

**Titre:** Modélisation et simulation des assemblages mécaniques par frettage sollicités en fatigue par la méthode des éléments finis  
Title:

**Auteur:** Frédéric Lanoue  
Author:

**Date:** 2008

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Lanoue, F. (2008). Modélisation et simulation des assemblages mécaniques par frettage sollicités en fatigue par la méthode des éléments finis [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
Citation: <https://publications.polymtl.ca/8223/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8223/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Aurelian Vadean, & Bernard Sanschagrin  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÉLISATION ET SIMULATION  
DES ASSEMBLAGES MÉCANIQUES  
PAR FRETAGE SOLLICITÉS EN FATIGUE  
PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

FRÉDÉRIC LANOUE  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
NOVEMBRE 2008



Library and  
Archives Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file    Votre référence*  
*ISBN: 978-0-494-48926-0*  
*Our file    Notre référence*  
*ISBN: 978-0-494-48926-0*

**NOTICE:**

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

**AVIS:**

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

  
**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

MODÉLISATION ET SIMULATION  
DES ASSEMBLAGES MÉCANIQUES  
PAR FRETTAGE SOLLICITÉS EN FATIGUE  
PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

présenté par: LANOUE Frédéric

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. SHIRAZI-ADL Aboulfazl, Ph.D., président

M. VADEAN Aurelian, Doct., membre et directeur de recherche

M. SANSCHAGRIN Bernard, D.Ing. membre et codirecteur de recherche

M. TERRIAULT Daniel, Ph.D., membre

### **Remerciements**

Je tiens à remercier M. Aurelian Vadean, professeur de génie mécanique à l'École Polytechnique de Montréal, qui a accepté d'être mon directeur de recherche. Je le remercie pour son professionnalisme, sa gentillesse et son approche humaine.

Je veux également remercier M. Bernard Sanschagrin, professeur de génie mécanique à l'École Polytechnique de Montréal et mon co-directeur de recherche, pour son support et sa gentillesse.

Je remercie également M. Aboufazi Shirazi-Adl et M. Daniel Therriault, professeurs de génie mécanique à l'École Polytechnique de Montréal, pour avoir accepté de faire partie du jury d'évaluation de ce mémoire.

Je suis aussi reconnaissant envers les gens de ROI Engineering Montréal, pour leur soutien et leurs précieux conseils dans l'utilisation avancée du logiciel ANSYS.

Merci à mes amis et collègues de travail, qui ont rendu agréable mon séjour à Polytechnique. Sans vous, Francis, Arnaud et Amir, j'aurais trouvé plusieurs journées plutôt longues et j'ai su apprécier nos discussions, aussi divertissantes qu'intéressantes et éducatives.

Merci à ma famille pour leurs encouragements et d'avoir cru en moi dès mon jeune âge.

Merci à mon Amour d'être là pour moi et de m'inciter à me dépasser. Tu es pour moi une source de motivation. Nos projets de vie sont à portée de main, il ne reste plus qu'à les saisir.

## Résumé

Ce mémoire présente le développement et l'utilisation d'outils ainsi qu'une méthodologie pour le calcul par éléments finis des assemblages par interférence sollicités en fatigue pour une conception optimale.

Un des principaux paramètres influençant le comportement des assemblages par interférence est la pression de contact. Celle-ci est le résultat d'une interférence entre l'arbre et le moyeu. Pour des cas complexes, cette pression dépend de la combinaison de rigidité des matériaux, de la vitesse de révolution, du gradient de température et de l'application d'une pression interne ou externe. Le développement d'un outil-logiciel permet de calculer efficacement la pression de contact nominale en considérant tous ces facteurs.

La modélisation par éléments finis permet de tenir compte de l'effet de bout et des variations dues au chargement. Pour obtenir des résultats précis au niveau de l'interface de contact, il a été démontré qu'il est nécessaire de minimiser la pénétration, qui elle est un concept mathématique influençant la convergence de l'algorithme de contact. De par sa nature, un assemblage par interférence implique de très petites valeurs de déplacement. Cependant, les options de simulation par défaut d'un logiciel de calcul par éléments finis génèrent une tolérance de pénétration du même ordre de grandeur, voire supérieure, à la valeur de l'interférence. Il est donc nécessaire de contrôler adéquatement la solution. Par l'exploration des différents algorithmes de contact, une méthodologie permettant d'obtenir des résultats précis a été développée, en tenant également compte du temps de calcul. Une étude de convergence sur la taille des éléments a également été menée. Pour une précision accrue dans un contexte de rapidité de calcul et en utilisant au maximum les ressources (licence avec nombre limité de degrés de liberté et une certaine puissance informatique de calcul), la technique de sous-modélisation a été présentée en insistant sur les critères assurant la convergence de la solution.

Une fois la méthodologie établie, la modélisation par éléments finis d'essais expérimentaux en flexion rotative et en torsion alternée a permis d'établir l'existence d'un facteur de réduction de la vie en fatigue des assemblages par frettage ( $k_{fret}$ ). Contrairement aux attentes, ce facteur ne dépend pas de la valeur du glissement à l'interface de contact, qui semble plutôt être une conséquence plutôt que la cause. D'après les données disponibles, ce facteur semble plutôt être influencé par le type de chargement et/ou de matériau. Comme pour l'obtention de la rigidité, de

la résistance mécanique ou de la limite d'endurance, il est donc nécessaire de procéder à des essais expérimentaux pour obtenir la valeur du facteur  $k_{fret}$ .

Une étude de sensibilité des paramètres a permis d'identifier le type de configuration qui optimise la vie en fatigue des assemblages par interférence. Par le simple ajout d'un épaulement et d'un congé de raccordement ou par une rainure circulaire, il est possible d'augmenter la résistance à la fatigue de plus de 50% par rapport au cas d'un arbre simple avec frettage. L'étude de sensibilité a montré une transition dans la localisation de la zone de rupture, puisqu'il existe un phénomène de concurrence entre le niveau de contrainte dans le frettage et dans la zone située à proximité, par exemple un rayon de congé. Il a également été observé qu'une pression de contact trop élevée ou trop faible nuit à la vie en fatigue. L'étude de sensibilité a permis d'observer des tendances pour faciliter l'optimisation et d'en extraire des règles générales de conception.

Enfin, les connaissances acquises ont été mises en application par la réalisation d'un exemple de calcul. Par quelques calculs préalables et des règles générales de conception, une conception préliminaire a été effectuée, se situant relativement près de la solution optimale. De par les tendances observées par l'étude de sensibilité, le concept a évolué en très peu d'itérations vers une solution améliorée répondant à tous les critères de résistance mécanique. La précision des résultats a été assurée par la méthodologie de calcul développée au cours des travaux.

## **Abstract**

This thesis presents the development and application of a finite element methodology for interference fitted assemblies fatigue calculation for an optimal design.

One of the key parameters influencing the behavior of interference fitted assemblies is the contact pressure. This is due to geometrical interference between shaft and hub. For complex cases, this pressure depends on the combination of materials rigidity, the speed of revolution, temperature gradient and the application of an external or internal pressure. The development of a software tool allows to calculate the nominal contact pressure considering all these factors.

Finite element analysis takes account of the effect of the contact end and variations due to loading. To get accurate results at the contact interface, it was shown that it is necessary to minimize the penetration, which is a mathematical concept influencing the convergence of the contact algorithm. By its nature, an interference fitted assembly implies very small values. However, default simulation options of finite elements softwares generally generate a penetration tolerance of the same magnitude or higher than the value of the interference itself. It is therefore necessary to properly control the solution. By exploring different contact algorithms, a methodology to obtain accurate results has been developed, taking into account the calculation time. A convergence study on the element size was also conducted. For greater precision in a context of rapid calculation time and using the maximum resources (license with limited degrees of freedom and a power calculation), the submodeling technique was presented with emphasis on the criteria ensuring convergence of the solution.

Once the methodology established, finite element model was applied on experimental fatigue data in rotating bending and alternate torsion. This study established the existence of a fretting fatigue strength reduction factor for interference fitted assemblies ( $k_{\text{fret}}$ ). Contrary to expectations, this factor doesn't depend on the value of the relative slip at the interface of contact. Relative slip seems to be a consequence rather than the cause. According to available data, this factor seems to be influenced by the type of loading and / or material. As for obtaining the material rigidity, ultimate tensile strength or endurance limit, it is necessary to conduct experimental tests to get the value of  $k_{\text{fret}}$ .



A sensitivity study identified the type of configuration that maximizes the fatigue life of interference fitted assemblies. By the simple addition of a shoulder fillet or a circular groove, it is possible to increase fatigue resistance over 50% compared to the case of a plain shaft with hub. The sensitivity study showed a transition in the location of the rupture zone between the fillet and the fit. It was also observed that a contact pressure too high or too low reduces fatigue life. The sensitivity study observed trends to facilitate the optimization and extract general rules for design.

Finally, the knowledge gained has been implemented by building a sample calculation. By few calculations and general rules of design, preliminary design was completed, lying relatively close to the optimal solution. By trends in the study of sensitivity, the concept has changed in few iterations towards a solution that meets all the criteria of strength. The accuracy of results was provided by the calculation methodology developed previously in this thesis.

## Table des matières

Remerciements .....	iv
Résumé.....	v
Abstract.....	vii
Table des matières.....	ix
Liste des annexes.....	xiii
Liste des tableaux .....	xiv
Liste des figures .....	xvi
Liste des symboles.....	xviii
Introduction.....	1
1. Mise en contexte .....	1
2. Objectifs .....	2
2.1 Objectif général .....	2
2.2 Objectifs spécifiques .....	2
3. Plan de l'étude .....	2
Chapitre 1 : Revue des connaissances .....	4
1. Assemblage par interférence .....	4
1.1 Définition et utilisation .....	4
1.2 Calculs de base .....	4
2. Contact et glissement.....	8
2.1 Glissement macroscopique .....	8
2.2 Comportement microscopique .....	9
3. Le fretting .....	10
3.1 Régimes de glissement .....	10
3.2 Coefficient de friction .....	13
4. Calcul en fatigue .....	14
4.1 Théorie sur les critères de fatigue .....	14
4.2 Présentation des critères de fatigue.....	15
5. Modélisation par éléments finis.....	18
5.1 Convergence .....	19
5.2 Formulation du contact.....	19
5.3 Taille du maillage .....	20
5.4 Sous-modélisation.....	21

5.5	Axisymétrie, symétrie et symétrie cyclique .....	22
6.	Études antérieures sur les assemblages par interférence.....	24
6.1	Travaux sur les cas statiques.....	24
6.2	Essais expérimentaux en fatigue et observations.....	25
6.3	Moyens technologiques pour améliorer la vie en fatigue.....	28
Chapitre 2 : Calcul de la pression de contact nominale pour les assemblages multiples .....		29
1.	Introduction .....	29
2.	Mise en équation.....	29
2.1	Hypothèses.....	29
2.2	Équation polaire d'équilibre .....	29
2.3	Loi de comportement.....	30
2.4	Relations cinématiques .....	30
2.5	Équation différentielle gouvernante.....	30
3.	Solution de l'équation différentielle .....	30
3.1	Déplacement radial .....	30
3.2	Contraintes radiale et orthoradiale .....	30
3.3	Cas particulier : Température constante .....	31
4.	Cylindres composés.....	31
4.1	Définition des matrices .....	31
4.2	Application des conditions aux limites et de continuité .....	31
5.	Résolution complète.....	32
6.	Outil : Calculateur de frettage .....	32
6.1	Exemple de calcul .....	33
Chapitre 3 : Méthodologie et étude de convergence .....		38
1.	Méthodologie et modèles étudiés .....	38
2.	Modèle de Nishioka : flexion rotative .....	38
2.1	Description.....	38
2.2	Options de simulation .....	39
3.	Résultats .....	42
3.1	Modèle global .....	42
3.2	Résultats de déplacements .....	43
3.3	Résultats de contraintes .....	44
3.4	Sous-modélisation.....	46
3.5	Options de contact .....	47
3.6	Discussions .....	51

4. Comparaison : Arbre vs Moyeu .....	55
5. Conclusion .....	56
Chapitre 4 : Assemblages frettés en flexion rotative .....	57
1. Configurations .....	57
2. Procédure.....	59
2.1 Options de simulation.....	59
2.2 Calcul des résultats .....	59
3. Résultats .....	61
3.1 Discussion .....	65
3.2 Influence du coefficient de friction : Nishioka A.....	65
4. Conclusion .....	67
Chapitre 5 : Assemblages frettés en torsion alternée.....	68
1. Description du modèle .....	68
2. Options de simulation.....	70
3. Résultats .....	72
3.1 Déformée.....	72
3.2 Contraintes .....	75
3.3 Fatigue.....	80
3.4 Conclusion.....	84
Chapitre 6 : Étude de sensibilité .....	85
1. Définition de l'étude de sensibilité.....	85
2. Modèle en flexion .....	86
2.1 Arbre simple .....	86
2.2 Arbre avec épaulement .....	88
2.3 Arbre avec rainure circulaire .....	91
2.4 Arbre avec moyeu en saillie .....	93
2.5 Recommandations .....	94
3. Modèle en torsion.....	95
3.1 Arbre simple .....	95
3.2 Arbre avec épaulement .....	96
3.3 Arbre avec rainure circulaire .....	98
3.4 Arbre avec moyeu en saillie .....	100
3.5 Recommandations .....	101
4. Conclusion .....	103
Chapitre 7 : Exemple d'application .....	104

1.	Énoncé du problème .....	104
2.	Calcul préliminaire.....	105
2.1	Contrainte alternée maximale admissible .....	105
2.2	Flexion .....	105
2.3	Torsion.....	106
2.4	Tolérance d'usinage et pression de contact.....	107
2.5	Itération 1 : choix de la configuration .....	107
2.6	Pression de contact.....	107
3.	Calcul par éléments finis : Validation de la conception.....	108
3.1	Modèle .....	108
3.2	Résumé des itérations.....	110
4.	Conclusion .....	111
	Conclusion et perspectives .....	112
	Références.....	115
	ANNEXES.....	120

**Liste des annexes**

Annexe A	Calcul des corps axisymétriques.....	120
1.	Mise en équation.....	120
1.1	Équation polaire d'équilibre.....	120
1.2	Loi de comportement.....	120
1.3	Relations cinématiques.....	120
1.4	Équation différentielle gouvernante.....	120
2.	Solution de l'équation différentielle.....	120
2.1	Déplacement radial.....	120
2.2	Contrainte radiale.....	120
2.3	Contrainte orthoradiale.....	120
2.4	Cas particulier : Température constante.....	121
3.	Cylindres composés.....	121
3.1	Définition des matrices.....	121
3.2	Application des conditions aux limites et continuité.....	121
4.	Résolution complète.....	121
Annexe B	Calcul du critère de Dang Van.....	124
Annexe C	Résultats de l'étude de sensibilité.....	126

### Liste des tableaux

Tableau 2-1 : Calculateur de frettage dans Excel.....	33
Tableau 2-2 : Comparaison des résultats .....	37
Tableau 3-1 : Propriétés matériaux.....	39
Tableau 3-2 : Définition du contact .....	40
Tableau 3-3 : Information sur le maillage.....	41
Tableau 3-4 : Résultats de déplacements : signification .....	43
Tableau 3-5 : Résultats de contraintes (plan de symétrie) : signification .....	45
Tableau 3-6 : Options de contact.....	47
Tableau 3-7 : Algorithmes de contact – Temps de calcul et nombre d'itérations .....	54
Tableau 4-1 : Dimensions .....	57
Tableau 4-2 : Fatigue et chargement.....	58
Tableau 4-3 : Résultats du calcul en fatigue (Nishioka).....	63
Tableau 5-1 : Propriétés matériaux.....	69
Tableau 5-2 : Configurations, chargements et vie en fatigue .....	69
Tableau 5-3 : Propriétés des contacts .....	71
Tableau 5-4 : Résultats de fatigue – Modèle de Juuma .....	82
Tableau 6-1 : Paramètres .....	86
Tableau 6-2 : Propriétés matériaux.....	86
Tableau 6-3 : Arbre simple – Flexion – Résultats .....	88
Tableau 6-4 : Arbre avec épaulement – Flexion – $K_f$ .....	89
Tableau 6-5 : Arbre avec épaulement – Flexion – Influence des paramètres .....	90
Tableau 6-6 : Arbre avec épaulement – Flexion - $FS_{\text{fatigue}}$ .....	90
Tableau 6-7 : Arbre avec rainure circulaire – Flexion - $K_f$ .....	92
Tableau 6-8 : Arbre avec rainure circulaire – Flexion – Influence des paramètres .....	92
Tableau 6-9 : Arbre avec moyeu en saillie – Flexion – $K_f$ .....	93
Tableau 6-10 : Arbre avec moyeu en saillie – Flexion – Influence des paramètres .....	94
Tableau 6-11 : Arbre avec épaulement – Torsion – $K_f$ .....	97

Tableau 6-12 : Arbre avec épaulement – Torsion – Influence des paramètres.....	97
Tableau 6-13 : Arbre avec épaulement – Torsion - $FS_{fatigue}$ .....	98
Tableau 6-14 : Arbre avec rainure circulaire – Torsion - $K_f$ .....	99
Tableau 6-15 : Arbre avec rainure circulaire – Torsion – Influence des paramètres.....	99
Tableau 6-16 : Arbre avec moyeu en saillie – Torsion – $K_f$ .....	100
Tableau 6-17 : Arbre avec moyeu en saillie – Torsion – Influence des paramètres.....	101
Tableau 7-1 : Propriétés matériaux.....	105
Tableau 7-2 : Résumé des itérations .....	110



### Liste des figures

Figure 1-1 : Cylindres composés .....	5
Figure 1-2 : Loi de Coulomb.....	9
Figure 1-3 : Glissement partiel.....	10
Figure 1-4 : Effet de l'amplitude de glissement sur le taux d'usure et la vie en fatigue.....	11
Figure 1-5 : Définition de la symétrie cyclique .....	24
Figure 1-6 : Configurations testées.....	27
Figure 2-1 : Résultats analytiques .....	35
Figure 2-2 : Résultats numériques.....	36
Figure 3-1 : Géométrie – Nishioka, Groupe A, Série a .....	39
Figure 3-2 : Conditions aux limites et chargement .....	39
Figure 3-3 : Maillage – Modèle Global 4 .....	41
Figure 3-4 : Maillage – Sous-modèle E.....	42
Figure 3-5 : Zone d'intérêt.....	43
Figure 3-6 : Déplacements (Fibre en traction sur le plan de symétrie) Modèle global.....	44
Figure 3-7 : Contraintes (Fibre en traction sur le plan de symétrie) Modèle global.....	45
Figure 3-8 : Résultats (Fibre en traction sur le plan de symétrie) Sous-modélisation.....	46
Figure 3-9 : Résultats Méthode par pénalité Fibre en compression sur le plan de symétrie .....	49
Figure 3-10 : Résultats Lagrangien augmenté. Fibre en compression sur le plan de symétrie .	50
Figure 3-11 : Résultats Lagrangien normal. Fibre en compression sur le plan de symétrie .....	51
Figure 3-12 : Déplacements – Comparaison .....	52
Figure 3-13 : Contraintes – Comparaison.....	52
Figure 3-14 : Comparaison Arbre vs Moyeu .....	55
Figure 4-1 : Configurations.....	58
Figure 4-2 : FS en fatigue – Théorie de Von Mises et critère de Dang Van.....	60
Figure 4-3 : Glissement.....	61
Figure 4-4 : FS (Frettage) vs Glissement – Nishioka.....	64
Figure 4-5 : Facteurs de sécurité en fatigue .....	64
Figure 4-6 : Influence de $\mu$ sur le glissement.....	66

Figure 4-7 : Influence de $\mu$ sur le FS en fatigue.....	66
Figure 5-1 : Schéma du montage de Juuma.....	68
Figure 5-2 : Géométrie du modèle de Juuma .....	68
Figure 5-3 : Modèle de Juuma – Conditions aux limites et chargement.....	70
Figure 5-4 : Maillage – Modèle de Juuma.....	72
Figure 5-5 : Déformée – Modèle de Juuma (Groupe C, Série j).....	74
Figure 5-6 : Contraintes dans un repère cylindrique.....	75
Figure 5-7 : Contraintes – Modèle de Juuma (Groupe C, Série j) .....	79
Figure 5-8 : Courbe S-N – Fe52 – Modèle de Juuma.....	80
Figure 5-9 : Facteur de sécurité en fatigue – Modèle de Juuma .....	81
Figure 6-1 : Configurations.....	85
Figure 6-2 : Arbre simple – Flexion.....	87
Figure 6-3 : $FS_{fatigue}$ – Glissement vs Décollement .....	91
Figure 6-4 : Arbre simple - Torsion .....	96
Figure 7-1 : Montage.....	104
Figure 7-2 : Contrainte radiale – Contribution de la vitesse de rotation .....	108
Figure 7-3 : Modèle – Conditions aux limites et chargement.....	109
Figure 7-4 : Maillage .....	109
Figure 7-5 : Contrainte équivalente maximale .....	111

**Liste des symboles**

<b>Symbole</b>	<b>Signification</b>
A, B	Paramètres du critère de fatigue de Crossland
AL	Algorithme de contact: Lagrangien augmenté
CNM	Critère de fatigue de la contrainte normale maximale
CRO	Critère de fatigue de Crossland
D	Diamètre majeur ou diamètre du frettage
d	Diamètre mineur
$D_h$	Diamètre du moyeu
DV	Critère de fatigue de Dang Van
E	Module d'Young
$F_E$	Effort d'emmanchement ou force d'arrachement
FKN, FKT	Facteurs de rigidité de contact, normale et tangentielle
$f_s, f_m$	Coefficient de friction dans la zone de friction, moyenne mesurée
FS, $FS_{fatigue}$ , $FS_{congé}$ , $FS_{frettage}$	Facteur de sécurité, en fatigue, du congé, du frettage
FTOLN	Tolérance de pénétration
I	Second moment d'une section
$I_{1max}$	Maximum du premier invariant du tenseur des contraintes
J	Second moment polaire d'une section circulaire
$J_{2a}$	Amplitude du deuxième invariant du tenseur déviateur de contrainte
$K_{contact}$ , KN, KT	Rigidité de contact, rigidité normale, rigidité tangentielle
$K_f$	Facteur de concentration de contrainte en fatigue
$k_{fret}$ , $k_{frettage}$	Facteur de réduction de la vie en fatigue dans la zone du frettage
$K_t$	Facteur de concentration de contrainte
L	Longueur de la zone frettée
M	Moment de flexion
m	masse
N	Nombre de cycles à la rupture

NL	Algorithme de contact: Lagrangien normal
$P, P_{int}, P_{ext}$	Pression de contact, Pression intérieure, Pression extérieure
PEN	Algorithme de contact: fonction pénalité
$P_h$	Pression hydrostatique
PL	Algorithme de contact: Lagrangien pur
Q	Contrainte de cisaillement
R	Rayon à l'interface de contact
$r, r_i, r_o$	rayon d'un cylindre, rayon intérieur, rayon extérieur
$S_e$	Limite d'endurance en fatigue
$S_e^*$	Limite d'endurance en fatigue avec facteurs correctifs
$S_f$	Limite de fatigue (à un nombre défini de cycles)
SIN	Critère de fatigue de Sines
SLTO	Tolérance de glissement élastique ou pénétration tangentielle
$S_{ut}$	Résistance mécanique
$S_y$	Limite d'écoulement ou limite d'élasticité
T	Température
T	Couple de torsion
$T_E$	Couple maximal admissible ou coupe d'arrachement
$T_n$	Couple nominal de torsion
u	Déplacement
$u_r, u_\theta, u_z$	3 ddl en déplacement dans un repère cylindrique
$u_x, u_y, u_z$	3 ddl en déplacement dans un repère cartésien
VM	Critère de fatigue de Von Mises
Z	Position selon l'axe de révolution
$\alpha$	Coefficient de dilatation thermique
$\alpha, \beta$	Paramètres du critère de fatigue de Dang Van
$\beta$	Facteur nominal de la réduction de la vie en fatigue
$\delta$	Dimension en saillie d'un assemblage arbre - moyeu
$\delta_L$	Dimension en saillie d'un assemblage arbre - moyeu
$\delta_r$	Interférence radiale
$\Delta T$	Écart de température
$\Delta u_r$	Interférence radiale calculée

$\Delta u_z$	Glissement axial calculé
$\Delta x$	Pénétration
$\Delta \sigma_r$	Différence (erreur) de $\sigma_r$ entre l'arbre et le moyeu
$\Delta \tau_{rz}$	Différence (erreur) de $\Delta \tau_{r\theta}$ entre l'arbre et le moyeu
$\varepsilon$	Déformation
$\varepsilon$	Critère de convergence
$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta z}, \gamma_{rz}$	6 composantes du tenseur de déformation dans un repère cylindrique
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	6 composantes du tenseur de déformation dans un repère cartésien
$\theta$	Angle
$\mu, \mu_s, \mu_d, \mu_c$	Coefficient de friction, statique, dynamique, cinétique
$\nu$	Coefficient de Poisson
$P$	Densité volumique
$\rho$	Rayon d'un congé d'épaulement
$\sigma$	Contrainte
$\sigma_{-1}$	Limite d'endurance (fatigue) en traction alternée symétrique
$\sigma_a^*$	Contrainte alternée équivalente (avec correction de la contrainte moyenne)
$\sigma_a, \sigma_m$	En fatigue, contrainte alternée et contrainte moyenne
$\sigma_{eqv}$	Contrainte équivalente de Von Mises
$\sigma_f, \sigma_{flexion}$	Contrainte nominale de flexion
$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}$	6 composantes du tenseur de contrainte dans un repère cylindrique
$\sigma_w$	Limite de fatigue nominale en flexion
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	6 composantes du tenseur de contrainte dans un repère cartésien
$\tau_{-1}$	Limite d'endurance (fatigue) en torsion alternée symétrique
$\tau_{ha}$	Partie alternée du cisaillement dans le plan
$\tau_{max}$	Contrainte maximale de frottement
$\tau_n$	Contrainte nominale de torsion
$\omega$	Vitesse angulaire

## Introduction

### **1. Mise en contexte**

L'assemblage mécanique par frettage consiste à emmancher deux tubes cylindriques l'un dans l'autre par ajustement serré. La réalisation technologique consiste soit à chauffer le tube extérieur ou à refroidir le tube intérieur pour bénéficier du phénomène de dilatation ou de rétrécissement thermique lors de l'assemblage. Une autre méthode consiste à emmancher l'arbre dans le moyeu à l'aide d'une presse. Par exemple, l'assemblage par interférence est utilisé pour fixer divers éléments sur un arbre de turbine à gaz, pour fixer une roue de chemin de fer sur son essieu ou tout autre assemblage où le gain de poids est important.

Que ce soit pour la vérification d'une conception existante ou pour son dimensionnement, il est nécessaire de calculer la résistance mécanique des assemblages par interférence pour garantir leur fiabilité. Il faut bien sûr vérifier leur tenue face à des sollicitations statiques, mais il est également nécessaire de tenir compte du phénomène de fatigue qui est d'ailleurs responsable de la majorité des bris en service. Soumise à des cycles de sollicitations en fatigue, la zone de contact subit des variations importantes de contraintes en état multiaxial. À l'interface, des zones en contact initialement peuvent subir des décollements et/ou des glissements partiels. En plus d'engendrer une rigidité non-linéaire, les surfaces en contact peuvent se déformer plastiquement et s'user rapidement.

Le phénomène étudié n'est pas encore totalement compris et il n'existe pas de modèle de calcul spécifique appliqué à ce type précis de problème. La modélisation par éléments finis permet de calculer efficacement les contraintes pour tous les types de problèmes. Cependant, comme la notion d'interférence suppose que de très petites variations sur la précision influencent grandement la réponse, il est donc nécessaire de contrôler la solution de manière appropriée.

Les travaux présentés dans ce mémoire seront orientés vers le développement d'une méthodologie de calcul qui permettra de prédire avec suffisamment de précision la durée de vie des assemblages par interférence. Des simulations seront comparées à des résultats expérimentaux et une étude de sensibilité permettra d'établir des règles générales pour l'optimisation de la conception.

## **2. Objectifs**

### **2.1 Objectif général**

Développer un modèle de calcul, utilisable par l'industrie, appliqué aux assemblages mécaniques par frettage soumis à des sollicitations en fatigue, dans le but de réaliser une conception optimale.

### **2.2 Objectifs spécifiques**

- Faire une revue de littérature sur l'état des connaissances sur les assemblages par frettage, les mécanismes impliqués et les méthodes de calcul.
- Établir la méthodologie appropriée d'utilisation des éléments finis afin d'obtenir des résultats précis et fiables en présence de phénomènes complexes de contact spécifiques aux assemblages par interférence.
- Identifier un facteur correctif à appliquer au calcul de la durée de vie en fatigue pour les assemblages par interférence.
- Faire des recommandations concernant la conception optimale des assemblages par interférence.

## **3. Plan de l'étude**

Le Chapitre 1 présente une revue de connaissances d'après les informations pertinentes trouvées dans la littérature. Il y est notamment question de notions de bases sur les assemblages par interférence, de contact et de glissement, d'usure par fretting, de fatigue et de modélisation par éléments finis. Un survol de quelques études antérieures sur les assemblages par interférence y est également traité.

Le Chapitre 2 développe les équations pour le calcul des assemblages par interférence pour les cylindres de longueur infinie. Les notions de gradient thermique et de vitesse angulaire y sont également traitées. Le chapitre se termine par la présentation d'un outil logiciel permettant de calculer rapidement de tels assemblages, ainsi qu'un exemple de calcul pour la validation.

Le Chapitre 3 présente la méthodologie détaillée pour le calcul par éléments finis des assemblages par interférence avec ANSYS Workbench. Par un exemple simple, les notions de convergence du contact et du maillage, de sous-modélisation et des autres options de simulations sont introduites. La présentation des résultats et son analyse permettent de justifier la méthodologie employée pour les chapitres suivants. Ce chapitre a fait l'objet d'un premier article soumis à la publication dans la revue *Simulation Modelling Practice and Theory*.

Le Chapitre 4 et le Chapitre 5 consistent en l'analyse par éléments finis ainsi que le calcul en fatigue d'essais présents dans la littérature pour les cas de flexion rotative et de torsion alternée respectivement. La procédure ainsi que les résultats y sont détaillés. La modélisation par éléments finis permet de calculer les contraintes locales à l'endroit où la rupture par fatigue survient. Tous ces calculs permettent de mettre en lumière l'existence d'un facteur de réduction de la vie en fatigue au niveau de la surface de contact des assemblages par interférence. Ces deux chapitres font l'objet d'un second article soumis à la publication.

Le Chapitre 6 présente une étude de sensibilité des paramètres. Plusieurs configurations d'arbres et de moyeux y sont testées en faisant varier notamment le diamètre, la pression de contact, le chargement ainsi que la forme de l'extrémité de la zone freinée. Des règles générales de conception y sont également formulées.

Enfin, le Chapitre 7 présente un exemple d'application des observations et des résultats précédents. Par un exemple simple, les recommandations permettent d'arriver rapidement à une conception optimale répondant aux exigences de résistance souhaitées.



## CHAPITRE 1 : REVUE DES CONNAISSANCES

### 1. Assemblage par interférence

#### 1.1 Définition et utilisation

L'assemblage mécanique par interférence (ou frettage) consiste à emmancher deux tubes cylindriques l'un dans l'autre par ajustement serré. La réalisation technologique consiste habituellement à chauffer le tube extérieur ou à refroidir le tube intérieur pour bénéficier du phénomène de dilatation et/ou de contraction thermique lors de l'assemblage. Le frettage est habituellement pratiqué sur des éléments de révolution, avec un emmanchement cylindrique ou conique. L'usinage des pièces requiert des tolérances serrées pour assurer une pression de contact adéquate. Il est utilisé pour effectuer un assemblage (quasi) permanent et compact tout en conservant une bonne rigidité. Son utilisation est répandue dans plusieurs domaines, par exemple pour les arbres de turbine à gaz, l'assemblage d'un pignon d'engrenage sur un arbre de transmission ou pour fixer les roues de chemin de fer à leur essieu.

#### 1.2 Calculs de base

Il existe des relations analytiques de base pour calculer le comportement d'un assemblage par frettage. Celles-ci proviennent de la résolution des équations de Lamé pour des cylindres composés à paroi épaisse de longueur infinie faits d'un matériau isotrope. (Bazergui, Bui-Quoc, Biron, McIntyre, & Laberge, 2002) (Figure 1-1) Ces calculs se basent également sur l'hypothèse qu'il n'existe pas d'effort de cisaillement dû à la friction à l'interface après l'assemblage. Cette hypothèse est valable pour un assemblage suite à une dilatation thermique. Pour un assemblage à la presse (*press fit*) par exemple, l'introduction de contraintes tangentielles dues à la friction lors de l'assemblage n'est pas considérée. L'assemblage par dilatation thermique donne de meilleurs résultats pour ce qui est des contraintes résiduelles en compression. (Jang, Cho, & Yang, 2006)

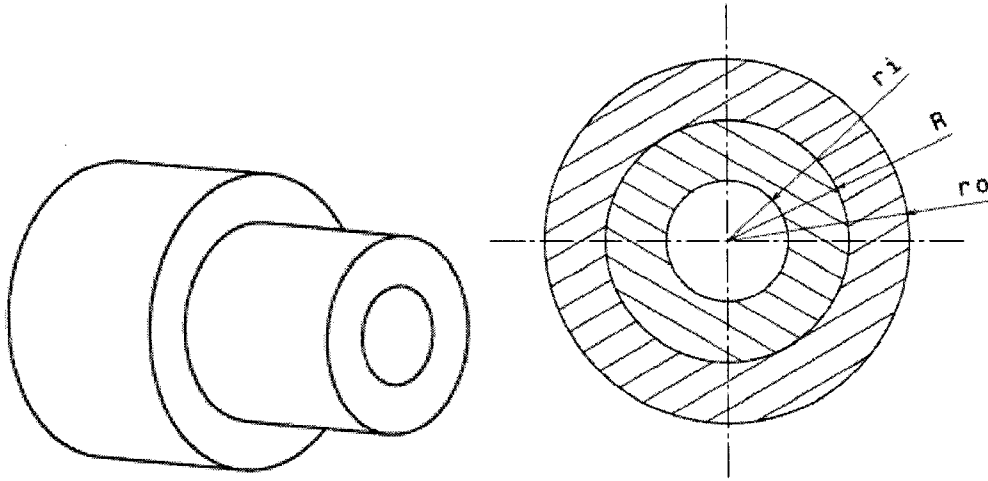


Figure 1-1 : Cylindres composés

### 1.2.1 Pression de contact et contraintes de frottement

Dans le cas général, les contraintes radiales  $\sigma_r$  et orthoradiales  $\sigma_\theta$  d'un tube soumis à une pression interne  $P_i$  et externe  $P_o$  sont :

$$\begin{aligned}\sigma_r(r) &= P_i \frac{r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \left( 1 - \left( \frac{r_o^2}{r} \right)^2 \right) - P_o \frac{r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \left( 1 - \left( \frac{r_i}{r} \right)^2 \right) \\ \sigma_\theta(r) &= P_i \frac{r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \left( 1 + \left( \frac{r_o^2}{r} \right)^2 \right) - P_o \frac{r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \left( 1 + \left( \frac{r_i}{r} \right)^2 \right)\end{aligned}\quad (1.1)$$

Pour un frottement, l'état de contrainte des deux cylindres est fonction de la pression  $P$  de contact, d'où :

$$\begin{aligned}\sigma_{r,1}(r) &= -P \frac{R^2}{R^2 - r_i^2} \left( 1 - \left( \frac{r_i}{r} \right)^2 \right) & \sigma_{r,2}(r) &= P \frac{R^2}{r_o^2 - R^2} \left( 1 - \left( \frac{r_o}{r} \right)^2 \right) \\ \sigma_{\theta,1}(r) &= -P \frac{R^2}{R^2 - r_i^2} \left( 1 + \left( \frac{r_i}{r} \right)^2 \right) & \sigma_{\theta,2}(r) &= P \frac{R^2}{r_o^2 - R^2} \left( 1 + \left( \frac{r_o}{r} \right)^2 \right)\end{aligned}\quad (1.2)$$

Pour deux cylindres de matériaux différents, la pression de contact est égale à :

$$P = \frac{\delta_r}{R \left[ \frac{1}{E_2} \left( \frac{r_o^2 + R^2}{r_o^2 - R^2} + \nu_2 \right) + \frac{1}{E_1} \left( \frac{R^2 + r_i^2}{R^2 - r_i^2} - \nu_1 \right) \right]}\quad (1.3)$$

Pour deux cylindres de même matériau, la pression s'écrit alors :

$$P = \frac{E\delta_r (r_o^2 - R^2)(R^2 - r_i^2)}{2R^3 (r_o^2 - r_i^2)} \quad (1.4)$$

### 1.2.2 Effet de la dilatation thermique

Une variation de la température  $\Delta T$  après l'assemblage crée une dilatation thermique des deux cylindres. Les équations des déformations thermiques  $\varepsilon^{th}$  en coordonnées cylindriques sont les suivantes :

$$\varepsilon^{th} = \varepsilon_r^{th} = \varepsilon_\theta^{th} = \varepsilon_z^{th} = \alpha\Delta T \quad (1.5)$$

Il est alors possible de calculer les contraintes associées aux déformations thermiques :

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu\sigma_\theta] + \alpha\Delta T \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \nu\sigma_r] + \alpha\Delta T \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[-\nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] + \alpha\Delta T \end{aligned} \quad (1.6)$$

Dans la direction radiale, un déplacement  $u_r^{th}$  est créé :

$$u_r^{th}(r) = r\alpha\Delta T \quad (1.7)$$

Si le coefficient d'expansion thermique  $\alpha$  n'est pas identique pour les deux cylindres, une variation de l'interférence  $\delta_r^{th}$  est créée et vaut :

$$\delta_r^{th} = u_{r,1}^{th} - u_{r,2}^{th} = R(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T \quad (1.8)$$

Il est à noter que si  $\alpha_1 < \alpha_2$ , il y aura une diminution de l'interférence initiale et si  $\alpha_1 > \alpha_2$ , l'interférence est augmentée. Le théorème de superposition peut ensuite être appliqué pour calculer la pression de contact et les contraintes dues à la nouvelle interférence.

### 1.2.3 Effet centrifuge

Pour un disque annulaire en rotation, les contraintes  $\sigma^\omega$  et le déplacement radial  $u_r^\omega$  dus à la vitesse de rotation  $\omega$  et à la densité du matériau  $\rho$  sont les suivants :

$$\begin{aligned}
\sigma_r^\omega(r) &= \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r_o^2 \left[ \left( \frac{r_i}{r_o} \right)^2 + 1 - \left( \frac{r}{r_o} \right)^2 - \left( \frac{r_i}{r} \right)^2 \right] \\
\sigma_\theta^\omega(r) &= \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r_o^2 \left[ \left( \frac{r_i}{r_o} \right)^2 + 1 - \left( \frac{1+3\nu}{3+\nu} \right) \left( \frac{r}{r_o} \right)^2 + \left( \frac{r_i}{r} \right)^2 \right] \\
u_r^\omega(r) &= \frac{(3+\nu)(1-\nu)}{8E} \rho \omega^2 r_o^2 r \left[ 1 + \left( \frac{r_i}{r_o} \right)^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \left( \frac{r_i}{r} \right)^2 - \frac{1+\nu}{3+\nu} \left( \frac{r}{r_o} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Si les deux cylindres ne sont pas faits du même matériau, ces relations peuvent être employées indépendamment pour chacun. Il faudra également tenir compte de la variation sur l'interférence radiale et le théorème de superposition peut ensuite être appliqué pour calculer la pression de contact et les contraintes dues à la nouvelle interférence :

$$\begin{aligned}
u_{r,1}^\omega(R) &= \frac{(3+\nu_1)}{4E_1} \rho_1 \omega^2 R^3 \left[ \frac{1-\nu_1}{3+\nu_1} + \left( \frac{r_i}{R} \right)^2 \right] \\
u_{r,2}^\omega(R) &= \frac{(3+\nu_2)}{4E_2} \rho_2 \omega^2 r_o^2 R \left[ 1 + \frac{1-\nu_2}{3+\nu_2} \left( \frac{R}{r_o} \right)^2 \right] \\
\delta_r^\omega &= u_{r,1}^\omega - u_{r,2}^\omega
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Enfin, notons que les contraintes  $\sigma^\omega$  sont habituellement très faibles, sauf à de grandes vitesses de révolution. Cependant, dans le cas de deux matériaux différents, les contraintes dues à la variation de l'interférence sont plus importantes.

#### 1.2.4 Effort d'emmanchement

L'effort axial maximum qui peut être supporté par le frettage est fonction du coefficient de friction  $\mu$ , de la pression et de la surface de contact :

$$F_E = 2\pi R L P \mu \tag{1.11}$$

#### 1.2.5 Couple transmissible

Le couple maximal de torsion que peut supporter un frettage est le produit de l'effort d'emmanchement par le rayon à l'interface de contact :

$$T_E = 2\pi R^2 L P \mu \tag{1.12}$$

L'application directe de cette relation prédit un couple très conservatif, alors qu'une approche locale (avec concentration de contrainte) donne des résultats très près de la réalité. (Truman & Booker, 2003)

## 2. Contact et glissement

Il y a deux aspects fondamentaux à la modélisation du contact. Le premier aspect est de savoir si les deux corps sont en contact ou encore en décollement. Essentiellement, il y a contact tant et aussi longtemps que la pression de contact est positive. Lorsqu'elle devient négative ou nulle, il y a décollement. Le second aspect consiste à connaître l'état du frottement pour le cas général, bien qu'il existe des contacts sans frottement ( $\mu = 0$ ) ou rugueux ( $\mu = \infty$ ). Avant de poursuivre, notons qu'il existe trois types de frottement en mécanique théorique : (Beleca Irimescu, 2002)

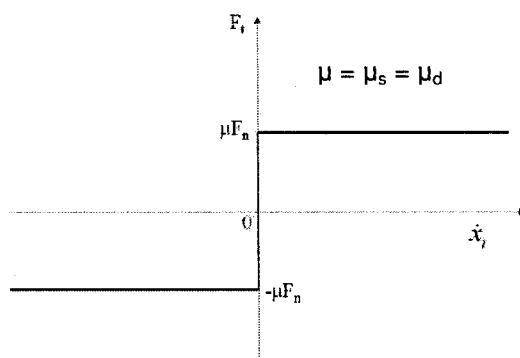
- Frottement en glissement (sujet de la présente étude)
- Frottement en pivotement
- Frottement en roulement

### 2.1 Glissement macroscopique

Au niveau macroscopique, l'ensemble de la surface de contact est considérée dans le même état. Le modèle théorique le plus utilisé pour représenter le glissement à l'état macroscopique est la loi de Coulomb (D'Ambrosio, 2004) (Voir Figure 1-2). Cette dernière stipule que la force tangentielle  $F_t$  de friction s'oppose au sens du glissement et qu'elle est proportionnelle à la force normale  $F_n$  dans le rapport du coefficient de friction. Il existe cependant un seuil à ne pas dépasser avant que le glissement ne s'amorce, d'où la distinction entre le coefficient de friction statique ( $\mu_s$ ) et dynamique ( $\mu_d$ ), d'après les relations ci-dessous :

$$F_t < \mu_s F_n \text{ si } \dot{x}_t = 0 \text{ (bloqué)} \quad (1.13)$$

$$F_t = \mu_d F_n \text{ si } \dot{x}_t > 0 \text{ (glissement)}$$



**Figure 1-2 : Loi de Coulomb**

**Source : (D'Ambrosio, 2004)**

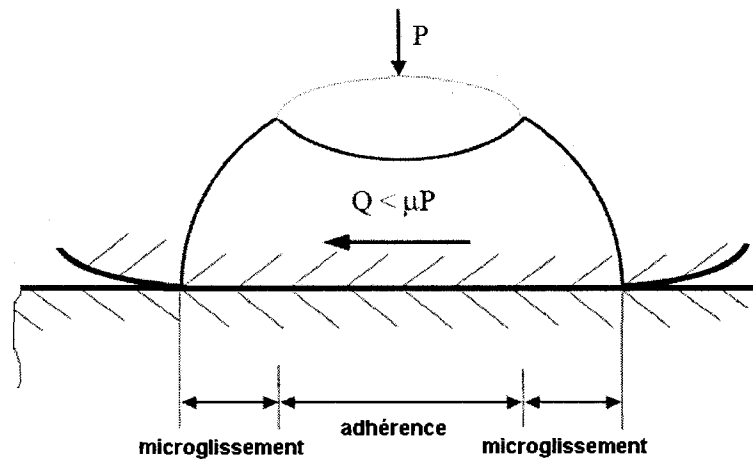
Le coefficient de friction est souvent considéré constant dans la modélisation. Il s'agit d'une approximation, puisque des études ont démontré qu'il varie en fonction du taux d'application de la force et du déplacement des surfaces en contact. Cependant, lorsque l'amplitude du glissement demeure faible, la valeur à utiliser est  $\mu_s$  (D'Ambrosio, 2004).

## 2.2 Comportement microscopique

Au niveau microscopique, il existe différents modèles (ex : Mindlin (D'Ambrosio, 2004)) pour caractériser la non-homogénéité de l'état de contact des surfaces. Comme l'approche privilégiée dans le présent travail est la simulation par éléments finis, ces modèles théoriques ne seront pas davantage explicités.

### 2.2.1 Glissement partiel

Suite à l'application d'une contrainte tangentielle telle que  $Q < \mu P$ , le centre de la surface de contact est en adhérence, alors que les extrémités sont elles en micro-glissement. On parle alors de glissement partiel. (Araujo & Nowell, 2002; D'Ambrosio, 2004) Si ce dernier est créé par un mouvement oscillatoire de faible amplitude, le phénomène s'appelle fretting.



**Figure 1-3 : Glissement partiel**

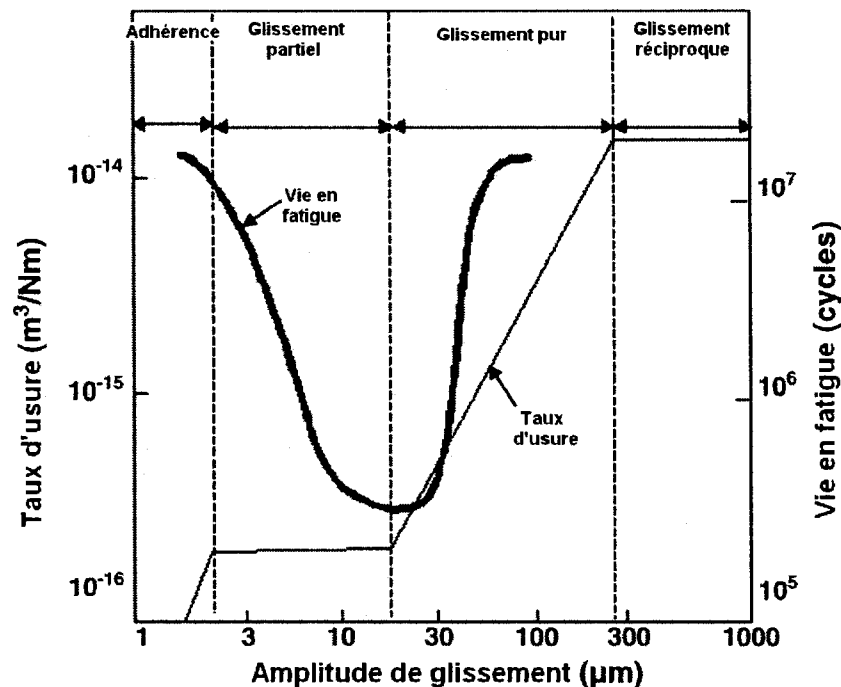
Source : (Beleca Irimescu, 2002)

### 3. Le fretting

Plusieurs observations expérimentales ont démontré que la vie en fatigue de pièces soumises au fretting peut être beaucoup plus faible que par fatigue normale (D.-H. Lee, Kwon, Choi, & Kim, 2006; D. H. Lee, Goo, Lee, Choi, & Kim, 2005). Au niveau de la surface de contact entre les deux cylindres frottés, l'endommagement par frottement est fonction principalement de 3 paramètres considérés indépendants : la pression de contact, l'amplitude de glissement et le coefficient de friction. (Madge, Leen, McColl, & Shipway, 2007)

#### 3.1 Régimes de glissement

L'endommagement par fretting met en concurrence deux phénomènes distincts : la fatigue (*fretting – fatigue*) et l'usure (*fretting – wear*). La Figure 1-4 illustre l'évolution du taux d'usure et la vie en fatigue en fonction de l'amplitude de glissement pour un cas typique.



**Figure 1-4 : Effet de l'amplitude de glissement sur le taux d'usure et la vie en fatigue**  
**Adaptation de (Madge, Leen, McColl, & Shipway, 2007)**

Sur la Figure 1-4, il est possible de distinguer 4 régimes de glissement, qui peuvent se définir comme suit : (Ekberg, 2004; Fouvry, Fridrici, Langlade, Kapsa, & Vincent, 2006; Szolwinski, 1998)

- En adhérence : l'amplitude de glissement est très faible, voire nulle. L'usure de la surface est très limit e et il n'y a pas de formation de fissures.
- Glissement partiel : l'amplitude de glissement est d'environ 2 à 25  $\mu\text{m}$ . Il y a un peu d'usure et de dommage caus e par l'oxydation, mais la vie en fatigue chute. Ceci s'explique par l'amplitude de cisaillement qui est très  lev e à la limite de la zone qui alterne entre adhérence et glissement.
- Glissement pur : l'amplitude de glissement est  lev e. L'usure en surface est sévère due au frottement et à l'oxydation, mais la vie en fatigue remonte. Ceci s'explique par l'augmentation des débris qui créent un film lubrifiant, empêchant la formation de fissure.
- Glissement réciproque : l'amplitude de glissement est très  lev e. Le taux d'usure sature et la vie en fatigue n'est plus affect e par le glissement. Le phénomène s'explique par le film de débris qui est rendu assez épais pour que les surfaces ne soient plus directement en contact.



### 3.1.1 Fatigue par fretting

La fatigue par fretting se caractérise par l'amorce de fissures dans la zone en contact et se situe principalement dans le régime de glissement partiel. À première vue, elle est due principalement aux contraintes de cisaillement à l'interface. Cependant, sa compréhension n'est pas encore complète et sera discutée plus en détails au à la section 4 : Calcul en fatigue.

### 3.1.2 Usure par fretting

L'usure par fretting se caractérise par l'enlèvement de matière qui résulte en une modification de la géométrie et se situe dans un régime où le glissement est élevé. La relation de base dans ce domaine est l'équation d'Archard et est utilisée par certains auteurs (Hattori & Watanabe, 2006).

$$\dot{V} = K \dot{W} \quad (1.14)$$

- $\dot{V}$  : Taux d'enlèvement de matière [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]
- $K$  : Coefficient d'usure [ $\text{m}^3/\text{Nm}$ ]
- $\dot{W}$  : Puissance d'usure [Watt]

Cette approche est intéressante, mais le véritable problème dans la plupart des cas est dû à la fissuration. Les données relatives à ce genre de modélisation sont également habituellement moins bien connues. Bien que l'usure par fretting ne soit pas un phénomène totalement indépendant de la fatigue par fretting, l'approche privilégiée sera d'étudier le comportement en fatigue par une analyse par éléments finis et à l'aide de critères de fatigue.

### 3.1.3 Étendue de l'étude

La présente étude porte sur l'optimisation d'assemblages par frettage. Les principaux critères de conception retenus sont la résistance en statique et en fatigue, en plus de la rigidité. Une usure trop importante dans la zone frettée aura pour effet de perdre en grande partie l'effet de la précontrainte de frettage et la rigidité de l'assemblage, ce qui n'est pas souhaitable. L'étude se limitera donc aux régimes où le glissement et l'usure demeurent faibles, soit l'adhérence et le glissement partiel et ne considérera pas l'usure par frottement dans les calculs.

De plus, le fretting – fatigue et le fretting – wear sont deux phénomènes distincts qui peuvent progresser en même temps et les études ne sont pas assez complètes pour bien modéliser le comportement de leur interaction. (Fouvry, Fridrici, Langlade, Kapsa, & Vincent, 2006; D. H. Lee, Kwon, Lee, Choi, & Kim, 2006)

### 3.2 Coefficient de friction

En fretting, il existe trois types de coefficients de friction (Wang, Jain, & Mall, 2007) :

- Statique ( $\mu_s$ ) : Rapport entre la force tangentielle nécessaire pour créer le glissement et la force normale qui maintient deux corps en contact;
- Dynamique ( $\mu_d$ ) : Rapport entre la force tangentielle et la force normale une fois le glissement amorcé;
- Cinétique ( $\mu_c$ ) : Coefficient de friction dans le régime de glissement pur, dû à l'apparition d'un troisième corps (du point de vue tribologique) constitué de l'accumulation de débris.

D'après les expérimentations, le coefficient de friction n'est pas toujours constant en fonction du temps selon les cas observés. Par exemple, lorsque le glissement est important, le coefficient de friction cinétique est plutôt constant. (Elleuch & Fouvry, 2005; Wang, Jain, & Mall, 2007) Pour de faibles amplitudes de glissement, le coefficient de friction statique semble augmenter au cours des cycles à cause de l'usure et sature vers 10 000 à 50 000 cycles, pouvant passer de 0.2 à 0.7 par exemple. (Hattori, Kawai, Okamoto, & Sonobe, 1981; Juuma, 1999, 2000b; Wang, Jain, & Mall, 2007)

La présente étude se limite à de faibles amplitudes de glissement et seuls le coefficient de friction statique sera considéré, selon un modèle de friction de Coulomb. Si aucune donnée n'est disponible, il est recommandé d'utiliser un coefficient de friction un peu plus élevé à l'endroit où il se produit le plus de dommage pour des résultats de simulation plus près de la réalité. (Swalla & Neu, 2001; Truman & Booker, 2007)

Si des expérimentations sont possibles, il existe une relation qui permet de déterminer le coefficient de friction dans la zone de glissement  $f_s$  à partir d'une valeur moyenne mesurée  $f_m$  après 10 000 cycles (pour de faibles amplitudes de glissement, car à grandes amplitudes moins de cycles sont nécessaires), connaissant la force normale  $P$  et l'amplitude de la force tangentielle  $Q$ . (Araujo & Nowell, 2002; Hills & Nowell, 1994; Szolwinski, 1998). L'essai à réaliser pour obtenir ces résultats est basé sur le contact hertzien.

$$f_m = f_s + \left\{ \frac{4Q}{\pi P} \left[ \frac{\pi}{2} - \cot \theta_s - \theta_s \right] - \frac{2}{\pi} \left[ f_s \phi_s - \frac{Q}{P} \tan \phi_s \right] \right\} \quad (1.15)$$

Avec :

$$\theta_s = \sin^{-1} \sqrt{\frac{Q}{f_s P}}$$

$$\phi_s = \cos^{-1} \sqrt{\frac{Q}{f_s P}}$$

## 4. Calcul en fatigue

### 4.1 Théorie sur les critères de fatigue

Le calcul en fatigue classique est basé sur l'utilisation des courbes S-N, qui sont un tracé de l'amplitude de contrainte en fonction du nombre de cycles à la rupture. Il est possible d'obtenir ce genre de courbes pour des états de contrainte en traction – compression ou en torsion par exemple. Un critère de base est donc celui de la contrainte normale maximale (CNM), qui considère un état uniaxial de contrainte. Pour calculer la vie en fatigue, la norme ASME (ASME, 2006) recommande l'utilisation du critère général de Von Mises (VM) ou la méthode de Sines (SIN), qui font intervenir le cisaillement octaédrique. Ces critères ont l'avantage d'être simples à appliquer et tiennent compte de l'état multiaxial de contrainte en plus de la contrainte moyenne, avec la correction du diagramme de Goodman modifié.

Les critères énoncés précédemment se basent sur l'état de contrainte. Ces derniers sont souvent l'objet de la fatigue à haut nombre de cycles. Il existe également des critères basés sur l'état de déformation, habituellement utilisés pour la fatigue oligocyclique. Notons par exemple les critères de Manson-Coffin, Smith-Watson-Topper et de Fatemi-Socie, les deux premiers étant basés sur la déformation normale et le dernier sur la déformation en cisaillement. Il est à noter que les données relatives aux critères basés sur la déformation sont plus difficiles à obtenir que pour ceux basés sur l'état de contrainte, les rendant parfois inutilisables en conception.

Lorsque l'état de contrainte est complexe, les auteurs qui effectuent la modélisation utilisent parfois des critères multiaxiaux. L'amorce de fissures par fretting se fait habituellement dans un endroit où le chargement est multiaxial et non-proportionnel (les directions principales varient au cours du temps). Ceci suggère donc l'utilisation d'un critère multiaxial de fatigue. Un critère multiaxial de fatigue se base habituellement sur les données d'essais en fatigue d'au moins deux états de contrainte, par exemple la combinaison de la traction alternée symétrique ( $\sigma_{-1}$ ) et de la torsion alternée symétrique ( $\tau_{-1}$ ). Il existe une multitude de critères multiaxiaux, dont

plusieurs sont décrits dans (Bastien Weber, 1999). Parmi tous les critères, ceux de Crossland (CRO) et de Dang Van (DV) retiennent l'attention. Le critère de Crossland est un critère global dérivé du critère de Von Mises. Le critère de Dang Van est un critère de type plan critique basé sur l'amplitude de cisaillement.

Pour appliquer un critère multiaxial, il arrive que les données d'essais ne soient disponibles que pour un seul état de contrainte, bien souvent seulement pour  $\sigma_{-1}$ . Il est néanmoins possible de faire l'approximation suivante basée sur la théorie de Von Mises, en sachant bien que le plein potentiel du critère multiaxial n'est à ce moment pas utilisé :

$$\tau_{-1} = \frac{\sigma_{-1}}{\sqrt{3}} \quad (1.16)$$

D'autres auteurs privilégient une approche basée sur la mécanique de la rupture. Cette méthode consiste à simuler directement la fissuration due au phénomène de fretting et de suivre sa progression. Il est possible d'arriver à des résultats à moins de 50% de la durée de vie expérimentale d'assemblages par interférence, ce qui représente un résultat intéressant. (Gutkin & Alfredsson, 2008)

## 4.2 Présentation des critères de fatigue

Les critères énoncés précédemment sont présentés ici, avec l'expression du facteur de sécurité en fatigue. L'interprétation d'un critère de fatigue diffère d'un à l'autre en fonction de sa définition. Néanmoins, ils devraient tous être égaux à 1 au moment de l'amorce de la fissure.

### 4.2.1 Critère de Von Mises (VM)

Ce critère calcule d'abord la contrainte alternée ( $\sigma_a$ ) et la contrainte moyenne ( $\sigma_m$ ) au sens de Von Mises :

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{(\sigma_{x,a} - \sigma_{y,a})^2 + (\sigma_{y,a} - \sigma_{z,a})^2 + (\sigma_{z,a} - \sigma_{x,a})^2 + 6(\tau_{xy,a}^2 + \tau_{yz,a}^2 + \tau_{xz,a}^2)}{2}} \quad (1.17)$$

$$\sigma_m = \pm \sqrt{\frac{(\sigma_{x,m} - \sigma_{y,m})^2 + (\sigma_{y,m} - \sigma_{z,m})^2 + (\sigma_{z,m} - \sigma_{x,m})^2 + 6(\tau_{xy,m}^2 + \tau_{yz,m}^2 + \tau_{xz,m}^2)}{2}} \quad (1.18)$$

Le signe de la contrainte moyenne est choisi en fonction de la plus grande contrainte principale en valeur absolue. Par exemple, si  $|\sigma_I| < |\sigma_{III}|$  et que  $\sigma_{III} < 0$ , alors  $\sigma_m$  est défini négatif.

De plus, une correction due à la contrainte moyenne est ensuite appliquée à la contrainte alternée selon le diagramme de Goodman modifié. Le calcul du facteur de sécurité en fatigue devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} VM = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{S_f} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}}} \quad \text{si } \sigma_m > 0 \\ \\ VM = \frac{S_f}{\sigma_a} \quad \text{si } \sigma_m \leq 0 \end{array} \right. \quad (1.19)$$

À partir de l'équation (1.19), il est possible de définir une contrainte alternée équivalente (contrainte moyenne nulle) ayant le même effet en fatigue :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_a^* = \frac{\sigma_a}{1 - \frac{\sigma_m}{S_{ut}}} \quad \text{si } \sigma_m > 0 \\ \\ \sigma_a^* = \sigma_a \quad \text{si } \sigma_m \leq 0 \end{array} \right. \quad (1.20)$$

#### 4.2.2 Critère de Sines (SIN)

Le critère de Sines est identique à celui de Von Mises, à la différence du calcul de la contrainte moyenne :

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{(\sigma_{x,a} - \sigma_{y,a})^2 + (\sigma_{y,a} - \sigma_{z,a})^2 + (\sigma_{z,a} - \sigma_{x,a})^2 + 6(\tau_{xy,a}^2 + \tau_{yz,a}^2 + \tau_{xz,a}^2)}{2}} \quad (1.21)$$

$$\sigma_m = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (1.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} SIN = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{S_f} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}}} \quad \text{si } \sigma_m > 0 \\ \\ SIN = \frac{S_f}{\sigma_a} \quad \text{si } \sigma_m \leq 0 \end{array} \right. \quad (1.23)$$

### 4.2.3 Critère de la Contrainte Normale Maximale (CNM)

Pour un état de contrainte uniaxial, l'application du critère CNM est triviale. Pour un état multiaxial proportionnel, il suffit de diagonaliser le tenseur de contrainte pour en extraire les contraintes principales. Pour un état non proportionnel cependant, il est nécessaire de balayer dans l'espace tridimensionnel toutes les directions possibles et d'effectuer le calcul de l'amplitude de contrainte pour chacune d'elles. L'amorce de fissure s'effectuera pour le cas où l'amplitude est maximale. L'expression du facteur de sécurité en fatigue est définie comme étant le maximum dans le temps  $t$ , selon une direction  $h$  quelconque, de l'amplitude de la contrainte normale. Encore une fois, la correction de Goodman est applicable.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{CNM} = \underset{h}{\text{Max}} \left( \underset{t}{\text{Max}} \left[ \frac{1}{\frac{\sigma_{a,h}}{S_f} + \frac{\sigma_{m,h}}{S_{ut}}} \right] \right) \quad \text{si } \sigma_{m,h} > 0 \\ \text{CNM} = \underset{h}{\text{Max}} \left( \underset{t}{\text{Max}} \left[ \frac{S_f}{\sigma_{a,h}} \right] \right) \quad \text{si } \sigma_{m,h} \leq 0 \end{array} \right.$$

### 4.2.4 Critère de Crossland (CRO)

Le critère de Crossland est une combinaison linéaire de la racine carrée de l'amplitude du deuxième invariant du tenseur déviateur de contrainte (ou la contrainte équivalente au sens de Von Mises) et du maximum au cours du temps du premier invariant du tenseur des contraintes.

$$CRO = \frac{A}{\sqrt{J_{2a}} + BI_{1\max}} \quad \text{avec } A = \tau_{-1} \quad \text{et } B = \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (1.24)$$

$$\sqrt{J_{2a}} = \sqrt{\frac{(\sigma_{x,a} - \sigma_{y,a})^2 + (\sigma_{y,a} - \sigma_{z,a})^2 + (\sigma_{z,a} - \sigma_{x,a})^2 + 6(\tau_{xy,a}^2 + \tau_{yz,a}^2 + \tau_{xz,a}^2)}{2}}$$

$$I_{1\max} = \underset{t}{\text{Max}} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

Il est à noter qu'avec l'approximation  $\tau_{-1} = \frac{\sigma_{-1}}{\sqrt{3}}$ ,  $B = 0$  et le critère devient identique à celui de

Von Mises et de Sines, si on ne tient pas compte de la correction due à la contrainte moyenne.

#### 4.2.5 Critère de Dang Van (DV)

Le critère de Dang Van (DV) est une maximisation d'un indicateur de dommage par plan  $DV_h$  :

$$\frac{1}{DV} = \text{Max}_h \left\{ \frac{1}{DV_h} \right\} \quad (1.25)$$

Si  $1/DV > 1 \rightarrow$  Amorce de fissure

Si  $1/DV < 1 \rightarrow$  Durée de vie infinie

Cet indicateur par plan est à son tour une maximisation d'une fonction de fatigue en tout temps  $t$  au cours du chargement :

$$\frac{1}{DV_h} = \text{Max}_t \left\{ \frac{\tau_{ha}(t) + \alpha P_H(t)}{\beta} \right\} \quad (1.26)$$

Avec :

- $P_H(t) = \frac{\sigma_{xx}(t) + \sigma_{yy}(t) + \sigma_{zz}(t)}{3}$ , la pression hydrostatique à l'instant  $t$ .
- $\tau_{ha}(t)$ , la partie alternée du cisaillement dans le plan.
- Les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  sont déterminées à partir de deux limites d'endurance en fatigue.
  - Par exemple :  $\alpha = 3 \left( \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \frac{1}{2} \right)$  et  $\beta = \tau_{-1}$

Le calcul du critère de Dang Van est présenté en détail à l'Annexe B.

#### 5. Modélisation par éléments finis

La méthode des éléments finis (MEF) permet d'effectuer des calculs plus précis sur des géométries complexes comparativement aux équations de Lamé. De plus, la MEF permet de tenir compte des effets de bout, là où il y a des concentrations de contrainte. Il est donc beaucoup plus facile de connaître la contrainte locale pour tout type de chargement. Il est préférable de traiter les cas complexes par la méthode des éléments finis (Zhang, McClain, & Fang, 2000).

Pour la présente étude sur les assemblages par interférence, une modélisation par éléments finis à l'aide du logiciel ANSYS Workbench 11.0 sera effectuée. Pour pouvoir faire confiance à des résultats d'expériences en laboratoire, il est important d'avoir une méthode expérimentale rigoureuse. Il en va de même pour une analyse par éléments finis. Malheureusement, dans plusieurs cas présentés dans la littérature, seules quelques informations de base sont

clairement indiquées sur l'aspect de la modélisation par éléments finis. Comme notre étude portera plus précisément sur la modélisation du contact, une attention spéciale y sera accordée. Nous verrons qu'il n'y a pas seulement le raffinement du maillage qui intervient dans la convergence des résultats.

### 5.1 Convergence

Une étude de convergence est primordiale en éléments finis, puisque les résultats numériques ne sont qu'une approximation de la solution exacte. La principale question est : quand a-t-on atteint la convergence? La réponse est : lorsqu'un paramètre n'affecte plus la solution de façon significative et devient négligeable. Ce paramètre peut être la taille du maillage. Au niveau du contact, la convergence est directement liée à la quantité de pénétration. Pour comprendre ce qu'est la pénétration, voici un résumé des notions fondamentales à propos des formulations de contact en éléments finis.

### 5.2 Formulation du contact

Essentiellement, il existe deux familles de formulation pour les contacts rugueux (avec friction) : la méthode par pénalité et les multiplicateurs de Lagrange. Ces formulations existent dans les directions normales et tangentielles de la surface de contact.

#### 5.2.1 Méthode par pénalité

La fonction pénalité est une méthode de résolution basée sur le déplacement :

$$[K]\{x\} = \{F\} \quad (1.27)$$

Les paramètres impliqués sont la rigidité de contact et la pénétration.

$$K_{contact} \Delta x_{penetration} = F_{contact} \quad (1.28)$$

Puisque qu'un contact surface-à-surface transmet la pression de contact entre les points de Gauss, et non les forces entre les nœuds, la rigidité de contact est en unités [FORCE/LONGUEUR<sup>3</sup>]. La pénétration est un artifice mathématique, puisqu'elle n'existe pas en réalité entre deux corps en contact. Même si elle est très petite (ex : 1E-3 mm), la pénétration influence la solution. Ainsi, pour obtenir la bonne contrainte de contact, la pénétration doit être la plus petite possible. Ceci peut être obtenu en augmentant la rigidité de contact autant que possible. Mais une rigidité de contact trop élevée entraîne des problèmes avec un solveur itératif, puisque la matrice à résoudre devient mal-conditionnée. Pour un solveur direct, ceci ne cause pas de problème, mais demande des ressources informatiques très importantes. Cependant, il est souvent beaucoup plus rapide d'utiliser un solveur itératif pour de grands modèles, il survient alors des problèmes de convergence. La rigidité de contact peut être entrée



en valeur absolue (KN ou KT) ou par un facteur (FKN et FKT) de la rigidité de contact de Hertz calculée par défaut.

### 5.2.2 Multiplicateurs de Lagrange

Avec les multiplicateurs de Lagrange, les forces de contact sont traitées en tant que degrés de liberté :

$$[K] \begin{Bmatrix} x \\ F_{contact} \end{Bmatrix} = \{F\} \quad (1.29)$$

On calcule donc directement les forces de contact (ou pressions de contact). Il y a donc l'avantage de ne pas avoir à traiter avec les rigidités de contact. Cependant, la pénétration existe toujours, mais cette fois elle est plutôt liée à la taille du maillage et au nombre de points de détection de contact. La pression de contact est beaucoup plus sensible au maillage qu'avec la méthode par pénalité. Avec les multiplicateurs de Lagrange, la matrice du système à résoudre aura des 0 sur la diagonale, résultant en un choix de solveur limité (solveur direct uniquement). Bien qu'efficace pour de petits modèles, un solveur direct demande une puissance de calcul importante pour des modèles de grande taille, augmentant parfois de beaucoup le temps de calcul.

### 5.2.3 Lagrangien augmenté

Parmi les formulations de contact disponibles, il existe la méthode du Lagrangien augmenté. Il s'agit d'une fonction pénalité avec un contrôle de la pénétration (FTOLN) et du glissement élastique (SLTO – pénétration tangentielle), contrairement à un contrôle direct de la rigidité de contact. Lorsque la pénétration ou le glissement excède une limite définie, la rigidité de contact est automatiquement augmentée à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange. Le contrôle peut être défini comme un facteur de la taille de l'élément de contact ou comme une valeur absolue.

## 5.3 Taille du maillage

La taille du maillage est un paramètre clé dans toute étude de convergence. Pour le phénomène étudié ici, la zone d'intérêt se situe à proximité d'une arête de contact et sa taille est très limitée par rapport au gradient de contrainte. La taille du maillage influencera donc la précision des contraintes, mais aussi la pénétration de contact et son comportement en glissement.

Plusieurs auteurs mentionnent l'importance du gradient de contrainte dans l'application d'un critère de fatigue. Dans les assemblages par interférence, il existe un fort gradient de contrainte sur le coin de la zone du fretage. Certains auteurs semblent montrer que cet effet peut être pris en compte par un raffinement du maillage de la taille du grain du matériau dans la zone critique

(Ekberg, 2004; Sum, Williams, & Leen, 2005). D'autres ont étudié cette possibilité sans parvenir à démontrer cette affirmation dans tous les cas (Araujo & Nowell, 2002; Araujo, Nowell, & Vivacqua, 2004; Bernardo, Araujo, & Mamiya, 2006). Il est difficile de savoir quelle est la bonne réponse à cette question, puisque les études présentées utilisent souvent des propriétés de matériau empruntés à d'autres auteurs et que les étapes de la modélisation par éléments finis ne sont pas clairement explicitées. Il est donc ardu de reproduire les simulations. De plus, il faut mentionner qu'un raffinement de la taille du grain donne une quantité astronomique d'éléments et que cette méthode semble peu envisageable. Par exemple, pour un acier avec une taille de grain de 200  $\mu\text{m}$ , il faut 125 000 éléments dans 1  $\text{cm}^3$ . Dans les cas qui seront étudiés dans le présent document, une étude de convergence du maillage sera effectuée en utilisant le principe de sous-modélisation mentionné ci-dessous.

#### 5.4 Sous-modélisation

La convergence est atteinte pour une taille relativement petite d'éléments dans la zone d'intérêt, c'est-à-dire à l'extrémité du frettage. Une technique de sous-modélisation est donc appropriée dans ce cas. La sous-modélisation introduit toutefois une approximation supplémentaire et peut causer de sérieux problèmes de convergence lorsqu'on tente de l'appliquer dans une zone de contact. La méthode de sous-modélisation est recommandée pour obtenir des contraintes convergées dans les endroits difficiles (Rajasekaran & Nowell, 2005). La sous-modélisation se base sur le principe de St-Venant (les conditions aux limites CL sont assez loin de la zone étudiée). Il est recommandé d'utiliser les déplacements en CL, par opposition aux forces nodales, car ils convergent plus rapidement. (D. H. Lee, Goo, Lee, Choi, & Kim, 2005)

La procédure décrite ci-dessous assure de bons résultats : (Cormier, Smallwood, Sinclair, & Meda, 1999)

1. Analyse du modèle global avec 3 maillages systématiquement raffinés (g – *grossier*, m – *moyen*, f – *fin*)
2. Vérification de la convergence des déplacements aux limites de la zone de sous-modélisation
  - a. Les déplacements convergent si  $|u_i^g - u_i^m| > |u_i^m - u_i^f|$
  - b. Les déplacements sont convergés si  $|u_i^m - u_i^f| < \Delta$  (ex :  $\Delta = 1\%$ )
  - c. Cette vérification doit être effectuée sur des nœuds coïncidents pour chaque sous-modèle

- d. Si le critère de convergence n'est pas respecté, il est nécessaire de raffiner le modèle global à partir de l'étape 1 ou d'augmenter la taille de la zone de sous-modélisation
3. Si l'étape 2 converge, un premier sous-modèle avec un maillage plus fin est testé en utilisant les déplacements imposés des modèles globaux moyen et fin
  - a. Les résultats du modèle global sont convergés si la contrainte maximale varie moins que le critère défini à l'interface de contact (ic) :  $\left| \sigma_{\max}^{fci} - \sigma_{\max}^{mci} \right| < \Delta$
  - b. Si le critère de convergence n'est pas respecté, il est nécessaire de raffiner le modèle global à partir de l'étape 1 ou d'augmenter la taille de la zone de sous-modélisation
4. Si l'étape 3 converge, le sous-modèle peut être raffiné, puisque les conditions aux limites imposées sont convergées
  - a. L'étude de convergence est effectuée comme aux étapes 2a et 2b avec des maillages systématiquement raffinés
  - b. Si la contrainte maximale ne converge pas assez rapidement, un sous-modèle interne peut être effectué en suivant les étapes 2 et 3
  - c. Si plusieurs sous-modèles successifs sont réalisés, les erreurs à l'interface s'accroissent et le critère de convergence pour chaque sous-étape est de

$$\Delta \rightarrow \frac{\Delta}{N}$$

## 5.5 Axisymétrie, symétrie et symétrie cyclique

### 5.5.1 Axisymétrie

Lorsque la géométrie et le chargement (ex : traction) s'y prêtent, il peut être utile d'y appliquer une condition d'axisymétrie. En éléments finis, il existe des éléments axisymétriques. Dans ANSYS (*ANSYS Theory Manual*, 2007), notons par exemple l'élément PLANE82. Pour d'autres types de chargement, tels que la flexion et la torsion, le chargement est non axisymétrique. Il est donc impossible d'utiliser la formulation axisymétrique même si la géométrie s'y prête. Dans ANSYS, l'élément PLANE83 permet une géométrie axisymétrique avec un chargement non-axisymétrique. Cependant, sa formulation harmonique ne permet pas l'utilisation de matériaux non-linéaires (ex : avec plasticité), ce qui est nécessaire dans les cas étudiés. En effet, la zone située au coin de la zone frettée entre l'arbre et le moyeu est dans un état de déformation plastique.

### 5.5.2 Symétrie

Pour le cas particulier du chargement en flexion du modèle de Nishioka (Chapitre 4), il sera possible d'utiliser une condition de symétrie sur le modèle 3D. En supposant que le plan de symétrie est  $Y = 0$ , le déplacement à imposer est  $u_y = 0$  sur les nœuds de ce plan de symétrie.

### 5.5.3 Symétrie cyclique

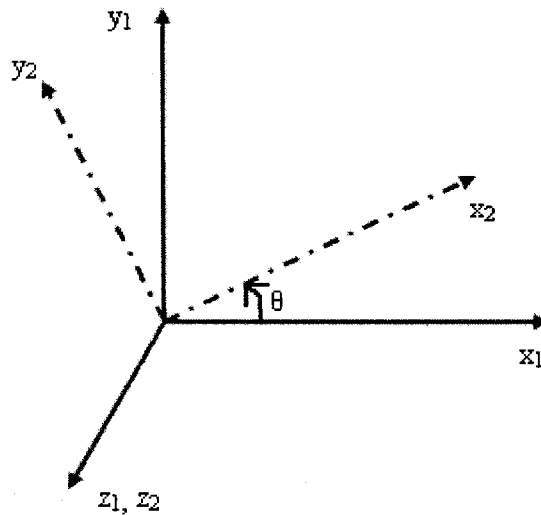
Pour le cas particulier de la torsion du modèle de Juuma (Chapitre 5), il est possible d'utiliser une condition de symétrie cyclique sur une mince tranche (ex :  $1^\circ$  de révolution) du modèle 3D. Sur les faces correspondantes du modèle, ceci revient à coupler les degrés de liberté (après une rotation dans un système de coordonnées cylindriques,  $u_r$ ,  $u_\theta$ ,  $u_z$ ) des nœuds qui doivent être coïncidents. La fonction CPCYC effectue ce travail dans ANSYS. Cependant, lorsqu'il existe des surfaces en contact, les nœuds coïncidents de part et d'autre du contact créent des problèmes dans la définition des paires de nœuds couplés. Ce problème se présente également pour un maillage très fin, alors qu'il est nécessaire de contrôler une tolérance de coïncidence. De plus, l'application d'un chargement (ex : application d'un moment de torsion sur la circonférence d'un cylindre) sur des nœuds couplés génère des erreurs au niveau du moteur de résolution. En effet, un nœud couplé à un autre est *supprimé* du système à résoudre et appliquer un chargement sur ce nœud crée une erreur. Pour palier à tous ces problèmes, une macro a été spécialement écrite, reliant avec des équations de contrainte les déplacements des surfaces (notées 1 et 2) auxquelles la symétrie cyclique est appliquée. De façon résumée, elle applique les équations de contraintes ci-dessous en effectuant un balayage corps solide par corps solide pour éviter le problème du contact et des nœuds avec des coordonnées identiques à cet endroit. Notons que ces équations sont valides seulement dans le repère global cartésien si l'axe Z correspond à l'axe de révolution.

$$u_{x2} = u_{x1} \cos \theta - u_{y1} \sin \theta \quad (1.30)$$

$$u_{y2} = u_{x1} \sin \theta + u_{y1} \cos \theta$$

$$u_{z2} = u_{z1}$$

$\theta$ : Angle de la tranche du modèle 3D pour la symétrie cyclique



**Figure 1-5 : Définition de la symétrie cyclique**

## **6. Études antérieures sur les assemblages par interférence**

Bien que tous les problèmes ne soient pas encore résolus, il existe plusieurs études dans la littérature portant sur les assemblages par interférence. Un survol est présenté dans cette section. Il y est question d'analyses de défaillance, d'essais expérimentaux et d'observations sur des cas statiques et de sollicitation en fatigue. De plus, divers moyens technologiques pour améliorer la vie en fatigue sont présentés.

### **6.1 Travaux sur les cas statiques**

Des auteurs (Truman & Booker, 2007) se sont intéressés à l'analyse de défaillance d'un assemblage par frettage d'une roue d'engrenage assemblée par frettage sur un arbre. Le mécanisme était présent dans une boîte d'engrenage et s'est avéré incapable de transmettre le couple de torsion après une période de temps relativement faible. Après s'être attardée à l'usure par fretting, les auteurs ont plutôt conclu que le dommage était causé par une diminution d'interférence due à un problème métallurgique. Ce qui a résulté en une diminution de la pression de contact et par conséquent, à l'incapacité de transmettre le couple. (Voir équation (1.12)) Bien que de l'usure était présente, la cause n'était donc pas due à la fatigue ni au fretting, mais plutôt à un phénomène statique couplé à un changement métallurgique. Il est donc important de s'assurer de la tenue statique tout au long de la vie utile de l'assemblage et ne pas seulement vérifier sa tenue en fatigue. Les mêmes auteurs ont également observé que d'ajouter un épaulement avec un congé sur l'arbre peut jusqu'à doubler le couple appliqué avant que ne survienne un glissement (Truman & Booker, 2003).

Le cas statique d'un arbre fretté dans un moyeu a également été étudié par d'autres auteurs (Ozel, Temiz, Aydin, & Sen, 2005). Suite à des modélisations par éléments finis, les auteurs ont observé que pour réduire le niveau de contrainte, la configuration la plus avantageuse est celle d'un arbre avec épaulement. Un arrondi sur le moyeu permet également d'obtenir de bons résultats.

Doumenc a effectué des observations sur le comportement statique en flexion des assemblages frettés (Doumenc, 1996). Sous des chargements de flexion faibles, la liaison procure une cohésion suffisante et assure une rigidité maximale. Sous des chargements de flexion élevés, des décollements et des glissements interviennent dans la liaison et provoquent une décohésion, faisant ainsi chuter la rigidité. Ceci donne lieu à une rigidité en deux parties linéaires (avant et après décollement). Aucune observation n'a toutefois été réalisée sur les contraintes et la résistance en fatigue.

Yang a développé un modèle tenant compte de la rugosité pour calculer la pression de contact équivalente des assemblages par interférence (Yang, 1998). Il est ainsi capable de calculer avec plus de précision la force d'arrachement (voir équation (1.11)). Il propose d'utiliser la notion de serrage en crête au lieu de serrage moyen, en se basant sur les paramètres de l'état de surface (hauteur maximale de la rugosité et hauteur maximale de l'ondulation. Il effectue également une correction sur l'aire réelle en contact à partir des pas moyens de rugosité. Pour les serrages importants, il introduit une notion de perte de serrage basée sur la déformation plastique des pics les plus hauts des aspérités. De par son modèle, Yang conclue qu'une rugosité plus élevée a pour effet d'augmenter l'effort maximal d'emmanchement. Cependant, une plus grande rugosité a habituellement un effet néfaste sur la tenue en fatigue et n'est pas étudiée par Yang. Il est cependant possible de recommander une plus forte rugosité dans la zone à l'intérieur du frettage, puis d'avoir un état de surface très lisse sur l'extrémité de la zone frettée pour ainsi maximiser la tenue en statique et en fatigue.

## **6.2 Essais expérimentaux en fatigue et observations**

Comme pour le cas statique, certaines configurations sont plus avantageuses pour un cas de sollicitation en fatigue. Par exemple, l'ajout d'un épaulement avec un rayon de congé peut augmenter la vie en fatigue fretting jusqu'à 50% (Ekberg, 2004).

En ce sens, des auteurs ont effectués des séries d'essais expérimentaux sur des arbres et des moyeux assemblés par frettage. Ils ont testé l'influence du matériau, du coefficient de friction, de la pression de contact et de différentes configurations géométriques sur la vie en fatigue fretting.

Nishioka a réalisé une série d'essais expérimentaux sur l'usure par fretting et notamment sur des assemblages par interférence avec un chargement en flexion (Nishioka & Hirakawa, 1969a, 1969b, 1969c, 1969d, 1972; Nishioka & Komatsu, 1967; Nishioka, Nishimura, & Hirakawa, 1968). Ses principales observations sont énumérées ci-dessous. Le détail des configurations testées ainsi que les résultats expérimentaux seront comparés à une modélisation par éléments finis au Chapitre 4.

- Pour un chargement constant en flexion rotative, l'amplitude de glissement décroît progressivement jusqu'à se stabiliser vers quelques milliers de cycles.
- La fréquence du chargement et la dureté du matériau ne semblent pas avoir d'effet sur le glissement.
- Le glissement diminue avec une augmentation de la pression nominale et de toute configuration géométrique faisant augmenter la pression locale à l'extrémité. Une augmentation de la pression diminue la vie en fatigue.
- Une des causes de la diminution de la résistance en fatigue par fretting est la distribution de la contrainte de friction.

Juuma a réalisé une série d'essais avec un chargement en torsion alternée (Juuma, 1997, 1998, 1999, 2000a, 2000b). Le détail des configurations testées ainsi que les résultats expérimentaux seront comparés à une modélisation par éléments finis au Chapitre 5. Ses principales conclusions sont les suivantes :

- Plus le matériau du moyeu est dur par rapport à l'arbre, plus le gain sur la vie en fatigue est important.
- Une diminution du coefficient de friction (par une combinaison judicieuse de matériaux pour l'arbre et le moyeu) diminue l'usure par fretting.
- Il observe également qu'il existe une valeur limite à partir de laquelle la pression de contact ne diminue plus le glissement, dans son cas 100 MPa. Une augmentation trop importante de la pression de contact n'est également pas bénéfique au niveau des contraintes.
- Ses observations expérimentales montrent que la rupture par fatigue fretting dans le frettage survient rarement pour de faibles amplitudes de glissement. La valeur critique de l'amplitude de glissement se trouve à être autour de 3  $\mu\text{m}$ , ce qui est en accord avec la Figure 1-4.
- Pour optimiser les assemblages par interférence, il y a un compromis à faire entre une fissure amorcée par fatigue fretting dans le joint fretté et une fissure amorcée par fatigue

conventionnelle dans le congé de l'arbre. Il privilégie la seconde option, car ce phénomène est mieux connu et surtout observable au cours de la vie du composant.

Pour sa part, Hattori (Hattori, Kawai, Okamoto, & Sonobe, 1981) a réalisé quelques essais expérimentaux sur des assemblages par frettage en torsion. Les configurations testées sont illustrées à la Figure 1-6. Les pressions de contact varient de 60 à 70 MPa. Ses principales observations sont les suivantes :

- Le coefficient de friction augmente au cours de l'essai, variant de  $\mu = 0.2$  initialement à  $\mu = 0.7$  une fois stabilisé après environ 10 000 cycles, en accord avec ce qui a été énoncé au à la section 3.2.
- Le facteur nominal de réduction de la vie en fatigue en torsion est d'environ  $\beta \approx 1.28$ .
- Les configurations b et c améliorent peu la vie en fatigue par fretting.
  - L'épaulement de la configuration b aurait dû être conçu de manière inverse, en augmentant le diamètre dans la zone frettée et non en le diminuant.
  - La partie en saillie du moyeu de la configuration c augmente la concentration de contrainte, ce qui nuit à la vie en fatigue.

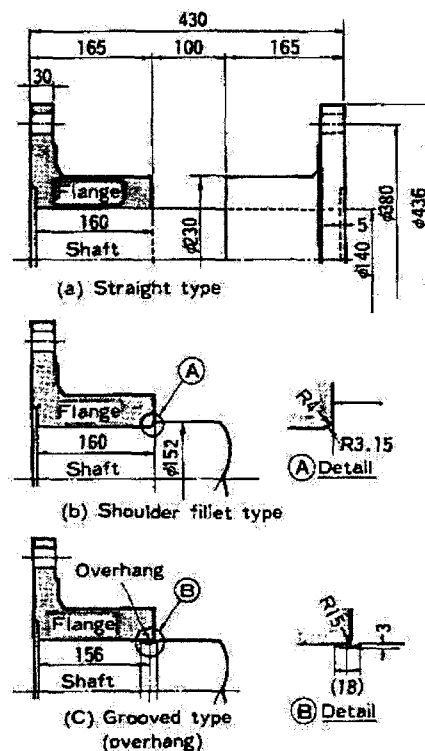


Figure 1-6 : Configurations testées

Source : (Hattori, Kawai, Okamoto, & Sonobe, 1981)



### 6.3 Moyens technologiques pour améliorer la vie en fatigue

Dans l'industrie, différentes méthodes sont utilisées pour augmenter la vie en fatigue des pièces mécaniques. Une analyse de différentes solutions appliquées au fatigue fretting est effectuée dans (Fouvry, Fridrici, Langlade, Kapsa, & Vincent, 2006).

- Diminuer le coefficient de friction résulte en une réduction du cisaillement de la surface de contact. Il est à noter qu'une diminution de la friction résulte également en une diminution de la rigidité de l'assemblage, ce qui est souvent non souhaitable. Les méthodes ci-dessous présentent des exemples concrets pour abaisser la friction à l'interface.
  - Application d'un lubrifiant
    - À grande amplitude (régime de glissement pur), l'usure par frottement est diminuée.
    - À faible amplitude (régime de glissement partiel), le lubrifiant n'a pas d'espace pour se loger dans l'interface (pression de contact élevée) et l'effet est négligeable.
  - Application d'un revêtement de faible friction (ex : MoS<sub>2</sub>)
    - Efficace dans tous les régimes, jusqu'à un temps critique où l'épaisseur du revêtement a été enlevée suite à l'usure par frottement.
- Intercaler un revêtement mou et déformable à l'interface (ex : bronze)
  - Cette méthode peut aussi avoir l'avantage de ne pas diminuer le coefficient de friction.
  - Bien que le métal de base soit protégé, le revêtement est lui-même soumis au fatigue fretting. Le cisaillement est peut-être moins important, mais les propriétés mécaniques du revêtement mou sont souvent moins bonnes que celles du métal de base. Une analyse complète est donc requise.
- Introduction de contraintes résiduelles en compression
  - Par grenailage
    - Peu efficace contre l'amorçage de fissures, mais efficace contre la propagation.
    - L'introduction de déformations plastiques aura tendance à diminuer les contraintes résiduelles initiales, par exemple la pression de frettage, dû au phénomène de relaxation.
  - Par l'application d'une mince couche de PVD (Dépôt métallique sous vide, ex : TiN)
    - Contraintes résiduelles dues à l'incompatibilité spatiale de la structure en colonne du TiN et du métal de base.
    - Bonne résistance à l'usure, augmentation de la dureté et de la ténacité.
    - Comme pour tous les revêtements, l'effet dure jusqu'à ce que l'usure ne l'ait enlevé complètement.

## CHAPITRE 2 : CALCUL DE LA PRESSION DE CONTACT NOMINALE POUR LES ASSEMBLAGES MULTIPLES

### 1. Introduction

Au Chapitre 1, des équations pour le calcul de la pression de contact nominale ont été présentées. Ces relations sont valables pour la plupart des cas lorsqu'ils demeurent relativement simples. Ainsi, des équations résolues existent pour le cas de deux tubes cylindriques composés de même matériau ou non, avec interférence et/ou dilatation thermique et/ou effet centrifuge. Déjà, lorsque toutes les combinaisons précédentes sont réunies, le calcul analytique se complexifie. Il serait utile de détenir un outil logiciel pour faciliter et accélérer le calcul.

De plus, lorsque le cas de plus de 2 cylindres composés se présente et/ou un gradient de température (par opposition à température uniforme) se présente, il n'existe pas de relations développées dans la littérature. Une façon de procéder est d'effectuer la simulation par le calcul par éléments finis. Cependant, cette technique n'est pas disponible pour tous et exige tout de même un certain temps à mettre en œuvre. Le calcul de la pression de contact est souvent une étape préliminaire au calcul d'un problème plus complexe. Il est donc utile de développer un outil logiciel permettant le calcul rapide de ce type d'assemblage.

### 2. Mise en équation

#### 2.1 Hypothèses

Le calcul de la pression de contact suppose un état plan de contrainte dans un repère de coordonnées polaires. Les cylindres sont supposés de longueur infinie, ce qui signifie que les déplacements et les contraintes sont uniformes dans le sens de la longueur. De plus, les surfaces en contact sont supposées sans frottement ( $\mu = 0$ ), ce qui signifie l'absence de contrainte tangentielle. (Bazergui, Bui-Quoc, Biron, McIntyre, & Laberge, 2002)

#### 2.2 Équation polaire d'équilibre

L'équation de base est l'équation polaire d'équilibre, qui est une sommation de forces. Il existe une équation du type (1.31) pour chacun des cylindres.

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0 \quad (1.31)$$

$F_r$  représente l'ensemble des forces de volume par unité de longueur. Dans le cas étudié, la seule force est due à l'effet centrifuge.

$$F_r = \rho\omega^2 r \quad (1.32)$$

### 2.3 Loi de comportement

La loi de comportement pour un matériau isotrope, élastique linéaire et homogène est donnée ci-dessous. Elle inclut l'effet de la dilatation thermique.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta - (1+\nu)\alpha T) \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r - (1+\nu)\alpha T) \end{aligned} \quad (1.33)$$

### 2.4 Relations cinématiques

Les relations cinématiques permettent de relier les déformations aux déplacements.

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (1.34)$$

### 2.5 Équation différentielle gouvernante

En remplaçant les équations (1.32) à (1.34) dans l'équation (1.31), l'équation différentielle gouvernante devient alors :

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = (1+\nu)\alpha \frac{dT}{dr} - \frac{(1-\nu^2)}{E} \rho\omega^2 r \quad (1.35)$$

## 3. Solution de l'équation différentielle

### 3.1 Déplacement radial

La solution de l'équation différentielle gouvernante est la somme de la solution générale et de la solution particulière qui dépend de T et  $\omega$ . Il s'agit du déplacement radial. Les constantes d'intégration  $C_1$  et  $C_2$  dépendent des conditions aux limites.

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \left( (1-\nu^2) \frac{\rho\omega^2 r^3}{8E} \right) + \frac{(1+\nu)\alpha}{r} \int_a^r T r dr \quad (1.36)$$

### 3.2 Contraintes radiale et orthoradiale

En remplaçant la solution précédente dans l'équation (1.33), l'expression des contraintes devient :

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left( (1+\nu)C_1 - \frac{(1-\nu)}{r^2} C_2 \right) - \frac{(3+\nu)}{8} \rho\omega^2 r^2 - \frac{\alpha E}{r^2} \int_a^r T r dr \quad (1.37)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{1-\nu^2} \left( (1+\nu)C_1 + \frac{(1-\nu)}{r^2}C_2 \right) - \frac{(1+3\nu)}{8} \rho \omega^2 r^2 - \frac{\alpha E}{r^2} \left( 1 - \int_{r_i}^r T r dr \right) \quad (1.38)$$

### 3.3 Cas particulier : Température constante

Dans les équations (1.36) à (1.38), si la température  $T$  est constante dans l'épaisseur d'un cylindre, alors :

$$\int_a^r T r dr = T \frac{r^2 - r_i^2}{2} \quad (1.39)$$

## 4. Cylindres composés

Maintenant que la solution générale a été développée pour le cas d'un cylindre seul, une formulation matricielle sera adoptée pour pouvoir résoudre le cas complexe d'un nombre  $n$  de cylindres. Les matrices ainsi développées le seront pour les termes du cylindre intérieur  $1$  et extérieur  $n$  ainsi que pour un cylindre quelconque  $i$ .

### 4.1 Définition des matrices

L'expression du déplacement radial  $u$  et des contraintes  $\sigma_r$  et  $\sigma_{\theta}$  sous forme matricielle dépend des constantes d'intégration  $C_1$  et  $C_2$ , qui diffèrent pour chaque cylindre.

$$[u] = \begin{bmatrix} u_1(C_{1,1}, C_{2,1}) \\ \dots \\ u_i(C_{1,i}, C_{2,i}) \\ \dots \\ u_n(C_{1,n}, C_{2,n}) \end{bmatrix} \quad [\sigma_r] = \begin{bmatrix} \sigma_{r,1}(C_{1,1}, C_{2,1}) \\ \dots \\ \sigma_{r,i}(C_{1,i}, C_{2,i}) \\ \dots \\ \sigma_{r,n}(C_{1,n}, C_{2,n}) \end{bmatrix} \quad [\sigma_{\theta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{\theta,1}(C_{1,1}, C_{2,1}) \\ \dots \\ \sigma_{\theta,i}(C_{1,i}, C_{2,i}) \\ \dots \\ \sigma_{\theta,n}(C_{1,n}, C_{2,n}) \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

### 4.2 Application des conditions aux limites et de continuité

L'application des conditions aux limites et de continuité entre les cylindres permet de résoudre en fonction des  $n$  constantes d'intégration  $C_1$  et  $C_2$ .

#### 4.2.1 Conditions aux limites

Il est supposé que la pression à l'intérieur du cylindre  $1$  et à l'extérieur du cylindre  $n$  est connue. Ce qui signifie que :

$$\sigma_{r,1}(r = r_0) = -p_{\text{int}} \quad (1.41)$$

$$\sigma_{r,n}(r = r_n) = -p_{\text{ext}} \quad (1.42)$$

#### 4.2.2 Continuité

À l'interface entre deux cylindres quelconques, il y a continuité du déplacement radial et de la contrainte radiale. Ainsi :

Pour  $1 \leq i \leq n-1$

$$\sigma_{r,i}(r = r_i) = \sigma_{r,i+1}(r = r_i) \quad (1.43)$$

$$u_i(r = r_i) = u_{i+1}(r = r_i) \quad (1.44)$$

#### 4.2.3 Cas particulier : Interférence radiale

Pour le cas particulier où il existe une interférence radiale  $\delta_r$  entre deux cylindres, il faut remplacer l'équation (1.44) par :

$$u_{i+1}(r = r_i) - u_i(r = r_i) = \delta r_i \quad (1.45)$$

#### 4.2.4 Cas particulier : cylindre intérieur plein

Pour le cas particulier où le cylindre intérieur est plein, la condition de pression interne définie par l'équation (1.41) doit être modifiée par une condition de déplacement nul :

$$u_{r,1}(r = 0) = 0 \quad (1.46)$$

### 5. Résolution complète

La résolution complète est effectuée par un système matriciel linéaire, où les constantes d'intégration  $C_1$  et  $C_2$  sont contenues dans le vecteur  $\{X\}$  :

$$[A]\{X\} = \{b_{p_{in}}\} + \{b_{p_{ex}}\} + \{b_{\delta_r}\} + \{b_{\omega}\} + \{b_T\} \quad (1.47)$$

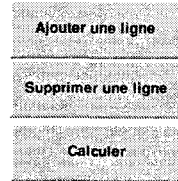
Les termes des matrices et des vecteurs sont donnés à l'Annexe A.

### 6. Outil : Calculateur de frettage

Un outil logiciel a été développé dans *Excel* et *Matlab* d'après les équations précédentes. Les données sont entrées dans un tableau Excel tel que montré au Tableau 2-1. Il est possible d'y définir jusqu'à 100 cylindres composés avec pour chacun ses dimensions, son interférence radiale, son matériau, sa température uniforme dans l'épaisseur. De plus, une vitesse de rotation peut être définie, ainsi que les pressions intérieure et extérieure. Il est à noter qu'il est possible de modéliser un cylindre de température non uniforme en le séparant en plusieurs sous-cylindres de température uniforme.

Tableau 2-1 : Calculateur de frottement dans Excel

Géométrie		Tube	Matériau					Autres		
$r_n$ (m)	$\delta_r$ (m)	#	Nom	$E_n$ (Pa)	$\nu_n$	$\rho_n$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\alpha_n$ (1/°C)	$T_n$ (°C)	$\omega$ (rad/s)	$P$ (Pa)
0.010		0							2094.3951	1.000E+08
0.020	2.000E-05	1	Acier	2.000E+11	0.3	7850	1.200E-05	400		
0.030	3.000E-05	2	Alliage d'aluminium	7.100E+10	0.33	2770	2.300E-05	350		
0.040	4.000E-05	3	Alliage de titane	9.600E+10	0.36	4620	9.400E-06	300		
0.050	5.000E-05	4	Alliage de magnésium	4.500E+10	0.35	1800	2.600E-05	250		
0.060		5	Fonte	1.100E+11	0.28	7200	1.100E-05	200		7.500E+07



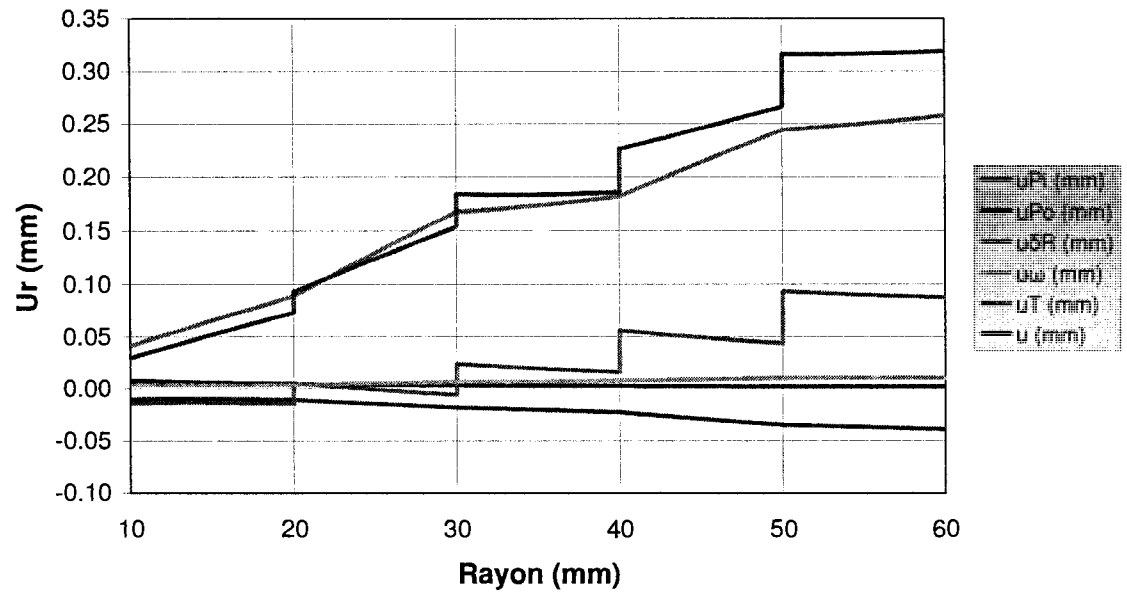
Les résultats du calculateur de frottement sont :

- La déformée radiale  $u_r$ . Lorsqu'une interférence radiale est appliquée, il est normal de noter une discontinuité de la déformée égale à  $\delta_r$ .
- La contrainte radiale  $\sigma_r$ .
- La contrainte orthoradiale  $\sigma_\theta$ .
- Les 3 résultats précédents sont montrés avec la contribution de chaque paramètre, en plus de la solution globale. Il y a ainsi 6 tracés de chaque résultat, dont 5 qui dépendent chacun de  $P_i$ ,  $P_o$ ,  $\delta_r$ ,  $\omega$ ,  $T$  en plus du tracé de la solution globale.
- La pression de contact  $P = -\sigma_r$  à l'interface de contact. Si la pression de contact est négative (ou  $\sigma_r > 0$ ), cela signifie qu'il y a décollement. Dans bien des cas, cela signifie également que l'assemblage n'est pas adéquat. Une exception notable au cas où la pression de contact est négative est le calcul de la dilatation thermique nécessaire pour emmancher deux cylindres l'un dans l'autre.

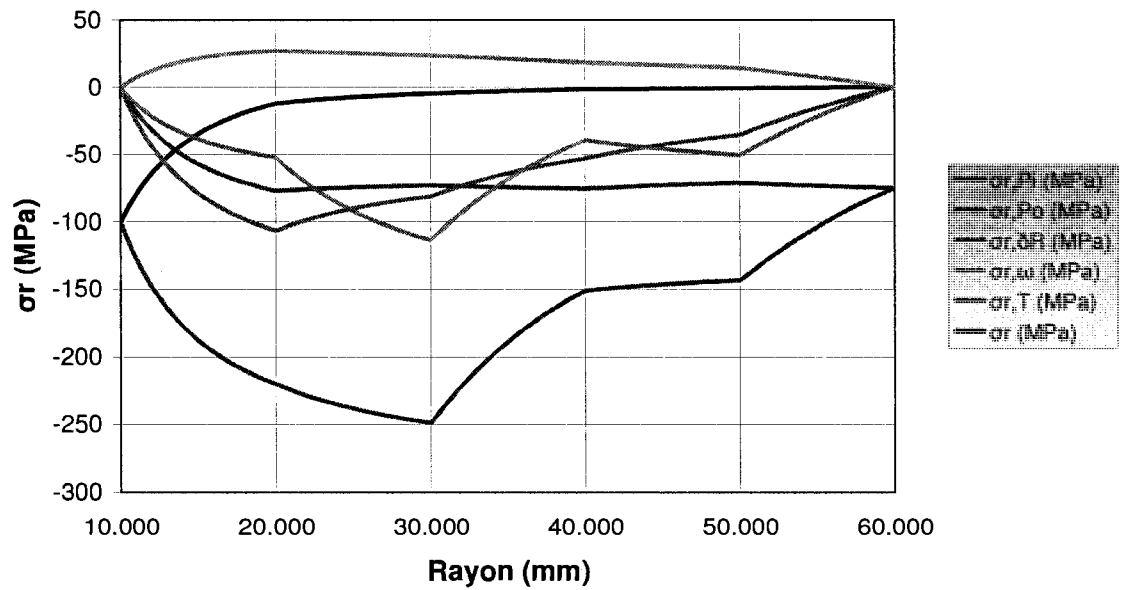
### 6.1 Exemple de calcul

Un exemple de calcul de 5 cylindres composés a été réalisé pour la validation de l'outil logiciel. Il s'agit d'un cas fictif d'après les données du Tableau 2-1. Ainsi, 5 tubes avec 5 interférences radiales, 5 matériaux différents, 5 températures différentes, vitesse de rotation, pression interne et pression externe ont été modélisés. Les résultats sont présentés à la Figure 2-1. Pour valider les résultats, un modèle 3D (tranche de 30°) a également été réalisé dans ANSYS Workbench. Les résultats sont présentés à la Figure 2-2. Les résultats aux interfaces sont comparés pour les deux méthodes au Tableau 2-2. La faible valeur de l'erreur relative permet de valider les résultats.

## a) Déplacement radial



## b) Contrainte radiale



c) Contrainte orthoradiale

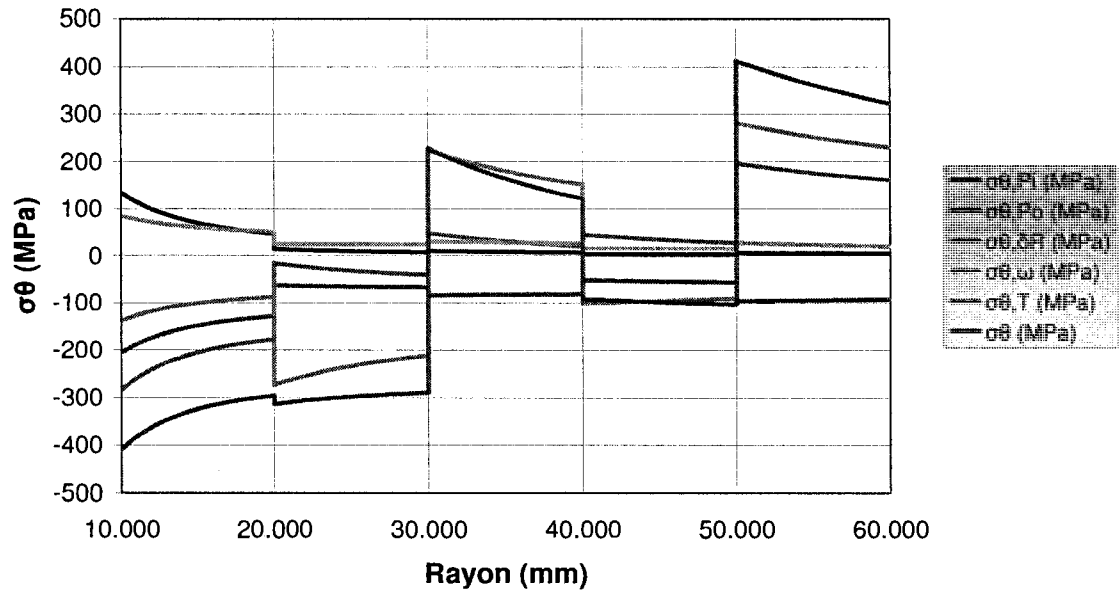
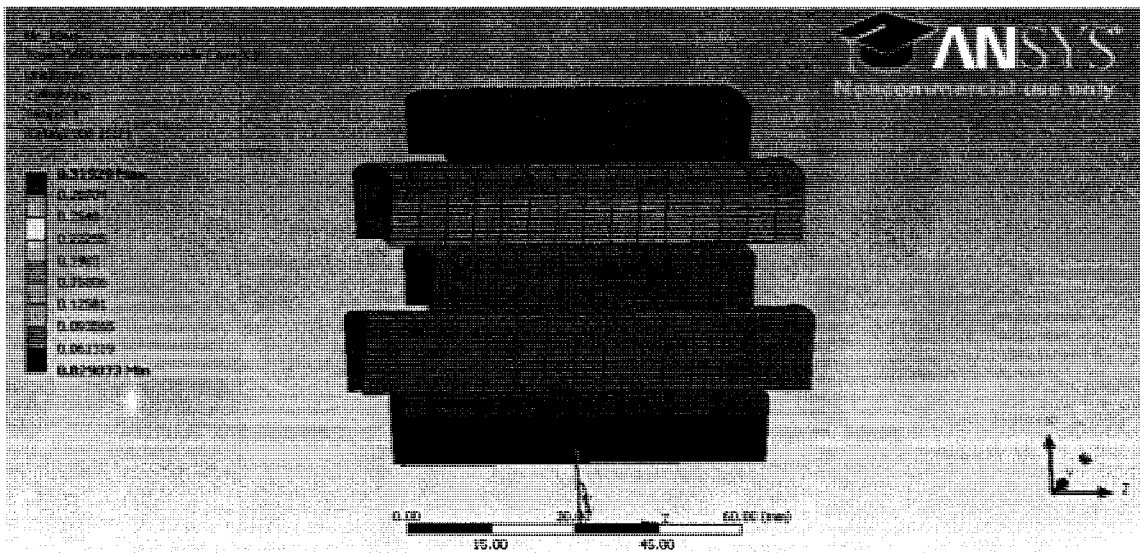


Figure 2-1 : Résultats analytiques

a) Déplacement radial  $u_r$





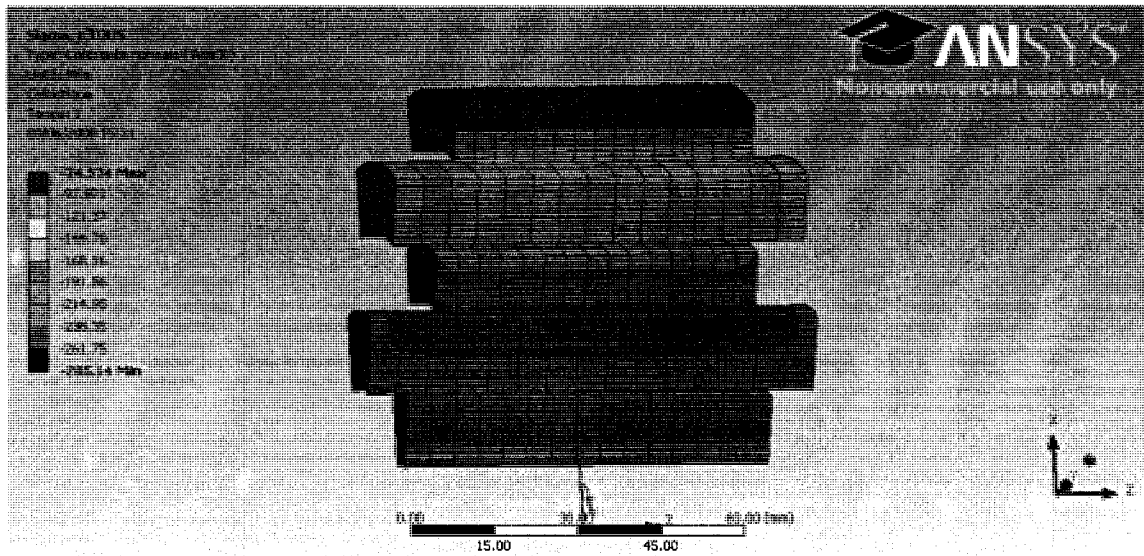
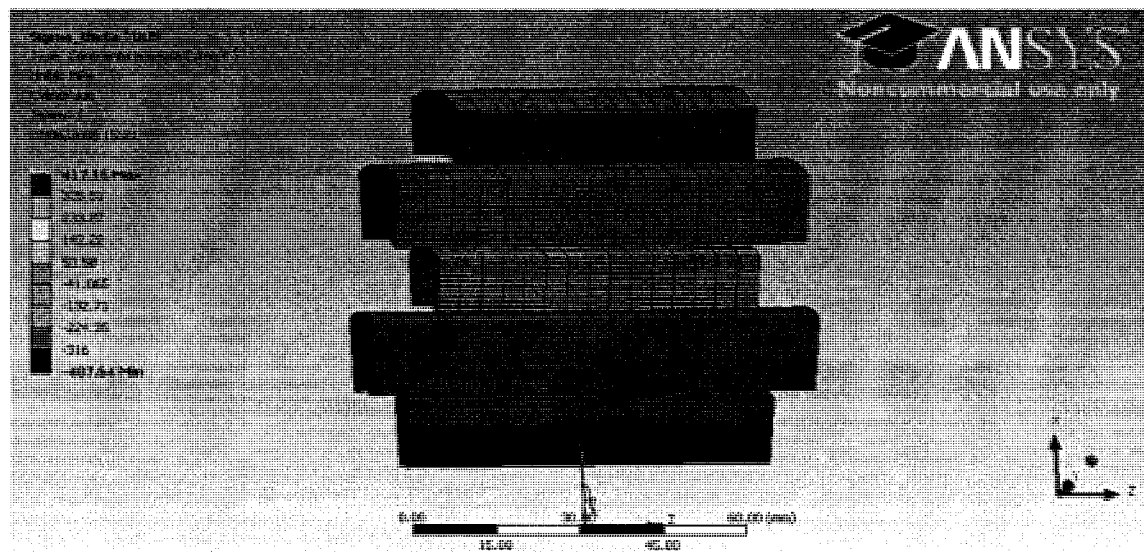
b) Contrainte radiale  $\sigma_r$ c) Contrainte orthoradiale  $\sigma_\theta$ 

Figure 2-2 : Résultats numériques

		a (mm)			b (mm)			c (mm)		
		Analytique	Numérique	Erreur (%)	Analytique	Numérique	Erreur (%)	Analytique	Numérique	Erreur (%)
Cylindre 1	int	2 807E-02	2 807E-02	0.01%	-1 000	-1 001	0.10%	498.8	497.8	0.20%
	ext	7 310E-02	7 310E-02	0.01%	-220.2	-220.3	0.05%	-295.1	-295.9	0.28%
Cylindre 2	int	8 210E-02	8 209E-02	0.18%	-223.2	-221.4	0.58%	-213.2	-214.4	0.21%
	ext	1 541E-01	1 539E-01	0.18%	-249.9	-249.4	0.21%	-290.0	-290.1	0.02%
Cylindre 3	int	1 841E-01	1 839E-01	0.27%	-248.9	-249.0	0.04%	228.2	229.4	0.31%
	ext	1 830E-01	1 828E-01	0.23%	-151.0	-151.2	0.15%	121.2	119.6	1.30%
Cylindre 4	int	2 294E-01	2 294E-01	0.27%	-151.9	-151.7	0.45%	-81.2	-81.3	0.11%
	ext	2 692E-01	2 692E-01	0.23%	-143.9	-144.3	0.48%	-103.4	-104.2	1.26%
Cylindre 5	int	3 182E-01	3 181E-01	0.28%	-143.9	-144.2	0.42%	412.9	413.2	0.18%
	ext	3 181E-01	3 180E-01	0.24%	-125.0	-125.1	0.92%	322.1	318.9	0.70%

Tableau 2-2 : Comparaison des résultats

## CHAPITRE 3 : MÉTHODOLOGIE ET ÉTUDE DE CONVERGENCE

### 1. Méthodologie et modèles étudiés

Un des objectifs est de prédire adéquatement le comportement en fatigue des assemblages frettés. Il a donc été choisi de réaliser une modélisation par éléments finis, à l'aide du logiciel ANSYS Workbench 11.0, de différents essais expérimentaux détaillés dans la littérature. Les études les plus exhaustives et complètes disponibles sur le sujet sont celles de Nishioka en flexion rotative (Nishioka & Komatsu, 1967) et de Juuma en torsion alternée (Juuma, 1999).

Pour ce type d'assemblage, la rupture survient habituellement à l'extrémité de l'interface de contact. En plus des problèmes de convergence du contact par interférence, à cet endroit se trouve bien souvent une discontinuité géométrique qui crée un important gradient de contrainte. Il est donc nécessaire de définir adéquatement une méthodologie de calcul appropriée pour ce type d'assemblage.

En prenant en exemple une configuration donnée de l'étude de Nishioka, le modèle complet sera d'abord présenté, puis une investigation sur les options de contact, la convergence du maillage ainsi qu'une sous-modélisation sera effectuée de façon détaillée. Une discussion sur les résultats obtenus conduira à des recommandations et des règles à respecter concernant la modélisation par éléments finis. Enfin, les différentes configurations testées par Nishioka seront analysées au Chapitre 4. Le Chapitre 5 fera l'objet de l'analyse de différentes configurations testées par Juuma.

### 2. Modèle de Nishioka : flexion rotative

#### 2.1 Description

Le modèle étudié est le spécimen du groupe A, série A de Nishioka et est illustré à la Figure 3-1. Le matériau utilisé est un acier au carbone avec les propriétés listées au Tableau 3-1. Puisqu'il y aura plasticité près de l'arête de contact, un modèle de plasticité à écrouissage isotropique bilinéaire a été défini par son module tangent de 1407 MPa. La pression de contact nominale entre l'arbre (diamètre de 50 mm) et le moyeu (diamètre de 75 mm) est de 70 MPa. L'interférence radiale résultante calculée est de  $3.15 \times 10^{-2}$  mm. La limite d'endurance en fatigue nominale du spécimen étudié est de 97 MPa, correspondant à une force de flexion de 2258.8 N. La vitesse de rotation de l'essai en flexion rotative est de 1250 rpm (130.9 rad/s). Comme l'arbre et le moyeu sont faits du même matériau, l'effet de la rotation est négligeable à cette vitesse.

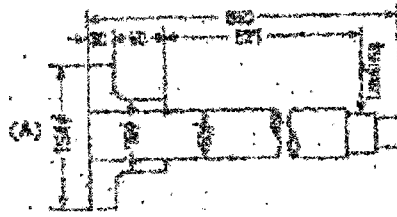


Figure 3-1 : Géométrie – Nishioka, Groupe A, Série a

Tableau 3-1 : Propriétés matériaux

Module d'Young E	Coefficient de Poisson $\nu$	Limite d'élasticité $S_y$	Module tangent (MPa)	Résistance mécanique $S_{ut}$	Limite d'endurance $S_e$ (MPa)
200000	0.3	345	1407	552	275

## 2.2 Options de simulation

Le modèle tire avantage de la symétrie. Les conditions aux limites et le chargement sont montrés à la Figure 3-2. Il s'agit de la condition de symétrie (A), de l'appui horizontal  $u_z = 0$  à l'extrémité (B), de la force de flexion (C) et de l'appui vertical  $u_x = 0$  sur la fibre neutre (D).

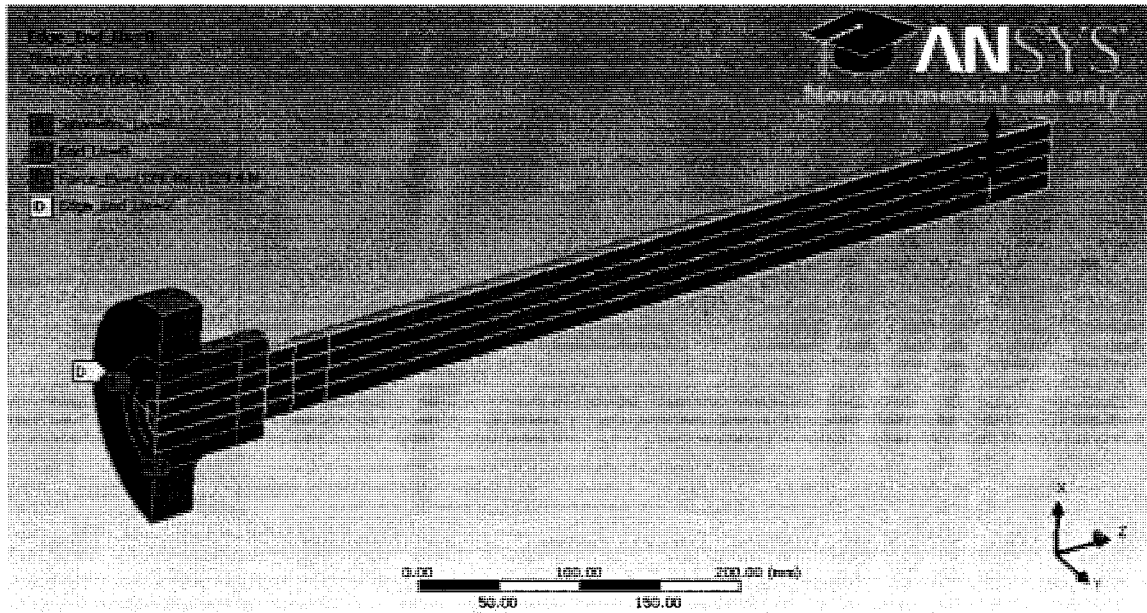


Figure 3-2 : Conditions aux limites et chargement

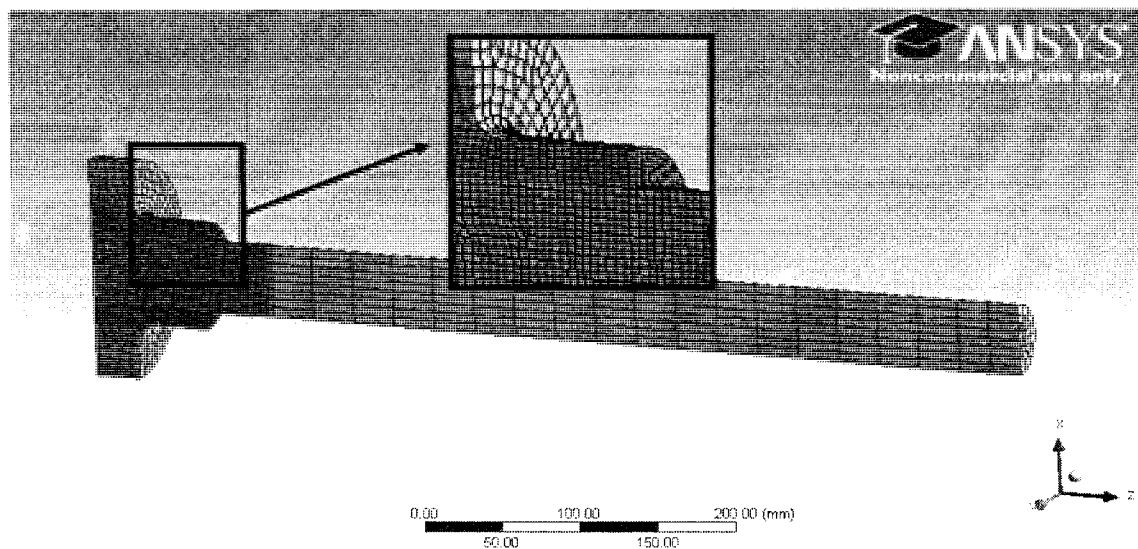
Une paire de contact est définie entre l'arbre et le moyeu avec les caractéristiques du Tableau 3-2 selon les termes utilisés dans le logiciel. La rigidité de contact (FKN) est définie manuellement pour contrôler la quantité de pénétration. Selon la théorie (*ANSYS Theory Manual*, 2007), la contrainte maximale de frottement est fonction de la limite d'élasticité au sens de Von Mises (équation (2.1)). Si cette limite est dépassée sur une certaine zone, il y a alors glissement plutôt qu'adhérence à cet endroit.

$$\tau_{\max} = S_y / \sqrt{3} \quad (2.1)$$

Le maillage est réalisé avec des éléments solides à 20 nœuds avec intégration complète (SOLID186). Un raffinement progressif du maillage et une sous-modélisation sont effectués pour obtenir une taille locale d'éléments de 0.25 mm près de l'arête de contact. L'information sur le maillage est fournie au Tableau 3-3. Le modèle Global 4 est montré à la Figure 3-3 et le Sous-modèle E à la Figure 3-4. Il est à noter qu'avec la taille d'éléments du Sous-modèle E, la taille locale des éléments se rapproche de la valeur énoncée au à la section 5.3 du Chapitre 1. La taille du grain n'est cependant pas connue pour le matériau étudié. Enfin, la précontrainte due à l'interférence sera appliquée dans un premier pas de chargement et le chargement de flexion dans un second pas de chargement.

**Tableau 3-2 : Définition du contact**

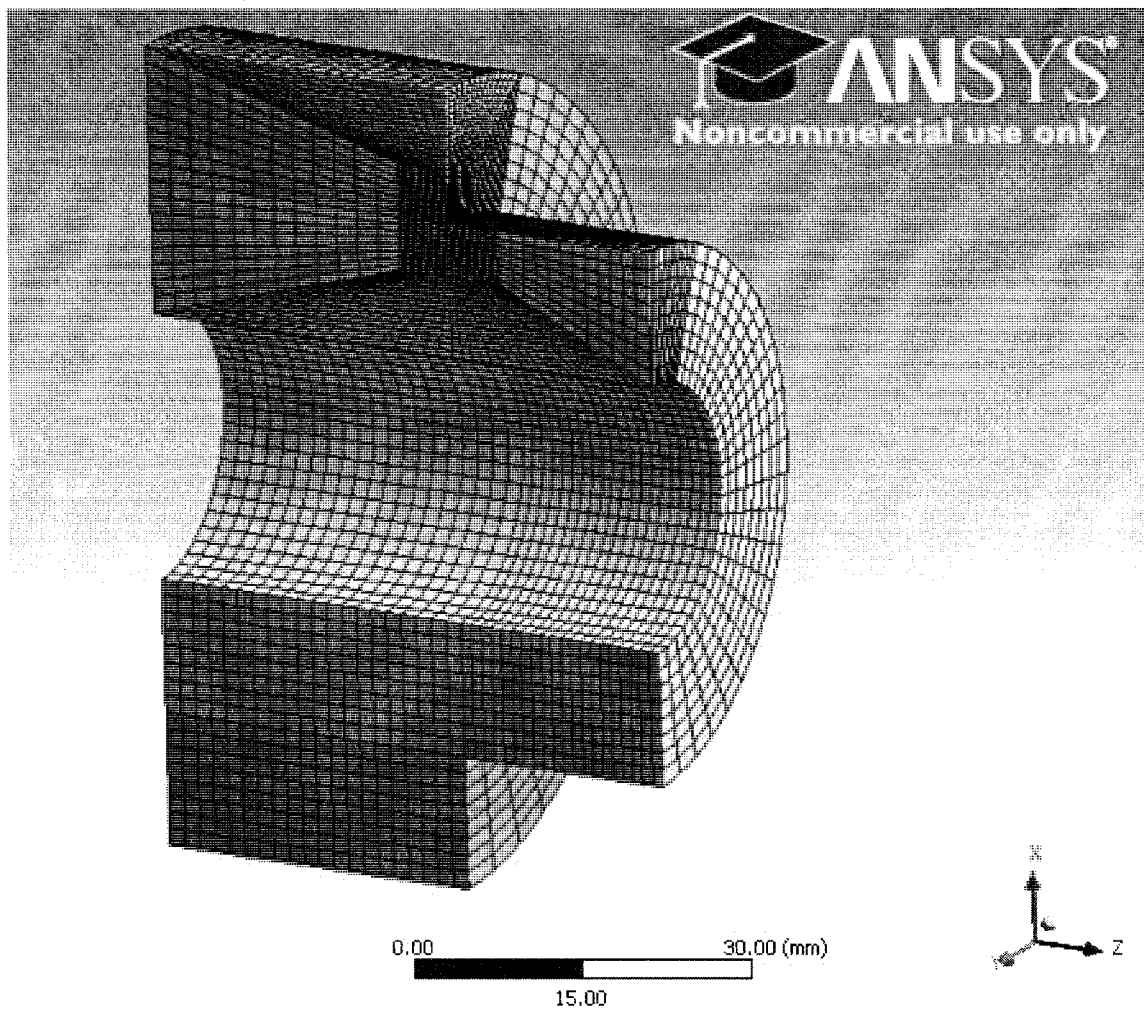
Modèle du contact	Surface à Surface
Type	Avec friction
Coefficient de friction ( $\mu$ )	0.5
Interférence ( $\delta r$ )	3.15e-2 mm
Comportement	Asymétrique
Formulation	Fonction pénalité
Rigidité de contact (FKN)	Contrôlé manuellement
Types d'éléments	CONTA174 et TARGE170



**Figure 3-3 : Maillage – Modèle Global 4**

**Tableau 3-3 : Information sur le maillage**

Modèle	Éléments	Noeuds	Taille locale (mm)
Global_1	992	4637	10,00
Global_2	3692	15976	5,00
Global_3	8603	37451	3,75
Global_4	22462	91605	2,50
Sous-modèle A	1152	5914	1,25
Sous-modèle B	3888	18410	0,83
Sous-modèle C	7704	35714	0,63
Sous-modèle D	18432	82314	0,42
Sous-modèle E	13136	154138	0,25



**Figure 3-4 : Maillage – Sous-modèle E**

### **3. Résultats**

#### **3.1 Modèle global**

La zone d'intérêt se situe sur l'arbre près de l'extrémité contact sur le plan de symétrie, tel que montré à la Figure 3-5. Les déplacements et les contraintes seront analysés dans cette zone de 20 mm.

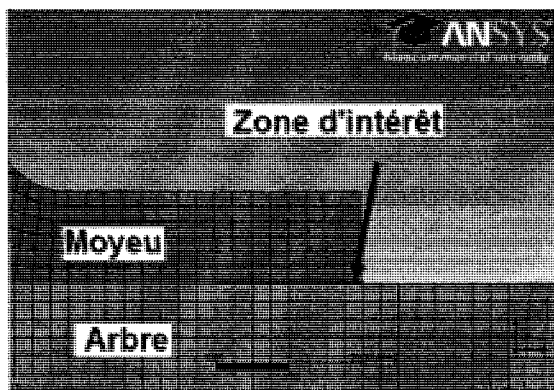


Figure 3-5 : Zone d'intérêt

### 3.2 Résultats de déplacements

Les résultats de déplacements dans la zone d'intérêt sont présentés à la Figure 3-6. Le Tableau 3-4 résume les résultats. Dû à la symétrie,  $u_\theta = 0$  dans la zone d'intérêt. Les observations sont les suivantes :

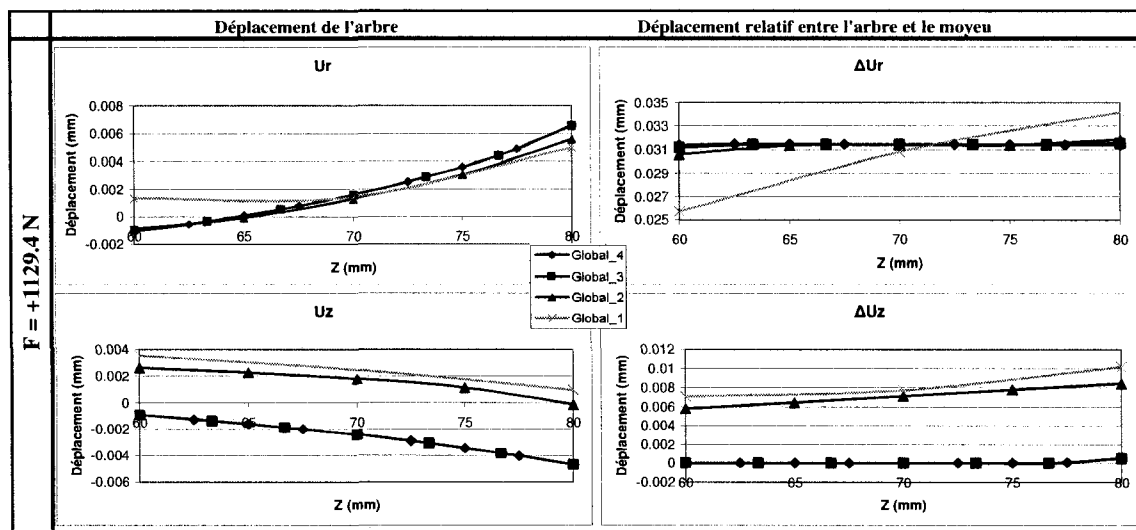
- $u_r$  et  $u_z$  convergent avec un raffinement de maillage;
- $\Delta u_r$  converge progressivement vers la valeur de  $3.15e-2$  mm. Cette valeur est le critère principal de convergence et doit être atteinte, car il s'agit de l'interférence radiale appliquée au modèle;
- $\Delta u_z$  converge vers 0 sur le côté de la fibre comprimé par la force de flexion (fibre en traction), sauf à l'extrémité. Puisque le contact est en adhérence dans cette zone, un glissement nul est la valeur attendue;
- $\Delta u_z$  converge vers  $10.4 \mu\text{m}$  sur le côté de la fibre en traction par la force de flexion (fibre en compression).

On assume maintenant que le modèle Global 4 est convergé en termes de déplacements.

Tableau 3-4 : Résultats de déplacements : signification

Résultat	Signification	Valeur théorique
$u_r$	Déplacement radial	
$u_z$	Déplacement axial	
$\Delta u_r$	Interférence radiale	$3.15e-2$ mm
$\Delta u_z$	Glissement axial	





**Figure 3-6 : Déplacements (Fibre en traction sur le plan de symétrie)  
Modèle global**

### 3.3 Résultats de contraintes

Les résultats de contraintes dans la zone d'intérêt sont présentés à la Figure 3-7. Le Tableau 3-5 résume les résultats. Dans le but de simplifier la lecture, tous les résultats listés sont pour le cas  $F = +1129.4$  N. Les observations sont les suivantes :

- Les contraintes ( $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{rz}$ ) convergent avec un maillage raffiné, sauf à l'extrémité du contact;
- Les contraintes de contact convergent à des valeurs identiques pour l'arbre et le moyeu, résultant en des valeurs nulles pour  $\Delta\sigma_r$  et  $\Delta\tau_{rz}$ . Encore une fois, cette affirmation est vraie sauf à l'extrémité.

On assume maintenant que le modèle Global 4 est convergé en termes de contraintes sauf près de l'extrémité du contact. Une sous-modélisation sera nécessaire pour investiguer la convergence à cet endroit.

Tableau 3-5 : Résultats de contraintes (plan de symétrie) : signification

Résultat	Signification	Valeur théorique
$\sigma_r$	Contrainte radiale ( $\equiv$ pression de contact)	
$\sigma_\theta$	Contrainte orthoradiale	
$\sigma_z$	Contrainte axiale	
$\tau_{rz}$	Contrainte de cisaillement $r\theta$ ( $\equiv$ contrainte de friction de contact)	
$\tau_{\theta z}$	Contrainte de cisaillement $\theta z$	0
$\tau_{r\theta}$	Contrainte de cisaillement $rz$	0
$\Delta\sigma_r$	Différence de $\sigma_r$ entre l'arbre et le moyeu	0
$\Delta\tau_{r\theta}$	Différence de $\Delta\tau_{r\theta}$ entre l'arbre et le moyeu	0

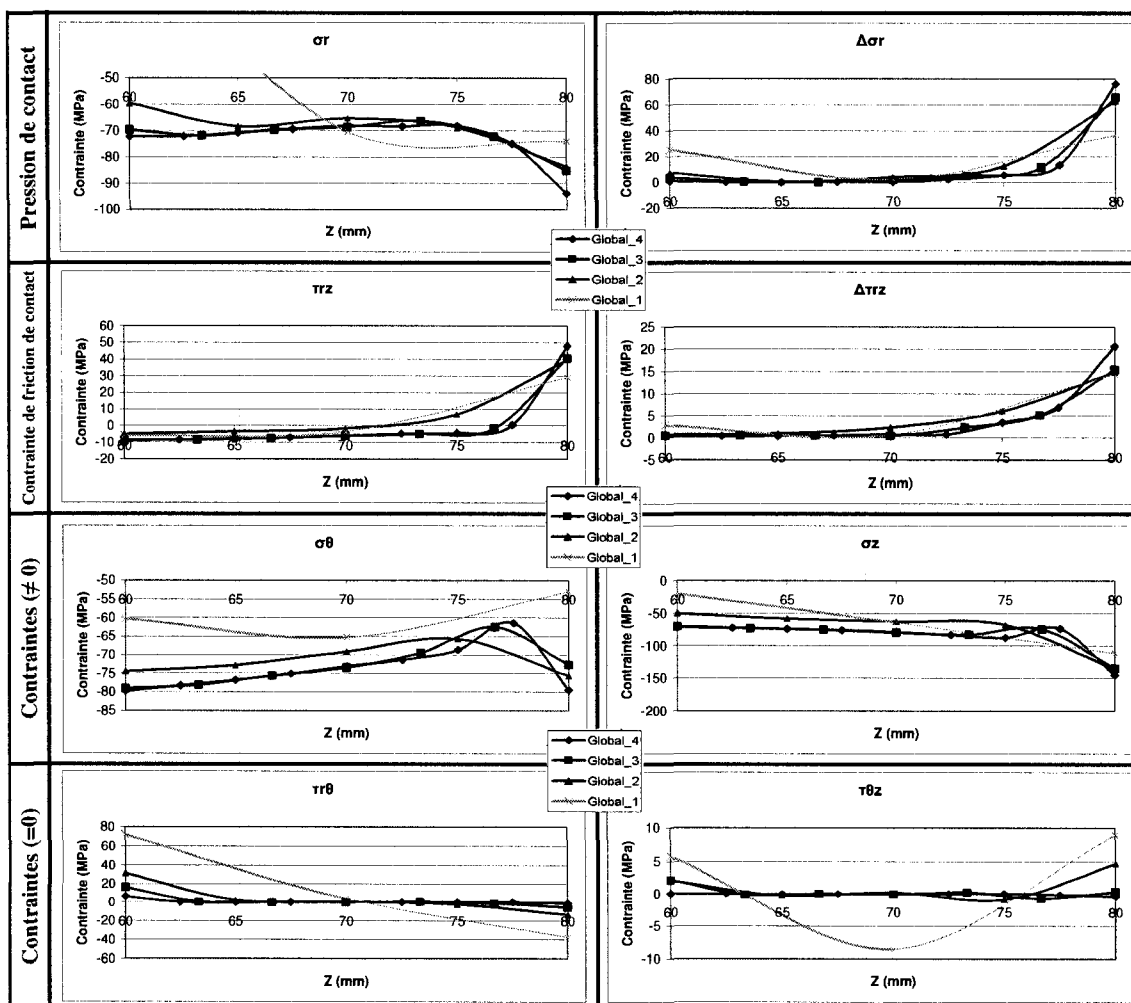


Figure 3-7 : Contraintes (Fibre en traction sur le plan de symétrie)

Modèle global

### 3.4 Sous-modélisation

Les conditions aux limites des sous-modèles sont les déplacements du modèle Global 4. Les résultats sont illustrés à la Figure 3-8 et les observations sont les suivantes :

- Les déplacements sont pratiquement identiques pour tous les sous-modèles et le modèle Global 4. Ainsi, la solution est définitivement convergée en termes de déplacements;
- Les contraintes ont également le même comportement, sauf près de l'arête de contact. Un raffinement agressif du maillage ne semble pas réussir à faire converger les contraintes à cet endroit.

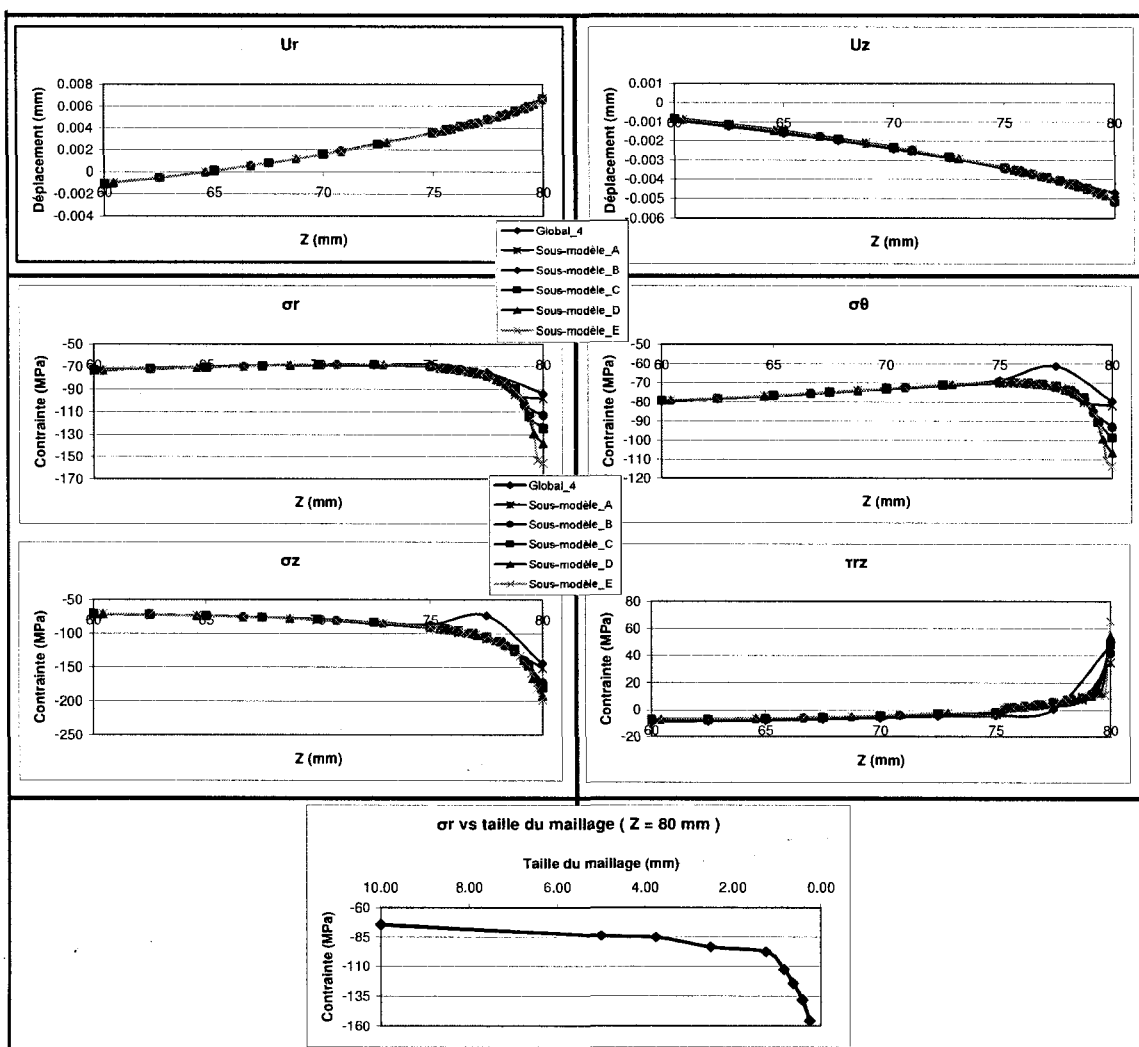


Figure 3-8 : Résultats (Fibre en traction sur le plan de symétrie)  
Sous-modélisation

Tel qu'observé sur le dernier graphique de la Figure 3-8, pour  $Z = 80$  mm (arête de contact), la contrainte (ex:  $\sigma_r$ ) diverge même pour un maillage très fin. Ceci est dû à la singularité géométrique, même si un modèle de plasticité est utilisé. La contrainte semble asymptotique près de l'arête de contact. Nous verrons toutefois plus tard que ce comportement n'influence pas la convergence du facteur de sécurité en fatigue, qui tient compte de la variation de toutes les composantes de contrainte. De plus, une arête vive comme dans ce modèle est irréaliste après quelques cycles suite à une déformation plastique.

### 3.5 Options de contact

Les résultats précédents ont été obtenus pour différents maillages pour montrer l'influence de la taille des éléments sur les résultats. Une méthode par pénalité avec un facteur de rigidité normal  $FKN = 1000$  a été utilisé pour garantir la convergence. Voyons maintenant l'influence des options de contact sur le maillage Global 4. Les cas étudiés sont listés au Tableau 3-6. Pour l'algorithme du Lagrangien augmenté, le raffinement de la rigidité de contact peut être normal ou agressif. Lorsqu'une très petite pénétration est nécessaire, un incrément plus agressif sur la rigidité de contact accélérera les calculs. Mis à part la rapidité, le type de raffinement de la rigidité n'influence pas les résultats. Normalement, la rigidité est augmentée et l'application de l'interférence sont appliqués dans un premier incrément, puis le chargement de flexion est appliqué dans un second incrément. Le cas 5 fait exception, puisque la rigidité est augmentée après l'application du chargement de flexion.

**Tableau 3-6 : Options de contact**

Cas	Formulation du contact	FKN	FKT	FTOLN	SLTO	Raffinement de la rigidité de contact
1	Pénalité (PEN)	1e0				
2	Pénalité (PEN)	1e1				
3	Pénalité (PEN)	1e2				
4	Pénalité (PEN)	1e3				
5	Pénalité (PEN)	1e0 - 1e3				
6	Lagrangien augmenté (AL)			1e-1	1e-2	Normal
7	Lagrangien augmenté (AL)			1e-2	1e-2	Normal
8	Lagrangien augmenté (AL)			1e-3	1e-2	Normal
9	Lagrangien augmenté (AL)			1e-4	1e-2	Agressif
10	Lagrangien augmenté (AL)			1e-5	1e-2	Agressif
11	Lagrangien augmenté (AL)			1e-5	1e-3	Agressif
12	Lagrangien augmenté (AL)			1e-5	1e-4	Agressif
13	Lagrangien augmenté (AL)			1e-5	1e-5	Agressif
14	Lagrangien normale (NL)		1e0			

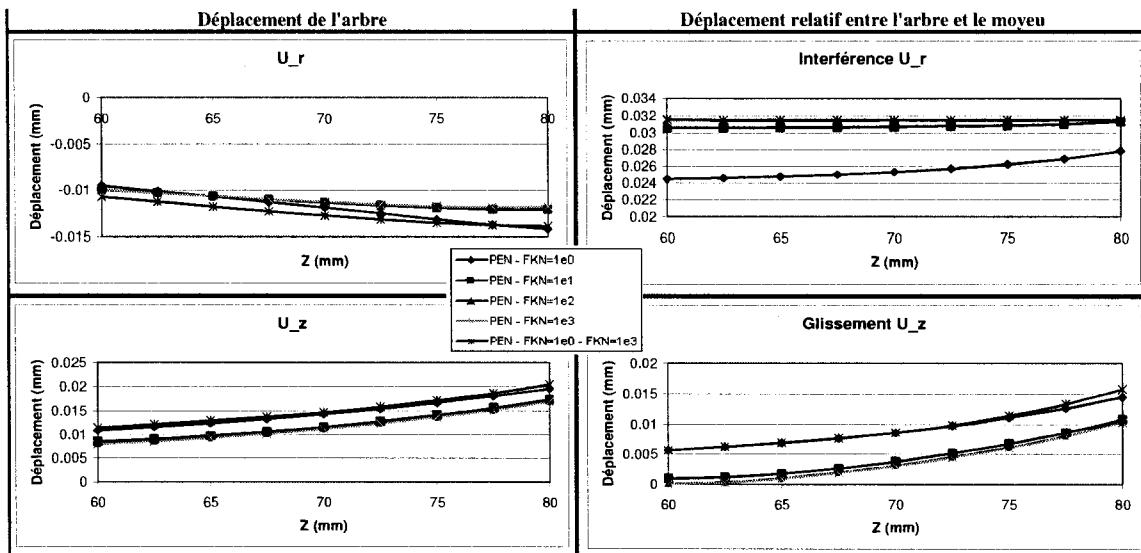
15	Lagrangien normale (NL)		1e1			
16	Lagrangien normale (NL)		1e2			
17	Lagrangien pur (PL)					

### 3.5.1 Méthode par pénalité (PEN)

La méthode par pénalité utilise la notion de rigidité de contact. Le facteur de rigidité normal FKN agit à la fois sur la rigidité normale et tangentielle. Son influence sur la réponse en déplacement est montrée à la Figure 3-9. Voici les observations :

- Les cas #1 à #4 (voir Tableau 3-6) montrent la convergence en fonction d'une augmentation de FKN;
  - o  $u_r$  et  $u_z$  sont très similaires pour de grandes valeurs de FKN;
  - o  $\Delta u_r = 3.15e-2$  mm, la valeur anticipée, pour un grand FKN;
  - o  $\Delta u_z = 0$  dans la zone en adhérence (pas de glissement) pour un grand FKN;
- Le cas #5 montre que la rigidité de contact doit être augmentée avec l'application de l'interférence, mais avant d'appliquer le chargement extérieur;
  - o Les valeurs absolues de  $u_r$  et  $u_z$  sont différentes des autres valeurs;
  - o  $\Delta u_r = 3.15e-2$  mm, la valeur anticipée;
  - o  $\Delta u_z$  est semblable au cas #1, avec FKN = 1;

La raison de la dernière observation est que lorsque le chargement extérieur est appliqué, il existe une pression de contact non convergée (trop faible). Le chargement est alors appliqué, résultant en un glissement excessif. Augmenter par la suite FKN règle le problème de la pression de contact (ou  $\Delta u_r$ ), mais ne corrige pas le problème du glissement.

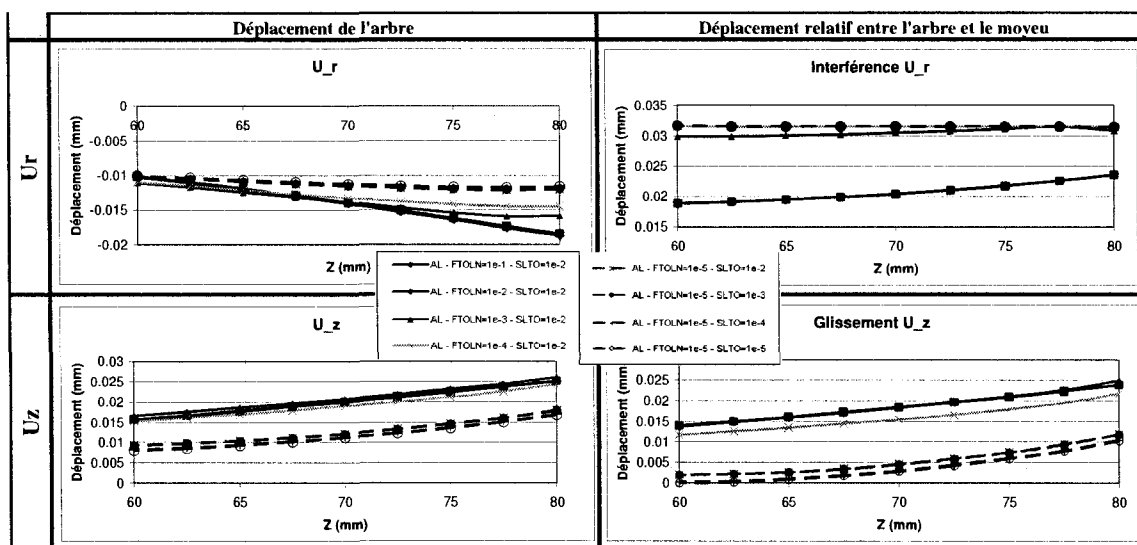


**Figure 3-9 : Résultats Méthode par pénalité  
Fibre en compression sur le plan de symétrie**

### 3.5.2 Lagrangien augmenté (AL)

La convergence pour le Lagrangien augmenté est semblable à celle de la méthode par pénalité, à l'exception que le contrôle se fait sur la tolérance de pénétration (FTOLN) et sur la tolérance de glissement élastique (SLTO) au lieu de la rigidité de contact. La rigidité de contact doit être mise à jour automatiquement à chaque itération d'équilibre. L'effet de FTOLN et de SLTO est montré à la Figure 3-10 et résumé ainsi :

- La convergence se produit pour des valeurs faibles de FTOLN et SLTO;
- FTOLN et SLTO doivent être contrôlés pour obtenir la convergence.



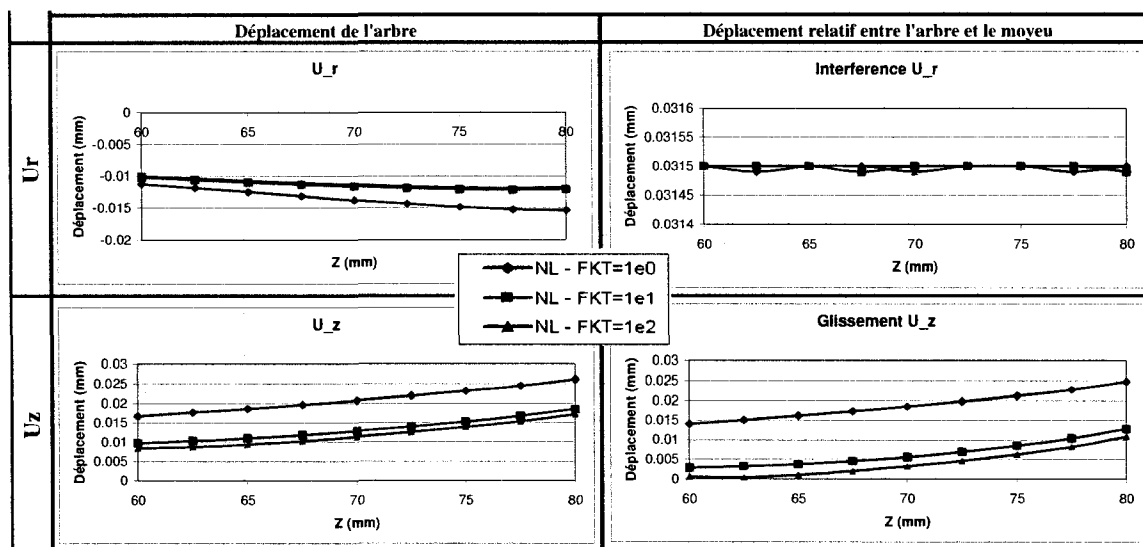
**Figure 3-10 : Résultats Lagrangien augmenté.  
Fibre en compression sur le plan de symétrie**

### 3.5.3 Lagrangien normal (NL)

Le Lagrangien normal utilise des multiplicateurs de Lagrange dans la direction normale au contact et une fonction pénalité dans la direction tangentielle. Avec le Lagrangien normal, le déplacement normal relatif (ex : interférence radiale) est automatiquement satisfait pour un maillage suffisamment raffiné, puisqu'il n'est pas question de rigidité de contact, mais plutôt de multiplicateurs de Lagrange. Pour le glissement cependant, il faut contrôler la rigidité de contact tangentielle FKT. Son influence est la même que FKN (voir Figure 3-11). Les observations sont les suivantes :

- $\Delta u_r = 3.15e-2$  mm est respecté dans tous les cas;
- $\Delta u_z$  converge pour de grandes valeurs de FKT, faisant dire que le glissement dépend de la rigidité de contact.

Selon la Figure 3-11, il n'est toujours pas clair si la solution a convergé pour  $FKT = 100$ . Une tentative de calcul a été faite pour  $FKT = 1000$ , mais le calcul n'a pas convergé vers une solution. La convergence du résidu de force de Newton-Raphson est difficile à obtenir pour un FKT élevé, alors que de nombreuses itérations d'équilibre sont nécessaires, plus que pour un haut FKN avec la méthode par pénalité. Cependant, nous verrons plus loin que la solution est convergée pour  $FKT = 100$ .



**Figure 3-11 : Résultats Lagrangien normal.  
Fibre en compression sur le plan de symétrie**

### 3.5.4 Lagrangien pur (PL)

Le Lagrangien pur utilise des multiplicateurs de Lagrange pour les directions normales et tangentielles au contact. Avec les multiplicateurs de Lagrange, il n'existe pas de paramètres à contrôler tels que la rigidité de contact ou la pénétration. La solution obtenue est donc précise en termes de contact, mais il faut se rappeler qu'elle dépend toujours de la taille du maillage. Tel que montré à la Figure 3-12 et à la Figure 3-13, même si la méthode ne nécessite pas de paramètres de contact additionnels, la solution est légèrement différente des 3 autres pour  $\tau_{rz}$  et  $\tau_{\theta z}$ . Cet algorithme de contact n'est donc pas meilleur qu'un autre à priori.

### 3.6 Discussions

Une comparaison de la réponse en déplacements est donnée à la Figure 3-12 pour les 4 algorithmes de contact, en choisissant pour chacun la combinaison de paramètres donnant les résultats convergés. Les résultats sont similaires dans les 4 cas, démontrant qu'une méthodologie adéquate est utilisée. Une comparaison des contraintes est également effectuée à la Figure 3-13. Selon les observations, les résultats sont presque identiques, sauf pour le Lagrangien pur, spécialement pour les contraintes tangentielles. Selon la théorie,  $\tau_{\theta z} = 0$  : nous pouvons donc dire que tous les algorithmes sauf le Lagrangien pur donnent de bons résultats avec un contrôle adéquat pour ce cas particulier. Il est à noter qu'avec un maillage légèrement plus raffiné, il est possible de parvenir à la convergence pour le Lagrangien pur.



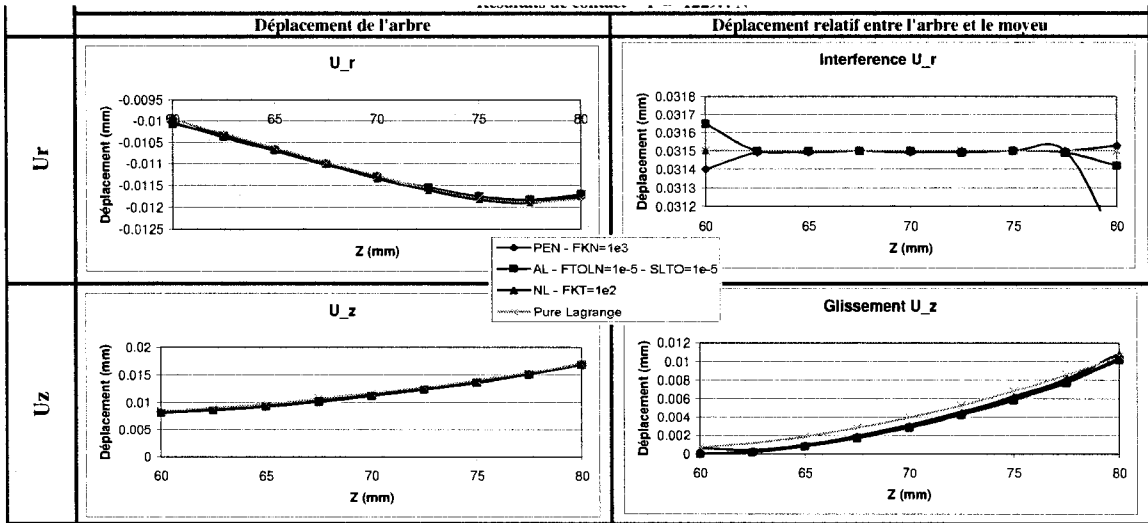


Figure 3-12 : Déplacements – Comparaison

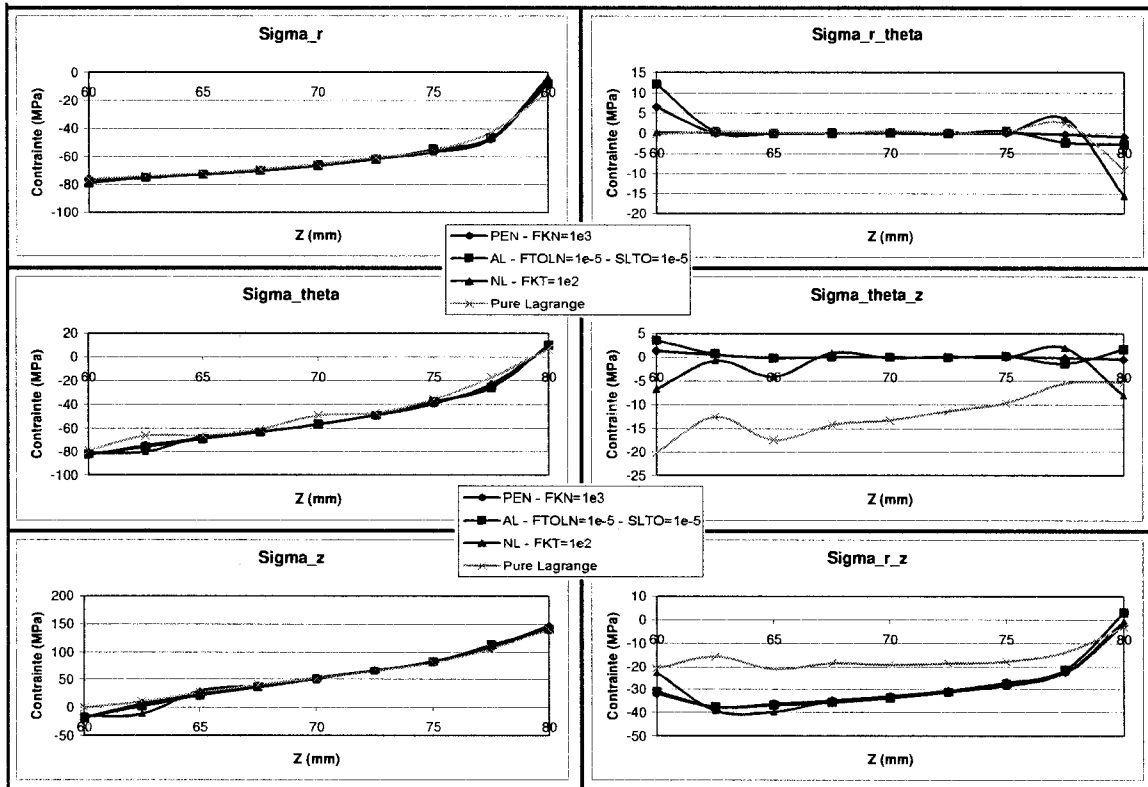


Figure 3-13 : Contraintes – Comparaison

Généralement, puisque toutes les méthodes donnent des résultats convergés, la question est de savoir quel est le meilleur algorithme de contact. La réponse dépend de plusieurs facteurs :

- Chaque méthode donne des résultats équivalents en termes de précision, avec les contrôles appropriés.
- Le Lagrangien pur est la méthode la plus simple, puisqu'aucun paramètre supplémentaire n'est requis.
  - o Selon l'expérience de l'auteur, cette méthode est la plus dépendante de la taille du maillage.
  - o Même si aucun paramètre supplémentaire n'est requis, cette méthode n'est pas plus précise que les autres. Par exemple, l'amplitude du glissement élastique dans la zone d'adhérence (Figure 3-12) est plus haute que pour les autres algorithmes.
- Le Lagrangien pur et le Lagrangien normal sont efficaces, mais coûtent généralement plus cher en temps de calcul comparativement à la méthode par pénalité et celle du Lagrangien augmenté, même pour un nombre d'itérations d'équilibre inférieur (Tableau 3-7). Ceci est dû à l'utilisation du solveur direct, combiné à la puissance de calcul disponible.
  - o Notons que pour le Lagrangien augmenté, le temps de calcul diminue pour une mise à jour agressive de la rigidité de contact (Cas #9 à 13, voir aussi le Tableau 3-6). Ceci s'explique par une augmentation plus rapide de la rigidité de contact, résultant en un nombre inférieur d'itérations d'équilibre.
- La méthode par pénalité utilise la notion de rigidité de contact, qui a une interprétation mathématique mais ne représente pas une valeur physique. Il est donc préférable de contrôler la pénétration et le glissement élastique comme avec le Lagrangien augmenté.
  - o Si on connaît la quantité de pénétration et de glissement élastique à partir duquel la solution n'est plus affectée de façon significative, le Lagrangien augmenté est le meilleur algorithme.
  - o Dans le cas particulier étudié, une pénétration acceptable peut être définie comme étant 1% de l'interférence radiale (résultant en une erreur de 1% de la pression de contact) et de 0.1  $\mu\text{m}$  de glissement élastique (dans les problèmes de fretting fatigue, le glissement réel est d'au moins quelques  $\mu\text{m}$ ).
  - o Malgré ces recommandations, il est toujours nécessaire de vérifier la validité des résultats. Il faut donc comparer les valeurs de pénétration et de glissement obtenues à la tolérance définie. Par exemple, un glissement de 10  $\mu\text{m}$  pour une tolérance de 0.1  $\mu\text{m}$  correspond à une erreur de 1% et est jugée acceptable.

Dans cette étude, les paramètres FKN, FKT, FTOLN et SLTO ont été contrôlé en appliquant un facteur à la valeur calculée par défaut par le logiciel. La valeur par défaut était constante dans le présent cas puisque les maillages et les propriétés matériaux étaient identiques. Il est toutefois préférable d'appliquer des valeurs absolues, et non un facteur, spécialement pour le Lagrangien augmenté (FTOLN et SLTO) en accord avec le point précédent.

**Tableau 3-7 : Algorithmes de contact – Temps de calcul et nombre d'itérations**

		# Sous-Incréments / # Itérations			Temps CPU (h)	Temps écoulé (h)
		LS1	LS2	Total		
1	PEN - FKN=1e0	4 / 4	4 / 6	8 / 10	0.28	0.23
2	PEN - FKN=1e1	5 / 12	4 / 12	8 / 24	0.54	0.43
3	PEN - FKN=1e2	5 / 24	4 / 22	9 / 46	0.98	0.76
4	PEN - FKN=1e3	4 / 32	4 / 44	8 / 76	1.81	1.32
5	PEN - FKN=1e0 - FKN=1e3	4 / 4	11 / 65	15 / 69	4.80	4.04
6	AL - FTOLN=1e-1 - SLTO=1e-2	4 / 6	4 / 15	8 / 21	1.26	0.86
7	AL - FTOLN=1e-2 - SLTO=1e-2	4 / 12	4 / 10	8 / 22	1.31	0.85
8	AL - FTOLN=1e-3 - SLTO=1e-2	5 / 40	4 / 16	9 / 56	2.98	1.88
9	AL - FTOLN=1e-4 - SLTO=1e-2	4 / 11	4 / 5	8 / 16	0.77	0.54
10	AL - FTOLN=1e-5 - SLTO=1e-2	4 / 14	4 / 18	8 / 32	2.17	1.43
11	AL - FTOLN=1e-5 - SLTO=1e-3	4 / 16	4 / 14	8 / 30	2.12	1.59
12	AL - FTOLN=1e-5 - SLTO=1e-4	4 / 20	4 / 26	8 / 46	3.20	2.05
13	AL - FTOLN=1e-5 - SLTO=1e-5	4 / 27	4 / 30	8 / 57	4.32	2.78
14	NL - FKT=1e0	5 / 32	4 / 9	9 / 41	21.24	46.94
15	NL - FKT=1e1	5 / 29	4 / 14	9 / 43	22.60	39.82
16	NL - FKT=1e2	5 / 83	1 / 6	6 / 89	48.59	96.36
17	Pure Lagrange	2 / 6	1 / 4	3 / 10	12.04	83.41
<b>Note: Tous les modèles utilisent le pas de temps automatique avec un nombre minimal de sous-incréments.</b>						
Intel® Core™ 2 CPU, 6700 @ 2.66GHz, 2.00Go RAM						

#### 4. Comparaison : Arbre vs Moyeu

Dans tous les cas observés dans la littérature, la rupture est survenue dans l'arbre et non dans le moyeu. C'est la raison pour laquelle tous les résultats présentés le sont pour l'arbre seulement. Une question intéressante à se poser est de savoir pourquoi la rupture survient toujours du côté de l'arbre et jamais du côté du moyeu. En effet, ils subissent par définition la même amplitude de glissement. Cependant, au niveau des contraintes, seules les contraintes  $\sigma_r$ ,  $\tau_{r\theta}$  et  $\tau_{rz}$  sont identiques (pression de contrainte et contraintes de frottement).

Les 3 autres composantes sont différentes. Par exemple, la contrainte  $\sigma_\theta$  est en compression dans l'arbre et en traction dans le moyeu. Mais la principale raison est que la contrainte de flexion  $\sigma_z$  est transmise *progressivement* de l'arbre au moyeu par l'entremise du frettage. C'est pour cette raison qu'il existe un glissement. L'arbre subit donc une charge plus importante que le moyeu à l'extrémité du frettage. À titre d'exemple, la contrainte alternée équivalente au sens de Von Mises  $\sigma_a^*$  (équation (1.20)) est tracée à la Figure 3-14. Comme  $\sigma_a^*$  est toujours plus élevé dans l'arbre que dans le moyeu, la rupture survient toujours dans l'arbre lorsque les matériaux sont identiques.

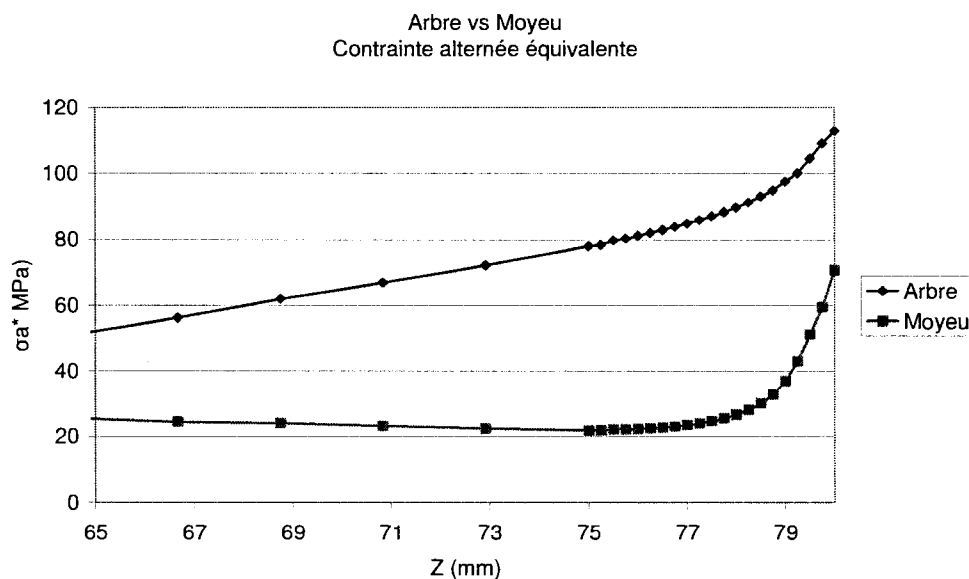


Figure 3-14 : Comparaison Arbre vs Moyeu

## 5. Conclusion

Une investigation sur la convergence des algorithmes de contact et du maillage a été réalisée de façon exhaustive sur l'exemple d'un arbre simple freiné dans un moyeu soumis à la flexion rotative.

L'étude de convergence du maillage a été effectuée avec une procédure de sous-modélisation. Il n'existe pas de règle précise pour savoir quelle taille d'éléments permet d'atteindre la convergence : cette valeur dépend de la géométrie de chaque problème et une vérification de la convergence est toujours nécessaire. Ainsi, la méthodologie développée au à la section 5.4 du Chapitre 1 a été utilisée.

Pour ce qui est des algorithmes de contact, il a été démontré qu'il est possible d'atteindre la convergence avec 4 algorithmes différents, soit la méthode par pénalité, le Lagrangien augmenté, le Lagrangien normal et le Lagrangien pur. En termes de temps de calcul et de précision, la méthode la plus efficace consiste à utiliser le Lagrangien augmenté avec un contrôle de la pénétration (tolérance 0.1% de l'interférence radiale) et du glissement élastique (tolérance de 0.1  $\mu\text{m}$ ).

## CHAPITRE 4 : ASSEMBLAGES FRETTÉS EN FLEXION ROTATIVE

Une des sollicitations en fatigue les plus courantes est le cas de la flexion rotative. Nishioka a réalisé une étude expérimentale exhaustive sur ce cas de chargement appliqué aux assemblages par interférence. Au Chapitre 2, une étude de convergence du contact et du maillage sur une configuration spécifique a été effectuée. Maintenant que les outils sont en place pour faire le calcul de ce type d'assemblage, une analyse par éléments finis sera effectuée sur toutes les configurations testées par Nishioka (Nishioka & Komatsu, 1967).

### 1. Configurations

La configuration testée au Chapitre 3 était le modèle du groupe A, série A des essais de Nishioka. La Figure 4-1 et le Tableau 4-1 présentent les autres cas testés. Leur tenue en fatigue et le chargement correspondant sont indiqués au Tableau 4-2.

Tableau 4-1 : Dimensions

Spécimen		Dimensions en saillie		Dimensions du congé				
Groupe	Série	l (mm)	t (mm)	$\rho$ (mm)	d (mm)	$\delta$ (mm)	D/ $\rho$	D/d
A	a	0.0		$\infty$				
B	b	1.5	3.75	$\infty$				
	c	4.0	3.75	$\infty$				
	d	8.0	3.75	$\infty$				
	e	4.0	2.0	$\infty$				
	f	4.0	6.0	$\infty$				
C	g			7.0	47.8		7.14	1.046
	h			5.0	47.8		10.00	1.046
	i			11.3	46.8		4.42	1.068
	j			7.0	46.8		7.14	1.068
	k			5.0	46.8		10.00	1.068
	l			3.5	46.8		14.29	1.068
	m			11.3	45.8		4.42	1.092
	n			7.0	45.8		7.14	1.092
	o			11.3	44.8		4.42	1.116
D	p	4.0	3.75	11.3	46.8		4.42	1.068
	q	4.0	3.75	7.0	46.8		7.14	1.068
E	r			11.3	46.8	2	4.42	1.068
	s			11.3	45.8	10	4.42	1.092
	t			11.3	45.8	2	4.42	1.092
	u			11.3	45.8	-2.5	4.42	1.092

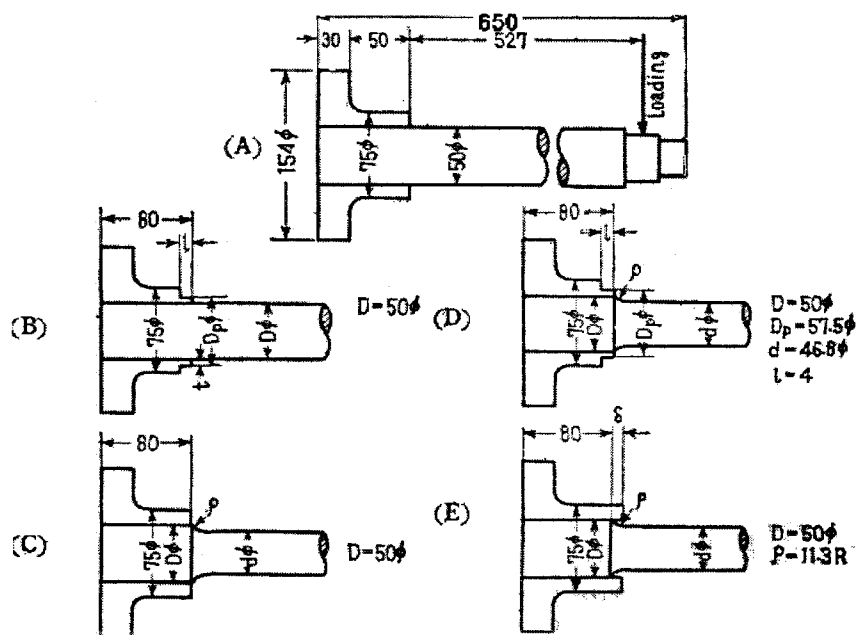


Figure 4-1 : Configurations

Tableau 4-2 : Fatigue et chargement

Spécimen		Limite de fatigue (nominale)	Comparaison à Groupe A, Série a	Facteur de réduction de vie en fatigue (nominal)	Chargement en flexion	Localisation de la rupture en fatigue
Groupe	Série	$\sigma_w$ (MPa)	$\sigma_w/\sigma_{wa}$	$S_e/\sigma_w$	F (N)	
A	a	$\sigma_{wa} = 97$	1.00	2.84	2258.8	Frettage
B	b	104	1.07	2.64	2421.8	Frettage
	c	122	1.26	2.25	2840.9	Frettage
	d	127	1.31	2.17	2957.4	Frettage
	e	125	1.29	2.20	2910.8	Frettage
	f	100	1.03	2.75	2328.6	Frettage
C	g	125	1.29	2.20	2910.8	Frettage
	h	130	1.34	2.12	3027.2	Frettage
	i	127	1.31	2.17	2957.4	Frettage
	j	143	1.47	1.92	3329.9	Frettage, congé
	k	137	1.41	2.01	3190.2	Frettage, congé
	l	135	1.39	2.04	3143.6	Congé
	m	146	1.51	1.88	3399.8	Frettage
	n	143	1.47	1.92	3329.9	Frettage, congé
o	145	1.49	1.90	3376.5	Frettage, congé	
D	p	135	1.39	2.04	3143.6	Frettage
	q	150	1.55	1.83	3492.9	Frettage
E	r	146	1.51	1.88	3399.8	Frettage, congé
	s	137	1.41	2.01	3190.2	Congé
	t	146	1.51	1.88	3399.8	Frettage
	u	115	1.19	2.39	2677.9	Frettage

## 2. Procédure

### 2.1 Options de simulation

Selon les résultats de l'étude du Chapitre 2, un maillage fin (voir Figure 3-3, taille de 2.5 mm) suivi d'un sous-modèle (voir Figure 3-4, taille de 0.25 mm) permet d'obtenir des résultats convergés. L'interface entre l'arbre et le moyeu est modélisée par un contact rugueux ( $\mu = 0.5$ ) avec la formulation du Lagrangien augmenté. La tolérance de pénétration est  $FTOLN = 3.15e-5$  mm et la tolérance de glissement élastique est de  $SLTO = 1e-4$  mm. Ce raffinement de maillage et ces tolérances serrées assurent la précision désirée des résultats, sans avoir à réaliser à nouveau une étude de convergence exhaustive.

### 2.2 Calcul des résultats

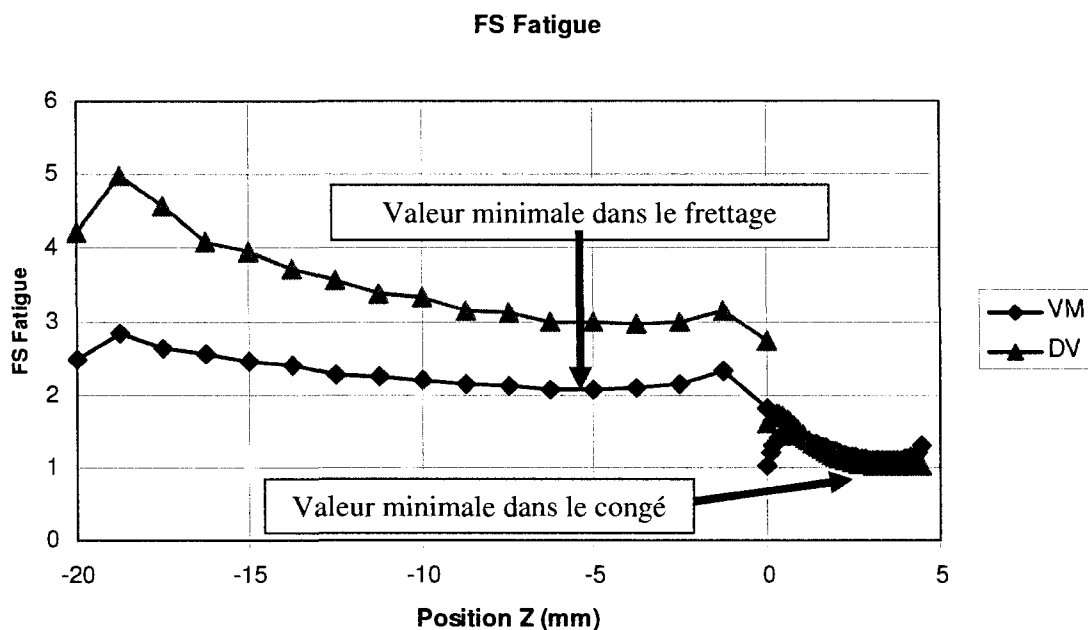
La zone d'intérêt est située sur les derniers 20 mm de la partie frettée de l'arbre (Z négatif), ainsi que dans le congé (Z positif), le cas échéant. Un exemple de tracé est fourni à la Figure 4-2 à la fois pour la théorie de Von Mises et le critère de Dang Van. Les deux tracés sont similaires mais non identiques. Il faut rappeler que la signification d'un critère de fatigue est différente d'un critère à l'autre lorsqu'ils ne sont pas égaux à 1, valeur à laquelle l'amorce de fissure se produit. C'est ainsi que dans la zone frettée il existe une différence importante entre le critère de Von Mises et le critère de Dang Van, alors que la différence est minime dans le congé. Il y aura donc des valeurs différentes de facteur correctif sur la vie en fatigue dans la zone frettée selon le critère adopté.

À la Figure 4-2, il existe un pic de contrainte à  $Z = 0$  dû au changement rapide de l'état de contact (extrémité du moyeu). À la section 0 du Chapitre 2, il a été démontré que la contrainte ne converge pas à cet endroit.

Ainsi, les valeurs retenues du facteur de sécurité en fatigue sur l'arbre sont les suivantes :

- Valeur minimale dans la zone frettée, en excluant le pic à  $Z = 0$  et les environs;
- Valeur minimale dans le congé de raccordement, en excluant le pic à  $Z = 0$  et les environs.

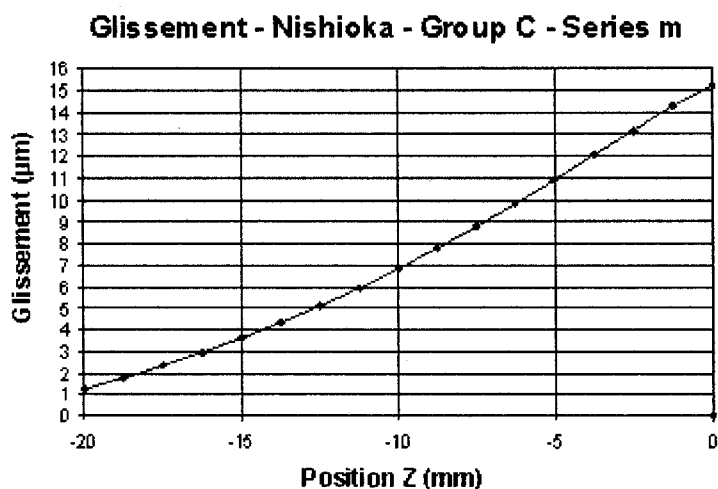




**Figure 4-2 : FS en fatigue – Théorie de Von Mises et critère de Dang Van**

L'autre résultat intéressant à noter est le glissement qui est calculé par la différence de déplacement  $u_z$  entre l'arbre et le moyeu aux nœuds coïncidents du maillage. L'amplitude de glissement est quant à elle définie comme étant la différence de glissement entre les deux cas de chargement (flexion dans les deux directions). Un exemple de tracé est fourni à la Figure 4-3. La valeur maximale est notée comme résultat.

$$\begin{aligned}
 \Delta u_z^+ &= u_{z,arbre}^+ - u_{z,moyeu}^+ \\
 \Delta u_z^- &= u_{z,arbre}^- - u_{z,moyeu}^- \\
 \Delta u_z &= \left| \Delta u_z^+ - \Delta u_z^- \right|
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$



**Figure 4-3 : Glissement**

### 3. Résultats

Les facteurs de sécurité en fatigue ainsi que le glissement sont notés au Tableau 4-3 pour les 4 critères définis au Chapitre 1. Une première observation peut être faite en traçant le FS dans la zone frettée en fonction de l'amplitude de glissement (Figure 4-4). Il ne semble pas exister de relation entre le facteur de sécurité en fatigue et l'amplitude de glissement.

Une deuxième observation qui peut être formulée est que le facteur de sécurité est beaucoup plus élevé que 1 dans la zone frettée et très près de 1 dans le congé lorsque la rupture survient à cet endroit. Ceci démontre l'existence d'un facteur de réduction de la vie en fatigue dans les assemblages par frettage  $k_{fret}$ . Dans le but d'avoir des valeurs comparables du facteur de sécurité, il faut diviser le facteur de sécurité dans le frettage par sa valeur moyenne (qui exclut les cas où la rupture se produit dans le congé). Pour rendre les critères égaux à 1, les corrections selon l'équation (3.2) peuvent être appliquées. Avec cette correction, il y aura donc un critère global de fatigue égal à 1 lors de l'amorce de fissure, que ce soit au niveau du frettage ou n'importe où ailleurs.

$$\begin{aligned}
 VM_{fretage}^* &= 0.39 \times VM_{fretage} \\
 SIN_{fretage}^* &= 0.39 \times SIN_{fretage} \\
 CRO_{fretage}^* &= 0.39 \times CRO_{fretage} \\
 DV_{fretage}^* &= 0.35 \times DV_{fretage}
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

À la Figure 4-5, les facteurs de sécurité sont tracés au niveau du congé, de la zone frettée et la valeur minimale incluant la correction pour les 4 critères de fatigue. Ainsi, la valeur du FS est environ égale à 1 pour tous les cas étudiés, peu importe le glissement. La valeur de glissement indiquée est la valeur de l'amplitude maximale calculée.

Tableau 4-3 : Résultats du calcul en fatigue (Nishioka)

Gr.	Séries	Von Mises Signe				Sires				Crossland				Dang Van				Gliss. (µm)
		VM <sub>congé</sub>	VM <sub>ret</sub>	VM <sub>ret</sub>	VM <sub>min</sub>	S <sub>max</sub>	S <sub>min</sub>	S <sub>max</sub>	S <sub>min</sub>	CRO <sub>congé</sub>	CRO <sub>ret</sub>	CRO <sub>ret</sub>	CRO <sub>min</sub>	DV <sub>congé</sub>	DV <sub>ret</sub>	DV <sub>ret</sub>	DV <sub>min</sub>	
A	a	1	1.04	1.04	1.04	2.68	1.04	1.04	1.04		2.68	1.04	1.04		2.79	0.97	0.97	10.10
	b	2	2.48	0.96	0.96	2.48	0.96	0.96	0.96		2.48	0.96	0.96		2.59	0.90	0.90	12.25
	c	3	2.36	0.92	0.92	2.36	0.92	0.92	0.92		2.36	0.92	0.92		2.47	0.86	0.86	15.61
	d	4	2.35	0.91	0.91	2.35	0.91	0.91	0.91		2.35	0.91	0.91		2.48	0.86	0.86	18.71
	e	5	2.14	0.83	0.83	2.14	0.83	0.83	0.83		2.14	0.83	0.83		2.18	0.76	0.76	16.38
	f	6	2.58	1.00	1.00	2.58	1.00	1.00	1.00		2.58	1.00	1.00		2.69	0.94	0.94	12.49
B	g	7	1.32	1.02	1.02	2.62	1.02	1.02	1.02	1.41	2.62	1.02	1.02	1.30	2.93	1.02	1.02	12.82
	h	8	1.18	0.97	0.97	2.49	0.97	0.97	0.97	1.25	2.49	0.97	0.97	1.12	2.79	0.97	0.97	13.28
	i	9	1.36	1.06	1.06	2.73	1.06	1.06	1.06	1.42	2.73	1.06	1.06	1.33	3.04	1.06	1.06	13.16
	j	10	1.09	1.04	1.04	2.68	1.04	1.04	1.04	1.15	2.68	1.04	1.04	1.03	2.97	1.03	1.03	14.90
	k	11	1.05	1.02	1.02	2.63	1.02	1.02	1.02	1.10	2.63	1.02	1.02	0.97	2.98	1.03	0.97	13.81
	l	12	0.97	1.11	0.97	2.86	1.11	0.97	0.97	0.98	2.86	1.11	0.98	0.87	3.18	1.10	0.87	13.30
C	m	13	1.11	1.02	1.02	2.62	1.02	1.02	1.02	1.16	2.62	1.02	1.02	1.05	2.91	1.01	1.01	15.22
	n	14	1.02	1.04	1.04	2.66	1.04	1.04	1.04	1.06	2.66	1.04	1.04	0.93	3.06	1.06	0.93	14.68
	o	15	1.05	1.01	1.01	2.60	1.01	1.01	1.01	1.08	2.60	1.01	1.01	0.98	2.98	1.03	0.98	14.92
	p	16	1.29	1.01	1.01	2.60	1.01	1.01	1.01	1.35	2.60	1.01	1.01	1.26	2.84	0.99	0.99	17.03
	q	17	1.07	0.97	0.97	2.50	0.97	0.97	0.97	1.10	2.50	0.97	0.97	0.99	2.73	0.95	0.95	19.02
	r	18	1.17	1.02	1.02	2.62	1.02	1.02	1.02	1.24	2.62	1.02	1.02	1.13	2.91	1.01	1.01	14.03
E	s	19	1.11	0.95	0.95	2.43	0.95	0.95	0.95	1.21	2.43	0.95	0.95	1.09	3.33	1.16	1.09	10.96
	t	20	1.03	1.05	1.03	2.70	1.05	1.05	1.05	1.15	2.70	1.05	1.05	1.04	3.03	1.05	1.04	13.74
	u	21	1.38	1.04	1.04	2.66	1.04	1.04	1.04	1.49	2.66	1.04	1.04	1.41	2.92	1.01	1.01	12.23
	Moyenne		2.57			2.57					2.57				2.85			
Médiane		2.62			2.62					2.62				2.91				
Écart-type		0.1575			0.1575					0.1575				0.2611				
		6.13%			6.13%					6.13%				9.17%				

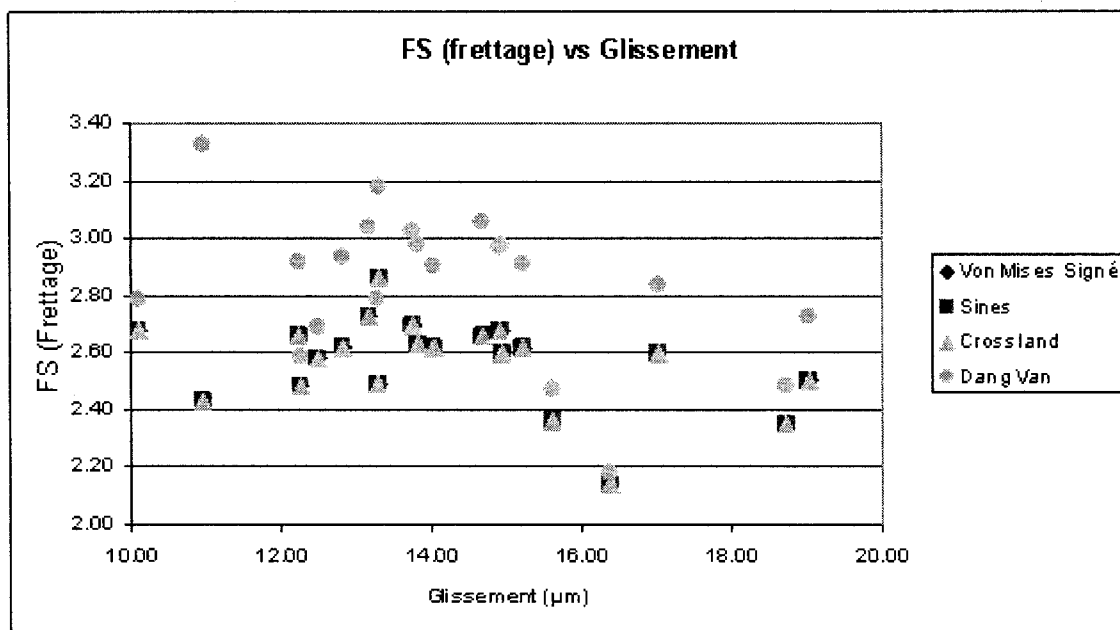


Figure 4-4 : FS (Fretage) vs Glissement – Nishioka

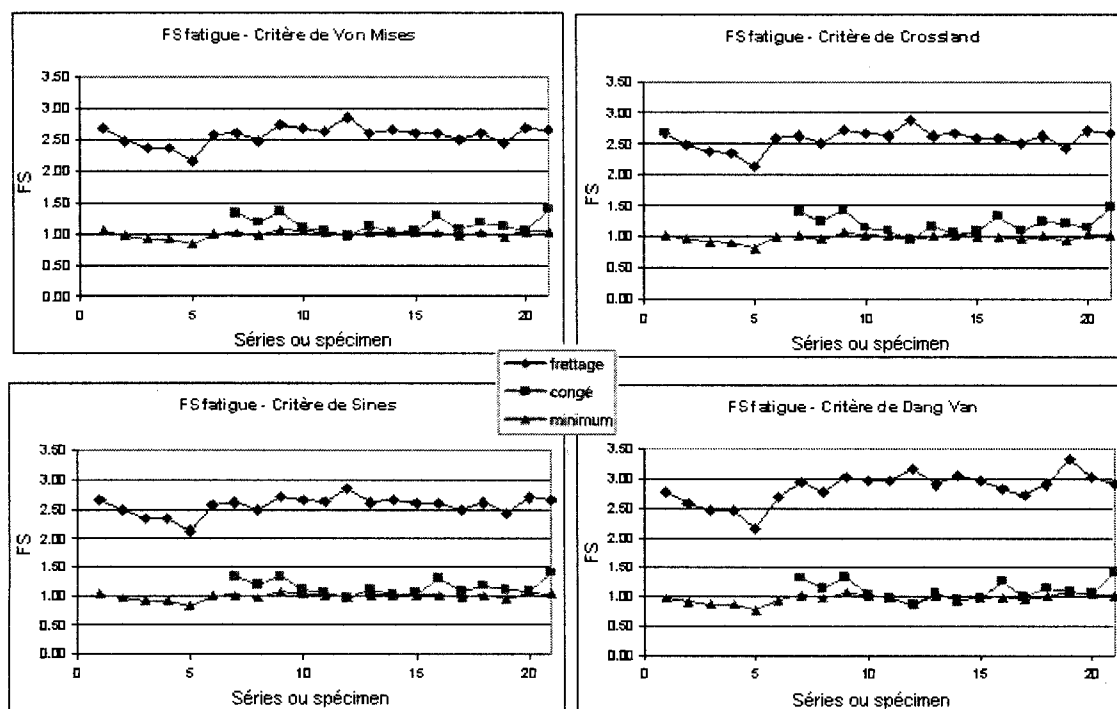


Figure 4-5 : Facteurs de sécurité en fatigue

### 3.1 Discussion

Un facteur correctif sur la vie en fatigue dans la zone frettée a été trouvé pour le type de chargement et le matériau étudiés. Ce facteur est de 0.39 pour les critères de Von Mises, Sines et Crossland et de 0.35 pour le critère de Dang Van. Rappelons qu'il est normal de trouver des facteurs différents pour des critères différents, puisque le facteur de sécurité est défini différemment selon le critère choisi. De plus, il faut rappeler que les critères de Von Mises, Sines et Crossland sont identiques pour une contrainte moyenne en compression.

Tel que vu à la Figure 1-4 du Chapitre 1, la vie en fretting fatigue est fonction de l'amplitude de glissement. Dans les cas étudiés, le glissement se situe entre 10 et 20  $\mu\text{m}$ . Il s'agit de la zone où la vie en fatigue atteint un creux quasi-constant en fonction du glissement. Malgré les nombreuses configurations étudiées, le glissement se situe toujours dans cette zone. L'amplitude de glissement n'est peut-être pas la cause de la diminution de la vie en fatigue, mais il se pourrait qu'il soit un des résultats. Pour le savoir, d'autres configurations avec des chargements et des matériaux différents doivent être testés. Au Chapitre 5, un chargement en torsion alternée sur un acier doux sera testé.

Au Chapitre 3, il avait été mentionné que la non-convergence des contraintes sur le coin de la zone frettée n'affectait pas la convergence du FS en fatigue. En effet, la valeur minimale du FS est minimale légèrement à l'intérieur de la zone frettée, pas sur le bout. De plus, le FS est le résultat d'une combinaison des 6 composantes de contrainte, atténuant ainsi l'effet des pics de contrainte suivant une certaine direction seulement.

### 3.2 Influence du coefficient de friction : Nishioka A

Un des paramètres importants dans la modélisation du contact est le coefficient de friction. La valeur de  $\mu = 0.5$  a été utilisée dans les analyses jusqu'à maintenant. Tel que mentionné au Chapitre 1, la valeur de  $\mu$  peut varier au cours d'un essai de fatigue. De plus, cette propriété n'est pas intrinsèque au matériau et peut varier d'un essai à l'autre.

L'influence du coefficient de friction sur la vie en fatigue des assemblages par interférence est maintenant étudiée. Pour ce faire, le coefficient de friction a été testé pour différentes valeurs sur la série a, groupe A des essais de Nishioka. L'influence sur le glissement est illustrée à la Figure 4-6 et l'impact sur le FS en fatigue à la Figure 4-7.

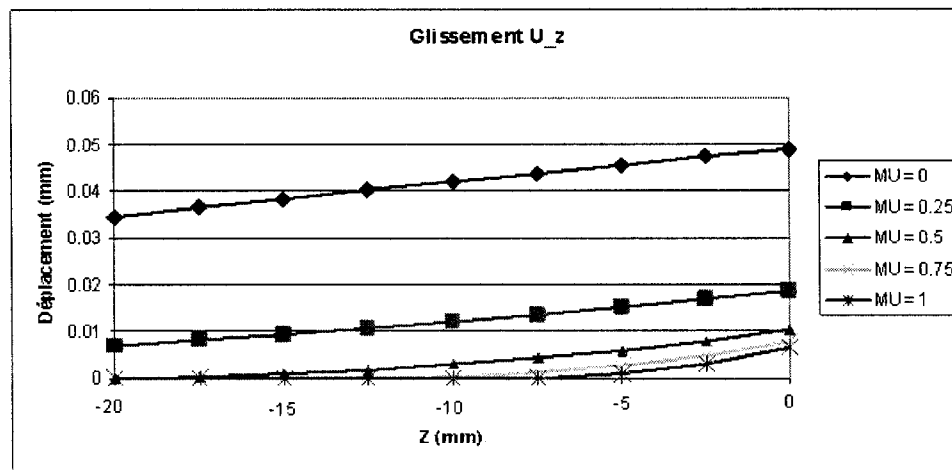


Figure 4-6 : Influence de  $\mu$  sur le glissement

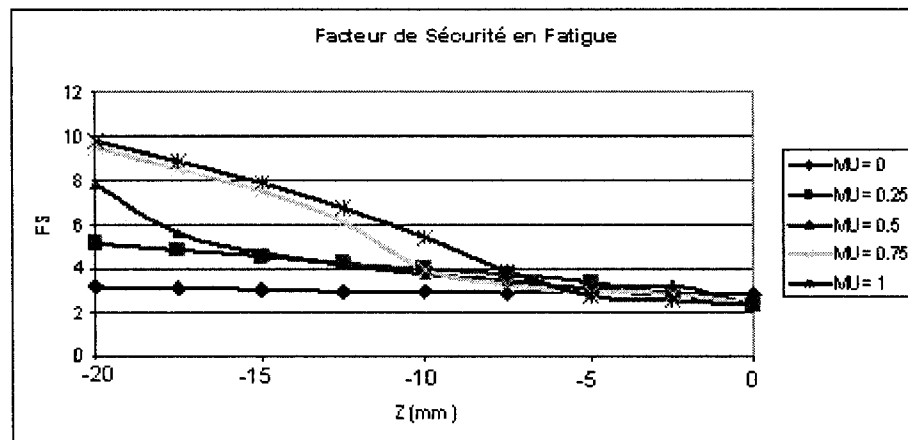


Figure 4-7 : Influence de  $\mu$  sur le FS en fatigue

Le glissement diminue avec une augmentation de  $\mu$ . Pour  $0.5 \leq \mu \leq 1.0$ , le glissement est peu influencé. Normalement, le coefficient de friction se retrouve dans cette plage pour ce type d'acier et aurait tendance à augmenter au cours de l'essai. Des valeurs de  $\mu < 0.5$  sont moins probables, mais elles permettent un glissement plus important. Cependant, même pour  $\mu = 0.25$ , le glissement demeure en dessous de  $20 \mu\text{m}$ , soit dans la plage ayant les effets sur la vie en fatigue mentionnés précédemment.

Quant à lui, le FS en fatigue est influencé par une variation de  $\mu$ , mais pratiquement pas sur le bout de la zone de contact ( $Z = 0 \text{ mm}$ ). C'est à cet endroit que se retrouve la valeur minimale du FS. Or, il a été défini que la contrainte de frottement maximale est égale à la limite d'écoulement au sens de Von Mises (voir équation (1.16)). Comme il y a plastification sur le coin du contact, il

y a saturation de la contrainte de frottement et c'est la raison pour laquelle le coefficient de friction influence peu l'état de contrainte à l'extrémité.

Ainsi, le coefficient de friction semble avoir un effet moins important qu'anticipé sur la vie en fatigue. Bien qu'il soit toujours recommandé de garder une marge de sécurité pour sa variation possible lors de la conception, il ne constitue pas une valeur critique sur laquelle il faut porter une attention si particulière. Ainsi, dans le cas traité, les essais avec  $\mu = 0.5$  sont considérés représentatifs pour les essais en flexion rotative de Nishioka.

#### **4. Conclusion**

L'analyse par éléments finis de différentes configurations d'essais en flexion rotative a été réalisée. L'étude a porté sur le calcul du facteur de sécurité en fatigue selon les critères de Von Mises, Sines, Crossland et Dang Van. Pour les essais de Nishioka (Nishioka & Komatsu, 1967), un facteur correctif  $k_{\text{fret}}$  de 0.39 pour les 3 premiers critères et de 0.35 pour le dernier critère permet d'obtenir des valeurs comparables à la fatigue conventionnelle au niveau du frettage.

Le facteur correctif n'est pas fonction du glissement, ce dernier semblant être une conséquence de la fatigue par fretting plutôt qu'une cause. Le facteur correctif est probablement fonction du chargement et/ou du matériau. Des études supplémentaires sont nécessaires pour valider cette hypothèse.

Le coefficient de friction est une donnée qui peut varier au cours d'un essai. Cependant, une étude de l'influence de la variation de  $\mu$  a montré qu'il influence peu le facteur de sécurité en fatigue à l'extrémité du contact.



## CHAPITRE 5 : ASSEMBLAGES FRETTÉS EN TORSION ALTERNÉE

### 1. Description du modèle

Juuma a effectué des tests sur des assemblages frettés sollicités en torsion alternée (Juuma, 1999). Le schéma du montage ainsi que la géométrie sont présentés à la Figure 5-1 et à la Figure 5-2. Un arbre avec épaulement est fretté dans un moyeu à l'aide d'une troisième pièce conique. Un bras de levier y permet de mesurer avec plus de précision l'amplitude de glissement. Le Tableau 5-1 présente les propriétés des matériaux. Les différentes configurations testées sont listées au Tableau 5-2, avec leurs dimensions, couple de torsion appliqué, interférence radiale, la localisation de la rupture en fatigue et le nombre de cycles à la rupture.

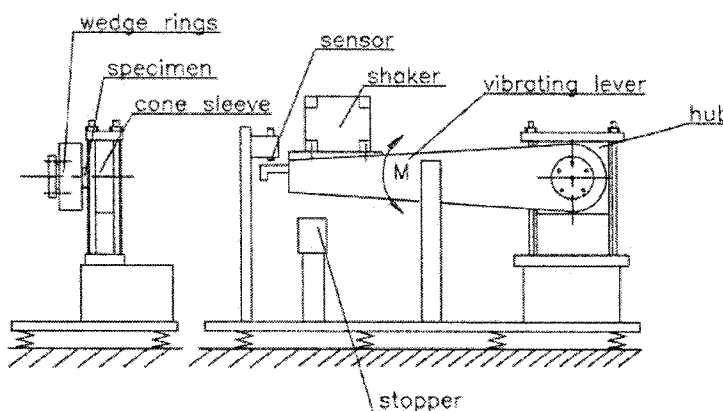


Figure 5-1 : Schéma du montage de Juuma

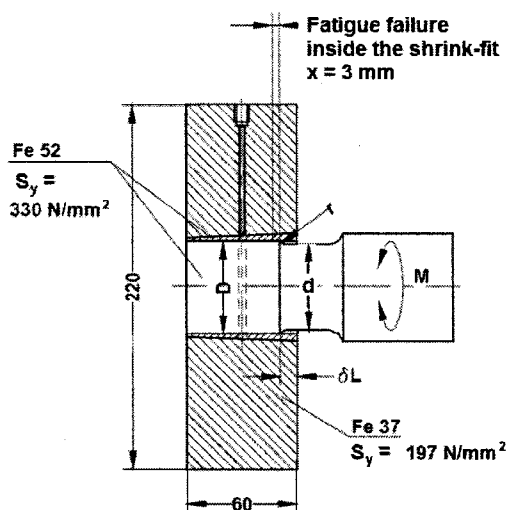


Figure 5-2 : Géométrie du modèle de Juuma

Tableau 5-1 : Propriétés matériaux

	E (GPa)	$\nu$	Sy (MPa)	Sut (MPa)	Se (MPa)
Fe37	205	0.3	197	370	-
Fe52	205	0.3	330	520	345

Tableau 5-2 : Configurations, chargements et vie en fatigue

Test	Contrainte de torsion	Couple de torsion	Pression de contact	Interférence radiale	Dimensions (mm)				Localisation de la rupture en fatigue	Cycles à la rupture
	$\tau_n$ (MPa)	$T_n$ (Nmm)	P (MPa)	$\delta_R$ (mm)	D	d	r	$\delta L$	x(mm)	N ( $10^6$ )
20	175	3.80E+06	88.6	2.38E-02	52	48	9	9	0.5	1.2
21	175	3.80E+06	146.1	3.93E-02	52	48	9	7	0.5	1.4
22	175	3.80E+06	79.6	2.14E-02	52	48	12	9	1.4	0.72
23	175	3.80E+06	133.8	3.60E-02	52	48	12	7	1	1.05
24	175	3.80E+06	146.1	3.98E-02	52.6	48	9	7	1.3	0.71
25	175	3.80E+06	91.9	2.50E-02	52.6	48	12	9	0.5	1.4
26	175	3.80E+06	200.1	5.45E-02	52.6	48	12	9	1	1.36
27	175	3.80E+06	187.9	5.11E-02	52.6	48	15	9	0.4	2
28	175.3	3.81E+06	143.5	3.91E-02	52.6	48	15	7	1.5	1.9
29	154	3.34E+06	79.9	2.17E-02	52.6	48	12	7	3	6.66
30	175	3.35E+06	132.2	3.55E-02	52	46	15	8	2	1.54
31	175	3.35E+06	171.9	4.62E-02	52	46	15	8.5	1	1.4
32	175	3.35E+06	227.5	6.11E-02	52	46	15	8.5	0.2	1.9
33	175	3.35E+06	78.5	2.11E-02	52	46	15	8	3	1.2
34	175	2.93E+06	199.3	5.36E-02	52	44	15	7	0.5	0.95
35	148	2.48E+06	185.1	4.97E-02	52	44	15	7	1.5	20.25
36	154	2.58E+06	148.7	4.00E-02	52	44	15	9	0	5.9
37	154	2.58E+06	77.9	2.09E-02	52	44	15	8	-1	10.3
38	184	2.87E+06	141.9	3.81E-02	52	43	15	7	-1.5	0.59
39	154	2.40E+06	104.1	2.80E-02	52	43	15	7	-	33.2
40	154	2.94E+06	197.2	5.30E-02	52	46	9	9	0	4.3
41	154	2.94E+06	157.4	4.23E-02	52	46	9	8.5	0.5	7.1
42	154	2.76E+06	225.3	6.05E-02	52	45	9	7	-0.7	4.2
43	154	2.76E+06	130	3.49E-02	52	45	9	5.5	-1.5	6.1
44	154	2.76E+06	84	2.26E-02	52	45	9	10	-1.5	8
45	154	2.76E+06	78.8	2.12E-02	52	45	9	7.5	-0.5	4
46	154	2.76E+06	138.7	3.73E-02	52	45	12	7	-2	4
47	154	2.76E+06	64.7	1.74E-02	52	45	12	6	-1.5	7.35
48	154	2.94E+06	140.2	3.77E-02	52	46	6	9	-0.5	5.3
49	154	2.94E+06	79.1	2.13E-02	52	46	6	8	-0.1	5.5
50	154	3.14E+06	139.2	3.74E-02	52	47	6	9	0.2	5.2
51	154	3.14E+06	75.7	2.03E-02	52	47	6	8	-0.5	5
52	154	3.34E+06	108.1	2.90E-02	52	48	6	7	0.7	2.7
53	154	3.34E+06	75.2	2.02E-02	52	48	6	6.5	1	20.3

## 2. Options de simulation

La géométrie quasi-cylindrique et le chargement en torsion permettent d'appliquer une condition de symétrie cyclique au modèle. La seule simplification est au niveau du moyeu, qui est carré originellement. Cependant, une petite variation du diamètre extérieur du moyeu a une influence très faible sur la pression de contact et donc, sur les autres résultats. Ainsi, une variation du rayon extérieur de 110 mm à 155 mm (diagonale) a une influence de moins de 3% sur la pression de contact.

Le modèle éléments finis est montré à la Figure 5-3. Le chargement et les conditions aux limites y sont indiqués. La condition de symétrie cyclique est imposée par un bloc de commandes.

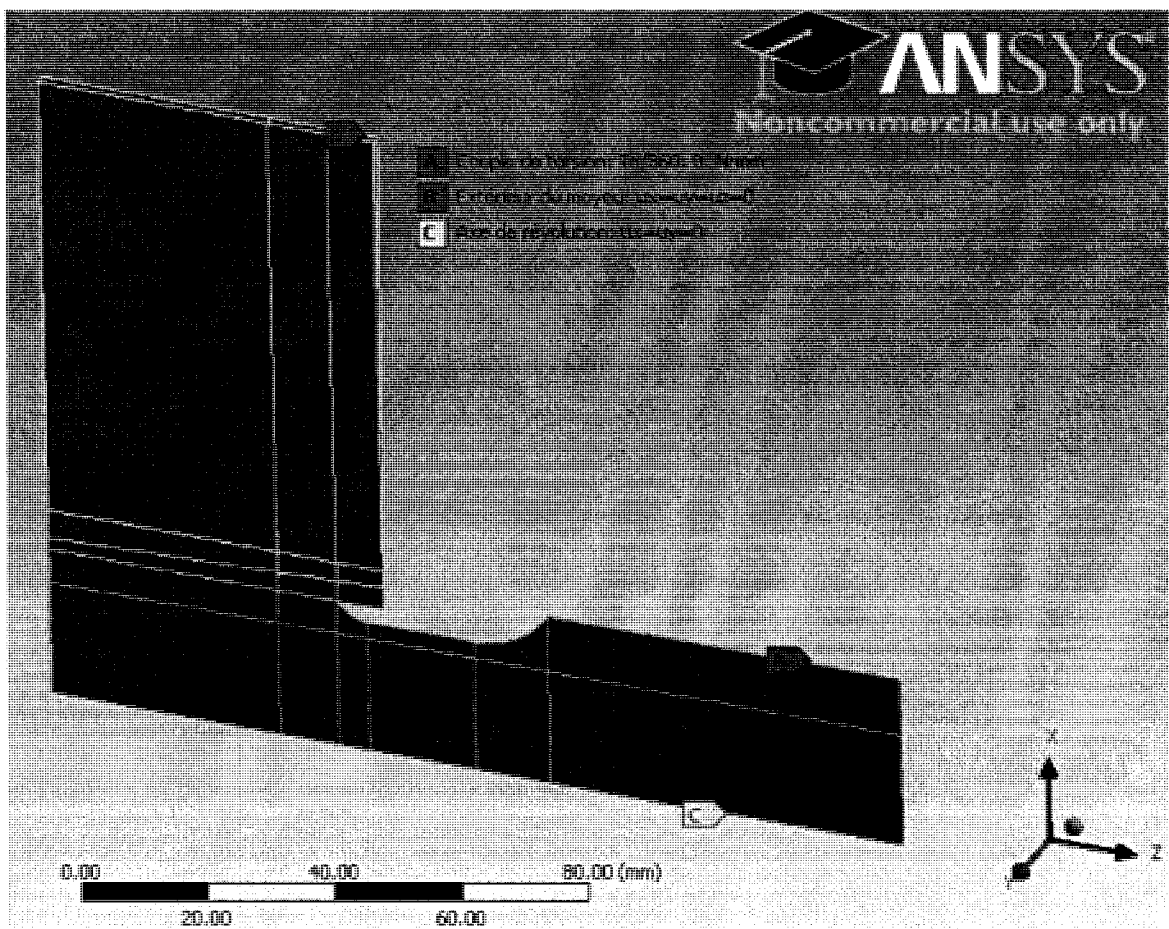


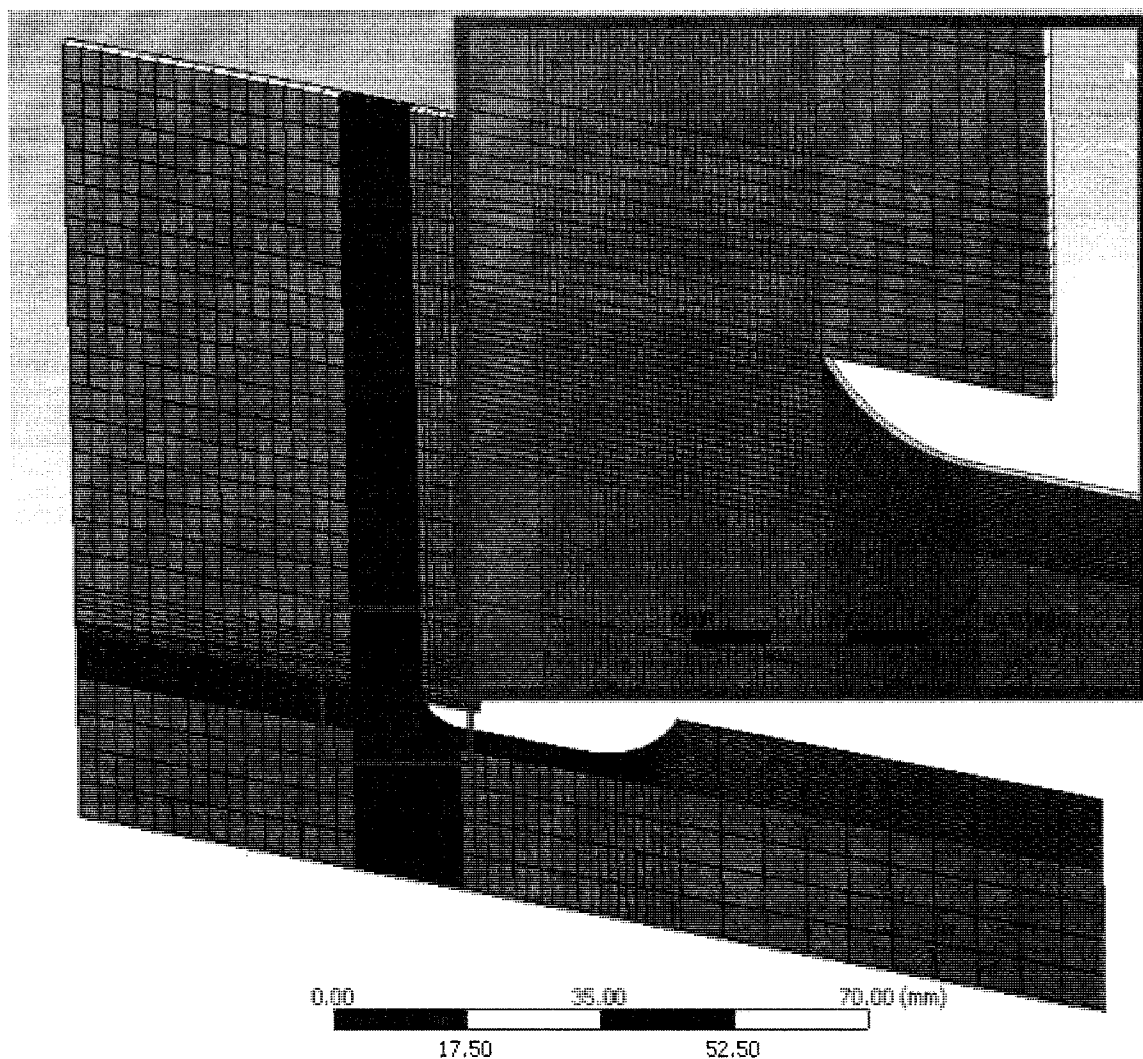
Figure 5-3 : Modèle de Juuma – Conditions aux limites et chargement

Comme ce modèle est constitué de 3 pièces (arbre, cône et moyeu), il existe deux zones de contact. Celles-ci sont modélisées par deux contacts rugueux ( $\mu = 0.7$ ), d'après les recommandations fournies au Chapitre 2. Les propriétés sont listées au Tableau 5-3. L'interférence  $\delta_r$  est appliquée à l'interface cylindrique entre l'arbre et le cône.

**Tableau 5-3 : Propriétés des contacts**

Modèle du contact	Surface-à-Surface
Type	Rugueux
Coefficient de friction ( $\mu$ )	0.7
Interférence ( $\delta_r$ )	0 et $\delta_r$
Comportement	Asymétrique
Formulation	Lagrangien augmenté
Tol. Péné FTOLN	5e-5 mm
Tol. Gliss élastique. SLTO	1e-4 mm
Éléments	CONTA174 and TARGE170

Le maillage est fait d'éléments hexaédriques à 20 nœuds (SOLID186). Pour réaliser le maillage, une tranche de 1° du modèle a été modélisée, avec maillage coïncident sur les faces de la symétrie cyclique. Il y a un seul élément dans l'épaisseur, ce qui est suffisant pour assurer la convergence puisque les contraintes et les déplacements sont uniformes autour de l'axe de révolution. L'utilisation de la symétrie cyclique permet d'avoir des éléments aussi petits que 0.25 mm dans la zone critique, assurant la convergence sans avoir recours à la sous-modélisation. Un exemple de maillage est illustré à la Figure 5-4.

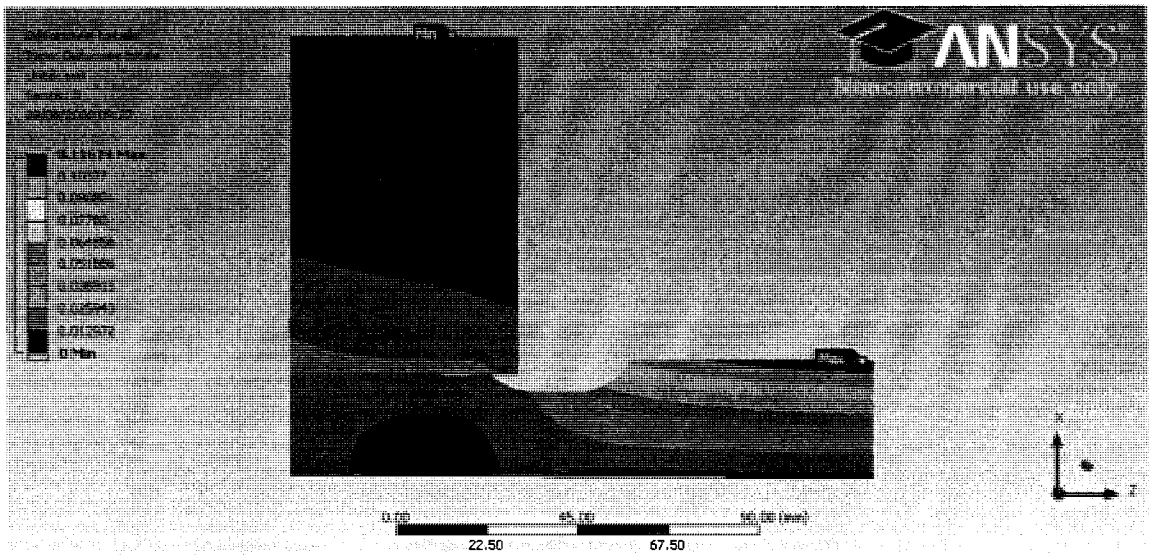


**Figure 5-4 : Maillage – Modèle de Juuma**

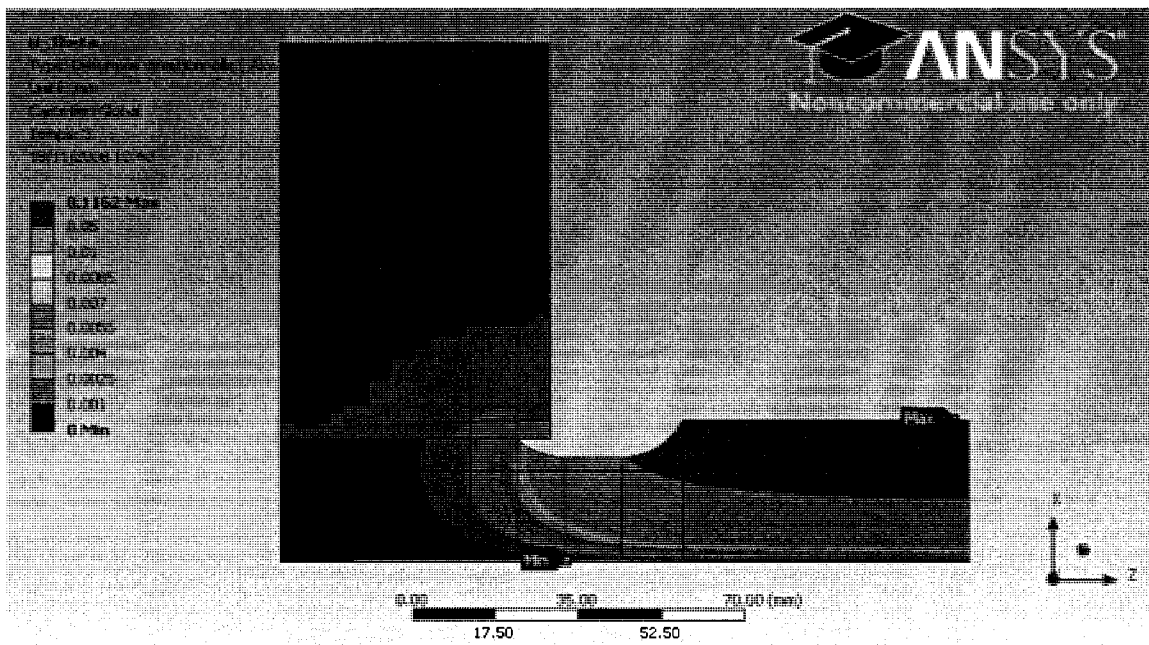
### **3. Résultats**

#### **3.1 Déformée**

Le tracé de la déformée est effectuée à la Figure 5-5 et correspond bien à un chargement de torsion, puisque la déformée circonférentielle au niveau de l'arbre est la plus importante. À l'interface de contact, il y a discontinuité du déplacement radial  $u_r$  dû à l'interférence. Il existe un léger glissement axial (selon  $u_z$ ) à l'extrémité.



Déformée totale



Déformée circonférentielle ( $u_\theta$ )

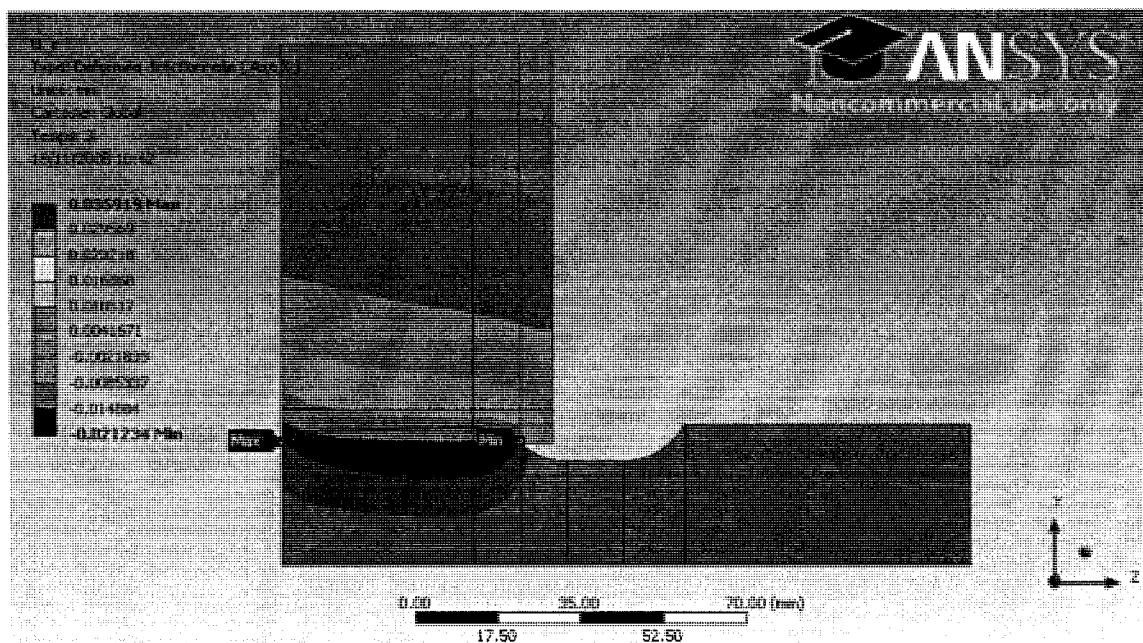
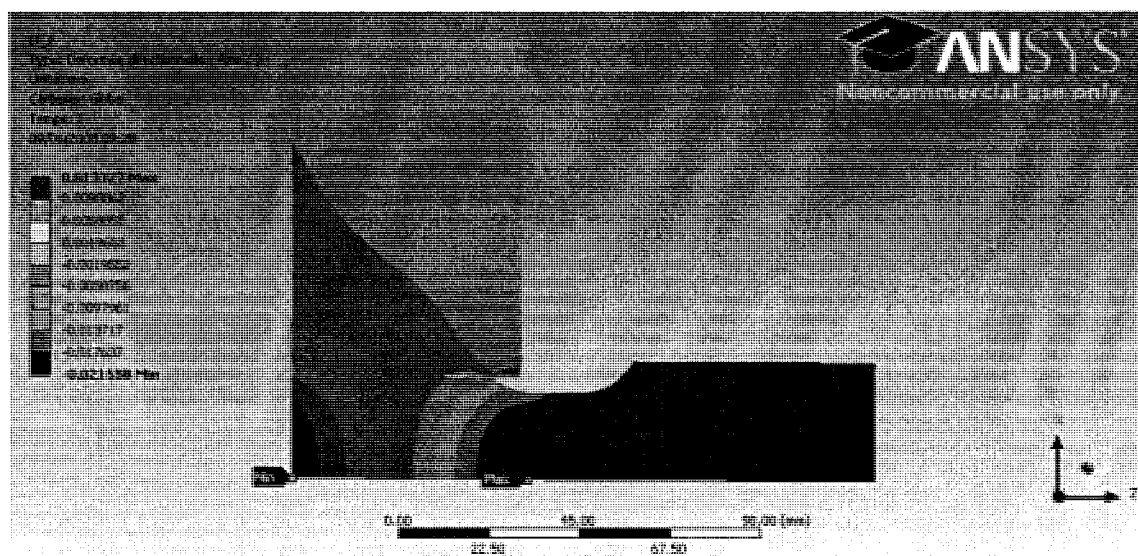
Déformée radiale ( $u_r$ )Déformée axiale ( $u_z$ )

Figure 5-5 : Déformée – Modèle de Juuma (Groupe C, Série j)

### 3.2 Contraintes

Le tracé des contraintes est effectué à la Figure 5-7. Il existe une concentration de contrainte située sur le coin du contact entre l'arbre et le moyeu. Pour assurer la convergence à l'interface de contact, il doit y avoir une continuité des contraintes qui sont transmises par la surface de contact, soit  $\sigma_r$ ,  $\tau_{r\theta}$  et  $\tau_{rz}$  (ce qui revient à la pression de contact et la contrainte de frottement). Pour le chargement en torsion en fatigue, l'amplitude de contrainte sera le résultat des composantes  $\tau_{r\theta}$  et  $\tau_{\theta z}$ , les autres ne variant pratiquement pas. En revanche, la contrainte moyenne sera définie par les composantes  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$  et  $\tau_{rz}$ .

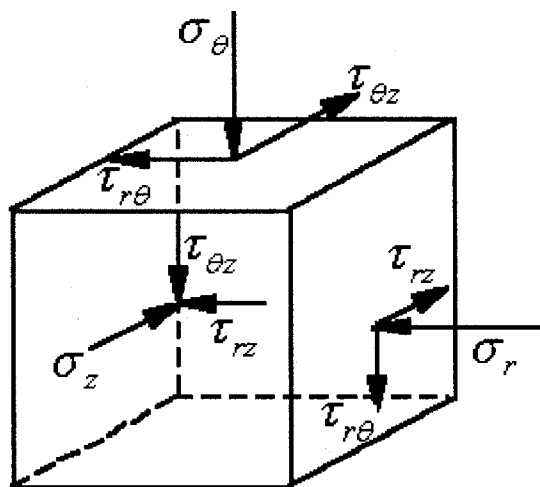
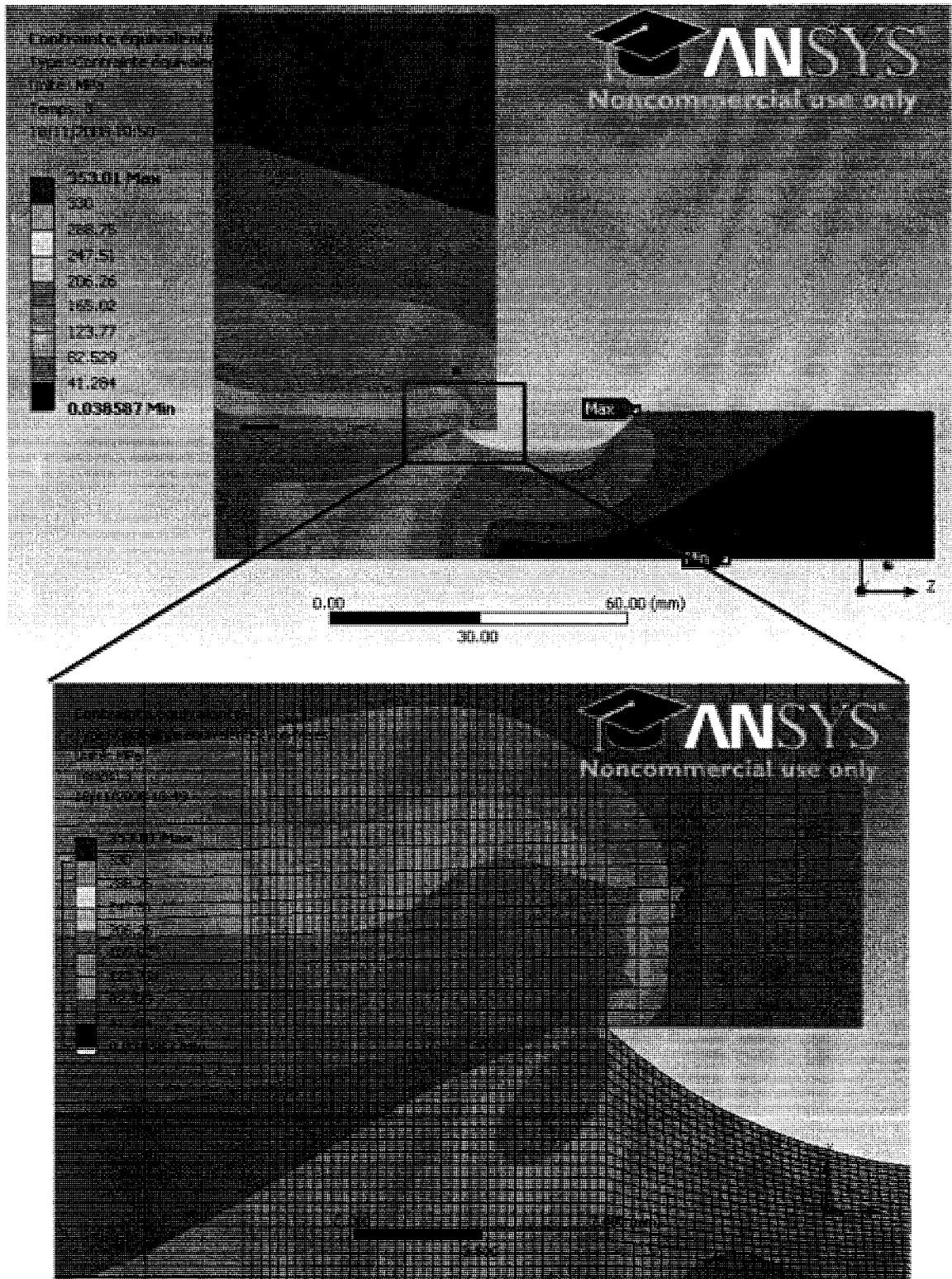
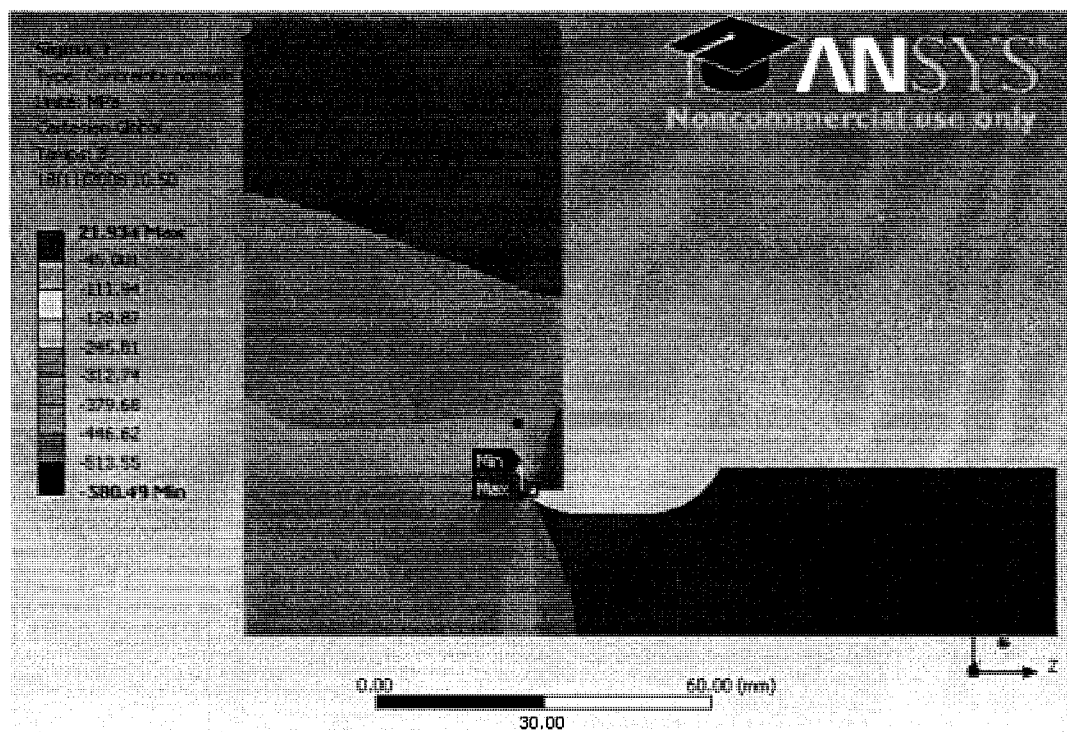


Figure 5-6 : Contraintes dans un repère cylindrique

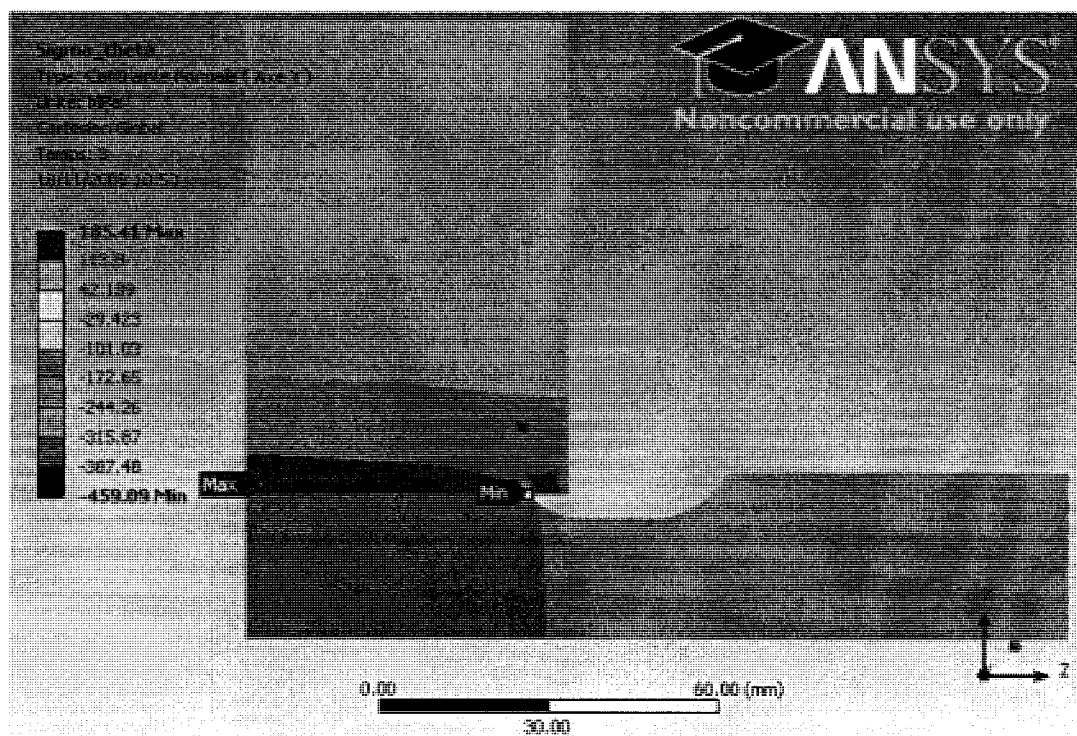




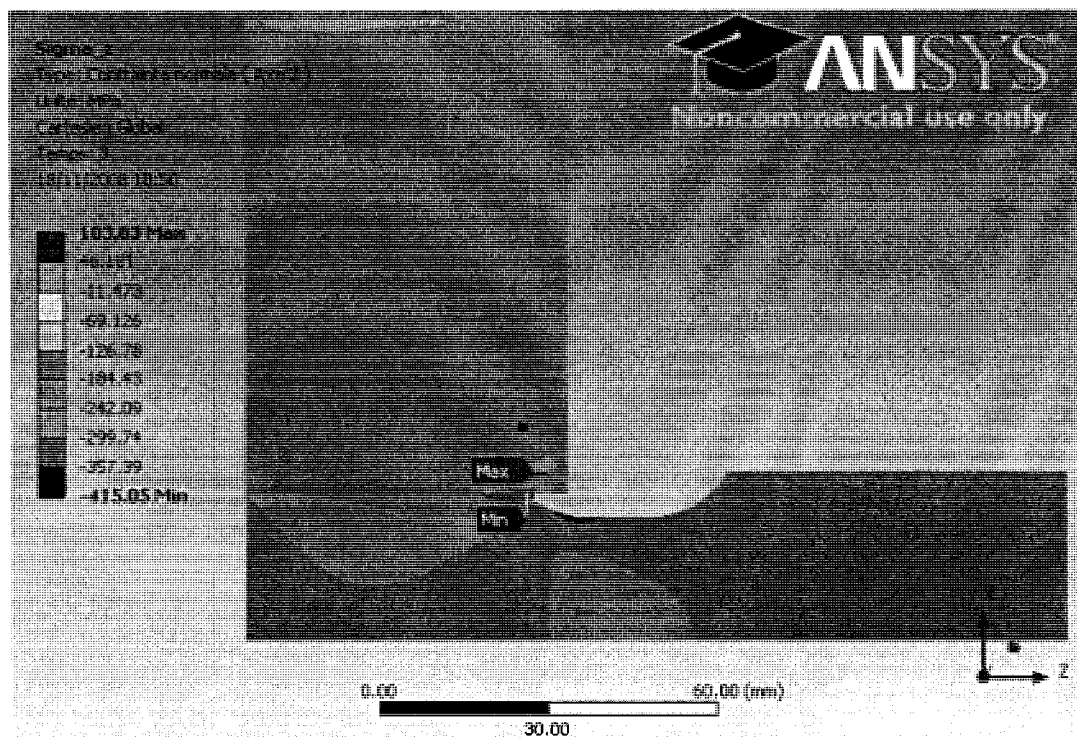
Contrainte équivalente de Von Mises ( $\sigma_{eqv}$ )



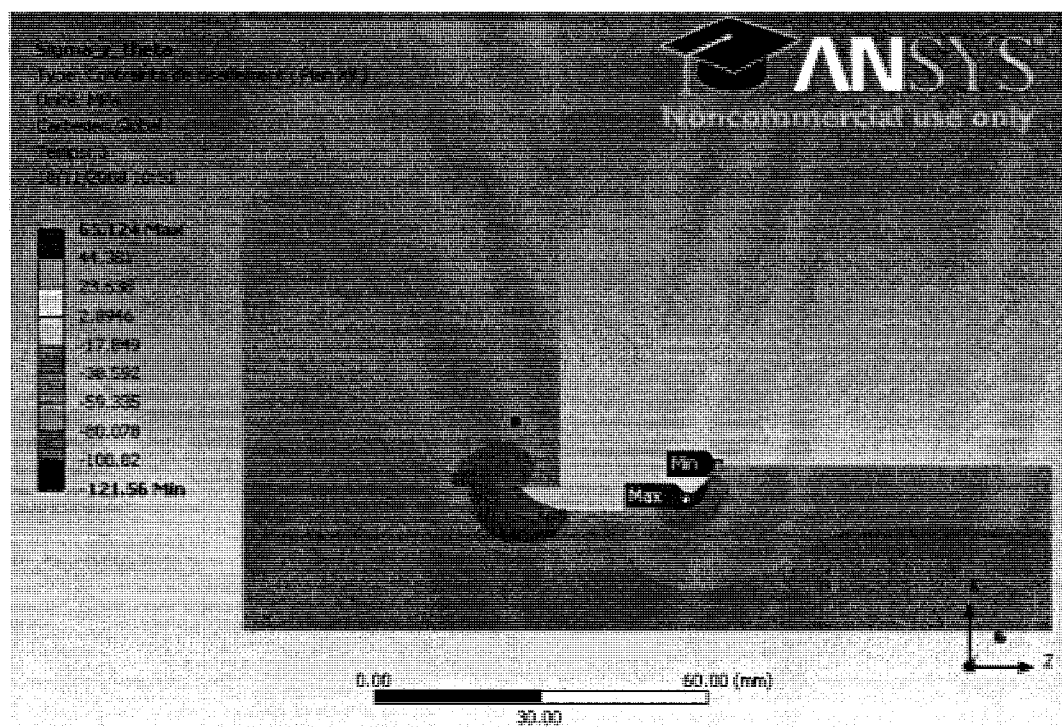
Contrainte radiale ( $\sigma_r$ )



Contrainte orthoradiale ( $\sigma_\theta$ )



Contrainte axiale ( $\sigma_z$ )



Contrainte de friction circonférentielle ( $\sigma_{r\theta}$ )



### 3.3 Fatigue

#### 3.3.1 Limite de fatigue

Les résultats calculés l'ont été pour un chargement défini à un certain nombre de cycles. Or, pour calculer le facteur de sécurité en fatigue, il est nécessaire de déterminer la limite de fatigue pour le nombre de cycles effectués. Connaissant la limite d'endurance de cet acier, définie à environ  $10^7$  cycles (selon les données du Tableau 5-4), ainsi que la résistance maximale  $S_{ut}$ , il est possible d'estimer la limite de fatigue  $S_f$  du matériau par interpolation logarithmique (Norton, 2006). Le tracé de la courbe S-N est fourni à la Figure 5-8.

- $S_f @ 10^7 \text{ cycles} = S_e = 345 \text{ MPa}$
- $S_f @ 10^3 \text{ cycles} = 0.9 S_{ut} = 468 \text{ MPa}$
- Interpolation logarithmique : 
$$\frac{S_f - 0.9S_{ut}}{S_e - 0.9S_{ut}} = \frac{\log N - \log 10^3}{\log 10^7 - \log 10^3} \quad (4.1)$$

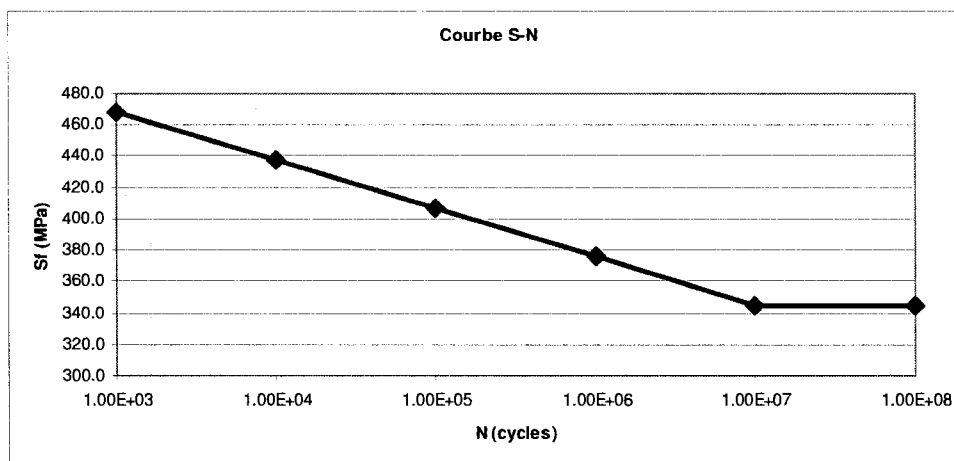


Figure 5-8 : Courbe S-N – Fe52 – Modèle de Juuma

#### 3.3.2 Calcul du facteur de sécurité en fatigue

Le calcul du facteur de sécurité en fatigue a été effectué pour les critères de Von Mises (VM), Sines (SIN), Crossland (CRO) et Dang Van (DV). Les résultats ont été divisés en deux catégories : ceux situés dans le congé de raccordement et ceux situés dans le frettage. Les résultats bruts sont donnés au Tableau 5-4. La moyenne, la médiane, l'écart type et la déviation standard y sont également calculés pour le facteur de sécurité en fatigue. La Figure 5-9 effectue le tracé comparatif des FS en fatigue pour les différents critères entre la zone du congé et la zone du frettage.

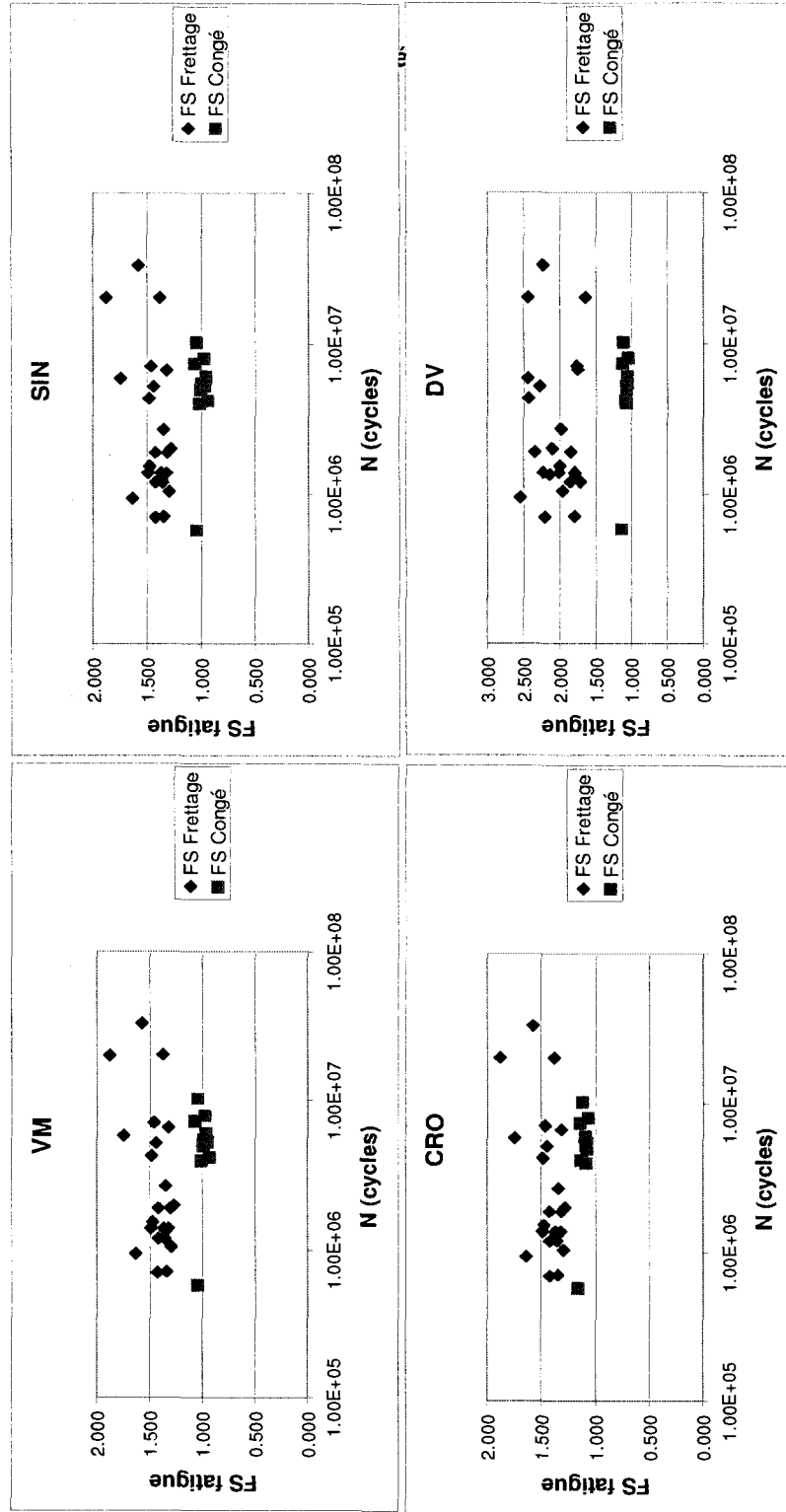


Figure 5-8 : Facteur de sécurité en fatigue – Modèle de Juuma



Au Tableau 5-4, le facteur nominal de réduction de la vie en fatigue  $\beta$  est également calculé. Il s'agit du rapport entre la résistance à la fatigue  $S_f$  et la contrainte nominale de torsion, sans considérer l'effet de concentration de contrainte ou la pression de contact. La valeur de  $\beta$  varie entre 1.7 et 1.9.

$$\beta = \frac{S_f}{\sqrt{3}\tau_n} \quad (4.2)$$

Tableau 5-4 : Résultats de fatigue – Modèle de Juuma

Test no.	N (cycles)	Sf (MPa)	$\beta$	Glissement ( $\mu\text{m}$ )	FS congé				FS frettage			
					VM	SIN	CRO	DV	VM	SIN	CRO	DV
20	1.20E+06	373.3	1.87	4.76					1.36	1.36	1.36	1.71
21	1.40E+06	371.3	1.86	3.12					1.33	1.33	1.33	2.01
22	7.20E+05	380.1	1.91	4.96					1.35	1.35	1.35	1.79
23	1.05E+06	375.1	1.88	3.62					1.29	1.29	1.29	1.95
24	7.10E+05	380.3	1.91	2.42					1.43	1.43	1.43	2.20
25	1.40E+06	371.3	1.86	3.68					1.37	1.37	1.37	1.79
26	1.36E+06	371.6	1.87	3.52					1.36	1.36	1.36	2.13
27	2.00E+06	366.5	1.84	3.52					1.28	1.28	1.28	2.09
28	1.90E+06	367.2	1.84	3.7					1.31	1.31	1.31	1.85
29	6.66E+06	350.4	1.76	3.28					1.32	1.32	1.32	1.75
30	1.54E+06	370.0	1.86	3					1.48	1.48	1.48	1.99
31	1.40E+06	371.3	1.86	3.18					1.49	1.49	1.49	2.23
32	1.90E+06	367.2	1.84	3.42					1.42	1.42	1.42	2.35
33	1.20E+06	373.3	1.87	3.96					1.42	1.42	1.42	1.86
34	9.50E+05	376.4	1.89	2.44					1.64	1.64	1.64	2.55
35	2.03E+07	335.6	1.68	2.26					1.88	1.88	1.88	2.44
36	5.90E+06	352.0	1.77	1.82					1.75	1.75	1.75	2.45
37	1.03E+07	344.6	1.73	2.1	1.05	1.04	1.12	1.11				
38	5.90E+05	382.8	1.92	2	1.05	1.04	1.16	1.14				
39	3.32E+07	329.0	1.65	1.38					1.58	1.58	1.58	2.23
40	4.30E+06	356.3	1.79	1.74					1.48	1.48	1.48	2.44
41	7.10E+06	349.6	1.76	1.68					1.47	1.47	1.47	1.77
42	4.20E+06	356.6	1.79	1.43	0.93	0.93	1.12	1.08				
43	6.10E+06	351.6	1.77	1.26	0.96	0.95	1.09	1.06				
44	8.00E+06	348.0	1.75	1.36	0.97	0.97	1.07	1.05				
45	4.00E+06	357.2	1.79	1.44	1.01	1.01	1.08	1.07				
46	4.00E+06	357.2	1.79	2.98	1.01	1.01	1.08	1.07				
47	7.35E+06	349.1	1.75	3.44	1.07	1.06	1.14	1.12				
48	5.30E+06	353.5	1.77	1.36	0.95	0.96	1.08	1.07				
49	5.50E+06	353.0	1.77	1.28	0.99	1.00	1.07	1.06				
50	5.20E+06	353.7	1.78	1.7					1.44	1.44	1.44	2.27
51	5.00E+06	354.3	1.78	1.8	0.99	1.00	1.08	1.06				
52	2.70E+06	362.5	1.82	2.02					1.35	1.35	1.35	1.97
53	2.03E+07	335.5	1.68	1.54					1.38	1.38	1.38	1.64
Légende des couleurs Rupture au niveau du frettage Rupture au niveau du congé				Moyenne	1.00	1.00	1.10	1.08	1.44	1.44	1.44	2.06
				Médiane	0.99	1.00	1.08	1.07	1.42	1.42	1.42	2.01
				Écart-type	0.04	0.04	0.04	0.04	0.15	0.15	0.15	0.27
					4.37%	4.38%	3.97%	4.04%	10.26%	10.26%	10.26%	13.21%

En première observation, notons que la moyenne et la médiane des distributions sont très semblables. De plus, l'écart-type est situé entre 10% et 13% de la moyenne. Généralement, on admet un rapport de 8% dans les calculs (Norton, 2006). Les essais de Juuma sont donc considérés normaux.

En première observation, il faut noter que le facteur de sécurité dans le congé est environ égal à 1 pour tous les critères. Cependant, la valeur est plus élevée dans le frettage, même si tous les points illustrés correspondent à un cas de rupture par fatigue. Il existe donc bel et bien un facteur de réduction de la vie en fatigue par frettage  $k_{fret}$ . Pour rendre les critères égaux à 1 dans le frettage, les corrections ci-dessous peuvent être appliquées :

$$\begin{aligned}
 VM_{fretage}^* &= 0.69 \times VM_{fretage} \\
 SIN_{fretage}^* &= 0.69 \times SIN_{fretage} \\
 CRO_{fretage}^* &= 0.69 \times CRO_{fretage} \\
 DV_{fretage}^* &= 0.49 \times DV_{fretage}
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

Nous pouvons également observer que dans la zone frettée, les critères de Von Mises, Sines et Crossland sont identiques. En effet, la théorie de Goodman n'applique aucune correction à un état de contrainte avec une moyenne en compression. Dans la zone frettée, la pression de contact crée inévitablement de la compression. Dans le congé, ces 3 critères donnent des résultats semblables, à la différence que le critère de Crossland donne une valeur du FS légèrement supérieure à 1. C'est qu'avec l'hypothèse avancée  $\left( \tau_{-1} = \frac{\sigma_{-1}}{\sqrt{3}} \right)$ , il revient au même que le critère de Von Mises sans considérer la contrainte moyenne. Pour le critère de Dang Van, les observations sont semblables à savoir que le facteur de sécurité est plus élevé dans la zone frettée (moyenne = 2.06) que dans le congé (moyenne = 1.08).

Il est à noter que le facteur de sécurité en fatigue a été calculé précédemment en tenant compte du nombre de cycles à la rupture. Un facteur correctif à appliquer a été défini selon le critère employé. Ce facteur correctif est indépendant de l'amplitude de glissement. La relation observée à la Figure 1-4 semble donc le résultat et non la cause du phénomène. Ainsi, la variation de l'amplitude de glissement et la relation observée sur la vie en fatigue seraient plutôt dues à l'effet de la variation de la contrainte locale au niveau du contact et au type de chargement. Habituellement, les auteurs d'essais expérimentaux notent l'amplitude de contrainte nominale et



le glissement. Avec la modélisation par éléments finis, il est possible de connaître la contrainte locale et de procéder ainsi à un calcul plus précis.

### 3.4 Conclusion

Il a été démontré qu'en appliquant un facteur correctif de la vie en fatigue en fonction du chargement, il est possible de calculer avec une précision acceptable la durée de vie d'un assemblage fretté. L'étude a porté sur le calcul du facteur de sécurité en fatigue selon les critères de Von Mises, Sines, Crossland et Dang Van. Un facteur correctif  $k_{\text{fret}}$  de 0.69 pour les 3 premiers critères et de 0.49 pour le dernier critère permet d'obtenir des valeurs comparables à la fatigue conventionnelle au niveau du frettage. Il faut rappeler que les critères de fatigue multiaxiaux (Crossland et Dang Van) ne sont pas utilisés à leur plein potentiel, puisque la valeur de  $\tau_{-1}$  a été approximée.

Davantage d'essais permettraient de vérifier si ce facteur correctif dépend du matériau et de procéder à des essais avec d'autres modes de chargement, par exemple la traction alternée. Cependant, il a été observé que le facteur nominal de réduction de la vie en fatigue  $\beta$  varie entre 1.7 et 1.9 pour les cas testés par Juuma. Hattori avait fait des observations semblables sur des assemblages frettés en torsion, mais il avait obtenu une valeur de  $\beta = 1.28$ . Il semblerait donc que le facteur correctif dépende du matériau utilisé.

Les observations donnent cependant assez d'information pour être en mesure de tester numériquement plusieurs configurations et d'en tirer des recommandations sur la conception. Une étude de sensibilité sera d'ailleurs menée au Chapitre 6 en fixant une valeur donnée de facteur correctif sur la vie en fatigue.

## CHAPITRE 6 : ÉTUDE DE SENSIBILITÉ

### 1. Définition de l'étude de sensibilité

Maintenant que la méthode de calcul a été définie et qu'il a été montré qu'un facteur de correction sur la vie en fatigue des assemblages frettés existe, une étude de sensibilité sera effectuée. L'analyse de l'effet de la pression de contact sera prise en compte, en plus de l'effet de différentes configurations géométriques. Les configurations testées sont montrées à la Figure 6-1. Les paramètres à faire varier sont listés au Tableau 6-1. Le modèle éléments finis a été réalisé selon les recommandations établies précédemment.

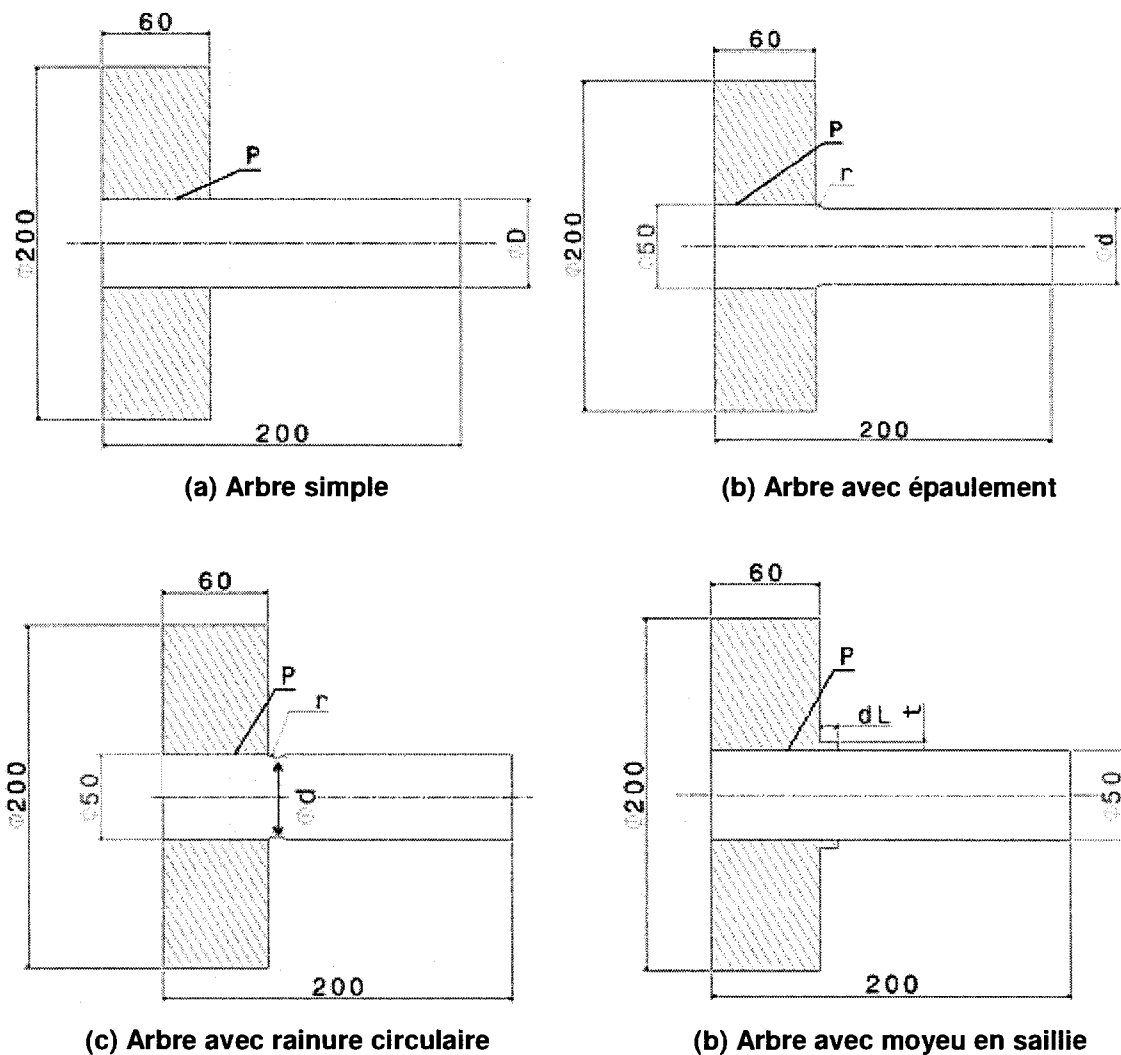


Figure 6-1 : Configurations

**Tableau 6-1 : Paramètres**

Symbole	Définition	Arbre simple	Arbre avec épaulement	Arbre avec rainure circulaire	Arbre avec moyeu en saillie
P	Pression de contact	X	X	X	X
D	Diamètre majeur de l'arbre	X	X	X	X
d	Diamètre mineur de l'arbre		X	X	
r	Rayon du congé de l'épaulement ou de la rainure		X	X	
t	Épaisseur de la partie en saillie du moyeu				X
dL	Longueur de la partie en saillie du moyeu				X

Le matériau utilisé est un acier avec un modèle plastique parfait (sans écrouissage) avec les propriétés ci-dessous. Le critère de fatigue de Von Mises avec la correction de Goodman sera utilisé. La contrainte alternée équivalente  $\sigma_a^*$  sera calculée, puisqu'elle est indépendante de la limite d'endurance  $S_e$ .

**Tableau 6-2 : Propriétés matériaux**

E (GPa)	$\nu$	$S_y$ (MPa)	$S_{ut}$ (MPa)	$S_e$ (MPa)
205	0.3	330	520	345

## 2. Modèle en flexion

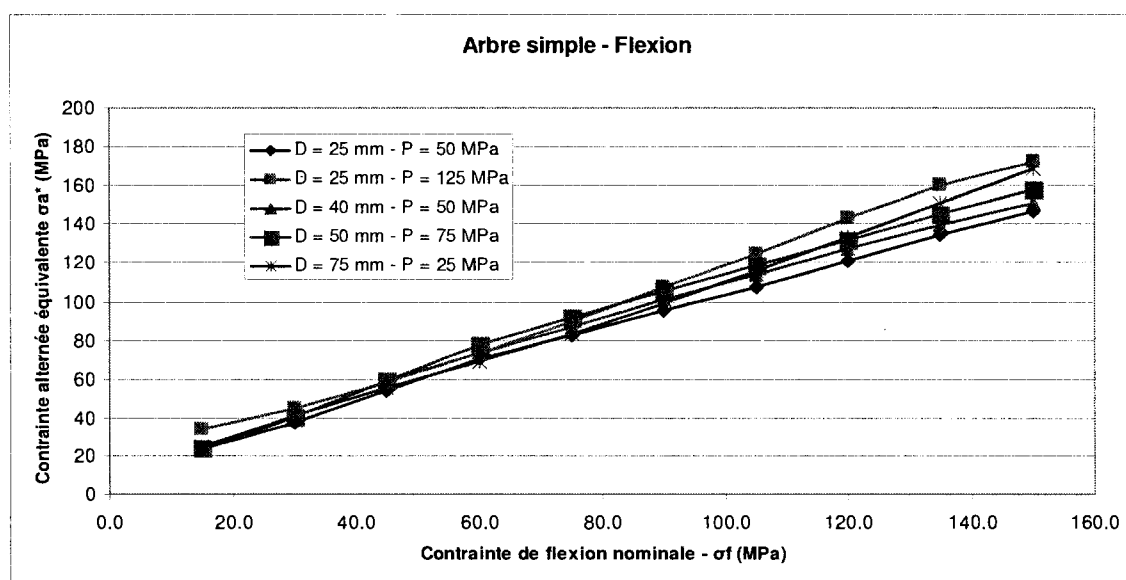
### 2.1 Arbre simple

Pour le cas d'un arbre simple (Figure 6-1 (a)) avec frettage soumis à une contrainte de flexion, les valeurs testées des paramètres sont les suivantes :

- Diamètre – D (mm) : 25, 40, 50, 75 et 100.
- Pression de contact – P (MPa) : 0, 25, 50, 75, 100, 125, 150 et 200. Le cas théorique d'un arbre simple sans moyeu correspond à  $P = 0$  MPa.
- Contrainte nominale de flexion -  $\sigma_f$  (MPa) : 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135 et 150.
- Total :  $5 \times 8 \times 10 = 400$  cas testés.

La contrainte alternée équivalente maximale est calculée pour chacun des cas testés. Elle est toujours située à l'extrémité de la zone frettée. Le cas échéant, la valeur lue sur le modèle exclue le pic de contrainte au coin du frettage pour des raisons d'erreur numérique. La totalité des résultats est listée à l'Annexe C. Il est possible d'y observer que plus la pression de contact augmente, plus  $\sigma_a^*$  augmente. Il est donc préférable d'avoir une faible pression de contact. De plus, pour un même niveau de contrainte nominale de flexion  $\sigma_f$ ,  $\sigma_a^*$  augmente de façon non uniforme en même temps que le diamètre D.

La contrainte alternée équivalente  $\sigma_a^*$  varie quasi-linéairement par rapport à la contrainte de flexion nominale  $\sigma_f$ . Un exemple de tracé pour quelques configurations est fourni à la Figure 6-2. Une régression linéaire a été calculée pour chaque configuration et les valeurs sont listées au Tableau 6-3. Bien qu'il ne semble pas exister de relation entre ( $C_1$  et  $C_2$ ) et (D et P), un dimensionnement préliminaire peut être effectué en considérant que  $\sigma_a^*$  est à peu près égal à  $\sigma_f$ . Lors de la conception, il faudra évidemment inclure le facteur  $k_{fret}$  de réduction de la vie en fatigue dans le frettage. De plus, il n'est pas requis d'avoir une grande précision pour le cas d'un arbre simple avec frettage, puisqu'il ne s'agit pas de la configuration optimale. En effet, certaines modifications mineures (ex : arbre avec épaulement, arbre avec rainure, etc) améliorent de façon substantielle la vie en fatigue.



**Figure 6-2 : Arbre simple – Flexion**

Tableau 6-3 : Arbre simple – Flexion – Résultats

$\sigma_a^* = C_1 \sigma_f + C_2$					
C1	D (mm)				
P (MPa)	25	40	50	75	100
0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
25	0.95	0.97	0.98	1.05	1.10
50	0.91	0.94	0.92	0.97	1.01
75	0.95	1.02	0.99	1.03	1.05
100	1.02	1.09	1.05	1.09	1.12
125	1.07	1.16	1.12	1.17	1.20
150	1.07	1.22	1.19	1.26	1.28
200	1.04	1.27	1.27	1.38	1.31
C2	D (mm)				
P (MPa)	25	40	50	75	100
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
25	8.33	6.90	5.30	7.57	9.92
50	12.51	14.11	15.45	17.74	20.60
75	13.91	14.16	15.72	18.00	24.29
100	13.18	13.15	15.00	19.01	24.54
125	12.47	11.69	10.75	19.14	22.75
150	13.60	9.43	9.23	14.21	19.56
200	17.02	9.23	9.03	11.09	16.93

## 2.2 Arbre avec épaulement

Le cas d'un arbre avec épaulement (voir Figure 6-1 (b)) a été testé à un niveau de contrainte nominale de flexion  $\sigma_f = 150$  MPa. Le diamètre mineur de l'arbre  $d$ , le rayon du congé  $r$  ainsi que la pression de contact  $P$  ont été testés pour 3 valeurs chacune, pour un total de 27 cas. Cette fois, comme la rupture peut survenir dans le frettage et/ou dans le congé de raccordement, la contrainte alternée équivalente a été sondée à ces 2 endroits. Dans le but de comparer rapidement les résultats, ceux-ci sont présentés au Tableau 6-4 sous la forme d'un facteur de concentration de contrainte en fatigue  $K_f$ . Il est souhaité que ce facteur  $K_f$  soit le plus faible possible, ce qui correspondra à un facteur de sécurité en fatigue plus élevé.

$$K_f = \frac{\sigma_{a,\max}^*}{\sigma_f} \quad (5.1)$$

Tableau 6-4 : Arbre avec épaulement – Flexion –  $K_f$ 

$K_f$ pour $\sigma_f = 150$ MPa							
Frettage				Congé			
P = 25 MPa				P = 25 MPa			
d (mm)	r (mm)			d (mm)	r (mm)		
	3	5	8		3	5	8
48	0.83	0.84	0.83	48	1.86	1.64	1.48
46	0.83	0.82	0.83	46	2.10	1.93	1.72
44	0.82	0.80	0.82	44	2.27	2.17	1.98
P = 50 MPa				P = 50 MPa			
d (mm)	r (mm)			d (mm)	r (mm)		
	3	5	8		3	5	8
48	0.72	0.70	0.74	48	1.86	1.64	1.48
46	0.60	0.61	0.64	46	2.18	1.93	1.72
44	0.55	0.57	0.60	44	2.23	2.22	2.01
P = 100 MPa				P = 100 MPa			
d (mm)	r (mm)			d (mm)	r (mm)		
	3	5	8		3	5	8
48	0.71	0.75	0.70	48	2.19	1.90	1.74
46	0.61	0.61	0.63	46	2.22	2.21	1.96
44	0.55	0.56	0.59	44	2.27	2.25	2.19

L'influence des paramètres n'est pas la même dans le frettage et dans le congé. Les observations sont notées au Tableau 6-5. En première observation, il est possible de noter que  $K_f < 1$  dans le frettage, ce qui montre une amélioration par rapport au cas de l'arbre simple avec frettage.

De façon générale, les observations sont opposées entre la zone du frettage et celle du congé. En effet, il existe un phénomène de concurrence entre les deux zones. C'est ainsi qu'il peut y avoir un phénomène de transition de la localisation de la rupture en fatigue, tel qu'observé dans les essais de Nishioka (voir Tableau 4-2). Pour les dimensions testées, ce phénomène est illustré au Tableau 6-6 en effectuant le calcul du facteur de sécurité en fatigue.

Tableau 6-5 : Arbre avec épaulement – Flexion – Influence des paramètres

	Fretage	Congé
<b>P</b>	Préférable d'augmenter P, mais l'effet est négligeable au-dessus d'un certain seuil	Préférable de diminuer P, mais l'effet est négligeable en-dessous d'un certain seuil
<b>d</b>	Préférable de diminuer d, mais l'effet ne se fait plus sentir à faible pression	Préférable d'augmenter d le plus possible
<b>r</b>	L'effet de r est négligeable dans le fretage	Préférable d'augmenter r le plus possible

Tableau 6-6 : Arbre avec épaulement – Flexion - FS<sub>fatigue</sub>

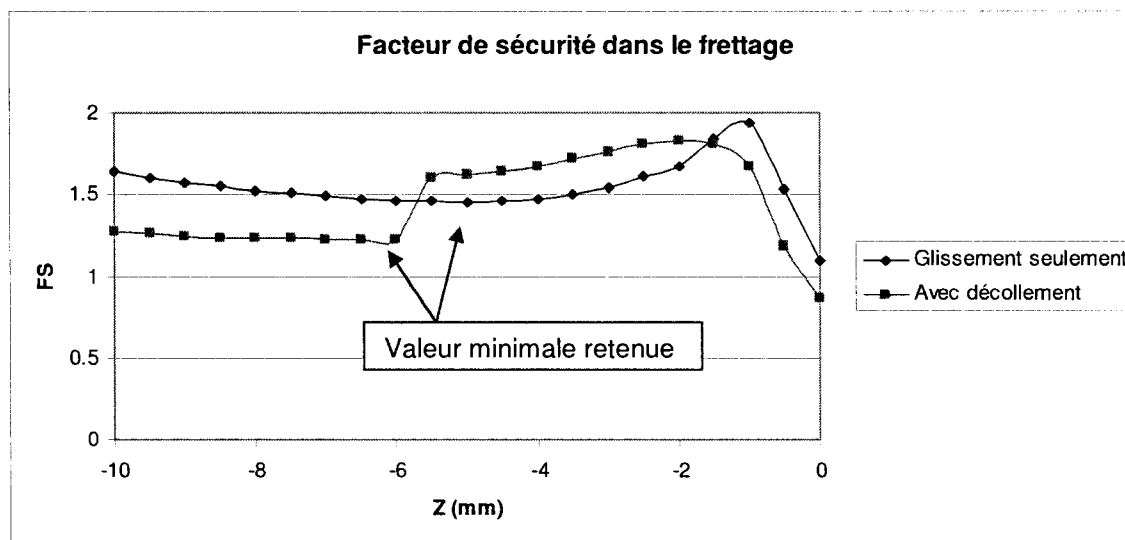
FS pour $\sigma_r = 150$ MPa												
Fretage (kfret = 0.39)				Congé				Minimum				
P = 25 MPa				P = 25 MPa				P = 25 MPa				
d (mm)	r (mm)			d (mm)	r (mm)			d (mm)	r (mm)			
	3	5	8		3	5	8		3	5	8	
48	1.08	1.07	1.08	48	1.24	1.40	1.55	48	1.08	1.07	1.08	
46	1.08	1.09	1.08	46	1.10	1.19	1.33	46	1.08	1.09	1.08	
44	1.09	1.12	1.10	44	1.01	1.06	1.16	44	1.01	1.06	1.10	
P = 50 MPa				P = 50 MPa				P = 50 MPa				
d (mm)	r (mm)			d (mm)	r (mm)			d (mm)	r (mm)			
	3	5	8		3	5	8		3	5	8	
48	1.25	1.28	1.21	48	1.24	1.40	1.55	48	1.24	1.28	1.21	
46	1.50	1.46	1.41	46	1.05	1.19	1.34	46	1.05	1.19	1.34	
44	1.62	1.58	1.51	44	1.03	1.03	1.15	44	1.03	1.03	1.15	
P = 100 MPa				P = 100 MPa				P = 100 MPa				
d (mm)	r (mm)			d (mm)	r (mm)			d (mm)	r (mm)			
	3	5	8		3	5	8		3	5	8	
48	1.27	1.20	1.29	48	1.05	1.21	1.32	48	1.05	1.20	1.29	
46	1.47	1.47	1.43	46	1.03	1.04	1.18	46	1.03	1.04	1.18	
44	1.62	1.59	1.52	44	1.01	1.02	1.05	44	1.01	1.02	1.05	

Au Tableau 6-6, le facteur de sécurité minimum entre la zone du fretage et le congé est surligné. Ceci démontre bien un phénomène de transition de la localisation de la rupture. La solution optimale est celle pour laquelle la valeur minimale du FS<sub>fatigue</sub> est la plus élevée. Dans les cas testés, il s'agit de la combinaison (P = 50 MPa, d = 46 mm et r = 8 mm). Il est également possible d'observer que ce n'est pas parce que le FS<sub>fatigue</sub> est égal pour le fretage et le congé qu'il s'agit de la meilleure solution. La quantité de données testées ne permet pas de définir une règle permettant de trouver la configuration optimale, sachant que celle-ci peut également varier en fonction du chargement appliqué.

La présente étude a été menée pour une valeur de  $D$  constante. Il a été observé que diminuer  $d$  a un effet bénéfique au niveau du frettage. Il est toutefois conseillé de choisir à la conception un  $d$  donné et d'augmenter  $D$  pour ainsi faire un gain plus important.

Une configuration d'arbre avec épaulement combiné à un chargement en flexion peut amener un décollement de l'extrémité du frettage entre l'arbre et le moyeu. Ce comportement influence le  $FS_{\text{fatigue}}$  en créant une discontinuité, tel qu'illustré à la Figure 6-3. Pour rappel, le  $FS_{\text{fatigue}}$  minimum est choisi en excluant le pic de contrainte à l'extrémité. Le décollement créant la discontinuité est pénalisant par rapport au cas avec glissement seulement. Il est donc avantageux de vérifier cet aspect lors de la conception et de corriger la situation si nécessaire en augmentant la pression de contact par exemple.

**Figure 6-3 :  $FS_{\text{fatigue}}$  – Glissement vs Décollement**



### 2.3 Arbre avec rainure circulaire

Le cas d'un arbre avec rainure circulaire (voir Figure 6-1 (c)) a été testé à un niveau de contrainte nominale de flexion  $\sigma_f = 150$  MPa. Le diamètre mineur de l'arbre  $d$ , le rayon du congé  $r$  ainsi que la pression de contact  $P$  ont été testés pour 3 valeurs chacune, pour un total de 27 cas. La rupture pouvant survenir dans le frettage et/ou dans le congé de raccordement, la contrainte alternée équivalente a été sondée à ces 2 endroits. La valeur de  $K_f$  (voir équation (6.1)) est notée au Tableau 6-7.



Tableau 6-7 : Arbre avec rainure circulaire – Flexion -  $K_f$ 

$K_f$ pour $\sigma_f = 150$ MPa													
Frettage						Rainure							
P = 25 MPa						P = 25 MPa							
d (mm)	r (mm)			r (mm)			d (mm)	r (mm)			r (mm)		
	3	5	8	3	5	8		3	5	8	3	5	8
48	0.83	0.82	0.83	2.05	1.80	1.59	48	2.05	1.80	1.59	2.05	1.80	1.59
46	0.83	0.82	0.82	2.27	2.13	1.87	46	2.27	2.13	1.87	2.27	2.13	1.87
44	0.79	0.79	0.80	2.29	2.23	2.15	44	2.29	2.23	2.15	2.29	2.23	2.15
P = 50 MPa						P = 50 MPa							
d (mm)	r (mm)			r (mm)			d (mm)	r (mm)			r (mm)		
	3	5	8	3	5	8		3	5	8	3	5	8
48	0.70	0.69	0.70	2.09	1.79	1.60	48	2.09	1.79	1.60	2.09	1.79	1.60
46	0.58	0.62	0.64	2.23	2.16	1.90	46	2.23	2.16	1.90	2.23	2.16	1.90
44	0.55	0.57	0.58	2.24	2.24	2.19	44	2.24	2.24	2.19	2.24	2.24	2.19
P = 100 MPa						P = 100 MPa							
0	r (mm)			r (mm)			0	r (mm)			r (mm)		
	3	5	8	3	5	8		3	5	8	3	5	8
48	0.65	0.68	0.73	2.20	2.12	2.10	48	2.20	2.12	2.10	2.20	2.12	2.10
46	0.60	0.63	0.64	2.27	2.20	2.10	46	2.27	2.20	2.10	2.27	2.20	2.10
44	0.55	0.58	0.60	2.27	2.27	2.15	44	2.27	2.27	2.15	2.27	2.27	2.15

Les observations, qui sont très semblables au cas de l'arbre avec épaulement, sont notées au Tableau 6-8.

Tableau 6-8 : Arbre avec rainure circulaire – Flexion – Influence des paramètres

	Frettage	Rainure
<b>P</b>	Préférable d'augmenter P, mais l'effet est négligeable au-dessus d'un certain seuil	Préférable de diminuer P, mais l'effet est négligeable en-dessous d'un certain seuil
<b>d</b>	Préférable de diminuer d, mais l'effet ne se fait plus sentir à faible pression	Préférable d'augmenter d le plus possible
<b>r</b>	Préférable de diminuer r, mais l'effet est mineur	Préférable d'augmenter r le plus possible

Dans le frettage, la valeur de  $K_f$  est légèrement supérieure, voire négligeable, pour le cas de l'arbre avec rainure circulaire que celui avec épaulement. Pour ce qui est du congé, la valeur de  $K_f$  est substantiellement plus élevée pour le cas avec rainure circulaire. De façon générale, il est donc plutôt recommandé d'avoir une configuration d'un arbre avec épaulement plutôt qu'avec une rainure circulaire. Les observations du Tableau 6-8 montrent encore une fois un phénomène de concurrence entre la zone du frettage et celle de la rainure. Le même raisonnement que précédemment peut alors s'appliquer.

## 2.4 Arbre avec moyeu en saillie

Le cas d'un arbre avec moyeu en saillie (voir Figure 6-1 (d)) a été testé à un niveau de contrainte nominale de flexion  $\sigma_f = 150$  MPa. L'épaisseur  $t$  et la longueur  $dL$  de la partie en saillie du moyeu ainsi que la pression de contact  $P$  ont été testés pour 3 valeurs chacune, pour un total de 27 cas. Pour cette configuration, la rupture de l'arbre surviendra toujours dans le frettage. La valeur de  $K_f$  est notée au Tableau 6-9.

Tableau 6-9 : Arbre avec moyeu en saillie – Flexion –  $K_f$

<b><math>K_f</math> pour <math>\sigma_f = 150</math> MPa</b>			
<b>Frettage</b>			
<b>P = 25 MPa</b>			
<b>dL (mm)</b>	<b>t</b>		
	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>8</b>
2	1.06	1.13	1.19
4	1.06	0.94	1.07
8	1.04	0.93	0.86
<b>P = 50 MPa</b>			
<b>dL (mm)</b>	<b>t</b>		
	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>8</b>
2	1.08	1.18	1.20
4	1.06	0.97	1.11
8	1.01	0.93	0.90
<b>P = 100 MPa</b>			
<b>dL (mm)</b>	<b>t</b>		
	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>8</b>
2	1.35	1.20	1.21
4	1.28	1.05	1.12
8	1.19	0.97	0.90

Les observations sur l'influence du facteur de concentration de contrainte en fatigue  $K_f$  sont notées au Tableau 6-10. De façon générale, bien que certaines valeurs de  $K_f$  soient inférieures à 1 et donc au cas de l'arbre simple avec frettage,  $K_f$  est plus élevé pour la configuration d'un arbre avec moyeu en saillie que pour un arbre avec épaulement ou avec rainure circulaire.

**Tableau 6-10 : Arbre avec moyeu en saillie – Flexion – Influence des paramètres**

	Frettage
<b>P</b>	Préférable de diminuer P dans tous les cas
<b>dL</b>	Il est préférable d'augmenter dL pour ajouter de la souplesse à l'assemblage
<b>t</b>	En fonction de dL et P, il n'est pas clair si il faut augmenter ou diminuer t car il existe une transition. Il semble qu'une souplesse trop faible ou trop élevée soit néfaste, il existe donc une valeur optimale de t en fonction de P et dL

### 2.5 Recommandations

L'analyse d'un arbre simple avec frettage a permis de démontrer que la contrainte alternée équivalente  $\sigma_a^*$  varie quasi-linéairement avec la contrainte nominale de flexion  $\sigma_f$ . En appliquant le facteur de correction de la vie en fatigue  $k_{fret}$ , il est recommandé d'effectuer le dimensionnement préliminaire comme s'il s'agissait d'un arbre seul. Il est ensuite conseillé de diminuer la concentration de contrainte en fatigue ( $K_f$ ) par une modification locale.

La configuration testée la plus avantageuse est celle de l'arbre avec épaulement. La meilleure façon de faire est d'augmenter le plus possible le diamètre D du frettage et d'ajuster les paramètres d, r et P. Il est ainsi possible de diminuer substantiellement la valeur de  $K_f$ . En contrepartie, il faut se rappeler que la valeur de  $K_f$  dans le congé peut augmenter pendant qu'elle diminue dans le frettage. Il est toutefois réaliste de s'attendre à une amélioration de l'ordre de 50% sur la contrainte alternée équivalente par rapport au cas de l'arbre simple.

S'il est impossible d'effectuer un épaulement pour des raisons de contraintes de conception, il est recommandé de choisir une configuration d'arbre avec rainure circulaire. Les tendances sont les mêmes qu'observées pour l'arbre avec épaulement. Cependant, il faut s'attendre à pouvoir réaliser un gain moindre, soit de l'ordre de 40% sur la contrainte alternée équivalente par rapport au cas de l'arbre simple.

Enfin, s'il est impossible d'apporter une modification à l'arbre pour une quelconque raison, il faut savoir qu'il est possible de modifier le moyeu. La configuration testée est celle d'un moyeu en saillie. Il faut s'attendre à pouvoir faire un gain de l'ordre de 15% sur la contrainte alternée équivalente par rapport au cas de l'arbre simple. Il faut toutefois faire attention puisque certaines combinaisons de paramètres sont désavantageuses par rapport au cas de l'arbre simple.

### 3. Modèle en torsion

#### 3.1 Arbre simple

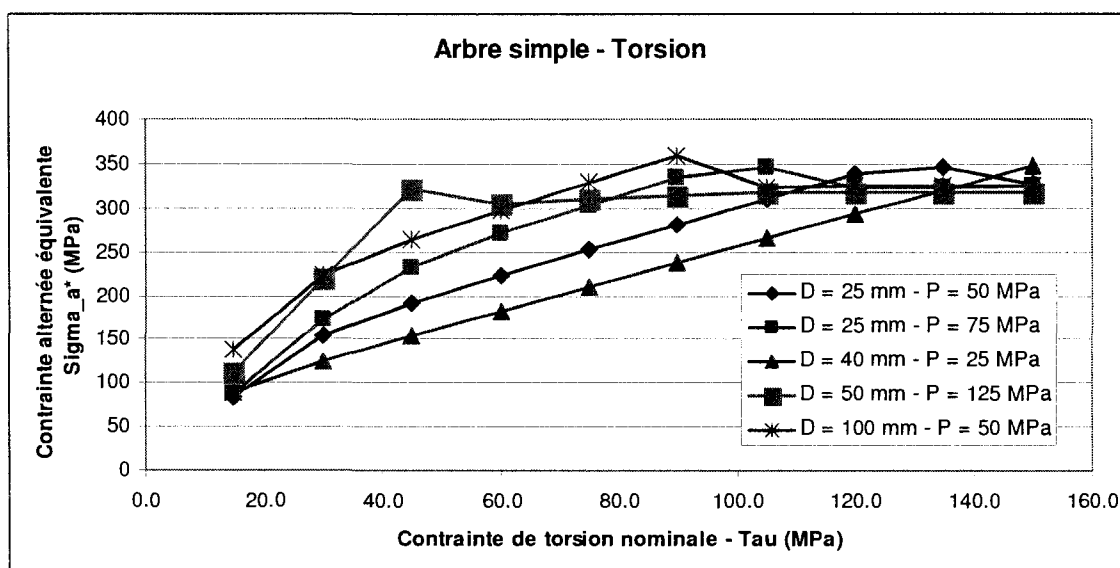
Pour le cas d'un arbre simple (Figure 6-1 (a)) avec frettage soumis à une contrainte de torsion, les valeurs testées des paramètres sont les suivantes :

- Diamètre – D (mm) : 25, 40, 50, 75 et 100.
- Pression de contact – P (MPa) : 0, 25, 50, 75, 100, 125, 150 et 200. Le cas théorique d'un arbre simple sans moyeu correspond à P = 0 MPa.
- Contrainte nominale de torsion -  $\tau$  (MPa) : 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135 et 150.
- Total : 5 x 8 x 10 = 400 cas testés.

La contrainte alternée équivalente maximale est calculée pour chacun des cas testés. Elle est toujours située à l'extrémité de la zone frettée. Le cas échéant, la valeur lue sur le modèle exclue le pic de contrainte au coin du frettage pour des raisons d'erreur numérique. La totalité des résultats est listée à l'Annexe C. L'effet de concentration de contrainte est très important, le facteur de concentration de contrainte en fatigue  $K_f$  prenant des valeurs allant de 2 à 3. Il est donc recommandé d'apporter des modifications géométriques à l'extrémité de la zone frettée pour en diminuer les effets.

La contrainte alternée équivalente  $\sigma_a^*$  varie quasi-linéairement par rapport à la contrainte nominale de torsion  $\tau$ , jusqu'à atteindre un maximum (voir Figure 6-4). Ce maximum est situé environ à la limite d'écoulement du matériau ( $S_y = 330$  MPa).  $\sigma_a^*$  se stabilise alors à cette valeur, puisque le matériau défini a un comportement plastique parfait.

Il est possible d'y observer que plus la pression de contact augmente plus  $\sigma_a^*$  augmente, jusqu'à atteindre un maximum à environ  $\sigma_a^* = S_y = 330$  MPa. Il est donc préférable d'avoir une faible pression de contact. De plus,  $\sigma_a^*$  augmente en même temps que le diamètre D, pour un même niveau de contrainte nominale de flexion  $\sigma_f$ . L'effet de concentration de contrainte est donc plus important plus le diamètre augmente.



**Figure 6-4 : Arbre simple - Torsion**

### 3.2 Arbre avec épaulement

Le cas d'un arbre avec épaulement (voir Figure 6-1 (b)) a été testé à un niveau de contrainte nominale de torsion  $\tau = 90$  MPa. Le diamètre mineur de l'arbre  $d$ , le rayon du congé  $r$  ainsi que la pression de contact  $P$  ont été testés pour 3 valeurs chacune, pour un total de 27 cas. Cette fois, comme la rupture peut survenir dans le frettage et/ou dans le congé de raccordement, la contrainte alternée équivalente a été sondée à ces 2 endroits. Dans le but de comparer rapidement les résultats, ceux-ci sont présentés au Tableau 6-11 sous la forme d'un facteur de concentration de contrainte en fatigue ( $K_f$ ). Il est souhaité que ce facteur  $K_f$  soit le plus faible possible, ce qui correspondra à un facteur de sécurité en fatigue plus élevé.

$$K_f = \frac{\sigma_{a,max}^*}{\sqrt{3}\tau} \quad (5.2)$$

Tableau 6-11 : Arbre avec épaulement – Torsion –  $K_f$ 

$K_f$ pour $\tau = 90$ MPa							
Frettage				Congé			
P = 25 MPa				P = 25 MPa			
d (mm)	r (mm)			d (mm)	r (mm)		
	3	5	8		3	5	8
48	0.91	0.92	0.97	48	1.75	1.56	1.54
46	0.83	0.85	0.87	46	1.98	1.82	1.75
44	0.77	0.80	0.82	44	2.22	2.18	1.96
P = 50 MPa				P = 50 MPa			
d (mm)	r (mm)			d (mm)	r (mm)		
	3	5	8		3	5	8
48	1.04	1.18	1.34	48	1.93	1.72	1.73
46	0.82	0.94	1.08	46	2.13	1.95	1.87
44	0.79	0.80	0.93	44	2.28	2.29	2.06
P = 100 MPa				P = 100 MPa			
d (mm)	r (mm)			d (mm)	r (mm)		
	3	5	8		3	5	8
48	1.64	1.86	2.04	48	2.04	1.99	1.93
46	1.44	1.60	1.74	46	2.35	2.15	2.06
44	1.03	1.26	1.58	44	2.38	2.09	2.21

L'influence des paramètres n'est pas la même dans le frettage et dans le congé. Les observations sont notées au Tableau 6-12. En première observation, il est possible de noter que  $K_f < 1$  dans le frettage, ce qui montre une amélioration par rapport au cas de l'arbre simple avec frettage.

Tableau 6-12 : Arbre avec épaulement – Torsion – Influence des paramètres

	Frettage	Congé
<b>P</b>	Préférable de diminuer P	Préférable de diminuer P
<b>d</b>	Préférable de diminuer d	Préférable d'augmenter d
<b>r</b>	Préférable de diminuer r	Préférable d'augmenter r

Comme pour le cas de la flexion, les observations sont opposées entre la zone du frettage et celle du congé pour ce qui est des paramètres  $d$  et  $r$ . En effet, il existe un phénomène de concurrence entre les deux zones. C'est ainsi qu'il peut y avoir un phénomène de transition de la localisation de la rupture en fatigue, tel qu'observé dans les essais de Juuma (voir Tableau

5-2). Pour les dimensions testées, ce phénomène est illustré au Tableau 6-13 en effectuant le calcul du facteur de sécurité en fatigue.

Pour ce qui est de la pression de contact, les observations montrent qu'il est avantageux tant pour le frettage que pour le congé de la diminuer le plus possible. La limite inférieure sera alors définie par le calcul du couple d'arrachement (Équation (1.12)).

Tableau 6-13 : Arbre avec épaulement – Torsion - FS<sub>fatigue</sub>

FS pour $\tau = 90$ MPa											
Frettage (kfret = 0.69)				Congé				Minimum			
P = 25 MPa				P = 25 MPa				P = 25 MPa			
d (mm)	r (mm)			d (mm)	r (mm)			d (mm)	r (mm)		
	3	5	8		3	5	8		3	5	8
48	1.75	1.72	1.64	48	1.31	1.47	1.49	48	1.31	1.47	1.49
46	1.91	1.87	1.83	46	1.16	1.26	1.31	46	1.16	1.26	1.31
44	2.05	1.98	1.93	44	1.04	1.06	1.17	44	1.04	1.06	1.17
P = 50 MPa				P = 50 MPa				P = 50 MPa			
d (mm)	r (mm)			d (mm)	r (mm)			d (mm)	r (mm)		
	3	5	8		3	5	8		3	5	8
48	1.53	1.34	1.19	48	1.19	1.34	1.33	48	1.19	1.34	1.19
46	1.94	1.68	1.47	46	1.08	1.18	1.23	46	1.08	1.18	1.23
44	2.01	1.99	1.70	44	1.01	1.00	1.12	44	1.01	1.00	1.12
P = 100 MPa				P = 100 MPa				P = 100 MPa			
d (mm)	r (mm)			d (mm)	r (mm)			d (mm)	r (mm)		
	3	5	8		3	5	8		3	5	8
48	0.97	0.85	0.78	48	1.13	1.16	1.19	48	0.97	0.85	0.78
46	1.10	0.99	0.91	46	0.98	1.07	1.11	46	0.98	0.99	0.91
44	1.54	1.26	1.01	44	0.96	1.10	1.04	44	0.96	1.10	1.01

Au Tableau 6-13, le facteur de sécurité minimum entre la zone du frettage et le congé est surligné. Ceci démontre bien un phénomène de transition de la localisation de la rupture.

### 3.3 Arbre avec rainure circulaire

Le cas d'un arbre avec rainure circulaire (voir Figure 6-1 (c)) a été testé à un niveau de contrainte nominale de torsion  $\tau = 90$  MPa. Le diamètre mineur de l'arbre  $d$ , le rayon du congé  $r$  ainsi que la pression de contact  $P$  ont été testés pour 3 valeurs chacune, pour un total de 27 cas. La rupture pouvant survenir dans le frettage et/ou dans le congé de raccordement, la contrainte alternée équivalente a été sondée à ces 2 endroits. La valeur de  $K_f$  est notée au Tableau 6-14.

Tableau 6-14 : Arbre avec rainure circulaire – Torsion -  $K_f$ 

$K_f$ pour $\tau = 90$ MPa													
Frettage						Congé							
P = 25 MPa						P = 25 MPa							
d (mm)	r (mm)			r (mm)			d (mm)	r (mm)			r (mm)		
	3	5	8	3	5	8		3	5	8	3	5	8
48	0.92	0.93	0.94	1.84	1.67	1.55	48	2.00	1.80	1.66	2.29	2.04	2.05
46	0.84	0.85	0.87	2.21	1.96	1.80	46	2.34	2.07	1.88	2.46	2.25	2.03
44	0.79	0.80	0.82	2.32	2.27	2.07	44	2.34	2.30	2.14	2.41	2.41	2.26
P = 50 MPa						P = 50 MPa							
d (mm)	r (mm)			r (mm)			d (mm)	r (mm)			r (mm)		
	3	5	8	3	5	8		3	5	8	3	5	8
48	1.06	1.18	1.30	2.00	1.80	1.66	48	2.29	2.04	2.05	2.29	2.04	2.05
46	0.91	0.95	1.07	2.34	2.07	1.88	46	2.34	2.07	1.88	2.46	2.25	2.03
44	0.85	0.87	0.90	2.34	2.30	2.14	44	2.34	2.30	2.14	2.41	2.41	2.26
P = 100 MPa						P = 100 MPa							
D	r (mm)			r (mm)			D	r (mm)			r (mm)		
	3	5	8	3	5	8		3	5	8	3	5	8
48	1.74	1.87	2.01	2.29	2.04	2.05	48	2.29	2.04	2.05	2.29	2.04	2.05
46	1.45	1.61	1.74	2.46	2.25	2.03	46	2.46	2.25	2.03	2.46	2.25	2.03
44	1.04	1.43	1.58	2.41	2.41	2.26	44	2.41	2.41	2.26	2.41	2.41	2.26

Les observations, qui sont qualitativement les mêmes que le cas de l'arbre avec épaulement, sont notées au Tableau 6-15.

Tableau 6-15 : Arbre avec rainure circulaire – Torsion – Influence des paramètres

	Frettage	Congé
P	Préférable de diminuer P	Préférable de diminuer P
d	Préférable de diminuer d	Préférable d'augmenter d
r	Préférable de diminuer r	Préférable d'augmenter r

Comme pour le cas de l'arbre avec épaulement, il existe un phénomène de concurrence entre les paramètres  $d$  et  $r$  pour les zones du frettage et du congé. Comme précédemment, il est préférable de diminuer la pression de contact dans les deux cas.

À titre comparatif, la valeur de  $K_f$  est légèrement supérieure, voire négligeable, pour le cas de l'arbre avec rainure circulaire que celui avec épaulement. Pour ce qui est du congé, la valeur de  $K_f$  est substantiellement plus élevée pour le cas avec rainure circulaire. De façon générale, il est donc plutôt recommandé d'avoir une configuration d'un arbre avec épaulement plutôt qu'avec une rainure circulaire, comme pour le cas de la flexion.



### 3.4 Arbre avec moyeu en saillie

Le cas d'un arbre avec rainure circulaire (voir Figure 6-1 (d)) a été testé à un niveau de contrainte nominale de torsion  $\tau = 90$  MPa. L'épaisseur (t) et la longueur (dL) de la partie en saillie du moyeu ainsi que la pression de contact (P) ont été testés pour 3 valeurs chacune, pour un total de 27 cas. Pour cette configuration, la rupture de l'arbre surviendra toujours dans le frettage. La valeur de  $K_f$  est notée au Tableau 6-16.

Tableau 6-16 : Arbre avec moyeu en saillie – Torsion –  $K_f$

<b><math>K_f</math> pour <math>\tau = 90</math> MPa</b>			
<b>Frettage</b>			
<b>P = 25 MPa</b>			
<b>dL</b>	<b>t</b>		
	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>8</b>
2	1.24	1.42	1.62
4	1.19	1.25	1.46
8	1.16	1.29	1.29
<b>P = 50 MPa</b>			
<b>dL</b>	<b>t</b>		
	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>8</b>
2	1.43	1.75	2.10
4	1.35	1.43	1.79
8	1.30	1.49	1.49
<b>P = 100 MPa</b>			
<b>dL</b>	<b>t</b>		
	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>8</b>
2	1.78	2.48	2.37
4	1.63	1.70	2.48
8	1.51	1.95	1.95

Les observations sur l'influence du facteur de concentration de contrainte en fatigue  $K_f$  sont notées au Tableau 6-17. De façon générale, les valeurs de  $K_f$  sont toutes supérieures à 1, mais c'est encore plus avantageux que pour le cas d'un arbre simple avec frettage. Cependant,  $K_f$  est plus élevé pour la configuration d'un arbre avec moyeu en saillie que pour un arbre avec épaulement ou avec rainure circulaire.

**Tableau 6-17 : Arbre avec moyeu en saillie – Torsion – Influence des paramètres**

	Frettage
<b>P</b>	Préférable de diminuer P
<b>dL</b>	Il est préférable d'augmenter dL pour ajouter de la souplesse à l'assemblage
<b>t</b>	En fonction de dL et P, il n'est pas clair si il faut augmenter ou diminuer t car il existe une transition. Il semble qu'une souplesse trop faible ou trop élevée soit néfaste, il existe donc une valeur optimale de t en fonction de P et dL

### 3.5 Recommandations

L'analyse d'un arbre simple avec frettage a permis de démontrer que la contrainte alternée équivalente  $\sigma_a^*$  varie quasi-linéairement en fonction de la contrainte nominale de torsion  $\tau$ , jusqu'à une certaine limite. En appliquant le facteur de correction de la vie en fatigue  $k_{fret}$ , il est recommandé d'effectuer le dimensionnement préliminaire en choisissant d'abord la pression de contact la plus basse possible qui ne causera pas d'arrachement. Il n'y a pas de règle de base qui a été trouvée pour le dimensionnement d'un arbre simple avec frettage en torsion, la valeur de  $K_f$  variant de 1.3 à plus de 4. Cependant, le cas le plus avantageux est à faible pression de contact, ce qui revient à favoriser un assemblage souple pour une meilleure distribution des contraintes.

La configuration testée la plus avantageuse est celle de l'arbre avec épaulement. La meilleure façon de faire est d'augmenter le plus possible le diamètre D du frettage et d'ajuster les paramètres d, r et P. Il est ainsi possible de diminuer substantiellement la valeur de  $K_f$ . En contrepartie, il faut se rappeler que la valeur de  $K_f$  dans le congé peut augmenter pendant qu'elle diminue dans le frettage. Il est toutefois réaliste de s'attendre à réussir à obtenir une valeur de  $K_f$  de l'ordre de 0.8 dans le frettage sur la contrainte alternée équivalente par rapport au cas analytique, soit un gain de 20%. Dans le congé, il faut s'attendre à une valeur de  $K_f$  de l'ordre de 1.5 à 1.75.

S'il est impossible d'effectuer un épaulement pour des raisons de contraintes de conception, il est recommandé de choisir une configuration d'arbre avec rainure circulaire. Les tendances sont les mêmes qu'observées pour l'arbre avec épaulement. Il faut également s'attendre à pouvoir réaliser un gain avec une valeur de  $K_f$  dans le frettage de l'ordre de 0.8 sur la contrainte alternée équivalente par rapport au cas de l'arbre simple, soit un gain d'également 20%. Dans la rainure, il faut toutefois s'attendre à une valeur de  $K_f$  de l'ordre de 1.6 à 1.8.

Enfin, s'il est impossible d'apporter une modification à l'arbre pour une quelconque raison, il faut savoir qu'il est possible de modifier le moyeu en saillie. Il est possible de s'attendre à une valeur de  $K_f$  de l'ordre de 1.2 au mieux. Bien que cette valeur soit supérieure à 1, c'est plus favorable que pour le cas d'un arbre simple avec frettage en torsion.

#### 4. Conclusion

Une étude de sensibilité a été menée sur différentes configurations d'assemblages frettés. Il existe une multitude de configurations permettant d'améliorer la vie en fatigue d'un arbre fretté dans un moyeu. Les configurations testées ici sont les suivantes : un arbre simple fretté dans un moyeu, un arbre avec épaulement, un arbre avec rainure circulaire et un arbre avec moyeu en saillie. Différentes dimensions et pressions de contact ont été testées.

La présente étude n'a pas la prétention de permettre de trouver du premier essai la meilleure configuration. Elle avait plutôt comme objectif de guider l'ingénieur vers une conception améliorée en lui proposant des pistes de solution. Ainsi, des recommandations pour la conception ont été formulées de manière à faciliter l'optimisation des assemblages par interférence.

Il a été démontré qu'il est possible de faire des gains allant jusqu'à plus de 50% en flexion et 20% en torsion sur le niveau de contrainte admissible en adoptant une configuration avantageuse, comme celle de l'arbre avec épaulement par exemple.

Les observations ont confirmé un phénomène de concurrence entre la zone du frettage et le congé de raccordement pour certaines configurations. Ces observations confirment les essais expérimentaux de Nishioka (Nishioka & Komatsu, 1967) et de Juuma (Juuma, 1999), où une transition s'effectuait dans la localisation de la rupture en fatigue.

De façon générale, les observations montrent qu'il est préférable d'augmenter la souplesse de l'assemblage pour augmenter sa vie en fatigue. Rien ne sert de trop serrer ou de créer un accident géométrique qui fait trop augmenter la pression de contact locale. Il vaut mieux laisser la contrainte circuler progressivement, et non de façon abrupte, entre l'arbre et le moyeu.

## CHAPITRE 7 : EXEMPLE D'APPLICATION

### 1. Énoncé du problème

Pour mettre en pratique les connaissances et les méthodes de calcul des chapitres précédents, un exemple d'application est effectué. Il s'agit du cas d'un arbre de transmission actionné par un moteur électrique sur lequel est fixée une poulie engendrant la flexion et transmettant un effort de torsion. Le montage est illustré à la Figure 7-1.

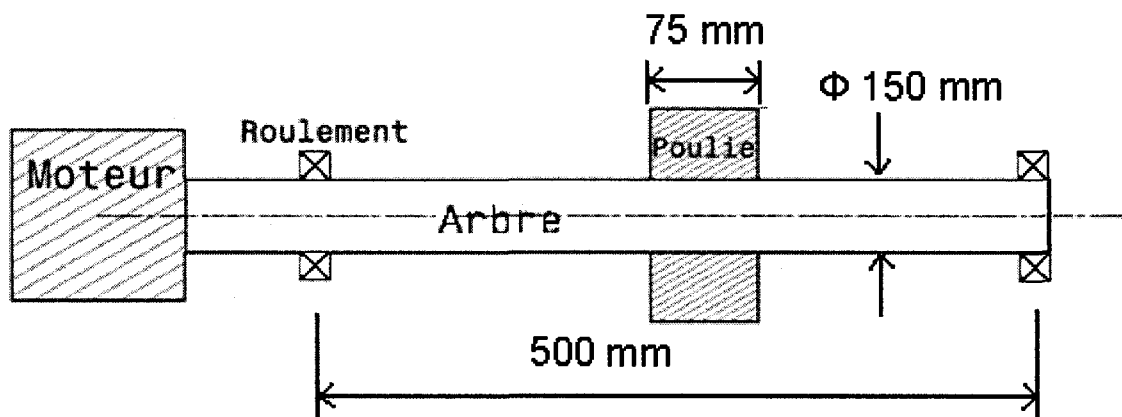


Figure 7-1 : Montage

En service, le moteur tourne à une vitesse de 7500 rpm. La tension est de 20 850 N dans le brin tendu de la courroie et de 3 120 N dans le brin lâche. Le montage doit également pouvoir supporter un couple de freinage de  $4.35 \times 10^6$  Nmm.

La poulie est pleine, de largeur 75 mm et de diamètre extérieur de 150 mm. Il est possible d'ajuster le diamètre intérieur par une simple opération d'usinage. La poulie sera fixée à l'arbre par ajustement serré et réalisé par dilatation thermique. Le coefficient de friction entre l'arbre et la poulie est de  $\mu = 0.5$ .

Les deux roulements sont des roulements à billes agissant comme un appui simple. Ils sont séparés par une distance de 500 mm. Les dimensions des roulements à billes dépendront du diamètre extérieur de l'arbre.

Le diamètre de l'arbre est à choisir afin de respecter les critères de résistance mécanique et de faisabilité. Ainsi, les moyens disponibles permettent seulement de réaliser un usinage simple, à savoir le perçage du trou de la poulie au diamètre désiré ainsi qu'une opération simple de tournage sur l'arbre. La tolérance sur le diamètre est de  $\pm 2 \mu\text{m}$ .

Les propriétés du matériau utilisé pour l'arbre et la poulie sont listées au Tableau 7-1. Puisque le chargement est en flexion rotative et d'après les observations du Chapitre 4, on suppose que le facteur de réduction de la vie en fretting fatigue est d'environ  $k_{\text{fretting}} = 0.4$ .

**Tableau 7-1 : Propriétés matériaux**

E (MPa)	$\nu$	$S_y$ (MPa)	$S_{ut}$ (MPa)	$S_e$ (MPa)	$k_{\text{fretting}}$	$\rho$ (kg/mm <sup>3</sup> )
205 000	0.3	480	700	330	0.40	7.85E-06

## 2. Calcul préliminaire

### 2.1 Contrainte alternée maximale admissible

Selon l'étude du Chapitre 6, en flexion rotative la contrainte alternée équivalente  $\sigma_a^*$  est environ égale à la contrainte nominale de flexion  $\sigma_f$ .

$$\sigma_a^* = \sigma_f \quad (6.1)$$

Le niveau de la contrainte maximale admissible dans le fretting (limite d'endurance) dépend du facteur de correction  $k_{\text{fretting}}$  :

$$S_e^* = k_{\text{fretting}} \times S_e = 0.40 \times 330 \text{MPa} = 132 \text{MPa} \quad (6.2)$$

Il a été déterminé au Chapitre 6 qu'il est possible de réaliser un gain de 50% sur le niveau de contrainte par rapport à un arbre simple avec fretting en choisissant la configuration d'un arbre avec épaulement. Ainsi :

$$\sigma_{a,\text{max}}^* = 1.5 \times S_e^* = 198 \text{MPa} \quad (6.3)$$

### 2.2 Flexion

L'arbre, d'une longueur de 500 mm, est sur 2 appuis simples et subit une force de flexion égale à la somme des efforts de tension dans les deux brins de la courroie. La poulie est fixée au centre de l'arbre. Le moment de flexion est calculé sur l'arbre au coin de la poulie. Ainsi :

$$M_f = \frac{(20850N + 3120N)}{2} * \frac{500mm - 75mm}{2} = 2.55e6Nmm \quad (6.4)$$

Pour sa part la contrainte de flexion est calculée ainsi :

$$\sigma_f = \frac{32M_f}{\pi D^3} \quad (6.5)$$

### 2.2.1 Diamètre de l'arbre

À partir des équations (6.1) à (6.5), il est possible de déterminer le diamètre D du frettage qui satisfait les conditions de résistance mécanique :

$$\frac{32 \times 2.55e6Nmm}{\pi D^3} = 198MPa \Rightarrow D = 50.79mm \quad (6.6)$$

En fonction des dimensions disponibles, le diamètre choisi sera :

$$D = 2po = 50.8mm \quad (6.7)$$

## 2.3 Torsion

La différence de tension entre les deux brins crée un couple de torsion statique entre la poulie et le moteur

$$T = \frac{(20850N - 3120N)}{2} \times \frac{150mm}{2} = 6.65e5Nmm \quad (6.8)$$

Ce couple de torsion crée une contrainte de cisaillement moyenne au niveau de l'interface arbre – poulie :

$$\tau = \frac{Tr}{J} = \frac{16T}{\pi D^3} = \frac{16 \times 6.65e5Nmm}{\pi (50.8mm)^3} = 25.8MPa \quad (6.9)$$

### 2.3.1 Couple transmissible

La pression de contact nécessaire pour supporter le couple de torsion est calculée d'après l'équation (1.12) :

$$T = 2\pi R^2 LP\mu = 2\pi \times \left(\frac{50.8}{2}\right)^2 \times 75mm \times P \times 0.5 \Rightarrow P_{\min} = 7.43MPa \quad (6.10)$$

### 2.3.2 Couple de freinage

Pour être en mesure de transmettre le couple de freinage, la pression minimale de contact est également calculée d'après l'équation (1.12) :

$$\left. \begin{aligned} T &= 2\pi R^2 LP\mu \\ 4.35e6 Nmm &= 2\pi \times \left(\frac{50.8}{2}\right)^2 \times 75mm \times P \times 0.5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_{\min} = 28.6MPa \quad (6.11)$$

#### 2.4 Tolérance d'usinage et pression de contact

La tolérance d'usinage de  $\pm 2 \mu\text{m}$  sur le diamètre influence le choix de la pression de contact. En effet, l'interférence radiale  $\delta_r$ , est directement proportionnelle à la pression de contact (voir équation (1.4)). L'influence de la tolérance d'usinage se calcule à partir de l'équation (1.4) :

$$\Delta P = \frac{205000 \times \left(\frac{2 \times 10^{-3}}{2}\right) \left( \left(\frac{150}{2}\right)^2 - \left(\frac{50.8}{2}\right)^2 \right) \left( \left(\frac{50.8}{2}\right)^2 - 0^2 \right)}{2 \times \left(\frac{50.8}{2}\right)^3 \left( \left(\frac{150}{2}\right)^2 - 0^2 \right)} = 3.6MPa \quad (6.12)$$

La pression de contact minimale nominale est fonction de la pression minimale (équation (6.11)) et de l'écart de pression dû à l'usinage (équation (6.12)) :

$$P_{\min} = P_{\min}^* - \Delta P = 28.6MPa - 3.6MPa = 25MPa \quad (6.13)$$

#### 2.5 Itération 1 : choix de la configuration

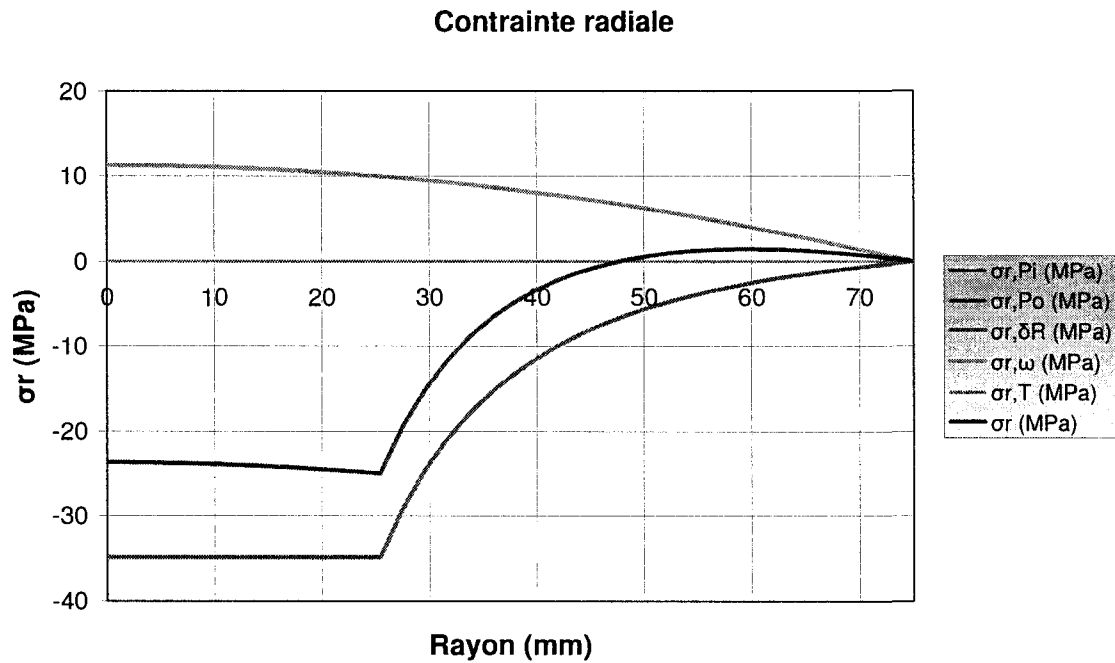
Au Chapitre 6, la meilleure configuration testée est celle d'un arbre avec épaulement. Pour cette configuration, il a été démontré qu'une pression de contact faible augmente la résistance en fatigue dans le frettage, mais diminue celle située dans le congé. Une première itération sera effectuée avec  $P = 25 \text{ MPa}$ , puisqu'une pression plus basse correspondrait à une valeur non testée dans l'étude de sensibilité. Les dimensions, notées selon la Figure 6-1 (b), sont :

- $D = 50.8 \text{ mm}$
- $d = 48 \text{ mm}$
- $r = 6 \text{ mm}$

#### 2.6 Pression de contact

Le calcul de la pression de contact doit inclure l'effet centrifuge dû à la vitesse de rotation de 7500 rpm ( $\omega = 785.4 \text{ rad/s}$ ). L'effet est calculé par l'outil logiciel développé au Chapitre 2 et correspond à une perte au niveau de pression de contact de 9.95 MPa. Ainsi, pour une pression désirée de 25 MPa, l'interférence radiale nécessaire est de  $\delta_r = 9.775e-3 \text{ mm}$ , qui à elle seule équivaut à une pression de 34.95 MPa. La contribution de la vitesse de rotation est illustrée à la Figure 7-2 et fait décroître la pression de contact de 9.95 MPa au niveau du contact.



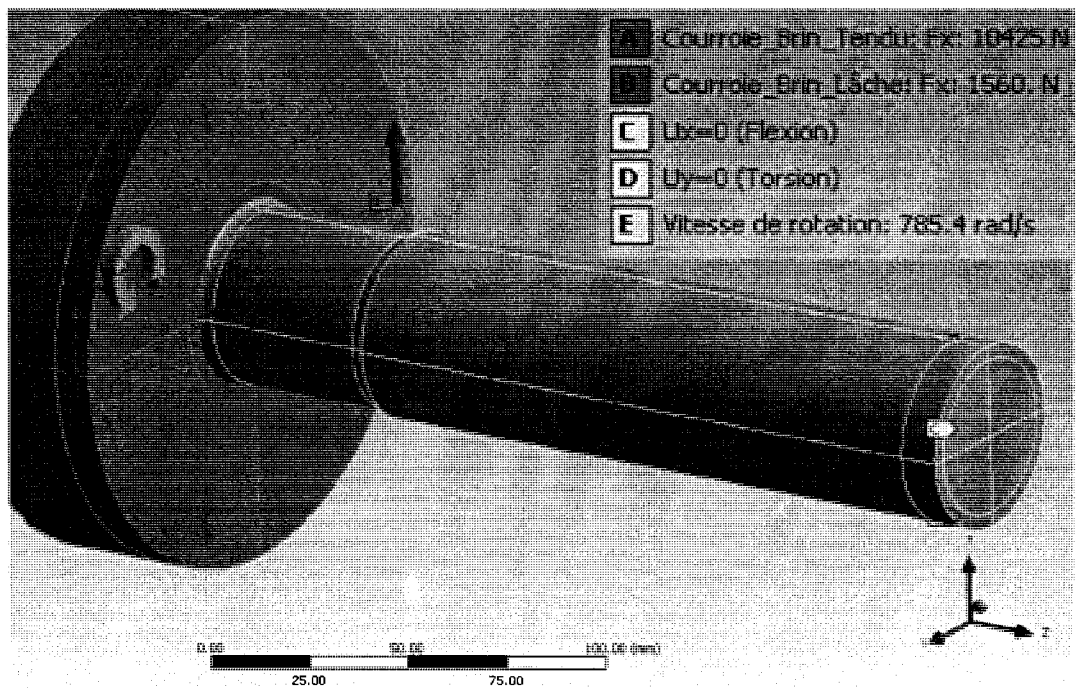


**Figure 7-2 : Contrainte radiale – Contribution de la vitesse de rotation**

### 3. Calcul par éléments finis : Validation de la conception

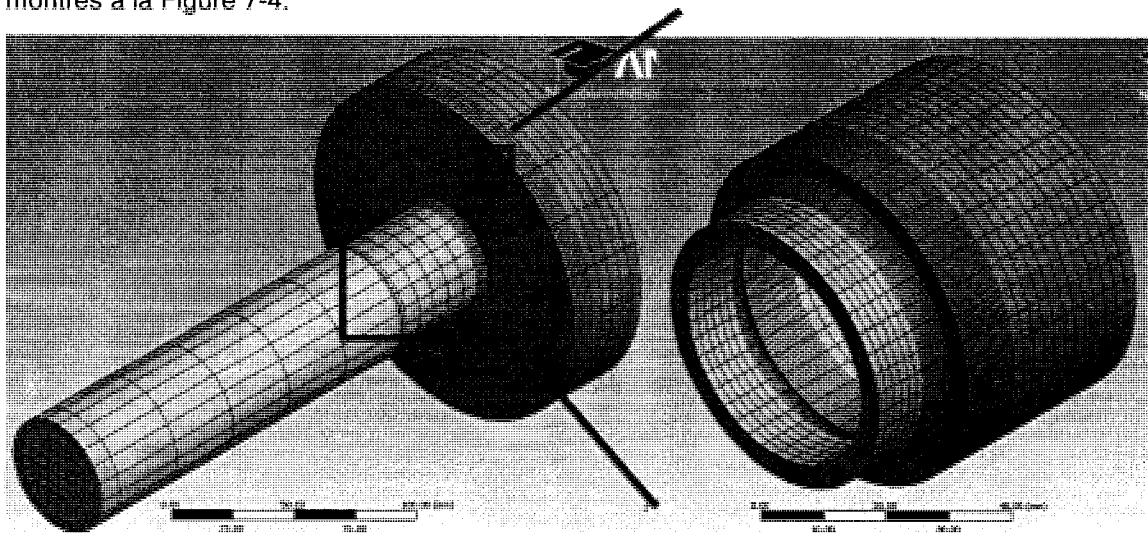
#### 3.1 Modèle

Le modèle est présenté à la Figure 7-3 et prend avantage du plan de symétrie au milieu de la poulie. Les forces de la courroie sont appliquées à la moitié de leur valeur due à la symétrie. Le roulement est modélisé en bloquant le déplacement  $u_x$  (reprise de l'effort de flexion) au centre de l'arbre et  $u_y$  sur 2 nœuds en  $y = 0$  à l'extrémité (reprise de l'effort de torsion). Une vitesse de rotation de 785.4 rad/s est également appliquée.



**Figure 7-3 : Modèle – Conditions aux limites et chargement**

Une étude de convergence a été menée en ayant recours à la sous-modélisation. La vérification de la convergence des déplacements aux frontières de sous-modélisation a été vérifiée d'après la procédure présentée au Chapitre 3. Les maillages du modèle global et du sous-modèle sont montrés à la Figure 7-4.



(a) 3 484 éléments – 15 871 noeuds

(b) 17 280 éléments – 79 360 noeuds

**Figure 7-4 : Maillage**

### 3.2 Résumé des itérations

Le facteur de sécurité a été calculé en utilisant le critère de Von Mises et la correction de Goodman sur la contrainte moyenne. Un facteur  $k_{\text{fret}} = 0.4$  a été appliqué pour le calcul dans la zone du frettage, en l'appliquant directement dans l'outil fatigue de Workbench ( $K_f$ ) pour cette zone. Les résultats des différentes itérations sont listés au Tableau 7-2.

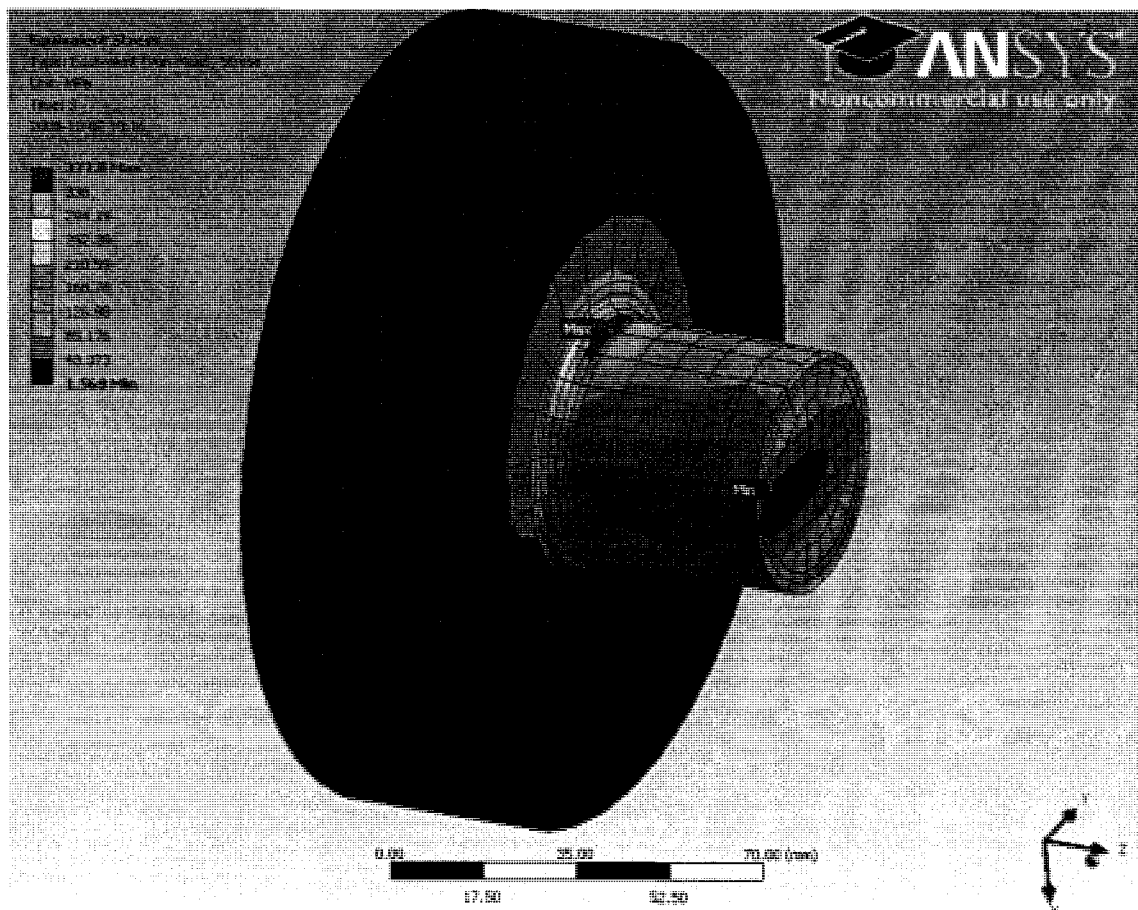
Pour l'itération # 1, le facteur de sécurité est suffisant dans le congé de l'épaule, mais trop faible dans le frettage. D'après les observations du Tableau 6-4, une diminution du diamètre  $d$  augmentera le facteur de sécurité dans le frettage. Cependant, pour compenser l'effet inverse dans le congé, le rayon  $r$  a été augmenté. Pour l'itération # 2, le facteur de sécurité est supérieur à 1 dans le congé, mais légèrement insuffisant dans le frettage. Une légère augmentation de la pression de contact devrait améliorer les choses. Ainsi pour l'itération # 3, le facteur de sécurité est suffisamment élevé dans les deux zones. Cette configuration sera donc celle retenue pour la conception de l'arbre avec poulie.

**Tableau 7-2 : Résumé des itérations**

#	D (mm)	d (mm)	r (mm)	P (MPa)	FS_congé	FS_frettage
1	50.8	48	6	25	1.02	0.84
2	50.8	46	10	25	1.11	0.97
3	50.8	46	10	30	1.08	1.01

Une vérification complète de la conception devrait également tenir compte de l'effet de la variation de la pression de contact due à la tolérance d'usinage, en testant le modèle avec les écarts de pression de contact. De plus, il devrait être vérifié que la pression de contact désirée correspond à un niveau acceptable de variation de la température pour effectuer l'assemblage par dilatation thermique.

La vérification statique doit également être effectuée. La contrainte maximale de Von Mises est tracée à la Figure 7-5. La valeur maximale est atteinte sur l'arbre à l'extrémité du frettage et vaut 377.8 MPa, ce qui est inférieur à la limite élastique du matériau, soit  $S_y = 480$  MPa. La configuration adoptée satisfait donc également le critère de résistance statique, avec un facteur de sécurité supérieur au facteur de sécurité en fatigue.



**Figure 7-5 : Contrainte équivalente maximale**

#### 4. Conclusion

Un exemple de calcul portant sur la conception d'un arbre de transmission sur lequel une poulie est fixée par frettage a été réalisé. À partir de quelques calculs analytiques simples, soit la pression de contact ainsi que le calcul de la contrainte nominale, une première configuration a été proposée, soit celle d'un arbre avec épaulement. Les règles de conception présentées au Chapitre 6 ont permis d'appliquer un facteur correctif au calcul des contraintes nominales pour tenir compte de l'interférence. La configuration initiale a fait l'objet d'une modélisation par éléments finis pour le calcul précis du facteur de sécurité en fatigue. Toujours d'après les observations du Chapitre 6, des modifications mineures sur les dimensions de l'épaulement de l'arbre ont été apportées et une configuration répondant aux critères de résistance a rapidement été trouvée. Cet exemple d'application vient donc démontrer l'utilité des règles définies des précédents chapitres.

### **Conclusion et perspectives**

Les travaux présentés dans ce mémoire visaient le développement d'outils et d'une méthodologie, basée sur la modélisation par éléments finis, pour le calcul en fatigue des assemblages par interférence afin d'obtenir une conception améliorée.

Un des principaux paramètres influençant le comportement des assemblages par interférence est la pression de contact. Celle-ci est le résultat d'une interférence entre l'arbre et le moyeu. Pour des cas complexes, cette pression dépend de la combinaison de rigidité des pièces, de la vitesse de révolution, du gradient de température et de l'application d'une pression interne ou externe. Le développement d'un outil-logiciel a permis de calculer efficacement la pression de contact nominale en tenant compte de tous ces facteurs.

La modélisation par éléments finis permet de tenir compte de l'effet de bout et des variations dues au chargement. Pour obtenir des résultats précis au niveau de l'interface de contact, il a été établi qu'il est nécessaire de minimiser la pénétration, qui elle est un concept mathématique influençant la précision. De par sa nature, un assemblage par interférence implique de très petites valeurs de déplacement. Cependant, les options de simulation par défaut d'un logiciel de calcul par éléments finis génèrent une tolérance de pénétration du même ordre de grandeur, voire supérieure, à la valeur de l'interférence. Il est donc nécessaire de contrôler adéquatement la solution. Par l'exploration des différents algorithmes de contact, une méthodologie permettant d'obtenir des résultats précis a été développée, en tenant également compte du temps de calcul. Une étude de convergence sur la taille des éléments a également été menée. Dans une optique de rapidité de calcul, la technique de sous-modélisation a été présentée en insistant sur les critères assurant la convergence de la solution.

Une fois la méthodologie établie, la modélisation par éléments finis d'essais expérimentaux en flexion rotative et en torsion alternée a permis d'établir l'existence d'un facteur de réduction de la vie en fatigue des assemblages par frettage ( $k_{\text{fret}}$ ). Contrairement aux attentes, ce facteur ne dépend pas de la valeur du glissement à l'interface de contact, qui semble être une conséquence plutôt que la cause. D'après les données disponibles, ce facteur est fonction du type et de l'intensité du chargement et/ou du matériau. Comme pour l'obtention de la rigidité, de la résistance mécanique ou de la limite d'endurance en fatigue, il est donc nécessaire de procéder à des essais expérimentaux pour obtenir ou valider la valeur du facteur  $k_{\text{fret}}$ .

Une étude de sensibilité des paramètres a permis d'identifier le type de configuration qui améliore la vie en fatigue des assemblages par interférence. Par le simple ajout d'un épaulement et d'un congé de raccordement ou par une rainure circulaire, il est possible d'augmenter la résistance à la fatigue de plus de 50% en flexion et de 20% en torsion par rapport au cas analytique d'un arbre simple comportant un frettage. L'étude de sensibilité a montré une transition dans la localisation de la zone de rupture due à un phénomène de concurrence entre le niveau de contrainte dans le frettage et dans la zone située à proximité, par exemple un rayon de congé. Il a également été observé qu'une pression de contact trop élevée ou trop faible nuit à la vie en fatigue. L'étude de sensibilité a permis d'observer des tendances et d'en extraire des règles générales de conception.

Enfin, les connaissances acquises ont été mises en application par la réalisation d'un exemple de calcul. Par quelques calculs préalables et des règles générales de conception, une conception préliminaire a été effectuée, se situant déjà relativement près d'une solution satisfaisante. De par les tendances observées par l'étude de sensibilité, le concept a évolué en très peu d'itérations vers une solution améliorée répondant à tous les critères de résistance mécanique. La précision des résultats a été assurée par la méthodologie de calcul développée au cours des travaux.

Ce travail a permis le développement d'un outil-logiciel convivial pour le calcul de la pression de contact nominale pour des cas complexes, d'une méthodologie de calcul par éléments finis efficace assurant la précision des résultats, la connaissance d'un facteur de réduction de la vie en fatigue à déterminer expérimentalement et de règles générales de conception pour les assemblages par interférence.

La perspective d'une étude de sensibilité plus approfondie permettrait de quantifier avec plus de précision le comportement en fatigue des assemblages par interférence, voire même la création d'abaques de calcul, dans le but de réaliser une conception améliorée, voire optimale encore plus rapidement. Ces abaques pourraient notamment prendre en compte le gradient de température, la combinaison de sollicitations axiales, en torsion et en flexion en vue d'une conception fiable et légère, donc optimale. Un exemple d'application qui contient tous ces aspects physiques est le cas des arbres turbomoteurs dans l'industrie aéronautique.

La perspective de la réalisation d'essais en laboratoire pour différents matériaux et chargements permettrait d'approfondir les connaissances concernant le facteur de réduction de la vie en fatigue des assemblages par interférence. Davantage de données permettraient vraisemblablement de relier ce facteur à d'autres propriétés mécaniques, par exemple la dureté ou le coefficient de friction.

### Références

- ANSYS Theory Manual*. (2007). Version 11.0.
- Araujo, J. A., & Nowell, D. (2002). The effect of rapidly varying contact stress fields on fretting fatigue. *International Journal of Fatigue*, 24(7), 763-775.
- Araujo, J. A., Nowell, D., & Vivacqua, R. C. (2004). The use of multiaxial fatigue models to predict fretting fatigue life of components subjected to different contact stress fields. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 27(10), 967-978.
- ASME. (2006). Boiler and Pressure Vessel Code. In.
- Bazergui, A., Bui-Quoc, T., Biron, A., McIntyre, G., & Laberge, C. (2002). *Résistance des matériaux* (3<sup>e</sup> éd.). Montréal: Presses internationales Polytechnique.
- Beleca Irimescu, L. (2002). *Déplacement relatif et frottement à l'interface d'un contact élastique*. Ph.D. inédit, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Lyon.
- Bernardo, A. T., Araujo, J. A., & Mamiya, E. N. (2006). Proposition of a finite element-based approach to compute the size effect in fretting fatigue. *Tribology International*, 39(10), 1123-1130.
- Cormier, N. G., Smallwood, B. S., Sinclair, G. B., & Meda, G. (1999). Aggressive submodelling of stress concentrations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(6), 889-909.
- D'Ambrosio, F. (2004). *Comportement dynamique des structures en présence de frottement sec. Application aux ensembles aubés*. Ph.D. inédit, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Lyon.
- Doumenc, D. (1996). *Étude d'assemblages frettés et à précontrainte axiale - Application à un rotor*. Ph.D. inédit, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, Toulouse.
- Ekberg, A. (2004). Fretting fatigue of railway axles - A review of predictive methods and an outline of a finite element model. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 218(4), 299-316.



- Elleuch, K., & Fouvry, S. (2005). Experimental and modelling aspects of abrasive wear of a A357 aluminium alloy under gross slip fretting conditions. *Wear*, 258(1-4 SPEC. ISS.), 40-49.
- Fouvry, S., Fridrici, V., Langlade, C., Kapsa, P., & Vincent, L. (2006). Palliatives in fretting: A dynamical approach. *Tribology International*, 39(10), 1005-1015.
- Gutkin, R., & Alfredsson, B. (2008). Growth of fretting fatigue cracks in a shrink-fitted joint subjected to rotating bending. *Engineering Failure Analysis*, 15(5), 582-596.
- Hattori, T., Kawai, S., Okamoto, N., & Sonobe, T. (1981). Torsional fatigue strength of a shrink fitted shaft. *Bulletin of the JSME*, 24(197), 1893-1900.
- Hattori, T., & Watanabe, T. (2006). Fretting fatigue strength estimation considering the fretting wear process. *Tribology International*, 39(10), 1100-1105.
- Hills, D. A., & Nowell, D. (1994). *Mechanics of Fretting Fatigue*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Jang, J.-S., Cho, M.-R., & Yang, W.-H. (2006). 3-Dimensional finite element analysis of the residual stress by cold expansion method and interference fit. *Key Engineering Materials*, 326-328 II, 1079-1082.
- Juuma, T. (1997). Fretting of a shrink-fitted shaft. *10th International Congress and Exhibition on Condition Monitoring and Diagnostic Engineering Management, Espoo, VTT* (pp. 279-288)COMADEM International.
- Juuma, T. (1998). Effects of Contact Pressure, Slip Amplitude and Geometry on the Torsional Fretting Fatigue Strength of a Shrink-fitted Shaft. *11th International Congress and Exhibition on Condition Monitoring and Diagnostic Engineering Management, Novotel Launceston, Tasmania, Australia* (pp. 477-485)COMADEM International.
- Juuma, T. (1999). Torsional fretting fatigue strength of a shrink-fitted shaft. *Wear*, 231(2), 310-318.
- Juuma, T. (2000a). The fretting fatigue strength of a shrink-fitted shaft in contact with various hub materials. *Systems integrity and maintenance: Proceedings of the 2nd Asia-Pacific Conference on Systems Integrity and Maintenance, China* (pp. 224-229).

- Juuma, T. (2000b). Torsional fretting fatigue strength of a shrink-fitted shaft with a grooved hub. *Tribology International*, 33(8), 537-543.
- Lee, D.-H., Kwon, S.-J., Choi, J.-B., & Kim, Y.-J. (2006). Observations of fatigue damage in the press-fitted shaft under bending loads. *Key Engineering Materials*, 326-328 II, 1071-1074.
- Lee, D. H., Goo, B. C., Lee, C. W., Choi, J. B., & Kim, Y. J. (2005). Fatigue life evaluation of press-fitted specimens by using multiaxial fatigue theory at contact edge. *Asian Pacific Conference for Fracture and Strength (APCFS'04), Jeju Island, South Korea* (Vol. 297-300, pp. 108-114)Trans Tech Publications.
- Lee, D. H., Kwon, S. J., Lee, C. W., Choi, J. B., & Kim, Y. J. (2006). The evolution of contact stress and surface profile in press-fitted shaft under partial slip conditions. *Key Engineering Materials*, 321-323 II, 1495-1498.
- Madge, J. J., Leen, S. B., McColl, I. R., & Shipway, P. H. (2007). Contact-evolution based prediction of fretting fatigue life: Effect of slip amplitude. *Wear*, 262(9-10), 1159-1170.
- Nishioka, K., & Hirakawa, K. (1969a). Fundamental investigations of fretting fatigue. Part 2: Fretting fatigue testing machine and some test results. *Bulletin of the JSME*, 12(50), 180-187.
- Nishioka, K., & Hirakawa, K. (1969b). Fundamental investigations of fretting fatigue. Part 3: Some phenomena and mechanisms of surface cracks. *Bulletin of the JSME*, 12(51), 397-407.
- Nishioka, K., & Hirakawa, K. (1969c). Fundamental investigations of fretting fatigue. Part 4: The effect of mean stress. *Bulletin of the JSME*, 12(51), 408-414.
- Nishioka, K., & Hirakawa, K. (1969d). Fundamental investigations of fretting fatigue. Part 5: The effect of relative slip amplitude. *Bulletin of the JSME*, 12(52), 692-697.
- Nishioka, K., & Hirakawa, K. (1972). Fundamental investigations of fretting fatigue. Part 6: Effects of contact pressure and hardness of materials. *Bulletin of the JSME*, 15(80), 135-144.

- Nishioka, K., & Komatsu, H. (1967). Researches on increasing the fatigue strength of press-fitted shaft assembly. *Bulletin of the JSME*, 10(42), 880-889.
- Nishioka, K., Nishimura, S., & Hirakawa, K. (1968). Fundamental investigations of fretting fatigue. Part 1: On the relative slip amplitude of press-fitted axle assemblies. *Bulletin of the JSME*, 11(45), 437-445.
- Norton, R. L. (2006). *Machine Design: An Integrated Approach* (3<sup>e</sup> éd.): Pearson Prentice Hall.
- Ozel, A., Temiz, S., Aydin, M. D., & Sen, S. (2005). Stress analysis of shrink-fitted joints for various fit forms via finite element method. *Materials and Design*, 26(4), 281-289.
- Rajasekaran, R., & Nowell, D. (2005). On the finite element analysis of contacting bodies using submodelling. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 40(2), 95-106.
- Sum, W. S., Williams, E. J., & Leen, S. B. (2005). Finite element, critical-plane, fatigue life prediction of simple and complex contact configurations. *International Journal of Fatigue*, 27(4), 403-416.
- Swalla, D. R., & Neu, R. W. (2001). Influence of coefficient of friction on fretting fatigue crack nucleation prediction. *Tribology International*, 34(7), 493-503.
- Szolwinski, M. P. (1998). *The mechanics and tribology of fretting fatigue with application to riveted lap joints*. Ph.D. inédit, Purdue University, Indiana.
- Truman, C. E., & Booker, J. D. (2003). Failure Analysis of Shrink-Fitted Shafts. *Modern Practice in Stress and Vibration Analysis: Proceedings of the 5th International Conference on Modern Practice in Stress and Vibration Analysis, Glasgow, Scotland, United Kingdom* (Vol. 440-441, pp. 447-454) Trans Tech Publications Ltd.
- Truman, C. E., & Booker, J. D. (2007). Analysis of a shrink-fit failure on a gear hub/shaft assembly. *Engineering Failure Analysis*, 14(4), 557-572.
- Wang, R. H., Jain, V. K., & Mall, S. (2007). A non-uniform friction distribution model for partial slip fretting contact. *Wear*, 262(5-6), 607-616.
- Weber, B. (1999). *Fatigue multiaxiale des structures industrielles sous chargement quelconque*. Ph.D. inédit, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Lyon.

- Weber, B., Kenmeugne, B., Clement, J. C., & Robert, J. L. (1999). Improvements of multiaxial fatigue criteria computation for a strong reduction of calculation duration. *Computational Materials Science*, 15(4), 381-399.
- Yang, G. M. (1998). *Étude de l'influence de l'état de surface sur les caractéristiques d'un emmanchement fretté*. École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Cluny.
- Zhang, Y., McClain, B., & Fang, X. D. (2000). Design of interference fits via finite element method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 42(9), 1835-1850.

## ANNEXE A    CALCUL DES CORPS AXISYMETRIQUES

### 1. Mise en équation

#### 1.1 Équation polaire d'équilibre

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0$$

$$F_r = \rho\omega^2 r$$

#### 1.2 Loi de comportement

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta - (1+\nu)\alpha T)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r - (1+\nu)\alpha T)$$

#### 1.3 Relations cinématiques

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

#### 1.4 Équation différentielle gouvernante

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = (1+\nu)\alpha \frac{dT}{dr} - \frac{(1-\nu^2)}{E} \rho\omega^2 r$$

### 2. Solution de l'équation différentielle

#### 2.1 Déplacement radial

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \left( (1-\nu^2) \frac{\rho\omega^2 r^3}{8E} \right) + \frac{(1+\nu)\alpha}{r} \int_{r_i}^r T r dr$$

#### 2.2 Contrainte radiale

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left( (1+\nu)C_1 - \frac{(1-\nu)}{r^2} C_2 \right) - \frac{(3+\nu)}{8} \rho\omega^2 r^2 - \frac{\alpha E}{r^2} \int_{r_i}^r T r dr$$

#### 2.3 Contrainte orthoradiale

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \left( (1+\nu)C_1 + \frac{(1-\nu)}{r^2} C_2 \right) - \frac{(1+3\nu)}{8} \rho\omega^2 r^2 - \frac{\alpha E}{r^2} \left( 1 - \int_{r_i}^r T r dr \right)$$

## 2.4 Cas particulier : Température constante

Si  $T = \text{Constante}$  dans toute l'épaisseur du cylindre, alors :

$$\int_a^r T r dr = T \frac{r^2 - r_i^2}{2}$$

## 3. Cylindres composés

### 3.1 Définition des matrices

$$[u] = \begin{bmatrix} u_1(C_{1,1}, C_{2,1}) \\ \dots \\ u_i(C_{1,i}, C_{2,i}) \\ \dots \\ u_n(C_{1,n}, C_{2,n}) \end{bmatrix} \quad [\sigma_r] = \begin{bmatrix} \sigma_{r,1}(C_{1,1}, C_{2,1}) \\ \dots \\ \sigma_{r,i}(C_{1,i}, C_{2,i}) \\ \dots \\ \sigma_{r,n}(C_{1,n}, C_{2,n}) \end{bmatrix} \quad [\sigma_\theta] = \begin{bmatrix} \sigma_{\theta,1}(C_{1,1}, C_{2,1}) \\ \dots \\ \sigma_{\theta,i}(C_{1,i}, C_{2,i}) \\ \dots \\ \sigma_{\theta,n}(C_{1,n}, C_{2,n}) \end{bmatrix}$$

### 3.2 Application des conditions aux limites et continuité

#### 3.2.1 Conditions aux limites

$$\sigma_{r,1}(r = r_0) = -p_{\text{int}}$$

$$\sigma_{r,n}(r = r_n) = -p_{\text{ext}}$$

#### 3.2.2 Continuité

Pour  $1 \leq i \leq n-1$

$$\sigma_{r,i}(r = r_i) = \sigma_{r,i+1}(r = r_i)$$

$$u_i(r = r_i) = u_{i+1}(r = r_i)$$

#### 3.2.3 Cas particulier : Interférence radiale

$$u_{i+1}(r = r_i) - u_i(r = r_i) = \delta r_i$$

#### 3.2.4 Cas particulier : Cylindre intérieur plein

$$u_{r,1}(r = 0) = 0$$

## 4. Résolution complète

$$[A]\{X\} = \{b_{p_{\text{int}}}\} + \{b_{p_{\text{ext}}}\} + \{b_{\delta_r}\} + \{b_{\omega}\} + \{b_T\}$$

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} C_{1,1} \\ C_{2,1} \\ \dots \\ C_{1,i} \\ C_{2,i} \\ C_{1,i+1} \\ C_{2,i+1} \\ \dots \\ C_{1,n} \\ C_{2,n} \end{Bmatrix} \quad \{b_{\rho_{int}}\} = \begin{Bmatrix} -p_{int} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{b_{\rho_{ext}}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -p_{ext} \end{Bmatrix} \quad \{b_{\delta r}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \delta r_{i-1} \\ 0 \\ \delta r_i \\ \dots \\ \delta r_{n-1} \\ -p_{ext} \end{Bmatrix}$$

$$\{b_{\omega}\} = \begin{Bmatrix} \frac{(3+v_1)}{8} \rho_1 \omega^2 r_0^2 \\ \left( \frac{(3+v_1)}{8} \rho_1 - \frac{(3+v_2)}{8} \rho_2 \right) \omega^2 r_1^2 \\ \dots \\ \left( \frac{(3+v_{i-1})}{8} \rho_{i-1} - \frac{(3+v_i)}{8} \rho_i \right) \omega^2 r_{i-1}^2 \\ \left( \frac{(1-v_{i-1}^2)}{8E_{i-1}} \rho_{i-1} - \frac{(1-v_i^2)}{8E_i} \rho_i \right) \omega^2 r_{i-1}^3 \\ \left( \frac{(3+v_i)}{8} \rho_i - \frac{(3+v_{i+1})}{8} \rho_{i+1} \right) \omega^2 r_i^2 \\ \left( \frac{(1-v_i^2)}{8E_i} \rho_i - \frac{(1-v_{i+1}^2)}{8E_{i+1}} \rho_{i+1} \right) \omega^2 r_i^3 \\ \dots \\ \left( \frac{(1-v_{n-1}^2)}{8E_{n-1}} \rho_{n-1} - \frac{(1-v_n^2)}{8E_n} \rho_n \right) \omega^2 r_{n-1}^3 \\ -\frac{(3+v_n)}{8} \rho_n \omega^2 r_n^2 \end{Bmatrix} \quad \{b_r\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \Delta T_1 E_1 \left( \frac{r_0^2 - r_1^2}{2r_0^2} \right) \\ \alpha_1 \Delta T_1 E_1 \left( \frac{r_1^2 - r_0^2}{2r_1^2} \right) - \alpha_2 \Delta T_2 E_2 \left( \frac{r_1^2 - r_1^2}{2r_1^2} \right) \\ \dots \\ \alpha_{i-1} \Delta T_{i-1} E_{i-1} \left( \frac{r_{i-1}^2 - r_{i-2}^2}{2r_{i-1}^2} \right) - \alpha_i \Delta T_i E_i \left( \frac{r_{i-1}^2 - r_{i-1}^2}{2r_{i-1}^2} \right) \\ (1+v_i) \alpha_i \Delta T_i \left( \frac{r_{i-1}^2 - r_{i-1}^2}{2r_{i-1}^2} \right) - (1+v_{i-1}) \alpha_{i-1} \Delta T_{i-1} \left( \frac{r_{i-1}^2 - r_{i-2}^2}{2r_{i-1}^2} \right) \\ \alpha_i \Delta T_i E_i \left( \frac{r_i^2 - r_{i-1}^2}{2r_i^2} \right) - \alpha_{i+1} \Delta T_{i+1} E_{i+1} \left( \frac{r_i^2 - r_i^2}{2r_i^2} \right) \\ (1+v_{i+1}) \alpha_{i+1} \Delta T_{i+1} \left( \frac{r_i^2 - r_i^2}{2r_i^2} \right) - (1+v_i) \alpha_i \Delta T_i \left( \frac{r_i^2 - r_{i-1}^2}{2r_i^2} \right) \\ \dots \\ (1+v_n) \alpha_n \Delta T_n \left( \frac{r_{n-1}^2 - r_{n-1}^2}{2r_{n-1}^2} \right) \\ \alpha_n \Delta T_n E_n \left( \frac{r_n^2 - r_{n-1}^2}{2r_n^2} \right) \end{Bmatrix}$$

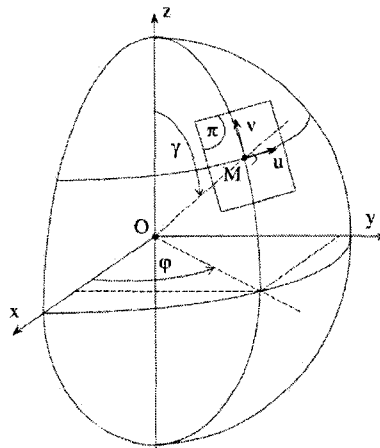




## ANNEXE B    CALCUL DU CRITÈRE DE DANG VAN

### Définition d'un plan physique

Un plan physique ( $\pi$ ) passant par un point matériel est généralement orienté par son vecteur unitaire  $\hat{h}$ . Ce vecteur peut être exprimé en coordonnées sphériques, en fonction des angles  $\gamma$  et  $\varphi$ .  $\hat{u}$  est un vecteur unitaire quelconque du plan et  $\hat{v}$  est défini tel que  $\hat{v} = \hat{h} \wedge \hat{u}$ .



**Figure B-1 : Représentation d'un plan physique**

Source : (B. Weber, Kenmeugne, Clement, & Robert, 1999)

### Projection d'un tenseur sur un plan

De façon générale en 3 dimensions, un tenseur permet d'exprimer l'état de contrainte  $[\sigma]$  ou de déformation  $[\epsilon]$  :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad [\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

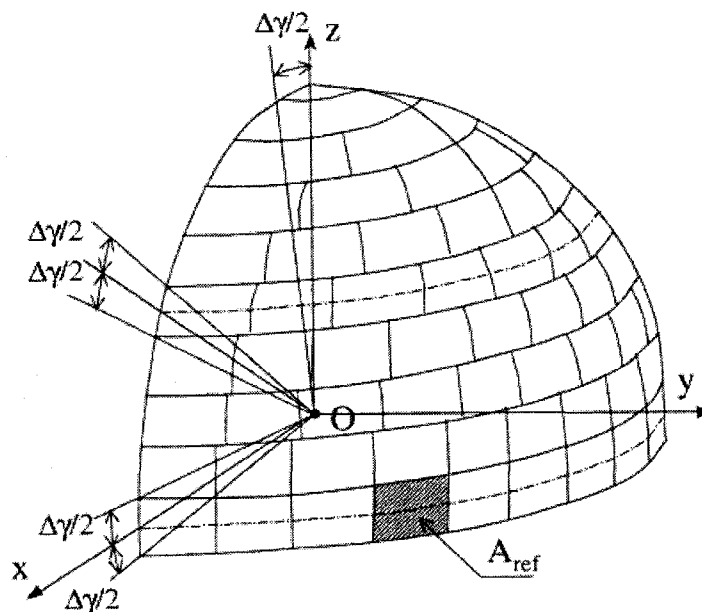
Le tenseur de contrainte qui agit sur un plan de normale unitaire  $\hat{h}$  est défini par son vecteur contrainte  $\phi_h = [\sigma] \cdot \hat{h}$ . Ce vecteur contrainte se décompose en une partie normale au plan et en deux directions quelconques du plan, de vecteurs unitaires  $\hat{u}$  et  $\hat{v}$ . La même méthodologie peut également être appliquée aux déformations.

$$\begin{aligned}\sigma_{hh} &= \mathbf{h}^t \cdot [\boldsymbol{\sigma}] \cdot \mathbf{h} \\ \sigma_{uh} &= \mathbf{u}^t \cdot [\boldsymbol{\sigma}] \cdot \mathbf{h} \\ \sigma_{vh} &= \mathbf{v}^t \cdot [\boldsymbol{\sigma}] \cdot \mathbf{h}\end{aligned}$$

La contrainte tangentielle de cisaillement dans le plan est définie comme étant  $\tau_h = \sqrt{\sigma_{uh}^2 + \sigma_{vh}^2}$ .

### Définition du plan critique

Le plan critique est le plan qui maximise une fonction correspondant au critère multiaxial de fatigue. Ce plan est trouvé par itération suite à un balayage dans l'espace tridimensionnel. Deux méthodes pour y parvenir sont celles du balayage par incrément constant et de la distribution homogène des plans. (B. Weber, Kenmeugne, Clement, & Robert, 1999) La méthode de la distribution homogène des plans est plus efficace et est illustrée à la Figure B-2. La programmation complète est effectuée à l'Annexe E.



**Figure B-2 : Représentation d'un plan physique**

Source : (B. Weber, Kenmeugne, Clement, & Robert, 1999)

## ANNEXE C RÉSULTATS DE L'ÉTUDE DE SENSIBILITÉ

Arbre simple en Flexion - $\sigma_x$ *										
D = 25 mm										
P (MPa)	of (MPa)									
	15.0	30.0	45.0	60.0	75.0	90.0	105.0	120.0	135.0	150.0
0	15.00	30.00	45.00	60.00	75.00	90.00	105.00	120.00	135.00	150.00
25	19.534	34.586	47.908	60.92	73.879	86.632	99.857	113.29	128.85	144.33
50	23.213	37.799	54.177	70.128	82.642	95.095	107.71	120.81	134.27	146.27
75	27.115	39.792	55.686	72.228	89.143	105.25	117.07	129.36	141.74	154.36
100	30.704	42.239	56.662	72.97	89.874	107.26	124.7	138.8	150.86	163.27
125	34.01	44.593	58.307	73.427	89.938	107.2	124.89	142.77	160.39	172.35
150	37.063	46.851	59.907	74.541	90.003	106.7	124.57	142.62	160.87	179.26
200	39.706	49.047	61.676	75.981	91.187	106.92	123.35	140.82	159.04	177.73
Mf (Nmm)	2.301E+04	4.602E+04	6.903E+04	9.204E+04	1.150E+05	1.381E+05	1.611E+05	1.841E+05	2.071E+05	2.301E+05
D = 40 mm										
P (MPa)	of (MPa)									
	15.0	30	45	60	75	90	105	120	135	150
0	15.00	30.00	45.00	60.00	75.00	90.00	105.00	120.00	135.00	150.00
25	20.8	37.882	51.559	65.362	78.539	91.886	105.95	122.03	138.28	154.67
50	22.772	40.565	58.931	73.531	87.182	100.79	114.16	127.19	139.69	150.92
75	24.74	41.566	60.046	79.073	95.759	109.04	122.44	135.94	149.17	162.42
100	26.534	42.561	60.515	79.413	98.929	117.65	130.56	144.02	157.41	170.77
125	28.507	43.46	60.928	79.237	98.698	118.6	138.62	152.33	165.36	178.77
150	29.588	44.173	61.357	79.437	98.292	118.3	138.63	159.07	174.37	187.59
200	29.803	43.925	60.889	78.739	96.99	115.69	136.11	156.92	177.92	198.9
Mf (Nmm)	9.425E+04	1.885E+05	2.827E+05	3.770E+05	4.712E+05	5.655E+05	6.597E+05	7.540E+05	8.482E+05	9.425E+05
D = 50 mm										
P (MPa)	of (MPa)									
	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
0	15.00	30.00	45.00	60.00	75.00	90.00	105.00	120.00	135.00	150.00
25	20.414	36.565	50.195	63.979	76.933	90.475	105.85	121.96	138.26	154.82
50	22.197	39.62	57.473	71.023	84.572	97.907	111.28	124.07	135.72	149.47
75	23.879	40.53	58.732	77.566	91.621	105.22	118.69	131.84	145.01	158.12
100	25.502	41.291	59.004	77.856	97.114	112.25	125.7	139.06	152.47	165.52
125	26.375	41.948	59.328	77.611	96.96	116.53	132.68	146.4	160.05	173.59
150	27.3	42.385	59.706	77.779	96.955	116.79	137.04	154.1	167.96	181.7
200	26.52	41.638	58.909	76.851	95.103	114.76	135.03	155.55	176.18	195.03
Mf (Nmm)	1.841E+05	3.682E+05	5.522E+05	7.363E+05	9.204E+05	1.104E+06	1.289E+06	1.473E+06	1.657E+06	1.841E+06
D = 75 mm										
P (MPa)	of (MPa)									
	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
0	15.00	30.00	45.00	60.00	75.00	90.00	105.00	120.00	135.00	150.00
25	24.7	41.23	55.622	69.31	83.336	98.602	115.94	133.4	151.06	168.49
50	27.604	46.503	63.583	78.064	92.428	106.4	119.91	132.76	146.24	162.21
75	29.7	47.766	68.257	85.782	100.29	114.65	128.76	142.62	156.43	170.56
100	32.012	48.667	68.695	90.051	107.72	122.22	136.65	150.74	164.96	179.59
125	33.401	49.318	68.729	90.047	112.11	129.76	144.7	159.22	174.23	188.76
150	32.011	48.74	68.338	89.401	111.75	134.39	151.98	167.05	182.24	196.85
200	30.86	47.508	67.005	87.356	109.36	132.15	155.23	178.39	194.22	210.14
Mf (Nmm)	6.213E+05	1.243E+06	1.864E+06	2.485E+06	3.106E+06	3.728E+06	4.349E+06	4.970E+06	5.591E+06	6.213E+06
D = 100 mm										
P (MPa)	of (MPa)									
	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
0	15.00	30.00	45.00	60.00	75.00	90.00	105.00	120.00	135.00	150.00
25	28.411	44.745	59.718	74.739	89.026	105.77	124.03	142.35	160.6	176.23
50	32.201	52.083	67.462	83.026	97.753	112.49	127.03	139.99	155.6	172.45
75	34.502	53.681	75.283	90.486	105.93	120.8	135.61	150.21	164.43	179.12
100	36.247	54.557	76.762	97.806	112.77	128.34	143.37	158.76	174.24	189.74
125	36.222	53.978	76.197	100.2	119.88	135.65	150.98	166.52	182.31	198.53
150	34.842	52.878	75.098	99.203	123.92	142.11	157.38	173.02	189.5	205.34
200	33.117	51.607	73.238	97.44	122.45	147.69	167.13	184.07	186.63	200.8
Mf (Nmm)	1.473E+06	2.945E+06	4.418E+06	5.890E+06	7.363E+06	8.836E+06	1.031E+07	1.178E+07	1.325E+07	1.473E+07

Arbre simple en Torsion - $\sigma_{\perp}$										
D = 25 mm										
P (MPa)	Tau (MPa)									
	15.0	30.0	45.0	60.0	75.0	90.0	105.0	120.0	135.0	150.0
0	25.98	51.96	77.94	103.92	129.90	155.88	181.87	207.85	233.83	259.81
25	75.194	111.08	140.6	168.95	196.84	224.4	251.81	278.94	306.01	332.92
50	83.822	153.87	191.32	222.97	252.72	281.66	310.15	338.31	345.52	326.84
75	86.697	173.4	231.99	270.77	303.91	334.85	346.28	322.86	324.2	325.12
100	88.478	176.96	258.46	310.43	349.47	315.52	318.52	320.62	322.12	322.75
125	89.557	177.5	262.97	327.6	307.51	312.7	315.75	318.49	319.79	320.26
150	89.032	175.71	259.17	329.73	302.92	309.25	313.31	316.16	317.39	318.08
200	88.432	174.21	257.06	334.98	295.08	303.43	309.39	312.52	313.8	314.66
T (Nmm)	4.602E+04	9.204E+04	1.381E+05	1.841E+05	2.301E+05	2.761E+05	3.221E+05	3.682E+05	4.142E+05	4.602E+05
D = 40 mm										
P (MPa)	Tau (MPa)									
	15.0	30	45	60	75	90	105	120	135	150
0	25.98	51.96	77.94	103.92	129.90	155.88	181.87	207.85	233.83	259.81
25	88.392	124.51	154.19	182.77	210.88	238.61	266.08	293.29	320.36	347.32
50	100.31	180.08	217.96	249.78	279.55	308.66	337.39	346.21	325.97	326.7
75	103.38	206.76	272.42	310.7	343.93	350.11	321.5	322.98	324.01	324.37
100	105.23	210.14	301.29	356.94	313.68	316.85	319.19	320.7	321.28	321.68
125	104.19	205.3	301.65	303.03	310.19	314.06	317.08	318.37	318.72	319.12
150	103.51	202.56	296.6	296.42	305.79	311.55	314.71	315.84	316.27	316.9
200	103.05	201.27	294.25	284.99	298.16	305.94	309.31	310.29	310.97	312.04
T (Nmm)	1.885E+05	3.770E+05	5.655E+05	7.540E+05	9.425E+05	1.131E+06	1.319E+06	1.508E+06	1.696E+06	1.885E+06
D = 50 mm										
P (MPa)	Tau (MPa)									
	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
0	25.98	51.96	77.94	103.92	129.90	155.88	181.87	207.85	233.83	259.81
25	95.587	131.92	161.54	190.15	218.27	245.97	273.36	300.5	327.47	340.43
50	109.3	195.03	232.81	264.39	294.19	323.3	351.99	325.2	325.94	326.5
75	112.42	224.84	293.05	339.01	365.9	319.78	321.44	322.98	323.61	323.95
100	113.12	224.31	322.24	309.71	314.48	317.13	319.45	320.45	320.81	321.22
125	111.84	219.01	322.03	304.72	310.95	315.07	317.33	318.04	318.26	318.7
150	111.27	216.63	318.9	298.08	306.81	312.31	314.5	314.94	315.58	316.42
200	110.86	215.32	312.75	286.62	298.69	305.79	308.39	308.87	309.32	309.88
T (Nmm)	3.682E+05	7.363E+05	1.104E+06	1.473E+06	1.841E+06	2.209E+06	2.577E+06	2.945E+06	3.313E+06	3.682E+06
D = 75 mm										
P (MPa)	Tau (MPa)									
	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
0	25.98	51.96	77.94	103.92	129.90	155.88	181.87	207.85	233.83	259.81
25	107.88	144.34	174.13	202.86	230.94	258.52	285.76	313.1	340.2	351.01
50	126.69	218.57	257.48	289.11	319.08	348.42	350.54	325.04	325.85	326.18
75	129.95	259.9	328.7	368.55	318.12	320.13	321.86	322.66	322.98	323.52
100	128.73	252.4	345.47	311.69	315.56	318.36	319.58	319.97	320.22	320.63
125	127.55	246.17	350.25	306.46	312.72	316.17	317.12	317.31	317.7	318.36
150	127.07	244.7	336.6	300.81	308.92	312.77	313.67	313.92	314.61	316.3
200	126.69	243.19	270.81	290.3	301.49	305.97	307.08	307.51	308.21	310.36
T (Nmm)	1.243E+06	2.485E+06	3.728E+06	4.970E+06	6.213E+06	7.455E+06	8.698E+06	9.940E+06	1.118E+07	1.243E+07
D = 100 mm										
P (MPa)	Tau (MPa)									
	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
0	25.98	51.96	77.94	103.92	129.90	155.88	181.87	207.85	233.83	259.81
25	110.54	148.43	179.56	209.03	237.52	265.52	292.76	320.1	347.2	358.01
50	137.67	223.03	263.35	297.11	328.66	359.16	324.4	325.25	325.8	326.17
75	141.38	271.82	334.02	349.58	318.89	320.7	322.11	322.59	322.84	323.75
100	141.48	273	365.74	312.84	316.53	318.77	319.53	319.67	319.94	320.85
125	140.26	268.77	299.39	309.01	314.17	316.35	317.06	317.08	317.42	318.4
150	139.76	267.37	294.52	305.96	311.96	314.09	314.09	314.39	315.17	316.42
200	139.23	265.4	280.83	297.09	305.13	307.27	307.14	307.21	308.53	311.18
T (Nmm)	2.945E+06	5.890E+06	8.836E+06	1.178E+07	1.473E+07	1.767E+07	2.062E+07	2.356E+07	2.651E+07	2.945E+07