

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

OPTIMISATION DES STRATÉGIES DE PRODUCTION DANS LES CHAÎNES DE
FABRICATION FLEXIBLES

STÉPHANE YOUSSEF
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)
DÉCEMBRE 2008



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 978-0-494-48940-6

Our file Notre référence

ISBN: 978-0-494-48940-6

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.



Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

OPTIMISATION DES STRATÉGIES DE PRODUCTION DANS LES CHAÎNES DE
FABRICATION FLEXIBLES

présenté par: YOUSSEF Stéphane

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. PELLERIN Robert, Ph.D., président

M. MALHAMÉ Roland, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. LABIB Richard, Ph.D., membre

À mon père, ma mère et mon frère

À Marigerges

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tous les gens qui m'ont aidé dans la réalisation de ce travail. Je remercie en tout premier lieu mon directeur de recherche M. Roland P. Malhamé pour sa gentillesse, sa disponibilité, ses conseils judicieux et ses réflexions profondes. Il a toujours été pour moi un directeur de recherche idéal tant au niveau scientifique qu'humain. J'éprouve un profond respect pour son travail et son parcours, ainsi que pour toutes ses qualités humaines. Je lui exprime également ma reconnaissance pour son soutien financier qui m'a été indispensable.

Je remercie M. Robert Pellerin et M. Richard Labib pour m'avoir fait l'honneur de participer au Jury de soutenance de ma maîtrise.

Un grand merci à tous les professeurs de la section *Automation et Systèmes*, la technicienne informatique Mme Marie-Lyne Brisson et la secrétaire Mme Suzanne Valade.

Je passe ensuite une dédicace spéciale à tous mes collègues avec qui je me suis rapproché pendant ma maîtrise Soheil Saberi, Fatima-Zahra Mhada et Omar Messas. J'aimerais aussi remercier Javad Sadr pour les discussions scientifiques intéressantes qu'on a eues ensemble.

J'adresse mes remerciements les plus chaleureux à mes amis pour leur présence et leurs sentiments, tout particulièrement Michael Kamel pour son incontestable moralité et son dévouement exceptionnel envers tous les gens autour de lui. Il est pour moi un exemple très précieux. Je tiens aussi à remercier Mariam Bashir pour son grand cœur, sa sensibilité et son immense générosité.

Je ne sais comment exprimer ma gratitude, ma reconnaissance et mes plus profonds sentiments à **MES PARENTS** à qui je dois tout. Leur inconditionnel soutien et leurs encouragements étaient pour moi la source qui me donnait la force et la persévérance

pendant les moments difficiles. Malgré la grande distance physique qui nous séparait, ils étaient toujours là pour partager les joies et soigner les blessures.

Je remercie vivement tous ceux dont le nom n'apparaît pas dans cette page qui m'ont aidé d'une façon ou d'une autre et sans qui ce travail n'aurait pas vu le jour.

Je tiens finalement à mentionner le plaisir que j'ai eu à travailler sur ce sujet de recherche.

Stéphane Youssef

RÉSUMÉ

Nous considérons dans ce mémoire des ateliers flexibles de fabrication multi-machines multi-pièces qui opèrent sous la classe de politique de type *Kanban*. Ces ateliers représentent le cas général des ateliers multi-machines mono-pièces. Deux cas de lignes de transfert sont considérés : ligne partiellement-homogène et ligne non homogène. Une ligne partiellement-homogène est une ligne de transfert dont les machines partagent toutes le même taux de réparation mais chacune possède son propre taux de panne. Le cas le plus général est celui d'une ligne non homogène où chaque machine possède son propre taux de panne et de réparation. Nous présentons deux classes de stratégies de production multi-pièces : *production synchronisée de pièce* et *production prioritaire*. Le but visé est, d'une part, de concevoir un modèle mathématique simple et efficace qui rende lucide la compréhension et l'analyse de ce système complexe ; et d'autre part, de développer une méthodologie adéquate d'optimisation du flux de production sous les politiques de production considérées. Le problème d'optimisation du flux est formulé comme celui de la recherche de seuils critiques (niveaux de Kanban) qui permettraient de minimiser une mesure combinée des coûts d'inventaire et de retards de livraison.

Pour les ateliers multi-machines, les niveaux moyens des encours ou des inventaires ne peuvent être calculés ni analytiquement ni numériquement sauf à l'intermédiaire d'une méthode de décomposition approximative. Nous utilisons une méthode de décomposition basée sur deux approximations : l'*hypothèse de découplage des machines* et le *principe de moyennage de la demande*. L'hypothèse de découplage des machines permet de considérer la source d'encours en amont d'une machine comme un fournisseur non fiable (excepté pour la première machine dont l'alimentation est parfaitement fiable), et dont l'état de disponibilité est un processus binaire statistiquement indépendant de la machine desservie ; tandis que le processus de demande en aval est perçu comme un client stochastique (sauf le processus de demande en fin de ligne qui est constant). Pour un taux de

demande de pièces constant sur la ligne de transfert, et sous une hypothèse d'ergodicité du système sous les lois de commande décentralisées à seuils critiques, le principe de moyennage de la demande stipule que le taux de demande stochastique associé à chaque machine peut être substitué par sa moyenne statistique sans affecter les niveaux moyens d'encours ou d'inventaire. Ces deux approximations permettent de décomposer la ligne multi-machines en *un nombre fini de couples stock-machine approximativement isolés*.

Dans le premier chapitre, nous introduisons le problème des ateliers flexibles de fabrication multi-machines multi-pièces. Une revue pertinente bien organisée de la littérature scientifique du domaine des ateliers de fabrication est présentée dans le chapitre 2.

Au chapitre 3, nous nous concentrons sur le cas des atelier multi-machines multi-pièces partiellement-homogènes. La technique de décomposition est adaptée au cas multi-pièces sous les politiques décentralisées de commande à seuils critiques. La stratégie de production synchronisée de pièces est par la suite détaillée et les conséquences qui en découlent sont étudiées explicitement. À la faveur de la technique de décomposition, une modélisation mathématique est réalisée sur la base d'une machine fictive markovienne à deux états adéquatement construite. Ensuite, une comparaison des performances estimées par le modèle mathématique et celles calculées par la simulation de Monte-Carlo pour un large échantillon de systèmes est présentée. Celle-ci indique que notre principe d'approximation par décomposition s'avère hautement précis. Ultérieurement, le problème d'optimisation du coût total de stockage par la programmation dynamique est formulé et résolu après pour quelques données numériques pour montrer l'efficacité du modèle ainsi que la précision de la solution optimale.

Le chapitre 4 consiste en une généralisation du chapitre 3 puisqu'il est consacré au cas des ateliers multi-machines multi-pièces non homogènes sous les politiques décentralisées de commande à seuils critiques combinées avec les stratégies de production synchronisée de pièces. Une modélisation plus générale est effectuée dans ce cas et validée

par comparaison avec les résultats de simulation de Monte-Carlo. Contrairement au problème de la programmation dynamique formulé au chapitre 3 qui ne tient compte que du coût total de stockage, le problème de la programmation dynamique du chapitre 4 considère aussi bien le coût total de stockage que le coût total de retard de livraison. Trois algorithmes efficaces et améliorés graduellement de solution du problème d'optimisation par la programmation dynamique sont présentés et testés sur de nombreux exemples.

Au chapitre 5, nous introduisons une nouvelle stratégie plus générale de production multi-pièces sous le fonctionnement des politiques à seuils critiques, celle de la *production prioritaire*. Cette stratégie est appliquée sur une ligne non homogène à deux machines produisant deux types de pièces. Par la suite, une modélisation mathématique est détaillée puis validée par comparaison avec les résultats de simulation de Monte-Carlo. Enfin, une étude comparative entre la solution optimale obtenue sous la stratégie de production synchronisée de pièces et celle obtenue sous la stratégie prioritaire est faite.

ABSTRACT

We consider in this report flexible multi-machine multi-part transfer line operating under the class of Kanban policies. Two cases of transfer lines are considered : partially-homogeneous lines and non homogeneous lines. Partially-homogeneous line is a transfer line where all the machines share the same repair rate but have different failure rates. In non homogeneous lines, machines have arbitrary failure and repair rates. We present two classes of multi-part Kanban production strategies : synchronized production and prioritized production. Our main goal is, on the one hand, to construct a simple and effective mathematical model which would help in the understanding and analysis of such complex systems ; and on the other hand, to develop an adequate methodology of optimal flow control under the considered policies. The optimization problem over the class of policies of interest reduces to the search for hedging levels (Kanban levels) minimizing a combined measure of storage and backlog costs.

For multi-machine manufacturing systems, average levels of the work-in-process and inventories can be calculated neither analytically nor numerically except by means of an approximate decomposition method. We use a decomposition method based on two approximations : *machine decoupling approximation* and *demand averaging principle*. The machine decoupling helps decoupling a given machine (except the first machine in the line) from its upstream counterparts by assuming that the binary availability state of the incoming work-in-process is statistically independent of the machine operating state ; while the process of demand downstream of a given work-in-process buffer is seen as a stochastic client. Under a constant rate of demand for parts and under ergodic conditions for decentralized hedging policies, the demand averaging principle states that the stochastic demand process drawing work-in-process from a given buffer can be substituted for by its constant mean value without affecting the mean level of inventories. These two approximations help decomposing the multi-part line into a finite number of

isolated single machine/single buffer units.

In the first chapter, we introduce production problems in multi-machine multi-part flexible manufacturing systems. A review of manufacturing systems relevant to our work is presented in chapter 2.

In Chapter 3, we concentrate on the case of partially-homogeneous multi-machine flexible transfer line. The decomposition technique is adapted to the multi-part case under decentralized hedging control policies. The synchronized production strategy is detailed and its performance in the transfer line is studied explicitly. Due to the decomposition technique, mathematical modelling is realized on the basis of a collection of fictitious adequately constructed two-state Markovian machine. Subsequently, a comparison between the estimated performance of the mathematical model and performance as calculated from Monte-Carlo simulations is presented. This comparison indicates an excellent precision resulting from our decomposition technique. Finally, average storage cost optimization problem by dynamic programming is formulated and then solved for a number of merical cases in order to demonstrate the efficiency of the computational technique and the accuracy of resulting optimal solution.

Chapter 4 consists a generalization of Chapter 3 as it considers the case of non homogeneous multi-machine multi-part flexible transfer lines under synchronized production strategies. The approximate models are validated by comparing their estimates with the results of Monte-Carlo simulations. Unlike the case of Chapter 3 in which only the storage cost under a probability of availability of finished parts constraint is taken into consideration for the optimization problem, the dynamic programming problem of Chapter 4 considers both storage and backlog costs. Three efficient and gradually enhanced algorithms of solution for the dynamic programming problem are presented and tested on many examples.

In Chapter 5, we introduce a new and more general multi-part Kanban production stra-

tegy called a prioritized strategy. This strategy is applied on a two-machine two-part non homogeneous transfer line. A corresponding approximate mathematical model for performance analysis is constructed and validated by comparison to Monte-Carlo simulation results. Finally, quality of optimal synchronized policies and that of optimal prioritized policies are compared based on a sample of numerical cases.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vii
ABSTRACT	x
TABLE DES MATIÈRES	xiii
LISTE DES TABLEAUX	xvi
LISTE DES FIGURES	xviii
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES	xxi
LISTE DES ANNEXES	xxv
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Introduction générale	1
1.2 Motivations, objectifs et méthodologies	4
1.3 Organisation du mémoire	6
CHAPITRE 2 REVUE DE LA LITTÉRATURE	8
2.1 Lignes mono-machine mono-pièces	9
2.2 Lignes mono-machine multi-pièces	12
2.3 Lignes multi-machines mono-pièces	14
2.4 Lignes multi-machines multi-pièces	16
CHAPITRE 3 OPTIMISATION DES LIGNES DE TRANSFERT PARTIELLEMENT-	

	HOMOGENES SOUS POLITIQUE SYNCHRONISÉE	19
3.1	Introduction	19
3.2	Formulation du problème	20
3.2.1	Hypothèses	20
3.2.2	Dynamique du système	21
3.2.3	Objectif	22
3.3	Techniques de décomposition	23
3.3.1	Hypothèse de découplage des machines	23
3.3.2	Principe de moyennage de la demande	24
3.4	Production parallèle synchronisée de pièces	26
3.5	Modélisation	28
3.6	Formulation du problème d'optimisation par la programmation dynamique	32
3.7	Cas particulier : Ligne parfaitement homogène	34
3.8	Résultats numériques	36
3.8.1	Lignes partiellement-homogènes	36
3.8.2	Lignes parfaitement homogènes	38
3.9	Conclusion	41
CHAPITRE 4	OPTIMISATION DES LIGNES DE TRANSFERT NON HO-	
	MOGENES SOUS POLITIQUE SYNCHRONISÉE	43
4.1	Introduction	43
4.2	Formulation du problème	44
4.3	Modèle mathématique	45
4.4	Vérification de la performance du modèle	51
4.5	Problème d'optimisation par la programmation dynamique	55
4.6	Solution du problème de la programmation dynamique	56
4.6.1	Algorithme de discrétisation exacte de l'espace d'état	57

4.6.2	Algorithme de discrétisation de l'espace d'état avec abscisse réduite	58
4.6.3	Algorithme de maille adaptative	61
4.7	Résultats numériques	63
4.8	Conclusion	66
CHAPITRE 5	OPTIMISATION DES LIGNES DE TRANSFERT NON HOMO- GÈNES SOUS POLITIQUE PRIORITAIRE	68
5.1	Introduction	68
5.2	Politiques prioritaires de production	69
5.3	Modélisation mathématique approximative	73
5.4	Vérification de la performance du modèle	82
5.5	Optimisation par la programmation dynamique	85
5.6	Résultats numériques	86
5.7	Conclusion	89
CHAPITRE 6	CONCLUSION GÉNÉRALE	90
6.1	Discussion et Analyse	90
6.2	Contributions scientifiques du mémoire	91
6.3	Perspectives	93
RÉFÉRENCES		94
ANNEXES		99

LISTE DES TABLEAUX

TABLEAU 4.1	Données de la première ligne	52
TABLEAU 4.2	Données de la deuxième ligne	52
TABLEAU 4.3	Données de la troisième ligne	52
TABLEAU 4.4	Résultats de la comparaison pour la première ligne	53
TABLEAU 4.5	Résultats de la comparaison pour la deuxième ligne	53
TABLEAU 4.6	Résultats de la comparaison pour la troisième ligne	54
TABLEAU 4.7	Les valeurs minimales, optimales et maximales de a_i pour $i = 0, \dots, 5$	64
TABLEAU 4.8	Les valeurs minimales, optimales et maximales de $\tilde{r}_i$ et $\tilde{p}_i$ pour $i = 1, \dots, 6$	65
TABLEAU 5.1	Données de la première ligne	83
TABLEAU 5.2	Données de la deuxième ligne	83
TABLEAU 5.3	Données de la troisième ligne	83
TABLEAU 5.4	Résultats de la comparaison pour la première ligne	84
TABLEAU 5.5	Résultats de la comparaison pour la deuxième ligne	84
TABLEAU 5.6	Résultats de la comparaison pour la troisième ligne	84
TABLEAU 5.7	Solution optimale par l' <i>algorithme de maille adaptative</i> sous la politique synchronisée	87

TABLEAU 5.8	Solution optimale par la programmation dynamique sous la politique prioritaire	87
TABLEAU 5.9	Solution optimale par la programmation dynamique sous la politique prioritaire pour un autre choix des k'_{ji}	88

LISTE DES FIGURES

FIGURE 3.1	Ligne de production de n machines produisant m pièces	20
FIGURE 3.2	Espace des taux de production de la machine M_i dans le cas de deux pièces	28
FIGURE 3.3	Modèle markovien à deux états de la machine M_i , $i = 1, \dots, n$. .	29
FIGURE 3.4	Représentation du modèle markovien approximatif de la disponibilité de l'encours x_{ji} , $j = 1, \dots, m$ et $i = 1, \dots, n - 1$	29
FIGURE 3.5	Le produit cartésien des deux modèles de I_{i-1} et M_i	30
FIGURE 3.6	Modèle équivalent simplifié à deux états ($\tilde{M}_{i+1}$)	32
FIGURE 3.7	Profil optimal des coefficients de disponibilité pour une longue ligne de transfert homogène quand $a_{n-1}^0 > \bar{a}$, où $\bar{a}$ est le minimiseur de $T(a, a)$	34
FIGURE 3.8	Profil optimal des coefficients de disponibilité pour une longue ligne de transfert homogène quand $a_{n-1}^0 < \bar{a}$, où $\bar{a}$ est le minimiseur de $T(a, a)$	36
FIGURE 3.9	Profil optimal des coefficients de disponibilité des encours x_{ji} ($j = 1, 2, 3, 4$ et $i = 0, \dots, 19$) pour une ligne partiellement homogène avec les taux de panne diminuant avec l'augmentation de l'indice i	37

FIGURE 3.10	Profil optimal des coefficients de disponibilité des encours x_{ji} ($j = 1, 2, 3, 4$ et $i = 0, \dots, 19$) pour une ligne partiellement homogène avec les taux de panne augmentant avec l'augmentation de l'indice i	38
FIGURE 3.11	Profil optimal des coefficients de disponibilité des encours x_{ji} ($j = 1, 2, 3, 4$ et $i = 0, \dots, 19$) pour une ligne homogène avec $a_{19}^0 = 0.85$ et $\bar{a} = 0.4981$ ($a_{19}^0 > \bar{a}$)	39
FIGURE 3.12	Profil optimal des coefficients de disponibilité des encours x_{ji} ($j = 1, 2, 3, 4$ et $i = 0, \dots, 19$) pour une ligne homogène avec $a_{19}^0 = 0.4$ et $\bar{a} = 0.4981$ ($a_{19}^0 < \bar{a}$)	40
FIGURE 3.13	Fonction coût de transition $T(a_{i-1}, a_i)$ lorsque $a_{i-1} = a_i = a$	41
FIGURE 4.1	Le modèle Markovien de l'état de disponibilité de l'encours x_{ji} , $j = 1, \dots, m$ et $i = 1, \dots, n - 1$	45
FIGURE 4.2	Le produit cartésien des deux modèles de I_{i-1} et M_i	46
FIGURE 4.3	Modèle équivalent simplifié à deux états de $\tilde{M}_i$	48
FIGURE 4.4	Génération de l'espace d'état à l'étape 2 à partir de r_1 et les valeurs discrétisées de a_1 , pour $N = 3$	60
FIGURE 4.5	Génération de l'espace d'état à l'étape 3 à partir de $\tilde{r}_2$ et les valeurs discrétisées de a_2 , pour $N = 3$	60
FIGURE 4.6	Coefficients optimaux de disponibilités pour les stocks $i = 0, \dots, 5$	64
FIGURE 5.1	La chaîne de production à étudier	69

FIGURE 5.2	Espace des taux de production de la machine M_i dans le cas de deux pièces	72
FIGURE 5.3	Chaîne de Markov de M_1 à 2 états	74
FIGURE 5.4	La machine équivalente $\tilde{M}_{21}$	76
FIGURE 5.5	Chaîne de Markov de x_{11} (à gauche) / Chaîne de Markov de M_2 (à droite)	77
FIGURE 5.6	La machine équivalente $\tilde{M}_{12}$	78
FIGURE 5.7	La machine équivalente $\tilde{M}_{22}$	80
FIGURE 5.8	La machine $\tilde{M}_{22}$	81
FIGURE I.1	Un certain scénario du comportement des pièces j et l dans le stock n	101
FIGURE I.2	Un certain scénario du comportement des pièces j et l dans le stock $n-1$	103
FIGURE II.1	Espace des taux de production par la première machine	110

LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

Caractères usuels

$\bar{a}$	Le minimiseur de la fonction coût $T(a, a)$.
a_i	Coefficient de disponibilité de l'encours x_{ji} sous la politique synchronisée de pièces.
a_i^*	Coefficient optimal de disponibilité de l'encours x_{ji} sous la politique synchronisée de pièces.
$a_{i_{min}}$	Coefficient minimal de disponibilité de l'encours x_{ji} sous la politique synchronisée de pièces.
$a_{i_{max}}$	Coefficient maximal de disponibilité de l'encours x_{ji} sous la politique synchronisée de pièces.
a_{ji}	Coefficient de disponibilité de l'encours x_{ji} .
a_{n-1}^0	Coefficient de disponibilité de l'encours $x_{j,n-1}$ à atteindre par l'optimisation.
A_i	Ensemble admissible des coefficients de disponibilité a_i sous la politique synchronisée de pièces.
c_{ji}	Coût unitaire de stockage de la pièce j dans le stock i par unité de temps.
c_{jn}^+	Coût unitaire de stockage de la pièce j dans le dernier stock n par unité de temps.
c_{jn}^-	Coût unitaire de pénurie de la pièce j dans le dernier stock n par unité de temps.
d_j	Taux constant de la demande de la pièce j .
$E[\cdot]$	L'espérance mathématique.
$I_{ji}(t)$	Processus de disponibilité de l'encours x_{ji} à l'instant t .

$I_i(t)$	Processus de disponibilité de l'encours x_{ji} à l'instant t sous la politique synchronisée de pièces.
k_{ji}	Taux maximal nominal de production de la pièce j par la machine M_i .
$\bar{k}_{ji}$	Taux maximal de production de la pièce j par la machine M_i sous la politique synchronisée de pièces.
k'_{ji}	Taux maximal de production de la pièce j par la machine M_i sous la politique prioritaire.
m	Nombre de pièces.
M_i	Machine numéro i .
$\tilde{M}_i$	Machine fictive numéro i approximativement isolée.
n	Nombre de machines.
N	Nombre de valeurs discrétisées de l'abscise $\tilde{r}_i$ pour l' <i>algorithme de la discretisation de l'espace d'état avec abscisse réduite</i> .
p_i	Taux de panne de la machine M_i .
$\tilde{p}_i$	Taux de panne de la machine fictive $\tilde{M}_i$ sous la politique synchronisée de pièces.
$\tilde{p}_{ji}$	Taux de panne de la machine fictive $\tilde{M}_i$ affectant la pièce j sous la politique prioritaire.
p_{s_i}	Taux approximatif de panne du processus d'encours x_{ji} sous la politique synchronisée de pièces.
$p_{s_{ji}}$	Taux approximatif de panne du processus d'encours x_{ji} .
r	Taux de réparation de toutes les machines dans le cas d'une ligne partiellement-homogène.
r_i	Taux de réparation de la machine M_i .
$\tilde{r}_i$	Taux de réparation de la machine fictive $\tilde{M}_i$ sous la politique synchronisée de pièces.

$\tilde{r}_{ji}$	Taux de réparation de la machine fictive $\tilde{M}_i$ affectant la pièce j sous la politique prioritaire.
t_{rzji}	Temps de premier retour à zéro du processus d'encours x_{ji} .
$\bar{t}_{rzji}$	Temps moyen de premier retour à zéro du processus d'encours x_{ji} .
$T_{ji}(\cdot)$	Coût moyen de stockage (et de pénurie s'il s'agit de la dernière machine) de la pièce j dans le stock i .
$T_{ji}^*(\cdot)$	Coût moyen optimal de stockage (et de pénurie s'il s'agit de la dernière machine) de la pièce j dans le stock i .
$u_{ji}(t)$	Taux de production de la pièce j par la machine M_i à l'instant t .
$x_{ji}(t)$	Processus d'encours de la pièce j dans le stock i à l'instant t .
$\tilde{x}_{ji}(t)$	Processus approximatif d'encours de la pièce j dans le stock i à l'instant t .
z_{ji}	Seuil critique de la pièce j pour le stock i .
z_{ji}^*	Seuil critique optimal de la pièce j pour le stock i .
$\bar{z}_{jn}$	Variable correspondant au seuil critique de la pièce j pour le stock i sous la politique synchronisée de pièces.

Caractères grecs

$\alpha_i(t)$	Processus binaire de l'état de la machine M_i à l'instant t .
$\tilde{\alpha}_i(t)$	Processus binaire de l'état de la machine approximative $\tilde{M}_i$ à l'instant t .
β_{ji}	Variable qui sert à rendre l'expression analytique du coût moyen de la pièce j dans le stock i plus compact. Elle n'a pas de sens physique.
γ_{ji}	Variable qui sert à rendre l'expression analytique du coût moyen de la pièce j dans le stock i plus compact. Elle n'a pas de sens physique.

λ_{ji}	Variable qui sert à rendre l'expression analytique du coût moyen de la pièce j dans le stock i plus compact. Elle n'a pas de sens physique.
μ_{ji}	Variable qui sert à rendre l'expression analytique du coût moyen de la pièce j dans le stock i plus compact. Elle n'a pas de sens physique.
ρ_{ji}	Variable qui sert à rendre l'expression analytique du coût moyen de la pièce j dans le stock i plus compact. Elle n'a pas de sens physique.
σ_{ji}	Variable qui sert à rendre l'expression analytique du coût moyen de la pièce j dans le stock i plus compact. Elle n'a pas de sens physique.

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	DÉMONSTRATIONS	99
I.1	Démonstration du lemme 3.1	99
I.2	Démonstration du lemme 5.1	104
ANNEXE II	RAPPELS	109
II.1	Solution des équations de Kolmogorov pour la première machine produisant la pièce 2	109
II.2	Solution des équations de Kolmogorov pour la deuxième machine produisant la pièce 2	113
II.3	Algorithme de calcul de a_{21} à partir de z_{21}	117

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 Introduction générale

Avec la globalisation actuelle des marchés, les entreprises doivent faire face à des défis importants tant au niveau des finances que des stratégies de gestion adoptées. Ces défis nécessitent une planification scientifique rigoureuse. Une production basée sur des concepts scientifiques et adaptée aux besoins des clients est donc indispensable pour la réussite et l'avancement de l'entreprise. Ceci exige à la fois le maintien constant d'une production fiable de très bonne qualité et un contrôle des coûts. Dans ce mémoire, nous nous concentrons sur le problème de gestion des espaces de stockage dans les lignes de transfert.

Une ligne de transfert ou de production est une chaîne constituée de plusieurs machines en série. Chaque machine est suivie d'un stock ou d'une zone de stockage qui agit comme une source d'alimentation de pièces pour la machine suivante. Le dernier stock est appelé *stock de produits finis* tandis que le reste des stocks (du premier jusqu'à l'avant-dernier) sont appelés des *stocks d'encours*. Chaque zone de stockage a une capacité limitée. Le stock de matières premières, qui sert à alimenter la première machine de la ligne, est considéré disponible en tout temps dans le sens où la ligne ne manque jamais de matières premières ; tout se passe donc comme si le stock de matières premières était infini. La matière première passe par la première machine pour suivre une certaine opération manufacturière et sort vers la première zone de stockage, ensuite passe par la machine suivante, sa zone de stockage et ainsi de suite. La ligne de transfert peut produire un ou plusieurs types de pièces. Dans ce mémoire, nous considérons le cas général

de plusieurs types de pièces que nous appelons *production multi-pièces*. Chacun des différents types de pièces passe par chaque machine et chaque zone de stockage exactement une fois. En plus, toutes les pièces suivent la même séquence d'ordre des machines et des zones de stockage. La demande de chaque type de pièce est considérée constante. Les sources d'aléas dans ce système sont les événements de pannes et de réparations des machines qui influencent les différents niveaux de stocks et donc l'efficacité ou la productivité du système. Le temps de transport des pièces entre les machines et les stocks est considéré être suffisamment petit pour qu'il soit négligé. De même, les temps de reconfiguration des machines sont négligeables puisque nous considérons que les machines sont flexibles et donc reconfigurables rapidement en vue de réaliser différentes tâches.

Nous distinguons entre deux types de lignes de transfert : ligne *partiellement-homogène* et ligne *non homogène*. Une ligne partiellement-homogène est une ligne de transfert qui se caractérise par le fait que toutes les machines partagent le même taux de réparation (par exemple celui associé au technicien responsable) mais chacune possède son propre taux de panne. Un cas particulier de ce type de ligne est la ligne *parfaitement homogène* où toutes les machines partagent les mêmes taux de panne et de réparation. Le cas le plus général est celui d'une ligne non homogène, chaque machine possédant son propre taux de panne et de réparation.

L'incertitude dans les lignes de production due aux événements aléatoires correspondant aux pannes et réparations des machines requiert un inventaire positif des pièces dans tous les stocks situés entre les différentes machines. En effet, les ruptures de stocks entraînent des pertes considérables pour l'entreprise, il est important de maintenir des aires de stockage des encours ; elles permettent de maintenir la continuité de service au moins partielle pendant la période de panne d'une ou plusieurs machines. Cependant, la présence des stocks représente un capital immobilisé et aussi pourrait engendrer des coûts élevés de stockage. De plus, une *sur-production* pourrait satisfaire la demande des clients mais engendrerait un coût de stockage qui risque d'être assez élevé. En revanche,

une *sous-production* ne coûterait pas très cher au niveau du stockage mais risque de ne pas satisfaire la demande ce qui engendrerait des coûts importants de pénurie. Il est donc clair que la gestion des aires de stockage est un problème d'optimisation (appelée dans la littérature *problème de dimensionnement*) qui représente avec la question du choix des stratégies de production, deux problématiques fondamentales dans ce domaine.

Parmi les politiques de production les plus fréquentes dans la littérature des systèmes manufacturiers, nous pouvons citer pour la classe du *Juste-à-temps* (*Just-in-time*), les *Réseaux de jetons* (*Kanban*), le *Conwip* (*Constant work-in-process*) et la classe des politiques à *seuils critiques* (*Hedging policies*). Tout particulièrement, cette dernière classe de politique, qui est aussi appelé *lois décentralisées à seuils critiques*, s'avère très intéressante parce qu'elle représente de nombreux avantages en termes d'applicabilité et d'optimalité [2], [4], [18] ; c'est pourquoi elle a suscité l'intérêt de beaucoup de chercheurs dans les deux dernières décennies. Le principe de base de la production correspondant à la politique à seuils critiques se résume comme suit. Chaque machine, quand elle peut produire, produit au taux maximal permis pour alimenter son stock en aval jusqu'à ce que ce dernier atteigne le niveau du seuil critique. Ensuite, elle produit au même taux que la machine suivante afin de maintenir le stock intermédiaire exactement au niveau du seuil critique. Ainsi, le stock ne peut jamais dépasser le seuil critique.

Afin de pouvoir évaluer l'efficacité du système manufacturier et l'optimiser, il faut définir un critère de performance qui reflète les objectifs recherchés. Dans les problèmes d'optimisation des lignes de transfert, le critère de performance qui revient le plus souvent dans la littérature est le coût moyen total à long terme de stockage et de pénurie de stocks. Ce choix de critère est en réalité très logique puisque l'objectif est de maintenir la qualité de service tout en minimisant les coûts de stockage et de pénurie. La complexité du problème réside donc dans la détermination des seuils critiques (le dimensionnement) qui minimiseraient le critère de performance choisi.

1.2 Motivations, objectifs et méthodologies

Il existe dans la littérature beaucoup de travaux¹ étudiant la production optimale ou *sous-optimale* des lignes de transfert dont la majorité propose des méthodes très complexes au niveau de l'analyse et du calcul ce qui rend une implantation en temps réel très difficile. Quoique l'optimisation du cas des lignes multi-machines multi-pièces soit un sujet d'extrême importance pour beaucoup d'entreprises de nos jours, rares sont les travaux qui y sont consacrés. De plus, la complexité du calcul rendent ces modèles difficiles à généraliser quand le nombre de machines et de pièces tend à augmenter. Toutes ces raisons nous ont poussé à centrer notre recherche dans ce mémoire sur *les lignes de production multi-machines multi-pièces*.

Dans un premier temps, notre objectif principal sera de généraliser les lignes de production non fiables multi-machines mono-pièces en des lignes de production multi-machines multi-pièces, et ceci pour le cas partiellement-homogène aussi bien que le cas non homogène, sous la classe de politiques décentralisées à seuils critiques. La motivation derrière l'adoption de cette classe de politique réside sur plusieurs éléments. Un seuil critique agit en réalité comme une "police d'assurance" contre les aléas du système dûs aux pannes des machines. Quand une machine tombe en panne, la ligne continue à fonctionner, au moins pour une certaine période, grâce à l'inventaire dans le stock en amont de cette machine. Ces inventaires permettent de découpler les machines, et par conséquent, une panne d'une machine affecte localement et non pas globalement le service (c'est pourquoi elles sont appelées *lois décentralisées à seuils critiques*) ce qui intuitivement rendrait le système plus fiable. En plus, le principe d'opération de la production sous les politiques à seuils critiques est similaire à celui des stratégies très répandues du type Kanban [26].

¹ Voir la revue de la littérature présentée dans le chapitre suivant pour plus de détails.

Pour chacun des deux cas traités (ligne partiellement-homogène et ligne non homogène), la production multi-pièces sera faite sous une sous-classe des politiques à seuils critiques, celle dite *politiques synchronisées* (à définir dans le chapitre 3). Cette classe de politiques s'avère très intéressante pour au moins deux raisons ; (i) l'analyse se ramène à celle d'une ligne mono-pièce avec seulement un seul degré de liberté par machine ; (ii) pour des raisons dont nous discuterons au Chapitre 3), cette classe est quasi optimale pour des lignes comportant de nombreuses machines. Ceci réduit énormément la complexité de l'analyse et mène à des stratégies de production périodiques et très réalisables. Les modèles mathématiques utilisés sont basés sur les techniques d'approximation sous-jacentes aux méthodes de décomposition et d'agrégation développées par Mbihi et Malhamé [28] et [29] et Sadr et Malhamé [35] et [36]. L'essentiel de ces méthodes consiste à découpler chaque machine en prenant l'influence de son environnement en amont et en aval en considération ce qui permet de traiter chaque machine individuellement et profiter des résultats déjà existants pour les machines non fiables isolées. Ensuite, nous utilisons la programmation dynamique afin de trouver les variables de décisions qui optimiseraient les coûts totaux de stockage et de pénurie de la ligne décomposée.

Dans un deuxième temps et en partant de la production multi-pièces basée sur la politique synchronisée, nous définissons une autre classe plus générale de politiques de production multi-pièces, celle de la *production prioritaire* (à définir dans le chapitre 5). En fait, nous y définissons une sorte de priorité créant un ordre de préférence des pièces à produire. Cette dernière sera appliquée sur une ligne composée de deux machines produisant deux types de pièces. Notre objectif sera donc d'analyser cette politique plus générale et par la suite optimiser la ligne. Encore une fois, les méthodes de décomposition jouent un rôle crucial dans l'analyse de la ligne ainsi que la modélisation. La nature séquentielle des décisions motive à utiliser la programmation dynamique comme moyen d'optimisation pour trouver les variables optimales de décision dans ce cas.

Les contributions principales de ce mémoire se résument de la façon suivante : (i) l'in-

troduction de deux nouvelles classes de stratégies de production dans les lignes de transfert multi-pièces, en l'occurrence la production synchronisée et la production prioritaire ; (ii) l'analyse mathématique de la performance de ces stratégies par une combinaison de techniques issues des méthodes de décomposition/agrégation de lignes de transfert, et certains résultats existants sur l'analyse des machines isolées mono pièces (surtout Hu [18] et Bielecki et Kumar [4]) ; (iii) le développement d'algorithmes efficaces d'optimisation des paramètres d'opération de ces stratégies.

1.3 Organisation du mémoire

Dans le chapitre 2, nous présentons une brève revue de la littérature des multiples travaux existants dans le domaine des lignes de production. Nous nous concentrons plus spécifiquement sur les approches basées sur les chaînes de Markov, sous des politiques de production à seuils critiques, et qui ont attiré l'attention d'une grande partie des chercheurs du domaine.

Le chapitre 3 est consacré entièrement aux lignes de transfert multi-machines multi-pièces partiellement-homogènes. Tout d'abord, la technique d'analyse de performance par décomposition pour les lignes mono-pièce est généralisée au cas multi-pièces sous la politique de production synchronisée de pièces combinée avec les politiques à seuils critiques. Subséquemment, nous présentons le modèle mathématique traduisant le comportement du système et formulons le problème d'optimisation avec la programmation dynamique. Plus tard dans ce chapitre, des exemples de résultats numériques obtenus sont présentés, suivis de la conclusion du chapitre.

Dans le chapitre 4, nous traitons un problème plus général, celui des lignes de transfert non homogènes sous la même classe de politique de production. Également, les modèles mathématiques dans ce cas seront présentés en prenant en compte plus de paramètres

(comme par exemple la dernière machine qui a une nature différente des autres) pour rendre le problème encore plus général. Une section entière sera dédiée à la validation des modèles mathématiques par comparaison avec la simulation Monte-Carlo. Ensuite, nous formulons le problème de la programmation dynamique et proposons des algorithmes de solution efficaces. Des résultats numériques sont présentés à la fin du chapitre avant de conclure.

Dans le chapitre 5, nous introduisons une nouvelle classe de production multi-pièces sous des politiques à seuils critiques, celle que nous avons nommée *production prioritaire*. La ligne à étudier sera limitée à deux machines produisant chacune deux types de pièces. Cette limitation nous aidera à mieux comprendre le système sous la nouvelle classe de production proposée. La modélisation mathématique qui en découle sera présentée et validée après dans une section à part. Ensuite, nous formulons le problème de la programmation dynamique correspondant à ce cas et présentons quelques résultats numériques obtenus et concluons le chapitre.

Enfin, la conclusion générale du mémoire résumera à nouveau les contributions scientifiques de cette étude et montrera la pertinence de ce travail de recherche. Des perspectives de travaux de recherche futurs seront par la suite proposées.

CHAPITRE 2

REVUE DE LA LITTÉRATURE

Dans la littérature scientifique du domaine des lignes de production, différents modèles mathématiques basés sur différentes approches ont été proposés. Parmi les modèles les plus fréquemment utilisés, on trouve les réseaux de Pétri [18], les systèmes à événements discrets [32], [5], les files d'attente [7], les simulations [33] et les chaînes de Markov à temps continu et états discrets [31]. Des études comparatives entre ces différents modèles ont commencé à apparaître dans la littérature ; parmi les plus importantes, nous citons de façon non exclusive celles faites par Dallery et Gershwin [11], et Reisman, Kumar, Motwani et Cheng [34]. Chacun des modèles proposés peut offrir des avantages et souffrir de certaines lacunes mais nous pouvons observer que les modèles basés sur les chaînes de Markov à temps continu et états discrets font l'objet d'une attention toute particulière au cours des dernières années.

De même, les publications se sont poursuivies dans la littérature en se basant sur différentes classes de politiques de production. Les politiques les plus connues dans les classes des Juste-à-temps sont Kanban, Conwip et seuils critiques. Des comparaisons entre les bénéfices et les insuffisances de ces politiques se sont multipliées, parmi lesquelles nous citons à titre d'exemple l'étude intéressante de Muckstadt et Tayur [30]. Malgré les avantages et les inconvénients de chaque classe de politique, les lois décentralisées à seuils critiques ont été adoptées par un nombre important de chercheurs pour des multiples raisons. Cette classe de politique, qui a été introduite initialement par Kimemia et Gershwin [20], peut permettre la décomposition de la ligne multi-machines grâce à l'inventaire stocké dans les stocks intermédiaires d'encours, ce qui facilite l'analyse et la compréhension d'un système avec un nombre élevé de machines et stocks.

En réalité, la décomposition devient souvent une nécessité pour les longues lignes où multiples aléas et perturbations causés par les pannes et réparations des machines ou la fluctuation de la demande rendent une approche sans décomposition très complexe. Dans le reste de ce chapitre, nous allons nous concentrer surtout sur les publications centrées sur les politiques à seuils critiques que nous jugeons fortement avantageuses et pratiques quant à la généralisation aux longues lignes multi-machines multi-pièces.

2.1 Lignes mono-machine mono-pièces

La loi de commande optimale à seuil critique dans le cas d'une ligne mono-machine mono-pièce soumise à une demande constante de pièces consiste à maintenir autant que possible l'inventaire au niveau du seuil critique qui est à déterminer de sorte à minimiser un certain critère de performance (en général, le coût moyen de stockage). Cette loi optimale exige que la machine produise au maximum de sa capacité compte tenu de son état d'opération, et ceci tant que l'inventaire est en dessous du seuil critique ; sinon elle doit produire au taux de la demande qui est considéré être constante afin de maintenir le niveau du seuil critique.

Bielecki et Kumar [4] ont considéré une machine à deux états markoviens soumise à une demande constante et alimentée par une source parfaitement fiable. En plus, ils ont permis la pénurie du stock en aval de la machine en envisageant un coût de pénalité qui est différent du coût de stockage et le critère de performance à optimiser était donc le coût moyen de stockage et de retards de livraison. Après avoir établi les conditions d'optimalité des politiques à seuils critiques, Bielecki et Kumar ont obtenu des expressions analytiques des fonctions densité de probabilité du niveau de l'inventaire en régime permanent et par la suite ont développé les expressions exactes du seuil critique et coût optimal associé en fonction de la demande et des paramètres de la machine. Deux ans plus tôt, Akella et Kumar [2] avaient étudié le même problème mais avec, comme cri-

tère de performance, un coût moyen de stockage et de retards de livraison avec facteur d'actualisation. Ils avaient démontré que la loi à seuil critique était la politique optimale pour cette situation également.

Hu [18] a étudié une ligne similaire à celui de Bielecki et Kumar mais sans permettre le retard de livraison et le critère de performance était uniquement le coût moyen de stockage. Il a également prouvé l'optimalité de la loi à seuil critique dans ce cas, a obtenu les expressions analytiques des fonctions des probabilités associées à l'inventaire et a optimisé le critère de performance choisi. Au cours de notre recherche présentée dans ce mémoire, le modèle de Hu sera d'un grand intérêt pour nous afin de modéliser les machines de la première jusqu'à l'avant-dernière, et celui de Bielecki et Kumar pour la dernière.

Sharifnia [39] et Algoet [1] ont étudié le cas d'une machine isolée à plusieurs états markoviens à l'instar de Kimemia et Gershwin [20]. Le résultat principal de ces études indique que la politique à seuils critiques se caractérise par un ensemble de niveaux de seuils critiques parmi lesquels il y a un candidat possible pour donner une performance optimale. Sharifnia a proposé de calculer les seuils critiques optimaux en dérivant les distributions de probabilités, définies par morceaux, en régime permanent (horizon infini) par le moyennage du processus d'inventaire sur une longue période de temps, ensuite en calculant analytiquement le coût total de production en fonction d'un choix arbitraire des niveaux des seuils critiques. Ce coût étant optimisé dans l'espace des seuils donne lieu aux valeurs optimales des seuils critiques qui optimisent la production.

Malhamé et Boukas [25] ont enrichi le modèle de la machine isolée à plusieurs états markoviens en présentant les équations aux dérivées partielles associées aux fonctions densités de probabilités du niveau d'inventaire en régime transitoire (horizon fini) ainsi que les conditions frontières nécessaires pour la solution de ces équations. Ceci est d'une grande utilité pour les systèmes manufacturiers pour lesquels les exigences de produc-

tion peuvent changer avant que le système n'ait le temps de se stabiliser en un régime permanent. Ils ont fait apparaître la nature de renouvellement markovien de la dynamique du système sous les lois de production à seuils critiques et par la suite ont utilisé leur système d'équations aux dérivées partielles pour calculer le noyau de transition de ce processus de renouvellement. De plus, leur étude a donné lieu à une méthode permettant le calcul des moments des temps de premier retour de l'inventaire à un niveau quelconque qui s'avère très utile pour la modélisation statistique du processus d'encours.

Malhamé [24] a poursuivi la recherche sur le modèle de la machine isolée multi-états markoviens en publiant le théorème d'ergodicité de ce modèle qui permet le calcul des densités de probabilité de l'inventaire en régime quelconque. Ce théorème d'ergodicité s'applique sur une machine isolée à n états markoviens dont m sont réalisables ($n > m$) dans le sens où la demande est inférieure à la capacité de la machine pour ces m états. Il stipule qu'une telle machine est ergodique si et seulement si le processus admet $n - m$ valeurs propres à partie réelle positive, une valeur propre nulle et $m - 1$ valeurs propres à partie réelle négative.

El-Férik et Malhamé [13] ont présenté, pour une machine unique multi-états sous des politiques à seuils critiques, l'équation de renouvellement de la fonction coût sur horizon fini pour laquelle le noyau est la fonction densité de probabilité du premier retour à un niveau quelconque. Ils ont aussi construit le système d'équations aux dérivées partielles de cette fonction de densité et développé un algorithme récursif généralisé pour le calcul des moments du premier retour. Ces moments servent en fait à calculer une approximation très précise du coût moyen de production sur les deux horizons fini et infini à travers la construction des approximations de Padé du processus semi-markovien de l'inventaire. D'un point de vue pratique, une adaptation de ce résultat peut contribuer à la construction d'une bonne approximation des modèles markoviens des machines isolées d'une ligne de transfert décomposée.

2.2 Lignes mono-machine multi-pièces

La performance de la politique à seuils critiques pour une ligne mono-machine produisant deux types de pièces a été étudiée par Srivatsan et Dallery [40] en généralisant les résultats de la stabilité des politiques à seuils critiques déjà existants pour le cas mono-pièce. Ils ont aussi analysé les coûts moyens des trajectoires pour caractériser partiellement la politique optimale appartenant à cette classe de politiques. Leur travail a aidé à donner des aperçus lucides pour concevoir des heuristiques simples mais efficaces pour contrôler des systèmes manufacturiers produisant plusieurs types de pièces. Il est à noter que la structure de contrôle de Srivatsan et Dallery est optimale seulement pour des coûts linéaires par morceaux.

Caramanis et Sharifnia [8] ont étudié la production multi-pièces pour une machine isolée multi-états sous des politiques à seuils critiques. Ils ont décrit une méthode d'approximation qui réduit le problème de contrôle multi-pièces à un nombre de problèmes de contrôle mono-pièce découplés. En principe, ils ont défini les ensembles des taux de production faisables quand la machine est dans un état quelconque comme des hyper-cubes afin de rendre les niveaux de production dans l'espace de la production indépendants tout au long des coordonnées séparées. Leur recherche a donné lieu à un contrôleur sous-optimal qui présentait beaucoup de commodité au niveau de la conception et du calcul mais souffrait de certaines limitations. En fait, la capacité de production permise était un sous-ensemble restreint de l'espace de production. En plus, le découplage total de la production des différentes pièces engendrait une perte d'une capacité disponible de production, surtout quand au moins une des pièces atteint son niveau de seuil critique.

El-Férik, Malhamé et Boukas [14] ont amélioré les insuffisances de la production multi-pièces de Caramanis et Sharifnia [8] pour une machine isolée mais à deux états (état de marche et état de panne) en définissant une nouvelle classe de politique de contrôle

à seuils critiques qu'ils ont appelé *Politiques simples maximales de contrôle à seuils critiques* (*Simple maximal hedging control policies*). Cette classe de politique, qui est paramétrisée par un seuil critique, un taux maximal de production et un ordre de priorité pour chaque pièce, permet une utilisation maximale de la capacité de production de la machine avec les différents niveaux de seuils critiques. L'ensemble des taux faisables de production sont dans ce cas des polyèdres convexes quand la machine est parfaitement flexible. À travers l'analyse des temps de premier passage et les approximations de Padé, ils ont réussi à montrer qu'une analyse séquentielle de la performance des nouvelles politiques est possible en commençant par la pièce la plus prioritaire jusqu'à la moins prioritaire. Leur analyse d'ergodicité montre que le critère d'ergodicité sous les politiques simples maximales de contrôle à seuils critiques est minimal dans le sens où le vecteur des taux de demande des pièces est compris à l'intérieur de l'ensemble de la capacité moyenne. En fait, leur analyse telle que présentée dans [14] peut être appliquée seulement sur les systèmes multi-pièces mono-machine à deux états. Toutefois, aucune restriction n'est mise sur le nombre de pièces ni la forme de l'ensemble de la capacité de production en autant qu'il corresponde à un polyèdre convexe.

Sethi, Suo, Taksar et Yan [37] se sont intéressés au cas d'un système mono-machine (qui peut être vu comme multi-machines en parallèle) multi-états avec un coût convexe de stockage et de pénurie. En vue de pouvoir dériver les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) pour le problème de contrôle de ce coût moyen et étudier l'existence d'une solution, ils ont introduit un problème de contrôle avec coût actualisé. Ils ont réussi à démontrer que les équations de HJB en fonction des dérivées directionnelles ont une solution constituée du coût moyen minimal et d'une fonction qu'ils ont appelé *fonction potentielle*, ce qui aide à spécifier une politique de contrôle optimal en termes de cette fonction potentielle. En fait, la formulation initiale de leur coût et les fondations de la méthodologie des perturbations du contrôle hiérarchique des flux se trouvent dans Sethi et Zhang [38].

2.3 Lignes multi-machines mono-pièces

Dans ce cas, la ligne est composée d'un certain nombre de machines en tandem, séparées les unes des autres par des zones de stockage, et produit un seul type de pièces. Pour les lignes multi-machines, en dehors du cas où les aires de stockages sont nulles (machines pouvant être agrégées) ou infinies (machines totalement découplées), les niveaux moyens de ces inventaires ne peuvent être calculés ni analytiquement ni numériquement ; il faut donc des méthodes d'approximation. Afin de faciliter l'analyse et la compréhension d'une telle ligne, différentes techniques d'approximation et de décomposition, qui transforment ce problème complexe en un ensemble fini de sous-problèmes simples, ont été proposés. Dans ce qui suit, nous présentons un aperçu rapide des travaux qui ont marqué la littérature.

Gershwin [15] a proposé une méthode de décomposition pour une ligne de transfert homogène avec un modèle discret où les temps de pannes et de réparations ont une distribution géométrique et les tailles des stocks sont des valeurs entières. La méthode proposée consiste à décomposer la ligne en un ensemble de sous-lignes composée chacune de deux machines où chaque machine possède son propre taux de panne et réparation. Les paramètres de chaque sous-ligne sont déterminés par un ensemble d'équations. La méthode peut être résolue par un algorithme itératif mais qui malheureusement peut diverger. Gershwin [16] a poursuivi ses recherches en proposant une méthode transformant une ligne non fiable et non homogène en une ligne non fiable mais homogène. Pour ce faire, chaque machine (sauf la plus rapide) est remplacée par deux machines séparées par un stock intermédiaire de capacité nulle. Une des deux machines est chargée d'engendrer le comportement non fiable de la machine originelle et l'autre est chargée de représenter le ralentissement de la production causé par les blocages en aval. La ligne résultante est homogène et donc la méthode de [15] peut être appliquée.

Dallery, David et Xie [9] ont conçu un algorithme rapide et efficace dénoté DDX pour résoudre les équations de la décomposition de Gershwin [15]. Par la suite, ils ont élargi leurs recherches ([10]) en proposant une méthode de décomposition approximative pour une ligne homogène mais à flux continu. La technique proposée est en fait l'adaptation de la méthode de Gershwin [16] au cas du flux continu. En remplaçant les équations de Gershwin par des équations équivalentes beaucoup plus simples, l'algorithme itératif de résolution est dans ce cas plus facile à implémenter et plus rapide que celui de Gershwin, en plus, il semble converger tout le temps. Par ailleurs, Burman [6] a présenté une extension améliorée de l'algorithme DDX de Dallery, David et Xie pour un modèle non homogène et continu. Une amélioration au niveau du temps de calcul de cet algorithme a été présentée par Gershwin et Burman [17] sous le nom ADDX.

Sadr et Malhamé ont étudié la performance des lignes de transfert multi-machines à deux états (état fonctionnel et état de panne pour chaque machine) pour les cas partiellement-homogène [35] et non-homogène [36] en se basant sur la technique de décomposition et d'agrégation initialement présentée par Mbihi et Malhamé [28] et améliorée plus tard par Mbihi, Malhamé et Sadr [29]. Cette méthode repose sur deux approximations de découplage que nous allons adopter dans ce mémoire et les généraliser au cas de la production multi-pièces. Les deux approximations sont *l'hypothèse de découplage des machines* et *le principe de moyennage de la demande*, elles seront présentées en détails dans la section 3.3. En fait, la méthode de décomposition et d'agrégation permet la décomposition de la ligne en un ensemble fini et traçable de couples stock-machine dont l'analyse de performance est à la fois facile à implémenter et donne une approximation très précise.

2.4 Lignes multi-machines multi-pièces

Les lignes multi-machines multi-pièces représentent le cas le plus général des lignes de fabrication en tandem. L'analyse de ces lignes est en général très compliquée à cause de la délicatesse de la traçabilité dans les deux dimensions, les machines et les pièces. Les travaux de recherches qui y sont dédiés sont rares et les méthodes proposées sont peu efficaces. C'est un domaine qui est encore ouvert quant à l'apport de nouvelles méthodes ainsi que l'amélioration du peu de méthodes existantes.

Commençant d'abord par le travail de Kimemia et Gershwin [20] dans lequel ils ont étudié de manière assez qualitative un système manufacturier multi-machines multi-pièces. Le résultat essentiel et le plus intéressant de leur étude était le principe de la politique à seuils critiques qui a ouvert une nouvelle voie de recherche pour laquelle ils étaient les pionniers. Ils ont présenté un contrôleur à quatre niveaux. Un premier niveau qui calcule conjointement les taux de production des pièces à court-terme. Le deuxième niveau détermine la proportion des pièces à laisser entrer dans chacun des cheminements possibles de la ligne pour satisfaire les taux de production dictés par le premier niveau. Le troisième niveau dirige les pièces dans le système et surveille les opérations selon les deux premiers niveaux. Finalement, le quatrième niveau calcule séparément les politiques de contrôle à utiliser dans le premier et le deuxième niveau. En fait, l'algorithme de contrôle qu'ils ont développé est heuristique et extrêmement difficile à implémenter dans le cas d'un large système manufacturier pour la complexité de l'analyse ainsi que l'immense temps de calcul.

Liberopoulos et Caramanis [21] ont réalisé un contrôleur numérique sous-optimal qui utilise des fonctions quadratiques approximatives pour représenter les fonctions valeurs de la politique optimale pénalisant le stockage et la pénurie. Ces fonctions valeurs sont supposées être convexes. En faisant une analyse de perturbation infinitésimale sur un

échantillon d'une seule trajectoire du processus d'inventaire, ils réussissent à obtenir des estimés de la dérivée première et seconde du coût cumulatif engendré par l'échantillon par rapport aux paramètres des quadratiques approximatives. Ces paramètres des quadratiques sont par la suite à optimiser. Ils ont proposé deux algorithmes d'optimisation stochastique qui utilisent les estimés de la dérivée première et seconde. Cette méthode semble donner une bonne approximation de la solution optimale mais souffre de certains inconvénients. La méthode s'applique uniquement dans les cas où les fonctions valeurs sont convexes ; et quoique l'utilisation des estimés de la dérivée première et seconde rende la recherche de la solution rapide, elle ajoute un fardeau de calcul à la complexité déjà existante due au traitement des données de calcul. En plus, il n'y a aucune garantie que la méthode puisse profiter des propriétés structurelles d'un contrôleur optimal analytiquement conçu.

Le travail de Jang Y. J. [19] est l'étude la plus récente, au mieux de nos connaissances, qui traite des lignes multi-machines multi-pièces. Jang considère un flux continu des pièces à temps discret et des temps de pannes et de réparations des machines géométriquement distribués. Il définit une politique de priorité statique des pièces qui consiste, pour chaque machine, à produire uniquement la pièce prioritaire quand la machine est fonctionnelle, le stock en amont est disponible pour cette pièce et le niveau du stock en aval est inférieur au seuil critique pour cette pièce ; sinon produire la deuxième pièce dans l'ordre de priorité quand la machine ne peut pas produire la pièce prioritaire ; et ainsi de suite. En d'autres termes, quand la machine a le choix, elle choisit toujours selon un ordre de priorité des pièces prédéfini à l'avance. Pour l'analyse de la performance du système, il a adapté la méthode de décomposition, basée sur les blocs des deux machines et le stock intermédiaire, présentée initialement dans [16] au cas multi-pièces selon sa politique de priorité. Une estimation des taux de production et des niveaux moyens des inventaires de toutes les pièces a été obtenue. Cette méthode s'applique dans le cas des flux discrets de production. Un algorithme d'optimisation des seuils critiques a été

proposé. Il semble converger avec des paramètres raisonnables de la ligne étudiée mais utilise une mémoire assez grande pour le traitement des données et le calcul basé sur un nombre considérable d'équations de décomposition. En outre, on ne trouve aucune mention dans ce travail du temps de calcul nécessaire avant la convergence à une solution optimale.

CHAPITRE 3

OPTIMISATION DES LIGNES DE TRANSFERT PARTIELLEMENT-HOMOGÈNES SOUS POLITIQUE SYNCHRONISÉE

3.1 Introduction

¹Une ligne de transfert partiellement homogène est une ligne de production constituée de n machines en tandem, non fiables, séparées les unes des autres par des zones de stockage (des stocks intermédiaires), et tel que toutes les machines partagent le même taux moyen de réparation (r) mais chaque machine possède son propre taux moyen de panne ($p_i, i = 1, \dots, n$).

Dans un premier temps, la technique d'analyse de performance par décomposition pour des lignes de transfert multi-machine mono-pièces, initialement présentée par Mbihi [27] et Mbihi et Malhamé [28] et améliorée ensuite par Mbihi, Malhamé et Sadr [29] et Sadr et Malhamé [35] et [36], sera présentée. Dans un deuxième temps, cette technique sera généralisée au cas des lignes multi-pièces sous la politique de production synchronisée de pièces. Par la suite, l'optimisation de la ligne multi-pièces décomposée sera faite par la programmation dynamique en vue d'obtenir les valeurs numériques des paramètres libres de la stratégie qui minimiseraient les coûts totaux de stockage et de pénurie.

¹Ce chapitre avec le chapitre prochain constituent un développement détaillé d'un article [41] publié aux "proceedings of the 16th Mediterranean Conference on Control and Automation", Ajaccio, France, juin 2007.

3.2 Formulation du problème

On considère une ligne de transfert partiellement homogène constituée de n machines en tandem séparées par des stocks intermédiaires et produisant m types de pièces. La chaîne est donc composée de n machines, $n - 1$ stocks intermédiaires de produits semi-finis et un stock de produits finis (en aval de la n^{eme} machine). Soit $x_{ji}(t)$ le niveau de la pièce j au stock i à l'instant t , avec $j = 1, \dots, m$ et $i = 1, \dots, n$. Fig. 3.1 montre la ligne de production en question. Une machine M_i , par exemple, peut être dans un de deux modes : mode opérationnel où le taux de production de la pièce j ($j = 1, \dots, m$) varie entre 0 et un maximum de k_{ji} et un mode de panne où les taux de production de toutes les pièces pour cette machine sont nuls. La variable indiquant le mode de la machine M_i est dénotée α_i . Pour $\alpha_i = 1$, la machine M_i est opérationnelle et pour $\alpha_i = 0$, elle est en panne. De plus, chaque α_i ($i = 1, \dots, n$) est supposé évoluer selon une chaîne de Markov à temps continu à deux états avec un taux moyen de panne p_i et un taux moyen de réparation r . Le taux instantané de demande pour les produits finis de type j est considéré être une constante d_j ($j = 1, \dots, m$).

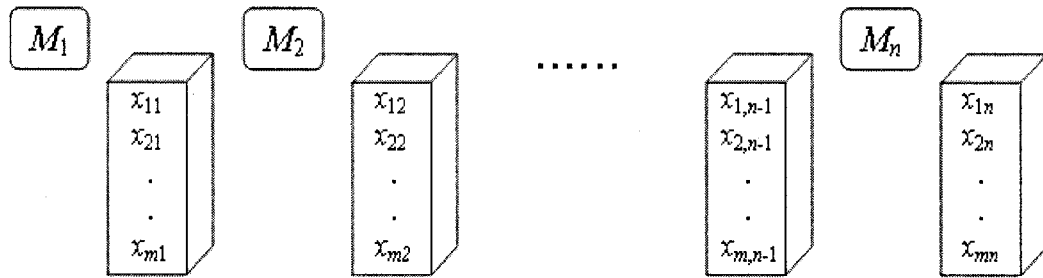


FIGURE 3.1 Ligne de production de n machines produisant m pièces

3.2.1 Hypothèses

Les hypothèses suivantes sont faites :

- La première machine ne manque jamais de pièces à traiter. Cette hypothèse est équivalente à affirmer que la première machine est précédée d'un stock de matière première de taille infinie.
- Les taux de production maximaux respectent l'inégalité suivante : $k_{j1} \geq k_{j2} \geq \dots \geq k_{jn} \forall j = 1, \dots, m$. Cette condition est exigée pour garantir que le niveau de l'inventaire de la pièce j dans le stock i (x_{ji}) augmente quand la machine M_i produit cette pièce à son taux maximal k_{ji} , peu importe le taux auquel elle est tirée par la machine M_{i+1} .
- La pénurie est permise uniquement pour la dernière machine M_n . Soit c_{ji} le coût instantané de stockage par unité de x_{ji} pour $j = 1, \dots, m$ et $i = 1, \dots, n - 1$; en plus, pour $j = 1, \dots, m$, c_{jn}^+ (respectivement c_{jn}^-) est le coût instantané de stockage (respectivement de pénurie) par unité de l'inventaire x_{jn} . Il est à noter qu'en général c_{jn}^- est supérieur à c_{jn}^+ .
- La condition suivante de réalisabilité de la demande est satisfaite par chaque machine en isolation : Pour $j = 1, \dots, m$ et $i = 1, \dots, n$:

$$\frac{r}{r + p_i} k_{ji} > d_j \quad (3.1)$$

Cette condition s'interprète aisément : en effet, si la machine M_i doit répondre à la demande d_j , il est nécessaire que le taux moyen de production de la machine sachant que lorsqu'elle produit, elle le fait toujours à pleine capacité, doit être supérieur à la demande.

3.2.2 Dynamique du système

L'inventaire $x_{ji}(t)$, $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$, évolue selon :

$$\frac{dx_{ji}(t)}{dt} = u_{ji}(t) - u_{j,i+1}(t) \quad (3.2)$$

où $u_{ji}(t)$ est le taux de production instantanée de la pièce j par la machine M_i et $u_{j,n+1}(t) = d_j \forall t > 0$.

3.2.3 Objectif

Notre objectif est de développer une loi de contrôle par rétroaction afin de réduire au minimum (optimiser) le coût moyen à long terme de stockage et de pénurie de toute la ligne de transfert. Nous cherchons l'optimalité dans une classe limitée de politique de contrôle par rétroaction : celle des Kanbans. Une telle politique est caractérisée par un ensemble de seuils critiques à maintenir autant que possible et son optimalité est satisfaite par chaque machine en isolation pour les systèmes industriels avec une machine unique à deux états parmi une classe spécifique de politiques de contrôle admissibles (voir [18]). La notion de seuils critiques est considérée comme une police d'assurances contre les pannes de machines potentielles et les coûts associés à la pénurie de stock. Chaque stock, par exemple x_{ji} , est associé à un seuil critique (un niveau de Kanban) pour chaque pièce. Soit z_{ji} le seuil critique associé à la pièce j du stock i . Si x_{ji} est inférieur à z_{ji} , la machine M_i doit produire la pièce j au taux maximum permis $\bar{k}_{ji}$ respectant les exigences de la production synchronisée des pièces (ces taux seront définis plus tard dans ce chapitre); et si x_{ji} est exactement égal à z_{ji} , la machine M_i doit produire la pièce j au même taux que la machine M_{i+1} le fait ($u_{j,i+1}(t)$) afin de maintenir x_{ji} au niveau z_{ji} . Par conséquent, x_{ji} ne dépassera jamais son seuil critique z_{ji} et $0 \leq x_{ji} \leq z_{ji}$ pour $j = 1, \dots, m$ et $i = 1, \dots, n - 1$. Quant aux stocks des produits finis (ceux en aval de la dernière machine), $x_{jn} \leq z_{jn}$ (pour $j = 1, \dots, m$) parce que ces stocks peuvent être en pénurie et dans ce cas deviendront négatifs. Un niveau de stock négatif voudrait dire qu'il y a une quantité de produit, égale à la valeur absolue du niveau négatif du stock, qui a été commandée par des clients mais pas encore produite. Cette quantité est à produire le plus tôt possible. Ainsi, l'objectif est de développer une technique efficace pour optimiser le niveau de Kanbans z_{ji} , $j = 1, \dots, m$ et $i = 1, \dots, n$ ($n \geq 2$), afin de réduire au minimum

une mesure convenablement définie du coût moyen à long terme. Cette mesure s'écrit de façon générale comme suit :

$$J^{\{z\}}(x_0, \alpha_0^T) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left\{ \int_0^t E \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m c_{ji} x_{ji}(\tau) + \sum_{j=1}^m (c_{jn}^+ x_{jn}^+(\tau) + c_{jn}^- x_{jn}^-(\tau)) \mid x_0, \alpha_0^T \right] d\tau \right\} \quad (3.3)$$

avec z la matrice des seuils critiques, c_{ji} le coût unitaire de stockage de la pièce j dans le stock i , c_{jn}^+ le coût unitaire de stockage de la pièce j dans le stock n , c_{jn}^- le coût unitaire de pénurie de la pièce j du stock n , $\alpha^T(t) = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$ le vecteur des états des machines à l'instant t et l'indice 0 correspond au temps initial où la ligne est considérée.

3.3 Techniques de décomposition

Les techniques de décomposition jouent un rôle très important dans la simplification de l'analyse de performance pour un choix de seuils critiques donné, rendant l'optimisation plus aisée. Grâce aux techniques de décomposition, une ligne de n machines est décomposée en n machines approximativement séparées. Pour ce faire, l'influence de l'univers en amont et en aval de chaque machine doit être approximativement représentée. La technique de décomposition utilisée dans ce travail est celle initialement présentée par Mbihi et Malhamé [28]. Cette technique est basée sur deux stratégies d'approximation : l'hypothèse de découplage des machines et le principe de moyennage de la demande.

3.3.1 Hypothèse de découplage des machines

Cette hypothèse vise à représenter de façon compacte l'univers en amont d'une machine donnée. Dans le contexte de lignes de transfert, l'univers en amont d'une machine donnée agit comme une source non fiable de pièces. Ainsi par exemple, du point de vue de la capacité de la machine M_{i+1} de produire la pièce j , ce qui importe c'est la valeur de

l'état binaire de disponibilité de la source $I_{ji}(t)$.

$$I_{ji}(t) = I \left[\{x_{ji}(t) > 0\} \cup \{x_{ji}(t) = 0, \alpha_i(t) = 1, I_{j,i-1}(t) = 1\} \right] \quad (3.4)$$

où $I_{ji}(t) = 1$ si $x_{ji}(t) > 0$ et $I_{ji}(t) = 0$ si $x_{ji}(t) = 0$. L'hypothèse de découplage des machines signifie que $I_{ji}(t)$ est un processus aléatoire qui est complètement indépendant du processus aléatoire de l'état opérationnel de la machine M_{i+1} ($\alpha_{i+1}(t)$, pour $i = 1, \dots, n - 1$).

3.3.2 Principe de moyennage de la demande

Le principe de moyennage de la demande est une technique d'approximation qui sert à modéliser l'univers en aval d'une machine donnée de façon compacte. Pour une demande constante d_j de pièces finies de type j , chaque machine M_i ($i = 1, \dots, n$) de la ligne de transfert doit répondre au même taux moyen de demande de la pièce j si le processus d'encours x_{ji} est ergodique² (sinon, l'inventaire augmenterait jusqu'à l'infini ou s'épuiserait complètement dans certains stocks de la ligne de transfert). Le principe de moyennage de la demande utilise donc cette observation pour réaliser une représentation approximative mais compacte de l'effet des machines en aval d'un certain stock i sur la dynamique de $x_{ji}(t)$ et $I_{ji}(t)$.

L'hypothèse de moyennage de la demande stipule ce qui suit : "*Sous une politique ergodique de production de type Kanban pour une ligne de transfert soumise à un taux constant de demande des pièces j , d_j , la valeur moyenne en régime permanent du niveau du stock $x_{ji}(t)$ pendant les portions actives du cycle de provision (périodes où $I_{ji}(t) = 1$) dépend de la valeur moyenne en régime permanent du processus stochastique du*

²Par ergodique, nous voulons dire que la demande des pièces j est réalisable en moyenne par la machine non fiable M_i servie par un encours non fiable $x_{j,i-1}$.

taux instantané auquel les pièces j sont tirées par la machine M_{i+1} quand $I_{ji}(t) = 1$ ". Cela signifie que $u_{j,i+1}(t)$ pourrait être remplacé pendant les portions actives du $I_{ji}(t)$ par un niveau constant approprié sans affecter la moyenne de $x_{ji}(t)$. Soit $u_{j,i+1}^+$ ce niveau constant approprié (à calculer plus tard).

Soit $\tilde{x}_{ji}$ le processus fictif représentant l'approximation du processus x_{ji} , c'est à dire l'inventaire de la pièce j produit par la machine fictive $\tilde{M}_i$ soumise en vertu du principe de moyennage de la demande à une demande constante pendant les périodes actives de I_{ji} . Soit a_{ji} la valeur moyenne en régime permanent du coefficient de disponibilité instantané du stock $\tilde{x}_{ji}$.

$$a_{ji} = \lim_{t \rightarrow \infty} E[I[x_{ji}(t)]] \quad (3.5)$$

Étant donné que la valeur moyenne en régime permanent du processus $u_{j,i+1}(t)$ doit être égale à d_j , on peut écrire la relation suivante :

$$\begin{aligned} d_j &= \lim_{t \rightarrow \infty} E[u_{j,i+1}(t)|I_{ji}(t) = 1]Pr[I_{ji}(t) = 1] + E[u_{j,i+1}(t)|I_{ji}(t) = 0]Pr[I_{ji}(t) = 0] \\ &= u_{j,i+1}^+ a_{ji} + 0(1 - a_{ji}) \\ &= u_{j,i+1}^+ a_{ji} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Par (3.6), on peut déduire que le niveau constant approprié remplaçant $u_{j,i+1}(t)$ pendant les portions actives du $I_{ji}(t)$, $u_{j,i+1}^+$, est égal à d_j/a_{ji} . Cela veut dire que la machine $\tilde{M}_i$ est soumise à une demande de d_j/a_{ji} . Il est à noter que d_j/a_{ji} est supérieur à d_j puisque le coefficient de disponibilité a_{ji} est compris entre 0 et 1. Ainsi, la division de la demande d_j par le coefficient a_{ji} sert à compenser les pertes possibles de la demande par la machine M_{i+1} quand x_{ji} n'est pas disponible ($x_{ji} = 0$).

3.4 Production parallèle synchronisée de pièces

La production parallèle de pièces signifie que chaque machine, quand elle peut produire, produit toutes les pièces (les m pièces) simultanément. Ceci est équivalent à la supposition que chaque machine consacre un certain pourcentage de son taux de production, quand elle est opérationnelle, à chaque pièce et le fait ainsi d'une façon cyclique. Cette politique de production est bien adaptée à des lignes flexibles de fabrication où les temps de reconfiguration des machines pour passer de l'usinage d'un type de pièces à l'usinage d'un autre sont négligeables. La production synchronisée de pièces est un cas particulier de la production parallèle de pièces où, pour n'importe quelle machine donnée, les taux maximaux de production synchronisés ($\bar{k}_{ji}$) et les niveaux de seuils critiques (z_{ji}) de toutes les pièces sont en rapport avec les proportions des taux de demandes. Plus spécifiquement, cela pourrait être mathématiquement exprimé par les égalités suivantes. Pour $i = 1, \dots, n$:

$$\frac{z_{ji}}{z_{li}} = \frac{\bar{k}_{ji}}{\bar{k}_{li}} = \frac{d_j}{d_l} \quad \text{pour } j, l (\neq j) = 1, \dots, m \quad (3.7)$$

où $\bar{k}_{ji}$ est le nouveau taux maximal de production de la pièce j par la machine M_i pour la production synchronisée. Il est à noter que $\bar{k}_{ji}$ doit évidemment être inférieur à k_{ji} ³. Les taux maximaux de la production synchronisée ($\bar{k}_{ji}$'s) représentent l'intersection du vecteur de la demande (à m dimensions) avec la frontière supérieure de l'espace des taux de production faisable. En effet, cette frontière supérieure est l'hyper-surface formée par les taux de production maximaux réels (k_{ji}). Ainsi, les $\bar{k}_{ji}$ peuvent être obtenus par la

³ k_{ji} est le taux maximal de production, par défaut, de la pièce j par la machine M_i . Autrement dit, k_{ji} est le taux maximal de production à utiliser quand le système ne produit que la pièce j tandis que $\bar{k}_{ji}$ est le taux maximal de production satisfaisant notre production synchronisée (les égalités 3.7).

solution du système d'équations suivant. Pour $i = 1, \dots, n$:

$$\frac{\bar{k}_{1i}}{d_1} = \frac{\bar{k}_{2i}}{d_2} = \dots = \frac{\bar{k}_{mi}}{d_m} \quad (3.8a)$$

$$\sum_{j=1}^m \frac{\bar{k}_{ji}}{k_{ji}} = 1 \quad (3.8b)$$

L'équation (3.8a) vient de l'hypothèse de la production synchronisée de pièces (3.7) tandis que l'équation (3.8b) représente l'hyper-surface formée par les taux de production maximaux réels (k_{ji} 's). La solution de ce système n'est autre que l'intersection du vecteur de la demande avec la frontière supérieure de l'espace des taux de production faisable (voir Fig. 3.2 de l'espace des taux de production de la machine M_i dans le cas de deux pièces ($m = 2$)). Cette solution est donnée, pour $i = 1, \dots, n$, par :

$$\begin{aligned} \bar{k}_{1i} &= \frac{\prod_{l=1}^m k_{li}}{\sum_{j=1}^m \frac{d_j}{d_1} \left(\prod_{l=1, l \neq j}^m k_{li} \right)} \\ \bar{k}_{ji} &= \frac{d_j}{d_1} \bar{k}_{1i} \quad \text{pour } j = 2, \dots, m \end{aligned} \quad (3.9)$$

Lemme 3.1 *Sous la politique de production synchronisée de pièces (3.7), les comportements des niveaux des pièces dans un stock donné sont identiques dans le sens où les tailles d'inventaire de toutes les pièces dans ce stock restent en tout temps⁴ en proportion avec les taux de demande des pièces. Plus spécifiquement, pour $i = 1, \dots, n$ et $j, l = 1, \dots, m$ ($l \neq j$) : $x_{ji}(t)/x_{li}(t) = d_j/d_l$ pour tout $t > 0$ où $x_{ji}(t) > 0$ et $x_{li}(t) > 0$.*

Démonstration Voir Annexe I.1 ■

Le lemme (3.1) implique que les inventaires de toutes les pièces ($1, 2, \dots, m$) dans le stock i atteignent simultanément leurs seuils critiques (pour $i = 1, \dots, n$) et aussi tombent à zéro simultanément (pour $i = 1, \dots, n - 1$).

⁴Sauf pour les périodes où les stocks sont nuls.

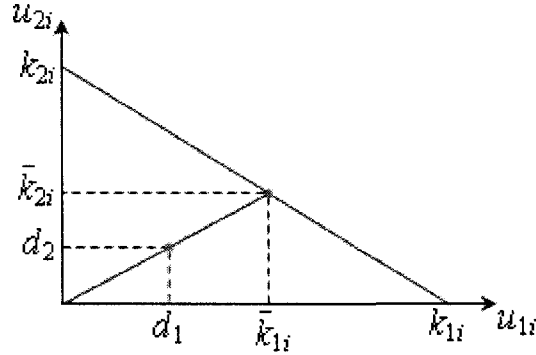


FIGURE 3.2 Espace des taux de production de la machine M_i dans le cas de deux pièces

Proposition 3.2 *Le comportement des inventaires des différentes pièces, dicté par la production synchronisée de pièces, a comme conséquence directe de rendre les coefficients de disponibilité de toutes les pièces dans un stock donné identiques, c'est à dire que pour $i = 1, \dots, n - 1$, $I_{1i}(t) = I_{2i}(t) = \dots = I_{mi}(t) = I_i(t)$ et donc $a_{1i} = a_{2i} = \dots = a_{mi} = a_i$.*

3.5 Modélisation

La machine M_i ($i = 1, \dots, n$) évolue selon une chaîne de Markov à deux états avec un taux de réparation r et un taux de panne p_i (Fig. 3.3). Soit t_{rzji} (respectivement $\bar{t}_{rzji}$) le temps (respectivement le temps moyen) de premier retour à zéro de l'inventaire de la pièce j dans le stock i , pour $j = 1, \dots, m$ et $i = 1, \dots, n - 1$. La proposition (3.2) implique que $\bar{t}_{rz1i} = \bar{t}_{rz2i} = \dots = \bar{t}_{rzmi} = \bar{t}_{rzj}$. Pour un seuil critique donné, Malhamé [24] et El-Férik et Malhamé [13] ont montré la méthode de calcul de tous les moments du temps de premier retour lorsque le taux de demande de pièces est constant, comme dans notre cas avec le principe de moyennage de la demande. De plus, ils ont montré qu'il est possible de construire une représentation markovienne approximative de ce temps de retour à partir de ces moments. Par suite, Mbihi [27] a montré que ce temps de retour avait une distribution quasi-exponentielle et donc caractérisé entièrement par son premier

moment $\bar{t}_{rz_i}$. Il s'en suit un modèle d'une chaîne de Markov à deux états évoluant avec un taux de réparation r et un taux moyen de pénurie de stock p_{s_i} (Fig. 3.4), où $p_{s_i} = 1/\bar{t}_{rz_i}$, représentant le processus binaire de la disponibilité de l'encours x_{ji} , $I_i(t)$ ($i = 1, \dots, n - 1$). En considérant les caractéristiques probabilistes du processus $I_i(t)$, la proportion du temps où le niveau du stock $x_i(t)$ est positif est donnée par $(1/p_{s_i})/((1/p_{s_i})+(1/r))$. Cette proportion est aussi égale à a_i . p_{s_i} est donc lié à a_i par l'équation suivante.

$$p_{s_i} = \frac{r(1 - a_i)}{a_i} \quad (3.10)$$

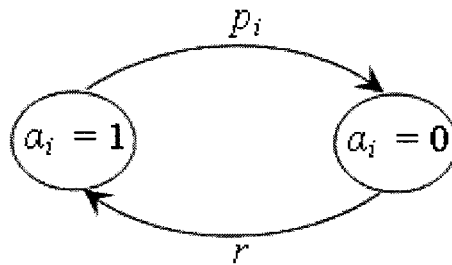


FIGURE 3.3 Modèle markovien à deux états de la machine M_i , $i = 1, \dots, n$

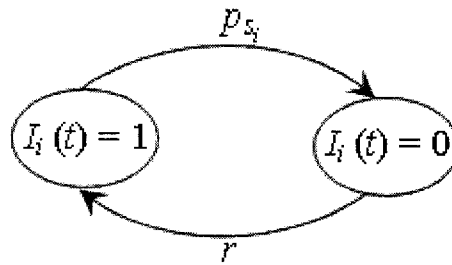


FIGURE 3.4 Représentation du modèle markovien approximatif de la disponibilité de l'encours x_{ji} , $j = 1, \dots, m$ et $i = 1, \dots, n - 1$

À ce stade, en faisant usage de l'hypothèse de découplage des machines et du principe de moyennage de la demande, il est possible de décomposer approximativement la ligne de n machines couplées en n machines séparées produisant chacune m types de pièces.

La première machine M_1 est représentée par une chaîne de Markov à deux états avec un taux de réparation r et un taux de panne p_1 . Selon le principe de moyennage de la demande, cette machine est considérée soumise à une demande constante de pièces j de d_j/a_1 . Ensuite, à partir de $i = 2$ à n , le produit cartésien de la chaîne de Markov de la disponibilité de l'encours $x_{j,i-1}$, I_{i-1} , et la chaîne de Markov associée à la machine M_i donnera le modèle approximatif de la chaîne de Markov de la machine équivalente $\tilde{M}_i$ (Fig. 3.5). Ce modèle est constitué de quatre états dont un seul est fonctionnel et les trois états autres sont des états de pannes. L'état de panne dû aux pannes simultanées de I_{i-1} et α_i est négligé parce qu'il arrive très rarement en général, et les deux autres états de pannes sont agrégés ensemble donnant une machine à un seul état de panne (voir Fig. 3.6). Afin de minimiser l'erreur de l'approximation, nous imposons que la probabilité

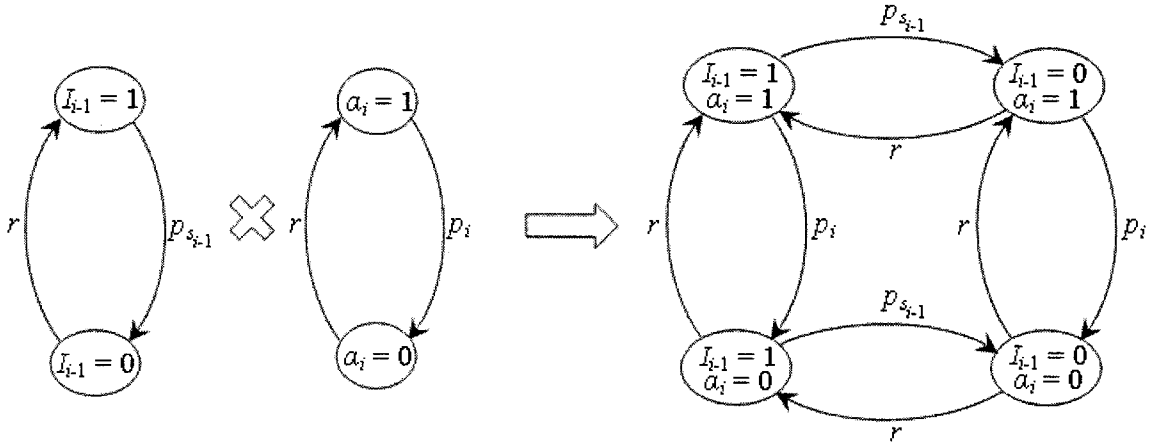


FIGURE 3.5 Le produit cartésien des deux modèles de I_{i-1} et M_i

stationnaire de l'état " $\tilde{\alpha}_i = 1$ " soit $(r/(p_{s_{i-1}} + r)) \cdot (r/(r + p_i))$. En effet, $r/(p_{s_{i-1}} + r)$ est la probabilité que l'encours $x_{j,i-1}$ soit positif (selon le modèle approximatif de la disponibilité de l'encours de la figure 3.4) et $r/(r + p_i)$ est la probabilité exacte que la machine M_i soit en marche. Le résultat est le $\tilde{p}_i$ tel que donné par l'équation suivante.

$$\tilde{p}_i = \left[\frac{r + p_i}{ra_{i-1}} - 1 \right] r \quad (3.11)$$

D'après le principe de moyennage de la demande, a_i peut être calculé par les formules de la machine unique avec pénurie non permise dérivés dans [18], considérant que la machine séparée approximative $\tilde{M}_i$ est soumise à une demande de pièces j de d_j/a_i .

$$a_i = 1 - \frac{\tilde{p}_i}{r + \tilde{p}_i} \left[\frac{1 - \rho_i}{1 - \rho_i e^{-\mu_{ji}(1 - \rho_i)z_{ji}}} \right] \quad (3.12)$$

avec :

$$\mu_{ji} = \frac{\tilde{p}_i}{\bar{k}_{ji} - \frac{d_j}{a_i}} \quad (3.13)$$

$$\rho_i = \frac{r(\bar{k}_{1i} - \frac{d_1}{a_i})}{\tilde{p}_i \frac{d_1}{a_i}} \quad (3.14)$$

Il est à noter que ρ_i de l'équation (3.14) dépend uniquement de l'indice i , et l'indice 1 dénote la première pièce. Si l'on remplace l'indice 1 dans (3.14) par 2, 3, $\dots$ ou m , on obtiendra en vertu de la synchronisation (3.7) le *même* ρ_i . En outre, $\mu_{ji}/\mu_{li} = d_l/d_j$. La solution de (3.12) pour z_{ji} en utilisant (3.13) et (3.14) donne l'expression suivante de z_{ji} .

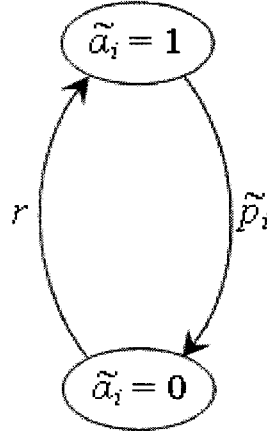
$$z_{ji} = \frac{1}{\lambda_{ji}} \ln \gamma_i \quad (3.15)$$

avec :

$$\lambda_{ji} = -\mu_{ji}(1 - \rho_i) \quad (3.16)$$

$$\gamma_i = \frac{\tilde{p}_i [r\bar{k}_{1i} - d_1(r + \tilde{p}_i)]}{r(r + \tilde{p}_i)(1 - a_i)(\bar{k}_{1i} - \frac{d_1}{a_i})} \quad (3.17)$$

Encore une fois, γ_i de l'équation (3.17) dépend uniquement de l'indice i (peu importe la pièce (1, 2, $\dots$ ou m), γ_i a toujours la *même* valeur), or $\lambda_{ji}/\lambda_{li} = d_l/d_j$. Par (3.15), (3.16) et (3.17), on peut conclure que le rapport entre z_{ji} et z_{li} , pour $j, l = 1, \dots, m$ et $j \neq l$, est égal à d_j/d_l et donc respecte la production synchronisée de pièces (3.7). Le coût de stockage pour $\tilde{M}_i$ avec pénurie non permise est obtenu de [18] comme une fonction de

FIGURE 3.6 Modèle équivalent simplifié à deux états ($\tilde{M}_{i+1}$)

z_{ji} . Si l'on remplace z_{ji} par sa valeur de (3.15) avec (3.16) et (3.17), dans l'expression de ce coût, on obtiendra l'expression de la fonction de coût de transition suivante. Pour $j = 1, \dots, m$ et $i = 1, \dots, n - 1$:

$$\begin{aligned}
 T_{ji}(a_{i-1}, a_i) &= \frac{c_{ji}\rho_i}{(r + \tilde{p}_i)(1 - \rho_i\gamma_i)} \left[\bar{k}_{ji} \frac{1 - \gamma_i}{1 - \rho_i} - \frac{\gamma_i}{\lambda_{ji}} (r + \tilde{p}_i) \ln \gamma_i \right] \\
 &= \frac{c_{ji}\rho_i}{\left(\frac{r + p_i}{a_{i-1}}\right)(1 - \rho_i\gamma_i)} \left[\bar{k}_{ji} \frac{1 - \gamma_i}{1 - \rho_i} - \frac{\gamma_i}{\lambda_{ji}} \left(\frac{r + p_i}{a_{i-1}}\right) \ln \gamma_i \right]
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

La fonction de coût de transition $T_{ji}(a_{i-1}, a_i)$ est définie comme étant le coût moyen (de stockage) nécessaire pour assurer au stock x_{ji} , un coefficient de disponibilité a_i sachant que le stock $x_{j,i-1}$ est lui même associé à un coefficient de disponibilité a_{i-1} .

3.6 Formulation du problème d'optimisation par la programmation dynamique

Le problème d'optimisation du système décrit dans la section 3.2 est formulé comme suit :

Soit une ligne de transfert, composée de n machines produisant chacune m types de pièces, soumise à une demande constante d_j des pièces de type j ($j = 1, \dots, m$). Étant

donné un coefficient de disponibilité minimal désiré des encours $x_{j,n-1}$ ($j = 1, \dots, m$), a_{n-1}^0 , tel que pour tout $j = 1, \dots, m$: $a_{n-1}^0 (\frac{r}{r+p_n}) \bar{k}_{jn} > d_j$, l'objectif est de déterminer une séquence de coefficients a_i^* , $i = 1, \dots, n-2$ qui minimiserait le coût suivant :

$$J^* = \inf_{a_{i-1} \in A_i(a_i)_{i=2, \dots, n-1}} \left\{ \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m T_{jl}(a_{l-1}, a_l) \right\} \quad (3.19)$$

avec $a_0 = 1$ et $A_i(a_i)$ et l'ensemble admissible des coefficients de disponibilité. Cet ensemble admet une borne inférieure et supérieure qui sont données, selon [35], par l'inéquation suivante.

Pour tout $i = 2, \dots, n-1$:

$$\max \left\{ \prod_{l=1}^{i-1} \frac{r}{r+p_l}, \frac{d_1}{\bar{k}_{1i}} \frac{r+p_i}{r} \right\} < a_{i-1} < \min \left\{ \frac{r+p_i}{r} a_i, 1 \right\} \quad (3.20)$$

Il est à noter que le rapport entre la fonction du coût de transition (3.18) de la pièce j et celle de la pièce l ($j, l = 1, \dots, m$ et $j \neq l$) est le suivant : $T_{ji}(a_{i-1}, a_i) / T_{li}(a_{i-1}, a_i) = c_{ji}d_j / c_{li}d_l$. Par conséquent, (3.19) pourrait être écrite en fonction du coût de transition de la première pièce (par exemple).

$$J^* = \inf_{a_{i-1} \in A_i(a_i)_{i=2, \dots, n-1}} \left\{ \sum_{l=1}^{n-1} \frac{T_{1l}(a_{l-1}, a_l)}{c_{1l}d_1} \sum_{j=1}^m c_{ji}d_j \right\} \quad (3.21)$$

Cette observation est extrêmement importante parce qu'elle permet d'exprimer tout le problème de la ligne de transfert multi-pièces en termes du problème de la ligne mono-pièce. Le système se réduit donc en un système mono-pièce avec un seul degré de liberté. Ce degré représente les paramètres de la première pièce puisque la ligne produisant les pièces de types 2 à m est exprimée en fonction de la première pièce. C'est grâce à la production synchronisée des pièces qu'une telle réduction de la complexité du problème a pu être réalisée.

3.7 Cas particulier : Ligne parfaitement homogène

Une ligne de transfert parfaitement homogène est un cas particulier des lignes partiellement homogène, où toutes les machines⁵ sont associées à des paramètres identiques (pour tout $i = 1, \dots, n-1$: $r_i = r$, $p_i = p$ et $k_{ji} = k_j$ pour $j = 1, \dots, m$). De plus, on suppose que pour tout $j = 1, \dots, m$: $a_{n-1}^0(\frac{r}{r+p})\bar{k}_{jn} > d_j$. Nous nous intéressons au comportement limite de la solution optimale lorsque le nombre de machines n tend vers l'infini. Nous cherchons donc à déterminer une séquence $a_1, a_2, \dots, a_{n-2}$, lorsque n tend vers l'infini, en vue d'atteindre la fonction valeur J^* suivante.

$$J^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\inf_{a_{i-1} \in A_i(a_i) \quad i=2, \dots, n-1} \left\{ \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m T_j(a_{l-1}, a_l) \right\}}{n-1} \quad (3.22)$$

Notons que l'homogénéité de la ligne de transfert permet le remplacement de $T_{ji}(a_{i-1}, a_i)$ par $T_j(a_{i-1}, a_i)$ dans (3.22).

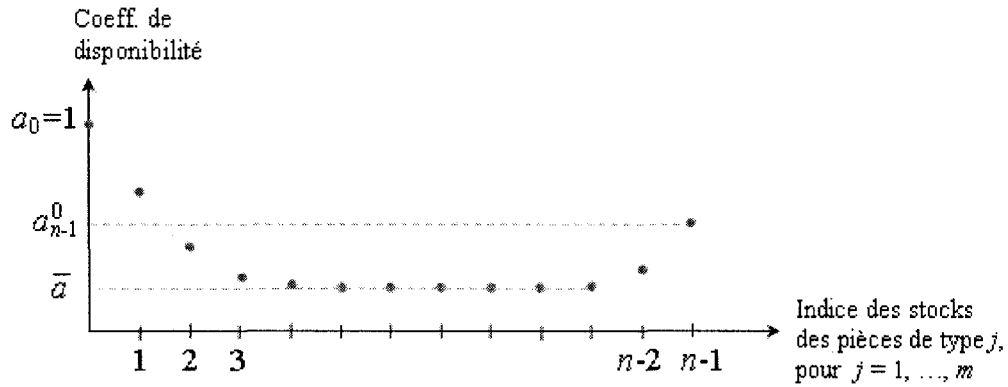


FIGURE 3.7 Profile optimal des coefficients de disponibilité pour une longue ligne de transfert homogène quand $a_{n-1}^0 > \bar{a}$, où $\bar{a}$ est le minimiseur de $T(a, a)$

Grâce à la réduction, obtenue par l'hypothèse de la production synchronisée des pièces, du système multi-pièces en un système mono-pièces, tous les résultats de la ligne homo-

⁵La dernière machine n'est pas nécessairement associée aux mêmes paramètres que les autres machines.

gène mono-pièce sont applicables ici. Ces résultats sont résumés ci-dessous⁶.

- Si l'on reformule le problème de sorte à ce que l'espace d'état de a_i , $i = 1, \dots, n-1$, soit discrétisé, et donc se réduise en un nombre fini de valeurs, le nouveau problème discrétisé admet une politique de loi de commande stationnaire en boucle fermée. Cela donne la possibilité de trouver cette loi de commande optimale stationnaire par un algorithme d'optimisation par *itération de politique* [3].
- Il est aussi possible de trouver une loi de commande optimale stationnaire entre n'importe quelles deux étapes définissant un sous-problème du problème global discrétisé, soit par exemple de l'étape i à l'étape $i+l$ où $i > 0$ et $i+l < n-1$.
- Considérons une condition frontière a_{n-1}^0 et une certaine perturbation arbitraire de cette condition frontière ; sous certaines hypothèses, il est possible de montrer qu'il existera une configuration optimale des coefficients de disponibilité de l'étape 1 à $n-2$ qui se déplacera de façon monotone avec la perturbation. Ces hypothèses sont données dans le lemme I de [35]. Elles ont été satisfaites dans toutes nos simulations et expérimentations numériques.
- La séquence optimale des coefficients de disponibilité, a_{n-i}^* pour $i > 1$, convergera à une limite $\bar{a}$. Il est alors clair à partir de (3.19) que si l'on moyenne, le coût de transition dominant sera $\sum_{j=1}^m T_j(\bar{a}, \bar{a})$: $\bar{a}$ est donc le minimiseur de $\sum_{j=1}^m T_j(\bar{a}, \bar{a})$. Ce dernier est obtenu en posant $a_{i-1} = a_i = \bar{a}$ dans (3.18)⁷. La séquence optimale des coefficients de disponibilité commencera donc avec un $a_0 = 1$ et ensuite diminuera de façon monotone jusqu'à une certaine étape pour laquelle le coefficient de disponibilité sera quasiment égal à $\bar{a}$ et restera dans l'entourage très proche de $\bar{a}$ longtemps. Vers la fin de la ligne, la séquence augmentera ou diminuera dépendant de a_{n-1}^0 et $\bar{a}$. Pour $a_{n-1}^0 > \bar{a}$, la séquence augmentera, sinon elle diminuera. Les figures 3.7 et 3.8 montrent

⁶Voir la section V.B de [35] pour plus de détails ainsi que pour les démonstrations.

⁷Grâce à la continuité du coût T et de ses dérivées première et seconde, la propriété de stationnarité $(\partial T / \partial y)(a_{n-i-1}^*, a_{n-i}^*) + (\partial T / \partial x)(a_{n-i}^*, a_{n-i+1}^*) = 0$, la propriété de minimalité $(\partial^2 T / \partial y^2)(a_{n-i-1}^*, a_{n-i}^*) + (\partial^2 T / \partial x^2)(a_{n-i}^*, a_{n-i+1}^*) \geq 0$ et le fait que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-i-1}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-i}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-i+1}^* = \bar{a}$, il n'est pas difficile de conclure qu'un ou plusieurs minimiseurs locaux qui satisfont $(\partial T / \partial a)(a, a)|_{a=\bar{a}=a^*} = 0$ et $(\partial^2 T / \partial a^2)(a, a)|_{a=\bar{a}=a^*}$ existeront.

la nature de la loi de répartition optimale des stocks.

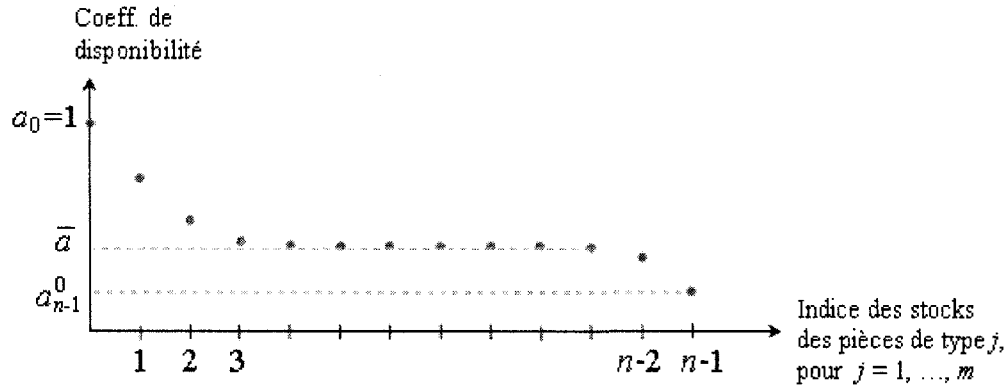


FIGURE 3.8 Profil optimal des coefficients de disponibilité pour une longue ligne de transfert homogène quand $a_{n-1}^0 < \bar{a}$, où $\bar{a}$ est le minimiseur de $T(a, a)$

3.8 Résultats numériques

Dans cette section, nous montrons les résultats numériques du problème de la programmation dynamique formulé dans la section 3.6 (respectivement 3.7) pour une ligne de transfert multi-machines multi-pièces partiellement homogène (respectivement parfaitement homogène).

3.8.1 Lignes partiellement-homogènes

Nous considérons ici une ligne de transfert partiellement homogène composée de 20 machines ($n = 20$) et produisant 4 types de pièces ($m = 4$). Les paramètres de cette ligne sont comme suit : Le taux de réparation de toutes les machines est fixé à $r = 0.5$, la demande des clients pour les 4 pièces est donnée par le vecteur $d = [1.5 \ 1.25 \ 1.75 \ 1]$, le coût de stockage de la pièce j dans le stock i est fixé à $c_{ji} = 2$ pour $j = 1, 2, 3, 4$ et $i = 1, \dots, 19$. Les taux maximaux de production, pour $i = 1, \dots, 20$, des 4 pièces sont respectivement $k_{1i} = 15.5 - 0.01(i-1)$, $k_{2i} = 16 - 0.01(i-1)$, $k_{3i} = 16.5 - 0.01(i-1)$ et $k_{4i} =$

$15 - 0.01(i-1)$. Les conditions des deux frontières (gauche et droite) sont $a_0 = 1$ et $a_{19}^0 = 0.85$.

Par ailleurs, nous considérons deux cas. Le premier où le taux de panne des machines diminue en allant de la première machine vers la dernière. Pour ce faire, nous posons le taux de panne $p_i = 0.2 - 0.005(i-1)$ pour $i = 1, \dots, 20$. Quant au deuxième cas, le taux de panne des machines augmente en allant de la première machine vers la dernière. Le taux de panne dans ce cas est fixé à $p_i = 0.2 + 0.005(i-1)$ pour $i = 1, \dots, 20$.

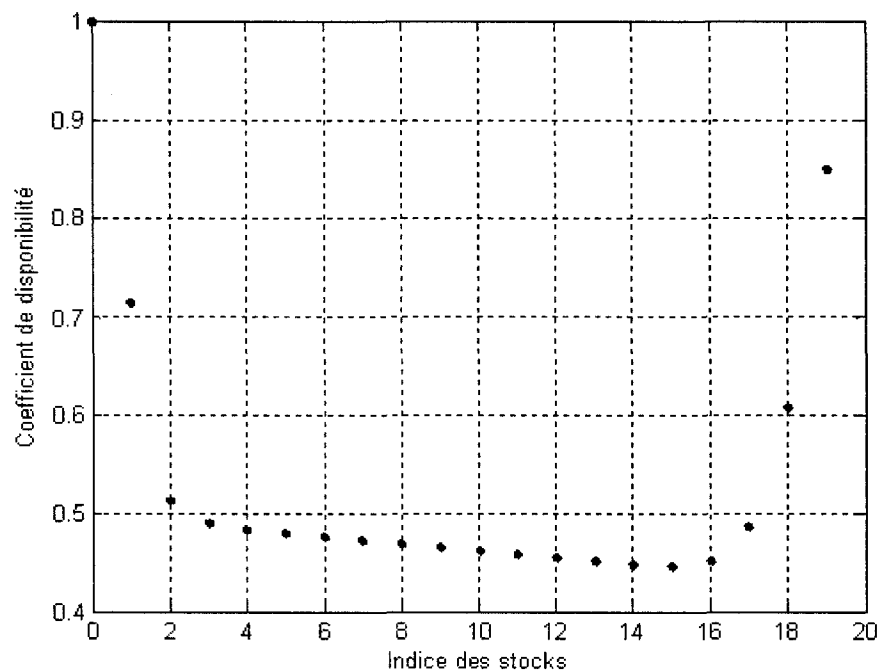


FIGURE 3.9 Profil optimal des coefficients de disponibilité des encours x_{ji} ($j = 1, 2, 3, 4$ et $i = 0, \dots, 19$) pour une ligne partiellement homogène avec les taux de panne diminuant avec l'augmentation de l'indice i

Les résultats obtenus par la programmation dynamique pour les deux cas ci-haut en utilisant notre méthode de décomposition et la politique de production synchronisée sont montrés dans les figures 3.9 et 3.10. Ces figures représentent les coefficients de disponibilité optimaux (a_i , pour $i = 0, \dots, 19$). Un régime transitoire peut être observé dans les deux courbes. Pendant cette période transitoire, la solution optimale est sensible

aux conditions aux deux frontières, gauche (a_0) et droite (a_{n-1}^0). Au centre de la ligne, les coefficients de disponibilité optimaux sont décroissants ou croissants monotones. Lorsque les machines deviennent plus fiables (le taux de panne des machines augmente en allant du début vers la fin de la ligne), les coefficients au centre sont décroissants monotones. Par contre, ils sont croissants monotones lorsque les machines deviennent moins fiables (le taux de panne des machines diminue en allant du début vers la fin de la ligne). Ce comportement est dû au fait qu'une machine fiable n'a pas besoin d'un grand stock pour répondre à la demande tandis qu'une machine moins fiable en a besoin.

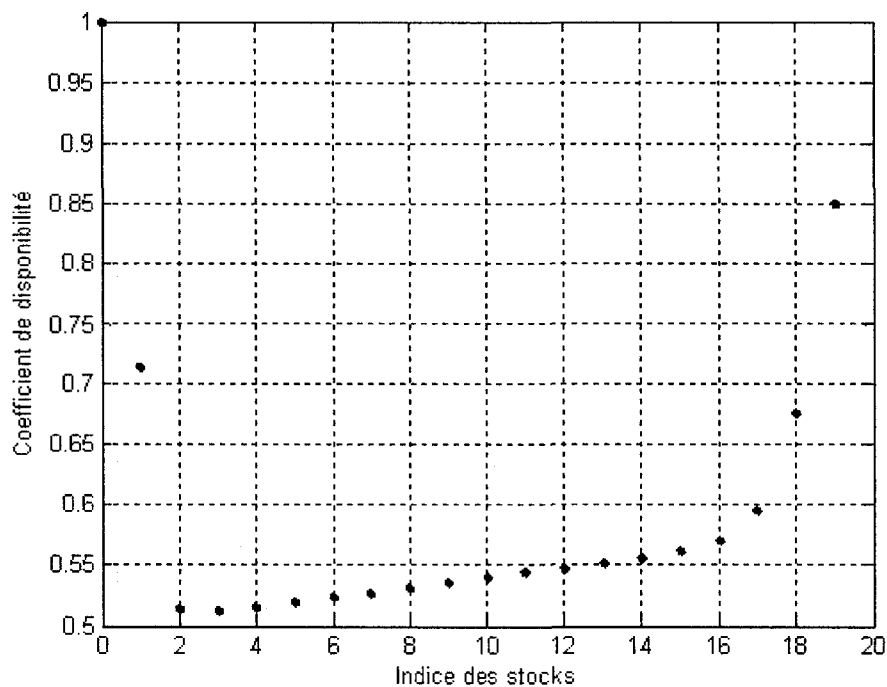


FIGURE 3.10 Profil optimal des coefficients de disponibilité des encours x_{ji} ($j = 1, 2, 3, 4$ et $i = 0, \dots, 19$) pour une ligne partiellement homogène avec les taux de panne augmentant avec l'augmentation de l'indice i

3.8.2 Lignes parfaitement homogènes

Pour la ligne parfaitement homogène, nous montrons (à titre d'exemple) les résultats obtenus pour la ligne suivante. La ligne est composée de 20 machines identiques ayant

chacune un taux de réparation $r = 0.5$ et un taux de panne $p = 0.2$. La ligne produit 4 types de pièces. La demande des pièces est $d = [1.5, 1.25, 1.75, 1]$, les taux de production maximaux de toutes les machines sont identiques pour chaque pièce et sont donnés par les valeurs suivantes : $k_{1i} = 15.5$, $k_{2i} = 16$, $k_{3i} = 16.5$ et $k_{4i} = 15$. Les coûts de stockage sont $c_{ji} = 2$ pour $j = 1, 2, 3, 4$ et $i = 1, \dots, 20$. Nous considérons deux cas, le

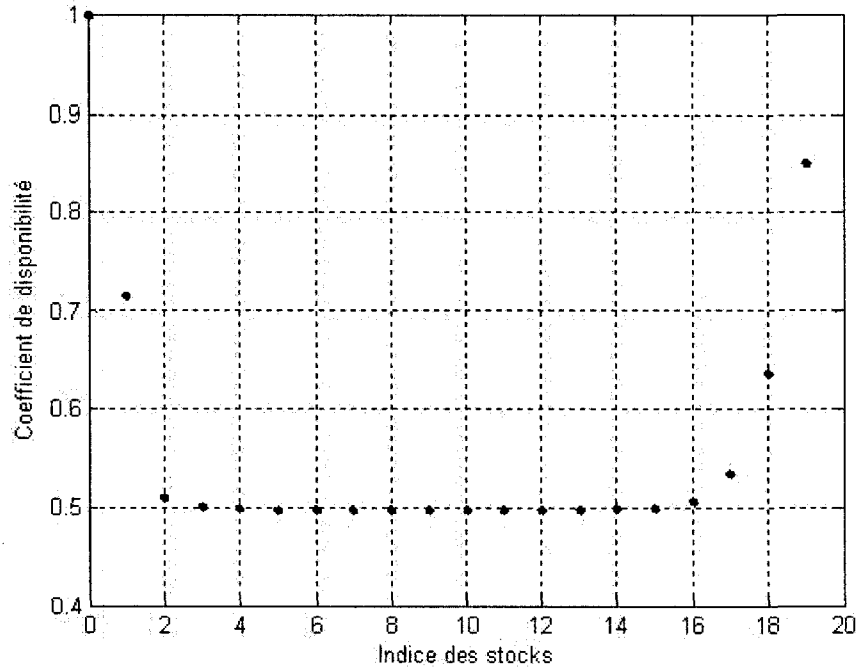


FIGURE 3.11 Profil optimal des coefficients de disponibilité des encours x_{ji} ($j = 1, 2, 3, 4$ et $i = 0, \dots, 19$) pour une ligne homogène avec $a_{19}^0 = 0.85$ et $\bar{a} = 0.4981$ ($a_{19}^0 > \bar{a}$)

premier où la condition de la frontière droite a_{19}^0 est supérieure à $\bar{a}$ (figure 3.11), et le deuxième où $a_{19}^0 < \bar{a}$ (figure 3.12). Comme prévu par la théorie développée dans [35], les figures montrent que suffisamment loin des deux extrêmes (gauche et droite) de la ligne, la valeur optimale des coefficients de disponibilité devient une constante qui n'est autre que $\bar{a}$ le minimiseur de $T(a, a)$. La figure 3.13 montre la fonction coût de transition, $T(a_{i-1}, a_i)$, lorsque $a_{i-1} = a_i = a$ pour les mêmes données de la ligne ci-haut mais seulement pour des valeurs de a commençant de la valeur minimale (0.4867) jusqu'à 0.55 pour montrer la convexité de la fonction. Ensuite, la fonction croît très rapidement

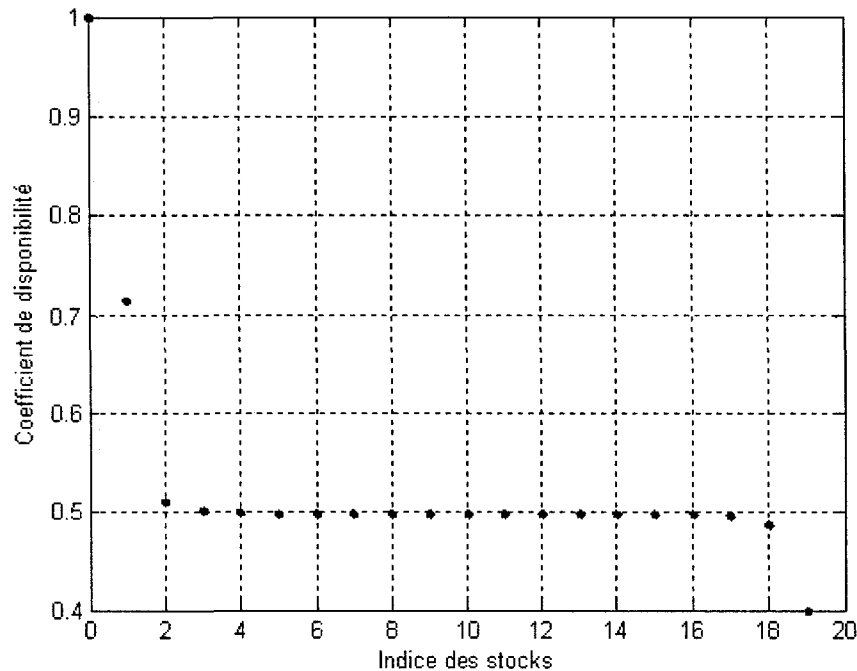


FIGURE 3.12 Profil optimal des coefficients de disponibilité des encours x_{ji} ($j = 1, 2, 3, 4$ et $i = 0, \dots, 19$) pour une ligne homogène avec $a_{19}^0 = 0.4$ et $\bar{a} = 0.4981$ ($a_{19}^0 < \bar{a}$)

avec l'augmentation du coefficient de disponibilité. En général, $\bar{a}$ le minimiseur de cette fonction est extrêmement proche du coefficient minimal permis, a_{min} , qui représente la limite d'ergodicité (la limite en dessous de laquelle la demande ne sera pas satisfaisable). Pour les données ci-haut, $a_{min} = 0.4867$ et $\bar{a} = 0.4981$. Donc, loin des extrémités d'une ligne de transfert homogène, le fonctionnement optimal avec les $(\bar{a})$ représente en quelque sorte une production du type " Juste à temps ". Ainsi, cette production minimise le temps de séjour des encours dans les stocks intermédiaires en favorisant la production maximale quand les machines peuvent produire. Les simulations montrent aussi que si les taux maximaux de production augmentaient tout en gardant les mêmes paramètres de fiabilité dans la ligne, $\bar{a}$ diminuerait. Ceci n'est pas du tout surprenant puisque dans ce cas la ligne satisferait la demande plus facilement ce qui justifie le fait de ne pas avoir besoin de beaucoup de stock, et donc les seuils critiques (et ainsi $\bar{a}$) diminueraient.

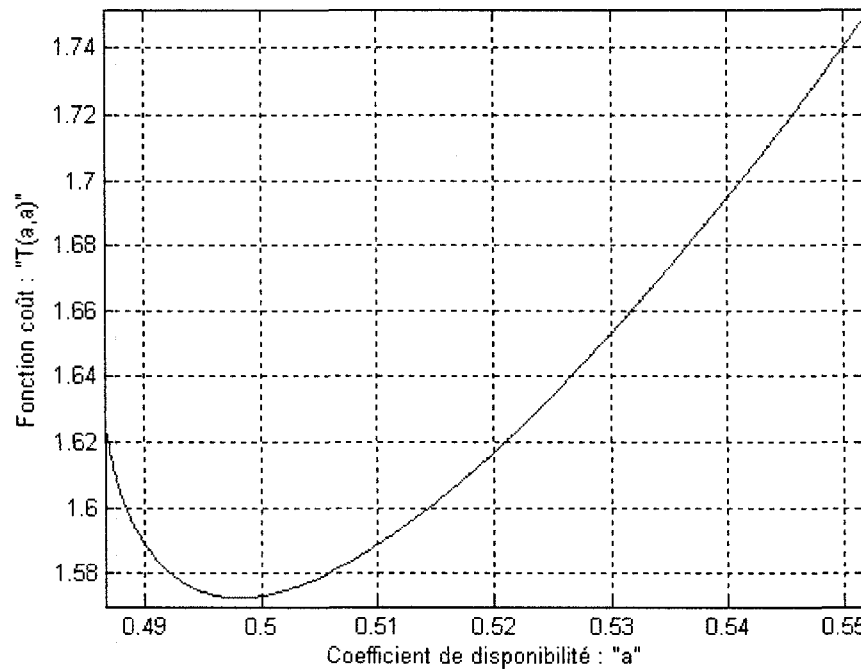


FIGURE 3.13 Fonction coût de transition $T(a_{i-1}, a_i)$ lorsque $a_{i-1} = a_i = a$

3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé une technique d'optimisation des lignes de transfert partiellement homogènes multi-machines produisant différents types de pièces. Cette technique utilise la méthode de décomposition basée sur l'hypothèse de découplage des machines et le principe de moyennage de la demande. Les paramètres à optimiser sont les coefficients de disponibilité de chaque type de pièce dans chaque stock pour un vecteur demande donné et un coefficient de disponibilité d'inventaire minimal. Chacun de ces coefficients est directement lié au seuil critique d'une des pièces dans le stock correspondant (les niveaux de Kanbans). Étant bornés inférieurement et supérieurement, le choix des coefficients de disponibilité comme paramètres d'optimisation rend le calcul de la solution optimale par la programmation dynamique plus aisé. La fonction coût a été choisie de sorte à minimiser à la fois les coûts totaux de stockage de toute la ligne, tout en garantissant un certain niveau de disponibilité d'inventaire pour répondre

à un vecteur donné de demandes des clients malgré la non fiabilité de la ligne.

Grâce à notre politique de production synchronisée des pièces, le problème se réduit à un seul degré de liberté, celui d'un type arbitraire de pièces, ce qui simplifie énormément le modèle mathématique et les calculs du programme d'optimisation associé. Ceci augmente l'efficacité et les chances d'applicabilité de la technique développée. C'est un outil prometteur d'optimisation des lignes de transfert partiellement homogène multi-machines multi-pièces grâce à la précision des résultats ainsi que le temps de calcul assez court même pour les grandes lignes.

Nous avons étudié aussi le cas particulier des lignes parfaitement homogènes où les machines partagent les mêmes taux de panne et de réparation ainsi que les mêmes taux maximaux de production pour chaque type de pièce. Les coefficients optimaux obtenus dans ce cas favorisent une production qui est très proche du " Juste à temps ". Ce mode d'opération est sûrement le plus optimal possible puisqu'il minimise le temps de séjour des encours dans la ligne minimisant par là-même les coûts de stockage. Les résultats numériques obtenus ici concordent bien avec la théorie développée et les résultats de Sadr et Malhamé [35] ce qui rassure quant à l'exactitude de nos résultats numériques.

CHAPITRE 4

OPTIMISATION DES LIGNES DE TRANSFERT NON HOMOGÈNES SOUS POLITIQUE SYNCHRONISÉE

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit la ligne de transfert partiellement homogène ainsi que la méthode de décomposition utilisée pour décomposer la ligne de n machines couplées en une ligne de n machines approximativement isolées. Dans ce chapitre, nous appliquerons la même méthode de décomposition mais cette fois-ci à une ligne de transfert non-homogène sous la politique synchronisée de production.

Nous appelons une ligne de transfert non-homogène multi-machines multi-pièces une ligne constituée de n machines en tandem séparées par des stocks intermédiaires, où chaque machine possède son propre taux moyen de réparation (r_i) et son propre taux moyen de panne (p_i), $i = 1, \dots, n$. Cette ligne produit m différents types de pièces.

Dans le reste de ce chapitre, nous formulerons d'abord le problème ; nous présenterons ensuite le modèle mathématique correspondant au cas non-homogène. La technique de décomposition présentée au chapitre précédent sera alors adaptée au cas présent sous la politique de production synchronisée de pièces. La modélisation rapportée dans cette partie suit Sadr et Malhamé [36]. Finalement, nous utiliserons la programmation dynamique pour optimiser les différents niveaux de Kanbans et présenter quelques exemples des résultats numériques obtenus.

4.2 Formulation du problème

Soit $x_{ji}(t)$ le niveau de la pièce j au stock i à l'instant t , avec $j = 1, \dots, m$ et $i = 1, \dots, n$. La machine M_i , quand elle le peut, produit la pièce j ($j = 1, \dots, m$) à un taux variant de 0 à k_{ji} . L'état de la machine M_i , α_i ($i = 1, \dots, n$), évolue selon une chaîne de Markov à temps continu à deux états avec un taux moyen de panne p_i et un taux moyen de réparation r_i , où $\alpha_i = 1$ représente l'état fonctionnel de la machine et $\alpha_i = 0$ l'état de panne. Le taux instantané de demande pour les produits finis de type j est considéré être une constante d_j ($j = 1, \dots, m$).

Les hypothèses de la section 3.2.1 sont toujours valides ici mais la condition de faisabilité de la demande s'écrit pour le cas non-homogène comme suit. Pour $j = 1, \dots, m$ et $i = 1, \dots, n$:

$$\frac{r_i}{r_i + p_i} k_{ji} > d_j \quad (4.1)$$

La dynamique de l'inventaire $x_{ji}(t)$, $j = 1, \dots, m$ et $i = 1, \dots, n$ s'écrit de la même façon que celle de l'équation 3.2.

À l'instar du chapitre précédent, notre objectif est de développer une technique efficace pour optimiser le niveau de Kanban z_{ji} , $j = 1, \dots, m$ et $i = 1, \dots, n$ ($n \geq 2$), afin de réduire au minimum une mesure convenablement définie du coût moyen à long terme. Tout comme la ligne partiellement homogène, la technique de décomposition, basée sur l'hypothèse de découplage des machines et le principe de moyennage de la demande, sera très utile pour traiter chaque machine séparément en tenant en compte approximativement l'influence du reste de la ligne. La politique de production à considérer est celle de la production synchronisée de pièces (3.7). Le Lemme 3.1 et la proposition 3.2 ainsi que toutes leurs conséquences s'appliquent aussi pour le cas non-homogène.

4.3 Modèle mathématique

Dans la section 3.5 du chapitre 3, nous avons obtenu un modèle à deux états de la machine équivalente $\tilde{M}_i$ ($i = 2, \dots, n$) pour la ligne partiellement homogène. Pour le cas de la ligne non-homogène, le modèle est beaucoup plus compliqué parce que les taux de réparation des machines sont différents. Dans cette section, nous aimerions obtenir un modèle de la machine équivalente qui soit suffisamment précis mais reste simple au niveau de l'application en vue de l'implantation d'un algorithme d'optimisation par la programmation dynamique. L'évolution de l'état de la vraie machine M_i , $\alpha_i(t)$, ($i = 1, \dots, n$) se fait selon une chaîne de Markov à temps continu à deux états avec un taux de panne p_i et un taux de réparation r_i . Quant au processus binaire de disponibilité de l'encours x_{ji} , $I_i(t)$ ($i = 1, \dots, n - 1$)¹, il évolue selon une chaîne de Markov à deux états mais avec des taux différents de ceux de la figure 3.4. Le taux de réparation du stock i , dans le cas non-homogène, doit prendre en considération le vrai taux de réparation de la machine M_i ainsi que tous les taux de réparation en amont de l'étape i . Soient $\tilde{r}_i$ le taux de réparation de la machine (fictive) approximative $\tilde{M}_i$ et p_{s_i} le taux de pénurie du processus approximatif de $I_i(t)$ (le processus de disponibilité de l'encours x_{ji}). La figure 4.1 représente la chaîne de Markov approximative de ce processus. $\tilde{r}_i$ est lié à a_i par la

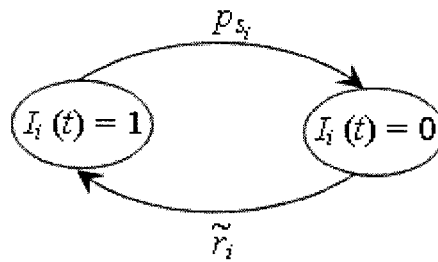


FIGURE 4.1 Le modèle Markovien de l'état de disponibilité de l'encours x_{ji} , $j = 1, \dots, m$ et $i = 1, \dots, n - 1$

¹Notons que la production synchronisée implique que $I_{1i}(t) = I_{2i}(t) = \dots = I_{mi}(t) = I_i(t)$

relation suivante.

$$p_{s_i} = \frac{\tilde{r}_i(1 - a_i)}{a_i} \quad (4.2)$$

Pour la première machine de la ligne, le modèle à considérer est celui de la vraie machine avec son taux de panne et de réparation p_1 et r_1 (respectivement). À partir de $i = 2$ à n , le modèle à considérer est celui de la machine approximativement isolée qui prend en compte le comportement de la machine réelle et l'impact de la disponibilité du stock en amont. Ce modèle est obtenu par le produit cartésien de la chaîne de Markov associée à la disponibilité de l'encours $x_{j,i-1}$, I_{i-1} , et celle associée à la machine M_i . Le produit cartésien donne un modèle à quatre états dont un seul est fonctionnel et les trois autres sont des états de pannes (Fig. 4.2). L'état de panne résultant des pannes simultanées de

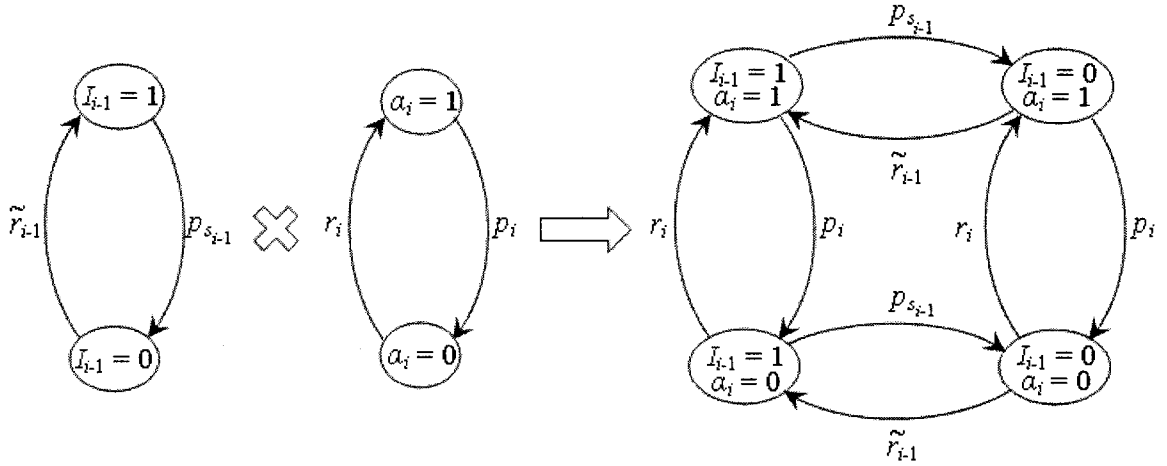


FIGURE 4.2 Le produit cartésien des deux modèles de I_{i-1} et M_i

I_{i-1} et α_i est négligé parce qu'il arrive très rarement en général. Il reste donc trois états dont l'un est fonctionnel et les deux autres sont des états de pannes. Le premier état de panne (*Panne1*) représente la machine M_i en mode opérationnel ($\alpha_i = 1$) et le processus de la disponibilité de l'encours $x_{j,i-1}$ en pénurie ($I_{i-1} = 0$). Ces deux événements étant supposés indépendants par la technique de décomposition, la probabilité de cet état de

panne est donnée par l'équation suivante.

$$P[\text{Panne1}] = \frac{r_i}{r_i + p_i} (1 - a_{i-1}) \quad (4.3)$$

À partir de cet état de panne, le système retourne à l'état opérationnel avec un taux $\tilde{r}_{i-1}$.

Quant au deuxième état de panne (*Panne2*), il représente la machine M_i en panne ($\alpha_i = 0$) et le processus de la disponibilité de l'encours $x_{j,i-1}$ disponible ($I_{i-1} = 1$). Ces deux événements étant supposés indépendants par la technique de décomposition, la probabilité de cet état de panne est donnée par l'équation suivante.

$$P[\text{Panne2}] = \frac{p_i}{r_i + p_i} a_{i-1} \quad (4.4)$$

À partir de cet état de panne, le système retourne à l'état opérationnel avec le taux r_i . Étant donné que le système est en mode de panne (*Panne1* ou *Panne2*), les équations 4.5 et 4.6 donnent respectivement la probabilité que la source de panne soit *Panne1* (respectivement *Panne2*).

$$\begin{aligned} P[\text{Panne1}|\text{Panne}] &= \frac{\frac{r_i}{r_i + p_i} (1 - a_{i-1})}{\frac{r_i}{r_i + p_i} (1 - a_{i-1}) + \frac{p_i}{r_i + p_i} a_{i-1}} \\ &= \frac{r_i (1 - a_{i-1})}{r_i (1 - a_{i-1}) + p_i a_{i-1}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} P[\text{Panne2}|\text{Panne}] &= \frac{\frac{p_i}{r_i + p_i} a_{i-1}}{\frac{r_i}{r_i + p_i} (1 - a_{i-1}) + \frac{p_i}{r_i + p_i} a_{i-1}} \\ &= \frac{p_i a_{i-1}}{r_i (1 - a_{i-1}) + p_i a_{i-1}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Si l'on veut agréger les deux états de panne ensemble, pour minimiser l'impact de la perte d'information, le taux de réparation $\tilde{r}_i$ de la machine $\tilde{M}_i$ doit être calculé par l'espérance conditionnelle de ce taux sachant que l'on est en état de panne. Cette espérance

conditionnelle est donnée par $E[\text{taux de réparation}|Panne1] P[Panne1|Panne] + E[\text{taux de réparation}|Panne2] P[Panne2|Panne]$. Compte tenu de (4.5) et (4.6), nous obtenons l'équation suivante pour $i = 2, \dots, n$.

$$\tilde{r}_i = \frac{r_i(1 - a_{i-1})}{r_i(1 - a_{i-1}) + p_i a_{i-1}} \tilde{r}_{i-1} + \frac{p_i a_{i-1}}{r_i(1 - a_{i-1}) + p_i a_{i-1}} r_i \quad (4.7)$$

De plus, nous imposons que la probabilité stationnaire de l'état opérationnel de la machine équivalente ($\tilde{r}_i/(\tilde{r}_i + \tilde{p}_i)$) soit égale à la probabilité des états opérationnels du processus de la disponibilité d'encours I_{i-1} et de la machine M_i simultanément, donnant une probabilité de $(\tilde{r}_{i-1}/(p_{s_{i-1}} + \tilde{r}_{i-1})) \cdot (r_i/(r_i + p_i))$, avec $(r_i/(r_i + p_i))$ la probabilité exacte de l'état opérationnel de la machine M_i . Le résultat nous donne une expression pour $\tilde{p}_i$.

$$\tilde{p}_i = \left[\frac{r_i + p_i}{r_i a_{i-1}} - 1 \right] \tilde{r}_i \quad (4.8)$$

Par conséquent, le modèle de la machine équivalente est une chaîne de Markov évoluant avec un taux de panne $\tilde{p}_i$ et de réparation $\tilde{r}_i$ (Fig. 4.3). Selon le principe de moyennage

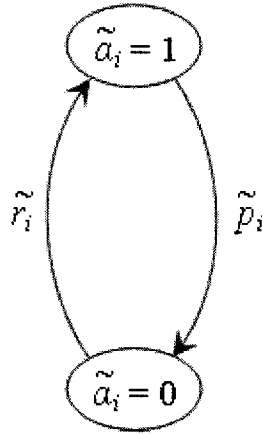


FIGURE 4.3 Modèle équivalent simplifié à deux états de $\tilde{M}_i$

de la demande, a_i ($i = 1, \dots, n - 1$) est calculé par la formule tirée de Hu [18], considérant que la machine approximative séparée $\tilde{M}_i$ est soumise à une demande d_j/a_i de pièces du

type j .

$$a_i = 1 - \frac{\tilde{p}_i}{\tilde{r}_i + \tilde{p}_i} \left[\frac{1 - \rho_i}{1 - \rho_i e^{-\mu_{ji}(1-\rho_i)z_{ji}}} \right] \quad (4.9)$$

avec :

$$\mu_{ji} = \frac{\tilde{p}_i}{\bar{k}_{ji} - \frac{d_j}{a_i}} \quad (4.10)$$

$$\rho_i = \frac{\tilde{r}_i(\bar{k}_{ji} - \frac{d_j}{a_i})}{\tilde{p}_i \frac{d_j}{a_i}} \quad (4.11)$$

La solution de (4.9) pour z_{ji} avec l'usage de (4.10) et (4.11) donne, pour $j = 1, \dots, m$ et $i = 1, \dots, n - 1$:

$$z_{ji} = \frac{1}{\lambda_{ji}} \ln \gamma_i \quad (4.12)$$

avec :

$$\lambda_{ji} = -\mu_{ji}(1 - \rho_{ji}) \quad (4.13)$$

$$\gamma_i = \frac{\tilde{p}_i [\tilde{r}_i \bar{k}_{ji} - d_j(\tilde{r}_i + \tilde{p}_i)]}{\tilde{r}_i(\tilde{r}_i + \tilde{p}_i)(1 - a_i)(\bar{k}_{ji} - \frac{d_j}{a_i})} \quad (4.14)$$

Il est à noter que $\mu_{ji}/\mu_{li} = \lambda_{ji}/\lambda_{li} = d_l/d_j$. Cette remarque est d'une importance cruciale parce qu'elle garantit que les seuils critiques de (4.12) respectent la condition de la production synchronisée de pièces (3.7). Selon Hu [18] et en utilisant (4.12) avec (4.13) et (4.14), on obtient l'expression du coût de stockage pour $\tilde{M}_i$, pour $j = 1, \dots, m$ et $i = 1, \dots, n - 1$.

$$T_{ji}(\tilde{r}_i, \tilde{p}_i, a_i) = \frac{c_{ji}\rho_i}{(\tilde{r}_i + \tilde{p}_i)(1 - \rho_i\gamma_i)} \left[\bar{k}_{ji} \frac{1 - \gamma_i}{1 - \rho_i} - \frac{\gamma_i}{\lambda_{ji}} (\tilde{r}_i + \tilde{p}_i) \ln \gamma_i \right] \quad (4.15)$$

où c_{ji} est le coût de stockage par unité de temps et de produit de la pièce j dans le dernier stock i .

Quant à la dernière machine qui peut admettre un stock négatif pour toutes les pièces (x_{jn}

$< z_{jn} \forall j = 1, \dots, m$), Bielecki et Kumar [4] ont optimisé ses coûts totaux de stockage et de pénurie considérant que la machine est séparée et produit un seul type de pièce. Dans notre cas, la machine équivalente à la dernière est considérée approximativement séparée avec des taux respectifs de panne et de réparation $\tilde{p}_n$ et $\tilde{r}_n$. Elle est soumise à une demande d_j des pièces de type j ($j = 1, \dots, m$). Contrairement aux $n-1$ premiers stocks en aval des $n-1$ premières machines de la ligne, il n'existe pas de coefficient de disponibilité pour les quantités des produits finis (x_{jn}) parce qu'elles ne sont pas bornées inférieurement. Définissons la variable $\bar{z}_n$ comme suit : $\bar{z}_n = z_{jn}/d_j \forall j = 1, \dots, m$; notons, vu (3.7), que cette fraction est une constante peu importe la valeur de j . Le coût total de stockage et de pénurie de la pièce j dans le dernier stock est donné par l'équation (4.16). Ce coût est la fonction à optimiser dans [4].

$$T_{jn}(\tilde{r}_n, \tilde{p}_n, \bar{z}_n) = c_{jn}^+ d_j \bar{z}_n + \frac{\tilde{p}_n \bar{k}_{jn}}{\sigma_{jn}(\tilde{r}_n + \tilde{p}_n)(\bar{k}_{jn} - d_j)} \left[(c_{jn}^+ + c_{jn}^-) e^{-\sigma_{jn} d_j \bar{z}_n} - c_{jn}^+ \right] \quad (4.16)$$

avec :

$$\sigma_{jn} = \frac{\tilde{r}_n(\bar{k}_{jn} - d_j) - \tilde{p}_n d_j}{d_j(\bar{k}_{jn} - d_j)} \quad (4.17)$$

où c_{jn}^+ (respectivement c_{jn}^-) est le coût de stockage (respectivement de pénurie) par unité de temps et de produit de la pièce j dans le dernier stock². Bielecki et Kumar [4] ont optimisé ce coût pour une pièce unique dans le sens où ils ont trouvé le seuil critique optimal minimisant ce coût. Pour le cas multi-pièces, nous devons optimiser le coût total de stockage et de pénurie de toutes les pièces pour le dernier stock. Ce dernier est donné par l'équation suivante.

$$T_F(\tilde{r}_n, \tilde{p}_n, \bar{z}_n) = \sum_{j=1}^m T_{jn}(\tilde{r}_n, \tilde{p}_n, \bar{z}_n) \quad (4.18)$$

Dans ce cas, la variable à optimiser est $\bar{z}_n$ qui est une mesure de tous les seuils de toutes

²Il est à noter que la condition d'ergodicité exige que σ_{jn} soit positif pour tout $j = 1, \dots, m$; sinon la demande d_j ne sera pas satisfaisable par la machine $\tilde{M}_n$.

les pièces dans le stock de produits finis. Si $\partial T_F(\tilde{r}_n, \tilde{p}_n, \bar{z}_n)/\partial \bar{z}_n > 0$ à $\bar{z}_n = 0$, la valeur optimale de $\bar{z}_n$ sera égale à zéro ; sinon, il faudra trouver la valeur positive³ de $\bar{z}_n$ pour laquelle $\partial T_F(\tilde{r}_n, \tilde{p}_n, \bar{z}_n)/\partial \bar{z}_n = 0$ et $\partial^2 T_F(\tilde{r}_n, \tilde{p}_n, \bar{z}_n)/\partial \bar{z}_n^2 > 0$. Soit β définit comme suit.

$$\beta = \frac{(\tilde{r}_n + \tilde{p}_n)(\bar{k}_{1n} - d_1) \sum_{j=1}^m c_{jn}^+ d_j}{\tilde{p}_n \bar{k}_{1n} \sum_{j=1}^m (c_{jn}^+ + c_{jn}^-) d_j} \quad (4.19)$$

Par l'analyse ci-haut, la valeur optimale de $\bar{z}_n$ qui minimise (4.18) est donnée par l'équation suivante.

$$\bar{z}_n^* = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta \geq 1 \\ \frac{1}{\sigma_{1n} d_1} \ln\left(\frac{1}{\beta}\right) & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.20)$$

Par conséquent, le coût optimisant la dernière machine séparément est obtenu en remplaçant une des valeurs du $\bar{z}_n^*$ de (4.20) dans (4.18) selon la valeur de β . Ce coût est une fonction de $\tilde{r}_n$ et $\tilde{p}_n$ qui sont des fonctions de a_{n-1} ((4.7) et (4.8)) et donc il est à prendre en considération pour la programmation dynamique.

4.4 Vérification de la performance du modèle

Afin d'évaluer le degré d'exactitude du modèle présenté dans la section précédente, nous allons comparer l'estimation des coefficients de disponibilité et des coûts moyens obtenus analytiquement par les équations du modèle avec les coefficients de disponibilité et les coûts moyens obtenus par la simulation de Monte-Carlo pour un choix donné de seuils critiques. Cette démarche a été employée sur de nombreuses données, nous allons montrer à titre d'exemple trois différentes lignes de transfert non homogènes, puis comparer les résultats de l'évaluation analytique avec ceux de la simulation. Pour les trois lignes, nous avons fixé le nombre de machines à 3 ($n = 3$), le nombre de pièces à 3 ($m = 3$). Le vecteur de la demande pour les trois pièces est donnée par $d = [1 \ 1.2 \ 0.9]$,

³Une valeur négative de $\bar{z}_n$ ne sera jamais optimale. Voir [4] pour plus de détails.

les coûts unitaires de stockage donnés par $c_{ji} = 2$ pour $j = 1, 2, 3$ et $i = 1, 2$, les coûts unitaires de stockage dans le dernier stock donnés par $c_{j3}^+ = 2$ pour $j = 1, 2, 3$ et les coûts unitaires de pénurie des trois pièces dans le dernier stock donnés par $c_{j3}^- = 10$ pour $j = 1, 2, 3$. Le reste des données sont différentes d'une ligne à l'autre. Les tableaux 4.1, 4.2 et 4.3 donnent ces données pour les trois lignes.

TABLEAU 4.1 Données de la première ligne

	p_i			r_i					
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$			
	0.1	0.08	0.15	0.5	0.45	0.6			
	k_{ji}			$\bar{k}_{ji}$			z_{ji}		
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$j = 1$	9	8.7	8.5	3	2.9	2.8	5	3	7
$j = 2$	11	10.5	10	3.6	3.48	3.36	6	3.6	8.4
$j = 3$	7.95536	7.78551	7.53165	2.7	2.61	2.52	4.5	2.7	6.3

TABLEAU 4.2 Données de la deuxième ligne

	p_i			r_i					
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$			
	0.05	0.07	0.075	0.45	0.55	0.5			
	k_{ji}			$\bar{k}_{ji}$			z_{ji}		
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$j = 1$	7.5	8	8.5	2.55582	2.36149	2.21111	2	2.72727	6
$j = 2$	8.7	7.5	6.5	3.06698	2.83379	2.65333	2.4	3.27273	7.2
$j = 3$	7.5	6.5	6	2.30024	2.12534	1.98999	1.8	2.45455	5.4

TABLEAU 4.3 Données de la troisième ligne

	p_i			r_i					
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$			
	0.2	0.15	0.1	0.6	0.45	0.4			
	k_{ji}			$\bar{k}_{ji}$			z_{ji}		
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$j = 1$	9	8.7	8.5	3	2.9	2.8	3	5	7
$j = 2$	11	10.5	10	3.6	3.48	3.36	3.6	6	8.4
$j = 3$	7.95536	7.78551	7.53165	2.7	2.61	2.52	2.5	4.5	6.3

Soit T_{ji} le coût de stockage et de pénurie (uniquement pour la dernière machine) de la pièce j dans le stock i . Les tableaux 4.4, 4.5 et 4.6 montrent les résultats de la compari-

son entre l'évaluation analytique basée sur les équations du modèle et la simulation de Monte-Carlo pour les trois lignes.

TABLEAU 4.4 Résultats de la comparaison pour la première ligne

	Évaluation analytique	Simulation de M-C	% erreur relative
a_1	0.97746	0.98334	0.60156
a_2	0.94462	0.95198	0.77915
T_{11}	8.92264	9.08562	1.82659
T_{12}	5.0667	5.26467	3.90728
T_{13}	12.98763	12.77558	1.63271
T_{21}	10.70717	10.90274	1.82653
T_{22}	6.08005	6.3176	3.90704
T_{23}	15.58516	15.3307	1.63271
T_{31}	8.03038	8.17705	1.82644
T_{32}	4.56003	4.7382	3.90721
T_{33}	11.68887	11.49803	1.63266
T_{tot}	83.62864	84.09018	0.55189

TABLEAU 4.5 Résultats de la comparaison pour la deuxième ligne

	Évaluation analytique	Simulation de M-C	% erreur relative
a_1	0.95757	0.95681	0.07937
a_2	0.95099	0.95809	0.74659
T_{11}	3.42594	3.66022	6.83842
T_{12}	4.62328	4.79405	3.6937
T_{13}	1.15747	11.24531	0.78728
T_{21}	4.11113	4.39226	6.83827
T_{22}	5.54794	5.75286	3.69362
T_{23}	13.38897	13.49437	0.78722
T_{31}	3.08335	3.2942	6.83834
T_{32}	4.16095	4.31465	3.69387
T_{33}	10.04172	10.12078	0.78732
T_{tot}	59.54076	61.0687	2.56621

Ces résultats montrent une très bonne précision des estimés des coefficients de disponibilité et des coûts moyens de stockage et de pénurie. L'erreur maximal des coûts moyens totaux de l'évaluation analytique par rapport aux coûts moyens totaux de la simulation

TABLEAU 4.6 Résultats de la comparaison pour la troisième ligne

	Évaluation analytique	Simulation de M-C	% erreur relative
a_1	0.93627	0.94692	1.13749
a_2	0.92741	0.95931	3.43969
T_{11}	4.92741	4.97534	0.97272
T_{12}	8.29786	8.18703	1.33565
T_{13}	12.98128	13.04667	0.50373
T_{21}	5.9129	5.97041	0.97262
T_{22}	9.95743	9.82443	1.33569
T_{23}	15.57754	15.656	0.50367
T_{31}	4.43467	4.47781	0.97279
T_{32}	7.46808	7.36833	1.33568
T_{33}	11.68315	11.742	0.50372
T_{tot}	81.24034	81.24801	0.00944

de Monte-Carlo est de l'ordre de 2.5%. Par ailleurs, beaucoup d'autres comparaisons ont été faites et ont approuvé la précision des estimations du modèle. Par contre, uniquement dans les cas peu fréquents où les données de la ligne imposent un fonctionnement qui se rapproche de la limite de l'ergodicité (limite de capacité à répondre à la demande), les estimations analytiques du modèle diffèrent plus ou moins de la simulation à cause de l'instabilité de la simulation due particulièrement à la grande variance des niveaux de stockage de la dernière machine (de moins l'infini jusqu'aux seuils critiques), du bruit inhérent à la simulation de Monte-Carlo et des approximations du modèle (découplage des machines, moyennage de la demande, aggrégation de l'état et la distribution exponentielle attribuée aux temps de disponibilité des encours). Vu les différentes sources d'aléas du système, les coûts obtenus de la simulation doivent être des coûts moyens. Pour ce faire, nous avons défini des cycles pour chaque pièce dans chaque stock. Ces cycles commencent quand le niveau de l'inventaire est à son seuil critique correspondant, et y demeure jusqu'au moment d'une panne de machine ou d'une pénurie de stock, à partir duquel le niveau d'inventaire varie pour une certaine période de temps avant de revenir de nouveau au seuil critique. Le moment de retour au seuil représente la fin du

cycle actuel et le début d'un nouveau cycle. Le coût moyen par cycle est donc le rapport du coût total du cycle sur le temps du cycle. Ce coût moyen par cycle varie d'un cycle à l'autre selon les événements critiques le gérant. Donc, pour avoir une meilleure estimation du coût moyen, la somme de tous les coûts moyens par cycle pour une pièce donnée dans un stock quelconque doit être moyennée sur l'ensemble des cycles. Quant aux critères d'arrêt de la simulation, nous exigeons que l'écart-type de ce coût moyen par cycle moyenné sur l'ensemble des cycles soit inférieur à 0.01 pour toutes les pièces dans tous les stocks, qu'il y ait eu au moins 10000 cycles pour chacune des pièces dans chaque stock, que l'erreur relative du coût entre deux itérations successives soit inférieure à 10^{-9} et qu'au moins 200000 itérations aient été complétées.

4.5 Problème d'optimisation par la programmation dynamique

Dans la section précédente, nous avons développé un modèle approximatif simplifié à deux états pour la machine équivalente $\tilde{M}_i$ pour $i = 1, \dots, n$ (avec $\tilde{M}_1 = M_1$ et donc $\tilde{r}_1 = r_1$ et $\tilde{p}_1 = p_1$). L'espace d'état à chaque étape est bidimensionnel $(\tilde{r}_i, \tilde{p}_i)$ et un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. La variable de décision, pour $i = 1, \dots, n - 1$, est le coefficient de disponibilité a_i qui est bornée inférieurement aussi bien que supérieurement ; tandis que pour la dernière étape du problème, la variable de décision est $\bar{z}_n$ qui est bornée uniquement inférieurement. À ce stade, il est clair que le problème est divisé en deux sous-problèmes de deux natures différentes, le premier concerne les étapes de 1 à $n - 1$ et le deuxième concerne la dernière étape n . Nous résolvons donc chaque sous-problème de façon séparée. La solution optimale du deuxième sous-problème a été déjà donnée dans la section précédente par (4.20). Cette solution entre en jeu pour la détermination de la solution du premier sous-problème puisque $\bar{z}_n^*$ est fonction de $\tilde{r}_n$ et $\tilde{p}_n$ qui sont elles-mêmes des fonctions de a_{n-1} .

Le problème d'optimisation des zones de stockage d'une ligne de transfert multi-

machines multi-pièces par la programmation dynamique est donc formulé de la façon suivante.

Soit une ligne de transfert non-homogène multi-machines produisant m types de pièces, soumise à une demande constante de taux d_j des pièces de type j ($j = 1, \dots, m$) réalisable par chaque machine séparée. Notre objectif est de déterminer une séquence optimale des coefficients de disponibilité des encours (a_i pour $i = 1, \dots, n - 1$), si elle existe, qui permettrait d'atteindre la borne inférieure du coût total de stockage et de retard de livraison :

$$J^* = \inf_{a_i \in A_i(\tilde{r}_{i+1}, \tilde{p}_{i+1})_{i=1, \dots, n-1}} \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^{n-1} T_{jl}(\tilde{r}_l, \tilde{p}_l, a_l) + T_F^*(\tilde{r}_n, \tilde{p}_n, \bar{z}_n) \right\} \quad (4.21)$$

avec $T_{jl}(\tilde{r}_l, \tilde{p}_l, a_l)$ donné par (4.15) et $T_F^*(\tilde{r}_n, \tilde{p}_n, \bar{z}_n)$ donné par (4.18) mais remplaçant $\bar{z}_n$ par une des valeurs de $\bar{z}_n^*$ de (4.20) selon la valeur de β . $A_i(\tilde{r}_{i+1}, \tilde{p}_{i+1})$, pour $i = 1, \dots, n - 1$, sont les ensembles des coefficients de disponibilité (a_i) admissibles. Deux contraintes principales déterminent $A_i(\tilde{r}_{i+1}, \tilde{p}_{i+1})$. Puisque a_i sont des coefficients de disponibilité, alors $0 < a_i < 1$. En plus, pour que la demande d_j soit réalisable par la machine $\tilde{M}_i$, il faut que :

$$\frac{\tilde{r}_{i+1}}{(\tilde{r}_{i+1} + \tilde{p}_{i+1})} \bar{k}_{j,i+1} > d_j \quad (4.22)$$

avec $\tilde{r}_{i+1}$ et $\tilde{p}_{i+1}$ sont données respectivement par (4.7) et (4.8) mais avec l'indice $i + 1$ à la place de i .

4.6 Solution du problème de la programmation dynamique

Dans cette section, nous présentons la solution du problème de la programmation dynamique présenté dans la section précédente. En principe, trois algorithmes améliorés graduellement sont proposés.

4.6.1 Algorithme de discrétisation exacte de l'espace d'état

Cet algorithme se compose principalement de deux phases : la phase de la génération de l'espace d'état et la phase de l'optimisation par la programmation dynamique. La première phase consiste d'abord à discrétiser la variable de décision a_i , pour $i = 1, \dots, n - 1$, avec un certain pas de discrétisation. Chaque a_i est discrétisé de sa borne inférieure définie par la condition d'ergodicité jusqu'à sa borne supérieure qui est à la limite égale à 1. Cette discrétisation permet la génération de l'espace d'état $[\tilde{r}_i, \tilde{p}_i]^T$ par les équations (4.7) et (4.8) (pour $i = 2, \dots, n$) avec l'espace d'état à la première étape $\tilde{r}_1 = r_1$ et $\tilde{p}_1 = p_1$. Une fois les espaces de décision et d'état générés, vient la phase de l'optimisation par la programmation dynamique de droite à gauche (de $i = n$ jusqu'à 1) pour trouver la trajectoire optimale des coefficients de disponibilité, a_i ($i = 1, \dots, n - 1$). Le coût à utiliser pour la dernière étape ($i = n$, qui est la première étape de la programmation dynamique) est celui donné par (4.18) mais avec $\bar{z}_n^*$ de (4.20). Après avoir trouvé une trajectoire optimale des coefficients de disponibilité, a_i^* , par la programmation dynamique, il suffit de remplacer a_i par a_i^* dans (4.12), (4.13) et (4.14) pour obtenir les seuils critiques optimaux z_{ji}^* pour $j = 1, \dots, m$ et $i = 1, \dots, n - 1$.

Cet algorithme coûte très cher en termes de mémoire utilisée et de temps de calcul puisqu'il génère un espace d'état discrétisé exact. En fait, l'espace d'état augmente exponentiellement en allant de $i = 1$ jusqu'à n . Il est aussi à noter que plus le pas de discrétisation est précis (un pas de discrétisation de plus en plus petit), plus la solution obtenue sera précise mais la mémoire à utiliser sera plus grande et le programme sera plus lent.

L'idée de base de l'algorithme de discrétisation exacte de l'espace d'état se résume donc comme suit.

1. Génération de l'espace d'état : Pour $i = 2$ à n :
 - 1.1. Discrétiser a_{i-1} de sa borne inférieure jusqu'à la limite de 1.
 - 1.2. Pour chaque valeur discrétisée de a_{i-1} , générer l'espace d'état $[\tilde{r}_i, \tilde{p}_i]^T$ à partir

des équations (4.7) et (4.8).

- 1.3. Enregistrer les valeurs de a_{i-1} , $\tilde{r}_i$ et $\tilde{p}_i$.
2. Optimisation par la programmation dynamique⁴ :
 - 2.1. Pour tous les états générés à la dernière étape, calculer le coût par (4.18) avec $\bar{z}_n = \bar{z}_n^*$ et l'enregistrer pour chaque paire $[\tilde{r}_n, \tilde{p}_n]^T$.
 - 2.2. Pour $i = n - 1$ jusqu'à 1 :

Pour chaque paire $[\tilde{r}_i, \tilde{p}_i]^T$:

 - 2.2.1. Calculer le coût de transition par (4.15).
 - 2.2.2. Ajouter ce coût à chaque coût des états successeurs ($i + 1$).
 - 2.2.3. Choisir l'état successeur $[\tilde{r}_{i+1}, \tilde{p}_{i+1}]^T$ qui donne le coût optimal de l'étape i à n .
 - 2.2.4. Enregistrer ce successeur et le a_i correspondant.
 - 2.3. Trouver les coefficients de disponibilité optimaux (a_i) qui minimisent le coût total de la ligne de transfert.

4.6.2 Algorithme de discrétisation de l'espace d'état avec abscisse réduite

Cet algorithme est basé sur l'observation, de (4.7) et (4.8), que l'état bidimensionnel à l'étape i dépend uniquement de $\tilde{r}_{i-1}$ et a_{i-1} , mais *pas directement* de $\tilde{p}_{i-1}$. Un moyen de générer une approximation de *taille fixe*, disons N^2 , de l'espace d'état à chaque étape de $i = 3$ à n est de commencer avec r_1 et discrétiser a_1 en N valeurs équidistantes de sa borne inférieure jusqu'à sa borne supérieure, pour générer N valeurs possibles de l'état bidimensionnel $[\tilde{r}_2, \tilde{p}_2]^T$ à l'étape 2 en utilisant (4.7) et (4.8). Les N valeurs possibles de $\tilde{r}_2$ avec N valeurs discrétisées de a_2 génèrent N^2 états bidimensionnels $[\tilde{r}_3, \tilde{p}_3]^T$ à l'étape 3. Ensuite, nous divisons l'abscisse $\tilde{r}_3$ en N intervalles équidistants et retenons uniquement N valeurs de $\tilde{r}_3$ parmi les N^2 valeurs générées pour représenter ces N intervalles

⁴Nous suggérons Bertsekas [3] pour plus de détails sur la programmation dynamique comme un outil d'optimisation.

(une seule valeur retenue de $\tilde{r}_3$ par intervalle). Les N états *représentant* $\tilde{r}_3$ sont choisis selon les abscisses les plus proches possibles des milieux des intervalles pour mieux les représenter. Par exemple, s'il y a 5 valeurs générées de $\tilde{r}_3$ dans l'intervalle i ($i = 1, \dots, N$), nous conserverons uniquement parmi ces 5 valeurs celle qui a l'abscisse ($\tilde{r}_3$) la plus proche possible du milieu de cet intervalle ; et de même pour chacun des intervalles restants. Les N états retenus à l'étape 3 avec N valeurs discrétisées de a_3 , à leur tour, généreront N^2 états bidimensionnels $[\tilde{r}_4, \tilde{p}_4]^T$ à l'étape 4. La même procédure est répétée jusqu'à la génération d'un espace d'état de taille N^2 pour chaque étape de 3 à n . Avec l'espace d'état et de décision générés, une solution optimale du problème pourrait être trouvée par la programmation dynamique. La Fig. 4.4 montre l'espace d'état à l'étape 2 généré à partir de r_1 et trois ($N = 3$) valeurs discrétisées de a_1 (a_1^1, a_1^2 et a_1^3). L'espace d'état de l'étape 3 est montré dans la Fig. 4.5. Cet espace, qui est généré à partir des trois valeurs de $\tilde{r}_2$ et trois valeurs discrétisées de a_2 (a_2^1, a_2^2 et a_2^3), contient neuf valeurs ($N^2 = 9$) dont on retient uniquement trois pour générer l'espace d'état de l'étape 4.

Cet algorithme permet d'obtenir un espace d'état de taille fixe (N^2 valeurs) pour les étapes de 3 à n et donc la précision de la solution obtenue sera la même pour ces étapes. Pour la première étape, l'espace d'état contient une seule valeur (r_1, p_1) tandis que celui de la deuxième étape contient N valeurs possibles. L'algorithme est plus rapide que le premier algorithme et utilise moins de mémoire mais des améliorations peuvent toujours être apportées tant au niveau de la vitesse de calcul que de la précision de la solution obtenue.

Les démarches principales de l'*algorithme de la discrétisation de l'espace d'état avec abscisse réduite* peuvent se résumer comme suit.

1. Génération de l'espace d'état :

- 1.1. Discrétiser a_1 en N valeurs, de sa borne inférieure jusqu'à la limite de 1, pour générer l'espace d'état à l'étape 2 contenant N valeurs de $[\tilde{r}_2, \tilde{p}_2]^T$ en utilisant (4.7) et (4.8).

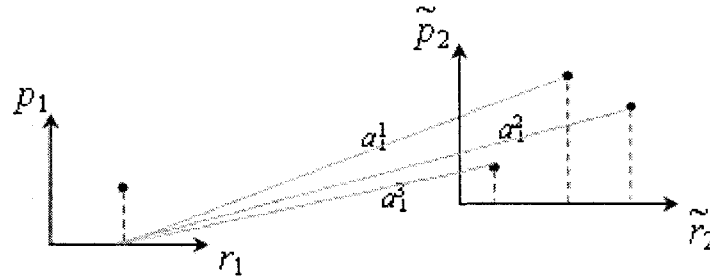


FIGURE 4.4 Génération de l'espace d'état à l'étape 2 à partir de r_1 et les valeurs discrétisées de a_1 , pour $N = 3$

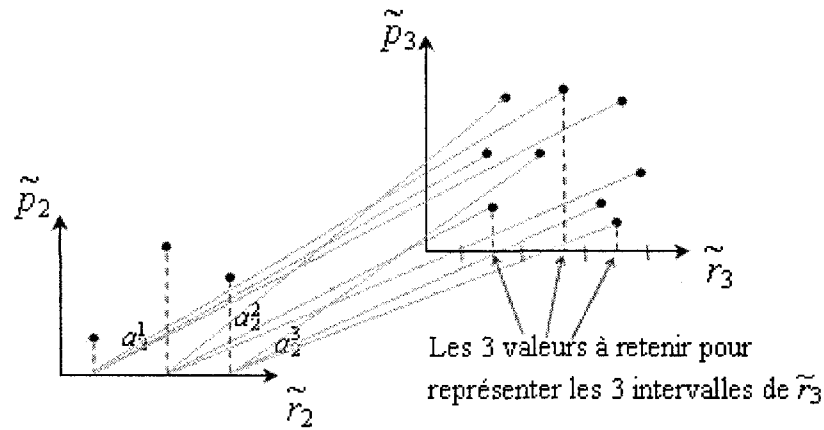


FIGURE 4.5 Génération de l'espace d'état à l'étape 3 à partir de $\tilde{r}_2$ et les valeurs discrétisées de a_2 , pour $N = 3$

- 1.2. Générer un espace d'état à l'étape 3 de taille N^2 à partir des N valeurs de $\tilde{r}_2$ avec N valeurs discrétisées de a_2 .
- 1.3. Pour $i = 3$ à $n - 1$:
 - 1.3.1. Enregistrer l'espace d'état de $[\tilde{r}_i, \tilde{p}_i]^T$ de taille N^2 .
 - 1.3.2. Diviser l'abscisse ($\tilde{r}_i$) en N intervalles entre sa valeur minimale et maximale.
 - 1.3.3. Pour chacun des intervalles, retenir une seule valeur de ($\tilde{r}_i$) représentant l'intervalle.
 - 1.3.4. Générer un espace d'état à l'étape $i + 1$ de taille N^2 à partir des N valeurs retenues de $\tilde{r}_i$ avec N valeurs discrétisées de a_i .
2. Optimisation par la programmation dynamique :
 - 2.1. Pour tous les états générés à la dernière étape, calculer le coût par (4.18) avec $\bar{z}_n$

$= \bar{z}_n^*$ et l'enregistrer pour chaque paire $[\tilde{r}_n, \tilde{p}_n]^T$.

2.2. Pour $i = n - 1$ jusqu'à 1 :

Pour chaque paire $[\tilde{r}_i, \tilde{p}_i]^T$:

2.2.1. Calculer le coût de transition par (4.15).

2.2.2. Ajouter ce coût à chaque coût des états successeurs $(i + 1)$.

2.2.3. Choisir l'état successeur $[\tilde{r}_{i+1}, \tilde{p}_{i+1}]^T$ qui donne le coût optimal de l'étape i à n .

2.2.4. Enregistrer ce successeur et le a_i correspondant.

2.3. Trouver les coefficients de disponibilité optimaux (a_i) qui minimisent le coût total de la ligne de transfert.

4.6.3 Algorithme de maille adaptative

L'algorithme de maille adaptative se compose principalement de deux phases. Dans la première phase, l'*algorithme de la discrétisation de l'espace d'état avec abscisse réduite* est utilisé avec un certain N pas très grand afin de générer rapidement un espace d'état discret de taille N^2 à chaque étape (de 3 à n) et une trajectoire initiale sous-optimale des coefficients de disponibilité. Ensuite vient la deuxième phase qui consiste à utiliser le même algorithme mais avec une autre valeur de N et en se concentrant dans le voisinage de la solution sous-optimale rapidement obtenue par la première phase. Ce voisinage est défini en prenant une certaine largeur en-dessous et au-dessus de chacun des coefficients sous-optimaux obtenus précédemment pour définir des nouvelles bornes inférieures et supérieures de chaque coefficient. L'écart entre la borne inférieure et supérieure de chaque a_i ($i = 1, \dots, n - 1$) est, dans ce cas, plus rétréci et donc l'espace d'état à chaque étape sera également plus rétréci. La deuxième phase de cet algorithme est répétée jusqu'à l'obtention d'une solution avec la précision recherchée.

Cet algorithme semble être très rapide tout en maintenant une très bonne précision,

lorsque comparé à la recherche d'optimalité dans un espace d'état augmentant exponentiellement comme le cas de l'*algorithme de la discrétisation exacte de l'espace d'état*. Ce dernier souffre tant d'une explosion dans les exigences de calcul que d'une non-uniformité de la précision de l'espace d'état discretisé d'une étape à l'autre. Par contre, l'*algorithme de maille adaptative* combiné avec la réduction d'abscisses à chaque étape, maintient la même précision de discrétisation à toutes les étapes et calcule une solution optimale qui s'améliore de façon régulière d'un cycle à l'autre.

Dans ce qui suit, nous montrons les démarches principales de l'*algorithme de maille adaptative*.

1. Utiliser l'*algorithme de discrétisation de l'espace d'état avec abscisse réduite* avec une certaine valeur de N pour générer un espace d'état initial et trouver une solution sous-optimale rapide.
2. Définir des nouvelles bornes inférieures et supérieures pour les coefficients de disponibilité de la façon suivante :

Pour $i = 1, \dots, n - 1$:

$$a_{i_{min}} = \max \{ a_i^* (\text{de l'étape précédente}) - \text{distance} ; \text{la borne inférieure de } a_i \}$$

$$a_{i_{max}} = \min \{ a_i^* (\text{de l'étape précédente}) + \text{distance} ; 1 \}$$

3. Pour ces nouvelles bornes et pour une certaine valeur de N : Exécuter de nouveau l'*algorithme de discrétisation de l'espace d'état avec abscisse réduite*.
4. Définir la précision de la solution optimale obtenue⁵ :

$$precision = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} [a_i^* (\text{de l'étape actuelle}) - a_i^* (\text{de l'étape précédente})]^2}}{n - 1}$$

5. Tant que $precision >$ précision recherchée :

⁵Il existe beaucoup d'autres façons pour calculer cette précision.

Retourner à l'étape 2.

4.7 Résultats numériques

Dans cette section, nous montrons les résultats numériques du problème de la programmation dynamique pour une ligne de transfert non-homogène multi-machines multi-pièces obtenus par l'*algorithme de maille adaptative* proposé dans la section 4.6.3.

Beaucoup de données ont été essayées et des solutions optimales correspondantes ont été obtenues. Nous montrons la ligne suivante à titre d'exemple. Soit une ligne de transfert non-homogène composée de 6 machines et produisant 4 types de produits finis. Les taux de réparation des machines sont $r = [0.5 \ 0.8 \ 0.7 \ 0.85 \ 0.7 \ 0.6]$; les taux de panne $p = [0.4 \ 0.4 \ 0.45 \ 0.285 \ 0.28 \ 0.5]$; les taux des demandes des 4 types de pièces $d = [1.5, 1.25, 1.75, 1]$; les coûts de stockage $c_{ji} = 2$ pour $j = 1, \dots, 4$ et $i = 1, \dots, 5$ et $c_{j6}^+ = 2$ (pour $j = 1, \dots, 4$); le coût de pénurie de la dernière machine pour les 4 types de pièces $c_{j6}^- = 10$ (pour $j = 1, \dots, 4$) et les taux maximaux de production pour $i = 1, \dots, 6$: $k_{1i} = 15.5 - (0.01 * (i - 1))$, $k_{2i} = 16 - (0.01 * (i - 1))$, $k_{3i} = 16.5 - (0.01 * (i - 1))$ et $k_{4i} = 15 - (0.01 * (i - 1))$. La trajectoire des coefficients optimaux de disponibilité est donnée dans la Fig. 4.6 avec les bornes inférieure et supérieure de chaque coefficient. Le tableau 4.7 donne les valeurs numériques exactes de ces coefficients optimaux a_i ($i = 0, \dots, 5$) ainsi que les valeurs numériques des bornes inférieure et supérieures de chaque coefficient. Le tableau 4.8 montre les valeurs minimale, optimale, maximale de $\tilde{r}_i$ et $\tilde{p}_i$ pour toutes les étapes de $i = 1, \dots, 6$. Notons que l'espace d'état est bidimensionnel; pour la première étape, l'espace d'état est le point unique $[r_1, p_1]^T$; tandis que pour la deuxième étape, l'espace d'état $(\tilde{r}_2, \tilde{p}_2)$ est une courbe; quant aux étapes de $i = 3$ à n , l'espace d'état $(\tilde{r}_i, \tilde{p}_i)$ a une certaine forme géométrique bidimensionnelle.

La solution optimale présentée ici a été obtenue après 58 cycles atteignant une précision

de 10^{-8} avec l'*algorithme de maille adaptative* avec $N = 75$ pour tous les cycles. Le coût total optimal obtenu est de 122.38681 et $\bar{z}_n^*$ est égal à 5.79133. Le temps total d'opération de l'algorithme est de 9.6268 minutes en utilisant un ordinateur de processeur *Pentium 4 - 3.00 GHz* et de mémoire (RAM) de 512 Mo.

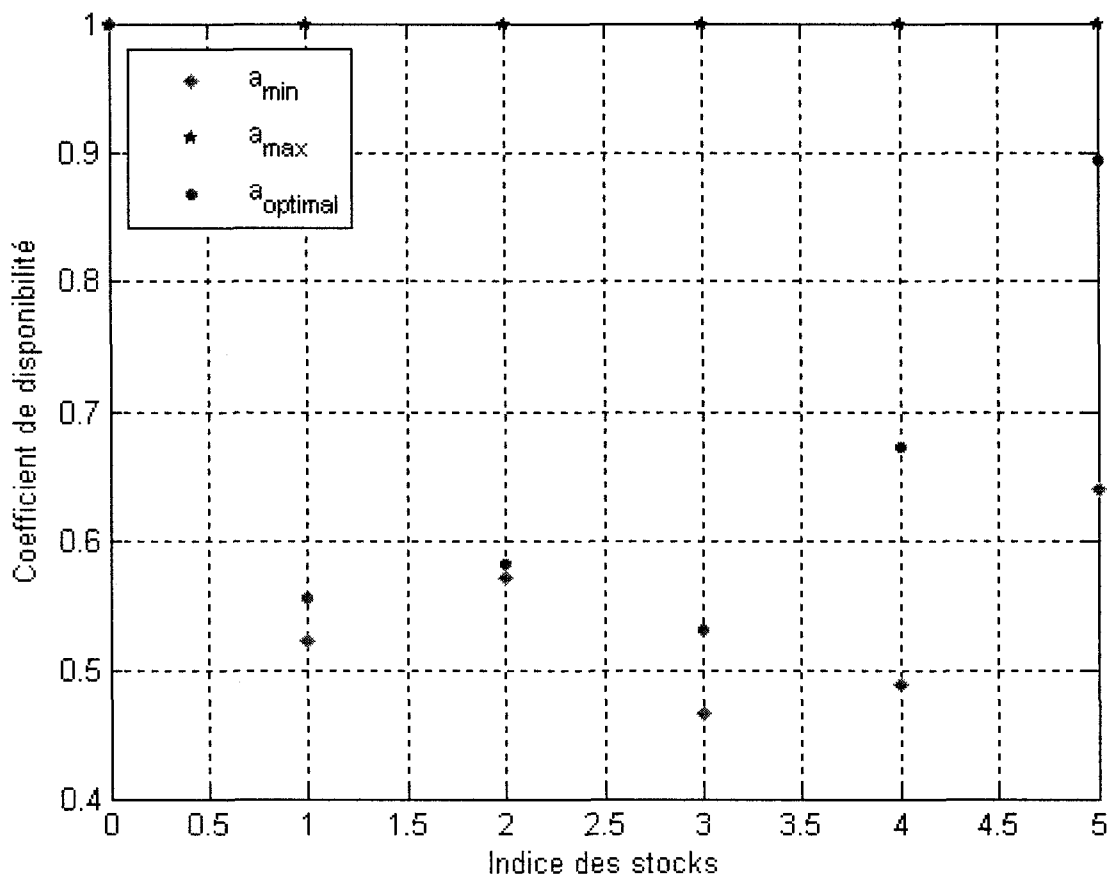


FIGURE 4.6 Coefficients optimaux de disponibilités pour les stocks $i = 0, \dots, 5$

TABLEAU 4.7 Les valeurs minimales, optimales et maximales de a_i pour $i = 0, \dots, 5$

	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
$a_{i_{min}}$	1	0.52177	0.57183	0.46507	0.48791	0.63934
a_i^*	1	0.55556	0.58158	0.53141	0.67217	0.89379
$a_{i_{max}}$	1	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999

Pour obtenir une précision de la solution optimale de 10^{-4} pour les mêmes données présentées ci-haut avec l'*algorithme de discrétisation exacte de l'espace d'état* pro-

posé dans la section 4.6.1, le temps d'opération est énorme, soit des jours. En plus, il faut que la mémoire de l'ordinateur soit suffisamment grande pour pouvoir enregistrer tous les points bidimensionnels générés constituant l'espace d'état à chaque étape, sinon le programme s'arrêtera avant même de terminer l'exécution. Quant à l'*algorithme de discrétisation de l'espace d'état avec abscisse réduite* proposé dans la section 4.6.2, il se situe entre les deux autres algorithmes. Il donne sûrement un meilleur résultat que l'*algorithme de discrétisation exacte de l'espace d'état* et plus rapidement mais il est en même temps beaucoup plus lent et moins précis que l'*algorithme de maille adaptative*.

TABLEAU 4.8 Les valeurs minimales, optimales et maximales de $\tilde{r}_i$ et $\tilde{p}_i$ pour $i = 1, \dots, 6$

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$
$\tilde{r}_{i_{min}}$	0.5	0.60589	0.64936	0.69465	0.69613	0.6
$\tilde{r}_i^*$	0.5	0.61538	0.65531	0.70895	0.70492	0.61309
$\tilde{r}_{i_{max}}$	0.5	0.8	0.75381	0.85	0.80861	0.68421
$\tilde{p}_{i_{min}}$	0.4	0.30295	0.41745	0.23291	0.27845	0.5
$\tilde{p}_i^*$	0.4	1.04615	1.19581	1.07244	0.76329	0.64447
$\tilde{p}_{i_{max}}$	0.4	1.49986	1.41188	1.59051	1.51158	1.27779

Si l'on considère maintenant les mêmes données de la ligne ci-haut mais cette fois-ci avec $c_{j6}^- = 2$ pour $j = 1, \dots, 4$, la trajectoire des coefficients optimaux de disponibilité dans ce cas sera [1 0.55556 0.57896 0.51522 0.63183 0.8396]. Une comparaison de cette trajectoire avec la trajectoire des coefficients optimaux de disponibilité du tableau 4.7 indique que les valeurs optimales des coefficients du dernier cas sont inférieures à celles du premier cas. C'est-à-dire que si la pénurie n'est pas très pénalisée, la solution optimale tendra à diminuer les coefficients de disponibilité et donc diminuer les niveaux de stockage ; ce qui est logiquement très correct.

4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, les lignes de transfert non-homogènes multi-machines produisant différents types de pièces avec la politique décentralisée de type Kanban ont été introduites. Dans la section 4.3, le système a été modélisé mathématiquement de façon approximative mais efficace en utilisant la méthode de décomposition basée sur l'hypothèse de découplage des machines et le principe de moyennage de la demande. L'espace d'état à chaque étape est bidimensionnel. Le caractère probabiliste des équations (4.7) et (4.8) minimise l'impact de la perte d'information dû à l'approximation. À l'instar du chapitre 3, la politique de production synchronisée des pièces réduit énormément la complexité du problème en le ramenant à un seul degré de liberté, celui d'un type arbitraire de pièces. Cela permet aussi de réduire le nombre de variables à optimiser de $n*m$ variables à n variables puisque $a_{ji} = a_i$ pour tout $j = 1, \dots, m$ et $i = 1, \dots, n - 1$ en faveur de (3.7) et $\bar{z}_n = z_{jn}/d_j$ qui satisfait aussi (3.7). Une de nos contributions dans ce chapitre est donc la capacité de formuler le problème multi-pièces essentiellement en un problème mono-pièce grâce à la production synchronisée des pièces.

Dans la section 4.6, nous avons présenté trois algorithmes de solution pour le problème de la programmation dynamique formulé à la section 4.5. Une analyse de chaque algorithme présenté a été faite résumant ses avantages et ses inconvénients. L'*algorithme de maille adaptative* s'avère le plus intéressant en termes du temps nécessaire de calcul, de la mémoire utilisée de l'ordinateur et de la précision de la solution optimale obtenue. Un exemple des résultats numériques obtenus a été présenté en détail dans la section 4.7.

À ce stade, nous pouvons nous permettre de dire que la méthode simplifiée d'analyse des lignes de transfert multi-machines multi-pièces, basée sur l'hypothèse de découplage des machines et le principe de moyennage de la demande, associée avec l'*algorithme de maille adaptative* constitue un outil très prometteur d'optimisation pour ce genre de

problème grâce à la simplicité et la clarté du modèle mathématique ainsi que la rapidité et la précision de la solution optimale obtenue.

CHAPITRE 5

OPTIMISATION DES LIGNES DE TRANSFERT NON HOMOGÈNES SOUS POLITIQUE PRIORITAIRE

5.1 Introduction

Dans le chapitre 3 (respectivement 4), nous avons étudié le problème d'optimisation des lignes de transfert partiellement-homogènes (respectivement non-homogènes) multi-machines produisant différents types de pièces sous des politiques de production synchronisée des pièces. Nous avons vu que cette classe de politique de production génère une synchronisation entre les niveaux de toutes les pièces dans chaque stock ce qui réduit la complexité du problème en le ramenant à un seul degré de liberté. Cette classe de politiques bien qu'intéressante par son côté pratique (caractère cyclique de la production) et prometteuse au niveau de la capacité à mener à bien les calculs ne représente toutefois qu'un cas très particulier de la production parallèle de pièces. Les questions qui se posent maintenant sont les suivantes : Quelle serait une classe de stratégies de production plus générale qui inclurait la production synchronisée comme cas particulier mais pour laquelle il serait encore possible de mener à bien des calculs efficaces ? Que se passe-t-il si l'on emploie une telle classe de politique de production ? Quels seraient les pertes et les gains par rapport à l'emploi de la politique synchronisée de production ?

Dans ce chapitre, nous allons essayer de trouver des réponses à ces questions pour une ligne de transfert non-homogène constituée de deux machines ($n = 2$) et produisant uniquement deux types de pièces ($m = 2$). Le fait de limiter le nombre de machines et de pièces à deux servira à mieux comprendre et analyser le système sous la classe plus générale de politique de production. Le système à étudier est montré à la figure 5.1. Les

deux machines sont nommées M_1 et M_2 , chacune suivie d'un stock partagé entre les deux types de pièces. x_{11} (respectivement x_{21}) est le niveau des pièces de premier (respectivement deuxième) type dans le premier stock tandis que x_{12} (respectivement x_{22}) est le niveau des pièces de premier (respectivement deuxième) type dans le deuxième stock.

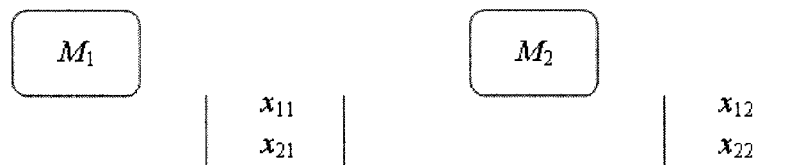


FIGURE 5.1 La chaîne de production à étudier

Dans le reste de ce chapitre, nous introduisons la classe de politiques plus générale à étudier ; nous développons ensuite un modèle mathématique approximatif pour l'analyse de cette classe. Le problème d'optimisation par la programmation dynamique est par la suite formulé suivi des résultats numériques obtenus. Finalement, nous concluons ce chapitre par une évaluation de la classe de production présentée.

5.2 Politiques prioritaires de production

La politique dite *prioritaire* est une classe de politiques parallèles de production qui favorise certains types de pièces par rapport à d'autres. En réalité, elle définit un certain ordre de priorité des différentes pièces. Cet ordre permet à la pièce la plus prioritaire d'atteindre son seuil critique toujours en premier et ensuite la pièce suivante dans l'ordre et ainsi de suite. Or, quand les niveaux de stocks diminuent, la dernière pièce dans l'ordre de priorité tombe à zéro¹ en premier suivi de la pièce précédente dans l'ordre de priorité

¹Pour les stocks d'encours où les niveaux des pièces sont compris entre zéro et les seuils critiques (niveau de KANBAN) correspondants et non pas le dernier stock qui peut être négatif pour toutes les pièces.

et ainsi de suite. Ceci veut dire que la pièce la plus prioritaire est toujours plus disponible que les autres pièces. Par conséquent, le coefficient de disponibilité de cette pièce sera sûrement plus élevé que ceux du reste des pièces.

Nous faisons ici les mêmes hypothèses que la section 3.2.1 avec $n = m = 2$. Dans notre cas limité à deux pièces, posons la première pièce comme la pièce prioritaire. Soient k_{ji} le taux nominal maximal de production de la pièce j par la machine i ($j = 1, 2$ et $i = 1, 2$); c'est-à-dire que si la machine M_i ne produit que la pièce j , elle la produit à un taux variant de 0 à k_{ji} . Soient k'_{ji} le taux maximal de la production prioritaire de la pièce j par la machine i ($j = 1, 2$ et $i = 1, 2$). Les k'_{ji} représentent les taux maximaux de production dans le cas de la production parallèle de pièces. Il est à noter que $\bar{k}'_{ji}$ sont évidemment inférieurs aux k_{ji} . L'espace des $\bar{k}'_{ji}$ sera présenté plus tard dans cette section.

En effet, la politique prioritaire associée à la politique de production du type Kanban doit fonctionner de la façon suivante. Soit $u_{ji}(t)$ le taux instantané de production de la pièce j par la machine M_i pour $j, i = 1, 2$. Quand la machine M_i peut produire, elle produit la pièce 1 avec un taux de k'_{1i} et la pièce 2 avec un taux de k'_{2i} jusqu'à ce que x_{1i} atteigne son seuil critique z_{1i} ou la machine M_i tombe en panne. Notons que x_{1i} atteint z_{1i} avant que x_{2i} n'atteigne z_{2i} . Ensuite, la pièce 1 est produite avec un taux $u_{1,i+1}(t)$ (avec $u_{13}(t) = d_1$ et $u_{23}(t) = d_2$ pour tout $t > 0$ où d_1 et d_2 sont les taux de demandes des deux types de pièces) pour garder le niveau de stockage de la pièce 1 à son seuil critique. Cette chute de la production de la première pièce dégage une capacité de production que la pièce 2 pourrait utiliser si l'on veut que l'utilisation des machines soit maximale quand c'est possible. Donc, au moment où la production de la machine M_i de la pièce 1 chute de k'_{1i} à $u_{1,i+1}(t)$, la production de la pièce 2 saute de k'_{2i} au taux accru dénoté k^a_{2i} (à définir plus tard) jusqu'à ce que x_{2i} atteigne z_{2i} ; ensuite la production de la pièce 2 sera $u_{2,i+1}(t)$. Soit $\alpha_i(t)$ le processus binaire continu représentant l'évolution de la machine M_i . $\alpha_i(t) = 1$ si M_i est en marche et 0 sinon. La production prioritaire associée à la politique de

production Kanban est donnée mathématiquement par les équations suivantes.

$$(t)u_{11}(t) = \begin{cases} k'_{11} & \text{si } [\alpha_1(t) = 1, x_{11}(t) < z_{11}] \\ u_{12}(t) & \text{si } [\alpha_1(t) = 1, x_{11}(t) = z_{11}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.1)$$

$$u_{21}(t) = \begin{cases} k'_{21} & \text{si } [\alpha_1(t) = 1, x_{11}(t) < z_{11}, x_{21}(t) < z_{21}] \\ k^a_{21} & \text{si } [\alpha_1(t) = 1, x_{11}(t) = z_{11}, x_{21}(t) < z_{21}] \\ u_{22}(t) & \text{si } [\alpha_1(t) = 1, x_{11}(t) = z_{11}, x_{21}(t) = z_{21}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.2)$$

$$u_{12}(t) = \begin{cases} k'_{12} & \text{si } [\alpha_2(t) = 1, x_{11}(t) > 0, x_{12}(t) < z_{12}] \\ d_1 & \text{si } [\alpha_2(t) = 1, x_{11}(t) > 0, x_{12}(t) = z_{12}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.3)$$

$$u_{22}(t) = \begin{cases} k'_{22} & \text{si } [\alpha_2(t) = 1, x_{21}(t) > 0, x_{12}(t) < z_{12}, x_{22}(t) < z_{22}] \\ k^a_{22} & \text{si } [\alpha_2(t) = 1, x_{21}(t) > 0, x_{12}(t) = z_{12}, x_{22}(t) < z_{22}] \\ d_2 & \text{si } [\alpha_2(t) = 1, x_{21}(t) > 0, x_{12}(t) = z_{12}, x_{22}(t) = z_{22}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.4)$$

Dans le lemme suivant, nous donnons une condition nécessaire et suffisante sur les taux maximaux de la production prioritaire et les seuils critiques pour que la pièce 1 soit toujours prioritaire par rapport à la pièce 2, dans le sens où elle atteint son seuil critique toujours en premier et tombe à zéro toujours en dernier.

Lemme 5.1 *Sous la politique de production prioritaire associée à des niveaux de Kanban, pour atteindre le comportement prioritaire recherché, il faut satisfaire la condition suivante :*

Sous l'hypothèse que k'_{21} est strictement supérieur à k_{22}^a :

$$\frac{k'_{11}}{k'_{21}} > \frac{z_{11}}{z_{21}} > \frac{k'_{12}}{k'_{22}} > \frac{d_1}{d_2} \quad (5.5)$$

Démonstration Voir Annexe I.2 ■

Sur ce segment, la pièce 2 est prioritaire par rapport à la pièce 1

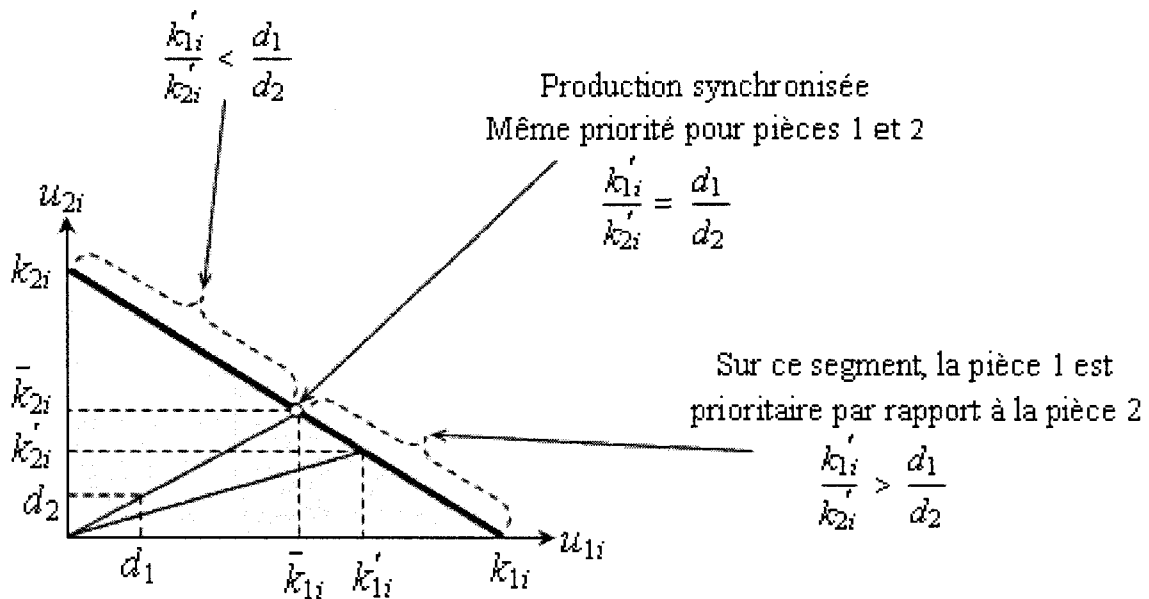


FIGURE 5.2 Espace des taux de production de la machine M_i dans le cas de deux pièces

Il est clair que la production synchronisée (3.7) est un cas particulier de la production prioritaire (5.5) où les inégalités sont des égalités. La figure 5.2 montre l'espace des taux de production de la machine M_i . Tout l'espace est représenté par le triangle gris tandis que l'espace où l'utilisation de la machine est maximale est représenté par le segment liant les deux points $(k_{1i}, 0)$ et $(0, k_{2i})$. Ce segment est divisé en trois régions : la région où la pièce 1 est prioritaire représenté par le segment liant les deux points $(k_{1i}, 0)$ et $(\bar{k}_{1i}, \bar{k}_{2i})$ (ce dernier point non inclus), la région où la pièce 2 est prioritaire représenté par le segment liant les deux points $(0, k_{2i})$ et $(\bar{k}_{1i}, \bar{k}_{2i})$ (ce dernier point non inclus) et la région

où les deux types de pièce ont la même priorité qui est, quant à elle, représentée par le point $(\bar{k}_{1i}, \bar{k}_{2i})$. En plus de la condition 5.5 et pour que les taux de la production prioritaire soient des taux maximaux favorisant la pièce 1 (les taux de production se situent sur le segment liant les deux points $(k_{1i}, 0)$ et $(\bar{k}_{1i}, \bar{k}_{2i})$), il faut que $k'_{1i}/k_{1i} + k'_{2i}/k_{2i}$ soit égal à 1. Cette équation est tout simplement celle du segment en question.

Soit a_{11} (respectivement a_{21}) le coefficient de disponibilité de la pièce 1 (respectivement 2) dans le premier stock défini tel que (3.5). Le lemme (5.1) a pour conséquence directe la proposition suivante.

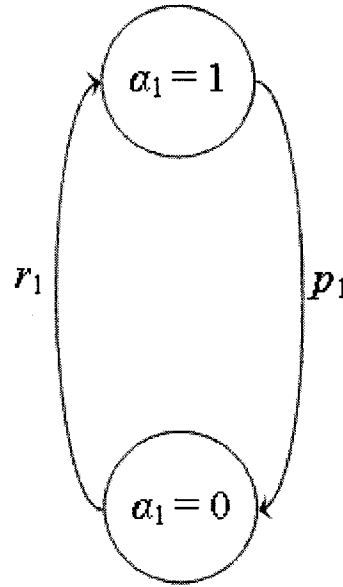
Proposition 5.2 *Le coefficient de disponibilité de la pièce 1 dans le premier stock (a_{11}) est strictement supérieur au coefficient de disponibilité de la pièce 2 dans le premier stock (a_{21}).*

5.3 Modélisation mathématique approximative

Dans cette section, nous modélisons chaque machine produisant chaque type de pièce en vue d'obtenir une machine équivalente approximative permettant de bien exprimer l'évolution de cette machine pour cette pièce tout en prenant en considération l'influence de toutes les parties de la ligne qui interviennent dans cette évolution.

Première machine produisant la pièce 1

La première machine est précédée d'un stock infini (qui n'est jamais en pénurie). Elle évolue selon une chaîne de Markov avec un taux de panne p_1 et de réparation r_1 . La figure 5.3 représente le modèle de la première machine produisant la pièce 1 où α_1 représente le processus binaire de l'état de la machine M_1 ($\alpha_1 = 1$ quand M_1 est fonctionnelle ; sinon $\alpha_1 = 0$).

FIGURE 5.3 Chaîne de Markov de M_1 à 2 états

Cette machine, en faveur de l'hypothèse de découplage des machines et du principe de moyennage de la demande, est soumise à une demande pour la pièce 1 de d_1/a_{11} où a_{11} est lié à z_{11} par la relation suivante tirée de Hu [18].

$$a_{11} = 1 - \frac{p_1}{r_1 + p_1} \left[\frac{1 - \rho_{11}}{1 - \rho_{11} e^{-\mu_{11}(1 - \rho_{11})z_{11}}} \right] \quad (5.6)$$

avec :

$$\mu_{11} = \frac{p_1}{k'_{11} - \frac{d_1}{a_{11}}} \quad (5.7)$$

$$\rho_{11} = \frac{r_1}{\mu_{11} \frac{d_1}{a_{11}}} \quad (5.8)$$

Soit c_{11} le coût de stockage par unité de temps et de produit de la pièce 1 dans le premier stock. Le coût de stockage de la pièce 1 par cette machine isolée avec pénurie non

permise est obtenu de Hu [18] et est donné par l'équation suivante.

$$T_{11}(p_1, r_1, a_{11}) = \frac{c_{11}\rho_{11}}{(r_1 + p_1)(1 - \rho_{11}\gamma_{11})} \left[k'_{11} \frac{1 - \gamma_{11}}{1 - \rho_{11}} - \frac{\gamma_{11}}{\lambda_{11}} (r_1 + p_1) \ln \gamma_{11} \right] \quad (5.9)$$

avec

$$\lambda_{11} = -\mu_{11}(1 - \rho_{11}) \quad (5.10)$$

$$\gamma_{11} = \frac{p_1 [r_1 k'_{11} - d_1 (r_1 + p_1)]}{r_1 (r_1 + p_1) (1 - a_{11}) (k'_{11} - \frac{d_1}{a_{11}})} \quad (5.11)$$

Première machine produisant la pièce 2

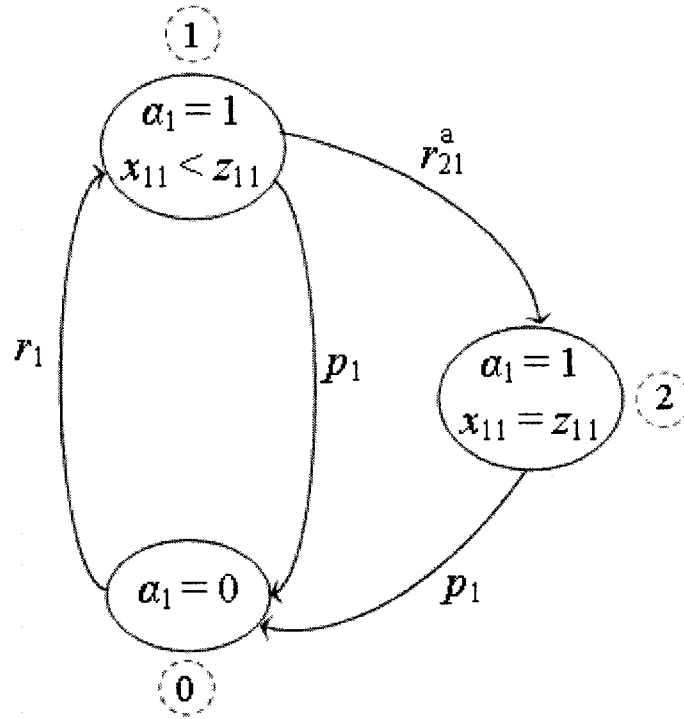
Le taux de production de la pièce 2 par la première machine dépend de l'état de la machine M_1 et du niveau du stock x_{11} (voir (5.2)). Le modèle de la machine M_1 produisant la pièce 2 est donné par la Fig. 5.4. Ce modèle est constitué de trois états (0), (1) et (2) dont le seul état de panne est l'état (0). Soient Π_0 , Π_1 et Π_2 les probabilités en régime permanent d'être respectivement à l'état (0), (1) et (2). Π_0 est la probabilité de panne de la machine M_1 en régime permanent ($\Pi_0 = p_1 / (p_1 + r_1)$) et $\Pi_1 + \Pi_2$ est la probabilité opérationnelle de la machine M_1 en régime permanent ($\Pi_1 + \Pi_2 = r_1 / (p_1 + r_1)$).

Π_2 est la probabilité que $x_{11} = z_{11}$ et $\alpha_1 = 1$, elle est donnée selon Hu [18] par l'équation suivante.

$$\Pi_2 = P_{z_{11}} = \frac{r_1}{r_1 + p_1} \frac{(1 - \rho_{11}) e^{\lambda_{11} z_{11}}}{1 - \rho_{11} e^{\lambda_{11} z_{11}}} \quad (5.12)$$

En régime permanent, le taux d'entrée à l'état (2) est égal au taux sortant. Donc, $r_{21}^a \Pi_1 = p_1 \Pi_2$, ce qui donne la valeur de r_{21}^a qui suit.

$$r_{21}^a = \frac{p_1 P_{z_{11}}}{\frac{r_1}{r_1 + p_1} - P_{z_{11}}} \quad (5.13)$$

FIGURE 5.4 La machine équivalente $\tilde{M}_{21}$

Les probabilités stationnaires de cette machine isolée ainsi que son coût de stockage de la pièce 2 sont calculés par la solution des équations correspondantes de Kolmogorov ([25] et [13]) donnée dans l'annexe II.1. Ce coût dépend de p_1 , r_1 , a_{11} et a_{21} .

Deuxième machine produisant la pièce 1

La production de la pièce 1 par la deuxième machine dépend de la disponibilité du stock x_{11} et de l'état de la deuxième machine M_2 . Les chaînes de Markov représentant l'évolution du stock x_{11} et de la machine M_2 sont données par la figure 5.5.

En considérant les caractéristiques probabilistes du processus stochastique du niveau de la pièce 1 dans le premier stock (x_{11}), la proportion du temps où le niveau du stock $x_{11}(t)$ est positif est donnée par $(1/p_{s_{11}})/((1/p_{s_{11}})+(1/r_1))$. Cette proportion est aussi égale à a_{11} .

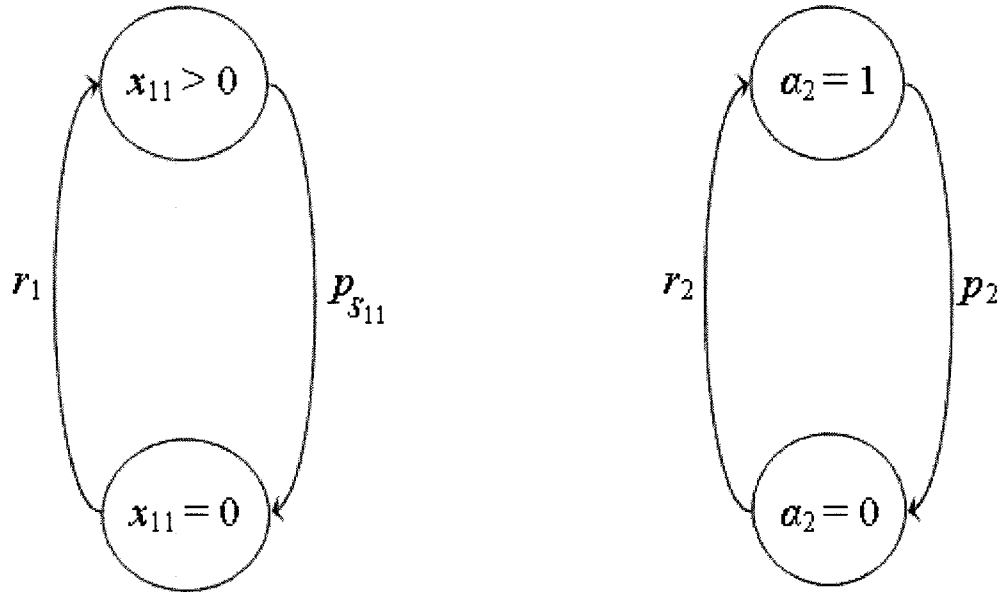


FIGURE 5.5 Chaîne de Markov de x_{11} (à gauche) / Chaîne de Markov de M_2 (à droite)

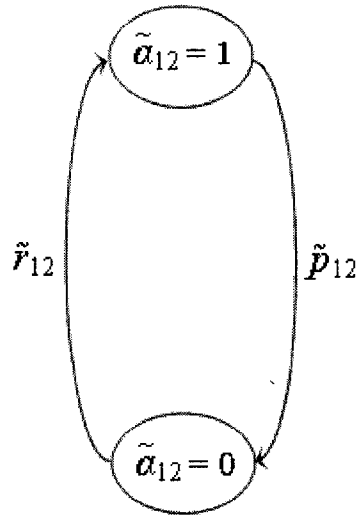
p_{s11} est donc lié à a_{11} par l'équation suivante.

$$p_{s11} = \frac{r_1(1 - a_{11})}{a_{11}} \quad (5.14)$$

La machine équivalente de M_2 produisant la pièce 1 est obtenue par le produit cartésien des deux chaînes de Markov de la figure 5.5. Ce produit donne un état fonctionnel et trois états de panne. L'état de panne résultant de la panne de M_2 et la pénurie de x_{11} peut être négligé parce que son occurrence est très rare statistiquement. Les deux autres états de panne peuvent être agrégés ensemble donnant le modèle final (Fig. 5.6) de $\tilde{M}_{12}$, la machine équivalente de M_2 produisant la pièce 1 où $\tilde{\alpha}_{12} = 1$ représente l'état fonctionnel de $\tilde{M}_{12}$ ($\alpha_2 = 1$ et $x_{11} > 0$) et $\tilde{\alpha}_{12} = 0$ l'état de panne ($\alpha_2 = 0$ et $x_{11} > 0$) ou ($\alpha_2 = 1$ et $x_{11} = 0$)¹.

Étant donné qu'il n'existe que deux causes pour l'état de panne, le taux de réparation $\tilde{r}_{12}$

¹Le cas où $\alpha_2 = 0$ et $x_{11} = 0$ est négligé.

FIGURE 5.6 La machine équivalente $\tilde{M}_{12}$

est calculé comme étant la probabilité de la première cause conditionnelle à une panne multipliée le taux moyen de réparation associé plus la probabilité de la deuxième cause conditionnelle à une panne multipliée par le taux moyen de réparation associé ; ce qui donne $\tilde{r}_{12}$ comme suit.

$$\tilde{r}_{12} = \frac{r_2(1 - a_{11})}{r_2(1 - a_{11}) + p_2 a_{11}} r_1 + \frac{p_2 a_{11}}{r_2(1 - a_{11}) + p_2 a_{11}} r_2 \quad (5.15)$$

La disponibilité du modèle équivalent ($\tilde{p}_{12}/(\tilde{r}_{12} + \tilde{p}_{12})$) doit être égale à la disponibilité du stock x_{11} ($r_1/(p_{s_{11}} + r_1)$) multipliée par la disponibilité de la machine M_2 ($r_2/(r_2 + p_2)$), ce qui donne le $\tilde{p}_{12}$ suivant.

$$\tilde{p}_{12} = \left(\frac{r_2 + p_2}{a_{11} r_2} - 1 \right) \tilde{r}_{12} \quad (5.16)$$

Cette machine qui peut admettre un stock négatif est soumise à une demande des pièces 1 de d_1 . Elle a été optimisée par Bielecki et Kumar [4]. La valeur optimale du seuil

critique z_{12} est donc donnée par l'équation suivante.

$$\bar{z}_{12}^* = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta_{12} \geq 1 \\ \frac{1}{\sigma_{12}} \ln\left(\frac{1}{\beta_{12}}\right) & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.17)$$

avec

$$\sigma_{12} = \frac{\tilde{r}_{12}(k'_{12} - d_1) - \tilde{p}_{12}d_1}{d_1(k'_{12} - d_1)} \quad (5.18)$$

$$\beta_{12} = \frac{c_{12}^+(\tilde{r}_{12} + \tilde{p}_{12})(k'_{12} - d_1)}{(c_{12}^+ + c_{12}^-)\tilde{p}_{12}k'_{12}} \quad (5.19)$$

où c_{12}^+ (respectivement c_{12}^-) le coût de stockage (respectivement de pénurie) par unité de temps et de produit de la pièce 1 dans le deuxième stock.

Le coût optimal de stockage et de pénurie de la pièce 1 pour cette machine est donnée par l'équation suivante.

$$\bar{T}_{12}^*(\tilde{p}_{12}, \tilde{r}_{12}, a_{11}) = \begin{cases} \frac{c_{12}^- \tilde{p}_{12} k'_{12}}{\sigma_{12}(\tilde{r}_{12} + \tilde{p}_{12})(k'_{12} - d_1)} & \text{si } \beta_{12} \geq 1 \\ \frac{c_{12}^+ d_1}{\tilde{r}_{12} + \tilde{p}_{12}} + \frac{c_{12}^+}{\sigma_{12}} \ln \frac{1}{\beta_{12}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.20)$$

Deuxième machine produisant la pièce 2

Le taux de production de la pièce 2 par la deuxième machine dépend de l'état de la machine M_2 et des niveaux des stocks x_{21} et x_{12} . La machine équivalente à la machine M_2 et le stock x_{21} est donnée par la figure 5.7 où $\bar{\alpha}_{22} = 1$ correspond à " $\alpha_2 = 1$ et $x_{21} > 0$ " et $\bar{\alpha}_{22} = 0$ correspond à " $\alpha_2 = 1$ et $x_{21} = 0$ " où " $\alpha_2 = 0$ et $x_{21} > 0$ ", avec $\bar{r}_{22}$ et $\bar{p}_{22}$ données par les équations (5.21) et (5.22)². Ce modèle est le résultat du produit cartésien

²La même analyse que le cas deuxième machine produisant la pièce 1 (équations (5.13) et (5.14)) mais cette fois-ci avec le stock x_{21} au lieu de x_{11} .

des chaînes de Markov du stock x_{21} et la machine M_2 après avoir négligé l'état de panne simultanée de x_{21} et M_2 et agrégé les états restants de panne ensemble.

$$\bar{r}_{22} = \frac{r_2(1-a_{21})}{r_2(1-a_{21}) + p_2a_{21}}r_1 + \frac{p_2a_{21}}{r_2(1-a_{21}) + p_2a_{21}}r_2 \quad (5.21)$$

$$\bar{p}_{22} = \left(\frac{r_2 + p_2}{a_{21}r_2} - 1 \right) \bar{r}_{22} \quad (5.22)$$

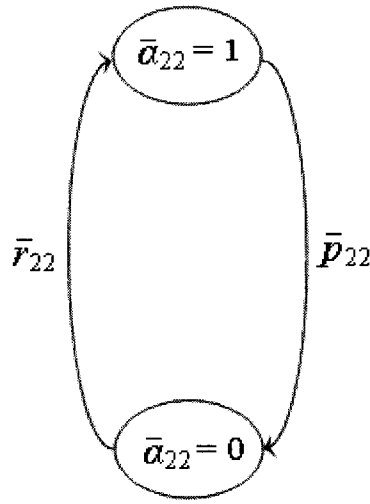
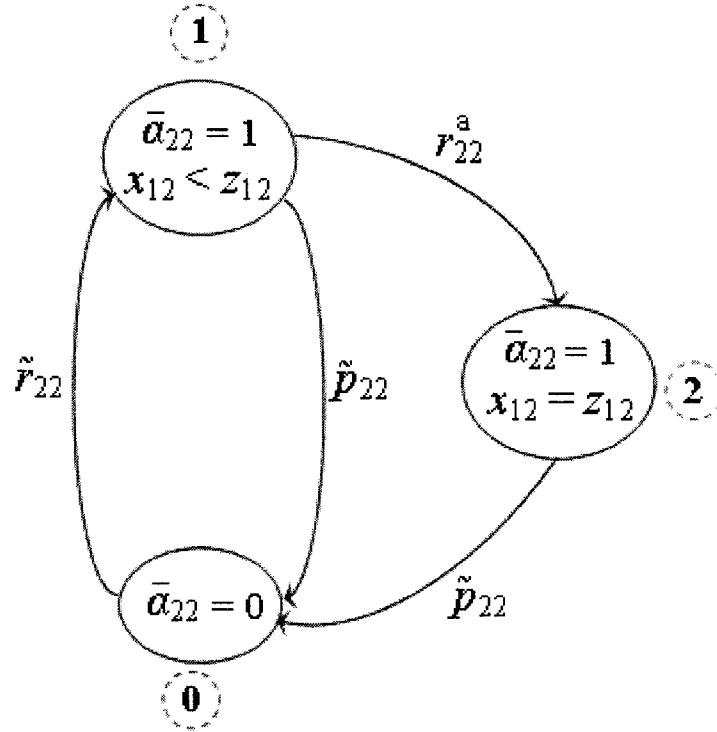


FIGURE 5.7 La machine équivalente $\bar{M}_{22}$

Pour prendre en considération l'influence du niveau du stock x_{12} sur le taux de production de la deuxième pièce, le modèle final à considérer est celui de la figure 5.8, avec $\tilde{r}_{22} = \bar{r}_{22}$ et $\tilde{p}_{22} = \bar{p}_{22}$.

Soient Π_0 , Π_1 et Π_2 les probabilités en régime permanent d'être à l'état (0), (1) et (2). $\Pi_1 + \Pi_2$ représente la probabilité que $\bar{\alpha}_{22} = 1$, c'est à dire $\alpha_2 = 1$ et $x_{21} > 0$, $\Pi_1 + \Pi_2 = a_{21}r_2/(r_2 + p_2) = \bar{r}_{22}/(\bar{r}_{22} + \bar{p}_{22})$. Soit $P_{z_{12}}$ la probabilité que $\tilde{\alpha}_{12} = 1$ ($\alpha_2 = 1$ et $x_{11} > 0$) et $x_{12} = z_{12}$. Cette probabilité est donnée selon Bielecki et Kumar [4] par la relation suivante.

$$P_{z_{12}} = \frac{\sigma_{12}d_1}{\tilde{r}_{12} + \tilde{p}_{12}} \quad (5.23)$$

FIGURE 5.8 La machine $\tilde{M}_{22}$

L'état (2) représente $\bar{\alpha}_{22} = 1$ ($\alpha_2 = 1$ et $x_{21} > 0$), $x_{11} > 0$ et $x_{12} = z_{12}$. Donc, la probabilité stationnaire d'être à l'état (2) (Π_2) est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \Pi_2 &= P[x_{21} > 0, \alpha_2 = 1, x_{11} > 0, x_{12} = z_{12}] \\
 &= P[x_{21} > 0 | \alpha_2 = 1, x_{11} > 0, x_{12} = z_{12}] P[\alpha_2 = 1, x_{11} > 0, x_{12} = z_{12}] \\
 &= P[x_{21} > 0 | \alpha_2 = 1, x_{11} > 0, x_{12} = z_{12}] P_{z_{12}}
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Par les hypothèses de la technique de décomposition, les processus de x_{21} et α_2 sont indépendants. Nous supposons aussi que $x_{21} > 0$ et $x_{12} = z_{12}$ sont indépendants. De plus, en faveur de la production prioritaire, si x_{21} est positif, x_{11} le sera également. Nous

obtenons donc l'équation suivante.

$$\begin{aligned}
 P[x_{21} > 0 | \alpha_2 = 1, x_{11} > 0, x_{12} = z_{12}] &= P[x_{21} > 0 | x_{11} > 0] \\
 &= \frac{P[x_{21} > 0, x_{11} > 0]}{P[x_{11} > 0]} \\
 &= \frac{P[x_{21} > 0]}{P[x_{11} > 0]} \\
 &= \frac{a_{21}}{a_{11}}
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Donc, l'équation (5.24) devient :

$$\Pi_2 = \frac{a_{21}}{a_{11}} P_{z_{12}} \tag{5.26}$$

En régime permanent, le taux d'entrée à l'état (2) est égal au taux sortant. Donc, $r_{22}^a \Pi_1 = \tilde{p}_{22} \Pi_2$, ce qui donne la valeur de R_{12} qui suit.

$$r_{22}^a = \frac{\tilde{p}_{22} \frac{P_{z_{12}}}{a_{11}}}{\frac{r_2}{r_2 + p_2} - \frac{P_{z_{12}}}{a_{11}}} \tag{5.27}$$

Les probabilités stationnaires de cette machine isolée ainsi que son coût de stockage et de pénurie de la pièce 2 sont calculés par la solution des équations correspondantes de Kolmogorov ([25] et [13]) donnée dans l'annexe II.2. Ce coût dépend de $\tilde{p}_{22}$, $\tilde{r}_{22}$, a_{11} et a_{21} .

5.4 Vérification de la performance du modèle

À ce stade et avant d'aller plus loin, nous allons évaluer le degré d'exactitude de notre modèle mathématique approximatif, à l'instar de la section 4.4, par comparaison avec

la simulation de Monte-Carlo pour un choix donné de seuils critiques. Les tableaux 5.1, 5.2 et 5.3 montrent respectivement les données de trois lignes distinctes, toutes avec les taux de demandes suivants : $d_1 = 1.25$ et $d_2 = 1.5$.

TABLEAU 5.1 Données de la première ligne

				p_i		r_i			
				$i = 1$	$i = 2$	$i = 1$	$i = 2$		
				0.2	0.25	0.45	0.75		
	c_{j1}	c_{j2}^+	c_{j2}^-	k_{ji}		k'_{ji}		z_{ji}	
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 2$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 1$	$i = 2$
$j = 1$	2	2	10	6.68571	9.25	3.65	2.75	2	7.5
$j = 2$	2	2	10	9.36	4.625	4.25	3.25	2.35	8.9

TABLEAU 5.2 Données de la deuxième ligne

				p_i		r_i			
				$i = 1$	$i = 2$	$i = 1$	$i = 2$		
				0.22	0.25	0.42	0.6		
	c_{j1}	c_{j2}^+	c_{j2}^-	k_{ji}		k'_{ji}		z_{ji}	
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 2$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 1$	$i = 2$
$j = 1$	1	2	4	9.45	10.41667	4.8	3.5	1.9	4.77
$j = 2$	1	2	4	11.34	6.25	5.58	4.15	2.25	5.7

TABLEAU 5.3 Données de la troisième ligne

				p_i		r_i			
				$i = 1$	$i = 2$	$i = 1$	$i = 2$		
				0.2	0.25	0.45	0.75		
	c_{j1}	c_{j2}^+	c_{j2}^-	k_{ji}		k'_{ji}		z_{ji}	
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 2$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 1$	$i = 2$
$j = 1$	2	2	2.5	6.68571	9.25	3.65	2.75	2	3.75
$j = 2$	2	2	3	9.36	4.625	4.25	3.25	2.35	4.45

Soit T_{ji} le coût de stockage et de pénurie (uniquement pour la dernière machine) de la pièce j ($j = 1, 2$) dans le stock i ($i = 1, 2$). Les tableaux 5.4, 5.5 et 5.6 montrent les résultats de la comparaison entre l'évaluation analytique basée sur les équations du modèle et la simulation de Monte-Carlo pour les trois lignes.

TABLEAU 5.4 Résultats de la comparaison pour la première ligne

	Simulation de M-C	Évaluation analytique	% erreur relative
a_{11}	0.82881	0.82208	0.81201
a_{21}	0.82628	0.82086	0.65595
T_{11}	2.8848	2.87332	0.39795
T_{12}	14.28374	14.80309	3.63595
T_{21}	3.36531	3.40071	1.05191
T_{22}	17.10568	17.0221	0.48861
T_{tot}	37.63954	38.09921	1.22124

TABLEAU 5.5 Résultats de la comparaison pour la deuxième ligne

	Simulation de M-C	Évaluation analytique	% erreur relative
a_{11}	0.80573	0.78621	2.42265
a_{21}	0.80387	0.78542	2.29515
T_{11}	1.35425	1.3206	2.48477
T_{12}	8.80315	9.41978	7.00465
T_{21}	1.59465	1.57133	1.46239
T_{22}	10.56708	10.92475	3.38476
T_{tot}	22.31913	23.23646	4.11006

TABLEAU 5.6 Résultats de la comparaison pour la troisième ligne

	Simulation de M-C	Évaluation analytique	% erreur relative
a_{11}	0.83349	0.82201	1.37734
a_{21}	0.83085	0.82086	1.20238
T_{11}	2.907	2.87332	1.15858
T_{12}	6.66139	6.9386	4.16144
T_{21}	3.38986	3.40071	0.32007
T_{22}	8.19418	8.69282	6.08529
T_{tot}	21.15243	21.90545	3.55997

Pour des données statistiques raisonnables des lignes de transfert (comme celles des tableaux 5.1, 5.2 et 5.3), les résultats de la comparaison montrent que l'erreur relative du coût total moyen estimé par les équations du modèle par rapport à celui de la simulation, dans le pire des cas, est de l'ordre de 4 %. La technique de moyennage des coûts de la

simulation de Monte-Carlo sur les cycles ainsi que les critères d'arrêt de la simulation tels que détaillés à la section 4.4 ont été respectés ici. Ceci nous permet de valider notre modèle mathématique approximatif basé sur la technique de décomposition/agrégation sous les politiques prioritaires de la section 5.2.

5.5 Optimisation par la programmation dynamique

Dans la section précédente, nous avons obtenu quatre modèles mathématiques représentant les deux machines produisant chacune les deux types de pièces. Les variables à optimiser pour la première machine produisant la pièce 1 et 2 sont respectivement a_{11} et a_{21} ; quant à la deuxième machine, les variables à optimiser sont les seuils critiques z_{12} et z_{22} . La valeur optimale de z_{12} est donnée par (5.17) qui est une fonction de a_{11} , et donc le coût de la deuxième machine produisant la pièce 1 doit être pris en considération pour optimiser les coefficients de disponibilité par la programmation dynamique ; nous ne pouvons pas obtenir une expression analytique de la valeur optimale de z_{22} mais elle peut être calculée numériquement. Cette valeur dépendra de a_{11} et a_{21} , et donc le coût de la deuxième machine produisant la pièce 2 doit être également pris en considération dans le coût à optimiser par la programmation dynamique. À ce stade, l'objectif du problème d'optimisation par la programmation dynamique est de trouver les valeurs des coefficients de disponibilité a_{11} et a_{21} qui permettraient d'atteindre la borne inférieure du coût total de stockage et de retards de livraison suivante.

$$J^* = \inf_{a_{11} \in A_{11}, a_{21} \in A_{21}, a_{11} > a_{21}} \left\{ T_{11}(p_1, r_1, a_{11}) + T_{21}(p_1, r_1, a_{11}, a_{21}) + T_{12}^*(\tilde{p}_{12}, \tilde{r}_{12}, a_{11}) + T_{22}^*(\tilde{p}_{22}, \tilde{r}_{22}, a_{11}, a_{21}) \right\} \quad (5.28)$$

avec $T_{11}(p_1, r_1, a_{11})$ donné par (5.9), $T_{21}(p_1, r_1, a_{11}, a_{21})$ par (II.17), $T_{12}^*(\tilde{p}_{12}, \tilde{r}_{12}, a_{11})$ par (5.20) et $T_{22}^*(\tilde{p}_{22}, \tilde{r}_{22}, a_{11}, a_{21})$ calculé numériquement. L'ensemble admissible du coeffi-

cient a_{11} , A_{11} , est borné inférieurement par la valeur de $(d_1/k'_{12})((r_2 + p_2)/r_2)$ qui vient de la condition d'ergodicité (la faisabilité de la demande) et supérieurement par la valeur de 1, avec les deux bornes non incluses. Quant à l'ensemble admissible du coefficient a_{21} , A_{21} , il est en fait une fonction de a_{11} . L'inéquation (5.5) exige que le rapport k'_{11}/k'_{21} soit supérieur au rapport z_{11}/z_{21} , et ce dernier supérieur à k'_{12}/k'_{22} . z_{11} peut être exprimé en fonction de a_{11} par l'intermédiaire de (5.6), et z_{21} en fonction de a_{21} par l'algorithme itératif de l'Annexe II.3. En vertu de (5.5) et pour un a_{11} quelconque, z_{21} est borné inférieurement par $z_{21_{min}}(a_{11}) = z_{11}k'_{21}/k'_{11}$ et supérieurement par $z_{21_{max}}(a_{11}) = z_{11}k'_{22}/k'_{12}$. Par conséquent, les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble admissible du coefficient a_{21} , $A_{21}(a_{11})$, sont données respectivement par $a_{21}(z_{21_{min}}(a_{11}))$ et $a_{21}(z_{21_{max}}(a_{11}))$; où $a_{21}(z_{21_{min}}(a_{11}))$ et $a_{21}(z_{21_{max}}(a_{11}))$ sont calculés par l'algorithme itératif de l'Annexe II.3.

5.6 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons un exemple de données statistiques pour une ligne de transfert non-homogène de deux machines produisant deux types de pièces. Cet exemple sera optimisé par la programmation dynamique deux fois. La première optimisation sera faite par l'*algorithme de maille adaptive* présenté à la section 4.6.3 sous la politique synchronisée de pièces et la deuxième par la programmation dynamique classique mais sous la politique prioritaire. Dans le premier cas, les taux maximaux de la production synchronisée, $\bar{k}_{ji}$, respectant (3.7) sont définis automatiquement par (3.8a) et (3.8b) avec $j = 1, 2$ et $i = 1, 2$. Quant au deuxième cas à *partir de techniques d'approximation numérique totalement différentes*, nous allons choisir les taux maximaux de la production prioritaire, k'_{ji} , de sorte à respecter (5.5) mais avec k'_{11}/k'_{21} à peine supérieur à k'_{12}/k'_{22} , et ce dernier à peine supérieur à d_1/d_2 afin de pouvoir comparer les résultats obtenus avec ceux du premier cas. Les données de la ligne sont les suivantes. $c_{11} = c_{21} = c_{12}^+ = c_{22}^+ = 2$,

$c_{12}^- = c_{22}^- = 10$, $d_1 = 1.25$, $d_2 = 1.5$, $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.3$, $r_1 = 0.5$, $r_2 = 0.7$, $k_{11} = 8.20857$, $k_{21} = 11.492$, $k_{12} = 10.94$ et $k_{22} = 5.75789$.

Par (3.8a) et (3.8b), nous calculons $\bar{k}_{11} = 4.42$, $\bar{k}_{21} = 5.304$, $\bar{k}_{12} = 3.33537$ et $\bar{k}_{22} = 4.00244$. Notons que $\bar{k}_{11}/\bar{k}_{21} = \bar{k}_{12}/\bar{k}_{22} = d_1/d_2 = 0.83333$. En ce qui concerne les taux maximaux de la production prioritaire, nous choisissons $k'_{11} = 4.43$, $k'_{21} = 5.29$, $k'_{12} = 3.34$ et $k'_{22} = 4$. Notons que $k'_{11}/k'_{21} = 0.83743$, $k'_{12}/k'_{22} = 0.835$ et $d_1/d_2 = 0.83333$; ce qui respecte la condition de la production prioritaire (5.5).

TABLEAU 5.7 Solution optimale par l'algorithme de maille adaptive sous la politique synchronisée

a_{11}^*	0.85368
a_{21}^*	0.85368
z_{11}^*	2.07264
z_{21}^*	2.48717
z_{12}^*	4.40562
z_{22}^*	5.28674
T_{tot}^*	31.42143

TABLEAU 5.8 Solution optimale par la programmation dynamique sous la politique prioritaire

a_{11}^*	0.7936401
a_{21}^*	0.7936399
z_{11}^*	1.0595
z_{21}^*	1.26518
z_{12}^*	5.56402
z_{22}^*	5.67409
T_{tot}^*	31.53645

Le tableau 5.7 (respectivement 5.8) montre les paramètres optimaux obtenus par la programmation dynamique sous la politique synchronisée (respectivement prioritaire). T_{tot}^* est le coût minimal de stockage et de pénurie pour toute la ligne.

Il est clair des résultats du cas de la production synchronisée (tableau 5.7) que $a_{11}^* = a_{21}^*$ et que $z_{11}^*/z_{21}^* = z_{12}^*/z_{22}^* = d_1/d_2 = 0.83333$; tandis que les résultats du cas de la production

prioritaire (tableau 5.8) montrent que $a_{11}^* > a_{21}^*$ et que $k'_{11}/k'_{21} > z_{11}^*/z_{21}^* > k'_{12}/k'_{22}$. De plus, nous pouvons remarquer que le coût total optimal de la production synchronisée est légèrement inférieur à celui de la production prioritaire.

À ce stade, si nous considérons les mêmes données de la ligne ci-haut, mais choisissons d'autres taux maximaux de production prioritaire qui respectent évidemment (5.5) avec dans ce cas des rapports plus étendus ($k'_{11}/k'_{21} \gg k'_{12}/k'_{22}$), il serait intéressant de comparer le résultat obtenu pour ce cas avec ceux d'avant. Fixons $k'_{11} = 4.74795952782462$, $k'_{21} = 4.84485666104553$, $k'_{12} = 3.51642857142857$ et $k'_{22} = 3.90714285714286$. Pour ces valeurs, $k'_{11}/k'_{21} = 0.98$ et $k'_{12}/k'_{22} = 0.9$; le tableau 5.9 montre dans ce cas les paramètres optimaux de la programmation dynamique sous la politique prioritaire. Le coût total optimal du tableau 5.9 est inférieur à ceux des tableaux 5.7 et 5.8. Par contre, si les rapports des taux maximaux de production prioritaire sont très étalés ($k'_{11}/k'_{21} \gg \gg k'_{12}/k'_{22}$), le coût total optimal commencera à augmenter de nouveau. En fait, ce dernier cas est un cas extrême qui pourrait engendrer des longues périodes de pénurie du stock x_{21} puisque la pièce 2 est fortement défavorisée; ce qui forcerait une solution optimale à augmenter les seuils critiques correspondant à la deuxième pièce engendrant ainsi des coûts supplémentaires de stockage.

TABLEAU 5.9 Solution optimale par la programmation dynamique sous la politique prioritaire pour un autre choix des k'_{ji}

a_{11}^*	0.84862
a_{21}^*	0.83213
z_{11}^*	1.96431
z_{21}^*	2.0044
z_{12}^*	4.15958
z_{22}^*	4.8964
T_{tot}^*	29.89335

Pour conclure cette étude comparative, nous pourrions dire que la stratégie prioritaire peut être plus avantageuse que la stratégie synchronisée au niveau de l'optimisation quand le rapport des taux maximaux de la production prioritaire pour la machine i

$(k'_{1i}/k'_{2i}, i = 1, 2)$ se situe à mi-chemin sur le segment liant les deux points $(k_{1i}, 0)$ et $(\bar{k}_{1i}, \bar{k}_{2i})$ de la figure 5.2. Par contre, les cas extrêmes où l'on se rapproche d'une des deux extrémités (les points $(k_{1i}, 0)$ et $(\bar{k}_{1i}, \bar{k}_{2i})$), la production synchronisée sera plus avantageuse au niveau de l'optimisation. De nombreuses comparaisons confirment également cette conclusion.

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit la classe de stratégies prioritaires combinée avec la politique décentralisée de type Kanban. Nous avons modélisé mathématiquement de façon approximative le système avec deux machines produisant deux types de pièces à la section 5.3. Cette modélisation se caractérise par l'éclairage physique qu'elle apporte, et les simplifications mathématiques qu'elle permet dans l'analyse. Le modèle mathématique présenté s'est avéré très précis d'après les comparaisons faites à la section 5.4 de la performance du système modélisé avec la performance de la simulation de Monte-Carlo.

Encore une fois, la technique de décomposition/agrégation vient jouer un rôle crucial dans l'analyse de performance du système manufacturier étudié sous les politiques décentralisées à seuils critiques avec des stratégies prioritaires. Cette technique permet l'obtention d'un modèle mathématique lucide et un algorithme d'optimisation par la programmation dynamique susceptible d'être implanté pour optimiser le système. La modélisation et l'analyse de performance de la stratégie prioritaire quoique plus complexe que celles de la stratégie synchronisée de pièces, mais semble-t-il plus économique dans les cas où les taux de production prioritaire favorisent raisonnablement la pièce prioritaire; en d'autres termes, dans les cas où les taux de production prioritaire sont loin d'une part de l'extrémité de la production synchronisée et d'autre part de l'extrémité où l'on ne produit que la pièce prioritaire. Sinon, autour des deux extrémités la production synchronisée reste plus économique.

CHAPITRE 6

CONCLUSION GÉNÉRALE

6.1 Discussion et Analyse

La gestion de la fabrication dans les lignes de production multi-machines multi-pièces est un problème réel d'une grande importance ; et il a été pourtant peu étudié analytiquement dans sa dimension la plus générale. Les rares études existantes souffrent de multiples lacunes telles que la fragilité de la représentation de la performance du système, l'impuissance de la généralisation à une longue ligne ou l'incapacité d'implémentation d'une optimisation à cause de la complexité de calcul. L'importance du sujet et le manque aigu d'études rigoureuses pour ces ateliers nous ont encouragés à consacrer cette recherche à combler les besoins.

Dans cette étude, nous avons réussi à étudier la performance des lignes de transfert multi-machines multi-pièces de façon analytique approximative mais très précise, sous la classe de politiques décentralisées à seuils critiques agissant comme des niveaux de Kanbans. Ceci nous a aidé à développer des algorithmes rapides et performants pour l'optimisation des seuils critiques en question ; ce qui nous a permis par la suite d'apporter des solutions numériques au problème. La difficulté au niveau de l'analyse des machines (*difficulté horizontale*) a été résolue par la technique de décomposition/agrégation basée sur l'hypothèse de découplage des machines et le principe de moyennage de la demande ; tandis que la difficulté au niveau de l'analyse multi-pièces (*difficulté verticale*) a été surmontée en définissant des classes de stratégies particulières. Les résultats déjà existants pour le cas mono-pièce ont été généralisés pour le cas multi-pièces sous deux classes de stratégies de production multi-pièces : la production synchronisée de pièces

et la production prioritaire. Ces deux stratégies ont été étudiées de façon mathématique rigoureuse.

Dans ce qui suit, nous détaillons les contributions originales de ce travail de recherche et concluons quant aux perspectives de recherche futures dans la continuité des travaux présentés ici.

6.2 Contributions scientifiques du mémoire

Les contributions scientifiques de ce travail de recherche peuvent se résumer comme suit.

- ◇ L'introduction de nouvelles stratégies de production multi-pièces à l'intérieur de la classe de politiques décentralisées à seuils critique. Ces stratégies sont la production synchronisée de pièces (section 3.4) et la production prioritaire (section 5.2).
- ◇ La modélisation approximative des lignes multi-machines multi-pièces, pour les cas partiellement-homogène ainsi que le cas non homogène, par un ensemble fini (égal au nombre de pièces) de lignes multi-machines mono-pièces sous la stratégie de production synchronisée de pièces. Cette stratégie réduit au minimum la complexité du problème en le ramenant à un seul degré de liberté équivalent aux paramètres de la ligne pour un type particulier de pièces. L'étude analytique de la performance du système dans ce cas pour un choix arbitraire d'une ligne mono-pièce a été effectuée à partir de la technique de décomposition/agrégation grâce à laquelle l'atelier de n machines est traité comme n sous-ateliers mono-machines faciles à gérer pour lesquels les résultats déjà existants des machines isolées peuvent être appliqués.
- ◇ L'obtention des coefficients optimaux de disponibilité dans le cas parfaitement homogène, sous la stratégie de production synchronisée de pièces, ces derniers favorisant une production très proche du "Juste à temps". Ce mode de production qui est optimal

en ce qu'il minimise le temps de séjour des encours dans l'atelier, et donc minimise les coûts totaux de stockage sous une contrainte de probabilité de disponibilité des inventaires.

- ◇ Le développement d'algorithmes de résolution du problème de la programmation dynamique sous la stratégie de production synchronisée de pièces opérant avec des politiques à seuils critiques (section 4.6). Ces algorithmes, qui permettent d'apporter des solutions numériques au problème, sont extrêmement puissants tant au niveau de la rapidité de calcul que de la précision de la solution obtenue. De plus ils tiennent compte, pour l'optimisation, des deux coûts : le coût de stockages et le coût de retards de livraison pour toute la ligne.
- ◇ L'exploration et l'analyse de la stratégie de production prioritaire opérant avec des politiques à seuils critiques. Cette stratégie s'avère intéressante et peut être appliquée dans bien des cas industriels où l'on se permet de favoriser la production de certaines pièces sur d'autres. Il faut reconnaître cependant qu'elle est plus difficile à implanter en pratique qu'une politique synchronisée (qui a tendance à être plus cyclique).
- ◇ L'obtention de modèles mathématiques reflétant avec une très bonne précision le vrai comportement du système et estimant efficacement les paramètres d'états, de contrôle ainsi que les coûts de stockages et de retards de livraisons associés pour les deux stratégies de production multi-pièces (synchronisée et prioritaire).
- ◇ L'étude comparative entre la solution optimale obtenue par le modèle sous la stratégie de production synchronisée de pièces et celle obtenue par le modèle sous la stratégie de prioritaire pour les lignes non homogènes de deux machines produisant deux types de pièces. Cette étude montre que l'analyse de performance du système sous les stratégies prioritaires bien que plus complexe que celle sous les stratégies synchronisées, demeure plus générale sur le plan de choix des taux maximaux de production et menant ainsi à des niveaux d'optimisation plus poussés dans la majorité des cas.

6.3 Perspectives

Les résultats de recherche de ce travail peuvent admettre des extensions et ouvrir des nouvelles portes de recherche. Parmi les perspectives possibles, nous citons de façon non exclusive les points suivants.

- ◇ Étude de la performance des lignes multi-machines multi-pièces sous des stratégies synchronisées de pièces combinées avec des politiques de production du type *Conwip* (*Constant work-in-process*) ou hybrides du type *Kanban/Conwip*.
- ◇ Développer des algorithmes d'optimisation pour stratégies prioritaires dans les lignes de transfert multi-machines multi-pièces incluant les paramètres de taux de production aux côtés des seuils critiques comme paramètres à optimiser.
- ◇ Généralisation des lignes de transfert sous des stratégies prioritaires au cas multi-machines multi-pièces, avec dans ce cas n et $m > 2$, et développement d'un algorithme puissant de solution du problème d'optimisation associé tel que l'*algorithme de maille adaptive* présenté à la section 4.6.3.
- ◇ Explorer le cas des lignes multi-machines multi-pièces sous les stratégies prioritaires avec des stratégies synchronisées de pièces combinées avec des politiques de production du type *Conwip* ou hybrides du type *Kanban/Conwip*.
- ◇ Étendre l'étude comparative des deux stratégies (synchronisée et prioritaire) pour un certain nombre de machines (n) et de pièces (m) avec n et $m > 2$.

RÉFÉRENCES

- [1] ALGOET P. H., Aug. 1989, "Flow balance equations for the steady-state distribution of a flexible manufacturing system", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, No. 8, pp 917-921.
- [2] AKELLA R. and KUMAR P. R., Feb. 1986, "Optimal control of production rate in failure prone manufacturing system", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-31, No. 2, pp. 116-126.
- [3] BERTSEKAS D., *Dynamic Programming and Optimal Control*, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, Vol. I, 3rd edition 2005.
- [4] BIELECKI T. and KUMAR P. R., July-Aug. 1988 "Optimality of zero-inventory policies for unreliable manufacturing systems", *Operations research*, vol. 36, no. 4., pp. 532-541.
- [5] BRANDIN B. A., WONHAM W. M., Feb 1994, "Supervisory control of timed discrete event systems", *IEEE transactions on Automatic Control*, Vol. 39 N. 2, pp 329-341.
- [6] BURMAN M. H., "New results in flow line analysis", Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, June 1995.
- [7] BUZACOTT J. A. and SHANTHIKUMAR J. G., "Stochastic models of manufacturing systems", *Prentice-Hall, INC., Englewood Cliffs, New Jersey*, 1993.
- [8] CARAMANIS M. C. and SHARIFNIA A., 1991, "Near-optimal manufacturing flow controller design", *International Journal of Flexible Manufacturing Systems*, vol. 3(4), pp 321-336.
- [9] DALLERY Y., DAVID R. and XIE X. L., 1988, "An efficient algorithm for analysis of transfer lines with unreliable machine and finite buffers", *IIE Transactions*, vol. 20, no. 3, pp. 280-283.

- [10] DALLERY Y., DAVID R. and XIE X. L., sept 1989, "Approximate analysis of transfer lines with unreliable machine and finite buffers", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, no. 9, pp. 943-953.
- [11] DALLERY Y. and GERSHWIN S. B., 1992, "Manufacturing flow line systems : A review of models and analytical results", *Journal of Queueing Systems*, vol. 12, pp 3-94.
- [12] DUBOIS D. and STECKE K. E., 1983, "Using Petri nets to represent production processes", *proceeding of the 22th IEEE conference on Decision and Control, San Antonio, TX*, Vol. 3, pp 1062-1067.
- [13] EL-FERIK S. and MALHAMÉ R. P., 1997, "Padé approximants for transient optimization of hedging control systems in manufacturing", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, no. 4, pp. 440-457.
- [14] EL-FERIK S. and MALHAMÉ R. P. and Boukas E.-K., 1998, "A tractable class of maximal hedging policies in multi-part manufacturing systems", *Discrete Event Dynamic Systems : Theory and applications*, vol. 8, pp. 299-331.
- [15] GERSHWIN S. B., Mar-apr 1987, "An efficient decomposition method for the approximate evaluation of tandem queues with finite storage space and blocking". *Operations Research Society of America*, vol. 35, no. 2, pp. 291-305.
- [16] GERSHWIN S. B., 1987, "Representation and analysis of transfer lines with machines that have different processing rates", *Annals of Operations Research*, vol. 9, pp. 511-530.
- [17] GERSHWIN S. B. and BURMAN S. H., 2000, "A decomposition method for analysing inhomogeneous assembly/disassembly systems", *Annals of Operations Research*, Netherlands, vol. 93, pp. 91-115.
- [18] HU J. Q., Feb. 1995, "Production control for failure-prone production systems with no backlog permitted", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 40, pp. 299-305.

- [19] JANG Y. J., *Mathematical modeling and analysis of flexible production lines*, Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, June 2007.
- [20] KIMEMIA J. G. and GERSHWIN S. B., Dec. 1983, "An algorithm for the computer control of production in flexible manufacturing systems", *IIE Transactions*, vol. AC-15, pp 353-362.
- [21] LIBEROPOULOS I. G. and CARAMANIS M., May 1994, "Infinitesimal perturbation analysis for second derivative estimation and design of manufacturing flow controllers", *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 81, no. 2, pp. 297-327.
- [22] MALHAMÉ R. P., 1985, "Electrical load model synthesis by diffusion approximation of a high-order hybrid-state stochastic system", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-30, pp. 854-860.
- [23] MALHAMÉ R. P., 1986, "A Markovian jump process driven stochastic hybrid state model, and its application for the prediction of the statistical behavior of controlled electric water heating loads in power systems", in *Proc. IEEE, 25th Conf Decision Control, Athens, Greece*, pp. 1228-1230.
- [24] MALHAMÉ R. P., Feb 1993, "Ergodicity of hedging control policies in single-part multiple-state manufacturing systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, no. 2, pp. 340-343.
- [25] MALHAMÉ R. P. and Boukas E.-K., May 1991, "A renewal theoretic analysis of a class of manufacturing systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36, no. 5, pp. 580-587.
- [26] MASCOLO M. D., FREIN Y. and DALERY Y., 1996, "An analytical method for performance evaluation of kanban controlled production systems", *Operations Research*, 44 (1), pp 50-64.

- [27] MBIHI J., *Commande à seuils critiques de la production dans un atelier de fabrication avec machines en tandem non fiables*, Thèse de Ph.D., École Polytechnique de Montréal, Québec, Canada, Juin 1999.
- [28] MBIHI J. and MALHAMÉ R. P., Dec. 1999, "Optimization of a class of decentralized hedging production policies in an unreliable two-machine flow shop", *38th IEEE Conf. Decision Control*, Tampa, FL, pp 2282-2287.
- [29] MBIHI J., MALHAMÉ R. P. and SADR J., 2001 "Two approximations as a basis for the optimization of production in long unreliable markovian transfer lines", *Decision and Control in Management Science*, G. Zaccour, Ed. Amsterdam, The Netherlands : Kluwer,.
- [30] MUCKSTADT J. A. and TAYUR S. R., 1995, "A comparison of alternative Kanban control mechanism. I. Background and structural results", *IIE Transactions*, vol. 27, pp 140-150.
- [31] OLSDER G. J. and SURI R., Dec 1980, "Time-optimal control of parts-routing in a manufacturing system with failure-prone machines", *proceeding of the 19th IEEE conference on Decision and Control Including the Symposium on Adaptive Processes*, Albuquerque, New Mexico, pp 45-61.
- [32] OSTROFF J. S., WONHAM W. M., Apr 1990, "A framework for real-time discrete event control", *IEEE transactions on Automatic Control*, Vol. 35 N. 3, pp 412-416.
- [33] PIERREVAL H. and MAHEY P., Oct 1996, "Design of manufacturing systems through simulation optimization : a new approach based on mathematical programming", *proc. European Simulation Symposium, Genes, Italy*, pp 264-267.
- [34] REISMAN A., KUMAR A., MOTWANI J. et CHENG C. H., 1997, "Cellular manufacturing : A statistical review of the litterature (1965- 1995)", *Operations Research*, vol. 45 (4), pp 508-519.

- [35] SADR J. and MALHAMÉ R. P., Jan. 2004, "Decomposition/Aggregation-based dynamic programming optimization of partially homogeneous unreliable transfer lines", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, pp. 68-81.
- [36] SADR J. and MALHAMÉ R. P., 2004, "Unreliable transfer lines : Decomposition/Aggregation and optimization", *Annals of Operations Research*, vol. 125, pp. 167-190.
- [37] SETHI S. P., SUO W., TAKSAR M. I. and YAN H., Mar 1998, "Optimal Production Planning in a Multi-Product Stochastic Manufacturing System with Long-Run Average Cost", *Discrete Event Dynamic Systems*, vol. 8, no. 1, pp. 37-54.
- [38] SETHI S. P. and ZHANG Q., 1994, "Hierarchical Decision Making in Stochastic Manufacturing Systems". Birkhauser, Boston, Cambridge, MA.
- [39] SHARIFNIA A., 1988, "Production control of a manufacturing system with multiple machine States", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 33, pp 620-625.
- [40] SRIVASTAN N. and DALLERY Y., 1994, "Partial Characterization of Optimal Policies in Unreliable Multiple-Part-Type Systems", *Technical Report Laboratory for Manufacturing and Productivity*, LMP94-004.
- [41] YOUSSEF S. and MALHAMÉ R. P., June 2008, "An improved dynamic programming algorithm for nonhomogeneous transfer line Kanban optimization", *16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Ajaccio, France, pp 204-209.

ANNEXE I

DÉMONSTRATIONS

I.1 Démonstration du lemme 3.1

Commençant par la dernière machine M_n :

Cette machine a une nature très particulière parce qu'elle peut admettre un niveau positif ou négatif de stock pour toutes les pièces. On suppose que le stock en aval de M_n des pièces j et l ($j, l = 1, \dots, m$ et $l \neq j$) au temps t_0 satisfait $0 < x_{jn}(t_0) < z_{jn}$, $0 < x_{ln}(t_0) < z_{ln}$ et $x_{jn}(t_0)/x_{ln}(t_0) = d_j/d_l$. Cette condition initiale ne représente aucune perte de généralité parce que même si initialement cette relation n'est pas respectée, elle le sera après une période extrêmement courte (presque négligeable). Dès lors, l'analyse sera valide et demeurera valide pour toujours. La figure I.1 nous montre un certain scénario du comportement des pièces j et l . Si les deux stocks sont en train d'augmenter pendant la période comprise entre les instants t_0 et t_1 (c'est à dire que le stock $n - 1$ n'est pas en pénurie, que M_n est en marche et qu'elle produit les deux pièces j et l à leurs taux maximaux de production respectivement $\bar{k}_{jn}$ et $\bar{k}_{ln}$), les niveaux des stocks pendant cette période seront les suivants.

Pour tout $t_0 \leq t \leq t_1$:

$$x_{jn}(t) = x_{jn}(t_0) + (\bar{k}_{jn} - d_j)(t - t_0) \quad (\text{I.1})$$

$$x_{ln}(t) = x_{ln}(t_0) + (\bar{k}_{ln} - d_l)(t - t_0) \quad (\text{I.2})$$

Par (I.1), (I.2), la politique de production synchronisée de pièces (3.7) et les conditions initiales ci-haut, on peut calculer le rapport entre x_{jn} et x_{ln} pendant la période en question.

$$\begin{aligned}
 \frac{x_{jn}(t)}{x_{ln}(t)} &= \frac{x_{jn}(t_0) + (\bar{k}_{jn} - d_j)(t - t_0)}{x_{ln}(t_0) + (\bar{k}_{ln} - d_l)(t - t_0)} \\
 &= \frac{\frac{d_j}{d_l}x_{ln}(t_0) + \frac{d_j}{d_l}(\bar{k}_{ln} - d_l)(t - t_0)}{x_{ln}(t_0) + (\bar{k}_{ln} - d_l)(t - t_0)} \\
 &= \frac{d_j}{d_l} \quad \forall t_0 \leq t \leq t_1
 \end{aligned} \tag{I.3}$$

Si les deux stocks x_{jn} et x_{ln} sont en train de diminuer pendant la période comprise entre les instants t_1 et t_2 (c'est à dire que M_n est en panne ou qu'elle est en marche mais ne peut pas produire parce que le niveau du stock en amont est nul), alors les niveaux des stocks pendant cette période seront les suivants.

Pour tout $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$x_{jn}(t) = x_{jn}(t_1) - d_j(t - t_1) \tag{I.4}$$

$$x_{ln}(t) = x_{ln}(t_1) - d_l(t - t_1) \tag{I.5}$$

Par (I.3), (I.4) et (I.5) :

$$\begin{aligned}
 \frac{x_{jn}(t)}{x_{ln}(t)} &= \frac{x_{jn}(t_1) - d_j(t - t_1)}{x_{ln}(t_1) - d_l(t - t_1)} \\
 &= \frac{\frac{d_j}{d_l}x_{ln}(t_1) - \frac{d_j}{d_l}d_l(t - t_1)}{x_{ln}(t_1) - d_l(t - t_1)} \\
 &= \frac{d_j}{d_l} \quad \forall t_1 \leq t \leq t_2
 \end{aligned} \tag{I.6}$$

Que les stocks x_{jn} et x_{ln} , pour $j, l = 1, \dots, m$ et $l \neq j$, soient en train d'augmenter ou de diminuer (peu importe le scénario du comportement des pièces, x_{jn} et x_{ln} augmentent ou diminuent simultanément), les relations (I.3) et (I.6) nous permettent de conclure que le rapport entre les niveaux de ces stocks est le même que celui des demandes (d_j/d_l).

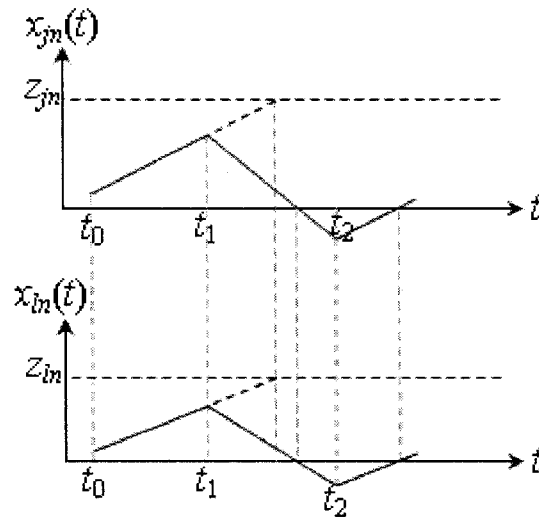


FIGURE I.1 Un certain scénario du comportement des pièces j et l dans le stock n

En plus, si t_1 est suffisamment long pour que x_{jn} atteigne son seuil critique z_{jn} ($x_{jn}(t_1) = z_{jn}$), alors en vertu de (I.3) et la production synchronisée de pièces (3.7), x_{ln} atteindra son seuil critique z_{ln} exactement au même instant. Par conséquent, $\forall t > t_0 : x_{jn}(t)/x_{ln}(t) = z_{jn}/z_{ln} = \bar{k}_{jn}/\bar{k}_{ln} = d_j/d_l$.

Pour l'avant dernière machine M_{n-1} :

Cette machine admet, pour chaque pièce, un niveau de stock compris entre zéro et le seuil critique de la pièce. On suppose que le stock $n - 1$ des pièces j et l ($j, l = 1, \dots, m$ et $l \neq j$) au temps τ_0 satisfait $0 < x_{j,n-1}(\tau_0) < z_{j,n-1}$, $0 < x_{l,n-1}(\tau_0) < z_{l,n-1}$ et $x_{j,n-1}(\tau_0)/x_{l,n-1}(\tau_0) = d_j/d_l$. De plus, si pendant la période comprise entre les instants τ_0 et τ_1 , M_{n-1} est en marche et elle produit les deux pièces j et l à leurs taux maximaux de production respectivement $\bar{k}_{j,n-1}$ et $\bar{k}_{l,n-1}$, les niveaux des stocks pendant cette période seront les suivants.

Pour tout $\tau_0 \leq t \leq \tau_1$:

$$x_{j,n-1}(t) = x_{j,n-1}(\tau_0) + (\bar{k}_{j,n-1} - u_{jn}(t))(t - \tau_0) \quad (\text{I.7})$$

$$x_{l,n-1}(t) = x_{l,n-1}(\tau_0) + (\bar{k}_{l,n-1} - u_{ln}(t))(t - \tau_0) \quad (\text{I.8})$$

Puisque les stocks x_{jn} et x_{ln} atteignent leurs seuils critiques respectifs au même instant, alors si le niveau de l'un de ces stocks est inférieur ou exactement égal à son seuil critique, il en sera de même pour l'autre. Il n'existe donc que trois possibilités pour $u_{jn}(t)$ et $u_{ln}(t)$:

$$- u_{jn}(t) = \bar{k}_{jn} \text{ et } u_{ln}(t) = \bar{k}_{ln}.$$

$$- u_{jn}(t) = d_j \text{ et } u_{ln}(t) = d_l.$$

$$- u_{jn}(t) = u_{ln}(t) = 0.$$

Pour les trois cas possibles, en utilisant la politique de production synchronisée de pièces (3.7) et les conditions initiales ci-haut, il est très facile de montrer que pour tout $\tau_0 \leq t \leq \tau_1$:

$$\frac{x_{j,n-1}(t)}{x_{l,n-1}(t)} = \frac{d_j}{d_l} \quad (\text{I.9})$$

Si la machine M_{n-1} est en panne pendant la période comprise entre les instants τ_1 et τ_2 ou si elle ne peut pas produire, les deux stocks $x_{j,n-1}$ et $x_{l,n-1}$ seront en train de diminuer et les niveaux des stocks pendant cette période seront les suivants. Pour tout $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$:

$$x_{j,n-1}(t) = x_{j,n-1}(\tau_1) - u_{jn}(t)(t - \tau_1) \quad (\text{I.10})$$

$$x_{l,n-1}(t) = x_{l,n-1}(\tau_1) - u_{ln}(t)(t - \tau_1) \quad (\text{I.11})$$

Encore une fois, il n'existe pour $u_{jn}(t)$ et $u_{ln}(t)$ que les mêmes trois possibilités mentionnées ci-haut. Pour chacune de ces possibilités, en utilisant (I.9) et la politique de production synchronisée de pièces (3.7), il est clair que l'équation suivante est vraie.

Pour tout $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$:

$$\frac{x_{j,n-1}(t)}{x_{l,n-1}(t)} = \frac{d_j}{d_l} \quad (\text{I.12})$$

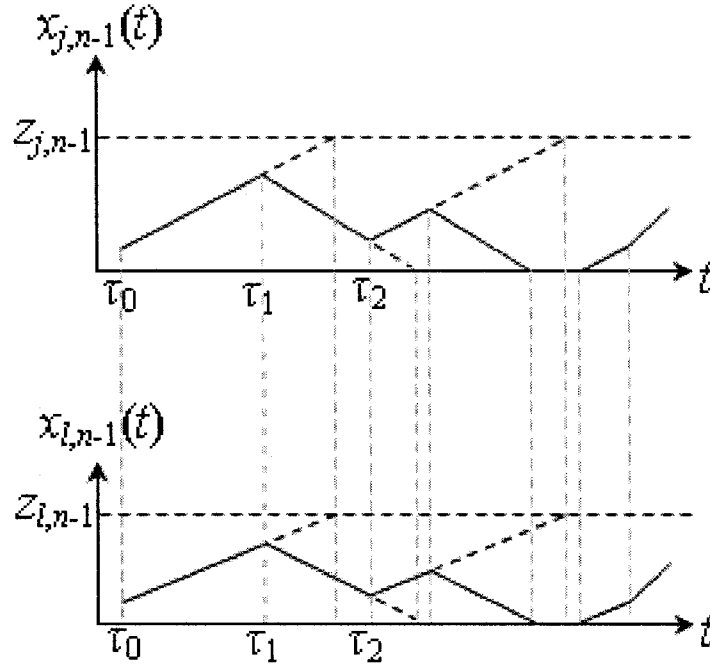


FIGURE I.2 Un certain scénario du comportement des pièces j et l dans le stock $n-1$

Le rapport entre les niveaux des stocks $x_{j,n-1}$ et $x_{l,n-1}$, pour $j, l = 1, \dots, m$ et $l \neq j$, est le même que celui des demandes (d_j/d_l). De plus, si τ_1 est suffisamment long pour que $x_{j,n-1}$ atteigne son seuil critique $z_{j,n-1}$ à l'instant τ_1 ($x_{j,n-1}(\tau_1) = z_{j,n-1}$), alors (I.9) et la production synchronisée de pièces (3.7), nous permettent facilement de démontrer que $x_{l,n-1}$ atteindra son seuil critique $z_{l,n-1}$ exactement au même instant. Or, si τ_2 est suffisamment long pour que $x_{j,n-1}$ tombe à zéro à l'instant τ_2 , alors grâce à (I.12) et la production synchronisée de pièces (3.7), on peut démontrer que $x_{l,n-1}$ tombera à zéro exactement au même instant. Par conséquent, $\forall j, l = 1, \dots, m$ et $l \neq j$ et $\forall t > \tau_0$ tel que $x_{j,n-1}(t) > 0$ (ceci veut aussi dire que $x_{l,n-1}(t) > 0$) : $x_{j,n-1}(t)/x_{l,n-1}(t) = z_{j,n-1}/z_{l,n-1} = \bar{k}_{j,n-1}/\bar{k}_{l,n-1} = d_j/d_l$.

Pour les machines M_{n-2} jusqu'à M_1 :

La même analyse que le cas de la machine M_{n-1} est applicable pour les machines en amont (de M_{n-2} à M_1) donnant la même conclusion.

I.2 Démonstration du lemme 5.1

($\Leftarrow$)

Nous partons des hypothèses suivantes :

- Pour $j = 1, 2$, $k'_{j1} > k'_{j2} > d_j$.
- L'hypothèse suivante représente le point de départ de la production prioritaire :

$$\frac{k'_{11}}{k'_{21}} > \frac{d_1}{d_2} \quad (\text{I.13})$$

$$\frac{k'_{12}}{k'_{22}} > \frac{d_1}{d_2} \quad (\text{I.14})$$

- La première pièce est toujours prioritaire par rapport à la deuxième dans le sens expliqué dans la section 5.2
- Pour garantir que le niveau du stock de la pièce 2 en aval de la première machine (x_{21}) soit en train d'augmenter quand cette pièce est produite à son taux maximal par la première machine, k'_{21} , peu importe le taux de production de cette même pièce par la deuxième machine, il faut imposer l'hypothèse suivante.

$$k'_{21} > k_{22}^a \quad (\text{I.15})$$

Nous allons étudier deux cas principaux. Le premier où les stocks sont en train d'augmenter et le deuxième pour les stocks diminuant.

Première machine :

Cas I : Supposons que $x_{11}(0) = x_{21}(0) = 0^1$, la première machine est en marche et que les stocks x_{11} et x_{21} augmentent de $t = 0$ jusqu'à un certain t_1 (aucun des deux stocks n'a encore atteint son seuil). Les niveaux des stocks x_{11} et x_{21} entre $t = 0$ et t_1 évoluent

¹On peut aussi choisir des conditions initiales telles que $x_{11}(0)/z_{11} = x_{21}(0)/z_{21}$. Ces conditions ne représentent pas une perte de généralité parce que même si initialement cette relation n'est pas respectée, elle le sera après une période extrêmement courte (presque négligeable). Dès lors, l'analyse sera valide et demeurera valide pour toujours.

selon : $x_{11}(t) = 0 + (u_{11}(t) - u_{12}(t)) t$ et $x_{21}(t) = 0 + (u_{21}(t) - u_{22}(t)) t$.

On aimerait que $x_{11}(t_1)/z_{11}$ soit supérieur à $x_{21}(t_1)/z_{21}$ pour que la première pièce soit toujours prioritaire par rapport à la deuxième². Pour ce faire, il faut satisfaire l'inégalité suivante.

$$\frac{z_{11}}{z_{21}} < \frac{x_{11}(t)}{x_{21}(t)} = \frac{u_{11}(t) - u_{12}(t)}{u_{21}(t) - u_{22}(t)} \quad (\text{I.16})$$

Il est clair que $u_{11}(t) = k'_{11}$ et $u_{21}(t) = k'_{21}$ puisque la première machine est fonctionnelle et x_{11} et x_{21} sont inférieurs à leurs seuils respectifs.

Pour les taux de production de la deuxième machine, il existe 4 cas à prendre en considération :

- a. $u_{12}(t) = k'_{12}$ et $u_{22}(t) = k'_{22}$
- b. $u_{12}(t) = d_1$ et $u_{22}(t) = k^a_{22}$
- c. $u_{12}(t) = d_1$ et $u_{22}(t) = d_2$
- d. $u_{12}(t) = 0$ et $u_{22}(t) = 0$

Si l'on substitue de ces valeurs dans (I.16), on obtient :

$$\frac{z_{11}}{z_{21}} < \min \left\{ \frac{k'_{11} - k'_{12}}{k'_{21} - k'_{22}}, \frac{k'_{11} - d_1}{k'_{21} - k^a_{22}}, \frac{k'_{11} - d_1}{k'_{21} - d_2}, \frac{k'_{11}}{k'_{21}} \right\} \quad (\text{I.17})$$

Puisque $k'_{12} > d_1$ et $k^a_{22} > k'_{22}$, donc $(k'_{11} - k'_{12})/(k'_{21} - k'_{22}) < (k'_{11} - d_1)/(k'_{21} - k^a_{22})$; et étant donné (I.13), il est facile de montrer que $(k'_{11}/k'_{21}) < (k'_{11} - d_1)/(k'_{21} - d_2)$. Par conséquent, (I.17) devient :

$$\frac{z_{11}}{z_{21}} < \min \left\{ \frac{k'_{11} - k'_{12}}{k'_{21} - k'_{22}}, \frac{k'_{11}}{k'_{21}} \right\} \quad (\text{I.18})$$

²Si les taux d'augmentation ou de diminution des stocks dans toutes les périodes où $0 < x_{11}(t) < z_{11}$ et $0 < x_{21}(t) < z_{21}$ sont de sorte à ce que $x_{11}(t)/z_{11} > x_{21}(t)/z_{21}$, la première pièce sera toujours prioritaire dans le sens où elle sera toujours plus proche de son seuil que la deuxième. Par conséquent, la première pièce atteindra son seuil en premier et tombera à zéro (pour la première machine) en dernier.

Cas II : Supposons que, à partir d'un certain temps t_2 jusqu'à un certain t_3 , la première machine est en panne et la deuxième est fonctionnelle, $x_{11}(t_2) = z_{11}$ et $x_{21}(t_2) = z_{21}$ ³. Les niveaux des stocks x_{11} et x_{21} entre t_2 et t_3 diminuent selon les équations suivantes :

$$x_{11}(t) = z_{11} + (u_{11}(t) - u_{12}(t))t \quad (\text{I.19})$$

$$x_{21}(t) = z_{21} + (u_{21}(t) - u_{22}(t))t \quad (\text{I.20})$$

Il est clair que $u_{11}(t) = u_{21}(t) = 0$ car la première machine est en panne. Pour les taux de production de la deuxième machine, il existe 3 cas à prendre en considération :

- a. $x_{12}(t) = k'_{12}$ et $x_{22}(t) = k'_{22}$
- b. $x_{12}(t) = d_1$ et $x_{22}(t) = k^a_{22}$
- c. $x_{12}(t) = d_1$ et $x_{22}(t) = d_2$

Pour que $x_{11}(t)/z_{11}$ soit supérieur à $x_{21}(t)/z_{21}$, (I.19) et (I.20) exigent que $1 - u_{12}(t)/z_{11}$ soit supérieur à $1 - u_{22}(t)/z_{21}$ et donc $z_{11}/z_{21} > u_{12}(t)/u_{22}(t)$. Si l'on substitue des valeurs de $u_{12}(t)$ et $u_{22}(t)$ dans cette relation, on obtient l'inéquation suivante.

$$\frac{z_{11}}{z_{21}} > \max \left\{ \frac{k'_{12}}{k'_{22}}, \frac{d_1}{k^a_{22}}, \frac{d_1}{d_2} \right\} \quad (\text{I.21})$$

Puisque $k^a_{22} > d_2$ et étant donné (I.14), il est facile de montrer que $k'_{12}/k'_{22} > d_1/d_2 > d_1/k^a_{22}$. Par conséquent, (I.21) devient :

$$\frac{z_{11}}{z_{21}} > \frac{k'_{12}}{k'_{22}} \quad (\text{I.22})$$

³On peut aussi choisir des conditions initiales plus générales telles que $x_{11}(t_2)/z_{11} = x_{21}(t_2)/z_{21}$ dans lesquelles se trouvent le cas particulier $x_{11}(t_2) = z_{11}$ et $x_{21}(t_2) = z_{21}$. Ces conditions ne représentent pas une perte de généralité parce que notre objectif est d'obtenir $x_{11}(t_3)/z_{11} > x_{21}(t_3)/z_{21}$. Si l'on peut atteindre cet objectif avec $x_{11}(t_2)/z_{11} = x_{21}(t_2)/z_{21}$, ça sera sûrement beaucoup plus facile de l'atteindre avec des conditions initiales telles que $x_{11}(t_2)/z_{11} > x_{21}(t_2)/z_{21}$ qui représentent la réalité des stocks sous la politique prioritaire.

Par (I.18) et (I.22), les bornes de z_{11}/z_{21} sont données par la relation suivante.

$$\min \left\{ \frac{k'_{11} - k'_{12}}{k'_{21} - k'_{22}}, \frac{k'_{11}}{k'_{21}} \right\} > \frac{z_{11}}{z_{21}} > \frac{k'_{12}}{k'_{22}} \quad (\text{I.23})$$

Si $(k'_{11} - k'_{12})/(k'_{21} - k'_{22}) < k'_{11}/k'_{21}$, ceci impliquerait que $k'_{12}/k'_{22} > k'_{11}/k'_{21} > (k'_{11} - k'_{12})/(k'_{21} - k'_{22})$, ce qui voudrait dire que (I.23) est non-réalisable. Par contre, si $(k'_{11} - k'_{12})/(k'_{21} - k'_{22}) > k'_{11}/k'_{21}$, ceci impliquerait que $(k'_{11} - k'_{12})/(k'_{21} - k'_{22}) > k'_{11}/k'_{21} > k'_{12}/k'_{22}$ et donc (I.23) deviendrait réalisable. Par conséquent, les vraies bornes de z_{11}/z_{21} sont donc données par

$$\frac{k'_{11}}{k'_{21}} > \frac{z_{11}}{z_{21}} > \frac{k'_{12}}{k'_{22}} \quad (\text{I.24})$$

Deuxième machine :

La deuxième machine se caractérise par le fait que ses stocks x_{12} et x_{22} sont limités uniquement supérieurement par les seuils z_{12} et z_{22} . Ces stocks peuvent donc devenir négatifs. Supposons que $x_{12}(t_0) = z_{12}$ et $x_{22}(t_0) = z_{22}$. Soient t_1 le temps de premier retour de x_{12} à z_{12} à partir de t_0 , t_{ON} le temps total entre t_0 et t_1 où la deuxième machine est fonctionnelle et t_{OFF} le temps total entre t_0 et t_1 où la deuxième machine est en panne ($t_{ON} + t_{OFF} = t_1 - t_0$).

Si l'on néglige les périodes où la deuxième machine est en marche et les stocks x_{11} et x_{21} sont en pénurie⁴, on peut dire que x_{12} et x_{22} évoluent entre t_0 et t_1 selon les équations suivantes :

$$x_{12}(t_1) = x_{12}(t_0) + (k'_{12} - d_1)t_{ON} - d_1t_{OFF} \text{ et } x_{22}(t_1) = x_{22}(t_0) + (k'_{22} - d_2)t_{ON} - d_2t_{OFF}$$

⁴Si la première pièce est prioritaire par rapport à la deuxième en négligeant ces périodes, elle le sera sûrement en les prenant en considération parce que x_{11} tombe à zéro après x_{21} .

On a $x_{12}(t_1) = z_{12}$ et on aimerait que $x_{22}(t_1)$ soit inférieur à z_{22} .

$$z_{12} = z_{12} + (k'_{12} - d_1)t_{ON} - d_1 t_{OFF} \quad (\text{I.25})$$

$$z_{22} > z_{22} + (k'_{22} - d_2)t_{ON} - d_2 t_{OFF} \quad (\text{I.26})$$

Selon (I.25), $t_{OFF}/t_{ON} = (k'_{12} - d_1)/d_1$, tandis que (I.26) exige que t_{OFF}/t_{ON} soit supérieur à $(k'_{22} - d_2)/d_2$. Pour satisfaire les deux rapports, il faut que :

$$\frac{t_{OFF}}{t_{ON}} = \frac{k'_{12} - d_1}{d_1} > \frac{k'_{22} - d_2}{d_2} \quad (\text{I.27})$$

Ceci veut dire que $(k'_{12} - d_1)/(k'_{22} - d_2)$ doit être supérieur à d_1/d_2 , et donc $k'_{12}/k'_{22} > d_1/d_2$. Aucune condition n'est exigée sur le rapport des seuils z_{12}/z_{22} (sauf d'être positif).

À ce stade, nous pouvons affirmer que si la première pièce est toujours prioritaire par rapport à la deuxième, la condition suivante sera satisfaite.

$$\frac{k'_{11}}{k'_{21}} > \frac{z_{11}}{z_{12}} > \frac{k'_{12}}{k'_{22}} > \frac{d_1}{d_2} \quad (\text{I.28})$$

($\Rightarrow$)

Il est très facile de montrer maintenant que si la condition (I.28) est satisfaite, la pièce 1 sera toujours prioritaire par rapport à la pièce 2 avec une analyse semblable à celle ci-haut. Donc, (I.28) est la condition nécessaire et suffisante pour le comportement prioritaire expliqué dans la section (5.2).

ANNEXE II

RAPPELS

Malhamé et El-Kébir [25] (respectivement El-Ferik et Malhamé [13]) ont caractérisé la dynamique transitoire des fonctions densité de probabilité associées au processus de production sous une classe de politique à plusieurs niveau de seuils critiques pour des machines multi-états. Le processus était vu comme un processus Markovien à état hybride continu/discret (comme le cas de notre système). Ils ont développé les équations de Kolmogorov associées à ce système. La dynamique probabiliste d'un système similaire a été développé par Malhamé dans le domaine du génie électrique ([22] et [23]). Dans les sections II.1 et II.2, nous adaptons les équations de Kolmogorov à notre système et trouvons la solution de ces équations en régime permanent.

II.1 Solution des équations de Kolmogorov pour la première machine produisant la pièce 2

Soient $f_0(x_{21}, t)$, $f_1(x_{21}, t)$ et $f_2(x_{21}, t)$ les densités de probabilité de $x_{21}(t)$ dans les états (0), (1) et (2) (voir figure 5.4). Le vecteur de densité hybride $\vec{f}(x_{21}, t) = [f_0(x_{21}, t), f_1(x_{21}, t), f_2(x_{21}, t)]^T$ satisfera, pour tout $0 < x_{21} < z_{21}$, l'équation aux dérivées partielles de Kolmogorov suivante.

$$\frac{\partial \vec{f}(x_{21}, t)}{\partial t} = -V \frac{\partial \vec{f}(x_{21}, t)}{\partial x_{21}} + \Lambda^T \vec{f}(x_{21}, t) \quad (\text{II.1})$$

où V la matrice des taux de production donnée par

$$V = \begin{bmatrix} -\frac{d_2}{a_{21}} & 0 & 0 \\ 0 & k'_{21} - \frac{d_2}{a_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & k^a_{21} - \frac{d_2}{a_{21}} \end{bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

et Λ la matrice de transition donnée par

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -r_1 & r_1 & 0 \\ p_1 & -(p_1 + r^a_{21}) & r^a_{21} \\ p_1 & 0 & -p_1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

k^a_{21} est le taux de production accrue de la pièce 2 par la première machine quand le niveau du stock x_{11} atteint son seuil critique z_{11} et donc le taux de production de la pièce 1 chute à $\frac{d_1}{a_{11}}$. La figure II.1 montre l'espace des taux de production de la première machine d'où l'on peut calculer k^a_{21} comme suit.

$$k^a_{21} = \frac{k_{21}}{k_{11}} \left(k_{11} - \frac{d_1}{a_{11}} \right) \quad (\text{II.4})$$

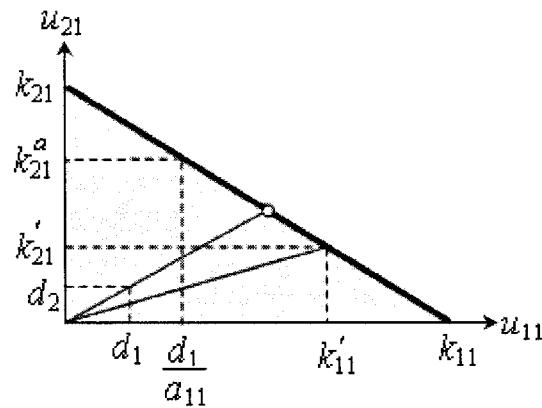


FIGURE II.1 Espace des taux de production par la première machine

Mais en régime permanent, $\partial f(x_{21}, t)/\partial t = 0$; et donc (II.1) devient comme suit.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{f}(x_{21})}{\partial x_{21}} &= V^{-1} \Lambda^T \vec{f}(x_{21}) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{r_1}{d_2/a_{21}} & -\frac{p_1}{d_2/a_{21}} & -\frac{p_1}{d_2/a_{21}} \\ \frac{r_1}{k'_{21}-d_2/a_{21}} & -\frac{(p_1+r_{21}^a)}{k'_{21}-d_2/a_{21}} & 0 \\ 0 & \frac{r_{21}^a}{k_{21}^a-d_2/a_{21}} & -\frac{p_1}{k_{21}^a-d_2/a_{21}} \end{bmatrix} \vec{f}(x_{21}) \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Les trois valeurs propres de la matrice $V^{-1} \Lambda^T$ sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_{2,3} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4c})/2$ où

$$b = \frac{p_1}{k_{21}^a - \frac{d_2}{a_{21}}} + \frac{p_1 + r_{21}^a}{k'_{21} - \frac{d_2}{a_{21}}} - \frac{r_1}{\frac{d_2}{a_{21}}} \quad (\text{II.6})$$

$$c = \frac{p_1(p_1 + r_{21}^a)}{(k_{21}^a - \frac{d_2}{a_{21}})(k'_{21} - \frac{d_2}{a_{21}})} - \frac{p_1 r_1}{\frac{d_2}{a_{21}}(k_{21}^a - \frac{d_2}{a_{21}})} - \frac{r_1 r_{21}^a}{\frac{d_2}{a_{21}}(k'_{21} - \frac{d_2}{a_{21}})} \quad (\text{II.7})$$

et les trois vecteurs propres correspondants sont les suivants.

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} \frac{p_1}{r_1} \left(\frac{p_1}{r_{21}^a} + 1 \right) \\ \frac{p_1}{r_{21}^a} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

$$\omega_i = \begin{bmatrix} p_1(k'_{21} - \frac{d_2}{a_{21}}) + r_{21}^a(k_{21}^a - \frac{d_2}{a_{21}}) + \lambda_i(k'_{21} - \frac{d_2}{a_{21}})(k_{21}^a - \frac{d_2}{a_{21}}) \\ \frac{d_2}{a_{21}} [p_1 + \lambda_i(k_{21}^a - \frac{d_2}{a_{21}})] \\ r_{21}^a \frac{d_2}{a_{21}} \end{bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

pour $i = 2, 3$. Les densités de probabilité de $x_{21}(t)$, $f_0(x_{21})$, $f_1(x_{21})$, et $f_2(x_{21})$, sont données par l'équation suivante.

$$\vec{f}(x_{21}) = \begin{bmatrix} f_0(x_{21}) \\ f_1(x_{21}) \\ f_2(x_{21}) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^3 c_i \omega_i e^{\lambda_i(x_{21} - z_{21})} \quad (\text{II.10})$$

avec c_1 , c_2 et c_3 trois constantes.

Il existe trois frontières $x_{21} = 0$, $x_{21} = z_{21}^1$ (le seuil critique de x_{21} atteint par l'état (1)) et $x_{21} = z_{21}^2$ (le seuil critique de x_{21} atteint par l'état (2)) ; les probabilités stationnaires en régime permanent de ces frontières sont respectivement P_0 , $P_{z_{21}}^1$ et $P_{z_{21}}^2$. Nous pouvons ainsi écrire les conditions frontières suivantes.

$$\frac{d_2}{a_{21}} f_0(0^+) = r_1 P_0 \quad (\text{II.11})$$

$$r_1 P_0 = (k'_{21} - \frac{d_2}{a_{21}}) f_1(0^+) \quad (\text{II.12})$$

$$(k'_{21} - \frac{d_2}{a_{21}}) f_1(z_{21}^-) = (p_1 + r_{21}^a) P_{z_{21}}^1 \quad (\text{II.13})$$

$$(k_{21}^a - \frac{d_2}{a_{21}}) f_2(z_{21}^-) + r_{21}^a P_{z_{21}}^1 = p_1 P_{z_{21}}^2 \quad (\text{II.14})$$

$$f_2(0^+) = 0 \quad (\text{II.15})$$

Les équations (II.11) et (II.12) sont respectivement les courants de probabilités entrants et sortant de la frontière $x_{21} = \text{zéro}$ et les équations (II.13) et (II.14) représentent les courants de probabilités entrants aux frontières $x_{21} = z_{21}^1$ et $x_{21} = z_{21}^2$ ¹. L'équation II.15 est imposée pour garantir l'impossibilité d'une chute immédiate du niveau de x_{21} juste après avoir quitté l'état (2). Ces cinq équations avec une sixième qui impose que la somme des probabilités soit égale à 1 nous donnent la solutions des six inconnues du système (P_0 , $P_{z_{21}}^1$, $P_{z_{21}}^2$, c_1 , c_2 et c_3). Ces équations peuvent être représentées sous forme matricielle comme suit : $A X = B$ où $X = [P_0 \ P_{z_{21}}^1 \ P_{z_{21}}^2 \ c_1 \ c_2 \ c_3]^T$, $B = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ et A

¹Les courants de probabilités sortant de la frontière $z_{21} = z_{21}^1 + z_{21}^2$ sont inclus dans (II.13) et (II.14) ensemble.

la matrice suivante.

$$A = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & -\omega_{11} \frac{d_2}{a_{21}} & -\omega_{12} \frac{d_2}{a_{21}} e^{-\lambda_2 z_{21}} & -\omega_{13} \frac{d_2}{a_{21}} e^{-\lambda_3 z_{21}} \\ r_1 & 0 & 0 & -\omega_{21} (k'_{21} - \frac{d_2}{a_{21}}) & -\omega_{22} (k'_{21} - \frac{d_2}{a_{21}}) e^{-\lambda_2 z_{21}} & -\omega_{23} (k'_{21} - \frac{d_2}{a_{21}}) e^{-\lambda_3 z_{21}} \\ 0 & p_1 + r_{21}^a & 0 & -\omega_{21} (k'_{21} - \frac{d_2}{a_{21}}) & -\omega_{22} (k'_{21} - \frac{d_2}{a_{21}}) & -\omega_{23} (k'_{21} - \frac{d_2}{a_{21}}) \\ 0 & -r_{21}^a & p_1 & -\omega_{31} (k_{21}^a - \frac{d_2}{a_{21}}) & -\omega_{32} (k_{21}^a - \frac{d_2}{a_{21}}) & -\omega_{33} (k_{21}^a - \frac{d_2}{a_{21}}) \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{31} & \omega_{32} e^{-\lambda_2 z_{21}} & -\omega_{33} e^{-\lambda_3 z_{21}} \\ 1 & 1 & 1 & z_{21} \sum_{j=1}^3 \omega_{j1} & \frac{1-e^{-\lambda_2 z_{21}}}{\lambda_2} \sum_{j=1}^3 \omega_{j2} & \frac{1-e^{-\lambda_3 z_{21}}}{\lambda_3} \sum_{j=1}^3 \omega_{j3} \end{bmatrix} \quad (\text{II.16})$$

où ω_{1i} , ω_{2i} et ω_{3i} sont les trois composantes du vecteur propre ω_i et $P_{z_{21}} = P_{z_{21}}^1 + P_{z_{21}}^2$.

Une fois les paramètres du système trouvés, le coût de stockage de la pièce 2 par le stock en aval de la première machine peut être facilement calculé par $T_{21}(a_{11}, a_{21}) = c_{21}^+ \int_0^{z_{21}} x_{21} f_{X_{21}}(x_{21}) dx_{21} + c_{21}^+ z_{21} P_{z_{21}}$ où $f_{X_{21}}(x_{21}) = \sum_{i=1}^3 f_i(x_{21})$. Ceci nous donne le coût suivant.

$$T_{21}(p_1, r_1, a_{11}, a_{21}) = c_{21}^+ c_1 \frac{z_{21}^2}{2} \left(\sum_{j=1}^3 \omega_{j1} \right) + c_{21}^+ c_2 \frac{\lambda_2 z_{21} - 1 + e^{-\lambda_2 z_{21}}}{\lambda_2^2} \left(\sum_{j=1}^3 \omega_{j2} \right) + c_{21}^+ c_3 \frac{\lambda_3 z_{21} - 1 + e^{-\lambda_3 z_{21}}}{\lambda_3^2} \left(\sum_{j=1}^3 \omega_{j3} \right) + c_{21}^+ z_{21} P_{z_{21}} \quad (\text{II.17})$$

II.2 Solution des équations de Kolmogorov pour la deuxième machine produisant la pièce 2

Soient $f_0(x_{22}, t)$, $f_1(x_{22}, t)$ et $f_2(x_{22}, t)$ les densités de probabilité de $x_{22}(t)$ dans les états (0), (1) et (2) (voir figure 5.8). Pour cette chaîne de Markov, la matrice des taux de

production, V est donnée par

$$V = \begin{bmatrix} -d_2 & 0 & 0 \\ 0 & k'_{22} - d_2 & 0 \\ 0 & 0 & k^a_{22} - d_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

et la matrice de transition, Λ , donnée par

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\tilde{r}_{22} & \tilde{r}_{22} & 0 \\ \tilde{p}_{22} & -(\tilde{p}_{22} + r^a_{22}) & r^a_{22} \\ \tilde{p}_{22} & 0 & -\tilde{p}_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

Pour tout $x_{22} < z_{22}$, le vecteur de densité $\vec{f}(x_{22}, t) = [f_0(x_{22}, t), f_1(x_{22}, t), f_2(x_{22}, t)]^T$ satisfait l'équation aux dérivées partielles de Kolmogorov suivante.

$$\frac{\partial \vec{f}(x_{22}, t)}{\partial t} = -V \frac{\partial \vec{f}(x_{22}, t)}{\partial x_{22}} + \Lambda^T \vec{f}(x_{22}, t) \quad (\text{II.20})$$

k^a_{22} est le taux de production accrue de la pièce 2 par la deuxième machine quand le niveau du stock x_{12} atteint son seuil critique z_{12} et par conséquent le taux de production de la pièce 1 chute à d_1 . k^a_{22} est donné par l'équation suivante.

$$k^a_{22} = \frac{k_{22}}{k_{12}} (k_{12} - d_1) \quad (\text{II.21})$$

En régime permanent, puisque $\partial f(x_{22}, t) / \partial t = 0$, (II.20) s'écrit de la façon suivante.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{f}(x_{22})}{\partial x_{22}} &= V^{-1} \Lambda^T \vec{f}(x_{22}) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\tilde{r}_{22}}{d_2} & -\frac{\tilde{p}_{22}}{d_2} & -\frac{\tilde{p}_{22}}{d_2} \\ \frac{\tilde{r}_{22}}{k'_{22} - d_2} & -\frac{(\tilde{p}_{22} + r^a_{22})}{k'_{22} - d_2} & 0 \\ 0 & \frac{r^a_{22}}{k^a_{22} - d_2} & -\frac{\tilde{p}_{22}}{k^a_{22} - d_2} \end{bmatrix} \vec{f}(x_{22}) \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

Les trois valeurs propres de la matrice $V^{-1}\Lambda^T$ sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_{2,3} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4c})/2$ où

$$b = \frac{\tilde{p}_{22}}{k_{22}^a - d_2} + \frac{\tilde{p}_{22} + r_{22}^a}{k_{22}' - d_2} - \frac{\tilde{r}_{22}}{d_2} \quad (\text{II.23})$$

$$c = \frac{\tilde{p}_{22}(\tilde{p}_{22} + r_{22}^a)}{(k_{22}^a - d_2)(k_{22}' - d_2)} - \frac{\tilde{p}_{22}\tilde{r}_{22}}{d_2(k_{22}^a - d_2)} - \frac{\tilde{r}_{22}r_{22}^a}{d_2(k_{22}' - d_2)} \quad (\text{II.24})$$

et les trois vecteurs propres correspondants sont les suivants.

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{p}_{22}}{\tilde{r}_{22}} \left(\frac{\tilde{p}_{22}}{r_{22}^a} + 1 \right) \\ \frac{\tilde{p}_{22}}{r_{22}^a} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.25})$$

$$\omega_i = \begin{bmatrix} \tilde{p}_{22}(k_{22}' - d_2) + r_{22}^a(k_{22}^a - d_2) + \lambda_i(k_{22}' - d_2)(k_{22}^a - d_2) \\ d_2[\tilde{p}_{22} + \lambda_i(k_{22}^a - d_2)] \\ r_{22}^a d_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.26})$$

pour $i = 2, 3$. Les densités de probabilité de $x_{22}(t)$, $f_0(x_{22})$, $f_1(x_{22})$, et $f_2(x_{22})$, sont données par l'équation suivante.

$$\vec{f}(x_{22}) = \begin{bmatrix} f_0(x_{22}) \\ f_1(x_{22}) \\ f_2(x_{22}) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^3 c_i \omega_i e^{\lambda_i(x_{22} - z_{22})} \quad (\text{II.27})$$

avec c_1 , c_2 et c_3 des constantes. Pour que la demande d_2 soit satisfaisable, il faut que $\lim_{x_{22} \rightarrow -\infty} f_{X_{22}}(x_{22})$ soit nulle. Nous pouvons en conclure que $c_1 = 0$. Pour cette machine de Bielecki-Kumar, il n'existe que deux frontières $x_{22} = z_{22}^1$ (le seuil critique de x_{22} atteint par l'état (1)) et $x_{22} = z_{22}^2$ (le seuil critique de x_{22} atteint par l'état (2)) avec $z_{22} = z_{22}^1 + z_{22}^2$; les probabilités stationnaires en régime permanent de ces frontières sont respectivement

$P_{z_{22}}^1$ et $P_{z_{22}}^2$. Nous pouvons ainsi écrire les conditions frontières suivantes.

$$(k'_{22} - d_2)f_1(z_{22}^-) = (\tilde{p}_{22} + r_{22}^a)P_{z_{22}}^1 \quad (\text{II.28})$$

$$(k_{22}^a - d_2)f_2(z_{22}^-) + r_{22}^a P_{z_{22}}^1 = \tilde{p}_{22} P_{z_{22}}^2 \quad (\text{II.29})$$

$$f_2(0^+) = 0 \quad (\text{II.30})$$

Les équations (II.28) et (II.29) représentent les courants de probabilités entrants aux frontières $x_{22} = z_{22}^1$ et $x_{22} = z_{22}^2$ et l'équation est imposée pour garantir l'impossibilité d'une chute immédiate du niveau de x_{22} juste après avoir quitté l'état (2). Ces trois équations avec une quatrième qui impose que la somme des probabilités soit égale à 1 nous donnent la solution des quatre inconnues du système ($P_{z_{22}}^1$, $P_{z_{22}}^2$, c_2 et c_3). Ces équations sont représentées sous forme matricielle par le système d'équations suivant.

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}_{22} + r_{22}^a & 0 & -\omega_{22}(k'_{22} - d_2) & -\omega_{23}(k'_{22} - d_2) \\ -r_{22}^a & \tilde{p}_{22} & -\omega_{32}(k_{22}^a - d_2) & -\omega_{33}(k_{22}^a - d_2) \\ 0 & 0 & \omega_{32}e^{-\lambda_2 z_{22}} & \omega_{33}e^{-\lambda_3 z_{22}} \\ 1 & 1 & \frac{\sum_{j=1}^3 \omega_{j2}}{\lambda_2} & \frac{\sum_{j=1}^3 \omega_{j3}}{\lambda_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{z_{22}}^1 \\ P_{z_{22}}^2 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.31})$$

où ω_{1i} , ω_{2i} et ω_{3i} sont les trois composantes du vecteur propre ω_i et $P_{z_{22}} = P_{z_{22}}^1 + P_{z_{22}}^2$.

À ce stade, le coût de stockage de la pièce 2 par le stock en aval de la deuxième machine peut être facilement calculé par $T_{22}(a_{11}, a_{21}) = c_{22}^- \int_{-\infty}^0 x_{22} f_{X_{22}}(x_{22}) dx_{22} + c_{22}^+ \int_0^{z_{22}} x_{22} f_{X_{22}}(x_{22}) dx_{22} + c_{22}^+ z_{22} P_{z_{22}}$ où $f_{X_{22}}(x_{22}) = \sum_{i=1}^3 f_i(x_{22})$. Ceci nous donne le coût

suivant.

$$\begin{aligned}
 T_{22}(a_{11}, a_{21}) = & \frac{c_2 \left(\sum_{j=1}^3 \omega_{j2} \right)}{\lambda_2^2} \left[c_{22}^- e^{-\lambda_2 z_{22}} + c_{22}^+ (\lambda_2 z_{22} - 1 + e^{-\lambda_2 z_{22}}) \right] + \\
 & \frac{c_3 \left(\sum_{j=1}^3 \omega_{j3} \right)}{\lambda_3^2} \left[c_{22}^- e^{-\lambda_3 z_{22}} + c_{22}^+ (\lambda_3 z_{22} - 1 + e^{-\lambda_3 z_{22}}) \right] + \\
 & c_{22}^+ z_{22} P_{z_{22}}
 \end{aligned} \tag{II.32}$$

II.3 Algorithme de calcul de a_{21} à partir de z_{21}

Dans ce qui suit, nous donnons les démarches principales de l'algorithme itératif de calcul de a_{21} à partir d'une valeur quelconque de z_{21} . Ces démarches se résument comme suit.

1. À l'itération 0, $a_{21}^{(0)} = 1$.
2. À l'itération $i > 0$ et en fonction de z_{21} et $a_{21}^{(i-1)}$, résoudre le système d'équations linéaires $A X = B$ de l'annexe II.1 pour X ; où $X = [P_0 \ P_{z_{21}}^1 \ P_{z_{21}}^2 \ c_1 \ c_2 \ c_3]^T$, $B = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ et A donnée par (II.16).
3. Calculer $a_{21}^{(i)} = 1 - P_0^{(i)}$, où $P_0^{(i)}$ la première variable du vecteur X à l'itération i .
4. Pour la première itération, fixons $precision^{(1)}$ à une valeur prédéfinie à l'avance supérieure à la précision recherchée (qui elle aussi est prédéfinie à l'avance). Sinon ; pour $i > 1$, calculer $precision^{(i)}$ comme la valeur absolue de $a_{21}^{(i)} - a_{21}^{(i-1)}$.
5. Tant que $precision^{(i)} > \text{précision recherchée}$:
 $i = i + 1$.
 Retour à l'étape 2.