

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

APPLICATION DE L'HOLOGRAPHIE ACOUSTIQUE EN CHAMP PROCHE
À L'ÉTUDE DU RAYONNEMENT TRANSITOIRE DE PLAQUES SOUMISES
À DES IMPACTS

JEAN-FRANÇOIS BLAIS
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)
NOVEMBRE 2008



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 978-0-494-48908-6

Our file Notre référence

ISBN: 978-0-494-48908-6

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

APPLICATION DE L'HOLOGRAPHIE ACOUSTIQUE EN CHAMP PROCHE
À L'ÉTUDE DU RAYONNEMENT TRANSITOIRE DE PLAQUES SOUMISES
À DES IMPACTS

présenté par: BLAIS Jean-François

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. TRÉPANIÉ Jean-Yves, Ph.D., président

Mme ROSS Annie, Ph.D., membre et directrice de recherche

M. LÉVESQUE Daniel, Ph.D., membre

*À mes parents,
qui m'ont toujours encouragé
à aller là où mon instinct me guide.*

*À Geneviève,
sur qui j'ai toujours pu compter
dans les moments où j'en avais vraiment besoin.*

REMERCIEMENTS

Je tiens en premier lieu à remercier sincèrement ma directrice de recherche Mme Annie Ross pour avoir su me guider au travers des divers obstacles qui se sont présentés au cours des deux dernières années. C'est entre autres grâce aux nombreuses discussions constructives et fructueuses que nous avons eues que ce mémoire de maîtrise est tel qu'il est aujourd'hui. C'est aussi par ces mêmes conversations que j'ai compris l'importance du terme « rigueur scientifique ».

De plus, s'il y a quelqu'un avec qui il est possible d'avoir des échanges aussi passionnants à propos de la causalité des signaux transitoires, c'est bien Daniel Granger. Merci Dan, je crois que ces discussions ont été la pierre angulaire de ce projet. J'en profite d'ailleurs pour remercier les autres membres de l'équipage du « sous-marin jaune », soit Isabelle, Martine, Romain, Thomas, Cédric, Joël, Heung Seok, Ben et Massimo, avec qui les bas ont été moins bas et les hauts toujours plus hauts. Sans oublier les agréables « cafés » houblonnés de fin de journée en votre compagnie !

Un grand merci à Valérie Lalonde et Sylvie Nguene pour leur aide précieuse (que dis-je, leur patience) en ce qui concerne la partie expérimentale du projet. Elles ont découvert à la dure ce que peuvent être les longues manipulations répétitives. Je tiens aussi à remercier François Barette du département de génie physique pour les bancs d'optique, qui se sont avérés indispensables sur le plan expérimental.

Finalement, je tiens à remercier tout spécialement les deux organismes subventionnaires qui m'ont épaulé financièrement durant ces deux dernières années, soit le Fonds québécois de la recherche sur la nature et les technologies ainsi que l'Institut de recherche Robert-Sauvé en santé et en sécurité au travail. Grâce à eux, j'ai pu me consacrer à temps plein à ce projet de recherche qui m'a permis de pousser encore plus loin ma passion pour l'acoustique.

RÉSUMÉ

Le présent projet de maîtrise vise à appliquer l'holographie acoustique en champ proche (NAH) à l'étude dans le domaine du temps du rayonnement transitoire de plaques soumises à des impacts. À partir de simulations numériques, il est montré que les fonctions de Green dans le domaine des fréquences mènent à d'importantes erreurs lors de l'application de la NAH. En effet, l'utilisation de la transformée de Fourier discrète (DFT) pour les passages entre les domaines temporel et fréquentiel cause du repliement temporel, phénomène qui est d'autant plus important lorsque les signaux initiaux sont tronqués par la fenêtre d'échantillonnage. Bien que l'ajout de zéros à ces signaux initiaux puisse régler ce problème, cette approche accroît considérablement les besoins en ressources informatiques. C'est pourquoi une nouvelle formulation des fonctions de Green dans le domaine de Laplace est introduite. Ainsi, l'utilisation de la transformée de Laplace numérique (NLT) réduit considérablement les erreurs sans qu'aucun zéro ne soit ajouté. Cette nouvelle approche est nommée « NAH transitoire » (TNAH). Par ailleurs, il est bien connu que la formulation des fonctions de Green dans l'espace des nombres d'ondes (espace k), et par le fait même l'utilisation de la DFT spatiale, génère des répliques du plan de mesure et, par conséquent, de la source de rayonnement originale. Il est montré que la TNAH réduit les conséquences de ces répliques dans le domaine temporel. Par ailleurs, il est mis en évidence que la TNAH est aussi avantageuse lors de la rétropropagation des hologrammes. Toutefois, une double régularisation est nécessaire pour filtrer les ondes évanescences et les instabilités causées par l'inversion de la NLT, qui autrement seraient amplifiées. La régularisation de Tikhonov est appliquée dans les deux cas et son optimisation par la méthode de la courbe en L est étudiée. Il est illustré par plusieurs exemples que la méthode de la courbe en L sous-estime systématiquement le paramètre optimal du filtrage des ondes évanescences. Finalement, un montage a été réalisé afin de valider expérimentalement la

propagation directe et la rétropropagation d'un hologramme. Le rayonnement d'une plaque de plexiglas suspendue et frappée en son centre par un pendule d'acier fait l'objet de l'étude expérimentale. Les signaux propagés concordent avec ceux mesurés dans les plans de propagation sur des distances allant jusqu'à une vingtaine de centimètres de l'hologramme, c'est-à-dire des distances comparables à la taille de la source. Une bonne concordance est également observée pour l'accélération transversale de la plaque qui est obtenue expérimentalement en utilisant la fonction de Green appropriée.

ABSTRACT

In this master thesis, near-field acoustical holography (NAH) is applied to study the transient sound radiation of impacted plates. Using numerical simulations, it is shown that the use of a Green's function in the frequency domain leads to important errors at the beginning of reconstructed time signals. These errors are due to the discrete Fourier transform (DFT) involved in that process which causes time aliasing, especially when initial signals are truncated by the sampling window. The introduction of trailing zeros in initial time signals reduces time aliasing errors but requires more computer resources. Therefore, the numerical Laplace transform (NLT) is introduced and applied to the NAH technique, resulting in a significant reduction of these errors. This new approach is called "transient NAH" (TNAH). It is shown that the effects of wraparound errors in the time domain due to the use of a spatial DFT are reduced considerably. In addition, the use of TNAH is preferable to that of standard NAH for retropropagating sound pressure fields. However, a double regularization process is required to filter evanescent waves and instabilities due to the inversion of the NLT that would otherwise be amplified. Tikhonov regularization is applied to both cases and its optimization is studied using the L-curve method. It is shown that this optimization approach for evanescent waves filtering systematically underestimates the regularization parameter that minimizes the error. Finally, an experimental setup was built to validate simulation results. The transient radiation of a free plexiglas plate impacted at its center by a steel pendulum is studied. Both direct propagation and retropropagation from a measured hologram are carried out by applying the new TNAH technique. Forward propagated signals show good agreement with measured signals in propagation planes at distances up to 20 cm from the hologram, i.e. distances comparable to the plate dimensions. Good results are also obtained for the transverse acceleration of the plate which is recovered experimentally by using the appropriate Green's function.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	viii
TABLE DES MATIÈRES	ix
LISTE DES TABLEAUX	xii
LISTE DES FIGURES	xiii
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES	xviii
LISTE DES ANNEXES	xxiv
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 REVUE DE LA LITTÉRATURE	6
1.1 Rayonnement acoustique transitoire d'une plaque soumise à un impact	6
1.1.1 Réponse vibratoire de la plaque	7
1.1.2 Calcul de la force d'impact	8
1.1.3 Rayonnement acoustique	15
1.2 Holographie acoustique en champ proche	19
1.2.1 Approches théoriques suggérées en propagation directe . . .	20
1.2.2 Conditions d'applicabilité et contraintes de mise en oeuvre .	27
1.2.3 Interpolation et extrapolation	33
1.2.4 Exemples d'application de la NAH	36
1.3 Autres approches de reconstruction 3D du champ acoustique	38

1.3.1	SONAH	38
1.3.2	IBEM	41
1.3.3	HELs	42
CHAPITRE 2	DÉFINITION DES OBJECTIFS ET MÉTHODOLOGIE	47
CHAPITRE 3	ARTICLE : FORWARD PROJECTION OF TRANSIENT SOUND PRESSURE FIELDS RADIATED BY IMPACTED PLATES USING NUMERICAL LAPLACE TRANSFORM	54
3.1	Abstract	55
3.2	Introduction	55
3.3	Sound radiation and propagation	58
3.3.1	Transient sound radiation of an impacted plate	58
3.3.2	Near-field acoustical holography	60
3.4	Time aliasing	61
3.4.1	Description of the phenomenon	61
3.4.2	Illustration of time aliasing in NAH	62
3.5	Numerical Laplace Transform	68
3.5.1	Formulation of the NLT	68
3.5.2	Signal processing issues	69
3.5.3	Application to NAH	71
3.6	Comparison of TNAH with standard NAH	72
3.7	Spatial wraparound errors	76
3.7.1	Description of the phenomenon	76
3.7.2	Sound radiated by a circular baffled piston	78
3.7.3	Consequences in the time domain	79
3.8	Experimental validation	82
3.9	Conclusion	85

3.10 Acknowledgments	86
CHAPITRE 4 COMPLÉMENT DE PROPAGATION DIRECTE	87
4.1 Propagation des données expérimentales	87
4.1.1 Suite de la validation	87
4.1.2 Reconstruction 3D	99
4.2 Passage de l'accélération de la source à la pression acoustique	102
4.2.1 Comparaison de G_{pp} et G_{ap}	104
4.2.2 Plaque avec deux points d'impact	110
CHAPITRE 5 RÉTROPROPAGATION	114
5.1 Filtrage des ondes évanescentes	115
5.1.1 Démarche proposée	115
5.1.2 Étude de la distance de rétropropagation	117
5.1.3 Comportement dynamique de la plaque	123
5.1.4 Comparaison de la TNAH avec la NAH classique	128
5.2 Régularisation de l'inversion de la transformée de Laplace numérique	131
5.2.1 Fondements théoriques	131
5.2.2 Application à la TNAH	133
5.3 Validation expérimentale	140
CHAPITRE 6 DISCUSSION GÉNÉRALE	148
CONCLUSION	153
LISTE DES RÉFÉRENCES	160
ANNEXES	172

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1	Numerical simulation properties.	63
Tableau 3.2	Properties of the piston and the simulated hologram.	79
Tableau 3.3	Properties of the experimental setup.	83
Tableau 4.1	Comparaison des pourcentages d'erreur obtenus avec la NAH classique et la TNAH	96

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Plaque rectangulaire et ses systèmes de coordonnées.	7
Figure 1.2	Exemple de rayonnement transitoire d'une plaque soumise à un impact	16
Figure 1.3	Illustration du phénomène de dispersion apparente.	18
Figure 1.4	Configuration planaire de la NAH.	20
Figure 1.5	Effet de la distance de propagation sur l'échantillonnage des fonctions de Green $\bar{g}_2(x, y, d, \omega)$ et $G_1(k_x, k_y, d, \omega)$	24
Figure 1.6	Exemple de courbe en L.	31
Figure 2.1	Exemples de non-causalité de signaux propagés dans le do- maine des fréquences.	49
Figure 3.1	Rectangular plate and coordinate systems.	58
Figure 3.2	Application of a delay τ_0 to a function using a DFT.	62
Figure 3.3	Time signals of the transverse acceleration of the plate at the impact point and of the impact force.	63
Figure 3.4	Transient radiation of an impacted plate.	64
Figure 3.5	Sound pressure on the impact axis at $z = 35$ cm.	65
Figure 3.6	Geometry of the error duration estimation.	67
Figure 3.7	Distribution of the relative error in the plane $z = 10$ cm after a propagation of $d = 5$ cm using NAH and TNAH.	74
Figure 3.8	Relative error with NAH and TNAH as a function of the propagated distance.	75
Figure 3.9	Propagation from $z_0 = 5$ cm over a distance of 50 cm.	75
Figure 3.10	Replications of an acoustic source due to 2D-DFTs.	77
Figure 3.11	Circular baffled piston geometry and its coordinate system. .	78
Figure 3.12	Velocity profile of the baffled circular piston and its radiated sound pressure	78

Figure 3.13	Simulation of the radiated pressure by the source piston and some of its replications.	80
Figure 3.14	Propagation of the radiated sound pressure from $z_0 = 5$ cm to $z = 65$ cm of a piston using standard NAH and TNAH. . .	80
Figure 3.15	Forward projection of the sound pressure field simulated in the plane $z_0 = 5$ cm to $z = 125$ cm at $y = 0$ cm as a function of x and t	81
Figure 3.16	Experimental setup.	83
Figure 3.17	Propagation of signals measured at $z_0 = 2.2$ cm over a distance of 6.9 cm.	84
Figure 4.1	Repère cartésien du nouveau plan de mesures expérimentales.	88
Figure 4.2	Pression acoustique brute mesurée au niveau de l'hologramme à deux instants t après l'impact.	90
Figure 4.3	Position des trois points de comparaison de la pression acoustique propagée et des mesures faite dans les plans de propagation.	90
Figure 4.4	Projection par TNAH de signaux mesurés en $z_0 = 2$ cm sur différents plan z et comparaison avec les signaux mesurés en trois points d'observations.	91
Figure 4.5	Effet de la dispersion sur l'amplitude de la pression mesurée à l'extérieur de la plaque.	95
Figure 4.6	Reconstruction du champ de pression acoustique dans le plan $Y' = 32,8$ cm à différents instants après l'impact.	100
Figure 4.7	Exemple d'hologramme optique du rayonnement transitoire d'une plaque à un instant donné après l'impact.	101
Figure 4.8	Distribution du pourcentage d'erreur en z pour les deux propageurs utilisés.	105

Figure 4.9	Comparaison des spectres des signaux simulés et propagés par TNAH avec le propagateur G_{ap} en deux points d'observations dans le plan $z = 5$ cm.	107
Figure 4.10	Comparaison sur 1 ms des signaux simulés et propagés par TNAH avec la fonction de Green G_{ap} selon le pas d'échantillonnage spatial choisi.	108
Figure 4.11	Comparaison sur 2,5 ms des signaux simulés et propagés par TNAH avec la fonction de Green G_{ap} selon le pas d'échantillonnage spatial choisi.	109
Figure 4.12	Configuration de la plaque frappée en deux points.	111
Figure 4.13	Reconstruction du champ de pression acoustique rayonnée par la plaque soumise à deux impacts simultanés dans le plan $X = 30$ cm à deux instants après les impacts.	112
Figure 5.1	Courbe en L et erreur relative dans l'axe de frappe en fonction du paramètre de régularisation pour différentes distances de rétropropagation de la pression acoustique.	118
Figure 5.2	Étude du paramètre de filtrage optimal en fonction de la distance de rétropropagation.	119
Figure 5.3	Rétropropagation par TNAH de signaux en $z_0 = 10$ cm sur le plan $z = 1$ cm et comparaison avec les signaux simulés selon le paramètre de régularisation choisi	121
Figure 5.4	Étude de l'optimisation de la régularisation pour la rétropropagation sur 10 cm à partir du plan $z_0 = 10$ cm en utilisant les fonctions de Green G_{pa} , G_{pv} et G_{pd}	124
Figure 5.5	Rétropropagation au niveau de la plaque de la pression simulée en $z_0 = 10$ cm avec les valeurs de β minimisant l'erreur dans l'axe de frappe.	126

Figure 5.6	Comparaison de la NAH standard avec la TNAH pour une rétropropagation de 3 cm à partir du plan $z_0 = 5$ cm en deux points d'observations.	128
Figure 5.7	Comparaison de la plage temporelle avec zéros ajoutés pour une rétropropagation et propagation directe avec la NAH classique sur une distance de 3 cm à partir du plan $z_0 = 5$ cm.	129
Figure 5.8	Courbes en L obtenues lors de la régularisation de la NLT pour quatre distances de rétropropagation.	134
Figure 5.9	Variation du paramètre de régularisation γ en fonction de la distance de rétropropagation.	135
Figure 5.10	Comparaison des signaux temporels régularisé et non-régularisé avec le signal simulé dans l'axe de frappe pour une rétropropagation de 8 cm à partir du plan $z_0 = 10$ cm.	136
Figure 5.11	Effet de fenêtrage dans le domaine temporel dû à la régularisation de Tikhonov pour différents paramètres de régularisation.	137
Figure 5.12	Comparaison du signal régularisé par la TSVD avec celui non-régularisé suite à une rétropropagation de 8 cm à partir du plan $z_0 = 10$ cm.	139
Figure 5.13	Localisation des points de mesure d'accélération de la plaque.	140
Figure 5.14	Courbes en L pour des rétropropagations de 1 et 2 cm. . . .	141
Figure 5.15	Variation de l'erreur relative pour une rétropropagation de pression à pression, et de pression à accélération en fonction de β	142
Figure 5.16	Rétropropagation par TNAH des signaux mesurés en $z_0 = 2$ cm sur une distance d de 1 cm selon deux critères de sélection de β	144

Figure 5.17	Rétropropagation par TNAH des signaux mesurés en $z_0 = 2$ cm sur une distance d de 2 cm selon deux critères de sélection de β	145
Figure III.1	Vue d'ensemble du montage expérimental de NAH.	195
Figure III.2	Antenne constituée de huit microphones.	196
Figure III.3	Support de translation de l'antenne microphonique.	197
Figure III.4	Position du microphone de référence.	197
Figure III.5	Spectre moyen de la pression acoustique mesurée à 2 cm de la plaque.	201
Figure IV.1	Piston circulaire bafflé et son système de coordonnées.	206

LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

Acronymes

pdp	point de pourcentage
2D	en deux dimensions
3D	en trois dimensions
DFT	<i>Discrete Fourier Transform</i>
HELs	<i>Helmoltz Equation Least-Squares</i>
IBEM	<i>Inverse Boundary Elements Method</i>
MFT	<i>Modified Fourier Transform</i>
NAH	<i>Near-Field Acoustical Holography</i>
NLT	<i>Numerical Laplace Transform</i>
SONAH	<i>Statistically Optimized Near-Field Acoustical Holography</i>
SVD	<i>Singular Value Decomposition</i>
TNAH	<i>Transient Near-Field Acoustical Holography</i>
TSVD	<i>Truncated Singular Value Decomposition</i>
TTL	<i>Transistor-Transistor Logic</i>
TTS	<i>Temporary Threshold Shift</i>

Variables et constantes¹

(x, y, z)	système de coordonnées dont l'origine est au centre de la plaque
(x', y', z')	système de coordonnées ayant la même origine que (x, y, z) et qui sert de repère pour la seconde intégrale de Rayleigh

¹Dans l'ensemble du mémoire, les vecteurs sont représentés par des caractères gras.

(X, Y, Z)	système de coordonnées dont l'origine est l'un des coins de la plaque
(X', Y', Z')	système de coordonnées dont l'origine est l'un des coins du plan de mesures expérimentales
(X_0, Y_0)	coordonnées du point d'impact
c	vitesse du son dans le milieu ambiant [m/s]
c_f	vitesse des ondes de flexion dans la plaque [m/s]
d	distance de propagation par NAH [m]
f	fréquence [Hz]
$f_{\max}$	fréquence maximale des signaux [Hz]
h	épaisseur de la plaque [m]
h_p	réponse impulsionnelle du piston
i	$\sqrt{-1}$
$\mathbf{k}$	vecteur d'onde
k	nombre d'onde ($ \mathbf{k} $) [rad/m]
k_c	fréquence de coupure du filtre de Veronesi [rad/m]
k_x, k_y, k_z	composantes du vecteur d'onde $\mathbf{k}$ en x , y et z [rad/m]
k'_z	partie réelle de k_z dans le domaine de Laplace [rad/m]
m	indice des modes de la plaque selon l'axe X
m_s	masse de la sphère [kg]
n	indice des modes de la plaque selon l'axe Y
$p(x, y, z, t)$	pression acoustique spatio-temporelle [Pa]
$\bar{p}(x, y, z, \omega)$	pression acoustique définie dans l'espace (x, y, z) et le domaine fréquentiel (ω) [Pa]
r_p	rayon du piston [m]
r_s	rayon de la sphère [m]

s	variable du domaine de Laplace
t	temps [s]
$u(t)$	déplacement relatif de l'impacteur par rapport à la plaque [m]
$\bar{u}(t)$	déplacement total de l'impacteur par rapport à la plaque [m]
u_0	déplacement maximal de la sphère à l'impact [m]
$v(t)$	vitesse du piston [m/s]
v_s	vitesse de la sphère au moment de l'impact [m/s]
$w(x, y, t)$	déplacement transversal de la plaque [m]
x_m	largeur maximale de la fenêtre de Tukey
x_w	largeur de la pente de la fenêtre de Tukey
z_0	position en z de l'hologramme (plan de mesure) [m]
C_L	vitesse des ondes longitudinales se propageant dans la plaque [m/s]
D	rigidité en flexion de la plaque [N·m]
E	module d'Young [Pa]
$F(t)$	force d'impact [N]
F_0	amplitude maximale de la force d'impact [N]
F_s	fréquence d'échantillonnage [Hz]
$G(k_x, k_y, d, \omega)$	fonction de Green
$H(t)$	fonction de Heaviside
K	constante de la loi de Hertz
L_x, L_y	dimensions de la plaque en x et y [m]
M	masse surfacique de la plaque [kg/m ²]
M_i	masse totale de l'impacteur [kg]

N_t, N_x, N_y	nombre de points en t, x ou y
N_t^*	nombre de points considérés dans le calcul de l'erreur
$\overline{N}_x, \overline{N}_y$	nombre de points en x et y , incluant les zéros ajoutés
$P(k_x, k_y, z, \omega)$	pression acoustique dans l'espace des nombres d'ondes et dans le domaine fréquentiel [Pa]
$\overline{P}(k_x, k_y, k_z, t)$	pression acoustique dans l'espace des nombres d'ondes et dans le temps [Pa]
R	distance entre un élément infinitésimal de la plaque et la position d'un point de mesure de pression acoustique [m]
R_0	distance entre un élément infinitésimal du plan de mesure et la position d'un point de mesure de pression acoustique dans un autre plan [m]
S	expression générale d'un signal de pression acoustique [Pa]
T	durée de la fenêtre d'observation des signaux temporels [s]
$\overline{T}$	durée des signaux temporels avec zéros ajoutés [s]
T_0	durée de l'impact [s]
Z_0	impédance d'entrée d'une plaque de longueur et largeur infinies
α	pente du filtre de Veronesi
β	paramètre du filtre de Tikhonov
γ	paramètre de régularisation de la NLT inverse
$\delta(t), \delta(x, y)$	impulsions de Dirac
ζ	taux d'amortissement visqueux de la plaque

κ	partie imaginaire de k_z dans le domaine de Laplace [rad/m]
λ	longueur d'onde [m]
ν	coefficient de Poisson
ρ	densité [kg/m ³]
ρ_0	densité du milieu ambiant [kg/m ³]
σ	facteur d'amortissement artificiel de la NLT
τ	temps adimensionnel pour la force d'impact
τ_{error}	durée de l'erreur due au repliement temporel
ω	fréquence angulaire [rad/s]
ω_{mn}	fréquences naturelles de la plaque [rad/s]
$\tilde{\omega}_{mn}$	fréquences naturelles amorties de la plaque [rad/s]
$\Gamma(\xi)$	fenêtre de Tukey
$\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta k_x, \Delta k_y$	pas de la discrétisation en t, x, y, k_x ou k_y
Λ	paramètre d'impact (approximation de Heitkämper)
$\Pi(k_x, k_y)$	filtre dans l'espace des nombres d'ondes
$\Phi_{mn}(X, Y)$	modes propres de la plaque

Indices

ap	accélération à pression
m	mesuré
p	plaque
pp	pression à pression
pa	pression à accélération
p_v	pression à vitesse
pd	pression à déplacement

r	reconstruit
s	sphère
w	portion décroissante de la fenêtre de Tukey
T	Tikhonov
V	Veronesi

Autres symboles

$(\dot{})$	$\partial()/\partial t$
$(\ddot{})$	$\partial^2()/\partial t^2$
$()^\dagger$	transposée conjuguée de ()
$(\hat{})$	vecteur unitaire
$\ ()\ _2$	norme euclidienne de ()
Er	pourcentage d'erreur
Re	partie réelle
$\mathcal{F}_t, \mathcal{F}_{xy}$	DFT temporelle (t) ou spatiale (xy)
$\mathcal{F}_t^{-1}, \mathcal{F}_{xy}^{-1}$	DFT inverse
$*$	produit de convolution
$\partial/\partial\chi$	dérivée partielle par rapport à χ
∇	$\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$

Unités

s. u.	sans unités
u. a.	unités arbitraires (en anglais, a. u. (<i>arbitrary units</i>))
dB	décibel
Hz	Hertz
Pa	Pascal

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	ACCÉLÉRATION TRANSVERSALE D'UNE PLAQUE AMORTIE	172
ANNEXE II	MÉTHODES NUMÉRIQUES	175
II.1	Simulation du rayonnement acoustique	175
II.1.1	Comportement dynamique d'une plaque soumise à un impact	175
II.1.2	Routine générale de calcul du rayonnement acoustique tran- sitoire d'une plaque	179
II.1.3	Fonction calculant le rayonnement acoustique transitoire d'une plaque	181
II.1.4	Calcul du rayonnement d'un piston circulaire bafflé	183
II.2	Algorithmes de TNAH	185
II.2.1	Programme général de TNAH	185
II.2.2	Application directe de la fonction de Green	190
II.2.3	Optimisation du filtre de Tikhonov	191
ANNEXE III	MÉTHODOLOGIE EXPÉRIMENTALE	194
III.1	Montage expérimental	194
III.1.1	Système de mesures	195
III.1.2	Nature de la plaque et conditions aux frontières	198
III.1.3	Impact	200
III.1.4	Échantillonnage temporel et spatial	200
III.2	Sources d'erreurs expérimentales	202
ANNEXE IV	RAYONNEMENT ACOUSTIQUE D'UN PISTON CIRCULAIRE BAFFLÉ	206

INTRODUCTION

La surdité vient au deuxième rang des maladies professionnelles relevées au Québec [1]. Outre le bruit continu auquel sont soumis les travailleurs, les bruits d'impact ou impulsionnels peuvent aussi être très nocifs. Ceux-ci sont rencontrés dans plusieurs types d'industries, qu'on pense entre autres aux domaines de l'aéronautique, de la construction immobilière ou au secteur minier. L'assemblage de structures par rivetage ou encore le martelage de pièces métalliques sont des exemples de situations engendrant ce type de bruit.

En plus de leur très grande intensité, les bruits d'impact se caractérisent par un temps de montée très court. Par exemple, lors d'un contact métal-métal, ce temps est de l'ordre de 50 à 100 μ s. Or, ce temps pris à atteindre l'intensité maximale est de loin inférieur à celui que prend le muscle de l'étrier situé dans l'oreille moyenne pour se contracter afin de protéger la cochlée, localisée quant à elle dans l'oreille interne. Dans la plage de fréquences s'étendant de 250 à 4000 Hz, qui est primordiale pour la discrimination de la parole [2], le seuil de ce réflexe, dit stapédien, est de 80 dB [3]. À cette intensité, son temps de latence est de 150 ms alors qu'il peut être réduit à une trentaine de millisecondes pour des sons d'intensité plus élevée [3]. Enfin, le réflexe stapédien assure une atténuation d'environ 10 dB pour les fréquences inférieures à la résonance principale de l'oreille moyenne (située autour de 1000 Hz [4]).

Le réflexe stapédien ne peut donc pas protéger des bruits d'impact qui se présentent isolément, c'est-à-dire moins de 2 ou 3 fois par seconde [3]. D'un autre côté, il a été montré que l'exposition à des bruits d'impact répétés, tout comme à un bruit continu de forte intensité, peut entraîner une augmentation temporaire du seuil auditif (en anglais *temporary threshold shift* ou TTS), voire même permanente

dans le cas des travailleurs qui sont quotidiennement exposés à des niveaux sonores élevés [2].

Outre le port de protecteurs auditifs, une façon de réduire les dangers des bruits d'impact est d'agir directement à la source, leur origine étant principalement vibratoire. Afin d'ajouter de manière conséquente des traitements amortissants pour réduire l'amplitude des vibrations mécaniques, il est important de comprendre les différents phénomènes entrant en jeu lors du rayonnement acoustique de structures soumises à des impacts auxquelles sont fixés lesdits traitements. Pour parvenir à cette fin, des méthodes analytiques [5] et par éléments finis [6] permettent déjà l'étude du comportement dynamique transitoire de poutres ou de plaques lorsque celles-ci sont soumises à des impacts. Néanmoins, le développement d'une approche expérimentale pourrait permettre d'étudier directement le rayonnement acoustique transitoire de certaines structures ou types de traitements amortissants qui sont plus difficiles à modéliser.

Dans un premier temps, le fait de connaître le niveau sonore en différents endroits à proximité d'une source ne suffit pas à comprendre l'ensemble des phénomènes acoustiques résultant d'un impact. Il est aussi important de prendre en compte la directivité du son. Ainsi, il est possible de savoir d'où viennent les ondes sonores. Par exemple, prenons le cas d'un impact sur une plaque à laquelle est fixé un tampon amortissant. Le rayonnement acoustique perçu en un point donné pourrait être dû à l'impact en tant que tel, à la propagation des ondes de flexion dans la plaque ou encore à la réflexion de celles-ci, contre les bords de la plaque ou du tampon. Or, le niveau de pression sonore en ce point, qui peut entre autres être mesuré par un sonomètre ou un dosimètre, ne sera que la somme des divers éléments qui viennent d'être présentés. C'est donc dire que d'importantes informations quant à la nature du rayonnement sont ainsi perdues.

D'autre part, la méthode par formation de voies (en anglais, *beamforming*) a été appliquée à la localisation de sources ponctuelles impulsionnelles [7]. Ainsi, la pression acoustique mesurée dans le champ proche d'une source par au moins trois microphones permet de localiser des bruits de courte durée tels que ceux produits lorsque les roulements à billes d'une machine tournante sont défectueux. Toutefois, dans le cas d'une plaque soumise à un impact, cette approche permettrait de situer le point d'impact et non pas d'étudier l'ensemble de la vibration de la plaque et de son rayonnement.

Enfin, l'interférométrie optique est l'une des principales techniques utilisées pour visualiser le rayonnement acoustique transitoire d'une plaque soumise à un impact [8–10]. Cependant, les dimensions des sources qui peuvent être étudiées sont relativement restreintes, soit environ une trentaine de centimètres de côté. Aussi, le champ acoustique ne peut être visualisé que sur une distance d'une dizaine de centimètres perpendiculairement à la plaque. En fait, ces dimensions sont limitées par la taille que peut atteindre le faisceau lumineux qui permet de former l'image du rayonnement acoustique en question. De plus, l'utilisation de lasers fait en sorte que cette méthode est sensible aux vibrations externes. Bref, cette technique se prête moins à une application industrielle.

Au début des années 80, une autre technique d'imagerie acoustique a vu le jour : l'holographie acoustique en champ proche (de l'anglais *near-field acoustical holography* ou NAH) [11]. Elle consiste en la reconstruction spatiale d'un champ acoustique tridimensionnel à partir de l'amplitude et de la phase de la pression acoustique mesurée en différents points dans le champ proche d'une source sonore. Le terme « holographie » vient du fait que la NAH s'apparente à l'holographie optique, en ce sens où un enregistrement bidimensionnel peut mener à une visualisation tridimensionnelle. Un quadrillage microphonique remplace alors le support

photosensible. Notons toutefois que contrairement à l'holographie optique, ce ne sont pas des interférences qui sont enregistrées dans le cas de la NAH.

Alors que divers dérivés de la NAH ont été largement étudiés et optimisés en régime stationnaire, leur application en rayonnement transitoire est relativement limitée, particulièrement en raison de la difficulté à obtenir une répétabilité satisfaisante des résultats. Les transducteurs piézoélectriques, souvent modélisés par des pistons, ont été les sources acoustiques ayant fait l'objet du plus d'études en régime transitoire [12–17]. Ces études ont été faites autant par des simulations qu'expérimentalement.

Néanmoins, notons que les plaques se rapprochent davantage que les pistons des différentes structures rencontrées en industrie. Or, l'applicabilité de la NAH pour visualiser le rayonnement transitoire des plaques n'a pas été vérifiée au moyen de simulations. Seulement quelques cas d'impacts sur des plaques ont été étudiés expérimentalement, sans toutefois mener à la visualisation complète du rayonnement de la source [15, 16, 18]. Comme la distribution spatio-temporelle du champ acoustique d'une plaque soumise à un impact n'est pas aussi simple que celle d'un piston, les quelques résultats présentés dans la littérature ne permettent pas de conclure sur l'ensemble de l'utilisation de la méthode.

C'est donc pourquoi le présent projet de maîtrise vise à étudier l'applicabilité de l'holographie acoustique en champ proche (NAH) au rayonnement transitoire de plaques soumises à des impacts. Après avoir étudié, au moyen de simulations, dans quelle mesure la NAH est applicable à ce type de rayonnement, des modifications y seront apportées pour la rendre utilisable en régime transitoire. La NAH ainsi modifiée sera validée expérimentalement dans le cas d'impacts sur une plaque uniforme. Des recommandations pourront ainsi être faites quant à l'éventuelle applicabilité de la technique à des structures plus complexes.

Ce mémoire comporte six chapitres. Le premier chapitre présente brièvement la théorie reliée au rayonnement transitoire d'une plaque soumise à un impact, allant de la force d'impact au champ acoustique, en passant par le comportement vibratoire de la plaque. Une revue de la littérature concernant les différentes techniques de reconstruction de champ acoustique y est aussi présentée et ce, tant pour les régimes stationnaire que transitoire. Au second chapitre, les objectifs du projet ainsi que la démarche à suivre pour les atteindre sont précisés en se basant sur les caractéristiques du rayonnement transitoire des plaques et sur celles des méthodes de visualisation du champ acoustique.

Le troisième chapitre présente un article soumis à *The Journal of the Acoustical Society of America*. Cet article décrit les problèmes reliés à la NAH telle qu'elle a déjà été utilisée dans la littérature pour la propagation du champ de pression acoustique rayonnée par une plaque soumise à un impact. Une nouvelle approche de calcul y est proposée et validée expérimentalement. Le chapitre 4 fournit davantage de détails sur la propagation de signaux expérimentaux à des distances considérables de la source. Qui plus est, cette étude mène à une visualisation spatiale et temporelle du champ acoustique qui permet d'identifier les différentes phases du rayonnement transitoire d'une plaque de plexiglas dans les instants suivant un impact par une bille d'acier. Au cinquième chapitre, la nouvelle méthode de propagation des signaux acoustiques est comparée avec la NAH traditionnelle en matière de rétro-propagation, c'est-à-dire la propagation des signaux acoustiques vers la source. Cet aspect de la NAH étant considéré comme un problème inverse, il est plus difficile à traiter, d'où le fait qu'il soit considéré séparément. Ce chapitre vient ainsi compléter l'ensemble de la reconstruction tridimensionnelle du champ acoustique amorcée aux précédents chapitres.

CHAPITRE 1

REVUE DE LA LITTÉRATURE

Ce chapitre brosse tout d'abord un portrait des publications reliées au rayonnement transitoire des plaques. Les façons de calculer la réponse vibratoire et le rayonnement acoustique sont présentées, en plus de quelques modèles permettant d'obtenir la force d'impact. Une brève présentation des phénomènes observables lors du rayonnement est aussi faite. Ensuite sont abordées différentes techniques de reconstruction du champ de pression rayonnée par une source ainsi que de son comportement vibratoire à partir de mesures acoustiques. Bien que l'holographie acoustique en champ proche y occupe une place de choix, puisqu'elle a fait l'objet de plusieurs études au fil des années, quelques dérivés de cette approche sont aussi présentés.

1.1 Rayonnement acoustique transitoire d'une plaque soumise à un impact

Considérons tout d'abord la plaque mince de dimensions $L_x \times L_y$ et d'épaisseur h présentée à la figure 1.1. Un modèle couramment utilisé pour représenter une plaque mince est celui de Love-Kirchhoff, principalement basé sur l'hypothèse que seules les ondes de flexion se propagent dans la plaque. De plus, la densité ρ_0 du fluide entourant la plaque est beaucoup plus faible que celle de la plaque, notée ρ_p . Trois systèmes de coordonnées sont aussi indiqués à la figure 1.1. Alors que les coordonnées (X, Y, Z) ont pour origine le coin de la plaque, l'origine des systèmes d'axes (x, y, z) et (x', y', z') est située au centre de la plaque.

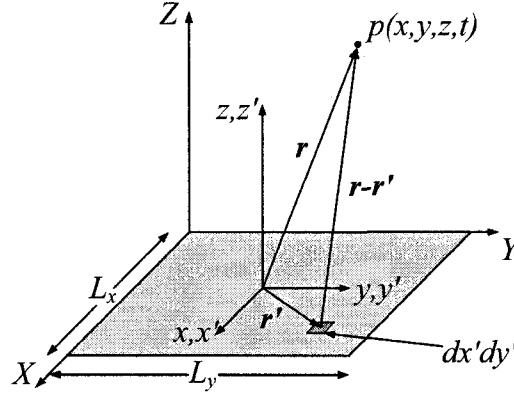


Figure 1.1 – Plaque rectangulaire et ses systèmes de coordonnées. Un élément infinitésimal de la plaque est indiqué sous la forme $dx'dy'$.

1.1.1 Réponse vibratoire de la plaque

L'équation différentielle régissant le déplacement transversal $w(X, Y, t)$ de la plaque sous l'effet d'une force $F(t)$ arbitraire appliquée au point (X_0, Y_0) s'écrit

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} w(X, Y, t) + 2\zeta\Omega \frac{\partial}{\partial t} w(X, Y, t) + \Omega^2 \nabla^4 w(X, Y, t) = \frac{F(t)}{M} \delta(X - X_0, Y - Y_0) \quad (1.1)$$

où δ est une impulsion de Dirac, ζ représente le taux d'amortissement visqueux et $\Omega^2 = D/M$, où

$$M = \rho_p h \quad \text{et} \quad D = \frac{E_p h^3}{12(1 - \nu_p^2)}$$

sont respectivement la masse surfacique et la rigidité en flexion de la plaque. Le module d'Young et le coefficient de Poisson sont respectivement notés E et ν . La solution à l'équation (1.1) s'écrit dans le domaine du temps sous la forme

$$w(X, Y, t) = \frac{1}{M} \sum_m \sum_n \frac{\Phi_{mn}(X_0, Y_0) \Phi_{mn}(X, Y)}{\tilde{\omega}_{mn}} \times \left\{ F(t) * e^{-\zeta \omega_{mn} t} \sin(\tilde{\omega}_{mn} t) \right\}. \quad (1.2)$$

où Φ_{mn} sont les modes propres de la plaque, ω_{mn} sont les fréquences naturelles et

$$\tilde{\omega}_{mn} = \omega_{mn} \sqrt{1 - \zeta^2}.$$

Quant à l'astérisque (*), il représente le produit de convolution.

Dans le cas d'une plaque dont les quatre côtés sont simplement supportés, on a

$$\Phi_{mn} = \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}} \sin\left(\frac{m\pi X}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi Y}{L_y}\right) \quad (1.3)$$

et

$$\omega_{mn} = \left(\frac{D}{M}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \right]. \quad (1.4)$$

1.1.2 Calcul de la force d'impact

La force qu'exerce un objet percutant une structure est fonction des propriétés physiques et mécaniques des deux corps entrant en contact. Un premier modèle pour un impact purement élastique est défini par la loi de Hertz selon laquelle [19]

$$F(t) = K u(t)^{3/2}. \quad (1.5)$$

Dans cette dernière expression, $u(t)$ est le déplacement relatif de l'impacteur par rapport à la structure. Dans le cas d'une sphère de rayon r_s frappant une plaque infiniment épaisse avec une vitesse v_s , on a

$$K = \frac{4}{3} \sqrt{r_s} \left(\frac{E'_s E'_p}{E'_s + E'_p} \right) \quad (1.6)$$

où s et p sont respectivement les indices de la sphère et de la plaque, et $E' = E/(1 - \nu^2)$. Il est montré par Goldsmith que la valeur maximale que prend $u(t)$ lors

de l'impact (toujours dans le contexte d'une plaque infiniment épaisse) est définie par [19]

$$u_0 = \left(\frac{5m_s v_s^2}{4K} \right)^{2/5}, \quad (1.7)$$

m_s étant la masse de l'impacteur. Ce déplacement maximal croît donc quand la vitesse d'impact et la densité de la sphère augmentent, alors qu'il diminue avec l'augmentation du module d'Young des deux objets.

Quant à la durée T_0 de ce contact, elle est donnée par la relation [19]

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{4\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{2}{5})}{5\Gamma(\frac{9}{10})v_s^{1/5}} \left(\frac{5m_s}{4K} \right)^{2/5} \\ &\approx \frac{2,9432}{v_s^{1/5}} \left(\frac{5m_s}{4K} \right)^{2/5} \end{aligned} \quad (1.8)$$

où Γ représente la fonction Gamma. Cette durée augmente elle aussi en fonction de ρ_s , et elle diminue quand v_s et E croissent. À partir des valeurs de u_0 et T_0 , le déplacement relatif de la sphère par rapport à la plaque peut être approximé par une demi-période de sinus, c'est-à-dire [19]

$$u(t) = \begin{cases} u_0 \sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) & \text{pour } 0 \leq t \leq T_0 \\ 0 & \text{pour } t > T_0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Par conséquent, en combinant les équations (1.5) et (1.9), la force d'impact peut s'écrire sous la forme

$$F(t) = \begin{cases} F_0 \sin^{3/2}\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) & \text{pour } 0 \leq t \leq T_0 \\ 0 & \text{pour } t > T_0 \end{cases} \quad (1.10)$$

avec

$$\begin{aligned} F_0 &= K u_0^{3/2} \\ &= \left(\frac{5}{4}\right)^{3/5} m_s^{3/5} v_s^{6/5} K^{2/5}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

On voit donc à partir de cette équation et des commentaires précédents que contrairement à u_0 et T_0 , l'amplitude de la force d'impact augmente avec la croissance de chaque paramètre.

Toutefois, tel que mentionné précédemment, ce modèle de force d'impact a été réalisé pour une plaque « infiniment » épaisse. Dans le cas des plaques minces, la flexibilité de celles-ci entre en jeu dans le calcul. Pour ce faire, considérons tout d'abord le déplacement total de la sphère parfaitement rigide qui prend la forme

$$\bar{u}(t) = u(t) + w(X_0, Y_0, t)$$

où $w(X_0, Y_0, t)$ est le déplacement transversal de la plaque au point d'impact défini à partir de l'équation (1.2). Sachant que la force exercée par la plaque sur la sphère est d'amplitude $F(t)$ et de sens opposé au déplacement de la sphère, l'équilibre dynamique de cette dernière s'écrit alors [20]

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(t) + w(X_0, Y_0, t)) + \frac{F(t)}{m_s} = 0, \quad (1.12)$$

qui peut être réécrite sous forme intégrale telle que [19]

$$u(t) = v_s t - \frac{1}{m_s} \int_0^t \left[\int_0^t F(t) dt \right] dt - w(X_0, Y_0, t) \quad (1.13)$$

en supposant que la plaque est initialement au repos.

Avec l'équation (1.5), on peut réécrire l'équation (1.13) sous la forme

$$\left(\frac{F(t)}{K}\right)^{2/3} = v_s t - \frac{1}{m_s} \int_0^t \left[\int_0^t F(t) dt \right] dt - w(X_0, Y_0, t) \quad (1.14)$$

de telle sorte que la seule inconnue soit $F(t)$, si le terme $w(X_0, Y_0, t)$ est remplacé par l'équation (1.2). Cette approche a montré que la flexibilité de la plaque diminue considérablement l'amplitude de la force d'impact [19].

Comme le terme $w(X_0, Y_0, t)$ de l'équation (1.2) est calculé par un produit de convolution, l'équation (1.14) contient deux intégrales qui doivent être calculées numériquement. De plus, l'exposant du terme de gauche dans l'équation fait en sorte que cette équation n'est pas linéaire et qu'un algorithme de résolution tel que celui de Newton doit être utilisé.

En raison du temps de calcul relativement élevé pour l'évaluation de l'équation (1.14), une première approximation a été développée [19]. Elle est principalement basée sur le fait qu'en l'absence d'amortissement visqueux, le calcul de $w(X_0, Y_0, t)$ avec l'équation (1.2) fait intervenir le terme

$$\frac{1}{M} \sum_m \sum_n \frac{\Phi_{mn}^2(X_0, Y_0)}{\omega_{mn}} \sin(\omega_{mn} t).$$

Bien que Φ_{mn} et ω_{mn} dépendent à la fois de la géométrie de la plaque et de ses conditions aux frontières, la somme des contributions de tous les modes, elle, peut en être considérée indépendante. Cette affirmation n'est valide que si la durée du contact est inférieure au temps que prennent les ondes de flexions à atteindre les bords de la plaque et à être réfléchies jusqu'au point d'impact. Autrement dit, plus grandes sont les dimensions de la plaque et plus l'impact se produit au centre de cette dernière, meilleure est l'approximation.

Cette approximation a pour effet de transformer le produit de convolution de l'équation (1.14) lorsqu'il n'y a pas d'amortissement en une simple intégrale de la force, c'est-à-dire [19]

$$w(X_0, Y_0, t) = \frac{1}{Z_0} \int_0^t F(t) dt \quad (1.15)$$

où Z_0 est l'impédance d'entrée d'une plaque mince ayant les mêmes caractéristiques, mais dont les dimensions sont infinies. Cette impédance s'écrit $Z_0 = 8\sqrt{DM}$ où on rappelle que D et M sont respectivement la rigidité en flexion de la plaque et sa masse surfacique [21]. De plus, en rapport à ce qui a été écrit précédemment, on a la correspondance [19]

$$Z_0 = \left[\frac{1}{M} \sum_m \sum_n \frac{\Phi_{mn}^2(X_0, Y_0)}{\omega_{mn}} \sin(\omega_{mn} t) \right]^{-1}.$$

En la combinant aux équations (1.5) et (1.15), l'équation différentielle donnée par l'équation (1.12) devient alors [21]

$$\frac{d^2}{dt^2} u(t) + \frac{K}{Z_0} \frac{d}{dt} (u(t)^{3/2}) + \frac{K}{m_s} u(t)^{3/2} = 0. \quad (1.16)$$

Malgré le fait que cette dernière équation puisse être résolue numériquement, Heitkämper en a approximé la solution, soit [21]

$$F(t) \approx F_0 \left\{ \frac{1.1}{1 + \Lambda + 2\Lambda^2} \sin(0,97\tau)^{3/2} \times \exp[-(0,4\tau)^4] H\left(\frac{\pi}{0,97} - \tau\right) + \left(\frac{1 + 2/\Lambda}{1 + \Lambda}\right) \left(\frac{\tau}{\tau + 1/\Lambda}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{-\tau}{\Lambda}\right) \right\} \quad (1.17)$$

où $\tau = \pi t/T_0$ est le temps adimensionnel, $H(t)$ est la fonction de Heaviside alors que T_0 et F_0 sont définis respectivement par les équations (1.8) et (1.11). Le paramètre

Λ est quant à lui défini par [21]

$$\Lambda = \frac{\pi^{3/5}}{3^{1/2}} \left(\frac{r_s}{h} \right)^2 \left(\frac{v_s}{C_L} \right)^{1/5} \left(\frac{\rho_s}{\rho_p} \right)^{3/5} \left(\frac{E'_s}{E'_s + E'_p} \right)^{2/5} \quad (1.18)$$

où C_L correspond, selon Heitkämper, à la vitesse des ondes longitudinales se propageant dans la plaque.

Toutefois, on remarque deux différences notables entre les paramètres présentés par Goldsmith [19] et ceux présentés par Heitkämper [21]. Premièrement, bien que présenté par Heitkämper comme étant l'amplitude maximale de la force hertzienne, le paramètre F_0 ne contient pas le facteur $(5/4)^{3/5}$ de l'équation (1.11). Sans ce facteur dont tient compte Goldsmith, cette amplitude maximale est sous-estimée d'un peu plus de 10 %.

Deuxièmement, le paramètre Λ diffère en ce qui a trait à C_L . En effet, Heitkämper présente ce dernier comme étant la vitesse des ondes longitudinales dans le matériau dont est constitué la plaque, sans toutefois en expliciter la définition. Or, la vitesse de telles ondes dépend également des dimensions latérales du milieu dans lequel ces ondes se propagent. Par exemple, dans une tige mince, cette vitesse est donnée par la relation [22]

$$C_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (1.19)$$

alors que dans une plaque, elle prend la forme [22]

$$C_L = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}. \quad (1.20)$$

Qui plus est, Goldsmith présente plutôt ce paramètre comme étant

$$C_L = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}, \quad (1.21)$$

ce qui ne correspond ni à l'équation (1.19) ni à l'équation (1.20). En fait, l'expression de l'équation (1.21) ne représente pas une vitesse propre au matériau, bien qu'elle en ait les unités. En comparant les équations (1.19) et (1.21), la différence d'amplitude des forces correspondantes est très minime, soit d'environ 1 % pour des vitesses d'impact de l'ordre de 1 m/s pour un contact acier-aluminium. Néanmoins, cette différence croît à quelques pourcents lorsqu'on compare les équations (1.20) et (1.21). Puisque les raisonnements de Goldsmith et Heitkämper pour le calcul de Λ ont comme origine l'équation (1.16), on peut en conclure que la vitesse de propagation des ondes longitudinales dans une plaque définie par l'équation (1.20) n'est pas le terme C_L pertinent au calcul de Λ . En fait, il apparaît plutôt que Heitkämper a tout simplement négligé le coefficient de Poisson pour son terme C_L .

Les modèles présentés jusqu'à présent ne tiennent compte que d'un comportement élastique des deux matériaux en contact. Troccaz *et al.* ont présenté un modèle d'impact inélastique dans un contexte d'étude du rayonnement transitoire des plaques [20]. La loi de Hertz donnée par l'équation (1.5) y est remplacée par une relation entre la force d'impact et le déplacement relatif de la sphère comportant trois phases :

1. La première phase est élastique et définie par la loi de Hertz $F(t) = Ku(t)^{3/2}$. Elle se termine lorsque la contrainte exercée par la sphère atteint la limite d'élasticité dynamique R_{ed} du matériau composant la plaque.
2. La seconde phase est purement plastique et la force d'impact devient $F(t) = 2\pi r_s R_{ed} u(t)$ jusqu'à l'atteinte de son maximum F'_0 .
3. La dernière phase redevient élastique et correspond au rebond. La force d'impact s'écrit alors $F(t) = F'_0[(u(t) - u_r)/(u'_0 - u_r)]^{3/2}$ où u_r et u'_0 sont respectivement le déplacement résiduel plastique et le déplacement maximal total, c'est-à-dire élastique et plastique.

Les auteurs ont combiné ces expressions de la force d'impact avec l'équation (1.13) pour déterminer la force en fonction du temps. En raison de la plasticité de la plaque, l'amplitude maximale de la force est plus faible que dans le cas purement élastique. Toutefois, la différence dans la durée du contact est négligeable.

1.1.3 Rayonnement acoustique

Une fois que la réponse vibratoire de la plaque est calculée à partir du profil de force d'impact choisi, la seconde intégrale de Rayleigh permet de calculer la pression acoustique qui est donnée par la relation [23]

$$p(x, y, z, t) = \frac{\rho_0}{2\pi} \iint \ddot{w}\left(x', y', t - \frac{R}{c}\right) \frac{dx' dy'}{R} \quad (1.22)$$

avec

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

où comme on peut le voir à la figure 1.1, le vecteur $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ représente la position d'un point de mesure de pression acoustique et $\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}}$ correspond à la position d'un élément de la plaque $dx'dy'$. La vitesse du son dans le milieu ambiant y est donnée par le paramètre c . Quant à l'accélération transversale, elle s'obtient par la double dérivation de l'équation (1.2) dont le calcul est détaillé à l'Annexe I :

$$\begin{aligned} \ddot{w}(X, Y, t) = & \frac{1}{M} \sum_m \sum_n \Phi_{mn}(X_0, Y_0) \Phi_{mn}(X, Y) \\ & \times \left\{ F(t) * \left(\left[(\zeta^2 \omega_{mn}^2 / \tilde{\omega}_{mn} - \tilde{\omega}_{mn}) \sin(\tilde{\omega}_{mn} t) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - 2\zeta \omega_{mn} \cos(\tilde{\omega}_{mn} t) \right] e^{-\zeta \omega_{mn} t} + \delta(t) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

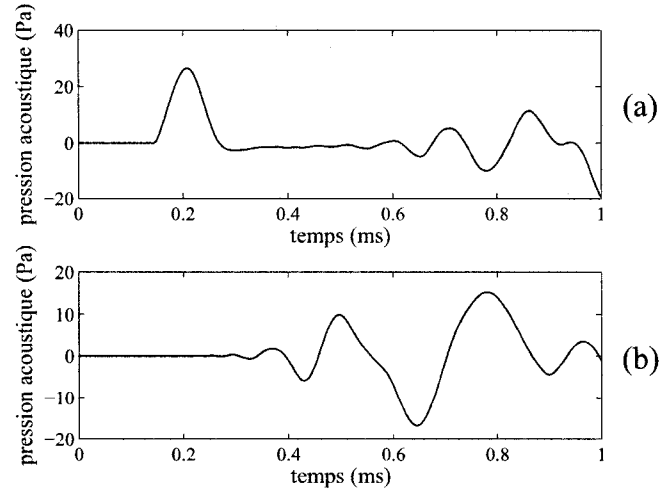


Figure 1.2 – Exemples de rayonnement transitoire à 5 cm d’une plaque soumise à un impact, (a) dans l’axe de frappe et (b) à 28 cm de cet axe.

Il est primordial de noter que cette intégrale est valable à deux conditions. Premièrement, on considère que la source est bafflée, c’est-à-dire que la vitesse transversale à l’extérieur de celle-ci est nulle. Il n’y a donc pas d’interaction entre le rayonnement des deux côtés de la plaque. Deuxièmement, le rayonnement est produit en champ libre, condition dont on se rapproche expérimentalement en chambre anéchoïque.

Deux exemples de rayonnement acoustique transitoire d’une plaque soumise à un impact sont présentés à la figure 1.2. La figure 1.2(a) illustre la pression acoustique rayonnée à 5 cm de la plaque dans l’axe de frappe (perpendiculaire à la plaque et passant par le point d’impact). À la figure 1.2(b), la pression acoustique est donnée, toujours à 5 cm de la plaque, mais cette fois à 28 cm de l’axe de frappe.

On voit tout d’abord à la figure 1.2(a) une crête de pression initiale de forte amplitude. Elle est due à la déformation brusque de la plaque au point d’impact et sa durée correspond environ à la durée d’application de la force [8–10, 20, 24]. La suite du signal est causée par la propagation des ondes de flexion dans la plaque. Or, la direction de propagation de ces ondes de flexion dicte la direction de propa-

gation des ondes acoustiques rayonnées par la plaque. Comme les ondes de flexion en question se propagent initialement en s'éloignant du point d'impact, il en est de même pour les ondes acoustiques. C'est ce qui explique que la pression après la crête est relativement faible, puisqu'il s'écoule un certain temps entre le passage du front d'onde de flexion initial et celui de la réflexion contre les bords de la plaque. Après avoir été réfléchies, les ondes de flexions se propagent vers le point d'impact, d'où les effets observables à la figure 1.2(a) à partir de $t \approx 0,45$ ms.

Alors que dans l'axe de frappe, l'augmentation du niveau de pression acoustique se produit subitement autour de $t = 0,15$ ms, on voit à la figure 1.2(b) que loin de l'axe de frappe, la pression croît graduellement à partir de $t \approx 0,25$ ms. Pour comprendre ce phénomène, mentionnons tout d'abord que la vitesse des ondes de flexion dans la plaque c_f est fonction de leur fréquence ω , c'est-à-dire que

$$c_f = \left[\frac{E_p h}{12 \rho_p (1 - \nu^2)} \right]^{1/4} \omega^{1/2}. \quad (1.24)$$

Ainsi, la plaque est un milieu dispersif dans lequel les hautes fréquences se propagent plus rapidement que les basses. De plus, rappelons que les ondes de flexion générées par l'impact couvrent une large bande de fréquences ω .

Comme l'illustre la figure 1.3, la continuité de la propagation des ondes à l'interface air-plaque implique que pour des vitesses de propagation élevées des ondes de flexion, les fronts d'ondes acoustiques sont obliques, sauf lorsque $c_f = c$ auquel cas le front d'onde est hémisphérique [8]. Comme les fronts d'ondes eux-mêmes se propagent à la vitesse du son c dans le milieu ambiant, les hautes fréquences arrivent au point d'observation avant les basses. On parle alors de dispersion apparente [24]. Ce phénomène se traduit sur le signal de la figure 1.2(b) par des oscillations rapides vers $t = 0,25$ ms et dont la période augmente graduellement pour des temps plus élevés. C'est d'ailleurs pourquoi on utilise l'expression « dispersion apparente »

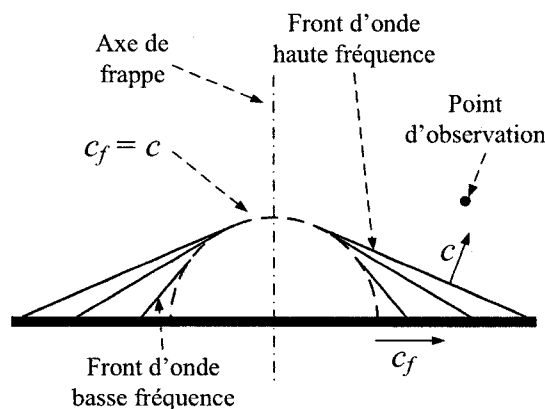


Figure 1.3 – Illustration du phénomène de dispersion apparente (figure inspirée de [24]).

puisque cette dispersion est visible dans les signaux malgré le fait que l'air ne soit pas un milieu dispersif.

De plus, on peut constater à la figure 1.3 que l'ensemble des fronts d'ondes coïncident dans l'axe de frappe. C'est d'ailleurs pourquoi l'amplitude de la crête de pression initiale présentée à la figure 1.2(a) est plus importante que celle du reste du signal.

Par ailleurs, Troccaz *et al.* ont étudié l'influence des différentes propriétés de la plaque lors d'un impact inélastique tel que celui décrit à la section précédente [20]. Ils ont entre autres mis en évidence que l'effet de masse de la plaque joue un rôle important dans l'amplitude de la crête de pression initiale, comme en fait foi l'équation (1.23). Ainsi, avec une vitesse initiale de l'impacteur et des dimensions identiques, la pression de la crête sera plus élevée dans le cas d'une plaque d'aluminium comparativement à une plaque d'acier, bien que la force exercée sur cette dernière soit le double. De plus, la pression acoustique de cette même crête croît de 6 dB à chaque fois que la vitesse d'impact double. Enfin, peut-être l'observation la plus intéressante dans un contexte de sécurité au travail, l'atténuation de

l'amplitude du pic initial causée par l'augmentation de l'amortissement visqueux est négligeable. En fait, seule la pression acoustique due aux ondes de flexion est réduite puisque ce sont celles-ci qui sont amorties.

Finalement, bien qu'on ait négligé la pression ambiante dans l'équation (1.1), il a été montré qu'en vibrations libres, ce qui est le cas dans les instants suivant l'application de la force d'impact, l'amortissement dû au rayonnement acoustique n'est pas négligeable [25]. Il a aussi été mis en évidence expérimentalement et par des simulations dans le domaine du temps que ce type d'amortissement est dominant aux fréquences supersoniques ($c_f > c$) dans des contextes où l'amortissement structural est faible (par exemple, pour une plaque libre) [26, 27]. Ces mêmes auteurs ont aussi étudié les amortissements thermoélastique et viscoélastique. Alors que le premier mécanisme est présent dans le cas des plaques métalliques, le second est prédominant dans le cas du verre, des matériaux à base de fibres de carbone ou encore du bois [26, 27].

Bref, à la lumière de ces observations quant au rayonnement transitoire de plaques soumises à des impacts, on constate que les signaux de pression acoustique dans le domaine du temps contiennent beaucoup d'information sur les structures impliquées. C'est pourquoi les prochaines sections présentent différentes méthodes de reconstruction tridimensionnelle du champ acoustique afin de voir dans quelle mesure elles seraient applicables pour étudier le rayonnement des plaques dans le domaine temporel.

1.2 Holographie acoustique en champ proche

Introduite par Williams au début des années 80 [11], l'holographie acoustique en champ proche (NAH) permet la reconstruction des champs de pression acoustique

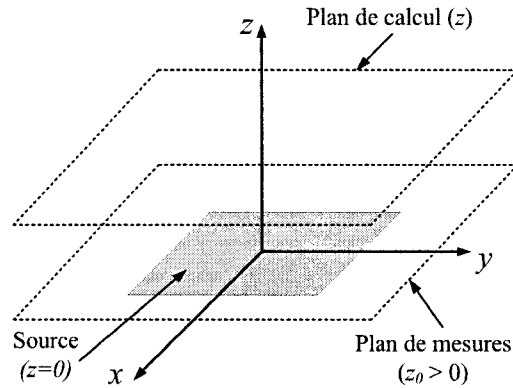


Figure 1.4 – Configuration planaire de la NAH.

et de vitesse particulière aux environs d'une source sonore à partir d'un nombre fini de mesures de pression. Bien qu'elle ait été aussi formulée en coordonnées cylindriques et sphériques [23], cette section concerne la configuration planaire présentée à la figure 1.4 et qui comprend la source dans le plan $z = 0$, l'hologramme (ou plan de mesures) situé en $z = z_0$ ainsi que le plan de calcul z qui sont tous trois parallèles.

Bien que le plan z soit présenté comme étant plus loin de la source que le plan de mesures, certaines formulations permettent de rétropropager les pressions mesurées dans le plan z_0 jusqu'à la source située en $z = 0$. Cette section présente les différentes formulations de la NAH planaire, les conditions d'applicabilité, les contraintes de mise en oeuvre ainsi que des techniques d'interpolation et d'extrapolation des champs de pression mesurés.

1.2.1 Approches théoriques suggérées en propagation directe

Comme cela a été vu à la section précédente concernant le rayonnement acoustique des plaques soumises à des impacts, la seconde équation de Rayleigh donnée par l'équation (1.22) permet de calculer la pression acoustique à partir de l'accélération

de la source. De la même façon, la première équation de Rayleigh permet le calcul de cette même pression, mais cette fois à partir de la pression connue sur une autre surface. Lorsque celle-ci est plane et se trouve dans le plan $z = z_0$, cette équation s'écrit [28]

$$p(\mathbf{r}, t) = \frac{d}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{R_0^3} p\left(\mathbf{r}_0, t - \frac{R_0}{c}\right) + \frac{1}{cR_0^2} \frac{\partial}{\partial t} p\left(\mathbf{r}_0, t - \frac{R_0}{c}\right) \right] dx_0 dy_0 \quad (1.25)$$

avec

$$R_0 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$$

où $\mathbf{r}_0 = x_0\hat{\mathbf{x}} + y_0\hat{\mathbf{y}} + z_0\hat{\mathbf{z}}$ est un vecteur indiquant la position des points de mesure de la pression. Notons aussi que l'équation (1.25) n'est valable que pour $z > z_0$ et que la distance entre les plans de mesure et de calcul est donnée par $d = z - z_0$.

Comme cette approche est définie dans le domaine du temps, elle a été peu utilisée puisque la majorité des publications dans le domaine étudient les sources acoustiques dans le domaine des fréquences. Elle a néanmoins été l'une de celles étudiées par de La Rochefoucauld dans sa thèse portant sur le rayonnement transitoire des sources acoustiques [15]. Évaluée numériquement, cette intégrale permet de calculer la pression acoustique en n'importe quel point pour lequel $z > z_0$ (contrairement aux méthodes basées sur une transformée de Fourier spatiale qui seront vues plus loin). Elle nécessite toutefois un nombre important de points de mesures pour obtenir des résultats jugés satisfaisants par l'auteure. Pour des surfaces rayonnantes relativement grandes, ce qui est souvent le cas des plaques, la reconstruction du champ de pression peut alors être fastidieuse, d'autant plus que l'intégrale doit être calculée pour chacun des points du champ de pression. Par contre, la reconstruction ne se limite pas à des sources planaires, tant que leur courbure est faible comparativement à leur nombre d'onde caractéristique [17].

Sapozhnikov *et al.* ont aussi utilisé une formulation similaire aux équations (1.22) et (1.25) pour le calcul de l'accélération transversale de transducteurs [17]. Encore une fois, le nombre de points de mesure se doit d'être très élevé. De plus, les résultats présentés sous forme d'accélération efficace dans le plan reconstruit ne permettent pas de conclure sur la qualité des résultats dans le domaine du temps.

Afin de réduire le nombre de points de mesures ainsi que le temps de calcul, l'approche préconisée pour la NAH est de travailler dans le domaine des fréquences. Pour ce faire, établissons tout d'abord les définitions des paires de transformées de Fourier temporelles et spatiales appliquées à la pression acoustique [23], soit

$$P(k_x, k_y, z, \omega) = \int_0^{+\infty} \iint_{-\infty}^{+\infty} p(x, y, z, t) e^{-i(k_x x + k_y y - \omega t)} dx dy dt \quad (1.26)$$

et

$$p(x, y, z, t) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} P(k_x, k_y, z, \omega) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} dk_x dk_y d\omega. \quad (1.27)$$

Ainsi, la pression acoustique dans un plan z donné est considérée comme une superposition d'ondes planes d'amplitudes $P(k_x, k_y, z, \omega)$ et de fréquences spatiales k_x et k_y dans les directions x et y respectivement.

Le champ de pression mesuré dans un plan z_0 peut être propagé à tout plan $z \geq 0$ en remplaçant les trois produits de convolution de l'équation (1.25) par la relation suivante dans le domaine des fréquences :

$$P(k_x, k_y, z, \omega) = P(k_x, k_y, z_0, \omega) G(k_x, k_y, d, \omega) \quad (1.28)$$

où $G(k_x, k_y, d, \omega)$ est la fonction de Green qui dépend notamment de la distance de propagation d .

Veronesi et Maynard ainsi que de La Rochefoucauld *et al.* ont montré que dans les cas stationnaire [29] et transitoire [16], il y a deux façons de formuler G selon la distance de propagation. Pour de faibles valeurs de d (de l'ordre du centimètre [15]) il est préférable d'échantillonner la fonction de Green directement dans l'espace des nombres d'ondes, c'est-à-dire

$$G_1(k_x, k_y, d, \omega) = e^{ik_z d} \quad (1.29)$$

où $k_z^2 = k^2 - k_x^2 - k_y^2$ et $k = \omega/c$. Cette expression permet d'ailleurs de distinguer les ondes propagatives ($k_z^2 \geq 0$) des ondes évanescentes ($k_z^2 < 0$). Dans le premier cas, l'exposant de l'équation (1.29), soit $ik_z d$, est imaginaire et les ondes planes correspondantes ne subissent qu'un changement de phase. Dans le second cas, cet exposant est réel et négatif, et donc l'exponentielle décroît avec la distance de propagation. La limite entre ces deux types d'ondes correspond au demi-cercle pointillé de la figure 1.3, soit celui pour lequel $c = c_f$. C'est aussi pourquoi l'holographie acoustique est dite en « champ proche », c'est-à-dire que les mesures sont prises près de la source pour que les ondes évanescentes ne soient pas noyées dans le bruit.

Pour de plus grandes distances de propagation, il a été montré qu'il est plus efficace d'échantillonner la fonction de Green $\bar{g}_2(x, y, d, \omega)$ aux mêmes points (x, y) que la pression acoustique a été mesurée dans le plan z_0 , et d'en faire la transformée de Fourier spatiale (notée $\mathcal{F}_{xy}$) [16, 29]. Cette fonction de transfert s'écrit alors

$$G_2(k_x, k_y, d, \omega) = \mathcal{F}_{xy}\{\bar{g}_2(x, y, d, \omega)\} \quad (1.30)$$

avec

$$\bar{g}_2(x, y, d, \omega) = \frac{de^{ik\sqrt{x^2+y^2+d^2}}}{2\pi(x^2+y^2+d^2)^{3/2}} \left(1 - ik\sqrt{x^2+y^2+d^2}\right). \quad (1.31)$$

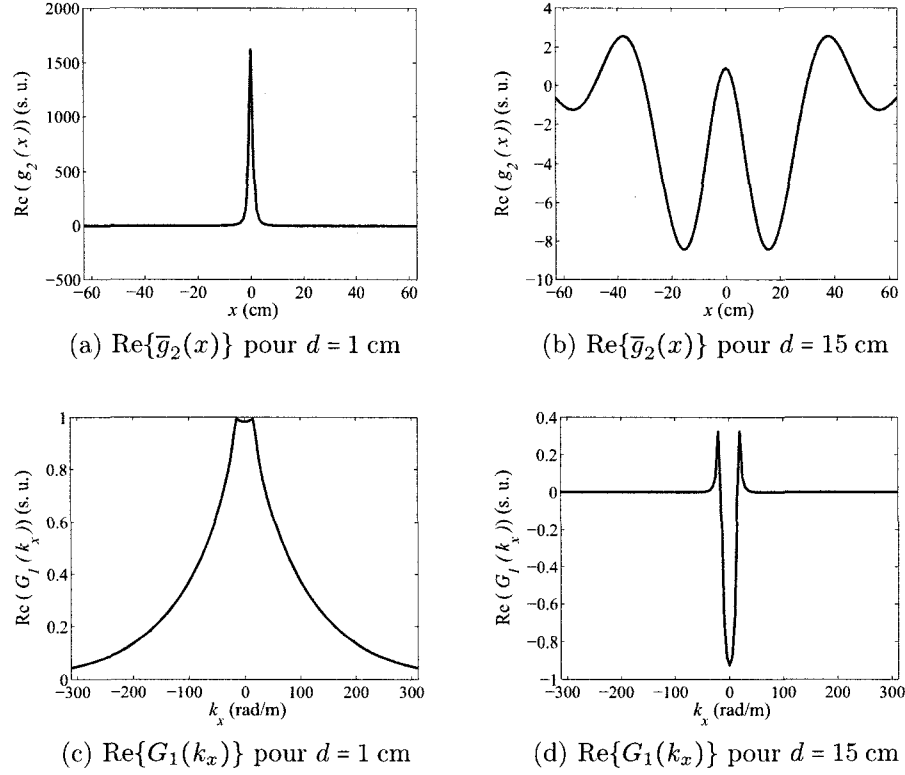


Figure 1.5 – Effet de la distance de propagation sur l'échantillonnage des fonctions de Green $\bar{g}_2(x, y, d, \omega)$ et $G_1(k_x, k_y, d, \omega)$.

La différence entre l'utilisation des équations (1.29) et (1.30) est reliée à la façon d'échantillonner les fonctions de Green. Tout d'abord, les points de mesures doivent être espacés régulièrement pour que la transformée de Fourier discrète (*discrete Fourier transform* ou DFT) spatiale puisse être calculée. Ainsi, sachant que l'hologramme est composé de N_x points selon l'axe des x et que ceux-ci sont espacés de Δx , on a dans le domaine réciproque $N_{k_x} = N_x$ et $\Delta k_x = 2\pi/(N_x \Delta x)$. C'est donc dire que l'échantillonnage d'un des domaines est lié à l'échantillonnage de l'autre.

Or, la forme de ces fonctions de Green dépend fortement de la distance de propagation d comme en témoigne la figure 1.5 qui présente les parties réelles de $\bar{g}_2(x, y, d, \omega)$ à $y = 0$ (figures (a) et (b)) et de $G_1(k_x, k_y, d, \omega)$ à $k_y = 0$ (figures (c) et (d)). Leur fréquence est $f = 1000$ Hz et deux distances de propagation sont consi-

dérées, soit 1 cm (figures (a) et (c)) et 15 cm (figures (b) et (d)). On voit bien aux figures 1.5(a) et (b) que $\bar{g}_2(x, y, d, \omega)$ est plus confinée spatialement lorsque d est faible. Quant aux figures 1.5(c) et (d), elles montrent que le comportement de $G_1(k_x, k_y, d, \omega)$ est contraire à celui de $\bar{g}_2(x, y, d, \omega)$, c'est-à-dire qu'elle est plus localisée et que les oscillations sont plus rapides pour de grandes distances de propagation.

Afin de représenter fidèlement les pressions acoustiques propagées, il est préférable que la fonction de Green utilisée soit bien échantillonnée. Autrement dit, il faut que l'essentiel de l'information fournie par la fonction de Green en question soit connue. Comme les conditions d'échantillonnage en (x, y) sont liées à celles en (k_x, k_y) , on a un même nombre de points régulièrement espacés dans l'un ou l'autre des domaines. Ainsi, à pas fixe, on risque de perdre moins d'information en échantillonnant les fonctions de Green des figures 1.5(b) et (c) qui correspondent respectivement à une grande distance de propagation pour $\bar{g}_2(x, y, d, \omega)$ et une faible distance pour $G_1(k_x, k_y, d, \omega)$. Bien que cette étude ait été faite avec la partie réelle des fonctions de Green, les mêmes conclusions peuvent être tirées à partir de leur partie imaginaire.

Notons que de La Rochefoucauld a aussi convolué spatialement $\bar{g}_2$ avec la représentation spatio-fréquentielle de la pression, soit [16]

$$\bar{p}(x, y, z, \omega) = \bar{p}(x, y, z_0, \omega) * \bar{g}_2(x, y, d, \omega). \quad (1.32)$$

Les conclusions tirées sont sensiblement les mêmes que celles obtenues avec l'équation (1.30) puisqu'une convolution peut être réalisée par transformée de Fourier.

Dans ces trois cas, c'est-à-dire en utilisant les équations (1.29), (1.30) et (1.32), on rappelle que les microphones doivent être espacés régulièrement. La pression

propagée ne sera donc connue qu'aux coordonnées (x, y) où étaient positionnés les microphones.

Enfin, deux autres formes de propagation inspirées de la NAH ont découlé des fonctions de Green précédemment mentionnées pour une utilisation en régime transitoire. Alors que les fonctions de transfert précédentes étaient définies dans les domaines (x, y, t) , (x, y, ω) et (k_x, k_y, ω) , Forbes *et al.* ont plutôt défini la pression acoustique et la fonction de Green dans le domaine (k_x, k_y, t) [12]. La propagation s'écrit alors

$$\overline{P}(k_x, k_y, z, t) = \overline{P}(k_x, k_y, z_0, t) * g_3(k_x, k_y, d, t) \quad (1.33)$$

avec

$$g_3(k_x, k_y, d, t) = \delta(t - d/c) - \frac{dk_r}{\sqrt{t^2 - d^2/c^2}} J_1 \left(ck_r \sqrt{t^2 - \left(\frac{d}{c}\right)^2} \right) H(t - d/c) \quad (1.34)$$

où $k_r^2 = k_x^2 + k_y^2$. Les fonctions J_1 et H sont respectivement la fonction de Bessel de première espèce et la fonction de Heaviside.

Dans l'ensemble des articles portant sur la NAH, c'est la seule fois que cette formulation a été utilisée. Il faut dire que cette méthode n'a été concrètement testée que pour un cas axisymétrique, qu'elle ne permet que la propagation directe et qu'aucun équivalent pour calculer le champ de vitesse n'a été proposé.

Finalement, une forme similaire à la NAH a été proposée pour les techniques qui enregistrent à un temps t_0 donné la pression acoustique dans un volume avoisinant la source, c'est-à-dire des positions pour lesquelles on connaît $p(x, y, z, t_0)$. La photographie schlieren et l'holographie optique sont des exemples de ces techniques. En fait, il s'agit cette fois de définir la pression propagée sous la forme [14]

$$\overline{P}(k_x, k_y, k_z, t) = \overline{P}(k_x, k_y, k_z, t_0) e^{-ic(t-t_0)\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}} \quad (1.35)$$

où $P(k_x, k_y, k_z, t_0)$ est la transformée de Fourier spatiale tridimensionnelle du champ de pression mesuré au temps t_0 . Le principal avantage de cette technique est que le terme de l'exponentielle de l'équation (1.35) est toujours complexe, peu importe si on projette pour un temps t inférieur ou supérieur à t_0 . Ainsi, on s'affranchit des problèmes liés aux ondes évanescentes rencontrés lors de la rétropropagation par les méthodes précédemment présentées. Toutefois, au temps t_0 , le champ de pression doit être fini, c'est-à-dire confiné dans l'espace où les mesures sont prises. Bien que ce soit le cas pour le rayonnement d'un piston tel que présenté dans la référence [14], ces conditions sont plus difficiles à obtenir dans le cas du rayonnement transitoire d'une plaque. De la même façon, la zone d'observation à des temps $t \neq t_0$ est limitée à la zone de mesures, ce qui restreint aussi son applicabilité.

Bref, plusieurs méthodes utilisant des fonctions de Green ou des variantes dans différents domaines ont été proposées dans la littérature et présentées dans cette section. L'approche formulée dans le domaine (k_x, k_y, ω) et définie par l'équation (1.29) est la plus couramment utilisée puisqu'elle permet aussi la rétropropagation. C'est donc sur celle-ci que porte la section suivante concernant les conditions d'applicabilité de la NAH ainsi que les contraintes de mise en oeuvre qui sont particulièrement importantes en rétropropagation.

1.2.2 Conditions d'applicabilité et contraintes de mise en oeuvre

Les conditions d'échantillonnage temporel et spatial de l'hologramme sont celles respectant le critère de Nyquist [30]. Premièrement, il faut $F_s > 2f_{\max}$ où F_s et $f_{\max}$ sont respectivement la fréquence d'échantillonnage dans le domaine du temps et la fréquence maximale des signaux temporels. Deuxièmement, l'équivalent spatial par rapport à la distance entre les microphones s'écrit $\Delta x = \Delta y < c/(2f_{\max}) = \lambda_{\min}/2$ où $\lambda_{\min}$ est la plus petite longueur d'onde de la pression rayonnée. Toujours en ce qui

a trait à l'échantillonnage spatial, de La Rochefoucauld a considéré, dans le cas du rayonnement d'un piston, une différence d'au moins 6 dB entre l'amplitude de la pression à $f_{\max} = c/(2\Delta x) = c/(2\Delta y)$ et l'amplitude maximale du spectre [15, 16]. Enfin, il est aussi préférable que le plan de mesure couvre la plus grande longueur d'onde rayonnée et qu'il soit à une distance légèrement supérieure à celle séparant les microphones [31].

Enfin, l'utilisation de la DFT spatiale périodise le plan de mesure, répliquant ainsi la source initiale (en anglais, *wraparound error*) [30]. C'est donc dire que le résultat de la propagation est la somme des contributions de la source initiale et des sources secondaires. Une façon de diminuer l'impact des sources secondaires est de les « éloigner » de la source originale par l'ajout de zéros sur les bords du plan z_0 . L'amplitude de la pression rayonnée par les répliques devient alors négligeable par rapport à celle de la vraie source.

Comme les mesures de pression se font près de la source et que d peut être positif ou négatif dans l'équation (1.29) (ce qui n'est pas le cas pour l'équation (1.30)), il est possible d'utiliser l'équation (1.28) pour obtenir le champ de pression acoustique plus près de la source ou même obtenir le champ de vitesse de cette même source en utilisant la fonction de Green vectorielle [23]

$$\mathbf{G}_{pv}(k_x, k_y, d, \omega) = (k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} + k_z \hat{\mathbf{z}}) \frac{e^{ik_z d}}{\rho_0 \omega}. \quad (1.36)$$

De la même façon, on peut aussi définir un propagateur permettant d'obtenir l'accélération à partir de la pression acoustique et qui s'écrit [18]

$$\mathbf{G}_{pa}(k_x, k_y, d, \omega) = (k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} + k_z \hat{\mathbf{z}}) \frac{-i e^{ik_z d}}{\rho_0}. \quad (1.37)$$

Toutefois, la rétropropagation des champs acoustiques n'est pas aussi simple que leur propagation directe. En effet, l'exponentielle de l'équation (1.29), qui est décroissante pour $d > 0$ dans le cas des ondes évanescentes, devient alors croissante. Cela mène à une amplification croissante avec d du bruit ambiant et des artefacts introduits par l'utilisation de la DFT. Cet inconvénient lié à la rétropropagation est récurrent pour plusieurs problèmes inverses.

En ce qui a trait au rayonnement acoustique des plaques, ce sont les modes de basses fréquences qui sont essentiellement évanescents, c'est-à-dire ceux pour lesquels les valeurs de m et n dans les équations (1.2), (1.3) et (1.4) sont faibles. Puisqu'on souhaite idéalement étudier la totalité du rayonnement et du comportement dynamique de la source, on cherche à atténuer l'amplification des ondes évanescentes sans toutefois les supprimer complètement. Pour parvenir à cette fin, il faut donc filtrer la pression acoustique propagée (équation (1.28)) dans l'espace k sans enlever d'information pertinente à l'étude de la source. Les filtres de Veronesi et de Tikhonov sont couramment utilisés et ont d'ailleurs été étudiés en régime transitoire par de La Rochefoucauld [15]. Le filtre de Veronesi est défini par [23]

$$\Pi_V^{k_c, \alpha}(k_x, k_y) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{k_r/k_c - 1}{\alpha}\right) & \text{pour } k_r \leq k_c \\ \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1 - k_r/k_c}{\alpha}\right) & \text{pour } k_r > k_c. \end{cases} \quad (1.38)$$

La fréquence spatiale de coupure k_c et la pente du filtre α sont les paramètres à optimiser. Pour ce qui est du filtre de Tikhonov, il s'écrit [15]

$$\Pi_T^\beta(k_x, k_y, \omega, d) = \frac{|G^{-1}|^2}{|G^{-1}|^2 + \beta} \quad (1.39)$$

où β est l'unique paramètre à optimiser. Notons que ce filtre est fonction de la distance de rétropropagation d . De plus, comme $\beta \ll 1$, le filtre de Tikhonov a peu

d'effets sur les ondes propagatives pour lesquelles $|G^{-1}| = 1$. Ce sont donc les ondes évanescentes pour lesquelles $|G^{-1}| < 1$ qui sont filtrées.

Une méthode d'optimisation couramment rencontrée dans la littérature, autant pour la NAH que pour les autres techniques abordées plus loin dans ce chapitre, est celle de la courbe en L. Pour sa compréhension, définissons tout d'abord la relation entre $S_m(z_0)$, soit les signaux du plan de mesure $z = z_0$, et $S_r(z)$, soit ceux à être propagés sur un plan $z < z_0$. Cette relation peut s'écrire sous la forme

$$S_m(z_0) = G^{-1} S_r(z). \quad (1.40)$$

Lorsque le filtre de Tikhonov est appliqué en plus du propagateur, le signal rétro-propagé s'écrit

$$S_r^\beta(z) = \Pi_T^\beta G S_m(z_0). \quad (1.41)$$

La méthode de la courbe en L consiste à tracer, sur une échelle logarithmique, l'énergie du signal rétropropagé $\|S_r^\beta\|_2$ en fonction du résidu $\|G^{-1} S_r^\beta - S_m\|_2$. Bien que les propagations s'effectuent dans le domaine des fréquences (k_x, k_y, ω) , ces termes sont calculés dans les domaines du temps et de l'espace, c'est-à-dire :

$$\|S_r^\beta\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{N_t} \sum_{n=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} [p_\beta(x_n, y_m, z, t_i)]^2 \right)^{1/2} \quad (1.42)$$

et

$$\|G^{-1} S_r^\beta - S_m\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{N_t} \sum_{n=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} [p_\beta(x_n, y_m, z_0, t_i) - p(x_n, y_m, z_0, t_i)]^2 \right)^{1/2} \quad (1.43)$$

Notons que $p_\beta(x_n, y_m, z, t_i)$ correspond à la pression au niveau de l'hologramme à laquelle le filtre de Tikhonov est appliqué. À titre d'exemple, une courbe en L

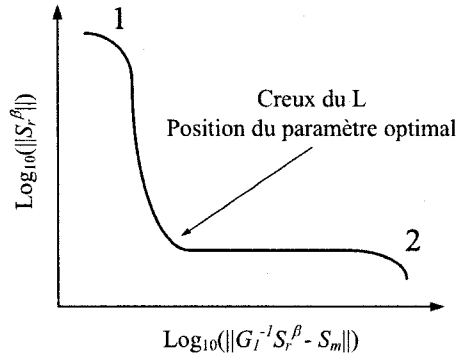


Figure 1.6 – Exemple de courbe en L.

fictive est présentée à la figure 1.6. L'aspect de la courbe s'explique en deux parties qui sont aussi identifiées sur cette dernière figure :

1. Lorsque le paramètre β de l'équation (1.39) est faible, les signaux ne sont pratiquement pas filtrés et l'amplification des ondes évanescentes fera en sorte que $\|S_r^\beta\|_2$ soit élevé. Comme le niveau de filtrage est bas, le fait de propager de nouveau S_r^β au plan de mesure devrait redonner les signaux initiaux, ce qui se traduit par une valeur de $\|G_l^{-1}S_r^\beta - S_m\|_2$ faible. Ce point se situe en haut à gauche du graphique.
2. Dans le cas contraire, c'est-à-dire quand β est très élevé, le filtrage est important et donc l'énergie des signaux reconstruits $\|S_r^\beta\|_2$ sera trop faible par rapport à ce qu'elle devrait être. Par conséquent, le fait de propager ces signaux vers le plan initial ne permettra pas d'obtenir les signaux initiaux et ainsi, $\|G_l^{-1}S_r^\beta - S_m\|_2$ sera élevé. Ce point se situe quant à lui en bas à droite du graphique.

Bref, le paramètre β optimal est celui pour lequel la courbure du L est maximale (point communément appelé « creux du L »). Il s'agit ainsi d'un compromis entre le fait d'enlever trop ou pas assez d'énergie au signal à reconstruire. Cette opti-

misation pour laquelle P. C. Hansen a développé certains algorithmes [32] a pour effet d'augmenter le temps de calcul puisque β varie d'une distance de propagation à une autre. L'approche utilisée dans le cas du filtre de Tikhonov peut aussi être appliquée au filtre de Veronesi. Pour ce faire, il faut fixer α et faire varier k_c .

D'autre part, parmi les artefacts numériques rencontrés lors de l'utilisation de la DFT, on note les fuites spectrales qui sont dues à l'introduction de discontinuités sur les côtés du plan de mesure puisque celui-ci est de dimensions finies. C'est d'ailleurs en basses fréquences (kL_x ou $kL_y < 10$) que ces discontinuités sont les plus importantes, car à ces fréquences, le son est beaucoup moins directionnel [33]. Une façon courante de réduire ces effets est d'utiliser une fenêtre spatiale de manière à adoucir les côtés du plan de mesure. La fenêtre de Tukey, qui est couramment utilisée, est une combinaison de fenêtres rectangulaire et de Hanning, et elle n'atténue l'amplitude du champ de pression qu'à ses extrémités. Elle est définie dans le cas unidimensionnel par [23]

$$\Gamma(\xi) = \begin{cases} 1 & |\xi| < \xi_m - \xi_w \\ \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi(|\xi| - \xi_m)}{\xi_w} \right) \right] & \xi_m - \xi_w \leq |\xi| \leq \xi_m \end{cases} \quad (1.44)$$

où ξ_m est la valeur maximale de ξ et ξ_w est la largeur de la portion décroissante de la fenêtre.

Thomas et Pascal ont aussi développé un algorithme de prétraitement des signaux mesurés pour réduire les effets de troncature dans le plan de mesures [34]. Cette approche est basée sur l'analyse multirésolution en utilisant les transformées par ondelettes. Comme elle ne filtre pas l'amplification des ondes évanescentes, cette technique n'est pas un substitut des filtres de Veronesi ou de Tikhonov, mais plutôt un complément.

1.2.3 Interpolation et extrapolation

Certaines méthodes ont été mises en oeuvre afin d'interpoler ou d'extrapoler les champs de pression de façon à diminuer le nombre de points de mesures. Bien qu'elles soient principalement utilisées pour la NAH, elles pourraient aussi être appliquées aux autres méthodes qui sont présentées aux prochaines sections.

Habituellement, la méthode « classique » d'interpolation consiste en l'utilisation des différences finies et ne fait intervenir que les valeurs de pression. Toutefois, de nouveaux types de microphones qui donnent simultanément la pression acoustique et la vitesse particulaire, tel que le *Microflown*, [35], permettent d'augmenter la précision des interpolations. En effet, la relation d'Euler définie dans le domaine du temps par [23]

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(x, y, z, t) = -\nabla p(x, y, z, t) \quad (1.45a)$$

et dans le domaine fréquentiel par

$$i\omega \rho_0 \bar{\mathbf{v}}(x, y, z, \omega) = \nabla \bar{p}(x, y, z, \omega) \quad (1.45b)$$

permet d'obtenir directement le gradient de pression et donc les dérivées souvent approximées par des différences finies. Harris *et al.* ont utilisé ces dérivées en combinaison avec des surfaces d'Hermite bicubiques, soit l'équivalent bidimensionnel d'un polynôme du troisième degré [36]. Ainsi, connaissant la pression et ses dérivées selon x et y , le nombre de points requis dans le cas du rayonnement d'une plaque vibrant en régime forcé à une fréquence d'environ 1000 Hz a été réduit de 75 % tout en conservant un même taux d'erreur.

Les techniques d'extrapolation, quant à elles, présentent deux avantages. Le premier est de diminuer les effets de fuites spectrales dues aux dimensions finies de l'hologramme. Le second est de pouvoir étudier localement des structures plus

grandes que l'hologramme. Saijyou et Yoshikawa ont appliqué dans le domaine des fréquences ω deux techniques différentes pour parvenir à cette fin [37].

La première étape commune à ces deux approches est d'ajouter des zéros sur les pourtours du plan de mesure pour qu'il atteigne les dimensions désirées. Saijyou et Yoshikawa vont jusqu'à étudier localement le comportement vibratoire d'une plaque avec un hologramme dont les dimensions sont quatre fois plus petites que celles de la plaque en question. Aux paragraphes suivants, on identifiera la zone de l'hologramme et celle où les zéros ont été ajoutés comme étant respectivement les zones 1 et 2.

La première méthode est utilisée dans l'espace k et ne fait intervenir aucune fonction de Green. Elle est basée sur le fait que la troncature de la pression aux extrémités de l'hologramme cause des fuites spectrales vers les hautes fréquences spatiales. Les étapes de cette méthode se résument à :

1. Ajouter les zéros à l'hologramme.
2. Calculer la DFT spatiale.
3. Mettre à zéro la portion du spectre angulaire pour laquelle $\sqrt{k_x^2 + k_y^2} > k_{\max}$, où $k_{\max}$ est la fréquence angulaire de coupure déterminée entre autres par les propriétés acoustiques de la source.
4. Calculer la DFT spatiale inverse.
5. Remplacer la pression dans la zone 1 par la pression initiale puisque le fait de mettre à zéro certaines composantes du spectre angulaire (k_x, k_y) modifie l'ensemble du plan initial.
6. Recommencer à l'étape 2 jusqu'à ce que le filtrage dans l'espace k ait une incidence minimale dans la zone 1, c'est-à-dire jusqu'à l'atteinte d'un certain seuil d'erreur.

Quant à la seconde méthode, appelée méthode de l'espace réel, elle est applicable lorsqu'on considère que la source est bafflée. Elle repose sur le fait qu'après rétropropagation au niveau du plan de la source, la vitesse de celle-ci est nulle dans la zone 2 puisque ladite source est bafflée. Cette méthode peut être décrite de la façon suivante :

1. Ajouter les zéros à l'hologramme.
2. Calculer la DFT spatiale.
3. Appliquer la rétropropagation avec le procédé de régularisation souhaité pour obtenir la vitesse transversale de la source.
4. Calculer la DFT spatiale inverse.
5. Mettre à zéro cette vitesse à l'extérieur de la source (zone 2).
6. Calculer la DFT spatiale.
7. Effectuer la propagation directe vers le plan de l'hologramme.
8. Calculer la DFT spatiale inverse.
9. Remplacer la pression dans la zone 1 par la pression initiale puisque le fait de mettre à zéro la vitesse à l'extérieur de la source (zone 2) modifie l'ensemble du plan initial.
10. Recommencer à l'étape 2 jusqu'à ce que la vitesse à l'extérieur de la source (zone 2) soit inférieure à un certain seuil.

Les deux approches présentées sont plus efficaces que l'utilisation d'une fenêtre spatiale (Hanning, Tukey, etc.) pour réduire les fuites spectrales dues aux dimensions finies de l'hologramme. Si on les compare l'une par rapport à l'autre, les deux méthodes d'extrapolation ont tout de même quelques différences en terme d'efficacité. Celle de l'espace k n'est pas contraignante en ce qui concerne la nature de la source, mais demande un grand nombre d'itérations. De plus, les résultats de Saijyou et Yoshikawa montrent que le rapport entre les dimensions de la source et celles de

l'hologramme peut s'élever à quatre, ce que ne permet pas la méthode de l'espace réel. On rappelle aussi qu'avec la méthode de l'espace réel, on se doit de considérer que la source est bafflée. Néanmoins, cette dernière approche demande beaucoup moins d'itérations (2 à 3 ordres de grandeur de moins) et les taux d'erreurs obtenus sont négligeables.

Williams présente une méthode d'extrapolation similaire à celle de l'espace k présentée par Saijyou et Yoshikawa, et qui est applicable pour la NAH et la méthode des éléments frontières inverse [38]. Au lieu d'utiliser simplement un filtre rectangulaire de fréquence de coupure $k_{\max}$, il propose d'utiliser un filtre de Tikhonov dont le paramètre β est optimisé.

Enfin, la méthode présentée pour l'interpolation pourrait être applicable en régime transitoire. Il suffirait de l'appliquer à chacun des pas de temps. Quant à l'extrapolation, elle nécessiterait un processus itératif pour chacune des fréquences, ce qui alourdirait énormément la tâche.

1.2.4 Exemples d'application de la NAH

De façon générale, l'approche de la NAH la plus couramment utilisée est celle définie par les équations (1.28) et (1.29). De plus, le régime stationnaire est celui qui a fait l'objet du plus d'études. Celles-ci se concentrent donc sur des fréquences en particulier, ce qui fait que seules les transformées de Fourier spatiales de l'équation (1.27) sont calculées. Après avoir été validée pour le rayonnement de plaques comportant une discontinuité [30], la NAH a entre autres permis à Williams *et al.* d'étudier le rayonnement d'une plaque immergée dans l'eau [39]. Notons que dans plusieurs cas, la NAH est utilisée en rétropropagation afin de caractériser la source elle-même. Toutefois, la propagation directe a entre autres été utilisée afin

d'étudier le rayonnement acoustique à l'intérieur d'une carlingue d'avion dans le but d'améliorer le confort des passagers [40].

En ce qui concerne l'étude du rayonnement acoustique dans le domaine du temps, une distinction est faite dans la littérature entre les sources « non-stationnaires » et « transitoires ». L'exemple le plus courant du premier cas est l'étude des moteurs en montée de régime [15, 28, 41, 42]. L'étude de ces sources se divise en deux étapes. La première étape consiste à enregistrer avec le quadrillage microphonique les signaux temporels de la pression rayonnée par le moteur. Les signaux sont ensuite moyennés pour produire un sonagramme, c'est-à-dire une représentation temps-fréquence. Comme à chacun des pas de temps est associée une vitesse de révolution du moteur, il est ainsi possible de savoir, à une vitesse donnée, quelles fréquences sonores sont principalement rayonnées. Dans la deuxième étape, connaissant les fréquences dominantes à une vitesse donnée, la NAH est utilisée pour savoir de quelles parties du moteur provient le son. C'est donc dire que l'analyse se fait dans le domaine des fréquences pour un temps donné, ce qui la distingue de l'approche dite « transitoire ».

La méthode transitoire consiste véritablement en l'enregistrement de signaux temporels qui sont propagés pour obtenir un résultat final, lui aussi dans le domaine du temps. Les principales sources étudiées sont des pistons soumis à des profils de vitesse dépendant du temps. Ceux-ci se traduisent expérimentalement par des transducteurs piézoélectriques immergés dans l'eau [13] ou encore par un haut-parleur auquel un bref signal est envoyé [15]. Les résultats obtenus avec les équations (1.28) et (1.29) sont satisfaisants.

Clement et Hynynen ont d'ailleurs utilisé cette technique pour des applications biomédicales [43] et l'ont étendue à la propagation des ondes ultrasonores dans plusieurs couches de milieux absorbants (k complexe) [44]. Toutefois, les signaux

décrivant la pression acoustique rayonnée par des pistons sont souvent très courts dans le temps. Or, ce n'est pas le cas du rayonnement des plaques qui sont percutées, surtout si elles sont faiblement amorties.

Le rayonnement transitoire de quelques plaques soumises à des impacts a été étudié expérimentalement par de La Rochefoucauld, soit deux plaques d'aluminium, l'une simplement supportée et l'autre suspendue, ainsi qu'une plaque de plexiglas simplement supportée [15]. La propagation directe et la rétropropagation donnent des résultats généralement similaires aux mesures, sauf en début de signal comme il en sera question au chapitre 2. Par ailleurs, en limitant les bornes de l'intégrale de l'équation (1.27) aux nombres d'ondes pour lesquels les ondes sont propagatives, l'auteur a pu identifier la zone d'impact.

1.3 Autres approches de reconstruction 3D du champ acoustique

Les travaux portant sur la NAH ont aussi mené parallèlement au développement de trois autres approches de reconstruction tridimensionnelle du champ acoustique qui sont détaillées dans cette section. Celles-ci sont la NAH optimisée statistiquement (de l'anglais *Statistically Optimized NAH* ou SONAH), la méthode des éléments frontières inverse (*Inverse Boundary Elements Method* ou IBEM) et finalement la méthode des moindres carrés de l'équation de Helmholtz (*Helmholtz Equation Least-Squares* ou HELS).

1.3.1 SONAH

La NAH optimisée statistiquement emprunte de la NAH traditionnelle le fait que la pression mesurée soit considérée comme étant une superposition d'ondes planes

(SONAH planaire). Jusqu'à présent utilisée uniquement en régime stationnaire (la fréquence ω est implicite dans les prochaines équations), la SONAH se formule essentiellement comme suit dans le cas d'une propagation de pression à pression [45, 46] :

$$p(\mathbf{r}) \approx \sum_{n=1}^{N_{xy}} c_n(\mathbf{r}) \cdot p(\mathbf{r}_n) \quad (1.46)$$

où $p(\mathbf{r})$ et $p(\mathbf{r}_n)$ sont respectivement la pression rayonnée en $\mathbf{r}$ et l'ensemble des pressions mesurées dans le plan de l'hologramme. Notons que contrairement à la NAH classique, les microphones utilisés n'ont pas besoin d'être espacés régulièrement.

Afin que l'équation (1.46) soit une bonne estimation du champ de pression acoustique pour tout point situé en $z > 0$, il faut que les ondes planes qui le forment, c'est-à-dire

$$\Psi_K(\mathbf{r}) = e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}, \quad (1.47)$$

puissent aussi être décrites par l'équation (1.46) et ce, peu importe leur fréquence. On parle alors d'optimiser les coefficients d'une source acoustique « blanche » (dont le spectre fréquentiel est uniforme) en $z = 0$, d'où l'appellation de NAH optimisée statistiquement. C'est pourquoi l'amplitude des ondes acoustiques de l'équation (1.47) est unitaire.

On impose alors à l'équation (1.46) d'être une bonne estimation d'un sous-ensemble des fonctions de l'équation (1.47), c'est-à-dire pour plusieurs vecteurs d'ondes. Comme ce sous-ensemble contient beaucoup plus de vecteurs d'ondes qu'il y a de points de mesures, la mise en équation matricielle des équations (1.46) et (1.47) constitue un système d'équations sur-déterminé. La résolution du système ne se fait donc pas par inversion de matrice mais plutôt par « pseudo-inversion ». Celle-ci est une résolution du système au sens des moindres carrés. En utilisant un paramètre

de régularisation β , on peut écrire les coefficients de l'équation (1.46) sous la forme

$$\mathbf{c}(\mathbf{r}) = (\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} + \beta^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^\dagger \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) \quad (1.48)$$

avec

$$\mathbf{A} \equiv \{\Psi_{K_m}(\mathbf{r}_n)\}, \quad \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) \equiv \{\Psi_{K_m}(\mathbf{r})\} \text{ et } \mathbf{c}(\mathbf{r}) \equiv \{c_n(\mathbf{r})\},$$

et où $\mathbf{A}^\dagger$ est la transposée conjuguée de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{I}$ est la matrice identité. Quant à l'indice m , il correspond au vecteur d'onde de chacune des ondes planes utilisées pour la reconstruction. En faisant tendre ce nombre de fonctions élémentaires vers l'infini pour couvrir l'ensemble des ondes planes, on a alors

$$[\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}]_{nn'} = \frac{1}{\pi k^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Psi_K^*(\mathbf{r}_n) \Psi_K(\mathbf{r}_{n'}) dk_x dk_y \quad (1.49a)$$

et

$$[\mathbf{A}^\dagger \boldsymbol{\eta}]_n = \frac{1}{\pi k^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Psi_K^*(\mathbf{r}_n) \Psi_K(\mathbf{r}) dk_x dk_y. \quad (1.49b)$$

La SONAH a comme principal avantage de ne pas faire intervenir de transformée de Fourier spatiale et n'entraîne donc ni l'apparition de répliques de la source ni les effets mentionnés à la section précédente dus au fait d'avoir un plan de mesure fini. Il est aussi possible de formuler cette approche de façon à obtenir le champ de vitesse à la surface de la source. La technique a de plus été formulée en coordonnées cylindriques et appliquée à l'étude d'un compresseur ayant cette géométrie [47].

Bien que la matrice déterminée par l'équation (1.49a) puisse être calculée une seule fois, le vecteur de l'équation (1.49b) doit quant à lui être calculé pour chacun des points à reconstruire. Cela peut donc augmenter le temps de calcul. De plus, il va sans dire qu'une application en régime transitoire nécessiterait l'évaluation de $\mathbf{c}(\mathbf{r})$

pour l'ensemble des valeurs de ω , ce qui ferait aussi croître de façon significative le temps de calcul.

1.3.2 IBEM

La principale lacune de la NAH et de la SONAH est qu'elles sont restreintes aux géométries planaire, cylindrique ou sphérique. Cela a mené à une autre approche de reconstruction tridimensionnelle qui a évolué parallèlement à la NAH au fil des ans : la méthode des éléments frontières inverse (*Inverse Boundary Elements Method* ou IBEM).

L'idée générale de celle-ci est de discrétiser l'équation intégrale d'Helmholtz s'écrivant sous la forme

$$p(\mathbf{r}_p) = \int_{S'} \left[p(\mathbf{r}_q) \frac{\partial}{\partial n_q} G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) - G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) \frac{\partial}{\partial n_q} p(\mathbf{r}_q) \right] dS_q \quad (1.50)$$

où

$$G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) = \frac{e^{ikR}}{4\pi R},$$

avec $R = |\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q|$, et où S' correspond à la surface de la source [48, 49]. La pression en un point p dans le milieu ambiant et la pression en un point q au niveau de la source sont données par $p(\mathbf{r}_p)$ et $p(\mathbf{r}_q)$. De plus, $\partial/\partial n_q$ est la dérivée par rapport à la surface. Tout comme pour la SONAH, précisons que le développement a été fait dans le domaine des fréquences et que le terme ω dans l'équation précédente est implicite. L'équation (1.50) est la formulation générale des équations (1.22) et (1.25) dans le domaine des fréquences pour lesquelles $n_q = z'$.

Quant à la discrétisation de l'intégrale, la surface à intégrer est maillée avec des éléments bidimensionnels qui peuvent être quadrilatéraux, triangulaires ou autres.

Ainsi, chaque élément du maillage a un vecteur normal différent. La fonction de Green G prendra différentes formes afin d'éliminer l'un ou l'autre des termes de l'équation (1.50), selon que la quantité recherchée soit la pression à la surface de la source ou la vitesse de celle-ci. Ainsi, la pression acoustique peut s'exprimer en notation matricielle comme une combinaison linéaire de la pression rayonnée par chacun des éléments du maillage, qui sont eux-mêmes divisés en noeuds [49]. Comme il en a été question dans le cas de la SONAH, la résolution se fait par pseudo-inversion. Schuhmacher *et al.* ont entre autres étudié la régularisation par la décomposition en valeurs singulières combinée à une régularisation de Tikhonov lors d'analyses vibratoires d'un pneu [50].

Le principal avantage de la IBEM est évidemment qu'elle permet de reconstruire la vitesse transversale et le champ de pression d'une source de forme arbitraire. Toutefois, pour pouvoir le faire, il faut être en mesure de mailler ladite source, ce qui n'est pas toujours possible. De plus, il faut au moins six éléments par longueur d'onde pour une reconstruction acceptable. C'est donc dire que le temps de calcul peut être très long. Comme une plaque soumise à un impact a un spectre à large bande, il faudrait donc un nombre de points très élevé et ce, sans compter le fait que la résolution du système d'équations devrait être faite pour chacune des fréquences.

1.3.3 HELS

La dernière technique de reconstruction abordée est celle des HELS (*Helmholtz Equation Least-Squares*), qui constitue une grande partie des recherches de Wu [51–55]. De manière générale, elle consiste à résoudre l'équation d'Helmholtz qui s'écrit

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}) + k^2 p(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.51)$$

en admettant que le champ de pression peut s'écrire comme une combinaison linéaire de fonctions sphéroïdales satisfaisant l'équation (1.51), c'est-à-dire [56]

$$p(\mathbf{r}) = \rho_0 c \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=-n}^n \tilde{c}_{n,l} \psi_{n,l}(\mathbf{r}). \quad (1.52)$$

où, comme dans le cas de la SONAH et de la IBEM, la présence de ω est implicite dans l'expression de $p(\mathbf{r})$. Les coordonnées sphériques sont souvent choisies en raison de leur simplicité d'utilisation. Dans cette géométrie, les fonctions génératrices sont données par

$$\psi_{n,l}(r, \theta, \phi) = h_n(kr) P_{n,l}(\cos \theta) \begin{cases} \cos(l\phi) & \text{pour } l \geq 0 \\ \sin(l\phi) & \text{pour } l < 0 \end{cases} \quad (1.53)$$

où $h_n(kr)$ et $P_{n,l}$ sont respectivement les fonctions sphériques de Hankel et les fonctions de Legendre. Ces fonctions doivent aussi être orthonormalisées par rapport à la surface de la source par le procédé de Gram-Schmidt. En changeant les indices de l'équation (1.52), on peut écrire cette dernière sous la forme

$$p(\mathbf{r}) = \rho_0 c \sum_{j=0}^{\infty} c_j \Psi_j(\mathbf{r}) \quad (1.54)$$

où les $\Psi_j(\mathbf{r})$ sont les fonctions orthonormalisées.

Si la pression acoustique est mesurée en plusieurs points d'indice m , l'équation (1.54) peut donc s'écrire

$$p_m(\mathbf{r}_m) = \rho_0 c \sum_{j=0}^{\infty} c_j \Psi_{m,j}(\mathbf{r}_m). \quad (1.55)$$

C'est donc dire qu'en réécrivant cette dernière équation sous forme matricielle, les coefficients c_j peuvent être calculés. Comme il y a plus de points de mesures M

que de fonctions sphériques utilisées J , on doit, comme dans le cas de la SONAH, procéder à la pseudo-inversion pour résoudre le système d'équation. Le vecteur des coefficients $\{\mathbf{c}\}_{J \times 1}$ s'écrit alors

$$\{\mathbf{c}\}_{J \times 1} = (\rho_0 c)^{-1} [\mathbf{E}]_{J \times M} \{\mathbf{p}\}_{M \times 1} \quad (1.56)$$

où

$$[\mathbf{E}]_{J \times M} = ([\Psi]_{M \times J}^T [\Psi]_{M \times J})^{-1} [\Psi]_{M \times J}^T. \quad (1.57)$$

Comme cela a été mentionné dans le cas de la SONAH, cette pseudo-inversion est une résolution du système d'équations au sens des moindres carrés, d'où le nom de la technique. Les principaux avantages des HELS sont que le nombre de points de mesure requis est plus faible que pour les autres approches et que des sources de formes arbitraires peuvent être étudiées [51].

Au premier coup d'oeil, la SONAH et les HELS semblent très similaires. Bien que les deux approches soient basées sur des combinaisons linéaires, il s'agit d'une combinaison des pressions mesurées dans le premier cas, alors que dans le second, il s'agit plutôt d'une somme pondérée de fonctions génératrices. En fait, les coefficients de la SONAH dépendent de la position des microphones et non pas de la pression en tant que telle, alors que pour les HELS, les coefficients sont fonction à la fois des positions et des pressions. Cho *et al.* résument cette réalité en affirmant que la SONAH optimise les coefficients au niveau de la source elle-même alors que les HELS les optimisent au niveau de la position des microphones [47]. C'est d'ailleurs pourquoi contrairement à la SONAH où on considèrerait un nombre infini [45] ou du moins très grand de fonctions génératrices [47], le nombre J de fonctions sphériques dans les HELS doit être optimisé. Il est ainsi montré par Wu que la somme des erreurs au niveau de la surface de mesure tend vers zéro en faisant croître J alors

qu'au niveau de la source elle augmente de nouveau après avoir atteint un certain minimum [53], d'où l'affirmation de Cho *et al.*

Des fonctions sphériques ont été appliquées à l'étude de la vibration d'une boule de quilles [55], de moteurs [53] ou d'un capot de voiture [51, 54]. Toutefois, l'utilisation de fonctions sphériques est avant tout efficace pour des dimensions de sources pour lesquelles $x : y : z \rightarrow 1 : 1 : 1$. En effet, la pression reconstruite est valable à l'extérieur d'un volume de référence englobant la source et dont la géométrie dépend du système de coordonnées choisi. Ainsi, des coordonnées elliptiques, prolates ou oblates devraient donc être à privilégier pour les sources acoustiques allongées ou plates telles que les plaques. Toutefois, l'implantation de ces fonctions est plus complexe et leur calcul numérique peut être long [53].

Notons par ailleurs que les HELS ont été reformulés de telle sorte que l'équation (1.54) puisse s'écrire non seulement avec des fonctions caractéristiques de la source, mais également avec l'expression d'une pression acoustique provenant de l'infini, qui s'exprime elle aussi en termes de fonctions sphéroïdales [57]. Ainsi, l'application de la technique n'est plus seulement restreinte au champ libre. Une combinaison HELS-IBEM a aussi été présentée dans la littérature, sous la dénomination de HELS hybrides, de façon à diminuer le nombre de mesures requises lors de l'application des IBEM [58, 59].

Pour ce qui est du régime transitoire, Wang a étudié dans sa thèse la possibilité de faire le calcul des coefficients de l'équation (1.56) pour l'ensemble des fréquences ω [60]. Il en est cependant venu à la conclusion que cela pouvait être fastidieux en terme de temps de calcul. En effet, pour une sphère qui explose et dont l'amplitude de la pression rayonnée décroît exponentiellement, Wang a remarqué que les signaux temporels devaient être observés sur une longue durée pour éviter d'importantes erreurs en début de signal. Wu *et al.* ont depuis reformulé les HELS en régime

transitoire [61]. L'approche basée sur la théorie des résidus est développée dans le domaine de Laplace au lieu de celui de Fourier et permet de modifier les équations générales présentées précédemment. Les exemples donnés dans la littérature sont principalement axés sur le rayonnement transitoire de sphères. En pratique, la transformée en Z doit être appliquée aux signaux expérimentaux. Des explosions localisées et donc de géométrie sphérique ont été étudiées par cette approche [62].

En résumé, on a vu au présent chapitre que le domaine temporel regorge d'informations à propos du rayonnement transitoire de plaques soumises à des impacts. C'est donc dire que le développement d'une technique de reconstruction tridimensionnelle du champ de pression dans le domaine du temps pourrait permettre d'étudier et de comprendre divers phénomènes acoustiques entrant en jeu lorsqu'une structure est soumise à un impact. Or, parmi les quatre méthodes présentées dans ce chapitre, à savoir la NAH, la SONAH, la IBEM et les HELS, seule la première a déjà été appliquée à l'étude dans le domaine du temps du rayonnement transitoire de plaques soumises à des impacts. Comme les autres approches sont toutes matricielles et qu'elles sont formulées dans le domaine des fréquences, des inversions de matrices seraient requises pour chacune des valeurs de ω , ce qui augmenterait considérablement le temps de calcul. Néanmoins, comme on le verra au second chapitre, le principal problème de toutes ces méthodes, incluant la NAH, est qu'elles sont formulées dans le domaine des fréquences, et donc qu'elles nécessitent l'utilisation d'une DFT pour passer du domaine temporel au domaine fréquentiel et vice-versa.

CHAPITRE 2

DÉFINITION DES OBJECTIFS ET MÉTHODOLOGIE

Les travaux dont il a été question au chapitre 1 ont essentiellement porté sur le rayonnement acoustique transitoire de plaques impactées et sur les différentes techniques d'holographie acoustique. Ces divers éléments permettent de préciser les objectifs du présent projet.

En ce qui a trait au rayonnement transitoire des plaques, on constate d'emblée que le domaine temporel est riche en informations sur la plaque elle-même et sur l'impact. Parmi les phénomènes observables, notons d'une part que l'amplitude de la crête initiale de pression dans l'axe de frappe est fortement influencée par les caractéristiques des corps en contact lors de l'impact. D'autre part, la dispersion apparente ou encore la réflexion des ondes de flexion sont aussi sources d'information concernant la structure. Toutefois, pour étudier ces derniers phénomènes (dispersion et réflexion), une technique de reconstruction tridimensionnelle du champ acoustique serait requise.

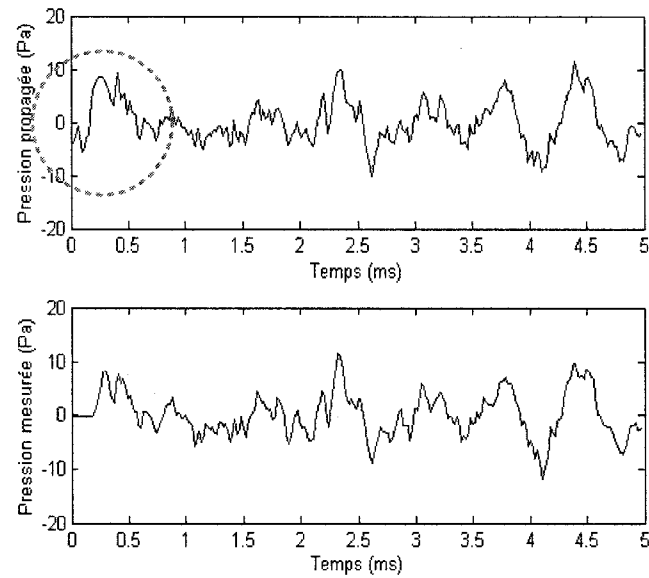
Or, on note du côté de la NAH un manque considérable d'études transitoires de sources autres que celles de type piston. La principale limitation est la nécessité d'un nombre élevé de microphones pour que l'acquisition se fasse à partir d'un seul impact. Si le nombre de microphones est insuffisant, ceux-ci doivent être déplacés. Conséquemment, une excellente reproductibilité du rayonnement acoustique, et donc des impacts, est requise. Bref, ces conditions réduisent l'applicabilité industrielle de la NAH en régime transitoire. Toutefois, il a été montré par de La Roche-foucauld *et al.* que ces conditions sont réalisables en laboratoire [15, 16, 18]. Ainsi, une méthode de reconstruction tridimensionnelle du champ de pression acoustique

serait possible et pourrait mener à des études expérimentales du rayonnement transitoire de structures plus complexes et ce, autant d'un point de vue paramétrique que phénoménologique.

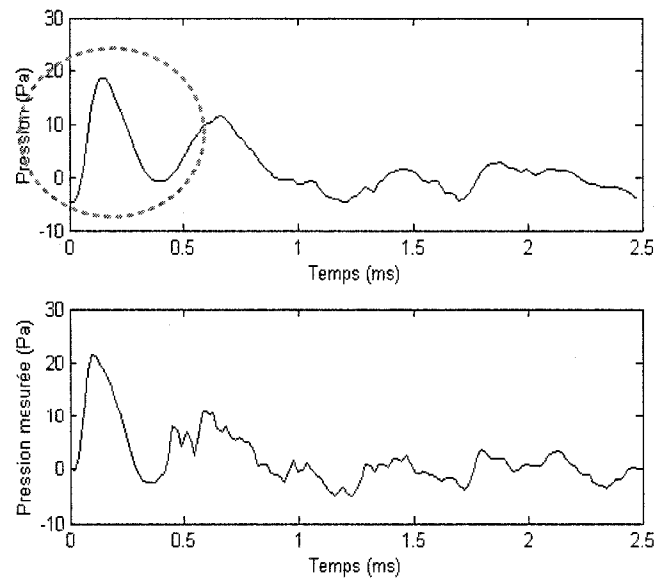
Pourtant, même les études faites par de La Rochefoucauld n'ont pas permis de tirer des conclusions générales quant à l'applicabilité de la NAH dans le domaine temporel. Bien qu'il y ait dans ses travaux des ressemblances évidentes entre les signaux mesurés et ceux propagés par NAH, on constate trois principales lacunes dans les résultats présentés.

Premièrement, il y a des différences significatives entre les signaux propagés et ceux mesurés dans le plan de propagation. Pour illustrer cette affirmation, la figure 2.1 présente des résultats obtenus par de La Rochefoucauld en ce qui concerne le rayonnement acoustique transitoire de plaques impactées. Sur cette figure, les signaux du haut sont ceux obtenus par propagation directe (figure 2.1(a)) ou par rétropropagation (figure 2.1(b)), alors que ceux du bas correspondent aux mesures faites dans les plans de propagation. Les différences entre les signaux propagés et mesurés sont particulièrement importantes en début de signal, dans les zones délimitées par des cercles pointillés. Tout d'abord, on constate que les signaux propagés ne sont pas causaux, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas nuls pour $t \leq 0$ ms. Qui plus est, les différences sont importantes entre les signaux propagés et ceux mesurés pour $t \leq 0,6$ ms. Cela porte à croire que tant la propagation directe que la rétropropagation, telles qu'elles sont appliquées par de La Rochefoucauld, entraînent des erreurs non négligeables.

Deuxièmement, les signaux présentés à la figure 2.1 correspondent à la pression acoustique rayonnée dans l'axe de frappe. Or, comme cela a été vu au chapitre précédent, la dispersion apparente fait en sorte que l'amplitude des signaux loin de l'axe de frappe croît graduellement dans le temps. Ainsi, comme l'amplitude de



(a) Propagation directe



(b) Rétropropagation

Figure 2.1 – Exemples de non-causalité de signaux propagés dans le domaine des fréquences (source : [15]). Les figures du haut sont les résultats de la propagation alors que celles du bas correspondent aux mesures dans les plans de propagation. Les cercles pointillés indiquent la portion des signaux propagés qui diffère de façon marquée des signaux mesurés.

l'erreur à $t = 0$ s est du même ordre de grandeur que la pression acoustique, tout porte à croire que les erreurs de non-causalité comme celles présentées à la figure 2.1 seraient beaucoup plus significatives pour les signaux propagés sur les côtés de la plaque. Pourtant, aucun résultat n'a été présenté par de La Rochefoucauld loin de l'axe de frappe.

Troisièmement, on s'attend essentiellement de la NAH qu'elle permette une reconstruction tridimensionnelle complète du champ acoustique. Or, de La Rochefoucauld a limité ses études du rayonnement transitoire des plaques impactées à l'axe de frappe et à des distances de propagation inférieures à 15 cm. À la lumière des éléments présentés au premier chapitre, seule une reconstruction complète du champ de pression acoustique, c'est-à-dire couvrant l'ensemble de la plaque et de plus grandes distances de propagation, permettrait d'étudier l'ensemble des phénomènes entrant en jeu lors du rayonnement transitoire d'une plaque impactée. Bref, on ne peut conclure à partir de ces résultats sur l'applicabilité de la NAH à l'étude du rayonnement acoustique transitoire d'une structure complexe.

La principale hypothèse sur laquelle repose ce mémoire est que l'utilisation de fonctions de transfert permettant la propagation de champs acoustiques dans le domaine des fréquences entraîne du repliement temporel, de façon similaire aux répliques spatiales de la source dont il a été question au chapitre 1. Cela cause des erreurs considérables en début de signal, erreurs qui sont d'autant plus importantes loin de l'axe de frappe ou de la plaque.

Deux méthodes de propagation ne sont toutefois pas formulées dans le domaine des fréquences. La première, consistant en l'intégration numérique de la première intégrale de Rayleigh (équation (1.25)), requiert un nombre imposant de points de mesures et des temps de calcul très élevés. La seconde, soit la formulation transitoire des HELS, n'a pas encore fait ses preuves pour des géométries planes. Bref, ces

deux méthodes ne semblent pas appropriées à l'étude du rayonnement transitoire des plaques.

Comme l'ensemble des autres méthodes (NAH, SONAH, IBEM et HELS) sont formulées dans le domaine fréquentiel, on se propose d'étudier l'applicabilité d'une telle formulation à l'étude du rayonnement transitoire de plaques impactées. Que la propagation s'effectue par l'application d'une fonction de Green (NAH) ou par la résolution d'imposantes équations matricielles (SONAH, IBEM et HELS), le calcul de la DFT temporelle et de son inversion s'avère être un incontournable, car toutes ces approches sont fonction de la fréquence. C'est donc dire qu'on s'attend à ce que les problèmes de repliement temporel soient rencontrés peu importe l'approche adoptée.

Puisque de La Rochefoucauld a montré des résultats encourageants malgré l'application de fonctions de Green formulées dans le domaine des fréquences, c'est sur cette approche que porte l'étude. On croit ainsi être en mesure de régler les problèmes de causalité dont il a été question précédemment. De plus, comme tout porte à croire que certains des problèmes de repliement temporel rencontrés avec la NAH puissent également l'être avec la SONAH, la IBEM et les HELS, on s'attend à ce que nos développements y soient aussi applicables.

Ainsi, les objectifs du présent projet sont les suivants :

1. Étudier, au moyen de simulations, l'étendue de l'applicabilité de la NAH telle qu'elle est formulée actuellement, particulièrement à l'égard du repliement temporel.
2. Proposer une nouvelle formulation de la NAH en régime transitoire.
3. Valider expérimentalement l'applicabilité de la méthode en propagation directe.

4. Utiliser la nouvelle approche par des simulations et expérimentalement en rétropropagation tout en la comparant avec la NAH classique.

Pour atteindre ces objectifs, la démarche suivante est proposée :

1. La pression acoustique rayonnée par une plaque simplement supportée impactée en son centre est simulée à l'aide des équations (1.22) et (1.23). L'objectif du projet est d'étudier l'applicabilité de la NAH à l'étude du rayonnement acoustique transitoire et non de comparer le rayonnement expérimental de la plaque avec le rayonnement théorique. Ainsi, la modélisation de la force n'est pas l'élément clé du projet, bien qu'on souhaite qu'elle soit réaliste. C'est pourquoi on a choisi une forme analytique relativement simple se rapprochant de la réalité lorsque l'impact est centré, soit l'expression de la force approximée par Heitkämper et donnée par l'équation (1.17). On considère également l'amplitude maximale de la force F_0 telle qu'elle est décrite par l'équation (1.11) et le terme C_L tel qu'il est défini par l'équation (1.19), ces deux paramètres ayant déjà été utilisés à des fins de validation expérimentale [24].
2. Ces simulations sont faites en des points espacés régulièrement et situés dans un plan parallèle à la plaque, de manière à simuler des mesures. Les critères d'échantillonnage spatial sont essentiellement basés sur ceux utilisés par de La Rochefoucauld [15, 16]. Ainsi, une différence de 20 dB à $f = c/(2\Delta x)$ par rapport à l'amplitude maximale du spectre de la pression rayonnée est jugée comme étant un bon compromis quant à la qualité des résultats de propagation et le nombre de points utilisés. L'échantillonnage dans le domaine du temps respecte évidemment la fréquence de Nyquist puisque le nombre de modes de la plaque qui sont excités est prédéterminé.
3. La fonction de Green donnée par l'équation (1.29) est celle utilisée pour la propagation directe. Le taux d'erreur est calculé en comparant point par

point les résultats de propagation dans le domaine du temps avec ceux des simulations en fonction notamment de la position sur le plan propagé ainsi que de la distance de propagation.

4. Une nouvelle formulation des fonctions de Green basée sur la transformée de Laplace numérique est proposée. Cette formulation est comparée avec la NAH traditionnelle sur deux aspects, soit le repliement temporel et les effets des répliques spatiales dans le domaine du temps.
5. Un montage est conçu afin de valider expérimentalement la méthode de propagation directe dans le cas du rayonnement d'une plaque de plexiglas suspendue à ses quatre extrémités et frappée en son centre par un pendule d'acier. Les signaux mesurés dans un plan près de la plaque sont propagés et comparés aux mesures faites dans les plans de propagation.
6. La technique est aussi appliquée en rétropropagation aux signaux simulés et expérimentaux. Les procédés de filtrage courants pour la NAH sont étudiés dans le domaine de Laplace.

Les deux premiers objectifs sont couverts au chapitre 3 alors que le troisième l'est partiellement. Le chapitre 4 complète le troisième objectif alors que le chapitre 5 traite du quatrième objectif.

CHAPITRE 3

ARTICLE : FORWARD PROJECTION OF TRANSIENT SOUND PRESSURE FIELDS RADIATED BY IMPACTED PLATES USING NUMERICAL LAPLACE TRANSFORM

Ce chapitre présente l'article « *Forward projection of transient sound pressure fields radiated by impacted plates using numerical Laplace transform* » écrit par Jean-François Blais et Annie Ross. Cet article a été accepté avec corrections mineures le 21 octobre 2008 par *The Journal of the Acoustical Society of America*. Dans ce mémoire, la version révisée de l'article qui a été envoyée au journal le 23 janvier 2009 est présentée.

L'article en question constitue l'essentiel de la formulation de la NAH pour l'étude dans le domaine du temps du rayonnement transitoire. Après y avoir étudié les limitations de la formulation actuelle, l'utilisation de fonctions de Green dans le domaine de Laplace au lieu de celui de Fourier est proposée. Le phénomène de repliement temporel dû à l'utilisation de la DFT inverse pour le passage du domaine fréquentiel à celui du temps est ainsi évité. Les effets cumulés des répliques spatiales et du repliement temporel sont aussi étudiés. Enfin, la technique est validée en propagation directe dans le cas du rayonnement d'une plaque de plexiglas frappée en son centre et suspendue aux quatre coins. La symétrie de la configuration expérimentale a été considérée et la pression acoustique n'a été mesurée que dans un seul quadrant dont un des coins correspond au point d'impact.

Le code *Matlab* pour le calcul de l'accélération transverse de la plaque et de son rayonnement ainsi que les programmes utilisés pour la propagation par NAH, qui sont essentiellement basés sur les algorithmes de transformée de Fourier rapide

(FFT), sont présentés à l'Annexe II. Les détails concernant le montage expérimental et l'acquisition des données sont décrits à l'Annexe III. Enfin, la réponse impulsionnelle d'un piston circulaire bafflé utilisé pour illustrer la combinaison des repliements temporel et spatial est détaillée à l'Annexe IV.

3.1 Abstract

Forward propagation of the transient sound pressure radiated by an impacted plate is presented. It is shown that direct and inverse time domain discrete Fourier transforms, involved in Fourier transform based near-field acoustical holography (NAH), lead to aliasing errors in the reconstructed time signals. Adding trailing zeros to the initial time signals is an inefficient way to reduce time aliasing errors. Hence, the numerical Laplace transform is introduced and a Fourier transform based transient NAH (TNAH) approach is formulated. An error measure is introduced to compare both standard and transient NAH with respect to the propagation distance and the location of the observation point in the projection plane. The percentage of error with TNAH is reduced by more than a factor of 10 without adding trailing zeros to the initial signals. A sound pressure field radiated by a baffled piston is also forward propagated using both methods to illustrate the reduction of spatial wraparound effects in the time domain using TNAH. Simulation results are validated experimentally using a free plexiglas plate impacted at its center.

3.2 Introduction

Sounds radiated by impacted structures are an important source of noise in industrial applications such as riveting and hammering, and can cause hearing impairment. In these sound fields, transient phenomena such as the radiation due to the

reflection of flexural waves in the structure (at edges, holes or any local changes in the structure's mechanical impedance) have time and space properties which are of interest for the development of impact noise control devices [10]. Accordingly, a time and space visualization technique such as near-field acoustical holography (NAH) [23, 30] could be used as a tool to gain a better understanding of these transient acoustic phenomena and thus, lead to better control devices.

Forward propagation of transient sound fields has been investigated by de La Rochefoucauld *et al.* [15, 16] using four formulations of time domain holography. These approaches were combinations of frequency/time and space/wave vector domains. Considering the simulated sound pressure radiated by a baffled piston, a parametric study has been carried out with respect to the bandwidth of the time signals, geometric characteristics of the source and of the measurement aperture, and the propagation distance. The four formulations have been also used experimentally to propagate sound pressure fields radiated by loudspeakers and impacted plates. The Fourier transform based NAH formulation (i.e. in the frequency and wave vector domains), which has also been applied successfully by Clement *et al.* [13] to propagate the sound pressure radiated by a piezoelectric transducer, lead to better results than time/space or frequency/space formulations, even with less measurement points.

The noise produced by impacted plates is of interest because plates are simple structures encountered in industry. However, by examining closely the de La Rochefoucauld *et al.* results relative to plate radiation, one could note that propagated signals are non-causal, i.e. sound pressure is not zero at time $t = 0$ s. This can be attributed to the use of direct and inverse time domain discrete Fourier transforms (DFT) involved in the Fourier transform based NAH formulation, leading to time aliasing errors in the propagated signals if the initial data is not properly padded with zeros [63]. Aliasing errors are negligible for sound pressure signals

much shorter than the observation time window. The sound pressure radiated by the loudspeakers or the transducer mentioned above are examples of these very short signals. On the other hand, time aliasing errors become more significant both in amplitude and duration when initial time signals are truncated, which is the case of the sound pressure radiated by an impacted plate.

Wu *et al.* have derived a transient formulation of the Helmholtz equation least squares (HELS) method [56] to study transient acoustic sources [61]. This approach makes use of the Laplace transform, which is a common tool for transient problems. In the present paper, a Fourier transform based transient NAH (TNAH) formulation, also using the Laplace transform, is presented. While the inverse Laplace transform in the transient HELS formulation is calculated using the residue theory, the TNAH approach is based on direct and inverse numerical Laplace transforms (NLT). Consequently, the k -space Green's function involved in the Fourier transform based NAH is reformulated and standard DFT algorithms for time and space transformations can still be used.

In Sec. 3.3, general equations for the transient radiation of an impacted plate and the basics of the standard NAH formulation are summarized. Section 3.4 presents the time aliasing phenomenon and how it can affect forward propagation. The sound pressure radiated by an impacted plate is simulated in a measurement plane. This data is propagated using the standard NAH formulation to illustrate time aliasing errors. The use of time domain zero padding as a way to reduce aliasing errors is also discussed. The NLT and its application to NAH are introduced in Sec. 3.5. The Gibbs phenomenon in the time domain, which is not an issue in standard NAH, must be considered in the TNAH formulation and is discussed in this section. In Sec. 3.6, an error measure is introduced to compare both standard and transient NAH with respect to the propagation distance and the location of the observation point in the projection plane. Section 3.7 illustrates spatial wraparound

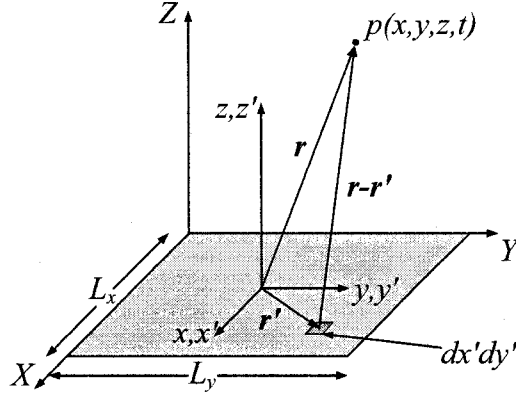


Figure 3.1 – Rectangular plate and coordinate systems.

errors by applying standard NAH to the simulated pressure radiated by a circular baffled piston. It is shown that these errors are negligible with the TNAH approach. Finally, in Sec. 3.8, simulation results are validated experimentally with an impacted, free plexiglas plate.

3.3 Sound radiation and propagation

3.3.1 Transient sound radiation of an impacted plate

Let us consider the rectangular plate of dimensions $L_x \times L_y$ and thickness h shown in Fig. 3.1. The cartesian coordinates (X, Y, Z) originate at the corner of the plate whereas coordinates (x, y, z) are located at its center.

Suppose that a sphere strikes the plate at point (X_0, Y_0) at time $t = 0$ s. The amplitude and the duration of the impact force $F(t)$ are functions of the sphere radius (r_s), the impact velocity (v_s) and other physical and mechanical properties of both the plate (subscript p) and the sphere (subscript s) such as the Young's modulus (E), the mass density (ρ) and Poisson's ratio (ν) [19, 21].

The transverse displacement of an undamped simply supported plate due to an impact is given in terms of a time convolution (*) by [19]

$$w(X, Y, t) = \frac{1}{\rho_p h} \sum_m \sum_n \frac{\Phi_{mn}(X_0, Y_0) \Phi_{mn}(X, Y)}{\omega_{mn}} \times \left\{ F(t) * \sin(\omega_{mn} t) \right\} \quad (3.1)$$

where Φ_{mn} are the mode shapes and ω_{mn} are the natural frequencies [23]. The transverse acceleration is obtained from the double time derivation of Eq. (3.1) and is given by

$$\ddot{w}(X, Y, t) = \frac{1}{\rho_p h} \sum_m \sum_n \Phi_{mn}(X_0, Y_0) \Phi_{mn}(X, Y) \times \left\{ F(t) * \left[-\omega_{mn} \sin(\omega_{mn} t) + \delta(t) \right] \right\} \quad (3.2)$$

where $\delta(t)$ is a Dirac impulse.

For a plate in an infinite baffle, the free field radiated sound pressure is given by the Rayleigh surface integral, in the cartesian coordinates (x, y, z) shown in Fig. 3.1, i.e.

$$p(x, y, z, t) = \frac{\rho_0}{2\pi} \iint \ddot{w} \left(x', y', t - \frac{R}{c} \right) \frac{dx' dy'}{R} \quad (3.3)$$

with

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|,$$

where c and ρ_0 are the sound velocity in the ambient medium and the density of the medium, respectively. Vectors $\mathbf{r}$ and $\mathbf{r}'$ shown in Fig. 3.1 represent the position of a sound pressure measurement point and that of an infinitesimal surface element $dx' dy'$ on the plate.

3.3.2 Near-field acoustical holography

Since the basics of NAH are widely described in the literature [23], only a brief summary is presented here. Let us first introduce the Fourier transform pairs applied to acoustic pressure,

$$P(k_x, k_y, z, \omega) = \int_0^{+\infty} \iint_{-\infty}^{+\infty} p(x, y, z, t) e^{-i(k_x x + k_y y - \omega t)} dx dy dt \quad (3.4)$$

and

$$p(x, y, z, t) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} P(k_x, k_y, z, \omega) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} dk_x dk_y d\omega \quad (3.5)$$

where k_x and k_y are the trace wavenumbers in the x and y directions.

Considering a measurement plane (hologram) located at $z = z_0$, propagation of the sound field to a plane $z > z_0$ can be written as [23]

$$P(k_x, k_y, z, \omega) = P(k_x, k_y, z_0, \omega) G_{pp}(k_x, k_y, d, \omega) \quad (3.6)$$

where G_{pp} is the k -space Green's function in the frequency domain, and $d = z - z_0$. Both in transient cases [16] and in stationary cases [29], it is preferable for short propagation distances d to sample G_{pp} directly in the k -space domain, i.e.

$$G_{pp}(k_x, k_y, d, \omega) = e^{ik_z d} \quad (3.7)$$

where $k_z^2 = k^2 - k_x^2 - k_y^2$ and $k = \omega/c$.

Tukey windows can be applied in both space and time domains to avoid spectral leakage in NAH calculations. The Tukey window is defined as [23]

$$\Gamma(\xi) = \begin{cases} 1 & |\xi| < \xi_m - \xi_w \\ \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi(|\xi| - \xi_m)}{\xi_w} \right) \right] & \xi_m - \xi_w \leq |\xi| \leq \xi_m \end{cases} \quad (3.8)$$

where ξ_m is the maximum value taken by ξ (corresponding to x , y or t), and ξ_w is the width of the tapered rim.

3.4 Time aliasing

3.4.1 Description of the phenomenon

To illustrate the consequences of time aliasing due to forward propagation using Fourier transform based NAH, let us first consider a given discrete function $f(t)$, truncated at $t = T$, as shown in Fig. 3.2(a). If a transfer function that causes a delay τ_0 is applied in the frequency domain,

$$F'(\omega) = F(\omega)e^{i\omega\tau_0}, \quad (3.9)$$

the resulting function should be null prior to $t = \tau_0$, i.e. $f'(t < \tau_0) = 0$. However, the use of an inverse time DFT replicates the resulting time signal $f'(t)$ with a period T as shown in Fig. 3.2(b). Therefore, $f'(0) = f(T - \tau_0)$, causing an aliasing error that can be quite large at the beginning of the time period.

When an acoustical hologram is forward propagated using the NAH technique, the sound pressure at an observation point (x, y, z) in the projection plane z is a summation of the contribution of each measurement point (x_0, y_0, z_0) . Each of these sound pressure contributions have their own attenuation and time delay (similar to Eq. (3.9)) caused by the k -space Green's function in Eq. (3.7). As a result, time aliasing errors due to NAH forward propagation can be superimposed to the

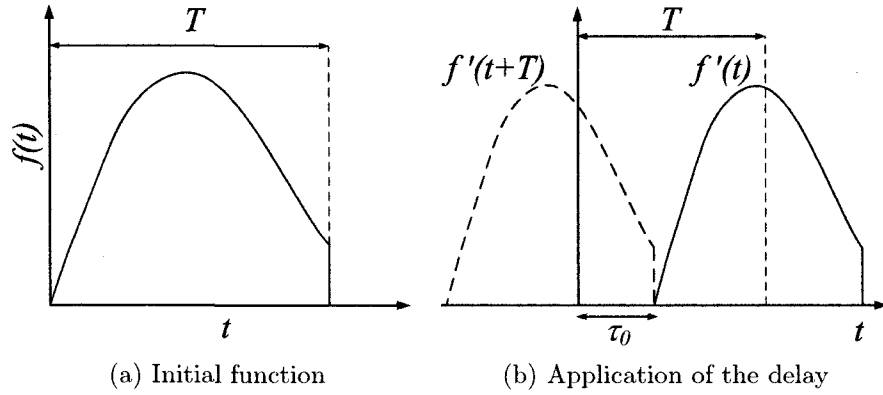


Figure 3.2 – Application of a delay τ_0 to a function using a DFT.

actual signal, which is not the case in Fig. 3.2(b) where the time-aliased part of the signal is clearly visible for $t < \tau_0$. The amplitude of the sound pressure at the observation point and that of the time aliasing error due to NAH propagation are of the same order of magnitude. The duration of these aliasing errors mainly depend on the hologram dimensions and on the position of the observation point in the propagation plane.

3.4.2 Illustration of time aliasing in NAH

To illustrate the importance of time aliasing errors, forward propagation of a simulated hologram was carried out with the Fourier transform based NAH. The transverse acceleration of the plate was simulated considering a central impact force ($X_0 = L_x/2, Y_0 = L_y/2$). Impact parameters are listed in Table 3.1. Summations in Eq. (3.2) were computed over the 40 first modes in each direction ($m, n \leq 40$). Experimental validations were carried out using an instrumented hammer with a spherical metal tip [24]. In Table 3.1, m_i is the total mass of the impactor. The impact force (---) and the initial transverse acceleration of the plate at the impact point (—) are shown in Fig. 3.3.

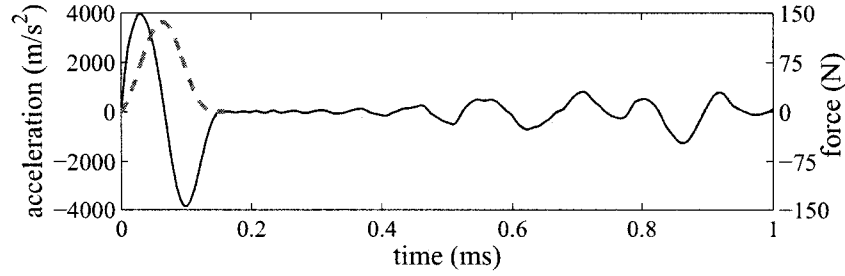


Figure 3.3 – Time signals of the transverse acceleration of the plate at the impact point (—) and the impact force (---).

Table 3.1 – Numerical simulation properties.

Aluminium plate		Steel sphere		Ambient air	
$L_x \times L_y$	$60.9 \times 91.4 \text{ cm}^2$	r_s	3.2 mm	ρ_0	1.29 kg/m^3
h	4.8 mm	m_i	26.8 g	c	343 m/s
ρ_p	2700 kg/m^3	ρ_s	7800 kg/m^3		
E_p	71 GPa	E_s	200 GPa		
ν_p	0.33	ν_s	0.28		
		v_s	0.23 m/s		
Hologram					
T	2.56 ms	$N_x \times N_y$	127×127	$\Delta x, \Delta y$	2 cm
Δt	5 μs	$\overline{N}_x \times \overline{N}_y$	147×147	x_w, y_w	20 cm
t_w	0.25 ms				

The acoustical hologram was simulated in the plane $z_0 = 5 \text{ cm}$ using a double trapezoidal integration scheme to evaluate Eq. (3.3). Time and space properties of the simulated measurement plane including signal duration (T), time step (Δt), number of measurements (N_x, N_y), total number of points including the spatial zero padding ($\overline{N}_x, \overline{N}_y$) and the distance between these points ($\Delta x, \Delta y$) are also summarized in Table 3.1. The hologram was tapered in the time and space domains using Tukey windows (Eq. (3.8)).

The initial transient radiation of the impacted plate is illustrated in Fig. 3.4 for two different locations at $z = z_0$. In Fig. 3.4(a), the sound pressure signal is calcu-

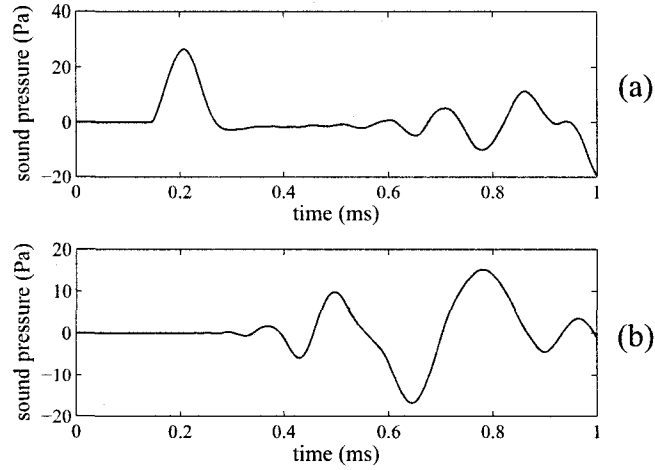


Figure 3.4 – Transient radiation of the impacted plate in the plane $z_0 = 5$ cm, (a) on the impact axis and (b) at $x = y = 20$ cm.

lated on the impact axis. The initial sound pressure peak (from 0.15 ms to 0.25 ms) is clearly visible, and is followed by ringing. At 28 cm from the impact axis (Fig. 3.4(b)), sound propagation delay and apparent dispersion of the initial sound pressure peak [24] can be observed. At both locations, because the initial sound pressure amplitude is null for a fair amount of time, any disturbance due to time aliasing would be observable.

Let us now consider the propagation of the sound field simulated at $z_0 = 5$ cm to the plane $z = 35$ cm. As mentioned in Sec. 3.2, one way of reducing time aliasing when applying Fourier transform based NAH is to increase the duration (T) of the initial sound pressure signals by adding trailing zeros to a total duration $\bar{T}$. This way, time aliasing would cause these zeros to be continued at the beginning of the signal, thereby reducing considerably the time aliasing error. Moreover, as it will be seen below, adding a sufficient number of zeros allows to separate the time-aliased part from the actual signal. It is proposed here to show the consequences of doubling the duration of initial signals by adding trailing zeros, i.e. $\bar{T} = 2T$.

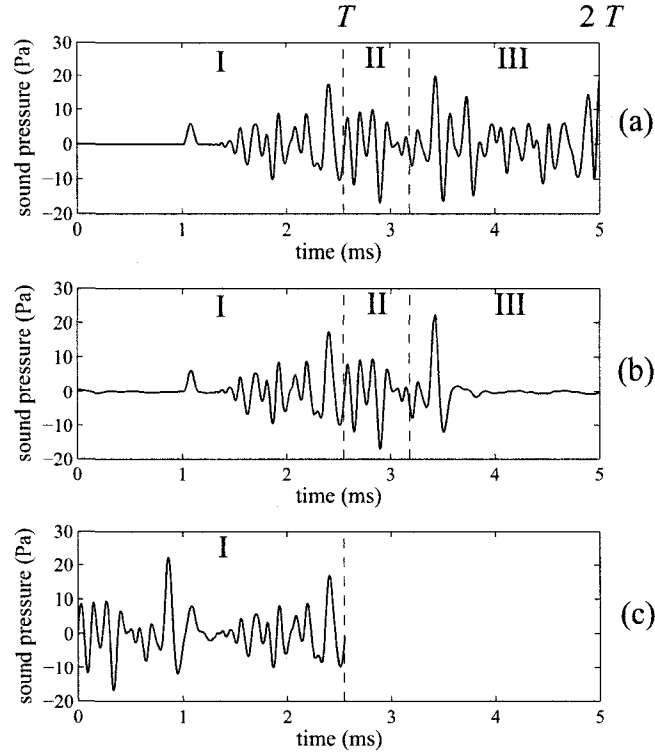


Figure 3.5 – Sound pressure on the impact axis at $z = 35$ cm. (a) Simulated signal. Propagation using Fourier transform based NAH from field simulated at $z_0 = 5$ cm: (b) with trailing zeros added to the initial signals and (c) without trailing zeros.

Figure 3.5(a) represents the signal simulated at $z = 35$ cm over a duration $2T$ along the impact axis, where the initial pressure peak and ringing can still be observed. However, the amplitude of the initial pressure peak is reduced by about 12.9 dB compared to that at $z_0 = 5$ cm. The peak is also delayed by approximately 0.9 ms, which corresponds to the propagation time d/c . The ringing wave form is also modified, due to the fact that propagation times for each element of the plate are not directly proportional to the distance along the z -axis. Figure 3.5(b) shows the propagation over a distance $d = 30$ cm of the zero padded time signals simulated at $z_0 = 5$ cm. In Fig. 3.5(c), propagation was obtained without padding in the time domain, which explains why the resulting signal lasts half the duration of that in

Fig. 3.5(b). To facilitate the observations and the discussion, the graphs in Fig. 3.5 were segmented in three zones, numbered from I to III. Borderlines are located at $t = T = 2.56$ ms and $t = T + d/c - t_w = 3.2$ ms. Zones II and III correspond to the second half of the signal, that is, to the zero padding on the original signals.

First, it can be observed that the time signal obtained using a zero pad (Fig. 3.5(b)) is very similar to the simulated signal in zones I and II. Each point of the hologram contributes to the propagated signal over duration $T + R_0/c - t_w$, where R_0 is the distance between a measurement point located at (x_0, y_0, z_0) and the observation point. Therefore, the contribution of hologram point $(0, 0, z_0)$ closest to the reconstruction point located at $(0, 0, z)$ stops at $t = 3.2$ ms. Thereafter, in zone III, the contribution of the other hologram points (farther from the reconstruction point) stop gradually as the propagation distance increases, causing an attenuated signal.

Second, the time signal obtained using standard NAH with no trailing zeros (Fig. 3.5(c)) is quite different from the simulated signal (Fig. 3.5(a)), to the point where the amplitude of the time aliasing error is greater than that of the initial pressure peak in Fig. 3.5(a). Consequently, this peak and its time of arrival at around 1.1 ms cannot be clearly identified from the signal. In fact, it can be shown that superposition of zones II and III over zone I in Fig. 3.5(b) gives the signal in Fig. 3.5(c). Better agreement with the simulation is obtained after $t = 1.5$ ms due to the fact that, in this particular case, the amplitude ratio of the folded signal over the actual signal becomes small (less than 3%).

This is a typical example of the time aliasing phenomenon when sound fields are propagated using the Fourier transform based NAH. The duration of the time aliasing error τ_{error} is defined as the minimum duration of the zero pad $(\bar{T} - T)$ for which there is no time aliasing. It can be estimated considering the point in the hologram (x_f, y_f, z_0) that is the farthest from the observation point and for which

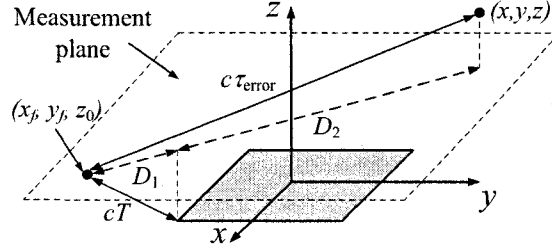


Figure 3.6 – Geometry of the error duration estimation.

the sound pressure is not null at the end of the interval $t \leq T$. Generally, this point corresponds to the farthest corner of the measurement aperture. For a large hologram or a short observation window, as in the simulated hologram presented above, the error duration, shown in Fig. 3.6, is given by

$$\tau_{\text{error}}(x, y, z) = \frac{1}{c} \sqrt{(D_1 + D_2)^2 + d^2}, \quad (3.10)$$

where

$$D_1^2 = (cT)^2 - z_0^2;$$

$$D_2^2 = (L_x/2 + |x|)^2 + (L_y/2 + |y|)^2.$$

In order to entirely avoid time aliasing in NAH, the duration of the zeros added in the initial signals must be at least $\bar{T} - T = \tau_{\text{error}}(x, y, z)$, that is, in the above example, 4.2 ms. In Fig. 3.5(b), since this condition is not respected, some ripples, which are the continuation of those in zone III, are mainly visible at $t < 1$ ms. Even though their amplitude is relatively weak and they do not alter the initial pressure peak significantly, these ripples still cause sizeable errors and more zeros would have been required to obtain a better reconstruction of the propagated signal. In addition, the farther the sound field is propagated, the more zeros are required, which also results in huge computing requirements. The use of the numerical

Laplace transform instead of the discrete Fourier transform is thus proposed to obtain a better representation of the propagated signal without zero padding.

3.5 Numerical Laplace Transform

The Laplace transform is a common tool to study transient phenomena. However, functions in the Laplace domain either may be difficult to invert, or are only available in a discrete form. One of the first inversion algorithms was introduced by Bellman *et al.* in the 1960's, in which the Laplace integral was replaced by a Gauss-Legendre polynomial [64]. Day *et al.* proposed the addition of an artificial damping factor σ to the $i\omega$ term in discrete Fourier transforms [65]. That method was named “modified Fourier transform” (MFT). The name “numerical Laplace transform” (NLT) has been introduced by Wilcox who formulated the MFT in terms of the Laplace theory [66]. The NLT has been successfully applied to several fields such as electrical transmission lines [66–68], vibrations [69–71] and acoustics [72, 73].

3.5.1 Formulation of the NLT

The analytical Laplace transform of a function $f(t)$ is given by

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (3.11)$$

where s is the time domain Laplace variable. Its inverse can be expressed in a complex form by the Mellin-Fourier integral [74]

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st}ds. \quad (3.12)$$

and is possible only if the system is stable relative to σ .

Replacing s by $\sigma + i\omega$, where σ is a constant damping factor and ω is the frequency used in the Fourier transform, and considering a causal system for which $f(t < 0) = 0$, Eqs. (3.11) and (3.12) can be rewritten as

$$F(\sigma + i\omega) = \mathcal{F}_t \{ f(t) e^{\sigma t} \} \quad (3.13)$$

and

$$f(t) = e^{-\sigma t} \mathcal{F}_t^{-1} \{ F(\sigma + i\omega) \}, \quad (3.14)$$

where $\mathcal{F}_t$ is the time DFT operator and $\mathcal{F}_t^{-1}$ is its inverse [66]. Depending on the sign of the exponential in the definition of the time domain Fourier transform, σ is positive or negative. It always acts as *damping*, i.e. the exponential factor in Eq. (3.13) must decrease sufficiently so that the amplitude at the end of the time signal becomes negligible. In our case, referring to Eqs. (3.4) and (3.5), σ is chosen to be negative.

3.5.2 Signal processing issues

As previously seen in Sec. 3.4.1, the error at the beginning of sound pressure signals $p(t)$ is roughly equal to $p(T)$. So, one could think that the damping factor should be as large as possible to minimize the initial error. However, signal processing issues such as the Gibbs oscillations for which amplitudes are generally small compared to that of the signals of interest in NAH applications, have to be treated carefully when applying the NLT.

The Gibbs phenomenon appears at sharp discontinuities of a given time signal when its spectrum is truncated. Since the use of the inverse time domain DFT leads to

a periodization of the time function with $p(T^+) = p(0^+) \neq p(T^-)$, ripples mainly occur at the beginning and at the end of the signal. Therefore, the exponential amplification factor in Eq. (3.14) ($e^{-\sigma t}$, keeping in mind that σ is negative) can overamplify the Gibbs oscillations.

A first way to reduce the impact of the Gibbs phenomenon is to increase the sampling frequency so that truncation of the spectrum is less significant. However, this is not necessarily possible experimentally, since sampling frequency is limited by the acquisition device. That is why windowing in the frequency domain has been introduced [75]. Several windows such as Hanning, Blackman, Lanczos and Riesz have been studied by Ramirez *et al.* [68]. However, the amplitudes of such windows decrease rapidly in the spectrum and this is not suitable for signals with large bandwidths compared to half of the sampling frequency ($F_s/2$). It would lead to a significant attenuation of high frequency components which would be detrimental to the recovery of the initial time signal. In this paper, a Tukey window is used as a trade-off between Hanning and rectangular windows. The width of the tapered rim on both sides is chosen to be $f_w = F_s/4$, so that half of the window is rectangular.

Values of σ have been proposed in the literature [66, 70]. Variation of parameters such as T , N_t (the number of points in the signal) and the bandwidth of the signal have been studied by Inoue *et al.* [76]. The value of σ suggested by Wedepohl [67] was chosen for the current application. It is given with the appropriate sign by

$$\sigma = -\frac{2\ln(N_t)}{T}. \quad (3.15)$$

3.5.3 Application to NAH

The NLT can be applied to the standard NAH formulation to obtain a Fourier transform based transient NAH (TNAH) method. Let us first consider a monochromatic wave

$$p(x, y, z, t) = P_0 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z) - st} \quad (3.16)$$

which is artificially amplified with the factor σ in $s = \sigma + i\omega$. Similar to the Fourier domain development of NAH, Eq. (3.16) can be combined with the wave equation

$$\nabla^2 p(x, y, z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p(x, y, z, t) = 0 \quad (3.17)$$

to get

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \frac{s^2}{c^2} = 0.$$

It is then possible to write k_z as

$$k_z = k'_z + i\kappa \quad (3.18)$$

with

$$\begin{aligned} k'_z &= \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \right)^{1/2}; \\ \kappa &= \left(\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \right)^{1/2}; \\ a &= \frac{\omega^2 - \sigma^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2 \text{ and } b = -\frac{2\omega\sigma}{c^2}. \end{aligned}$$

By combining Eqs. (3.7) and (3.18), the frequency dependence of the k -space Green's function can be formulated in the Laplace domain, i.e.

$$G_{pp} = e^{ik_z d} = e^{-\kappa d} e^{ik'_z d}, \quad (3.19)$$

where κ and k'_z are both real. The first term represents artificial damping and evanescence, and the second term corresponds to propagation. Accordingly, this transfer function attenuates all angular frequencies, even propagative waves, when sound fields are forward propagated, and amplifies frequencies when fields are propagated back toward the source.

Fourier transform based transient NAH (TNAH) is formulated by using Eqs. (3.13) and (3.14) in Eqs. (3.4) and (3.5) respectively, and by applying the k -space Green's function in Eq. (3.19). It is therefore proposed to compare TNAH to the standard NAH formulation for forward propagation of transient sound fields.

3.6 Comparison of TNAH with standard NAH

To test the efficiency of the new transient approach and to compare it to the Fourier transform based NAH, the sound pressure field simulated in the plane $z_0 = 5$ cm and studied in Sec. 3.4.2 was propagated in both the Fourier and the Laplace domains. The main objective of this section is to compare both methods for the same sources and measurement aperture properties. A complete parametric study is not considered here since it has been done by de La Rochefoucauld *et al.* in the standard NAH case. Only the propagation distance (d) and the location of the observation point in the propagation planes are studied. Both techniques behave in a similar way with other parameters such as the distance between microphones and the number of measurements since they both involve the computation of spatial 2D-DFTs.

To ensure minimally acceptable results in the Fourier domain, the duration of initial time signals was doubled by adding trailing zeros, as in Sec. 3.4.2. The relative error is calculated with

$$\text{Er}(x, y) = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N_t^*} (P_{\text{prop}}(x, y, t_n) - P_{\text{ref}}(x, y, t_n))^2}{\sum_{n=1}^{N_t^*} P_{\text{ref}}(x, y, t_n)^2}}, \quad (3.20)$$

where P_{prop} is the sound pressure signal propagated using one of the Green's functions (Eqs. (3.7) or (3.19)) and P_{ref} is the pressure signal simulated at the propagation plane. Because the field propagated in the Fourier domain was tapered with a Tukey window, the relative error is calculated on the first $N_t^* = 462$ points, which corresponds to a duration of 2.3 ms.

The error distribution over one fourth of the calculation plane for a propagation distance $d = z - z_0 = 5$ cm is presented in Fig. 3.7. A projection of the plate is indicated with black lines. For both methods, errors are generally more significant near the boundaries of the propagation plane: there is less energy in these signals due to a longer time of arrival, so the denominator in Eq. (3.20) is very small. The overall relative error over the plate is slightly larger ($\approx 1.3\%$) with the use of NAH, even with trailing zeros. For greater distances along the plane, the relative error in NAH increases exponentially whereas it remains relatively constant in TNAH. In fact, TNAH errors increase significantly only at values of x and y for which there is no signal at all in the observation window $t < T$, i.e.

$$cT < [(|x| - L_x/2)^2 H(|x| - L_x/2) + (|y| - L_y/2)^2 H(|y| - L_y/2) + z^2]^{1/2}, \quad (3.21)$$

where $H(x)$ is the Heaviside function.

In Fig. 3.8, relative errors are shown as functions of the propagation distance for three coordinates ($x = y = 0$, $x = y = 20$ and $x = y = 40$ cm). The results are

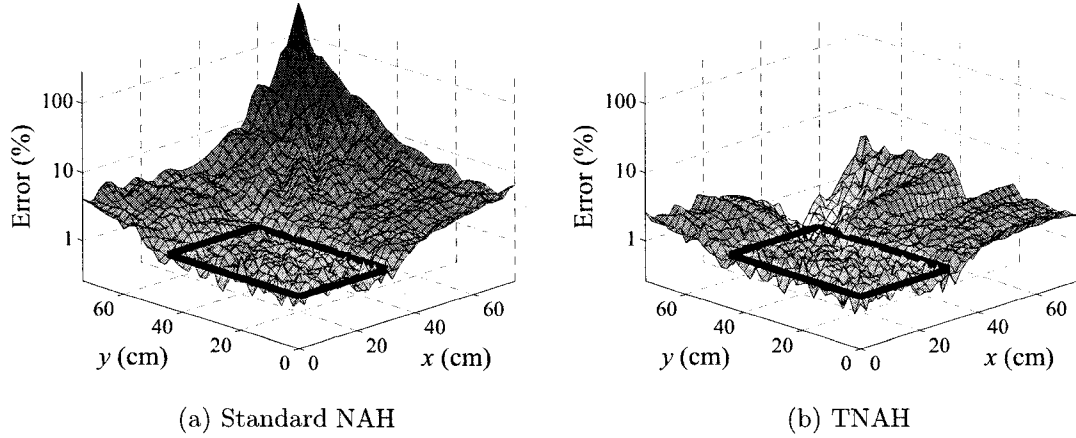


Figure 3.7 – Distribution of the relative error in the plane $z = 10$ cm after a propagation of $d = 5$ cm.

presented on a semi-log scale. The relative error in NAH with a Green's function sampled in the k -space (---) domain increases exponentially with the propagation distance [16]. The Green's function used the TNAH formulation (—) is also sampled in the k -space domain and therefore should not be appropriate for great propagation distances; the relative error, however, remains relatively low and constant with distance. In fact, for greater propagation distances not shown in Fig. 3.8, the relative error increases because the condition defined by Eq. (3.21) is not satisfied.

A time domain example is presented in Fig. 3.9 on the impact axis and at $x = y = 40$ cm for a propagation distance of 50 cm, from $z_0 = 5$ cm to $z = 55$ cm. On this figure, both methods are compared to a signal simulated at $z = 55$ cm. With TNAH, the initial pressure peak from 1.6 to 1.75 ms on the impact axis (Fig. 3.9(c)) and the dispersed signal (Fig. 3.9(d)) are easily identified. The simulated and propagated signals are clearly superimposed. With NAH, the time of arrival of the initial pressure peak (Fig. 3.9(a)) is not as clear as in TNAH; the time of arrival of the dispersed signal in Fig. 3.9(d) cannot be determined. The point at $(0, 0, 55)$ cm

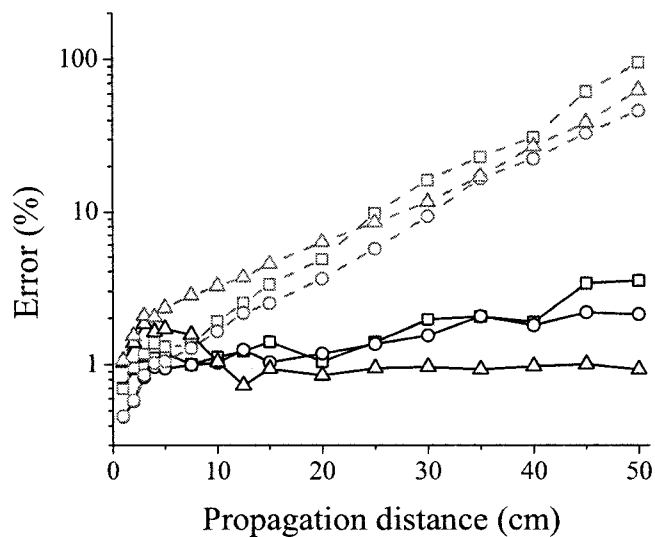


Figure 3.8 – Relative error as a function of the propagated distance: TNAH (—) and NAH (---). Impact axis ($\square$), $x = y = 20$ cm ($\circ$) and $x = y = 40$ cm ($\triangle$).

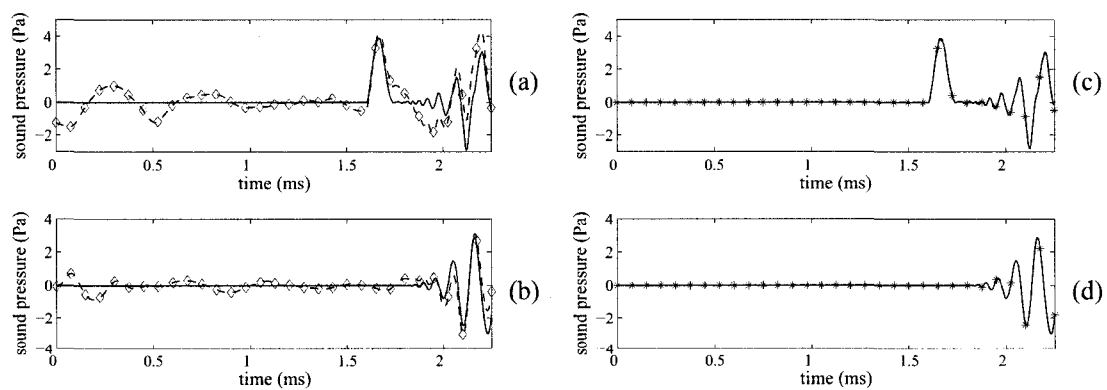


Figure 3.9 – Propagation from $z_0 = 5$ cm over a distance of 50 cm. Simulated signal (—), propagated signal using NAH ($-\diamond-$) and propagated signal using TNAH ($-\ast-$): (a) and (c) at $(0,0,55)$ cm; (b) and (d) at $(40,40,55)$ cm.

being closer to the plate than the point (40, 40, 55) cm, it was also expected that its relative error would be smaller, which is actually not the case.

According to Eq. (3.10), the duration of the error with NAH is estimated to about 4.4 ms for the signal on the impact axis (Fig. 3.9(a)) and 5.9 ms at $x = y = 40$ cm (Fig. 3.9(b)). The number of trailing zeros for $x = y = 40$ cm, which correspond to a duration of 2.56 ms, was thus insufficient and time aliasing occurred. However, at $x = y = 0$ cm, errors should not be significant over the whole observation window as in Fig. 3.9(a) since the first 2.56 ms of the error duration should be in the zero padded zone (from 2.56 to 5.12 ms) while the rest should be visible only in the first 1.8 ms of the observation window. It will be seen in the next section that for great propagation distances, an other kind of error may occur: those due to the effect in the time domain of spatial wraparound.

3.7 Spatial wraparound errors

3.7.1 Description of the phenomenon

The use of a k -space Green's function over a finite measurement aperture leads to wraparound errors caused by the spatial replication of the measurement aperture and hence, replication of the source [30]. These replications are due to the use of 2D-DFTs in the space domain. Figure 3.10 illustrates the original measurement aperture and the source (in grey) and the replications in either the measurement or the source plane. The parenthesis notation used in Fig. 3.10 represents the position of replications relative to the source identified by (0,0). Each numbered section in the source plane includes the spatial zero padding used in the measurement plane to increase the distance between the source and its replications and hence, reduce wraparound errors.

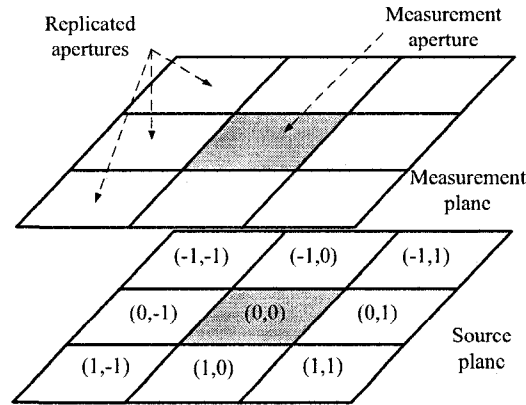


Figure 3.10 – Replications of an acoustic source due to 2D-DFTs.

Even if the propagation delay of replicated signals is greater than the observation time T , the sound pressure radiated by these replications can be present in the time signal of the original source due to time aliasing. For short propagation distances, the amplitude of the sound pressure radiated at the center of the calculation plane by these replicated sources is negligible compared to the sound pressure radiated by the original source; that is not the case near the edges of the calculation plane. Moreover, for great propagation distances the amplitudes of the sound pressure radiated by the original source and its replications become comparable: errors due to replicated sources become significant on the entire calculation plane.

To illustrate the combination of spatial replication of sources and time aliasing with the use of Fourier transform based NAH, a very short sound pressure signal is more appropriate than that of an impacted plate because propagation delays can be clearly determined. The transient radiation of a baffled circular piston was therefore chosen to present the spatial wraparound issue and to show how TNAH can partially solve the problem.

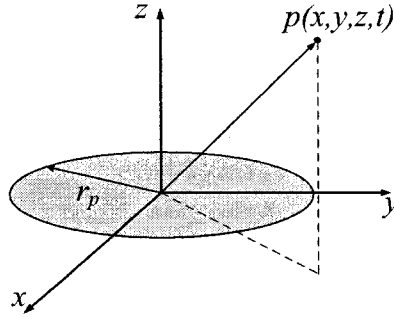


Figure 3.11 – Circular baffled piston geometry and its coordinate system.

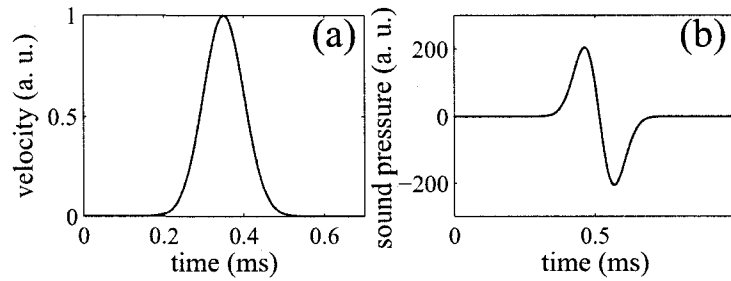


Figure 3.12 – (a) Velocity profile of the baffled circular piston and (b) its radiated sound pressure at $(0, 0, 5)$ cm.

3.7.2 Sound radiated by a circular baffled piston

The sound pressure radiated by a circular baffled piston (Fig. 3.11) with an arbitrary velocity profile $v(t)$ can be expressed by

$$p(x, y, z, t) = \rho_0 h_p(x, y, z, t) * \frac{d}{dt}v(t), \quad (3.22)$$

where h_p is the piston impulse response [77].

The amplitude (v_0), the full width at half is maximum (FWHM) and the central frequency (f_{central}) [15] of the velocity profile chosen for the simulations are listed in Table 3.2, together with the piston radius (r_p). The piston velocity and acoustic pressure profiles are also shown in Fig. 3.12. Properties of the hologram simulated

Table 3.2 – Properties of the piston and the simulated hologram.

Piston		Hologram	
r_p	4 cm	T	5.1 ms
v_0	1 a.u.	Δt	20 μ s
FWHM	120 μ s	$N_x \times N_y$	63×63
f_{central}	2800 Hz	$\overline{N}_x \times \overline{N}_y$	125×125
		$\Delta x, \Delta y$	2 cm
		x_w, y_w	20 cm

in the plane $z_0 = 5$ cm are summarized in Table 3.2. The dimensions of the simulated measurement aperture are large compared to the piston to show that replications can influence the time domain signals even when they are far from the original source.

3.7.3 Consequences in the time domain

Let us now consider a propagation over $d = 60$ cm. The sound pressure from the original piston and some replications were simulated on the central axis and over the first 20 ms (Fig. 3.13). The total distance between the source and its replications was taken into account, including the zero padding. A bracket notation $[m, n]$ is now used to represent all replications (a, b) for which $a^2 + b^2 = m^2 + n^2$. For instance, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$ and $(-1, 0)$ are included in $[1, 0]$. There are four replicated sources in $[1, 0]$, $[1, 1]$ or $[2, 0]$, but eight replications in $[2, 1]$. One can notice that amplitudes are in the same order of magnitude for the source and its replications.

Significant time aliasing errors may occur. In Fig. 3.13, the vertical dashed lines represent 5.1 ms intervals corresponding to the duration T of the observation window. It can be seen that replicated pulses appear only for times $t > T$, due to the use of a very large aperture. Replicated pulses appear at different times within

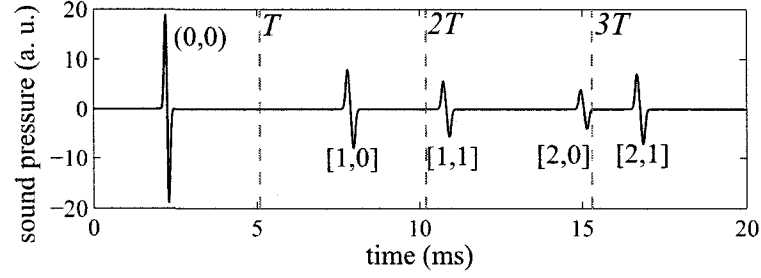


Figure 3.13 – Simulation of the radiated pressure by the source piston (0,0) and some of its replications $[m, n]$ at $z = 65$ cm.

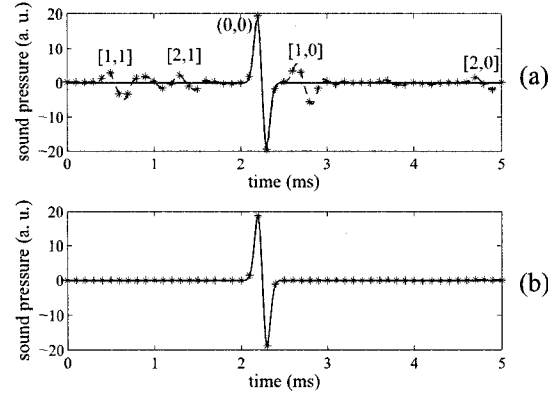


Figure 3.14 – Comparison of the simulated sound pressure radiated by the piston at (0,0,65) cm (—) and the signal propagated from $z_0 = 5$ cm over a distance $d = 65$ cm (—*) using (a) standard NAH and (b) TNAH.

the various windows $nT < t < (n+1)T$, where n is a positive integer. Due to time aliasing in the Fourier transform based NAH process, errors will appear within the observation window $0 < t < T$.

These errors can be observed in Fig. 3.14(a), where pressure signals propagated using standard NAH are compared to simulated signals at (0,0,65) cm. Bracket notation is still used, showing that the major pressure peaks correspond to those in Fig. 3.13. The amplitudes of replicated signals in Fig. 3.14(a) are smaller than those of Fig. 3.13. This is because the sound pressure was propagated using the k -space Green's function in Eq. (3.7), which does not give best results for great

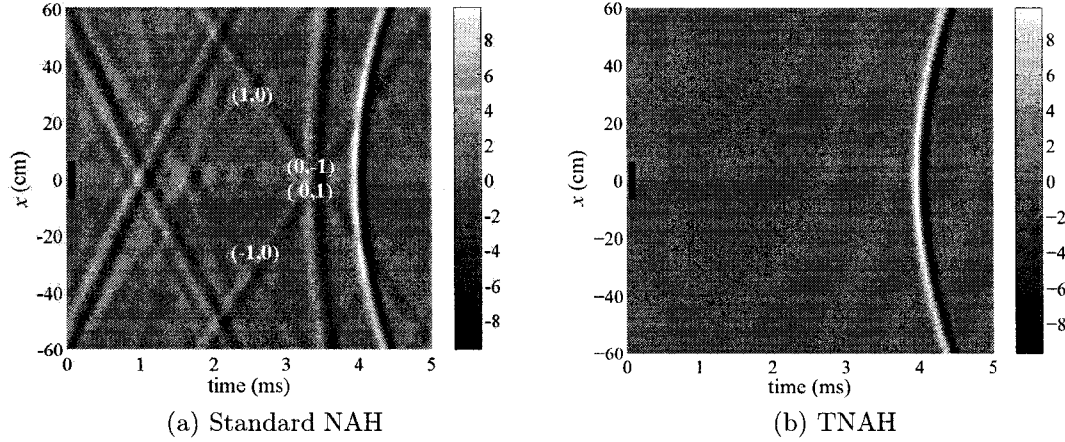


Figure 3.15 – Forward projection of the sound pressure field simulated in the plane $z_0 = 5$ cm to $z = 125$ cm at $y = 0$ cm as a function of x and t .

distances [16, 29]. On the other hand, in Fig. 3.14(b), the simulated signal and the signal propagated using TNAH are superimposed. The amplitudes of the replication peaks are several orders of magnitude lower than those in Fig. 3.14(a) due to the use of an artificial damping factor in the TNAH formulation. The corresponding relative errors given by Eq. (3.20) are 52% with NAH (Fig. 3.14(a)) and less than 2% with TNAH (Fig. 3.14(b)).

Wraparound errors in the time domain can be avoided not only on the central axis, but also elsewhere in the reconstructed plane if the spatial zero padding is sufficient. Propagation over the very long distance $d = 1.2$ m is shown in Fig. 3.15 as a function of t and x , at $y = 0$ cm. The black line indicates the location of the piston. Very clear wavefronts originating from each source replication can be observed in Fig. 3.15(a) due to time aliasing with NAH. Some of the secondary wavefronts in Fig. 3.15(a) are identified to particular replicated sources using the parenthesis notation from Fig. 3.10. For the same propagation using TNAH (Fig. 3.15(b)), results show that only the main wavefront radiated by the original piston is present. All secondary wavefronts are suppressed.

As it was said previously, errors due to spatial wraparound are *partially* suppressed by TNAH. In fact, this new formulation suppresses errors due to time aliasing. Therefore, if a replicated sound pressure peak has a propagation delay less than the observation time T , it will inevitably appear in the reconstructed signal. For instance, if the hologram of this section had been simulated over a duration $2T$ and propagated using TNAH, a second peak would have been visible since, according to Fig. 3.13, the propagation delay of replications $[1, 0]$ is smaller than $2T$. Solutions to that problem are to use an appropriate zero pad or to use another definition of time domain holography studied by de La Rochefoucauld *et al.* that does not create spatial replications.

In summary, the large relative error for great propagation distances, which was attributed by de La Rochefoucauld *et al.* [16] and by Veronesi and Maynard [29] to inadequate sampling of the k -space Green's function, are also caused by spatial wraparound. Therefore, propagation distances for which NAH formulations involving time domain DFTs are appropriate should be reinvestigated in the Laplace domain.

3.8 Experimental validation

The experimental setup in Fig. 3.16 was used in an anechoic chamber to validate the potential of TNAH to visualize the radiation of impacted structures. A plate hung at its four corners was impacted at its center by a pendulum. The properties of the two bodies are listed in Table 3.3. A 2-axes manual translation stage was used to displace the 4 by 2 microphone array. The 130A Acoustical electret microphones were calibrated in amplitude and phase, and were connected to a NI PXI-4472 acquisition device. Acquisition was triggered by another microphone located at 2.3 cm from the impact axis and at 2 cm from the plate.

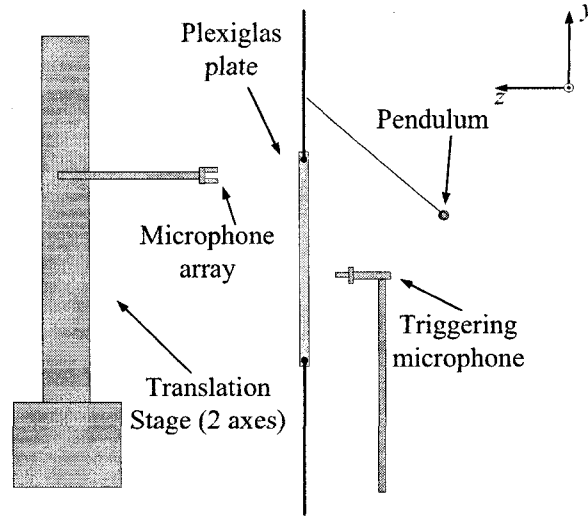


Figure 3.16 – Experimental setup.

Table 3.3 – Properties of the experimental setup.

Impacting bodies		Hologram	
Plexiglas plate		T	2.5 ms
$L_x \times L_y$	$50.6 \times 29.4 \text{ cm}^2$	F_s	102.4 kHz
h	5.8 mm	$N_x \times N_y$	55×51
Steel pendulum		$\bar{N}_x \times \bar{N}_y$	109×101
r_s	5.5 mm	$\Delta x, \Delta y$	1.4 cm
v_s	2 m/s	x_w, y_w	7 cm

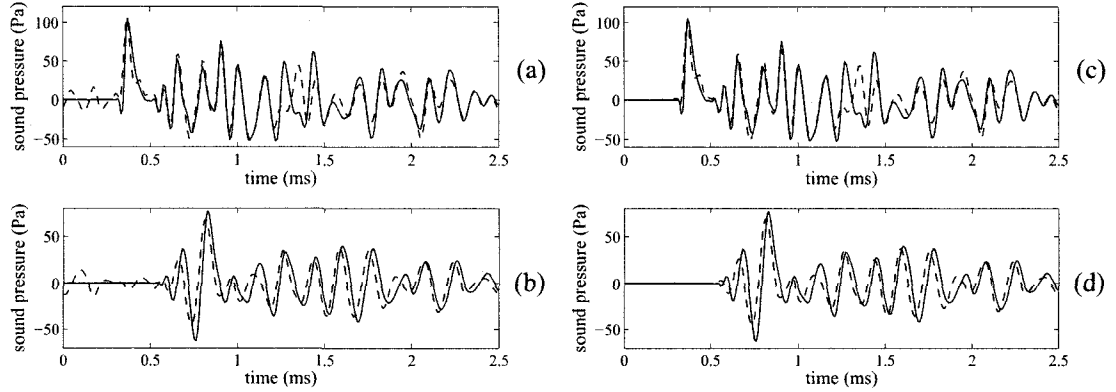


Figure 3.17 – Propagation of signals measured at $z_0 = 2.2$ cm over a distance of 6.9 cm. Signal measured on the reconstruction plane (—), signal propagated using NAH [(a) and (b)] or using TNAH [(c) and (d)] (---): (a) and (c) at $x = 8.4$, $y = 0.0$ cm; (b) and (d) at $x = 15.4$, $y = 22.4$ cm.

The microphone array was moved over one quadrant of the plate in the plane $z_0 = 2.2$ cm. Symmetries were used to generate the entire hologram defined in Table 3.3. Impacts were repeated 10 times at each array location for signal averaging.

Signals measured at z_0 were propagated over a distance $d = 6.9$ cm to the plane $z = 9.1$ cm using the Green's functions in Eqs. (3.7) and (3.19). Prior to the NAH propagation only, the time signal was tapered using a Tukey window on a width of 0.05 ms. To keep a constant number of points for both methods, no trailing zeros were added in the time domain.

In Fig. 3.17, signals propagated with both approaches (---) are compared to measured signals (—) at two locations (x, y) on the reconstruction plane $z = 9.1$ cm: (8.4, 0.0) cm and (15.4, 22.4) cm.

The sound pressure signals are strongly damped and their amplitude is reduced to less than 1% of their maximum in less than 20 ms. Hence, one should expect small time aliasing errors with the standard NAH method. However, since initial

signals were truncated at only 2.5 ms, these errors are significant enough to hide the propagation delay in Figs. 3.17(a) and (b). Such errors are not present in Figs. 3.17(c) and (d) for which TNAH was used and hence, propagation delays are in very good agreement with those observed experimentally. After 0.6 ms, both methods lead to propagated signals that are almost identical to each other, and are quite similar to the measured signals. Differences with the experimental results are mainly due to the spatial precision of the experimental setup that can cause phase shifts in the higher frequency components of the measured initial signals.

3.9 Conclusion

Forward propagation of the initial sound pressure radiated by an impacted plate was presented using a k -space Green's function in the frequency domain. It was shown from numerical simulations that truncation of the time signals leads to significant time aliasing errors with Fourier transform based NAH. These errors mainly occur at the beginning of the time signals, thus masking the initial transient pressure in the calculation plane. In addition, due to the use of spatial 2D-DFTs, the reconstructed signals include sound pressure radiated by spatially replicated sources through wraparound and time aliasing.

To reduce these errors, a Fourier transform based transient NAH (TNAH) formulation in the Laplace domain was developed. The numerical Laplace transform is computed using a standard DFT algorithm. An error measure was introduced to compare both standard NAH and TNAH with respect to the propagation distance and the location of the observation point in the projection plane. TNAH significantly reduces aliasing errors without requiring trailing zeros in the initial time signals. The sound pressure radiated by virtual replications of the source due to spatial wraparound is negligible compared to that of the original source, provided

that the propagation delay from the replicated sources to the spatial points of interest is greater than the duration of the observation window, i.e. the dimensions of the measurement plane and the spatial zero padding are adequate.

Forward propagation of the transient noise of an impacted plate was tested from experimental data. The quality of propagated transient signals is significantly improved with the use of TNAH. Initial transient time signals can be recovered without loss of precision on the amplitudes or propagation delay, provided that the initial data is accurately measured.

The use of TNAH for backward propagation still needs to be investigated. The application of the new formulation in the Laplace domain could also be extended to non-planar coordinates or other acoustical reconstruction methods to visualize the transient sound pressure radiated by more complex structures.

3.10 Acknowledgments

This work was supported by the Fonds québécois de la recherche sur la nature et les technologies, the Institut de recherche Robert-Sauvé en santé et en sécurité au travail and the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada. Sincere thanks to Sylvie Nguene and Valérie Lalonde for their help with experimental validation.

CHAPITRE 4

COMPLÉMENT DE PROPAGATION DIRECTE

Ce chapitre vient compléter les éléments de propagation directe dont il a été question au chapitre précédent. En premier lieu, la validation expérimentale se poursuit, cette fois à partir de mesures faites sur un plan englobant la totalité de la source. Cette nouvelle validation donne aussi suite à des reconstructions tridimensionnelles. Ensuite, un algorithme permettant le passage direct de l'accélération à la pression acoustique au moyen d'une autre fonction de Green formulée dans l'espace k est appliqué de façon à comparer les taux d'erreurs avec ceux obtenus lors d'une propagation de pression à pression. Il est montré que cet algorithme peut réduire considérablement le temps de calcul de la pression acoustique rayonnée par une source plane. Enfin, un exemple de rayonnement d'une plaque percutée simultanément en deux points est présenté.

4.1 Propagation des données expérimentales

4.1.1 Suite de la validation

Tout d'abord, rappelons que la validation expérimentale a été faite en admettant que la source est symétrique par rapport aux axes vertical et horizontal passant par son centre. Cela a permis de réduire de 75 % le nombre de mesures. Toutefois, pour que la pression acoustique puisse n'être enregistrée que dans un seul quadrant, il faut que le point d'impact soit exactement au centre de la plaque et qu'un des microphones soit aligné sur l'axe de frappe. Ce point sert alors de pivot pour générer

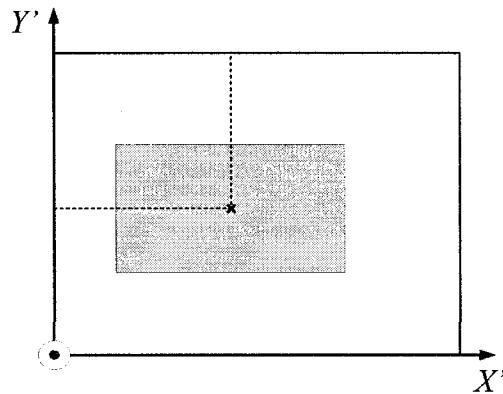


Figure 4.1 – Repère cartésien du nouveau plan de mesures expérimentales (—). Le plan considérant la symétrie de la source et utilisé au chapitre 3 est aussi présenté (-----). La croix ($\times$) représente le point d'impact.

les trois autres quadrants. Bref, une précision supplémentaire est requise pour que les pressions propagées par NAH soient comparables à celles mesurées dans les plans de propagation.

Un mauvais alignement affecte davantage les mesures centrales, soit celles dont les amplitudes sont les plus importantes. Pour des distances de propagation en-deçà de 10 cm, la reconstruction peut être acceptable comme en font foi les graphiques de la figure 3.17. Toutefois, les résultats de propagation pour des distances plus grandes se sont avérés inacceptables et ce, particulièrement près de l'axe de frappe. En effet, cette dernière zone est la plus affectée puisqu'elle contient les axes de symétrie. C'est donc dire qu'une reconstruction tridimensionnelle du champ acoustique n'est pas possible à partir des résultats expérimentaux du chapitre 3.

Pour cette raison, une autre série de mesures a été faite avec le montage illustré à la figure 3.16, cette fois sur un plan englobant l'ensemble de la plaque. La figure 4.1 présente cette nouvelle configuration pour laquelle le repère cartésien (X', Y') est centré sur un des coins de l'hologramme situé en $z_0 = 2$ cm. Le nouveau plan de mesure est représenté en trait plein (—) alors que celui utilisé au chapitre 3 et

pour lequel on considèrerait la symétrie de la source est indiqué par un trait pointillé (.....). L'hologramme compte 64×48 points de mesure, couvrant ainsi une surface d'environ $89,8 \times 67,0 \text{ cm}^2$. La hauteur à laquelle le pendule est relâché relativement au centre de la plaque est de 27 cm. Les autres paramètres expérimentaux tels que l'espacement entre les microphones et la position du point d'impact demeurent les mêmes.

La figure 4.2 présente la pression mesurée au niveau de l'hologramme à deux instants donnés après l'impact. Le rectangle tireté blanc y illustre la position de la plaque. À la figure 4.2(a), on voit bien la symétrie circulaire du rayonnement bien que la source soit rectangulaire. Cela est dû au fait qu'à $t = 0,21 \text{ ms}$, le rayonnement dû à la réflexion des ondes de flexion sur les bords de la plaque et dont il a été question au premier chapitre n'est pas encore perceptible. Les anneaux de la figure 4.2(a) sont tous centrés sur le point d'impact.

En ce qui concerne la figure 4.2(b) illustrant la pression acoustique à $t = 0,48 \text{ ms}$, des anneaux de diamètres plus grands qu'à la figure 4.2(a) sont visibles. On note qu'au point 1, la pression acoustique est plus élevée qu'au point 2, bien que ces deux positions appartiennent au même anneau. Ceci est dû au fait que le point 2 est plus éloigné de la plaque que le point 1 puisque ladite plaque est rectangulaire. Enfin, le rayonnement dû à la réflexion des ondes de flexion sur les côtés de la plaque qui sont parallèles à l'axe X' est très visible, apparaissant sous une forme similaire à une hyperbole. Toutefois, la réflexion contre les deux autres côtés, soit ceux parallèles à l'axe Y' , est encore peu visible à $t = 0,48 \text{ ms}$.

De la même façon qu'au chapitre 3, la pression acoustique a été propagée en utilisant la TNAH sur des distances d de 7,0, 14,6 et 21,6 cm. Les signaux obtenus suite à la propagation sont comparés avec des mesures faites en trois points d'observation numérotés de (1) à (3) à la figure 4.3, et correspondant respectivement

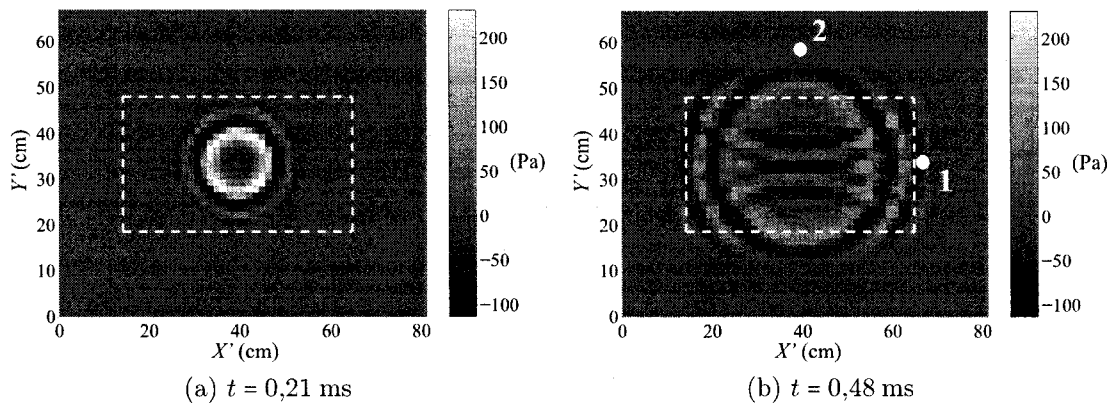


Figure 4.2 – Pression acoustique brute mesurée au niveau de l’hologramme à deux instants t après l’impact.

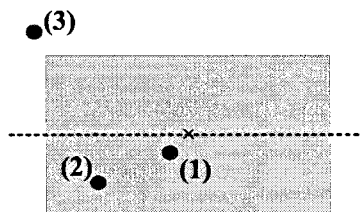


Figure 4.3 – Position des trois points de comparaison de la pression acoustique propagée et des mesures faite dans les plans de propagation. Le trait tireté (---) indique la position du plan $Y' = 32,8$ cm permettant l’étude du champ acoustique tridimensionnel. Quant à la croix (x), elle représente le point d’impact.

aux coordonnées $(35,6; 29,9)$, $(24,8; 24,2)$ et $(11,4; 51,3)$ cm. À titre comparatif, le centre de la plaque est situé en $(39,6; 33,2)$ cm. En ce qui a trait aux paramètres de propagation, le nombre de points en X' et Y' a été doublé par l’ajout de zéros et la pente de la fenêtre de Tukey spatiale utilisée correspond à une longueur de 5,7 cm.

La figure 4.4 présente ces résultats de propagation ainsi que les mesures faites aux différents points d’observation. À des fins de comparaison, la figure 4.4(a) montre la pression acoustique en ces points, au niveau de l’hologramme.

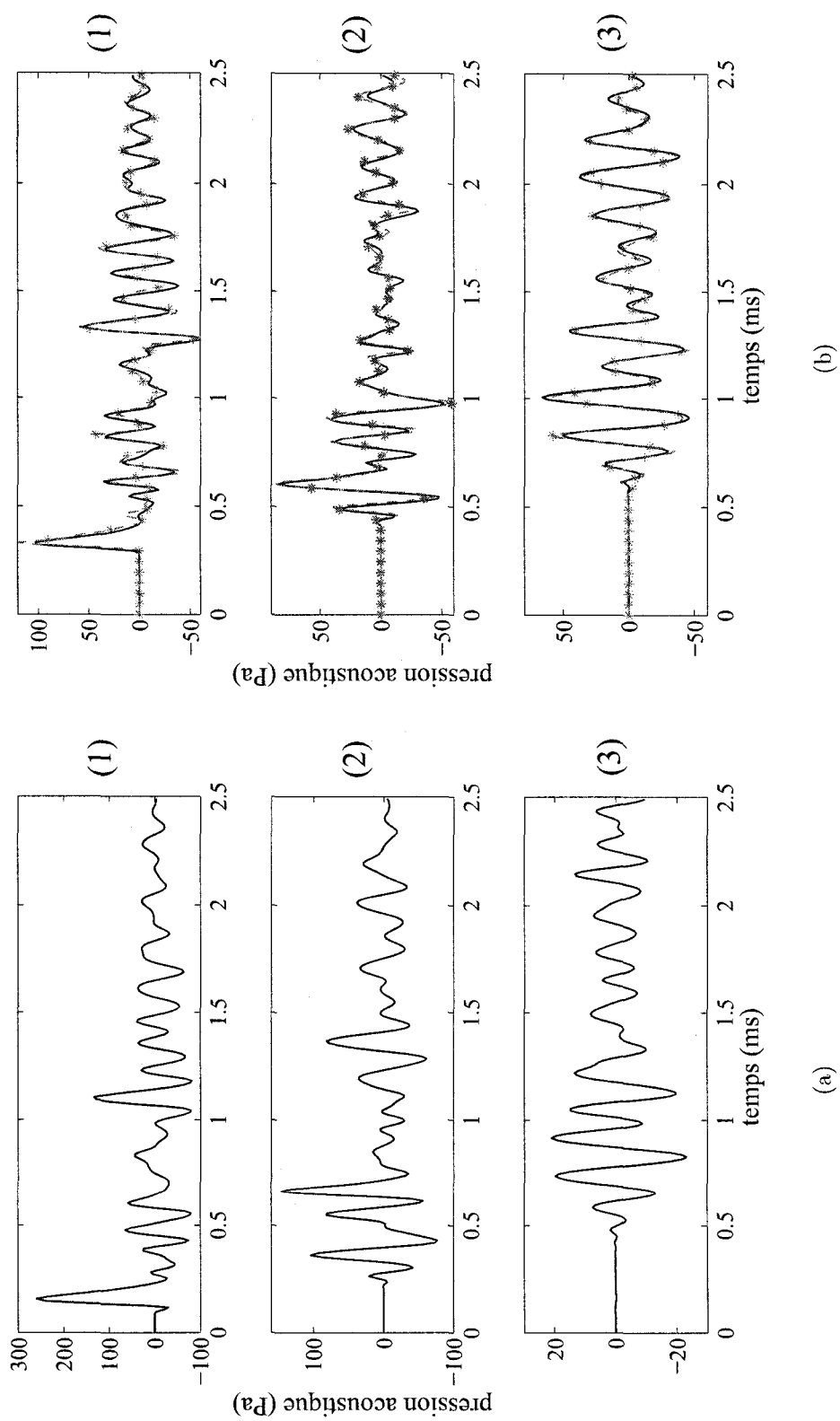
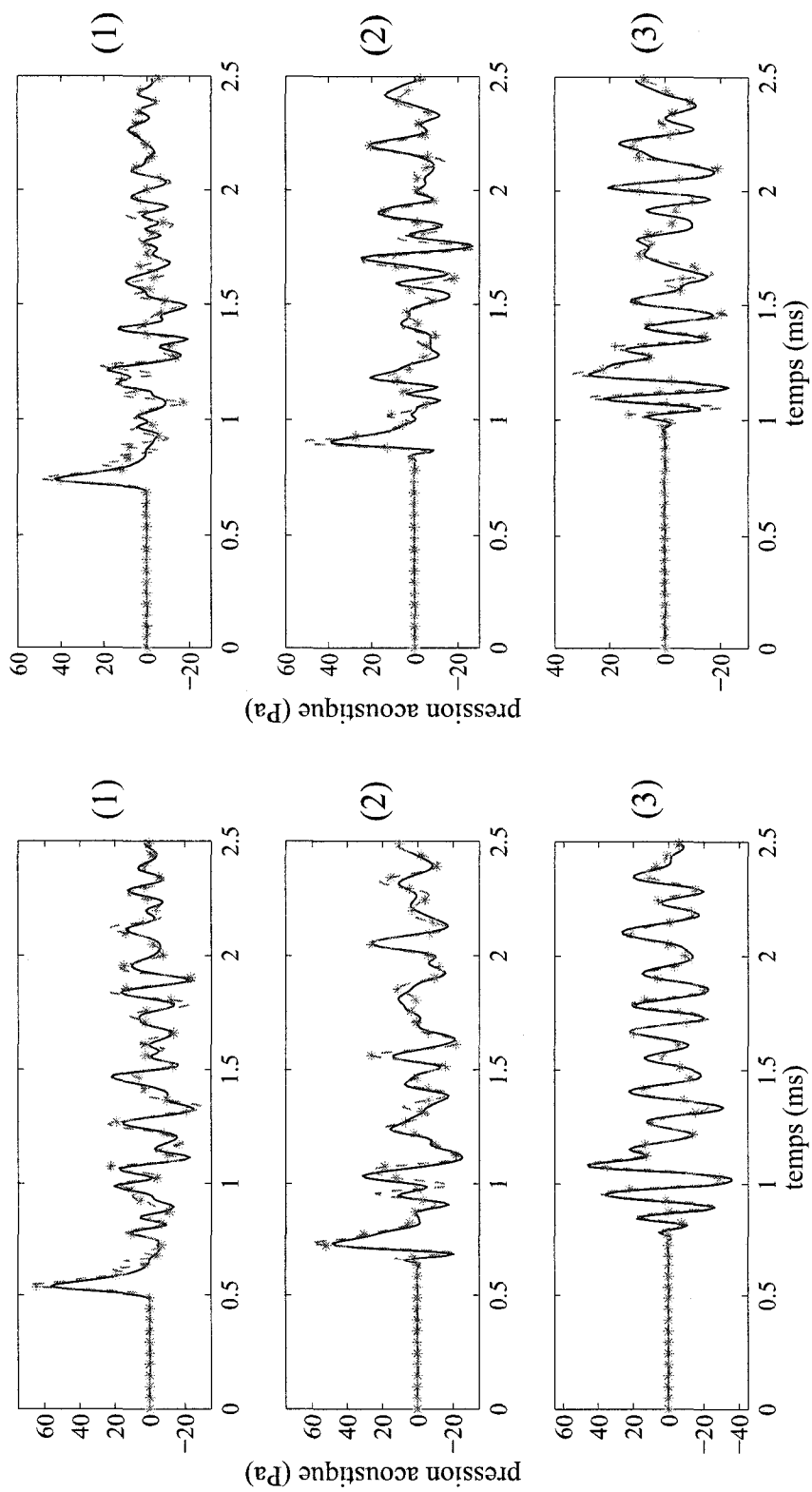


Figure 4.4 – Pression acoustique aux points (1) (35,6; 29,9) cm, (2) (24,8; 24,2) cm et (3) (11,4; 51,3) cm : (a) signaux mesurés en $z_0 = 2$ cm ; (b) signaux mesurés (—) et projetés par TNAH (—*) au plan $z = 9$ cm.



(c)

(d)

Figure 4.4 – (suite) Pression acoustique aux points (1) (35,6;29,9) cm, (2) (24,8;24,2) cm et (3) (11,4;51,3) cm : signaux mesurés (—) et projetés par TNAH (-*-) aux plans (c) $z = 16,6$ cm et (d) $z = 23,6$ cm.

De façon générale, les résultats de propagation par TNAH présentés aux figures 4.4(b), (c) et (d) correspondent bien aux signaux mesurés dans les différents plans de propagation. D'un point de vue qualitatif, l'amplitude de l'ensemble des signaux projetés correspond à celle des signaux mesurés. En comparant les figures 4.4(b), (c) et (d), on s'aperçoit que peu importe la position du point d'observation dans le plan de propagation, les différences d'amplitude sont d'autant plus importantes que la distance de propagation est grande. Ceci est particulièrement visible au point (1), dans les instants suivant l'arrivée de la crête de pression initiale. On y observe des oscillations à hautes fréquences qui ne correspondent pas au signal mesuré. Comme on le verra à la section 4.2, cette différence pourrait entre autres être due à un espacement « trop » grand entre les microphones.

Toutefois, la concordance la plus facilement appréciable est celle des temps d'arrivée de la plupart des maxima et minima locaux des différents signaux. Les temps d'arrivée en question des signaux propagés sont décalés au maximum de $\pm \Delta t$ par rapport à ceux des pressions mesurées. Or, Δt représente aussi l'incertitude quant à la répétabilité des impacts (voir Annexe III pour plus de détails). Qui plus est, ces similitudes au niveau des temps d'arrivée des maxima et minima locaux sont d'autant plus difficiles à obtenir pour les signaux loin de la plaque. En effet, puisqu'à ces distances les ondes évanescentes sont fortement atténuées (ondes qui comme on l'a vu au premier chapitre correspondent essentiellement aux basses fréquences de la plaque), les signaux mesurés loin de la plaque ont une proportion de hautes fréquences plus élevée. Qualitativement, les différences de temps d'arrivée sont donc beaucoup plus apparentes, car les maxima et minima locaux de hautes fréquences sont très étroits dans le domaine du temps.

Par ailleurs, on constate en comparant les figures 4.4(a) et (b) que l'amplitude de la pression acoustique au point (3) est environ 3 fois plus élevée en $z = 9$ cm qu'en $z_0 = 2$ cm. En effet, on peut s'attendre à ce que l'amplitude de la pression dé-

croisse avec la distance de propagation. Or, en comparant l'amplitude de la pression au point (3) pour l'ensemble des distances présentées à la figure 4.4, on voit que l'amplitude maximale des signaux en question passe par un maximum en (b) pour ensuite décroître en (c) et (d). On peut comprendre cette observation à partir de la figure 4.5, basée sur l'explication au premier chapitre du phénomène de dispersion apparente. Sur cette figure, on a illustré le point d'observation (3) dans les quatre plans qui nous intéressent, soit $z_0 = 2$ cm (3a), $z = 9$ cm (3b), $z = 16,6$ cm (3c) et $z = 23,6$ cm (3d). On y voit que du point (3a) au point (3b), l'angle d'élévation θ du point d'observation est plus élevé et que les fronts d'ondes des diverses fréquences sont rapprochés. Ils contribuent donc ensemble à une augmentation de la pression. Évidemment, aux points (3c) et (3d), on observe une décroissance de la pression en fonction de la distance : l'angle d'observation θ est assez élevé pour que la diminution d'amplitude avec la distance compense pour l'effet de la dispersion apparente.

De plus, en quittant la surface de la plaque, les fronts d'ondes acoustiques des diverses fréquences conservent leur orientation tout en se propageant à la vitesse c . Ainsi, l'amplitude de la pression acoustique dans le plan $z = 9$ cm sera relativement importante sur une plus grande surface que dans le plan $z_0 = 2$ cm. C'est donc dire que si l'hologramme avait été situé à 9 cm de la plaque, en plus de perdre davantage d'information sur les ondes évanescentes, il aurait fallu que le plan de mesure soit relativement plus grand afin d'englober la majorité de la pression rayonnée par la plaque.

Suite à cette étude qualitative des résultats, il est intéressant de calculer le taux d'erreur entre les signaux propagés et mesurés de la même manière qu'au chapitre précédent, c'est-à-dire en utilisant l'équation (3.20). Cela permet de savoir quelle proportion de l'erreur est due au repliement temporel par rapport aux différentes erreurs expérimentales.

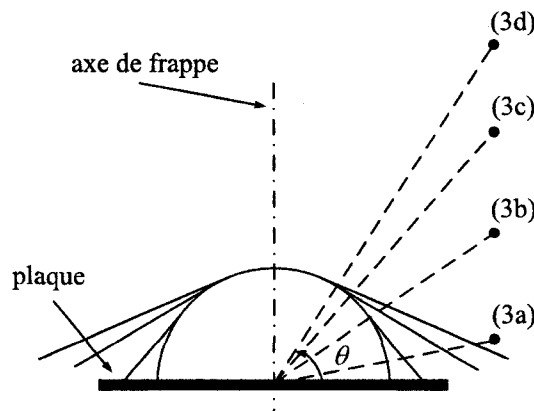


Figure 4.5 – Effet de la dispersion sur l’amplitude de la pression mesurée à l’extérieur de la plaque.

Ces pourcentages d’erreur, présentés au tableau 4.1, ont été calculés sur 251 points temporels, ce qui équivaut à une durée d’environ 2,45 ms. La propagation a été faite de trois manières différentes pour chacun des signaux présentés à la figure 4.4. La première méthode est la TNAH ; les seconde et troisième méthodes consistent en l’application de la NAH classique pour laquelle on ajoute respectivement 256 et aucun zéro. Pour ces deux dernières approches, une fenêtre de Tukey temporelle d’environ 50 μ s a été appliquée. Cela a été fait pour que la comparaison soit similaire à celle faite au troisième chapitre.

On constate tout d’abord que ces pourcentages d’erreur provenant des données expérimentales sont relativement plus élevés que ceux présentés au chapitre précédent et qui ont été calculés à partir de simulations. Toutefois, en comparant la différence des taux d’erreur entre la TNAH et la NAH avec zéros, on observe de fortes similarités. En effet, on compte en moyenne pour les trois points d’observation et pour les deux méthodes environ 1 pdp (point de pourcentage) de différence pour une propagation sur $d = 7$ cm, 3 pdp sur $d = 14,6$ cm et 5 pdp sur $d = 21,6$ cm.

Cependant, hormis une diminution du temps de calcul, on pourrait être porté à se demander quelle est l’utilité de la TNAH par rapport à la NAH classique puisque

Tableau 4.1 – Comparaison des pourcentages d’erreur obtenus avec la NAH classique et la TNAH

z (cm)	Point	Méthode utilisée (erreur en %)		
		TNAH	NAH avec zéros	NAH sans zéros
9,0	1	32	33	35
	2	35	35	36
	3	18	19	25
16,6	1	49	52	53
	2	51	53	58
	3	30	32	43
23,6	1	58	63	68
	2	53	56	62
	3	45	50	75

la différence des pourcentages d’erreur est très faible vis-à-vis du taux d’erreur correspondant à l’utilisation de la TNAH. On rappelle que c’est dans la portion du signal pour laquelle $p \approx 0$ que les erreurs dues au repliement temporel sont les plus significatives. De plus, la durée de cette portion de pression nulle (au début du signal) croît avec l’augmentation de la distance, et donc l’erreur suit la même tendance. Or, si suffisamment de zéros sont ajoutés dans le domaine du temps pour l’application de la NAH classique, les signaux ainsi projetés se superposent avec ceux propagés par TNAH pour $t > \tau_{\text{error}} - (\bar{T} - T)$, où on rappelle que τ_{error} est défini par l’équation (3.10). C’est donc dire que l’erreur importante en début de signal lors de la propagation par NAH classique est dissimulée par la faible erreur en fin de signal en raison du moyennage de l’erreur par l’équation (3.20). Bref, à distance de propagation constante, plus le nombre de points N_t^* utilisés pour le calcul du taux d’erreur avec l’équation (3.20) est grand, moins importante est la différence de points de pourcentage entre la TNAH et la NAH classique. Autrement dit, si on limite N_t^* au point correspondant à un des premiers instants pour lesquels la pression de référence est non-nulle, la différence de points de pourcentage est

beaucoup plus marquée. Dans le cadre de ce mémoire, l'utilisation d'un nombre de points N_t^* fixe a pour but d'uniformiser les calculs sur une grande plage de distances de propagation.

Ainsi, on peut conclure que pour les distances de propagation étudiées expérimentalement et limitées à une vingtaine de centimètres, la TNAH a un taux d'erreur plus faible et ce, avec deux fois moins de points pour les calculs temporels. C'est donc dire que si la tendance est respectée pour ces distances, il y a fort à parier, à la lumière de la figure 3.8, que le taux d'erreur croîtra considérablement avec d .

Quant à l'application directe de la NAH standard, c'est-à-dire sans l'ajout de zéros, les taux d'erreurs présentés au tableau 4.1 sont particulièrement élevés et augmentent surtout lorsque la distance de propagation est grande. La différence entre cette approche et les deux autres méthodes précédemment présentées est aussi très importante au niveau du point (3), atteignant même 30 pdp. Cette différence est donc du même ordre de grandeur que le pourcentage d'erreur lui-même. Cette réalité correspond à l'hypothèse faite au chapitre 3, à savoir que les signaux relativement loin de l'axe devraient être plus sensibles aux erreurs de repliement.

Enfin, bien que la différence de pourcentage d'erreur demeure la même entre les simulations et les expériences, cela n'est pas le cas de l'erreur « de base », soit celle de la TNAH. C'est donc dire que cette dernière, qui se chiffre à $\sim 1\%$ en simulations et entre 18 et 58 % pour l'expérimental, constitue l'erreur « absolue » de la technique, incluant l'hypothèses de départ, l'échantillonnage, la troncature spatiale, etc. Il est d'ailleurs question des différentes sources d'erreur à l'Annexe III portant sur le montage expérimental. Notons que ces erreurs sont présentes autant lors de la mesure de l'hologramme que dans les signaux servant de référence pour le calcul du pourcentage d'erreur.

A priori, même les pourcentages d'erreur présentés pour la propagation par TNAH semblent énormes pour des applications de haute précision. Néanmoins, ces taux d'erreurs doivent être relativisés à la lumière des graphiques de la figure 4.4, puisqu'on a vu qu'il y a une forte similitude en ce qui concerne les amplitudes des signaux ainsi que les temps d'arrivée des différents maxima et minima locaux. Bref, un taux d'erreur de 18 %, bien qu'en apparence élevé, correspond à un signal propagé pratiquement superposé à celui mesuré (figure 4.4(b.3)). C'est pourquoi les résultats présentés ici sont jugés satisfaisants, dans la mesure où le moindre décalage entre le signal propagé et celui de référence augmente de façon considérable le pourcentage d'erreur défini par l'équation (3.20). Comme les signaux sont à hautes fréquences, l'influence d'un décalage, ne serait-ce que de Δt , est significative.

De plus, dans sa thèse, de La Rochefoucauld avait obtenu ses meilleurs résultats pour une plaque d'aluminium simplement supportée [15]. Les signaux obtenus dans le cas d'une plaque d'aluminium suspendue et d'une plaque de plexiglas simplement supportée étaient de moindre qualité. Dans le premier cas, on peut penser que l'oscillation de la plaque autour de sa position d'équilibre en est la cause. En ce qui concerne la différence au niveau des résultats obtenus pour l'aluminium et le plexiglas, l'auteure n'a émis aucune hypothèse. Ainsi, en extrapolant, on aurait pu s'attendre à ce que le champ de pression acoustique rayonnée par une plaque de plexiglas suspendue soit plus difficile à reconstruire puisque cette configuration combine un matériau et des conditions aux frontières qui ont donné les résultats à plus haut taux d'erreur lorsqu'étudiés séparément par de La Rochefoucauld. Or, on a vu que malgré l'important contenu de hautes fréquences du rayonnement de cette plaque de plexiglas suspendue, les résultats obtenus dans le cadre du présent projet se sont avérés fort satisfaisants.

4.1.2 Reconstruction 3D

Puisque les résultats sont concluants pour différents points d'observation et quelques distances de propagation, il s'avère intéressant de reconstruire le champ de pression en trois dimensions, ce qui constitue l'un des buts de la NAH. Comme les problèmes de repliement temporel sont résolus par l'utilisation de la transformée de Laplace numérique, une zone s'étendant relativement loin en z peut donc être étudiée.

La figure 4.6 présente la pression acoustique à quatre instants suivant l'impact dans le plan (X', z) en $Y' = 32,8$ cm tel qu'indiqué à la figure 4.3. La propagation directe a été faite sur plusieurs plans en z espacés de 7 mm selon les mêmes paramètres qu'à la section précédente. Afin de valider la formulation de la TNAH, la propagation des signaux vers chacun des plans est toujours faite à partir du plan z_0 . C'est donc la distance de propagation d qui croît pour générer l'ensemble de plans z . De plus, la durée des signaux temporels propagés est de 5 ms. Afin de présenter le champ de pression acoustique sur une zone plus large que l'hologramme, les zéros ajoutés de part et d'autre de celui-ci sont conservés dans la présentation finale. Le trait noir sur les graphiques de la figure 4.6 illustre la position de la plaque.

On remarque tout d'abord à la figure 4.6(a) que le champ de pression à $t = 0,38$ ms comporte un front d'onde hémisphérique de forte amplitude (1) ainsi que différents fronts d'ondes obliques (2) tels que ceux illustrés à la figure 1.3. Le phénomène de dispersion apparente est donc facilement observable par l'utilisation de la TNAH et comparable à ce qui été obtenu dans la littérature par holographie optique [8–10]. La figure 4.7 présente d'ailleurs un exemple d'hologramme optique obtenu par Schedin *et al.* [10].

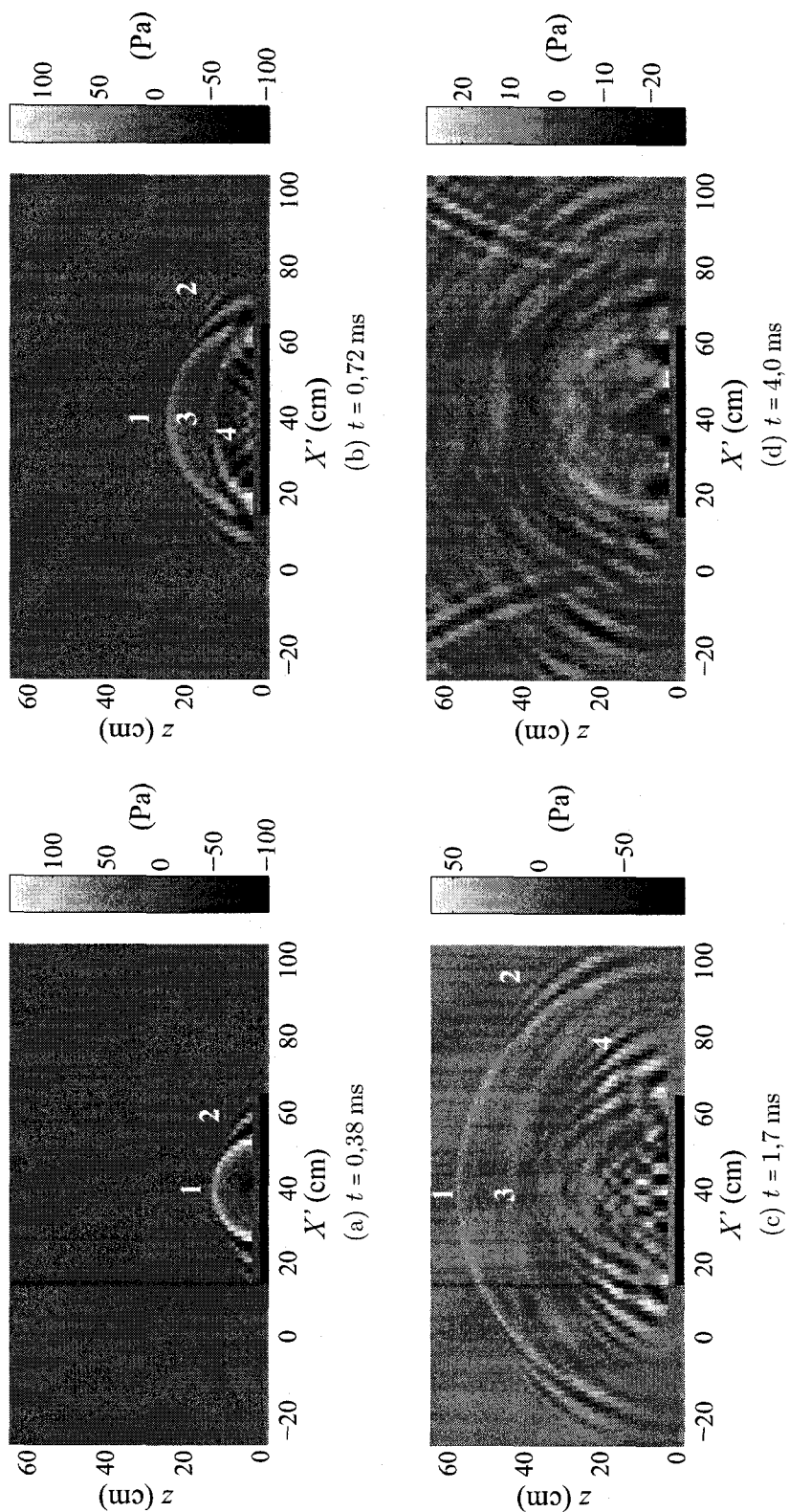


Figure 4.6 – Reconstruction du champ de pression acoustique dans le plan $Y' = 32,8$ cm à différents instants après l'impact. Les différents phénomènes observables sont identifiés par des chiffres allant de 1 à 4.



Figure 4.7 – Exemple d'hologramme optique du rayonnement transitoire d'une plaque à un instant donné après l'impact (source : [10]).

La différence majeure entre les représentations des figures 4.6(a) et 4.7 est que dans le premier cas, il s'agit de la pression acoustique dans un plan Y' précis alors que pour l'holographie optique, la pression illustrée est en fait une projection de la pression acoustique du volume défini par $z > 0$ sur le plan $Y' = 0$. C'est donc dire que la figure 4.7 présente la somme des pressions en Y' pour chaque point (X', z) . Afin de faire une vraie reconstruction tridimensionnelle du champ de pression, il faut appliquer des techniques de tomographie [78].

En ce qui a trait à la figure 4.6(b), on voit bien à $t = 0,72$ ms la continuité du front d'onde hémisphérique principal (1) ainsi que celle des fronts d'ondes obliques (2) même si ceux-ci ont quitté la surface de la plaque. C'est donc dire que les ondes qui sont dispersées par la plaque le demeurent une fois parvenues sur le côté de celle-ci puisqu'à partir de ce point, les fronts d'ondes se propagent toujours à la vitesse c . On note aussi à $t = 0,72$ ms la formation d'un second front d'onde (3) ayant pour largeur maximale L_x , soit la dimension de la plaque parallèle à l'axe X' . Ce front d'onde est dû à la réflexion des ondes de flexion sur les bords de la plaque parallèles à l'axe X' . Il a également une amplitude importante puisque le plan $Y' = 32,8$ cm passe près du centre de la plaque. Ainsi, le rayonnement des ondes de flexion réfléchies sur les deux bords de la plaque arrive dans ce plan simultanément. De plus, on peut observer d'autres fronts d'ondes obliques (4) près de la plaque. Ceux-ci sont causés par le rayonnement des ondes de flexion qui sont réfléchies sur les bords de la plaque parallèles à l'axe Y' .

Bien qu'à $t = 1,7$ ms, l'amplitude de la pression acoustique soit plus faible, on distingue encore bien à la figure 4.6(c) les différents phénomènes observés à la figure 4.6(b) qui sont identifiés par les mêmes chiffres. Il est évident que l'ensemble des phénomènes observés aux figures 4.6(a), (b) et (c) n'auraient pas été identifiables aussi clairement avec l'application de la NAH classique, qu'on pense entre autres au front d'onde principal (1) de la figure 4.6(c) dont le maximum s'étend à près de 60 cm de la plaque.

Enfin, la figure 4.6(d) présente le champ de pression à environ 4 ms après l'impact. Malgré le fait que les dimensions de l'hologramme aient été doublées par l'ajout de zéros, on voit clairement deux fronts d'ondes venant de part et d'autre de la plaque. Ceux-ci sont évidemment dus aux répliques spatiales dont il a été question au précédent chapitre. Comme le déplacement de la plaque est grandement amorti, l'amplitude de la pression rayonnée par ces sources secondaires est du même ordre de grandeur que celle à proximité de la source originale. C'est donc dire que pour étudier le rayonnement de la plaque sur plusieurs millisecondes par la TNAH, il faudrait ajouter davantage de zéros au plan de mesure.

4.2 Passage de l'accélération de la source à la pression acoustique

L'évaluation numérique du rayonnement acoustique transitoire d'une plaque par les équations (1.22) et (1.23) est fastidieux et requiert un temps de calcul très élevé. On parle de plusieurs heures pour obtenir la pression dans un seul plan. Or, l'utilisation de la fonction de Green reliant l'accélération transversale à la pression acoustique, qui s'écrit

$$G_{ap}(k_x, k_y, d, s) = \frac{i\rho_0}{k_z} e^{ik_z d}, \quad (4.1)$$

pourrait réduire considérablement le temps de calcul. De plus, contrairement à la formulation de la fonction G_{ap} dans le domaine de Fourier, l'équation (4.1) définie dans le domaine de Laplace n'a pas de singularité en $k_z = 0$ puisque $\sigma \neq 0$. Enfin, cette approche aurait comme seule contrainte un espacement régulier des points d'observation. On se propose donc dans cette section de calculer la pression acoustique dans différents plans directement à partir de l'accélération transversale de la plaque d'aluminium simplement supportée qui a été simulée dans le cadre du troisième chapitre.

Pour ce faire, il suffit de calculer l'accélération de la plaque en des points régulièrement espacés, de telle sorte qu'il y ait plus de deux points par longueur d'onde pour chacun des modes de la plaque. Par exemple, si le mode maximal est le 4^e, on devra avoir au minimum cinq points dans chacune des dimensions puisque ce mode compte deux longueurs d'onde complètes (4 ventres).

Au troisième chapitre, les simulations portant sur le rayonnement de la plaque d'aluminium ont été faites avec les 40 premiers modes de chaque dimension. En considérant les conditions d'échantillonnage spatial mentionnées au paragraphe précédent, il faudrait donc plus d'une quarantaine de points par dimension. Cela représente un espacement de moins de 1,5 cm puisqu'il faut considérer la plus petite dimension de la plaque qui est d'une soixantaine de centimètres. Toutefois, le spectre de la force n'est pas assez large pour exciter les modes élevés et par conséquent, leur réponse n'est pas significative. C'est pourquoi on a jugé qu'un espacement de 2 cm, soit le même que pour le champ de pression, était suffisant. Ces points sont choisis symétriquement par rapport au centre, de manière à ce que les résultats de propagation puissent être comparés avec ceux du chapitre 3.

4.2.1 Comparaison de G_{pp} et G_{ap}

Évidemment, les erreurs causées par le repliement spatial sont encore susceptibles d'être présentes. C'est pourquoi le nombre de points a été quadruplé dans chaque dimension par l'ajout de zéros. En plus d'éloigner les répliques de la source, cet ajout de zéros permet aussi d'étudier le rayonnement acoustique sur les côtés de la plaque puisque l'échantillonnage spatial initial est limité à la surface de celle-ci. Comme les différences entre ces résultats de propagation et ceux obtenus au chapitre précédent ne sont pas réellement perceptibles, seules les distributions d'erreurs dans les plans $z = 5$ cm et $z = 10$ cm sont présentées à la figure 4.8.

Tout d'abord, la figure 4.8(a) représente une propagation avec G_{pp} sur une distance $d = 5$ cm à partir de $z_0 = 5$ cm. Il s'agit du même graphique qu'à la figure 3.7(b), mais le pourcentage d'erreur y est présenté sur une échelle linéaire. Quant aux figures 4.8(b) et (c), elles correspondent à l'utilisation de G_{ap} , respectivement sur des distances d de 5 cm et 10 cm.

On constate premièrement que les pourcentages d'erreur sont du même ordre de grandeur, peu importe la fonction de Green utilisée ou la distance propagée. Toutefois, ces taux d'erreurs sont légèrement supérieurs, soit d'environ 1 point de pourcentage, lors de l'utilisation de G_{ap} . Qui plus est, la transition entre les zones (foncées) d'erreur faible et les zones (pâles) d'erreur élevée localisée aux bords de la plaque est beaucoup plus marquée lors du passage de l'accélération à la pression.

De façon générale, lorsque les déformées modales sont définies de façon continue, on a un effet de troncature spatiale « naturelle » de ces déformées puisque les dimensions de la plaque sont finies. Par exemple, les modes d'une plaque simplement supportée comptent un nombre fini de cycles. C'est donc dire que ce fenêtrage imposé par la plaque entraîne des fuites spectrales dans l'espace (k_x, k_y) . C'est

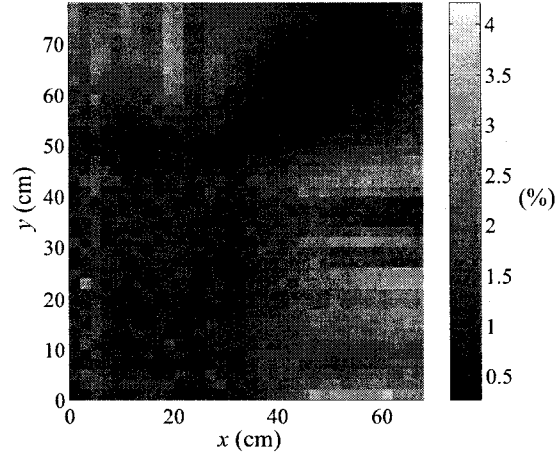
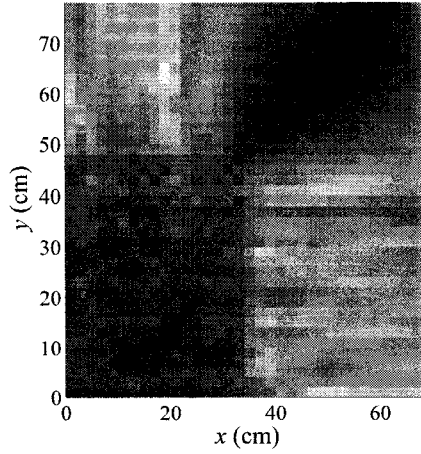
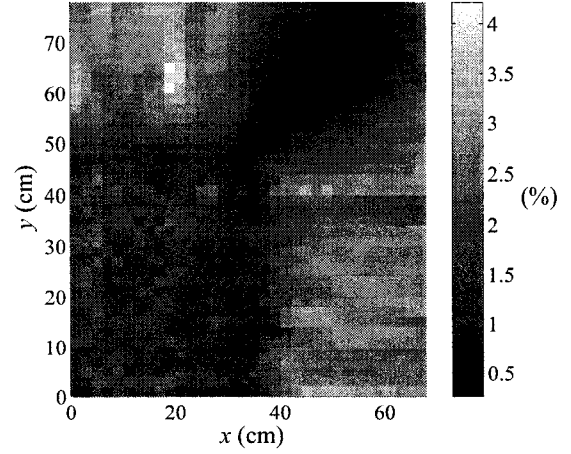
(a) G_{pp} de $z_0 = 5$ cm à $z = 10$ cm.(b) G_{ap} de $z_0 = 0$ cm à $z = 5$ cm.(c) G_{ap} de $z_0 = 0$ cm à $z = 10$ cm.

Figure 4.8 – Distribution du pourcentage d'erreur en z pour les deux propagateurs utilisés.

d'ailleurs pourquoi les modes évanescents peuvent avoir, en régime stationnaire, une efficacité de rayonnement non-nulle en champ lointain [23].

Toutefois, en discrétisant la plaque, on vient couper plus abruptement les déformées modales, à moins que les dimensions de la plaque ne soient un nombre entier de l'espacement $\Delta x = \Delta y$ choisi. La fuite spectrale supplémentaire qui en découle cause des erreurs qui sont d'autant plus importantes sur les côtés de la plaque, c'est-à-dire

là où l'accélération transversale de la plaque est tronquée. Comme une partie des composantes de l'accélération propagée est évanescente, les erreurs occasionnées par la troncature de l'accélération sont moins importantes à $d = 10$ cm qu'à $d = 5$ cm. Notons enfin que ces effets de troncature sont négligeables dans le cas de la propagation de l'hologramme mesuré en $z_0 = 5$ cm puisque ce champ de pression acoustique tend graduellement vers zéro aux abords du plan de mesure en raison de l'application d'une fenêtre de Tukey spatiale. Conséquemment, la coupure est beaucoup moins sévère aux abords de l'hologramme.

Néanmoins, le fait le plus remarquable est que la distribution des erreurs est la même et ce, peu importe la fonction de Green utilisée ou la distance de propagation. L'erreur en question est plus importante sur les côtés de la plaque et négligeable toujours à l'extérieur de la plaque, mais cette fois le long de sa diagonale. Pour comprendre pourquoi il en est ainsi pour les trois graphiques de la figure 4.8, il est intéressant de passer dans le domaine fréquentiel pour comparer les points d'observation où les pourcentages d'erreur sont les plus faibles et ceux où ils sont les plus élevés.

La figure 4.9 présente ces spectres ($-*-$) dans le cas où la propagation est faite sur 5 cm avec la fonction de Green G_{ap} (figure 4.8(b)). Ils sont comparés aux spectres des signaux simulés ($---$). L'erreur minimale dans le plan $z = 5$ cm est située en $x = 50$ cm et $y = 68$ cm. Elle est évaluée à 0,30 % et correspond au spectre de la figure 4.9(b). Quant à l'erreur maximale, elle vaut 4,1 % et est localisée en $x = 18$ cm et $y = 62$ cm (figure 4.9(a)).

On voit bien à la figure 4.9(a) que le spectre résultant de la propagation « décroche » du spectre simulé vers 7 kHz. C'est donc dire que les hautes fréquences ne sont pas correctement projetées et que, conséquemment, les signaux temporels pour lesquels le pourcentage d'erreur est le plus élevé correspondent à ceux ayant

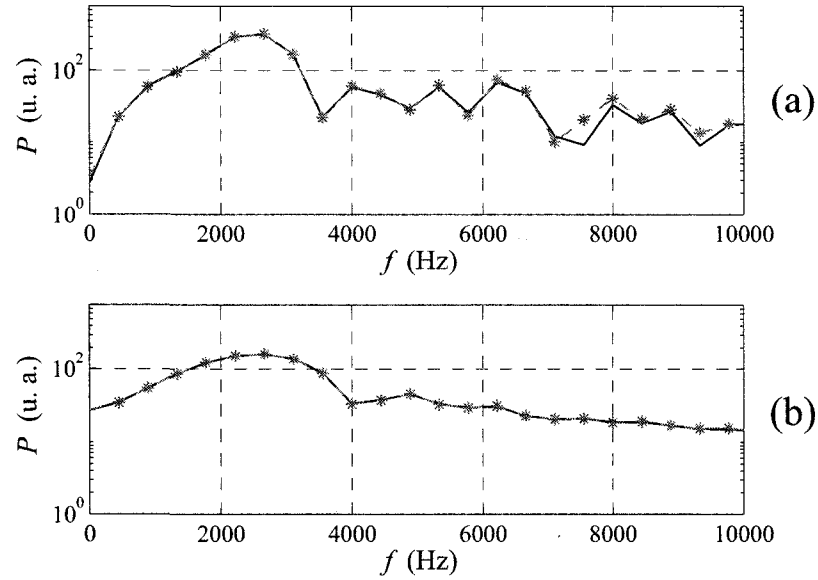


Figure 4.9 – Comparaison des spectres des signaux simulés (—) et propagés par TNAH avec le propagateur G_{ap} (-*-) en deux points d'observations dans le plan $z = 5$ cm : (a) (18, 62) cm, (b) (50, 68) cm.

la plus forte proportion de hautes fréquences. Dans le domaine temporel, ces erreurs se manifestent principalement au début de ces signaux qui, rappelons-le, sont dispersifs. C'est donc dire que ce sont les oscillations initiales à hautes fréquences et de faibles amplitudes qui sont davantage concernées par ce problème. Par opposition, on voit à la figure 4.9(b) que les spectres résultant des signaux propagés et de ceux mesurés sont superposés ou du moins, que les différences entre les deux sont négligeables.

Comme la distribution des erreurs est similaire peu importe la fonction de Green, il faut revenir à l'une des caractéristiques communes à chacune des propagations effectuées pour comprendre l'origine de ces erreurs. En effet, toutes ces propagations ont été faites avec un pas spatial $\Delta x = \Delta y = 2$ cm. Or, ce choix était basé sur les critères utilisés par de La Rochefoucauld [15, 16], mais également sur les ressources informatiques à notre disposition. Par exemple, le fait de diminuer par

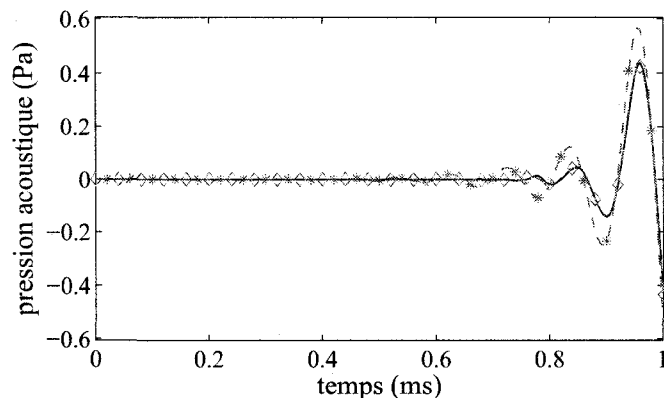


Figure 4.10 – Comparaison sur 1 ms des signaux simulés (—) en $X = 18$ cm, $Y = 62$ cm et $z = 5$ cm avec ceux propagés par TNAH avec la fonction de Green G_{ap} avec un pas d'échantillonnage spatial de 1 cm ($-\diamond-$) et 2 cm ($-*-$).

deux l'espacement entre les points de mesure aurait fait en sorte que la durée d'observation soit réduite d'un facteur 4 (rappelons que le nombre total de données à traiter est $N_x \times N_y \times N_t$). Ainsi, la propagation des signaux par NAH n'aurait pas pu être étudiée sur d'aussi longues distances.

Malheureusement, il s'avère que la propagation des hautes fréquences est affectée par ce compromis. Pour illustrer ce phénomène, la figure 4.10 présente la première milliseconde des signaux temporels simulés (—) et propagés ($-*-$) en $X = 18$ cm, $Y = 62$ cm et $z = 5$ cm, et dont les spectres sont présentés à la figure 4.9(a). À ces signaux est ajoutée le résultat de la propagation en ce point à partir de l'accélération transversale de la plaque, cette fois-ci échantillonnée avec un pas réduit $\Delta x = \Delta y = 1$ cm ($-\diamond-$).

On voit bien sur cette figure que le signal propagé pour lequel $\Delta x = \Delta y = 1$ cm correspond beaucoup mieux au signal simulé que celui propagé avec un pas spatial de 2 cm. L'amplitude de la pression acoustique en ce point d'observation est inférieure à 1 Pa, d'où le fait que les erreurs relatives sont significatives.

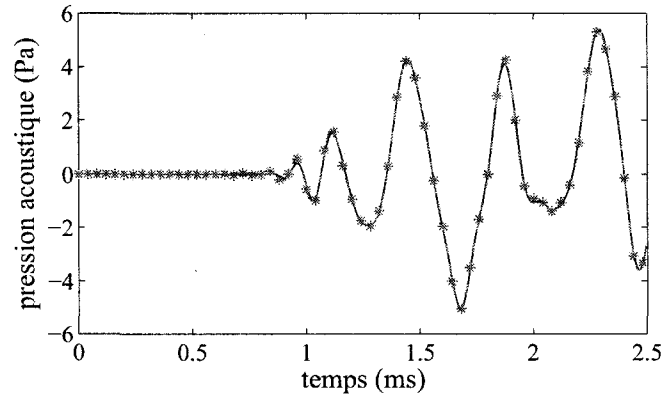


Figure 4.11 – Comparaison sur 2,5 ms des signaux simulés (—) en $X = 18$ cm, $Y = 62$ cm et $z = 5$ cm avec ceux propagés par TNAH avec la fonction de Green G_{ap} avec $\Delta x = \Delta y = 2$ cm (-*-).

Néanmoins, la figure 4.11 montre que sur 2,5 ms, les signaux simulés et propagés par TNAH avec $\Delta x = \Delta y = 2$ cm coïncident plutôt bien. Les différences sont perceptibles principalement là où il y a de la haute fréquence, entre autres durant la première milliseconde. Notons que la propagation avec un pas de 1 cm ne peut être présentée sur une telle durée puisque la diminution de l'espacement entre les points de mesure réduit considérablement la fenêtre d'observation T qui peut être utilisée. Mentionnons également que les mêmes conclusions auraient pu être tirées à partir de la fonction de Green G_{pp} .

Enfin, une autre portion de signal pouvant contenir beaucoup de hautes fréquences est celle située immédiatement après la crête initiale de pression pour un point d'observation dans l'axe de frappe (voir par exemple la figure 1.2). Or, on a observé d'importantes oscillations de hautes fréquences après la crête initiale de pression lors de la propagation des signaux expérimentaux au point d'observation (1) de la figure 4.4, point qui était situé dans l'axe de frappe. Il se peut donc bien que l'espace d'environ 1,4 mm entre les microphones soit trop grand, ce qui causerait quelques erreurs au niveau des hautes fréquences.

Bref, les critères d'échantillonnage spatial du champ de pression acoustique ou de l'accélération transversale de la plaque se sont avérés insuffisants pour obtenir une erreur minimale des signaux propagés par TNAH. C'est donc dire que pour bien reconstruire les composantes de hautes fréquences des signaux, il faudrait considérer, à $f = c/\lambda_{\min}$, une amplitude normalisée inférieure au critère utilisé dans le cadre de ce projet, soit -20 dB. À la lumière de ces résultats, on a donc pu voir de quelle façon les signaux propagés risquaient d'être affectés par un sous-échantillonnage spatial. On a vu que le début des signaux temporels correspondant à des points d'observation sur les côtés de la plaque sont les plus à risque.

Toutefois, on a aussi vu que les erreurs en hautes fréquences affectent peu la forme générale des signaux. De plus, le faible taux d'erreur lors du passage de l'accélération à la pression (comparable à celui rencontré lors de l'utilisation de G_{pp}) indique que cette approche est intéressante pour calculer rapidement le rayonnement acoustique d'une structure plane dont on connaît l'accélération transversale. Cette dernière peut être obtenue par une approche analytique ou même par éléments finis dans le cas d'une source plus complexe. Connaissant cette accélération, on parle d'un temps de calcul d'environ 15 secondes pour un premier plan de rayonnement acoustique et d'une dizaine de secondes par plan supplémentaire. Ces temps sont bien loin des dizaines de secondes prises pour calculer la pression en un seul point à partir de l'équation (1.22).

4.2.2 Plaque avec deux points d'impact

À titre d'exemple d'application, considérons la même plaque que précédemment. Cette fois, comme l'illustre la figure 4.12, la force $F(t)$ est appliquée simultanément en deux points, de façon à ce que le déplacement de la plaque soit antisymétrique. Dans le cas présent, le coin de la plaque est en $X = 0$ cm et $Y = 0$ cm. Ce point est

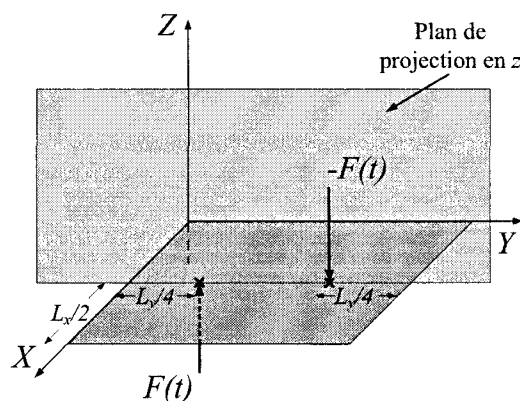


Figure 4.12 – Configuration de la plaque frappée en deux points.

d'ailleurs l'origine de la discrétisation de la plaque. Les autres paramètres de calcul sont les mêmes que ceux présentés à la section précédente.

Les figures 4.13(a) et (b) présentent le rayonnement de la plaque dans le plan $X = 30$ cm, respectivement à $t = 0,25$ ms et $t = 1,1$ ms. Ce plan, qui est aussi illustré à la figure 4.12, passe à environ 5 mm du centre de la plaque.

Les flèches illustrées à la figure 4.13 indiquent la position des points d'impact ainsi que la direction des forces appliquées. On voit clairement à la figure 4.13(a) les deux fronts d'ondes ayant comme origine leur point d'impact respectif. L'un est de teinte blanche (pression positive) alors que l'autre est noir (pression négative) puisque les impacts sont d'amplitudes égales mais de directions opposées. D'autre part, on discerne très bien à la figure 4.13(b) les points d'intersection des fronts d'ondes. Ceux-ci sont aussi antisymétriques par rapport au centre de la plaque. Finalement, comme les ondes de flexion voyagent rapidement dans l'aluminium, plusieurs réflexions sur les bords de la plaque ont eu le temps de se succéder en 1,1 ms. Cette réverbération fait en sorte qu'on peut observer une alternance de 6 maxima et minima sur toute la longueur de la plaque et à environ 5 cm de celle-ci.

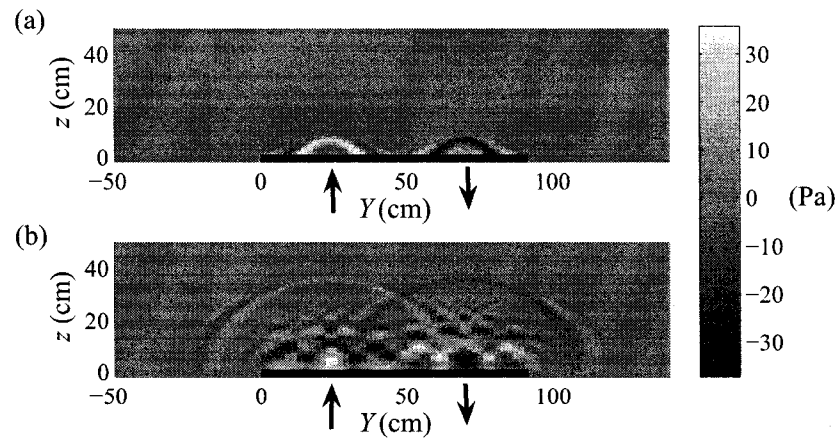


Figure 4.13 – Reconstruction du champ de pression acoustique rayonnée par la plaque soumise à deux impacts simultanés dans le plan $X = 30$ cm à deux instants après les impacts : (a) $t = 0,25$ ms et (b) $t = 1,1$ ms. Les flèches indiquent la position des points d'impact ainsi que la direction des forces appliquées.

D'autre part, alors que le calcul de l'accélération transversale d'une plaque soumise à plusieurs impacts à partir de l'équation (1.23) est relativement rapide, ce n'est pas le cas du calcul de la pression acoustique rayonnée en plusieurs points par l'évaluation numérique de l'intégrale de l'équation (1.22). Par l'exemple précédent, on a montré que l'utilisation de la fonction de Green G_{ap} définie par l'équation (4.1) est une alternative intéressante pour étudier le rayonnement acoustique d'une configuration différente de celle dont il a été question au chapitre 3 et à la première section du chapitre 4, c'est-à-dire avec un seul impact centré. On parle d'un temps de calcul de quelques minutes avec la fonction de Green G_{ap} comparativement à plusieurs heures lorsque la pression acoustique est évaluée à partir de la seconde intégrale de Rayleigh donnée par l'équation (1.22).

En résumé, on a vu dans ce quatrième chapitre que la TNAH permet de propager un plan de mesures expérimentales sur des distances allant jusqu'à une vingtaine de centimètres. En effet, les signaux ainsi projetés sont très similaires aux signaux mesurés dans les plans de propagation. Qui plus est, une reconstruction tridimen-

sionnelle du champ de pression acoustique rayonnée par la plaque de plexiglas suspendue a été réalisée. Ainsi, divers phénomènes tels que la dispersion apparente et le rayonnement dû aux ondes de flexion réfléchies sur les bords de la plaque ont pu être observés.

D'autre part, on a constaté que l'échantillonnage spatial est critique pour une bonne reconstruction des signaux de pression ayant une importante proportion de hautes fréquences. De tels signaux correspondent principalement à des points d'observation situés sur les côtés de la plaque. Finalement, il a été montré que l'accélération transversale d'une plaque peut être propagée directement par la fonction de Green G_{ap} , ce qui réduit considérablement le temps de calcul si on le compare à celui qui est requis pour l'évaluation numérique de la seconde intégrale de Rayleigh (équation (1.22)).

Bref, la propagation directe par TNAH a été étudiée aux troisième et quatrième chapitres, que ce soit par la projection d'un plan de mesures de pression acoustique ou par la projection de l'accélération transversale d'une plaque. Pour que la reconstruction tridimensionnelle du champ de pression acoustique soit complète, il faut aussi être en mesure de propager les hologrammes vers la source. C'est pourquoi la rétropropagation est l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE 5

RÉTROPROPAGATION

Pour que la reconstruction tridimensionnelle du champ de pression acoustique soit complète, il faut aussi traiter de la rétropropagation. Toutefois, comme il en a été question au chapitre 1, cette dernière ne se fait pas aussi aisément que la propagation directe, en raison de l'amplification des ondes évanescentes. On rappelle que l'amplitude de ces ondes décroît exponentiellement lorsqu'elles s'éloignent de la plaque. Lorsqu'elles sont rétropropagées, leur amplitude croît avec la distance, tout comme le bruit et les artefacts numériques indésirables. C'est pourquoi le filtrage des ondes évanescentes doit être considéré. De plus, le fait de travailler avec un facteur d'amortissement artificiel en rétropropagation entraîne des instabilités supplémentaires lors de l'inversion de la transformée de Laplace numérique (NLT). C'est donc dire que pour être menée à terme, la rétropropagation requiert une double régularisation.

On se propose dans ce chapitre d'étudier séparément ces deux régularisations. Dans un premier temps, le filtrage des ondes évanescentes est traité à partir des signaux simulés au chapitre 3. À partir des meilleurs paramètres de filtrage dans l'espace k , la régularisation de l'inversion de la NLT est ensuite étudiée. Cette façon de faire permet de dissocier ces deux types de filtrage, de telle sorte que les effets de la première instabilité n'aient pas de conséquences sur la seconde, et vice versa. Enfin, ces principes sont appliqués à la rétropropagation de l'hologramme expérimental utilisé au chapitre 4.

5.1 Filtrage des ondes évanescentes

5.1.1 Démarche proposée

Comme il en a été question aux chapitres 1 et 3, l'amplification des ondes évanescentes dépend en premier lieu de la distance de rétropropagation comme en fait foi l'expression de la fonction de Green qui, rappelons-le, s'écrit

$$G_{pp} = e^{ik_z d}.$$

Toutefois, cette amplification dépend aussi de la proportion d'ondes évanescentes par rapport aux ondes propagatives, et donc des conditions d'échantillonnage. Ainsi, le fait de sur-échantillonner spatialement aura pour effet d'augmenter les valeurs de k_x et k_y maximales et donc le nombre de points pour lesquels, dans l'espace de Fourier, $(\omega/c)^2 - k_x^2 - k_y^2 < 0$. Conséquemment, le filtrage des ondes évanescentes sera incontournable et ce, même pour des distances de rétropropagation de l'ordre du centimètre.

Or, il s'avère que les conditions d'échantillonnage temporel et spatial de l'hologramme situé en $z_0 = 5$ cm aux chapitres 3 et 4 font en sorte que moins de 7 % des composantes spectrales sont évanescentes. Par ailleurs, on a vu au chapitre précédent que l'espacement entre les points de mesure aurait dû être réduit. C'est ce qui fait que le taux de composantes spectrales évanescentes est si peu élevé. Bref, même dans le cas d'une rétropropagation sur 5 cm, l'amplification des ondes évanescentes n'est pas visible et conséquemment, le filtrage de celles-ci ne peut donc pas être étudié. Comme on a vu que la réduction de l'espacement entre les microphones diminue la durée d'observation T des signaux en raison des ressources informatiques disponibles, il faut donc se placer dans des conditions pour lesquelles

les ondes évanescentes sont amplifiées. On pourra ainsi étudier les signaux sur des durées similaires à celles des chapitres 3 et 4.

C'est pourquoi, dans ce chapitre, on considère plutôt l'hologramme situé en $z_0 = 10$ cm. Bien qu'en pratique, cette distance entre le plan de mesure et la plaque soit trop élevée pour bien mesurer les ondes évanescentes, l'absence de bruit « expérimental » dans les simulations permet de le faire. De plus, malgré le fait que les conditions d'échantillonnage soient les mêmes que pour le plan $z_0 = 5$ cm, le fait de pouvoir doubler la distance de rétropropagation mène à une amplification très importante des ondes évanescentes.

L'objectif de cette section est donc d'étudier dans quelle mesure le filtre de Tikhonov décrit par l'équation (1.39) peut être optimisé par la méthode de la courbe en L afin de filtrer convenablement les ondes évanescentes. La distance de rétropropagation et le type de fonction de Green utilisée sont les principaux paramètres étudiés. Les paramètres d'échantillonnage spatial et temporel, le nombre de zéros ajoutés dans l'espace et le fenêtrage demeurent les mêmes qu'au chapitre 3.

Pour l'ensemble des rétropropagations de la section, il faut limiter convenablement les sommations des termes $\|S_r^\beta\|_2$ et $\|G^{-1}S_r^\beta - S_m\|_2$ définis respectivement par les équations (1.42) et (1.43), et qui permettent de tracer la courbe en L. Tout d'abord, comme la symétrie du système est considérée, un seul quadrant des plans z et z_0 est utilisé pour l'évaluation des expressions $\|S_r^\beta\|_2$ et $\|G^{-1}S_r^\beta - S_m\|_2$. De plus, pour éviter les effets de bords, on se concentre principalement sur le rayonnement au-dessus de la plaque, c'est-à-dire $N_x = 19$ et $N_y = 24$. La surface ainsi obtenue couvre 36×46 cm², ce qui est légèrement supérieur au quart de la plaque. Enfin, il a été mentionné précédemment que l'inversion de la NLT est instable. Comme la régularisation de l'inversion de la NLT est faite ultérieurement, on se limite à

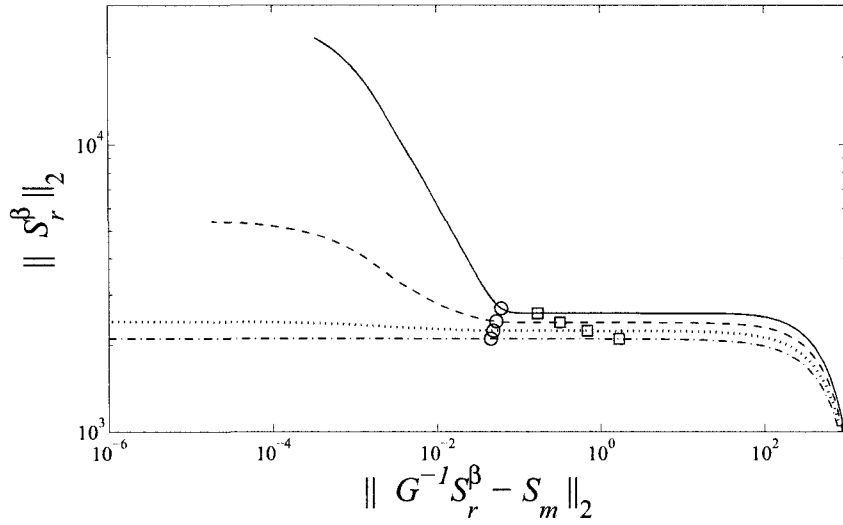
$N_t = 256$, soit la moitié des points du signal. Pour les distances étudiées, ces points ne sont pas affectés par l'instabilité.

Finalement, en ce qui concerne le paramètre de régularisation du filtre, il est varié de façon logarithmique sous la forme $\beta = (\sqrt{2})^n$ où $n \in \mathbb{Z}$. Une routine développée par P. C. Hansen (`l_corner.m`) permet de calculer la courbure maximale au creux du L [32]. La courbe est ainsi interpolée par des splines cubiques et le maximum de courbure en question est calculé par dérivation numérique. La valeur de β la plus près de ce maximum est alors choisie.

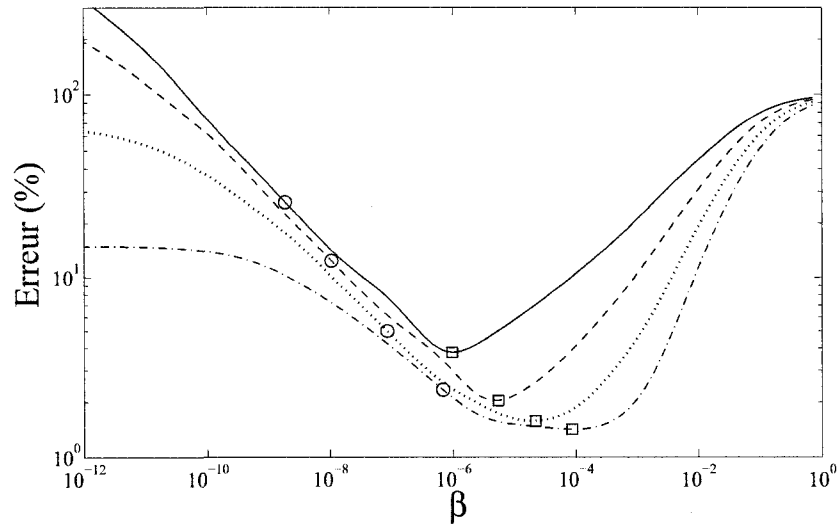
5.1.2 Étude de la distance de rétropropagation

Dans un premier temps, la rétropropagation en utilisant la fonction de Green G_{pp} est étudiée pour des distances $|d|$ allant de 1 à 9 cm à tous les centimètres. Les courbes en L pour $-9 < d < -6$ cm sont présentées à la figure 5.1(a) alors que l'erreur dans l'axe de frappe ($x = y = 0$ cm), telle qu'elle est définie par l'équation (3.20), est présentée à la figure 5.1(b) en fonction de β . Bien que ce soit l'erreur dans l'axe de frappe qui soit présentée, les courbes d'erreur sont sensiblement les mêmes peu importe la position dans le plan reconstruit et les minima concordent plutôt bien.

En ce qui concerne les courbes en L, on voit bien que lorsque la distance de rétropropagation est grande, le creux est plus prononcé. Il en est de même pour l'erreur relative suivant β . Lorsque le niveau de filtrage est élevé (à droite des graphiques), les courbes se rejoignent, le résidu $\|G^{-1}S_r^\beta - S_m\|_2$ étant élevé et la norme du signal rétropropagé $\|S_r^\beta\|_2$ étant faible. Les courbes se rejoignent aussi au niveau de l'erreur, ayant comme asymptote 100 %. Ainsi, lorsque β est élevé, l'amplitude de $p_\beta(x_n, y_m, z, t_i)$ est faible devant le signal de référence. Comme ce dernier appa-



(a) Courbes en L.



(b) Erreurs relatives dans l'axe de frappe.

Figure 5.1 – Courbe en L et erreur relative dans l'axe de frappe ($x = y = 0$ cm) en fonction du paramètre de régularisation β pour différentes distances de rétropropagation de la pression acoustique : $|d| = 9$ cm (—), $|d| = 8$ cm (---), $|d| = 7$ cm (.....) et $|d| = 6$ cm (· - ·). Les points de courbure maximale (○) et d'erreur minimale (□) y sont aussi indiqués.

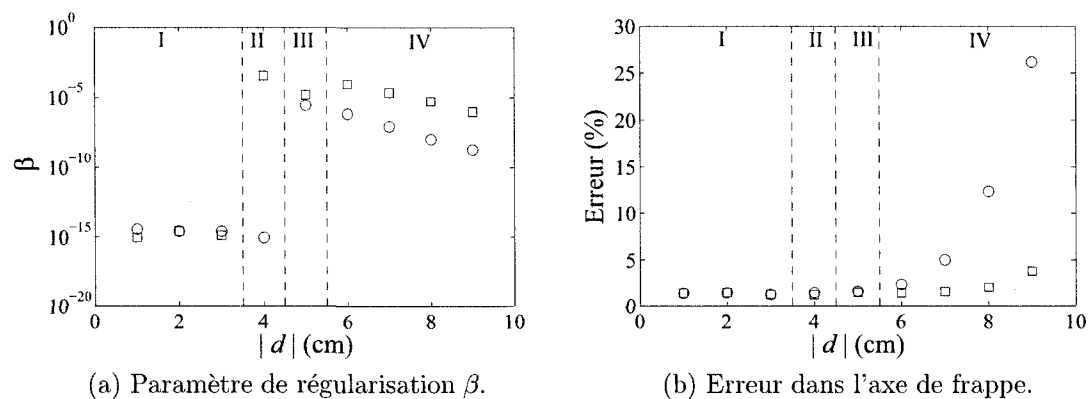


Figure 5.2 – Étude du paramètre de filtrage optimal en fonction de la distance de rétropropagation selon qu'il soit choisi par la courbure maximale (○) ou l'erreur minimale dans l'axe de frappe (□).

raît aussi au dénominateur de l'équation (3.20), la limite de l'erreur de ce côté du graphique est bien 100 %.

Par ailleurs, on voit que les plateaux à gauche des figures 5.1(a) et (b) sont atteints pour des valeurs de β plus élevées au fur et à mesure que la distance diminue. Cela est dû au fait que $|G^{-1}|^2$ croît lorsque $|d|$ diminue et donc β , même lorsqu'il est plus élevé, est tout de même négligeable devant $|G^{-1}|^2$. Pour des distances de rétropropagation de quelques centimètres, les courbes d'erreurs sont uniquement croissantes, c'est donc dire qu'aucun filtrage n'est requis.

Après avoir traité de la forme générale des courbes en L et de l'évolution de l'erreur relative dans l'axe de frappe en fonction du paramètre de régularisation, abordons maintenant le choix de ce dernier. À des fins de comparaison, deux critères sont retenus, soit la valeur de β pour laquelle la courbure de la courbe en L est maximale et celle pour laquelle l'erreur dans l'axe de frappe est minimale. Ces points sont représentés à la figure 5.1 respectivement par les symboles (○) et (□).

Sachant qu'expérimentalement, l'erreur ne peut évidemment pas être calculée, il faut donc connaître dans quelle mesure le choix du paramètre de régularisation par la méthode de la courbe en L optimise le filtre de Tikhonov. Les figures 5.2(a) et (b) présentent respectivement la variation de β et de l'erreur minimale en $x = 0$ et $y = 0$ cm en fonction de la distance de rétropropagation. Les deux critères de sélection de β y sont présentés par les mêmes symboles qu'à la figure 5.1.

Ces deux figures sont divisées en quatre zones, identifiées de I à IV. Dans la première, correspondant à des distances de 1 à 3 cm, les valeurs de β sont très faibles, soit de l'ordre de 10^{-15} . C'est donc dire qu'aucun filtrage n'est requis pour de telles distances. Les taux d'erreurs sont faibles, soit environ 1 %.

Dans la zone II, on voit que les deux paramètres ne correspondent absolument pas. Cela est dû au fait que la courbe d'erreur dans l'axe de frappe pour une distance de 4 cm comporte un léger creux qui n'est pas perceptible sur la courbe en L. Toutefois, les pourcentages d'erreur sont tout aussi près l'un de l'autre.

Pour mieux comprendre ce qui se passe dans la zone III, traitons tout d'abord de la zone IV qui s'étend de 6 à 9 cm. Notons dans un premier temps que dans cette dernière, le choix de β selon le critère du maximum de courbure du L sous-estime d'environ deux ordres de grandeur la valeur permettant l'obtention d'une erreur minimale. De plus, on observe que peu importe le critère de sélection de β , sa valeur croît lorsque la distance de rétropropagation diminue. Comme il en a été question précédemment, $|G^{-1}|^2$ augmente lorsque $|d|$ diminue. C'est donc dire que β doit aussi croître de façon à ne pas être négligeable par rapport à $|G^{-1}|^2$. En ce qui concerne l'erreur, on voit que la courbe basée sur l'erreur minimale est relativement constante jusqu'à 8 cm. Ces valeurs sont similaires à celles obtenues en propagation directe pour de telles distances. Tout comme en propagation directe, l'erreur semble donc être uniquement due aux conditions d'échantillonnage et ne dépendre que très

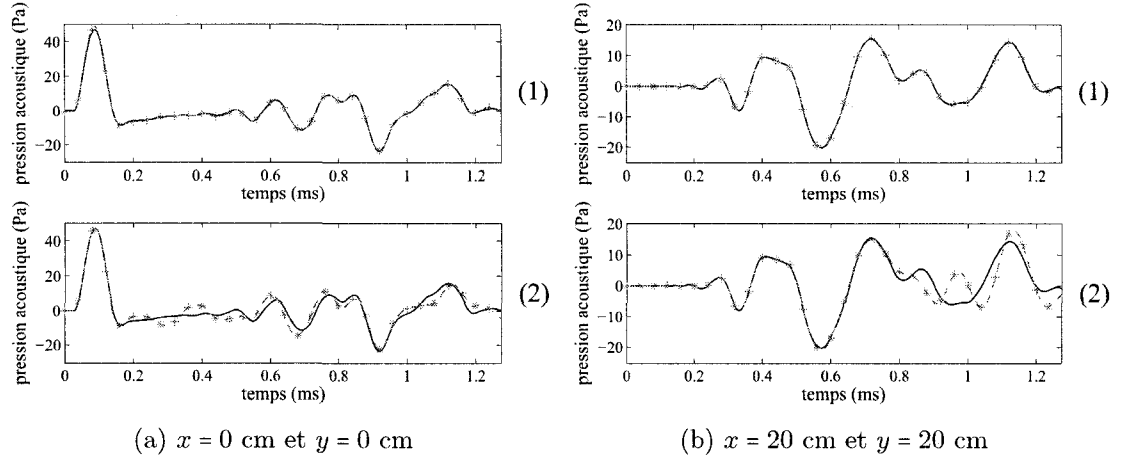


Figure 5.3 – Rétropropagation par TNAH de signaux en $z_0 = 10$ cm sur le plan $z = 1$ cm ($-*-$) et comparaison avec les signaux simulés ($—$) selon le critère de sélection de β : (1) minimum d’erreur dans l’axe de frappe et (2) maximum de courbure du L.

peu de la distance de rétropropagation si et seulement si le filtrage est bien réalisé. D’autre part, l’erreur reliée au choix de β par la courbe en L croît exponentiellement avec la distance.

Dans la zone III, on voit que la valeur du paramètre de régularisation suggérée par la courbe en L suit la même tendance que dans la zone IV. Néanmoins, ce n’est pas le cas pour l’erreur minimale. Cela est dû au fait que le creux dans la courbe d’erreur est très large et plat pour une rétropropagation de 5 cm. C’est donc dire que la moindre différence peut faire changer β de quelques ordres de grandeur. L’erreur demeure toutefois relativement faible.

Afin d’illustrer ce que représentent les pourcentages d’erreur à $d = -9$ cm, la figure 5.3 présente les différents signaux obtenus selon le critère de sélection de β et ce, en deux positions dans le plan $z = 1$ cm : $x = y = 0$ cm et $x = y = 20$ cm. Ceux-ci sont comparés aux signaux simulés. Comme on s’en doute, le critère basé

sur l'erreur minimale (1) fait en sorte que les signaux rétropropagés ($-*-$) sont très similaires à ceux simulés ($---$).

Les signaux obtenus par le filtrage utilisant la courbe en L (2) correspondent aux signaux simulés jusqu'après la crête initiale dans l'axe de frappe et jusqu'à 0,7 ms en $x = y = 20$ cm. Après ces temps, les signaux reconstruits ne correspondent plus à ceux simulés. En fait, les portions des signaux qui sont bien reconstruites s'avèrent être celles ayant une proportion de hautes fréquences plus importante. En effet, comme ce sont les ondes de basses fréquences qui sont principalement évanescentes, les hautes fréquences, elles, n'ont pas besoin d'être filtrées. Ces composantes de hautes fréquences sont donc bien reconstruites malgré le fait que le filtrage soit insuffisant. Évidemment, les ondes évanescentes devraient quant à elles être filtrées davantage.

Bref, la méthode de la courbe en L ne permet pas d'obtenir directement le paramètre de filtrage optimal. Bien qu'on constate à la figure 5.1(a) que les points correspondant aux deux critères sont relativement près, il n'en demeure pas moins que la courbure maximale sous-estime toujours le paramètre optimal.

Or, on remarque à la figure 5.1(a) que le résidu ($\|G^{-1}S_r^\beta - S_m\|_2$) de la courbure maximale est d'au moins un ordre de grandeur plus élevé que celui de l'erreur minimale. C'est donc dire qu'un résidu un peu plus élevé n'entraîne pas automatiquement une moins bonne régularisation. D'ailleurs, le fait que le paramètre optimal soit à droite du maximum de courbure a aussi été observé par de La Rochefoucauld lors de la rétropropagation de la pression acoustique rayonnée par un piston au moyen de la NAH classique [15].

Bien que le choix basé sur le maximum de courbure soit très commun dans la littérature, il se peut très bien que dans le contexte de la NAH, ce critère ne soit

pas le plus approprié. En effet, à la lumière de la figure 5.1(a), le paramètre optimal semble plutôt localisé au début du plateau horizontal du L, c'est-à-dire pour un des premiers points pour lequel la dérivée sur l'échelle logarithmique est nulle. C'est donc dire qu'une nouvelle approche pour la détermination du paramètre de régularisation optimal pourrait être envisagée dans une étude future.

5.1.3 Comportement dynamique de la plaque

De la même façon que cela a été fait pour la pression acoustique, il est aussi possible d'étudier l'accélération, la vitesse et le déplacement de la plaque à l'aide des fonctions de Green appropriées. C'est ce qu'on se propose de faire dans cette section. Le propagateur permettant le passage de la pression à l'accélération a été précédemment défini par l'équation (1.37) alors que les fonctions de Green permettant d'obtenir directement la vitesse et le déplacement à partir de la pression acoustique s'écrivent respectivement

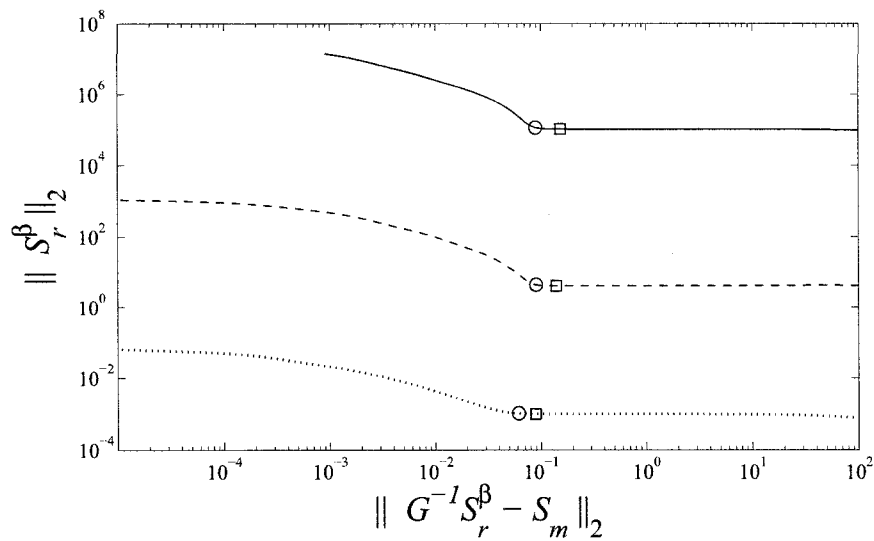
$$G_{pv}(k_x, k_y, d, s) = \frac{ik_z}{\rho_0 s} e^{ik_z d} \quad (5.1)$$

et

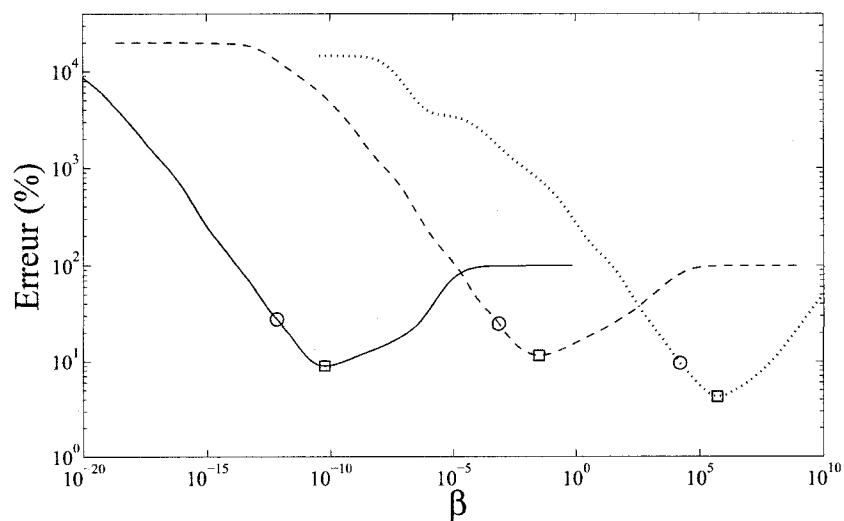
$$G_{pd}(k_x, k_y, d, s) = \frac{-ik_z}{\rho_0 s^2} e^{ik_z d}. \quad (5.2)$$

Notons également que ces deux propagateurs définis dans le domaine de Laplace n'ont pas de singularité en $\omega = 0$ puisque $\sigma \neq 0$.

Les courbes en L et la variation de l'erreur dans l'axe de frappe en fonction de β sont présentées aux figures 5.4(a) et (b). Les points de courbure maximale et d'erreur minimale y sont toujours indiqués par les symboles ($\circ$) et ($\square$). L'allure générale des courbes en L est la même peu importe la fonction de Green utilisée. Elles subissent



(a) Courbes en L.



(b) Erreurs dans l'axe de frappe.

Figure 5.4 – Courbe en L et erreur relative dans l'axe de frappe ($x = y = 0$ cm) en fonction du paramètre de régularisation β pour la rétropropagation à partir du plan $z_0 = 10$ cm en utilisant les fonctions de Green G_{pa} (—), G_{pv} (---) et G_{pd} (.....). Les points de courbure maximale (O) et d'erreur minimale (□) y sont aussi indiqués.

principalement des translations verticales puisque les amplitudes des déplacements, des vitesses et des accélérations ne sont pas du même ordre de grandeur.

En ce qui concerne les courbes d'erreur en fonction du paramètre de régularisation, elles subissent une translation horizontale selon la fonction de Green utilisée. Cela est facilement explicable en réécrivant l'expression du filtre de Tikhonov pour les trois propagateurs en fonction de G_{pd} , c'est-à-dire

$$\Pi^{\beta,n}(k_x, k_y, \omega, d) = \frac{|G_{pd}^{-1}|^2}{|G_{pd}^{-1}|^2 + \beta(|s^n|^2)}, \quad (5.3)$$

où $n = 0$ pour le déplacement, $n = 1$ pour la vitesse et $n = 2$ dans le cas de l'accélération. On rappelle également que $s = \sigma + i\omega$ est la variable du domaine de Laplace. Les trois fonctions de Green causent la même amplification des ondes évanescences puisqu'elles contiennent le même terme exponentiel ; par conséquent, le filtre doit se comporter relativement de la même manière dans les trois cas. C'est donc dire qu'avec la présence de s au dénominateur de l'équation (5.3), β doit diminuer de façon à compenser pour l'augmentation de $|s^n|^2$ lorsque n passe de 0 à 1, puis à 2. Comme dans le cas présent, $\sigma = -2\ln(N_t)/T \approx -5000$ (où on rappelle que N_t et T sont respectivement le nombre de points et la durée des signaux temporels), on s'attend à une différence de plus de 7 ordres de grandeur entre chacune des valeurs de β , peu importe le critère de sélection utilisé. C'est d'ailleurs ce qui est observé à la figure 5.4(b). Enfin, la tendance d'écart entre les paramètres de régularisation obtenus selon les deux critères est la même qu'à la section précédente, c'est-à-dire que la méthode de la courbe en L sous-estime le niveau de filtrage requis.

Enfin, la figure 5.5 présente l'accélération (1), la vitesse (2) et le déplacement (3) de la plaque en deux points d'observation : $x = 0$ et $y = 0$ cm ainsi que $x = 20$ et $y = 20$ cm. Les signaux obtenus par TNAH (—*—) sont comparés à ceux simulés

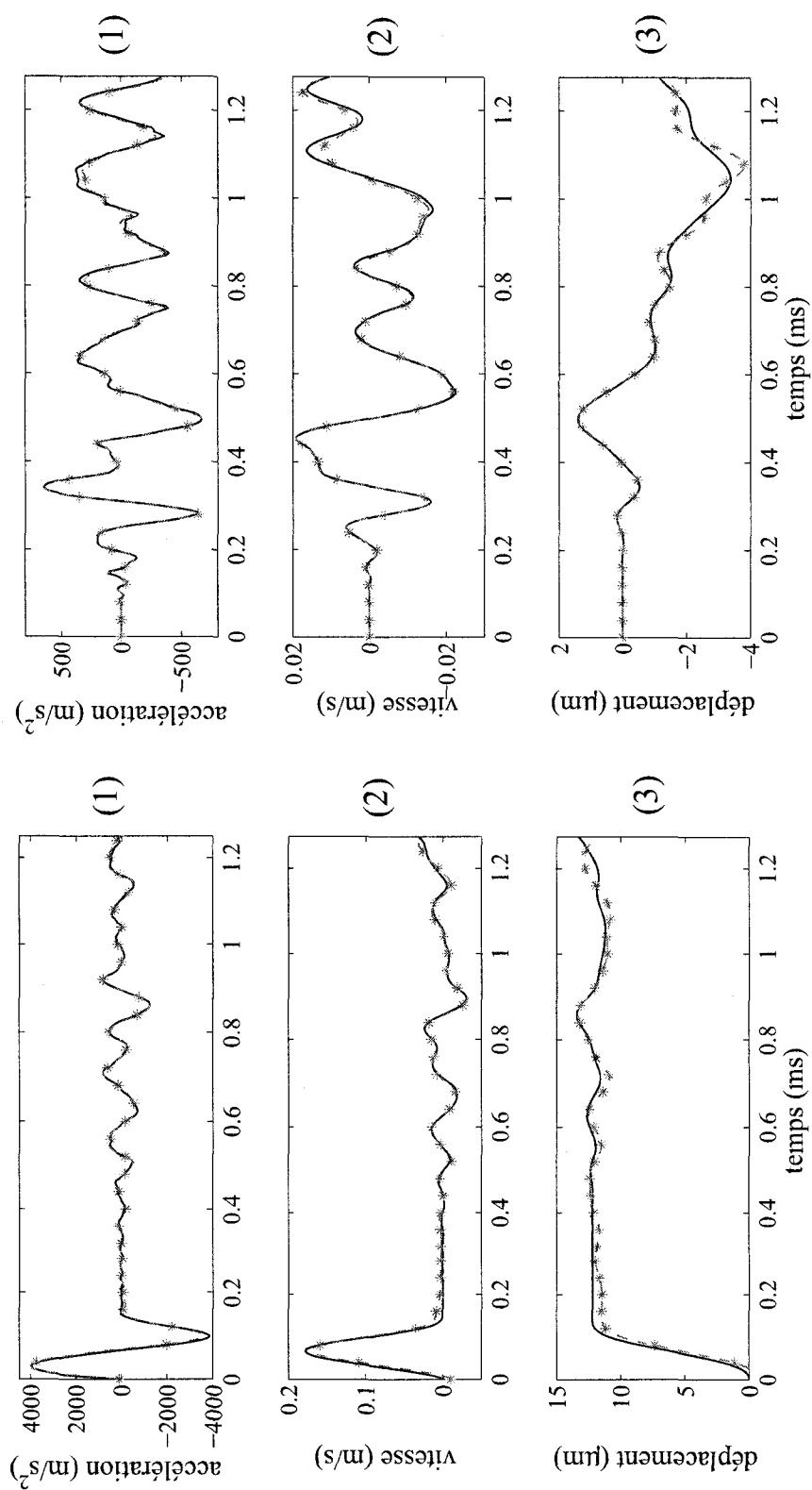
(a) $x = 0$ et $y = 0$ cm(b) $x = 20$ et $y = 20$ cm

Figure 5.5 – Rétropropagation de la pression simulée en $z_0 = 10$ cm avec les valeurs de β minimisant l'erreur dans l'axe de frappe. L'accélération (1), la vitesse (2) et le déplacement (3) propagés (—*) sont comparés avec les signaux simulés (—).

(—). Alors que le déplacement et l'accélération transverses ont respectivement été simulés avec les équations (1.2) et (1.23), la vitesse transversale, pour laquelle les détails du calcul sont donnés à l'Annexe I, s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{w}(X, Y, t) = & \frac{1}{M} \sum_m \sum_n \Phi_{mn}(X_0, Y_0) \Phi_{mn}(X, Y) \\ & \times \left\{ F(t) * \left(\left[\cos(\tilde{\omega}_{mn} t) - \zeta \omega_{mn} / \tilde{\omega}_{mn} \sin(\tilde{\omega}_{mn} t) \right] e^{-\zeta \omega_{mn} t} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

En ce qui concerne la rétropropagation, le paramètre de régularisation utilisé est celui minimisant l'erreur dans l'axe de frappe. On remarque néanmoins à la figure 5.5 que peu importe la fonction de Green utilisée ou la position du point d'observation, les signaux rétropropagés sont très similaires à ceux simulés.

Les erreurs sont plus visibles dans le cas du déplacement et de la vitesse. Elles sont dues à l'intégration numérique de l'accélération, représentée par la division par $-s$ dans l'expression des fonctions de Green et qui permet de passer de l'équation (1.37) à l'équation (5.1) ainsi que de l'équation (5.1) à l'équation (5.2). En effet, cette manière de faire comporte des erreurs qui lui sont intrinsèques et qui s'ajoutent aux erreurs liées à la rétropropagation des signaux sur 10 cm.

Enfin, notons que l'utilisation du paramètre de régularisation déterminé par la courbure maximale de la courbe en L entraîne des erreurs similaires à celles présentées à la figure 5.3. Ainsi, la première portion du signal est bien reconstruite alors que la seconde ne l'est pas.

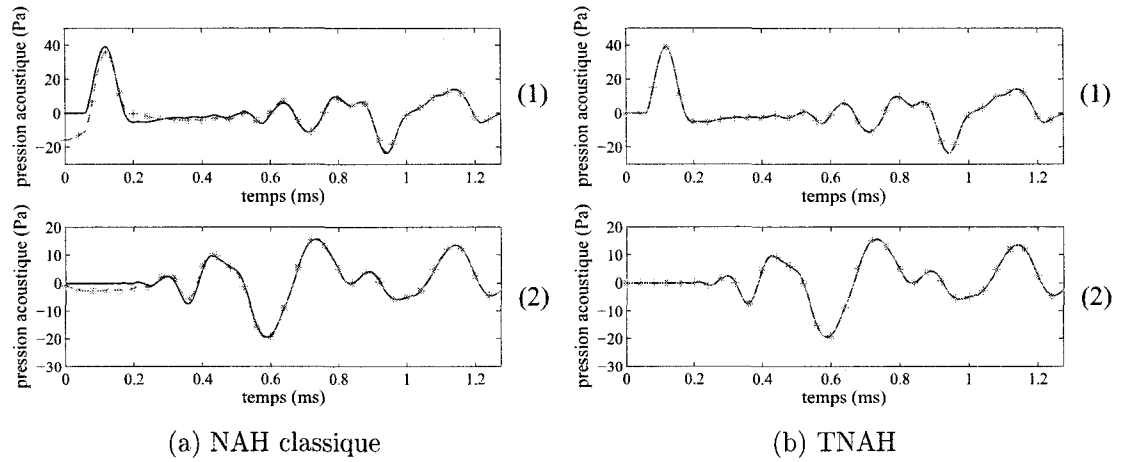


Figure 5.6 – Comparaison de la NAH classique et de la TNAH ($-*-$) avec les signaux simulés ($—$) pour une rétropropagation de 3 cm à partir du plan $z_0 = 5$ cm en deux points d'observation : (1) $x = y = 0$ cm et (2) $x = y = 20$ cm.

5.1.4 Comparaison de la TNAH avec la NAH classique

Comme cela a été fait au troisième chapitre pour la propagation directe, il s'avère intéressant de comparer la TNAH avec la NAH classique en matière de rétropropagation. De prime abord, on pourrait s'attendre à ce qu'il n'y ait pas ou peu de repliement temporel puisqu'il s'agit d'un « retour » dans le temps. Afin de comparer les approches, une rétropropagation de 3 cm à partir du plan $z_0 = 5$ cm est effectuée. Comme ce passage d'un plan à l'autre ne nécessite pas de filtrage, les deux techniques peuvent être comparées sans artefact extérieur.

De plus, aucun zéro n'a été ajouté pour la NAH classique. Une fenêtre de Tukey de 0,05 ms a toutefois été utilisée dans le domaine du temps comme cela a été fait au chapitre 3. Bien que les signaux rétropropagés comptent 512 points, la comparaison se fait sur seulement 256 points, évitant ainsi les problèmes dus à l'instabilité de l'inversion de la NLT, qui ont été mentionnés auparavant mais qui n'ont pas encore été abordés.

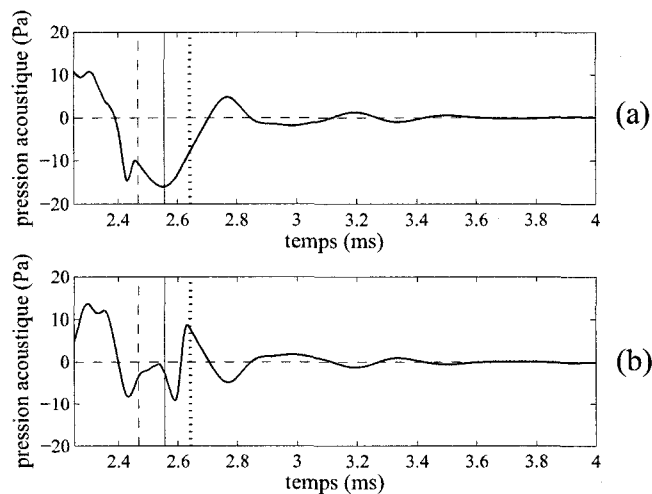


Figure 5.7 – Comparaison de la plage temporelle avec zéros ajoutés pour (a) une rétropropagation et (b) une propagation directe, toutes deux faites avec la NAH classique sur une distance de 3 cm à partir du plan $z_0 = 5$ cm. Les traits verticaux correspondent à $t = T - |d|/c$ (---), $t = T$ (—) et $t = T + |d|/c$ (.....).

La figure 5.6 présente la rétropropagation utilisant la NAH classique (a) et la TNAH (b) et ce, en deux points d'observation : (1) $x = 0$ et $y = 0$ cm ainsi que (2) $x = 20$ et $y = 20$ cm. Les signaux sont comparés à ceux simulés en ces points. Alors que la TNAH permet d'obtenir d'excellents résultats, les signaux résultant de la rétropropagation par NAH classique sont affectés de façon importante par le repliement temporel. On observe ainsi une forte non-causalité à la figure 5.6(a).

Afin de mieux comprendre ce qui se passe, la rétropropagation par NAH classique a aussi été réalisée avec l'ajout de 512 zéros supplémentaires. La figure 5.7(a) présente une portion du signal obtenu dans l'axe de frappe. Le trait vertical plein (—) indique la fin de la durée d'observation T qui correspond également à la durée des signaux initiaux qui ont été propagés. Quant aux traits verticaux tireté (---) et pointillé (.....) aussi tracés à la figure 5.7, ils correspondent respectivement aux temps $t = T - |d|/c$ et $t = T + |d|/c$.

Tel que discuté au chapitre 3 en propagation directe, un signal de durée T permet une reconstruction dans un plan éloigné d'une durée $T + d/c$ si les zéros ajoutés sont conservés. De la même façon, on s'attend à ce que seule la durée $T - |d|/c$ soit exacte en rétropropagation puisqu'elle permet de générer les signaux de durée T dans le plan original.

Or, on observe à la figure 5.7(a) des oscillations d'une durée de plus d'une milliseconde à partir de $t = T - |d|/c$, qui ne contiennent aucune information pertinente au calcul de la pression en $z_0 = 5$ cm. C'est donc dire que les erreurs dues au repliement temporel de la figure 5.6(a) ont aussi cette durée. D'ailleurs, cette durée se compare aussi à celle observée pour une propagation directe de 3 cm à partir du plan $z_0 = 5$ cm comme en témoigne la figure 5.7(b). Celle-ci a été obtenue avec les mêmes paramètres que le signal de la figure 5.7(a).

Fait très intéressant, à partir de $t = T + d/c$, les signaux des figures 5.7(a) et (b) sont de signe opposé. Autrement dit, lorsque les zéros ajoutés sont conservés, on a

$$p\left(x, y, z_0 - |d|, t > T + \frac{|d|}{c}\right) = -p\left(x, y, z_0 + |d|, t > T + \frac{|d|}{c}\right). \quad (5.5)$$

Une source plane infiniment mince située dans le plan $z_0 = 5$ cm aurait exactement le même comportement que ce qui est observé pour $t \geq T + |d|/c$. En effet, pour une telle source, l'amplitude de la pression acoustique rayonnée par celle-ci serait la même de part et d'autre du plan, mais de signe opposé.

Finalement, dans le cas de la propagation directe, l'erreur due au repliement temporel était causée par la présence d'une partie des signaux de la fenêtre répliquée $[-T, 0]$ dans la fenêtre d'observation $[0, T]$. Dans le cas de la rétropropagation, c'est plutôt une partie du signal de la fenêtre répliquée $[T, 2T]$ qui apparaît dans la fenêtre d'observation $[0, T]$.

C'est donc dire que peu importe si on applique à l'hologramme une propagation directe comme aux chapitres 3 et 4 ou une rétropropagation comme dans ce chapitre-ci, le repliement temporel peut causer des erreurs considérables. Qui plus est, ce problème de repliement temporel risque fort d'être rencontré dans toute technique dont la formulation est établie dans l'espace des fréquences ω . Néanmoins, l'utilisation de la transformée de Laplace, comme dans l'implantation de la TNAH, permet d'éviter les problèmes de repliement temporel, tant en propagation directe qu'en rétropropagation.

5.2 Régularisation de l'inversion de la transformée de Laplace numérique

Comme il en a été question à la section précédente, l'inversion de la NLT lors de la rétropropagation mène à une importante instabilité, faisant qu'une proportion du signal pouvant atteindre 25 % ne peut pas être utilisée.

Inoue *et al.* ont étudié l'instabilité de l'inversion de la NLT afin de déduire la force d'impact à partir de mesures du déplacement d'une poutre [69]. Après avoir introduit les concepts théoriques de cette seconde régularisation, on se propose d'utiliser l'approche de ces auteurs afin de connaître quelle proportion des points d'un signal peut être récupérée en fonction de la distance de rétropropagation.

5.2.1 Fondements théoriques

Considérons en premier lieu la forme matricielle de la NLT qui s'écrit

$$\mathbf{F} = \mathbf{L}\mathbf{f} \tag{5.6}$$

où $\mathbf{F}$ et $\mathbf{f}$ sont des vecteurs colonnes tels que

$$\mathbf{F} \equiv \{F(n\Delta\omega + \sigma)\} \text{ et } \mathbf{f} \equiv \{f(n\Delta t)\}.$$

Ces vecteurs sont les mêmes que ceux utilisés dans les algorithmes présentés à l'Annexe II et pour lesquels $n = 0, 1, \dots, N_t - 1$. La matrice $\mathbf{L}$ permettant le passage de l'un à l'autre s'écrit sous la forme d'une décomposition en valeurs singulières (*singular value decomposition* ou SVD), c'est-à-dire

$$\mathbf{L} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\dagger \quad (5.7)$$

où

$$\mathbf{U} \equiv \{U_{mn}\}, \quad \mathbf{\Sigma} \equiv \text{diag}(\Sigma_n) \text{ et } \mathbf{V} = \mathbf{I}, \quad (5.8a)$$

avec

$$\{U_{mn}\} = \frac{1}{\sqrt{N_t}} e^{2\pi i n m / N_t} \quad (5.8b)$$

et

$$\{\Sigma_n\} = \sqrt{N_t} e^{\sigma n \Delta t} \Delta t. \quad (5.8c)$$

Le terme « diag » indique une matrice diagonale. On rappelle également que $\mathbf{V}^\dagger$ est la transposée conjuguée de $\mathbf{V}$ et que $\mathbf{I}$ est la matrice identité. Or, la matrice $\mathbf{\Sigma}$ est très mal conditionnée en raison des termes exponentiels qui la composent. Un mauvais conditionnement peut donc mener à d'importantes erreurs de stabilité lors de la transformée inverse qui s'écrit

$$\mathbf{f} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^\dagger\mathbf{F}. \quad (5.9)$$

C'est pourquoi cette inversion doit aussi être régularisée. Inoue *et al.* proposent de le faire au moyen de la régularisation de Tikhonov qui a été utilisée précédemment dans ce chapitre et qui prend la forme en notation matricielle :

$$\mathbf{f}_\gamma = (\Sigma \Sigma + \gamma \mathbf{I})^{-1} \Sigma \mathbf{U}^\dagger \mathbf{F} \quad (5.10)$$

où γ est le paramètre à optimiser. Par analogie avec le filtrage des ondes évanescentes, sachant que $\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = \mathbf{I}$ et que Σ est réelle, on a $\beta \Leftrightarrow \gamma \mathbf{I}$ et $G^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^\dagger$. Afin de déterminer le paramètre de régularisation optimal, les auteurs utilisent la méthode de la courbe en L.

5.2.2 Application à la TNAH

Le principal paramètre à étudier pour la régularisation de l'inversion de la NLT est la distance de rétropropagation. En effet, on a vu à la section précédente qu'une portion du signal résultant dans le plan z , c'est-à-dire pour $(T - |d|/c) \leq t \leq T$, ne contient pas d'information qui permettrait de recalculer la pression dans le plan de mesure $z_0 = 10$ cm. Qui plus est, la pression de cette portion du signal reconstruit est un artefact de calcul qui peut mener à une instabilité lors de la multiplication par l'exponentielle en fin d'inversion. On s'attend donc à ce que l'instabilité soit d'autant plus importante quand la distance de rétropropagation est grande.

De plus, on souhaite étudier la régularisation de l'inversion de la NLT de telle sorte qu'elle soit indépendante du filtrage des ondes évanescentes. Ainsi, les paramètres β choisis pour chacune des distances étudiées sont ceux qui minimisent l'erreur dans l'axe de frappe.

La méthode de la courbe en L est aussi choisie pour déterminer le paramètre de régularisation γ optimal. Ainsi, les valeurs de $\|\mathbf{Lp}_\gamma - \mathbf{P}\|_2$ sont portées en abscisses

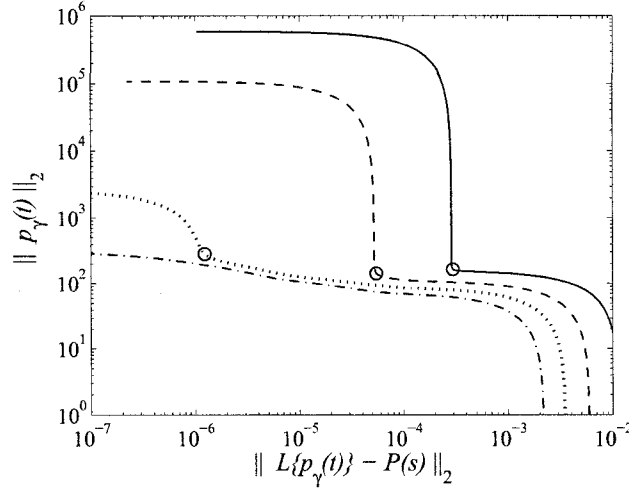


Figure 5.8 – Courbes en L obtenues lors de la régularisation de la NLT pour $|d| = 9$ cm (—), $|d| = 7$ cm (---), $|d| = 5$ cm (.....) et $|d| = 3$ cm (·-·). Les points de courbure maximale (O) y sont aussi indiqués.

et celles de $\|\mathbf{p}_\gamma\|_2$ sont en ordonnées. Les vecteurs $\mathbf{p}_\gamma$ et $\mathbf{P}$ sont respectivement la pression régularisée dans le domaine du temps et la pression avant inversion dans le domaine de Laplace.

La figure 5.8 présente les courbes en L ainsi obtenues pour des distances de rétropropagation de 3, 5, 7 et 9 cm. Les points correspondant aux paramètres γ optimaux y sont indiqués par des cercles. Comme pour le filtrage des ondes évanescentes, le creux du L est beaucoup plus prononcé lorsqu'une régularisation importante est requise. Cela confirme donc l'hypothèse selon laquelle l'inversion de la NLT est davantage instable pour les grandes distances de rétropropagation.

Quant au paramètre γ optimal, sa variation en fonction de la distance est présentée à la figure 5.9, où l'échelle de l'axe des ordonnées est logarithmique. Les zones divisées par des traits verticaux tiretés correspondent à celles de la figure 5.2. On observe premièrement que pour des distances de rétropropagation de 1 à 3 cm (zone I), aucune régularisation n'est nécessaire, compte tenu des faibles valeurs de

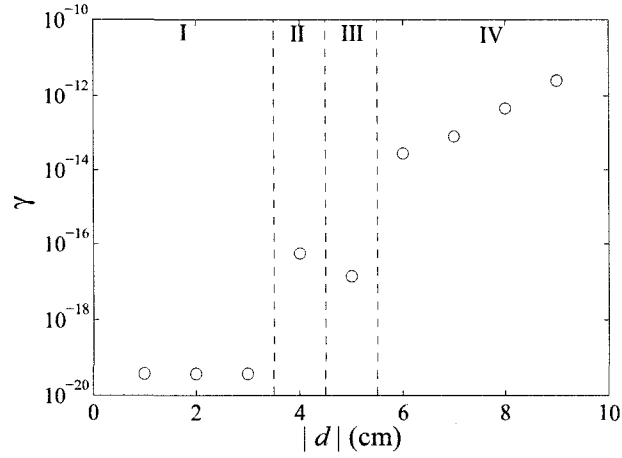


Figure 5.9 – Variation du paramètre de régularisation γ en fonction de la distance de rétropropagation.

γ . Deuxièmement, on voit qu'à partir de 4 cm, une régularisation est nécessaire. Une croissance exponentielle est observable aux zones II à IV. Néanmoins, le point à $d = -5$ cm (zone III) ne semble pas suivre cette tendance. Donc, bien qu'on observe une tendance générale, l'instabilité de l'inversion de la NLT n'est pas tout à fait prévisible, d'où l'importance d'optimiser γ .

Or, qu'en est-il des signaux résultants dans le domaine du temps ? La figure 5.10(a) présente un exemple de régularisation dans l'axe de frappe pour une rétropropagation sur 8 cm. Le signal obtenu ($-*-$) est comparé à celui simulé ($—$). Le trait tireté vertical indique $t = T - |d|/c$. La figure 5.10(b) présente quant à elle le signal non-régularisé ($-\diamond-$).

En comparant les figures 5.10(a) et (b), on constate que la régularisation de Tikhonov est très importante, voire même trop importante. En effet, le signal rétropropagé en (a) est si atténué qu'il ne correspond au signal simulé que sur le tiers de la durée d'observation T .

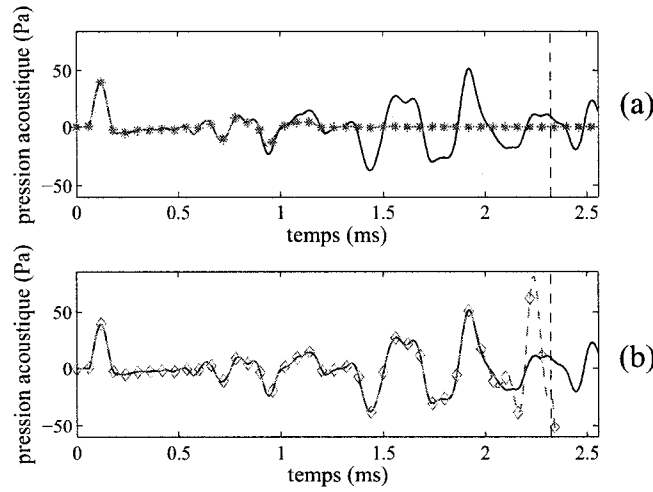


Figure 5.10 – Comparaison des signaux temporels (a) régularisé (—*) et (b) non-régularisé (—◇) avec le signal simulé dans l’axe de frappe (—) pour une rétro-propagation de 8 cm à partir du plan $z_0 = 10$ cm.

La figure 5.11 permet d’expliquer ce phénomène. On y voit le rapport $p_\gamma/p_{\gamma=0}$ sur une échelle logarithmique pour différentes valeurs de γ en fonction du temps. C’est donc dire que la régularisation de Tikhonov consiste finalement en une fenêtre temporelle. La courbe en pointillés (.....) correspond à la fenêtre générée avec le paramètre γ utilisé à la figure 5.10(a). Or, on voit que la pente des fenêtres est la même peu importe la valeur de γ et qu’elle n’est pas très abrupte. Conséquemment, comme l’amplitude de $p_{\gamma=0}$ dans la portion du signal comprise dans l’intervalle $T - |d|/c \leq t \leq T$ est de quelques ordres de grandeur supérieure à celle en début de signal, la pente de la fenêtre doit commencer tôt pour atténuer convenablement l’amplification due à l’instabilité. Ainsi, beaucoup d’information sur le signal en question est perdue lors de ce processus.

D’autre part, on peut voir à la figure 5.9 que γ varie entre environ 10^{-19} et 10^{-12} . On rappelle que pour filtrer les ondes évanescentes, β doit être du même ordre de grandeur que $|G^{-1}|^2$ dans l’équation (1.39). De façon similaire, pour la régularisation de l’inversion de la NLT, γ doit être du même ordre que $\Sigma\Sigma$ ou plus simplement,

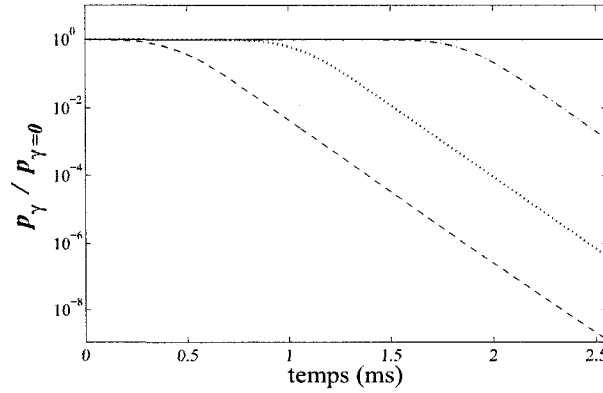


Figure 5.11 – Effet de fenêtrage dans le domaine temporel de la régularisation de Tikhonov pour : $\gamma = 0$ (—), $\gamma = 2 \times 10^{-16}$ (· — ·), $\gamma = 5 \times 10^{-13}$ (.....) et $\gamma = 2 \times 10^{-10}$ (---).

que $e^{2\sigma t_c}$ où t_c peut être associé au temps à partir duquel commencent les fenêtres de la figure 5.11. Ainsi, comme $e^{2\sigma t_c}$ est une fonction décroissante de t_c (on rappelle que σ est négatif) et que la pente de la fenêtre doit commencer plus tôt pour filtrer les instabilités à la fin des signaux, γ croît donc effectivement lorsque la distance de rétropropagation augmente.

Or, on voit à la figure 5.10(b) que les erreurs dues à l'instabilité sont très localisées dans le temps et que les signaux rétropropagés sont similaires à ceux simulés jusqu'à $t = 2$ ms. Toutefois, notons que le point $t = T - |d|/c$ n'est pas celui qui sépare la zone stable de la zone instable. C'est donc dire qu'il faudrait une fenêtre dont la pente est beaucoup plus abrupte, qui résulterait d'une autre technique de régularisation.

L'approche employée par Inoue *et al.* pour leurs travaux visait essentiellement à filtrer l'amplification du bruit présent dans les signaux lors de la multiplication par le terme exponentiel pour inverser la NLT (équation (3.14)). Or, dans notre cas, l'instabilité est beaucoup plus localisée, c'est-à-dire qu'elle se trouve à la toute fin des signaux, et elle est due au fait qu'une portion de ces signaux correspondant à $T - |d|/c \leq t \leq T$ ne contient pas d'information pertinente au champ acoustique

rétropropagé. Ainsi, la régularisation de Tikhonov est probablement plus appropriée dans un cas comme le leur que dans le nôtre. On observe toutefois aux graphiques de la référence [69] qu'une portion considérable des signaux ainsi régularisés est nulle comme cela a été observé à la figure 5.10(a).

En ce qui a trait aux autres méthodes de régularisation, Williams a proposé un filtre de Tikhonov d'ordre plus élevé pour filtrer les ondes évanescentes en NAH [79]. Néanmoins, il est probable que la pente de la fenêtre qui en résulte ne soit pas assez abrupte. C'est pourquoi on propose ici l'utilisation de la SVD tronquée (*truncated SVD* ou TSVD), pour laquelle la pression acoustique régularisée prend la forme [80]

$$\mathbf{p}_{N_{TSVD}} = \bar{\mathbf{V}} \bar{\Sigma}^{-1} \bar{\mathbf{U}}^\dagger \mathbf{P} \quad (5.11)$$

avec

$$\bar{\mathbf{U}} \equiv \{U_{ij}\}, \quad \bar{\Sigma} \equiv \text{diag}(\Sigma_j) \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{V}} \equiv \{V_{ij}\},$$

où $i = 0, 1, \dots, N_t - 1$ et $j = 0, 1, \dots, N_{TSVD} - 1$. Cette approche donne un vecteur résultant de longueur N_t , mais les dimensions de la matrice diagonale Σ et la seconde dimension des matrices $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ sont réduites aux N_{TSVD} premiers éléments. La TSVD est utilisée entre autres en traitement des images [81].

Dans le contexte de l'inversion de la NLT, cette approche peut être considérée comme étant l'application d'une fenêtre rectangulaire à N_{TSVD} points. Cette méthode peut aussi être régularisée par la courbe en L. Alors que pour la régularisation de Tikhonov, γ peut prendre n'importe quelle valeur réelle positive, N_{TSVD} est évidemment un nombre entier compris entre 0 et N_t .

Bien que la TSVD ne fasse pas l'objet d'une étude paramétrique dans ce mémoire, la figure 5.12 présente tout de même la régularisation du signal de la figure 5.10(b) par cette méthode. Le signal régularisé ($-\ast-$) y est comparé à celui non-régularisé

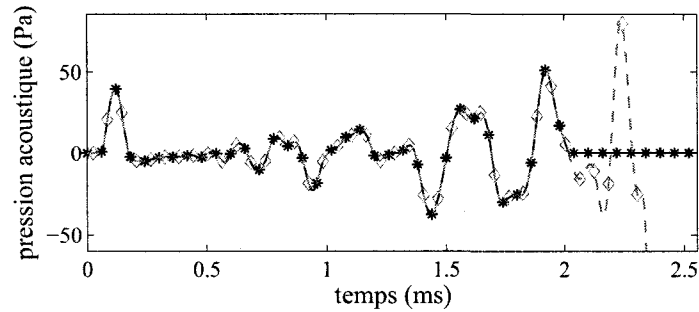


Figure 5.12 – Comparaison du signal régularisé par la TSVD ($-* -$) avec celui non-régularisé ($-\diamond -$) suite à une rétropropagation de 8 cm à partir du plan $z_0 = 10$ cm.

($-\diamond -$). On constate que la coupure du signal régularisé se fait environ au temps auquel le signal non-régularisé « décroche » du signal simulé, soit 2 ms (figure 5.10(b)).

Considérant qu'expérimentalement, le signal de référence n'est pas connu, la TSVD jumelée à l'utilisation de la courbe en L peut permettre d'identifier la portion du signal reconstruit qui n'est que peu, voire aucunement affectée par l'instabilité rencontrée lors de l'inversion de la NLT. On évite ainsi d'avoir à se fixer un facteur de sécurité n qui ferait en sorte qu'on ne conserverait systématiquement que la portion du signal pour laquelle $t < T - n|d|/c$. Le paramètre N_{TSVD} optimal peut être trouvé à partir de la routine `Lcurve` aussi développée par P. C. Hansen [32] et qui peut être utilisée directement à partir des matrices $\mathbf{U}$, $\mathbf{\Sigma}$ et $\mathbf{V}$ de l'équation (5.7). On note cependant que qualitativement, la forme du L n'est vraiment pas aussi définie qu'à la figure 5.8 et que l'optimisation du nombre de point N_{TSVD} à conserver resterait encore à être étudiée.

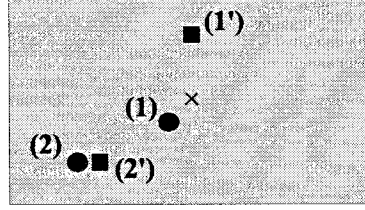


Figure 5.13 – Localisation des points de mesure de pression acoustique (●) et d'accélération de la plaque (■). La croix (x) indique le point d'impact.

5.3 Validation expérimentale

L'hologramme expérimental dont il a été question au quatrième chapitre est utilisé dans cette section afin de valider les notions présentées dans les sections précédentes. Comme le plan de mesure est situé relativement près de la source (2 cm), deux distances de rétropropagation sont étudiées. La pression acoustique mesurée est rétropropagée en pression (G_{pp}) sur 1 cm et en accélération (G_{pa}) sur 2 cm.

La figure 5.13 présente la position des différents points de comparaison pour la pression acoustique (●) et l'accélération (■). Les points de mesure de pression (1) et (2) sont situés dans le plan $z = 1$ cm et des accéléromètres ont été placés aux points (1') et (2') dans le plan $z = 0$ cm.

Les paramètres expérimentaux sont les mêmes qu'au chapitre précédent. De plus, l'inversion de la NLT est régularisée par la TSVD de façon à ce qu'un maximum de points puissent être conservés sur les premières 2,5 ms, sans trace d'instabilité. On rappelle que le nombre de points N_{TSVD} déterminé par la méthode de la courbe en L a donné des résultats plus probants que la régularisation de Tikhonov à la section précédente. Il s'avère donc intéressant de voir dans quelle mesure cette approche s'applique expérimentalement.

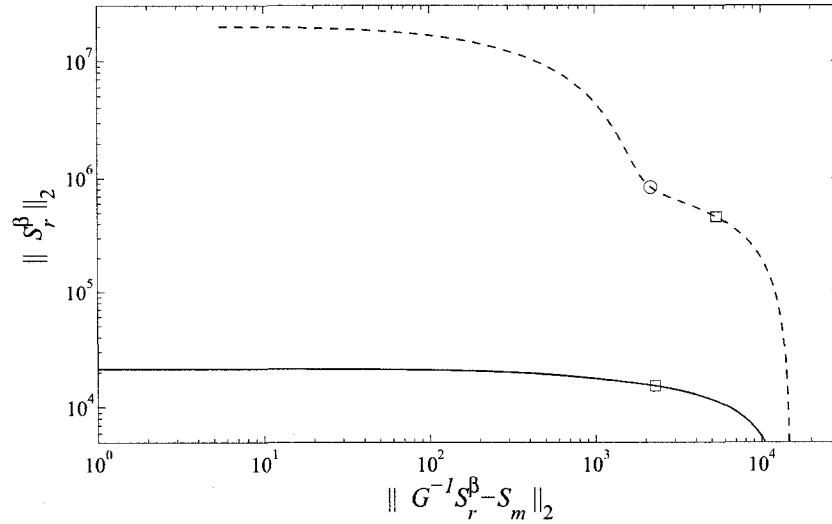


Figure 5.14 – Courbes en L pour une rétropropagation de 1 cm avec la fonction de Green G_{pp} (—) et de 2 cm avec le propagateur G_{pa} (---). Les points de courbure maximale (○) et d'erreur minimale (□) y sont aussi indiqués.

En ce qui a trait au filtrage des ondes évanescentes, la méthode de la courbe en L pour l'optimisation du paramètre de régularisation β est aussi utilisée. La figure 5.14 présente ces courbes dans le cadre d'une rétropropagation de pression à pression sur 1 cm (—), ainsi que de pression à accélération sur 2 cm (---).

Afin de vérifier si les conclusions tirées à la section 5.1 sont valables expérimentalement, à savoir que la méthode de la courbe en L sous-estime le paramètre de filtrage, la figure 5.15 présente la variation de l'erreur relative aux points (1) pour G_{pp} et (1') pour G_{pa} en fonction de β . Notons que les courbes concernant l'erreur relative au point (2) sont très similaires à celles au point (1) et que celles présentant l'erreur relative au point (2') sont similaires à celles au point (1'). Enfin, comme à la section 5.1, les valeurs de β correspondant au maximum de courbure du L et à l'erreur minimale sont respectivement identifiées aux figures 5.14 et 5.15 par les symboles (○) et (□).

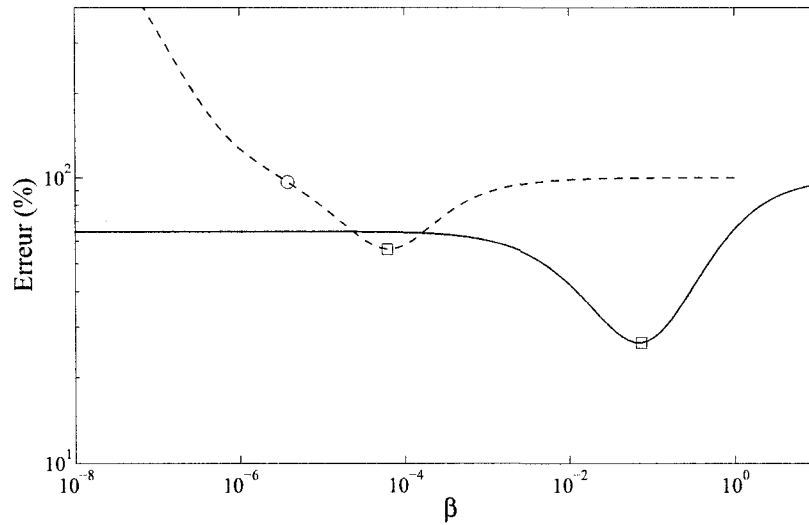


Figure 5.15 – Variation de l'erreur relative pour une rétropropagation de pression à pression au point (1) (—) et une rétropropagation de pression à accélération au point (1') (---) en fonction de β . Les points de courbure maximale ($\circ$) et d'erreur minimale ($\square$) y sont aussi indiqués.

En premier lieu, la présence d'un L pour $d = -2$ cm à la figure 5.14 illustre que malgré les faibles distances de rétropropagation, les conditions d'échantillonnage et le bruit expérimental font en sorte qu'un filtrage des ondes évanescentes est requis. Ce filtrage n'apparaît pas nécessaire pour le passage de pression à pression sur une distance de 1 cm, puisque le maximum de courbure est situé à l'extrémité gauche de la courbe en trait plein (—), soit à l'extérieur des valeurs de β qui y sont présentées.

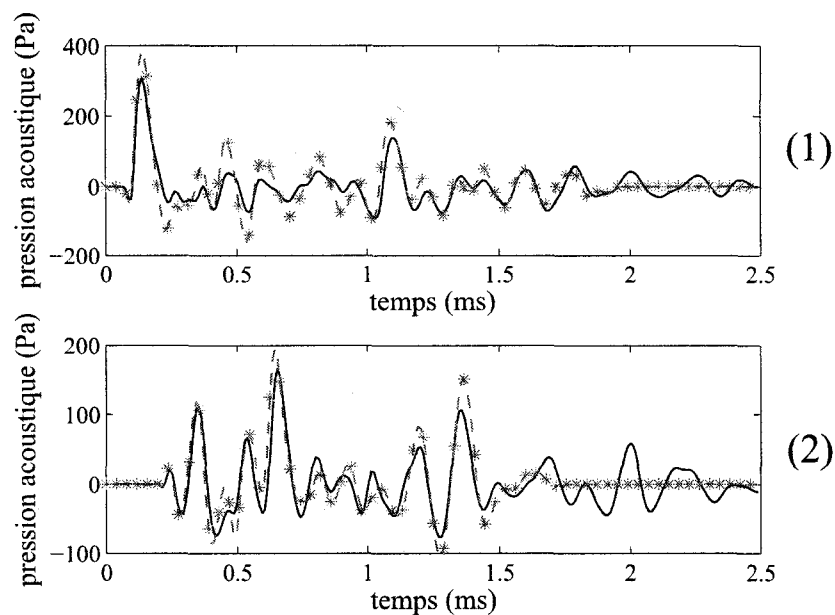
Or, la figure 5.15 montre qu'il y a un paramètre de filtrage optimal dans les deux cas. Lors de l'utilisation du propogateur G_{pp} sur une distance de 1 cm, ce paramètre est relativement élevé, soit $\beta = 0,0625$. Cela correspond à ce qui avait été remarqué à la section 5.1, à savoir que le paramètre de régularisation doit être du même ordre de grandeur que $|G^{-1}|^2$ pour être effectif. Toutefois, la méthode de la courbe en L ne permet pas de relever le besoin de filtrage pour la rétropropagation de 1 cm.

À la lumière de ces observations et des figures 5.14 et 5.15, on s'aperçoit que l'erreur du signal non-filtré doit dépasser 100 % comme pour la rétropropagation sur 2 cm pour que le creux du L soit identifiable par les algorithmes proposés par Hansen. Il faut donc que le signal non-filtré contienne beaucoup d'énergie comparativement au signal réel. Néanmoins, bien que le creux de la courbe en L soit identifiable dans le cas de la rétropropagation sur 2 cm, le paramètre de régularisation est sous-estimé de plus d'un ordre de grandeur. C'est donc dire que dans un contexte « à l'aveugle », où le signal à reconstruire n'est pas connu, la méthode de la courbe en L n'est pas applicable.

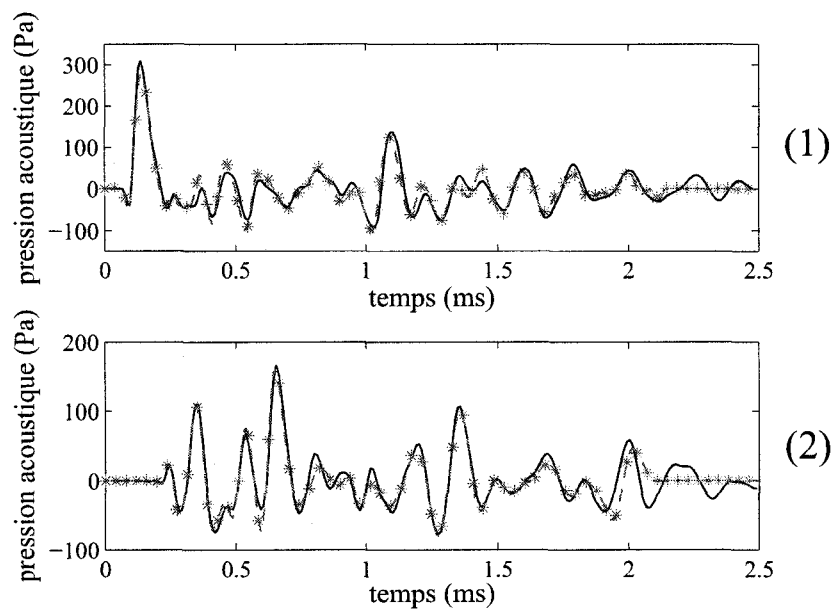
Enfin, la figure 5.16 présente les signaux filtrés avec des paramètres déterminés par la méthode de la courbe en L et à partir de l'erreur minimale aux points (1) et (2) pour une rétropropagation de pression à pression sur 1 cm ($-*-$). La figure 5.17 présente les signaux obtenus par ces deux critères de sélection de β aux points (1') et (2') dans le cadre de l'utilisation du propagateur G_{pa} sur $d = -2$ cm. Ces signaux sont respectivement comparés à ceux mesurés par un microphone dans le plan $z = 1$ aux points (1) et (2), et par un accéléromètre fixé à la plaque aux points (1') et (2') ($—$). Comme il en a été question précédemment, l'inversion de la NLT a été régularisée par la TSVD, d'où la présence de plusieurs points d'amplitude nulle à la fin des signaux.

En comparant les figures 5.16(a) et 5.17(a) aux figures 5.16(b) et 5.17(b), on voit que l'amplitude des premières est plus élevée à cause d'un filtrage insuffisant. Cette différence est moins marquée pour la rétropropagation de pression à pression (figure 5.16) puisque la distance de rétropropagation est plus faible.

De plus, on peut voir à la figure 5.15 que l'erreur dans le cas de l'utilisation de G_{pa} lorsque β est choisi par la courbure maximale du L s'approche des 100 %. Or, il est très important de préciser qu'un 100 % à gauche du minimum des courbes d'erreur

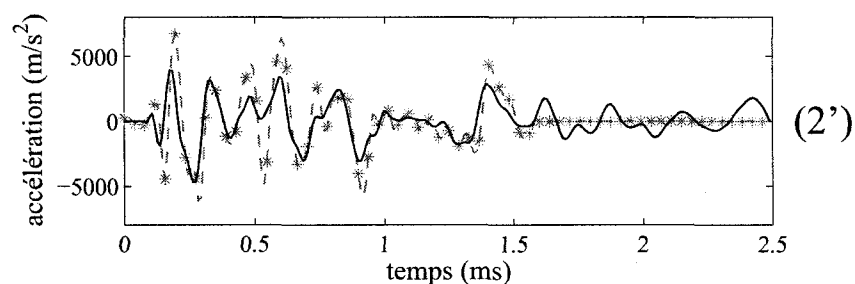
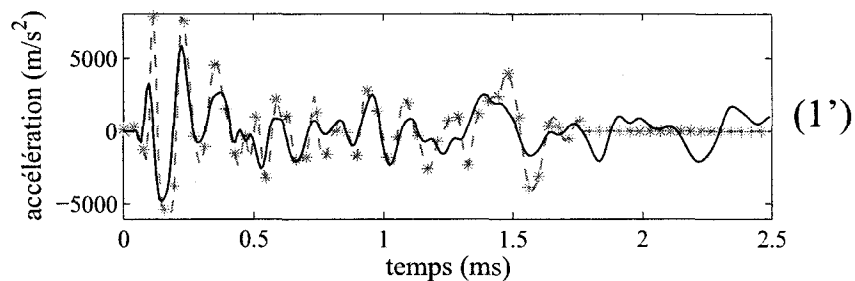


(a) Sélection de β par la méthode de la courbe en L.

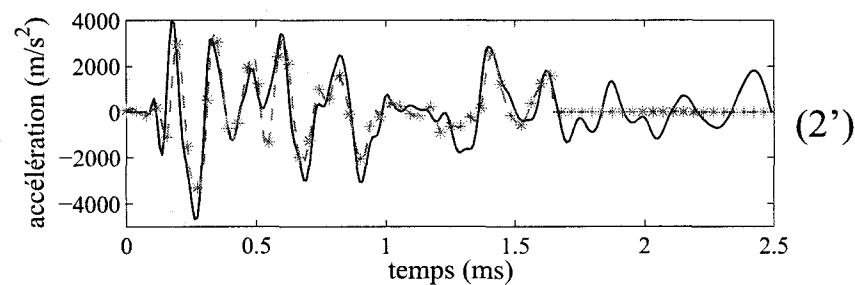
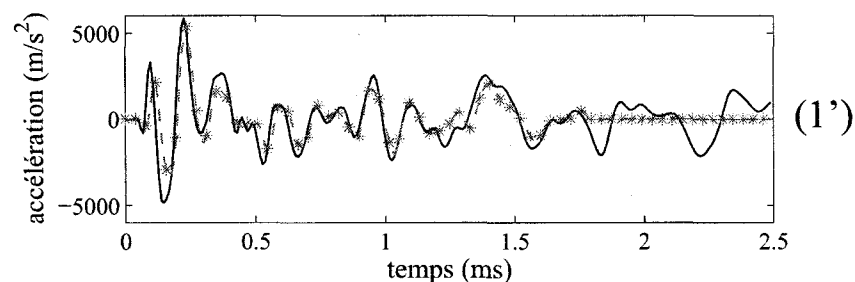


(b) Sélection de β par l'erreur minimale au point (1).

Figure 5.16 – Rétropropagation par TNAH des signaux mesurés en $z_0 = 2$ cm sur une distance d de 1 cm selon deux critères de sélection de β (—*) et comparaison avec la pression acoustique mesurée (—) aux points d'observation (1) et (2).



(a) Sélection de β par la méthode de la courbe en L.



(b) Sélection de β par l'erreur minimale au point (1').

Figure 5.17 – Rétropropagation par TNAH des signaux mesurés en $z_0 = 2$ cm sur une distance d de 2 cm selon deux critères de sélection de β (—*) et comparaison avec l'accélération mesurée (—) aux points d'observation (1') et (2').

(c'est-à-dire que les signaux ne sont pas suffisamment filtrés) n'est pas l'équivalent d'un 100 % à droite de ce minimum d'erreur, pour lequel les signaux sont trop filtrés. En effet, lorsque le niveau de filtrage est exagéré (à l'extrême droite du minimum d'erreur), l'amplitude du signal à étudier devient négligeable par rapport au signal de référence, ce qui mène à un taux d'erreur calculé avec l'équation (3.20) de 100%. C'est donc dire que l'amplitude du signal filtré est pratiquement nulle, rendant celui-ci inutilisable. Toutefois, un taux d'erreur de 100 % pour une valeur de β située à gauche du minimum d'erreur signifie que le signal à étudier contient deux fois plus d'énergie que le signal de référence. Ainsi, toujours selon l'équation (3.20), le taux d'erreur est effectivement de 100 %. C'est d'ailleurs ce qu'on observe à la figure 5.17(a) : malgré une erreur relative élevée, les temps d'arrivée des maxima et minima locaux du signal rétropropagé correspondent à ceux de l'accélération mesurée sur la plaque.

En comparant les figures 5.16(b) et 5.17(b), on voit que les pressions rétropropagées concordent davantage avec celles mesurées, comparativement aux accélérations. Cela est en partie dû au fait que l'utilisation d'un accéléromètre entraîne des erreurs expérimentales supplémentaires. En effet, pour varier la position en z lors des mesures de pression, le quadrillage de microphones est glissé selon ce même axe. On s'assure alors que les positions en X et Y concordent. Cependant, l'alignement des accéléromètres sur la position des microphones peut engendrer des erreurs.

Bref, on a vu dans ce chapitre que la rétropropagation par TNAH nécessite une double régularisation. En premier lieu, les ondes évanescentes doivent être filtrées. Bien que le filtre de Tikhonov s'est avéré approprié, l'optimisation de son paramètre de régularisation β par la méthode de la courbe en L n'a pas eu le succès escompté. En effet, que l'hologramme soit simulé ou mesuré expérimentalement, la valeur de β optimale est toujours sous-estimée. Qui plus est, le besoin de filtrage peut passer complètement inaperçu comme ce fut le cas pour la rétropropagation sur seulement

1 cm de l'hologramme expérimental. Il faudrait donc être en mesure de déterminer le paramètre de régularisation qui minimise l'erreur sans avoir à connaître les signaux à reconstruire.

Dans un deuxième temps, il a été montré que la régularisation de Tikhonov pour l'inversion de la NLT telle que décrite par Inoue *et al.* élimine une partie considérable des signaux rétropropagés. En se basant aussi sur une écriture matricielle de la NLT, il a été proposé d'appliquer une régularisation basée sur la TSVD qui impose une coupure beaucoup plus abrupte aux signaux temporels. Bien que cette approche n'ait pas fait l'objet d'une étude approfondie, les résultats présentés dans ce chapitre laissent croire que la TSVD est à considérer pour l'inversion de la NLT dans un contexte de problèmes inverses. Qui plus est, il est préférable de retirer un certain nombre de points en fin de signal, quitte à considérer un signal légèrement plus long au départ, plutôt que de subir les effets du repliement temporel causé par la NAH classique.

CHAPITRE 6

DISCUSSION GÉNÉRALE

Dans ce chapitre une discussion générale est présentée à propos de l'ensemble du projet, mettant ainsi en lien les résultats numériques et expérimentaux des chapitres 3 à 5 avec la revue de la littérature. Les thèmes abordés portent essentiellement sur les simulations numériques ainsi que sur la nouvelle formulation proposée pour l'application de la NAH en régime transitoire.

Simulations numériques

Afin de vérifier l'applicabilité de la formulation classique de la NAH à l'étude du rayonnement transitoire d'une plaque, le comportement dynamique et le rayonnement de celle-ci dans les instants suivant un impact ont été simulés. Dans un premier temps, la force d'impact a été modélisée par une expression analytique s'inspirant fortement de celle développée par Heitkämper [21]. La fonction définissant cette force tient compte des propriétés physiques et mécaniques des matériaux en contact et constitue une approximation réaliste lorsque l'impact est centré et que les dimensions de la plaque sont grandes.

Dans le cadre de ce projet, la force en question est une combinaison des expressions utilisées par Goldsmith et Heitkämper telle que décrite au chapitre 2. Elle a été utilisée puisqu'elle avait été validée expérimentalement au préalable [24]. Bien que simple d'utilisation, on a vu au premier chapitre que la forme que prend cette force porte à confusion entre autres en raison du terme C_L qui n'est pas explicitement défini par Heitkämper en fonction du module d'Young, de la densité et du coefficient

de Poisson de la plaque. Afin d'éviter toute confusion pour d'éventuelles simulations numériques et d'être plus rigoureux au niveau du modèle de force utilisé, il serait préférable d'utiliser l'approximation développée par Heitkämper uniquement avec les paramètres tels qu'ils sont présentés par Goldsmith. On s'assurera ainsi de respecter les fondements de la loi de Hertz.

Évidemment, pour d'éventuelles comparaisons entre un champ acoustique simulé et celui reconstruit expérimentalement par NAH, il pourrait être avantageux d'implanter le modèle de force défini par Troccaz *et al.* On tiendrait ainsi davantage compte de la plasticité des matériaux en contact qui peuvent affecter considérablement l'amplitude maximale de la force. En utilisant les fonctions de forme appropriées, un tel modèle serait également applicable à la vibration des poutres, consolidant ainsi la base de plusieurs travaux faits au sein du groupe de recherche.

D'autre part, les algorithmes de calcul de l'accélération et du rayonnement des plaques présentés à l'Annexe II ont permis d'étudier de manière satisfaisante la propagation par NAH. Les phénomènes clés du rayonnement acoustique transitoire des plaques sont facilement identifiables et correspondent à ceux présentés dans la littérature. De plus, le calcul de l'accélération directement à partir de la fonction définissant la force (et non de ses dérivées) a un aspect novateur.

Néanmoins, l'efficacité de ces algorithmes n'a pas été optimisée dans le cadre de ce projet. À titre indicatif, la simulation d'un plan de pression acoustique a pris quelques jours. Il pourrait donc s'avérer intéressant d'optimiser le calcul, particulièrement à l'égard de la correspondance entre l'échantillonnage spatial et temporel pour l'évaluation de la seconde intégrale de Rayleigh (équation (1.22)). Une approche par différences finies telle que celle privilégiée par Schedin *et al.* [10] pourrait aussi être à considérer.

Nouvelle formulation de la NAH

La principale contribution scientifique de ce projet est le développement d'une formulation de la NAH applicable à l'étude du rayonnement acoustique transitoire des plaques. Nommée TNAH (*transient NAH*), cette nouvelle approche, basée sur la transformée de Laplace numérique dans le domaine du temps, a mené à une reconstruction de champs acoustiques simulés et expérimentaux beaucoup plus complète que ce qui avait été présenté jusqu'à présent dans la littérature. Bien qu'il reste quelques pas à franchir à l'égard de la rétropropagation, il n'en demeure pas moins que de nouvelles portes s'ouvrent en matière d'holographie acoustique transitoire.

Quelques détails concernant la formulation et son application pourraient toutefois être peaufinés pour renforcer la technique. Tout d'abord, la fonction de Green de Dirichlet dans l'espace k ($G_{pp}(k_x, k_y, d, \omega)$) a entre autres fait l'objet de cette formulation dans le domaine de Laplace. Bien que de La Rochefoucauld ainsi que Veronesi *et al.* aient démontré que cette fonction de Green n'était efficace que pour propager les champs de pression acoustique sur de courtes distances, il a été montré dans ce mémoire que l'étendue de son applicabilité est quand même significative. On rappelle que de La Rochefoucauld et Veronesi *et al.* recommandent plutôt de faire la transformée de Fourier discrète de la fonction de Green spatiale définie par l'équation (1.30) lorsque les champs de pression acoustique doivent être propagés sur de grandes distances. Il pourrait donc s'avérer intéressant de reformuler l'équation (1.30) dans le domaine de Laplace et de comparer l'étendue de son applicabilité avec celle de l'équation (3.19), particulièrement en ce qui a trait à la distance de propagation.

D'autre part, l'implantation de la transformée de Laplace numérique a été réalisée directement par l'utilisation de la transformée de Fourier rapide. Le principal objectif étant de développer une méthode simple d'application, l'efficacité de l'al-

gorithme n'était pas à optimiser. Or, puisque ce projet a permis de mettre en évidence la puissance de la transformée de Laplace pour l'étude de phénomènes transitoires, il pourrait être avantageux de se pencher sur l'implantation de la NLT et ce, principalement à l'égard de l'échantillonnage.

Par exemple, Moreno et Ramirez [82] privilégient un échantillonnage « impair » en fréquences plutôt que l'échantillonnage « pair » utilisé dans le cadre du présent projet. Ainsi, pour un même nombre de points dans le domaine du temps, la fréquence maximale observable est doublée, réduisant du même coup les conséquences du phénomène de Gibbs dont il a été question au troisième chapitre. Wilcox et Gibson, quant à eux, ont plutôt utilisé un pas d'échantillonnage et un facteur d'amortissement artificiel qui est fonction du temps [83, 84]. Cette approche est basée sur le fait que dans un système mécanique ou électrique quelconque, les hautes fréquences sont souvent amorties plus rapidement que les basses fréquences, ce qui permet de réduire graduellement la largeur de bande tout en respectant les critères d'échantillonnage. Le nombre de points s'en trouve ainsi réduit. Enfin, Durbin a proposé une approche basée sur les transformées en sinus et cosinus plutôt que sur la transformée de Fourier traditionnelle [85]. Bref, il n'y a pas de recette magique et un algorithme efficace dans un contexte donné peut ne pas l'être dans un autre. C'est pourquoi une étude de ces méthodes dans le contexte de la TNAH pourrait être envisageable.

Finalement, on a vu au chapitre 4 que l'échantillonnage spatial est très important pour l'obtention d'une reconstruction fidèle des hautes fréquences. Ainsi, une différence de 20 dB entre l'amplitude maximale du spectre de la pression rayonnée et l'amplitude à $f = c/(2\Delta x)$ ne s'est pas avérée suffisante pour bien propager les hautes fréquences. Il serait donc important d'établir plus clairement quelle différence d'amplitude est requise pour que les hautes fréquences soient reconstruites de façon satisfaisante. L'espacement entre les microphones (Δx) pourrait ainsi être dé-

terminé plus judicieusement. Pour un rayonnement à très large bande, on pourrait aussi envisager le filtrage des signaux acoustiques mesurés pour que leur contenu fréquentiel soit coupé plus abruptement que ce qui est observé à la figure III.5.

Toujours en ce qui a trait à l'échantillonnage spatial, il a été montré par Lévesque *et al.* dans un contexte de contrôle non-destructif que les critères peuvent être assouplis en considérant que chaque point de mesure de pression acoustique ne contribue que localement sur un cône angulaire restreint [86]. Malgré le fait que les conclusions à ce sujet dans ce mémoire montrent qu'un espacement maximal de $\lambda_{\min}/2$ entre les microphones semble essentiel, cet aspect pourrait néanmoins être investigué.

À plus forte raison, cela démontre l'étendue des champs d'application des fonctions de Green dans l'espace k et de la décomposition en ondes planes. Toutefois, on doit admettre que la majorité des travaux en holographie acoustique ne citent essentiellement que d'autres publications traitant également d'holographie acoustique. Or, les façons de voir les choses d'un champ de recherche à l'autre peuvent varier et l'exemple précédent en contrôle non-destructif témoigne de la nécessité d'aller voir ce qui se fait ailleurs pour améliorer la technique de NAH, comme cela a été dans le cadre de cette maîtrise avec l'application de la transformée de Laplace numérique.

CONCLUSION

Ce projet de maîtrise avait pour but d'appliquer l'holographie acoustique en champ proche (NAH) à l'étude du rayonnement transitoire d'une plaque soumise à un impact. Ainsi, différents phénomènes tels que le rayonnement dû à la réflexion des ondes de flexion sur des obstacles (bords de la plaque, tampons amortissants, etc.) ou encore la dispersion apparente pourraient être observés en fonction du temps dans l'espace avoisinant la source.

En premier lieu, la pression acoustique rayonnée par une plaque d'aluminium frappée en son centre a été simulée en des points régulièrement espacés dans un plan parallèle à la plaque. L'application de la NAH classique à l'hologramme ainsi simulé a permis de valider la principale hypothèse sous-tendant ce mémoire. En effet, il a été montré que l'utilisation d'une fonction de Green dans le domaine des fréquences entraîne du repliement temporel lors de la propagation directe si les signaux sont initialement tronqués par la fenêtre d'échantillonnage. Bien que l'ajout de zéros à la fin des signaux temporels initiaux réduise significativement le pourcentage d'erreur, celui-ci demeure tout de même important. Qui plus est, ce taux d'erreur croît avec la distance de propagation. Autrement dit, le nombre de zéros requis afin de maintenir un faible pourcentage d'erreur augmente considérablement avec la distance. Cela fait donc en sorte que cette façon de procéder est très exigeante en termes de temps de calcul et de ressources informatiques.

C'est pourquoi une nouvelle formulation des fonctions de Green a été proposée et la méthode découlant de l'application de celles-ci a été nommée NAH transitoire (*transient NAH* ou TNAH). Celle-ci est essentiellement basée sur l'utilisation de la transformée de Laplace numérique (NLT) au lieu de la transformée de Fourier discrète pour le passage du domaine temporel au domaine fréquentiel. Cette ap-

proche réduit de façon très importante le pourcentage d'erreur, qui demeure ainsi relativement constant ($\sim 1\%$) peu importe la distance de propagation. De plus, il a été montré que les fonctions de Green reliant la pression acoustique à la vitesse et au déplacement particulaire ne comportent pas de singularité lorsqu'elles sont formulées dans le domaine de Laplace. Elles sont donc adaptées à un rayonnement à large bande spectrale tel que le rayonnement transitoire.

Les effets de la réplication de la source originale due à la formulation des fonctions de Green dans l'espace des nombres d'ondes (espace k), et donc à l'utilisation de la transformée de Fourier spatiale discrète, ont également été étudiés. Pour ce faire, le rayonnement d'un piston circulaire bafflé soumis à un profil de vitesse gaussien a été simulé sur un maillage similaire à celui généré dans le cas de la plaque d'aluminium. Comme un tel rayonnement est très localisé dans le temps, les signaux initiaux ne sont pas tronqués. Néanmoins, il a été mis de l'avant que la combinaison du repliement temporel et de la réplication spatiale cause des erreurs supplémentaires lorsque la pression rayonnée par les répliques de la source originale est du même ordre de grandeur que celle rayonnée par la source elle-même. En effet, le rayonnement acoustique de ces répliques, malgré le fait que celles-ci soient éloignées de la source, apparaît dans les signaux propagés en raison du repliement temporel. Comme le rayonnement des pistons est très localisé temporellement, les signaux parasites ont pu être clairement associés à chacune des répliques. De plus, il a été mis en évidence que la TNAH peut régler ce problème si un nombre suffisant de zéros sont ajoutés à l'hologramme afin d'éloigner lesdites répliques.

Toujours en propagation directe, la fonction de Green reliant l'accélération transversale de la plaque à la pression acoustique rayonnée a aussi été utilisée. La distribution des erreurs dans les plans sur lesquels l'accélération a été projetée était sensiblement la même que dans le cas d'une propagation de pression à pression. Bien que faibles, ces taux d'erreurs sont plus importants pour les signaux ayant

une plus grande proportion de hautes fréquences, qui se situent sur les côtés de la plaque. En raison de la dispersion apparente, c'est-à-dire que les hautes fréquences arrivent en ces points d'observation avant les basses fréquences, c'est principalement le début des signaux temporels qui est affecté par ces erreurs. Il en a été conclu que l'échantillonnage spatial, bien qu'adéquat pour reconstruire de façon satisfaisante l'ensemble des signaux, est critique pour la propagation des hautes fréquences. Comme le choix de la résolution spatiale expérimentale s'avère être une question de compromis, ce sont donc les zones de pression sur les côtés de la plaque qui risquent de comporter le plus d'erreurs. Mentionnons toutefois que cette erreur demeure faible comparativement à celle due au repliement temporel.

Dans un deuxième temps, la rétropropagation a aussi été étudiée en utilisant les fonctions de Green formulées dans le domaine de Laplace. Ainsi, la pression acoustique simulée dans un plan a été propagée vers la source, que ce soit pour déterminer la pression dans un plan plus près d'elle, ou encore son accélération, sa vitesse et son déplacement transversaux. Il a été montré qu'en raison de l'amplification des ondes évanescentes et de l'instabilité de l'inversion de la NLT, une double régularisation est requise. Cela a été réalisé par l'application de filtres de Tikhonov.

Comme on n'a a priori aucune information sur les signaux à reconstruire, des techniques d'optimisation doivent être appliquées. Dans le cas des ondes évanescentes, on rappelle qu'un filtrage insuffisant mène à des signaux dont l'amplitude est exagérée puisque le bruit ambiant et les artefacts numériques sont amplifiés exponentiellement. D'un autre côté, un filtrage trop important supprime les éléments essentiels des signaux. La méthode de la courbe en L a été choisie afin de déterminer le paramètre optimal du filtre. Sommairement, cette approche consiste à trouver un compromis entre l'énergie enlevée aux signaux initiaux et celle enlevée aux signaux rétropropagés. Bien que le paramètre déterminé par la courbe en L et celui minimisant le pourcentage d'erreur suivent des tendances similaires en fonction de

la distance de rétropropagation, il a été montré que la méthode de la courbe en L sous-estime systématiquement le paramètre optimal lorsqu'un filtrage est requis. Néanmoins, on a vu que lorsque le paramètre de régularisation est bien choisi, les signaux rétropropagés correspondent de façon satisfaisante aux signaux simulés.

D'autre part, il a été montré que l'inversion de la NLT mène à des instabilités qui sont d'autant plus importantes quand la distance de rétropropagation est grande. La NLT a été formulée sous forme matricielle et son inversion a aussi été écrite sous la forme d'une régularisation de Tikhonov. La méthode de la courbe en L, qui a d'ailleurs déjà été adoptée dans ce contexte dans la littérature, a été choisie afin de déterminer le paramètre de régularisation optimal. Or, il a été montré que ce processus est l'équivalent de l'application d'une fenêtre temporelle dont la pente est relativement douce. Comme les erreurs liées à l'instabilité de l'inversion de la NLT sont localisées à la toute fin des signaux, la régularisation de Tikhonov filtre de manière trop importante les signaux rétropropagés.

Une seconde approche a été proposée bien qu'elle n'ait pas été investiguée en profondeur. Il s'agit de la décomposition en valeurs singulières tronquée (TSVD). Comme elle correspond essentiellement à une fenêtre rectangulaire, elle permet de filtrer les erreurs d'instabilité tout en conservant le reste des signaux intact. Bref, malgré le fait que la nécessité d'une double régularisation lors de la rétropropagation ait été mise en évidence, il n'en demeure pas moins que cet aspect de la TNAH reste à être exploré davantage.

Troisièmement, l'utilisation de la TNAH a aussi été validée expérimentalement et ce, autant à des fins de propagation directe que de rétropropagation. Pour ce faire, un montage de NAH composé essentiellement d'une antenne microphonique et d'un système de translation a été conçu. Le rayonnement transitoire d'une plaque

de plexiglas suspendue et percutée en son centre par un pendule métallique a ainsi pu être étudié.

Le signaux propagés à partir de l'hologramme expérimental situé à 2 cm de la plaque se sont avérés comparables à ceux mesurés sur des distances de propagation allant jusqu'à une vingtaine de centimètres. De plus, ces comparaisons ont été jugées satisfaisantes pour différents points dans chacun des plans sur lesquels la pression acoustique a été projetée. Autrement dit, les résultats expérimentaux, qui étaient jusqu'à présent limités dans la littérature à l'axe de frappe et à de faibles distances de propagation, ont été largement étendus. Cela a d'ailleurs permis d'étudier le rayonnement de la plaque dans un plan perpendiculaire à celle-ci et à des instants bien précis. Différents phénomènes, dont la dispersion apparente et le rayonnement des ondes de flexion réfléchies sur les bords de la plaque, ont ainsi pu être observés.

En rétropropagation, les signaux expérimentaux propagés vers la source ont été comparés à la pression acoustique à 1 cm de la plaque ainsi qu'à l'accélération de cette dernière. La rétropropagation des signaux expérimentaux a permis de tirer les mêmes conclusions que la rétropropagation des signaux simulés, à savoir que la méthode de la courbe en L sous-estime le paramètre de filtrage des ondes évanescentes optimal.

De façon générale, le montage expérimental qui a été réalisé dans le cadre de ce projet a donné des résultats satisfaisants malgré le fait qu'il comporte quelques sources inhérentes d'incertitude. Les erreurs en question concernent principalement le positionnement de l'antenne microphonique. À l'avenir, il pourrait être intéressant de développer un système d'axes robotisé permettant de contrôler les déplacements à l'aide d'un ordinateur. De la même façon, l'acquisition des données s'est avérée fastidieuse (le terme « fastidieux » étant ici un euphémisme). En effet, en raison de la taille de l'antenne et afin d'effectuer un moyennage, le fait de devoir laisser

tomber le pendule un grand nombre de fois réduit considérablement l'applicabilité de la méthode. Il pourrait s'avérer pratique de concevoir un dispositif permettant le déclenchement des impacts de façon automatique (par exemple, avec un ressort et un électro-aimant). Bref, cela ferait en sorte que les acquisitions pourraient se faire plus rapidement tout en ne requérant pas la présence de l'expérimentateur à l'intérieur de la chambre anéchoïque. Enfin, l'interface du programme *Labview* utilisé pour l'acquisition pourrait être améliorée, puisque les implications de la TNAH expérimentale sont désormais connues.

D'un point de vue théorique, les formulations développées dans le cadre de ce projet pourraient éventuellement être étendues. En premier lieu, l'optimisation de la double régularisation lors de la rétropropagation doit se faire plus adéquatement. Il faudrait donc que l'approche utilisée permette de trouver un paramètre de filtrage des ondes évanescentes très près de celui minimisant l'erreur, sachant qu'expérimentalement, les signaux exacts sont a priori inconnus de l'expérimentateur. La validation généralisée croisée (*generalized cross validation* ou GCV) [15, 50, 79], le principe d'anomalie de Morozov (*Morozov discrepancy principle*) [79] et la méthode de la courbe en U [87] sont parmi les techniques qui pourraient être explorées pour l'une ou l'autre des régularisations.

D'autre part, on a vu que même si les répliques spatiales sont très éloignées de la source originale, leur rayonnement intervient éventuellement dans les reconstructions tridimensionnelles. Or, dans un contexte de propagation ultrasonore, Lévesque et Piché ont utilisé la transformée de Laplace bilatérale pour la transformation spatiale au lieu de la transformée de Fourier traditionnelle [72]. Ainsi, si la NLT a permis d'obtenir de meilleurs résultats que l'ajout de zéros à la fin des signaux temporels, il est possible que la transformée de Laplace bilatérale puisse éviter l'ajout de zéros au plan de mesure. Il pourrait donc s'avérer intéressant de voir

dans quelle mesure cette approche permettrait d'éviter les conséquences négatives que l'on connaît de la réplication des sources.

Finalement, les techniques d'interpolation ou d'extrapolation présentées au premier chapitre sont tout aussi applicables à la TNAH. Des formulations équivalentes en coordonnées cylindriques ou sphériques pourraient aussi être développées. De la même manière, comme il a été démontré que l'application de la NLT à des signaux expérimentaux donne des résultats satisfaisants, les autres techniques d'holographie acoustique, soit la SONAH, la IBEM et les HELS, pourraient également être écrites dans le domaine de Laplace.

De plus, il a été mentionné dans la revue de la littérature que l'amortissement des plaques dû au rayonnement acoustique est important en régime transitoire [25–27]. Or, il a aussi été montré que l'échange d'énergie entre une structure et le milieu ambiant peut être étudié dans le domaine du temps [63]. C'est donc dire que sur le plan expérimental, l'interaction fluide-structure pourrait être étudiée temporellement et spatialement par TNAH.

Bref, l'approche développée dans ce mémoire n'est pas une fin en soi, mais plutôt un élément d'un tout. Ainsi, la TNAH planaire n'est peut-être pas la meilleure approche pour étudier une source complexe, mais elle a permis de vérifier la faisabilité d'études de rayonnement transitoire de sources autres qu'un piston. Cela laisse donc présager que le rayonnement de structures plus complexes pourrait être étudié par l'une ou l'autre des approches précédemment mentionnées si elles sont formulées dans le domaine de Laplace. Ainsi, le rayonnement transitoire de structures dont on veut réduire le niveau vibratoire et celui d'instruments de musique (par exemple, des percussions) pourraient être observés, ne serait-ce que d'un point de vue phénoménologique.

LISTE DES RÉFÉRENCES

- [1] Direction générale de la santé publique du Ministère de la santé et des services sociaux du Québec, "Programme national de santé publique 2003-2012," 2003.
- [2] A. Quaranta, P. Portalatini et D. Henderson, "Temporary and permanent threshold shift : An overview," *Scandinavian Audiology Supplementum*, vol. 27, pp. 75-86, 1998.
- [3] M.-A. Boillat, "L'anatomie de l'oreille," dans *Encyclopédie de sécurité et santé au travail*, 3^e édition, vol. 1, Genève : International Labour Organization, 2000, pp. 11.2-11.7.
- [4] H. Wada et T. Kobayashi, "Dynamical behavior of middle ear : Theoretical study corresponding to measurement results obtained by a newly developed measuring apparatus," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 87, no. 1, pp. 237-245, 1990.
- [5] D. Granger, "Amortissement d'une poutre par traitement viscoélastique contraint et analyse du régime transitoire suite à un impact," Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, 2007.
- [6] A. Oulmane, "Dynamique transitoire d'une plaque impactée, partiellement recouverte d'un traitement amortissant contraint," Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, 2007.
- [7] Y.-C. Choi et Y.-H. Kim, "Near field impulsive source localization in a noisy environment," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 303, pp. 209-220, 2007.
- [8] A. O. Wahlin, P. O. Gren et N. E. Molin, "On structure-borne sound : Experiments showing the initial transient acoustic wave field generated by an

- impacted plate,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 96, no. 5 pt 1, p. 2791, 1994.
- [9] S. Schedin, A. O. Wahlin et P. O. Gren, “Transient acoustic near field in air generated by impacted plates,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 99, no. 2, pp. 700–705, 1996.
- [10] S. Schedin, C. Lambourge et A. Chaigne, “Transient sound fields from impacted plates : Comparison between numerical simulations and experiments,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 221, no. 3, pp. 471–490, 1999.
- [11] E. G. Williams et J. D. Maynard, “Holographic imaging without the wavelength resolution limit,” *Physical Review Letters*, vol. 45, no. 7, pp. 554–557, 1980.
- [12] M. Forbes, S. V. Letcher et P. R. Stepanishen, “A wave vector, time-domain method of forward projecting time-dependent pressure fields,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 90, no. 5, pp. 2782–2793, 1991.
- [13] G. T. Clement, R. Liu, S. V. Letcher et P. R. Stepanishen, “Forward projection of transient signals obtained from a fiber-optic pressure sensor,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 104, no. 3 pt 1, pp. 1266–1273, 1998.
- [14] G. T. Clement, R. Liu, S. V. Letcher et P. R. Stepanishen, “Temporal backward planar projection of acoustic transients,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 103, no. 4, pp. 1723–1726, 1998.
- [15] O. de La Rochefoucauld, “Résolution du problème inverse spatio-temporel en imagerie acoustique de champ proche : Application au rayonnement de sources industrielles instationnaires,” Thèse de doctorat, Université du Maine, Le Mans, France, 2002.

- [16] O. de La Rochefoucauld, M. Melon et A. Garcia, "Time domain holography : Forward projection of simulated and measured sound pressure fields," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 116, no. 1, pp. 142–153, 2004.
- [17] O. A. Sapozhnikov, A. E. Ponomarev et M. A. Smagin, "Transient acoustic holography for reconstructing the particle velocity of the surface of an acoustic transducer," *Acoustical Physics*, vol. 52, no. 3, pp. 324–330, 2006.
- [18] M. Melon, O. de La Rochefoucauld et A. Garcia, "Regularization methods for the determination of the transient acceleration of an aluminium plate from NAH measurements," dans *Proceedings of the Tenth International Congress on Sound and Vibration*, Stockholm, Sweden, 2003, pp. 3407–3414.
- [19] W. Goldsmith, *Impact : The Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids*, London : Edward Arnold Ltd., 1960.
- [20] P. Troccaz, R. Woodcock et F. Laville, "Acoustic radiation due to the inelastic impact of a sphere on a rectangular plate," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 108, no. 5, pp. 2197–2202, 2000.
- [21] W. Heitkämper, "Näherungsweise Berechnung der Schallabstrahlung von stoßartig angeregten Platten," *Acustica*, vol. 58, no. 3, pp. 141–148, 1985.
- [22] P. Karasudhi, *Foundations of Solid Mechanics*, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [23] E. G. Williams, *Fourier Acoustics, Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography*, San Diego : Academic Press, 1999.
- [24] A. Ross et G. Ostiguy, "Propagation of the initial transient noise from an impacted plate," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 301, pp. 28–42, 2007.

- [25] P. Filippi, O. Lagarrigue et P.-O. Mattei, "Perturbation method for sound radiation by a vibrating plate in a light fluid : Comparison with the exact solution," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 177, no. 2, pp. 259–275, 1994.
- [26] A. Chaigne et C. Lambourg, "Time-domain simulation of damped impacted plates. I. Theory and experiments," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 109, no. 4, pp. 1422–1432, 2001.
- [27] C. Lambourg, A. Chaigne et D. Matignon, "Time-domain simulation of damped impacted plates. II. Numerical model and results," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 109, no. 4, pp. 1433–1447, 2001.
- [28] J. Hald, "Time domain acoustical holography," dans *Proceedings of the International Conference on Noise Control Engineering*, Newport Beach, CA, USA, vol. 2, 1995, pp. 1349–1354.
- [29] W. A. Veronesi et J. D. Maynard, "Nearfield acoustic holography (NAH) II. Holographic reconstruction algorithms and computer implementation," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 81, no. 5, pp. 1307–1322, 1987.
- [30] J. D. Maynard, E. G. Williams et Y. Lee, "Nearfield acoustic holography : I. Theory of generalized holography and the development of NAH," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 78, no. 4, pp. 1395–1413, 1985.
- [31] A. Ross, G. Ostiguy et M. Amram, "New signal processing developments for low cost near-field acoustical holography systems," *Noise Control Engineering Journal*, vol. 47, no. 1, pp. 28–44, 1999.
- [32] P. C. Hansen, "Regularization tools : A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems," *Numerical Algorithms*, vol. 6, no. 1, pp. 1–35, 1994.

- [33] M. A. Rowell et D. Oldham, "Determination of the directivity of a planar noise source by means of near-field acoustical holography, 1 : Theoretical background," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 180, no. 1, pp. 99–118, 1995.
- [34] J.-H. Thomas et J.-C. Pascal, "Wavelet preprocessing for lessening truncation effects in nearfield acoustical holography," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 118, no. 2, pp. 851–860, 2005.
- [35] H.-E. De Bree, "The Microflow : An acoustic particle velocity sensor," *Acoustics Australia*, vol. 31, no. 3, pp. 91–94, 2003.
- [36] M. C. Harris, J. D. Blotter et S. D. Sommerfeldt, "Obtaining the complex pressure field at the hologram surface for use in near-field acoustical holography when pressure and in-plane velocities are measured," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 119, no. 2, pp. 808–816, 2006.
- [37] K. Saijyou et S. Yoshikawa, "Reduction methods of the reconstruction error for large-scale implementation of near-field acoustical holography," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 110, no. 4, pp. 2007–2023, 2001.
- [38] E. G. Williams, B. H. Houston et P. C. Herdic, "Fast Fourier transform and singular value decomposition formulations for patch nearfield acoustical holography," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 114, no. 3, pp. 1322–1333, 2003.
- [39] E. G. Williams, H. D. Dardy et R. G. Fink, "Nearfield acoustical holography using an underwater, automated scanner," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 78, no. 2, pp. 789–798, 1985.
- [40] B. J. Sklanka, J. R. Tuss, R. D. Buehrle, J. Klos, E. G. Williams et N. Valdivia, "Acoustic source localization in aircraft interiors using microphone array technologies," dans *Collection of Technical Papers - 12th AIAA/CEAS*

- Aeroacoustics Conference*, Cambridge, MA, United States, vol. 6, 2006, pp. 4029–4035.
- [41] J. L. Chauray et B. Beguet, “Acoustic holography in non stationary conditions,” dans *Proceedings of the 23rd International Conference on Noise and Vibration Engineering, ISMA*, Leuven, Belgium.
 - [42] F. Deblauwe, “Transient holography what is possible for engines,” dans *Proceedings of the International Modal Analysis Conference - IMAC*, vol. 2, 2000, pp. 1052–1055.
 - [43] G. T. Clement et K. Hynynen, “Field characterization of therapeutic ultrasound phased arrays through forward and backward planar projection,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 108, no. 1, pp. 441–446, 2000.
 - [44] G. T. Clement et K. Hynynen, “Forward planar projection through layered media,” *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 50, no. 12, pp. 1689–1698, 2003.
 - [45] J. Hald, “Patch near-field acoustical holography using a new statistically optimal method,” *INCE Conference Proceedings*, vol. 206, no. 1, pp. 2203–2210, 2003.
 - [46] R. Steiner et J. Hald, “Near-field acoustical holography without the errors and limitations caused by the use of spatial DFT,” *International Journal of Acoustics and Vibration*, vol. 6, no. 2, pp. 83–89, 2001.
 - [47] Y. T. Cho, J. S. Bolton et J. Hald, “Source visualization by using statistically optimized near-field acoustical holography in cylindrical coordinates,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 118, no. 4, pp. 2355–2364, 2005.

- [48] W. A. Veronesi et J. D. Maynard, "Digital holographic reconstruction of sources with arbitrarily shaped surfaces," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 85, no. 2, pp. 588–598, 1989.
- [49] M. R. Bai, "Application of BEM (boundary element method)-based acoustic holography to radiation analysis of sound sources with arbitrarily shaped geometries," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 92, no. 1, pp. 533–549, 1992.
- [50] A. Schuhmacher, J. Hald, K. B. Rasmussen et P. C. Hansen, "Sound source reconstruction using inverse boundary element calculations," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 113, no. 1, pp. 114–127, 2003.
- [51] N. Rayess et S. F. Wu, "Experimental validations of the HELS method for reconstructing acoustic radiation from a complex vibrating structure," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 107, no. 6, pp. 2955–2964, 2000.
- [52] T. Semenova et S. F. Wu, "The Helmholtz equation least-squares method and Rayleigh hypothesis in near-field acoustical holography," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 115, no. 4, pp. 1632–1640, 2004.
- [53] S. F. Wu, "On reconstruction of acoustic pressure fields using the Helmholtz equation least squares method," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 107, no. 5, pp. 2511–2522, 2000.
- [54] S. F. Wu, N. E. Rayess et N. M. Shiau, "Visualizing sound radiation from a vehicle front end using the HELS method," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 248, no. 5, pp. 963–974, 2001.

- [55] S. F. Wu, N. Rayess et X. Zhao, "Visualization of acoustic radiation from a vibrating bowling ball," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 109, no. 6, pp. 2771–2779, 2001.
- [56] Z. Wang et S. F. Wu, "Helmholtz equation – least-squares method for reconstructing the acoustic pressure field," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 102, no. 4, pp. 2020–2032, 1997.
- [57] S. F. Wu, "Hybrid near-field acoustic holography," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 115, no. 1, pp. 207–217, 2004.
- [58] X. Zhao et S. F. Wu, "Reconstruction of vibroacoustic fields in half-space by using hybrid near-field acoustical holography," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 117, no. 2, pp. 555–565, 2005.
- [59] X. Zhao et S. Wu, "Reconstruction of vibro-acoustic fields using hybrid near-field acoustic holography," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 282, pp. 1183–1199, 2005.
- [60] Z. Wang, "Helmholtz Equation – Least-Squares (HELS) method for inverse acoustic radiation problems," Thèse de doctorat, Wayne State University, Detroit, Michigan, 1995.
- [61] S. F. Wu, H. Lu et M. S. Bajwa, "Reconstruction of transient acoustic radiation from a sphere," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 117, no. 4I, pp. 2065–2077, 2005.
- [62] H. Lu et S. Wu, "Reconstructing transient acoustic field resulting from an explosion," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 116, no. 4, p. 2626, 2004.
- [63] J. Adin Mann III, E. G. Williams, K. Washburn et K. Grosh, "Time-domain analysis of the energy exchange between structural vibrations and acoustic

- radiation using near-field acoustical holography measurements,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 90, no. 3, pp. 1656–1664, 1991.
- [64] R. E. Bellman, R. E. Kalaba et J. A. Lockett, *Numerical inversion of the Laplace transform : applications to biology, economics, engineering, and physics*, New York : Elsevier, 1966.
- [65] S. J. Day, N. Mullineux et J. R. Reed, “Development in obtaining transient response using Fourier transforms. II. Use of the modified Fourier transform,” *International Journal of Electrical Engineering Education*, vol. 4, no. 1, pp. 31–40, 1966.
- [66] D. J. Wilcox, “Numerical Laplace transformation and inversion,” *International Journal of Electrical Engineering Education*, vol. 15, no. 3, pp. 247–265, 1978.
- [67] L. M. Wedepohl, “Power systems transients : Errors incurred in the numerical inversion of the Laplace transform,” dans *Proceedings of Midwest Symposium on Circuits and Systems*, Puebla, Mexico, 1983, pp. 174–178.
- [68] A. Ramirez, P. Gomez, P. Moreno et A. Gutierrez, “Frequency domain analysis of electromagnetic transients through the numerical Laplace transforms,” dans *Proceedings of IEEE Power Engineering Society General Meeting*, Denver, CO, USA, vol. 1, 2004, pp. 1136–1139.
- [69] H. Inoue, K. Kishimoto, T. Shibuya et K. Harada, “Regularization of numerical inversion of the Laplace transform for the inverse analysis of impact force,” *JSME International Journal, Series A*, vol. 41, no. 4, pp. 473–480, 1998.
- [70] W. Krings et H. Waller, “Contribution to the numerical treatment of partial differential equations with the Laplace transformation - An application of the algorithm of the Fast Fourier Transformation,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, no. 8, pp. 1183–1196, 1979.

- [71] D. E. Beskos et A. Y. Michael, "Solution of plane transient elastodynamic problems by finite elements and Laplace transform," *Computers and Structures*, vol. 18, no. 4, pp. 695–701, 1984.
- [72] D. Lévesque et L. Piché, "A robust transfer matrix formulation for the ultrasonic response of multilayered absorbing media," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 92, no. 1, pp. 452–467, 1992.
- [73] T. Nishigaki, T. Ohyama et M. Endo, "Study of the transient sound radiated by impacted solid bodies based on the boundary element method," *JSME International Journal, Series C*, vol. 39, no. 2, pp. 218–224, 1996.
- [74] J. L. Schiff, *Laplace Transform : Theory & Applications*, Springer, 1999.
- [75] S. J. Day, N. Mullineux et J. R. Reed, "Developments in obtaining transient response using Fourier transforms. I. Gibbs phenomena and Fourier integrals," *International Journal of Electrical Engineering Education*, vol. 3, no. 1, pp. 501–506, 1965.
- [76] H. Inoue, M. Kamibayashi, K. Kishimoto, T. Shibuya et T. Koizumi, "Numerical Laplace transformation and inversion using fast Fourier transform," *JSME International Journal, Series 1 : Solid Mechanics, Strength of Materials*, vol. 35, no. 3, pp. 319–324, 1992.
- [77] P. R. Stepanishen, "Transient radiation from pistons in an infinite planar baffle," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 49, no. 5B, pp. 1629–1638, 1971.
- [78] X. Li, P. Gren, A. Wahlin et S. Schedin, "Pulsed TV holography and tomography for the study of transient waves in air," *Optics and Laser Technology*, vol. 31, no. 1, pp. 23–32, 1999.

- [79] E. G. Williams, "Regularization methods for near-field acoustical holography," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 110, no. 4, pp. 1976–1988, 2001.
- [80] P. C. Hansen, "Truncated SVD as a method for regularization," *BIT*, vol. 27, no. 4, pp. 534–553, 1987.
- [81] X. Zhang et S. Wang, "Image restoration using truncated SVD filter bank based on an energy criterion," *IEE Proceedings : Vision, Image and Signal Processing*, vol. 153, no. 6, pp. 825–836, 2006.
- [82] P. Moreno et A. Ramirez, "Implementation of the numerical Laplace transform : A review," vol. 23, no. 4, pp. 2599–2609, 2008.
- [83] D. J. Wilcox et I. S. Gibson, "Numerical Laplace transformation and inversion in the analysis of physical systems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 20, no. 8, pp. 1507–1519, 1984.
- [84] D. J. Wilcox et I. S. Gibson, "Evaluation of a new method for numerical Laplace transformation and inversion," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 20, no. 8, pp. 1521–1528, 1984.
- [85] G. V. Narayanan et D. E. Beskos, "Numerical operational methods for time-dependant linear problems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 18, no. 12, pp. 1829–1854, 1982.
- [86] D. Lévesque, A. Blouin, C. Néron et J.-P. Monchalin, "Performance of laser-ultrasonic F-SAFT imaging," *Ultrasonics*, vol. 40, no. 10, pp. 1057–1063, 2002.
- [87] D. Krawczyk-Stando et M. Rudnicki, "Regularization parameter selection in discrete ill-posed problems – The use of the U-Curve," *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, vol. 17, no. 2, pp. 157–164, 2007.

- [88] G. B. Arfken et H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 6^e édition, Elsevier Academic Press, 2005.
- [89] M. Carrega, *Matériaux polymères*, 2^e édition, Dunod, 2007.
- [90] Y. Narita, “Combinations for the free-vibration behaviors of anisotropic rectangular plates under general edge conditions,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 67, no. 3, pp. 568–573, 2000.

ANNEXE I

ACCÉLÉRATION TRANSVERSALE D'UNE PLAQUE AMORTIE

Cette annexe présente les détails du calcul de l'accélération transversale d'une plaque amortie. Pour ce faire, rappelons tout d'abord l'équation du déplacement de la plaque dont il a été question aux chapitres 1 et 3, et qui s'écrit

$$w(X, Y, t) = \frac{1}{M} \sum_m \sum_n \Phi_{mn}(X_0, Y_0) \Phi_{mn}(X, Y) \left[F(t) * e^{-\zeta \omega_{mn} t} \frac{\sin(\tilde{\omega}_{mn} t)}{\tilde{\omega}_{mn}} \right]. \quad (\text{I.1})$$

Bien que l'accélération puisse être obtenue par différentiation numérique de l'équation (I.1), il s'avère pratique d'avoir une forme analytique qui est fonction du terme $F(t)$. On évite ainsi quelques erreurs numériques. L'accélération est alors donnée par la dérivée seconde par rapport à t de l'équation précédente, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \ddot{w}(X, Y, t) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{M} \sum_m \sum_n \Phi_{mn}(X_0, Y_0) \Phi_{mn}(X, Y) \left[F(t) * e^{-\zeta \omega_{mn} t} \frac{\sin(\tilde{\omega}_{mn} t)}{\tilde{\omega}_{mn}} \right] \right) \\ &= \frac{1}{M} \sum_m \sum_n \Phi_{mn}(X_0, Y_0) \Phi_{mn}(X, Y) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(F(t) * e^{-\zeta \omega_{mn} t} \frac{\sin(\tilde{\omega}_{mn} t)}{\tilde{\omega}_{mn}} \right). \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

Pour alléger la suite des calculs, seul le terme dépendant du temps

$$\frac{d^2}{dt^2} [F(t) * g(t)] \quad (\text{I.3})$$

où

$$g(t) = e^{-\zeta \omega_{mn} t} \frac{\sin(\tilde{\omega}_{mn} t)}{\tilde{\omega}_{mn}}$$

est considéré. Comme l'expression précédente n'est fonction que d'une seule variable, on emploiera par la suite la dérivée totale d/dt au lieu de la dérivée partielle $\partial/\partial t$.

En premier lieu, rappelons que l'intégrale de convolution de l'équation (I.3) s'écrit

$$F(t) * g(t) = \int_0^t F(t')g(t-t')dt'. \quad (\text{I.4})$$

Bien que cette intégrale soit faite sur t' et non t , on ne peut la dériver directement puisque la variable t est aussi présente dans ses bornes. Comme on le verra plus tard, faire abstraction de ce principe ferait en sorte qu'un terme serait omis dans l'expression de l'accélération. La règle de Leibniz permet la dérivation d'une intégrale par rapport à une variable présente à la fois dans les bornes et dans l'intégrande [88]. Selon cette règle, la dérivée première par rapport au paramètre t d'une intégrale sous la forme

$$q(t) = \int_{\phi(t)}^{\xi(t)} Q(t', t) dt' \quad (\text{I.5})$$

s'écrit [88]

$$\dot{q}(t) = \int_{\phi(t)}^{\xi(t)} \dot{Q}(t', t) dt' + \dot{\xi}(t)Q(\xi(t), t) - \dot{\phi}(t)Q(\phi(t), t). \quad (\text{I.6})$$

D'ailleurs, l'équation (I.4) est de cette forme en considérant $\phi(t) = 0$, $\xi(t) = t$ et $Q(t', t) = F(t')g(t-t')$. Comme $g(0) = 0$ et $\phi(t) = 0$, les second et troisième termes de l'équation (I.6) sont nuls. On obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[F(t) * g(t)] &= \int_0^t \frac{d}{dt}[F(t')g(t-t')]dt' \\ &= \int_0^t F(t')\dot{g}(t-t')dt' \\ &= F(t) * \dot{g}(t). \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

De la même façon, on peut dériver à nouveau l'équation (I.7) en utilisant la relation (I.6). Cette fois-ci, comme $\dot{g}(0) = 1$, on a

$$\frac{d^2}{dt^2}[F(t) * g(t)] = \int_0^t \frac{d}{dt}[F(t')\dot{g}(t-t')]dt' + F(t). \quad (\text{I.8})$$

Cette dernière équation s'écrit aussi sous la forme d'un produit de convolution, c'est-à-dire

$$\frac{d^2}{dt^2}[F(t) * g(t)] = F(t) * [\ddot{g}(t) + \delta(t)]. \quad (\text{I.9})$$

Finalement, comme

$$\ddot{g}(t) = \left[(\zeta^2 \omega_{mn}^2 / \tilde{\omega}_{mn} - \tilde{\omega}_{mn}) \sin(\tilde{\omega}_{mn} t) - 2\zeta \omega_{mn} \cos(\tilde{\omega}_{mn} t) \right] e^{-\zeta \omega_{mn} t}, \quad (\text{I.10})$$

l'accélération transversale de la plaque amortie s'écrit

$$\begin{aligned} \ddot{w}(X, Y, t) = & \frac{1}{M} \sum_m \sum_n \Phi_{mn}(X_0, Y_0) \Phi_{mn}(X, Y) \\ & \times \left\{ F(t) * \left(\left[(\zeta^2 \omega_{mn}^2 / \tilde{\omega}_{mn} - \tilde{\omega}_{mn}) \sin(\tilde{\omega}_{mn} t) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - 2\zeta \omega_{mn} \cos(\tilde{\omega}_{mn} t) \right] e^{-\zeta \omega_{mn} t} + \delta(t) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

Ainsi, on a bel et bien un terme supplémentaire qui intervient lors du calcul de l'accélération. Cette façon de procéder permet donc de calculer l'accélération transversale sans avoir à évaluer numériquement la dérivée seconde du déplacement transversal ni même aucune des dérivées de la force $F(t)$.


```
%% Suppression des variables et fermeture des figures ouvertes
```

```
clear
clc
close all
```

```
%% Paramètres de l'impacteur (acier)
```

```
E1 = 20E10;      % module d'Young de l'impacteur
nu1 = 0.28;      % coefficient de Poisson de l'imp.
rho1 = 7800;     % densité de l'impacteur
m1 = 0.0268;     % masse de l'impacteur
R1 = 0.0032;     % rayon de l'impacteur
v0 = 0.23;      % vitesse de l'impacteur au contact
```

```
%% Paramètres de la plaque (aluminium)
```

```
E2 = 7.1E10;     % module d'Young de la plaque
nu2 = 0.33;      % coefficient de Poisson de plaque
rho2 = 2700;     % densité de la plaque
h2 = 0.0048;     % épaisseur de la plaque
m = 0.609;      % largeur de la plaque
n = 0.914;      % hauteur de la plaque
c2 = 5160;      % vitesse des ondes de flexion dans la plaque
```

```
%% Paramètres reliés à l'impact (ref. Goldsmith)
```

```
E1p = E1 / (1-nu1^2);
E2p = E2 / (1-nu2^2);
del1 = 1/(pi*E1p);
del2 = 1/(pi*E2p);
k1 = 1/m1;
k2 = 4*sqrt(R1)/3/pi/(del1+del2);
alpha = (1.25*v0^2/k1/k2)^0.4;
Fmax = k2*alpha^1.5;      % force de frappe
tau = 2.9432/v0^0.2*(1.25/k1/k2)^0.4; % durée du contact
```

```
%% Discrétisation de la plaque et position de frappe
```

```
x0 = m/2; % frappe au centre de la plaque
y0 = n/2;
dx_plaque = 2E-3;
```

```
% La symétrie de la plaque est considérée
% Il suffit de remplacer x0 et y0 comme point de départ des vecteurs
% suivant par 0 et 0.
```

```
x_plaque = x0 : dx_plaque : 2*x0;
y_plaque = y0 : dx_plaque : 2*y0;
```

```

%% Discrétisation temporelle

dt = 5e-6;           % Delta T
t_max = 0.005;       % Temps total de la fenêtre d'observation
t = 0 : dt : t_max;  % Vecteur temps

%% Modes de la plaque utilisés pour les calculs

modes_m = 1:2:40;    % Seulement modes impairs : impact centré
modes_n = 1:2:40;    % m --> largeur et n --> hauteur
[i,k]=ndgrid(modes_m,modes_n);

%% Paramètres de temps de la convolution

pas_conv = 25;       % Rapport entre dt et dt_conv
                    % (plus de précision pour la convolution)
dt_conv = dt/pas_conv;
t_conv = 0 : dt_conv : t_max;

%% Calcul de la force d'impact

% Paramètre Lambda (ref. Heitkämper)
Lambda = 1.15 * (R1/h2)^2 * (v0/c2)^0.2 * (rho1/rho2)^0.6...
        * (E1p/(E1p+E2p))^0.4;

T_force = pi * t_conv / tau; % Temps adimensionnel

% Approximation de Heitkämper de la force d'impact
F = real(Fmax * ((1.1/(1+Lambda+2*Lambda^2)).*(sin(0.97*T_force)).^1.5...
    .* exp(-(0.4*T_force).^4).*heaviside(pi-0.97*T_force)...
    + ((1+2/Lambda)/(1+Lambda))...
    * (T_force./(T_force+1/Lambda)).^1.5 .* exp(-T_force/Lambda)));

%% Calculs préliminaires concernant les modes de la plaque

% Hik_0
Hik0=sin(i*pi*x0/m).*sin(k*pi*y0/n);

% Fréquences naturelles de la plaque
omega = (i*pi/m).^2+(k*pi/n).^2;
omega = h2/2*sqrt(E2/3/rho2/(1-nu2^2))*omega;

%% Calcul du produit de convolution pour tous les modes

% Choix de calcul : - 'd' --> Déplacement
%                  - 'v' --> Vitesse
%                  - 'a' --> Accélération

```

```

dynamique = 'a';

if strcmp(dynamique,'d')
    ind_d = 1;
    ind_v = 0;
    ind_a = 0;
    correctif = 0;
elseif strcmp(dynamique,'v')
    ind_d = 0;
    ind_v = 1;
    ind_a = 0;
    correctif = 0;
elseif strcmp(dynamique,'a')
    ind_d = 0;
    ind_v = 0;
    ind_a = 1;
    correctif = F;
end

% Cette boucle permet de calculer l'accélération de trois façons
% différentes, dépendamment de quels termes de l'expression du mouvement
% sont dérivés.

% Initialisation de la convolution
convol = zeros(length(modes_m),length(modes_n),length(t));

for ind_m = 1:length(modes_m)

    ind_m % Affichage de l'indice m pour suivi

    for ind_n = 1:length(modes_n)

        G = sin(omega(ind_m,ind_n)*t_conv)...           % Déplacement
            /omega(ind_m,ind_n)*ind_d +...
            cos(omega(ind_m,ind_n)*t_conv)*ind_v + ...   % Vitesse
            (-1)*omega(ind_m,ind_n)*...                 % Accélération
            sin(omega(ind_m,ind_n)*t_conv)*ind_a;

        convol_temp = conv(F,G)*dt_conv;    % Calcul de la convolution

        % Ajout des termes correctifs au besoin
        convol_temp = convol_temp(1:length(T_force)) + correctif;

        % Réduction de la taille de la convolution selon celle de t
        convol(ind_m,ind_n,:) = convol_temp(1:pas_conv:end);

    end
end
end

```

```

%% Calcul de l'accélération sur la plaque

% Initialisation du vecteur de données dynamiques de la plaque
vib = zeros(length(t),length(x_plaque),length(y_plaque));

for y = y_plaque % Position en y du calcul

    ind_y = round((y-y0)/dx_plaque) + 1 % Compteur pour suivi

    for x = x_plaque % Position en x du calcul

        ind_x = round((x-x0)/dx_plaque) + 1;
        Hik = sin(i*pi*x/m).*sin(k*pi*y/n);
        H2 = Hik.*Hik0*(4/m/n);
        H2_3D = repmat(H2,[1,1,length(t)]);
        vib(:,ind_x,ind_y) = 1/rho2/h2*sum(sum(H2_3D.*convol));

    end
end

%% Enregistrement des paramètres pour le calcul de la pression acoustique

nom_fichier = 'accel_40x40_modes';
save(nom_fichier,'vib', 'x_plaque','y_plaque','x0','y0','dt',...
't','dx_plaque','dynamique')

```

II.1.2 Routine générale de calcul du rayonnement acoustique transitoire d'une plaque

Le programme `calcul_pression_XYZ.m` appelle la fonction `impact_pression_ponctuel.m` pour calculer la pression acoustique rayonnée par la plaque à partir de son accélération transversale. Bien qu'il soit présenté ici pour un seul point (x, y, z) , il est possible d'y ajouter des boucles pour générer un maillage utilisable pour la NAH.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CHOIX DU POINT DE CALCUL (X,Y,Z) DE LA PRESSION ACOUSTIQUE %
% Fichier : calcul_pression_XYZ_transitoire.m %
% Auteur : Jean-François Blais %
% Date : Août 2007 %
% Description : Ce programme appelle la fonction %
% impact_pression_ponctuel.m qui calcule la %
% pression rayonnée par une plaque en un point %
% (x,y,z) à partir de son accélération . Bien que %
% ce programme soit la version "1 point", cette %
% disposition permet de faire une boucle sur %
% l'appel de la fonction pour générer un maillage %
% en vue de l'utilisation de la NAH. Si la %
% variable "vib" ne correspond pas à %
% l'accélération, un message d'erreur apparaît. %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% Suppression des variables et fermeture des figures ouvertes

clear
clc
close all

%% Chargement du fichier des paramètres de l'accélération de la plaque

% Ce fichier doit contenir les variables :
% - vib --> Dynamique de la plaque (les options déplacement
% et vitesse sont rejetées)
% - x_plaque --> Coordonnées en X de la plaque
% - y_plaque --> Coordonnées en Y de la plaque
% - x0 --> Coordonnée en X du point d'impact
% - y0 --> Coordonnée en Y du point d'impact
% - dt --> Pas de temps
% - t --> Vecteur temps
% - dx_plaque --> Pas de discrétisation de la plaque
% - dynamique --> Nature du mouvement (déplacement, vitesse
% ou accélération)

nom_fichier_load = 'accel_40x40_modes';
load(nom_fichier_load);

if (strcmp(dynamique,'d') || strcmp(dynamique,'v'))
    disp('Interruption du programme :')
    disp('L''accélération de la plaque est requise ...
    pour le calcul de son rayonnement acoustique.')
    return
end

%% Calcul de la pression acoustique en un point x, y et z donné

```

```

x_pression = 0.0;
y_pression = 0.0;
z_pression = 0.5;

P = impact_pression_ponctuel(vib,x_pression,y_pression,z_pression,...
x0,y0,x_plaque,y_plaque,dx_plaque,t,dt);

%% Enregistrement des données concernant la pression acoustique
nom_fichier_save = 'pression_xyz'
save(nom_fichier_save, 'P','t','dt','x_pression',...
'y_pression','z_pression','dx_pression')

```

II.1.3 Fonction calculant le rayonnement acoustique transitoire d'une plaque

La fonction `impact_pression_ponctuel.m` calcule la pression acoustique en un point quelconque de coordonnées (x, y, z) choisi par l'utilisateur. Comme dans le cadre de ce mémoire on a considéré un impact central sur la plaque, l'accélération de la plaque comporte par défaut deux axes de symétrie.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% FONCTION DE CALCUL DE LA PRESSION ACOUSTIQUE EN UN POINT DONNÉ %
% Fichier :      impact_pression_ponctuel.m                        %
% Auteur  :      Jean-François Blais                             %
% Date   :      Août 2007                                         %
% Description : Cette fonction calcule la pression acoustique %
%               rayonnée par une plaque à partir de son          %
%               accélération en un point (x,y,z) qu'on lui a     %
%               passé comme paramètre.                             %
%               IMPORTANT : La symétrie de l'accélération est    %
%               considérée.                                       %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function P = impact_pression_ponctuel(accel,x_pression,y_pression,...
z_pression,x0,y0,x_plaque,y_plaque,dx_plaque,t,dt)

%% Initialisation des paramètres du milieu ambiant

rho = 1.29;           % masse volumique de l'air ambiant
c = 343;              % vitesse de propagation du son dans l'air

% Nouveaux vecteurs de discrétisation de la plaque de façon à déplier la

```

```

% symétrie. Ces vecteurs sont maintenant dans le référentiel (x,y,z) dont
% l'origine est au centre de la plaque.

x = [-(fliplr(x_plaque(2:end)) - x0) (x_plaque - x0)];
y = [-(fliplr(y_plaque(2:end)) - y0) (y_plaque - y0)];

% Initialisation du temps "minimal" de calcul. Ainsi, avant ce temps, le
% rayonnement n'a pas encore atteint le point d'observation et donc aucun
% calcul n'est nécessaire.

T_min = z_pression / c;          % Temps minimal
ind_T = length(t(t<T_min));      % Indice de ce temps minimal.

P = zeros(size(t));              % Initialisation du vecteur de pression

for T = t(t>T_min)

    % Indice de la boucle
    ind_T = ind_T + 1;

    % L'évaluation de l'intégrale de Rayleigh se fait sur un certain nombre
    % d'éléments du maillage à partir desquels le temps de propagation est
    % inférieur à T.

    R_max = ((T*c)^2 - z_pression^2)^(1/2);
    x_temp = x(x >= (x_pression - R_max));
    x_temp = x_temp(x_temp <= (x_pression + R_max));
    y_temp = y(y >= (y_pression - R_max));
    y_temp = y_temp(y_temp <= (y_pression + R_max));

    % Matrices des (x,y) correspondant au critère précédent
    [X,Y] = ndgrid(x_temp,y_temp);

    % Distance entre chacun des éléments du maillage et le point
    % d'observation
    d = ((X-x_pression).^2 + (Y-y_pression).^2 + z_pression^2).^(1/2);

    % Indices x et y des éléments du maillage, tenant compte que
    % l'accélération n'est calculée que sur 1/4 de la plaque.
    ind_x = round(abs(X)/dx_plaque)+1;
    ind_y = round(abs(Y)/dx_plaque)+1;

    % Indice du t de l'accélération correspondant à t-d/c
    % La fonction "echelon.m" est la même que "heaviside.m" sauf qu'elle
    % vaut 0 lorsque l'argument est nul (au lieu de NaN).
    ind_t = (round((T-d/c)/dt).*echelon(T-d/c)) + 1;

    % Association à chacun des éléments du maillage du point temporel de
    % l'accélération pour le calcul de la pression au temps T de la boucle.
    accel_pression =...

```

```

        accel(ind_t+(ind_x-1)*length(t)+(ind_y-1)...
            *(length(t)*length(x_plaque)));

    % Évaluation de l'intégrale de Rayleigh SANS constantes
    P(ind_T)= trapz(trapz(accel_pression./d));

end

% Évaluation de l'intégrale de Rayleigh AVEC constantes
P = P * rho/(2*pi)*dx_plaque^2;

```

II.1.4 Calcul du rayonnement d'un piston circulaire bafflé

La routine `rayonnement_piston.m` permet de calculer le rayonnement acoustique d'un piston circulaire bafflé soumis à un profil de vitesse dépendant du temps. Malgré le fait qu'il soit implanté ici pour l'évaluation de la pression en un seul point, il est possible d'y ajouter des boucles de façon à créer un maillage pouvant être utilisé en NAH.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CALCUL DU RAYONNEMENT ACOUSTIQUE D'UN PISTON %
% Fichier :      rayonnement_piston.m %
% Auteur  :      Jean-François Blais %
% Date    :      Décembre 2007 %
% Description : Ce programme calcule le rayonnement d'un piston %
%               circulaire bafflé soumis à un profil de vitesse %
%               dépendant du temps. Il peut aussi être implémenté %
%               en boucle pour générer un plan utilisable en NAH. %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% Suppression des variables et fermeture des figures ouvertes

clear
clc
close all

%% Paramètres temporels

dt = 2e-5;          % Pas de temps
t_max = 2.5e-3;      % Temps maximal
t = 0 : dt : t_max;  % Vecteur temps

```

```

%% Paramètres de temps de la convolution

pas_conv = 50;      % Rapport entre dt et dt_conv
                    % (plus de précision pour la convolution)
dt_conv = dt/pas_conv;
t_conv = 0 : dt_conv : t_max;

%% Propriétés du milieu ambiant

c = 343;           % Vitesse du son dans le milieu ambiant
rho = 1.29;        % Densité du milieu ambiant

%% Propriétés du piston à profil de vitesse gaussien

% Rayon du piston
rp = 0.04;

% Profil de vitesse et d'accélération

FWHM = 120e-6;      % Largeur à mi-hauteur de la vitesse
sigma = FWHM/(2*sqrt(2*log(2)));
mu = 350e-6;        % Temps central de la gaussienne
v = exp(-(t_conv-mu).^2/(2*sigma^2)); % Profil de la vitesse
acc = -(t_conv-mu).*v/sigma^2; % Profil de l'accélération

%% Point de calcul de la pression

z = 0.55;
x = 0;
y = 0;

%% Réponse impulsionnelle

% Paramètres permettant le calcul de la réponse impulsionnelle
r = sqrt(x^2 + y^2);
R1 = sqrt(z^2+(r-rp)^2);
R2 = sqrt(z^2+(r+rp)^2);

% Initialisations de la réponse impulsionnelle
hp = zeros(size(acc));

% Calcul de la réponse impulsionnelle

hp(c*t_conv > R1) = (c/pi) *...
    acos((((c*t_conv(c*t_conv > R1)).^2 - z^2 + r^2 - rp^2)...
        ./ (2*r*((c*t_conv(c*t_conv > R1)).^2 - z^2).^(1/2))));
hp(c*t_conv > R2) = 0;

if(r <= rp)
    hp(c*t_conv < R1) = c;

```

```

        hp(c*t_conv < z) = 0;
    end

%% Calcul de la pression P

% Calcul de la convolution au moyen d'une FFT
P = rho*convfft(acc,hp)*dt_conv;

% Réduction de la taille de la convolution selon celle de t
P = P(1:pas_conv:(length(t))*pas_conv);

%% Enregistrement des données

nom_fichier_save = 'pression_piston'
save(nom_fichier_save, 'P','t','dt','x','y','z');

```

II.2 Algorithmes de TNAH

II.2.1 Programme général de TNAH

Le programme TNAH.m permet de propager la pression simulée ou mesurée dans un plan z_0 à un plan quelconque. Les différentes fonctions de Green présentées dans ce mémoire sont accessibles. À partir de la pression acoustique en (k_x, k_y, ω) , deux options sont disponibles pour l'utilisateur. La première permet d'obtenir directement la pression dans le plan z souhaité en (x, y, z, t) . La seconde tente d'optimiser le paramètre du filtre de Tikhonov dans le cas d'une rétropropagation.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% PROPAGATION EN Z PAR TNAH
% Fichier :      TNAH.m
% Auteur  :      Jean-François Blais
% Date    :      Février 2008
% Description :  Ce programme permet la (rétro)propagation d'un
%                plan de pression simulé ou mesuré par NAH
%                classique ou TNAH.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% Suppression des variables et fermeture des figures ouvertes

```

```

clear
clc
close all

%% Chargement du fichier de pression acoustique

% Celui-ci doit contenir les informations suivantes :
% - P          (matrice de pression)
% - t          (vecteur temps)
% - dt         (pas de temps)
% - x_pression (vecteur X)
% - y_pression (vecteur Y)
% - dx_pression (pas spatial)

nom_fichier_load = 'pression_transitoire_z10_final';
load(nom_fichier_load);

% Changement de nom de la variable "dx_pression" puisqu'elle est la même en
% x et en y
dxy_pression = dx_pression;
clear dx_pression

%% Propriétés du milieu ambiant

c = 343;          % Vitesse du son dans le milieu ambiant
rho = 1.29;       % Densité du milieu ambiant

%% Sélection des points utilisés pour le calcul

Nt = 512;          % Nombre de points temporels utilisés
t = t(1:Nt);       % Redéfinition du vecteur temps

Nx = size(P,2);    % Nombre de points spatiaux utilisés
Ny = size(P,3);
pas_xy = 1;        % Espacement des points spatiaux
x_pression = x_pression(1:Nx); % Redéfinition du vecteur X
y_pression = y_pression(1:Ny); % Redéfinition du vecteur Y

P = P(1:Nt,1:Nx,1:Ny); % Redéfinition de la matrice de pressions

%% Définition de la fenêtre exponentielle de la transformée de Laplace

Methode = 'Laplace'; % Choix entre 'Laplace' et 'Fourier'

if strcmp(Methode,'Laplace') % Amortissement artificiel
    sigma = -2*log(Nt)/t(end);

    t_filter = exp(t*sigma); % Fenêtre exponentielle
    T_filter = repmat(t_filter',[1,Nx,Ny]); % Fenêtre 3D

```

```

P = P.*T_filter; % Application de la fenetre

elseif strcmp(Methode,'Fourier')
    sigma = 0;

    t_max = max(t); % Temps maximal du vecteur temps
    Ntw = 10; % Nombre de points de la pente
    tw = Ntw*dt; % Durée de la pente

    % Définition du filtre par partie
    t_filter(t <= (t_max - tw)) = 1;
    t_filter(t > (t_max - tw)) = 1/2 -...
        (1/2)*cos(pi*(t(t > (t_max - tw))-t_max)/tw);

    T_filter = repmat(t_filter',[1,Nx,Ny]); % Fenetre 3D
    P = P.*T_filter; % Application de la fenetre
    T_filter = ones(size(P));
end

%% Extension du maillage par symétries dans le plan (s'il y a lieu)
% Si Symetrie = 1, on considère que la source est symétrique et que la
% pression est connue dans le quadrant x > 0 et y > 0

Symetrie = 1;

if (Symetrie == 1)

    P = cat(2, flipdim(P(:,2:end,:),2),P); % Extension en X
    P = cat(3, flipdim(P(:,2:end),3),P); % Extension en Y

    x_pression = [-fliplr(x_pression(2:end)) x_pression]; % Symétrie en X
    y_pression = [-fliplr(y_pression(2:end)) y_pression]; % Symétrie en Y

    % Nouvelle taille de la matrice de pression augmentée
    [Nt, Nx, Ny] = size(P);
    vec_x = (Nx+1)/2:Nx;
    vec_y = (Ny+1)/2:Ny;
else
    vec_x = 1:Nx;
    vec_y = 1:Ny;
end

%% Fenêtrage spatial

Np = 10; % Nombre de pts de la pente de la fenetre

x_filter = tukeywin(Nx,2*(Np)/Nx); % Fenetre de Tukey en X
X_filter(1,:,:) = repmat(x_filter,[1,Ny]); % Extension en Y
y_filter = tukeywin(Ny,2*(Np)/Ny)'; % Fenetre de Tukey en Y
Y_filter(1,:,:) = repmat(y_filter,[Nx,1]); % Extension en X

```

```

XY_filter(1, :, :) = (X_filter.*Y_filter).^(1/2);    % Fenêtre 2D
XY_filter = repmat(XY_filter,[Nt,1,1]);             % Extension en 3D

P = P.*XY_filter;                                   % Application de la fenêtre
clear X_filter Y_filter XY_filter                   % Suppression des fenêtres

%% Définition des paramètres de FFT temporel --> fréquentiel

% Nombre de points fréquentsiels (incluant le zero-padding)
Nf = Nt;

% Fréquence d'échantillonnage temporel
Fs = 1/dt;

% Vecteur fréquence de la FFT temporelle (pour Nf pair)
f = (Fs*(-Nf/2:Nf/2-1)/Nf)' ;

omega = 2*pi*f;                                     % Vecteur omega associé au vecteur f

%% Définition des paramètres de FFT spatiale --> k-space

% En raison des symétries utilisées pour réduire la demande en ressources
% matérielles, le nombre de points Nkx et Nky doit être IMPAIR, de telle
% sorte qu'il y ait autant de points de part et d'autre du 0.

Nkx = 147;    % Nombre de kx
Nky = 147;    % Nombre de ky

% Fréquences d'échantillonnage spatial
Ks_xy = (2*pi)/dxy_pression;

% Vecteur kx et ky de la FFT spatiale

kx = (Ks_xy*(-(Nkx-1)/2 : (Nkx-1)/2) / Nkx)' ;
ky = (Ks_xy*(-(Nky-1)/2 : (Nky-1)/2) / Nky)' ;

%% Application des FFT

% IMPORTANT : On applique ici une IFFT en t au lieu d'une FFT standard
%             puisqu'il faut que les signes dans
%             exp(i(k_x x + k_y y + k_z z -wt)) soient opposés.

Pfxy = ifft(P,Nf,1)*dt*Nt;                          % FFT en t
clear P
Pfkxy = fft(Pfxy,Nkx,2)*dxy_pression;                % FFT en x
clear Pfxy
Pfkxky = fft(Pfkxy,Nky,3)*dxy_pression;              % FFT en y
clear Pfkxy
Pfkxky = fftshift(Pfkxky);

```

```

% Utilisation de seulement la moitié des 8 octants de la matrice
% (comme il y a plus de points dans la partie négative, c'est
% cette partie qu'on utilise, qu'on bascule
% et on prend le conjugué complexe)

Pfkxky = conj(flipdim(flipdim(flipdim(Pfkxky(1:Nf/2+1,:,:),1),2),3));

% Matrices 3D correspondant à k, kx et ky
[Omega, KX, KY] = ndgrid(flipud(-omega(1:Nf/2+1)),kx,ky);

%% Définition du propagateur et application de celui-ci

Type_Propagation = 'PP'           % Choix de :
                                   % - 'PP' --> Pression à Pression
                                   % - 'PA' --> Pression à Accélération
                                   % - 'PVx' --> Pression à Vitesse X
                                   % - 'PVy' --> Pression à Vitesse Y
                                   % - 'PVz' --> Pression à Vitesse Z
                                   % - 'PD' --> Pression à Déplacement

% Définition des paramètres du propagateur

a = (Omega.^2 - sigma^2)/c^2 - KX.^2 - KY.^2;
b = -2*sigma*Omega/c^2;

KZP = sqrt((a+sqrt(a.^2+b.^2))/2);
Kappa = sqrt((-a+sqrt(a.^2+b.^2))/2);
clear a b

KZ = KZP + j*Kappa;
clear KZP Kappa

S = sigma + j*Omega;
clear Omega

% Distance propagée
d = -0.09;

% Sélection de la fonction de propagation

if strcmp(Type_Propagation,'PP')
    G = exp(j*KZ*d);
elseif strcmp(Type_Propagation,'PA')
    G = -j/rho*KZ.*exp(j*KZ*d);
elseif strcmp(Type_Propagation,'PVx')
    G = j/rho*KX.*exp(j*KZ*d)./S;
elseif strcmp(Type_Propagation,'PVy')
    G = j/rho*KY.*exp(j*KZ*d)./S;
elseif strcmp(Type_Propagation,'PVz')

```

```

        G = j/rho*KZ.*exp(j*KZ*d)./S;
elseif strcmp(Type_Propagation,'PD')
    G = -j/rho*KZ.*exp(j*KZ*d)./S.^2;
end

clear KX KY KZ S

%% Choix des options pour la suite des calculs

Option = 'Optimisation';    % Choix de :
                             % - 'Calcul' --> Permet l'application de la
                             %   fonction de transfert, le filtrage et le
                             %   retour dans le domaine spatio-temporel.
                             % - 'Optimisation' --> Optimise le filtre de
                             %   Tikhonov pour la distance souhaitée.

if strcmp(Option,'Calcul')
    TNAH_calcul2;
elseif strcmp(Option,'Optimisation')
    TNAH_optimisation;
end

```

II.2.2 Application directe de la fonction de Green

La routine `TNAH_calcul.m` applique le propagateur choisi par l'utilisateur et revient dans les domaines du temps et de l'espace. Si le paramètre β de régularisation a déjà été optimisé il peut être appliqué lors de la rétropropagation.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% APPLICATION DE LA FONCTION DE GREEN ET RETOUR EN (X,Y,Z,T)      %
% Fichier :      TNAH_calcul.m                                     %
% Auteur  :      Jean-François Blais                             %
% Date    :      Avril 2008                                       %
% Description :  Programme permettant l'application de la        %
%                propagation et le retour dans le domaine        %
%                spatio-temporel, avec ou sans filtrage.         %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% Application ou non d'un k-space filter

% Filtre de Tikhonov (si rétropropagation)
if(d < 0)
    beta = 0;
    W = abs(G.^(-1)).^2./(abs(G.^(-1)).^2 + beta);

```

```

        Pfkxky_prop = Pfkxky.*G.*W;
    else
        Pfkxky_prop = Pfkxky.*G;
    end

clear Pfkxky G

%% Retour dans les domaines temporel et spatial
% Application des symétries pour retourner à la matrice à 8 octants
Pfkxky_prop = cat(1,conj(flipdim(flipdim(flipdim...
    (Pfkxky_prop(2:end,:,:),1),2),3)),Pfkxky_prop(1:end-1,:,:));

% Application du ifftshift (le fait que le nombre de points en t soit pair
% fait en sorte que le ifftshift peut être appliqué même avant une fft)

% Ratio de la pente pour la fenêtre fréquentielle;
ratio_fen = 0.5;

% Définition de la enêtre fréquentielle de Tukey
fen = repmat([tukeywin(Nf-1,ratio_fen);0],[1,Nkx,Nky]);

P_f = ifftshift(Pfkxky_prop.*fen);
clear Pfkxky_prop

P_f = ifft(P_f,[],3)*Ks_xy/(2*pi);      % IFFT en y
P_f = ifft(P_f,[],2)*Ks_xy/(2*pi);      % IFFT en x

P_f = fft(P_f,[],1)*Fs/Nt;              % IFFT en t

% Récupération des points voulus et fenêtrage inverse
P_f = real(P_f(1:Nt,vec_x,vec_y).*T_filter.^(-1));

%% Enregistrement des données

nom_fichier_save = 'pression_proj_NAH'
save(nom_fichier_save, 'P_f','t','dt','d');

```

II.2.3 Optimisation du filtre de Tikhonov

Le programme `TNAH_optimisation.m` fait varier le paramètre de régularisation β pour calculer les termes $\|S_r^\beta\|_2$ et $\|G^{-1}S_r^\beta - S_m\|_2$ qui ont été définis au chapitre 5. Il est ensuite possible d'utiliser les valeurs de β , $\|S_r^\beta\|_2$ et $\|G^{-1}S_r^\beta - S_m\|_2$ avec la

routine `Lcorner.m` développée par P. C. Hansen [32] afin de trouver le paramètre optimal du filtre de Tikhonov par la méthode de la courbe en L.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% OPTIMISATION DU FILTRE DE TIKHONOV EN RÉTROPROPAGATION          %
% Fichier :      TNAH_optimisation.m                               %
% Auteur  :      Jean-François Blais                             %
% Date    :      Août 2008                                         %
% Description : Programme permettant l'optimisation du filtre de  %
%                de Tikhonov par la méthode de la courbe en L.    %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Nombre de valeurs de beta pour l'optimisation
N_beta = 90;

% Initialisation
beta = zeros(N_beta,1);
GS = zeros(N_beta,1);      % GS -->  $G^{(-1)}S_r - S_m$ 
S = GS;                    % S  -->  $S_r$ 

% Matrice de pression initiale
P = P(:,vec_x,vec_y).*T_filter.^(-1);

% Points spatiaux pour lesquels les termes GS et S sont calculés
% Dans le cadre du mémoire, les points au dessus de la plaque sont choisis

ind_x_plaque_min = 1;
ind_x_plaque_max = ind_x_plaque_min + 18;
ind_x_plaque = ind_x_plaque_min : ind_x_plaque_max;

ind_y_plaque_min = 1;
ind_y_plaque_max = ind_y_plaque_min + 23;
ind_y_plaque = ind_y_plaque_min : ind_y_plaque_max;

for ind_lambda = 1:N_beta

    ind_beta    % Affichage du compteur

    % Calcul de beta : une base de 2 ou de sqrt(2) s'est avéré un choix
    % approprié
    beta(ind_beta) = 2^((-ind_beta+1)/2);

    % Calcul du filtre de Tikhonov
    W = abs(G.^(-1)).^2./(abs(G.^(-1)).^2 + beta(ind_beta));

    % Application du propagateur et du filtre
    Pfkxky_prop = Pfkxky.*G.*W;

    % Retour vers le plan de mesure après filtrage

```

```

Pfkxky_retour = Pfkxky_prop.*G.^(-1);

%% Retour dans les domaines temporel et spatial
% Application des symétries pour retourner à la matrice à 8 octants
Pfkxky_prop = cat(1,conj(flipdim(flipdim(flipdim...
(Pfkxky_prop(2:end,:,:),1),2),3)),Pfkxky_prop(1:end-1,:,:));
Pfkxky_retour = cat(1,conj(flipdim(flipdim(flipdim...
(Pfkxky_retour(2:end,:,:),1),2),3)),Pfkxky_retour(1:end-1,:,:));

% P_reg --> p_beta(z)

P_reg = ifftshift(Pfkxky_prop);
clear Pfkxky_prop

P_reg = ifft(P_reg,[],3)*Ks_xy/(2*pi);      % IFFT en y
P_reg = ifft(P_reg,[],2)*Ks_xy/(2*pi);      % IFFT en x

P_reg = fft(P_reg,[],1)*Fs/Nt;               % IFFT en t
P_reg = real(P_reg(1:Nt,vec_x,vec_y)).*T_filter.^(-1);

% P0_reg --> p_beta(z0)

P0_reg = ifftshift(Pfkxky_retour);
clear Pfkxky_retour

P0_reg = ifft(P0_reg,[],3)*Ks_xy/(2*pi);      % IFFT en y
P0_reg = ifft(P0_reg,[],2)*Ks_xy/(2*pi);      % IFFT en x

P0_reg = fft(P0_reg,[],1)*Fs/Nt;              % IFFT en t
P0_reg = real(P0_reg(1:Nt,vec_x,vec_y)).*T_filter.^(-1);

% GS et S sont calculés sur la première moitiés des points temporels
% pour éviter les problèmes dus à l'instabilité de l'inversion de la
% NLT

GS(ind_beta) = (sum(sum(sum((P0_reg(1:Nt/2,ind_x_plaque,ind_y_plaque)...
- P(1:Nt/2,ind_x_plaque,ind_y_plaque)).^2 , 1),2),3)).^(1/2);
S(ind_beta) = (sum(sum(sum(P_reg(1:Nt/2,ind_x_plaque,ind_y_plaque).^2...
,1),2),3)).^(1/2);

end

%% Enregistrement des données

nom_fichier_save = 'regularisation_TNAH'
save(nom_fichier_save, 'GS','S','beta');

```

ANNEXE III

MÉTHODOLOGIE EXPÉRIMENTALE

Il est question dans cette annexe de la méthodologie expérimentale suivie afin d'obtenir les résultats présentés aux chapitres 3 à 5. Tout d'abord, les détails du montage et de la chaîne de mesures sont donnés, tout comme les motifs justifiant la nature et les conditions aux limites de plaque, ainsi que les conditions d'échantillonnage. Des précisions concernant le calibrage des microphones sont ensuite apportées. Finalement, les problèmes rencontrés et les sources d'erreur concluent l'annexe.

III.1 Montage expérimental

Afin de valider expérimentalement les résultats de simulations en propagation directe et en rétropropagation, le montage présenté à la figure III.1 a été réalisé en chambre anéchoïque. Les différents éléments dont il est constitué sont

- une antenne microphonique ;
- un support de translation des microphones ;
- un microphone de référence ;
- un système d'acquisition des données ;
- une plaque de plexiglas ;
- un pendule sphérique en acier.

Cette section présente dans un premier temps le système de mesures, allant des microphones à la carte d'acquisition. Ensuite, des détails concernant la plaque utilisée ainsi que l'impacteur sont donnés.

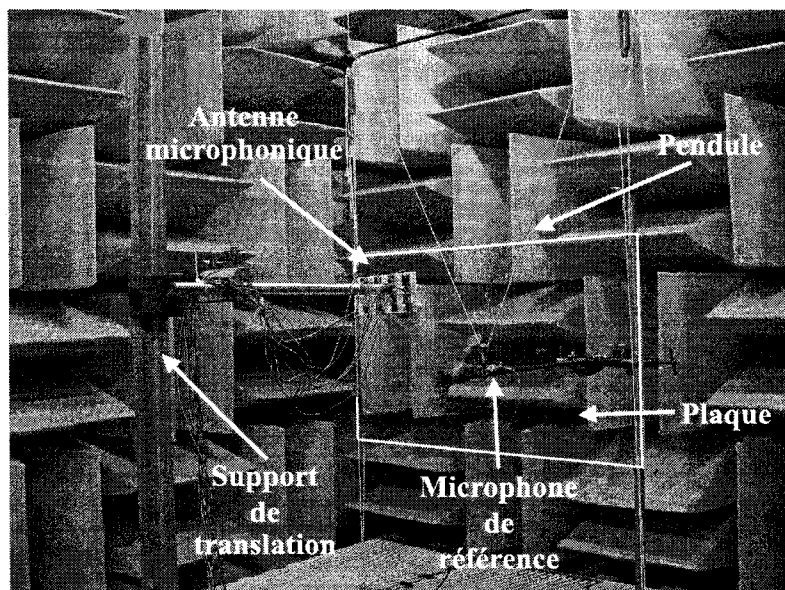


Figure III.1 – Vue d'ensemble du montage expérimental de NAH.

III.1.1 Système de mesures

La figure III.2 présente l'antenne microphonique qui a été assemblée. Des microphones à électret omnidirectionnels de modèle Acousticiel 130A sont utilisés. Ils ont une longueur de 25 mm ainsi que des diamètres interne et externe de respectivement 5 et 10 mm. Ils présentent une réponse fréquentielle plate à ± 1 dB dans la plage de fréquences allant de 20 à 6000 Hz [31]. Ces microphones sont alimentés par une source de type Structel A514 qui amplifie aussi les signaux avant que ceux-ci n'atteignent la carte d'acquisition, de modèle NI PXI-4472. Comme cette carte d'acquisition est limitée à huit entrées analogiques, seulement huit microphones sont utilisés. Ces microphones sont espacés régulièrement et la distance les séparant, soit 2,85 cm, est déterminée par le quadrillage de plastique sur lequel ils sont fixés.

Ces microphones ont été calibrés en amplitude à l'aide d'un pistonphone émettant un signal sonore de 93,8 dB à 1000 Hz. De plus, chacun des microphones a été

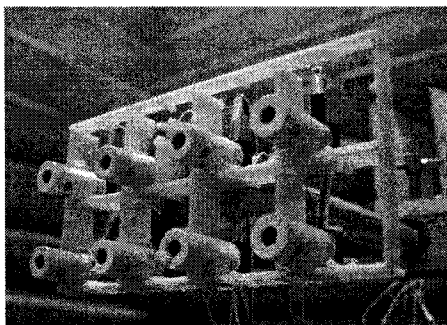


Figure III.2 – Antenne constituée de huit microphones.

juxtaposé au microphone de référence à environ 1,5 m de la plaque pour mesurer simultanément rayonnement de celle-ci suite à un impact. Comme la distance séparant le microphone de référence de celui à calibrer était négligeable par rapport à la distance les séparant de la plaque, les microphones devaient a priori mesurer le même signal. Or, le terme de phase de la fonction de transfert entre chacun des huit microphones et le microphone de référence s'est avéré suffisamment faible pour que les signaux soient superposés dans le domaine du temps. Ainsi, on en a conclu qu'aucune rectification de phase n'était requise.

Afin de permettre aux microphones de couvrir une surface supérieure à celle de la plaque, ils ont été intégrés à un support de translation biaxial (en X' et Y') gradué au millimètre. Ce support, constitué en fait de deux bancs d'optique joints perpendiculairement l'un à l'autre, est présenté à la figure III.3. Il permet de couvrir une surface d'environ $0,9 \times 0,9 \text{ m}^2$. Il est aussi fixé à des blocs de béton afin de le stabiliser. Enfin, la tige métallique qui maintient les microphones peut être déplacée d'une vingtaine de centimètres selon z . C'est donc la mobilité de cette tige qui permet de faire des mesures de pression acoustique dans différents plans parallèles à la plaque.

D'autre part, l'acquisition doit être déclenchée de telle sorte que peu importe la position de l'antenne microphonique, le temps initial $t = 0 \text{ s}$ soit toujours le même.

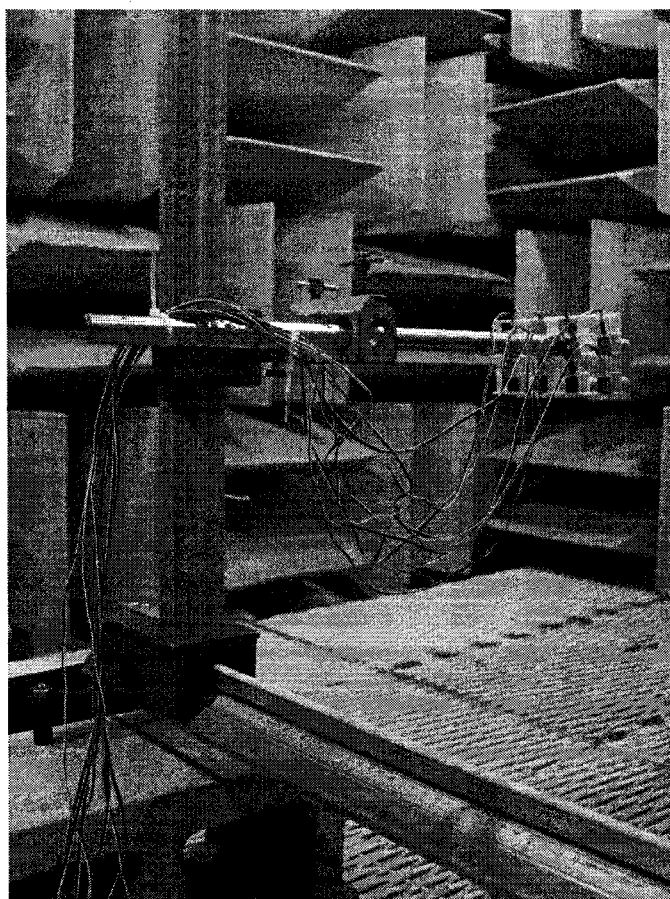


Figure III.3 – Support de translation de l'antenne microphonique.



Figure III.4 – Position du microphone de référence.

Pour ce faire, un microphone de référence de même modèle que les huit autres est utilisé (voir figure III.4). Comme dans le cas de la pression acoustique simulée, le temps initial de l'ensemble des signaux mesurés ($t = 0$ ms) est défini au début du contact entre le pendule et la plaque. À partir du signal enregistré par l'un des microphones situé à une distance R du point d'impact, on peut retrouver ce temps initial, sachant que la pression acoustique n'est plus nulle dès l'instant $t = R/c$.

Comme les huit entrées analogiques de la carte d'acquisition sont utilisées par les autres microphones, l'entrée numérique de type TTL (*transistor-transistor logic*) de la carte d'acquisition est utilisée. Ainsi, le signal de référence n'est pas enregistré puisque cette entrée n'a pas de convertisseur analogique-numérique. C'est donc dire que ce signal n'est vu que comme une succession de zéros et de uns. Si l'amplitude du signal analogique est suffisamment élevée (3 V), il y a un passage de l'état 0 à 1, ce qui déclenche l'acquisition. Le principal inconvénient de cette façon de faire est que le microphone doit être placé très près du point d'impact. Il est situé à environ 2,3 cm de l'axe de frappe et 2 cm de la plaque. Comme ces microphones ont tendance à saturer lorsqu'ils sont soumis à une forte pression acoustique (~ 400 Pa), cela a pour effet qu'il faut attendre une trentaine de secondes entre chaque impact afin de s'assurer que l'acquisition soit faite au bon moment.

III.1.2 Nature de la plaque et conditions aux frontières

Dans un autre ordre d'idées, les dimensions et la nature de la plaque ont été déterminées par la longueur des bancs d'optique dont est composé le support de translation. En effet, afin de respecter les critères de la NAH, il faut que l'hologramme soit suffisamment grand par rapport à la source, de sorte que la majorité de l'énergie rayonnée par celle-ci soit mesurée. C'est donc dire qu'il faut dans notre cas limiter la taille de la source.

De plus, on ne souhaite pas avoir un rayonnement ayant une plage de fréquences trop élevée puisque cela fait en sorte que la distance entre les microphones doit être réduite, ce qui augmente le nombre de points de mesure. Or, le fait de réduire la taille de la plaque augmente aussi ses fréquences propres (voir par exemple l'équation (1.4)). C'est donc dire que d'autres paramètres doivent être variés pour compenser.

Ainsi, toujours à partir de l'équation (1.4), on voit que les fréquences propres en flexion d'une plaque simplement supportée sont aussi proportionnelles au terme $\sqrt{E_p/\rho_p}$ et qui correspond également à la vitesse de propagation des ondes longitudinales dans une tige mince. À titre d'exemple, ces vitesses sont très semblables pour l'acier (5060 m/s) et l'aluminium (5160 m/s) [24]. Toutefois, dans un matériau tel que le plexiglas, on a $E_p \approx 3$ GPa et $\rho_p \approx 1200$ kg/m³ [89]. Donc, la vitesse correspondante est plutôt de l'ordre de 1600 m/s. Ainsi, les fréquences naturelles d'une plaque en plexiglas simplement supportée sont environ 3 fois plus faibles que celles d'une plaque d'acier ou d'aluminium de mêmes dimensions et de mêmes conditions aux frontières. C'est pourquoi ce matériau a été choisi.

La vitesse de propagation des ondes de flexion c_f , donnée par l'équation (1.24), dépend aussi de $\sqrt{E_p/\rho_p}$. Le temps pris par les ondes de flexion pour atteindre les côtés d'une plaque de plexiglas est donc supérieur à celui d'une plaque d'aluminium ou d'acier. Cela permet d'observer les fronts d'onde obliques tels que ceux présentés à la figure 4.6(a) sur une plus longue durée.

D'autre part, des conditions aux limites se rapprochant de celles d'une plaque libre réduisent aussi les fréquences naturelles de la plaque [90]. C'est d'ailleurs pourquoi il a été choisi de suspendre la plaque à ses quatre coins, à la verticale, comme en témoigne la figure III.1. Notons que des tendeurs ont été ajoutés afin d'éviter que

la plaque n'oscille trop par rapport à sa position d'équilibre. Enfin, les dimensions de la plaque utilisée sont $50,6 \times 29,4 \text{ cm}^2$ et son épaisseur est $h = 5,8 \text{ mm}$.

III.1.3 Impact

En ce qui a trait à l'impact, le pendule qu'on peut voir aux figures III.1 et III.4 a été réalisé. Il s'agit d'une bille de roulement d'acier de 11 mm de diamètre à laquelle est collée une ficelle. Les deux extrémités de cette corde sont attachées à une tige métallique située dans le même plan que la plaque. En ayant deux points d'attache situés dans ce plan, on s'assure ainsi que le déplacement de la bille soit bel bien perpendiculaire à la plaque au point d'impact. Enfin, la bille est relâchée d'une hauteur de 27 cm par rapport au centre de la plaque, ce qui lui confère une vitesse d'environ 2,3 m/s à l'impact.

III.1.4 Échantillonnage temporel et spatial

En premier lieu, rappelons qu'il a été vu au premier chapitre que l'espacement entre les microphones doit être tel que

$$\Delta x = \Delta y = \frac{\lambda_{\min}}{2} = \frac{c}{2f_{\max}}$$

où $\lambda_{\min}$ est la longueur d'onde minimale du rayonnement de la plaque, correspondant à la fréquence maximale $f_{\max}$ de celui-ci.

La nature de la plaque, ses conditions aux frontières ainsi que le temps de contact entre la sphère métallique et la plaque déterminent la largeur spectrale du rayonnement acoustique transitoire de cette dernière. Afin d'estimer les bons paramètres d'échantillonnage, la pression acoustique a été mesurée en une série de points à

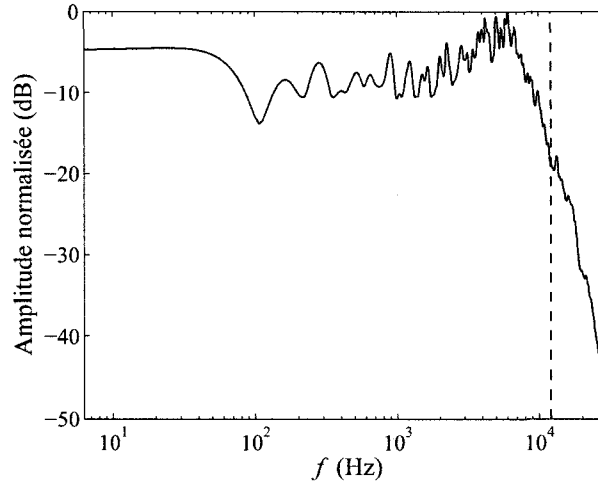


Figure III.5 – Spectre moyen de la pression acoustique mesurée à 2 cm de la plaque.

l'avant de la plaque, en $z = 2$ cm. La moyenne des spectres de la pression mesurée en chacun de ces points, normalisée par la pression moyenne maximale, est d'ailleurs présentée à la figure III.5.

L'atténuation du spectre vaut plus de 60 dB à $f = 51,2$ kHz. La fréquence d'échantillonnage temporel étant de $F_s = 102,4$ kHz, on n'a donc pas de repliement dans ce spectre. Par contre, le fait d'utiliser l'antenne avec un espacement de 2,85 cm entre les microphones mène à une fréquence maximale $f_{\max}$ d'environ 6 kHz. Or, cette fréquence vient limiter le contenu spectral de la pression acoustique. Il est donc clair que l'espacement entre les microphones est trop grand. Comme le support de translation permet des déplacements au millimètre près, il a été décidé d'intercaler les positions de l'antenne microphonique de telle sorte que $\Delta x = \Delta y = 1,425$ cm. La fréquence maximale ainsi obtenue, soit 12 kHz, est représentée à la figure III.5 par un trait vertical tireté (---). On y voit que l'atténuation à cette fréquence est d'environ 20 dB et que la fréquence pour laquelle la pression acoustique est maximale est désormais incluse dans l'intervalle $[0, f_{\max}]$. Ces critères correspondent à ceux respectés par de La Rochefoucauld [15, 16].

Évidemment, comme le support ne permet pas des déplacements précis au-delà du millimètre, une position sur deux de l'antenne est décalée en moyenne de 0,25 mm par rapport à ce qu'elle devrait être. Comme cela sera abordé dans la section suivante, ce décalage n'est qu'une incertitude parmi tant d'autres plus importantes concernant le montage.

III.2 Sources d'erreurs expérimentales

Comme les signaux propagés par TNAH sont comparés aux signaux mesurés, il est intéressant de voir dans quelle mesure les erreurs de positionnement des microphones peuvent avoir une influence sur les résultats observés. Par exemple, un décalage temporel d'un point correspond à une différence de distance de propagation $\Delta d = c\Delta t \approx 3 \text{ mm}$, où $\Delta t = 1/F_s$. C'est donc dire que si la somme des erreurs de positionnement des différents éléments composant le montage (bancs d'optique, antenne microphonique, plaque, etc.) est égale à cette distance, un décalage temporel d'un point sera observé dans le signal mesuré.

Plus les fréquences des signaux mesurés sont élevées, plus ces erreurs de positionnement sont perceptibles. En plus d'être visibles en comparant les signaux propagés et mesurés des graphiques des chapitres 3 à 5, ces décalages sont critiques dans le calcul des erreurs par l'équation (3.20), puisque les signaux sont comparés point par point dans le domaine du temps.

Dans un premier temps, l'objectif principal de la partie expérimentale du projet était de voir dans quelle mesure le développement théorique est applicable en pratique. Ainsi, les investissements pour la conception du montage ont été minimisés. À titre d'exemple, le support de translation et l'antenne microphonique ont été assemblés avec des pièces disponibles en quincaillerie. Ainsi, la variation d'espacement

entre les cases du quadrillage de plastique servant de support aux microphones est de l'ordre de 0,1 mm puisque le quadrillage en question n'est pas prévu à cet effet. Comme ce support sert de référence pour la fixation des microphones, il y a donc une incertitude d'environ un demi millimètre quant à la distance séparant le centre des microphones.

De la même façon, l'alignement des deux bancs d'optique a été vérifié avec un niveau. En fait, considérant aussi la tige métallique en z et le quadrillage de plastique, quatre axes doivent être mis au niveau. Or, la moindre erreur sur l'angle de l'un ou l'autre de ces axes introduit une erreur de positionnement. Il en est de même pour le parallélisme entre l'antenne microphonique et la plaque. Bref, pour faire des études plus poussées avec ce montage, il faudrait envisager l'usinage d'un support pour les microphones ainsi qu'un tolérancement plus précis au niveau de l'assemblage des pièces.

Par ailleurs, la diffraction de l'antenne peut aussi introduire certaines erreurs. Pour une antenne dont la distance inter-microphone est de 3 cm, de La Rochefoucauld présente le rapport entre l'autocorrélation de la pression mesurée par un microphone monté sur l'antenne et de celle mesurée par un microphone seul [15]. Si l'antenne n'avait aucune influence sur la mesure, ce rapport devrait être unitaire. Or, des oscillations dont l'amplitude s'élève à 0,5 dB sont observables à partir de 1800 Hz. Elle en a toutefois conclu que ces effets sont négligeables même si la fréquence à laquelle la pression acoustique est maximale est supérieure à 1800 Hz. Il pourrait être intéressant d'étudier ce phénomène de façon à savoir s'il existe une distance optimale entre les microphones.

D'autre part, l'utilisation d'une plaque suspendue introduit aussi des erreurs. En effet, bien que les cordes qui la soutiennent soient tendues, la plaque est quand même libre d'osciller dans une certaine mesure autour de sa position d'équilibre.

Malgré le fait qu'on attende le retour à l'équilibre avant chaque impact, il se peut fort bien qu'il y ait toujours une oscillation imperceptible. Or, un déplacement de la plaque entraîne une double erreur, c'est-à-dire qu'un point donné de la plaque se trouve à la fois plus près de l'hologramme et plus éloigné du microphone de référence (ou l'inverse). En plus d'affecter les amplitudes mesurées, cela a surtout pour effet de changer la position du temps initial $t = 0$ ms puisque si la plaque est avancée, la pression rayonnée par celle-ci arrive légèrement plus tôt au niveau de l'hologramme et plus tard au microphone de référence. Le contraire se produit si la plaque est légèrement reculée au moment de l'impact. La répétabilité des mesures à ce niveau a néanmoins été vérifiée et les différences de temps d'arrivée sont de $\pm \Delta t$. Le moyennage des signaux permet d'éviter de trop grands écarts de temps d'arrivée. Lors de la comparaison entre les signaux propagés par TNAH et ceux mesurés, la différence de temps d'arrivée correspond aussi généralement à $\pm \Delta t$.

Finalement, un autre inconvénient de la plaque suspendue est le fait qu'elle ne soit pas bafflée. En premier lieu, mentionnons que l'expérimentateur est situé à l'arrière de la plaque pour laisser tomber le pendule. Il faut donc qu'il se positionne correctement pour que les ondes rayonnées par la plaque ne soient pas réfléchies sur lui-même pour être ensuite perçues par les microphones. Cela est d'autant plus vrai lorsque l'antenne microphonique est placée sur le côté de la plaque. Deuxièmement, le modèle théorique de propagation utilisé est conçu pour une plaque bafflée. C'est donc dire qu'à l'extérieur de la plaque et pour un plan situé en $z \leq 1$ cm, les signaux résultant d'une rétropropagation ne pourraient être comparés à ceux mesurés, même si l'hologramme était suffisamment grand pour qu'il n'y ait aucun effet de bord. Cette différence a été étudiée par Schedin *et al.* en comparant le rayonnement transitoire simulé d'une plaque bafflée à celui mesuré expérimentalement ayant comme origine une plaque de mêmes dimensions, mais non bafflée [10].

En conclusion, cette annexe a présenté les divers éléments dont se compose le montage ainsi que les sources d'erreurs potentielles qui en découlent. L'ensemble de ces erreurs sont surtout perceptibles en raison des hautes fréquences (> 5 kHz) présentes dans le rayonnement de la plaque. Ainsi, le moindre décalage entre les signaux est perceptible visuellement sur les graphiques et surtout, lors du calcul d'erreur.

Si le support de translation avait permis de couvrir une plus grande surface, la taille de la plaque aurait pu être augmentée, réduisant du même coup ses fréquences propres. Le fait d'agrandir l'hologramme aurait été compensé par une distance inter-microphones elle aussi supérieure. Néanmoins, les différentes incertitudes concernant le positionnement des microphones seraient demeurées les mêmes (en valeur absolue). Ainsi, les erreurs de positionnement seraient devenues plus faibles de façon relative et seraient par le fait même moins perceptibles lors de la comparaison des signaux propagés par TNAH et de ceux mesurés. Bref, la source qui a été considérée dans le cadre de ce projet a permis de mettre de l'avant le degré de précision requis afin d'étudier convenablement le rayonnement d'une plaque ayant un fort contenu de hautes fréquences. Les taux d'erreurs relativement élevés pourraient être réduits, entre autres par la conception d'une antenne microphonique et d'un support de translation dont les tolérancements sont plus précis.

ANNEXE IV

RAYONNEMENT ACOUSTIQUE D'UN PISTON CIRCULAIRE BAFFLÉ

Cette annexe présente les équations régissant le rayonnement acoustique d'un piston circulaire bafflé et soumis à un profil de vitesse dépendant du temps. La figure IV.1 présente d'ailleurs le système de coordonnées dans lequel se situe le piston de rayon r_p .

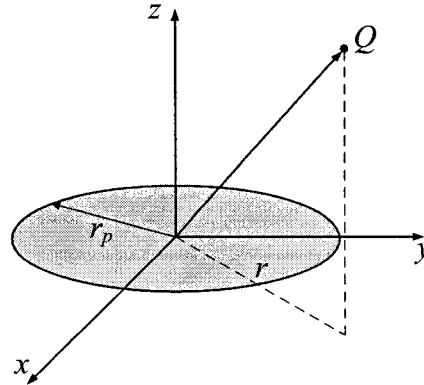


Figure IV.1 – Piston circulaire bafflé et son système de coordonnées.

De façon générale, la pression acoustique rayonnée par un piston au point Q ayant pour coordonnées (x, y, z) s'écrit [77]

$$p(x, y, z, t) = \rho_0 h_p(x, y, z, t) * \frac{d}{dt} v(t), \quad (\text{IV.1})$$

où $v(t)$ est la fonction décrivant la vitesse du piston et $h_p(x, y, z, t)$ est la réponse impulsionnelle du piston en question. Dans le cas d'un piston circulaire bafflé, cette

réponse impulsionnelle est donnée par la relation [77]

$$h_p = \begin{cases} 0 & ct < z \\ c & z < ct < R_1 \\ \frac{c}{\pi} \arccos \left(\frac{r^2 + (ct)^2 - r_p^2 - z^2}{2r\sqrt{(ct)^2 - z^2}} \right) & R_1 < ct < R_2 \\ 0 & ct > R_2 \end{cases} \quad (\text{IV.2a})$$

pour $r < r_p$ et par

$$h_p = \begin{cases} 0 & ct < R_1 \\ \frac{c}{\pi} \arccos \left(\frac{r^2 + (ct)^2 - r_p^2 - z^2}{2r\sqrt{(ct)^2 - z^2}} \right) & R_1 < ct < R_2 \\ 0 & ct > R_2 \end{cases} \quad (\text{IV.2b})$$

pour $r > r_p$, avec $R_1 = \sqrt{z^2 + (r_p - r)^2}$ et $R_2 = \sqrt{z^2 + (r_p + r)^2}$. Quant au paramètre $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ aussi présenté à la figure IV.1, il est la projection de la position du point Q dans le plan $z = 0$.