

**Titre:** Reconstruction algébrique en tomographie à rayons X en 3D  
Title:

**Auteur:** Malik Dussaud  
Author:

**Date:** 2008

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Dussaud, M. (2008). Reconstruction algébrique en tomographie à rayons X en 3D  
[Master's thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
Citation: <https://publications.polymtl.ca/8246/>

## Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8246/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Yves Goussard  
Advisors:

**Programme:** Unspecified  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

**RECONSTRUCTION ALGÉBRIQUE EN  
TOMOGRAPHIE À RAYONS X EN 3D**

MALIK DUSSAUD

INSTITUT DE GÉNIE BIOMÉDICAL  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE BIOMÉDICAL)  
MARS 2008



Library and  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file Votre référence*

*ISBN: 978-0-494-41553-5*

*Our file Notre référence*

*ISBN: 978-0-494-41553-5*

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.



**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

RECONSTRUCTION ALGÉBRIQUE EN TOMOGRAPHIE À RAYONS X EN  
3D

présenté par: DUSSAUD Malik

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées  
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. BERTRAND Michel, Ph.D., président

M. GOUSSARD Yves, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. LESAGE Frédéric, Ph.D., membre

## RÉSUMÉ

La tomographie à rayons X est une technique d'imagerie offrant des résolutions suffisantes pour suivre des patients portant des stents métalliques. Les scanners industriels actuels utilisent des techniques d'imagerie dites par rétroposition filtrée. Or, la rétroposition filtrée engendre des artefacts en présence d'éléments métalliques car la méthode suppose que les données sont monochromatiques. Le but plus large d'un projet qui englobe nos travaux de maîtrise consiste à réduire les artefacts métalliques. Dans le cadre de nos travaux de maîtrise nous avons développé une méthode de reconstruction algébrique qui permet d'améliorer la modélisation du problème direct. Nous avons développé une structure de données innovante permettant de stocker la géométrie du problème de façon optimale car la géométrie du problème tridimensionnel engendre des données très volumineuses. Ce modèle est flexible puisqu'il peut s'adapter à divers modèles physiques comme le cadre monochromatique d'émission des photons ou un cadre où on prend en compte l'épaisseur des rayons épais. Nous avons testé nos algorithmes de reconstructions sur des données réelles acquises sur un scanner utilisé en milieu clinique.

## ABSTRACT

X-ray computed tomography is a medical imaging technique which offers adequate resolutions and enables physicians to examine patients that have metallic stents. Standard scanners reconstruct images with filtered back-projection (FBP) techniques. However, FBP techniques generate beam-hardening artefacts because they do not take into account the poly-energetic aspect of the model. The goal of the broader project that encompasses our research is to take into account a poly-energetic model. In order to do so, our work was focused on the development of an algebraic reconstruction technique (ART) for real data in 3D. The 3D geometry of the data acquisition is complex and generates huge data sets. Therefore we developed an innovative data structure that minimizes the usage of memory. The data structure that we implemented is flexible and can be adapted to multiple models. We tested our algorithms on clinical data.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>RÉSUMÉ .....</b>	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>v</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES .....</b>	<b>vi</b>
<b>LISTE DES FIGURES .....</b>	<b>xii</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX .....</b>	<b>xvi</b>
<b>LISTE DES SYMBOLES ET DES NOTATIONS .....</b>	<b>xvii</b>
<b>LISTE DES ANNEXES .....</b>	<b>xviii</b>
<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>1</b>
0.1 Contexte .....	1
0.2 Obstacles à surmonter .....	2
0.3 Objectifs et contributions .....	3
0.4 Plan du mémoire .....	4
<b>CHAPITRE 1 IMAGERIE PAR TOMOGRAPHIE À RAYONS X - ÉTAT DE L'ART .....</b>	<b>7</b>
1.1 Présentation générale de la modalité .....	7
1.1.1 Autres modalités d'imagerie médicale .....	8
1.1.1.1 Radiographie .....	8
1.1.1.2 Échographie .....	9
1.1.1.3 IRM .....	10
1.1.2 Généralités sur la tomographie à rayons X .....	10
1.1.2.1 Récapitulation .....	12
1.1.3 Principes et évolutions récentes de la tomographie à rayons X .....	13

1.1.3.1	Principes formels . . . . .	13
1.1.3.2	Première génération : un seul détecteur . . . . .	13
1.1.3.3	Deuxième génération : plusieurs détecteurs . . . . .	14
1.1.3.4	Troisième génération : rayons en éventail . . . . .	15
1.1.3.5	Quatrième génération . . . . .	15
1.1.3.6	Acquisition axiale . . . . .	15
1.1.3.7	Acquisition hélicoïdale . . . . .	16
1.1.4	Complexité du problème en tomographie à rayons X hélicoïdale .	16
1.2	Physique de la tomographie à rayons X . . . . .	21
1.2.1	Interaction photon - matière . . . . .	21
1.2.2	Propagation du faisceau dans un milieu atténuant . . . . .	22
1.2.3	Modélisation statistique de formation des données . . . . .	24
1.2.4	Modélisation polychromatique de formation des données . . . . .	24
1.2.5	Épaisseur du faisceau . . . . .	26
1.2.6	De la modélisation à la reconstruction . . . . .	26
1.3	État de l'art sur les méthodes de reconstruction analytiques . . . . .	27
1.3.1	Transformée de Radon, principes de la rétroprojection filtrée . . .	27
1.3.1.1	Cadre théorique de la rétroprojection filtrée . . . . .	27
1.3.1.2	Principes de la rétroprojection filtrée . . . . .	28
1.3.1.3	Discrétisation de la transformée de Radon . . . . .	29
1.3.1.4	Adaptation aux rayons en éventail . . . . .	30
1.3.2	Adaptations de la FBP au cas 3D . . . . .	30
1.3.2.1	Cas du faisceau conique pour une trajectoire circulaire .	31
1.3.2.2	Algorithme de Feldkamp . . . . .	31
1.3.2.3	Adaptation à une trajectoire hélicoïdale . . . . .	32
1.3.2.4	Limites de la rétroprojection filtrée . . . . .	33
1.4	État de l'art sur les méthodes algébriques . . . . .	34
1.4.1	Généralités sur les méthodes algébriques . . . . .	34
1.4.2	Exemple de matrice de projection . . . . .	37
1.4.3	Critères utilisés en reconstruction algébrique . . . . .	37

1.4.3.1	Critère des moindres carrés . . . . .	37
1.4.3.2	Critères poissonniens . . . . .	38
1.4.3.3	Méthodes polychromatiques . . . . .	40
1.4.4	Méthodes algébriques en 3D . . . . .	42
1.4.5	Algorithmes d'optimisation utilisés en reconstruction algébrique . .	42
1.4.5.1	Algorithmes de descente . . . . .	43
1.4.5.2	Algorithme de la plus forte descente . . . . .	45
1.4.5.3	Algorithme du gradient conjugué linéaire . . . . .	45
1.4.5.4	Algorithme du gradient conjugué non linéaire . . . . .	46
1.4.5.5	Algorithme de Newton . . . . .	47
1.4.5.6	Algorithmes quasi-Newton . . . . .	48
1.4.5.7	Résultats théoriques concernant la convergence . . . . .	49
1.4.5.8	Régularisation . . . . .	51
1.4.6	Comparaison de l'approche analytique et de l'approche algébrique	52
1.5	Diverses détériorations d'image en tomographie à rayons X . . . . .	53
1.5.1	Généralités sur le bruit en tomographie à rayons X . . . . .	53
1.5.2	Artefacts métalliques, artefacts de durcissement de faisceau . . . .	54
1.5.3	Artefacts hélicoïdaux : « wind-mill » . . . . .	58
1.6	Conclusion . . . . .	58
CHAPITRE 2	MODÉLISATION DU PROBLÈME DIRECT . . . . .	59
2.1	Introduction . . . . .	59
2.2	Modèle de formation des données . . . . .	60
2.2.1	Formation des données pour une seule mesure . . . . .	60
2.2.1.1	Approximations monochromatique . . . . .	60
2.2.2	Système à résoudre . . . . .	61
2.2.3	Critère choisi . . . . .	61
2.3	Modélisation de l'épaisseur du faisceau . . . . .	62
2.3.1	Position du problème . . . . .	62
2.3.2	Linéarisation et discréétisation du problème . . . . .	64

2.3.2.1	Approximation d'ordre 1 . . . . .	64
2.3.2.2	Approximation d'ordre 2 . . . . .	65
2.3.2.3	Discrétisation proposée . . . . .	65
2.3.3	Compromis nécessaire . . . . .	67
2.3.3.1	Autre approche . . . . .	68
2.4	Paramétrisation géométrique du problème . . . . .	68
2.4.1	Matrice de projection 2D . . . . .	69
2.4.2	Cas 2D : rayons en éventail . . . . .	70
2.4.3	Cas 3D en hélicoïdal . . . . .	72
2.4.4	Source volante . . . . .	73
2.4.4.1	Source volante axiale (FFS en $z$ ) . . . . .	74
2.4.4.2	Source volante angulaire (FFS en $\alpha$ ) . . . . .	77
2.4.4.3	Modification du modèle . . . . .	78
2.4.5	Décalage des détecteurs . . . . .	79
2.5	Structure de données adaptée pour la mise en œuvre . . . . .	81
2.5.1	Difficultés du problème . . . . .	81
2.5.2	Méthode proposée . . . . .	81
2.5.2.1	Démarche générale . . . . .	81
2.5.2.2	Structure de données . . . . .	82
2.5.2.3	Opérations algébriques . . . . .	84
2.5.3	Utilisation de symétries et d'invariances géométriques . . . . .	86
2.5.3.1	Invariances géométriques par rotation-translation . . . . .	86
2.5.3.2	Invariances par symétries . . . . .	87
2.5.4	Bilan des gains de mémoire obtenu . . . . .	90
2.5.4.1	Matrice pleine . . . . .	90
2.5.4.2	Matrice creuse . . . . .	90
2.5.4.3	Structure proposée . . . . .	90
2.6	Conclusion . . . . .	91

CHAPITRE 3 MÉTHODE DE MINIMISATION DU CRITÈRE . . . . .	92
3.1 Algorithme de minimisation utilisé . . . . .	92
3.2 Régularisation utilisée . . . . .	93
3.2.1 Problème mal posé . . . . .	93
3.2.2 Pénalisation quadratique . . . . .	93
3.2.3 Pénalisation l2l1 . . . . .	98
3.2.4 Autres pénalisations . . . . .	98
3.2.5 Choix des hyperparamètres . . . . .	99
3.3 Reconstruction par région d'intérêt (ROI) . . . . .	99
3.3.1 Heuristique . . . . .	100
3.3.2 Mise en équation de la méthode . . . . .	101
3.3.2.1 Minimisation simultanée . . . . .	104
3.3.2.2 ROI et invariances géométriques . . . . .	104
3.4 Conclusion . . . . .	104
CHAPITRE 4 RÉSULTATS ET DISCUSSION . . . . .	105
4.1 Introduction . . . . .	105
4.2 Reconstructions tomographiques 3D sur des données simulées pour une trajectoire circulaire . . . . .	106
4.2.1 Méthodologie des simulations et des reconstructions . . . . .	107
4.2.2 Géométrie des simulations . . . . .	109
4.2.3 Expérience cone-beam1 : reconstruction sur des données non bruitées	110
4.2.4 Reconstruction avec du bruit : cone-beam2 . . . . .	117
4.2.4.1 Modifications des données simulées . . . . .	117
4.2.4.2 Géométrie des simulations . . . . .	117
4.2.4.3 Résultats et discussion . . . . .	118
4.2.5 Conclusions tirées . . . . .	118
4.3 Reconstructions tomographiques sur des données simulées pour une trajectoire hélicoïdale . . . . .	122
4.3.1 Méthodologie des simulations et géométries utilisées . . . . .	122

4.3.2	Hélice A : un pas important . . . . .	124
4.3.3	Hélice B : un pas d'hélice plus faible . . . . .	127
4.3.4	Conclusions . . . . .	129
4.4	Traitement de données réelles . . . . .	129
4.4.1	Fantôme et cadre des expériences . . . . .	130
4.4.2	Reconstruction de données réelles sans ROI . . . . .	130
4.4.2.1	Effets de bord . . . . .	131
4.4.2.2	Des couches centrales bien reconstruites . . . . .	131
4.4.3	Reconstruction de données réelles avec ROI . . . . .	135
4.4.3.1	Protocole AAA avec FFS axial . . . . .	135
4.4.3.2	Protocole InnerEar avec FFS angulaire et axial . . . . .	142
4.4.4	Conclusions sur le traitement de données réelles . . . . .	145
4.5	Prise en compte de l'épaisseur du faisceau . . . . .	145
4.5.1	Méthodologie des simulations . . . . .	146
4.5.2	Observation des artefacts dus à l'épaisseur du faisceau . . . . .	147
4.5.3	Reconstructions en prenant en compte l'épaisseur des rayons . . . . .	149
4.6	Conclusions . . . . .	152
CHAPITRE 5 CONCLUSION . . . . .		153
5.1	Objectifs atteints . . . . .	153
5.2	Objectifs non atteints . . . . .	154
5.3	Perspectives du projet . . . . .	155
RÉFÉRENCES . . . . .		156

## LISTE DES FIGURES

<b>FIGURE 1</b>	<i>Exemple de sténose et d'introduction de stent.</i> . . . . . <span style="float: right;">2</span>
<b>FIGURE 2</b>	<i>Méthodologie adoptée.</i> . . . . . <span style="float: right;">6</span>
<b>FIGURE 1.1</b>	<i>Fonctionnement schématique d'un tomographe.</i> . . . . . <span style="float: right;">14</span>
<b>FIGURE 1.2</b>	<i>Scan avec rayons parallèles.</i> . . . . . <span style="float: right;">19</span>
<b>FIGURE 1.3</b>	<i>Scan avec rayons en éventail.</i> . . . . . <span style="float: right;">20</span>
<b>FIGURE 1.4</b>	<i>Visualisation de la trajectoire de rayons X. Tiré de</i> . . . . . <span style="float: right;">20</span>
<b>FIGURE 1.5</b>	<i>Illustration de l'absorption d'un rayon X.</i> . . . . . <span style="float: right;">23</span>
<b>FIGURE 1.6</b>	<i>Coefficient d'atténuation du carbone C en fonction de l'énergie. Données tirées de</i> . . . . . <span style="float: right;">25</span>
<b>FIGURE 1.7</b>	<i>Paramétrisation d'un rayon X.</i> . . . . . <span style="float: right;">28</span>
<b>FIGURE 1.8</b>	<i>Plan incliné dans la méthode de Feldkamp.</i> . . . . . <span style="float: right;">32</span>
<b>FIGURE 1.9</b>	<i>Reconstruction algébrique et discréétisation de l'image.</i> . . . . . <span style="float: right;">36</span>
<b>FIGURE 1.10</b>	<i>Schématisation d'un algorithme de descente (alg. du plus forte descente).</i> . . . . . <span style="float: right;">44</span>
<b>FIGURE 1.11</b>	<i>Convergences pour un problème quadratique grâce aux algorithmes de plus forte descente (en noir) et du gradient conjugué (gris).</i> . . <span style="float: right;">47</span>
<b>FIGURE 1.12</b>	<i>Spectre d'émission de la source du scanner SIEMENS SENSATION 16.</i> . . . . . <span style="float: right;">55</span>
<b>FIGURE 1.13</b>	<i>Artefacts dus à des billes d'acier.</i> . . . . . <span style="float: right;">56</span>
<b>FIGURE 1.14</b>	<i>Profil d'une boule reconstruite avec artefacts de durcissement.</i> . . <span style="float: right;">57</span>
<b>FIGURE 2.1</b>	<i>Atténuation d'un faisceau épais.</i> . . . . . <span style="float: right;">63</span>
<b>FIGURE 2.2</b>	<i>Fonctions de contribution.</i> . . . . . <span style="float: right;">66</span>
<b>FIGURE 2.3</b>	<i>Scan avec rayons en éventail.</i> . . . . . <span style="float: right;">70</span>
<b>FIGURE 2.4</b>	<i>Géométrie de la projection en 2D.</i> . . . . . <span style="float: right;">71</span>
<b>FIGURE 2.5</b>	<i>Schéma de calcul des éléments de la matrice de projection.</i> . . . . . <span style="float: right;">74</span>
<b>FIGURE 2.6</b>	<i>Schéma de FFS en z.</i> . . . . . <span style="float: right;">75</span>
<b>FIGURE 2.7</b>	<i>Schéma de FFS en <math>\alpha</math>.</i> . . . . . <span style="float: right;">77</span>

FIGURE 2.8	Schéma illustrant le décalage des détecteurs. . . . .	79
FIGURE 2.9	Schéma illustrant l'impact du décalage de détecteurs. . . . .	80
FIGURE 2.10	Schéma illustrant les paramètres : Première (ou Dernière) couche (ou colonne). . . . .	83
FIGURE 2.11	Schéma illustrant les paramètres : Première (ou Dernière) rangée. . . . .	85
FIGURE 2.12	Invariance par rotation. . . . .	88
FIGURE 2.13	Symétrie axiale. . . . .	89
FIGURE 3.1	Schématisation des voisins du point courant pour la pénalisation. . . . .	95
FIGURE 3.2	Schématisation des voisins en 3D. . . . .	97
FIGURE 3.3	Courbes de pénalisation $l2l1$ , $l1$ et $l2$ . . . . .	99
FIGURE 3.4	Grille fine et grille grossière pour la ROI. . . . .	100
FIGURE 3.5	Principe d'un produit matrice-vecteur (projection) en ROI. . . . .	102
FIGURE 3.6	Principe d'un produit vecteur-matrice (rétroréfraction) en ROI. . . . .	103
FIGURE 4.1	Fantôme numérique utilisé. . . . .	107
FIGURE 4.2	Cone-beam circulaire sans bruit, sans régularisation. . . . .	110
FIGURE 4.3	Reconstruction algébrique 3D sans bruit et sans régularisation. . . . .	111
FIGURE 4.4	Reconstruction FBP 3D sans bruit (algorithme de Feldkamp). . . . .	112
FIGURE 4.5	Reconstruction algébrique avec régularisation vs. FBP (algorithme de Feldkamp). . . . .	113
FIGURE 4.6	Reconstruction algébrique 3D sans bruit et avec régularisation. . . . .	114
FIGURE 4.7	Reconstruction algébrique avec trop de régularisation. . . . .	115
FIGURE 4.8	Intensités des coupes centrales pour des reconstructions algébriques et analytiques. . . . .	116
FIGURE 4.9	Reconstruction algébrique 3D avec du bruit et sans régularisation comparée à une reconstruction FBP. . . . .	119
FIGURE 4.10	Réduction du bruit pour différents poids de régularisation. . . . .	119
FIGURE 4.11	Intensités des coupes centrales pour des reconstructions analytiques et algébriques (avec et sans régularisation) en présence de bruit. . . . .	120
FIGURE 4.12	Différence de comportement de la convergence avec et sans régularisation. . . . .	121

FIGURE 4.13	Reconstruction algébrique (gauche) vs reconstruction analytique (droite) (hélice A). . . . .	124
FIGURE 4.14	Reconstruction algébrique 3D (hélice A). . . . .	125
FIGURE 4.15	Reconstruction analytique 3D (hélice A). . . . .	126
FIGURE 4.16	Reconstruction hélicoïdale B. . . . .	127
FIGURE 4.17	Reconstruction algébrique 3D sans bruit et avec régularisation. .	128
FIGURE 4.18	Différentes couches reconstruites pour le protocole AAA (zone de 25 cm). . . . .	133
FIGURE 4.19	Différentes couches reconstruites pour le protocole InnerEar (zone de 25 cm). . . . .	134
FIGURE 4.20	Parcours de la source. . . . .	137
FIGURE 4.21	Contributions d'un voxel sur le système de détecteurs. . . . .	138
FIGURE 4.22	À gauche : reconstruction Siemens. À droite : Reconstruction sans FFS avec une grande ROI (zone de 25 cm). . . . .	138
FIGURE 4.23	À gauche : reconstruction Siemens. À droite : Reconstruction en prenant en compte le FFS avec une grande ROI (zone de 25 cm) sans bille atténuateuse. . . . .	139
FIGURE 4.24	À gauche : reconstruction Siemens. À droite : Reconstruction en prenant en compte le FFS avec une grande ROI (zone de 25 cm) avec des billes atténuateuses. . . . .	139
FIGURE 4.25	À gauche : reconstruction Siemens. À droite : Reconstruction en prenant en compte le FFS avec une petite ROI (zone de 8.6 cm) avec billes atténuateuses. . . . .	140
FIGURE 4.26	À gauche : reconstruction Siemens. À droite : Reconstruction en prenant en compte le FFS avec une petite ROI (zone de 8.6 cm) sans bille atténuateuse. . . . .	141
FIGURE 4.27	Reconstructions avec et sans FFS (angulaire + axiale). . . . .	143
FIGURE 4.28	Reconstruction InnerEAR avec une résolution infra-millimétrique. .	144
FIGURE 4.29	Artefacts d'épaisseur de rayon (2 pixels de largeur) : différence entre la reconstruction et le fantôme numérique. . . . .	148

FIGURE 4.30	<i>Correction des artefacts dus à l'épaisseur du faisceau (2 pixels de largeur). En haut : les reconstructions. En bas : les différences avec le fantôme numérique.</i>	150
FIGURE 4.31	<i>Correction des artefacts dus à l'épaisseur du faisceau (0.5 pixel de largeur). En haut : les reconstructions. En bas : les différences avec le fantôme numérique.</i>	151
FIGURE B.1	<i>Vue de haut du fantôme</i>	161
FIGURE B.2	<i>Vue d'une coupe du fantôme</i>	162
FIGURE B.3	<i>Position des stents</i>	163

## LISTE DES TABLEAUX

TABLEAU 1.1	<i>Comparaison de modalités d'imagerie.</i>	12
TABLEAU 1.2	<i>Générations de scanner.</i>	17
TABLEAU 4.1	<i>Géométrie du fantôme 1.</i>	109
TABLEAU 4.2	<i>Écart-type à l'intérieur et à l'exterieur de la boule.</i>	113
TABLEAU 4.3	<i>Géométrie du fantôme 2.</i>	117
TABLEAU 4.4	<i>Écart-type à l'intérieur et à l'extérieur de la boule avec du bruit.</i>	120
TABLEAU 4.5	<i>Géométrie fantôme 3.</i>	123
TABLEAU 4.6	<i>Géométrie fantôme 4.</i>	123
TABLEAU 4.7	<i>Comparaison analytique/algébrique.</i>	129
TABLEAU 4.8	<i>Comparaison AAA/InnerEar.</i>	131
TABLEAU 4.9	<i>Comparaison scanner/méthode algébrique.</i>	146
TABLEAU 4.10	<i>Fantôme pour rayon épais.</i>	147

## LISTE DES SYMBOLES ET DES NOTATIONS

- Sv : unité le Sievert ( $1J/kg$ )  
Gy : unité le Gray ( $1J/kg$ )  
ART : Algebraic Reconstruction Techniques  
ROI : Region of Interest  
FFS : Flying Focal Spot  
 $\mu$  : Coefficient d'atténuation linéique  
 $A$  : matrice de projection  
 $p$  : sinogramme linéique  
 $I$  : intensité d'un flux de photon  
 $N$  : nombre de photons  
 $Pr(E)$  : probabilité que l'événement E se produise  
 $P$  : distribution de Poisson  
2D : deux dimensions  
3D : trois dimensions  
 $\nabla f$  : gradient de la fonction  $f$

## LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	PROTOCOLE DU SCAN.....	159
ANNEXE II	FANTÔME UTILISÉ.....	160

## INTRODUCTION

### 0.1 Contexte

Les maladies cardio-vasculaires sont la première cause de mortalité dans les pays de l'OCDE comme les États-Unis, le Canada et les principaux pays européens. Ces maladies représentent plus de trente pourcents des causes de mortalité aux États-Unis comme l'indique le Center for Disease Control and Prevention (2008). Dans certains cas de maladies cardio-vasculaires, la mise en place de stents (ou endoprothèses) est nécessaire afin de maintenir une circulation normale du sang. Lors de sténoses, les patients souffrent d'un rétrécissement de certains vaisseaux et des prothèses de vaisseaux y sont introduites. Ces endoprothèses sont constituées d'alliages métalliques et permettent de garder une ouverture adéquate du vaisseau. Après la pose de ces endoprothèses, des risques de resténose sont importants et il est essentiel de pouvoir suivre ces patients. C'est un phénomène complexe qui induit à nouveau une obstruction de la lumière de l'artère. Afin d'assurer un suivi, la tomographie à rayons X est utilisée car cette technique d'imagerie permet d'obtenir une résolution adaptée à la visualisation de la lumière artérielle dont le diamètre est compris entre quelques millimètres et quelques centimètres. La figure 1 illustre le processus de sténose avec l'introduction d'un stent.

Cependant, cette méthode d'imagerie engendre des artefacts dus à la présence des stents métalliques. La méthode de reconstruction tomographique usuelle se base sur un modèle direct simplificateur et inadéquat qui ne permet pas de bien prendre en compte la présence de métaux. En effet, les méthodes habituelles des tomographes standards utilisent une méthode d'inversion qui est une transformée inverse de Radon analytique. La transformée inverse analytique considère que l'émission des photons est monochromatique tandis qu'elle est polychromatique en réalité. Cette méthode de reconstruction engendre donc des artefacts que nous qualifions de « métalliques ». Les méthodes usuelles de réduction d'artefacts sur des données réelles consistent notamment en des post-traitements des reconstructions ou d'un pré-traitement des données. Ces méthodes sont

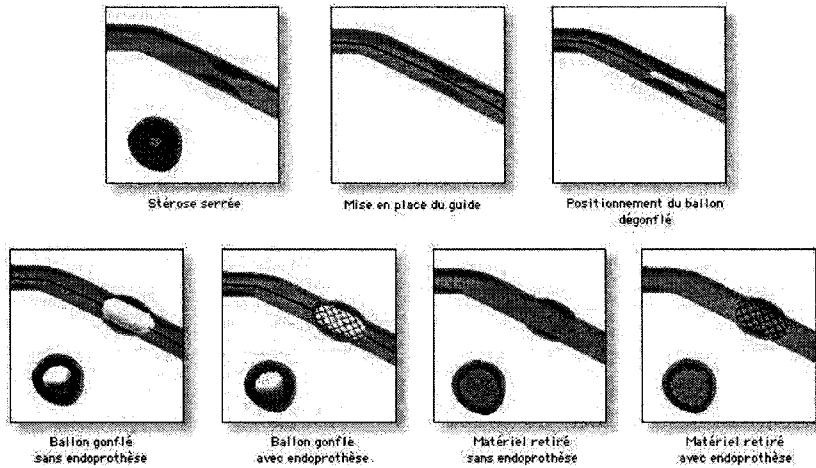


FIGURE 1 – Exemple de sténose et d'introduction de stent.

des méthodes analytiques qui se basent sur un certain nombre d'hypothèses réductrices. Grâce à une autre classe d'algorithmes dits « algébriques », il est possible de nous placer dans un cadre d'hypothèses plus réalistes. Nos travaux de maîtrise ont été effectués au sein du Laboratoire d'Imagerie par Optimisation Numérique (LION) de l'Institut de génie biomédical de l'École Polytechnique de Montréal. Ils ont été encadrés par le professeur Yves GOUSSARD. Ces travaux ont eu lieu dans le cadre d'un projet plus important avec d'autres acteurs dont les étudiants et chercheurs du LION, des chercheurs du LBUM (Laboratoire de biorhéologie et d'ultrasonographie médicale), du CHUM de l'Hôpital Notre-Dame de Montréal. Le but général de ce projet plus global est de visualiser correctement les lumières d'artères entourées de stents métalliques insérés dans les vaisseaux périphériques de patients atteints de sténoses.

## 0.2 Obstacles à surmonter

Les scanners actuels, tout comme celui de l'Hôpital Notre-Dame utilisé pour acquérir des données réelles à des fins expérimentales, ont beaucoup évolué dans les dernières décennies. Le scanner Somaton 16 barrettes de l'Hôpital Notre-Dame, construit par l'entreprise SIEMENS, a une géométrie complexe en trois dimensions, ce qui complique

la reconstruction d'image tomographiques. La trajectoire de la source qui émet les rayons X est hélicoïdale, afin de diminuer le temps d'acquisition et de réduire la dose reçue par le patient. Ceci complique le modèle direct que nous avons implémenté. La taille des données est très importante et le nombre des inconnues est tel que l'inversion du problème peut s'avérer très coûteuse et inapplicable en milieu clinique.

Ainsi, nous avons plusieurs obstacles à surmonter :

1. **Gérer des données de taille très importante.** Nous verrons qu'il s'agit d'un problème ayant 12 millions de données et d'environ 9 millions d'inconnues. Il n'est pas évident de gérer des données aussi importantes sur des ordinateurs personnels (PC). Ces données doivent être traitées en un temps raisonnable.
2. **Prendre en compte une géométrie complexe.** La géométrie du problème est complexe et nous la prendrons en compte avec moins d'approximation que les méthodes actuelles. Cette complexité du problème 3D hélicoïdal entraîne des difficultés d'abstraction qui nécessitent une paramétrisation rigoureuse.
3. **Prendre en compte la physique du modèle.** Pour réduire des artefacts métalliques ou d'autres sources de détérioration comme l'épaisseur des détecteurs, un modèle physique plus complexe doit être proposé, ce qui n'a jamais été effectué auparavant dans le cadre hélicoïdal sur des données réelles.

### 0.3 Objectifs et contributions

Afin de permettre à terme de réduire les artefacts métalliques en milieu clinique, nous proposons un certain nombre d'objectifs.

1. **Développer une méthode algébrique adaptée à la tomographie 3D.** La meilleure façon de réduire les artefacts métalliques est de développer une méthode dite algébrique. Nous verrons en quoi consiste cette méthode qui diffère de celles utilisées par les scanners actuels.
2. **Améliorer la modélisation physique du problème direct.** Afin de reconstruire des images plus précises, nous développerons un modèle direct mieux adapté.

Nous proposerons notamment une méthode pour prendre en compte l'épaisseur des faisceaux de rayons X émis par la source.

**3. Créer un modèle géométrique flexible et efficace.** Nous devons pouvoir utiliser le modèle géométrique pour différents modèles physiques. En effet, le modèle proposé doit pouvoir prendre en compte la génération de données polychromatiques ou monochromatiques. D'autre part, ce modèle doit être efficace et ne doit stocker que le minimum d'informations pour optimiser l'utilisation de la mémoire.

**4. Reconstruire des images tomographiques 3D à partir de données réelles.**

Pour le modèle monochromatique, notre objectif est d'avoir des images de qualité supérieure ou comparable à ce qu'obtient l'industriel SIEMENS avec des méthodes dites « analytiques ».

Nous avons apporté deux **contributions personnelles principales qui sont des innovations** en tomographie à rayons X. La première est l'élaboration d'une reconstruction basée sur une méthode statistique applicable sur des données 3D réelles en mode hélicoïdal multibarrette. La deuxième contribution principale concerne le modèle direct d'émission des rayons X. Nous avons proposé une méthodologie permettant de prendre en compte l'épaisseur des rayons X.

## 0.4 Plan du mémoire

Dans un premier temps, nous présenterons les techniques modernes d'imagerie médicale. Nous insisterons sur la tomographie à rayons X puisqu'il s'agit de la technique retenue pour le suivi de patients ayant des stents métalliques. Nous justifierons le choix de cette modalité d'imagerie pour le contexte de suivi de patients portant des stents métalliques. Dans ce chapitre nous décrirons les évolutions de la tomographie ainsi que les techniques de reconstruction actuelles. Nous montrerons les insuffisances des techniques standards actuelles, afin de justifier notre approche : la reconstruction algébrique. Nous étudierons les diverses sources de détérioration d'image en tomographie à rayons X avant d'exposer l'état de l'art de la réduction de ces sources de détérioration.

Ensuite, nous décrirons dans un second chapitre le modèle direct fiable et efficace que nous avons développé. Dans ce chapitre, nous insisterons sur l'élaboration d'un modèle physique théorique, adapté à notre problème. Nous avons aussi développé un modèle innovant prenant en compte l'épaisseur du faisceau de photons X. Ce modèle devra prendre en compte toute la complexité d'un scanner moderne comme le Somaton 16 de SIEMENS. Nous exposerons également la mise en œuvre que nous avons effectuée. Il a été nécessaire de développer une structure de données innovante permettant de traiter des données réelles en stockant moins de mémoire que les matrices creuses.

Puis, dans un quatrième chapitre, nous présenterons les méthodes choisies pour effectuer nos reconstructions. Il s'agit d'algorithmes de descente. Ces algorithmes s'appliquent à des fonctions dont le minimum est une estimation de l'image que nous cherchons à reconstruire. D'autres algorithmes peuvent être utilisés pour effectuer les minimisations des fonctions que nous avons élaborées. Une heuristique par région d'intérêt (ROI) permet d'obtenir des reconstructions qui ont une résolution équivalente à celles obtenues par le constructeur SIEMENS.

Enfin, dans le dernier chapitre nous examinerons les résultats obtenus et nous proposerons une discussion de ces résultats pour vérifier si les objectifs sont atteints.

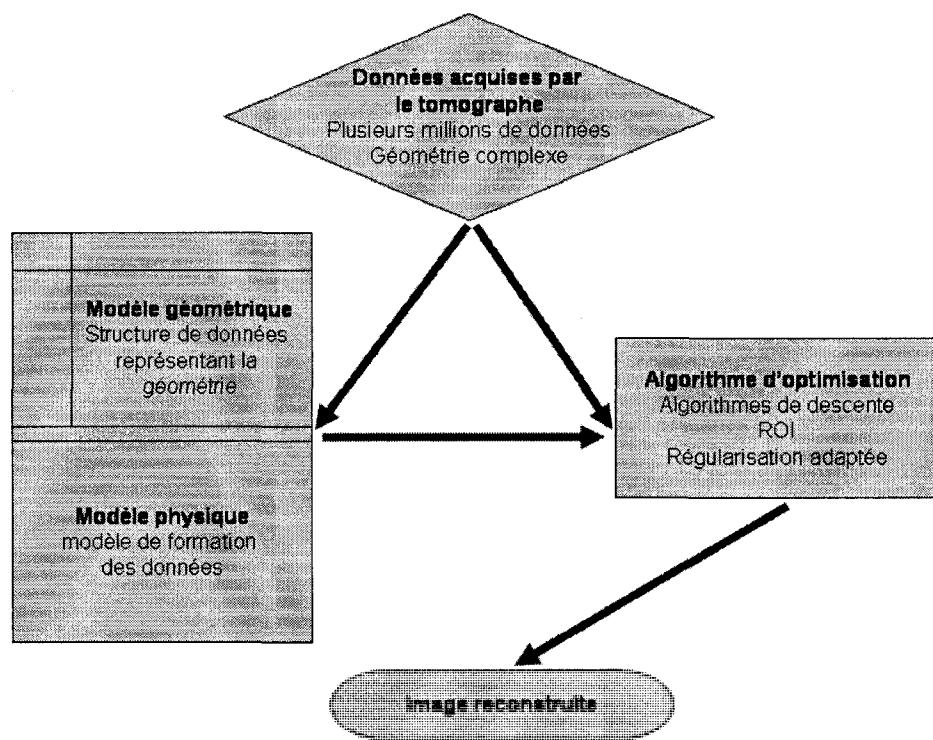


FIGURE 2 – Méthodologie adoptée.

## CHAPITRE 1

# IMAGERIE PAR TOMOGRAPHIE À RAYONS X - ÉTAT DE L'ART

L'objet de ce chapitre est de comprendre comment fonctionne la tomographie à rayons X. Notre projet de recherche qui s'effectue dans le cadre d'une maîtrise s'inscrit dans un projet plus global ayant pour but de réduire les artefacts métalliques apparaissant dans les images tomographiques de stents de patients. Avant de présenter un aperçu global de la tomographie à rayons X, nous devons comprendre pourquoi cette modalité convient dans les applications qui nous intéressent. Nous exposerons brièvement les diverses modalités d'imagerie qui pourraient aussi servir dans le suivi de patient atteints de sténoses. Ceci nous permettra de comparer ces diverses modalités afin de justifier le choix de la tomographie à rayons X.

Après avoir examiné les diverses modalités d'imagerie médicale dont la tomographie à rayons X en particulier, nous étudierons les méthodes de reconstructions tomographiques. En effet, afin d'observer les propriétés des tissus observés il est nécessaire de les déterminer grâce aux données obtenues par le scanner. Nous appelons cette étape la « reconstruction ». Dans cette section, nous examinerons l'état de l'art sur la reconstruction tomographique.

Troisièmement, nous essaierons de comprendre les diverses sources de détérioration d'images tomographiques et les pistes permettant de les réduire.

### 1.1 Présentation générale de la modalité

Avant de comprendre le fonctionnement général de la tomographie à rayons X, il serait intéressant de rappeler les principales modalités d'imagerie médicale. Le but est de voir succinctement ces modalités pour comprendre pourquoi la tomographie à rayons X est retenue dans le cadre de ce projet. À la fin de cette section, nous dresserons une synthèse permettant de comparer ces modalités. Seules des généralités sur les di-

verses modalités peuvent être présentées. Nous présenterons la plus ancienne des modalités d'imagerie moderne, la radiographie ainsi que des modalités plus modernes comme l'échographie et l'IRM. Enfin, nous présenterons la modalité qui nous intéresse le plus dans le cadre de nos travaux de maîtrise : la tomographie à rayons X.

### 1.1.1 Autres modalités d'imagerie médicale

Comme nous le verrons dans les présentations des diverses modalités qui nous intéressent, l'objet principal de l'imagerie médicale est d'obtenir une ou plusieurs images reflétant des propriétés physiques permettant de discriminer les tissus. Cette discrimination est due soit à la nature même des tissus (imagerie anatomique) ou à l'activité de ces tissus (imagerie fonctionnelle). L'imagerie fonctionnelle et principalement les modalités d'imagerie nucléaire ne sont pas présentées ici comme par exemple la SPECT (single photon emission computed tomography) ou la PET (positron emission tomography). Ces modalités permettent de contrôler l'activité de tissus biologiques qui intéressent le médecin. Dans notre cas, nous voulons avoir des images anatomiques les plus précises possible afin de suivre des patients portant des stents métalliques.

#### 1.1.1.1 Radiographie

L'ancêtre du principe de la tomographie à rayons X est la radiographie. Cette modalité est découverte en 1895 par le scientifique allemand Wilhelm Röentgen. La radiographie consiste à faire traverser un faisceau de rayons X sur un volume dont nous voulons imager une projection. Les photons X réagissent avec le film sur lequel s'imprime l'image radiographique. Cette technique est très utile pour visualiser par exemple les os, puisqu'ils absorbent beaucoup plus les photons que les tissus environnants qui contiennent beaucoup plus d'eau. Ainsi, ceci permet aux médecins de déterminer des fractures d'os. La quantité visualisée sur un film radiographique est en fait une quantité proportionnelle au nombre de photons ayant pu traverser le volume visualisé. Un faisceau de photons passant à travers un volume d'os sera beaucoup plus atténué que le même faisceau passant dans un tissu mou (comme un poumon). Donc, la quantité de photons recueillie sur

le film sera différente et permettra de discriminer les deux tissus.

Cependant, la radiographie ne permet pas de visualiser des volumes, mais seulement la projection d'un volume. Ceci est un inconvénient de taille puisqu'il n'est pas possible de véritablement isoler une couche du volume du tissu imagé puisqu'il s'agit d'une projection de plusieurs couches, et ceci nous empêche de pouvoir visualiser la lumière d'une artère. Un autre désavantage de la radiographie, que nous retrouverons, hélas, en tomodensimétrie (scanner à rayons X), est le caractère ionisant des rayons X. Ces particules interagissent avec la matière et peuvent détériorer des tissus, voire provoquer des cancers. Heureusement, les risques sont minimes si les doses utilisées sont faibles.

### 1.1.1.2 Échographie

L'échographie est une modalité d'imagerie médicale utilisant les ultrasons. Ces ultrasons qui sont des ondes sonores de haute fréquence (plusieurs MHz) sont émis par une sonde qui en mesure ensuite les échos. Grâce à un ordinateur, les temps de propagation des ondes sont mesurés. Or, les ondes ne se propagent pas à la même vitesse dans tous les matériaux. Schématiquement, c'est donc la vitesse de propagation de ces ondes qui permet de discriminer les tissus grâce à l'échographe. Dès les années 1970, l'échographie s'utilise énormément en obstétrique pour le suivi des grossesses. Les principaux avantages de l'échographie sont que les ondes mécaniques employées ne sont pas ionisantes et que la résolution est élevée, en dépit d'un niveau de bruit important.

Concernant l'application qui nous intéresse, il est possible de faire de l'échographie intra-vasculaire. Cette méthode consiste à insérer dans les vaisseaux de circulation sanguine d'intérêt une sonde qui permettra de voir le diamètre du faisceau et d'assurer le suivi du patient. Cette méthode est invasive et les risques de complications sont nombreux, dont des risques d'hémorragies et d'infections inhérentes à toute pénétration d'un corps étranger à l'intérieur du corps. À cause de ce caractère invasif, on cherche à explorer d'autres méthodes qui rendent le suivi moins pénible pour le patient. On considère le mot invasif au sens strict du terme, c'est-à-dire en termes de pénétration physique d'un corps étranger dans le corps du patient.

### 1.1.1.3 IRM

L'imagerie par résonance magnétique nucléaire est la modalité la plus récente que nous présentons ici, puisque celle-ci n'apparaît que dans les années 1980. Cette modalité se base sur la résonance magnétique nucléaire qui est un phénomène quantique dont la théorie dépasse le cadre de nos travaux. Nous n'entrerons pas dans les détails de cette technique complexe. Grâce à des signaux radiofréquences et à des champs magnétiques puissants, il est possible de déterminer la concentration en hydrogène dans le corps. Grossso modo, c'est cette concentration en atomes d'hydrogène qui permet de discriminer les tissus, grâce à l'inversion d'un modèle physique de formation des données (signaux radiofréquences mesurés).

Les signaux utilisés ne sont pas ionisants et la méthode ne présente pas de dangers apparents pour la santé. De plus, les images obtenues par IRM sont d'excellente qualité. Cependant, la présence de champs magnétiques importants (plusieurs teslas) nous empêche d'examiner des patients ayant des objets ferromagnétiques dans le corps, puisqu'ils pourraient être fatal pour le patient. Dans les salles contenant les scanners IRM, il est strictement interdit d'avoir des objets métalliques (puisque'ils peuvent être ferromagnétiques) puisque ceux-ci peuvent se déplacer dans le champ magnétique. À cause de ceci, l'utilisation clinique de l'IRM n'est pas encore autorisée pour le suivi de patients portant des stents.

## 1.1.2 Généralités sur la tomographie à rayons X

Un des objectifs de ce chapitre est de comprendre le principe de la tomographie à rayons X. La tomographie à rayons X a pour but de visualiser des coupes de volumes de tissus en utilisant des rayons X. C'est une généralisation du principe de la radiographie présentée ci-dessus. Ici, la quantité physique qui permet de discriminer les tissus est le coefficient d'atténuation . En effet, chaque matériau atténue plus ou moins fortement un faisceau de rayons X. La loi de Beer-Lambert définit ce que nous appelons le coefficient d'atténuation linéique, qui quantifie ce phénomène physique que nous détaillerons plus loin dans le chapitre. Ainsi, une image tomographique est une représentation de la

distribution spatiale des coefficients d'atténuation. Cette image est obtenue par reconstruction tomographique à partir des données. Les données sont une série d'intensités de plusieurs faisceaux traversant le volume image. Tout comme la radiographie, les rayons X sont utilisés et ils sont ionisants. Il y a donc un risque associé à chaque examen tomographique. Le médecin prescrivant cet examen doit être conscient de ces risques. En quelque sorte, le risque d'être atteint d'une maladie (observable uniquement par cette modalité) doit être suffisamment important pour passer cet examen.

TABLEAU 1.1 – Comparaison de modalités d'imagerie.

	Quantité représentée	Quantité mesurée	Résolution	Invasif	Ionisant
Radiographie	Nombre de photons	Nombre de photons	-	NON	OUI
Échographie	Vitesse de propagation	Amplitude d'ondes ultrasonores	-	NON	NON
Échographie Intra-Vasculaire	Vitesse de propagation	Amplitude d'ondes ultrasonores	-	OUI	NON
IRM	Densité de protons	Signaux RF	++	NON	NON
Tomographie X	Coefficient d'atténuation	Nombre de photons	++	NON	OUI

### 1.1.2.1 Récapitulation

Les seules méthodes qui sont à la fois minimalement invasives et qui offrent la meilleure résolution sont la tomographie à rayons X et l'IRM. Or il n'est pas possible d'imager des patients comportant des objets métalliques (stents) en IRM à cause de la présence de champs magnétiques intenses. Nous en déduisons que la seule modalité minimalement invasive nous permettant de suivre des patients portant des stents est la tomographie à rayons X.

### 1.1.3 Principes et évolutions récentes de la tomographie à rayons X

#### 1.1.3.1 Principes formels

Comme nous l'avons dit précédemment, pour la tomographie à rayons X nous tentons de calculer la distribution spatiale de coefficients d'atténuation. La reconstruction d'images tomographique consiste à déterminer une fonction du type :

$$(x, y) \mapsto \mu(x, y)$$

En 3D, la fonction que nous cherchons à reconstruire dépend d'une troisième coordonnée :

$$(x, y, z) \mapsto \mu(x, y, z)$$

Les  $\mu$  sont les coefficients d'atténuation. Notons  $I$  l'intensité mesurée par le tomographe. Cette étape de mesure est l'étape 1, comme nous pouvons le constater sur la figure 1.1. Ce qui nous permet de déterminer la distribution de  $\mu$  est un modèle de formation des données que nous pouvons écrire de façon formelle :  $I = A(\mu)$ .  $A$  est un opérateur dont nous déterminerons les propriétés au chapitre suivant, car nous n'avons pas besoin de définir ce modèle de formation d'images à ce stade de notre développement. La détermination de la relation  $I = A(\mu)$  est le **modèle direct**.  $I$  est un vecteur qui contient des séries de données. Chaque donnée correspond à une mesure prise dans une direction particulière pré-déterminée et pour une position particulière de la source qui émet les rayons X. Le tomographe est équipé d'un ordinateur qui calcule les coefficients d'atténuation du milieu grâce à une étape 2, comme nous le constatons sur le schéma 1.1. Il s'agit de l'étape d'inversion du modèle.

#### 1.1.3.2 Première génération : un seul détecteur

Dès le début des années 1970, juste après la découverte de Godfrey N. HOUNSFIELD en 1972, apparaît la première génération de scanners industriels. Ces tomographes ne comportent qu'un seul détecteur. La source émet un rayon X et se déplace autour du patient, selon une trajectoire circulaire dans le plan de la couche que l'on souhaite

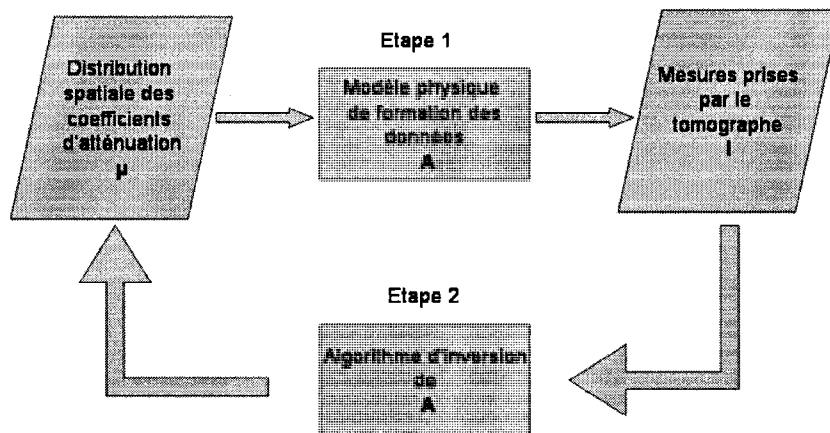


FIGURE 1.1 – Fonctionnement schématique d'un tomographe.

imager. Dans la littérature anglophone, on qualifie ces rayons de pencil-beam (puisque le faisceau de rayons est très fin). Pour avoir suffisamment de données et pour recouvrir le plus de points de la couche imagerée, il est nécessaire de faire translater le système source-détecteur. Ici, c'est à la fois la source et le détecteur qui se déplacent. Ainsi, pour chaque angle de projection (noté  $\phi$  dans la figure 1.2) on constitue un ensemble de rayons parallèles dont l'atténuation dépend d'un très grand nombre de pixels du tissu à imager.

#### 1.1.3.3 Deuxième génération : plusieurs détecteurs

Lors de la deuxième génération, dans les années 1980, il y a plusieurs détecteurs. Le principe est semblable à celui de la première génération. Tandis que lors de la première génération la source et le détecteur se déplacent, pour cette génération de scanners, la source se déplace seule pour un angle de projection donné. Cette innovation simplifie la mécanique du système et permet de faire des scans plus rapides.

#### 1.1.3.4 Troisième génération : rayons en éventail

Pour cette génération, le faisceau de rayons X émis par la source est en éventail. Il n'est plus nécessaire de faire translater la source pour obtenir des rayons parallèles détectés par la barrette (ou rangée) de détecteurs : la source reste fixe lors d'une projection. La source  $S$  que nous pouvons visualiser sur la figure 1.3 se déplace selon une trajectoire circulaire. Pour chaque incrément angulaire, qui correspond à une position particulière de cette source, un ensemble de faisceaux en éventail sont émis. Cet éventail est composé de rayons régulièrement espacés du point de vue de l'angle d'émission au point  $S$ . Chacun de ces rayons est détecté au niveau d'une barrette de détecteurs. Les détecteurs sont sur un arc de cercle de centre  $S$  et tournent en même temps que la source  $S$ . Ceci simplifie beaucoup l'aspect mécanique du système mais complique bien entendu l'aspect algorithmique, comme nous le constaterons dans la section dédiée aux méthodes de reconstruction tomographique. En effet, le facteur temporel limitant des générations précédentes était mécanique puisqu'il fallait faire des translations de la source qui ralentissaient de façon non négligeable l'acquisition tomographique.

#### 1.1.3.5 Quatrième génération

Le système est le même que pour la troisième génération, mais le système de détecteurs est un anneau complet de  $360^\circ$  qui reste stationnaire. Ceci simplifie la mécanique du système. L'inconvénient principal des scanners de cette génération est qu'ils sont plus coûteux sans améliorer la résolution des images. C'est pour cela que les principaux scanners industriels standards sont de la troisième génération.

#### 1.1.3.6 Acquisition axiale

Un intérêt majeur de la tomographie (d'où son étymologie) est de pouvoir visualiser des volumes. Mais avant d'avoir la capacité de calcul permettant d'effectuer des visualisation si lourdes en mémoire, il peut s'avérer suffisant de pouvoir reconstruire des couches d'un volume. La méthode la plus triviale consiste à imager les couches coupe par coupe. On translate le système selon l'axe z après chaque série de mesures afin de

reconstituer une couche. Il s'agit du scan axial, aussi appelé scan « stop and go ».

#### 1.1.3.7 Acquisition hélicoïdale

Dès 1989, afin de gagner en rapidité, il est mis au point le premier scanner dont la source a une trajectoire hélicoïdale. L'acquisition de données ne se fait pas couche par couche mais selon un processus plus continu qui permet de réduire le temps d'acquisition : la source parcourt une trajectoire hélicoïdale dans le référentiel du patient.

1. La table sur laquelle repose le patient est translatée selon l'axe de rotation du système de détecteurs et de la source.
2. En même temps, le système source-détecteur subit une rotation autour de l'axe de translation de la table. Pour chaque rotation, la source émet un faisceau conique détecté par les détecteurs présents sur les différentes barrettes parallèles.

Lorsque la source parcourt un tour, plusieurs couches auront été traversées par des rayons X. Dans les années 1990, les constructeurs de tomographes mettent au point des systèmes de détection multi-couches. Plusieurs barrettes de détecteurs sont utilisées, ce qui permet de reconstruire de plus grands volumes en un temps plus faible. L'avènement d'ordinateurs de plus en plus puissants rend possible ces dernières évolutions. L'autre avantage majeur des scans hélicoïdaux est que le temps d'acquisition est beaucoup plus faible qu'un scan axial. En effet, plus de rayons parcourent le corps du patient en moins de temps.

Les données du tableau 1.2 sont tirées du livre de Kalender (2005) (chapitre 2).

#### 1.1.4 Complexité du problème en tomographie à rayons X hélicoïdale

Dans le cadre de notre projet, nous nous sommes intéressé au côté algorithmique de la tomographie puisque nous nous intéressons à la reconstruction d'images à partir de données tomographiques acquises par un scanner. L'appareil qui nous intéresse est le scanner SOMATON SENSATION 16 de SIEMENS. Les détails des spécifications techniques de ce scanner sont donnés en annexe. Rappelons tout de même certaines caractéristiques de ce scanner. Ce tomographe comporte 16 barrettes parallèles de détecteurs.

TABLEAU 1.2 – *Générations de scanner.*

	Durée d'un scan	Résolution axiale	Résolution dans le plan
Première Génération	2.5 min	13 mm	3.5 mm
Deuxième Génération	10 s	2-10 mm	1 mm
Troisième Génération	1 s	1-10 mm	0.7 mm
Quatrième Génération	1 s	0.5-1mm	0.6 mm
SOMATON 16 SIEMENS	0.5 s	0.6 mm	0.6 mm

Chacune de ces barrettes comporte 672 cellules de détecteurs. Ainsi, le faisceau émis par la source lors d'une projection est un cône dont l'angle au sommet est non négligeable. La source émet 1160 faisceaux coniques pour un tour complet d'hélice. Pour 1 tour d'hélice, ce scanner produit un vecteur de données de taille  $12472320 \times 1$  ( $1160 \times 672 \times 16$ ). Comme nous le verrons ultérieurement, l'espace est discrétré en voxels. Ce nombre de voxels pour un tour d'hélice est de l'ordre de 9 millions ( $512 \times 512 \times 34$ ). Nous avons donc environ 12 millions de données pour 9 millions d'inconnues. Nous verrons que dans un certain cadre simplificateur, les équations sont linéaires. Même dans ce cadre, la taille du problème est très importante et les algorithmes utilisés doivent être adaptés. La mémoire nécessaire pour résoudre ce problème est importante : plusieurs gigaoctets de mémoire vive sont nécessaires.

Ainsi, les difficultés sont principalement de deux natures :

- **Conceptuelles.** Le problème 3D hélicoïdal est abstrait, donc complexe à bien paramétriser.
- **Tailles des données.** La gestion de la taille de ces données est un véritable défi technique à surmonter.

Par ailleurs, la trajectoire de la source est hélicoïdale, ce qui complique la modélisation du problème ainsi que la mise en œuvre. Dans le cas de la tomographie axiale, il était relativement aisément de découpler le problème pour le transformer en une série de plus petits problèmes 2D. En tomographie hélicoïdale, les données sont enchevêtrées et il est impossible de faire un simple découplage du problème.

Lors de nos travaux effectués dans le cadre de notre maîtrise, nous avons dû faire face à ces difficultés inhérentes à la tomographie à rayons X. Nous verrons aussi que les artefacts métalliques sont dus à une simplification du modèle physique faite par les scanners usuels en la présence de métaux. Un de nos objectifs est de proposer un modèle physique flexible nous permettant de prendre en compte des cadres physiques plus ou moins complexes.

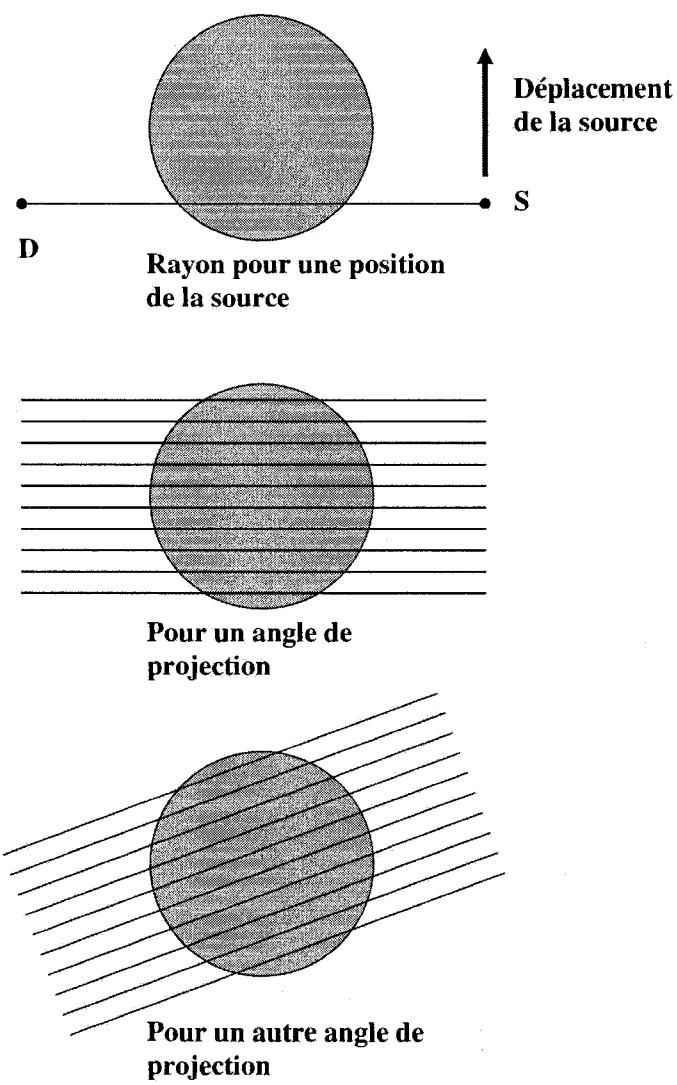


FIGURE 1.2 – Scan avec rayons parallèles.

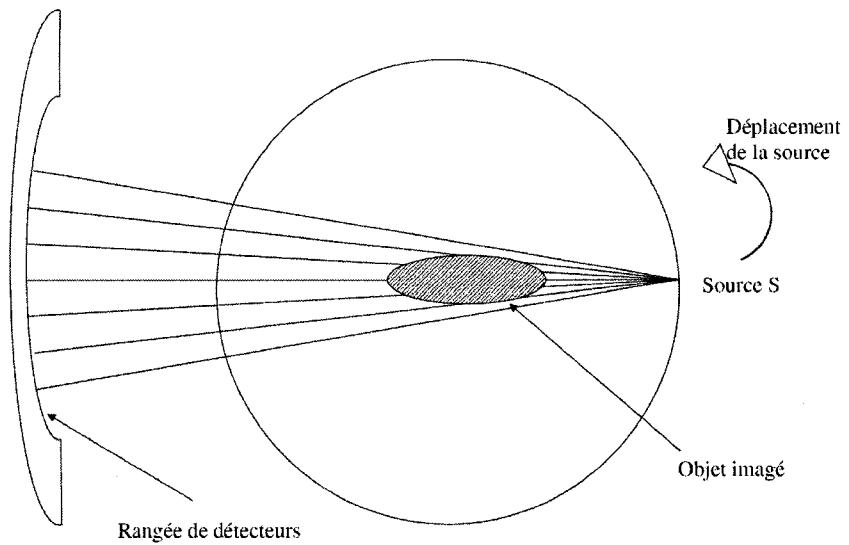


FIGURE 1.3 – Scan avec rayons en éventail.

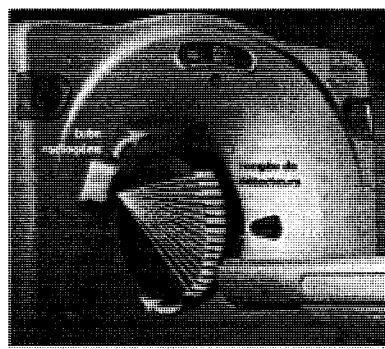


FIGURE 1.4 – Visualisation de la trajectoire de rayons X. Tiré de (Département de Médecine Vétérinaire de l'Université de Montréal 2008).

## 1.2 Physique de la tomographie à rayons X

Jusqu'à présent, nous avons donné un simple aperçu de la tomographie à rayons X. Afin de pouvoir proposer une méthode de reconstruction, il faut être capable de proposer un modèle direct de formation des données (cf. figure 1.1). Dans cette section, nous allons étudier la formation des données à partir desquelles sont reconstruites les images tomographiques. Les méthodes de reconstruction que nous rencontrons dans la littérature et que nous décrirons à la section suivante se basent sur des approximations de ces modèles de formation des données.

### 1.2.1 Interaction photon - matière

Les interactions photon-matière sont à la base de la génération des données en tomographie à rayons X et nous permettent de comprendre les modèles utilisés. Quand un photon entre en contact avec la matière, plusieurs interactions physiques peuvent avoir lieu. Nous classons ces interactions en trois catégories :

1. **L'effet Compton.** Un photon peut interagir avec un électron. De façon imagée, il s'agit d'une collision avec celui-ci. L'électron prend de l'énergie cinétique et le photon est dévié et perd de l'énergie (sa fréquence diminue).
2. **L'effet photoélectrique.** Les photons ayant une énergie supérieure à un certain seuil sont susceptibles d'être absorbés par la matière. Lors de ce processus d'absorption, un électron est émis par la matière. Ce phénomène est une des interactions photon-matière à la base de la théorie corpusculaire de la lumière, théorisée notamment par Albert Einstein en 1905.
3. **La production de paires.** Un photon peut aussi rentrer en collision avec un noyau. Le photon est absorbé et le noyau émet un électron et un positron (un électron chargé positivement).

En ce qui concerne les scanners SIEMENS, et comme nous pouvons le constater sur la figure 1.12, la plage d'énergies qui nous intéresse se situe entre 25 keV et 125 keV. Or, dans cette zone d'énergie, les effets dominants sont les effets Compton et photoélectrique.

Considérons un photon ayant subi une de ces trois interactions, nous pouvons considérer que ce photon n'aura qu'une probabilité très faible de continuer à se propager sur le rayon (qui est une droite). Il s'agit en effet d'une direction parmi une infinité de directions. Comme ce photon est dévié de sa direction originelle et à cause de la présence d'un collimateur, le photon est donc considéré comme perdu du signal qui nous intéresse et se retrouve en bruit. Comme il n'y a pas de possibilité d'assurer la traçabilité d'un tel photon, il est impossible de le modéliser autrement que par un bruit de diffusion.

### 1.2.2 Propagation du faisceau dans un milieu atténuant

Nous proposons ici de faire le lien entre la loi de Beer-Lambert et les phénomènes d'interaction photon-matière.

Nous faisons plusieurs hypothèses approximatives :

- **Le faisceau de photons X est infiniment mince : H<sub>1</sub>**. Or les photons n'ont a priori pas tous la même trajectoire rectiligne. La source peut en effet être de dimension finie ainsi que les détecteurs.
- **L'émission des photons est déterministe : H<sub>2</sub>**, ce qui équivaut à considérer que le nombre de photons est très élevé. Or, en réalité l'émission est stochastique.
- **Les photons émis sont monochromatiques : H<sub>3</sub>**, ils ont la même énergie. Ceci n'est pas le cas puisqu'ils sont émis selon un certain spectre énergétique.

Soit  $N$  le nombre de photons émis par unité de temps et par unité de surface (en  $\text{mm}^2/\text{s}$ ). Il s'agit d'un flux de photons. Afin de mieux comprendre, nous pouvons faire une analogie avec l'électricité.  $N$  est comparable à l'intensité  $I$  d'un courant électrique, qui est un flux surfacique d'électrons par unité de temps. Supposons pour l'instant que les photons sont monoénergétiques. Alors l'intensité de ce faisceau vaut :

$$I = \epsilon \cdot N$$

où  $\epsilon$  est l'énergie d'un photon.

Avec les notations de la figure 1.5, on considère un faisceau de photons parallèle à l'axe des abscisses (si cela n'avait pas été le cas, nous aurions considéré une abscisse curviligne adaptée au faisceau). Nous nous intéressons au comportement de notre faisceau

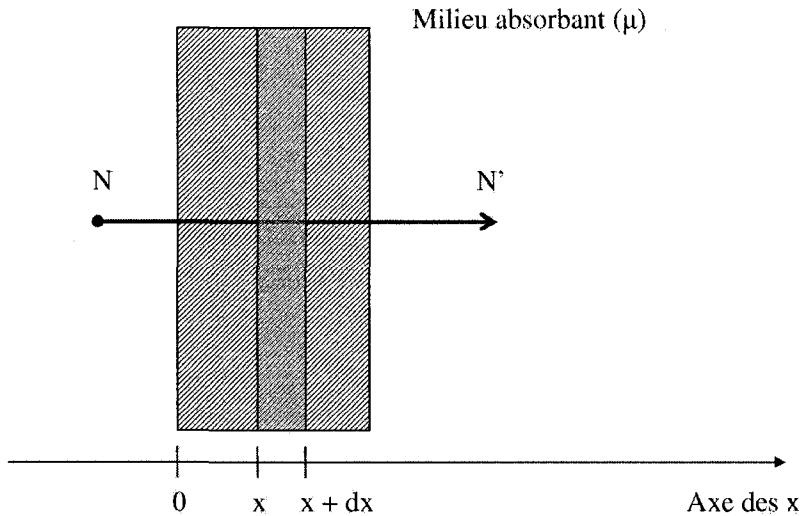


FIGURE 1.5 – Illustration de l'absorption d'un rayon X.

dans une tranche infinitésimale d'épaisseur  $dx$ . Soit  $dS$  une surface infiniment mince traversée perpendiculairement par le rayon. Le volume considéré est un parallélépipède. Pour une épaisseur infinitésimale nous pouvons considérer ce milieu homogène. À cause de cette homogénéité, pour chaque unité de longueur que parcourt un photon, il a la même probabilité d'être dévié et donc d'être perdu du rayon. Ainsi :  $dN = -\mu(x)Ndx$  est l'expression de la perte des photons du rayon (la proportion de photons perdue est la même pour chaque unité de longueur).

**$\mu$  est le coefficient d'atténuation linéique que nous avons déjà introduit précédemment.** Il dépend du matériau (ainsi que de l'énergie). Il intègre donc les trois phénomènes que nous avons cités précédemment : l'effet photoélectrique, l'effet Compton et la création de paires d'électrons (qui n'a qu'une très faible probabilité de se produire pour les énergies utilisées en tomographie). La relation précédente s'intègre pour donner

la loi de Beer-Lambert :

$$\frac{I}{I_0} = \exp\left(-\int_0^L \mu(x) \cdot dx\right) \quad (1.1)$$

### 1.2.3 Modélisation statistique de formation des données

Dans ce paragraphe, nous souhaitons relaxer l'hypothèse déterministe **H<sub>2</sub>** tout en maintenant les hypothèses de rayon infiniment mince **H<sub>1</sub>** et de monochromatisme **H<sub>3</sub>**.

Comme Kelbert et al. (2006), nous pouvons modéliser l'émission des photons X par un processus de Poisson.

$$N \sim P(N_0)$$

Ainsi, comme le proposent Menvielle et al. (2005), le nombre de photons détectés par unité de surface  $N$  peut être modélisé par la statistique suivante :

$$N \sim P(N_0 \exp\left(-\int_0^L \mu(x) \cdot dx\right))$$

où  $N_0$  est le paramètre de la loi de Poisson d'émission. Notons

$$\lambda = N_0 \exp\left(-\int_0^L \mu(x) \cdot dx\right)$$

On appelle  $\lambda$  le paramètre de la loi de Poisson et  $P$  la loi de Poisson. Cette statistique est telle que :

$$Pr(N = k) = \frac{\exp(-\lambda)\lambda^k}{k!}$$

$Pr(N = k)$  est la probabilité qu'il y ait  $k$  photons détectés.  $\lambda$  est la moyenne de la variable aléatoire  $N$ , ce qui est réconfortant puisque c'est la valeur que nous devons obtenir si le processus est supposé déterministe.

### 1.2.4 Modélisation polychromatique de formation des données

Dans ce paragraphe, nous ne supposons plus que l'hypothèse **H<sub>1</sub>** du rayon infiniment fin. L'émission des photons est polychromatique. Lorsqu'on suppose que cette émission est monochromatique, on fait l'hypothèse que les coefficients d'atténuation sont identiques pour deux niveaux d'énergie différents. Or les coefficients d'atténuation des différents matériaux dépendent de l'énergie du photon, comme nous pouvons le constater

sur la figure 1.6 qui porte sur l'exemple du carbone (graphite). Nous pouvons en effet constater que les coefficients d'atténuation linéiques dépendent de l'énergie des photons.

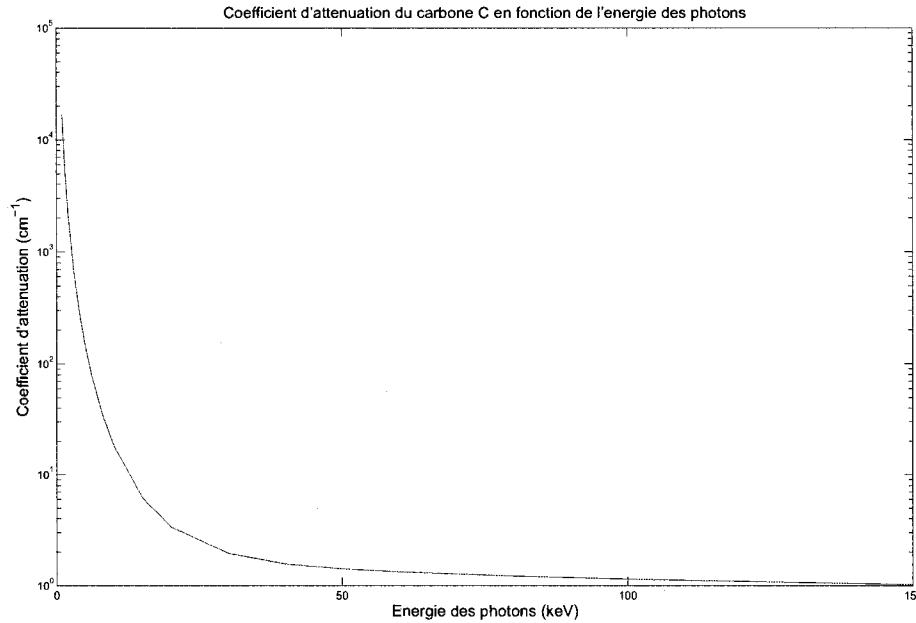


FIGURE 1.6 – Coefficient d'atténuation du carbone C en fonction de l'énergie. Données tirées de (National Institute of Standards and Technology 2007).

Le coefficient d'atténuation dépend donc de la variable de l'espace et du niveau d'énergie. Notons  $\mu = \mu(\vec{r}, \epsilon)$ . Le modèle de formation des données est modifié lorsque nous prenons en compte le caractère polychromatique des photons émis :

$$N \sim P\left(\int N_0(\epsilon) d\epsilon \exp\left(-\int_0^L \mu(x, \epsilon) \cdot dx\right)\right) \quad (1.2)$$

### 1.2.5 Épaisseur du faisceau

Si nous voulions préciser le modèle de formation des données, nous devrions prendre en compte l'épaisseur du faisceau de photons X se propageant dans le milieu que nous souhaitons imager. En effet, la taille des détecteurs est finie et la source qui émet les photons X n'est pas ponctuelle. Il s'agit des deux conditions pour avoir un rayon infiniment fin qui ne sont pas vérifiés dans la géométrie des acquisitions puisque la taille des détecteurs est de l'ordre du millimètre tout comme la taille des voxels utilisés dans un cadre clinique. À notre connaissance, aucun auteur n'a développé de méthodes de reconstructions algébriques prenant tenant compte de l'épaisseur du faisceau en tomographie à rayons X. Nous proposerons un tel modèle au chapitre suivant, ce qui est une de nos contributions personnelles dans ce projet.

### 1.2.6 De la modélisation à la reconstruction

Dans les paragraphes précédents, nous avons exposé des modèles de formation de données proposés dans la littérature. En fait, il s'agit de la formation des données correspondant à une seule mesure : à partir d'une distribution spatiale de coefficient d'atténuation, nous sommes capables de calculer avec les relations précédentes la distribution statistique d'une mesure. Or, ce qui nous intéresse est d'estimer la distribution des coefficients d'atténuation à partir de plusieurs mesures correspondant à différents détecteurs. Nous allons donc avoir un système de relations stochastiques ou déterministes correspondant à différentes détections et émissions. À partir de cela, il faudra inverser le système pour obtenir l'image reconstruite.

À partir de ce modèle, il faut reconstruire les images tomographiques à partir des données. Il existe deux classes d'algorithmes de reconstructions tomographiques :

1. les reconstructions **analytiques** : elles emploient (comme la rétroprojection filtrée présentée juste après) une formule d'inversion analytique. Celle-ci a juste besoin d'être discrétisée pour trouver la valeur des pixels que nous souhaitons imager. Il s'agit des techniques utilisées dans les scanners usuels.
2. les reconstructions **algébriques** : elles inversent un système d'équations de façon

itérative. Ce système peut être linéaire dans certains cas. Cette méthode, comme nous le verrons, laisse plus de liberté concernant le choix du modèle de formation des données, mais comporte certains désavantages dont nous parlerons.

### 1.3 État de l'art sur les méthodes de reconstruction analytiques

Nous avons présenté succinctement les évolutions récentes de la tomographie à rayons X. Dans cette section, nous nous intéressons à la reconstruction tomographique, c'est-à-dire le passage des données acquises par le tomographe aux inconnues que nous cherchons à déterminer. Ces inconnues sont les coefficients d'atténuation  $\mu(x, y)$  ( $\mu(x, y, z)$  en 3D) et les données sont des nombres de photons détectés divisés par le nombre de photons émis  $\frac{I}{I_0} = \frac{N}{N_0}$ . Nous rappelons que ces coefficients d'atténuation permettent de discriminer les tissus.

La relation fondamentale sur laquelle se basent les méthodes analytiques est la **loi de Beer-Lambert**. Nous rappelons qu'elle s'écrit :

$$\frac{N}{N_0} = \exp\left(-\int_0^L \mu(x) \cdot dx\right)$$

#### 1.3.1 Transformée de Radon, principes de la rétroprojection filtrée

##### 1.3.1.1 Cadre théorique de la rétroprojection filtrée

L'inversion de **Radon** que nous allons présenter ci-après fonctionne sous un certain nombre d'hypothèses :

- **La distribution des coefficients d'atténuation est continue ou continue par morceaux.** Sans ces hypothèses la transformée ne pourrait pas être définie. En pratique, l'hypothèse de continuité par morceaux est vérifiée.
- **L'espace des mesures est continu.** Or en pratique, nous n'effectuons qu'un nombre fini de mesures. L'hypothèse de continuité est valide si le nombre de me-

sures est important et s'il s'agit d'un échantillonnage suffisamment dense. Ceci entraîne bien sûr des difficultés liées à la discréétisation du problème. En pratique, il faudra donc discréétiser cette inversion.

- Les hypothèses de la loi de Beer-Lambert sont vérifiées : émission monochromatique, rayon infiniment mince, cadre déterministe.

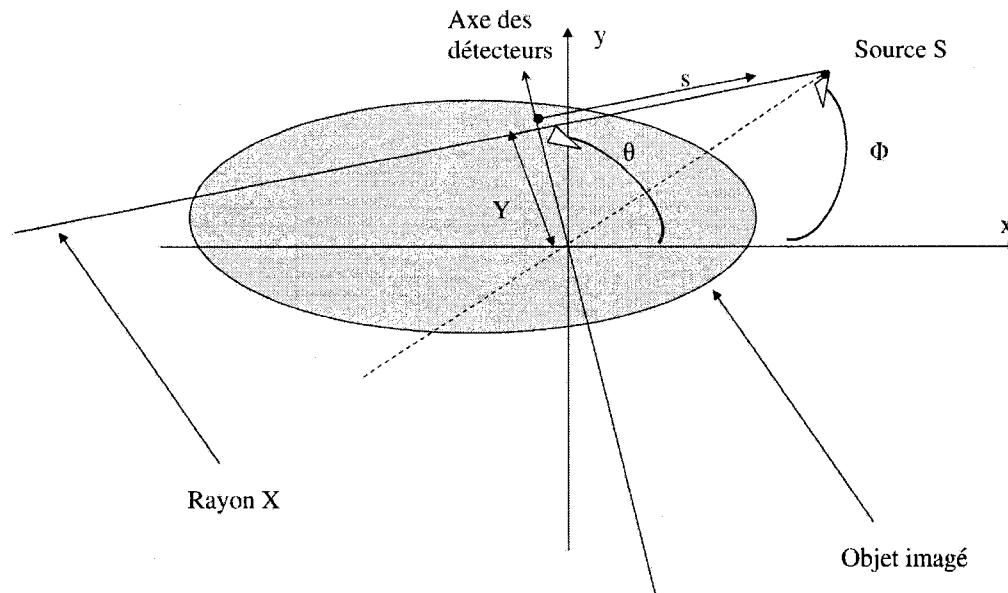


FIGURE 1.7 – Paramétrisation d'un rayon X.

### 1.3.1.2 Principes de la rétroprojection filtrée

Dans ce paragraphe, on se place dans le cadre 2D avec des rayons en éventail. Considérons les notations de la figure 1.7. Un rayon est émis à partir du point-source *S*. Ce point source émettra des rayons qui consisteront les projections d'angle  $\Phi$ . Pour repérer les points du rayon *X* émis par *S* nous utilisons une paramétrisation polaire  $(r, \theta)$ . Les points sur l'objet image qui sont sur la droite correspondant au rayon *X* sont repérés par la coordonnée linéique *s*. On repère les détecteurs sur l'axe des détecteurs par la

variable  $Y$ .

Nous notons  $I(Y, \Phi)$  l'intensité détectée par le détecteur dont la coordonnée est  $Y$  et pour la projection d'angle  $\Phi$ . Selon la loi de Beer-Lambert, nous pouvons calculer la quantité  $g(Y, \Phi) = -\log(I(Y, \Phi))$ . Nous appellerons **sinogramme** l'ensemble  $g(Y, \Phi)$  pour tous les  $Y$  et  $\Phi$  de l'acquisition. Il s'agit de la transformée intégrale suivante :

$$g(Y, \Phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x = l \cdot \cos(\theta) + s \cdot \cos(\theta - \Phi), y = l \cdot \sin(\theta) + s \cdot \sin(\theta - \Phi)) ds \quad (1.3)$$

$l$  et  $\theta$  sont des paramètres qui s'expriment en fonction de  $Y$  et  $\Phi$ . En notant  $d$  la distance de la source à l'origine, qui est par convention le centre de rotation de la source, on a :

$$l = Y \frac{d}{\sqrt{d^2 + Y^2}}, \quad \theta = \Phi + \pi/2 + \tan^{-1}(Y/d) \quad (1.4)$$

On note  $p(l, \theta) = g(Y, \Phi)$ . Et  $f(r, \phi) = \mu(x, y)$  avec  $(r, \phi)$  les coordonnées polaires associées au point de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ . On appelle  $f$  la fonction de densité que nous voulons restituer. En utilisant ce qui précède, nous obtenons que  $p$  s'obtient à partir de  $f$  par la transformée de Radon ainsi définie :

$$p(l, \theta) = \int_0^{+\infty} r dr \int_0^{2\pi} f(r, \phi) \delta(r \cos(\theta - \phi) - l) d\phi \quad (1.5)$$

En 1921, Radon nous fournit une inverse **analytique** dans le cas où les rayons sont parallèles (voir Radon (1986) pour une version en anglais). L'expression de cette inverse est relativement simple :

$$f(r, \phi) = \frac{1}{4\pi^2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \omega d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dl \cdot p(l, \theta) \cdot \exp(i\omega(r \cos(\theta - \phi) - l)) \quad (1.6)$$

Cette formule n'est valable que pour le cas de la géométrie à rayons parallèles.

### 1.3.1.3 Discréétisation de la transformée de Radon

En pratique, il faut discréétiser cette formule puisque nous n'avons qu'un nombre fini d'échantillons de  $p(l, \theta)$ .

Il s'agit de calculer la transformée de Fourier du sinogramme pour chaque angle de projection. On multiplie ensuite cette transformée par un filtre rampe et on repasse

du domaine fréquentiel au domaine temporel. On somme pour chaque angle de rotation. On obtient l'image reconstruite. Cette méthode s'appelle la rétroprojection filtrée, en anglais : « filtered back-projection »(FBP). Nous occultons sciemment les détails pratiques de ce type d'algorithme. En effet, notre but est ici de présenter les diverses techniques utilisées pour reconstruire des images tomographiques. L'avantage majeur de cette méthode est qu'elle est rapide. En plus, nous avons l'expression analytique de l'inverse. Tous les scanners industriels reposent sur ce type de méthode, avec des raffinements pour prendre en compte les géométries plus sophistiquées que la géométrie en rayons parallèles.

#### 1.3.1.4 Adaptation aux rayons en éventail

Pour les générations suivantes de scanner, il faut adapter la méthode aux rayons en éventail. Nous citons une méthode : celle de Feldkamp qui s'obtient par un changement de variable dans la formule précédente dans l'article Feldkamp et al. (1984). L'expression est plus complexe mais le principe est le même et il permet d'avoir un algorithme de type FBP qui devient :

$$f(r, \phi) = \frac{1}{4\pi^2} \int d\phi \frac{d^2}{(d + r \cos(\phi - \Phi))^2} P'_\Phi(Y(r, \phi)) \quad (1.7)$$

avec

$$P'_\Phi(Y) = \int dY' \frac{d}{\sqrt{d^2 + Y'^2}} P_\Phi(Y') g(Y' - Y)$$

avec

$$g(Y) = \text{Re} \int_0^{\pi/\Delta Y} \exp(i\omega Y) \omega d\omega$$

#### 1.3.2 Adaptations de la FBP au cas 3D

La FBP présentée précédemment est très pratique, car nous avons la formule analytique et sa mise en œuvre est peu coûteuse en termes de mémoire et de temps de calcul. Cependant, la formule n'est une bonne approximation que pour le cas 2D. Certains auteurs ont adapté cette méthode au cas 3D circulaire. Il a fallu ensuite adapter ces algorithmes **analytiques** à la trajectoire hélicoïdale de la source.

### 1.3.2.1 Cas du faisceau conique pour une trajectoire circulaire

Ici, la source parcourt un cercle dans le plan médian et émet un faisceau en forme conique détecté par des détecteurs qui se situent sur quelques barrettes parallèles au plan médian. Il existe des algorithmes dits exacts comme ceux développés par Nguyen et al. (2005) ou par Tuy (1983) qui se basent sur une formule analytique qui est exacte dans le cadre de la loi de Beer-Lambert. Il s'agit en fait d'une généralisation de la transformée de Radon et d'une expression de cette inverse généralisée.

D'autres auteurs, comme Feldkamp et al. (1984) ont mis au point des méthodes dites approximatives qui se basent sur des heuristiques qui sont exactes à la limite. Cela signifie que ces méthodes ne sont exactes que pour le cas 2D. Plus l'angle du cône est important moins la solution sera bonne. Cette méthode fonctionne assez bien car l'angle au sommet de ce type de cône est faible. Mais comme il s'agit d'approximation, ces méthodes engendrent des artefacts.

### 1.3.2.2 Algorithme de Feldkamp

Nous nous efforçons de décrire ici les grands traits de l'algorithme de Feldkamp puisque nous comparerons nos résultats à une implémentation de la méthode de Feldkamp. L'algorithme propose une heuristique de reconstruction tomographique dans le cas d'un faisceau conique d'émission et pour une trajectoire circulaire de la source.

Soit  $\vec{r}$  un point dont nous souhaitons calculer la fonction de densité  $f$ . Ce point est dans l'objet image.

Pour chaque angle  $\Phi$  de projection, on détermine le plan incliné (voir figure 1.8) qui contient le point  $\vec{r}$ . Le plan incliné est défini par le point S et la droite contenant les détecteurs d'une barrette. On rétroprojette les données acquises sur les détecteurs de ce plan, en corrigeant l'effet de l'inclinaison (notamment la distance source-détecteur) en utilisant la formule de rétroposition 2D en éventail citée précédemment. Cette rétroposition nous fournit une contribution  $\delta f(\vec{r})$  qui correspond à un angle de projection. Pour obtenir la valeur totale de la fonction de densité  $f(\vec{r})$ , il faut sommer sur tous les angles, et répéter l'opération en tous les points (ou pixels en pratique) qui nous

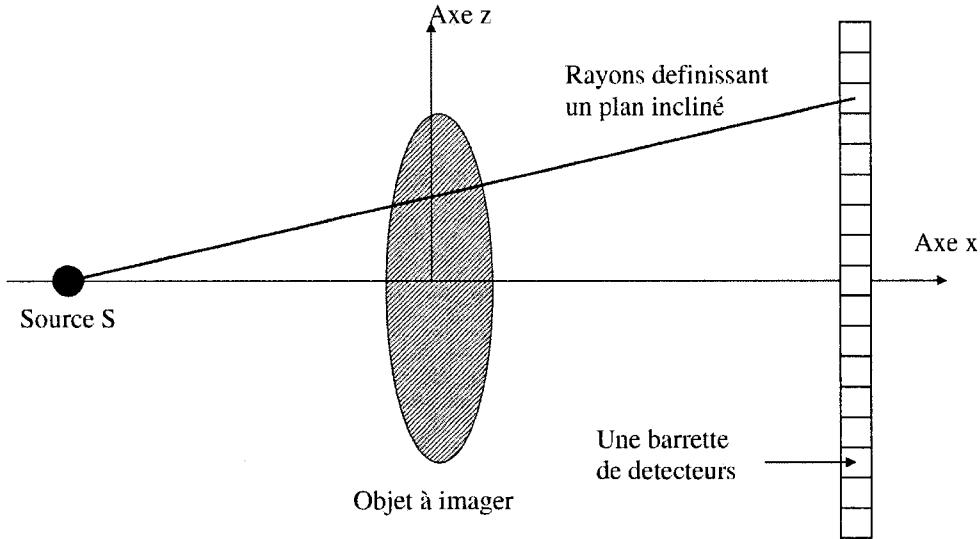


FIGURE 1.8 – Plan incliné dans la méthode de Feldkamp.

intéressant. Pour avoir tous les détails de cet algorithme, nous suggérons au lecteur de se référer à l'article de Feldkamp et al. (1984).

### 1.3.2.3 Adaptation à une trajectoire hélicoïdale

Toute une série de méthodes, comme celles proposées par Rischal et al. (1997) ou par Yan et Zhang (2005) se basent sur des interpolations permettant de passer du cas 3D hélicoïdal à une série de cas axiaux. Ces auteurs utilisent ensuite l'algorithme de Feldkamp pour chacun de ces plans inclinés. D'autres proposent des variantes de rétroprojections filtrées avec d'autres transformées : c'est le cas de Zamyatin et al. (2006) qui utilisent une transformée de Hilbert. Kudo et al. (2002) proposent une autre rétroposition filtrée avec un filtre et des pondérations adaptés.

Quelques algorithmes exacts ont été développés. Il s'inspirent essentiellement de Tuy (1983) et de Nguyen et al. (2005). Citons Defrise et Clack (1994) qui proposent une inver-

sion exacte du problème hélicoïdal à condition que l'objet satisfasse certaines conditions comme le fait que l'objet ne soit pas trop long (selon l'axe  $z$ ). D'autres comme Katsevich (2002) généralisent ces rétroposition filtrées exactes en proposant une formule d'inversion complexe qui possède cinq termes.

#### 1.3.2.4 Limites de la rétroposition filtrée

Toutes ces méthodes analytiques sont des algorithmes de rétroposition filtrée adaptée à la géométrie de l'acquisition tomographique. Ils sont très souvent rapides et efficaces et sont le standard industriel actuel. Cependant, dès que nous souhaitons modifier le modèle de formation des données en adaptant la relation de Beer-Lambert, ces méthodes s'adaptent plus difficilement puisqu'elles se basent sur un certain nombre d'hypothèses réductrices :

1. Les photons X ont tous la même énergie. Nous savons que cette hypothèse est fausse, notamment dans l'application qui nous intéresse : la visualisation d'objets métalliques par tomographie à rayons X.
2. Le faisceau de photons X est infiniment mince. En réalité, ceci est inexact puisque la source est imparfaite.
3. Le cadre d'émission et de détection des photons est déterministe. Or, nous verrons qu'avec des méthodes ART, il est possible de faire dériver une méthode à partir du modèle statistique de formation des données.

Pour corriger certaines des imperfections mentionnées ci-dessus, les constructeurs ont mis en place des méthodes de correction a posteriori des données et des reconstructions. Cependant celles-ci dépendent du cadre médical de l'examen et du protocole, car elles se basent surtout sur des méthodes de filtrage dont les paramètres sont fixés à l'avance en fonction du type de reconstruction élaboré.

C'est en partie à cause de ces limites que certains auteurs ont développé des reconstructions dites « **algébriques** ». Dans la section qui suit, nous nous proposons d'exposer le principe de ces méthodes.

## 1.4 État de l'art sur les méthodes algébriques

### 1.4.1 Généralités sur les méthodes algébriques

Les reconstructions algébriques apparaissent dans des cadres où la rétroprojection filtrée est défaillante. Par exemple, dans certains cas, la source ne peut parcourir tout un tour en tomographie à « angles partiels ». Andersen (1989) propose une application de la méthode ART dans un cadre de tomographie à angles partiels.

Mais plus généralement, les reconstructions algébriques donnent plus de souplesse concernant le modèle de formation des données.

Le livre de Kak et Stanley (2001) est très clair sur le sujet et propose tout un chapitre sur ces méthodes. Dans toute reconstruction tomographique, on discrétise l'espace qu'on souhaite imager en pixels (ou voxels pour le cas 3D). Généralement, cette discrétilisation est uniforme. Nous verrons au chapitre suivant des pixels « alternatifs ». Considérons un rayon X émis et traversant un ensemble de pixels. Par souci de simplicité, nous nous plaçons dans le cas 2D, puisque les équations auraient la même forme. Considérons l'exemple de la figure 1.9 car ceci permettra de comprendre la théorie avec un exemple simple. Les pixels  $(1, 2)$ ,  $(1, 4)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(3, 5)$  et  $(4, 6)$  sont traversés par le rayon. Notons  $C$  l'ensemble de ces coordonnées. Notons  $l_{ij}$  la longueur d'intersection du rayon et du pixel  $(i, j)$ . Nous choisissons une discrétilisation de l'espace qui est telle que la valeur des coefficients d'atténuation est uniforme sur un pixel. Ces atténuation valent  $\mu_{ij}$ .

Dans les hypothèses de la loi de Beer-Lambert, l'intensité détectée est égale à :

$$I = I_0 \exp \left( - \sum_{(i,j) \in C} l_{ij} \cdot \mu_{ij} \right) \quad (1.8)$$

Avec les mêmes notations que pour la section relative à la transformée de Radon, la valeur en ce point du sinogramme est :

$$p_k = \sum_{(i,j) \in C} l_{ij} \cdot \mu_{ij}$$

avec  $p_k = -\log I/I_0$ . Remarquons qu'il s'agit d'une discrétilisation de la transformée de Radon. Nous avons en effet discrétilisé l'intégrale qui correspond à la loi de Beer-Lambert. Nous pouvons écrire cette équation pour chaque rayon émis.

Ici les inconnues sont les  $\mu_{ij}$  et les données  $p_k$  sont recueillies dans le sinogramme. Les  $l_{ij}$  sont les coefficients de ce système d'équations linéaires. Ces coefficients se calculent en avance et ne dépendent que de la géométrie du système (trajectoire de la source et disposition des détecteurs). Les coefficients sont stockés et ne sont pas recalculés pour chaque reconstruction. Nous pouvons synthétiser toutes ces équations en une équation linéaire :

$$\mathbf{p} = A\boldsymbol{\mu} \quad (1.9)$$

$\mathbf{p}$  et  $\boldsymbol{\mu}$  sont deux vecteurs qui contiennent respectivement le sinogramme et les coefficients d'atténuation de chaque pixel.  $A$  est la **matrice de projection du système**. C'est en fait une discrétisation de l'opérateur linéaire de la transformée de Radon.  $A$  contient en fait les informations concernant la géométrie du système, i.e. les  $l_{ij}$  dans le cas de l'exemple ci-dessus.

Les méthodes algébriques tentent de résoudre le problème de la reconstruction tomographique par cette approche.

Résoudre un tel système est un problème en soit, puisque la taille du problème peut s'avérer très importante. Pour un problème réel en trois dimensions, il y a plusieurs millions d'inconnues pour plusieurs millions de données. Il y a plusieurs façons de résoudre un tel système. La technique que nous avons utilisée dans nos travaux est la minimisation d'un critère. En effet, résoudre le système  $\mathbf{p} = A\boldsymbol{\mu}$  équivaut à minimiser le critère de moindres carrés suivant :

$$\boldsymbol{\mu} \mapsto f(\boldsymbol{\mu}) = 1/2 \|A\boldsymbol{\mu} - \mathbf{p}\|^2$$

La minimisation de ce critère se fait itérativement. Nous présenterons ultérieurement les algorithmes permettant d'effectuer ces minimisations.

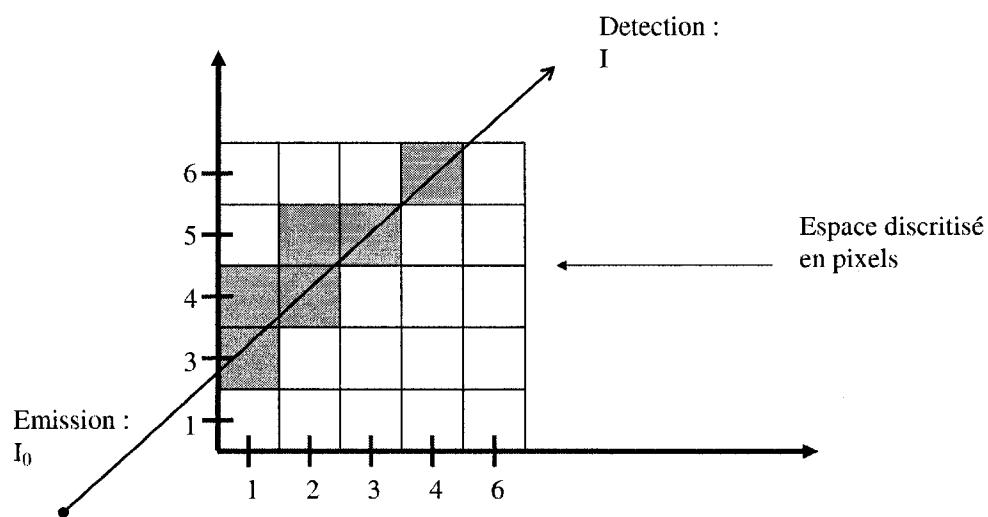


FIGURE 1.9 – Reconstruction algébrique et discréétisation de l'image.

### 1.4.2 Exemple de matrice de projection

Pour comprendre ce qui est stocké dans une matrice  $A$  classique, reprenons l'exemple de la figure 1.9. Les rayons étant numérotés, supposons qu'il s'agit du rayon  $k$ . Cela signifiera que la matrice  $A$  aura pour  $k^{ième}$  ligne :

$$L_k = [0l_{1,3}l_{1,4}00000l_{2,4}l_{2,5}00000l_{3,5}000000l_{4,6}00000]$$

Les différents éléments de cette ligne correspondent à la contribution de chaque pixel (ou voxel en 3D) pour ce rayon  $k$ . Pour classer les pixels, nous devons choisir une convention d'ordre pour les couples  $(i, j)$ . Ici, il s'agit de l'ordre lexicographique :

$(i, j) \geq (k, l) \iff (i > k) ou (j \geq l)$ . Les  $l_{ij}$  sont les contributions des pixels  $(i, j)$  qui correspondent ici à la longueur d'intersection du pixel  $(i, j)$  avec le rayon  $k$ .

### 1.4.3 Critères utilisés en reconstruction algébrique

Le but de la reconstruction tomographique est de reconstruire des images à partir de données réelles recueillies par un tomographe. Nous avons des modèles physiques de formation des données et à partir de ceux-ci et des données nous **estimons** les coefficients d'atténuation  $\mu$  ou  $\phi$  dans le cas polychromatique. Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'exposer les diverses fonctions à minimiser. Ces fonctions ou **critères** ont pour argument  $\phi$  ou  $\mu$ . Si nous appelons  $f$  de manière générique ces critères, une estimation des coefficients d'atténuation sera donnée par

$$\hat{\mu} = \arg \min_{\mu} f(\mu)$$

Il suffit de bien choisir ce critère  $f$  pour qu'il prenne correctement en compte la physique du modèle. Nous traiterons au chapitre 4 des techniques de régularisation qui impliquent l'introduction d'un terme supplémentaire à la fonction de coût et qui permettent de réduire le bruit.

#### 1.4.3.1 Critère des moindres carrés

Le critère des moindres carrés est utilisé ici lorsque le modèle d'émission de la source est supposé déterministe. Avec les mêmes notations que précédemment, le modèle

déterministe en mode monochromatique est donné par

$$\mathbf{p} = A \cdot \mu$$

$\mathbf{p}$  est une estimation du sinogramme de l'acquisition si on connaît  $\mu$ . C'est une écriture synthétique du système d'équations obtenu par les équations de type 1.3 en utilisant les hypothèses approximatives de rayons infiniment fins, de photons monochromatiques et d'un cadre de formation déterministe des données.

Nous définissons le critère des moindres carrés qui traduit une distance entre le modèle direct estimé et les mesures :

$$\mu \mapsto f(\mu) = 1/2 \|A\mu - \hat{\mathbf{p}}\|^2 \quad (1.10)$$

$\hat{\mathbf{p}}$  est le sinogramme mesuré. Calculons le gradient de cette fonction :

$$\nabla f(\mu) = A^T(A\mu - \hat{\mathbf{p}})$$

Nous remarquons que si le modèle direct est satisfait, alors le gradient du critère est nul et correspond à un minimum local. Si le hessien du critère qui vaut  $A^T A$  est défini positif, il s'agit du minimum local d'une fonction convexe donc du minimum global. Nous verrons ultérieurement comment faire si  $A^T A$  n'est pas définie positive, comme c'est le cas en pratique. De plus, nous exposerons les techniques que nous avons utilisées pour minimiser ce critère à la section suivante.

#### 1.4.3.2 Critères poissonniens

Dans un cadre non déterministe et monochromatique, le modèle statistique de formation des données s'écrit :

$$\mathbf{N} \sim P(N_0 \exp(-A\mu))$$

Comment introduire un critère permettant de traduire l'écart entre les données modélisées et les données réelles ? Pour cela nous avons besoin de la fonction de **vraisemblance**. Cette fonction sera notée  $\mu \mapsto L(\mu)$ . Nous la définissons comme suit :

$$L(\mu) = \Pr(N_1, \dots, N_j, \dots, N_J | \mu)$$

C'est la probabilité que le tomographe mesure  $N_1, \dots, N_j, \dots, N_J$  photons pour les  $J$  mesures acquises par le tomographe sachant que les coefficients d'atténuation sont

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_i, \dots, \mu_Q)$$

où  $Q$  est le nombre de voxels (ou pixels en 2D). Pour déterminer une estimation de  $\mu$ , il suffit de trouver le maximum de  $L$ , que nous nommons le **maximum de vraisemblance**. C'est la probabilité maximale que les données modélisées (à partir des atténuations estimées) correspondent aux données réelles. Explicitons  $L$  pour le modèle qui nous intéresse. Les  $N_j$  sont des variables aléatoires indépendantes. Ainsi, nous avons :

$$L(\mu) = \prod_j \Pr(N_j | \mu)$$

Or,

$$\Pr(N_j | \mu) = \frac{\exp(-\lambda_j) \lambda_j^{N_j}}{N_j!}$$

où  $\lambda_j = N_0[\exp(-A\mu)]_j$ . Comme la fonction logarithme est strictement croissante, maximiser la vraisemblance revient à maximiser son logarithme. Or,

$$\log L(\mu) = \sum_j \log[\Pr(N_j | \mu)] = \sum_j \log\left[\frac{\exp(-\lambda_j) \lambda_j^{N_j}}{N_j!}\right]$$

Et nous avons :

$$\log L(\mu) = \sum_j -\lambda_j + \log(\lambda_j) \cdot N_j + \log[N_j!]$$

Maximiser une fonction revient à minimiser son opposée. Nous obtenons un critère à minimiser en ignorant les termes qui ne dépendent pas de  $\mu$ . Le critère à minimiser est donc :

$$f^*(\mu) = \sum_j \{N_0[\exp(-A\mu)]_j + [A\mu]_j \cdot N_j - N_0 \cdot N_j\}$$

En laissant tomber les termes indépendants de  $\mu$ , nous avons :

$$f(\mu) = \sum_j \{N_0[\exp(-A\mu)]_j + [A\mu]_j \cdot N_j\} \quad (1.11)$$

Ce critère est plus complexe que le critère des moindres carrés : ce n'est plus un simple critère quadratique. Mais il permet de mieux estimer  $\mu$  lorsque le nombre de photons détectés est plus faible. Le gradient de  $f$  n'est plus linéaire. Remarquons à nouveau que l'opérateur géométrique  $A$  n'a pas besoin d'être modifié en conséquence.

#### 1.4.3.3 Méthodes polychromatiques

Nous nous plaçons dans le cadre de l'hypothèse  $\mathbf{H}_1$  de rayon infiniment mince. De même que dans le paragraphe précédent, le tomographe va prendre toute une série de mesures que nous pouvons écrire de façon vectorielle :

$$\mathbf{N} \sim P\left(\int \mathbf{N}_0(\epsilon) d\epsilon \exp(-A\mu(\epsilon))\right)$$

Il faut ensuite discréteriser l'intégrale qui s'effectue sur les niveaux d'énergie. Ceci revient à discréteriser le spectre d'émission en  $K$  niveaux. Le modèle d'émission devient alors :

$$\mathbf{N} \sim P\left(\sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{N}_0^{(k)} \exp(-A\mu_k)\right) \quad (1.12)$$

$A$  ne dépend pas de la physique du problème mais seulement de sa géométrie. Cette distinction peut paraître artificielle mais elle est utile, car nous pourrons utiliser un même opérateur  $A$  pour différents modèles physiques. Remarquons qu'il y a  $K$  fois plus d'inconnues que précédemment, pour le même nombre d'inconnues. Ceci détériore de façon importante la détermination du problème. En plus de cela, nous verrons que le critère à minimiser dérivant de ce modèle est non linéaire. Nous sommes donc dans une impasse numérique. Il faut pour cela réduire le nombre d'inconnues. De Man et al. (1998) proposent de décomposer les  $\mu_k$  en deux termes : l'un d'effet Compton et l'autre d'effet photoélectrique :

$$\mu_k = \Phi_k \times \phi(\mu_{70}) + \Theta_k \times \theta(\mu_{70}) \quad (1.13)$$

$\mu_{70}$  : coefficients d'atténuation pour le niveau d'énergie de 70 keV.

$$\Phi_k \times \phi(\mu_{70})$$

est le terme qui correspond à l'effet photoélectrique.

$$\Theta_k \times \theta(\mu_{70})$$

est le terme de l'effet Compton.  $\Phi_k$  et  $\Theta_k$  ne dépendent pas du matériau mais seulement du niveau d'énergie  $k$ .

De Man et al. (1998) ont effectué des régressions linéaires entre les fonctions  $\phi$  et  $\theta$  qui s'exprime de la façon suivante :  $\theta = \alpha\phi + \beta$  et qui ramènent le problème à une seule inconnue vectorielle :  $\phi$ . Cette inconnue vectorielle est de la même taille que l'inconnue  $\mu$  dans la reconstruction polychromatique.

Le modèle physique de formation des données devient :

$$\mathbf{N} \sim P\left(\sum_{k=0}^{K} \mathbf{N}_0^{(k)} \exp(-A\{\Phi_k \times \phi + \Theta_k \times (\alpha\phi + \beta)\})\right)$$

c'est-à-dire :

$$\mathbf{N} \sim P\left(\sum_{k=0}^{K} \mathbf{N}_0^{(k)} \exp\{-A[(\Phi_k + \Theta_k \times \alpha) \times \vec{\phi} + \Theta_k \times (\beta)]\}\right) \quad (1.14)$$

Notons bien que  $\Phi_k$  et  $\Theta_k$  sont des constantes prédéterminées.

De même que précédemment, nous voyons que l'opérateur  $A$  est isolé et ne dépend pas du modèle physique d'émission. Il s'agit de l'opérateur contenant l'information sur la géométrie du problème. Nous verrons ultérieurement les critères à minimiser selon les aspects physiques que nous souhaitons privilégier.

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressé à des critères monochromatiques. Pour tenir compte du mode polychromatique d'émission, il suffit de remplacer le terme  $A\mu$  par le terme équivalent polychromatique et de sommer sur les différents niveaux d'énergie  $k$ .

$$f(\phi) = \sum_k \sum_j \{ N_0 [\exp(-A[(\Phi_k + \Theta_k \times \alpha) \times \vec{\phi} + \Theta_k \times (\beta)])]_j + [A[(\Phi_k + \Theta_k \times \alpha) \times \vec{\phi} + \Theta_k \times (\beta)]]_j \cdot N_j \}$$

L'inconnue est cette fois-ci le vecteur colonne  $\phi$ . C'est le critère qui prend le plus de ressources en termes de calculs. Comme pour le critère précédent, celui-ci a un gradient non linéaire, mais il permet de prendre à la fois en compte le cadre stochastique de la formation des données et le caractère polychromatique des photons.

#### 1.4.4 Méthodes algébriques en 3D

À cause de la taille des données, la reconstruction algébrique dans le cadre 3D pour une trajectoire hélicoïdale peut paraître prohibitive avec des ordinateurs personnels (PC). Certains articles comme celui de Mueller et al. (1999) proposent des techniques itératives dans le cadre 3D mais en trajectoire circulaire : « circular cone-beam CT ». Ce n'est que récemment que nous avons constaté dans la littérature des tentatives de reconstruction de type ART (abréviation en anglais de Algebraic reconstruction technique). Personne n'a encore publié de tels résultats sur des données cliniques, comme le confirment Wang et al. (2007). En effet, Carvalho et Herman (2007) ont effectué de telles reconstructions pour une grille de  $128 \times 128$  et Allain et al. (2002) n'utilisent que 4 barrettes de détecteurs sur des données simulées. De même, Roh et Cho (2004) proposent une implémentation d'un algorithme de reconstruction « ART ». Cependant, il s'agit de fantômes de petite taille :  $60 \times 60 \times 60$  avec des voxels sphériques. La méthode exposée n'est pas appliquée en milieu clinique. De même, Mueller et al. (1999) effectuent une reconstruction 3D pour réduire les artefacts dus à la largeur du cône sur des données non réelles.

#### 1.4.5 Algorithmes d'optimisation utilisés en reconstruction algébrique

Récapitulons la démarche :

- Nous avons précisé les modèles de formation des données utilisés : tantôt déterministe ou stochastique et tantôt monochromatique ou polychromatique.
- À partir de ces modèles, nous avons déduit un critère à minimiser. Ce minimum nous donne une estimée des coefficients d'atténuation que nous recherchons.
- Il nous reste plus qu'à présenter l'état de l'art permettant de minimiser le type de fonction qui nous intéresse. C'est l'objet de cette partie.

Un grand nombre d'algorithmes d'optimisation auraient pu être utilisés dans le cadre de nos travaux, ce qui répond à l'impératif de flexibilité que nous nous étions fixés. Nos travaux n'ont pas porté sur ces algorithmes en tant que tels, mais nous devons justifier l'utilisation de tel ou tel algorithme de minimisation sans pour autant rentrer dans les

détails d'un manuel dédié à l'optimisation.

#### 1.4.5.1 Algorithmes de descente

Il existe plusieurs types d'algorithmes d'optimisation. Il y a notamment les techniques discrètes qui n'utilisent pas d'informations sur les dérivées de la fonction à minimiser. Ce sont par exemple les problèmes de programmation par contrainte ou de recherche opérationnelle qui s'appliquent à de petits problèmes (par rapport à ceux rencontrés en tomographie) ou ayant des contraintes beaucoup plus fortes entre les variables. Par exemple, chaque coup d'une partie d'échec est un problème d'optimisation.

Mais il y a aussi des techniques d'optimisation qui se servent des informations liées aux dérivées pour des problèmes différentiables. Ce sont notamment les méthodes de descentes dont nous nous sommes servis. En effet, nos fonctions sont différentiables, donc autant utiliser la dérivation qui fournit une information importante concernant la variation locale de la fonction.

Un algorithme de descente a pour but de minimiser  $f$ , c'est-à-dire de trouver le vecteur  $x$  qui minimise la fonction  $f$  en utilisant une direction de descente qui est calculée itérativement. Considérons le schéma explicatif de la figure 1.10. Les diverses étapes de cette minimisation sont les suivantes :

1. Tout d'abord, nous initialisons le point courant. En pratique, nous prenons un point initial ayant des valeurs du même ordre de grandeur que la solution que nous recherchons.
2. Au début de la boucle principale, nous calculons ce que nous appelons une direction de descente. Nous verrons plusieurs techniques permettant de déterminer le vecteur  $d$ . Dans l'exemple 1.10, nous avons choisi l'opposé du gradient comme direction de descente. C'est une direction selon laquelle nous allons minimiser la solution.
3. Ensuite, nous minimisons la fonction à variable  $\alpha$  définie par  $\alpha \mapsto f(\alpha d + x_k)$  où  $x_k$  est la valeur du point courant. En fait, il s'agit de minimiser localement  $f$  autour du point  $x_k$  selon une seule direction :  $d$ . La direction  $d$  est appelée direction de descente, d'où le nom de cette famille de techniques.  $\alpha$  est le pas de descente. Il

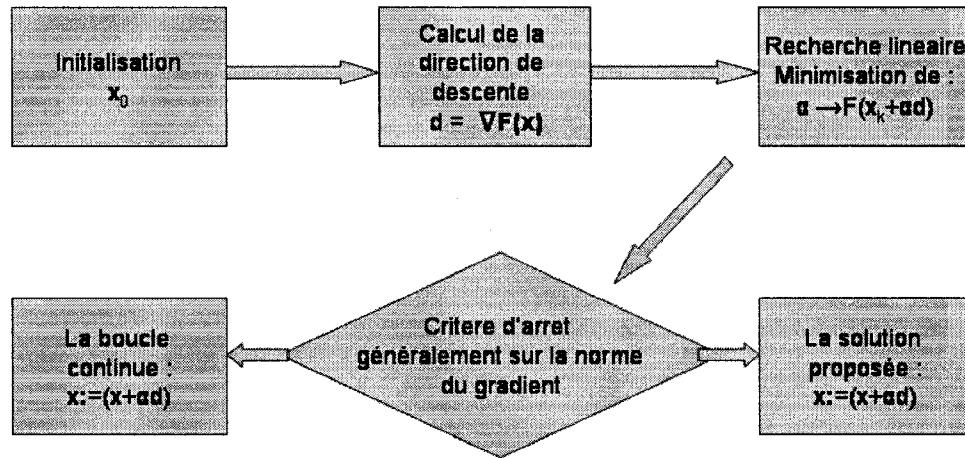


FIGURE 1.10 – Schématisation d'un algorithme de descente (alg. du plus forte descente).

est choisi positif. Il doit être déterminé après une étape dite de recherche linéaire (puisque'on évolue sur une droite de direction  $d$ ).

- Après ce calcul, le critère d'arrêt est vérifié. Il s'agit généralement d'un critère d'arrêt sur la norme du gradient. Avec  $\epsilon$  pré-choisi, un critère d'arrêt adapté pourrait être :

$$\|\nabla f\| \leq \epsilon$$

Ce critère pourrait aussi être le nombre d'itérations. Si le critère est vérifié, nous nous arrêtons, sinon nous continuons la boucle.

- À l'issu de ce processus pour certain types de problèmes, nous obtenons une solution. Au mieux celle-ci est un minimum global et au pire, pour des problèmes trop mal posés, ce n'est même pas un minimum local (au sens de l'annulation du

gradient).

Il existe plusieurs techniques qui sont des déclinaisons de ce principe. Citons ces techniques :

- algorithme de plus forte descente
- algorithme du gradient conjugué
- algorithme de Newton
- algorithme quasi-Newton

C'est le choix du **pas** et de la **direction de descente** qui différencie les divers algorithmes cités ci-dessous. Nous allons présenter les principales techniques existantes en insistant sur celles utilisées. Nous renvoyons le lecteur au livre de Nocedal et Wright (1999) qui rentre dans le détail de ces méthodes d'optimisation numérique.

#### 1.4.5.2 Algorithme de la plus forte descente

Un algorithme de descente important est l'algorithme de la plus forte descente. Dans ce cas, la direction de descente est donnée par :

$$\mathbf{d}_k = -\nabla f(x_k)$$

#### 1.4.5.3 Algorithme du gradient conjugué linéaire

Lorsque le critère à minimiser est quadratique, nous pouvons utiliser un algorithme de gradient conjugué linéaire. C'est le cas lorsque le critère à minimiser est de la forme :

$$f(x) = 1/2 \|Ax - y\|^2$$

Notons pour la suite :

$$Q = A^T A$$

Notons  $g_k = \nabla f(x_k)$ . La direction de descente est cette fois-ci donnée à l'itération suivante par l'expression :

$$d_{k+1} = g_{k+1} - \frac{d_k^T Q g_{k+1}}{d_k^T Q d_k} d_k \quad (1.15)$$

Les vecteurs  $d_{k+1}$  et  $d_k$  sont dits conjugués, d'où le conjugué dans le nom de l'algorithme. En effet, nous avons :  $d_k^T Q d_{k+1} = 0$  (définition de la conjugaison).

Comme  $Q$  est symétrique, nous savons d'après le théorème spectral que toutes les valeurs propres de  $Q$  sont réelles. De plus, nous savons par ce même théorème qu'il existe une base orthonormée permettant de décomposer  $Q$  en valeurs propres. Selon le produit scalaire associé à  $Q$ , défini par  $(x, y) \mapsto y^T Q x$ , les vecteurs propres de  $Q$  forment une base orthonormée (ou une base de vecteurs conjugués).

L'intérêt du gradient conjugué est que la recherche linéaire se fait sur une base qui correspond à la base de vecteurs propres adaptés au produit scalaire induit par la matrice  $Q$ .

Voyons cela à l'aide de la figure 1.11. Nous avons tracé les iso-valeurs de  $f$ . Ces iso-valeurs sont déterminées par les équations quadratiques :

$f(x) = k$  où  $k$  est une constante. Il s'agit d'ellipsoïdes puisque  $f$  est quadratique. La solution se trouve au centre de l'ellipse. Les axes de l'ellipse correspondent aux valeurs propres orthonormales (selon le produit scalaire lié à  $Q$ ). Ils correspondent aux axes géométriques de l'ellipse.

L'algorithme de la plus forte descente fait évoluer le point courant perpendiculairement aux ellipses passant par les points courants. En effet, le gradient est perpendiculaire aux iso-valeurs (comme en électricité où le champ électrique est perpendiculaire aux équipotentielles).

En revanche, l'algorithme du gradient conjugué fait évoluer le point courant selon les axes principaux de l'ellipse (ou de l'ellipsoïde si nous sommes en dimension quelconque  $n$ ).

#### 1.4.5.4 Algorithme du gradient conjugué non linéaire

Comme nous l'avons mentionné, les critères ne sont pas toujours quadratiques. Il existe des algorithmes adaptés au cas non linéaire. Ce sont surtout les algorithmes Polack-Ribièvre et Fletcher-Reeves.

À chaque itération, nous calculons le scalaire  $\beta_k$  selon l'une des deux formules :

Fletcher-Reeves proposent :

$$\beta_k = \frac{g_k^T g_k}{g_{k-1}^T g_{k-1}}$$

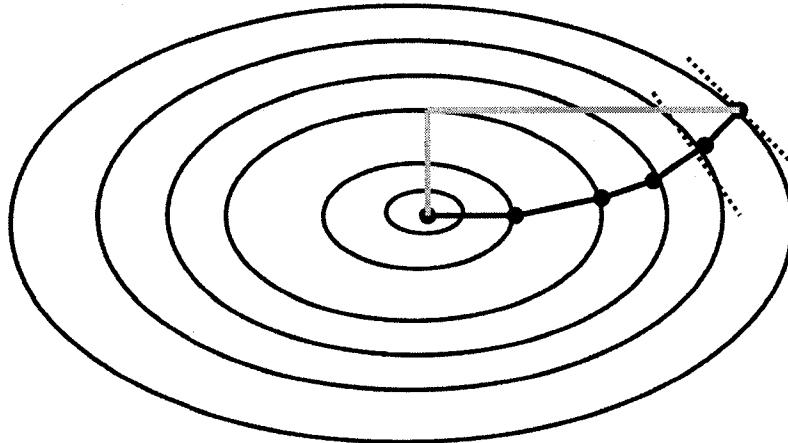


FIGURE 1.11 – Convergences pour un problème quadratique grâce aux algorithmes de plus forte descente (en noir) et du gradient conjugué (gris).

Polak-Ribière proposent :

$$\beta_k = \frac{g_k^T (g_k - g_{k-1})}{g_{k-1}^T g_{k-1}}$$

Dans ces deux équations,  $g_k$  désigne le gradient de la fonction  $f$  au point courant  $x_k$ . Ensuite, il y a une partie commune  ces deux algorithmes : c'est le calcul de la direction de descente.

$$d_k = -g_k + \beta_k d_{k-1}$$

Comme tous les algorithmes de descente, il y a ensuite une phase de recherche linéaire selon la direction de descente.

#### 1.4.5.5 Algorithme de Newton

Les algorithmes de Newton utilisent une direction de descente vérifiant  $Hd_{k+1} = x_k - H(x_k)^{-1} \bigtriangledown f(x_k)$ , où  $H$  est le hessien. Il contient les valeurs des dérivées secondes de  $f$  au point courant.

Soit  $f$  une fonction, effectuons un développement d'ordre 2 autour du point  $x$  :

$$f(x + h) = f(x) + \langle \bigtriangledown f(x) | h \rangle + 1/2 \langle H(x)h | h \rangle + o(\|h\|^2)$$

Si  $x$  est un minimum local, alors :

$$\langle \nabla f(x) | h \rangle + 1/2 \langle H(x)h | h \rangle \simeq 0$$

Comme ceci a lieu dans toutes les directions  $h$ , nous avons :

$$\nabla f(x) = -1/2H(x)d$$

La méthode de Newton consiste à prendre une direction de descente égale à :

$$d = -H^{-1} \nabla f(x)$$

Cette méthode présuppose que le hessien  $H$  est inversible (i.e. défini positif vu qu'il s'agit d'un minimum).

De même que précédemment, il y a ensuite une phase de calcul du pas que nous n'explicitons pas ici. Comme cette méthode n'est pas applicable à des problèmes non convexes, des algorithmes quasi-Newton ont été créés. En plus de cela, il est très lourd d'inverser le hessien à chaque itération puisque le hessien dépend de  $x_k$  pour une fonction non quadratique. Cette méthode ne pourra pas être utilisée en pratique.

#### 1.4.5.6 Algorithmes quasi-Newton

Les algorithmes quasi-Newton adaptent la méthode de Newton à des problèmes réels qui sont très souvent non convexes et non linéaires. Il s'agit de construire une matrice  $B_k$  donnant une approximation définie positive du hessien, tout en évitant de le calculer à chaque itération. La direction de descente est alors de la forme :

$$d_k = -B_k g_k$$

avec  $B_k \approx H(x_k)$ . Un type d'algorithme quasi-Newton est l'algorithme BFGS pour Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno. Cette approximation du hessien est donnée par l'expression suivante :

$$B_{k+1} = B_k + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k} - \frac{B_k s_k (B_k s_k)^T}{s_k^T B_k s_k}$$

où  $s_k$  est la solution de l'équation  $B_k s_k = -\nabla f(x_k)$ . Pour calculer  $s_k$  il faut faire une approximation pour obtenir l'inverse de l'approximation du hessien. Grâce à la

formule de Sherman-Morrisson, nous avons l'approximation suivante qui nous permet de surmonter l'impasse :

$$B_{k+1}^{-1} = B_k^{-1} + (s_k s_k^T) \frac{(s_k^T y_k + y_k^T B_k^{-1} y_k)}{(s_k^T y_k)^2} - \frac{B_k^{-1} y_k s_k^T + s_k y_k^T B_k^{-1}}{s_k^T y_k}$$

Comme nous pouvons le constater, d'importants calculs matriciels sont entrepris et il faut stocker la matrice  $B_k$  ce qui peut s'avérer coûteux en mémoire pour des problèmes de grande taille. C'est pour cela qu'un algorithme L-BFGS (L pour limited memory) a été développé à l'Optimization Technology Center à la Northwestern University aux États-Unis d'Amérique. Cet algorithme se base sur le même principe que ci-dessus mais ne stocke pas la matrice  $B_k$ . L'algorithme mentionné est adapté à notre problème. Il utilise une information supplémentaire concernant la courbure locale de la fonction à minimiser, ce qui améliore la connaissance locale de la fonction et accélère la convergence. En plus de cela, les ressources mémoires nécessaires sont à peine supérieures à celles utilisées lors d'une minimisation par gradient conjugué non linéaire.

#### 1.4.5.7 Résultats théoriques concernant la convergence

L'objet de ce paragraphe est de rappeler les principaux résultats de convergence de ces algorithmes. Notre but est d'exposer le cadre d'utilisation de ces algorithmes afin de comprendre lequel d'entre eux pourra s'avérer le plus adapté au problème de reconstruction tomographique. Nous ne démontrerons pas les résultats exposés ici.

##### Algorithme de plus forte descente :

Dans le cas d'un **problème quadratique**, il est possible de majorer l'écart entre la valeur de la fonction au point courant et la valeur de la fonction à la solution idéale. Nous nous plaçons dans le cadre où la matrice  $A$  est définie positive.

Nous avons :

$$\frac{f(x_i) - f(x)}{f(x_0) - f(x)} \leq \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\right)^{2i}$$

où

$$\kappa = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

qui est le **conditionnement** de la matrice  $A$  (les  $\lambda$  sont les valeurs propres de la matrice).

Plus les valeurs propres de la matrice sont dispersées moins le problème est conditionné et plus la convergence sera plus lente.

### Conditions de Wolfe :

En pratique, le pas  $\alpha$  déterminé lors de la recherche linéaire ne peut pas être calculé de manière exacte car le critère est non quadratique. Il faut donc choisir un pas qui est souvent non optimal, car par souci d'efficacité, la recherche du pas ne doit pas être trop longue, surtout si on cherche dans la mauvaise direction.

Interprétons les deux conditions de Wolfe. Nous avons tout d'abord l'inégalité dite d'Armijo :

$$f(x_k + \alpha d_k) \leq f(x_k) + c_1 \alpha < g_k | d_k > \quad (1.16)$$

$c_1 \in ]0, 1[$  est un paramètre à fixer. Ce coefficient fixe l'importance que doit avoir la descente. Si  $c_1 \sim 1$ , cela signifie que la descente doit être d'une ampleur plus importante. Cette condition empêche le pas d'être choisi trop rapidement sans faire décroître suffisamment la fonction.

D'autre part, il y a une condition dite de courbure :

$$[< g_{k+1} | d_k >] \geq c_2 < g_k | d_k > \quad (1.17)$$

$c_2 \in ]c_1, 1[$  est un paramètre à fixer.

En notant  $\Phi(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k)$ , nous rappelons que le but de la recherche linéaire est de trouver un pas  $\alpha$  pour rendre  $\Phi$  le plus petit possible. Supposons que le terme  $\Phi'(0) = < g_k | d_k >$  soit négatif. Remarquons pour la suite que  $\Phi'(\alpha) = < g_{k+1} | d_k >$ . Cela signifierait que la recherche doit se faire dans les  $\alpha$  positifs. Si nous avions un  $\alpha$  tel que  $\Phi'(\alpha) = [< g_{k+1} | d_k >] < \Phi'(0)$ , cela signifierait que nous ne sommes pas descendus suffisamment, puisque la pente serait encore plus raide (et descendante) au nouveau point. Cette condition nous assure aussi que le pas produit fait descendre la fonction suffisamment rapidement.

### **Algorithme du gradient conjugué :**

Pour un problème quadratique, on peut démontrer que :

$$\frac{\|x_i - x\|_A}{\|x_0 - x\|_A} \leq \frac{1}{C_i(\frac{\kappa+1}{\kappa-1})}$$

avec la même définition de  $\kappa$  que précédemment.  $C_i$  est le polynôme de Chebychev. L'étude de ces polynômes permet de montrer qu'il y a convergence dans le cas quadratique. De même que dans le cas de l'algorithme de plus forte descente, lorsque le conditionnement empire, la convergence est plus lente.

### **Algorithmes du gradient conjugué non linéaire :**

Il y a convergence globale de ces algorithmes sous certaines conditions. Ces conditions sont liées à la recherche linéaire. Elles doivent se faire avec les conditions de Wolfe fortes. Si ces conditions ne sont pas vérifiées, rien n'assure la convergence de l'algorithme pour une fonction quelconque différentiable.

### **Algorithmes quasi-Newton :**

Les résultats de convergence portent essentiellement sur les problèmes convexes. Dans ce cas, il y a convergence et celle-ci est super-linéaire, c'est-à-dire plus rapide que linéaire. Les algorithmes exacts de Newton convergent de façon quadratique, mais si la solution est proche du point initial. En effet, si le point initial est éloigné de la solution, l'algorithme pourrait ne jamais converger, dans le cas d'un hessien non défini positif. Nous pouvons voir les algorithmes quasi-Newton comme un compromis entre la lenteur des algorithmes de plus fortes descentes (qui convergent sûrement) et la rapidité des algorithmes de Newton (qui peuvent ne jamais converger). Ce sont les conditions de Wolfe qui assurent ce compromis. La convergence est plus rapide que pour les algorithmes de plus forte descente. Il faut cependant que les pas de descente satisfassent les conditions de Wolfe.

#### **1.4.5.8 Régularisation**

Nous nous situons dans le cadre de la minimisation d'un critère pour reconstruire une image tomographique :

$$\hat{\mu} = \arg \min f(\mu)$$

$f_0$  peut être un des critères exposés au chapitre précédent et décrit une adéquation entre l'observation et le modèle direct.

Or ce **problème est mal posé** et pour faciliter la convergence de l'algorithme, nous ajoutons un terme de régularisation comme les termes de pénalisation de Tikhonov (Tikhonov et Arsenin (1977)).

Le problème prend alors la forme suivante :

$$f(\mu) = f_0(\mu) + \Psi(\mu) \quad (1.18)$$

$f_0$  est le critère correspondant à la distance au modèle direct. Au chapitre 4, nous décrirons diverses fonctions de pénalisation  $\Psi$ . Ces critères de pénalisation tentent de tenir compte d'informations a priori. Donnons quelques exemples d'informations a priori dont nous pouvons tenir compte :

- **Régularité de l'image reconstruite.** En effet, nous pouvons supposer que la fonction  $(x, y, z) \mapsto \mu(x, y, z)$  est assez lisse et qu'elle n'a en général pas trop de discontinuité. Cette hypothèse est basée sur le bon sens : les seules discontinuités se font aux frontières des différents tissus.
- **Amplitude des coefficients d'atténuation.** Par exemple, l'image a une plus grande probabilité d'être constituée de valeurs nulles.
- **Positivité des coefficients d'atténuation.** En effet, les coefficients d'atténuation ne peuvent être négatifs.

#### 1.4.6 Comparaison de l'approche analytique et de l'approche algébrique

En pratique nous constatons que l'approche analytique est plus rapide (grâce notamment au passage dans le domaine de Fourier) et moins lourde en termes de mémoire que l'approche algébrique (puisque il faut stocker l'opérateur  $A$ ).

Cependant, en rétroprojection filtrée, nous ne pouvons pas proposer de modèle de formation de données non linéaire. Le modèle le plus usuel est linéaire, c'est celui que nous avons présenté précédemment : la transformée de Radon discrétisé. Nous avons

présenté ensuite un modèle non linéaire : il sert dans un cadre où les photons n'ont pas tous le même niveau d'énergie (émission polychromatique). De plus, nous pouvons intégrer à notre modèle l'aspect aléatoire de l'émission et de la propagation des photons X. L'émission peut être modélisée comme une variable aléatoire de Poisson.

En plus de cela, il est possible d'introduire de l'information a priori à notre modèle dans les techniques algébriques, tandis que ce n'est pas le cas pour des techniques analytiques. Nous verrons que cela est utile pour réduire le bruit. Avec des techniques analytiques, ceci ne peut se faire que par post-traitement ou pré-traitement des données.

Mais aucune technique développée jusqu'à maintenant en ART n'est utilisable sur des données réelles à cause de la taille des données. **Nous mettrons en place une technique ART permettant d'être appliquée sur des données réelles.**

## 1.5 Diverses détériorations d'image en tomographie à rayons X

Après avoir présenté les modèles de formation des données et les méthodes de reconstruction (analytiques et algébriques), nous proposons de présenter les diverses détériorations d'image en tomographie à rayons X qui peuvent affecter la qualité des images reconstruites. Le **bruit**, dont nous expliquerons les origines, est une source de détérioration majeure. Nous présenterons les grands principes de réduction du bruit et nous verrons que les reconstructions algébriques permettent une meilleure gestion du bruit. Une autre source de détérioration importante est l'ensemble des **artefacts**. Étymologiquement, un artefact est un effet artificiel. C'est donc une détérioration due à la méthode employée. Ainsi, le bruit est un signal aléatoire se superposant au signal utile (ici le nombre de photons émis) et les artefacts sont dus à une inadéquation de la technique de reconstruction.

### 1.5.1 Généralités sur le bruit en tomographie à rayons X

Le bruit observé sur les reconstructions tomographiques est en partie dû au processus aléatoire d'émission et de propagation des photons de la source. Une fois les photons émis des phénomènes aléatoires comme la diffusion régissent le comportement des photons du faisceau de rayons X. Les photons diffusés ont des directions de propagation aléatoires et sont donc perdus. Ils peuvent atteindre un détecteur qui ne serait pas le bon. C'est un exemple typique de bruit. Le bruit est aussi une conséquence de l'imperfection du système de détection.

La seule façon de traiter la détérioration de l'image par du bruit avec des reconstructions basées sur la rétroposition filtrée est d'appliquer des post-traitements de l'image notamment avec l'aide de filtres adaptés.

Un des intérêts majeurs des méthodes algébriques est qu'elles nous permettent de mieux modéliser le processus physique d'émission et donc d'amoindrir le bruit. Il est par ailleurs possible d'introduire un terme de pénalisation dans la fonction à minimiser qui force l'inconnue à converger vers une solution ayant certaines propriétés. C'est ce que propose Allain et al. (2002) dans le cadre de la tomographie à rayons X pour une trajectoire hélicoïdale, dans un cadre de simulation.

### 1.5.2 Artefacts métalliques, artefacts de durcissement de faisceau

Un premier type d'artefacts qui nous intéresse ici sont les artefacts métalliques. Comme nous l'avons déjà signalé précédemment, les photons émis ne sont pas monochromatiques. En effet, ils sont émis selon un spectre, comme nous pouvons le constater dans la figure 1.12. Ce spectre n'est pas uniforme. À chaque niveau d'énergie, un certain nombre de photons sont émis.

Or les coefficients d'atténuation dans la loi de Beer-Lambert dépendent de l'énergie des photons. Ainsi, la loi de Beer-Lambert devrait s'écrire :

$$I = \int_0^{+\infty} I_0(\epsilon) d\epsilon \exp \left( - \int_0^{+L} \mu(x, \epsilon) dx \right) \quad (1.19)$$

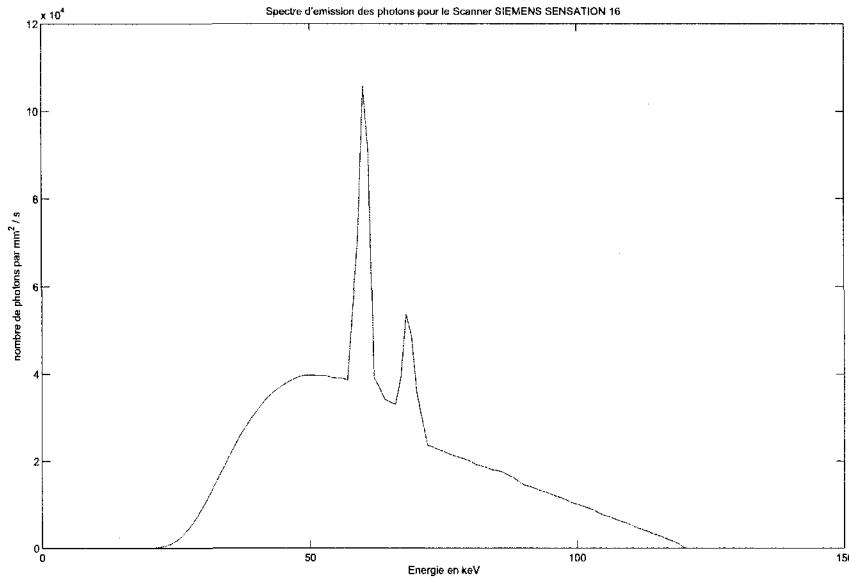


FIGURE 1.12 – Spectre d'émission de la source du scanner SIEMENS SENSATION 16.

Dans cette équation,  $x$  est la variable d'intégration sur le rayon (abscisse linéaire selon le rayon).  $\epsilon$  est un niveau d'énergie.  $I_0(\epsilon)$  est le nombre de photons émis pour une énergie  $\epsilon$  donnée. La quantité  $p = -\log(I)$  n'est plus une transformée linéaire de  $\mu$ . Il ne s'agit plus de la transformée de Radon et la rétroposition est alors basée sur un modèle simplificateur : le modèle monochromatique. Nous retrouvons la loi de Beer-Lambert lorsque nous prenons un unique niveau d'énergie dans l'équation ci-dessus. Or les métaux sont plus atténuateurs que les tissus mous et les différences d'atténuation pour différents niveaux d'énergie affectent plus le sinogramme en présence de métaux. Nous verrons ultérieurement comment prendre en compte le caractère polychromatique de l'émission des photons X dans le cas d'un scanner industriel. Nous pouvons constater ces artefacts, sur la figure 1.13, qui apparaissent sur un tomographe industriel. Ces artefacts apparaissent ici autour de billes d'acier.

Certains auteurs comme Elbakri et al. (2004) ou Menvielle et al. (2005) minimisent des critères dérivant d'un certain modèle statistique qui prend en compte cet aspect

polychromatique de l'émission comme nous l'avons présenté précédemment.

D'autres comme Zhang et al. (2007) tentent de modifier le sinogramme en segmentant les zones métalliques afin de restaurer le sinogramme pour pouvoir utiliser les algorithmes classiques de rétroposition.

**Cependant, aucun auteur n'a implémenté de techniques ART dans un cadre statistique s'appliquant à des données réelles 3D, en mode multi-barrette.**

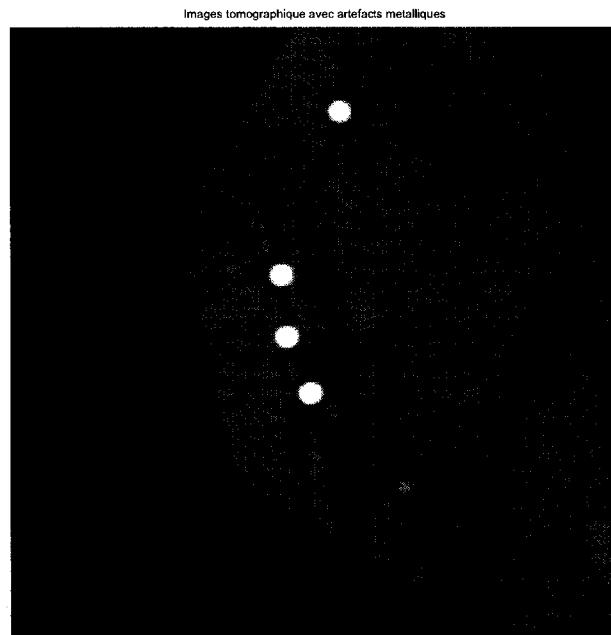


FIGURE 1.13 – Artefacts dus à des billes d'acier.

Plus généralement que les artefacts métalliques, nous pouvons aussi observer des artefacts de durcissement de faisceau. Considérons un rayon X polychromatique. Dans un milieu homogène, les photons de basse énergie sont plus atténusés que les photons de haute énergie. Le spectre des photons détecté par le système de détecteurs n'est plus le même que le spectre d'émission. Plus le matériau traversé est épais plus ce phénomène est important. Les images reconstruites du matériau donnent alors l'impression que le centre de l'objet est plus atténuant, ce qui n'est pas le cas.

Ces artefacts sont une sous-catégorie des précédents, puisqu'il s'agit d'artefacts dus au caractère polychromatique des données et à la monochromatique de la reconstruction.

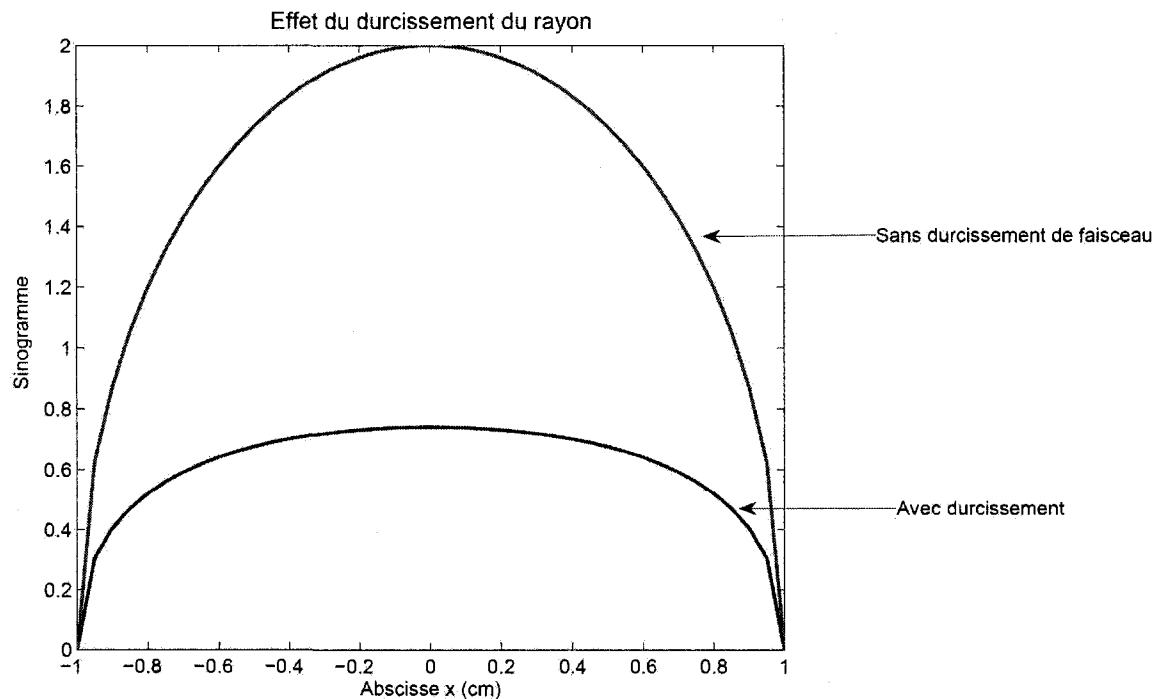


FIGURE 1.14 – Profil d'une boule reconstruite avec artefacts de durcissement.

Dans la figure 1.14, nous avons simulé les contributions (en  $-\log$ ) obtenues sur une barrette de détecteurs (plusieurs détecteurs en abscisse) pour une projection. Le

fantôme est une boule homogène. L'une des deux courbes prend en compte le caractère polychromatique des photons tandis que l'autre ne le fait pas.

### 1.5.3 Artefacts hélicoïdaux : « wind-mill »

Certains algorithmes peuvent faire apparaître des artefacts propres au mode hélicoïdal. Cet artefact est dû à la géométrie en hélice de la trajectoire. Les méthodes faisant intervenir des interpolations font apparaître de tels artefacts spécifiques. Stierstorfer et al. (2004) proposent une FBP pondérée qui atténue ces artefacts spécifiques au cas hélicoïdal.

Nous verrons que les techniques algébriques employées réduisent ces artefacts puisqu'elles tiennent mieux compte de la géométrie exacte du problème.

## 1.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons montré pourquoi la tomographie à rayons X était une technique adaptée au suivi de patients portant des stents métalliques dans le système vasculaire périphérique. C'est en effet une technique non invasive (au sens strict du terme) et offrant une résolution suffisante. Cependant, pour réduire les temps d'acquisition et les doses reçues par le patient, les évolutions récentes de la tomographie à rayons X ont fait augmenter la taille du problème puisque l'acquisition hélicoïdale rend complexe une décomposition du problème en une série de plus petits sous-problèmes (comme ce qui peut se faire en tomographie axiale). De plus, la présence de stents métalliques engendre des artefacts métalliques dus à des reconstructions non adaptées.

Les méthodes usuelles de réduction des artefacts métalliques par des techniques analytiques ne sont pas pleinement satisfaisantes. En effet, elles effectuent généralement des post-traitements d'images sans remettre en cause le modèle physique qui est la source du problème. Il est donc nécessaire de modifier le modèle physique de formation des données et de se placer dans un cadre de reconstruction algébrique. Ceci, comme nous le verrons au chapitre suivant, pose des problèmes liés à la taille du problème et au temps de traitement des données.

## CHAPITRE 2

### MODÉLISATION DU PROBLÈME DIRECT

#### 2.1 Introduction

Jusqu'à présent, nous avons défini la tomographie à rayons X et les principes de la reconstruction tomographique. Nous avons défini ce que sont les techniques analytiques - méthodes usuelles employées par les scanners industriels - et les techniques algébriques - celles utilisées dans le cadre de nos travaux. Nous avons choisi dans le cadre de notre projet les techniques algébriques qui nous permettent d'affiner le modèle de formation des données. Ceci n'est pas possible pour la technique de rétroprojection filtrée (reconstruction analytique) qui est la méthode utilisée par les scanners industriels.

Après la présentation de l'état de l'art du chapitre 2, l'objet de ce chapitre est de décrire le modèle de formation des données que nous avons utilisé. Dans un premier temps, nous préciserons les modèles physiques de formation des données que nous avons utilisés ainsi que le critère à minimiser qui découle de ce modèle physique.

Ensuite, nous proposerons une méthode innovante pour prendre en compte l'épaisseur des rayons afin de rendre plus adéquate la modélisation de la génération des données. La prise en compte de l'épaisseur des rayons a aussi été explorée par Chouzenoux (2007) dans le cadre d'un stage au Laboratoire d'imagerie par optimisation numérique de l'Institut de génie biomédical de l'École Polytechnique de Montréal où ont été entrepris nos travaux de maîtrise.

Puis, nous présenterons notre paramétrisation géométrique du problème. Cette géométrie est complexe puisque nous proposons de prendre en compte : la trajectoire hélicoïdale, les sources volantes angulaires et axiales, et le caractère tridimensionnel du système de détecteurs.

Enfin, dans une dernière partie, nous proposerons une structure de données innovante adaptée à la taille importante des données à traiter. Cette structure innovante que nous

avons implémentée en langage C nous a permis de reconstruire des données réelles et nous permet de surmonter plusieurs difficultés :

- **Géométrie 3D complexe et abstraite. La paramétrisation du problème est une difficulté en soi.**
- **Volume des données très important. C'est pour cela que nous avons développé une structure plus légère qu'une matrice creuse.**

## 2.2 Modèle de formation des données

### 2.2.1 Formation des données pour une seule mesure

Nous nous sommes placé dans un cadre déterministe et monochromatique. De plus le rayon est infiniment fin. Nous expliquerons à la section suivante comment prendre en compte l'épaisseur du faisceau.

Lorsque nous nous basons sur l'hypothèse de déterminisme, cela signifie que nous supposons que le nombre de photons est suffisamment élevé. En notant  $\lambda$  le paramètre d'une loi de Poisson, le rapport moyenne sur écart-type vaut  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ . Quand  $\lambda$  est très grand, ce qui est généralement le cas en tomographie à rayons X, l'hypothèse déterministe est très réaliste. Dans un cadre clinique, ce rapport est de moins de 1 %.

#### 2.2.1.1 Approximations monochromatique

De plus, nous supposons aussi que les coefficients d'atténuation ne dépendent pas de l'énergie des photons. Il s'agit d'une approximation adéquate en premier abord puisque les tissus imagés sont généralement des tissus mous qui génèrent peu de durcissement de faisceau. Ces tissus mous représentent plus de 80 % de la masse de tissus imagés. Dans ce cadre d'approximations, le modèle de formation des données pour une seule mesure est obtenu grâce à la loi de Beer-Lambert donnée en 1.3 :

$$\frac{N}{N_0} = \exp\left(- \int_0^L \mu(x(l), y(l), z(l)) \cdot dl\right) \quad (2.1)$$

Nous rappelons que  $l$  est l'abscisse curviligne du rayon X qui va de l'abscisse curviligne 0 à  $L$ .

### 2.2.2 Système à résoudre

En tomographie, nous avons plusieurs mesures de la forme 2.1, pour différentes positions de la source et des détecteurs. Ce sont les fonctions  $x : l \mapsto x(l)$ ,  $y : l \mapsto y(l)$  et  $z : l \mapsto z(l)$  qui varient d'une mesure à l'autre. Nous obtenons ainsi un système d'équations fonctionnelles.

Cependant, seule une partie du travail est alors faite. Il faut ensuite discréteriser le système. Puisque nous n'avons qu'un nombre discret de mesures, nous ne pourrons avoir qu'un nombre discret d'échantillons de la fonction  $\mu$ . Il est donc nécessaire de discréteriser la fonction  $\mu$  pour inverser le système et pour discréteriser l'intégrale de l'équation ci-dessus.

Le modèle direct discréterisé devient alors :

$$\mathbf{p} = A \cdot \mu \quad (2.2)$$

Avec  $\mathbf{p} = -\log(\mathbf{y})$  où  $\mathbf{y}$  sont les données mesurées par le tomographe.  $\log$  est ici la fonction logarithme prise terme à terme.  $\mathbf{p}$  est le sinogramme de l'acquisition. **A** est la matrice de projection qui est une discréterisation du système d'équations intégrales mentionnés ci-dessus.

### 2.2.3 Critère choisi

Une fois le modèle de formation des données explicité, il faut choisir un critère qui est une mesure nous indiquant la distance de la solution projetée aux mesures. La méthode algébrique que nous utilisons consiste à minimiser un critère qui nous fournit une estimation de la distribution spatiale des coefficients d'atténuation. Nous utilisons le critère des moindres carrés qui n'est rien d'autre qu'une distance euclidienne, superposée à un terme de régularisation.

$$\mu \mapsto f(\mu) = 1/2 \|A\mu - \hat{\mathbf{p}}\|^2 + \Psi$$

## 2.3 Modélisation de l'épaisseur du faisceau

L'objet de cette section est de présenter une technique permettant de prendre en compte cet aspect de la modélisation. Dans un premier temps, nous généraliserons la relation de Beer-Lambert afin qu'elle prenne en compte l'épaisseur du rayon. Afin d'obtenir des équations linéaires nous verrons dans un deuxième temps qu'il est nécessaire de faire une approximation qui suppose que le rayon est épais avec une faible épaisseur relativement aux autres dimensions du problème. Dans un troisième temps, nous proposerons une discrétisation de l'espace adaptée à cette approximation.

### 2.3.1 Position du problème

Jusqu'à maintenant, nous avions considéré que le rayon était infiniment fin. Ceci est physiquement impossible, car la source ne peut pas être parfaitement ponctuelle et les détecteurs ont une certaine épaisseur. Dans ce paragraphe, nous voulons adapter la loi de Beer-Lambert en considérant l'épaisseur du rayon. Nous nous plaçons dans le cadre 2D et nous modélisons le faisceau par un rectangle (en 3D, ce serait cylindre) dont nous pouvons trouver les paramètres sur la figure 2.1. Nous voulons préciser le modèle direct de formation des données correspondant à une seule mesure.

Comme dans le reste de ce chapitre, nous nous plaçons dans le cadre de deux hypothèses approximatives :

- **L'émission des photons est déterministe : H<sub>2</sub>**, ce qui équivaut à considérer que le nombre de photons est très élevé.
- **Les photons émis sont monochromatiques : H<sub>3</sub>**, ils ont la même énergie.

Pour un même souci de notations, nous supposons que l'axe  $x$  se confond avec la direction du rayon. Rappelons que, dans ce contexte, pour un rayon infiniment mince,

$$N = N_0 \exp\left(- \int_0^L \mu(x, y) dx\right)$$

$N$  étant le nombre de photons mesurés et  $N_0$  le nombre de photons émis. Le cylindre de diamètre  $c$  peut se décomposer en une infinité de rayons infiniment minces qui sont identiques. Soit  $\delta N$  l'intensité du rayonnement pour un rayon d'épaisseur infinitésimale.

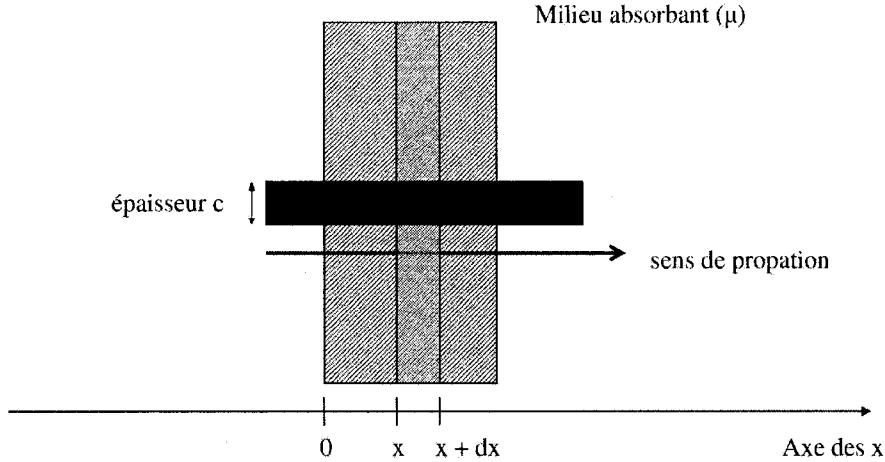


FIGURE 2.1 – Atténuation d'un faisceau épais.

Pour ce rayon, la loi de Beer-Lambert est applicable :

$$\delta N = \delta N_0 \exp\left(-\int_0^L \mu(x, y) dx\right)$$

Pour obtenir l'intensité totale, il suffit de sommer sur tous les rayons infinitésimaux :

$$N = \int_{-c/2}^{c/2} \delta N_0 \exp\left(-\int_0^L \mu(x, y) dx\right) dy$$

En supposant que tous les rayons sont émis avec la même intensité, nous avons :

$$N = \frac{N_0}{c} \int_{-c/2}^{c/2} \exp\left(-\int_0^L \mu(x, y) dx\right) dy \quad (2.3)$$

Comme nous pouvons le constater, nous avons une intégrale à l'extérieur de l'exponentielle. Or :

$$\int \exp\left(-\int \mu(x, y) dx\right) dy \neq \exp\left(-\int \int \mu(x, y) dx dy\right)$$

Auparavant, nous prenions l'opposé du logarithme de  $N$ ,  $p = -\log(N)$  pour obtenir l'équation linéaire :

$$p = \int \mu(x)dx$$

ce qui correspondait à une transformée intégrale (donc linéaire). En effet, nous n'avons pas pour l'expression ci-dessus une simplification de la formule puisque :

$$-\log(N) = -\log(N_0 \int \exp(-\int \mu(x, y)dx)dy) = -\log(N_0) - \log(\int \exp(-\int \mu(x, y)dx)dy)$$

### **Le problème a perdu en linéarité.**

En effet, si nous tentons de discréteriser le problème avec des pixels standards, nous obtenons :

$$p = -\log\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\log\left(\sum_j \frac{\exp(-\sum_i \frac{l_i \mu_{ij}}{N})}{N}\right)$$

Comme nous ne pouvons pas insérer la somme à l'intérieur de l'exponentielle, le problème ne peut pas être linéarisé sans faire d'approximation.

## **2.3.2 Linéarisation et discréétisation du problème**

Dans un premier temps, nous tentons de linéariser le modèle de formation des données. Ensuite, nous proposons une discréétisation adaptée.

### **2.3.2.1 Approximation d'ordre 1**

L'objet de ce paragraphe est de trouver une approximation linéaire du modèle de formation des données pour une seule mesure. Au paragraphe suivant, nous discréterisons le modèle direct approximatif pour en déduire un système d'équations linéaires.

$$I(c) = \int_{-c/2}^{c/2} \delta N_0 \exp(-\int \mu(x, y)dx)dy \quad (2.4)$$

$$I(c) = \int_0^{c/2} \delta N - \int_0^{-c/2} \delta N$$

On note :

$$I^*(c) = \int_0^{c/2} \delta N_0 \exp(-\int \mu(x, y)dx)dy$$

Ainsi :

$$I^{*\prime}(0) = 1/2 \exp(-\int \mu(x, 0) dx)$$

Avec ces notations :

$$I(c) = I^*(c/2) - I^*(-c/2)$$

Nous avons :  $c \ll R_d$  où  $R_d$  est la distance entre un détecteur et la source. Donc nous pouvons faire un développement limité :

$$I^*(c) = I^*(0) + cI^{*\prime}(0) + c^2/2I^{*\prime\prime}(0) + o(c^2)$$

Pour  $I(c)$  les termes d'ordre 2 s'annulent :

$$I(c) = 2cI^{*\prime}(0) + o(c^2)$$

À l'ordre 1 :

$$-\log(I(c)/c) = \int \mu(x, 0) dx + o(c)$$

Nous n'avons pas de terme d'ordre 1 en  $c$  pour un développement limité d'ordre 1 dans cette équation. La meilleure approximation linéaire est donc celle de la loi de Beer-Lambert.

### 2.3.2.2 Approximation d'ordre 2

Afin de gagner encore en précision Chouzenoux (2007) a poursuivi le développement limité effectué ci-dessus à l'ordre 2.

Ce développement fait perdre la linéarité du problème ce qui augmente le temps de traitement des données. Il fait notamment apparaître un terme du type  $[\int \frac{\partial \mu}{\partial y}]^2$ . Les travaux d'Émilie CHOUZENOUX montrent que ce terme d'ordre 2 n'a que très peu d'influence dans le cadre de la tomographie à rayons X en milieu clinique.

### 2.3.2.3 Discréétisation proposée

Nous voulons faire en sorte que les contributions des pixels prennent en compte l'épaisseur du faisceau. En effet, les voxels ne sont qu'une discréétisation standard parmi d'autres. Il s'agit d'une discréétisation de l'espace qui permet d'échantillonner la fonction

$\mu(x, y)$  des coefficients d'atténuation. Par souci de clarté, supposons que nous sommes en 2D. Une telle discrétisation s'écrit :

$$\mu(x, y) = \sum_i \sum_j b(x - x_i, y - y_j) \mu_{ij} \quad (2.5)$$

$b$  est une base de discrétisation. Les pixels standards correspondent à des fonctions en escalier :

$b(x - x_i, y - y_j) = 1$  si  $x_i - a/2 < x < x_i + a/2$  et si  
 $y_j - a/2 < y < y_j + a/2$  ou  
 $b(x - x_i, y - y_j) = 0$  sinon.

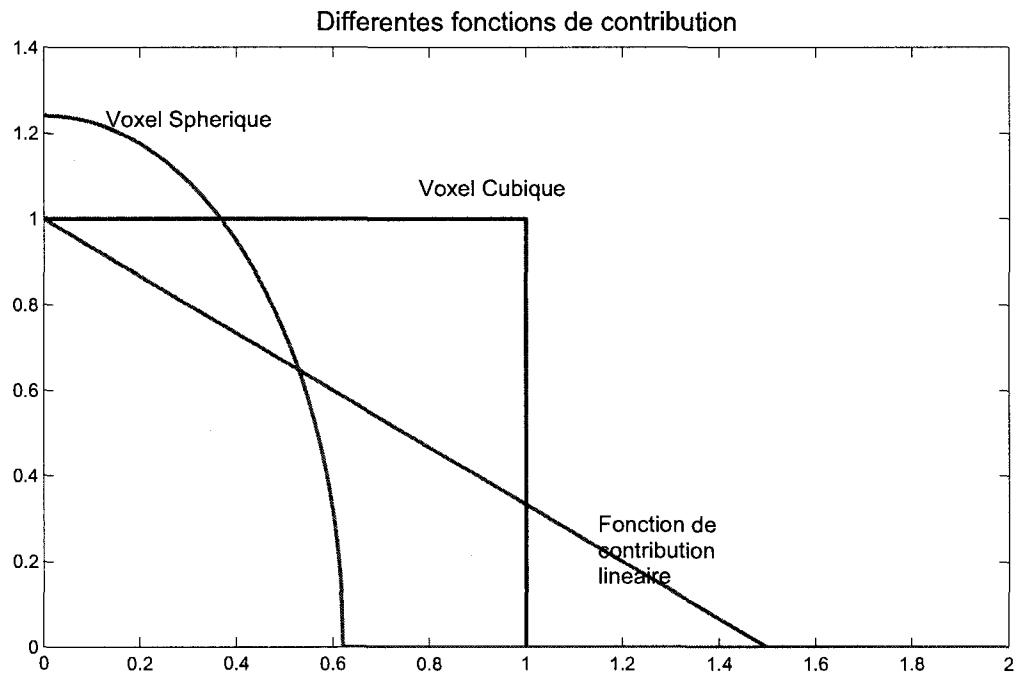


FIGURE 2.2 – Fonctions de contribution.

D'autres auteurs, comme Matej et Lewitt (1996) ont proposé des bases non standards. Ils proposent une base à symétrie radiale. D'autres auteurs proposent des pixels encore

plus atypiques : c'est le cas de Carvalho et Herman (2007) qui proposent des pixels de forme de lobe de Bessel.

Notons  $\vec{r}_{ij} = (x_i, y_j)$  un vecteur position du centre d'un pixel  $(i, j)$ . Nous nous sommes intéressés dans le cadre de nos travaux à des pixels à symétrie circulaire (sphérique en 3D), tels que

$$b(\vec{r} - \vec{r}_{ij}) = f(\|\vec{r} - \vec{r}_{ij}\|)$$

si  $\|\vec{r} - \vec{r}_{ij}\| \leq a$  et 0 sinon.

Donc nous avons :

$$\mu(x, y) = \sum_{ij} f(\|\vec{r} - \vec{r}_{ij}\|) \mu_{ij}$$

En insérant cette expression dans l'équation de Beer-Lambert, nous obtenons une équation discrétisée de la forme :

$$\int_0^L \mu(x(l), y(l)) dl = \sum_{ij} w_{ij} \mu_{ij}$$

avec  $w_{ij} = \int_0^L [f(\|\vec{r}(l) - \vec{r}_{ij}\|)] dl$ .

Or le problème est à symétrie radiale donc il existe une fonction  $F$  telle que

$$F(d_{ij}) = \int_0^L [f(\|\vec{r} - \vec{r}_{ij}\|)] dl$$

$d_{ij}$  est la distance entre le centre  $\vec{r}_{ij}$  du voxel et le rayon X qui est au centre du faisceau cylindrique. Pour avoir un terme linéaire, nous proposons tout d'abord de choisir une fonction affine pour  $F$ . Cette fonction affine est définie par :

$$F(x) = K(1 - x/(c/2 + a))$$

La deuxième fonction utilisée est  $F(d_{ij}) = s_{ij}$  où  $s_{ij}$  est la surface d'intersection (pour le cas 2D) du faisceau cylindrique et du pixel circulaire.

### 2.3.3 Compromis nécessaire

Tout comme le cas polychromatique, l'épaisseur du rayon induit un problème non linéaire. Vu que l'épaisseur des rayons est très faible en pratique, nous nous contenterons de

linéariser le problème et de proposer une approximation qui est en théorie meilleure que l'approximation du rayon infiniment fin. Les voxels traversés par le faisceau de rayons épais contribuent à l'atténuation. Cette fonction de contribution dépend de la distance du centre du voxel (parallépipédique ou sphérique) au centre du faisceau. Ainsi, l'épaisseur du faisceau est prise en compte.

Si l'espace mémoire était illimité et que la vitesse de calcul importait peu, nous aurions décomposé le faisceau de rayons en  $K$  rayons infiniment minces. Le modèle direct serait devenu :

$$I = I_0^{(k)} \sum_k \exp(-A_k \mu) \quad (2.6)$$

Remarquons que ce modèle direct a la même structure non linéaire que le modèle direct polychromatique. Les  $k$  matrices de projection  $A_k$  sont les matrices de projection pour les  $k$  rayons infiniment fins composant le rayon épais dont  $I$  est l'intensité détectée.

### 2.3.3.1 Autre approche

Une autre approche, comme celle de Chouzenoux (2007) consiste à conserver les termes d'ordre 2 et à utiliser une base de voxels plus complexe que celles présentées. Nous n'avons utilisé dans nos modèles directs que des bases à symétries sphériques. L'auteur a, quant à elle, exploré les bases dites **séparables**.

Rappelons la décomposition de l'image en une base 2D :

$$\mu(x, y) = \sum_i \sum_j b(x - x_i, y - y_j) \mu_{ij}$$

Des bases séparables sont telles que :

$$b(x - x_i, y - y_j) = b_1(x - x_i) b_2(y - y_j)$$

L'auteur a notamment choisi des bases gaussiennes telles que  $b_1 = b_2$ . Mais elle conclut que ce choix de base n'influe pas vraiment sur la qualité finale des images dans le cadre clinique qui nous intéresse.

## 2.4 Paramétrisation géométrique du problème

À présent, nous avons deux modèles de formation des données discrétisés qui nous intéressent. L'un prend en compte l'épaisseur des rayons et l'autre suppose que les rayons sont infiniment fins. Les deux modèles considèrent que l'émission des photons est déterministe et que les tissus ont des coefficients d'atténuation qui ne dépendent pas de l'énergie des photons.

Une fois que ces deux modèles sont discrétisés, un système d'équation apparaît et nous faisons apparaître une **matrice de projection**.

L'objectif principal de cette section sera de présenter la paramétrisation géométrique du problème qui nous permet de calculer les éléments de la matrice de projection.

### 2.4.1 Matrice de projection 2D

L'objet de ce paragraphe est d'expliquer comment la matrice de projection  $A$  introduite précédemment. En 2D, nous avons la géométrie représentée par la figure 2.3.

Introduisons quelques notations :

- $N_d$  : le nombre de détecteurs sur une barrette.
- $N_\phi$  : le nombre de projections (nombre de positions différentes de la source S sur un cercle pour le cas 2D).
- $N$  : le nombre de pixels. L'espace est discrétisé selon une grille homogène de pas  $a$  qui est le même selon l'axe  $x$  et selon l'axe  $y$ .

Nous rappelons que la valeur du sinogramme correspondant à la détection  $k$  est donnée par :

$$p_k = \sum_{(i,j) \in C} w_{ij} \cdot \mu_{ij} \quad (2.7)$$

où  $C$  est l'ensemble des pixels de l'espace.

$w_{ij}$  est la contribution du pixel  $(i, j)$  au rayon. Il peut s'agir de  $l_{ij}$  qui est la longueur de l'intersection du pixel  $(i, j)$  avec le rayon  $k$  pour un rayon fin ou une autre fonction comme nous l'avons vu dans la section précédente lorsqu'il s'agit d'un rayon épais. Avec ces notations :

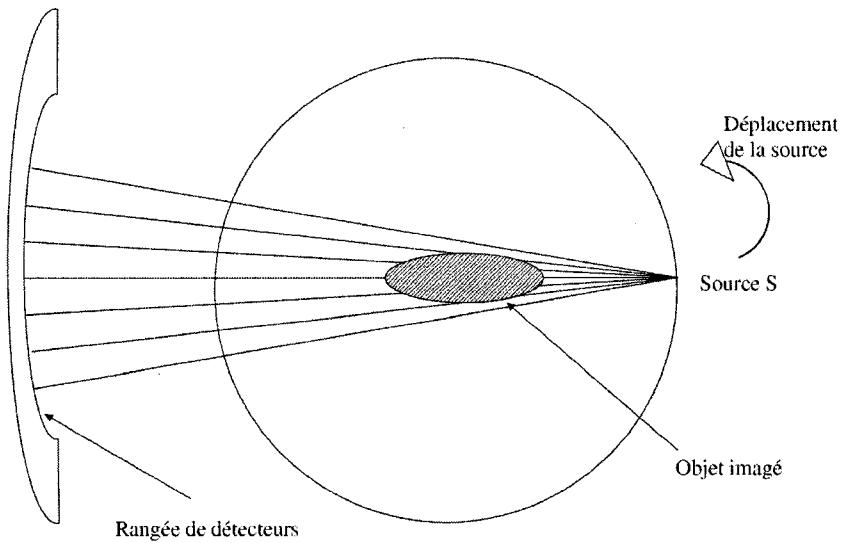


FIGURE 2.3 – Scan avec rayons en éventail.

$$k \in [1, N_\phi N_d].$$

On synthétise ces équations correspondant à différentes mesures dans une seule équation de dimension supérieure :

$$\mathbf{p} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\mu}$$

La matrice de projection  $\mathbf{A}$  est de taille  $(N_\phi N_d, N^2)$ . Les lignes de la matrice correspondent à un rayon et chaque élément sur cette ligne est la valeur de la longueur de l'intersection du voxel et du rayon : ce sont les  $l_{ij}$  de l'équation précédente. L'objet du paragraphe suivant est d'indiquer comment il est possible de calculer les éléments de cette matrice de projection.

#### 2.4.2 Cas 2D : rayons en éventail

Les étapes de mesures en tomographie 2D sont les suivantes :

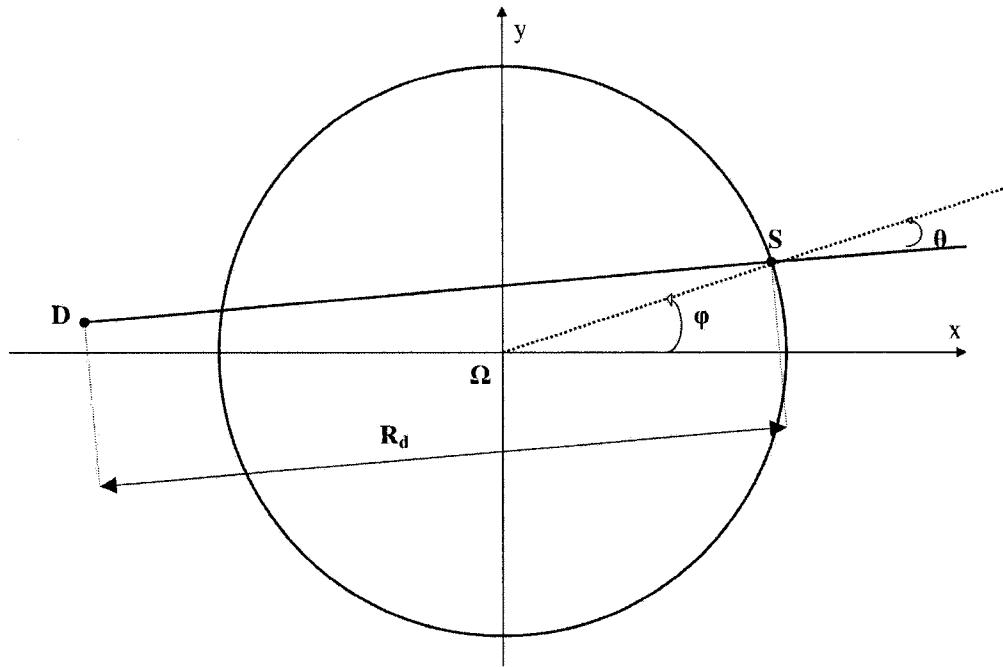


FIGURE 2.4 – Géométrie de la projection en 2D.

1. Pour une certaine position, la source émet un faisceau en éventail qui se propage dans le milieu pour ensuite être mesuré par les détecteurs de chaque barrette (1 barrette en 2D)
2. Ensuite, la source se déplace sur sa trajectoire circulaire, en incrémentant l'angle de rotation.

Toutes ces mesures fournissent ce qu'on appelle les données.

Nous souhaitons calculer les contributions des pixels pour une mesure correspondant à une valeur du vecteur des données. Considérons un rayon infiniment mince comme c'est le cas dans la figure 2.4. Dans le cas 2D (mais aussi dans le cas cone-beam circulaire), la source  $S$  tourne autour de  $\Omega$ . Nous pouvons donc repérer  $S$  par l'angle  $\phi$  de rotation, que nous appellerons **angle de projection**. Nous introduisons les notations suivantes, nécessaires pour le développement de cette section.

1.  $R_d = SD$  : les détecteurs sont sur un cercle de centre  $S$  et de rayon  $R_d$ .  $D$  désigne

un détecteur.

$$\theta = \widehat{\vec{DS}, \vec{\Omega S}}$$

qui est l'angle qui permet de repérer un détecteur sur le cercle de centre  $S$  et de rayon  $R_d$ .

2.  $R_f = \Omega S$  : rayon du cercle sur lequel se déplace la source de rayons X.

Remarquons que le rayon  $(SD)$  est totalement déterminé par la donnée  $(\phi, \theta)$ .

Afin de calculer les intersections des pixels, nous utilisons une équation paramétrée du rayon  $(SD)$ .

$$M \in (SD) \iff \exists t | \vec{OM} = \vec{OS} + t \cdot \vec{SD}/SD$$

Pour cela, il faut calculer les coordonnées du vecteur directeur  $\vec{u} = \vec{SD}/SD$  et celles de  $S$ .

$$u_x = \cos(\phi - \theta)$$

$$u_y = \sin(\phi - \theta)$$

$$s_x = R_f \cdot \cos(\phi)$$

$$s_y = R_f \cdot \sin(\phi)$$

### 2.4.3 Cas 3D en hélicoïdal

En 3D hélicoïdal, les équations ainsi que la paramétrisation ne sont si pas différentes.

Il faut cependant ajouter la cote  $z$  aux autres coordonnées.

Le processus de détection et d'émission est similaire :

1. Pour une certaine position, la source émet un faisceau en cône qui se propage dans le milieu pour ensuite être mesuré par les détecteurs de chaque barrette (16 barrettes en 3D pour nos données réelles)
2. Ensuite, la source se déplace sur sa trajectoire circulaire, en incrémentant l'angle de rotation. Comme la trajectoire de la source (dans le référentiel du patient) est une hélice, cette incrémentation déplace la source sur l'hélice.

Nous avons  $N_b$  barrettes de détecteurs. Désignons par  $n \in [1, N_b]$  une barrette. Chaque barrette contient  $N_d$  détecteurs.

De même qu'en 2D, en 3D, la matrice de projection est constituée des longueurs d'intersections des voxels parallélépipédiques avec chaque rayon ( $SD$ ) (ou d'une autre fonction de contribution, ce qui ne change pas le raisonnement ci-après). Il suffit de connaître les coordonnées de  $S$  et du coefficient directeur  $\vec{u}$  de la droite ( $SD$ ) pour pouvoir calculer ces longueurs d'intersection comme pour le cas 2D.

$$u'_x = R_d \cos(\phi - \theta)$$

$$u'_y = R_d \sin(\phi - \theta)$$

$u'_z = (n - N_b/2)\Delta z$  où  $\Delta z$  est l'épaisseur d'une barrette.

$\vec{u} = \vec{u}' / \|u'\|$  pour normer le vecteur.

$$s_x = R_f \cdot \cos(\phi)$$

$$s_y = R_f \cdot \sin(\phi)$$

$s_z = h\phi/(2\pi)$  où  $h$  est le pas de l'hélice (distance que parcourt la source selon l'axe de rotation du système).

Le cas cone-beam circulaire n'est qu'un cas particulier pour lequel  $h = 0$ .

Il suffit ensuite de calculer itérativement les coordonnées des intersections entre chaque côté de chaque voxel et de chaque rayon. À partir de ces intersections, nous calculons les longueurs d'intersection. Cette méthode est simple en théorie, mais sa mise en œuvre telle quelle est impossible. La taille des données est telle que les produits matriciels seraient trop lourds en mémoire. Nous exposerons ultérieurement notre méthodologie nous permettant de gérer des données aussi volumineuses.

La matrice  $A$  contenant tous les éléments de contribution des pixels est de taille :  $(N_b N_\phi N_d, N^2 N_z)$ ,  $N_z$  étant le nombre de couches de l'ensemble de voxels considérés. Nous proposerons plus loin dans le chapitre une structure de données permettant de stocker efficacement ces données du modèle direct.

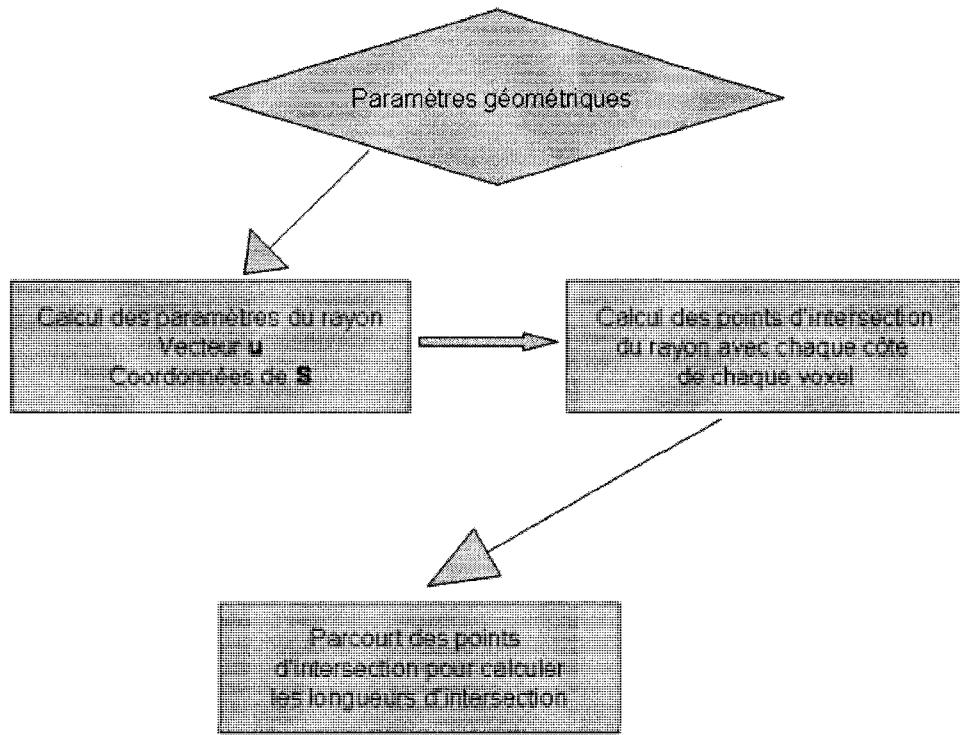


FIGURE 2.5 – Schéma de calcul des éléments de la matrice de projection.

#### 2.4.4 Source volante

Afin de gagner en densité d'échantillonnage, les scanners de SIEMENS comportent maintenant un dispositif de source volante.

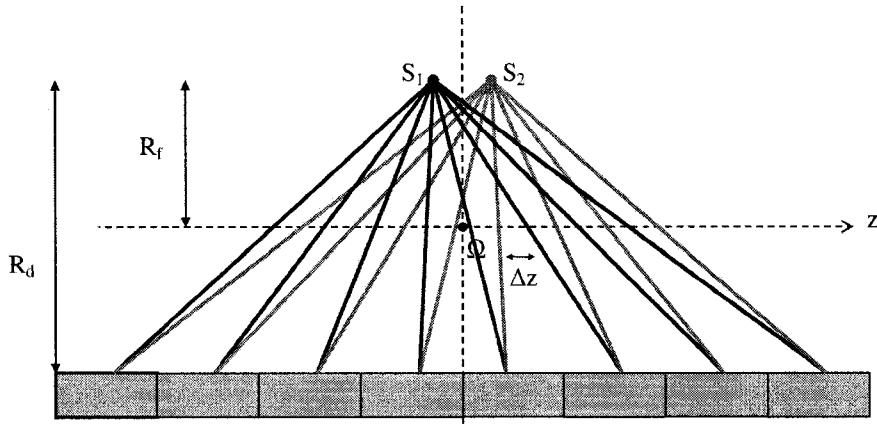
Il y a deux types de sources volantes :

- Source volante axiale (Flying Focal Spot en  $z$ ). On dévie la source selon l'axe  $z$ .
- Source volante angulaire (Flying Focal Spot en  $\alpha$ ). On dévie la source selon la tangente à la trajectoire circulaire.

Kachelriess et al. (2006) exposent le principe de cette innovation technologique dont nous mentionnerons les résultats les plus importants dans le paragraphe suivant.

#### 2.4.4.1 Source volante axiale (FFS en $z$ )

Avec FFS en z



Sans FFS en z

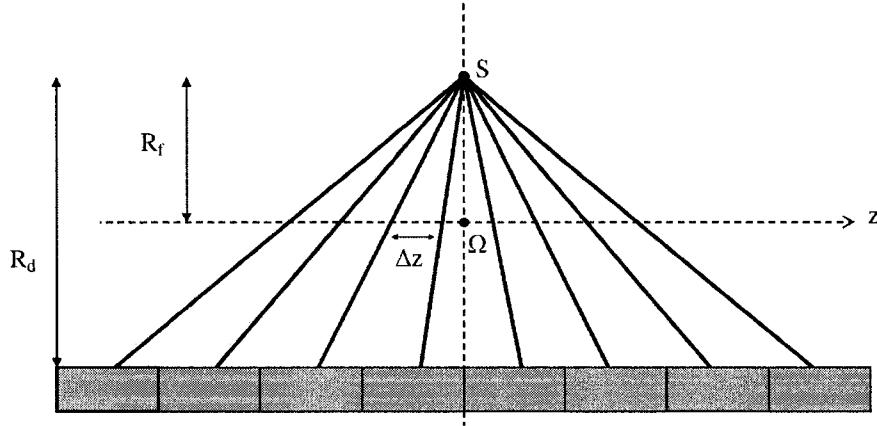


FIGURE 2.6 – Schéma de FFS en  $z$ .

Nous nous référons pour les notations à la figure 2.6. Sans FFS, pour chaque angle de projection  $\phi$ , la source émet un faisceau de photons X qui est conique et a une seule position explicitée précédemment. Avec du FFS en  $z$ , pour chaque angle de projection  $\phi$ , il y a deux positions d'émission. En notant  $\Delta b$  la largeur d'un détecteur, la fréquence d'échantillonnage dans le plan contenant le centre de rotation du système et qui est parallèle à l'axe  $z$  peut être augmentée. En effet, Kachelriess et al. (2006) démontrent

que cette période d'échantillonnage spatiale est réduite et vaut

$$\Delta z = 1/2\Delta b R_f / (R_d - R_f)$$

au lieu de valoir :

$$\Delta z = \Delta b R_f / (R_d - R_f)$$

pour le cas sans FFS en  $z$ . Ces valeurs ne sont de bonnes approximations que proche du centre  $\Omega$ .

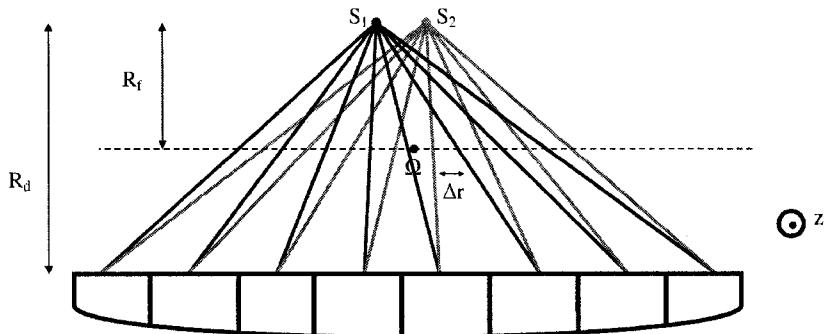
La période d'échantillonnage est réduite si les deux points d'émission  $S_1$  et  $S_2$  sont distants de

$$S_1 S_2 = 1/4\Delta b R_f / (R_d - R_f)$$

ce qui est le cas pour les scanners de SIEMENS lorsqu'il y a du FFS en  $z$ . Il suffit de dévier parallèlement la source qui émet les rayons X.

#### 2.4.4.2 Source volante angulaire (FFS en $\alpha$ )

##### Avec FFS en $\alpha$



##### Sans FFS en $\alpha$

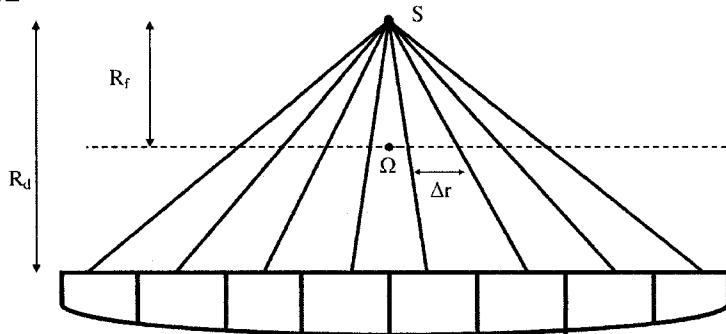


FIGURE 2.7 – Schéma de FFS en  $\alpha$ .

Tout comme le FFS en  $z$ , il y a un FFS angulaire qui permet d'augmenter la densité d'échantillonnage sans augmenter le nombre de détecteurs. Ceci est effectué en déviant la source tangentielle au cercle de centre  $\Omega$ , de rayon  $R_f$  et contenant le point  $S$ . Comme nous pouvons le constater sur la figure 2.7, la fréquence d'échantillonnage est doublée (comme dans le cas de FFS en  $z$ ). Pour réaliser cette innovation technologique, la déviation est telle que :

$$S_1 S_2 = 1/2 \Delta\theta R_d R_f / (R_d - R_f)$$

#### 2.4.4.3 Modification du modèle

La source volante améliore la résolution spatiale grâce à une astuce technologique qui consiste à dévier la source dans deux directions : la direction axiale et la direction tangentielle. Pour ajuster notre modèle géométrique élaboré au paragraphe précédent, il suffit de remplacer les coordonnées de  $S$  successivement par celles de  $S_1$  et de  $S_2$  dans toutes les équations développées précédemment. Le nombre de rayons et donc des données est multiplié d'un facteur 2 (s'il y a un seul FFS) ou d'un facteur 4 (s'il y a les deux FFS). Le volume des données étant plus important, il est encore plus crucial d'avoir une structure de données adaptée.

Donnons les équations qui correspondent à ce décalage. Il suffit en effet de modifier les coordonnées de  $S$  et celles de  $\vec{u}$  en conséquence.

Pour le FFS en  $z$  :

$$s_z^{(1)} = s_z - S_1 S_2 / 2$$

$$s_z^{(2)} = s_z + S_1 S_2 / 2$$

De même pour le FFS angulaire :

$$s_x^{(2)} = s_x - S_1 S_2 / 2 \sin(\Phi)$$

$$s_y^{(2)} = s_y + S_1 S_2 / 2 \cos(\Phi)$$

$$s_x^{(1)} = s_x + S_1 S_2 / 2 \sin(\Phi)$$

$$s_y^{(1)} = s_y - S_1 S_2 / 2 \cos(\Phi)$$

où  $S_1 S_2$  désigne la longueur entre les deux points sources et les  $s_i$  sont les coordonnées de  $S$  sans FFS.

Les  $s_i^{(1)}$  et  $s_i^{(2)}$  sont les coordonnées respectives de  $S_1$  et de  $S_2$ .

### 2.4.5 Décalage des détecteurs

Dans les scanners de SIEMENS, les détecteurs d'une barrette ne sont pas placés symétriquement par rapport à ( $\Omega S$ ). Nous illustrons ce décalage dans la figure 2.8. Ce décalage est un décalage angulaire d'un quart de détecteur. Sans ce décalage, le système de détecteurs est symétrique par rapport à l'axe ( $\Omega S$ ). Si ce décalage n'est pas pris en compte, un artefact apparaît. Cet artefact est un flou homogène qui se propage sur toute l'image.

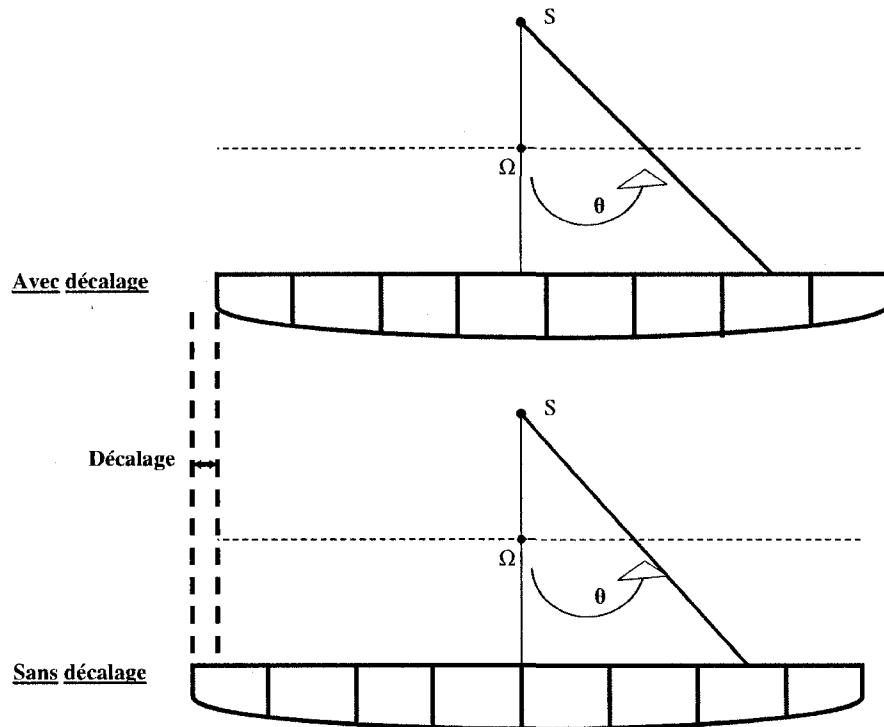


FIGURE 2.8 – Schéma illustrant le décalage des détecteurs.

Pour implémenter ce décalage, il suffit de calculer les valeurs des angles  $\theta$  qui sont introduites dans les équations du paragraphe précédent. Les angles  $\theta$  discrétisés sont

donnés par l'équation :

$$\theta_k = -\theta_{max}/2 + k\Delta\theta + \Delta\theta/4$$

avec  $k \in [|0, N_d - 1|]$

au lieu de :

$$\theta_k = -\theta_{max}/2 + k\Delta\theta$$

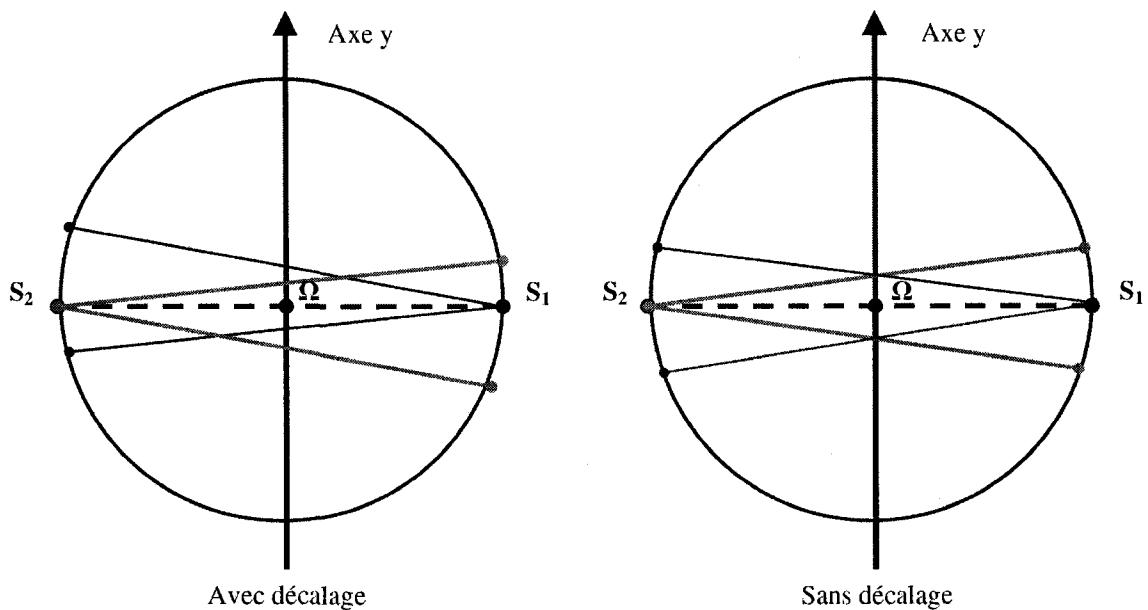


FIGURE 2.9 – Schéma illustrant l'impact du décalage de détecteurs.

Comme nous pouvons le constater sur la figure 2.9, lorsqu'il y a un décalage de détecteurs plus de points sont échantillonnés sur l'axe  $y$ . Nous constatons même un doublement de l'échantillonnage sur l'axe  $y$ .

## 2.5 Structure de données adaptée pour la mise en œuvre

Pour chaque rayon émis par la source, nous sommes maintenant capable de calculer les contributions de chaque pixel pour un rayon donné. Dans cette section, nous proposerons une structure permettant de stocker les informations relatives aux contributions de chaque pixel pour chaque rayon.

### 2.5.1 Difficultés du problème

Comme nous l'avons souligné précédemment, la taille des données de ce problème numérique est telle qu'une matrice pleine formée de plusieurs vecteurs pleins ou d'une matrice creuse (sparse) ne peuvent être utilisées lors de la résolution d'un problème d'inversion réel. Nous sommes limité par la mémoire vive puisque nous nous efforçons d'utiliser des ordinateurs de bureaux (PC) ayant une mémoire vive de 8 gigaoctets pour effectuer nos calculs. Il ne s'agit pas d'un supercalculateur mais bien d'un ordinateur de bureau.

### 2.5.2 Méthode proposée

Nous proposons ici d'expliciter la structure des données utilisées.

#### 2.5.2.1 Démarche générale

En tomographie à rayons X, une structure de données faisant office de matrice de projection doit nous permettre de faire deux opérations :

- Un produit  $A(\mu)$  où  $\mu$  est un vecteur contenant les coefficients d'atténuation discrétisés. Le résultat de ce produit est une discrétisation d'un des modèles directs qui nous intéresse.
- Une rétroprojection  $B(y)$ , qui est la discrétisation de la rétroprojection, nécessaire au calcul du gradient.

Pour conduire à bien ces deux opérations, il est nécessaire et suffisant de connaître la contribution de chaque voxel à chaque rayon émis. Une matrice pleine stockerait toutes les contributions de tous les voxels dans un vecteur de vecteurs. Une matrice creuse stockerait toutes les contributions non nulles. Notre structure de données tente de stocker beaucoup moins de données en se basant sur le principe suivant : **en connaissant seulement les coordonnées des deux points extrêmes d'un rayon dans l'ensemble des voxels imaginés, il est possible de déduire les voxels traversés par ce rayon.** C'est aussi sur ce principe que David GENDRON a permis de construire des matrices adaptées à une géométrie en 2D. Pour chaque rayon, la structure nous permet de déterminer les contributions des voxels à un rayon.

### 2.5.2.2 Structure de données

Avant de rentrer dans le vif du sujet, précisons certains éléments de vocabulaire utilisés.

- **Rangée** : il s'agit d'un plan de voxels dont les centres sont sur un plan d'équation  
 $y = k$
- **Colonne** : il s'agit d'un plan de voxels dont les centres sont sur un plan d'équation  
 $x = k$
- **Couche** : il s'agit d'un plan de voxels dont les centres sont sur un plan d'équation  
 $z = k$

Nous nous aidons des figures 2.10 et 2.11 pour présenter les paramètres de la structure de données. Introduisons tout d'abord les champs de données que nous utilisons dans notre structure. Cette structure est elle-même constituée d'une structure s'appelant **Rayon**. Il y a autant de **Rayon** que de rayons X émis et reçus, donc avec les notations habituelles :  $N_b N_d N_\phi$  (sans FFS) ou  $4N_b N_d N_\phi$  (avec FFS angulaire et axial). Chaque **Rayon** est une structure constituée comme suit :

- **Première rangée** (voir figure 2.11). C'est un scalaire qui indique le numéro de la première rangée (axe  $y$ ) traversée par le rayon. Il faut entendre première en terme physique (et non pas numérique). Dans le sens de propagation proposé dans l'exemple de la figure 2.11, la première rangée est la rangée 3, mais si le sens du

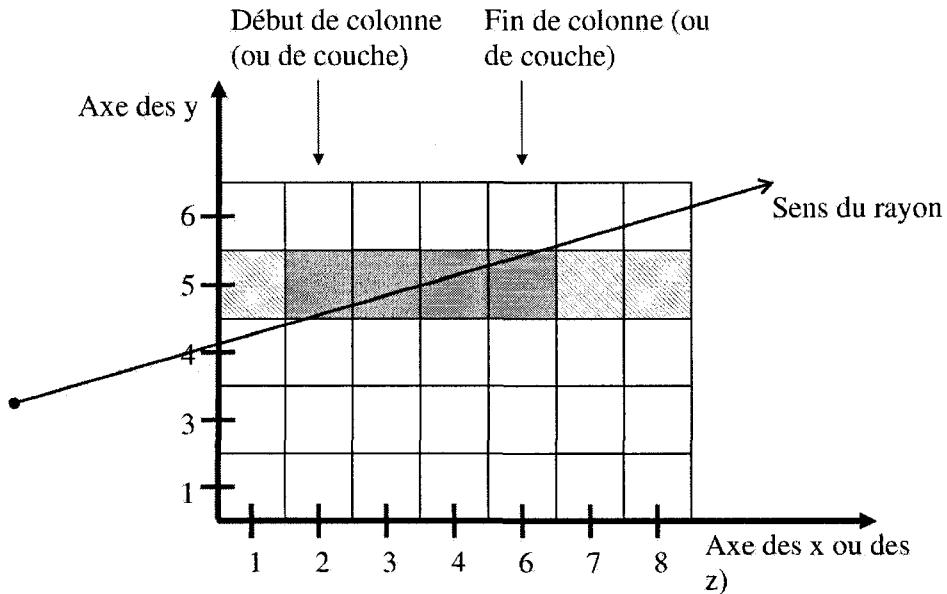


FIGURE 2.10 – Schéma illustrant les paramètres : Première (ou Dernière) couche (ou colonne).

rayon avait été dans le sens contraire, la première rangée aurait été 6.

- **Dernière rangée** (voir figure 2.11). C'est aussi un scalaire. C'est la dernière rangée en termes de sens de propagation.
- **Début de colonne** (voir figure 2.10). C'est un vecteur constitué de scalaires. Sa taille est égale au nombre de rangées traversées par le rayon. Pour chaque rangée traversée, nous stockons la première colonne (axe x) traversée par le rayon (au sens de la propagation). Par exemple, dans la figure 2.10, ce paramètre vaut 2.
- **Fin de colonne** (voir figure 2.10). C'est un vecteur constitué de scalaires. Sa taille est égale au nombre de rangées traversées par le rayon. Pour chaque rangée traversée, nous stockons la dernière colonne (axe x) traversée par le rayon (au sens

de la propagation). Par exemple, dans la figure 2.10, ce paramètre vaut 6.

- **Début de couche** (voir figure 2.10). C'est un vecteur constitué de scalaires. Sa taille est égale au nombre de rangées traversées par le rayon. Pour chaque rangée traversée, nous stockons la première couche (axe z) traversée par le rayon (au sens de la propagation). Par exemple, dans la figure 2.10, ce paramètre vaut 2.
- **Fin de couche** (voir figure 2.10). C'est un vecteur constitué de scalaires. Sa taille est égale au nombre de rangées traversées par le rayon. Pour chaque rangée traversée, nous stockons la dernière couche (axe z) traversée par le rayon (au sens de la propagation). Par exemple, dans la figure 2.10, ce paramètre vaut 6.
- **Contribution**. C'est un vecteur constitué de scalaires. Sa taille est égale au nombre de voxels qui ont été traversés par le rayon. Ce vecteur stocke la longueur d'intersection du voxel et du rayon, qui est la contribution de ce pixel à ce rayon. Ces contributions au sein du vecteur **Contribution** sont ordonnées selon l'ordre de passage du rayon. Si on observe la figure 2.11 cet ordre serait : (1, 3), (1, 4), (2, 4), (2, 5), (3, 5), (4, 6). Nous avons omis dans cet exemple la troisième coordonnée, mais le principe serait le même.
- $N_{valeurs}$ . C'est un scalaire qui est la taille du vecteur **Contribution**.

Avec ces éléments, nous pouvons associer à chaque voxel une contribution au rayon.

### 2.5.2.3 Opérations algébriques

Nous nous servons de l'opérateur  $A$  pour deux types d'opérations :

- **Projection**. Il s'agit de l'opération  $\mu \mapsto A\mu$ . Ceci correspond à l'opération nécessaire pour obtenir un sinogramme  $p = -\log(N)$  où  $N$  est le nombre de photons détectés. Il ne s'agit pas d'un opérateur de projection au sens mathématique du terme. Pour chaque rayon ou triplet  $i = (\phi, n, \theta)$  (angle de projection, numéro de barrette et angle correspondant à un détecteur), ce qui correspond exactement à une donnée acquise par le tomographe, on parcourt le rayon dans le sens de propagation. Nous prenons les voxels traversés les uns après les autres en parcourant en même temps

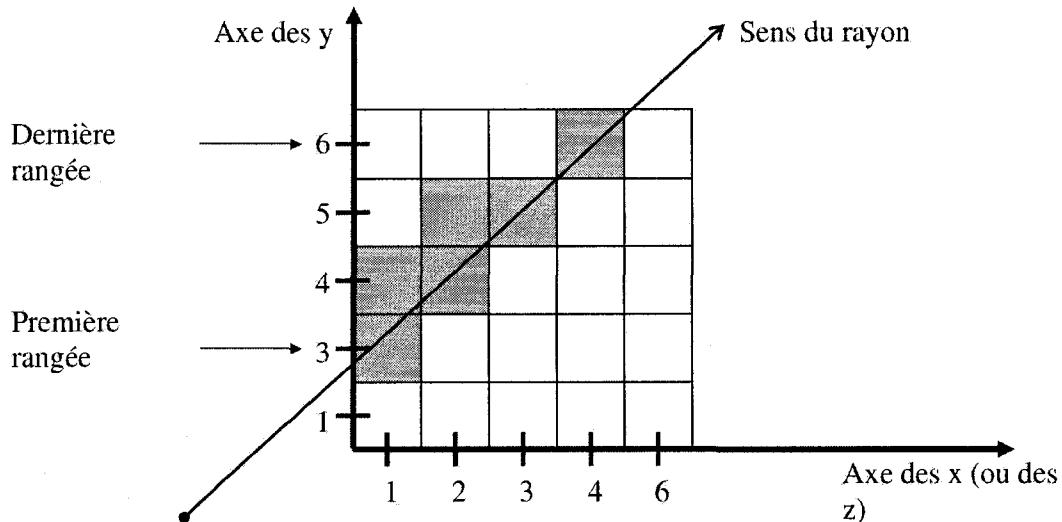


FIGURE 2.11 – Schéma illustrant les paramètres : Première (ou Dernière) rangée.

le tableaux des **Contributions** et nous calculons la somme :

$$y_i = \sum_{j \in T} l_j \mu_j$$

où l'ensemble  $T$  est l'ensemble des pixels traversés.

- **Rétrorprojection.** Il s'agit de l'opération  $y \mapsto A^T y$ . La rétrorprojection intervient dans le calcul du gradient, nécessaire pour minimiser le critère. C'est bien la rétrorprojection (sans filtre) de la rétrorprojection filtrée. Pour chaque rayon ou triplet  $i = (\phi, n, \theta)$  (angle de projection, numéro de barrette et angle correspondant à un détecteur), ce qui correspond exactement à une donnée acquise par le tomographe, on parcourt le rayon dans le sens de propagation. Pour calculer l'élément  $j$  de  $A^T y$ , pour chaque rayon parcouru nous calculons  $l_j y_i$  (la contribution correspondant à l'intersection du rayon  $i$  avec le voxel  $j$ ). Nous sommes cette quantité sur  $i$  (les rayons) pour obtenir  $(A^T y)_j$

Contrairement à une matrice pleine nous n'avons pas stocké les termes explicites de la matrice. Il a donc fallu mettre en œuvre les deux opérations mentionnées ci-dessus, qui tiennent compte de la spécificité de la structure.

### 2.5.3 Utilisation de symétries et d'invariances géométriques

La géométrie du problème a d'importantes invariances par des transformations géométriques simples. Ces invariances nous permettent d'effectuer de considérables économies de mémoire. Ainsi, nous pourrons stocker les données nécessaires et déduire le reste par des transformations très simples. Nous verrons tout d'abord les invariances par rotation et ensuite, nous montrerons les invariances par symétries que nous avons utilisées.

#### 2.5.3.1 Invariances géométriques par rotation-translation

Avec les notations de la figure 2.12, soit  $\Gamma$  la transformation qui est la composée de la rotation de centre  $\Omega$ , d'axe  $(\Omega z)$ , d'angle  $\pi/2$  et de la translation de vecteur  $\vec{t} = h/4\vec{u}_z$ . Nous rappelons que  $h$  est le pas de l'hélice.

En utilisant les notations de la figure 2.4, calculons  $S' = \Gamma(S)$ .

$$s'_x = R_f \cdot \cos(\phi + \pi/2)$$

$$s'_y = R_f \cdot \sin(\phi + \pi/2)$$

$$s'_z = h\phi/(2\pi) + h/4 = h(\phi + \pi/2)/(2\pi)$$

$$s'_x = R_f \cdot \cos(\phi')$$

$$s'_y = R_f \cdot \sin(\phi')$$

$$s'_z = h\phi'/(2\pi)$$

En notant  $\phi' = \phi + \pi/2$ .

$S'$  a les mêmes coordonnées que  $S$  dans le repère tourné d'un angle  $\pi/2$  et translaté selon le vecteur  $h/4\vec{u}_z$ . Nous avons la même chose pour  $S_1$  et  $S_2$  quand il y a une source volante.  $\Gamma$  est une isométrie et conserve notamment les longueurs et les angles. Nous pouvons faire la même remarque pour tous les détecteurs  $D_k$ .

Ainsi la géométrie de notre problème est invariante en  $\Gamma$ . Nous pouvons constater cela sur la figure 2.12. **Cela nous permet de stocker uniquement les données correspondant aux angles allant de 0 à  $\pi/2$ .** Soit un pixel  $M = (x, y, z)$  dont nous souhaiterions calculer la contribution pour chaque angle  $\phi$  allant de 0 à  $2\pi$ , à  $\theta$  et  $n$  fixés. Pour les contributions des rayons correspondant à des projections d'angles  $\phi' \in [k\pi/2, k\pi]$ , il suffit de récupérer les contributions du pixel  $\Gamma^{(k)}(M)$  pour  $k = 2, 3, 4$ .  $\Gamma^{(k)} = \Gamma \circ \dots \circ \Gamma$  ( $k$  composées).

Ceci permet de ne stocker que 1/4 des données.

Nous pourrions aussi montrer que cette invariance est aussi valable en présence de décalage des détecteurs ou des sources volantes.

### 2.5.3.2 Invariances par symétries

En nous plaçant dans un cadre sans FFS axial, nous remarquons que le système est invariant par la symétrie axiale de plan  $\Omega S_1 S_2$ , que nous désignerons par  $\sigma$  comme nous pouvons l'observer sur la figure 2.13. Soit un pixel  $M = (i, j, k)$  dont nous souhaiterions calculer la contribution pour chaque  $n$ , à  $\phi$  et  $\theta$  fixés. Pour simplifier les notations, supposons que  $n \in [-N_b, N_b]$ .  $\sigma$  conserve les distances. Nous ne stockons que les rayons qui correspondent à  $n \in [0, N_b]$ . Les contributions du pixel  $M$  pour les rayons de la barrette  $-n$  sont obtenues grâce aux contributions de  $\sigma(M)$  pour la barrette  $n$ .

En présence de FFS, les deux cônes correspondant aux deux FFS axiaux d'une même projection sont symétriques. Ceci nous permet aussi de ne stocker que la moitié des données.

Grâce à ces deux invariances, nous utilisons 8 fois moins de mémoire ! Ceci est un gain non négligeable que nous avons mis en œuvre.

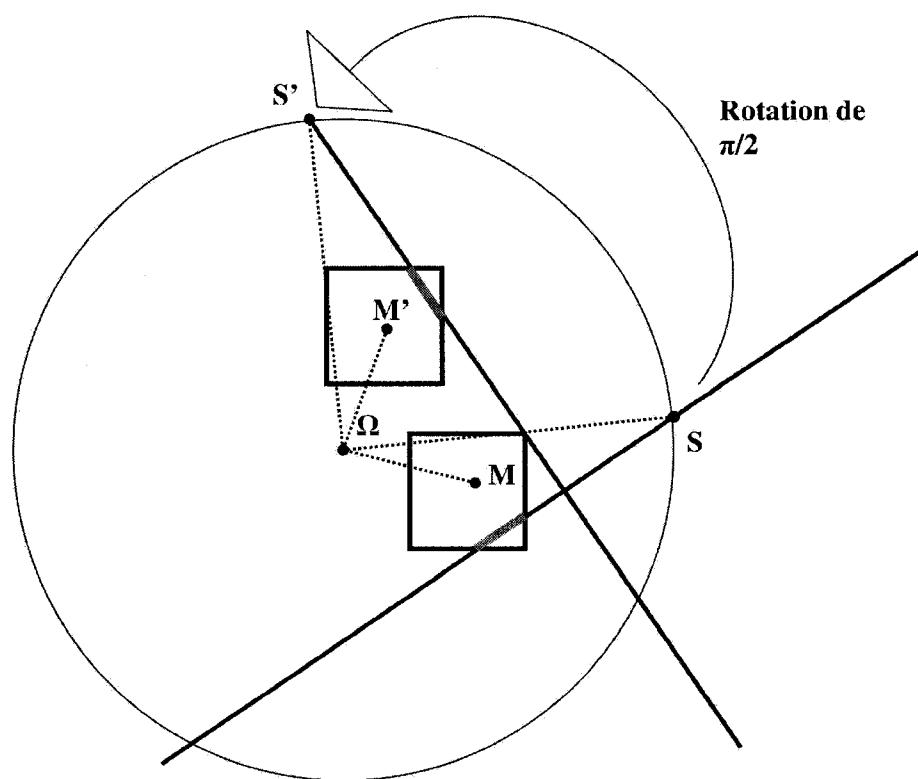


FIGURE 2.12 – Invariance par rotation.

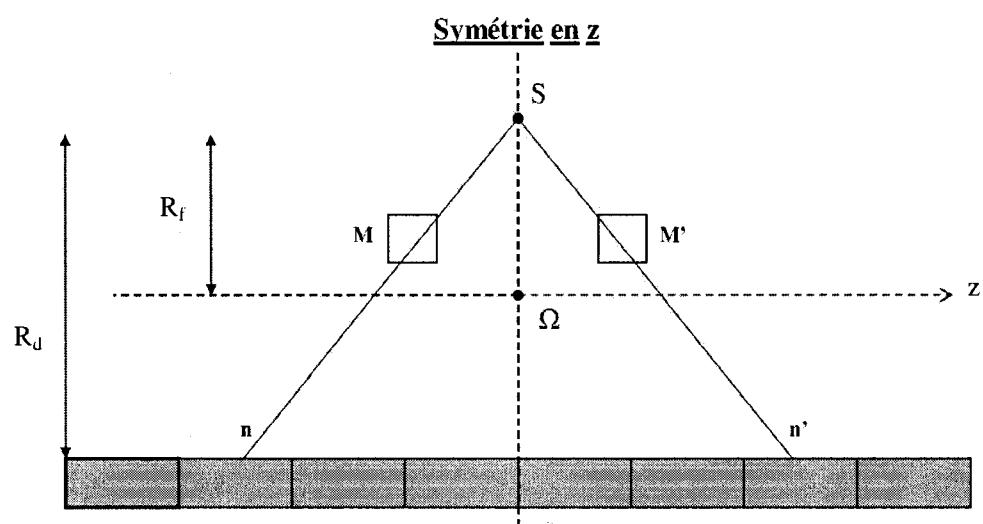


FIGURE 2.13 – Symétrie axiale.

## 2.5.4 Bilan des gains de mémoire obtenu

Dans ce paragraphe nous proposons de comparer les ressources en mémoire nécessaires pour notre structure avec des stockages en matrices pleines et creuses.

### 2.5.4.1 Matrice pleine

Une matrice pleine est un vecteur de vecteurs dont tous les éléments sont stockés qu'ils soient nuls ou non. Pour un seul rayon, nous avons stocké autant d'éléments que de voxels, soit  $M_0 = N^2 N_z$  éléments.

### 2.5.4.2 Matrice creuse

Évaluons le nombre de données stockées pour un seul rayon. Il s'agit en fait d'une ligne de la matrice  $A$ . Supposons qu'il y ait  $N_v$  voxels traversés par ce rayon. La matrice sparse ne stocke que les valeurs non nulles et les coordonnées. Elle stocke donc  $3N_v$  entiers et  $3N_v$  valeurs réelles (type float en C et single en MATLAB). Nous stockons ainsi  $M_1 = 4N_v$  données.

### 2.5.4.3 Structure proposée

Pour chaque rayon, nous stockons :

- **Première rangée** (voir figure 2.11). 1 donnée.
- **Dernière rangée** (voir figure 2.11). 1 donnée.
- **Première colonne** (voir figure 2.10).  $R$  données, où  $R$  est le nombre de rangées traversées.
- **Dernière colonne** (voir figure 2.10).  $R$  données, où  $R$  est le nombre de rangées traversées
- **Première couche** (voir figure 2.10).  $R$  données, où  $R$  est le nombre de rangées traversées
- **Dernière couche** (voir figure 2.10).  $R$  données, où  $R$  est le nombre de rangées traversées
- **Contribution.**  $N_v$  données.

–  $N_{valeurs}$ . 1 donnée

Ainsi, nous stockons pour un seul rayon :

$$M_2 = 2 + 4R + N_v + 1$$

Nous pouvons dire qu'au maximum  $R$  vaut  $\bar{R} = N$ .  $N_v$  est le nombre d'intersections d'un rayon avec les voxels qui est égal au nombre d'intersections du rayon avec les arêtes diminué de 1. Ainsi au maximum,  $N_v \sim 2N + N_z - 1$ . Ainsi, au maximum,  $M_2 \sim 6N + N_z$ .

De même,  $M_1 \sim 12N + 6N_z$ . Lorsque  $N = 512$ ,  $N_z = 30$ , on a :

$\frac{M_1 - M_2}{M_2} = 51\%$ . Pour des rayons qui intersectent beaucoup de voxels notre structure prend environ deux fois moins de place que des matrices creuses.

## 2.6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre la modélisation du problème direct utilisé pour effectuer des reconstructions tomographiques sur des données réelles. Comme la modélisation géométrique, se découpe de la modélisation géométriques, ceci nous permet d'avoir un modèle géométrique flexible. Or nous avons vu que la taille des données nous oblige à proposer une structure innovante qui permet de traiter des données réelles. En effet, les matrices creuses classiques sont de tailles trop importantes pour des données réelles en mode multi-barrette hélicoïdal. Nous avons donc exposé une structure de données permettant de traiter des données réelles tout en faisant des économies de mémoire très importantes grâce notamment à des invariances géométriques.

## CHAPITRE 3

### MÉTHODE DE MINIMISATION DU CRITÈRE

Dans le chapitre précédent, nous avons précisé les outils permettant d'évaluer le critère qu'il faut minimiser pour obtenir une estimation des coefficients d'atténuation recherchés. Cet estimé constitue l'image tomographique. L'objet de ce chapitre est d'expliquer la méthode adoptée pour minimiser le critère choisi. Le problème se résume maintenant à une seule équation :

$$\hat{\mu} = \arg \min_{\mu} f(\mu) = \arg \min_{\mu} [f_0(\mu) + \lambda \Psi_{\delta}] \quad (3.1)$$

où la fonction  $f_0$  est définie au chapitre précédent :

$$\mu \mapsto f_0(\mu) = 1/2 \|A\mu - \hat{p}\|^2$$

et  $\lambda \Psi_{\delta}$  est le terme de régularisation que nous allons expliciter dans ce chapitre.

Dans un premier temps, nous allons spécifier l'algorithme qui a été utilisé pour minimiser la fonction  $f$ . Deuxièmement, nous décrirons la régularisation que nous avons adoptée afin de réduire le bruit présent dans les images. Nous avons étendu le principe de régularisation présent dans les travaux de Menvielle et al. (2005) et de Allain et al. (2002) à un cadre tridimensionnel. Troisièmement, nous proposerons une adaptation du principe de reconstruction par région d'intérêt (ROI) au cadre 3D, ce qui est une première en tomographie à rayons X.

### 3.1 Algorithme de minimisation utilisé

Parmi les algorithmes de minimisation présentés au chapitre 2, nous avons choisi d'utiliser un algorithme quasi-Newton LBFGS développé initialement par une équipe du laboratoire de l'Université Northwestern aux États-Unis.

Premièrement, cet algorithme a l'avantage d'être simple à utiliser puisqu'il suffit de pouvoir calculer la valeur de la fonction en un point et son gradient. En plus de

cela, le critère est convexe, donc il est adapté à ce type de minimisation comme nous l'avons expliqué au chapitre 2. Deuxièmement, ce type d'algorithme est économique en mémoire, ce qui est nécessaire vu la taille des données. Troisièmement, cet algorithme converge plus rapidement que les algorithmes de gradients conjugués puisqu'ils utilisent une information de deuxième ordre (qui donne une information sur la courbure locale de la fonction). Cependant, d'autres algorithmes auraient pu être utilisés puisqu'ils peuvent être considérés comme une boîte noire qui prend en entrée :

- Une fonction qui peut être évaluée en n'importe quel point.
- Le gradient de cette fonction qui peut être évalué en tous les points.

Le critère d'arrêt que nous nous sommes fixés correspond à un nombre d'itérations de **250**. En pratique, nous observons que le gradient du critère est stable dans cette zone d'itérations, pour les problèmes d'inversion qui nous intéressent. De plus, la solution ne change plus pour un tel nombre d'itérations.

## 3.2 Régularisation utilisée

### 3.2.1 Problème mal posé

En minimisant :

$$\hat{\mu} = \arg \min_{\mu} f(\mu)$$

nous cherchons en fait à trouver une solution qui soit assez proche d'une solution au problème :

$$\hat{p} = A\mu$$

Si  $A$  est non inversible et a fortiori non carrée, comme c'est toujours le cas en pratique en tomographie à rayons X, rien ne nous prouve que le problème admette une solution ou que cette solution soit unique, et c'est pour cela que nous cherchons à régulariser.

### 3.2.2 Pénalisation quadratique

De façon générale, un terme de pénalisation quadratique est de la forme :

$$\Psi(\mu) = \sum_i [(D\mu)_i]^2$$

$D$  est un endomorphisme linéaire agissant sur  $\mu$ . La fonction à minimiser devient alors :

$$f(\mu) = f_0(\mu) + \lambda \sum_i [(D\mu)_i]^2$$

Remarquons que  $\lambda$  représente l'arbitrage entre le modèle direct (qui décrit la physique et la géométrie du problème) et la régularisation (pour effacer les effets du bruit). Si  $\lambda = 0$ , nous ne régularisons pas. Si  $\lambda = \infty$ , c'est l'information a priori qui l'emporte dans le processus de minimisation, i.e.  $D\mu = 0$ . Le choix du critère  $\lambda$  est donc important. Un coefficient trop important tendra à lisser trop l'image et fera disparaître des détails. Un coefficient trop faible ne supprimera pas suffisamment les effets du bruit.

Voyons quelques exemples concrets :

- En pratique, nous avons pris souvent  $D = I$ , ce qui revient à avoir à minimiser la fonction :

$$f(\mu) = f_0(\mu) + \lambda \|\mu\|^2$$

L'information a priori sous-entendue est que les pixels ne sont pas d'intensités trop élevées avec des variations qui ne sont pas trop grandes (l'opposé d'un signal très bruité).

- Une autre pénalisation utilisée dans le cadre de ce projet est par la différence des voisins du point courant. En 2D, nous définissons les voisins comme nous l'avons illustré à la figure 3.1. Considérons une discrétisation de l'espace en pixels classiques.  $i$  un indice du vecteur  $\mu$ . Si nous écrivons  $i = N \cdot k_x + k_y$ , où  $N$  est le nombre de pixels, avec  $(k_x, k_y)$  les coordonnées discrètes de pixel  $i$ , alors :

$$\lambda [(\mu_{k_x k_y} - \mu_{(k_x \pm 1) k_y})^2 + (\mu_{k_x k_y} - \mu_{k_x (k_y \pm 1)})^2]$$

$$(D\mu)_i = \quad +$$

$$\lambda' [(\mu_{k_x k_y} - \mu_{(k_x \pm 1) (k_y \pm 1)})^2 + (\mu_{k_x k_y} - \mu_{(k_x \mp 1) (k_y \pm 1)})^2]$$

Cette pénalisation consiste à éviter autant que possible des discontinuités trop importantes. Les coefficients  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont du même ordre de grandeur. Nous les

prendrons égaux à cause de l'équidistance des centres au centre du pixel courant et à cause de l'isotropie du matériau. Nous pouvons aussi prendre  $\lambda' = 0$  pour ne considérer que les voisins les plus proches. Nous pouvons bien entendu adapter l'opérateur  $D$  au cas 3D, en calculant les différences avec six voxels voisins. C'est exactement la même chose que pour le cas 3D que nous avons explicité ci-dessus. Nous pouvons visualiser ces voisins sur la figure 3.2.

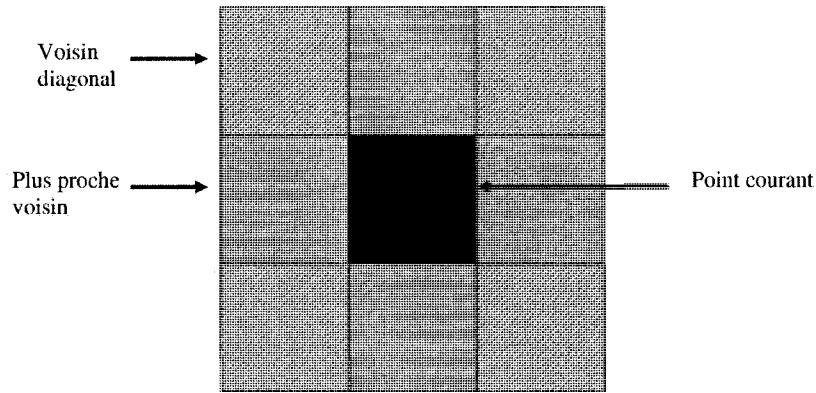


FIGURE 3.1 – Schématisation des voisins du point courant pour la pénalisation.

La régularisation a un avantage numérique non négligeable qui en facilite la résolution. Plaçons-nous dans le cadre d'un critère quadratique classique, dont la matrice  $A$  est carrée. Nous rappelons qu'il est toujours possible de se ramener à ce cas en remplaçant  $A$  par  $A^T A$ . Supposons que nous souhaitions régulariser le problème avec un terme de pénalisation  $D = I$ . Le problème devient alors :

$$\hat{\mu} = \arg \min_{\mu} [1/2 \|A\mu - y\|^2 + \lambda \|\mu\|^2]$$

L'annulation de ce critère nous fournit la solution. L'annulation du gradient du critère s'écrit :

$$A^T(A\mu - y) + 2\lambda\mu = 0$$

ce qui équivaut à :  $A^T y = (A^T A + 2\lambda I)\mu$ . Ainsi le problème de matrice  $A$  de second terme  $y$  est transformé en un problème de matrice symétrique et définie positive  $A^T A + 2\lambda I$  et de second terme  $A^T A + 2\lambda I$ . Ainsi si la matrice  $A$  n'est pas inversible, la matrice du nouveau système l'est. Les valeurs propres de la matrice  $A^T A + 2\lambda I$  sont les  $\lambda_i + 2\lambda$ , où les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres positives ou nulles (puisque  $A^T A$  est symétrique – conséquence du théorème spectral). Or  $\lambda > 0$  donc  $\lambda_i + 2\lambda > 0$ .  $A^T A + \lambda I$  n'ayant que des valeurs propres strictement positives, il s'agit d'une matrice définie positive donc inversible. En effet, aucune considération théorique ne nous permet d'affirmer que le système est inversible. Or les théorèmes de convergence cités ci-dessus nécessitent d'avoir des matrices définies positives et ce terme de pénalisation nous le permet. En pratique, on remarque que les itérations sont moins nombreuses mais plus lentes.

L'inconvénient de la pénalisation quadratique est qu'elle tend à trop lisser et rend les frontières excessivement floues. Nous pourrions penser à une autre pénalisation, dite l1, il s'agirait d'un terme du type :

$$\Psi(\mu) = \lambda \sum_i |(D\mu)_i|$$

Ce terme a l'avantage de donner des frontières nettes. Mais ce terme n'est pas différentiable lorsque  $(D\mu)_i = 0$ . Or nos algorithmes d'optimisation ont besoin de différentiabilité.

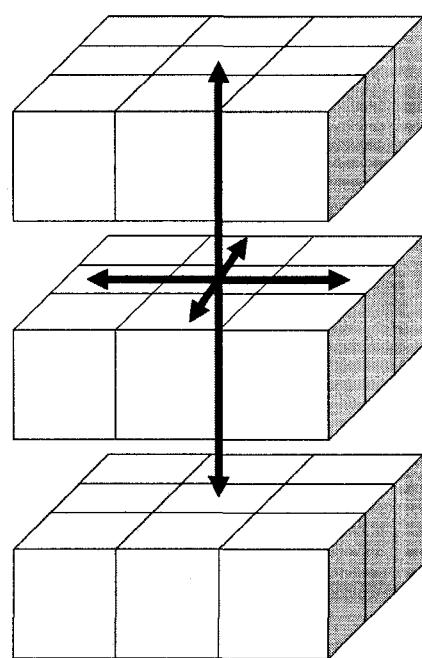


FIGURE 3.2 – Schématisation des voisins en 3D.

### 3.2.3 Pénalisation l2l1

Il existe un compromis permettant d'avoir une pénalisation qui conserve les contours de l'image-solution et qui soit différentiable et convexe. Il s'agit de la pénalisation l2l1. Nous définissons la fonction :

$$\Psi_\delta(\mu) = \sum_i [\sqrt{(D\mu)_i^2 + \delta^2} - \delta]$$

$\delta$  est un paramètre à fixer. Lorsque  $\delta$  tend vers 0, ce terme de pénalisation tend vers un terme de type l1. Voyons le comportement de la fonction lorsque  $\delta$  est important.

$$\Psi_\delta(\mu) = \delta \sum_i [\sqrt{\left(\frac{D\mu)_i}{\delta}\right)^2 + 1} - 1]$$

En supposant que  $\delta \rightarrow \infty$ , nous avons par un développement à l'ordre 1 :

$$\Psi_{\delta,\lambda}(\mu) \approx 1/2\lambda\delta\left(\frac{D\mu)_i}{\delta}\right)^2$$

Lorsque  $\delta$  augmente, il s'agit d'une fonction quadratique. Ainsi, il faut choisir  $\delta$  de telle sorte qu'il ne soit ni trop grand ni trop petit. Comme nous le constatons à la figure 3.3, la pénalisation l2l1 est bornée par la pénalisation l1 et par la pénalisation l2.

Nous avons utilisé une pénalisation l2l1 dans nos reconstructions.

### 3.2.4 Autres pénalisations

Rien n'oblige nos fonctions à être quadratiques ou linéaires. Un exemple de pénalisation non quadratique est un terme de contrainte de positivité pour empêcher la solution d'avoir des valeurs négatives. Un terme de la forme :

$$\Psi(\mu) = \lambda \sum_i (\log(\mu_i) - \log(\mu_i + \epsilon))^2$$

Cette fonction  $\Psi$  écarte les valeurs négatives tout en étant quasiment neutre sur les valeurs fortement positives. Ce terme est utile en présence de pixels fortement négatifs.

Une autre façon de rejeter les solutions avec des pixels négatifs est d'utiliser une contrainte de borne dans l'algorithme, ce que nous pouvons faire avec certains algorithmes comme le LBFGS-B.

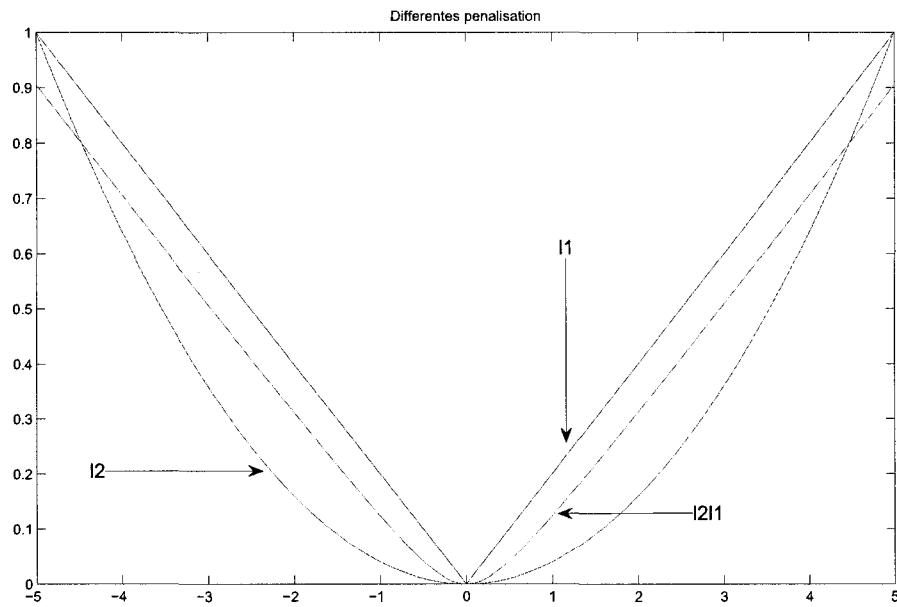


FIGURE 3.3 – Courbes de pénalisation  $l_2l_1$ ,  $l_1$  et  $l_2$ .

### 3.2.5 Choix des hyperparamètres

Nous avons deux paramètres à fixer pour le terme de régularisation que nous utilisons :  $\Psi(\mu) = \lambda \sum_i [\sqrt{(D\mu)_i^2 + \delta^2} - \delta]$ .

Nous proposons pour  $\delta$  de prendre  $\frac{1}{100}$  de la moyenne des valeurs des pixels. Nous fixons  $\lambda$  par essai et erreur.

## 3.3 Reconstruction par région d'intérêt (ROI)

Comme nos travaux s'inscrivent dans un projet plus global dont le but ultime est de visualiser la lumière d'artères comportant des stents métalliques, nous voulons avoir la résolution la plus fine possible. Afin d'obtenir des résolutions plus fines, nous avons mis en place une technique de reconstruction par région d'intérêt. Il s'agit d'une généralisation au cas 3D d'un principe mis en œuvre par Benoit HAMELIN dans Hamelin et al. (2007).

Le principe de la méthode est de reconstruire sur une grille fine dans la zone qui nous intéresse particulièrement et de reconstruire sur une grille grossière là où l'information est peu utile. En effet, dans les problèmes de taille réelle, le facteur limitant la résolution est la mémoire. Pour obtenir une résolution supérieure, il faut augmenter le nombre de pixels et donc la taille de la matrice de projection. En revanche, si nous augmentons la résolution dans une région tout en la diminuant autour, nous pouvons maintenir la quantité de mémoire vive utilisée.

### 3.3.1 Heuristique

Afin d'expliquer le principe de la ROI, nous nous contentons pour les exemples explicatifs du cas 2D. Le principe est rigoureusement le même pour le cas 3D.

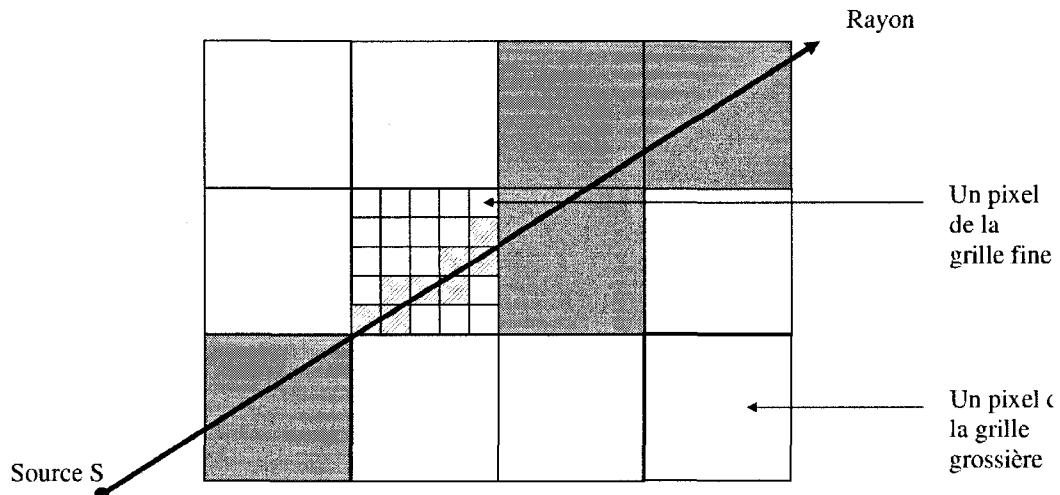


FIGURE 3.4 – Grille fine et grille grossière pour la ROI.

Considérons un rayon X émis par la source  $S$ , comme nous l'avons illustré sur la figure 3.4. Celui-ci parcourt l'espace discrétilisé en deux grilles complémentaires. Une partie du rayon passe par des pixels de la grille fine et l'autre partie passe par les pixels de la grille grossière, comme nous le constatons à la figure 3.4.

Nous nous sommes intéressé au seul cas des pixels carrés (ou parallépipédiques) dans le cadre de la ROI 2D (respectivement 3D). Nous utilisons deux grilles de pixels. L'une est plus fine que l'autre : la fréquence d'échantillonnage sera supérieure à la deuxième. En nous plaçant dans le cadre d'un rayon infiniment fin, nous rappelons la relation de Beer-Lambert :

$$-\log\left(\frac{N}{N_0}\right) = \int_0^L \mu(x(l), y(l)) dl$$

Or, nous avons deux grilles de pixels avec deux pas de discrétilisation différents :

$$\mu(x, y) = \sum_{(i,j) \in C_1} b_1(x - x_i, y - y_j) + \sum_{(i,j) \in C_2} b_2(x - x_i, y - y_j)$$

$C_1$  (respectivement  $C_2$ ) est l'ensemble des pixels de la grille fine (respectivement grossière).

$b_1$  et  $b_2$  sont deux fonctions carrés, de largeur de support différents. Nous avons donc :

$$-\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = \sum_{(i,j) \in C_1} w_{ij} + \sum_{(i,j) \in C_2} w_{ij} \quad (3.2)$$

Dans le cas du rayon infiniment fin,  $w_{ij} = l_{ij}$  qui est la longueur d'intersection entre le rayon et le pixel  $(i, j)$ .

Dans le cas de rayon épais nous utilisons une des autres fonctions de contribution explicitées au chapitre précédent.

### 3.3.2 Mise en équation de la méthode

À partir de l'équation ci-dessus, nous pouvons déduire une équation matricielle qui correspond aux diverses mesures tomographiques pour tous les rayons émis et pour toutes les détections :

$$\mathbf{p} = A_g \boldsymbol{\mu}_g + A_f \boldsymbol{\mu}_f \quad (3.3)$$

$A_g$  (respectivement  $A_f$ ) est le modèle direct qui correspond à la grille grossière (respectivement fine).  $\mu_g$  (respectivement  $\mu_f$ ) est l'ensemble des coefficients d'atténuation correspondant à la grille grossière (respectivement fine).

Nous nous sommes intéressé à un modèle déterministe et monochromatique. Le modèle direct est :

$$\mathbf{p} = A_g \mu_g + A_f \mu_f$$

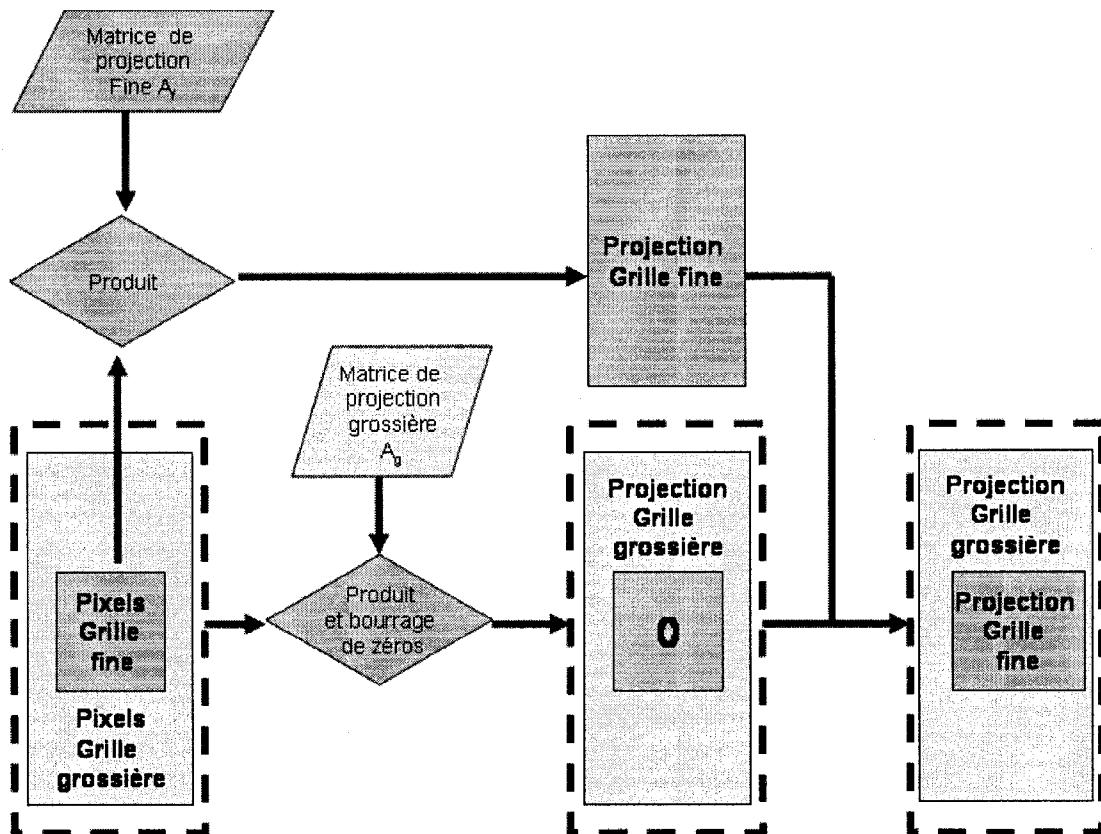


FIGURE 3.5 – Principe d'un produit matrice-vecteur (projection) en ROI.

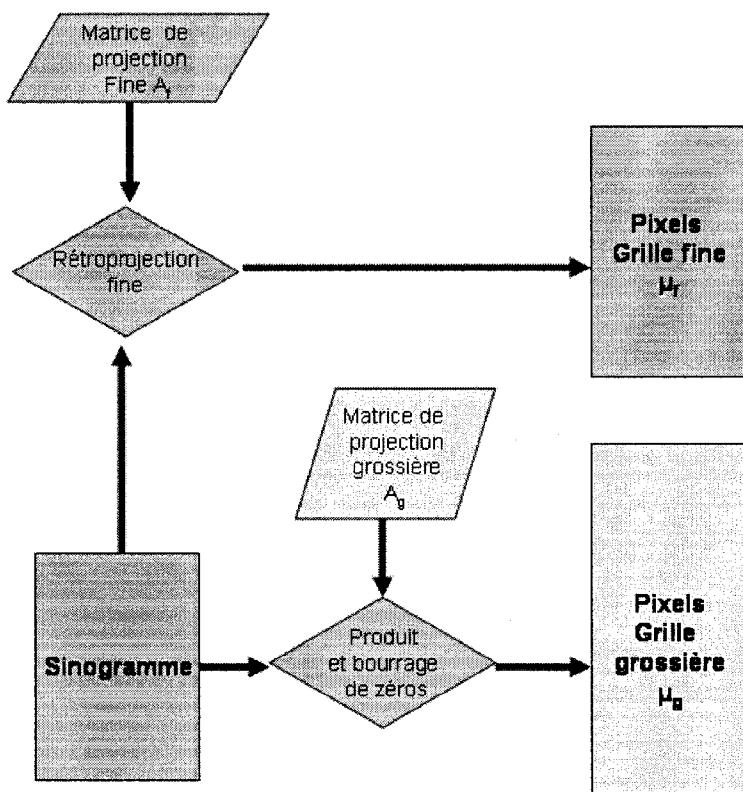


FIGURE 3.6 – Principe d'un produit vecteur-matrice (rétroréprojection) en ROI.

### 3.3.2.1 Minimisation simultanée

Le critère ci-dessus permet de faire de la minimisation simultanée :

$$f(\mu) = 1/2 \|A_g \mu_g + A_f \mu_f - \mathbf{p}\|^2 + \lambda_g \Psi_{\delta_g}(\mu_g) + \lambda_f \Psi_{\delta_f}(\mu_f)$$

où

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_g \\ \mu_f \end{bmatrix}$$

Les termes  $\lambda_g \Psi_{\delta_g}(\mu_g)$  et  $\lambda_f \Psi_{\delta_f}(\mu_f)$  sont des termes de régularisation.

### 3.3.2.2 ROI et invariances géométriques

Les invariances géométriques sont perdues pour la structure de données correspondant à la grille fine, si l'axe de rotation du système ne passe pas par le centre de la région d'intérêt. En revanche, la région grossière est toujours centrée, donc cet opérateur bénéficie toujours des économies importantes de mémoire proposée, dues aux invariances géométriques.

## 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons précisé l'algorithme de minimisation utilisé afin de reconstruire l'image tomographique recherchée : c'est un algorithme LBFGS de type quasi-Newton. Nous avons ensuite explicité la régularisation utilisée dans nos expériences ainsi que les hyperparamètres utilisés pour la régularisation. Finalement, nous avons exposé la méthode de reconstruction par région d'intérêt que nous avons mise en œuvre.

## CHAPITRE 4

### RÉSULTATS ET DISCUSSION

#### 4.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est d'exposer les résultats obtenus dans le cadre des travaux de notre maîtrise. Nous voulons en effet tester les innovations mises en œuvre et vérifier que le modèle direct que nous avons implémenté est suffisamment fidèle à la réalité physique du tomographe. Rappelons les contributions personnelles principales :

1. **Mise en œuvre d'une structure de données efficace représentant le modèle géométrique 3D.**
2. **Élaboration d'une reconstruction basée sur une méthode algébrique applicable sur des données 3D réelles en mode hélicoïdal multi-barrette en tenant compte des sources volantes (FFS).**
3. **Prise en compte de l'épaisseur des rayons X par une méthode innovante.**

Dans un premier temps nous effectuerons des reconstructions algébriques à partir de données simulées exactes obtenues sur des fantômes analytiques dont nous présenterons les caractéristiques. Ces reconstructions algébriques seront comparées à des reconstructions analytiques de type Feldkamp mises en œuvre par l'équipe du professeur Fessler (2007) de l'Université du Michigan. Ces expériences de comparaison s'effectuent aussi bien dans le cas d'une trajectoire circulaire cone-beam que dans une trajectoire hélicoïdale. Nous nous efforcerons de montrer d'une part les limites des algorithmes de Feldkamp et d'autre part les limites de la technique algébrique que nous proposons.

Dans un deuxième temps, nous consacrons notre étude aux reconstructions sur des données réelles. Dans le cadre du projet plus global de l'équipe d'Yves GOUSSARD et en partenariat avec le LBUM, des fantômes réels ont été spécialement moulés pour simuler des vaisseaux périphériques avec ou sans stent. Ces fantômes ont ensuite été scannés à l'Hôpital Notre-Dame dans des scanners multi-barrettes. Nous consacrons exclusivement

notre étude à des reconstructions sur le scanner 16 barrettes. Nous comparerons nos images à celles de SIEMENS avec et sans Région d'intérêt (ROI).

Finalement, nous présenterons les résultats relatifs à la mise en œuvre d'un modèle prenant en compte l'épaisseur des rayons X. Effectivement, les faisceaux de photons X ne sont pas infiniment fins et nous avons proposé une modélisation prenant en compte l'épaisseur des faisceaux. Nous tenterons d'apprécier cette méthode ainsi que ses limites.

## 4.2 Reconstructions tomographiques 3D sur des données simulées pour une trajectoire circulaire

Dans cette section, nous nous plaçons dans le cadre multi-barrette avec une source qui effectue une trajectoire circulaire. Il s'agit du cas cone-beam. Nous rappelons qu'il y a principalement deux approches : l'approche analytique (ex. Feldkamp) et l'approche algébrique (notre contribution personnelle).

Nous voulons mettre plusieurs éléments en évidence dans cette section :

1. Le modèle direct prend bien en compte la géométrie multi-barrette pour une trajectoire circulaire (cone-beam circulaire).
2. Avec de la régularisation et dans le cadre cone-beam, nos reconstructions algébriques sont de qualité comparable à la méthode analytique nous servant de benchmark qui est ici l'algorithme de Feldkamp.

Afin de mettre ces différents éléments en évidence, nous allons présenter plusieurs expériences que nous détaillerons dans les paragraphes suivants :

- **Expérience Cone-beam1.** Nous allons faire des reconstructions (analytique et algébrique) sans que les données soient bruitées.
- **Expérience Cone-beam2.** Nous ajoutons du bruit aux données simulées et nous appliquons différents niveaux de régularisation aux reconstructions algébriques.

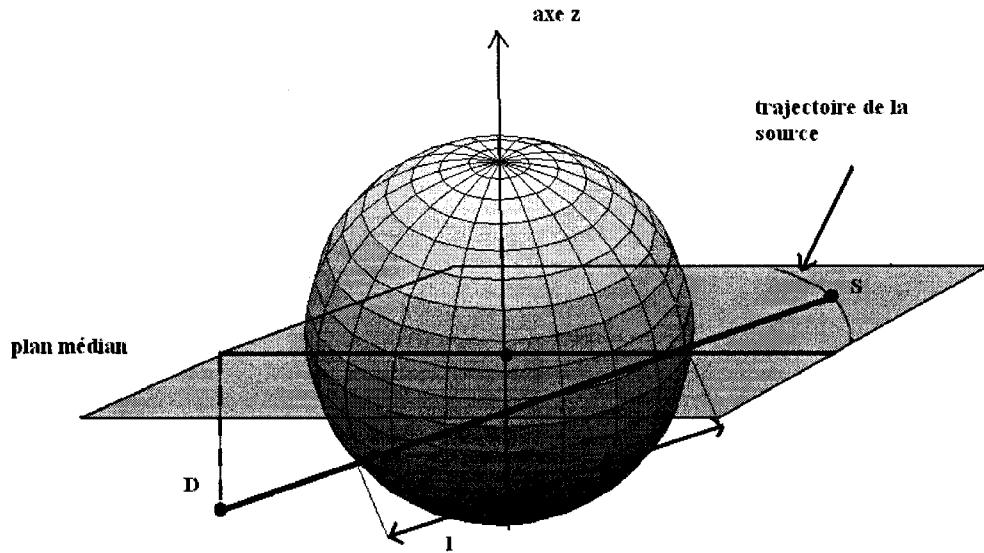


FIGURE 4.1 – Fantôme numérique utilisé.

#### 4.2.1 Méthodologie des simulations et des reconstructions

Afin de faire ces expériences, nous avons mis en œuvre un simulateur calculant les projections tomographiques d'un objet simple : une sphère homogène dont le coefficient d'atténuation est constant. À l'extérieur de la sphère, le coefficient d'atténuation est nul.

Ces données simulées donnaient les mêmes résultats que celles du simulateur proposé par le professeur FESSLER, ce qui exclut tout biais lié à nos données simulées.

Le cadre de ces simulations sont les hypothèses de la loi de Beer-Lambert que nous avons présentée au paragraphe 1.2.2.

- **Le faisceau de photons X est infiniment mince :  $H_1$ .**
- **L'émission des photons est déterministe :  $H_2$ ,** ce qui équivaut à considérer que le nombre de photons est très élevé.

– **Les photons émis sont monochromatiques :  $\mathbf{H}_3$** , ils ont la même énergie.

Pour simuler les données, nous calculons analytiquement le sinogramme rayon par rayon sans effectuer de discréétisation en pixels ce qui est possible grâce à la simplicité du fantôme. Soit un rayon ( $SD$ ) donné. Nous connaissons le vecteur directeur de cette droite  $\vec{u}$ , ainsi que les coordonnées d'un point de cette droite :  $S$ . Or, d'après la loi de Beer-Lambert, comme la boule est homogène et que l'extérieur de la boule est supposé non atténuant, nous avons :

$I = I_0 \exp(-l\mu)$ , où  $\mu$  est le coefficient d'atténuation homogène de la boule.  $l$  est la distance parcourue par le rayon dans la boule, comme nous pouvons le constater sur la figure 4.1. Or  $l$  se calcule de manière exacte :

$$l = \|\vec{\Omega S} \times \vec{u}\|, \text{ où } \times \text{ désigne le produit vectoriel lorsque } \vec{u} \text{ est normé.}$$

Le simulateur fonctionne selon les étapes suivantes :

1. Incrémenter le numéro du rayon, en incrémentant le triplet angle de projection-détecteur-numéro de barrette  $(\phi, \theta, n)$ .
2. Calculer pour ce rayon la position de la source et du détecteur pour en déduire l'équation paramétrée du rayon.
3. Calculer la distance entre le centre de la boule (fantôme numérique) et le rayon pour en déduire grâce au produit vectoriel cité ci-dessus la longueur parcourue par le rayon dans la boule.
4. En déduire l'atténuation du rayon grâce à la loi de Beer-Lambert et continuer au point 1.

Ce simulateur se base bien sûr sur le même principe que pour la tomographie hélicoïdale : il suffit de changer la trajectoire du point source  $S$  qui n'est plus circulaire.

Une fois les données simulées, nous construisons et stockons notre structure de données représentant le modèle géométrique, i.e. la matrice de projection  $A$ . Nous appliquons ensuite nos algorithmes de minimisation avec un critère quasi quadratique de la forme :

$$f(\mu) = 1/2 \|A\mu - \mathbf{p}\|^2 + \lambda\Psi_\delta(\mu)$$

TABLEAU 4.1 – Géométrie du fantôme 1.

Géométrie du tomographe	Géométrie du fantôme numérique
$N_b = 16$	Boule de centre (64, 64, 16)
$N_{phi} = 400$	Rayon 16
$N_d = 150$	$\mu = 1 \cdot pixel^{-1}$
$dz = 40/128cm$	
$dx = dy = dz$	
$db = 2dz$	
$R_d = 100cm$	
$R_f = 50cm$	
$h = 0$	

Nous utiliserons des termes de pénalisation  $\Psi$  de type l2l1. Les algorithmes de minimisation employés sont de type l-bfgs.

#### 4.2.2 Géométrie des simulations

Nous avons effectué nos simulations selon la géométrie suivante synthétisée au tableau 4.1.

Il s'agit d'un tomographe à 16 barrettes dont l'épaisseur est de 6.25mm. Chaque barrette comporte 150 détecteurs. Nous effectuons 400 incrément angulaires. Le pas est nul ici, ce qui équivaut à dire que la trajectoire de la source  $S$  est circulaire, ce qui est communément appelé du cone-beam circulaire. La distance entre le centre de rotation  $\Omega$  du système et la source est égale au rayon du cercle de centre  $\Omega$  sur lequel se situent les projections des détecteurs  $D_i$  dans le plan médian.

Nous considérons une grille de reconstruction dont l'arête des cubes est de 3.125mm. Nous discrétonissons la grille en  $128 \times 128 \times 34$  voxels cubiques, d'arrête 3.125mm  $\times$  3.125mm  $\times$  3.125mm.

### 4.2.3 Expérience cone-beam1 : reconstruction sur des données non bruitées

Dans un premier temps, nous générerons des données simulées sans bruit. Le but est de comparer nos reconstructions à celles du professeur FESSLER qui utilisent des algorithmes de rétroprojections adaptés au cas cone-beam circulaire. Comme nous pouvons le remarquer sur la figure 4.2, notre reconstruction a un certain bruit de reconstruction qui n'apparaît pas pour la technique de reconstruction filtrée.

De plus, nous avons voulu voir comment les deux algorithmes gèrent l'effet de bord. Effectivement, le fantôme qui est une sphère a un diamètre plus important que la longueur totale (selon l'axe  $z$ ) des détecteurs. L'image reconstruite en 3D devrait donc être une sphère tronquée. Ceci est bien entendu le cas, et nous constatons qu'il y a moins de bruit de bord sur l'image reconstruite par FBP (4.4) que celle que nous avons reconstruite avec une méthode algébrique (4.3). L'image reconstruite avec l'algorithme de Feldkamp est en effet plus lisse et moins bruitée.

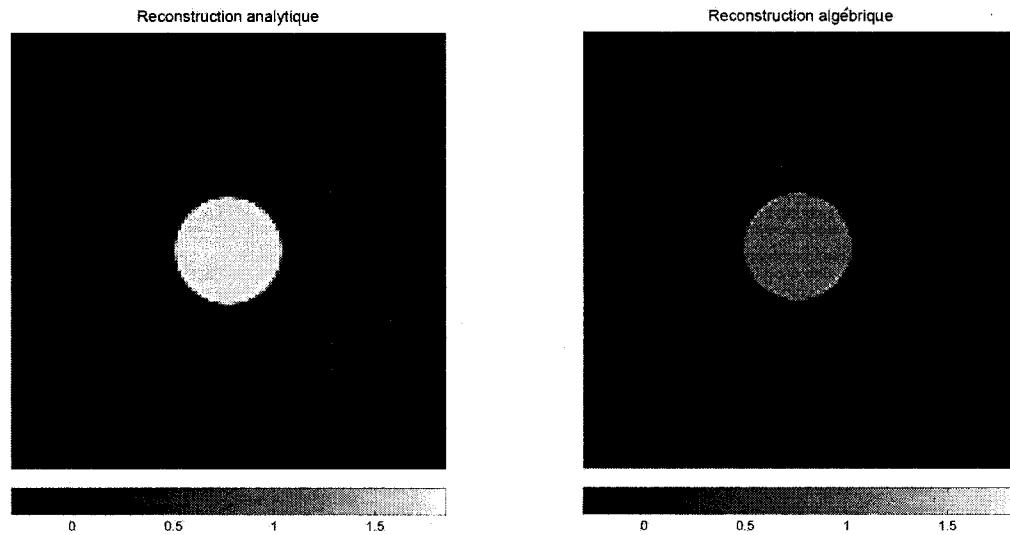


FIGURE 4.2 – Cone-beam circulaire sans bruit, sans régularisation.

Afin de réduire ce bruit de reconstruction, nous avons ajouté de la régularisation. Nous avons choisi  $\lambda = 1$  et  $\delta = 0.01$  comme hyperparamètres de régularisation. La

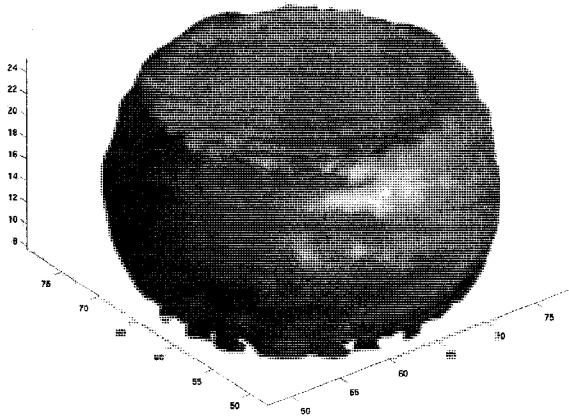


FIGURE 4.3 -- Reconstruction algébrique 3D sans bruit et sans régularisation.

régularisation est de type l<sub>1l1</sub> et elle a lieu sur les normes des différences entre proches voisins et sur les normes des pixels. Cette régularisation améliore considérablement la qualité de l'image comme nous pouvons le constater sur la figure 4.5. L'image est plus lisse et l'extérieur de la boule est plus homogène et moins bruité. De même, les effets de bord sont atténus comme le montre la figure 4.6 qui nous permet de visualiser en 3D l'image reconstruite.

Enfin, nous avons voulu voir l'effet d'un paramètre  $\lambda$  trop important. Nous avons produit une image trop régularisée (4.7). Trop de régularisation, comme nous l'avons dit au chapitre précédent tend bien à rendre l'image plus homogène car cela revient à privilégier le modèle a priori ajouté ad hoc en négligeant la distance au modèle direct physique. Les fluctuations des intensités des pixels sont moins importantes avec de la régularisation comme nous le constatons sur la figure 4.8 où nous avons représenté les intensités de la coupe centrale. Nous constatons cela aussi sur le tableau 4.2 où nous avons calculé l'écart-type à l'intérieur et à l'extérieur de la boule. Ces écart-types sont supérieurs pour des reconstructions algébriques n'utilisant pas de régularisation. Nous constatons cependant que les images reconstructions par ART sont plus bruitées à

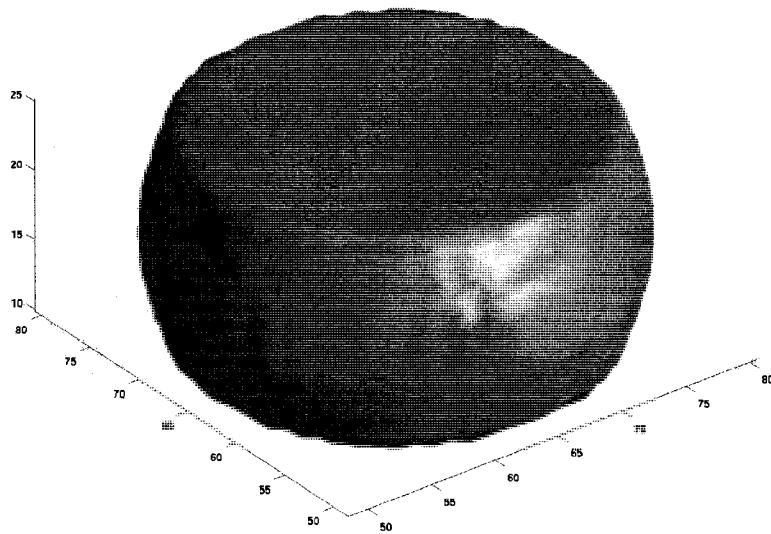


FIGURE 4.4 – Reconstruction FBP 3D sans bruit (algorithme de Feldkamp).

l'intérieur et à l'extérieur de la boule. Nos reconstructions font donc apparaître un bruit de reconstruction qui est moins présent pour les reconstructions analytiques.

Cette expérience nous amène à conclure que nos reconstructions algébriques donnent des résultats comparables aux reconstructions analytiques lorsque nous régularisons convenablement.

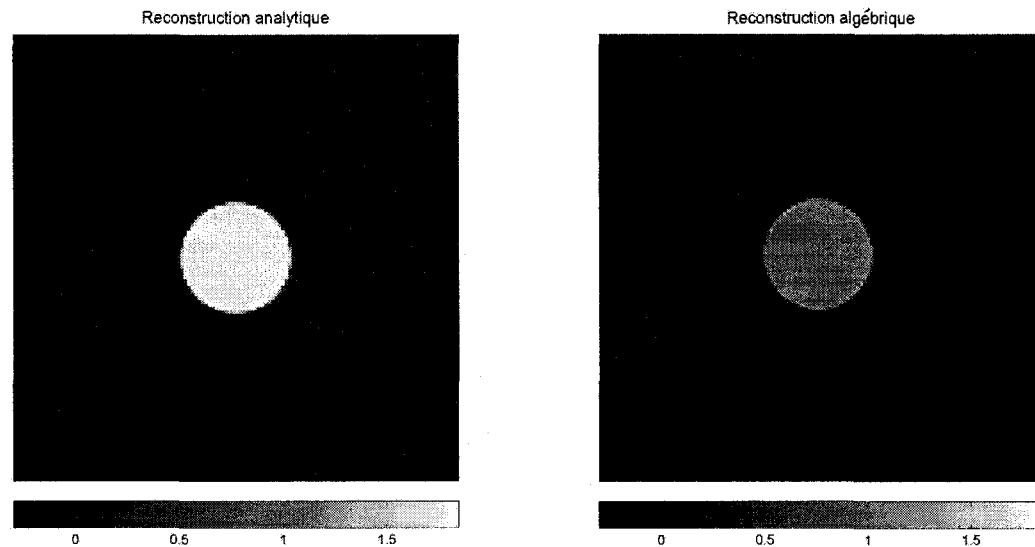


FIGURE 4.5 – Reconstruction algébrique avec régularisation vs. FBP (algorithme de Feldkamp).

TABLEAU 4.2 – Écart-type à l'intérieur et à l'exterieur de la boule.

	Reconstruction analytique	ART sans régularisation	ART avec régularisation
Intérieur de la boule	$3.9376 \cdot 10^{-5}$	0.0887	0.0061
Extérieur de la boule	0.0158	0.0773	0.0758

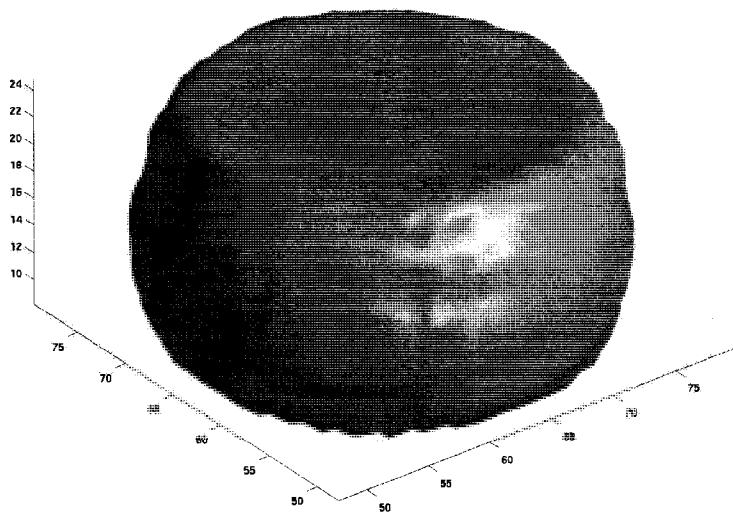


FIGURE 4.6 – Reconstruction algébrique 3D sans bruit et avec régularisation.

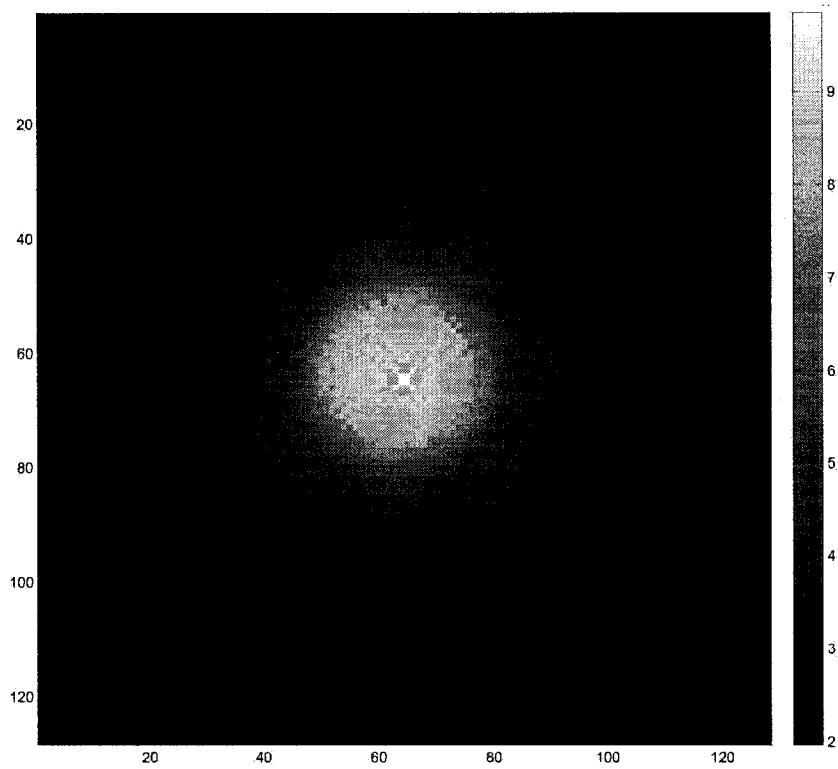


FIGURE 4.7 – Reconstruction algébrique avec trop de régularisation.

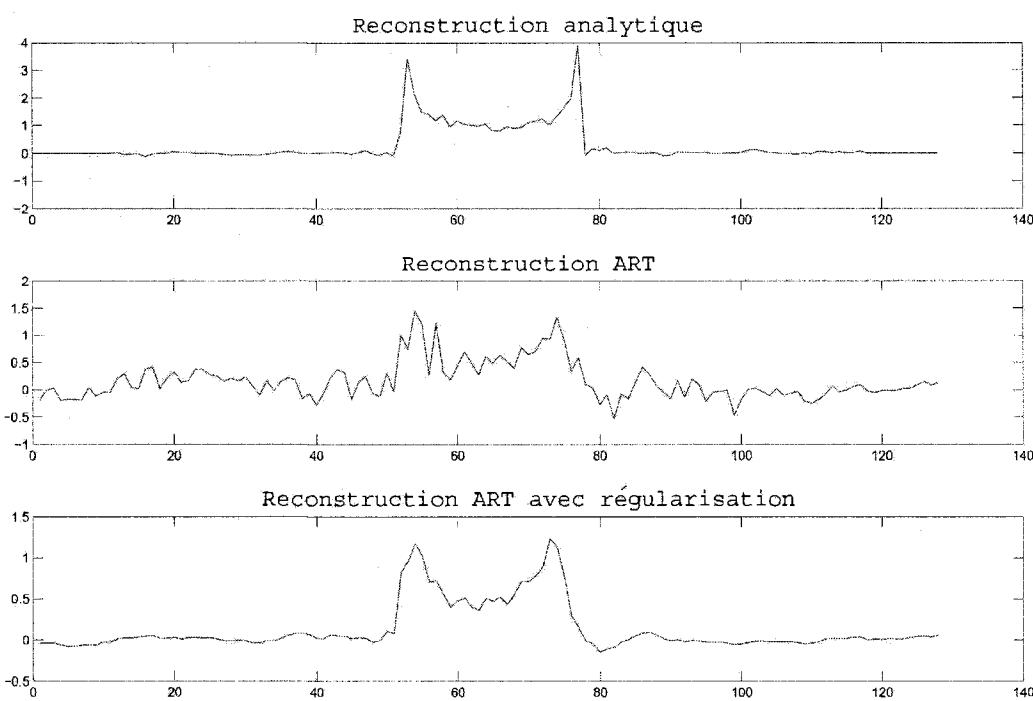


FIGURE 4.8 – Intensités des coupes centrales pour des reconstructions algébriques et analytiques.

TABLEAU 4.3 – Géométrie du fantôme 2.

Géométrie du tomographe	Géométrie du fantôme numérique
$N_b = 16$	Boule de centre (64, 64, 16)
$N_{phi} = 400$	Rayon 12
$N_d = 150$	$\mu = 1 \cdot pixel^{-1}$
$dz = 40/128cm$	
$dx = dy = dz$	
$db = 2dz$	
$R_d = 100cm$	
$R_f = 50cm$	
$h = 0$ (trajectoire circulaire)	

#### 4.2.4 Reconstruction avec du bruit : cone-beam2

Nous voulons maintenant voir l'effet des reconstructions lorsque nous ajoutons un bruit additif gaussien. C'est l'expérience cone-beam2.

##### 4.2.4.1 Modifications des données simulées

Nos données sont simulées de la manière suivante :

$$y = \exp(-p) + \Lambda b \quad (4.1)$$

$b$  est une variable aléatoire multi-normale générée par MATLAB.  $\Lambda$  est le niveau de bruit additif. Nous avons pris pour  $\Lambda$  : 1% de la moyenne de  $\exp(-p)$ , soit un bruit de 20 dB. Le terme  $\exp(-p)$  est calculé grâce au simulateur présenté précédemment. Il suffit donc d'ajouter le bruit aux données générées à celles du simulateur précédent pour la géométrie qui nous intéresse.

##### 4.2.4.2 Géométrie des simulations

Nous utilisons quasiment la même géométrie que précédemment. Cependant, nous réduisons la taille de la boule pour qu'elle puisse être entièrement reconstruite. Nous voulons ainsi supprimer tout biais dû à l'effet de troncature de la sphère.

#### 4.2.4.3 Résultats et discussion

Si nous n'utilisons pas de régularisation, la rétroprojection filtrée réagit mieux au bruit, comme nous pouvons le constater sur la figure 4.9. Le contraste de l'image reconstruite par une méthode analytique est de meilleure qualité que dans notre reconstruction.

Dans un deuxième temps, nous avons appliqué différents poids de régularisation  $\lambda$  à nos reconstructions. Nous avons représenté les différents résultats sur la figure 4.10. Nous constatons que pour un poids de régularisation inférieur environ à 1, le bruit diminue au fur et à mesure que le poids augmente. Cependant, lorsque le poids  $\lambda$  est trop important, la frontière autour de la boule devient floue. Il y a donc un juste milieu, comme autour de  $\lambda = 0.05$ , qui maintient de bonnes frontières tout en diminuant substantiellement le bruit au sein de la boule, ce qui fournit une image de qualité comparable à la reconstruction analytique. Nous constatons cette diminution du bruit en traçant une coupe de la boule sur la figure 4.11. En présence d'une régularisation adaptée le niveau de bruit est du même ordre de grandeur entre la méthode algébrique régularisée et la méthode analytique comme nous pouvons le constater sur le tableau 4.4.

Numériquement, la régularisation accélère la convergence. Sur la figure 4.12, nous pouvons constater que la norme du gradient oscille beaucoup moins lorsque le pas de régularisation est important. Il s'avère aussi que la norme du gradient se stabilise à un niveau d'itérations inférieur. Au fur et à mesure que le critère minimisé diminue, le terme de pénalisation devient de plus en plus influent. Ce terme quasi quadratique ( $l_2 l_1$ ) ressemble à une sorte de cuvette. À partir d'un certain stade, la solution reste coincée dans cette cuvette locale et le gradient ne se modifie que très peu.

#### 4.2.5 Conclusions tirées

Le choix du paramètre de régularisation est crucial mais son choix est un problème en soi. Une fois que des paramètres de régularisation adaptés sont choisis, les reconstructions algébriques sont de qualité comparable aux techniques analytiques pour les trajectoires circulaires.

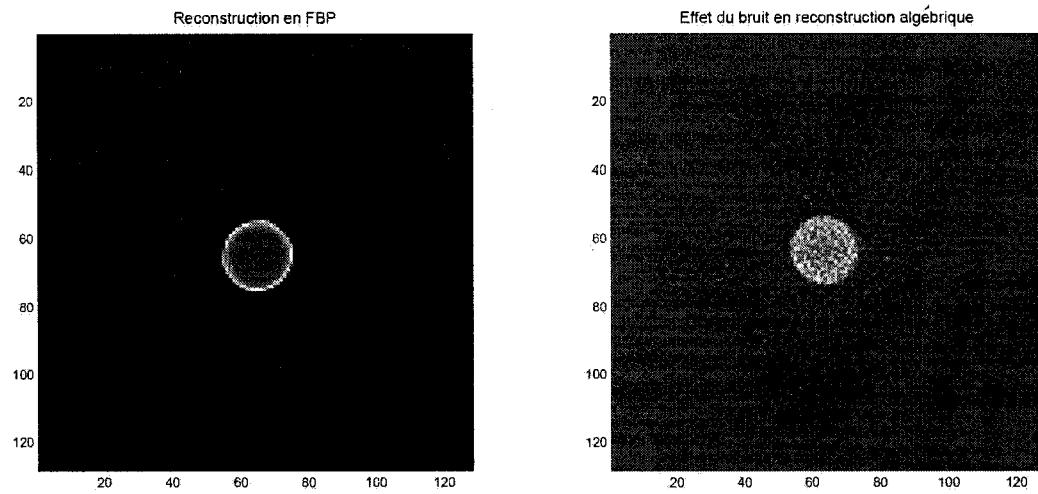


FIGURE 4.9 – Reconstruction algébrique 3D avec du bruit et sans régularisation comparée à une reconstruction FBP.

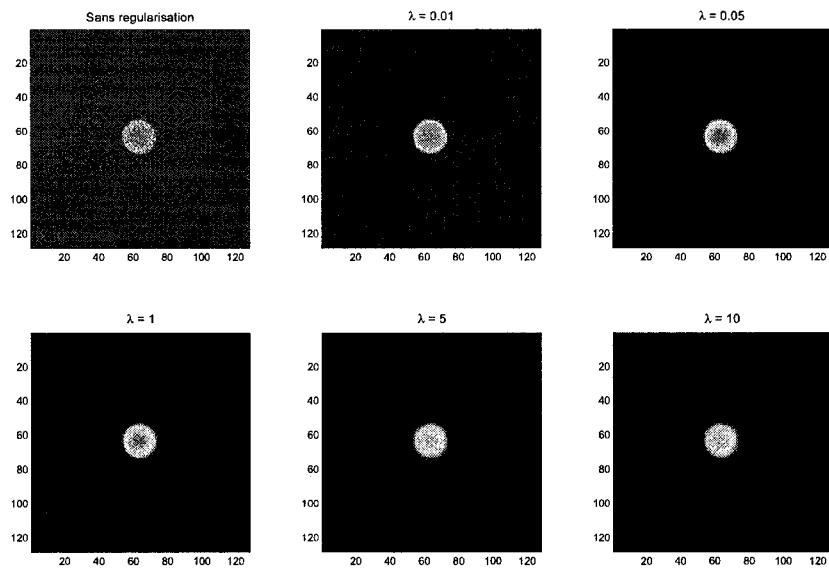


FIGURE 4.10 – Réduction du bruit pour différents poids de régularisation.

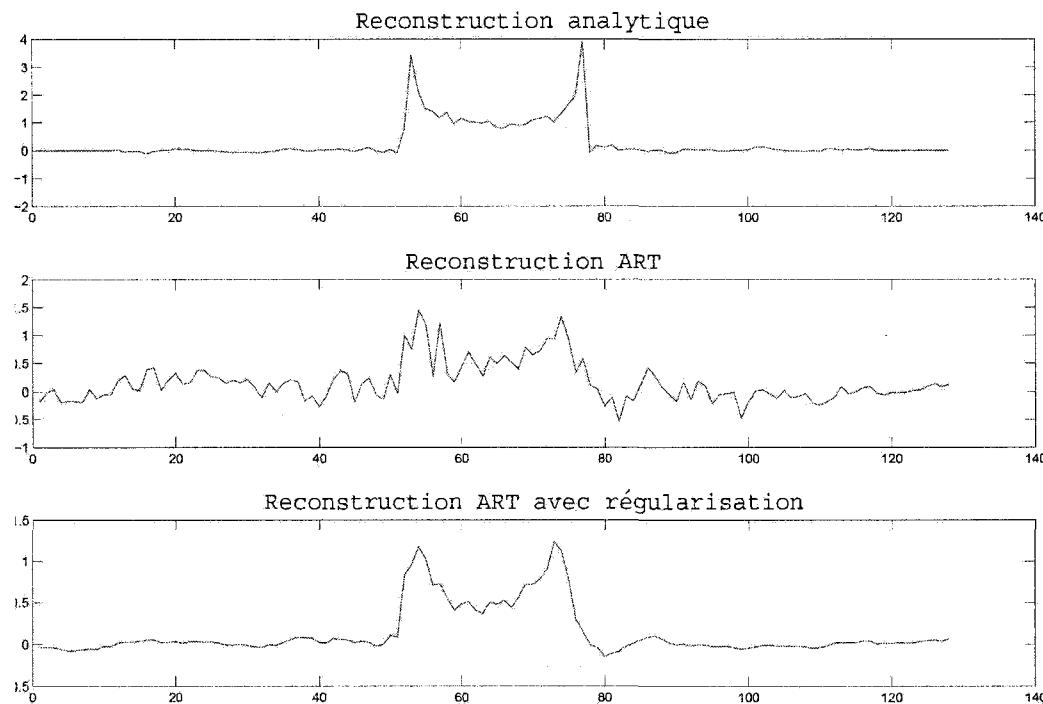


FIGURE 4.11 – Intensités des coupes centrales pour des reconstructions analytiques et algébriques (avec et sans régularisation) en présence de bruit.

TABLEAU 4.4 – Écart-type à l'intérieur et à l'extérieur de la boule avec du bruit.

	Reconstruction analytique	ART sans régularisation	ART avec régularisation
Intérieur de la boule	0.2321	0.3136	0.2354
Extérieur de la boule	0.0333	0.1419	0.0837

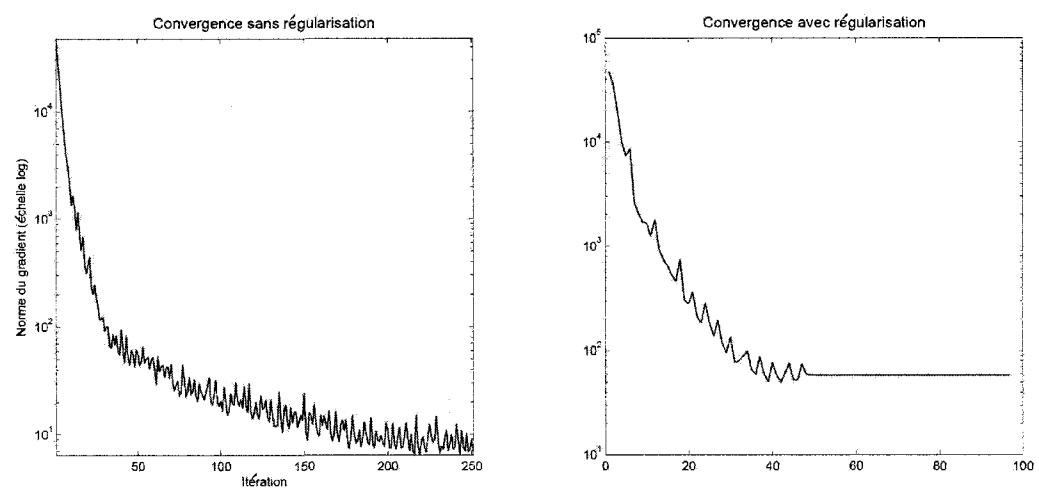


FIGURE 4.12 – Différence de comportement de la convergence avec et sans régularisation.

## 4.3 Reconstructions tomographiques sur des données simulées pour une trajectoire hélicoïdale

Dans la section précédente, nous nous sommes intéressé à des reconstructions en mode multi-barrette circulaire (cone-beam circulaire). Ce cas est intéressant pour les scans axiaux. Cependant, les acquisitions tomographiques en milieu clinique sont telles que la source suit généralement une trajectoire hélicoïdale. L'objet de la section est de montrer que la méthode algébrique que nous avons développée est adaptée à cette trajectoire. Dans cette section, nous cherchons à mettre en évidence deux éléments :

1. Le modèle direct que nous avons développé prend bien en compte la géométrie multi-barrette pour une trajectoire hélicoïdale, qui est le mode d'acquisition le plus utilisé en milieu clinique.
2. Notre méthode algébrique a une robustesse vis-à-vis de la géométrie que les méthodes approximatives analytiques n'ont pas.

### 4.3.1 Méthodologie des simulations et géométries utilisées

Le principe du simulateur est toujours le même, sauf que la source parcourt cette fois-ci une trajectoire hélicoïdale. Nous utilisons toujours un fantôme sphérique afin de calculer l'atténuation exacte des rayons X. Pour cela, nous nous plaçons toujours dans les hypothèses approximatives de la loi de Beer-Lambert présentées au paragraphe 1.2.2.

Nous proposons deux simulations qui se basent sur deux géométries un peu différentes :

1. **Hélice A** : il s'agit d'une hélice dont le pas est égal à la longueur de toute la barrette. C'est un pas élevé mais qui correspond aux ordres de grandeurs des proportions que nous avons dans les cas réels pour le protocole AAA.
2. **Hélice B** : c'est une hélice dont le pas est 8 fois moins important. Ce cas est beaucoup plus favorable pour l'algorithme de Feldkamp vu qu'il effectue des interpolations.

TABLEAU 4.5 – Géométrie fantôme 3.

Géométrie du tomographe	Géométrie du fantôme numérique
$N_b = 16$	Boule de centre (64, 64, 16)
$N_{phi} = 400$	Rayon 16
$N_d = 150$	$\mu = 1 \cdot pixel^{-1}$
$dz = 40/128cm$	
$dx = dy = dz$	
$db = 2dz$	
$R_d = 100cm$	
$R_f = 50cm$	
$h = 16 \cdot db$	

TABLEAU 4.6 – Géométrie fantôme 4.

Géométrie du tomographe	Géométrie du fantôme numérique
$N_b = 16$	Boule de centre (64, 64, 16)
$N_{phi} = 400$	Rayon 12
$N_d = 150$	$\mu = 1 \cdot pixel^{-1}$
$dz = 40/128cm$	
$dx = dy = dz$	
$db = 2dz$	
$R_d = 100cm$	
$R_f = 50cm$	
$h = 2 \cdot db$	

### 4.3.2 Hélice A : un pas important

Dans un premier temps, nous nous intéressons à un pas d'hélice important. Comme nous le constatons sur la figure 4.13, l'algorithme de Feldkamp donne des reconstructions de qualité très dégradée pour des pas d'hélices trop importants. Ceci est dû au caractère inadapté des interpolations pour des pas trop grands. En revanche, la reconstruction algébrique fournit une image de bonne qualité. La sphère est reconstruite en entier avec un faible bruit de reconstruction (4.14). L'algorithme de Feldkamp produit une reconstruction 3D très dégradée : 4.15. L'image 3D qu'on observe semble tordue selon un axe de rotation : c'est un artefact d'interpolation pour des données hélicoïdales.

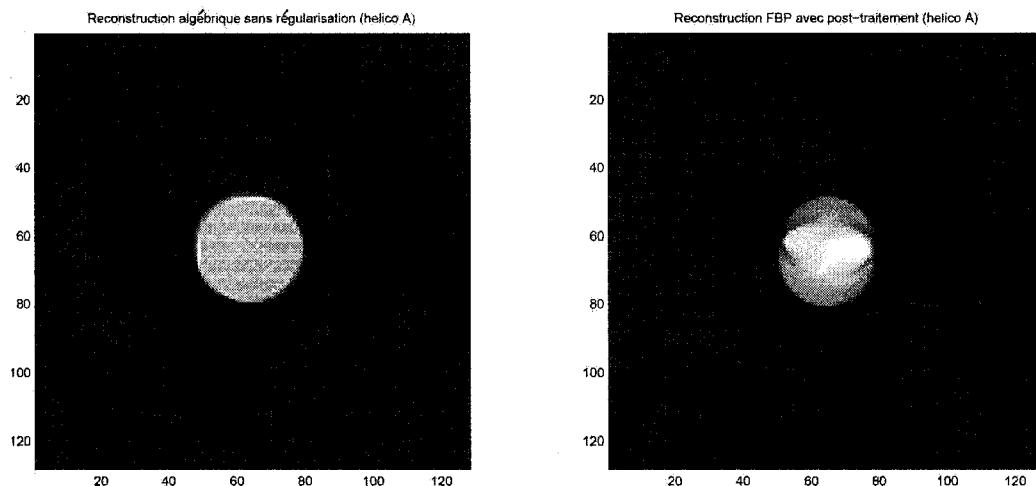


FIGURE 4.13 – Reconstruction algébrique (gauche) vs reconstruction analytique (droite) (hélice A).

Reconstruction hélicoïdale A sans régularisation

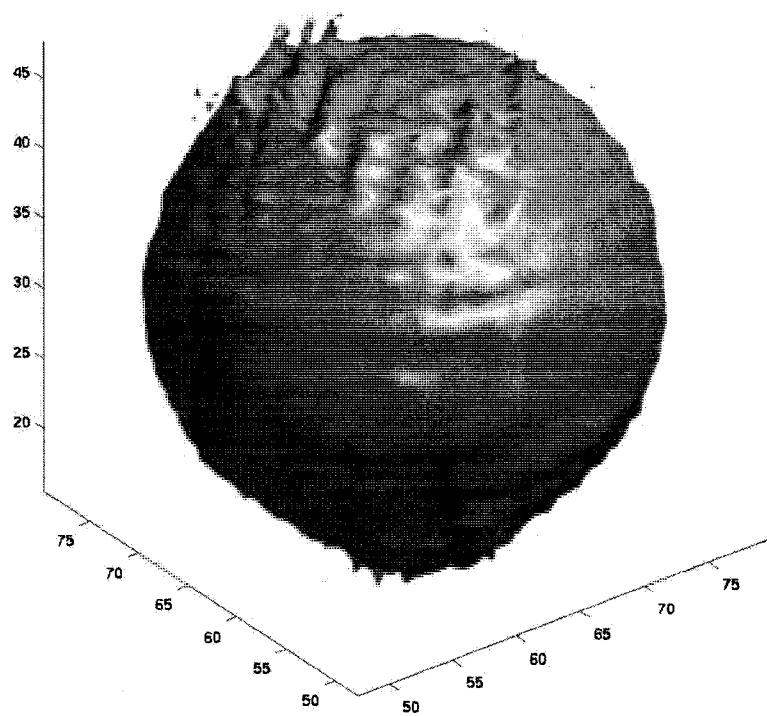


FIGURE 4.14 – Reconstruction algébrique 3D (hélice A).

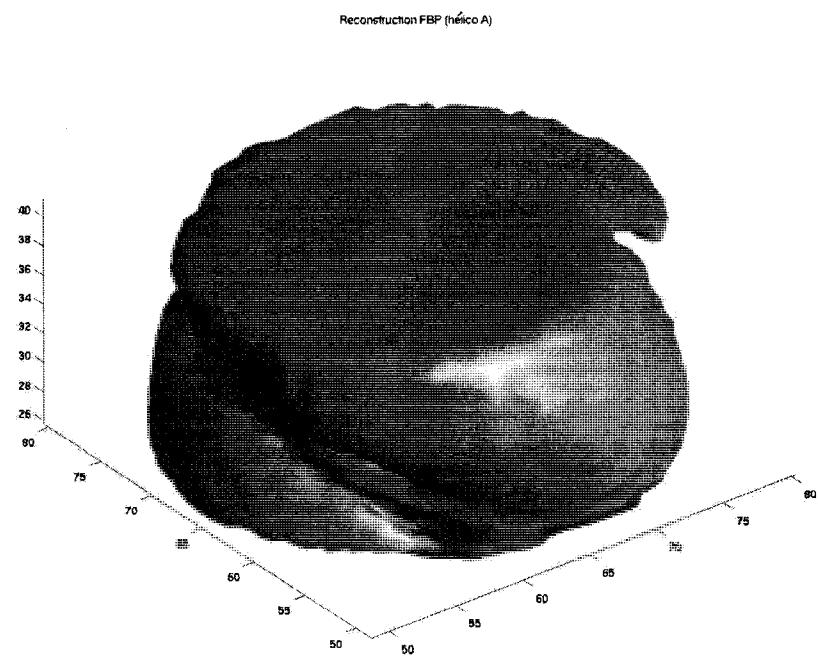


FIGURE 4.15 – Reconstruction analytique 3D (hélice A).

### 4.3.3 Hélice B : un pas d'hélice plus faible

Nous effectuons ensuite des reconstructions sur des hélices de pas plus faibles avec une sphère plus petite pour qu'elle soit entièrement reconstruite. L'algorithme de Feldkamp donne alors des résultats de qualité légèrement supérieure à ceux des reconstructions algébriques, comme nous pouvons le constater sur la figure 4.16. Cette reconstruction est améliorée puisque le pas de l'hélice est moins long : l'échantillonnage selon l'axe  $z$  est donc plus dense. Les interpolations effectuées sont donc plus appropriées à de petits pas. La figure 4.17 nous permet de constater que l'image reconstruite est de meilleure qualité que le cas du cone-beam circulaire (puisque toute la sphère est incluse dans l'hélice).

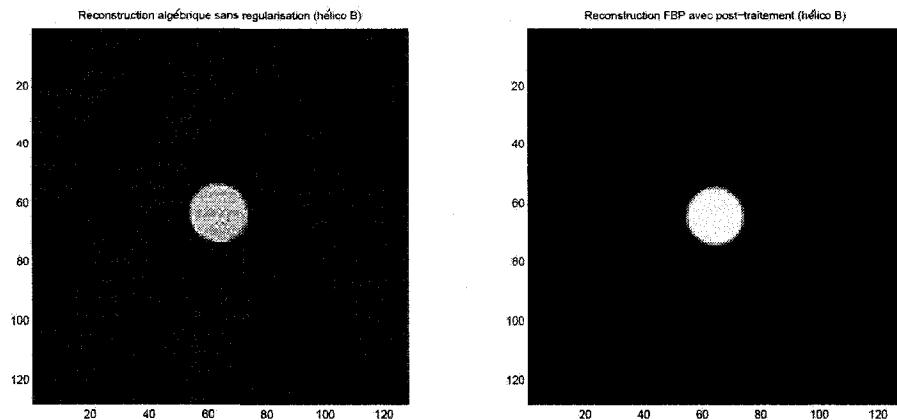


FIGURE 4.16 – Reconstruction hélicoïdale B.

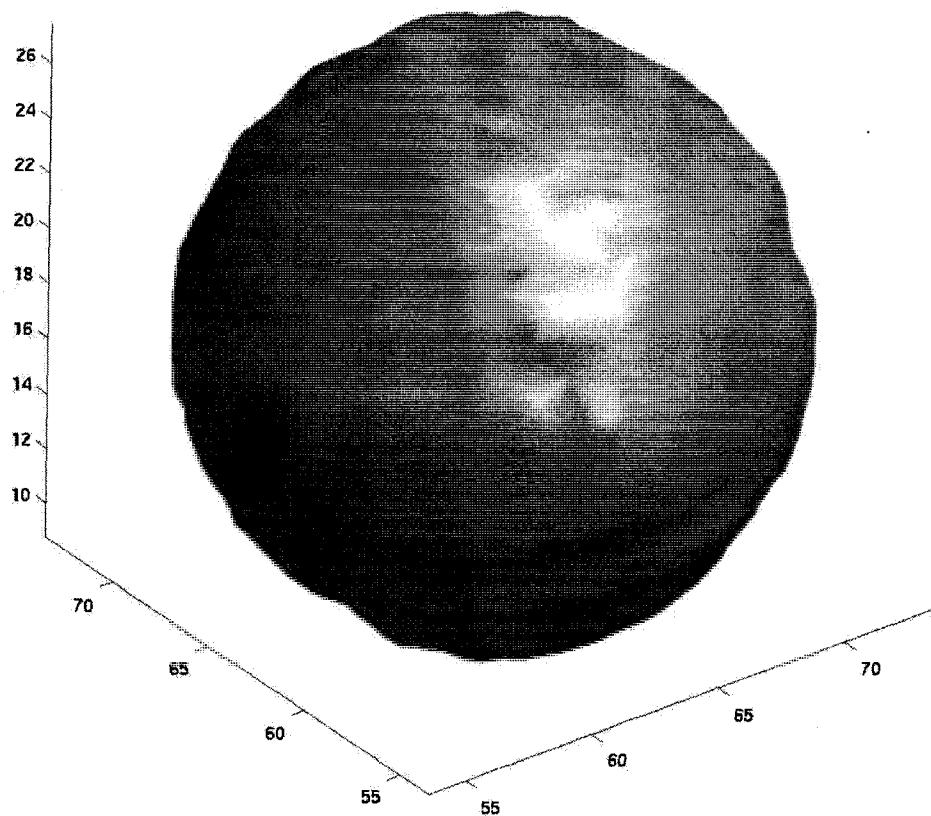


FIGURE 4.17 – Reconstruction algébrique 3D sans bruit et avec régularisation.

TABLEAU 4.7 – Comparaison analytique/algébrique.

	Méthode analytique	Méthode algébrique
Temps de calcul	1 min	30 min
Robustesse par rapport à la géométrie	–	++
Gestion du bruit	+	++

#### 4.3.4 Conclusions

Nous avons vu que les reconstructions algébriques permettent de bien tenir compte de la géométrie hélicoïdale. Ceci est moins le cas pour les techniques analytiques qui utilisent des interpolations qui ne sont plus valides lorsque le pas de l'hélice est trop important. Notre technique algébrique permet d'obtenir des images moins bruitées lorsque nous utilisons une régularisation adaptée.

Cependant notre technique a un défaut de taille : elle est beaucoup plus lente, car plusieurs itérations sont nécessaires pour minimiser le critère. Nous avons résumé ces conclusions au tableau 4.7.

### 4.4 Traitement de données réelles

L'objet de cette section est de valider notre méthode sur des données réelles. Nous voulons vérifier que notre modèle direct est suffisamment réaliste.

Nous voulons mettre en évidence plusieurs éléments :

1. Notre modèle direct est adapté aux scanners hélicoïdaux multi-barrettes utilisés en milieu clinique.
2. Nos reconstructions peuvent prendre en compte les sources volantes angulaire et axial.
3. La ROI permet d'améliorer la résolution des images.

Dans un premier temps, nous présenterons le cadre de nos expériences. Dans un deuxième temps, nous présenterons les reconstructions tomographiques effectuées sans

reconstruction par région d'intérêt (ROI). Troisièmement, nous présenterons nos reconstructions faites avec ROI.

#### **4.4.1 Fantôme et cadre des expériences**

Ces données sont de tailles plus conséquentes et ont été acquises grâce à des scanners de l'Hôpital Notre-Dame à Montréal. Elles ont été acquises à partir d'un fantôme réel produit sur mesure en collaboration avec le LBUM pour mettre en évidence les artefacts métalliques. Nous rappelons que nos travaux s'inscrivent dans un projet plus large ayant comme objectif la réduction d'artefacts métalliques au niveau de stents. Ainsi, le fantôme utilisé modélise un vaisseau avec son milieu environnant. Des stents ont été introduits autour du vaisseau à certaines cotes. De plus, des billes de verre et d'acier ont été introduites pour mettre en évidence la réduction d'artefacts métalliques et pour vérifier la reconstruction d'objets de petite taille. Les vaisseaux sont représentés par des cylindres dont l'axe coïncide avec l'axe de rotation du scanner.

Les données utilisées sont issues du scanner SOMATON SENSATION 16 barrettes. Pour valider notre méthode nous avons utilisé deux protocoles d'acquisition dont les détails se trouvent en annexe du mémoire.

Le premier est un protocole 'AAA' ayant du FFS en z (cf chapitre 3) et l'autre est un protocole 'Inner Ear' comportant du FFS angulaire et axial. Les détails de ces protocoles se trouvent en annexe. Dans cette section nous ferons des reconstructions sur les données des deux protocoles. Nous avons résumé ces protocoles au tableau 4.8.

#### **4.4.2 Reconstruction de données réelles sans ROI**

Afin de vérifier que le modèle direct est adapté à la géométrie hélicoïdale, nous faisons tout d'abord des reconstructions sans région d'intérêt. Nous effectuons deux expériences pour cela :

- Expérience1 : en prenant en compte le FFS, protocole AAA : grille de 256 par 256 par 34 sur une zone de 50 cm sur 50 cm sur 2.55 cm.

TABLEAU 4.8 – Comparaison AAA/InnerEar.

Protocole AAA	Protocole InnerEar
$N_b = 16$	$N_b = 16$
$N_{phi} = 580$	$N_{phi} = 580$
$N_d = 672$	$N_d = 672$
$h = 13.2mm$	$h = 6.6mm$
FFS angulaire : non	FFS angulaire : oui
FFS axial : oui	FFS axial : oui

- Expérience2 : en prenant en compte le FFS, protocole InnerEar : grille de 128 par 128 par 34 sur une zone de 50 cm sur 50 cm sur 2.55 cm.

Pour le protocole InnerEar, il y a deux fois plus de projections que pour le protocole AAA : c'est pour cela que nous devons faire des reconstructions de taille plus petite pour ce protocole. En effet nous sommes limité par la mémoire nous permettant de stocker les matrices de projection  $A$ . Pour avoir des résolutions supérieures permettant de comparer nos images avec celles de SIEMENS, nous serons obligés d'utiliser de la ROI.

Sur les figures 4.18 (protocole AAA) et 4.19 (protocole InnerEar), nous pouvons visualiser diverses couches du fantôme. Ces couches sont perpendiculaires à l'axe ( $Oz$ ) de rotation. Ce sont des **couches transverses**.

#### 4.4.2.1 Effets de bord

Nos reconstructions ne prennent en compte qu'un seul tour d'hélice. Or les données sont basées sur un certain nombre de tours d'hélice. Il y a donc des effets de bord que nous pouvons remarquer à la couche 5 pour la figure 4.18 et aux couches 6 et 18 (légèrement) pour la figure 4.19.

#### 4.4.2.2 Des couches centrales bien reconstruites

Même si la résolution n'est pas comparable à celle du constructeur, dans les tranches centrales : 12,13 et 17 pour le protocole AAA (4.18) ou 9 et 12 pour le protocole InnerEar

(4.19), nous reconnaissons bien le fantôme dont les spécifications sont en annexe. Ceci nous indique que le modèle géométrique est adapté à la géométrie du scanner utilisé en milieu clinique, ce qui était un de nos objectifs. Effectivement, nous pouvons reconnaître les billes de verre (couches 12 et 13 de la figure 4.18) et même des bulles d'air que nous avions observées lors de l'acquisition sur la figure 4.18.

De plus, même si la résolution de la figure 4.19 est médiocre, nous reconnaissons les principales caractéristiques du fantôme ainsi que certains détails comme des billes de métal aux couches 12 et 18 de la figure 4.19. Cependant, pour obtenir des résolutions semblables à celles de SIEMENS nous sommes obligés d'utiliser de la ROI, ce que nous exposons au paragraphe suivant.

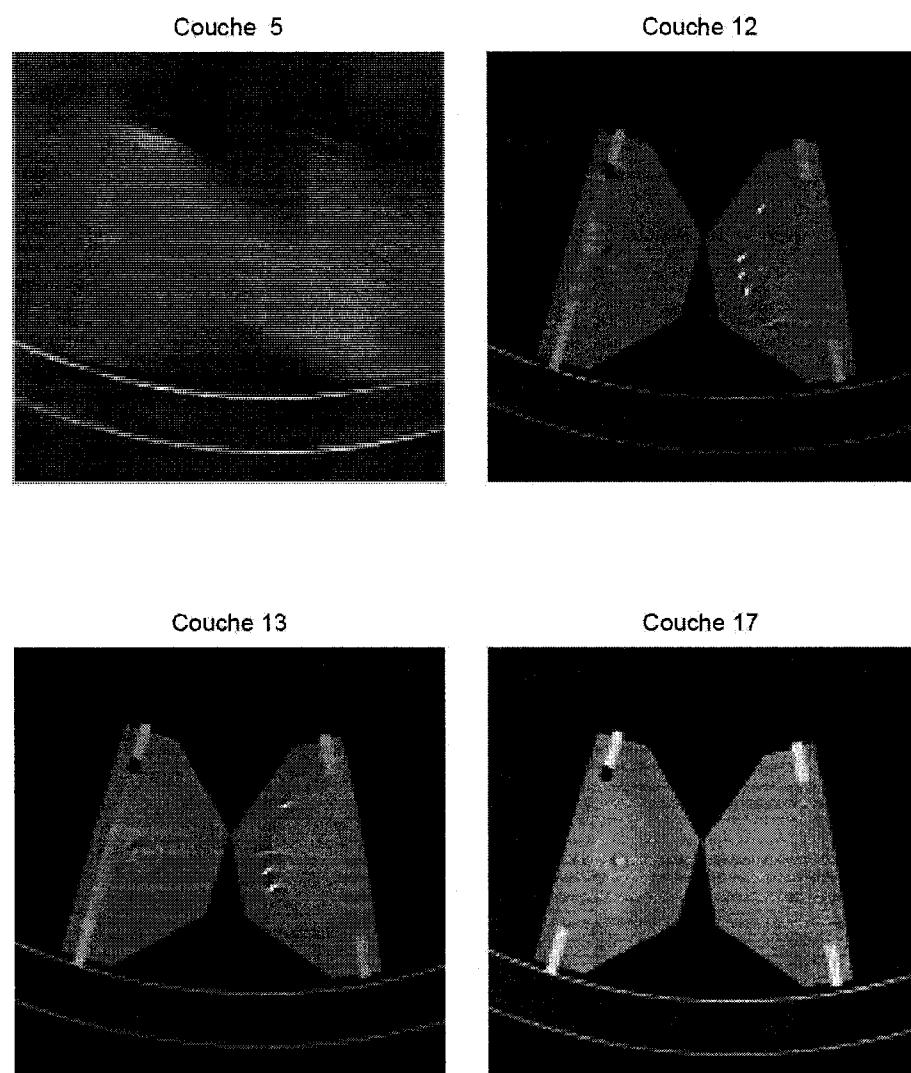


FIGURE 4.18 – Différentes couches reconstruites pour le protocole AAA (zone de 25 cm).

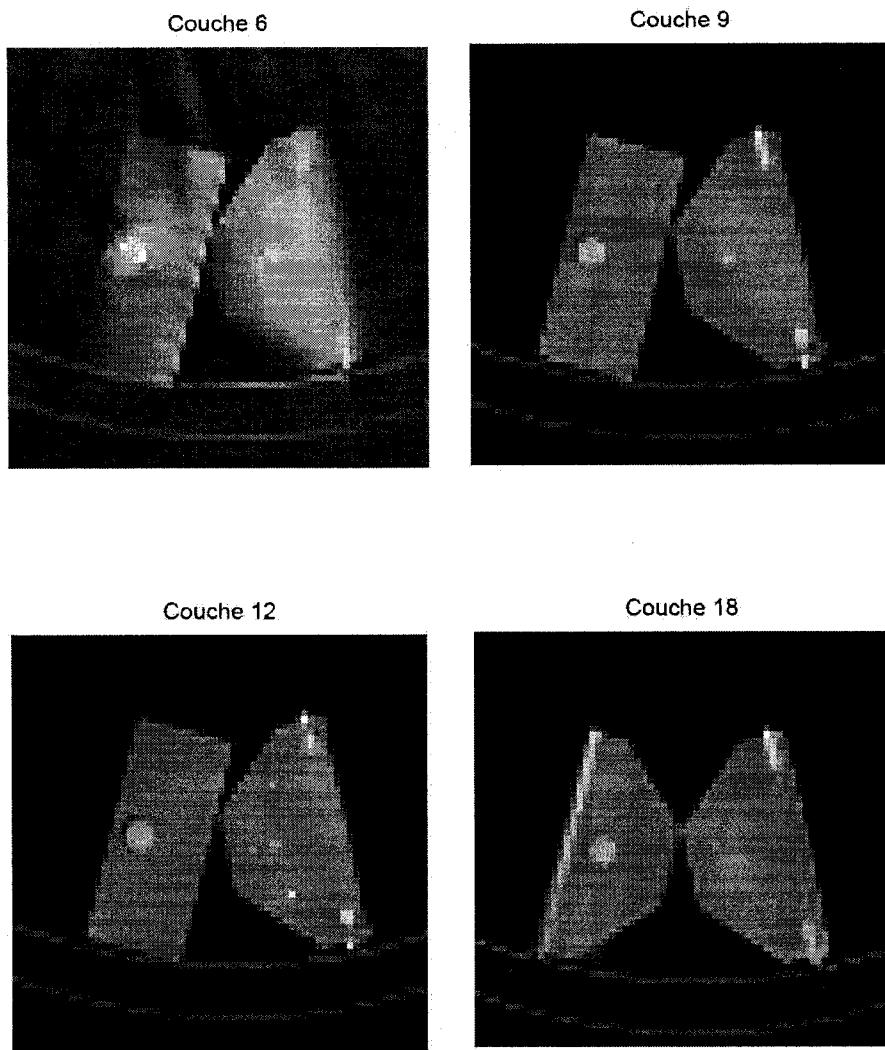


FIGURE 4.19 – Différentes couches reconstruites pour le protocole InnerEar (zone de 25 cm).

### 4.4.3 Reconstruction de données réelles avec ROI

Dans ce paragraphe, nous effectuons des reconstructions avec ROI sur deux protocoles différents. La ROI nous permet d'augmenter la résolution en reconstruisant une zone d'intérêt sur une grille plus fine, puisque les limites de mémoire nous empêchent d'obtenir ces résolutions pour des reconstructions à grilles homogènes qui se fait sur une plus grande zone.

#### 4.4.3.1 Protocole AAA avec FFS axial

- ROI1 : 300 sur 300 pour une zone imagée de 25 cm. La grille grossière est de taille 64 sur 64 pour une zone de 50 cm.
- ROI2 : 80 sur 80 pour une zone imagée de 8.6 cm. De même que pour ROI1 la grille grossière est de taille 64 sur 64.

Pour ROI1, nous observons trois choses :

- Sur la figure 4.22, nous comparons une coupe obtenue par SIEMENS à une reconstruction que nous avons effectuée. Nous observons que la reconstruction algébrique est beaucoup plus floue et contient moins de contraste. Cette reconstruction est obtenue sans prendre en compte le FFS.
- La prise en compte du FFS rend l'image plus nette. Sur la figure 4.23, nous proposons une reconstruction qui tient compte du FFS et nous la comparons à la coupe transverse correspondante de SIEMENS. En comparaison avec notre reconstruction obtenue sur la figure sans FFS, le contraste est amélioré et les frontières sont plus nettes. En effet, lorsque nous ne tenons pas compte du FFS, il y a une légère perturbation du modèle direct qui détériore l'image en la rendant plus floue.
- Des artefacts qui ressemblent à un effet d'angle partiel apparaissent. En présence de billes atténuateuses, nous observons sur la figure 4.24 une petite zone floue autour de ces billes. Nous avons tracé en figure 4.21 les contributions pour chaque couple angle de projection/détecteur du voxel correspondant à une des billes atténuateuses. Nous avons sommé les contributions de toutes les barrettes pour voir si tous les cônes émis par la source englobent le voxel qui nous intéresse. Ce n'est pas le cas :

certains angles de projection (abscisse de la figure 4.21) n'ont pas de contributions. Nous pouvons vérifier cela théoriquement à l'aide de la figure 4.20. Le voxel qui nous intéresse est approximativement équidistant de la source et du plan de détecteurs. Ceci implique que le cône émis par la source traverse une zone d'environ 6mm. Or la source parcourt 13.2mm dans le sens de l'axe z. Donc pour certains angles de projection, le voxel qui nous intéresse n'est pas traversé par le cône. Les images SIEMENS sont dénuées de ces artefacts. SIEMENS effectue un post-traitement de ses données pour atténuer ces artefacts, mais nous ne connaissons pas en détail leurs processus de traitement d'images. Ceci est une limite de notre méthode.

Pour ROI2, nous tenons compte du FFS axial pour ce protocole AAA. La région d'intérêt a une grille bien plus fine que la grille grossière qui constitue le fond comme nous pouvons le constater sur la figure 4.25. Nous constatons sur les figures 4.25 et 4.26 que le contraste à l'intérieur des fantômes est supérieur à celui de SIEMENS sur la grille fine. Cependant, nous observons un bruit de reconstruction que nous n'avions pas pour des grilles moins fines. Ce bruit pourrait être diminué avec de la régularisation comme nous l'avons vu au paragraphe 4.2.3. De même que pour ROI1, nous obtenons des artefacts d'angles partiels.

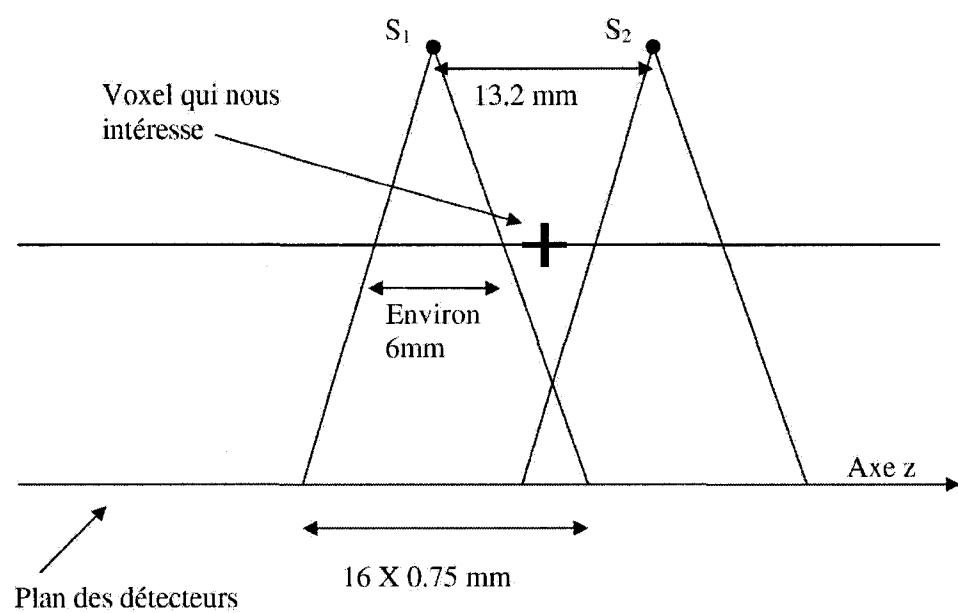


FIGURE 4.20 – Parcours de la source.

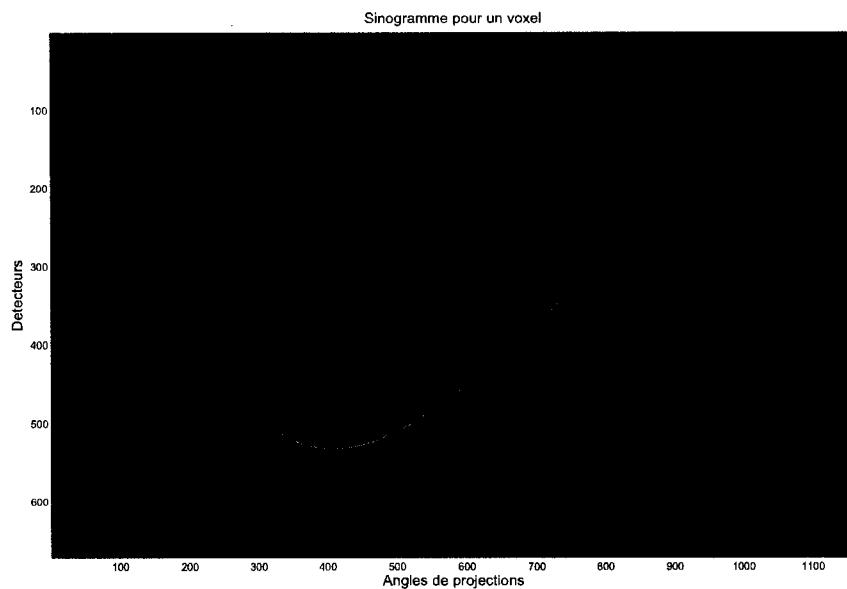


FIGURE 4.21 – Contributions d'un voxel sur le système de détecteurs.

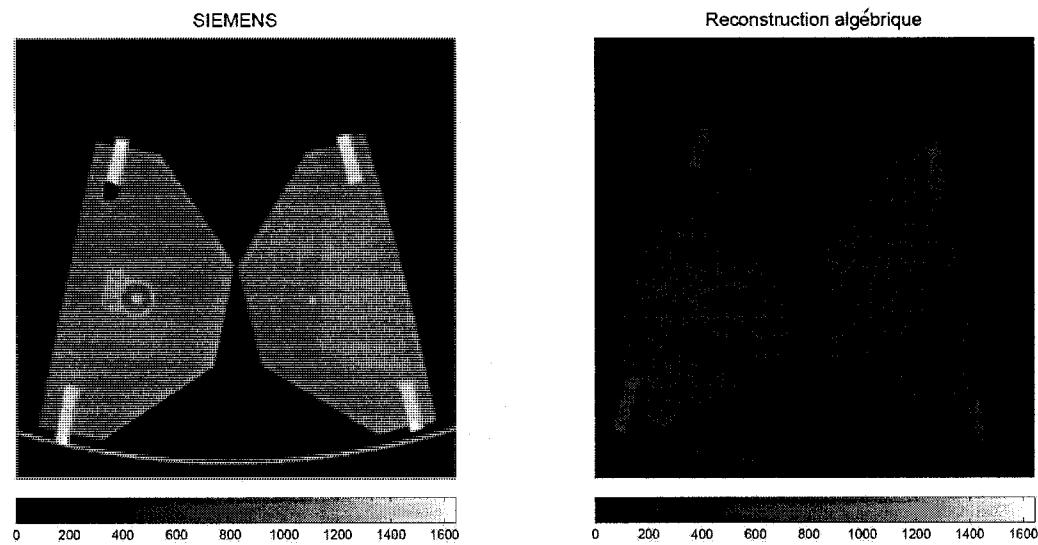


FIGURE 4.22 – À gauche : reconstruction Siemens. À droite : Reconstruction sans FFS avec une grande ROI (zone de 25 cm).

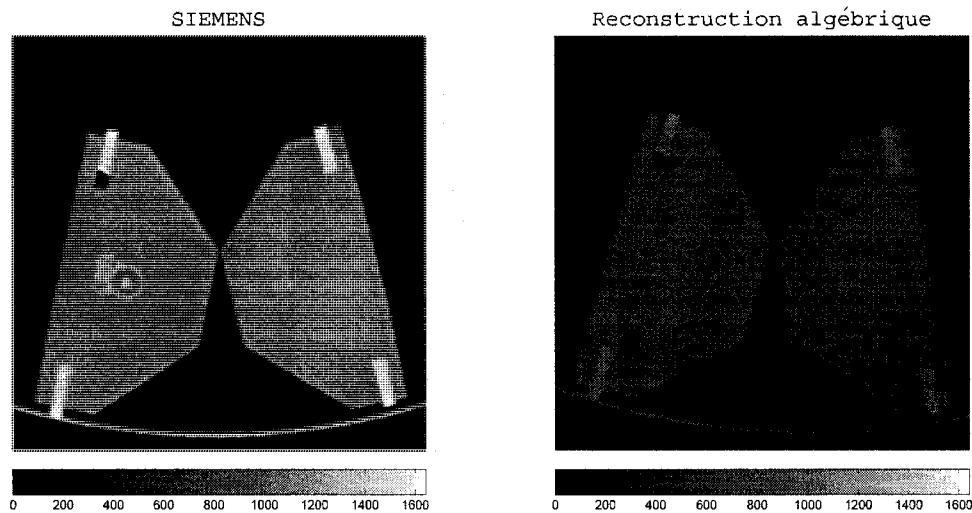


FIGURE 4.23 – À gauche : reconstruction Siemens. À droite : Reconstruction en prenant en compte le FFS avec une grande ROI (zone de 25 cm) sans bille atténuante.

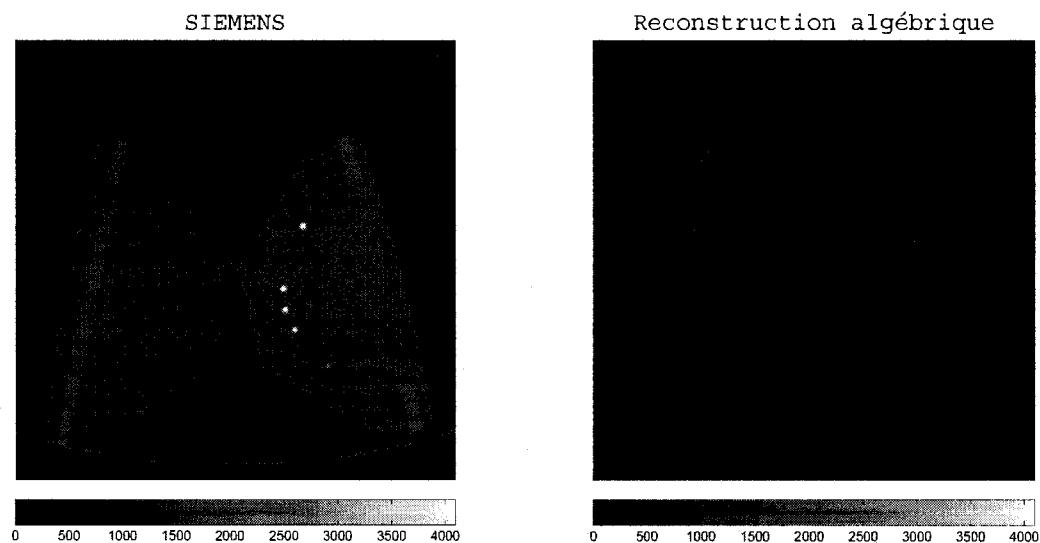


FIGURE 4.24 – À gauche : reconstruction Siemens. À droite : Reconstruction en prenant en compte le FFS avec une grande ROI (zone de 25 cm) avec des billes atténuantes.

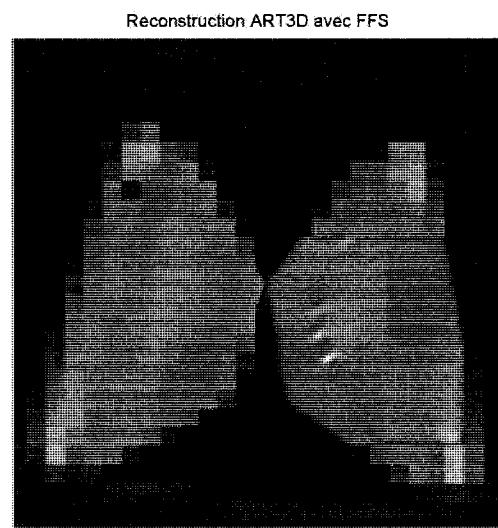


FIGURE 4.25 – À gauche : reconstruction Siemens. À droite : Reconstruction en prenant en compte le FFS avec une petite ROI (zone de 8.6 cm) avec billes atténuantes.

Reconstruction ART3D avec FFS

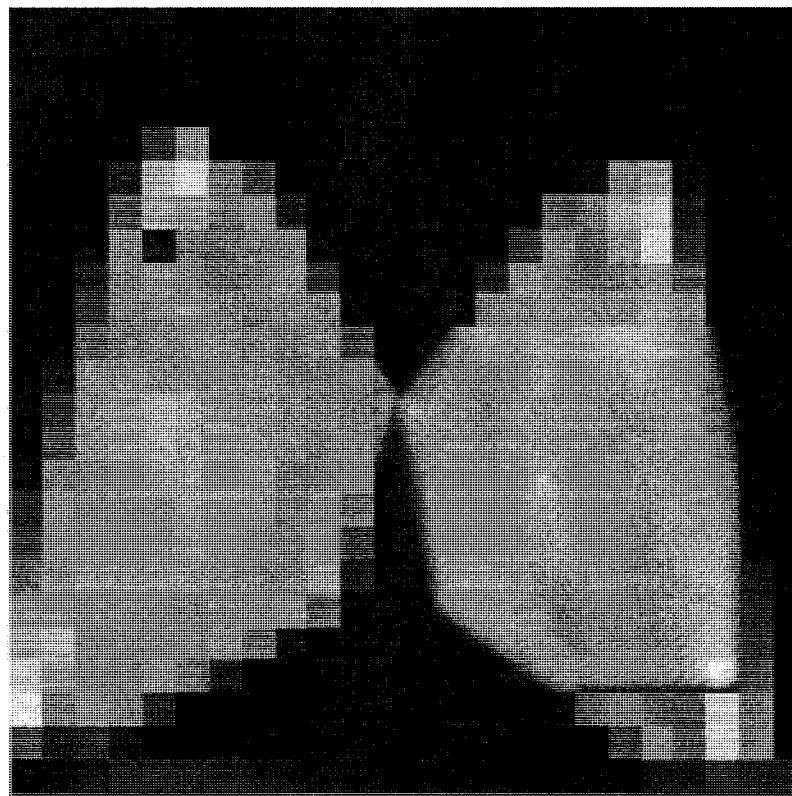


FIGURE 4.26 – À gauche : reconstruction Siemens. À droite : Reconstruction en prenant en compte le FFS avec une petite ROI (zone de 8.6 cm) sans bille atténuante.

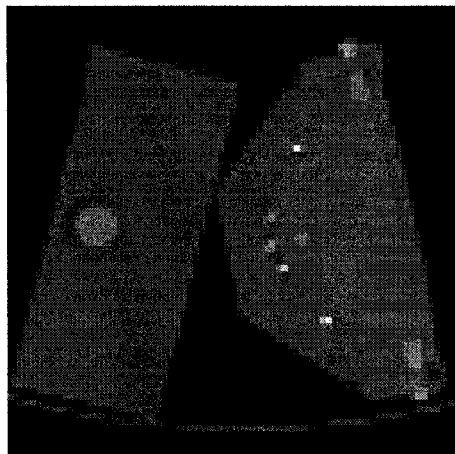
#### 4.4.3.2 Protocole InnerEar avec FFS angulaire et axial

Pour ce protocole, nous nous intéressons à une reconstruction par ROI sur une zone de taille équivalente à celle de SIEMENS sur une grille moins fine puisque les données de ce protocole sont plus volumineuses et que nous sommes limités par la taille de la mémoire. Dans une première expérience, nous considérons une grille de discréétisation de taille 128 sur 128 sur 26 pour une zone imagée de 25 cm sur 25 cm sur 1.95 cm. Dans une deuxième expérience, nous considérons une grille de 210 sur 210 sur 20 pour une zone imagée plus petite de 18.75 cm sur 18.75 cm sur 2 cm.

Nous rappelons que ce protocole comporte aussi bien du FFS en z qu'en  $\alpha$  contrairement au protocole précédent.

Sur la figure 4.27 nous pouvons remarquer que la reconstruction obtenue sans tenir compte des sources volantes (image du haut) est un peu plus bruitée que celle obtenue en tenant compte de ces aspects du modèle physique (image du bas). Mais les deux reconstructions sont quasiment identiques. Ceci nous montre que le problème direct est mieux pris en compte vu que les artefacts de reconstruction sont un peu moins visibles. Pour la reconstruction de la figure 4.28 nous constatons que l'absence d'artefacts d'angles partiels a disparu puisque le pas de l'hélice est deux fois plus petit. Ceci confirme l'explication des artefacts remarqués sur la figure 4.24 qui n'apparaissent que pour des pas trop importants. En effet, pour cette reconstruction, le pas n'est seulement de 6.6mm et tous les voxels sont traversés par tous les cônes émis.

Reconstruction ART sans FFS



Reconstruction ART avec FFS

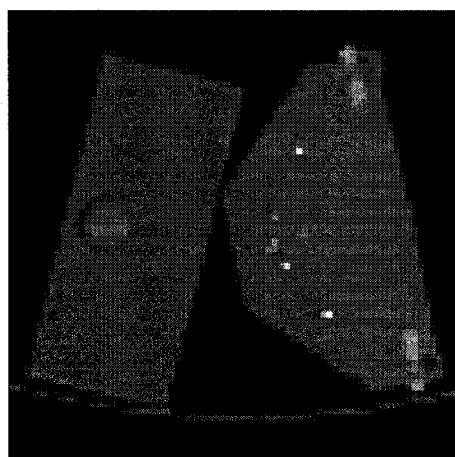


FIGURE 4.27 – Reconstructions avec et sans FFS (angulaire + axiale).

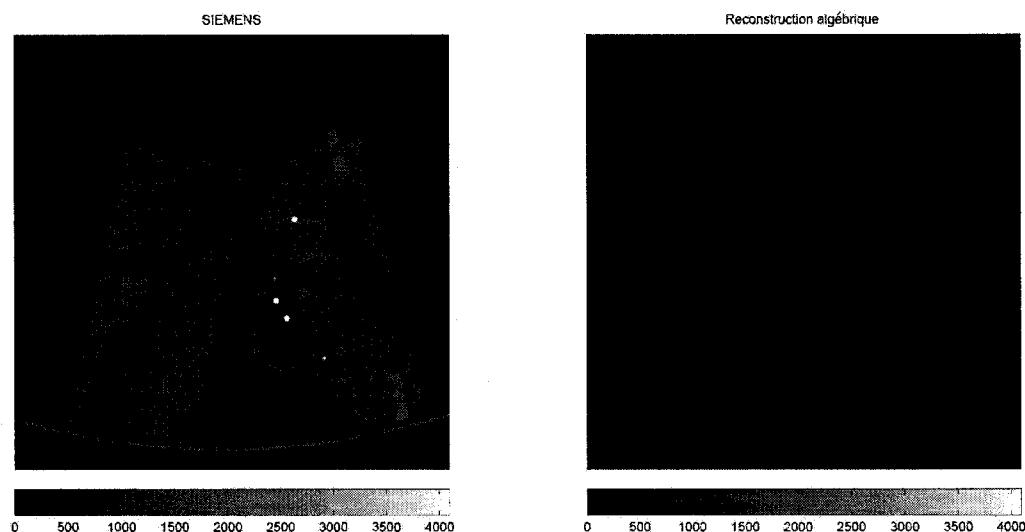


FIGURE 4.28 – Reconstruction *InnerEAR* avec une résolution *infra-millimétrique*.

#### 4.4.4 Conclusions sur le traitement de données réelles

La limite principale de notre méthode de reconstruction algébrique est qu'elle est beaucoup plus lente. C'est dû au caractère itératif de la méthode. Elle utilise énormément de mémoire : jusqu'à 7 Go pour des reconstructions de taille 300 par 300 par 34 voxels pour le protocole AAA. La deuxième limite de la méthode est le problème d'artefacts d'angles partiels que nous avons décrit au paragraphe 4.4.3.1. Pour un pas important comme celui du protocole AAA et en présence d'objets de faible dimension selon l'axe  $z$  (comme les petites billes), nous voyons apparaître des artefacts d'angles partiels. Cette dégradation n'est pas problématique dans le cadre de suivi de stents puisque ces objets sont quasi cylindriques. Ce sont les limites principales de la méthode et cela explique l'absence de techniques algébriques dans la littérature sur des données réelles.

Malgré cet avantage de taille, à résolution équivalente, les images reconstruites sont de qualité semblable. Par ailleurs, la technique est très adaptée pour faire de la reconstruction par région d'intérêt tandis que les techniques analytiques s'y prêtent moins naturellement. De plus, notre modèle servirait aussi dans un modèle polychromatique, ce qui permettrait de réduire les artefacts métalliques. Il suffirait pour cela d'adapter le critère à ceux vus au paragraphe 1.4.3.3.

### 4.5 Prise en compte de l'épaisseur du faisceau

Dans cette section, nous souhaitons vérifier l'efficacité de notre méthode de réduction d'artefacts dus à l'épaisseur de faisceaux. Pour ce faire, nous avons élaboré un modèle direct qui calcule pour chaque détecteur la contribution du faisceau émis. Nous présenterons les caractéristiques de ce simulateur. Ensuite, nous exposerons les résultats obtenus avec nos reconstructions en vérifiant si la technique innovante (cf. paragraphe 2.3) proposée permet de réduire la détérioration de l'image due à l'épaisseur du faisceau.

TABLEAU 4.9 – Comparaison scanner/méthode algébrique.

	Reconstruction scanner industriel	Méthode algébrique
Qualité des images	++	++
Résolution maximale pour une zone de 25 cm	0.5 mm	0.8 mm
Temps de calcul	1 min	entre 2h et 5h
Robustesse par rapport à la géométrie	++	+
Gestion du bruit	++	++

#### 4.5.1 Méthodologie des simulations

Nous utilisons un fantôme numérique sphérique comme pour les deux premières sections de ce chapitre. Nous nous plaçons dans le cadre de deux hypothèses, comme à la section 2.3 :

- **L'émission des photons est déterministe** :  $\mathbf{H}_2$ , ce qui équivaut à considérer que le nombre de photons est très élevé.
- **Les photons émis sont monochromatiques** :  $\mathbf{H}_3$ , ils ont la même énergie.

Pour simuler l'épaisseur des rayons, nous émettons plusieurs rayons minces pour un même triplet angle de projection-détecteur-barrette  $(\phi, \theta, n)$ . Ces rayons sont parallèles entre eux et forment un cylindre dont le centre est le point source idéal. Le faisceau épais est donc composé de plusieurs rayons minces. Le modèle direct pour un faisceau émis est donc le suivant :

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^K \exp(-l_k \mu)$$

Les indices  $k$  correspondent aux divers rayons du faisceau. Le faisceau est constitué de  $K$  rayons équirépartis dans un cylindre. Nous prenons  $K = 50$ . Les  $l_k$  se calculent de manière exacte comme au paragraphe 4.2.1.

TABLEAU 4.10 – Fantôme pour rayon épais.

Géométrie du tomographe	Géométrie du fantôme numérique
$N_b = 16$	Boule de centre (64, 64, 16)
$N_{phi} = 400$	Rayon 12
$N_d = 150$	$\mu = 1 \cdot pixel^{-1}$
$dz = 40/128cm$	
$dx = dy = dz$	
$db = 2dz$	
$R_d = 100cm$	
$R_f = 50cm$	
$h = 0$	

#### 4.5.2 Observation des artefacts dus à l'épaisseur du faisceau

Dans ce paragraphe, nous voulons observer des artefacts dus à l'épaisseur de faisceau. Nous générerons des données qui tiennent compte de l'épaisseur du faisceau et nous reconstruisons les images tomographiques sans en prendre compte. Afin de visualiser le plus nettement les artefacts, nous faisons figurer la différence entre une telle reconstruction et une reconstruction qui s'applique à des données de rayons infiniment fins. Nous visualisons cette différence sur la figure 4.29.

Nous remarquons que la sphère reconstruite a un flou autour de ses frontières. Ceci correspond à l'effet attendu : comme le faisceau est plus épais, plus de pixels contribuent à l'atténuation d'un rayon. L'image est aussi plus bruitée que celle obtenue sur des rayons infiniment fins, ce qui est dû à un phénomène de propagation de l'erreur dans tous les points de la solution, puisque le modèle de reconstruction est moins adapté.

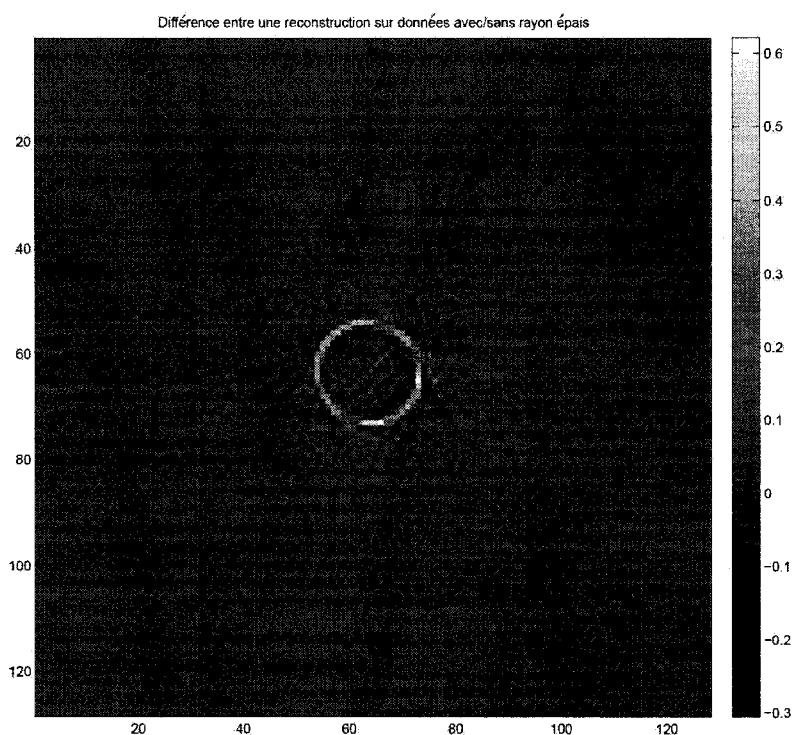


FIGURE 4.29 – Artefacts d'épaisseur de rayon (2 pixels de largeur) : différence entre la reconstruction et le fantôme numérique.

### 4.5.3 Reconstructions en prenant en compte l'épaisseur des rayons

Nous voulons vérifier si l'approche proposée réduit les artefacts observés à la figure 4.29. Afin de vérifier cela, nous effectuons 2 expériences, dans le cadre cone-beam avec le même fantôme numérique que précédemment :

1. **Expérience 1** : Nous simulons des projections avec un rayon épais de diamètre de 2 pixel. À partir de ces simulations, nous effectuons plusieurs reconstructions basées sur nos trois modèles directs : Thin(rayon infiniment mince), Sphere (voxels sphériques) et Affine (fonction de contribution affine des pixels).
2. **Expérience 2** : Nous simulons des projections avec un rayon épais de diamètre de 0.5 pixel.

Les résultats de la première reconstruction (Expérience 1) s'observent sur la figure 4.30. Nous voyons qu'avec un faisceau qui a une épaisseur importante de deux pixels, les artefacts ne se voient pas vraiment réduits. En bas de la figure 4.30 (ansi que pour la figure 4.31) nous avons introduit la différence entre la reconstruction et le fantôme numérique. Les différences maximales en intensités pour les méthodes Sphère et Affine sont du même ordre de grandeur de celles de Thin. Nous remarquons aussi que ces images reconstruites sont plus lisses et moins bruitées, ce qui est un effet comparable à de la régularisation. Ce lissage peut s'expliquer par le fait que les fonctions de contributions de pixels proposées sont plus lisses que celle utilisée pour les pixels carrés.

Pour des faisceaux assez fins, les reconstructions sont de qualité équivalente comme nous pouvons le constater sur la figure 4.31. La détérioration des images est minime puisque la perturbation des données est très faible.

Ainsi, pour des épaisseurs de faisceau qui ne sont pas trop importantes notre méthode n'améliore pas vraiment la qualité des images. Cependant, pour des épaisseurs de faisceau plus grandes les images sont de qualité comparable. Le bilan de cette méthode est donc mitigé. Il semble donc qu'il soit difficile de réduire les artefacts d'épaisseur de faisceau avec une modélisation géométrique linéaire.

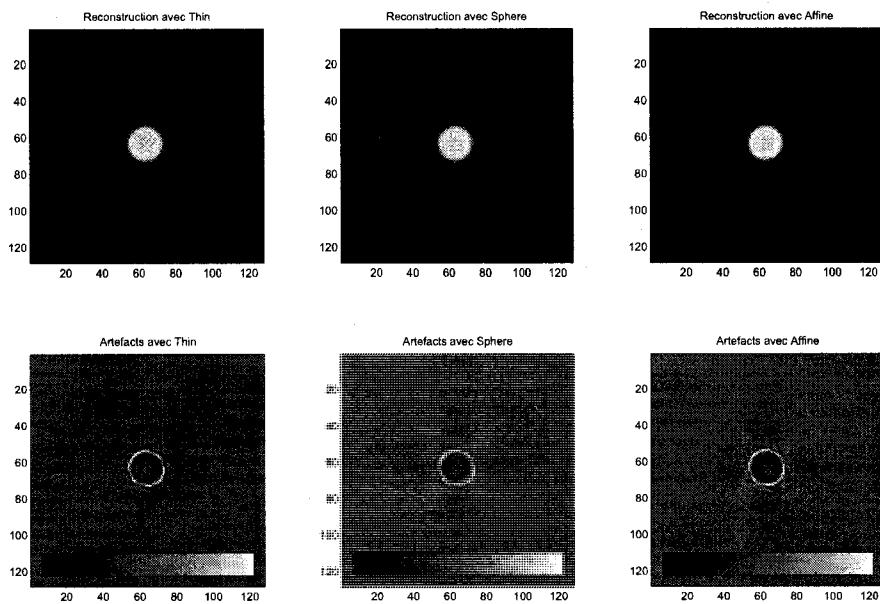


FIGURE 4.30 – Correction des artefacts dus à l'épaisseur du faisceau (2 pixels de largeur).

En haut : les reconstructions. En bas : les différences avec le fantôme numérique.

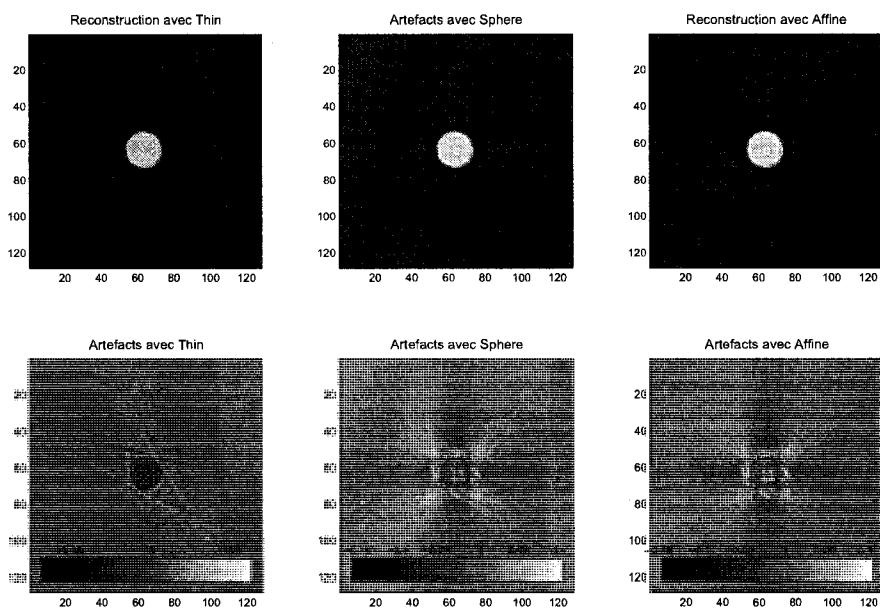


FIGURE 4.31 – Correction des artefacts dus à l'épaisseur du faisceau (0.5 pixel de largeur). En haut : les reconstructions. En bas : les différences avec le fantôme numérique.

## 4.6 Conclusions

Les résultats de cette partie nous montrent que nous avons réussi à développer une technique de reconstruction algébrique qui s'applique à la tomographie à rayons X dans le cadre 3D hélicoïdal. La méthode que nous avons développée est plus robuste que les algorithmes de Feldkamp.

De plus, nous avons été capable d'utiliser cette méthode sur des données réelles obtenues à partir d'acquisitions effectuées à l'Hôpital Notre-Dame de Montréal. Nos méthodes prennent en compte les dernières sophistications technologiques que sont les sources volantes qui s'ajoutent à la complexité de la géométrie tri-dimensionnelle du problème. Grâce à la ROI, nous avons obtenu des résultats de résolution équivalente que celles obtenues par SIEMENS. Mais notre technique nous donne plus de flexibilité puisque nous pouvons l'intégrer à un cadre polychromatique. Cependant, pour des objets étendus selon l'axe du tomographe, des artefacts d'angles partiels apparaissent pour des pas d'hélices importants.

En outre, la méthode proposée pour traiter les rayons épais semble lisser l'image reconstruite sans pour autant faire disparaître les artefacts dus à l'épaisseur de rayon. Pour les applications nécessaires en tomographie à rayons X cette amélioration ne semble pas suffisamment substantielle pour être systématiquement prise en compte.

## CHAPITRE 5

### CONCLUSION

Dans le cadre de notre projet de maîtrise, nous nous étions fixé plusieurs objectifs :

1. Développer une méthode algébrique adaptée à la tomographie 3D.
2. Améliorer la modélisation physique du problème direct.
3. Créer un modèle géométrique flexible et efficace.
4. Reconstruire des images tomographiques 3D à partir de données réelles.

Tout d'abord, tentons de voir dans quelle mesure les objectifs ont été atteints. Puis, tentons de voir quels sont les aspects qui n'ont pas été totalement satisfaits. Ensuite, nous verrons quelles sont les perspectives de ce projet puisque d'autres y ont travaillé dans le passé et y travailleront probablement pendant quelques temps.

#### 5.1 Objectifs atteints

L'objectif principal du projet de maîtrise était de développer une méthode algébrique adaptée au cas 3D. Notre méthode algébrique traite des données émises par un scanner comportant plusieurs barrettes de détecteurs et dont la source suit une trajectoire hélicoïdale. De plus, notre méthode permet de prendre en compte les sources "volantes" aussi bien en mode axial ("FFS" en  $z$ ) qu'en mode angulaire ("FFS" en  $\alpha$ ). Cet objectif a donc été atteint, puisque les reconstructions opérées sur des fantômes numériques sont d'une bonne qualité. Le caractère hélicoïdal est bien pris en compte puisque lorsque le pas de l'hélice est important nos reconstructions sont de qualité comparable au cas axial. Ceci n'est pas le cas pour des reconstructions utilisant l'algorithme de Feldkamp dont la qualité se dégrade lorsque le pas de l'hélice est trop important.

Le modèle géométrique (ou "matrice de projection") développé est flexible et peut s'appliquer à des cadres physiques différents. En effet le modèle proposé peut être utilisé

dans un cadre monochromatique ou polychromatique. Ceci est en adéquation avec nos objectifs.

Dans nos travaux de maîtrise, nous nous sommes intéressés au cadre monochromatique et nous avons constaté qu'en utilisant de la ROI (reconstruction par région d'intérêt) nos images étaient de qualité comparable à celles obtenues par SIEMENS pour des zones où il n'y a pas de billes (métalliques ou en verre). Pour des reconstructions sur des données simulées, les reconstructions sont vraiment meilleures lorsque le pas de l'hélice est important.

## 5.2 Objectifs non atteints

SIEMENS effectue pour le protocole d'acquisition qui nous intéresse des reconstructions sur des zones de 25 cm avec une grille de pixels de  $512 \times 512$ . À cause de notre limitation en mémoire nos reconstructions maximales pour la même zone étaient de taille  $300 \times 300$ . Il est évident qu'une telle différence de résolution nous empêche de comparer ce qui est comparable. Cependant, nous avons pu comparer des régions d'intérêt de résolution comparable. Néanmoins la ROI induit forcément des détériorations d'images qui sont absentes d'une reconstruction "complète", nous empêchant encore de comparer ce qui est comparable. Nous nous sommes contentés d'utiliser l'heuristique, tandis que Benoit HAMELIN, étudiant au doctorat, a étudié de façon plus détaillée la technique de ROI.

D'autre part, nous avions développé une méthodologie qui avait pour objectif de réduire des artefacts dus à l'épaisseur des faisceaux de rayons X. Nous avons tenté d'atteindre cet objectif en maintenant la linéarité du modèle d'émission des données, en modifiant l'opérateur géométrique de projection  $A$ . Mais les reconstructions obtenues donnent un résultat mitigé. Lorsque le faisceau a une épaisseur très importante, les images reconstruites sont de qualité comparable à celles qu'on obtient sans prendre en compte l'épaisseur. Ceci est normal puisqu'il s'agit d'une méthode développée pour des rayons dont l'épaisseur ne serait pas trop grande. Dans le cas où l'épaisseur est moins importante, les résultats obtenus ne sont guère meilleurs. Ainsi, les avantages de

cette méthode ne sont pas suffisamment significatifs pour justifier l'utilisation de cette méthodologie.

### 5.3 Perspectives du projet

Ce projet avait pour but d'élaborer une méthode algébrique qui permettra de faire des reconstructions qui utilisent un modèle polychromatique. Plusieurs perspectives du projet peuvent être envisagées :

1. **Accélérer l'obtention des reconstructions.** Des reconstructions dont la résolution est comparable à celle de SIEMENS ne s'obtiennent en 3D qu'en cinq heures de temps ou plus. Ces temps de calcul peuvent être raccourcis en faisant de la **parallelisation** des algorithmes ou en attendant que des ordinateurs plus rapides accèdent au marché.
2. **Gérer des zones de reconstructions avec une taille de  $512 \times 512$ .** Ceci peut se faire par de la **parallelisation** ou avec des ordinateurs ayant **plus de mémoire vive** en passant à des ordinateurs ayant 16 Go de mémoire vive qui existent déjà sur le marché.
3. **Reconstruire des données réelles sous l'hypothèse polychromatique.** Pour cela il suffit d'utiliser les différentes parties du projet du Laboratoire d'Imagerie par Optimisation Numérique. Comme nous l'avons dit, notre modèle géométrique (ou matrice de projection) peut aussi s'utiliser dans un cadre polychromatique. Il suffit de minimiser le critère polychromatique au lieu du critère monochromatique, ce que nous n'avons pas fait puisque notre objectif était de valider le modèle géométrique 3D.

## RÉFÉRENCES

- ALLAIN, M., GOUSSARD, Y. ET IDIER, J. 2002. « Regularized approach in 3d helical computed tomography ». *Proceedings of the second Joint EMBS/BMES Conference*. P. 943–944.
- ANDERSEN, A. 1989. « Algebraic reconstruction in ct from limited views ». *IEEE Transactions on Medical imaging*. 8. P. 50–55.
- CARVALHO, B. ET HERMAN, G. 2007. « Low-dose, large-angled cone-beam helical ct data reconstruction using algebraic reconstruction techniques ». *Image and vision computing*. 25. P. 78–94.
- CENTER FOR DISEASE CONTROL AND PREVENTION. 2008. *Heart disease*. <http://www.cdc.gov/HeartDisease/>. Consulté le 20 avril 2008.
- CHOUZENOUX, E. 2007. *Modélisation du problème direct en tomographie à rayons x*. Mémoire de maîtrise, École Centrale Nantes.
- DE MAN, B., NUYTS, J., DUPONT, P. ET MARCHAL, G. 1998. « Metal streaks artifacts in x-ray computed tomography : a simulation study ». *IEEE Nuclear Science Symposium*.
- DEFRISE, M. ET CLACK, R. 1994. « A cone-beam reconstruction algorithm using shift-variant filgering and cone-beam backprojection ». *IEEE Transactions on Medical imaging*. 13. P. 186–195.
- DÉPARTEMENT DE MÉDECINE VÉTÉRINAIRE DE L'UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL. 2008. <http://www.medvet.umontreal.ca/chuv/imagerie/tomodensitometrie/>. Consulté le 20 avril 2008.
- ELBAKRI, I., ZHANG, Y., CHEN, L., CLINTHORNE, N. ET FESSLER, J. 2004. « Statistical reconstructions for quantitative ct applications ». *IEEE*. 1. P. 2978–2980.
- FELDKAMP, L., DAVIS, L. ET KRESS, J. 1984. « Practical cone-beam algorithm ». *J. Opt. Soc. Am. A*. 1. P. 612–619.

- FESSLER, J. 2007. <http://www.eecs.umich.edu/fessler/irt>.
- HAMELIN, B., GOUSSARD, Y. ET DUSSAULT, J. 2007. « Regularized region-of-interest x-ray tomographic reconstruction by local supersampling ».
- KACHELRIESS, M., KNAUP, M., PENSSEL, C. ET KALENDER, W. 2006. « Flying focal spot (ffs) in cone-beam ct ». *IEEE Transactions on nuclear science*. 53:3. P. 1238–1247.
- KAK, A. ET STANLEY, M. 2001. *Principles of computerized tomographic imaging*.
- KALENDER, W. 2005. *Computed Tomography*. Publicis.
- KATSEVICH, A. 2002. « Theoretically exact fbp-type inversion algorithm for spiral ct ». *SIAM Journal of Applied Mathematics*. 62. P. 2012–2026.
- KELBERT, M., I, S. ET WRIGHT, A. 2006. « Exact expression for the variance of the photon emission process in scintillation counters ». *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A*.
- KUDO, H., NOO, F., DEFRISE, M. ET RODET, T. 2002. « New approximate filtered backprojection algorithm for helical cone-beam ct with redundant data ». *IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*. 3. P. 10–16.
- MATEJ, S. ET LEWITT, R. 1996. « Practical considerations for 3d image reconstruction using spherically symmetric volume elements ». *IEEE Transactions on medical imaging*. 15. P. 68–78.
- MENVIELLE, N., GOUSSARD, Y., ORBAN, D. ET SOULEZ, G. 2005. « Reduction of beam-hardening artifacts in x-ray ct ». *Engineering in Medecine and Biology 27 th annual conference, IEEE*. P. 1865–1868.
- MUELLER, K., YAGEL, R. ET WHEELER, J. 1999. « Anti-aliased 3d cone-beam reconstruction of low-contrast objects within algebraic methods ». *IEEE Transactions on Medical imaging*. 18. P. 519–537.
- NATIONAL INSTITUTE OF STANDARDS AND TECHNOLOGY. 2007. <http://physics.nist.gov/PhysRefData>. Consulté le 20 avril 2008.

- NGUYEN, N., TRUONG, T. ET GRANGEAT, P. 2005. « Radon transforms on a class of cones with fixed axis direction ». *Journal of Physics A : Mathematicl and General.* 38. P. 8003–8015.
- NOCEDAL, J. ET WRIGHT, S. 1999. *Numerical Optimization*. Springer.
- RADON, J. 1986. « On determination of functions from their integral values along certain manifolds ». *IEEE Transactions on Medical Imaging*. 5. P. 170–176.
- RISCHAL, A., YOUNG, S. ET SOUMEKH, M. 1997. « A reconstruction method for helical computed tomography ». *IEEE*. P. 2857–2860.
- ROH, Y. ET CHO, H. 2004. « Implementation of uniform and simultaneous art for 3-d reconstruction in an x-ray imaging system ». *IEE Proceedings Vis. Image Signal Process.* 151:5. P. 360–368.
- STIERSTORFER, K., RAUSCHER, A., BOESE, J. ET FLOHR, T. 2004. « Weighted fbp - a simple approximate 3d fbp algorithm for multislice spiral ct with good dose usage for arbitrary pitch ». *Physics in Medecine and Biology*. 49. P. 2209–2218.
- TIKHONOV, A. ET ARSENIN, V. 1977. *Solution of ill-posed problems*. Winston and Sons.
- TUY, H. 1983. « An inversion formula for cone-beam reconstruction ». *SIAM Journal Applied Mathematics*. 43. P. 546–552.
- WANG, G., YE, Y. ET YU, H. 2007. « Approximate and exact cone-beam reconstruction with standard and non-standard spiral scanning ». *Physics in medicine and biology*.
- YAN, M. ET ZHANG, C. 2005. « Tilted plane feldkamp type reconstruction algorithm for spiral cone beam ct ». *Medical Physics*. 32. P. 3455–3464.
- ZAMYATIN, A., TAGUCHI, K. ET SILVER, M. 2006. « Practical hybrid convolution algorithm for helical ct reconstruction ». *IEEE Transactions on Nuclear Science*. 53. P. 167–174.
- ZHANG, Y., ZHANG, L. ET ZHU, X. 2007. « Reducing metal artifacts in cone-beam ct images by preprocessing projection data ». *Int. J. Radiation Oncology Biol. Phys.* 67:3. P. 924–932.

**ANNEXE I****PROTOCOLE DU SCAN**

Nom du protocole : AAA CT16

Nombre de barrettes : 16

Taille des couches : [750 750 750 750]

Nombre de FFS : 1

TramesParRotation : 1160

Nombre de détecteurs : 672

Pas de l'hélice : 13.200 mm

Nom du protocole : "HND RENALES"

StudyDescription : "VascularHND RENALES (Adult)"

Readings : '32132'

SlicePhysical : '0.75'

SpiralRotTime : '0.500 s'

Direction du scan : 'MlCraniocaudal'

BodyPartExamined : "ABDOMEN"

FoVHorLength : '144 mm'

Noyau de convolution : "B20f smooth"

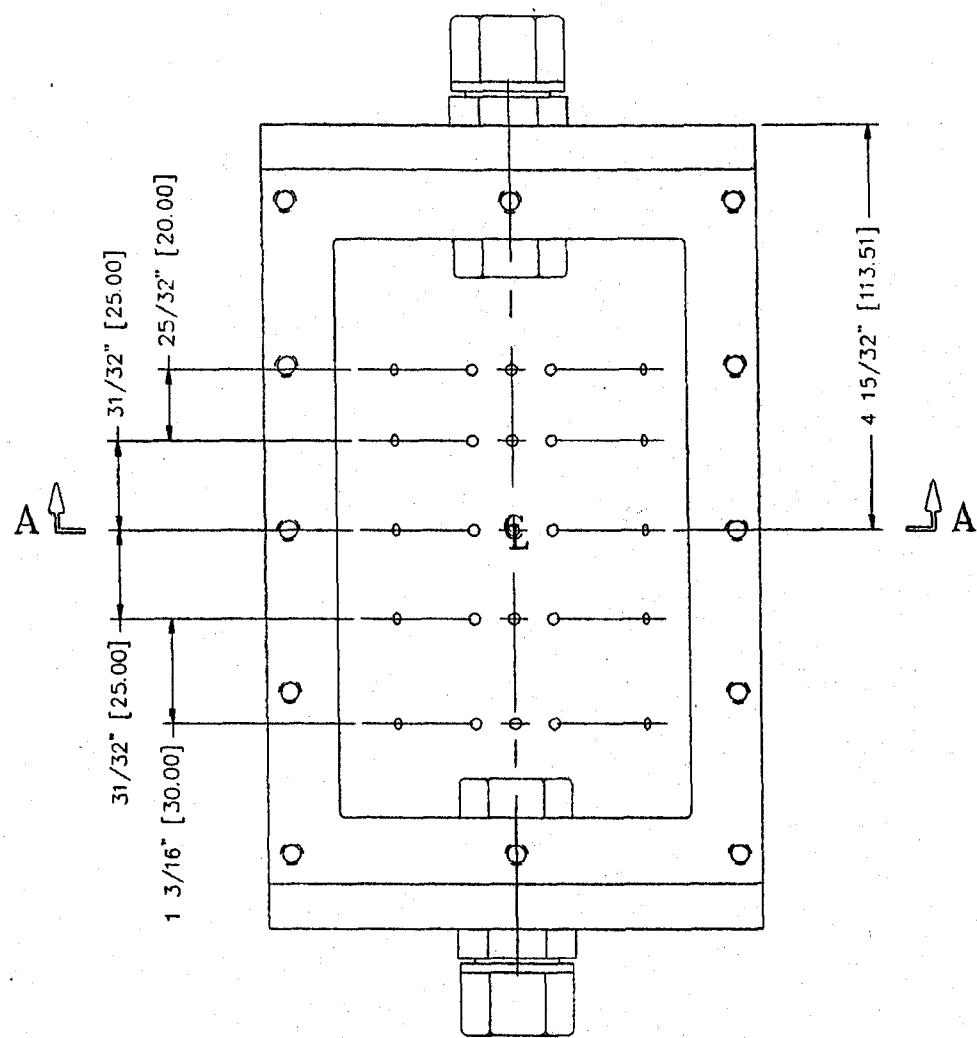
OrganFoV : '380'

SpiralReconIncr : '0.700'

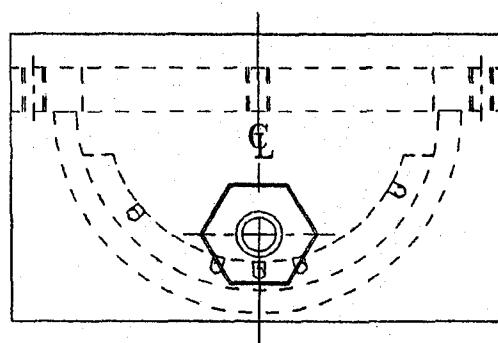
**ANNEXE II****FANTÔME UTILISÉ**

Un fantôme physique a été conçu par des chercheurs du "Laboratory of Biorheology and Medical Ultrasonics" (L.B.U.M.) dirigé par Guy CLOUTIER. Cette annexe présente ce fantôme qui a été scanné par tomographie à rayons X (SOMATON de SIEMENS), à l'hôpital Notre-Dame.

Ce fantôme est sensé reproduire deux vaisseaux périphérique face à face avec des stents qui sont placés à certains endroits.



VUE DU DESSUS



ELEVATION

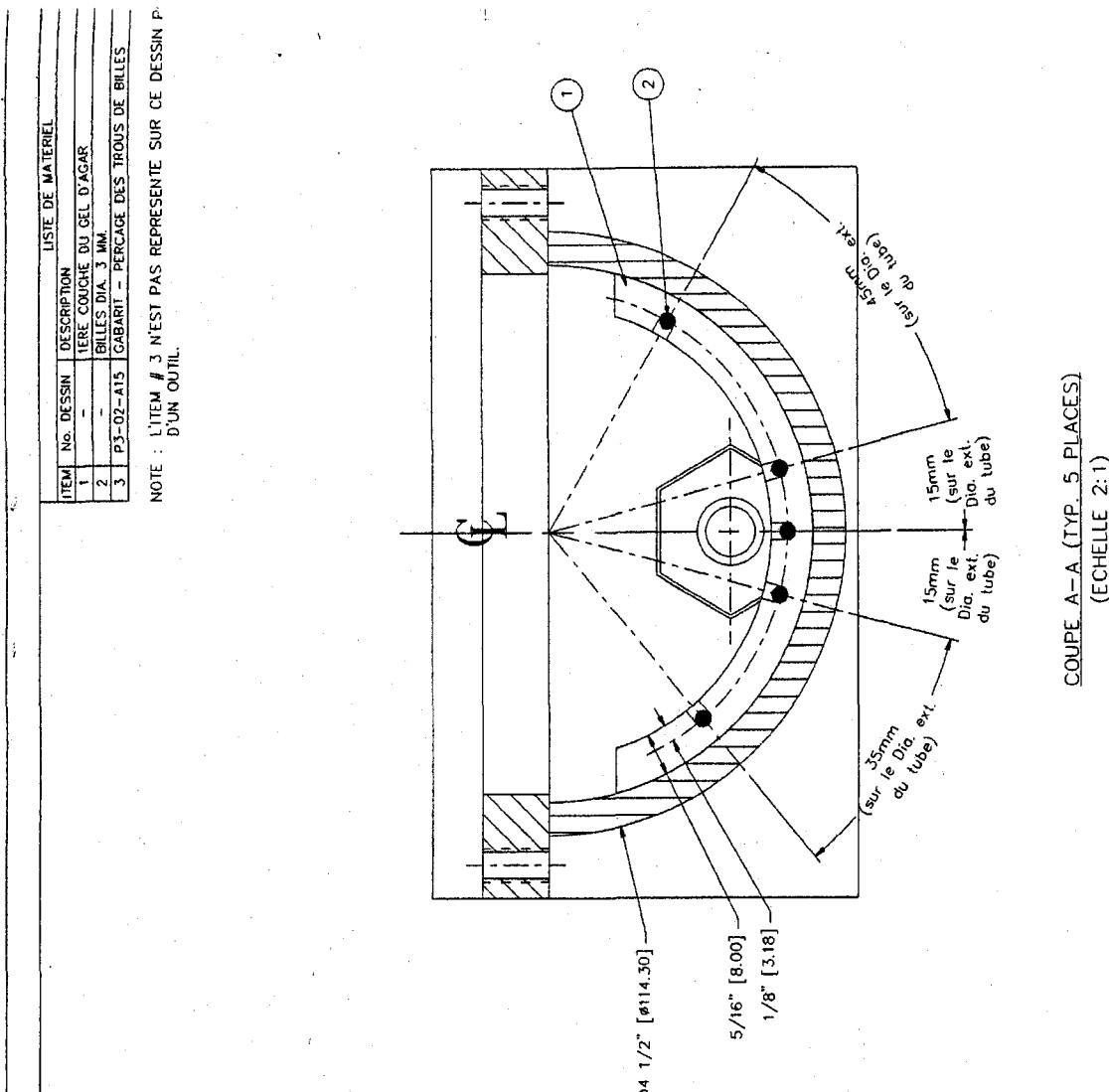


FIGURE II.2 – Vue d'une coupe du fantôme

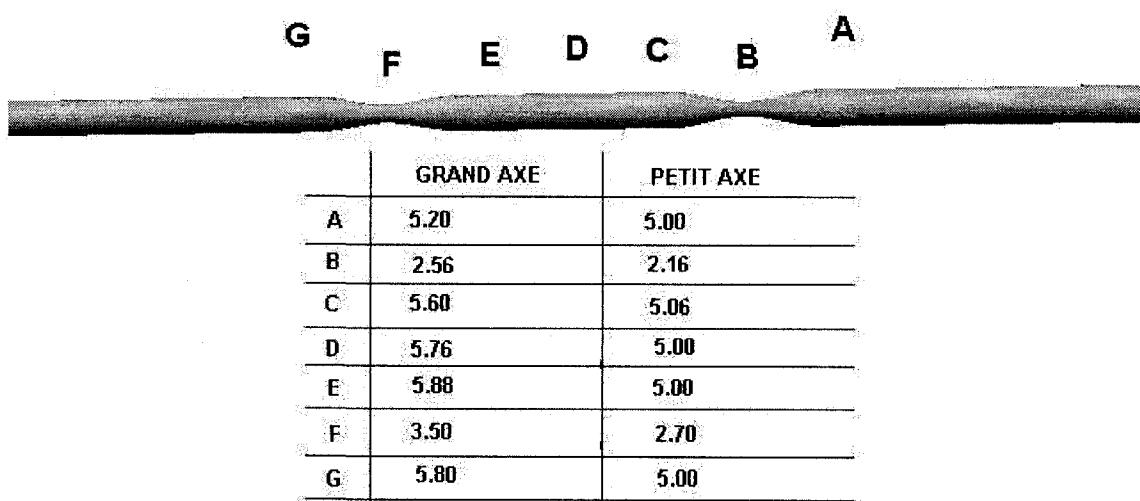


FIGURE II.3 – Position des stents