

**Titre:** Adaptation de maillage pour la simulation numérique du tourbillon marginal sur une aile tridimensionnelle  
Title:

**Auteur:** Éric Joubarne  
Author:

**Date:** 2008

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Joubarne, É. (2008). Adaptation de maillage pour la simulation numérique du tourbillon marginal sur une aile tridimensionnelle [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/8258/>  
Citation:

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8258/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Steven Dufour, & François Guibault  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ADAPTATION DE MAILLAGE POUR LA SIMULATION NUMÉRIQUE DU  
TOURBILLON MARGINAL SUR UNE AILE TRIDIMENSIONNELLE

ÉRIC JOUBARNE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET GÉNIE INDUSTRIEL  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)

AVRIL 2008



Library and  
Archives Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file    Votre référence*  
*ISBN: 978-0-494-41564-1*  
*Our file    Notre référence*  
*ISBN: 978-0-494-41564-1*

**NOTICE:**

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

**AVIS:**

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

  
**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

ADAPTATION DE MAILLAGE POUR LA SIMULATION NUMÉRIQUE DU  
TOURBILLON MARGINAL SUR UNE AILE TRIDIMENSIONNELLE

présenté par : JOUBARNE Éric

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. CAMARERO Ricardo, ing., Ph.D., président

M. DUFOUR Steven, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. GUIBAULT François, ing., Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. AVELLAN François, Doct., membre

## REMERCIEMENTS

Ce travail n'aurait pas été possible sans aide. À Montréal, Steven Dufour m'a d'abord accueilli dans son équipe et je tiens à le remercier pour cela. Yvan Mokwinski m'a beaucoup aidé avec Linux et ses applications. De plus, son sujet de recherche étant similaire au mien, j'ai pu échanger avec lui à plusieurs reprises sur des aspects techniques et cela m'a fait beaucoup progresser. J'ai aussi cotoyé Alain Fidahoussen et Charles Pestiau, du même labo, que je tiens à saluer ici pour leur support.

J'ai eu ensuite la chance de travailler avec le professeur François Guibault du laboratoire de maillage et géométrie numérique. Plusieurs personnes de ce labo m'ont supporté. Entre autres, j'ai utilisé des programmes développés par Horea Ipean, Julien Dompierre, Marie-Gabrielle Valet, Jean-François Dubé, Olivier Courchesne et Paul Labbé. C'est Jean-François qui m'a introduit à la grappe de calcul Echidna et qui m'a expliqué le comment du pourquoi. Je ne peux passer sous silence les bons moments que j'ai eu avec Man Wang, Ying Zhang, Anthony Haroutunian, Vincent LeRoy, Xavier Mankovsky, Christophe Tribes et Sergio Galvan.

Je dois encore remercier le professeur Guibault pour m'avoir donné la chance d'effectuer un stage à l'étranger et pour m'avoir invité à participer à deux conférences internationales. J'ai été choyé durant ces deux années et c'est en grande partie grâce au professeur Guibault. Les expériences vécues dépassent de beaucoup le simple fait de travailler deux ans pour avoir un diplôme. Lors de mon stage en Suisse, j'ai travaillé dans un laboratoire d'avant-garde sous la direction du professeur Avellan et du doctorant Olivier Braun. Je remercie sincèrement le Pr. Avellan de m'avoir accepté dans son labo et de m'avoir guidé durant les six mois que j'y ai passés. Enfin, j'offre mes amicales salutations aux autres membres du laboratoire : Mohammed Farhat, Pierre Maruzedski, Cécile Munch, Ali Zobeiri, Christophe Nicolet et Alexandre Per-

rig. Durant ce stage, j'ai également eu la chance d'avoir un souper de Noël sur le lac Léman et de visiter une industrie oeuvrant dans l'hydraulique près de Neuchâtel.

Je ne peux nommer chaque aide reçue durant mes études, mais en voici quelques-unes dans le désordre. Philippe Ausoni, du laboratoire suisse, a pris les photos du tunnel de cavitation avec moi. Jean-Yves Billard, de l'École Navale de Brest en France, m'a donné des informations sur les essais réalisés avec le profil elliptique. Micheline Legault, la responsable des échanges étudiants à Montréal, m'a grandement aidé à remplir les formulaires pour le stage, même si j'étais six mois en retard dans les démarches. Luc Lalonde, responsable du réseau du département de génie informatique, m'a proposé de m'installer le WI-FI sur Linux après que je lui ai fait part du vol de mon laptop. Ovidiu Manole et Thi Vu, de General Electric, ont répondu à mes questions sur CFX. Chantal Pic, de la compagnie Invisu, m'a offert une licence gratuite de Vu pour la durée de mon stage en Suisse.

J'espère n'oublier personne. J'ai vécu des expériences exceptionnelles. Ce travail a été rendu possible grâce à chacun, chacune. Merci.

## RÉSUMÉ

Une procédure d'adaptation de maillage est développée pour capturer un tourbillon dans un calcul numérique en dynamique des fluides. L'estimateur d'erreur utilisé est une métrique issue du hessien d'une variable scalaire. Afin d'accélérer la convergence du processus adaptatif, un nouveau champ scalaire est introduit : une vorticité transportée. Cette quantité est calculée indépendamment des autres variables par le solveur ; elle n'a donc pas d'influence sur le résultat du calcul numérique. La somme de la vorticité originale et de la vorticité transportée est utilisée pour calculer le hessien. Cette méthode permet de raffiner le maillage dans la région tourbillonnaire sur une plus grande distance en aval du point d'origine du tourbillon et ainsi de mieux le capter. Afin de vérifier la validité de la méthode, un cas test sans surface portante est d'abord étudié. Un tourbillon théorique est modélisé dans un domaine tridimensionnel à section carrée. Les résultats obtenus avec des éléments hexaédriques et tétraédriques sont comparés. Par la suite, le cas avec la surface portante est abordé. Les profils de vitesses numériques sont comparés aux profils expérimentaux.

## ABSTRACT

A mesh adaptation procedure is presented to capture vortices in a numerical calculation. The error estimator of the adaptation scheme is based on the Hessian of a scalar field. To make convergence faster toward the analytic solution, a new scalar field is introduced : a transported vorticity. This field is computed as a separate equation in the solver, therefore having no influence on the flow computation. The sum of the original vorticity and the transported vorticity is used to calculate the Hessian. This method allows a better vortex capture farther downstream in the axial direction. To assess the quality of the proposed methodology, a simple test case without any lifting foil is first studied. An analytic vortex is set at the inlet of a rectangular cross-section tunnel and expands downstream. Results obtained with hexahedral elements are compared to results obtained with tetrahedral elements. In a second test case, the analytic vortex is replaced by a hydrofoil from which a tip vortex is created. Numerical velocity profiles are compared with experimental results.



## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	vi
ABSTRACT . . . . .	vii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	viii
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xii
LISTE DES FIGURES . . . . .	xiv
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . .	xix
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xxv
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE 1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE . . . . .	9
1.1 Phénomène physique . . . . .	9
1.1.1 Description générale de l'écoulement . . . . .	9
1.1.2 Modèles analytiques de tourbillon . . . . .	10
1.1.2.1 Tourbillon laminaire visqueux . . . . .	10
1.1.2.2 Tourbillon turbulent visqueux . . . . .	14
1.2 Le tourbillon numérique . . . . .	17
1.2.1 Modélisation de la turbulence . . . . .	19
1.2.1.1 Modèle $k - \varepsilon$ . . . . .	20
1.2.1.2 Modèle $k - \varepsilon$ cubique . . . . .	22
1.2.1.3 Modèles de Reynolds et Large Eddy Simulation (LES) . . . . .	23
1.2.2 Localisation de tourbillons numériques . . . . .	24

1.2.3	Adaptation . . . . .	26
1.2.3.1	Le gradient comme estimateur d'erreur . . . . .	29
1.2.3.2	Le hessien comme estimateur d'erreur . . . . .	31
1.2.3.3	Les méthodes mixtes . . . . .	32
1.2.3.4	Choix des variables d'adaptation . . . . .	33
1.2.4	Qualité des maillages obtenus . . . . .	33
1.2.4.1	Lissage lors de la construction de la métrique . . . . .	34
1.2.4.2	Lissage a posteriori de la métrique . . . . .	35
CHAPITRE 2 PRÉSENTATION DE LA DÉMARCHE . . . . .		37
2.1	Schéma global du cycle solveur-remailleur . . . . .	37
2.2	Fonctionnement du remailleur . . . . .	40
2.3	Théorie sur la métrique . . . . .	44
2.4	Construction de l'estimateur d'erreur . . . . .	47
2.4.1	Reconstruction du hessien . . . . .	47
2.4.2	Prise en compte du gradient . . . . .	50
2.5	Régularité des maillages . . . . .	52
2.5.1	Lissage pour régulariser les volumes élémentaires . . . . .	52
2.5.2	Lissage de la métrique : comparaison de trois méthodes . . . . .	54
2.5.3	Influence du critère de forme dans le remailleur . . . . .	57
2.6	Algorithme pour garder le nombre d'éléments constant . . . . .	59
2.7	Transport de la variable d'adaptation . . . . .	62
2.8	Critère de convergence du cycle solveur/mailleur . . . . .	64
CHAPITRE 3 PREMIER CAS TEST : SIMULATIONS SANS LE PROFIL		65
3.1	Présentation du cas test . . . . .	65
3.2	Analyse sans adaptation . . . . .	66
3.2.1	Étude de la condition limite en aval . . . . .	66
3.2.2	Étude de la forme du domaine . . . . .	67

3.2.3	Étude de l'influence du type d'éléments . . . . .	69
3.2.4	Influence du raffinement axial et transverse . . . . .	71
3.2.5	Viscosité numérique équivalente . . . . .	72
3.2.6	Écoulement turbulent . . . . .	75
3.2.6.1	Comparaison entre trois modèles de turbulence . . . . .	75
3.2.6.2	Modification du modèle $k - \varepsilon$ . . . . .	77
3.3	Adaptation . . . . .	80
3.3.1	Vorticité transportée . . . . .	81
3.3.2	Taux de déformation transporté et hélicité . . . . .	83
3.3.3	Calcul de la viscosité numérique . . . . .	85
3.3.3.1	Viscosité numérique basée sur $\bar{S} + \bar{\Omega}$ . . . . .	86
3.3.3.2	Viscosité numérique basée sur les pertes de puissance . . . . .	88
3.3.3.3	Comparaison entre les deux formulations . . . . .	91
3.3.4	Paramètres du solveur, de OORT et de Riemann . . . . .	93
3.4	Résultats . . . . .	96
3.4.1	Profils de vitesse . . . . .	96
3.4.2	Résultats de convergence . . . . .	100
3.4.2.1	Convergence du cycle solveur-remailleur . . . . .	101
3.4.2.2	Convergence en fonction du nombre de noeuds . . . . .	103
3.4.3	Temps de calculs . . . . .	104
3.4.4	Résultats : métrique prenant en compte le gradient. . . . .	107
3.5	Dégénérescence du tourbillon : explications . . . . .	108

## CHAPITRE 4 DEUXIÈME CAS TEST : SIMULATION AVEC UN PROFIL 111

4.1	Description du cas test . . . . .	111
4.2	Description de la géométrie . . . . .	113
4.3	Description du maillage . . . . .	117
4.4	Résultats sans adaptation . . . . .	120

4.4.1	Convergence du solveur . . . . .	120
4.4.2	Résultats numériques : cas sans adaptation . . . . .	125
4.5	Adaptation . . . . .	128
4.5.1	Méthodologie . . . . .	129
4.5.2	Variables d'adaptation . . . . .	131
4.5.3	Paramètres retenus . . . . .	132
4.5.4	Adaptation avec des tétraèdres . . . . .	134
4.5.5	Adaptation avec des hexaèdres . . . . .	141
4.5.5.1	Comparaison entre l'adaptation de OORT et CFX . . . . .	142
	CONCLUSION . . . . .	145
	RÉFÉRENCES . . . . .	155
	ANNEXES . . . . .	163

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1	Paramètres utilisés pour le tourbillon laminaire visqueux. . . .	12
Tableau 1.2	Lois logarithmiques. . . . .	16
Tableau 1.3	Modèles de turbulence potentiels pour le tourbillon. . . . .	20
Tableau 1.4	Critères de qualité à respecter pour le solveur <i>ANSYS-CFX</i> . . .	33
Tableau 2.1	Opérations dans <i>OORT</i> . . . . .	41
Tableau 2.2	Critères de qualité observés dans <i>ANSYS-CFX</i> . . . . .	49
Tableau 2.3	Prise en compte du gradient dans le calcul de la métrique . . .	51
Tableau 2.4	Lissage de métrique pour des maillages de tétraèdres. . . . .	55
Tableau 2.5	Lissage de métrique pour des maillages d'hexaèdres. . . . .	55
Tableau 3.1	Variation du moment angulaire. . . . .	69
Tableau 3.2	Rayon du tourbillon selon la production de turbulence . . . .	79
Tableau 3.3	Paramètres de l'équation de transport (2.14) . . . . .	82
Tableau 3.4	Différences entre les calculs du solveur et du post-processeur. .	90
Tableau 3.5	Effet de la turbulence sur le calcul de $\eta_{num}$ . . . . .	93
Tableau 3.6	Paramètres retenus dans le fichier de configuration de <i>OORT</i> . .	95
Tableau 3.7	Paramètres retenus pour le solveur : tétraèdres et hexaèdres. .	96
Tableau 3.8	Paramètres retenus lors du calcul des métriques. . . . .	96

Tableau 3.9	Tétraèdres . . . . .	102
Tableau 3.10	Hexaèdres . . . . .	102
Tableau 3.11	Temps de calcul globaux . . . . .	105
Tableau 3.12	Décomposition d'une itération de <i>OORT</i> . . . . .	106
Tableau 3.13	Opérations dans <i>OORT</i> : maillage de 70K noeuds. . . . .	107
Tableau 3.14	Influence du gradient. Maillages d'hexaèdres de 960K noeuds. . . . .	108
Tableau 4.1	Coefficients de portance et de traînée. . . . .	128
Tableau 4.2	Paramètres retenus lors du calcul des métriques. . . . .	134
Tableau 4.3	Paramètres du solveur pour le cas test avec profil . . . . .	134
Tableau 4.4	Convergence : maillages de tétraèdres. . . . .	137
Tableau 4.5	Évolution du nombre de noeuds et d'éléments dans le domaine éloigné. . . . .	137

## LISTE DES FIGURES

Figure 1	Deux exemples de cavitation . . . . .	2
Figure 2	Tourbillon marginal généré par un profil 3d . . . . .	3
Figure 3	Vue de la veine d'essai du tunnel de cavitation du LMH . . . . .	4
Figure 4	Vue de dessus de la cavitation de tourbillon marginal. . . . .	5
Figure 1.1	Vitesses dans le tourbillon laminaire visqueux . . . . .	12
Figure 1.2	Évolution des variables primaires dans le tourbillon . . . . .	13
Figure 1.3	Comparaison entre un tourbillon laminaire et turbulent . . . . .	15
Figure 1.4	Loi de paroi et loi du tourbillon. . . . .	16
Figure 1.5	Approche lagrangienne de résolution. . . . .	18
Figure 1.6	Localisation de tourbillon numérique . . . . .	26
Figure 1.7	Lissage de la métrique . . . . .	35
Figure 2.1	Schéma global du cycle solveur-remailleur . . . . .	37
Figure 2.2	Sous-étapes de l'étape 4 : calcul des métriques. . . . .	39
Figure 2.3	Entrées et sortie du logiciel <i>OORT</i> . . . . .	40
Figure 2.4	Exemples de techniques d'adaptation dans <i>OORT</i> . . . . .	41
Figure 2.5	Retournement d'arêtes dans <i>OORT</i> . . . . .	42
Figure 2.6	Retournement de faces dans <i>OORT</i> . . . . .	43

Figure 2.7	Méthode QF avec deux voisins . . . . .	48
Figure 2.8	Différentes méthodes de reconstruction du hessien . . . . .	49
Figure 2.9	Effet beigne . . . . .	50
Figure 2.10	Différences entre les méthodes basées sur le volume et les arêtes. . . . .	54
Figure 2.11	Critère de forme d'un tétraèdre. . . . .	58
Figure 2.12	Influence d'un critère de forme élevé. . . . .	58
Figure 2.13	Influence d'un critère de forme faible. . . . .	59
Figure 3.1	Domaine 3d et profil de vitesse spécifié en entrée. . . . .	66
Figure 3.2	Condition limite en aval. . . . .	67
Figure 3.3	Forme du domaine . . . . .	68
Figure 3.4	Étude de la forme du domaine. . . . .	69
Figure 3.5	Influence de la sorte d'éléments : maillages iniformes . . . . .	70
Figure 3.6	Influence de la sorte d'éléments : noeuds concentrés . . . . .	71
Figure 3.7	Influence de l'orientation des mailles du maillage . . . . .	72
Figure 3.8	Influence du raffinement axial et du raffinement transverse. . . . .	73
Figure 3.9	Calcul de $\eta_{num}$ à différentes sections du domaine. . . . .	73
Figure 3.10	Viscosité numérique équivalente . . . . .	74
Figure 3.11	Modèles de turbulence . . . . .	76



Figure 3.12	Production de turbulence et viscosité turbulente. . . . .	78
Figure 3.13	Localisation de la production de turbulence . . . . .	78
Figure 3.14	Tourbillon avec coeur tourbillonnaire moins turbulent . . . . .	80
Figure 3.15	Adaptation avec la vorticité et la vorticité totale . . . . .	81
Figure 3.16	Évolution de la vorticité dans la direction axiale (axe $y = z = 0$ ). . . . .	83
Figure 3.17	Évolution radiale des variables dans le tourbillon. . . . .	84
Figure 3.18	Traitement des frontières dans <i>ANSYS-CFX</i> . . . . .	89
Figure 3.19	Évaluation du paramètre $\eta_{num}$ par les deux méthodes. . . . .	91
Figure 3.20	Vitesse tangentielle : maillages de tétraèdres . . . . .	97
Figure 3.21	Vitesse tangentielle : maillages d'hexaèdres . . . . .	98
Figure 3.22	Métriques à l'entrée du domaine et à la sortie . . . . .	98
Figure 3.23	Vitesse tangentielle : maillages d'hexaèdres. . . . .	99
Figure 3.24	Maillages adaptés à la section d'entrée. . . . .	100
Figure 3.25	Convergence : maillages de tétraèdres. . . . .	101
Figure 3.26	Convergence : maillages d'hexaèdres. . . . .	101
Figure 3.27	Convergence en fonction du nombre de noeuds . . . . .	103
Figure 3.28	Dégénérescence du tourbillon . . . . .	104
Figure 3.29	Dégénérescence du tourbillon : coupe du maillage de tétraèdres. . . . .	105

Figure 4.1	Domaine de calcul avec le profil . . . . .	112
Figure 4.2	Distribution des points sur le profil NACA. . . . .	114
Figure 4.3	Les quatre blocs de l'extrado. . . . .	115
Figure 4.4	Surfaces décalées. . . . .	115
Figure 4.5	Géométries complète et simplifiée. . . . .	116
Figure 4.6	Vue globale d'un maillage d'hexaèdres. . . . .	119
Figure 4.7	Vues détaillées d'un maillage d'hexaèdres. . . . .	119
Figure 4.8	Résidus : modèles k- $\varepsilon$ RNG et SST. . . . .	121
Figure 4.9	Position des résidus maximaux. . . . .	122
Figure 4.10	Inconvénients des maillages anisotropes pour les volumes finis. . . . .	123
Figure 4.11	Convergence du solveur en fonction de $\Delta T$ . . . . .	124
Figure 4.12	Sections de référence . . . . .	126
Figure 4.13	Comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques . . . . .	126
Figure 4.14	Variables d'adaptation : domaine avec profil. . . . .	132
Figure 4.15	L'hélicité. . . . .	133
Figure 4.16	La variable vorticité multipliée avec l'hélicité. . . . .	133
Figure 4.17	Comparaison des variables d'adaptation. . . . .	135
Figure 4.18	Vitesses obtenues avec les maillages adaptés par <i>OORT</i> . . . . .	136

Figure 4.19	Maillages obtenus après l'adaptation avec <i>OORT</i> (itération 3). 138
Figure 4.20	Gros plan du maillage près de la couche limite. . . . . 139
Figure 4.21	Transport de la variable d'adaptation. . . . . 141
Figure 4.22	Adaptation avec la variable vorticité $\times$ hélicité. . . . . 142
Figure 4.23	Comparaison entre l'adaptation de <i>ANSYS-CFX</i> et d' <i>OORT</i> . 143
Figure 4.24	Comparaison : vitesses obtenues par <i>ANSYS-CFX</i> et <i>OORT</i> . . 144
Figure A.1	Forme en plan des profils NACA 16020 du LMH et de l'EN. . 163
Figure A.2	Comparaison entre le profil mesuré et l'équation analytique. . 164
Figure A.3	Gros plan : 20 mm. . . . . 165
Figure B.1	Décomposition en deux domaines. . . . . 166
Figure B.2	Profils de vitesse : 1 domaine vs 2 domaines. . . . . 166
Figure C.1	Répartition des noeuds dans la couche limite. . . . . 167
Figure E.1	Premier problème de retournement . . . . . 171
Figure E.2	Deuxième problème de retournement . . . . . 172

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

### Abréviations

ACC	Action concertée cavitation
BA	Bord d'attaque
BF	Bord de fuite
CFL	Nombre adimensionnel de Courant-Friedrichs-Lewy
CL	Couche limite
DNS	Direct numerical simulation
ELR	Edge length ratio
EN	École navale, Brest, France
EPFL	École Polytechnique Fédérale de Lausanne
EPM	École Polytechnique de Montréal
LES	Modèle de turbulence : Large eddy simulation
LMH	Laboratoire de machines hydrauliques de l'EPFL
LRR-IP	Modèle de turbulence de Launder, Reece & Rodi avec une production isotrope
MAGNU	Laboratoire de maillage et géométrie numérique de l'EPM
NACA	National advisory committee for aeronautics
NS	Navier-Stokes
OORT	Object-oriented remeshing toolkit
SSG	Modèle de turbulence : Speziale, Sarkar, Gatski
VER	Volume element ratio
SLF	Simple linear fitting
QF	Quadratic fitting

### Caractères latins

$a$	rayon du tourbillon		m
$A$	surface en plan de l'aile	$A = \frac{2b}{C_{\text{moy}}}$	$\text{m}^2$
$A_P$	constante du modèle $k - \varepsilon$	$A_P = \frac{1}{\kappa}$	-
$A_S$	constante du modèle $k - \varepsilon$	$A_S = \frac{1}{H} \frac{1}{\ln 10}$	-
$b$	demi-envergure de l'aile		m
$C$	corde du profil NACA		m
$C_1$	constante dans l'équation de transport		$\text{s}/\text{m}^2$
$C_2$	constante dans l'équation de transport		$\text{m}^2$
$C_{\varepsilon 1}$	constante du modèle $k - \varepsilon$	$C_{\varepsilon 1} = 1,44$	-
$C_{\varepsilon 2}$	constante du modèle $k - \varepsilon$	$C_{\varepsilon 2} = 1,92$	-
$C_{PL}$	constante pour la plaque plane	$C_{PL} = 5$	-
$C_S$	constante pour le tourbillon	$C_S = 1$	-
$C_\mu$	constante du modèle $k - \varepsilon$	$C_\mu = 0,09$	-
$d$	dimension de l'espace géométrique		-
$D$	diffusivité de la variable d'adaptation		$\text{kg}/\text{m s}$
$e$	épaisseur du profil NACA		m
$h$	longueur d'une arête d'un élément du maillage		m
$H$	constante de Hoffman	$H = 0,4673$	-
$H$	matrice hessienne d'une variable scalaire		-
$k$	énergie turbulente		$\text{m}^2/\text{s}^2$
$I_t$	intensité turbulente de l'écoulement	$I_t = \sqrt{u'^2}/\bar{U}$	-
$l_t$	longueur turbulente	$l_t = k^{3/2}/\varepsilon$	m
$L$	longueur de la veine d'essai du tunnel de cavitation		m
$\mathcal{M}$	métrique utilisée pour l'adaptation		$1/\text{m}^2$

$\vec{n}$	vecteur $\perp$ à la frontière du domaine	-
N	nombre de noeuds du maillage dans la CL	-
$p$	pression locale	N/m <sup>2</sup>
$p'$	pression fluctuante locale	N/m <sup>2</sup>
P	force de portance générée par le profil	N
$r$	rayon	m
S	senseur utilisé comme estimateur d'erreur	-
$\bar{S}$	tenseur du taux de déformation	$\bar{S} = \frac{1}{2} \left( \overline{\nabla \vec{U}} + \overline{\nabla \vec{U}}^T \right)$ 1/s
$t$	temps	s
T	force de traînée générée par le profil	N
$u, v, w$	vitesse dans les directions $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	m/s
$\vec{u}'$	vecteur des vitesses turbulentes	m/s
$\vec{U}$	vecteur vitesse	$\vec{U} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ m/s
$\bar{\vec{U}}$	vecteur de la vitesse moyenne	$\bar{\vec{U}} = \bar{u}\vec{i} + \bar{v}\vec{j} + \bar{w}\vec{k}$ m/s
$U_\tau$	vitesse de frottement à la paroi	$U_\tau = \left( \frac{\tau_w}{\rho} \right)^{1/2}$ m/s
$x, y, z$	coordonnées dans les directions $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	m
V	volume d'un élément de maillage	m <sup>3</sup>
$V_a$	vitesse axiale dans le tourbillon	m/s
$V_t$	vitesse tangentielle dans le tourbillon	m/s

### Caractères grecs

$\alpha$	angle d'incidence du profil	rad
$\beta$	ratio de taille maximum admissible	-
$\gamma$	critère de forme dans OORT	$\gamma = \frac{12(3V)^{2/3}}{(\sum_{i=1}^6 \ell_i)^2}$ -
$\Gamma$	circulation ou intensité du tourbillon	m <sup>2</sup> /s

$\delta$	épaisseur de la CL sur le profil	$\delta = \frac{0,37x}{Re_x^{1/5}}$	m
$\epsilon$	erreur d'interpolation	$\epsilon = \phi - \Pi_h \phi$	
$\varepsilon$	taux de dissipation de l'énergie turbulente		$\text{m}^2/\text{s}^3$
$\vec{\zeta}$	vecteur vorticité		1/s
$\eta$	viscosité dynamique du fluide		$\text{N s} / \text{m}^2$
$\theta$	angle entre deux faces d'un même élément		à
$\kappa$	constante de Von K�rm�n	$\kappa = 0,41$	-
$\lambda$	valeur propre d'une matrice		-
$\nu$	viscosité cinématique du fluide	$\nu = \eta/\rho$	$\text{m}^2/\text{s}$
$\xi$	coefficient de sensibilité du gradient		-
$\Pi_h$	opérateur d'interpolation linéaire		
$\rho$	densité du fluide		$\text{kg}/\text{m}^3$
$\phi$	variable d'adaptation		
$\sigma_k$	constante du modèle $k - \varepsilon$	$\sigma_k = 1,0$	-
$\sigma_\varepsilon$	constante du modèle $k - \varepsilon$	$\sigma_\varepsilon = 1,3$	-
$\bar{\tau}$	tenseur des contraintes turbulentes		Pa
$\varphi$	facteur de mise à l'échelle de la métrique		-
$\chi$	facteur multiplicatif du hessien		-
$\bar{\bar{\Omega}}$	tenseur du taux de rotation	$\bar{\bar{\Omega}} = \frac{1}{2} \left( \overline{\nabla \vec{U}} - \overline{\nabla \vec{U}}^\top \right)$	1/s
$\omega$	taux de dissipation spécifique	$\omega = \frac{\varepsilon}{k}$	1/s

### Indices

0	quantité à la section d'entrée
1	quantité max. pour une position axiale
a	dans la direction axiale

e	extrado
i	intrado
moy	moyenne
<i>eff</i>	valeur effective de la turbulence
max	quantité maximale
min	quantité minimale
<i>mol</i>	moléculaire
<i>num</i>	numérique
ec	écart-type
<i>t</i>	turbulent
t	dans la direction tangentielle
v	vapeur
$\omega$	paroi (wall) (par exemple, contrainte à la paroi)
$\infty$	loin en amont

### Caractéristiques adimensionnelles de l'écoulement

$\sigma$	nombre de cavitation	$\sigma = \frac{p_0 - p_V}{\frac{1}{2} \rho u_0^2}$
$C_D$	coefficient de traînée	$C_D = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho u_0^2 A}$
$C_L$	coefficient de portance	$C_L = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho u_0^2 A}$
$C_p$	coefficient de pression	$C_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \rho u_0^2}$
$\Gamma^+$	circulation adimensionnalisée	$\Gamma^+ = \frac{\Gamma}{\Gamma_1}$
$r^+$	distance du centre du tourbillon	$r^+ = \frac{r}{r_1}$
$Re$	nombre de Reynolds axial	$Re = \frac{u_0 a_0}{\nu}$
$Re_\Gamma$	nombre de Reynolds tangentiel	$Re_\Gamma = \frac{\Gamma_0}{\nu}$
$\Omega$	nombre de circulation	$\Omega = \frac{\Gamma_0}{a_0 u_0}$



$St$	nombre de Strouhal	$St = \frac{fL}{u_0}$
$u^+$	vitesse tangente au mur, adimensionnée	$u^+ = \frac{u_t}{U_\tau}$
$u_S^+$	vitesse adimensionnée pour le tourbillon	$u_S^+ = \frac{V_t}{V_{t_1}}$
$y^+$	distance de la paroi	$y^+ = \frac{U_\tau y}{\nu}$

## LISTE DES ANNEXES

ANNEXE A	PROFIL ELLIPTIQUE NACA 16020 . . . . .	163
ANNEXE B	DEUX DOMAINES DE CALCULS DANS <i>ANSYS-CFX</i> .	166
ANNEXE C	DISTRIBUTION DES NOEUDS DANS LA CL . . . . .	167
ANNEXE D	VARIABLES VORTICITÉ ET POSITION TOURBILLON.	169
ANNEXE E	RETOURNEMENT D'ARÊTES DANS <i>OORT</i> . . . . .	171

## INTRODUCTION

### Objectif principal du travail

L'objectif de ce travail est de mieux cerner numériquement la dépression qui se forme au milieu d'un tourbillon turbulent visqueux. Dans un écoulement liquide, lorsque la pression  $p$  descend en-dessous de la pression de vapeur saturée  $p_v$ , un changement de phase se produit localement à l'endroit où  $p < p_v$ . Le liquide se transforme alors en gaz. Ce phénomène, appelé cavitation, est entre autres observé dans diverses machines hydrauliques. Un objectif à long terme relié à ce travail est de capter le plus correctement possible l'apparition de la cavitation dans une machine hydraulique complète, i.e. avec plusieurs aubes. Ainsi, le présent travail est un point de départ pour bien comprendre le phénomène de la cavitation, même s'il ne sera pas question de cavitation dans ce mémoire. En effet, le traitement de l'écoulement bi-phasique nécessite une analyse plus poussée.

La figure 1(a) présente un cas de cavitation qui se développe à partir d'une hélice de bateau. L'hélice compte ici plusieurs pales. Un tourbillon est généré à l'extrémité de chacune des pales. L'implosion des bulles de gaz est un phénomène violent et si celle-ci se produit à proximité de parois, comme le gouvernail du bateau, des dommages sérieux peuvent en résulter. La figure 1(b) présente une torche de cavitation à la sortie du modèle réduit de la roue de la turbine de la centrale LG3 au Québec. Dans ce cas-ci, la torche peut, dans certains cas, frapper les parois du diffuseur et introduire une vibration de ce dernier. Dans ces deux cas, la cavitation est à éviter ou du moins à mieux contrôler.



(a) Cavitation de tourbillon marginal derrière une hélice de bateau. Photo : David Taylor Model Basin, Wikimedia Commons



(b) Torche cavitante à la sortie de la roue d'une turbine hydraulique. Photo IMHEF, Turbomachines Hydrauliques, Pierre Henry, 1992

Figure 1 Deux exemples de cavitation

### Motivation et mise en contexte

Afin de mieux comprendre la cavitation, plusieurs travaux ont été entrepris dans les années passées. En 1991, un regroupement de plusieurs centres de recherche a été formé dans ce but : **Action concertée cavitation (ACC)**. Des recherches expérimentales aussi bien que numériques ont été poursuivies. Dans la majorité des cas, les calculs numériques réalisés ne concordaient pas bien aux essais expérimentaux à cause d'une trop forte diffusion introduite « artificiellement » lors des calculs. Les deux principales causes de cette sur-estimation de la diffusion dans les calculs numériques, tel qu'identifié par l'ACC, sont les suivantes :

1. une discrétisation spatiale trop grossière ;
2. la modélisation de la turbulence.

Afin de simplifier l'étude du phénomène de cavitation, le cas simplifié où une seule pale est placée de façon immobile dans un tunnel de cavitation a été étudié en détail par l'ACC. Un écoulement de contournement apparaît à l'extrémité du profil 3d

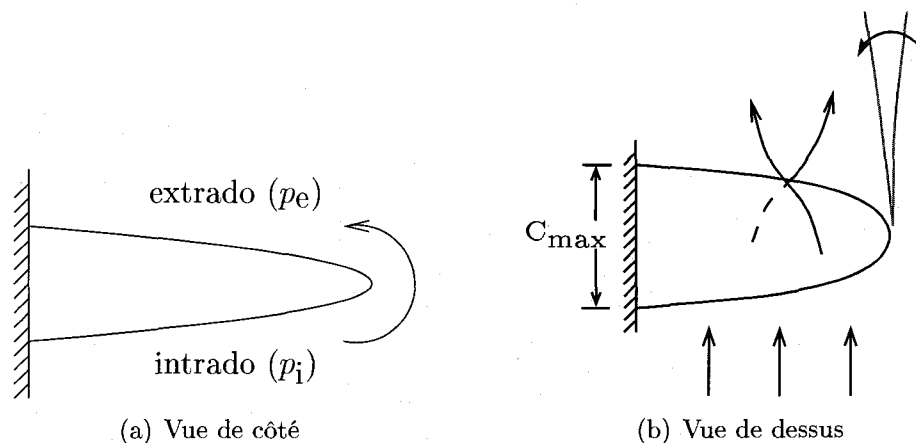
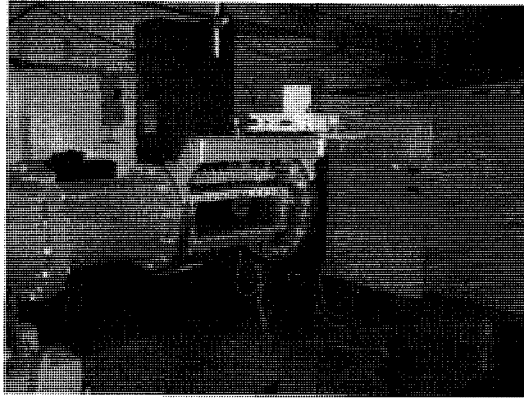


Figure 2 Représentation du tourbillon marginal à l'extrémité d'un profil 3d.

causé par la différence de pression entre l'extrado et l'intrado. La figure 2 schématise cet écoulement. À la figure 2(a), la vue de côté est montrée dans laquelle le fluide s'écoule perpendiculairement au plan de la feuille. L'enroulement du fluide se poursuit en aval du profil. À la figure 2(b), la vue de dessus est présentée. Le fluide s'écoule ici de bas en haut. La plus courte distance entre le bord d'attaque du profil et le bord de fuite, pour une section donnée, est appelée corde. Le tourbillon résultant, qui a son origine près de l'extrémité du profil, est appelé tourbillon marginal. Lors des expérimentations en laboratoire, il a été remarqué que la cavitation de tourbillon marginal s'étend en aval du profil sur une distance équivalente à plusieurs cordes, chacune de longueur  $C_{max}$ , tandis que lors des simulations numériques, celle-ci n'apparaît que pendant une courte distance, beaucoup plus courte que ce qui est observé expérimentalement. La diffusion « artificielle » introduite dans le calcul numérique est responsable de l'inexactitude de ce dernier.

À la figure 3, la veine d'essai du tunnel de cavitation du Laboratoire de machines hydrauliques (LMH) de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL)<sup>1</sup> est représentée. L'eau arrive par la droite et s'écoule vers la gauche. Le profil est placé

<sup>1</sup><http://lmhwww.epfl.ch/>



(a) Veine d'essai

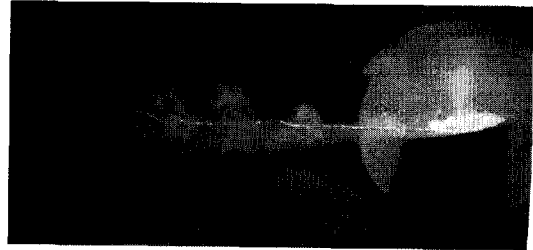
(b)  $u_0 = 13,5 \text{ m/s}$ ;  $\alpha = 10^\circ$ ;  $\sigma = 1,0$ 

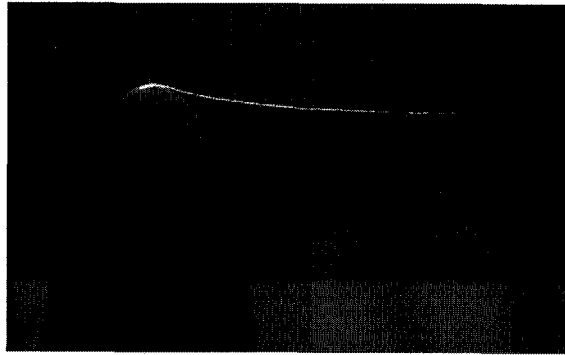
Figure 3 Vue rapprochée de la veine d'essai du tunnel de cavitation du LMH. Photos prises en mars 2007.

au début de la veine. Un panneau de plexiglass permet d'observer l'écoulement autour du profil. Sur la figure de droite, on voit clairement deux phénomènes : la cavitation de tourbillon marginal qui forme un filament plus ou moins régulier et l'écoulement de sillage derrière le profil. L'appareillage du tunnel de cavitation permet d'étudier différentes conditions d'opération. La pression à la section d'entrée de la veine d'essai  $p_0$  peut ainsi être diminuée selon les besoins de l'étude. Les capteurs de pression sont situés au début de la veine. On rapporte la pression sous la forme d'un nombre sans dimension  $\sigma$ . Ce coefficient adimensionnel est appelé nombre de cavitation et est défini par :

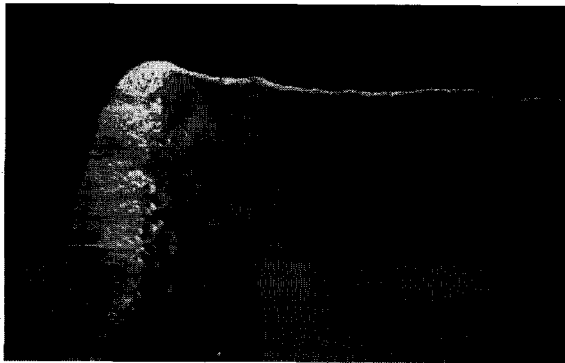
$$\sigma = \frac{p_0 - p_v}{\frac{1}{2}\rho u_0^2}.$$

La pression de vapeur saturée  $p_v$  de l'eau à  $20^\circ\text{C}$  est de 2340 Pa. La vitesse relevée à la section d'entrée de la veine est  $u_0$  et la densité du fluide  $\rho$ .

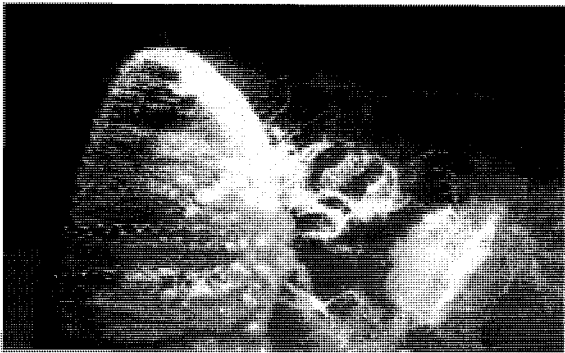
À la figure 4, la cavitation de tourbillon marginal est visible pour les trois conditions d'opération :  $\sigma = 1,5$ ,  $\sigma = 1,0$  et  $\sigma = 0,5$ . Plus  $\sigma$  est faible, plus la cavitation est importante. On remarque que le tourbillon marginal est influencé par l'écoulement



$$u_0 = 13,5 \text{ m/s}; \alpha = 10^\circ; \sigma = 1,5$$



$$u_0 = 13,5 \text{ m/s}; \alpha = 10^\circ; \sigma = 1,0$$



$$u_0 = 13,5 \text{ m/s}; \alpha = 10^\circ; \sigma = 0,5$$

Figure 4 Vue de dessus de l'écoulement et cavitation de tourbillon marginal. Photos prises en mars 2007.

dans le sillage du profil et ce d'autant plus que le nombre de cavitation est faible. Pour un nombre de cavitation  $\sigma \geq 2$ , il n'y a pas de cavitation. Le tourbillon marginal existe mais n'est pas visible à l'oeil nu. Dans de telles conditions, le tourbillon est très peu affecté par l'écoulement de sillage.

Dans ce travail, on s'intéresse à la première cause de diffusion excessive du calcul numérique : la discrétisation spatiale du domaine de calcul. Dans la suite de ce

travail, on appellera maillage cette discrétisation spatiale. L'étude réalisée porte sur un écoulement de tourbillon marginal avec  $\sigma \geq 2$  : la cavitation n'est pas étudiée. Le calcul numérique est effectué en utilisant une méthode d'adaptation pour raffiner le maillage dans le tourbillon et le rendre plus grossier loin de son centre.

On ne sait pas d'avance où se situe le tourbillon marginal lorsque l'on fait la simulation numérique. On ne peut donc pas mailler plus finement à cet endroit a priori. Une solution pour augmenter la précision de la solution consiste à mailler finement le domaine sur une large zone et à espérer que le tourbillon se trouve dans cette zone. Une autre approche serait d'adapter le maillage a posteriori, i.e. se baser sur la solution d'un calcul numérique pour construire un « meilleur » maillage. C'est cette dernière approche que nous proposons d'explorer ici, en nous inspirant, entre autres, des méthodes d'adaptation développées au laboratoire MAGNU<sup>2</sup> de l'École Polytechnique de Montréal (EPM).

L'écoulement autour d'un profil a fait l'objet d'études expérimentales au LMH et à l'École navale de Brest (EN) (Pichon (1995), Dupont *et al.* (1993), Dupont et Cerrutti (1992), Fruman *et al.* (1997)). Dans ces études, un profil de section NACA 16020, de corde maximale (corde à l'emplanture)  $C_{\max} = 80$  mm et d'envergure  $b = 120$  mm est utilisé. Les détails de la géométrie du profil sont donnés à l'annexe A. Les essais ont été réalisés il y a 15 ans. Les calculs de portance et de traînée ont été effectués au LMH avec un profil homothétiquement semblable au profil utilisé à l'EN, mais 25% plus petit pour tenir compte des dimensions différentes du tunnel de cavitation de l'EN. Les profils de vitesse ont été obtenus à l'EN. La vitesse de l'écoulement amont est  $u_0 = 13,5$  m/s et l'incidence du profil est  $\alpha = 10^\circ$ , soit les mêmes conditions d'opération que ce qui est présenté à la figure 4, mais avec une pression plus élevée.

---

<sup>2</sup>Laboratoire de maillage et géométrie numérique. <http://wwz.polymtl.ca/grmiaio/magnu/>



## Objectifs spécifiques

La méthodologie numérique proposée sera ainsi évaluée en fonction de son habileté à rapprocher le plus possible les résultats numériques des résultats expérimentaux présentés dans Pichon (1995) à la p.19. Pour y arriver, une variable d'adaptation adéquate sera déterminée, la taille et la « qualité » des maillages seront contrôlées et le meilleur modèle de turbulence pouvant être couplé à l'algorithme adaptatif sera également déterminé. La prise en compte de la turbulence de l'eau est importante dans le calcul numérique du tourbillon marginal. La transition laminaire/turbulente sur une plaque plane se situe à  $Re_x = 5 \times 10^5$  selon Munson *et al.* (1998), où la longueur caractéristique formant  $Re$  est la distance entre le début de la plaque et une position en aval  $x$  donnée. Pour de l'eau s'écoulant à 13,5 m/s, la transition se produit à 41,5 mm du début de la plaque. Sachant que la corde du profil est de 80 mm, on peut raisonnablement penser que l'écoulement est turbulent sur une partie de la corde.

Les travaux effectués dans les années 90 ne disposaient pas des moyens informatiques et de modélisation actuels. Depuis ce temps, de nouveaux modèles de turbulence ont vu le jour et les méthodes d'adaptation de maillages sur lesquels les solutions sont calculées ont beaucoup évolué. Dans ce mémoire, l'accent est mis sur le processus d'adaptation plutôt que sur le solveur. Les calculs numériques sont largement répandus dans l'industrie des turbomachines et la plupart sont réalisés avec des codes commerciaux comme *ANSYS-CFX*, *Fluent* et *NUMECA*. On propose donc de coupler un de ces codes à un algorithme d'adaptation afin d'améliorer les résultats numériques. Le solveur choisi est le code de volumes finis *ANSYS-CFX*. Il a été retenu car le principal partenaire industriel travaillant avec le groupe MAGNU l'utilise, de même que le LMH. De plus, le choix de ce solveur est justifié par la technique de résolution matricielle « multigrille ». Cette technique permet de grands

pas de temps et Zhong *et al.* (2007) la recommande lorsque la convection dans le sillage est de l'ordre de grandeur de l'écoulement amont comme c'est le cas ici. À l'opposé, le cas du tourbillon marginal se développant à l'extrémité de la pale d'un hélicoptère n'est pas traité de façon optimale par un solveur multigrille selon Zhong *et al.* (2007), car la vitesse axiale dans le tourbillon est très faible comparativement à la vitesse de la pale de sorte que le tourbillon prend plus de temps à se former.

Le chapitre 1 dresse un résumé de l'état des connaissances sur le tourbillon marginal. Le chapitre 2 présente la méthodologie retenue dans ce travail. Le chapitre 3 décrit un cas test sans profil. Ce cas test simplifié est un préambule au cas plus complexe rencontré avec le profil et permet de développer et tester les outils mis de l'avant au chapitre 2. Les résultats numériques du chapitre 3 seront comparés aux modèles analytiques de tourbillon décrits au chapitre 1. Le dernier chapitre présente les résultats obtenus pour le cas test avec le profil.

## CHAPITRE 1

### REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Un résumé des recherches effectuées sur le tourbillon marginal durant les dernières années est présenté dans les sections suivantes. Une description générale de l'écoulement physique est d'abord présentée. Des modèles analytiques de tourbillons laminaire et turbulent sont discutés. Par la suite, les aspects reliés aux calculs numériques sont traités. En particulier, il est question de la localisation de tourbillons numériques, de l'adaptation de maillage et de la modélisation de la turbulence.

#### 1.1 Phénomène physique

##### 1.1.1 Description générale de l'écoulement autour d'un profil 3d elliptique

En 1992 et plus récemment en 2002, Arndt (2002) a présenté une revue de l'état de l'art en ce qui a trait au tourbillon marginal. On y apprend notamment que le tourbillon a son rayon minimal à une légère distance en aval de l'extrémité du profil. Par la suite, son rayon augmente constamment jusqu'à être complètement diffusé dans l'écoulement principal. Le rayon initial du tourbillon semble être relié de près à l'épaisseur de la couche limite (CL) près du bord de fuite, à l'extrémité du profil (McCormick (1954), Franc, J.P. *et al.* (1995)). En effet, il est généralement admis que c'est le fluide dans la couche limite qui forme le tourbillon marginal. Des relations mathématiques basées sur des essais expérimentaux reliant le diamètre du coeur tourbillonnaire et la corde du profil  $C_{max}$  sont données dans Franc, J.P. *et al.* (1995).

Selon le théorème d’Helmholtz<sup>1</sup>, un vortex laminaire non-visqueux ne peut se terminer que sur lui-même, s’étendre à l’infini ou se terminer sur une paroi solide. Dans un cas réel, il y a toujours un peu de viscosité, due à la turbulence par exemple. Cette viscosité diffuse le tourbillon, de sorte qu’à l’infini il est complètement mélangé dans l’écoulement environnant. Néanmoins, même dans le cas turbulent, Deniset (1996) a remarqué qu’il s’étire sur plusieurs dizaines de cordes en aval de la pale.

À la figure 4 de l’introduction, deux phénomènes se côtoient : la cavitation de tourbillon marginal et la cavitation par poche. L’écoulement derrière la pale est principalement turbulent, la vorticité y étant assez faible, tandis que l’écoulement dans le tourbillon marginal est principalement tourbillonnant. En effet, selon Deniset (1996), la turbulence est beaucoup plus faible dans le tourbillon marginal que ce qui est observé derrière la pale. Par contre, la vorticité y est plus élevée. Lorsque l’incidence du profil par rapport à l’écoulement amont n’est pas trop grande, le tourbillon marginal se comporte de façon stationnaire (Arndt (2002), Boulon et Chahine (1997)).

### **1.1.2 Modèles analytiques de tourbillon**

Cette section traite des tourbillons analytiques laminaires et turbulents. Un mouvement turbulent se distingue d’un mouvement laminaire par la présence de fluctuations spatiales et temporelles des propriétés du fluide.

#### **1.1.2.1 Tourbillon laminaire visqueux**

Il existe différents modèles analytiques du tourbillon laminaire visqueux. Pour la vitesse tangentielle, le plus simple est le modèle de Rankine. Dans ce modèle, le coeur

---

<sup>1</sup>Helmholtz a publié son théorème en 1858 et on le retrouve aujourd’hui dans tout bon livre traitant de la mécanique des fluides, notamment dans Saffman (1995).

du tourbillon est modélisé par un bloc solide en rotation et l'extérieur du tourbillon est modélisé par un vortex libre, i.e. une zone potentielle. Une discontinuité existe à la jonction entre les deux zones, i.e. la courbe du profil de vitesse est de continuité  $C_0$ . Au début du siècle, Oseen et Lamb (Lamb (1932)) ont proposé un modèle sans discontinuité pour la vitesse tangentielle à partir des équations de Navier-Stokes (NS) simplifiées et ont obtenu

$$V_t = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right). \quad (1.1)$$

L'équation (1.1) donne la vitesse tangentielle pour un tourbillon laminaire visqueux 2d en fonction du temps. La circulation totale est identifiée par  $\Gamma_0$  et la viscosité cinématique du fluide par  $\nu$ . On peut transformer cette représentation 2d en représentation 3d en remplaçant le temps  $t$  par  $\frac{x}{u_0}$  tel que suggéré par Batchelor (1964) pour obtenir

$$V_t = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \left(1 - e^{-\frac{u_0 r^2}{4\nu x}}\right). \quad (1.2)$$

Un modèle de tourbillon combinant une vitesse tangentielle et une vitesse axiale est dû à Batchelor (1964). Dans ce modèle, la vitesse axiale varie en fonction de la position radiale et du temps. Il n'y a pas de vitesse radiale. La modélisation de la vitesse axiale retenue dans ce travail est celle utilisée par Faler et Leibovich (1977) suivant une régression de leurs données expérimentales et s'inspire du modèle de Batchelor :

$$V_a = u_0 + \frac{u_0}{(a/a_0)^2} e^{-(r/a)^2}; \quad (1.3)$$

$$a = a \left(\frac{x}{u_0}\right) = \left(a_0^2 + \frac{4\nu \Delta x}{u_0}\right)^{1/2}, \quad (1.4)$$

où  $a$  est le rayon du tourbillon qui varie en fonction de la position axiale  $x$ . Le rayon initial est noté  $a_0$ . L'indice 0 marque la référence aux dimensions à  $x = 0$ . La différence entre deux positions axiales est notée  $\Delta x$ .

La figure 1.1 présente les graphiques des vitesses tangentielle et axiale suivant le rayon d'un tourbillon laminaire analytique selon les équations (1.2) et (1.3). Trois positions axiales sont illustrées. Les paramètres ont été fixés afin d'obtenir un tourbillon qui ressemble le plus possible au tourbillon expérimental observé par Deniset (1996). Le fluide est de l'eau. Les paramètres sont résumés au tableau 1.1. On ob-

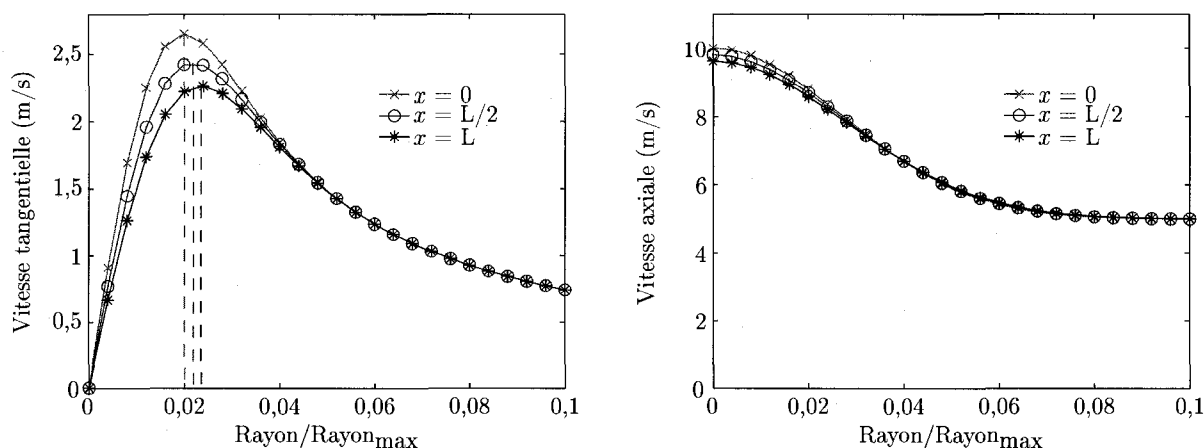


Figure 1.1 Vitesses tangentielle et axiale dans le tourbillon laminaire visqueux :  $L = 0,75$  m ;  $\text{Rayon}_{\text{max}} = 0,075$  m.

Tableau 1.1 Paramètres utilisés pour le tourbillon laminaire visqueux.

Paramètres	Valeurs numériques	unités
$\Gamma_0$	0,035	$\text{m}^2/\text{s}$
$u_0$	5	$\text{m}/\text{s}$
$p_0$	0	Pa
$\rho$	1000	$\text{kg}/\text{m}^3$
$\nu$	$1,12 \times 10^{-6}$	$\text{m}^2/\text{s}$

serve à la figure 1.1 que la vitesse tangentielle maximale décroît avec la distance axiale et que le rayon correspondant à cette vitesse maximale augmente avec la distance axiale. La viscosité est responsable de ce phénomène. Quant à la vitesse axiale, elle est plus élevée dans le tourbillon et décroît à mesure que l'on s'éloigne du centre pour rejoindre la valeur spécifiée de 5 m/s.

L'équation de NS en coordonnées cylindriques selon la direction radiale est donnée,

après simplification, par

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{V_t^2}{r} \geq 0. \quad (1.5)$$

Étant donné que le membre de droite est toujours positif, la pression dans le tourbillon augmente jusqu'à atteindre la pression dans l'écoulement principal. Pour cette raison, il est important de bien cerner le tourbillon marginal si l'on veut étudier la cavitation, car la pression la plus faible se trouve en son centre.

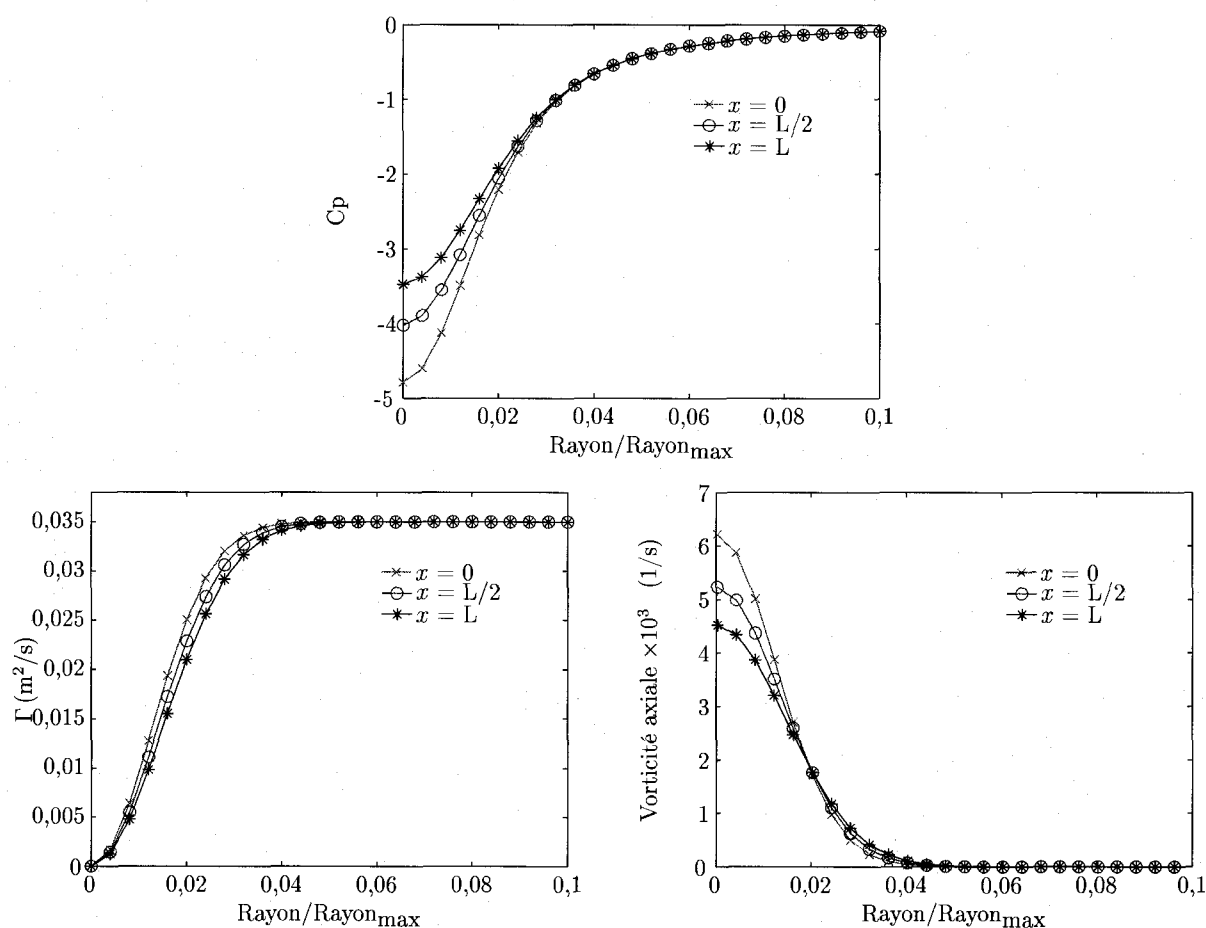


Figure 1.2 Évolution de la pression, de la circulation et de la vorticité dans un tourbillon laminaire visqueux :  $L = 0,75$  m ;  $\text{Rayon}_{\text{max}} = 0,075$  m.

La figure 1.2 présente l'évolution de la pression, rapportée sous la forme du coefficient de pression  $C_p$ , suivant le rayon et la distance axiale. Le coefficient de pression est

défini par

$$C_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2}\rho u_0^2}.$$

On voit que la pression dans le coeur augmente avec une augmentation de la distance axiale  $x$ . Ceci est en accord avec la diminution de la vitesse axiale observée à la figure 1.1 : si la pression augmente, la vitesse doit diminuer afin de conserver une énergie totale constante. Les autres variables présentées à la figure 1.2, soit la circulation  $\Gamma$  et la vorticité, sont calculées à partir de la vitesse tangentielle donnée à l'équation (1.2). La circulation est bien constante et égale à la valeur spécifiée, soit  $0,035 \text{ m}^2/\text{s}$ , pour toute distance  $x$  si l'on considère un circuit qui englobe complètement le tourbillon. La vorticité maximale est située dans le coeur tourbillonnaire.

### 1.1.2.2 Tourbillon turbulent visqueux

Un tourbillon turbulent se diffuse plus rapidement qu'un tourbillon laminaire. En effet, selon Hoffmann et Joubert (1963) le rayon d'un tourbillon laminaire visqueux  $a$  augmente selon  $\sqrt{x}$ ,

$$\underbrace{a \propto \sqrt{x}}_{\text{laminaire}},$$

tandis que dans le cas turbulent, c'est plutôt selon  $x$ ,

$$\underbrace{a \propto x}_{\text{turbulent}}.$$

La résolution des équations de NS dans le cas d'un tourbillon turbulent est beaucoup plus ardue que dans le cas laminaire. Une approximation empirique a été proposée par Squire (1954) dans laquelle la viscosité moléculaire de l'équation (1.2) est remplacée par une viscosité effective  $\nu_{eff}$ . La valeur du paramètre  $\nu_{eff}$  est déterminée expérimentalement. Govindaraju et Saffman (1971) présentent les résultats de six études ayant déterminé ce paramètre. Des données expérimentales sont également disponibles dans Iversen (1974). Une dépendance de  $\nu_{eff}$  envers le coefficient adimen-



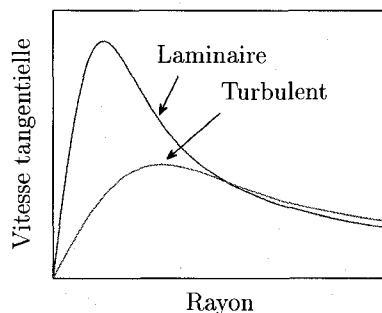


Figure 1.3 Comparaison entre un tourbillon laminaire et turbulent

sionnel  $\Gamma_o/\nu$  est observée. Cette approche permet d'estimer la vitesse tangentielle maximale, mais ne permet pas une bonne estimation pour tout rayon  $r$ . La figure 1.3 compare qualitativement un tourbillon laminaire et un tourbillon turbulent. On y voit que la vitesse tangentielle maximale atteinte par un tourbillon turbulent est inférieure à la vitesse maximale atteinte par un tourbillon laminaire. De plus, la décroissance loin du centre est moins importante. Lorsque l'on change seulement la valeur de la viscosité dans l'équation 1.2, on obtient une courbe similaire à la courbe laminaire plutôt que la vraie représentation de la courbe turbulente. Toutefois, dans la région de la vitesse tangentielle maximale, la relation est assez près de la réalité.

Des travaux plus poussés ont été entrepris par Govindaraju et Saffman (1971) et Saffman (1995) pour caractériser analytiquement un tourbillon turbulent. Dans ces travaux, il est notamment question d'un surdépassement (« overshoot ») de la circulation. Mentionnons également les travaux de Hoffmann et Joubert (1963) dans lesquels une relation semblable à la loi de paroi pour une couche limite sur une plaque plane a été trouvée, mais appliquée aux tourbillons. La figure 1.4 détaille les représentations de la plaque plane et du tourbillon turbulent. La description de la plaque plane provient du livre écrit par Schlichting et Gersten (2000). Ainsi, dans les deux cas, il y a une région logarithmique, i.e. une région où une propriété varie selon une équation logarithmique. Pour le tourbillon, c'est la circulation adimensionnée qui varie selon une loi logarithmique tandis que pour la plaque plane, c'est

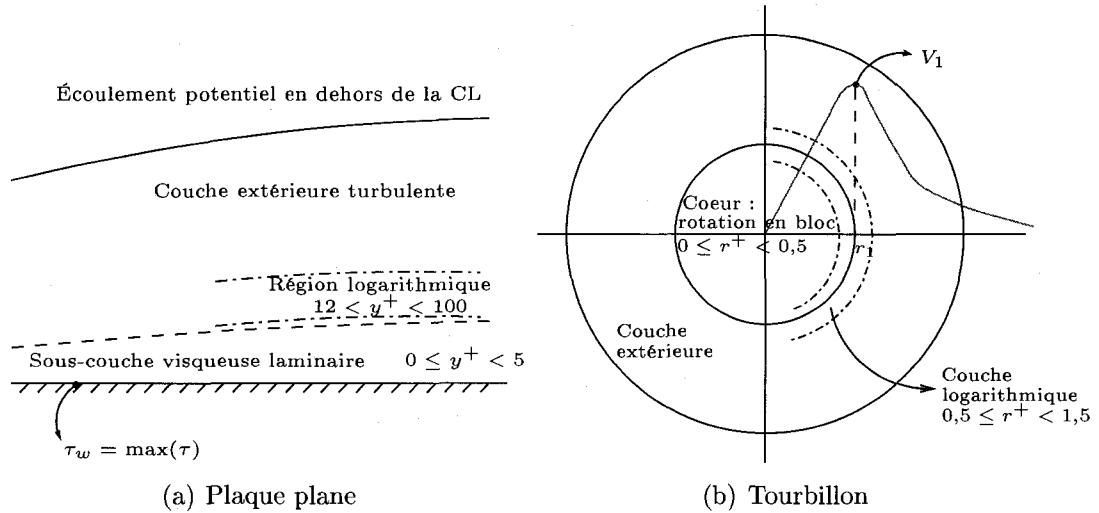


Figure 1.4 Loi de paroi et loi du tourbillon.

plutôt la vitesse adimensionalisée. Une autre différence entre ces deux écoulements concerne la contrainte. La contrainte maximale observée sur la plaque plane est située à  $y^+ = 0$  tandis que pour le tourbillon, la contrainte est nulle à  $r^+ = 0$ . Le tableau 1.2 détaille les relations logarithmiques pour les deux situations ainsi que les différents termes de celles-ci. La plage de validité de chaque relation est aussi précisée. Dans la formulation logarithmique du tourbillon,  $V_1$  est la vitesse tangen-

Tableau 1.2 Équations valides dans les régions logarithmiques de la plaque plane et du tourbillon turbulent.

Plaque plane	Tourbillon
$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C_{PL}$	$\Gamma^+ = \frac{1}{H} \log_{10} r^+ + C_S$
$\kappa = 0,41, C_{PL} = 5$	$\frac{1}{H} = 2,14, C_S = 1$
$y^+ = \frac{y U_\tau}{\nu}$	$r^+ = r/r_1$
$u^+ = u_t/U_\tau$	$\Gamma^+ = \Gamma/\Gamma_1$
$U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$	
$12 < y^+ < 100$	$0,5 \leq r^+ < 1,5$

tielle maximale pour une position axiale donnée et  $r_1$  est le rayon correspondant à cette vitesse maximale. La circulation obtenue à  $r_1$  est notée  $\Gamma_1$ .

## 1.2 Le tourbillon numérique

Si l'on s'intéresse aux dommages causés par un écoulement cavitant fortement tourbillonnant, on doit tenir compte de la compressibilité et d'une variation de température tel que mentionné par Inanç (2002). En effet, c'est lors de l'implosion des bulles cavitantes que l'on observe ces effets. Dans cette étude, il n'y aura pas de cavitation. La température et la densité seront donc considérées constantes. Ainsi, l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (1.6)$$

et les équations de NS

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{U} \otimes \vec{U}) = \vec{\nabla} \cdot \left( -\frac{p}{\rho} \vec{I} + \nu \left( \overline{\nabla \vec{U}} + \overline{\nabla \vec{U}}^T \right) \right) \quad (1.7)$$

sont résolues. De plus, la turbulence est généralement traitée par l'ajout d'équations supplémentaires. Ce point sera vu à la section 1.2.1.

Lors de la résolution numérique de ces équations, trois facteurs responsables de la diffusion numérique du tourbillon ont été identifiés par Deniset (1996) :

1. la condition limite en aval, imposée à la sortie du domaine de calcul ;
2. le maillage trop grossier ;
3. la modélisation de la turbulence.

Les deux derniers points seront développés dans les paragraphes suivants. En ce qui concerne la condition limite en aval, celle-ci ne pose plus de problème. Dans les années 90, une pression constante en sortie était imposée. Cela forçait le fluide à atteindre cette pression et causait une diffusion artificielle du tourbillon. Afin de diminuer cet effet, un domaine de calcul s'étendant très loin en aval de l'obstacle était nécessaire. Aujourd'hui, par contre, les logiciels commerciaux, et en particulier

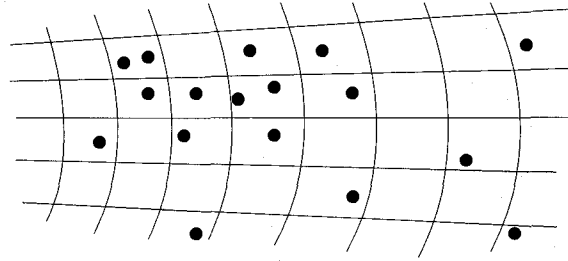


Figure 1.5 Approche lagrangienne pour la résolution de l'écoulement tourbillonnant.

*ANSYS-CFX*, permettent d'imposer une condition de pression moyenne en sortie et d'ainsi éliminer cette source de diffusion artificielle. Cela sera validé au chapitre 3.

Notez qu'il existe aussi des méthodes de résolution des équations de NS n'utilisant pas de maillage, mais qui utilisent plutôt une approche lagrangienne. Entrant dans cette catégorie, on retrouve la méthode présentée par Barba *et al.* (2005) pour la capture de tourbillon. Dans cette approche, l'équation de transport de vorticité est r solv e plutôt que les équations de NS. La pression n'apparaît donc pas dans la formulation mathématique pour un écoulement incompressible. Pour retrouver le champ de vitesse, on intègre la vorticité couplée à une fonction de *Green*. Des particules sont convectées par le fluide et se répandent aux endroits de forte vorticité, tel qu'illustré à la figure 1.5. Pour éviter une trop forte concentration de particules, il faut régulièrement interpoler la circulation aux noeuds d'un *stencil* régulier. La viscosité est prise en compte en faisant varier la vorticité des particules. Cette méthode a l'avantage de ne pas introduire d'erreur reliée au maillage et de ne pas avoir de limitation concernant le paramètre de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)<sup>2</sup>. Toutefois, la façon d'interpoler la circulation aux noeuds du stencil joue un grand rôle sur la diffusion de la solution. Cette approche ne sera pas davantage traitée ici.

<sup>2</sup>Ce paramètre est expliqué à la section 1.2.1.3.

### 1.2.1 Modélisation de la turbulence

Une approche pour la modélisation des écoulements turbulents consiste à ré-écrire les variables  $\vec{U}$  et  $p$  comme étant la somme d'une quantité moyenne et d'une quantité fluctuante :

$$\vec{U} = \bar{\vec{U}} + \vec{u}' \quad p = \bar{p} + p'$$

Les équations de continuité (1.6) et de quantité de mouvement (1.7) sont reformulées avec ces nouvelles définitions de sorte qu'on les résoud maintenant pour les quantités moyennes. Différents modèles ont été élaborés au fil des ans selon le traitement appliqué aux termes turbulents. Quatre modèles seront décrits dans les paragraphes suivants :  $k - \varepsilon$ ,  $k - \varepsilon$  cubique, le modèle de type « Reynolds stress » développé par Speziale, Sarkar et Gatski (SSG) et le modèle « large eddy simulation » (LES). Ces modèles utilisent tous des équations supplémentaires afin de représenter la turbulence. Le tableau 1.3 dresse un portrait de ces modèles, allant du plus simple au plus compliqué. D'autres modèles de turbulence existent mais ne seront pas décrits dans les paragraphes suivants. Entre autres, il est d'usage courant d'utiliser des modèles  $k - \varepsilon$  RNG,  $k - \omega$ , SST<sup>3</sup> et LRR-IP<sup>4</sup>. Pour plus d'informations sur ces modèles, consulter ANSYS (2005). Résoudre directement les équations de NS comme le fait la « direct numerical simulation » (DNS) en tenant compte des petites échelles requises pour les mouvements turbulents est possible mais extrêmement exigeant en terme de ressources de calcul.

<sup>3</sup>SST est l'acronyme de shear stress transport. Ce modèle est basé sur le modèle  $k - \omega$  mais incorpore des éléments du modèle  $k - \varepsilon$ . La distance à la paroi du premier noeud est calculée et si le noeud est trop éloigné de celle-ci, une loi de paroi est utilisée.

<sup>4</sup>LRR-IP est un acronyme pour le nom de ses inventeurs, Launder, Reece et Rodi et isotropisation of production. C'est un modèle « Reynolds stress ».

Tableau 1.3 Modèles de turbulence potentiels pour le tourbillon.

Modèles	Moyennage	Nb. équations	Avantages	Désavantages
$k - \varepsilon$	En temps (hypothèse de Boussinesq)	2	Simple, rapide	Mauvais en présence d'un gradient de pression adverse. Viscosité turbulente surestimée dans le tourbillon.
$k - \varepsilon$ cubique	En temps (les contraintes turbulentes hybrides sont prises en compte)	2	Modèle développé spécifiquement pour le tourbillon.	Pas démontré que c'est meilleur que $k - \varepsilon$ dans la CL. Encore en développement.
SSG	En temps (transport des contraintes de Reynolds)	6 + 1	Bonne résolution dans la CL et pour les tourbillons.	Temps de calcul élevé. Résolution en instationnaire.
LES	En espace	12 + 1	Bonne résolution dans la CL et pour les tourbillons.	Temps de calcul très élevé. Résolution en instationnaire.

### 1.2.1.1 Modèle $k - \varepsilon$

Dans le modèle  $k - \varepsilon$ , chaque terme des équations de NS est moyenné en temps et l'hypothèse de Boussinesq

$$\overline{-\rho \vec{u}' \otimes \vec{u}'} \propto \eta_t \bar{\bar{\tau}} - \frac{2}{3} \rho k \bar{\bar{I}} \quad (1.8)$$

est utilisée pour approximer les contraintes de Reynolds et fermer le système d'équations. Les termes de vitesses fluctuantes sont assimilés à des contraintes turbulentes et sont proportionnels à la viscosité turbulente  $\eta_t$ , nouvelle variable introduite par Boussinesq. Elle-même provient du calcul de deux nouvelles quantités : l'énergie turbulente  $k$  et le taux de dissipation de cette énergie  $\varepsilon$  :

$$\eta_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}; \quad (1.9)$$

$$k = \frac{1}{2} \overline{\vec{u}' \cdot \vec{u}'}. \quad (1.10)$$

Une équation pour  $k$ ,

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{U}k) = \vec{\nabla} \cdot \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \vec{\nabla} k \right] + P_k - \varepsilon \quad (1.11)$$

et une équation pour  $\varepsilon$ ,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{U} \varepsilon) = \vec{\nabla} \cdot \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \vec{\nabla} \varepsilon \right] + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad (1.12)$$

sont requises. Dans celles-ci,  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\varepsilon$ ,  $C_{\varepsilon 1}$ ,  $C_{\varepsilon 2}$  et  $C_\mu$  sont des constantes. Le terme de production d'énergie turbulente  $P_k$  est donné par

$$P_k = \nu_t \overline{\nabla \vec{U}} : \left( \overline{\nabla \vec{U}} + \overline{\nabla \vec{U}}^\top \right). \quad (1.13)$$

Ce modèle est isotrope, car seules les contraintes de Reynolds sur la diagonale du tenseur  $\bar{\tau}$  sont considérées. On ne peut donc pas bien résoudre un écoulement fortement anisotrope, tel qu'un tourbillon, avec ce modèle. Une viscosité turbulente beaucoup plus élevée qu'en réalité est obtenue et cela peut conduire, dans certains cas, à l'élimination d'effets instationnaires lors de simulations en régime transitoire, tel qu'observé par Bernsten, G.S. *et al.* (2001) et Coutier-Delgosha *et al.* (2003).

L'avantage du modèle  $k - \varepsilon$  est relié au traitement de la condition limite à la paroi. Il n'est pas nécessaire, bien que théoriquement possible, de discrétiser la couche limite jusqu'à la paroi lorsqu'une condition de non-glissement  $\vec{U}_{wall} = \vec{0}$  est appliquée à celle-ci. Calculer l'écoulement jusqu'à la paroi requerrait un premier noeud positionné à une distance  $y^+$  de 0,2. À l'opposé, lorsqu'une loi de paroi comme celle donnée au tableau 1.2 pour la plaque plane est utilisé pour la condition limite, un maillage plus grossier près de la paroi est permis, car le premier noeud doit se situer dans la région logarithmique. Dans le solveur *ANSYS-CFX*, c'est cette dernière formulation qui est employée (ANSYS (2005)).

Il est alors possible d'imaginer une « loi de paroi modifiée » qui tiendrait compte à

la fois de la paroi et du tourbillon,

$$u^+ = u_P^+ + \alpha(u_S^+ - u_P^+). \quad (1.14)$$

Cette équation contient un facteur  $\alpha$  qui module la loi selon que l'on se trouve près d'une paroi ou d'un tourbillon. Si  $\alpha$  vaut 0, on est près d'une paroi solide. Si  $\alpha$  vaut 1, on est près d'un tourbillon et une valeur entre les deux indiquerait une position intermédiaire. Pour implémenter cette formulation dans un solveur, on pourrait notamment ré-écrire l'équation (1.14) comme

$$u^+ = A_P \ln y^+ + \left\{ C_{PL} + \alpha \left[ ((r^+)^{-1} A_S \ln r^+ + C_S) - (A_P \ln y^+ + C_{PL}) \right] \right\} \quad (1.15)$$

où

$$\underbrace{u_P^+ = A_P \ln y^+ + C_{PL}}_{\text{paroi}} \quad \text{et} \quad \underbrace{u_S^+ = (r^+)^{-1} A_S \ln r^+ + C_S}_{\text{tourbillon}}.$$

Dans l'équation 1.15, le terme entre accolades viendrait remplacer le terme constant dans la formulation originale de la loi de paroi. Le solveur utilisé ici, *ANSYS-CFX*, ne permet pas d'avoir un terme variable à cet endroit. Aussi, dans ce mémoire notre attention est dirigée vers le maillage. Pour ces raisons, cette méthode n'a pas été développée davantage.

### 1.2.1.2 Modèle $k - \varepsilon$ cubique

Ce modèle a été développé pour améliorer la résolution avec des écoulements fortement tourbillonnaires tout en conservant les avantages de simplicité et de rapidité du modèle  $k - \varepsilon$ . Au lieu de se servir de l'hypothèse de Boussinesq pour représenter les contraintes de Reynolds, une formulation qui tient compte des contraintes hors-diagonale est utilisée. Le modèle  $k - \varepsilon$  standard surestime les contraintes de Reynolds alors que ce modèle produit des valeurs plus faibles selon Yang et Ma (2002). On



appelle ce modèle « cubique » car trois dérivées de la vitesse sont multipliées pour établir les contraintes de Reynolds.

L'étude de cas tests a montré une concordance beaucoup plus grande que ce qui est obtenu avec le modèle  $k - \varepsilon$  pour des écoulements tourbillonnaires. Les éléments négatifs suivants persistent néanmoins :

- les équations contiennent toujours des constantes qu'il faut ajuster en se servant de données expérimentales tirées d'écoulements tourbillonnaires ;
- il n'a pas été démontré que le modèle améliore la résolution dans la CL ;
- ce modèle est toujours en cours de développement.

Pour ces raisons il n'a pas été utilisé dans ce mémoire.

### 1.2.1.3 Modèles de Reynolds et Large Eddy Simulation (LES)

Ces modèles nécessitent des temps de calcul beaucoup plus longs, mais sont plus précis que ceux mentionnés précédemment. Certains auteurs (ANSYS (2005), Zeman (1995) et Coussirat *et al.* (2006)) recommandent le modèle « Reynolds stress » SSG pour traiter les écoulements tourbillonnaires. Dans ce modèle, chacune des six contraintes de Reynolds résultant du moyennage en temps est résolue par une équation additionnelle. À cela s'ajoute une équation pour le taux de dissipation de l'énergie turbulente  $\varepsilon$ . Quant au modèle LES, douze équations sont maintenant à résoudre pour les douzes contraintes turbulentes. En effet, à cause du moyennage en espace, les termes  $\overline{\vec{U}\vec{u}}$  qui s'annulaient auparavant ne sont plus nuls.

Ces deux méthodes nécessitent de traiter le problème transitoire plutôt que le problème stationnaire. De plus, pour le modèle LES, il faut respecter une condition CFL de 1 afin d'obtenir une bonne convergence du solveur où

$$\text{coefficient CFL} = \frac{\Delta t}{\text{temps que le fluide met pour traverser la cellule}}$$

Ceci est obtenu en ayant des petits pas de temps ou des maillages très fins. Selon la documentation de *ANSYS-CFX*, typiquement 1000 pas de temps sont nécessaires pour passer au travers du régime transitoire et obtenir une solution du régime permanent avec la méthode LES.

Dans le logiciel *ANSYS-CFX*, la solution est toujours obtenue en résolvant le problème instationnaire, mais seulement une itération, i.e. une résolution matricielle par la méthode multigrille, est réalisée par pas de temps si l'on désire atteindre le régime permanent. Lorsqu'on résoud pour le régime instationnaire, plusieurs itérations de la méthode multigrille sont faites à chaque pas de temps et il faut s'assurer de la convergence à chaque pas de temps avant de passer au pas de temps suivant. Typiquement, deux à quatre résolutions matricielles par la méthode multigrille sont nécessaires par pas de temps. Aussi, les pas de temps sont généralement plus courts que ceux fixés pour la résolution en régime permanent.

### **1.2.2 Localisation de tourbillons numériques**

Deux groupes de méthodes existent pour localiser des tourbillons. Le premier groupe détermine la région tourbillonnaire tandis que le deuxième groupe détermine le centre discret du tourbillon.

Dans le premier groupe, la meilleure méthode est probablement celle de Jeong et Hussain (1995). Cette méthode a l'avantage de négliger les termes visqueux et instationnaires. Ainsi, on ne trouvera pas de tourbillon sur une plaque plane même si la vorticité est grande dans la couche limite. L'idée est de chercher les endroits où il y a un creux dépressionnaire, i.e. où la dérivée seconde de la pression est positive. Le gradient des équations de NS pour calculer la dérivée seconde de la pression est

considéré et les termes visqueux et instationnaire sont négligés :

$$\vec{\nabla} \left[ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{U} \otimes \vec{U}) \right] = \vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla} \cdot \left[ \vec{v} \left( \overrightarrow{\nabla U} + \overrightarrow{\nabla U}^{\top} \right) - \frac{p}{\rho} \bar{\mathbb{I}} \right] \right].$$

En réarrangeant les termes, on obtient l'expression décrite par

$$\bar{\mathbb{S}} + \bar{\mathbb{Q}} = \frac{-1}{\rho} H(p) \quad (1.16)$$

dans laquelle

$$\bar{\mathbb{S}} = \frac{1}{2} \left( \overrightarrow{\nabla U} + \overrightarrow{\nabla U}^{\top} \right) \quad \text{et} \quad \bar{\mathbb{Q}} = \frac{1}{2} \left( \overrightarrow{\nabla U} - \overrightarrow{\nabla U}^{\top} \right). \quad (1.17)$$

Il s'agit alors de trouver les valeurs propres de la matrice  $\bar{\mathbb{S}} + \bar{\mathbb{Q}}$ . Si deux valeurs propres sur trois sont négatives, alors le noeud fait partie d'un tourbillon.

Une autre méthode permettant de retrouver la région tourbillonnaire est celle développée par Levy *et al.* (1990) dans laquelle on calcule l'hélicité :

$$\text{Hélicité} = \frac{\vec{U} : \overrightarrow{\nabla U}}{\|\vec{U}\| \|\overrightarrow{\nabla U}\|}. \quad (1.18)$$

On considère ici l'alignement entre les vecteurs vitesse et accélération pour déterminer si le noeud se trouve dans le tourbillon. Si le produit scalaire adimensionnalisé est près de 1, le noeud est considéré dans le tourbillon. Au contraire, si la valeur trouvée est près de 0, le noeud est considéré loin du tourbillon.

Enfin, mentionnons la méthode développée par Jian *et al.* (2002) pour retrouver la région tourbillonnaire. Cette méthode n'est pas basée sur le calcul des valeurs propres d'une matrice mais sur l'analyse des directions des vecteurs vitesses entourant chaque noeud.

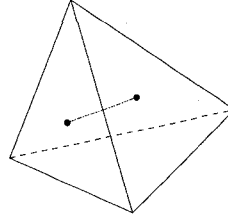


Figure 1.6 Méthode de Sujudi et Haines (1995). Sur chaque face, on détermine si la vitesse réduite vaut zéro.

En ce qui concerne la localisation exacte du centre du tourbillon, soulignons la méthode de Sujudi et Haines (1995) illustrée à la figure 1.6. Sur chaque face d'un élément, on vérifie si la vitesse réduite tombe à zéro. Si c'est le cas, le tourbillon passe par cette face à l'endroit où la vitesse réduite vaut zéro. La vitesse réduite est calculée à partir des vecteurs vitesses aux noeuds de l'élément et des vecteurs propres de la matrice  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ . Si deux points sont trouvés sur deux faces différentes, ces points sont reliés pour obtenir la trajectoire du tourbillon dans l'élément. L'interface entre les éléments peut être continue ou discontinue. On mentionne cette dernière méthode à titre informatif seulement, car celle-ci ne sera pas utilisée. Dans ce mémoire, il importe seulement de trouver la région tourbillonnaire. De ce fait, la méthode de Jeong et Hussain (1995) est retenue.

### 1.2.3 Adaptation

Pour bien capter le tourbillon, une bonne résolution spatiale est nécessaire. Zhong *et al.* (2007) affirment en effet que « *one of the major problem is the computed vortex wake system diffuses too rapidly due to numerical dissipation... Typically, large grids have to be used for simulating the evolution and convection of the tip vortices and the vortical wake* ». Bernsten, G.S. *et al.* (2001) affirment quant à eux qu'au moins quinze noeuds sont nécessaires dans le tourbillon.

Lorsqu'on analyse un phénomène transitoire avec détachement périodique de vortex

comme c'est le cas derrière un profil 2d tronqué, le problème de la résolution spatiale se pose aussi. En effet, on peut trouver numériquement un nombre de Strouhal qui se rapproche du nombre de Strouhal expérimental et tout de même être loin de bien capter les tourbillons de sillage tel qu'observé par Ait Bouziad (2005). Le nombre adimensionnel de Strouhal  $St$  est défini par

$$St = \frac{fL}{u_0}$$

où  $L$  est une longueur caractéristique et  $f$  est la fréquence des détachements de vortex. Dans les travaux de Ait Bouziad (2005), la cavitation cessait à 20% de la corde en aval du profil alors qu'en réalité celle-ci s'étend sur plusieurs dizaines de cordes en aval.

On peut choisir de mailler tout le domaine plus finement, un choix coûteux, ou utiliser des techniques d'adaptation de maillage afin de mieux distribuer ces noeuds. Une troisième solution serait d'augmenter le degré de l'interpolant des variables. Toutefois, le solveur utilisé ne permet, au mieux, que des interpolants du second ordre (ANSYS (2005)). Il importe donc d'avoir une distribution optimale de noeuds pour bien capter le tourbillon. Krieger et Wimmer (2003) ont étudié le maillage d'un tourbillon analytique simple qui évolue axialement (un vortex de type Rankine avec une vitesse axiale uniforme) afin d'en connaître les paramètres importants pour bien mailler le domaine autour du bout d'une aile d'avion. Dans leur étude, les profils de vitesse obtenus numériquement sont comparés aux profils analytiques. Un raffinement du maillage dans la direction radiale vers le centre du vortex est ainsi souhaité. Ces chercheurs ont également remarqué que la forme des éléments utilisés influence aussi la précision du calcul. Ainsi, pour les mêmes conditions, un maillage de tétraèdres induit une diffusion numérique d'un ordre de grandeur plus élevé qu'un maillage d'hexaèdres tel que mesuré par un coefficient représentant la « viscosité numérique ». De plus, à cause de la courbure du tourbillon marginal originant de

l'aile, il est préférable d'utiliser des éléments peu étirés dans la direction axiale dans la région immédiatement en aval de l'origine du vortex, tandis que loin en aval de l'origine, des éléments plus étirés axialement sont souhaités.

Le problème ici est qu'on ne connaît pas d'avance la position du vortex tel que rapporté par Deniset (1996). Dans ce cas, une méthode d'adaptation de maillage a posteriori paraît justifiée. On peut effectuer cette adaptation manuellement ou programmer un algorithme qui adapte automatiquement. Deniset (1996) et Bernsten, G.S. *et al.* (2001) ont montré que la méthode manuelle était utilisable. Ils ont d'abord effectué une première simulation numérique du phénomène avec un maillage initial. À partir de ce maillage, ils ont visualisé la position du tourbillon marginal et raffiné le maillage dans le sillage de ce dernier. La résolution de l'écoulement obtenu avec ce nouveau maillage a permis de mieux préciser la position du tourbillon, qui ne coïncidait plus totalement avec l'endroit où le raffinement a été fait auparavant. Un second raffinement du maillage à l'endroit déterminé par la dernière solution des équations de NS a amélioré encore la capture de la vorticité. Chaque auteur a ainsi effectué trois raffinements du maillage. Toutefois, même après ces trois itérations, 95% de la vorticité était néanmoins diffusée à une distance d'une corde en aval de l'extrémité de la pale. Une meilleure méthode d'adaptation que la méthode manuelle paraît nécessaire au vue de ces résultats.

Les meilleures méthodes a posteriori automatiques, du moins en ce qui concerne les maillages cartésiens, sont probablement celles basées sur la résolution d'une équation adjointe d'après les comparaisons effectuées par Bengert et Rannacher (2004). Ces méthodes sont très performantes mais pour les implémenter, il faut avoir accès au code source du r solvateur, ce que ne permet pas l'utilisation d'un solveur commercial. Parmi les autres méthodes d'adaptation automatiques existantes, on distingue deux grandes catégories : celles ayant le gradient comme estimateur d'erreur et celles

ayant le hessien comme estimateur d'erreur. Les paragraphes suivants détailleront davantage ces deux approches.

### 1.2.3.1 Le gradient d'une variable scalaire comme estimateur d'erreur

Certains auteurs utilisent la dérivée première ou une variante de celle-ci pour déterminer les endroits de fortes variations de la variable scalaire considérée (de With *et al.* (2003), Liseikin (2007), Tysell (2007). À titre d'exemple, mentionnons aussi les travaux de Bijl *et al.* (2005) dans lesquels un senseur  $S$  calculé à chaque cellule  $k$  fait office d'estimateur d'erreur :

$$S_k = \frac{|\phi_L - \phi_R|}{|\phi_{\text{moy}}|}.$$

Dans cette équation,  $\phi_L$  est la variable solution évaluée sur la cellule de gauche,  $\phi_R$  est la variable solution évaluée sur la cellule de droite tandis que  $\phi_{\text{moy}}$  est la moyenne de cette variable dans le domaine. Le raffinement engendré par cette méthode est anisotrope. Afin de contrôler le nombre de cellules créées et détruites lors de l'adaptation, des valeurs limites sont imposées :  $T_r$  pour le raffinement,

$$T_r = S_{\text{moy}} + \beta_r S_{\text{ec}}$$

et  $T_c$  pour le déraffinement,

$$T_c = S_{\text{moy}} - \beta_c S_{\text{ec}}.$$

Une distribution normale est assumée pour le senseur  $S$  dont la moyenne est  $S_{\text{moy}}$  et l'écart-type est  $S_{\text{ec}}$ . Les cellules où  $S_k$  est plus grand que  $\beta_r \times S_{\text{moy}}$  sont marquées pour le raffinement tandis que les cellules dont  $S_k$  est plus petit que  $\beta_c \times S_{\text{moy}}$  sont

marquées pour le déraffinement avec  $\beta_r$  et  $\beta_c$  les coefficients de dispersion acceptable autour de la moyenne.

Il est également possible de modifier le maillage de façon adaptative dans le solveur *ANSYS-CFX* en se basant sur la dérivée première. Un critère d'adaptation  $W_i$  est calculé pour chaque arête par

$$W_i = \sum_j \frac{\ell_i \|\Delta\phi_{ji}\|}{N_{\phi_j} \|\Delta\phi_j\|} \quad (1.19)$$

où  $\ell_i$  est la longueur euclidienne de l'arête  $i$ ,  $\Delta\phi_j$  est la plage de variation de la  $j^{\text{ième}}$  variable,  $\Delta\phi_{ji}$  est la différence entre la variable d'adaptation évaluée à un noeud de l'arête et à l'autre noeud et  $N_{\phi_j}$  est un paramètre de mise-à-l'échelle. Le nombre de noeuds final est fixé de même que le nombre d'adaptations désirées. Les arêtes dont le critère  $W_i$  est le plus élevé sont par la suite raffinées. Cette adaptation a plusieurs limitations dont :

- le raffinement est isotrope, car si une arête d'un élément est raffinée, toutes les arêtes de l'élément sont raffinées ;
- les éléments des maillages adaptés ne peuvent pas être plus grossiers que les éléments parents du maillage initial ;
- l'adaptation ne s'arrête pas avec un critère de convergence, mais plutôt lorsque le nombre de noeuds final fixé est atteint ;
- un seul domaine de calcul peut être adapté ;
- la qualité des maillages adaptés est tributaire de la qualité du maillage initial.

Compte tenu du problème étudié qui est fortement anisotrope, une méthode d'adaptation permettant des éléments anisotropes est favorisée.



### 1.2.3.2 Le hessien d'une variable scalaire comme estimateur d'erreur

D'autres auteurs dont Labbé *et al.* (2005), Alauzet *et al.* (2003) et Courchesnes (2007) optent plutôt pour la dérivée seconde comme estimateur d'erreur. Il a été démontré théoriquement, entre autres par Alauzet et Frey (2003), que lorsque l'approximation numérique est linéaire, la métrique issue du hessien est un estimateur de l'erreur d'interpolation, ce qui n'est pas le cas pour le gradient. Pour cette raison, la préséance est donnée au hessien comme base de l'estimateur d'erreur. Les variables solution obtenues de *ANSYS-CFX* sont toujours des approximations linéaires. En effet, bien que les variables soient évaluées aux points d'intégration, le solveur reporte la solution aux noeuds du maillage fourni en entrée et ce peu importe les schémas de discrétisation.

Une courte présentation de la théorie sur le hessien et la métrique associée est présentée à la section 2.3. Pour plus de détails, consultez les articles précédemment mentionnés. La méthode retenue est celle décrite dans le livre de Frey et George (1999) à la section 10.4. Le but est de raffiner le maillage dans les endroits où l'erreur d'interpolation est maximum en employant des métriques comme estimateurs d'erreurs. Le groupe MAGNU, de l'École Polytechnique de Montréal, a développé plusieurs outils informatiques basés sur la notion de métrique (Dompierre et Labbé (2006), MAGNU (2006)). Alauzet et Frey (2004) ont contribué aussi fortement au développement de cette méthode, notamment en ce qui concerne les problèmes instationnaires. Les avantages de cette méthode et les raisons pour lesquelles elle a été retenue sont les suivantes :

- l'adaptation n'est pas reliée au solveur. Un solveur commercial peut ainsi être utilisé ;
- les éléments générés peuvent être anisotropes ;
- l'adaptation tend vers un maillage où les erreurs sont équidistribuées, i.e. un maillage optimal selon Babuška et Rheinboldt (1977).

### 1.2.3.3 Les méthodes mixtes employant le gradient et le hessien comme estimateur d'erreur

Certains auteurs tiennent compte des dérivées première et deuxième pour bâtir l'estimateur d'erreur. Entre autres, Harvey III *et al.* (1990) prend en compte à chaque noeud du maillage  $i, j$ , le gradient maximal et la dérivée seconde maximale d'une variable quelconque  $\phi$  par l'intermédiaire d'une quantité scalaire  $f$  :

$$f = \alpha \left| \frac{\partial \phi}{\partial s} \right|_{\max} + \beta \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} \right|_{\max}.$$

Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont fixés par l'utilisateur. Dans cet article,  $\alpha$  était toujours 1 et  $\beta$  variait de 0 à 0,1 d'où une influence accrue du gradient. Une adimensionnalisation est effectuée par

$$\bar{f} = \frac{f - f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}}.$$

Une procédure semblable est appliquée par Thompson *et al.* (1999). Dans ce cas, la métrique  $\mathcal{M}$  utilisée en tant qu'estimateur d'erreur est l'intersection des deux dérivées :

$$\mathcal{M} = \left( \frac{\text{dérivée 1}^{\text{re}} \text{ max locale}}{\text{dérivée 1}^{\text{re}} \text{ max globale}} \right) \cap \left( \frac{\text{dérivée 2}^{\text{e}} \text{ max locale}}{\text{dérivée 2}^{\text{e}} \text{ max globale}} \right).$$

Tableau 1.4 Critères de qualité à respecter pour le solveur *ANSYS-CFX*, d'après ANSYS (2005).

Types d'éléments	les éléments peuvent être problématiques si on observe :
tétraèdres (4 noeuds)	ratio de longueur d'arêtes > 100 angle maximal entre deux faces > 170° angle minimal entre deux faces < 10° ratio de volumes > 30
pyramides (5 noeuds) prismes (6 noeuds) hexaèdres (8 noeuds)	ratio de longueur d'arêtes > 100 angle maximal entre deux faces > 170° angle minimal entre deux faces < 10° ratio de volumes > 5

#### 1.2.3.4 Choix des variables d'adaptation

Afin de bien résoudre l'écoulement dans le sillage d'un cylindre, de With *et al.* (2003) utilisent la viscosité turbulente  $\eta_t$  comme variable d'adaptation pour des écoulements à nombre de Reynolds élevés (écoulements turbulents) et le taux de déformation  $\|\bar{S}\|$  pour des écoulements à faible nombre de Reynolds (laminaire). Le taux de déformation  $\|\bar{S}\|$  est défini par :

$$\|\bar{S}\| = \left[ 2 \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (1.20)$$

#### 1.2.4 Qualité des maillages obtenus

Les maillages utilisés par les solveurs doivent respecter certains critères de qualité pour s'assurer de la convergence des calculs. Par exemple, en ce qui a trait au solveur *ANSYS-CFX*, les éléments doivent respecter les critères de qualité donnés au tableau 1.4. Le ratio de longueur d'arêtes (ELR) est défini à chaque noeud. Pour chaque face reliée au noeud, le rapport de la plus longue arête par la plus petite

arête est calculé :

$$\text{ELR} = \frac{\max(\ell_1, \ell_2)}{\min(\ell_1, \ell_2)}. \quad (1.21)$$

De même, le ratio de volumes (VER) est défini par le rapport du plus gros volume élémentaire par le plus petit volume élémentaire touchant un noeud :

$$\text{VER} = \frac{\text{Volum}_{\max}}{\text{Volum}_{\min}}. \quad (1.22)$$

Si ces ratios ne sont pas respectés, la convergence du solveur peut être grandement affectée. Afin d'assurer la qualité des maillages obtenus lors processus adaptatif, un lissage est effectué. Au moins trois stratégies sont employées en pratique : un lissage effectué lors de la construction de la métrique, un lissage de la métrique après que celle-ci ait été construite ou un lissage du maillage obtenu après l'adaptation. Les deux premières stratégies sont privilégiées car elles traitent le problème à la source. Elles sont décrites ci-dessous.

#### 1.2.4.1 Lissage lors de la construction de la métrique

de With *et al.* (2003) couplent la variable utilisée pour le raffinement  $\|\bar{S}\|$  avec la taille des mailles  $h$ . La quantité  $q$  obtenue, donnée par

$$q = \rho h^{2C_m} \|\bar{S}\|^{C_{str}},$$

présente une variation plus graduelle qu'un métrique qui ne prend pas en compte la taille des mailles et évite de « sur-mailler » dans les zones de forte variation. Les exposants  $C_{str}$  et  $C_m$  peuvent varier afin d'accorder plus ou moins d'importance au lissage. Plus  $C_m$  est important, plus le lissage sera important. Une valeur de 1 pour  $C_m$  et de 1,5 pour  $C_{str}$  sont les valeurs retenues par l'auteur.

### 1.2.4.2 Lissage a posteriori de la métrique

D'autres auteurs ont plutôt opté pour une moyenne algébrique des métriques aux noeuds environnants (Vallet (1992)). En combinant la valeur nodale du tenseur  $\mathcal{M}_i$  avec une fraction  $f$  de la valeur moyenne des tenseurs aux noeuds environnants  $\bar{\mathcal{M}}_i$ , un lissage est effectivement réalisé :

$$\mathcal{M}_i = (1 - f) \mathcal{M}_i + f \bar{\mathcal{M}}_i.$$

Cette méthode ne permet toutefois pas de fixer les ratios de tailles. Pour cette raison, des méthodes plus avancées ont été élaborées. En particulier, la méthode

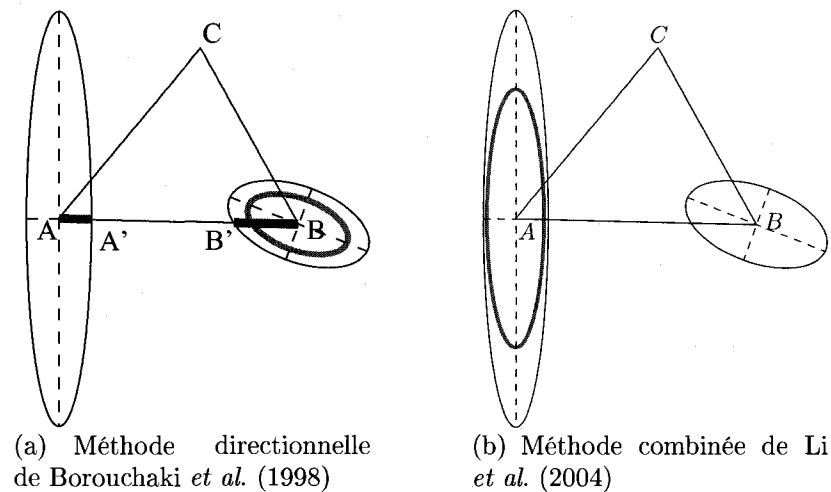


Figure 1.7 Lissage de métriques selon trois méthodes.

de Borouchaki *et al.* (1998) permet, en théorie, de fixer le ratio maximal de longueur des arêtes. Dans la figure 1.7(a), un élément triangulaire  $ABC$  est représenté et une métrique est définie à chacun des sommets. Toutefois, afin de simplifier le schéma, seulement les métriques aux noeuds  $A$  et  $B$  sont montrées et représentées sous forme d'ellipses. Les directions des axes principaux de chaque ellipse sont données par les vecteurs propres du tenseur nodal tandis que les grandeurs de ces axes sont

données par les valeurs propres correspondantes. Selon cette dernière méthode, deux segments sont mesurés dans la direction reliant les centres et intersectant les ellipses, soit les segments  $AA'$  et  $BB'$ . Si le ratio de longueur dépasse un certain seuil fixé par l'utilisateur, alors le tenseur ayant la plus longue arête sera réduit. Pour le cas illustré, c'est le tenseur au noeud  $B$  qui est réduit.

Li *et al.* (2004) proposent un lissage directionnel en plus du lissage de taille (cf. figure 1.7(b)). Selon cette méthode, l'anisotropie du tenseur le plus anisotrope est conservée et le tenseur le moins anisotrope est tourné si le rapport de tailles diffère plus qu'un certain seuil. Sur la figure, seul le tenseur au noeud  $A$  est modifié. Le trait mince foncé représente la métrique originale tandis que le trait gras indique la métrique modifiée. Notons quelques faiblesses de la méthode :

- les nouvelles directions du tenseur tourné ne sont pas orthogonales alors qu'elles devraient l'être : les vecteurs propres de toute matrice définie positive symétrique, comme c'est le cas ici, doivent être orthogonaux ;
- si un des deux tenseurs est sphéroïdal<sup>5</sup>, on garde ce tenseur sphéroïdal de force plutôt que d'associer les directions de ce tenseur avec les directions du deuxième tenseur et de changer les tailles dans les directions respectives ;
- aucune direction n'est changée si le tenseur ayant les spécifications de taille les plus grandes est aussi le plus anisotrope.

Dans les deux cas, on notera que c'est le rapport de la longueur d'arête qui est lissé au lieu du rapport de volume. D'après les spécifications du solveur, il est plus important d'avoir un ratio de volume bas plutôt qu'un ratio de longueur d'arête bas. Une comparaison de ces techniques de lissage sera effectuée à la section 2.5.2 afin de déterminer la meilleure méthode pour le cas du tourbillon marginal.

---

<sup>5</sup>Une ellipse que l'on tourne sur un axe :  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ .

## CHAPITRE 2

### PRÉSENTATION DE LA DÉMARCHE

La démarche d'adaptation retenue sera détaillée dans les paragraphes suivants. D'abord, on présente une vue globale de l'ensemble solveur-remailleur pour ensuite se concentrer sur le remailleur. Une courte revue de la théorie sur laquelle se base ce remailleur est présentée suivi par une description du traitement appliqué à la variable d'adaptation. Enfin, les algorithmes spécifiques utilisés dans le traitement du hessien sont décrits.

#### 2.1 Schéma global du cycle solveur-remailleur

La figure 2.1 présente les cinq étapes du cycle solveur-remailleur. En dessous de ces cinq étapes majeures les logiciels utilisés sont indiqués. Les programmes entièrement développés dans le cadre de ce mémoire sont en *italique* tandis que les programmes existants dans lesquels des modifications ont été faites sont en caractères **gras**. Par exemple, `cfx5solve` est le solveur commercial existant dans lequel des sous-programmes Fortran ont été intégrés sous la forme de « fonctions de l'utilisateur ».

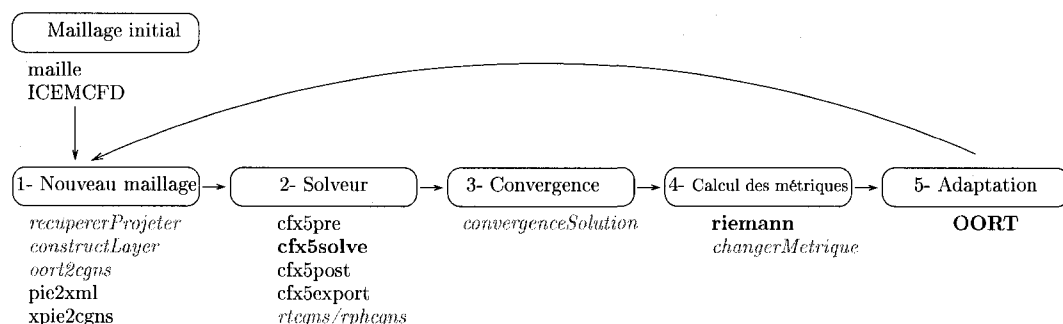


Figure 2.1 Schéma global du cycle solveur-remailleur

Le cycle global débute avec un maillage initial sur lequel une solution est calculée numériquement avec le logiciel *ANSYS-CFX*. Une métrique est par la suite calculée en chaque noeud à partir de la solution avec le logiciel Riemann, enrichi de nouveaux algorithmes de lissage et de mise à l'échelle. L'adaptation du maillage avec le logiciel *OORT* termine la boucle. La tâche du remailleur est de satisfaire le plus possible le champ de métrique qui lui est fourni en entrée. La mesure de la convergence (étape 3 de la figure 2.1) est réalisée après la deuxième itération globale. On mesure ici la convergence entre la solution obtenue à l'itération globale  $i$  et celle obtenue à l'itération globale  $i - 1$ . La boucle globale est itérée jusqu'à l'atteinte d'une convergence. On distingue ainsi trois boucles d'itérations :

1. la boucle d'itérations effectuée par le solveur ;
2. la boucle d'itérations effectuée par le remailleur ;
3. et la boucle globale du cycle solveur-remailleur.

Lors du calcul de l'écoulement dans *ANSYS-CFX*, la solution est initialisé à chaque itération globale, sauf pour la première itération, avec la solution calculée à l'itération globale 1. Cette procédure est recommandée par le groupe MAGNU. Une procédure comme celle de Zhong *et al.* (2007) dans laquelle la solution calculée à l'itération globale  $i - 1$  sert de point de départ pour l'itération  $i$  introduit des erreurs d'interpolation et n'est pas utilisée pour cette raison.

Des programmes de conversion de fichiers du format pirate<sup>1</sup> à CGNS<sup>2</sup> (*pie2xml* et *xpie2cgns*) et du format CGNS à pirate (*rtcgns* et *rphcgns*) sont nécessaires pour transférer les informations entre le solveur et le remailleur car ces deux programmes n'utilisent pas le même format. De plus, les codes noeuds ne sont pas traités par le solveur. De même, le solveur ne traite que des éléments tridimensionnels : aucun

---

<sup>1</sup>Le format pirate n'est pas un format commercial. Un fichier pirate peut contenir la géométrie, le maillage et la solution.

<sup>2</sup>Le format CGNS est un format commercial dont l'acronyme signifie CFD general notation system. Un fichier CGNS ne peut contenir que le maillage et la solution.



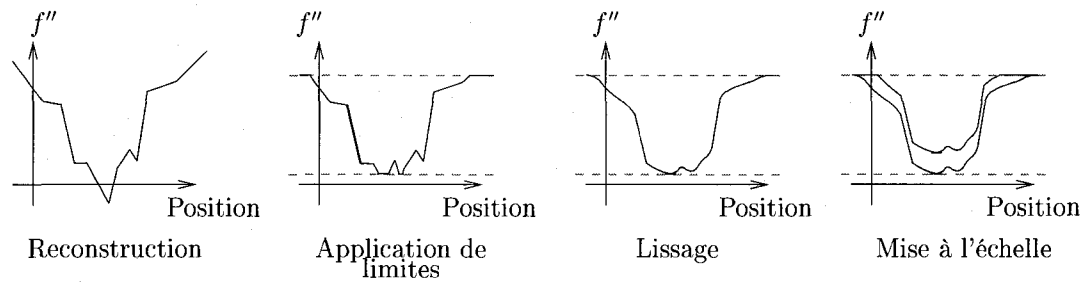


Figure 2.2 Sous-étapes de l'étape 4 : calcul des métriques.

maillage composé de segments d'arêtes n'est reconnu. Il a également été observé que l'ordre dans lequel les noeuds sont fournis au solveur n'est pas nécessairement le même que l'ordre dans lequel on les récupère. Ainsi, les programmes de conversation des données *rtcgns*, *rphcgns* incorporent un algorithme pour retrouver les codes noeuds. Cet algorithme vérifie la présence de chaque noeud dans chaque face exportée. Par exemple, si un noeud est présent dans la face 1 et la face 2 et que ces faces partagent une arête commune, alors le noeud est situé sur l'arête. Si un noeud est présent dans trois faces partageant un sommet commun, alors le noeud est le sommet commun aux faces, etc. Le fait que le solveur n'accepte que des éléments tridimensionnels est un frein important à l'utilisation massive de la technique d'adaptation qui sera développée. À la sortie de *OORT*, un maillage 3d adapté est obtenu et l'on doit par la suite retrouver les faces frontières sur lesquelles les conditions aux limites seront appliquées lors de la réinsertion du maillage dans le solveur. Les frontières du domaine sont retrouvées par le programme *oort2cgns*.

La figure 2.2 présente les sous-étapes effectuées lors du calcul des métriques. On reconstruit d'abord le hessien qui est ensuite borné par des valeurs fournies par l'utilisateur. Le champ tensoriel est ensuite lissé puis mis à l'échelle. La mise à l'échelle est effectuée en dernier de façon à conserver la variation de taille obtenue du lissage.

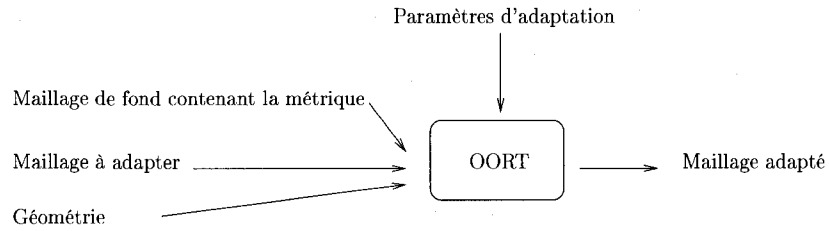


Figure 2.3 Entrées et sortie du logiciel *OORT*

## 2.2 Fonctionnement du remaillage

Pour adapter le maillage, un algorithme a été développé au MAGNU par Dompierre et Labbé (2006) et implémenté dans le logiciel *OORT*. Ce code produit un maillage adapté à partir d'un maillage initial, d'un champ de métriques et de la géométrie, tel que le schématise la figure 2.3. La géométrie est nécessaire pour placer des noeuds sur la frontière lorsqu'il y a raffinement à cet endroit. L'algorithme modifie le maillage de façon à avoir toutes les arêtes de longueur égale, la longueur étant mesurée dans l'espace de la métrique. Si les longueurs sont toutes égales, le maillage résultant est optimal (D'Azevedo et Simpson (1991), section 4.2 de Bengert et Rannacher (2004) et Babuška et Rheinboldt (1977)). La longueur  $L$  d'une arête dans l'espace de la métrique est calculée selon

$$L = \int_0^1 \sqrt{\vec{AB}^T \mathcal{M}(\vec{A} + t\vec{AB}) \vec{AB}} dt \quad (2.1)$$

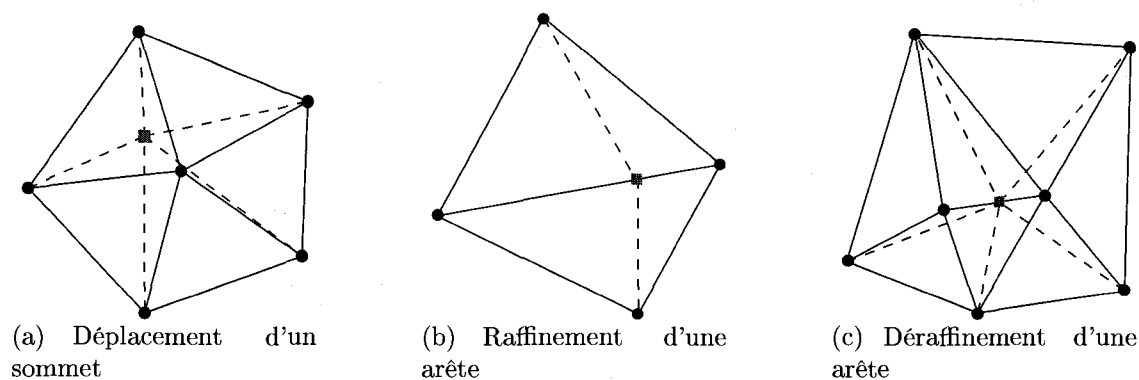
où  $A$  et  $B$  sont les deux sommets de l'arête et  $\mathcal{M}$  est la métrique définie sur l'arête. Par une mise-à-l'échelle appropriée des valeurs propres des métriques, la proposition précédente est équivalente à avoir toutes les arêtes de longueur unitaire.

L'algorithme implémenté dans *OORT* utilise les opérations décrites au tableau 2.1 pour respecter la condition de longueur unitaire. Certaines opérations sont réservées pour des maillages d'éléments simpliciaux (triangles, tétraèdres) alors que d'autres s'appliquent aussi bien aux maillages d'éléments simpliciaux que de non-simpliciaux

Tableau 2.1 Opérations dans *OORT*.

Éléments non-simpliciaux	Éléments simpliciaux
Déplacement de sommets	Déplacement de sommets Raffinement et déraffinement d'arêtes Retournement d'arêtes Retournement de faces

(quadrangles, prismes, hexaèdres). Dans ce mémoire, le seul élément non-simplicial utilisé est l'hexaèdre pour lequel il n'y a que du déplacement de sommets. Il n'est pas possible de diviser les arêtes d'hexaèdres sans créer de noeuds flottants et le solveur utilisé n'accepte que des maillages non-structurés sans noeuds flottants. Un noeud flottant est un noeud qui n'est pas un sommet de tous les éléments se rattachant à ce noeud. Globalement, le remaillieur essaie de produire un maillage de type Delaunay<sup>3</sup> à partir d'un maillage initial quelconque.

Figure 2.4 Exemples de techniques d'adaptation dans *OORT*.

Un exemple de déplacement d'un sommet est représenté à la figure 2.4(a). Chaque sommet du maillage est déplacé au centroïde du groupe d'éléments l'entourant. Le

<sup>3</sup>Pour une revue des différentes méthodes et types de maillages, se référer à Lo (2002). Pour une présentation plus complète des maillages de type Delaunay, se référer à George et Borouchaki (1997). Dans ce dernier livre, le critère principal à respecter pour qualifier un maillage de type Delaunay est mentionné : tous les éléments du maillage doivent contenir le centre de leurs sphères circonscrites, i.e. le noeud du diagramme de Voronoï. Les maillages de Delaunay sont assez réguliers car ils maximisent l'angle minimal entre les arêtes des éléments, d'où l'intérêt de les utiliser dans les calculs numériques. En 2d, il a été démontré par Lawson (1977) qu'on pouvait obtenir des maillages Delaunay par retournements d'arêtes.

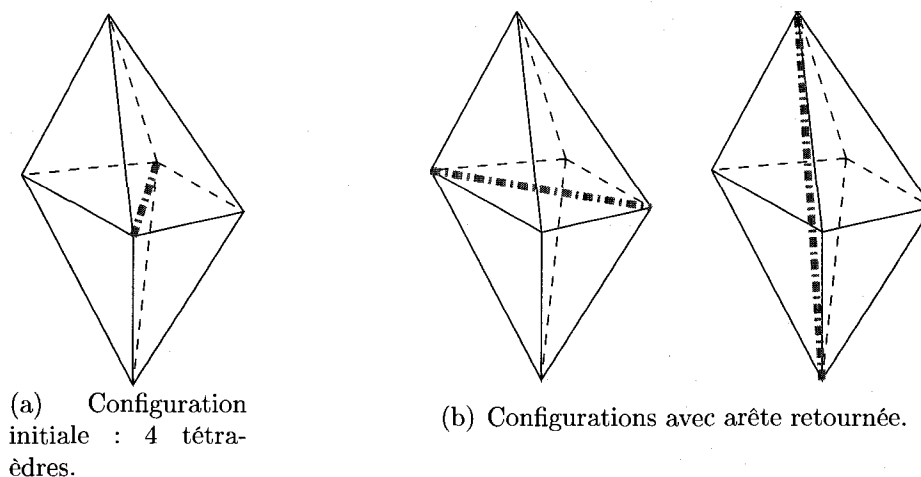


Figure 2.5 Retournement d'arêtes dans *OORT*.

centroïde est calculé en considérant les longueurs d'arêtes mesurées dans la métrique. Si le déplacement est plus court qu'une certaine valeur seuil, alors l'algorithme de déplacement est arrêté. Un exemple de raffinement/déaffinement est illustré aux figures 2.4(b) et 2.4(c). Si une arête est trop longue, un noeud est ajouté à la moitié de la longueur et divise l'arête en deux parties égales. La longueur est encore ici mesurée dans l'espace de la métrique de sorte que le centre euclidien de l'arête ne coïncide pas nécessairement avec la position du noeud ajouté. Au contraire, si l'arête est trop courte, le noeud est fusionné avec le noeud voisin : un noeud disparaît alors.

Le retournement d'arêtes est présenté à la figure 2.5. En 2.5(a), quatre tétraèdres du maillage avant retournement sont illustrés. Le retournement d'arêtes consiste à changer la connectivité du groupement original de tétraèdres de façon à faire disparaître l'arête à retourner, en pointillé gras à la figure 2.5(a). Pour le cas illustré, deux possibilités existent et celles-ci sont présentées à la figure 2.5(b). La possibilité qui permet d'augmenter le plus la qualité<sup>4</sup> de l'ensemble des tétraèdres est retenue.

<sup>4</sup>En réalité, le critère qualité utilisé pour déterminer s'il y a retournement ou non est le critère de forme du plus mauvais tétraèdre, mesuré dans la métrique. Une description du critère de forme est donnée à la section 2.5.3. Des critères géométriques doivent aussi être respectés.

Un exemple de retournement de faces est présenté à la figure 2.6. Dans ce cas, la face partageant deux tétraèdres du maillage disparaît et une nouvelle arête est créée pour aboutir à un groupement final de trois tétraèdres.

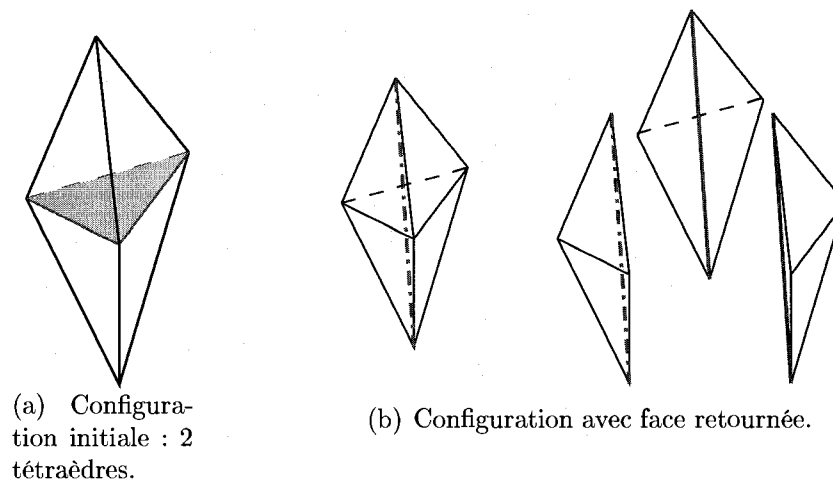


Figure 2.6 Retournement de faces dans *OORT*.

Le maillage de fond n'est pas modifié par l'algorithme d'adaptation. Son utilité est de fournir la carte de taille. À chaque noeud du maillage de fond, une métrique est définie sous forme d'une matrice  $d \times d$  où  $d$  est la dimension de l'espace géométrique. Cette métrique contient en fait la spécification de taille que doit satisfaire le maillage à adapter. On interpole les métriques aux noeuds du maillage à adapter. Différentes façon d'interpoler des métriques sont décrites dans Frey et George (1999). Toutefois, pour augmenter la vitesse d'exécution, les termes matriciels sont interpolés linéairement un à un dans *OORT*. L'adaptation est un processus itératif, le but étant d'avoir des longueurs égales, mesurées dans la métrique. À chaque itération du remaillage, l'écart-type adimensionnalisé est calculé. Si l'écart-type est plus petit qu'une certaine valeur cible ou si le nombre maximum d'itérations du remaillage est atteint, l'adaptation se termine. Au début de l'adaptation, le maillage de fond n'est pas nécessairement le même que le maillage à adapter. Dans cette étude néanmoins,

c'est toujours le cas. Par la suite, au fur et à mesure que l'adaptation progresse, le maillage à adapter diffère de plus en plus du maillage de fond.

### 2.3 Théorie sur la métrique

Quelques éléments seulement de la théorie de la métrique sont présentés ici. Pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter Alauzet et Frey (2003) et Frey et George (1999). L'erreur entre la vraie solution  $\phi$  et la solution approximative  $\phi_h$  est bornée par l'erreur d'interpolation (Ciarlet (1978)) :

$$\|\phi - \phi_h\|_V \leq C \|\phi - \Pi_h \phi\|_V$$

où  $\Pi_h \phi$  est la solution interpolée linéairement,  $C$  est une constante de proportionnalité et  $V$  est l'espace fonctionnel dans lequel  $\phi$  existe. Il s'agit donc de déterminer l'erreur d'interpolation. Si la solution est approximée linéairement, alors l'erreur d'interpolation sur l'élément  $K$ ,  $\epsilon_K = (\phi - \Pi_h \phi)_K$ , est estimée par la dérivée seconde. En effet, si on développe  $\phi$  en série de Taylor, on obtient

$$\phi(\vec{x}) = \phi(\vec{x}_0) + (\vec{x} - \vec{x}_0)^\top \vec{\nabla} \phi(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{x}_0)^\top H(\vec{x}_0) (\vec{x} - \vec{x}_0) + \dots$$

où  $\vec{x}_0$  est le sommet d'un élément. De plus, parce que  $\Pi_h \phi$  est une interpolation linéaire, on a

$$\Pi_h \phi(\vec{x}) = \Pi_h \phi(\vec{x}_0) + (\vec{x} - \vec{x}_0)^\top \vec{\nabla} \Pi_h \phi(\vec{x}_0).$$

Étant donné que l'on cherche un minimum à l'erreur d'interpolation, on peut poser

$$\vec{\nabla}(\phi(\vec{x}_0) - \Pi_h \phi(\vec{x}_0)) = 0.$$

Sachant que, par définition,  $\phi(\vec{x}_0) = \Pi_h \phi(\vec{x}_0)$ , on trouve que l'erreur d'interpolation est, en négligeant les termes de degrés trois et plus,

$$\epsilon(\vec{x}) = (\phi(\vec{x}) - \Pi_h \phi(\vec{x})) \approx \frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{x}_0)^\top H(\vec{x}_0) (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

où  $H(\vec{x}_0)$  est la matrice hessienne de  $\phi$  qui est définie par

$$H(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \phi(\vec{x}) \right) \quad i, j = 1, \dots, d.$$

On remarque la symétrie de la matrice. Il y a donc 6 composantes inconnues pour un espace tridimensionnel. Le gradient  $\vec{\nabla} \phi(\vec{x})$  est défini par

$$\vec{\nabla} \phi(\vec{x}) = \frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, d.$$

L'erreur évaluée le long d'une arête est donc approximée par :

$$\epsilon = (\phi(\vec{x}) - \Pi_h \phi(\vec{x})) \approx (\vec{e} | H(\vec{x}_0) | \vec{e}). \quad (2.2)$$

Le terme  $\vec{e}$  de l'équation (2.2) représente un déplacement le long d'une arête de l'élément. L'erreur élémentaire est obtenue par majoration en fonction du type d'élément et s'exprime selon

$$\epsilon_K \leq P (\vec{e} | H(\vec{x}_0) | \vec{e}),$$

où  $P$  est une constante qui dépend du type d'élément. Après quelques manipulations, on obtient une relation entre la longueur d'une arête de l'élément  $h_i$  et la valeur propre de  $|H(\vec{x}_0)|$  associée,  $\lambda_i$  :

$$\lambda_i \propto \frac{\epsilon_K}{h_i^2}. \quad (2.3)$$

On borne ces valeurs propres en spécifiant des grandeurs limites positives en se basant sur les dimensions du domaine physique de façon à éviter des éléments trop

petits ou trop gros :

$$|\lambda_i| = \min\left(\max(\lambda_i, \lambda_{\min}), \lambda_{\max}\right).$$

$H$  étant maintenant symétrique définie positive, on la décompose comme un produit de 3 matrices. La matrice des vecteurs propres est  $R$ , tandis que  $\Lambda$  est la matrice des valeurs propres :

$$\mathcal{M} = |H(\vec{x}_0)| = R \Lambda R^{-1},$$

avec

$$\Lambda = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & 0 & 0 \\ 0 & |\lambda_2| & 0 \\ 0 & 0 & |\lambda_3| \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Afin de récupérer les dérivées secondes de l'interpolation linéaire  $\Pi_h \phi$ , on procède à une reconstruction. Ce point sera expliqué à la section 2.4.1. Il est à noter que  $\phi_h$  peut être n'importe quelle variable scalaire de la solution numérique : la norme de la vitesse, la densité, la pression ou toute combinaison de ces variables. Une fois la métrique  $\mathcal{M}$  obtenue en chaque sommet de l'élément  $K$ , on en déduit la métrique  $\overline{\mathcal{M}}$  sur l'élément  $K$  par une quadrature appropriée (quadrature de Hammer pour des éléments simpliciaux ou quadrature de Gauss pour des éléments non-simpliciaux) :

$$\overline{\mathcal{M}}(K) = \frac{\int_K \mathcal{M}(\vec{x}) dK}{\int_K dK}. \quad (2.5)$$

Les valeurs des tenseurs nodaux aux points d'intégration sont encore ici retrouvées par interpolations linéaires terme à terme.

Dans les prochains paragraphes, trois algorithmes opérant sur le hessien seront explicités. D'abord, il sera question de la méthode de reconstruction du hessien.



Ensuite, la méthode de lissage sera détaillée, puis une méthode pour limiter la variation du nombre total d'éléments dans le maillage sera discutée.

## 2.4 Construction de l'estimateur d'erreur

Dans cette section, il est d'abord question de la méthode de reconstruction du hessien. L'estimateur d'erreur est construit à partir du hessien, tel qu'expliqué dans la section 2.3. Ensuite, une analyse sommaire est effectuée quant à la prise en compte du gradient.

### 2.4.1 Reconstruction du hessien

Afin de déterminer la meilleure façon de reconstruire le hessien pour le cas du tourbillon marginal, une étude comparative a été effectuée entre trois variantes de deux méthodes. Une étude semblable, mais portant sur un cas théorique a déjà été menée dans Manole *et al.* (2005). Les méthodes retenues pour la présente étude, en employant la même terminologie que dans Manole *et al.* (2005), sont la méthode *Simple linear fitting* (SLF) et la méthode *Quadratic fitting* (QF). La première est déjà implémentée dans le logiciel *OORT* tandis que la deuxième est la méthode la plus précise qui a été identifiée pour le cas test théorique.

Dans la méthode QF, il s'agit en fait de reconstruire une surface quadratique à partir d'un groupe d'éléments d'une taille déterminée entourant chaque noeud. La figure 2.7 montre un tel groupe avec deux noeuds voisins dans toutes les directions. En tout, le noeud central est entouré ici de douze voisins. La surface quadratique pour ce groupe est donnée par

$$\phi_h = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4y + a_5y^2 + a_6xy.$$

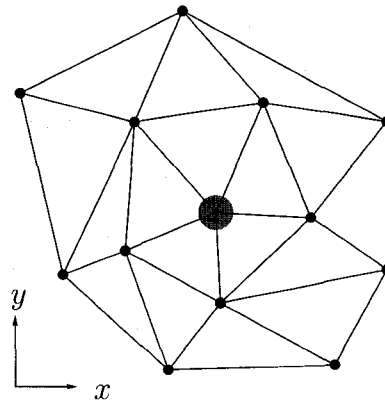


Figure 2.7 Méthode QF avec deux noeuds voisins entourant le noeud central.

Les coefficients  $a_1$  à  $a_6$  ( $a_1$  à  $a_{10}$  en 3d) sont déterminés par régression linéaire étant donné qu'il y a plus de voisins que d'inconnues. Après deux différenciations, on retrouve les différents termes du hessien.

Les résultats de l'étude comparative sont présentés à la figure 2.8. Un domaine tridimensionnel à section carrée est considéré aux fins de l'étude. Le domaine est parcouru par un tourbillon<sup>5</sup>. On voit que la méthode QF à trois voisins est celle qui permet de construire les maillages ayant les ratios de volume (VER) les plus bas. De plus, l'angle minimum  $\theta$  entre deux faces d'un même élément est plus élevé avec cette méthode :  $5,3^\circ$  comparativement à  $3,2^\circ$  pour la même méthode, mais à deux voisins. Ces résultats sont tels qu'attendus. En effet, plus la surface est grande autour du noeud central, plus la régression linéaire lisse la métrique. Parmi les autres avantages de la méthode QF, mentionnons une réduction des effets de bords, visibles surtout avec la méthode SLF sur la figure 2.8(a). Le temps de calcul augmente toutefois avec le nombre de voisins. Il est 2,25 fois plus long avec trois voisins plutôt qu'avec deux. Pour ces raisons, la méthode QF avec deux voisins est retenue.

Le tableau 1.4 indique les ratios cibles à respecter selon ANSYS (2005). Lors des expérimentations, des valeurs différentes ont été observées. Elles sont résumées dans

<sup>5</sup>Il s'agit en fait du domaine utilisé pour le premier cas test (cf. figure 3.1).

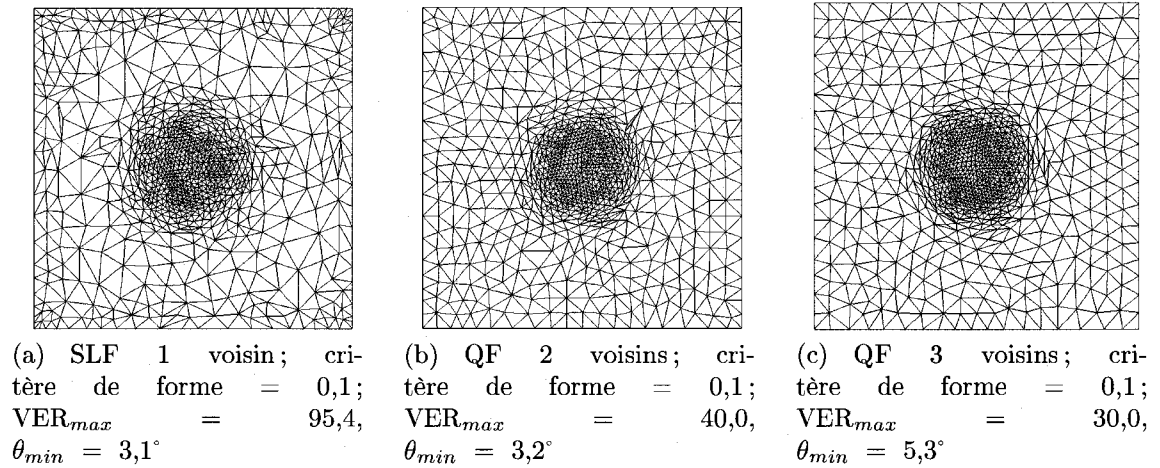


Figure 2.8 Différentes méthodes de reconstruction du hessien. Les statistiques sont pour le domaine entier, mais les figures représentent la section d'entrée seulement.

Tableau 2.2 Critères de qualité observés dans *ANSYS-CFX*

Type d'éléments	Éléments problématiques si :
Tétraèdres	$VER > 10\ 000$ $ELR > 80$ $\theta_{min} < 1,0^\circ$ $\theta_{max} > 179,0^\circ$
Hexaèdres	$VER > 100$ $ELR > 100$ $\theta_{min} < 1,0^\circ$ $\theta_{max} > 179,0^\circ$

le tableau 2.2. Ainsi, on remarque que l'angle  $\theta$  n'est pas limité à  $10^\circ$ , mais peut être aussi bas que  $1^\circ$  et la convergence du solveur est bonne. Le ratio de volumes maximal pour des tétraèdres peut quant à lui être aussi élevé que 10 000. Ces chiffres sont des valeurs moyennes, car la convergence du solveur dépend d'un ensemble de facteurs. La méthode QF à deux voisins est celle qui permet le mieux de respecter ces critères de qualité.

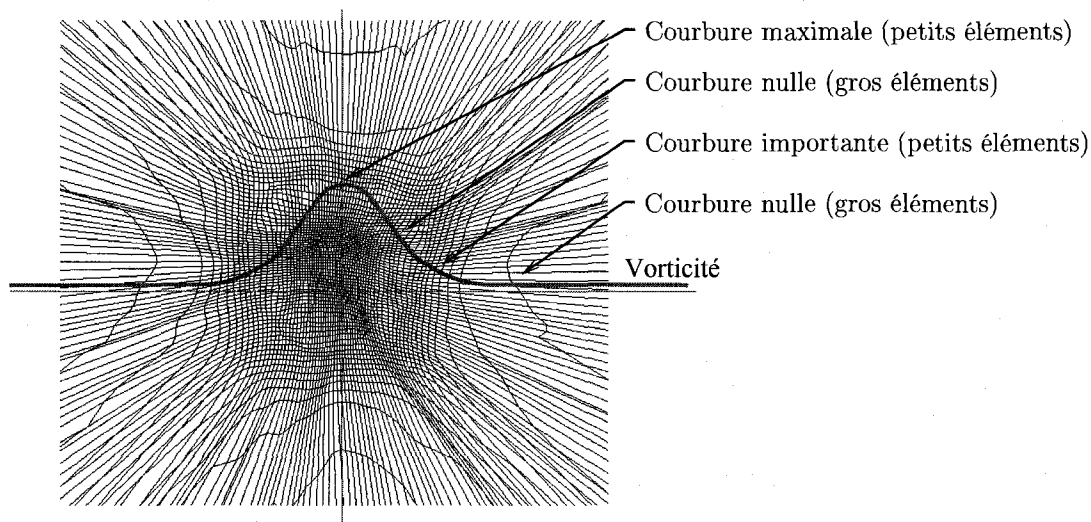


Figure 2.9 Effet beigne rencontré lorsque le gradient n'est pas pris en compte.

#### 2.4.2 Prise en compte du gradient

Dans certaines circonstances, il peut être avantageux de prendre en compte le gradient en plus du hessien. Par exemple, si l'adaptation est réalisée avec la vorticité, le maillage obtenu de l'adaptation avec le hessien seul présente un « effet beigne » comme on le voit sur la figure 2.9. La courbure de la vorticité varie de façon intermittente entre une courbure prononcée et une courbure nulle. Les éléments sont plus gros lorsque la courbure est nulle. Cet endroit correspond toutefois au point de gradient maximum. On observe donc une alternance entre les zones de petits éléments et les zones de grands éléments et cela crée des contraintes importantes lors du remaillage. Dans ces cas, on observe que les ratios de tailles les plus élevés sont au pourtour du beigne.

Tableau 2.3 Comparaison entre une métrique qui tient compte du gradient et une métrique qui ne tient pas compte du gradient

Type de métrique	VER	ELR
Sans tenir compte du gradient	644	23.1
En tenant compte du gradient : $\chi = 0,5$	319,1	21,6
En tenant compte du gradient : $\chi = 1,0$	145,2	23,9
En tenant compte du gradient : $\chi = 2,0$	1251	22,5

Afin de diminuer l'effet beigne, une métrique qui incorpore des informations liées aux gradients est souhaitée. Quelques essais utilisant différentes formulations ont été réalisés. La meilleure est celle décrite par

$$\lambda_i = \chi \left| \frac{\lambda_{\max \text{ global}}}{\lambda_{\max \text{ local}}} \right| \lambda_i,$$

dans laquelle les directions obtenues des vecteurs propres du hessien original sont maintenues, mais les valeurs propres sont multipliées par un facteur  $\chi$  si ce dernier est plus grand que  $\chi_{\text{threshold}}$ . Le facteur  $\chi$  est calculé à partir du hessien et du gradient :

$$\chi = \left| \frac{\lambda_{\max \text{ local}}}{\lambda_{\max \text{ global}}} \right| + \xi \left| \frac{(\frac{\partial f}{\partial x})^2_{\max \text{ local}}}{(\frac{\partial f}{\partial x})^2_{\max \text{ global}}} \right|.$$

Dans cette dernière équation, un coefficient fixé par l'utilisateur  $\xi$  permet d'ajuster la sensibilité accordée au gradient. Plus  $\xi$  est élevé, plus le gradient prend de l'importance vis-à-vis du hessien et plus les valeurs propres sont augmentées. Une valeur pour  $\xi$  égale ou inférieure à 1,0 permet de diminuer les ratios de tailles observés suite à l'adaptation comme le montre le tableau 2.3. Les effets de bords sont par contre augmentés lorsque le gradient est considéré. Dans tous les cas ici,  $\chi_{\text{threshold}} = 0,1$ .

## 2.5 Régularité des maillages

La reconstruction du hessien par la méthode QF assure une bonne régularité des maillages, mais ce n'est pas assez. Les tests effectués dans ce mémoire ont montré qu'environ 50% de la régularité nécessaire est obtenue lors de la reconstruction du hessien. La partie restante est assurée par des algorithmes dédiés de lissage de la métrique et par un choix judicieux du paramètre « critère de forme » du remaillieur. Ces sujets sont discutés ci-dessous. En premier lieu, une nouvelle méthode de lissage est introduite.

### 2.5.1 Lissage de la métrique pour régulariser la gradation des volumes élémentaires

La méthode de lissage selon le rapport des volumes a été développée afin de contrôler la gradation des volumes élémentaires. Selon le tableau 1.4, il est aussi important d'avoir des ratios de volumes faibles que des ratios de longueurs d'arêtes faibles. L'algorithme itératif implémenté est semblable à celui de Borouchaki *et al.* (1998), mais au lieu de considérer un ratio de longueurs, on calcule le ratio des volumes aux noeuds de l'arête. On ne change pas les directions propres des éléments, ni l'étirement, mais seulement la taille locale. Le pseudo-code est donné ci-dessous :

1. Bâtir une liste des arêtes à inspecter ;
2. Calculer les longueurs euclidiennes de toutes les arêtes ;
3. Boucler sur les arêtes. Tant qu'il reste des arêtes à inspecter :
  - Calculer les longueurs moyennes  $\bar{h}$  aux deux noeuds de l'arête avec l'équation (2.6) ;
  - Calculer la longueur de l'arête dans la métrique  $\ell_{AB}$  avec l'équation (2.7) où  $A$  et  $B$  sont les deux sommets de l'arête ;
  - Calculer le ratio des tailles moyennes  $C(AB)$  selon l'équation (2.8) ;
  - Si  $C(AB) > \beta$  et  $h(B) > h(A)$ , remplacer  $\mathcal{M}(B)$  par  $\frac{\mathcal{M}(B)}{\mu^2}$ . Si  $h(A) > h(B)$ , remplacer  $\mathcal{M}(A)$  par  $\frac{\mathcal{M}(A)}{\mu^2}$ . Marquer l'arête pour inspection pour l'itération suivante.

Dans cet algorithme,  $\beta$  est le ratio maximum admissible fixé par l'utilisateur. Le déterminant du tenseur est utilisé afin de trouver une longueur moyenne  $\bar{h}$  à chaque extrémité de l'arête :

$$\bar{h} = \frac{1}{\det(\mathcal{M})^{(1/6)}} \quad (2.6)$$

pour un tenseur  $3 \times 3$ . La longueur de l'arête mesurée en prenant en compte la métrique  $\ell_{AB}$  est donnée par

$$\ell_{AB} = \|\vec{AB}\| \int_0^1 \frac{1}{h(t)} dt.$$

où le paramètre  $t$  varie linéairement de 0 à 1 le long de l'arête. Une expression pour  $h$  est trouvée en supposant une interpolation linéaire des valeurs propres le long des arêtes,

$$\lambda(t) = \lambda(A) + t[\lambda(B) - \lambda(A)].$$

Cette interpolation est celle utilisée présentement dans le logiciel *OORT*. Par la suite, on utilise l'équation (2.3) pour retrouver  $h$  :

$$\frac{1}{h(t)^2} = \frac{1}{h(A)^2} + t \left( \frac{1}{h(B)^2} - \frac{1}{h(A)^2} \right);$$

$$h(t)^2 = \frac{h^2(A) h(B)^2}{h(B)^2 + t(h(A)^2 - h(B)^2)}.$$

La relation obtenue pour la longueur  $\ell_{AB}$  est alors

$$\ell_{AB} = \frac{2}{3} \|\vec{AB}\| \left[ \frac{h(A)/h(B) + h(B)/h(A) + 1}{h(A) + h(B)} \right]. \quad (2.7)$$

$C(AB)$  et  $\mu$  sont calculés de la même façon que le fait Borouchaki *et al.* (1998) :

$$C(AB) = \max \left( \frac{\overline{h(A)}}{\overline{h(B)}}, \frac{\overline{h(B)}}{\overline{h(A)}} \right)^{1/\ell_{AB}} \quad \text{et} \quad \mu = \left( \frac{\beta}{C(AB)} \right)^{1/\ell_{AB}}. \quad (2.8)$$

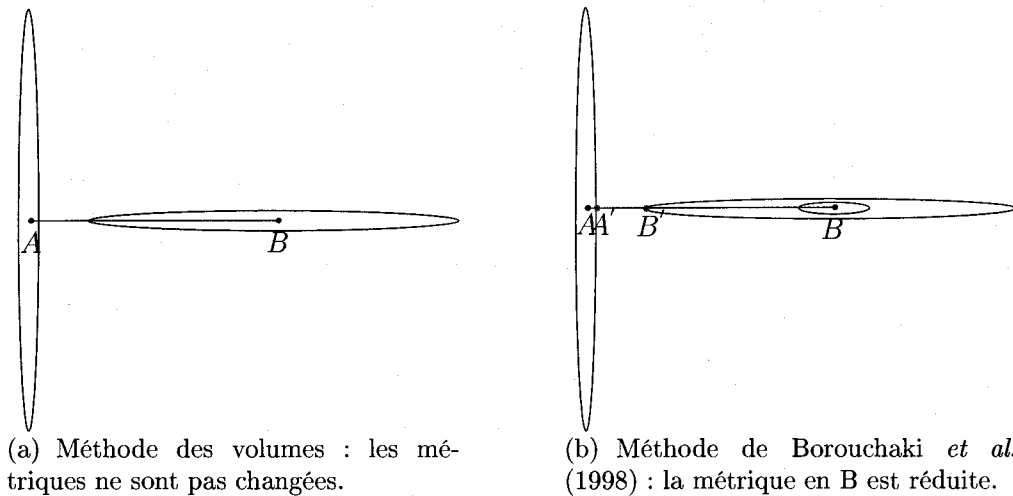


Figure 2.10 Différences entre les méthodes basées sur le volume et les arêtes.

Un exemple de la méthode est présenté à la figure 2.10(a) où une arête  $AB$  est illustrée de même que les tenseurs nodaux aux deux extrémités. Selon la méthode des volumes, aucun tenseur n'est modifié car le volume spécifié par chaque tenseur est identique. Si l'on se basait sur le ratio de longueurs, comme le fait Borouchaki *et al.* (1998), le tenseur en  $B$  serait modifié. La longueur des segments  $AA'$  et  $BB'$  serait d'abord mesurée avec la position  $A'/B'$  correspondant à l'intersection de l'arête et du tenseur métrique en  $A/B$  tel que l'illustre la figure 2.10(b). Le ratio de longueurs  $BB'/AA'$  étant très élevé, la réduction en  $B$  est réalisée.

### 2.5.2 Lissage de la métrique : comparaison de trois méthodes

Trois méthodes de lissage de métriques ont été comparées. En ordre croissant de qualité, on a la méthode de Borouchaki *et al.* (1998), puis la méthode volumique et enfin la méthode de Li *et al.* (2004). Cette dernière a été modifiée pour corriger les trois faiblesses identifiées à la section 1.2.4.2. Pour chaque méthode, trois tests ont été réalisés avec des ratios limites  $\beta$  fixés à 1,1, 1,5 et 2,0. Suite aux calculs et aux lissages des métriques, les maillages ont été adaptés. Les ratios de tailles des



Tableau 2.4 Lissage de métrique pour des maillages de tétraèdres. Avant adaptation :  
 $VER_{\max} = 5,6$ ;  $ELR_{\max} = 2,8$ ;  $\theta_{\min} = 21,1^\circ$ .

	Méthodes	ratio spécifié	VER max obtenu	ELR max obtenu
1	Borouchaki <i>et al.</i> (1998) (ratio d'arêtes)	1,1	40,8	13,2
		1,5	185,9	13,9
		2,0	55,8	15,0
2	Volumique (ratio de volumes)	1,1	39,5	12,4
		1,5	53,6	14,0
		2,0	43,3	15,9
3	Li <i>et al.</i> (2004) (longueurs et directions)	1,1	6,5	5,6
		1,5	21,7	12,2
		2,0	39,9	14,2
4	Méthodes 1 et 2 combinées	1,1	76,2	8,2
		1,5	63,2	15,6
		2,0	169,4	15,5
5	sans lissage		80,7	14,9

Tableau 2.5 Lissage de métrique pour des maillages d'hexaèdres. Avant adaptation :  
 $VER_{\max} = 15,4$ ;  $ELR_{\max} = 12,7$ ;  $\theta_{\min} = 18,2^\circ$ .

	Méthodes	ratio spécifié	VER max obtenu	ELR max obtenu
1	Borouchaki <i>et al.</i> (1998) (ratio d'arêtes)	1,1	4,3	4,8
		1,5	6,8	13,2
		2,0	10,1	12,4
2	Volumique (ratio de volumes)	1,1	3,2	5,1
		1,5	7,0	11,3
		2,0	10,1	11,8
3	Li <i>et al.</i> (2004) (longueurs et directions)	1,1	2,4	5,7
		1,5	6,4	10,0
		2,0	8,9	10,7
4	Méthodes 1 et 2 combinées	1,1	2,4	3,5
		1,5	5,5	10,7
		2,0	9,1	11,9
5	sans lissage		10,5	11,8

maillages adaptés sont rapportés dans le tableau 2.4 pour des maillages tétraédriques et dans le tableau 2.5 pour des maillages hexaédriques.

De façon générale pour les tétraèdres, les ratios de tailles obtenus (VER et ELR) lorsqu'un lissage a été effectué sont plus faibles que les ratios obtenus sans lissage. Il n'y a que la méthode 1 et la méthode 4 qui donnent des ratios plus élevés. La méthode donnant les ratios les plus faibles est celle de Li *et al.* (2004). Pour les hexaèdres, les ratios obtenus (VER) avec lissage sont toujours inférieurs aux ratios sans lissage. La meilleure méthode ici est celle qui combine le lissage des longueurs et des volumes. Cette méthode a été testée afin d'accélérer le lissage. En effet, il est

nécessaire d'effectuer, en moyenne 1500 itérations avec la méthode 3 contre 50 pour la méthode 1 ou 2. D'autres tests, non présentés ici, ont permis de conclure que pour les hexaèdres, la méthode de Li *et al.* (2004) est encore la meilleure. Celle-ci sera favorisée dans la suite de ce travail. Selon les résultats obtenus, le paramètre  $\beta$  doit être fixé à une valeur près de 1,1 pour obtenir les ratios de tailles les plus faibles. Dans tous les cas dans la suite de ce travail,  $\beta$  sera fixé entre 1,1 et 1,5.

Pour tous les cas tests, on observe un écart important entre les ratios  $\beta$  spécifiés en entrée et les ratios obtenus. Cet écart est aussi observé par Borouchaki *et al.* (1998) et Li *et al.* (2004) dans leurs articles respectifs. Deux raisons expliquent cet écart. Premièrement, il n'est pas toujours possible d'atteindre le ratio spécifié. Ce phénomène est observé uniquement pour la méthode 3. Par exemple, pour le maillage d'hexaèdres pour lequel un ratio maximum de longueurs de 1,5 est spécifié, la méthode de lissage ne converge plus après 1364 itérations et à ce stade, le ratio de longueurs est de 1,8. Deuxièmement, lors de l'adaptation, il n'est pas toujours possible pour le remailleur de satisfaire complètement la métrique fournie en entrée. Cela peut être causé par une convergence insuffisante de ce dernier ou tout simplement parce qu'il est mathématiquement impossible de satisfaire toutes les contraintes de tailles spécifiées par la métrique. Dans cette étude, les paramètres du remailleur ont été ajustés de façon à assurer un maximum de convergence. Pour les maillages d'hexaèdres, 300 itérations de déplacement ont été demandées. Pour les maillages de tétraèdres, 15 itérations d'adaptation ont été demandées, ces dernières incorporant chacune 15 itérations de déplacement. Ainsi, pour la méthode de Borouchaki *et al.* (1998) avec des tétraèdres et un ratio spécifié de 1,5, on peut supposer que le remailleur est incapable de satisfaire la métrique lissée qui lui est fournie.

Il est surprenant de constater des ratios de longueurs d'arêtes ELR plus faibles avec la méthode de lissage des volumes plutôt qu'avec la méthode de lissage des arêtes,

et ce pour les hexaèdres et tétraèdres. Si l'on regarde la figure 2.10(b), on remarque que les segments  $AA'$  et  $BB'$  sont de tailles différentes bien que les volumes soient identiques. Pour cette raison, on pourrait s'attendre à obtenir des ratios de longueurs élevés avec la méthode 2, ce qui n'est pas le cas. Probablement que le lissage effectué lors de la reconstruction du hessien avec la méthode QF est responsable des bas ratios de longueurs observés à la suite du lissage des volumes.

### 2.5.3 Influence du critère de forme dans le remaillageur

On peut lisser aussi en modifiant le critère de forme  $\gamma$  dans le remaillageur. C'est en fait le seul paramètre du remaillageur explicitement relié à la qualité géométrique des éléments. Celui-ci est défini pour des tétraèdres par

$$\gamma = \frac{12(3V)^{2/3}}{(\sum_{i=1}^6 \ell_i)^2} \quad (2.9)$$

où  $V$  est le volume élémentaire et  $\ell_i$  la longueur euclidienne de l'arête  $i$ . Le critère de forme varie de 0 à 1. Plus la valeur de  $\gamma$  est près de 1, plus la forme est isoédrique. Si  $\gamma$  se rapproche de 0, alors la forme est aplatie. Le volume est calculé selon

$$V = \frac{\sqrt{P - Q + R}}{12} \quad (2.10)$$

avec

$$\begin{aligned} P &= 4a^2b^2d^2; \\ Q &= a^2(b^2 + d^2 - e^2)^2 - b^2(a^2 + d^2 - f^2)^2 - d^2(a^2 + b^2 - c^2)^2; \\ R &= (b^2 + d^2 - e^2)(a^2 + d^2 - f^2)(a^2 + b^2 - c^2), \end{aligned}$$

où les lettres  $a$  à  $f$  sont les longueurs euclidiennes des arêtes tel que l'illustre la figure 2.11.

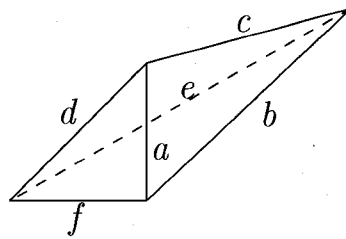
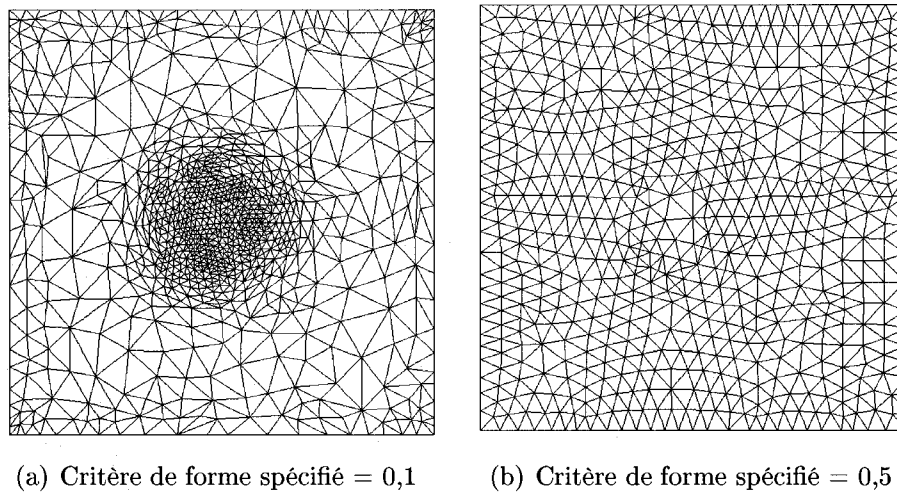


Figure 2.11 Identification des arêtes pour le calcul du critère de forme d'un tétraèdre.



(a) Critère de forme spécifié = 0,1

(b) Critère de forme spécifié = 0,5

Figure 2.12 Influence d'un critère de forme élevé.

La figure 2.12 présente une comparaison entre des maillages obtenus avec des critères de forme de 0,1 et 0,5. On voit que le critère ne doit pas être trop élevé sinon le maillage résultant est presque totalement isotrope et n'est plus adapté au tourbillon imposé au centre du domaine. De façon générale, lorsqu'une forme minimale est spécifiée au remaillieur *OORT* par le biais du critère de forme et qu'une portion importante des éléments initiaux ont une forme plus faible que la spécification, alors l'adaptation est mauvaise.

On rapporte dans la figure 2.13 les critères de forme ainsi que l'angle minimale  $\theta_{min}$  entre les faces pour des simulations où le critère décroît continuellement. Ici, des hexaèdres sont utilisés. On remarque que l'angle minimum entre deux faces diminue

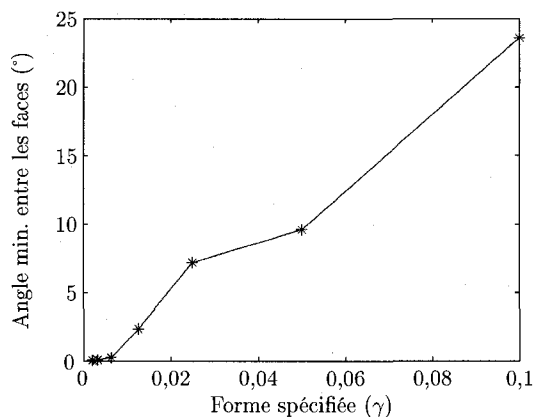


Figure 2.13 Influence d'un critère de forme faible.

à mesure que le critère décroît. Ainsi, il faut avoir un critère de forme petit, mais pas trop, car on doit respecter l'angle minimum acceptable identifié au tableau 2.2. La valeur seuil retenue pour le critère de forme  $\gamma$  pour les tétraèdres est de 0,1 tandis qu'elle est de 0,005 pour des hexaèdres.

## 2.6 Algorithme pour garder le nombre d'éléments constant

Cet algorithme a été implémenté pour éviter les trop grandes variations de la taille des maillages. Typiquement, sans une limitation de la taille, le nombre de noeuds peut facilement être multiplié par 100 lors des premières itérations globales solveur-remailleur. Le but recherché est de débiter la boucle solveur-remailleur avec un maillage d'une certaine taille et de la terminer avec un maillage adapté comptant environ le même nombre de noeuds et d'éléments qu'au départ. La mise à l'échelle est appliquée seulement pour les maillages de tétraèdres. Avec les hexaèdres, il n'y a que du déplacement de noeuds. Le problème de la variation du nombre de noeuds est absent.

Le pseudo-code de l'algorithme se présente ainsi :

1. pour chaque élément, calculer le volume euclidien réel et le volume spécifié par la métrique ;
2. évaluer, pour chaque élément, le nombre d'éléments qui seront potentiellement construits dans ce volume ;
3. faire la somme sur tout le domaine des éléments qui doivent être créés ;
4. si le nombre d'éléments à être créés est différent du nombre d'éléments visé, mettre à l'échelle les métriques en les multipliant par un facteur commun  $\varphi$  ;
5. répéter les étapes 2 à 4 jusqu'à ce que le nombre d'éléments désiré soit atteint.

Typiquement, après deux mises à l'échelle, on converge vers le nombre d'éléments désiré. Le volume d'un tétraèdre spécifié par la métrique est obtenu par

$$V_{\text{tétraèdre}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \bar{h}^3 \quad (2.11)$$

en se servant de l'équation (2.6) pour évaluer  $\bar{h}$ . Les métriques nodales sont interpolées linéairement terme à terme pour estimer la métrique élémentaire selon l'équation (2.5). Après plusieurs essais avec des cas tests, la constante  $\frac{\sqrt{2}}{12}$  (0,1178) a été changée pour 0,11.

Le facteur  $\varphi$  pour la mise à l'échelle des tenseurs nodaux  $\mathcal{M}_i$  se calcule avec

$$\varphi = \left( \frac{\text{nb d'éléments visé}}{\text{nb d'éléments estimé}} \right)^{2/3} \quad (2.12)$$

Cette expression est construite à partir de

$$\bar{h}_{\text{nouveau}}^3 = \left( \frac{\text{nb d'éléments estimé}}{\text{nb d'éléments visé}} \right) \bar{h}_{\text{actuel}}^3,$$

ré-écrit en employant une formulation basée sur les valeurs propres en se servant de

l'équation (2.3) :

$$\lambda_{\text{nouveau}} = \left( \frac{\text{nb d'éléments visé}}{\text{nb d'éléments estimé}} \right)^{2/3} \lambda_{\text{actuel}}.$$

Le nombre d'éléments visé est le nombre d'éléments au départ de la première itération globale du cycle solveur-remailleur (en réalité, on peut viser n'importe quel nombre d'éléments, mais afin de limiter la variation de taille des maillages, il est préférable de toujours viser le nombre initial). Cette méthode dans laquelle un facteur de mise à l'échelle unique est utilisé pour tous les tenseurs nodaux est préférée à une méthode où une mise à l'échelle locale est effectuée comme dans les travaux de Alauzet *et al.* (2006). En effet, modifier les tenseurs localement avec des facteurs de mise à l'échelle différents modifie le lissage effectué auparavant.

Les points faibles de la méthode de mise à l'échelle présentée ici sont :

- la géométrie n'est pas utilisée pour calculer le volume total du domaine, mais plutôt le maillage ;
- s'il y a des contraintes trop grandes à respecter lors de l'adaptation, le nombre d'éléments qui seront effectivement créés dans un volume donné ne correspond pas au nombre d'éléments estimé ;
- de façon plus générale, le résultat dépend de la convergence du remailleur ;
- l'interpolation des tenseurs nodaux est grossière et fausse l'estimation du nombre spécifié d'éléments à cet endroit.

Néanmoins, malgré ces points faibles, l'utilisation de cet algorithme limite grandement la variation du nombre d'éléments et par ricochet, du nombre de noeuds. Par exemple, après 10 itérations globales solveur-remailleur, on note, dans la majorité des cas, une variation de moins de 25% du nombre de noeuds lorsque le nombre d'éléments visé est le nombre d'éléments au départ de la première itération globale. Si le nombre d'éléments visé est le nombre d'éléments présents dans le maillage avant chaque adaptation, la variation augmente aux environs de 50%.

## 2.7 Transport de la variable d'adaptation

Tel que mentionné dans l'introduction, le principal problème rencontré lors du calcul numérique est la diffusion du tourbillon. Même si le maillage est adapté à partir de la solution obtenue de la résolution numérique des équations de NS, l'adaptation n'est pas efficace loin en aval de l'origine du tourbillon. La diffusion introduite par la discrétisation spatiale fait en sorte que l'intensité des propriétés diminue dans la direction de l'écoulement de sorte qu'en sortie de domaine, il n'y a presque plus de variation des variables vitesses et pression. Pour remédier à ce problème, un certain nombre de possibilités existent parmi lesquelles :

- limiter les métriques à chaque itération pour avoir  $\mathcal{M}_{\text{aval}} \approx \mathcal{M}_{\text{amont}}$  et faire beaucoup d'itérations ;
- lisser les métriques afin de spécifier de petites tailles plus loin vers l'aval ;
- raffiner en fonction de la distance entre le noeud et le centre du tourbillon, peu importe que celui-ci soit fort ou faible ;
- transporter la variable d'adaptation vers l'aval de l'écoulement pour compenser les pertes causées par la diffusion numérique.

La troisième possibilité a des avantages certains, car elle permettrait de faire un maillage structuré englobant le vortex. Par contre, l'implantation de cette méthode paraît assez compliquée avec le solveur commercial *ANSYS-CFX*. De plus, rien ne garantit sa supériorité par rapport à la dernière méthode. En ce qui concerne le lissage, cette stratégie peut en fait être couplée avec la dernière proposition.

La méthode retenue est la quatrième. Elle consiste à additionner la quantité transportée  $\phi_{\text{transp}}$  au champ original  $\phi_{\text{original}}$  pour obtenir la variable d'adaptation  $\phi$  :

$$\phi = \phi_{\text{transp}} + \phi_{\text{original}}. \quad (2.13)$$



L'équation de transport utilisée pour calculer  $\phi_{\text{transp}}$  est

$$\rho \frac{\partial(\phi_{\text{transp}})}{\partial t} + \rho \vec{\nabla} \cdot (\vec{U} \phi_{\text{transp}}) = \vec{\nabla} \cdot \left[ (D_\phi + \eta_t) \vec{\nabla} \cdot \phi_{\text{transp}} \right] + P_\phi - K_\phi \quad (2.14)$$

où  $D_\phi$  est la diffusivité de la variable d'adaptation  $\phi$  en l'absence de convection,  $P_\phi$  est le terme de production qui dépend du maillage et  $K_\phi$  est le terme de destruction. On notera que cette nouvelle équation de transport est résolue indépendamment des équations de continuité et de quantité de mouvement dans le solveur. Elle n'influence donc pas le calcul de l'écoulement.

Selon cette méthode, l'évaluation précise des pertes numériques est importante de façon à ajouter la bonne quantité de la variable d'adaptation par l'intermédiaire du terme de production. De façon analogue à ce qui a été fait par Krieger et Wimmer (2003), on introduit une viscosité numérique  $\eta_{\text{num}}$ . Celle-ci tient compte de la viscosité artificielle introduite par la discrétisation spatiale liée au maillage, des erreurs d'arrondis du solveur, de la viscosité introduite par le schéma de différences finies et de toutes autres sources de viscosité artificielle introduites par le solveur (exception faite de la viscosité turbulente) :

$$\eta_{\text{num}} = \eta_{\text{maillage}} + \eta_{\text{erreurs d'arrondi}} + \eta_{\text{schéma différences finies}} + \dots$$

La viscosité numérique est reliée à la diffusion numérique : plus la diffusion numérique est importante, plus la viscosité numérique est importante. Afin de diminuer la diffusion numérique, la discrétisation spatiale est modifiée par l'algorithme d'adaptation de maillages. La viscosité totale est donc la somme de la viscosité moléculaire, turbulente et numérique :

$$\eta_{\text{totale}} = \eta_{\text{num}} + \underbrace{\eta_t + \eta_{\text{mol}}}_{\eta_{\text{eff}}} \quad (2.15)$$

Le terme de production dépend de la viscosité numérique :  $P_\phi = P_\phi(\eta_{num})$ . Plus de détails concernant  $P_\phi$ ,  $K_\phi$  et le calcul de  $\eta_{num}$  seront donnés à la section 3.3.1 en fonction du choix de la variable  $\phi$ .

## 2.8 Critère de convergence du cycle solveur/mailleur

On s'intéresse ici à la convergence du cycle global solveur-remailleur pour un nombre de noeuds constant. On distingue deux situations. Premièrement, lorsqu'une solution analytique est connue, on compare le résultat numérique à celle-ci en considérant les normes  $L^\infty$  ou  $L^2$  :

$$\|\phi - \phi_h\|_{L^\infty} \quad \text{ou} \quad \|\phi - \phi_h\|_{L^2}. \quad (2.16)$$

Les normes absolues écrites ci-dessus mais aussi les normes relatives permettent une bonne évaluation de la convergence. Dans notre cas, on compare la vitesse tangentielle analytique à la vitesse tangentielle obtenue du calcul numérique à la sortie du domaine de calcul. Quinze points distribués judicieusement ont été choisis suivant trois directions distinctes (horizontale, verticale et diagonale) pour fins de comparaison (45 points au total). S'il n'y a pas de solution analytique connue, quand le tourbillon est turbulent par exemple, on compare plutôt deux solutions successives en considérant les normes  $L^\infty$  ou  $L^2$  relatives :

$$\frac{\|\phi_i - \phi_{i-1}\|_{L^\infty}}{\|\phi_{i-1}\|_{L^\infty}} \quad \text{ou} \quad \frac{\|\phi_i - \phi_{i-1}\|_{L^2}}{\|\phi_{i-1}\|_{L^2}}. \quad (2.17)$$

On interpole la solution du maillage  $i$  aux noeuds du maillage  $i - 1$ . Lorsque l'erreur relative ne diminue plus, le processus adaptatif est arrêté.

## CHAPITRE 3

### PREMIER CAS TEST : SIMULATIONS SANS LE PROFIL

Dans ce premier cas test, une analyse sans adaptation a d'abord été faite. Par la suite, la méthode d'adaptation a été appliquée. On notera au passage qu'une méthode d'adaptation de maillage a posteriori n'est pas nécessaire ici, car on connaît déjà la position du tourbillon. L'étude de ce cas test est un préambule au cas plus compliqué d'un tourbillon qui évolue aléatoirement dans l'espace 3d. Un tourbillon laminaire est d'abord étudié. Le problème avec turbulence est étudié à la section 3.2.6.

#### 3.1 Présentation du cas test

On ne considère pas le profil dans ce cas test et le tourbillon normalement induit par celui-ci est remplacé par un tourbillon analytique placé au centre de la veine d'essai. Une vitesse tangentielle de même qu'une vitesse axiale sont spécifiées en entrée selon les équation (1.2) et (1.3) respectivement. La figure 1.1 présente les courbes des vitesses en entrée ainsi que l'évolution vers l'aval que l'on devrait normalement obtenir par calcul numérique. Pour ne pas avoir de singularité à l'origine, la distance  $x$  est remplacée par  $x + 2$  dans ces formules. La figure 3.1 illustre la géométrie dont les dimensions correspondent aux dimensions du tunnel de cavitation du LMH. La longueur  $L$  de 0,75 m équivaut à 475 fois le rayon du tourbillon à la section d'entrée. La largeur est de 0,15 m. Le domaine a d'abord été maillé en considérant un quart du tunnel avec des conditions périodiques aux interfaces, mais à l'intersection des plans périodiques, les dérivées de la vitesse obtenues de *ANSYS-CFX* étaient nulles, ce qui est faux. Pour cette raison, le domaine complet est considéré dans ce qui suit. Le

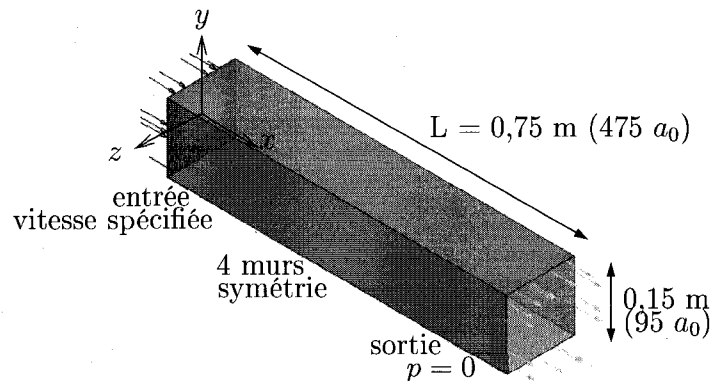


Figure 3.1 Domaine 3D et profils de vitesse spécifiés en entrée. Le tourbillon se développe selon l'axe  $x$ .

Le tourbillon analytique imposé à l'entrée est un tourbillon qui pourrait normalement être généré par le profil NACA 16020 étudié. En fait, les paramètres du tourbillon analytique proviennent de la thèse de Deniset (1996) et sont donnés au tableau 1.1.

## 3.2 Analyse sans adaptation

### 3.2.1 Étude de la condition limite en aval

La condition limite en aval est posée sur la pression. Il a été mentionné au chapitre 1 que l'imposition d'une pression à la sortie du domaine pouvait diffuser le tourbillon en forçant le solveur à atteindre cette pression. Nous vérifions maintenant si cela est effectivement le cas. La figure 3.2 illustre l'évolution du rayon du tourbillon selon la distance axiale et l'évolution du coefficient de pression  $C_p$  pour trois conditions :

1. pression constante imposée en sortie,  $p = 0$  ;
2. pression moyenne imposée en sortie,  $\bar{p} = 0$  ;
3. pression moyenne imposée en sortie avec un domaine deux fois plus long,  $\bar{p} = 0$ .

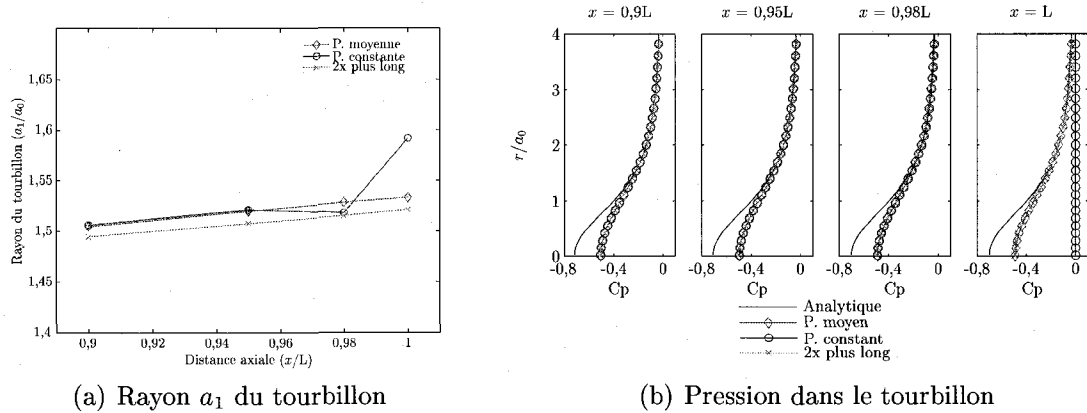


Figure 3.2 Influence de la condition limite en aval sur la diffusion du tourbillon.

Tel qu'on le voit à la figure 3.2(b), lorsqu'on impose une pression constante nulle en sortie, celle-ci change rapidement pour se ramener à 0. Cette augmentation de pression coïncide avec une augmentation du rayon du tourbillon, i.e. une diffusion accrue, visible sur la figure 3.2(a). Le rayon  $a_1$  du tourbillon correspond toujours ici à la position radiale pour laquelle la vitesse tangentielle est maximale. La diffusion prononcée du tourbillon n'est observée que dans les derniers 2% du domaine. Dans tous les autres cas, aucun changement brusque n'apparaît. Les résultats obtenus avec le domaine de longueur  $L$  sont comparés aux résultats obtenus avec un domaine 2 fois plus long. Bien que ce dernier soit légèrement moins diffusif, les rayons sont très semblables. On en conclut donc que l'imposition d'une pression moyenne en sortie a peu d'effet sur la diffusion du tourbillon.

### 3.2.2 Étude de la forme du domaine

Une comparaison entre des domaines à section carrée et circulaire a été menée pour vérifier si le fait d'utiliser un domaine à section carrée modifie l'axisymétrie du tourbillon. La figure 3.3 illustre trois maillages utilisés dans l'étude : un maillage à section carrée dont les noeuds sont concentrés sur les axes, un maillage à section

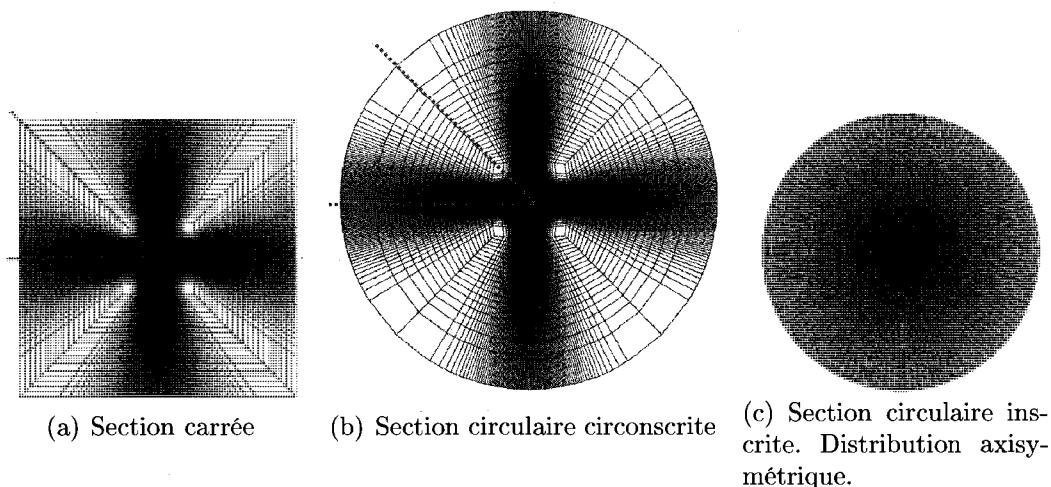


Figure 3.3 Domaines à sections carrée et circulaires.

circulaire circonscrite au carrée et ayant la même distribution de noeuds que ce dernier et un deuxième maillage circulaire ayant une distribution de noeuds uniforme. L'espacement radial des mailles est le même dans la partie centrale des maillages.

Dans un premier temps, on compare les valeurs de vitesse relevées sur une droite horizontale et sur une droite diagonale avec les valeurs de vitesse obtenues du maillage axisymétrique. Les résultats sont reportés à la figure 3.4(a) pour le maillage à section carrée et le maillage à section circulaire ayant la même distribution de noeuds. La concordance est meilleure lorsque la vitesse est relevée selon la droite horizontale, i.e. la direction la plus densément maillée. À la figure 3.4(b), on compare la vitesse tangentielle moyenne obtenue avec le maillage à section carrée et le maillage à section circulaire circonscrite. Celles-ci sont pratiquement identiques. Ainsi, ce n'est pas tant la forme du domaine, ni l'angle entre les faces des éléments, mais plutôt la structure régulière des maillages qui permet une bonne capture du tourbillon.

Il existe toutefois une différence entre les deux domaines. Le moment angulaire diminue entre l'entrée et la sortie dans le cas du domaine à section carrée tandis qu'il reste presque constant dans le cas du domaine à section circulaire. En l'absence

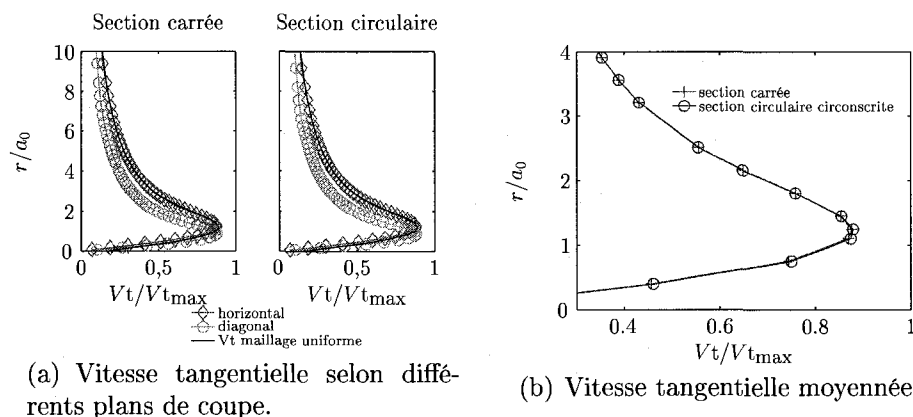


Figure 3.4 Influence de la forme du domaine sur les résultats numériques ( $x = L/2$ ).

Tableau 3.1 Variation du moment angulaire.

Domaine	Variation du moment angulaire au travers du domaine
section carrée	Perte de 7,2%
section circulaire circonscrite	Gain de 0,03%

de forces extérieures comme c'est le cas ici, il devrait normalement se conserver. Les valeurs numériques sont rapportées dans le tableau 3.1. Ainsi, le domaine à section carrée freine un peu le mouvement tourbillonnant. Ceci n'est pas observé au centre, car les vitesses tangentielles sont semblables, mais plutôt près des parois. Cette diminution du moment angulaire explique probablement pourquoi Deniset (1996) trouve près des parois un tourbillon de faible intensité tournoyant en sens opposé au tourbillon principal.

### 3.2.3 Étude de l'influence du type d'éléments

Une comparaison est réalisée entre des éléments tétraédriques et hexaédriques afin de déterminer si un élément est plus précis que l'autre. Lors du maillage d'une géométrie, il est important de considérer une technique rapide et permettant d'obtenir des résultats précis lors des simulations numériques. Les techniques de maillage pour

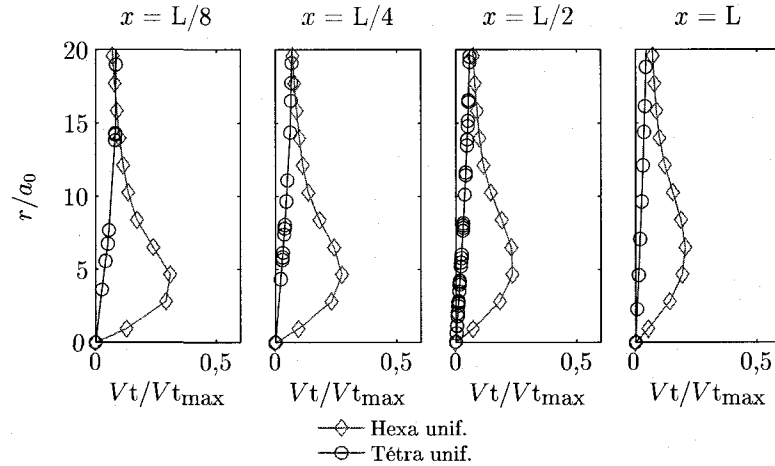


Figure 3.5 Vitesse tangentielle : Distribution uniforme des noeuds.

les tétraèdres sont généralement rapides car elles ne nécessitent pas de décomposition de la géométrie en blocs. Les techniques reliées aux hexaèdres requièrent la plupart du temps une décomposition en blocs et sont plus longues pour cette raison. On considère d'abord une distribution de noeuds uniforme à travers le domaine. Les deux maillages ont 780K noeuds. Le maillage de tétraèdres a été fait avec le logiciel *ICEMCFD* avec la technique *octree*. Les résultats sont présentés à la figure 3.5. On voit clairement que les hexaèdres captent mieux le tourbillon que les tétraèdres, car la vitesse tangentielle est plus élevée. Cela s'explique probablement par la distribution de noeuds parfaitement régulière des hexaèdres. Le maillage de tétraèdres présente une distribution de noeuds moins régulière. À la figure 3.5, les points illustrés correspondent à l'intersection entre les frontières des éléments et les droites horizontales situées à  $x = L/8, L/4, L/2$  et  $L$ .

Lorsque les noeuds sont concentrés dans le centre, à l'endroit occupé par le tourbillon, la différence entre les hexaèdres et les tétraèdres s'estompe de sorte que les deux donnent des résultats similaires comme le montre la figure 3.6. Ici, malgré le fait que seulement 125K noeuds soient utilisés, la vitesse tangentielle est mieux captée, et ce pour les deux types d'éléments. Le maillage de tétraèdres a été fait avec



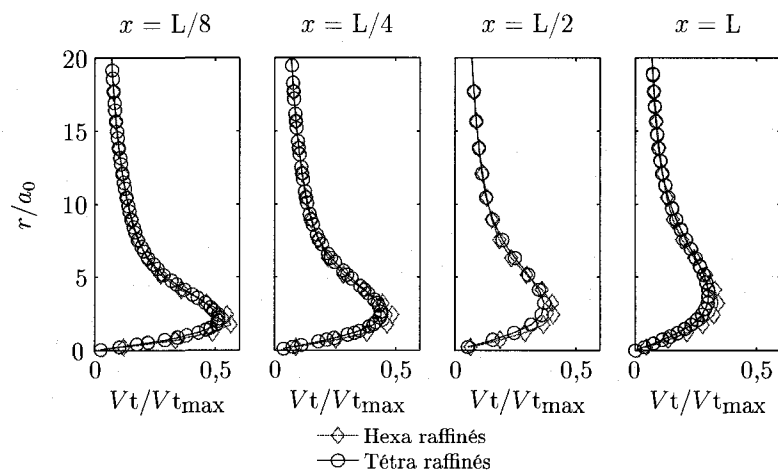


Figure 3.6 Vitesse tangentielle : Noeuds concentrés au centre du domaine.

le logiciel *CFXMesh* qui utilise une technique de progression de fronts. Les mailles hexaédriques sont alignées avec la direction principale de l'écoulement.

Le fait que les mailles d'hexaèdres soient alignées avec la direction principale de l'écoulement a peu d'influence sur la précision des résultats. Par contre, le solveur prend plus de temps pour converger lorsque celles-ci ne sont pas alignées. La figure 3.7 présente deux maillages utilisés pour fins de comparaison. Le deuxième a des mailles non-alignées avec l'écoulement, mais tout de même distribuées selon une certaine structure. La vitesse tangentielle maximale en sortie est presque la même (moins de 2% de différence), mais le temps pour obtenir la convergence est 3,2 fois plus important avec le maillage dont les mailles ne sont pas alignées avec l'écoulement.

### 3.2.4 Influence du raffinement axial et transverse

Le domaine a été maillé avec 20, 42 et 100 noeuds dans la direction axiale correspondant respectivement à une taille de maille  $\delta$  de  $26,0 a_0$ ,  $12,7 a_0$  et  $5,0 a_0$ . La distribution nodale dans la direction transverse est la même. La figure 3.8(a) illustre

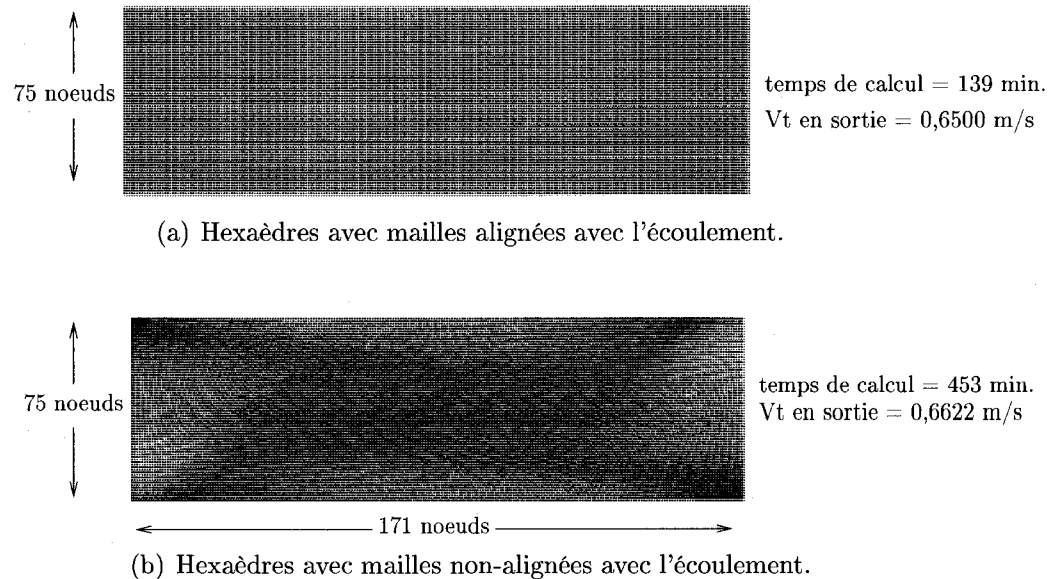


Figure 3.7 Influence de l'orientation des mailles du maillage. Maillages de 961K noeuds.

l'évolution du rayon  $a_1$  du tourbillon en fonction de la distance axiale. Les trois courbes sont similaires. Le raffinement axial a donc peu d'importance pour un tourbillon et c'est normal. C'est en effet selon le rayon que les propriétés varient le plus rapidement. Dans la figure 3.8(b), le raffinement transverse est étudié tout en gardant inchangé l'espacement axial. Les tailles de mailles dans la direction transverse sont de  $0,54 a_0$ ,  $0,36 a_0$  et  $0,27 a_0$  respectivement. On voit que le raffinement transverse a une grande importance sur le résultat final : c'est lui qui influence le plus la diffusion du tourbillon. Lorsque le maillage contient peu de noeuds dans la direction transverse, le rayon du tourbillon augmente plus rapidement que le rayon de la solution analytique.

### 3.2.5 Viscosité numérique équivalente

Ce cas test laminaire permet un calcul facile et exact de la viscosité numérique  $\nu_{num}$  en comparant la solution numérique avec la solution analytique. Une représenta-

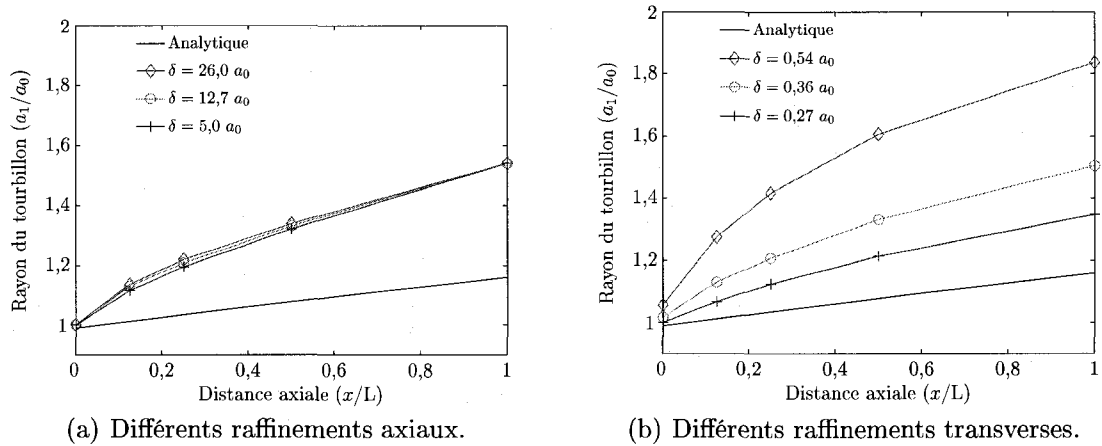


Figure 3.8 Influence du raffinement axial et du raffinement transverse : évolution du rayon  $a_1$  du tourbillon en fonction de la distance axiale.

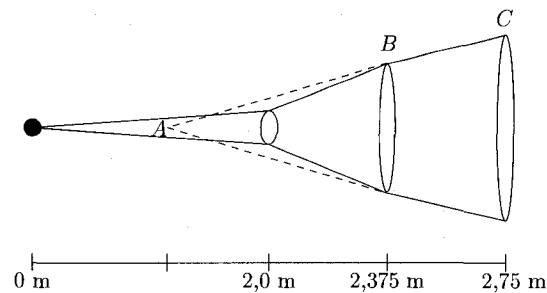


Figure 3.9 Calcul de  $\eta_{num}$  à différentes sections du domaine.

tion schématique du tourbillon est présentée à la figure 3.9. La section d'entrée du domaine de calcul est située à  $x = 2$  m. Avant cette distance, seule la viscosité moléculaire intervient. Par contre, en aval de cette marque, une viscosité numérique est introduite par la discrétisation spatiale des équations. On peut découper le domaine en autant de tranches que l'on souhaite. Pour fin d'analyse, il a été découpé en quatre tranches, qui sont situées à  $x = 2 + L/8, 2 + L/4, 2 + L/2$  et  $2 + L$ . Si on considère la viscosité numérique  $\eta_{num}$  constante entre deux sections, alors l'origine du tourbillon change de position et n'est plus située à  $x = 0$ , mais plutôt à une distance intermédiaire entre 0 et 2 m comme le montre la figure 3.9.

Le calcul de la viscosité numérique s'établit à partir de l'équation (1.4) que l'on réécrit pour deux positions arbitraires  $i$  et  $i - 1$ . En isolant  $\nu$ , on obtient

$$\nu_{totale} = \frac{u_0 (a_i^2 - a_{i-1}^2)}{4\Delta x}, \quad (3.1)$$

où  $\nu$  est maintenant la viscosité cinématique totale. Dans l'équation (3.1), le rayon  $a$  du tourbillon est pris comme étant le rayon au maximum de vitesse tangentielle. On utilise les rayons obtenus par post-traitement de la solution numérique. Les courbes de vitesse tangentielles sont au préalable rendues lisses par régression avec une fonction analytique. Après avoir trouvé  $\nu_{totale}$ , on lui soustrait  $\nu_{mol}$  pour trouver  $\nu_{num}$ . Des résultats pour des maillages hexaédriques et tétraédriques sont présentés à la figure 3.10 sous la forme de viscosités dynamiques  $\eta_{num}/\eta_{mol}$ .

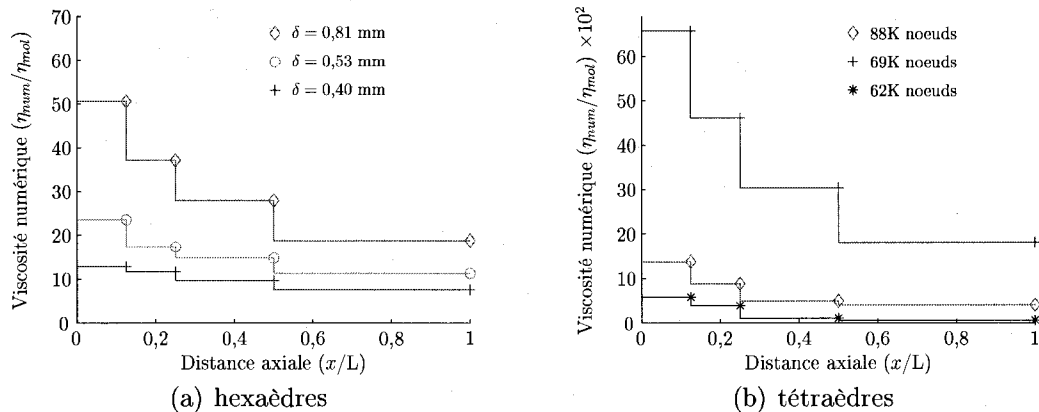


Figure 3.10 Viscosité numérique équivalente

On voit que la viscosité numérique est très forte au début puis décroît asymptotiquement à mesure que la taille du tourbillon se rapproche de la taille des mailles. De plus, l'ordre de grandeur de la viscosité varie énormément en fonction du maillage. Pour des maillages hexaédriques fins,  $\eta_{num}$  est 10 à 20 fois la viscosité moléculaire. Cependant, pour des maillages tétraédriques grossiers, le rapport est beaucoup plus élevé : jusqu'à 6400 fois, ici. On notera aussi que la viscosité numérique n'est pas

seulement fonction du nombre de noeuds dans le maillage, mais également de la répartition de ceux-ci. Dans le cas des hexaèdres, on a la même répartition de noeuds, mais la taille des mailles augmente de sorte que les noeuds deviennent plus rapprochés. Dans le cas des tétraèdres, la répartition des noeuds est différente. On peut donc avoir deux maillages ayant le même nombre de noeuds tout en ayant une viscosité numérique très différente.

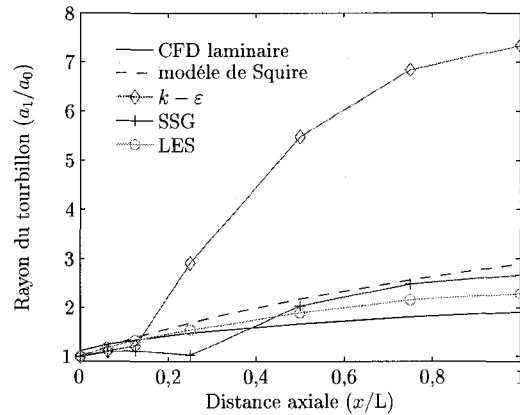
### 3.2.6 Écoulement turbulent

La turbulence est maintenant prise en compte. Trois modèles de turbulence sont d'abord comparés. Par la suite, une modification simple est effectuée au modèle  $k - \varepsilon$  afin d'augmenter sa précision.

#### 3.2.6.1 Comparaison entre trois modèles de turbulence

Une comparaison des modèles de turbulence  $k - \varepsilon$ , SSG et LES a été faite. La figure 3.11 présente l'évolution du rayon du tourbillon en fonction de la distance axiale pour ces trois modèles ainsi que pour une solution de référence turbulente, le modèle de Squire. Pour ce dernier modèle, la viscosité turbulente a été tirée de Govindaraju et Saffman (1971) et vaut  $2,06 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ , soit 18,4 fois la viscosité moléculaire. Cette valeur est une interpolation entre différentes expériences réalisées il y a plusieurs années. Les conditions à l'entrée du domaine pour le modèle  $k - \varepsilon$  sont fixées à l'aide d'une intensité turbulente  $I_t$  et d'une longueur turbulente  $l_t$ . L'intensité turbulente est une indication du niveau de turbulence et est définie par

$$I_t = \frac{\|\vec{u}'\|}{\|\vec{U}\|}.$$



Modèles	Temps de calcul
$k - \varepsilon$	1,25 h
SSG	47,3 h
LES	87,9 h

Figure 3.11 Évolution du rayon  $a_1$  d'un tourbillon turbulent selon trois modèles de turbulence avec les temps de calcul respectifs.

La longueur turbulente est une estimation de la distance moyenne parcourue par une particule fluide lors du mouvement turbulent. Ces deux paramètres sont fixés arbitrairement étant donné qu'il s'agit d'un écoulement théorique à  $I_t = 10\%$  et  $l_t = 0,1 a_0$ . On s'assure néanmoins de respecter la condition  $l_t < a_0$  fixée par Dupont *et al.* (1993) pour ne pas trop diffuser le tourbillon. Les modèles SSG et LES ont utilisé le résultat du calcul de  $k - \varepsilon$  comme point de départ initial. À partir de l'intensité et de la longueur turbulente, les valeurs de  $k$  et  $\varepsilon$  à l'entrée sont retrouvées en se servant de

$$k = \frac{3}{2} I_t^2 u_0^2 \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{k^{3/2}}{l_t}.$$

La première constatation que l'on tire de la courbe des rayons à la figure 3.11 est que le modèle  $k - \varepsilon$  est beaucoup trop diffusif. En particulier, le rayon augmente significativement aux alentours de  $x = 0,2L$ . Le modèle LES donne une courbe qui varie monotoniquement tandis que la courbe du modèle SSG diminue puis augmente par la suite. Par contre, au final, ces deux modèles sont assez près de la courbe théorique de Squire. Cette précision est obtenue au détriment du temps de calcul. Le modèle  $k - \varepsilon$  à deux équations prend 38 fois moins de temps que le modèle SSG à

7 équations et 70 fois moins de temps que le modèle LES à 13 équations. Les temps sont ramenés sur la base d'un calcul en séquentiel. Les trois modèles ont convergé au même résidu maximum de  $3 \times 10^{-5}$ . Le même maillage comptant 262K noeuds a été utilisé pour les trois modèles de turbulence mais des pas de temps différents ont été assignés.

### 3.2.6.2 Modification du modèle $k - \varepsilon$

La figure 3.12 illustre l'évolution de la production de turbulence définie par l'équation (1.13) et la viscosité turbulente pour trois différentes conditions frontières d'entrée :  $I_t = 10\%$ ,  $5\%$  et  $1\%$ .  $l_t = 0,1 a_0$  pour les trois cas. On observe qu'une forte production de turbulence coïncide avec une forte viscosité turbulente. Par exemple, pour  $I_t = 10\%$ , le maximum de production est obtenu vers  $x = 0,2L$ , soit la même distance que celle où se produit l'augmentation marquée du rayon sur la figure 3.11. On remarque également à la figure 3.12 une influence marquée de la condition frontière de l'intensité turbulente sur  $\eta_t$ , en particulier sur la partie initiale du domaine s'étendant jusqu'à  $x = 0,53L$  (0,40 m) environ. Une étude semblable a été réalisée pour la condition portant sur  $l_t$ , mais son influence est moindre et n'est pas montrée ici. Une fois estompé l'effet de la condition frontière, la viscosité turbulente se stabilise à environ 179K fois la viscosité moléculaire. Ainsi, lorsque le modèle  $k - \varepsilon$  est utilisé,  $\eta_t$  est plus important que  $\eta_{num}$  d'où une diffusion accrue provenant de la modélisation de la turbulence. Par contre, lorsque le modèle SSG ou LES est utilisé, c'est la discrétisation spatiale qui influence le plus la diffusion du tourbillon si cette dernière est trop grossière.

Afin d'obtenir un résultat près de la courbe théorique de Squire, mais en un temps raisonnable, une modification simple du modèle  $k - \varepsilon$  a été faite dans laquelle la production de turbulence est diminuée dans le tourbillon. On choisit de laisser in-

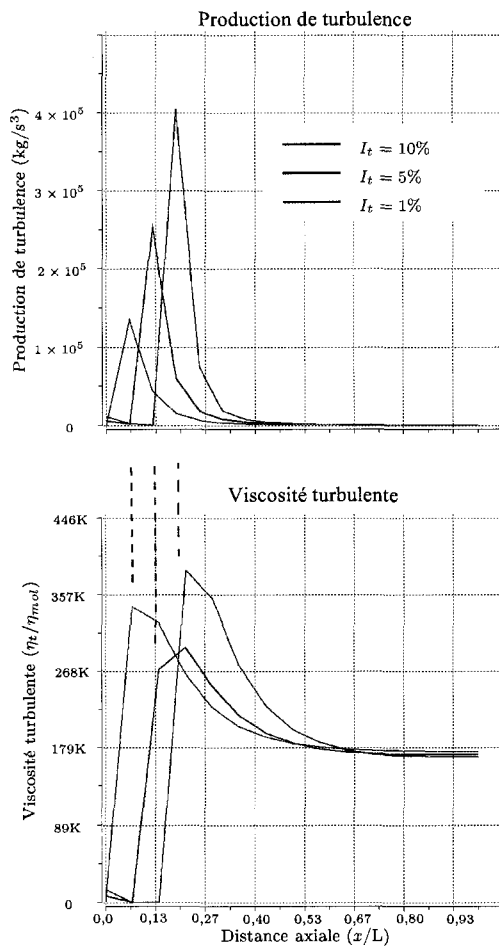


Figure 3.12 Production de turbulence et viscosité turbulente.

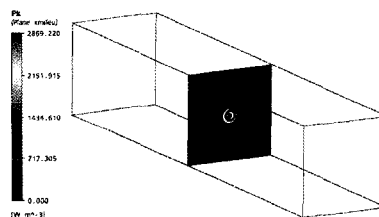


Figure 3.13 La production de turbulence est concentrée dans le tourbillon.



Tableau 3.2 Rayon du tourbillon en fonction de la production de turbulence.

Q	Rayon du tourbillon en sortie ( $a_1/a_0$ )
0	7,37
0,2	5,79
0,9	3,03
0,99	2,63

changée la production de turbulence en dehors du tourbillon. En réalité, la production se concentre dans le tourbillon comme le montre la figure 3.13. La formulation de Jeong et Hussain (1995) est utilisée pour déterminer si un noeud fait partie ou non du tourbillon. L'équation modifiée de l'énergie turbulente  $k$  est donnée par

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \vec{\nabla} \cdot (\vec{U}k) = \vec{\nabla} \cdot [(\eta + \eta_t) \vec{\nabla} k] + (1 - Q) \left( 2\eta_t \overline{\vec{\nabla} \vec{U}} : \vec{\bar{S}} \right) - \rho \varepsilon \quad (3.2)$$

et consiste en une soustraction d'un certain pourcentage  $Q$  de la production turbulente dans le tourbillon. Dans le logiciel *ANSYS-CFX*, un terme source additionnel a été introduit dans l'équation de  $k$  afin d'implémenter cette modification. Le tableau 3.2 donne les rayons de sortie obtenus lorsque 20%, 90% et 99% de la production est enlevée. Le résultat s'approchant le plus du modèle de Squire s'obtient lorsque 90% de la production est annulée ( $Q = 0,9$ ). En effet, le rayon obtenu à la sortie du domaine dans ce cas est de  $3,03 a_0$  comparativement à  $2,95 a_0$  pour le modèle de Squire.

La figure 3.14 présente l'évolution du rayon avec et sans modification du modèle  $k-\varepsilon$ . La courbe référence de Squire est aussi tracée. On voit que la modification au modèle réduit la diffusion du tourbillon et que la concordance avec le modèle empirique de Squire est bonne. Cette méthode se compare à la méthode  $k-\varepsilon$  cubique de Yang et Ma (2002). On observe pour les deux méthodes une réduction de la viscosité turbulente dans la région tourbillonnaire. Aussi, un paramètre est fixé par l'expérimentation dans les deux méthodes (le terme  $Q$  ici). Toutefois, le même défaut se

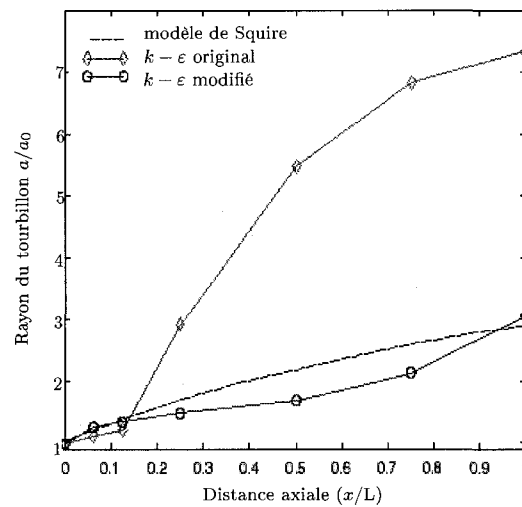


Figure 3.14 Rayon du tourbillon ( $a_1$ ) lorsque 90% de la production de turbulence dans le tourbillon est enlevée.

retrouve dans les deux modèles : une mauvaise représentation de la turbulence dans les couches limites avec gradient de pression négatif. Le gradient de pression négatif favorise un décollement de la couche limite et les modèles de type  $k - \epsilon$  modélisent mal ce phénomène (cf. Wilcox (1993) et Yang et Ma (2002)).

### 3.3 Adaptation

La procédure d'adaptation décrite au chapitre 2 est maintenant appliquée sur le tourbillon analytique laminaire. Le cas turbulent n'a pas été étudié par manque de temps. Trois variables d'adaptation ont été testées : la vorticité, le taux de déformation  $\|\bar{S}\|$  et l'hélicité. Dans le cas des tétraèdres, ces variables sont transportées vers l'aval de l'écoulement. Pour les hexaèdres, seulement la variable originale est utilisée pour le raffinement.

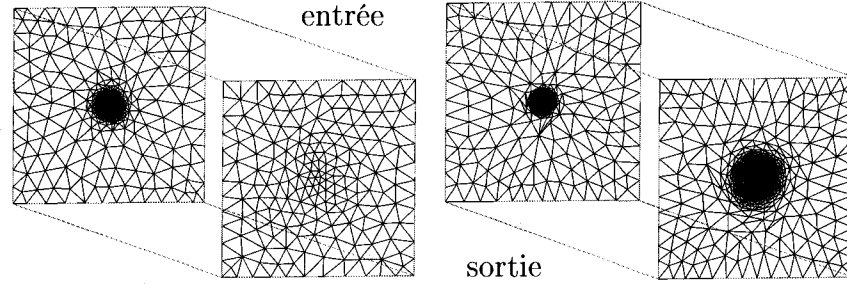


Figure 3.15 Maillages adaptés. À gauche, la magnitude de la vorticité originale est utilisée comme variable d'adaptation. À droite, la vorticité totale est utilisée.

### 3.3.1 Vorticité transportée

L'adaptation du maillage avec la norme de la vorticité  $\|\vec{\zeta}\|$  seule ne permet pas de raffiner jusqu'à la sortie du domaine. Tel que décrit à la section 2.7, une quantité est introduite pour compenser la perte causée par la diffusion numérique : la vorticité transportée. Celle-ci est additionnée à la vorticité originale afin de construire la variable d'adaptation  $\phi$ . La figure 3.15 montre les maillages adaptés en considérant les deux variables. Les zones noircies aux centres des maillages représentent de fortes concentrations de noeuds. L'équation (2.13) décrivant la variable d'adaptation s'écrit alors

$$\phi = \zeta_{\text{transp}} + \|\vec{\zeta}_{\text{originale}}\|. \quad (3.3)$$

La variable  $\zeta_{\text{transp}}$  est scalaire, car c'est la magnitude de la vorticité originale  $\vec{\zeta}_{\text{originale}}$  qui est transportée. Les termes de production et de destruction de l'équation (2.14) sont construits de façon analogue aux termes de l'équation de l'énergie turbulente et sont donnés par

$$P_\phi = -2\eta_{\text{num}}C_1 \overrightarrow{\nabla U} : \bar{\Omega} \quad \text{et} \quad K_\phi = \frac{C_2\rho\zeta_{\text{transp}}^2}{a_0^2 + 4\nu x/u_0}. \quad (3.4)$$

Les paramètres utilisés dans cette équation sont définis au tableau 3.3. Le paramètre  $D_\zeta$  est choisi le plus petit possible pour limiter la diffusion, mais tout de

Tableau 3.3 Paramètres de l'équation de transport (2.14)

Paramètres	Unités	Valeurs
$D_\zeta$	kg/m·s	0,1
$\eta_t$	kg/m·s	0
$C_1$	s/m <sup>2</sup>	832
$C_2$	m <sup>2</sup>	$1 \times 10^{-8}$
$a_0$	m	$1,52 \times 10^{-3}$
$u_0$	m/s	5

même assez grand pour assurer une bonne convergence du solveur. Idéalement, il faudrait  $D_\zeta = 0$ . Toutefois, lorsqu'une équation différentielle a un caractère trop hyperbolique comme c'est le cas lorsque  $D_\zeta = 0$ , il faut ajouter de la diffusion artificielle pour mieux converger tel qu'expliqué dans la thèse de Dufour (1999). Un schéma de type « upwind » pour le terme convectif des équations de NS et  $D_\zeta = 0$  permet au solveur de bien converger mais ne résoud pas suffisamment l'écoulement en aval. Le meilleur résultat pour  $D_\zeta$  est obtenu, après plusieurs essais, avec le schéma d'interpolation du second ordre dans le solveur et une valeur de 0,1. Les paramètres  $C_1$  et  $C_2$  sont ajustés afin d'obtenir une décroissance de la vorticité transportée qui correspond à la décroissance analytique, le paramètre  $C_2$  étant moins important que  $C_1$  à cet égard. En effet, dans l'équation classique de transport de la vorticité pour un écoulement incompressible, aucun terme de dissipation n'est présent et la « production » est donnée par  $\overrightarrow{\nabla U} \cdot \vec{\omega}$  où  $\vec{\omega} = 1/2 \vec{\zeta}$ .

La figure 3.16 présente les courbes de la vorticité, vorticité transportée, totale et « théorique » suivant un axe qui passe par le centre du domaine. Pour cette dernière, les vitesses analytiques ont été programm es dans le solveur, mais leurs dérivées sont calculées d'une manière discrète en fonction du maillage. Néanmoins, la courbe donne une bonne idée de la décroissance théorique attendue de la vorticité. Le fait de compenser les pertes numériques par l'ajout d'une nouvelle variable permet de raffiner le maillage plus loin vers l'aval. En effet, si on utilise la vorticité originale, il ne reste que 10% de celle-ci en sortie de domaine. En comparaison, la vorticité totale

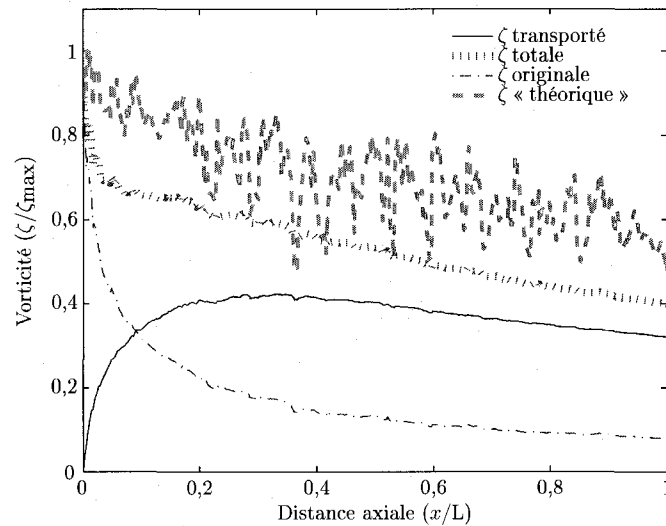


Figure 3.16 Évolution de la vorticité dans la direction axiale (axe  $y = z = 0$ ).

est encore forte, car elle contient encore 50% de la vorticité originale initiale. Le but recherché est d'avoir une courbe de vorticité totale similaire à la courbe théorique. Une restriction est appliquée à la vorticité totale : en tout point du domaine, la vorticité totale est limitée par la vorticité originale maximale. Cette restriction est appliquée pour se conformer à la physique du problème : on ne veut pas créer plus de vorticité que ce qui est perdu par diffusion numérique.

### 3.3.2 Taux de déformation transporté et hélicité

La variable d'adaptation  $\phi$  est le taux de déformation total donné par

$$\phi = \|\bar{\bar{S}}\|_{\text{transp}} + \|\bar{\bar{S}}\|_{\text{originale}}$$

où  $\|\bar{\bar{S}}\|_{\text{transp}}$  est le taux de déformation transporté vers l'aval de l'écoulement.

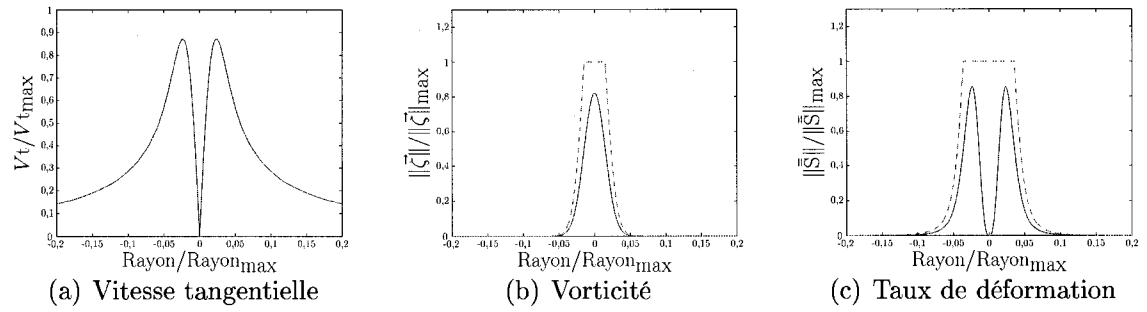


Figure 3.17 Évolution radiale des variables dans le tourbillon.

Les termes de production et destruction sont donnés par

$$P_S = 2\eta_{num}C_3 \vec{\nabla}\vec{U} : \bar{\bar{S}} \quad \text{et} \quad K_S = \frac{C_2\rho \|\bar{\bar{S}}\|_{\text{transp}}^2}{a_0^2 + 4\nu x/u_0}$$

avec  $C_3 = 417 \text{ s/m}^2$ . Une comparaison qualitative entre les variables vorticité et taux de déformation est présentée à la figure 3.17. À première vue, la seconde variable paraît plus prometteuse car les deux maxima que l'on obtient avec le taux de déformation sont situés aux mêmes endroits que les maxima de la vitesse tangentielle. Il n'est pas surprenant alors que de With *et al.* (2003) utilisent cette variable pour raffiner le maillage dans le sillage d'un cylindre, car si l'on veut une bonne résolution des tourbillons de Von Kármán présents dans le sillage du cylindre, un maximum de noeuds doivent être placés à l'endroit de grands changements de la vitesse tangentielle. Toutefois, en transportant la variable d'adaptation,  $\eta_{num}$  est quelquefois surestimée et d'autres fois sous-estimée parce que son évaluation est imprécise. Lorsqu'il y a surestimation, trop de  $\zeta_{\text{transp}}$  (ou  $\|\bar{\bar{S}}\|_{\text{transp}}$  selon le cas) est produit. À cause de la limitation imposée selon laquelle  $\phi_{\text{totale}} \leq \phi_{\text{originale}_{\text{max}}}$ , les variables totales se trouvent tronquées. Dans le cas de  $\|\bar{\bar{S}}\|$ , la situation est pire car la diffusion introduite dans l'équation de transport fait en sorte que les deux pics se fondent en un seul plus large. La troncature est alors beaucoup plus importante que la troncature observée dans le cas de la vorticité transportée (environ 2

fois plus large sur la figure 3.17). L'estimateur d'erreur étant calculé à partir de la courbure de la variable, on a donc une taille spécifiée très grande en plein milieu du tourbillon. Si aucune troncature n'est appliquée, la valeur maximale de  $\phi$  peut se trouver à une grande distance en aval de l'origine du tourbillon. Cela est causé par une surestimation de  $\eta_{num}$  et engendre une valeur de  $\phi_{transp}$  plus élevée vers l'aval. Lorsque  $\phi_{max}$  est situé loin en aval, les plus petits éléments sont créés loin de l'origine du tourbillon, là où de gros éléments sont susceptibles d'être créés. Une diffusion accrue du tourbillon est observée lorsque des éléments grossiers sont situés à sa racine. Avec un calcul de  $\eta_{num}$  toujours exact et sans diffusion introduite dans l'équation de transport, l'utilisation de  $\|\bar{S}\|$  serait justifiée. Mais ce n'est pas le cas ici et c'est la raison pour laquelle la vorticité transportée est utilisée.

D'autres variables d'adaptation ont été testées. En particulier l'hélicité et l'hélicité couplée avec une variable indiquant la présence du tourbillon. Dans le premier cas, on ne convergait pas vers un tourbillon localisé uniquement dans le centre. Celui-ci s'étendait plutôt en une spirale irrégulière ayant quelques bras positionnés loin du centre. Afin de garder seulement le centre, cette variable a été multipliée par une autre variable, la « présence du tourbillon ». Cette dernière variable prend les valeurs 0 et 1 dépendamment si l'on est dans le tourbillon ou non, selon la définition donnée par Jeong et Hussain (1995). Cette variable combinée donne des résultats analogues à ce qu'on obtient avec la vorticité.

### 3.3.3 Calcul de la viscosité numérique

La mesure de ce qui est perdu par diffusion numérique passe par l'évaluation du coefficient  $\eta_{num}$ . Deux méthodes pour calculer la viscosité numérique sont développées dans les paragraphes suivants. La viscosité numérique est utilisée dans l'équation de

transport afin d'obtenir une variable d'adaptation qui varie plus loin vers l'aval du domaine.

### 3.3.3.1 Viscosité numérique basée sur les valeurs propres de $\bar{\bar{S}} + \bar{\bar{\Omega}}$

À la section 3.2.5, une méthode basée sur les rayons a été présentée pour les cas où la solution analytique est connue. Cette méthode, très facile à implémenter dans le post-processeur, s'imbrique mal dans le solveur. En effet, à chaque itération interne du solveur,  $\eta_{num}$  doit être recalculée. Une alternative plus simple à implémenter dans le solveur et basée sur les valeurs propres de  $\bar{\bar{S}} + \bar{\bar{\Omega}}$  a été mise de l'avant afin de contourner ce problème.

La dérivée par rapport à  $r$  de l'équation (1.5) est donnée par

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = \frac{2V_t}{r} \left[ \frac{\partial V_t}{\partial r} - \frac{V_t}{2r} \right]. \quad (3.5)$$

Dans cette dernière équation, on peut remplacer  $V_t$  par son expression (voir l'équation (1.2)) pour connaître la variation analytique de la pression en fonction de la distance axiale et radiale. Si on augmente  $\nu$  ou  $x$  d'un facteur  $f$  quelconque,  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}$  est diminué d'un facteur  $f^2$ . Aussi, en se basant sur l'équation (1.16), on fait l'hypothèse que  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}$  est égal à la grandeur de la deuxième valeur propre négative de la matrice  $\bar{\bar{S}}^2 + \bar{\bar{\Omega}}^2$ .

Les trois valeurs propres indiquent la force du tourbillon dans les trois directions principales ( $x, y, z$ ). Dans notre cas, la pression augmente selon les deux directions transverses  $y$  et  $z$ . En plus, pour le cas étudié, la pression augmente aussi avec la distance axiale  $x$ . Néanmoins, la pression peut augmenter ou diminuer dans la direction axiale et l'on retrouve toujours un tourbillon. Pour cette raison, deux valeurs propres négatives sur trois sont nécessaires pour avoir un tourbillon et il



est observé que la deuxième valeur propre négative coïncide avec la « force » du tourbillon calculée par l'équation (3.5). En effet, la valeur analytique maximale de  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}$  à l'entrée du domaine est  $9,66 \times 10^6$  pour le tourbillon étudié. À mesure que le maillage est raffiné, la valeur absolue maximale de la deuxième valeur propre négative de la matrice  $\bar{S}^2 + \bar{\Omega}^2$  se rapproche de cette valeur, ce qui confirme la validité de cette approche.

L'algorithme pour calculer  $\eta_{num}$  devient donc :

1. modifier la viscosité en fonction du maillage à l'entrée :

$$\eta_{init} = \eta_{mol} \sqrt{\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}\right)_{ax_0} / \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}\right)_{x_0}};$$

2. modifier la dépression en sortie de domaine en fonction de la distance  $x$  :

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}\right)_{xL\,visc} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}\right)_{x_0} \left(\frac{x_{initial}}{x_{final}}\right)^2;$$

3. modifier la viscosité en fonction de la diffusion numérique dans le domaine :

$$\eta_{totale} = \eta_{init} \sqrt{\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}\right)_{xL\,visc} / \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}\right)_{xL}}.$$

Après avoir calculé la viscosité totale, on lui soustrait la viscosité moléculaire pour obtenir la viscosité numérique selon l'équation (2.15). Dans cette procédure,  $\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}\right)_{ax_0}$  est calculé à partir de l'équation (3.5) et représente la dépression analytique à la section d'entrée du domaine. Le terme  $\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}\right)_{x_0}$  est obtenu du solveur par calcul de la deuxième valeur propre de  $\bar{S}^2 + \bar{\Omega}^2$  et représente la dépression effective à l'entrée du domaine en tenant compte du maillage à cette section. Le terme  $\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}\right)_{xL}$  est la valeur obtenue du solveur à la section de sortie. Dans ce cas test,  $x_{initial}$  et  $x_{final}$  représentent les coordonnées des sections d'entrée et de sortie respectivement et valent 2 et 2,75 m.

### 3.3.3.2 Calcul de la viscosité numérique équivalente basée sur les pertes de puissance

Une deuxième façon de calculer  $\eta_{num}$  est obtenue à partir du calcul des pertes de puissance dans le domaine. Normalement, il ne devrait pas y avoir de pertes de puissance. La diffusion numérique introduite par la discrétisation spatiale en provoque cependant une. L'équation de conservation de la puissance pour un écoulement incompressible, après avoir appliqué l'hypothèse de Boussinesq pour les contraintes turbulentes  $\bar{\tau}_t/\rho = \eta_t \bar{\mathbf{S}}$  devient (voir Rhyming (2004) pour plus de détails)

$$\int_{\partial V} (p_{tot} + gy\rho) \vec{U} \cdot \vec{n} dA = - \int_V \eta_{tot} \|\bar{\mathbf{S}}\|^2 dV + \int_{\partial V} 2 [\eta_{tot} \bar{\mathbf{S}} \cdot \vec{U}] \cdot \vec{n} dA - \rho \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{U}^2}{2} \right) dV.$$

Pour isoler  $\eta_{num}$ , on considère ce paramètre constant partout dans le domaine. Aussi, étant donné que l'on s'intéresse à un phénomène permanent, le terme instationnaire est négligé. On s'assure que les propriétés ne varient plus dans le temps en imposant un faible résidu au solveur. L'écoulement est horizontal de sorte que le terme d'énergie potentielle est négligé. On trouve alors l'expression

$$\eta_{num} = \frac{\int_{\partial V} p_{tot} \vec{U} \cdot \vec{n} dA + \int_V \eta_{eff} \|\bar{\mathbf{S}}\|^2 dV - \int_{\partial V} 2\eta_{eff} [\bar{\mathbf{S}} \cdot \vec{U}] \cdot \vec{n} dA}{\int_{\partial V} 2[\bar{\mathbf{S}} \cdot \vec{U}] \cdot \vec{n} dA - \int_V \|\bar{\mathbf{S}}\|^2 dV} \quad (3.6)$$

pour la viscosité numérique. Trois raisons principales sont identifiées pour expliquer pourquoi la puissance n'est pas conservée alors qu'elle devrait l'être :

1. il y a des effets de bord ;
2. les dérivées de la vitesse ne sont pas conservées ;
3. il y a des erreurs d'arrondis lors du calcul numérique.

*ANSYS-CFX* est un logiciel de volumes finis. Autour de chaque noeud, un volume fini est considéré. Les variables (vitesse, pression, etc.) sont moyennées pour chaque volume et reportées au noeud tel que le montre la figure 3.18. Pour les éléments

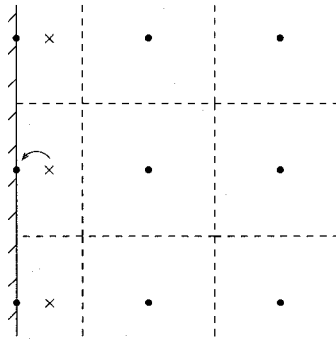


Figure 3.18 Traitement des frontières dans *ANSYS-CFX*.

frontières, la vitesse au noeud n'est pas la vitesse moyenne en ce lieu, car le centre du volume ne coïncide pas avec la position du noeud. Il y a ainsi une « erreur » qui est générée par les éléments frontières. Si ceux-ci sont gros, l'erreur est importante. Si ceux-ci sont petits, l'erreur est petite car la distance entre le centre du volume fini et la position du noeud est petite.

Deuxièmement, les équations de base résolues dans le solveur sont l'équation de conservation de la masse et l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Ainsi, par le biais de ces équations, la quantité de mouvement et la masse sont conservées. Ce n'est pas le cas de leurs dérivées de sorte qu'une faible perte de puissance à l'intérieur du domaine apparaît. Pour vérifier cela, des simulations ont été réalisées sur des maillages successifs ayant 11, 51, 101, 201 et 401 noeuds dans la direction axiale. S'il n'y avait que l'effet de bord qui existait, on aurait un comportement linéaire, i.e. la viscosité numérique  $\eta_{num}$  diminuerait à mesure que la distance au bord diminue. On observe plutôt un phénomène asymptotique; quand le nombre de noeuds est assez important, la viscosité numérique ne varie presque plus. Ainsi, en supposant que les erreurs d'arrondis ne jouent pas un rôle clé ici (ce qui n'est pas totalement le cas comme le démontre le prochain paragraphe), une perte sur les dérivées de la vitesse est observée dans le domaine.

Tableau 3.4 Différences entre les calculs du solveur et du post-processeur.

	Termes	Frontières	Post-processeur	Solveur
1	$\int_{\partial V} p_{tot} \vec{U} \cdot \vec{n} dA$	entrée	-1410,64	-1410,9
		sortie	1410,44	1410,4
		murs	0	-12,515
2	$\int_V \eta_{eff} \ \bar{S}\ ^2 dV$		0,000779954	0,00077995
3	$\int_{\partial V} 2\eta_{eff} [\bar{S} \cdot \vec{U}] \cdot \vec{n} dA$	entrée	$-5,29 \times 10^{-7}$	$-5,8147 \times 10^{-5}$
		sortie	$5,24 \times 10^{-8}$	$-1,2427 \times 10^{-7}$
		murs	$-2,98 \times 10^{-6}$	$1,1426 \times 10^{-4}$

En ce qui concerne les erreurs d'arrondis, deux constatations s'imposent : 1) le solveur calcule mal certains termes et 2) il y a des différences importantes entre la façon de calculer du solveur et du post-processeur, bien que les deux programmes soient vendus par la même compagnie. Le tableau 3.4 présente le résultat des différents termes de l'équation (3.6) pour un cas test laminaire, tel que calculé par le solveur et par le post-processeur. Dans le post-processeur, les variables conservatives ont été utilisées pour que la comparaison soit cohérente. On remarque tout d'abord que le solveur évalue mal les termes sur les parois. Pour la première intégrale, le solveur calcule une valeur de -12,515 alors que celle-ci devrait être près de 0, car la vitesse perpendiculaire aux parois latérales est nulle. Le post-processeur réussit à calculer la bonne valeur. On observe un phénomène semblable pour l'autre terme surfacique (la troisième intégrale). En conséquence, ces termes ont été négligés lors du calcul par le solveur. En fait, même si ces termes étaient évalués correctement par le solveur, ils seraient néanmoins négligés, car le raffinement n'est pas désiré sur les murs, mais plutôt dans le domaine, entre l'entrée et la sortie. Le terme volumique (la deuxième intégrale) est évalué de façon similaire par le solveur et le post-processeur. Dans d'autres situations, non montrées ici, le solveur performait mieux que le post-processeur. Dans tous les cas, on compare de petits chiffres entre eux. La façon de calculer engendre des erreurs d'arrondis qui peuvent devenir importantes à mesure

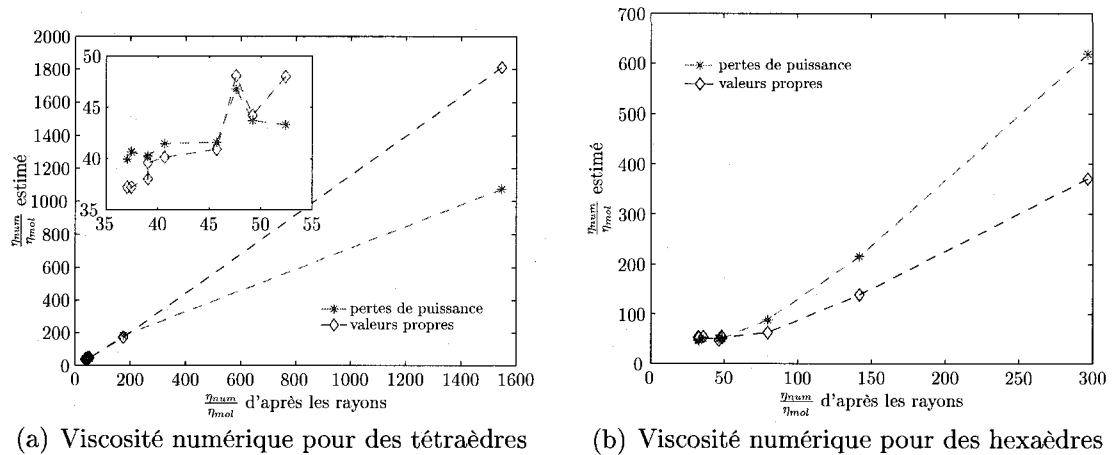


Figure 3.19 Évaluation du paramètre  $\eta_{num}$  par les deux méthodes.

que les chiffres comparés deviennent petits. Dans tous les cas, les calculs sont faits en simple précision.

### 3.3.3.3 Comparaison entre la formulation des pertes de puissance et la formulation des valeurs propres

La figure 3.19 présente une comparaison des deux façons de calculer  $\eta_{num}$ . Les données ayant servi à construire ces figures proviennent d'un cycle adaptatif et représente ainsi les évolutions typiques de  $\eta_{num}$  en fonction des itérations globales solveur-remailleur. À la première itération, les viscosités numériques sont élevées et elles diminuent au fur et à mesure que le maillage est adapté. Les deux résultats de  $\eta_{num}$  estimés sont comparés avec la valeur trouvée par une mesure des rayons selon l'équation (3.1). La façon de calculer  $\eta_{num}$  à partir des rayons est considérée exacte ici étant donné qu'une solution analytique est connue.

Pour des hexaèdres, les deux formulations donnent des résultats similaires et ce d'autant plus que la viscosité numérique diminue. Pour les tétraèdres, on observe une relation presque linéaire entre la viscosité numérique estimée (par les valeurs propres

ou les pertes de puissance) et la viscosité réelle calculée à partir des rayons. La pente de ces droites est près de un. Toutefois, lorsque la viscosité numérique devient faible, la pente de la droite obtenue par la méthode des pertes de puissance s'aplatit. Il n'est pas nécessaire d'obtenir une relation linéaire entre la viscosité calculée à partir des rayons et la viscosité estimée (par les valeurs propres ou les pertes de puissance). Dans l'équation (3.4), la viscosité  $\eta_{num}$  doit être la plus exacte possible, i.e. se rapprocher de la valeur obtenue par la méthode des rayons. Si la relation n'est pas linéaire à la figure 3.19(a), il est possible de déterminer une fonction :

$$\eta_{num,estimée} = f(\eta_{num,provenant\ des\ rayons}).$$

Toutefois, afin de simplifier la définition de  $\eta_{num}$  dans l'équation (3.4), une relation linéaire a été considérée entre les deux formulations. Pour cette raison, le calcul de  $\eta_{num}$  basé sur les valeurs propres de  $\bar{S}^2 + \bar{\Omega}^2$  donne de meilleurs résultats lorsque la viscosité numérique est faible. Cette méthode dépend davantage de la différence entre l'entrée et la sortie, i.e. de ce qui se passe dans le domaine plutôt que des effets de bord. Les termes surfaciques négligés dans l'évaluation de  $\eta_{num}$  par la formulation des pertes de puissance sont en partie responsables de l'imprécision observée avec cette méthode lorsque  $\frac{\eta_{num}}{\eta_{mol}}$  diminue aux alentours de 40. En effet, pour diminuer davantage ce ratio, il faudrait raffiner le maillage sur les surfaces négligées même si celles-ci ne jouent aucun rôle ici. Par contre, l'utilisation de la méthode des valeurs propres dans le contexte d'un écoulement a priori inconnu ou turbulent pose problème. La formulation basée sur les pertes de puissance, moins précise, permet le traitement des problèmes avec turbulence.

Tableau 3.5 Effet de la turbulence sur le calcul de  $\eta_{num}$ .

Maillages	Calcul de $\frac{\eta_{num}}{\eta_{mat}}$		
	à partir des pertes de puissance		d'après les rayons
	sans turbulence	avec turbulence ( $k - \varepsilon$ )	sans turbulence
736K noeuds hexa	0,8	1,2	2,0
472K noeuds hexa	1,5	2,3	3,5
261K noeuds hexa	3,5	5,4	7,2
17K noeuds hexa	123,0	123,8	36,0
88K noeuds tetra	1729,2	1732,6	616,6

Le tableau 3.5 rapporte quelques valeurs de  $\eta_{num}$  obtenues à partir des pertes de puissances pour un écoulement turbulent avec des maillages hexaédriques et tétraédriques. Le modèle  $k - \varepsilon$  a été utilisé pour ces calculs. On remarque que les valeurs de  $\eta_{num}$  calculées pour l'écoulement laminaire sont semblables aux valeurs de  $\eta_{num}$  calculées pour l'écoulement turbulent. Ces valeurs varient encore ici dans le même sens que la viscosité numérique réelle calculée à partir des rayons. Ainsi, le calcul de  $\eta_{num}$  par la méthode des pertes de puissance dans le contexte d'un écoulement turbulent paraît justifié.

### 3.3.4 Paramètres du solveur, de OORT et de Riemann

Le tableau 3.6 présente un exemple représentatif des valeurs retenues dans le fichier de configuration de *OORT* pour ce cas test du tunnel avec tourbillon analytique. Pour plus de détails concernant la description de ces paramètres, référez-vous à Dompierre et Labbé (2006). On retrouve quelques différences entre les paramètres retenus pour les hexaèdres et les tétraèdres. Notamment, le facteur de forme et l'étirement maximal de la métrique sont 20 fois plus permissifs pour les hexaèdres. Si les mêmes valeurs sont utilisées pour les tétraèdres, les ratios de tailles augmentent trop et la mauvaise qualité des maillages empêche le solveur de converger. On remarque aussi que le coefficient multiplicateur de l'écart-type augmente pour

les tétraèdres de sorte qu'il y a raffinement/déraffinement d'arêtes principalement pendant les premières itérations du remailleur. Cette façon de faire économise du temps et permet un meilleur lissage par le remailleur. En effet, les opérations de raffinement/déraffinement modifient grandement la structure du maillage. Enfin, on notera que la borne euclidienne minimum de la métrique pour les hexaèdres varie davantage que pour les tétraèdres. Limiter la métrique est un bon moyen d'éviter un raffinement excessif en amont. Par contre, il est plus long d'agir ainsi plutôt que d'adapter avec une variable qui est transportée vers l'aval. Dans le cas des hexaèdres, il n'y a pas de transport, ce qui explique la variation plus grande de la borne de la métrique. Bien que des limites de convergence pour le remailleur ont été fixées, celui-ci s'arrête presque toujours lorsque le nombre maximal d'itérations fixé au départ est atteint. Différents essais ont été réalisés pour déterminer un nombre maximal d'itérations adéquat.

En ce qui concerne le solveur, les paramètres retenus se trouvent dans le tableau 3.7. Le pas de temps est augmenté d'une itération globale solveur-remailleur à l'autre afin d'aider à la convergence du solveur. Normalement, pour un problème stationnaire, un petit pas de temps aide à converger selon ANSYS (2005). Toutefois, dans ce cas test, il a été observé qu'une augmentation du pas de temps aidait. Le schéma convectif du premier ordre de type « upwind » introduit une diffusion des propriétés mais converge bien tandis que le schéma du second ordre, plus précis, converge moins bien.

Enfin, on retrouve dans le tableau 3.8 les paramètres utilisés dans *Riemann* pour le calcul des métriques. On remarquera ici que le gradient n'est pas pris en compte lors du calcul de la métrique même s'il a été démontré qu'en considérant ce dernier, les résultats sont améliorés. En fait, la méthode de calcul incorporant le gradient a été développée lorsque l'étude de ce cas test était presque terminée.



Tableau 3.6 Paramètres retenus dans le fichier de configuration de OORT.

Paramètres	Tétraèdres			Hexaèdres		
	Au début	Changement	Limite	Au début	Changement	Limite
borne euclidienne minimum de la métrique	0,2 mm	aucun		0,6 mm	÷3	0,2 mm
borne euclidienne maximum de la métrique	10 mm	×1,5	20 mm	10 mm	×1,5	20 mm
étirement maximum de la métrique	100	×2	2500	1000	×3	50 000
longueur cible d'une arête dans la métrique	1,0	aucun		1,0	aucun	
nombre de chiffres significatifs dans les fichiers	10	aucun		10	aucun	
longueur euclidienne minimum des arêtes	0,1 mm	aucun		0,3 mm	÷3	0,1 mm
longueur euclidienne maximum des arêtes	20 mm	×1,5	30 mm	20 mm	×1,5	30 mm
forme euclidienne minimum des éléments	0,1	aucun		0,04	÷2	0,005
distorsion euclidienne maximum d'une face	0,7	aucun		0,7	aucun	
nb. max. d'itérations du remaillage en non-structuré	12	N/A	N/A	N/A		
critère de convergence en non-structuré	0,1	aucun		N/A		
facteur de relaxation dans le déplacement	1,2	aucun		1,2	aucun	
critère d'arrêt du déplacement	0,005	aucun		0,0005	aucun	
maximum d'itérations de déplacement	15	aucun		250	aucun	
maximum d'itérations de retournement	7	aucun		N/A		
coeff. multiplicateur de l'écart-type dans la métrique	2,0	×1,1	3,0	N/A		
maximum d'itérations de raffinement	1	aucun		N/A		
seuil de raffinement	1,3	aucun		N/A		
maximum d'itérations de déraffinement	1	aucun		N/A		
seuil de déraffinement	0,7	aucun		N/A		
précision dans l'intégration des arêtes	0,01	aucun		0,005	aucun	
nb. maximum de subdivisions lors de l'intégration	4	aucun		4	aucun	

Tableau 3.7 Paramètres retenus pour le solveur : tétraèdres et hexaèdres.

Paramètres	Au début	Changement
Pas de temps : NS	0,01	$\times 1,5$
Pas de temps : équation de transport	0,1	$\times 1,5$
Schéma d'interpolation des termes convectifs	second ordre	
Schéma d'interpolation des dérivées temporelles	arrière, premier ordre	
Résidus max	$1 \times 10^{-5}$	

Tableau 3.8 Paramètres retenus lors du calcul des métriques.

Paramètres	Valeurs
Reconstruction du hessien	2 voisins
Rapport de taille maximal pour le lissage des métriques (méthode de Li <i>et al.</i> (2004) ou volumique)	1,3
Traitement du gradient lors de calcul de la métrique	$\xi = 0$

### 3.4 Résultats

Afin de valider la méthode d'adaptation sur ce cas test, les profils de vitesses tangentielles sont comparés aux profils analytiques. Une étude de convergence ainsi qu'une étude du temps de calcul sont réalisées et présentées par la suite. Enfin, une brève comparaison entre les résultats obtenus, en prenant en compte le gradient lors du calcul de la métrique et sans prendre en compte le gradient, est présentée.

#### 3.4.1 Profils de vitesse

La figure 3.20(a) présente les courbes de vitesses tangentielles moyennes à la section de sortie obtenues en adaptant des maillages de tétraèdres avec la vorticité originale comme variable d'adaptation tandis que la figure 3.20(b) présente les courbes obtenues des simulations réalisées avec un transport de la vorticité. Les maillages ont ici 88K noeuds en moyenne. La vitesse tangentielle maximale, pour une itération donnée, est plus élevée lorsque la variable d'adaptation est transportée vers l'aval. En particulier, à l'itération 16, 38% de la vitesse tangentielle analytique en sortie de domaine est captée avec une variable transportée comparativement à 30% sans transport. La convergence est aussi améliorée lorsque la variable est transportée. Sans transport, la vitesse tangentielle captée augmente de 5,5% à 10%, de l'it ra-

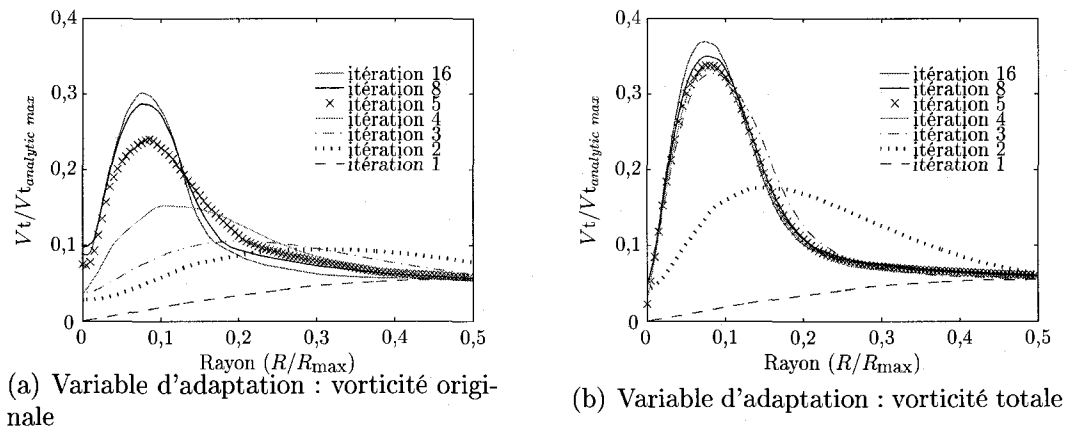


Figure 3.20 Vitesse tangentielle en sortie du domaine pour différentes itérations. Maillages de tétraèdres.

tion un à l'itération trois. Avec transport, l'augmentation va jusqu'à 33% pour les mêmes itérations.

La section considérée pour cette comparaison est située à  $475 a_0$ . Il est difficile de capter un tourbillon aussi loin. Dans l'étude de Dupont et Cerrutti (1992), la section de comparaison est située à  $10 a_0$ . À cette distance, la méthode présentée ici permet de capter 86% de la vitesse tangentielle analytique. Pour enlever toute arbitrarité, la section de sortie est néanmoins choisie dans la présente étude. Parmi les facteurs limitant la capture du tourbillon, on note la diffusion introduite dans l'équation de transport, l'évaluation imprécise de  $\eta_{num}$ , la taille minimale admissible des arêtes et l'anisotropie limitée des tétraèdres.

En ce qui concerne les hexaèdres, on voit à la figure 3.21 que la vorticité totale, incluant la composante transportée, ne permet pas une meilleure capture que la vorticité originale seule car dans les deux cas la vitesse tangentielle maximale captée avoisine 27%. De plus, la convergence n'est pas accélérée. On se rappelle que le schéma adaptatif pour les hexaèdres n'ajoute ni n'enlève aucun noeud. Il n'y a que des déplacements de noeuds. Pour cette raison, les éléments créés par le remailleur

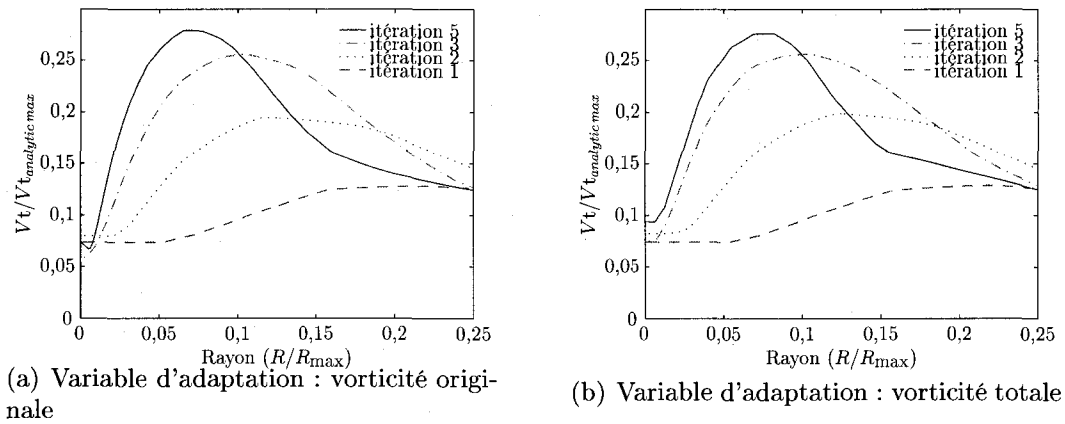


Figure 3.21 Vitesse tangentielle en sortie de domaine pour différentes itérations. Maillages d'hexaédres.

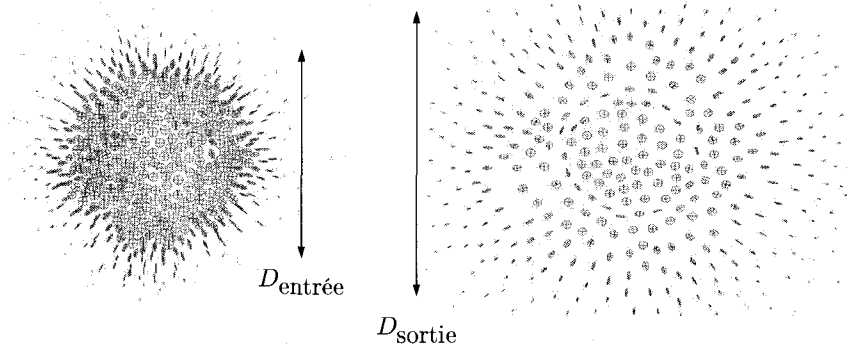


Figure 3.22 Représentation des métriques à l'entrée du domaine et à la sortie (hexaédres).

sont plus gros, même si les tailles spécifiées par la métrique sont plus petites. La figure 3.22 présente les métriques aux sections d'entrée et de sortie calculées à partir de la vorticité totale. Les ellipsoïdes 3d sont converties en ellipses 2d afin de faciliter la visualisation. Plus la grandeur de l'ellipse dans la direction  $i$  est importante ( $\lambda_i$  important), plus la taille spécifiée est petite (petit  $h_i$ ). On voit qu'au centre du domaine, la taille des ellipses est la même pour les deux sections indiquant des tailles spécifiées égales. Toutefois, la zone de petite taille est plus importante pour la section de sortie,  $D_{\text{entrée}} < D_{\text{sortie}}$ . Le remaillage distance alors les mailles en sortie afin de satisfaire le plus possible l'ensemble des spécifications en sortie. Le

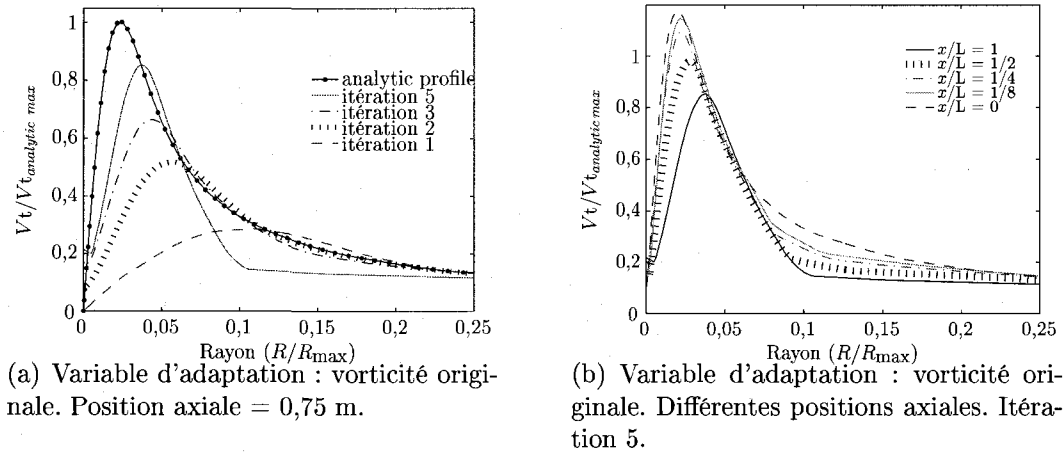


Figure 3.23 Vitesse tangentielle captée par des maillages d'hexaèdres.

diamètre en sortie ( $D_{\text{sortie}}$ ) est plus important qu'en entrée ( $D_{\text{entrée}}$ ) en grande partie à cause de la diffusion introduite dans l'équation de transport. La diffusion numérique introduite par les hexaèdres est aussi plus faible que celle introduite par les tétraèdres et c'est la raison pour laquelle même sans transport, une bonne capture du tourbillon est possible. Les maillages d'hexaèdres ont 40K noeuds (20 noeuds dans la direction transverse).

Si l'on ajoute des noeuds aux maillages d'hexaèdres, une meilleure capture est possible. Par exemple, lorsqu'il y a 75 noeuds dans la direction transverse, 85% de la vitesse tangentielle en sortie est captée (figure 3.23). Dans la figure 3.23(b), la vitesse adimensionnalisée avec la vitesse maximale en sortie est tracée en fonction de la distance axiale. Une décroissance monotone, semblable à la décroissance analytique, est obtenue.

La figure 3.24 montre les maillages de la section d'entrée du domaine correspondants aux courbes de vitesses tangentielles. Pour les tétraèdres, il y a 88K noeuds dans le domaine complet et pour les hexaèdres, 960K noeuds (75 noeuds dans la direction transverse).   chaque itération globale du cycle solveur-remailleur, le maillage

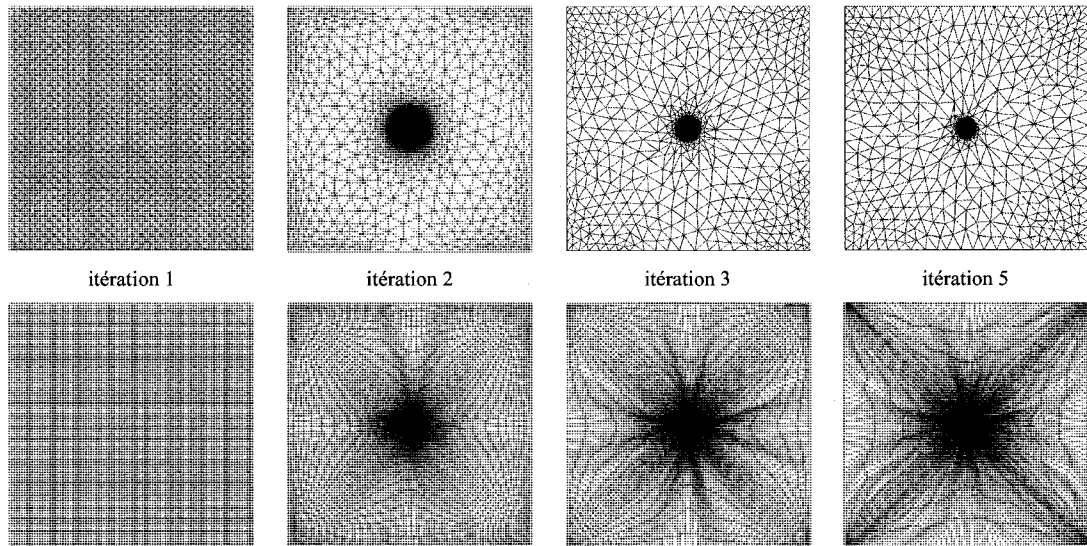


Figure 3.24 Maillages adaptés à la section d'entrée. Maillages de tétraèdres (ligne du haut) et d'hexaèdres (ligne du bas).

est raffiné dans le centre, à l'endroit où se situe le tourbillon, et déraffiné sur les pourtours. Un maillage uniforme est utilisé comme point de départ pour simuler un cas où l'on ne connaît pas la solution à l'avance, comme c'est le cas avec le profil. Les ratios de tailles demeurent dans des limites acceptables de sorte qu'une bonne convergence du solveur est obtenue à chaque itération. Ces points seront détaillés dans les prochains paragraphes.

### 3.4.2 Résultats de convergence

Une analyse de la convergence est établie pour les cas dont les profils de vitesse ont été présentés. Une seule taille de maillage est d'abord analysée, soit respectivement 88K noeuds et 960K noeuds pour des maillages de tétraèdres et d'hexaèdres. Par la suite, une étude en fonction du nombre de noeuds est présentée.

it.#	normes $L^\infty$			
	$\ Vt_i - Vt_{i-1}\ $	$\frac{\ Vt_i - Vt_{i-1}\ }{\ Vt_{i-1}\ }$	$\ Vt - Vt_i\ $	$\frac{\ Vt - Vt_i\ }{\ Vt\ }$
1			2,25	99,51 %
2	1,98	267,73 %	2,12	93,81 %
3	2,41	98,57 %	1,90	84,16 %
4	2,41	92,59 %	1,86	82,21 %
5	2,57	97,86 %	1,87	82,61 %
8	2,53	94,84 %	1,87	84,36 %
16	2,59	96,89 %	1,88	83,08 %

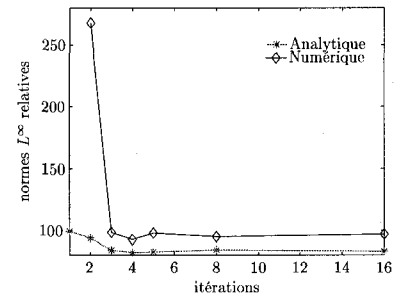


Figure 3.25 Convergence : maillages de tétraèdres.

it.#	normes $L^\infty$			
	$\ Vt_i - Vt_{i-1}\ $	$\frac{\ Vt_i - Vt_{i-1}\ }{\ Vt_{i-1}\ }$	$\ Vt - Vt_i\ $	$\frac{\ Vt - Vt_i\ }{\ Vt\ }$
1			2,02	89,04 %
2	2,24	104,28 %	1,62	71,55 %
3	2,36	90,54 %	1,22	53,96 %
4	1,62	61,13 %	1,23	54,03 %
5	1,29	48,70 %	0,65	28,70 %

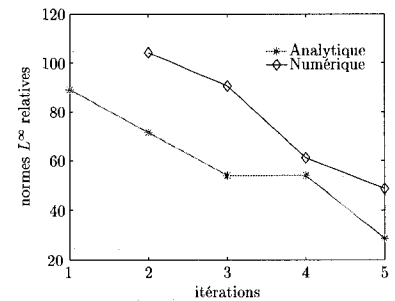


Figure 3.26 Convergence : maillages d'hexaèdres.

### 3.4.2.1 Convergence du cycle solveur-remailleur

La figure 3.25 présente l'évolution de l'erreur dans la norme  $L^\infty$  pour les maillages de tétraèdres adaptés. On remarque que les normes entre la solution numérique et la solution analytique diminuent jusqu'à l'itération 4, puis augmentent légèrement à l'itération 5. Ce comportement n'est pas observé pour la norme de l'erreur absolue entre deux solutions successives (première colonne du tableau), mais l'est par contre pour la norme de l'erreur relative (deuxième colonne du tableau). Ainsi, lorsque la solution analytique n'est pas connue, les résultats trouvés dans cette section suggèrent de considérer la norme relative plutôt que la norme absolue. Ici, on aurait pu arrêter après l'itération 5, les autres itérations n'apportant que peu d'avantages par la suite. Des résultats similaires sont obtenus pour la norme  $L^2$ , mais ne sont pas présentés ici pour alléger la lecture.

Pour les hexaèdres (figure 3.26), les normes entre la solution numérique et la solu-

tion analytique diminuent jusqu'à l'itération 3, puis augmentent légèrement à l'itération 4. Par contre, l'erreur absolue en norme  $L^2$ , non montrée ici, diminue pendant les 5 itérations. Du côté de l'erreur absolue entre deux itérations successives (première colonne du tableau), on observe encore une augmentation sans lien avec les erreurs analytiques. À l'opposé, l'erreur relative calculée entre deux itérations diminue constamment et reflète mieux la correspondance avec les erreurs analytiques (l'erreur absolue en norme  $L^2$  du moins). Pour cette raison, cette erreur sera considérée pour le cas test avec le profil. Enfin, bien que l'erreur continue de diminuer à l'itération 5, l'algorithme a été arrêté. Une dégénérescence prononcée du tourbillon est en effet observée et aurait mis des doutes importants sur la validité de la suite des itérations.

Tableau 3.9 Tétraèdres

it. #	nb noeuds	nb éléments	ELR	VER
1	88 641	400 000	2,2	2
2	65 178	360 454	7,0	24
3	72 568	407 992	33,8	1125
4	69 723	389 465	22,4	1223
5	70 144	392 532	22,2	1409
8	72 577	406 575	19,8	3162
16	77 575	437 422	21,4	2690

Tableau 3.10 Hexaèdres

it. #	ELR	VER
1	1,0	2,2
2	3,7	15,8
3	12,6	41,3
4	63,0	76,1
5	126,6	357,3

Le tableau 3.9 rapporte le nombre de noeuds, d'éléments, les ratios de longueur d'arêtes (ELR) et les ratios de volumes (VER) obtenus au cours du processus adaptatif pour les tétraèdres. Le nombre de noeuds et d'éléments demeurent presque constants tout au long de l'adaptation indiquant que la mise à l'échelle fonctionne bien. Les ratios de tailles augmentent puis se stabilisent. Dans le cas des hexaèdres (tableau 3.10), il y a toujours 961K noeuds et 930K éléments, car seul le déplacement de noeuds est utilisé. Ici aussi, les ratios augmentent. Ils sont à la limite de l'acceptable lorsque le processus adaptatif est arrêté.



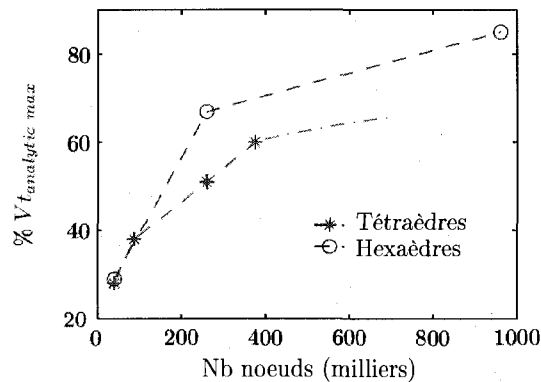


Figure 3.27 Convergence en fonction du nombre de noeuds

### 3.4.2.2 Convergence en fonction du nombre de noeuds des maillages

Des cycles d'adaptation ont été réalisés avec différents nombres de noeuds initiaux. Au cours de chaque cycle, le nombre de noeuds est maintenu le plus constant possible. Plusieurs itérations globales solveur-remailleur sont effectuées pour chaque taille de maillage. On rapporte à la figure 3.27 la vitesse tangentielle maximale obtenue en sortie de domaine pour chacun des maillages adaptés.

On remarque que les tétraèdres performant aussi bien que les hexaèdres lorsque le nombre de noeuds est inférieur à 100K. Lorsque le nombre de noeuds est supérieur à cette valeur, les hexaèdres permettent de mieux capter le tourbillon. La raison principale qui explique ce phénomène est liée à l'anisotropie. En effet, l'anisotropie des hexaèdres, réflétée par le facteur de forme, est plus grande que celle des tétraèdres. Il n'est pas possible de spécifier un facteur de forme plus souple pour les tétraèdres tout en conservant une qualité de maillage acceptable pour le solveur. Les maillages d'hexaèdres ont des ratios de volume plus bas ( $\sim 200$ ) que les maillages de tétraèdres ( $\sim 2000$ ) même si le facteur de forme est plus petit pour les tétraèdres. C'est cette régularité accrue qui permet aux hexaèdres d'être mieux alignés avec la direction principale de l'écoulement.

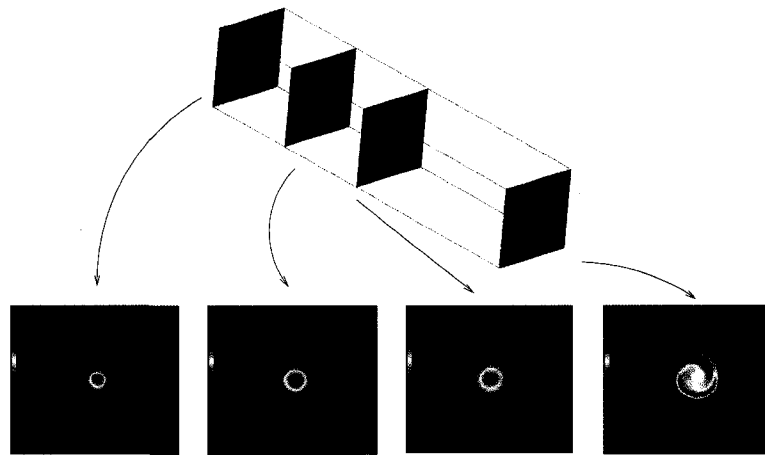


Figure 3.28 Dégénérescence du tourbillon

Lorsque 60% ou plus de la vitesse analytique est captée, un phénomène nouveau apparaît : la dégénérescence du tourbillon numérique. De forme axisymétrique à l'entrée du domaine, le tourbillon acquiert une forme spirale. Quatre plans de coupe montrent l'évolution de la forme tourbillonnaire suivant la distance axiale à la figure 3.28. On voit que deux bras tendent à se développer. La vorticité maximale se retrouve alors dans l'un des bras plutôt qu'au centre. Le centre du tourbillon lui-même n'est plus tout à fait au centre du domaine, mais est légèrement dévié. Ce phénomène est observé avec des maillages de tétraèdres et d'hexahèdres adaptés et est d'autant plus prononcé que la vitesse tangentielle captée est élevée. La figure 3.29 présente un gros plan du cas de dégénérescence observée avec des tétraèdres.

### 3.4.3 Temps de calculs

L'utilisation de l'adaptation permet de réduire le nombre de noeuds nécessaire pour avoir la même vitesse tangentielle en sortie de sorte que le temps de calcul est réduit. À titre d'exemple, un maillage de tétraèdres adapté de 88K noeuds est équivalent à un maillage de Delaunay uniforme de 10M de noeuds. Le temps de calcul extrapolé

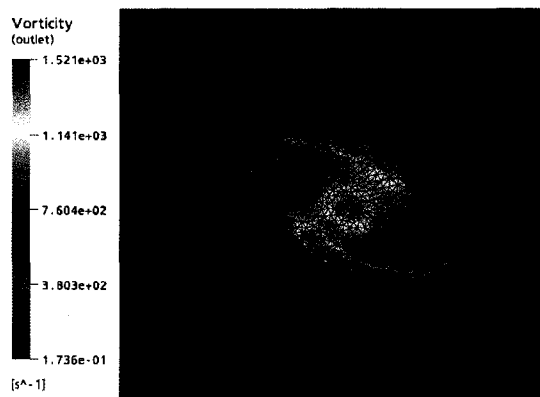


Figure 3.29 Dégénérescence du tourbillon : coupe du maillage de tétraèdres.

Tableau 3.11 Temps de calcul globaux

Maillages	Nb. noeuds	Temps de calcul		
		Remailleur	Solveur	Total
tétraèdres adaptés	88K noeuds	215 min/it.	25 min/it.	20 h (5 it.)
tétraèdres uniformes	10M noeuds		119 h	119 h
hexaèdres adaptés	40,4K noeuds	30 min/it.	10 min/it.	3,3 h (5 it.)
hexaèdres uniformes	1,6M noeuds		5 h	5 h

du maillage de 10M de noeuds est de 119 h sur la base d'un calcul en série (en supposant que c'est possible) (voir tableau 3.11). Pour le maillage adapté de 88K noeuds, les temps moyens de calcul pour une itération du cycle solveur-remailleur sont de 25 min pour le solveur et de 215 min pour le remailleur. Ainsi, chaque itération d'adaptation prend en moyenne 4 h pour un total de 20 h pour 5 itérations. Dans le cas des hexaèdres, un maillage adapté de 40,4K noeuds est équivalent à un maillage uniforme de 1,6M de noeuds. Le temps de calcul pour ce dernier maillage est de 5 h. Comparativement, les temps moyens de calcul pour une itération du cycle solveur-remailleur sont de 10 min pour le solveur et de 30 min pour le remailleur. Pour 5 itérations, le temps combiné est donc de 3,3 h. On remarque que le gain de temps est plus élevé lorsque des tétraèdres sont utilisés, car la diffusion numérique introduite par ceux-ci pour des maillages presque uniformes est énorme. Le remailleur n'est pas programmé pour faire du calcul parallèle présentement. Il n'a pas été

Tableau 3.12 Décomposition d'une itération de *OORT*.

	Étapes	Variation de l'écart-type	Temps de calcul
1	Retournement des arêtes	+29,0 %	8,4 %
2	Retournement de faces	+0,9 %	2,0 %
3	Déplacement des sommets (20 it.)	-70,1 %	28,1 %
4	Raffinement des arêtes	-32,7 %	1,0 %
5	Retournement des faces	+5,8 %	2,3 %
6	Retournement des arêtes	-3,7 %	1,8 %
7	Déplacement des sommets (20 it.)	-10,9 %	18,2 %
8	Déraffinement des arêtes	-19,2 %	1,2 %
9	Retournement des faces	+2,7 %	2,3 %
10	Retournement des arêtes	+1,8 %	2,5 %
11	Retournement des faces	0,0 %	2,1 %
12	Déplacement des sommets (20 it.)	-3,6 %	30,1 %

optimisé non plus pour la rapidité d'exécution. Optimiser le code du remaillieur afin de réduire son temps d'exécution paraît ainsi primordial en vue d'une utilisation à plus grande échelle. En effet, les calculs effectués par *ANSYS-CFX* peuvent être effectués en parallèle de sorte qu'il est plus rapide d'utiliser un maillage uniforme raffiné sur l'ensemble du domaine plutôt que d'adapter.

Les temps de calcul des différentes étapes du remaillieur sont décortiqués dans le tableau 3.12. On s'intéresse à une itération de *OORT* lors d'une adaptation d'un maillage non-structuré. Il y a douze étapes. Certaines opérations sont répétées plus d'une fois. Le temps de calcul de chaque étape ainsi que l'évolution de l'écart-type adimensionnalisé de la longueur des arêtes dans la métrique sont reportés dans le tableau. Le but de l'adaptation étant d'avoir des arêtes de longueur égale, les opérations qui diminuent l'écart-type sont souhaitées. Par exemple, le déplacement de sommets de l'étape 3 permet de réduire l'écart-type de 70,1 % et prend seulement 28,1 % du temps total. Cette opération est ainsi hautement rentable. Au départ, il y a 469K arêtes. Le temps d'adaptation total pour une itération est de 605 s,

Tableau 3.13 Sommaire des opérations dans *OORT* pour un maillage de 70K noeuds.

Opérations	Variation de l'écart-type	Temps de calcul
Retournements, raff., déraff.	-15,5 %	23,6 %
Déplacement des sommets	-84,5 %	76,4 %

l'écart-type adimensionnalisé de la longueur des arêtes au début de l'itération est de 0,4335 et de 0,4225 à la fin de l'adaptation.

Dans le cas présenté, la majorité de l'adaptation est réalisée par le déplacement de sommets, bien qu'on adapte un maillage non-structuré. Afin de savoir si les opérations d'adaptation en non-structuré sont rentables, un regroupement est fait et les résultats sont reportés au tableau 3.13. Ainsi, les opérations spécifiques à l'adaptation en non-structuré (retournements, raffinement et déraffinement) prennent 23,6 % du temps et ne permettent une diminution que de 15,5 % de l'écart-type. Ainsi, ici il est désavantageux d'effectuer ces opérations et l'on aurait mieux fait de déplacer les sommets uniquement. Ce n'est pas toujours le cas. L'analyse d'un maillage plus gros (2 106K arêtes) donne des résultats opposés. Dans cet autre cas, les opérations spécifiques à l'adaptation en non-structuré prennent 29,3 % du temps pour une efficacité de 46,8 %. Sur la base de ces résultats, on ne peut pas conclure quant à l'efficacité de l'adaptation des maillages non-structurés. Une étude du temps d'adaptation en fonction de l'itération d'adaptation et de l'itération globale solveur-remailleur apporterait d'autres informations.

#### 3.4.4 Comparaison entre une métrique issue du hessien et une métrique issue du hessien et du gradient

Une comparaison est faite entre une métrique qui provient du hessien et une métrique qui provient du hessien et du gradient. Après cinq itérations solveur-remailleur de part et d'autre, on obtient les résultats présentés dans le tableau 3.14.

Tableau 3.14 Influence du gradient. Maillages d'hexaèdres de 960K noeuds.

	Avec gradient	Sans gradient
Vorticité max. en sortie	4144 s <sup>-1</sup>	2639 s <sup>-1</sup>
Vit. tangentielle max. en sortie	1,89 m/s	1,97 m/s
ratio de volumes max.	111,2	126,6

La vorticité maximale captée en sortie est plus importante lorsque le gradient est considéré et les ratios de tailles sont plus faibles. Par contre, la vitesse maximale est inférieure à celle captée avec le hessien seul. Cela s'explique par la déformation du tourbillon. Lorsque le gradient est considéré, la dégénérescence du tourbillon est encore plus accentuée, i.e. les bras spirales sont encore plus développés. En résumé, on trouve un léger avantage à calculer les métriques en modulant le hessien avec le gradient lorsque ce dernier est important.

### 3.5 Dégénérescence du tourbillon : explications

Des études expérimentales antérieures ont démontré que ce phénomène pouvait survenir dans certaines circonstances. Hall (1972) identifie trois conditions nécessaires pour observer expérimentalement une dégénérescence :

1. la vitesse tangentielle doit être assez élevée par rapport à la vitesse axiale avec un angle  $\theta$  entre les deux avoisinant les  $40^\circ$  ( $\theta = \tan^{-1} \left( \frac{V_t}{V_a} \right)$ );
2. il doit y avoir un gradient de pression adverse. Celui-ci peut être généré, par exemple, par une canalisation divergente;
3. le coeur du vortex doit être en expansion.

On retrouve des similitudes avec le calcul numérique. D'abord, on observe ce phénomène seulement lorsque le tourbillon est bien capté, i.e. lorsque la vitesse tangentielle numérique est élevée par rapport à la vitesse axiale (à partir de  $\theta = 20^\circ$ ). Les parois du domaine de calcul ne divergent pas, mais on a tout de même un gradient de pression positif, car la pression moyenne en sortie de domaine est fixée. Ainsi,

l'écoulement tend à atteindre cette pression. Le coeur du vortex prend également de l'expansion dans ce cas test.

Faler et Leibovich (1977) identifient six sortes de dégénérescences de tourbillons et les points suivants sont observés pour tous :

- le centre du vortex est dévié par rapport à sa position amont ;
- l'enroulement de l'hélice est dans le même sens que l'écoulement tourbillonnaire initial ;
- l'écoulement est laminaire et devient turbulent lorsque survient la dégénérescence ;
- la dégénérescence a son origine en aval puis remonte vers l'amont.

Encore ici, des similitudes existent avec notre cas. La spirale est bien du même côté que l'écoulement tourbillonnaire initial. Par contre, dans le calcul numérique, l'écoulement est toujours laminaire : aucun modèle de turbulence n'est utilisé. En fait, considérant les points ci-haut mentionnés, on serait probablement en face d'un tourbillon de type 1 ou 2 tel qu'identifié par Faler et Leibovich (1977), juste avant qu'une forte déviation du centre tourbillonnaire se produise. Cet état serait rendu anormalement long en forçant l'écoulement à être laminaire.

Les explications amenées par Hall (1972) sur l'existence de la dégénérescence vont dans trois directions :

- la dégénérescence est analogue à la séparation d'une couche limite 2d ;
- la dégénérescence est causée par une instabilité hydrodynamique ;
- la dégénérescence dépend de l'existence d'un état critique, au sens de la théorie des ondes.

Dans l'article écrit par Hall (1972), on donne comme exemples d'irrégularités hydrodynamiques, la turbulence et toute autre cause ponctuelle subite. Dans notre cas, l'irrégularité du maillage pourrait être l'instabilité nécessaire pour que le tourbillon change de forme. D'autres études plus récentes sur le sujet ont été publiées, notamment par Revuelta (2004) dans laquelle des simulations numériques en insta-

tionnaire ont été menées pour capturer la dégénérescence. Dans l'étude réalisée ici, une simulation stationnaire est plutôt réalisée, ce qui rend impossible toute comparaison. En réalité, *ANSYS-CFX* utilise une formulation qui dépend du temps, mais avec une itération multigrille par pas de temps. La solution est calculée jusqu'à ce qu'on atteigne le régime stationnaire. L'augmentation nécessaire du pas de temps entre les itérations globales solveur-remailleur sert probablement à éliminer l'effet instationnaire causé par la dégénérescence du tourbillon.

Une autre explication possible de la dégénérescence du tourbillon numérique est liée à la forme du domaine. Des calculs préliminaires avec un domaine à section circulaire n'ont pas démontré de dégénérescence tel qu'observé avec un domaine de calculs à section carrée. Notons toutefois que le tourbillon n'est pas capté avec assez de précision pour conclure définitivement quant à la validité de cette hypothèse étant donné que seulement 44% de la vitesse tangentielle maximale en sortie est relevée.

En résumé, la dégénérescence du tourbillon numérique, tel que rencontré ici est probable. L'irrégularité du maillage pourrait précipiter cet état. Aucune déviation majeure de l'écoulement n'est observée car le gradient de pression positif est faible et la modélisation est toujours laminaire. La question à savoir si cet état existe physiquement dans les mêmes conditions reste ouverte. Aussi, l'on peut se demander si c'est en fait le maillage irrégulier qui cause cet état ou plutôt si le maillage suit les résultats numériques. Des recherches supplémentaires sont nécessaires pour y répondre.



## CHAPITRE 4

### DEUXIÈME CAS TEST : SIMULATION AVEC UN PROFIL

Une surface portante est placée dans la veine d'essai du tunnel de cavitation de l'École navale (EN) et des simulations numériques avec le même domaine géométrique sont réalisées. Les prochaines sections décrivent cet écoulement. La section 4.1 définit en détails le cas test et les deux sections suivantes (sections 4.2 et 4.3) décrivent la géométrie et le maillage respectivement. Le maillage décrit à la section 4.3 servira pour l'étude de l'écoulement sans adaptation du maillage, mais aussi pour le maillage initial lorsque l'adaptation est considérée. La géométrie est utilisée pour les cas sans adaptation aussi bien que pour construire les maillages adaptés. Les résultats sans adaptation sont présentés à la section 4.4 et les résultats obtenus sur des maillages adaptés sont présentés à la section 4.5.

#### 4.1 Description du cas test

On calcule numériquement l'écoulement autour d'une demi-aile de forme en plan elliptique de section NACA 16020. Cet écoulement a fait l'objet d'une étude expérimentale par Pichon (1995). Les profils de vitesse  $v = f(z)$  ont été mesurés par vélocimétrie laser Doppler. Une modification de la géométrie du profil au bord de fuite est réalisée afin de simplifier l'étude numérique. L'équation du profil original ainsi que l'équation du profil modifié sont présentées à l'annexe A. Le profil a une corde à l'emplanture de  $C_{\max} = 80$  mm, une envergure de  $b = 120$  mm et une épaisseur maximale de  $e_{\max} = 20$  mm à mi-corde. Il est placé dans la veine d'essai du tunnel de cavitation de l'EN. Celle-ci mesure 192 mm de côté et a une longueur de 1 m. La vitesse de l'eau à l'entrée de la veine d'essai est de 13,5 m/s. Le nombre

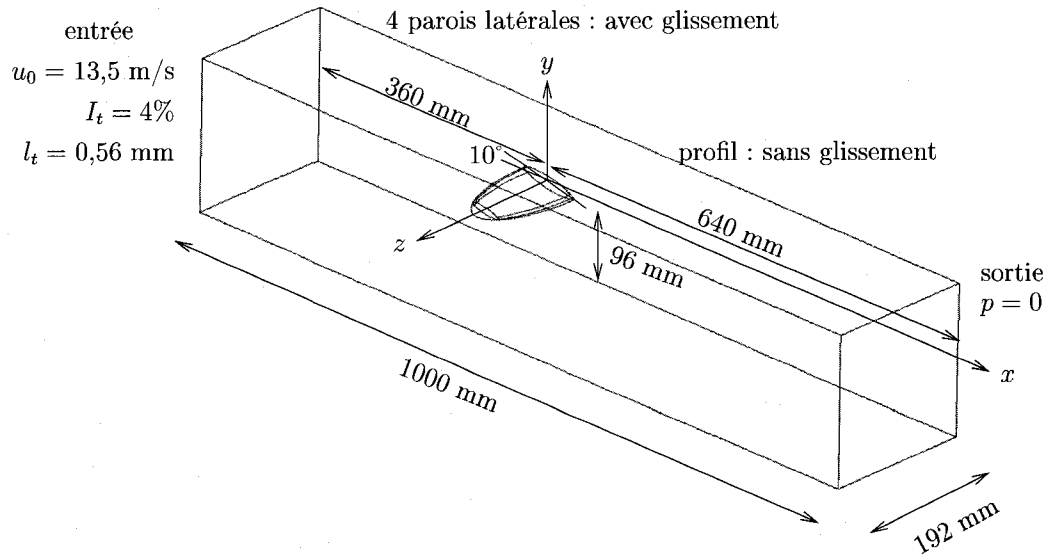


Figure 4.1 Domaine de calcul avec le profil

de Reynolds, basé sur la corde maximale et la vitesse amont, est de  $1,08 \times 10^6$ . La pression dans la veine d'essai est maintenue assez élevée de sorte qu'il n'y a pas de cavitation ( $\sigma \geq 2$ ). L'incidence du profil avec l'écoulement est de  $10^\circ$ . Pour cette configuration, un décollement de la couche limite est observé expérimentalement sur l'extrado.

Pour la simulation numérique, les mêmes conditions que le cas expérimental sont utilisées dans la mesure du possible, le but étant de recouvrer les résultats expérimentaux. L'intensité turbulente et la longueur turbulente à l'entrée sont obtenues d'après les observations expérimentales de Dupont et Cerrutti (1992) pour des conditions d'opérations semblables :  $I_t = 4\%$  et  $l_t = 0,56$  mm. En ce qui concerne le positionnement vertical du profil dans la veine d'essai, les données de l'EN n'étant pas disponibles, le profil est placé à mi-hauteur<sup>1</sup>. Pour le positionnement axial, encore ici aucune donnée n'est disponible sur le tunnel de l'EN<sup>2</sup>. Toutefois, en se

<sup>1</sup>Les données du LMH sont par contre disponibles : le profil n'est pas placé au milieu. Pour une hauteur de veine d'essai de 150 mm, le profil est placé à 72 mm du haut de la veine.

<sup>2</sup>Dans le tunnel du LMH, le profil est placé très près du début de la veine d'essai comme on le voit à la figure 3(b) de l'introduction.

basant sur les résultats du cas test sans profil, une distance amont d'environ 0,3 m est nécessaire afin que disparaisse l'effet des conditions initiales de la turbulence, bien qu'ici les conditions initiales soient « exactes ». Sachant que la condition limite en sortie sur la pression moyenne n'affecte pas la diffusion du tourbillon, le profil est reculé et placé à 4 cordes  $C_{\max}$  en aval de l'entrée de la veine de sorte qu'il reste 7,5 cordes en aval du profil. La rotation du profil avec l'axe  $z$  est effectuée au milieu de la corde comme c'est le cas expérimentalement. Aucune donnée n'est disponible sur la viscosité moléculaire de l'eau et sa densité. Ces quantités sont prises comme étant  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  et  $\nu = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ . La figure 4.1 de l'introduction présente la géométrie et les conditions limites utilisées pour l'étude numérique. L'origine des axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  est placée à mi-corde sur le mur d'attache du profil. La figure 4 présente des photos de l'écoulement autour de ce profil pour des nombres de cavitation plus petits. L'expérience a eu lieu au Laboratoire de machines hydrauliques (LMH) avec un profil homothétiquement identique, mais plus petit de 25%.

## 4.2 Description de la géométrie

Des courbes et surfaces B-splines de degré trois sont utilisées pour représenter le profil géométrique. Cela permet de représenter exactement le bord de fuite. Toutefois, le bord d'attaque ne peut pas être représenté correctement car il y a une racine carrée dans l'équation du bord d'attaque. Néanmoins, un nombre de points de contrôle suffisant permet de limiter l'erreur de représentation. Les points de contrôle et les vecteurs nodaux sont formés par interpolation à partir de points situés sur la surface définie par le profil. Ces derniers sont concentrés au bord d'attaque et au bord de fuite de même qu'à l'extrémité du profil ( $z = 120 \text{ mm}$ ). La distribution des points interpolés au bord d'attaque d'une section est présentée à la figure 4.2(a) tandis que la figure 4.2(b) illustre la distribution des points interpolés le long de l'axe  $z$ . Cent sections sont réparties le long de cet axe.

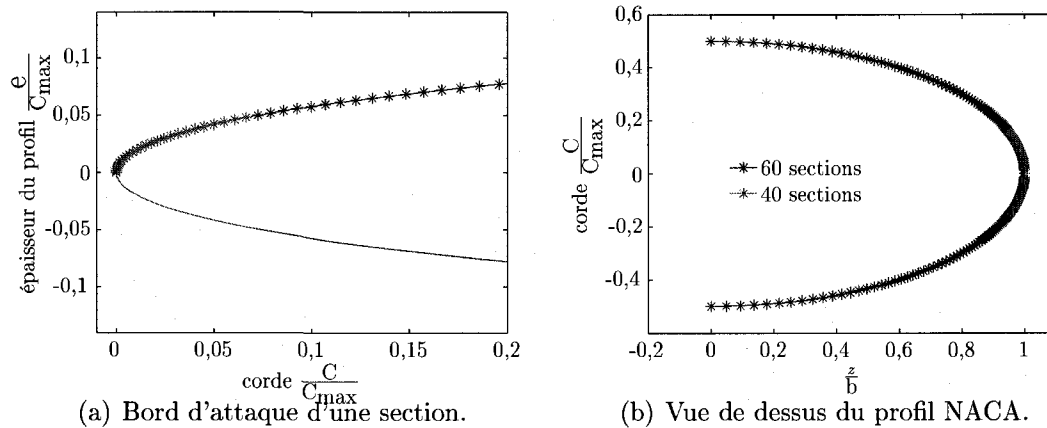


Figure 4.2 Distribution des points sur le profil NACA.

La géométrie du domaine de calcul complet comporte trente volumes<sup>3</sup> dont huit sont situés autour du profil. Ainsi, l'extrado et l'intrado sont divisés chacun en quatre volumes afin d'obtenir une extrémité non-tronquée. Dans les travaux de Vonlanthen (2007) et Hirschi (1998), l'extrémité du profil est tronquée afin de simplifier la décomposition de la géométrie en blocs, créant une surface de taille minuscule à l'extrémité. Certains problèmes peuvent survenir lors du maillage en fonction de l'algorithme utilisé. La figure 4.3 présente la décomposition de l'extrado en quatre faces. Chacune de ces faces est bornée par quatre arêtes. On voit clairement sur la figure que l'extrémité du profil est non-tronquée. Une surface décalée par rapport au profil est créée en prévision du maillage de la couche limite. La figure 4.4 montre les surfaces décalées. La géométrie complète est quant à elle présentée à la figure 4.5(a).

Une géométrie simplifiée est aussi construite. Dans celle-ci les huit faces de l'entrée sont regroupées pour ne former qu'une seule face. Il en est de même pour la sortie, pour les faces supérieure ( $y = 0,096$  m) et inférieure ( $y = -0,096$  m) et pour le mur latéral éloigné ( $z = 0,192$  m). Le mur latéral rapproché ( $z = 0$  m) est divisé en deux faces. Les quatre faces décalées de l'extrado et les quatre faces décalées

<sup>3</sup>Dans le logiciel commercial *ICEMCFD*, on parlerait plutôt de blocs.

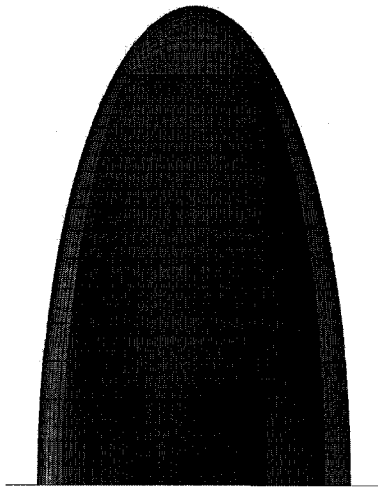


Figure 4.3 Les quatre blocs de l'extrado.

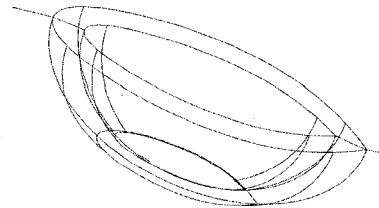
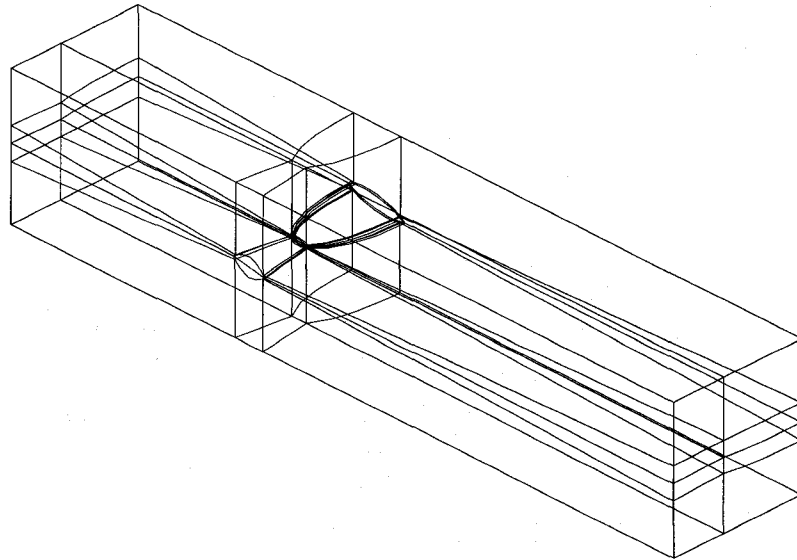
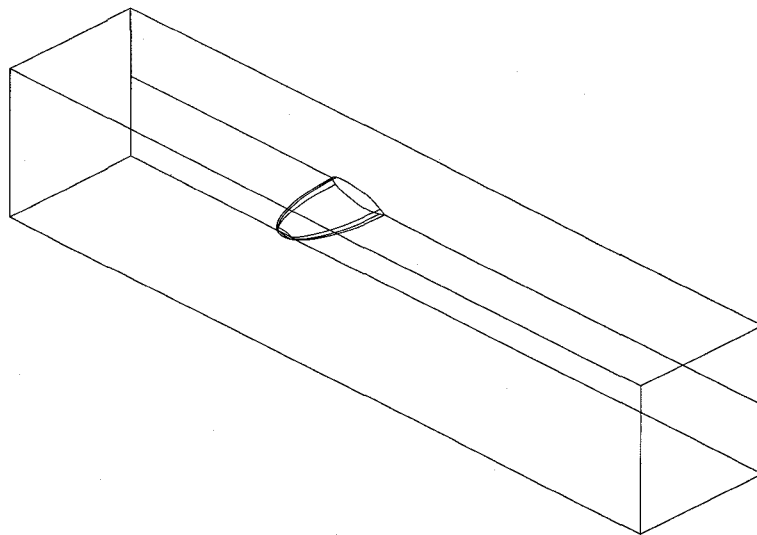


Figure 4.4 Surfaces décalées.

de l'intrado sont conservées. La géométrie simplifiée prend en compte uniquement les 22 volumes les plus éloignés du profil qui sont regroupés pour ne former qu'un seul volume. Dans la suite de ce mémoire, on parlera de « région éloignée » et de « région rapprochée » identifiant respectivement le domaine simplifié et le domaine de la couche limite. La géométrie simplifiée est présentée à la figure 4.5(b). La géométrie complète comportant trente volumes facilite le maillage initial tandis que la géométrie simplifiée facilite l'adaptation avec *OORT*. On rappelle que l'adaptation des hexaèdres conserve les noeuds frontières sur leurs faces respectives. Ainsi, permettre à un noeud situé sur la face de la sortie de bouger partout en sortie augmente les possibilités de l'adaptation. De plus, la récupération des codes topologiques à la sortie de *ANSYS-CFX* est grandement facilitée avec une géométrie simplifiée.



(a) Géométrie complète des domaines éloignés (22 volumes) et rapprochés (8 volumes).



(b) Géométrie simplifiée du domaine éloigné.

Figure 4.5 Géométrie complète comportant 30 volumes et géométrie simplifiée du domaine éloigné.

### 4.3 Description du maillage

La géométrie simplifiée est maillée avec des hexaèdres ou des tétraèdres puis les 22 volumes sont regroupés en un seul. Les noeuds du maillage situés sur les faces décalées de l'extrado et de l'intrado sont par la suite projetés sur le profil pour former le maillage de la couche limite. La géométrie complète contient la description des faces formant le profil. Les deux maillages sont insérés dans le solveur et forment deux domaines de calcul. Une condition d'interface commune les départage. Pour assurer la continuité à l'interface, une comparaison des résultats entre cette configuration à deux domaines et une configuration à un domaine mais couvrant la même géométrie a été réalisée. Le maillage de la géométrie comportant un domaine est identique au maillage de la géométrie comportant deux domaines. Aucune coupure n'a été observée dans les profils de vitesse à la jonction entre les domaines. On observe des résultats similaires lorsque les maillages comportent un nombre différent de noeuds (se référer à l'annexe B pour les résultats de cette comparaison). Lorsque le domaine éloigné est maillé avec des hexaèdres, la couche limite est aussi maillée avec des hexaèdres. Lorsque le domaine éloigné est maillé avec des tétraèdres, la couche limite est maillée avec des prismes.

Deux solutions sont possibles pour mailler la couche limite. La première, préconisée entre autres par Bergström (2000), consiste à conserver l'espacement de la première maille. L'espacement est maintenu constant pour toutes les itérations d'adaptation. Dans ses travaux, un modèle de turbulence à loi de paroi est utilisé. Selon l'auteur, certains noeuds du maillage peuvent se retrouver en dehors de la zone de validité de la loi de paroi, mais si l'espacement de la première maille est maintenu constant lors des raffinements, alors l'extrapolation de Richardson (cf. Fortin (2001) pour une description de l'extrapolation de Richardson) permet d'estimer la convergence des calculs numériques. Une deuxième possibilité est de mailler de sorte que  $y^+$

soit constant le long du profil, et ce pour toutes les itérations d'adaptation. Cette seconde méthode est meilleure que la première d'après des discussions informelles avec le Dr. Sergio Galvan, mais plus compliquée à mettre en oeuvre. En ce qui concerne l'épaisseur du maillage de la couche limite, celle-ci peut être constante ou varier. Tysell (2007) choisit notamment de varier le nombre d'éléments dans la direction transversale de la couche limite. Lorsque la hauteur d'un élément est égale à sa largeur, alors le maillage de la couche limite est limité à ce niveau. Cette façon de procéder permet d'éliminer les éléments « bâtonnets ». Dans ce mémoire, pour des raisons de simplicité, un maillage de la couche limite d'épaisseur constante dont les premiers noeuds sont toujours à la même distance est retenu.

L'épaisseur de la couche limite  $\delta$  au bord de fuite du profil est approximée par l'équation :

$$\delta = \frac{0,37 x}{\text{Re}_{C_{\max}}^{1/5}}, \quad (4.1)$$

valide pour la plaque plane (cf. le chapitre 9 de Munson *et al.* (1998)). En remplaçant les paramètres par les valeurs numériques, on obtient  $\delta = 1,88$  mm. Ainsi, la surface décalée est positionnée à une distance  $E_t = 2$  mm du profil. Les N noeuds présents dans la couche limite sont répartis suivant une fonction de concentration linéaire. Celle-ci est détaillée à l'annexe C. Les noeuds peuvent être concentrés près de la surface du profil ou concentrés loin de la surface du profil. Au moins 10 noeuds sont présents dans la couche limite si un modèle avec loi de paroi est utilisé et 15 noeuds si un modèle « bas Reynolds » est utilisé afin de respecter les spécifications de *ANSYS-CFX*. La figure 4.6 présente une vue globale d'un maillage d'hexaèdres typique utilisé pour des simulations sans adaptation avec les modèles de turbulence à deux équations. Le maillage illustré contient 440K noeuds. La figure 4.7(a) présente une vue détaillée de l'extrado du profil tandis que la figure 4.7(b) est un plan de coupe du maillage à  $x = 0$  m.



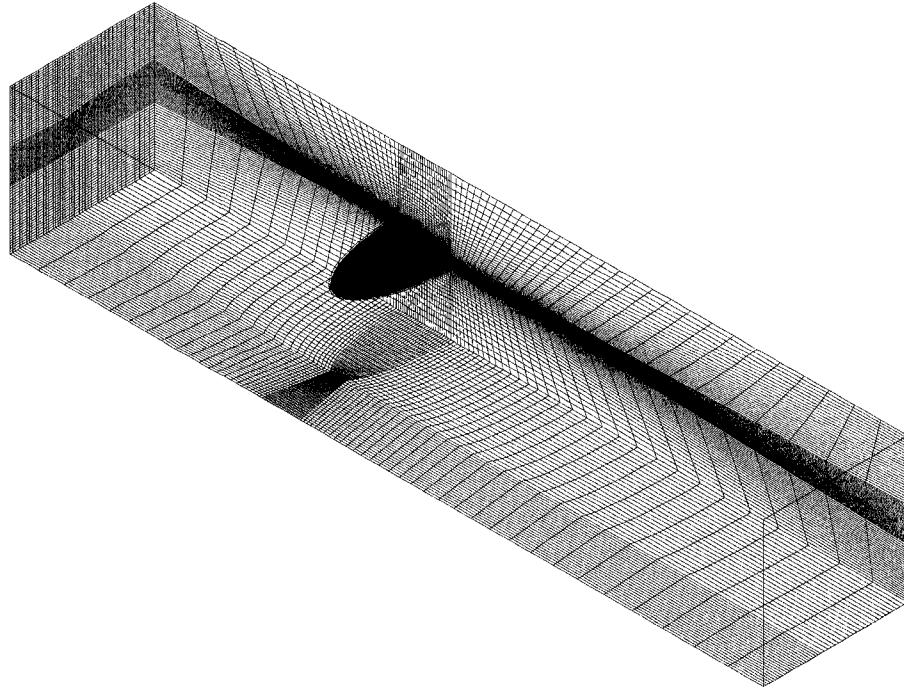
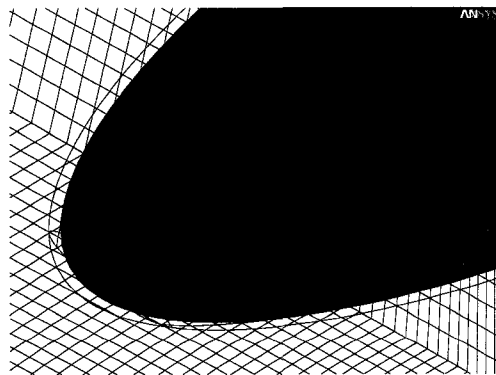
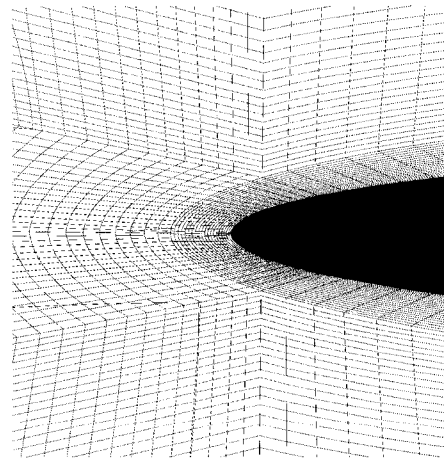


Figure 4.6 Vue globale d'un maillage typique utilisé pour les simulations sans adaptation avec les modèles de turbulence à deux équations.



(a) Vue rapprochée de l'extrémité du profil.



(b) Plan de coupe du maillage à  $x = 0$  m.

Figure 4.7 Vues détaillées d'un maillage typique utilisé pour les simulations sans adaptation avec les modèles de turbulence à deux équations.

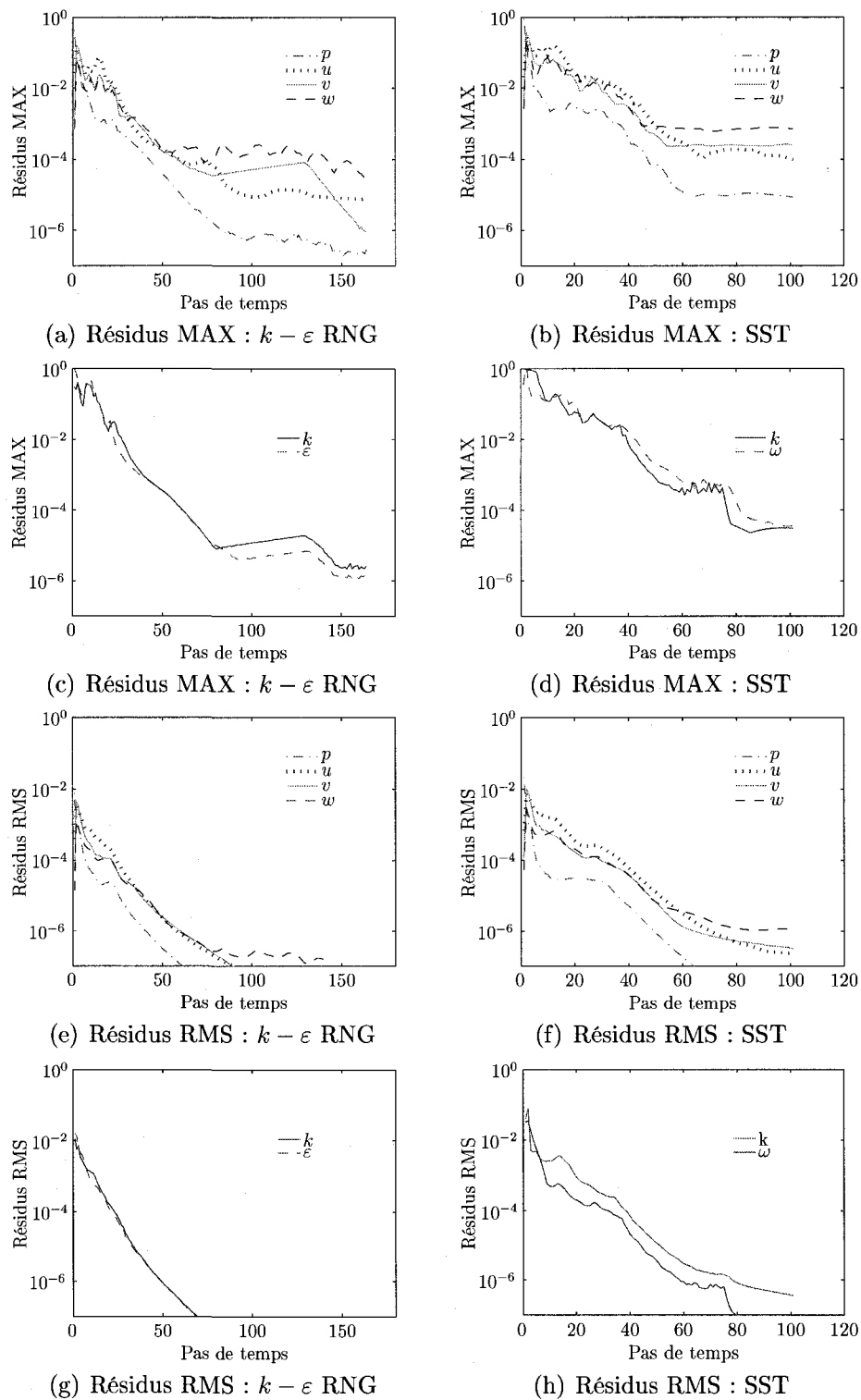
## 4.4 Résultats sans adaptation

Avant de procéder à l'adaptation des maillages, une étude sans adaptation est réalisée afin de cerner les paramètres importants à utiliser dans le solveur. Ainsi, la convergence du solveur est analysée à la section 4.4.1 en regards de certains paramètres fixés par l'utilisateur. À la section suivante on compare quelques résultats numériques, obtenus avec des maillages d'hexaèdres non-adaptés comptant 1950K noeuds, aux résultats expérimentaux. Toutes les simulations dont les résultats sont présentés dans cette dernière section ont convergé avec des résidus maximaux inférieurs à  $3 \times 10^{-5}$ .

### 4.4.1 Convergence du solveur

Il a été remarqué que les facteurs ayant la plus grande influence sur la convergence du solveur sont le modèle de turbulence, le pas de temps, le maillage et l'interpolation du terme advectif. Six modèles de turbulence ont été comparés. Dans l'ordre croissant du nombre de pas de temps nécessaire pour converger :  $k - \varepsilon$ ,  $k - \varepsilon$  RNG,  $k - \omega$ , SST, LRR-IP,  $k - \varepsilon$  avec terme source et SSG. Les simulations sont réalisées en régime permanent sauf pour les modèles « Reynolds stress » qui sont réalisées en instationnaire.

La figure 4.8 présente les courbes de convergence pour deux modèles, soit  $k - \varepsilon$  RNG et SST. Le même pas de temps ( $8 \times 10^{-3}$  s) et le même schéma d'interpolation du terme advectif (« high resolution ») sont utilisés pour les deux modèles. En ce qui concerne le maillage, dans les deux cas, l'épaisseur de la couche limite est de 2 mm et l'espacement de la dernière maille est de 0,2 mm. La première maille est positionnée pour respecter au mieux la condition sur le  $y^+$  de chaque modèle ( $y^+ \leq 2,0$  pour SST et  $20 \leq y^+ \leq 100$  pour  $k - \varepsilon$  RNG). Le maillage de la couche limite est composé

Figure 4.8 Résidus : modèles  $k-\epsilon$  RNG et SST.

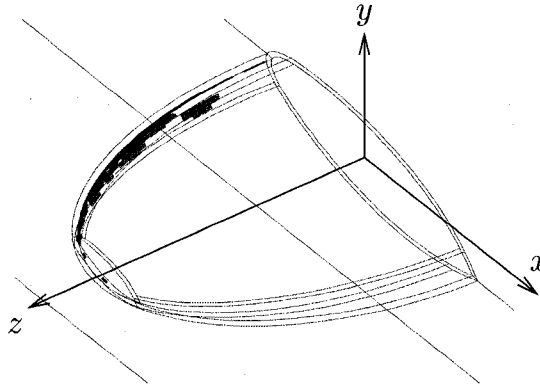


Figure 4.9 Endroits où les résidus de la vitesse  $w$  sont supérieurs à  $1 \times 10^{-6}$ . Modèle SST.

de 19 mailles transversales pour le modèle SST et de 10 mailles transversales pour le modèle  $k - \varepsilon$  RNG. Le maillage du reste du domaine est le même. On remarque que le modèle  $k - \varepsilon$  RNG permet une meilleure convergence que le modèle SST, car les résidus maximaux (MAX) et moyens (RMS) sont plus bas, et ce aussi bien pour les variables de l'équation de NS que pour les variables des équations traitant la turbulence. Une différence importante existe entre les résidus moyens et maximaux obtenus, ces derniers étant environ deux ordres de grandeur plus importants que les premiers. C'est au bord d'attaque que l'on retrouve les résidus maximaux les plus importants pour les deux modèles. À titre d'exemple, la figure 4.9 illustre les résidus maximaux de la vitesse  $w$  plus importants que  $1 \times 10^{-6}$ . Les résidus maximaux pour les vitesses  $u$ ,  $v$  et la pression  $p$  sont situés au même endroit. La valeur de  $y^+$  est trop élevée au bord d'attaque pour les deux modèles de turbulence :  $y^+ = 140$  pour  $k - \varepsilon$  RNG et  $y^+ = 8$  pour SST. Le modèle SST implanté dans *ANSYS-CFX* permet une plus grande variation du  $y^+$  mais ne converge pas mieux pour autant.

Concernant le modèle SSG, un maillage présentant des ratios de tailles plus faible a dû être utilisé afin de converger ( $VER_{\max} = 36$ ,  $ELR_{\max} = 53$ ). Ce maillage est légèrement plus grossier près de l'extrémité du profil. Le temps de calcul est beaucoup plus long avec le modèle SSG car celui-ci doit être initialisé avec une solu-

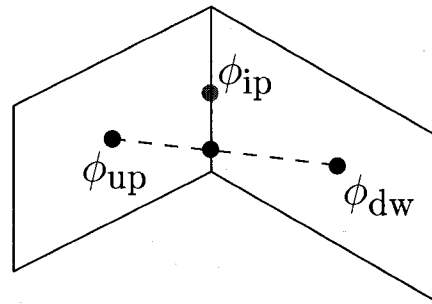


Figure 4.10 Inconvénients des maillages anisotropes pour les volumes finis.

tion qui est déjà près de la solution désirée afin d'obtenir la convergence du solveur. Plus spécifiquement, la solution du modèle SSG « high resolution » a été initialisée avec les résultats obtenus avec le modèle SSG « upwind », eux-mêmes initialisés avec une solution incorporant déjà les contraintes de Reynolds : le modèle LRR-IP. Le modèle LRR-IP doit, à son tour, être initialisé avec une solution obtenue d'un modèle à deux équations, ici  $k - \varepsilon$  RNG. En résumé, les sept équations de transport résolues pour les termes turbulents du modèle SSG rendent la convergence difficile. La convergence est d'autant plus ardue lorsque les ratios de tailles et l'anisotropie des éléments sont élevés.

Ferziger et Perić (2002) donnent quelques explications sur l'influence de l'anisotropie et des ratios de tailles sur la convergence. Selon eux, les volumes finis se prêtent mal à une forte anisotropie des éléments, car les intégrales surfaciques sont alors mal approximées. En particulier, l'intégrale surfacique du terme convectif est approximée par l'aire de la surface du volume multipliée par la valeur au centre de la surface et ce pour chaque surface entourant le volume, tel qu'illustré à la figure 4.10 pour deux volumes finis 2d. La valeur de l'intégrand au centre de l'arête droite,  $\phi_{ip}$ , est calculée en fonction des valeurs nodales avoisinantes selon la formulation :

$$\phi_{ip} = \phi_{up} + \beta \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\Delta r} \quad (4.2)$$

où  $\phi_{up}$  est la valeur au noeud en amont,  $\vec{\nabla}\phi$  est le gradient au noeud amont et  $\vec{\Delta}r$  est la distance entre le noeud amont et le centre de l'arête. Le paramètre  $\beta$  permet de modifier l'interpolation, passant de  $\beta = 0$  qui est appelée schéma « upwind » à  $\beta = 1$ , cette dernière étant précise au second ordre<sup>4</sup>. Lorsque l'on utilise le schéma « high resolution », *ANSYS-CFX* module lui-même le paramètre  $\beta$  à chaque face afin d'assurer une interpolation le plus près possible du second ordre tout en assurant une bonne convergence du solveur. Lorsque les éléments sont fortement anisotropes, la valeur  $\phi_{ip}$  estimée n'est pas exacte car les vecteurs  $\vec{\nabla}\phi$  et  $\vec{\Delta}r$  ne sont pas alignés. Ce comportement n'est pas aussi néfaste avec la méthode des éléments finis car tous les termes évalués sur les faces sont interpolés avec les fonctions d'interpolation définies sur l'élément.

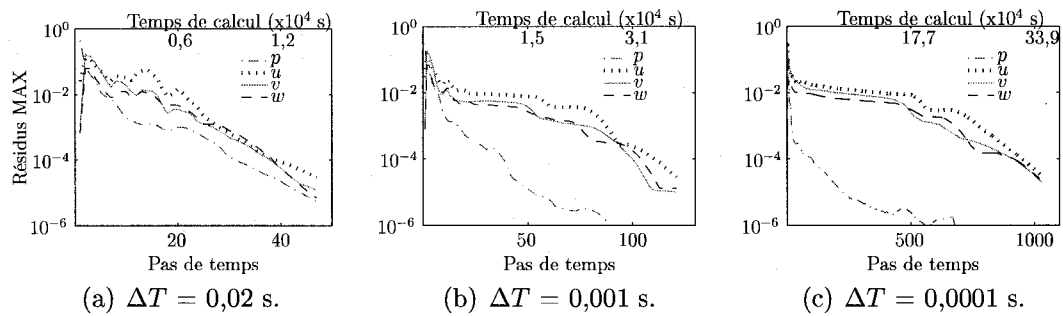


Figure 4.11 Convergence du solveur en fonction du pas de temps  $\Delta T$ .

À la figure 4.11, les courbes de convergence pour différents pas de temps sont présentées. Le même modèle de turbulence ( $k - \varepsilon$  RNG) et schéma d'interpolation du terme advectif (« upwind ») sont utilisés pour les trois simulations en régime permanent. Avec un pas de temps de 0,02 s, une bonne convergence est obtenue en 45 pas de temps pour un temps de calcul de  $1,3 \times 10^4$  s. Avec un pas de temps de 0,001 s, 120 pas de temps sont nécessaires pour obtenir les mêmes résidus maximaux tandis

<sup>4</sup>En réalité, la précision de l'interpolation dépend de la façon dont est évalué le gradient au noeud amont. Si ce dernier est approximé par une différence finie arrière d'ordre un à partir des noeuds amont et aval, alors avoir  $\beta = 1$  est du second ordre tel qu'expliqué dans Ferziger et Perić (2002). La documentation de *ANSYS-CFX* n'est pas très explicite quant à la manière de calculer  $\vec{\nabla}\phi$ , mais on mentionne néanmoins que l'interpolation est du second ordre lorsque  $\beta = 1$ .

que pour un pas de temps de 0,0001 s, 1000 pas de temps sont nécessaires. Les temps de calculs respectifs pour les deux dernières simulations sont de  $3,7 \times 10^4$  s et  $33,9 \times 10^4$  s. On observe un comportement similaire pour la convergence des termes turbulents. Ainsi, un grand pas de temps est souhaitable. En plus de réduire le temps de calcul, cela permet d'atténuer les mouvements instationnaires dans le sillage du profil pour les simulations en régime permanent.

#### 4.4.2 Résultats numériques : cas sans adaptation

Les mesures expérimentales sont disponibles pour 10 sections s'étendant de  $x/C_{\max} = 0$  à  $x/C_{\max} = 0,5$  en aval de l'extrémité du profil. On choisit ici de comparer la vitesse  $v$  obtenue numériquement avec les mesures expérimentales pour les sections  $x/C_{\max} = 0,125$  et  $x/C_{\max} = 0,5$  comme le montre la figure 4.12<sup>5</sup>. Les résultats sont présentés à la figure 4.13. Pour tracer les courbes de vitesse, le centre du tourbillon est retrouvé en se basant sur une vitesse  $v$  nulle. L'origine des axes  $y$  et  $z$  est ensuite positionnée au centre du tourbillon. Il a été remarqué qu'à la section  $x/C_{\max} = 0,125$ , le centre du tourbillon obtenu du calcul numérique est plus bas ( $y = -0,0008$  m) que dans l'expérience (estimé à  $y = 0,0012$  m). Le tourbillon est également dévié vers l'emplanture du profil : à la section  $x/C_{\max} = 0,125$ , le centre est situé à  $z = 0,1169$  m tandis qu'à la section  $x/C_{\max} = 0,5$ , le centre est situé à  $z = 0,112$  m.

Parmi les modèles de turbulence à deux équations testés, le modèle  $k - \varepsilon$  RNG est celui qui permet d'obtenir les résultats se rapprochant le plus des mesures expérimentales. Ce modèle est meilleur que les modèles bas Reynolds ( $k - \omega$ , SST)

---

<sup>5</sup>La figure 4.12 est re-dessinée à partir de la thèse de Pichon (1995). Il n'est pas clair où se situent exactement les sections considérées. En effet, à cause de l'angle d'attaque de  $10^\circ$ , la section  $x/C_{\max} = 0,5$  ne devrait pas coïncider avec le bord de fuite lorsqu'on regarde le profil du dessus. On fait l'hypothèse que Pichon (1995) n'a pas tenu compte de l'angle d'attaque pour dessiner le profil.

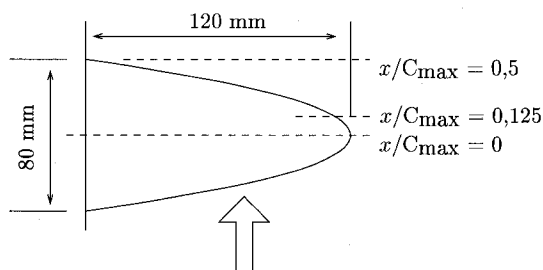


Figure 4.12 Sections pour lesquelles des mesures expérimentales sont disponibles.

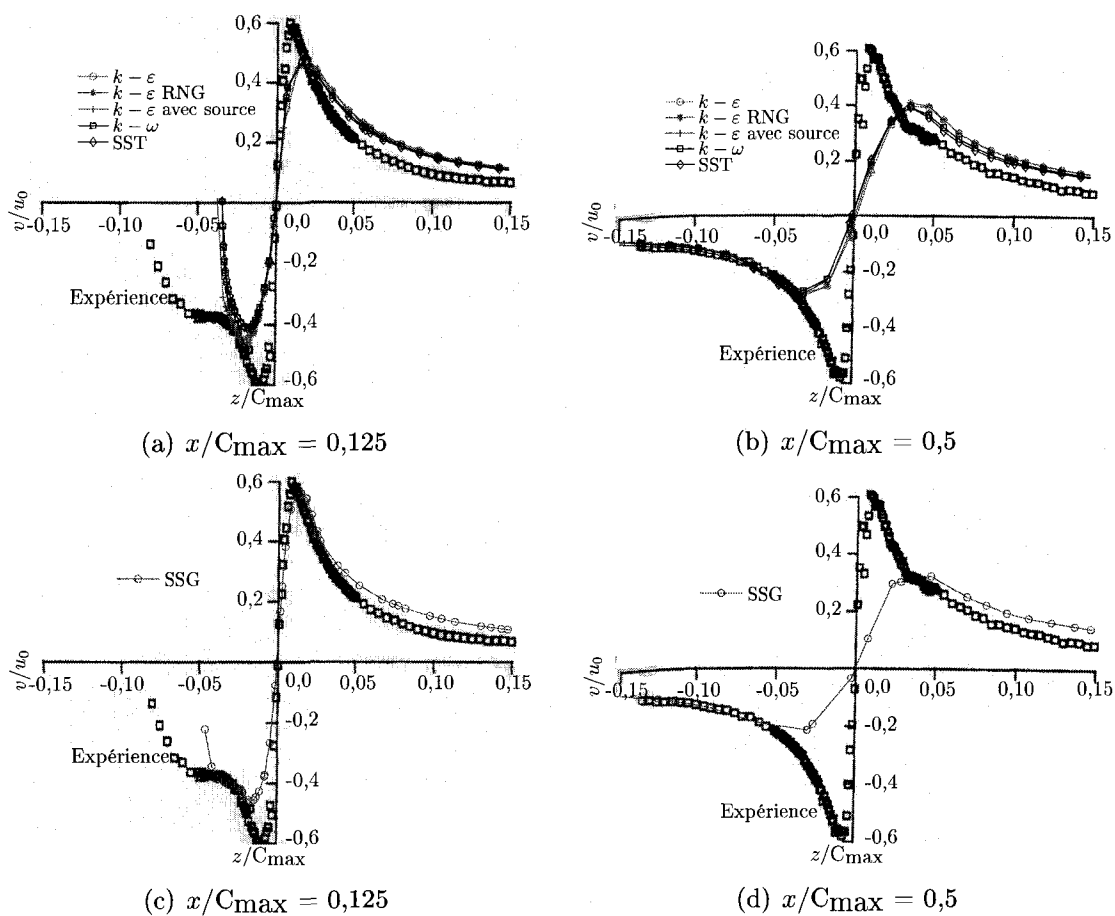


Figure 4.13 Comparaison entre les mesures expérimentales et les résultats numériques obtenus avec différents modèles de turbulence et des maillages d'hexaèdres de 1950K noeuds.



qui résolvent la couche limite jusqu'à la paroi. A priori, on aurait pu s'attendre à des résultats contraires étant donné l'hypothèse de McCormick (1954) selon laquelle c'est le fluide dans la couche limite qui s'enroule dans le tourbillon.

Un modèle  $k - \varepsilon$  avec terme source pour diminuer la production de turbulence dans le tourbillon comme celui décrit à la section 3.2.6.2 a été testé. Le terme source est introduit seulement dans le domaine éloigné de sorte que la turbulence dans la couche limite n'est pas modifiée. Les résultats obtenus avec ce modèle ne sont pas meilleurs que ceux obtenus avec  $k - \varepsilon$  RNG. La convergence du modèle  $k - \varepsilon$  avec terme source est très ardue. En réalité, il est possible de converger lorsque l'interpolation du terme advectif est du premier ordre (« upwind »), mais pas du second ordre. Probablement que la qualité du maillage, au sens décrit par Ferziger et Perić (2002), nécessaire à une bonne convergence doit être davantage relevée. Aussi, la diminution de la viscosité turbulente dans le domaine éloigné rend plus difficile la convergence du solveur.

Le modèle SSG donne de meilleurs résultats à la section  $x/C_{\max} = 0,125$ , mais pas à la section  $x/C_{\max} = 0,5$ . Ce modèle est le seul parmi les modèles testés qui capte le point d'inflexion (situé à  $z/C_{\max} = -0,05$ ) à la première section. La vitesse  $v/u_0$  à  $x/C_{\max} = 0,125$  vaut 0,55 comparativement à 0,45 pour le modèle  $k - \varepsilon$  RNG. À la section  $x/C_{\max} = 0,5$ , on trouve  $v/u_0 = 0,32$  comparativement à  $x/c = 0,41$  pour  $k - \varepsilon$  RNG. Expérimentalement, on trouve  $v/u_0 = 0,6$  à  $x/C_{\max} = 0,125$  et presque autant à la seconde section comme le montre la figure 4.13. Le fait que la vitesse soit moins bien évaluée à la seconde section en comparaison des résultats obtenus avec le modèle  $k - \varepsilon$  RNG s'explique probablement par une moins bonne interpolation du terme advectif et un maillage légèrement différent. La diminution probable du paramètre  $\beta$ , nécessaire pour converger, serait causée en partie du moins par un maillage présentant de trop fortes variations de tailles. En regard des difficultés de convergence, l'utilisation du modèle SSG n'apparaît pas souhaitable pour le calcul

Tableau 4.1 Coefficients de portance et de traînée.

	$C_L$	$C_D$
Expérimentations	0,32 (Dupont et Cerrutti (1992)) 0,35 (Pichon (1995))	0,035 (Dupont et Cerrutti (1992))
Calculs numériques	0,476	0,034

du tourbillon marginal dans le contexte de l'adaptation de maillages. Le modèle  $k - \varepsilon$  RNG est celui qui est retenu.

Les coefficients de portance  $C_L$  et de traînée  $C_D$  sont calculés numériquement à partir de :

$$C_L = \frac{P}{1/2 \rho u_0^2 A} \quad \text{et} \quad C_D = \frac{T}{1/2 \rho u_0^2 A}$$

où  $A$  est la surface en plan du profil elliptique donnée par

$$A = \pi b \frac{C_{\max}}{4}$$

et  $P$  et  $T$  sont les forces de portance et de traînée. La comparaison entre les valeurs numériques et les valeurs expérimentales est présentée au tableau 4.1. Deux valeurs expérimentales existent pour le coefficient de portance. La valeur calculée est plus élevée que les valeurs expérimentales. Pour la traînée, la valeur calculée est presque la même que la valeur expérimentale. Ainsi, l'évaluation de la traînée ne souffre pas de la mauvaise capture du tourbillon en aval du profil.

#### 4.5 Adaptation

La section 4.5.1 présente la méthodologie retenue pour l'adaptation des maillages. À la section 4.5.2, quatre variables pour l'adaptation sont étudiées et celle ayant le meilleur potentiel est retenue. Tel que suggéré lors de l'étude du cas test sans profil, la variable pour l'adaptation de tétraèdres est transportée par l'écoulement.

La section 4.5.3 présente les paramètres retenus dans *ANSYS-CFX*, *OORT* et dans *Riemann*. Enfin, les deux dernières sections présentent les résultats obtenus avec des tétraèdres, puis avec des hexaèdres.

#### 4.5.1 Méthodologie

Comme il a été vu au chapitre 1, un tourbillon partage certaines caractéristiques avec la couche limite : caractère anisotrope, loi logarithmique, etc. Ainsi, ces deux phénomènes se résolvent mieux (avec plus de précision ou plus vite) avec des maillages structurés. De plus, les résultats obtenus avec le cas test sans profil suggèrent que le solveur utilisé « travaille » mieux avec des maillages présentant une certaine structure. Toutefois, une différence majeure différencie la couche limite du tourbillon : la première est située sur une surface solide, bien localisée, tandis que le tourbillon est situé à une position a priori inconnue à l'intérieur du domaine. La position du tourbillon change en fonction du maillage utilisé. Pour ces raisons, le maillage de la couche limite n'est pas adapté avec *OORT*, mais le reste du domaine l'est. Par la suite, les noeuds à l'interface du domaine éloigné sont projetés sur la surface du profil et le maillage de la couche limite est construit. Le nombre de couches est ajusté afin d'obtenir la transition la plus lisse possible à l'interface. La méthode d'adaptation est décrite par l'algorithme ci-dessous :

1. calculer une métrique à partir de la solution numérique obtenue dans le domaine éloigné. La lisser en employant la méthode de Li *et al.* (2004) ;
2. calculer les dimensions spécifiées par la métrique pour tous les noeuds situés sur l'interface dans les directions associées à  $h_1$ ,  $h_2$  et  $h_3$ . La dimension perpendiculaire à la surface est associée à  $h_3$  et les dimensions dans les directions tangentes à la surface sont associées à  $h_1$  et  $h_2$  ;
3. calculer le nombre de couches dans le maillage de la couche limite afin de diminuer la variation de la taille des mailles à l'interface. L'épaisseur de la première

couche  $E_1$  est ajustée pour avoir un bon  $y^+$ . Cette épaisseur est maintenue constante pour toutes les itérations globales remaillieur-solveur. L'épaisseur de la dernière couche  $E_{N-1}$  est fixée en posant  $E_{N-1} = h_{3\min}$  où  $h_{3\min}$  est la plus petite dimension spécifiée par la métrique parmi tous les noeuds situés sur l'interface. Le nombre de noeuds  $N$  dans la direction transversale de la couche limite est fixé en se servant de l'équation (C.4). Le nombre de noeuds est limité afin de respecter les spécifications du solveur :  $10 \leq N \leq 30$ .

4. au besoin, changer les tenseurs métriques à l'interface si la transition n'est pas assez lisse dans la direction transversale ( $h_3$ ). Limiter les grandeurs  $h_1$  et  $h_2$  des noeuds situés sur l'interface par des valeurs fournies par l'utilisateur<sup>6</sup>. Le programme *changerMétrique* est utilisé à cette fin ;
5. lisser de nouveau la métrique, cette fois avec la méthode volumique ;
6. adapter le maillage du domaine éloigné du profil ;
7. projeter les noeuds situés sur l'interface jusque sur le profil, puis construire le nombre de couches calculé précédemment. Le programme *recupererProjeter* sert à projeter les noeuds sur le profil et le programme *constructLayer* divise la couche limite en plusieurs couches. Se référer à la figure 2.1 pour situer ces programmes dans l'algorithme global d'adaptation ;
8. réinsérer les deux maillages dans le solveur pour une nouvelle simulation.

---

<sup>6</sup>Un algorithme plus évolué utiliserait la courbure de la surface pour limiter  $h_1$  et  $h_2$ .

### 4.5.2 Variables d'adaptation

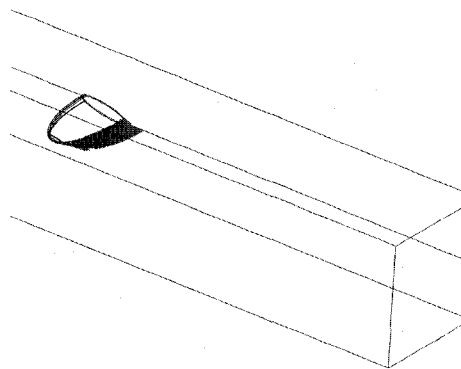
Une visualisation de la norme de la vorticité, de la variable « position du tourbillon » et de l'hélicité est présentée à la figure 4.14 afin de mieux saisir leurs distributions dans la région éloignée. La position du tourbillon est représentée par la deuxième valeur propre négative de la matrice  $\bar{\bar{S}} + \bar{\bar{\Omega}}$ . La vorticité diminue plus lentement que la variable « position tourbillon ». En effet, la deuxième valeur propre de  $\bar{\bar{S}} + \bar{\bar{\Omega}}$  diminue au moins selon  $x^4$  tandis que la vorticité diminue au moins selon  $x^2$  (se référer à l'annexe D pour les détails de ces estimations).

Si l'on multiplie la vorticité par l'hélicité, on obtient une distribution moins influencée par la vorticité générée sur l'extrado et l'intrado du profil.   la figure 4.15 on voit la distribution de l'hélicité à quatre sections dans le domaine. En amont du profil, l'hélicité est presque nulle alors qu'en aval du profil, elle est maximale à plusieurs endroits et on distingue le tourbillon. Par contre, l'hélicité dans le sillage du profil est faible. La figure 4.16(a) présente le produit de la vorticité par l'hélicité tandis que la figure 4.16(b) présente la vorticité seule. Au vu de ces observations, la norme du produit de la vorticité par l'hélicité paraît la meilleure variable d'adaptation pour les hexaèdres et aucun transport n'est effectué :

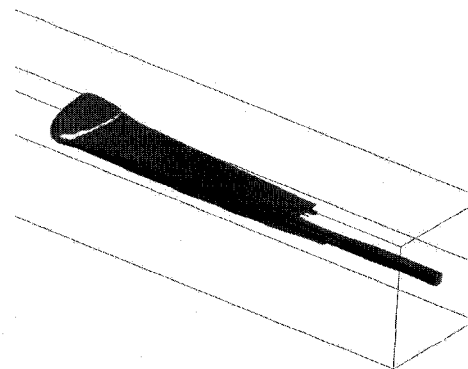
$$\phi_{\text{hexa}} = \|\vec{\zeta}\| \times \text{hélicité}.$$

Pour l'adaptation avec des tétraèdres, cette variable est transportée vers l'aval :

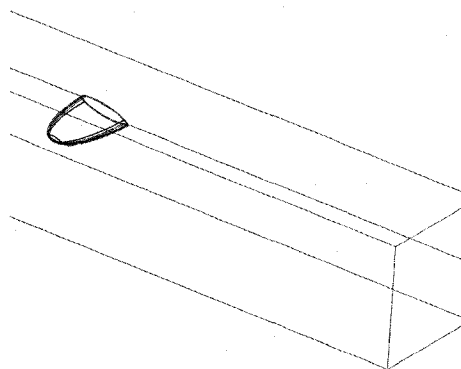
$$\phi_{\text{tetra}} = \left( \|\vec{\zeta}\| \times \text{hélicité} \right) + \phi_{\text{transp}}.$$



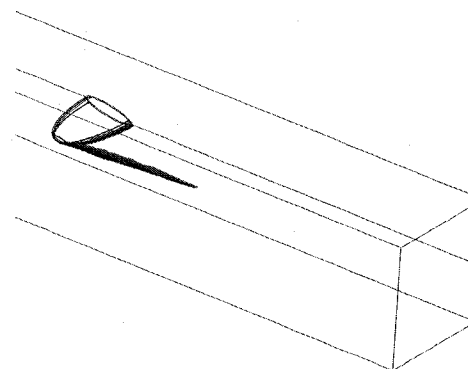
(a) Vorticité : 20% et plus de la valeur maximale.



(b) Vorticité : 2% et plus de la valeur maximale.



(c) Position tourbillon : 20% et plus de la valeur maximale.



(d) Position tourbillon : 2% et plus de la valeur maximale.

Figure 4.14 Variables vorticité et « position tourbillon » dans la région éloignée du domaine de calcul.

### 4.5.3 Paramètres retenus pour le solveur, le remailleur et le calcul de la métrique

Les paramètres retenus lors du calcul de la métrique sont donnés au tableau 4.2. À l'opposé du cas test précédent, le gradient est maintenant pris en compte. Les paramètres retenus pour le remailleur sont similaires aux paramètres pour le cas test sans profil, donnés au tableau 3.6. La principale différence se retrouve du côté de l'adaptation avec les tétraèdres. Une augmentation du nombre d'itérations du

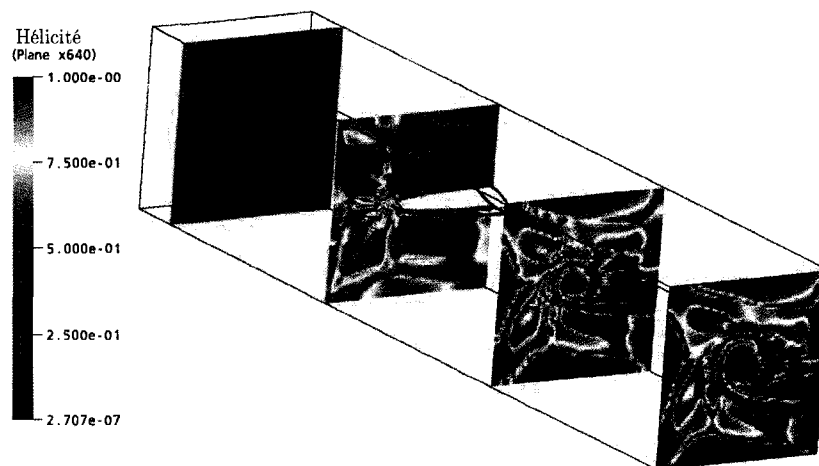
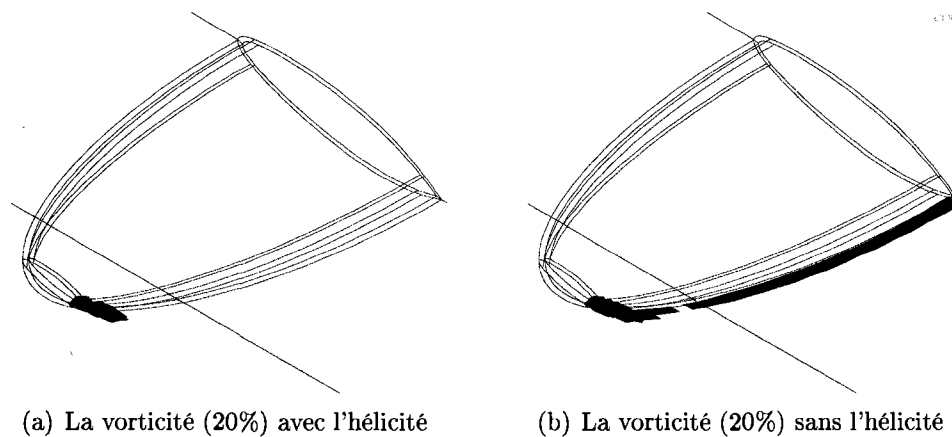


Figure 4.15 L'hélicité.



(a) La vorticité (20%) avec l'hélicité

(b) La vorticité (20%) sans l'hélicité

Figure 4.16 La variable vorticité multipliée avec l'hélicité.

remailleur de 12 à 15 ainsi qu'une augmentation du nombre d'itérations de déplacement de 15 à 20 sont nécessaires pour adapter l'ensemble du maillage. On notera également que le retournement d'arêtes n'est autorisé que pour les arêtes dont les deux sommets se trouvent dans le volume. Deux problèmes rencontrés dans l'algorithme de retournement d'arêtes en 3d sur des faces courbes justifient ce changement (voir l'annexe E).

Tableau 4.2 Paramètres retenus lors du calcul des métriques.

Paramètres	Valeurs
Reconstruction du hessien	2 voisins
Rapport de taille maximal pour le lissage des métriques : méthode de Li <i>et al.</i> (2004)	1,4
Rapport de taille maximal pour le lissage des métriques : méthode volumique	1,4
Traitement du gradient lors de calcul de la métrique	$\xi = 0,5$
Tailles $h_1$ et $h_2$ maximales des mailles permises sur le profil	3 mm

Tableau 4.3 Paramètres retenus pour le solveur : tétraèdres et hexaèdres.

Paramètres	Au début	Changement
Pas de temps : NS	0,02	$\times 1,5$
Pas de temps : équation de transport	0,1	$\times 1,5$
Schéma d'interpolation des termes convectifs	« high resolution »	
Schéma d'interpolation des dérivées temporelles	arrière, premier ordre	
Modèle de turbulence	$k - \varepsilon$ RNG	
Résidus max	$3 \times 10^{-5}$	

Les paramètres du solveur sont donnés au tableau 4.3. En plus de ces paramètres, on notera les détails suivants pour le transport de la variable d'adaptation :

- les mêmes valeurs numériques pour les coefficients  $C_1$ ,  $C_2$  et  $D_\zeta$  que celles mentionnées au tableau 3.3 sont utilisées pour l'équation de transport ;
- le paramètre  $\eta_{num}$  est évalué par les pertes de puissance dans le domaine selon l'équation 3.6 ;
- il n'y a production de la variable d'adaptation  $P_\phi$  que dans le domaine éloigné et pour  $x \geq 0$ .

#### 4.5.4 Adaptation avec des tétraèdres

La figure 4.17 présente les profils de vitesse obtenus à la suite de l'adaptation avec les variables :

- grandeur de la vorticité totale ;
- (grandeur de la vorticité  $\times$  hélicité) totale ;
- position tourbillon totale ;
- (position tourbillon  $\times$  hélicité) totale.



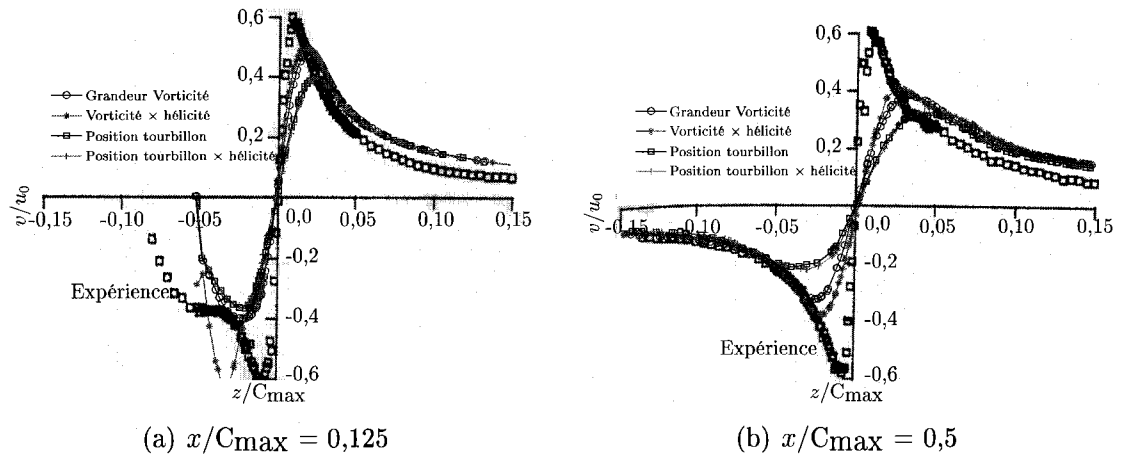


Figure 4.17 Vitesses obtenues suivant l'adaptation des maillages de tétraèdres par *OORT*. Comparaison de quatre variables d'adaptation. Chacune des variables est transportée vers l'aval du domaine.

Dans chaque cas, la variable est transportée vers l'aval. La variable transportée est additionnée à la variable originale pour obtenir la quantité totale. Dans le cas de la variable position tourbillon, le terme de production dans l'équation de transport est  $P_\phi = 2\eta_{num}C_3$  (position tourbillon) avec  $C_3 = 5 \times 10^6$  et aucun terme de destruction n'est utilisé. Les profils de vitesse aux sections  $x/C_{max} = 0,125$  et  $x/C_{max} = 0,5$  montrés à la figure 4.17 confirment les deux observations de la section 4.5.2 : la variable vorticité est une meilleure variable d'adaptation que la position du tourbillon et le fait de multiplier la vorticité par l'hélicité est avantageux pour capter le tourbillon. On déduit de cette dernière observation qu'il n'est pas nécessaire de tenir compte de l'écoulement dans le sillage pour bien capter le tourbillon.

La figure 4.18 présente les profils de vitesse pour quatre itérations globales du cycle solveur-remailleur. La variable d'adaptation est la (vorticité  $\times$  l'hélicité) totale. À la section  $x/C_{max} = 0,125$ , la vitesse  $v/u_0$  maximale captée augmente de l'itération 1 à l'itération 2 de 0,38 à 0,48. Par la suite, elle demeure presque la même aux itérations 2, 3 et 4. À la seconde section, la situation est sensiblement la même. Par

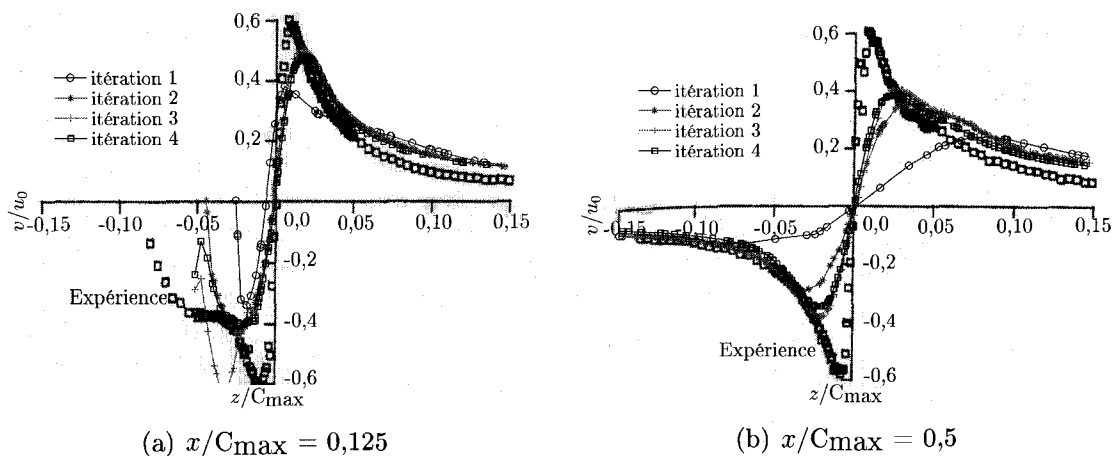


Figure 4.18 Vitesses obtenues suivant l'adaptation des maillages de tétraèdres par *OORT*. Variable d'adaptation : (grandeur de la vorticité  $\times$  hélicité) totale.

contre, les vitesses maximales sont moins élevées, ce qui témoigne d'une diffusion encore présente. Néanmoins, les profils de vitesse obtenus avec les maillages de tétraèdres adaptés (figures 4.17(a) et 4.17(b)) sont semblables aux profils obtenus avec les maillages d'hexaèdres non adaptés de 1950K noeuds (figures 4.13(a) et 4.13(b)). Ceci est remarquable car 11 fois moins de noeuds sont présents dans les maillages de tétraèdres adaptés. Il est d'autant plus remarquable d'obtenir les mêmes profils de vitesse que les hexaèdres diffusent moins le tourbillon tel que trouvé à la section 3.4.2.2. En réalité, les deux causes principales de diffusion du tourbillon, soit la discrétisation spatiale et la modélisation de la turbulence, sont présentes dans les calculs numériques. Il est raisonnable de supposer que pour le cas des hexaèdres de la figure 4.13, la discrétisation spatiale induit peu de diffusion car le maillage utilisé a une bonne résolution. La majeure partie de la diffusion obtenue pour les hexaèdres et pour les tétraèdres serait alors causée par la mauvaise modélisation de la turbulence.

Les gains obtenus par l'adaptation de maillage sont moins importants ici que pour le cas test sans profil alors que les maillages adaptés étaient équivalents à des maillages

Tableau 4.4 Convergence : maillages de tétraèdres. La norme de la vitesse est utilisée pour calculer les normes.

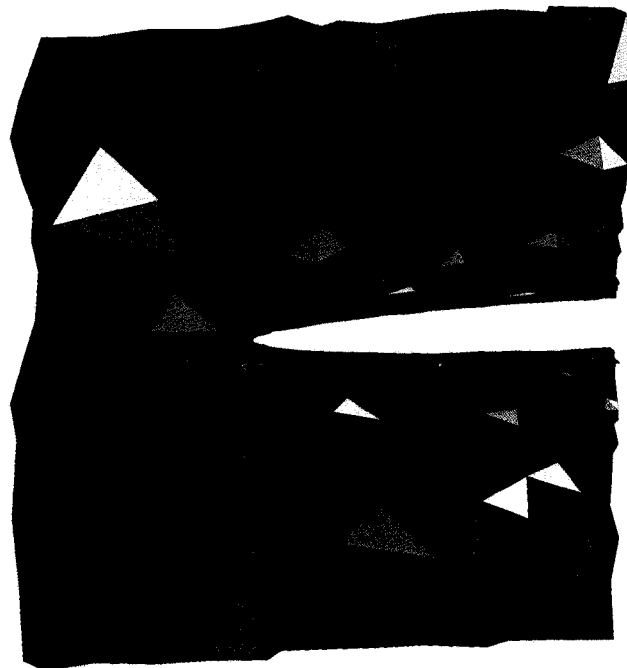
it. #	$\frac{\ V_i - V_{i-1}\ _{L^\infty}}{\ V_{i-1}\ _{L^\infty}}$	$\frac{\ V_i - V_{i-1}\ _{L^2}}{\ V_{i-1}\ _{L^2}}$
1	-	-
2	77,08 %	4,83 %
3	85,75 %	11,57 %
4	73,15 %	15,76 %

Tableau 4.5 Évolution du nombre de noeuds et d'éléments dans le domaine éloigné.

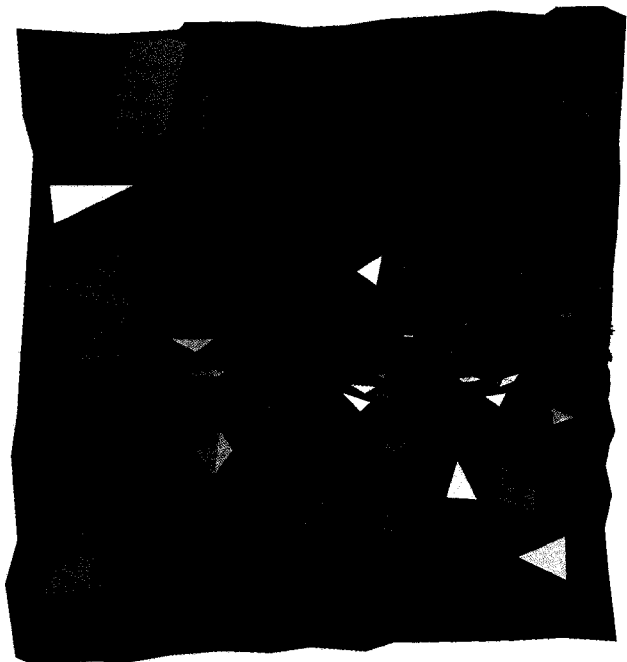
it. #	nb. noeuds	nb. éléments
1	272 095	1 290 240
2	153 600	854 655
3	141 761	796 635
4	141 261	800 997

uniformes comptant environ 100 fois plus de noeuds. On notera que les maillages pour le cas test avec profil sont tous raffinés près de l'extrémité du profil, ce qui explique en partie les plus faibles gains obtenus. Le rapport de volume entre les plus gros et les plus petits éléments est de 10000. Afin de conserver une transition graduelle de la taille des mailles, le maillage à l'interface du domaine éloigné et de la couche limite est raffiné. Le tableau 4.4 confirme que l'adaptation aurait pu être arrêtée après l'itération 3, car les normes relatives augmentent. La grandeur de la vitesse, notée  $V$ , a été utilisée pour calculer les normes. Aucune dégénérescence du tourbillon n'est observée pour ce cas test comme c'était le cas à la section 3.5.

Le tableau 4.5 permet de constater une variation de 34% du nombre d'éléments entre le premier et le deuxième maillage. Par la suite, le nombre d'éléments demeure relativement constant. Une explication à la variation importante du nombre d'éléments pour la première adaptation est reliée au type du maillage initial. Ce dernier possède le même nombre d'arêtes reliées à chaque noeud, car il a été créé en divisant des hexaèdres en tétraèdres. Les maillages obtenus aux itérations 2, 3 et 4 sont du type Delaunay et leur ratio d'arêtes par noeud varie. On peut donc affirmer que pour une même configuration de maillage, le nombre d'éléments demeure presque constant. Le maillage adapté de l'itération 4 compte 181 092 noeuds dont 141 261 sont dans le domaine éloigné.



(a)  $x/C_{\max} = 0$



(b)  $x/C_{\max} = 0,5$

Figure 4.19 Maillages obtenus après l'adaptation avec *OORT* (itération 3).

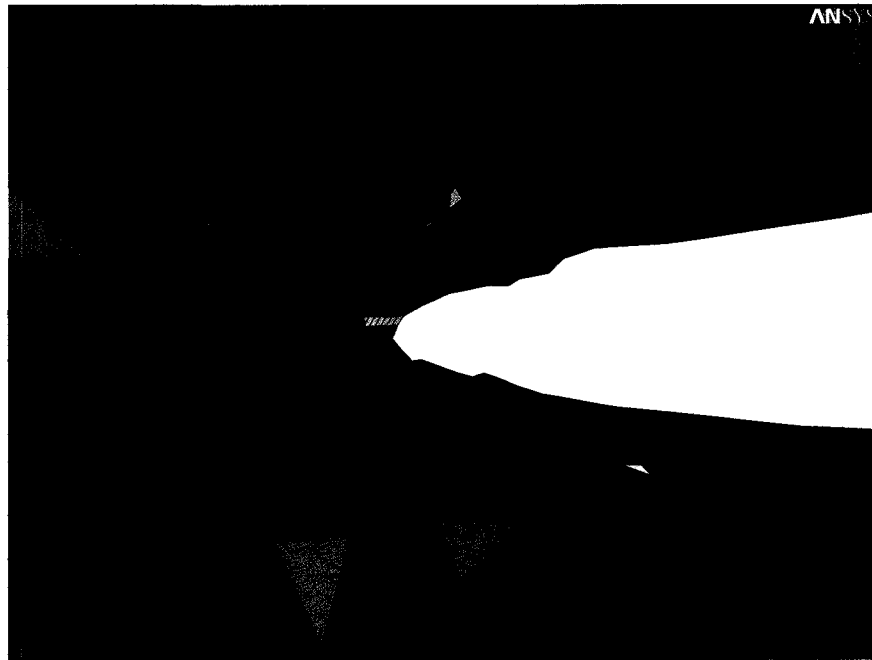


Figure 4.20 Gros plan du maillage près de la couche limite.

La figure 4.19(a) permet de visualiser les éléments du maillage qui touchent au plan  $x/C_{\max} = 0$ . Ce plan est situé à mi-corde du profil. Les éléments les plus petits sont situés près du profil et leurs tailles s'accroissent à mesure que l'on s'éloigne du profil. La figure 4.19(b) présente le maillage des éléments touchant le plan  $x/C_{\max} = 0,125$ . La zone de petits éléments semble bien correspondre à la position du tourbillon. La figure 4.20 est une vue détaillée du maillage près de l'extrémité du profil et inclut le maillage de la couche limite et le maillage du domaine éloigné. Des prismes forment le maillage de la couche limite alors que des tétraèdres remplissent le domaine éloigné. Le maillage de la couche limite est généré par projection du maillage adapté sur la surface du profil, formant ainsi des prismes. Les prismes générés sont par la suite divisés en plusieurs couches tel qu'expliqué à la section 4.3.

Enfin, on montre à la figure 4.21 la variable d'adaptation avant et après le transport. Cette figure illustre la situation pour le plan  $z = 0,115$  situé dans le tourbillon pour

une bonne partie du domaine en aval du profil. Presque aucune vorticité n'est visible près du profil, car seulement le domaine éloigné est montré. Après le transport, la nouvelle variable, qui contient à la fois la vorticité originale et la vorticité transportée, a une valeur environ quatre fois plus élevée en aval du profil. L'avantage de transporter la variable d'adaptation n'est tout de même pas aussi marqué que ce qui a été observé pour le cas test sans profil du chapitre 3.    la figure 4.21(b), la variable d'adaptation est plus importante, après avoir effectué le transport, complètement en aval du profil mais la différence par rapport à la variable originale reste faible. Deux raisons principales expliquent ce phénomène. Premièrement, la vorticité est surtout produite dans la couche limite du profil et la partie encore présente dans le domaine éloigné se retrouve majoritairement dans le sillage du profil et non près de l'extrémité. Deuxièmement, la variable est transportée dans la direction de la vitesse  $\vec{U}$ . Aux endroits de forte production ( $P_\phi$  élevé) correspondants au bord de fuite du profil dans le domaine éloigné, la vitesse est dirigée vers l'aval mais aussi vers le bas. Il s'en suit un transport de la variable dans la même direction et celle-ci ne correspond pas tout à fait à la position du tourbillon marginal. En résumé, il y a un avantage à transporter la variable d'adaptation vers l'aval mais l'avantage n'est pas aussi important que ce qui a été observé pour le cas test sans profil.

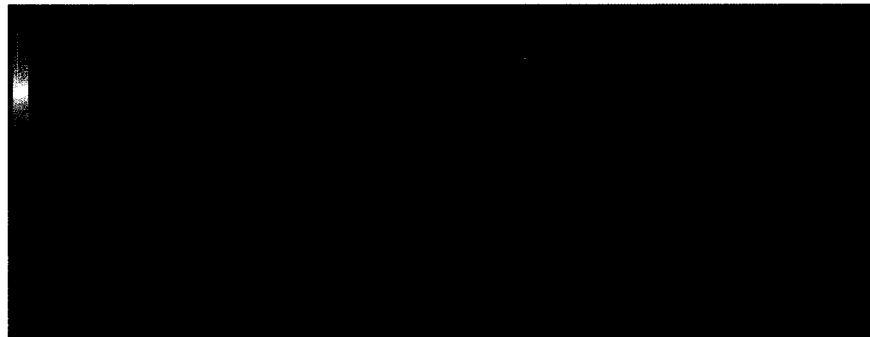
(a) (Vorticité  $\times$  hélicité) originale(b) (Vorticité  $\times$  hélicité) totale

Figure 4.21 Transport de la variable d'adaptation. Itération 3.

#### 4.5.5 Adaptation avec des hexaèdres

La figure 4.22(a) montre le maillage d'hexaèdres sur le mur latéral situé à l'emplanture du profil. La taille des mailles dans le sillage du profil est diminuée suite à l'adaptation. À cause de la conservation des noeuds originaux, certaines mailles deviennent alors davantage étirées. Un gros plan du maillage de la couche limite est montré à la figure 4.22(b). On remarquera, entre autres, que les mailles deviennent de plus en plus petites à mesure que l'on s'éloigne de la surface du profil. C'est habituellement le contraire que l'on recherche. Toutefois, pour mieux capter le tourbillon marginal, cette distribution est souhaitée. En effet, avec le modèle de

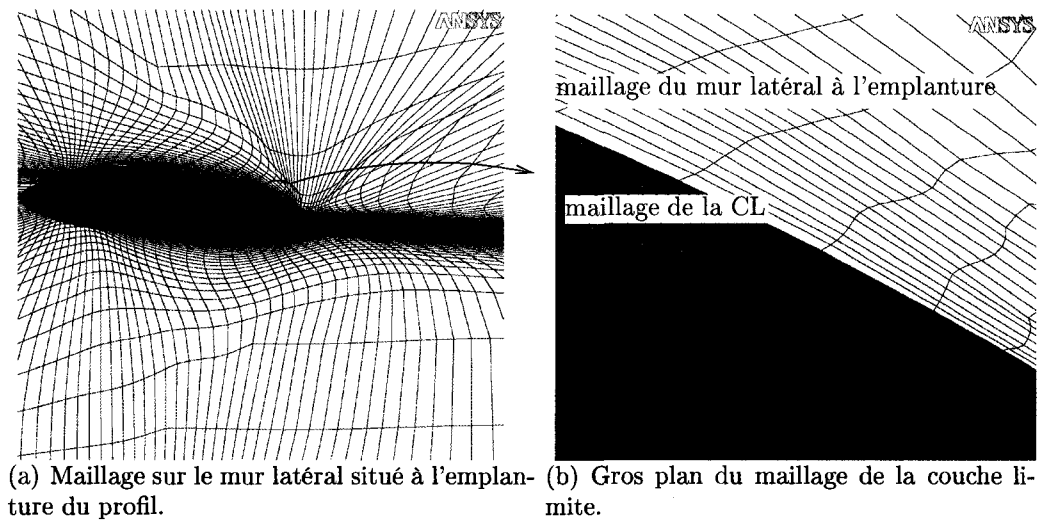


Figure 4.22 Maillage d'hexaèdres adaptés à la variable grandeur vorticité  $\times$  hélicité.

turbulence  $k - \varepsilon$  RNG, une loi de paroi est utilisée près de la paroi du profil mais aucune loi de tourbillon n'est utilisée dans le tourbillon. Ainsi, la première maille près du profil est relativement grosse mais l'on doit mailler finement dans le tourbillon. En réalité, la stratification de la couche limite se fait automatiquement lors de l'adaptation en suivant la méthodologie proposée à la section 4.5.1.

#### 4.5.5.1 Comparaison entre l'adaptation de OORT et CFX

Une comparaison entre l'adaptation réalisée par *OORT* et l'adaptation réalisée par *ANSYS-CFX* a été effectuée. La même variable d'adaptation est utilisée dans les deux cas, soit la norme de la vorticité  $\times$  l'hélicité. Il n'y a pas de transport. Les résultats sont présentés aux figures 4.23 et 4.24. L'adaptation réalisée par *ANSYS-CFX* est basée sur l'équation (1.19) et un seul domaine englobant toute la géométrie est utilisé. Les maillages initiaux dans les deux cas sont des maillages d'hexaèdres. Toutefois, au cours d'une adaptation par le solveur, des éléments prismatiques,



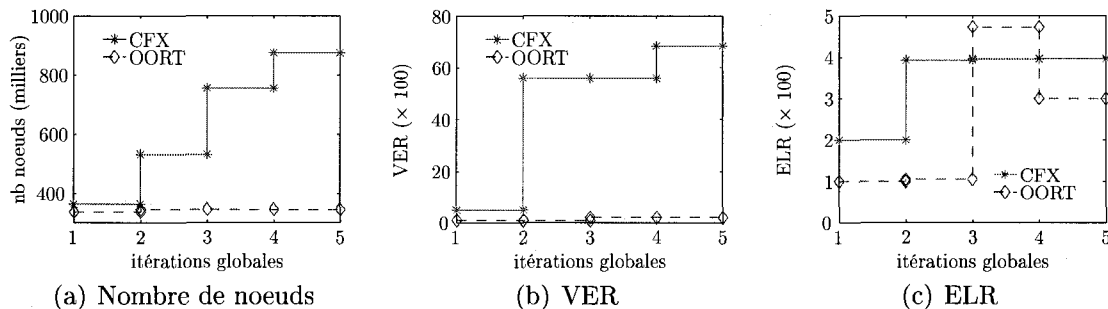


Figure 4.23 Comparaison entre les maillages adaptés de *ANSYS-CFX* et *OORT*.

tétraédriques et hexaédriques sont créés à partir des hexaèdres originaux. En ce qui concerne les maillages générés par *OORT*, il n'y a toujours que des hexaèdres.

La figure 4.23(a) témoigne de l'augmentation du nombre de noeuds dans les maillages adaptés par *ANSYS-CFX*. Trois adaptations ont été spécifiées. Les maillages adaptés suivant l'algorithme implémenté dans ce mémoire ont toujours le même nombre de noeuds mis-à-part une augmentation de 336 000 à 347 000 à l'itération globale deux. La faible augmentation du nombre de noeuds est liée à la modification de la couche limite. Dans le domaine éloigné, les mêmes noeuds sont conservés tout au long de l'adaptation mais leurs positions varient. Par contre, le nombre de couches d'éléments dans le maillage de la couche limite augmente. Les ratios de tailles obtenus suite aux adaptations par le solveur augmentent toujours tandis que les ratios de tailles obtenus avec *OORT* augmentent puis diminuent (figures 4.23(b) et 4.23(c)). Aucun lissage du maillage n'est effectué lors de l'adaptation par *ANSYS-CFX* : c'est la raison pour laquelle les rapports de tailles augmentent toujours.

Les profils de vitesse obtenus suite aux adaptations par les deux méthodes sont présentés à la figure 4.24. On voit que les profils sont similaires. L'adaptation par le solveur est quelque peu meilleure à  $x/C_{\max} = 0,125$  tandis que l'adaptation de *OORT* est meilleure à  $x/C_{\max} = 0,5$ . À  $x/C_{\max} = 8$ , les deux résultats sont très diffusés. Encore ici on note la différence importante entre l'adaptation

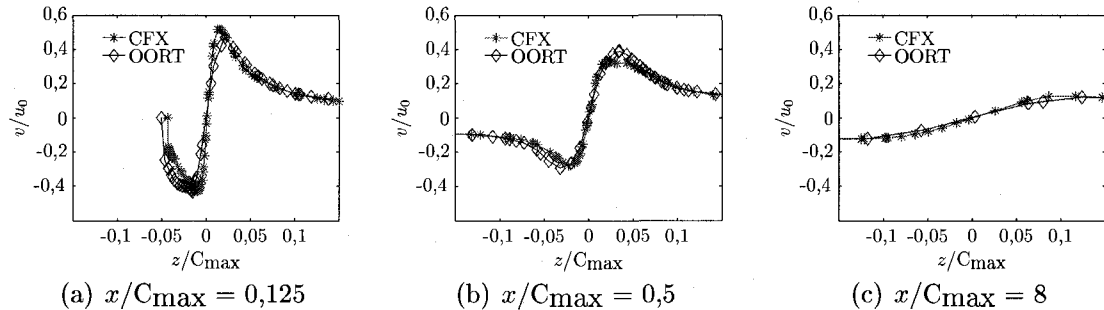


Figure 4.24 Comparaison entre les vitesses obtenues des maillages adaptés par *ANSYS-CFX* et *OORT*.

isotrope réalisée par *ANSYS-CFX* et l'adaptation anisotrope de *OORT*. À première vue, il est difficile de départager la meilleure méthode d'adaptation d'hexaèdres à utiliser dans un solveur volumes finis. Étirer les éléments dans les endroits de fortes variations améliore les résultats numériques comme en témoigne le cas test sans profil du chapitre 3 et les résultats obtenus à la section 4.5.4. De l'autre côté, limiter l'anisotropie des éléments en subdivisant les arêtes comme le fait *ANSYS-CFX* pourrait permettre au solveur de mieux converger. Cependant, la convergence du solveur était semblable pour les calculs effectués avec les deux méthodes d'adaptation présentées ici. Il est probable que les ratios de tailles élevés obtenus par *ANSYS-CFX* limitent quelque peu la convergence du solveur. Néanmoins, obtenir une bonne convergence du solveur avec des ratios de tailles aussi élevés est un avantage certain. Cet avantage est obtenu au détriment d'un temps de calcul plus long. En effet, à cause de l'augmentation du nombre de noeuds dans les maillages adaptés par *ANSYS-CFX*, le temps de calcul total est de 40,6 h comparativement à un temps de calcul total pour l'adaptation basée sur *OORT* de 26 h. Il y a donc un dosage à respecter entre une forte anisotropie permettant une bonne capture du tourbillon et une isotropie permettant au solveur de mieux converger. Il serait intéressant de comparer les résultats d'adaptation de *ANSYS-CFX* et de *OORT* provenant de maillages tétraédriques.

## CONCLUSION

L'objectif principal de ce travail était de mieux cerner numériquement un tourbillon turbulent visqueux. En particulier, ce travail traitait de la capture du tourbillon marginal généré par la demi-aile de forme en plan elliptique et de section NACA 16020. On observe généralement dans les calculs numériques une diffusion du tourbillon beaucoup plus importante que ce qui est observé expérimentalement. Les deux principaux facteurs responsables de la diffusion numérique sont le modèle de turbulence et la discrétisation spatiale. Ces facteurs ont été identifiés par l'Action concertée cavitation et les travaux réalisés dans ce mémoire les ont confirmés. Chacun influence le résultat d'une manière similaire : la viscosité numérique, reliée au maillage, est environ 1000 fois plus élevée que la viscosité moléculaire pour un maillage non-adapté tel que trouvé à la section 3.2.5, soit le même ordre de grandeur que la viscosité turbulente lorsqu'un modèle de turbulence à deux équations est utilisé.

Pour atteindre l'objectif principal, une technique d'adaptation de maillage est utilisée pour réduire la diffusion introduite par la discrétisation spatiale. Afin de développer la méthodologie d'adaptation, un cas test simplifié a d'abord été étudié. Dans ce cas test simplifié, le tourbillon marginal a été remplacé par un tourbillon analytique. Quatre objectifs spécifiques ont été fixés pour atteindre l'objectif principal :

1. déterminer une variable d'adaptation adéquate pour l'adaptation ;
2. contrôler la taille des maillages adaptés ;
3. contrôler la qualité géométrique des éléments des maillages adaptés ;
4. déterminer un modèle de turbulence adéquat pouvant être utilisé dans le processus adaptatif.

En plus de ces objectifs spécifiques, l'objectif implicite de validation du couplage entre le remailleur *OORT* développé par Dompierre et Labbé (2006) et le solveur

volumes finis *ANSYS-CFX* est défini. Dans les prochains paragraphes, chaque objectif spécifique sera passé en revue.

En ce qui concerne la variable d'adaptation  $\phi$ , il a été trouvé que la meilleure variable à utiliser parmi celles testées pour adapter des maillages d'hexaèdres est :

$$\phi_{\text{hexa}} = \|\vec{\zeta}\| \times \text{hélicité}.$$

Pour l'adaptation de tétraèdres, la variable d'adaptation retenue est plutôt :

$$\phi_{\text{tetra}} = \left( \|\vec{\zeta}\| \times \text{hélicité} \right) + \phi_{\text{transp}}$$

où  $\phi_{\text{transp}}$  est la variable d'adaptation transportée par l'écoulement. Cette nouvelle quantité a été introduite pour raffiner les maillages de tétraèdres le plus loin possible en aval de l'origine du tourbillon. Le cycle global solveur-remailleur converge plus rapidement en tenant compte de cette quantité transportée comme il a été vu à la section 3.4.2.1. Par contre, il y a peu d'avantages à transporter la variable vers l'aval si le maillage est composé d'hexaèdres. Lors du transport de la variable, une évaluation des pertes numériques causées par le maillage est réalisée et reflétée par le paramètre  $\eta_{\text{num}}$ . L'évaluation exacte de ce paramètre est le point le plus important de la méthode d'adaptation incorporant le transport. Une surestimation est néfaste, car elle favorise une zone de mailles grossières près de l'origine du tourbillon tandis qu'une sous-estimation n'apporte pas d'avantages significatifs. On notera au passage que ce paramètre joue le même rôle fonctionnel que l'écart-type de la longueur d'arêtes mesurée dans la métrique par le logiciel de remailage *OORT*. En effet, les deux paramètres mesurent l'adéquation existante entre le maillage et le problème numérique, du moins lorsqu'il s'agit d'éléments simpliciaux. Lorsqu'il est question d'éléments hexaédriques,  $\eta_{\text{num}}$  est toujours une mesure de la « qualité » du maillage tandis que l'écart-type ne la reflète pas nécessairement (Dompierre et Labbé (2006)).

Deux façons novatrices de calculer  $\eta_{num}$  ont été introduites dans ce mémoire. La première façon est basée sur le tenseur des taux de déformation et de rotation ( $\bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{\Omega}}$ ) et donne les meilleurs résultats en laminaire. La deuxième façon, basée sur les pertes de puissance, permet par contre un traitement du cas turbulent.

Pour améliorer la méthode, une meilleure évaluation de  $\eta_{num}$  est requise. Les avenues possibles sont : 1) diminuer les erreurs d'arrondis, par un traitement en double précision par exemple et 2) diminuer les effets de bords, par exemple en utilisant un code d'éléments finis. Le but est de se concentrer le plus possible sur les pertes à l'intérieur du domaine. Une évaluation de  $\eta_{num}$  locale au lieu de globale est une autre piste à explorer. En plus d'une possible amélioration de l'évaluation de  $\eta_{num}$ , un calcul local permettrait de traiter plusieurs tourbillons. Dans une machine hydraulique typique, il peut exister plusieurs tourbillons en même temps et ces tourbillons sont localisés à différents endroits dans le domaine. L'intensité de chaque tourbillon peut aussi différer. Ainsi, pour ces cas, il est nécessaire d'avoir un paramètre  $\eta_{num}$  qui varie localement. On peut penser à subdiviser le domaine original en un certain nombre de sous-domaines contenant chacun plusieurs éléments ou encore à calculer une valeur de  $\eta_{num}$  pour chaque noeud. Cependant, le calcul de  $\eta_{num}$  local avec *CFX-10.0* est ardu sinon impossible. Le lecteur voulant aborder ce problème trouvera sans doute plus de facilité à utiliser un logiciel dont le code source est disponible.

Le second objectif spécifique concerne la taille des maillages adaptés. Afin de diminuer la variation du nombre d'éléments, et par conséquent du nombre de noeuds, un algorithme a été implémenté. Cet algorithme est exécuté après le calcul des tenseurs nodaux et effectue une mise-à-l'échelle de ces tenseurs. Sur le cas test sans profil, la variation du nombre de noeuds est de moins de 25% pour l'ensemble des itérations solveur-remailleur. Pour le cas test avec profil, la variation du nombre de noeuds est limitée à environ 50% sur l'ensemble des itérations. Ces valeurs sont acceptables

pour l'étude numérique du tourbillon. Sans le contrôle réalisé par l'algorithme implémenté, la variation atteint environ 10 000%.

La qualité géométrique des éléments a été contrôlée par un lissage de la métrique. La méthode de lissage de Li *et al.* (2004) a été modifiée puis implémentée. Cette méthode effectue un lissage des vecteurs propres et un lissage des valeurs propres des tenseurs nodaux. Une nouvelle méthode de lissage des volumes a aussi été développée. Bien qu'elle soit moins efficace que la précédente, son temps de calcul réduit lui procure un certain avantage pour de gros maillages. On notera toutefois qu'aucune des méthodes de lissage actuelles ne garantit des ratios de tailles déterminés pour les maillages adaptés. Les ratios de tailles obtenus après l'adaptation sont toujours plus importants que les ratios maximaux permis lors du lissage de la métrique. Néanmoins, le lissage réalisé aide à maintenir une qualité de maillage acceptable. On n'a qu'à comparer les ratios de tailles obtenus avec la méthodologie proposée dans ce mémoire aux ratios de tailles des maillages obtenus de l'adaptation avec *ANSYS-CFX* pour s'en rendre compte. Dans le dernier cas, les ratios de tailles augmentent toujours, ce qui n'est pas le cas pour les ratios obtenus avec la méthodologie proposée ici. La prise en compte du gradient lors du calcul de la métrique a permis de diminuer les ratios de tailles des maillages adaptés. Normalement, la métrique est construite à partir du hessien d'une variable scalaire.

Concernant le modèle de turbulence, le plus approprié présentement pour le calcul des tourbillons, le modèle SSG, nécessite une qualité de maillage très élevée et même avec un maillage de très grande qualité géométrique, la convergence du solveur est difficile à obtenir. Les modèles à deux équations convergent mieux. Toutefois, ils surestiment fortement la viscosité turbulente. Cela est causé par une surproduction de turbulence d'environ 90% dans le tourbillon (cf. section 3.2.6.2). Les modèles  $k - \omega$  et SST qui résolvent la couche limite jusqu'à la paroi n'ont pas démontré leur supériorité pour le calcul du tourbillon marginal comme on aurait pu s'y attendre

compte tenu de l'hypothèse de McCormick (1954). Pour le cas test sans profil, une modification simple du modèle  $k - \varepsilon$  a permis de réduire la surestimation de la viscosité turbulente à des valeurs comparables à ce qui est obtenu avec les modèles SSG et LES. Cette modification a été transposée au cas test avec le profil. La faible convergence du solveur observée alors n'a pas permis de poursuivre l'utilisation de ce modèle. Dans ces conditions, le modèle de turbulence le plus adapté pour le calcul du tourbillon marginal dans le contexte d'un couplage avec un processus adaptatif s'est révélé être le modèle  $k - \varepsilon$  RNG.

Les nombreux tests effectués avec la méthode d'adaptation ont permis de vérifier son efficacité. La méthodologie proposée a permis de diminuer la viscosité numérique aux alentours de  $\frac{\eta_{num}}{\eta_{mol}} = 30$  pour le cas test du tourbillon analytique. Lors de l'adaptation, les éléments du maillage courant sont modifiés en grandeur et direction afin de satisfaire le plus possible les dimensions imposées par la métrique. Le raffinement engendré est alors concentré dans le tourbillon et est fortement anisotrope. De plus, la méthode permet d'avoir des éléments étirés loin en aval du point d'origine du tourbillon et peu étirés axialement immédiatement après l'origine du vortex. Spécifiquement, pour le cas test avec le profil, il a été observé qu'il n'est pas nécessaire de mailler finement le sillage du profil. Un maillage raffiné dans le tourbillon est suffisant. Cette étude a permis de mettre en relief un lien beaucoup plus important qu'anticipé entre le solveur volumes finis *ANSYS-CFX* et le remaillieur *OORT*. En effet, plusieurs facteurs affectent la convergence du solveur. En particulier, le maillage et le modèle de turbulence sont parmi les plus importants. De plus, l'anisotropie des éléments n'est pas que bénéfique. On a constaté que la convergence du solveur volumes finis est diminuée lorsque les éléments sont fortement anisotropes (cf. section 4.4.1). Si l'utilisateur spécifie le schéma d'interpolation « high resolution » pour les termes convectifs, alors le solveur peut diminuer la qualité de l'interpolation en présence d'éléments fortement anisotropes. Il en résulte alors

une diminution de la précision de la solution. La prise en compte de paramètres supplémentaires propres au solveur utilisé permettrait d'améliorer l'adaptation. La méthode converge après quatre itérations solveur-remailleur en moyenne, bien que les gains les plus importants soient réalisés durant les deux premières itérations. Lorsqu'aucune solution analytique n'est connue, l'erreur relative doit être utilisée pour juger de la convergence de la méthode plutôt que l'erreur absolue.

Enfin, l'objectif principal a été atteint car les profils de vitesse obtenus numériquement se rapprochent des profils de vitesse observés expérimentalement. La figure 4.18 présente les profils de vitesse obtenus avec des maillages de tétraèdres de 180K noeuds. Les profils obtenus avec les maillages de tétraèdres adaptés sont semblables aux profils obtenus avec des maillages d'hexaèdres comptant 11 fois plus de noeuds. Afin de diminuer davantage la diffusion du tourbillon, un maillage initial comptant plus de noeuds et un meilleur modèle de turbulence que le modèle  $k - \varepsilon$  RNG doivent être utilisés. Le rapport entre le nombre de noeuds des maillages uniformes et adaptés permettant d'obtenir des profils de vitesse comparables est plus élevé pour des tétraèdres. Le gain de temps ainsi obtenu en suivant la méthodologie proposée est donc plus important pour des tétraèdres comparativement aux hexaèdres. La diffusion numérique introduite par les tétraèdres est plus importante.

### **Limitations du processus**

L'algorithme implémenté dans ce mémoire lie un solveur commercial à un code d'adaptation académique et l'échange d'informations entre les deux entités pose des problèmes. Le principal problème concerne la topologie. Pour adapter un maillage avec *OORT*, chaque noeud du maillage doit être associé à une entité topologique le supportant : sommet, arête, face ou volume. Aucune information topologique n'est conservée par *ANSYS-CFX* dans ses fichiers internes, ni d'ailleurs par le format de



fichier CGNS, format de stockage intermédiaire entre le format pirate et le format CFX. Afin d'associer aux noeuds du maillage des entités topologiques à la sortie de *ANSYS-CFX*, on pourrait utiliser la topologie disponible dans le fichier pirate avant le transfert du maillage vers le solveur. Toutefois, les noeuds des maillages exportés par le solveur sont quelquefois renumérotés. Il est normal que ce dernier effectue une renumérotation pour faciliter les calculs numériques, mais une fois les calculs terminés, la numérotation d'origine n'est pas systématiquement recouverte. La question de la numérotation des noeuds à la sortie du solveur a été posée à un représentant de *ANSYS-CFX* et il ne semble pas être possible de retrouver systématiquement la numérotation d'origine. La solution retenue dans ce mémoire permettant d'associer les noeuds du maillage à la topologie, consistant à recréer la topologie à partir des conditions frontières, est difficilement applicable à des géométries complexes. Cela nécessiterait de définir dans le solveur autant de conditions frontières que d'entités topologiques existantes. Pour le cas test avec le profil, il n'aurait pas été pénalisant d'adapter en ne suivant pas la géométrie pour les noeuds situés à l'interface du domaine éloigné et de la couche limite car ceux-ci sont projetés par la suite sur le profil. En n'incluant pas la géométrie et la topologie dans les fichiers, la conversion du format pirate vers CFX et inversement est grandement facilitée. De plus, cela permettrait d'étendre le champ d'application du couplage *ANSYS-CFX/OORT* à des maillages issues de géométries complexes.

Un second problème rencontré concerne l'adaptation, par *OORT*, d'éléments ayant une forme euclidienne plus petite que la forme minimale spécifiée. On a observé que lorsque beaucoup d'éléments présentent cette caractéristique, le remaillage adapte moins le maillage qu'anticipé. Ce comportement n'est pas totalement compris. Le programme *OORT* est codé de façon telle que lorsqu'une modification élémentaire est à faire, celle qui rapproche le plus la forme euclidienne de la forme spécifiée est

réalisée parmi un ensemble de modifications possibles. Une meilleure connaissance du code du remailleur serait nécessaire pour régler ce problème.

### **Travaux futurs**

Afin d'améliorer davantage la capture du tourbillon marginal, un certain nombre de travaux pourraient être entrepris en plus de ceux déjà mentionnés. Le premier et le plus évident consiste à paralléliser l'exécution de *OORT* afin de réduire le temps d'adaptation. Tout au long de ce mémoire, des temps de calcul ramenés sur la base d'un calcul séquentiel ont été donnés. En réalité, le solveur permet une parallélisation. Il en résulte un écart important entre les temps de calcul réels pris par le solveur et le remailleur, ce dernier nécessitant environ 10 fois plus de temps. Le second point à améliorer est relié à la qualité géométrique des maillages adaptés par *OORT* : il faut avoir un meilleur contrôle des ratios de tailles de ces maillages. Présentement, les ratios de tailles sont contrôlés par un lissage de la métrique, mais ce n'est pas suffisant. Pour garantir que des ratios de tailles usagers soient respectés, il faudrait repenser en profondeur l'algorithme d'adaptation pour mettre l'emphasis sur des critères géométriques plutôt que sur les critères reliés à la métrique. Il faut ajouter des critères géométriques et s'assurer que ceux-ci soient prioritaires par rapport aux autres. Les ratios de volumes et de longueurs d'arêtes seraient deux exemples de critères géométriques qui pourraient être ajoutés au remailleur. Une autre solution serait d'effectuer un lissage a posteriori des maillages adaptés afin de respecter les ratios de tailles fixés. Cette solution n'a pas été retenue à la section 1.2.4 cependant, car le problème du lissage n'est pas traité à la source.

Après avoir mieux contrôlée la qualité géométrique des maillages adaptés, on pourrait aussi limiter davantage l'anisotropie des éléments. Deux manières existent dans *OORT* : en limitant le ratio des métriques ou en fixant une forme géométrique éle-

vée. La deuxième solution ne paraît pas être à privilégier compte tenu des problèmes mentionnés aux paragraphes précédents. Quant à la première manière, peu de tests ont été faits avec des ratios de métriques très bas et il serait bon d'expérimenter plus de ce côté. Si l'anisotropie des éléments jouent un rôle secondaire dans le solveur volumes finis *ANSYS-CFX*, on pourrait adapter les maillages en fonction de la présence d'une variable plutôt que de la variation d'une variable. De ce point de vue, adapter en fonction de la présence de la variable « position tourbillon » paraît prometteur car celle-ci est présente très loin en aval de l'origine du tourbillon.

Une modification à l'algorithme de retournement d'arêtes en 3d sur les surfaces convexes et concaves doit être apportée. L'ajout d'un critère de variation de volume et l'analyse des noeuds retenus sur la boucle équatoriale permettraient d'éliminer les deux problèmes rencontrés (cf. annexe E pour plus de détails). Dans ce mémoire, pour simplifier les corrections à l'algorithme et aussi par manque de temps, tous les retournements d'arêtes dont au moins un sommet touche à une surface, convexe ou non, ont été interdits. Cela élimine les deux problèmes rencontrés mais élimine aussi d'autres retournements sur des surfaces planes, qui pourraient être bénéfiques.

Une autre travail qui pourrait être entrepris pour améliorer la capture numérique des tourbillons serait d'opter pour un maillage de l'extrémité du profil du type préconisé par Tysell (2007). Cet auteur maille la couche limite en diminuant, de façon automatique, le nombre de couches d'éléments près de l'extrémité du profil. L'épaisseur du maillage de la couche limite se trouve ainsi à varier d'un endroit à l'autre autour du profil. Mailler de cette façon permettrait d'adapter le maillage plus près du profil dans la région proche de l'extrémité.

Comme avant dernière suggestion, on pourrait améliorer la modélisation de la turbulence en revoyant celle-ci en profondeur. Parmi les modélisations prometteuses se retrouvent une loi logarithmique spécifique au tourbillon et un modèle de turbulence

de type  $k - \varepsilon$  cubique. Ces modèles ne peuvent être implantés dans le solveur commercial *ANSYS-CFX*. Si un autre solveur est utilisé, il serait intéressant de pouvoir utiliser des interpolations plus élevées que le second ordre pour les variables primaires (cf. section 4.4.1). Enfin, si toutes les améliorations précédentes sont apportées, on pourrait songer à ajouter l'option multiphasique pour calculer l'écoulement cavitant.

## RÉFÉRENCES

- AIT BOUZIAD, Y. (2005). *Physical modeling of leading edge cavitation : computational methodologies and application to hydraulic machinery*. Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- ALAUZET, F. et FREY, P. (2003). *Estimateur d'erreur géométrique et métriques anisotropes pour l'adaptation de maillages. Partie I : aspects théoriques*. Institut National de Recherches en Informatique et en Automatique (INRIA).
- ALAUZET, F. et FREY, P. (2004). Anisotropic mesh adaptation for transient flows simulations. *INRIA*.
- ALAUZET, F., GEORGE, P., MOHAMMADI, B. et BOROUCHAKI, H. (2003). Transient fixed point-based unstructured mesh adaptation. *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, 43, 729–745.
- ALAUZET, F., LOSEILLE, A., DERVIEUX, A. et FREY, P. (2006). Multi-Dimensional Continuous Metric for Mesh Adaptation. *Proceedings, 15th International Meshing Roundtable*, 191–214.
- ANSYS (2005). *ANSYS CFX-Solver, Release 10.0 : Theory*. ANSYS Inc.
- ARNDT, R. E. (2002). Cavitation in vortical flows. *Annual review of fluid mechanics*, 34, 143–177.
- BABUŠKA, I. et RHEINBOLDT, W. (1977). Analysis of optimal finite element meshes in  $R^1$ . University of Maryland, Institute for Physical Science and Technology, Technical Note BN-869.

BARBA, L., LEONARD, A. et ALLEN, C. (2005). Vortex method with meshless spatial adaption for accurate simulation of viscous, unsteady vortical flows. *Int. Journal for Num. Meth. Fluids*, 47, 841–848.

BATCHELOR, G. (1964). Axial flow in trailing line vortices. *Journal Fluid Mech.*, 20, 645–658.

BENGERTH, W. et RANNACHER, R. (2004). *Adaptive finite element method for differential equations*. Lecture notes in mathematics. Birkhauser.

BERGSTRÖM, J. (2000). *Modeling and Numerical Simulation of Hydro Power Flows*. Thèse de doctorat, Luleå University of Technology, Sweden.

BERNSTEN, G.S. *et al.* (2001). Numerical modeling of sheet and tip vortex cavitation with Fluent 5. *Int. symposium on cavitation, CAV2001*.

BIJL, H., ZUIJLEN, A. et VAN MAMEREN, A. (2005). Validation of adaptive unstructured hexahedral mesh computations of flow around a wind turbine airfoil. *Int. Journal for Num. Meth. Fluids*, 48, 929–945.

BOROUCAKI, H., HECHT, F. et FREY, P.-J. (1998). Mesh gradation control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43, 1143–1165.

BOULON, O. et CHAHINE, G. (1997). étude numérique de la cavitation sur une aile tridimensionnelle. poches de cavitation instationnaires, effets non permanents et de confinements. *Revue Scientifique et Technique de la Défense*, 27–43.

CIARLET, P. (1978). *The finite element method for elliptic problems*. North Holland.

COURCHESNES, O. (2007). *Génération adaptative de maillage tridimensionnel à partir d'images IRM du tronc humain*. Mémoire de maîtrise, École polytechnique de Montréal.

COUSSIRAT, M., GRAU, J., MATEOS, B., FONTANALS, A. et EGUSQUIZA, E. (2006). Assessment of turbulence models for unsteady flow in hydrofoils. *IAHR Int. Meeting of WG on Cavitation and Dynamic Problems in Hydraulic Machinery and Systems*.

COUTIER-DELGOSHA, O., FORTES-PATELLA, R. et REBOUD, J. (2003). Evaluation of the turbulence model influence on the numerical simulation of unsteady cavitation. *Transactions of the ASME*, 125, 38–45.

D'AZEVEDO, E. et SIMPSON, R. (1991). On optimal triangular meshes for minimizing the gradient error. *Numerische Mathematik*, 59, 321–348.

DE WITH, G., HOLDO, A. et HULD, T. (2003). Solution adaptive grids applied to low reynolds number flow. *Int. Journal for Num. Meth. Fluids*, 42, 1135–1154.

DENISET, F. (1996). *Modélisation numérique des conditions d'apparition de la cavitation de tourbillon marginal sur une aile 3D. Effet de confinement*. Thèse de doctorat, Institut national Polytechnique de Grenoble.

DOMPIERRE, J. et LABBÉ, P. (2006). *OORT : Manuel de l'utilisateur, version 0.0.0.3*. Centre de Recherches en Calculs Appliquées (CERCA).

DUFOUR, S. (1999). *Méthodes d'éléments finis adaptatives pour les écoulements multifluides*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal.

DUPONT, P. et CERRUTTI, P. (1992). Comparison between tip vortex development calculations and measurements on an elliptic hydrofoil. *Proceedings of the third european Fidap Users Group Meeting, Heidelberg.*

DUPONT, P., HIRSCHI, R. et BILLARD, J.-Y. (1993). Prédiction de la cavitation liée à l'enroulement en extrémité d'un hydrofoil de forme en plan elliptique. *Proc. of Cavitation Inception, ASME Winter Annual Meeting, New-Orleans, 177*, 113–124.

FALER, J. et LEIBOVICH, S. (1977). Disrupted states of vortex flow and vortex breakdown. *Physics of Fluids, 20*, 1385–1400.

FERZIGER, J. et PERIĆ, M. (2002). *Computational Methods for Fluid Dynamics, third edition.* Springer.

FORTIN, A. (2001). *Analyse numérique pour ingénieurs.* Presses internationales Polytechnique.

FRANC, J.P. et al. (1995). *La cavitation, Mécanismes physiques et aspects industriels.* Presses Universitaires de Grenoble.

FREY, P. et GEORGE, P.-L. (1999). *Maillages, applications aux éléments finis.* Hermès, Paris.

FRUMAN, D., CERRUTTI, P., PICHON, T. et DUPONT, P. (1997). Effect of hydrofoil planform on tip vortex roll-up and cavitation. *La Houille Blanche, 4*, 57–63.

GEORGE, P.-L. et BOROUCHAKI, H. (1997). *Triangulation de Delaunay et maillage.* Hermès, Paris.

GOVINDARAJU, S. et SAFFMAN, P. (1971). Flow in a turbulent trailing vortex. *The Physics of Fluids, 14*, 2074–2080.



- HALL, M. (1972). Vortex Breakdown. *Annual Review of Fluid Mech.*, 4, 195–218.
- HARVEY III, A. D., ACHARYA, S., LAWRENCE, S. L. et CHEUNG, S. (1990). Solution-Adaptive Grid Procedure for High-Speed Parabolic Flow Solvers. *AIAA Journal*, 29, 1232–1240.
- HIRSCHI, R. (1998). *Prédiction par modélisation numérique tridimensionnelle des effets de la cavitation à poche dans les turbomachines hydrauliques*. Mémoire de maîtrise, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- HOFFMANN, E. et JOUBERT, P. (1963). Turbulent lines vortices. *Fluid Mech.*, 16, 395–411.
- INANÇ, C. (2002). *Computational methodology for the simulation of turbulent cavitating flows*. Thèse de doctorat, University of Florida.
- IVERSEN, J. D. (1974). Correlation of turbulent trailing vortex decay data. *Journal of Aircraft*, 13, 338–342.
- JEONG, J. et HUSSAIN, F. (1995). On the identification of a vortex. *J.Fluid Mech.*, 285, 69–94.
- JIAN, M., MACHIRAJU, R. et THOMPSON, D. (2002). A novel approach to vortex core region detection. *Eurographics Symposium on Visualization*, 217–225.
- KRIEGER, M. et WIMMER, P. (2003). Dissipation of vortices in CFD-simulations. *Proc. Appl. Math. Mech.*, 3, 344–345.
- LABBÉ, P., DOMPIERRE, J., VALLET, M.-G. et GUIBAULT, F. (2005). Interpolation error control through anisotropic mesh adaptation. *Int. Journal for Numerical Meth. in Fluids*.

- LAMB, H. (1932). *Hydrodynamics*. Cambridge University Press.
- LAWSON, C. (1977). Software for C 1 surface interpolation. *Math. Soft. III*, John R. Rice (ed), Academic Press, New York, 161–194.
- LEVY, Y., DEGANI, D. et SEGNER, A. (1990). Graphical visualization of vortical flows by means of helicity. *AIAA Journal*, 28, 1347–1352.
- LI, X., REMACLE, J.-F., CHEVAUGEON, N. et SHEPHARD, M. (2004). Anisotropic mesh gradation control. *Thirteenth International Meshing Roundtable*, (Williamsburg, VA), Sandia National Laboratories, Sept. 2004.
- LISEIKIN, V. (2007). *A computational Differential Geometry Approach to grid generation, second edition*. Springer.
- LO, S. (2002). Finite element mesh generation and adaptive meshing. *Prog. Struct. Engng. Mater.*, 4, 381–399.
- MAGNU (2006). *Manuel de l'utilisateur : Bibliothèque de classes Pirate*. Laboratoire de Maillages et géométries numériques (MAGNU).
- MANOLE, C.-M., VALLET, M.-G., DOMPIERRE, J. et GUIBAULT, F. (2005). Benchmarking second order derivatives recovery of a piecewise linear scalar field. *Proceedings of the 17th IMACS World Congress Scientific Computation, Applied Mathematics and simulation*.
- MCCORMICK, B. (1954). *A study of the minimum pressure in a trailing vortex system*. Thèse de doctorat, Pennsylvania state University.
- MUNSON, YOUNG et OKIISHI (1998). *Fundamentals of fluid mechanics, third edition*. John Wiley & sons.

PICHON, T. (1995). *Contribution à l'étude de la cavitation de tourbillon marginal*. Thèse de doctorat, École doctorale des sciences pour l'ingénieur de Nantes.

REVUELTA, A. (2004). On the axisymmetric vortex breakdown of a swirling jet entering a sudden expansion pipe. *Physics of Fluids*, 16, 3495–3498.

RYHMING, I. L. (2004). *Dynamique des fluides*. Presses Polytechniques et universitaires romandes.

SAFFMAN, P. (1995). *Vortex Dynamics*. Cambridge University Press.

SCHLICHTING, H. et GERSTEN, K. (2000). *Boundary layer theory, 8th edition*. Springer.

SQUIRE, H. (1954). The growth of a vortex in turbulent flow. *Aero. Res. Council*, 666.

SUJUDI, D. et HAIMES, R. (1995). Identification of swirling flow in 3-D vector fields. *AIAA 95-1715*.

THOMPSON, J. F., SONI, B. et WEATHERILL, N. P. (1999). *Handbook of grid generation*. CRC Press.

TYSELL, L. (2007). The TRITET Grid Generation System. *Proceedings of the 10th Int. Society of Grid Generation Conf., Crete*.

VALLET, M.-G. (1992). *Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, France.

VONLANTHEN, M. (2007). étude des critères de détection et de visualisation d'un vortex. *Projet de 9e semestre, EPFL*.

WILCOX, D. C. (1993). *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, Inc. La Cañada.

YANG, X. et MA, H. (2002). Computation of strongly swirling confined flows with cubic eddy-viscosity turbulence models. *Int. Journal for Num. Meth. Fluids*, 3, 1355–1370.

ZEMAN, O. (1995). The persistence of trailing vortices : A modeling study. *Phys. Fluids*, 7, 135–143.

ZHONG, B., SHAW, S. et QIN, N. (2007). BILU implicit multiblock Euler/Navier-Stokes simulation for rotor tip vortex and wake convection. *Int. Journal for Num. Meth. in Fluids*, 55, 509–536.

## ANNEXE A

## PROFIL ELLIPTIQUE NACA 16020

La demi-aile de forme en plan elliptique utilisée est formée à partir d'un profil NACA non standard à 5 chiffres qui est constant de l'emplanture à l'extrémité. Il a été défini par l'Action concertée cavitation de façon à ce que l'épaisseur maximale du profil soit à 50% de la corde. C'est un profil non-cambré. Des essais en tunnel de cavitation ont été effectués au Laboratoire de machines hydrauliques (LMH) et à l'École navale de Brest (EN) avec des profils NACA 16020 homothétiques ayant respectivement 60 mm et 80 mm de cordes à l'emplanture (cf. Pichon (1995), Dupont *et al.* (1993), Dupont et Cerrutti (1992)).

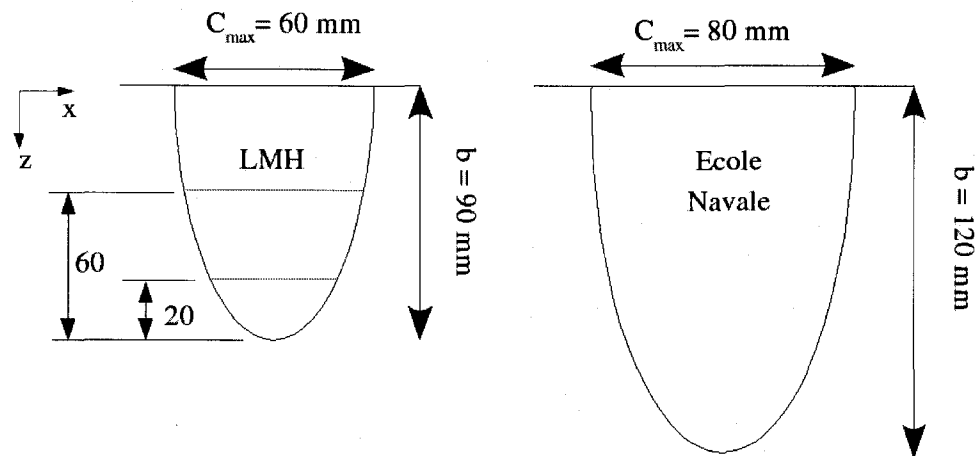


Figure A.1 Forme en plan des profils NACA 16020 du LMH et de l'EN.

L'équation du profil en positionnant l'origine au bord d'attaque est la suivante :

$$y_t = \begin{cases} \pm \left[ 0,197936x^{0,5} - 0,047796x - 0,008434x^2 - 0,111642x^3 \right] & \text{pour } x < x_m; \\ \pm \left[ 0,002 + 0,465(1-x) - 0,684(1-x)^2 + 0,292(1-x)^3 \right] & \text{pour } x > x_m, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où  $x$  varie de 0 à 1 et  $x_m$  est l'abscisse d'épaisseur maximale. Pour calculer la corde suivant la direction  $z$ , on utilise l'équation de l'ellipse :

$$\frac{\left(\frac{C(z)}{2}\right)^2}{\left(\frac{C_{\max}}{2}\right)^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Une comparaison a été effectuée entre le profil théorique donné par l'équation et le profil usiné afin de vérifier que ce dernier corresponde bien à l'équation. Les dimensions du profil physique ont été relevées à l'aide d'un palpeur mécanique. Les résultats sont présentés à la figure A.2 après repositionnement de l'origine au centre du profil. La concordance est bonne. La figure A.3 est un gros plan de la section à 20 mm de l'extrémité du profil. La courbe théorique ainsi que la courbe mesurée sont encore représentées. L'erreur de mesure additionnée de l'erreur de fabrication est de 0,058 mm.

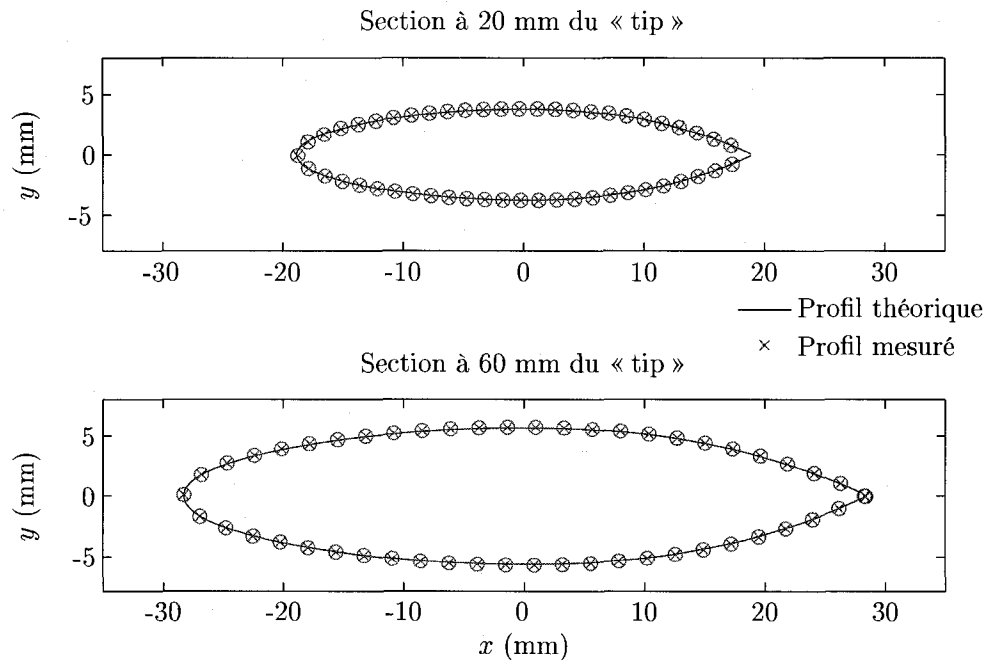


Figure A.2 Comparaison entre le profil physique mesuré et l'équation analytique décrivant ce profil pour deux sections.

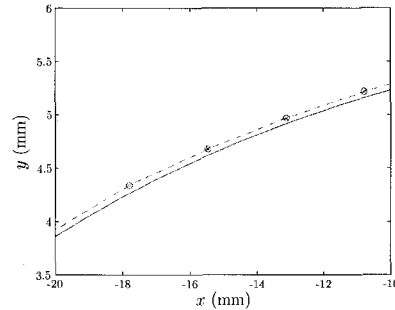


Figure A.3 Gros plan : 20 mm.

La représentation mathématique exacte du profil a un bord de fuite droit. Selon l'équation (A.1), le bord de fuite mesure 0,2 mm d'épais à 60 mm du bout du profil et 0,14 mm à 20 mm du bout. C'est comparable à l'épaisseur d'une feuille de papier ou deux, selon la feuille. À la jonction entre le profil et la paroi de plexiglass, il y a un jeu d'environ 1 à 2 mm. Ce jeu introduit de la turbulence dans l'écoulement de sorte que c'est à cet endroit que la cavitation apparaît en premier. Le fait que le bord de fuite du profil soit droit a ainsi une importance moindre. Pour ces deux raisons et aussi afin de faciliter la construction de la géométrie et du maillage, le bord de fuite est considéré pointu. Ainsi, on utilise plutôt l'équation suivante pour le bord de fuite :

$$y_t = \pm \left[ 0,004(1 - x) + 0,465(1 - x) - 0,684(1 - x)^2 + 0,292(1 - x)^3 \right] \quad \text{pour } x > x_m,$$

en remplacement de l'équation (A.1). L'équation complète du profil n'est plus de continuité  $C_1$  à  $x_m$  en tenant compte de cette modification. La différence de courbure engendrée est toutefois négligeable en regard des aspérités présentes sur le profil physique. La différence entre la courbe NACA originale et la courbe NACA modifiée est faible. Par exemple, pour la section située à 75 mm de l'emplanture et un point à 4/5 de la corde, il y a 0,0398 mm de différence entre les deux courbes, ce qui se compare à l'erreur observée lors de la mesure. Il apparaît donc justifié d'employer une telle simplification.

## ANNEXE B

DEUX DOMAINES DE CALCULS DANS *ANSYS-CFX*

Pour valider que le solveur calcule correctement l'écoulement lorsque plus d'un domaine est utilisé, une comparaison a été effectuée entre les résultats obtenus avec un domaine et deux domaines (cf. figure B.1). Les résultats obtenus, présentés à la figure B.2, montrent bien qu'il n'y a pas de différence entre les deux cas tests. En effet, les profils de vitesse sont les mêmes suivant une droite traversant les domaines ( $x = 0$ ,  $z = 60$  mm). Dans cette étude, le modèle de turbulence SST a été utilisé. Le maillage de la géométrie comportant un domaine est identique au maillage de la géométrie comportant deux domaines. La seule différence est l'ajout d'interfaces entre les deux domaines pour les relier entre eux. Aucune coupure significative n'est observée dans les profils de vitesse à la jonction entre les domaines. On observe des résultats similaires lorsque les maillages comportent un nombre différent de noeuds et pour des maillages de tétraèdres ou d'hexaèdres.

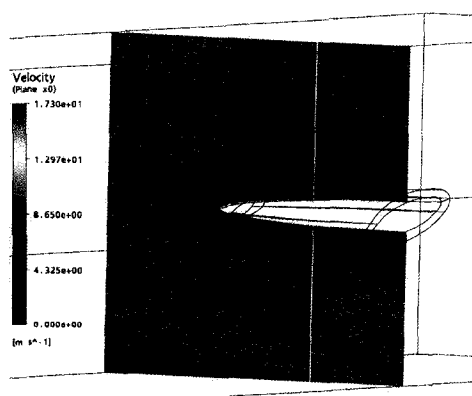


Figure B.1 Schéma des deux domaines et droite sur laquelle la vitesse est relevée

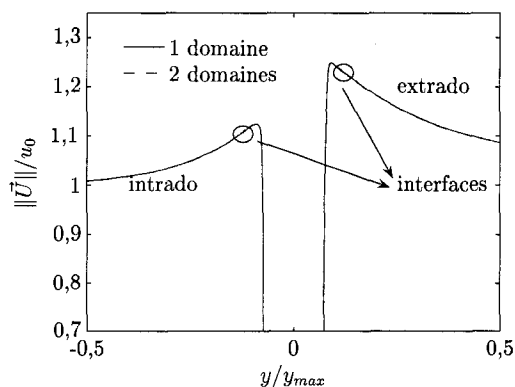


Figure B.2 Profils de vitesse pour les cas 1 domaine et 2 domaines



## ANNEXE C

## DISTRIBUTION DES NOEUDS DANS LA COUCHE LIMITE

Une surface décalée d'une distance de  $E_t$  mm est formée autour du profil. Soit  $N$  le nombre de noeuds dans la couche limite de maillage. Les noeuds sont répartis suivant une fonction de concentration linéaire du type présenté à la figure C.1. Selon cette distribution, l'espacement  $E_i$  de la maille  $i$  est proportionnel à l'aire  $A_i$  du trapèze  $i$ , divisée par l'aire totale  $A_t$  :

$$E_i = \frac{A_i}{A_t} E_t, \quad (\text{C.1})$$

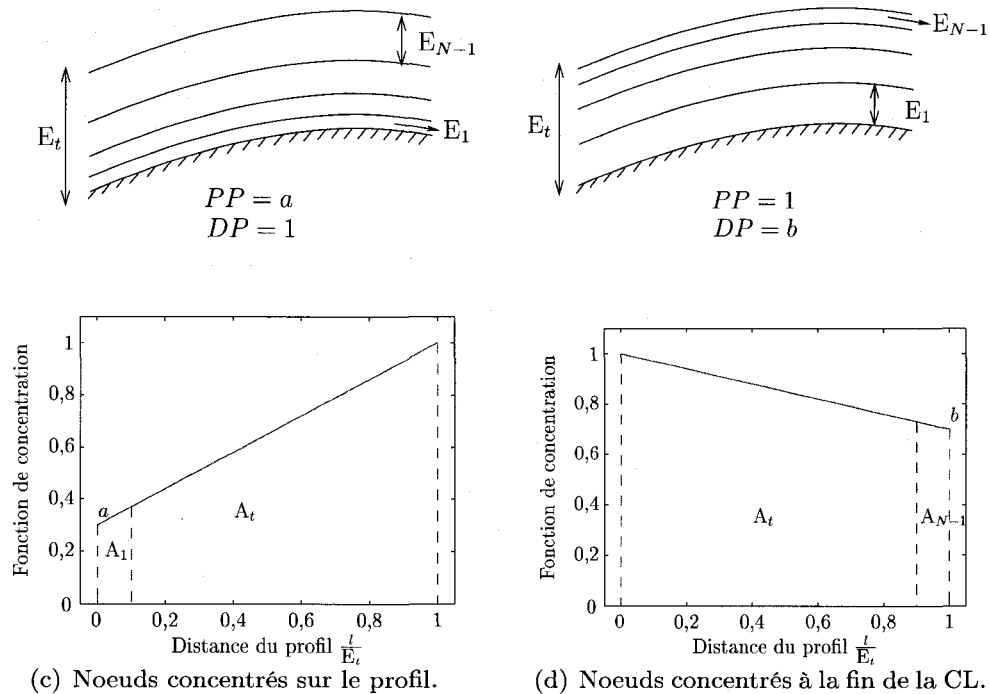


Figure C.1 Répartition des noeuds dans la couche limite.

avec  $A_i$  et  $A_t$  donnés respectivement par :

$$A_i = \left[ DP - i \frac{(DP - PP)}{(N - 1)} + DP - \frac{(i - 1)(DP - PP)}{(N - 1)} \right] \frac{1}{2(N - 1)} \quad \text{et} \quad A_t = \frac{1}{2} \frac{(PP + DP)}{(N - 1)}. \quad (\text{C.2})$$

Dans l'équation (C.2),  $PP$  est le premier point près du profil et  $DP$  est le dernier point dans la couche limite. Ainsi, les noeuds peuvent être concentrés près du profil ou à la limite extérieure de la couche limite. Lorsque les noeuds sont concentrés près du profil,  $PP = a$  et  $DP = 1$ . Lorsque les noeuds sont concentrés à la fin de la couche limite,  $PP = 1$  et  $DP = b$ , avec  $a$  et  $b$  tels qu'illustrés à la figure C.1.

On fixe les paramètres  $a$  et  $b$  en fonction de l'espacement désiré à la première maille  $E_1$  et à la dernière maille  $E_{N-1}$  :

$$a = \frac{(E_1/E_t)(N - 1)^2 - 1}{2(N - 1) - 1 - (E_1/E_t)(N - 1)^2}, \quad b = \frac{(E_{N-1}/E_t)(N - 1)^2 - 1}{2(N - 1) - 1 - (E_{N-1}/E_t)(N - 1)^2}. \quad (\text{C.3})$$

En remplaçant les paramètres  $a$  et  $b$  dans l'équation (C.1) par leurs valeurs respectives données à l'équation (C.3), on trouve une expression pour le nombre de noeuds nécessaires dans la couche limite en fonction des espacements  $E_1$  et  $E_{N-1}$  spécifiés :

$$N = \frac{-G - \sqrt{G^2 - 4FH}}{2F} \quad (\text{C.4})$$

où

$$\begin{aligned} F &= -(E_{N-1} + E_1); \\ G &= (3E_{N-1} + 3E_1 + 2E_t); \\ H &= -(2E_{N-1} + 2E_1 + 2E_t). \end{aligned}$$

L'équation C.4 a été codée dans le programme *constructLayer*. La borne inférieure pour  $N$  est fixée à 10 noeuds si un modèle avec loi de paroi est utilisé et 15 noeuds si un modèle bas Reynolds est utilisé. Quant à la borne supérieure pour le nombre de noeuds dans la couche limite, elle est prise arbitrairement égale à 30 noeuds.

## ANNEXE D

**ÉVOLUTION DES VARIABLES VORTICITÉ ET POSITION  
TOURBILLON SUIVANT LA DISTANCE AXIALE.**

La variable « position tourbillon » définie par la deuxième valeur propre négative de la matrice  $\bar{S} + \bar{\Omega}$  est reliée à la dérivée seconde de la pression  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}$ . Afin de retrouver cette dernière expression, on se sert de l'équation (1.5) comme point de départ :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_t^2}{r} \right), \quad (\text{D.1})$$

où la vitesse tangentielle d'un tourbillon laminaire  $V_t$  varie selon l'équation (1.2), ré-écrite ici :

$$V_t = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \left( 1 - e^{-u_0 r^2 / 4\nu x} \right).$$

Après remplacement de la dérivée de la vitesse tangentielle dans l'équation (D.1), on obtient :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = \frac{2V_t^2}{r} \left( \frac{\partial V_t(r, x)}{\partial r} - \frac{V_t(r, x)}{2r} \right).$$

Sachant que le rayon d'un tourbillon laminaire varie selon  $\sqrt{x}$  et que le rayon d'un tourbillon turbulent varie selon  $x$ , on arrive aux relations suivantes concernant la variation de la variable position tourbillon suivant la distance axiale :

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \right)_{\text{laminaire}} \propto \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \right)_{\text{turbulent}} \propto \frac{1}{x^4}.$$

En réalité,  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}$  diminue plus rapidement que cela pour le cas laminaire car il y a aussi une décroissance dans le terme exponentiel qui n'est pas prise en compte. Pour le cas turbulent, la décroissance est également plus rapide que  $1/x^4$ . En effet,

en plus du terme exponentiel, la formulation laminaire de la vitesse tangentielle a été utilisée.

En ce qui concerne la vorticité, celle-ci varie moins rapidement que la « position du tourbillon ». La vorticité étant principalement axiale dans le problème considéré, on part donc de :

$$\zeta_{\text{axiale}} = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r}$$

où la circulation  $\Gamma$  est exprimée par

$$\Gamma = \Gamma_0 \left( 1 - e^{-u_0 r^2 / 4\nu x} \right).$$

Après différenciation, on obtient :

$$\zeta = \frac{\Gamma_0 u_0}{4\pi \nu x} e^{-u_0 r^2 / 4\nu x}.$$

En employant les mêmes relations que précédemment pour la variation du rayon du tourbillon suivant la distance axiale, on trouve que

$$\zeta_{\text{laminaire}} \propto \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \zeta_{\text{turbulent}} \propto \frac{1}{x^2}.$$

Encore ici la vorticité décroît plus rapidement que le montrent ces relations pour les mêmes raisons que celles exprimées pour la variable position tourbillon.

## ANNEXE E

## RETOURNEMENT D'ARÊTES SUR SURFACES CONVEXES

Deux problèmes concernant le retournement d'arêtes sur surfaces convexes ont été rencontrés. Un exemple du premier problème est illustré à la figure E.1. Trois tétraèdres sont définis sur une surface convexe. l'arête à retourner est en pointillé fin et la boucle reliant les sommets des éléments autres que les sommets de l'arête à retourner est en gras à la figure E.1(a). Cette boucle est aussi appelée boucle équatoriale. À la figure E.1(b), une configuration obtenue après retournement est présentée. La nouvelle arête créée sur la surface convexe, en pointillé fin, est plus longue que l'arête avant retournement. Un creusement de la surface se produit lorsque la surface est convexe. Si le creusement est trop prononcé, le solveur *ANSYS-CFX* le détecte et renvoie une erreur. Aucune donnée quantitative sur le creusement maximal accepté par le solveur n'a pu être recueillie. Afin d'éliminer les retournements qui creusent trop la surface, on pourrait instaurer une limite sur la variation du volume de l'ensemble des éléments. Par exemple, limiter la variation de volume à 2%.

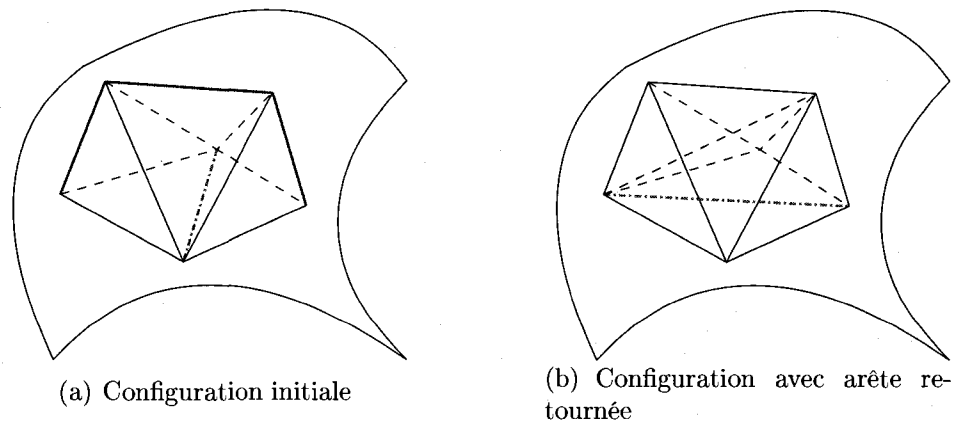


Figure E.1 Premier problème rencontré : les nouveaux éléments « creusent » trop la géométrie.

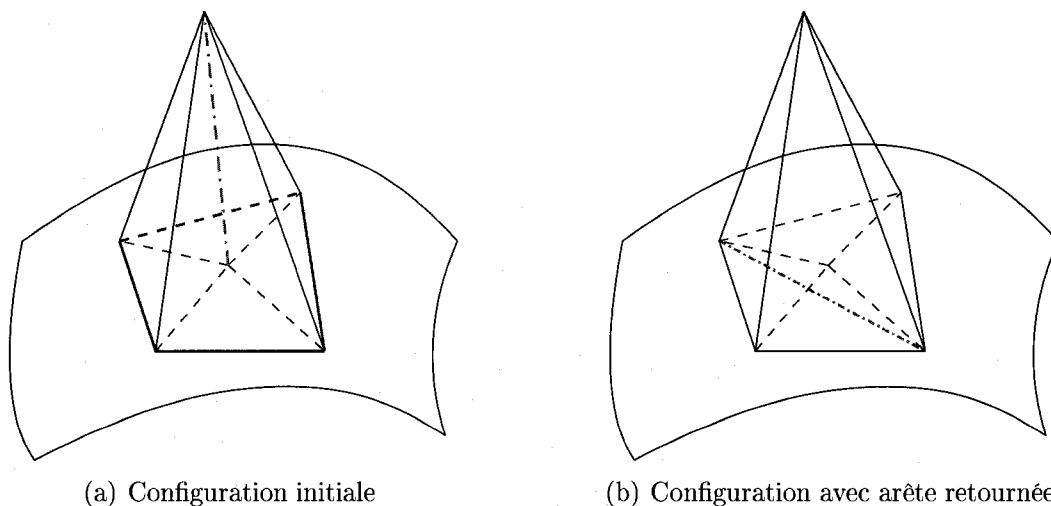


Figure E.2 Deuxième problème rencontré : il y a des tétraèdres dont les quatres sommets sont sur la même face.

Un exemple du second problème rencontré dans l'algorithme de retournement d'arêtes est illustré à la figure E.2. Dans ce cas, on a quatre tétraèdres et l'arête à retourner est en pointillé fin. Pour la configuration initiale illustrée, tous les sommets de la boucle équatoriale sont situés sur la surface convexe. Une fois l'arête retournée, on obtient des tétraèdres dont les quatres sommets sont sur la surface convexe et cela est détecté comme étant une erreur par le solveur. Afin d'éliminer ce problème, il faut empêcher tous les retournements dont l'arête à retourner touche à une surface convexe et dont les deux sommets de l'arête retournée sont aussi sur la surface convexe.