

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÉLISATION DE LA DÉCOHÉSION DE L'INTERFACE
RENFORT-MATRICE DANS UN MATÉRIAU COMPOSITE PAR LA
MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

ROMINA BEATRIZ BARELLO
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)

MAI 2008



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 978-0-494-46033-7

Our file Notre référence

ISBN: 978-0-494-46033-7

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

MODÉLISATION DE LA DÉCOHÉSION DE L'INTERFACE
RENFORT-MATRICE DANS UN MATÉRIAU COMPOSITE PAR LA
MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

présenté par: BARELLO Romina Beatriz

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. LAKIS Aouni A., Ph.D., président

M. LÉVESQUE Martin, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. SHIRAZI-ADL Aboulfazl, Ph.D., membre

À mes parents qui m'ont donné la vie et à mon époux qui la fait grandir.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon directeur de recherche, le professeur Martin Lévesque pour son encadrement et ses conseils judicieux sur plusieurs défis trouvés tout au long de ce projet. Son encadrement m'a permis d'acquérir de l'expérience dans le domaine de la recherche ainsi que de l'habilité d'exprimer mes connaissances d'une façon claire et appropriée.

Mes remerciements s'adressent également aux professeurs A. Lakis et A. Shirazi-Adl pour avoir donné leur temps comme membres du jury et évaluer ce mémoire de maîtrise.

Ce projet a été également supporté par différents organismes, tels que les Fonds de Recherche sur la Nature et les Technologies, l'École Polytechnique de Montréal et la Fondation Desève. Je remercie ces organismes pour leur appui financier ainsi que pour leur confiance et encouragement.

Je tiens à remercier mes collègues polytechniciens et non polytechniciennes, les membres de la section Mécanique Appliquée et mes collègues Hélène et Hong Yan pour leur support et écoute tout au long du projet.

Également, j'adresse mes remerciements à mes amis, Damian et Sebastian, qui ont été toujours avec moi sans importer les 10000 Km de distance qui nous séparent ; et de la même façon je remercie mes parents, Liliana et Ricardo, pour leur encouragement, soutien et leurs longues écoutes téléphoniques.

Finalement, je remercie fortement mon époux, Santiago, qui a toujours fait confiance en moi, supporté mes changements d'états d'esprit et m'encouragé tout au long du projet ainsi que pour son soutien et compagnie dans ma vie.

RÉSUMÉ

L'objectif principal de ce projet de maîtrise est de modéliser l'endommagement par décohésion de l'interface renfort-matrice de matériaux composites à renforts discontinus par la méthode des éléments finis. Les phases sont considérées visco-élastiques linéaires. Cet objectif est atteint en suivant les étapes suivantes :

1. Le Chapitre 1 contient la revue bibliographique qui permet de définir le domaine d'intérêt de cette étude.
2. Parmi les méthodes de prédiction du comportement effectif de matériaux composites, l'homogénéisation numérique a été choisie. Ainsi, des modèles éléments finis de microstructures tridimensionnelles ont été développés afin de prédire le comportement mécanique des matériaux composites sans tenir compte de l'endommagement. Le volume élémentaire représentatif est défini par une cellule unitaire contenant des renforts sphériques distribués aléatoirement dans l'espace. La microstructure est périodique car des conditions aux limites périodiques ont été imposées. Des simulations éléments finis sur des matériaux composites constitués de phases Maxwelliennes et incompressibles ont été réalisées pour différentes fractions volumiques de renforts et contrastes entre les propriétés des phases. Une procédure numérique permettant d'obtenir le spectre de relaxation effectif a été développée. Les simulations éléments finis ont été comparées avec les prédictions de techniques d'homogénéisation analytiques. Ces résultats sont présentés au Chapitre 2.
3. La modélisation de la décohésion de l'interface renfort-matrice a été réalisée à l'aide d'un élément fini d'interface. Celui-ci est constitué de deux surfaces. Chaque surface a 6 nœuds, pour un total de 12 nœuds pour l'élément. De plus, ces éléments sont compatibles avec des tétraèdres à 10 nœuds qui sont les éléments solides utilisés pour le maillage des phases. Dans la configuration initiale et sans endommagement, les deux surfaces sont parfaitement collées. Lorsque le volume élémentaire représentatif est sollicité, les deux surfaces se séparent à cause de la déformation des éléments solides adjacents. Ce

comportement permet de modéliser le grossissement des cavités lors de la décohésion. Cette décohésion se déroule selon une loi de comportement définie pour l'interface. Le Chapitre 3 porte sur la formulation de l'élément fini codé et la loi de comportement de l'interface choisie.

4. Les éléments finis d'interface ont été implémentés sur les microstructures développées au Chapitre 2. Les propriétés effectives de matériaux composites endommagés par décohésion ont été comparées avec celles des matériaux composites sans endommagement. Ces éléments montrent un grand potentiel d'utilisation sur différents types de microstructures. Le Chapitre 4 porte sur les différents tests effectués afin de valider l'élément et l'implémentation de celui-ci sur les volumes élémentaires représentatifs.

Finalement, les contributions de ce projet de maîtrise sont :

1. Un ensemble de programmes qui permettent d'obtenir automatiquement les volumes élémentaires représentatifs périodiques ainsi que leurs maillages.
2. Une procédure qui permet d'obtenir le spectre de relaxation effectif.
3. Des comparaisons entre les prédictions de méthodes analytiques d'homogénéisation et celles de simulations éléments finis qui ont déterminé que la méthode Auto-Cohérente est la méthode d'homogénéisation analytique la plus précise parmi celles étudiées. Une publication a découlé de la première étape du projet. Celle-ci est présentée à l'Annexe I.
4. La programmation d'un élément fini d'interface indépendant de la loi de comportement d'interface choisie.

ABSTRACT

The principal objective of this M.Sc. project is the reinforcement-matrix interface damage modeling of randomly distributed particles reinforced composites with the finite element method. The constituents phases are considered as linearly viscoelastic. This document is organized as follows :

1. Chapter 1 contains the literature review that allows defining the subject of this study.
2. Numerical homogenization is selected among the effective behavior of composite materials prediction methods. Therefore, finite element models of tri-dimensional microstructures of composite materials were developed with the aim of predicting the effective behavior of composites without interface damage. The representative volume element is defined as a unit cell which contains randomly distributed spherical reinforcements. In addition, periodic boundary conditions were applied to the microstructures which forced the representative volume elements to be periodic. Finite element simulations of composite materials constituted of Maxwellian and incompressible phases were performed. Different reinforcement volume fractions and properties ratios between phases were considered. A numerical procedure was developed in order to determine the effective relaxation spectra. The finite element simulations were compared against predictions of several analytical homogenization methods. These results are presented in Chapter 2.
3. The reinforcement-matrix interface decohesion was simulated with an interface finite element. The interface finite element is constituted of two surfaces. Each surface has 6 nodes for a total of 12 nodes for the whole element. In addition, these elements are compatible with 10-noded tetrahedrons used for the phases meshing. In the initial configuration and without damage, the two surfaces are perfectly bonded. When the representative volume element is loaded, the two surfaces start to separate as the adjacent solid elements

are deformed. This behavior allows modelling the cavity growth when decohesion occurs. Decohesion follows a constitutive relation defined for the reinforcement-matrix interface. Chapter 3 describes the interface finite element development and the interface constitutive relation.

4. Interface finite elements were implemented in the tridimensional microstructures developed in Chapter 2. The effective properties of composite materials, considering the interface damage, were compared with those of composites materials with perfectly bonded interfaces. These finite elements show a great potential for the in utilization on different microstructures. Chapter 4 describes all the performed tests for validating the element and the element implementation in the representative volume elements.

Finally, the contributions of this roject are :

1. A set of programs that allows generating automatically periodic representative volume elements and finite element models.
2. A numerical procedure that allows obtaining the effective relaxation spectra.
3. Comparisons between analytical homogenization predictions and those obtained from finite element simulations. Among all studied methods, the Self-Consistent scheme gives the best approximation to the finite element simulations. A scientific article was published containing the results of this part of the project (see Appendix I).
4. An interface finite element coding. The implemented formulation does not depend on the selected interface constitutive relation.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	viii
TABLE DES MATIÈRES	x
LISTE DES TABLEAUX	xiii
LISTE DES FIGURES	xiv
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES	xix
LISTE DES ANNEXES	xxiv
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 REVUE DE LA LITTÉRATURE	4
1.1 Introduction	4
1.2 Techniques d'homogénéisation	6
1.3 Conditions aux rives	7
1.3.1 Contraintes homogènes au contour	8
1.3.2 Déformations homogènes au contour	9
1.3.3 Conditions aux limites périodiques	10
1.4 Étapes de l'homogénéisation	12
1.5 Types d'homogénéisation	14
1.5.1 Approches numériques	15
1.5.1.1 Modèles éléments finis	15

1.5.1.2	Étude des conditions aux rives	16
1.5.1.3	Simulations sur des matériaux composites viscoélastiques	18
1.5.1.4	Modèles de cohésion et éléments d'interface	18
1.5.2	Approches d'homogénéisation analytiques	22
1.5.2.1	Matériaux élastiques linéaires	22
1.5.2.2	Matériaux viscoélastiques linéaires sans endommagement	24
1.5.2.3	Introduction de l'endommagement dans les approches analytiques	24
1.6	Conclusions	25

CHAPITRE 2 MODÉLISATION DU COMPORTEMENT MÉCANIQUE DE MATÉRIAUX COMPOSITES SANS ENDOMMAGEMENT 27

2.1	Introduction	27
2.2	Obtention du modèle éléments finis	28
2.3	Évaluation des contraintes	34
2.4	Description des simulations	35
2.4.1	Loi de comportement viscoélastique linéaire	35
2.4.2	Simulations éléments finis	38
2.5	Propriétés effectives du matériau composite	40
2.5.1	Procédure pour obtenir le spectre de relaxation à partir des simulations éléments finis	42
2.5.2	Spectres de relaxation obtenus par des techniques d'homogénéisation analytiques	46
2.6	Résultats et discussions	49
2.7	Conclusions	53

CHAPITRE 3 ÉLÉMENT FINI ET LOI DE COMPORTEMENT D'INTERFACE 55

3.1	Introduction	55
3.2	Modèle continu d'interface	55
3.3	Formulation de l'élément fini d'interface	58
3.3.1	Introduction	58
3.3.2	Formulation	60
3.4	Loi de comportement d'interface	66
3.5	Conclusions	71
CHAPITRE 4 IMPLÉMENTATION DE L'ÉLÉMENT FINI D'INTERFA-		
	CE	72
4.1	Introduction	72
4.2	Sous-routine UEL	72
4.2.1	Structure du programme	74
4.2.2	Régularisation visqueuse	75
4.3	Implémentation de l'élément d'interface sur un problème simple de conditions aux rives	77
4.4	Vérification de l'élément fini d'interface	79
4.5	Implémentation des éléments finis d'interface à 12 nœuds dans les VERs	84
4.5.1	Évaluation des contraintes	85
4.5.2	Matériau composite avec une sphère placée au centre	87
4.5.3	Étude de l'endommagement sur des VERs avec $\zeta = 10\%$	88
4.6	Perspective de travail	92
4.7	Conclusions	93
CONCLUSION		94
ANNEXES		109

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1	Module de relaxation effectif en cisaillement calculé pour le premier temps de calcul pour tous les matériaux étudiés. Pour $\eta = 10$ le module de relaxation instantané pour la matrice est $8,67 \times 10^7$ Pa et pour les renforts est $8,67 \times 10^8$ Pa. Pour $\eta = 100$ le module de relaxation instantané pour la matrice est $8,67 \times 10^6$ Pa et pour les renforts est $8,67 \times 10^8$ Pa. . .	51
Tableau 3.1	Fonctions de forme de l'élément d'interface. Les numéros de nœuds correspondent à ceux montrés à la figure 3.4.	62
Tableau 4.1	Propriétés de l'interface montrée à la figure 4.1	78
Tableau 4.2	Propriétés de l'interface de l'élément COH3D8	81
Tableau 4.3	Propriétés des phases. Cas 1 seule sphère placée au centre du VER.	86
Tableau 4.4	Propriétés des phases. $\zeta = 10\%$	88
Tableau 4.5	Propriétés de l'interface. $\zeta = 10\%$	88
Tableau II.1	Règles d'intégration de 3 et 7 points pour des triangles unitaires.	129

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Définition du volume élémentaire représentatif et des échelles macroscopiques et microscopiques (Sanchez-Palencia et Zaoui, 1987). À l'échelle microscopique le matériau est hétérogène. L'homogénéisation d'un Volume Élémentaire Représentatif (VER) permet d'obtenir les propriétés effectives du matériau hétérogène. Ainsi, les propriétés effectives sont calculées pour le matériau homogène équivalent.	5
Figure 1.2	Différentes tailles du VER pour une même fraction volumique de renforts : (a) 5 renforts, (b) 10 renforts et (c) 20 renforts.	6
Figure 1.3	Conditions aux limites de contraintes homogènes (Bornert et al., 2001). σ^0 correspond à Σ^0 dans le développement présenté dans la section 1.3.1.	7
Figure 1.4	Conditions aux limites de déformations homogènes (Bornert et al., 2001). ϵ^0 correspond à E^0 dans le développement présenté dans la section 1.3.2.	8
Figure 1.5	Champ de déplacement périodique (Bornert et al., 2001). De gauche à droite : champ de déplacement périodique, champ de déplacement homogène et fluctuation périodique.	11
Figure 1.6	Contrainte normale obtenue à partir des potentiels polynomial et exponentiel (Needleman, 1992). La contrainte normale est normalisée en fonction de la contrainte maximale (σ_{max}) que l'interface peut atteindre. Ainsi, les maximum des deux courbes correspondent à $-T_n/\sigma_{max} = 1$. La surface qui est définie par les courbes (polynomiale et exponentielle) représente le travail de séparation.	21

Figure 1.7	Représentation de l'inclusion ellipsoïdale (I) plongée dans un milieu infini (V) et soumise à une déformation libre de contrainte ($\boldsymbol{\varepsilon}^T$) (Lévesque, 2004). La déformation dans l'inclusion est donnée par $\boldsymbol{\varepsilon}^I = \mathbf{S}^E : \boldsymbol{\varepsilon}^T$, où $\mathbf{S}^E$ est le tenseur d'Eshelby. $\mathbf{C}$ est le tenseur de module du milieu infini et $\boldsymbol{\varepsilon}$ est la déformation macroscopique appliquée.	23
Figure 2.1	Sphères générées par périodicité de la sphère j . La sphère i doit vérifier les conditions de distance avec la sphère j et celles générées par le vecteur $\mathbf{h}$	29
Figure 2.2	Distribution aléatoire des renforts obtenue pour une fraction volumique de 20% et VER de 40 sphères.	30
Figure 2.3	Configuration finale de la cellule unitaire. Fraction volumique de 20% et VER de 40 sphères.	31
Figure 2.4	Modèles mécaniques de (a) Maxwell, (b) Voigt et (c) Linéaire Standard.	36
Figure 2.5	Fonction rampe utilisée pour l'application de la déformation macroscopique $\mathbf{E}_{12}$	39
Figure 2.6	Effet de la taille du maillage pour $\zeta = 10\%$ et $\eta = 10$ sur la contrainte macroscopique Σ_{12} (Barello et Lévesque, 2008). Les valeurs de contrainte macroscopique Σ_{12} correspondent au premier temps de calcul.	41
Figure 2.7	Fonction d'essai pour approximer un spectre de relaxation continu $\mu_{\text{app}}^c(t)$ (Barello et Lévesque, 2008). Par exemple, le spectre continu $H_2(\tau)$ est défini par une interpolation linéaire entre les valeurs du spectre à τ_1 et τ_2 . $\Delta g(\tau_2)$ représente la différence entre ces deux valeurs d'intensité.	42

Figure 2.8	Spectres de relaxation obtenus par les différents schémas analytiques pour une fraction volumique $\zeta = 20\%$ et un contraste entre les phases $\eta = 10$. MT : Mori - Tanaka, SC cont : Auto-Cohérent partie continue, SC disc : Auto-Cohérent partie discrète et TOA : Torquato (Barello et Lévesque, 2008).	49
Figure 2.9	Module de relaxation moyen pour chaque taille de VER (15, 30, 40 et 50 sphères). $\zeta = 25\%$ et $\eta=10$. Les barres d'erreur correspondent des intervalles de confiance de 95% en considérant une distribution gaussienne sur les valeurs moyennes. (Barello et Lévesque, 2008).	50
Figure 2.10	Spectres de relaxation obtenus par différentes méthodes. $\zeta = 25\%$ et $\eta=10$. « SC cont » et « SC disc » correspondent aux parties continues et discrètes de la méthode Auto-Cohérente, « MT » correspond au spectre obtenu par la méthode de Mori-Tanaka, « TOA » correspond au spectre obtenu par la méthode de Torquato et « μ_{app}^{c+d} disc et cont » correspondent aux parties discrètes et continues de l'approximation du spectre obtenu par la procédure développée dans la section 2.5.1 (Barello et Lévesque, 2008).	52
Figure 2.11	Module de relaxation calculé au premier temps de calculs en utilisant toutes les méthodes et les simulations éléments finis ($\eta=10$). Les barres d'erreur correspondent à l'erreur relative des simulations éléments finis (FE) en prenant un intervalle de confiance de 95% (Barello et Lévesque, 2008).	54
Figure 3.1	Décohésion de l'interface renfort-matrice dans un matériau composite renforcé par des particules de verre. La direction de chargement est verticale. (Lévesque, 2004).	56
Figure 3.2	Corps constitué de plus d'une phase et une interface.	57

Figure 3.3	Relation entre les forces de réaction au point d'application du chargement et les déplacements appliqués dans un essai du type Mode I. Résultats expérimentaux et à partir de simulations éléments finis (Alfano et Crisfield, 2001).	59
Figure 3.4	Élément d'interface à 12 nœuds (Segurado et LLorca, 2004).	60
Figure 3.5	Assemblage de l'élément d'interface et des éléments solides (Ortiz et Pandolfi, 1999).	61
Figure 3.6	Domaine d'intégration de l'élément. Les nœuds sont indiqués par des nombre romains.	64
Figure 3.7	Loi de comportement bilinéaire et irréversible pour les directions tangentielles (t_1, t_2) et normale (n).	69
Figure 4.1	Problème de condition aux rives : deux blocs ayant une interface. Un des blocs est encastré sur l'extrémité opposée à l'interface. L'autre bloc est soumis à un déplacement uniforme sur l'extrémité opposée à l'interface.	77
Figure 4.2	Configuration déformée des deux blocs. Direction de la sollicitation : x du système de coordonnées global.	79
Figure 4.3	Contrainte uniforme calculée dans les blocs.	79
Figure 4.4	Relation entre les contraintes et les déplacements obtenue à partir des simulations éléments finis pour le problème de la figure 4.2.	80
Figure 4.5	Configuration déformée des deux blocs. Direction de la sollicitation : y du système de coordonnées global.	81
Figure 4.6	Configuration déformée des deux blocs. Direction de la sollicitation : z du système de coordonnées global.	81
Figure 4.7	Élément d'interface COH3D8 (ABAQUS, 2004b).	82
Figure 4.8	État déformé en cisaillement de l'élément COH3D8.	82
Figure 4.9	Contraintes de cisaillement. Élément fini d'interface COH3D8.	83

Figure 4.10	Deux éléments finis d'interface triangulaires connectés afin d'obtenir une brique unitaire.	83
Figure 4.11	Relation entre les contraintes tangentielles et déplacements tangentiels. La loi de comportement imposée est retrouvée.	84
Figure 4.12	Élément fini d'interface dégénéré (INTER204) d'ANSYS (Ansys, 2007).	85
Figure 4.13	Représentation isométrique de la moitié de la cellule unitaire contenant 1 seule sphère placée au centre.	86
Figure 4.14	Section normale à l'axe y . La régions signalée dénote la décohésion de l'interface renfort-matrice.	87
Figure 4.15	Courbes contraintes - déformations pour les états endommagés et sans endommagement. $\bar{\Sigma}_{11}$ constitue la moyenne sur les contraintes Σ_{11} mesurées. ε_{11} est la déformation macroscopique imposée. Les barres d'erreur correspondent à une distribution gaussienne sur les valeurs moyennes du VER=5 sphères en prenant des intervalles de confiance de 95%. . .	89
Figure 4.16	Section normale à l'axe y . VER : 10 sphères. $\zeta = 10\%$. Les flèches indiquent la décohésion de l'interface renfort-matrice.	90
Figure 4.17	Cellule unitaire d'une microstructure d'un matériau composite renforcé par des fibres cylindriques distribuées aléatoirement dans l'espace.	91
Figure 4.18	Section normale à l'axe y . VER : 5 cylindres. $\zeta = 10\%$. Les flèches indiquent la décohésion de l'interface renfort-matrice.	92

LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

$\mathbf{A}_r$:	tenseur de localisation de déformations de la phase r
$\mathbf{B}_r$:	tenseur de concentration de contraintes de la phase r
$\mathbf{C}_{\text{loc}}$	module tangent
$c_r = \zeta$:	fraction volumique de la phase r
$c(t)$:	complaisance de fluage dans un comportement viscoélastique
d_i :	paramètre d'endommagement dans la direction locale i
$\bar{d}^r$:	paramètre régularisé d'endommagement
$\dot{\bar{d}}^r$:	évolution temporelle du paramètre régularisé d'endommagement
d_η :	coefficient de viscosité dans un comportement viscoélastique
$d\bar{\mu}(\tau)$:	mesure définie positive
δ_{ij} :	Delta de Kronecker
Δ :	saut de déplacement dans l'interface (principe de travaux virtuels)
$\Delta g(\tau_i)$:	paramètre de l'interpolation linéaire du spectre continu au temps τ_i
Δt :	incrément de temps
$\Delta \mathbf{u}$:	saut de déplacement entre deux noeuds opposés
$\Delta \mathbf{u}_i$:	déplacement relatif maximal atteint par un point dans la direction i locale
$\Delta \mathbf{u}_i^0$:	déplacement relatif dans la direction i locale où la contrainte maximale que l'interface peut supporter est atteinte
$\Delta \mathbf{u}_i^f$:	déplacement relatif dans la direction i locale où la contrainte est nulle
$\Delta \mathbf{u}_{\text{loc}}$:	déplacement relatif dans les directions normales et tangentielles de l'élément fini d'interface
$\Delta \mathbf{u}(r, s)$:	déplacement relatif entre les surfaces de l'élément au point (r, s)
$\mathbf{E}^0$:	tenseur de déformations macroscopiques
E_{ij} :	composante ij du tenseur de déformations macroscopiques $\mathbf{E}^0$

E_k^2 :	sommation des moindres carrés de la méthode k
$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$:	champ de déformations microscopique
$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_r)$:	tenseur de déformations de la phase r
η :	rapport entre les propriétés des phases dans un matériau composite
η_2 :	paramètre statistique dépendant de la microstructure dans la méthode de Torquato
$F(t)$:	histoire de chargement dans un comportement viscoélastique
$\mathbf{f}^{\text{el}}$:	vecteur de forces nodales
FE :	Finite Element
$\mathbf{h}$:	vecteur définissant les conditions de périodicité
$H_i(\tau)$:	interpolation linéaire du spectre continu
$H(t)$:	fonction d'Heaviside
$\mathbf{I}_{n \times n}$:	matrice identité de n rangées et n colonnes
J :	jacobien de la transformation entre les coordonnées cartésiennes et naturelles
k_μ :	constante du ressort dans un comportement viscoélastique
$k(t)$:	module de relaxation dans un comportement viscoélastique
k_r^{DL} :	module de compressibilité dans le domaine de Laplace - Carson de la phase r
$\mathbf{K}^{\text{el}}$:	matrice de rigidité tangente de l'élément fini d'interface
Kp :	rigidité de pénalité
L :	longueur du côté de la cellule unitaire
$\mathbf{L}$:	tenseur de modules effectif
$\mathbf{L}_r$:	tenseur de modules de la phase r
$\mathbf{M}$:	tenseur de complaisances effectif
$\mathbf{M}_r$:	tenseur de complaisances de la phase r
MT :	Mori-Tanaka
$\mu(t)$:	module de relaxation en cisaillement

μ'' :	réponse élastique du matériau
μ_i :	intensité de l'impulsion Dirac
μ^0 :	module de cisaillement instantané
$\mu_{\text{app}}^c(t)$:	module de relaxation approximé continu
$\mu_{\text{app}}^d(t)$:	module de relaxation approximé discret
$\mu_{\text{app}}^{c+d}(t)$:	module de relaxation approximé de nature discrète et continue
μ^{DL} :	module de cisaillement effectif dans le domaine de Laplace - Carson
μ_r^{DL} :	module de cisaillement dans le domaine de Laplace - Carson de la phase r
$\mu_{\text{app}}^k(t_i)$:	module de relaxation approximé au temps t_i par la méthode k
$\mu_{\text{real}}(t_i)$:	module de relaxation mesuré au temps t_i
$\mathbf{n}$:	vecteur normal à la surface
$\hat{\mathbf{n}}$:	vecteur unitaire définissant la direction normale à la surface de référence
n_c :	nombre de $H(\tau_i)$
n_d :	nombre de temps de relaxation discrets
$\mathbf{N}$:	matrice 3×18 composée par les fonctions de forme de l'élément
$N_i(r, s)$:	fonction de forme du noeud i
Φ^* :	matrice 18×36 définie par les sous-matrices $\mathbf{I}_{18 \times 18}$ et $-\mathbf{I}_{18 \times 18}$
Φ :	matrice 3×36 qui est obtenue à partir de $\mathbf{N} \cdot \Phi^*$
r :	rayon des renforts
$\mathbf{R}$:	matrice de rotation
$\mathbb{R}_+^*$:	ensemble des nombres réels positifs
r, s :	coordonnées naturelles de l'élément fini d'interface
S^+, S^- :	faces opposées de l'interface
s_1, s_2 :	paramètres de distance pour la génération du maillage.
SC :	Self-Consistent
Σ^0 :	tenseur de contraintes macroscopiques

Σ_{ij} :	composante ij du tenseur de contraintes macroscopique
$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$:	champ de contraintes microscopique
$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_r)$:	tenseur de contraintes de la phase r
$\sigma_{ji,j}$:	divergence du tenseur de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$
τ :	variable d'intégration de temps
τ_i :	temps de relaxation i
$\mathbf{T}^{\text{loc}}$:	contraintes dans les directions locales qui agissent dans l'interface
T_i^{loc} :	contrainte dans la direction locale i qui agit dans l'interface
$\hat{\mathbf{t}}_{t1}$:	vecteur unitaire définissant la direction tangentielle $t1$ à la surface de référence
$\hat{\mathbf{t}}_{t2}$:	vecteur unitaire définissant la direction tangentielle $t2$ à la surface de référence
θ :	paramètre qui sert à définir l'intervalle de distribution de temps de relaxation
TOA :	Torquato
$\mathbf{u}$:	vecteur de degrés de liberté
$u_{i,j}$:	gradient du déplacement
$u(t)$:	élongation totale dépendante du temps t dans un comportement viscoélastique
$\mathbf{u}(\mathbf{x})$:	champ de déplacements
$\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$:	fluctuation périodique
$u_i(\mathbf{x})$:	composante i du déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x})$
VER :	volume élémentaire représentatif
w_j :	poids du point de Gauss j
$\mathbf{x}^i$:	vecteur des coordonnées du centre de la sphère i
x_k^i :	coordonnée k du centre de la sphère i
$\mathbf{x}_r$:	vecteur position dans l'espace de la phase r
$\mathbf{X}_{\text{in}}$:	vecteur des coordonnées des noeuds dans la configuration initiale

- $\mathbf{X}_R$: vecteur des coordonnées des points qui définissent la surface de référence
- $\mathbf{X}_R^{rs}(r, s)$: coordonnées d'un point dans la surface de référence
- ξ : facteur d'amortissement
- 2D : bidimensionnel
- 3D : tridimensionnel

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	COMPARISON BETWEEN THE RELAXATION SPECTRA OBTAINED FROM HOMOGENIZATION MODELS AND FINITE ELEMENTS SIMULATION FOR THE SAME COMPOSITE	109
ANNEXE II	RÈGLES D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE	128
ANNEXE III	TRANSFORMATION DE L'ÉLÉMENT DIFFÉRENTIELLE DE SURFACE	130

INTRODUCTION

Mise en contexte

Les matériaux hétérogènes sont des matériaux constitués de plusieurs phases. Ces phases sont distinguables à une longueur d'échelle déterminée. Par exemple, les fibres dans un matériau composite, les roches dans le cas du béton, les grains dans un acier, etc. Chaque phase a des propriétés qui lui sont propres (rigidité, forme, orientation). Les matériaux composites sont des matériaux hétérogènes qui sont constitués d'une matrice (métallique, thermoplastique, etc.), des renforts (des fibres longues, des fibres courtes, des whiskers, des particules, etc.) et de l'interface renfort-matrice qui est en fait un ensemble de liaisons chimiques. Les renforts peuvent être distribués aléatoirement dans l'espace (renforcement discontinu) ou bien dans des orientations définies.

L'endommagement est un problème inhérent aux matériaux lorsque ceux-ci sont sollicités. Par exemple, l'endommagement ductile commence par une nucléation des cavités suivie par une croissance des ces dernières. Puis, la dernière étape est définie par la coalescence des cavités jusqu'à la rupture finale. Une meilleure compréhension et modélisation de l'endommagement permettent de diminuer les facteurs de sécurité retenus lors de la conception ainsi qu'une approche de design de tolérance aux dommages.

L'homogénéisation est une discipline qui permet de prédire le comportement effectif des matériaux hétérogènes (propriétés effectives mécaniques, thermiques, électriques, etc.) en connaissant l'information reliée à la microstructure (fraction volumique des renforts, propriétés des phases, orientations, etc.). Dans le domaine de l'homogénéisation on trouve deux écoles de pensée : l'approche numérique et l'approche analytique. Une des techniques utilisées dans l'approche numérique est la méthode des éléments finis. Cette méthode permet d'obtenir une description très

précise des champs de contraintes et de déformations des matériaux hétérogènes. Cependant, les besoins informatiques sont très importants. L'approche analytique donne des approximations des champs de contraintes et de déformations avec des ressources informatiques plus modestes que les méthodes numériques.

Les matériaux composites à matrices thermoplastiques sont de plus en plus présents dans l'industrie. Le niveau de confiance en ces matériaux est tel que l'industrie aéronautique commence à les utiliser pour des pièces structurales. En conséquence, l'intérêt de recherche sur ces matériaux a augmenté considérablement au cours des dernières années.

Objectifs de recherche

L'objectif principal de ce projet de maîtrise est de prédire le comportement mécanique de matériaux composites à renforts discontinus en tenant compte de la décohésion de l'interface renfort-matrice par la méthode des éléments finis. Les phases sont considérées viscoélastiques linéaires.

Afin d'atteindre cet objectif, des objectifs secondaires sont définis :

1. Modélisation du comportement mécanique de matériaux composites sans tenir compte de l'endommagement par la méthode des éléments finis.
2. Programmation d'une formulation existante d'un élément fini d'interface.
3. Implémentation de l'élément fini d'interface.
4. Simulation du comportement mécanique de matériaux composites viscoélastiques linéaires en tenant compte de l'endommagement de l'interface renfort-matrice.

Méthodologie

La modélisation du comportement effectif de matériaux composites sans tenir compte de l'endommagement est réalisée en premier lieu en utilisant des méthodes

analytiques et numériques (éléments finis). Ceci permet une familiarisation avec les méthodes d'homogénéisation et des logiciels. Ensuite, la modélisation de l'endommagement par la méthode des éléments finis est abordée. Ainsi, on peut distinguer deux étapes bien définies au long du projet : la modélisation de matériaux composites sans endommagement et la modélisation de matériaux composites avec endommagement.

Plan du mémoire

Ce mémoire est structuré de la façon suivante : le Chapitre 1 donne un panorama du sujet de recherche à l'aide de la revue de la littérature ; le Chapitre 2 porte sur les modèles d'éléments finis et les méthodes analytiques appliquées sur des matériaux composites à renforts discontinus sans tenir compte de l'endommagement ; le Chapitre 3 présente la formulation choisie de l'élément fini d'interface et la loi de comportement de l'interface qui servent à modéliser l'endommagement par décohésion ; le Chapitre 4 porte sur la vérification de l'élément fini d'interface et son utilisation dans les matériaux composites à renforts discontinus ; finalement les Conclusions où des perspectives de travail sont rajoutées. De plus, l'article scientifique qui découle des travaux qui font partie de la première étape de ce projet de maîtrise est présenté à l'Annexe I.

CHAPITRE 1

REVUE DE LA LITTÉRATURE

1.1 Introduction

Étant donné le vaste domaine d'utilisation des matériaux composites dans différentes industries telles que l'aéronautique, le génie chimique, la mécanique automobile, la biotechnologie, etc., l'intérêt de recherche sur ces matériaux est devenu très important. Cependant, le domaine de recherche est très vaste. Ce chapitre présente une revue bibliographique permettant de nous situer dans le domaine d'intérêt. Compte tenu que le sujet de recherche porte sur la prédiction du comportement des matériaux composites en utilisant la méthode des éléments finis, plusieurs concepts devront être éclairés avant de s'immiscer dans le projet. Les développements mathématiques liés à la modélisation des matériaux composites par éléments finis seront présentés dans les chapitres suivants.

Dans ce mémoire, les vecteurs sont notés par des lettres romaines minuscules en gras et les matrices ou tenseurs d'ordre 2 par des lettres romaines majuscules en gras. Les tenseurs de contraintes et de déformations globales sont notés par des lettres grecques majuscules en gras, tandis que les champs de contraintes et déformations microscopiques sont notés par des lettres grecques minuscules en gras. Les tenseurs d'ordre 4 sont notés par des lettres romaines majuscules en gras (comme les tenseurs d'ordre 2) et ils sont également indiqués dans le texte¹. Dans certains cas des exceptions sont appliquées sur cette notation générale². Quand la notation

¹La notation est répétée pour les tenseurs d'ordre 4 car ceux-ci apparaissent occasionnellement dans ce mémoire. La notation pour les tenseurs d'ordre 2 a été utilisée partout dans la formulation de l'élément fini d'interface (Chapitre 3).

²Au Chapitre 3 le vecteur de contraintes $\mathbf{T}^{\text{loc}}$ et les vecteurs de coordonnées $\mathbf{X}_{\text{in}}$, $\mathbf{X}_{\text{R}}$ et $\mathbf{X}_{\text{R}}^{rs}$ sont notés par des lettres romaines majuscules en gras (comme les matrices).

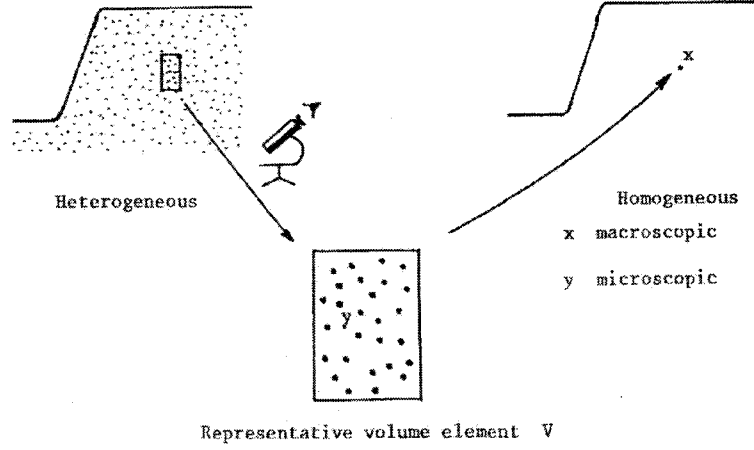


Figure 1.1 Définition du volume élémentaire représentatif et des échelles macroscopiques et microscopiques (Sanchez-Palencia et Zaoui, 1987). À l'échelle microscopique le matériau est hétérogène. L'homogénéisation d'un Volume Élémentaire Représentatif (VER) permet d'obtenir les propriétés effectives du matériau hétérogène. Ainsi, les propriétés effectives sont calculées pour le matériau homogène équivalent.

indicielle est utilisée la répétition des indices indique une sommation. Dans tout le mémoire, quatre types de produits apparaissent : le produit contracté entre deux vecteurs qui est le produit scalaire tel que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_j v_j$; le produit contracté d'un tenseur d'ordre 2 ou matrice et d'un vecteur est un vecteur tel que $\mathbf{C} \cdot \mathbf{a} = C_{ij} a_j = b_i$; le produit contracté de deux tenseurs d'ordre 2 ou matrices est un tenseur d'ordre 2 ou une matrice définie par $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ik} B_{kj} = C_{ij}$; finalement le produit doublement contracté entre un tenseur d'ordre 4 et un tenseur d'ordre 2 est un tenseur d'ordre 2 tel que $\mathbf{X} : \boldsymbol{\tau} = X_{ijkl} \tau_{lk}$, si $\boldsymbol{\tau}$ est symétrique le produit devient $\mathbf{X} : \boldsymbol{\tau} = X_{ijkl} \tau_{kl}$. La dérivée d'un vecteur par rapport aux coordonnées x_j est représentée par $a_{i,j} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}$. Également, la divergence d'un tenseur d'ordre 2 est représentée par $\text{div}(\mathbf{C}) = C_{ji,j}$.

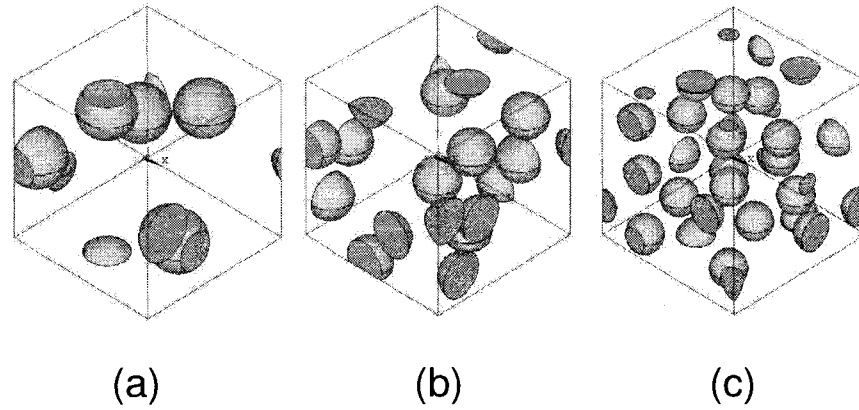


Figure 1.2 Différentes tailles du VER pour une même fraction volumique de renforts : (a) 5 renforts, (b) 10 renforts et (c) 20 renforts.

1.2 Techniques d'homogénéisation

Deux échelles différentes sont impliquées dans l'étude des propriétés effectives des matériaux hétérogènes : l'échelle macroscopique où la taille des hétérogénéités est très petite et l'échelle microscopique qui est l'échelle des hétérogénéités (fibres, etc.). Afin d'obtenir les propriétés effectives du matériau composite, on doit d'abord supposer qu'il existe un Volume Élémentaire Représentatif (VER) qui peut être défini dans le matériau composite. C'est sur le VER que l'homogénéisation sera appliquée afin d'obtenir les propriétés effectives du composite. De plus, la taille du VER doit être telle que si l'on change la quantité des renforts dans le volume, les propriétés effectives obtenues par homogénéisation restent inchangées. Par exemple, pour une même fraction volumique de renforts, la figure 1.2 montre trois tailles du VER pour un matériau composite à renforcement discontinu. Ainsi, pour que les propriétés effectives du matériau composite soient atteintes, les valeurs obtenues par homogénéisation avec chacune des tailles doivent être les mêmes.

D'un point macroscopique on doit considérer deux familles de variables : les va-

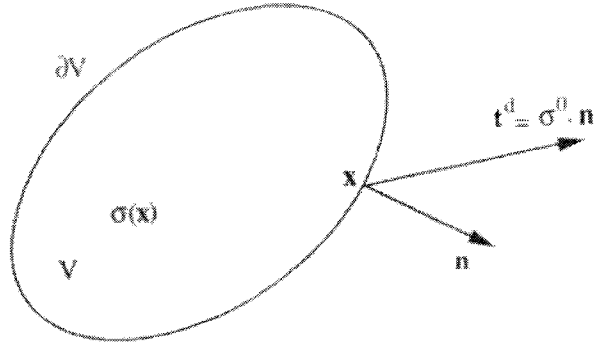


Figure 1.3 Conditions aux limites de contraintes homogènes (Bornert et al., 2001). σ^0 correspond à Σ^0 dans le développement présenté dans la section 1.3.1.

riables macroscopiques qui correspondent aux propriétés du matériau homogénéisé et d'un autre côté, les variables microscopiques qui prennent importance dans le VER (Sanchez-Palencia et Zaoui, 1987) et qui servent à définir le comportement des phases constituant le matériau. La figure 1.1 montre les deux échelles considérées et les deux types de variables.

1.3 Conditions aux rives

Les propriétés effectives du matériau composite sont obtenues à partir de l'homogénéisation réalisée sur le VER soumis à des sollicitations mécaniques et sur lequel des conditions aux limites sont imposées. La taille du VER dépendra des conditions aux rives appliquées. Cette sous-section définit les différents types de conditions aux rives qui peuvent être appliquées.

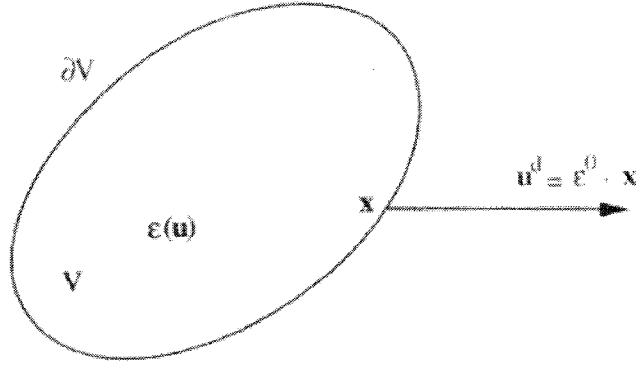


Figure 1.4 Conditions aux limites de déformations homogènes (Bornert et al., 2001). ϵ^0 correspond à $\mathbf{E}^0$ dans le développement présenté dans la section 1.3.2.

1.3.1 Contraintes homogènes au contour

Les contraintes homogènes au contour sont des conditions aux limites de type force imposée. La condition est donnée par $\mathbf{t}^d = \Sigma^0 \cdot \mathbf{n}$ sur la frontière ∂V avec Σ^0 homogène (Bornert et al., 2001). $\mathbf{t}^d$ représente les tractions appliquées sur la frontière du corps, $\mathbf{n}$ est le vecteur normal à la frontière et Σ^0 devient les contraintes macroscopiques. La figure 1.3 montre la frontière ∂V d'un corps de volume V et les tractions qui y sont appliquées. Ainsi, pour le champ de contraintes $\sigma(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}$ étant un point dans l'espace du corps, la forme suivante peut être obtenue :

$$\Sigma^0 = \langle \sigma \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V \sigma(\mathbf{x}) dV \quad (1.1)$$

où Σ^0 désigne les contraintes macroscopiques et $\langle \cdot \rangle$ définit l'opérateur de moyenne spatiale. En effet, cette expression peut être développée à partir de l'équilibre de contraintes où $\sigma_{ji,j} = \text{div}(\sigma) = 0$ dans le cas d'absence des forces de volume

(Bornert et al., 2001) :

$$\begin{aligned}
\int_V \sigma_{ij} dV &= \int_V (\sigma_{ik} x_j)_{,k} dV = \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} x_j + \sigma_{ik} \delta_{jk} \right) dV \quad \text{où} \quad \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0 \\
&= \int_{\partial V} \sigma_{ik} x_j n_k dS \quad (\text{application du théorème de la divergence}) \\
&= \Sigma_{ik}^0 \int_{\partial V} x_j n_k dS \quad \text{car } \sigma_{ik} \text{ est homogène sur } \partial V \\
&= \Sigma_{ik}^0 \int_V x_{j,k} dV \quad (\text{application du théorème de la divergence}) \\
&= \Sigma_{ik}^0 \int_V \delta_{jk} dV \quad \text{d'où} \\
\int_V \sigma_{ij} dV &= \Sigma_{ij}^0 |V|
\end{aligned} \tag{1.2}$$

où δ_{jk} est le Delta de Kronecker.

Le champ de déformations résultant n'est pas homogène et par définition la déformation macroscopique est obtenue par :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) dV \tag{1.3}$$

1.3.2 Déformations homogènes au contour

Dans ce cas on impose des déplacements sur la frontière ∂V . Ces conditions sont définies par $\mathbf{u}^d = \mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{x}$ sur ∂V avec $\mathbf{E}^0$ homogène. $\mathbf{u}^d$ représente les déplacements imposés sur la frontière du corps, $\mathbf{x}$ est un point à la frontière et $\mathbf{E}^0$ devient les déformations macroscopiques. La figure 1.4 montre le cas des déplacements imposés. Ainsi, la déformation macroscopique est obtenue par :

$$\mathbf{E}^0 = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) dV \tag{1.4}$$

En effet, cette dernière expression peut être développée à partir de la compatibilité de $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ et la continuité du déplacement $\mathbf{u}$ (Bornert et al., 2001) :

$$\begin{aligned}
\int_V \varepsilon_{ij} dV &= \frac{1}{2} \int_V (u_{i,j} + u_{j,i}) dV \\
&= \frac{1}{2} \int_{\partial V} (u_i n_j + u_j n_i) dS \quad (\text{théorème de la divergence}) \\
&= \frac{1}{2} \left[\int_{\partial V} E_{ik}^0 x_k n_j dS + \int_{\partial V} E_{jk}^0 x_k n_i dS \right] \quad \text{car } \mathbf{u}^d = \mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{x} \\
&\text{comme } E_{ik}^0 \text{ est homogène sur } \partial V, \text{ l'expression ci-dessus devient :} \\
&= \frac{1}{2} \left[E_{ik}^0 \int_{\partial V} x_k n_j dS + E_{jk}^0 \int_{\partial V} x_k n_i dS \right] \tag{1.5} \\
&\text{et par application du théorème de la divergence on obtient :} \\
&= \frac{1}{2} \left(E_{ik}^0 \int_V \delta_{kj} dV + E_{jk}^0 \int_V \delta_{ki} dV \right) \quad \text{d'où} \\
\int_V \varepsilon_{ij} dV &= |V| E_{ij}^0
\end{aligned}$$

Le champ de contraintes résultant n'est pas homogène et par définition la contrainte macroscopique est obtenue par :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) dV \tag{1.6}$$

1.3.3 Conditions aux limites périodiques

Dans cette partie on définit les microstructures et champs périodiques car ce type de microstructure est utilisé dans le cadre des simulations par éléments finis.

Un champ de déplacement périodique est composé d'un champ moyen ($\mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{x}$) qui serait le champ de déplacement si le milieu était homogène et d'une fluctuation périodique ($\mathbf{u}^*$) qui tient compte des hétérogénéités (figure 1.5).

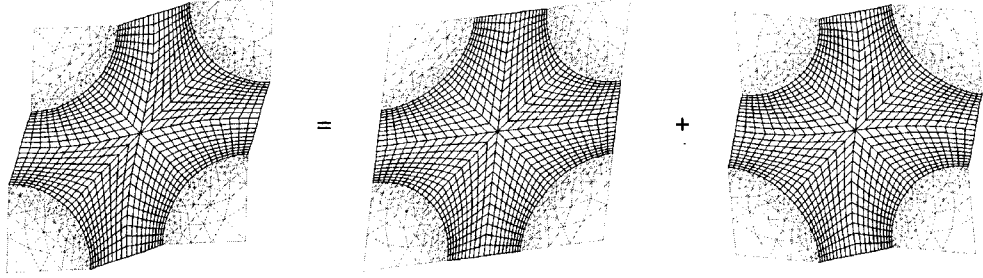


Figure 1.5 Champ de déplacement périodique (Bornert et al., 2001). De gauche à droite : champ de déplacement périodique, champ de déplacement homogène et fluctuation périodique.

Ce champ peut être exprimé par (Michel et al., 1999) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \quad (1.7)$$

La figure 1.5 montre que la fluctuation périodique prend des valeurs identiques dans des points qui sont placés aux faces opposées du quadrilatère (2D) qui définit dans ce cas le VER d'une microstructure périodique.

La déformation macroscopique est définie par :

$$\mathbf{E}^0 = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) dV \quad (1.8)$$

où $\langle \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{u}^*) \rangle$ est nulle à cause de la fluctuation périodique.

Par définition la contrainte macroscopique est obtenue par :

$$\boldsymbol{\Sigma}^0 = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) dV \quad (1.9)$$

De plus, les tractions $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ prennent les mêmes valeurs mais avec signe contraire sur les faces opposées du VER (Xia et al., 2006).

1.4 Étapes de l'homogénéisation

On distingue trois étapes dans les techniques d'homogénéisation (Bourgeois, 1994) :

1. Description ou Représentation : dans cette étape on décrit la microstructure en définissant les propriétés mécaniques et géométriques des phases. Par exemple, dans le cas des comportements élastiques linéaires on arrive aux lois de comportement des phases :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_r) = \mathbf{L}_r : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_r) \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_r) = \mathbf{M}_r : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_r) \quad (1.10)$$

où $\mathbf{L}_r$ et $\mathbf{M}_r$ sont respectivement les tenseurs d'ordre 4 de module et de complaisance de la phase r et $\mathbf{x}_r$ représente un point dans l'espace à l'intérieur de la phase r .

2. Localisation ou Concentration : lors de cette étape on cherche des relations entre les quantités locales et globales. Dans le cas des comportements élastiques linéaires on obtient :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_r) \rangle = \mathbf{B}_r : \boldsymbol{\Sigma}^0 \quad \text{et} \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_r) \rangle = \mathbf{A}_r : \mathbf{E}^0 \quad (1.11)$$

où $\mathbf{A}_r$ et $\mathbf{B}_r$ sont respectivement les tenseurs d'ordre 4 de localisation des déformations et de concentration des contraintes. Comme on peut le voir au point 3, la définition des ces tenseurs permet d'obtenir la réponse au problème. Chaque schéma ou méthode d'homogénéisation conduira à différents tenseurs de localisation et de concentration. Ainsi, on aura différentes solutions homogénéisées possibles.

3. Homogénéisation : cette étape permet d'obtenir les propriétés effectives du composite en utilisant les propriétés des phases et les tenseurs de localisation et de concentration obtenus précédemment. Ainsi, on peut obtenir les tenseurs

d'ordre 4 de complaisance et de module du matériau composite de la manière suivante :

$$\mathbf{M} = \sum_{r=0}^{r=N} c_r \mathbf{M}_r : \mathbf{B}_r \quad \mathbf{L} = \sum_{r=0}^{r=N} c_r \mathbf{L}_r : \mathbf{A}_r \quad (1.12)$$

où c_r est la fraction volumique de la phase r et N est le nombre de phases. La fraction volumique est le rapport entre le volume occupé par la phase r et le volume total du VER. L'équation (1.12) peut être expliquée en utilisant le Lemme de Hill. Celui-ci stipule que si le champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ est équilibré et le champ de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ est compatible et des conditions homogènes aux rives sont appliquées, on obtient :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (1.13)$$

donc, si la taille du VER est grande les contraintes et déformations macroscopiques deviennent $\boldsymbol{\Sigma}^0$ et $\mathbf{E}^0$ respectivement. En effet, le lemme d'Hill donne une relation entre les champs microscopiques et macroscopiques, qu'on appelle condition de macrohomogénéité. Cette condition assure que les bilans d'énergie sur les champs macroscopiques sont équivalents aux bilans réels. Alors, l'équation (1.13) peut être écrite comme :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \boldsymbol{\Sigma}^0 : \mathbf{E}^0 \quad (1.14)$$

De plus, on peut écrire les tenseurs de contraintes et de déformations macroscopiques de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\Sigma}^0 = \sum_{r=0}^{r=N} c_r \langle \boldsymbol{\sigma}_r(\mathbf{x}) \rangle \quad \mathbf{E}^0 = \sum_{r=0}^{r=N} c_r \langle \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{x}) \rangle \quad (1.15)$$

En utilisant l'équation (1.10) et (1.11) et pour le cas des matériaux élastiques

linéaires, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^0 &= \sum_{r=0}^{r=N} c_r \langle \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{x}) \rangle \\
&= \sum_{r=0}^{r=N} c_r \langle \mathbf{M}_r : \boldsymbol{\sigma}_r(\mathbf{x}) \rangle \\
&\text{comme } \mathbf{M}_r \text{ est constant dans chaque phase, on obtient :} \\
&= \sum_{r=0}^{r=N} c_r \mathbf{M}_r : \langle \boldsymbol{\sigma}_r(\mathbf{x}) \rangle \quad \text{avec l'équation (1.11) :} \\
&= \sum_{r=0}^{r=N} c_r \mathbf{M}_r : \mathbf{B}_r : \boldsymbol{\Sigma}^0 \\
&= \mathbf{M} : \boldsymbol{\Sigma}^0
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Ce qui permet d'obtenir le tenseur de complaisance de l'équation (1.12). Un développement analogue à partir de $\boldsymbol{\Sigma}^0$ permet d'obtenir l'expression du tenseur de module.

Donc, la résolution du problème se résume à la définition de la loi de localisation particulière pour chaque schéma.

1.5 Types d'homogénéisation

On distingue deux écoles de pensée dans les techniques d'homogénéisation : les approches numériques et les approches analytiques. La plupart des approches numériques sont basées sur la méthode des éléments finis. Ainsi, le VER est modélisé à l'aide d'éléments finis. Des propriétés matériau sont données à chaque phase et le VER est ensuite sollicité. D'autres méthodes numériques (Michel et al., 1999) reformulent le problème dans l'espace de Fourier et en appliquant une méthode itérative basée sur la méthode FFT (« Fast Fourier Transformation ») obtiennent les propriétés effectives de matériaux composites. Les méthodes analytiques permettent d'estimer la moyenne spatiale des champs de contraintes et de déformations pour

une fraction du temps de calcul nécessaire pour la résolution des approches numériques. La revue de la littérature suivante concernant les techniques d'homogénéisation ne contient pas de développement lourd. Les développements mathématiques nécessaires pour la réalisation de ce projet de maîtrise seront présentés dans les chapitres suivants.

1.5.1 Approches numériques

1.5.1.1 Modèles éléments finis

Plusieurs chercheurs ont travaillé sur la prédiction des propriétés élastiques effectives en analysant des microstructures tridimensionnelles de matériaux par la méthode des éléments finis. D'abord le VER est habituellement considéré comme un cube ou cellule unitaire contenant les renforts. Les renforts peuvent être modélisés comme des particules sphériques distribuées aléatoirement dans l'espace, des fibres cylindriques unidirectionnelles, etc. Gusev (1997) a étudié la taille du VER d'un matériau composite en faisant plusieurs simulations avec différents nombres de particules sphériques dans une cellule unitaire. Segurado et LLorca (2002) ont obtenu des microstructures 3D en utilisant l'algorithme « Random Sequential Adsorption » et étudié les propriétés élastiques effectives en les comparant avec des modèles d'homogénéisation analytiques. Ensuite, Segurado et al. (2003) ont étudié l'effet des amas de renforts sur les propriétés élastiques effectives de matériaux composites. De la même façon, Mishnaevsky (2004) a généré des microstructures tridimensionnelles et étudié le comportement effectif lors de la formation des amas de renforts et de l'endommagement par rupture des renforts. Récemment, Mishnaevsky (2005) a étudié le comportement effectif de matériaux composites en générant des microstructures 3D basées sur des voxels³. D'un autre côté Michel et al. (1999) ont étudié le comportement effectif des microstructures périodiques 2D en

³Un voxel est une unité graphique qui définit un point dans l'espace 3D. Chaque coordonnée de chaque point est définie par la position, la couleur et la densité.

utilisant la méthode des éléments finis et la méthode de la transformation de Fourier. Tucker et Lian (1999) ont fait une revue des méthodes d'homogénéisation analytiques et comparé ces méthodes en utilisant la méthode des éléments finis sur des microstructures 3D d'arrangements réguliers de fibres. Lévesque et al. (2004) ont réalisé des simulations éléments finis sur des microstructures 3D de matériaux composites viscoélastiques non linéaires et développé une méthode d'homogénéisation analytique pour ce type de matériaux. Ainsi, ils ont comparé les résultats obtenus à partir des simulations éléments finis avec ceux obtenus à partir de la méthode d'homogénéisation analytique. González et al. (2004) ont simulé des microstructures 3D de matériaux composites élasto - plastiques. De la même façon Sun et al. (2007) ont réalisé des simulations éléments finis sur des microstructures 3D de matériaux composites à renforts sphériques afin d'établir les limites des propriétés effectives élastiques et les comparer avec des méthodes d'homogénéisation analytiques. Également Duschlbauer et al. (2006) ont étudié le comportement élastique effectif des microstructures 3D périodiques renforcés par des fibres courtes distribués aléatoirement dans l'espace en utilisant la méthode des éléments finis. Ensuite, ils ont comparé ces résultats avec des méthodes analytiques. Ainsi, on peut conclure qu'il y a une gamme très ample de travaux de recherche reliés à la modélisation par éléments finis 3D de la microstructure de matériaux composites renforcés également par des particules comme par des fibres. Cependant, la plupart des études ont été axées sur des matériaux qui ne se sont pas endommagés et en considérant les phases élastiques linéaires.

1.5.1.2 Étude des conditions aux rives :

Kanit et al. (2003) ont étudié la taille du VER en fonction de différents types de conditions aux rives (contraintes uniformes, déformations uniformes et conditions périodiques) pour des microstructures 3D établies à partir de mosaïques de Voronoi. Leurs résultats confirment ceux obtenus par les études précédentes de Huet

(1990) et Hazanov et Huet (1994) : l'application de conditions aux rives périodiques permet d'atteindre des tailles du VER plus petites que lorsqu'on applique des conditions aux rives uniformes. Ceci est avantageux car lorsqu'on augmente la taille du VER les besoins informatiques augmentent, ce qui peut rendre le temps de calcul prohibitif. Xia et al. (2006) ont démontré que dans la méthode des éléments finis basée sur les déplacements, l'application des conditions aux rives périodiques sur les déplacements garantit la périodicité sur les tractions définie par :

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma}(0, x_2, x_3) \cdot \mathbf{n}(0, x_2, x_3) &= -\boldsymbol{\sigma}(L, x_2, x_3) \cdot \mathbf{n}(L, x_2, x_3) \\
 \boldsymbol{\sigma}(x_1, 0, x_3) \cdot \mathbf{n}(x_1, 0, x_3) &= -\boldsymbol{\sigma}(x_1, L, x_3) \cdot \mathbf{n}(x_1, L, x_3) \\
 \boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2, 0) \cdot \mathbf{n}(x_1, x_2, 0) &= -\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2, L) \cdot \mathbf{n}(x_1, x_2, L)
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur normal à la frontière du VER, x_1, x_2 et x_3 le système de coordonnées utilisé sur le VER et L la longueur du côté de la cellule unitaire (on suppose une cellule carrée). En plus, Xia et al. (2003) ont proposé l'application des conditions aux rives périodiques aux cellules unitaires de matériaux composites renforcés par des fibres unidirectionnelles et ont prédit leur comportement effectif. Pour le même type de microstructure, Karadeniz et Kumulutas (2007) ont déterminé les coefficients d'expansion thermiques effectifs en utilisant la méthode des éléments finis. Avec ces résultats, ils ont pu établir des comparaisons avec plusieurs méthodes analytiques.

Des cellules unitaires contenant des renforts sphériques distribués aléatoirement dans l'espace seront étudiées dans ce projet de maîtrise. En plus, des conditions aux rives périodiques sont appliquées sur les VERs afin d'atteindre plus rapidement, en termes de nombre de particules maillées, les propriétés effectives du matériau composite. Ceci se traduit par une diminution du temps de calcul.

1.5.1.3 Simulations sur des matériaux composites viscoélastiques

Brinson et Knauss (1992) et Nguyen Viet et al. (1995) ont réalisé des simulations éléments finis 2D de matériaux composites viscoélastiques linéaires. Brinson et Lin (1998) ont comparé les simulations élément finis avec des méthodes d'homogénéisation analytiques. Barello et Lévesque (2008) ont réalisé des simulations éléments finis de microstructures 3D de matériaux composites à phases viscoélastiques linéaires. De plus, ils ont développé une procédure afin d'obtenir le spectre de relaxation effectif et ainsi déterminer sa nature (continue ou discrète) à partir des simulations éléments finis. D'autres auteurs ont développé des procédures similaires afin d'obtenir le spectre de relaxation à partir d'expériences (Emri et Tschoegl, 1993, 1994, 1995). Cependant leur méthode ne permet pas d'affirmer si le spectre est de nature continue ou discrète. En plus, Barello et Lévesque (2008) ont présenté des comparaisons entre certaines méthodes analytiques d'homogénéisation et les résultats obtenus par simulations.

1.5.1.4 Modèles de cohésion et éléments d'interface

Des éléments finis d'interface sont utilisés afin de modéliser la décohésion de l'interface renfort-matrice et ainsi simuler l'endommagement. L'élément fini d'interface 3D est modélisé par deux surfaces qui sont parfaitement collées dans la configuration sans endommagement. Quand l'endommagement a lieu, les deux surfaces se séparent et le volume de l'élément augmente graduellement. Cette caractéristique est utile pour simuler le grossissement de cavité dans un matériau s'endommageant par décohésion interfaciale.

La plupart des modèles d'éléments finis qui incorporent l'endommagement par décohésion de l'interface renfort-matrice appliquent le concept de « modèles de cohésion ». Ce type de modèle a été présenté pour la première fois par Barenblatt (1962) en introduisant le concept de forces moléculaires de cohésion en bout de

fissure dans un contexte de rupture fragile. Ainsi, Barenblatt a défini le « module de cohésion » comme étant la quantité qui caractérise la résistance du matériau à un prolongement de fissure. Cette résistance est causée par l'effet des forces de cohésion. Cependant, Barenblatt n'a pas déterminé une relation entre le déplacement relatif des lèvres de la fissure et le vecteur de contraintes associé.

Needleman (1987) a proposé un modèle de cohésion pour l'étude du décollement des renforts dans les matériaux composites. Ce modèle donne une relation entre les contraintes et les déplacements relatifs de l'interface, i.e. une loi de comportement pour l'interface. Certaines restrictions sont imposées sur la loi de comportement de l'interface (Needleman, 1992). Ainsi, la réponse de l'interface est dissipative, donc le travail dans un processus fermé (le point de départ est égal au point final du processus) doit être positif. Cette restriction est représentée par⁴ :

$$\oint \mathbf{T} \cdot d\mathbf{u} \geq 0 \quad (1.18)$$

où $\mathbf{T}$ est le vecteur de contraintes dans l'interface et $\mathbf{u}$ est le saut de déplacement à travers de l'interface. L'existence d'un potentiel assure que le travail soit nul dans un cycle fermé. En effet, en considérant une direction normale et une direction tangentielle pour les contraintes et les déplacements, l'équation (1.18) peut être ré-écrite sous la forme suivante :

$$\oint (T_n du_n + T_t du_t) \geq 0 \quad (1.19)$$

où les indices n et t font référence aux directions normale et tangentielle dans l'interface, respectivement. L'existence d'un potentiel $\phi(u_n, u_t)$ permet d'écrire le

⁴Dans les publications de Needleman l'équation (1.18) a un signe négatif. Cependant, le signe positif permet également d'obtenir un travail nul dans un cycle fermé. En effet, Gao et Bower (2004) ont utilisé le potentiel de Needleman (1992) avec un signe positif.

vecteur de contraintes de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{u}} \quad \text{où} \\ T_n &= \frac{\partial \phi}{\partial u_n} \quad T_t = \frac{\partial \phi}{\partial u_t} \end{aligned} \tag{1.20}$$

Par le théorème de Green qui stipule que $\oint_c (f dx + g dy) = \int \int_S (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}) dx dy$ et comme il existe un potentiel ϕ avec $f = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ et $g = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ alors $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$, donc l'intégrale dans un cycle fermé devient nulle pour n'importe quelle trajectoire choisie. En effet, l'existence d'un potentiel assure $\oint \mathbf{T} \cdot d\mathbf{u} = 0$. Donc, le comportement de l'interface qui est modélisé avec un potentiel est un comportement élastique (i.e. il n'y a pas des pertes d'énergie). De plus, la direction tangentielle peut être décomposée en deux directions orthogonales, ce qui donne un vecteur de contraintes ayant une composante normale et deux composantes tangentielles. Needleman (1987) a proposé un potentiel du type polynomial par simplicité analytique. Dans des études postérieures (Needleman, 1990, 1992) et (Xu et Needleman, 1993, 1994a,b) ont proposé des potentiels exponentiels et périodiques afin d'expliquer les comportements de l'interface. La figure 1.6 montre les contraintes normales que transmet l'interface pour deux types de potentiels : polynomial et exponentiel.

D'autres formes mathématiques pour la loi de comportement de l'interface ont été proposées sans assurer l'existence d'un potentiel. Cependant, ces formes mathématiques sont simples et permettent de modéliser plusieurs comportements d'interface obtenus expérimentalement. Par exemple, (Tvergaard, 1990, 2003a,b) a proposé un modèle de cohésion basé sur un paramètre adimensionnel qui relie les déplacements normal et tangentiels de l'interface. Tvergaard a étudié des matériaux composites à matrice métallique renforcés par des particules afin de déterminer la décohésion normale et/ou tangentielle des renforts.

Geubelle et Baylor (1998) ont donné une relation de contrainte - déplacement bilinéaire afin d'étudier le délaminage de matériaux composites stratifiés soumis à des impacts à basse vitesse. Ce type de loi a été utilisé par Camanho et al. (2003) qui

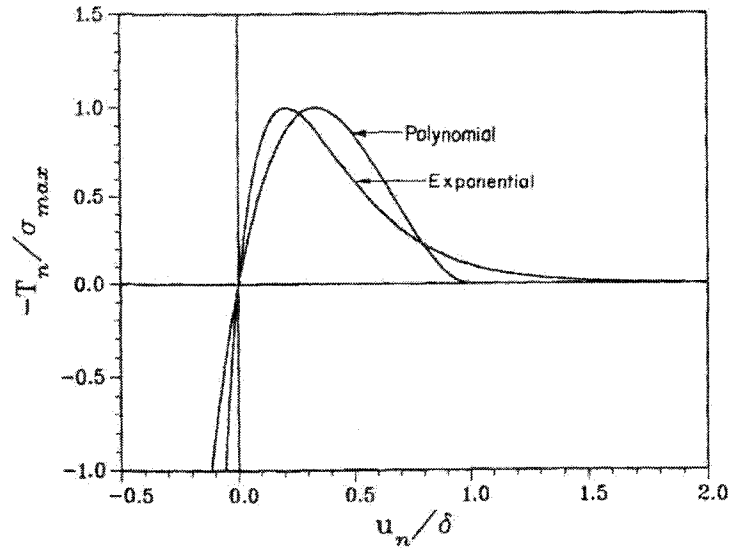


Figure 1.6 Contrainte normale obtenue à partir des potentiels polynomial et exponentiel (Needleman, 1992). La contrainte normale est normalisée en fonction de la contrainte maximale (σ_{max}) que l'interface peut atteindre. Ainsi, les maximum des deux courbes correspondent à $-T_n/\sigma_{max} = 1$. La surface qui est définie par les courbes (polynomiale et exponentielle) représente le travail de séparation.

ont rajouté un facteur d'endommagement afin de tenir compte de l'irréversibilité inhérente au processus.

En effet, ce dernier type de loi de comportement est souvent utilisé à cause de sa simplicité. D'un autre côté, les relations constitutives qui proviennent d'un potentiel sont plus difficiles à obtenir et les paramètres qui définissent le potentiel deviennent compliqués à déterminer. Cependant, les lois qui proviennent d'un potentiel permettent d'assurer les restrictions de la thermodynamique.

Plusieurs travaux ont été réalisés par rapport au développement des éléments finis d'interface : Hashagen et Borst (1997), Ortiz et Pandolfi (1999), Alfano et Crisfield (2001), Arun Roy et Dodds JR. (2001), Aoki et Suemasu (2003), Camanho et al. (2003), Segurado et LLorca (2004), Swaminathan et al. (2006), Turon et al. (2006) et Davila et al. (2007), entre autres. La plupart de ces travaux dénotent

un problème de convergence attribuable à la loi de comportement de l'interface. En effet, la dégradation de la rigidité de l'interface est la cause du problème de convergence. Donc, au point d'instabilité (i.e. le point où la contrainte maximale que l'interface peut supporter est atteinte) les méthodes itératives de résolution des problèmes des éléments finis n'atteignent pas la convergence. Différentes techniques ont été développées afin d'éviter ce problème (Gao et Bower, 2004). D'un autre côté, Davila et al. (2007) ont introduit une régularisation visqueuse, laquelle avait été proposée initialement pour le code de calcul ABAQUS.

1.5.2 Approches d'homogénéisation analytiques

1.5.2.1 Matériaux élastiques linéaires

Les premiers schémas d'homogénéisation analytiques ont été développés pour des matériaux élastiques linéaires. La plupart de ces modèles reposent sur le problème de l'inclusion d'Eshelby (1957) (voir figure 1.7). Eshelby a trouvé les champs de déformations et de contraintes qui se produisent dans le cas d'une inclusion ellipsoïdale plongée dans un milieu infini. La différence entre chaque méthode analytique repose sur l'étape de localisation ou concentration.

La méthode Auto-Cohérente consiste à noyer les inclusions dans un milieu ayant les propriétés du matériau homogénéisé. Ceci fait que le problème devient implicite et que les propriétés effectives doivent être obtenues généralement par itérations. Ce schéma a été initialement utilisé par Hershey et Dahlgren (1954) dans l'étude des polycristaux. Pour les matériaux composites à renforts sphériques Hill (1965a) et Budiansky (1965) ont appliqué cette méthode. Ensuite, Hill (1965b) a appliqué ce schéma sur des matériaux composites renforcés par des fibres. De la même manière Willis (1977) et Willis (1983) a utilisé l'estimation auto-cohérente pour des matériaux composites anisotropes.

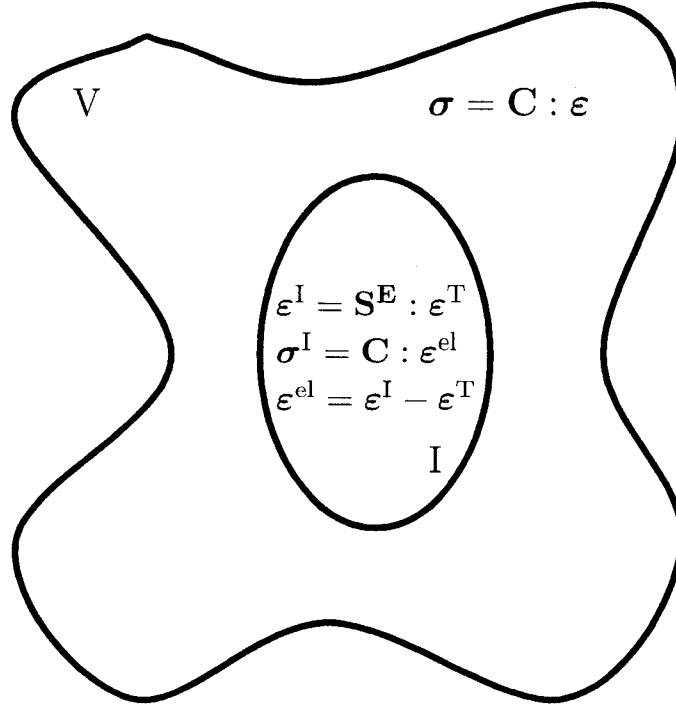


Figure 1.7 Représentation de l'inclusion ellipsoïdale (I) plongée dans un milieu infini (V) et soumise à une déformation libre de contrainte (ϵ^T) (Lévesque, 2004). La déformation dans l'inclusion est donnée par $\epsilon^I = \mathbf{S}^E : \epsilon^T$, où $\mathbf{S}^E$ est le tenseur d'Eshelby. $\mathbf{C}$ est le tenseur de module du milieu infini et ϵ est la déformation macroscopique appliquée.

La méthode de Mori-Tanaka (basée sur l'article de Mori et Tanaka (1973)) a été interprétée plus clairement par Benveniste (1987). Cette méthode considère l'inclusion noyée dans un milieu infini ayant les propriétés de la matrice. Weng (1984) a étudié le comportement effectif élastique de matériaux composites renforcés par des inclusions sphériques en se basant sur cette méthode. De plus, Tandon et Weng (1984) ont utilisé ce schéma afin d'étudier l'effet du rapport de forme sur les propriétés effectives élastiques linéaires pour des matériaux composites renforcés par des fibres unidirectionnelles.

Torquato (1998) a obtenu des approximations du tenseur des modules pour des

composites renforcés par des inclusions sphériques en utilisant des séries d'expansion. Pour obtenir les propriétés effectives, des paramètres statistiques qui tiennent compte de la microstructure du matériau sont nécessaires (Torquato, 1991).

1.5.2.2 Matériaux viscoélastiques linéaires sans endommagement

L'homogénéisation des matériaux viscoélastiques linéaires a été réalisée en utilisant le principe de correspondance viscoélastique et les transformées de Laplace-Carson. Cette procédure consiste à appliquer la transformée de Laplace-Carson aux théories constitutives de la viscoélasticité linéaire et insérer ces propriétés mécaniques dans les modèles d'homogénéisation des matériaux élastiques linéaires. Hashin (1965) a utilisé ce principe afin d'obtenir les propriétés effectives de matériaux composites isotropes. Postérieurement Hashin (1966) a mené la même étude sur des matériaux composites renforcés par des fibres unidirectionnelles.

Wang et Weng (1992) et Lévesque et al. (2004) (parmi d'autres) ont utilisé ce principe avec la méthode de Mori-Tanaka ; Laws et McLaughlin (1978), Beurthey et Zaoui (2000) et Brenner et al. (2002) l'ont utilisé avec la méthode Auto-Cohérente.

1.5.2.3 Introduction de l'endommagement dans les approches analytiques

Les modèles d'homogénéisation ont été développés initialement en considérant une cohésion parfaite entre le renfort et la matrice. Plusieurs études ont traité par une approche de la mécanique des milieux continus l'effet de la décohésion de l'interface renfort-matrice dans des matériaux composites élastiques. Par exemple, Benveniste (1984) et Benveniste et Aboudi (1984) ont étudié le comportement effectif de matériaux composites renforcés par des fibres en considérant l'effet de la décohésion de l'interface. Postérieurement, Benveniste (1985) a utilisé la méthode

auto-cohérente généralisée (Christensen et Lo, 1979) afin d'obtenir les propriétés effectives des matériaux composites renforcés par des particules. Dans ces travaux de recherche, la décohésion de l'interface a été simulée en satisfaisant une continuité sur les contraintes et sur les déplacements normaux dans l'interface mais en permettant une discontinuité sur les déplacements tangentiels (glissement des surfaces de l'interface). Hashin (1990, 1991) a utilisé la méthode auto-cohérente généralisée pour des matériaux composites renforcés par des fibres et des particules en considérant une discontinuité sur les déplacements normal et tangentiel. Ainsi, les séparations normales et les glissements sont permis. L'effet de la cohésion imparfaite entre le renfort et la matrice a été également étudié comme un problème de superposition, en considérant le problème de l'inclusion d'Eshelby et une dislocation qui cause la décohésion. Dans ce contexte, on peut trouver les travaux de Mura (1984) et de Zhong et Meguid (1997, 1999), entre autres. Finalement, les méthodes d'Eshelby et de Mori-Tanaka ont été utilisées afin de déterminer les propriétés effectives des matériaux composites renforcés par des particules en considérant une loi de comportement pour l'interface du type bilinéaire irréversible (Tan et al., 2005a, 2006). Plus récemment, la méthode de Mori-Tanaka a été utilisée pour déterminer le comportement effectif elasto-plastique de matériaux composites renforcés par des particules en utilisant une fonction de probabilité pour caractériser l'évolution de l'endommagement par décohésion (Jian-guo et Fang, 2007). Cependant, il n'y a pas d'étude concernant l'homogénéisation analytique sur des matériaux composites viscoélastiques en tenant compte de l'endommagement.

1.6 Conclusions

Cette revue bibliographique permet de déterminer à priori certaines étapes du projet de maîtrise. D'abord, le VER est considéré comme un cube contenant des renforts sphériques distribués aléatoirement dans l'espace. Par rapport aux conditions aux limites, des conditions périodiques aux rives sont appliquées. Ainsi, la

taille du VER est atteinte plus rapidement. Donc, à l'aide de la méthode des éléments finis, la modélisation des VERs est réalisée. Ensuite, une comparaison avec des méthodes d'homogénéisation analytiques est menée. Dans ce cas, l'endommagement n'a pas été considéré. Afin de modéliser l'endommagement par décohésion de l'interface renfort-matrice, un élément fini d'interface est implémenté. La formulation de l'élément fini d'interface correspond à celle de Segurado et LLorca (2004). Le comportement de l'interface est défini par une relation constitutive bilinéaire. Ce choix est arbitraire et en fonction de la simplicité qu'elle entraîne lors de la programmation. Comme s'est décrit dans la revue bibliographique, d'autres lois de comportement peuvent être utilisées qui tiennent compte des phénomènes physiques. D'un autre côté, les propriétés des phases et de l'interface des matériaux composites simulés sont arbitraires. Les modèles d'éléments finis pour les cas sans endommagement et avec endommagement seront abordés dans les chapitres suivants.

CHAPITRE 2

MODÉLISATION DU COMPORTEMENT MÉCANIQUE DE MATÉRIAUX COMPOSITES SANS ENDOMMAGEMENT

2.1 Introduction

Les matériaux composites renforcés par des particules sont surtout recherchés pour leurs performances en frottement et en usure, tandis que les matériaux composites renforcés par des fibres sont utilisés pour leurs meilleures propriétés mécaniques. Par exemple, certains pneumatiques sont constitués d'une matrice de polyisobutylène (polymère - élastomère) renforcée par des particules de carbone. Également, ce type de matériau composite est très utilisé dans la fabrication de joints d'étanchéité et de parties non structurales d'automobiles. D'un autre côté, certains polymères renforcés par des billes de verre sont biocompatibles, alors ces matériaux sont utilisés dans l'industrie biomédicale pour le développement de prothèses (e.g. dentaires). Également, les matériaux composites à matrice métallique renforcés par des particules sont très utilisés pour des parties structurales dans l'industrie automobile et aérospatiale (e.g. disques de freins, cylindres de moteurs, panneaux, etc.). Ainsi, la connaissance et la prédiction du comportement mécanique de ce type de matériau composite permettent de réaliser des choix appropriés sur leurs constituants, leur utilisation, etc.

Le développement des modèles éléments finis sans tenir compte de l'endommagement a conduit à une publication (Barello et Lévesque, 2008). Celle-ci est présentée à l'Annexe I. Ce chapitre est dédié à la description de ces modèles. Étant donné que les phases du matériau composite sont considérées comme viscoélastiques linéaires, une procédure numérique est développée afin de calculer les propriétés effectives du matériau composite. Certains résultats sont présentés dans ce chapitre. Cependant,

il est suggéré au lecteur de se référer à l'Annexe I pour plus de détails.

2.2 Obtention du modèle éléments finis

D'abord le VER est considéré comme un cube ou cellule unitaire contenant des renforts sphériques distribués aléatoirement dans l'espace. Afin d'obtenir la distribution aléatoire des sphères pour chaque VER, l'algorithme « Random Sequential Adsorption » (RSA) est utilisé (Segurado et LLorca, 2002).   tant donné que les conditions aux rives périodiques permettent une convergence plus rapide à la taille du VER (Kanit et al., 2003), des VERs périodiques sont générés. La figure 2.1 montre une microstructure périodique où la sphère j est r  p  t  e par périodicité sur chaque côté. La sphère i est dans le cube et sera plac  e au même endroit des cubes adjacentes. Finalement, afin d'appliquer les conditions aux rives périodiques, une cellule unitaire périodique de volume L^3 contenant une distribution aléatoire des billes doit être obtenue. Pour ce faire, les positions du centre de chaque particule sont g  n  r  es aléatoirement et séquentiellement. Les billes doivent vérifier certaines conditions de distance entre elles et avec les côtés du cube pour que le nombre d'éléments distordus soit minimal. Les sphères ont un rayon r . Ainsi chaque sphère i est accept  e si les coordonnées du centre $\mathbf{x}^i$ vérifient les deux conditions suivantes :

1. Les distances entre la sphère i et toutes les sphères accept  es précédemment $j = 1, \dots, i - 1$ doivent excéder une valeur minimale s_1 d  termin  e par essais et erreurs afin de créer un maillage avec un nombre des éléments distordus minimal. En plus, cette condition doit être v  rifi  e avec les sphères g  n  r  es par périodicité. Mathématiquement cette condition peut être exprim  e comme :

$$\|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j + \mathbf{h}\| \geq s_1 \quad (2.1)$$

où $\mathbf{h} = (h, k, l)$. h , k et l peuvent prendre les valeurs 0, L , $-L$ et donc on a 27 conditions qui doivent être v  rifi  es pour chaque sphère i . En effet, $\mathbf{h}$

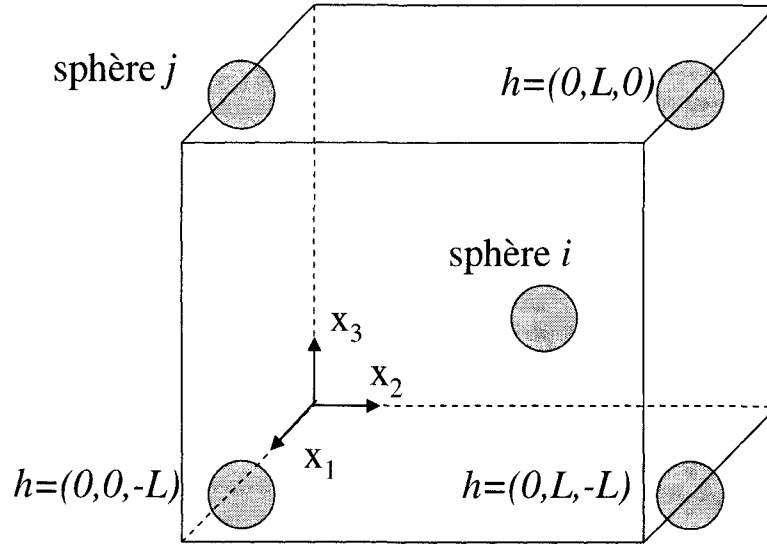


Figure 2.1 Sphères générées par périodicité de la sphère j . La sphère i doit vérifier les conditions de distance avec la sphère j et celles générées par le vecteur $\mathbf{h}$.

est défini dans un système d'axes cartésien qui a l'origine sur le coin $(0, 0, 0)$ de la cellule unitaire. Donc, le cas où $\mathbf{h} = (0, 0, 0)$ correspond à la sphère j . Les autres 26 possibilités regroupent les sphères générées par périodicité de la sphère j . La figure 2.1 montre un exemple. La sphère j a été acceptée précédemment et trois sphères sont générées dans le cube par périodicité. Alors, la sphère i doit vérifier les conditions de distance avec la sphère j et les trois sphères générées à cause de la périodicité.

2. La surface de la sphère ne doit pas être trop proche des faces du cube afin de prévenir la présence d'éléments distordus lors de l'opération de maillage.

Ceci conduit à :

$$\begin{aligned} |x_k^i - r| &\geq s_2; \quad k = 1, 2, 3 \\ |x_k^i + r - L| &\geq s_2; \quad k = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Afin d'obtenir la distribution aléatoire des centres des billes, un programme MatLab a été développé. Le maillage est réalisé avec le pre-processeur d'ANSYS. Le programme MatLab génère automatiquement le fichier macro d'ANSYS (fichier de

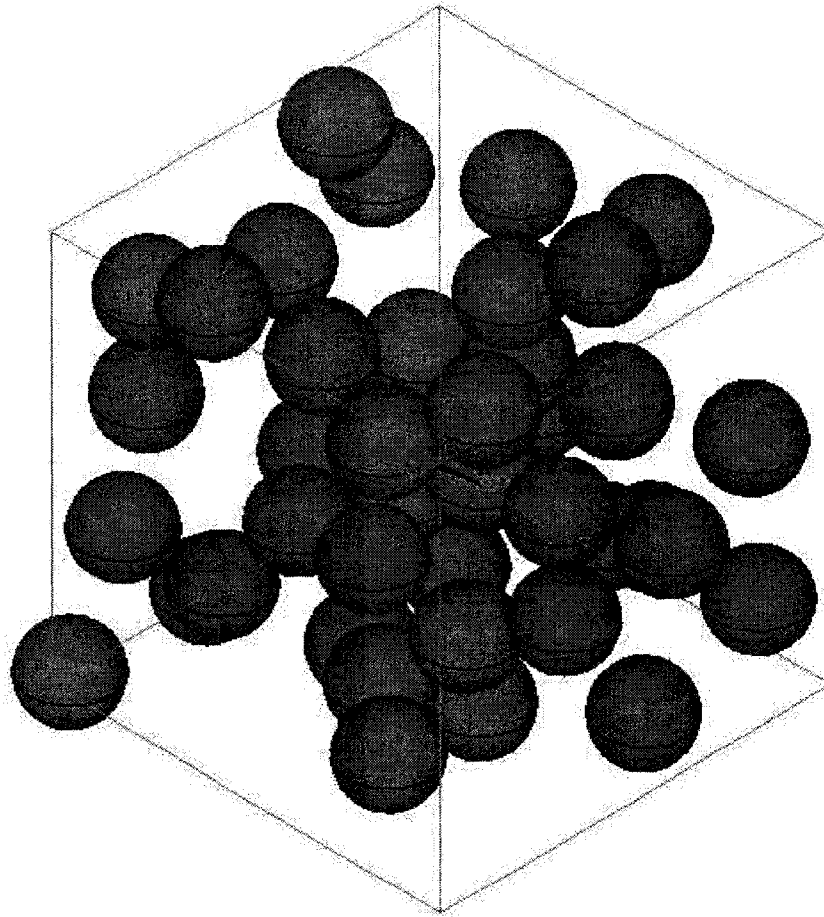


Figure 2.2 Distribution aléatoire des renforts obtenue pour une fraction volumique de 20% et VER de 40 sphères.

commandes), ce qui permet d'automatiser la génération des maillages.

Ce programme MatLab est constitué par a) une partie principale ou centrale (MAIN) où l'utilisateur fournit les données nécessaires (i.e. la fraction volumique des renforts, nombre des sphères, longueur du côté du cube, les paramètres s_1 et s_2 , etc.); b) deux fonctions qui déterminent les coordonnées du centre de chaque sphère en respectant les conditions énoncées dans les équations (2.1) et (2.2) et c) une fonction qui génère le fichier de commandes d'ANSYS lorsque la distribution aléatoire des sphères a été obtenue.

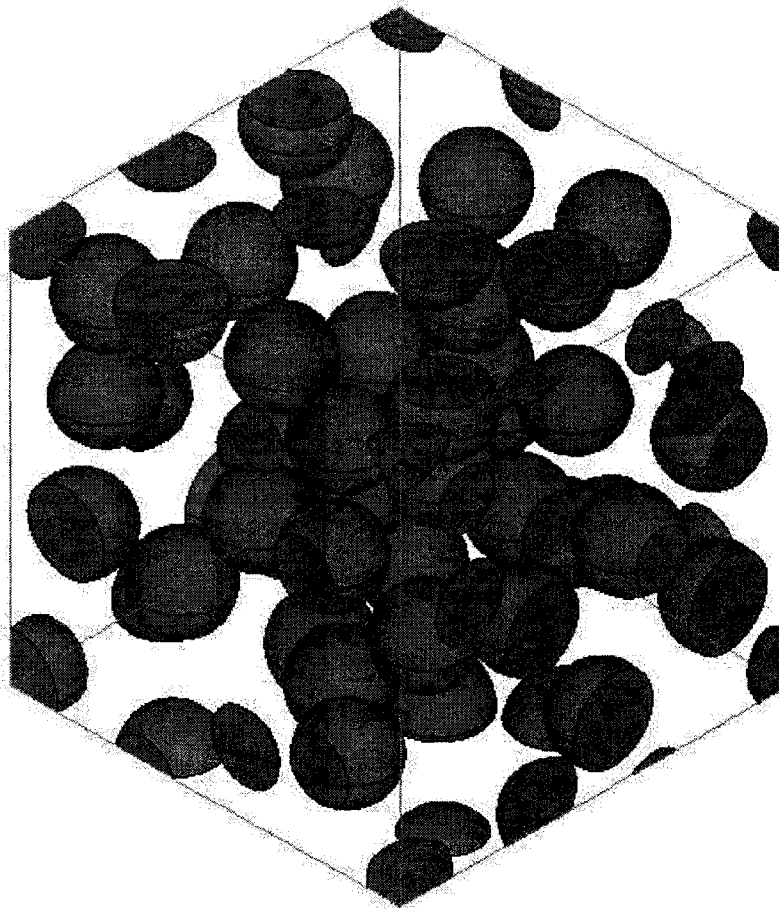


Figure 2.3 Configuration finale de la cellule unitaire. Fraction volumique de 20% et VER de 40 sphères.

Ainsi, une fois la distribution aléatoire des billes obtenue (la figure 2.2 montre la distribution initiale des renforts), les sphères qui coupent une face sont copiés à la face opposée. Ensuite, une opération booléenne de partition sur les volumes est appliquée. Finalement tous les volumes qui sont en dehors de la cellule unitaire sont effacés. La configuration finale des renforts pour une fraction volumique de 20% et 40 sphères est illustrée à la figure 2.3.

Étant donné que des conditions aux rives périodiques sont imposées aux VERs, les maillages des faces opposées de la cellule unitaire doivent être coïncidents afin d'imposer des équations de contraintes. Ainsi, le maillage des VERs est fait en

deux étapes en utilisant deux type d'éléments différents. D'abord, trois faces de la cellule unitaire (par exemple $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 0$) sont maillées à l'aide des éléments de surface triangulaires à 6 nœuds. Ensuite, ces maillages sont copiés aux faces opposées ($x_1 = L$, $x_2 = L$ et $x_3 = L$, étant L la longueur du côté de la cellule unitaire). Finalement, les volumes sont maillés à l'aide des éléments tétraèdres quadratiques, de telle sorte que les nœuds des faces soient coïncidents avec les nœuds des éléments solides. Une fois que le maillage des solides est généré, les éléments de surface sont effacés.

Des équations de contraintes doivent être imposées afin de vérifier des conditions aux rives périodiques. Afin de trouver une relation entre les points placés sur des faces opposées de la cellule unitaire, on procède de la façon suivante : par exemple si on prend les faces à $x_1 = 0$ et $x_1 = L$ en utilisant l'équation (1.7) on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(0, x_2, x_3) - \mathbf{E}^0 \cdot (0, x_2, x_3) &= \mathbf{u}^*(0, x_2, x_3) \\ \mathbf{u}(L, x_2, x_3) - \mathbf{E}^0 \cdot (L, x_2, x_3) &= \mathbf{u}^*(L, x_2, x_3) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Comme $\mathbf{u}^*$ est une fluctuation périodique, alors $\mathbf{u}^*(0, x_2, x_3) = \mathbf{u}^*(L, x_2, x_3)$. Ainsi, on obtient :

$$\mathbf{u}(0, x_2, x_3) + \mathbf{E}^0 \cdot (L, 0, 0) = \mathbf{u}(L, x_2, x_3) \quad (2.4)$$

Ainsi, la fluctuation ($\mathbf{u}^*$) est éliminée avec l'ensemble d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(0, x_2, x_3) + \mathbf{E}^0 \cdot (L, 0, 0) &= \mathbf{u}(L, x_2, x_3) \\ \mathbf{u}(x_1, 0, x_3) + \mathbf{E}^0 \cdot (0, L, 0) &= \mathbf{u}(x_1, L, x_3) \\ \mathbf{u}(x_1, x_2, 0) + \mathbf{E}^0 \cdot (0, 0, L) &= \mathbf{u}(x_1, x_2, L) \end{aligned} \quad (2.5)$$

De plus, dans les modèles éléments finis on doit prévenir les mouvements rigides, donc on fixe un point, par exemple : $\mathbf{u}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Ainsi, les composantes de $\mathbf{E}^0$ peuvent être obtenues en fonction des déplacements de certains nœuds et des relations entre

ces déplacements sont établies à cause de la symétrie de $\mathbf{E}^0$, où :

$$\begin{aligned} \frac{u_1(L, 0, 0)}{L} &= E_{11}, & \frac{u_2(L, 0, 0)}{L} &= E_{12}, & \frac{u_3(L, 0, 0)}{L} &= E_{13} \\ \frac{u_1(0, L, 0)}{L} &= E_{21}, & \frac{u_2(0, L, 0)}{L} &= E_{22}, & \frac{u_3(0, L, 0)}{L} &= E_{23} \\ \frac{u_1(0, 0, L)}{L} &= E_{31}, & \frac{u_2(0, 0, L)}{L} &= E_{32}, & \frac{u_3(0, 0, L)}{L} &= E_{33} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Les conditions périodiques (équations (2.5)) sont appliquées aux VERs à l'aide d'équations de contrainte. Ainsi, des relations entre les translations de chaque face opposée doivent être obtenues à partir des équations (2.5) et (2.6). Par exemple si on développe la première équation de l'ensemble (2.5) avec les relations (2.6) on obtient :

$$\{u_1, u_2, u_3\}_{(0, x_2, x_3)}^T + \{u_1, u_2, u_3\}_{(L, 0, 0)}^T = \{u_1, u_2, u_3\}_{(L, x_2, x_3)}^T \quad (2.7)$$

L'équation (2.7) représente un ensemble de trois équations de contraintes entre les translations des nœuds placés à $x_1 = 0$, $x_1 = L$ et le nœud placé au coin $(L, 0, 0)$. Les équations de contraintes restantes sont obtenues de la même façon. Cependant, l'ordre d'application des équations est important au niveau du code d'éléments finis. Ceci est attribuable au fait qu'un degré de liberté peut être esclave une seule fois. Par contre, les degrés de liberté qui apparaissent dans les coins et les arêtes font partie de plusieurs équations de contrainte. Donc, des sous-groupes d'équations sont définis pour les arêtes et pour les coins de la cellule unitaire afin d'éviter qu'un même degré de liberté soit esclave plus d'une fois.

Compte tenu que les calculs sont réalisés avec le code de calcul **ABAQUS**, les lignes de commandes d'**ABAQUS** sont générées à l'aide d'un programme codé en **Python**. Celui-ci utilise l'information reliée aux nœuds et aux éléments qui a été générée par **ANSYS**. Ensuite, ce programme génère le fichier de commandes d'**ABAQUS**.

2.3 Évaluation des contraintes

Étant donné que des conditions aux rives périodiques sur les déplacements sont imposées, la déformation moyenne de la fluctuation périodique devient nulle, ainsi la déformation macroscopique de la cellule unitaire devient le tenseur $\mathbf{E}^0$. La section 1.3 porte sur les conditions aux rives et la définition des tenseurs de déformations et de contraintes macroscopiques.

La contrainte macroscopique est définie par :

$$\Sigma^0 = \langle \sigma \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V \sigma(\mathbf{x}) dV \quad (2.8)$$

C'est-à-dire que la contrainte macroscopique est la moyenne volumique du champ de contraintes sur le volume déformé du VER (Koutznetsova et al., 2001). Puisque l'intégration numérique est utilisée dans la méthode d'éléments finis, une portion du volume de chaque élément est attribuée à chaque point d'intégration. C'est sur ceux-ci que les contraintes sont calculées. Ainsi, une moyenne volumique sur les points d'intégration peut être établie afin de calculer la contrainte globale. Cette opération peut être faite à l'aide d'une sous-routine : URDFIL (ABAQUS, 2004a). Cette sous-routine permet d'accéder au fichier des résultats lors d'une simulation. Donc, à la fin de chaque incrément, il est possible d'obtenir les valeurs des contraintes et des volumes sur chaque point d'intégration.

De plus, les contraintes calculées par ABAQUS constituent les composantes du tenseur de contraintes de Cauchy. Ces contraintes sont également appelées des « vraies contraintes ».

2.4 Description des simulations

Les matériaux composites étudiés dans ce mémoire sont constitués de phases viscoélastiques linéaires. ABAQUS permet de simuler le comportement de tels matériaux. Avant de continuer la description des simulations éléments finis réalisées certains concepts et terminologie de la loi de comportement viscoélastique linéaire doivent être expliqués.

2.4.1 Loi de comportement viscoélastique linéaire

Lorsqu'un corps est soumis à des contraintes et/ou des déformations, des mécanismes de déformation (plasticité, glissement dans un polymère, etc.) se mettent en branle. Généralement, ces mécanismes évoluent sur un certain laps de temps qui varie d'un matériau à l'autre. Par exemple, pour les matériaux métalliques à température ambiante (comportement élastique), la réponse à une sollicitation est instantanée, alors que pour un polymère la réponse n'est pas tout à fait instantanée (comportement viscoélastique). Ainsi, une combinaison des propriétés purement visqueuses et purement élastiques donne la naissance aux matériaux viscoélastiques. Dans le cas d'un matériau purement visqueux l'énergie fournie par la sollicitation est dissipée, tandis que dans un matériau purement élastique l'énergie est emmagasinée et peut être récupérée complètement après l'enlèvement de la charge.

Plusieurs approches ont été développées afin de décrire la loi de comportement de ces matériaux. Une des approches classiques relie le comportement viscoélastique aux combinaisons de ressorts et d'amortisseurs. La combinaison de ces unités peut être réalisée en série ou en parallèle. De plus, les ressorts ont un comportement purement élastique et les amortisseurs ont un comportement purement visqueux. Ainsi, le mot viscoélastique découle de ces types de modèles. D'autres approches cherchent une forme mathématique de la loi de comportement tout en respectant

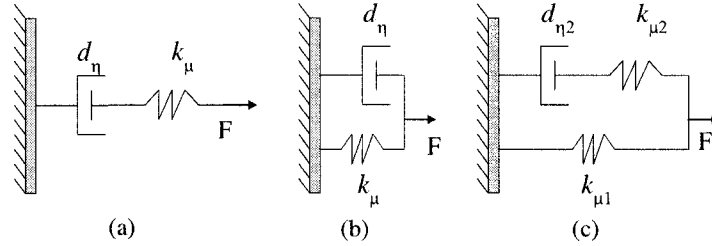


Figure 2.4 Modèles mécaniques de (a) Maxwell, (b) Voigt et (c) Linéaire Standard.

les principes de la thermodynamique.

Dans le cas de combinaisons de ressorts et d'amortisseurs on peut trouver trois types de modèles mécaniques classiques. La figure 2.4 (a) montre le modèle de Maxwell, 2.4 (b) le modèle de Voigt et 2.4 (c) le modèle linéaire standard. Tous ces modèles sont des combinaisons des ressorts linéaires avec des constantes de ressort k_μ et des amortisseurs avec des coefficients de viscosité d_η . Un ressort linéaire produit une déformation instantanée proportionnelle au chargement. Un amortisseur produit une vitesse proportionnelle au chargement à chaque instant. Il est possible d'obtenir les relations entre les déplacements et les forces pour chaque modèle. Par exemple, dans le cas du modèle de Maxwell :

$$\dot{u} = \frac{\dot{F}}{k_\mu} + \frac{F}{d_\eta} \quad (2.9)$$

avec $\dot{f} = \frac{df}{dt}$. L'équation (2.9) représente une équation différentielle liant les forces et les déplacements appliqués sur ce modèle.

Il est possible de résoudre cette équation à l'aide de la transformée de Laplace et les propriétés de convolution. Ainsi, si l'origine du temps est prise au moment d'initiation du mouvement et du chargement, il est possible d'obtenir l'élongation

totale $u(t)$ comme une sommation sur toute l'histoire de chargement $F(t)$, donc :

$$u(t) = \int_0^t c(t - \tau) \frac{dF}{d\tau}(\tau) d\tau \quad (2.10)$$

Une forme semblable peut être obtenue si les rôles de F et u sont échangés, ce qui donne :

$$F(t) = \int_0^t k(t - \tau) \frac{du}{d\tau}(\tau) d\tau \quad (2.11)$$

Les équations (2.10) et (2.11) appartiennent à la formulation de Boltzmann (Ludwig Boltzmann, 1844 - 1906) du comportement viscoélastique linéaire pour le cas simple d'un barreau. La fonction $c(t)$ est appelée « complaisance de fluage » alors que $k(t)$ est appelée « module de relaxation ». Ces fonctions constituent des caractéristiques du matériau.

Les approches thermodynamiques (par exemple Schapery (1969)) permettent d'obtenir une relation entre les contraintes et les déformations tout en respectant les principes de la thermodynamique. Lévesque (2004) a utilisé l'approche de Schapery et obtenu une relation entre les contraintes et les déformations dans un matériau viscoélastique. D'autres auteurs ont cherché des formes plus générales pour définir le comportement viscoélastique linéaire. Par exemple, Bouleau (1991, 1999) donne la forme suivante pour le module de relaxation en cisaillement :

$$\mu(t) = \int_0^\infty \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right] d\bar{\mu}(\tau) + \mu'' \quad (2.12)$$

où $d\bar{\mu}(\tau)$ est une mesure définie positive sur $\mathbb{R}_+^* \in]0, \infty[$ et μ'' représente la réponse élastique du matériau ($\mu'' > 0$). $d\bar{\mu}(\tau)$ est appelé *spectre de relaxation*.

Dans le cas où la mesure positive est définie par une sommation d'impulsions Dirac, le module de relaxation en cisaillement devient la forme typique des combi-

naisons des ressorts - amortisseurs donnée par :

$$\mu(t) = \sum_{i=1}^N \mu_i \exp \left[-\frac{t}{\tau_i} \right] + \mu'' \quad (2.13)$$

Il est possible de simuler de tels matériaux avec le code de calcul **ABAQUS** en normalisant la forme présentée ci-dessus par le module de relaxation en cisaillement instantané. Cette forme est communément appelée *série de Prony*.

2.4.2 Simulations éléments finis

La cellule unitaire a un volume de $10 \times 10 \times 10 \text{ mm}^3$. Ce choix est arbitraire et l'utilisation d'une autre longueur du côté de la cellule unitaire conduirait aux mêmes résultats, pour une même fraction volumique et nombre des renforts dans le VER. Des simulations d'essais de relaxation sont réalisées. Dans un essai de relaxation les déformations ε_r sont appliquées soudainement à $t = 0$ et maintenues constantes alors que les contraintes sont mesurées au fur et à mesure le temps avance. Ainsi, on a appliqué une déformation macroscopique E_{12} et on a mesuré la contrainte macroscopique Σ_{12} . Comme ce n'est pas possible d'appliquer numériquement une fonction échelon du type $E_{12}(t) = E_{12}^0 H(t)$, $H(t)$ étant la fonction d'Heaviside, la déformation doit être appliquée sous la forme d'une rampe. La figure 2.5 montre la fonction rampe utilisée pour l'application de la déformation macroscopique. Ainsi, le temps initial d'application de la déformation a été 5×10^{-5} seconde et le temps final de calcul a été 5 secondes. Nous avons observé que l'application de la déformation en 1×10^{-7} seconde a produit une différence de moins de 0.02% dans les contraintes mesurées à ce temps par rapport aux contraintes mesurées à 5×10^{-5} seconde lorsque E_{12}^0 est appliquée en 5×10^{-5} seconde. Ainsi, il est raisonnable de considérer $\Sigma_{12}(t = 5 \times 10^{-5}) \cong \Sigma_{12}(t = 0)$. Les phases sont considérées visco-élastiques linéaires, isotropes, incompressibles et Maxwelliennes. Ainsi, la loi de

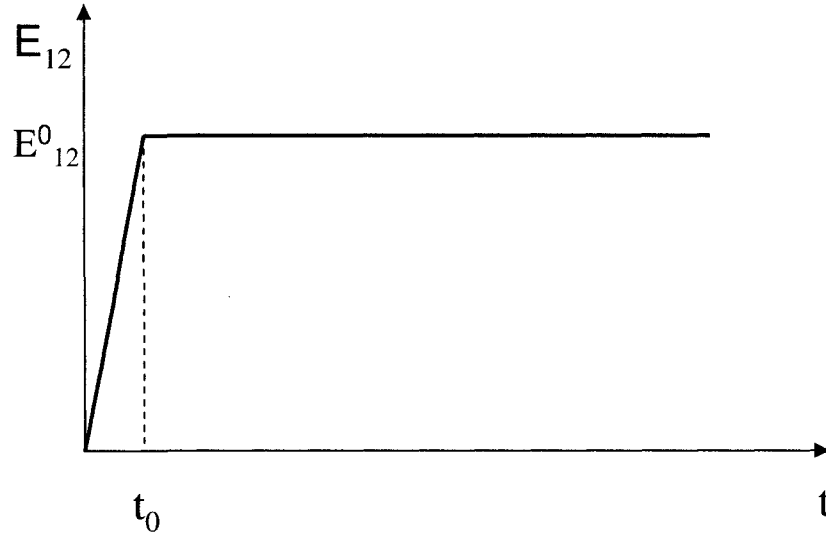


Figure 2.5 Fonction rampe utilisée pour l'application de la déformation macroscopique E_{12} .

comportement de chaque phase est donné par :

$$\mu_i(t) = \mu_i^0 \exp \left[-\frac{t}{\tau_i} \right] \quad (2.14)$$

où μ_i^0 et τ_i sont le module de cisaillement instantané et le temps de relaxation de la phase i , respectivement.

Les valeurs utilisées pour les phases constituant le matériau composite sont données au tableau 1 de l'Annexe I (page 112). Étant donné qu'on s'intéresse aux méthodes d'homogénéisation, celles-ci ne tiennent pas compte des unités. Par contre, le contraste entre les propriétés ainsi que les fractions volumiques des renforts sont des facteurs importants dans les techniques d'homogénéisation. Le contraste est le rapport entre les propriétés des renforts et celles de la matrice. En fait, deux contrastes (η) entre les propriétés des phases sont étudiés ($\eta = 10$ et $\eta = 100$). Ces contrastes sont appliqués sur les modules instantanés et sur les temps de relaxation

de chaque phase.

La taille du VER est déterminée en variant le nombre de sphères dans la cellule unitaire. Plusieurs simulations sont réalisées sur des VERs ayant les mêmes caractéristiques. Donc, dépendant la fraction volumique des renforts, des modèles éléments finis de VERs ayant 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40 et 50 renforts sont générés. Ainsi, si la valeur moyenne obtenue ne change pas significativement entre deux tailles de VERs, la taille du VER a été atteinte. De plus, l'isotropie est vérifiée en appliquant une déformation E_{12} , E_{13} et E_{23} séparément et en vérifiant que les contraintes globales mesurées sont approximativement égales. Également des études de convergence du maillage sont conduites. Les phases étant maxwelliennes, au fur et à mesure que le temps avance les contraintes s'approchent vers zéro. Ainsi, on peut mesurer les contraintes au temps initial de calcul pour différentes tailles de maillage pour un même modèle. La figure 2.6 montre l'effet de la taille du maillage dans le cas où la fraction volumique $\zeta = 10\%$ et le contraste $\eta = 10$. Cinq tailles différentes de maillage sont étudiées et une comparaison entre les contraintes mesurées au temps initial du calcul est établie. Cette étude montre que l'utilisation de 3×10^6 degrés de liberté permet d'obtenir un résultat précis. En effet, la variation entre la contrainte macroscopique Σ_{12} mesurée au temps initial entre le maillage le plus raffiné et celui contenant 3×10^6 degrés de liberté est approximativement 1,1%.

2.5 Propriétés effectives du matériau composite

Étant donné que les déformations sont imposées, les contraintes sont mesurées en utilisant la sous-routine URDFIL. Une fois les contraintes et les déformations calculées, le module de relaxation en cisaillement peut être obtenu pour chaque temps de calcul. Cependant, l'équation (2.12) montre que le module de relaxation en cisaillement dépend du temps et donc, le spectre de relaxation doit être obtenu. Le spectre de relaxation peut avoir une nature discrète (impulsions de Dirac), une

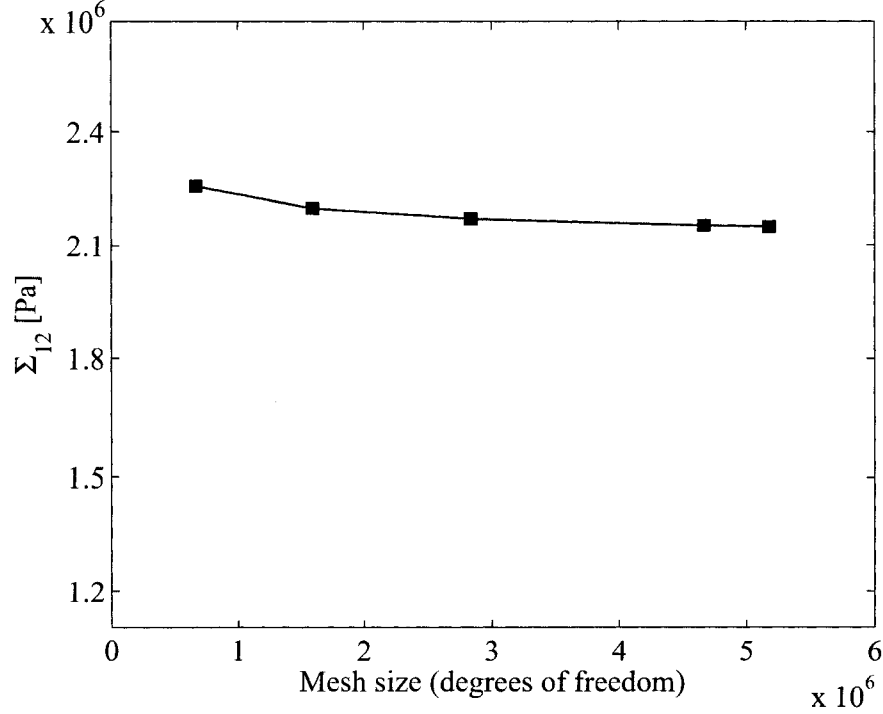


Figure 2.6 Effet de la taille du maillage pour $\zeta = 10\%$ et $\eta = 10$ sur la contrainte macroscopique Σ_{12} (Barello et Lévesque, 2008). Les valeurs de contrainte macroscopique Σ_{12} correspondent au premier temps de calcul.

nature continue (une fonction continue quelconque) ou bien une combinaison des deux. Plusieurs méthodes ont été développées afin d'obtenir le spectre de relaxation à partir de la connaissance du module de relaxation. Cependant, la plupart de ces méthodes peuvent conduire à des résultats ne respectant pas les restrictions imposées par la thermodynamique. De plus, les méthodes développées ne permettent pas de prédire si la nature est continue ou discrète. Dans le cadre de ce projet de maîtrise, une procédure est développée afin d'obtenir le spectre de relaxation effectif à partir des simulations éléments finis. Cette procédure permet de représenter une nature discrète, continue ou combinaison des deux. Également, celle-ci s'assure que les résultats obtenus rencontrent les restrictions imposées par la thermodynamique.

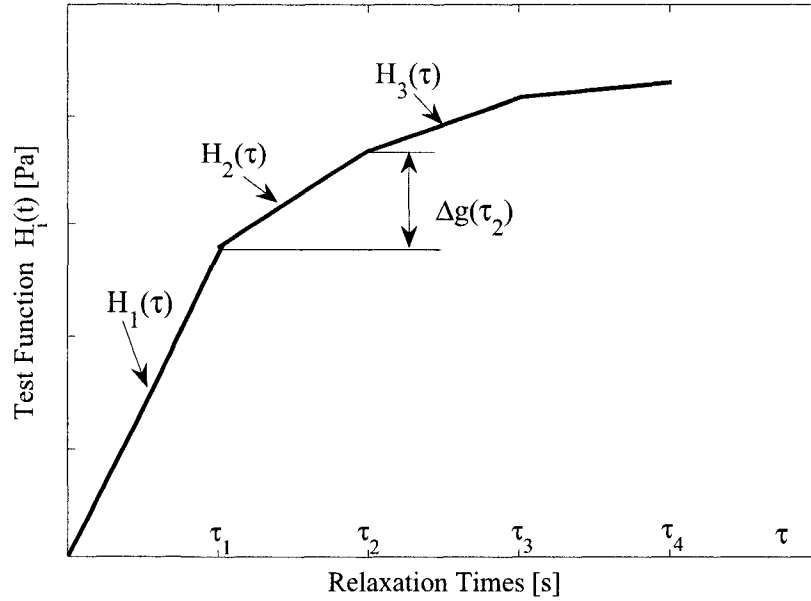


Figure 2.7 Fonction d'essai pour approximer un spectre de relaxation continu $\mu_{\text{app}}^c(t)$ (Barello et Lévesque, 2008). Par exemple, le spectre continu $H_2(\tau)$ est défini par une interpolation linéaire entre les valeurs du spectre à τ_1 et τ_2 . $\Delta g(\tau_2)$ représente la différence entre ces deux valeurs d'intensité.

2.5.1 Procédure pour obtenir le spectre de relaxation à partir des simulations éléments finis

La procédure définit des approximations du spectre de relaxation selon la nature considérée. Donc, pour un spectre discret le module de relaxation en cisaillement peut être exprimé de la façon suivante :

$$\mu(t) = \mu'' + \sum_{i=1}^{n_d} \mu_i \exp \left[-\frac{t}{\tau_i} \right] \quad (2.15)$$

où n_d est le nombre des temps de relaxations discrets, μ'' est la réponse à $t = \infty$, dite aussi élastique car à $t = \infty$ c'est uniquement le ressort qui agit, μ_i est l'intensité de l'impulsion Dirac (intensité de la ligne spectrale) et τ_i est le temps de relaxation

de la ligne spectrale i . Dans cette procédure les temps de relaxation sont définis *a priori* selon la méthode de Lévesque et al. (2007) :

$$\frac{1}{\tau_i} = 10^{\log[(1+\theta)\theta_{\min}] + i \frac{\log[(1-\theta)\theta_{\max}] - \log[(1+\theta)\theta_{\min}]}{n_d - 1}} \quad (2.16)$$

avec $i = 0, 1, \dots, n_d - 1$

Cette relation fait en sorte que les temps de relaxation sont distribués linéairement sur une échelle logarithmique. Cette relation a été obtenue par essais et erreurs. Le paramètre θ détermine l'intervalle dans lequel les temps de relaxation sont distribués entre $\theta_{\min}$ et $\theta_{\max}$. Afin de rencontrer les restrictions imposées par la thermodynamique un changement de variable est défini. μ_i est défini comme $\mu_{\text{app}_i}^2$. La réponse élastique μ'' peut être mesurée à partir des simulations éléments finis. Néanmoins, comme les phases sont Maxwelliennes celle-ci devient nulle. Par généralité, μ'' est retenu dans le développement car la procédure peut être utilisée pour d'autres types des matériaux viscoélastiques. Alors, la fonction d'essai suivante est proposée pour le module de relaxation en cisaillement approximé :

$$\mu_{\text{app}}^d(t) = \mu'' + \sum_{i=1}^{n_d} \mu_{\text{app}_i}^2 \exp \left[-\frac{t}{\tau_i} \right] \quad (2.17)$$

où l'exposant « d » indique la formulation du spectre discret. Alors, les paramètres μ_{app_i} peuvent être déterminés en posant le problème d'optimisation suivant :

$$\inf_{\mu_{\text{app}_i}} E_d^2 = \inf_{\mu_{\text{app}_i}} \sum_{i=1}^M [\mu_{\text{real}}(t_i) - \mu_{\text{app}}^d(t_i)]^2 \quad \text{avec} \quad \mu(0) = \mu'' + \sum_{i=1}^{n_d} \mu_{\text{app}_i}^2 \quad (2.18)$$

où M est le nombre de points simulés, $\mu_{\text{real}}(t_i)$ est le module de relaxation en cisaillement mesuré au temps t_i à partir des simulations éléments finis, E_d^2 est la somme des $[\mu_{\text{real}}(t_i) - \mu_{\text{app}}^d(t_i)]^2$. Une équation de contrainte est introduite afin d'assurer que les réponses instantanées mesurées et approximées soient les mêmes. En effet, le spectre de relaxation doit être capable de retrouver la réponse instantanée du problème. Le logiciel utilisé pour résoudre ce problème d'optimisation est **Mathematica**. La

fonction utilisée est `NMinimize` et l'algorithme choisi est `RandomSearch`.

Dans cette étude, un spectre continu a été approximé par une interpolation linéaire entre les intensités du spectre $H(\tau_{i-1})$ et $H(\tau_i)$ aux temps τ_{i-1} et τ_i respectivement. La figure 2.7 montre la fonction d'essai utilisé pour le spectre continu. L'interpolation linéaire devient :

$$H_i(\tau) = \left(\sum_{s=1}^{i-1} \Delta g(\tau_s) \right) + \left(\frac{\tau - \tau_{i-1}}{\tau_i - \tau_{i-1}} \Delta g(\tau_i) \right) \quad \text{pour } \tau_{i-1} < \tau < \tau_i \quad (2.19)$$

Le module de relaxation est approximé par :

$$\mu_{\text{app}}^c(t) = \mu'' + \sum_{i=1}^{n_c-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \exp \left[-\frac{t}{\tau} \right] H_i(\tau) d\tau \quad (2.20)$$

où n_c représente le nombre de $H(\tau_i)$ utilisés dans l'interpolation. Pour que le spectre de relaxation vérifie les restrictions de la thermodynamique ($H(\tau) \geq 0$), les équations de contraintes suivantes doivent être imposées :

$$\text{CE}_i = \sum_{s=1}^i \Delta g(\tau_s) \geq 0 \quad \text{pour } i = 1 \quad \text{à} \quad n_c \quad (2.21)$$

Le spectre de relaxation continu est obtenu à partir du problème suivant :

$$\inf_{\Delta g(\tau_s)} E_c^2 = \inf_{\Delta g(\tau_s)} \sum_{i=1}^m [\mu_{\text{real}}(t_i) - \mu_{\text{app}}^c(t_i)]^2 \quad (2.22)$$

où E_c^2 est la somme des $[\mu_{\text{real}}(t_i) - \mu_{\text{app}}^c(t_i)]^2$.

En procédant de manière analogue, un spectre de relaxation ayant des parties discrètes et continues peut être obtenu en approximant le module de relaxation en

cisaillement de la façon suivante :

$$\mu_{\text{app}}^{c+d}(t) = \mu'' + \sum_{i=1}^{n_d} \mu_{\text{app}_i}^2 \exp\left[-\frac{t}{\tau_i}\right] + \sum_{j=1}^{n_c-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right] H_j(\tau) d\tau \quad (2.23)$$

Le problème d'optimisation suivant est posé :

$$\begin{aligned} \inf_{\mu_{\text{app}_i}, \Delta g(\tau_s)} E_{c+d}^2 &= \inf_{\mu_{\text{app}_i}, \Delta g(\tau_s)} \sum_{i=1}^m [\mu_{\text{real}}(t_i) - \mu_{\text{app}}^{c+d}(t_i)]^2 \\ \text{avec} \quad \text{CE}_i &= \sum_{s=1}^i \Delta g(\tau_s) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

où E_{c+d}^2 est la somme des $[\mu_{\text{real}}(t_i) - \mu_{\text{app}}^{c+d}(t_i)]^2$. Étant donné que les résultats optimaux approximent l'égalité des réponses instantanées mesurée et approximée, l'équation de contrainte qui impose cette condition a été enlevée. De plus, ceci diminue la charge informatique nécessaire pour la résolution du problème d'optimisation.

Le spectre de relaxation effectif est obtenu en plusieurs étapes. D'abord un spectre discret est obtenu en utilisant l'équation (2.18) en déterminant par essais et erreurs les paramètres $\theta_{\max}$, $\theta_{\min}$ et les τ_i . Ensuite, la même procédure est appliquée afin d'obtenir un spectre continu optimal en utilisant l'équation (2.22). Finalement, les deux spectres optimaux sont combinés et des nouveaux essais sont réalisés afin de trouver les valeurs des τ_i discrets et continus qui solutionnent le problème (2.24). Ainsi, le but de chaque problème est de minimiser E_i^2 . La nature du spectre est déterminée par la valeur minimale de E_i^2 , e.g. si $E_{c+d}^2 \leq E_d^2 \leq E_c^2$ le spectre de relaxation a une nature discrète et continue.

La procédure a été validée en prenant des valeurs numériques d'un spectre de relaxation connu. Pour plus des détails sur la validation de la procédure voir l'Annexe I (page 119).

2.5.2 Spectres de relaxation obtenus par des techniques d'homogénéisation analytiques

Les méthodes d'homogénéisation analytiques permettent de prédire le spectre de relaxation effectif du matériau composite. Cependant, la nature du spectre est différente selon la méthode utilisée et ce, pour le même matériau. Les schémas d'homogénéisation analytiques utilisés dans cette étude sont : Mori - Tanaka (MT), Auto-Cohérent (en anglais « Self-Consistent » ; SC), et Torquato (TOA). Ces méthodes ont été développées pour des matériaux composites constitués de phases élastiques. Le principe de correspondance viscoélastique stipule que si les propriétés effectives élastiques sont connues, les propriétés effectives viscoélastiques peuvent être obtenues en utilisant celles élastiques dans le domaine de Laplace - Carson¹. En d'autres mots, en appliquant l'inverse de la transformée de Laplace - Carson sur les réponses élastiques, les réponses temporelles viscoélastiques sont obtenues.

La méthode de MT est utilisée selon les résultats de Wang et Weng (1992). Alors, pour un matériau composite renforcé par des renforts sphériques distribués aléatoirement dans l'espace, le module de cisaillement dans le domaine de Laplace - Carson est défini par (Wang et Weng, 1992) :

$$\mu^{\text{DL}} = \mu_0^{\text{DL}} + \frac{c_1}{\frac{1}{\mu_1^{\text{DL}} - \mu_0^{\text{DL}}} + \frac{6c_0(k_0^{\text{DL}} + 2\mu_0^{\text{DL}})}{5\mu_0^{\text{DL}}(3k_0^{\text{DL}} + 4\mu_0^{\text{DL}})}} \quad (2.25)$$

où k_0^{DL} , μ_0^{DL} , c_0 sont les modules de compressibilité et de cisaillement dans le domaine de Laplace - Carson et la fraction volumique de la matrice, respectivement. μ_1^{DL} et c_1 est le module de cisaillement dans le domaine de Laplace - Carson et la fraction volumique des renforts, respectivement. De plus, les phases étant incom-

¹La transformée de Laplace - Carson est donnée par $f^*(s) = s \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-st] dt$, où $f^*(s)$ est la transformée de Laplace - Carson de la fonction $f(t)$ et s est la variable de Laplace.

pressibles ($k_i \rightarrow \infty$) l'équation (2.25) devient :

$$\mu^{\text{DL}} = \mu_0^{\text{DL}} + \frac{c_1}{\frac{1}{\mu_1^{\text{DL}} - \mu_0^{\text{DL}}} + \frac{6c_0}{15\mu_0^{\text{DL}}}} \quad (2.26)$$

Le module de cisaillement dans l'espace temporel est obtenu en appliquant l'inverse de la transformée de Laplace - Carson à l'équation (2.26). Le spectre effectif de relaxation obtenu avec la méthode de MT donne une nature discrète constituée de deux lignes spectrales. De plus, un des temps de relaxation coïncide avec le temps de relaxation de la matrice. La forme analytique du spectre de relaxation obtenu par la méthode de MT peut être exprimée par :

$$\mu(t) = \alpha_1 \exp[-\tau_0 t] + \alpha_2 \exp[-\tau^A t] \quad (2.27)$$

où les fractions volumiques c_0 et c_1 , les modules de cisaillement instantanés de la matrice et des renforts et d'autres constantes provenant du tenseur d'Eshelby interviennent dans les constantes α_i et τ^A et τ_0 correspond au temps de relaxation de la matrice.

La méthode SC est utilisée selon les résultats de Beurthey et Zaoui (2000) et Brenner et al. (2002). L'équation quadratique suivante permet d'obtenir le module de cisaillement effectif pour un composite renforcé par des renforts sphériques distribués aléatoirement dans l'espace :

$$A\mu'^2 + B\mu' + C = 0 \quad (2.28)$$

où $\mu' = \frac{\mu}{\mu_0}$, $A = 1$, $B = \frac{1-5c_1}{2} \frac{\mu_1}{\mu_0} + \frac{5c_1-3}{3}$ et $C = \frac{-2}{3} \frac{\mu_1}{\mu_0}$. Afin d'obtenir le module de cisaillement effectif μ , l'équation (2.28) doit être traitée dans le domaine de Laplace - Carson et ensuite pour obtenir la réponse temporelle, l'inverse de la transformée Laplace - Carson est appliquée. Le spectre de relaxation effectif obtenu avec la méthode SC pour des matériaux composites ayant des phases Maxwelliennes et

incompressibles est constitué d'une partie continue dominante et une ligne spectrale qui a le même temps de relaxation que la matrice. La forme analytique du spectre de relaxation obtenu à partir de la méthode SC peut être représentée par :

$$\mu(t) = \alpha_1 \exp[-\tau_0 t] + \int_{\tau^A}^{\tau^B} \exp[-t/\tau] d\hat{\mu}(\tau) \quad (2.29)$$

où α_1 , τ^A , τ^B et $d\hat{\mu}(\tau)$ sont des fonctions des fractions volumiques c_0 et c_1 et des modules de cisaillement instantanés de la matrice et des renforts et τ_0 correspond au temps de relaxation de la matrice.

La méthode de TOA (Torquato, 1998) fait apparaître des paramètres qui dépendent de la microstructure étudiée (Torquato, 1991). Le module effectif en cisaillement pour des matériaux composites renforcés par des sphères distribuées aléatoirement dans l'espace pour des phases incompressibles est donné par :

$$\mu = \mu_0 \frac{1 + \frac{3}{2} D c_1 - \frac{3}{2} D^2 c_0 \eta_2}{1 - D c_1 - \frac{3}{2} D^2 c_0 \eta_2} \quad (2.30)$$

où $D = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_2 + \frac{3}{2} \mu_0}$ et η_2 est le paramètre statistique qui dépend de la microstructure. En effet, ce paramètre est calculé à partir d'une intégrale qui tient compte de la probabilité de distribution de phases. Il dépend donc de la fraction volumique des renforts et des caractéristiques particulières de la microstructure (distribution de sphères, distribution de cylindres, sphères impénétrables, sphères totalement rigides, etc.).

Le schéma de TOA conduit à un spectre de nature discrète constitué de trois lignes spectrales. Une de ces lignes correspond au temps de relaxation de la matrice. La forme analytique du spectre de relaxation obtenu à partir de la méthode de TOA est exprimée par :

$$\mu(t) = \alpha_1 \exp[-\tau_0 t] + \alpha_2 \exp[-\tau^A t] + \alpha_3 \exp[-\tau^B t] \quad (2.31)$$

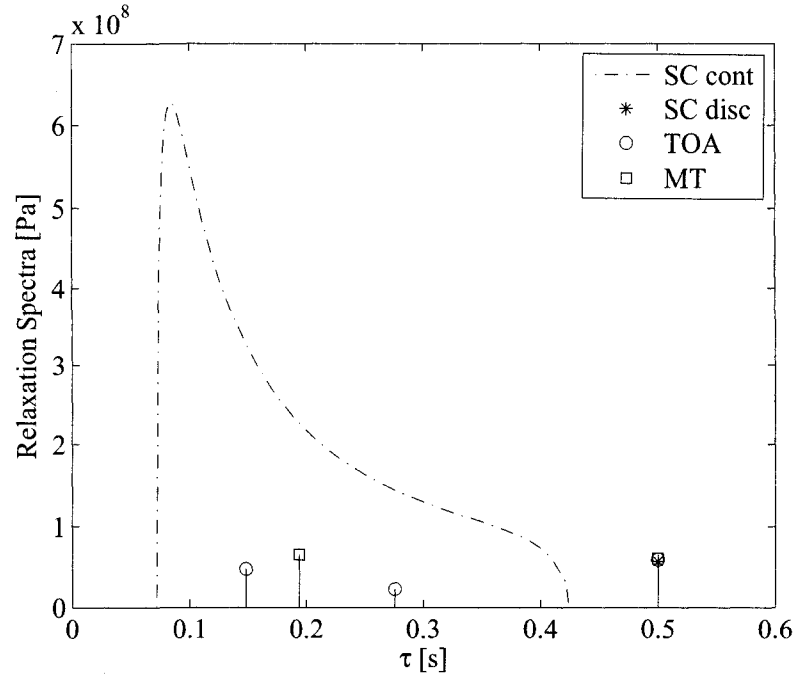


Figure 2.8 Spectres de relaxation obtenus par les différents schémas analytiques pour une fraction volumique $\zeta = 20\%$ et un contraste entre les phases $\eta = 10$. MT : Mori - Tanaka, SC cont : Auto-Cohérent partie continue, SC disc : Auto-Cohérent partie discrète et TOA : Torquato (Barello et Lévesque, 2008).

où les constantes α_i , τ^A et τ^B sont des fonctions des fractions volumiques c_0 et c_1 , des modules de cisaillement instantanés de la matrice et des renforts et du paramètre η_2 et τ_0 correspond au temps de relaxation de la matrice.

La figure 2.8 montre les spectres de relaxation obtenus pour toutes les méthodes d'homogénéisation analytiques étudiées.

2.6 Résultats et discussions

Quatre fractions volumiques sont étudiées : 10%, 15%, 20% et 25% avec un rapport des propriétés entre les phases $\eta = 10$ (η étant le rapport entre les propriétés

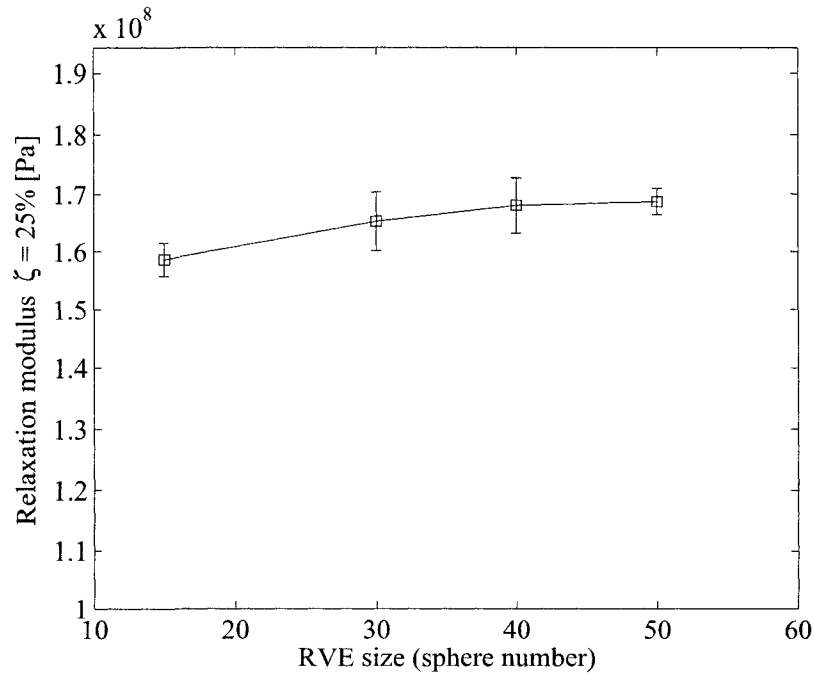


Figure 2.9 Module de relaxation moyen pour chaque taille de VER (15, 30, 40 et 50 sphères). $\zeta = 25\%$ et $\eta=10$. Les barres d'erreur correspondent des intervalles de confiance de 95% en considérant une distribution gaussienne sur les valeurs moyennes. (Barello et Lévesque, 2008).

des renforts et celles de la matrice) et deux fractions volumiques 10% et 20% avec $\eta = 100$. Dans cette partie les résultats reliés à la fraction volumique 25% sont présentés. En effet, des conclusions similaires peuvent être obtenues à partir des autres fractions volumiques. L'Annexe I contient tous les résultats (voir les pages 113 à 115 et les pages 121 à 125).

La taille du VER est déterminée pour chaque fraction volumique et rapport des propriétés. La figure 2.9 montre l'étude de la taille du VER pour une fraction volumique des renforts de 25% et $\eta = 10$. Six simulations ont été faites pour chaque VER ayant les mêmes caractéristiques. Les barres d'erreur correspondent aux intervalles de confiance de 95% pris sur les valeurs moyennes en considérant une distribution gaussienne. Il est possible d'observer pour toutes les fractions

	Module de relaxation effectif [Pa]	
	$\eta = 10$	$\eta = 100$
$\zeta = 10\%$	$11,1 \times 10^7$	$1,28 \times 10^7$
$\zeta = 15\%$	$12,76 \times 10^7$	–
$\zeta = 20\%$	$14,51 \times 10^7$	$2,075 \times 10^7$
$\zeta = 25\%$	$16,86 \times 10^7$	–

Tableau 2.1 Module de relaxation effectif en cisaillement calculé pour le premier temps de calcul pour tous les matériaux étudiés. Pour $\eta = 10$ le module de relaxation instantané pour la matrice est $8,67 \times 10^7$ Pa et pour les renforts est $8,67 \times 10^8$ Pa. Pour $\eta = 100$ le module de relaxation instantané pour la matrice est $8,67 \times 10^6$ Pa et pour les renforts est $8,67 \times 10^8$ Pa.

volumiques une différence significative statistique entre la taille du VER la plus grande est celle la plus petite. Étant donné que la variabilité diminue lorsque la taille du VER augmente, les valeurs des simulations qui appartiennent à la taille du VER plus grande sont prises pour le calcul des propriétés effectives. Donc, les valeurs moyennes de 6 simulations qui correspondent à la taille du VER de 50 sphères sont utilisées pour le calcul du spectre et module de relaxation.

Le spectre de relaxation effectif calculé à partir des simulations en utilisant la méthode développée dans la section 2.5.1 a une partie discrète dominante et une partie continue négligeable. En effet, si la partie continue du spectre de relaxation obtenu numériquement n'est pas incluse dans le module de relaxation approximé, les valeurs du module de relaxation calculées à partir de cette approximation collent à celles obtenues à partir des simulations éléments finis. La figure 2.10 montre les spectres de relaxation obtenus en utilisant toutes les méthodes analytiques d'homogénéisation et la procédure développée, pour une fraction volumique $\zeta = 25\%$ et $\eta = 10$. Deux échelles différentes sont utilisées afin de qu'il soit possible d'observer la partie continue du spectre de relaxation approximé. Ce type de résultat est obtenu pour toutes les fractions volumiques étudiées.

Le module de relaxation effectif en cisaillement est obtenu à partir des simulations éléments finis. Les valeurs effectives calculées pour le premier temps de calcul

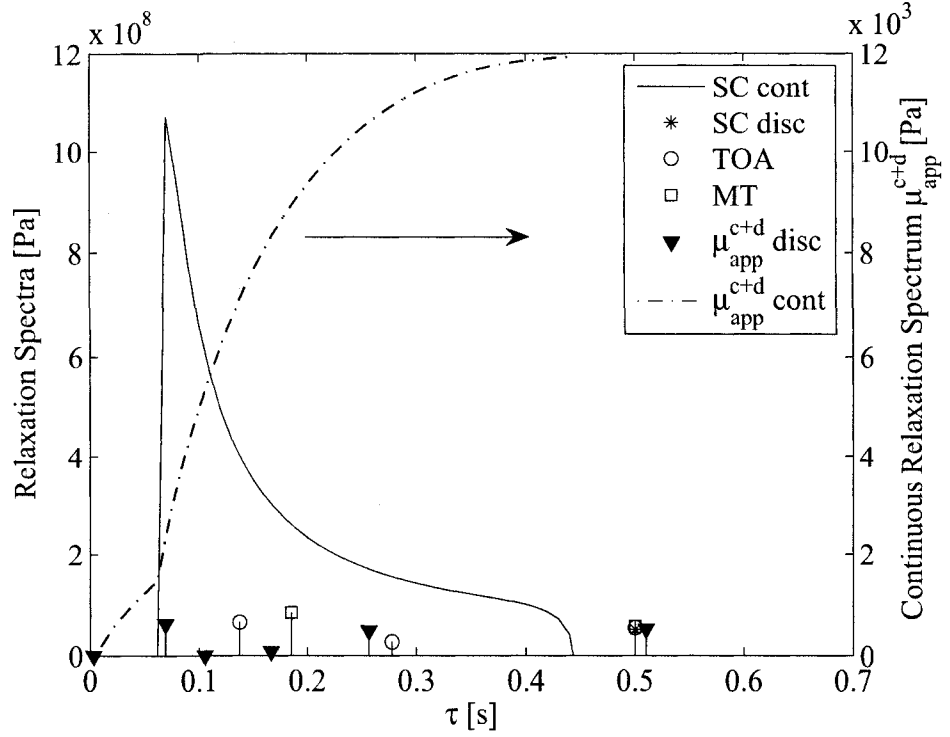


Figure 2.10 Spectres de relaxation obtenus par différentes méthodes. $\zeta = 25\%$ et $\eta=10$. « SC cont » et « SC disc » correspondent aux parties continues et discrètes de la méthode Auto-Cohérente, « MT » correspond au spectre obtenu par la méthode de Mori-Tanaka, « TOA » correspond au spectre obtenu par la méthode de Torquato et « μ_{app}^{c+d} disc et cont » correspondent aux parties discrètes et continues de l'approximation du spectre obtenu par la procédure développée dans la section 2.5.1 (Barello et Lévesque, 2008).

pour tous les matériaux étudiés sont montrées au tableau 2.1.

Ce module de relaxation effectif en cisaillement est comparé avec celui prédit par les méthodes d'homogénéisation analytiques. La figure 2.11 montre les modules de relaxation en cisaillement pour le premier temps de calcul pour toutes les fraction volumiques avec un contraste entre les phases $\eta = 10$ obtenus à partir des méthodes analytiques, simulations éléments finis (FE) et l'approximation développée dans la section 2.5.1. Entre les techniques d'homogénéisation analytiques, la méthode de MT montre la différence la plus grande avec les résultats obtenus par les simulations

éléments finis. De plus, la différence augmente au fur et à mesure que la fraction volumique augmente. L'erreur augmente de 5,97% pour une fraction volumique de 10% à 21% pour une fraction volumique de 25%. En plus, les résultats de l'Annexe I montrent que la méthode de MT augmente l'erreur introduite avec l'augmentation de contraste entre les propriétés de phases. Le schéma SC est celui qui approxime le mieux les valeurs obtenues à partir des simulations éléments finis. Finalement, on peut conclure que le comportement effectif d'un matériau composite qui est constitué de phases Maxwelliennes n'est plus Maxwellien. Ceci est montré par toutes les méthodes d'homogénéisation étudiées. En effet, il faut remarquer qu'on pourrait s'attendre à un comportement effectif Maxwellien étant donné que les phases constitutantes ont de telles caractéristiques. Cependant, on peut constater que le mélange de matériaux ayant des caractéristiques similaires ne donne pas des propriétés effectives semblables à celles-ci.

2.7 Conclusions

Les modèles éléments finis pour des matériaux composites constitués de renforts sphériques distribués aléatoirement dans l'espace ont été développés sans tenir compte de l'endommagement. Des simulations d'essais de relaxation ont été conduites en considérant des phases maxwelliennes et incompressibles. De plus, une procédure pour obtenir le spectre de relaxation effectif a été développée. Ainsi, le spectre obtenu à partir des simulations éléments finis a été comparé avec ceux obtenus à partir des méthodes analytiques d'homogénéisation. Le module de relaxation en cisaillement a été également comparé avec les méthodes analytiques en montrant que la méthode Auto-Cohérente est celle qui approxime le mieux les résultats obtenus à partir des simulations éléments finis, tandis que la méthode de Mori - Tanaka est celle qui montre les différences les plus grandes. En effet, cette méthode est celle qui donne la solution la plus souple. Ces résultats pourront être utilisés dans le choix d'une méthode d'homogénéisation analytique dans le cadre du

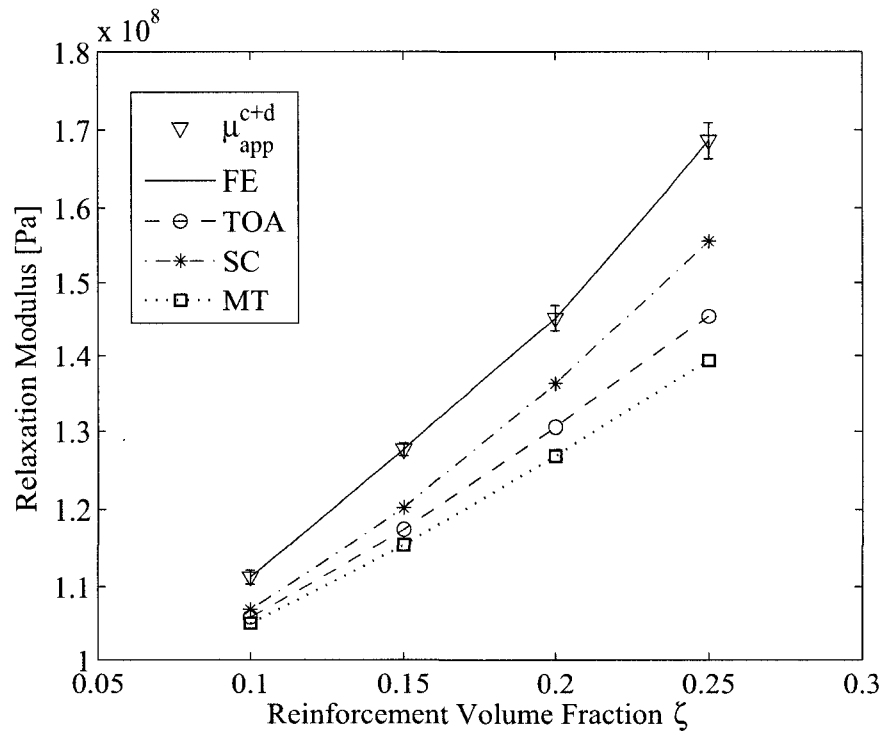


Figure 2.11 Module de relaxation calculé au premier temps de calculs en utilisant toutes les méthodes et les simulations éléments finis ($\eta=10$). Les barres d'erreur correspondent à l'erreur relative des simulations éléments finis (FE) en prenant un intervalle de confiance de 95% (Barello et Lévesque, 2008).

développement d'une méthode analytique qui tiendra compte de l'endommagement pour le calcul des propriétés effectives de matériaux composites.

Ces modèles d'éléments finis peuvent être utilisés afin d'étudier le comportement effectif en tenant compte de l'endommagement par décohésion de l'interface renfort-matrice. Pour ce faire de nouveaux éléments doivent être ajoutés afin de modéliser l'interface renfort-matrice.

CHAPITRE 3

ÉLÉMENT FINI ET LOI DE COMPORTEMENT D'INTERFACE

3.1 Introduction

Un des types d'endommagement que l'on peut apercevoir dans les matériaux composites renforcés par des particules distribuées aléatoirement dans l'espace est la décohésion de l'interface renfort-matrice. La figure 3.1 montre la décohésion des particules pour un chargement uni-axial d'un matériau composite renforcé par des particules de verre (fraction volumique des renforts 10%). Afin de modéliser la décohésion de l'interface renfort-matrice par la méthode des éléments finis un élément fini d'interface est implémenté. La formulation programmée est celle de Segurado et LLorca (2004). Le comportement de l'interface est piloté par une loi d'interface qui doit être définie afin de calculer la matrice de rigidité et le vecteur de forces nodales de l'élément. La formulation de l'élément et la loi de comportement de l'interface choisie seront abordées dans ce chapitre.

3.2 Modèle continu d'interface

Afin de comprendre le développement de l'élément fini d'interface le principe des travaux virtuels sur un corps ayant deux phases et une interface est appliqué. En considérant le corps de la figure 3.2, et en négligeant les forces de volume et d'inertie, le principe de travaux virtuels dans la configuration déformée peut être exprimé comme :

$$\int_V \sigma_{ji} \delta u_{i,j} dV = \int_{S_{ext}} T_i \delta u_i dS \quad (3.1)$$

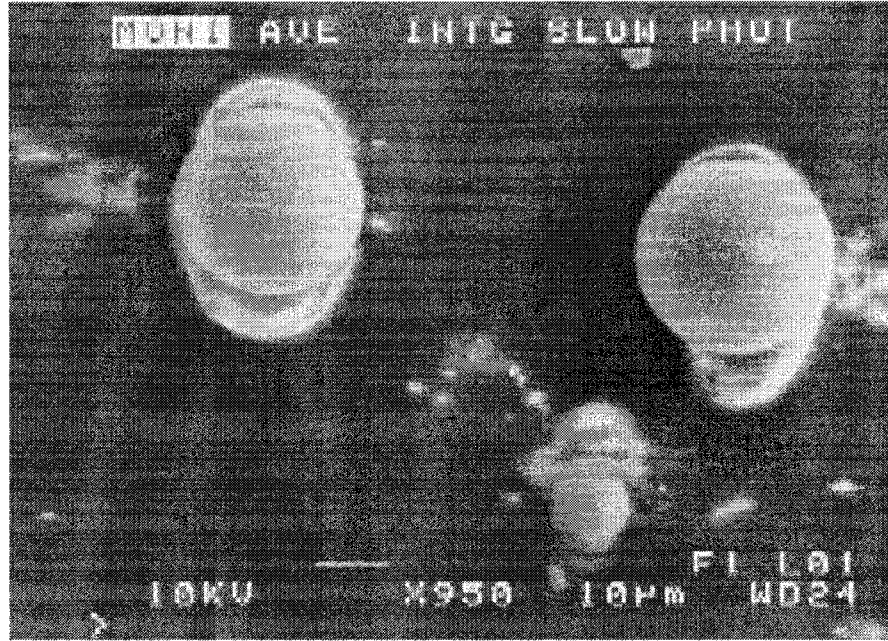


Figure 3.1 Décohésion de l'interface renfort-matrice dans un matériau composite renforcé par des particules de verre. La direction de chargement est verticale. (Lévesque, 2004).

où σ_{ji} est le tenseur de contraintes de Cauchy, $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ représente le gradient de déplacement, T_i est le vecteur de contraintes appliqué dans la frontière du corps et δ représente un déplacement virtuel. En effet, par l'équilibre des contraintes en l'absence de forces de volume (d'où $\sigma_{ji,j} = 0$) et comme $T_i = \sigma_{ji}n_j$ où $\mathbf{n}$ est le vecteur normal à la surface S_{ext} , on obtient :

$$\begin{aligned}
 \int_{S_{ext}} T_i \delta u_i dS &= \int_{S_{ext}} \sigma_{ji} \delta u_i n_j dS \\
 &= \int_V (\sigma_{ji} \delta u_i)_{,j} dV \\
 &= \int_V \sigma_{ji,j} \delta u_i dV + \int_V \sigma_{ji} \delta u_{i,j} dV
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

où le théorème de la divergence a été utilisé et l'argument de la première intégrale du membre à droite devient nul.

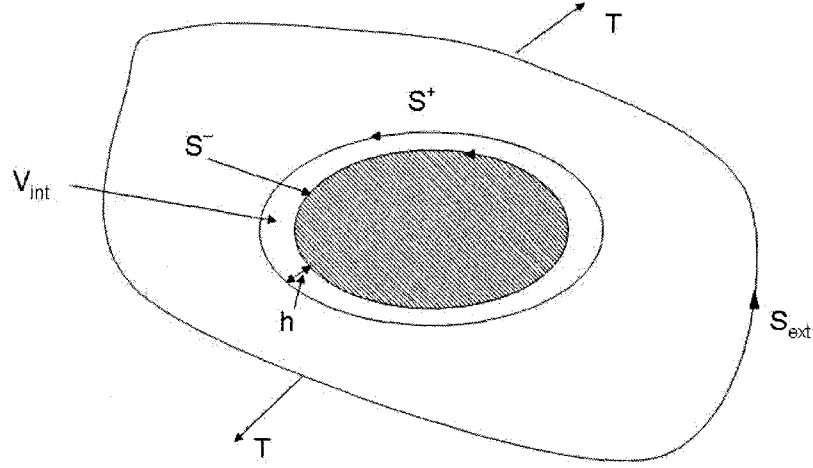


Figure 3.2 Corps constitué de plus d'une phase et une interface.

Comme l'on a remarqué, le corps possède plusieurs phases. L'interface a une épaisseur h qui est plus petite que les autres dimensions. Ainsi, le domaine de l'interface est borné par l'enveloppe des deux phases entre lesquelles elle se trouve, comme illustré à la figure 3.2. On peut réécrire le principe de travaux virtuels comme :

$$\int_{V_1} \sigma_{ji} \delta u_{i,j} dV + \int_{V_{int}} \sigma_{ji} \delta u_{i,j} dV = \int_{S_{ext}} T_i \delta u_i dS \quad (3.3)$$

où $V_1 = V - V_{int}$ et V_{int} est le volume correspondant à l'interface. En utilisant le théorème de la divergence on obtient :

$$\int_{V_1} \sigma_{ji} \delta u_{i,j} dV + \int_{S^+} T_i^{loc} \delta u_i dS + \int_{S^-} T_i^{loc} \delta u_i dS = \int_{S_{ext}} T_i \delta u_i dS \quad (3.4)$$

où S^+ et S^- sont les faces opposées de l'interface et T_i^{loc} est le vecteur de contraintes qui agit dans l'interface. Quand $h \rightarrow 0$, $V_1 \rightarrow V$ et $S^+ \rightarrow S^-$, par continuité dans les contraintes, l'équation (3.4) devient :

$$\int_V \sigma_{ji} \delta u_{i,j} dV + \int_{S_{int}} T_i^{loc} \delta \Delta_i dS = \int_{S_{ext}} T_i \delta u_i dS \quad (3.5)$$

où $\Delta = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$ est le saut de déplacement dans l'interface. Dans ce qui suit,

l'objectif est de déterminer les tractions qui sont transmises par l'interface.

3.3 Formulation de l'élément fini d'interface

3.3.1 Introduction

La décohésion de l'interface renfort-matrice est modélisée à l'aide d'un modèle d'interface aussi appelé modèle de cohésion. Les interfaces sont modélisées comme des ensembles de ressorts dans les directions normales et tangentielles de ces dernières. Les ressorts ont une longueur initiale infinitésimale et sont attachés aux renforts et à la matrice. Au fur et à mesure que les sauts de déplacements augmentent, les contraintes dans l'interface augmentent jusqu'à une valeur maximale, puis diminuent lorsque l'augmentation des déplacements continue et finalement deviennent nulles quand le ressort est cassé (décollement complet). Ce comportement peut être représenté avec des éléments finis d'interface iso-paramétriques.

En effet, ce type de comportement (où les tractions dans l'interface augmentent jusqu'à une valeur maximale et ensuite diminuent jusqu'à la rupture finale) a été corroboré par plusieurs études expérimentales. Donc, des comparaisons entre les résultats obtenus expérimentalement et ceux obtenus à partir des simulations éléments finis peuvent être établies. Par exemple Camanho et al. (2003) ont comparé les simulations éléments finis sur des matériaux composites stratifiés (AS4/PEEK) soumis à des chargements en Mode I purs (induit une séparation normale à l'interface) et en Mode II (induit une séparation tangentielle de l'interface). Ils ont modélisé l'interface avec des éléments d'interface à 8 nœuds et implémenté une loi de comportement de type bilinéaire. Les courbes qui montrent la relation entre le chargement et la séparation de l'interface obtenues expérimentalement et celles obtenues à partir des simulations collent très bien. Des résultats similaires ont été obtenus par Arun Roy et Dodds JR. (2001) dans l'étude de la propagation de fissures de panneaux d'aluminium. Les résultats expérimentaux ont été obtenus à

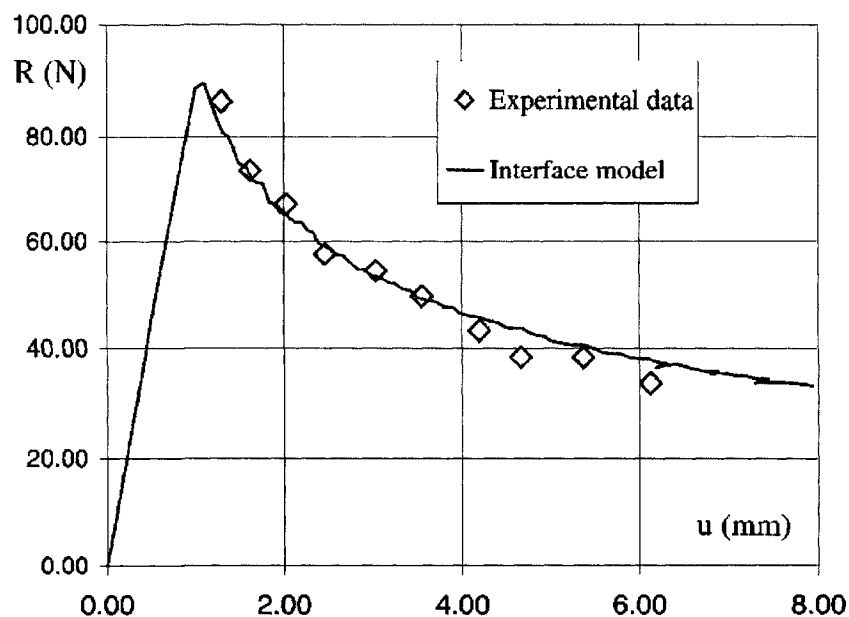


Figure 3.3 Relation entre les forces de réaction au point d'application du chargement et les déplacements appliqués dans un essai du type Mode I. Résultats expérimentaux et à partir de simulations éléments finis (Alfano et Crisfield, 2001).

partir d'échantillons Compact Tension (CT). Ils ont également modélisé l'interface avec des éléments à 8 nœuds et implémenté une loi de comportement du type quadratique. Alfano et Crisfield (2001) ont comparé les simulations éléments finis de matériaux composites stratifiés chargés en Mode I pur et des résultats expérimentaux. Ils ont modélisé l'interface avec des éléments 2D linéaires et quadratiques et utilisé des lois de comportement bilinéaires. Les résultats expérimentaux et ceux obtenus à partir de simulations sont très similaires. La figure 3.3 montre les deux types de résultats. Par rapport aux matériaux composites à renforts discontinus, récemment Tan et al. (2005b) ont déterminé la loi de décohésion dans des matériaux explosifs en utilisant la technique de corrélation des images 2D. La loi de comportement retrouvée est approximée par une loi de comportement bilinéaire.

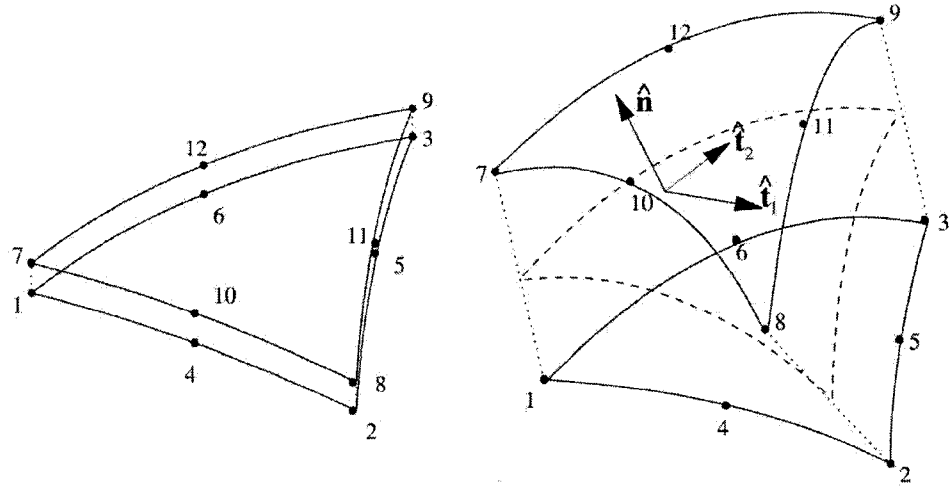


Figure 3.4 Élément d'interface à 12 nœuds (Segurado et LLorca, 2004).

3.3.2 Formulation

L'élément fini d'interface est un élément iso-paramétrique. Ce type d'élément a l'avantage que le champ de déplacement et la géométrie sont définis par les mêmes fonctions de forme (Cook et al., 2002). Ceci veut dire que le déplacement d'un point dans l'élément peut être exprimé selon les fonctions des formes et les valeurs des degrés de liberté dans les nœuds. De la même façon, la position ou coordonnées d'un point dans l'élément peut être représentée par les positions globales des nœuds et les mêmes fonctions de forme. Dans le cas 2D, les fonctions de forme sont définies selon deux paramètres (r et s).

L'élément fini d'interface 3D est constitué de deux surfaces. De plus, cet élément doit être compatible avec les éléments solides utilisés pour le maillage de la microstructure (tétraèdres à 10 nœuds). Ainsi, chaque surface constituant l'élément d'interface aura 6 nœuds et 3 degrés de liberté par nœud, faisant un total de 36 degrés de liberté par élément. Les figures 3.4 et 3.5 montrent l'élément d'interface et son assemblage avec des éléments solides, respectivement.

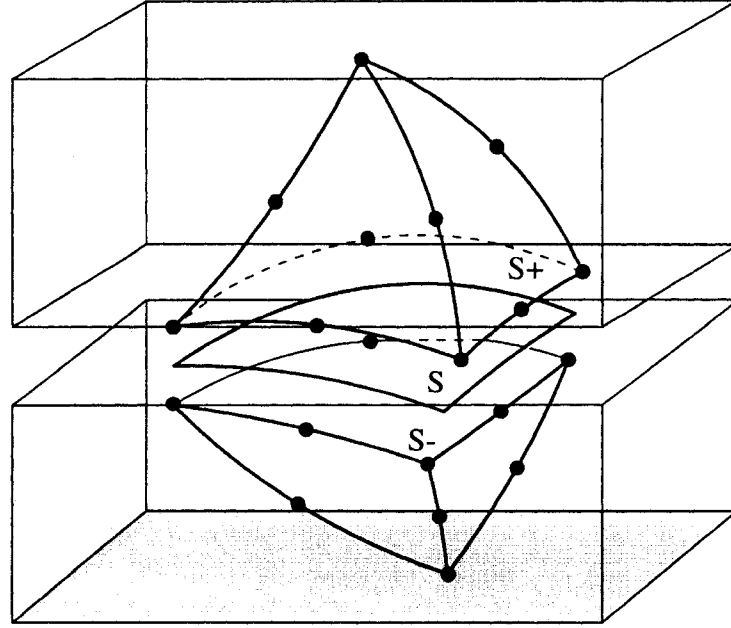


Figure 3.5 Assemblage de l'élément d'interface et des éléments solides (Ortiz et Pandolfi, 1999).

Les deux surfaces triangulaires de l'élément d'interface sont parfaitement collées dans la configuration initiale (épaisseur nulle) et se séparent lorsque les éléments solides adjacents se déforment. Le déplacement relatif des faces de l'élément génère des contraintes normales et de cisaillement qui dépendent de la loi de comportement de l'interface. D'ailleurs la formulation de l'élément est indépendante de la loi de comportement de l'interface.

La formulation de l'élément implémentée est celle présentée par Segurado et LLorca (2004) et Swaminathan et al. (2006). D'abord on a 36 degrés de liberté définis par le vecteur colonne $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} = (u_x^1, u_y^1, u_z^1, u_x^2, u_y^2, u_z^2, \dots, u_x^{12}, u_y^{12}, u_z^{12})^T \quad (3.6)$$

Noeud i	Fonction de forme $N_i(r, s)$
1, 7	$2 \left(\frac{1}{2} - r - s \right) (1 - r - s)$
2, 8	$2r \left(r - \frac{1}{2} \right)$
3, 9	$2s \left(s - \frac{1}{2} \right)$
4, 10	$4r (1 - r - s)$
5, 11	$4rs$
6, 12	$4s (1 - r - s)$

Tableau 3.1 Fonctions de forme de l'élément d'interface. Les numéros de nœuds correspondent à ceux montrés à la figure 3.4.

Le saut de déplacement entre deux nœuds opposés est défini par :

$$\Delta \mathbf{u} = \left(\mathbf{I}_{18 \times 18} \mid -\mathbf{I}_{18 \times 18} \right) \cdot \mathbf{u} = \Phi_{18 \times 36}^* \cdot \mathbf{u} \quad (3.7)$$

où $\mathbf{I}_{n \times n}$ est la matrice identité. $N_i(r, s)$ étant la fonction de forme de chaque paire de nœuds i ($i = 1, 6$) (voir tableau 3.1), r et s (avec $0 \leq r \leq 1$ et $0 \leq s \leq 1$) les coordonnées naturelles de l'élément, le déplacement relatif entre les surfaces de l'élément au point (r, s) peut être obtenu par interpolation entre les paires de nœuds de la façon suivante :

$$\Delta \mathbf{u}(r, s) = \begin{pmatrix} \Delta u_x(r, s) \\ \Delta u_y(r, s) \\ \Delta u_z(r, s) \end{pmatrix} = \mathbf{N}(r, s) \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (3.8)$$

où $\mathbf{N}(r, s)$ est la matrice 3×18 définie par les sous-matrices suivantes :

$$\mathbf{N}(r, s)_{3 \times 18} = \left(N_1 \mathbf{I}_{3 \times 3} \mid N_2 \mathbf{I}_{3 \times 3} \mid N_3 \mathbf{I}_{3 \times 3} \mid N_4 \mathbf{I}_{3 \times 3} \mid N_5 \mathbf{I}_{3 \times 3} \mid N_6 \mathbf{I}_{3 \times 3} \right) \quad (3.9)$$

où les N_i sont définies au tableau 3.1. En remplaçant l'équation (3.7) dans l'équation (3.8) la forme suivante est obtenue :

$$\Delta \mathbf{u}(r, s) = \mathbf{N} \cdot \Phi^* \cdot \mathbf{u} = \Phi \cdot \mathbf{u} \quad (3.10)$$

D'abord la configuration initiale de l'élément d'interface est donnée par le vecteur $\mathbf{X}_{\text{in}_{36 \times 1}}$ constitué des coordonnées des nœuds. La surface de référence est définie par les coordonnées de six points données dans le vecteur $\mathbf{X}_{\text{R}_{18 \times 1}}$. Les contraintes qui agissent dans l'interface sont calculées sur cette surface de référence. Les coordonnées qui définissent $\mathbf{X}_{\text{R}}$ sont calculées par interpolation linéaire des coordonnées des paires de nœuds dans les deux surfaces de l'élément d'interface, celui-ci étant dans la configuration déformée (Segurado et LLorca, 2004). Ainsi, les coordonnées de la surface de référence sont données par :

$$\mathbf{X}_{\text{R}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{18 \times 18} & \mathbf{I}_{18 \times 18} \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{X}_{\text{in}} + \mathbf{u}) \quad (3.11)$$

Donc, les coordonnées d'un point dans la surface de référence $\mathbf{X}_{\text{R}}^{rs}$ sont calculées en utilisant les fonctions de forme, ce qui donne :

$$\mathbf{X}_{\text{R}}^{rs}(r, s) = \mathbf{N}(r, s) \mathbf{X}_{\text{R}} \quad (3.12)$$

Ainsi, il est possible de déterminer le système de coordonnées local dans la configuration actuelle afin de définir la relation entre les contraintes locales et les déplacements locaux. Ce système de coordonnées local est défini par trois vecteurs orthogonaux donnés par :

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{X}_{\text{R}}^{rs}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{X}_{\text{R}}^{rs}}{\partial s} \right\|} \left(\frac{\partial \mathbf{X}_{\text{R}}^{rs}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{X}_{\text{R}}^{rs}}{\partial s} \right), \quad \hat{\mathbf{t}}_{t1} = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{X}_{\text{R}}^{rs}}{\partial r} \right\|} \frac{\partial \mathbf{X}_{\text{R}}^{rs}}{\partial r}, \quad \hat{\mathbf{t}}_{t2} = \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{t}}_{t1} \quad (3.13)$$

où $\hat{\mathbf{n}}$ est la direction normale à la surface de référence et $\hat{\mathbf{t}}_{t1}$ et $\hat{\mathbf{t}}_{t2}$ sont les directions tangentielles. Afin de définir les composants de saut de déplacement dans le système de coordonnées local la matrice de rotation $\mathbf{R}$ est définie comme :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{n}}(1) & \hat{\mathbf{n}}(2) & \hat{\mathbf{n}}(3) \\ \hat{\mathbf{t}}_{t1}(1) & \hat{\mathbf{t}}_{t1}(2) & \hat{\mathbf{t}}_{t1}(3) \\ \hat{\mathbf{t}}_{t2}(1) & \hat{\mathbf{t}}_{t2}(2) & \hat{\mathbf{t}}_{t2}(3) \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

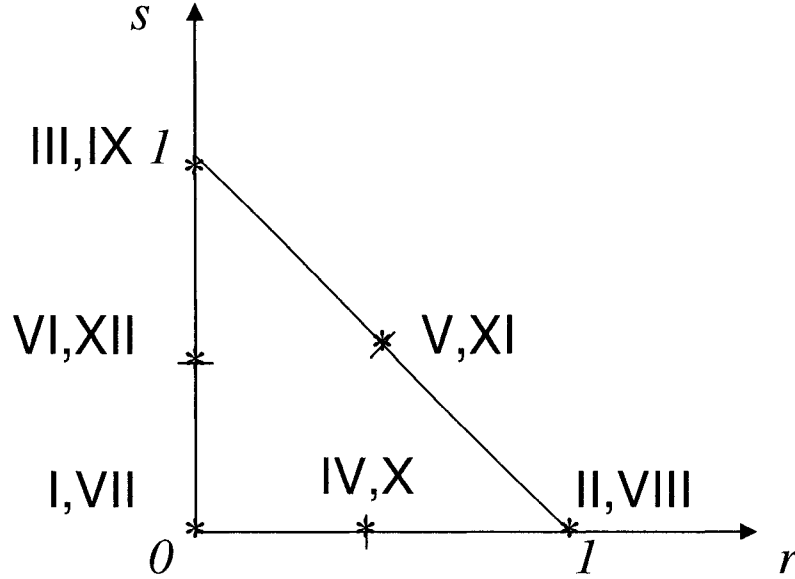


Figure 3.6 Domaine d'intégration de l'élément. Les nœuds sont indiqués par des nombre romains.

où $\hat{n}(i)$ dénote la composante i du vecteur $\hat{n}$ et $\hat{t}_{tj}(i)$ dénote la composante i du vecteur $\hat{t}_{tj}$.

Le principe de travaux virtuels développé dans la section 3.2 mène à la forme habituelle de la méthode des éléments finis. En effet, l'équation (3.5) doit être vraie pour n'importe quel déplacement virtuel. Ce qui nous permet conclure que la méthode des éléments finis basée sur les déplacements satisfait les équations différentielles de l'équilibre dans le sens des intégrales. Le terme de l'équation (3.5) qui contient le vecteur des contraintes dans l'interface permet d'obtenir le vecteur de forces nodales. Celui-ci est défini dans le domaine de coordonnées naturelles de l'élément d'interface illustré à la figure 3.6. En effet, un changement de coordonnées est établi afin d'utiliser le vecteur de contraintes dans le système local de l'élément (directions normales et tangentielles de la surface de référence). Ainsi, le vecteur

de forces nodales peut être exprimé par :

$$\mathbf{f}^{\text{el}} = \int_0^1 \int_0^{1-s} \boldsymbol{\Phi}^T \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{T}^{\text{loc}} J dr ds = \sum_j w_j \boldsymbol{\Phi}^T \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{T}^{\text{loc}} J \quad (3.15)$$

où $\mathbf{T}^{\text{loc}}$ est le vecteur qui donne les trois composantes des contraintes dans les directions locales de la surface de référence et sont en fonction du déplacement relatif (relation donnée par la loi de comportement de l'interface), w_j est le poids du point de Gauss j afin de calculer les intégrales numériquement et J est le jacobien de la transformation entre les coordonnées cartésiennes et naturelles défini par :

$$J = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{X}_R^{rs}(2)}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{X}_R^{rs}(3)}{\partial s} - \frac{\partial \mathbf{X}_R^{rs}(2)}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{X}_R^{rs}(3)}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{X}_R^{rs}(3)}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{X}_R^{rs}(1)}{\partial s} - \frac{\partial \mathbf{X}_R^{rs}(3)}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{X}_R^{rs}(1)}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{X}_R^{rs}(1)}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{X}_R^{rs}(2)}{\partial s} - \frac{\partial \mathbf{X}_R^{rs}(1)}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{X}_R^{rs}(2)}{\partial r} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.16)$$

Pour plus de détails sur le calcul du jacobien voir l'Annexe III.

La matrice de rigidité tangente est définie par $\mathbf{K}^{\text{el}} = \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{el}}}{\partial \mathbf{u}}$. En effet, le vecteur de contraintes $\mathbf{T}^{\text{loc}}$ est en fonction du saut de déplacement dans le système local $\Delta \mathbf{u}_{\text{loc}}$. Ce saut de déplacement peut être exprimé en fonction des degrés de liberté par :

$$\Delta \mathbf{u}_{\text{loc}} = \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{u}(r, s) = \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{u} \quad (3.17)$$

Ce qui permet d'exprimer la matrice de rigidité tangente par :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{\text{el}} &= \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{el}}}{\partial \mathbf{u}} = \int_0^1 \int_0^{1-s} \boldsymbol{\Phi}^T \cdot \mathbf{R}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{T}^{\text{loc}}}{\partial \mathbf{u}} J dr ds \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-s} \boldsymbol{\Phi}^T \cdot \mathbf{R}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{T}^{\text{loc}}}{\partial \Delta \mathbf{u}_{\text{loc}}} \cdot \frac{\partial \Delta \mathbf{u}_{\text{loc}}}{\partial \mathbf{u}} J dr ds \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-s} \boldsymbol{\Phi}^T \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{C}_{\text{loc}} \cdot \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\Phi} J dr ds \\ &= \sum_j w_j \boldsymbol{\Phi}^T \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{C}_{\text{loc}} \cdot \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\Phi} J \end{aligned} \quad (3.18)$$

où $\mathbf{C}_{\text{loc}}$ est la matrice du module tangent définie par :

$$\mathbf{C}_{\text{loc}} = \frac{\partial \mathbf{T}^{\text{loc}}}{\partial \Delta \mathbf{u}_{\text{loc}}} \quad (3.19)$$

3.4 Loi de comportement d'interface

Plusieurs types de lois de comportement de l'interface ont été proposés par différents auteurs. Certaines sont basées sur le fait que l'interface ne produit pas de travail dans un cycle fermé. Alors, en reprenant l'équation (1.18) et après d'un changement de variables, il est possible de définir une fonction potentielle de façon à vérifier la forme suivante (Needleman, 1992) :

$$\oint \mathbf{T}^{\text{loc}} \cdot d\Delta \mathbf{u}_{\text{loc}} = 0 \quad (3.20)$$

La loi de comportement établit que les contraintes qui se produisent dans l'interface sont des fonction des sauts de déplacements, donc :

$$\mathbf{T}^{\text{loc}} = \mathbf{T}^{\text{loc}}(\Delta \mathbf{u}_{\text{loc}}) \quad (3.21)$$

Comme on l'avait remarqué dans la section 1.5.1.4, l'existence d'une fonction potentielle permet d'assurer que le travail disparaît dans un cycle fermé quelconque. Ceci permet d'exprimer le vecteur de contraintes de la façon suivante :

$$\mathbf{T}^{\text{loc}} = \frac{\partial \phi}{\partial \Delta \mathbf{u}_{\text{loc}}} \quad (3.22)$$

où ϕ est la fonction potentielle. Plusieurs formes pour ce potentiel ont été proposées. Needleman (1987) a proposé une forme polynomiale pour des raisons de simplicité dans l'étude de la décohésion des particules dans des matériaux composites à matrice métallique. De plus, d'autres potentiels du type exponentiel et périodique ont été proposés (Needleman, 1990, 1992; Xu et Needleman, 1993, 1994a,b).

D'autres formes de la loi de comportement de l'interface ont été développées selon des formes mathématiques simples. Dans ce contexte on peut trouver les travaux de Tvergaard (1990, 2003a,b). Tvergaard propose un modèle qui tient compte de la séparation normale et de la séparation tangentielle des phases. Ainsi, un paramètre adimensionnel est défini par :

$$\lambda = \left\{ \left(\frac{u_n}{\delta_n} \right)^2 + \left(\frac{u_t}{\delta_t} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.23)$$

où u_n et u_t sont les déplacements normal et tangentiel respectivement. Comme l'on avait vu dans la section 3.2, l'épaisseur de l'interface n'apparaît pas dans l'équation (3.5). Donc, une longueur caractéristique est implicitement définie dans la loi de comportement de l'interface. De cette façon, les δ_n et δ_t deviennent ces longueurs caractéristiques. Dans ce cas, elles correspondent aux déplacements où le décollement complet est atteint dans les cas d'une séparation purement normale et purement tangentielle respectivement. Ensuite une fonction $F(\lambda)$ est choisie comme :

$$F(\lambda) = \frac{27}{4} \sigma_{\max} (1 - 2\lambda + \lambda^2) \quad \text{avec} \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (3.24)$$

Tvergaard (2003b) a utilisé cette forme afin de comparer ce modèle de cohésion avec celui polynomial de Needleman (1987). De cette façon, il cherchait à avoir le même travail de séparation pour les deux modèles. Le travail de séparation est défini par la surface sous la courbe de contraintes - déplacements de séparation. Les contraintes sont définies par :

$$\begin{aligned} T_n^{\text{loc}} &= \frac{u_n}{\delta_n} F(\lambda) \\ T_t^{\text{loc}} &= \alpha \frac{u_t}{\delta_t} F(\lambda) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ceci veut dire que dans un décollement purement normal ($u_t = 0$) la contrainte maximale que l'interface peut atteindre est $\sigma_{\max}$, le décollement total se produit à $u_n = \delta_n$ et le travail de séparation ou de décollement défini par la surface sous la

courbe T_n vs u_n est $9\sigma_{\max}\frac{\delta_n}{16}$. Dans un décollement purement tangentiel ($u_n = 0$) la contrainte maximale que l'interface peut atteindre est $\alpha\sigma_{\max}$, le décollement total se produit à $u_t = \delta_t$ et le travail de séparation est $9\alpha\sigma_{\max}\frac{\delta_n}{16}$. Ainsi, afin de représenter le comportement de l'interface il faut définir les paramètres δ_n , δ_t , $\sigma_{\max}$ et α .

Finalement des lois montrant une dépendance bilinéaire avec les sauts de déplacement ont été proposées. Celles-ci présentent certains avantages à cause de leur simplicité de codage. Parmi les auteurs qui ont implémenté ce type de lois de comportement on peut citer Geubelle et Baylor (1998) dans l'étude du délaminage des matériaux composites stratifiés soumis à des efforts d'impact, Camanho et al. (2003) et Davila et al. (2007) dans l'étude de délaminage de composites stratifiés sous chargement mixte. La loi de comportement bilinéaire a permis d'obtenir des prédictions de délaminage qui collent remarquablement bien aux résultats expérimentaux (Camanho et al., 2003). Cependant, des problèmes de convergence apparaissent dans les simulations éléments finis. Ceci est attribuable aux lois de comportement de l'interface, où des régions de détrempe ou « softening » sont manifestées. Ces régions produisent des changements brusques dans le calcul de la matrice de rigidité de l'élément fini, ce qui fait que la convergence est difficilement atteinte. Des techniques ont été développées afin de s'affranchir de ce problème (Gao et Bower, 2004; Davila et al., 2007). Davila et al. (2007) a montré qu'une régularisation visqueuse peut être incorporée dans le calcul de la matrice de rigidité et du vecteur de forces nodales de l'élément fini. Cette régularisation visqueuse est introduite au niveau de la loi de comportement.

Dans ce mémoire, une loi de comportement bilinéaire est utilisée afin de modéliser la décohésion de l'interface renfort-matrice. De plus, une technique de régularisation visqueuse est implémentée afin de favoriser la convergence des simulations éléments finis. La technique de régularisation visqueuse sera abordée au Chapitre 4.

La loi de comportement bilinéaire utilisée est définie à la figure 3.7. Étant donné

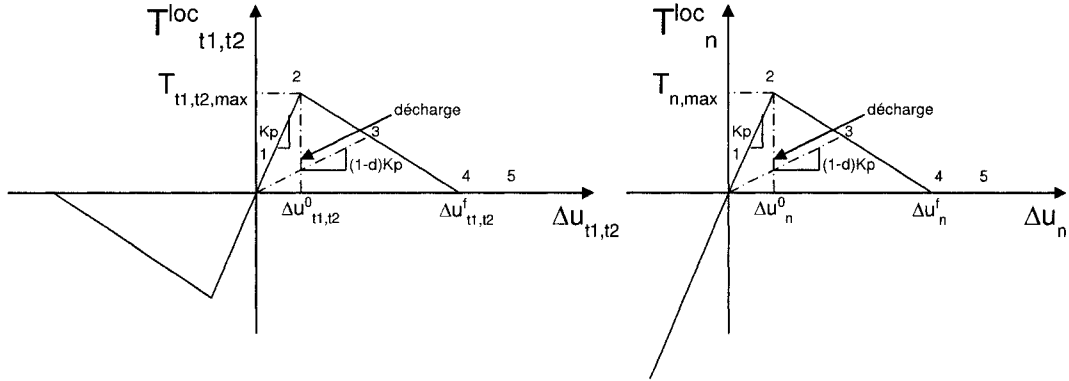


Figure 3.7 Loi de comportement bilinéaire et irréversible pour les directions tangentielles (t1,t2) et normale (n).

que l'endommagement est tenu en compte (Camanho et al., 2003), cette loi est dite irréversible par opposition aux lois définies par des potentiels qui sont elles réversibles.

Dans ce type de loi de comportement on peut distinguer trois étapes différentes qui doivent être considérées : chargement, déchargement et rechargement. La condition de chargement peut être traitée avec une variable définie comme le déplacement relatif maximal, $\Delta u^{\max}$, atteint par un point :

$$\begin{aligned} \text{Directions } i=t1 \text{ et } t2 : \quad \Delta u_i^{\max} &= \max \{ \Delta u_i^{\max}, |\Delta u_i| \} \\ \text{Direction } i=n : \quad \Delta u_i^{\max} &= \max \{ \Delta u_n^{\max}, \Delta u_n \} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Dans la figure 3.7 il est possible d'observer cinq points qui déterminent les différents aspects du comportement de l'interface. D'abord dans la région 1, la contrainte dans l'interface est inférieure à la contrainte maximale ($T_{i,\max}^{\text{loc}}$) que celle-ci peut atteindre. Donc, le comportement est réversible, ceci veut dire que s'il y a un déchargement et ensuite un chargement, la contrainte sera définie par la même pente. Cette pente est dénotée comme une rigidité de pénalité K_p , car elle doit être

suffisamment grande afin de modéliser le collement parfait au début du mouvement. Entre les points 2 et 4 la contrainte maximale a été atteinte par l'interface. Donc, dans cette région la contrainte commence à diminuer à cause de l'endommagement. Alors, s'il y a un déchargement (point 3) la pente qui donne la relation entre les déplacements et la contrainte est diminuée à cause de l'endommagement qui diminue les propriétés mécaniques. Au point 4 la contrainte atteinte est nulle. Ceci veut dire que la décohésion est complète. Entre les points 4 et 5 la contrainte que l'interface peut transférer est nulle ; le déplacement entre les faces opposées de l'interface augmente à cause du chargement macroscopique. Ainsi, le comportement irréversible et bilinéaire pour un type de chargement montré dans la figure 3.7 peut être défini par :

$$T_i^{\text{loc}} = \begin{cases} Kp\Delta u_i & \text{si } \Delta u_i^{\text{max}} \leq \Delta u_i^0 \\ (1 - d_i)Kp\Delta u_i & \text{si } \Delta u_i^0 < \Delta u_i^{\text{max}} \leq \Delta u_i^f \\ 0 & \text{si } \Delta u_i^{\text{max}} \geq \Delta u_i^f \end{cases} \quad (3.27)$$

d est dénoté comme le paramètre d'endommagement. Celui-ci est défini par :

$$d_i = \frac{\Delta u_i^f (\Delta u_i^{\text{max}} - \Delta u_i^0)}{\Delta u_i^{\text{max}} (\Delta u_i^f - \Delta u_i^0)} \quad i=t1,t2,n; \quad d_i \in [0, 1] \quad (3.28)$$

où Δu_i^0 est la valeur de déplacement où la contrainte maximale que l'interface peut supporter est atteinte et Δu_i^f est la valeur de déplacement où la contrainte est nulle (décohésion complète). De plus, afin d'éviter l'interpénétration des surfaces de l'élément fini d'interface l'équation de contrainte suivante est imposée :

$$T_n^{\text{loc}} = Kp\Delta u_n \quad \Delta u_n \leq 0 \quad (3.29)$$

En effet, l'équation (3.27) spécifie implicitement que le comportement de l'interface dépend de l'histoire de contraintes que l'interface possède. Ainsi, les composantes du vecteur de contraintes sont définies en fonctions des valeurs de Δu_i atteintes. De plus, les comportements tangentiels et normaux sont considérés découplés. Les

paramètres qui définissent une loi de comportement bilinéaire peuvent être obtenus expérimentalement (par exemple à partir des essais sur des échantillons Compact Tension (Arun Roy et Dodds JR., 2001)).

3.5 Conclusions

Dans ce chapitre la formulation de l'élément fini d'interface a été présentée. Cet élément fini est constitué de deux éléments triangulaires quadratiques superposés dans la configuration initiale afin de que la compatibilité avec les éléments solides soit vérifiée. La formulation de l'élément fini d'interface est indépendante de la loi de comportement de l'interface. La loi de comportement de l'interface utilisée dans le cadre de ce projet est une loi bilinéaire irréversible. Donc, l'endommagement est tenu en compte lors du développement de la loi de comportement de l'interface. En effet, la formulation de l'élément fini d'interface est celle de Segurado et LLorca (2004) et la loi de comportement d'interface est celle de Camanho et al. (2003). D'après les informations dont on dispose, la programmation de cette combinaison de formulation et loi d'interface n'a pas été réalisée antérieurement. Finalement, différentes études faites auparavant ont montré que les modèles d'interface représentés par des éléments finis et des lois de comportement d'interface bilinéaire collent remarquablement bien des résultats expérimentaux. Ceci a déterminé le choix sur la modélisation de l'endommagement en utilisant des modèles de cohésion par la méthode des éléments finis.

CHAPITRE 4

IMPLÉMENTATION DE L'ÉLÉMENT FINI D'INTERFACE

4.1 Introduction

La formulation de l'élément fini d'interface présentée au Chapitre 3 est implémentée dans le code de calcul ABAQUS. Pour ce faire une sous-routine (UEL : User Element) est programmée (ABAQUS, 2004a). Des essais de conditions aux rives et des vérifications sur l'élément fini d'interface sont réalisés. Ensuite, ces éléments sont utilisés dans les VERs afin d'étudier l'endommagement par décohésion de l'interface renfort-matrice dans des matériaux composites à renforts discontinus.

4.2 Sous-routine UEL

Cette sous-routine permet de définir un élément fini selon les besoins de l'utilisateur. Le langage de programmation est FORTRAN. Il existe trois types de variables dans le développement d'un élément fini avec la sous-routine UEL :

1. Variables qui doivent être définies
 - RHS : correspond au vecteur des forces nodales.
 - AMATRX : correspond à la matrice de rigidité.
 - SVARS : un vecteur contenant les variables internes qui dépendent de la solution.
2. Variables qui peuvent être mise à jour : ce type de variable n'a pas été utilisé dans le cadre de ce projet de maîtrise.
3. Variables nécessaires pour les calculs :
 - PROPS : un vecteur contenant les valeurs des propriétés de l'élément fini.

- JPROPS : un nombre entier qui donne le nombre des propriétés.
- COORDS : un vecteur contenant les coordonnées des nœuds.
- U, DU : des vecteurs qui contiennent les variables de la solution (déplacements et les incréments de déplacements).
- TIME(1) : temps actuel
- TIME(2) : temps total de calcul.
- DTIME : incrément du temps.
- NDOFEL : nombre de degrés de liberté dans l'élément
- NRHS : nombre de vecteurs des forces. Généralement NRHS=1.
- NSVARS : nombre de variables internes qui dépendent de la solution. Ces variables sont définies par l'utilisateur.
- NPROPS : nombre de quantités des propriétés réelles associées à l'élément fini.
- NJPROP : nombre de quantités des propriétés entières associées à l'élément fini.
- MCRD : nombre maximum de coordonnées nécessaires (3 dans ce cas : x , y et z).
- NNODE : nombre de nœuds par élément fini.
- JTYPE : nombre entier qui définit le type d'élément.
- KINC : numéro d'incrément actuel.
- JELEM : numéro de l'élément fini.

Les variables ci-dessus sont les variables utilisées dans le cadre de ce projet. Les types de calculs envisagés sont des calculs statiques (dans le cas où les modèles de matériaux ne dépendent pas du temps) et quasi-statiques (dans le cas où les modèles de matériaux dépendent du temps). Dans ces deux types de calcul les effets d'inertie sont négligés.

Ainsi, la formulation de l'élément fini et la loi de comportement bilinéaire irréversible présentées au Chapitre 3 sont programmées dans la sous-routine UEL.

L'intégration numérique de Gauss de 3 points a été utilisée (Segurado et LLorca, 2004; Davila et al., 2007). En effet des essais en utilisant 3 points et 7 points d'intégration ont été réalisés en montrant qu'il n'y a pas de différence entre une règle et l'autre. L'Annexe II décrit les deux règles d'intégration numérique programmées dans la sous-routine.

4.2.1 Structure du programme

La programmation de l'élément possède plusieurs sous-routines qui réalisent différentes tâches, par exemple la normalisation des vecteurs, la multiplication des matrices, etc. De plus, il y a une autre sous-routine (SEPLAW) qui définit la loi de comportement de l'interface, i.e. les contraintes (T_i^{loc}) et la matrice du module tangent (C_{loc}). Celle-ci peut être modifiée selon les besoins de l'utilisateur. En définitive, l'objectif est d'obtenir la matrice de rigidité et le vecteur des forces nodales de l'élément. Les données nécessaires sont entrées dans le fichier de commandes d'ABAQUS. La structure suivante survole la partie principale de la formulation de l'élément. Cette structure fait des appels aux sous-routines qui font des tâches particulières.

ENTRÉES: NNODES, COORDS, PROPS, NSVARS, MCRD, NDOFEL

SORTIES: RHS, AMATRX, SVARS

Initialiser RHS et AMATRX

NINTP : No de points d'intégration. (NINTP=3 ou 7 points)

CALL INTPTS (initialisation des points et des poids d'intégration : r_i , s_i et w_i)

pour $I = 1$ à NINTP **faire**

 Calculer :

$\mathbf{X}_R$: équation (3.11)

Φ^* : équation (3.7)

$\mathbf{N}$: équation (3.9)

$\mathbf{X}_R^{rs}$: équation (3.12)

$\Delta \mathbf{u}(r, s)$ et Φ : équation (3.10)
 $\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{t}}_{t1}, \hat{\mathbf{t}}_{t2}$: équation (3.13)
 $\mathbf{R}$: équation (3.14)
 $\Delta \mathbf{u}_{\text{loc}} : \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{u}(r, s)$
 J : équation (3.16)
 CALL SEPLAW (sous-routine pour la loi de comportement de l'interface)
 Calculer $\mathbf{T}^{\text{loc}}, \mathbf{C}_{\text{loc}}$ et SVARS dans SEPLAW
 Ensuite calculer :
 $\text{RHS}_I = w_j \Phi^T \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{T}^{\text{loc}} J$
 $\text{AMATRX}_I = w_j \Phi^T \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{C}_{\text{loc}} \cdot \mathbf{R} \cdot \Phi J$
 $\text{RHS} = \text{RHS} + \text{RHS}_I$: équation (3.15)
 $\text{AMATRX} = \text{AMATRX} + \text{AMATRX}_I$: équation (3.18)
fin pour

4.2.2 Régularisation visqueuse

ABAQUS Standard est le code d'éléments finis utilisé pour les calculs. Les calculs sont réalisés par incrément. Ainsi, une fois la solution obtenue pour le temps t , la solution pour le temps $t + \Delta t$ est calculée. Pour ce faire, le code utilise généralement les itérations de Newton - Raphson afin de résoudre les équations d'équilibre non linéaire. Les relations constitutives qui présentent une dégradation dans la rigidité génèrent des problèmes de convergence dans les simulations d'éléments finis. En effet, la méthode de Newton - Raphson ne peut pas converger car le rayon de convergence est réduit à zéro (Gao et Bower, 2004). ABAQUS (2004a) suggère l'utilisation d'une régularisation visqueuse afin de préserver la convergence dans les calculs. Ainsi, le paramètre d'endommagement d est dit paramètre cinématique d'endommagement et d^r est dit paramètre régularisé d'endommagement. Le taux de changement dans le paramètre régularisé est une fonction du facteur d'amortis-

sement ξ :

$$\dot{d}^r = \frac{1}{\xi} (d - d^r) \quad (4.1)$$

Le paramètre régularisé d'endommagement au temps $t + \Delta t$ est calculé comme suit à partir de l'équation (4.1) :

$$\begin{aligned} \dot{d}^r &= \frac{d^r|_{t+\Delta t} - d^r|_t}{\Delta t} = \frac{1}{\xi} (d|_{t+\Delta t} - d^r|_{t+\Delta t}) \\ d^r|_{t+\Delta t} &= \frac{\Delta t}{\xi + \Delta t} d|_{t+\Delta t} + \frac{\xi}{\xi + \Delta t} d^r|_t \end{aligned} \quad (4.2)$$

où $f|_{t_i}$ signifie l'évaluation de la fonction f au temps t_i . Il est possible d'observer que le facteur d'amortissement a des unités de temps. Ainsi, la stabilisation du problème sera déterminée selon le facteur d'amortissement ξ et les incréments de temps Δt qui sont définis par l'utilisateur. En général, l'utilisation de la régularisation visqueuse avec un facteur d'amortissement qui est très faible en comparaison à l'incrément de temps peut améliorer la convergence du calcul. Néanmoins, l'utilisation des facteurs d'amortissement qui sont grands en comparaison à l'incrément de temps peut conduire aux résultats trop stables qui se traduisent dans un durcissement du matériau. Davila et al. (2007) ont utilisé des facteurs d'amortissement de l'ordre 50 fois plus petit que l'incrément de temps. De plus, ils ont montré que pour des simulations où il est possible de trouver la convergence avec $\xi = 0$ les résultats ne changent pas pour des ξ jusqu'à 50 fois plus petit. En effet, le facteur d'amortissement réduit le temps de calcul car les itérations nécessaires pour la convergence sont réduites. Dans ce projet de maîtrise, le facteur d'amortissement a été fixé arbitrairement à une valeur 100 fois plus petit que l'incrément de temps. Des études futures pourront être établies afin de déterminer une valeur de facteur d'amortissement qui permet d'atteindre la convergence sans produire des résultats trop stables.

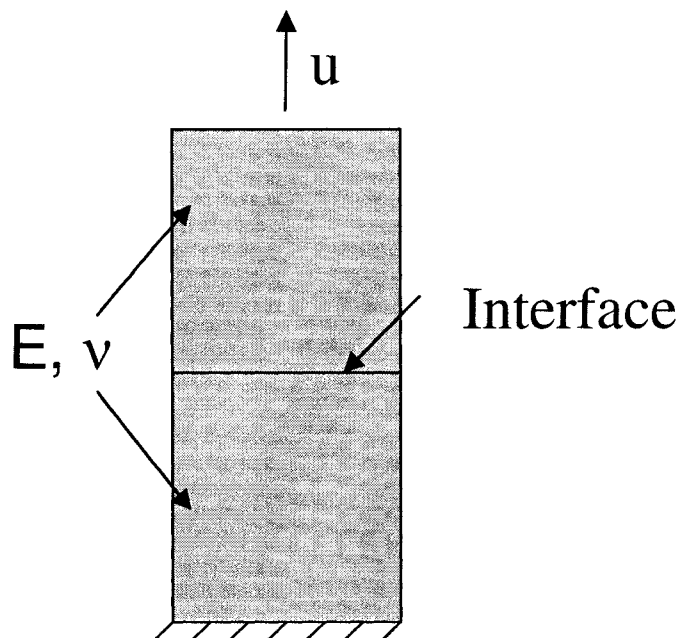


Figure 4.1 Problème de condition aux rives : deux blocs ayant une interface. Un des blocs est encastré sur l'extrémité opposée à l'interface. L'autre bloc est soumis à un déplacement uniforme sur l'extrémité opposée à l'interface.

4.3 Implémentation de l'élément d'interface sur un problème simple de conditions aux rives

Le problème simple de conditions aux rives est schématisé à la figure 4.1. Ce problème consiste en deux blocs ayant une interface. Un des blocs est encastré et l'autre est soumis à un déplacement uniforme. Les deux blocs possèdent les mêmes propriétés de matériau (module d'Young E et coefficient du Poisson ν) et entre ces deux il y a une interface qui a des propriétés définies par une loi de comportement bilinéaire et irréversible. La loi de comportement est définie par les paramètres donnés au tableau 4.1.

$K_p \left[\frac{N}{mm^3} \right]$	$\Delta u^0 \text{ [mm]}$	$\Delta u^f \text{ [mm]}$	ξ
10×10^4	0,001	0,3	0,0001

Tableau 4.1 Propriétés de l'interface montrée à la figure 4.1

Quand le déplacement est appliqué les contraintes qui se produisent dans chaque bloc sont uniformes. Ainsi, celles-ci représentent la contrainte atteinte par l'interface. Les deux blocs sont maillés avec des tétraèdres à 10 nœuds. Le déplacement varie d'une valeur nulle au temps initial du calcul à 0,35 mm au temps final de l'analyse (1 seconde). L'incrément de temps est de 0,01 seconde.

La figure 4.2 montre la configuration déformée des deux blocs. L'interface ne peut pas être visualisée à cause que celle-ci est modélisée par un élément fini défini par l'utilisateur (c'est une limitation du post-processeur d'ABAQUS). Dans ce cas la direction de chargement coïncide avec l'axe x du système de coordonnées global. Les contraintes uniformes peuvent être visualisées à la figure 4.3. Il est possible d'observer que la loi de comportement de l'interface est respectée car la contrainte maximale que l'interface peut atteindre est vérifiée (100 MPa). De plus, la décohésion complète des deux blocs se produit à la valeur de déplacement Δu^f donnée au tableau 4.1. Les déplacements sur deux nœuds opposés dans l'interface peuvent être obtenus et la différence entre ces deux peut être calculée afin de retrouver la loi de comportement qui a été préétablie.

Ainsi, la relation entre les contraintes et les déplacements est obtenue et montrée à la figure 4.4. Il est possible d'observer que les valeurs imposées au tableau 4.1 sont respectées. Donc, le comportement de l'interface est vérifié. Étant donné que dans la formulation de l'élément fini d'interface interviennent plusieurs opérations vectorielles afin d'obtenir les directions tangentielles et normales, ce même problème peut être réalisé en variant la direction de sollicitation. Les figures 4.5 et 4.6 montrent le même problème de conditions aux rives que la figure 4.1 avec la

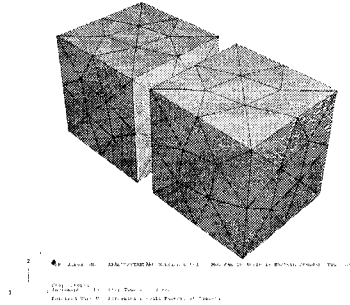


Figure 4.2 Configuration déformée des deux blocs. Direction de la sollicitation : x du système de coordonnées global.

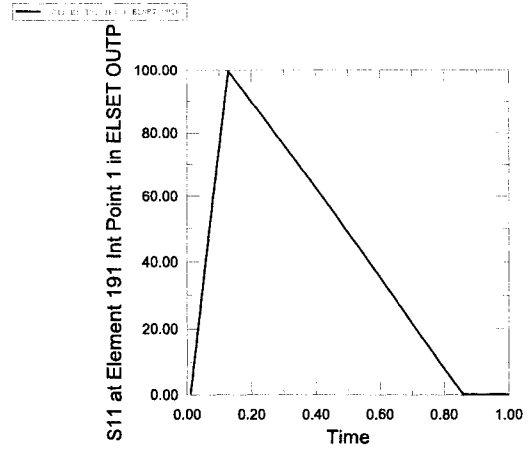


Figure 4.3 Contrainte uniforme calculée dans les blocs.

direction de chargement coïncidente avec les axes y et z du système de coordonnées global, respectivement. La loi de comportement est retrouvée dans les deux cas. Celles-ci sont égales à la loi définie à la figure 4.4. Ceci vérifie la formulation de l'élément.

4.4 Vérification de l'élément fini d'interface

Le comportement étudié dans la section 4.3 constitue une décohésion dans la direction normale. Afin d'étudier le comportement en cisaillement, l'élément fini d'interface d'ABAQUS a été utilisé. ABAQUS possède une série d'éléments d'interface bidimensionnels (2D) et tridimensionnels (3D). Ces éléments sont linéaires, i.e. les champs de déplacements sont définis par des fonctions linéaires. Donc, ceux-ci ne peuvent pas être utilisés dans le maillage avec des éléments solides quadratiques.

Afin de vérifier les éléments d'interface, ABAQUS (2004b) propose une vérification en sollicitant l'élément sur les nœuds. Ainsi, des conditions aux rives sur les nœuds de l'élément fini d'interface sont appliquées afin d'obtenir des déformations

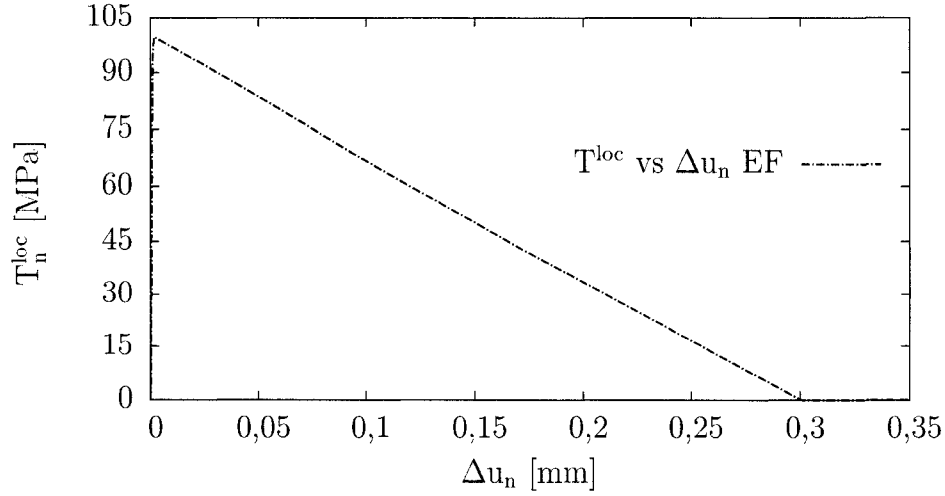


Figure 4.4 Relation entre les contraintes et les déplacements obtenue à partir des simulations éléments finis pour le problème de la figure 4.2.

pures en cisaillement. De plus, ABAQUS fournit des lois de comportement d'interface bilinéaires avec différents critères d'endommagement. Ainsi, les résultats de la vérification faite sur l'élément COH3D8 sont utilisés.

D'abord l'élément fini d'interface COH3D8 est constitué de 8 nœuds. La figure 4.7 montre cet élément. La direction normale de l'élément est donnée par l'axe global $y = 2$. Afin d'obtenir un comportement de cisaillement pur et d'étudier l'évolution de l'endommagement, les conditions aux rives suivantes doivent être appliquées :

$$\begin{aligned} u_1^C &= u_1^D = u_1^G = u_1^H = 0, 1 \\ u_{1,2,3}^A &= u_{1,2,3}^B = u_{1,2,3}^E = u_{1,2,3}^F = 0, 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Les degrés de liberté restants sont fixes à zéro.

La loi de comportement d'interface choisie est bilinéaire, avec un critère d'initiation d'endommagement qui relie les déplacements (valeurs de déplacement où la

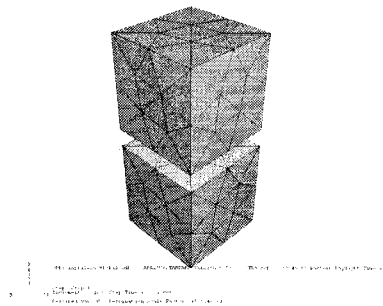


Figure 4.5 Configuration déformée des deux blocs. Direction de la sollicitation : y du système de coordonnées global.

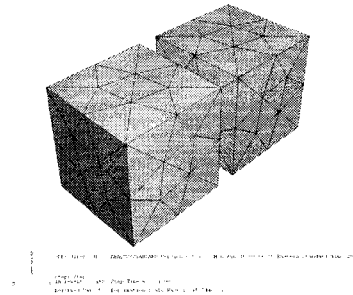


Figure 4.6 Configuration déformée des deux blocs. Direction de la sollicitation : z du système de coordonnées global.

$Kp \left[\frac{N}{mm^3} \right]$	Δu^0 [mm]	Δu^f [mm]
4×10^6	0,002	0,1

Tableau 4.2 Propriétés de l'interface de l'élément COH3D8

contrainte maximale est atteinte) et un critère d'évolution d'endommagement où il est possible de donner les valeurs maximales de déplacements où la décohésion complète est atteinte. Les paramètres qui définissent la loi de comportement de l'interface sont donnés au tableau 4.2. Le temps total de calcul est 1s et l'incrément de temps maximum est 0,1s et celui minimum est 1×10^{-5} s. Au temps initial, tous les degrés de liberté sont fixés à zéro et au temps final les degrés de liberté correspondent aux conditions aux rives de l'équation (4.3).

La figure 4.8 montre l'état déformé de l'élément fini d'interface COH3D8. La figure 4.9 montre les contraintes de cisaillement générées. De plus, il est possible d'observer que la loi de comportement imposée est vérifiée avec la réponse de l'élément COH3D8.

Afin de tester l'élément fini d'interface développé dans le cadre de ce projet, deux éléments sont connectés afin de représenter une brique unitaire. En effet, comparer

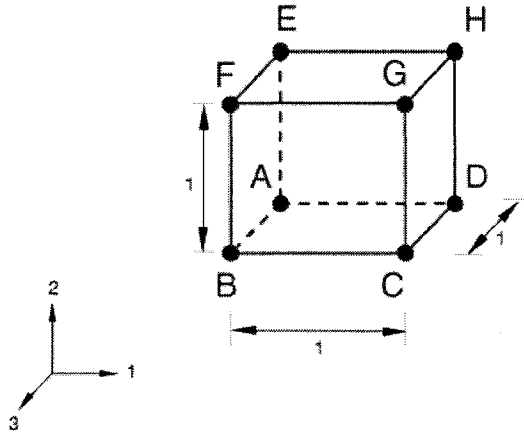


Figure 4.7 Élément d'interface COH3D8 (ABAQUS, 2004b).

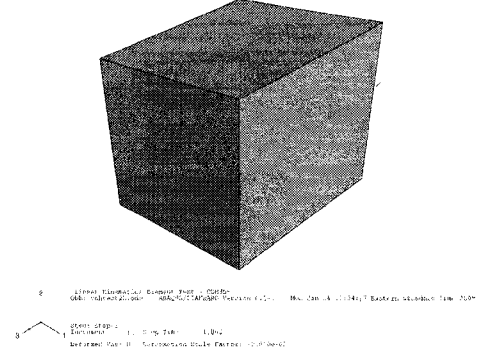


Figure 4.8 État déformé en cisaillement de l'élément COH3D8.

l'élément d'interface développé dans le cadre de ce projet avec l'élément d'interface d'ABAQUS permet de vérifier la connectivité des éléments (à cause du fait que pour représenter l'élément d'ABAQUS il faut connecter deux éléments triangulaires). De plus, en utilisant les mêmes types de lois de comportement d'interface, chaque élément doit être capable de retrouver la relation constitutive. De plus, l'élément triangulaire vérifié pourrait être utilisé sur des modèles où l'élément d'ABAQUS ne le peut pas à cause que celui-ci ne vérifie pas la compatibilité avec certains éléments solides (i.e tétraèdres). Étant donné que les éléments finis d'interface ne peuvent pas être visualisés avec le module de visualisation d'ABAQUS ce n'est pas possible de visualiser les résultats. Cependant, lors de la formulation de l'élément des variables internes (SVARS) sont calculées pour chaque incrément. Donc, les valeurs de contraintes dans les directions locales et de déplacements locaux peuvent être calculées. La figure 4.10 montre la configuration initiale des éléments finis d'interface. Afin d'obtenir une déformation en cisaillement les conditions aux rives suivantes sont appliquées :

$$\begin{aligned}
 u_1^1 = u_1^2 = u_1^3 = u_1^4 = u_1^5 = u_1^6 = u_1^{13} = u_1^{14} = u_1^{15} &= 0, 1 \\
 u_{1,2,3}^7 = u_{1,2,3}^8 = u_{1,2,3}^9 = u_{1,2,3}^{10} = u_{1,2,3}^{11} = u_{1,2,3}^{12} = u_{1,2,3}^{16} = u_{1,2,3}^{17} = u_{1,2,3}^{18} &= 0, 0
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

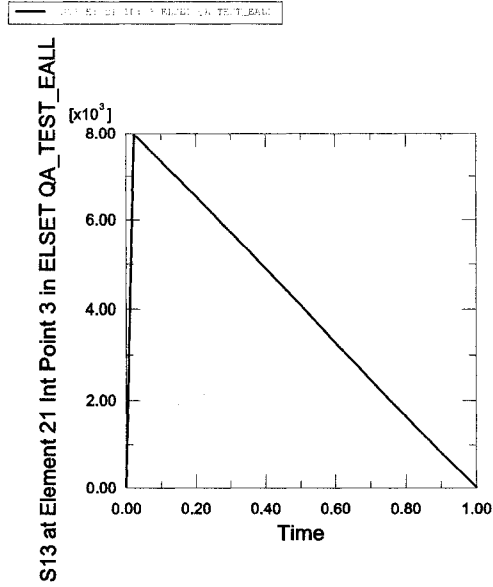


Figure 4.9 Contraintes de cisaillement.
Élément fini d'interface COH3D8.

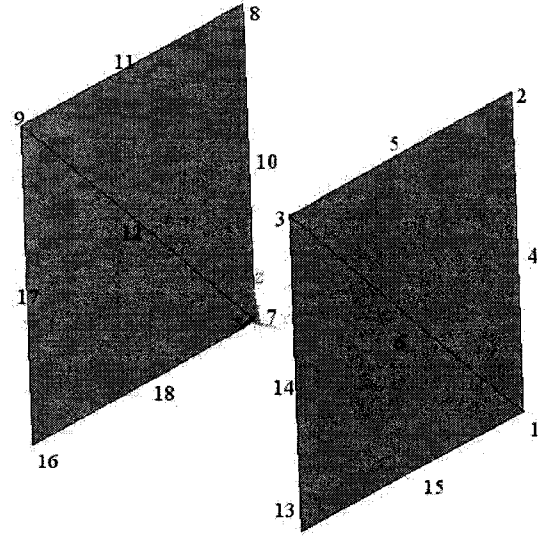


Figure 4.10 Deux éléments finis d'interface triangulaires connectés afin d'obtenir une brique unitaire.

La loi de comportement de l'interface implémentée est celle décrite au tableau 4.2. Donc, les valeurs obtenues pour l'élément fini d'interface triangulaire à 12 nœuds sont comparées avec celles de l'élément COH3D8. La figure 4.11 montre les contraintes de cisaillement obtenues pour chaque cas. Les résultats qui correspondent à l'élément fini d'interface de 12 nœuds coïncident parfaitement avec l'élément COH3D8. Donc, l'élément fini d'interface triangulaire peut représenter la loi de comportement imposée. Il doit être noté que les valeurs des contraintes de cisaillement correspondent à une des directions tangentielles. La même procédure est appliquée pour l'autre direction tangentielle et les mêmes résultats sont obtenus. Dans ce cas les conditions aux rives suivantes sont appliquées :

$$\begin{aligned} u_3^1 = u_3^2 = u_3^3 = u_3^4 = u_3^5 = u_3^6 = u_3^{13} = u_3^{14} = u_3^{15} = 0, 1 \\ u_{1,2,3}^7 = u_{1,2,3}^8 = u_{1,2,3}^9 = u_{1,2,3}^{10} = u_{1,2,3}^{11} = u_{1,2,3}^{12} = u_{1,2,3}^{16} = u_{1,2,3}^{17} = u_{1,2,3}^{18} = 0, 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Les paramètres montrés au tableau 4.2 sont utilisés pour la vérification de la deuxième direction tangentielle. Donc, la loi de comportement retrouvée est celle

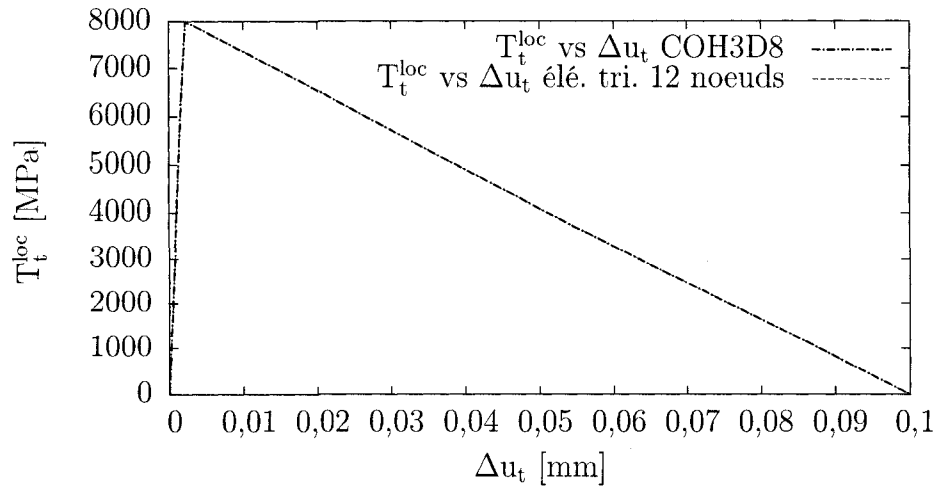


Figure 4.11 Relation entre les contraintes tangentielles et déplacements tangentiels. La loi de comportement imposée est retrouvée.

présentée à la figure 4.11. En effet, les développements de la loi de comportement de l'interface pour chaque direction tangentielle de l'élément fini triangulaire à 12 noeuds sont identiques.

4.5 Implémentation des éléments finis d'interface à 12 nœuds dans les VERs

Dans les modèles d'éléments finis des VERs sans endommagement les nœuds qui sont dans l'interface renfort-matrice sont partagés par la matrice et les renforts. Pour que l'élément fini d'interface puisse être utilisé, deux nœuds doivent être créés. Un des nœuds appartient à la matrice et l'autre aux renforts. Dans la configuration initiale (sans endommagement) ces deux nœuds ont les mêmes coordonnées, i.e. ceux-ci sont partagés par la matrice et les renforts. Quand l'endommagement a lieu l'élément fini d'interface va se déformer puisque les éléments solides adjacents se déforment.

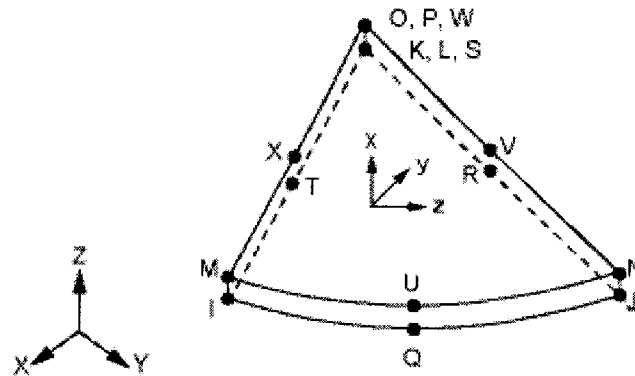


Figure 4.12 Élément fini d'interface dégénéré (INTER204) d'ANSYS (Ansys, 2007).

Pour générer les nœuds de l'élément fini d'interface le pre-processeur d'ANSYS est utilisé. ANSYS possède des éléments finis d'interface à 16 nœuds constitués de deux surfaces quadrilatères qui peuvent dégénérer en triangles. La figure 4.12 montre l'élément fini dégénéré. Ainsi, le maillage peut être réalisé automatiquement à l'aide du pre-processeur d'ANSYS. L'information des nouveaux nœuds est sauvegardée dans un fichier de texte et ensuite un programme Python utilise cette information pour générer le fichier des commandes d'ABAQUS.

4.5.1 Évaluation des contraintes

La méthode développée dans le Chapitre 2 section 2.3 est utilisée. Cependant, cette méthode est valable si les déformations sont modérées (Pierard, 2006). Dans le cas où les déformations sont grandes, des effets locaux sont rencontrés et la précision de la méthode des éléments finis ne peut pas être assurée. Donc, l'homogénéisation ne peut pas être réalisée car ce n'est pas possible faire une séparation d'échelles. D'autres méthodes ont été développées afin de tenir compte des gradients de déformation qui ne sont pas négligeables. Par exemple, Koutznetsova et al. (2002) ont

Phase	E [Gpa]	ν
Matrice	2	0,35
Renfort	69	0,3

Tableau 4.3 Propriétés des phases. Cas 1 seule sphère placée au centre du VER.

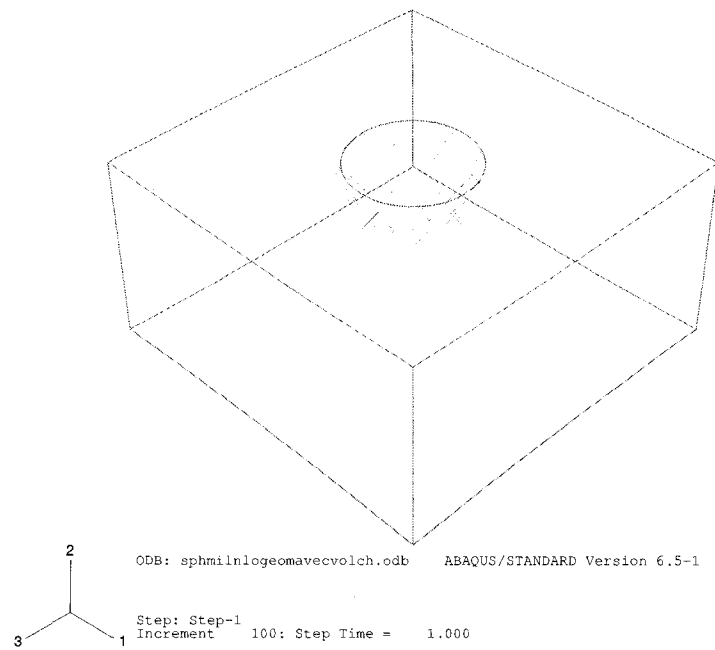


Figure 4.13 Représentation isométrique de la moitié de la cellule unitaire contenant 1 seule sphère placée au centre.

proposé une méthode d'homogénéisation numérique de deuxième ordre. Cette méthode tient compte du gradient de déformation. De plus, les conditions périodiques aux limites sont modifiées afin de tenir compte du gradient de déformation, ce qui donne la naissance aux conditions périodiques aux rives généralisées.

Dans le cadre de ce projet de maîtrise, les déformations imposées sont modérées. Donc, la méthode d'évaluation des contraintes développée dans le Chapitre 2 est utilisée.

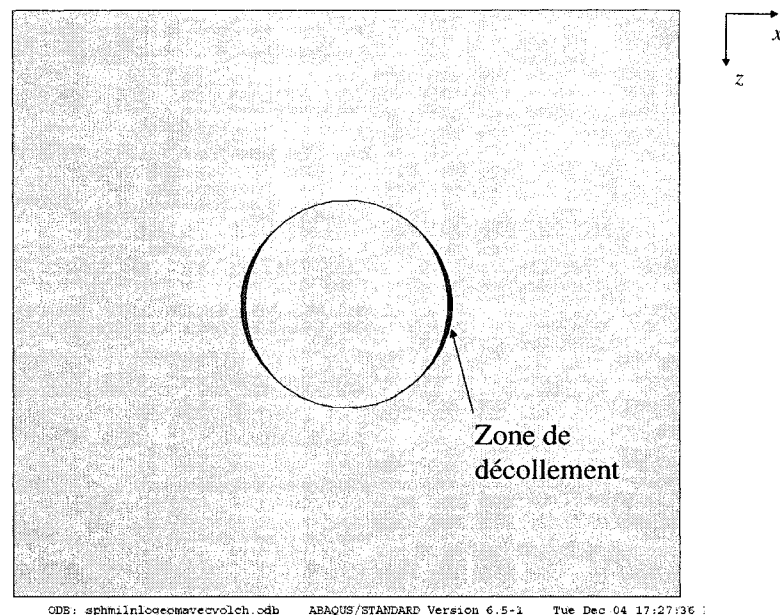


Figure 4.14 Section normale à l'axe y . La région signalée dénote la décohésion de l'interface renfort-matrice.

4.5.2 Matériau composite avec une sphère placée au centre

Cet essai a pour but de visualiser le comportement de l'interface dans le cas où il n'y a qu'une seule sphère.

La cellule unitaire a une longueur du côté $L = 10$ mm et la sphère a un rayon de $r = 1,684$. La fraction volumique est très faible (en effet $\zeta = 2\%$). Des conditions périodiques sont appliquées en fonction de l'ensemble d'équations (2.5). La sollicitation appliquée est un déplacement dans la direction x au nœud placé à $x = L$, $y = 0$ et $z = 0$, ce qui donne une déformation macroscopique E_{11} (voir l'ensemble d'équation (2.6)). Les propriétés de l'interface renfort-matrice sont données au tableau 4.1. Les valeurs des paramètres des directions tangentielle et normales sont

Phases	E_0 [GPa]	ν	τ_i
Matrice	5	0,35	0,5
Renfort	69	0,3	n/a

Tableau 4.4 Propriétés des phases. $\zeta = 10\%$.

Kp $[\frac{N}{mm^3}]$	Δu^0 [mm]	Δu^f [mm]	ξ
10×10^4	0,001	0,1	0,0001

Tableau 4.5 Propriétés de l'interface. $\zeta = 10\%$

égales. L'incrément de temps $\Delta t = 0,01s$ et le temps total de calcul est 1s. Les phases sont considérées élastiques linéaires. Les propriétés des phases sont données au tableau 4.3. Comme dans les cas sans endommagement les propriétés des matériaux ne correspondent pas nécessairement aux propriétés des matériaux réels. Une déformation macroscopique variant linéairement avec le temps est appliquée. La déformation initiale au temps initial est nulle, tandis qu'au temps 1s la déformation vaut 5%.

La figure 4.13 montre la moitié de la cellule unitaire modélisée. Les éléments d'interface sont notés par des symboles $\times$. Cependant, les champs de déplacements, etc. ne peuvent pas être visualisés dans le module de visualisation d'ABAQUS car cet élément fini est un élément défini par l'utilisateur. La figure 4.14 montre la section normale à l'axe y de la cellule unitaire. Donc, il est possible d'observer la décohésion de l'interface renfort-matrice modélisée par les éléments finis d'interface. La décohésion complète n'est pas atteinte.

4.5.3 Étude de l'endommagement sur des VERs avec $\zeta = 10\%$

Des études sur des VERs ayant une fraction volumique $\zeta = 10\%$ sont conduites. La matrice est considérée viscoélastique maxwellienne et les renforts sont considérés

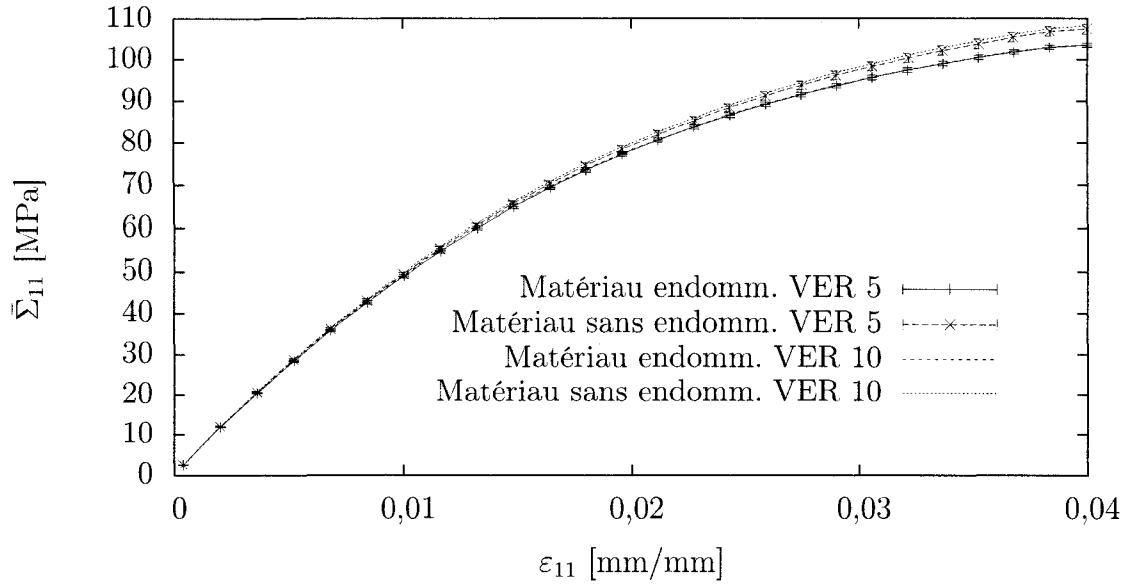


Figure 4.15 Courbes contraintes - déformations pour les états endommagés et sans endommagement. $\bar{\Sigma}_{11}$ constitue la moyenne sur les contraintes Σ_{11} mesurées. ε_{11} est la déformation macroscopique imposée. Les barres d'erreur correspondent à une distribution gaussienne sur les valeurs moyennes du VER=5 sphères en prenant des intervalles de confiance de 95%.

élastiques linéaires. Les propriétés des phases (le module d'Young instantané E_0 , le coefficient de Poisson ν et le temps de relaxation τ) sont définies au tableau 4.4. Étant donné que le temps de calcul est considérablement long, on va étudier le VER ayant 5 sphères. De plus, deux simulations des VERs ayant 10 sphères sont réalisées. Les propriétés de l'interface sont définies au tableau 4.5. Les paramètres pour les directions tangentielles et normales sont égaux. L'intervalle de temps de calcul est 1s avec des incréments de temps de 0,01s. Une déformation macroscopique E_{11} est appliquée et la contrainte macroscopique Σ_{11} est mesurée. La variation de la déformation est linéaire avec le temps de calcul ayant sa valeur maximale égale à 4%.

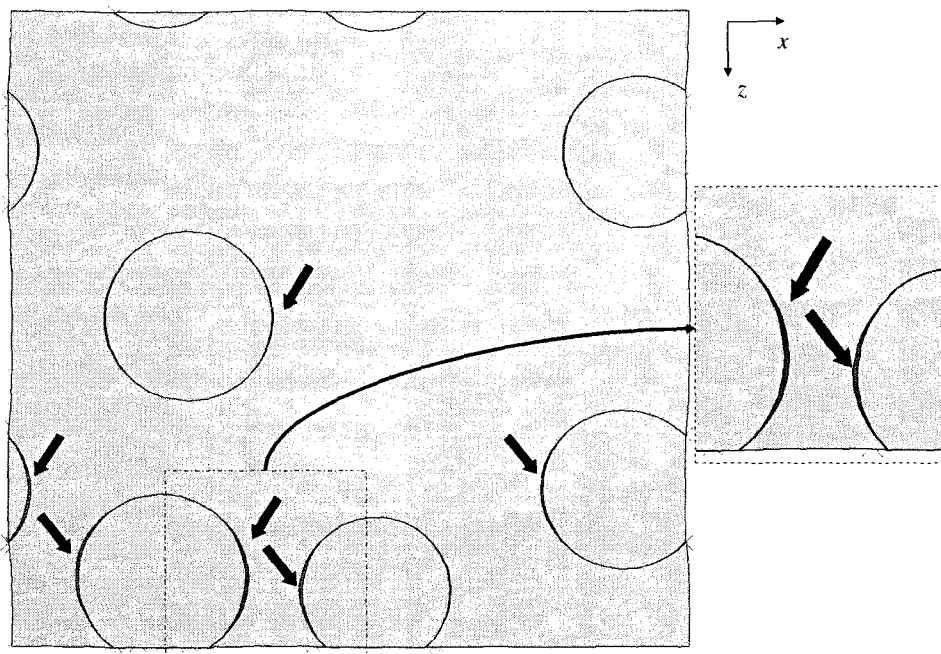


Figure 4.16 Section normale à l'axe y . VER : 10 sphères. $\zeta = 10\%$. Les flèches indiquent la décohésion de l'interface renfort-matrice.

Des simulations éléments finis en considérant un collement parfait entre les phases sont également réalisées. Ainsi, les courbes contraintes - déformations pour le cas endommagé et sans endommagement sont obtenues et comparées.

Pour la taille du VER de 5 sphères quatre simulations ont été réalisées pour les états endommagés et sans endommagement. La figure 4.15 montre les courbes contraintes - déformations pour les états endommagés et sans endommagement. Les barres d'erreur correspondent aux intervalles de confiance de 95% pris sur les valeurs moyennes en considérant une distribution gaussienne. L'erreur relative maximale atteinte pour les modèles sans endommagement est de 1,1% et pour le cas endommagé est de 0,9%. Également dans la figure 4.15 les valeurs moyennes de deux simulations sur des VERs ayant 10 sphères sont montrées. Les valeurs obtenues pour ces dernières sont dans l'intervalle de confiance défini pour le VER=5

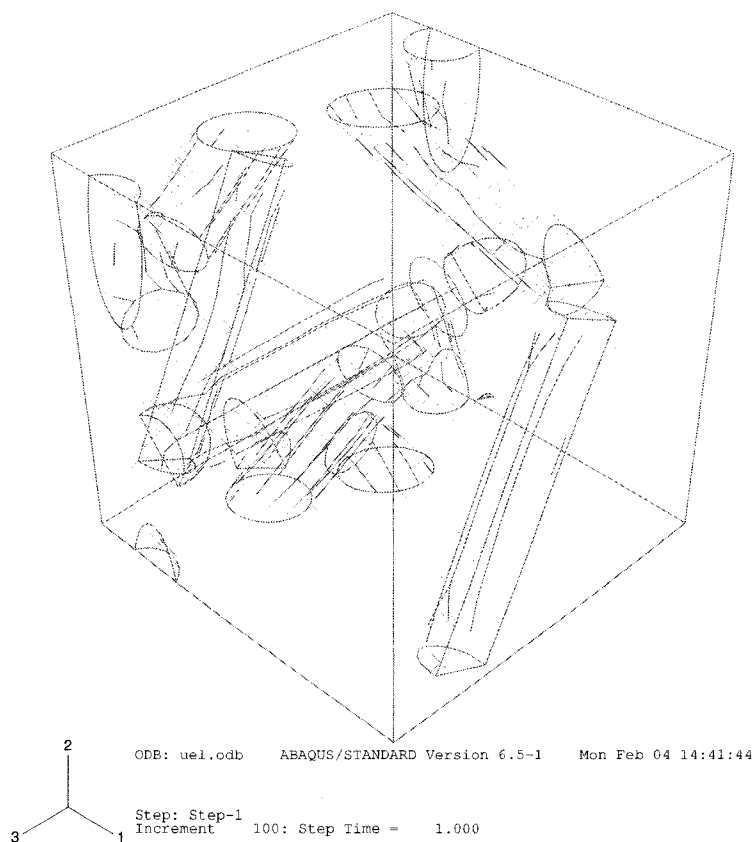


Figure 4.17 Cellule unitaire d'une microstructure d'un matériau composite renforcé par des fibres cylindriques distribuées aléatoirement dans l'espace.

sphères. Cependant, il n'est pas possible d'affirmer que la taille du VER est atteinte car l'étude n'est pas statistiquement représentative. Pour définir la taille du VER, d'autres simulations devraient être réalisées sur le VER de 10 sphères et sur des VERs plus grands (par exemple 15 ou 20 sphères).

Les valeurs obtenues montrent une diminution de la rigidité lorsque l'endommagement a eu lieu. Des résultats semblables ont été obtenus par Segurado et LLorca (2006). La figure 4.16 montre une section normale à l'axe y et les régions de décohésion de l'interface renfort-matrice pour un VER=10 sphères. La décohésion complète des renforts n'est pas atteinte.

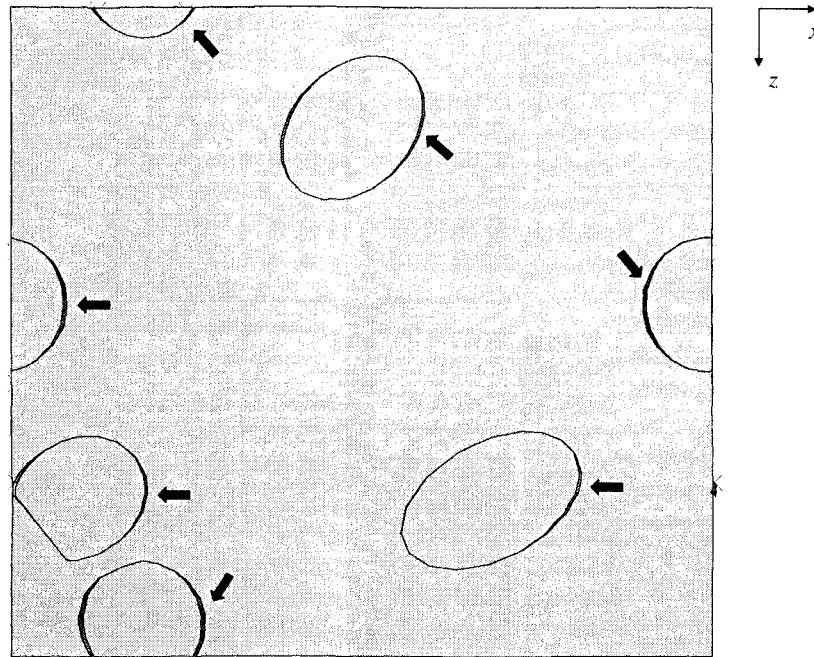


Figure 4.18 Section normale à l'axe y . VER : 5 cylindres. $\zeta = 10\%$. Les flèches indiquent la décohésion de l'interface renfort-matrice.

4.6 Perspective de travail

La beauté de cet élément fini d'interface est qu'il peut être utilisé sur n'importe quelle microstructure. La seule condition qui doit être respectée est l'utilisation des éléments solides quadratiques à 10 nœuds (tétraèdres) pour le maillage des phases. Par exemple, l'élément fini d'interface à 12 nœuds est implémenté dans une microstructure d'un matériau composite renforcé par des fibres cylindriques. La cellule unitaire contient 5 cylindres distribués aléatoirement dans l'espace. La figure 4.17 illustre la microstructure avec des renforts cylindriques. Les éléments finis d'interface sont utilisés dans l'interface renfort-matrice. Une déformation macroscopique

E_{11} est appliquée et les phases sont considérés élastiques linéaires. La figure 4.18 montre la section normale à l'axe y . La décohésion de l'interface renfort-matrice est dénotée par les flèches.

4.7 Conclusions

La modélisation de la décohésion de l'interface renfort-matrice a été réalisée à l'aide d'un élément fini d'interface. La formulation de cet élément a été vérifiée dans les directions normales et tangentielles de la surface de référence. Dans tous les cas, la loi de comportement définie *a priori* pour l'interface a été retrouvée. Ces éléments ont été utilisés dans l'interface renfort-matrice des matériaux composites à renforts sphériques. Des courbes de contraintes - déformations pour les états endommagés et sans endommagement ont montré une diminution de la rigidité puisque la décohésion a été modélisée. De plus, ces éléments ont été utilisés sur une microstructure à renforts cylindriques.

CONCLUSION

L'objectif de ce projet de maîtrise a été de modéliser l'endommagement par décohésion de l'interface renfort-matrice des matériaux composites renforcés par des particules distribuées aléatoirement dans l'espace par la méthode des éléments finis. Étant donné qu'il n'y avait pas de modèles éléments finis existants dans le groupe de recherche, la première étape du projet a été dédiée à concevoir ces modèles.

D'abord des modèles solides de cellules unitaires contenant des renforts sphériques distribués aléatoirement dans l'espace ont été générés à l'aide de l'algorithme « Random Sequential Adorption ». Le maillage de ces volumes élémentaires représentatifs a été réalisé automatiquement en utilisant le pre-processeur d'ANSYS. Ces maillages sont périodiques à cause de l'application des conditions périodiques aux rives, i.e. des équations de contraintes sont imposées entre les nœuds des faces opposées de la cellule unitaire. L'information reliée aux nœuds et aux éléments a été utilisée pour définir les lignes de commandes d'ABAQUS, logiciel utilisé pour les calculs. Ainsi, des simulations éléments finis sur ces matériaux composites ont été réalisées sans tenir compte de l'endommagement. Les phases ont été considérées isotropes, maxwelliennes et incompressibles. Les propriétés effectives du matériau composite ont été calculées. De plus, une procédure a été développée afin d'obtenir le spectre de relaxation effectif. Ces résultats ont été comparés avec des méthodes d'homogénéisation analytiques.

Afin de modéliser la décohésion de l'interface renfort-matrice un élément fini d'interface a été programmé. L'élément fini d'interface 3D est constitué de deux surfaces qui sont parfaitement collées dans la configuration sans endommagement. Lorsque la décohésion a lieu, ces surfaces se séparent. L'élément fini d'interface implémenté est compatible avec des éléments solides quadratiques à 10 nœuds (tétraèdres). Ainsi, chaque surface de l'élément a 6 nœuds afin de produire un

champ de déplacement quadratique.

La loi de comportement de l'interface est bilinéaire et irréversible. Cette loi a été choisie en raison de la simplicité de sa formulation. De plus, celle-ci fournit l'évolution de l'endommagement car il est possible de définir le point d'initiation de l'endommagement et le point de la décohésion complète. Les problèmes de convergence qui sont des conséquences de ce type de loi de comportement ont été résolus sur la loi bilinéaire à l'aide d'une régularisation visqueuse.

Finalement, ces éléments d'interface ont été utilisés dans l'interface renfort-matrice de VERs. Pour ce faire, il a fallu générer les nœuds à l'interface à l'aide du pré - processeur d'ANSYS. Comme dans le cas des modèles des éléments finis sans endommagement, les calculs ont été réalisés avec ABAQUS. Le maillage obtenu avec ANSYS a donc été utilisé pour définir les lignes de commandes d'ABAQUS.

Les contributions de ce travail sont :

1. Un ensemble d'outils informatiques permettant de générer de manière automatique des VERs de matériaux composites à renforts sphériques distribués aléatoirement dans l'espace qui soient compatibles avec l'application de conditions aux rives périodiques.
2. Une comparaison systématique entre les prédictions de modèles éléments finis et de modèles d'homogénéisation analytiques pour de matériaux viscoélastiques linéaires. Cette comparaison permet de montrer que parmi les modèles analytiques testés, le schéma auto-cohérent semble être le plus précis.
3. Une méthodologie qui permet de déterminer le spectre de relaxation d'un matériau viscoélastique qui respecte les exigences de la thermodynamique. Il doit être noté que les points 2 et 3 ont conduit à une publication dans la revue International Journal of Solids and Structures.
4. La programmation d'un élément fini d'interface qui puisse être connecté à des tétraèdres à 10 nœuds. La formulation de l'élément fini d'interface est

indépendante de la loi d'interface ce qui confère une qualité très générale à ces éléments. La formulation de l'élément fini d'interface est celle de Segurado et LLorca (2004) et la loi de comportement d'interface bilinéaire et irréversible est celle de Camanho et al. (2003). À notre connaissance, cette combinaison formulation - loi d'interface est introduite par la première fois dans le cadre de ce projet de maîtrise. Finalement le potentiel d'application de ces éléments a été démontré sur les VERs développés au point 1.

Perspective de travail

Afin d'améliorer et/ou d'élargir le domaine d'utilisation des modèles développés dans le cadre de ce projet de maîtrise certaines recommandations sont suggérées :

1. Des études de la taille du VER pour des microstructures à renforts sphériques en tenant compte de l'endommagement peuvent être réalisées. Cependant, les simulations prennent des temps de calcul relativement longs. Donc, un plan d'expériences numériques est fortement recommandé.
2. De plus, ces éléments finis peuvent être appliqués pour n'importe quelle microstructure. Ceci a été montré dans le Chapitre 4. Il est suggéré, donc, d'étudier la décohésion de l'interface renfort-matrice dans des matériaux composites ayant différents types des renforts, comme par exemple des renforts cylindriques.
3. Étant donné que la décohésion complète n'a pas été atteinte, des déformations plus grandes doivent être appliquées. Cependant, la méthode pour mesurer les quantités globales doit changer car la précision de la méthode des éléments finis est diminuée. Ainsi, une méthode d'homogénéisation numérique de deuxième ordre devrait être implémentée.
4. Il doit être noté que l'étude de l'endommagement des matériaux composites viscoélastiques en utilisant des méthodes d'homogénéisation analytiques n'a pas été réalisée. Ces modèles d'éléments finis permettront de valider des mé-

thodes d'homogénéisation analytiques qui pourraient être développées dans le cadre d'un autre projet.

BIBLIOGRAPHIE

- ABAQUS (2004a). *Analysis User's Manual*. Hibbit, Karlsson et Sorensen, Inc.
- ABAQUS (2004b). *Verification Manual*. Hibbit, Karlsson et Sorensen, Inc.
- ALFANO G. et CRISFIELD A. (2001). Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites : mechanical and computational issues. *International Journal for Numerical Methods and Engineering*, 50 :1701 – 1736.
- ANSYS (2007). *Release 11.0 Documentation for ANSYS*. SAS IP, Inc.
- AOKI Y. et SUEMASU H. (2003). Damage analysis in composite laminates by using interface elements. *Advanced Composite Materials*, 12.
- ARUN ROY Y. et DODDS JR. R. H. (2001). Simulation of ductile crack growth in thin aluminium panels using 3-d surface cohesive elements. *International Journal of Fracture*, 110 :21 – 45.
- BARELLO R. B. et LÉVESQUE M. (2008). Comparison between the relaxation spectra obtained from homogenization models and finite elements simulation for the same composite. *International Journal of Solids and Structures*, 45 :850 – 867.
- BARENBLATT G. (1962). The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics*, 7 :55 – 129.
- BENVENISTE Y. (1984). On the effect of debonding on the overall behavior of composite materials. *Mechanics of Materials*, 3 :349 – 358.
- BENVENISTE Y. (1985). The effective mechanical behaviour of composite materials with imperfect contact between the constituents. *Mechanics of Materials*, 4 :197 – 208.
- BENVENISTE Y. (1987). A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. *Mechanics of Materials*, 6 :147 – 157.

- BENVENISTE Y. et ABOUDI J. (1984). A continuum model for fiber reinforced materials with debonding. *International Journal of Solids and Structures*, 20 :935 – 951.
- BEURTHEY S. et ZAOUI A. (2000). Structural morphology and relaxation spectra of viscoelastic heterogeneous media. *Journal of Mechanics A/Solids*, 19 :1–16.
- BORNERT M., BRETHEREAU T. et GILORMINI P. (2001). *Homogénéisation en mécanique des matériaux 1 - Matériaux aléatoires élastiques et périodiques*. Hermès Science Publications, Paris.
- BOULEAU N. (1991). Interprétation probabiliste de la viscoélasticité linéaire. *Mechanics Research Communications*, 19 :16 – 20.
- BOULEAU N. (1999). Viscoélasticité et processus de lévy. *Journal of Potential Analysis*, 11(3) :289 – 302.
- BOURGEOIS N. (1994). *Caractérisation et modélisation micromécanique du comportement et de l'endommagement d'un composite à matrice métallique : Al/SiCp*. PhD thesis, Ecole Centrale de Paris.
- BRENNER R., MASSON R., CASTELNEAU O. et ZAOUI A. (2002). A “quasi-elastic” affine formulation for the homogenised behaviour of nonlinear viscoelastic polycrystals and composites. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 21 :943 – 960.
- BRINSON L. et KNAUSS W. (1992). Finite element analysis of multiphase viscoelastic solids. *Journal of Applied Mechanics*, 59(4) :730 – 737.
- BRINSON L. et LIN W. (1998). Comparison of micromechanics methods for effective properties of multiphase viscoelastic composites. *Composites Structures*, 41 :353 – 367.
- BUDIANSKY B. (1965). On the elastic moduli of some heterogeneous materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13 :223 – 227.

- CAMANHO P., DAVILA C. et MOURA M. (2003). Numerical simulation of mixed-mode progressive delamination in composite materials. *Journal of Composite Materials*, 37(16) :1415 – 1438.
- CHRISTENSEN R. et LO K. H. (1979). Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 27 :315 – 330.
- COOK R. D., MALKUS D. S., PLESHA M. E. et WITT R. J. (2002). *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons, Inc. Fourth Edition, New York.
- DAVILA C., CAMANHO P. et TURON A. (2007). Cohesive elements for shells. NASA/TP 2007-214869, Nasa Langley Research Center.
- DUSCHLBAUER D., BÖHM H. et PETTERMANN H. (2006). Computational simulation of composites reinforced by planar random fibers : homogenization and localization by unit cell and mean field approaches. *Journal of Composite Materials*, 40(24) :2217 – 2234.
- EMRI I. et TSCHOEGL N. (1993). Generating line spectra from experimental responses. Part I : Relaxation modulus and creep compliance. *Rheologica Acta*, 32 :311–321.
- EMRI I. et TSCHOEGL N. (1994). Generating line spectra from experimental responses. Part IV : Application to experimental data. *Rheologica Acta*, 33 :60–70.
- EMRI I. et TSCHOEGL N. (1995). Determination of mechanical spectra from experimental responses. *International Journal of Solids and Structures*, 32 :817–826.
- ESHELBY J. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London, Serie A.*, 241 :376 – 396.

- GAO Y. et BOWER A. (2004). A simple technique for avoiding convergence problems in finite element simulations of crack nucleation and growth on cohesive interfaces. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 12 :453 – 463.
- GEUBELLE P. et BAYLOR J. S. (1998). Impact-induced delamination of composites : a 2d simulation. *Composites Part B*, 29B :589 – 602.
- GONZÁLEZ C., SEGURADO J. et LLORCA J. (2004). Numerical simulation of elastoplastic deformation of composites : evolution of stress microfields and implications for homogenization models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52 :1573 – 1593.
- GUSEV A. (1997). Representative volume element size for elastic composites : A numerical study. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(9) :1449 – 1459.
- HASHAGEN F. et BORST R. (1997). An interface element for modelling the onset and growth of mixed-mode cracking in aluminium and fibre metal laminates. *Structural Engineering and Mechanics*, 5 :817 – 837.
- HASHIN Z. (1965). Viscoelastic behavior of heterogeneous media. *Journal of Applied Mechanics*, 32(E) :630 – 636.
- HASHIN Z. (1966). Viscoelastic fibre reinforced materials. *AIAA Journal*, 4(8) :1411 – 1417.
- HASHIN Z. (1990). Thermoelastic properties of fiber composites with imperfect interface. *Mechanics of Materials*, 8 :333 – 348.
- HASHIN Z. (1991). The spherical inclusion with imperfect interface. *Journal of Applied Mechanics*, 58 :444 – 449.

- HAZANOV S. et HUET C. (1994). Order relationships for boundary conditions effect in heterogeneous bodies smaller than the representative volume. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 42 :1995 – 2011.
- HERSHEY A. et DAHLGREN V. (1954). The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals. *Journal of Applied Mechanics*, 21 :236 – 240.
- HILL R. (1965a). A Self-Consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13 :213 – 222.
- HILL R. (1965b). Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials - III. Self-Consistent model. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13 :189 – 198.
- HUET C. (1990). Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 38 :813 – 841.
- JIAN GUO N. et FANG J. (2007). Elastoplastic behavior of particle reinforced composites considering the effect of interfacial debonding. *Key Engineering Materials*, 340-341 :125 – 130.
- KANIT T., FOREST S., GALLIET I., MOUNOURY V. et JEULIN D. (2003). Determination of the size of the representative volume element for random composites : Statistical and numerical approach. *International Journal of Solids and Structures*, 40 :3647 – 3679.
- KARADENIZ Z. H. et KUMULUTAS D. (2007). A numerical study on the coefficients of thermal expansion of fiber reinforced composite materials. *Composite Structures*, 78 :1 – 10.
- KOUTZNETSOVA V., BREKELMANS A. M. et BAAIJENS F. P. T. (2001). An approach to micro-macro modeling of heterogeneous materials. *Computational Mechanics*, 27 :37 – 48.

- KOUTZNETSOVA V., GEERS M. G. D. et BREKELMANS A. M. (2002). Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54 :1235 – 1260.
- LAWS N. et MCLAUGHLIN R. (1978). Self-consistent estimates for the viscoelastic creep compliances of composite materials. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 359 :251 – 273.
- LÉVESQUE M. (2004). *Modélisation du comportement mécanique de matériaux composites viscoélastiques non linéaires par un approche d'homogénéisation*. PhD thesis, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers. Paris.
- LÉVESQUE M., DERRIEN K., MISHNAEVSKY JR. L., BAPTISTE D. et GILCHRIST M. D. (2004). A micromechanical model for nonlinear viscoelastic particle reinforced polymeric composite materials—undamaged state. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 35(7) :905 – 913.
- LÉVESQUE M., GILCHRIST M. D., BOULEAU N., DERRIEN K. et BAPTISTE D. (2007). Numerical inversion of the Laplace – Carson transform applied to homogenization of randomly reinforced linear viscoelastic media. *Computational Mechanics*, 40(4) :771 – 789.
- MICHEL J. C., MOULINEC H. et SUQUET P. (1999). Effective properties of composite materials with periodic microstructure : A computational approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172 :109 – 143.
- MISHNAEVSKY L. J. (2004). Three-dimensional numerical testing of microstructures of particle reinforced composites. *Acta Materialia*, 52(14) :4177 – 4188.
- MISHNAEVSKY L. J. (2005). Automatic voxel-bases generation of 3d microstructural fe models and its application to the damage analysis composites. *Materials Science & Engineering A*, 407 :11 – 23.

- MORI T. et TANAKA K. (1973). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica et Materialia*, 21 :597 – 629.
- MURA T. (1984). The elastic inclusion with a sliding interface. *Journal of Applied Mechanics*, 51 :308 – 310.
- NEEDLEMAN A. (1987). A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *Journal of Applied Mechanics*, 54 :525 – 531.
- NEEDLEMAN A. (1990). An analysis of decohesion along an imperfect interface. *International journal of fracture*, 42 :21 – 40.
- NEEDLEMAN A. (1992). Micromechanical modelling of interfacial decohesion. *Ultramicroscopy*, 40 :203 – 214.
- NGUYEN VIET H., PASTOR J. et MULLER D. (1995). Method for predicting linear viscoelastic mechanical behavior of composites, a comparison with other methods and experimental validation. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 14(6) :939 – 960.
- ORTIZ M. et PANDOLFI A. (1999). Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44 :1267 – 1282.
- PIERARD O. (2006). *Micromechanics of inclusion-reinforced composites in elasto-plasticity and elasto-viscoplasticity : modeling and computation*. PhD thesis, Université Catholique de Louvain. Faculté des Sciences Appliquées.
- SANCHEZ PALENCIA E. et ZAOUÏ A. (1987). *Homogenization techniques for composite media : lecture delivered at the CISM International Center for Mechanical Science*. Springer-Verlag, New York.
- SCHAPERY R. A. (1969). *Further development of a thermodynamic constitutive theory : stress formulation*. Purdue University, School of Aeronautics.

- SEGURADO J., GONZÁLEZ C. et LLORCA J. (2003). A numerical investigation of the effect of particle clustering on the mechanical properties of composites. *Acta Materialia*, 51 :2355 – 2369.
- SEGURADO J. et LLORCA J. (2002). A numerical approximation to the elastic properties of sphere-reinforced composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50 :2107 – 2121.
- SEGURADO J. et LLORCA J. (2004). A new three-dimensional interface finite element to simulate fracture in composites. *International Journal of Solids and Structures*, 41 :2977–2993.
- SEGURADO J. et LLORCA J. (2006). Computational micromechanics of composites : The effect of particle spatial distribution. *Mechanics of Materials*, 38 :873 – 883.
- SUN C., SAFFARI P., R. R., SADEGHIPOUR K. et BARAN G. (2007). Finite element analysis of elastic property bounds of a composite with randomly distributed particles. *Composites Part A : applied science and manufacturing*, 38 :80 – 86.
- SWAMINATHAN S., PAGANO N. J. et GHOSH S. (2006). Analysis of interfacial debonding in three-dimensional composite microstructures. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 128 :96 – 106.
- TAN H., HUANG Y., LIU C. et GEUBELLE P. (2005a). The Mori-Tanaka method for composite materials with nonlinear interface debonding. *International Journal of Plasticity*, 21 :1890 – 1918.
- TAN H., HUANG Y., LIU C. et GEUBELLE P. (2006). Effect of nonlinear interface debonding on the constitutive model of composite materials. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 4(1).
- TAN H., LIU C., HUANG Y. et GEUBELLE P. (2005b). The cohesive law for the particle/matrix interfaces in high explosives. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53 :1892 – 1917.

- TANDON G. et WENG G. J. (1984). The effect of aspect ratio of inclusions on the elastic properties of unidirectionally aligned composites. *Polymer Composites*, 5(4).
- TORQUATO S. (1991). Random heterogeneous media : Microstructure and improved bounds on effective properties. *Applied Mechanics Reviews*, 44 :37 – 76.
- TORQUATO S. (1998). Effective stiffness tensor of composite media : II. Applications to isotropic dispersions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46 :1411 – 1440.
- TUCKER C. I. et LIAN E. (1999). Stiffness predictions for unidirectional short-fiber composites : Review and evaluation. *Composites Science and Technology*, 59 :655 – 671.
- TURON A., CAMANHO P., COSTA J. et DÁVILA C. (2006). A damage model for the simulation of delamination in advanced composites under variable-mode loading. *Mechanics of Materials*, 38 :1072 – 1089.
- TVERGAARD V. (1990). Effect of fiber debonding in a whisker-reinforced metal. *Materials science and engineering*, A125 :203 – 213.
- TVERGAARD V. (2003a). Cohesive zone representations of failure between elastic or rigid solids and ductile solids. *Engineering Fracture Mechanics*, 70 :1859 – 1868.
- TVERGAARD V. (2003b). Debonding of short fibres among particulates in a metal matrix composite. *International Journal of Solids and Structures*, 40 :6957 – 6967.
- WANG Y. et WENG G. (1992). Influence of inclusion shape on the overall viscoelastic behavior of composites. *Journal of Applied Mechanics*, 59 :510 – 518.

- WENG G. J. (1984). Some elastic properties of reinforced solids, with special reference to isotropic ones containing spherical inclusions. *International Journal of Engineering Science*, 22(7) :845 – 856.
- WILLIS J. R. (1977). Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 25 :185 – 202.
- WILLIS J. R. (1983). The overall elastic response of composite materials. *Journal of Applied Mechanics*, 50 :1202 – 1209.
- XIA Z., ZHANG Y. et ELYIN F. (2003). A unified periodical boundary conditions for representative volume elements of composites and applications. *International Journal of Solids and Structures*, 40 :1907 – 1921.
- XIA Z., ZHOU C., YONG Q. et WANG X. (2006). On selection of repeated unit cell model and application of unified periodic boundary conditions in micro-mechanical analysis of composites. *International Journal of Solids and Structures*, 43 :266 – 278.
- XU X. P. et NEEDLEMAN A. (1993). Void nucleation by inclusion debonding in a crystal matrix. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 1 :111 – 132.
- XU X. P. et NEEDLEMAN A. (1994a). Continuum modelling of interfacial decohesion. *Solid State Phenomena*, 35 :287 – 302.
- XU X. P. et NEEDLEMAN A. (1994b). Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 42(9) :1397 – 1434.
- ZHONG Z. et MEGUID S. A. (1997). On the elastic field of a spherical inhomogeneity with an imperfectly bonded interface. *Journal of Elasticity*, 46 :91 – 113.

ZHONG Z. et MEGUID S. A. (1999). On the imperfectly bonded spherical inclusion problem. *Journal of Applied Mechanics*, 66 :839 – 846.

ANNEXE I

COMPARISON BETWEEN THE RELAXATION SPECTRA OBTAINED FROM HOMOGENIZATION MODELS AND FINITE ELEMENTS SIMULATION FOR THE SAME COMPOSITE

Cette annexe contient la publication qui a découlé des travaux reliés à la première étape de ce projet de maîtrise.

Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

International Journal of Solids and Structures 45 (2008) 850–867

INTERNATIONAL JOURNAL OF
SOLIDS AND
STRUCTURESwww.elsevier.com/locate/ijssolstr

Comparison between the relaxation spectra obtained from homogenization models and finite elements simulation for the same composite

Romina B. Barelo, Martin Lévesque *

CREPEC, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal, C.P. 6079, Succ. Centre-ville, Montréal, Canada H3C 3A7

Received 23 April 2007; received in revised form 3 July 2007

Available online 14 September 2007

Abstract

The objective of this work is to determine the relaxation spectrum of spherical particles reinforced viscoelastic and isotropic composites from 3D Finite Elements (FE) simulations of the microstructure. The matrix and the reinforcements are assumed to be incompressible and Maxwellian. The spectra obtained from the FE simulations are compared with those obtained from analytical homogenization models. This paper presents the procedure used for generating the FE models as well as the procedure used for obtaining relaxation spectra meeting the thermodynamics requirements imposed on linear viscoelastic materials. It seems that the relaxation spectrum for the microstructure studied in this paper is composed of a negligible continuous part and a discrete part of higher intensity. In any case, the resulting material does not have a Maxwellian behavior.

© 2007 Elsevier Ltd. All rights reserved.

Keywords: Stress relaxation; Finite Element Analysis (FEA); Homogenization; Unit cell

1. Introduction

Homogenization techniques can be used for predicting the effective behavior of composites based on information related to the microstructure. There are two principal categories of homogenization methods: the analytical methods and the numerical methods. Researchers like Gusev (1997), Segurado and LLorca (2002) and Mishnaevsky (2004) have worked on the effective elastic properties prediction by performing Finite Element (FE) analyses of three-dimensional material microstructure unit cells. Brinson and Knauss (1992) and Nguyen Viet et al. (1995) have performed 2D FE analyses of linear viscoelastic composites. Huet (1990) and Hazanov and Huet (1994) proposed bounding relations for the effective properties using uniform and mixed boundary conditions, respectively. They found that if smaller material specimens are selected and uniform boundary conditions are applied, a bias is introduced on the effective properties calculation. Kanit et al. (2003) have pro-

* Corresponding author.

E-mail address: martin.levesque@polymtl.ca (M. Lévesque).

posed a statistical procedure for determining the Representative Volume Element (RVE) size. They verified that using periodic boundary conditions leads to smaller RVE size than using displacement or traction uniform boundary conditions. Xia et al. (2006) have demonstrated that in displacement-based finite element method, the application of periodical boundary conditions on the displacements guarantees the periodicity of the tractions.

The first analytical homogenization models were developed for linear elastic materials. These results were extended to non linear materials as well as to linear viscoelastic materials. The homogenization of linear viscoelastic materials is classically performed using the viscoelastic correspondence principle and the Laplace–Carson Transforms (LCT). The procedure consists in applying the LCT to the linear viscoelastic constitutive theories and insert these symbolic mechanical properties into a linear elastic homogenization model. The overall properties are obtained by the LCT inversion. Hashin (1965) has used such principle for unidirectional fiber composites; Wang and Weng (1992) and Lévesque et al. (2004) with the Mori–Tanaka (MT) scheme and Laws and McLaughlin (1978), Beurthey and Zaoui (2000) and Brenner et al. (2002) with the Self-Consistent (SC) scheme, amongst others.

This work focuses on linear viscoelastic composite materials. The objective of this work is to compare the relaxation spectrum of composite materials constituted of incompressible, isotropic, viscoelastic and Maxwellian phases obtained by numerical homogenization and analytical models. The microstructure studied consists in spherical reinforcements randomly distributed into a matrix. FE meshes of RVE of such microstructure are built and their solutions are considered as the “exact solution”. The analytical homogenization models tested are MT, SC and Torquato (TOA) (Torquato, 1998). The FE models as well as the simulations are described at Section 2. The numerical method used for obtaining the relaxation spectra from the FE simulations is described at Section 3. Comparisons between the FE and the analytical approaches results are presented at Section 4.

2. Finite element model

2.1. Obtaining the finite element models

The composite is modeled as a cube containing spherical reinforcements. The Random Sequential Adsorption algorithm (Segurado and LLorca, 2002) has been used for obtaining a spatially random sphere distribution. Conditions of minimum distance between each sphere and between each sphere and each cube face (Segurado and LLorca, 2002) have been imposed. The coordinates of the centre of the first sphere are randomly generated. If the distances between the sphere and each cube face are greater than an established value, the sphere is accepted. Otherwise, the sphere is rejected and the coordinates of a new sphere are generated again until the distance condition mentioned above is met. The following spheres are generated sequentially. The centre coordinates of a new sphere are randomly generated and the distances between the sphere and the cube faces are verified. Then, the distances between the new sphere and those previously created must be inferior to a certain value. In this study, the spheres were randomly distributed into a cube of $10 \times 10 \times 10$ mm. The spheres radii were calculated for obtaining the desired reinforcement volume fraction. The distances between the centers of two spheres had to be greater than $2.07r$ mm and the distances from the cube faces greater than $0.1r$ mm (r stands for the sphere radius). Periodic boundary conditions were applied to the cube's surfaces since it leads to a smaller RVE than with homogeneous tractions or displacements (Kanit et al., 2003). Periodic RVE were created for facilitating the application of this type of boundary conditions.

The mesh of the unit cell was created with the commercial software ANSYS 10.0. Fig. 1 shows the solid model of a unit cell containing 50 spheres for a volume fraction ζ of 25%. Constraint equations were imposed between nodes lying on opposite faces for applying the periodic boundary conditions. The three cube faces intersecting the Cartesian coordinate system origin were meshed in a first time with surface elements (6-noded triangles). Then, these meshes were copied to the opposite faces. Finally, the volumes were meshed with 10-noded tetrahedra. Fig. 2 shows the mesh corresponding to the reinforcement. This mesh was then exported to ABAQUS/Standard 6.5 for the calculations.

Periodic displacements fields can be expressed as (Michel et al., 1999):

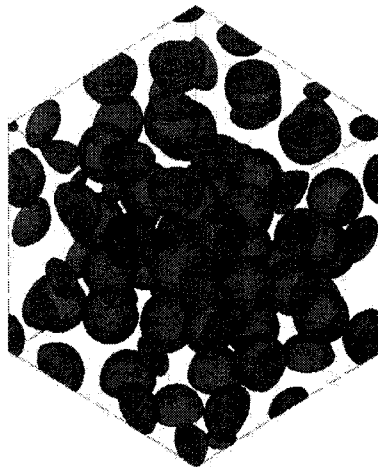


Fig. 1. Solid model. Cube containing 50 spheres. Volume fraction $\zeta = 25\%$.

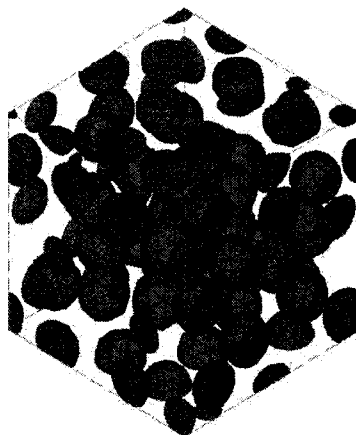


Fig. 2. Mesh of the reinforcements shown at Fig. 1.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

where $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ is the displacement vector corresponding to the position vector $\mathbf{x}$, $\mathbf{E}$ is the overall strain in the elementary cube and $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ is a periodic fluctuation. The spatial average of $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ is equal to zero. This periodic field takes the same values in a pair of points that are on opposite faces (i.e. sharing two of their coordinates).

The fluctuation $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ can be eliminated with the following set of equations:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(0, x_2, x_3) + \mathbf{E} \cdot (L, 0, 0) &= \mathbf{u}(L, x_2, x_3) \\ \mathbf{u}(x_1, 0, x_3) + \mathbf{E} \cdot (0, L, 0) &= \mathbf{u}(x_1, L, x_3) \\ \mathbf{u}(x_1, x_2, 0) + \mathbf{E} \cdot (0, 0, L) &= \mathbf{u}(x_1, x_2, L) \end{aligned} \quad (2.2)$$

where L is the cube length. When setting $\mathbf{u}(0) = 0$ to prevent rigid body motions, the components of $\mathbf{E}$ as a function of the displacements of some nodes can be obtained and relations between the displacements of these nodes are established due to the symmetry of $\mathbf{E}$, namely:

$$\begin{aligned}
\frac{u_1(L, 0, 0)}{L} &= E_{11}, & \frac{u_2(L, 0, 0)}{L} &= E_{12}, & \frac{u_3(L, 0, 0)}{L} &= E_{13} \\
\frac{u_1(0, L, 0)}{L} &= E_{21}, & \frac{u_2(0, L, 0)}{L} &= E_{22}, & \frac{u_3(0, L, 0)}{L} &= E_{23} \\
\frac{u_1(0, 0, L)}{L} &= E_{31}, & \frac{u_2(0, 0, L)}{L} &= E_{32}, & \frac{u_3(0, 0, L)}{L} &= E_{33}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

2.2. Simulation description

Relaxation tests were simulated. In a relaxation test, the strains are suddenly applied from 0 to a certain value, ϵ_i , at $t = 0$. This strain is kept constant and the stresses are measured. In this study, we applied an overall shear deformation E_{12} and computed the overall stress Σ_{12} . The sudden strain jump was in fact applied over 5×10^{-5} s and the final simulation time was 5 s. It was observed that applying the strain jump over 1×10^{-7} s produced a difference of less than 0.02% in Σ_{12} right after the assumed strain jump. Therefore, it was assumed that $\Sigma_{12}(t = 5 \times 10^{-5}) \cong \Sigma_{12}(t = 0)$. The composite phases were modeled as linear viscoelastic, isotropic, incompressible and Maxwellian. It should be noted that these values were arbitrarily chosen and do not represent any real material. The objective here is to study the sensitivity of the homogenization models to the contrasts between each phase. The shear relaxation modulus of each phase was defined as:

$$\mu_i(t) = \mu_i^0 \exp \left[-\frac{t}{\tau_i} \right] \tag{2.4}$$

where μ_i^0 corresponds to the instantaneous modulus of the phase i and τ_i corresponds to the relaxation time of the phase i . Table 1 lists the material properties used in the FE simulations for two levels of contrast (η) between phase properties. Both the instantaneous shear modulus and the relaxation time were varied simultaneously.

The effective response of the composite was obtained by calculating the volume average of the stresses and strains. The FE code computes the local stresses and strains at each integration point. In addition, a volume is associated to each integration point. The subroutine URDFIL built in ABAQUS/Standard 6.5 has been used for computing these volume averages from the integration points results.

The RVE size has been studied by varying the number of spheres within the FE model. The evolution of the stress-strain curves was studied as a function of the RVE size. FE models with 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40 and 50 spheres were tested depending on the volume fraction and contrast between phases. For each RVE size, at least 6 simulations were performed. If the mean effective shear relaxation modulus of the composite did not vary significantly when the RVE size was increased, the RVE size was considered to have been attained. Figs. 3–6 show the mean shear relaxation modulus for the first computation time of each RVE size studied, for the case $\eta = 10$, for 10%, 15%, 20% and 25% volume fractions, respectively. The error bars on the figures represent a 95% confidence interval on the mean value (it is assumed that the mean effective response obeys a normal distribution). This applies to all the error bars in this paper. For the case $\eta = 100$, only two volume fractions were studied: 10% and 20%. Figs. 7 and 8 show the shear relaxation modulus for the first computation time of each RVE size studied for 10% and 20% volume fractions, respectively. For all the cases studied, a statistically significant difference (in the sense of a 95% confidence interval) on the mean relaxation shear modulus has been observed between the smallest and the largest RVEs plotted in Figs. 3–6. However, for most cases, no statistically significant difference has been observed between the mean shear relaxation modulus

Table 1
Material properties used for the FE simulations for $\eta = 10$ and $\eta = 100$

Phase	$\eta = 10$		$\eta = 100$	
	μ^0 (Pa)	τ_i (s)	μ^0 (Pa)	τ_i (s)
Matrix	8.67×10^7	5×10^{-1}	8.67×10^6	5×10^{-1}
Reinforcement	8.67×10^8	5×10^{-2}	8.67×10^8	5×10^{-3}

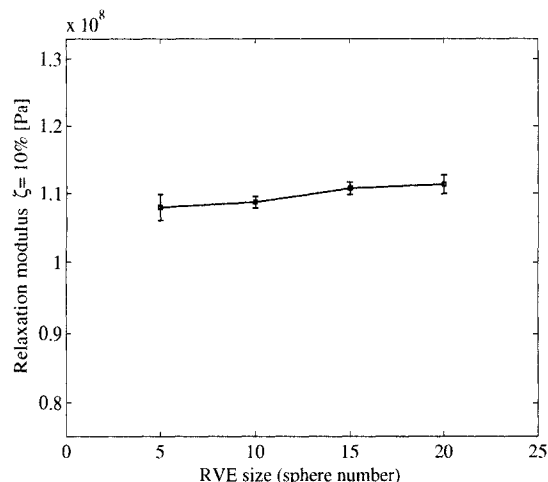


Fig. 3. Mean shear relaxation modulus for each RVE size (5, 10, 15 and 20 spheres) at $t = 0$. $\zeta = 10\%$. The error bars are a 95% confidence interval on the mean value. $\eta = 10$.

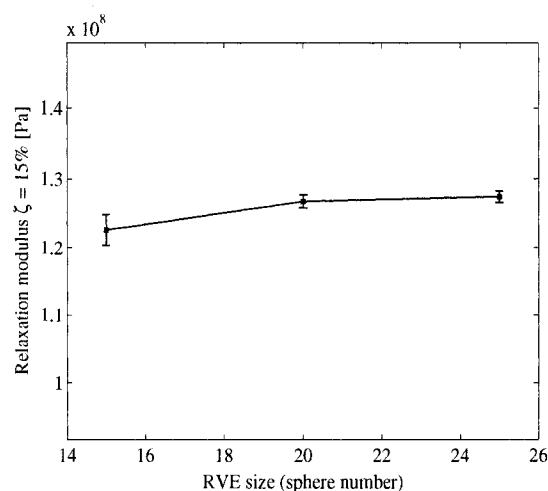


Fig. 4. Mean shear relaxation modulus for each RVE size (15, 20 and 25 spheres) at $t = 0$. $\zeta = 15\%$. The error bars are a 95% confidence interval on the mean value. $\eta = 10$.

for the intermediate RVE sizes studied. Considering the relatively narrow confidence intervals, it would seem that the biases in the mechanical properties have been cleared and that the RVEs have been reached. The simulations used for obtaining the relaxation spectra were those obtained for the largest RVE size. It should be noted that it was not possible to obtain larger RVEs than 50 spheres due to mesh limitations. So, for $\eta = 10$, for $\zeta = 10\%$ and RVE = 20, the instantaneous relaxation modulus was $11.1 \times 10^7 \pm 1.2\%$, for $\zeta = 15\%$ and RVE = 25, it was $12.76 \times 10^7 \pm 0.63\%$, for $\zeta = 20\%$ and RVE = 30, it was $14.51 \times 10^7 \pm 1.7\%$ and for $\zeta = 25\%$ and RVE = 50, it was $16.86 \times 10^7 \pm 1.35\%$; for $\eta = 100$, for $\zeta = 10\%$ and RVE = 20, it was $1.28 \times 10^7 \pm 2.9\%$ and for $\zeta = 20\%$ and RVE = 50, it was $2.075 \times 10^7 \pm 2.6\%$.

The isotropy was verified by applying E_{12} , E_{13} and E_{23} separately and observing that the average values for the stresses obtained in each simulation were approximately equal. The effect of the mesh size was studied by varying the number of finite elements in the FE model. Therefore the number of degree of freedom was changed from 665,700 to 5,180,850. It was observed that using from 3,000,000 to 5,180,850 degrees of freedom led

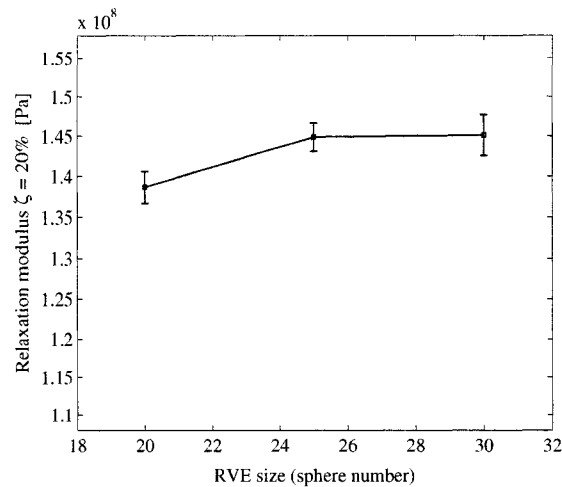


Fig. 5. Mean shear relaxation modulus for each RVE size (20, 25 and 30 spheres) at $t = 0$. $\zeta = 20\%$. The error bars are a 95% confidence interval on the mean value. $\eta = 10$.

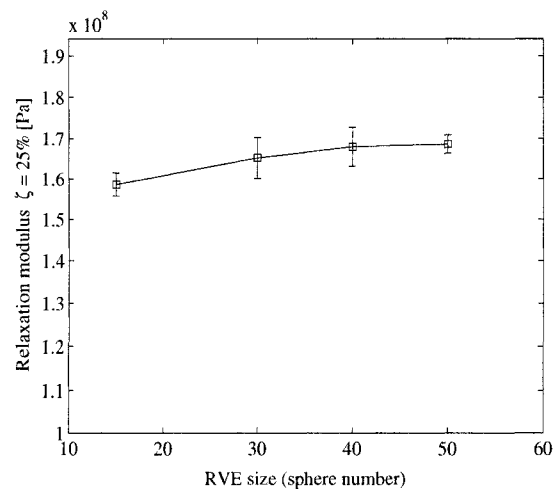


Fig. 6. Mean shear relaxation modulus for each RVE size (15, 30, 40 and 50 spheres) at $t = 0$. $\zeta = 25\%$. The error bars are a 95% confidence interval on the mean value. $\eta = 10$.

to variation in Σ_{12} of approximately 1.1%. Approximately 3,000,000 were then used for the computations. Fig. 9 shows the effect of the mesh size for $\zeta = 10\%$ with $\eta = 10$.

3. Relaxation spectra

For a linear viscoelastic and isotropic material, the shear relaxation modulus $\mu(t)$ can be expressed in a general way as (Boulet, 1991):

$$\mu(t) = \int_0^\infty \exp\left[-\frac{t}{s}\right] d\bar{\mu}(s) + \mu'' \quad (3.1)$$

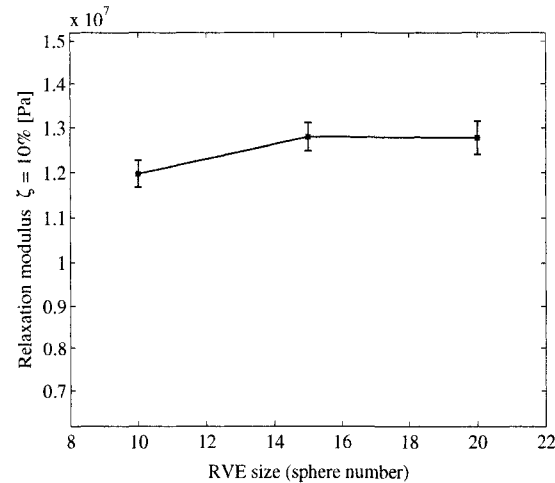


Fig. 7. Mean shear relaxation modulus for each RVE size (10, 15 and 20 spheres) at $t = 0$. $\zeta = 10\%$. The error bars are a 95% confidence interval on the mean value. $\eta = 100$.

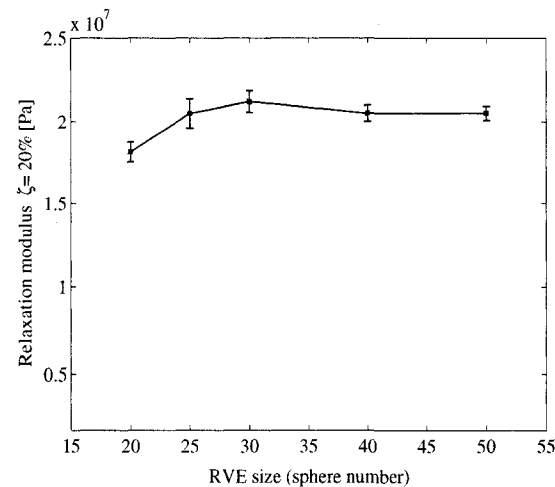


Fig. 8. Mean shear relaxation modulus for each RVE size (20, 25, 30, 40 and 50 spheres) at $t = 0$. $\zeta = 20\%$. The error bars are a 95% confidence interval on the mean value. $\eta = 100$.

where $d\bar{\mu}(s)$ is a positive measure in $\mathbb{R}_+^* \setminus]0, 1[$ and μ^0 represents the elastic response of the material ($\mu^0 > 0$). These restrictions are imposed by thermodynamics. $d\bar{\mu}(s)$ is commonly called relaxation spectrum.

The relaxation spectrum may be continuous on an interval of time (even infinite) and/or constituted of Dirac impulses. The objective of this section is to obtain the relaxation spectrum from the FE simulations. Many researchers worked on this subject considering experimental data. Some developed methods like the collocation method of Schapery (1962) which requires matrix inversions and a solution violating the principles of thermodynamics can be obtained (i.e. negative Dirac impulses). Other methods (Emri and Tschoegl, 1993) were developed for avoiding these kind of results. However in Emri and Tschoegl (1993) an iterative process is necessary to avoid the apparition of negative Dirac impulses.

Lévesque et al. (2007) have developed a numerical algorithm for inverting the Laplace–Carson transforms encountered in the homogenization of linear viscoelastic heterogeneous materials. One of the features of the algorithm is that it leads to linear viscoelastic materials that meet the restrictions imposed by thermodynamics.

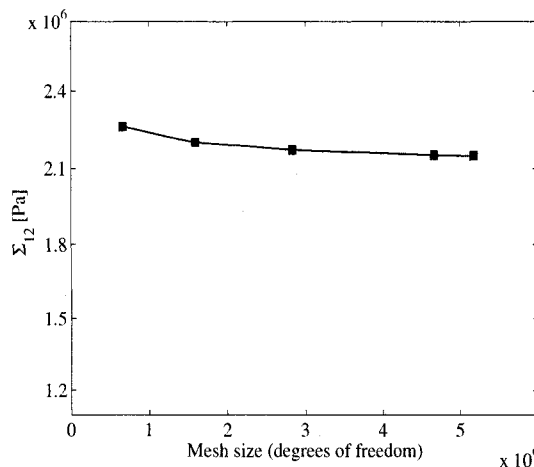


Fig. 9. Effect of the mesh size on the overall stress Σ_{12} for $\zeta = 10\%$ and $\eta = 10$.

The procedure used in this study for extracting the relaxation spectrum from the FE simulations is very similar to that algorithm. The procedure attempts finding a relaxation spectrum which is composed of Dirac impulses and a continuous section while meeting the thermodynamics restrictions.

Relaxation spectra obtained from the analytical homogenization models are described at Section 3.1. The procedure used for obtaining the relaxation spectrum from the FE simulations is developed at Section 3.2 and tested in a case where the analytical solution is known at Section 3.3.

3.1. Relaxation spectra obtained from analytical methods

Relaxation spectra obtained from analytical homogenization techniques were generated. The homogenization models compared are: MT, SC and TOA. The viscoelastic correspondence principle was used for obtaining the overall viscoelastic effective properties. The MT model was used following the methodology of Wang and Weng (1992). For the SC model, the results of Beurthey and Zaoui (2000) and Brenner et al. (2002) were applied. Finally, for the TOA model, we applied the incompressible phases solution presented in Torquato (1998). For this model statistical parameters are needed. These parameters may be found in Torquato (1991) for a three-dimensional random distribution of totally impenetrable spheres as a function of the reinforcement volume fraction.

The MT scheme leads to a discrete spectrum constituted of two discrete lines. The relaxation spectrum obtained by the TOA model is constituted of three spectral lines. Finally, the SC scheme leads to relaxation spectrum constituted of a continuous and discrete parts. Fig. 10 shows the spectrum obtained by each method for $\zeta = 20\%$ and $\eta = 10$. It is interesting to note here that these homogenization models, for the exact same microstructure, lead to relaxation spectra of different natures. This is in fact the motivation of our study.

3.2. Relaxation spectra obtained from FE simulations

For a discrete spectrum, the shear relaxation modulus can be expressed as:

$$\mu(t) = \mu^{(0)} + \sum_{i=1}^{n_d} \mu_i \exp \left[-\frac{t}{s_i} \right] \quad (3.2)$$

where n_d is the number of discrete relaxation times, $\mu^{(0)}$ is the elastic response, μ_i is the spectral line intensity and s_i is the relaxation time of the corresponding spectral line i . In our procedure, the relaxation times are defined as

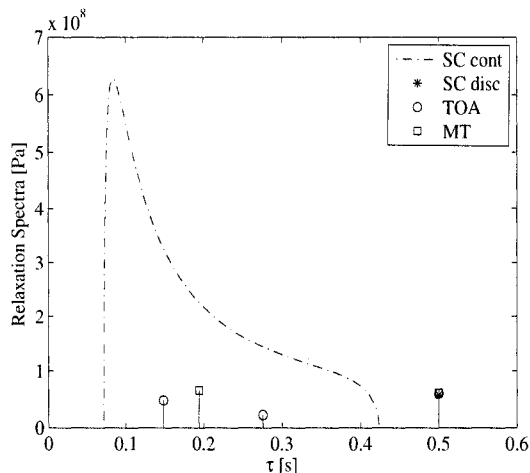


Fig. 10. Relaxation spectra obtained by applying analytical methods. $\zeta = 20\%$ and $\eta = 10$. MT: Mori-Tanaka, SC cont: Self-Consistent continuous contribution, SC disc: Self-Consistent discrete contribution, TOA: Torquato.

priori. The inverse of the relaxation times were distributed uniformly on a log scale according to Lévesque et al. (2007):

$$\frac{1}{\tau_i} = 10^{\log[(1+\theta)\theta_{\min}] + i \frac{\log[(1-\theta)\theta_{\max}] - \log[(1-\theta)\theta_{\min}]}{n_d - 1}} \quad \text{with } i = 0, 1, \dots, n_d - 1 \quad (3.3)$$

The parameter θ defines the range over which the $\frac{1}{\tau_i}$ are distributed between $\theta_{\min}$ and $\theta_{\max}$.

In order to meet the thermodynamics restrictions, μ_i and μ'' must be positive. μ'' can be calculated by measuring the stress and the strain for a large time when the material is completely relaxed. In our case μ'' is equal to zero since both phases are Maxwellian. However, for the sake of generality, μ'' is kept in the developments since the procedure could be applied to non-Maxwellian materials. A change of variable was introduced for obtaining a positive spectrum ($\mu_i \geq 0$). Therefore, μ_i is defined as $\mu_{app,i}^2$ and the following function has been introduced:

$$\mu_{app}^d(t) = \mu'' + \sum_{i=1}^{n_d} \mu_{app,i}^2 \exp\left[-\frac{t}{\tau_i}\right] \quad (3.4)$$

The $\mu_{app,i}$ can be determined by solving the following optimization problem:

$$\inf_{\mu_{app,i}} E_d^2 = \inf_{\mu_{app,i}} \sum_{i=1}^M [\mu_{real}(t_i) - \mu_{app}^d(t_i)]^2 \quad \text{with } \mu(0) = \mu'' + \sum_{i=1}^{n_d} \mu_{app,i}^2 \quad (3.5)$$

where M is the number of points calculated on the relaxation curve obtained from the FE simulations, $\mu_{real}(t_i)$ is the shear relaxation modulus obtained from the FE simulations and E_d^2 is the sum of the squared differences $\mu_{real}(t_i) - \mu_{app}^d(t_i)$. The constraint at Eq. (3.5) has been introduced for enforcing the real and the modeled elastic responses to be the same. This minimization problem was solved with Mathematica and the Random Search algorithm of the NMinimize function. This applies for all the minimization problems in this paper. In the case where a material is modeled with only a continuous spectrum, we introduced the following numerical representation:

$$H_i(\tau) = \left(\sum_{s=1}^{i-1} \Delta g(\tau_s) \right) + \left(\frac{\tau - \tau_{i-1}}{\tau_i - \tau_{i-1}} \Delta g(\tau_i) \right) \quad \text{for } \tau_{i-1} < \tau < \tau_i \quad (3.6)$$

Therefore, the shear relaxation modulus is approximated by:

$$\mu_{\text{app}}^c(t) = \mu^0 + \sum_{i=1}^{n_c-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right] H_i(\tau) d\tau \quad (3.7)$$

The continuous spectrum is therefore a piecewise linear interpolation between the values $H(\tau_{i-1})$ and $H(\tau_i)$. Fig. 11 illustrates this function. At Eq. (3.7), n_c represents the number of $H(\tau_i)$ used in the interpolation. For imposing that $H(\tau) \geq 0$ the following constraints were imposed:

$$CE_i = \sum_{s=1}^i \Delta g(\tau_s) \geq 0 \quad \text{for } i = 1 \text{ to } n_c \quad (3.8)$$

The relaxation spectrum was obtained by solving this optimization problem:

$$\inf_{\Delta g(\tau_s)} E_c^2 = \inf_{\Delta g(\tau_s)} \sum_{i=1}^m [\mu_{\text{real}}(t_i) - \mu_{\text{app}}^c(t_i)]^2 \quad (3.9)$$

where E_c^2 is the sum of the squared differences $\mu_{\text{real}}(t_i) - \mu_{\text{app}}^c(t_i)$.

Then, an approximate function composed of a discrete and a continuous spectra can be given by:

$$\mu_{\text{app}}^{c+d}(t) = \mu^0 + \sum_{i=1}^{n_d} \mu_{\text{app}}^d \exp\left[-\frac{t}{\tau_i}\right] + \sum_{j=1}^{n_c-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right] H_j(\tau) d\tau \quad (3.10)$$

The spectrum is obtained by solving the following optimization problem:

$$\inf_{\mu_{\text{app}}^d, \Delta g(\tau_s)} E_{c+d}^2 = \inf_{\mu_{\text{app}}^d, \Delta g(\tau_s)} \sum_{i=1}^m [\mu_{\text{real}}(t_i) - \mu_{\text{app}}^{c+d}(t_i)]^2 \quad \text{with } CE_i = \sum_{s=1}^i \Delta g(\tau_s) \geq 0 \quad (3.11)$$

where E_{c+d}^2 is the sum of the squared differences $\mu_{\text{real}}(t_i) - \mu_{\text{app}}^{c+d}(t_i)$.

It should be noted that the constraint $\mu_{\text{real}}(0) = \mu_{\text{app}}(0)$ was not enforced at optimization problems (3.9) and (3.11). It was found that the optimum results obtained without this constraint led to $\mu_{\text{real}}(0) \cong \mu_{\text{app}}(0)$ and therefore, this constraint is not required. In addition, relaxing this constraint decreases significantly the computational burden for solving problems (3.9) and (3.11).

The relaxation spectrum determination from the FE simulations is obtained in several steps. At first an optimum approximate discrete spectrum is obtained by solving problem (3.5). It has been observed that the SC predictions fit relatively well the FE results. For this reason, a continuous spectrum with a discrete line is optimized according to problem (3.11). Finally, the values of the τ_i for the discrete lines and the bounds of the continuous spectrum are combined and the problem (3.11) is solved anew. In all cases, the relaxation times (i.e. τ_i) and the bounds of the continuous spectrum are varied by trials and errors for obtaining a value of E_{c+d}^2 that appears to be minimum. As in most nonlinear optimization problems, this procedure does not guar-

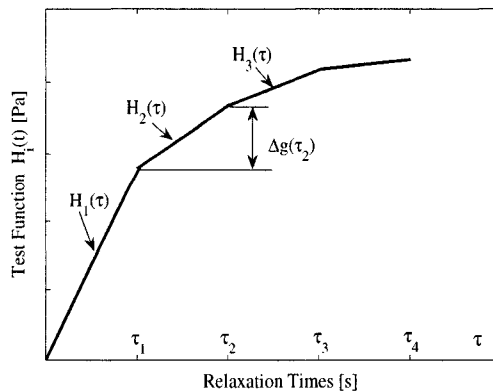


Fig. 11. Continuous test function used for approximating the relaxation spectra $\mu_{\text{app}}^c(t)$.

antee that an absolute minimum has been attained. It was found that it led to relaxation curves where $\mu_{app}^{c+d}(t)$ fit remarkably well the $\mu_{real}(t)$ (see Fig. 21). An example is developed in Section 3.3.

3.3. Procedure validation

For testing the procedure, the SC solution for an isotropic, incompressible and Maxwellian composite with $\zeta = 20\%$ and with the mechanical properties listed at Table 1 for $\eta = 10$ is used for generating the numerical values of the shear relaxation modulus that were used in the solution of the least square problem. In this case, the relaxation spectrum is already known and the goal is to recover it by using the procedure described above. Three steps were performed:

- (i) An optimum discrete spectrum was obtained by solving problem (3.5). The parameters θ_{min} and θ_{max} at Eq. (3.3) were first optimized, by trials and errors for minimizing E_d^2 . The parameter θ at Eq. (3.3) was arbitrarily set to zero. Then some relaxation times were deleted, others slightly varied for decreasing further the value of E_d^2 .
- (ii) For the cases studied here it was observed that the SC solution fitted very well the FE results. Therefore, a spectrum constituted of a continuous part and a discrete line was obtained by solving problem (3.11). However, if there is not a known function that approximates well the relaxation modulus it is necessary to solve the problem (3.9). For the sake of generality, we solved problem (3.9) for testing the procedure. A continuous spectrum was obtained by finding the bounds of τ that minimizes E_c^2 . The bounds of the continuous spectrum were obtained as described at the step 1 for the calculation of θ_{min} and θ_{max} . In addition, the distribution of τ_i used in the linear interpolation of the continuous spectrum was optimized.
- (iii) The optimum relaxation times obtained at the step 1 and the bounds of the continuous spectrum obtained at the step 2 were combined and the procedure of trials and errors applied on the relaxation times selection for the discrete part and the range of τ for the continuous part, was repeated until the value of E_{c+d}^2 appeared to be minimum (problem 3.11).

The optimal spectrum was obtained by observing the values of E^2 . A combined spectrum was obtained if $E_d^2 > E_{c+d}^2$ and $E_c^2 > E_{c+d}^2$. Even if good approximations of the relaxation modulus can be obtained regardless of the spectrum nature, the best approximation was obtained for a continuous and discrete spectra combination (μ_{app}^{c+d}). Fig. 12 shows the continuous and discrete spectra obtained: “ μ_{app}^d ” refers to the spectrum obtained

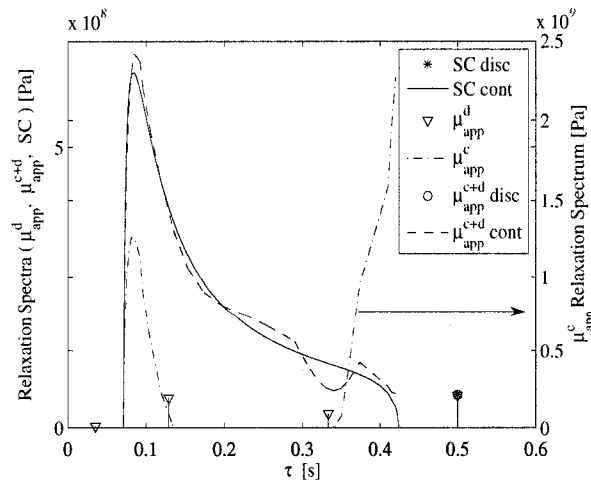


Fig. 12. Relaxation spectra obtained by the SC model and numerical approximations: μ_{app}^d (problem 3.5), μ_{app}^c (problem 3.9) and μ_{app}^{c+d} (problem 3.11). In all cases “disc” and “cont” refer to the discrete and continuous parts respectively. $\zeta = 20\%$ and $\eta = 10$. Note that the scale for μ_{app}^c is on the right.

by solving problem (3.5), “ μ_{app}^c ” refers to the spectrum obtained by solving problem (3.9), “ μ_{app}^{c+d} disc” and “ μ_{app}^{c+d} cont” refer respectively to the discrete and continuous spectra obtained by solving problem (3.11). The convergence of the continuous contribution for μ_{app}^{c+d} was difficult to obtain, even though the overall approximate spectrum shape is close the exact spectrum. This exemplifies that our procedure is capable of determining if the “real” spectrum is composed of a significant continuous part. It should be noted that the difference between the approximate and exact spectral lines intensities is approximately 0.6%. For analyzing the approximation degree of each solution the relative error between each approximation and the SC solution was calculated for each computation time. Fig. 13 shows the relative error defined as $|\frac{\mu_{real} - \mu_{app}}{\mu_{real}}|$ for each approximation. It is possible to observe that the discrete approximate solution (μ_{app}^d) fitted very well the values obtained by the SC method. Contrarily, the continuous approximate solution (μ_{app}^c) fitted the values of the SC scheme only at the first computation times. Finally, μ_{app}^{c+d} gave the best results showing that it fitted the SC values in all the time range calculated.

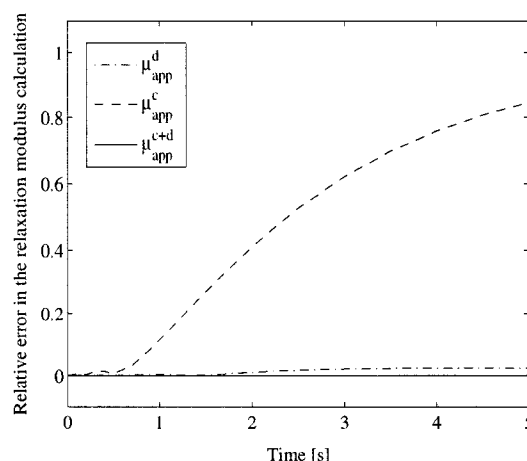


Fig. 13. Relative error in the relaxation modulus calculation with each approximate solution for each computation time. μ_{app}^d refers to problem (3.5), μ_{app}^c refers to problem (3.9) and μ_{app}^{c+d} refers to problem (3.11).

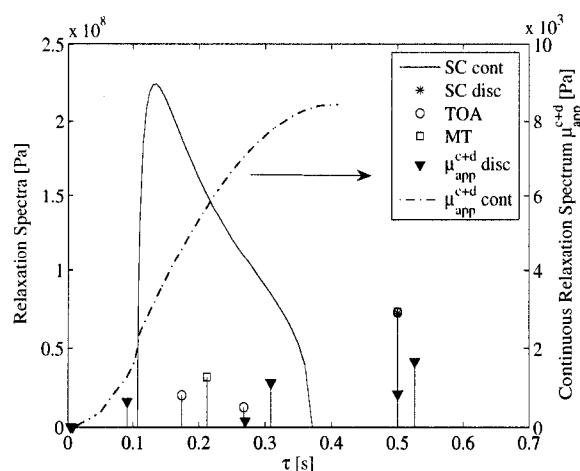


Fig. 14. Relaxation spectra obtained by different methods. $\zeta = 10\%$ and $\eta = 10$. Note that the scale for μ_{app}^{c+d} cont is on the right.

4. Results and discussions

Four volume fractions were studied with $\eta = 10$: 10%, 15%, 20% and 25% and two volume fractions with $\eta = 100$: 10% and 20%. For each volume fraction, the Σ VE size was established according to the procedure described at Section 2.2. The relaxation spectra of the composites simulated using the FE method were calculated with the procedure described at Section 3.2.

For the MT scheme, one of the spectral lines corresponds to the relaxation time of the soft phase (matrix) whose volume fraction is greater than the reinforcement volume fraction. Therefore, when the reinforcement volume fraction increases, the intensity on this spectral line decreases. The same behavior is observed for the SC and the TOA models. For the SC scheme the continuous part of the spectrum is of greater intensity than the spectral lines intensities and it increases with the reinforcement volume fraction.

Figs. 14–17 show the relaxation spectra obtained by different methods for linear viscoelastic composites with $\eta = 10$ for 10%, 15%, 20% and 25% volume fractions, respectively. Figs. 18 and 19 show the relaxation

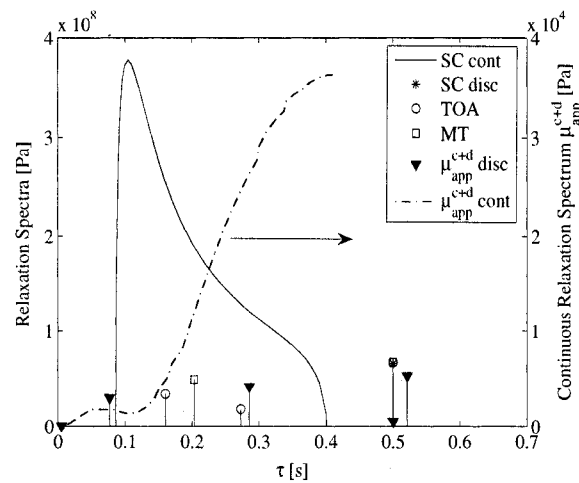


Fig. 15. Relaxation spectra obtained by different methods. $\zeta = 15\%$ and $\eta = 10$. Note that the scale for μ_{app}^{c+d} cont is on the right.

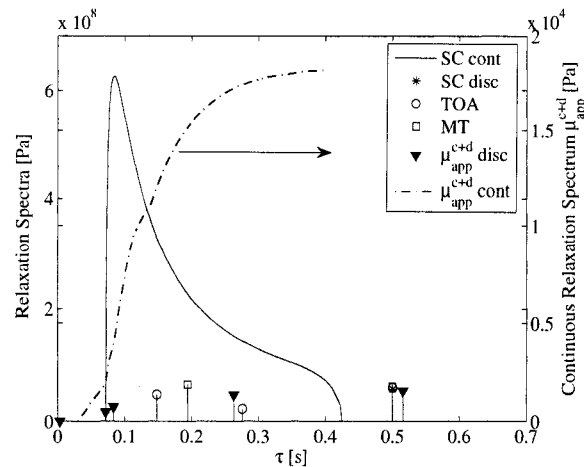


Fig. 16. Relaxation spectra obtained by different methods. $\zeta = 20\%$ and $\eta = 10$. Note that the scale for μ_{app}^{c+d} cont is on the right.

spectra obtained by different methods for linear viscoelastic composites with $\eta = 100$ for 10% and 20% volume fractions. In all cases, “SC cont” and “SC disc” refer to continuous and discrete parts of the spectra obtained with the Self-Consistent method; “TOA” refers to the spectra calculated with the Torquato technique; “MT” refers to the spectra calculated by the Mori-Tanaka model and finally “ l_{app}^{c+d} disc” and “ l_{app}^{c+d} cont” refer to discrete and continuous parts of l_{app}^{c+d} , respectively. The right scale is related to the continuous relaxation spectrum of the numerical solution l_{app}^{c+d} . Thus, it is possible to note the difference between the intensities of the discrete lines (left scale) and the continuous part of l_{app}^{c+d} , which makes the continuous part negligible.

In all cases, the spectrum associated to l_{app}^{c+d} shows one or two spectral lines close to the relaxation time associated to the matrix. The intensities of these spectral lines decrease as the volume fraction of reinforcements increases. This behavior has been observed with all the homogenization models tested in this study. The relaxation spectrum associated to l_{app}^{c+d} is composed of a discrete spectrum and a continuous spectrum of a much lower intensity. In addition, the bounds of this continuous part are very similar to those obtained with the SC model. It would therefore seem that the relaxation spectrum “nature” of the mate-

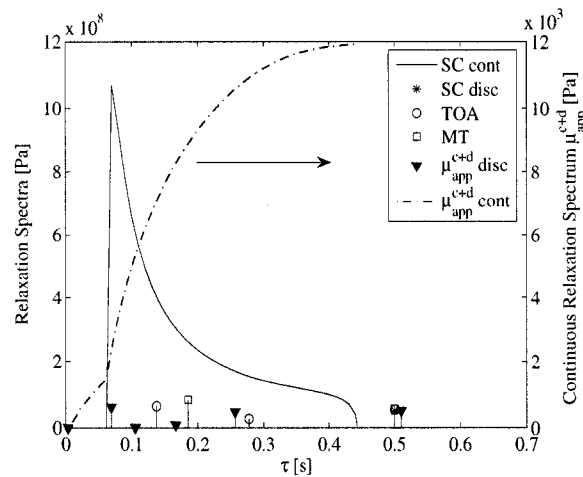


Fig. 17. Relaxation spectra obtained by different methods. $\zeta = 25\%$ and $\eta = 10$. Note that the scale for l_{app}^{c+d} cont is on the right.

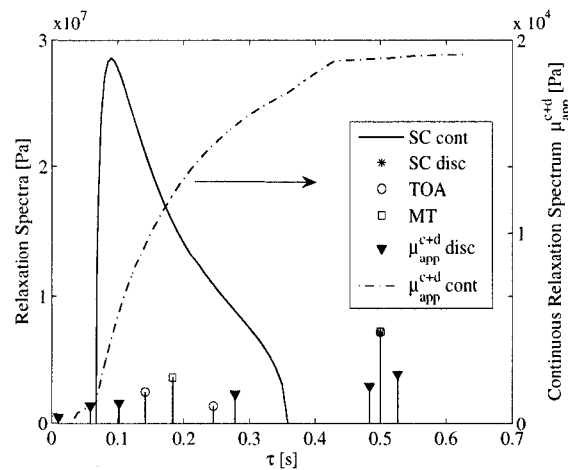


Fig. 18. Relaxation spectra obtained by different methods. $\zeta = 10\%$ and $\eta = 100$. Note that the scale for l_{app}^{c+d} cont is on the right.

rial studied is a mixture of the homogenization models characteristics: it is composed of a dominant discrete spectrum, as in TOA and MT but also of a continuous spectrum whose bounds are very similar to the SC scheme. However, this continuous contribution is much smaller and considered as “noise” in the solution and can therefore be neglected. Fig. 20 shows the relaxation modulus obtained by using only the discrete part of μ_{app}^{c+d} and the FE results for $\zeta = 10\%$ with a $\eta = 10$ and $\eta = 100$, at the first computation times. It can be seen that the discrete part fits very well the FE results. It is also clear from these results that even if the constituent phases are Maxwellian, the resulting composite material is not, as it is predicted in analytical homogenization models.

Fig. 21 shows the relaxation curve for $\zeta = 15\%$ with $\eta = 10$ obtained for each method and the FE data for the first computation times. Only this short time interval is shown since the difference is more remarkable than at longer times. This is due to the fact that both phases are Maxwellian and that for long times the relaxation

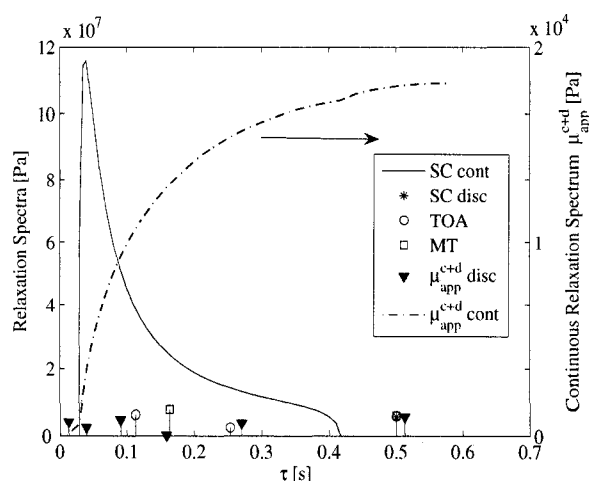


Fig. 19. Relaxation spectra obtained by different methods. $\zeta = 20\%$ and $\eta = 100$. Note that the scale for μ_{app}^{c+d} cont is on the right.

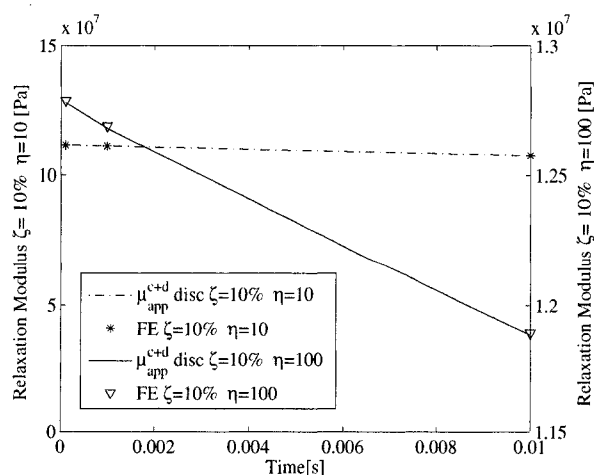


Fig. 20. Relaxation modulus calculated by the discrete part of μ_{app}^{c+d} and the FE results for $\zeta = 10\%$ with $\eta = 10$ and $\eta = 100$.

stress in both phases is equal to zero. Similar results are obtained for the others volume fractions. It can be observed that the MT model underestimates the relaxation modulus. Amongst the analytical homogenization methods the SC method gives the best approximation to the FE data. Fig. 22 shows the relaxation modulus calculated at the first computation time for each analytical method, μ_{app}^{c+d} and the FE data for linear viscoelastic composites with $\eta = 10$. The MT model shows the maximum error in the relaxation modulus calculation, and it increases as the reinforcement volume fraction increases. The maximum error increases from 5.97% for a volume fraction $\zeta = 10\%$ to 21% for a volume fraction $\zeta = 25\%$. Fig. 23 shows the relaxation modulus calculated at the first computation time for each analytical method, μ_{app}^{c+d} and the FE results for linear viscoelastic composites with $\eta = 100$. The MT model shows again the maximum error in the relaxation modulus calculation. However, now the error introduced by all the analytical methods is greater than linear viscoelastic composites with $\eta = 10$. Therefore, the maximum error introduced by the MT model with $\eta = 100$ increases from 13.9% for $\zeta = 10\%$ to 29% for $\zeta = 20\%$.

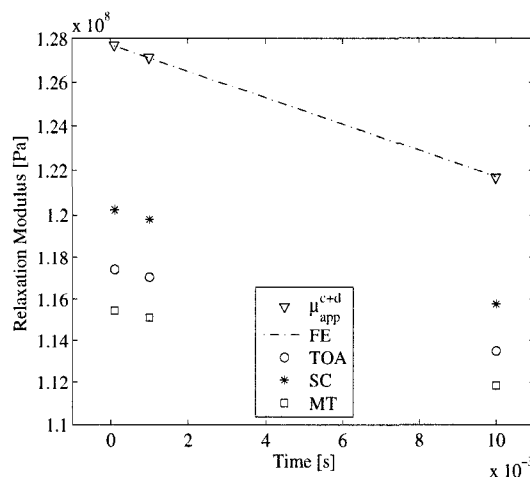


Fig. 21. Comparison of the homogenization models and the FE simulations for $\zeta = 15\%$ at first computation times. $\eta = 10$

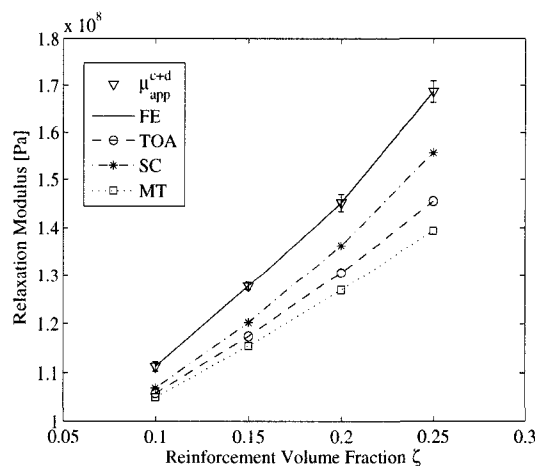


Fig. 22. Relaxation modulus calculated at the first computation time using all methods. The error bars correspond to the relative error of the FE results taking a confidence interval of 95%. $\eta = 10$.

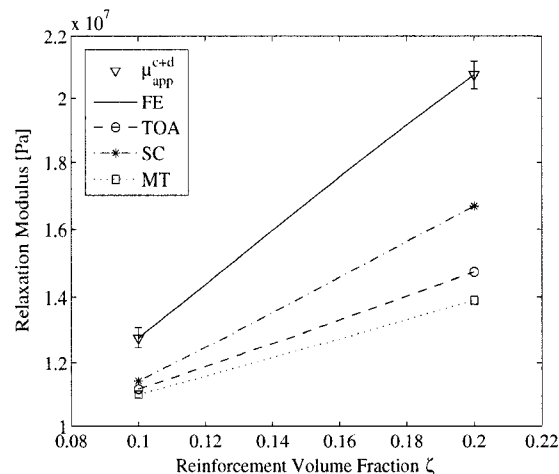


Fig. 23. Relaxation modulus calculated at the first computation time using all methods. The error bars correspond to the relative error of the FE results taking a confidence interval of 95%, $\eta = 100$.

5. Conclusions

In conclusion, the contributions of this study are:

- (i) A novel procedure for the shear relaxation spectrum determination for isotropic linear viscoelastic materials that allows for a continuous as well as a discrete parts, while meeting the thermodynamics restrictions imposed on linear viscoelastic materials, to be obtained.
- (ii) The comparison between FE simulations of 3D linear viscoelastic composite materials Σ VE and analytical homogenization models.

It is shown that the relaxation spectrum of the material studied here is composed of a dominant discrete spectrum and also from a negligible continuous spectrum. Even if the constituent phases are Maxwellian, this study confirms that, as predicted by analytical homogenization models, the effective relaxation spectrum is not of Maxwellian nature.

In this study, we only studied a composite material reinforced with randomly distributed Maxwellian reinforcements. Future work will deal with cylindrical (i.e., fibers) reinforcements as well as other viscoelastic constitutive theories in order to confirm the same trends as those observed in this study.

References

- Beurthey, S., Zaoui, A., 2000. Structural morphology and relaxation spectra of viscoelastic heterogeneous media. *Journal of Mechanics A/Solids* 19, 1–16.
- Bouleau, N., 1991. Interprétation probabiliste de la viscoélasticité linéaire. *Mechanics Research Communications* 19, 16–20.
- Brenner, S., Masson, S., Castelnau, O., Zaoui, A., 2002. A “quasi-elastic” affine formulation for the homogenised behaviour of nonlinear viscoelastic polycrystals and composites. *European Journal of Mechanics A/Solids* 21, 943–960.
- Brinson, L.C., Knauss, W.G., 1992. Finite element analysis of multiphase viscoelastic solids. *Journal of Applied Mechanics* 59 (4), 730–737.
- Emri, I., Tschoegl, N.W., 1993. Generating line spectra from experimental responses. Part I: relaxation modulus and creep compliance. *Rheologica Acta* 32, 311–321.
- Gusev, A., 1997. Representative volume element size for elastic composites: a numerical study. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 45 (9), 1449–1459.
- Hashin, Z., 1965. Viscoelastic behavior of heterogeneous media. *Journal of Applied Mechanics* 32 (E), 630–636.
- Hazanov, S., Huet, C., 1994. Order relationships for boundary conditions effect in heterogeneous bodies smaller than the representative volume. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 42, 1995–2011.

- Huet, C., 1990. Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 38, 813–841.
- Kanit, T., Forest, S., Galliet, I., Mounoury, V., Jeulin, D., 2003. Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach. *International Journal of Solids and Structures* 40, 3647–3679.
- Laws, N., McLaughlin, R., 1978. Self-consistent estimates for the viscoelastic creep compliances of composite materials. *Proceedings of the Royal Society of London A* 359, 251–273.
- Lévesque, M., Derrien, K., Mishnaevsky Jr., L., Baptiste, D., Gilchrist, M.D., 2004. A micromechanical model for nonlinear viscoelastic particle reinforced polymeric composite materials—undamaged state. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 35 (7), 905–913.
- Lévesque, M., Gilchrist, M.D., Bouleau, N., Derrien, K., Baptiste, D., 2007. Numerical inversion of the Laplace–Carson transform applied to homogenization of randomly reinforced linear viscoelastic media. *Computational Mechanics* 40 (4), 771–789.
- Michel, J.C., Moulinec, H., Suquet, P., 1999. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 172, 109–143.
- Mishnaevsky Jr., L., 2004. Three-dimensional numerical testing of microstructures of particle reinforced composites. *Acta Materialia* 52 (14), 4177–4188.
- Nguyen Viet, Hung, Pastor, Joseph, Muller, Didier, 1995. Method for predicting linear viscoelastic mechanical behavior of composites, a comparison with other methods and experimental validation. *European Journal of Mechanics, A/Solids* 14 (6), 939–960.
- Schapery, R.A. 1962. Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analysis. *Proceedings of the 4th US National Congress on Applied Mechanics*, 2, 1075–1085.
- Segurado, J., LLorca, J., 2002. A numerical approximation to the elastic properties of sphere-reinforced composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 50, 2107–2121.
- Torquato, S., 1991. Random heterogeneous media: microstructure and improved bounds on effective properties. *Applied Mechanics Reviews* 44, 37–76.
- Torquato, S., 1998. Effective stiffness tensor of composite media: II. Applications to isotropic dispersions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 46, 1411–1440.
- Wang, Y.M., Weng, G.J., 1992. Influence of inclusion shape on the overall viscoelastic behavior of composites. *Journal of Applied Mechanics* 59, 510–518.
- Xia, Z., Zhou, C., Yong, Q., Wang, X., 2006. On selection of repeated unit cell model and application of unified periodic boundary conditions in micro-mechanical analysis of composites. *International Journal of Solids and Structures* 43, 266–278.

ANNEXE II

RÈGLES D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE

Dans plusieurs cas, il n'est pas pratique d'intégrer certaines expressions sous une forme analytique et donc l'intégration numérique est utilisée. De plus, plusieurs chercheurs ont trouvé que l'utilisation de l'intégration numérique simplifie la programmation des matrices de rigidité, vecteurs de forces nodales, etc. des éléments finis. En général, dans l'intégration numérique, les coordonnées sont supposées dans leur système naturel, donc l'intervalle de variation de chaque coordonnée est entre -1 et +1. Dans le cas particulier du triangle unitaire l'intervalle de variation de chaque coordonnée est entre 0 et +1.

Par exemple, pour une intégration en deux dimensions, l'intégration numérique devient :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r, s) dr ds = \sum_{i=1}^m f(r_i, s_i) w_i \quad (\text{II.1})$$

où $m = n^2$, n étant les points d'intégration dans chaque dimension, r_i et s_i dénotent les coordonnées naturelles du point d'intégration i et w_i est le poids du point d'intégration i .

Le tableau suivant montre la règle d'intégration de Gauss pour un triangle unitaire en utilisant 3 et 7 points.

Règles de Quadrature de Gauss sur des triangles unitaires $\int_0^1 \int_0^{1-r} f(r, s) dr ds = \sum_{i=1}^m f(r_i, s_i) w_i$			
No points m	Coordonnée r_i	Coordonnée s_i	Poids w_i
3	0.1666666666666666	0.1666666666666666	0.1666666666666666
	0.1666666666666666	0.6666666666666666	0.1666666666666666
	0.6666666666666666	0.1666666666666666	0.1666666666666666
7	0.101286507323456	0.101286507323456	0.062969590272414
	0.797426985353087	0.101286507323456	0.062969590272414
	0.101286507323456	0.797426985353087	0.062969590272414
	0.470142064105115	0.059715871789770	0.066197076394253
	0.470142064105115	0.470142064105115	0.066197076394253
	0.059715871789770	0.470142064105115	0.066197076394253
	0.3333333333333333	0.3333333333333333	0.1125000000000000

Tableau II.1 Règles d'intégration de 3 et 7 points pour des triangles unitaires.

ANNEXE III

TRANSFORMATION DE L'ÉLÉMENT DIFFÉRENTIELLE DE SURFACE

D'abord il faut définir les vecteurs de base du système de coordonnées naturelles. Ceux-ci sont définis par :

$$\begin{aligned}\vec{dr} &= \left(x_r \vec{i} + y_r \vec{j} + z_r \vec{k} \right) dr \\ \vec{ds} &= \left(x_s \vec{i} + y_s \vec{j} + z_s \vec{k} \right) ds\end{aligned}\tag{III.1}$$

où x , y et z sont les coordonnées cartésiennes globales ; r et s sont les coordonnées naturelles ; $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont les vecteurs de base du système cartésien global et a_t symbolise $\frac{\partial a}{\partial t}$.

L'élément différentiel est calculé comme suit :

$$\begin{aligned}dS &= \left| \vec{dr} \times \vec{ds} \right| = \left| (y_r z_s - y_s z_r) \vec{i} + (z_r x_s - x_r z_s) \vec{j} + (x_r y_s - y_r x_s) \vec{k} \right| dr ds \\ dS &= \left[(y_r z_s - y_s z_r)^2 + (z_r x_s - x_r z_s)^2 + (x_r y_s - y_r x_s)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dr ds\end{aligned}\tag{III.2}$$

où le terme entre crochets définit le jacobien de la transformation.