

**Titre:** Modèle d'affectation pluraliste de passagers dans un réseau de transport en commun  
Title: [Modèle d'affectation pluraliste de passagers dans un réseau de transport en commun](#)

**Auteur:** Arnaud Le Gallou  
Author: [Arnaud Le Gallou](#)

**Date:** 2009

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Le Gallou, A. (2009). Modèle d'affectation pluraliste de passagers dans un réseau de transport en commun [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal].  
Citation: [PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/8305/>](https://publications.polymtl.ca/8305/)

## Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8305/>  
PolyPublie URL: <https://publications.polymtl.ca/8305/>

**Directeurs de recherche:** François Soumis  
Advisors: [François Soumis](#)

**Programme:** Mathématiques appliquées  
Program: [Mathématiques appliquées](#)

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÈLE D'AFFECTATION PLURALISTE DE PASSAGERS DANS UN  
RÉSEAU DE TRANSPORT EN COMMUN

ARNAUD LE GALLOU

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)

AVRIL 2009



Library and  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*

ISBN: 978-0-494-49438-7

*Our file* *Notre référence*

ISBN: 978-0-494-49438-7

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

MODÈLE D'AFFECTATION PLURALISTE DE PASSAGERS DANS UN  
RÉSEAU DE TRANSPORT EN COMMUN

présenté par : LE GALLOU Arnaud

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées  
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. TRÉPANIER Martin, ing., Ph.D., président

M. SOUMIS François, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. FLEURENT Charles, Ph.D., membre

*Aux usagers quotidiens des transports en commun.*

## REMERCIEMENTS

Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance à mon directeur de recherche, François Soumis, pour tout ce qu'il m'a appris lors de cette maîtrise recherche, mais aussi pour sa gentillesse et sa bienveillance.

Je remercie Benoit Rochefort, analyste au GERAD, pour sa disponibilité et son travail, ainsi que Pierre Trudeau, vice-président de Giro, pour le soutien qu'il m'a apporté tout au long de mes recherches. Je remercie aussi Jonathan Dumas, pour ses relectures attentives et constructives de mes travaux ainsi que Quentin Lequy, étudiant au doctorat, pour sa patience et ses conseils.

Je pense, enfin, à tous les membres du GERAD et à l'ensemble de son personnel qui m'ont permis de réaliser mon projet de recherche dans les meilleures conditions.

## RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous proposons des modèles et des algorithmes pour résoudre le problème d'affectation de passagers dans un réseau de transport en commun. Ce problème consiste à prévoir, le plus fidèlement possible, le nombre de passagers sur chaque portion d'un réseau de transport en commun, à partir de la demande et des caractéristiques du réseau. Les modèles que nous présentons visent à résoudre aussi bien la version fréquentielle que spatio-temporelle de ce problème ; l'accent est toutefois mis sur la seconde.

Afin de résoudre le problème d'affectation de passagers, nous étudions deux modèles classiques de répartition de flot dans un graphe orienté. Le premier se base sur l'affectation systématique de l'ensemble du flot sur le plus court chemin. Il représente mal le comportement des passagers dont les goûts sont éclectiques. Le second est une répartition des passagers en proportion de la qualité de chaque chemin. Il se base sur la minimisation d'un objectif quadratique, il correspond, entre autres, à la répartition du courant dans un circuit électrique. Il représente mal le comportement des passagers, car il engendre du flot même sur de très mauvais chemins.

Afin de prendre en compte, d'une part, l'éclectisme des passagers et, d'autre part, leur attrait naturel pour le plus court chemin, nous construisons un modèle mixte, combinaison linéaire des deux modèles précédents. Ce modèle ne se montre cohérent que pour des graphes série-parallèle, et après une légère modification. Cette restriction permet toutefois de développer un algorithme récursif efficace pour déterminer une solution du modèle mixte.

Le problème d'affectation de passagers peut se modéliser par un problème de répar-

tition de flot dans un graphe orienté. Ce graphe dépend du réseau de transport en commun et de la demande des usagers. De plus, il existe un graphe pour le problème fréquentiel et un autre pour le problème spatio-temporel.

Pour résoudre le problème d'affectation de passagers, il suffit donc d'appliquer le modèle mixte au graphe représentant le réseau. La prise en compte de la congestion se fait alors grâce à un procédé itératif. À chaque itération, le coût des arcs est mis à jour en fonction du flot qui les traverse, puis une nouvelle affectation est calculée.

L'ensemble de cette méthode a été implémenté. La construction du graphe a été réalisée en **perl**, tandis que la procédure d'affectation du flot a été codée en **C**. Cette implémentation a été testée sur l'ensemble des lignes de transport en commun du centre de Montréal de 02:00 à 23:00, soit 25% des voyages d'une journée. Les demandes utilisées pour ce test sont une estimation des demandes réelles. Une solution pluraliste est trouvée en six minutes.

## ABSTRACT

In this master's thesis, we propose models and algorithms to solve the transit assignment problem. It consists of forecasting the passengers number for each part of a transit network. We could use our model to solve frequency version and spatio-temporal one either. Yet, we especially insist on the second version.

We consider two standard flow repartition models to solve the transit assignment problem. The first one is based on the shortest paths, the whole flow is affected on the best path. It does not take into account the passengers eclectic liking. In the second one, passengers are affected in function of the quality of each path. It is based on a quadratic objective minimisation. It is similar to the power repartition in electrical circuit. It is not a good representation of the passenger behaviour because it puts flow even on bad path.

To consider both eclecticism and good path attractivity, we build a mixed model as a linear combination of the precedent models. This model is only consistent for serial-parallel graph. In spite of this restriction, we develop a recursive and efficient algorithm to solve the mixed model.

We represent the transit assignment problem by a flow repartition problem in an oriented graph. This graph depends on transit network and passengers demands. Furthermore, there is a graph for the frequency version and another one for the spatio-temporal version.

To solve the transit assignment problem, we plug the mixed model on the network graph. Moreover, our model loops to solve the congestion. Inside each loop, arcs cost

are update and a new affectation is computed.

We implement this method. First, the graph is builded by a `perl` script, then a `C` program compute the flow affectation. We test this implementation on the downtown lines of the Montreal transit network between 02:00 and 23:00. For this test, we use an estimation of the real demand. A pluralist solution is found in less than six minutes.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iv
REMERCIEMENTS . . . . .	v
RÉSUMÉ . . . . .	vi
ABSTRACT . . . . .	viii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	x
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xiii
LISTE DES FIGURES . . . . .	xiv
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE 1 REVUE DE LITTÉRATURE . . . . .	3
1.1 Méthodes de résolution pour la version fréquentielle : mémoire de maîtrise de Y. Bzioui . . . . .	3
1.2 Une approche pour la version temporelle : C.O Tong et S.C. Wong . . . . .	5
1.3 Problème d'affectation pour le trafic routier : H. Bar-Gera . . . . .	5
1.4 Une méthode originale pour le calcul des plus courts chemins : M. Friedrich et S. Wekeck . . . . .	7
1.5 Synthèse . . . . .	8
CHAPITRE 2 MODÈLES MATHÉMATIQUES . . . . .	9
2.1 Quelques définitions . . . . .	9
2.1.1 Itinéraires . . . . .	10
2.1.2 Modèle d'affectation de flot . . . . .	10
2.1.3 Graphe série-parallèle . . . . .	12

2.1.4	Niveau d'un arc . . . . .	14
2.1.5	Flot par niveau . . . . .	16
2.2	Propriétés intéressantes . . . . .	18
2.3	Présentation et étude des modèles . . . . .	20
2.3.1	Modèle des plus courts chemins . . . . .	21
2.3.2	Répartition par proportion . . . . .	22
2.3.3	Modèle mixte . . . . .	24
2.3.4	Modèle mixte corrigé . . . . .	30
2.4	Étude détaillée du modèle mixte corrigé . . . . .	34
2.5	Cas des graphes non série-parallèle . . . . .	37
2.5.1	Graphe série-parallèle par origine-destination . . . . .	37
2.5.2	Graphe quelconque . . . . .	38
CHAPITRE 3 ALGORITHME D'AFFECTATION PLURALISTE . . . . .		39
3.1	Procédures de regroupement et de répartition . . . . .	39
3.2	Ensemble d'itinéraires parallèles (EIP) . . . . .	42
3.3	Présentation de l'algorithme . . . . .	44
3.3.1	Première phase : plus courts chemins et détection des EIP . .	44
3.3.2	Seconde phase : équilibrage des EIP . . . . .	46
3.3.3	Calcul de la profondeur d'un EIP . . . . .	49
CHAPITRE 4 PROBLÈME D'AFFECTATION DE PASSAGERS . . . . .		51
4.1	Présentations et définition . . . . .	51
4.1.1	Présentation du problème . . . . .	51
4.1.2	Réseau de transport en commun . . . . .	53
4.1.3	Modèle fréquentiel et spatio-temporel . . . . .	54
4.2	Modèle fréquentiel . . . . .	55
4.2.1	Présentation . . . . .	55
4.2.2	Lignes communes . . . . .	56

4.2.3	Graphe fréquentiel . . . . .	57
4.3	Modèle spatio-temporel . . . . .	59
4.3.1	Présentation . . . . .	59
4.3.2	Graphe spatio-temporel . . . . .	60
4.4	Modèle de comportement des usagers . . . . .	62
4.4.1	Modélisation du comportement . . . . .	63
4.4.2	Modélisation de la congestion . . . . .	63
4.5	Méthode de résolution . . . . .	64
 CHAPITRE 5     IMPLÉMENTATION ET RÉSULTATS . . . . .		66
5.1	Implémentation . . . . .	66
5.1.1	Construction du graphe . . . . .	66
5.1.2	Affectation de passagers . . . . .	67
5.1.3	Méthodes de suppression des huit . . . . .	67
5.1.4	Accélération du calcul des plus courts chemins . . . . .	68
5.1.5	Accélération de la convergence . . . . .	69
5.2	Résultats . . . . .	70
5.2.1	Étude d'exemples . . . . .	70
5.2.1.1	Effet du paramètre $\lambda$ . . . . .	71
5.2.1.2	Effet des coefficients de confort . . . . .	73
5.2.1.3	Effet de la congestion . . . . .	74
5.2.2	Étude des performances . . . . .	74
 CONCLUSION . . . . .		78
 RÉFÉRENCES . . . . .		80

**LISTE DES TABLEAUX**

Tableau 1.1	Synthèse des différents modèles. . . . .	8
Tableau 2.1	Écart de coûts $c_2 - c_1$ , donnant lieu aux répartitions indiquées, pour trois valeurs de $\lambda$ . L'arc 1 étant de coût 60. . . . .	36
Tableau 5.1	Répartition des passagers pour différentes valeurs de $\lambda$ . . . . .	71
Tableau 5.2	Répartition des passagers pour différentes valeurs des coeffi- cient de confort. . . . .	73
Tableau 5.3	Répartition des passagers pour différents nombres de passagers.	74

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Exemple de route et de PAS . . . . .	6
Figure 2.1	Exemples d'itinéraires . . . . .	10
Figure 2.2	Procédure de regroupement . . . . .	13
Figure 2.3	Exemple de suite regroupante . . . . .	14
Figure 2.4	Flot par niveau . . . . .	17
Figure 2.5	Itinéraires parallèles simples, disjoints. . . . .	25
Figure 2.6	Limite du modèle mixte . . . . .	29
Figure 2.7	Valeur de la proportion $\frac{x_2}{D}$ de la demande $D$ assignée à l'arc 2, en fonction de $\frac{c_2}{c_1+c_2}$ . . . . .	36
Figure 2.8	Faiblesse du modèle mixte corrigé : arc de coût nul. . . . .	37
Figure 2.9	Graphe série-parallèle par origine-destination . . . . .	38
Figure 3.1	Procédures de regroupement et de répartition $P_s$ , $P_p$ et $P_r$ . . .	42
Figure 3.2	Exemple de résultat après la phase I. . . . .	46
Figure 3.3	Exemple d'exécution de la phase II. . . . .	50
Figure 4.1	Exemple de réseau de transport en commun . . . . .	54
Figure 4.2	Exemple de graphe fréquentiel . . . . .	58
Figure 4.3	Exemple de graphe spatio-temporel . . . . .	60
Figure 4.4	Regroupement des arrêts par bloc . . . . .	62
Figure 4.5	Structure en « huit » . . . . .	65
Figure 5.1	Itinéraires de Plamondon à Rosemont. . . . .	72
Figure 5.2	Réseau concerné par l'étude de performance. . . . .	76

## INTRODUCTION

Avec la prise de conscience actuelle des problèmes environnementaux, la montée du prix des hydrocarbures et la croissance des grandes métropoles, l'utilisation des transports en commun augmentera dans les prochaines années. Dans ce contexte, la planification du réseau s'avère primordiale. Elle consiste à déterminer les routes de chaque ligne, ainsi que les horaires des véhicules qui les parcourent. Son objectif est de répondre, le mieux possible, à la demande des usagers, sans toutefois excéder la capacité opérationnelle de la compagnie. Actuellement, ce travail s'effectue en grande partie à la main car peu d'outils d'aide à la décision ont été développés dans ce secteur.

L'objectif de ce mémoire, qui retrace une année de recherche au GERAD, est de présenter des modèles et des algorithmes permettant de prévoir le comportement des usagers face à une planification. Il devient alors possible d'évaluer, et de comparer, plusieurs scénarios, et ainsi d'aider le planificateur à choisir le meilleur.

Pour cela, nous sommes amenés à résoudre un problème d'affectation de passagers. Ce dernier consiste à prévoir, le plus fidèlement possible, le nombre de passagers sur chaque portion d'un réseau de transport en commun, à partir de la demande et des caractéristiques du réseau. Un tel réseau se compose d'arrêts et de lignes, chaque ligne desservant une succession d'arrêts. Ce problème se décline en deux versions : fréquentielle et spatio-temporelle. Dans la version fréquentielle, nous ne considérons que les fréquences de passage sur les lignes, alors que, dans la version spatio-temporelle, nous travaillons avec les horaires exacts de chaque véhicule circulant sur une ligne.

Ce mémoire peut être lu de différentes manières, selon les intérêts du lecteur. Si ce dernier est un mathématicien, les chapitres se déroulent dans leur ordre naturel : présentation de la littérature, d'un modèle mathématique et d'un algorithme de

résolution, puis application de ces résultats au problème d'affectation des passagers. En revanche, si l'intérêt du lecteur se porte sur l'aspect opérationnel du problème, la lecture commence par le chapitre 4, concernant l'affectation des passagers, les autres chapitres se succédant alors pour proposer les modèles et les algorithmes qui permettent de résoudre ce problème.

## CHAPITRE 1

### REVUE DE LITTÉRATURE

Dans ce chapitre, nous présentons une revue de littérature succincte, dont l'objectif n'est pas d'être exhaustif. Nous y présentons simplement les ouvrages qui ont eu une influence sur les méthodes de résolution présentées dans les chapitres suivants.

Dans un premier temps, nous étudions le mémoire de maîtrise de Y. Bzioui, dont les travaux préfigurent nos recherches. Ensuite, nous étudions l'article de C.O Tong et S.C. Wong, dont nous montrons l'intérêt et les limites. Enfin, nous nous intéressons à l'article de H. Bar-Gera car nous réutiliserons dans la suite son concept de PAS.

#### 1.1 Méthodes de résolution pour la version fréquentielle : mémoire de maîtrise de Y. Bzioui

Les recherches et les travaux que nous avons effectués sur le problème d'affectation des passagers dans un réseau de transport en commun faisaient suite à la maîtrise recherche de Y. Bzioui. L'attention de ce dernier s'est portée sur la version fréquentielle du problème : une ligne y est caractérisée par la succession d'arrêts desservis, et par la fréquence de passage des véhicules. Les résultats qu'il a obtenus sont présentés dans son mémoire [1].

Dans ce mémoire, Y. Bzioui présente, dans un premier temps, une revue de littérature détaillée de ce problème. Les modèles de Chriqui et Robillard (1975, [2]), Spiess et Florian (1989, [3]), Carraresi, Malucelli et Pallottino (1995, [4]), Tong et Wong (1999, [5]), ainsi que Fan et Machemehl (2004, [6]) y sont présentés et commentés. Nous

reviendrons sur l'article de C.O Tong et S.C. Wong. Pour les autres, le lecteur est invité à se rapporter au mémoire de Y. Bzioui.

Y. Bzioui présente ensuite en détail la méthode de Fernandez et de Céa (1989, [7]). Cette méthode permet de résoudre le modèle de Chriqui et Robillard de manière rapide et efficace ; elle détermine une solution à la version fréquentielle du problème d'affectation de passagers. Dans cette méthode, un coût généralisé est associé à chaque portion d'itinéraire. Ce coût généralisé dépend de l'espérance du temps de parcours et du facteur de confort de la portion considérée. Dans ce modèle, les lignes communes, c'est-à-dire les lignes desservant une même succession d'arrêts, sont l'objet d'une attention particulière, puisqu'elles font diminuer l'espérance d'attente. La résolution du problème s'exécute en trois phases. La première phase traite le cas des lignes communes, la seconde affecte le flot entre les différents noeuds de correspondance, la troisième affecte le flot sur les lignes.

Selon Y. Bzioui, cette méthode ne représente pas convenablement le comportement des usagers ; en effet, elle ne prend en compte ni la congestion des lignes, ni le comportement pluraliste des passagers. Il expose alors son propre modèle, dérivé de celui de Fernandez et de Céa, pour pouvoir traiter ces effets. Pour traiter la congestion, il propose un procédé itératif, qui consiste à mettre à jour le facteur de confort, et donc le coût généralisé des itinéraires, après chaque affectation ; ce procédé sera repris dans notre étude. Le choix pluraliste des passagers est traité grâce à un modèle mixte, inspiré à la fois d'un modèle de répartition par proportion et de la répartition sur les plus courts chemins. Ce modèle est sans-mémoire (une notion que nous définissons dans la section 2.2), ce qui rend sa résolution particulièrement rapide. Cependant il n'est pas nécessairement indépendant des arcs inutilisés (une autre notion que nous définissons dans la section 2.2), une propriété désirable pour justifier la cohérence d'un modèle. Nous présentons dans le chapitre 2 un modèle mixte corrigé qui est à la fois sans-mémoire et indépendant des arcs inutilisés.

## 1.2 Une approche pour la version temporelle : C.O Tong et S.C. Wong

L'article de C.O Tong et S.C. Wong [5] est particulièrement intéressant, car le modèle qu'il propose est dynamique et prend en compte le comportement pluraliste des usagers. Leur idée consiste à choisir aléatoirement les goûts des passagers, représentés par un ensemble de coefficients d'attractions pénalisant plus ou moins l'attente, les correspondances, le temps de route, etc. Chaque usager est alors affecté sur le plus court chemin, selon ses paramètres, de son origine à sa destination. Le calcul des plus courts chemins est de plus accéléré par un algorithme permettant de réduire la taille du réseau.

Même si ce modèle se justifie facilement et propose un comportement pluraliste, il n'est pas utilisable sur un vaste réseau. En effet, il faut effectuer un calcul de plus court chemin par passager, ce qui demande vite trop de ressources. Plus grave, l'algorithme utilisant des paramètres aléatoires, les résultats obtenus ont une grande variance. Ainsi, pour obtenir des résultats exploitables, il faut utiliser le flot moyen sur plusieurs instances de l'algorithme ; le calcul d'une solution devient encore plus long.

## 1.3 Problème d'affectation pour le trafic routier : H. Bar-Gera

H. Bar-Gera [8] traite le problème d'affectation pour le trafic routier. Ce problème est lié au problème d'affectation de passagers : les deux problèmes modélisent un comportement humain et visent à calculer un flot pluraliste. Toutefois, la congestion est un phénomène déterminant pour le trafic routier alors qu'elle est secondaire dans un réseau de transport en commun. Ainsi, le modèle communément retenu, et sur lequel se base H. Bar-Gera, est une reformulation d'un modèle de répartition par proportion : l'équilibre des utilisateurs. L'optimum de ce modèle est atteint lorsque

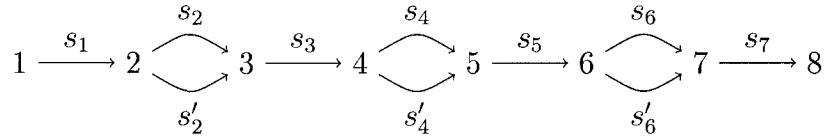


Figure 1.1 Exemple de route et de PAS

aucun conducteur n'a intérêt à changer de route. Les coûts étant sur les arcs, on remarque que ce modèle est sans mémoire, c'est-à-dire que la route choisie par un passager à partir d'un point du réseau ne dépend pas de ses choix précédents.

Pour résoudre ce problème, H. Bar-Gera utilise la notion de *paired alternative segment* (PAS). Celle-ci se base sur l'observation suivante : l'ensemble des routes d'un problème d'équilibre de passagers a une structure particulière, qui peut être décrite par un ensemble local de PAS. Ainsi, dans l'exemple figure 1.1, il y a huit itinéraires distincts pour se rendre du nœud 1 au nœud 8, mais le conducteur ne doit faire que trois choix indépendants. Un choix du conducteur aboutissant à la même destination forme alors un PAS (exemple  $p = \{s_2, s'_2\}$ ).

Pour résoudre le problème d'affectation de trafic, H. Bar-Gera propose un algorithme qui détecte les PAS et équilibre le flot sur ceux-ci jusqu'à l'équilibre. Cet algorithme est particulièrement efficace car il traite tous les usagers d'un PAS en même temps, indépendamment de leur origine et de leur destination.

Nous utilisons une méthode similaire pour résoudre le problème d'affectation de passagers. Cette méthode se base sur la notion d'*ensemble d'itinéraires parallèles* (EIP), que nous définissons dans le chapitre 3, et qui est une extension du concept de PAS pour le problème d'affectation.

#### 1.4 Une méthode originale pour le calcul des plus courts chemins : M. Friedrich et S. Wekeck

Dans l'article [9], M. Friedrich et S. Wekeck proposent un nouvel algorithme pour déterminer les plus courts chemins dans un réseau de transport en commun. Contrairement aux algorithmes polynomiaux traditionnels, leur méthode se base sur un processus de *branch and bound*.

Pour chaque ligne de transport, une première phase détermine toutes les heures de départ et d'arrivée possibles entre deux arrêts de cette ligne. On forme ainsi des segments de connections. Ces segments sont alors enchaînés les uns aux autres pour former un arbre. Cet arbre est bien plus large que l'arbre des plus courts chemins. Il présente toutefois les avantages suivants :

- sa profondeur peut être limitée. En effet, les auteurs décident de négliger les parcours nécessitant plus d'un certain nombre de correspondances ;
- l'arbre peut être élagué à l'aide de règles de dominance. Ces règles, qui nécessitent un certain formalisme, sont décrites dans l'article ;
- plusieurs chemins entre deux mêmes points peuvent coexister, cela permet de traiter les différents goûts des passagers ;
- tous les chemins acceptables depuis un point de départ sont présents dans l'arbre.

L'avantage de cet algorithme est qu'il permet d'arrêter le calcul des plus courts chemins au bon moment. En effet, un chemin se trouve dans l'arbre si et seulement si il est réalisable sans être dominé. Il suffit alors de garder un arbre en mémoire pour répondre à toutes les requêtes depuis une origine.

Dans notre implémentation, nous utilisons un algorithme de plus court chemin traditionnel. Toutefois, nous garderons l'idée de M. Friedrich et S. Wekeck qui consiste à limiter le nombre de correspondances.

Tableau 1.1 Synthèse des différents modèles.

Article	fréquentiel	temporel	grégaire	pluraliste	congestion
C. Chriqui et P. Robillard [2]	X		X		Non
J. de Cea et J.E. Fernandez [7]	X		X		Non
H. Spiess et M. Florian [3]	X			X	Oui
P. Carraresi et al. [4]		X		X	Non
Tong et Wong [5]		X		X	Non
M. Friedrich et S. Wekeck [9]		X		X	Non
H. Bar-Gera [8]	X			X	Oui
Y. Bzioui [1]	X			X	Oui
Objectifs de ce mémoire	X	X		X	Oui

## 1.5 Synthèse

Le tableau 1.1 permet de comparer les différents modèles présentés dans cette revue de littérature. Pour chaque modèle, nous indiquons s'il traite la version fréquentielle ou spatio-temporelle du problème, si le comportement des passagers est pluraliste ou grégaire et si le modèle d'affectation prend en compte la congestion.

## CHAPITRE 2

### MODÈLES MATHÉMATIQUES D'AFFECTATION PLURALISTE

Dans ce chapitre, nous présentons et nous étudions les différents modèles de répartition de flot dans un graphe série-parallèle, que nous proposons pour résoudre le problème d'affectation de passagers. Dans une première section, nous posons tout le formalisme nécessaire en définissant, entre autres, les notions d'itinéraire, de modèle et de graphe série-parallèle. Nous définissons ensuite cinq propriétés qui formalisent certaines caractéristiques du comportement des usagers d'un réseau de transport en commun. Nous construisons alors différents modèles de répartition pour aboutir au modèle mixte corrigé que nous étudions ensuite plus en détails. Enfin, nous abordons brièvement le cas de graphes plus généraux.

#### 2.1 Quelques définitions

Dans cette section, nous posons le formalisme et nous définissons les notions qui sont utilisées dans toute la suite de ce mémoire. Les notions les plus importantes sont celles d'itinéraire, de flot, de modèle, de graphe série-parallèle et de flot par niveau. Dans ce qui suit, nous utilisons le terme *graphe* pour désigner un multi-graphe orienté, généralement noté  $G = (N, A)$ , où  $N$  est l'ensemble des nœuds du graphe et  $A$  l'ensemble de ses arcs.

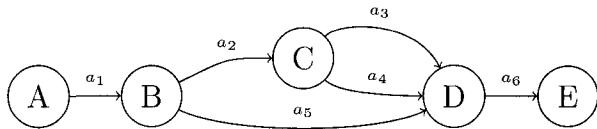


Figure 2.1 Exemples d’itinéraires

### 2.1.1 Itinéraires

Dans cette sous-section, nous définissons, puis nous illustrons, les notions liées aux itinéraires, afin, surtout, de mettre en place une terminologie rigoureuse.

**Définition 2.1.** *Itinéraire.* Soit  $n_1$  et  $n_2$  des nœuds d’un graphe. On appelle itinéraire entre  $n_1$  et  $n_2$  toute succession d’arcs de  $n_1$  à  $n_2$ .

**Définition 2.2.** *Itinéraires distincts.* Soit  $n_1$  et  $n_2$  des nœuds d’un graphe. Deux itinéraires entre  $n_1$  et  $n_2$  sont dits distincts s’ils diffèrent par au moins un arc.

**Définition 2.3.** *Itinéraires disjoints.* Soit  $n_1$  et  $n_2$  des nœuds d’un graphe. Deux itinéraires entre  $n_1$  et  $n_2$  sont dits disjoints s’ils n’ont aucun arc en commun.

L’exemple proposé sur la figure 2.1 permet d’illustrer les notions d’itinéraire. Sur cet exemple, trois itinéraires distincts existent entre B et D :  $(a_5)$ ,  $(a_2, a_3)$  et  $(a_2, a_4)$ . L’itinéraire  $(a_5)$  est disjoint d’avec les deux autres. En revanche les itinéraires  $(a_2, a_3)$  et  $(a_2, a_4)$  ne sont pas disjoints.

### 2.1.2 Modèle d’affectation de flot

L’objectif de cette sous-section est de définir les notions de flot, de solution et de modèle ; même si elles paraissent évidentes, il est important de les définir afin de poser une terminologie rigoureuse pour la suite de ce mémoire.

Dans un premier temps, nous définissons un problème d'affectation comme un graphe et un ensemble de demandes ; le terme *problème* est donc pris ici dans son sens le plus général. En notant  $N$  l'ensemble des nœuds du graphe, une demande  $q$  est définie par une origine  $o_q \in N$ , une destination  $d_q \in N$  et une quantité réelle positive  $D_q$  ; une demande est donc un élément de  $N \times N \times \mathbb{R}_+$ .

**Définition 2.4.** *Problème d'affectation de flot multi origine-destination.* Un problème d'affectation de flot multi origine-destination est défini par un multi-graphe  $G = (N, A)$  orienté et pondéré, et par un ensemble de demandes  $Q \subset N \times N \times \mathbb{R}_+$ . Le graphe étant pondéré, chaque arc  $a \in A$  est paramétré par un poids noté  $c_a$ .

La notion de solution réalisable nous permet de définir les variables  $x_{q,a}$  du problème, et d'introduire les contraintes de flot.

**Définition 2.5.** *Solution réalisable d'un problème d'affectation de flot.* Soit  $\mathcal{P}$  un problème d'affectation de flot. Une solution réalisable de  $\mathcal{P}$  est un vecteur  $X = (x_{q,a})_{q \in Q, a \in A}$  tel que pour toute demande  $q = (o_q, d_q, D_q) \in Q$  :

$$\begin{aligned} \sum_{a \in o_q^+} x_{q,a} &= D_q \\ \sum_{a \in n^-} x_{q,a} &= \sum_{a \in n^+} x_{q,a} \quad \forall n \in N \setminus \{o_q, d_q\}. \end{aligned}$$

On dit que  $x_{q,a}$  est le flot sur l'arc  $a$  pour la commodité  $q$ .

Pour résoudre un même problème, c'est-à-dire un même ensemble de données et de contraintes, plusieurs modèles de comportement peuvent être utilisés.

**Définition 2.6.** *Modèle de comportement.* Un modèle de comportement  $\mathcal{M}$  est une fonction qui, à chaque problème d'affectation de flot  $\mathcal{P}$  associe un ensemble de flots réalisables  $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ .

Un flot réalisable  $\mathcal{S} \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$  est appelé une *solution du modèle*. En général, l'ensemble  $\mathcal{M}(\mathcal{P})$  est réduit à une unique solution  $\mathcal{S}$ . Toutefois, certains modèles et

certains problèmes peuvent aboutir à un ensemble de solutions  $\mathcal{M}(\mathcal{P})$  comportant plusieurs éléments.

On conçoit évidemment le flot modélisé  $\mathcal{S} \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$  comme étant une estimation de ce que serait le véritable flot de passagers dans un réseau de transport en commun décrit par le graphe  $G$  et soumis à une demande  $Q$ , si  $G$  et  $Q$  définissent le problème  $\mathcal{P}$ .

Les *modèles d'équilibre* proposent un flot modélisé qui est solution d'un système d'équations des variables de flot. C'est-à-dire que, pour un tel modèle  $\mathcal{M}$ , le flot modélisé  $\mathcal{S} \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$  satisfait

$$E(\mathcal{S}) = 0$$

pour une certaine fonction  $E$ .

Cependant, dans ce qui suit, notre intérêt se porte sur les *modèles d'optimisation*, c'est-à-dire les modèles  $\mathcal{M}$  pour lesquels le flot modélisé  $\mathcal{S} \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$  minimise une *fonction de coût*  $F$  sur l'ensemble  $E$  des flots réalisables, soit :

$$\mathcal{S} = \arg \min_{Y \in E} F(Y).$$

### 2.1.3 Graphe série-parallèle

Cette sous-section permet de définir les graphes série-parallèle. La définition proposée ici se base sur la définition de Duffin [10]. Dans un premier temps, nous définissons les notions de procédure de regroupement, puis de suite regroupante. Nous utilisons alors cette dernière notion afin de définir les graphes série-parallèle.

Les procédures de regroupement sont simplement des procédures qui permettent de regrouper les arcs montés (dans le sens électrocinétique du terme) *en série* ou *en parallèle*.

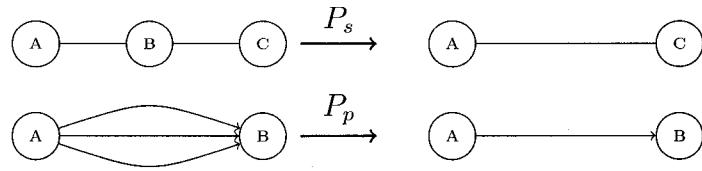


Figure 2.2 Procédure de regroupement

**Définition 2.7. Procédure de regroupement série.** *Une procédure de regroupement série est une procédure qui remplace tout couple d'arcs adjacents à un sommet  $n$  de degré  $\delta^+ = \delta^- = 1$  par un unique arc. Le sommet  $n$  est de plus retiré.*

Dans la figure 2.2, la procédure  $P_s$  est une procédure de regroupement série.

**Définition 2.8. Procédure de regroupement parallèle.** *Une procédure de regroupement parallèle est une procédure qui remplace tout ensemble d'arcs ayant les mêmes extrémités par un unique arc.*

Dans la figure 2.2, la procédure  $P_p$  est une procédure de regroupement parallèle.

**Définition 2.9. Fils.** *On dit qu'un graphe  $G'$  est un fils d'un graphe  $G$  si  $G'$  est isomorphe au résultat obtenu par une unique application d'une procédure de regroupement sur un ensemble d'arcs de  $G$ .*

Dans la suite de ce chapitre, la notation  $A \simeq B$  signifie que le graphe  $A$  est isomorphe au graphe  $B$ .

**Définition 2.10. Suite regroupante.** *On dit qu'une suite  $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de graphes est regroupante si, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , soit  $G_{k+1} \simeq G_k$ , soit  $G_{k+1}$  est un fils de  $G_k$ .*

La figure 2.3 illustre un exemple de suite regroupante. Elle permet aussi d'illustrer la notion de fils, puisque chaque graphe est le fils du graphe précédent.

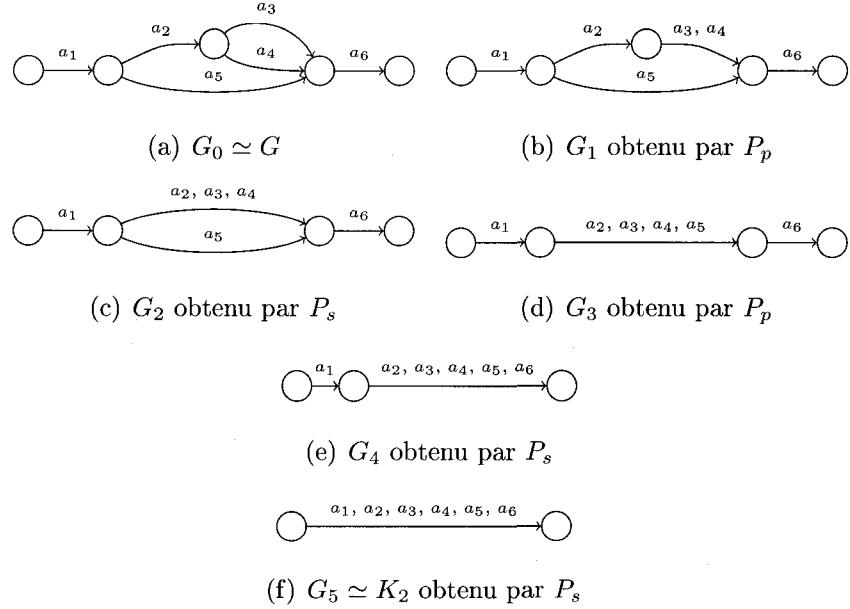


Figure 2.3 Exemple de suite regroupante

**Définition 2.11. Graphe série-parallèle.** On dit qu'un graphe  $G$  est série-parallèle s'il existe un suite regroupante  $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et un entier  $N$  tel que  $G_0 \simeq G$ , et  $G_N \simeq K_2$ , où  $K_2$  est le graphe complet d'ordre deux.

Le graphe  $G_0$  de la figure 2.3 est un graphe série-parallèle ; en effet, la suite illustrée sur cet exemple est regroupante et  $G_4 \simeq K_2$ . En fait, chaque graphe représenté sur cet exemple est série-parallèle.

#### 2.1.4 Niveau d'un arc

**Définition 2.12. Représentant d'un arc.** Soit  $G$  un graphe série-parallèle,  $a$  un arc de  $G$  et  $(G_k)$  une suite regroupante telle que  $G_0 \simeq G$ . Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Si  $k = 0$ ,  $a$  est son propre représentant dans  $G_0$ . Sinon, soit  $a_{k-1}$  le représentant de  $a$  dans  $G_{k-1}$ , et  $P_k$  la procédure de regroupement permettant de passer de  $G_{k-1}$  à  $G_k$ . Si  $P_k$  agit sur  $a_{k-1}$ , alors le représentant de  $a$  dans  $G_k$  est l'arc issu de  $P_k$ . Sinon, le représentant

de  $a$  dans  $G_k$  est l'arc correspondant à  $a_{k-1}$  dans  $G_k$ .

Cette définition est aussi illustrée par la figure 2.3. Chaque arc du graphe  $G_0$  original est nommé  $(a_1, \dots, a_6)$  sur la figure (a). Ensuite, sur chaque arc  $a$  des graphes de la suite, les arcs représentés par  $a$  sont inscrits.

Nous définissons maintenant la notion de suite regroupante optimale. Il s'agit simplement d'une suite regroupante menant en une copie de  $K_2$  en un nombre minimal de procédures de regroupement en série et en parallèles.

**Définition 2.13.** *Suite regroupante optimale.* Soit  $G$  un graphe série-parallèle. Soit  $u$  une suite regroupante telle que  $u_0 \simeq G$ . On dit que  $u$  est optimale pour  $G$ , si, pour toute suite regroupante  $u'$  et tout entier  $N'$  tel que  $u'_0 \simeq G$  et  $u'_{N'} \simeq K_2$ , il existe  $N \leq N'$  tel que  $u_N \simeq K_2$ .

Nous définissons alors le niveau d'un arc. Le niveau d'un arc  $a$  mesure en quelque sorte le nombre de montages parallèles à l'intérieur desquels il se trouve.

**Définition 2.14.** *Niveau d'un arc.* Soit  $G$  un graphe série-parallèle,  $(G_k)$  une suite regroupante optimale et  $a$  un arc de  $G$ . Le niveau de  $a$  est le nombre d'applications de la procédure de regroupement parallèle agissant sur un représentant de  $a$  dans la suite  $G_k$ .

La suite représentée par la figure 2.3 est optimale, nous pouvons donc l'utiliser pour déduire le niveau des arcs de  $G_0$ . Les arcs  $a_1$  et  $a_6$  sont de niveau nul ; en effet, ils ne sont concernés par aucune procédure de regroupement parallèle. Les arcs  $a_2$  et  $a_5$  sont de niveau un ; en effet, ils subissent une procédure de regroupement parallèle entre  $G_2$  et  $G_3$ . Enfin les arcs  $a_3$  et  $a_4$  sont de niveau deux, ils subissent une procédure de regroupement parallèle entre  $G_0$  et  $G_1$ , puis leur représentant en subit une, entre  $G_2$  et  $G_3$ .

Dans la définition de certains des modèles, nous utilisons la notion de *représentant de niveau  $l$  d'un arc  $a$* ; il s'agit, tout simplement, d'un représentant de l'arc  $a$ , qui est de niveau  $l$ . Ainsi, dans l'exemple représenté sur la figure 2.3, l'arc représentant  $a_3$  et  $a_4$  dans  $G_1$  est un représentant de niveau un pour ces deux arcs.

### 2.1.5 Flot par niveau

Dans la section 2.3, nous définissons un modèle, nommé modèle mixte corrigé, qui est ensuite utilisé comme base dans les chapitres suivants. Dans ce modèle, la fonction de coût est assez particulière et s'exprime à l'aide de la notion de flot par niveau pour un arc. Cette notion est présentée et illustrée ici.

Dans un premier temps, nous définissons le flot dans une suite regroupante. Il s'agit en fait de déterminer le comportement du flot face à l'application des procédures de regroupement.

Soit  $X$  un flot dans un graphe série-parallèle  $G$ . Pour respecter la propriété de conservation du flot, toute procédure de regroupement appliquée à  $G$  induit un regroupement du flot  $X$ , et ce de façon évidente. Si  $H$  est le fils de  $G$ , alors

- le flot reste inchangé pour les arcs non affectés par les procédures de regroupement ;
- le flot sur un arc issu d'un regroupement série est égal au flot qui traversait chacun des deux arcs de  $G$  ainsi regroupés, et qui étaient nécessairement égaux ;
- le flot sur un arc issu d'un regroupement en parallèle est la somme des flots des arcs de  $G$  ainsi regroupés.

Le concept de *flot induit par une suite de regroupements* s'ensuit naturellement. Ce comportement des flots dans une suite regroupante est illustré sur la figure 2.4, qui reprend l'exemple de la figure 2.3.

**Définition 2.15. Flot de niveau  $l$ .** Soit  $X_q$  un flot respectant une demande  $q$  dans

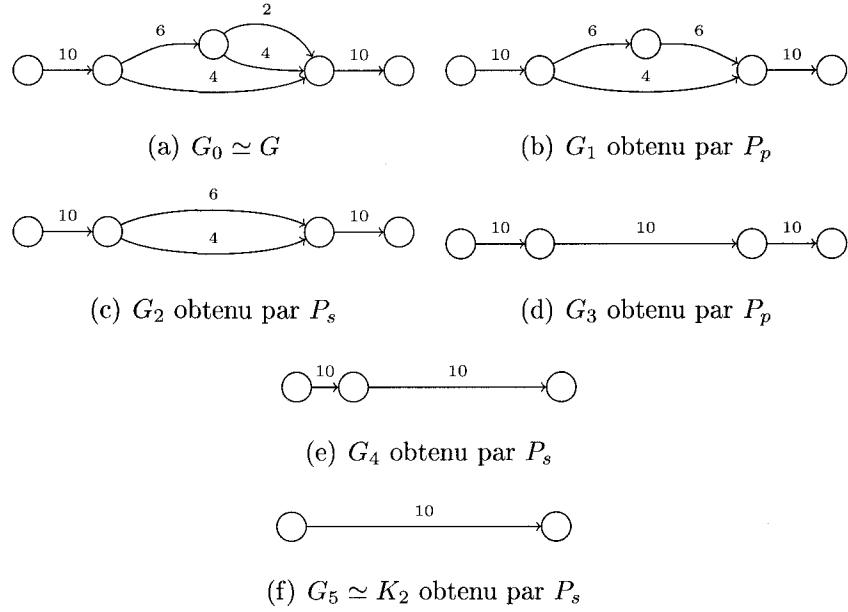


Figure 2.4 Flot par niveau

un graphe série-parallèle  $G$ . Le flot de niveau  $l$  d'un arc  $a$ , noté  $x_{q,a}^l$ , est le flot de n'importe quel représentant de niveau  $l$  de  $a$ , si un tel représentant existe.

En particulier, si  $l_a$  dénote le niveau de  $a$ , alors le flot de niveau  $l_a$  de  $a$  est tout simplement  $x_{q,a}$ . À l'opposé, pour tout arc  $a$ , le flot de niveau 0 est égal à  $D_q$ , la demande totale.

**Définition 2.16.** Soit  $a$  un arc d'un graphe  $G$  série-parallèle. Si  $a$  est de niveau  $l_a$ , on appelle niveau de répartition de  $a$  le niveau  $l_a - 1$ .

Pour des raisons de cohérence, les définitions 2.15 et 2.16 nous amènent à définir le flot de niveau  $-1$  comme étant égal à  $D_q$ , où  $q = (o_q, d_q, D_q)$ .

La figure 2.4 peut aussi être utilisée pour déterminer les flots par niveau. Ainsi, par exemple, le flot de niveau un pour les arcs  $a_3, a_4$  est 6 et leur flot de niveau deux est 10.

## 2.2 Propriétés intéressantes

Dans cette section, nous définissons des propriétés concernant des modèles de répartition. Ces modèles s'appliquent à des graphes quelconques dont les arcs sont pondérés. Ces propriétés caractérisent et modélisent, en partie, le comportement de passagers dans un réseau de transport en commun. Ainsi, elles devront ensuite être respectées par les modèles que nous souhaitons utiliser pour résoudre le problème d'affectation de passagers dans un réseau de transport en commun.

\* \* \*

Dans un premier temps, nous définissons le pluralisme. Un modèle est pluraliste s'il peut répartir du flot sur plusieurs itinéraires de coûts distincts. Si le flot modélise des passagers dans un réseau de transport en commun, cela représente le fait que les passagers d'une même demande ne choisissent pas nécessairement tous le même itinéraire.

**Définition 2.17. Pluralisme.** *On dit qu'un modèle de comportement  $\mathcal{M}$  est pluraliste s'il existe un problème d'affectation  $\mathcal{P}$  tel que pour chaque demande  $q = (o_q, d_q, D_q)$  pour lesquelles il existe plusieurs itinéraires distincts de  $o_q$  vers  $d_q$ , le flot pour  $q$  de chaque arc de chaque itinéraire de  $o_q$  vers  $d_q$  est non nul pour chaque solution  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ .*

\* \* \*

Nous définissons maintenant la sélectivité. Un modèle est sélectif s'il permet l'affectation d'un flot nul sur certains itinéraires. Si le flot modélise des passagers dans un

réseau de transport en commun, cela représente le fait qu'aucun passager n'emprunte un itinéraire « trop » mauvais.

**Définition 2.18. Sélectivité.** *On dit qu'un modèle de comportement  $M$  est sélectif s'il existe un problème d'affectation  $\mathcal{P}$  et une solution  $\mathcal{S} \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$  tels que, pour chaque demande  $q = (o_q, d_q, D_q)$  pour lesquelles il existe plusieurs itinéraires distincts de  $o_q$  vers  $d_q$ , il existe un arc  $a$  d'un itinéraire  $I$  de  $o_q$  vers  $d_q$  sur lequel le flot pour  $q$  est nul.*

\* \* \*

L'absence de mémoire, que nous définissons ensuite, est vérifiée lorsque la répartition du flot entre plusieurs itinéraires se fait indépendamment des origines-destinations. Ainsi, la répartition du flot entre les différents itinéraires reliant deux noeuds du graphe se fait en fonction de la qualité de ces différents itinéraires, celle-ci ne dépendant pas du flot. Si le flot modélise des passagers dans un réseau de transport en commun, l'absence de mémoire représente le fait qu'une fois débarqués à une station, les passagers peuvent oublier leur origine, pour choisir l'itinéraire pour la suite de leur déplacement.

**Définition 2.19. Absence de mémoire.** *Un modèle  $\mathcal{M}$  est sans mémoire si, pour tout problème d'affectation  $\mathcal{P}$  et tout couple de nœuds  $(u, v)$ , il existe une solution  $\mathcal{S}$  telle que, pour tout itinéraire  $I$  de  $u$  à  $v$ , on dispose d'un paramètre  $\rho_I$  tel que, pour chaque demande  $q = (o_q, d_q, D_q)$ , le flot dans  $\mathcal{S}$  pour  $I$  s'écrit*

$$\rho_I \eta_{q,u,v} D_q.$$

\* \* \*

Nous définissons enfin l'indépendance des arcs inutilisés. Cette propriété est vérifiée lorsque les arcs inutilisés d'une solution n'influent pas sur cette solution.

**Définition 2.20. Indépendance des arcs inutilisés.** *On dit qu'un modèle de comportement  $\mathcal{M}$  est indépendant des arcs inutilisés si, pour tout problème d'affection de flot  $\mathcal{P}$ , on obtient le même ensemble de solutions pour  $\mathcal{M}$  en retirant un arc de  $G$  sur lequel le flot est nul pour toutes les solutions de  $\mathcal{M}$ .*

\* \*

**Définition 2.21. Additivité en série.** *On dit qu'un modèle de comportement  $\mathcal{M}$  est additif en série si deux arcs  $a_1, a_2$  en série se comportent comme un unique arc de poids  $c_1 + c_2$ .*

### 2.3 Présentation et étude des modèles

Le vocabulaire ayant été défini dans les sous-sections précédentes, nous allons désormais nous en servir pour définir et étudier différents modèles de répartition de flot. Les deux premiers modèles que nous étudions ne vérifiant pas toutes les propriétés souhaitées (sous-section 2.3.1 et 2.3.2), nous tentons alors de les combiner en un nouveau modèle, présenté dans la sous-section 2.3.3. Nous montrons ensuite, à l'aide d'un contre-exemple judicieux, que ce dernier modèle n'est pas indépendant des arcs inutilisés ; c'est pourquoi nous définissons un nouveau modèle, dans la sous-section 2.3.4, en introduisant une série de facteurs qui permettent de vérifier l'indépendance des arcs inutilisés.

Dans la suite de ce chapitre nous ne considérons que les problèmes de répartition  $\mathcal{P}$  tels que le graphe  $G = (N, A)$  est série-parallèle.

### 2.3.1 Modèle des plus courts chemins

Dans cette sous-section, nous définissons le modèle de comportement suivant les plus courts chemins. Ce modèle consiste, comme son nom l'indique, à affecter tout le flot de chaque demande  $q = (o_q, d_q, D_q)$  sur un plus court chemin de  $o_q$  à  $d_q$ . Cette méthode d'affectation de toute la demande sur un seul chemin est aussi appelée « tout-ou-rien ».

En modélisant ainsi un flot de passagers dans un réseau de transport en commun, nous considérons que ceux-ci choisissent le meilleur itinéraire. Cette modélisation semble donc raisonnable. Toutefois, elle présuppose que les usagers aient les mêmes goûts et connaissent parfaitement la disposition, ainsi que les horaires, du réseau. Elle est de plus très sensible aux variations des caractéristiques du réseau.

En utilisant la terminologie de la section précédente, nous montrons que ce modèle est sélectif, sans mémoire, additif en série et indépendant des arcs inutilisés mais qu'il n'est pas pluraliste.

**Définition 2.22.** *Le modèle des plus courts chemins est un modèle d'optimisation dont la fonction de coût est*

$$F(X) = \sum_{q \in Q} \sum_{a \in A} c_a x_{q,a}.$$

**Prop. 2.23.** *Soit  $\mathcal{P}$  un problème d'affectation. Toutes les solutions  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{M}(\mathcal{P})$  du modèle des plus courts chemins ont le même coût  $c^* = F(\mathcal{S})$ .*

*Pr.* Les contraintes et l'objectif sont linéaires. □

**Prop. 2.24.** *Le modèle des plus courts chemins est sans mémoire, additif en série, sélectif et indépendant des arcs inutilisés.*

*Pr.* L'absence de mémoire découle du principe d'optimalité de Bellman. L'additivité en série est évidente, tout comme la sélectivité. Enfin, si un arc n'est utilisé par aucune solution, c'est qu'il ne se trouve pas sur un plus court chemin ; on peut donc le retirer sans changer l'ensemble des solutions du modèle.  $\square$

**Prop. 2.25.** *Le modèle des plus courts chemins n'est pas pluraliste.*

*Pr.* Soit  $q = (o_q, d_q, D_q)$  une demande telle qu'il existe plusieurs itinéraires distincts de  $o_q$  vers  $d_q$ . La solution qui consiste à affecter toute la demande  $D_q$  sur un unique plus court chemin de  $o$  vers  $d$  est optimale, or il existe un arc d'un itinéraire de  $o_q$  vers  $d_q$  sur lequel le flot est nul pour cette solution, par conséquent le modèle n'est pas pluraliste.  $\square$

### 2.3.2 Répartition par proportion

Dans cette sous-section, nous présentons le modèle de comportement par proportion. Il s'agit d'un modèle d'optimisation basé sur la minimisation d'un objectif quadratique. Pour chaque demande  $q = (o_q, d_q, D_q)$ , ce modèle associe, en quelque sorte, un coefficient d'attraction à chaque itinéraire de  $o_q$  vers  $d_q$  ; le flot  $D_q$  est alors réparti sur ces itinéraires en proportion de leur coefficient d'attraction.

En modélisant ainsi un flot de passagers dans un réseau de transport en commun, nous prenons en compte l'éclectisme des passagers ainsi que leur connaissance limitée du réseau. Ce modèle présente de plus l'avantage d'être assez peu sensible aux légères variations des caractéristiques du réseau. Toutefois, il donne trop d'importance à la dispersion des passagers : même un itinéraire très mauvais sera parcouru par un flot non nul.

Ce modèle présente une analogie forte avec le comportement électrocinétique des

réseaux de résistances électriques, dont une étude de référence est présentée dans le manuel [11]. Cette analogie est utilisée pour donner une idée des preuves permettant d'établir que ce modèle est pluraliste, sans mémoire, additif en série et indépendant des arcs inutilisés mais qu'il n'est pas sélectif.

**Définition 2.26.** *Le modèle de comportement par proportion est un modèle d'optimisation dont la fonction coût est*

$$F(X) = \sum_{q \in Q} \sum_{a \in A} c_a x_{q,a}^2.$$

Si on considère le coût  $c_a$  comme une résistance  $R_a$  et le flot  $x_{q,a}$  comme un courant électrique  $i_a$ , le problème d'optimisation revient à minimiser la puissance électrique dans le réseau. Or, en notant  $v_a$  la différence de potentiel entre les extrémités de  $a$ , ce qui correspond en fait aux variables duales des contraintes de flot, le courant se répartit suivant la loi d'Ohm :  $i_a = \frac{v_a}{R_a}$ .

**Prop. 2.27.** *Soit  $\mathcal{P}$  un problème d'optimisation. L'ensemble des solutions  $\mathcal{M}(\mathcal{P})$  du modèle de répartition par proportion est réduit à une unique solution  $\mathcal{M}(\mathcal{P}) = \{\mathcal{S}\}$ .*

*Pr.* L'objectif est strictement convexe et les contraintes sont linéaires.  $\square$

**Prop. 2.28.** *Le modèle de répartition par proportion est pluraliste, sans mémoire, additif en série et indépendant des arcs inutilisés.*

*Pr.* Soit  $q = (o_q, d_q, D_q)$  une demande. Supposons qu'un arc  $a$  d'un itinéraire  $I$  de  $o_q$  à  $d_q$  ait un flot nul pour  $q$  dans la solution  $\mathcal{S}$ . La différence de potentiel aux bornes de  $a$  (différence des variables duales) est donc nulle, par conséquent tous les arcs montés en parallèle avec  $a$  ont un flot nul. Le graphe étant série-parallèle, l'application du regroupement des arcs, de la conservation du flot et du même raisonnement aboutit au fait que tous les arcs de  $I$  ont un flot nul. La différence de

potentiel entre  $o_q$  et  $d_q$  est alors nulle elle aussi : aucun flot ne peut circuler de  $o_q$  à  $d_q$ , ce qui contredit le fait que  $X$  soit une solution. Ainsi, tous les arcs de tous les itinéraires de  $o_q$  à  $d_q$  ont du flot et le modèle est bien pluraliste.

Soit  $u, v$  deux nœuds de  $G$ . L'analogie avec le comportement électrocinétique et la loi d'Ohm permet de calculer des résistances équivalentes pour les arcs montés en série et en parallèle. Ainsi, les itinéraires de  $u$  à  $v$  peuvent se réduire en  $n$  arcs parallèles. Soit  $(c_i)$  les coûts équivalents de ces arcs (calculés par les formules traditionnelles d'électrocinétique). Pour chaque demande  $q$ , on dispose alors de  $(C_q)$  tel que

$$c_a x_{q,a} = C_q, \quad \forall a.$$

Ainsi, le modèle de répartition par proportion répartit les flots entre les arcs parallèles en proportion inverse de leur coût  $c_a$  ; on en déduit l'absence de mémoire.

L'additivité en série est évidente. Enfin, aucun arc des itinéraires de  $o$  vers  $d$  n'étant inutilisé, on peut dire que le modèle est indépendant des arcs inutilisés.  $\square$

**Prop. 2.29.** *Le modèle de répartition par proportion n'est pas sélectif.*

*Pr.* Soit  $q = (o_q, d_q, D_q)$  une demande. Comme nous l'avons montré dans la preuve précédente, du flot passe nécessairement sur tous les arcs de tous les itinéraires de  $o_q$  à  $d_q$ , par conséquent le modèle de répartition par proportion n'est pas sélectif.  $\square$

### 2.3.3 Modèle mixte

Les deux modèles précédents vérifient toutes les propriétés de la section 2.2, exceptés le pluralisme pour l'un et la sélectivité pour l'autre. C'est pourquoi nous allons créer un nouveau modèle en formant une combinaison linéaire des fonctions de coûts des précédents modèles.

En modélisant le flot de passagers avec le modèle mixte, nous faisons un compromis entre la méconnaissance partielle du réseau, l'éclectisme des passagers et leur volonté d'optimiser leur itinéraire. Ce compromis se reflète dans la fonction objectif, qui se compose des deux modèles précédents.

Sous réserve d'une condition pour le choix des paramètres de la combinaison linéaire de l'objectif, le modèle mixte se révèle sans mémoire, pluraliste, sélectif et additif en série. Nous montrerons toutefois qu'il n'est pas indépendant des arcs inutilisés.

Dans un premier temps, nous étudions la fonction de coût

$$F(X) = \sum_{q \in Q} \sum_{a \in A} \left( K_{q,a} c_a x_{q,a} + \frac{1}{2} c_a x_{q,a}^2 \right),$$

où les  $K_{q,a}$  sont des paramètres.

Pour déterminer la valeur des paramètres  $K_{q,a}$  qui rendent le modèle sans mémoire, nous allons étudier le cas d'arcs en parallèle, comme ceux de la figure 2.5. Nous étudions ici la répartition du flot sur les  $n$  arcs entre les nœuds  $u$  et  $v$  pour une demande  $q$  quelconque. Pour alléger les notations, la référence à la commodité  $q$  est retirée.

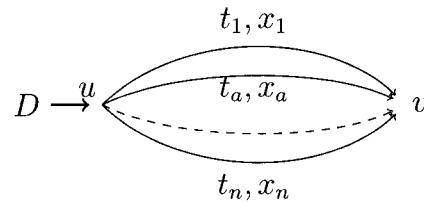


Figure 2.5 Itinéraires parallèles simples, disjoints.

Soit  $X$  la solution du modèle mixte. Les flots  $x_a$  sur les arcs sont donc solution du

problème d'optimisation sous contraintes de flots

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_a K_a c_a x_a + \frac{1}{2} c_a x_a^2 \\ \text{sc} & \sum_{a=1}^n x_a = D \\ & x_a \geq 0 \quad a = 1, \dots, n. \end{array} \quad (\pi)$$

Les conditions de Kuhn-Tucker de ce problème s'écrivent :

$$\begin{aligned} K_a c_a + c_a x_a & \begin{cases} = \pi & \text{si } x_a > 0 \\ \geq \pi & \text{si } x_a = 0 \end{cases} \quad a = 1, \dots, n \\ \sum_{a=1}^n x_a & = D. \end{aligned}$$

En indiquant  $x_1, \dots, x_p$  les  $x_a$  non nuls, nous obtenons

$$K_a + x_a = \frac{\pi}{c_a}, \quad a = 1, \dots, p.$$

Puis en faisant la somme, et comme  $\sum_{i=1}^p x_i = \sum_{i=1}^n x_i = D$ , on a

$$\sum_{i=1}^p K_i + D = \sum_{j=1}^p \frac{\pi}{c_j}.$$

Nous en déduisons les expressions de  $\pi$  et de  $x_a$

$$\pi = \frac{D + \sum_{i=1}^p K_i}{\sum_{j=1}^p 1/c_j},$$

$$x_a = \frac{D + \sum_{i=1}^p K_i}{c_a \sum_{j=1}^p 1/c_j} - K_a.$$

Ces relations étant valables pour chaque demande  $q = (o_q, d_q, D_q)$ , nous avons

$$\pi_q = \frac{D_q + \sum_{i=1}^p K_{q,i}}{\sum_{j=1}^p 1/c_j},$$

$$x_{q,a} = \frac{D_q + \sum_{i=1}^p K_{q,i}}{c_a \sum_{j=1}^p 1/c_j} - K_{q,a}.$$

Pour que la répartition entre les arcs se fasse dans les mêmes proportions pour chaque demande  $q$ , et qu'ainsi l'absence de mémoire soit vérifiée, il faut donc prendre, pour un certain  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$K_{q,a} = \lambda D_q.$$

On obtient alors

$$\pi_q = \frac{1 + p\lambda}{\sum_{j=1}^p 1/c_j} D_q$$

$$x_a = \left( \frac{1 + p\lambda}{c_a \sum_{j=1}^p 1/c_j} - \lambda \right) D_q.$$

En pratique, nous ne connaissons *a priori* ni les  $x_{q,a}$  nuls ni  $p$ . Nous pouvons toutefois les déterminer facilement. Pour cela, nous trions, pour une demande  $q$ , les variables  $x_{q,i}$  par pondération  $c_i$  croissante. Si  $D_q > 0$ , l'entier  $p$  est tel que pour tout  $i \leq p$   $x_i \neq 0$  et pour tout  $i > p$   $x_i = 0$ . La preuve est laissée au lecteur. Elle repose sur la minimisation de l'objectif. De plus,  $p$  est alors l'unique entier tel que pour tout  $i \leq p$   $\left( \frac{1 + p\lambda}{c_i \sum_{j=1}^p 1/c_j} - \lambda \right) D_q > 0$  et pour tout  $i > p$   $\left( \frac{1 + p\lambda}{c_i \sum_{j=1}^p 1/c_j} - \lambda \right) D_q \leq 0$ . Là encore, la preuve est laissée au lecteur. Elle repose sur le fait qu'un tel  $p$  existe et convient, et que n'importe quelle valeur différente de  $p$  ne convient pas.

Dans l'exemple étudié,  $D_q$  est en fait le flot du niveau de répartition des arcs. Ainsi, en généralisant cet exemple à l'ensemble des graphes série-parallèle, nous obtenons la définition suivante du modèle mixte.

**Définition 2.30.** *Le modèle de comportement mixte est un modèle d'optimisation dont la fonction de coût est*

$$F(X) = \sum_{q \in Q} \sum_{a \in A} \left( \lambda x_{q,a}^{l_a-1} c_a x_{q,a} + \frac{1}{2} c_a x_{q,a}^2 \right).$$

On rappelle que  $x_{q,a}^{l_a-1}$  est le flot du niveau de répartition de  $a$ . De plus, pour un graphe série-parallèle,  $x_{q,a}^{l_a-1}$  est bien défini et peut s'exprimer sous forme d'une somme de

$x_{q,a}$ . Par conséquent,  $F$  est un polynôme en  $X$  de degré 2.

**Prop. 2.31.** *Le modèle mixte est additif en série.*

*Pr.* Soit  $q$  une demande et  $a, b$  deux arcs en série. Soit  $n$  le nœud de degré  $\delta^+ = \delta^- = 1$  commun à  $a$  et  $b$ . Comme  $\delta^+ = \delta^- = 1$ , la conservation de flot impose que  $x_a = x_b = x$  (pour simplifier les notations, la commodité devient implicite). Aussi, étant en série,  $a$  et  $b$  ont nécessairement le même niveau ( $l = l_a = l_b$ ) et le même flot sur le niveau de répartition ( $x_a^{l-1} = x_b^{l-1}$ ), et donc

$$\lambda x_a^{l_a-1} t_a x_a^{l_a} + \frac{1}{2} t_a (x_a^{l_a})^2 + \lambda x_b^{l_b-1} t_b x_b^{l_b} + \frac{1}{2} t_b (x_b^{l_b})^2 = \lambda x^{l-1} (t_a + t_b) x^l + \frac{1}{2} (t_a + t_b) (x^l)^2,$$

ce qui prouve l'additivité en série du modèle.  $\square$

**Prop. 2.32.** *Le modèle mixte est sélectif et pluraliste pour des itinéraires disjoints en parallèle.*

*Pr.* Soit  $\mathcal{P}$  le problème d'affectation de flot dont le graphe  $G$  est constitué de  $n$  arcs disjoints en parallèle. On a alors vu que le flot sur un arc  $a$  s'écrit :

$$\bar{x}_a = \max \left\{ 0, \left( \frac{1 + p\lambda}{c_a \sum_{j=1}^p 1/c_j} - \lambda \right) D \right\}.$$

Le modèle est pluraliste puisque du flot passe sur tous les arcs  $a$  tels que

$$c_a \sum_{j=1}^p 1/c_j < \frac{1 + p\lambda}{\lambda}.$$

Il est de plus sélectif puisqu'aucun flot n'est affecté sur les arcs  $a$  tels que

$$c_a \sum_{j=1}^p 1/c_j \geq \frac{1 + p\lambda}{\lambda}.$$

$\square$

**Prop. 2.33.** *Le modèle mixte est sans mémoire pour les arcs en parallèle.*

*Pr.* Lors de la détermination de la valeur de  $K_{q,a}$ , au début de cette sous-section, nous avons choisi  $K_{q,a}$  afin que l'absence de mémoire soit vérifiée par le modèle mixte pour  $n$  arcs en parallèle.  $\square$

Le modèle mixte se révèle donc pluraliste, sélectif, sans mémoire pour les arcs en parallèle, et additif en série. Toutefois, nous allons voir qu'il n'est pas indépendant des arcs inutilisés.

**Prop. 2.34.** *Le modèle mixte n'est pas indépendant des arcs inutilisés.*

*Pr.* La preuve repose sur le contre-exemple induit par le graphe de la figure 2.6. La

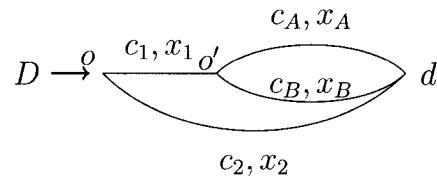


Figure 2.6 Limite du modèle mixte

solution optimale du problème d'affectation pour le modèle mixte est la solution du problème de minimisation suivant :

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \left( \lambda D c_1 x_1 + \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \left( \lambda x_1 c_A x_A + \frac{1}{2} c_A x_A^2 + \lambda x_1 c_B x_B + \frac{1}{2} c_B x_B^2 \right) \right) \\
 & + \lambda D c_2 x_2 + \frac{1}{2} c_2 x_2^2 \\
 \text{sc} \quad & x_1 + x_2 = D \quad (\pi) \\
 & x_A + x_B = x_1 \quad (\mu) \\
 & x_i \geq 0 \quad \forall i \quad (\nu_i).
 \end{aligned}$$

Supposons alors que la route B soit « mauvaise », prenons par exemple  $c_B > \frac{1+2\lambda}{\lambda} c_A$ . Les résultats précédents imposent que  $x_B = 0$ . Par conséquent, la solution optimale

du modèle mixte est la solution du problème de minimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda D c_1 x_1 + \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \lambda c_A x_1^2 + \frac{1}{2} c_A x_1^2 + \lambda D c_2 x_2 + \frac{1}{2} c_2 x_2^2 \\ \text{sc} \quad & x_1 + x_2 = D \quad (\pi) \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i \quad (\nu_i). \end{aligned}$$

Toutefois, en retirant l'arc B, sur lequel le flot est nul, on obtient le problème de minimisation :

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda D c_1 x_1 + \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \lambda D c_A x_1 + \frac{1}{2} c_A x_1^2 + \lambda D c_2 x_2 + \frac{1}{2} c_2 x_2^2 \\ \text{sc} \quad & x_1 + x_2 = D \quad (\pi) \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i \quad (\nu_i). \end{aligned}$$

Ces deux problèmes étant différents, ils auront *a priori* des solutions différentes et, par conséquent, le modèle mixte n'est pas indépendant des arcs inutilisés.  $\square$

#### 2.3.4 Modèle mixte corrigé

Le modèle mixte vérifie toutes les conditions que nous souhaitons, excepté l'indépendance des arcs inutilisés. Nous allons donc le corriger, à l'aide de facteurs multiplicatifs, pour qu'il gagne cette indépendance, sans perdre toutefois les autres propriétés.

En reprenant l'exemple de la figure 2.6, nous souhaitons donc trouver un facteur  $V$  tel que :

$$V \cdot \left( \lambda x_1 c_A x_1 + \frac{1}{2} c_A x_1^2 \right) = \lambda D c_A x_1 + \frac{1}{2} c_A x_1^2.$$

Soit

$$V = V(D, x_1) = \frac{2\lambda D + x_1}{(2\lambda + 1) x_1}.$$

Nous pouvons en fait généraliser ce calcul. En considérant les itinéraires parallèles entre  $o$  et  $d$ , le coût d'un arc quelconque  $a$  dans la fonction de coût du modèle dépend de son niveau et devient

$$c(a) = \left( \prod_{l=0}^{l_a} V(x_a^{l-2}, x_a^{l-1}) \right) \left( \lambda x_a^{l_a-1} c_a x_a + \frac{1}{2} c_a x_a^2 \right)$$

**Définition 2.35.** *Le modèle de comportement mixte corrigé est défini par la fonction de coût*

$$F(X) = \sum_{q \in Q} \sum_{a \in A} \left( \prod_{l=0}^{l_a} V(x_{q,a}^{l-2}, x_{q,a}^{l-1}) \right) \left( \lambda x_{q,a}^{l_a-1} c_a x_{q,a} + \frac{1}{2} c_a x_{q,a}^2 \right).$$

On rappelle que  $x_{q,a}^l$  est le flot de niveau  $l$  de  $a$ . De plus, pour un graphe série-parallèle,  $x_{q,a}^l$  est bien défini et peut s'exprimer sous forme d'une somme de  $x_{q,a}$ . De plus, en développant les calculs, on peut montrer que  $F$  est une fonction rationnelle en  $X$ .

**Prop. 2.36.** *Le modèle mixte corrigé est additif en série.*

*Pr.* Soit  $q$  une demande et  $a, b$  deux arcs en série. Soit  $n$  le nœud de degré  $\delta^+ = \delta^- = 1$  commun à  $a$  et  $b$ . Comme  $\delta^+ = \delta^- = 1$  la conservation de flot impose donc que  $x_a = x_b = x$  (pour simplifier les notations, la commodité devient implicite). Aussi, étant en série,  $a$  et  $b$  ont nécessairement le même niveau ( $L = l_a = l_b$ ) et le même flot sur les niveaux supérieurs ( $x_a^{L-1} = x_b^{L-1}$ ) et ( $x_a^{L-2} = x_b^{L-2}$ ), et donc

$$\prod_{l=0}^{l_a} V(x_a^{l-2}, x_a^{l-1}) = \prod_{l=0}^{l_b} V(x_b^{l-2}, x_b^{l-1}) = \prod_{l=0}^L V(x^{l-2}, x^{l-1}),$$

et

$$\lambda x_a^{l_a-1} c_a x_a + \frac{1}{2} c_a x_a^2 + \lambda x_b^{l_b-1} c_b x_b + \frac{1}{2} c_b x_b^2 = \lambda x^{L-1} (c_a + c_b) x + \frac{1}{2} (c_a + c_b) x^2.$$

On peut donc faire des regroupements dans la fonction de coût du modèle, ce qui prouve l'additivité en série.  $\square$

**Prop. 2.37.** *Soit  $n$  arcs en parallèle ordonnés par coût croissant, et soit  $p$  tel que pour  $i = 1, \dots, n$  les  $t_i$  vérifient :*

$$\begin{aligned} c_i \sum_{j=1}^p 1/c_j &\leq \frac{1+p\lambda}{\lambda} \text{ si } i \leq p, \\ c_i \sum_{j=1}^p 1/c_j &> \frac{1+p\lambda}{\lambda} \text{ si } i > p. \end{aligned}$$

Alors, les  $n$  arcs sont équivalents à un arc de coût

$$C_{eq} = \frac{(1+p\lambda)^2}{2\lambda+1} \frac{1}{\sum_{j=1}^p 1/c_j} - \frac{\lambda^2}{1+2\lambda} \sum_{j=1}^p c_j.$$

Pr. Comme les  $n$  arcs sont montés en parallèle, ils ont même niveau  $L$  et même flot  $x^l$  pour tous les niveaux  $l < L$ . Le coût de l'ensemble en parallèle peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} \sum_a c(a) &= \left( \prod_{l=0}^L V(x^{l-2}, x^{l-1}) \right) \sum_a \left( \lambda x_a^{l_a-1} c_a x_a + \frac{1}{2} c_a (x_a^{l_a})^2 \right) \\ &= \left( \prod_{l=0}^{L-1} V(x^{l-2}, x^{l-1}) \right) V(x^{L-2}, x^{L-1}) \sum_a \left( \lambda x_a^{l_a-1} c_a x_a + \frac{1}{2} c_a (x_a^{l_a})^2 \right) \\ &= \left( \prod_{l=0}^{L-1} V(x^{l-2}, x^{l-1}) \right) C'. \end{aligned}$$

Puisque  $p$  de ces arcs en parallèle ont un flot non nul, et en notant  $d = x^{L-2}$  et

$x_0 = x^{L-1}$ , on trouve la contribution  $C'$  des arcs

$$\begin{aligned}
C' &= V(d, x_0) \sum_a \left( \lambda x_a^{l_a-1} c_a x_a + \frac{1}{2} c_a (x_a^{l_a})^2 \right) \\
&= \frac{2\lambda d + x_0}{(2\lambda + 1)x_0} \sum_a \left( \lambda x_0 c_a x_a + \frac{1}{2} c_a x_a^2 \right) \\
&= \frac{2\lambda d + x_0}{(2\lambda + 1)x_0} \sum_{i=0}^p \left( \lambda c_i \left( \frac{1 + p\lambda}{c_i \sum_{j=0}^p 1/c_j} - \lambda \right) + \frac{1}{2} c_i \left( \frac{1 + p\lambda}{c_i \sum_{j=0}^p 1/c_j} - \lambda \right)^2 \right) x_0^2 \\
&= \frac{2\lambda d x_0 + x_0^2}{(2\lambda + 1)} \sum_{i=0}^p \left( \frac{(1 + p\lambda)^2}{2c_i \left( \sum_{j=0}^p 1/c_j \right)^2} - \frac{1}{2} c_i \lambda^2 \right) \\
&= \frac{2\lambda d x_0 + x_0^2}{(2\lambda + 1)} \left( \frac{(1 + p\lambda)^2}{2 \sum_{j=0}^p 1/c_j} - \frac{1}{2} \lambda^2 \sum_{i=1}^p c_i \right) \\
&= \lambda d \left( \frac{(1 + p\lambda)^2}{2\lambda + 1} \frac{1}{\sum_{j=0}^p 1/c_j} - \frac{\lambda^2}{1 + 2\lambda} \sum_{i=0}^p c_i \right) x_0 \\
&\quad + \left( \frac{(1 + p\lambda)^2}{2\lambda + 1} \frac{1}{\sum_{j=0}^p 1/c_j} - \frac{\lambda^2}{1 + 2\lambda} \sum_{i=0}^p c_i \right) \frac{x_0^2}{2} \\
&= \lambda d C_{eq} x_0 + \frac{1}{2} C_{eq} x_0^2.
\end{aligned}$$

□

**Prop. 2.38.** *Le modèle mixte corrigé est pluraliste, sélectif et sans mémoire.*

*Pr.* À l'aide de l'additivité en série (prop 2.36) et de l'équivalence en parallèle (prop 2.37), on peut transformer tout graphe en un ensemble d'arcs simples et disjoints en parallèle. Le modèle mixte corrigé se comporte alors comme le modèle mixte et on a vu que, dans le cas d'arcs en parallèle, le modèle mixte est pluraliste, sélectif et sans mémoire. □

## 2.4 Étude détaillée du modèle mixte corrigé

Dans la section précédente, nous avons étudié différents modèles de comportement afin d'aboutir au modèle mixte corrigé qui est à la fois sélectif, pluraliste, additif en série, sans mémoire et indépendant des arcs inutilisés. Dans cette section, nous illustrons et nous étudions plus en détail le comportement de ce modèle.

**Prop. 2.39.** *Soit  $n$  arcs en parallèle, ordonnés par coût croissant, et soit  $D$  le flot du niveau de répartition pour ces  $n$  arcs. Soit  $p$  tel que :*

$$\begin{aligned} c_i \sum_{j=1}^p 1/c_j &\leq \frac{1+p\lambda}{\lambda} \quad \forall i \leq p \\ c_i \sum_{j=1}^p 1/c_j &> \frac{1+p\lambda}{\lambda} \quad \forall i > p. \end{aligned}$$

*Le flot se répartit alors suivant les proportions*

$$\begin{aligned} x_i &= \left( \frac{1+p\lambda}{c_i \sum_{j=1}^p 1/c_j} - \lambda \right) D && \text{si } i \leq p \text{ et} \\ x_i &= 0 && \text{si } i > p. \end{aligned}$$

*Pr.* Même calcul que dans la sous-section 2.3.3. □

À partir de cette proposition, nous étudions la répartition d'une quantité  $D$  de flot entre deux arcs de coût  $t_1$  et  $t_2$  montés en parallèle. Supposons que tout le flot passe sur l'arc 1. Alors,  $p = 1$  et

$$\frac{c_2}{c_1} > \frac{1+\lambda}{\lambda}.$$

Réiproquement, si

$$\frac{c_2}{c_1} > \frac{1+\lambda}{\lambda},$$

alors  $p = 1$  et tout le flot passe sur l'arc 1. On en déduit que le flot est nul sur l'arc 2 si et seulement si

$$c_2 \geq \frac{1+\lambda}{\lambda} t_1,$$

ou encore si et seulement si

$$\frac{c_2}{c_1 + c_2} \geq \frac{1 + \lambda}{1 + 2\lambda}.$$

Supposons désormais que du flot passe sur les deux arcs. Alors, par des calculs élémentaires, on trouve que

$$\frac{c_1}{c_2} \leq \frac{1 + \lambda}{\lambda} \quad \text{et} \quad \frac{c_2}{c_1} \leq \frac{1 + \lambda}{\lambda}.$$

De plus, on a sur l'arc 1 que

$$\frac{x_1}{D} = (1 + 2\lambda) \frac{c_2}{c_1 + c_2} - \lambda.$$

Comme il se doit, selon cette équation,  $x_1 = D$  lorsque

$$\frac{c_2}{c_1 + c_2} = \frac{1 + \lambda}{1 + 2\lambda}.$$

La figure 2.7 et le tableau 2.1 illustrent le comportement du modèle mixte corrigé pour deux arcs en parallèle et pour différentes valeurs de  $\lambda$ . Sur cette figure, la valeur de  $x_2$  est tracée en fonction du ratio  $\frac{c_2}{c_1 + c_2}$ . Dans le tableau 2.1, on suppose que l'arc 1 a un coût de 60 et on indique la différence de coût entre les deux arcs pour qu'une certaine proportion du flot circule sur le second arc. On vérifie que plus  $\lambda$  est grand, plus le flot a tendance à se tasser sur l'arc le moins coûteux. À l'opposé, plus  $\lambda$  est petit, plus le flot se répand facilement sur les deux arcs. La valeur  $\lambda = 3$  apparaît comme un bon compromis dans le cas où le modèle mixte corrigé est appliqué pour modéliser le comportement des passagers d'un réseau de transport en commun.

Nous venons d'étudier le modèle mixte corrigé. Celui-ci respecte les propriétés que nous souhaitons, et est de plus paramétrable grâce au choix de  $\lambda$ . Dans la suite, nous utiliserons donc ce modèle. Il présente toutefois deux défauts : il n'est pas robuste à l'égard des arcs de coût nul et ne s'applique qu'aux graphes série-parallèle. Ce premier défaut est illustré par le graphe de la figure 2.8. En effet, l'application des formules précédentes donne un résultat légèrement différent entre les deux graphes,

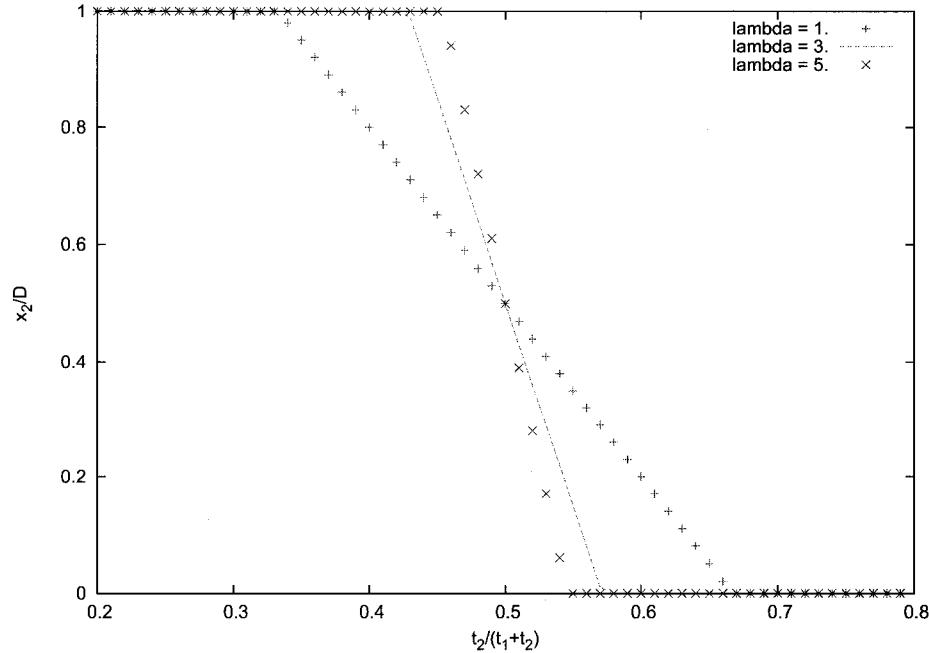


Figure 2.7 Valeur de la proportion  $\frac{x_2}{D}$  de la demande  $D$  assignée à l'arc 2, en fonction de  $\frac{c_2}{c_1+c_2}$ .

Tableau 2.1 Écart de coûts  $c_2 - c_1$ , donnant lieu aux répartitions indiquées, pour trois valeurs de  $\lambda$ . L'arc 1 étant de coût 60.

	0% sur l'arc 2	25% sur l'arc 2
$\lambda = 1.$	60	24
$\lambda = 3.$	20	9
$\lambda = 5.$	12	5

pourtant équivalents, de la figure 2.8. Ainsi, pour  $\lambda = 3$  et des coûts unitaires sur les arcs, la répartition du flot varie de 10% et le temps équivalent de 1.5%. Le second défaut est l'objet de la section suivante.

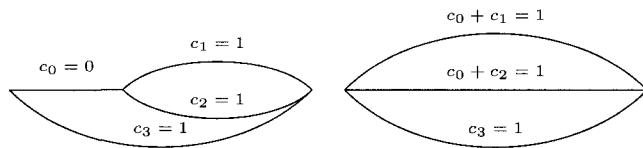


Figure 2.8 Faiblesse du modèle mixte corrigé : arc de coût nul.

## 2.5 Cas des graphes non série-parallèle

Les modèles que nous avons présentés dans les sections précédentes ne s'appliquent que sur les graphes série-parallèle. Dans cette section, nous présentons dans un premier temps une généralisation des graphes série-parallèle à laquelle notre modèle peut s'appliquer, puis nous traitons succinctement des graphes quelconques.

### 2.5.1 Graphe série-parallèle par origine-destination

#### Définition 2.40. Graphe série-parallèle pour un couple origine-destination.

Soit  $G = (N, A)$  un graphe et  $(o, d) \in N^2$ . Soit  $A'$  l'ensemble des arcs  $a$  tels qu'il existe un chemin de  $o$  à  $d$  passant par  $a$  et soit  $N'$  l'ensemble des nœuds extrémités des arcs de  $A$ . On dit que  $G$  est série-parallèle pour le couple  $(o, d)$  si le graphe partiel  $G' = (N', A')$  est série-parallèle.

Le graphe illustré sur la figure 2.9 n'est pas un graphe série-parallèle. Ce graphe est toutefois série-parallèle pour les couples d'origine-destination  $(O_1, D)$  et  $(O_2, D)$ .

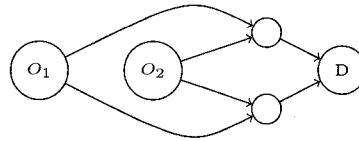


Figure 2.9 Graphe série-parallèle par origine-destination

Le modèle mixte corrigé se généralise clairement au cas des graphes série-parallèle pour toute les demandes  $q$  du problème.

### 2.5.2 Graphe quelconque

Nous ne développons pas de modèle d'optimisation pour résoudre le problème d'affection pluraliste dans des graphes quelconques. En pratique, nous utiliserons plutôt un modèle de comportement simple du flot autour des structures non série-parallèle. Un développement plus poussé des recherches présentées dans ce mémoire pourrait consister à définir des modèles avancés pour traiter le cas non série-parallèle.

## CHAPITRE 3

### ALGORITHME D'AFFECTATION PLURALISTE

Dans le chapitre précédent, nous avons décrit et étudié un modèle d'affectation pluraliste pour les graphes série-parallèle par origine destination. Ce modèle présente l'avantage d'être additif en série, ce qui permet de remplacer deux arcs consécutifs par un arc équivalent. Il permet aussi d'associer à un ensemble d'arcs parallèles un arc équivalent (cf proposition 2.37). Si nous pouvons ainsi contracter le graphe, nous savons aussi effectuer l'opération inverse. En effet, la proposition 2.39 détermine la répartition du flot associé à un arc équivalent sur ses différents arcs originaux. Dans ce nouveau chapitre, nous présentons un algorithme d'affectation qui utilise des procédures de regroupement et de répartition. Cet algorithme s'adapte donc directement pour déterminer une solution du modèle mixte corrigé.

Dans une première section, nous modifions les procédures de regroupement pour les adapter aux graphes pondérés, nous définissons aussi les procédures de répartition. Nous étudions ensuite le concept d'ensemble d'itinéraires parallèles, qui sert de base à l'algorithme. Ce dernier est alors présenté et détaillé dans une troisième section.

#### 3.1 Procédures de regroupement et de répartition

Dans le chapitre précédent, ainsi que dans celui-ci, nous travaillons sur des graphes série-parallèle par origine destination. Par définition, ces graphes peuvent se réduire au graphe complet  $K_2$  pour chaque origine-destination à l'aide des opérations :

- remplacer un ensemble d'arcs parallèles par un unique arc connectant leurs extrémités communes ;

– remplacer les deux arcs adjacents d'un sommet de degré deux par un unique arc. Ces opérations formelles seront utiles dans l'algorithme que nous développons. Dans le cas d'un graphe pondéré, il faut, de plus, être capable de déterminer un coût équivalent pour l'arc issu du regroupement : c'est le rôle des procédures de regroupement pondéré que nous définissons ici.

**Définition 3.1. Procédure de regroupement pondéré.** *Une procédure de regroupement pondéré est une procédure de regroupement (série ou parallèle) qui associe un poids à l'arc créé. Le poid de cet arc est fonction du poids des arcs regroupés.*

L'algorithme que nous développons dans la suite de ce chapitre consiste, pour une demande d'origine  $o$  et de destination  $d$ , à regrouper les arcs de telle sorte que  $o$  et  $d$  soient directement liés par un arc équivalent. Tout le flot de  $o$  à  $d$  est alors affecté sur cet arc équivalent. L'utilisation d'une procédure de répartition permet alors de déterminer le flot circulant sur chaque arc original.

**Définition 3.2. Procédure de répartition.** *Une procédure de répartition est une procédure ayant pour entrée un arc issu d'une procédure de regroupement et une quantité de flot circulant sur cet arc et qui associe à chacun des arcs originaux leur quantité de flot respective en fonction de leur coût.*

Nous noterons  $P_s$ ,  $P_p$  et  $P_r$  ces procédures. Les exemples suivants définissent les procédures de regroupement et de répartition relatives au modèle mixte corrigé du chapitre précédent.

**Définition 3.3. Procédure de regroupement série pondéré du modèle mixte corrigé.** *Les deux arcs adjacents au sommet donné en entrée de la procédure sont remplacés par un unique arc dont le coût est la somme des coûts des deux arcs originaux. (cf proposition 2.36).*

**Définition 3.4. Procédure de regroupement parallèle pondéré du modèle mixte corrigé.** Soit  $n$  arcs en parallèle dont les coûts  $c_1, \dots, c_n$  sont ordonnés par ordre croissant. Soit  $p$  tel que

$$\begin{aligned} c_i \sum_{j=1}^p 1/c_j &\leq \frac{1+p\lambda}{\lambda} \quad \forall i \leq p \\ c_i \sum_{j=1}^p 1/c_j &> \frac{1+p\lambda}{\lambda} \quad \forall i > p. \end{aligned}$$

La procédure de regroupement parallèle du modèle mixte corrigé (cf proposition 2.37) remplace ces  $n$  arcs par un arc de coût

$$\bar{c} = \frac{(1+p\lambda)^2}{2\lambda+1} \frac{1}{\sum_{j=1}^p 1/c_j} - \frac{\lambda^2}{1+2\lambda} \sum_{j=1}^p c_j.$$

**Définition 3.5. Procédure de répartition du modèle mixte corrigé.** Soit  $a$  l'arc original en entrée de la procédure et  $x$  la quantité de flot qui passe sur  $a$ .

Si  $a$  est issu de la procédure de regroupement série, en notant  $a_1$  et  $a_2$  les arcs originaux, la procédure de répartition du modèle mixte corrigé associe le flot  $x$  à l'arc  $a_1$  et à l'arc  $a_2$ .

Si  $a$  est issu de la procédure de regroupement parallèle, alors soit  $a_1, \dots, a_n$  les arcs originaux dont les coûts  $c_1, \dots, c_n$  sont ordonnés par ordre croissant. Soit  $p$  tel que

$$\begin{aligned} c_i \sum_{j=1}^p 1/c_j &\leq \frac{1+p\lambda}{\lambda} \quad \forall i \leq p \\ c_i \sum_{j=1}^p 1/c_j &> \frac{1+p\lambda}{\lambda} \quad \forall i > p. \end{aligned}$$

La procédure de répartition du modèle mixte corrigé associe à l'arc  $a_i$  le flot  $x_i$  suivant :

$$\begin{aligned} x_i &= \left( \frac{1+p\lambda}{c_i \sum_{j=1}^p 1/c_j} - \lambda \right) x \quad \text{si } i \leq p \\ x_i &= 0 \quad \text{si } i > p. \end{aligned}$$

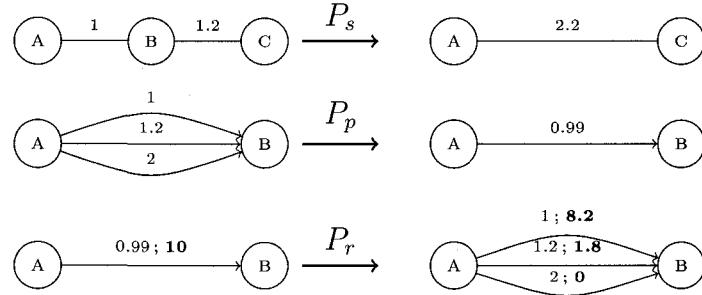


Figure 3.1 Procédures de regroupement et de répartition  $P_s$ ,  $P_p$  et  $P_r$ .

### 3.2 Ensemble d'itinéraires parallèles (EIP)

Lorsque plusieurs itinéraires permettent de se rendre d'un nœud  $u$  à un nœud  $v$ , nous pouvons remplacer chaque itinéraire par un arc (en utilisant  $P_s$ ), puis les arcs ainsi créés par un unique arc (en utilisant  $P_p$ ). Si du flot est affecté sur cet arc équivalent, il est alors possible de déterminer le flot sur chaque arc original grâce à  $P_r$ . Ces structures d'itinéraires parallèles jouent ainsi un rôle important dans notre processus de résolution, nous les définissons sous le nom d'EIP ; elles généralisent la notion de *paired alternative segment* (PAS) [8].

**Définition 3.6. Ensemble d'itinéraires parallèles (EIP).** Soit  $u, v$  deux nœuds du graphe, tels qu'il existe deux itinéraires d'intérieur disjoints de  $u$  à  $v$ . On appelle EIP d'origine  $u$  et de destination  $v$  l'ensemble des itinéraires de  $u$  à  $v$ . On le note  $I(u, v)$ .

**Remarque** Avec cette définition, un EIP est entièrement caractérisé par son origine et sa destination. De plus, par abus de langage, on identifiera parfois un EIP avec le sous-graphe induit par ses itinéraires. Ainsi, on pourra parler des arcs d'un EIP.

Pour fonctionner convenablement, l'application des procédures de regroupement et

de répartition doit s'effectuer dans un certain ordre. Les définitions suivantes formalisent ces notions d'emboîtement et d'ordre des EIP.

**Définition 3.7. Ancêtres et descendants.** Soit  $A = I(u_A, v_A)$  et  $B = I(u_B, v_B)$  deux EIP distincts. On dit que  $B$  est un descendant de  $A$  (et que  $A$  est un ancêtre de  $B$ ) s'il existe un itinéraire de  $u_A$  à  $v_A$  passant par  $u_B$  puis  $v_B$ .

**Définition 3.8. Profondeur d'un EIP.** Soit  $A = I(u_A, v_A)$  un EIP. Soit  $E$  l'ensemble des ancêtres de  $A$ . La profondeur de  $A$  est définie par

- $\text{prof}(A) = 0$  si  $E = \emptyset$  ;
- $\text{prof}(A) = \max_{X \in E} \text{prof}(X) + 1$  sinon.

**Remarque.** La profondeur d'un EIP et le niveau d'un arc sont deux notions liées : la profondeur correspond au plus grand niveau des arcs de l'EIP.

**Définition 3.9. Parents et enfants.** Soit  $A$  et  $B$  deux EIP. On dit que  $A$  est un parent de  $B$  (et que  $B$  est un enfant de  $A$ ) si  $A$  est un ancêtre de  $B$  et que  $\text{prof}(B) = \text{prof}(A) + 1$ .

**Remarque.** Si le graphe est série-parallèle, un EIP a au plus un parent mais peut avoir plusieurs enfants.

Dans un graphe série-parallèle, lorsque deux EIP distincts ont même profondeur, les ensembles d'arcs qu'ils sous-tendent sont nécessairement disjoints. On peut donc traiter simultanément des EIP de même profondeur. Le regroupement des arcs s'effectue alors dans l'ordre suivant :

1. calculer la profondeur des EIP ;
2. appliquer  $P_s$  aux itinéraires des EIP les plus profonds ;
3. appliquer  $P_p$  à chacun des EIP les plus profonds ;
4. retourner en 1.

### 3.3 Présentation de l'algorithme

L'algorithme de répartition pluraliste de flot a pour entrée un graphe  $G$  et un ensemble de demandes  $Q$ . Nous supposons que  $G = (N, A)$  est un graphe série-parallèle par origine destination pondéré et que les poids de ses arcs sont positifs ou nuls. Une demande est un triplet origine, destination, quantité de flot ;  $Q$  est donc un sous-ensemble de  $N \times N \times \mathbb{R}$ . L'utilisation de cet algorithme requiert enfin des procédures de regroupement série et parallèle ainsi qu'une procédure de répartition.

Cet algorithme s'exécute en deux phases. La première, basée sur l'algorithme de Dijkstra, aboutit à une affectation non pluraliste du flot sur les plus courts chemins. Elle permet aussi de construire l'ensemble des EIP. La seconde phase de l'algorithme utilise l'ensemble des EIP détectés pour construire une affectation pluraliste.

Dans la description de l'algorithme 1, page 45, nous notons  $O(Q)$  l'ensemble des noeuds  $o \in N$  tel qu'il existe une demande d'origine  $o$  dans  $Q$ . De même, nous notons  $Dest(o, Q)$  l'ensemble des noeuds  $d \in N$  tel qu'il existe une demande d'origine  $o$  et de destination  $d$  dans  $Q$ .

#### 3.3.1 Première phase : plus courts chemins et détection des EIP

Cette phase a deux objectifs : affecter le flot sur les plus courts chemins et détecter les EIP. Elle se base sur l'algorithme de Dijkstra, dont l'utilisation est justifiée par la positivité du poids des arcs.

Dans un premier temps, l'algorithme de Dijkstra propage des étiquettes sur tous les noeuds accessibles depuis l'origine courante  $o$ . Lorsque l'algorithme s'achève, pour chaque noeud  $n$  étiqueté, on connaît un plus court chemin de  $o$  à  $n$ . Pour chaque demande d'origine  $o$  et de destination  $d$ , on affecte alors le flot sur ce plus court

---

**Algorithme 1** : Affectation pluraliste de flot.

---

**Données** :  $G = (N, A)$  un graphe série-parallèle par origine destination,  $Q$  un ensemble de demandes.

**Sorties** : Affectation pluraliste de flot sur  $G$  répondant à  $Q$ .

**début**

// Première phase

**pour chaque** *origine*  $o \in O(Q)$  **faire**

    Trouver les plus courts chemins de  $o$  vers les destinations  $Dest(o, Q)$ .

    Affecter le flot sur les plus courts chemins trouvés.

    Déetecter les EIP.

// Seconde phase

    Soit  $E$  l'ensemble des EIP détectés.

    Calculer la profondeur des éléments de  $E$ .

    Trier  $E$  par ordre de profondeur décroissant.

**pour chaque**  $e$  *dans*  $E$  **faire**

    // Calcul du coût de  $e$ .

    Appliquer  $P_s$  aux itinéraires de  $e$ .

    Appliquer  $P_p$  à  $e$ .

    Trier  $E$  par ordre de rang croissant.

**pour chaque**  $e$  *dans*  $E$  **faire**

    // Affectation pluraliste du flot autour de  $e$

    Appliquer  $P_r$  à  $e$ .

**fin**

---

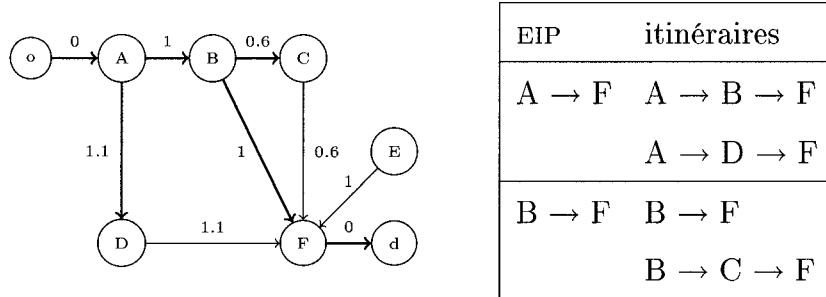


Figure 3.2 Exemple de résultat après la phase I.

chemin de  $o$  à  $d$ .

À ce stade, il est possible de détecter les EIP. En effet, pour chaque nœud  $v$ , il suffit de tester la présence d'une étiquette sur ses prédécesseurs directs. Si un unique prédécesseur de  $v$  est étiqueté, alors aucun EIP n'est détecté. En revanche, si plusieurs prédécesseurs de  $v$  sont étiquetés, alors un EIP de destination  $v$  a été trouvé. Pour trouver l'entrée commune de l'EIP, il suffit de remonter les plus courts chemins, dans l'ordre des étiquettes, depuis les prédécesseurs de  $v$ , jusqu'à tomber sur le premier nœud commun  $u$  (cf procédure page 47).

La figure 3.2 expose le résultat de la phase I. L'arbre des plus courts chemins, trouvé grâce à l'algorithme de Dijkstra, est représenté en gras. Les coûts sont indiqués sur chaque arc. Le nœud F a quatre prédécesseurs. Seuls trois d'entre eux sont étiquetés (B, C et D). En remontant le long des chemins, on trouve deux EIP : le premier d'entrée B et de sortie F, le second d'entrée A et de sortie F.

### 3.3.2 Seconde phase : équilibrage des EIP

Dans la première phase, le flot est affecté sur les plus courts chemins et les EIP sont détectés. Ce n'est que par la suite, durant la phase II, que l'on utilise les EIP pour réaliser une affectation pluraliste en échangeant du flot entre les différents itinéraires

---

**Procédure DetectionDesEIP**

**Données** : Un graphe  $G = (N, A)$ . Pour une origine  $o$ , les étiquettes de Dijkstra associées aux noeuds de  $G$ . L'ensemble  $E$  des EIP déjà détectés.

**Résultat** : Met à jour  $E$  en détectant des nouveaux EIP.

**début**

**pour chaque**  $nœud v \in N$  **faire**

$S \leftarrow \emptyset$ .

        Soit  $P$  l'ensemble des prédecesseurs de  $v$  étiquetés par l'algorithme de Dijkstra.

**pour chaque**  $nœud p \in P$  **faire**

        Soit  $I$  un itinéraire de  $o$  à  $p$ .

**si** un  $nœud$  visité par  $I$  est présent dans  $S$  **alors**

            Soit  $u$  le sommet de  $I$  le plus proche de  $v$  tel que  $u \in S$ .

$E \leftarrow E \cup \{I(u, v)\}$ .

        Ajouter dans  $S$  tous les noeuds visités par  $I$ .

**fin**

---

d'un EIP.

Dans la phase 2 de l'algorithme, les EIP sont classés par profondeur.

Dans un premier temps, le tri est dans l'ordre décroissant. On traite ainsi d'abord les EIP les plus profonds, qui n'ont aucun descendants, et qui ne sont donc qu'un ensemble d'itinéraires en parallèle. Le calcul du coût d'un EIP s'effectue directement en appliquant  $P_s$  aux itinéraires, puis  $P_p$  à l'ensemble des arcs parallèles obtenus. L'EIP étant remplacé par son arc équivalent, le calcul du coût de ses ancêtres pourra s'effectuer de la même manière.

Dans un second temps, le tri est fait dans l'ordre décroissant. La répartition du flot entre les différents itinéraires de l'EIP s'effectue alors directement en appliquant  $P_r$ . Le flot étant affecté sur les arcs originaux, l'affectation du flot sur les EIP enfants pourra s'effectuer de la même manière.

Lors de la phase II, les flots sont agrégés sur les EIP indépendamment de leur origine. La phase II ne dépend donc plus du cardinal de la demande mais seulement du nombre d'EIP détectés.

Une exécution de la phase II est illustrée sur la figure 3.3. Elle fait suite à l'exemple de la figure 3.2 illustrant la phase I. Dans cet exemple, les coûts et les flots sont représentés sur les arcs. Le paramètre  $\lambda$  vaut trois, et les flots sont arrondis. Nous savons de plus que le graphe a deux EIP : le premier,  $I(A, F)$ , de rang nul, et le second,  $I(B, F)$ , de rang un. On applique donc successivement :

- (a) les procédures  $P_s$  et  $P_p$  sur l'EIP  $I(B, F)$  afin d'en calculer le coût équivalent ;
- (b) les procédures  $P_s$  et  $P_p$  sur l'EIP  $I(A, F)$  afin d'en calculer le coût équivalent ;
- (c) on répartit alors le flot sur les itinéraires de l'EIP  $I(A, F)$  à l'aide de la procédure  $P_r$  ;
- (d) on répartit enfin le flot sur les itinéraires de l'EIP  $I(B, F)$  à l'aide de la procédure

$P_r.$

Ainsi, il suffit de calculer la profondeur des EIP pour pouvoir effectuer la seconde phase sans encombre. Une procédure permettant d'effectuer ce calcul est présentée dans la sous-section suivante.

### 3.3.3 Calcul de la profondeur d'un EIP

Le calcul de la profondeur d'un EIP est primordial pour réaliser la phase II de l'algorithme. La procédure page 49 permet de calculer la profondeur des EIP.

---

#### Procédure calculProfondeur

Données : L'ensemble  $E$  des EIP.

Résultat : Calcul de la profondeur de chaque EIP.

**début**

Coller une étiquette dont la valeur est -1 sur tous les arcs de  $G$ .

**pour chaque EIP  $e \in E$  faire**

$\sqsubset$  Incrémenter l'étiquette de chaque arc de  $e$ .

**pour chaque EIP  $e \in E$  faire**

$\sqsubset$  La profondeur de  $e$  est la valeur de la plus petite étiquette collée à un arc de  $e$ .

**fin**

---

**Remarque.** À la fin de cette procédure, la valeur de l'étiquette attachée à l'arc  $a$  est le niveau de celui-ci.

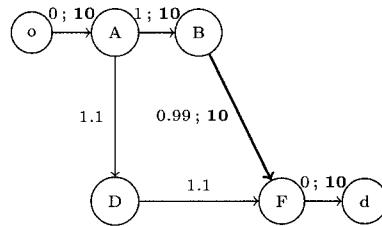
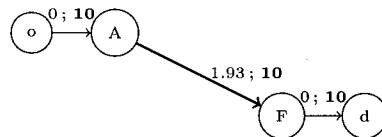
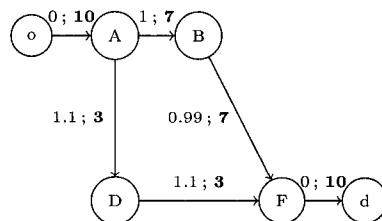
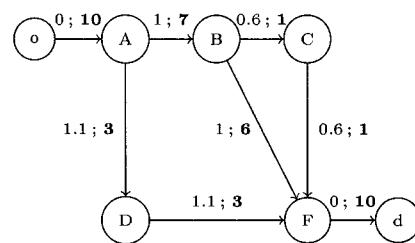
(a)  $P_s$  et  $P_p$  sur l'EIP B→F.(b)  $P_s$  et  $P_p$  sur l'EIP A→F.(c)  $P_r$  sur l'EIP A→F.(d)  $P_r$  sur l'EIP B→F.

Figure 3.3 Exemple d'exécution de la phase II.

## CHAPITRE 4

### PROBLÈME D'AFFECTATION DE PASSAGERS

L'objectif de ce chapitre est de présenter, puis d'étudier le problème d'affectation de passagers dans un réseau de transport en commun. Dans une première section, nous définissons ce problème. Ensuite, nous montrons comment il peut se décliner en deux versions : un modèle statique, paramétré par la fréquence des véhicules sur les lignes, et un modèle spatio-temporel, dans lequel on considère les horaires de passages exacts des véhicules à chaque arrêt. Dans les deux cas, nous détaillons la modélisation du problème d'affectation de passagers par un problème d'affectation de flot dans un graphe particulier. Nous présentons alors le modèle de comportement des passagers, c'est-à-dire la fonction économique associée au problème d'affectation de flot. Nous décrivons enfin une méthode permettant de trouver la solution optimale du modèle.

#### 4.1 Présentations et définition

##### 4.1.1 Présentation du problème

Le problème d'affectation de passagers consiste à prévoir, le plus fidèlement possible, le nombre de passagers sur chaque portion d'un réseau de transport en commun, à partir de la demande et des caractéristiques du réseau.

Les passagers souhaitent, en général, se rendre d'un endroit à un autre. Le plus souvent, ils ont une contrainte d'horaire : rejoindre le lieu d'arrivée avant une certaine heure, comme avant un rendez-vous ; ou quitter le point de départ après un moment

donné, comme après une journée de travail.

Une première approximation du problème consiste à affecter chaque passager sur le plus court chemin lui permettant de répondre à sa demande. Toutefois, ce modèle simpliste est critiquable à bien des égards. En effet, les passagers d'un réseau de transport en commun sont des êtres humains et, par conséquent, leurs goûts et leurs priorités ne sont pas identiques : les vieilles dames préfèrent voyager assises, les jeunes cadres dynamiques choisissent la rapidité, les faveurs des étudiants dépendent des choix de leurs camarades, etc. On parle du comportement pluraliste des usagers. La pondération des différentes composantes du parcours (temps d'attente, temps de trajet, coût par changement, etc.) ne devrait pas être identique pour tous les usagers ; c'est pourquoi prendre des pondérations moyennes, puis affecter tous les passagers sur les plus courts chemins, ne permet pas de reproduire le comportement de l'ensemble des usagers.

Toutefois, en utilisant un modèle pluraliste et sélectif, nous pouvons utiliser des pondérations moyennes. En effet, lorsque deux routes ont des coûts proches, le pluralisme assure qu'elles seront toutes les deux utilisées, ce qui permet de retrouver le comportement des différentes catégories d'usagers. La sélectivité assure de son côté qu'aucun passager ne choisira un itinéraire « trop » mauvais.

Le modèle que nous souhaitons utiliser ne doit pas dépendre des itinéraires mauvais : puisqu'ils ne sont pas utilisés, les retirer du réseau ne doit pas changer la solution. De plus, les choix des usagers ne doivent pas dépendre de leurs antécédents : lorsque des passagers se trouvent à la station de métro Jean Talon, on peut oublier leur provenance, car seule compte, désormais, leur destination. Enfin, le coût ressenti par la succession de plusieurs portions d'itinéraire doit être la somme des coûts de chaque portion.

Pour reprendre la terminologie développée dans la section 2.2, notre modèle doit être

pluraliste, sélectif, sans mémoire, additif en série et indépendant des arcs inutilisés. Il faut aussi prendre en compte la congestion des lignes ; toutefois, celle-ci doit rester un facteur secondaire dans le choix des usagers.

Ces hypothèses forment une première approximation du comportement des passagers. Elles permettent de simplifier le problème et d'en accélérer la résolution. Il faut les valider en les comparant au comportement observé des passagers.

#### 4.1.2 Réseau de transport en commun

Le problème d'affectation de passagers dans un réseau de transport en commun se base, comme son nom l'indique, sur un *réseau de transport en commun*. Celui-ci est composé d'un ensemble d'*arrêts*  $\mathcal{A}$ , d'un ensemble de *lignes*  $\mathcal{L}$ , et d'un ensemble de *voyages*  $\mathcal{V}$ . Un *arrêt* est un lieu géographique où les usagers peuvent entrer et sortir du réseau ou effectuer un changement de ligne. Une *ligne* est un ensemble d'arrêts, parcouru dans un certain ordre ; avec cette définition stricte, une « ligne » d'autobus est en fait composée de deux lignes, une pour chaque direction. Un *voyage* est le passage d'un véhicule sur une ligne. Un exemple de réseau composé de 6 lignes et de 8 voyages est illustré par la figure 4.1.

Pour évaluer l'attraction d'une route sur les usagers, il faut associer aux différentes parties de réseau des coûts généralisés d'utilisation. Le critère le plus important pour le choix des usagers étant le temps du trajet, ces coûts généralisés dépendront du temps multiplié par des constantes dépendantes de la portion de route utilisée. Ces constantes paramètrent le *confort* de chaque partie du réseau et dépendent principalement du mode de transport représenté par l'arc (marche, attente, autobus, métro, etc). Elles peuvent aussi dépendre d'une multitude d'autres facteurs comme la saison, la ville ou la société de transport. Ces paramètres doivent être choisis par les

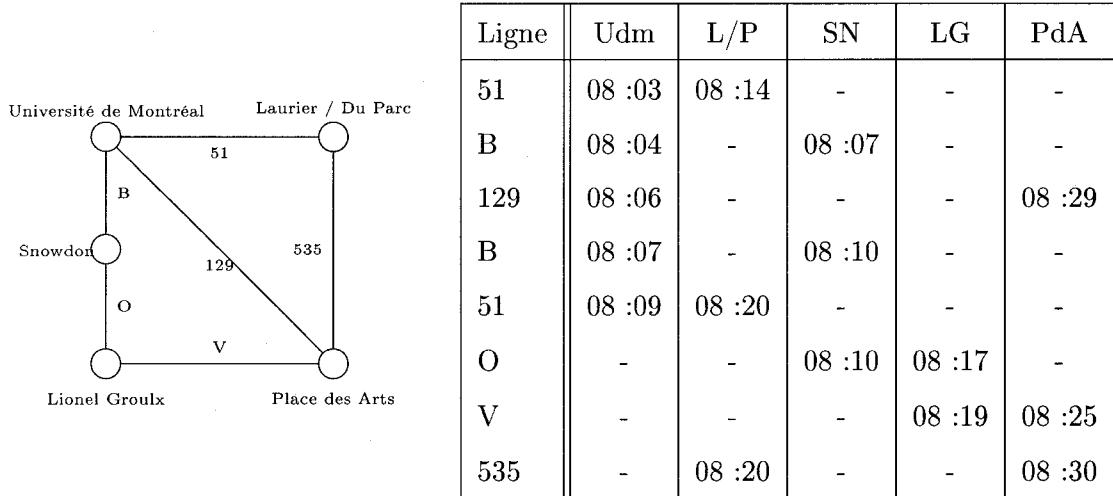


Figure 4.1 Exemple de réseau de transport en commun

planificateurs qui connaissent leur réseau et leurs usagers<sup>1</sup>.

#### 4.1.3 Modèle fréquentiel et spatio-temporel

La planification d'un réseau de transport en commun peut être traitée à deux niveaux de détails. Un premier niveau consiste à choisir la fréquence des voyages sur une ligne. Les coûts des itinéraires se calculent alors comme des espérances de temps de parcours. Un second niveau de détail consiste à choisir les horaires de passage de tous les voyages à tous leurs arrêts.

Le modèle fréquentiel est beaucoup moins complexe, c'est de plus une très bonne approximation du système lorsque les fréquences sont élevées, comme aux heures de pointe. Le modèle spatio-temporel, bien que plus complexe, s'avère être beaucoup

1. Heureusement, la modélisation du comportement pluraliste des usagers permet aussi de prendre en compte les incertitudes : les résultats trouvés ne seront pas « trop » sensibles aux variations des paramètres de confort.

plus précis et permet de traiter les basses fréquences.

On peut concevoir l'optimisation d'un réseau de transport en deux temps. L'utilisation du modèle fréquentiel permet d'optimiser le réseau en choisissant les meilleures fréquences, à l'heure de pointe, pour chaque ligne ; le modèle spatio-temporel permet ensuite d'agencer au mieux les départs hors pointe tout en respectant les fréquences trouvées pour l'heure de pointe par le premier modèle. Cette planification détaillée pour toute la journée permet de trouver le meilleur compromis entre la qualité de service et le budget d'opération, qui est fonction du nombre d'heures d'utilisation des véhicules.

L'objectif des sections suivantes est de présenter ces deux modèles.

## 4.2 Modèle fréquentiel

### 4.2.1 Présentation

Bien que moins précis, le modèle fréquentiel n'est pas forcément le plus mauvais. Il devient même parfaitement justifié aux heures de pointe, lorsque la fréquence des autobus est grande, mais que leur temps de parcours est soumis aux vicissitudes du trafic urbain. Dans ce cas, l'écart entre l'heure de passage aux arrêts et l'heure prévue est significatif par rapport à l'intervalle entre deux passages pour une même ligne.

Dans le modèle fréquentiel, les usagers choisissent leurs itinéraires en fonction de l'espérance du temps de parcours. Lorsqu'une unique ligne joint deux points du réseau, le coût du parcours est simple : il s'agit de l'espérance du temps de route augmentée de l'espérance d'attente. Si le nombre de passages d'un autobus par unité de temps suit une loi de Poisson d'espérance  $f$ , alors l'espérance du temps d'attente

est  $\frac{1}{f}$ . Si les passages surviennent avec une fréquence constante  $f$ , alors l'espérance d'attente est  $\frac{1}{2f}$ .

Le coût d'une route peut cependant devenir plus compliqué lorsque plusieurs lignes joignent les deux mêmes points ; on parle alors de lignes communes.

#### 4.2.2 Lignes communes

La détermination du coût d'une route, nécessaire pour construire le graphe sous-jacent au modèle fréquentiel, n'est pas évidente dans le cas de lignes communes. En effet, dans la mesure où le passager peut prendre plusieurs autobus différents, son espérance d'attente et de temps de parcours ne dépend plus seulement d'un seul autobus, mais de la combinaison de plusieurs autobus. Dans cette sous-section, nous présentons brièvement comment calculer ces espérances. Nous nous basons ici sur les travaux de Y. Bzioui [1].

Nous avons besoin ici d'une relation sur la vitesse relative des autobus. Cette relation consiste à considérer que les autobus sont soit de nature *express* soit de nature *omnibus*. Un *omnibus* ne pourra ainsi jamais dépasser un *express*. D'un point de vue plus formel, nous sommes amenés à définir la relation d'ordre suivante entre les voyages. Soit  $v_1, v_2$  deux voyages, on dit que  $v_2$  est plus lent que  $v_1$  ( $v_2 \preccurlyeq v_1$ ) si pour tout couple d'arrêts  $(a, b)$  tel que  $v_1$  et  $v_2$  desservent  $a$  respectivement en  $t_1$  et  $t_2$  avec  $t_1 \leq t_2$ , on a

$$t_1 + c_1(a \rightarrow b) \leq t_2 + c_2(a \rightarrow b),$$

où  $c_i(a \rightarrow b)$  est le coût généralisé du trajet de  $a$  à  $b$  en empruntant le voyage  $v_i$ .

Dans notre modèle fréquentiel, lorsque plusieurs lignes joignent deux mêmes arrêts du réseau, le choix du passager s'effectue en deux temps. Dans un premier temps, il sélectionne un certain nombre de lignes, qu'il juge intéressantes. Puis il embarque

dans le premier voyage d'une ligne intéressante qui passe. Soit  $x_i$  la variable binaire représentant le choix du passager :  $x_i = 1$  si la ligne  $i$  est intéressante, 0 sinon. L'espérance d'attente est alors donnée par la formule

$$\frac{\gamma}{\sum_i x_i f_i},$$

où les  $f_i$  sont les fréquences de chacune des lignes desservant l'arrêt, et  $\gamma = 1$  si le passage d'un autobus est modélisé par une loi de Poisson, ou  $\gamma = 1/2$  si le passage d'un autobus est modélisé par une loi uniforme. L'espérance du temps de parcours entre les deux points est alors donnée par

$$\frac{\sum_i f_i T_i x_i}{\sum_i f_i x_i},$$

où  $T_i$  est le temps de parcours en utilisant la ligne  $i$ .

Il semble alors que le passager peut déterminer  $2^n$  ensembles de lignes intéressantes, lorsque  $n$  lignes communes desservent sa route. Il n'en est rien. Le passager ne sera en effet pas prêt à laisser passer, volontairement, le véhicule d'une ligne rapide pour prendre le véhicule d'une ligne lente. Ainsi, si les  $n$  lignes communes sont triées par vitesse décroissante, le choix d'un passager est un vecteur semblable à  $x_i = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ . Il y a donc seulement  $n$  ensembles de lignes intéressantes.

#### 4.2.3 Graphe fréquentiel

À partir du réseau de transport en commun, nous construisons un graphe fréquentiel. La figure 4.2 présente un exemple de graphe fréquentiel. Il modélise le réseau de la figure 4.1. Cet exemple nous sert ici à illustrer les différents types d'arcs et de noeuds.

Chaque arrêt géographique du réseau est représenté par un *noeud d'arrêt*. Dans la figure 4.2, les noeuds de forme rectangulaire sont des noeuds d'arrêt ; on y trouve la

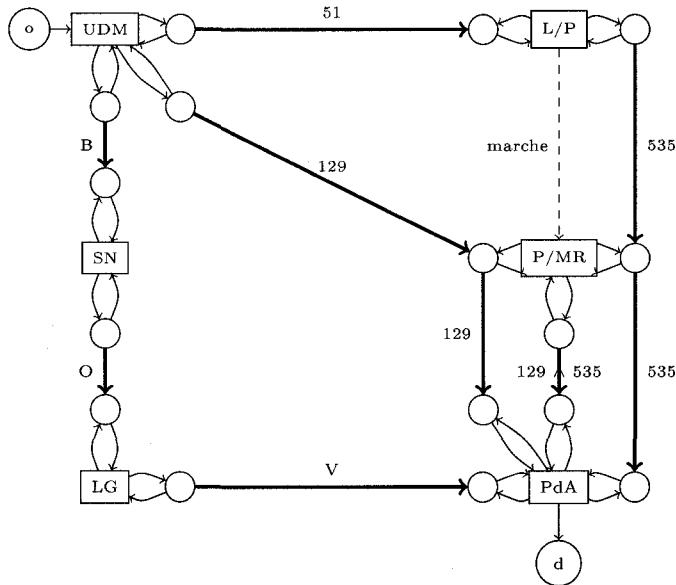


Figure 4.2 Exemple de graphe fréquentiel

description géographique de l'arrêt (UDM : université de Montréal, L/P : intersection de la rue Laurier avec l'avenue du Parc, etc.).

Lorsqu'il est possible de marcher d'un arrêt à un autre, un *arc de marche*, dont le coût généralisé est le temps de marche pondéré, relie les nœuds d'arrêt correspondants. L'arc, illustré par un trait interrompu sur la figure 4.2, représente la possibilité de marcher pour se rendre de l'intersection entre la rue Laurier et l'avenue du Parc à l'intersection entre le boulevard du Mont-Royal et l'avenue du Parc.

Chaque ligne du réseau est représentée par une succession de *nœuds de ligne* et *d'arcs de ligne*. Les nœuds de ligne correspondent aux arrêts desservis par la ligne. Les arcs de ligne joignent deux nœuds de ligne consécutifs entre eux. Leur coût généralisé est le temps de parcours pondéré entre ces deux nœuds de ligne. Chaque nœud de ligne est de plus connecté au nœud d'arrêt correspondant par deux arcs : un arc sortant de coût généralisé nul, un arc entrant dont le coût généralisé dépend de l'espérance d'attente. Sur la figure 4.2, les nœuds ronds non marqués correspondent aux nœuds

de ligne du graphe. De même, les arcs représentés par un trait gras sont les arcs de lignes.

Lorsque plusieurs lignes desservent une suite d'arrêts consécutifs, des lignes fictives sont créées. Si les lignes communes sont triées par ordre de vitesse décroissante, alors les lignes fictives correspondent aux choix  $x_i = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ , où  $x_i[k] = 1$  si la ligne  $k$  est sélectionnée. Les coûts d'attente et de trajet de ces lignes sont donnés par les calculs d'espérance de la sous-section précédente. Ces lignes fictives sont alors traitées de la même façon que les lignes réelles. Sur la figure 4.2, l'arc indicé 129 $\wedge$ 535, entre l'intersection du boulevard du Mont-Royal et de l'avenue du Parc et la station Place des Arts, représente la ligne commune formée des lignes 129 et 535.

Un graphe fréquentiel comporte aussi des nœuds et des arcs d'accès au réseau. À chaque zone d'origine présente dans l'ensemble des demandes est associé un nœud d'accès. Il est relié à tous les arrêts accessibles dans cette zone par des arcs d'accès au réseau de coût nul. De même, à chaque zone de destination présente dans l'ensemble des demandes est associé un nœud de sortie. Des arcs de coût généralisé nul font alors le lien entre les arrêts de la zone et ce nœud.

### 4.3 Modèle spatio-temporel

#### 4.3.1 Présentation

Contrairement au modèle fréquentiel, où on ne considère que les lignes de transport en commun, le modèle spatio-temporel considère indépendamment tous les voyages de toutes les lignes. Une correspondance d'un voyage à un autre n'est réalisable que si ces voyages ont un arrêt en commun et uniquement dans le *sens de la flèche du temps*, c'est-à-dire du premier voyage à desservir cet arrêt vers le second. Les

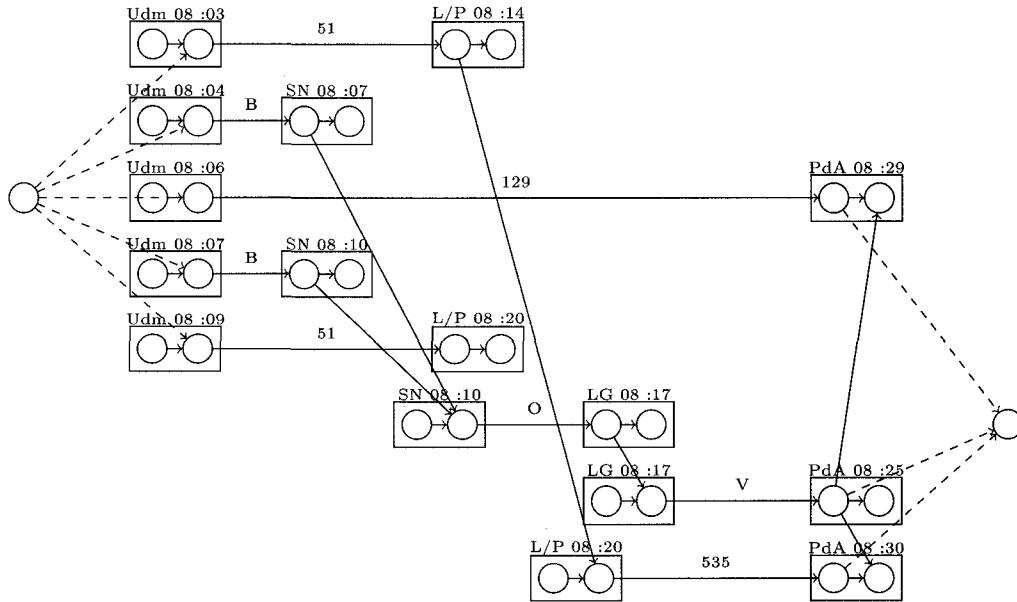


Figure 4.3 Exemple de graphe spatio-temporel

variables de ce problème sont les flots entre chaque paire d'arrêts consécutifs de chaque voyage et entre chaque paire de voyages consécutifs dans le temps desservant un même arrêt. Les premières variables représentent l'utilisation d'un véhicule et les secondes l'attente à un arrêt. Le modèle spatio-temporel est donc beaucoup plus gros que le modèle statique en terme de nombre de variables. Ce modèle permet surtout de résoudre de manière plus précise l'affectation d'itinéraires pendant les heures creuses. En effet, lorsqu'un autobus a une fréquence de deux voyages par heure, l'attente n'est pas ressentie de la même manière par les usagers arrivant vingt minutes avant le prochain départ que par ceux arrivant cinq minutes avant.

#### 4.3.2 Graphe spatio-temporel

À partir du réseau de transport en commun, nous construisons un graphe spatio-temporel. La figure 4.3 présente un exemple de graphe spatio-temporel. Il modélise le réseau de la figure 4.1. Cet exemple nous sert ici à illustrer les différents types

d'arcs et de nœuds.

Dans ce graphe, les arrêts géographiques du réseau sont dupliqués, de telle sorte qu'il y existe deux nœuds à chaque fois qu'un véhicule dessert un arrêt. Le premier de ces nœuds, le *nœud de débarquement* correspond au débarquement du véhicule, le second, le *nœud d'embarquement*, à l'embarquement.

Un arc de coût nul relie le nœud de débarquement d'un voyage à un arrêt au nœud d'embarquement du même voyage, au même arrêt ; ces arcs représentent la possibilité de rester dans l'autobus. Un arc, dont le coût est la durée du trajet pondérée par son confort, relie le nœud d'embarquement d'un voyage à un arrêt au nœud de débarquement du même voyage, à l'arrêt suivant ; ces arcs représentent la possibilité d'emprunter le véhicule pour se déplacer. Enfin, pour représenter la possibilité de changer de véhicule, des arcs relient le nœud de débarquement de tout voyage, en tout arrêt, aux nœuds d'embarquement des premiers voyages suivants de chaque ligne passant par cet arrêt. Le coût de ces arcs prend en compte l'inconfort de la correspondance, le temps de marche et le temps d'attente.

Des nœuds et des arcs sont aussi ajoutés à ce graphe pour représenter la demande. Pour chaque demande, on ajoute un nœud pour son origine et un pour sa destination. L'origine, ainsi que la destination, d'une demande peuvent être liées à un unique arrêt, ou à plusieurs arrêts, pour représenter une zone géographique plus étendue. Des arcs relient alors le nœud de l'origine de la demande à tous les nœuds d'embarquement correspondant à la desserte d'un arrêt de la zone de cette origine à l'horaire correspondant à la demande. De même, des arcs relient les nœuds de débarquement correspondant aux arrêts de la zone de la destination au nœud destination de la demande.

Pour limiter la taille du graphe, on peut ignorer certaines possibilités. Ainsi, on peut supposer que les passagers ne sortiront pas d'un autobus pour emprunter un autre

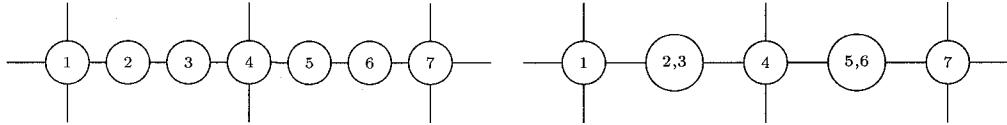


Figure 4.4 Regroupement des arrêts par bloc

autobus de la même ligne. De même, lorsque plusieurs lignes desservent la même succession d'arrêts, on considère que les passagers peuvent seulement changer de lignes au premier, ou au dernier, arrêt commun. Ils utilisent ainsi la ligne la plus rapide pour parcourir la partie commune. La taille du graphe peut être aussi limitée en regroupant par bloc les arrêts se trouvant entre deux correspondances, comme cela est illustré par la figure 4.4. Dans cette figure, il est possible de changer de lignes sur les nœuds 1, 4 et 7. Les nœuds 2,3 et 5,6 ne permettent pas de changer de ligne d'autobus : un passager n'embarque ou ne débarque à ces nœuds que pour entrer ou sortir du réseau. Le couple 2,3 est donc regroupé en un unique nœud. Ce type de regroupement modifie le coût généralisé de la solution mais ne change pas le flot sur les arcs.

#### 4.4 Modèle de comportement des usagers

Dans la section précédente, nous avons représenté les problèmes d'affectation de passagers fréquentiel et spatio-temporel sous forme d'un problème d'affectation de flot, c'est-à-dire sous forme d'un graphe et d'un ensemble de demande.

Pour résoudre le problème d'affectation de passagers, il nous faut déterminer le flot sur chaque arc du graphe  $G$ . Pour cela, nous devons définir un modèle de comportement. Nous avons opté pour un modèle pluraliste, sélectif, indépendant des arcs inutilisés, sans mémoire, additif en série et qui prend en compte la congestion. Ce choix nous permet de modéliser assez fidèlement le comportement des usagers d'un

réseau de transport en commun, sans dépendre trop fortement des données et des paramètres.

#### 4.4.1 Modélisation du comportement

Pour modéliser le comportement des usagers, sans prendre en compte la congestion, nous utilisons le modèle mixte corrigé que nous avons étudié dans la section 2.3. La fonction de coût du modèle s'écrit :

$$F(X) = \sum_{q \in Q} \sum_{a \in A} \left( \prod_{l=0}^{l_a} V(x_{q,a}^{l-2}, x_{q,a}^{l-1}) \right) \left( \lambda x_{q,a}^{l_a-1} c_a x_{q,a} + \frac{1}{2} c_a x_{q,a}^2 \right).$$

Nous savons que ce modèle est pluraliste, sélectif, sans mémoire, indépendant des arcs inutilisés et additif en série. Toutefois, il ne prend pas en compte la congestion.

#### 4.4.2 Modélisation de la congestion

Pour modéliser la congestion, nous modifions la fonction coût du modèle de comportement introduit précédemment. Désormais, le poids  $c_a$  d'un arc est remplacé par une fonction  $g_a$  du flot total  $x_a = \sum_q x_{q,a}$  sur  $a$ .

Pour modéliser la congestion, il faut que  $g_a(x_a)$  soit une fonction positive croissante ; en effet, plus un véhicule est chargé moins il est confortable. Pour que la convergence soit aisée, il est, de plus, préférable d'imposer que la fonction  $x_a \rightarrow x_a g_a(x_a)$  soit  $C^1$ .

Pour chaque arc  $a$  de poids  $c_a$ , le planificateur doit déterminer un paramètre de capacité  $K_a$  et un paramètre de pénalisation pour la congestion  $\alpha_a$ . Ces paramètres dépendent du type d'arc (attente, type de véhicule, etc.). La congestion peut alors

se modéliser en utilisant la fonction :

$$g_a : x_a \rightarrow \begin{cases} c_a & \text{si } x_a \leq K_a \\ c_a \left(1 + \alpha_a \frac{(x_a - K_a)^2}{x_a}\right) & \text{si } x_a > K_a. \end{cases}$$

Celle-ci est en effet positive et croissante. De plus, la fonction  $x_a \rightarrow x_a g_a(x_a)$  est  $\mathcal{C}^1$  ; en effet, sa dérivée s'écrit  $c_a$  pour  $x \leq K_a$  et  $c_a (1 + 2\alpha_a(x_a - K_a))$  pour  $x \geq K_a$  et est donc continue.

Nous obtenons alors la fonction de coût :

$$F(X) = \sum_{q \in Q} \sum_{a \in A} \left( \prod_{l=0}^{l_a} V(x_{q,a}^{l-2}, x_{q,a}^{l-1}) \right) \left( \lambda x_{q,a}^{l_a-1} g_a \left( \sum_q x_{q,a} \right) x_{q,a} + \frac{1}{2} g_a \left( \sum_q x_{q,a} \right) x_{q,a}^2 \right).$$

#### 4.5 Méthode de résolution

La méthode de résolution que nous présentons pour résoudre le problème d'affectation de passagers en tenant compte de la congestion est un procédé itératif qui s'inspire de la méthode présentée par Y. Bzioui dans [1]. À chaque itération, on calcule le coût des arcs en fonction du flot total affecté puis on résout le modèle mixte corrigé, en considérant que le coût des arcs est constant, pour déterminer une nouvelle affectation ; cette méthode est présentée par l'algorithme 4.

Dans cet algorithme, nous utilisons l'algorithme 1 pour affecter un flot sur le graphe. Cet algorithme a été développé pour les graphes série-parallèle par origine destination, il devient moins robuste et n'est pas exact dans le cas de graphe quelconque. Or les graphes sur lesquels nous travaillons, et qui ont été présentés dans les sections précédentes, ne sont pas série-parallèle par origine destination. Supposons que nous ayons une structure en « huit », comme illustré sur la figure 4.5. Les limites du modèle sont atteintes si les trois itinéraire du « huit » sont bons. Toutefois, il est fort probable qu'au moins une des routes soit « mauvaise » ; par exemple, une des routes

---

**Algorithm 4** : Résolution du problème d'affectation de passagers.

---

**Données** : Un problème d'affectation de passagers.

**Sorties** : Une affectation pluraliste, sélective, sans mémoire, indépendante des arcs inutilisés et prenant en compte la congestion.

**début**

**tant que** *le flot est sensiblement modifié faire*

    |  Calculer le coût des arcs en fonction du flot.

    |  Affecter le flot sur le graphe obtenu à l'aide de l'algorithme 1.

**fin**

---

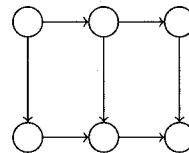


Figure 4.5 Structure en « huit »

pourrait avoir une correspondance de plus. Ainsi, bien que les graphes modélisant les réseaux ne soient pas série-parallèle par origine destination, le nombre de « huit » gênants est vraisemblablement faible.

Nous avons ainsi présenté deux modélisations pour le réseau de transport en commun, et une modélisation du comportement des usagers. Malgré le problème engendré par les structures en « huit » présentes dans les graphes modélisant le réseau, nous avons implémenté la méthode de résolution du chapitre 3 pour tester la modélisation spatio-temporelle, présentée dans ce chapitre. L'étude de cette implémentation et les résultats trouvés, sont présentés dans le chapitre suivant.

## CHAPITRE 5

### IMPLÉMENTATION ET RÉSULTATS

Dans les chapitres précédents, nous avons posé les bases de notre méthode de résolution du problème d'affectation pluraliste d'un flot de passagers dans un réseau de transport en commun. Pour tester et valider cette méthode, nous l'avons implantée. Cette implantation a été ensuite utilisée pour résoudre des problèmes d'affectation basés sur le réseau de transport en commun de Montréal, géré par la STM. Dans ce chapitre, nous décrivons cette implantation et nous en présentons les résultats.

#### 5.1 Implémentation

Le code implémentant la méthode d'affectation pluraliste de passagers se décompose en deux parties indépendantes :

- un ensemble de programmes *perl* réalisé par Benoit ROCHEFORT, analyste au GERAD, et dont l'objectif est de construire le graphe spatio-temporel à partir des données des compagnies de transport en commun ;
- un programme *C* dont le but est de réaliser une affectation pluraliste, dans un graphe fourni en entrée.

##### 5.1.1 Construction du graphe

La construction du graphe est implantée par un ensemble de scripts *perl*. À date, seule la version spatio-temporelle a été implantée. i ensemble de scripts se dé-

compose en deux parties. La première partie transforme les données d'une société de transport en un ensemble de tables. Elle teste de plus la validité et la cohérence de ses données et les utilise pour extrapoler les informations manquantes. La seconde partie construit le graphe spatio-temporel à partir des tables construites préalablement.

### 5.1.2 Affectation de passagers

L'affectation pluraliste de passagers est implémentée en *C*. Les entrées du code sont des fichiers décrivant le graphe et la demande. Le code comporte trois phases distinctes. Dans la première phase, les plus courts chemins sont calculés pour chaque origine. On affecte de plus tout le flot de chaque demande sur ces plus courts chemins. Cette première phase permet aussi de construire l'ensemble des EIP. Une seconde phase détermine les relations d'inclusion entre les différents EIP. Cette phase permet aussi de trouver les paires d'EIP formant des structures non série-parallèle. Elle représente l'essentiel du temps d'exécution du programme. La dernière phase réalise successivement des affectations pluralistes en prenant en compte la congestion pour mettre à jour le coût des itinéraires des différents EIP.

### 5.1.3 Méthodes de suppression des huit

Comme nous l'avons mentionné dans la sous-section 2.5.2, ce mémoire n'a pas eu pour objet de construire un modèle pour les singularités non série-parallèle. Ainsi, le choix retenu actuellement dans le code pour traiter des structures en huit consiste à supprimer un des EIP formant le huit, les passagers étant alors affectés sur le plus court chemin. Ce choix présente l'avantage de la simplicité et de la rapidité mais détériore le pluralisme de la solution.

#### 5.1.4 Accélération du calcul des plus courts chemins

Dans cette sous-section, nous présentons des méthodes dont l'objectif est d'accélérer le calcul des plus courts chemins et de ne détecter que les EIP utiles, sans toutefois détériorer la solution. Nous passons en revue brièvement chacune de ces méthodes.

**Limitation en profondeur** Dans un réseau de transport en commun classique, utilisé quotidiennement par de nombreux passagers, comme celui de la ville de Montréal, les usagers dont le voyage dure plus d'une heure et demie ou nécessite plus de trois correspondances sont très rares. Nous décidons donc de les négliger en limitant notre recherche des plus courts chemins à l'ensemble des itinéraires dont la durée et le nombre de correspondances sont bornés par ces constantes. Bien entendu, ces dernières peuvent être adaptées selon les habitudes observées par les différentes sociétés de transport. Il est aussi possible de paramétriser et de valider ce nombre limite de correspondance à l'aide de l'enquête ménage ou des données de cartes à puce.

**Dominance par arrêt** Dans le cas du problème spatio-temporel, le calcul du plus court chemin dans le graphe n'est pas véritablement significatif. En effet, puisqu'un nœud représente un arrêt à un instant donné, il existe autant de plus courts chemins vers un arrêt que d'instants où l'arrêt est desservi. Il est donc plus judicieux de calculer les plus courts chemins vers les arrêts et non pas vers les nœuds.

**Dominance par voyage** Il peut arriver qu'un usager puisse rejoindre un voyage donné à plusieurs endroits différents. Dans tous les cas, le passager arrive à sa prochaine destination au même instant. C'est pourquoi nous imposons au passager d'embarquer dans un voyage le plus tôt possible. Cette décision ne détériore pas de manière conséquente le pluralisme puisqu'elle n'empêche pas d'embarquer sur une autre

ligne ni sur un voyage différent d'une même ligne.

### 5.1.5 Accélération de la convergence

Comme nous l'avons décrit précédemment, la prise en compte de la congestion est réalisée par un procédé itératif. Ce procédé consiste à mettre à jour le coût des arcs en fonction de leur flot, puis de réaffecter le flot sur les arcs. Ce procédé peut malheureusement être assez instable. En effet, si deux arcs de coûts très proches sont montés en parallèle et qu'un grand nombre de passagers est affecté sur le premier arc, alors la prise en compte de la congestion risque de déplacer tout le flot du premier arc sur le second arc. Celui-ci devient alors surchargé et l'itération suivante transfère tout le flot du second arc sur le premier. Ce cas de figure aboutit donc à des oscillations du flot ; par conséquent, l'algorithme converge très lentement.

Pour accélérer la convergence, nous amortissons la mise à jour du coût des arcs. Notons  $c_i$  le coût d'un arc  $a$  à l'itération  $i$ ,  $f$  la fonction de congestion d'un arc et  $x_i$  le flot à l'itération  $i$  de l'arc. Sans amortissement, le coût de l'arc  $a$  devient :

$$c_{i+1} = f(x_i).$$

Si, en revanche, on amortit le coût pour accélérer la convergence, le coût de l'arc  $a$  devient :

$$c_{i+1} = (1 - \rho) c_i + \rho f(x_i),$$

où  $\rho$  est un paramètre entre 0 et 1.

Cette méthode a été implémentée dans notre code et assure effectivement un convergence en quelques itérations.

## 5.2 Résultats

Dans cette section, nous présentons les résultats que nous obtenons en résolvant le problème d'affectation pluraliste sur le réseau de la STM. La géographie des lignes et les horaires de passage correspondent à une journée type d'une semaine de l'année 2006.

L'ordinateur utilisé pour exécuter le code est la machine « omelette » du GERAD. Cette machine comporte quatre processeurs de type Dual Core AMD Opteron(tm) Processor 285 de 2592.691 Mhz ; il s'agit d'une architecture 64 bit. Cette machine contient de plus 8 gigabit de mémoire.

Dans un première partie, nous étudions plusieurs exemples simples, et nous nous intéressons à la répartition du flot. Dans une seconde partie, nous étudions les performances du programme face à un ensemble de demandes proches de la réalité.

### 5.2.1 Étude d'exemples

Dans cette sous-section, nous observons le comportement de notre implémentation pour résoudre des problèmes ayant peu de demandes. L'objectif est de montrer dans quelle mesure les solutions trouvées sont pluralistes, et d'étudier succinctement leurs sensibilités aux différents paramètres.

Nous considérons le graphe représentant les lignes du métro orange, bleue et verte de Montréal ainsi que la ligne d'autobus 161 de la STM, entre 12h00 et 14h00. Nous étudions une demande dont l'origine est la station Plamondon à 12h10 et dont la destination est la station Rosemont.

Pour répondre à cette demande, le programme propose jusqu'à trois itinéraires. Le

premier itinéraire (que nous notons A) consiste à emprunter la ligne de métro orange, en direction de Montmorency, depuis la station Plamondon jusqu'à la station Rosemont. Ce trajet ne nécessite aucune correspondance, de plus les métros sont peu sensibles à la congestion et sont assez fréquents. Le second itinéraire (que nous notons B) consiste à emprunter la ligne 161 de Plamondon jusqu'à Rosemont. Ce trajet est un peu plus rapide que le précédent et ne nécessite pas non plus de correspondance. Toutefois, les autobus sont moins confortables, plus sensibles à la congestion et moins fréquents que les métros. Enfin un troisième itinéraire (que nous notons C) peut être proposé. Il consiste à prendre la ligne de métro orange jusqu'à Snowdon puis à emprunter la ligne bleue jusqu'à Jean-Talon pour enfin prendre la ligne orange jusqu'à Rosemont. Cet itinéraire est plus long que les précédents et nécessite deux correspondances. Ces différents itinéraires sont représentés sur la figure 5.1.

### 5.2.1.1 Effet du paramètre $\lambda$

Comme nous l'avons montré dans l'étude théorique du modèle mixte corrigé (section 2.4), le paramètre  $\lambda$  influe sur le pluralisme de la solution. Le tableau 5.1 présente la répartition des passagers entre les différents itinéraires pour plusieurs valeurs de  $\lambda$ . On constate effectivement que plus  $\lambda$  est petit, plus le flot se disperse.

Tableau 5.1 Répartition des passagers pour différentes valeurs de  $\lambda$ .

	itinéraire A	itinéraire B	itinéraire C
$\lambda = 1.5$	55%	43%	2%
$\lambda = 3.0$	63%	37%	0%
$\lambda = 4.5$	68%	32%	0%

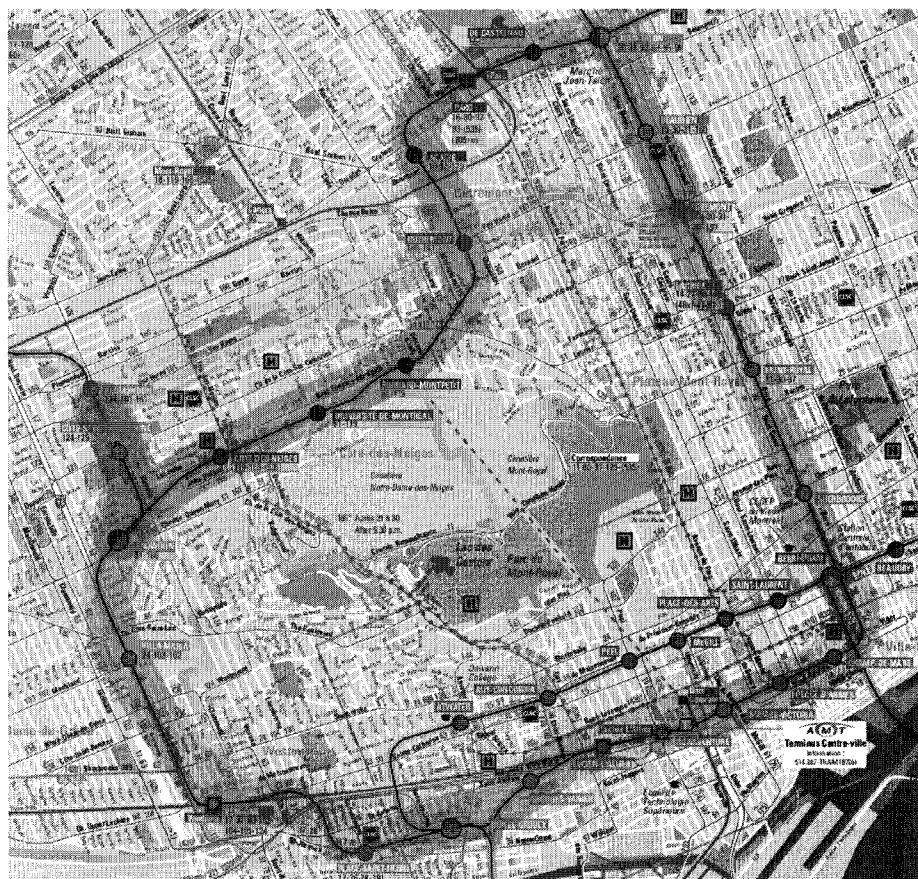


Figure 5.1 Itinéraires de Plamondon à Rosemont.

### 5.2.1.2 Effet des coefficients de confort

Nous étudions ici le comportement de notre algorithme face à des modifications légères des paramètres de confort. Les durées des itinéraires A et B sont proches : le premier dure trente-sept minutes et le second trente-huit minutes. Selon les choix des paramètres de confort, le coût généralisé du trajet A peut donc être soit inférieur, soit supérieur à celui du trajet B. Le tableau 5.2 présente les différentes répartitions du flot entre les itinéraires pour plusieurs valeurs des coefficients de confort. Nous notons  $\alpha_A$  le coefficient de confort du trajet en métro et  $\alpha_B$  le coefficient de confort du trajet en autobus. On rappelle que le coût généralisé d'un itinéraire est le produit de sa durée par son coefficient de confort. On constate que la répartition des passagers dépend linéairement de  $\frac{\alpha_A C_A}{\alpha_A C_A + \alpha_B C_B}$ . L'erreur engendrée par l'imprécision du calcul des coefficient de confort est donc du même ordre que cette imprécision.

Tableau 5.2 Répartition des passagers pour différentes valeurs des coefficient de confort.

		itinéraire A	itinéraire B	itinéraire C
$\alpha_A = 1$	$\alpha_B = 0.8$	10%	90%	0%
$\alpha_A = 1$	$\alpha_B = 0.9$	29%	71%	0%
$\alpha_A = 1$	$\alpha_B = 0.95$	38%	62%	0%
$\alpha_A = 1$	$\alpha_B = 1$	47%	53%	0%
$\alpha_A = 1$	$\alpha_B = 1.05$	55%	45%	0%
$\alpha_A = 1$	$\alpha_B = 1.1$	62%	38%	0%
$\alpha_A = 1$	$\alpha_B = 1.2$	77%	23%	0%

### 5.2.1.3 Effet de la congestion

Nous étudions ici l'effet de la congestion. Nous supposons que le confort d'un autobus commence à baisser lorsqu'il transporte plus de trente personnes. Le tableau 5.3 présente les différentes répartitions des passagers pour des demandes concernant de plus en plus de passagers. On constate que la congestion favorise le trajet en métro au détriment de l'itinéraire en autobus.

Tableau 5.3 Répartition des passagers pour différents nombres de passagers.

	itinéraire A	itinéraire B	itinéraire C
$N = 10$	63%	37%	0%
$N = 100$	66%	34%	0%
$N = 200$	80%	20%	0%

### 5.2.2 Étude des performances

Dans la sous-section précédente, nous avons présenté le comportement, et la sensibilité, de notre implémentation sur un exemple très simple. Nous avons montré que les solutions fournies par notre programme sont pluralistes et prennent en compte la congestion. En pratique, nous ne souhaitons pas résoudre d'aussi petits problèmes. Dans cette sous-section, nous présentons les performances de notre implémentation sur une instance beaucoup plus grosse.

Notre implémentation ne permet malheureusement pas de résoudre le problème d'affection de passagers pour l'ensemble du réseau de la ville de Montréal sur toute la journée. Les résultats suivants ne concernent que les lignes desservant le centre de Montréal. Il s'agit des quatre lignes de métro et de quarante-trois lignes d'autobus<sup>1</sup>.

1. Les lignes 11, 15, 16, 17, 24, 29, 30, 31, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 57, 61, 63, 66, 74, 75, 78, 80,

De plus, nous utilisons ici les demandes mesurées par l'équipe de M. Trépanier, professeur agrégé au département de mathématiques et de génie industriel de l'École Polytechnique de Montréal, qui sont une estimation des demandes réelles.

Nous résolvons le problème d'affectation pour l'ensemble de la journée, plus précisément pour tous les voyages de 02:00 à 23:00. Ce problème traite 4484 voyages, soit 25% du nombre total de voyages de l'ensemble du réseau. Le graphe généré se compose de 289 765 nœuds et 887 659 arcs.

Une solution est trouvée en moins de six minutes (353s). La recherche des plus courts chemin est effectuée en 96s. L'établissement des relations entre EIP, ainsi que la détermination des huits, sont effectuées en 244s. Enfin, les dix itérations d'affectation pluralistes s'exécutent en 13s.

Du point de vue de la mémoire, cette implémentation est assez gourmande. Le réseau de transport en commun nécessite 43Mo. La structure permettant le calcul des plus courts chemins utilisent 90Mo. Enfin, l'ensemble des données utilisées par les EIP nécessite 1 500Mo. Toutefois, lors de la détermination des relations de filiation entre EIP, la consommation en mémoire grimpe jusqu'à 6Go. Ainsi, l'utilisation d'une machine 64bits se révèle nécessaire pour résoudre des problèmes de grande taille.

Pour avoir une idée du pluralisme de la solution trouvée, 12% du flot se trouvant sur un plus court chemin est dévié vers des chemins plus longs.

Toutefois, il faut savoir que les 1 155 935 EIP détectés engendrent 1 011 392 huits. Ainsi, après l'élimination de ceux-ci, il ne reste plus que 157 884 EIP. On constate que l'hypothèse selon laquelle le nombre de huit serait petit n'est pas vérifiée. Cependant, la méthode de résolution que nous proposons, malgré le nombre de huits et la manière simpliste de les écarter, reste performante. En effet, elle permet de résoudre, dans 90, 92, 97, 104, 107, 108, 119, 125, 129, 138, 144, 145, 150, 160, 161, 165, 166, 168, 410, 420, 430 et 537.

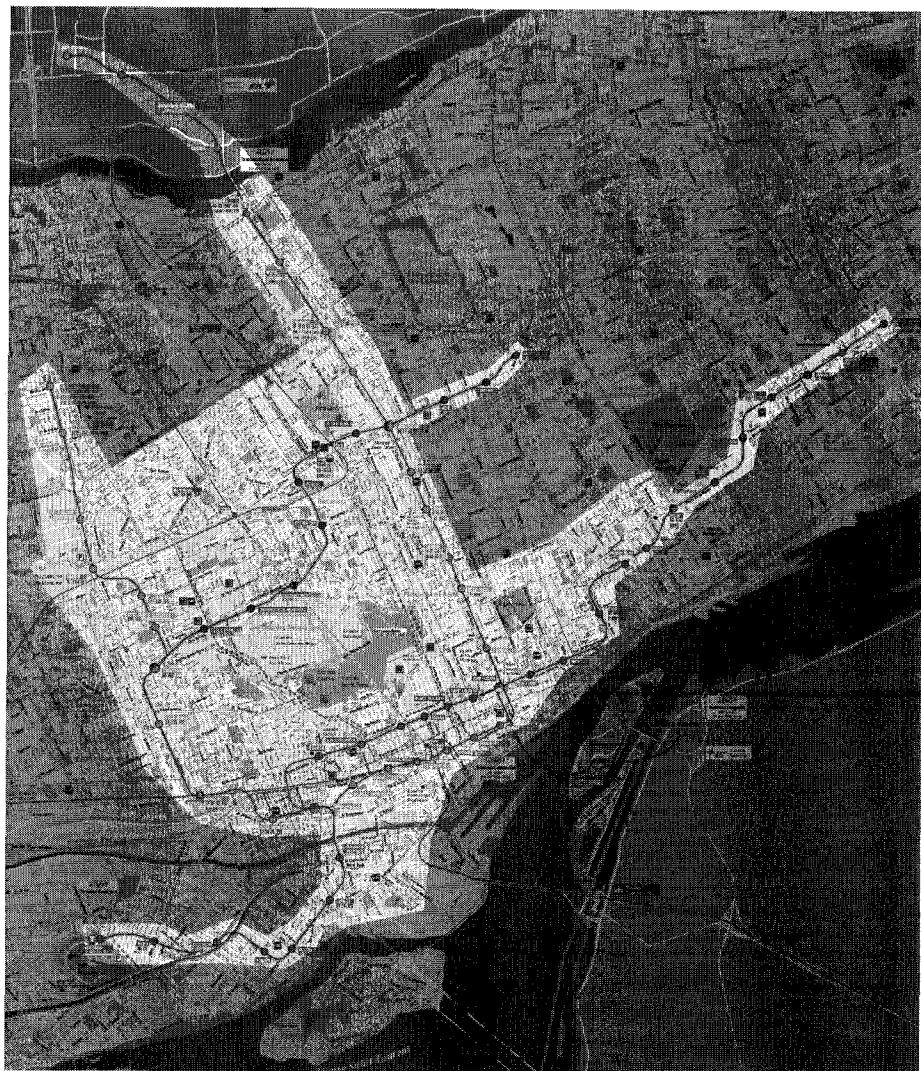


Figure 5.2 Réseau concerné par l'étude de performance.

un temps raisonnable, des problèmes de taille industrielle et engendre une solution relativement pluraliste. De plus, un traitement plus évolué des huits, qui utiliserait un modèle spécifique, permettrait de mieux modéliser le comportement des passagers et augmenterait le pluralisme de la solution. En pratique, on observe un flot de 305 529 sur l'ensemble des EIP dont 176 700 sur les EIP impliqués dans un huit. Ainsi, le traitement des huits devrait permettre de doubler le pluralisme.

## CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous présentons un modèle d'affectation de flot dans un graphe série-parallèle. Ce modèle est issu de la combinaison linéaire entre le modèle d'affectation sur les plus courts chemins, et un modèle de répartition par proportion. Il permet de représenter le comportement des usagers d'un réseau de transport en commun car il prend en compte à la fois la diversité du comportement des passagers et leur attrait pour les itinéraires les plus courts. De plus, un algorithme spécifique nous permet de trouver un flot solution pour ce modèle. En modélisant un réseau de transport en commun par un graphe orienté, nous pouvons alors résoudre le problème d'affectation de passagers. Enfin, des itérations successives et une mise à jour du coût des arcs permettent de prendre en compte la congestion.

Toutefois, le graphe obtenu à partir d'un réseau de transport en commun n'est pas un graphe série-parallèle par origine destination. Dans ce mémoire, le choix retenu pour traiter les structures en huit consiste à supprimer un des EIP formant le huit, les passagers étant alors affectés sur le plus court chemin. Ce choix détériore le pluralisme de la solution. Cependant, les résultats obtenus sur le centre du réseau de transport de la ville de Montréal présente une charge du réseau ayant les propriétés désirées, ce qui justifie *a posteriori* cette approximation.

La solution trouvée pourrait donc être améliorée en développant un modèle d'affectation pluraliste spécifique pour traiter les structures en « huit ». Pour pouvoir être ajouté facilement à notre algorithme, ce modèle doit permettre d'affecter le flot sur un « huit » en fonction du coût des itinéraires qui le compose et d'attribuer à un « huit » un coût équivalent. L'utilisation de ce type de modèle permettrait de rendre la solution plus pluraliste en modélisant de manière plus fine le comportement des usagers autour d'un « huit ».

Cette méthode d'affectation pourrait ensuite être utilisée dans le cadre d'un processus itératif de planification et d'optimisation d'un réseau de transport en commun. À chaque itération, le réseau est modifié en fonction de la prévision d'utilisation. Celle-ci est alors mise à jour à l'aide du modèle d'affection présenté dans ce mémoire. Le temps d'exécution modéré de l'algorithme d'affectation de passagers devrait permettre de réaliser un nombre important d'itérations et d'améliorer sensiblement l'offre de service.

## RÉFÉRENCES

- [1] BZIOUI, Y., (2007). Modèle d'affectation de passager dans un réseau de transport en commun. Mémoire de maîtrise, université de Montréal.
- [2] CHRIQUI, C. et ROBILLARD, P., (1975). Common bus lines. *Transportation Science*, 9(1) : 115–221.
- [3] SPIESS, H. et FLORIAN, M., (1989). Optimal strategies : A new assignment model for transit networks. *Transportation Research Part B : Methodological*, 23(2) : 83–102.
- [4] CARRARESI, P., MALUCELLI, F. et PALLOTTINO, S., (1996). Regional mass transit assignment with resource constraints. *Transportation Research Part B : Methodological*.
- [5] TONG, C.O. et WONG, S.C., (1998). A stochastic transit assignment model using a dynamic schedule-based network. *Transportation Research Part B : Methodological*, 33(2) :107–121.
- [6] FAN, W. et MACHEMEHL, R.B., (2004). Optimal transit route network design problem algorithms, implementations, and numerical results. *Informs 2003 Annual Meeting*, Atlanta, GA.
- [7] DE CEA, J. et FERNANDEZ, J.E., (1989). Transit assignment to minimal routes : an efficient new algorithm. *Traffic engineering control*, 30 : 491–494.
- [8] BAR-GERA, H. Traffic assignment by paired alternative segments. Extended abstract.

- [9] FRIEDRICH, M., HOFSAESS, I. et WEKECK, S., (2001). Timetable-based transit assignment using branch and bound techniques. *Travel Patterns And Behavior ; Effects Of Communications Technology*, (1752) :100–107.
- [10] DUFFIN, R.J., (1965). Topology of series-parallel networks. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 10(2) : 303–318.
- [11] BRÉBEC, J.-M., (2003). 1ere Année Mpsi ; Electronique Electrocinetique. Hachette Education.