

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

TARIFICATION OPTIMALE POUR LE PLACEMENT MÉDIA

NICOLAS CHAN

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE
MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)

AVRIL 2008



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 978-0-494-41550-4

Our file Notre référence

ISBN: 978-0-494-41550-4

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

TARIFICATION OPTIMALE POUR LE PLACEMENT MÉDIA

présenté par : CHAN Nicolas

en vue de l'obtention

du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. DESAULNIERS Guy, Ph.D., président

M. SAVARD Gilles, Ph.D., directeur de recherche

M. MARCOTTE Patrice, Ph.D., codirecteur de recherche

M. AUDET Charles, Ph.D., membre

À ma famille, ma femme et mon enfant.

REMERCIEMENTS

Je souhaite remercier en premier lieu mes directeurs de recherche, Gilles Savard et Patrice Marcotte, pour leur soutien, leur patience et l'inspiration qu'ils ont donné à mes travaux.

J'aimerais également remercier Guy Desaulniers et Charles Audet pour avoir accepté d'examiner ces travaux et pour leurs commentaires qui ont permis de rendre ce mémoire plus clair.

Je remercie également Suzanne Guindon pour le temps accordé à la révision de ce mémoire et Francine Benoît pour son aide pour enfin réussir à imprimer ce mémoire.

Enfin mes remerciements vont aux membres du GERAD et de l'École Polytechnique Montréal sans qui ce mémoire n'aurait pas pu voir le jour.

RÉSUMÉ

Nous nous intéressons dans ce mémoire au placement média et au problème de tarification qui y est rattaché.

Chaque année, après avoir annoncé sa grille de diffusion pour la saison à venir, une compagnie télévisuelle reçoit des demandes de la part de différentes entreprises ou agences de publicités désirant diffuser leurs publicités sur une certaine partie de son espace publicitaire. L'achat et la vente des spots publicitaires durant la période qui suit l'annonce des programmes constitue l'up-market. A l'opposé, quand ce commerce a lieu peu de temps avant la diffusion des programmes au cours desquels vont être diffusés les spots négociés, on parle de scatter market. La chaîne télévisuelle doit ainsi établir le prix de chaque spot, problème de tarification, sélectionner les demandes qu'elle va satisfaire et décider de la répartition des ventes entre l'up-market et le scatter market, problème de placement.

Le prix d'un spot publicitaire pendant un programme sur une chaîne peut varier d'un client à un autre en raison de différents facteurs : la fidélité du client si c'est un client de longue date, le nombre de spots qu'il achète, combien de temps à l'avance l'achète-t-il, etc. Chaque spot publicitaire se distingue par son audience, intéressant différemment chaque client. De son côté, une chaîne doit arbitrer entre les différentes demandes de spots : pour une tranche donnée, celles-ci peuvent dépasser le nombre de spots disponibles, des entreprises vendant des produits concurrents peuvent être intéressées par les mêmes spots publicitaires, etc. Enfin, les compagnies télévisuelles ont un inventaire limité de spots publicitaires.

Comment la chaîne télévisuelle doit-elle donc fixer le prix de ses spots et allouer son espace publicitaire de façon à maximiser son revenu ? Pour aborder ce problème, nous développons un modèle à l'aide de la programmation biniveau. Cette approche

permet de prendre en compte les interactions entre la chaîne et ses clients via les prix des spots et leur disponibilité. La notion d'ensemble minimal est introduite pour comprendre les propriétés de l'ensemble réalisable. A l'aide de celle-ci, nous concevons un algorithme basé sur la génération de coupes pour résoudre ce programme biniveau. Les résultats numériques sont satisfaisants pour de petites instances, mais incitent à plus de développements pour de plus grandes instances.

Mots-clefs : Publicité, chaîne de télévision, gestion du revenu, programmation biniveau, sac-à-dos, plans coupants.

ABSTRACT

We are interested in this thesis in media broadcasting and in the pricing issue related to it.

Each year, after a television channel announces its show schedule for the upcoming season, it faces requests from different companies or advertising agencies which want to have a certain amount of their advertisements broadcast on the channel's advertising time. Buying and selling advertising spots during the period which follows the schedule announcement composes the up-market. On the other hand, when the transaction occurs just before the broadcasting of the shows during which the negotiated spots are going to be broadcast, we refer to the scatter market. The television network thus faces two issues. Pricing : how to price each spot. Media broadcasting : how to select requests it will satisfy and how to partition sales between up-market and scatter market.

For a given client, a spot price during a show on a network can be different regarding to several factors : the client's fidelity, the amount of spots it wishes to buy, how early it offers to buy them, etc. Each spot is differentiated by its audience which differently interests each client. A channel has to arbitrate between different spot requests : they can outnumber the amount of spots available on a given slot, competing companies can be interested in the same spots, etc. At last, television channels have a limited inventory of spots.

How should a television channel price its spots and allocate its advertising space in order to maximise its income? To tackle this problem, we develop a model based on bilevel programming. This way, we consider the interactions between a television channel and its customers through the price and the availability of the spots. We introduce the notion of minimal set to understand the properties of the feasible set.

We exploit this notion to design an algorithm based on cuts generation able to solve this bilevel problem. Numerical results are satisfying with small size problems but invite us to further developments in order to tackle larger ones.

Keywords : Advertising, revenue management, bilevel programming, knapsack, branch-and-cut.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	viii
TABLE DES MATIÈRES	x
LISTE DES TABLEAUX	xiii
LISTE DES FIGURES	xv
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 : REVUE DE LITTÉRATURE	4
1.1 : La gestion du revenu	4
1.2 : Le placement média	5
1.3 : La programmation biniveau	7
1.4 : Concepts de la programmation biniveau	8
CHAPITRE 2 : MODÈLE BINIVEAU POUR LE PLACEMENT MÉDIA	15

2.1 : Présentation du modèle	15
2.2 : Formulation mathématique	19
CHAPITRE 3 : PROPRIÉTÉS DU MODÈLE	26
3.1 : Reformulation du modèle	26
3.2 : Ensemble minimal	28
3.3 : Étude d'un exemple	29
3.4 : Ensembles minimaux non dominés	33
3.5 : Géométrie de la région induite	37
CHAPITRE 4 : ALGORITHME DE RÉOLUTION	49
4.1 : Génération des ensembles minimaux non dominés	49
4.2 : Algorithme exact de résolution	53
4.2.1 : Initialisation	54
4.2.2 : Problème relaxé modifié et génération de l'ensemble minimal	57
4.2.3 : Génération des coupes	58
4.2.4 : Validité de l'algorithme	59
4.3 : Exemple d'application de l'algorithme	61
CHAPITRE 5 : AMÉLIORATIONS DE L'ALGORITHME ET HEU- RISTIQUE	68
5.1 : Ajout initial de coupes	68
5.2 : Ajout progressif de coupes	70

5.3 : Heuristique : séparation du problème par client	72
CHAPITRE 6 : ANALYSE DES RÉSULTATS NUMÉRIQUES .	75
6.1 : Génération des instances	75
6.2 : Résultats numériques	76
CONCLUSION	85
BIBLIOGRAPHIE	87

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1 : Gradient de la fonction objectif sur l'exemple 3.1	32
Tableau 4.1 : Peu de variance dans le jeu de données. 5 tranches publicitaires pour le leader, 30 pour la concurrence, objectif d'audience 500.	52
Tableau 4.2 : Variance moyenne dans le jeu de données. 6 tranches publicitaires pour le leader, 6 pour la concurrence, objectif d'audience 500.	52
Tableau 4.3 : Grande variance dans le jeu de données. 6 tranches publicitaires pour le leader, 40 pour la concurrence, objectif d'audience 500.	52
Tableau 4.4 : Itérations de l'algorithme sur un exemple	63
Tableau 4.5 : Classement des ensembles minimaux non dominés par masse fixe	64
Tableau 6.1 : Catégorie démographique : 1 - Longueurs de spots : 3 - Clients : 5	82
Tableau 6.2 : Utilisation de la génération de coupes initiale ou dynamique avec les instances du tableau 6.2d	82
Tableau 6.3 : Catégorie démographique : 1 - Tranches du leader : 5 - Tranches de la concurrence : 40 - Durées : 3 - Client : 1.	83
Tableau 6.4 : Catégorie démographique : 1 - Clients : 5 - Longueurs : 3	84

Tableau 6.5 : Catégorie démographique : 1 - Clients : 1 - Longueurs : 3 . 84

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 : Géométrie de la région induite d'un programme biniveau . .	11
Figure 3.1 : Ensemble des polyèdres d'optimalité	32
Figure 3.2 : Non connexité de la région induite.	41
Figure 4.1 : Polyèdres d'optimalité	62
Figure 4.2 : Évolution du polyèdre d'optimalité de $\{1, 2\}$ pour le client 3	65

INTRODUCTION

Grâce à la publicité télévisuelle, une chaîne de télévision peut générer d'importants revenus. Par exemple, en 2007, à l'occasion du Super Bowl, la chaîne américaine CBS qui diffusait l'évènement a vendu une soixantaine de spots publicitaires de 30 secondes pour des prix allant jusqu'à \$2.6 millions de dollars le spot. L'évènement a été entièrement suivi par plus de 93 millions de téléspectateurs.

Dans le cadre de ce mémoire, nous cherchons à déterminer comment fixer les prix de ces spots de façon optimale, à savoir maximiser le revenu de la chaîne. En effet, les compagnies média, comme les chaînes télévisuelles ou les réseaux câblés, mais aussi les stations radios ont la capacité de fournir de larges audiences aux publicitaires. La vente de son espace publicitaire constitue la principale source de revenu pour une chaîne télévisuelle. En conséquence, chacune de ces chaînes, chaque année, négocie la vente de son espace publicitaire. Par exemple, aux États-Unis, une chaîne annonce autour du mois de mai la grille de ses programmes pour la saison à venir qui commencera en septembre. Puis, peu après, elle annonce ses prix pour chaque spot publicitaire. Suite à cela, elle reçoit des demandes de compagnies ou d'agences de publicités souhaitant acheter des spots de publicités proposés par la compagnie. Parfois, certaines de ses demandes peuvent être reçues simultanément.

Une partie de ces transactions se fait sur l'*up-market* : les principales compagnies intéressées négocient longtemps avant la diffusion des programmes concernés, pour des contrats publicitaires sur de longues périodes. La chaîne s'engage alors à garantir une certaine audience au client. Par exemple, aux États-Unis, ces négociations ont lieu avant septembre. L'autre partie se fait sur le *scatter market* : ce sont des demandes ponctuelles durant l'année, le prix des spots est alors plus élevé et la

chaîne fournit peu ou pas de garantie quant à l'audience reçue.

Dans les contrats négociés sur l'up-market, l'engagement de la chaîne de réaliser une certaine audience au client peut se manifester ainsi : si l'objectif d'audimat n'est pas atteint une fois diffusées toutes les publicités négociées au préalable, alors la chaîne peut soit verser une contre-partie financière à son client, soit lui fournir sans frais de nouveaux spots publicitaires afin d'atteindre l'objectif voulu. C'est l'incertitude relativement à la prévision d'audimat pour un spot donné qui engendre ces risques pour la chaîne. A contrario, pour les ventes sur le scatter-market, cette dernière n'a pas à faire face à de tels risques comme elle ne garantit aucun chiffre d'audience. Par contre, il se peut qu'elle ne vende pas tous ses spots sur le scatter-market, ce qui engendre un manque à gagner.

Le problème de l'allocation des créneaux publicitaires soulève en outre d'autres considérations. Un spot publicitaire se caractérise par le programme auquel il est rattaché, les différentes catégories démographiques de téléspectateurs qui le regardent, son audimat auprès de chacune de ces catégories, sa durée et sa date de diffusion. D'un autre côté, chaque client dispose d'un certain budget pour promouvoir un produit dans une industrie donnée auprès d'un objectif d'audience dans une catégorie démographique. En conséquence, la chaîne télévisuelle peut faire face à une demande pour certains spots publicitaires dépassant l'offre possible ou bien avoir deux clients désirant le même spot publicitaire pour promouvoir des produits concurrents. Ajouté à cela, la chaîne doit fixer le prix des spots publicitaires pour les rendre attractifs, ou non, de façon à attirer les clients et non à les inciter à acheter des spots des chaînes concurrentes.

Dans ces conditions, la chaîne télévisuelle doit décider quels créneaux publicitaires allouer à quel client et quels prix fixer pour l'attribution de ces créneaux.

Pendant longtemps et encore à l'heure actuelle, le problème d'allocation était notamment résolu à la main par des planificateurs. Désormais, chez certaines chaînes, on utilise déjà des techniques d'optimisation pour résoudre le problème de l'allocation des créneaux. Ici, nous allons étudier une nouvelle approche pour résoudre le problème nouveau d'optimisation concernant et l'allocation des créneaux et leur tarification : la modélisation biniveau. C'est un cas particulier des modèles hiérarchiques qui prend en compte l'interaction entre les deux acteurs, ici la chaîne télévisuelle et ses clients, en considérant les objectifs et contraintes de chacun, mais également l'offre de la concurrence. En prenant en compte ces interactions, l'approche biniveau permet d'ajuster les prix des créneaux horaires en fonction de son offre, de celle de la concurrence et de la demande, mais également de résoudre le problème de l'allocation. Les variables de décision du modèle seront donc le prix des créneaux publicitaires et le nombre de spots par tranche publicitaire vendus à chaque client.

Dans la suite de ce mémoire, nous effectuons en premier lieu une revue de la littérature sur les questions de gestion du revenu, de placement média et sur l'approche biniveau en général, mais aussi sur celle qui implique des problèmes de second niveau de type sac-à-dos. Au cours du second chapitre, nous présentons les hypothèses sous-jacentes et la formulation générale du modèle biniveau représentant le problème de la tarification optimale du placement média. Par la suite, dans la troisième partie, nous étudions les propriétés de notre modèle, ce qui nous amène dans un quatrième point à développer un algorithme de résolution. La cinquième partie propose des améliorations de l'algorithme qui consiste à générer plus de coupes pertinentes. Le dernier chapitre propose les résultats de différentes simulations numériques et analyse les résultats observés.

CHAPITRE 1

REVUE DE LITTÉRATURE

Dans cette partie, nous détaillons d'abord les informations relatives à la gestion du revenu et au placement média, recueillies à travers la lecture de différentes références bibliographiques. Puis, nous présentons plusieurs références sur la programmation biniveau, avant de donner un aperçu plus approfondi des concepts qui y sont liés.

1.1 La gestion du revenu

Auparavant communément appelé yield management, la gestion du revenu est une pratique qui s'est développée à partir des années 80, initialement pour l'industrie aérienne. Initialement, le yield management visait à déterminer l'inventaire des sièges, c'est-à-dire, la répartition dynamique des classes tarifaires en fonction de plusieurs paramètres comme le trajet, la classe à bord, la date de l'achat par rapport à la date du trajet ou aussi les prix de la concurrence.

Plus généralement, le but de la gestion du revenu est d'optimiser le revenu généré par la vente d'une ou de plusieurs ressources, les billets d'avions dans le cadre de l'industrie aérienne. C'est généralement la compétition entre plusieurs acheteurs, prêts à acheter ces produits, disponibles en quantité limitée, à des prix différents qui permet de générer des revenus variables. Ainsi, en jouant sur le prix des ressources, mais également leur disponibilité, le vendeur (la compagnie aérienne, par exemple) peut améliorer ses revenus. Les techniques de la recherche opérationnelle permettent

de modéliser puis de résoudre ces problèmes. Côté, Marcotte et Savard [6] abordent ainsi le problème de la tarification des billets d'avion.

Depuis, ses champs d'application se sont développés à d'autres problèmes. Par exemple, sur un réseau routier, quelles routes taxer et comment fixer le prix de ces taxes, de façon notamment à orienter le trafic routier? Labbé, Marcotte et Savard dans [13] ainsi que Didi-Biha, Marcotte et Savard [8] étudient ce problème. Nous pouvons aussi évoquer les problèmes de tarification des chambres d'hôtel, des locations de voiture, du stockage et de la vente de ressources énergétiques, etc. Un aperçu de la théorie, des avancées et des champs d'application de la gestion du revenu a été mis en page par Talluri et Van Ryzin [19].

Dans le cadre qui nous intéresse, nous cherchons explicitement à optimiser le revenu des chaînes télévisuelles engendré par la vente de son espace publicitaire à différentes compagnies et agences publicitaires.

1.2 Le placement média

Le problème du placement média pour les chaînes télévisuelles est un sujet qui gagne de l'intérêt dans la littérature scientifique. Le chapitre 10.5 du livre de Talluri et Van Ryzin [19] est une bonne introduction à ce sujet : il présente le contexte général de ce problème et offre un rapide aperçu des différentes problématiques qu'il soulève pour le revenue management. Nous pouvons distinguer ensuite trois types de publications scientifiques sur ce sujet, chacun différant en fonction de l'approche mathématique retenue pour étudier le problème.

Le premier type correspond à une approche déterministe du problème. Seule la question de la vente de spots publicitaires sur l'up-market est considérée. Bollapra-

gada et al. [2] étudient le cas d'un seul client pour lequel ils cherchent à définir l'ensemble optimal de spots publicitaires à vendre en prenant en compte sa requête initiale. Les auteurs considèrent celle-ci de façon détaillée : ses objectifs d'audience en fonction de plusieurs périodes de temps sur une saison, son budget selon ces périodes, ses préférences de programmes, sa longueur de spot préférentielle. Il introduit une flexibilité dans les contrats négociés en cherchant à proposer au client un mélange entre programmes à forte et à faible audience. Le modèle est un programme linéaire mixte résolu à l'aide d'un algorithme de recherche tabou. Les autres textes sur le sujet abordent uniquement la question de décider si oui ou non la chaîne doit accepter la demande des clients dont la liste des spots souhaités est connue et fixée. Ainsi, les textes de Zhang [21] et de Kimms et Müller-Bungart [12] prennent en compte l'ensemble des clients à un moment donné. Les requêtes des clients sont respectées strictement dans ces modèles, à ceci près que les clients peuvent proposer plusieurs choix de spots. Les modèles définis par Zhang et par Kimms et Müller-Bungart sont des programmes linéaires en nombres entiers qu'ils résolvent à l'aide d'heuristiques. Zhang propose une heuristique centrée sur une décomposition de Dantzig-Wolfe, tandis que Kimms et Müller-Bungart se basent sur des heuristiques définies à l'aide de solutions du problème relaxé. Dans tous ces textes, les prix des spots publicitaires sont considérés comme des données du problème.

La seconde catégorie étudie la question à partir d'une approche stochastique en prenant en compte l'incertitude sur la demande de spots publicitaires (sur l'up-market ou le scatter market) mais également sur les résultats d'audience, via l'audit. Araman et Popescu [1] ont développé des modèles stochastiques qui permettent de prendre en compte l'interaction entre l'up-market et le scatter market pour une chaîne télévisuelle. Pour un objectif d'audience donné, ils cherchent l'allocation qui minimise l'espérance de perte financière pour la chaîne, puis l'objectif d'audience

qui permet de maximiser le revenu espéré. Le texte de Gallego et al. [10] permet aussi de raffiner les tranches horaires mis en vente par une chaîne en étudiant la question des produits préemptables.

Enfin, la troisième catégorie, moins intéressante dans le cadre d'une approche biniveau, traite du problème de l'agencement exact des publicités au cours d'un programme. Dans les textes évoqués jusqu'à présent, les auteurs se préoccupent essentiellement d'affecter les spots publicitaires d'un client à différents programmes. Ils mettent de côté la question de la planification de ces spots au cours d'un programme. Cette question ne relève plus directement de problématiques propres à la gestion du revenu. Il s'agit de trouver une programmation qui assure un laps de temps suffisant entre les diffusions d'une même publicité et qui évite autant que possible les conflits d'intérêt entre des publicités pour des produits concurrents. Cette question est étudiée par Bollapragada et al. [4] et par Bollapragada et Garbiras [3].

Jusque là, les travaux sur le placement média ont considéré les prix des spots publicitaires sur un créneau comme des données du problème. La nouveauté ici va être de les considérer désormais comme des variables de décision du problème. Le principe du revenue management étant de prendre en compte le comportement des clients face aux prix proposés et à l'inventaire disponible, la programmation mathématique à deux niveaux offre un paradigme de modélisation tout à fait adapté pour prendre en compte cette interaction.

1.3 La programmation biniveau

Savard et Marcotte ont publié plusieurs articles sur la programmation biniveau, étudiant le problème sur des questions théoriques ou des problèmes concrets. Colson, Marcotte et Savard [5] présentent un aperçu général de la théorie en introduisant les

concepts de base, les méthodes de résolution existantes en fonction de la nature du problème biniveau et le lien avec les programmes mathématiques avec contraintes d'équilibre. Marcotte et Savard [17] soulignent le lien entre les programmes biniveau et des programmes combinatoires mieux connus ce qui permet de mieux comprendre la complexité algorithmique des programmes biniveau.

Labbé, Marcotte et Savard [13] étudient plus particulièrement le cas des programmes biniveau bilinéaires d'abord d'un point de vue théorique, puis d'un point de vue pratique en modélisant le problème de l'agencement des taxes sur un réseau routier à l'aide d'un tel programme biniveau. Celui-ci est notamment ramené à un programme linéaire mixte à un niveau. Avec le même type de modèle, Côté, Marcotte et Savard [6] étudient le problème de la tarification des billets d'avions pour une compagnie aérienne. Dans les deux cas, les problèmes de second niveau correspondent à des problèmes de flots.

Vicente, Savard et Judice [20] étudient la géométrie de l'ensemble réalisable et l'existence de solution optimale pour les problèmes biniveau linéaire à variables discrètes. Dempe et Richter [7] étudient un cas particulier de problème biniveau linéaire à variables discrètes où seules les variables de second niveau sont discrètes et le problème de second niveau correspond à un problème de sac-à-dos. Les variables de premier niveau paramètrent uniquement la contrainte. Les auteurs proposent des algorithmes d'énumération pour résoudre de façon exacte ou approchée le problème.

1.4 Concepts de la programmation biniveau

Un programme biniveau est un programme d'optimisation dont les variables peuvent être séparées en deux ensembles tels que le second a pour contrainte d'être solution d'un problème d'optimisation paramétré par le premier ensemble.

De façon général, un programme biniveau peut se formuler ainsi :

$$\begin{aligned} \max_{x \in X, y} \quad & F(x, y) \\ \text{s.à} \quad & G(x, y) \leq 0 \\ & y \in \arg \min_z \{f(x, z) : g(x, z) \leq 0\} \end{aligned}$$

Par la suite, pour faciliter la notation, nous utiliserons la forme suivante, appelée *forme verticale*, pour écrire un problème biniveau :

$$\begin{aligned} \max_{x \in X, y} \quad & F(x, y) \\ \text{s.à} \quad & G(x, y) \leq 0 \\ & \min_y f(x, y) \\ & \text{s.à} \quad g(x, y) \leq 0 \end{aligned}$$

On distingue dans le problème deux types de variables : les variables dites *de niveau supérieur* ou *de premier niveau*, ici x et les variables dites *de niveau inférieur* ou *de second niveau*, ici y . De la même façon, on distingue *l'objectif de niveau supérieur*, ici F , de *l'objectif de niveau inférieur*, ici f . Enfin, G et g sont respectivement *les contraintes de niveau supérieur* et *les contraintes de niveau inférieur*.

Introduisons quelques concepts supplémentaires. *Le problème relaxé* correspond au problème où l'objectif de niveau inférieur est ignoré. Il se formule ainsi :

$$\begin{aligned} \max_{x \in X, y} \quad & F(x, y) \\ \text{s.à} \quad & G(x, y) \leq 0 \\ & g(x, y) \leq 0 \end{aligned}$$

La valeur du problème relaxé détermine clairement une borne supérieure pour la valeur du programme biniveau. L'ensemble réalisable du problème relaxé se note Ω

et s'écrit :

$$\Omega = \{(x, y) : G(x, y) \leq 0, g(x, y) \leq 0\}$$

Pour un vecteur donné $\bar{x} \in X$, l'ensemble réalisable de niveau inférieur est :

$$\Omega(\bar{x}) = \{y : g(\bar{x}, y) \leq 0\}$$

et l'ensemble de réaction du niveau inférieur correspond à :

$$R(\bar{x}) = \{y : y \in \arg \min \{f(\bar{x}, y') : y' \in \Omega(\bar{x})\}\}$$

Pour x donné, $R(x)$ peut être vide. On en déduit une expression de l'ensemble réalisable du programme biniveau également appelé *région induite* et noté $\mathcal{IR}$:

$$\mathcal{IR} = \{(x, y) : x \in X, G(x, y) \leq 0, y \in R(x)\}$$

Une solution optimale du programme biniveau est alors un point (x^*, y^*) tel que :

$$(x^*, y^*) \in \mathcal{IR}$$

$$\forall (x, y) \in \mathcal{IR} \quad F(x^*, y^*) \geq F(x, y)$$

La région induite d'un programme biniveau est généralement non convexe, ce qui ne permet pas d'approche directe du problème avec l'analyse convexe. Elle peut également être non connexe, voire vide en présence de contraintes de niveau supérieur. Observons ceci sur un exemple simple :

$$\min_{x, y} \quad x + y$$

$$\text{s.à } x \geq 0$$

$$\min_y \quad y$$

$$\text{s.à } y \geq 5 - x$$

$$y \geq 0$$

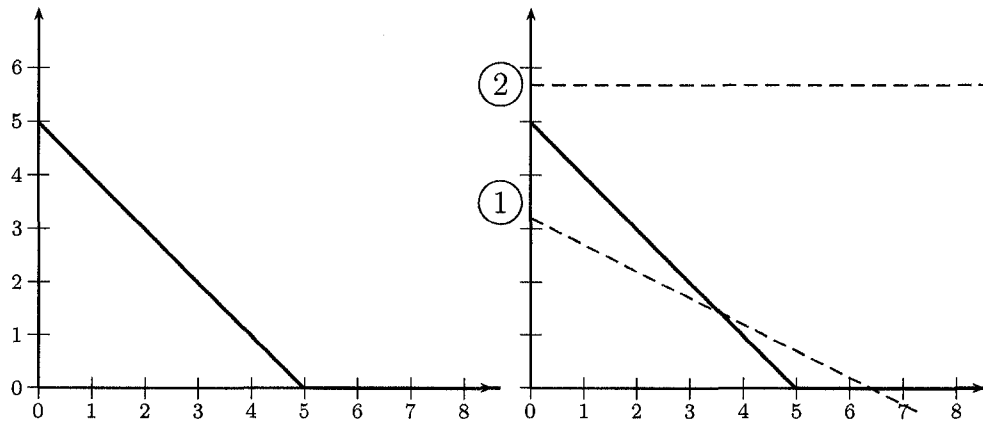


Figure 1.1: Géométrie de la région induite d'un programme biniveau

Sur le premier graphique de la figure 1.1, nous pouvons voir que la région induite du programme biniveau, indiquée en traits gras sur la figure de gauche, n'est pas convexe. Toutefois, elle est connexe. Nous rajoutons ensuite des contraintes de niveau supérieur. Dans un premier cas, nous ajoutons la contrainte correspondant à la première droite, elle est du type $y + 0.5x \geq k$. La région induite n'est alors plus connexe comme nous pouvons voir sur le deuxième graphique de la figure 1.1. Dans un second cas, nous rajoutons une contrainte du type $y \geq k$. Nous constatons alors rapidement que la région induite peut alors devenir vide pour k suffisamment grand.

Un programme biniveau peut être vu comme un problème d'optimisation qui correspond à une modélisation hiérarchique des décisions entre deux agents. Le premier, l'agent meneur, afin de résoudre son problème d'optimisation, effectue ses décisions, ce qui correspond au choix des valeurs de x dans la formulation précédente, en prenant en compte la réaction du second, l'agent meneur, à ses choix. L'agent suiveur prend ses décisions, ce qui correspond au choix des valeurs de y , en résolvant un problème d'optimisation dont certains paramètres correspondent à des variables de décisions de l'agent meneur, que ce soit au niveau des contraintes ou bien au niveau

de l'objectif. Le modèle indique par ailleurs que l'agent meneur connaît à la fois la fonction objectif et les contraintes de l'agent suiveur.

Du point de vue de la complexité algorithmique, même dans le cadre du type d'instance le plus simple pour un programme biniveau où les fonctions objectif et les contraintes sont linéaires, Hansen, Jaumard et Savard [11] montrent que ce type de problème est fortement NP-difficile à l'aide d'une réduction polynomiale du problème KERNEL.

On distingue généralement trois familles d'algorithmes pour résoudre un problème biniveau :

- les algorithmes pour des problèmes en nombres entiers qui reposent sur une reformulation du problème biniveau en un problème mixte en nombres entiers à l'aide des conditions de Karush-Kuhn-Tucker.
- Les algorithmes de descente directement basés sur le programme biniveau. On peut s'appuyer sur de telles méthodes quand l'on est capable d'exprimer y comme $y(x)$ explicitement, ce qui rend possible une différenciation du problème.
- Les algorithmes de descente basés sur des pénalisations exactes ou inexactes de contraintes après reformulation à un niveau du problème.

Pour plus d'informations sur ces familles d'algorithme, on peut lire Colson, Marcotte et Savard [5].

Détaillons la reformulation du problème biniveau à un niveau servant à la fois pour la première et la troisième famille d'algorithmes. Ainsi, dans le cas où le problème de second niveau est convexe et régulier, nous pouvons le remplacer par ses conditions de Karush-Kuhn-Tucker et ainsi obtenir un problème mathématique à

un seul niveau :

$$\begin{aligned}
 & \max_{x \in X, y, \lambda} F(x, y) \\
 & \text{s.à } G(x, y) \leq 0 \\
 & g(x, y) \leq 0 \\
 & \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m_2 \\
 & \lambda_i g_i(x, y) = 0, \quad i = 1, \dots, m_2 \\
 & \nabla_y \mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0
 \end{aligned}
 ,$$

où $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ est le lagrangien associé à la fonction de second niveau et m_2 est la dimension de l'espace d'arrivée de g .

Les contraintes de complémentarité capturent la nature combinatoire du problème.

Dans le cadre de la première famille d'algorithme, on peut alors tâcher de résoudre ce problème à l'aide d'une méthode de séparation et d'évaluation. Le nœud racine de l'arbre correspond alors au problème reformulé sans les contraintes de complémentarité. À un nœud de l'arbre qui ne satisfait pas les contraintes de complémentarité, on peut séparer le problème ainsi : on construit deux nœuds fils, l'un correspond à l'ajout de la contrainte $\lambda_i = 0$, l'autre à l'ajout de la contrainte $g_i(x, y) = 0$. La résolution de ces problèmes nous permet de déterminer des bornes supérieures valides pour les sous-arbres correspondants.

Dans le cadre de la troisième famille, on peut chercher à pénaliser ces contraintes de complémentarité. On peut se référer au texte de Labbé, Marcotte et Savard [13] pour un exemple.

Après cet aperçu des problématiques, à savoir la tarification optimale et le pla-

cement média, et des concepts mathématiques rattachés à notre sujet, à savoir la programmation biniveau, nous pouvons à présent développer notre modèle.

CHAPITRE 2

MODÈLE BINIVEAU POUR LE PLACEMENT MÉDIA

En premier lieu, nous présentons les concepts et les hypothèses sous-jacentes au modèle. Ensuite, nous construisons notre modèle biniveau pour la tarification optimale relative au placement média.

2.1 Présentation du modèle

Avant de commencer, il faut définir clairement ce que nous entendons par créneau ou tranche publicitaire. Il s'agit d'une période de temps dédiée à la publicité pendant un programme ou entre deux programmes. Nous appelons alors spot publicitaire un espace de temps d'un créneau publicitaire alloué à un client.

Nous nous intéressons ici à une vision globale de la tarification et du placement optimal pour les publicités. Nous ne nous intéressons donc qu'à la répartition sur les différents créneaux horaires. La question de l'ordre de programmation des publicités sur chaque créneau est un problème plus détaillé qui se place à l'échelle d'un programme télévisuel. Le lecteur intéressé pourra se référer à Bollapragada et al. [3]. Cela reste toutefois une question d'importance, au moment de la prise en compte des demandes de chaque client, afin d'éviter les conflits entre chaque client. Nous devons donc considérer cette question, de façon moins détaillée, à première vue.

Notre modélisation a pour but de fournir une politique générale d'allocation de

spots pour la chaîne de télévision. Elle doit l'aider à prendre une décision rapidement. Le modèle doit lui permettre de savoir à quel prix elle peut vendre son espace publicitaire et quelles demandes elle doit retenir. En pratique, les demandes des clients se succèdent et il faut leur répondre rapidement, ce qui fait qu'elles ne sont pas toujours simultanées. Toutefois, parmi les clients sur l'up-market, il en est qui sont des clients réguliers avec certaines habitudes. L'hypothèse de considérer un ensemble de clients et non un client individuellement est donc valable.

Nous supposons ici que le comportement des agents, à savoir la chaîne de télévision et l'ensemble des clients, est régi selon les règles d'un jeu de Stackelberg. Dans un tel jeu, l'objectif de chaque agent est fonction des stratégies des deux agents. De plus, le suiveur, ici les clients, adopte la meilleure stratégie en ayant pris connaissance de la stratégie du meneur, ici la chaîne télévisuelle. Le meneur, ayant conscience de cela, cherche la meilleure stratégie en anticipant donc la stratégie du suiveur. Pour plus d'informations les jeux de Stackelberg, le lecteur peut lire le texte de Stackelberg [18] ou bien la section 1 du chapitre 3 de [9].

Un programme biniveau correspond à la formulation mathématique de l'équilibre d'un jeu de Stackelberg. Le lecteur intéressé pourra se référer à Loridan et Morgan [15] pour plus d'explications sur les liens entre la programmation biniveau et les jeux de Stackelberg. D'un point de vue théorique, l'approche biniveau permet de prendre en compte l'ensemble des acteurs impliqués dans le processus. C'est pourquoi nous considérons ici à la fois l'ensemble des clients de la chaîne et l'ensemble des concurrents.

Nous faisons de plus l'hypothèse que la chaîne de télévision qui doit répondre à la demande de ses clients est leader sur le marché de l'audimat. Par conséquent, elle

prend en compte les caractéristiques des chaînes concurrentes comme des données fixes de son problème. En l'occurrence, il s'agit de leurs programmes de diffusion et du prix de chacun de leurs créneaux publicitaires.

Quant à l'inventaire de la concurrence, dans la réalité, il est difficile pour la chaîne leader d'en connaître sa capacité. Mais, la concurrence réunissant plusieurs chaînes, nous supposerons dans la suite du problème que sa capacité est suffisamment grande au regard de la demande. En somme, nous ignorerons les contraintes d'inventaire chez la concurrence.

Concernant le comportement des clients, nous considérerons que, pour une tranche publicitaire donnée et une longueur de spot donnée, un client n'est intéressé que par un seul spot de cette longueur dans cette tranche. Toutefois, cela ne l'empêche pas d'être intéressé par la diffusion d'un spot d'une autre longueur dans cette même tranche, en sus. Nous aurons par conséquent des variables binaires dans notre problème de second niveau.

Le problème de second niveau doit modéliser le comportement de l'agent suiveur, les clients. Ceux-ci, une fois les prix fixés pour chaque spot publicitaire chez le leader et chez la concurrence, décident en fonction de leurs préférences quelle allocation leur est optimale, en fonction d'une contrainte d'audimat minimum. Ces différents clients sont en concurrence pour faire programmer leurs publicités. Ni les questions d'inventaire, ni les choix des autres clients ne sont de leur ressort. Les questions d'inventaire intéressent uniquement les chaînes de télévision qui diffusent ces publicités. Par conséquent, les contraintes d'inventaire de la chaîne n'entrent pas dans leur horizon. Celles-ci se trouveront ainsi au niveau supérieur.

Il y a principalement deux types de paramètres qui expliquent le comportement des agents.

La première catégorie est composée des paramètres qui quantifient les objectifs de chaque agent. Pour la chaîne, il s'agit du revenu, que ce soit sur l'up-market ou le scatter market. Pour les clients, il s'agit à la fois du budget et de l'audience.

La seconde catégorie a pour but de quantifier les préférences des différents clients par rapport aux créneaux publicitaires proposés par la chaîne ou par ses concurrents. Ces paramètres permettent de savoir quels spots publicitaires les clients préfèrent, à la fois pour des raisons de catégorie démographique ciblée, d'audience obtenue, de prix et de calendrier. Ces paramètres nous permettent de sortir du cadre rigide où l'on décide si oui ou non la chaîne accepte entièrement le contrat du client, comme chez Kimms et Muller [12] ou Zhang [21]. Le modèle peut ainsi offrir une proposition d'ensemble de spots publicitaires qui diffère de la demande initiale du client, tout en réalisant ses objectifs d'audience et de budget. Parmi ces préférences, chaque client souhaite que ses publicités soient diffusées au cours d'une période donnée dans l'année. Pour modéliser cela, nous pouvons nous contenter de donner une valeur suffisamment grande au paramètre de préférence pour les créneaux publicitaires en dehors de cette période. Autrement, pour donner une structure plus claire au modèle, nous introduisons un paramètre pour dénombrer les semaines au cours de l'année de diffusion.

D'autres paramètres rentrent en compte dans le modèle, ce sont ceux qui permettent de quantifier les contraintes d'inventaire associées au problème.

Enfin, par commodité de représentation, nous supposerons que l'ensemble des catégories démographiques ciblées par les clients est une σ -algèbre. Cela implique

qu'une seule catégorie démographique intéresse chaque client.

Les créneaux publicitaires sont dupliqués dans le catalogue des produits que la chaîne offre. Une version correspond au produit sur l'up-market, l'autre à celui sur le scatter market. La longueur du créneau publicitaire de chacun peut alors être différente.

2.2 Formulation mathématique

Nous présentons ici un premier modèle biniveau pour le placement média.

Les indices supérieurs 1 et 2 désignent respectivement la chaîne leader et la concurrence qui est agrégée en un unique acteur.

Les indices du modèle sont les suivants :

- s : indice des tranches publicitaires ;
- d : indice des catégories démographiques ;
- c : indice des clients ;
- l : indice des durées possibles des spots publicitaires ;
- w : indice des semaines dans l'année.

Nous présentons ensuite les différents ensembles du modèle :

- S^1 : ensemble des créneaux de la chaîne leader sur le scatter market ;
- S^2 : ensemble des créneaux de la concurrence sur le scatter market ;
- U^1 : ensemble des créneaux de la chaîne leader sur l'up-market ;
- U^2 : ensemble des créneaux de la concurrence sur l'up-market ;
- D : ensemble des catégories démographiques ;

C : ensemble des clients ;

W : ensemble des semaines dans l'année ;

L : ensemble des durées de spot publicitaire ;

$D(s)$: ensemble des catégories démographiques qui constituent l'audience du créneau s ;

$d(c)$: catégorie démographique qui intéresse le client c ;

$W(s)$: semaine où se situe le créneau publicitaire s ;

$W(c)$: ensemble des semaines qui intéressent le client c .

Les ensembles de créneaux publicitaires sont considérés disjoints, nous dédoublons les créneaux s'ils se trouvent à la fois dans le scatter et l'up-market.

Dans l'ensemble des clients, nous distinguons ceux sur l'up-market et ceux sur le front-market. Enfin, en général, les durées disponibles de spots correspondent à des multiples de 15 secondes : 15, 30 ou 45 le plus fréquemment.

Les caractéristiques des créneaux publicitaires sont les suivants :

$t_{s,l}^1$ prix d'un spot de l secondes dans le créneau publicitaire s vendu par le leader ;

$t_{s,l}^2$ prix d'un spot de l secondes dans le créneau publicitaire s vendu par la concurrence ;

t^i vecteur de prix pour l'agent i ;

$a_{s,l,d}$ niveau d'audimat dans la catégorie démographique d du créneau publicitaire s pour l secondes ;

$l(s)$ durée du créneau publicitaire s , elle ne peut pas correspondre exactement à la longueur totale du créneau si celui-ci est en vente à la fois sur le scatter et l'up-market ;

$I_{s,l}^1$: nombre maximum de spots publicitaires de durée l qui peuvent être vendus sur le créneau s proposé par la chaîne leader.

$I_{s,l}^1$ est un paramètre qui est fixé pour assurer que la répartition sur les différents créneaux puisse garantir a posteriori une planification permettant un espacement certain entre une même publicité ou bien des publicités pour un produit concurrent.

Les variables de décision au niveau inférieur sont

$x_{s,c,l}^i$: élément de $\{0;1\}$ qui indique si oui ou non un spot publicitaire de durée l est vendu au client c dans le créneau s par l'agent i .

Les paramètres du modèle permettent de caractériser les contraintes de revenu de la chaîne leader, mais aussi les objectifs d'audience et les possibilités de budget des clients. Eventuellement, certaines bornes peuvent valoir 0 ou ∞ .

$\overline{R}_U$: borne supérieure de revenu sur l'up-market ;

$\underline{R}_U$: borne inférieure de revenu sur l'up-market ;

$\overline{R}_S$: borne supérieure de revenu sur le scatter-market ;

$\underline{R}_S$: borne inférieure de revenu sur le scatter-market ;

$\overline{A}_c$: borne supérieure d'audimat pour le client c ;

$\underline{A}_c$: borne inférieure d'audimat pour le client c ;

$\overline{B}_c$: borne supérieure de budget pour le client c ;

$\underline{B}_c$: borne inférieure de budget pour le client c .

$M_{s,l,c}$: borne pour la linéarisation des termes bilinéaires, utilisée dans le chapitre 5.

Enfin, le dernier paramètre permet de prendre en compte les préférences de chaque client pour des spots publicitaires particuliers. Ces préférences peuvent répondre à plusieurs critères comme la date de diffusion, le moment de la journée de la

diffusion, le public d'un tel spot, etc. $w_{s,c,l}^i$ mesure la désappréciation financière du client c pour un spot publicitaire de durée l sur le créneau publicitaire s vendu par i .

Nous introduisons maintenant les fonctions du modèles.

Au niveau supérieur, la chaîne leader cherche à maximiser son profit sur la vente de tous ses spots publicitaires pour chacun de ses clients. Cela nous donne :

$$\max_{t^1, x^1, x^2} \sum_{c \in C} \sum_{l \in L} \left(\sum_{s \in U^1} t_{s,l}^1 x_{s,c,l}^1 + \sum_{s \in S^1} t_{s,l}^1 x_{s,c,l}^1 \right)$$

Au niveau inférieur, les clients cherchent à minimiser leurs dépenses par rapport à la chaîne leader et à ses concurrents.

$$\min_{x^1, x^2} \sum_{c \in C} \sum_{l \in L} \left(\sum_{s \in U^1 \cup S^1} (t_{s,l}^1 + w_{s,c,l}^1) x_{s,c,l}^1 + \sum_{s \in U^2 \cup S^2} (t_{s,l}^2 + w_{s,c,l}^2) x_{s,c,l}^2 \right)$$

Au niveau supérieur, la chaîne leader doit assurer ses objectifs de revenus.

$$\begin{aligned} \underline{R}_U &\leq \sum_{c \in C} \sum_{l \in L} \sum_{s \in U^1} t_{s,l}^1 x_{s,c,l}^1 \leq \overline{R}_U \\ \underline{R}_S &\leq \sum_{c \in C} \sum_{l \in L} \sum_{s \in S^1} t_{s,l}^1 x_{s,c,l}^1 \leq \overline{R}_S \end{aligned}$$

Elle doit aussi prendre en compte les contraintes de capacité sur son inventaire pour chaque créneau publicitaire proposé. Rappelons que nous avons fait l'hypo-

thèse que la concurrence a une capacité suffisante quelque soit la demande donc ces contraintes ne la concernent pas.

$$\sum_{c \in C} x_{s,c,l}^1 \leq I_{s,l}^1 \quad \forall s \in S^1 \cup U^1 \quad \forall l \in L$$

$$\sum_{l \in L} \sum_{c \in C} l x_{s,c,l}^1 \leq l(s) \quad \forall s \in S^1 \cup U^1$$

Au niveau inférieur, les clients doivent atteindre leur objectif d'audience et rester dans les limites de leur budget. Ils cherchent une allocation optimale parmi les tranches publicitaires dont la semaine de diffusion fait partie des semaines qui intéressent le client.

$$\underline{A}_c \leq \sum_{l \in L} \left(\sum_{\substack{s \in U^1 \cup S^1 \\ d(c) \in D(s) \\ W(s) \in W(c)}} a_{s,l,d} x_{s,c,l}^1 + \sum_{\substack{s \in U^2 \cup S^2 \\ d(c) \in D(s) \\ W(s) \in W(c)}} a_{s,l,d} x_{s,c,l}^2 \right) \leq \overline{A}_c \quad \forall c \in C$$

$$\underline{B}_c \leq \sum_{c \in C} \sum_{l \in L} \left(\sum_{\substack{s \in U^1 \cup S^1 \\ d(c) \in D(s) \\ W(s) \in W(c)}} t_{s,l}^1 x_{s,c,l}^1 + \sum_{\substack{s \in U^2 \cup S^2 \\ d(c) \in D(s) \\ W(s) \in W(c)}} t_{s,l}^2 x_{s,c,l}^2 \right) \leq \overline{B}_c \quad \forall c \in C$$

Nous obtenons finalement le programme biniveau suivant :

$$\begin{aligned}
& \max_{t^1, x^1, x^2} \sum_{c \in C} \sum_{l \in L} \left(\sum_{s \in U^1} t_{s,l}^1 x_{s,c,l}^1 + \sum_{s \in S^1} t_{s,l}^1 x_{scl}^1 \right) \\
& \text{s.à} \quad \underline{R}_U \leq \sum_{c \in C} \sum_{l \in L} \sum_{s \in U^1} t_{s,l}^1 x_{s,c,l}^1 \leq \overline{R}_U \\
& \quad \underline{R}_S \leq \sum_{c \in C} \sum_{l \in L} \sum_{s \in S^1} t_{s,l}^1 x_{s,c,l}^1 \leq \overline{R}_S \\
& \quad \sum_{c \in C} x_{s,c,l}^1 \leq I_{s,l}^1 \quad \forall s \in S^1 \cup U^1 \quad \forall l \in L \\
& \quad \sum_{l \in L} \sum_{c \in C} l x_{s,c,l}^1 \leq l(s) \quad \forall s \in S^1 \cup U^1 \\
& \min_{x^1, x^2} \sum_{c \in C} \sum_{l \in L} \left(\sum_{s \in U^1 \cup S^1} (t_{s,l}^1 + w_{s,c,l}^1) x_{s,c,l}^1 + \sum_{s \in U^2 \cup S^2} (t_{s,l}^2 + w_{s,c,l}^2) x_{s,c,l}^2 \right) \\
& \text{s.à} \quad \underline{A}_c \leq \sum_{l \in L} \left(\sum_{\substack{s \in U^1 \cup S^1 \\ d(c) \in D(s) \\ W(s) \in W(c)}} a_{s,l,d} x_{s,c,l}^1 + \sum_{\substack{s \in U^2 \cup S^2 \\ d(c) \in D(s) \\ W(s) \in W(c)}} a_{s,l,d} x_{s,c,l}^2 \right) \leq \overline{A}_c \quad \forall c \in C \\
& \quad \underline{B}_c \leq \sum_{l \in L} \left(\sum_{\substack{s \in U^1 \cup S^1 \\ d(c) \in D(s) \\ W(s) \in W(c)}} t_{s,l}^1 x_{s,c,l}^1 + \sum_{\substack{s \in U^2 \cup S^2 \\ d(c) \in D(s) \\ W(s) \in W(c)}} t_{s,l}^2 x_{s,c,l}^2 \right) \leq \overline{B}_c \quad \forall c \in C \\
& \quad x_{s,c,l}^i \in \{0; 1\} \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad \forall s \in S^i \cup U^i \quad \forall l \in L \quad \forall c \in C \\
& \quad t_{s,l}^1 \geq 0 \quad \forall s \in S^1 \cup U^1 \quad \forall l \in L
\end{aligned}$$

L'objectif et certaines contraintes de niveau supérieur du modèle ainsi obtenus sont de nature bilinéaire. L'objectif de second niveau et les autres contraintes sont linéaires. Par ailleurs, les variables de second niveau sont entières. Nous constatons également que le problème de second niveau est séparable par client, ce qui correspond à l'intuition que l'on peut avoir du problème.

Il s'agit d'un type de problème biniveau qui n'a pas été étudié jusqu'à présent. Nous allons étudier plus en détail les propriétés de ce modèle, en particulier des points réalisables, afin de mettre au point un algorithme de résolution.

CHAPITRE 3

PROPRIÉTÉS DU MODÈLE

En l'absence de travaux abordant véritablement ce type de problème biniveau, nous nous intéressons d'abord à étudier ses propriétés.

Aussi, dans un premier temps, nous reformulons le modèle de façon raisonnée, afin de mieux comprendre son fonctionnement. Nous introduisons ensuite la notion d'ensemble minimal pour expliquer la forme des éléments de la région induite. Nous présentons alors un exemple de résolution du modèle sur une petite instance pour en tirer des enseignements. Ceci nous permet, dans la quatrième section, d'affiner la notion d'ensemble minimal en présentant les ensembles minimaux non dominés. Enfin, nous étudions plus en détail la géométrie de la région induite du problème.

3.1 Reformulation du modèle

Avant de commencer à étudier les propriétés du modèle, nous allons le changer sur quelques points.

Nous ignorerons ainsi par la suite les contraintes de revenu pour la chaîne leader et les contraintes de budget pour les clients. Comme l'objectif du problème biniveau est de maximiser le revenu global de la chaîne leader, les contraintes sur le revenu traduisent le même comportement que l'objectif du leader. De même, les contraintes de budget et l'objectif du problème de second niveau représentent le même comportement de la part des clients : ils cherchent à minimiser leurs dépenses. Dans la même optique, nous pourrions faire abstraction par la suite de $\bar{A}_c$ puisque le client

est intéressé par atteindre le plus d'audience possible.

Par ailleurs, sans nuire à la généralité, nous considérerons désormais uniquement l'up-market. Comme un client n'est intéressé qu'exclusivement par l'un des deux marchés, l'up-market et le scatter market sont deux marchés qui n'interagissent pas dans le modèle, donc ils sont dissociables au sein de celui-ci. Le modèle à résoudre relativement à l'up-market présente les mêmes caractéristiques que celui relativement au scatter market, à la valeur des paramètres près.

Enfin, dans un souci de clarté, nous ramènerons l'horizon de l'allocation à une seule semaine. En effet, nous pouvons supposer que chaque client cherche à diffuser de façon suffisamment uniforme ses publicités sur une période donnée. Par conséquent, il apparaît plus cohérent de remplacer $\underline{A}_c$ par $\underline{A}_c(w)$ pour chaque semaine. En procédant ainsi, on peut rapidement observer que le problème est séparable par semaine. Donc, par la suite, nous omettrons l'indice des semaines.

Ceci étant fait, nous constatons que le problème de second niveau consiste maintenant en un problème de sac-à-dos, séparable par client. Problème de sac-à-dos car il s'agit de minimiser le poids en atteignant un objectif minimal d'utilité, séparable par client car les contraintes d'audience et l'objectif sont séparables par client.

Voici la forme du problème biniveau ainsi modifié :

$$\max_{t^1, x^1, x^2} \sum_{c \in C} \sum_{l \in L} \sum_{s \in U^1} t_{s,l}^1 x_{s,l,c}^1 \quad (3.1)$$

$$\text{s.à} \quad \sum_{c \in C} x_{s,l,c}^1 \leq I_{s,l}^1 \quad \forall s, l \in U^1, L \quad (3.2)$$

$$\sum_{l \in L} \sum_{c \in C} l x_{s,l,c}^1 \leq l(s) \quad \forall s \in U^1 \quad (3.3)$$

$$\min_{x^1, x^2} \sum_{c \in C} \sum_{l \in L} \left(\sum_{s \in U^1} (t_{s,l}^1 + w_{s,l,c}^1) x_{s,l,c}^1 + \sum_{s \in U^2} (t_{s,l}^2 + w_{s,l,c}^2) x_{s,l,c}^2 \right) \quad (3.4)$$

$$\text{s.à} \quad \sum_{\substack{s,l \in U^1, L \\ d(c) \in D(s)}} a_{s,l,d} x_{s,l,c}^1 + \sum_{\substack{s,l \in U^2, L \\ d(c) \in D(s)}} a_{s,l,d} x_{s,l,c}^2 \geq \underline{A}_c \quad \forall c \in C \quad (3.5)$$

$$x_{s,l,c}^i \in \{0, 1\} \quad \forall i, s, l \in \{1, 2\}, U^i, L \quad \forall c \in C \quad (3.6)$$

$$t_{s,l}^1 \geq 0 \quad \forall s, l \in U^1, L \quad (3.7)$$

Après avoir reformulé le modèle, nous allons étudier de plus près ses propriétés.

3.2 Ensemble minimal

Il s'agit maintenant d'étudier les propriétés des solutions du modèle. Pour ce faire, nous nous intéressons tout d'abord aux propriétés des solutions du problème de second niveau. Ceci nous amène à introduire la notion d'*ensemble minimal*. Pour chaque client considéré, nous désignerons par commodité dans ce qui suit par d sa catégorie démographique.

Définition 1 Soit $c \in C$. Soit E un sous-ensemble de $(U^1 \times L) \cup (U^2 \times L)$. Alors,

on dit que E est un ensemble minimal pour c si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall F \subsetneq E \quad & \sum_{(s,l) \in F \cap (U^1 \times L)} a_{s,l,d}^1 + \sum_{(s,l) \in F \cap (U^2 \times L)} a_{s,l,d}^2 < \underline{A}_c \\ & \sum_{(s,l) \in E \cap (U^1 \times L)} a_{s,l,d}^1 + \sum_{(s,l) \in E \cap (U^2 \times L)} a_{s,l,d}^2 \geq \underline{A}_c \end{aligned}$$

Définition 2 Soit $c \in C$. On note $Em(c)$ l'ensemble des ensembles minimaux pour c .

Nous constatons que la composition d'un ensemble minimal ne dépend pas de la valeur des variables de premier niveau. Elle ne dépend que des coefficients dans les contraintes d'audience. Par contre, la propriété suivante qui est immédiate, relie la nature des solutions de second niveau avec les variables de premier niveau :

Propriété 1 Soit (x_{opt}^1, x_{opt}^2) une solution optimale du problème de second niveau. Soit $c \in C$. Alors $\{(s, l) \in (U^1 \cup U^2) \times L \mid x_{s,l,c}^i = 1\}$ est un élément de $Em(c)$.

Définition 3 Soient $t \in (\mathbb{R}^+)^n$, $c \in C$, $E \in Em(c)$. Alors, on dit que E est optimal pour c relativement à t si et seulement si il existe une solution optimale (x_{opt}^1, x_{opt}^2) du problème de second niveau, défini par t , telle que $E = \{(s, l) \in (U^1 \cup U^2) \times L \mid x_{s,l,c}^i = 1\}$.

3.3 Étude d'un exemple

Nous allons maintenant illustrer le modèle et cette notion d'ensemble minimal par un exemple. Nous considérons ainsi un problème avec deux clients, une seule catégorie démographique, deux longueurs de tranches publicitaires, une tranche pour la chaîne leader et une tranche pour la chaîne concurrente. Le modèle se réécrit ainsi :

$$\max_{t^1, x^1, x^2} \quad t_{1,1}^1 x_{1,1,1}^1 + t_{1,2}^1 x_{1,2,1}^1 + t_{1,1}^1 x_{1,1,2}^1 + t_{1,2}^1 x_{1,2,2}^1$$

$$\text{s.à} \quad x_{1,1,1}^1 + x_{1,1,2}^1 \leq 1$$

$$x_{1,2,1}^1 + x_{1,2,2}^1 \leq 2$$

$$15(x_{1,1,1}^1 + x_{1,1,2}^1) + 30(x_{1,2,1}^1 + x_{1,2,2}^1) \leq 75$$

$$\begin{aligned} \min_{x^1, x^2} \quad & (t_{1,1}^1 + 5)x_{1,1,1}^1 + (t_{1,2}^1 + 15)x_{1,2,1}^1 + (t_{1,1}^1 + 15)x_{1,1,2}^1 + \\ & (t_{1,2}^1 + 5)x_{1,2,2}^1 + 17x_{1,1,1}^2 + 42x_{1,2,1}^2 + 23x_{1,1,2}^2 + 27x_{1,2,2}^2 \end{aligned}$$

$$\text{s.à} \quad 20x_{1,1,1}^1 + 30x_{1,2,1}^1 + 15x_{1,1,2}^2 + 40x_{1,2,1}^2 \geq 50$$

$$20x_{1,1,2}^1 + 30x_{1,2,2}^1 + 15x_{1,1,2}^2 + 40x_{1,2,2}^2 \geq 55$$

$$x_{1,1,1}^1, x_{1,2,1}^1, x_{1,1,2}^1, x_{1,2,2}^1, x_{1,1,1}^2, x_{1,2,1}^2, x_{1,1,2}^2, x_{1,2,2}^2 \in \{0, 1\}$$

$$t_{1,1}^1, t_{1,2}^1 \geq 0$$

Pour résoudre ce problème, nous déterminons dans un premier temps l'ensemble des ensembles minimaux pour le client 1, $Em(1)$, et l'ensemble des ensembles minimaux pour le client 2, $Em(2)$. Nous les calculons à la main. Nous notons ici (i, s, l) un spot de longueur l , dans la tranche publicitaire s , chez l'agent i . Nous obtenons alors :

$$Em(1) = \{(1,1,1);(1,1,2)\}; \{(1,1,1);(2,1,2)\}; \{(1,1,2);(2,1,2)\}; \{(2,1,1);(2,1,2)\}\}$$

$$Em(2) = \{(1,1,2);(2,1,2)\}; \{(1,1,1);(1,1,2);(2,1,1)\}; \{(1,1,1);(2,1,2)\}; \{(2,1,1);(2,1,2)\}\}$$

A chaque ensemble minimal, un prix est associé dans le problème de second niveau, fonction de $t_{1,1}^1$ et $t_{1,2}^1$.

Client 1		Client 2	
$\{(1, 1, 1); (1, 1, 2)\}$	$t_{1,1}^1 + t_{1,2}^1 + 20$	$\{(1, 1, 1); (2, 1, 2)\}$	$t_{1,1}^1 + 42$
$\{(1, 1, 1); (2, 1, 2)\}$	$t_{1,1}^1 + 47$	$\{(1, 1, 1); (1, 1, 2); (2, 1, 1)\}$	$t_{1,1}^1 + t_{1,2}^1 + 43$
$\{(1, 1, 2); (2, 1, 2)\}$	$t_{1,2}^1 + 57$	$\{(1, 1, 2); (2, 1, 2)\}$	$t_{1,2}^1 + 32$
$\{(2, 1, 1); (2, 1, 2)\}$	59	$\{(2, 1, 1); (2, 1, 2)\}$	50

Pour chaque client, l'ensemble optimal de spots attribués est un ensemble minimal pour celui-ci. Afin qu'un ensemble minimal pour le client c soit optimal, son coût doit être plus petit que celui de tous les autres ensembles minimaux pour c . Ainsi, par exemple, pour l'ensemble minimal pour le client 1 suivant $\{(1, 1, 1); (1, 1, 2)\}$, nous devons avoir :

$$\begin{aligned}
t_{1,1}^1 + t_{1,2}^1 + 20 &\leq t_{1,1}^1 + 47 & t_{1,2}^1 &\leq 27 \\
t_{1,1}^1 + t_{1,2}^1 + 20 &\leq t_{1,2}^1 + 57 \quad \text{i.e.} & t_{1,1}^1 &\leq 37 \\
t_{1,1}^1 + t_{1,2}^1 + 20 &\leq 59 & t_{1,1}^1 + t_{1,2}^1 &\leq 39
\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi un système de contraintes linéaires sur $t_{1,1}^1$ et sur $t_{1,2}^1$ pour assurer l'optimalité de cet ensemble minimal pour le client 1. En répétant le même raisonnement avec chaque ensemble minimal pour le client 1, nous en déduisons pour chacun d'entre eux un système de contraintes linéaires. Par conséquent, cela définit un polyèdre de $\mathbb{R}^2$ propre à chaque ensemble minimal pour le client 1.

Nous faisons de même pour le client 2. Au passage, nous nous apercevons que l'ensemble minimal $\{(1, 1, 1); (1, 1, 2); (2, 1, 1)\}$ ne peut pas être optimal.

Nous obtenons ainsi un ensemble de polyèdres dans $\mathbb{R}^2$ que l'on peut observer sur la figure 3.1. Les traits noirs délimitent les contraintes par rapport au client 1, les traits en pointillés rouges ceux par rapport au client 2. Nous avons également

Tableau 3.1: Gradient de la fonction objectif sur l'exemple 3.1

Polyèdre	1	2	3	4	5	6	7	8
Gradient	(2,0)	(1,0)	(0,0)	(2,1)	(1,1)	(1,2)	(0,1)	(0,2)

représenté sur la figure par des flèches rouges, dans chaque polyèdre, le gradient de la fonction objectif du programme biniveau en fonction des valeurs de $t_{1,1}$ et de $t_{1,2}$.

Les valeurs du gradient selon le polyèdre sont résumées dans le tableau 3.1.

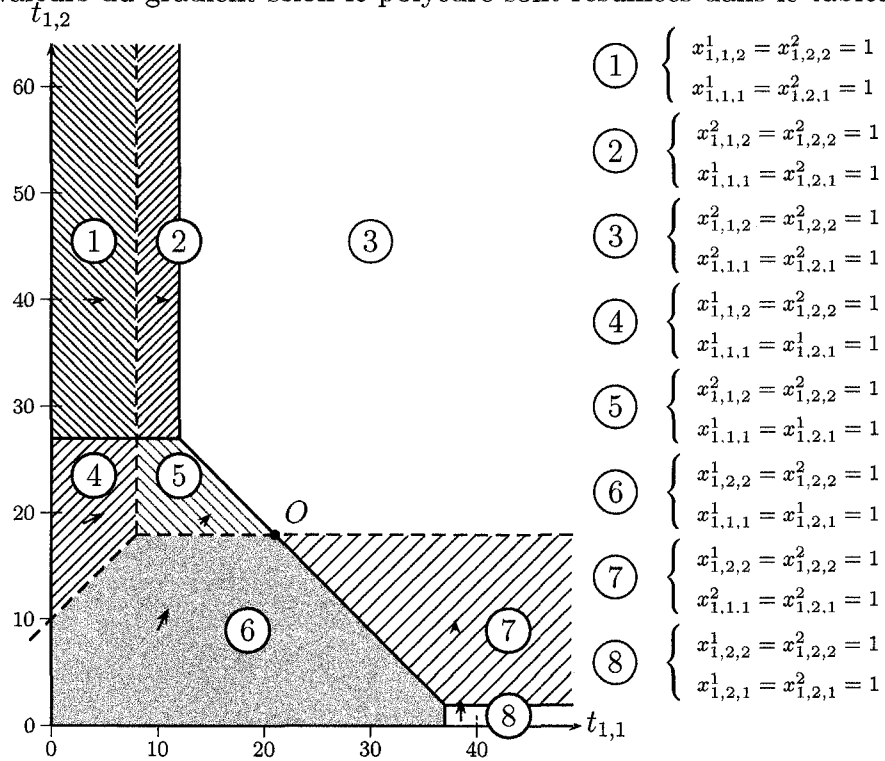


Figure 3.1: Ensemble des polyèdres d'optimalité

Nous vérifions maintenant les contraintes du niveau supérieur sur chaque polyèdre ainsi défini. Elles sont vérifiées sur les polyèdres 2,4,5,6,7,8. Nous devons maintenant résoudre un programme linéaire sur chacun de ces polyèdres. Par exemple,

sur le polyèdre 6, on a :

$$\begin{aligned}
 & \max_{t_{1,1}^1, t_{1,2}^1} && t_{1,1}^1 + 2t_{1,2}^1 \\
 & \text{s.à} && t_{1,2}^1 \leq 18 \\
 & && t_{1,2}^1 \leq 27 \\
 & && t_{1,1}^1 \leq 37 \\
 & && t_{1,1}^1 + t_{1,2}^1 \leq 39 \\
 & && t_{1,2}^1 \leq t_{1,1}^1 + 10 \\
 & && t_{1,1}^1, t_{1,2}^1 \geq 0
 \end{aligned}$$

On obtient une solution optimale sur chaque polyèdre, on en déduit alors la solution optimale qui vaut 57 et est atteinte au point O pour $t_{1,1}^1 = 21$ et $t_{1,2}^1 = 18$.

3.4 Ensembles minimaux non dominés

A partir de cet exemple, on peut tirer des enseignements sur la nature de la région induite.

Pour ce faire, nous revenons d'abord sur les ensembles $Em(c)$ pour chaque client c . On a vu dans l'exemple ci-dessus que pour un ensemble minimal donné, il n'existe pas toujours une valeur des variables de premier niveau telle que cet ensemble soit optimal pour le client associé. Introduisons la notion de masse fixe pour expliquer cela.

Définition 4 Soient $c \in C$, $E \in Em(c)$ où $n = |U^1| * |L|$. On appelle masse fixe de

E pour le client c , noté $m_c(E)$, la valeur suivante :

$$m_c(E) = \sum_{(s,l) \in E \cap (U^2 \times L)} (t_{s,l}^2 + w_{s,l,c}^2) + \sum_{(s,l) \in E \cap (U^1 \times L)} w_{s,l,c}^1$$

De cette définition, on en déduit une condition nécessaire et suffisante afin qu'un ensemble minimal pour un client puisse être optimal pour celui-ci. L'idée du résultat qui suit traduit l'incitation d'un client à acheter un spot supplémentaire à la chaîne leader. Un client ne le fera que si cela diminue la valeur de la masse fixe de l'ensemble de spots qu'il achète alors.

Propriété 2 Soit $c \in C$, soit $E \in Em(c)$, soit $n = |U^1| \times |L|$. Alors il existe $t^1 \in (\mathbb{R}^+)^n$ tel que E soit un ensemble minimal optimal pour c si et seulement si :

$$m_c(E) = \min\{m_c(F) / F \in Em(c), F \cap (U^1 \times L) \subseteq E \cap (U^1 \times L)\} \quad (3.8)$$

Tout ensemble minimal vérifiant cette propriété pour c sera dit non dominé pour c .

Démonstration :

Montrons d'abord que c'est une condition nécessaire. Soit $F \in Em(c)$ tel que $F \cap (U^1 \times L) \subseteq E \cap (U^1 \times L)$. Comme E est un ensemble minimal optimal pour c avec le vecteur de variables de premier niveau t^1 , on a $\sum_{(s,l) \in E \cap (U^1 \times L)} t_{s,l}^1 + m_c(E) \leq \sum_{(s,l) \in F \cap (U^1 \times L)} t_{s,l}^1 + m_c(F)$. Or $F \cap (U^1 \times L)$ est inclus dans $E \cap (U^1 \times L)$, donc par positivité des variables de premier niveau, on obtient $m_c(E) \leq m_c(F)$.

On s'intéresse maintenant à la réciproque. Soit $F \in Em(c)$, alors on a deux cas. Premièrement, supposons que $F \cap (U^1 \times L) \not\subseteq E \cap (U^1 \times L)$. On cherche donc t^1 tel que :

$$\sum_{(s,l) \in E \cap (U^1 \times L)} t_{s,l}^1 - \sum_{(s,l) \in F \cap (U^1 \times L)} t_{s,l}^1 \leq m_c(F) - m_c(E).$$

Les deux sommes de variables ont des termes disjoints. Par positivité des variables de premier niveau, on en déduit que pour $t_{s,l}^1$, $(s,l) \in F \cap (U^1 \times L) \setminus E \cap (U^1 \times L)$, suffisamment grand, l'inégalité est vérifiée.

Supposons maintenant que $F \cap (U^1 \times L) \subseteq E \cap (U^1 \times L)$. On cherche t^1 tel que :

$$\sum_{(s,l) \in E \cap (U^1 \times L) \setminus F \cap (U^1 \times L)} t_{s,l}^1 \leq m_c(F) - m_c(E)$$

Or, par propriété, $m_c(E) = \min\{m_c(F) / F \in Em(c), F \cap (U^1 \times L) \subseteq E \cap (U^1 \times L)\}$, donc $m_c(F) - m_c(E) \geq 0$. Ainsi, pour $t_{s,l}^1$, $(s,l) \in E \cap (U^1 \times L) \setminus F \cap (U^1 \times L)$ suffisamment petit, l'inégalité est vérifiée. Comme il y a un nombre fini d'inégalités à vérifier et que les variables qui jouent un rôle dans chaque cas sont indépendantes, on déduit rapidement de ceci la réciproque. $\square$

Pour chaque $c \in C$, cette propriété peut fournir une règle pour éliminer des ensemble de $Em(c)$. Ainsi, pour chaque sous-ensemble E^1 de $U^1 \times L$, on associe uniquement les sous-ensembles de E^2 de $U^2 \times L$ tels que $E^1 \cup E^2$ soit élément de $Em(c)$ et vérifie (3.8).

Intuitivement, on pourrait traduire ce résultat ainsi : un client n'est intéressé par l'achat de spots supplémentaires de la chaîne leader si et seulement si la masse fixe de l'ensemble résultant diminue.

Par la suite, on considère uniquement les ensembles minimaux non dominés E qui vérifient (3.8) et tels que :

$$\forall F \in Em^*(c) \quad F \cap (U^1 \times L) \subsetneq E \cap (U^1 \times L) \Rightarrow m_c(F) > m_c(E) \quad (3.9)$$

Cette décision se justifie pour deux raisons. Tout d'abord, si on a $E \in Em(c)$ vérifiant (3.8), mais ne vérifiant pas (3.9), alors on sait qu'il existe $F \in Em(c)$ tel que $m_c(E) = m_c(F)$ et $F \cap (U^1 \times L) \subsetneq E \cap (U^1 \times L)$. Aussi, $\forall (s,l) \in E \cap (U^1 \times L) \setminus F \cap$

$(U^1 \times L)$, $t_{s,l}^1 = 0$. Donc les deux ensembles minimaux coûteront autant pour le client c mais il n'y aura pas d'avantage en terme de revenu pour la chaîne leader à vendre E plutôt que F au client. De plus, si la chaîne leader décide de vendre E plutôt que F , il réduit plus son inventaire disponible restant pour les autres clients, donc limite ses choix. Il sera donc toujours plus intéressant pour la chaîne de vendre F plutôt que E au client c dans le cadre de ce modèle. C'est pourquoi nous considérons désormais les éléments de $Em(c)$ qui vérifient (3.8) et (3.9).

On peut déterminer pratiquement si un ensemble minimal $E \in Em(c)$ est non dominé à l'aide de la propriété (3.8). En effet, il suffit de résoudre le problème de second niveau pour le client c avec le vecteur de prix nul et en remplaçant l'inventaire du leader par $E \cap (U^1 \times L)$. Si la valeur de l'objectif est égale à $m_c(E)$ et l'allocation résultante contient $E \cap (U^1 \times L)$, alors E est non dominé, sinon il ne l'est pas.

Par commodité de notation, pour tout ensemble E , nous noterons par la suite E^1 pour désigner $E \cap (U^1 \times L)$ et E^2 pour désigner $E \cap (U^2 \times L)$.

Définition 5 Soit $c \in C$. On note $Em^*(c)$ l'ensemble $\{E \in Em(c) / E \text{ vérifie (3.8) et (3.9)}\}$.

Pour E^1 donné, la détermination d' E^2 tel que $(E^1 \cup E^2)$ soit un ensemble minimal vérifiant (3.8) consiste à résoudre un problème de sac-à-dos que nous détaillerons plus bas. Les contraintes d'inventaire chez la concurrence étant ignorées, il n'est pas important de savoir s'il existe plusieurs E^2 tels que $(E^1 \cup E^2)$ vérifie cette propriété. Nous pouvons donc associer un seul sous-ensemble E^2 pour E^1 donné. On en déduit rapidement qu'il y a au plus $2^{\text{card}(U^1) \cdot \text{card}(L)}$ ensembles minimaux qui vérifient (3.8).

3.5 Géométrie de la région induite

Intéressons nous maintenant aux propriétés sur les variables de premier niveau. On distingue tout d'abord l'ensemble des valeurs de premier niveau qui optimisent un ensemble minimal pour un client c donné.

Définition 6 Soit $c \in C$, soit $E \in Em(c)$. On appelle polyèdre d'optimalité pour E relativement à c , l'ensemble des valeurs des variables de premier niveau de $\mathbb{R}^n$ sur lequel E est un ensemble minimal optimal pour c , où $n = |U^1| * |L|$. On le note $\mathcal{P}_c(E)$.

Justifions la terminologie "polyèdre". Soit $c \in C$ donné, considérons $E \in Em(c)$. Soit $t \in \mathcal{P}_c(E)$. Alors, E est optimal pour c si et seulement si pour tout $F \in Em(c)$, on a $\sum_{(s,l) \in E} t_{s,l} \leq \sum_{(s,l) \in F} t_{s,l}$, soit $\sum_{(s,l) \in E^1} t_{s,l}^1 - \sum_{(s,l) \in F^1} t_{s,l}^1 \leq m_c(F) - m_c(E)$. Ceci définit une contrainte linéaire en les coordonnées de t . A chaque F est donc associée une contrainte linéaire. Par conséquent, t est un point réalisable d'un ensemble défini par des contraintes linéaires. $Em(c)$ possède un nombre fini d'élément. Donc, $\mathcal{P}_c(E)$ est bien un polyèdre.

De ceci, nous en déduisons immédiatement le résultat suivant.

Propriété 3 La projection sur $\mathbb{R}^n$, $n = |U^1| * |L|$, de la région induite du problème biniveau est une réunion finie de polyèdres.

Démonstration :

Soit $E^1, \dots, E^{|C|} \in Em(1), \dots, Em(|C|)$, tel que $\bigcap_{i=1}^{|C|} \mathcal{P}_i(E^i) \neq \emptyset$. Supposons qu'il existe t dans cette intersection tel que $(t, E^1, \dots, E^{|C|})$ soit élément de la région

induite. Alors $(E^1, \dots, E^{|C|})$ est une solution optimale du problème de second niveau défini par t et satisfait les contraintes supérieures. Pour tout $t' \in \bigcap_{i=1}^{|C|} \mathcal{P}_i(E^i)$, $t' \neq t$, $(E^1, \dots, E^{|C|})$ vérifie les mêmes propriétés et donc cette intersection est incluse dans la région induite.

Réciproquement, soit $(t, E^1, \dots, E^{|C|})$ élément de la région induite. Alors, t appartient à $\bigcap_{i=1}^{|C|} \mathcal{P}_i(E^i)$. Donc, la région induite est incluse dans une réunion finie de polyèdres. Plus exactement, elle est égale à :

$$\bigcup_{E^1, \dots, E^{|C|} \in Em(1), \dots, Em(|C|)} \bigcap_{i=1}^{|C|} \mathcal{P}_c(E^i)$$

telle que $(E^1, \dots, E^{|C|})$ vérifie les contraintes supérieures. $\square$

Comme les variables de second niveau sont discrètes, on ne peut discuter de la topologie de la région induite directement. On peut par contre étudier celle de la projection de la région induite sur l'espace des variables de premier niveau.

Nous pouvons faire quelques remarques préliminaires sur la géométrie de cet ensemble.

Remarque 1 :

Soient $c \in C$, $E = E^1 \cup E^2 \in Em^*(c)$. Soit $t \in \mathcal{P}_c(E)$. Alors, nous pouvons vérifier rapidement que tout t' tel que :

$$\begin{aligned} \forall (s, l) \in E^1 \quad t'_{s,l} &= t_{s,l} \\ \forall (s, l) \notin E^1 \quad t'_{s,l} &\geq t_{s,l} \end{aligned}$$

est élément de $\mathcal{P}_c(E)$. Nous pouvons déduire immédiatement de ceci que la projection de la région induite sur l'espace des prix est non bornée.

Remarque 2 :

Soient $c \in C$, $E = E^1 \cup E^2 \in Em^*(c)$. Soit $t \in \mathcal{P}_c(E)$. Alors, tout point t' vérifiant :

$$\forall (s, l) \in E^1 \quad t'_{s,l} \leq t_{s,l}$$

$$\forall (s, l) \notin E^1 \quad t'_{s,l} = t_{s,l}$$

est élément de $\mathcal{P}_c(E)$.

Nous pouvons maintenant montrer un premier résultat sur la dimension des polyèdres.

Propriété 4 *Soit $c \in C$, soit $E \in Em^*(c)$. Alors $\mathcal{P}_c(E)$ est un polyèdre de dimension n où $n = |U^1| \times |L|$.*

Démonstration :

Pour prouver ce résultat, il suffit de prouver que $\mathcal{P}_c(E)$ contient un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Soit $F \in Em^*(c)$. Distinguons deux cas.

Si $F^1 \subsetneq E^1$, alors pour $t \in \mathcal{P}_c(E)$, on a :

$$\sum_{(s,l) \in E^1 \setminus F^1} t_{s,l}^1 < m_c(F) - m_c(E) \quad (3.10)$$

Comme $m_c(F) - m_c(E) > 0$ d'après la propriété (3.9), on en déduit que l'ensemble des t vérifiant cette contrainte forme un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.

Si maintenant $F^1 \setminus E^1 \neq \emptyset$, alors pour $t \in \mathcal{P}_c(E)$, on a :

$$\sum_{(s,l) \in E^1 \setminus F^1} t_{s,l}^1 - \sum_{(s,l) \in F^1 \setminus E^1} t_{s,l}^1 < m_c(F) - m_c(E) \quad (3.11)$$

Aussi pour $m_c(F) - m_c(E) + \sum_{(s,l) \in F^1 \setminus E^1} t_{s,l}^1$ non nul, soit $\sum_{(s,l) \in F^1 \setminus E^1} t_{s,l}^1$ suffisamment grand, on en déduit que l'ensemble des t vérifiant cette contrainte est non vide, puis, par continuité de la fonction, que c'est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Nous en déduisons rapidement que l'intersection de ces ouverts est non vide en observant des t tels que $t_{s,l}$ soit suffisamment grand pour $(s,l) \notin E^1$ (par exemple, $t_{s,l} \geq 2 \max\{m_c(F) - m_c(E)/F \in Em^*(c), F \neq E\}$) et $t_{s,l}$ soit suffisamment petit mais non nuls pour $(s,l) \in E^1$ (par exemple, $t_{s,l} < \frac{1}{\text{card}(E)} \min\{m_c(F) - m_c(E)/F \in Em^*(c), F^1 \subsetneq E^1\}$). Par conséquent l'intersection de ces ouverts est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Aussi $\mathcal{P}_c(E)$ est un polyèdre de dimension n . $\square$

Nous aimerions montrer que cette projection est connexe. Ceci pourrait s'expliquer en partie par le fait que nous supposons que la concurrence est toujours en mesure de répondre à la demande des clients.

Par contre, si nous ne faisons pas cette hypothèse, alors nous pouvons voir rapidement que la projection de la région induite n'est plus nécessairement connexe. Ceci est dû aux contraintes de niveau supérieur, car ce sont les seules qui influent sur les variables de premier niveau.

Pour le voir, modifions l'exemple initial en remplaçant l'objectif d'audience du premier client par 60 et celle du second client par 70. La concurrence ne peut plus alors satisfaire à elle seule la demande du client 1 ou du client 2.

Sur la figure 3.2, on constate comment le changement d'une contrainte supérieure rend l'ensemble considéré non connexe.

Le premier graphe correspond à la projection sur $(\mathbb{R}^+)^2$ de la région induite dans le cadre de l'exemple modifié. La ligne en traits gras, indiqué par des pointillés, délimite les polyèdres d'optimalité pour le second client. Sur le second graphe, nous

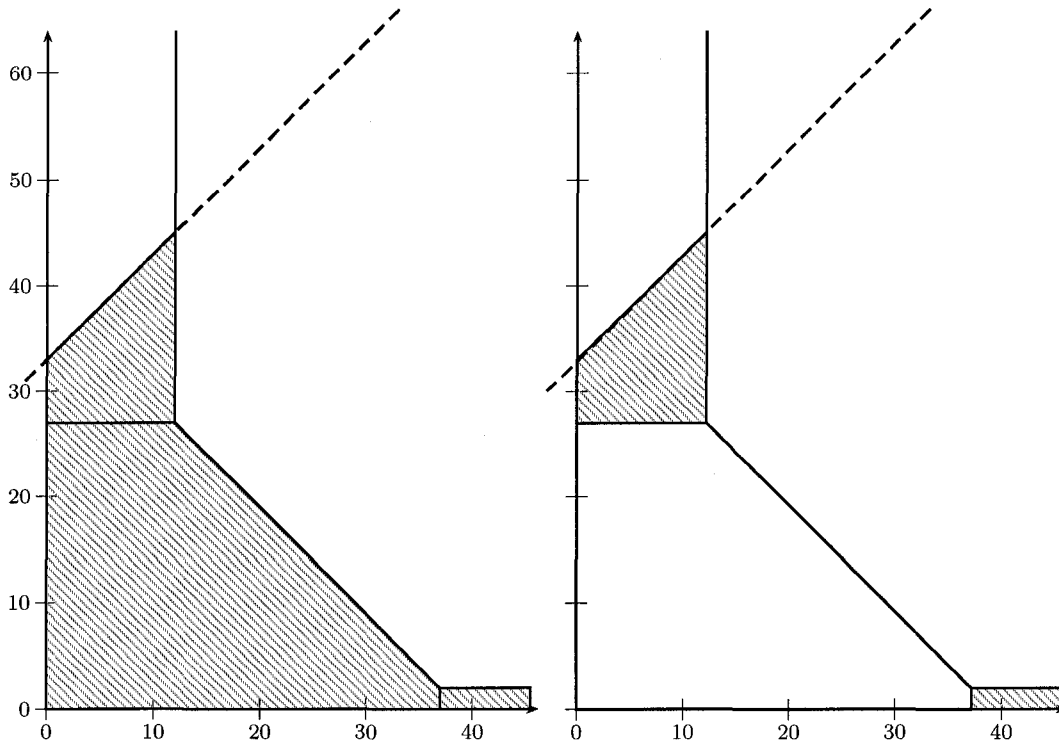


Figure 3.2: Non connexité de la région induite.

avons modifié la contrainte supérieure sur la durée de la tranche 1 en limitant celle-ci à 60 secondes maximum.

Propriété 5 *Supposons que la concurrence peut toujours répondre à la demande des clients. Alors, pour le programme biniveau défini par (3.1)-(3.7), la projection de la région induite sur $\mathbb{R}^n$ est non vide et connexe, où $n = \text{card}(U^1) \times \text{card}(L)$.*

Avant de démontrer la propriété 5, nous allons montrer un résultat intermédiaire.

Propriété 6 *Nous supposons toujours que la concurrence peut répondre à la demande des clients. Soit $c \in C$, soit $E \in \text{Em}^*(c)$ tel que $E \neq \emptyset$. Considérons $(s', l') \in E$ et $\mathcal{E}_{s', l'}$ l'ensemble $\{G \in \text{Em}^*(c) / G^1 \subsetneq E^1, (s', l') \notin G^1\}$.*

Alors, pour tout $F \in \mathcal{E}_{s',l'}$ qui vérifie le minimum de $\{m_c(G)/G \in \mathcal{E}_{s',l'}\}$, $\mathcal{P}_c(E) \cap \mathcal{P}_c(F)$ est non vide et forme un polyèdre de dimension au moins $n - \text{card}(E^1) + \text{card}(F^1)$.

Démonstration :

Nous considérons c , E et (s', l') tels que présentés dans l'énoncé de la propriété. Pour démontrer ce résultat, nous partons d'un vecteur t de $\mathcal{P}_c(E)$ que nous modifions jusqu'à atteindre la frontière de ce polyèdre.

Avant cela, nous pouvons rapidement remarquer que le minimum de $\{m_c(G)/G \in Em^*(c), G^1 \subsetneq E^1, (s', l') \notin G^1\}$ est égal au minimum de $\{m_c(G)/G \in Em^*(c), G^1 \subsetneq E^1, (s', l') \notin G^1, G^1 \text{ maximal pour l'inclusion dans } E^1\}$. Ce résultat est dû à (3.8) et (3.9).

Soit donc $t \in \mathcal{P}_c(E)$. Considérons $F \in \mathcal{E}_{s',l'}$ qui vérifie le minimum de $\{m_c(G)/G \in \mathcal{E}_{s',l'}\}$. Cet ensemble est bien défini et non vide car le polyèdre d'optimalité associé à l'allocation optimale chez la concurrence en est élément. Nous modifions alors t :

$$\forall (s, l) \in F^1 \quad t_{s,l} = \epsilon$$

$$\forall (s, l) \notin F^1 \quad t_{s,l} \simeq +\infty$$

D'après les remarques 1 et 2, t est toujours élément du polyèdre d'optimalité de E . On peut supposer que ϵ est suffisamment petit et non nul en prouvant que les polyèdres d'optimalité sont de dimension n . De la même façon, en s'appuyant sur le même argument, on peut supposer que $\forall (s, l) \in E^1 \setminus F^1 \quad t_{s,l} > 0$. Nous affinerons par la suite de la démonstration la valeur que peut prendre ϵ . Nous notons alors $t_{s',l'}^*$ la valeur limite de $t_{s',l'}$ telle que si $t_{s',l'} \leq t_{s',l'}^*$ alors t est élément de $\mathcal{P}_c(E)$ et si $t_{s',l'} > t_{s',l'}^*$ alors t n'appartient plus à $\mathcal{P}_c(E)$. Notons t^* le vecteur de prix associé.

Notons alors M l'ensemble minimal non dominé tel que t^{*+} soit élément de $\mathcal{P}_c(M)$, mais pas de $\mathcal{P}_c(E)$. Il s'agit maintenant de montrer que $M^1 = F^1$.

Nous pouvons déjà voir que $(s', l') \notin M^1$. En effet, l'expression de la minimalité de M doit nous donner en augmentant la valeur de $t_{s', l'}$ que

$$\sum_{(s,l) \in M^1 \setminus E^1} t_{s,l}^{*+} - \sum_{(s,l) \in E^1 \setminus M^1} t_{s,l}^{*+} \leq m_c(E) - m_c(M)$$

Pour que ce terme intervienne dans cette inégalité, il faut nécessairement que $(s', l') \notin M^1$ vu qu'il est élément de E^1 par hypothèse.

Montrons maintenant que $M^1 \subset E^1$. Nous avons par hypothèse sur t^{*+}

$$\begin{aligned} \sum_{(s,l) \in M^1 \setminus E^1} t_{s,l}^{*+} - \sum_{(s,l) \in E^1 \setminus M^1} t_{s,l}^{*+} &\leq m_c(E) - m_c(M) \\ \sum_{(s,l) \in M^1 \setminus E^1} t_{s,l}^{*+} &\leq m_c(E) - m_c(M) + \sum_{(s,l) \in E^1 \setminus M^1} t_{s,l}^{*+} \\ \sum_{(s,l) \in M^1 \setminus E^1} t_{s,l}^{*+} &\leq +\infty \end{aligned}$$

Or, étant donné comment a été modifié le point initial t , on en déduit nécessairement que l'ensemble $M^1 \setminus E^1$ est vide. Autrement, la somme vaudrait $+\infty$, ce qui serait absurde.

Montrons maintenant que M^1 est égal à F^1 . Soit $F \in \mathcal{E}_{s', l'}$ qui vérifie le minimum de $\{m_c(H)/H \in \mathcal{E}_{s', l'}\}$. Là encore, comme t^{*+} est élément de $\mathcal{P}_c(M)$, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{(s,l) \in M^1 \setminus F^1} t_{s,l}^{*+} - \sum_{(s,l) \in F^1 \setminus M^1} t_{s,l}^{*+} &\leq m_c(F) - m_c(M) \\ \sum_{(s,l) \in M^1 \setminus F^1} t_{s,l}^{*+} - \sum_{(s,l) \in F^1 \setminus M^1} \epsilon &\leq 0 \end{aligned}$$

En ayant alors choisit ϵ tel que

$$\epsilon < \frac{1}{\text{card}(F^1)} * \min\{t_{s,l}^{*+} / (s, l) \in E^1 \setminus F^1\}$$

on en déduit que si $M^1 \setminus F^1 \neq \emptyset$ alors on aura :

$$0 < \sum_{(s,l) \in M^1 \setminus F^1} t_{s,l}^{*+} - \sum_{(s,l) \in F^1 \setminus M^1} \epsilon \leq 0$$

D'où par l'absurde, on en déduit que $M^1 \setminus F^1 = \emptyset$ pour un tel choix de ϵ . Donc $M^1 \subset F^1$.

Par la suite, nous avons par hypothèse en réécrivant l'optimalité de M par rapport à F :

$$0 \leq m_c(M) - m_c(F) \leq \sum_{(s,l) \in F^1 \setminus M^1} \epsilon \leq \text{card}(E^1) * \epsilon$$

Il suffit alors ici d'avoir :

$$0 \leq \epsilon < \frac{1}{\text{card}(E^1)} * \min\{m_c(H) - m_c(F) / H \in \mathcal{E}_{s',l'}, m_c(H) \neq m_c(F)\}$$

Si ce minimum n'existe pas car l'ensemble en question est vide, alors on en déduit que $m_c(M) = m_c(F)$ comme $M \in \mathcal{E}_{s',l'}$. Sinon, notons ϵ^{**} le minimum de ce majorant et du majorant défini pour montrer que $M^1 \subset F^1$. Comme il n'y a qu'un nombre fini d'éléments dans l'ensemble en question, ce majorant est strictement positif. Alors, pour $\epsilon < \epsilon^{**}$, M vérifie le minimum. Ainsi dans tous les cas, pour ϵ suffisamment petit mais non nul, on sait que $M^1 \subset F^1$ et que M vérifie le minimum voulu. Donc d'après (3.9), $M^1 = F^1$ pour de telles valeurs de ϵ .

Comme ϵ est non nul, nous déduisons des remarques 1 et 2 que le polyèdre d'intersection contient une boule ouverte pour la topologie induite sur $\mathbb{R}^k$ où $k = n - \text{card}(E^1) + \text{card}(F^1)$. En conséquence, le polyèdre d'intersection est de dimension au moins k . $\square$

Cette propriété nous permet de comprendre un peu mieux la disposition des polyèdres d'optimalité dans la projection de la région induite. Pour un polyèdre

d'optimalité donné, nous pouvons déterminer certains de ses voisins. Comme les limites d'un polyèdre d'optimalité ne dépendent que des polyèdres limitrophes, ceci nous permet d'avoir une approximation de la forme du polyèdre en question.

Remarque 3 :

En observant la figure 3.1, nous constatons que pour un ensemble $E \in Em^*(c)$, les polyèdres d'optimalité limitrophes avec $\mathcal{P}_c(E)$ ne sont pas nécessairement des ensembles F tels que $F^1 \subset E^1$. Par exemple, si on considère le client 2, on peut voir que les polyèdres d'optimalité associés à $\{(1, 1, 1)\}$ et $\{(1, 1, 2)\}$ sont limitrophes.

A l'aide de la propriété 6, nous pouvons prouver la propriété 5 dans le cas d'un seul client.

Démonstration :

Pour démontrer le résultat, étant donné la nature polyédrale des ensembles considérés, il suffit de montrer que pour tout polyèdre d'optimalité associé à un ensemble minimal non dominé qui vérifie les contraintes de niveau supérieur, il existe un chemin continu entre tout point de ce polyèdre et tout point du polyèdre d'optimalité correspondant à l'ensemble de spots proposés uniquement par la concurrence.

Soit $E \in Em^*(c)$ tel que E vérifie les contraintes de niveau supérieur du modèle. Soit $(s', l') \in E^1$, alors d'après la propriété 6, nous considérons $F \in Em^*(c)$ tel que $F^1 \subset E^1$, $(s', l') \notin F^1$ et $\mathcal{P}_c(E) \cap \mathcal{P}_c(F)$ est non vide. Alors la réunion de ces deux polyèdres est connexe. Par ailleurs, comme E vérifie les contraintes de niveau supérieur, F les vérifie également. En procédant ainsi, on peut construire une suite

finie de polyèdres (F_i) tel que :

$$\begin{aligned} \forall i \quad & F_{i+1}^1 \subsetneq F_i^1 \\ \forall i \quad & F_i^1 \text{ vérifie les contraintes de niveau supérieur} \\ \forall i \quad & \bigcup_{0 \leq k \leq i} \mathcal{P}_c(F_i) \text{ est connexe} \end{aligned}$$

Comme le nombre d'éléments dans E^1 est fini, on finit par avoir $F_i^1 = \emptyset$ à partir d'un certain rang. On a ainsi prouvé notre résultat. $\square$

Il resterait à prouver la propriété 5 pour le cas où $\text{card}(C) > 1$.

Nous cherchons maintenant à connaître des propriétés sur les points extrêmes des polyèdres d'optimalité. Pour ce faire, nous définissons les matrices d'optimalité.

Définition 7 Soient $c \in C$, soit $E \in \text{Em}(c)$. On appelle matrice d'optimalité de E la matrice notée M_E qui définit les contraintes sur t^1 associées à $\mathcal{P}_c(E)$.

Nous avons vu plus haut que, pour $c \in C$, $\text{card}(\text{Em}^*(c)) \leq 2^n$, où $n = |U^1| * |L|$. On considérera donc qu'une matrice d'optimalité d'un ensemble minimal est une matrice $2^n \times n$.

Propriété 7 Soit $c \in C$. Soit M une matrice $2^n \times n$. Alors il existe $E \in \text{Em}^*(c)$ tel que $M = M_E$ si et seulement si :

- $M \in \{-1; 0; 1\}^{2^n \times n}$;
- les colonnes sont à valeurs uniquement dans $\{0; 1\}$ ou uniquement dans $\{-1; 0\}$;
- chaque colonne a exactement 2^{n-1} termes non nuls ;
- toutes les lignes sont différentes deux à deux.

Démonstration :

Supposons d'abord qu'il existe $E \in Em^*(c)$ tel que $M = M_E$. Alors, pour $F \in Em^*(c)$, on doit avoir :

$$\sum_{(s,l) \in E^1} t_{s,l}^1 - \sum_{(s,l) \in F^1} t_{s,l}^1 \leq m_c(F) - m_c(E).$$

De ceci, on déduit que pour la ligne associée à F dans M , les coefficients sont à valeurs dans $\{0; 1; -1\}$. Donc plus généralement, les coefficients de M sont à valeurs dans $\{0; 1; -1\}$.

Soit maintenant $(s, l) \in E^1$. Dans l'expression de la contrainte ci-dessus, le coefficient devant $t_{s,l}^1$ vaut 1 si $(s, l) \notin F^1$ et 0 sinon. Donc les coefficients de la colonne associée à (s, l) sont à valeurs dans $\{0; 1\}$. A contrario, soit $(s, l) \notin E^1$. Cette fois, dans la contrainte ci-dessus, le coefficient devant $t_{s,l}^1$ vaut 0 si $(s, l) \notin F^1$ et -1 sinon. Ainsi, les coefficients de la colonne associée à (s, l) sont à valeurs dans $\{-1; 0\}$.

Soit maintenant $(s, l) \in (U^1 \times L)$. Supposons que (s, l) soit élément de E . Il y a exactement 2^{n-1} sous-ensembles de $U^1 \times L$ dont (s, l) est élément. Pour chacune des lignes correspondantes aux ensembles minimaux engendrés par ces sous-ensembles, le coefficient correspondant à (s, l) vaudra 0. De la même façon, si $(s, l) \notin E$, on sait qu'il y a exactement 2^{n-1} sous-ensembles de $U^1 \times L$ dont (s, l) n'est pas élément. Donc pour chacune des lignes correspondantes aux ensembles minimaux engendrés par ces sous-ensembles, le coefficient correspondant à (s, l) vaut 0.

Soit une ligne donnée de M_E et soit $(s, l) \in U^1 \times L$. Alors, d'après ce qui précède, soit la colonne pour (s, l) est à valeurs dans $\{0; 1\}$ soit dans $\{-1; 0\}$. Dans le premier cas, si le coefficient en (s, l) vaut 1, alors (s, l) n'est pas élément de l'ensemble correspondant à cette ligne et y appartient s'il vaut 0. Dans le second cas, (s, l) est élément de l'ensemble en question si le coefficient vaut -1 et ne l'est pas sinon. Par conséquent, une ligne définit de façon unique un sous-ensemble de $U^1 \times L$. Or les

sous-ensembles de $U^1 \times L$ sont deux à deux distincts. Par conséquent, les lignes de M_E sont deux à deux distinctes.

La réciproque est immédiate. $\square$

Dans le cadre de l'exemple précédent, on peut voir que les points extrêmes de chaque polyèdre d'optimalité pour un ensemble minimal associé à un client ont leurs points extrêmes entiers.

Nous avons essayé par la suite de montrer que ces matrices pouvaient être totalement unimodulaires à l'aide de la caractérisation qui précède et d'une récurrence sur le cardinal de $U^1 \times L$. C'est là que nous nous sommes rendu compte avec l'exemple qui suit que ce n'est pas toujours le cas.

Considérons le cas où $\text{card}(U^1) = 1$ et $\text{card}(L) = 3$. Supposons que $E = \{(1; 1; 1); (1; 1; 2); (1; 1; 3)\}$, $\{(1; 1; 1)\}$, $\{(1; 1; 2)\}$ et $\{(1; 1; 3)\}$ définissent des ensembles minimaux pour un client donné qui vérifient (3.8), ceci ne dépend que des masses des ensembles.

Alors, la matrice d'optimalité de E contient la matrice 3×3 suivante, à permutation près des lignes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a pour déterminant -2 , donc la matrice d'optimalité considérée n'est pas totalement unimodulaire. En conséquence, rien ne garantit l'intégrité des points extrêmes des polyèdres d'optimalité.

CHAPITRE 4

ALGORITHME DE RÉOLUTION

La notion d'ensemble minimal non dominé rappelle celle de chemin dans le cadre d'un problème biniveau dont le problème de second niveau est un problème de flots. Nous pouvons par exemple nous référer à [8] pour plus de détails sur ces chemins et sur les algorithmes de résolution qui en découlent. Parmi ceux-ci, il s'agit de déterminer tous les chemins du réseau pertinents puis d'exprimer le modèle biniveau non plus en fonction des arcs mais uniquement en fonction de ces chemins. Nous pourrions être tentés d'en faire de même en utilisant les ensembles minimaux non dominés, si le nombre de ceux-ci n'est pas trop grand.

Premièrement, nous tâchons d'obtenir un ordre de grandeur du nombre d'ensembles minimaux non dominés relativement à un client. Ensuite, en fonction des résultats obtenus, nous élaborons un algorithme de résolution du problème.

4.1 Génération des ensembles minimaux non dominés

Nous savons désormais que l'ensemble des points réalisables pour le problème de second niveau est constitué d'ensembles minimaux non dominés pour chaque client. On peut éventuellement envisager de résoudre directement notre problème biniveau en considérant uniquement cet ensemble de variables.

Pour ce faire, nous devons d'abord connaître des ordres de grandeur du nombre

d'ensembles minimaux, pour un client, non dominés, existant dans une instance.

Comme il n'y a pas de contraintes d'inventaire chez la concurrence dans notre modèle, nous savons d'après (3.8) qu'il y a au plus $2^{\text{card}(U^1) * \text{card}(L)}$ ensembles minimaux non dominés pour un client $c \in C$ donné. Pour un sous-ensemble E^1 donné de $U^1 \times L$, il faut déterminer un sous-ensemble E^2 de $U^2 \times L$ tel que $E^1 \cup E^2$ soit minimal et de masse fixe minimale. La résolution de ce problème revient à résoudre le problème en variables binaires suivant :

$$\begin{aligned}
& \min_{x^2} \sum_{(s,l) \in U^2 \times L} (t_{s,l}^2 + w_{s,l,c}^2) x_{s,l,c}^2 \\
& \text{s.à} \sum_{\substack{(s,l) \in U^2 \times L \\ d(c) \in D(s)}} a_{s,l,d} x_{s,l,c}^2 \geq \underline{A}_c - \sum_{\substack{(s,l) \in E^1 \\ D(c) \in D(s)}} a_{s,l,d} \\
& \sum_{\substack{(s,l) \in U^2 \times L \\ D(c) \in D(s)}} a_{s,l,d} x_{s,l,c}^2 < \underline{A}_c - \sum_{\substack{(s,l) \in E^1 \\ D(c) \in D(s)}} a_{s,l,d} + \min\{a_{s,l,d} / (s,l) \in E^1, D(c) \in D(s)\} \\
& x_{s,l,c}^2 \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

Ce programme est rapidement résoluble par CPLEX à l'aide d'un simple branch-and-bound. Il faut toutefois noter que CPLEX ne résout pas les problèmes avec des inégalités strictes. Nous pouvons ici contourner cette difficulté en observant que tous les termes de cette inégalité sont des entiers naturels. Par conséquent, si on ajoute 1 au terme de gauche, on obtient alors une inégalité qui n'est plus stricte et qui est équivalente avec la formulation précédente.

L'objectif assure que la masse fixe de l'ensemble obtenu sera minimale. La première contrainte assure que l'audience totale sera plus grande que $\underline{A}_c$ mais aussi que :

$$\sum_{(s,l) \in E^1} a_{s,l,d}^1 + \sum_{(s,l) \in E^2} a_{s,l,d}^2 - a_{s',l',d}^2 < \underline{A}_c \quad \forall (s', l') \in E^2$$

Ceci ne nous permet pas de conclure que l'ensemble $E^1 \cup E^2$ est minimal. Il faut aussi que cette inégalité fonctionne pour tout $(s', l') \in E^1$, c'est pourquoi l'on rajoute la deuxième contrainte qui assure que :

$$\sum_{(s,l) \in E^1} a_{s,l,d}^1 + \sum_{(s,l) \in E^2} a_{s,l,d}^2 - a_{s',l',d}^1 < \underline{A}_c \quad \forall (s', l') \in E^1$$

Nous avons par la suite effectué différentes simulations en modifiant les paramètres afin d'obtenir une idée de leur influence sur le nombre d'ensembles minimaux non dominés résultants. Les paramètres que nous avons modifiés sont : le nombre de tranches publicitaires, l'intervalle d'audience et l'intervalle de désutilité chez la chaîne leader ou chez la concurrence, l'intervalle de prix chez la concurrence et enfin l'objectif d'audimat pour le client. Nous avons systématiquement vérifié pour chaque instance que la concurrence était capable seule de satisfaire la demande du client.

Nous pouvons lire sur les tableaux 4.1, 4.2 et 4.3 les résultats obtenus pour la génération des ensembles minimaux non dominés.

Ici, nous nous sommes arrêtés à l'étude de petites instances pour la génération d'ensembles minimaux non dominés. En effet, au vu du temps de résolution nécessaire dans ce cadre, nous n'avons pas cherché à observer les résultats pour des instances de plus grande taille. En effet, dans le premier cas, il a fallu en moyenne au moins 6 minutes pour chaque instance pour générer tous ces ensembles. Dans le second cas, il a fallu au moins 2 heures en moyenne pour chaque instance. Enfin, dans le dernier cas, il a fallu en moyenne 4 minutes.

Comme indiqué sur les tableaux, nous avons constaté que plus la variance augmente lors de la génération des instances, notamment pour la désutilité et les prix, moins il y a d'ensembles minimaux non dominés.

Dans le cadre de plus grande instances, nous aurions au moins à considérer une

Tableau 4.1: Peu de variance dans le jeu de données. 5 tranches publicitaires pour le leader, 30 pour la concurrence, objectif d'audience 500.

Paramètres			Instances	Ensembles minimaux	Ensembles minimaux non dominés	Ecart (%)
			L.	C.		
Audience minimale	40	10	1	27679	27679	0
Ecart d'audience	40	20	2	23362	23272	0,3
Désutilité minimale	10	20	3	24944	24941	0,0
Ecart de désutilité	10	40	4	24316	24293	0,0
Prix minimal	-	20	5	27002	27002	0
Ecart de prix	-	40	6	26831	26785	0,2
			7	27192	27190	0,0
			8	26946	26946	0,0
			9	24449	24449	0,0
			10	22757	22578	1,8

Tableau 4.2: Variance moyenne dans le jeu de données. 6 tranches publicitaires pour le leader, 6 pour la concurrence, objectif d'audience 500.

Paramètres			Instances	Ensembles minimaux	Ensembles minimaux non dominés	Ecart (%)
			L.	C.		
Audience minimale	30	30	1	172445	92220	46,5
Ecart d'audience	40	50	2	163116	56466	65,4
Désutilité minimale	10	20	3	232801	138336	40,6
Ecart de désutilité	10	40	4	210347	126946	39,6
Prix minimal	-	20	5	196235	92088	53,1
Ecart de prix	-	40	6	224227	150184	33,0
			7	167777	94987	43,4
			8	224743	114521	49,0
			9	169788	84873	50,0
			10	221995	135137	39,1

Tableau 4.3: Grande variance dans le jeu de données. 6 tranches publicitaires pour le leader, 40 pour la concurrence, objectif d'audience 500.

Paramètres			Instances	Ensembles minimaux	Ensembles minimaux non dominés	Ecart (%)
			L.	C.		
Audience minimale	10	20	1	26703	6	99,9
Ecart d'audience	100	150	2	21698	14	99,9
Désutilité minimale	20	30	3	24517	18	99,9
Ecart de désutilité	100	110	4	18364	6	99,9
Prix minimal	-	30	5	20194	23	99,9
Ecart de prix	-	110	6	28352	17	99,9
			7	25667	96	99,6
			8	23553	12	99,9
			9	22266	18	99,9
			10	27570	16	99,9

dizaine de clients ce qui augmenterait sensiblement le temps de génération de ces ensembles minimaux non dominés.

4.2 Algorithme exact de résolution

Comme le nombre d'ensembles minimaux non dominés est finalement trop important, en général, nous adaptons notre approche pour résoudre le problème.

A l'instar de la génération de colonnes, nous allons considérer progressivement des ensembles minimaux non dominés pertinents au lieu de les prendre tous en compte dans le modèle. Ceux-ci vont être générés au fur et à mesure mais dans le cadre d'une génération de coupes.

L'idée part de l'observation que les solutions du problème de second niveau sont des ensembles minimaux non dominés pour chaque client. De plus, pour un vecteur de coût donné, la résolution du problème de second niveau consiste à résoudre un problème de sac-à-dos pour chaque client, facilement résoluble.

Par la suite, dans le cadre de l'algorithme nous allons nous intéresser au problème biniveau relaxé, tel que présenté dans la partie 2.4. Il va s'agir de résoudre le problème biniveau relaxé, auquel sera progressivement ajouté des coupes.

L'algorithme fonctionne de la façon suivante. Au lieu de considérer le problème biniveau, nous considérons le problème biniveau relaxé.

A l'étape 0, nous linéarisons les termes bilinéaires dans le modèle puis nous ajoutons les coupes qui indiquent que le coût total pour chaque client ne peut dépasser le coût du meilleur ensemble de spots proposés par la concurrence. Nous résolvons le problème ainsi obtenu.

Nous vérifions ensuite que notre solution est élément de la région induite en calculant la valeur du problème de second niveau défini par le vecteur de prix obtenu en résolvant le problème biniveau relaxé. Si c'est le cas, nous avons trouvé une solution optimale du problème biniveau.

Sinon, la disposition obtenue en résolvant le problème de second niveau permet de définir une coupe pour chaque client que l'on ajoute au problème biniveau relaxé. Cette coupe signifie que pour chaque client, la disposition optimale dans le problème biniveau relaxé lors de la prochain itération doit avoir un coût inférieur au coût de la disposition obtenue après résolution du problème de second niveau associé au vecteur de prix obtenu à cette itération.

Nous résolvons alors à nouveau le problème biniveau relaxé, puis répétons les étapes qui consistent à vérifier que notre solution est élément de la région induite puis si ce n'est pas le cas à ajouter des coupes au problème.

Détaillons chaque étape.

4.2.1 Initialisation

Pour chaque client $c \in C$ donné, on résout le simple problème de sac-à-dos suivant. La valeur de l'objectif que l'on notera R_c détermine alors une borne supérieure sur le coût total pour chaque client.

$$\begin{aligned}
 \min_{x^2} \quad & \sum_{(s,l) \in U^2 \times L} (t_{s,l}^2 + w_{s,l,c}^2) x_{s,l,c}^2 \\
 \text{s.à} \quad & \sum_{\substack{(s,l) \in U^2 \times L \\ D(c) \in D(s)}} a_{s,l,d} x_{s,l,c}^2 \geq \underline{A}_c \\
 & x_{s,l,c}^2 \in \{0; 1\} \quad \forall s, l \in U^1, L
 \end{aligned}$$

Rappelons que nous avons fait l'hypothèse que la concurrence est en mesure de satisfaire la demande de chaque client, ce qui signifie que ce problème admet une solution optimale. Nous ajoutons ensuite au problème relaxé la contrainte $\sum_{(s,l) \in U^1 \times L} (t_{s,l}^1 + w_{s,l,c}^1) x_{s,l,c}^1 + \sum_{(s,l) \in U^2 \times L} (t_{s,l}^2 + w_{s,l,c}^2) x_{s,l,c}^2 \leq R_c$.

Le problème relaxé ainsi obtenu présente des termes bilinéaires. A l'aide de techniques utilisées dans [13], nous linéarisons le problème. Voici le problème initial considéré par la suite :

Problème relaxé initial

$$\begin{aligned}
& \max_{t^1, x^1, x^2, T^1} \sum_{c \in C} \sum_{s, l \in U^1, L} T_{s, l, c}^1 \\
& \text{s.à} \quad \sum_{c \in C} x_{s, l, c}^1 \leq I_{s, l}^1 \quad \forall s, l \in U^1, L \\
& \sum_{l \in L} \sum_{c \in C} l x_{s, l, c}^1 \leq l(s) \quad \forall s \in U^1 \\
& \sum_{\substack{s, l \in U^1, L \\ D(c) \in D(s)}} a_{s, l, d} x_{s, l, c}^1 + \sum_{\substack{s, l \in U^2, L \\ D(c) \in D(s)}} a_{s, l, d} x_{s, l, c}^2 \geq \underline{A}_c \quad \forall c \in C \\
& \sum_{s, l \in U^1, L} T_{s, l, c}^1 + w_{s, l, c}^1 x_{s, l, c}^1 + \sum_{s, l \in U^2, L} (t_{s, l}^2 + w_{s, l, c}^2) x_{s, l, c}^2 \leq R_c \quad \forall c \in C \\
& -M_{s, l, c}(1 - x_{s, l, c}^1) \leq T_{s, l, c}^1 - t_{s, l}^1 \leq M_{s, l, c}(1 - x_{s, l, c}^1) \quad \forall c, s, l \in C, U^1, L \\
& -M_{s, l, c} x_{s, l, c}^1 \leq T_{s, l, c}^1 \leq M_{s, l, c} x_{s, l, c}^1 \quad \forall c, s, l \in C, U^1, L \\
& x_{s, l, c}^i \in \{0, 1\} \quad \forall i, s, l, c \in \{1, 2\}, U^1, L, C \\
& T_{s, l, c}^1 \geq 0 \quad \forall c, s, l \in C, U^1, L \\
& t_{s, l}^1 \geq 0 \quad \forall s, l \in U^1, L
\end{aligned}$$

Pour fixer la valeur de $M_{s, l, c}$, on sait déjà que le prix d'un spot publicitaire ne peut pas être plus élevé que $\max_{c \in C} R_c$, pour $c \in C$. On peut par la suite affiner la valeur de $M_{s, l, c}$ à l'aide de la contrainte sur le coût total pour le client c . En effet, comme on a :

$$\sum_{s, l \in U^1, L} T_{s, l, c}^1 + w_{s, l, c}^1 x_{s, l, c}^1 + \sum_{s, l \in U^2, L} (t_{s, l}^2 + w_{s, l, c}^2) x_{s, l, c}^2 \leq \max_{c \in C} R_c$$

on sait que $T_{s, l, c} \leq \max_{c \in C} R_c - \sum_{s, l \in U^1, L} w_{s, l, c}^1 x_{s, l, c}^1 - \sum_{s, l \in U^2, L} (t_{s, l}^2 + w_{s, l, c}^2) x_{s, l, c}^2$. Ainsi $T_{s, l, c} \leq \max_{c \in C} R_c - w_{s, l, c}^1 - \alpha_{s, l, c} * \beta_{s, l, c}$ où $\alpha_{s, l, c}$ est le nombre minimal de spots supplémentaires nécessaire pour que le client c atteigne son objectif d'audimat et $\beta_{s, l, c}$ est le minimum de la désutilité pour un spot. Par la suite, on a utilisé

une majoration de $\alpha_{s,l,c}$. On note d la catégorie démographique du client en question.

$$\begin{aligned}\alpha_{s,l,c} &\geq (\underline{A}_c - w_{s,l,c}^1) / (\max\{a_{s',l',d} / (s', l') \neq (s, l)\}) \\ \beta_{s,l,c} &= \min\{w_{s',l',c}^i / (s', l') \neq (s, l), i = 1, 2\}\end{aligned}$$

4.2.2 Problème relaxé modifié et génération de l'ensemble minimal

On résout le problème relaxé modifié et le problème de second niveau en utilisant le solveur commercial CPLEX, les paramètres du solveur sont fixés par défaut. Le problème relaxé modifié est un problème mixte en nombres entiers. Le problème de second niveau à résoudre correspond à un problème de sac-à-dos séparable par client.

Notons $t^{1,*}, x^{1,*}, x^{2,*}$ la solution optimale du problème relaxé modifié, obtenue après résolution par CPLEX. Nous vérifions alors que, pour tout client c , $(t^{1,*} + w_c^1).x_c^{1,*} + (t^{2,*} + w_c^2).x_c^{2,*}$ est égal à la valeur optimale de l'objectif du problème de second niveau défini par $t^{1,*}$ pour le client c .

Comme $x^{1,*}, x^{2,*}$ est solution du problème relaxé modifié, ils vérifient bien les contraintes de niveau supérieur. Par conséquent, si la condition de test est vérifiée pour tout client c , alors cela signifie que $t^{1,*}, x^{1,*}, x^{2,*}$ est élément de la région induite du problème biniveau. Or, ils réalisent le maximum de l'objectif du problème sur un ensemble qui contient la région induite. Par conséquent, ils forment une solution optimale du problème bi-niveau.

4.2.3 Génération des coupes

A l'inverse, si la condition de test n'est pas vérifiée pour un des clients (notons c^0 un de ces clients), cela signifie que $x^{1,*}, x^{2,*}$ n'est pas une solution optimale du problème de second niveau défini par $t^{1,*}$ et par conséquent que $t^{1,*}, x^{1,*}, x^{2,*}$ ne forment pas un élément de la région induite. Ceci signifie qu'il existe des clients c tels que $t^{1,*}$ n'est pas élément du polyèdre d'optimalité de $x_c^{1,*}, x_c^{2,*}$. On peut donc chercher à couper $t^{1,*}, x^{1,*}, x^{2,*}$ sans couper des éléments de la région induite. Pour ce faire, on utilise $x_{inf}^{1,*}(i)$ et $x_{inf}^{2,*}(i)$, une solution optimale du problème de second niveau associé à $t^{1,*}$ à l'itération i . Pour tout client c , $t^{1,*}$ est élément du polyèdre d'optimalité de l'ensemble minimal non dominé pour c défini par $x_{inf}^{1,*}(i)_c$ et $x_{inf}^{2,*}(i)_c$. On en déduit alors une coupe pour chaque client $c \in C$.

$$\begin{aligned} \sum_{s,l \in U^1, L} (t_{s,l}^1 + w_{s,l,c}^1) x_{s,l,c}^1 + \sum_{s,l \in U^2, L} (t_{s,l}^2 + w_{s,l,c}^2) x_{s,l,c}^2 \leq \\ \sum_{s,l \in U^1, L} (t_{s,l}^1 + w_{s,l,c}^1) x_{inf}^{1,*}(i)_{s,l,c} + \sum_{s,l \in U^2, L} (t_{s,l}^2 + w_{s,l,c}^2) x_{inf}^{2,*}(i)_{s,l,c} \end{aligned}$$

Une fois celle-ci linéarisée, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{s,l \in U^1, L} T_{s,l,c}^1 + w_{s,l,c}^1 x_{s,l,c}^1 + \sum_{s,l \in U^2, L} (t_{s,l}^2 + w_{s,l,c}^2) x_{s,l,c}^2 \leq \\ \sum_{s,l \in U^1, L} (t_{s,l}^1 + w_{s,l,c}^1) x_{inf}^{1,*}(i)_{s,l,c} + \sum_{s,l \in U^2, L} (t_{s,l}^2 + w_{s,l,c}^2) x_{inf}^{2,*}(i)_{s,l,c} \end{aligned}$$

Cette coupe signifie que le coût total perçu par tous les clients dans la disposition choisie doit être plus petit que le coût total perçu pour la disposition $x_{inf}^{1,*}(i), x_{inf}^{2,*}(i)$. On vérifie immédiatement qu'elle coupe bien $t^{1,*}, x^{1,*}, x^{2,*}$. Elle est bien vérifiée par tout élément de la région induite. En effet, à première vue, nous aurions pu seulement générer la coupe qui correspond à la somme pour tous les clients de ces inégalités. Toutefois, si pour un client donné la coupe n'est pas vérifiée, nous constatons rapidement que nous pouvons engendrer un ensemble de valeur strictement plus petite

pour le problème de niveau inférieur.

Précisons un dernier point sur ces coupes. Certes, $x_{inf}^{1,*}(i), x_{inf}^{2,*}(i)$ peut ne pas vérifier les contraintes de niveau supérieur. Cela ne pose pas de problèmes. La prise en considération de ce vecteur d'allocation a pour but de couper les valeurs possibles du vecteur de prix pour une allocation donnée. $t^{1,*}, x^{1,*}, x^{2,*}$ vérifie toujours les contraintes de niveau supérieur. Il faut ensuite s'assurer que $x^{1,*}, x^{2,*}$ est solution du problème de second niveau défini par $t^{1,*}$. C'est le rôle de ces coupes qui sont ajoutées à chaque itération.

4.2.4 Validité de l'algorithme

Théorème 1 *Sous les hypothèses du modèle, l'algorithme résout le problème en un temps fini.*

Démonstration :

A chaque itération de l'algorithme, nous ajoutons au moins une coupe liée à une combinaison d'ensembles minimaux non dominés au problème biniveau relaxé, si une solution optimale n'est pas trouvée. Au pire des cas, nous ajouterons une coupe pour chaque combinaison d'ensembles minimaux non dominés possible. Il y en a un nombre fini car il y a un nombre fini de spots publicitaires.

De plus, chaque combinaison ne peut être visitée qu'une seule fois. Dans le cas où une combinaison est visitée deux fois, on déduit rapidement que la solution optimale du problème relaxé est alors solution optimale du problème biniveau. Ainsi, une fois toutes ces coupes ajoutées, la résolution du programme biniveau relaxé fournira une solution optimale.

Il y a ainsi un nombre fini de problèmes à résoudre pour atteindre une solution

optimale. Chaque problème est résoluble en temps fini. L'algorithme résout donc le problème en un temps fini. $\square$

Nous résumons les différentes étapes de l'algorithme :

Algorithme de génération de coupes associées à des ensembles minimaux

Étape 0 : Initialisation

On détermine pour chaque client la combinaison optimale de spots publicitaires en ne considérant que l'inventaire chez la concurrence.

On ajoute au problème relaxé la contrainte de prix pour chaque client associé à la concurrence et on linéarise le problème obtenu.

$i = 0$.

Étape 1 : On résout le problème relaxé modifié. On obtient $t^{1,*}$, $x^{1,*}$ et $x^{2,*}$.

Étape 2 : Génération de l'ensemble minimal¹

On résout le problème de second niveau avec $t^{1,*}$ pour chaque client c . On obtient $x_{inf}^{1,*}(i)_c$ et $x_{inf}^{2,*}(i)_c$.

Si pour chaque client c , $(t^{1,*} + w_c^1) \cdot x_c^{1,*} + (t^{2,*} + w_c^2) \cdot x_c^{2,*} = (t^{1,*} + w_c^1) \cdot x_{inf}^{1,*}(i)_c + (t^{2,*} + w_c^2) \cdot x_{inf}^{2,*}(i)_c$, alors $t^{1,*}$, $x^{1,*}$ et $x^{2,*}$ forment une solution optimale du problème bi-niveau. On arrête l'algorithme.

Sinon, on passe à l'étape 3.

Étape 3 : Génération des coupes

Pour chaque client c qui ne vérifie pas l'égalité énoncée à l'étape 2, on engendre la coupe relativement à $x_{inf}^{1,*}(i)_c$ et $x_{inf}^{2,*}(i)_c$. On la linéarise puis on l'ajoute au

¹Excepté pour $x_{inf}^{1,*}(i)_c$ et $x_{inf}^{2,*}(i)_c$, pour tout vecteur v , le vecteur v_c désigne ici le sous-vecteur de v composé uniquement des coordonnées relatives au client c .

problème relaxé modifié. On retourne ensuite à l'étape 1.

$i \leftarrow i + 1$.

4.3 Exemple d'application de l'algorithme

Afin de comprendre le fonctionnement de l'algorithme, nous allons l'appliquer sur un petit exemple. Pour ce faire, nous reprenons celui étudié à la section 3.3 auquel nous rajoutons un client et modifions les contraintes au niveau supérieur.

$$\begin{aligned}
& \max_{t^1, x^1, x^2} \quad t_{1,1}^1 x_{1,1,1}^1 + t_{1,2}^1 x_{1,2,1}^1 + t_{1,1}^1 x_{1,1,2}^1 + t_{1,2}^1 x_{1,2,2}^1 \\
& \text{s.à} \quad x_{1,1,1}^1 + x_{1,1,2}^1 \leq 2 \\
& \quad \quad x_{1,2,1}^1 + x_{1,2,2}^1 \leq 3 \\
& \quad \quad 15(x_{1,1,1}^1 + x_{1,1,2}^1) + 30(x_{1,2,1}^1 + x_{1,2,2}^1) \leq 75 \\
& \min_{x^1, x^2} \quad (t_{1,1}^1 + 5)x_{1,1,1}^1 + (t_{1,2}^1 + 15)x_{1,2,1}^1 + 17x_{1,1,1}^2 + 42x_{1,2,1}^2 + \\
& \quad \quad (t_{1,1}^1 + 15)x_{1,1,2}^1 + (t_{1,2}^1 + 5)x_{1,2,2}^1 + 23x_{1,1,2}^2 + 27x_{1,2,2}^2 + \\
& \quad \quad (t_{1,1}^1 + 10)x_{1,1,3}^1 + (t_{1,2}^1 + 10)x_{1,2,3}^1 + 40x_{1,1,3}^2 + 50x_{1,2,3}^2 \\
& \text{s.à} \quad 20x_{1,1,1}^1 + 30x_{1,2,1}^1 + 15x_{1,1,1}^2 + 40x_{1,2,1}^2 \geq 50 \\
& \quad \quad 20x_{1,1,2}^1 + 30x_{1,2,2}^1 + 15x_{1,1,2}^2 + 40x_{1,2,2}^2 \geq 55 \\
& \quad \quad 20x_{1,1,3}^1 + 30x_{1,2,3}^1 + 15x_{1,1,3}^2 + 40x_{1,2,3}^2 \geq 45 \\
& \quad \quad x_{1,l,c}^1, x_{1,l,c}^2 \in \{0, 1\} \quad \forall l \in \{1, 2\} \quad \forall c \in \{1, 2, 3\} \\
& \quad \quad t_{1,1}^1, t_{1,2}^1 \geq 0
\end{aligned}$$

Les ensembles minimaux non dominés pour les clients 1 et 2 restent les mêmes que précédemment. Pour le client 3, ces ensembles minimaux sont :

Client 3	
Ensemble minimal	Prix
$\{(1, 1, 1), (2, 1, 2)\}$	$t_{1,1} + 60$
$\{(1, 1, 2), (2, 1, 1)\}$	$t_{1,2} + 50$
$\{(1, 1, 1), (1, 1, 2)\}$	$t_{1,1} + t_{1,2} + 20$
$\{(2, 1, 1), (2, 1, 2)\}$	90

A partir de ceci, nous pouvons représenter sur la figure 4.1 l'ensemble des polyèdres d'optimalité pour chaque client.

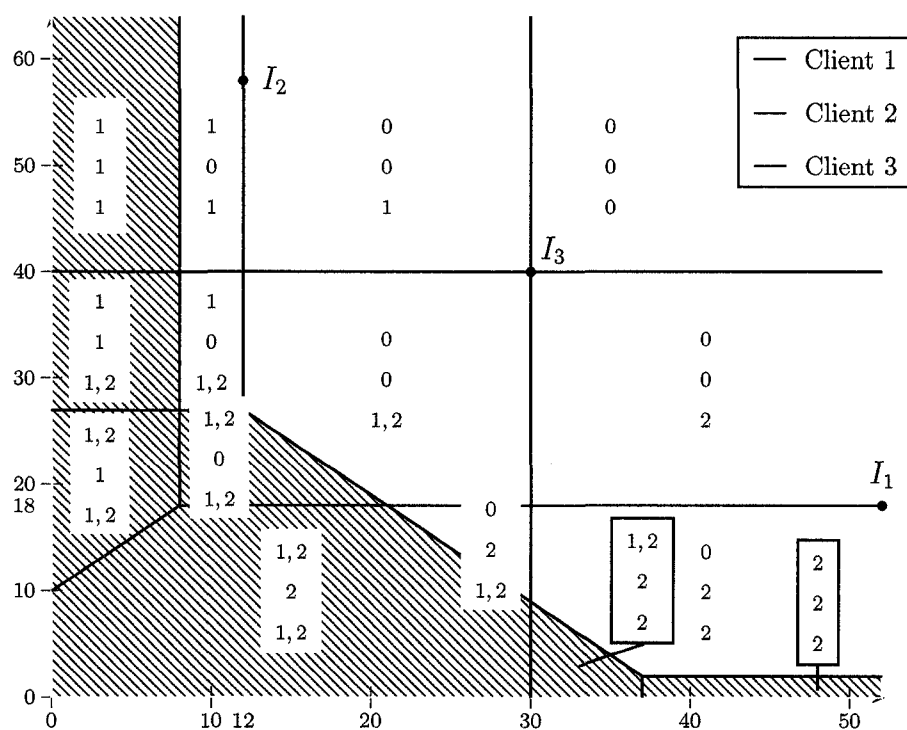


Figure 4.1: Polyèdres d'optimalité

Sur cette figure, pour chaque polyèdre délimité, nous avons indiqué la combinaison de spots publicitaires fournie par la chaîne leader pour chaque client. Ainsi, pour chaque polyèdre, la première ligne correspond au premier client, la deuxième au second et ainsi de suite. Un 1 indique un spot publicitaire de la tranche 1, de

longueur 15 secondes. Un 2 indique un spot publicitaire de cette même tranche mais de longueur 30 secondes. Un 0 indique aucun spot fourni par la chaîne leader. Par exemple, pour le polyèdre en haut à gauche du graphe, chaque client est pourvu d'un spot publicitaire de 15 secondes dans la tranche 1 par la chaîne leader.

Pour les valeurs des prix se trouvant dans la zone grisée, la combinaison des ensembles minimaux optimaux pour ces prix, associés à chaque client, ne vérifie pas les contraintes de niveau supérieur du problème biniveau. Nous pouvons ainsi remarquer que la projection de la région induite sur l'espace des prix n'est pas convexe.

Observons maintenant le comportement de l'algorithme sur cet exemple. L'algorithme s'interrompt après 3 itérations, nous résumons les résultats de chaque itération dans le tableau 4.4.

Tableau 4.4: Itérations de l'algorithme sur un exemple

Itération	Disposition dans le PMR	Objectif du PMR	Vecteur de prix
1	0	88	$t_{1,1} = 52$ $t_{1,2} = 18$
	2		
	1, 2		
2	1	82	$t_{1,1} = 12$ $t_{1,2} = 58$
	0		
	1, 2		
3	0	70	$t_{1,1} = 30$ $t_{1,2} = 40$
	0		
	1, 2		

On a représenté sur la figure 4.1 les différentes valeurs des prix à chaque itération.

Tableau 4.5: Classement des ensembles minimaux non dominés par masse fixe

	Ensembles minimaux non dominés			
Clients	$m_c(\emptyset)$	$m_c(\{1, 2\})$	$m_c(\{1\})$	$m_c(\{2\})$
Client 1	59	20	47	57
Client 2	50		42	32
Client 3	90	20	60	50

A la vue de ces résultats, nous pouvons donner une première interprétation économique en considérant les ensembles minimaux non dominés pour chaque client qui présentent la plus petite masse fixe.

Pour un client donné c , pour $E \in Em^*(c)$, le revenu maximum que peut générer la chaîne leader en vendant au client c les spots publicitaires associés à E est $m_c(\emptyset) - m_c(E)$. $m_c(\emptyset)$ représente le meilleur coût pour le client c s'il ne considère que l'inventaire de la concurrence pour satisfaire son objectif d'audience.

Ainsi parmi ces ensembles minimaux non dominés, en considérant individuellement les clients, ceux qui ont la plus petite masse fixe offrent le plus grand bénéfice potentiel pour la chaîne leader.

Dans le cadre de notre exemple, regardons quels sont ces ensembles et quels bénéfices ils offrent pour la chaîne. Comme notre exemple est de petite taille, nous avons consigné tous les ensembles minimaux dans le tableau 4.5.

Nous constatons qu'à la première itération, la résolution du problème maître relaxé renvoie la combinaison d'ensembles minimaux non dominés qui respecte les contraintes de niveau supérieur du problème biniveau et dont le bénéfice potentiel pour la chaîne leader est maximal. En l'occurrence, il s'agit de l'ensemble minimal non dominé $\{1, 2\}$ pour le client 3 et de l'ensemble $\{2\}$ pour le client 2.

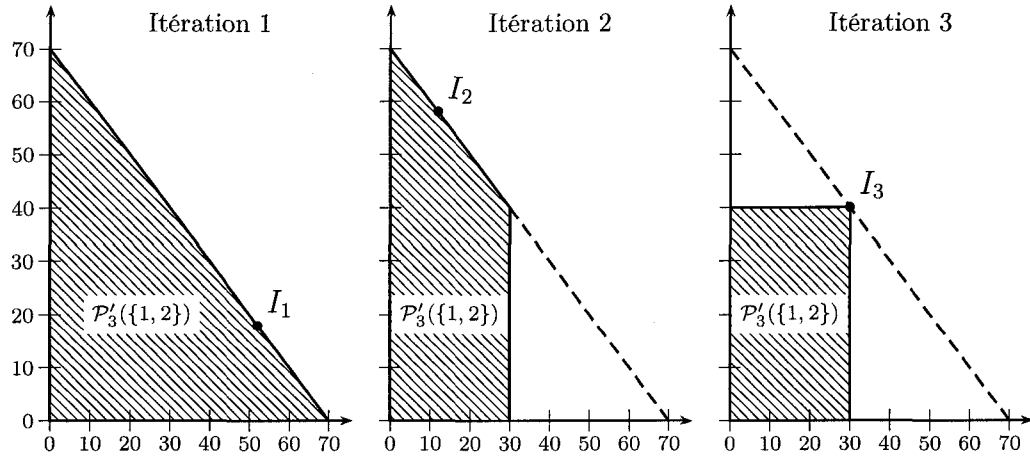


Figure 4.2: Évolution du polyèdre d'optimalité de $\{1, 2\}$ pour le client 3

Toutefois, les valeurs des prix obtenues ne permettent pas d'obtenir la même valeur d'objectif au second niveau. Cela s'explique par une myopie à l'échelle du problème biniveau relaxé relativement aux prix de tous les ensembles minimaux non dominés intéressant chaque client. Tout se passe au départ comme si, aux yeux de la chaîne leader, pour un ensemble minimal non dominé choisi, proposé à un client, le seul "produit" concurrent était l'offre de la concurrence. Cette myopie est progressivement corrigée par l'ajout de coupes à chaque itération, qui correspondent à la mise en lumière de "produits concurrents", également offerts par la chaîne leader.

Ainsi, par exemple, pour l'ensemble minimal non dominé $\{1, 2\}$ propre au client 3, retraçons sur la figure 4.2 les contraintes sur les prix au fur et à mesure des itérations. Nous notons $\mathcal{P}'_c(\{1, 2\})$ l'ensemble des valeurs des prix possibles pour l'ensemble minimal non dominé $\{1, 2\}$ dans le problème biniveau relaxé.

Le premier graphique sur la figure 4.2 correspond à la seule contrainte de prix inférieure à l'offre de la concurrence. Le second graphique considère en plus la contrainte de prix relative à l'ensemble minimal non dominé $\{2\}$ qui est ajoutée au problème maître relaxé à l'issue de l'itération 1. Enfin, le troisième graphique

considère une contrainte supplémentaire correspondant au prix de l'ensemble minimal non dominé $\{1\}$, ajoutée après l'itération 2. Nous avons indiqué pour chaque itération les valeurs des prix à l'optimalité pour la résolution du programme maître relaxé.

A la lecture de la figure 4.1, nous constatons que la myopie relative à un client donné, pour un ensemble minimal non dominé dont le polyèdre d'optimalité est inclus dans l'ensemble des prix correspondant à des solutions non réalisables au premier niveau, ne prête pas à conséquence. Ceci justifie le développement d'un algorithme de résolution qui ne tend pas à générer tous les ensembles minimaux non dominés possibles pour chaque client.

Nous pouvons remarquer également qu'à chaque itération de l'algorithme, la disposition pour chaque client correspond à un ensemble minimal non dominé.

Par ailleurs, la solution optimale suggère une heuristique pour résoudre le problème biniveau. A savoir : classer les clients par ordre décroissant en fonction du revenu maximal qu'ils peuvent générer pour la chaîne. Ensuite, considérer le problème biniveau uniquement pour le premier client, le résoudre avec l'algorithme développé. Fixer les valeurs non nulles obtenues. Résoudre après le problème biniveau pour le second client, fixer les valeurs non nulles obtenues, et ainsi de suite jusqu'au dernier client.

Si l'on applique cette heuristique à l'exemple, nous résolvons d'abord le problème pour le client 3. Nous obtenons après 3 itérations $x_{1,1,3} = x_{1,2,3} = 1$ et $t_{1,1} = 30$ et $t_{1,2} = 40$. Nous résolvons ensuite pour le client 1, ce qui donne $x_{1,1,1} = x_{1,2,1} = 0$,

puis pour le client 2, ce qui donne $x_{1,1,2} = x_{1,2,2} = 0$. Ceci correspond à la solution optimale obtenue au préalable.

CHAPITRE 5

AMÉLIORATIONS DE L'ALGORITHME ET HEURISTIQUE

La première limitation de notre algorithme est qu'il ne génère qu'une seule coupe à chaque itération par client. En étant capable de générer plus de coupes, nous pouvons espérer que l'algorithme nécessite moins d'itérations avant d'atteindre la valeur optimale et fonctionne ainsi plus rapidement.

5.1 Ajout initial de coupes

La première idée consiste à ajouter des coupes au problème avant le début de la résolution. Cette idée provient du constat sur nos premiers tests que, pour les premières itérations, la valeur du coût total pour chaque client, calculée à partir de la disposition et des prix issus de la résolution du problème relaxé, est égale à la valeur de la meilleure disposition chez la concurrence mais que cette égalité n'est plus vérifiée pour tous les clients quand on atteint la valeur optimale du problème biniveau.

Dans les premières itérations, c'est l'absence de coupes correspondantes aux ensembles minimaux non dominés dont le polyèdre d'optimalité est "limitrophe" avec le polyèdre d'optimalité associé à la disposition chez la concurrence uniquement, qui permet au vecteur de prix de prendre des valeurs trop grandes, en dehors du polyèdre d'optimalité de l'allocation générée par la résolution problème maître. Nous nous basons alors sur l'intuition que nous avons de la géométrie de la projection de

la région induite sur l'espace des prix, suggérée par la proposition 5. Celle-ci indique premièrement que les polyèdres d'optimalité des ensembles minimaux non dominés minimaux pour l'inclusion¹ dans $U^1 \times L$ sont limitrophes avec le polyèdre d'optimalité associé à la disposition optimale dans la concurrence uniquement. C'est pourquoi en générant les coupes associées aux ensembles minimaux de petite taille nous pouvons obtenir une première approximation des polyèdres d'optimalité limitrophe avec le polyèdre d'optimalité pour l'allocation optimale chez la concurrence.

Ainsi, pour appliquer cette idée, nous générons des coupes avant de lancer l'algorithme. Nous définissons d'abord une taille maximale k d'ensemble minimal. Puis, pour chaque client, nous générons tous les ensembles minimaux non dominés de taille au plus k et nous ajoutons la coupe associée pour chaque ensemble au problème maître.

Pour l'instant, la détermination de k n'obéit pas à une règle en particulier. Nous cherchons uniquement à éviter de générer un nombre trop important de coupes et à utiliser trop de temps pour générer toutes ces coupes.

¹Par ensemble minimal non dominé minimal pour l'inclusion dans $U^1 \times L$, nous entendons un ensemble $E \in Em^*(c)$ tel que $\forall F \in Em^*(c)$, si $F^1 \subsetneq E^1$ alors $F^1 = \emptyset$.

5.2 Ajout progressif de coupes

L'idée précédente d'ajout de coupes permet d'ajouter un nombre significatif de coupes au problème maître avant de commencer à le résoudre. Toutefois, le déroulement de l'algorithme est inchangé : il n'y a qu'au plus une coupe qui est ajoutée au problème maître par client.

De plus, l'analyse de l'exemple d'application de l'algorithme souligne deux points. Premièrement, pour chaque ensemble de spots publicitaires généré par la résolution du problème maître, il y a une "myopie" relativement aux coûts des autres ensembles de spots. Deuxièmement, pour pallier à cette "myopie", il peut falloir plusieurs itérations de l'algorithme.

Enfin, pour chaque ensemble de spots E_c attribué par client à la résolution du problème relaxé, l'intuition de la géométrie de la projection de la région induite nous suggère d'engendrer les ensembles minimaux non dominés dont les spots publicitaires attribués par le leader font partie de E_c .

Ainsi pour parer à cette "myopie", à chaque itération, nous pouvons ajouter au problème relaxé, pour chaque client, les coupes associées aux ensembles minimaux non dominés générés par les sous-ensembles de l'ensemble des spots publicitaires attribué au client par la chaîne leader. En vertu de la propriété 5, nous savons que les polyèdres d'optimalité associés à ces ensembles définissent une partie des frontières du polyèdre d'optimalité de l'ensemble généré par la résolution du problème si celui-ci est un ensemble minimal non dominé.

Nous avons par ailleurs observé sur nos simulations numériques que les solutions du problème maître relaxé définissaient généralement des ensembles minimaux non dominés. Ce résultat semble intuitif même si nous n'avons pas su le démontrer. En

effet, plus la masse fixe pour un ensemble de spots relativement à un client est faible, plus le revenu que peut potentiellement générer cet ensemble est grand.

Là encore pour un client, le résultat se démontre plus simplement. Ceci peut donner une intuition du phénomène dans le cas de plusieurs clients.

Propriété 8 *Dans le cas d'un seul client, les valeurs des variables d'allocation de la solution optimale du problème biniveau relaxé définissent un ensemble minimal non dominé pour ce client.*

Démonstration :

Nous considérons donc un tel problème biniveau relaxé. Supposons que nous sommes à l'itération k de l'algorithme, avec $k \geq 0$. Notons t^*, x^* la solution optimale obtenue après résolution. Nous pouvons supposer que $t^* \cdot x^*$ est strictement positif.

Notons E l'ensemble de spots associés à x^* . Supposons par l'absurde que E n'est pas un ensemble minimal non dominé. On considère alors E' un ensemble minimal non dominé tel que $m_1(E') = \min\{m_1(F)/F \in Em^*(1), F^1 \subset E^1\}$. E' existe bien et son sous-ensemble de spots alloués par la chaîne leader est non vide. En effet, on sait que $(t^* + w) \cdot x^* \leq R^1$ où R^1 est la masse fixe associée à la disposition optimale chez la concurrence uniquement. Par conséquent, $m_c(E) < R^1$ puisque l'on a supposé que $t^* \cdot x^* > 0$. Aussi, puisque l'on suppose que $E \notin Em^*(1)$, cela signifie alors que ce minimum est bien défini et n'est pas atteint pour la disposition optimale chez la concurrence. On note alors x' le vecteur d'allocation associé à E' . On définit $\beta = (t^* + w) \cdot x^* - (t^* + w) \cdot x'$, soit $\beta = t^* \cdot (x^* - x') + m_1(E) - m_1(E')$.

Soit alors $(s, l) \in E^{1'}$. D'après ce qui précède, $E^{1'}$ est non vide donc (s, l) existe bien. Nous modifions $t_{s,l}^*$ par $t_{s,l}^* + \beta$, notons t^{**} ce nouveau vecteur de prix. Alors, t^{**}, x' est bien une solution réalisable du problème relaxé. En effet, x' vérifie les

contraintes d'audience comme il est rattaché à un ensemble minimal non dominé, mais aussi les contraintes d'inventaires car x^* les vérifie et $E' \subset E$. Par ailleurs, comme $(t^{**} + w) \cdot x' = t^* \cdot x' + m_1(E') + \beta = t^* \cdot x^* + m_1(E) = (t^* + w) \cdot x^*$ et que les valeurs du terme majorant des contraintes augmentent², t^{**}, x' vérifient les contraintes sur le coût perçu également. La valeur de l'objectif du problème biniveau relaxé vaut alors $t^* \cdot x^* + m_1(E) - m_1(E')$ ce qui est strictement plus grand que $t^* \cdot x^*$ par hypothèse sur E . Or $t^* \cdot x^*$ est la valeur optimale, c'est donc absurde. Ainsi, E est un ensemble minimal non dominé. $\square$

5.3 Heuristique : séparation du problème par client

Nous avons constaté que pour un client, la résolution du problème était beaucoup plus rapide. À partir de là, nous pouvons proposer une heuristique de type glouton.

Pour chaque client, nous déterminons le prix de l'allocation optimale chez la concurrence uniquement, puis le prix de l'allocation optimale quand tous les prix des spots publicitaires de la chaîne leader sont fixés à 0. La différence de ces deux valeurs nous fournit le revenu potentiel maximal que peut générer la vente de spots publicitaires à chaque client. Le calcul du prix de l'allocation optimale quand les prix de l'inventaire de la chaîne leader sont nuls consiste à résoudre le problème de second niveau associé au vecteur de prix nul.

Nous classons les clients par ordre décroissant de revenu potentiel maximal.

L'heuristique consiste alors à résoudre séquentiellement le problème par client tout en adaptant les contraintes sur les prix de façon à conserver les allocations

²On considère ici les contraintes telles qu'elles ont été écrites dans 4.2.3

obtenues pour chaque client à chaque itération de l'heuristique.

Pour le premier client, nous résolvons le problème biniveau relaxé comme indiqué dans la description de l'algorithme exact. Ensuite, supposons que nous avons résolu jusqu'au client i . Notons $x(1), \dots, x(i)$ les vecteurs d'allocation et $t(i)$ le vecteur de prix obtenu. Nous considérons alors le problème biniveau relaxé défini uniquement pour le client $i + 1$ auquel nous rajoutons les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} t_{s,l}^1 &\leq t(i)_{s,l}^1 & \text{si } x(j)_{s,l}^1 = 1 & \text{ pour } 1 \leq j \leq i \\ t_{s,l}^1 &\geq t(i)_{s,l}^1 & \text{si } x(j)_{s,l}^1 = 0 & \text{ pour } 1 \leq j \leq i \\ t_{s,l}^1 &= t(i)_{s,l}^1 & \text{sinon} \end{aligned}$$

Alors d'après les remarques 1 et 2 de la partie 3.5, nous en déduisons que nous conservons les mêmes allocations pour les clients j , avec j allant de 1 à i , à la résolution. Toutefois, ceci ne nous garantit pas l'existence d'un point réalisable pour le problème biniveau relaxé pour l'itération $i + 1$ de l'heuristique.

Conservons les notations précédentes. Une heuristique gloutonne plus précise consisterait à résoudre l'itération i de la façon suivante :

Étape 0 : On effectue le même classement des clients qu'énoncé au début de cette section.

Étape 1 : Nous résolvons le problème biniveau relaxé associé au client $i + 1$ uniquement. Nous obtenons t^* et $x(i + 1)$.

Étape 2 : Pour chaque client j , $1 \leq j \leq i$, nous résolvons le problème de second niveau associé à t^* . Notons $x'(j)$ une solution optimale. Si pour chacun de ces clients, $(t^* + w) \cdot x'(j) = (t^* + w) \cdot x(j)$, alors, nous passons à l'itération suivante de l'heuristique. Sinon, nous passons à l'étape 3.

Étape 3 : Pour chaque client j , si $(t^* + w) \cdot x'(j) < (t^* + w) \cdot x(j)$, alors nous

rajoutons au problème biniveau relaxé associé au client $i + 1$ la contrainte suivante : $(t + w) \cdot x(j) \leq (t + w) \cdot x'(j)$. Nous retournons ensuite à l'étape 1.

Dans le cadre de ce mémoire, nous n'avons pas implémenté cette seconde idée d'heuristique. Là encore, rien ne garantit l'existence d'une solution réalisable au problème biniveau relaxé ainsi modifié à chaque itération de l'heuristique.

Il faut remarquer que, pour chaque client j , les coupes ainsi ajoutées pourraient se limiter aux coupes associées aux ensembles minimaux non dominés dont les polyèdres d'optimalité sont limitrophes avec le polyèdre d'optimalité associé à $x(j)$. Nous sommes également dans une situation différente de la résolution de l'algorithme exact où la valeur de $x(j)$ n'est pas identique à chaque itération de l'algorithme.

Si l'on peut facilement envisager que les valeurs obtenues à la sortie de l'heuristique ne sont pas très proches de la valeur optimale du problème biniveau, de par la nature gloutonne de l'heuristique, cette heuristique peut toutefois nous permettre d'obtenir un point de la région induite et par conséquent fournir une approximation du gap pour l'algorithme exact. En effet, l'inconvénient de notre algorithme est que tant que l'on n'a pas atteint l'optimalité, nous ne connaissons pas de point de la région induite et nous ne sommes donc pas en mesure de calculer une approximation du gap.

CHAPITRE 6

ANALYSE DES RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Maintenant que nous avons conçu un algorithme exact de résolution et des méthodes pour accélérer ses performances, la partie qui suit s'intéresse naturellement à les mettre en pratique. Nous expliquons d'abord comment nous avons généré les instances, avant de discuter des résultats numériques observés.

6.1 Génération des instances

Pour évaluer les performances de notre algorithme, nous avons généré aléatoirement, de façon uniforme, des instances numériques en jouant sur plusieurs paramètres. Les tests numériques ont été réalisés sur un ordinateur équipé de LINUX. Nous avons utilisé le solveur commercial CPLEX 10.1 pour résoudre nos problèmes mixtes en nombres entiers.

Parmi les paramètres en question, dans le cadre général, nous avons fixé le nombre de catégories démographiques en jeu et le nombre de clients. Ensuite, du côté des fournisseurs de spots publicitaires, à savoir la chaîne leader et la concurrence, nous avons fait varier le nombre de longueurs de spots publicitaires possibles et le nombre de tranches publicitaires proposées par la chaîne leader ou par la concurrence, en fonction du jeu de données considérées. Par exemple, pour les instances du tableau 6.3, nous avons fixé à 3 le nombre de longueurs de spots et respectivement à 5 et à 40 le nombre de tranches publicitaires proposées par la chaîne leader et par la concurrence.

Ensuite, pour le catalogue de spots publicitaires offert respectivement par la chaîne leader et par sa concurrence, pour chacun des paramètres nous avons fixé une valeur minimale puis un écart maximum par rapport à cette valeur. A l'aide d'une loi aléatoire sur $[0; 1]$, nous avons alors pour chaque instance déterminer une valeur du paramètre entre cette valeur minimale et sa somme avec l'écart maximum. Nous avons ainsi fait varier la valeur minimale de son audience et son écart maximum. De même pour la désutilité. Également, nous avons modifié le prix minimal d'un spot publicitaire et l'écart maximum sur le prix, pour le catalogue de la concurrence uniquement. Par ailleurs, pour les contraintes d'inventaire relatives au catalogue de la chaîne leader, le nombre de spots publicitaires d'une longueur donnée pour une tranche donnée sont paramétrisés de la même façon, ainsi que la longueur de chaque tranche.

Enfin, au niveau des clients, les paramètres que nous avons modifiés sont l'objectif d'audience minimal et l'écart d'objectif sur l'audience maximal, la désutilité minimale pour un spot publicitaire et la désutilité maximale.

Dans les tableaux qui suivent, "L." désigne la chaîne leader, "C." la concurrence, "Nb. de spots par lg minimum" le nombre de spots par longueur minimum, "OAM" l'objectif d'audience minimum par client et "EOA" l'écart sur l'objectif d'audience. La valeur du gap est définie par rapport à la valeur optimale du problème biniveau dans les cas où celle-ci a pu être déterminée.

6.2 Résultats numériques

Tout d'abord, à chaque itération de l'algorithme, nous avons pris soin d'indiquer à la méthode de séparation et d'évaluation résolvant le problème MIP que si une solution réalisable du problème biniveau relaxé était obtenue avec une valeur de

l'objectif égale à celle de la solution optimale à l'itération précédente, alors la méthode de séparation et d'évaluation pouvait s'arrêter car une solution optimale était trouvée pour le problème à cette itération, étant donné que l'on réduit l'ensemble réalisable à chaque itération.

Dans un premier temps, il faut noter que le nombre de spots publicitaires nécessaires à un client pour atteindre son objectif d'audimat joue un rôle sur la performance de l'algorithme. Ainsi, plus ce nombre est élevé, plus la résolution va être longue.

Les tableaux 6.2b, 6.2c et 6.2d soulignent cette différence dans des instances pour 5 clients¹. Chacun de ces tableaux montrent les résultats obtenus pour 10 instances générées aléatoirement dans chaque cas. Les seuls paramètres que nous avons modifiés entre ces deux séries d'exemple est l'objectif d'audience minimale et l'écart maximal sur l'objectif d'audience pour les clients. Pour le tableau 6.2b, les clients ont de 0 à 2 spots publicitaires attribués par la chaîne leader. Dans le cas du tableau 6.2c, les clients en ont de 0 à 4 ; dans le dernier cas, ils ont jusqu'à 7.

A partir de ces premiers tests, nous avons fait plusieurs constats.

Premièrement, il arrive que pour des itérations successives de l'algorithme, la résolution du problème relaxé fournit la même valeur pour l'objectif. C'est pourquoi, afin de gagner du temps dans la résolution, nous avons précisé dans la méthode de séparation et d'évaluation que si la valeur de l'objectif était égale à celle de l'itération précédente, alors une solution optimale avait été trouvée, comme indiqué au début de cette section. Au départ, quand on ne précisait pas ceci, la méthode de séparation et d'évaluation perdait du temps à essayer de prouver l'optimalité d'une telle solution en parcourant l'arbre de branchement jusqu'à atteindre un gap nul.

¹Sur chacun des tableaux qui suit, OAM désigne l'objectif d'audience minimal parmi les clients et EOA désigne l'écart sur l'objectif d'audience.

Deuxièmement, le nombre total de coupes générées pendant la résolution pour chaque client n'est pas le même. Par exemple, pour l'instance n°2 du tableau 6.2c, un client a 80 coupes engendrées, alors qu'un autre n'en a que 3. De même pour l'instance n°9 de ce même tableau, un client a 87 coupes engendrées, tandis que deux autres en ont moins de 10 générées. Ainsi, il n'est pas nécessaire de générer tous les ensembles minimaux non dominés selon le client pour pouvoir résoudre le problème à l'optimalité. Ceci s'explique par la combinatoire entre les clients.

Troisièmement, pour les premières itérations de l'algorithme, pour chaque client, le coût de la disposition générée par la résolution du problème maître était égal au coût de la disposition optimale en considérant uniquement l'inventaire de la concurrence. Toutefois, cette propriété n'est plus nécessairement le cas à la fin de l'algorithme.

Dernièrement, nous constatons que l'évolution des allocations et du vecteur de prix au cours de l'algorithme procède comme suit. L'algorithme obtient d'abord pour les clients dont le revenu potentiel est le moins élevé un vecteur d'allocation et de prix tels que la valeur du problème de second niveau associé à ce vecteur de prix pour ces clients soit égale au coût perçu associé à ces vecteurs. Ensuite, cette égalité reste vérifiée puis l'algorithme cherche à en faire de même pour les autres clients, en les considérant par ordre croissant relativement au revenu potentiel qu'ils peuvent générés.

Pour les instances du tableau 6.2d, nous avons utilisé par la suite les stratégies d'ajout de coupes pour observer les changements de performance. Ces résultats sont consignés dans le tableau 6.2.

Pour la génération initiale de coupes, nous avons engendré les coupes associées

aux ensembles minimaux non dominés ayant au plus deux spots publicitaires chez la chaîne leader.

Nous constatons que moins de temps est nécessaire pour obtenir la solution optimale, mais également que moins d'itérations sont requises pour résoudre le problème biniveau, ce qui semble cohérent. La génération dynamique fournit ici pour toutes les instances de meilleurs résultats que la génération initiale de coupes.

On s'aperçoit également que le temps de résolution d'une itération est généralement plus long que lorsque qu'on ne génère pas de coupes supplémentaires.

Toutefois, nous constatons qu'au bout d'un certain temps, en utilisant la génération dynamique de coupes, les valeurs des variables d'allocation pour les clients n'évoluent que rarement et donc l'effet de la génération dynamique s'estompe. Seule la résolution du problème de second niveau fournit alors des coupes supplémentaires, ce qui nous ramène à la situation initiale de l'algorithme. Ceci peut s'expliquer ainsi : pour chaque client, la génération dynamique de coupes ne considère que l'allocation propre à ce client résultant de la résolution du problème biniveau relaxé. En conséquence, les coupes qui sont rajoutées ne prennent pas en compte les allocations aux autres clients.

Arrivé à un certain point de l'algorithme, ce sont les différences d'allocations entre les clients qui doivent être génératrices de coupes. Ainsi, en observant les coupes ajoutées par la résolution du problème de second niveau, une fois que la génération dynamique n'apporte plus de nouvelles coupes, nous constatons que les allocations associées à ces coupes correspondent à une combinaison de spots publicitaires entre les différentes allocations de chaque client.

Nous avons ensuite fait des tests pour un seul client pour observer si le problème

était rapidement résolu. Sans surprise, nous constatons que c'est le cas. Les résultats sont consignés dans les tableaux de 6.3. Dans le premier cas, le client a jusqu'à 7 spots publicitaires attribués par la chaîne leader, dans le second cas, il en a jusqu'à 5, dans le troisième cas, il en a jusqu'à 5 également.

Nous pouvons faire deux remarques sur ces instances.

Premièrement, dans l'optique de comprendre la disposition de la région induite du problème, nous avons constaté pour certaines des instances que la valeur du coût perçu à l'optimalité n'est pas toujours égale à la valeur de R_c tel que défini en 4.2.1. Ceci signifie que l'intersection du polyèdre d'optimalité de l'allocation optimale avec le polyèdre d'optimalité correspondant à l'allocation optimale chez la concurrence uniquement est vide.

Deuxièmement, pour chacune de ces instances, on constate que pour plus de la moitié des itérations de l'algorithme, le problème maître a la même valeur qu'à l'itération précédente. On ne constate pas un phénomène si marqué avec 5 clients.

Par la suite, nous avons augmenté le nombre de tranches offertes par le leader pour évaluer l'effet sur la performance de l'algorithme.

Dans le cas de 5 clients, l'algorithme devient rapidement inefficace comme le montre le tableau 6.4. Dès qu'il faut au moins 5 spots pour satisfaire la demande, le temps de résolution des instances peut exploser. Certaines n'étaient pas résolues après plusieurs jours. Le tableau 6.4c présente uniquement les meilleurs résultats obtenus en utilisant les différentes méthodes de génération supplémentaire de coupes. C'est généralement la génération initiale de coupes qui donnaient les meilleurs résultats.

Pour 1 client, on obtient toujours des résultats satisfaisants comme on peut lire

sur le tableau 6.5. La résolution de ces instances nous fait observer les mêmes points que l'observation des tableaux 6.3.

Tableau 6.1: Catégorie démographique : 1 - Longueurs de spots : 3 - Clients : 5

Paramètres						
	L.	C.	Instance	Nombre d'itérations	Temps (s)	Gap (%)
Audience minimale	600	600	1	21	63.4	0.00
Ecart d'audience	700	800	2	7	5.8	0.00
Désutilité minimale	500	500	3	11	9.1	0.00
Ecart de désutilité	2500	3000	4	16	9.6	0.00
Prix minimal	-	200	5	9	7.6	0.00
Ecart de prix	-	1000	6	13	8.1	0.00
Nb. de spots par lg minimum	1	-	7	9	5.4	0.00
Ecart de nb de spots	3	-	8	32	22.4	0.00
Durée minimale d'une tranche	200	-	9	17	11.6	0.00
Ecart de durée	120	-	10	33	27.0	0.00
Tranches	5	40				

(b) OAM : 1500 - EOA : 500

Instance	Nombre d'itérations	Temps (s)	Gap (%)	Instance	Nombre d'itérations	Temps (s)	Gap (%)
1	5	3.5	0.00	1	37	15053.7	1.24
2	81	6276.1	0.00	2	11	15.1	0.00
3	19	57.9	0.00	3	38	14431.3	1.71
4	25	886.5	0.00	4	*	*	*
5	31	44	0.00	5	70	3093.1	0.00
6	15	10.1	0.00	6	41	15865.5	10.11
7	10	8.3	0.00	7	14	66.5	0.00
8	9	5.3	0.00	8	15	30.1	0.00
9	88	1230.3	0.00	9	54	159.9	0.00
10	13	10.1	0.00	10	29	469.7	0.00

(c) OAM : 3000 - EOA : 1000

(d) OAM : 5000 - EOA : 3000

Tableau 6.2: Utilisation de la génération de coupes initiale ou dynamique avec les instances du tableau 6.2d

Instance	Génération initiale			Génération dynamique		
	Nombre d'itérations	Temps (s)	Gap (%)	Nombre d'itérations	Temps (s)	Gap (%)
1	14	5777.8	0.00	6	3900.5	0.00
2	6	39.4	0.00	6	8.8	0.00
3	19	2633.6	0.00	5	1133.9	0.00
4	*	*	*	*	*	*
5	39	674.2	0.00	20	387.9	0.00
6	28	6283.3	0.00	11	3554.2	0.00
7	5	51.5	0.00	3	10.6	0.00
8	13	60.4	0.00	3	7.3	0.00
9	8	50.4	0.00	4	14.8	0.00
10	13	162.9	0.00	8	123.0	0.00

Tableau 6.3: Catégorie démographique : 1 - Tranches du leader : 5 - Tranches de la concurrence : 40 - Durées : 3 - Client : 1.

Paramètres			Instance	Nombre d'itérations	Temps (s)	Gap (%)
	L.	C.				
Audience minimale	600	600	1	100	30.9	0.00
Ecart d'audience	700	800	2	19	7.4	0.00
Désutilité minimale	500	500	3	35	10.8	0.00
Ecart de désutilité	2500	3000	4	14	2.7	0.00
Prix minimal	-	200	5	6	1.8	0.00
Ecart de prix	-	1000	6	7	1.3	0.00
Nb. de spots par lg minimum	1	-	7	3	0.4	0.00
Ecart de nb de spots	3	-	8	31	8.4	0.00
Durée minimale d'une tranche	200	-	9	89	24.5	0.00
Ecart de durée	120	-	10	14	3.8	0.00

(a) Paramètres

(b) OAM : 5000 - EOA 3000

Instance	Nombre d'itérations	Temps (s)	Gap (%)
1	11	20.0	0.00
2	26	38.7	0.00
3	21	36.7	0.00
4	28	16.7	0.00
5	28	17	0.00
6	1	1.7	0.00
7	473	572.3	0.00
8	3	1.1	0.00
9	7	3.9	0.00
10	21	12.2	0.00

(c) OAM : 4000 - EOA : 1500

Instance	Nombre d'itérations	Temps (s)	Gap (%)
1	6	3.7	0.00
2	55	31.0	0.00
3	1	0.6	0.00
4	1	0.6	0.00
5	1	0.5	0.00
6	15	10.3	0.00
7	15	9.9	0.00
8	12	9.1	0.00
9	19	9.4	0.00
10	18	9.0	0.00

(d) OAM : 3000 - EOA : 1000

Tableau 6.4: Catégorie démographique : 1 - Clients : 5 - Longueurs : 3

Paramètres			Instance	Nombre d'itérations	Temps (s)	Gap (%)
	L.	C.				
Audience minimale	600	600	1	49	49.3	0.00
Ecart d'audience	700	800	2	109	1213.5	0.00
Désutilité minimale	500	500	3	60	318	0.00
Ecart de désutilité	2500	3000	4		278.8	0.00
Prix minimal	-	200	5	23	19.0	0.00
Ecart de prix	-	1000	6	53	55.9	0.00
Nb. de spots par lg minimum	1	-	7	30	41.2	0.00
Ecart de nb de spots	3	-	8	33	50.4	0.00
Durée minimale d'une tranche	200	-	9	69	1176.4	0.00
Ecart de durée	120	-	10	45	47.8	0.00
Tranches	10	40				

(b) OAM : 1500 - EOA : 500

Instance	Nombre d'itérations	Temps (s)	Gap (%)
1	49	120.1	0.00
2	48	16314.3	?
3	4	35.3	0.00
4	27	15820.4	?
5	42	1460.1	0.00
6	100	8096.0	0.00
7	41	16497.5	1.24
8	14	18542.7	1.48
9	40	426.9	0.00
10	65	15639.0	?

(c) OAM : 3000 - EOA : 1000

Tableau 6.5: Catégorie démographique : 1 - Clients : 1 - Longueurs : 3

Paramètres			Instance	Nombre d'itérations	Temps (s)	Gap (%)
	L.	C.				
Audience minimale	600	600	1	91	36.6	0.00
Ecart d'audience	700	800	2	179	102.7	0.00
Désutilité minimale	500	500	3	217	197.0	0.00
Ecart de désutilité	2500	3000	4	56	20.0	0.00
Prix minimal	-	200	5	30	7.6	0.00
Ecart de prix	-	1000	6	129	44.8	0.00
Nb. de spots par lg minimum	1	-	7	476	1130.0	0.00
Ecart de nb de spots	3	-	8	1602	14475.4	2.02
Durée minimale d'une tranche	200	-	9	784	3099.5	0.00
Ecart de durée	120	-	10	14	3.3	0.00
Tranches	20	40				

(b) OAM : 5000 - EOA : 3000

CONCLUSION

Ce mémoire représente un point de départ pour l'étude du problème de la tarification optimale pour le placement média à l'aide de la programmation biniveau. Le modèle proposé ici, une fois résolu plus efficacement, pourra être enrichi, notamment le modèle de second niveau, pour prendre en compte des demandes plus détaillées ou spécifiques de la part des clients.

De façon plus large, ce mémoire constitue une première approche des programmes biniveaux ayant pour modèle de second niveau un problème de sac-à-dos dont l'objectif est paramétré par les variables de niveau supérieur. C'est sa contribution majeure.

Il nous propose une première intuition de la géométrie du modèle mais également un algorithme sur lequel travaillé pour résoudre de tels programmes biniveaux. L'algorithme donne des résultats satisfaisants sur de petites instances, mais devient rapidement dépassé pour des instances un peu plus grandes.

Nous pouvons d'ailleurs dénoter deux axes de recherches relativement à cet algorithme. Le premier, travailler plus spécifiquement sur la méthode de séparation et d'évaluation appliquée à chaque itération. Le second, relaxer la contrainte sur le gap dans la méthode de séparation et d'évaluation. Ceci signifie qu'au lieu de résoudre à chaque itération notre branch-and-bound jusqu'à ce que le gap vaille 0.00%, nous pourrions imposer une plus haute limite inférieure de gap pour accélérer la résolution de la méthode de séparation et d'évaluation, puis baisser progressivement cette limite au cours de l'algorithme.

Il serait également intéressant de travailler avec de véritables données pour tester

la pertinence de notre modèle, notamment le choix d'utiliser des termes de pénalité financière, mais également pour développer de nouveaux algorithmes au regard de la structure de ces données. Nous serions à l'occasion amenés à calibrer le modèle, à savoir déterminer le vecteur w , nous penchant ainsi sur l'optimisation inverse dans le cadre d'un sac-à-dos.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARAMAN, V., POPESCU, I. (2006). Stochastic Revenue Management Models for Media Broadcasting, *INFORMS* 2005. Submitted, awaiting approval.
- [2] BOLLAPRAGADA, S., CHENG, H., PHILLIPS, M., GARBIRAS, M. (2002). NBC's optimization systems increase revenues and productivity. *Interfaces*, vol. 32 (1), p. 47-60.
- [3] BOLLAPRAGADA, S., GARBIRAS, M. (2004). Scheduling commercials on broadcast television. *Operations Research*, vol. 53 (3), p. 337-345.
- [4] BOLLAPRAGADA, S., BUSSIECK, M.R., MALIK, S. (2004). Scheduling commercial videotapes in broadcast television. *Operations Research*, vol. 52, p.679-689.
- [5] COLSON, B., MARCOTTE, P., SAVARD, G. (2005). Bilevel programming : A survey. *4OR*, vol. 3, p. 87-107.
- [6] CÔTÉ, J.-P., MARCOTTE, P., SAVARD, G. (2003). A Bilevel Modeling Approach to Pricing and Fare Optimization in the Airline Industry. *Journal of Revenue and Pricing Management*, vol. 2, p. 23-36.

- [7] DEMPE, S., RICHTER, K. (2000). Bilevel Programming with Knapsack Constraints. *Central European Journal of Operations Research*, vol. 8, p. 93-107.
- [8] DIDI-BIHA, M., MARCOTTE, P., SAVARD, G. (2006). Path-based Formulations of a Bilevel Toll Setting Problem. "Optimization with Multivalued Mappings Theory : Theory, Applications and Algorithms", DEMPE, S., KALASHNIKOV, V. (Eds.), Applications and Algorithms Optimization and Its Applications, vol. 2, Springer.
- [9] FUDENBERG, D., TIROLE, J. (1993). "Game Theory". MIT Press.
- [10] GALLEGO, G., PHILLIPS, R., KOU, S. (2008). Revenue Management of Callable Products. *Management Science*, vol. 54, No. 3, p. 550-564.
- [11] HANSEN, P., JAUMARD, B., SAVARD, G. (1992). New Branch and Bound Rules for Linear Bilevel Programming. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 13(5), p. 1194 -1217.
- [12] KIMMS, A., MÜLLER-BUNGART, M. (2007). Revenue Management for Broadcasting Commercials : The Channel's Problem of Selecting and Scheduling Ads to be Aired. *International Journal of Revenue Management*, vol. 1, p. 28-44.

- [13] LABBÉ, M., MARCOTTE, P., SAVARD, G. (1998). A Bilevel Model of Taxation and Its Application to Optimal Highway Pricing. *Management Science*, vol. 44(12), p. 1608-1622.
- [14] LABBÉ, M., MARCOTTE, P., SAVARD, G. (2000). On a class of bilevel programs. "Nonlinear Optimization and Related Topics", DI PILLO, G., GIANNESSI, F. (Eds.), Kluwer Academic Publishers, p. 183-206.
- [15] LORIDAN, P., MORGAN, J. (1996). Weak via strong Stackelberg problem : new results. *Journal of Global Optimization*, vol. 8, p. 263-287.
- [16] MARCOTTE, P., SAVARD, G. (2002). A Bilevel Programming approach to Price setting. "Decision and Control in Management Science. Essays in Honor of Alain Haurie", ZACCOUR, G. (Ed.), Kluwer Academic Publishers, p. 97-117.
- [17] MARCOTTE, P., SAVARD, G. (2005). Bilevel programming : a combinatorial perspective. "Graph Theory and Combinatorial Optimization". Springer, p. 191-217.
- [18] STACKELBERG, H.(1952). "The Theory of Market Economy". Oxford University Press, Oxford, UK.
- [19] TALLURI, K. T., VAN RYZIN, G. J. (2004). "The Theory and Practice of Revenue Management". Kluwers Academic Publishers.

- [20] VICENTE, L., SAVARD, G., JUDICE, J. (1996). The Discrete Bilevel Programming Problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 89(3), p. 597-614.

- [21] ZHANG, X. (2006). Mathematical Models for the Television Primetime Advertising Allocation Problem. *International Journal of Operational Research*, vol.1(3), p. 302-322.