

**Titre:** Une méthode de l'équation des sensibilités lagrangiennes pour les écoulements  
Title:

**Auteur:** Lise Charlot  
Author:

**Date:** 2008

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Charlot, L. (2008). Une méthode de l'équation des sensibilités lagrangiennes pour les écoulements [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal].  
Citation: PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/8326/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8326/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Dominique Pelletier, & Stéphane Étienne  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

UNE MÉTHODE DE L'ÉQUATION DES SENSIBILITÉS LAGRANGIENNES  
POUR LES ÉCOULEMENTS

LISE CHARLOT  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
JUILLET 2008



Library and  
Archives Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file    Votre référence*

*ISBN: 978-0-494-46041-2*

*Our file    Notre référence*

*ISBN: 978-0-494-46041-2*

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

UNE MÉTHODE DE L'ÉQUATION DES SENSIBILITÉS LAGRANGIENNES  
POUR LES ÉCOULEMENTS

présenté par: CHARLOT Lise

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. GARON André, Ph.D., président

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. ETIENNE Stéphane, Doct., membre et codirecteur de recherche

M. PERRIER Michel, Ph.D., membre

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout particulièrement mon directeur de recherche, Dominique Pelletier pour la qualité de son encadrement et la confiance qu'il m'a témoignée. J'ai beaucoup appris grâce à ses conseils, il a veillé à ce que cette maîtrise se passe le mieux possible de tout point de vue et je lui en suis très reconnaissante.

J'aimerais aussi remercier mon codirecteur, Stéphane Etienne pour sa disponibilité et ses conseils. Les discussions avec lui m'ont permis d'éclaircir mes pensées et d'avancer efficacement.

Je remercie Alexander Hay pour son aide précieuse, même à distance il a toujours répondu à mes questions.

Je voudrais remercier aussi tous les étudiants que j'ai côtoyés dans le labo, déjà pour avoir répondu à mes questions mais surtout pour la très bonne ambiance qui a régné au quotidien, c'était un plaisir de venir travailler. Je remercie donc Jean-Serge pour les pauses et son excellent enseignement de la culture québécoise, Jérôme pour m'avoir supportée en tant que voisine, Eric pour ses conseils sport et santé, Farshad pour les parties de babyfoot, Jean-François pour avoir apprécié mes petits dessins, Romain pour l'animation intermittente, Fernando, Richard, Thomas, Esperancia, Marianne et Simon.

Enfin, je remercie mes parents pour leur soutien, leurs petits colis bien appréciés et pour être venus me voir.

## RÉSUMÉ

Dans ce mémoire de maîtrise, nous présentons une formulation lagrangienne de la méthode de l'équation des sensibilités pour les équations de Navier-Stokes. Cette méthode consiste à calculer les dérivées de l'écoulement par rapport à un vecteur de paramètres de design. Mais lorsque le paramètre définit la géométrie du domaine, il faut choisir entre évaluer les dérivées partielles (point de vue eulérien) ou totales (point de vue lagrangien). Les conditions aux limites des sensibilités sont données par les dérivées matérielles des variables aux frontières, c'est à dire les sensibilités lagrangiennes. Le point de vue eulérien rencontre donc des problèmes de convergence car ses conditions aux limites nécessitent l'évaluation des dérivées de la solution à la frontière.

Nous développons dans un premier temps l'équation des sensibilités lagrangiennes pour l'équation de la chaleur. Le point délicat est alors la dérivation des équations puisqu'il faut dériver des intégrales dont le domaine dépend du paramètre. Il apparaît alors une vitesse de déformation du domaine, connue uniquement aux frontières mais qui doit être calculée partout dans le domaine. Pour ce faire, nous choisissons l'approche pseudo-solide, qui représente la déformation du domaine par des équations d'élasticité, pour ses propriétés de régularité et sa compatibilité avec l'adaptation de maillage.

Nous testons ensuite numériquement cette formulation grâce à la méthode des solutions manufacturées qui nous permet d'être certains de l'exactitude de l'implémentation des équations dans le code. Les comparaisons avec la formulation eulérienne montrent que cette approche permet bien de contourner les problèmes de convergence de la formulation eulérienne.

Forts de ces conclusions positives, nous développons la formulation pour les équations de Navier-Stokes. Nous étudions alors le post traitement des sensibilités lagrangiennes qui est plus direct et plus simple que celui de la formulation

eulérienne. Nous vérifions ensuite la convergence et l’implémentation avec une solution manufacturée. Même avec l’imposition de conditions de Neumann, la convergence reste bonne et l’estimateur d’erreur est très fiable. Nous pouvons donc utiliser cette formulation pour le calcul de solutions voisines sur un profil d’aile NACA à 4 chiffres. La méthode s’avère alors très efficace, les extrapolations sont bonnes et il n’est pas nécessaire d’avoir des maillages aussi fins qu’avec la formulation eulérienne pour arriver à ces résultats.

## ABSTRACT

This thesis presents a lagrangian sensitivity equation method for the Navier-Stokes equations. This method aims at evaluating the derivatives of the flow variables with respect to a vector of design parameters. When the geometry of the domain depends on the design parameter, we have a choice between the partial derivatives (eulerian point of view) and the total or material derivatives (lagrangian point of view). The boundary conditions of the sensitivity problem are given by a material derivative. For the eulerian sensitivity equation method, the boundary conditions involve the derivatives of the flow variables at the boundary. This is precisely where the FEM derivatives are least accurate. This introduces inaccuracies that degrade the grid convergence of the solution with mesh refinement. The lagrangian sensitivity approach is free of this problem.

We firstly develop the lagrangian sensitivity equation for the heat equation. The main issue is the differentiation of the equations because we have to differentiate integrals over parameter dependent domains. As a consequence, a deformation velocity appears. It is required on the whole domain but is known only on the portion of the boundary that varies with the parameter. The boundary deformation is propagated through the domain by solving elasticity equations. This pseudo-solid approach is compatible with our mesh adaptation procedure.

We numerically test the formulation with the method of the manufactured solution to ensure of proper the implementation of the equation. We compare convergence results of our lagrangian approach with those of the eulerian formulation and we conclude that our approach yield a better sensibility for shape parameters.

We then develop the lagrangian formulation for the Navier-Stokes equations and study the post processing of the lagrangian sensitivity which is simpler and more direct than that of the eulerian point of view. The code is again verified with a manufactured solution. While the eulerian formulation experiences reduced conver-



gence rate and accuracy with a Neumann boundary condition, the langrangian one behaves according to theory because its boundary conditions are simple and exact. We recover the theoretical convergence rate and the error estimator is accurate. Finally we apply the lagrangian sensitivity equation method to a baseline to evaluation flow on nearby geometries. The method turns out to be very efficient : the extrapolations are accurate more accurate than with the eulerian formulation and obtained on coarser meshes.

## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	ix
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xiv
LISTE DES FIGURES . . . . .	xv
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES . . . . .	xvii
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xxiii
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE 1    REVUE BIBLIOGRAPHIQUE . . . . .	3
1.1    Introduction . . . . .	3
1.2    Méthode adjointe . . . . .	3
1.3    Méthode des sensibilités . . . . .	5
1.4    Problématique du paramètre de forme . . . . .	6
1.4.1    Méthode adjointe . . . . .	6
1.4.2    Sensibilités eulériennes . . . . .	7
1.4.3    Sensibilités lagrangiennes . . . . .	8
1.4.4    Comparaisons . . . . .	9
1.5    But et objectifs . . . . .	10

CHAPITRE 2	MÉTHODE DE L'ÉQUATION DES SENSIBILITÉS POUR UN PARAMÈTRE DE FORME . . . . .	11
2.1	Méthode de l'équation de sensibilité classique . . . . .	11
2.1.1	Équation des sensibilités eulériennes . . . . .	12
2.1.2	Conditions aux frontières : difficultés et limites . . . . .	13
2.1.2.1	Conditions de Dirichlet . . . . .	13
2.1.2.2	Conditions de Neumann . . . . .	14
2.1.2.3	Difficultés et limites . . . . .	15
2.1.3	Formulation variationnelle . . . . .	16
2.2	Méthode de résolution - Éléments finis . . . . .	16
2.2.1	Algorithme de résolution . . . . .	17
2.2.2	Méthodes numériques . . . . .	18
2.2.3	Adaptativité . . . . .	19
2.3	Méthode de l'équation des sensibilités lagrangiennes . . . . .	19
2.3.1	Transformation d'espace . . . . .	19
2.3.1.1	Taux de déformation et Jacobien . . . . .	22
2.3.1.2	Vitesse de déformation . . . . .	23
2.3.1.3	Quelques formules utiles . . . . .	23
2.3.2	Equation des sensibilités lagrangiennes . . . . .	25
2.3.2.1	Développement des équations . . . . .	25
2.3.2.2	Autres méthodes . . . . .	27
2.3.3	Calcul de la déformation . . . . .	28
2.3.4	Conditions aux limites . . . . .	30
2.3.4.1	Conditions de Dirichlet . . . . .	30
2.3.4.2	Conditions de Neumann . . . . .	31
2.3.5	Calcul analytique . . . . .	32
2.4	Formulation Eulérienne versus Formulation Lagrangienne . . . . .	36

CHAPITRE 3	RÉSULTATS NUMÉRIQUES EN CONDUCTION . . . .	38
3.1	Méthode de la solution manufacturée . . . . .	38
3.2	Cas d'une "couche mince" . . . . .	38
3.2.1	Solution exacte . . . . .	39
3.2.1.1	Champ de température . . . . .	40
3.2.1.2	Sensibilité eulérienne . . . . .	41
3.2.1.3	Sensibilité lagrangienne . . . . .	42
3.2.2	Résultats numériques . . . . .	48
3.2.2.1	Formulation eulérienne - Paramètre de valeur . . .	49
3.2.2.2	Formulation eulérienne - Paramètre de forme . . .	51
3.2.2.3	Formulation lagrangienne . . . . .	53
3.3	Cas d'un écoulement potentiel près d'un point de stagnation 2D . .	55
3.3.1	Solution exacte . . . . .	56
3.3.1.1	Champ de température . . . . .	56
3.3.1.2	Sensibilité eulérienne . . . . .	57
3.3.1.3	Sensibilité lagrangienne . . . . .	58
3.3.2	Résultats numériques . . . . .	67
3.3.2.1	Formulation eulérienne . . . . .	67
3.3.2.2	Formulation lagrangienne . . . . .	71
CHAPITRE 4	MÉTHODE DE L'ÉQUATION DES SENSIBILITÉS AP- PLIQUÉES AUX ÉQUATIONS DE NAVIER STOKES . .	73
4.1	Méthode de l'équation de sensibilité classique . . . . .	74
4.1.1	Equations des sensibilités eulériennes . . . . .	74
4.1.2	Conditions aux limites . . . . .	75
4.1.2.1	Conditions de Dirichlet . . . . .	75
4.1.2.2	Conditions de Neumann . . . . .	76
4.1.3	Réactions . . . . .	77

4.1.4	Calcul de la sensibilité de champs scalaires . . . . .	78
4.1.4.1	Coefficient de pression . . . . .	78
4.1.4.2	Coefficient de friction . . . . .	79
4.1.5	Difficultés et limites . . . . .	79
4.2	Méthode de l'équation des sensibilités lagrangiennes . . . . .	80
4.2.1	Equation de continuité . . . . .	81
4.2.2	Equations de mouvement . . . . .	82
4.2.3	Equation d'énergie . . . . .	84
4.2.4	Conditions aux limites . . . . .	84
4.2.4.1	Conditions de Dirichlet . . . . .	85
4.2.4.2	Conditions de Neumann . . . . .	85
4.2.5	Réactions . . . . .	86
4.2.6	Evaluation de champs scalaire . . . . .	86
4.2.6.1	Coefficient de pression . . . . .	87
4.2.6.2	Coefficient de friction . . . . .	87
4.3	Formulation Eulérienne versus Formulation Lagrangienne . . . . .	88

## CHAPITRE 5 RÉSULTATS NUMÉRIQUES POUR LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES . . . . . 90

5.1	Solution manufacturée, cas du jet plan . . . . .	90
5.1.1	Solution analytique . . . . .	91
5.1.1.1	Ecoulement . . . . .	92
5.1.1.2	Transformation . . . . .	92
5.1.1.3	Sensibilités . . . . .	93
5.1.1.4	Conditions aux limites . . . . .	94
5.1.2	Estimation d'erreur . . . . .	95
5.1.3	Etude de convergence et resultats numeriques . . . . .	96
5.1.3.1	Sensibilités lagrangiennes . . . . .	96

5.1.3.2	Sensibilités eulériennes . . . . .	100
5.1.4	Réactions . . . . .	103
5.1.4.1	Approche analytique . . . . .	103
5.1.4.2	Vérification supplémentaire . . . . .	104
5.2	Profil Naca, calcul de solutions voisines . . . . .	107
5.2.1	Description du problème . . . . .	107
5.2.2	Solutions voisines pour la vitesse et la pression . . . . .	109
5.2.3	Etude des coefficients de portance et de trainée . . . . .	113
5.2.3.1	Etude de convergence . . . . .	113
5.2.3.2	Résultats . . . . .	114
5.2.4	Etude des coefficients de pression et de friction . . . . .	116
5.2.5	Comparaison de maillage . . . . .	119
CONCLUSION . . . . .		121
RÉFÉRENCES . . . . .		124
ANNEXES . . . . .		128

## LISTE DES TABLEAUX

TAB. 3.1	Convergence de la sensibilité eulérienne en paramètre de valeur pour le cas thermique de couche mince . . . . .	50
TAB. 3.2	Convergence de la sensibilité eulérienne en paramètre de forme pour le cas thermique de couche mince . . . . .	52
TAB. 3.3	Convergence de la sensibilité lagrangienne pour le cas thermique de couche mince . . . . .	54
TAB. 3.4	Convergence de la sensibilité eulérienne, développement à l'ordre 4 pour le cas thermique du point de stagnation 2D .	68
TAB. 3.5	Convergence de la sensibilité eulérienne, développement à l'ordre 7 pour le cas thermique du point de stagnation 2D .	70
TAB. 3.6	Convergence de la sensibilité lagrangienne pour le cas thermique du point de stagnation 2D . . . . .	72
TAB. 5.1	Convergence des réactions avec différentes formulations . . .	106
TAB. 5.2	Paramètres des profils utilisés . . . . .	109
TAB. 5.3	Calcul des coefficients de trainée et de portance . . . . .	114

## LISTE DES FIGURES

FIG. 2.1	Algorithme de résolution . . . . .	17
FIG. 2.2	Déformation du domaine . . . . .	20
FIG. 2.3	Domaine 1D . . . . .	21
FIG. 2.4	Cas analytique : déformation du domaine . . . . .	32
FIG. 3.1	Cas de la "couche mince" : Déformation du domaine . . . .	39
FIG. 3.2	Cas de la "couche mince" : Déformation du domaine . . . .	42
FIG. 3.3	Maillage et isolignes de température pour le cas thermique "couche mince" . . . . .	47
FIG. 3.4	Élément quadratique . . . . .	48
FIG. 3.5	Courbes de convergence en formulation eulérienne, paramètre de valeur pour le cas thermique "couche mince" . . . . .	49
FIG. 3.6	Courbes de convergence en formulation eulérienne, paramètre de forme pour le cas thermique "couche limite" . . . . .	51
FIG. 3.7	Courbes de convergence en formulation lagrangienne pour le cas thermique "couche mince" . . . . .	53
FIG. 3.8	Domaine pour le cas du point de stagnation 2D . . . . .	55
FIG. 3.9	Construction de la vitesse de maille . . . . .	62
FIG. 3.10	Déformation et isolignes de température pour le cas ther- mique du point de stagnation 2D . . . . .	64
FIG. 3.11	Isolignes de sensibilité eulérienne et lagrangienne de la température pour le cas thermique du point de stagnation 2D . . . . .	65
FIG. 3.12	Courbes de convergence en formulation eulérienne, développement à l'ordre 4 pour le cas thermique du point de stagnation 2D . . . . .	67



FIG. 3.13	Courbes de convergence en formulation eulérienne, développement à l'ordre 7 pour le cas thermique du point de stagnation 2D . . . . .	69
FIG. 3.14	Courbes de convergence en formulation lagrangienne pour le cas thermique du point de stagnation 2D . . . . .	72
FIG. 4.1	Déformation du domaine . . . . .	81
FIG. 5.1	Domaine pour le cas de Duvigneau . . . . .	91
FIG. 5.2	Elément de Taylor-Hood . . . . .	96
FIG. 5.3	Maillage et isolignes de pression pour le cas du jet plan . . .	97
FIG. 5.4	Sensibilité lagrangienne de la vitesse pour le cas du jet plan	98
FIG. 5.5	Courbes de convergence des sensibilités lagrangiennes pour le cas du jet plan . . . . .	99
FIG. 5.6	Maillage et sensibilité eulérienne de $u$ pour le cas du jet plan	100
FIG. 5.7	Courbes de convergence des sensibilités eulériennes pour le cas du jet plan . . . . .	102
FIG. 5.8	Solution manufacturée : Erreur relative pour les réactions .	104
FIG. 5.9	Domaine pour le profil NACA . . . . .	107
FIG. 5.10	Géométries des profils utilisés . . . . .	108
FIG. 5.11	Isolignes de $U$ extrapolées et recalculées . . . . .	111
FIG. 5.12	Isolignes de $P$ extrapolées et recalculées . . . . .	112
FIG. 5.13	Etude de convergence des coefficients de trainée et de portance	113
FIG. 5.14	Evolution des erreurs avec le maillage pour les différentes formulations . . . . .	115
FIG. 5.15	Calcul de solution voisine pour les coefficients de pression et de friction . . . . .	118
FIG. 5.16	Maillages autour du profil 4512 . . . . .	119
FIG. 5.17	Isolignes de sensibilités eulériennes de $u$ pour le profil 4512 .	120
FIG. I.1	Déformation du domaine . . . . .	129

## LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

CFD	Computational Fluid Dynamics
CSEM	Classical Sensitivity Equation Method
LSEM	Lagrangian Sensitivity Equation Method
NACA	National Advisory Committee for Aeronautics
MEF	Méthode des Eléments Finis
MES	Méthode de l'Equation des Sensibilités
MMS	Method of Manufactured Solution

### Caractères usuels

$a$	paramètre de design
$b$	coefficient pour la vitesse de maille
$c$	corde d'un profil
	coefficient pour la vitesse de maille
$C$	constante de la solution manufacturée
$C_D$	coefficient de traînée
$C_f$	coefficient de friction
$C_L$	coefficient de portance
$C_p$	coefficient de pression
$c_p$	chaleur massique à pression constante
$D$	constante de la solution manufacturée
$d$	coefficient pour la vitesse de maille
$e$	erreur
	paramètre contrôlant l'épaisseur d'un profil NACA
$f$	champ scalaire

$\mathbf{f} = (f_x, f_y)$	vecteur des forces volumiques
$\mathbf{f}$	champ vectoriel
$F$	fonction coût
$\mathbf{F}$	tenseur des taux de déformation
$\mathbf{G}$	vecteurs des contraintes, équations d'état
$\mathbf{g}$	champ vectoriel
$h$	taille d'un élément du maillage
$Id$	matrice identité
	tenseur de la matrice identité
$J$	jacobien du tenseur des taux de déformation $\mathbf{F}$
$k$	conductivité thermique (équation de la chaleur)
$L$	lagrangien du problème d'optimisation
	longueur
$m$	paramètre du profil NACA controlant le maximum de cambrure
$\mathbf{n} = (n_x, n_y)$	vecteur unitaire normal
$N_e$	nombre d'éléments dans le maillage
$N_{s_T}$	nombre de noeuds de calcul par éléments pour la variables $s_T$
$n_p$	nombre de paramètres de design
$p$	pression
	paramètre du profil NACA controlant l'abscisse du maximum de la cambrure
$P$	pression (cas du profil NACA)
$Q$	source thermique
$q$	flux thermique

$q_s$	source de chaleur dans l'équation d'énergie
$R$	réaction de l'écoulement ou des sensibilités, variables secondaires
$\mathbf{R}$	résidu des équations éléments finis
$Re$	nombre de Reynolds
$s_x$	sensibilité eulérienne de la variable $x$
$S_x$	sensibilité lagrangienne de la variable $x$
$T$	température
$t$	abscisse curviligne
$tr$	trace d'un tenseur
$\mathbf{t} = (t_x, t_y)$	vecteur unitaire tangent
$\mathbf{t}_f$	tractions sur les frontières
$\mathbf{u} = (u, v)$	vecteur vitesse
$\mathbf{U}$	vecteur des variables d'état (inconnues)
$V_M = (V_{Mx}, V_{My})$	vitesse de déformation vitesse de maille
$\mathbf{x} = (x, y)$	coordonnées cartésiennes
$\mathbf{x}^\alpha = (x^\alpha, y^\alpha)$	coordonnées sur le domaine déformé
$\mathbf{X}_f = (x_f, y_f)$	coordonnées d'un point de la frontière

### Lettres calligraphiques

$\mathcal{L}$	système d'équations différentielles
$\mathcal{F}$	fonction coût
$\mathcal{C}^1$	ensemble des fonctions continûment différentiables

## Lettres grecques

$\alpha$	paramètre de forme
$\boldsymbol{\alpha}$	vecteur des paramètres de design
$\beta$	épaisseur de la couche mince, constante de la solution manufacturée
$\gamma$	constante de la solution manufacturée
$\Gamma$	frontière du domaine
$\Gamma^0$	frontière du domaine de référence
$\Gamma^\alpha$	frontière du domaine déformé
$\Gamma_q$	frontière du domaine où sont imposées des conditions de Neumann en température
$\Gamma_T$	frontière du domaine où sont imposées des conditions de Dirichlet en température
$\Gamma_t$	frontière du domaine où sont imposées des conditions de Neumann en vitesse
$\Gamma_u$	frontière du domaine où sont imposées des conditions de Dirichlet en vitesse
$\delta$	constante de la solution manufacturée
$\delta\Gamma$	partie infinitésimale de la frontière
$\delta S_p$	fonction test pour la sensibilité lagrangienne de la pression
$\delta \mathbf{S}_u$	fonction test pour la sensibilité lagrangienne la vitesse
$\delta W$	fonction test
$\lambda_{ps}$	coefficient de Lamé du pseudo-solide

$\lambda$	conductivité thermique, équation d'énergie
$\mu$	viscosité dynamique du fluide
$\mu_{ps}$	coefficient de Lamé du pseudo-solide
$\xi$	vecteur de variables adjointes
$\rho$	masse volumique
$\sigma$	tenseur des contraintes fluides
$\tau$	tenseur des contraintes visqueuses
$\hat{\phi}$	transformation entre le domaine de référence et le domaine déformé
$\Omega$	domaine de calcul
$\Omega_0$	domaine de référence
$\Omega_\alpha$	domaine déformé
$\partial\Omega$	frontière du domaine de calcul
$d\Omega$	partie infinitésimale du domaine

### Indices et exposants

$_0$ ou $^0$	qui se rapporte au domaine de référence qui est exprimé en fonction de variables du domaine de référence, non déformé
$_\alpha$ ou $^\alpha$	qui se rapporte au domaine déformé qui est exprimé en fonction de variables du domaine déformé, déformé
*	solution exacte ou enrichie

$\infty$	associé à une valeur à l'infini (de référence)
$'$	sensibilité eulérienne (dérivée)
$-$	valeur imposée par les conditions aux frontières,
$=$	tenseur d'ordre 2
$-1$	inverse
$eul$	eulérien
$exa$	solution exacte
$h$	solution éléments finis
$i$	composante d'un vecteur, valeur nodale,
$ij$	composante d'un tenseur d'ordre 2
$lgr$	lagrangien
$M$	solution manufacturée
$ref$	valeur de référence
$T$	transposée
$-T$	inverse de la transposée

## Symboles

$\nabla$	opérateur gradient
$\nabla \cdot$	opérateur divergence
$\frac{\partial \cdot}{\partial \cdot}$	dérivée partielle (ou eulérienne)
$\frac{D \cdot}{D \cdot}$	dérivée totale (ou lagrangienne)
$\  \cdot \ $	norme

## LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	TRANSFORMATIONS D'ESPACES ET DÉRIVÉES MATÉRIELLES . . . . .	128
I.1	Conventions de notation . . . . .	128
I.2	Transformations d'espace . . . . .	129
I.3	Dérivées matérielles . . . . .	131
ANNEXE II	AUTRES DÉVELOPPEMENTS DE L'ÉQUATION DES SENSIBILITÉS POUR L'ÉQUATION DE LA CHALEUR	133
II.1	Dérivation de la forme forte . . . . .	133
II.2	Utilisation des formules générales . . . . .	136
ANNEXE III	PROJECTION DES ÉQUATIONS DES SENSIBILITÉS LAGRANGIENNES . . . . .	138
III.1	Continuité . . . . .	138
III.2	Mouvement . . . . .	139
III.3	Energie . . . . .	142
ANNEXE IV	DÉTAILS DE LA SOLUTION MANUFACTURÉE . . . . .	144
IV.1	Sensibilités de l'écoulement et de la température . . . . .	144
IV.2	Terme source . . . . .	144
IV.3	Tractions et flux thermique . . . . .	146
IV.3.1	Tractions . . . . .	146
IV.3.2	Flux thermique à la frontière . . . . .	147



## INTRODUCTION

Les écoulements de fluides sont souvent des phénomènes complexes. En effet, ils sont modélisés par les équations de Navier Stokes qui n'ont malheureusement pas de solution analytique dans la majorité des cas pratiques. Il est alors difficile de prévoir le comportement de l'écoulement si on modifie certains paramètres. L'approche expérimentale a longtemps été la seule possible pour quantifier leur influence. Malheureusement, elle reste très lourde, longue et coûteuse. Depuis le début des années 80, avec les avancées technologiques, la simulation numérique s'est développée et permet à présent, avec l'augmentation de la puissance informatique, de simuler une grande variété d'écoulements. Différentes formulations ont été développées pour calculer les *sensibilités* qui sont justement le taux de variation des variables de l'écoulement (vitesse, température, etc...) ou de fonctions de ces variables par rapport au paramètre.

Le design optimal s'intéresse particulièrement aux paramètres définissant la forme du domaine. Le calcul des sensibilités permet en effet d'identifier les paramètres les plus influents, de calculer le gradients de fonctions coût ou d'évaluer des solutions voisines. Nous pourrions par exemple optimiser un profil d'aile pour maximiser la portance et minimiser la trainée. Il faut donc étudier l'écoulement sur un domaine variable. Plusieurs formulations sont alors possibles : nous pouvons adopter un point de vue eulérien, c'est à dire se concentrer sur un point fixe du domaine, ou alors un point de vue lagrangien qui consiste à suivre le domaine dans sa déformation. Pour chacun de ces points de vue, la sensibilité obtenue est différente et doit être interprétée de la façon appropriée.

Le but de ce mémoire est d'étudier les sensibilités du point de vue lagrangien et de comparer les performances de cette formulation avec celles de la formulation

eulérienne. Pour cela, nous utiliserons un code d’éléments finis adaptatif qui résout déjà les sensibilités d’un point de vue eulérien <sup>[32]</sup> et nous implémenterons les sensibilités lagrangiennes.

Dans un premier temps, une revue bibliographique permettra de redéfinir plus précisément les sensibilités dans le contexte de l’optimisation, d’insister sur la différence entre le point de vue eulérien et le point de vue lagrangien tout en replaçant ces notions dans leur contexte et par rapport aux travaux déjà effectués. Au chapitre 2, nous nous intéresserons à l’équation de la chaleur et exposerons la méthode des sensibilités continues d’un point de vue eulérien puis lagrangien avec les outils mathématiques nécessaires à leur développement en soulignant les atouts et les limites de ces formulations. Le chapitre 3 présente la vérification du code pour la formulation lagrangienne et une comparaison des résultats obtenus pour chacune des méthodes. Les conclusions étant positives pour le point de vue lagrangien, nous adopterons une démarche identique pour les équations de Navier Stokes. Nous exposerons au chapitre 4 les formulations eulériennes et lagrangiennes dans le cadre d’écoulements incompressibles laminaires en régime stationnaire. Le chapitre 5 comporte deux parties. Tout d’abord, il présente la vérification du code avec une solution manufacturée. Elle permettra une première comparaison numérique de la convergence pour chacune des formulations. Ensuite, nous simulerons l’écoulement autour d’un profil d’aile NACA à 4 chiffres et nous utiliserons les sensibilités pour calculer des solutions voisines. Ce calcul permettra d’évaluer la pertinence des sensibilités lagrangiennes mais aussi leur précision et leur facilité d’utilisation. Nous étudierons en particulier le nombre de noeuds nécessaire pour le calcul précis des coefficients de trainée et de portance et les caractéristiques du maillage obtenus après quelques cycles d’adaptation. Nous conclurons enfin sur les atouts et les défis de la formulation lagrangienne.

## CHAPITRE 1

### REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

#### 1.1 Introduction

Les sensibilités lagrangiennes ne sont qu'une étape possible dans une démarche globale. Le but de ce chapitre est donc de replacer cette méthode dans son contexte général et de présenter les autres possibilités. Pour ce faire, prenons l'exemple de l'optimisation. Dans ce contexte, le but de la méthode des sensibilités lagrangiennes est alors de calculer les sensibilités des états pour déterminer le gradient d'une fonction coût par rapport à un ensemble de paramètres de design. La méthode adjointe permet aussi ce calcul. Ces différentes méthodes sont exposées et comparées de façon plus détaillée par Gunzburger <sup>[18]</sup>.

#### 1.2 Méthode adjointe

La méthode adjointe est très utilisée dans le cadre de l'optimisation. Soit  $F(\mathbf{U}, \boldsymbol{\alpha})$  la fonction coût à optimiser sous les contraintes  $\mathbf{G}(\mathbf{U}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$ , avec  $\mathbf{U}$  les états et  $\boldsymbol{\alpha}$  le vecteur de variables de design. La fonction coût dépend à la fois explicitement du vecteur de design mais aussi implicitement par l'intermédiaire des états. Nous pouvons en effet définir la fonction  $\mathcal{F}(\boldsymbol{\alpha}) = F(\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha})$ . Nous introduisons alors la variable adjointe  $\boldsymbol{\xi}$  et le lagrangien :

$$L(\mathbf{U}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) = F(\mathbf{U}, \boldsymbol{\alpha}) - \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{G}(\mathbf{U}, \boldsymbol{\alpha}) \rangle$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire. Dans le cas discret, il s'agit du produit de 2 vecteurs et dans le cas continu d'une intégrale. Afin d'exposer généralement le fonctionnement de cette méthode, nous garderons la notation symbolique suivante :

$$L = F - \boldsymbol{\xi} \mathbf{G}$$

Le problème d'optimisation est maintenant équivalent à extrémiser  $L$  en fonction de  $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi})$ . La première variation du lagrangien par rapport à chacune de ces variables doit être nulle :

- La variation par rapport à  $\mathbf{U}$  conduit aux équations adjointes

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{U}} = \boldsymbol{\xi} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \quad (1.1)$$

- La variation par rapport à  $\boldsymbol{\alpha}$  produit la condition d'optimalité

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\xi} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = 0 \quad (1.2)$$

- La variation par rapport à  $\boldsymbol{\xi}$  mène aux équations d'état

$$\mathbf{G} = 0 \quad (1.3)$$

Nous pouvons récupérer le gradient de la fonction objectif de la façon suivante. Pour un vecteur de design  $\boldsymbol{\alpha}$  donné, les états  $\mathbf{U}$  sont obtenus par les équations d'états (1.3) et les variables adjointes par les équations adjointes (1.1). Le gradient de la fonction objectif s'exprime alors de la manière suivante :

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\boldsymbol{\alpha}} = \frac{DF}{D\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{U}} \frac{D\mathbf{U}}{D\boldsymbol{\alpha}} \quad (1.4)$$

En utilisant les équations adjointes, nous avons :

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\alpha} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} + \xi \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial U} \frac{DU}{D\alpha}$$

Or les équations d'états doivent être respectées quelque soit le vecteur de design  $\alpha$  donc

$$\frac{D\mathcal{G}}{D\alpha} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial U} \frac{DU}{D\alpha} = 0 \quad (1.5)$$

Ceci mène à l'expression finale du gradient :

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\alpha} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} - \xi \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \alpha} \quad (1.6)$$

Quelque soit le nombre de paramètres, il n'y a qu'un seul problème adjoint à résoudre par fonctionnelle.

### 1.3 Méthode des sensibilités

Pour le même problème que précédemment et en reprenant les mêmes notations, nous cherchons à calculer le gradient d'une fonction coût :

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\alpha} = \frac{D\mathcal{F}}{D\alpha} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial U} \frac{DU}{D\alpha} \quad (1.7)$$

Dans cette expression,  $\frac{DU}{D\alpha}$  est inconnu car la dépendance des états par rapport au design est implicite. La méthode des sensibilités (appelée aussi *direct differentiation method*) consiste à différentier les équations d'états par rapport au paramètre de design afin d'obtenir les équations de sensibilité. Il y a pour cela deux façons de procéder, discrétiser les équations d'états puis différentier, il s'agit de la méthode des sensibilités discrètes. Les sensibilités ainsi obtenues correspondent aux dérivées exactes de la solution discrète du premier problème. L'autre voie consiste

à différentier les équations d'état pour obtenir un nouveau système d'équations différentielles qu'il nous reste à discrétiser. Il s'agit alors des sensibilités continues discrétisées. Nous obtenons ainsi une approximation de la sensibilité de la solution exacte du premier problème. Généralement, les deux méthodes tendent vers le gradient exact [6, 7, 5]. Ces différentes voies à explorer sont détaillées pour l'élasticité linéaire par van Keulen [33]. Par la méthode des sensibilités, il y a un système à résoudre par paramètre de sensibilité, peu importe l'application qui en suivra. En effet, en plus de calculer le gradient de fonctions coûts, les sensibilités peuvent aussi être utilisées dans le cadre de calcul d'incertitude, de solutions voisines, ou pour identifier les paramètres déterminants d'un problème [32]

## 1.4 Problématique du paramètre de forme

Les paramètres considérés plus haut peuvent être de deux natures. Les paramètres dits "de valeur" n'ont pas d'influence sur la forme du domaine, il peut s'agir d'une propriété physique du fluide, d'une condition limite. Les paramètres de forme définissent la forme du domaine, ce qui est assez courant en design optimal. La méthode générale est la même pour chaque cas mais le traitement du paramètre de forme demande une attention toute particulière pour chacune des méthodes exposées plus haut.

### 1.4.1 Méthode adjointe

Pour cette méthode, le développement exposé ci-dessus est toujours valable, la difficulté est de calculer les différents termes de la formule (1.6). En effet, la fonction

coût est souvent de la forme :

$$F(\mathbf{U}, \boldsymbol{\alpha}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{U}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) d\Omega \quad (1.8)$$

Or le domaine dépend du paramètre, nous ne pouvons pas dériver simplement cette intégrale. De même,

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{G} \rangle = \int_{\Omega} \boldsymbol{\xi} \mathbf{G}(\mathbf{U}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) d\Omega \quad (1.9)$$

Nous utilisons alors la méthode des dérivées matérielles qui est exposée dans <sup>[10]</sup> de manière générale et aussi dans <sup>[19]</sup>, <sup>[8]</sup> ou <sup>[23]</sup>. Elle est fréquemment utilisée pour le calcul de structures, des développements plus spécifiques se trouvent dans <sup>[19]</sup> avec différents exemples, plusieurs formes sont aussi exposées dans <sup>[1]</sup> dans le cadre de l'élasticité linéaire et dans <sup>[31]</sup>, le problème de Laplace est traité pour illustrer la théorie.

#### 1.4.2 Sensibilités eulériennes

Pour la méthode des sensibilités, il s'agit de dériver les équations d'états. Tout comme dans le cadre de la mécanique des milieux continus <sup>[27]</sup>, nous pouvons prendre soit un point de vue eulérien, soit lagrangien. D'un point de vue eulérien, il suffit de dériver formellement les équations d'états pour obtenir les dérivées partielles des états par rapport au paramètre. Par exemple pour la vitesse d'un fluide  $u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$ , nous calculons  $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\alpha}}$ . Cependant, les conditions aux limites en sensibilités sont données par les dérivées matérielles des états. Il faut donc introduire les termes dus à la transformation de la frontière traduisant la variation du paramètre de forme. Ces termes dépendent des gradients en espace des états, qui, calculés numériquement, ne sont pas toujours précis. Le défi pour cette méthode est donc de calculer avec précision les gradients des états à la frontière pour obtenir de bonnes

conditions aux limites pour les sensibilités. Malgré cela, le point de vue eulérien reste intéressant par sa simplicité de mise en oeuvre numérique. En effet, contrairement à la méthode adjointe ou au point de vue lagrangien, il n'est pas nécessaire de dériver des intégrales dont le domaine dépend du paramètre. De nombreuses applications en mécanique des fluides ont été faites avec cette méthode<sup>[32]</sup>, en interaction fluide-structure<sup>[15]</sup>, en régime turbulent<sup>[12]</sup> ou en régime instationnaire<sup>[20]</sup>.

### 1.4.3 Sensibilités lagrangiennes

D'un point de vue lagrangien, nous nous intéresserons au calcul des dérivées totales des états par rapport au paramètre, elles se composent d'un terme lié à la variation pure du paramètre et un autre dû à la modification du domaine. En effet, nous avons  $u(\mathbf{x}, \alpha) = u(\mathbf{x}(\alpha), \alpha)$  donc

$$\frac{Du}{D\alpha} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \nabla u \cdot \frac{D\mathbf{x}}{D\alpha} \quad (1.10)$$

Pour ce faire, il faut dériver les équations d'état, sous leur forme forte ou sous leur forme intégrale, en tenant compte des variations de géométrie du domaine. Dans ces conditions, les opérateurs de dérivation par rapport au paramètre et le gradient d'espace ou l'intégration sur le domaine ne commutent pas puisque les coordonnées d'espaces dépendent du paramètre. Il apparaît alors une vitesse de déformation, connue uniquement sur les frontières, mais qui doit être calculée dans tout le domaine. Il existe différentes techniques pour évaluer cette vitesse. La méthode de la dérivée matérielle est beaucoup utilisée. Des formulations générales ont été établies par Delfour et Zolésio<sup>[10]</sup>, Navarrina<sup>[23]</sup> et Tortorelli<sup>[31]</sup>. Le point de vue lagrangien a été plutôt développé dans le cadre de la mécanique des structures, les problèmes de transfert thermique font l'objet des travaux de Dems<sup>[11]</sup> et



Kleiber <sup>[21]</sup>. Dans Arora <sup>[1]</sup>, nous trouverons une formulation pour les équations d'élasticité linéaire. Bobaru<sup>[3]</sup> a effectué quelques simulations numériques avec une méthode sans maillage pour la résolution (*element-free Galerkin method*). Les sensibilités lagrangiennes ont été aussi développées dans le cadre de la mécanique de la rupture par Taroco <sup>[29]</sup> qui a abordé les sensibilités d'ordre 2 et pour l'optimisation d'arcs plans par Choi <sup>[9]</sup>. Dans Lee <sup>[22]</sup>, des équations intégral-différentielles de bord (*boundary integral equation formulation*) sont utilisées pour traiter des problèmes de solides élastiques axisymétriques. En mécanique des fluides, nous noterons le travail de Smith<sup>[28]</sup> qui traite de l'écoulement de polymères gouverné par les équations de Stokes, dans Wang <sup>[34]</sup>, les équations de Navier Stokes sont traitées, avec une technique de paramétrisation de domaine <sup>[30]</sup> pour le calcul de la vitesse de déformation. D'autres approches mathématiquement compliquées ont été abordées par Gao<sup>[17]</sup> en utilisant les dérivées de Piola <sup>[4]</sup>.

#### 1.4.4 Comparaisons

Dans le domaine de la CFD, la formulation lagrangienne a été peu développée et ses performances ont été peu évaluées, en particulier, nous ne savons pas si elle présente un réel avantage par rapport à la formulation eulérienne. La difficulté principale pour la formulation eulérienne est la définition de conditions aux limites, car il faut tenir compte de la transformation de la frontière due à la variation du paramètre. Pour la formulation lagrangienne, il faudra considérer la transformation dans tout le domaine et la différentiation pour obtenir les résidus est aussi plus compliquée. Les conditions aux limites restent simples. Cette formulation pourrait donc être une bonne alternative pour contourner les problèmes de précision et de convergence de la formulation eulérienne.

## 1.5 But et objectifs

Le but de ce mémoire est d'étudier les sensibilités lagrangiennes et de comparer ses performances à celle de la formulation eulérienne. Les objectifs sont les suivants :

- Développer les équations des sensibilités lagrangiennes pour l'équation de la chaleur
- Vérifier l'implémentation et démontrer l'intérêt de la méthode en terme de convergence
- Développer les équations des sensibilités lagrangiennes pour les équations de Navier Stokes
- Vérifier la méthode sur une solution manufacturée
- Evaluer les atouts et les limites sur un cas concret de calcul de solutions voisines pour un profil NACA à 4 chiffres

## CHAPITRE 2

### MÉTHODE DE L'ÉQUATION DES SENSIBILITÉS POUR UN PARAMÈTRE DE FORME

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à l'équation des sensibilités pour l'équation de la chaleur. Nous la développerons donc pour chacune des formulations, eulérienne et lagrangienne en soulignant leurs caractéristiques, atouts et inconvénients.

#### 2.1 Méthode de l'équation de sensibilité classique

Considérons l'équation de la chaleur dans un milieu de conductivité  $k$  sur un domaine  $\Omega_\alpha$  dont la forme dépend d'un paramètre  $\alpha$  dit de forme. La frontière  $\partial\Omega_\alpha$  est subdivisée en deux parties disjointes,  $\Gamma_T$  et  $\Gamma_q$  sur lesquelles nous imposerons des conditions de Dirichlet et de Neumann respectivement :

$$\nabla \cdot (k \nabla T) = Q \quad \text{dans } \Omega_\alpha \quad (2.1)$$

$$T = \bar{T} \quad \text{sur } \Gamma_T \quad (2.2)$$

$$k \nabla T \cdot \mathbf{n} = \bar{q} \quad \text{sur } \Gamma_q \quad (2.3)$$

Dans ces équations, la conductivité  $k$ , la température  $T$  et les conditions aux limites  $\bar{T}$  et  $\bar{q}$  dépendent à la fois des coordonnées spatiales et du paramètre de forme  $\alpha$ .

Cette dépendance peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\begin{aligned} T &= T(x, y; \alpha) \\ k &= k(x, y; \alpha) \text{ ,etc...} \end{aligned}$$

Le point virgule séparant les variables indépendantes  $x$  et  $y$  du paramètre  $\alpha$ . Le but de la méthode des sensibilités est de quantifier la dépendance des variables du problème par rapport au paramètre.

### 2.1.1 Équation des sensibilités eulériennes

Nous utilisons le terme "sensibilités eulériennes" pour désigner les dérivées partielles des variables du problème par rapport au paramètre  $\alpha$ . Pour notre problème, la sensibilité eulérienne de la température sera notée de la manière suivante :

$$s_T = \frac{\partial T}{\partial \alpha} \quad (2.4)$$

Elle est calculée en résolvant le problème obtenu en dérivant formellement par rapport à  $\alpha$  les équations aux dérivées partielles du système initial ainsi que ses conditions aux limites. Pour l'équation de la chaleur, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \frac{\partial k}{\partial \alpha} \nabla T + k \frac{\partial \nabla T}{\partial \alpha} \right) &= \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \\ \text{Soit} \quad \nabla \cdot \left( \frac{\partial k}{\partial \alpha} \nabla T + k \nabla s_T \right) &= \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Comme nous le verrons au paragraphe suivant, le traitement des conditions aux frontières est un peu plus compliqué pour un paramètre de forme car il faut considérer la déformation de la frontière engendrée par la variation du paramètre.

### 2.1.2 Conditions aux frontières : difficultés et limites

Les conditions aux limites nécessaires pour fermer le système sont obtenues en dérivant celles du problème initial. Comme  $\alpha$  est un paramètre de forme, les frontières du domaine se déforment quand  $\alpha$  varie. Cette dépendance s'exprime par la paramétrisation suivante :

$$\Gamma_\alpha = \{(x_f(t; \alpha), y_f(t; \alpha)) \mid t \in [0, 1]\} \quad (2.6)$$

Dans cette expression,  $(x_f, y_f)$  représentent les coordonnées d'un point de la frontière,  $\alpha$  détermine la géométrie de la courbe sur laquelle les conditions aux limites sont appliquées, alors que  $t$  détermine la position d'un point le long de cette courbe.

#### 2.1.2.1 Conditions de Dirichlet

Les conditions de Dirichlet étaient les suivantes :

$$T = \bar{T} \text{ sur } \Gamma_T \quad (2.7)$$

Puisque la frontière change de forme avec les variations de  $\alpha$ , les conditions aux limites s'expriment plus naturellement par une dérivée matérielle que partielle de (2.7), ce qui permet de suivre le point de la frontière dans son changement de

position. Nous avons alors sur  $\Gamma_T$

$$\frac{DT}{D\alpha} = \frac{D\bar{T}}{D\alpha} \quad (2.8)$$

$$\text{soit } \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial \alpha} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial \alpha} = \frac{D\bar{T}}{D\alpha} \quad (2.9)$$

$$\text{donc } s_T = \frac{D\bar{T}}{D\alpha} - \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial \alpha} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial \alpha} \text{ sur } \Gamma_T \quad (2.10)$$

Ces formules sont valables également pour un paramètre de valeur. Dans ce cas, la frontière est immobile et les termes  $\partial x_f / \partial \alpha$  et  $\partial y_f / \partial \alpha$  sont nuls. La condition aux limites devient  $s_T = \frac{\partial \bar{T}}{\partial \alpha}$ .

### 2.1.2.2 Conditions de Neumann

Pour les conditions de Neumann, nous cherchons à exprimer le flux de la sensibilité eulérienne à la frontière qui est défini de la manière suivante :

$$q' = \left( \frac{\partial k}{\partial \alpha} \nabla T + k \nabla s_T \right) \cdot \mathbf{n}$$

Pour cela, considérons les conditions de Neumann de l'équation de la chaleur :

$$k \nabla T \cdot \mathbf{n} = \bar{q} \text{ sur } \Gamma_q \quad (2.11)$$

Tout comme dans le cas des conditions de Dirichlet, nous devons calculer les dérivées matérielles de chacun des termes de l'équation (2.11) pour tenir compte de la déformation de la frontière. Notons que l'opérateur  $\nabla$  dépend également du paramètre. Ainsi, nous obtenons :

$$\frac{Dk}{D\alpha} \nabla T \cdot \mathbf{n} + k \frac{D\nabla T}{D\alpha} \cdot \mathbf{n} + k \nabla T \cdot \frac{D\mathbf{n}}{D\alpha} = \frac{D\bar{q}}{D\alpha} \quad (2.12)$$

Les dérivées matérielles apparaissant dans cette équation peuvent être développées de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\frac{Dk}{D\alpha} &= \frac{\partial k}{\partial \alpha} + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial \alpha} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial \alpha} \\ \frac{D\nabla T}{D\alpha} \cdot \mathbf{n} &= \left( \frac{\partial s_T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\partial x_f}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \frac{\partial y_f}{\partial \alpha} \right) n_x \\ &\quad + \left( \frac{\partial s_T}{\partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \frac{\partial x_f}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \frac{\partial y_f}{\partial \alpha} \right) n_y\end{aligned}$$

Si la normale à la frontière  $\mathbf{n}$  est définie telle que  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t, \alpha)$ , alors sa dérivée matérielle se réduit à sa dérivée eulérienne car  $t$  et  $\alpha$  sont des paramètres indépendants l'un de l'autre. Ainsi, nous pouvons isoler le flux des sensibilités et nous obtenons la condition de Neumann suivante sur  $\Gamma_q$  :

$$\begin{aligned}q' &= \frac{D\bar{q}}{Da} - \left( \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial \alpha} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial \alpha} \right) \nabla T \cdot \mathbf{n} \\ &\quad - k \left[ \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\partial x_f}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \frac{\partial y_f}{\partial \alpha} \right) n_x + \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \frac{\partial x_f}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \frac{\partial y_f}{\partial \alpha} \right) n_y \right] \\ &\quad - k \nabla T \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha}\end{aligned} \quad (2.13)$$

Nous remarquons qu'elle fait intervenir les dérivées spatiales d'ordre 2 de la température.

### 2.1.2.3 Difficultés et limites

Que ce soit pour les conditions de Dirichlet ou de Neumann, les conditions aux limites des sensibilités font apparaître les dérivées spatiales de la température à la frontière. Ces dernières sont extraites de la résolution numérique par éléments finis du problème initial, or c'est justement à la frontière que ces dérivées sont les moins précises. Cette imprécision se propagera sur tout le domaine de calcul dans

le problème des sensibilités. Il existe des techniques de reconstruction des gradients à la frontière <sup>[13, 14]</sup> pour pallier ce problème mais leur coût demeure relativement élevé.

### 2.1.3 Formulation variationnelle

La forme faible du problème s'obtient en multipliant l'équation (2.5) par une fonction test et en intégrant sur tout le domaine. La fonction test est de même régularité que la solution et s'annule sur la partie  $\Gamma_T$  de la frontière, c'est à dire au niveau des conditions de Dirichlet. Soit  $\delta W$  une telle fonction, nous avons alors :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \left( \frac{\partial k}{\partial \alpha} \nabla T \delta W + k \nabla_{s_T} \delta W \right) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \delta W d\Omega$$

Intégrons ensuite par parties les termes d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial k}{\partial \alpha} \nabla T \cdot \nabla \delta W + k \nabla_{s_T} \cdot \nabla \delta W \right) d\Omega \\ & + \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial k}{\partial \alpha} \nabla T + k \nabla_{s_T} \right) \delta W \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \delta W d\Omega \end{aligned}$$

Par définition, la fonction test s'annule sur  $\Gamma_T$  alors que les conditions de Neumann apparaissent sur  $\Gamma_q$ . Nous obtenons donc la forme faible suivante :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial k}{\partial \alpha} \nabla T + k \nabla_{s_T} \right) \cdot \nabla \delta W d\Omega - \int_{\Gamma_q} q' \delta W d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \delta W d\Omega = 0 \quad (2.14)$$

## 2.2 Méthode de résolution - Éléments finis

Les problèmes de l'écoulement et des sensibilités sont mathématiquement fermés et seront résolus par une méthode d'éléments finis <sup>[16]</sup>. Afin de réduire les erreurs



de discrétisation, nous utilisons un maillage adaptatif. Dans cette partie, nous présentons l'algorithme de résolution et les méthodes numériques utilisées.

### 2.2.1 Algorithme de résolution

Le vecteur de design  $\alpha$  est composé de  $n_p$  paramètres. Il faut donc résoudre le problème initial et  $n_p$  systèmes de sensibilités. La démarche suivie est décrite par le schéma 2.1. À partir d'un maillage donné, nous résolvons d'abord le problème initial puis chacun des problèmes de sensibilité. À l'issue, l'erreur est estimée pour chacune des variables dépendantes et de leurs sensibilités. Nous pouvons ensuite en déduire la distribution de taille optimale des éléments qui raffinerà le maillage là où les erreurs sont les plus élevées. Le processus est répété jusqu'à ce que la précision voulue de la solution soit atteinte.

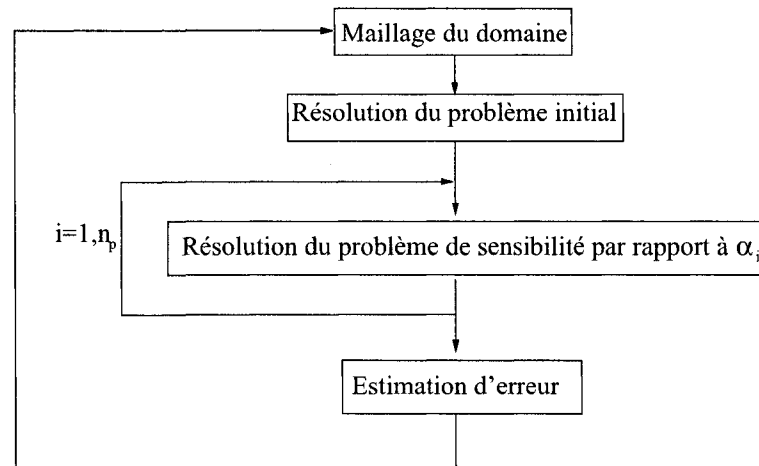


FIG. 2.1 Algorithme de résolution

### 2.2.2 Méthodes numériques

Nous avons vu au paragraphe précédent que le problème initial et le problème des sensibilités sont tout deux résolus avec une méthode d'éléments finis que nous allons maintenant détailler.

- La formulation variationnelle est obtenue à partir du système d'équations différentielles.
- Le domaine est décomposé en  $N_e$  éléments comprenant chacun  $N_{s_T}$  noeuds et sur chaque élément, la solution est approchée de la manière suivante :

$$s_T \approx s_{Th} = \sum_{i=1}^{N_{s_T}} s_{Ti} N_i^{s_T} \quad (2.15)$$

où  $s_{Ti}$  est la solution numérique au noeud  $i$  de l'élément considéré et les fonctions  $N_i^{s_T}$  sont les fonctions d'interpolation de l'élément.

- La méthode de Galerkin consiste alors à choisir successivement chaque fonction d'interpolation comme fonction test dans la forme faible, ce qui permet ensuite de construire un système discret du type  $\mathbf{R}(\mathbf{U}) = 0$
- Pour les problèmes de sensibilités ou pour la conduction si la conductivité est constante, il s'agit d'un système linéaire, ce qui n'est pas le cas pour les équations de Navier Stokes que nous verrons plus tard. Il faut alors utiliser une méthode itérative de Newton-Raphson. Afin de gagner du temps de calcul, nous utiliserons un jacobien numérique ou la matrice calculée à l'itération précédente. Avec cette opération, la convergence est légèrement affectée mais le temps de calcul est plus faible.

### 2.2.3 Adaptativité

Une fois le système résolu, l'erreur de discrétisation est estimée pour remailler le domaine. Comme la solution exacte est inconnue, une approximation d'ordre supérieur à la solution éléments finis est calculée par une méthode de projection locale établie par Zhu et Zienkiewicz<sup>[35, 36]</sup>. La norme de l'erreur est alors calculée sur chaque élément pour identifier les zones qui doivent être raffinées. Les erreurs du problème en température et des sensibilités sont prises en compte, il est donc important que la formulation des sensibilités soit compatible avec l'adaptation de maillage.

## 2.3 Méthode de l'équation des sensibilités lagrangiennes

Nous allons maintenant présenter la méthode qui permet d'obtenir la forme faible correspondant à la formulation en terme de sensibilités dites lagrangiennes. Tout d'abord, nous allons exposer quelques notions sur les transformations d'espace utilisées dans le développement subséquent des équations.

### 2.3.1 Transformation d'espace

Considérons le domaine  $\Omega$  dépendant du paramètre de forme  $\alpha$ . La configuration de référence sera notée  $\Omega_0$  et le domaine déformé suite à une variation du paramètre de forme sera noté  $\Omega_\alpha$ . Supposons qu'il existe un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^1(\Omega_0)$  liant ces deux domaines. Soit  $\hat{\phi}$  cette transformation, elle est alors définie de la

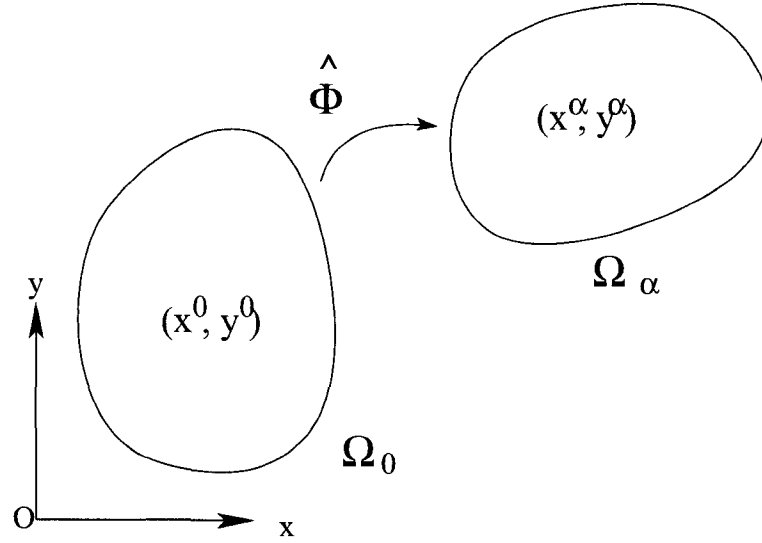


FIG. 2.2 Déformation du domaine

manière suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\phi} : \quad \Omega_0 &\rightarrow \Omega_\alpha \\ \mathbf{x} &\rightarrow \hat{\phi}(\mathbf{x}, \alpha) = \mathbf{x}^\alpha \end{aligned} \quad (2.16)$$

Nous noterons avec l'exposant  $\alpha$  les variables exprimées sur la configuration déformée, c'est à dire en fonction de  $\mathbf{x}^\alpha$ . Ainsi, si  $\mathbf{g}$  est un champ défini sur  $\Omega_0$ , les champs  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{g}^\alpha$  sont liés par la relation suivante :

$$\mathbf{g}^\alpha(\mathbf{x}^\alpha) = \mathbf{g}^\alpha(\hat{\phi}(\mathbf{x}, \alpha)) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (2.17)$$

Alors, pour  $\mathbf{g} = \hat{\phi}$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}^\alpha(\mathbf{x}^\alpha) &= \hat{\phi}^\alpha(\hat{\phi}(\mathbf{x}, \alpha)) = \hat{\phi}(\mathbf{x}, \alpha) = \mathbf{x}^\alpha \\ \text{donc } \hat{\phi}^\alpha &= Id^\alpha \end{aligned}$$

Prenons un exemple en une dimension. Considérons une barre de longueur  $L$ . La

transformation correspond à un allongement de la barre à une longueur  $L + \alpha$ . La déformation est illustrée sur la figure 2.3 et a l'expression analytique suivante :

$$\hat{\phi}(x) = \frac{L + \alpha}{L}x$$

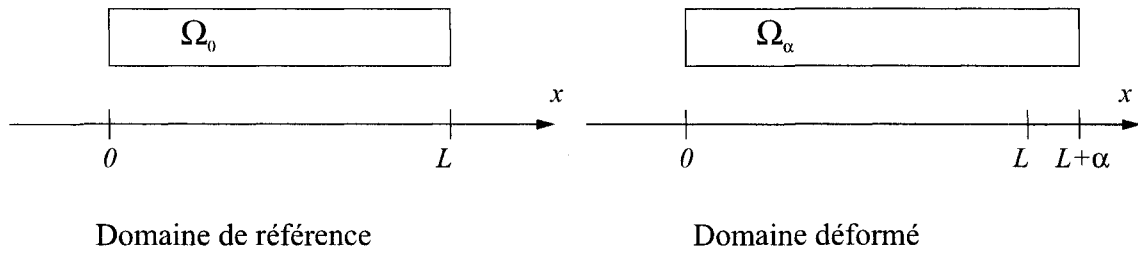


FIG. 2.3 Domaine 1D

Supposons maintenant que la température sur la configuration déformée soit définie de la manière suivante :

$$T^\alpha(x^\alpha) = x^\alpha(x^\alpha - (L + \alpha))$$

Donc en fonction de la variable sur le domaine non déformé, la température s'exprime par

$$T(x) = T^\alpha(\hat{\phi}(x)) = \frac{L + \alpha}{L}x \left( \frac{L + \alpha}{L}x - (L + \alpha) \right)$$

### 2.3.1.1 Taux de déformation et Jacobien

Le tenseur des taux de déformation, noté  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \alpha)$  s'exprime sur le domaine  $\Omega_0$  de la manière suivante :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \alpha) = \nabla \hat{\phi}(\mathbf{x}, \alpha) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x} & \frac{\partial x^\alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial y^\alpha}{\partial x} & \frac{\partial y^\alpha}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Son déterminant, le jacobien de la transformation  $J(\mathbf{x}, \alpha)$  a l'expression suivante :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}, \alpha) &= \det[\mathbf{F}(\mathbf{x}, \alpha)] = \det[\nabla \hat{\phi}(\mathbf{x}, \alpha)] \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x} \frac{\partial y^\alpha}{\partial y} - \frac{\partial y^\alpha}{\partial x} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Reprenons notre exemple précédent en y ajoutant une deuxième dimension,

$$\hat{\phi}(x, y) = \begin{cases} x^\alpha = \frac{L + \alpha}{L} x \\ y^\alpha = y \end{cases} \quad (2.20)$$

Ainsi,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \alpha) = \begin{bmatrix} \frac{L + \alpha}{L} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } J(\mathbf{x}, \alpha) = \frac{L + \alpha}{L} \quad (2.21)$$

### 2.3.1.2 Vitesse de déformation

La vitesse de déformation, appelée aussi vitesse de maille est la dérivée de la transformation par rapport au paramètre  $\alpha$ .

$$V_M(\mathbf{x}, \alpha) = \frac{\partial \hat{\phi}(\mathbf{x}, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \hat{\phi}^\alpha[\hat{\phi}(\mathbf{x}, \alpha)]}{\partial \alpha} = V_M^\alpha(\mathbf{x}^\alpha, \alpha)$$

Ces définitions nous permettent de déduire l'égalité tensorielle suivante :

$$\frac{D\mathbf{F}}{D\alpha} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha} = \nabla V_M = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_{Mx}}{\partial x} & \frac{\partial V_{Mx}}{\partial y} \\ \frac{\partial V_{My}}{\partial x} & \frac{\partial V_{My}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Pour notre exemple,

$$V_M(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

et nous pouvons vérifier que

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha} = \nabla V_M = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

### 2.3.1.3 Quelques formules utiles

Nous utiliserons dans la suite les formules suivantes, elles sont démontrées en annexe et développées de manière plus détaillée et rigoureuse dans l'ouvrage de Delfour et Zolesio<sup>[10]</sup> ou dans Tortorelli<sup>[31]</sup>.

– Dérivée du Jacobien

Sur la configuration de référence, la dérivée du Jacobien de la transformation par rapport au paramètre de forme est donnée par la formule suivante :

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \nabla V_M : J \mathbf{F}^{-1} \quad (2.25)$$

Pour la configuration déformée, nous avons :

$$\frac{DJ^\alpha}{D\alpha} = J^\alpha \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha \quad (2.26)$$

– Opérateurs gradient et divergence

Les opérateurs gradient et divergence font intervenir des dérivées d'espace, leur expression dépend donc du domaine dans lequel ils sont exprimés. Soient un champ de vecteurs  $\mathbf{f}^\alpha(\mathbf{x}^\alpha, \alpha)$  défini sur  $\Omega_\alpha$  et son correspondant  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha)$  sur  $\Omega_0$ , nous avons les correspondances suivantes :

$$\nabla^\alpha \cdot \mathbf{f}^\alpha = \mathbf{F}^{-1} : \nabla \mathbf{f} \quad (2.27)$$

$$\nabla^\alpha \mathbf{f}^\alpha = \nabla \mathbf{f} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.28)$$

– Formule de Nanson<sup>[10]</sup>

Le passage du domaine déformé au domaine de référence pour les intégrales de bord est donné par la formule suivante, dite de Nanson :

$$\int_{\Gamma_\alpha} \mathbf{f}^\alpha(x^\alpha, y^\alpha) n_\alpha d\Gamma_\alpha = \int_{\Gamma_0} \mathbf{f}(x, y) J \mathbf{F}^{-T} \cdot n_0 d\Gamma_0 \quad (2.29)$$

avec  $\mathbf{f}$  un champ de vecteur ou une fonction scalaire



Nous complétons ce paragraphe avec deux dernières formules :

$$\mathbf{F} \cdot \frac{D\mathbf{F}^{-1}}{D\alpha} = -\nabla^\alpha V_M^\alpha \quad (2.30)$$

$$J^{-1} \frac{DJ}{D\alpha} = \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha \quad (2.31)$$

### 2.3.2 Equation des sensibilités lagrangiennes

Nous allons maintenant présenter les équations permettant de calculer les sensibilités lagrangiennes, notées  $S_T$ .

Il s'agit de la dérivée totale des variables par rapport au paramètre  $\alpha$ , c'est à dire,

$$S_T = \lim_{\delta\alpha \rightarrow 0} \frac{T(\hat{\phi}(\mathbf{x}, \alpha + \delta\alpha), \alpha + \delta\alpha) - T(\mathbf{x}, \alpha)}{\delta\alpha} = \frac{DT}{D\alpha} \quad (2.32)$$

#### 2.3.2.1 Développement des équations

Nous développons la forme faible des équations de sensibilités lagrangiennes en dérivant directement la forme faible de l'équation de la chaleur. Soit  $\delta W$  une fonction test, la forme faible de l'équation de la chaleur (2.1) est :

$$\int_{\Omega_\alpha} (k \nabla^\alpha T \cdot \nabla^\alpha \delta W + Q \delta W) \, d\Omega_\alpha = 0 \quad (2.33)$$

Pour alléger le calcul, nous imposons des conditions de Dirichlet sur toute la frontière, ce qui permet d'annuler le terme de bord au complet. Nous devons alors évaluer

$$\frac{D}{D\alpha} \int_{\Omega_\alpha} (k \nabla^\alpha T \cdot \nabla^\alpha \delta W + Q \delta W) \, d\Omega_\alpha = 0 \quad (2.34)$$

Cette opération doit tenir compte de la déformation du domaine engendrée par une variation du paramètre  $\alpha$ , il n'est donc pas possible de dériver directement l'équation (2.33). Nous adopterons la démarche suivante :

1. Expliciter les dépendances en  $\alpha$  en ramenant l'intégrale sur le domaine de référence par un changement de variable approprié.
2. Dériver par rapport à  $\alpha$ . Le domaine de référence étant indépendant du paramètre, il n'y a qu'à dériver l'intégrande.
3. Revenir au domaine déformé

Procédons donc étape par étape et considérons la forme faible (2.33) :

1. Nous explicitons les dépendances en  $\alpha$  en revenant sur le domaine de référence. Les formules (2.27) et (2.28) permettent d'exprimer les gradients et les divergences en fonctions des coordonnées sur le domaine de référence.

$$\int_{\Omega_0} (k \nabla T \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \nabla \delta W \cdot \mathbf{F}^{-1} + Q \delta W) J d\Omega_0 = 0$$

2. Dérivons l'intégrand puisque le domaine est à présent indépendant du paramètre. Notons au préalable que les fonctions test sont indépendantes du paramètre  $\alpha$ . Leur dérivée est nulle.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \left( \frac{Dk}{D\alpha} \nabla T \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \nabla \delta W \cdot \mathbf{F}^{-1} + k \nabla \frac{DT}{D\alpha} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \nabla \delta W \cdot \mathbf{F}^{-1} \right. \\ & \quad \left. + k \nabla T \cdot \frac{D\mathbf{F}^{-1}}{D\alpha} \cdot \nabla \delta W \cdot \mathbf{F}^{-1} + k \nabla T \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \nabla \delta W \cdot \frac{D\mathbf{F}^{-1}}{D\alpha} \right. \\ & \quad \left. + \frac{DQ}{D\alpha} \delta W \right) J d\Omega_0 \\ & + \int_{\Omega_0} (k \nabla T \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \nabla \delta W \cdot \mathbf{F}^{-1} + Q \delta W) \frac{DJ}{D\alpha} d\Omega_0 \\ & = 0 \end{aligned}$$

3. Nous faisons le changement de variable inverse pour retourner au domaine déformé en utilisant les formules (2.27) et (2.28) en sens opposé pour transformer les dérivées d'espace :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\alpha} \left( \frac{Dk}{D\alpha} \nabla^\alpha T \cdot \nabla^\alpha \delta W + k \nabla^\alpha \frac{DT}{D\alpha} \cdot \nabla^\alpha \delta W + k \nabla^\alpha T \cdot \mathbf{F} \cdot \frac{D\mathbf{F}^{-1}}{D\alpha} \cdot \nabla^\alpha \delta W \right. \\
& \quad \left. + k \nabla^\alpha T \cdot \nabla^\alpha \delta W \cdot \mathbf{F} \cdot \frac{D\mathbf{F}^{-1}}{D\alpha} + \frac{DQ}{D\alpha} \delta W \right) d\Omega_\alpha \\
& + \int_{\Omega_\alpha} (k \nabla^\alpha T \cdot \nabla^\alpha \delta W + Q \delta W) \frac{1}{J} \frac{DJ}{D\alpha} d\Omega_\alpha \\
& = 0
\end{aligned}$$

Cette forme se simplifie en utilisant les formules (2.30) et (2.31) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} \cdot \frac{D\mathbf{F}^{-1}}{D\alpha} &= -\nabla^\alpha V_M^\alpha \\
J^{-1} \frac{DJ}{D\alpha} &= \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha
\end{aligned}$$

Nous obtenons alors la forme finale suivante :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\alpha} \left( \frac{Dk}{D\alpha} \nabla^\alpha T + k \nabla^\alpha S_T \right) \cdot \nabla^\alpha \delta W - k \nabla^\alpha T \cdot (\nabla^\alpha V_M^\alpha + (\nabla^\alpha V_M^\alpha)^T) \cdot \nabla^\alpha \delta W \\
& + k (\nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha) \nabla^\alpha T \cdot \nabla^\alpha \delta W + \left( \frac{DQ}{D\alpha} + Q \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha \right) \delta W \quad d\Omega_\alpha = 0
\end{aligned} \tag{2.35}$$

### 2.3.2.2 Autres méthodes

Une autre possibilité consiste à dériver la forme forte par rapport à  $\alpha$  en premier et ensuite calculer la forme faible de l'expression obtenue dans un second temps. Le résultat est le même. Ce calcul est développé en annexe.

Nous aurions aussi pu utiliser directement les formules de dérivation démontrées

dans <sup>[10]</sup> et <sup>[19]</sup> ou <sup>[31]</sup>. C'est la façon la plus utilisée en général<sup>[1]</sup> car elle est plus directe. Nous avons ici détaillé les calculs afin de mieux appréhender la notion de domaine déformable. Les calculs plus directs sont présentés en annexe.

Quelle que soit la méthode, elle mène au même résultat qui fait intervenir la vitesse de déformation sur tout le domaine, il convient donc d'en étudier les principales caractéristiques. C'est l'objet de la section suivante. Nous remarquons aussi que si la vitesse de maille est nulle, la formulation lagrangienne se simplifie et prend la forme exacte de la formulation eulérienne.

### 2.3.3 Calcul de la déformation

La forme faible de l'équation des sensibilités (2.35) fait intervenir les dérivées spatiales de la vitesse de déformation. Cependant, la vitesse de maille est définie uniquement sur la frontière du domaine. Il nous faut donc construire une extension au domaine complet. Ce prolongement devra :

- correspondre aux conditions aux limites du problème physique,
- être continûment différentiable en espace. En effet, c'est le gradient ou la divergence de la vitesse,  $\nabla V_M$ , qui apparaît dans la forme faible. Les dérivées en espaces doivent donc être continues afin de garantir une bonne résolution du problème des sensibilités et éviter d'avoir à introduire des termes de saut aux interfaces des éléments.

Toute fonction répondant à ces critères peut être utilisée, la vitesse de déformation exprimée sur le domaine n'est donc pas unique.

Il existe plusieurs techniques pour déterminer une telle extension. Tout d'abord, elle peut être spécifiée analytiquement<sup>[11][3]</sup>. Malheureusement, dans la plupart des cas, le calcul analytique devient trop complexe et trop lourd pour rester une approche

intéressante. Elle peut alors être construite numériquement. Dans ce mémoire, nous utiliserons l'approche pseudo-solide<sup>[26]</sup>, qui suppose que la géométrie du domaine se comporte comme un solide élastique. La transformation est alors gérée par les équations d'élasticité linéaire. Le déplacement en lui-même est nul et la vitesse de maille sera donnée par sa sensibilité. Les équations de sensibilités sont les mêmes que celles du déplacement. La vitesse de maille est donc la solution du système suivant :

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{2} \lambda_{ps} \text{tr} (\nabla V_M + \nabla^T V_M) + \mu_{ps} (\nabla V_M + \nabla^T V_M) \right) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.36)$$

$$V_M = \overline{V_M} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (2.37)$$

où  $\lambda_{ps}$  et  $\mu_{ps}$  sont les coefficients de Lamé de la pseudo-structure et  $\overline{V_M}$  est donnée. Ce problème est résolu en même temps que le problème des sensibilités de température (couplage total). Elle est donc compatible avec l'adaptation de maillage.

D'autres techniques de calcul existent comme la paramétrisation du domaine (*domain parametrization method*)<sup>[30]</sup> qui repose sur une configuration de référence fixe et utilise une transformation analogue à la transformation sur l'élément de référence utilisée dans la résolution éléments finis du problème. Elle est donc dépendante du maillage puisqu'elle est définie par élément <sup>[28][34]</sup>. Dans Belegundu<sup>[2]</sup>, des forces virtuelles sont prises comme paramètres de forme pour déformer le maillage, la vitesse de déformation est ensuite obtenue par différences finies. Ce calcul est un préalable à l'analyse de sensibilité et les forces adéquates doivent être appliquées aux noeuds adaptés pour obtenir la déformation voulue. Ces 2 techniques ne sont donc pas compatibles avec un maillage adaptatif.

Notons également que la transformation n'est utile que pour le calcul des dérivées. Nous ne distinguons pas dans la pratique pour le problème initial un champ

lagrangien et un champ eulérien. Autrement dit, les configurations de référence et déformée sont confondues.

### 2.3.4 Conditions aux limites

Tout comme pour les sensibilités eulériennes, nous devons compléter l'énoncé du problème avec les conditions aux limites. Les conditions limites du problème original étaient les suivantes :

$$k \nabla T \cdot \mathbf{n} = \bar{q} \quad \text{sur } \Gamma_q^\alpha \quad (2.38)$$

$$T = \bar{T} \quad \text{sur } \Gamma_T^\alpha \quad (2.39)$$

#### 2.3.4.1 Conditions de Dirichlet

Sur la courbe  $\Gamma_T$ , il y a égalité des dérivées matérielles

$$\frac{DT}{D\alpha} = \frac{D\bar{T}}{D\alpha} \quad (2.40)$$

Comme les dérivées matérielles correspondent aux sensibilités lagrangiennes, nous avons

$$S_T = \frac{D\bar{T}}{D\alpha} \quad \text{sur } \Gamma_T^\alpha \quad (2.41)$$

### 2.3.4.2 Conditions de Neumann

Pour exprimer les conditions de Neumann, nous devons revenir à la forme faible.

Ainsi,

$$\int_{\Gamma_q^\alpha} k \nabla^\alpha T^\alpha \cdot \mathbf{n}^\alpha \delta W \, d\Gamma^\alpha = \int_{\Gamma_q^\alpha} \bar{q} \delta W \, d\Gamma^\alpha \quad (2.42)$$

Il faut donc calculer la dérivée totale du membre de droite par rapport à  $\alpha$ . La démarche est la même qu'à la section précédente :

- expliciter les dépendances en  $\alpha$  en ramenant l'intégrale sur le domaine de référence
- dériver par rapport à  $\alpha$
- revenir au domaine déformé

Pour passer au domaine de référence, nous utilisons la formule de Nanson

$$I_{\Gamma_q} = \int_{\Gamma_q^\alpha} \bar{q} \delta W \, d\Gamma^\alpha = \int_{\Gamma_q^0} \bar{q} \delta W J \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}^0\| \, d\Gamma^0$$

Nous pouvons à présent dériver :

$$\begin{aligned} \frac{dI_{\Gamma_q}}{d\alpha} &= \int_{\Gamma_q^0} \frac{D\bar{q}}{D\alpha} \delta W J \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}^0\| + \bar{q} \delta W \frac{dJ}{d\alpha} \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}^0\| \\ &\quad + \bar{q} \delta W J \frac{d\|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}^0\|}{d\alpha} \, d\Gamma^0 \end{aligned}$$

Notons que

$$\frac{d\|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}^0\|}{d\alpha} = \frac{1}{\|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}^0\|} \left( \frac{d\mathbf{F}^{-T}}{d\alpha} \cdot \mathbf{n}^0 \right) \cdot (\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}^0)$$

Revenons sur le domaine déformé en utilisant (2.30) et la formule de Nanson. Comme il a été mentionné plus haut à la section 2.3.3, la déformation n'est utile que pour le calcul des dérivées. A cette étape, elle n'est plus utile et nous pouvons confondre la configuration de référence et la configuration actuelle. Ainsi, nous

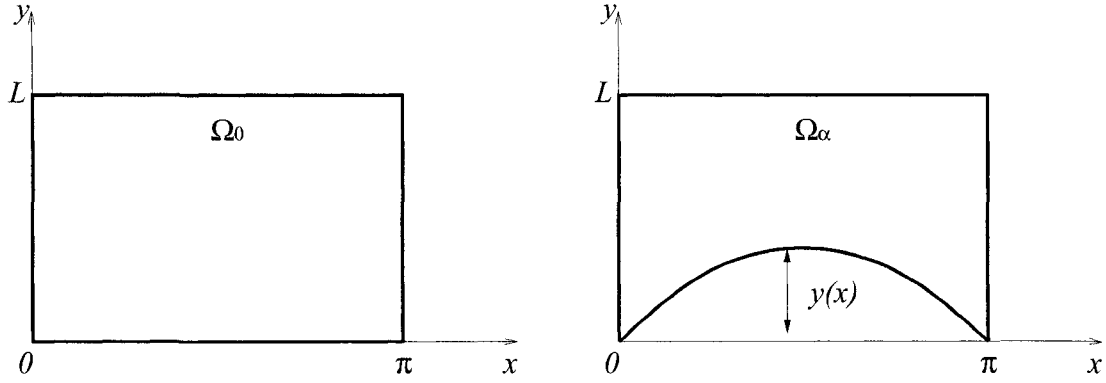


FIG. 2.4 Cas analytique : déformation du domaine

pouvons simplifier notre expression en utilisant que  $\mathbf{n}^\alpha = \mathbf{n}^0$  et  $\mathbf{F} = Id$ .

$$\left. \frac{dI_{\Gamma_q}}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{\Gamma_q} \left( \frac{D\bar{q}}{D\alpha} + (\nabla \cdot V_M) \bar{q} - \bar{q}(\nabla V_M \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \right) \delta W d\Gamma \quad (2.43)$$

Le système est à présent mathématiquement fermé et nous avons directement une forme faible que nous résolverons de la même manière que pour les sensibilités eulériennes.

### 2.3.5 Calcul analytique

Pour nous assurer que la forme faible obtenue est correcte, nous choisissons une solution analytique (transformation et température) et vérifions l'équation. Considérons donc le domaine  $\Omega_\alpha$  défini sur la figure 2.4. L'équation de la frontière du bas est

$$y(x) = \alpha \sin x \quad (2.44)$$

Le domaine de référence correspond à  $\alpha = 0$ .



## Transformation

La transformation entre le domaine  $\Omega_0$  et  $\Omega_\alpha$  peut être étendue au domaine de la manière suivante :

$$\hat{\phi}(x, y) = \begin{cases} x^\alpha = x \\ y^\alpha = \alpha \sin x + \frac{y}{L} (L - \alpha \sin x) \end{cases} \quad (2.45)$$

Calculons la dérivée par rapport à  $\alpha$  pour obtenir la vitesse de déformation :

$$V_M(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial y^\alpha}{\partial \alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \left(1 - \frac{y}{L}\right) \sin x \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Nous nous intéressons à la vitesse de déformation en  $\alpha = 0$ , donc le gradient de la vitesse de déformation est le suivant :

$$\nabla^\alpha V_M^\alpha = \nabla V_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \left(1 - \frac{y}{L}\right) \cos x & -\frac{\sin x}{L} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Ainsi,

$$\nabla \cdot V_M = -\frac{\sin x}{L} \quad (2.48)$$

Remarque : La transformation n'est pas unique, il s'agit d'un artifice de calcul sans signification physique. Il suffit donc qu'elle satisfasse les conditions aux limites correspondant à la déformation des frontières du domaine. Par exemple, pour notre cas, nous aurions pu choisir la transformation suivante :

$$\hat{\phi}(x, y) = \begin{cases} x^\alpha = x \\ y^\alpha = \alpha \sin x + \frac{y^2}{L^2} (L - \alpha \sin x) \end{cases} \quad (2.49)$$

### Solution

Soit le champ de température suivant :

$$T^\alpha(x^\alpha, y^\alpha, \alpha) = (y^\alpha - L)(y^\alpha - \alpha \sin x^\alpha) \quad (2.50)$$

Nous cherchons la sensibilité en  $\alpha = 0$  donc les champs de vecteurs sont les mêmes en configuration déformée et en configuration de référence. Le gradient de la température est donc calculé en  $\alpha = 0$  :

$$\nabla T^\alpha(x^\alpha, y^\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2y - L \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Pour calculer la sensibilité lagrangienne de la température, c'est à dire la dérivée totale par rapport à  $\alpha$ , nous avons deux possibilités équivalentes.

La première consiste à exprimer la température sur le domaine déformé en fonction des coordonnées non déformées, en effet,

$$T^\alpha(x^\alpha, y^\alpha, \alpha) = T^\alpha(\hat{\phi}(x, y), \alpha) \quad (2.52)$$

Cette opération permet d'expliciter les dépendances en  $\alpha$  et il ne reste plus qu'à dériver l'expression obtenue. Dans notre cas, la température a l'expression suivante :

$$T^\alpha(\hat{\phi}(x, y), \alpha) = \left( \alpha \sin x + \frac{y}{L}(L - \alpha \sin x) - L \right) \frac{y}{L}(L - \alpha \sin x) \quad (2.53)$$

Après dérivation et simplifications, nous obtenons :

$$S_T = \left. \frac{DT}{D\alpha} \right|_{\alpha=0} = 2y \left( 1 - \frac{y}{L} \right) \sin x \quad (2.54)$$

La deuxième méthode consiste à utiliser le théorème des fonctions composées.

$$S_T = \frac{DT}{D\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{d\alpha} \quad (2.55)$$

$$= \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \nabla T \cdot V_M \quad (2.56)$$

Ceci mène au même résultat.

Calculons le gradient de la sensibilité en  $\alpha = 0$ , nous omettrons donc les exposants  $\alpha$  :

$$\nabla S_T(x, y) = \begin{bmatrix} 2y \left(1 - \frac{y}{L}\right) \cos x \\ 2 \left(1 - \frac{2y}{L}\right) \sin x \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Cette solution correspond, pour un milieu de conductivité  $k = 1$  au terme source suivant

$$Q^\alpha(x^\alpha, y^\alpha, \alpha) = \alpha \sin x (y^\alpha - L) + 2 \quad (2.58)$$

En  $\alpha = 0$ ,  $Q = 2$ .

Nous déterminons la sensibilité lagrangienne du terme source de la même manière que pour la température :

$$Q^\alpha(\hat{\phi}(x, y), \alpha) = \alpha \sin x \left( \alpha \sin x + y \left( \frac{L - \alpha \sin x}{L} \right) - L \right)$$

Donc,

$$\left. \frac{DQ}{D\alpha} \right|_{\alpha=0} = \sin x (y - L) \quad (2.59)$$

## Vérification

En développant la forme faible (2.35), sachant que  $k = 1$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} & \left[ \frac{\partial S_T}{\partial x} - \left( 2 \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial V_{Mx}}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \left( \frac{\partial V_{Mx}}{\partial y} + \frac{\partial V_{My}}{\partial x} \right) \right) + \nabla \cdot V_M \frac{\partial T}{\partial x} \right] \frac{\partial \delta W}{\partial x} \\ & + \left[ \frac{\partial S_T}{\partial y} - \left( \frac{\partial T}{\partial x} \left( \frac{\partial V_{Mx}}{\partial y} + \frac{\partial V_{My}}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial V_{My}}{\partial y} \right) + \nabla \cdot V_M \frac{\partial T}{\partial y} \right] \frac{\partial \delta W}{\partial y} \\ & + \left[ \frac{DQ}{D\alpha} + \nabla \cdot V_M Q \right] \delta W \quad d\Omega = 0 \end{aligned}$$

En remplaçant la température, sa sensibilité lagrangienne et le terme source par leur expressions respectives, le membre de gauche devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} & (L - y) \cos x \frac{\partial \delta W}{\partial x} - \sin x \left( \frac{2y}{L} - 1 \right) \frac{\partial \delta W}{\partial y} \\ & + \left( \sin x (y - L) - 2 \frac{\sin x}{L} \right) \delta W \quad d\Omega \end{aligned}$$

En intégrant par partie les deux premiers termes et en tenant compte du fait que la fonction test s'annule sur le bord, nous vérifions bien que cette intégrale est nulle.

## 2.4 Formulation Eulérienne versus Formulation Lagrangienne

Comparons les caractéristiques des formulations eulérienne et lagrangienne.

### Obtention de la forme faible de l'équation des sensibilités :

Pour la formulation *eulérienne*, l'équation d'état est différenciée formellement par rapport au paramètre. La forme faible est ensuite obtenue en multipliant les équations ainsi obtenues par une fonction test puis en intégrant sur le domaine.

Pour la formulation *lagrangienne*, la forme faible de l'équation d'état est différenciée par rapport au paramètre. Cette opération est délicate car le domaine d'intégration dépend du paramètre. La forme faible ainsi obtenue met en jeu les dérivées spatiales d'une vitesse de déformation.

### Conditions aux limites :

Les conditions aux limites sont données par les dérivées matérielles de celles du problème initial.

Dans le cas des sensibilités *eulériennes*, il est nécessaire de retrancher le terme de transpiration afin d'obtenir la bonne valeur. Ce terme fait intervenir les dérivées spatiales du champ qui seront issues du calcul numérique.

Pour les sensibilités *lagrangiennes*, comme la dérivée matérielle correspond à la sensibilité lagrangienne, l'obtention des conditions aux limites est directe et exacte.

### Enjeu :

Pour les sensibilités *eulériennes*, le point crucial est le calcul des conditions aux limites. Comme elles font intervenir les dérivées spatiales du champ de température, il est indispensable que celles-ci soient calculées avec la plus grande précision possible à la frontière pour ne pas introduire d'erreur dans tout le champ de sensibilité. Cette opération demande en général des calculs supplémentaires qui peuvent être assez lourds.

Pour les sensibilités *lagrangiennes*, les conditions aux limites sont exactes mais la forme faible fait intervenir une vitesse de déformation qui n'a de réalité physique que sur les frontières du domaine. Elle doit être calculée partout, en même temps que les sensibilités. Il s'agit donc de deux variables inconnues supplémentaires à prendre en compte dans le système global. Le temps de calcul sera donc un peu plus long.

## CHAPITRE 3

### RÉSULTATS NUMÉRIQUES EN CONDUCTION

Nous avons établi au chapitre précédent une formulation de l'équation des sensibilités lagrangiennes. Nous allons à présent faire quelques simulations numériques pour tester le code et pour étudier la convergence, en particulier avec des conditions de Neumann.

#### 3.1 Méthode de la solution manufacturée

La méthode de la solution manufacturée (MMS)<sup>[25]</sup> sera utilisée pour vérifier l'implémentation et l'efficacité de la formulation lagrangienne.

La MMS consiste à choisir une expression algébrique  $T_M$  de la solution. Celle-ci ne satisfait généralement pas l'équation différentielle  $\mathcal{L}(T) = 0$ . Il faut donc déterminer l'expression du terme source  $Q_M = \mathcal{L}(T_M)$ . Ainsi,  $T_M$  est solution du problème modifié  $\mathcal{L}(T_M) = Q_M$ . Nous résoudrons cette équation sur une séquence de maillages de plus en plus fins afin de vérifier que la solution numérique calculée avec ces termes sources converge, avec le bon taux théorique vers la solution analytique  $T_M$ .

#### 3.2 Cas d'une "couche mince"

Dans cette première partie, nous reprendrons la géométrie et la transformation utilisées dans la section 2.3.5 mais la solution en température sera choisie avec un fort gradient au niveau de la frontière dépendant du paramètre afin d'avoir une

sensibilité forte dans son voisinage. La solution ressemblera à un profil de vitesse dans une couche limite.

### 3.2.1 Solution exacte

Considérons donc le domaine  $\Omega_\alpha$  défini sur la figure 3.1. Il s'agit d'un carré unitaire. Nous chercherons à calculer la sensibilité de la température par rapport à la forme de la frontière du bas. Celle-ci a pour équation :

$$y(x) = \alpha \sin x \quad (3.1)$$

Le paramètre de forme est alors  $\alpha$ .

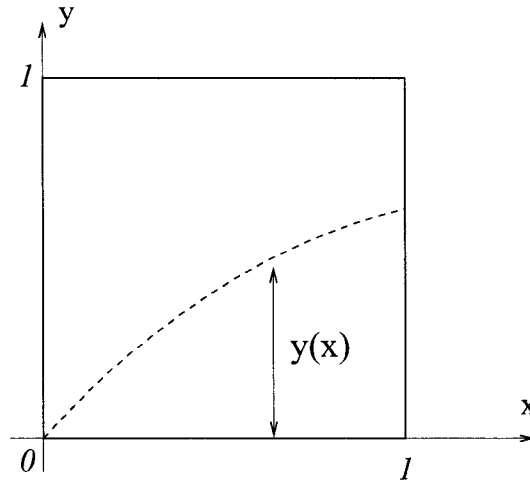


FIG. 3.1 Cas de la "couche mince" : Déformation du domaine

Nous commencerons par définir le champ de température choisi dans le cadre de la méthode des solutions manufacturées. Pour l'écoulement, il n'y a pas de différence de point de vue, puisque la transformation du domaine n'intervient que pour le calcul des dérivées. Ainsi  $T^\alpha(x^\alpha, y^\alpha) = T(x, y)$ . Nous dériverons ensuite ce champ pour obtenir tout d'abord la sensibilité eulérienne puis la sensibilité lagrangienne.

### 3.2.1.1 Champ de température

Nous choisissons le champ de température suivant comme solution manufacturée :

$$T^\alpha(x^\alpha, y^\alpha) = x^2 \frac{e^{-\beta(y-\alpha \sin x)} - 1}{e^{-\beta} - 1} \quad (3.2)$$

Dans cette expression,  $\alpha$  est le paramètre de forme et  $\beta$  contrôle l'épaisseur de la couche mince. En  $\alpha = 0$ , le gradient de  $T$  est le suivant :

$$\nabla T(x, y) = \begin{bmatrix} 2x \frac{e^{-\beta y} - 1}{e^{-\beta} - 1} \\ -\beta x^2 \frac{e^{-\beta y}}{e^{-\beta} - 1} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Pour une conductivité constante égale à 1, le terme source correspondant à cette solution est le suivant :

$$Q = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{e^{-\beta y} (2 + \beta^2 x^2 + \alpha \gamma(x, \alpha)) - 2}{e^{-\beta} - 1}$$

Avec la fonction  $\gamma(x, \alpha) = 4\beta x \cos x - \beta x^2 \sin x + \alpha \beta^2 x^2 \cos^2 x$

Ainsi, en  $\alpha = 0$ , le terme source devient :

$$Q = \frac{e^{-\beta y} (2 + \beta^2 x^2) - 2}{e^{-\beta} - 1}$$

Nous appliquons des conditions de Neumann sur la frontière du bas qui dépend du paramètre de forme  $\alpha$ . Nous devons donc calculer le flux thermique correspondant. Il est défini de la façon suivante :

$$\bar{q} = k \nabla T \cdot \mathbf{n}$$



La normale à la frontière est la suivante :

$$\mathbf{n}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha \cos x}{\sqrt{1 + \alpha^2 \cos^2 x}} \\ -1 \\ \frac{\alpha \sin x}{\sqrt{1 + \alpha^2 \cos^2 x}} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Sur cette frontière  $y = 0$ . Le flux thermique en  $\alpha = 0$  est alors le suivant :

$$\bar{q} = \frac{x^2 \beta}{e^{-\beta} - 1}$$

### 3.2.1.2 Sensibilité eulérienne

La sensibilité eulérienne de ce champ de température se calcule aisément par une dérivée partielle de  $T$  par rapport à  $\alpha$ . Nous obtenons alors en  $\alpha = 0$  :

$$s_T = \left. \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \beta x^2 \sin x \frac{e^{-\beta y}}{e^{-\beta} - 1} \quad (3.5)$$

Le terme source correspondant s'obtient aussi par une dérivée partielle par rapport à  $\alpha$ , ce qui mène à l'expression suivante pour  $\alpha = 0$ .

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = \frac{e^{-\beta y}}{e^{-\beta} - 1} (\beta \sin x (2 + x^2 \beta^2) + 4x\beta \cos x - x^2 \beta \sin x)$$

Pour les conditions de Neumann, nous devons calculer le flux des sensibilités eulériennes qui s'exprime de la façon suivante pour une conductivité constante :

$$\bar{q}' = k \nabla s_T \cdot \mathbf{n}$$

Sur la frontière du bas,  $y = 0$  et en  $\alpha = 0$ , nous obtenons l'expression suivante :

$$\bar{q}' = \frac{\beta^2 x^2 \sin x}{e^{-\beta} - 1}$$

### 3.2.1.3 Sensibilité lagrangienne

La sensibilité lagrangienne s'obtient avec la dérivée totale du champ de température par rapport au paramètre de forme. En utilisant le théorème des fonctions composées, nous obtenons l'expression suivante :

$$S_T = \frac{DT}{D\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \nabla T \cdot V_M$$

Cette expression fait apparaître la vitesse de déformation que nous devons calculer au préalable avant de déterminer la sensibilité lagrangienne du champ de température.

#### Transformation

Nous reprenons la transformation établie dans l'exemple analytique à la section 2.3.5. La transformation calculée précédemment était la suivante :

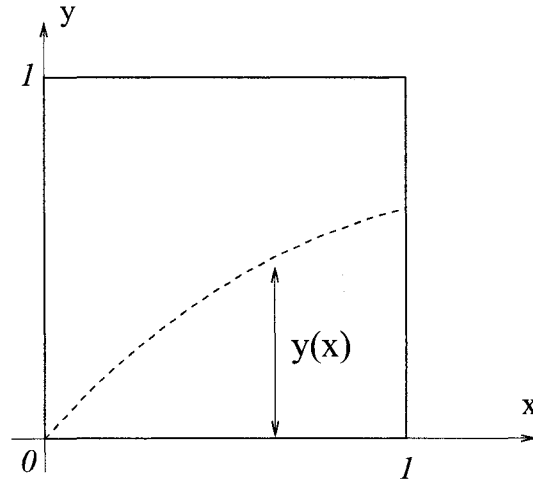


FIG. 3.2 Cas de la "couche mince" : Déformation du domaine

$$\hat{\phi}(x, y) = \begin{cases} x^\alpha = x \\ y^\alpha = \alpha \sin x + \frac{y}{L} (L - \alpha \sin x) \end{cases} \quad (3.6)$$

La vitesse de déformation :

$$V_M(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin x \left(1 - \frac{y}{L}\right) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

donc en  $\alpha = 0$ , le gradient de la vitesse de déformation a l'expression suivante :

$$\nabla^\alpha V_M = \nabla V_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \cos x \left(1 - \frac{y}{L}\right) - \frac{\sin x}{L} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

et

$$\nabla \cdot V_M = -\frac{\sin x}{L} \quad (3.9)$$

Nous pouvons à présent calculer la sensibilité lagrangienne du champ de température, ainsi que celle des termes sources et des conditions aux limites.

### Sensibilités lagrangiennes

Le champ de température était le suivant :

$$T^\alpha(x^\alpha, y^\alpha) = x^2 \frac{e^{-\beta(y - \alpha \sin x)} - 1}{e^{-\beta} - 1} \quad (3.10)$$

La sensibilité lagrangienne du champ de température est calculée par le théorème des fonctions composées

$$S_T = \frac{DT}{D\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{Dx}{D\alpha} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{Dy}{D\alpha}$$

Ce qui mène à l'expression suivante pour  $\alpha = 0$  :

$$S_T = x^2 y \beta \sin x \frac{e^{-\beta y}}{e^{-\beta} - 1} \quad (3.11)$$

La sensibilité du terme source est calculée par le code avec le théorème des fonctions composées. Il faut donc lui fournir ses dérivées spatiales et sa dérivée eulérienne.

Pour  $\alpha = 0$ , elles sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \alpha} &= \frac{e^{-\beta y}}{e^{-\beta} - 1} (\beta \sin x (2 + x^2 \beta^2) + 4x\beta \cos x - x^2 \beta \sin x) \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= 2x\beta^2 \frac{e^{-\beta y}}{e^{-\beta} - 1} \\ \frac{\partial Q}{\partial y} &= -\beta (2 + x^2 \beta^2) \frac{e^{-\beta y}}{e^{-\beta} - 1} \end{aligned}$$

Pour les conditions de Neumann, nous devons calculer la dérivée lagrangienne du flux thermique. Son expression est la suivante :

$$\frac{D\bar{q}}{D\alpha} = k \frac{D\nabla T}{D\alpha} \cdot \mathbf{n} + k \nabla T \cdot \frac{D\mathbf{n}}{D\alpha}$$

Il est important à cette étape de se rappeler que la sensibilité lagrangienne d'un gradient n'est pas égale au gradient de la sensibilité lagrangienne, c'est à dire,

$$\frac{D\nabla T}{D\alpha} \neq \nabla S_T$$

Il faut plutôt utiliser la formule suivante :

$$\frac{D\nabla T}{D\alpha} = \begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha \partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} V_{Mx} + \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x} V_{My} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha \partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} V_{Mx} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} V_{My} \end{cases} \quad (3.12)$$

Alors pour  $\alpha = 0$  nous obtenons :

$$\frac{D\bar{q}}{D\alpha} = 2x \cos x \frac{e^{-\beta y} - 1}{e^{-\beta} - 1} + x^2 y \beta^2 \sin x \frac{e^{-\beta y}}{e^{-\beta} - 1}$$

Ainsi, sur la frontière en question, donc pour  $y = 0$ , la sensibilité lagrangienne du flux thermique est nulle :

$$\frac{D\bar{q}}{D\alpha} = 0$$

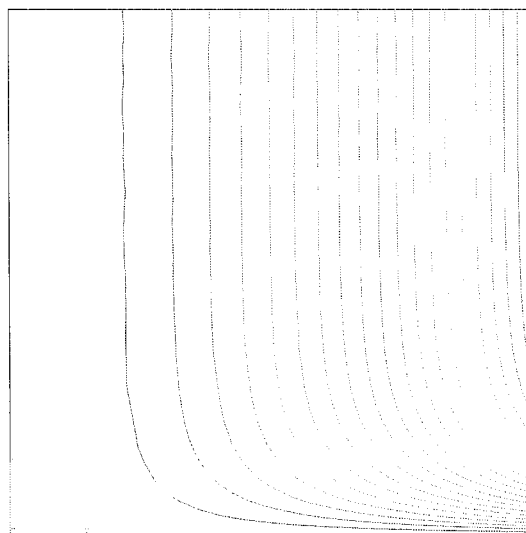
Nous avons à présent déterminé tous les champs nécessaires pour la méthode des solutions manufacturées, pour chacune des formulations des sensibilités. Les développements pour la formulation lagrangienne sont plus fastidieux à cause en particulier de la vitesse de déformation, de plus, les dérivées sont un peu plus complexes à calculer. Notons cependant que ces calculs sont spécifiques à la méthode et à l'élaboration d'une solution analytique, ils ne sont pas nécessaires pour un calcul "normal". Récapitulons donc les différents champs calculés et leurs caractéristiques, nous pourrions voir leurs isolignes sur la figure 3.3

Nous constatons en particulier que la sensibilité lagrangienne est bien nulle sur la frontière inférieure; il s'agit de la condition aux limites sur la dérivée matérielle. La sensibilité eulérienne est comprise entre -8.41 et -0.337, ces valeurs sont plus importantes que celles obtenues en formulation lagrangienne, celles-ci étant alors comprises entre -0.310 et -0.012. Cela semble logique puisque la sensibilité lagrangienne est nulle à la frontière alors que la sensibilité eulérienne est égale à l'opposé du terme de transpiration :

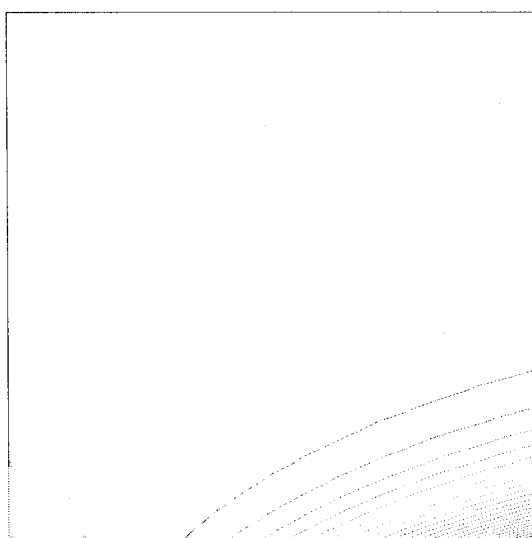
$$s_T|_{\Gamma} = -\nabla T \cdot V_M = -\frac{\partial T}{\partial y} \sin x$$

Nous avons choisi une solution avec un fort gradient à la frontière, ce qui explique cette différence importante.

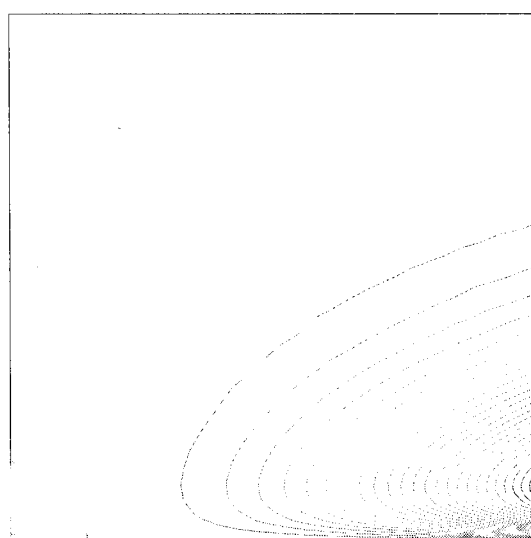
Passons à présent aux résultats numériques.



(a) Isolignes de température



(b) Isolignes de sensibilité eulérienne



(c) Isolignes de sensibilité lagrangienne

FIG. 3.3 Maillage et isolignes de température pour le cas thermique "couche mince"

### 3.2.2 Résultats numériques

Le maillage utilisé pour la résolution numérique est non structuré et composé d'éléments triangulaires de type quadratique. La température et les déplacements sont approximés avec des polynômes d'ordre 2, il y a donc 6 noeuds de calculs par élément comme le montre la figure 3.4.

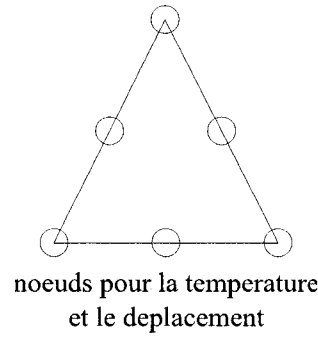


FIG. 3.4 Élément quadratique

Le taux de convergence théorique en semi-norme énergie est de 2. C'est à dire, si  $h$  est la longueur caractéristique des éléments et  $T_{exa}$  la solution exacte ou enrichie et  $T_h$  la solution éléments finis, nous avons :

$$\|e\| = \sqrt{\int_{\Omega} (\nabla T_h - \nabla T_{exa}) \cdot (\nabla T_h - \nabla T_{exa}) \, d\Omega} = O(h^2) \quad (3.13)$$

Ceci est valable tant pour la température que pour sa sensibilité.

Nous avons fait plusieurs calculs :

1. en formulation eulérienne avec  $\alpha$  traité comme paramètre de valeur, ce qui est possible car on connaît la solution analytique de la sensibilité eulérienne
2. en formulation eulérienne avec  $\alpha$  traité comme paramètre de forme.
3. en formulation lagrangienne



### 3.2.2.1 Formulation eulérienne - Paramètre de valeur

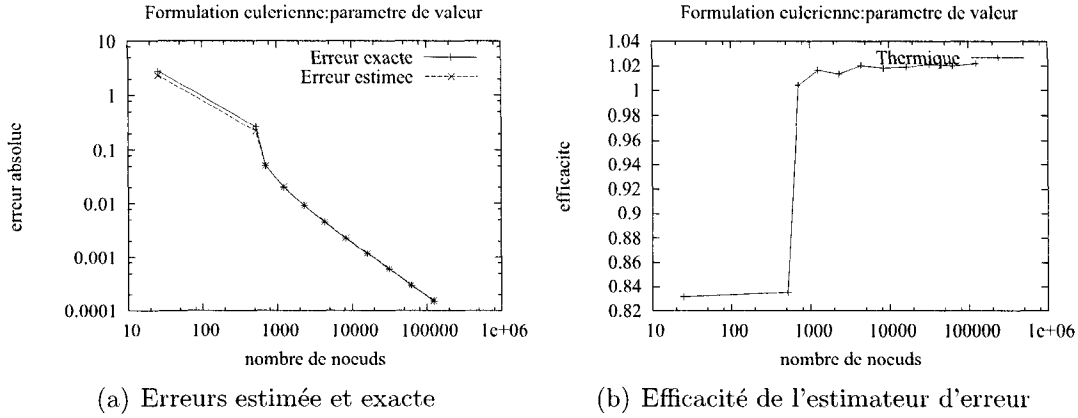


FIG. 3.5 Courbes de convergence en formulation eulérienne, paramètre de valeur pour le cas thermique "couche mince"

Pour ce calcul, nous avons utilisé la formulation eulérienne mais le paramètre a été traité en paramètre de valeur, c'est à dire que nous avons imposé la solution exacte de la sensibilité eulérienne  $\frac{\partial T}{\partial \alpha}$  pour les conditions de Dirichlet et la sensibilité eulérienne exacte du flux  $\vec{q}'$  pour les conditions de Neumann. Ce type de calcul est possible uniquement lorsque la solution analytique est connue. En effet dans le cas courant, seule la sensibilité lagrangienne est connue à la frontière.

Au bout de 4 cycles d'adaptation, le maillage compte 2283 noeuds et il a été raffiné sur la frontière inférieure et plutôt sur la droite du domaine dans les zones où les gradients sont les plus importants. Pour ce qui est de la convergence, les résultats obtenus sont conformes à nos attentes. Comme le montre la figure 3.5(a), la solution numérique converge vers la solution analytique à l'ordre 2 avec le raffinement du maillage. L'efficacité, c'est à dire le rapport entre la norme de l'erreur estimée et celle de l'erreur exacte présentée sur la figure 3.5(b) est également très bonne puisqu'elle tend vers 1. Les conditions aux frontières étant exactes, il est normal

d'obtenir le taux de convergence asymptotique théorique. Le tableau 3.1 récapitule les valeurs numériques du présent calcul.

Cycle	Nombre de noeuds	$\ S_T\ $	Erreur exacte	Efficacité
0	25	7.629	2.701E+00	0.8329
1	521	7.801	2.599E-01	0.8374
2	714	7.796	4.926E-02	1.005
3	1243	7.796	1.907E-02	1.009
4	2283	7.796	9.365E-03	1.016
5	4158	7.796	4.646E-03	1.019
6	7837	7.796	2.501E-03	1.018
7	14865	7.796	1.285E-03	1.020
8	29078	7.796	6.489E-04	1.021
9	57215	7.796	3.244E-04	1.022
10	114175	7.796	1.628E-04	1.023

TAB. 3.1 Convergence de la sensibilité eulérienne en paramètre de valeur pour le cas thermique de couche mince

Dès les premiers cycles, l'efficacité est très bonne et atteint rapidement sa limite de 1. L'estimation d'erreur fonctionne donc très bien tout comme l'adaptation du maillage. Nous constatons en effet sur les derniers cycles qu'à chaque itération, l'erreur est divisé par 2 alors que le nombre de noeud est multiplié par 2.

### 3.2.2.2 Formulation eulérienne - Paramètre de forme

Ce calcul correspond au calcul classique de sensibilité. Nous avons fourni au code les conditions aux limites des sensibilités lagrangiennes ainsi que le déplacement des frontières. En effet, la formulation impose

$$\overline{s_T} = \frac{D\overline{T}}{D\alpha} - \nabla T|_{\Gamma} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_f}{\partial \alpha}$$

L'énoncé du problème spécifie  $\frac{D\overline{T}}{D\alpha}$  et  $\frac{\partial \mathbf{X}_f}{\partial \alpha}$  alors que le gradient de température à la paroi doit être évaluée à partir de la solution éléments finis. Pour améliorer la précision sur ce terme, nous utiliserons une technique de projection locale. Nous imposerons des conditions de Dirichlet sur toutes les frontières, les imprécisions seront moins grandes qu'avec des conditions de Neumann. Nous constatons sur la

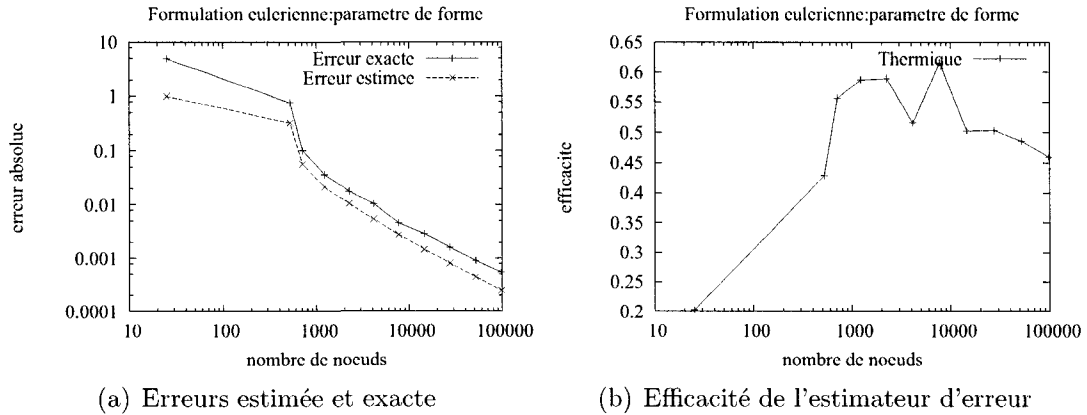


FIG. 3.6 Courbes de convergence en formulation eulérienne, paramètre de forme pour le cas thermique "couche limite"

figure 3.6(a) que même si l'erreur diminue, c'est à dire que la solution numérique semble bien converger vers la solution analytique, l'ordre de convergence n'est plus de 2. De plus, la figure 3.6(b) montre que l'estimateur d'erreur n'est plus asymp-

totiquement exact, c'est à dire que

$$\lim_{h \rightarrow 0} e_h \neq \lim_{h \rightarrow 0} e_{exa}$$

avec  $h$  la taille caractéristique des éléments,  $e_h$  l'erreur estimée et  $e_{ex}$  l'erreur exacte. Cette tendance est confirmée par les valeurs numériques du tableau 3.2. Aux premières itérations, le comportement de cette solution est semblable au calcul en paramètre de valeur, c'est à dire qu'il y a un palier pour le cycle 1 puis l'erreur diminue et l'efficacité augmente de manière significative. Mais au lieu de poursuivre cette tendance, pour les cycles suivants, l'efficacité plafonne à 0.6, la différence entre les 2 estimations d'erreur n'est plus due au maillage trop grossier mais à l'inexactitude des conditions aux limites des sensibilités. Le taux de convergence est aussi affecté. La pente des courbe de la figure 3.6(a) devrait être de -1 pour des maillages suffisamment fins, mais elle n'est que de -0.8. Cet exemple montre que les conditions aux limites inexactes affectent la convergence des sensibilités pour cette formulation.

Cycle	Nombre de noeuds	$\ S_T\ $	Erreur exacte	Efficacité
0	25	4.204	4.888E+00	0.2023
1	521	7.458	7.539E-01	0.4289
2	709	7.763	1.014E-01	0.5565
3	1222	7.782	3.656E-02	0.5870
4	2239	7.790	1.778E-02	0.5895
5	4145	7.792	1.040E-02	0.5158
6	7721	7.795	4.554E-03	0.6153
7	14545	7.796	2.939E-03	0.5026
8	27416	7.796	1.606E-03	0.5035
9	51829	7.796	9.059E-04	0.4866
10	97896	7.796	5.451E-04	0.4597

TAB. 3.2 Convergence de la sensibilité eulérienne en paramètre de forme pour le cas thermique de couche mince

### 3.2.2.3 Formulation lagrangienne

Après 4 cycles adaptatifs, nous obtenons un maillage de 2578 noeuds donc approximativement le même nombre de noeuds qu'en formulation eulérienne, le raffinement est semblable. La figure 3.7(a) présente l'évolution des normes de l'erreur estimée

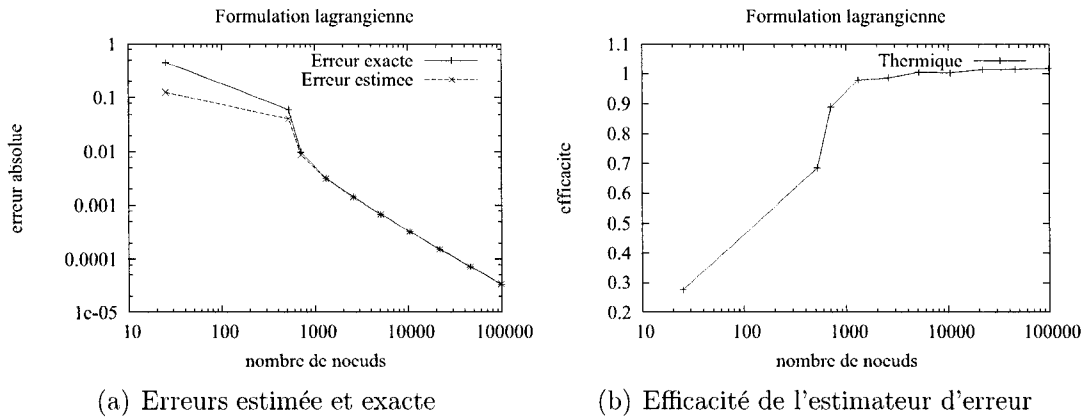


FIG. 3.7 Courbes de convergence en formulation lagrangienne pour le cas thermique "couche mince"

et de l'erreur exacte en fonction du raffinement du maillage, c'est à dire en fonction du nombre de noeuds. La solution numérique converge bien vers la solution analytique avec le taux de convergence attendu, en  $O(h^2)$  si  $h$  représente la taille caractéristique des éléments. Les équations sont donc correctement résolues par le code.

De plus, au bout de quelques cycles, l'erreur estimée se confond avec l'erreur exacte. Ceci est mis en évidence par la figure 3.7(b). L'efficacité est très proche de 1 dès que le maillage dépasse les 1000 noeuds. De plus, nous pouvons voir sur le tableau 3.3 que la norme de la sensibilité atteint sa valeur asymptotique à 4 chiffres significatifs dès le cycle 3, alors qu'il fallait attendre le cycle 7 pour la formulation eulérienne en paramètre de forme, voir le tableau 3.2.

Cycle	Nombre de noeuds	$\ S_T\ $	Erreur exacte	Efficacité
0	25	0.3364	4.514E-01	0.2751
1	521	0.5492	6.001E-02	0.6847
2	706	0.5512	9.804E-03	0.8881
3	1304	0.5513	3.155E-03	0.9784
4	2578	0.5513	1.425E-03	0.9858
5	5119	0.5513	6.806E-04	1.004
6	10423	0.5513	3.263E-04	1.002
7	21716	0.5513	1.525E-04	1.013
8	45938	0.5513	7.189E-05	1.014
9	98390	0.5513	3.341E-05	1.017

TAB. 3.3 Convergence de la sensibilité lagrangienne pour le cas thermique de couche mince

Cette solution manufacturée nous a permis tout d'abord d'illustrer les problèmes de convergence en formulation eulérienne pour un paramètre de forme. En effet, si le paramètre est traité comme paramètre de forme, le taux de convergence se trouve affecté et l'efficacité de l'estimateur d'erreur devient aussi beaucoup moins bonne. Ces problèmes n'apparaissent pas si le paramètre est traité en paramètre de valeur, c'est à dire si les conditions aux frontières sont imposées de manière exacte. Ces dernières sont donc bien la cause des problèmes de convergence.

Ensuite, les bons résultats de convergence de la formulation lagrangienne montrent d'une part que l'implémentation de la formulation est correcte et d'autre part que cette formulation est adaptée pour résoudre les sensibilités pour un paramètre de forme, même avec des conditions de Neumann.

### 3.3 Cas d'un écoulement potentiel près d'un point de stagnation 2D

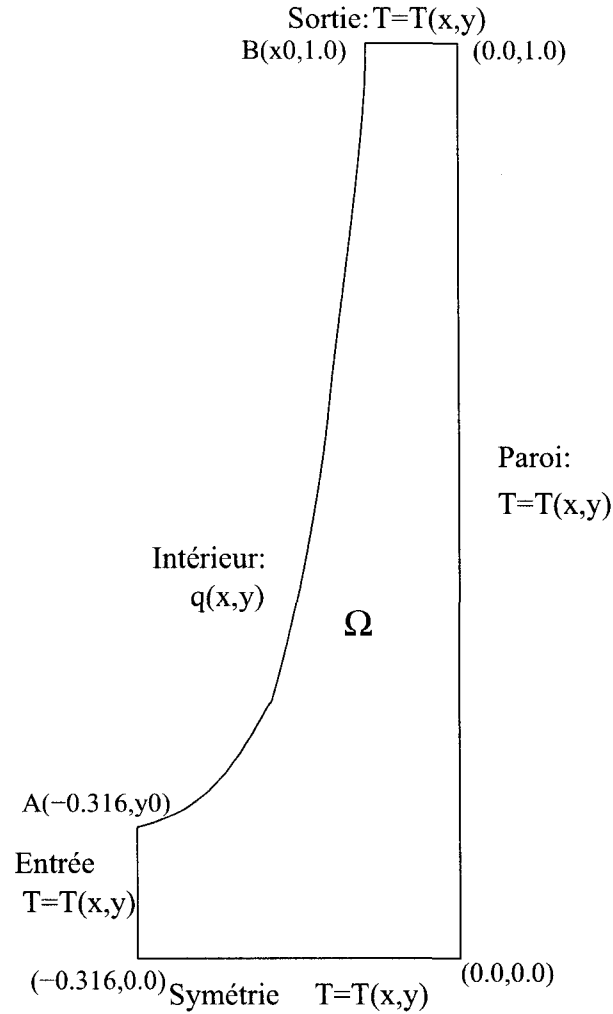


FIG. 3.8 Domaine pour le cas du point de stagnation 2D

Dans cette seconde partie, nous allons comparer les résultats obtenus en formulation lagrangienne, et en formulation eulérienne en paramètre de forme avec une technique avancée de reconstruction des gradients à la frontière. Nous utiliserons la solution manufacturée de Duvigneau<sup>[14]</sup>. Le domaine utilisé est celui présenté sur la figure 3.8. L'équation de la courbe "Intérieur" est  $2ax^2y = 1$ .  $a$  sera le paramètre de forme et pour notre configuration,  $a = 50$ .

### 3.3.1 Solution exacte

Détaillons dans un premier temps la solution analytique utilisée. Comme pour la section précédente, il n'y a pas de différence pour le champ de température entre le point de vue eulérien et lagrangien. Nous dériverons ensuite cette solution d'un point de vue eulérien puis d'un point de vue lagrangien, en détaillant à chaque fois les termes sources et les conditions aux limites correspondants.

#### 3.3.1.1 Champ de température

Nous choisissons le champ de température suivant comme solution manufacturée :

$$T^a(x^a, y^a) = 2a (x^2 y)^2 \quad (3.14)$$

Son gradient est le suivant :

$$\nabla T(x, y) = \begin{bmatrix} 8ax^3y^2 \\ 4ax^4y \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Pour une conductivité constante égale à 1, le terme source correspondant à cette solution est le suivant :

$$Q = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 4ax^2 (x^2 + 6y^2)$$

Pour les conditions, aux limites, nous imposons des conditions de Neumann sur la courbe étiquetée "Intérieur" et des conditions de Dirichlet ailleurs. Ainsi, nous



avons

$$\begin{cases} \Gamma_T = \text{sortie} \cup \text{paroi} \cup \text{symétrie} \cup \text{entrée} \\ \Gamma_q = \text{intérieur} \end{cases}$$

Pour les conditions de Neumann, nous devons donc calculer le flux thermique correspondant à notre solution sur la courbe étiquetée "Intérieur". Il est défini de la façon suivante :

$$\bar{q} = k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = k \nabla T \cdot \mathbf{n}$$

La normale à la frontière  $\Gamma_q$  est la suivante :

$$\mathbf{n}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{a^2 x^6 + 1}} \\ -ax^3 \\ \frac{-1}{\sqrt{a^2 x^6 + 1}} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Nous montrons alors facilement que le flux thermique correspondant à notre solution est donné par l'expression suivante :

$$\bar{q} = -\frac{4ax^3y(2y + ax^4)}{\sqrt{a^2x^6 + 1}}$$

### 3.3.1.2 Sensibilité eulérienne

Nous allons à présent calculer la sensibilité eulérienne de ce champ. Elle se calcule aisément par une dérivée partielle de  $T$  par rapport à  $a$ .

$$s_T = \frac{\partial T}{\partial a}(x, y, a) = 2(x^2y)^2 \quad (3.17)$$

Le terme source correspondant s'obtient aussi par une dérivée partielle par rapport à  $a$ , ce qui mène à l'expression suivante.

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = 4x^2 (x^2 + 6y^2)$$

Pour les conditions de Neumann, nous devons calculer le flux des sensibilités qui s'exprime de la façon suivante pour une conductivité constante :

$$\overline{q'} = \frac{\partial \overline{q}}{\partial a} = k \nabla s_T \cdot \mathbf{n}$$

Sur  $\Gamma_q$ , nous obtenons l'expression suivante :

$$\overline{q'} = -\frac{8x^3y^2 + 4ax^7y}{\sqrt{a^2x^6 + 1}}$$

Notons que comme nous ne ferons pas de simulation en formulation eulérienne en paramètre de valeur, nous nous ne servirons concrètement pas de cette valeur.

### 3.3.1.3 Sensibilité lagrangienne

La sensibilité lagrangienne s'obtient avec la dérivée totale du champ de température par rapport au paramètre de forme. En utilisant le théorème des fonctions composées, nous obtenons l'expression suivante :

$$S_T = \frac{DT}{Da} = \frac{\partial T}{\partial a} + \nabla T \cdot V_M$$

Cette expression fait apparaître la vitesse de déformation que nous devons calculer au préalable avant de déterminer la sensibilité lagrangienne du champ de température.

## Transformation

Comme nous l'avons expliqué au paragraphe 2.3.3, la vitesse de déformation doit être continûment différentiable ( $C^1$ ) et respecter les conditions aux frontières. Nous devons donc dans un premier temps établir ces conditions. Il faut commencer par trouver une paramétrisation de la courbe étiquetée "intérieur" qui explicite sa dépendance par rapport à  $a$ , c'est à dire tel que  $\mathbf{X}_f = \mathbf{X}_f(a, t)$  avec  $a$  et  $t$  indépendants l'un de l'autre. Nous n'avons pour l'instant que l'équation de la courbe et les points extrêmes A et B. Ils sont définis de sorte que l'ordonnée de A notée  $y_0$  et que l'abscisse de B notée  $x_0$  dépendent de  $a$ . En effet, ils sont établis à partir de l'équation de la courbe :

$$\begin{cases} x_B = x_0(a) = \frac{1}{\sqrt{2ay_B}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \\ y_A = y_0(a) = \frac{1}{2ax_A^2} = \frac{1}{2a \times 0.1} \end{cases}$$

Nous ne pouvons donc pas prendre comme paramètre "t"  $x$  ou  $y$  puisqu'ils ne seraient pas indépendants de  $a$ .

Nous choisissons alors la paramétrisation suivante.  $x$  est défini de manière linéaire par rapport à  $t$  et  $y$  est calculé par l'intermédiaire de l'équation de la courbe. Nous avons donc

$$\begin{cases} x(a, t) = x_A(1 - t) + x_B t = \frac{-1}{\sqrt{2a}}(1 - t) - \sqrt{0.1}t \\ y(a, t) = \frac{1}{2a(x(a, t))^2} \end{cases} \quad \text{avec } t \in [0, 1]$$

La dérivation directe de ces expressions par rapport à  $a$  donne la vitesse de maille sur  $\Gamma_q$  :

$$V_M|_{\Gamma_q} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{da} = -\frac{x + \sqrt{0.1}}{2a(1 - \sqrt{0.1}\sqrt{2a})} \\ \frac{dy}{da} = y\sqrt{0.1}\sqrt{2a}\frac{1 - \sqrt{y}}{a(1 - \sqrt{0.1}\sqrt{2a})} \end{bmatrix}$$

Les frontières étiquetées "symétrie" et "paroi" ne sont pas affectées par la variation du paramètre donc la vitesse d maille y est nulle. Le prolongement sur le domaine complet devra donc respecter ces conditions.

Pour le construire, nous procédons de la manière suivante :

Pour la composante en  $x$  de la vitesse, considérons un point  $M(x_m, y_m)$  du domaine tel que  $x_m < x_0 = -0,1$  voir la figure 3.9.

La vitesse en  $x$ , pour un point d'abscisse  $x_m$  est :

- nulle au point  $M_{min}$  de coordonnées  $(x_m, 0)$ , situé sur la frontière "symétrie"
- maximale au point  $M_{max}$  de coordonnées  $(x_m, y_{max}(x_m))$  avec  $2ax_m^2 y_{max} = 1$  situé sur la frontière "intérieur".

Nous choisissons alors d'interpoler la vitesse de maille horizontale de manière linéaire entre ces 2 points. Ainsi pour  $x < x_0 = -0,1$

$$V_{Mx}(x, y) = \frac{y}{y_{max}} V_{Mx}|_{\Gamma_q}(x) = -x^2 y \frac{x + \sqrt{0.1}}{1 - \sqrt{0.1}\sqrt{2a}}$$

Nous prolongeons cette solution avec une vitesse quadratique sur le reste du domaine pour pouvoir faire un raccordement continûment différentiable ( $C^1$ ), ce qui n'aurait pas été possible avec un prolongement linéaire. Nous cherchons alors une vitesse de la forme suivante :

$$V_{Mx} = b(a, y)x^2 + c(a, y)x + d(a, y) \text{ pour } x > x_0$$

Comme la vitesse horizontale sur la paroi est nulle,  $d = 0$ .  $b$  et  $c$  sont obtenus en résolvant le système suivant qui traduit la continuité de la vitesse et la continuité de sa dérivée suivant  $x$  en  $x_0$  :

$$\begin{aligned} bx_0^2 + cx_0 + d &= V_{Mx}(x_0, y) \\ 2bx_0 + c &= \frac{\partial V_{Mx}}{\partial x}(x_0, y) \end{aligned}$$

Nous obtenons alors pour  $x > x_0$  :

$$V_{Mx}(x, y) = \frac{xy}{1 - \sqrt{0.1}\sqrt{2a}} \left( - \left( 2x_0 + \sqrt{0.1} \right) x + x_0^2 \right)$$

Pour la composante en  $y$  de la vitesse, le raisonnement est similaire.

Pour  $y > y_0 = 0.1$ , la vitesse est interpolée linéairement entre les frontières "intérieur" et "paroi".

$$V_{My}(x, y) = \frac{x}{x_{max}} V_{My}|_{\Gamma_q}(y) = 2xy\sqrt{0.1y} \frac{\sqrt{y} - 1}{1 - \sqrt{0.1}\sqrt{2a}}$$

Nous prolongeons cette solution avec une vitesse quadratique sur le reste du domaine et un raccordement continûment différentiable en  $y_0$ . Nous obtenons alors pour  $y < y_0$

$$V_{My}(x, y) = \frac{xy\sqrt{0.1}}{1 - \sqrt{0.1}\sqrt{2a}} \left( \left( 2 - \frac{1}{\sqrt{y_0}} \right) y - \sqrt{y_0} \right)$$

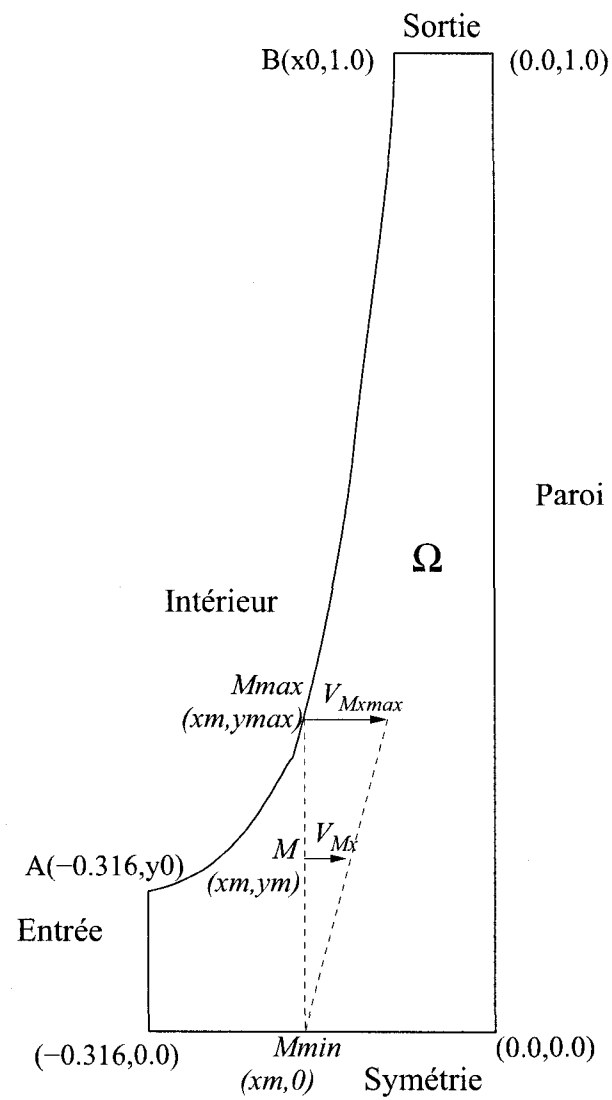


FIG. 3.9 Construction de la vitesse de maille

## Sensibilités lagrangiennes

Nous pouvons à présent calculer la sensibilité lagrangienne de la température par l'intermédiaire du théorème des fonctions composées.

$$\frac{DT}{Da} = \frac{\partial T}{\partial a} + \frac{\partial T}{\partial x} V_{Mx} + \frac{\partial T}{\partial y} V_{My}$$

Comme la vitesse de déformation est définie par morceaux, la sensibilité lagrangienne l'est aussi.

La sensibilité du terme source est calculée par le code avec le théorème des fonctions composées. Il faut donc lui fournir ses dérivées spatiales et sa dérivée eulérienne.

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial a} &= 4x^2 (x^2 + 6y^2) \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= 16ax (x^2 + 3y^2) \\ \frac{\partial Q}{\partial y} &= 48ax^2 y\end{aligned}$$

Pour les conditions de Neumann, nous devons calculer la dérivée lagrangienne du flux thermique. Avec une conductivité constante, son expression est la suivante :

$$\frac{D\bar{q}}{Da} = k \frac{D\nabla T}{Da} \cdot \mathbf{n} + k \nabla T \cdot \frac{D\mathbf{n}}{Da}$$

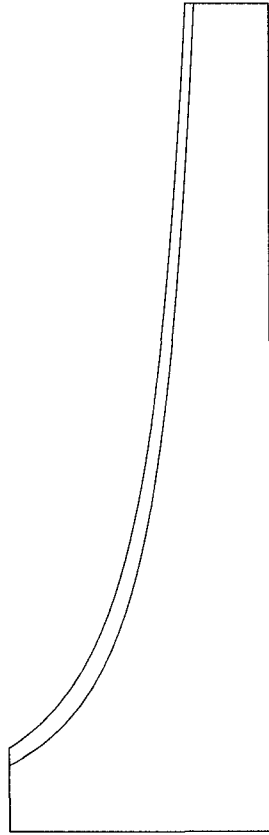
En utilisant les expressions (3.12) et la vitesse de déformation exprimée à la frontière, nous obtenons la sensibilité du gradient de température suivante :

$$\frac{D\nabla T}{Da}(x, y) = \begin{bmatrix} 8x^3y^2 - 12x^2y^2 \frac{x + \sqrt{0.1}}{1 - \sqrt{0.1}\sqrt{2a}} + 8y\sqrt{0.1} \frac{x\sqrt{2a} + 1}{a(1 - \sqrt{0.1}\sqrt{2a})} \\ 4x^4y - 8x^3y \frac{x + \sqrt{0.1}}{1 - \sqrt{0.1}\sqrt{2a}} + 2x\sqrt{0.1} \frac{x\sqrt{2a} + 1}{a(1 - \sqrt{0.1}\sqrt{2a})} \end{bmatrix}$$

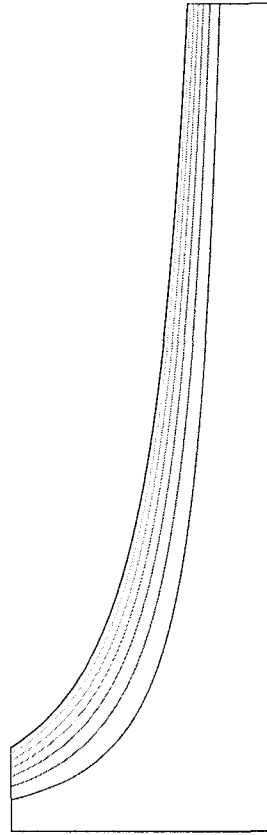
La dérivée de la normale à  $\Gamma_q$  est

$$\frac{D\mathbf{n}}{Da}(x, y) = \left[ \begin{array}{c} \frac{ax^6}{(a^2x^6 + 1)\sqrt{a^2x^6 + 1}} - \frac{3ax^5(x + \sqrt{0.1})}{2(a^2x^6 + 1)\sqrt{a^2x^6 + 1}(1 - \sqrt{0.1}\sqrt{2a})} \\ \frac{-x^3}{(a^2x^6 + 1)\sqrt{a^2x^6 + 1}} + \frac{3x^2(x + \sqrt{0.1})}{2(a^2x^6 + 1)\sqrt{a^2x^6 + 1}(1 - \sqrt{0.1}\sqrt{2a})} \end{array} \right]$$

Nous pouvons à présent comparer les différentes solutions calculées. Tout d'abord, la figure 3.10(a) montre comment le domaine est modifié par une variation de  $a$  et la figure 3.10(b) montre les isolignes du champ de température.



(a) Déformation



(b) Isolignes de température

FIG. 3.10 Déformation et isolignes de température pour le cas thermique du point de stagnation 2D



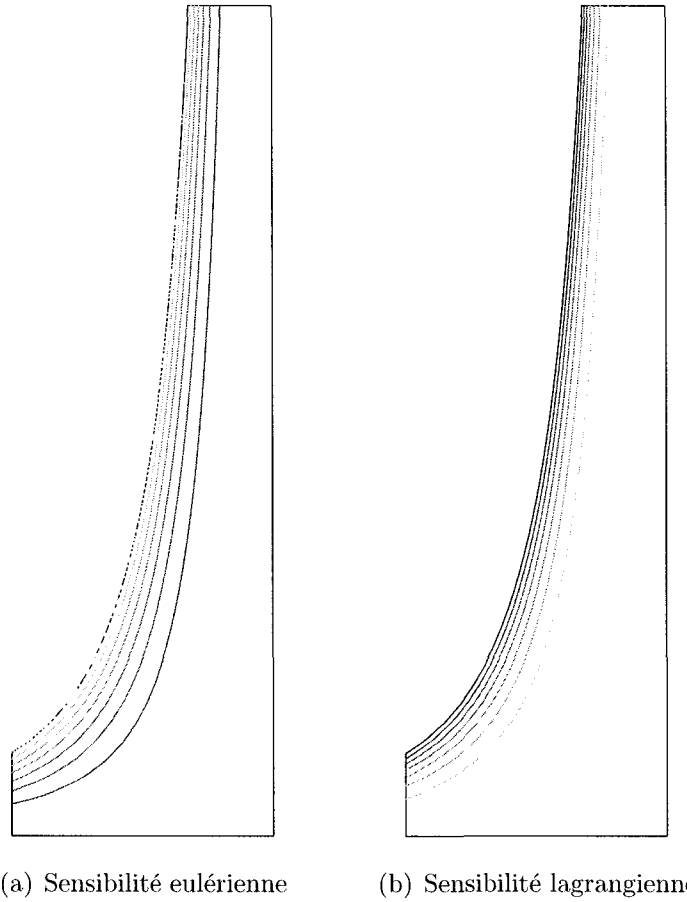


FIG. 3.11 Isolignes de sensibilité eulérienne et lagrangienne de la température pour le cas thermique du point de stagnation 2D

Sur la figure 3.11, nous pouvons comparer la sensibilité eulérienne avec la sensibilité lagrangienne. Ici aussi, nous pouvons voir que ces sensibilités sont bien différentes, elles sont de signe opposé et leur sens de variation est inversé. Nous sommes donc dans un cas où le terme de transpiration  $\nabla T \cdot V_M$  est particulièrement élevé.

La déformation du domaine est plus complexe que pour la solution précédente. Cela nous permet de vérifier la bonne implémentation de la formulation lagrangienne puisque tous les termes spécifiques à cette formulation seront testés avec cette solution. En effet, la vitesse de maille est bidimensionnelle, son gradient non trivial

et sa divergence non nulle et nous avons imposé des conditions aux limites de Neumann et de Dirichlet non nulles.

### 3.3.2 Résultats numériques

Nous allons donc comparer les résultats obtenus avec la formulation lagrangienne à ceux de Duvigneau <sup>[14]</sup> obtenus en formulation eulérienne avec une reconstruction précise des gradients à la frontière.

#### 3.3.2.1 Formulation eulérienne

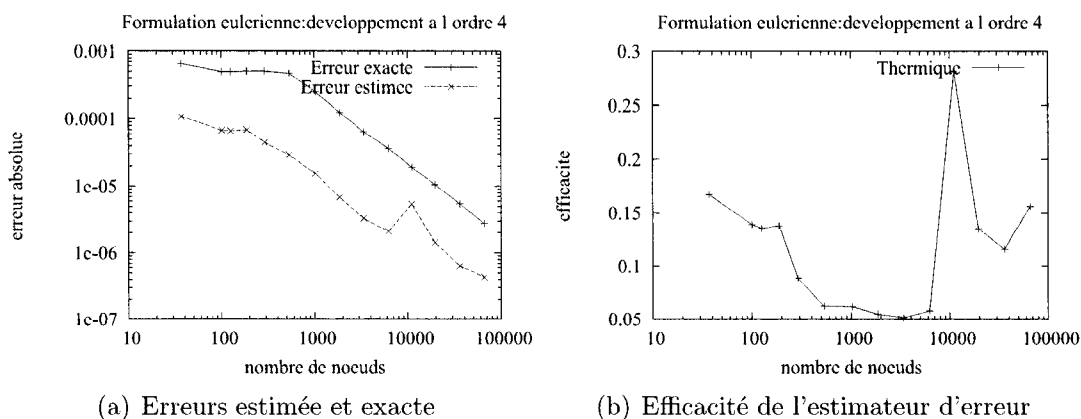


FIG. 3.12 Courbes de convergence en formulation eulérienne, développement à l'ordre 4 pour le cas thermique du point de stagnation 2D

Commençons par considérer la formulation eulérienne. Pour ces calculs, les gradients ont été reconstruits grâce à une méthode des moindres carrés contraints combinée avec des développements de Taylor d'ordre élevé afin d'obtenir des conditions aux limites en sensibilité les plus précises possibles. La qualité de la solution ainsi obtenue dépend de l'ordre du développement.

Tout d'abord, un développement à l'ordre 4 donne les résultats montrés sur les figures 3.12(a) et 3.12(b). Les valeurs numériques sont sur le tableau 3.4. Nous constatons que l'erreur exacte converge à l'ordre 2 avec le raffinement du maillage.

Cycle	Nombre de noeuds	$\ S_T\ $	Erreur exacte	Efficacité
0	37	6.116E-04	6.455E-04	0.1672
1	101	5.920E-04	4.880E-04	0.1391
2	126	5.952E-04	4.914E-04	0.1355
3	189	6.099E-04	5.001E-04	0.1381
4	292	6.174E-04	4.997E-04	0.08876
5	534	6.211E-04	4.679E-04	0.06207
6	1020	6.783E-04	2.501E-04	0.06146
7	1862	7.359E-04	1.244E-04	0.05452
8	3394	7.683E-04	6.393E-05	0.05147
9	6218	7.848E-04	3.643E-05	0.05750
10	11043	7.958E-04	1.920E-05	0.2811
11	19575	8.006E-04	1.051E-05	0.1351
12	35947	8.036E-04	5.445E-06	0.1161
13	65649	8.052E-04	2.761E-06	0.1562

TAB. 3.4 Convergence de la sensibilité eulérienne, développement à l'ordre 4 pour le cas thermique du point de stagnation 2D

Cependant, la norme de la sensibilité même au bout des 13 cycles ne compte que 2 chiffres significatifs. La convergence de l'erreur estimée est quant à elle très irrégulière et beaucoup plus basse que l'erreur exacte, ce qui explique que l'efficacité reste voisine de 0.1. L'estimateur d'erreur n'est donc pas fiable. Cet exemple illustre les difficultés évoquées précédemment à la section 2.1.2.3.

Il est alors nécessaire de pousser les développements de Taylor à un ordre supérieur afin d'avoir une précision suffisante sur les gradients de la température à la frontière. A l'ordre 7, les résultats sont bien meilleurs comme le montrent les figures 3.13(a) et 3.13(b) et le tableau 3.5. En effet, nous pouvons vérifier que le taux de convergence est de 2 et l'efficacité tend vers 1. De plus, nous obtenons pour le dernier maillage 4 chiffres significatifs pour la norme de la sensibilité de la température. Ici, le nombre de cycle nécessaires pour atteindre 69454 noeuds est inférieur au cas précédent car la cible pour l'estimateur d'erreur était de 0.3 au lieu de 0.5. Cette méthode permet donc de calculer les gradients avec suffisamment de précision pour évaluer correctement les conditions aux frontières du problèmes des sensibilités. Elle reste cependant lourde puisqu'elle demande la résolution de systèmes linéaires supplémentaires pour chaque points de la frontière [14].

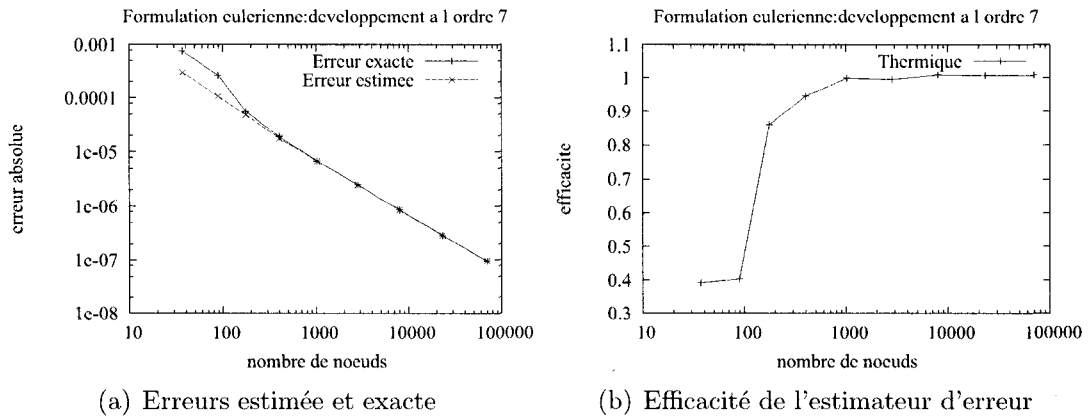


FIG. 3.13 Courbes de convergence en formulation eulérienne, développement à l'ordre 7 pour le cas thermique du point de stagnation 2D

Cycle	Nombre de noeuds	$\ S_T\ $	Erreur exacte	Efficacité
0	37	1.359E-03	7.654E-04	0.3917
1	89	8.859E-04	2.638E-04	0.4041
2	176	8.183E-04	5.628E-05	0.8607
3	402	8.103E-04	1.892E-05	0.9458
4	1025	8.080E-04	6.871E-06	0.9983
5	2838	8.073E-04	2.492E-06	0.9946
6	7990	8.070E-04	8.564E-07	1.009
7	23175	8.069E-04	2.860E-07	1.007
8	69454	8.069E-04	9.563E-08	1.008

TAB. 3.5 Convergence de la sensibilité eulérienne, développement à l'ordre 7 pour le cas thermique du point de stagnation 2D

### 3.3.2.2 Formulation lagrangienne

Considérons à présent la formulation lagrangienne. Les courbes de convergence sont représentées sur les figures 3.14(a) et (b). Les valeurs numériques correspondantes sont sur le tableau 3.6. Nous constatons que dès que le maillage atteint 300 noeuds, la partie asymptotique commence. En effet, l'efficacité est alors voisine de 90% et l'erreur exacte converge à l'ordre 2 avec le raffinement du maillage. De plus, nous obtenons rapidement 3 chiffres significatifs sur la norme de la sensibilité lagrangienne.

Nous avons donc bien vérifié l'implémentation du code, les équations des sensibilités lagrangiennes sont correctement résolues.

De plus, nous constatons que pour un coût numérique moindre que la reconstruction des gradients, nous obtenons des résultats de convergence équivalents.

Les performances de la méthode des sensibilités lagrangiennes sont donc très bonnes. Le traitement du paramètre de forme se fait sans perte de précision ou de convergence, nous pouvons donc à présent la développer pour les équations de Navier-Stokes.

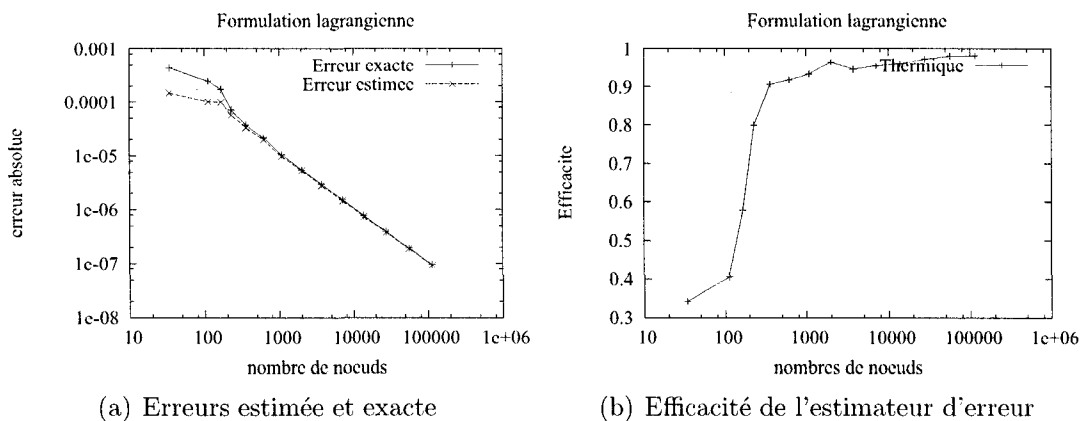


FIG. 3.14 Courbes de convergence en formulation lagrangienne pour le cas thermique du point de stagnation 2D

Cycle	Nombre de noeuds	$\ S_T\ $	Erreur exacte	Efficacité
0	34	8.712E-04	4.391E-04	0.3416
1	112	8.768E-04	2.495E-04	0.4065
2	166	8.881E-04	1.723E-04	0.5778
3	228	9.076E-04	7.171E-05	0.7992
4	359	9.076E-04	3.685E-05	0.9060
5	621	9.073E-04	2.152E-05	0.9189
6	1083	9.070E-04	1.051E-05	0.9341
7	2020	9.069E-04	5.537E-06	0.9658
8	3742	9.068E-04	2.957E-06	0.9466
9	7152	9.067E-04	1.516E-06	0.9559
10	13947	9.067E-04	7.657E-07	0.9616
11	27999	9.067E-04	3.869E-07	0.9740
12	56541	9.067E-04	1.914E-07	0.9814
13	115009	9.066E-04	9.497E-08	0.9819

TAB. 3.6 Convergence de la sensibilité lagrangienne pour le cas thermique du point de stagnation 2D



## CHAPITRE 4

### MÉTHODE DE L'ÉQUATION DES SENSIBILITÉS APPLIQUÉES AUX ÉQUATIONS DE NAVIER STOKES

Nous allons dans ce chapitre adopter une démarche similaire au chapitre 2 pour développer les équations de sensibilités en formulation eulérienne et en formulation lagrangienne pour les équations de Navier Stokes.

Considérons donc les équations de Navier-Stokes pour l'écoulement laminaire et incompressible d'un fluide Newtonien en régime stationnaire dans le domaine  $\Omega_\alpha$  dont la forme dépend du paramètre de forme  $\alpha$  :

$$\text{Continuité :} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.1)$$

$$\text{Mouvement :} \quad \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} \quad (4.2)$$

$$\text{Energie :} \quad \rho c_P \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + q_S \quad (4.3)$$

Avec les conditions à la frontière suivantes :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{sur } \Gamma_u^\alpha \quad (4.4)$$

$$-p\mathbf{n}^\alpha + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}^\alpha = \bar{\mathbf{t}}_f \quad \text{sur } \Gamma_t^\alpha \quad (4.5)$$

$$T = \bar{T} \quad \text{sur } \Gamma_T^\alpha \quad (4.6)$$

$$\lambda \nabla T \cdot \mathbf{n}^\alpha = \bar{q} \quad \text{sur } \Gamma_q^\alpha \quad (4.7)$$

où  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})$  est le tenseur des contraintes visqueuses défini de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) = \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})$$

## 4.1 Méthode de l'équation de sensibilité classique

Cette section est consacrée au développement de l'équation des sensibilités eulériennes. Nous nous attarderons sur les difficultés rencontrées lors du traitement du paramètre de forme.

### 4.1.1 Equations des sensibilités eulériennes

Comme nous l'avons vu plus tôt, les variables de l'écoulement peuvent être considérées comme dépendantes de l'espace et du paramètre  $\alpha$ , ainsi,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, \alpha)$ . Les sensibilités eulériennes sont les dérivées partielles des variables dépendantes par rapport au paramètre de forme  $\alpha$ . Nous adoptons la notation suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_{\mathbf{u}} &= (s_u, s_v) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha} \\ s_p &= \frac{\partial p}{\partial \alpha} \\ s_T &= \frac{\partial T}{\partial \alpha}\end{aligned}$$

Elles sont obtenues en dérivant formellement les équations de l'écoulement par rapport à  $\alpha$ . Dérivons donc successivement chaque équation.

#### Equation de continuité

La dérivation formelle de l'équation (4.1) par rapport à  $\alpha$  donne :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha} (\nabla \cdot \mathbf{u}) &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{s}_{\mathbf{u}} &= 0\end{aligned}\tag{4.8}$$

## Equation du mouvement

Considérons à présent l'équation du mouvement(4.2). En dérivant, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u \\ &= -\nabla s_p + \nabla \cdot [\mu' (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) + \mu (\nabla \mathbf{s}_u + \nabla^T \mathbf{s}_u)] + \mathbf{f}' \end{aligned} \quad (4.9)$$

## Equation de l'énergie

Par la même opération, l'équation de l'énergie devient :

$$\begin{aligned} & (\rho' c_p + \rho c_p') \mathbf{u} \cdot \nabla T + \rho c_p (\mathbf{s}_u \cdot \nabla T + \mathbf{u} \cdot \nabla s_T) \\ &= \nabla \cdot (\lambda' \nabla T + \lambda \nabla s_T) + q'_S \end{aligned} \quad (4.10)$$

### 4.1.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites pour les sensibilités sont obtenues à l'aide de la dérivée totale par rapport au paramètre des conditions aux frontières de l'écoulement. Tout comme à la section 2.1.2, il faut tenir compte de la transformation de la frontière due à la variation du paramètre.

#### 4.1.2.1 Conditions de Dirichlet

Reprenons les notations de la section 2.1.2.1. Les conditions de Dirichlet étaient les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \overline{\mathbf{u}} & \text{sur } \Gamma_{\mathbf{u}}^\alpha \\ T &= \overline{T} & \text{sur } \Gamma_T^\alpha \end{aligned}$$

Les conditions de Dirichlet pour les sensibilités sont obtenues en calculant la dérivée totale de ces dernières par rapport à  $\alpha$ . En isolant ensuite les sensibilités eulériennes, nous avons :

$$\mathbf{s}_u = \frac{D\bar{\mathbf{u}}}{D\alpha} - \nabla \mathbf{u} \cdot \frac{D\mathbf{X}_f}{D\alpha} \quad \text{sur } \Gamma_u^\alpha \quad (4.11)$$

$$s_T = \frac{D\bar{T}}{D\alpha} - \nabla T \cdot \frac{D\mathbf{X}_f}{D\alpha} \quad \text{sur } \Gamma_T^\alpha \quad (4.12)$$

#### 4.1.2.2 Conditions de Neumann

Reprenons les conditions de Neumann de l'écoulement.

$$\begin{aligned} -p\mathbf{n}^\alpha + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}^\alpha &= \overline{\mathbf{t}_f} & \text{sur } \Gamma_t^\alpha \\ \lambda \nabla T \cdot \mathbf{n}^\alpha &= \bar{q} & \text{sur } \Gamma_q^\alpha \end{aligned}$$

Les conditions de Neumann pour le problème des sensibilités sont données par une dérivée matérielle des conditions de l'écoulement. Nous devons donc extraire les tractions de la sensibilité eulérienne de l'expression suivante.

$$\frac{D}{D\alpha} (-p\mathbf{n}^\alpha + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}^\alpha) = \frac{D\overline{\mathbf{t}_f}}{D\alpha} \quad \text{sur } \Gamma_t^\alpha$$

Il faut développer le terme de gauche en utilisant le théorème des fonctions composées afin d'isoler les tractions des sensibilités qui s'expriment de la manière suivante :

$$\mathbf{t}'_f = [\mu' (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) + \mu (\nabla \mathbf{s}_u + \nabla^T \mathbf{s}_u)] \cdot \mathbf{n} - s_P \mathbf{n} \quad (4.13)$$

Ainsi, sur  $\Gamma_{\mathbf{t}}^\alpha$  nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'_f &= \frac{D\bar{\mathbf{t}}_f}{D\alpha} - \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})}{\partial x} \frac{Dx_f}{D\alpha} + \frac{\partial \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})}{\partial y} \frac{Dy_f}{D\alpha} \right] \cdot \mathbf{n} \\ &\quad - \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{Dx_f}{D\alpha} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{Dy_f}{D\alpha} \right) \mathbf{n} - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) \cdot \frac{D\mathbf{n}}{D\alpha} + p \frac{D\mathbf{n}}{D\alpha} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Pour la sensibilité de la température, nous reprenons l'expression calculée à la section 2.1.2.2.

$$\begin{aligned} q' &= \frac{D\bar{q}}{D\alpha} - \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{Dx_f}{D\alpha} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{Dy_f}{D\alpha} \right) \nabla T \cdot \mathbf{n} \\ &\quad - \lambda \left[ \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{Dx_f}{D\alpha} + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \frac{Dy_f}{D\alpha} \right) n_x + \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \frac{Dx_f}{D\alpha} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \frac{Dy_f}{D\alpha} \right) n_y \right] \\ &\quad - \lambda \nabla T \cdot \frac{D\mathbf{n}}{D\alpha} \end{aligned} \quad (4.15)$$

avec

$$q' = \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} \nabla T + \lambda \nabla s_T \right) \cdot \mathbf{n}$$

#### 4.1.3 Réactions

Les réactions sont les variables secondaires du problème éléments finis. Dans le cas où les données sont régulières, les variables secondaires sont nulles partout sauf à la frontière.

Pour l'écoulement, la somme des variables secondaires des noeuds appartenant à une courbe fermée est égale à la résultante des efforts exercés sur le fluide par cette paroi.

$$\int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\tau} - p\mathbf{Id}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

Pour l'équation de sensibilité eulérienne, la même opération mènera au résultat

suisant :

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{t}'_f d\Gamma$$

où  $\mathbf{t}'_f$  est défini par la formule (4.1.2.2). Cependant, cette intégrale n'a pas de sens physique direct. En effet, il s'agit de la sensibilité eulérienne des efforts intégrée sur une courbe : pour un paramètre de forme, il ne s'agit alors pas de la dérivée matérielle de la résultante, il faut donc ajouter des termes de transpiration provenant de la transformation de la frontière.

#### 4.1.4 Calcul de la sensibilité de champs scalaires

Il est souvent utile la sensibilité de champs scalaires traduisant le comportement de l'écoulement, comme le coefficient de pression  $C_p$  ou le coefficient de friction visqueuse  $C_f$ . Il faut alors considérer leur dérivée matérielle.

##### 4.1.4.1 Coefficient de pression

Pour un écoulement incompressible, le coefficient de pression est défini de la manière suivante :

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$$

Pour obtenir la dérivée matérielle de  $C_p$  à partir de la sensibilité eulérienne de la pression, il faut utiliser le théorème de dérivation des fonctions composées. L'expression de la sensibilité est alors la suivante :

$$\frac{DC_p}{D\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \left( s_p + \nabla p \cdot \frac{D\mathbf{X}}{D\alpha} \right)$$

#### 4.1.4.2 Coefficient de friction

Quant à lui, le coefficient de friction est défini comme suit :

$$C_f = \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$$

où  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{t}$  sont respectivement les vecteurs normal et tangent à la courbe. La dérivée matérielle du coefficient de friction s'exprime alors de la manière suivante :

$$\frac{DC_f}{D\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \left[ \frac{D\boldsymbol{\tau}}{D\alpha} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} + \left( \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{D\mathbf{n}}{D\alpha} \right) \cdot \mathbf{t} + (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \cdot \frac{D\mathbf{t}}{D\alpha} \right]$$

Nous adoptons la même démarche que pour le coefficient de pression en utilisant le théorème des fonctions composées :

$$\frac{D\boldsymbol{\tau}}{D\alpha} = s_\tau + \nabla \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{D\mathbf{X}}{D\alpha}$$

Ainsi,

$$\frac{DC_f}{D\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \left[ \left( s_\tau + \nabla \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{D\mathbf{X}}{D\alpha} \right) \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} + \left( \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{D\mathbf{n}}{D\alpha} \right) \cdot \mathbf{t} + (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \cdot \frac{D\mathbf{t}}{D\alpha} \right]$$

Notons que cette expression fait intervenir des dérivées d'ordre 2 en espace pour la vitesse avec le terme  $\nabla \boldsymbol{\tau}$ .

#### 4.1.5 Difficultés et limites

Dans le cas d'un paramètre de forme, tout comme pour l'équation de la chaleur, le problème de la formulation eulérienne est que les conditions aux limites font intervenir les dérivées spatiales de l'écoulement. Or, c'est justement à la frontière que leur évaluation numérique est la moins précise. Il faut donc utiliser des maillages

très fins pour avoir une bonne précision sur les sensibilités de forme. De plus, dans bien des cas, il faut un post traitement additionnel pour évaluer les termes de transpiration qui traduisent la déformation de la frontière due à la perturbation du paramètre.

## 4.2 Méthode de l'équation des sensibilités lagrangiennes

Dans cette section, nous allons reprendre le même formalisme et la même démarche que pour l'équation de la chaleur afin d'établir les équations de sensibilités lagrangiennes pour les équations de Navier-Stokes. Rappelons que les variables de l'écoulement sont considérées comme des fonctions de l'espace et de  $\alpha$ . Comme  $\alpha$  est un paramètre de forme, l'espace est lui-même une fonction de  $\alpha$ . Nous pouvons alors écrire  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x(\alpha), y(\alpha), \alpha)$ . Les sensibilités lagrangiennes sont les dérivées totales des variables de l'écoulement par rapport au paramètre. Nous adoptons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{\mathbf{u}} &= (S_u, S_v) = \frac{D\mathbf{u}}{D\alpha} \\ S_p &= \frac{Dp}{D\alpha} \\ S_T &= \frac{DT}{D\alpha}\end{aligned}$$

Le point de départ est toujours la forme faible des équations de l'écoulement, avec des termes de bord nuls pour alléger la description. Par un changement de variable, l'intégration est ramenée au domaine de référence afin d'explicitier les dépendances en  $\alpha$ . Il est alors possible de dériver simplement l'intégrande puisque le domaine ne dépend plus du paramètre. Enfin, par le changement de variable inverse, nous revenons au domaine déformé.



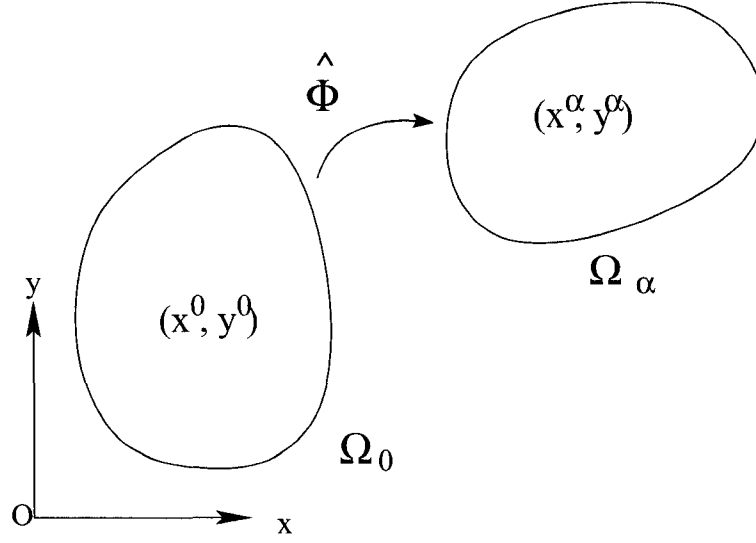


FIG. 4.1 Déformation du domaine

#### 4.2.1 Equation de continuité

La forme faible associée à (4.1) est

$$\int_{\Omega_\alpha} \nabla^\alpha \cdot \mathbf{u} \, \delta S_p \, d\Omega_\alpha = 0$$

Sur le domaine de référence, elle s'exprime de la manière suivante :

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{F}^{-1} : \nabla \mathbf{u} \, \delta S_p \, J d\Omega_0 = 0$$

Nous pouvons maintenant dériver formellement sous l'intégrale puisque le domaine d'intégration est indépendant du paramètre  $\alpha$  :

$$\int_{\Omega_0} \left[ \left( \frac{D\mathbf{F}^{-1}}{D\alpha} : \nabla \mathbf{u} + \mathbf{F}^{-1} : \nabla \frac{D\mathbf{u}}{D\alpha} \right) \delta S_p \, J + \mathbf{F}^{-1} : \nabla \mathbf{u} \, \delta S_p \, \frac{DJ}{D\alpha} \right] d\Omega_0 = 0$$

Rappelons que les fonctions test ne dépendent pas du paramètre. Finalement, nous repassons au domaine déformé :

$$\int_{\Omega_\alpha} (\nabla^\alpha \cdot \mathbf{S}_u - \nabla^\alpha V_M^\alpha : \nabla^\alpha \mathbf{u} + \nabla^\alpha \cdot \mathbf{u} \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha) \delta S_P d\Omega_\alpha = 0 \quad (4.16)$$

#### 4.2.2 Equations de mouvement

L'équation de mouvement est la suivante :

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} \quad (4.17)$$

Soit  $\delta \mathbf{S}_u$  une fonction test ayant la même régularité que  $\mathbf{S}_u$  et s'annulant sur  $\Gamma_U$ .

La forme faible associée est

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\alpha} (\mathbf{u} \cdot \nabla^\alpha) \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{S}_u d\Omega_\alpha - \int_{\Omega_\alpha} p \nabla^\alpha \cdot \delta \mathbf{S}_u d\Omega_\alpha + \int_{\Omega_\alpha} \boldsymbol{\tau} : \nabla^\alpha \delta \mathbf{S}_u d\Omega_\alpha \\ &= \int_{\Omega_\alpha} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{S}_u d\Omega_\alpha + \int_{\Gamma_q^\alpha} (\boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}^\alpha \cdot \delta \mathbf{S}_u d\Gamma_\alpha \end{aligned}$$

Nous pouvons identifier chaque terme de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \text{Convection} + \text{Pression} + \text{Diffusion} \\ &= \text{Force} + \text{Terme de bord} \end{aligned}$$

Pour obtenir les équations des sensibilités lagrangiennes, nous dérivons terme à terme la forme faible par rapport au paramètre en utilisant toujours la même démarche. La forme faible de l'équation des sensibilités aura la forme suivante :

$$\frac{D \text{ Convection}}{D\alpha} + \frac{D \text{ Pression}}{D\alpha} + \frac{D \text{ Diffusion}}{D\alpha} = \frac{D \text{ Force}}{D\alpha} + \frac{D \text{ Terme de bord}}{D\alpha}$$

Nous présentons ici le résultat final pour chaque terme, le détail des développements et les projections sur les axes des équations se trouvent en annexe.

### Dérivation du terme de convection

$$\begin{aligned}
& \frac{D}{D\alpha} \int_{\Omega_\alpha} \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla^\alpha) \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{S}_\mathbf{u} d\Omega_\alpha \\
&= \int_{\Omega_\alpha} \left( \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} + \rho \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha \right) (\mathbf{u} \cdot \nabla^\alpha) \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{S}_\mathbf{u} d\Omega_\alpha \\
&+ \int_{\Omega_\alpha} \rho [(\mathbf{S}_\mathbf{u} \cdot \nabla^\alpha) \mathbf{u} - \nabla^\alpha \mathbf{u} \cdot \nabla^\alpha V_M^\alpha \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla^\alpha) \mathbf{S}_\mathbf{u}] \cdot \delta \mathbf{S}_\mathbf{u} d\Omega_\alpha
\end{aligned} \tag{4.18}$$

### Dérivation du terme de pression

$$\begin{aligned}
& \frac{D}{D\alpha} \int_{\Omega_\alpha} -p \nabla^\alpha \cdot \delta \mathbf{S}_\mathbf{u} d\Omega_\alpha \\
&= - \int_{\Omega_\alpha} [(S_p + p \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha) \nabla^\alpha \cdot \delta \mathbf{S}_\mathbf{u} - p \nabla^\alpha V_M^\alpha : \nabla^\alpha \delta \mathbf{S}_\mathbf{u}] d\Omega_\alpha
\end{aligned} \tag{4.19}$$

### Dérivation du terme de diffusion

$$\begin{aligned}
& \frac{D}{D\alpha} \int_{\Omega_\alpha} \boldsymbol{\tau} : \nabla^\alpha \delta \mathbf{S}_\mathbf{u} d\Omega_\alpha \\
&= \int_{\Omega_\alpha} \left( \frac{D\mu}{D\alpha} + \mu \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha \right) (\nabla^\alpha \mathbf{u} + \nabla^{\alpha T} \mathbf{u}) : \nabla^\alpha \delta \mathbf{S}_\mathbf{u} d\Omega_\alpha \\
&+ \int_{\Omega_\alpha} \mu (\nabla^\alpha \mathbf{S}_\mathbf{u} + \nabla^{\alpha T} \mathbf{S}_\mathbf{u}) : \nabla^\alpha \delta \mathbf{S}_\mathbf{u} d\Omega_\alpha \\
&- \int_{\Omega_\alpha} \mu \left( \nabla^\alpha \mathbf{u} \nabla^\alpha V_M^\alpha + (\nabla^\alpha \mathbf{u} \nabla^\alpha V_M^\alpha)^T \right) : \nabla^\alpha \delta \mathbf{S}_\mathbf{u} d\Omega_\alpha \\
&- \int_{\Omega_\alpha} \mu (\nabla^\alpha V_M^\alpha \cdot (\nabla^\alpha \mathbf{u} + \nabla^{\alpha T} \mathbf{u})) : \nabla^\alpha \delta \mathbf{S}_\mathbf{u} d\Omega_\alpha
\end{aligned} \tag{4.20}$$

### Dérivation du terme de la force

$$\frac{D}{D\alpha} \int_{\Omega_\alpha} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{S}_\mathbf{u} d\Omega_\alpha = \int_{\Omega_\alpha} \left( \frac{D\mathbf{f}}{D\alpha} + \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha \mathbf{f} \right) \cdot \delta \mathbf{S}_\mathbf{u} d\Omega_\alpha \tag{4.21}$$

Il suffit de regrouper ces différents termes pour obtenir les équations de sensibilité pour le mouvement. Nous allons à présent effectuer le même travail avec l'équation d'énergie.

### 4.2.3 Equation d'énergie

L'équation d'énergie était la suivante :

$$\rho c_P \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + q_S$$

Soit  $\delta S_T$  une fonction test de même régularité que la sensibilité de la température et s'annulant sur  $\partial\Omega$ , la forme faible associée est :

$$\int_{\Omega_\alpha} (\rho c_P \mathbf{u} \cdot \nabla^\alpha T \delta S_T + \lambda \nabla^\alpha T \cdot \nabla^\alpha \delta S_T) d\Omega_\alpha = \int_{\Omega_\alpha} q_S \delta S_T d\Omega_\alpha$$

Après dérivation par rapport à  $\alpha$ , nous obtenons l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\alpha} \left[ \left( \frac{D\rho c_P}{D\alpha} + \rho c_P \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha \right) \mathbf{u} \cdot \nabla^\alpha T + \rho c_P \mathbf{S}_u \cdot \nabla^\alpha T \right. \\ & \quad \left. + \rho c_P \mathbf{u} \cdot \nabla^\alpha S_T - \rho c_P \mathbf{u} \cdot (\nabla^\alpha T \cdot \nabla^\alpha V_M^\alpha) \right] \delta S_T d\Omega_\alpha \\ & + \int_{\Omega_\alpha} \left[ \left( \frac{D\lambda}{D\alpha} + \lambda \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha \right) \nabla^\alpha T \cdot \nabla^\alpha \delta S_T + \lambda \nabla^\alpha S_T \cdot \nabla^\alpha \delta S_T \right. \\ & \quad \left. - \lambda \nabla^\alpha T \cdot (\nabla^\alpha V_M^\alpha + \nabla^{\alpha T} V_M^\alpha) \cdot \nabla^\alpha \delta S_T \right] d\Omega_\alpha \\ & = \int_{\Omega_\alpha} \left( \frac{Dq_S}{D\alpha} + q_S \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha \right) \delta S_T d\Omega_\alpha \end{aligned} \quad (4.22)$$

### 4.2.4 Conditions aux limites

Comme pour l'équation de la chaleur, les conditions aux limites pour la formulation lagrangienne s'obtiennent de manière très simple.

#### 4.2.4.1 Conditions de Dirichlet

Sur  $\Gamma_{\mathbf{u}}^\alpha$  et  $\Gamma_T^\alpha$ , il y a égalité de dérivées matérielles de  $\mathbf{u}$  et de  $T$  :

$$\frac{D\mathbf{u}}{D\alpha} = \frac{D\bar{\mathbf{u}}}{D\alpha} \quad \text{sur } \Gamma_{\mathbf{u}}^\alpha \quad (4.23)$$

$$\frac{DT}{D\alpha} = \frac{D\bar{T}}{D\alpha} \quad \text{sur } \Gamma_T^\alpha \quad (4.24)$$

Il n'y a pas de calcul intermédiaire, les conditions aux limites sont exactes, contrairement aux sensibilités eulériennes.

#### 4.2.4.2 Conditions de Neumann

Pour les conditions naturelles, reprenons la forme faible des conditions de Neumann de l'écoulement.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_t^\alpha} (-p\mathbf{n}^\alpha + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}^\alpha) \cdot \delta \mathbf{S}_{\mathbf{u}} d\Gamma_\alpha &= \int_{\Gamma_t^\alpha} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{S}_{\mathbf{u}} d\Gamma_\alpha \\ \int_{\Gamma_q^\alpha} \lambda \nabla T \cdot \mathbf{n}^\alpha \delta S_T d\Gamma_\alpha &= \int_{\Gamma_q^\alpha} \bar{q} \delta S_T d\Gamma_\alpha \end{aligned}$$

Pour obtenir les conditions de Neumann des sensibilités lagrangiennes, il faut calculer la dérivée matérielle de ces expressions :

$$\begin{aligned} \frac{D}{D\alpha} \int_{\Gamma_t^\alpha} (-p\mathbf{n}^\alpha + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}^\alpha) \cdot \delta \mathbf{S}_{\mathbf{u}} d\Gamma_\alpha &= \frac{D}{D\alpha} \int_{\Gamma_t^\alpha} \bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{f}} \cdot \delta \mathbf{S}_{\mathbf{u}} d\Gamma_\alpha \\ \frac{D}{D\alpha} \int_{\Gamma_q^\alpha} \lambda \nabla T \cdot \mathbf{n}^\alpha \delta S_T d\Gamma_\alpha &= \frac{D}{D\alpha} \int_{\Gamma_q^\alpha} \bar{q} \delta S_T d\Gamma_\alpha \end{aligned}$$

Reprenons la même démarche qu'à la section 2.3.4, pour  $\alpha = 0$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \left. \frac{D}{D\alpha} \int_{\Gamma_t^\alpha} (-p\mathbf{n}^\alpha + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}^\alpha) \cdot \delta S_{\mathbf{u}} d\Gamma_\alpha \right|_{\alpha=0} \\ &= \int_{\Gamma_t} \left( \frac{D\bar{\mathbf{t}}_f}{D\alpha} + \nabla \cdot V_M \bar{\mathbf{t}}_f - \bar{\mathbf{t}}_f (\nabla V_M \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \delta S_{\mathbf{u}} d\Gamma_\alpha \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{D}{D\alpha} \int_{\Gamma_q^\alpha} \lambda \nabla T \cdot \mathbf{n}^\alpha \delta S_T d\Gamma_\alpha \right|_{\alpha=0} \\ &= \int_{\Gamma_q^\alpha} \left( \frac{D\bar{q}}{D\alpha} + \nabla \cdot V_M \bar{q} - \bar{q} (\nabla V_M \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \right) \delta S_T d\Gamma_\alpha \end{aligned} \quad (4.26)$$

Nous avons à présent fermé le système, nous avons une forme faible et les conditions aux limites appropriées, il ne reste qu'à évaluer la vitesse de déformation et à résoudre.

#### 4.2.5 Réactions

Les sensibilités lagrangiennes sont obtenues par dérivation de la forme faible par rapport au paramètre de forme. Ainsi, les réactions seront directement les sensibilités lagrangiennes des réactions de l'écoulement. C'est à dire que nous obtiendrons directement

$$\frac{D}{D\alpha} \int_{\Gamma_\alpha} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d\Gamma_\alpha \quad (4.27)$$

avec  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - pId$ . Il s'agit de la sensibilité des efforts sur la frontière.

#### 4.2.6 Evaluation de champs scalaire

Considérons le cas du coefficient de pression  $C_p$  et du coefficient de friction  $C_f$ . Ces coefficients calculés à la frontière font intervenir les variables de l'écoulement ou

leur gradient. Pour les sensibilités lagrangiennes, ces quantités ne sont pas traitées de la même façon.

#### 4.2.6.1 Coefficient de pression

Pour un écoulement incompressible, le coefficient de pression est défini de la manière suivante :

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$$

La dérivée matérielle sera obtenue directement à partir de la sensibilité lagrangienne de la pression.

$$\frac{DC_p}{D\alpha} = \frac{S_p}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$$

Il n'est pas nécessaire de calculer les termes de transpiration comme pour les sensibilités eulériennes.

#### 4.2.6.2 Coefficient de friction

Quant à lui, le coefficient de friction est défini de la manière suivante :

$$C_f = \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$$

où  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{t}$  sont respectivement le vecteur normal et le vecteur tangent à la courbe. Sa sensibilité lagrangienne s'exprime de la manière suivante :

$$\frac{DC_f}{D\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \left[ \frac{D\boldsymbol{\tau}}{D\alpha} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} + \left( \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{D\mathbf{n}}{D\alpha} \right) \cdot \mathbf{t} + (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \cdot \frac{D\mathbf{t}}{D\alpha} \right]$$

Nous devons donc calculer la sensibilité lagrangienne du gradient de vitesse. Elle a 2 composantes, une provient de la sensibilité de la vitesse et l'autre de la sensibilité du gradient, les coordonnées d'espace dépendent en effet du paramètre. En adoptant une démarche similaire à celle de la dérivation des équations, nous trouvons que

$$\frac{D\nabla \mathbf{u}}{D\alpha} = \nabla \mathbf{S}_u - \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla V_M$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{DC_f}{D\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} & \left[ \mu \left( \nabla \mathbf{S}_u + \nabla^T \mathbf{S}_u - \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla V_M - \nabla^T V_M \cdot \nabla^T \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} \right. \\ & \left. + \left( \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{D\mathbf{n}}{D\alpha} \right) \cdot \mathbf{t} + (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \cdot \frac{D\mathbf{t}}{D\alpha} \right] \end{aligned}$$

Tout comme pour les sensibilités eulériennes, un post traitement est nécessaire pour obtenir la sensibilité du coefficient de friction visqueuse. Cependant, les termes supplémentaires à calculer ne font pas intervenir les dérivées secondes en espace. La convergence de la sensibilité de ce coefficient sera donc probablement plus rapide en utilisant les sensibilités lagrangiennes.

### 4.3 Formulation Eulérienne versus Formulation Lagrangienne

Les caractéristiques de chaque formulation évoquées à la section 2.4 se retrouvent pour les équations de Navier-Stokes.

Pour la formulation eulérienne, les équations sont obtenues relativement facilement. Cependant, pour un paramètre de forme, des termes de transpiration apparaissent dans les conditions aux limites. Ils font intervenir les gradients de l'écoulement à la frontière, là où ils sont le moins précis. Les conditions aux limites ne sont alors pas connues avec exactitude, ce qui cause une erreur dans tout le domaine.



Pour la formulation lagrangienne, les conditions aux limites sont obtenues directement par dérivation des données à la frontière, donc connues avec exactitude. La difficulté est reportée tout comme pour l'équation de la chaleur sur le calcul de la vitesse de déformation, exact ou numérique. Elle doit respecter les conditions aux limites et être continûment différentiable.

Pour l'exploitation des résultats, il faut considérer la dérivée matérielle des champs scalaires. Avec les sensibilités eulériennes, il faut ajouter un terme de transpiration qui fait intervenir le gradient de la quantité considérée. Ainsi, pour la sensibilité des contraintes, les dérivées secondes en espace de la vitesse sont introduites. Pour les sensibilités lagrangiennes, il faut faire une correction seulement pour la sensibilité d'un gradient, cette fois, il faut soustraire le produit du gradient considéré par le gradient de la vitesse de maille. Pour les contraintes, seules les dérivées premières en espace sont introduites, la perte de précision est donc moindre qu'avec les sensibilités eulériennes.

## CHAPITRE 5

### RÉSULTATS NUMÉRIQUES POUR LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

L'objet de ce chapitre est d'évaluer les performances numériques de la formulation lagrangienne établie au chapitre précédent. Tout d'abord, nous vérifierons l'implémentation du code avec la méthode des solutions manufacturées<sup>[25]</sup>. Cela nous permettra aussi de tester la convergence de la formulation et de comparer avec la formulation eulérienne. Dans un second temps, nous utiliserons les sensibilités lagrangiennes pour calculer des solutions voisines sur un profil d'aile NACA à 4 chiffres.

#### 5.1 Solution manufacturée, cas du jet plan

Dans cette partie, nous allons vérifier le bon fonctionnement du code avec la méthode des solutions manufacturées. Rappelons qu'il s'agit de choisir une solution analytique et d'ajouter le terme source approprié afin d'équilibrer les équations. Nous reprendrons donc le domaine utilisé pour l'équation de la chaleur, les coordonnées des points de la courbe vérifient l'équation suivante  $2ax^2y = 1$  et  $a$  sera le paramètre de forme. Le domaine est représenté sur la figure 5.1. Nous prenons  $a = 50$ ,  $x_0 = -0.1$ ,  $y_0 = 0.1$ .

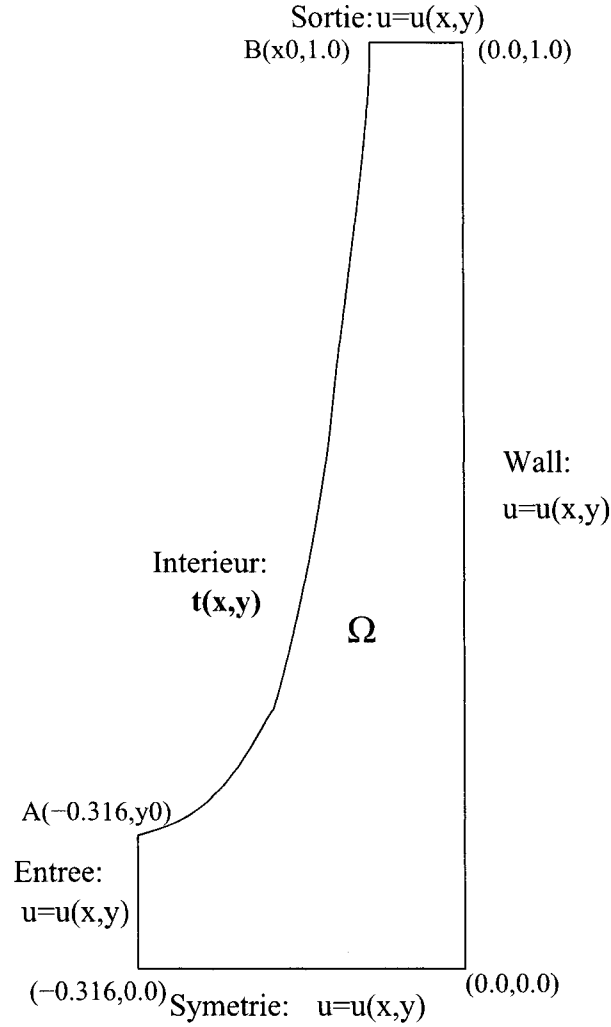


FIG. 5.1 Domaine pour le cas de Duvigneau

### 5.1.1 Solution analytique

Nous allons maintenant définir la solution analytique choisie dans le cadre de la méthode des solutions manufacturées puis en déduire les termes sources. Nous devons donc définir les champs de vitesse, pression et température pour l'écoulement, calculer la force correspondante. Puis, il faut établir une vitesse de transformation afin de calculer les sensibilités lagrangiennes de ces champs puis le terme source correspondant.

### 5.1.1.1 Ecoulement

La solution correspond à un jet plan :

$$\begin{aligned} u(x, y, a) &= 4x^2 e^{-ax^2 y} (1 - 2ax^2 y) \\ v(x, y, a) &= -8xy e^{-ax^2 y} (1 - 2ax^2 y) \\ p(x, y, a) &= \frac{D(1 - y)}{1 + C(x^2 + y^2)} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ T(x, y, a) &= e^{\gamma \frac{x}{\delta(1+\beta y)}} \end{aligned}$$

Les valeurs numériques sont les suivantes :  $\rho = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $c_p = 1$ ,  $\lambda = 0$ ,  $C = 1000$ ,  $D = 100$ ,  $\beta = 4$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $\gamma = 5$ .

Les termes source sont calculés à l'aide des expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \\ q_S &= \rho c_P \mathbf{u} \cdot \nabla T - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \end{aligned}$$

### 5.1.1.2 Transformation

Comme nous désirons calculer analytiquement la sensibilité lagrangienne par rapport à  $a$ , il faut déterminer au préalable une vitesse de déformation, continûment différentiable sur tout le domaine. Nous reprendrons celle de la section 3.3.1.3. Nous noterons  $V_M$  la vitesse de maille ou de déformation,  $V_{Mx}$  et  $V_{My}$  ses composantes sur les axes  $Ox$  et  $Oy$ .

Pour  $x < x_0$

$$V_{Mx}(x, y) = \frac{dx}{da} = -x^2 y \frac{x + \sqrt{0,1}}{1 - \sqrt{0,1} \sqrt{2a}}$$

Pour  $x > x_0$

$$V_{Mx} = \frac{xy}{1 - \sqrt{0,1}\sqrt{2a}} \left( - \left( 2x_0 + \sqrt{0,1} \right) x + x_0^2 \right)$$

Pour  $y > y_0$

$$V_{My}(x, y) = \frac{dy}{da} = 2xy\sqrt{0,1}y \frac{\sqrt{y} - 1}{1 - \sqrt{0,1}\sqrt{2a}}$$

Pour  $y < y_0$

$$V_{My}(x, y) = \frac{xy\sqrt{0,1}}{1 - \sqrt{0,1}\sqrt{2a}} \left( \left( 2 - \frac{1}{\sqrt{y_0}} \right) y - \sqrt{y_0} \right)$$

### 5.1.1.3 Sensibilités

Nous pouvons à présent exprimer les sensibilités lagrangiennes des variables à l'aide du théorème des fonctions composées.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_u &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} + \nabla \mathbf{u} \cdot V_M \\ S_p &= \frac{\partial p}{\partial a} + \nabla p \cdot V_M \\ S_T &= \frac{\partial T}{\partial a} + \nabla T \cdot V_M \end{aligned}$$

De même pour le terme source, nous devons calculer ses dérivées spatiales et sa sensibilité eulérienne analytique, le calcul de la sensibilité lagrangienne est fait par le code. Nous trouverons le détail de ces termes en annexe.

#### 5.1.1.4 Conditions aux limites

Afin de tester au mieux le code, que ce soit pour l'écoulement ou les sensibilités, nous imposons des conditions de Neumann sur la courbe étiquetée "Intérieur". C'est en effet l'endroit le plus délicat puisque c'est la courbe la plus déformée par la variation du paramètre. Ailleurs, nous fixons des conditions de Dirichlet correspondant à la solution analytique. Pour les conditions de Neumann, nous calculons la traction et le flux associés de la manière suivante :

$$\bar{\mathbf{t}} = -p\mathbf{n} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}$$

$$\bar{q} = \lambda \nabla T \cdot \mathbf{n}$$

Leur sensibilité lagrangienne a l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{D\bar{\mathbf{t}}}{Da} &= -S_p\mathbf{n} + \frac{D\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})}{Da} \cdot \mathbf{n} - p \frac{D\mathbf{n}}{Da} + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) \cdot \frac{D\mathbf{n}}{Da} \\ \frac{D\bar{q}}{Da} &= \frac{D\lambda \nabla T}{Da} \cdot \mathbf{n} + \lambda \nabla T \cdot \frac{D\mathbf{n}}{Da} \end{aligned}$$

Lors de cette opération, il faut garder en mémoire que

$$\frac{D}{Da} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \neq \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Du}{Da} \right) = \frac{\partial S_u}{\partial x}$$

Le détail des termes se trouve en annexe. Dans le cas général, contrairement au terme source, le calcul de la sensibilité lagrangienne des tractions et du flux thermique à la frontière est possible car la déformation est connue.

### 5.1.2 Estimation d'erreur

Pour vérifier le bon fonctionnement du code, nous allons étudier la convergence de la solution calculée vers la solution analytique. Pour cela, nous nous intéresserons à l'évolution de 3 normes d'erreur avec le maillage. Pour chaque norme, nous pourrions comparer l'erreur exacte (puisque nous connaissons la solution analytique) et l'erreur estimée par la méthode de projection locale établie par Zhu et Zienkiewicz<sup>[35, 36]</sup>. Les solutions éléments finis seront notées avec un indice  $h$  et les solutions exactes ou reconstruites avec l'exposant  $*$ .

- La norme L2p

Cette norme quantifie l'erreur sur la pression.

$$\|e^p\|^2 = \int_{\Omega} (p_h - p^*)^2 d\Omega$$

L'erreur sur sa sensibilité  $S_P$  se calcule de la même manière.

- La norme énergie

Cette norme quantifie l'erreur sur le gradient de la vitesse (ou de sa sensibilité).

$$\begin{aligned} \|e^u\|^2 = \int_{\Omega} & \left( (\nabla \mathbf{u}_h - \nabla \mathbf{u}^*) + (\nabla \mathbf{u}_h - \nabla \mathbf{u}^*)^T \right) \\ & : \left( (\nabla \mathbf{u}_h - \nabla \mathbf{u}^*) + (\nabla \mathbf{u}_h - \nabla \mathbf{u}^*)^T \right) d\Omega \end{aligned}$$

- La norme thermique

Cette norme quantifie l'erreur sur le gradient de la température (ou de sa sensibilité).

$$\|e^T\|^2 = \int_{\Omega} (\nabla T_h - \nabla T^*) \cdot (\nabla T_h - \nabla T^*) d\Omega$$

### 5.1.3 Etude de convergence et resultats numeriques

Les calculs ont été faits avec des éléments de Taylor-Hood, à pression continue. Les noeuds en vitesse et en pression sont placés comme illustré sur la figure 5.2. Pour chaque norme d'erreur, le taux de convergence en fonction de la taille ca-

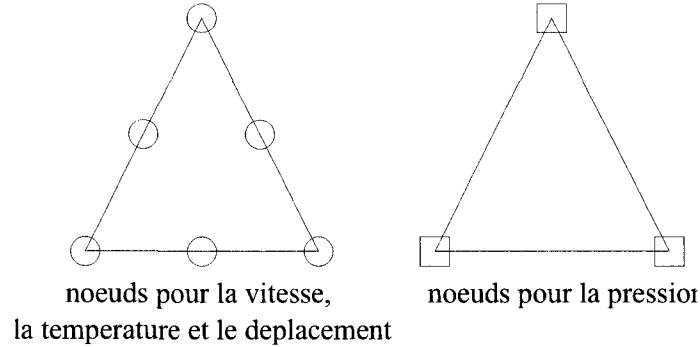


FIG. 5.2 Elément de Taylor-Hood

caractéristique  $h$  des éléments devrait être de 2, c'est à dire  $e = O(h^2)$ . De plus, l'erreur estimée doit converger vers l'erreur exacte. L'adaptation du maillage est basée sur les 3 normes définies précédemment pour l'écoulement et pour les sensibilités.

#### 5.1.3.1 Sensibilités lagrangiennes

La figure 5.3 montre le maillage obtenu après 5 cycles d'adaptation. Il compte 3807 noeuds et est particulièrement raffiné au niveau du point de stagnation, en effet, le gradient de pression est très élevé dans cette zone, voir la figure 5.3(b). Nous pouvons aussi vérifier sur la figure 5.4 que les conditions aux limites sont bien respectées pour les sensibilités de  $\mathbf{u}$  le long des parois, c'est à dire  $S_U$  et  $S_V$  sont bien nulles. La figure 5.5 montre l'évolution des erreurs en norme L2p, énergie et thermique pour les sensibilités ainsi que l'efficacité en fonction du nombre de



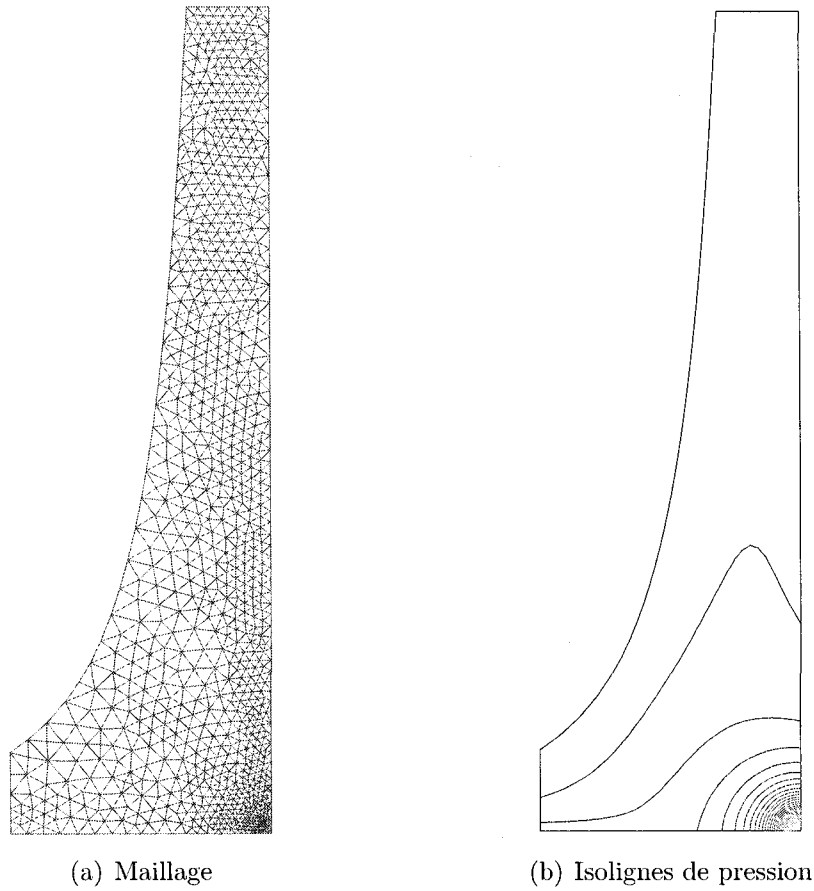


FIG. 5.3 Maillage et isolignes de pression pour le cas du jet plan

noeuds du maillage (qui est inversement proportionnel au carré de la taille des éléments, nous nous attendons à une pente de -1). Le comportement asymptotique de la solution éléments finis est très bon : le taux de convergence asymptotique est de 2 et les erreurs estimées convergent bien vers les erreurs exactes puisque l'efficacité tend vers 1.

Le code est donc vérifié et nous allons à présent comparer ces résultats avec les calculs effectués en formulation eulérienne.

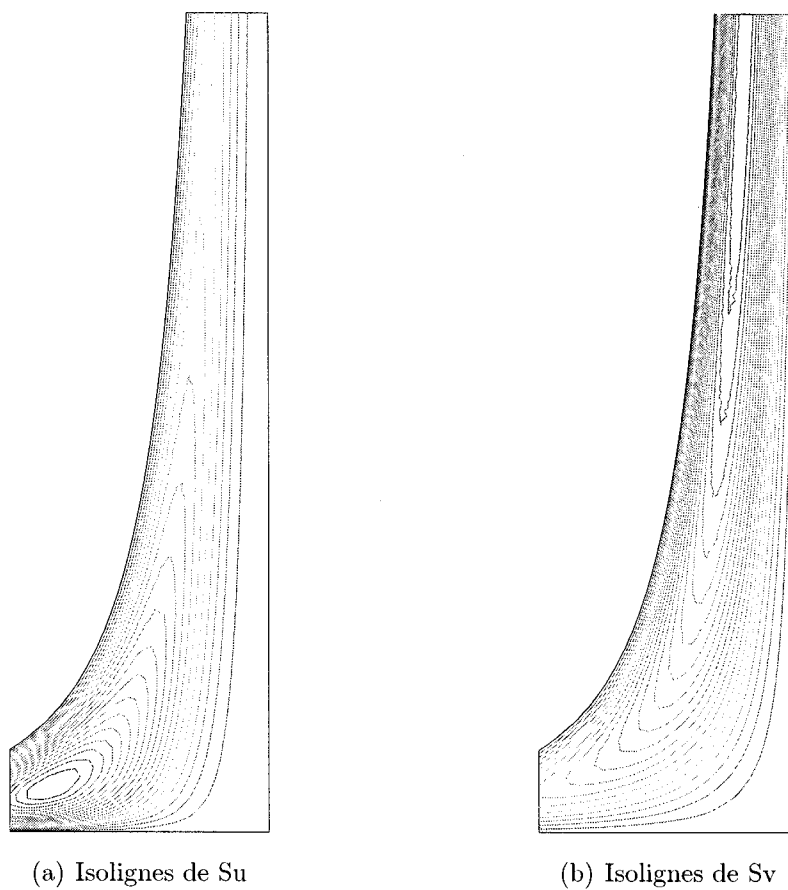


FIG. 5.4 Sensibilité lagrangienne de la vitesse pour le cas du jet plan

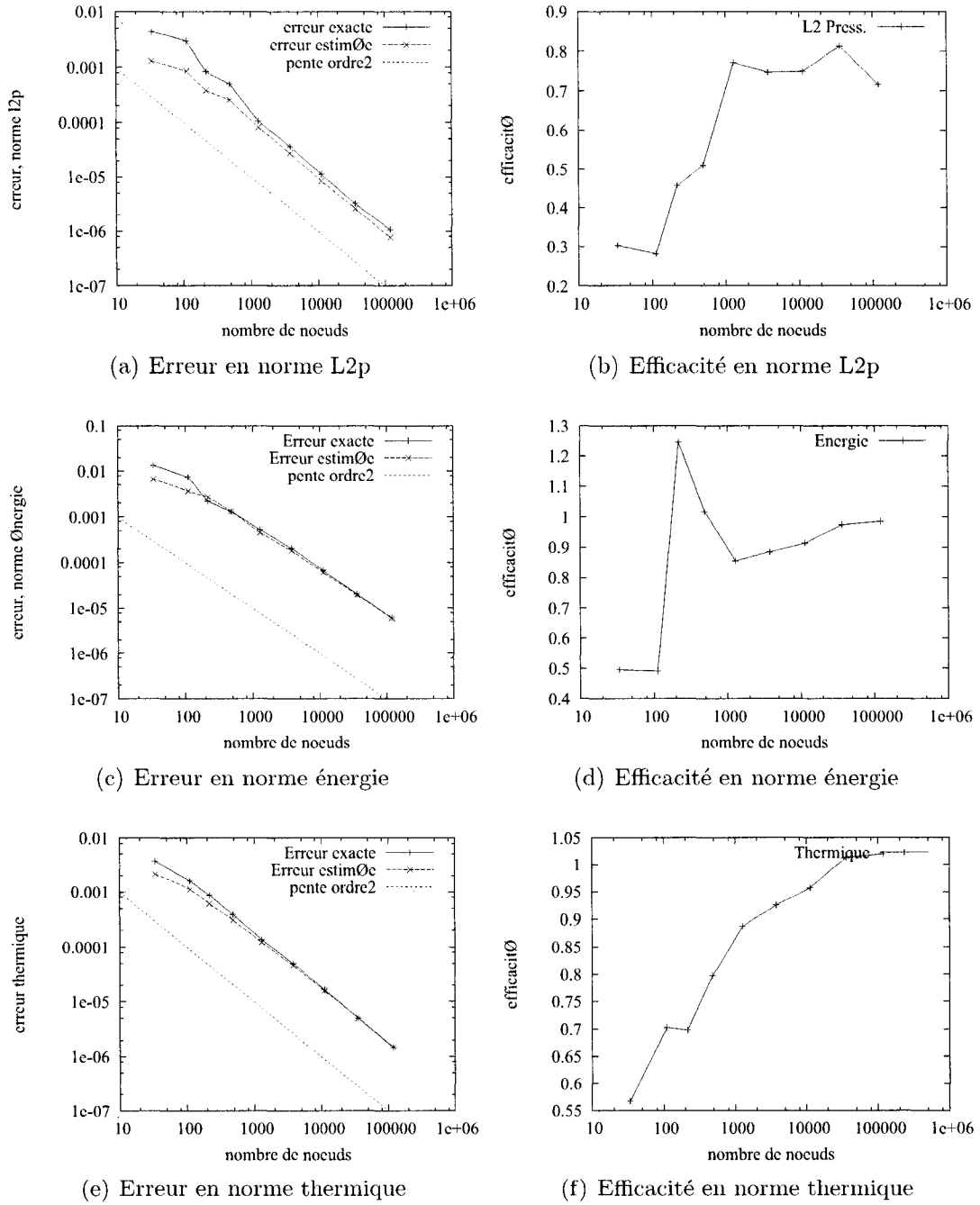


FIG. 5.5 Courbes de convergence des sensibilités lagrangiennes pour le cas du jet plan

### 5.1.3.2 Sensibilités eulériennes

Le même calcul avec les mêmes conditions aux limites a été fait. Aucun traitement particulier n'est appliqué pour améliorer la précision des gradients à la frontière. Le maillage obtenu est différent de celui obtenu avec la formulation lagrangienne, voir la figure 5.6.

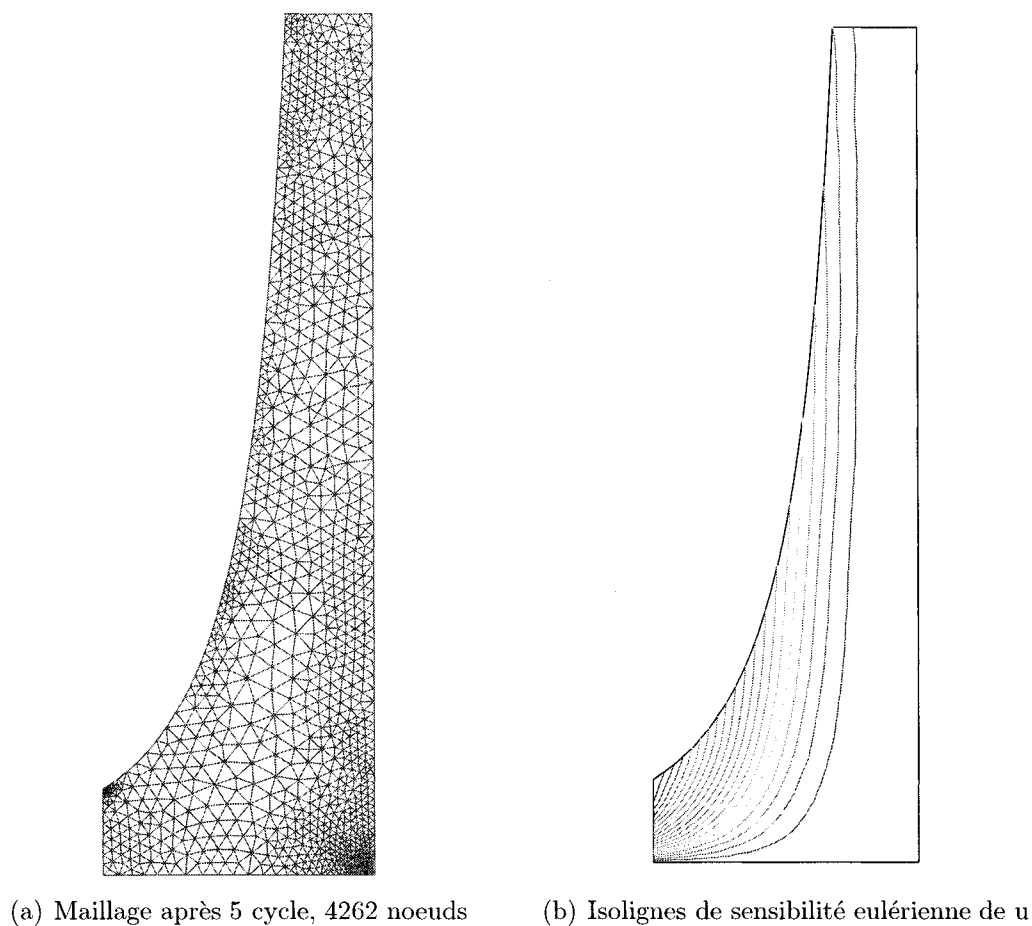


FIG. 5.6 Maillage et sensibilité eulérienne de  $u$  pour le cas du jet plan

Comme pour la formulation lagrangienne, le maillage est particulièrement raffiné au niveau du point de stagnation mais également le long de la frontière, ce qui n'était

pas le cas en lagrangien. Cela signifie que l'erreur sur les sensibilités eulériennes est particulièrement élevée à cet endroit. C'est une des conséquences de l'imprécision des conditions limites des sensibilités eulériennes pour un paramètre de forme. La figure 5.6(b) montre les isolignes de la sensibilité eulérienne de la composante horizontale de la vitesse. Leur allure est assez différente de celle des sensibilités lagrangiennes. En effet, cette comparaison illustre bien le fait que les sensibilités eulériennes ne sont pas nulles sur les parois mais qu'il a fallu calculer le terme de transpiration.

Les figures 5.7 montrent l'évolution des erreurs en norme  $L2p$ , énergie et thermique pour les sensibilités ainsi que l'efficacité en fonction du nombre de noeuds du maillage. Le taux de convergence pour l'erreur exacte n'est plus de 2, pour la norme energie, il chute à 1.14 et les erreurs estimées ne convergent pas vers l'erreur exacte. L'imprécision ne se limite donc pas aux frontières mais affecte les sensibilités dans tout le domaine. La formulation eulérienne n'est donc pas adaptée pour résoudre les problèmes avec paramètre de forme et conditions de Neumann.

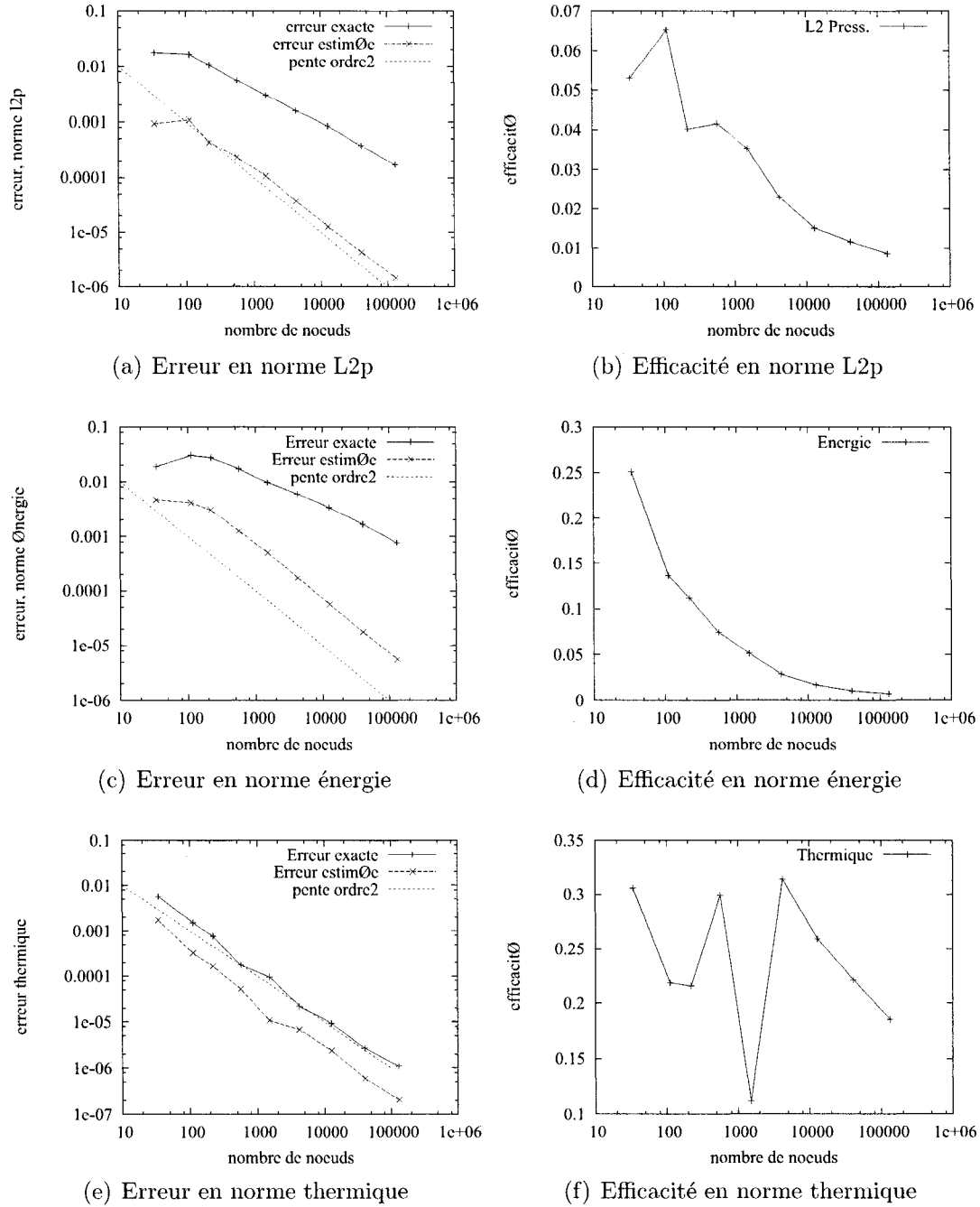


FIG. 5.7 Courbes de convergence des sensibilités eulériennes pour le cas du jet plan

### 5.1.4 Réactions

Dans cette partie, nous allons vérifier si la valeur donnée par les réactions est correcte.

#### 5.1.4.1 Approche analytique

Il est impossible de faire ici une étude de convergence rigoureuse. En effet, il faut tout d'abord calculer de manière analytique les réactions, c'est à dire calculer des intégrales relativement compliquées, notamment sur la courbe "intérieure" où la normale n'a pas une expression simple. Choisissons donc un cas simple, sur l'entrée. Le problème est qu'il s'agit d'une courbe ouverte, il y aura donc des contributions parasites aux extrémités. Il est possible de les diminuer en imposant des petits éléments à ces endroits et ainsi de voir qualitativement si la valeur numérique converge vers la valeur calculée. Considérons la composante horizontale des efforts et intégrons sur l'entrée.

$$\int_{entree} (\boldsymbol{\tau} - pId) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = - \int_0^{\frac{5}{a}} \frac{D(1-y)}{1+C(0.1+y^2)} dy$$

Le calcul analytique donne les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} F_x &= -0.09120 \\ \frac{DF_x}{Da} &= -\frac{5}{a^2} \frac{D(1-5/a)}{1+C(0.1+(5/a)^2)} \\ &= 0.0016216 \end{aligned}$$

La figure 5.8 montre l'évolution de l'erreur relative en pourcentage pour l'écoulement et pour les sensibilités. L'erreur sur la sensibilité des réactions est comparable à celle de l'écoulement. La valeur obtenue est donc correcte.

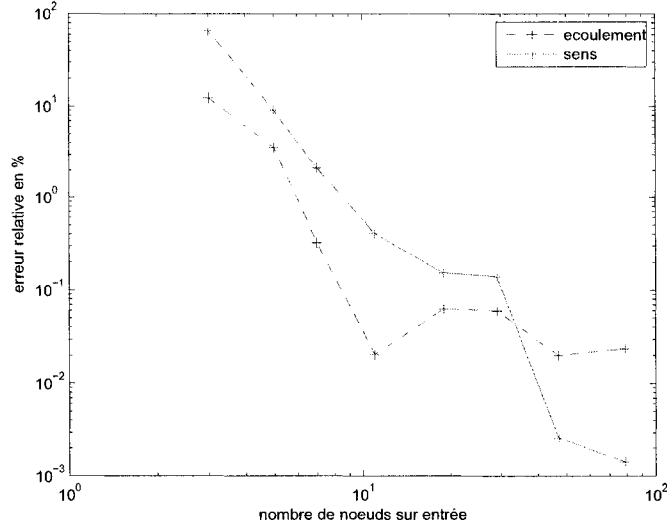


FIG. 5.8 Solution manufacturée : Erreur relative pour les réactions

#### 5.1.4.2 Vérification supplémentaire

La solution manufacturée nous offre une grande flexibilité, en effet, nous pouvons calculer n'importe quelle solution. Nous allons donc l'utiliser pour illustrer la relation entre les réactions en formulation eulérienne (notées  $R_{eul}$ ) et les réactions en formulation lagrangienne (notées  $R_{lgr}$ ). On a la relation suivante :

$$\frac{D}{D\alpha} \int_{\Gamma_\alpha} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d\Gamma_\alpha = \int_{\Gamma_\alpha} \left[ \mathbf{s}_\sigma \cdot \mathbf{n} + \nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{V}_M \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{V}_M \mathbf{n} - \nabla^T \mathbf{V}_M \cdot \mathbf{n}) \right] d\Gamma \quad (5.1)$$

avec  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - pId$ . Ainsi, les réactions en lagrangien sont composées des réactions eulériennes, d'un terme de transpiration et d'un terme issu de la sensibilité de la géométrie.

$$R_{lgr} = R_{eul} + \underbrace{\int_{\Gamma_\alpha} \nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{V}_M \cdot \mathbf{n} d\Gamma}_{\text{Transpiration}} + \underbrace{\int_{\Gamma_\alpha} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{V}_M \mathbf{n} - \nabla^T \mathbf{V}_M \cdot \mathbf{n}) d\Gamma}_{\text{Sensibilité de la géométrie}}$$



Nous allons utiliser une autre solution manufacturée pour calculer la somme de la transpiration et de la sensibilité de la géométrie. Elle sera obtenue en gardant la même solution pour l'écoulement et en utilisant une formulation lagrangienne pour les sensibilités. Toutefois, pour que le calcul des réactions conserve seulement les termes désirés, nous imposerons une sensibilité eulérienne nulle. Ainsi, en notant  $\mathbf{u}_{mod}$  cette nouvelle solution, nous aurons

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{mod} &= \mathbf{u} \\ \frac{\partial \mathbf{u}_{mod}}{\partial \alpha} &= 0 \\ \frac{D \mathbf{u}_{mod}}{D \alpha} &= \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{V}_M\end{aligned}$$

Alors, la sensibilité eulérienne des contraintes s'annule dans l'expression (5.1) et la sensibilité des réactions ainsi obtenue est réduite au terme de transpiration et au terme issu de la sensibilité de la géométrie qui sera le même qu'avec la solution initiale. Elle sera notée  $R_{T+G}$ . Cette manipulation nous permettra de vérifier la cohérence entre les 2 formulations, en effet,  $R_{lgr} = R_{eul} + R_{T+G}$ .

Pour contourner les problèmes de convergence de la formulation eulérienne, le paramètre sera traité comme un paramètre de valeur pour ce calcul, ce qui est possible puisque la solution analytique est connue. La table 5.1 récapitule les caractéristiques des différents calculs et les valeurs obtenues pour chacun d'eux sur un maillage d'environ 150000 noeuds. L'erreur relative entre  $R_{lgr}$  et  $R_{eul} + R_{T+G}$  est de 0.5%. Les 2 formulations semblent donc bien cohérentes. Les réactions en sensibilités peuvent donc être directement utilisées pour les sensibilités des efforts, sans post traitement.

Le code numérique est vérifié, nous pouvons à présent passer aux applications.

Formulation	Sensibilité calculée	Réaction obtenue	Valeur
lagrangien	$\frac{D\mathbf{u}}{D\alpha} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\alpha} + \nabla\mathbf{u} \cdot V_M$	$R_{lgr} = \frac{D}{D\alpha} \int_{\Gamma_\alpha} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d\Gamma_\alpha$	-0.011370
lagrangien	$\frac{D\mathbf{u}_{mod}}{D\alpha} = \nabla\mathbf{u} \cdot V_M$	$R_{T+G} = \int_{\Gamma_\alpha} \nabla\boldsymbol{\sigma} \cdot V_M \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \cdot V_M \mathbf{n} - \nabla^T V_M \cdot \mathbf{n}) d\Gamma_\alpha$	0.046378
eulérien	$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\alpha}$	$R_{eul} = \int_{\Gamma_\alpha} \mathbf{s}_\sigma \cdot \mathbf{n} d\Gamma_\alpha$	-0.057829

TAB. 5.1 Convergence des réactions avec différentes formulations

## 5.2 Profil Naca, calcul de solutions voisines

Maintenant que le code a été vérifié, nous allons nous en servir pour calculer des solutions voisines de profils NACA à 4 chiffres. Nous reprendrons le problème décrit dans <sup>[24]</sup> afin de comparer les résultats.

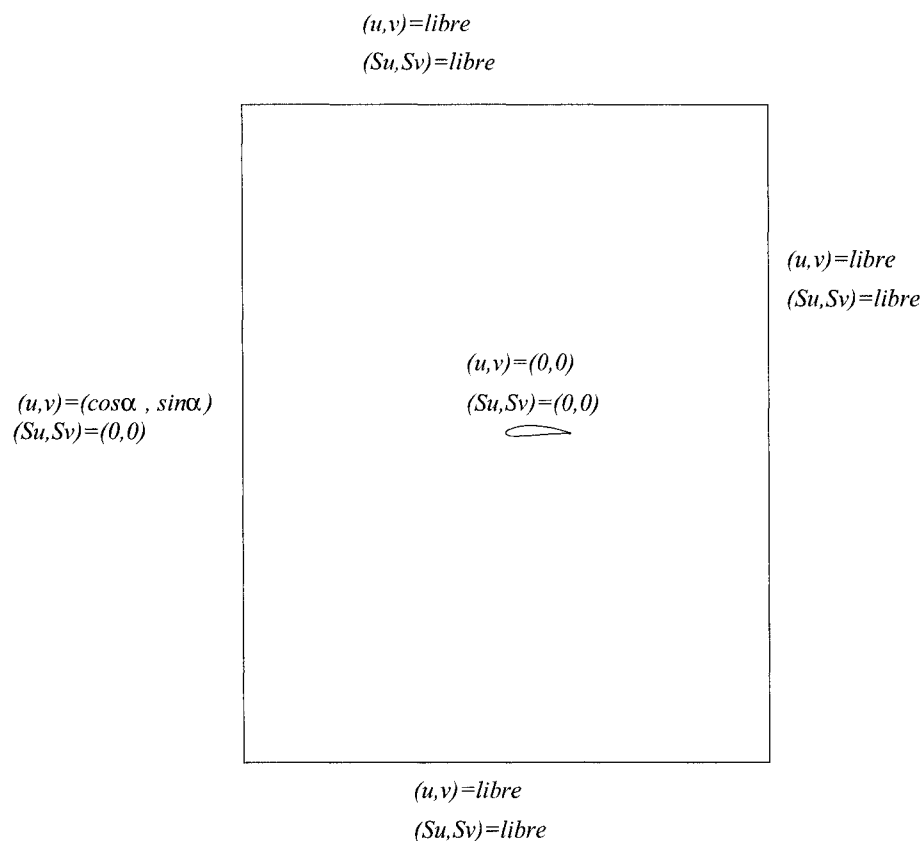


FIG. 5.9 Domaine pour le profil NACA

### 5.2.1 Description du problème

Considérons l'écoulement autour d'un profil de corde unitaire à nombre de Reynolds égal à 1000 avec une incidence de  $5^\circ$ . Le domaine de calcul est représenté sur la figure 5.9. La vitesse est imposée en entrée et une vitesse est nulle sur le profil. Sur

le reste des frontières, nous imposons des conditions de Neumann nulles.

Le profil est paramétré de la façon suivante : la ligne médiane est définie par 2 arcs de parabole tangents au maximum de la cambrure. L'expression analytique est la suivante :

$$\begin{aligned} y_{ml} &= \frac{m}{p^2} (2px - x^2) & 0 \leq x \leq x_p \\ y_{ml} &= \frac{m}{(1-p)^2} (1 - 2p + 2px - x^2) & x_p \leq x \leq c \end{aligned}$$

Avec  $c$  la longueur de la corde,  $mc$  l'ordonnée maximale de la médiane, et  $x_p = pc$  l'abscisse de l'ordonnée maximale. L'épaisseur du profil est définie de la façon suivante :

$$y_{th} = \pm 5e (0.2969\sqrt{x} - 0.1260x - 0.3537x^2 + 0.2843x^3 - 0.1015x^4)$$

Nous considérerons le profil 4512 comme profil de base et nous extrapolerons les résultats grâce aux sensibilités lagrangiennes pour d'autres profils définis au tableau 5.2 dont la géométrie est dessinée sur la figure 5.10

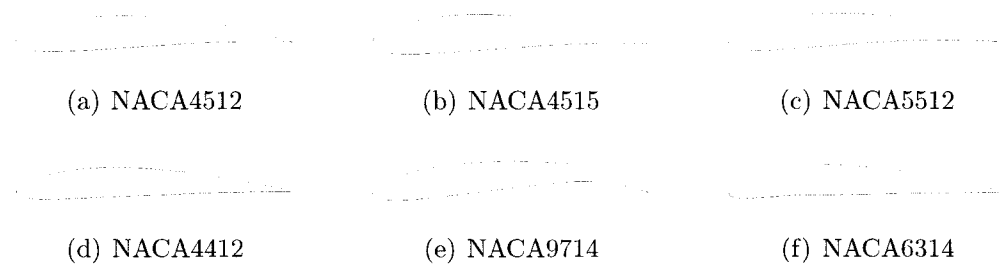


FIG. 5.10 Géométries des profils utilisés

NACA	4512	4515	5512	4412	9714	6314
e	0.12	0.15	0.12	0.12	0.14	0.14
m	0.04	0.04	0.05	0.04	0.09	0.06
p	0.50	0.50	0.50	0.40	0.70	0.30

TAB. 5.2 Paramètres des profils utilisés

### 5.2.2 Solutions voisines pour la vitesse et la pression

Intéressons-nous dans un premier temps aux variables de l'écoulement. Les champs de vitesse et de pression des profils voisins sont approchés avec un développement de Taylor à l'ordre 1. Pour plus de précision, le développement pourrait être poussé à l'ordre 2 mais il faudrait alors calculer les sensibilités d'ordre 2.

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}_{ref} + \frac{D\mathbf{u}}{De}\Delta e + \frac{D\mathbf{u}}{Dm}\Delta m + \frac{D\mathbf{u}}{Dp}\Delta p \\ P &= P_{ref} + \frac{DP}{De}\Delta e + \frac{DP}{Dm}\Delta m + \frac{DP}{Dp}\Delta p\end{aligned}$$

De plus, pour reconstruire les solutions sur la configuration voisine, il faut déformer le maillage avec la vitesse de maille.

$$\begin{aligned}\Delta x &= \Delta e V_{Mx}^e + \Delta m V_{Mx}^m + \Delta p V_{Mx}^p \\ \Delta y &= \Delta e V_{My}^e + \Delta m V_{My}^m + \Delta p V_{My}^p\end{aligned}$$

Les isolignes de la vitesse horizontale et de la pression pour les solutions extrapolées ou recalculées sont illustrées figures 5.11 et 5.12. Il s'agit des résultats obtenus après 6 cycles d'adaptation, le maillage comporte un peu moins de 10000 noeuds. La figure 5.11(a) représente le profil de base et la (b) les sensibilités par rapport à  $e$ . Les sensibilités nous indiquent qu'épaissir le profil augmente la taille de la zone de recirculation en aval du profil. En combinant ces 2 champs de manière appropriée et en déformant le maillage, nous obtenons les isolignes de la figure (c) qui sont à

comparer avec la figure (d). La géométrie du profil est bien extrapolée, en effet, la géométrie du profil est linéaire par rapport au paramètre  $e$ . Les isolignes de vitesse sont elles aussi bien reconstruites.

En utilisant les sensibilités par rapport à  $e$ ,  $m$ ,  $p$ , nous pouvons tracer les isolignes de vitesse pour un profil plus différent du profil de base, comme le profil 9714 qui est sur les figures 5.11(e) et 5.11(f) pour le profil recalculé. Cette fois, le profil obtenu après déformation du maillage d'origine n'est pas tout à fait le même que le profil réel. En effet, la géométrie du profil n'est pas linéaire par rapport au paramètre  $p$ . Nous sortons donc également de la zone linéaire pour les autres variables ce qui explique que les différences entre l'extrapolation et le calcul soient plus importantes que pour le profil précédent. Cependant, l'extrapolation donne pour un coût bien moindre qu'un nouveau calcul une bonne idée de l'écoulement pour un profil voisin, même assez différent.

Nous pouvons faire le même travail pour la pression. La sensibilité de la pression par rapport à  $e$  (voir figure 5.12(b)) est négative au niveau de l'intrados, donc si l'épaisseur du profil augmente, la pression sur l'intrados va diminuer donc la portance sera plus faible. Nous pourrions vérifier ces résultats à la section suivante sur le tableau 5.3. Les isolignes de pression extrapolées sont très semblables aux isolignes pour le profil recalculé. Si les 3 paramètres varient, les résultats peuvent aussi être très bons comme le montrent les figures 5.12(e) et 5.12(f) pour le profil 6314. Dans ce cas, le développement à l'ordre 1 semble suffisant pour retracer de manière assez fidèle les isolignes de pression.

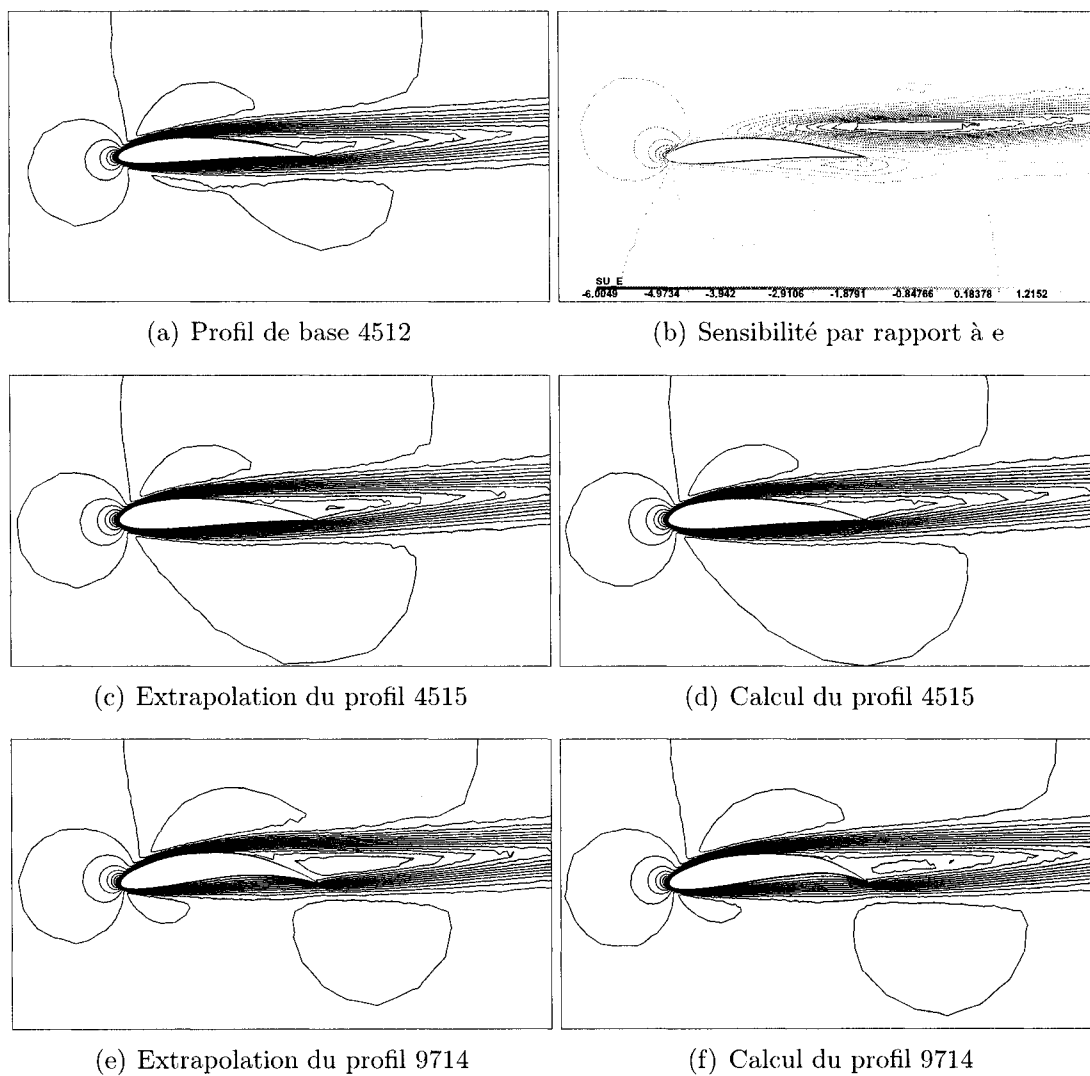


FIG. 5.11 Isolignes de  $U$  extrapolées et recalculées

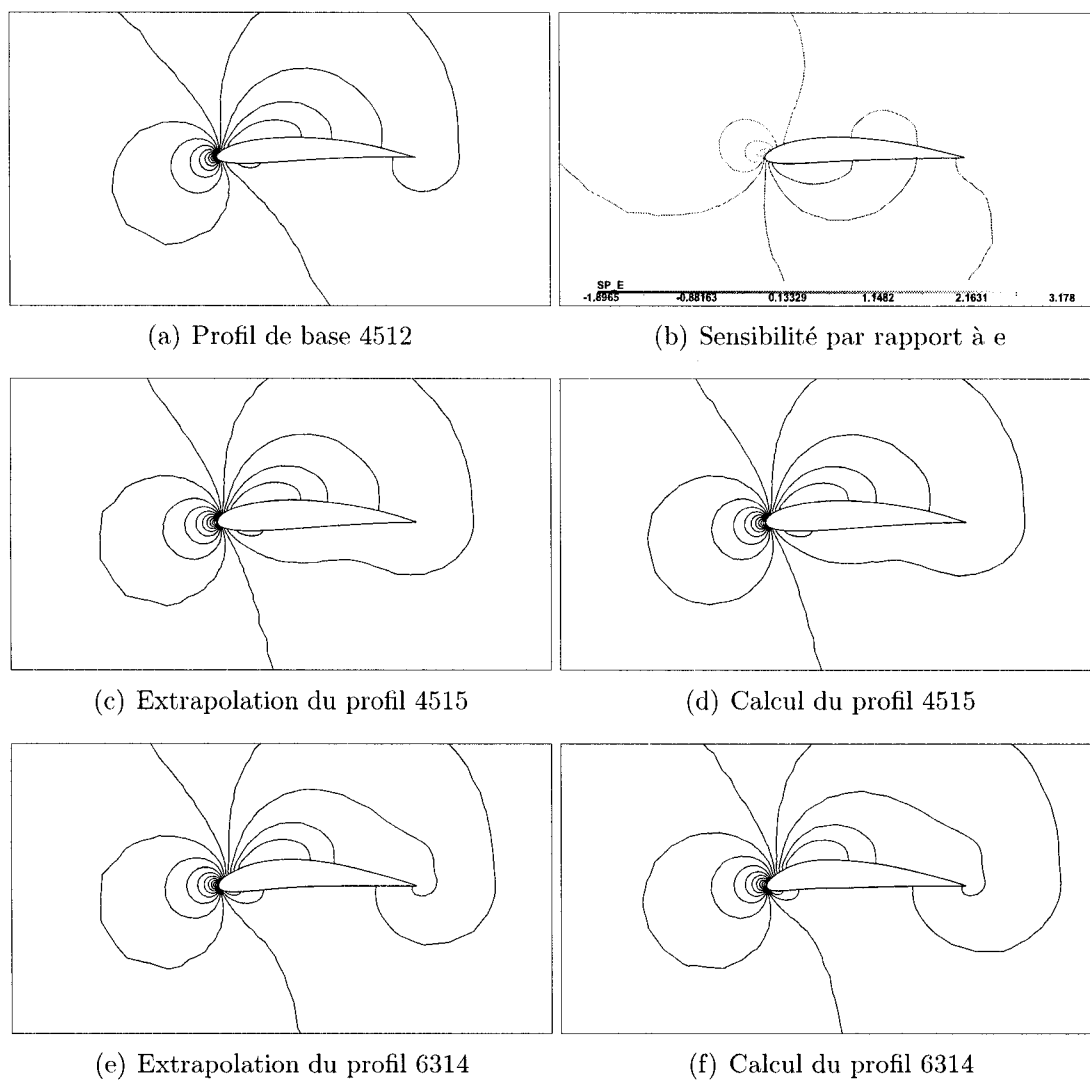


FIG. 5.12 Isolignes de P extrapolées et recalculées



### 5.2.3 Etude des coefficients de portance et de trainée

La même démarche peut être utilisée sur d'autres fonctions que les variables de l'écoulement. Nous présentons ici une approche plus quantitative avec les coefficients de portance et de trainée.

#### 5.2.3.1 Etude de convergence

Nous allons commencer par une petite étude de convergence sur le profil de base afin de déterminer le maillage nécessaire pour extrapoler les résultats aux autres profils. Les sensibilités des coefficients de trainée et de portance seront obtenues à partir des réactions sur le profil (il n'y a donc pas de post-traitement à faire). Il suffira de les projeter sur les axes du profil pour obtenir la portance et la trainée correspondantes. La figure 5.13 montre l'évolution de la portance et de la trainée ainsi que leur

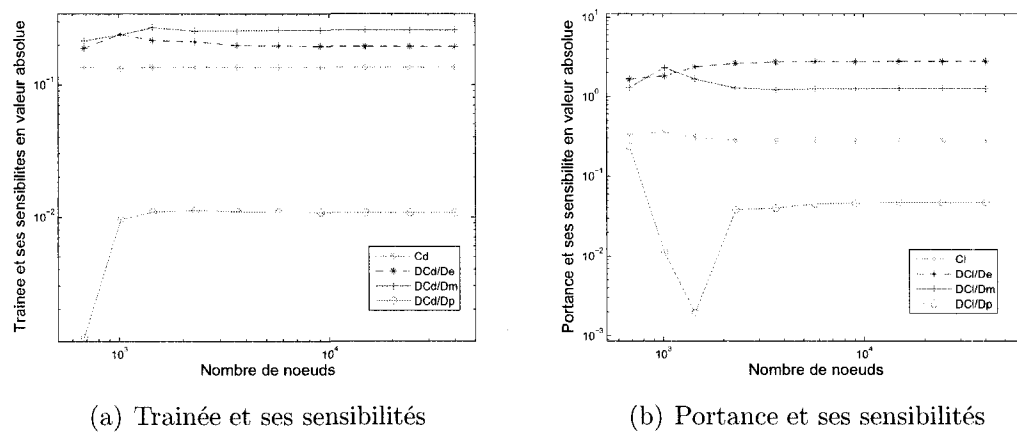


FIG. 5.13 Etude de convergence des coefficients de trainée et de portance

sensibilité par rapport aux 3 paramètres définissant le profil en fonction du cycle d'adaptation. A partir de 10000 noeuds, la portance et la trainée ainsi que leurs

différentes sensibilités ont convergé. Afin d'avoir une bonne précision, nous ferons les extrapolations avec des maillages de 40000 noeuds.

### 5.2.3.2 Résultats

Nous allons comparer les coefficients de trainée et de portance recalculés et les coefficients extrapolés. Ces extrapolations sont obtenues à partir d'un développement de Taylor d'ordre 1 :

$$C_D = C_{Dref} + \frac{DC_D}{De} \Delta e + \frac{DC_D}{Dm} \Delta m + \frac{DC_D}{Dp} \Delta p$$

$$C_L = C_{Lref} + \frac{DC_L}{De} \Delta e + \frac{DC_L}{Dm} \Delta m + \frac{DC_L}{Dp} \Delta p$$

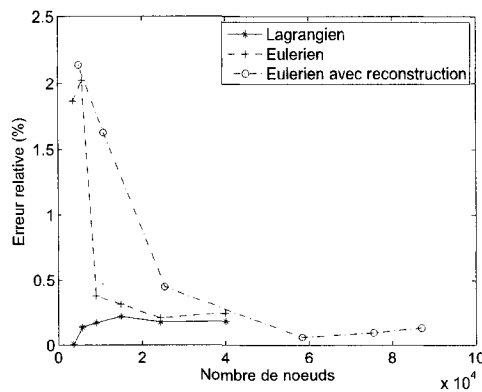
Nous utilisons ici les valeurs données par les réactions. Nous trouverons table 5.3 les coefficients recalculés et les coefficients extrapolés. Les erreurs obtenues sont

NACA		Coefficient recalculé	Coefficient extrapolé	Erreur relative (%)
4512	Cd	0.13479		
	Cl	0.28018		
4515	Cd	0.14110	0.14067	0.30
	Cl	0.19569	0.19694	0.64
5512	Cd	0.13766	0.13740	0.18
	Cl	0.29250	0.29287	0.13
4412	Cd	0.13595	0.13588	0.05
	Cl	0.27611	0.27550	0.22
9714	Cd	0.15197	0.14960	1.56
	Cl	0.30895	0.29751	3.70
6314	Cd	0.14856	0.14609	1.66
	Cl	0.22339	0.24071	7.74

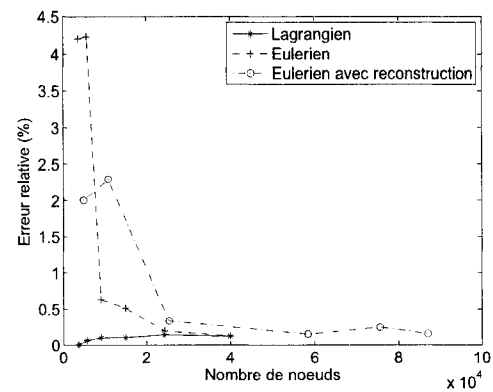
TAB. 5.3 Calcul des coefficients de trainée et de portance

du même ordre que celles obtenues dans [24]. Dans cet article, les sensibilités ont été calculées en formulation eulérienne avec une méthode de reconstruction des

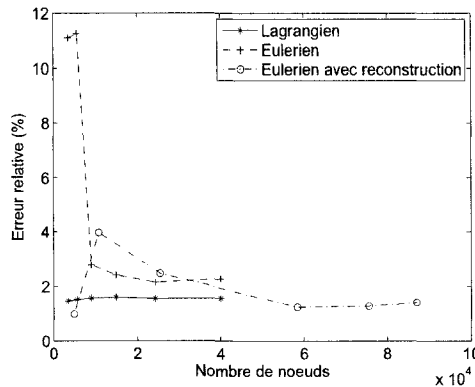
gradients à la frontière pour améliorer la précision<sup>[13]</sup>. Notons que le maillage comprenait alors 60000 noeuds environ. Pour mieux illustrer le comportement de chaque méthode, nous allons comparer à maillage égal les résultats obtenus en formulations lagrangienne et eulérienne (sans reconstruction des gradients) et les résultats avec reconstruction (nous utiliserons directement les résultats de <sup>[24]</sup>, le maillage ne sera donc pas strictement identique).



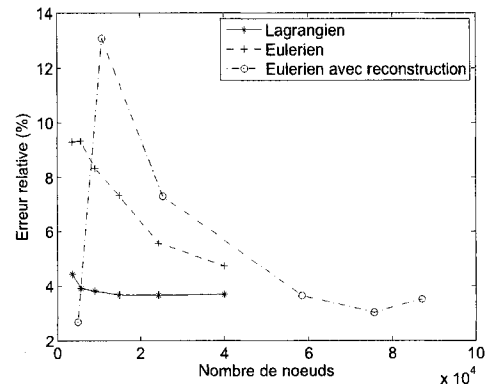
(a) Trainée pour le profil NACA 5512



(b) Portance pour le profil NACA 5512



(c) Trainée pour le profil NACA 9714



(d) Portance pour le profil NACA 9714

FIG. 5.14 Evolution des erreurs avec le maillage pour les différentes formulations

La figure 5.14 représente les erreurs relatives sur les coefficients extrapolés en fonction du nombre de points pour les 3 différentes techniques pour les profils NACA

5512 et NACA 9714. Pour la formulation lagrangienne, dès 10000 noeuds, l'erreur est presque aussi petite qu'à 40000 noeuds. La convergence est plus lente pour la formulation eulérienne simple qui est aussi moins précise. Si les gradients à la frontière sont reconstruits, le niveau de précision est équivalent à la formulation lagrangienne mais il faut un nombre de noeuds beaucoup plus élevé. En effet, la précision de conditions aux limites pour les sensibilités eulérienne est directement reliée au nombre de noeuds sur le bord du domaine. Les erreurs ne tendent pas vers zéro, il s'agit de l'erreur de troncature dans le développement de Taylor. Pour améliorer les résultats, il faudrait considérer le terme d'ordre 2.

#### 5.2.4 Etude des coefficients de pression et de friction

Nous allons maintenant nous servir des sensibilités pour extrapoler les coefficients de pression et de friction. Nous utiliserons les résultats de la section 4.2.6 pour le calcul des sensibilités. Le profil de départ est toujours le profil NACA 4512.

Nous extrapolerons le coefficient de pression de la façon suivante :

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = C_{pref} + \frac{DC_p}{De} \Delta e + \frac{DC_p}{Dm} \Delta m + \frac{DC_p}{Dp} \Delta p$$

avec  $\frac{DC_p}{D\alpha} = \frac{S_p^\alpha}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$ ,  $\alpha = e, m, p$  et  $S_p^\alpha$  la sensibilité lagrangienne de  $p$  par rapport au paramètre  $\alpha$ .

Nous adoptons une démarche similaire pour le coefficient de friction :

$$C_f = \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = C_{fref} + \frac{DC_f}{De} \Delta e + \frac{DC_f}{Dm} \Delta m + \frac{DC_f}{Dp} \Delta p$$

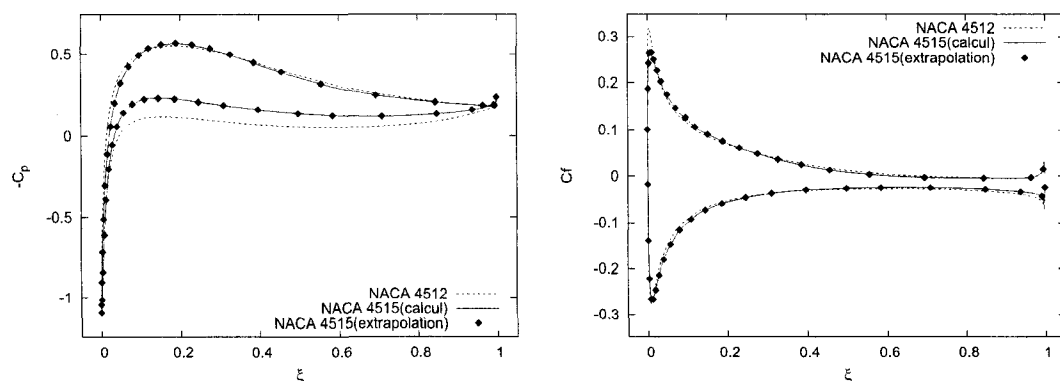
Nous pouvons donc utiliser directement la sensibilité lagrangienne de la pression. Nous avons déterminé à la section 4.2.6 l'expression de la sensibilité lagrangienne

du coefficient de friction :

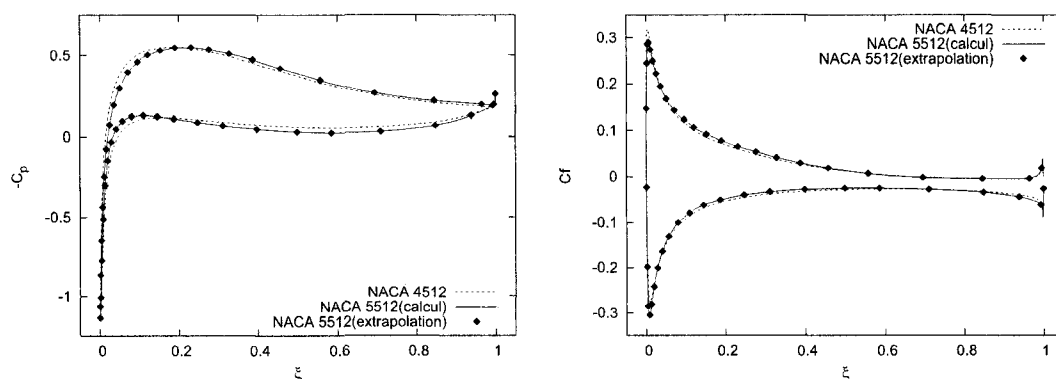
$$\begin{aligned} \frac{DC_f}{D\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \left[ \mu \left( \nabla \mathbf{S}_u + \nabla^T \mathbf{S}_u - \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla V_M - \nabla^T V_M \cdot \nabla^T \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} \right. \\ \left. + \boldsymbol{\tau} \cdot \left( \frac{D\mathbf{n}}{D\alpha} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{n} \cdot \frac{D\mathbf{t}}{D\alpha} \right) \right] \end{aligned}$$

Il faut donc post traiter les données pour la calculer en utilisant la vitesse de maille. Nous pouvons alors tracer les courbes de la figure 5.15. Les courbes pour les coefficients extrapolés se confondent avec celles des coefficients recalculés.

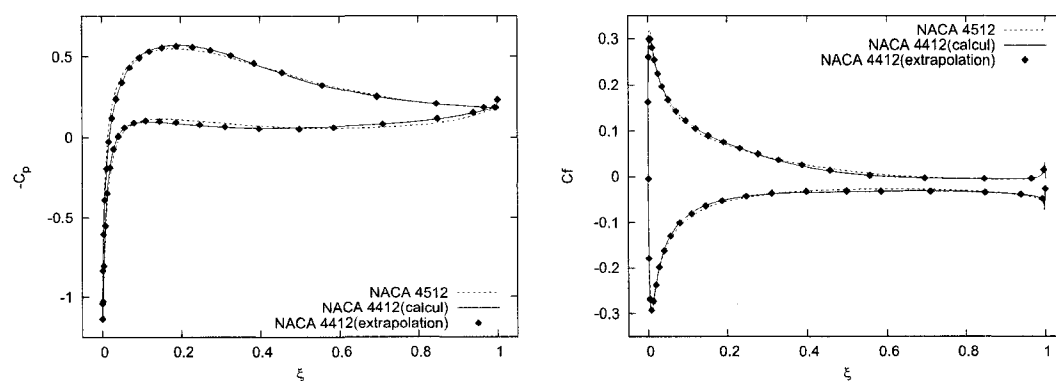
Ce calcul de solutions voisines nous montre que les sensibilités sont un outil performant pour calculer des solutions voisines, avec un seul calcul, nous pouvons extrapoler les resultats avec fidélité sur un grand nombre de profils.



(a) Coefficient de pression pour le profil NACA 4515 (b) Coefficient de friction pour le profil NACA 4515



(c) Coefficient de pression pour le profil NACA 5512 (d) Coefficient de friction pour le profil NACA 5512



(e) Coefficient de pression pour le profil NACA 4412 (f) Coefficient de friction pour le profil NACA 4412

FIG. 5.15 Calcul de solution voisine pour les coefficients de pression et de friction

### 5.2.5 Comparaison de maillage

Les études précédentes nous ont permis de comparer le comportement de la formulation lagrangienne et de la formulation eulérienne. Nous avons alors constaté que la formulation lagrangienne était moins exigeante en terme de nombre de noeuds. Pour mieux comprendre ce qu'il se passe, nous avons effectué un calcul avec adaptation sur l'écoulement et sur les sensibilités par rapport à  $e$ , avec les formulations lagrangiennes et eulériennes. La figure 5.16 montre les 2 maillages obtenus au 5ème

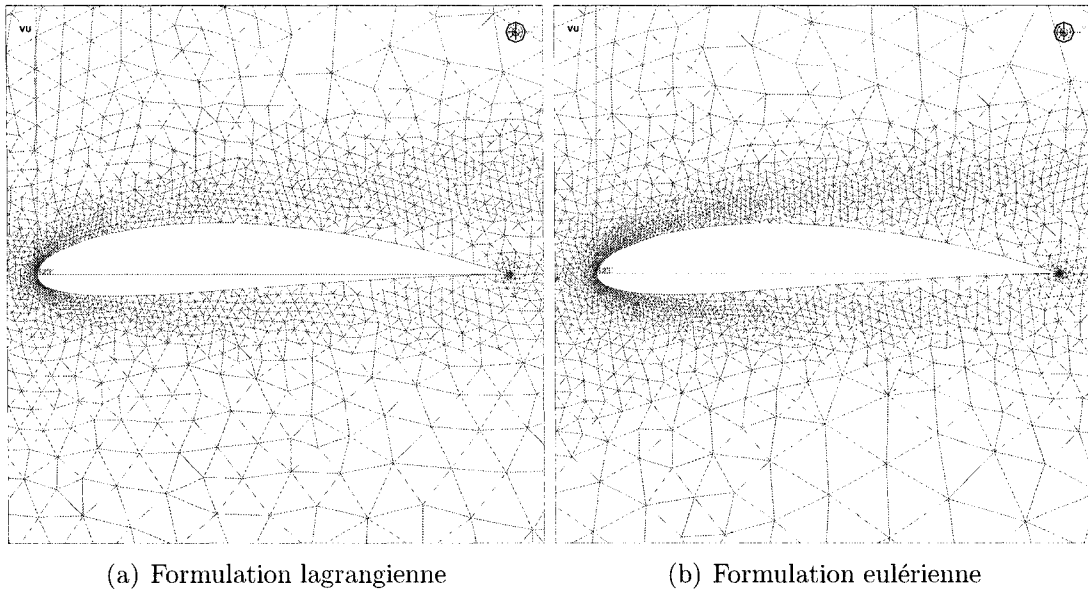


FIG. 5.16 Maillages autour du profil 4512

cycle d'adaptation, ils comptent environ 15000 noeuds, un peu plus pour la formulation eulérienne, un peu moins pour la formulation lagrangienne. Les différences principales apparaissent sur l'avant du profil. Pour la formulation lagrangienne, il est moins raffiné que pour la formulation eulérienne, mais plus homogène. Ce raffinement s'explique au regard des isolignes de sensibilité eulérienne de la vitesse horizontale sur la figure 5.17. Sur l'avant du profil, la sensibilité est très négative,

en effet, à la frontière, la sensibilité eulérienne est égale à l'opposé du terme de transpiration, c'est à dire  $s_u|_{profil} = -\frac{\partial u}{\partial x}V_{Mx} - \frac{\partial u}{\partial y}V_{My}$ . Les gradients sont donc beaucoup plus importants dans cette région avec la formulation eulérienne qu'avec la solution lagrangienne, ce qui explique que l'erreur soit maximale dans cette zone pour la norme énergie de la sensibilité. Ainsi, la précision est meilleure en lagrangien à nombre de noeuds égal car le raffinement est moins concentré sur les frontières, ce qui permet de raffiner ailleurs.

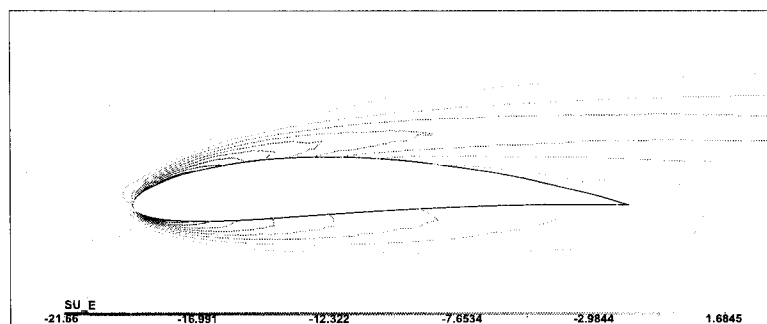


FIG. 5.17 Isolignes de sensibilités eulériennes de  $u$  pour le profil 4512

Ces applications nous ont permis de montrer d'une part la pertinence des sensibilités lagrangiennes pour traiter un paramètre de forme et d'autre part les différents avantages qu'elle présente par rapport à la formulation eulérienne, c'est à dire une meilleure précision, une convergence plus rapide et des maillages plus homogènes.



## CONCLUSION

Le but de ce mémoire était d'étudier les sensibilités lagrangiennes et de déterminer si cette formulation était une technique efficace pour le traitement d'un paramètre de forme, la formulation eulérienne classique rencontrant des problèmes de convergence à cause de conditions aux frontières inexactes.

Nous avons pour cela procédé en deux temps. Nous avons commencé par traiter l'équation de la chaleur pour simplifier le problème puis nous avons développé la méthode pour les équations de Navier-Stokes. La démarche est la même pour les deux problèmes : il faut dériver la forme faible du problème par rapport au paramètre. Seulement, le domaine d'intégration dépend du paramètre. Nous avons donc recours à un domaine de référence indépendant du paramètre pour expliciter les dépendances et pour pouvoir dériver simplement.

La formulation ainsi obtenue présente plusieurs avantages. Tout d'abord, les conditions aux limites sont directement établies à partir des données du problème, elle sont donc exactes. Ensuite, cette formulation permet de calculer les dérivées totales par rapport au paramètre de forme et ce sont elles qui sont utilisées pour calculer les sensibilités de fonctions coût, le post traitement se trouve donc allégé puisqu'il n'est plus nécessaire comme avec la formulation eulérienne d'évaluer des termes de transpiration. La formulation lagrangienne est donc plus facile à utiliser.

Elle se distingue aussi de la formulation eulérienne par la présence d'une vitesse de déformation qui traduit la transformation du domaine de calcul due à une variation du paramètre de forme. Données aux frontières, il s'agit de deux variables supplémentaires à calculer dans tout le domaine avec les contraintes suivantes : la vitesse de déformation doit être continûment différentiable et respecter les conditions aux limites du problème et son calcul doit être compatible avec l'adaptation de

maillage. L'approche pseudo-solide a été choisie car elle répond à tous ces critères. Ainsi, le domaine se déforme comme un solide élastique et la vitesse de déformation est régie par les équations d'élasticité linéaire.

Pour chacun des problèmes, équations de Navier-Stokes ou de la chaleur, l'implémentation des équations a été vérifiée par la méthode des solutions manufacturées. Ceci nous a permis non seulement de vérifier la convergence de cette formulation avec un paramètre de forme et des conditions de Neumann, mais aussi de comparer les résultats avec la formulation eulérienne. Là où la formulation eulérienne nécessitait une reconstruction précise des gradients à la frontière pour pouvoir conserver une convergence à l'ordre 2 avec le raffinement du maillage, la formulation lagrangienne converge sans problème avec le bon taux sans calcul complémentaire et l'estimateur d'erreur fonctionne aussi très bien. Il sera donc fiable pour des utilisations ultérieures pour lesquelles nous ne disposerons pas de la solution exacte.

Nous avons ensuite évalué les performances de la formulation lagrangienne sur un cas pratique. Nous avons calculé des états voisins pour des profils NACA, il s'agit d'extrapoler sur un profil voisin la solution elle-même, des valeurs locales comme le coefficient de friction ou de pression ou des quantités intégrales comme les coefficients de portance ou de trainée. Cette application nous a permis de montrer la facilité d'utilisation des sensibilités lagrangiennes. Dans un premier temps, nous avons pu reconstruire les isolignes de vitesse et de pression sur une géométrie déformée. Celles-ci restent alors assez fidèles aux isolignes des profils recalculés. De manière plus quantitative, nous avons extrapolé les coefficients de portance et de trainée et comparé avec les résultats qui avaient été obtenus en formulation eulérienne. Nous avons alors constaté que les résultats étaient semblables, ce qui montre la pertinence des sensibilités lagrangiennes, mais en plus que ces résultats étaient obtenus sur des maillages plus grossiers. La structure des maillages obtenus

après plusieurs cycles d'adaptation est différente, la répartition des noeuds est plus homogène avec la formulation lagrangienne car les erreurs aux frontières sont moins importantes.

Le coût numérique de cette formulation, ce sont deux inconnues supplémentaires dans le problème mais ceci est compensé par une convergence plus rapide. Nous pourrions encore gagner du temps de calcul en combinant les deux formulations. En effet, dans beaucoup de cas, la déformation du domaine ne concerne qu'une zone réduite du domaine de calcul. Par exemple, sur le cas du profil, seul le voisinage du profil est affecté, loin du profil, la déformation est pratiquement nulle. Nous pourrions donc utiliser la formulation lagrangienne dans les zones déformées et la formulation eulérienne ailleurs, ce qui permettrait de tirer profit des atouts de chaque formulation.

## RÉFÉRENCES

- [1] Arora, J. S. (1993). An exposition of the material derivative approach for structural shape sensitivity analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **105**, 41–62.
- [2] Belegundu, A. D. et Rajan, S. D. (1988). A shape optimization approach based on natural design variables and shape functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **66**, 87–106.
- [3] Bobaru, F. et Mukherjee, S. (2001). Shape sensitivity analysis and shape optimization in planar elasticity using element-free galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**, 4319–4337.
- [4] Boisgerault, S. (2000). *Optimisation de forme : systèmes non linéaires et mécanique des fluides*. Thèse de doctorat, École des Mines de Paris-Informatique Temps réel, Robotique, Automatique.
- [5] Borggaard, J. et Burns, J. (1997a). Asymptotically consistent gradients in optimal design. In *Multidisciplinary Design Optimization : State of the Art*, volume 1, Philadelphia, PA, pages 303–314. SIAM Publications.
- [6] Borggaard, J. et Burns, J. (1997b). A pde sensitivity equation method for optimal aerodynamic design. *Journal of Computational Physics*, **136(2)**, 366–384.
- [7] Borggaard, J. T. (1994). *The Sensitivity Equation Method for Optimal Design*. Thèse de doctorat, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA.
- [8] Cardoso, J. B. et Arora, J. S. (1989). Lagrangian interpretation of nonlinear design sensitivity analysis with continuum formulation. In *CAD/CAM Robotics and Factories of the Future. 3rd International Conference (CARS and FOF '88) Proceedings*, volume 2, pages 90–94.

- [9] Choi, J. H. (2002). Shape design sensitivity analysis and optimization of general plane arch. *Finite Elements in Analysis and Design*, **39**, 119–136.
- [10] Delfour, M. C. et Zolésio, J.-P. (2001). *Shapes and Geometries : Analysis, Differential Calculus, and Optimization*. Advances in Design and Control, SIAM, Philadelphia.
- [11] Dems, K. (1987). Sensitivity analysis in thermal problems–II : Structure shape variation. *Journal of Thermal Stresses*, **10**, 1–16.
- [12] DiCaro, R. (2007). Analyse de sensibilité de forme pour le modèle de turbulence k- $\epsilon$ . Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Montréal, QC.
- [13] Duvigneau, R. et Pelletier, D. (2005). On accurate boundary conditions for a shape sensitivity equation method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **50**, 147–164.
- [14] Duvigneau, R., Pelletier, D., et Borggaard, J. (2006). An improved continuous sensitivity equation method for optimal shape design in mixed convection. *Numerical Heat Transfert, Part B*, **50**, 1–24.
- [15] Etienne, S., Hay, A., Garon, A., et Pelletier, D. (2006). The sensitivity equation method in fluid mechanics. *Collection of Technical Papers - 36th AIAA Fluid Dynamics Conference*, **2**, 867–881.
- [16] Fortin, A. et Garon, A. (2000). *Les éléments finis : de la théorie á la pratique*. École Polytechnique de Montréal, Montréal, QC.
- [17] Gao, Z., Ma, Y., et Zhuang, H. (2007). Shape optimization for stokes flow. *Applied Numerical Mathematics*, **34**, 99–112.
- [18] Gunzburger, M. D. (1997). *Three lectures on flow optimisation*. Applied Mathematics Report Number AM97-8, Department Mathematics, Iowa State University, Ames, Iowa.

- [19] Haug, E. J., Choi, K. K., et Komkov, V. (1986). *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. Academic Press, New York.
- [20] Hristova, H., Etienne, S., Pelletier, D., et Borggaard, J. (2005). A continuous sensitivity equation method for time-dependent incompressible laminar flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **50**, 817–844.
- [21] Kleiber, M. et Sluzalec, A. (1996). Material derivative and control volume approaches to shape sensitivity analysis of nonlinear transient thermal problems. *Structural Optimization*, **11**, 56–63.
- [22] Lee, B. Y. (1997). Direct differentiation formulation for boundary element shape sensitivity analysis of axisymmetric elastic solid. *International Journal of Solids Structures*, **34**, 99–112.
- [23] Navarrina, F., Lopez-Fontan, S., Colomina, I., Bendito, E., et Casteleiro, M. (2000). High order shape design sensitivity : a unified approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **188**, 681–696.
- [24] Pelletier, D., Hay, A., Etienne, S., et Borggaard, J. (2008). The sensitivity equation method in fluid mechanics. *European Journal of Computational Mechanics*, **17(2)**, 31–61.
- [25] Pelletier, D. et Roache, P. J. (2002). CFD code verification and the method of manufactured solution. In *Proceedings of the 10th Annual Conference of the CFD Society of Canada*, Windsor, ON, pages 303–314.
- [26] Sackinger, P. A., Schunk, P., et Rao, R. R. (1996). A Newton-Raphson pseudo-solid domain mapping technique for free and moving boundary problems : a finite element implementation. *Journal of Computational Physics*, **125**, 83–103.
- [27] Salençon, J. (2005). *Mécanique des milieux continus. Tome I : Concepts généraux*. Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau.
- [28] Smith, D. E. (1996). *Optimal Design and analysis for polymer extrusion and molding*. Thèse de doctorat, University of Illinois, Urbana-Champaign.

- [29] Taroco, E. (2000). Shape sensitivity analysis in linear elastic fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **188**, 697–712.
- [30] Tortorelli, D. A., Tomasko, J. A., Morthland, T. E., et Dantzig, J. A. (1994). Optimal design of nonlinear parabolic systems. part II : Variable spatial domain with applications to casting optimization. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **113**, 157–172.
- [31] Tortorelli, D. A. et Wang, Z. X. (1993). A systematic approach to shape sensitivity analysis. *International Journal of Solids Structures*, **30**, 1181–1212.
- [32] Turgeon, E. (2001). *Méthode d'éléments finis adaptative pour la résolution des sensibilités d'écoulements*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal.
- [33] van Keulen, F., Haftka, R. T., et Kim, N. H. (2005). Review of options for structural design sensitivity analysis. part 1 : Linear system. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **194**, 3213–3243.
- [34] Wang, Z. X., Tortorelli, D. A., et Dantzig, J. A. (1996). Sensitivity analysis and optimization of coupled thermal and flow problems with applications to contraction design. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **23**, 991–1020.
- [35] Zienkiewicz, O. C. et Zhu, J. Z. (1992a). The superconvergent patch recovery and *a posteriori* error estimates. Part 1 : The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **33**, 1331–1364.
- [36] Zienkiewicz, O. C. et Zhu, J. Z. (1992b). The superconvergent patch recovery and *a posteriori* error estimates. Part 2 : Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **33**, 1365–1382.

## ANNEXE I

### TRANSFORMATIONS D'ESPACES ET DÉRIVÉES MATÉRIELLES

Nous présentons brièvement les démonstrations des formules exposées dans la section 2.3.1 et les formules permettant une dérivation plus systématique des équations. Le but étant de comprendre le raisonnement, nous ne nous attardons pas sur les considérations mathématiques et nous supposons que toutes les fonctions et espaces sont de régularité suffisante pour que toutes les fonctions, les dérivées et intégrales soient bien définies. Pour plus de détails et de rigueur mathématique, il est préférable de se référer aux travaux de J-P Zolésio et M.C.Delfour<sup>[10]</sup>.

#### I.1 Conventions de notation

Dans cette partie, nous allons définir quelques conventions de notation pour les opérateurs.

Considérons **A** et **B** deux tenseurs d'ordre 2. La double contraction est définie de la manière suivante :

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij}B_{ji} = B_{ji}A_{ij} = \mathbf{B} : \mathbf{A}$$



Si  $\mathbf{f}$  est un champ vectoriel, nous définissons le gradient et la divergence de la façon suivante :

$$(\nabla \mathbf{f})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

Ainsi, en deux dimensions nous avons :

$$\nabla \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_x}{\partial y} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}$$

## I.2 Transformations d'espace

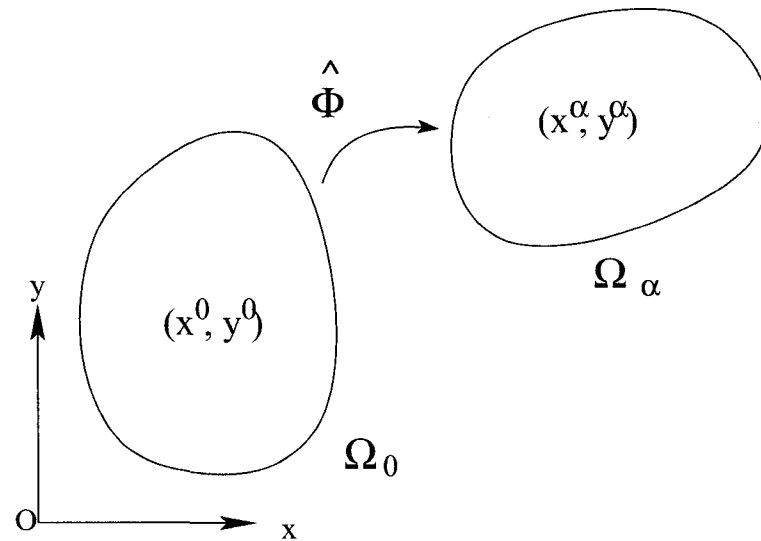


FIG. I.1 Déformation du domaine

Nous reprenons dans cette partie le formalisme introduit à la section 2.3.1. Considérons donc la transformation  $\hat{\phi}$  entre le domaine  $\Omega_0$  et  $\Omega_\alpha$ , son gradient

$\mathbf{F}$  et la vitesse de déformation  $V_M$ . Nous allons démontrer les relations de correspondance entre les 2 domaines. Soient un champ de vecteurs  $\mathbf{f}^\alpha(\mathbf{x}^\alpha, \alpha)$  défini sur  $\Omega_\alpha$  et son correspondant  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha)$  sur  $\Omega_0$ , démontrons les formules suivantes :

– Opérateur divergence (2.27)

$$\nabla^\alpha \cdot \mathbf{f}^\alpha = \mathbf{F}^{-1} : \nabla \mathbf{f}$$

Les dérivées en espace s'exprime par le théorème des fonctions composées de la manière suivante.

$$\begin{aligned} \nabla^\alpha \cdot \mathbf{f}^\alpha &= \frac{\partial f_x^\alpha(x^\alpha, y^\alpha)}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial f_y^\alpha(x^\alpha, y^\alpha)}{\partial y^\alpha} \\ &= \frac{\partial f_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial f_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial f_y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y^\alpha} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y^\alpha} \\ &= (\nabla f)_{ij} (\mathbf{F}^{-1})_{ji} \\ &= \mathbf{F}^{-1} : \nabla \mathbf{f} \end{aligned}$$

– Opérateur gradient (2.28)

$$\nabla^\alpha \mathbf{f}^\alpha = \nabla \mathbf{f} \cdot \mathbf{F}^{-1}$$

La composante  $ij$  du gradient peut se décomposer de la manière suivante, en utilisant la notation indicielle :

$$\begin{aligned} (\nabla^\alpha \mathbf{f}^\alpha)_{ij} &= \frac{\partial f_i^\alpha}{\partial x_j^\alpha} \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_j^\alpha} = (\nabla \mathbf{f})_{ik} (\mathbf{F}^{-1})_{kj} \\ &= (\nabla \mathbf{f} \cdot \mathbf{F}^{-1})_{ij} \end{aligned}$$

– Formule (2.30)

$$\mathbf{F} \cdot \frac{D\mathbf{F}^{-1}}{D\alpha} = -\nabla^\alpha V_M^\alpha$$

Elle se démontre simplement de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{D\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}}{D\alpha} &= \frac{D\mathbf{F}}{D\alpha}\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}\frac{D\mathbf{F}^{-1}}{D\alpha} = 0 \quad \text{donc} \\
 \mathbf{F}\frac{D\mathbf{F}^{-1}}{D\alpha} &= -\frac{D\mathbf{F}}{D\alpha}\mathbf{F}^{-1} \\
 &= -\nabla V_M \cdot \mathbf{F}^{-1} \\
 &= -\nabla^\alpha V_M^\alpha
 \end{aligned}$$

### I.3 Dérivées matérielles

Considérons à nouveau la transformation  $\hat{\phi}$  entre le domaine de référence  $\Omega_0$  et le domaine déformé  $\Omega_\alpha$ , son taux de déformation  $\mathbf{F}$  et la vitesse de transformation  $V_M$ . Nous cherchons alors à évaluer les dérivées matérielles de champs ou d'intégrales en  $\alpha = 0$ , c'est à dire pour la température par exemple,

$$\frac{DT}{D\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{T(\hat{\phi}(\mathbf{x}, \alpha), \alpha) - T(\mathbf{x}, 0)}{\alpha}$$

En adoptant une démarche analogue à celle de la section 2.3.2, nous pouvons démontrer les formules générales de dérivation présentées ci-dessous. Considérons un champ scalaire  $f$  dépendant du paramètre de forme  $\alpha$ .

– Dérivée matérielle ou lagrangienne d'un volume élémentaire

$$\frac{Dd\Omega}{D\alpha} = \nabla \cdot V_M d\Omega \quad (\text{I.1})$$

– Dérivée matérielle d'une surface élémentaire

$$\frac{Dd\Gamma}{D\alpha} = (\nabla \cdot V_M - (\nabla V_M \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \quad (\text{I.2})$$

Cette expression peut être retravaillée pour faire apparaître la courbure de la

courbe ou de la surface mais nous ne retiendrons pas cette possibilité car la courbure n'est pas calculée dans le code car la normale est exprimée en fonction de l'abscisse curviligne.

- Dérivée matérielle d'une intégrale de volume

$$\frac{D}{D\alpha} \left( \int_{\Omega} f \, d\Omega \right) = \int_{\Omega} \left( \frac{Df}{D\alpha} + f \nabla \cdot V_M \right) d\Omega \quad (\text{I.3})$$

- Dérivée matérielle d'une intégrale de surface

$$\frac{D}{D\alpha} \left( \int_{\Gamma} f \, d\Gamma \right) = \int_{\Gamma} \left( \frac{Df}{D\alpha} + f (\nabla \cdot V_M - (\nabla V_M \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}) \right) d\Gamma \quad (\text{I.4})$$

- Dérivée matérielle d'un gradient

$$\frac{D\nabla f}{D\alpha} = \nabla \frac{Df}{D\alpha} - \nabla f \cdot \nabla V_M \quad (\text{I.5})$$

Ces formules sont présentées et démontrées avec différents formalismes. dans <sup>[10]</sup>, <sup>[19]</sup> ou <sup>[31]</sup>. Les dérivées totales sont alors souvent exprimées en fonction des dérivées partielles correspondantes, ce qui permet de faire des simplifications supplémentaires, par exemple des intégrations par parties pour faire apparaître des intégrales de bord. Cependant, dans notre cas, nous cherchons justement une forme faible en fonction des dérivées totales (les sensibilités lagrangiennes), c'est pourquoi nous n'en parlons pas plus dans ce projet.

## ANNEXE II

### AUTRES DÉVELOPPEMENTS DE L'ÉQUATION DES SENSIBILITÉS POUR L'ÉQUATION DE LA CHALEUR

Comme mentionné à la section 2.3.2.2, il y a plusieurs façons de dériver les équations qui mènent au même résultat, nous en présentons ici 2. La première est obtenue en dérivant la forme forte de l'équation de la chaleur et en intégrant par partie ensuite pour obtenir la forme faible des sensibilités lagrangiennes. Pour la seconde façon, nous utiliserons les formules de dérivation générales. Ces développements complémentaires pourraient aussi être utilisés pour l'équation de Navier-Stokes.

#### II.1 Dérivation de la forme forte

Reprenons le problème de l'équation de la chaleur 2.1 :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (k \nabla T) &= Q \quad \text{dans } \Omega_\alpha \\ k \nabla T \cdot \mathbf{n} &= \bar{q} \quad \text{sur } \Gamma_q \\ T &= \bar{T} \quad \text{sur } \Gamma_T\end{aligned}$$

Nous avons choisi de dériver la forme faible associée à ce problème mais on peut aussi choisir de dériver la forme forte (avec la même démarche, passage au domaine de référence, dérivation, retour au domaine déformé) et d'intégrer par partie ensuite. Nous utiliserons les mêmes notations que précédemment. Nous supposons que  $\Gamma_T = \partial\Omega_\alpha$  Soit une fonction test  $\delta W$  appartenant à l'ensemble des fonctions admissibles. En multipliant par une fonction test et en intégrant sur le domaine,

nous obtenons :

$$\int_{\Omega_\alpha} [\nabla^\alpha \cdot (k \nabla^\alpha T) - Q] \delta W \, d\Omega_\alpha = 0$$

Avec un changement de variable, nous passons l'intégrale au domaine de référence.

Nous obtenons alors :

$$\int_{\Omega_0} [\mathbf{F}^{-1} : \nabla (k \nabla T \cdot \mathbf{F}^{-1}) - Q] \delta W \, J d\Omega_0 = 0$$

Nous pouvons donc dériver formellement par rapport à  $\alpha$  puisque le domaine d'intégration est indépendant du paramètre, ce qui mène à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \left\{ \frac{D\mathbf{F}^{-1}}{D\alpha} : \nabla (k \nabla T \cdot \mathbf{F}^{-1}) + \mathbf{F}^{-1} : \nabla \left( k \nabla T \cdot \frac{D\mathbf{F}^{-1}}{D\alpha} \right) \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{F}^{-1} : \nabla \left[ \left( \frac{Dk}{D\alpha} \nabla T + k \nabla \frac{DT}{D\alpha} \right) \cdot \mathbf{F}^{-1} \right] - \frac{DQ}{D\alpha} \right\} \delta W \, J d\Omega_0 \\ & + \int_{\Omega_0} [\mathbf{F}^{-1} : \nabla (k \nabla T \cdot \mathbf{F}^{-1}) - Q] \delta W \, \frac{DJ}{D\alpha} d\Omega_0 = 0 \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que les fonctions tests ne dépendent pas du paramètre.

En revenant sur la configuration déformée, nous avons :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\alpha} \left[ -\nabla^\alpha V_M^\alpha : \nabla^\alpha (k \nabla^\alpha T) + \nabla^\alpha \cdot (k \nabla^\alpha T) \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha \right. \\ & \quad \left. + \nabla^\alpha \cdot \left( \frac{Dk}{D\alpha} \nabla T + k \nabla S_T - k \nabla T \cdot \nabla^\alpha V_M^\alpha \right) \right] \delta W \, d\Omega_\alpha \quad (\text{II.1}) \\ & - \int_{\Omega_\alpha} \left[ \frac{DQ}{D\alpha} + Q \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha \right] \delta W \, d\Omega_\alpha = 0 \end{aligned}$$

Si  $f$  est un champ scalaire,  $\bar{\mathbf{U}}$  un vecteur et  $\bar{\mathbf{b}}$  un tenseur, nous avons les identités

suivantes :

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\mathbf{b}}} : \nabla \bar{\mathbf{U}} &= \nabla \cdot (\bar{\bar{\mathbf{b}}} \cdot \bar{\mathbf{U}}) - \nabla \cdot (\bar{\bar{\mathbf{b}}}^T) \cdot \bar{\mathbf{U}} \\ f \nabla \cdot (\bar{\mathbf{U}}) &= \nabla \cdot (f \bar{\mathbf{U}}) - \bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla f\end{aligned}$$

Considérons la première de ces formules en posant  $\bar{\bar{\mathbf{b}}} = \nabla^\alpha V_M^\alpha$  et  $\bar{\mathbf{U}} = k \nabla^\alpha T$ . Nous avons alors :

$$\nabla^\alpha V_M^\alpha : \nabla^\alpha (k \nabla^\alpha T) = \nabla^\alpha \cdot (\nabla^\alpha V_M^\alpha \cdot k \nabla^\alpha T) - \nabla^\alpha \cdot (\nabla^\alpha V_M^\alpha)^T \cdot k \nabla^\alpha T$$

Prenons à présent la deuxième avec  $\bar{\mathbf{U}} = k \nabla^\alpha T$  et  $f = \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha$ , nous obtenons

$$\nabla^\alpha \cdot (k \nabla^\alpha T) \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha = \nabla^\alpha \cdot (k \nabla^\alpha T \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha) - k \nabla^\alpha T \cdot \nabla^\alpha (\nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha)$$

En remarquant que  $\nabla^\alpha \cdot (\nabla^\alpha V_M^\alpha)^T = \nabla^\alpha (\nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha)$ , nous avons

$$\begin{aligned}-\nabla^\alpha V_M^\alpha : \nabla^\alpha (k \nabla^\alpha T) + \nabla^\alpha \cdot (k \nabla^\alpha T) \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha \\ = -\nabla^\alpha \cdot (\nabla^\alpha V_M^\alpha \cdot k \nabla^\alpha T) + \nabla^\alpha \cdot (k \nabla^\alpha T \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha)\end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant dans (II.1) nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\alpha} \left[ \nabla^\alpha \cdot (-\nabla^\alpha V_M^\alpha \cdot k \nabla^\alpha T + k \nabla^\alpha T \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha) \right. \\ \left. + \nabla^\alpha \cdot \left( \frac{Dk}{D\alpha} \nabla T + k \nabla S_T - k \nabla T \cdot \nabla^\alpha V_M^\alpha \right) \right] \delta W \, d\Omega_\alpha \\ - \int_{\Omega_\alpha} \left[ \frac{DQ}{D\alpha} + Q \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha \right] \delta W \, d\Omega_\alpha = 0\end{aligned}$$

Nous pouvons à présent intégrer par partie la première intégrale et nous retrouvons la forme faible obtenue à la section 2.3.2.

## II.2 Utilisation des formules générales

Dans cette partie, nous allons reprendre la forme faible de l'équation de la chaleur et utiliser les formules de dérivation de la section I.3 pour établir la forme faible de l'équation des sensibilités lagrangiennes. Ceci est équivalent à ce qui a été exposé à la section 2.3.2 mais plus direct. Nous devons donc calculer la dérivée par rapport à  $\alpha$  de l'équation suivante :

$$\int_{\Omega} (k \nabla T \cdot \nabla \delta W + Q \delta W) d\Omega = 0$$

Nous allons donc appliquer la formule (I.3)

$$\frac{D}{D\alpha} \left( \int_{\Omega} f d\Omega \right) = \int_{\Omega} \left( \frac{Df}{D\alpha} + f \nabla \cdot V_M \right) d\Omega$$

avec  $f = k \nabla T \cdot \nabla \delta W + Q \delta W$

Nous obtenons alors directement :

$$\begin{aligned} & \frac{D}{D\alpha} \int_{\Omega} (k \nabla T \cdot \nabla \delta W + Q \delta W) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left[ \frac{D}{D\alpha} (k \nabla T \cdot \nabla \delta W + Q \delta W) + (k \nabla T \cdot \nabla \delta W + Q \delta W) \nabla \cdot V_M \right] d\Omega \quad (\text{II.2}) \end{aligned}$$

Nous devons maintenant évaluer la dérivée totale du gradient de la température et du gradient de la fonction test. Nous appliquons donc la formule (I.5)

$$\begin{aligned} \frac{D \nabla T}{D\alpha} &= \nabla S_T - \nabla T \nabla V_M \\ \frac{D \nabla \delta W}{D\alpha} &= -\nabla \delta W \nabla V_M \quad (\text{rappelons que } \nabla \frac{D \delta W}{D\alpha} = 0) \end{aligned}$$



Ainsi nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{D}{D\alpha} (\nabla T \cdot \nabla \delta W) &= \nabla S_T \cdot \nabla \delta W - \nabla T \cdot \nabla V_M \cdot \nabla \delta W - \nabla T \cdot \nabla \delta W \cdot \nabla V_M \\ &= \nabla S_T \cdot \nabla \delta W - \nabla T \cdot (\nabla V_M + \nabla^T V_M) \cdot \nabla \delta W \end{aligned}$$

En remplaçant dans (II.2), nous obtenons la même forme qu'à la section 2.3.2, c'est à dire,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{Dk}{D\alpha} \nabla T \cdot \nabla \delta W + k \nabla S_T \cdot \nabla \delta W - k \nabla T \cdot (\nabla V_M + \nabla^T V_M) \cdot \nabla \delta W \\ + k \nabla \cdot V_M \nabla T \cdot \nabla \delta W + \left( \frac{DQ}{D\alpha} + Q \nabla \cdot V_M \right) \delta W \, d\Omega = 0 \end{aligned}$$

## ANNEXE III

### PROJECTION DES ÉQUATIONS DES SENSIBILITÉS LAGRANGIENNES

Nous avons développé au chapitre 4 les formes faibles pour calculer les sensibilités lagrangiennes du problème. Nous allons maintenant détailler les différents termes de ces formes faibles. Il s'agit des expressions qui ont été utilisées dans le code. Nous utiliserons les notations complémentaires suivantes :

- $(u, v)$  les composantes de la vitesse selon les axes  $(Ox, Oy)$
- $(S_u, S_v)$  les composantes de sensibilité lagrangienne de la vitesse
- $(\delta S_u, \delta S_v)$  les composantes de la fonction test associée à la sensibilité du mouvement
- $V_M$  la vitesse de maille ou de déformation et  $V_{Mx}, V_{My}$  ses composantes

#### III.1 Continuité

Reprenons la forme faible des sensibilités issue de l'équation de continuité (4.16).

$$\int_{\Omega_\alpha} (\nabla^\alpha \cdot \mathbf{S}_u + \nabla^\alpha \cdot \mathbf{u} \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha - \nabla^\alpha V_M^\alpha : \nabla^\alpha \mathbf{u}) \delta S_P d\Omega_\alpha = 0$$

En développant les différents termes et la contraction, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\alpha} \left[ \left( \frac{\partial S_u}{\partial x} + \frac{\partial S_v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \nabla^\alpha \cdot V_M \right. \\ & \quad \left. - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial V_{Mx}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial V_{My}}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial V_{Mx}}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial V_{My}}{\partial y} \right) \right] \delta S_P d\Omega_\alpha \\ & = 0 \end{aligned}$$

### III.2 Mouvement

Nous développons à présent les différents termes de la forme faible des sensibilités de mouvement. Rappelons qu'elle était de la forme suivante :

$$\frac{D \text{ Convection}}{D\alpha} + \frac{D \text{ Pression}}{D\alpha} + \frac{D \text{ Diffusion}}{D\alpha} = \frac{D \text{ Force}}{D\alpha} + \frac{D \text{ Terme de bord}}{D\alpha}$$

Nous allons détailler chaque terme.

#### Terme de convection

Nous pouvons décomposer le terme de de convection 4.18 de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{D}{D\alpha} \int_{\Omega_\alpha} \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla^\alpha) \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{S}_u \, d\Omega_\alpha \\ &= \int_{\Omega_\alpha} \left( \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} + \rho \nabla^\alpha \cdot \mathbf{V}_M^\alpha \right) (\mathbf{u} \cdot \nabla^\alpha) \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{S}_u \, d\Omega_\alpha \\ & \quad + \int_{\Omega_\alpha} \rho [(\mathbf{S}_u \cdot \nabla^\alpha) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla^\alpha) \mathbf{S}_u - \nabla^\alpha \mathbf{u} \cdot \nabla^\alpha \mathbf{V}_M^\alpha \cdot \mathbf{u}] \cdot \delta \mathbf{S}_u \, d\Omega_\alpha \\ &= \int_{\Omega_\alpha} \text{Conv}_x \delta S_u + \text{Conv}_y \delta S_v \, d\Omega_\alpha \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} \text{Conv}_x &= \left( \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} + \rho \nabla^\alpha \cdot \mathbf{V}_M \right) \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ & \quad + \rho \left( S_u \frac{\partial u}{\partial x} + S_v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial S_u}{\partial x} + v \frac{\partial S_u}{\partial y} \right) \\ & \quad - \rho \left[ u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial V_{Mx}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial V_{My}}{\partial x} \right) + v \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial V_{Mx}}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial V_{My}}{\partial y} \right) \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Conv}_y = & \left( \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} + \rho \nabla^\alpha \cdot V_M \right) \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ & + \rho \left( S_u \frac{\partial v}{\partial x} + S_v \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial S_v}{\partial x} + v \frac{\partial S_v}{\partial y} \right) \\ & - \rho \left[ u \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial V_{Mx}}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial V_{My}}{\partial x} \right) + v \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial V_{Mx}}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial V_{My}}{\partial y} \right) \right] \end{aligned}$$

### Terme de pression

Considérons à présent le terme de pression 4.19 :

$$\begin{aligned} & \frac{D}{D\alpha} \int_{\Omega_\alpha} -p \nabla^\alpha \cdot \delta \mathbf{S}_u \, d\Omega_\alpha \\ &= - \int_{\Omega_\alpha} [(S_p + p \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha) \nabla^\alpha \cdot \delta \mathbf{S}_u - p \nabla^\alpha V_M^\alpha : \nabla^\alpha \delta \mathbf{S}_u] \, d\Omega_\alpha \\ &= \int_{\Omega_\alpha} \left[ - (S_p + p \nabla^\alpha \cdot V_M) \left( \frac{\partial \delta S_u}{\partial x} + \frac{\partial \delta S_v}{\partial y} \right) \right. \\ & \quad + p \left( \frac{\partial V_{Mx}}{\partial x} \frac{\partial \delta S_u}{\partial x} + \frac{\partial V_{My}}{\partial x} \frac{\partial \delta S_u}{\partial y} \right) \\ & \quad \left. + p \left( \frac{\partial V_{Mx}}{\partial y} \frac{\partial \delta S_v}{\partial x} + \frac{\partial V_{My}}{\partial y} \frac{\partial \delta S_v}{\partial y} \right) \right] \, d\Omega_\alpha \end{aligned}$$

### Terme de diffusion

Reprenons le terme de diffusion 4.20. Nous pouvons décomposer la double contraction :

$$\begin{aligned}
& \frac{D}{D\alpha} \int_{\Omega_\alpha} \boldsymbol{\tau} : \nabla^\alpha \delta S_{\mathbf{u}} d\Omega_\alpha \\
&= \int_{\Omega_\alpha} \left( \frac{D\mu}{D\alpha} + \mu \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha \right) (\nabla^\alpha \mathbf{u} + \nabla^{\alpha T} \mathbf{u}) : \nabla^\alpha \delta S_{\mathbf{u}} d\Omega_\alpha \\
&\quad + \int_{\Omega_\alpha} \mu (\nabla^\alpha S_{\mathbf{u}} + \nabla^{\alpha T} S_{\mathbf{u}}) : \nabla^\alpha \delta S_{\mathbf{u}} d\Omega_\alpha \\
&\quad - \int_{\Omega_\alpha} \mu \left( \nabla^\alpha \mathbf{u} \nabla^\alpha V_M^\alpha + (\nabla^\alpha \mathbf{u} \nabla^\alpha V_M^\alpha)^T \right) : \nabla^\alpha \delta S_{\mathbf{u}} d\Omega_\alpha \\
&\quad - \int_{\Omega_\alpha} \mu (\nabla^\alpha V_M^\alpha \cdot (\nabla^\alpha \mathbf{u} + \nabla^{\alpha T} \mathbf{u})) : \nabla^\alpha \delta S_{\mathbf{u}} d\Omega_\alpha \\
&= \int_{\Omega_\alpha} \text{Diff}_{xx} \frac{\partial \delta S_u}{\partial x} + \text{Diff}_{xy} \frac{\partial \delta S_v}{\partial x} + \text{Diff}_{yx} \frac{\partial \delta S_u}{\partial y} + \text{Diff}_{yy} \frac{\partial \delta S_v}{\partial y}
\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
\text{Diff}_{xx} = & 2 \left( \frac{D\mu}{D\alpha} + \mu \nabla^\alpha \cdot V_M \right) \frac{\partial u}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial S_u}{\partial x} \\
& - \mu \left( 4 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial V_{Mx}}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial V_{My}}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial V_{Mx}}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Diff}_{xy} = & \left( \frac{D\mu}{D\alpha} + \mu \nabla^\alpha \cdot V_M \right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \mu \left( \frac{\partial S_u}{\partial y} + \frac{\partial S_v}{\partial x} \right) \\
& - \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial V_{Mx}}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial V_{My}}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial V_{Mx}}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial V_{My}}{\partial x} \right) \\
& - \mu \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial V_{Mx}}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial V_{Mx}}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Diff}_{yx} = & \left( \frac{D\mu}{D\alpha} + \mu \nabla^\alpha \cdot V_M \right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \mu \left( \frac{\partial S_u}{\partial y} + \frac{\partial S_v}{\partial x} \right) \\
& - \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial V_{Mx}}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial V_{My}}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial V_{Mx}}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial V_{My}}{\partial x} \right) \\
& - \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial V_{My}}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial V_{My}}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Diff}_{yy} = & 2 \left( \frac{D\mu}{D\alpha} + \mu \nabla^\alpha \cdot V_M \right) \frac{\partial v}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial S_v}{\partial y} \\ & - \mu \left( 4 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial V_{My}}{\partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial V_{Mx}}{\partial y} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial V_{My}}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

### III.3 Energie

Pour l'équation de l'énergie, la forme faible de l'équation des sensibilités était la suivante (4.22)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\alpha} \left[ \left( \frac{D\rho c_P}{D\alpha} + \rho c_P \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha \right) \mathbf{u} \cdot \nabla^\alpha T + \rho c_P \mathbf{S}_u \cdot \nabla^\alpha T \right. \\ & \quad \left. + \rho c_P \mathbf{u} \cdot \nabla^\alpha S_T - \rho c_P \mathbf{u} \cdot (\nabla^\alpha T \cdot \nabla^\alpha V_M^\alpha) \right] \delta S_T d\Omega_\alpha \\ & + \int_{\Omega_\alpha} \left[ \left( \frac{D\lambda}{D\alpha} + \lambda \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha \right) \nabla^\alpha T \cdot \nabla^\alpha \delta S_T + \lambda \nabla^\alpha S_T \cdot \nabla^\alpha \delta S_T \right. \\ & \quad \left. - \lambda \nabla^\alpha T \cdot (\nabla^\alpha V_M^\alpha + \nabla^{\alpha T} V_M^\alpha) \cdot \nabla^\alpha \delta S_T \right] d\Omega_\alpha \\ & = \int_{\Omega_\alpha} \left( \frac{Dq_S}{D\alpha} + q_S \nabla^\alpha \cdot V_M^\alpha \right) \delta S_T d\Omega_\alpha \end{aligned}$$

Le développement de ces termes donne l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\alpha} \left\{ \left( \frac{D\rho c_P}{D\alpha} + \rho c_P \nabla^\alpha \cdot V_M \right) \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \rho c_P \left( S_u \frac{\partial T}{\partial x} + S_v \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right. \\
& \quad \left. - \rho c_P \left[ u \left( \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial V_{Mx}}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial V_{My}}{\partial x} \right) + v \left( \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial V_{Mx}}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial V_{My}}{\partial y} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + \rho c_P \left( u \frac{\partial S_T}{\partial x} + v \frac{\partial S_T}{\partial y} \right) \right\} \delta S_T d\Omega_\alpha \\
& + \int_{\Omega_\alpha} \left\{ \left( \frac{D\lambda}{D\alpha} + \lambda \nabla^\alpha \cdot V_M \right) \left( \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \delta S_T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \delta S_T}{\partial y} \right) \right. \\
& \quad - \lambda \left[ \left( 2 \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial V_{Mx}}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \left( \frac{\partial V_{Mx}}{\partial y} + \frac{\partial V_{My}}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial \delta S_T}{\partial x} \right. \\
& \quad \left. \left( \frac{\partial T}{\partial x} \left( \frac{\partial V_{Mx}}{\partial y} + \frac{\partial V_{My}}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial V_{My}}{\partial y} \right) \frac{\partial \delta S_T}{\partial y} \right] \\
& \quad \left. + \lambda \left( \frac{\partial S_T}{\partial x} \frac{\partial \delta S_T}{\partial x} + \frac{\partial S_T}{\partial y} \frac{\partial \delta S_T}{\partial y} \right) \right\} d\Omega_\alpha \\
& = \int_{\Omega_\alpha} \left( \frac{Dq_S}{D\alpha} + q_S \nabla^\alpha \cdot V_M \right) \delta S_T d\Omega_\alpha
\end{aligned}$$

## ANNEXE IV

### DÉTAILS DE LA SOLUTION MANUFACTURÉE

La solution de l'écoulement n'ayant pas une expression très simple, il serait long de calculer tous les termes entrant en jeu dans les équations de l'écoulement et de ses sensibilités. Nous allons donc les exprimer en fonction des variables de l'écoulement, de leur gradient ou de leur sensibilité eulérienne et de la vitesse de déformation.

#### IV.1 Sensibilités de l'écoulement et de la température

La vitesse de maille étant définie par morceaux, il en sera de même pour la sensibilité des différentes variables.

$$\begin{aligned} S_u &= \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial x} V_{Mx} + \frac{\partial u}{\partial y} V_{My} \\ S_v &= \frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial x} V_{Mx} + \frac{\partial v}{\partial y} V_{My} \\ S_T &= \frac{\partial T}{\partial a} + \frac{\partial T}{\partial x} V_{Mx} + \frac{\partial T}{\partial y} V_{My} \end{aligned}$$

#### IV.2 Terme source

Pour équilibrer les équations, nous devons calculer le terme source approprié pour chacune des équations et les conditions aux limites. L'équation des sensibilités s'équilibre en calculant la dérivée lagrangienne du terme source de l'équation de l'écoulement. Comme pour les solutions manufacturées calculées pour l'équation de la chaleur, le code calcule lui-même la sensibilité lagrangienne à partir de la sensi-



lité eulérienne, des gradients du terme source et de la vitesse de maille numérique. En supposant que la densité du fluide est constante ; nous devons fournir au code les termes suivants :

Projection sur  $Ox$

$$\begin{aligned}
 f_x &= \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho u \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
 \frac{\partial f_x}{\partial x} &= \rho \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \rho u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \rho v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\
 &\quad + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \mu \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) \\
 \frac{\partial f_x}{\partial y} &= \rho \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \rho u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \rho v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
 &\quad + \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} - \mu \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \\
 \frac{\partial f_x}{\partial a} &= \rho \frac{\partial u}{\partial a} \frac{\partial u}{\partial x} + \rho u \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial u}{\partial y} + \rho v \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial y} \\
 &\quad + \frac{\partial^2 p}{\partial a \partial x} - \mu \left( \frac{\partial^3 u}{\partial a \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial a \partial y^2} \right)
 \end{aligned}$$

Projection sur  $Oy$

$$\begin{aligned}
 f_y &= \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho u \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
 \frac{\partial f_y}{\partial x} &= \rho \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \rho u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \rho v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\
 &\quad + \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} - \mu \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) \\
 \frac{\partial f_y}{\partial y} &= \rho \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \rho u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \rho v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\
 &\quad + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \mu \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) \\
 \frac{\partial f_y}{\partial a} &= \rho \frac{\partial u}{\partial a} \frac{\partial v}{\partial x} + \rho u \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial v}{\partial y} + \rho v \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial y} \\
 &\quad + \frac{\partial^2 p}{\partial a \partial y} - \mu \left( \frac{\partial^3 v}{\partial a \partial x^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial a \partial y^2} \right)
 \end{aligned}$$

### IV.3 Tractions et flux thermique

Pour le traitement de la solution manufacturée, nous avons à imposer les tractions et flux thermique à la frontière pour les conditions de Neumann. Nous présentons ici leur expression en fonction des variables de l'écoulement.

#### IV.3.1 Tractions

Les forces surfaciques et leur sensibilité lagrangienne sont développées ci-dessous.

Nous avons supposé que la viscosité du fluide était constante.

Projection sur  $Ox$

$$\begin{aligned}
 t_x &= -pn_x + \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y \right) \\
 \frac{Dt_x}{Da} &= -S_p n_x - p \frac{Dn_x}{Da} \\
 &\quad + 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial a \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} V_{Mx} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} V_{My} \right) n_x + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{Dn_x}{Da} \\
 &\quad + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial a \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} V_{Mx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} V_{My} \right) n_y + \mu \frac{\partial u}{\partial y} \frac{Dn_y}{Da} \\
 &\quad + \mu \left( \frac{\partial v}{\partial a \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} V_{Mx} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} V_{My} \right) n_y + \mu \frac{\partial v}{\partial x} \frac{Dn_y}{Da}
 \end{aligned}$$

Projection sur  $Oy$  :

$$\begin{aligned}
 t_y &= -pn_y + \mu \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + 2 \frac{\partial v}{\partial y} n_y \right) \\
 \frac{Dt_y}{Da} &= -S_p n_y - p \frac{Dn_y}{Da} \\
 &\quad + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial a \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} V_{Mx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} V_{My} \right) n_x + \mu \frac{\partial u}{\partial y} \frac{Dn_x}{Da} \\
 &\quad + \mu \left( \frac{\partial v}{\partial a \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} V_{Mx} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} V_{My} \right) n_x + \mu \frac{\partial v}{\partial x} \frac{Dn_x}{Da} \\
 &\quad + 2\mu \left( \frac{\partial v}{\partial a \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} V_{Mx} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} V_{My} \right) n_y + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \frac{Dn_y}{Da}
 \end{aligned}$$

#### IV.3.2 Flux thermique à la frontière

Nous supposons aussi la conductivité thermique constante.

Projection sur  $Ox$

$$\begin{aligned}
 q_x &= \lambda \frac{\partial T}{\partial x} n_x \\
 \frac{Dq_x}{Da} &= \lambda \left( \frac{\partial T}{\partial a \partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} V_{Mx} + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} V_{My} \right) n_x + \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \frac{Dn_x}{Da}
 \end{aligned}$$

Projection sur  $Oy$

$$\begin{aligned}
 q_y &= \lambda \frac{\partial T}{\partial y} n_y \\
 \frac{Dq_y}{Da} &= \lambda \left( \frac{\partial T}{\partial a \partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} V_{Mx} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} V_{My} \right) n_y + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \frac{Dn_y}{Da}
 \end{aligned}$$