

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

TOMOGRAPHIE ÉLECTRIQUE EN CONTINU POUR
L'AUSCULTATION NON-DESTRUCTIVE

NARCISSE ADJALLA
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)

AVRIL 2009



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence
ISBN: 978-0-494-49429-5
Our file Notre référence
ISBN: 978-0-494-49429-5

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

TOMOGRAPHIE ÉLECTRIQUE EN CONTINU POUR
L'AUSCULTATION NON-DESTRUCTIVE

présenté par: ADJALLA Narcisse

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. LABIB Richard, ing., Ph.D., président

M. SAUCIER Antoine, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. CHOUTEAU Michel C., ing., Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. GOUSSARD Yves, ing., Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. BERTRAND Michel, ing., Ph.D., membre

REMERCIEMENTS

Je commencerai en adressant mes sincères remerciements à mon directeur de recherche M Antoine Saucier et à mes codirecteurs M Michel Chouteau et M Yves Goussard pour la confiance qu'ils m'ont témoigné en m'accordant ce projet de maîtrise. Je les remercie également pour leur totale disponibilité, leur encouragement et pour l'aide qu'ils m'ont accordée dans l'accomplissement de ce travail de recherche.

Je dédie principalement ce mémoire à mes parents pour qui les études et la connaissance sont très importantes, surtout à mon père Michel Adjalla qui m'a montré que la voie des études est un chemin personnel et que seule la soif de la connaissance permet la réussite. À ma mère Mélanie Hounsounou, pour toutes les leçons de la vie que j'ai apprises avec elle. Une dédicace à mes frères et soeurs pour leurs soutiens moraux et spécialement à mon frère Santos qui m'a aidé dans la lecture et la correction de ce mémoire.

Je profite également de l'occasion pour remercier tous mes amis et amies pour leur soutien dans les moments les plus difficiles dans l'accomplissement de ce travail de recherche, notamment Nasrin Javadi, Zounmèvo Judicael, Sandrine Tiné, Charlène Houssou, Fatou Tao pour ne citer que ceux-là.

Une attention particulière à ma bien-aimée Afiwa Aziagba qui était là en tout temps pour me donner le courage nécessaire pour accomplir ce travail de recherche.

À tous, un grand merci.

RÉSUMÉ

Ce travail de recherche a pour objectif la mise en œuvre d'un outil de modélisation directe et inverse récursive permettant l'imagerie en temps réel en prospection électrique. Il s'agit d'une partie d'un système de mesure qui permettra d'ausculter la proche surface afin de détecter les hétérogénéités souterraines. Ce système, qui sera embarqué sur un véhicule en mouvement, devra traiter les données de façon continue. Le défi consiste à construire une image bidimensionnelle des résistivités du sol à partir de mesures de voltage faites à la surface à l'aide d'un réseau d'électrodes.

Pour le problème direct, un réseau de résistances a été utilisé pour modéliser la structure électrique du sol. Deux électrodes d'injection permettent de simuler la répartition du potentiel à travers le sol et dans le même temps plusieurs électrodes de réception permettent la prise de mesure à différents endroits du réseau de résistances.

Le problème inverse qui consiste à trouver les résistivités du sol à partir des mesures est résolu en temps réel pour ainsi dire, les résistivités sont obtenues au fur et à mesure que les mesures sont prises. Pour répondre à cette exigence, le filtre de Kalman a été utilisé pour réduire l'effort de calcul et la mémoire d'ordinateur utilisée. L'inversion opère par prédiction-correction, en utilisant les valeurs de résistivité à l'instant n pour estimer les valeurs de résistivité à l'instant $n + 1$ puis effectuer une correction des valeurs estimées à l'état $n + 1$ une fois que les mesures de l'instant $n + 1$ sont obtenues. Ainsi, la taille des

données mises à contribution dans l'inversion ne varie pas avec le temps.

Les résultats obtenus permettent de prouver l'efficacité des méthodes et techniques utilisées. Des essais sur des données synthétiques obtenues par le modèle direct puis sur des données réelles montrent que les hétérogénéités dans le sol sont détectées quelles que soient leurs natures. Aussi, la valeur maximale du bruit de mesure à partir de laquelle les hétérogénéités ne sont plus détectables par la technique de reconstruction est d'environ 25 % ; autrement dit un bruit de mesure dont l'écart-type est quatre fois plus petit que l'écart-type des mesures. Par ailleurs, l'inversion est plus précise en surface qu'en profondeur. Plus les hétérogénéités sont en profondeur, plus elles sont difficilement détectables.

Mots clés : tomographie en continu, imagerie électrique, temps réel, filtre de Kalman, algorithme récursif, matrice de sensibilité, prospection électrique.

ABSTRACT

This research is about the implementation of a recursive inverse and forward modeling tool for real time electrical prospection. The tool is part of a measuring system meant to test the near surface in order to detect underground heterogeneities. The system, embedded in a moving vehicle, will treat data in a continuous way. The challenge is to build a two-dimensional image of the subsurface resistivities from observations of electrical potential taken from the ground surface with a network of electrodes.

For the forward problem a network of resistors has been used to approximate the electrical structure of the soil. Two injection electrodes help simulating the electric potential distribution in the soil while several reception electrodes do measuring at various areas of the network of resistors.

The inverse problem, consisting in finding the subsurface resistivities from the observations of electrical potential, is solved in real time ; resistivities are obtained as measures are taken. To fulfill this requirement, a Kalman filter has been used to lessen the computing stress as well as the memory footprint. The inversion works by forecast-correction by using resistivity values at time n to estimate those at time $n + 1$. Then, it corrects the estimated resistivity values at time $n + 1$ when the measures are available at time $n + 1$. This approach keeps constant, through time, the size of the data used in the inversion.

The results prove the efficiency of the methods and techniques used. Tests performed on synthetic data obtained with the forward model as well as with actual data show that the heterogeneities in the soil are detected without regard to their nature. Plus, the tolerable level of measuring noise by the reconstruction technique is approximately 25%. Stated another way, the standard deviation of the measuring noise level is four times smaller than the standard deviation of the measures.

Furthermore, the inversion is more accurate at shallow depths. Deeper the heterogeneities are, more difficult their detection is.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	viii
TABLE DES MATIÈRES	x
LISTE DES TABLEAUX	xiii
LISTE DES FIGURES	xiv
LISTE DES NOTATIONS	xvii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 L'imagerie électrique	1
1.2 Problème direct et problème inverse	2
1.3 Objectifs de la recherche	2
CHAPITRE 2 PROSPECTION ÉLECTRIQUE	5
2.1 Résistivité électrique	5
2.2 Équations fondamentales	7
2.3 Sensibilité des dispositifs électriques de surface	9
2.4 Acquisition des mesures	10
CHAPITRE 3 RÉOLUTION DU PROBLÈME DIRECT.	16
3.1 Structure de la chaussée et de l'appareil de mesure	16
3.2 Discretisation de la zone d'intérêt	21
3.3 Équations du système	22

3.4	Recherche de la matrice de sensibilité avec un réseau de résistances . . .	32
3.4.1	Méthode des perturbations	39
3.4.2	Méthode de régression linéaire	41
3.4.3	Méthode d'extrapolation de Richardson	43
3.4.4	Méthode des moindres carrés	45
3.4.5	Résultats de sensibilité pour un milieu stratifié	46
CHAPITRE 4 RÉSOLUTION DU PROBLÈME INVERSE		48
4.1	Récurrance de Kalman	48
4.1.1	Théorèmes et hypothèses	49
4.1.2	Dérivation des équations de récurrence	51
4.1.3	Estimation récursive de Kalman	57
4.2	Inversion statique (non récursive)	58
CHAPITRE 5 PRÉSENTATION DES RÉSULTATS		61
5.1	Milieu homogène sans bruit de mesure	62
5.1.1	Résultats obtenus avec le filtre de Kalman	63
5.1.2	Résultats obtenus avec l'inversion statique	70
5.1.3	Interprétation des résultats	73
5.2	Milieu homogène avec bruit de mesure	74
5.2.1	Résultats obtenus avec le filtre de Kalman	74
5.2.2	Résultats obtenus avec l'inversion statique	81
5.2.3	Interprétation des résultats	83
5.3	Milieu stratifié sans bruit de mesure	84
5.3.1	Résultats obtenus avec le filtre de Kalman	85
5.3.2	Résultats obtenus avec l'inversion statique	91
5.3.3	Interprétation des résultats	94
5.4	Milieu stratifié avec bruit de mesure	95
5.4.1	Résultats obtenus avec le filtre de Kalman	95

5.4.2	Résultats obtenus avec l'inversion statique	102
5.4.3	Interprétation des résultats	105
5.5	Application à des données réelles	106
5.5.1	Résultats obtenus avec l'inversion statique	106
5.5.2	Résultats obtenus avec l'inversion récursive	106
5.5.3	Résultats obtenus avec des données synthétiques	112
5.5.4	Résultats obtenus pour une fréquence d'échantillonnage plus élevée	114
5.5.5	Interprétation des résultats	117
CHAPITRE 6 CONCLUSION ET PERSPECTIVES		119
BIBLIOGRAPHIE.		120

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1 Valeurs de résistivité des matériaux qui composent une chaussée .	7
Tableau 2.2 Densité de courant en fonction de la profondeur	10

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Problème direct et inverse	3
Figure 2.1	Résistivités couramment rencontrées en prospection géophysique .	6
Figure 2.2	Circulation de courant électrique	11
Figure 2.3	Profondeur de pénétration du courant	12
Figure 2.4	Sensibilité des dispositifs électriques de surface	12
Figure 2.5	Différence de potentiel entre MN pour un quadripôle quelconque .	15
Figure 3.1	Coupe transversale de la chaussée	17
Figure 3.2	Présentation physique du OhmMapper	18
Figure 3.3	Présentation physique du CORIM	19
Figure 3.4	Présentation physique du MPU	20
Figure 3.5	Spécifications de l'appareil de mesure	20
Figure 3.6	Discretisation de la zone d'intérêt	22
Figure 3.7	Modélisation d'un déplacement unitaire	24
Figure 3.8	Représentation schématique d'un déplacement unitaire	25
Figure 3.9	Déplacement unitaire simplifié	25
Figure 3.10	Modélisation schématique du système	31
Figure 3.11	Réseau de résistances et numérotation	34
Figure 3.12	Réseau de résistances appliqué à notre discrétisation	35
Figure 3.13	Répartition de potentiel avec pdetool et le réseau de résistances . .	36

Figure 3.14 Réseau de résistances avec raffinement	37
Figure 3.15 Sensibilité par perturbations (raffinement)	39
Figure 3.16 Sensibilité par perturbations (discrétisation et raffinement)	40
Figure 3.17 Sensibilité par régression (raffinement)	41
Figure 3.18 Sensibilité par régression (discrétisation et raffinement)	42
Figure 3.19 Sensibilité par extrapolation (raffinement)	43
Figure 3.20 Sensibilité par extrapolation (discrétisation et raffinement)	44
Figure 3.21 Sensibilité (discrétisation fine en profondeur)	46
Figure 3.22 Sensibilité (discrétisation fine en profondeur et en longueur)	47
Figure 3.23 Sensibilité (discrétisation fine et raffinement)	47
Figure 4.1 Représentation schématique de $\mathbf{H}_s$	59
Figure 5.1 Inversion récursive sans discrétisation fine ni raffinement	64
Figure 5.2 Inversion récursive combinée avec le raffinement 4x4	65
Figure 5.3 Inversion récursive avec discrétisation fine 2x2 et raffinement 2x2	66
Figure 5.4 Inversion récursive sans discrétisation fine ni raffinement	67
Figure 5.5 Inversion récursive avec raffinement 4x4	68
Figure 5.6 Inversion récursive avec discrétisation fine et raffinement 2x2	69
Figure 5.7 Inversion statique avec raffinement 4x4	71
Figure 5.8 Inversion statique avec discrétisation fine 2x2 et raffinement 2x2	72
Figure 5.9 Inversion récursive sans discrétisation fine ni raffinement	75
Figure 5.10 Inversion récursive avec raffinement 4x4	76
Figure 5.11 Inversion récursive avec discrétisation fine 2x2 et raffinement 2x2	77
Figure 5.12 Inversion récursive sans discrétisation fine ni raffinement	78
Figure 5.13 Inversion récursive avec raffinement 4x4	79
Figure 5.14 Inversion récursive avec discrétisation fine 2x2 et raffinement 2x2	80
Figure 5.15 Inversion statique avec raffinement 4x4	81

Figure 5.16 Inversion statique avec discrétisation fine 2x2 et raffinement 2x2 .	82
Figure 5.17 Inversion récursive avec discrétisation fine 1x2	85
Figure 5.18 Inversion récursive avec discrétisation fine 2x2	86
Figure 5.19 Inversion récursive avec discrétisation fine 2x2 et raffinement 2x2 .	87
Figure 5.20 Inversion récursive avec discrétisation fine 1x2	88
Figure 5.21 Inversion récursive avec discrétisation fine 2x2	89
Figure 5.22 Inversion récursive avec discrétisation fine 2x2 et raffinement 2x2 .	90
Figure 5.23 Inversion statique avec discrétisation fine 1x2	91
Figure 5.24 Inversion statique avec discrétisation fine 2x2	92
Figure 5.25 Inversion statique avec discrétisation fine 2x2 et raffinement 2x2 .	93
Figure 5.26 Inversion récursive avec discrétisation fine 1x2	96
Figure 5.27 Inversion récursive avec discrétisation fine 2x2	97
Figure 5.28 Inversion récursive avec discrétisation fine 2x2 et raffinement 2x2 .	98
Figure 5.29 Inversion récursive avec discrétisation fine 1x2	99
Figure 5.30 Inversion récursive avec discrétisation fine 2x2	100
Figure 5.31 Inversion récursive avec discrétisation fine 2x2 et raffinement 2x2 .	101
Figure 5.32 Inversion statique avec discrétisation fine 1x2	102
Figure 5.33 Inversion statique avec discrétisation fine 2x2	103
Figure 5.34 Inversion statique avec discrétisation fine 2x2 et raffinement 2x2 .	104
Figure 5.35 Résultats obtenus avec l'inversion statique sur les données réelles .	107
Figure 5.36 Inversion récursive sur des données réelles	108
Figure 5.37 Inversion récursive avec raffinement 4x4	109
Figure 5.38 Inversion récursive avec discrétisation fine 2x2	110
Figure 5.39 Inversion récursive sur des données réelles : cellules de $2 \times 0.5 \text{ m}^2$.	111
Figure 5.40 Inversion récursive sur des données synthétiques imitant le cas réel	113
Figure 5.41 Inversion récursive sur des données réelles	115
Figure 5.42 Inversion récursive avec discrétisation fine (répétition de données) .	116

LISTE DES NOTATIONS

Cette section est dédiée à la définition des notations utilisées tout au long de ce mémoire. Certaines notations très spécifiques ne sont pas mentionnées. Les vecteurs et les matrices sont notés en gras. Le produit scalaire entre $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ est noté $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ et le produit vectoriel est noté $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Lettres grecques majuscules

Γ	frontière du domaine Ω
Ω	domaine spatial étudié
Θ	indicateur d'ordre d'une approximation

Lettres grecques minuscules

ρ	résistivité électrique ou vecteur de résistivité électrique
ρ_n	vecteur de résistivité électrique à un instant n donné
$\rho_n(i)$	résistivité électrique de la cellule i à un instant n donné
σ	conductivité électrique

Lettres latines majuscules

K	nombre de colonnes de discrétisation laissées à chaque échantillonnage
M	nombre de récepteurs de l'appareil de mesure
L	longueur de la zone d'intérêt
N	nombre de cellules dans la zone d'intérêt discrétisée
A	matrice de décalage ou de transition
B	matrice d'ajout de fluctuation
H	matrice de sensibilité
X_i	récepteur i
G_n	matrice de gain de Kalman à l'instant n
P_n	matrice de covariance d'erreur d'estimation du filtre de Kalman
X	vecteur des mesures prises
H_s	matrice de sensibilité statique

Lettres latines minuscules

m	nombre de lignes de la zone d'intérêt discrétisée
n	désigne un instant donné
x	vecteur de mesure
x_n	vecteur de mesure au temps n
w	vecteur de bruit de mesure
w_n	vecteur de bruit de mesure au temps n
u	vecteur de fluctuation
u_n	vecteur de fluctuation au temps n

Dimensions

A	ampère
m	mètre
S	siemens
V	volt
Ω	ohm

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 L'imagerie électrique

L'imagerie électrique a pour objectif l'estimation de la distribution spatiale des propriétés électriques associées aux matériaux, à leur état et à leurs défauts. Il existe plusieurs types d'imagerie parmi lesquels l'imagerie électrique se distingue par sa capacité d'auscultation non-destructive sur des milieux stratiformes (chaussée, sol, infrastructure, etc.). La méthode d'auscultation utilisée ici consiste à injecter un courant électrique dans l'objet prospecté au moyen d'une paire d'électrodes. Le champ électrique créé par ce dipôle d'injection induit une répartition de potentiel à travers la structure étudiée. Des électrodes de réception dites passives mesurent les variations de potentiel à différents endroits de la structure. Par une procédure d'interprétation, la présence d'hétérogénéités est détectée grâce aux mesures prises.

La prospection électrique est couramment utilisée en géophysique dans le but de détecter les modifications (variations) dans l'objet prospecté. Les hétérogénéités peuvent être associées à des cavités, des variations de la teneur en eau, des fissures, des altérations. Cette méthode est couramment utilisée car elle est peu coûteuse, non invasive, rapide à mettre en œuvre et non-destructive.

1.2 Problème direct et problème inverse

En science expérimentale, nous cherchons à caractériser les paramètres physiques d'un objet en nous basant sur une série de données. L'utilisation des lois physiques permet de prédire le résultat d'une réponse en fonction d'un modèle. Cette opération est appelée *problème direct*. L'opération contraire, dite *problème inverse*, consiste à reconstruire un modèle à partir des réponses mesurées. Par exemple, en tomographie électrique, les mesures de voltage prises sur l'objet étudié permettent de déduire la distribution spatiale des résistivités. La difficulté principale en tomographie électrique réside dans le fait que le problème direct est non linéaire, c'est-à-dire la relation entre les voltages mesurés et les résistivités est non linéaire. Cette non-linéarité est due à la répartition du courant électrique qui suit les chemins de moindre résistivité et dépend donc des propriétés de l'objet prospecté.

Considéré comme étant l'opération opposée au problème direct, le problème inverse est plus difficile à résoudre que le problème direct. En premier lieu, une série de données réelles contient inévitablement des erreurs et ces dernières affectent l'estimation des paramètres du modèle. De plus, le fait qu'un nombre fini de données soit disponible pour estimer un modèle impliquant une infinité de degrés de liberté implique que la solution du problème inverse n'est pas unique. Par ailleurs, l'inversion utilise une linéarisation du problème direct pour résoudre un problème non linéaire et mal posé. À cela s'ajoutent les erreurs liées à l'échantillonnage. La figure 1.1 schématise la problématique directe et inverse.

1.3 Objectifs de la recherche

L'auscultation du sol en une ou deux dimensions est utilisée depuis plusieurs décennies et apporte généralement des informations très utiles sur la structure interne de l'objet étudié. La méthode classique d'auscultation consiste à acquérir les mesures et à les inverser

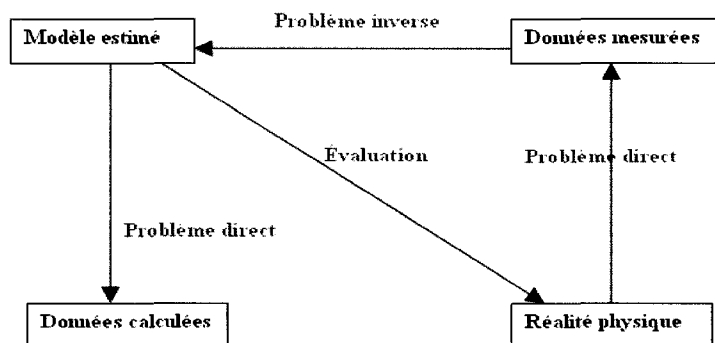


Figure 1.1 – Représentation schématique du problème direct et inverse.

après que toute l'acquisition a été faite. De nouveaux systèmes basés sur un réseau d'électrodes capacitatives ont vu le jour depuis les années 1990. Mentionnons les systèmes CORIM (Iris Instrument, France), OhmMapper (Geometrics, USA), MPU (Paris VI, France), CRI (BGS, Grande-Bretagne). Ces équipements permettent de mesurer la résistivité électrique du sol en continu en excitant le sol à l'aide d'un courant électrique basse fréquence (<10 Khz) et en mesurant la tension développée suivant un réseau d'électrodes. Le couplage avec le sol se fait de manière capacitive [14, Kuras, 2007]. Ces équipements ont été développés tout particulièrement pour l'étude des structures superficielles (chaussées, digues, sols, etc.). Pour certaines applications, il peut être utile d'avoir une imagerie électrique du sol à mesure qu'on déplace le système, afin de permettre une prise de décision rapide. La particularité de la méthode utilisée dans le cadre de ce travail réside dans le fait que l'inversion se déroule en même temps que l'acquisition des mesures. En effet, il est principalement question d'estimer en temps réel les paramètres du modèle. Tout d'abord, le problème direct sera résolu en vue d'explicitier le lien entre les mesures et le modèle (calcul de la sensibilité). Ensuite, la résolution du problème inverse par un algorithme récursif permettra l'obtention des paramètres du modèle en temps réel. La structure étudiée sera une chaussée que nous allons considérer homogène dans un premier temps, puis stratifiée dans

un second temps. Par ailleurs, comme le problème inverse est non linéaire, il est important de respecter la géométrie de l'objet étudié de manière précise et détaillée. Ainsi, la distortion du champ électrique ne sera plus une source d'erreur considérable dans la résolution du problème inverse. Des données synthétiques seront utilisées pour tester la fiabilité de l'inversion en absence et en présence de bruit de mesure. Finalement, une application sur des données réelles obtenues avec une configuration de six dipôles de réception permettra de vérifier le potentiel de la technique.

CHAPITRE 2

PROSPECTION ÉLECTRIQUE

Ce chapitre est consacré à la présentation du principe de mesure de la résistivité et aux équations fondamentales qui régissent la méthode de la prospection par courant électrique. Quelques modèles de sensibilité des dispositifs électriques de surface seront présentés.

2.1 Résistivité électrique

La résistivité électrique, qui se définit comme étant la capacité d'un milieu à s'opposer au passage du courant électrique, est le paramètre mesuré en prospection électrique. La résistivité dépend de facteurs tels que la minéralogie, la nature du fluide présent dans le sol, la saturation, la porosité ou encore la température du milieu étudié. La grande variabilité de la résistivité d'un matériau à un autre (de $1 \Omega.m$ à plusieurs milliers de $\Omega.m$) est un atout majeur des méthodes électriques de prospection. La figure 2.1 présente la gamme des résistivités couramment rencontrées en prospection géophysique tandis que le tableau 2.1 présente les valeurs de résistivité des matériaux utilisés pour la chaussée.

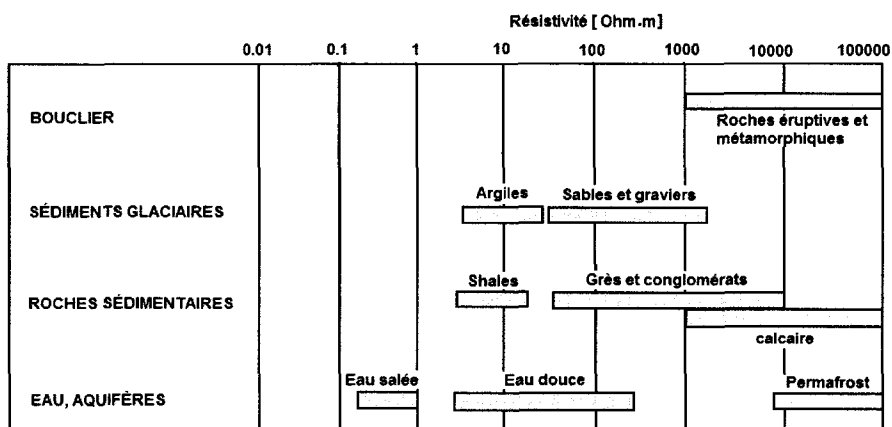


Figure 2.1 – Gamme des résistivités couramment rencontrées en prospection géophysique.

Tableau 2.1 – Valeurs de résistivité des matériaux qui composent une chaussée.

Matériau	Min-Max	Typique
asphalte	2 000 - 10 000 $\Omega.m$	5 000 $\Omega.m$
béton	10 - 2 000 $\Omega.m$	300 $\Omega.m$
fondation	5 - 100 $\Omega.m$	10 $\Omega.m$
eau(douce)	10 - 300 $\Omega.m$	100 $\Omega.m$
eau(salée)	0.2 - 10 $\Omega.m$	5 $\Omega.m$
air	10 000 - ∞ $\Omega.m$	∞

2.2 Équations fondamentales

Les nouveaux systèmes basés sur un réseau d'électrodes capacitives permettent l'auscultation en continu grâce à l'utilisation de sources de courant alternatif à basse fréquence. On parle de la technique de résistivité capacitive qui est une généralisation des méthodes d'auscultation dites conventionnelles utilisant le courant continu [14, Kuras, 2007]. Afin d'utiliser des méthodes de modélisation et d'interprétation conventionnelles utilisant le courant continu dans les nouveaux systèmes, certaines conditions doivent être respectées. Parmi ces conditions figurent l'utilisation de courant alternatif à basse fréquence (pour éviter entre autres l'effet de peau ou effet pelliculaire), le design et la géométrie des senseurs, les valeurs de résistivités [15, Kuras et al., 2006]. Si ces conditions sont respectées, le courant alternatif peut être approximé par le courant continu. Par exemple, pour des valeurs de résistivités supérieures à 10 $\Omega.m$ et pour une distance de séparation émetteur-récepteur inférieure à 10 mètres, la valeur maximale tolérable pour la fréquence du courant alternatif est 25 kHz [15, Kuras et al., 2006]. La plupart des nouveaux systèmes respectent ces conditions, ce qui justifie dans le cadre de ce travail l'utilisation de l'approximation en courant continu.

Les méthodes électriques permettent la détermination de la conductivité électrique σ , qui se définit selon la *loi d'Ohm* par la constante de proportionnalité entre le champ électrique $\mathbf{E}$ appliqué en un point du milieu et la densité de courant $\mathbf{J}$. On a ainsi l'équation suivante :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (2.1)$$

Le courant électrique I se définit comme le flux du vecteur $\mathbf{J}$ à travers une surface S :

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.2)$$

Les quatre équations suivantes définissent la formulation de Maxwell pour des champs électromagnétiques statiques où $\mathbf{H}$ représente le champ magnétique et $\mathbf{B}$ le champ d'induction magnétique :

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.6)$$

L'équation (2.3) implique qu'il existe une fonction potentiel V , en vertu du théorème de Stokes, telle que

$$\mathbf{E} = -\nabla V. \quad (2.7)$$

En combinant les équations (2.5 et 2.7) et la *loi d'Ohm* (équation 2.1) on obtient :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V) = 0. \quad (2.8)$$

Pour un milieu homogène, l'équation (2.8) se simplifie et devient l'équation de Laplace qui se définit comme suit :

$$\nabla^2 V = 0. \quad (2.9)$$

L'équation (2.8) est valable dans un milieu en absence de sources de courant. En présence d'une source ponctuelle de courant d'intensité I au point r_s , on a

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot (\sigma \nabla V) = -I \delta(r - r_s), \quad (2.10)$$

qui est l'équation de Poisson, avec δ la distribution de Dirac à trois dimensions et r la position d'un point quelconque de l'espace.

2.3 Sensibilité des dispositifs électriques de surface

En prospection électrique, la sensibilité se définit comme la variation de la réponse mesurée (une différence de potentiel) causée par une variation de résistivité locale du milieu prospecté. Cette sensibilité dépend de la configuration géométrique du dispositif de mesure utilisé et des propriétés électriques du milieu prospecté. La connaissance de la sensibilité permet non seulement de déterminer la profondeur d'investigation mais aussi de résoudre les problèmes direct et inverse. La figure 2.2 montre les lignes de courant entre deux électrodes placées à la surface d'un milieu homogène. Le tableau 2.3 montre la densité du courant (en pourcentage) selon les lignes de courant de la figure 2.2 (les lignes sont numérotées de 1 à 6 en partant de la surface). On voit que la densité de courant est plus forte en surface qu'en profondeur. Les schémas de la figure 2.3 et le tableau 2.3 permettent de voir qu'environ 50 % du courant circule à une profondeur inférieure à la séparation des électrodes. Pour augmenter la profondeur de pénétration du courant, il faut augmenter l'écartement des électrodes. Pour un milieu hétérogène, le courant suit les chemins de moindres résistivités et sa circulation n'est donc pas uniforme et prédéterminée.

Tableau 2.2 – Densité de courant en fonction de la profondeur.

Ligne de courant	% de courant
1	17
2	32
3	42
4	49
5	51
6	57

Il existe plusieurs dispositifs de mesure qui diffèrent selon leur configuration spatiale et le nombre d'électrodes utilisées. Les dispositifs de mesure les plus utilisés sont le dispositif Wenner, le dispositif Wenner-Schlumberger et le dispositif dipôle-dipôle. La figure 2.4 montre le profil de sensibilité de chacun de ces dispositifs ainsi que leurs configurations spatiales. Pour chaque dispositif, il est possible d'évaluer analytiquement les sensibilités pour un milieu homogène [8, Loke and Barker, 1995]. Pour un milieu non homogène ou à géométrie plus complexe, une évaluation numérique des valeurs de sensibilité, où les dérivées sont obtenues par différences finies par exemple, peut être utilisée [7, Spitzer, 1998].

2.4 Acquisition des mesures

Il existe plusieurs techniques d'acquisition des mesures en prospection électrique. À ces différentes techniques correspondent différents systèmes de mesures, tels que les systèmes à multi-électrodes statiques (SYSCAL PRO) et les systèmes à multi-électrodes mobiles par couplage capacitif (OhmMapper). Une mesure représente une différence de potentiel entre deux électrodes. Dans notre cas, la technique d'acquisition utilisée consiste à dépla-

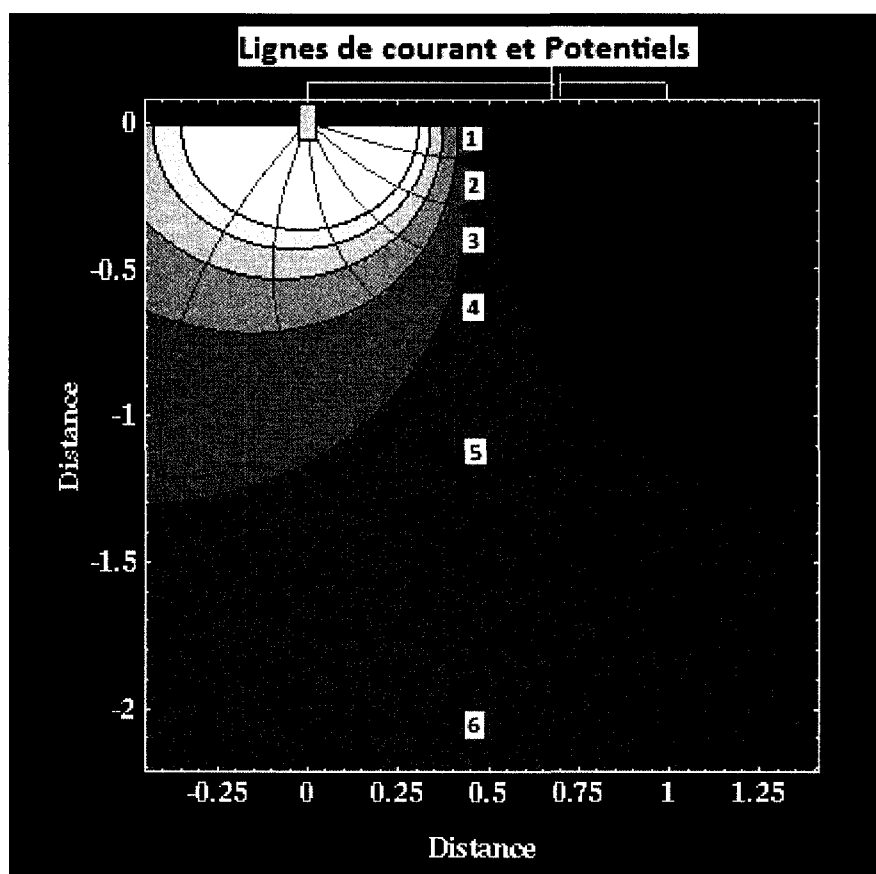


Figure 2.2 – Circulation de courant électrique entre deux électrodes dans un milieu homogène.

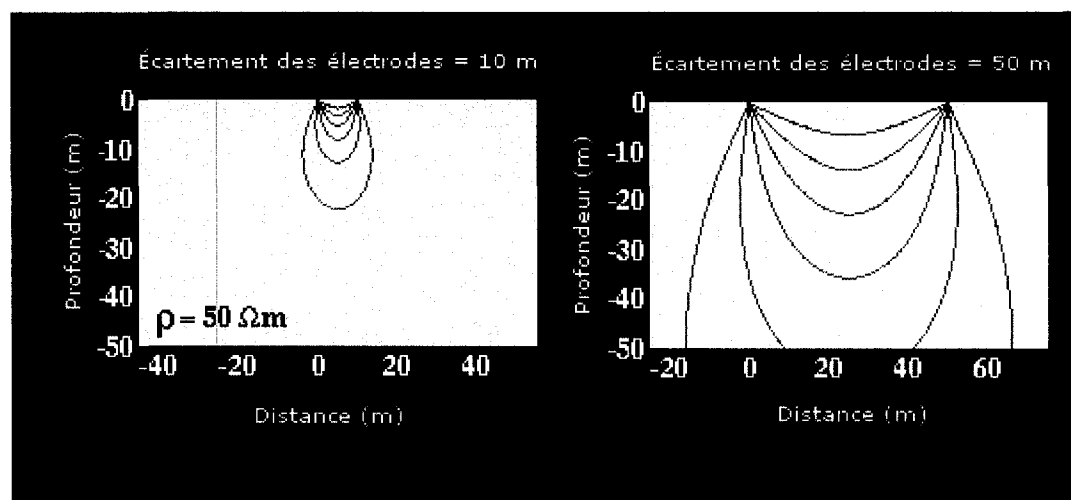


Figure 2.3 – Profondeur de pénétration du courant en fonction de l'écartement des électrodes.

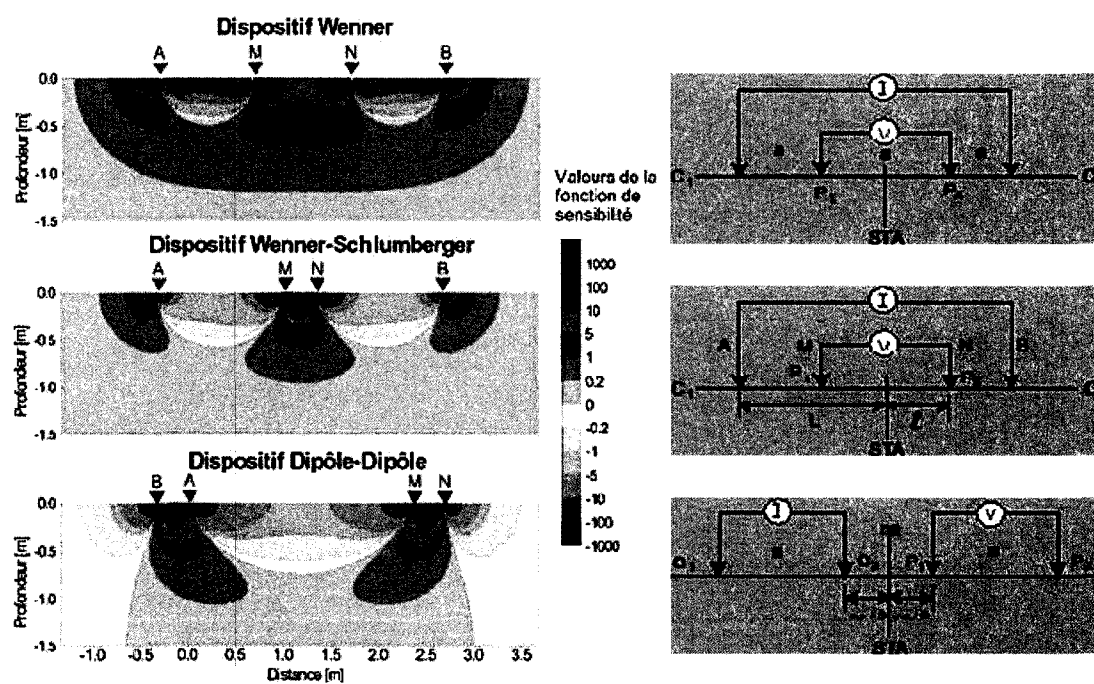


Figure 2.4 – Sensibilité des dispositifs électriques de surface.

cer un dispositif à écartement constant (traînée électrique). Une paire d'électrodes, dites d'injection, envoient le courant électrique dans le sol, et plusieurs paires d'électrodes passives, dites de réception, permettent l'acquisition des mesures de tension. Les mesures sont particulièrement sensibles aux variations de la résistivité dans le sol. Dans notre cas, une mesure représente la variation de la différence de potentiel observée entre deux électrodes lorsque la distribution de résistivité change. La sensibilité est le rapport de la variation de la différence de potentiel à la variation de la résistivité en un point du sol. La différence de potentiel mesurée, qui dépend de la disposition des électrodes et de la résistivité électrique du milieu étudié, est proportionnelle à l'intensité du courant injecté. Il est alors possible de déduire une répartition spatiale de la résistivité en se basant sur les mesures de potentiel. Pour un milieu homogène et isotrope, la résistivité mesurée correspond à la résistivité vraie du matériau, ce qui n'est pas le cas pour les milieux stratifiés. Pour un milieu hétérogène, nous faisons appel au concept de résistivité apparente. La résistivité apparente est la résistivité que devrait avoir un terrain homogène pour donner les mêmes réponses que celles obtenues pour un milieu hétérogène. Cette valeur n'a pas de sens physique propre, puisqu'elle dépend de la géométrie du dispositif de mesure utilisé, combinée à la répartition spatiale des résistivités dans le sous-sol hétérogène [17, Nely, 1989]. En pratique, on utilise deux électrodes d'émission de courant, **A** et **B**, ainsi que deux électrodes de mesure du potentiel, **M** et **N**, et on mesure la différence de potentiel V entre **M** et **N** due à l'action conjuguée de **A** et de **B** (figure 2.5). La différence de potentiel V est obtenue en résolvant l'équation de Laplace (2.9) dans un système de coordonnées sphériques en supposant une source de courant ponctuelle émettant un courant I au sein d'un espace infini homogène et isotrope. La symétrie implique alors que le potentiel V ne dépend que de la distance r entre le point observé et la source de courant. L'équation de Laplace prend donc la forme

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV}{dr}\right) = 0. \quad (2.11)$$

La résolution de l'équation (2.11) conduit à l'expression du potentiel engendré par une source ponctuelle de courant :

$$V(r) = \frac{I\rho}{4\pi r}. \quad (2.12)$$

Le facteur ρ est la résistivité du matériau dans lequel sont situés la source et le récepteur. Lorsqu'on effectue les mesures sur le terrain, le courant se propage alors dans un espace semi-infini. L'équation (2.12) devient alors :

$$V(r) = \frac{I\rho}{2\pi r}. \quad (2.13)$$

Donc, à partir de I connu et V observé, on peut déduire la résistivité exacte du milieu homogène. Lorsque le terrain n'est pas électriquement homogène, les équipotentiels et les lignes de courant sont déformées, leur répartition est altérée. V et I sont toujours mesurables. Dans ce cas, le facteur obtenu n'est plus la résistivité exacte ρ caractéristique des formations traversées par le courant, mais plutôt la résistivité apparente que l'on définit par :

$$\rho_a = \frac{2\pi r V(r)}{I}. \quad (2.14)$$

Dans le cas illustré par la figure 2.5, l'expression du potentiel est donnée par :

$$\Delta V_{MN} = \rho_a \frac{I_{AB}}{2\pi} \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} \right). \quad (2.15)$$

De l'équation 2.15, on obtient l'expression de la résistivité apparente :

$$\rho_a = K \frac{\Delta V_{MN}}{I_{AB}}, \quad (2.16)$$

où la constante K est appelée le facteur géométrique de la configuration utilisée et est égale à :

$$K = \frac{2\pi}{\left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} \right)}. \quad (2.17)$$

Par exemple, pour un dispositif de Wenner représenté par un quadripôle avec une distance identique a entre les électrodes, le facteur géométrique est donné par

$$K = 2\pi a. \quad (2.18)$$

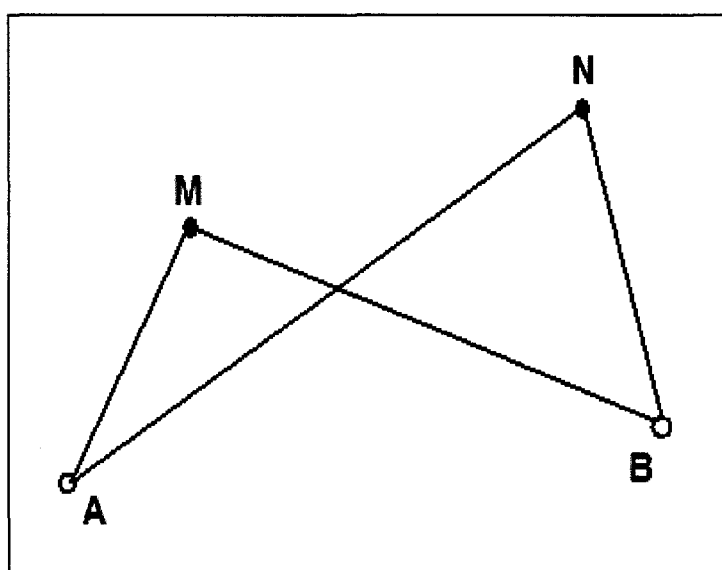


Figure 2.5 – Différence de potentiel entre MN pour un quadripole quelconque. A,B : électrodes d'injection de courant. M,N : électrodes de mesure de V .

CHAPITRE 3

RÉSOLUTION DU PROBLÈME DIRECT

3.1 Structure de la chaussée et de l'appareil de mesure

L'objet principal de notre étude étant les matériaux stratifiés, nous prendrons le cas d'une chaussée comme cible d'application. Comme le montre la figure 3.1, une chaussée urbaine mixte est composée de trois parties :

- L'asphalte : il s'agit de la partie supérieure, c'est la couche faite principalement de bitume et de granulats ;
- Le béton : une partie intermédiaire qui rend la chaussée résistante aux charges ;
- La fondation : il s'agit d'un mélange de roches et de sable qui facilite les écoulements souterrains et qui sert de support à la dalle.

Un appareil de mesure typique est composé de trois parties essentielles :

- Le module d'acquisition : il permet d'effectuer les opérations nécessaires à l'acquisition des mesures.
- Les transmetteurs : il s'agit d'électrodes qui injectent un courant électrique dans la chaussée.

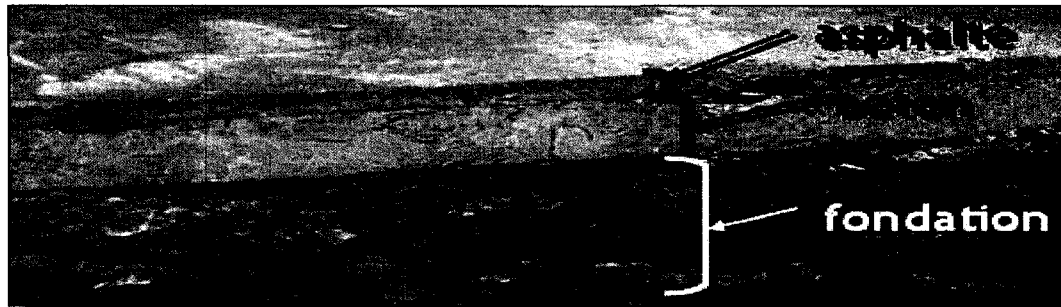


Figure 3.1 – Coupe transversale de la chaussée.

- Les récepteurs : ils mesurent des voltages induits par le courant.

Actuellement, il existe plusieurs systèmes de mesure. Ceux qui fonctionnent en continu utilisent le couplage capacitif, par exemple le OhmMapper de Geometrics (figure 3.2), en configuration dipôle-dipôle en ligne ou le CORIM (Continuous Resistivity Imaging ; figure 3.3) et le MPU (Multi-Pôles Urbain ; figure 3.4) qui utilisent une configuration dipôle-dipôle en équatoriale.

Comme le montre la figure 3.5, l'appareil de mesure simulé ici comporte un transmetteur et un certain nombre de récepteurs qui sont des dipôles en ligne. Dans notre cas, on choisit le nombre de récepteurs à six. L'appareil de mesure a une longueur de quatre mètres (dans le sens du déplacement), et la distance entre deux électrodes consécutives est 0.5 mètre. La zone d'intérêt (zone d'investigation) est prise à six mètres de long. Elle inclut la longueur totale du dispositif, plus une zone tampon de un mètre de part et d'autre du dispositif. La profondeur d'investigation est de l'ordre de 0.8 mètre (20 % de la longueur totale) auquel on ajoute un niveau de 0.4 mètre pour lequel la sensibilité est encore non-négligeable. La profondeur d'investigation dépend principalement de la séparation entre les électrodes les plus externes du système dipôle-dipôle et de la sensibilité du dispositif. Plus de détails seront donnés à ce sujet dans la section 3.4 sur le calcul de la sensibilité du dispositif utilisé.

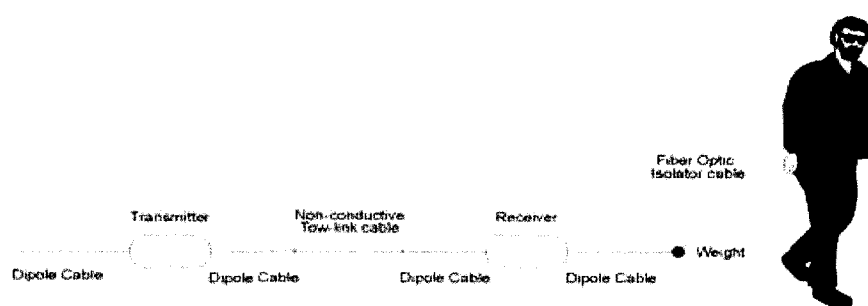


Figure 3.2 – Présentation physique du OhmMapper.



Equatorial dipole-dipole configuration

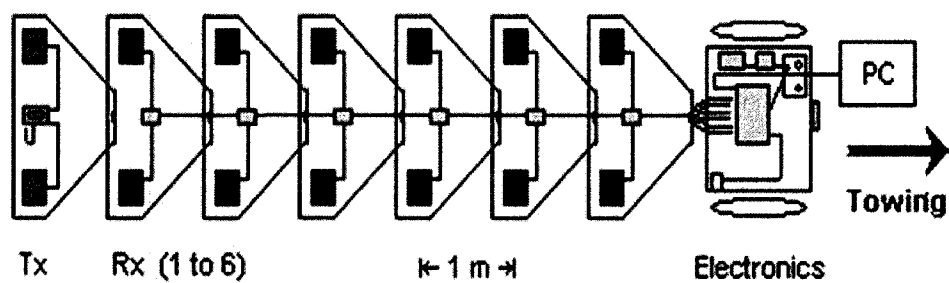


Figure 3.3 – Présentation physique du CORIM.

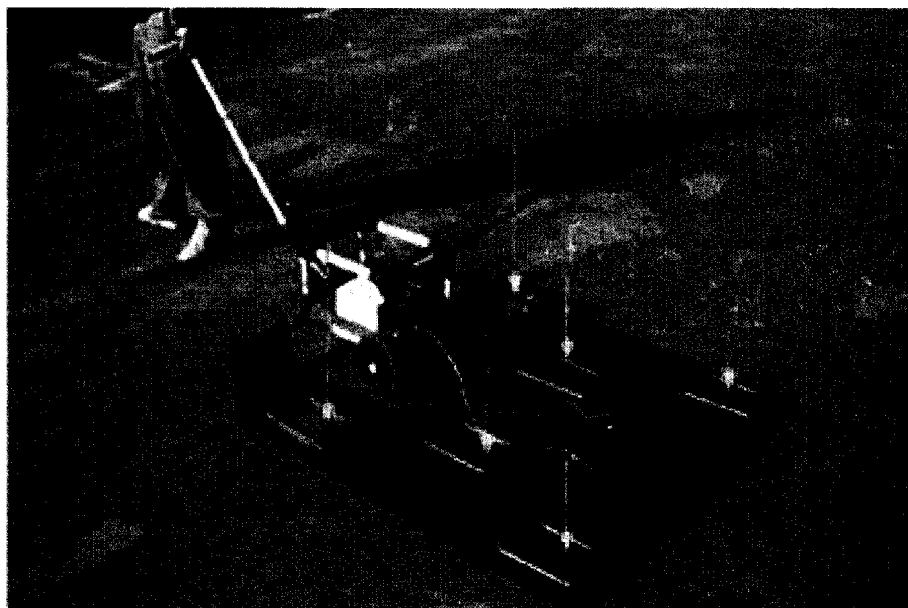


Figure 3.4 – Présentation physique du MPU.

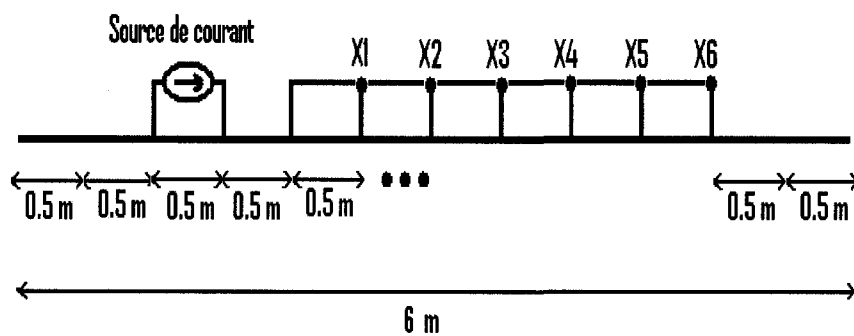


Figure 3.5 – Spécifications de l'appareil de mesure.

3.2 Discrétisation de la zone d'intérêt

Considérons la surface couverte par l'appareil de mesure. Le volume situé en-dessous de cette surface constitue la zone d'intérêt pour laquelle on veut déterminer les résistivités. La discrétisation consiste à diviser la zone d'intérêt en éléments parallélépipédiques de mêmes dimensions que nous désignons par cellules. Il s'agit d'un partitionnement vertical et horizontal de la zone d'intérêt.

La vitesse du véhicule pouvant varier au cours du temps, il est à noter que la fréquence d'échantillonnage varie en fonction de la vitesse du véhicule de telle sorte que la distance entre deux points de mesure consécutifs par un même récepteur reste constante et égale à $\Delta X = 0.5$ mètre. Cette distance ΔX est partitionnée en $K = 2$ colonnes de même dimension $\frac{\Delta X}{K} = 0.25$ mètre de sorte qu'entre deux échantillonnages consécutifs, le véhicule laisse derrière lui K colonnes de la zone d'intérêt. L'appareil de mesure dispose de $M = 6$ capteurs de mesure (récepteurs).

La discrétisation verticale consiste à diviser la profondeur de la zone d'intérêt en m couches de même largeur $\Delta Z = 0.20$ mètre pour que la profondeur totale soit $m \cdot \Delta Z = 1.2$ mètre avec $m = 6$.

La zone d'intérêt est alors divisée en cellules de dimensions $\Delta X \times \Delta Z$. Soit $L = 6$ mètres la longueur horizontale de la zone d'intérêt. L est choisie de manière qu'elle soit un multiple de ΔX . Une modélisation 2D permet de considérer les cellules comme des éléments rectangulaires. Le nombre de cellules présentes dans une zone d'intérêt 2D (surfactive) est $N = \frac{L}{\Delta X} \cdot K \cdot m = 144$, ce qui correspond au nombre de résistivités à estimer à chaque échantillonnage. La figure 3.6 montre la discrétisation de la zone d'intérêt.

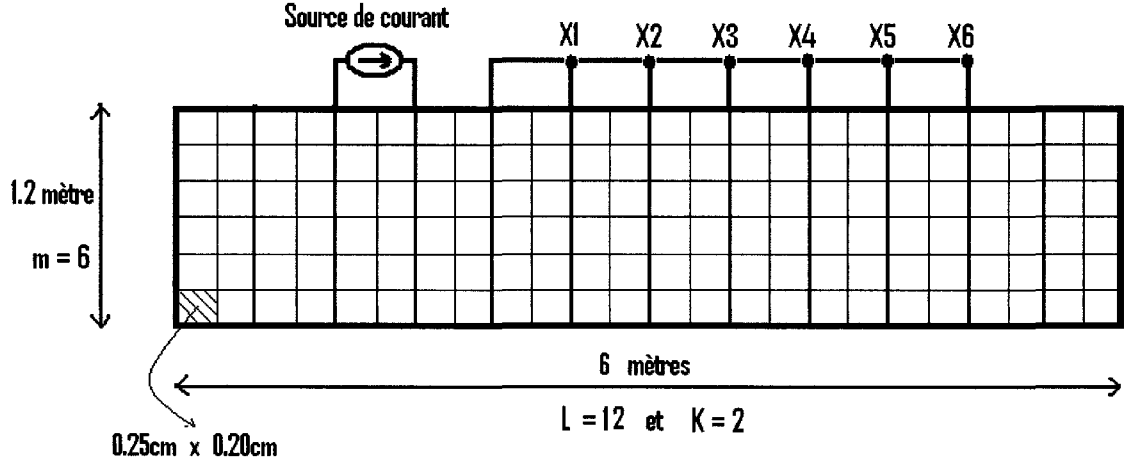


Figure 3.6 – Discrétisation de la zone d'intérêt.

3.3 Équations du système

Considérons ce qui se passe entre deux échantillonnages consécutifs. Comme le montre la figure 3.7, la nouvelle zone d'intérêt garde les mêmes dimensions que l'ancienne et la chevauche. Notons S_i , pour i allant de 1 à $N + Km$, les variations de résistivité telles qu'on a au temps n

$$S_i = \Delta\rho_n(i) \quad \text{pour } i \in [1 ; N], \quad (3.1)$$

et au temps $n + 1$

$$S_i = \Delta\rho_{n+1}(i - Km) \quad \text{pour } i \in [Km + 1 ; N + Km]. \quad (3.2)$$

On a les variations de résistivités les plus anciennes ($S_1, S_2, \dots, S_{Km}$) qui sortent de la zone d'intérêt et qui ne sont rien d'autre que les variations de résistivités $\Delta\rho_n(1), \Delta\rho_n(2), \dots, \Delta\rho_n(Km)$ au temps n , et de nouvelles variations de résistivité ($S_{N+1}, S_{N+2}, \dots, S_{N+Km}$) entrent dans la zone d'intérêt et qui sont les variations de résistivités $\Delta\rho_{n+1}(N - Km + 1), \Delta\rho_{n+1}(N - Km + 2), \dots, \Delta\rho_{n+1}(N)$ au temps $n + 1$. Comme le déplacement du véhicule

provoque un décalage des cellules dans la zone d'intérêt, alors à un instant n donné, les variations de résistivités $\Delta\rho_{n+1}(1), \Delta\rho_{n+1}(2), \dots, \Delta\rho_{n+1}(N - Km)$ au temps $n + 1$ sont égales aux variations de résistivités $\Delta\rho_n(Km + 1), \Delta\rho_n(Km + 2), \dots, \Delta\rho_n(N)$ au temps n . On peut considérer qu'entre deux échantillonnages consécutifs, les variations de résistivité en amont qui ne peuvent être obtenues par décalage seront modélisées avec $\Delta\rho_{n+1}(k) = a\Delta\rho_n(k) + u_n(k + Km - N)$, où $|a| < 1$ et $u_n(k + Km - N)$ désigne une fluctuation aléatoire. Si $|a| \rightarrow 1$ alors $\Delta\rho_{n+1}(k)$ et $\Delta\rho_n(k)$ sont fortement corrélés, et si $|a| \rightarrow 0$ alors $\Delta\rho_{n+1}(k)$ et $\Delta\rho_n(k)$ sont faiblement corrélés. À un instant n donné, on écrira

$$\Delta\rho_{n+1} = \mathbf{A}\Delta\rho_n + \mathbf{B}\mathbf{u}_n, \quad (3.3)$$

où $\mathbf{A}$ représente une matrice de décalage de dimensions $N \times N$, $\mathbf{B}$ une matrice de dimensions $N \times Km$ qui permet d'ajouter une fluctuation additive aux variations de résistivité qui ne peuvent être obtenues par décalage, $\Delta\rho_n$ est le vecteur $N \times 1$ des variations de résistivités au temps n , $\mathbf{u}_n = (u_n(1), u_n(2), \dots, u_n(Km))^T$ est le vecteur de fluctuations additives causées par les résistivités entrantes. $\mathbf{u}_n$ est modélisé par un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance $\mathbf{Q}_n : \mathbf{u}_n \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_n)$. La variance de $\mathbf{u}_n$ est fonction du temps. Chaque nouveau vecteur de fluctuations $\mathbf{u}_n$ est non corrélé avec les précédents :

$$E[\mathbf{u}_n \mathbf{u}_k^T] = \begin{cases} \mathbf{Q}_n & \text{si } n = k, \\ \mathbf{0} & \text{si } n \neq k. \end{cases} \quad (3.4)$$

Notons également que la valeur d'initialisation $\Delta\rho_0$ et les valeurs $\mathbf{u}_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ sont mutuellement indépendantes. La figure 3.8 montre de manière schématique ce que modélise l'équation (3.3).

Dans le but de construire les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, considérons une zone d'intérêt de taille plus petite en vue d'avoir un aperçu explicite de ces matrices. La figure 3.9 présente un déplacement unitaire de la zone d'intérêt simplifiée. On peut toujours écrire

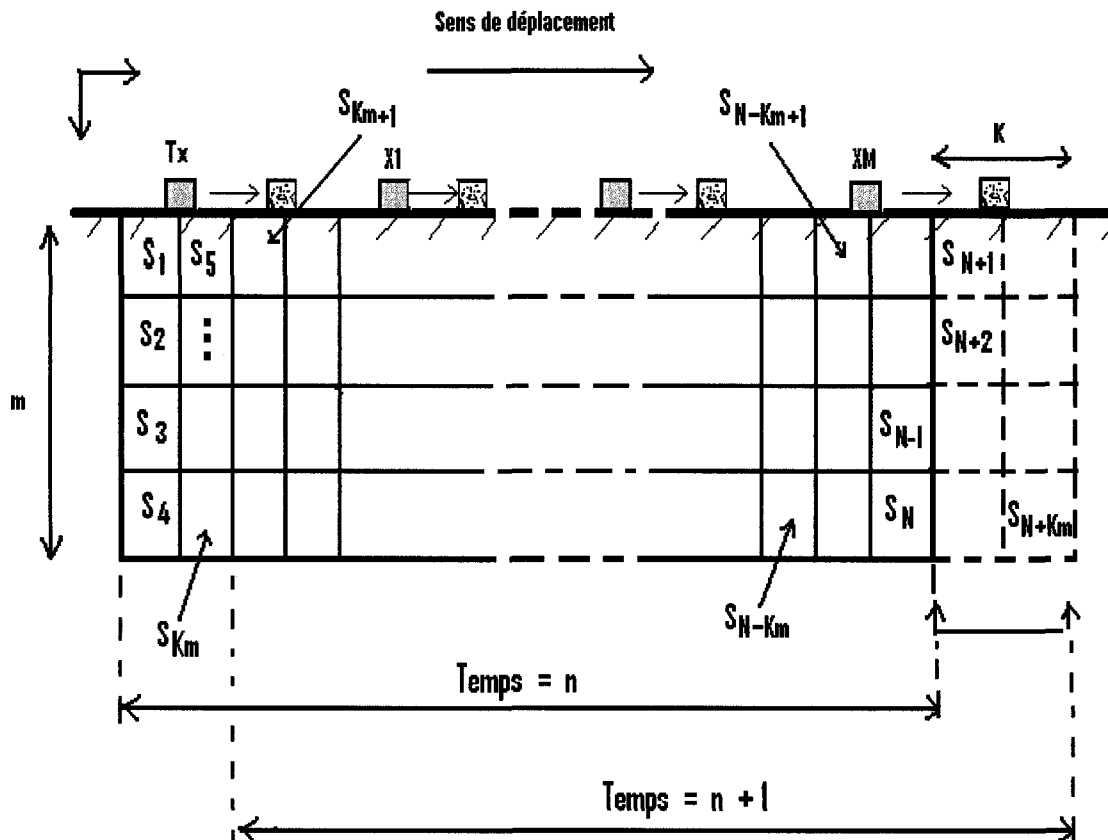


Figure 3.7 – Modélisation d'un déplacement unitaire. $K = 2$ et $m = 4$. T_x désigne le transmetteur. X_i désigne le récepteur i .

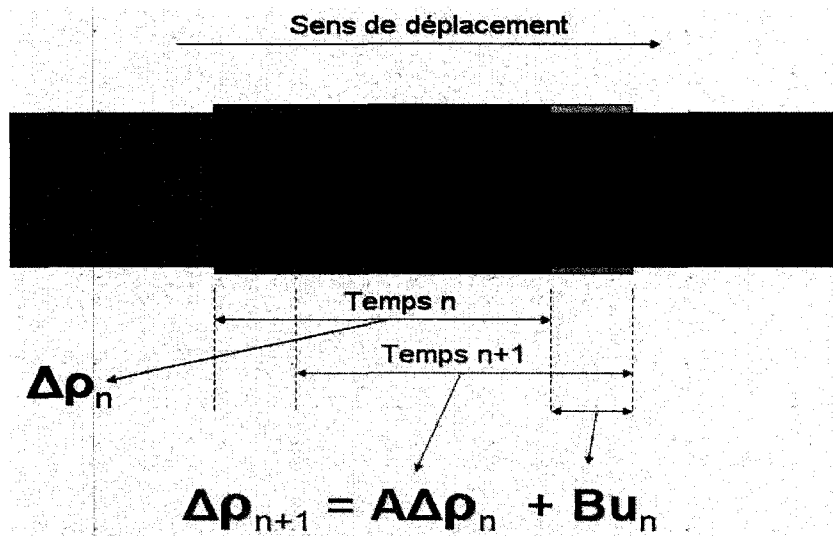


Figure 3.8 – Représentation schématique d'un déplacement unitaire.

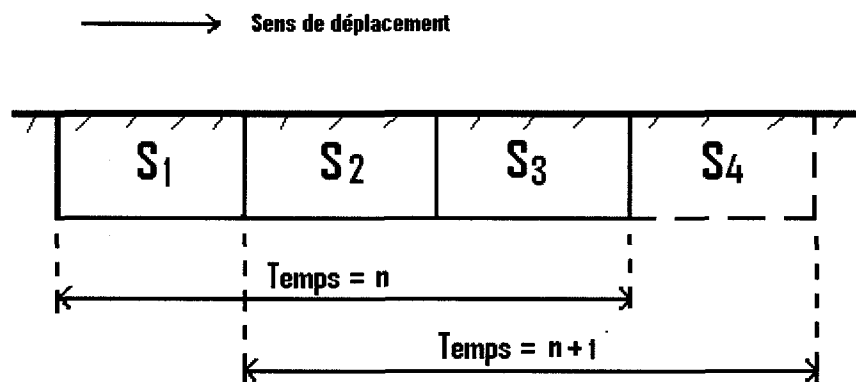


Figure 3.9 – Déplacement unitaire simplifié.

$$\begin{pmatrix} \Delta\rho_{n+1}(1) \\ \Delta\rho_{n+1}(2) \\ \Delta\rho_{n+1}(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\rho_n(2) \\ \Delta\rho_n(3) \\ a\Delta\rho_n(3) + u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\rho_n(1) \\ \Delta\rho_n(2) \\ \Delta\rho_n(3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_n,$$

où la variation de résistivité entrante $S_4 = \Delta\rho_{n+1}(3)$ est donnée par $\Delta\rho_{n+1}(3) = a\Delta\rho_n(3) + u_n$, où a est un paramètre ajustable. On peut donc écrire qu'au temps n ,

$$\Delta\rho_{n+1} = \mathbf{A} \Delta\rho_n + \mathbf{B} u_n,$$

où

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$u_n = \Delta\rho_{n+1}(3) - a\Delta\rho_n(3).$$

Nous dirons que le processus stochastique $\Delta\rho_n$, $n \in \mathbb{N}$, est stable si $Var(\Delta\rho_n(3)) < \infty$ quel que soit $n > 0$. La stabilité du processus dépend de la valeur du paramètre a . Afin de déterminer les valeurs de a qui assurent la stabilité du processus, calculons la variance de $\Delta\rho_{n+1}(3)$. Tout d'abord, notons que

$$\begin{aligned} E[\Delta\rho_{n+1}(3)] &= aE[\Delta\rho_n(3)] + E[u_n], \\ &= aE[\Delta\rho_n(3)]. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \text{var}(\Delta\rho_{n+1}(3)) &= E[(\Delta\rho_{n+1}(3) - E[\Delta\rho_{n+1}(3)])^2], \\
 &= E[(a\Delta\rho_n(3) + u_n - aE[\Delta\rho_n(3)])^2], \\
 &= a^2 \text{var}(\Delta\rho_n(3)) + \text{var}(u_n).
 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la relation $E[u_n \Delta\rho_n(3)] = 0$, qui est obtenue du fait que $\Delta\rho_n$ ne dépend que de $\{\Delta\rho_0, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$ et est indépendant de u_n . Posons $Z_n = \text{var}(\Delta\rho_n(3))$ et $\text{var}(u_n) = V_0$. On a, $Z_{n+1} = a^2 Z_n + V_0$. Pour $n = 1, 2$, on a :

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= a^2 Z_0 + V_0, \\
 Z_2 &= a^2 (a^2 Z_0 + V_0) + V_0, \\
 &= (a^2)^2 Z_0 + V_0 (1 + a^2).
 \end{aligned}$$

À un instant n quelconque, on voit que

$$\begin{aligned}
 Z_n &= (a^2)^n Z_0 + V_0 (1 + a^2 + \dots + (a^2)^{n-1}), \\
 &= (a^2)^n Z_0 + V_0 \left(\frac{(a^2)^n - 1}{a^2 - 1} \right),
 \end{aligned}$$

si $a \neq 1$. Si $|a| > 1$, $Z_n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$. Si $|a| < 1$, $Z_n \rightarrow V_0 \frac{1}{1-a^2}$ quand $n \rightarrow \infty$. Si $|a| = 1$, on a $Z_n = Z_0 + V_0(n-1)$ et donc $Z_n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$. En conclusion, la stabilité du processus est assurée par $|a| < 1$ et dans ce cas, $Z_n \rightarrow Z^*$ quand $n \rightarrow \infty$ où $Z^* = \frac{V_0}{1-a^2}$ ou encore $\text{var}(\Delta\rho_n(3)) \sim \frac{V_0}{1-a^2}$ quand $n \rightarrow \infty$. Par ailleurs, $|a| \rightarrow 1$ implique que les variations de résistivités $\Delta\rho_{n+1}(3)$ et $\Delta\rho_n(3)$ sont fortement corrélées et $|a| \rightarrow 0$ implique qu'elles sont faiblement corrélées.

Une généralisation de la zone d'intérêt simplifiée nous permet d'écrire l'équation suivante en nous référant à la figure 3.7 :

$$\Delta \rho_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix} \Delta \rho_n + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}_n,$$

où

$$\Delta \rho_{n+1} = \begin{pmatrix} \Delta \rho_{n+1}(1) \\ \Delta \rho_{n+1}(2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta \rho_{n+1}(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{1+Km} \\ S_{2+Km} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ S_{N+Km} \end{pmatrix},$$

$$\Delta \rho_n = \begin{pmatrix} \Delta \rho_n(1) \\ \Delta \rho_n(2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta \rho_n(N) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_n(1) \\ \mathbf{u}_n(2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n(Km) \end{pmatrix}.$$

Plus précisément, les matrices **A** et **B** se présentent comme suit :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(N-Km) \times (Km)} & \mathbf{I}_{(N-Km) \times (N-Km)} \\ \mathbf{0}_{(Km) \times (N-Km)} & a \mathbf{I}_{(Km) \times (Km)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(N-Km) \times (Km)} \\ \mathbf{I}_{(Km) \times (Km)} \end{pmatrix}.$$

Une mesure au niveau d'un dipôle de réception à un instant donné est une variation de la différence de potentiel à ses bornes par rapport à une différence de potentiel obtenue aux bornes du même récepteur pour une distribution spatiale de résistivités donnée $\rho_0 = \mu_\rho$ où μ_ρ est la moyenne de la distribution spatiale de résistivités. Il existe une relation qui lie les mesures $\mathbf{x}_n$ au temps n aux variations de résistivités $\Delta\rho_n$ au temps n . Cette relation découle de l'équation de Poisson et n'est pas linéaire. La linéarisation de cette relation est représentée avec une matrice de sensibilité **H**. On a donc

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{H} \Delta\rho_n + \mathbf{w}_n, \quad (3.5)$$

où **H** est une matrice de sensibilité de dimensions $M \times N$ et $\mathbf{w}_n$ est un vecteur contenant les erreurs de mesure au temps n . Cette matrice dépend principalement du nombre d'émetteurs

et de récepteurs ainsi que de leur disposition spatiale. Cette matrice dépend aussi du temps, mais nous la supposons constante dans le cadre de ce travail de recherche. Le vecteur $\mathbf{x}_n = (x_n(1), x_n(2), \dots, x_n(M))^T$ contient les mesures au temps n , $\mathbf{w}_n = (w_n(1), w_n(2), \dots, w_n(M))^T$ est un vecteur de bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance $\mathbf{C}_n$ au temps n ($\mathbf{w}_n \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{C}_n)$) qui contient les erreurs de mesure sur $\mathbf{x}_n$. En général, la variance de $\mathbf{w}_n$ peut être fonction du temps, mais dans ce mémoire nous la supposons constante. Chaque nouveau vecteur de bruit de mesure est supposé non corrélé avec les précédents :

$$E[\mathbf{w}_n \mathbf{w}_k^T] = \begin{cases} \mathbf{C}_n & \text{si } n = k, \\ \mathbf{0} & \text{si } n \neq k. \end{cases} \quad (3.6)$$

En résumé, à un instant n donné, on peut écrire le système d'équations suivant qui représente la modélisation mathématique du système :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_n = \mathbf{H} \Delta \rho_n + \mathbf{w}_n, \\ \Delta \rho_{n+1} = \mathbf{A} \Delta \rho_n + \mathbf{B} \mathbf{u}_n, \end{cases} \quad (3.7)$$

avec

- $\mathbf{x}_n$: vecteur de mesures au temps n .
- $\Delta \rho_n$: vecteur de variation des résistivités au temps n .
- $\mathbf{w}_n$: vecteur de bruit de mesure au temps n .
- $\mathbf{u}_n$: vecteur de fluctuation au temps n .
- $\mathbf{A}$: matrice de décalage ou de transition.
- $\mathbf{B}$: matrice d'ajout de fluctuation.
- $\mathbf{H}$: matrice de sensibilité.

Nous supposons que $\Delta \rho_0$, $\mathbf{w}_i$ et $\mathbf{u}_j$ sont mutuellement indépendants pour tout (i, j) et que $\Delta \rho_0$ suit une loi normale telle que $\Delta \rho_0 \sim N(\mu_{\Delta \rho}, \sigma_{\Delta \rho}^2)$ où $\mu_{\Delta \rho} = E[\Delta \rho]$ et $\sigma_{\Delta \rho}^2 = Var(\Delta \rho)$.

Une représentation schématique du système sous forme de boucle s'illustre comme suit à la figure 3.10. Cette figure indique d'une part la relation qui lie les variations de

résistivités au temps $k + 1$ aux variations de résistivités et incréments au temps k , et d'autre part la relation qui lie les variations de résistivités aux mesures au temps k . Les incréments (fluctuations) u_k constituent un bruit d'excitation du système.

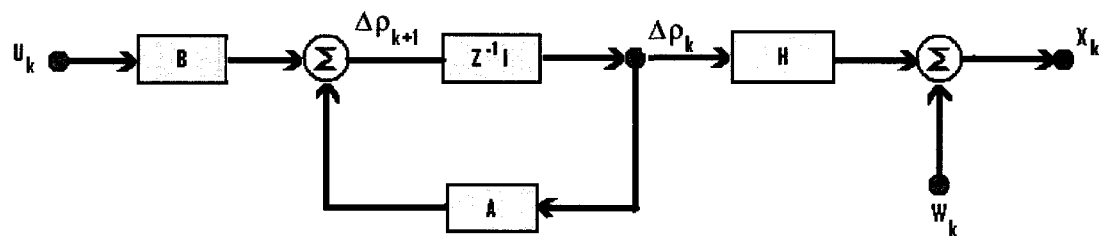


Figure 3.10 – Modélisation schématique du système.

3.4 Recherche de la matrice de sensibilité avec un réseau de résistances

La matrice de sensibilité globale $\mathbf{H}$ est obtenue à partir des matrices de sensibilité de chacun des récepteurs $X_1, X_2, \dots, X_6$ de l'équipement de mesure choisi. Nous supposons, dans un premier temps, une sous-sol homogène dont la valeur de résistivité est $100 \Omega.m$. Dans un second temps, nous supposons un modèle de chaussée stratifié dont les valeurs de résistivité de l'asphalte, du béton et de la fondation sont respectivement $1000 \Omega.m$, $300 \Omega.m$ et $50 \Omega.m$. Ces valeurs de résistivité pour l'asphalte, le béton et la fondation ont été choisies car elles se rapprochent des valeurs de résistivité qu'on observe au niveau d'une chaussée urbaine. Les valeurs d'épaisseur de l'asphalte, du béton et de la fondation sont respectivement 0.1 mètre, 0.2 mètre et 0.9 mètre. Que ce soit pour un milieu homogène ou pour un milieu stratifié, les techniques d'estimation de la sensibilité avec un réseau de résistances restent les mêmes. L'intensité du courant utilisé au niveau du transmetteur est $10 mA$.

Il existe plusieurs approches au calcul de la sensibilité. Ces approches se distinguent les unes des autres dans leurs façons de modéliser les dérivées dans l'équation de Poisson. Les différences finies et les éléments finis sont les méthodes les plus utilisées dans la modélisation des dérivées dans l'équation de Poisson. L'approche de calcul de sensibilité que nous utiliserons ici consiste à modéliser la chaussée par un réseau de résistances, comme le montre la figure 3.11, et à utiliser la loi des nœuds [4, Réal-Paul Bouchard, Guy Olivier] pour calculer le potentiel de chaque nœud du réseau. On définit un nœud principal comme étant un nœud commun à au moins trois résistances. Un des nœuds principaux est considéré comme nœud de référence (relié à la masse) et son potentiel est mis à zéro. Pour un réseau de Q nœuds principaux, la forme matricielle de la loi de nœuds s'écrit $\mathbf{G}\mathbf{V} = \mathbf{I}$ et

est définie par

$$\begin{pmatrix} +G_{1,1} & -G_{1,2} & \cdots & -G_{1,Q} \\ -G_{2,1} & +G_{2,2} & \cdots & -G_{2,Q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -G_{Q,1} & -G_{Q,2} & \cdots & +G_{Q,Q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_Q \end{pmatrix}$$

où

$G_{i,i}$ = somme des conductances reliées au nœud i .

$G_{i,j}$ = somme des conductances communes aux nœuds i et j . On conclut que $G_{j,i} = G_{i,j}$.

I_i = somme algébrique des sources de courant reliées au nœud i . La valeur de la source de courant est positive si le courant circule de la source vers le nœud ; elle est négative autrement.

Dans notre cas (figures 3.11 et 3.12), chaque résistance $R_{i,j}$ est convertie en conductance $C_{i,j}$ telle que $C_{i,j} = \frac{1}{R_{i,j}}$. Les nœuds concernés par le calcul de potentiel sont les nœuds principaux. Selon notre approche et pour une zone d'intérêt $m \times L$ (figure 3.6), le nombre de nœuds principaux pour lesquels il faut calculer les potentiels est

$$NV = (m-1)(L+1) + (L-1) + (L-2).$$

La matrice de conductance $\mathbf{G}$ est obtenue par l'évaluation de chaque élément $\mathbf{G}_{i,j}$ basée sur notre modèle de réseau. Pour i allant de 1 à NV , on remplit la diagonale supérieure de $\mathbf{G}$ grâce à :

$$\mathbf{G}_{i,i+k} = \begin{cases} C_{i,1} + C_{i+1,1} + C_{i+1,2} + C_{i-L,2} & \text{si } k = 0, \\ -C_{i+1,1} & \text{si } k = 1, \\ -C_{i-L,2} & \text{si } k = L+1, \\ 0 & \text{pour les autres valeurs possibles de } k. \end{cases} \quad (3.8)$$

La matrice $\mathbf{G}$ étant symétrique, sa diagonale inférieure s'obtient facilement une fois la diagonale supérieure remplie. Le vecteur de voltage $\mathbf{V}$ est obtenu par $\mathbf{V} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{I}$. La résolution des potentiels aux nœuds du réseau nous donne la mesure de chaque récepteur selon une distribution de résistivité donnée. La figure 3.13 montre la répartition de potentiel obtenue avec l'outil *pdetool* de MatLab (figure 3.13(a)) en comparaison avec celle obtenue avec le réseau de résistances (figure 3.13(b)). Les répartitions et les valeurs de potentiel dans les deux cas sont très semblables, ce qui démontre que la modélisation par un réseau de résistances est à première vue une approche consistante. On a ainsi un modèle direct à partir duquel nous pouvons générer des mesures synthétiques. La figure 3.12 montre une ébauche de la modélisation par un réseau de résistances de la zone d'intérêt du système de mesure choisi. Avec le modèle direct obtenu, plusieurs approches seront utilisées pour estimer la matrice de sensibilité. Il s'agit de la méthode des perturbations, de la méthode de regression linéaire, de la méthode d'extrapolation de Richardson et de la méthode des moindres carrés.

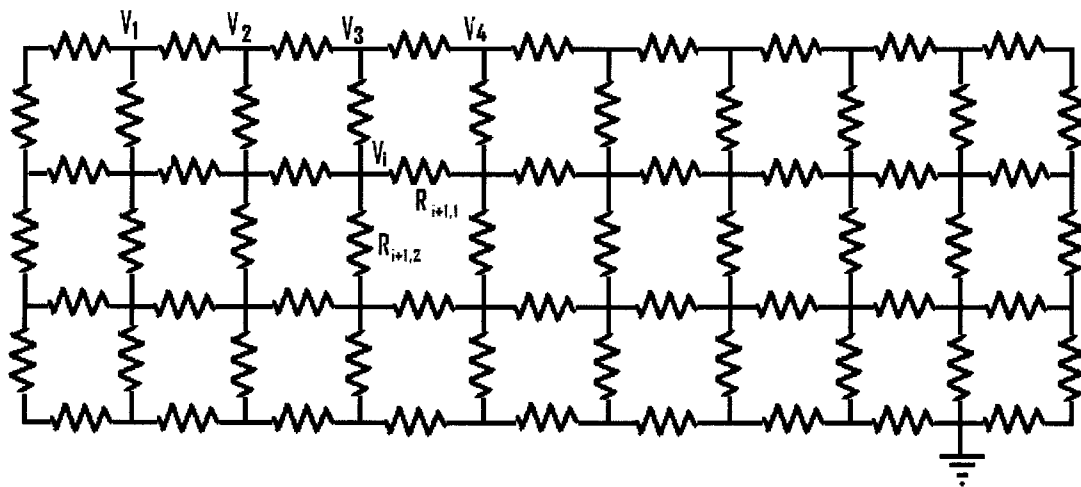


Figure 3.11 – Réseau de résistances et numérotation.

Le réseau de résistances utilisé suppose que chaque cellule de base de notre discrétisation

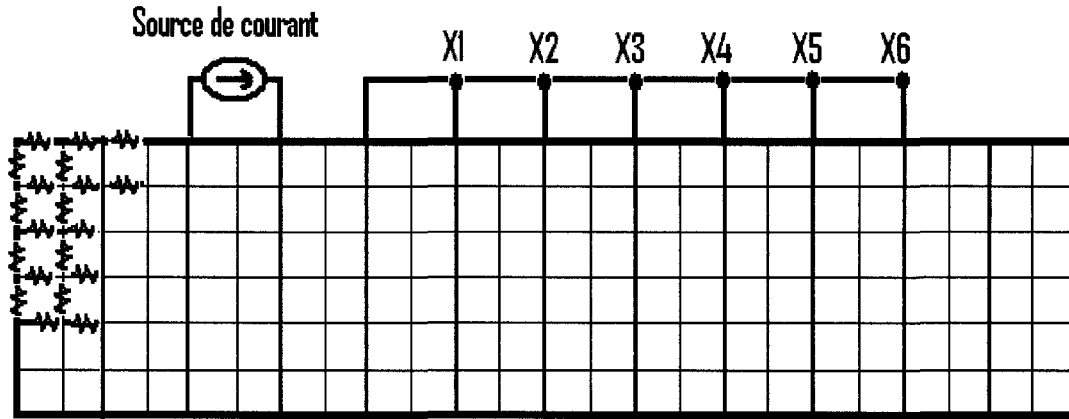


Figure 3.12 – Réseau de résistances appliqué à notre discrétisation.

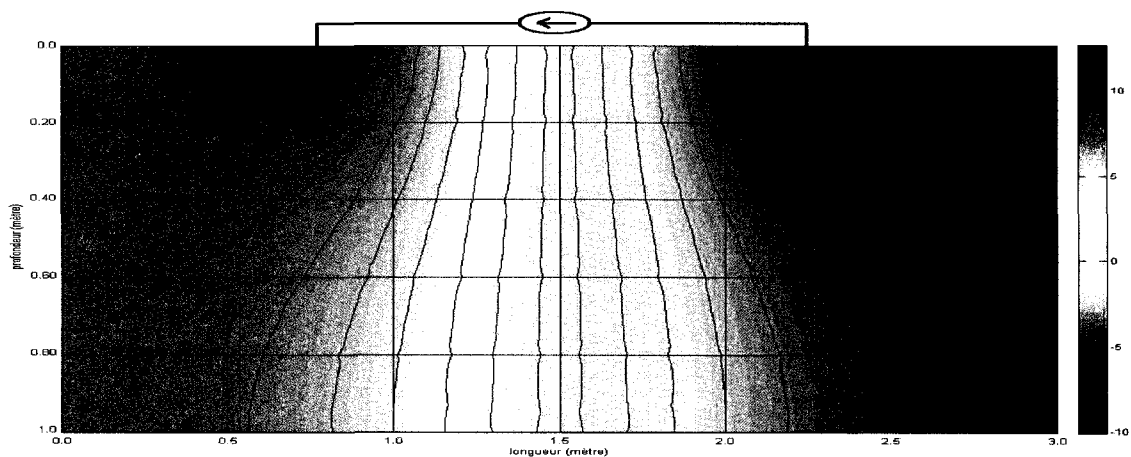
sation est représentée par deux résistances : une verticale et une horizontale. La valeur de chacune de ces résistances dépend de la géométrie ainsi que de la valeur de résistivité de la cellule de base. Pour une cellule de base de résistivité ρ , soient L_x , L_z et ϵ respectivement sa dimension horizontale (dans le sens du déplacement), sa dimension verticale (dimension en profondeur) et son épaisseur. La résistance horizontale R_h de la cellule de base est donnée par

$$R_h = \rho \frac{L_x}{\epsilon L_z}, \quad (3.9)$$

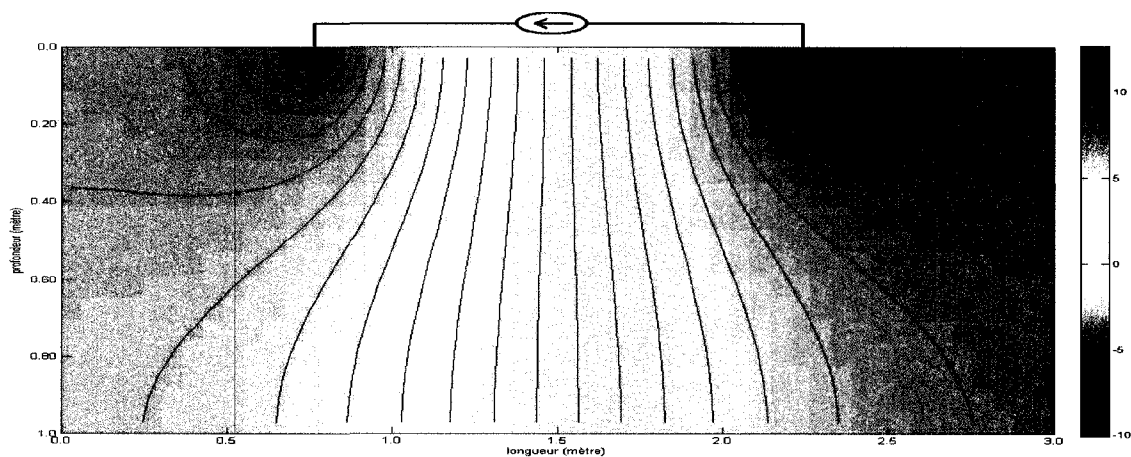
et sa résistance verticale R_v est donnée par

$$R_v = \rho \frac{L_z}{\epsilon L_x}. \quad (3.10)$$

La modélisation 2D suppose que le courant circule dans un plan et dans un tel cas il est préférable de choisir ϵ petit. Dans notre cas, la valeur de ϵ est 0.02 mètre. Pour une cellule de base carrée, les deux résistances ont la même valeur. À travers une cellule de base, le courant circule verticalement et horizontalement. La recherche d'une meilleure précision au niveau des voltages aux nœuds et par conséquent d'un meilleur estimé de la sensibilité



(a) Répartition de potentiel obtenue avec pdetool de Matlab.



(b) Répartition de potentiel obtenue avec le réseau de résistances.

Figure 3.13 – Répartition de potentiel avec pdetool et avec le réseau de résistances. Distribution homogène de résistivité de valeur $100 \Omega.m$. L'intensité du courant est $I = 100 mA$

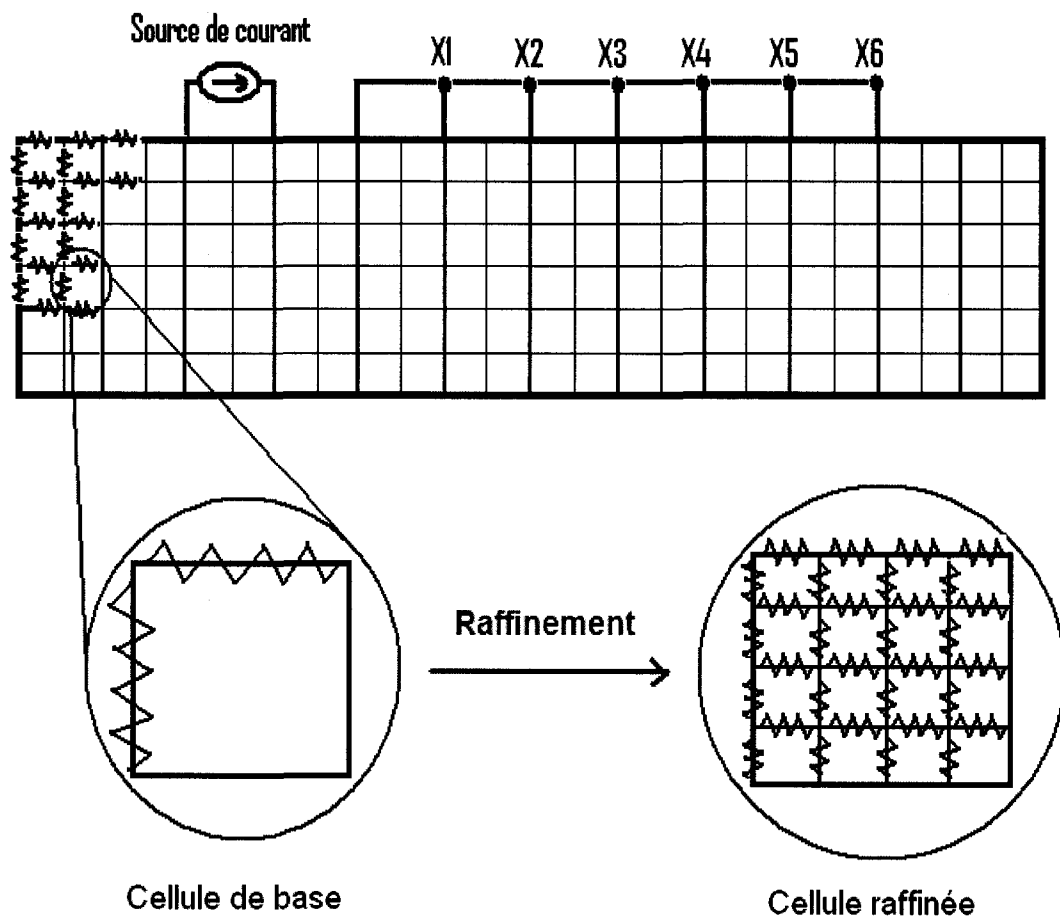


Figure 3.14 – Réseau de résistances appliqué à notre discrétisation avec raffinement 4x4.

nous amène à représenter une cellule de base par 16 sous-cellules de même résistivité que la cellule de base, soit 32 résistances. Parmi les 32 résistances, toutes celles qui sont horizontales ont la même valeur, tandis que toutes celles qui sont verticales ont la même valeur. Dans une sous-cellule, les calculs de la résistance horizontale et de la résistance verticale utilisent les mêmes formules que dans le cas d'une cellule de base ; seules les dimensions horizontale et verticale changent. L'utilisation de sous-cellules implique que la circulation du courant à travers une cellule de base n'est pas seulement horizontale et verticale, mais bien multi-directionnelle, ce qui se rapproche un peu plus de la réalité. La figure 3.14 illustre cette nouvelle approche, dite de raffinement, pour le calcul des voltages. Une autre approche consiste à utiliser des cellules de taille plus petite (discrétisation fine). Cette dernière approche augmente le nombre de cellules de base de la discrétisation et par conséquent le nombre de résistivités à estimer dans la résolution du problème inverse.

3.4.1 Méthode des perturbations

La méthode des perturbations consiste à faire varier positivement et négativement la résistivité d'une cellule à la fois avec un taux de perturbation h et à utiliser une différence centrée pour calculer la sensibilité de cette cellule par rapport à un dipôle de réception donné. On a ainsi pour un dipôle de réception i donné, et pour une résistivité située à la position vectorielle j , la sensibilité correspondante est donnée par $\mathbf{H}(i, j) = \frac{\mathbf{x}(i)}{\Delta\rho(j)}$ où $\mathbf{x}(i) = \Delta(\Delta V)(i)$ et $\Delta\rho(j) = (1 + h)\rho(j) - (1 - h)\rho(j) = 2h\rho(j)$. L'application de cette méthode de résolution nous donne la matrice de sensibilité du récepteur X4 à la figure 3.15 et ce, en utilisant l'approche de raffinement qui remplace une cellule de base par 16 sous-cellules. La valeur du taux de perturbation choisie ici est $h = 0.05$. La figure 3.16 présente le même résultat en utilisant des cellules de tailles quatre fois plus petites (discrétisation fine) et l'approche de raffinement.

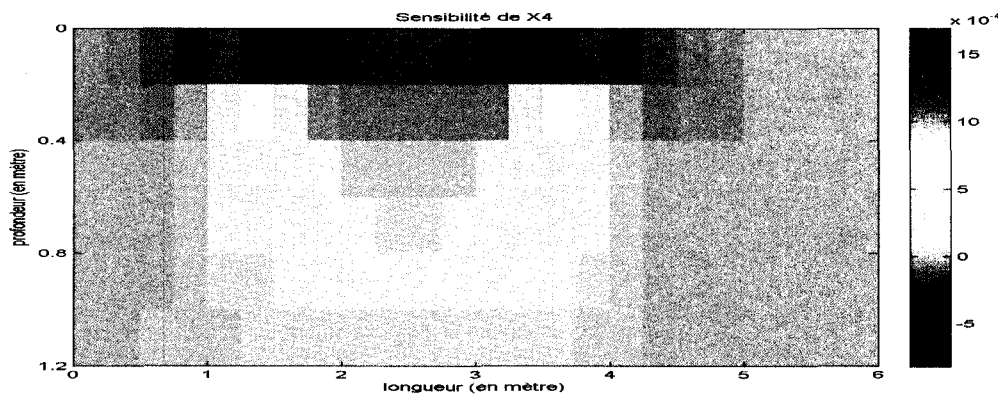


Figure 3.15 – Sensibilité du récepteur X4 par la méthode des perturbations (raffinement).

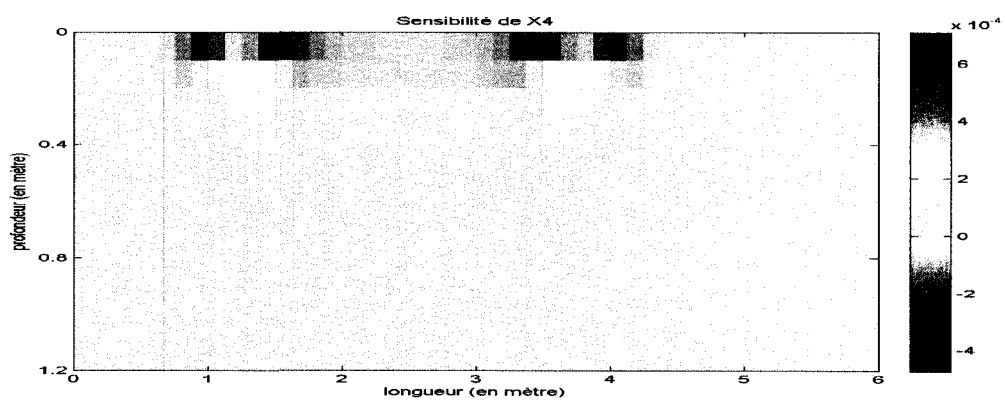


Figure 3.16 – Sensibilité du récepteur X4 par la méthode des perturbations (discrétisation fine plus raffinement).

3.4.2 Méthode de régression linéaire

La méthode de régression linéaire est basée sur la linéarisation suivante. Soit $f(x)$ une fonction dérivable en x_1 . L'estimé de la dérivée de $f(x)$ en x_1 avec une différence centrée est donnée par : $\frac{\Delta f}{2h} = \frac{f(x_1+h) - f(x_1-h)}{2h}$. Par ailleurs, $\frac{\Delta f}{2h} = f'(x_1) + h^2 \frac{f'''(\xi)}{6}$. En posant $y(x) = \frac{\Delta f}{2h}$, $a = f'(x_1)$, $x = h^2$ et $b = \frac{f'''(\xi)}{6}$, on obtient $y(x) = a + x b$ qui est un modèle de regression linéaire où a est la dérivée recherchée. Pour n observations $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, on a $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}$, $\hat{b} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$ où $S_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2$ et $S_{xy} = \sum y_i (x_i - \bar{x})$. Dans notre cas, $\frac{\Delta f}{2h}$ représente une valeur estimée de la sensibilité avec la méthode des perturbations pour un taux de perturbation h .

La méthode des perturbations a été utilisée pour obtenir plusieurs observations. Les taux de perturbation utilisés sont $\frac{h}{2^n}$ pour $n = 1, 2, \dots, 4$. L'estimé de la sensibilité obtenu, par utilisation de la régression linéaire sur ces observations, est plus précis. Le résultat obtenu avec cette méthode en utilisant l'approche de raffinement, et ce, pour le récepteur X4 est montré à la figure 3.17. En utilisant la même méthode de regression linéaire et une discrétisation plus fine (quatre cellules à la place d'une) combinée avec le raffinement, on obtient la figure 3.18.

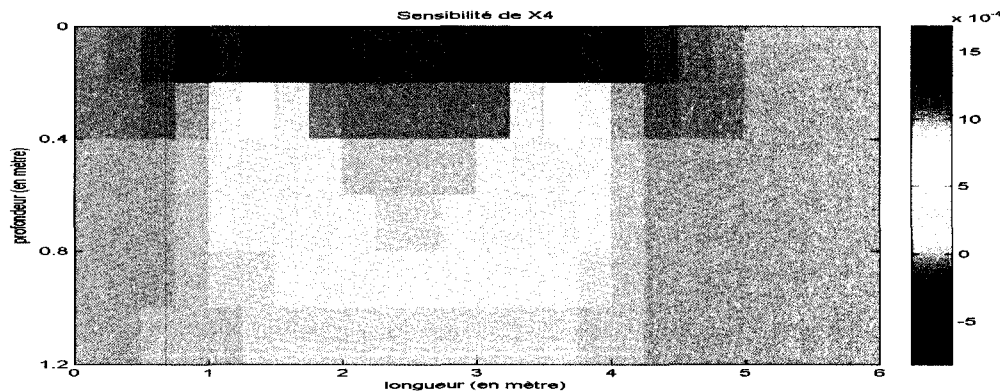


Figure 3.17 – Sensibilité du récepteur X4 par la méthode de regression (raffinement).

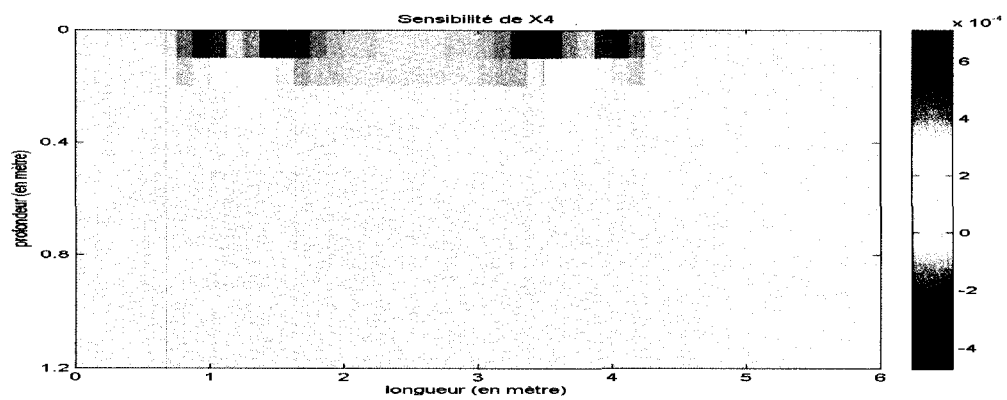


Figure 3.18 – Sensibilité du récepteur X4 par la méthode de regression (discretisation fine et raffinement).

3.4.3 Méthode d'extrapolation de Richardson

La méthode d'extrapolation de Richardson est une méthode qui permet d'élever l'ordre de l'erreur d'estimation de la sensibilité. L'ordre de l'erreur d'estimation de la sensibilité par la méthode des perturbations est deux. Utiliser la méthode d'extrapolation pour combiner deux estimés par perturbation par exemple, permet d'obtenir une estimation de la sensibilité dont l'ordre de l'erreur d'estimation est trois. Soit S_* la valeur d'une sensibilité et S son estimée dont l'ordre de l'erreur d'estimation est n . On a $S = S_* + \Theta((\Delta\rho)^n)$. En combinant les deux équations suivantes $S(\Delta\rho) = S_* + C(\Delta\rho)^n + \Theta((\Delta\rho)^{n+1})$ et $S(\frac{\Delta\rho}{2}) = S_* + C(\frac{\Delta\rho}{2})^n + \Theta((\Delta\rho)^{n+1})$, on obtient une nouvelle estimée S_a de S_* telle que

$$S_a = \frac{2^n S(\frac{\Delta\rho}{2}) - S(\Delta\rho)}{2^n - 1} = S_* + \Theta((\Delta\rho)^{n+1})$$

qui est une estimée dont l'erreur d'estimation est d'ordre $n + 1$. L'application de cette méthode d'extrapolation permet d'obtenir une matrice de sensibilité dont l'ordre de l'erreur d'estimation est cinq. Les résultats obtenus en utilisant cette méthode combinée avec le raffinement d'une part et la discrétisation fine combinée avec le raffinement d'autre part sont montrés aux figures 3.19 et 3.20.

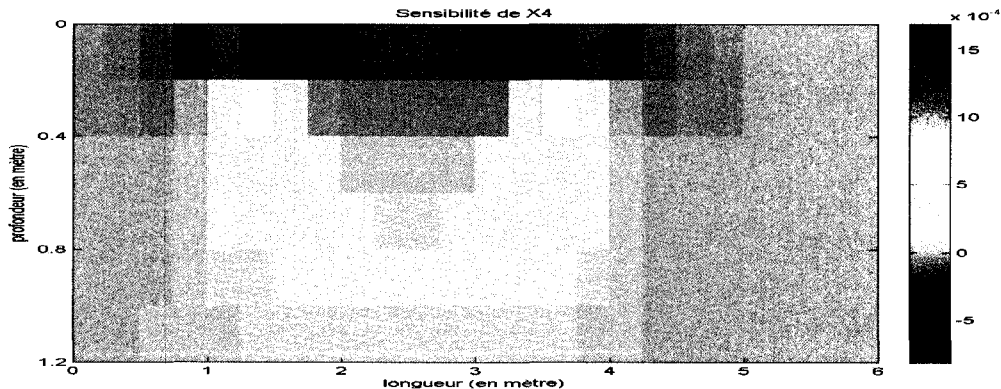


Figure 3.19 – Sensibilité du récepteur X4 par la méthode d'extrapolation (raffinement).

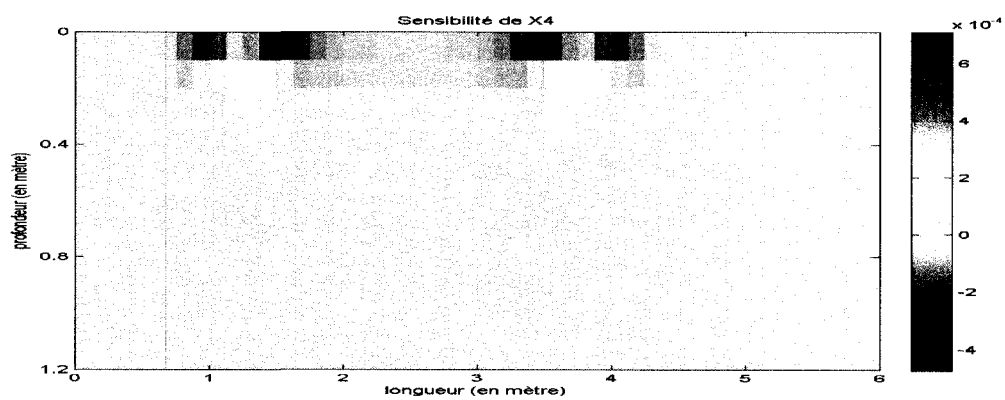


Figure 3.20 – Sensibilité du récepteur X4 par la méthode d'extrapolation (discrétisation fine et raffinement).

3.4.4 Méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés consiste à générer des hétérogénéités dans la chaussée et à utiliser les mesures qui en résultent pour estimer la sensibilité. Afin de générer les mesures, nous allons utiliser un bruit blanc gaussien pour modéliser les variations de résistivité $\Delta\rho$. Soient $x_{i,p}$, la p -ième mesure du dipôle de réception i , $\mathbf{h}_i$ la sensibilité du dipôle de réception i et $\Delta\rho_p$ la variation de résistivité correspondant à la mesure $x_{i,p}$. On a $x_{i,p} = \Delta\rho_p^T \mathbf{h}_i$. Pour p mesures obtenues par le récepteur i , on a

$$\begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \\ \vdots \\ x_{i,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\rho_1^T \\ \Delta\rho_2^T \\ \vdots \\ \Delta\rho_p^T \end{pmatrix} \mathbf{h}_i.$$

On peut donc écrire,

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{M}_{\Delta\rho} \mathbf{h}_i$$

où

$$\mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \\ \vdots \\ x_{i,p} \end{pmatrix},$$

et

$$\mathbf{M}_{\Delta\rho} = \begin{pmatrix} \Delta\rho_1^T \\ \Delta\rho_2^T \\ \vdots \\ \Delta\rho_p^T \end{pmatrix}.$$

Soit $\hat{\mathbf{h}}_i$, l'estimé de $\mathbf{h}_i$ par les moindres carrés. On a,

$$\hat{\mathbf{h}}_i = (\mathbf{M}_{\Delta\rho}^T \mathbf{M}_{\Delta\rho})^{-1} \mathbf{M}_{\Delta\rho}^T \mathbf{x}_i.$$

On procède ainsi pour chaque récepteur i .

La méthode de calcul de la sensibilité retenue est la méthode d'extrapolation de Richardson car elle offre un meilleur contrôle du bruit de mesure lorsqu'on effectue une reconstruction en présence de bruit de mesure. Elle donne également une meilleure symétrie de la matrice de sensibilité.

3.4.5 Résultats de sensibilité pour un milieu stratifié

Nous présenterons ici les résultats de calcul de sensibilité obtenus pour un milieu stratifié. Le milieu est constitué de trois couches superposées qui représentent respectivement pour une chaussée mixte l'asphalte, le béton et la fondation. Les valeurs de résistivité utilisées sont $1000 \Omega.m$ pour l'asphalte, $300 \Omega.m$ pour le béton et $50 \Omega.m$ pour la fondation. Les valeurs d'épaisseur de l'asphalte, du béton et de la fondation sont respectivement 0.1 mètre, 0.2 mètre et 0.9 mètre. Comme pour les milieux homogènes, plusieurs techniques d'estimation de la sensibilité sont utilisées. Cependant, nous ne présenterons que les résultats de sensibilité obtenus avec la méthode d'extrapolation de Richardson. La figure 3.21 montre la sensibilité du récepteur X4 pour une discrétisation dont $\Delta Z = 0.10$ mètre et $\Delta X = 0.25$ mètre. La figure 3.22 montre la sensibilité du même récepteur avec $\Delta Z = 0.10$ mètre et $\Delta X = 0.125$ mètre.

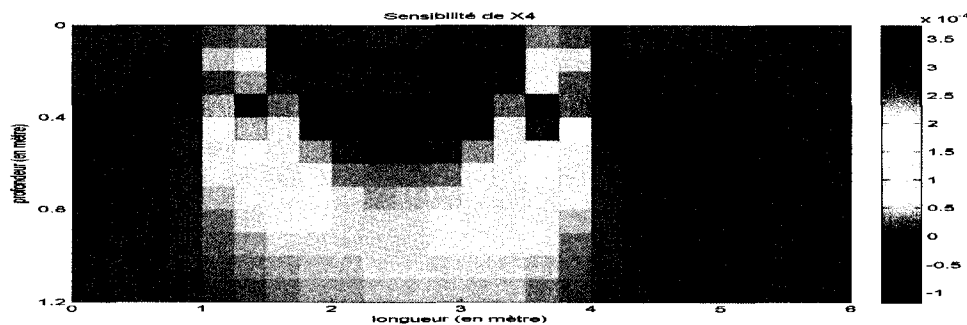


Figure 3.21 – Sensibilité du récepteur X4 (discrétisation fine en profondeur).

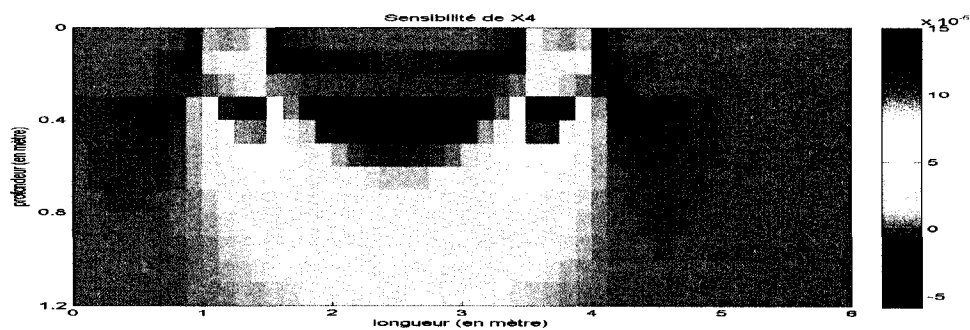


Figure 3.22 – Sensibilité du récepteur X4 (discrétisation fine en profondeur et en longueur).

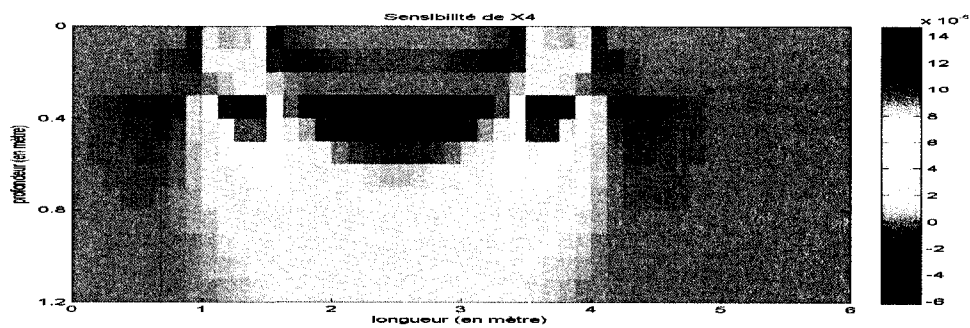


Figure 3.23 – Sensibilité du récepteur X4 (discrétisation fine en profondeur et en longueur plus raffinement).

CHAPITRE 4

RÉSOLUTION DU PROBLÈME INVERSE

Ce chapitre est consacré à la résolution du problème inverse, soit la détermination des résistivités du sous-sol en utilisant les mesures prises au niveau des récepteurs. Deux méthodes seront présentées et comparées : la méthode récursive de Kalman et la méthode statique du *maximum a posteriori*. La méthode récursive de Kalman permet de produire une image du sous-sol au fur et à mesure que les données sont acquises, alors que la méthode statique permet d'obtenir l'image des résistivités seulement à la fin de l'acquisition lorsque toutes les données sont recueillies.

4.1 Récurrence de Kalman

Cette section est consacrée à la résolution du système d'équations (3.7). Il s'agit d'un système sous-déterminé puisque le nombre de résistivités à estimer est supérieur au nombre de mesures prises. Nous allons résoudre le modèle en utilisant l'estimation récursive du filtre de Kalman.

4.1.1 Théorèmes et hypothèses

Avant toute chose, il est important de mentionner deux théorèmes importants dans l'établissement de la preuve des équations de récurrence du filtre de Kalman. Il s'agit du théorème de l'estimateur « moyenne conditionnelle » et du principe de l'orthogonalité tirés du livre de Simon Haykin [2].

Théorème 1 (Estimateur moyenne conditionnelle) *Si deux processus stochastiques $\{x_k\}$ et $\{y_k\}$ sont conjointement gaussiens, alors l'estimé optimal $\hat{x}_k$ de x_k sachant $y_1, y_2, \dots, y_k$ qui minimise l'erreur des moindres carrés $J_k = E[(x_k - \hat{x}_k)^2]$ est l'estimateur moyenne conditionnelle défini par*

$$\hat{x}_k = E[x_k | y_1, y_2, \dots, y_k].$$

Théorème 2 (Principe de l'orthogonalité) *Soient deux processus stochastiques $\{x_k\}$ et $\{y_k\}$ de moyennes nulles pour tout k , c'est-à-dire*

$$E[x_k] = E[y_k] = 0.$$

Si les processus $\{x_k\}$ et $\{y_k\}$ sont conjointement gaussiens, ou si l'estimateur optimal $\hat{x}_k$ est restreint à être une combinaison linéaire des observations y_k et que la fonction de coût est l'erreur des moindres carrés, alors l'estimé optimal $\hat{x}_k$ de x_k sachant les observations $y_1, y_2, \dots, y_k$, est la projection orthogonale de x_k sur l'espace engendré par ces observations. Plus précisément,

$$E[(x_k - \hat{x}_k) y_i] = 0, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, k.$$

Preuve :

Posons, $\hat{x}_k = \sum_{i=1}^k a_i y_i$. On cherche les coefficients a_i qui minimisent l'erreur quadratique moyenne (MSE) où MSE est définie par $MSE = E[(x_k - \hat{x}_k)^2]$. Si l'MSE est minimale,

alors $\nabla_{\vec{a}} MSE = \vec{0}$, ce qui implique :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a_j} E[(x_k - \hat{x}_k)^2] &= 0, \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, k \\ \Rightarrow E[(x_k - \hat{x}_k) \frac{\partial}{\partial a_j} \hat{x}_k] &= 0, \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, k \\ \Rightarrow E[(x_k - \hat{x}_k) y_j] &= 0, \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, k.\end{aligned}$$

4.1.2 Dérivation des équations de récurrence

On considère les équations du système (3.7). La tâche consiste à utiliser l'information contenue dans le vecteur de mesure $\mathbf{x}_n$ pour mettre à jour l'estimé des variations de résistivités inconnues $\Delta\rho_n$. Soit $\widehat{\Delta\rho}_n^-$, l'estimé *a priori* de $\Delta\rho_n$ au temps n . $\widehat{\Delta\rho}_n^-$ est l'estimé de $\Delta\rho_n$ sachant les mesures antérieures $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$. L'estimé *a posteriori* $\widehat{\Delta\rho}_n$ peut être obtenu par une combinaison linéaire de l'estimé *a priori* $\widehat{\Delta\rho}_n^-$ et de la nouvelle mesure $\mathbf{x}_n$. On a donc

$$\widehat{\Delta\rho}_n = \mathbf{F}_n \widehat{\Delta\rho}_n^- + \mathbf{G}_n \mathbf{x}_n, \quad (4.1)$$

où les matrices $\mathbf{F}_n$ et $\mathbf{G}_n$ sont à déterminer. $\widehat{\Delta\rho}_n$ est par conséquent une combinaison linéaire des mesures $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ car $\widehat{\Delta\rho}_n^-$ est obtenu par combinaison linéaire des mesures $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$. Soit le vecteur d'erreur $\widetilde{\Delta\rho}_n$ défini par

$$\widetilde{\Delta\rho}_n = \Delta\rho_n - \widehat{\Delta\rho}_n. \quad (4.2)$$

En utilisant le principe de l'orthogonalité vu au théorème 2, on a

$$E[(\Delta\rho_n - \widehat{\Delta\rho}_n) \mathbf{x}_i^T] = \mathbf{0}, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (4.3)$$

En remplaçant l'équation (4.1) dans l'équation précédente, on obtient

$$E[(\Delta\rho_n - \mathbf{F}_n \widehat{\Delta\rho}_n^- - \mathbf{G}_n \mathbf{x}_n) \mathbf{x}_i^T] = \mathbf{0}, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (4.4)$$

En substituant l'équation (3.5) dans l'équation précédente, on obtient finalement

$$E[(\Delta\rho_n - \mathbf{F}_n \widehat{\Delta\rho}_n^- - \mathbf{G}_n \mathbf{H} \Delta\rho_n - \mathbf{G}_n \mathbf{w}_n) \mathbf{x}_i^T] = \mathbf{0}, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (4.5)$$

Par ailleurs, pour $i = 1, 2, \dots, n-1$, on a, en utilisant l'équation (3.5)

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}_n \mathbf{x}_i] &= E[\mathbf{w}_n (\mathbf{H} \Delta\rho_i + \mathbf{w}_i)^T], \\ &= E[\mathbf{w}_n (\mathbf{H} \Delta\rho_i)^T] + E[\mathbf{w}_n \mathbf{w}_i^T], \\ &= E[\mathbf{w}_n (\mathbf{H} \Delta\rho_i)^T], \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

car $E[\mathbf{w}_n \mathbf{w}_i^T] = 0$ pour $i < n$ par hypothèse et $E[\mathbf{w}_n (\mathbf{H} \Delta \rho_i)^T] = \mathbf{0}$ car $\Delta \rho_i$ ne dépend que de $\{\Delta \rho_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}\}$ et $\mathbf{w}_n$ est indépendant de $\Delta \rho_0$ et $\mathbf{u}_j$ pour tout j . Ainsi après réarrangement de l'équation (4.5) avec ajout et soustraction du terme $\mathbf{F}_n \Delta \rho_n$ et en utilisant le résultat (4.6), on obtient l'équation

$$E[(\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{H} - \mathbf{F}_n) \Delta \rho_n \mathbf{x}_i^T + \mathbf{F}_n (\Delta \rho_n - \widehat{\Delta \rho_n}^-) \mathbf{x}_i^T] = \mathbf{0}, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (4.7)$$

où $\mathbf{I}$ désigne la matrice identité de dimension $N \times N$. Or à partir du principe de l'orthogonalité on peut écrire

$$E[(\Delta \rho_n - \widehat{\Delta \rho_n}^-) \mathbf{x}_i^T] = \mathbf{0}, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (4.8)$$

et donc l'équation (4.7) devient

$$E[(\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{H} - \mathbf{F}_n) \Delta \rho_n \mathbf{x}_i^T] = \mathbf{0}, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (4.9)$$

Par conséquent, on a

$$(\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{H} - \mathbf{F}_n) E[\Delta \rho_n \mathbf{x}_i^T] = \mathbf{0}, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (4.10)$$

L'équation (4.10) doit être satisfaite pour toutes les valeurs possibles de $E[\Delta \rho_n \mathbf{x}_i^T]$, ce qui implique

$$\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{H} - \mathbf{F}_n = \mathbf{0}, \quad (4.11)$$

d'où on obtient

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{H}. \quad (4.12)$$

En substituant l'équation (4.12) dans l'équation (4.1), l'estimé *a posteriori* au temps n prend la forme

$$\widehat{\Delta \rho_n} = \widehat{\Delta \rho_n}^- + \mathbf{G}_n (\mathbf{x}_n - \mathbf{H} \widehat{\Delta \rho_n}^-), \quad (4.13)$$

où la matrice $\mathbf{G}_n$ porte le nom de *gain de Kalman*.

Il est à présent question de trouver l'expression de $\mathbf{G}_n$. Soit $\hat{\mathbf{x}}_n$ l'estimé de $\mathbf{x}_n$ sachant les mesures précédentes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$. On a $\hat{\mathbf{x}}_n = E[\mathbf{x}_n | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}]$ et donc d'après l'équation (3.5)

$$\hat{\mathbf{x}}_n = E[\mathbf{H}\Delta\mathbf{p}_n + \mathbf{w}_n | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}] \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{H}E[\Delta\mathbf{p}_n | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}] + E[\mathbf{w}_n | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}] \\ &= \mathbf{H}\widehat{\Delta\mathbf{p}}_n^-. \end{aligned} \quad (4.15)$$

À partir du principe de l'orthogonalité, on peut écrire

$$E[(\Delta\mathbf{p}_n - \widehat{\Delta\mathbf{p}}_n)\mathbf{x}_n^T] = \mathbf{0}. \quad (4.16)$$

Il s'en suit que

$$E[(\Delta\mathbf{p}_n - \widehat{\Delta\mathbf{p}}_n)\hat{\mathbf{x}}_n^T] = \mathbf{0}, \quad (4.17)$$

car $\hat{\mathbf{x}}_n$ est une combinaison linéaire de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$. On définit l'*innovation* par

$$\tilde{\mathbf{x}}_n = \mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n. \quad (4.18)$$

Cette innovation est une mesure de l'information apportée par $\mathbf{x}_n$. En substituant l'équation (4.15) dans l'équation (4.18), on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_n &= \mathbf{x}_n - \mathbf{H}\widehat{\Delta\mathbf{p}}_n^- \\ &= \mathbf{H}\Delta\mathbf{p}_n + \mathbf{w}_n - \mathbf{H}\widehat{\Delta\mathbf{p}}_n^- \\ &= \mathbf{H}\widetilde{\Delta\mathbf{p}}_n^- + \mathbf{w}_n, \end{aligned} \quad (4.19)$$

où $\widetilde{\Delta\mathbf{p}}_n^- = \Delta\mathbf{p}_n - \widehat{\Delta\mathbf{p}}_n^-$. Par la suite, en faisant la différence entre les équations (4.16) et (4.17) et en utilisant la définition (4.18), on obtient

$$E[(\Delta\mathbf{p}_n - \widehat{\Delta\mathbf{p}}_n)\tilde{\mathbf{x}}_n^T] = \mathbf{0}. \quad (4.20)$$

En utilisant les équations (3.5) et (4.13), le vecteur d'erreur $\Delta\rho_n - \widehat{\Delta\rho}_n$ peut s'exprimer sous la forme

$$\begin{aligned}\Delta\rho_n - \widehat{\Delta\rho}_n &= \Delta\rho_n - \widehat{\Delta\rho}_n^- - \mathbf{G}_n(\mathbf{H}(\Delta\rho_n - \widehat{\Delta\rho}_n^-) + \mathbf{w}_n) \\ &= \widetilde{\Delta\rho}_n^- - \mathbf{G}_n(\mathbf{H}\widetilde{\Delta\rho}_n^- + \mathbf{w}_n) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n\mathbf{H})\widetilde{\Delta\rho}_n^- - \mathbf{G}_n\mathbf{w}_n.\end{aligned}\quad (4.21)$$

En substituant les équations (4.19) et (4.21) dans (4.20), on obtient

$$E[(\mathbf{I} - \mathbf{G}_n\mathbf{H})\widetilde{\Delta\rho}_n^- - \mathbf{G}_n\mathbf{w}_n](\mathbf{H}\widetilde{\Delta\rho}_n^- + \mathbf{w}_n)^T = \mathbf{0}. \quad (4.22)$$

Comme le bruit de mesure $\mathbf{w}_n$ est indépendant de $\Delta\rho_n$ et de $\widehat{\Delta\rho}_n^-$ et que $\widetilde{\Delta\rho}_n^- = \Delta\rho_n - \widehat{\Delta\rho}_n^-$, alors $\mathbf{w}_n$ est indépendant de $\widetilde{\Delta\rho}_n^-$. Ainsi l'équation (4.22) devient

$$(\mathbf{I} - \mathbf{G}_n\mathbf{H})E[\widetilde{\Delta\rho}_n^- \widetilde{\Delta\rho}_n^{-T}] \mathbf{H}^T - \mathbf{G}_n E[\mathbf{w}_n \mathbf{w}_n^T] = \mathbf{0}. \quad (4.23)$$

On définit la matrice de covariance *a priori* par

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_n^- &= E[(\Delta\rho_n - \widehat{\Delta\rho}_n^-)(\Delta\rho_n - \widehat{\Delta\rho}_n^-)^T] \\ &= E[\widetilde{\Delta\rho}_n^- \widetilde{\Delta\rho}_n^{-T}].\end{aligned}\quad (4.24)$$

En invoquant les définitions de covariance (3.6) et (4.24), l'équation (4.23) peut être réécrite sous la forme

$$(\mathbf{I} - \mathbf{G}_n\mathbf{H})\mathbf{P}_n^- \mathbf{H}^T - \mathbf{G}_n \mathbf{C}_n = \mathbf{0}. \quad (4.25)$$

L'équation précédente nous permet d'avoir l'expression du *gain de Kalman* $\mathbf{G}_n$ qu'on recherche :

$$\mathbf{G}_n = \mathbf{P}_n^- \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_n^- \mathbf{H}^T + \mathbf{C}_n)^{-1}. \quad (4.26)$$

Pour compléter la procédure de l'estimation récursive, on considère l'évolution de la matrice de covariance $\mathbf{P}_n$ de l'erreur d'estimation. Le calcul de cette matrice de covariance passe par deux étapes de calcul :

1. Connaissant la matrice de covariance $\mathbf{P}_{n-1}$, on calcule la matrice de covariance *a priori* $\mathbf{P}_n^-$.
2. La matrice de covariance *a priori* $\mathbf{P}_n^-$ au temps n est définie par l'équation (4.24).
Sachant $\mathbf{P}_n^-$, on calcule la matrice de covariance *a posteriori* $\mathbf{P}_n$, qui, au temps n , est définie par :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_n &= E[(\Delta\rho_n - \widehat{\Delta\rho}_n)(\Delta\rho_n - \widehat{\Delta\rho}_n)^T] \\ &= E[\widetilde{\Delta\rho}_n \widetilde{\Delta\rho}_n^T].\end{aligned}\quad (4.27)$$

En vue de compléter la première étape du calcul de la matrice de covariance d'erreur, il faut d'abord écrire l'estimé *a priori* de $\Delta\rho_n$ en fonction de l'ancien estimé *a posteriori* $\Delta\rho_{n-1}$.

On a ainsi :

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta\rho}_n^- &= E[\Delta\rho_n | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}] \\ &= E[(\mathbf{A} \Delta\rho_{n-1} + \mathbf{B} \mathbf{u}_{n-1}) | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}] \\ &= \mathbf{A} E[\Delta\rho_{n-1} | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}] + \mathbf{B} E[\mathbf{u}_{n-1} | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}] \\ &= \mathbf{A} \widehat{\Delta\rho}_{n-1}.\end{aligned}\quad (4.28)$$

Utilisons à présent les équations (3.3) et (4.28) pour exprimer l'estimation *a priori* de l'erreur :

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta\rho}_n^- &= \Delta\rho_n - \widehat{\Delta\rho}_n^- \\ &= (\mathbf{A} \Delta\rho_{n-1} + \mathbf{B} \mathbf{u}_{n-1}) - (\mathbf{A} \widehat{\Delta\rho}_{n-1}) \\ &= \mathbf{A}(\Delta\rho_{n-1} - \widehat{\Delta\rho}_{n-1}) + \mathbf{B} \mathbf{u}_{n-1} \\ &= \mathbf{A} \widetilde{\Delta\rho}_{n-1} + \mathbf{B} \mathbf{u}_{n-1}.\end{aligned}\quad (4.29)$$

En remplaçant l'équation (4.29) dans l'équation (4.24) et en tenant compte du fait que $\mathbf{u}_n$ et $\widetilde{\Delta\rho}_{n-1}$ sont indépendants et de la définition 3.4, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_n^- &= \mathbf{A} E[\widetilde{\Delta\rho}_{n-1} \widetilde{\Delta\rho}_{n-1}^T] \mathbf{A}^T + \mathbf{B} E[\mathbf{u}_{n-1} \mathbf{u}_{n-1}^T] \mathbf{B}^T \\ &= \mathbf{A} \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{Q}_{n-1} \mathbf{B}^T\end{aligned}\quad (4.30)$$

ce qui décrit la relation entre $\mathbf{P}_n^-$ et $\mathbf{P}_{n-1}$ et termine la première étape du calcul de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation.

Avant de compléter la deuxième étape du calcul de la matrice de covariance, notons que l'équation (4.25) permet d'obtenir l'identité suivante :

$$\mathbf{G}_n \mathbf{C}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{H}) \mathbf{P}_n^- \mathbf{H}^T. \quad (4.31)$$

Pour compléter la deuxième étape du calcul de la matrice de covariance, substituons l'expression de $\Delta \rho_n - \widehat{\Delta \rho}_n$ donnée par (4.21) dans (4.27), en tenant compte du fait que le bruit de mesure $\mathbf{w}_n$ est indépendant de l'estimé *a priori* de l'erreur $\widetilde{\Delta \rho}_n^-$, et aussi en utilisant l'identité (4.31). On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n &= E[(\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{H}) \widetilde{\Delta \rho}_n^- - \mathbf{G}_n \mathbf{w}_n] (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{H}) \widetilde{\Delta \rho}_n^- - \mathbf{G}_n \mathbf{w}_n)^T] \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{H}) E[\widetilde{\Delta \rho}_n^- \widetilde{\Delta \rho}_n^{-T}] (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{H})^T + \mathbf{G}_n E[\mathbf{w}_n \mathbf{w}_n^T] \mathbf{G}_n^T \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{H}) \mathbf{P}_n^- (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{H})^T + \mathbf{G}_n \mathbf{C}_n \mathbf{G}_n^T \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{H}) \mathbf{P}_n^- - (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{H}) \mathbf{P}_n^- \mathbf{H}^T \mathbf{G}_n^T + \mathbf{G}_n \mathbf{C}_n \mathbf{G}_n^T \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{H}) \mathbf{P}_n^-. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Avec les équations (4.28), (4.30), (4.26), (4.13) et (4.32) on est maintenant en mesure de résumer les étapes de l'estimation recursive de Kalman. Tout d'abord, mentionnons qu'au temps $n = 0$, aucune mesure n'est disponible et on initialise dans ce cas avec :

$$\widehat{\Delta \rho}_0 = E[\Delta \rho_0] = \mu_{\Delta \rho}, \quad (4.33)$$

où $\mu_{\Delta \rho}$ représente la valeur moyenne des variations de résistivités. En général, $\mu_{\Delta \rho} = \mathbf{0}$.

4.1.3 Estimation récursive de Kalman

La matrice de sensibilité étant connue, cette section présente le résumé de la méthode d'estimation récursive de Kalman utilisée pour résoudre le problème inverse. Il s'agit de la méthode utilisée pour trouver les résistivités du modèle à partir des voltages mesurés à la surface. La modélisation du problème par un système d'équations se présente comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_n = \mathbf{H} \Delta \rho_n + \mathbf{w}_n, \\ \Delta \rho_{n+1} = \mathbf{A} \Delta \rho_n + \mathbf{B} \mathbf{u}_n, \end{cases}$$

où $\mathbf{w}_n$ et $\mathbf{u}_n$ ont pour matrice de covariance $\mathbf{C}_n$ et $\mathbf{Q}_n$ respectivement. Au temps $n = 0$, aucune mesure n'est disponible et on initialise l'algorithme comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_0 &= E[\rho_0] = \mu_\rho, \\ \widehat{\Delta \rho}_0 &= E[\Delta \rho_0] = \mathbf{0}, \\ \mathbf{P}_0 &= E[(\Delta \rho_0 - E[\Delta \rho_0])(\Delta \rho_0 - E[\Delta \rho_0])^T] = \sigma_{\Delta \rho}^2 \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Pour $n = 1, 2, \dots$, l'algorithme d'estimation récursive se déroule comme suit :

(i) *Prédiction :*

$$\widehat{\Delta \rho}_n^- = \mathbf{A} \widehat{\Delta \rho}_{n-1};$$

(ii) *Prédiction de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation :*

$$\mathbf{P}_n^- = \mathbf{A} \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{Q}_{n-1} \mathbf{B}^T;$$

(iii) *Matrice du gain de Kalman :*

$$\mathbf{G}_n = \mathbf{P}_n^- \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_n^- \mathbf{H}^T + \mathbf{C}_n)^{-1};$$

(iv) *Estimation (correction) :*

$$\widehat{\Delta \rho}_n = \widehat{\Delta \rho}_n^- + \mathbf{G}_n (\mathbf{x}_n - \mathbf{H} \widehat{\Delta \rho}_n^-);$$

$$\hat{\rho}_n = \hat{\rho}_0 + \widehat{\Delta \rho}_n;$$

(v) *Mise à jour de la matrice de covariance d'erreur d'estimation :*

$$\mathbf{P}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{H}) \mathbf{P}_n^-.$$

Pour faire converger le gain de Kalman $\mathbf{G}_n$ avant de commencer la résolution du problème inverse en utilisant les mesures, les parties (ii), (iii) et (v) de l'algorithme ci-dessus sont calculées plusieurs fois indépendamment des mesures.

4.2 Inversion statique (non récursive)

L'inversion statique consiste à recueillir toutes les mesures et à utiliser une méthode non récursive pour estimer les résistivités. La matrice de sensibilité statique est une matrice qui permet de relier les mesures prises et les variations de résistivités, une fois toutes les mesures prises. Cette matrice est creuse et est obtenue en construisant par des décalages de pas $K \cdot m$ une matrice semi-diagonale à partir de la matrice de sensibilité d'une zone d'intérêt. Cette approche de calcul de sensibilité se justifie par le fait que plus un récepteur est situé loin d'une variation de résistivité, moins sa mesure est affectée par cette variation de résistivité. Soient $\mathbf{H}$ et $\mathbf{H}_s$ respectivement, la matrice de sensibilité de la zone d'intérêt et la matrice de sensibilité statique. La figure 4.1 montre une représentation schématique de la matrice $\mathbf{H}_s$.

Soient $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, les mesures prises, respectivement au temps 1, 2, ..., n . Soit $\mathbf{X}$ le vecteur de toutes les mesures. On a,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}_s \Delta \rho. \quad (4.34)$$

La résolution de l'équation (4.34) par la méthode du *maximum a posteriori* donne :

$$\widehat{\Delta\rho} = (\mathbf{H}_s^T \mathbf{H}_s + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}_s^T \mathbf{X}, \quad (4.35)$$

où λ est un paramètre de réglage. La matrice $(\mathbf{H}_s^T \mathbf{H}_s + \lambda \mathbf{I})$ est souvent appelée *matrice normale* et sa régularité est assurée par le paramètre λ qui doit être non nul. Le paramètre λ désigne le rapport de la variance du bruit de mesure sur la variance des variations de résistivités et règle une grande partie du compromis entre l'information *a priori* sur les variations de résistivités et l'information apportée par les mesures. Nous avons choisi λ petit (de l'ordre de 10^{-4}) pour laisser une grande plage de valeurs aux variations de résistivités et ne pas trop restreindre le domaine des solutions vraisemblables. Soit ρ_0 la valeur de la résistivité autour de laquelle on obtient l'équation (4.34). On a ainsi,

$$\widehat{\rho} = \rho_0 + \widehat{\Delta\rho}. \quad (4.36)$$

CHAPITRE 5

PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

Ce chapitre est consacrée à la présentation des résultats obtenus par la résolution du problème inverse. Les données utilisées sont d'une part synthétiques et obtenues par modélisation directe, et d'autre part réelles. Les résultats présentés ont été obtenus pour des milieux homogènes ainsi que des milieux stratifiés. La méthode d'estimation de la sensibilité utilisée est la méthode d'extrapolation de Richardson. Pour les méthodes d'inversion utilisées, le critère d'évaluation de l'efficacité de la méthode est l'erreur relative (ER) définie par :

$$ER = \frac{\| \rho - \hat{\rho} \|}{\| \rho \|},$$

où ρ est un vecteur de dimension $K \cdot m$ contenant les valeurs exactes des résistivités qui sortent de la zone d'intérêt entre chaque prise de mesures, tandis que $\hat{\rho}$ est un vecteur de dimension $K \cdot m$ contenant les valeurs estimées de ces mêmes résistivités. La norme utilisée est la norme euclidienne.

Dans ce chapitre, certains termes sont utilisés et nécessitent un éclaircissement. Il existe deux échelles de discrétisation. La première est la taille des cellules de base ayant une résistivité homogène. La seconde, appelée raffinement, est la taille des sous-cellules composant une cellule de base (voir figure 3.14). Ainsi, nous avons les définitions suivantes :

- Raffinement : signifie que l'algorithme utilisé remplace chaque cellule de base par

des sous-cellules de taille plus petite et de même résistivité sans augmenter la complexité du problème inverse.

- Raffinement 2×2 : qualifie l'utilisation de quatre sous-cellules de même résistivité pour une cellule de base.
- Raffinement 4×4 : qualifie l'utilisation de 16 sous-cellules de même résistivité pour une cellule de base.
- Discrétisation fine : désigne une subdivision des cellules de base en de nouvelles cellules de base. Les nouvelles cellules de base peuvent avoir des valeurs différentes de résistivité.
- Discrétisation fine 1×2 : désigne une discrétisation plus fine uniquement dans le sens de la profondeur avec de nouvelles cellules de base dont la taille est deux fois plus petite.
- Discrétisation fine 2×2 : désigne une discrétisation plus fine dans le sens de la profondeur et de la longueur. Les nouvelles cellules de base obtenues sont de taille quatre fois plus petite que les cellules de base d'origine.

5.1 Milieu homogène sans bruit de mesure

Cette section présente les résultats obtenus pour un milieu homogène en absence de bruit de mesure. La valeur de la résistivité pour le milieu est $100 \Omega.m$ et les défauts ont une résistivité de $150 \Omega.m$. Il s'agit ici de voir l'effet des différentes méthodes d'inversion utilisées, l'effet des techniques de raffinement et de discrétisation ainsi que l'effet de la profondeur d'investigation. Les défauts à la surface de type fissure verticale ont une largeur de 0.25 mètre et une extension verticale de 0.4 mètre, tandis que les défauts ou détériorations de grande taille ont une largeur de 0.75 mètre et une extension verticale de 0.4 mètre. Les défauts internes (en profondeur) ont les mêmes dimensions, sauf qu'ils se situent à une profondeur de 0.4 mètre.

5.1.1 Résultats obtenus avec le filtre de Kalman

Pour des défauts présents en surface, les figures 5.1, 5.2 et 5.3 montrent respectivement les résultats obtenus sans discrétisation fine ni raffinement, avec raffinement 4×4 mais sans discrétisation fine, et les résultats obtenus avec discrétisation fine 2×2 combinée avec raffinement 2×2 . Les figures 5.4, 5.5 et 5.6 montrent respectivement les résultats du même modèle mais avec des hétérogénéités présentes en profondeur.

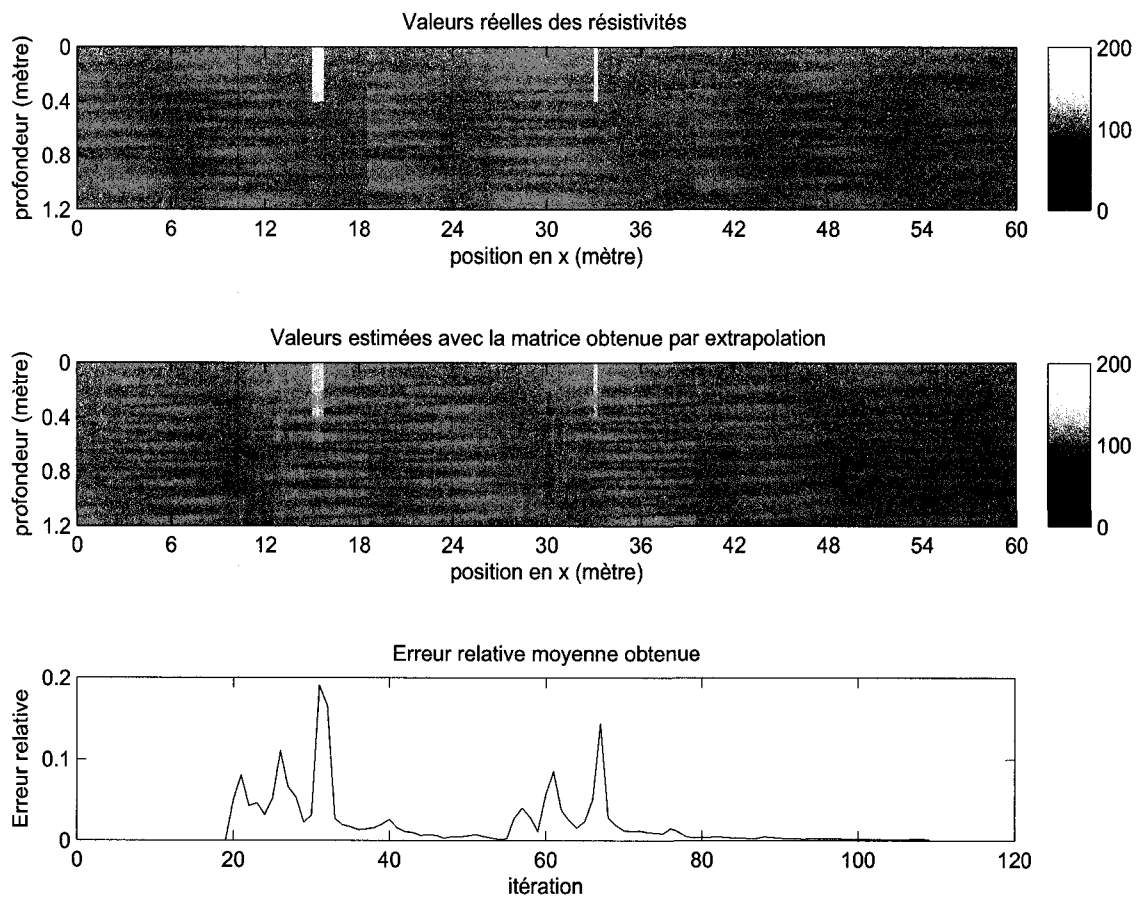


Figure 5.1 – Inversion récursive sans discrétisation fine ni raffinement pour un modèle homogène ($100 \Omega.m$) avec fissures verticales ($150 \Omega.m$) de 0.4 mètre de hauteur à la surface. Dans le graphique du bas, la valeur de l'itération est proportionnelle à la position x des colonnes de cellules estimées à chaque pas.

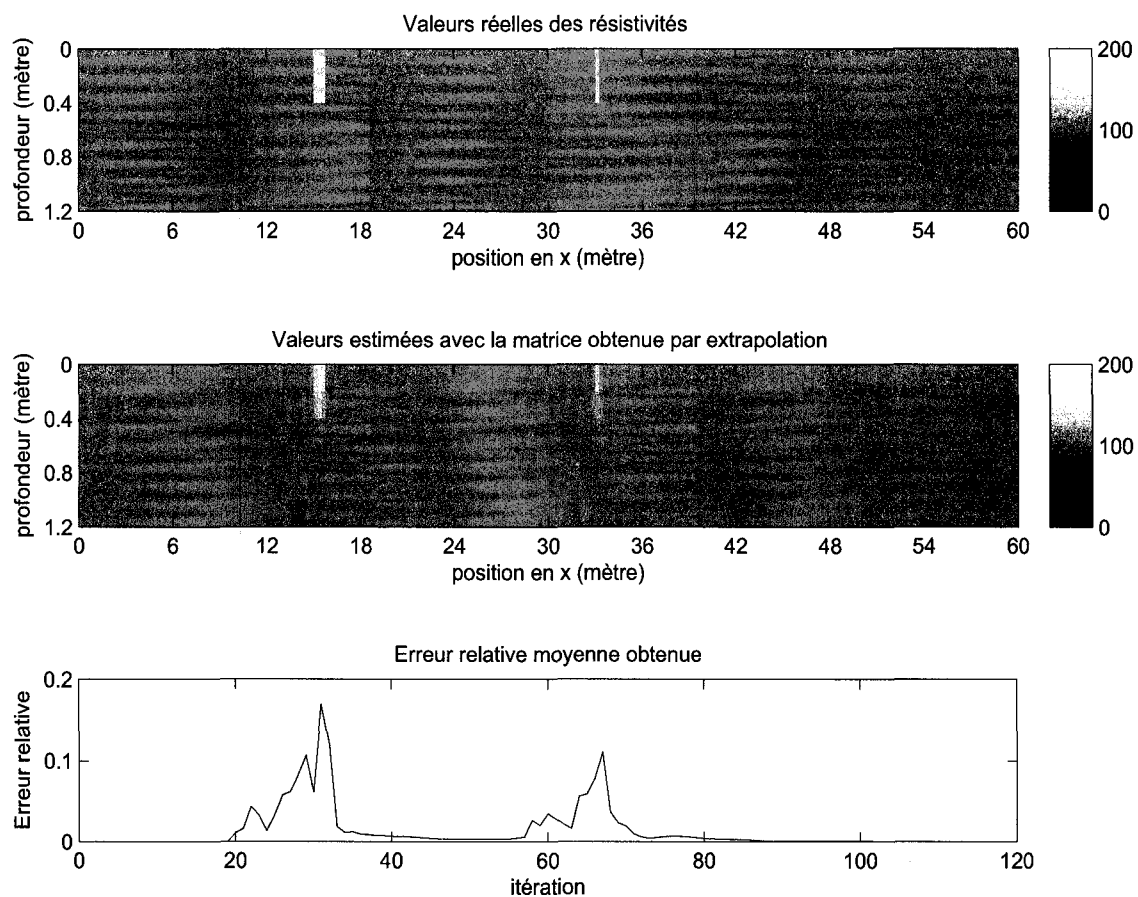


Figure 5.2 – Inversion récursive combinée avec le raffinement 4x4 sans discrétisation fine pour un modèle homogène ($100 \Omega.m$) avec fissures verticales ($150 \Omega.m$) de 0.4 mètre de hauteur à la surface. Dans le graphique du bas, la valeur de l'itération est proportionnelle à la position x des colonnes de cellules estimées à chaque pas.

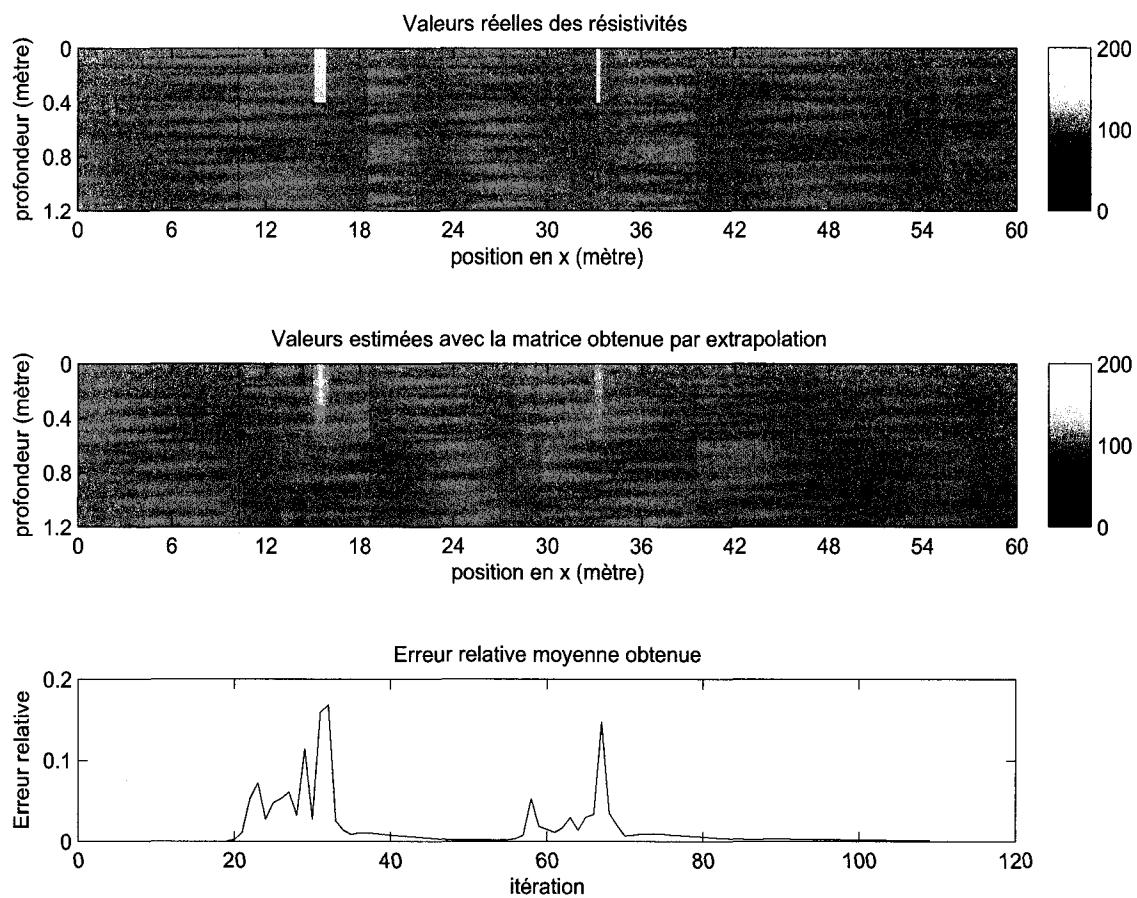


Figure 5.3 – Inversion récursive combinée avec la discrétisation fine 2x2 et le raffinement 2x2 pour un modèle homogène ($100 \Omega.m$) avec fissures verticales ($150 \Omega.m$) de 0.4 mètre de hauteur à la surface. Dans le graphique du bas, la valeur de l'itération est proportionnelle à la position x des colonnes de cellules estimées à chaque pas.

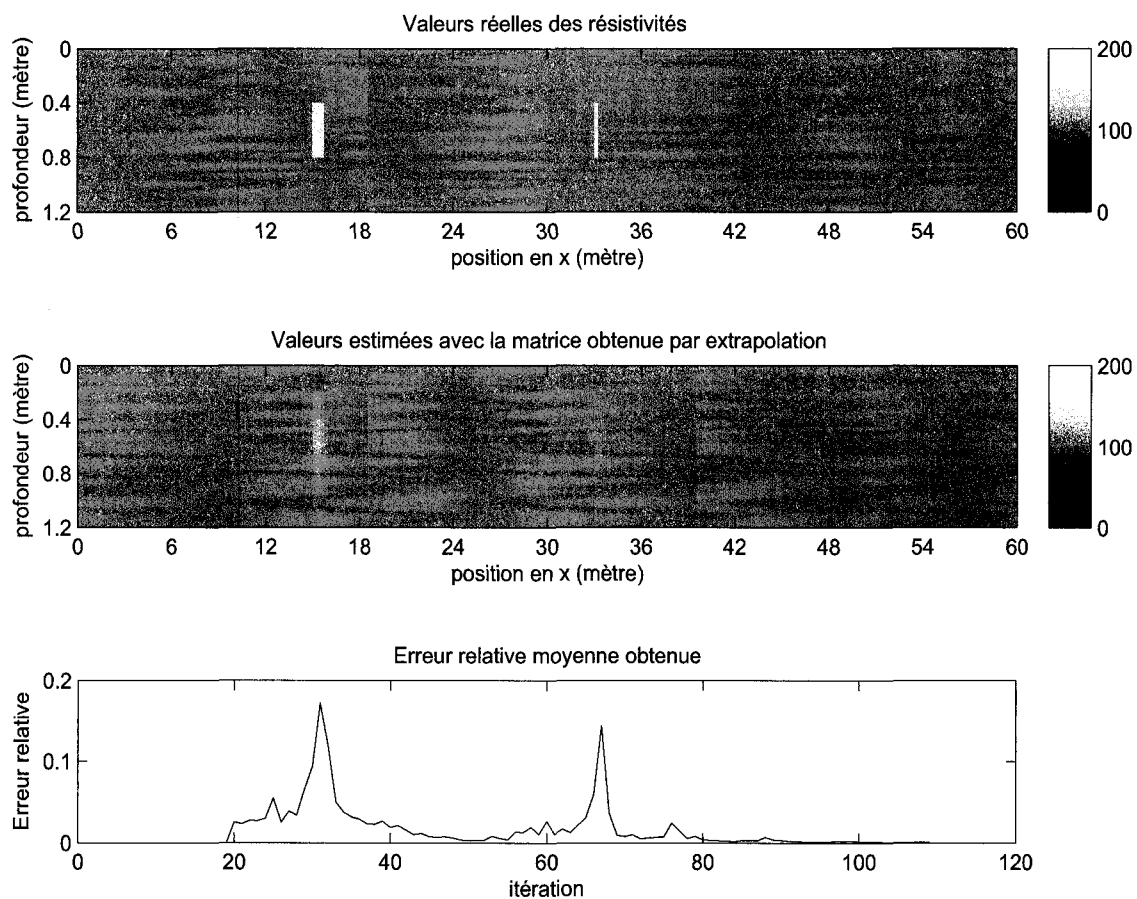


Figure 5.4 – Inversion récursive sans la discrétisation fine et sans raffinement pour un modèle homogène ($100 \Omega.m$) avec fissures verticales ($150 \Omega.m$) à 0.4 mètre de profondeur. Dans le graphique du bas, la valeur de l'itération est proportionnelle à la position x des colonnes de cellules estimées à chaque pas.

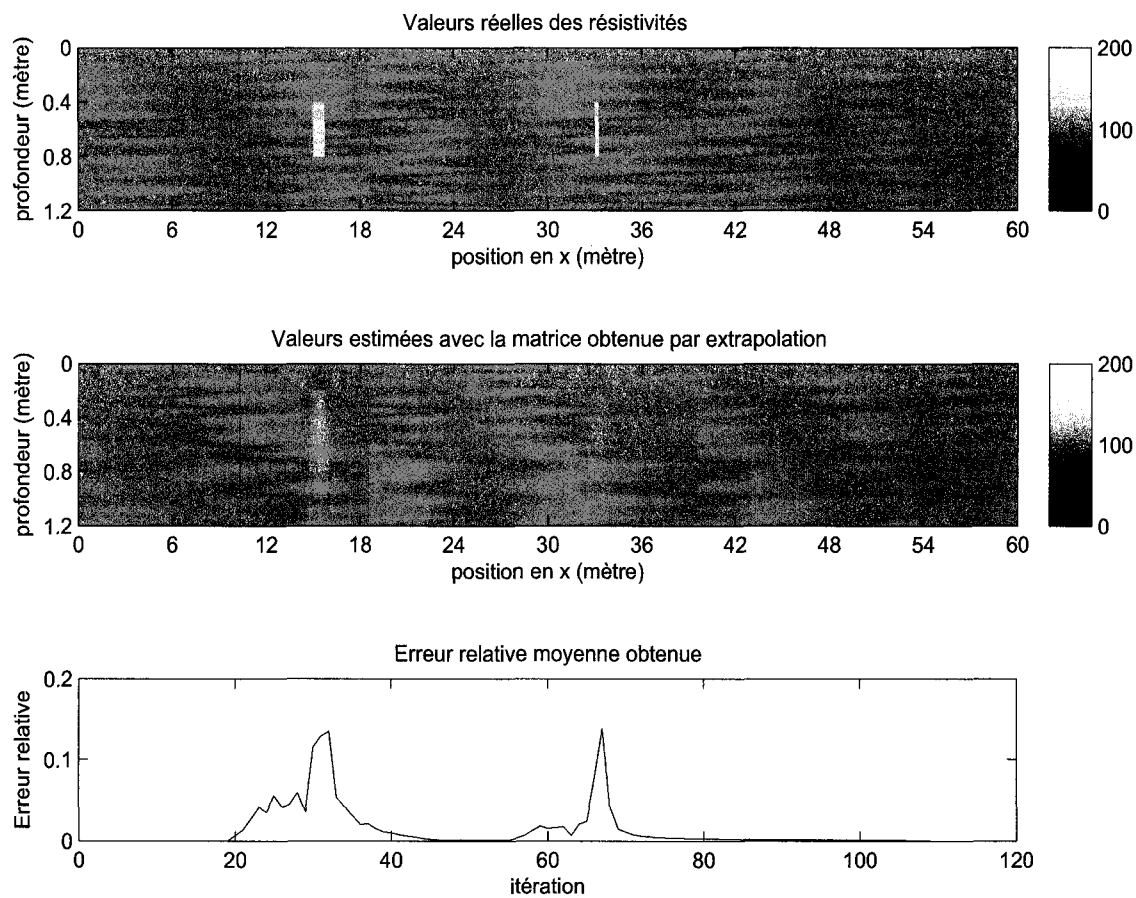


Figure 5.5 – Inversion récursive avec le raffinement 4x4 pour un modèle homogène (100 $\Omega.m$) avec fissures verticales (150 $\Omega.m$) à 0.4 mètre de profondeur. Dans le graphique du bas, la valeur de l'itération est proportionnelle à la position x des colonnes de cellules estimées à chaque pas.

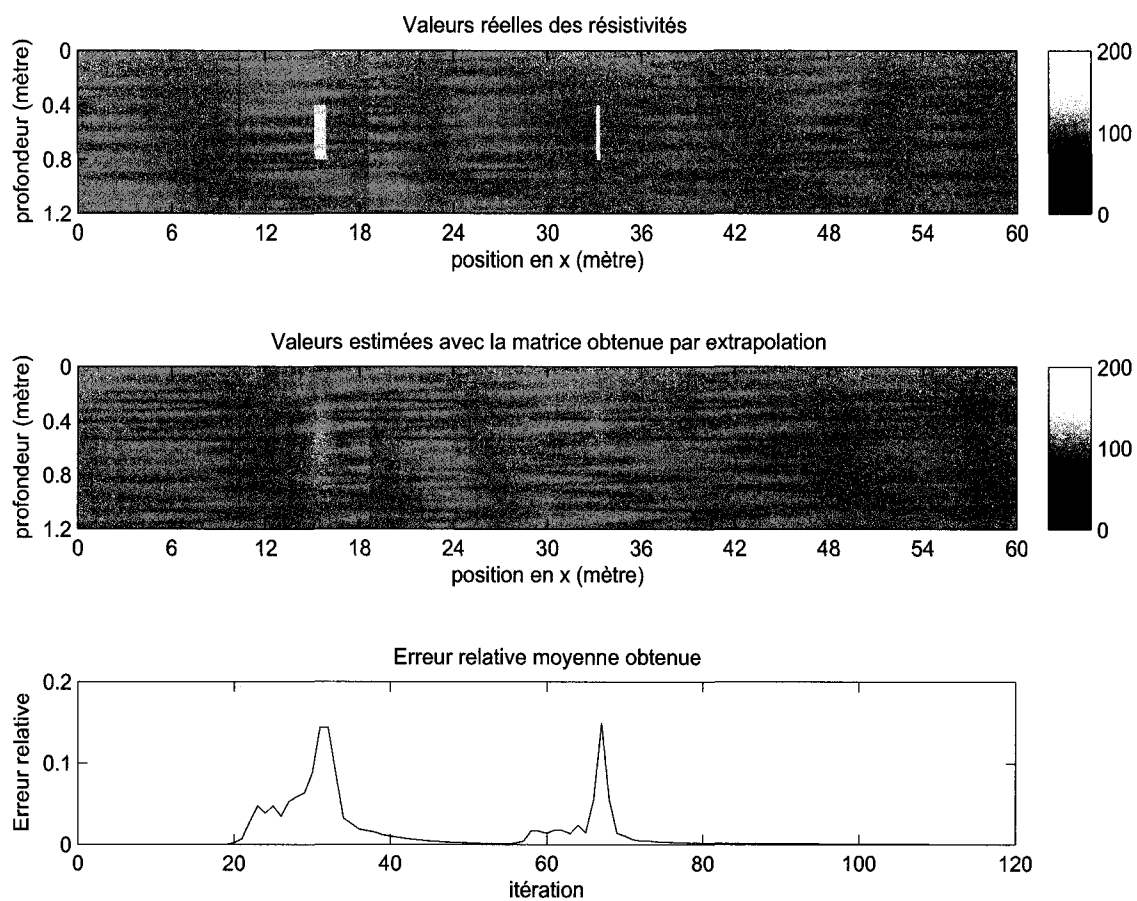


Figure 5.6 – Inversion récursive avec la discrétisation fine combinée avec le raffinement 2x2 pour un modèle homogène ($100 \Omega.m$) avec fissures verticales ($150 \Omega.m$) à 0.4 mètre de profondeur. Dans le graphique du bas, la valeur de l'itération est proportionnelle à la position x des colonnes de cellules estimées à chaque pas.

5.1.2 Résultats obtenus avec l'inversion statique

L'inversion statique a été appliquée sur les réponses des modèles de défauts de surface et de défauts internes. Pour des défauts présents en surface, la figure 5.7 présente les résultats obtenus avec un raffinement 4×4 tandis que la figure 5.8 montre les résultats obtenus par combinaison de la discrétisation fine 2×2 avec le raffinement 2×2 . L'inversion statique n'étant pas le sujet principal de ce travail de mémoire, les résultats d'inversion statique présentés ici n'égalent pas nécessairement les résultats qui auraient pu être obtenus avec un logiciel professionnel tel que *Res2DInv*. En particulier, de meilleurs résultats pourraient être obtenus si le problème direct était modélisé avec des éléments finis au lieu d'un réseau de résistances, et si le problème d'inversion était résolu sans recourir à la linéarisation.

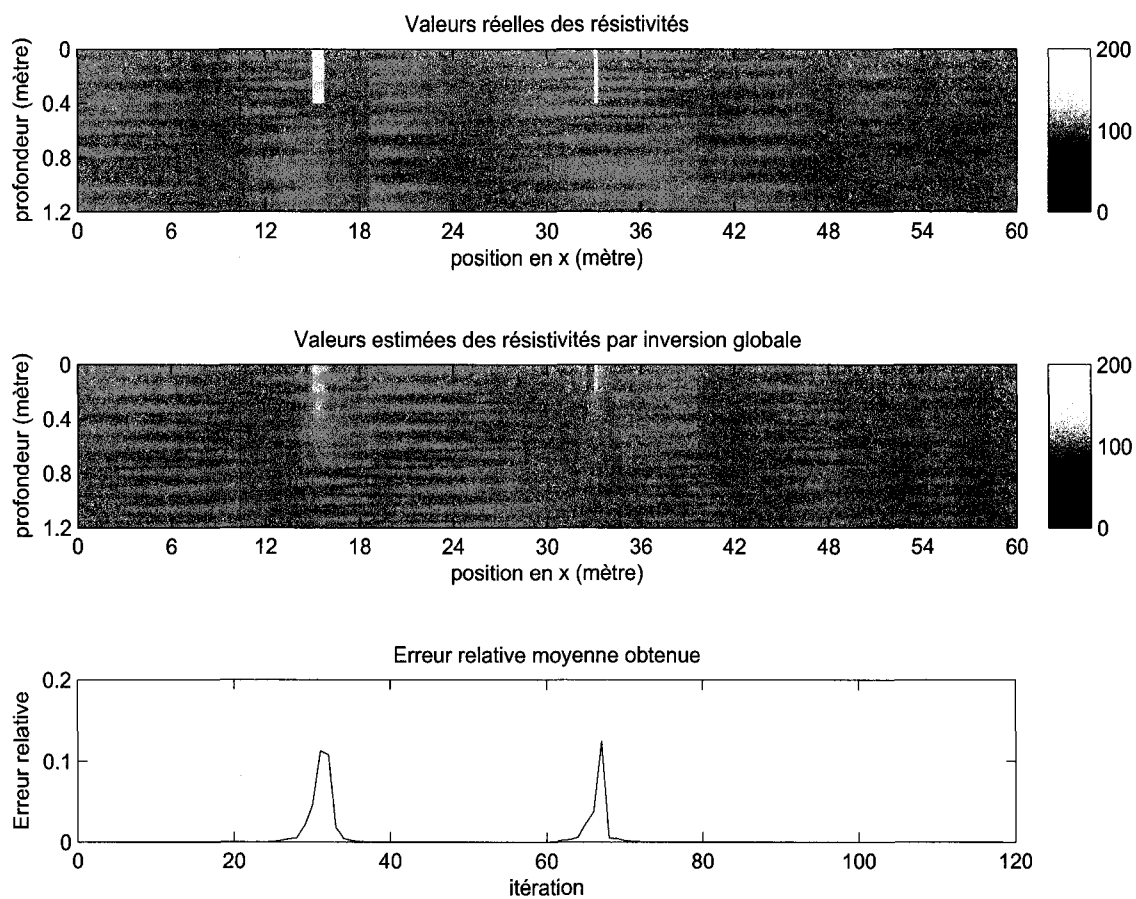


Figure 5.7 – Inversion statique avec le raffinement 4x4 pour un modèle homogène ($100 \Omega.m$) avec fissures verticales ($150 \Omega.m$) de 0.4 mètre de hauteur à la surface. Dans le graphique du bas, la valeur de l'itération est proportionnelle à la position x des colonnes de cellules estimées à chaque pas.

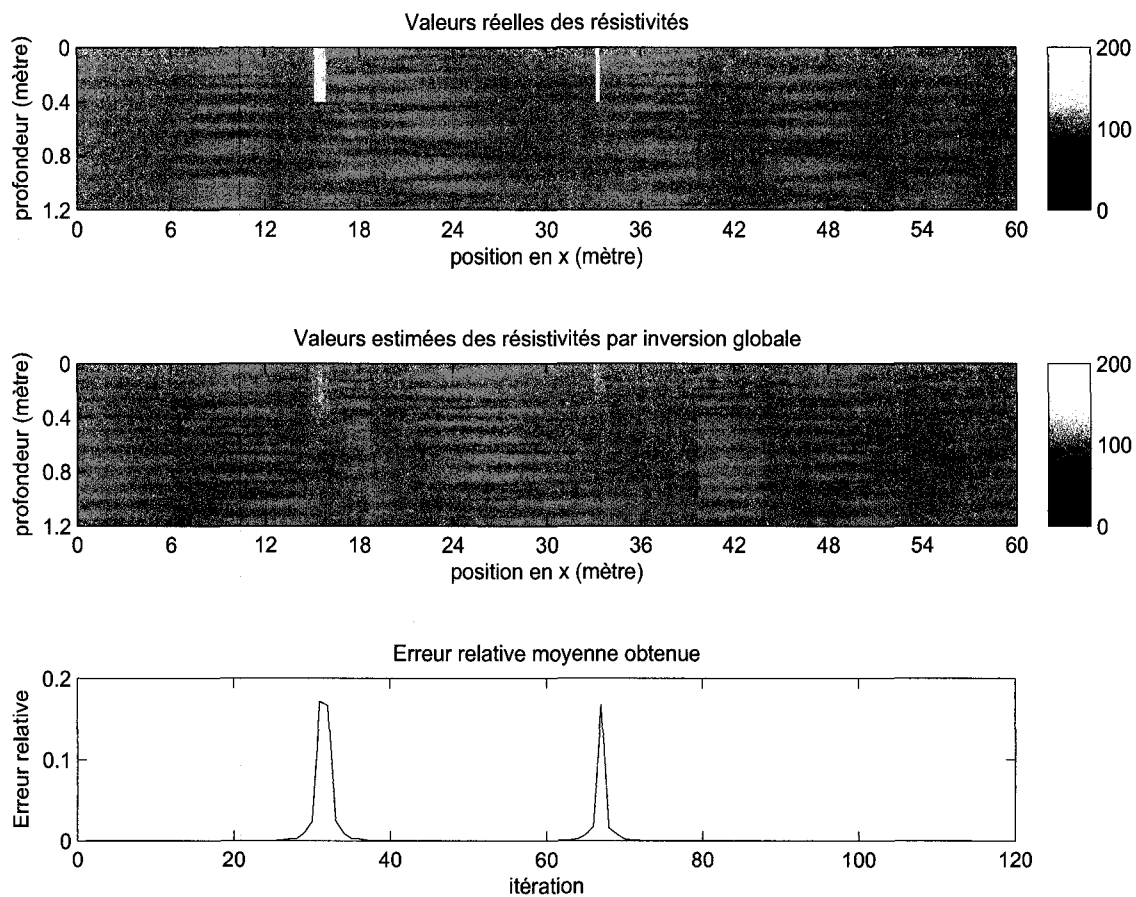


Figure 5.8 – Inversion statique avec la discrétisation fine 2x2 combinée avec le raffinement 2x2 pour un modèle homogène ($100 \Omega.m$) avec fissures verticales ($150 \Omega.m$) de 0.4 mètre de hauteur à la surface. Dans le graphique du bas, la valeur de l'itération est proportionnelle à la position x des colonnes de cellules estimées à chaque pas.

5.1.3 Interprétation des résultats

Les résultats obtenus avec le filtre de Kalman en absence de bruit permettent clairement d'identifier les défauts présents en surface et en profondeur et ce du point de vue position et dimensions des défauts. Les figures 5.1, 5.2 et 5.3 montrent une légère traînée avant l'apparition d'un défaut. Cela s'explique par le fait que les résistivités estimées, qui sortent après l'entrée du défaut dans la zone d'intérêt, ont été influencées par l'apparition du défaut et n'ont pas pu être corrigées avant de sortir de cette zone d'intérêt. En se basant sur l'erreur relative moyenne, les meilleurs résultats sont ceux obtenus en utilisant le raffinement 4×4 (figure 5.2) ou en combinant la discrétisation fine 2×2 avec le raffinement 2×2 (figure 5.3). Dans ces deux cas, l'erreur relative est plus basse et moins distribuée. On observe un léger phénomène de lissage au niveau du résultat utilisant la discrétisation fine 2×2 combinée avec le raffinement 2×2 (figure 5.3). Ce lissage est plus visible à cause de la petite taille des cellules utilisées.

L'inversion statique permet aussi de détecter les défauts présents en surface et en profondeur. Cependant le phénomène de lissage est plus prononcé car cette inversion utilise toutes les mesures disponibles qui s'influencent mutuellement. En se basant sur l'erreur relative moyenne, les résultats obtenus avec l'inversion statique sont meilleurs car leurs erreurs relatives moyennes sont plus basses en terme de valeur et moins distribuées (figure 5.7). Par contre, les résultats obtenus avec le filtre de Kalman (figure 5.2) semblent plus précis, c'est-à-dire avec un meilleur contraste, que ceux obtenus avec l'inversion statique (figure 5.7).

5.2 Milieu homogène avec bruit de mesure

Cette section présente les résultats obtenus pour un milieu homogène en présence de bruit de mesure. La valeur de la résistivité pour le milieu est $100 \Omega.m$ et les défauts ont une résistivité de $150 \Omega.m$. Il s'agit ici de voir l'effet de différentes méthodes d'inversion utilisées, l'effet des techniques de raffinement et de discrétisation fine ainsi que l'effet de la profondeur d'investigation et du bruit de mesure. Le bruit de mesure utilisé est un bruit gaussien de moyenne nulle. Ce bruit de mesure est de 10 %, soit un bruit de mesure dont l'écart-type est 10 fois plus petit que l'écart-type des mesures. Les mesures se comportent comme des fluctuations de moyenne nulle. Les défauts à la surface de type fissure ont une largeur de 0.25 mètre et une extension verticale de 0.4 mètre, tandis que les défauts ou détériorations de grande taille ont une largeur de 0.75 mètre et une extension verticale de 0.4 mètre. Les défauts internes (en profondeur) ont les mêmes dimensions, sauf qu'ils se situent à une profondeur de 0.4 mètre.

5.2.1 Résultats obtenus avec le filtre de Kalman

Pour des défauts présents en surface, les figures 5.9, 5.10 et 5.11 montrent respectivement les résultats obtenus sans discrétisation fine ni raffinement, avec raffinement 4×4 mais sans discrétisation fine et les résultats obtenus avec discrétisation fine 2×2 combinée avec raffinement 2×2 . Les figures 5.12, 5.13 et 5.14 montrent respectivement les mêmes résultats, mais avec des défauts présents en profondeur.

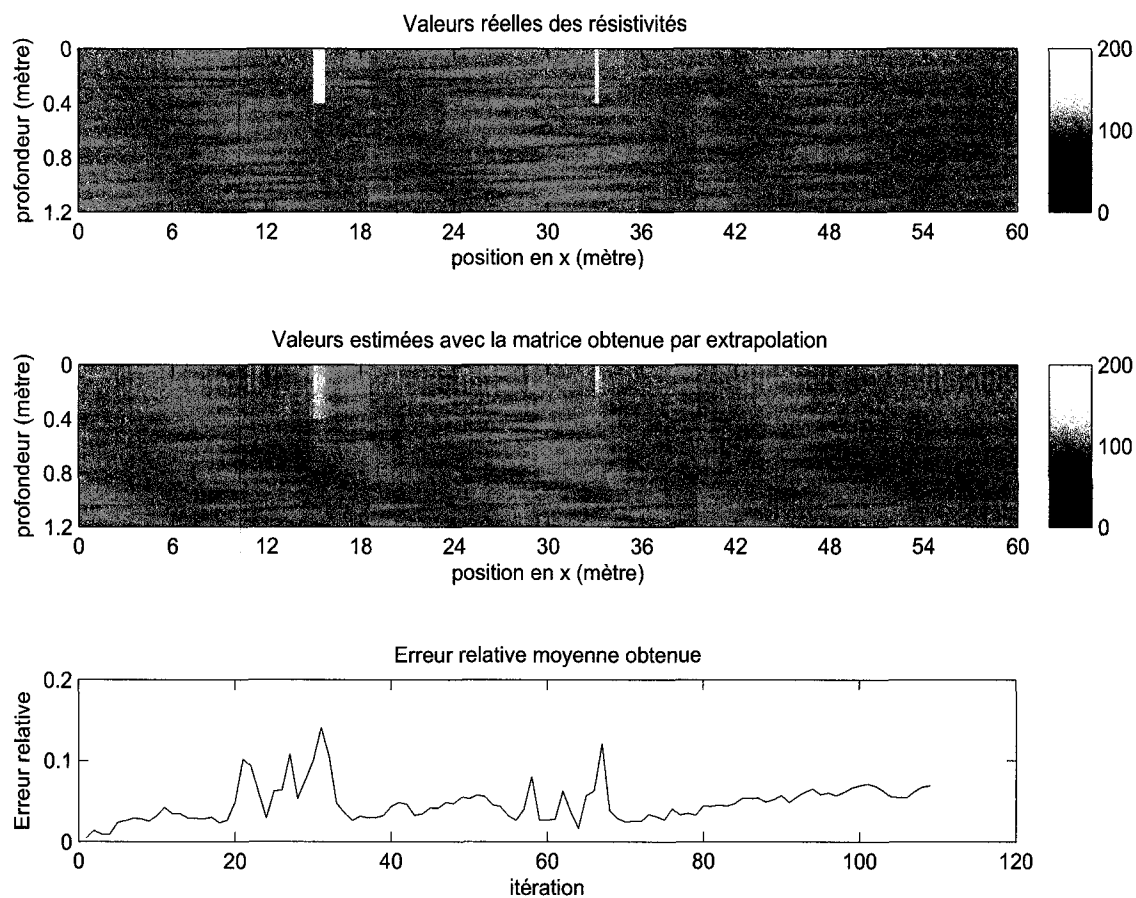


Figure 5.9 – Inversion récursive sans la discrétisation fine et sans raffinement avec 10% de bruit de mesure pour un modèle homogène ($100 \Omega.m$) avec fissures verticales ($150 \Omega.m$) de 0.4 mètre de hauteur à la surface.

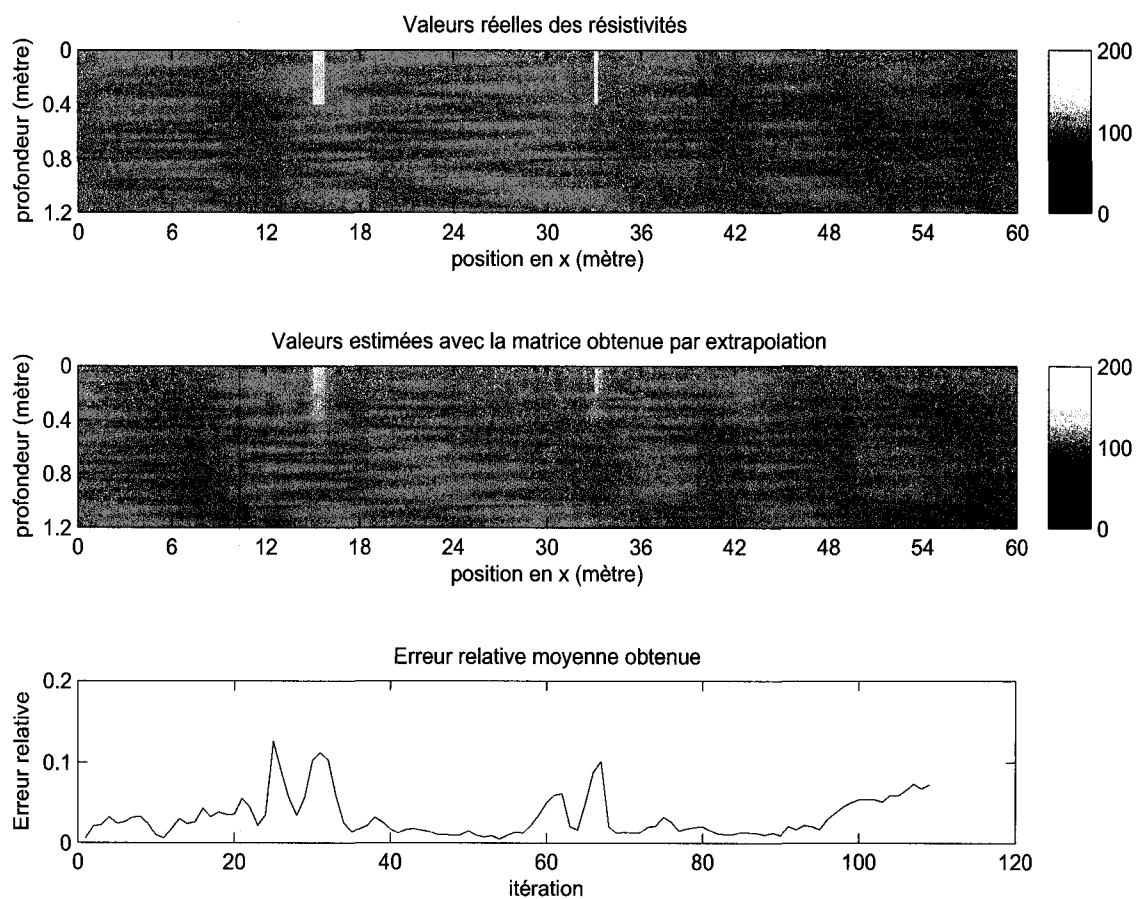


Figure 5.10 – Inversion récursive avec le raffinement 4x4 et 10% de bruit de mesure pour un modèle homogène ($100 \Omega.m$) avec fissures verticales ($150 \Omega.m$) de 0.4 mètre de hauteur à la surface.

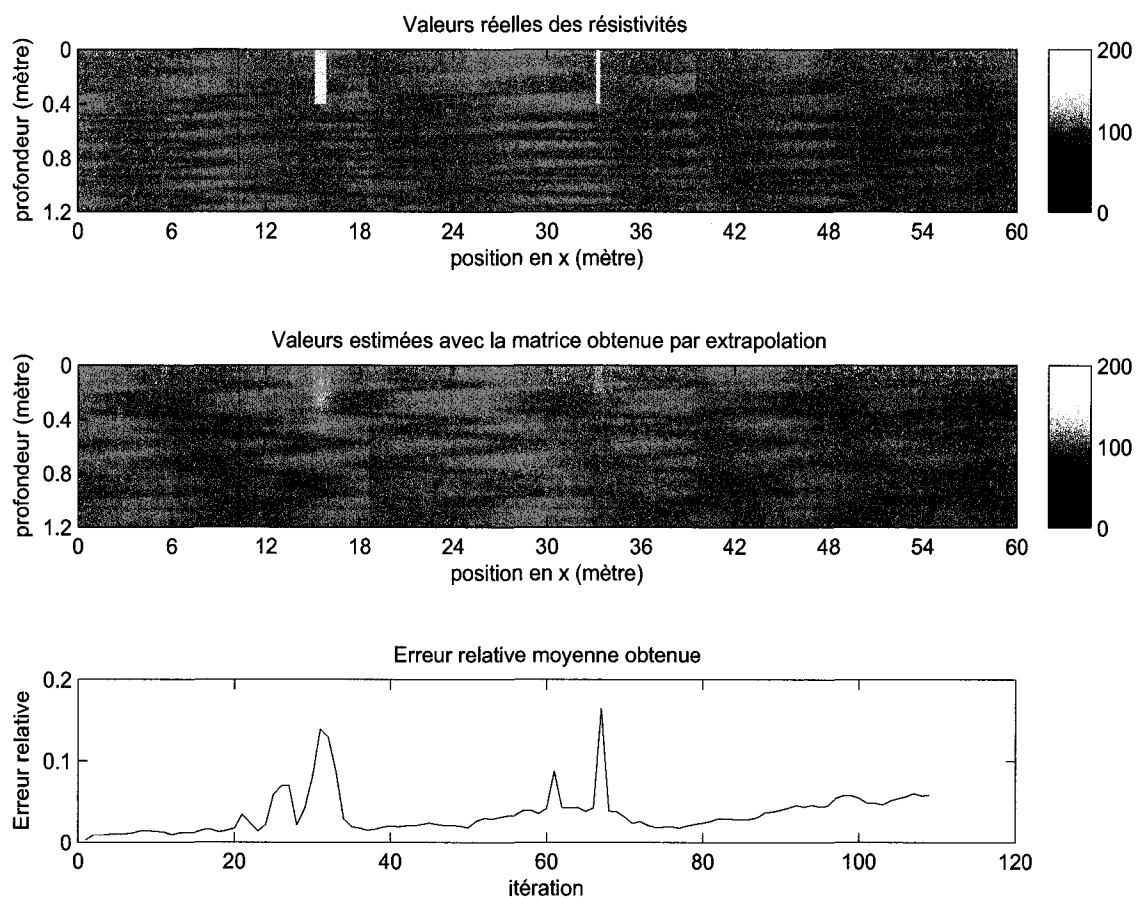


Figure 5.11 – Inversion récursive avec la discrétisation fine 2x2 combinée avec le raffinement 2x2 et avec 10% de bruit de mesure pour un modèle homogène ($100 \Omega.m$) avec fissures verticales ($150 \Omega.m$) de 0.4 mètre de hauteur à la surface.

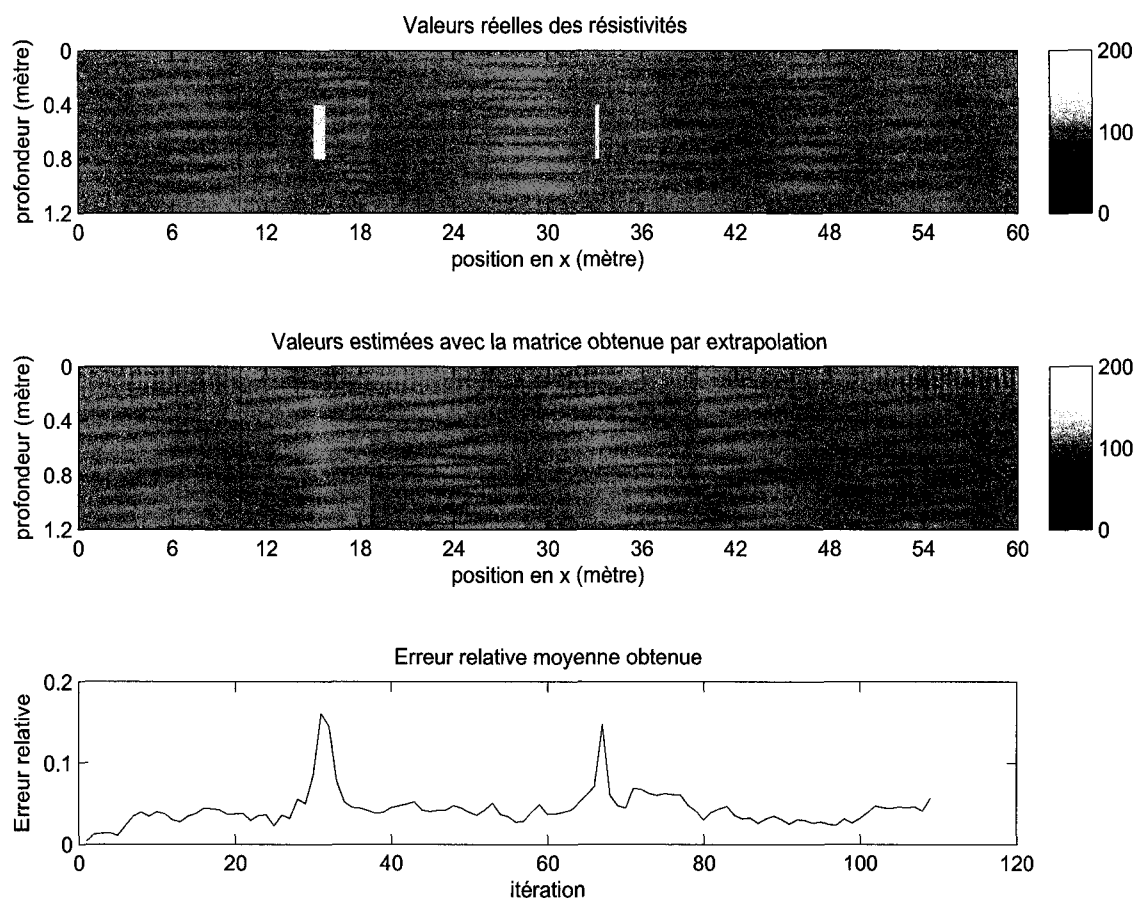


Figure 5.12 – Inversion récursive sans la discrétisation fine et sans raffinement avec 10% de bruit de mesure pour un modèle homogène ($100 \Omega.m$) avec fissures verticales ($150 \Omega.m$) à 0.4 mètre de profondeur.

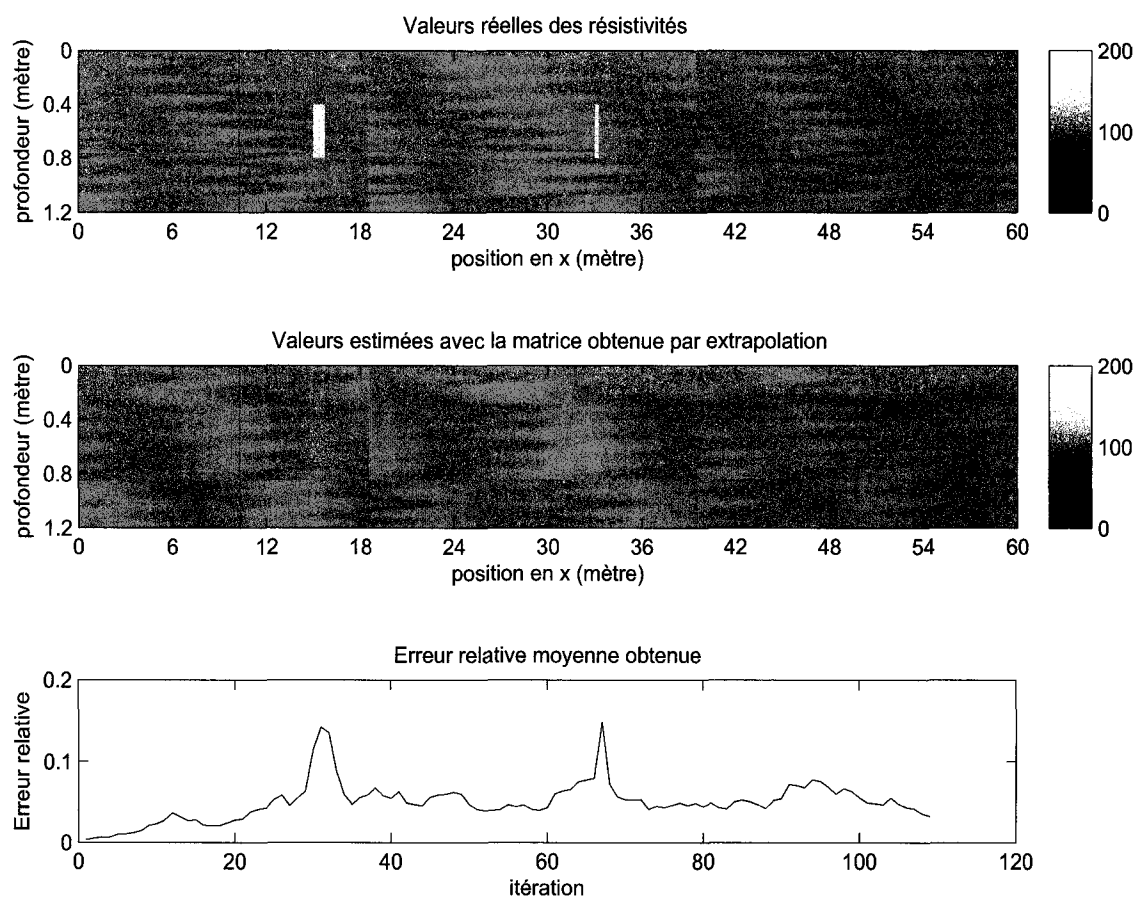


Figure 5.13 – Inversion récursive avec le raffinement 4x4 et 10% de bruit de mesure pour un modèle homogène ($100 \Omega.m$) avec fissures verticales ($150 \Omega.m$) à 0.4 mètre de profondeur.

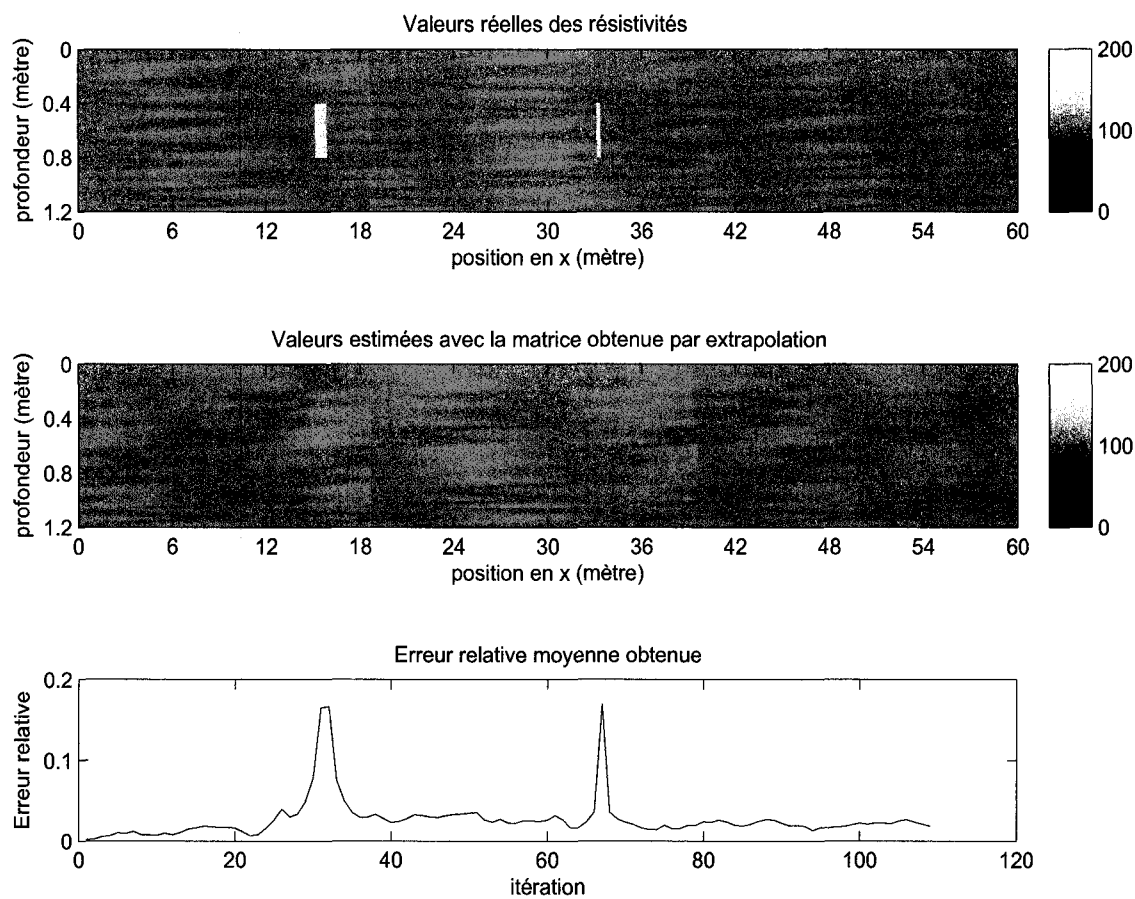


Figure 5.14 – Inversion récursive avec la discrétisation fine 2x2 combinée avec le raffinement 2x2 et avec 10% de bruit de mesure pour un modèle homogène ($100 \Omega.m$) avec fissures verticales ($150 \Omega.m$) à 0.4 mètre de profondeur.

5.2.2 Résultats obtenus avec l'inversion statique

L'inversion statique a permis d'obtenir les résultats suivants. Pour des défauts présents en surface, la figure 5.15 présente les résultats obtenus avec un raffinement 4×4 , tandis que la figure 5.16 montre les résultats obtenus par combinaison de la discrétisation fine 2×2 avec le raffinement 2×2 .

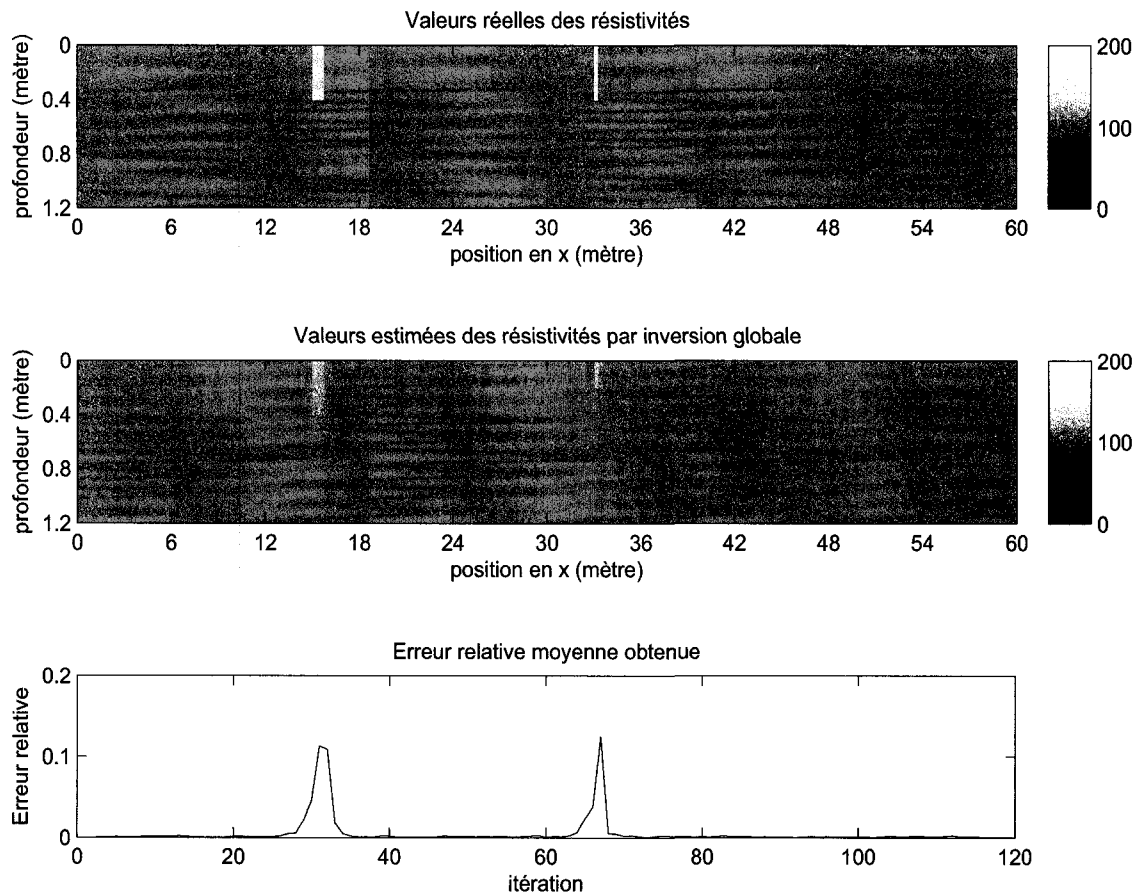


Figure 5.15 – Inversion statique avec le raffinement 4×4 et 10% de bruit de mesure pour un modèle homogène ($100 \Omega.m$) avec fissures verticales ($150 \Omega.m$) de 0.4 mètre de hauteur à la surface.

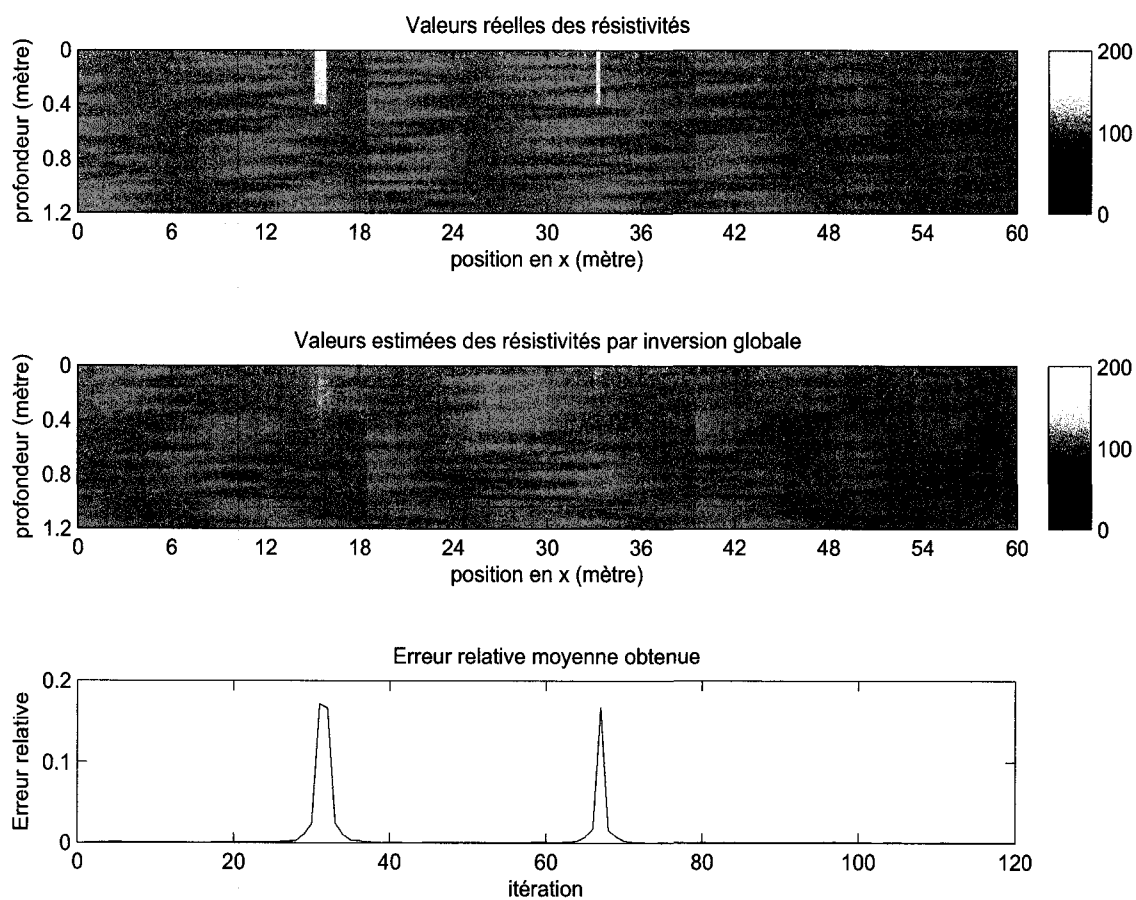


Figure 5.16 – Inversion statique avec la discrétisation fine 2x2 combinée avec le raffinement 2x2 et avec 10% de bruit de mesure pour un modèle homogène ($100 \Omega.m$) avec fissures verticales ($150 \Omega.m$) de 0.4 mètre de hauteur à la surface.

5.2.3 Interprétation des résultats

En présence d'un bruit de mesure de 10 % les défauts en surface et en profondeur sont encore détectables avec la méthode du filtre de Kalman, mais avec moins de précision du point de vue dimensions des défauts. Du point de vue de l'erreur relative moyenne, l'utilisation du raffinement 4×4 (figure 5.10) et l'utilisation de la discrétisation fine 2×2 combinée avec le raffinement 2×2 (figure 5.11) donnent des résultats semblables. Une fois encore, le résultat obtenu avec le raffinement 4×4 présente un meilleur contraste.

Par contre, la méthode d'inversion statique donne de meilleurs résultats, du point de vue de l'erreur relative moyenne, comparativement à la méthode du filtre de Kalman. Comme le montrent les figures 5.15 et 5.16 l'erreur relative moyenne de l'inversion statique est quasi nulle en absence de défauts et moins distribuée en présence de défauts ce qui n'est pas le cas de l'inversion récursive (figures 5.10 et 5.11) où même en absence de défauts l'erreur relative moyenne est présente. Ces constats montrent que l'inversion statique a un meilleur contrôle du bruit de mesure, ce qui est dû au fait que l'inversion dispose de toutes les mesures avant d'effectuer l'inversion. Cependant, l'inversion récursive (figure 5.10) offre un meilleur contraste (moins de lissage) que l'inversion statique (figure 5.15).

Des expériences faites avec différents niveaux de bruit de mesure permettent d'affirmer que la valeur maximale du bruit de mesure à partir de laquelle les hétérogénéités ne sont plus détectables par la méthode d'inversion récursive est d'environ 25 %.

5.3 Milieu stratifié sans bruit de mesure

Cette section est consacrée à la présentation des résultats dans le cas d'un milieu stratifié. Le milieu stratifié utilisé est composé de trois couches surperposées qui représentent respectivement l'asphalte, le béton et la fondation. Les couches présentent des défauts. Les valeurs de résistivités utilisées sont $1000 \Omega.m$ pour l'asphalte, $300 \Omega.m$ pour le béton et $50 \Omega.m$ pour la fondation. Les valeurs d'épaisseur de l'asphalte, du béton et de la fondation sont respectivement 0.1 mètre, 0.2 mètre et 0.9 mètre. La résistivité des défauts présents est $1200 \Omega.m$, ce qui correspond à des fissures remplies d'air. Les défauts à la surface de type fissure ont une largeur de 0.25 mètre et une extension verticale de 0.3 mètre, tandis que les défauts ou détériorations de grande taille ont une largeur de 0.75 mètre et une extension verticale de 0.3 mètre. Les défauts internes de type fissure ont une largeur de 0.25 mètre et une extension verticale de 0.5 mètre, alors que les défauts internes de grande taille ont une largeur de 0.75 mètre et une extension verticale de 0.5 mètre. De plus, les défauts internes sont situés à une profondeur de 0.1 mètre.

5.3.1 Résultats obtenus avec le filtre de Kalman

Les figures 5.17, 5.18, 5.19 présentent respectivement, pour des défauts présents en surface (asphalte et béton), les résultats obtenus avec la discrétisation fine 1×2 , la discrétisation fine 2×2 et la discrétisation fine 2×2 combinée avec le raffinement 2×2 . Les figures 5.20, 5.21, 5.22 présentent respectivement les mêmes résultats mais pour des défauts présents dans le béton et la fondation.

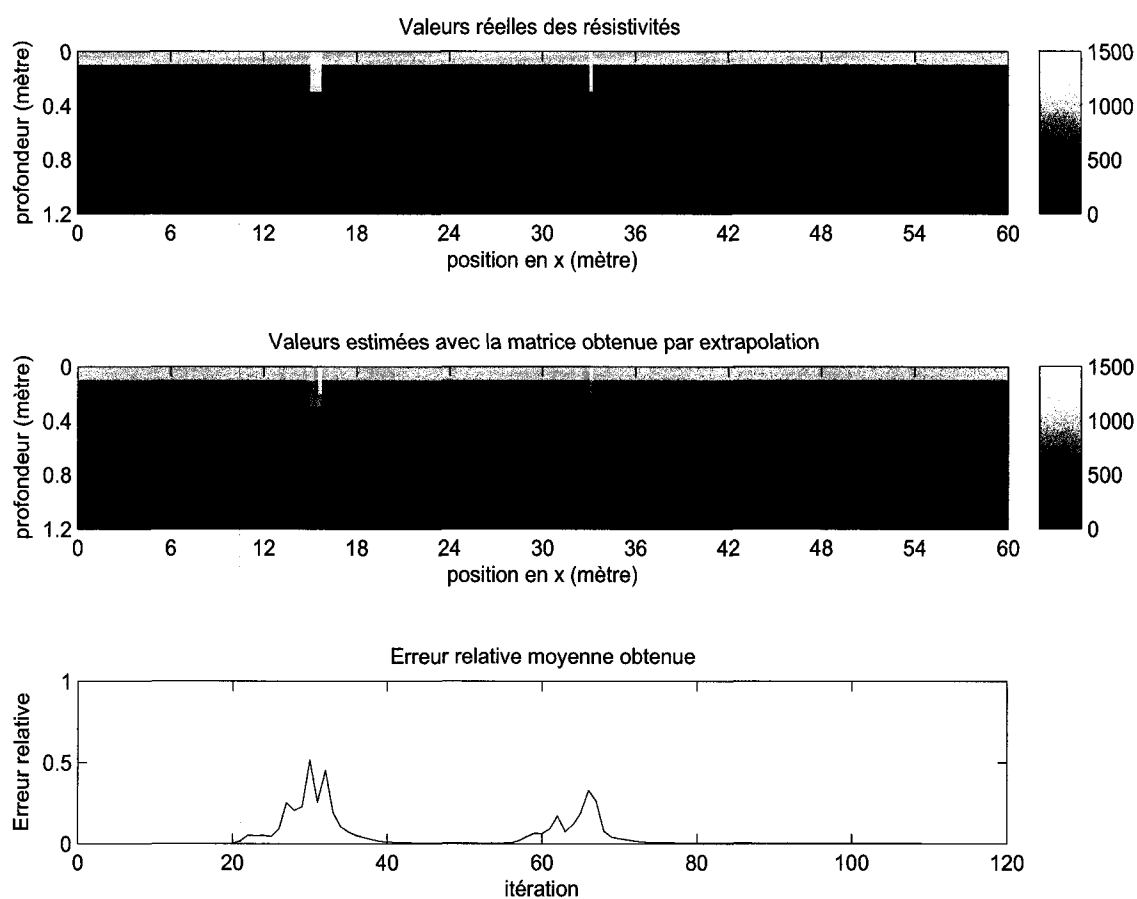


Figure 5.17 – Inversion récursive avec la discrétisation fine 1×2 pour un modèle stratifié avec fissures verticales ($1200 \Omega.m$) de 0.3 mètre de hauteur à la surface.

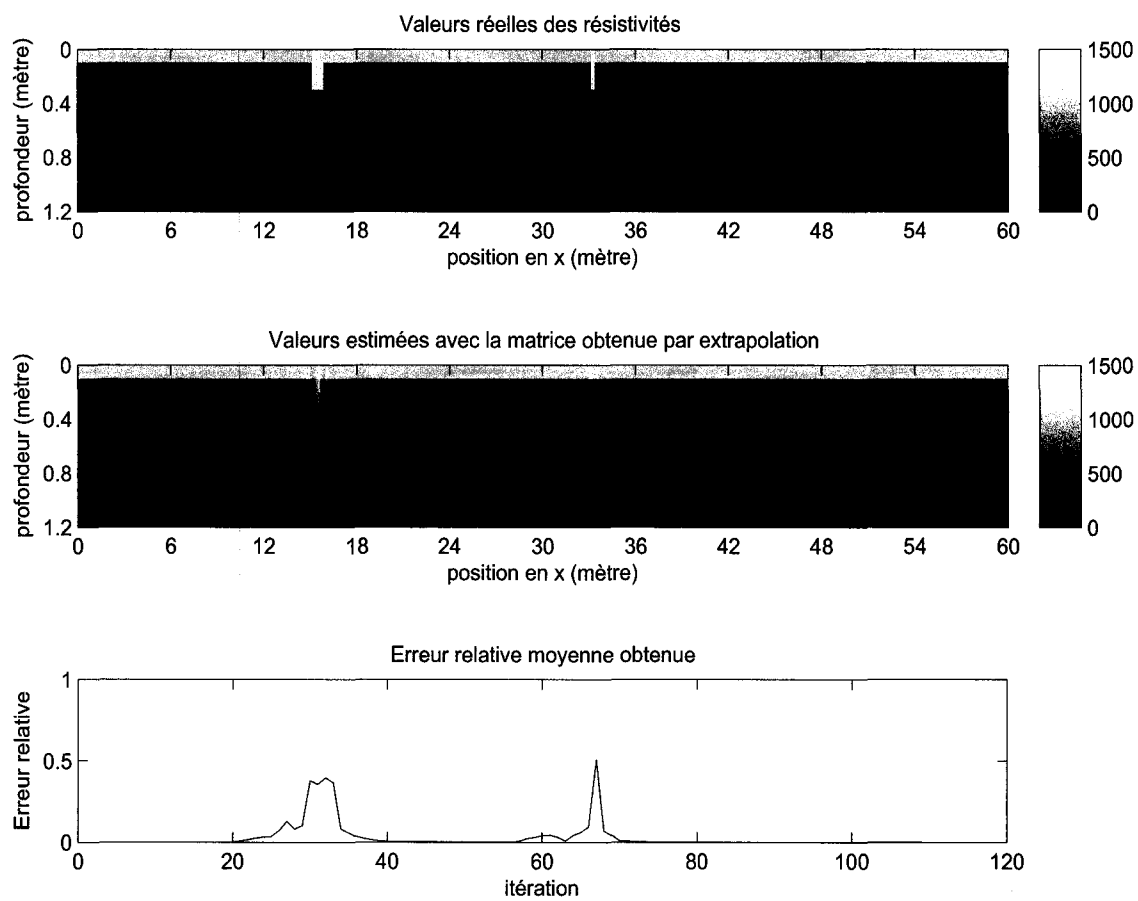


Figure 5.18 – Inversion récursive avec la discrétisation fine 2x2 pour un modèle stratifié avec fissures verticales ($1200 \Omega.m$) de 0.3 mètre de hauteur à la surface.

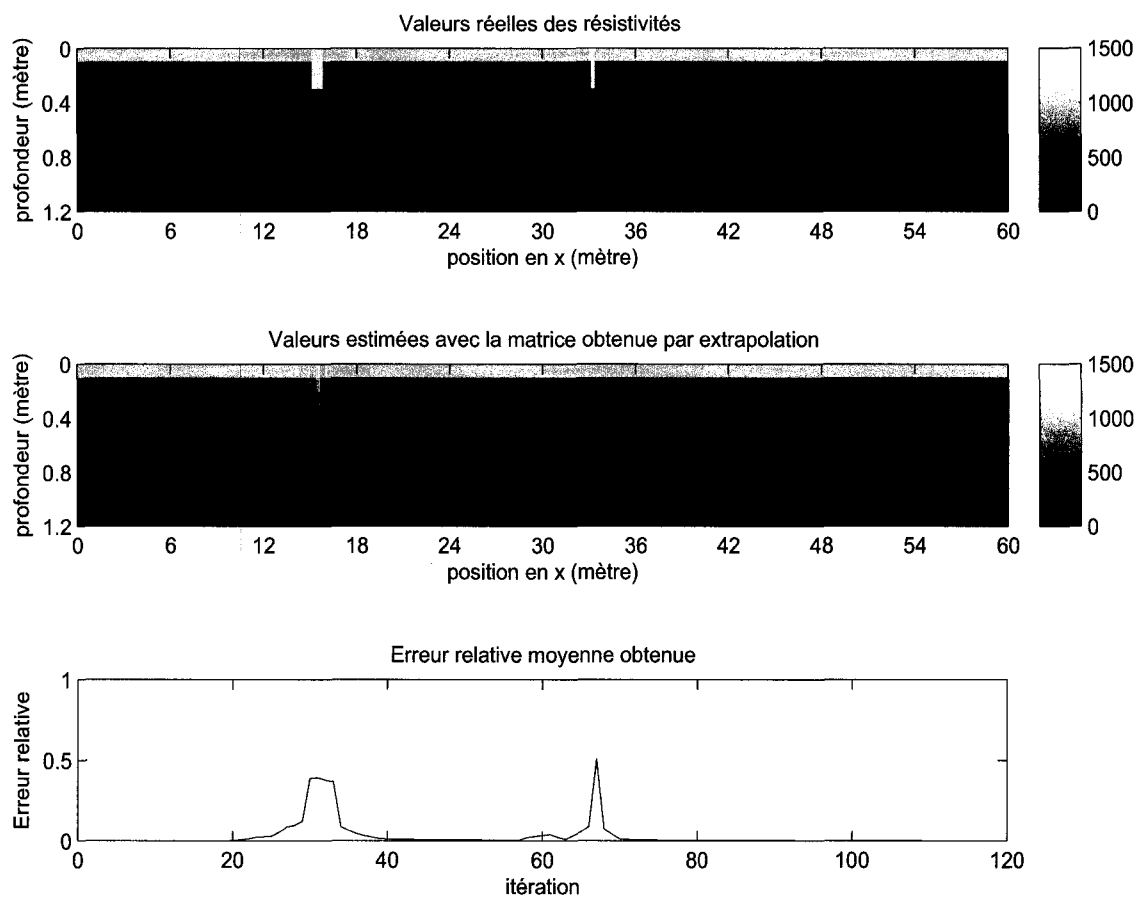


Figure 5.19 – Inversion récursive avec la discrétisation fine 2x2 combinée avec le raffinement 2x2 pour un modèle stratifié avec fissures verticales ($1200 \Omega.m$) de 0.3 mètre de hauteur à la surface.

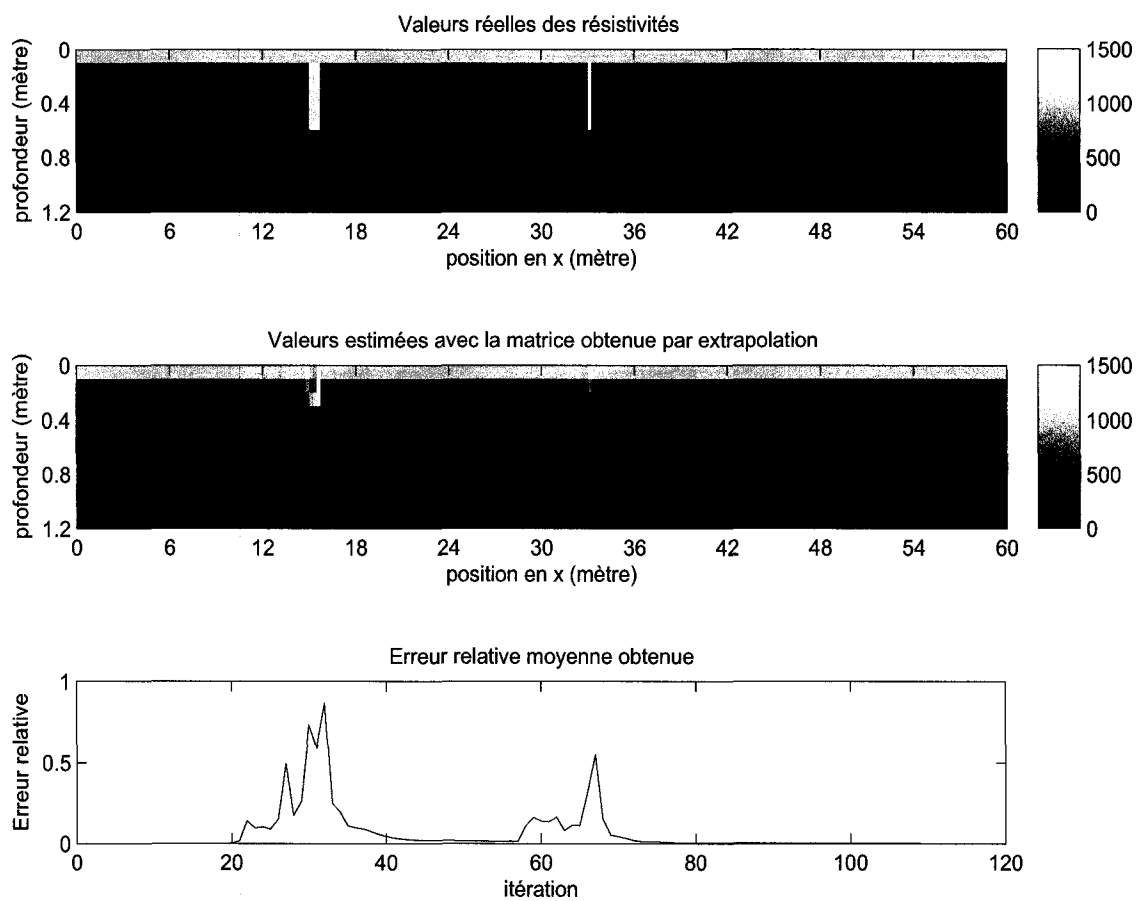


Figure 5.20 – Inversion récursive avec la discrétisation fine 1x2 pour un modèle stratifié avec fissures verticales ($1200 \Omega.m$) à 0.1 mètre de profondeur.

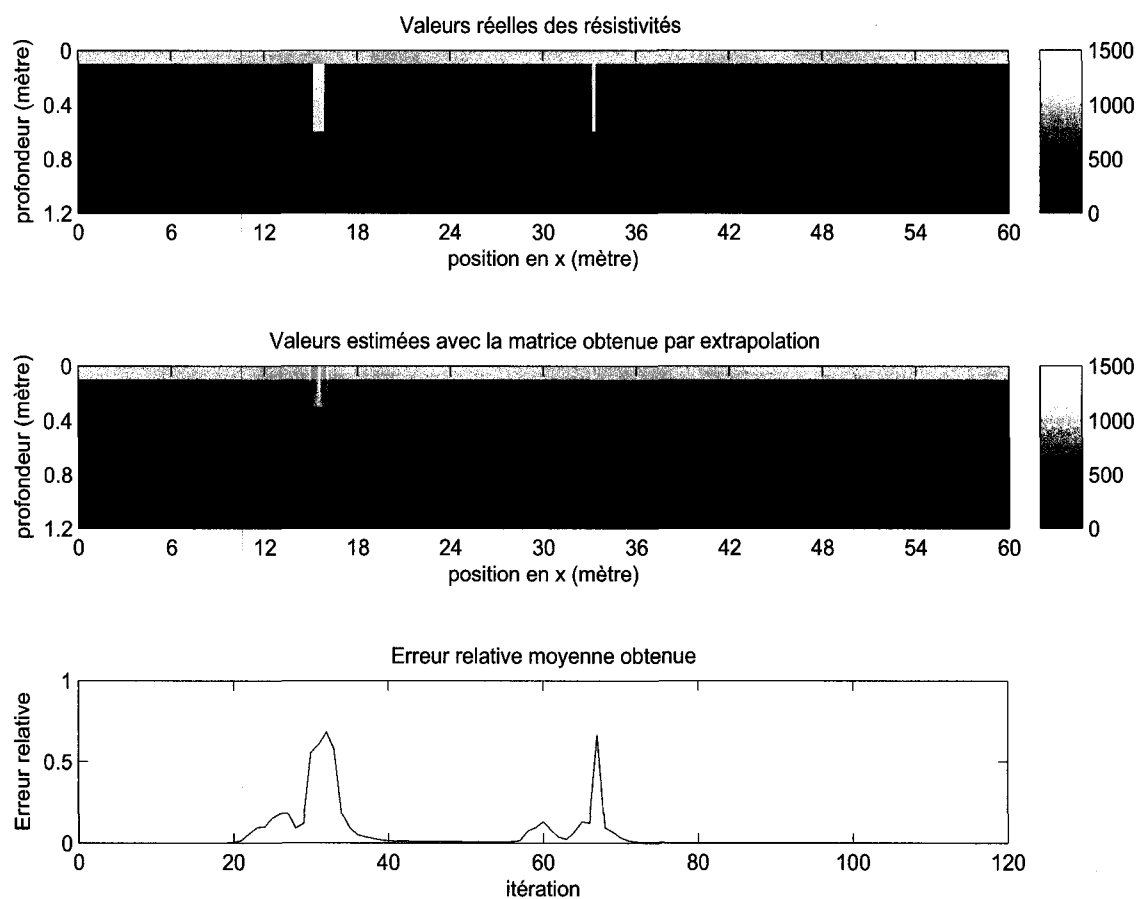


Figure 5.21 – Inversion récursive avec la discrétisation fine 2x2 pour un modèle stratifié avec fissures verticales ($1200 \Omega.m$) à 0.1 mètre de profondeur.

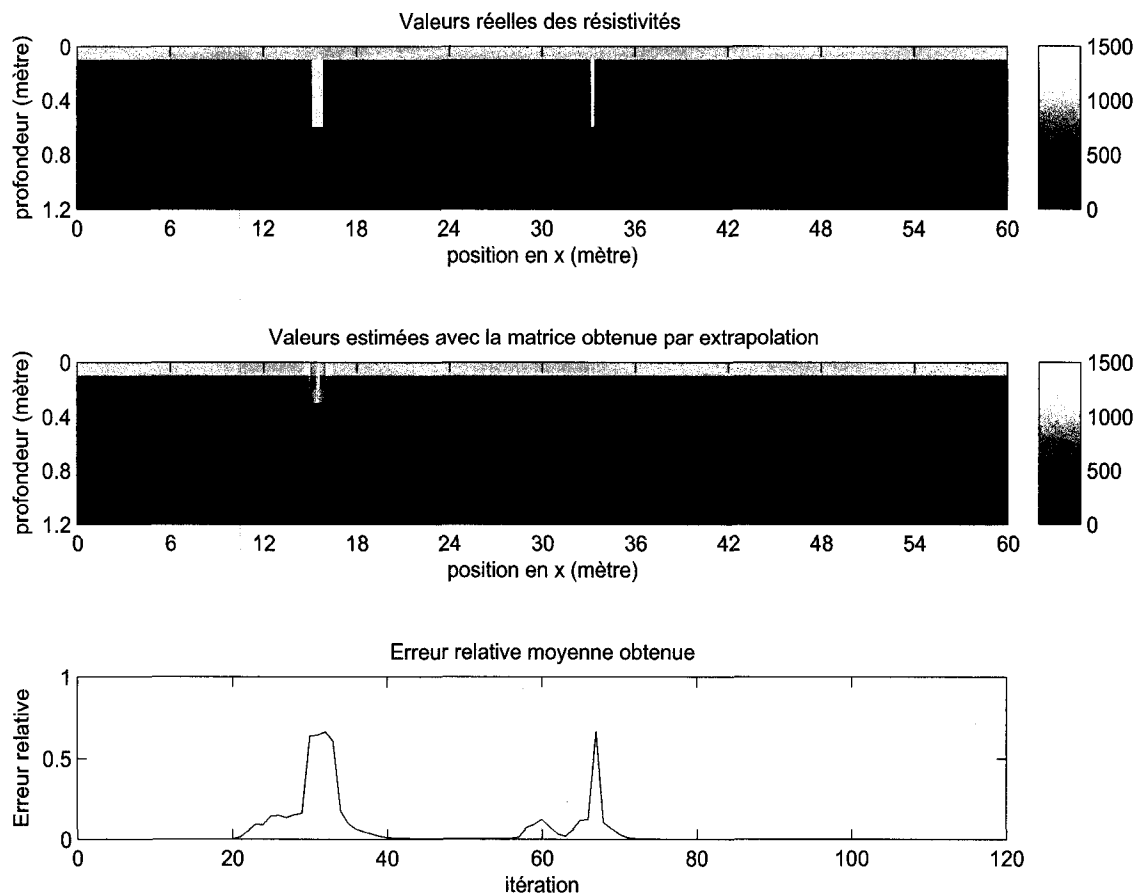


Figure 5.22 – Inversion récursive avec la discrétisation fine 2x2 combinée avec le raffinement 2x2 pour un modèle stratifié avec fissures verticales ($1200 \Omega.m$) à 0.1 mètre de profondeur.

5.3.2 Résultats obtenus avec l'inversion statique

En considérant à présent une méthode d'inversion statique, les figures 5.23, 5.24 et 5.25 montrent respectivement les résultats obtenus avec la discrétisation fine 1×2 , la discrétisation fine 2×2 et la discrétisation fine 2×2 combinée avec le raffinement 2×2 . Les matrices de sensibilité utilisées sont celles obtenues pour les milieux stratifiés.

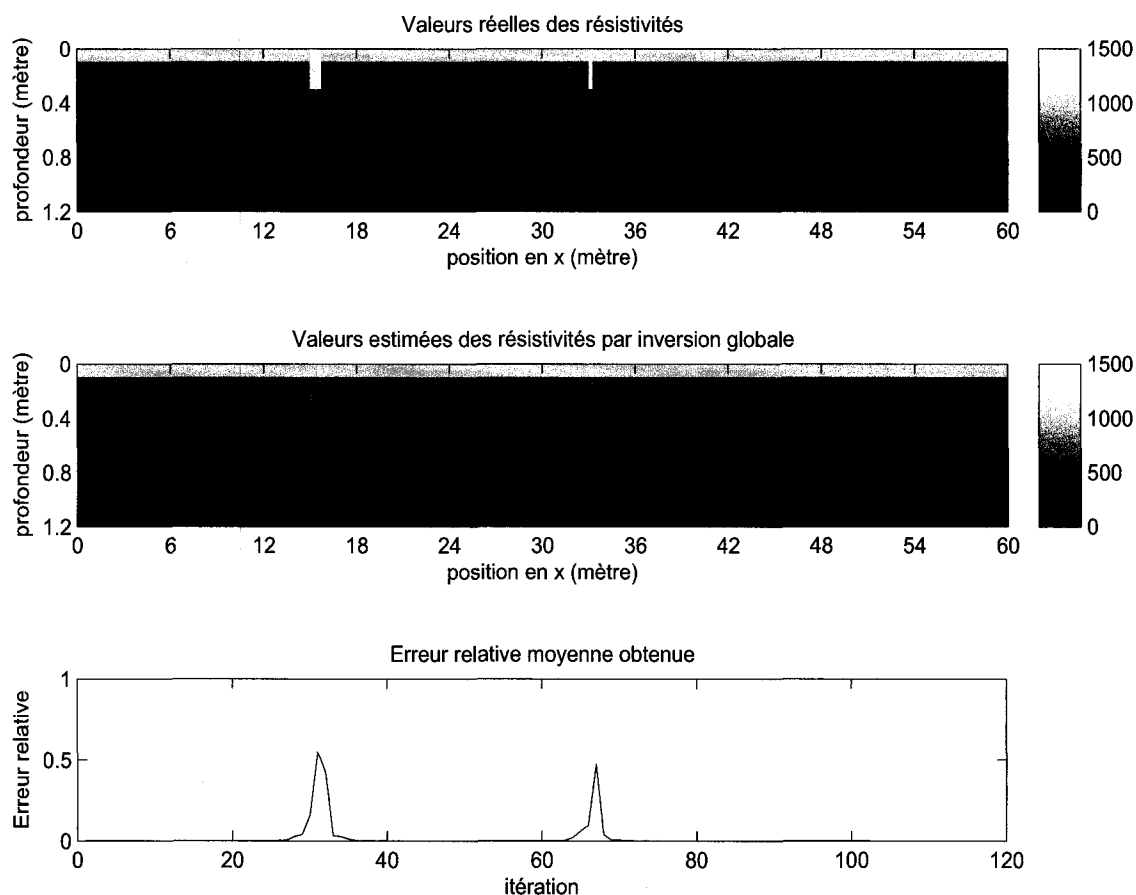


Figure 5.23 – Inversion statique avec la discrétisation fine 1×2 pour un modèle stratifié avec fissures verticales ($1200 \Omega.m$) de 0.3 mètre de hauteur à la surface.

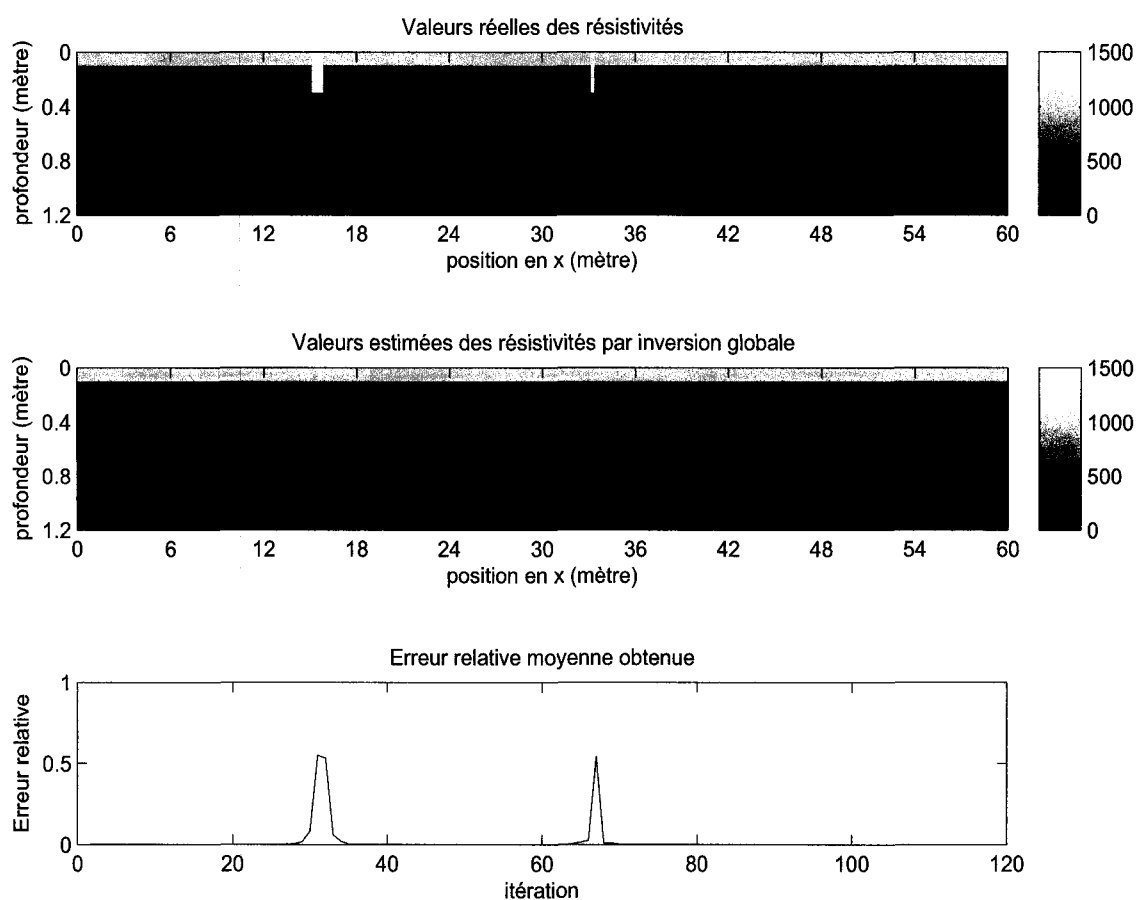


Figure 5.24 – Inversion statique avec la discrétisation fine 2x2 pour un modèle stratifié avec fissures verticales ($1200 \Omega.m$) de 0.3 mètre de hauteur à la surface.

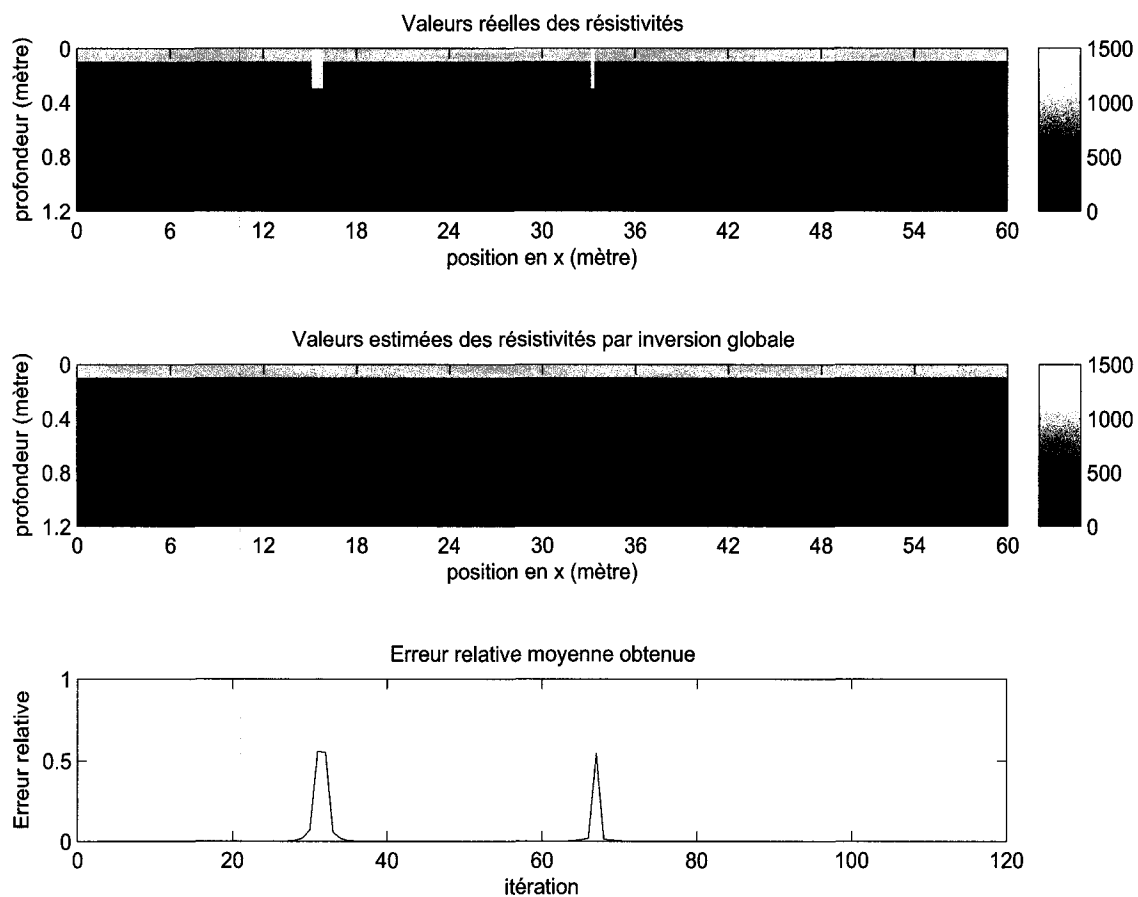


Figure 5.25 – Inversion statique avec la discrétisation fine 2x2 combinée avec le raffinement 2x2 pour un modèle stratifié avec fissures verticales ($1200 \Omega.m$) de 0.3 mètre de hauteur à la surface.

5.3.3 Interprétation des résultats

Les résultats obtenus avec le filtre de Kalman pour des défauts présents en surface permettent d'affirmer que, pour un milieu stratifié, les défauts de surface (asphalte et béton) restent détectables du point de vue localisation et dimensions. L'erreur relative moyenne obtenue a une valeur maximale de 0.5. Les défauts en profondeur (béton et fondation) sont également détectables mais ils sont restitués à la surface (à cause du profil de sensibilité du milieu) et semblent également moins profonds (figures 5.20, 5.21, 5.22). On note aussi la présence d'une légère traînée comme dans le cas des milieux homogènes (figure 5.20).

5.4 Milieu stratifié avec bruit de mesure

Cette section est consacrée à la présentation des résultats dans le cas d'un milieu stratifié en présence de bruit de mesure. Le milieu stratifié utilisé est composé de trois couches surperposées qui représentent respectivement l'asphalte, le béton et la fondation. Les valeurs de résistivités utilisées sont $1000 \Omega.m$ pour l'asphalte, $300 \Omega.m$ pour le béton et $50 \Omega.m$ pour la fondation. Les valeurs d'épaisseur de l'asphalte, du béton et de la fondation sont respectivement 0.1 mètre, 0.2 mètre et 0.9 mètre. La résistivité des défauts présents est $1200 \Omega.m$. Le bruit de mesure utilisé est un bruit gaussien de moyenne nulle. Ce bruit de mesure est 10 %, soit un bruit de mesure dont l'écart-type est 10 fois plus petit que l'écart-type des mesures. Les défauts à la surface de type fissure ont une largeur de 0.25 mètre et une extension verticale de 0.3 mètre tandis que les défauts ou détériorations de grande taille ont une largeur de 0.75 mètre et une extension verticale de 0.3 mètre. Les défauts internes de type fissure ont une largeur de 0.25 mètre et une extension verticale de 0.5 mètre alors que les défauts internes de grande taille ont une largeur de 0.75 mètre et une extension verticale de 0.5 mètre. De plus, les défauts internes sont situés à une profondeur de 0.1 mètre.

5.4.1 Résultats obtenus avec le filtre de Kalman

Les figures 5.26, 5.27, 5.28 présentent respectivement, pour des défauts présents en surface (asphalte et béton), les résultats obtenus avec la discrétisation fine 1×2 , la discrétisation fine 2×2 et la discrétisation fine 2×2 combinée avec le raffinement 2×2 . Les figures 5.29, 5.30, 5.31 présentent respectivement les mêmes résultats, mais pour des défauts présents dans le béton et la fondation.

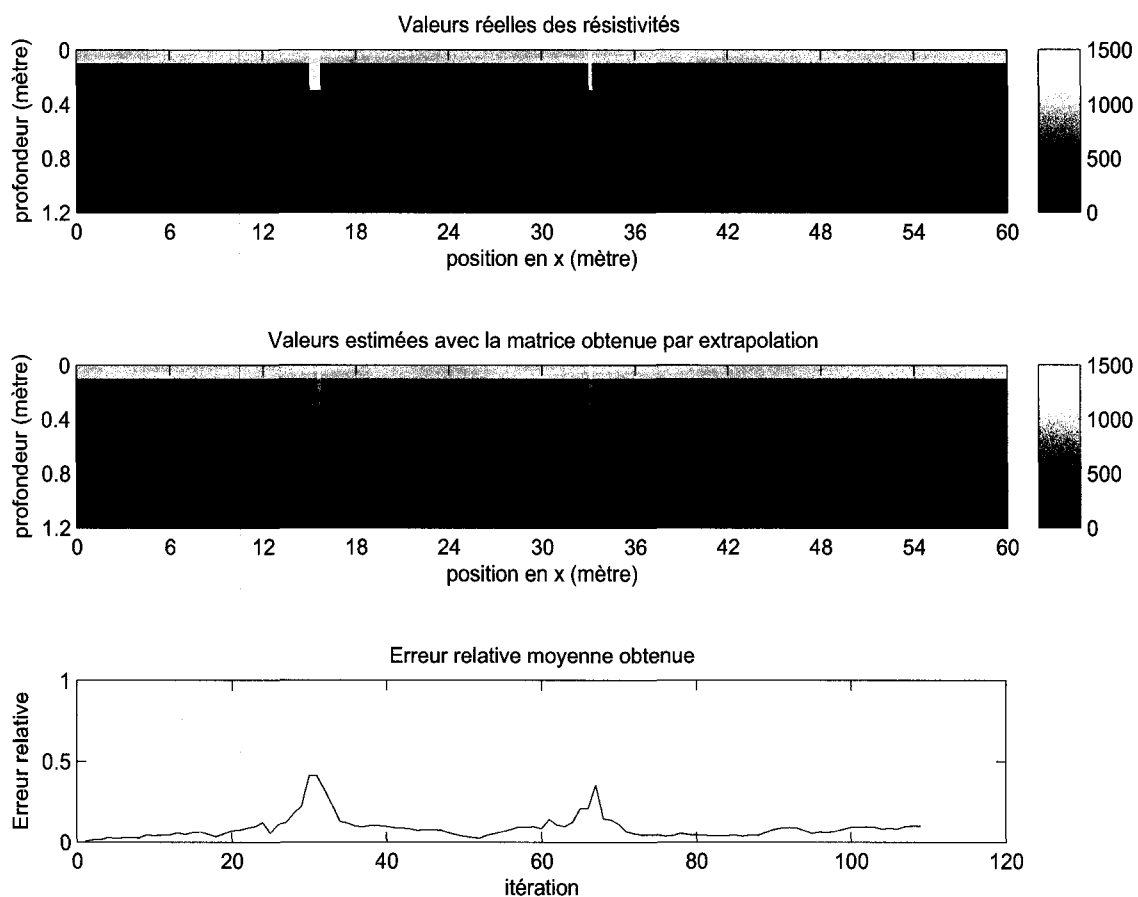


Figure 5.26 – Inversion récursive avec la discrétisation fine 1x2 et avec 10% de bruit de mesure pour un modèle stratifié avec fissures verticales ($1200 \Omega.m$) de 0.3 mètre de hauteur à la surface.

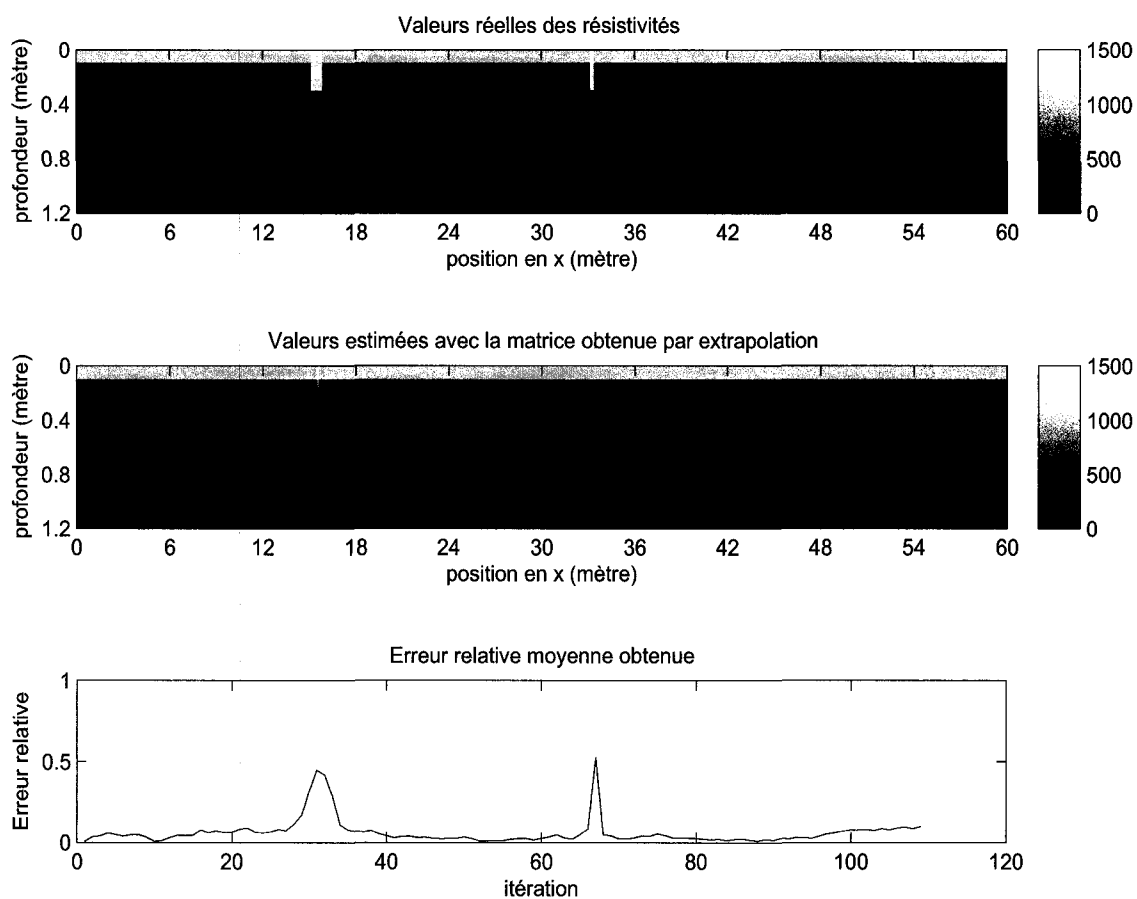


Figure 5.27 – Inversion récursive avec la discrétisation fine 2x2 et avec 10% de bruit de mesure pour un modèle stratifié avec fissures verticales ($1200 \Omega.m$) de 0.3 mètre de hauteur à la surface.

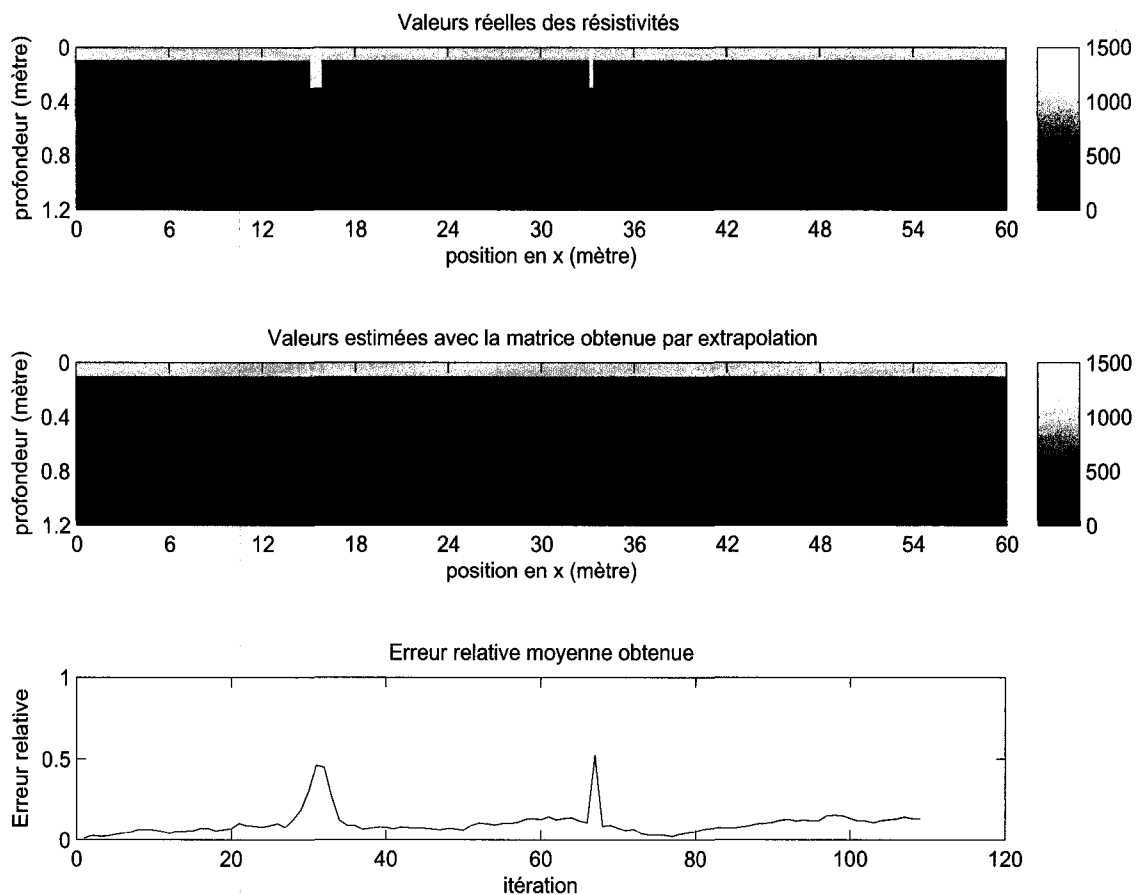


Figure 5.28 – Inversion récursive avec la discrétisation fine 2x2 combinée avec le raffinement 2x2 et avec 10% de bruit de mesure pour un modèle stratifié avec fissures verticales ($1200 \Omega.m$) de 0.3 mètre de hauteur à la surface.

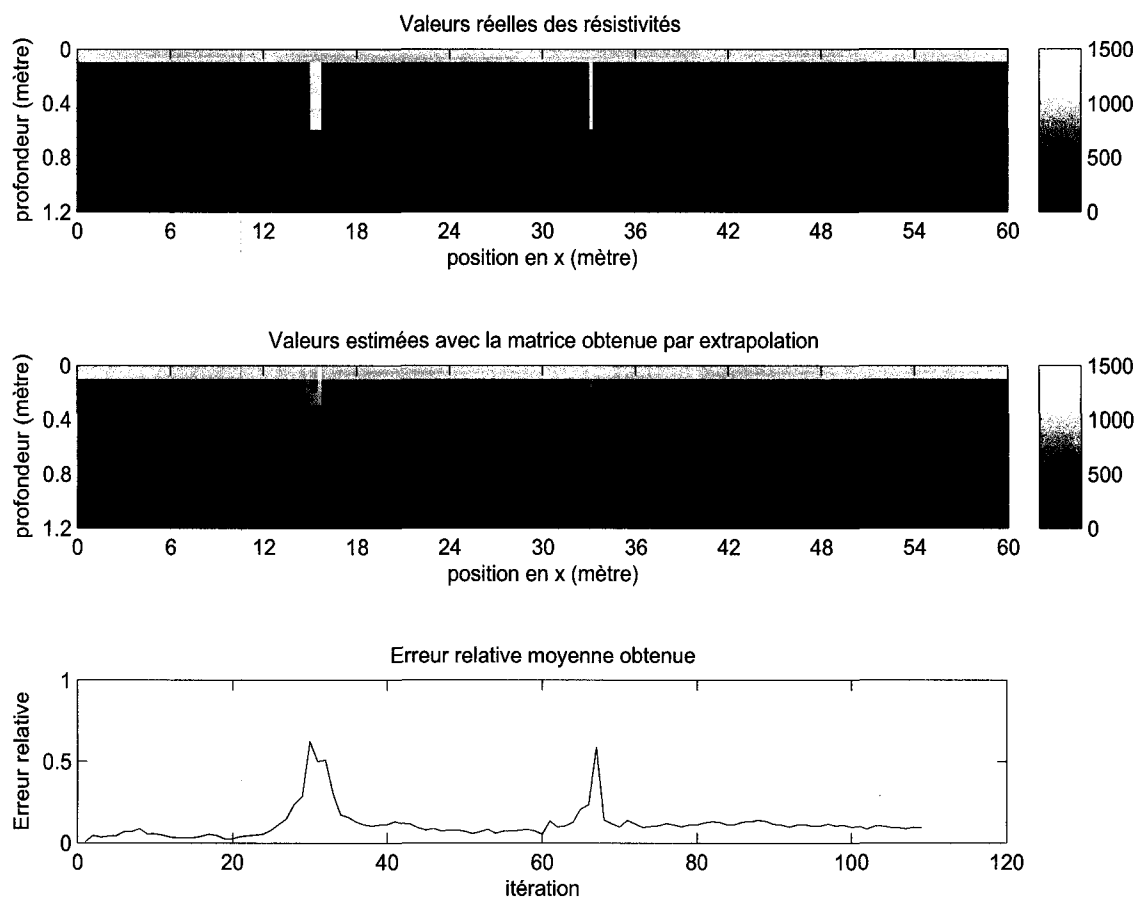


Figure 5.29 – Inversion récursive avec la discrétisation fine 1x2 et avec 10% de bruit de mesure pour un modèle stratifié avec fissures verticales ($1200 \Omega.m$) à 0.1 mètre de profondeur.

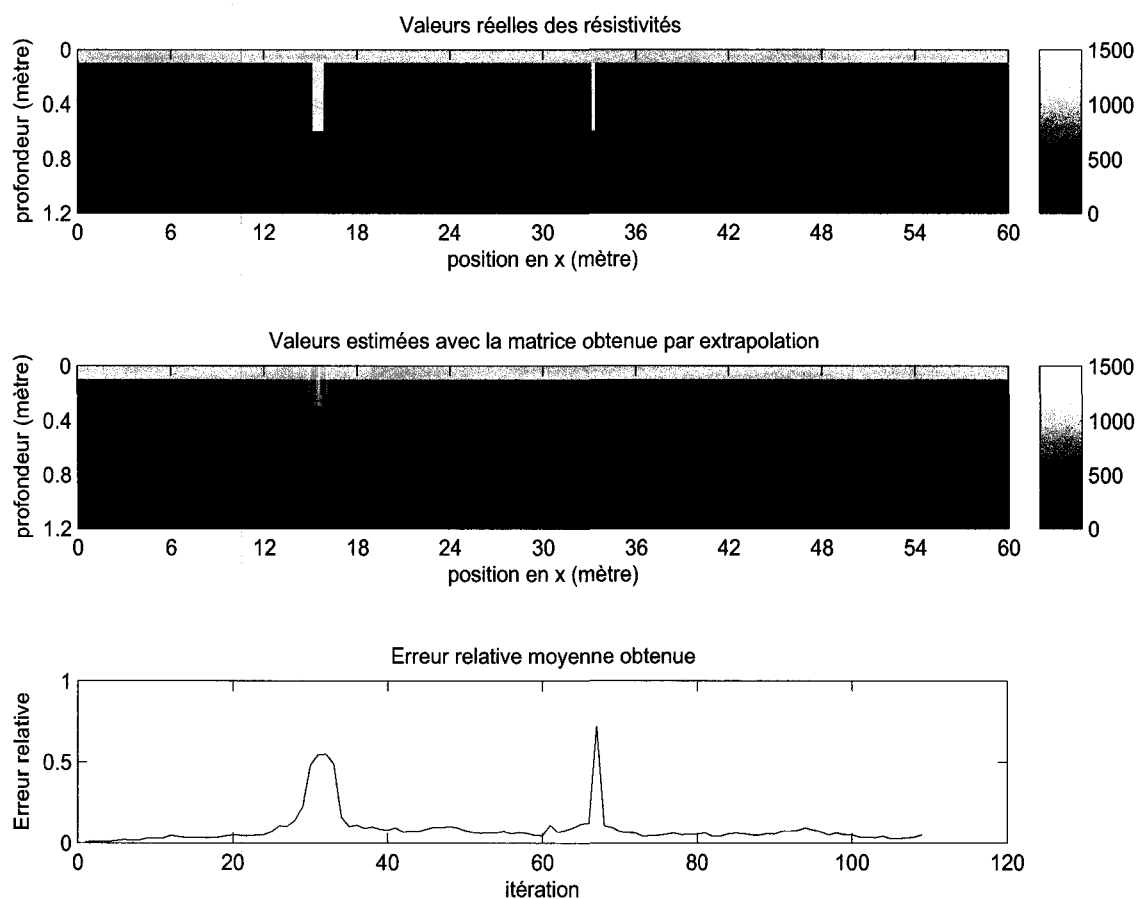


Figure 5.30 – Inversion récursive avec la discrétisation fine 2x2 et avec 10% de bruit de mesure pour un modèle stratifié avec fissures verticales ($1200 \Omega.m$) à 0.1 mètre de profondeur.

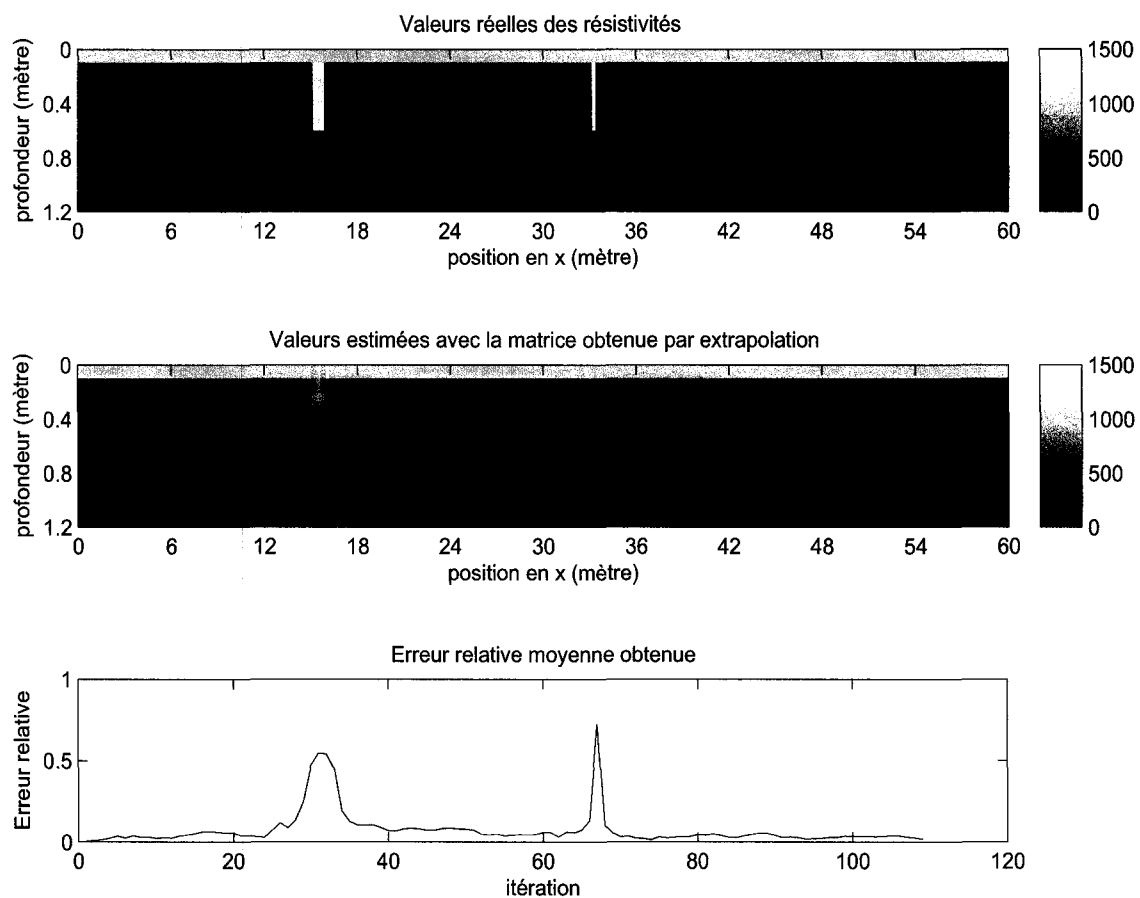


Figure 5.31 – Inversion récursive avec la discrétisation fine 2x2 combinée avec le raffinement 2x2 et avec 10% de bruit de mesure pour un modèle stratifié avec fissures verticales ($1200 \Omega.m$) à 0.1 mètre de profondeur.

5.4.2 Résultats obtenus avec l'inversion statique

En considérant à présent la méthode d'inversion statique, les figures 5.32, 5.33 et 5.34 montrent respectivement les résultats obtenus avec la discrétisation fine 1×2 , la discrétisation fine 2×2 et la discrétisation fine 2×2 combinée avec le raffinement 2×2 . Les matrices de sensibilité utilisées sont celles obtenues pour les milieux stratifiés.

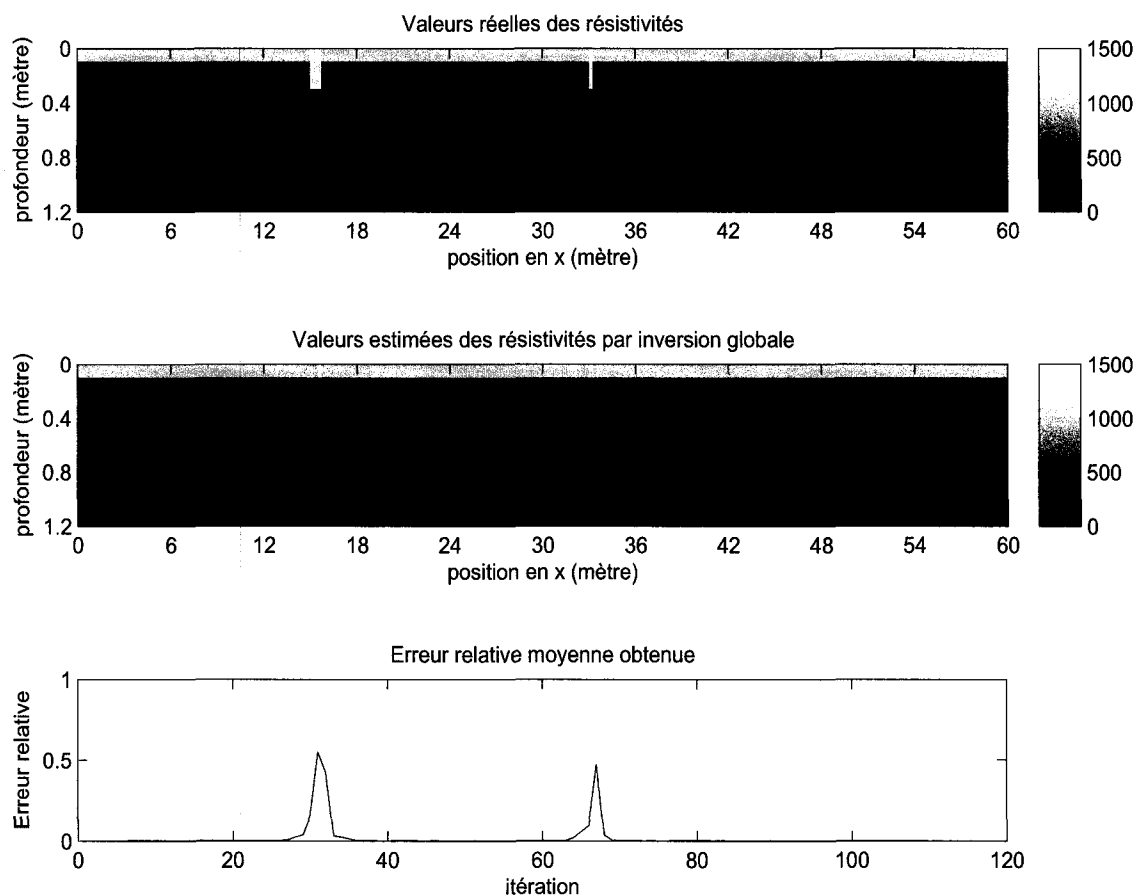


Figure 5.32 – Inversion statique avec la discrétisation fine 1×2 et avec 10% de bruit de mesure pour un modèle stratifié avec fissures verticales ($1200 \Omega.m$) de 0.3 mètre de hauteur à la surface.

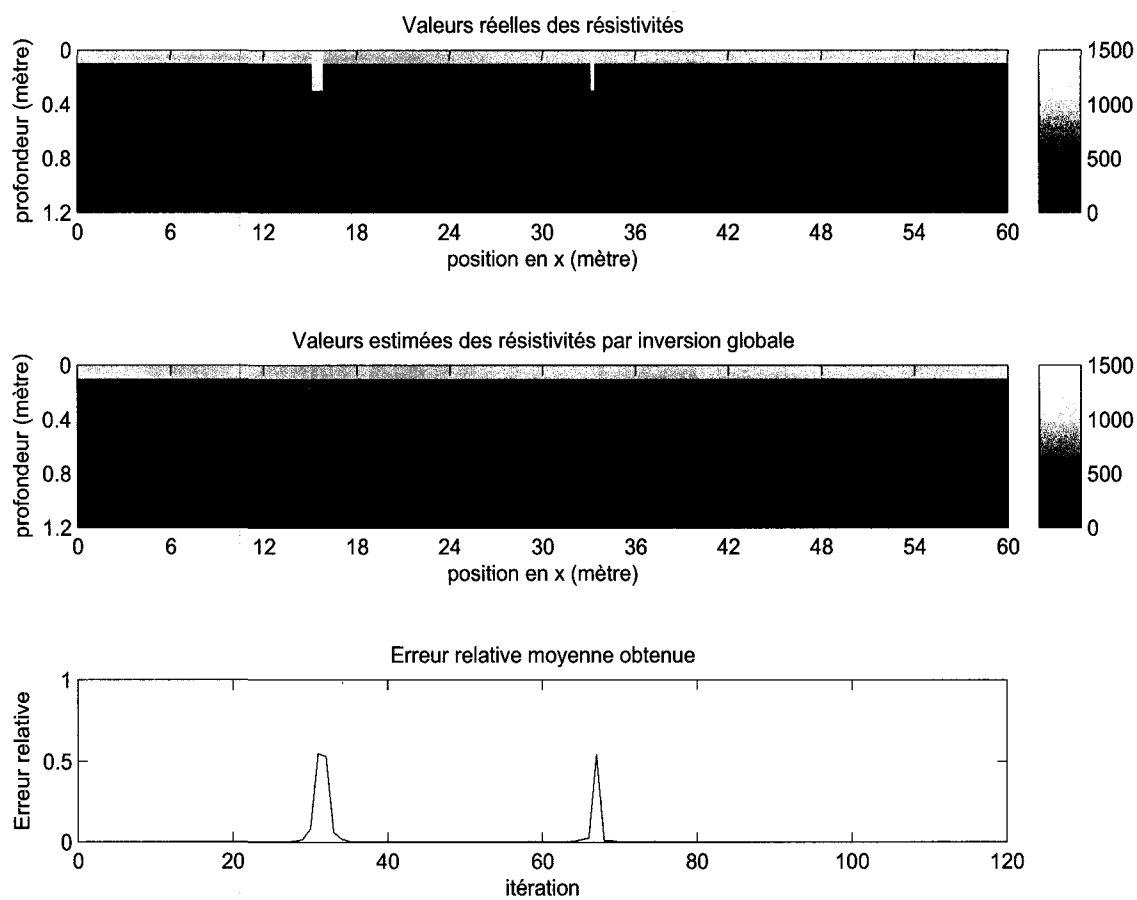


Figure 5.33 – Inversion statique avec la discrétisation fine 2x2 et avec 10% de bruit de mesure pour un modèle stratifié avec fissures verticales ($1200 \Omega.m$) de 0.3 mètre de hauteur à la surface.

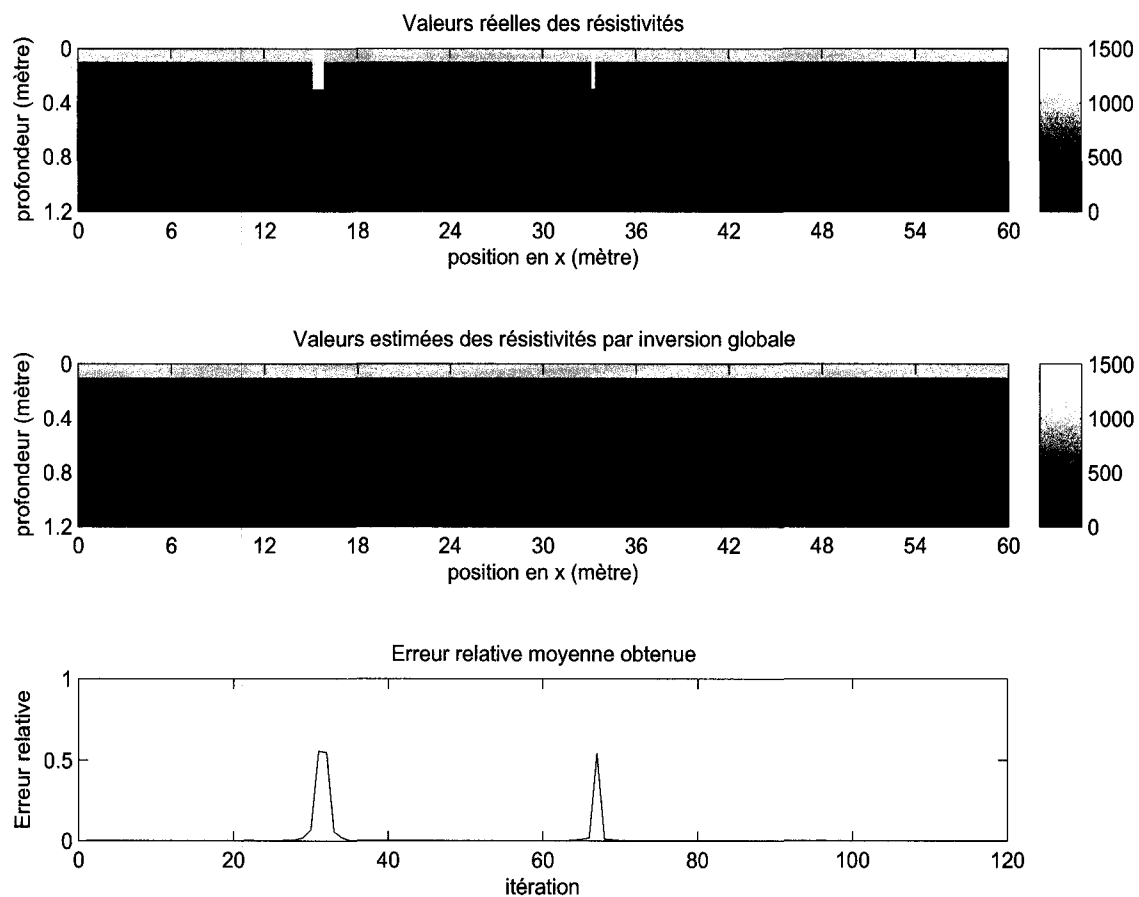


Figure 5.34 – Inversion statique avec la discrétisation fine 2x2 combinée avec le raffinement 2x2 et avec 10% de bruit de mesure pour un modèle stratifié avec fissures verticales (1200 $\Omega.m$) de 0.3 mètre de hauteur à la surface.

5.4.3 Interprétation des résultats

Un bruit de mesure de 10 % permet de détecter les fissures de grande taille du point de vue de leur géométrie de leur position et de leur nature (résistive ou conductrice). Les fissures de petite taille ne sont pas détectées. Les inversions récursive et statique donnent sensiblement les mêmes résultats. Des expériences supplémentaires montrent que la valeur maximale du bruit de mesure à partir de laquelle les hétérogénéités ne sont plus détectables par la méthode d'inversion récursive est d'environ 25 %.

5.5 Application à des données réelles

Afin de vérifier l'efficacité de la méthode d'inversion récursive développée dans ce mémoire, des données réelles ont été recueillies sur une distance de 154 mètres grâce à un système dipôle-dipôle en ligne contenant six dipôles de réception et un d'émission. Les dipôles utilisés sont des dipôles de deux mètres. Les mesures de résistivité apparente sont reportées sous forme de pseudo-section au haut de la figure 5.35.

5.5.1 Résultats obtenus avec l'inversion statique

Les données mesurées ont été modélisées par une méthode d'inversion classique (inversion statique) à l'aide du logiciel *Res2DInv*. Le modèle final est présenté au bas de la figure 5.35 alors que les réponses calculées de ce modèle sont présentées sous forme de pseudo-section au milieu de la figure 5.35. On peut apprécier l'ajustement des données observées par celles calculées à partir du modèle.

5.5.2 Résultats obtenus avec l'inversion récursive

Le dispositif de mesure étant formé de dipôles de deux mètres, la discrétisation choisie consiste à diviser la zone d'intérêt en cellules carrées de 0.5 mètre de côté. La profondeur d'investigation est de 3.5 mètres. La prise de mesure se fait tous les deux mètres. La figure 5.36 présente les résultats d'inversion obtenus par différentes méthodes de calcul de sensibilité. La figure 5.37 montre les résultats de l'inversion après avoir appliqué la technique de raffinement 4 x 4. La figure 5.38, quant à elle, expose les résultats obtenus en appliquant une discrétisation fine 2 x 2 (cellule carrée de 0.25 mètre de côté) avec différentes matrices de sensibilité.

Afin de laisser derrière une colonne de la zone d'intérêt entre chaque échantillonnage, nous avons utilisé une discrétisation dont la taille d'une cellule de base est 2 mètres $\times$ 0.5

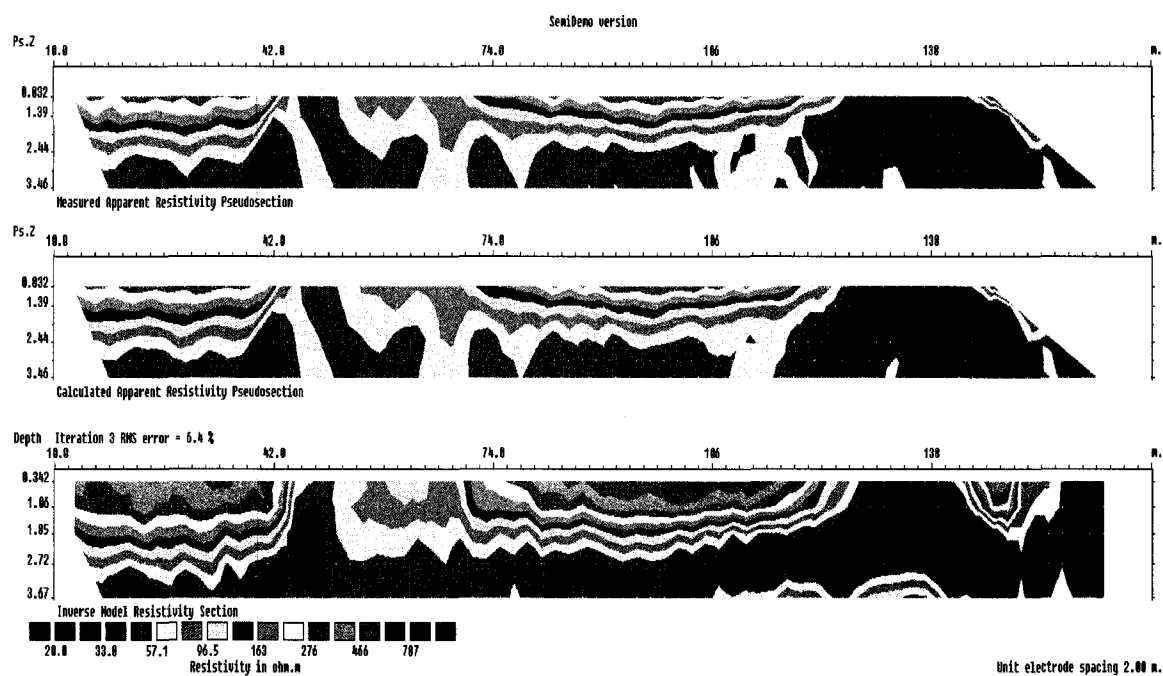


Figure 5.35 – Résultats obtenus avec l'inversion statique sur les données réelles à l'aide du logiciel *Res2DInv*.

mètre. La figure 5.39 montre les résultats obtenus avec une telle discrétisation.

Les figures 5.36, 5.37 et 5.38 présentent des discontinuités (oscillations) dans la détection des hétérogénéités tandis que la figure 5.39 n'en présente pas. Cependant, la figure 5.39 utilisant une discrétisation grossière ne permet pas une bonne détection des dimensions des hétérogénéités.

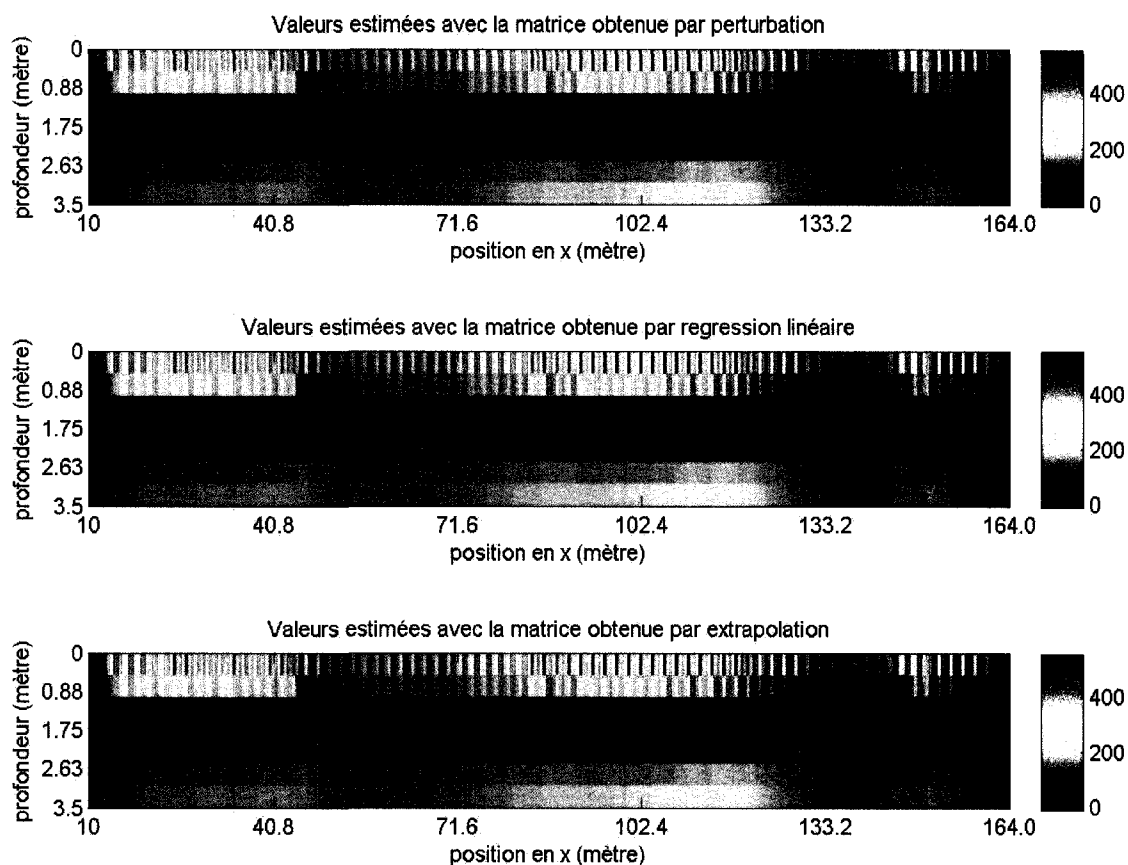


Figure 5.36 – Inversion récursive sur des données réelles. Les graphiques de cette figure présentent les résultats obtenus avec différentes matrices de sensibilité.

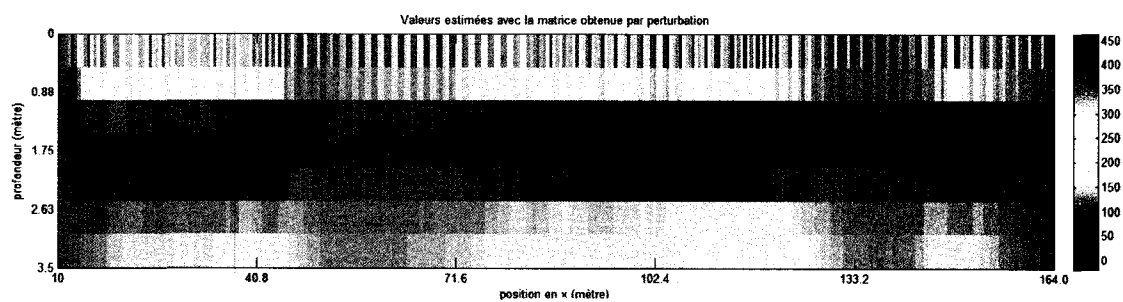


Figure 5.37 – Inversion récursive sur des données réelles avec raffinement 4x4.

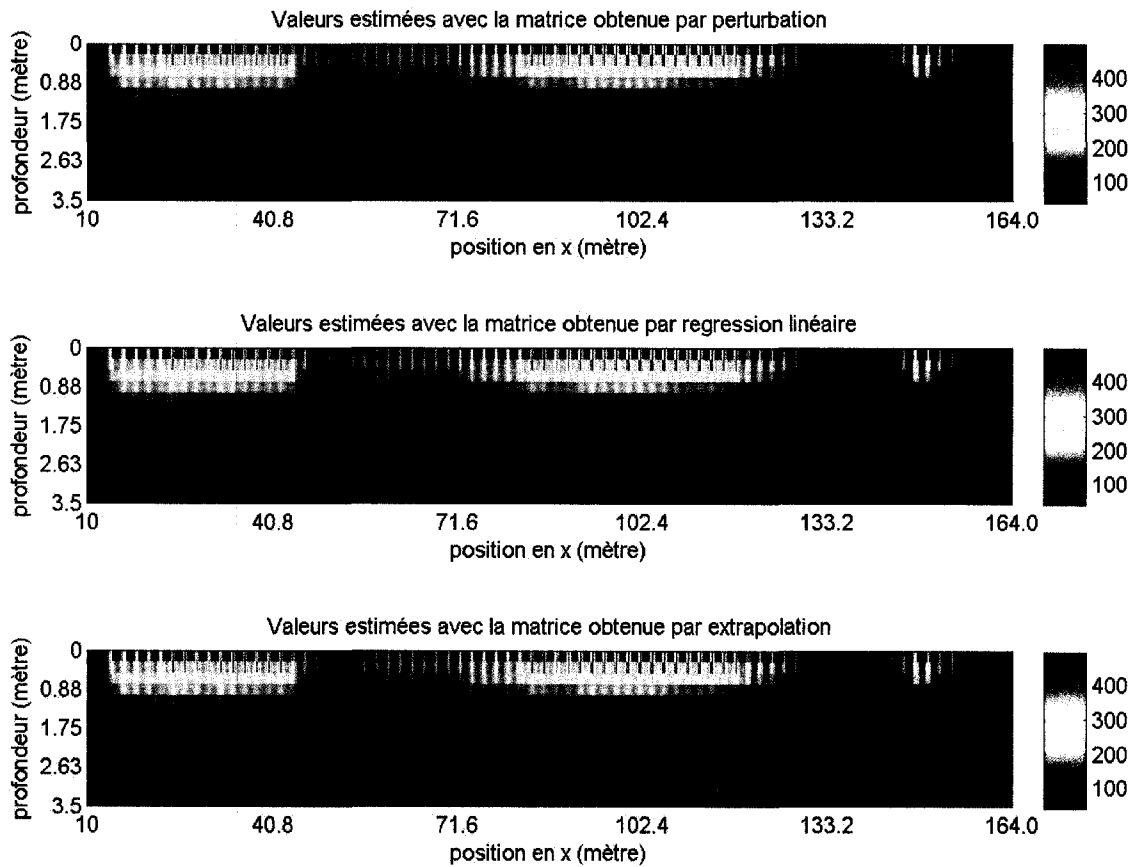


Figure 5.38 – Inversion récursive sur des données réelles avec la discrétisation fine 2x2. Les graphiques de cette figure présentent les résultats obtenus avec différentes matrices de sensibilité.

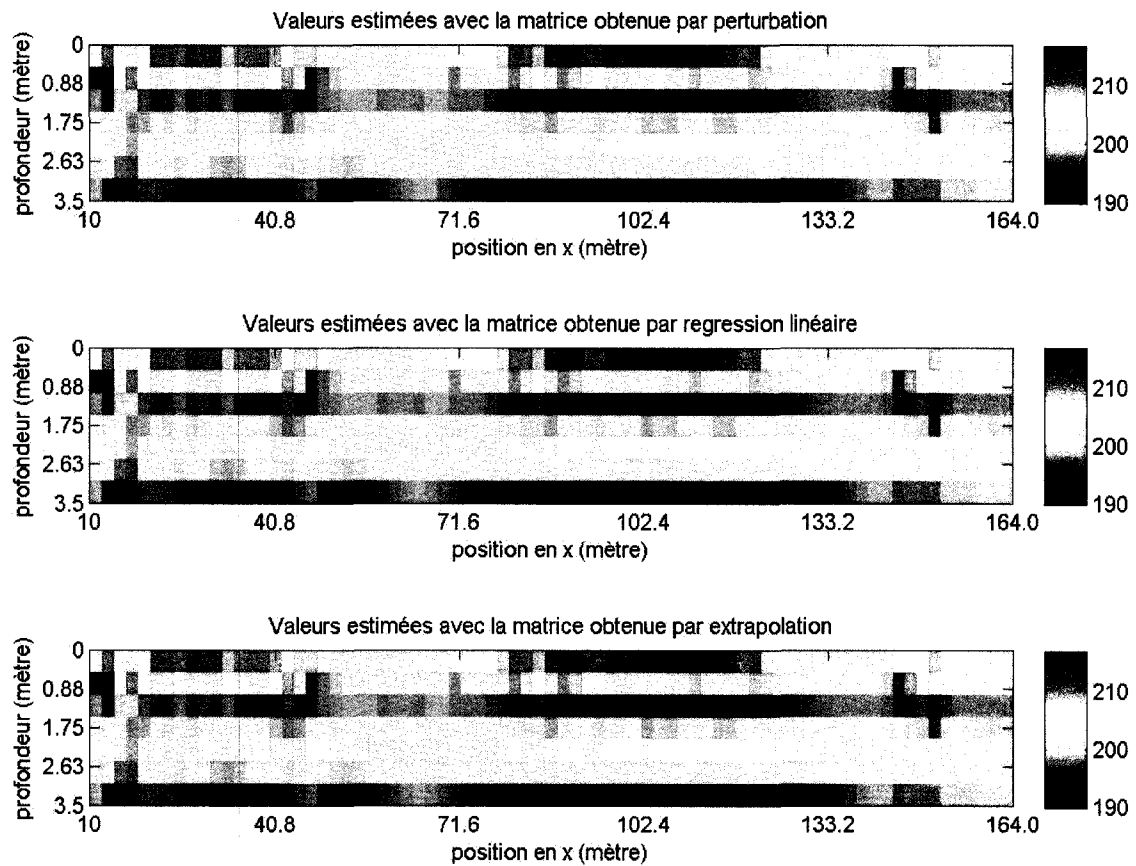


Figure 5.39 – Inversion récursive sur des données réelles utilisant des cellules de base de 2 mètres $\times$ 0.5 mètre.

5.5.3 Résultats obtenus avec des données synthétiques

Afin de rechercher la source des discontinuités observées dans l'inversion récursive sur des données réelles, une simulation avec des données synthétiques obtenues par une imitation de la distribution de résistivités du cas réel permet d'obtenir le résultat de la figure 5.40. Comme dans le cas réel, les dipôles utilisés sont de deux mètres et les cellules de base sont carrées de 0.5 mètre de côté. La profondeur d'investigation est de 3.5 mètres et la valeur de résistivité utilisée 100 $\Omega.m$. Par contre, la prise de mesure se fait à chaque 0.5 mètre. On constate qu'une augmentation de la fréquence d'échantillonnage élimine les discontinuités (figure 5.40).

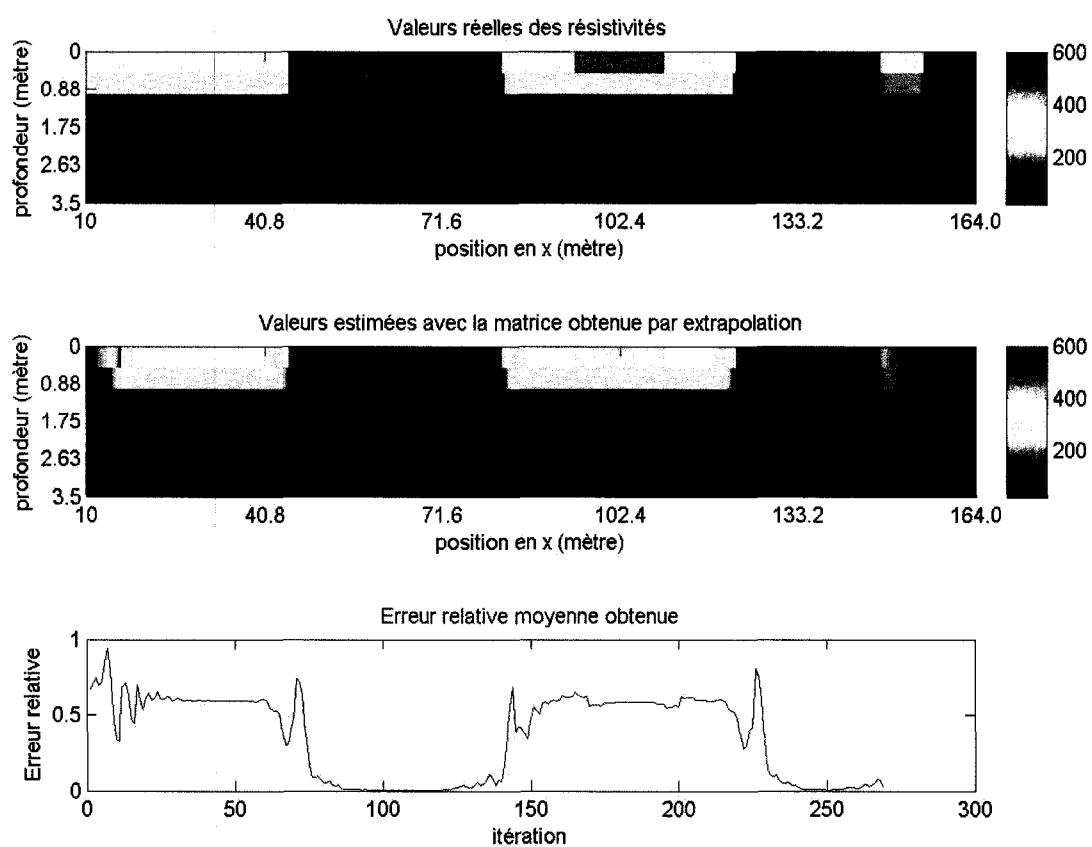


Figure 5.40 – Inversion récursive sur des données synthétiques imitant le cas réel.

5.5.4 Résultats obtenus en simulant une fréquence d'échantillonnage plus élevée sur les données réelles

Le dispositif de mesure utilisé dans le cas réel effectue une prise de mesure à tous les deux mètres. Afin de simuler une prise de mesure à chaque 0.5 mètre, comme dans la cas de la figure 5.40, les mesures prises sont répétées à chaque 0.5 mètre jusqu'à ce que de nouvelles mesures soient disponibles. Ainsi, la fréquence d'échantillonnage est quatre fois plus élevée que lorsque les mesures sont prises à chaque deux mètres. La figure 5.41 présente les résultats d'inversion obtenus par différentes méthodes de calcul de sensibilité, tandis que la figure 5.42 expose les résultats obtenus en appliquant une discrétisation fine 2×2 (cellule carrée de 0.25 mètre de côté) avec différentes matrices de sensibilité.

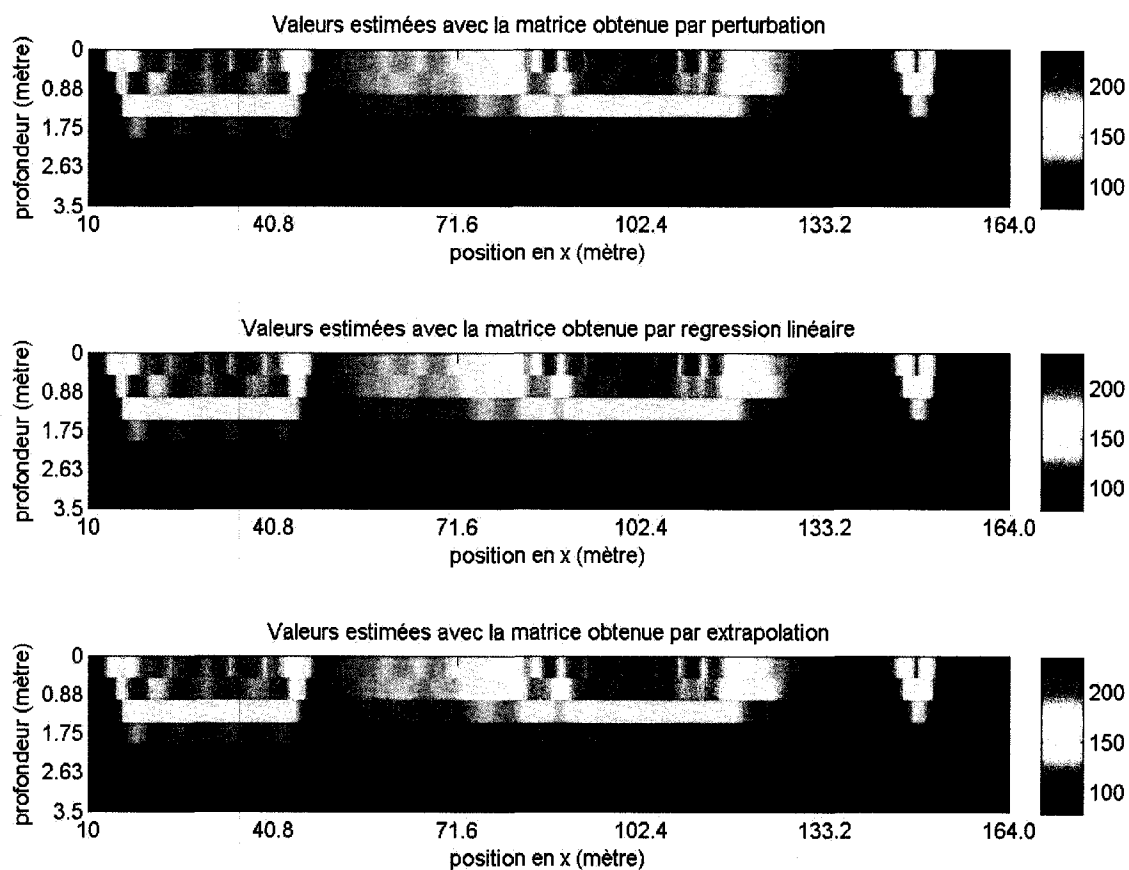


Figure 5.41 – Inversion récursive sur des données réelles avec prise de mesures à chaque 0.5 mètre. Les trois graphiques présentent les résultats pour différentes matrices de sensibilité.

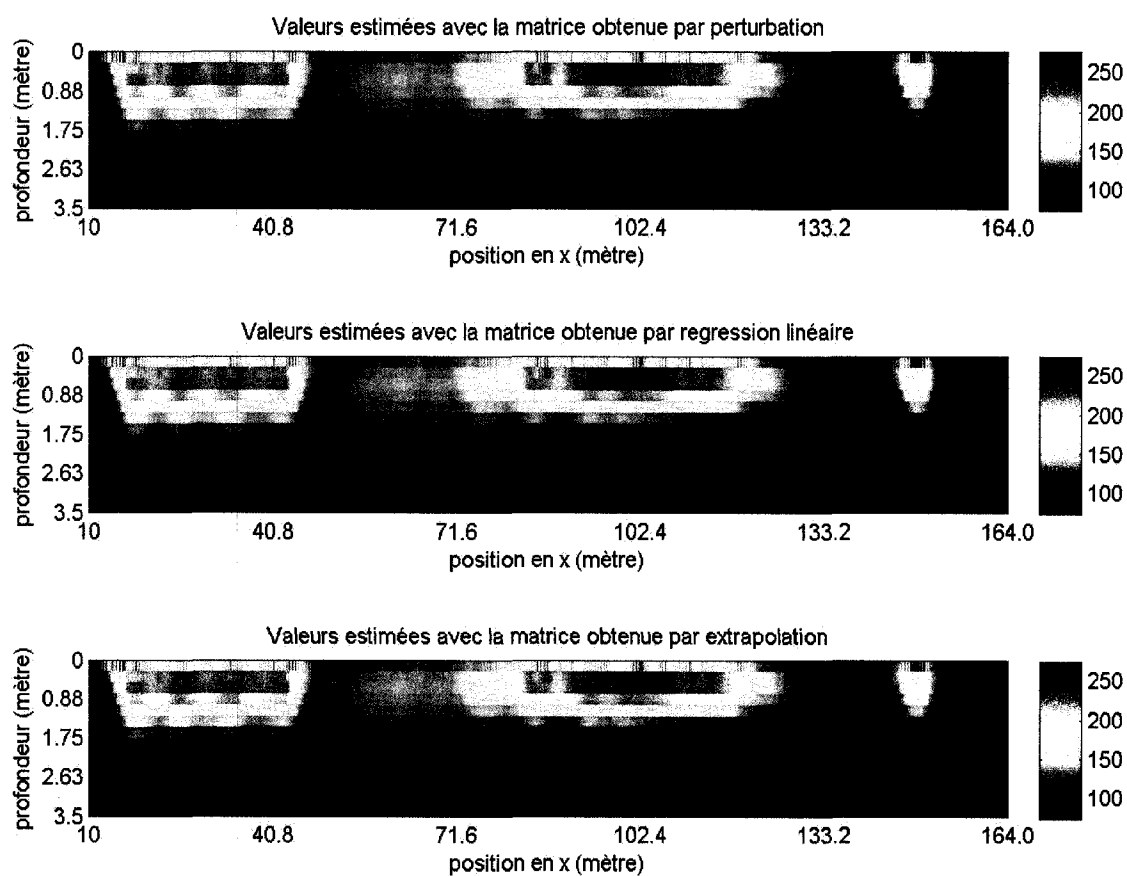


Figure 5.42 – Inversion récursive sur des données réelles avec la discrétisation fine 2x2 et prise de mesures à chaque 0.5 mètre. Les trois graphiques présentent les résultats pour différentes matrices de sensibilité.

5.5.5 Interprétation des résultats

Une comparaison des résultats obtenus par l'inversion statique et des résultats obtenus par l'inversion récursive montre que la technique d'inversion récursive détecte bien les hétérogénéités. Les hétérogénéités sont situées à la surface, ont une profondeur de 1.5 mètre et sont toutes résistives. La première se situe entre 15 mètres et 42 mètres, la deuxième entre 77 mètres et 120 mètres, la troisième entre 150 mètres et 154 mètres.

Pour un échantillonnage à tous les deux mètres, les résultats obtenus par inversion récursive (figures 5.36, 5.37 et 5.38) présentent des discontinuités (en forme de « notes de piano ») dans la détection des hétérogénéités. En utilisant des cellules de base dont la longueur dans le sens du déplacement est 2 mètres, le dispositif de mesure laisse derrière une colonne de discrétisation entre chaque échantillonnage. La figure 5.39 présente les résultats d'une telle discrétisation ; et on constate, dans ce cas, l'absence de discontinuités. Le fait de laisser plusieurs colonnes de discrétisation entre deux échantillonnages pourrait être la cause des discontinuités. Afin de résoudre ce problème de discontinuité, nous avons effectué des simulations avec des données synthétiques issues d'une distribution de résistivités semblables au cas réel. Une augmentation de la fréquence d'échantillonnage (échantillonnage à chaque 0.5 mètre) permet l'élimination des discontinuités (figure 5.40). La simulation de la prise de mesures à chaque 0.5 mètre au niveau des données réelles, en répétant les mesures prises jusqu'à ce que de nouvelles mesures soient disponibles (fréquence d'échantillonnage quatre fois plus élevée), élimine les discontinuités et donne de meilleurs résultats (figures 5.41 et 5.42).

Cependant, l'inversion statique, utilisant une discrétisation plus fine que l'inversion récursive, donne des résultats plus précis. Aussi, il est facile de voir que la méthode d'inversion récursive qui utilise des cellules de taille plus petite (figure 5.42) donne de meilleurs résultats que celle qui utilise des cellules de grande taille (figure 5.41). En somme, la technique d'inversion récursive utilisant le filtre de Kalman détectent les hétérogénéités lors-

qu'on utilise des données réelles.

CHAPITRE 6

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Les travaux présentés dans ce mémoire ont pour objectifs l'identification d'un modèle direct et la mise en œuvre d'un système d'inversion en temps réel permettant l'estimation des résistivités d'un milieu homogène, puis d'un milieu stratifié.

Pour atteindre ces objectifs, il a fallu dans un premier temps définir le modèle. La première étape dans cette définition a été le choix des paramètres de discrétisation du milieu étudié. L'étape la plus importante dans cette définition a été la recherche de la matrice de sensibilité. Plusieurs méthodes de calcul de sensibilité ont été utilisées parmi lesquelles la méthode de la perturbation, la méthode de régression linéaire et la méthode d'extrapolation de Richardson. Aussi les mesures de voltage sur l'objet étudié en vue de l'estimation de la sensibilité ont été obtenues en utilisant un réseau de résistances pour représenter l'objet étudié. Par ailleurs, pour obtenir une meilleure précision des valeurs de sensibilité, une technique dite de raffinement a été employée. Cette technique consiste, entre autres, à représenter une cellule de base par plusieurs résistances au lieu de deux : cela augmente la précision sans changer la taille des cellules de discrétisation.

Une fois le modèle direct défini, il a fallu mettre en place une méthode d'inversion récursive afin d'atteindre l'objectif d'estimation des résistivités en temps réel. La méthode d'estimation récursive utilisée dans notre cas est celle du filtre de Kalman, qui permet

l'estimation en temps réel de la variation des résistivités du sous-sol sans augmenter la taille ou la complexité du problème au fur et à mesure que le temps progresse.

Les résultats obtenus à travers ce projet de maîtrise permettent de prouver l'efficacité des méthodes et techniques utilisées. Les défauts plus proches des électrodes de mesure sont plus facilement détectables. Cependant, certaines améliorations restent possibles. Par exemple, il serait possible de rendre dynamique le calcul de la matrice de sensibilité de sorte qu'elle se mette à jour en fonction du temps et des nouvelles résistivités interprétées. Par ailleurs, l'utilisation des différences finies ou éléments finis dans l'estimation de la sensibilité pourrait être mise en œuvre. En ce qui concerne la méthode d'inversion, l'utilisation de la version étendue du filtre de Kalman pourra être envisagée. Cette version permet une estimation récursive sur un problème non-linéaire. Le bruit de mesure utilisé dans notre cas est un bruit gaussien car ce dernier est celui qui représente au mieux les bruits des appareils de mesure. Cependant, il serait judicieux d'utiliser une modélisation qui tient compte d'autres types de bruit. La configuration utilisée pour l'appareil de mesure de notre cas est une configuration dipôle-dipôle en ligne. Il serait donc pertinent de tester l'efficacité de modélisation et de la méthode d'inversion utilisée en considérant d'autres configurations, telles que le dipôle-dipôle en équatoriale qui est utilisée avec les systèmes CORIM et MPU.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Kay, S. M. (1993). Fundamentals of statistical signal processing Volume 1 : Theory of estimation. University of Rhode Island.
- [2] Haykin, S. (2001). Kalman filtering and neural networks. McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada.
- [3] Brown, R. G., Hwang P. Y. C. (1996). Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering (third edition). Iowa State University, Rockwell International Corporation.
- [4] Bouchard, R.-P., Olivier, G. (1995). Circuits et machines électriques. École Polytechnique de Montréal, Montréal, Québec, Canada.
- [5] Oldenborger, G. A., Routh, P. S., Knoll M. D. (2005). Sensitivity of electrical resistivity tomography data to electrode position errors. Department of Geosciences, Boise State University.
- [6] Spitzer, K. A 3-D finite-difference algorithm for DC resistivity modelling using conjugate gradient methods. *Geophys. J. Int.*(1995), 123, 903-914.
- [7] Spitzer, K. The three-dimensional DC sensitivity for surface and subsurface sources. Ecole Polytechnique de Montréal, *Geophys. J. Int.*(1998), 134, 736-746.

- [8] Loke, Barker. Least-squares deconvolution of apparent resistivity. *Geophysics Int.*(1995), 60, 1682-1690.
- [9] Dorozhovets, M. M., Potyranski, P. (2005). Data Acquisition System and Reference Model Used for the Investigation and Verification of the Resistance Tomography System. Department of Information and Measuring Technology, National University "Lviv Polytechnic" S. Bandera, 12, St. 79013, Lviv, Ukraine.
- [10] Binley, A. I., Pinheir, P., Dickin, F. Finite element based three-dimensional forward and inverse solvers for electrical impedance tomography. *Advances in Electrical Tomography* (Digest No : 1196/143), IEE Colloquium on Volume , Issue , 19 Jun 1996 Page(s) : 6/1 - 6/3.
- [11] Koh, C. S. (1997). Electric Resistivity Tomography for Geophysical Inverse Problems. *School of Electrical tk Electmniccs Engineering*, Chungbuk National University, Cheongju, Chuhgbuk 360-763, KOREA.
- [12] Grebennikov, A. (2003). Fast image reconstruction algorithms for electric tomography. Facultad de Ciencias Fisico Matematicas, BenemCrita Universidad Aut6noma de Puebla, AV. San Claudio y Rio verde, Ciudad Universitaria, CP 72570, Puebla, Pue., Mexico.
- [13] Gasulla, M., Pallàs-Areny, R. Noniterative Algorithms for Electrical Resistivity Imaging Applied to Subsurface Local Anomalies. *IEEE Sensors Journal*, VOL. 5, NO. 6, December 2005.
- [14] Kuras, O., Meldrum, P. I., Beamish, D., Ogilvy, R. D., Lala, D. Capacitive Resistivity Imaging with Towed Arrays. *Journal of Environmental and Engineering Geophysics*, September 2007, v. 12, 267-279.

- [15] Kuras, O., Meldrum, P. I., Beamish, D., Ogilvy, R. D. Fundamentals of the capacitive resistivity technique. *Geophysics*, VOL. 71, NO. 3 (May-June 2006) ; P. G135-G152.
- [16] Chouteau, M., Vallieres, S., Miralles, M. Assessment of continuous resistivity profiling for the characterization of paved roads. *Transactions of the American Geophysical Union*, no. 17, 2004, Joint Assembly Supplement, Abstract NS43A-03.
- [17] Nely, G. (1989). Les séries à évaporites en exploration pétrolière, 2 méthodes géophysiques. Greco 52 (CNRS), 198.