

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

DÉVELOPPEMENT D'ALGORITHMES D'INVERSION RAPIDES ET
PROPOSITIONS RELATIVES À LA CONFIGURATION DU MONTAGE DE
MESURES DANS UN CONTEXTE DE TOMOGRAPHIE MICRO-ONDES
APPLIQUÉE À LA DÉTECTION DU CANCER DU SEIN

PAUL-ANDRÉ BARRIÈRE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)
DÉCEMBRE 2008



Library and
Archives Canada

Published Heritage
Branch

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Direction du
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 978-0-494-48881-2

Our file Notre référence

ISBN: 978-0-494-48881-2

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

DÉVELOPPEMENT D'ALGORITHMES D'INVERSION RAPIDES ET
PROPOSITIONS RELATIVES À LA CONFIGURATION DU MONTAGE DE
MESURES DANS UN CONTEXTE DE TOMOGRAPHIE MICRO-ONDES
APPLIQUÉE À LA DÉTECTION DU CANCER DU SEIN

présentée par: BARRIÈRE Paul-André

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. SAVARD Pierre, Ph.D., président

M. GOUSSARD Yves, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. IDIER Jérôme, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. LAURIN Jean-Jacques, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. CARFANTAN Hervé, Ph.D., membre

M. DUSSAULT Jean-Pierre, Ph.D., membre

M. GIOVANNINI Hugues, Ph.D., membre

*"Le métier de la connaissance
Est mal connu et journalier"*

Gilles Vigneault

REMERCIEMENTS

Je remercie les membres de jury qui ont accepté d'évaluer mon travail de thèse. Leurs commentaires et suggestions furent très pertinents et des plus appréciés. J'aimerais exprimer de façon particulière ma gratitude envers messieurs Giovannini et Carfantan qui ont fait le déplacement depuis la France pour assister à la soutenance.

D'autre part, avec cette thèse, se termine un long voyage qui m'aura mené bien loin de chez moi. Tout au long de ce périple j'ai eu la chance de côtoyer des gens que j'aimerais maintenant remercier.

D'abord mes directeurs, messieurs Jérôme Idier, Yves Goussard et Jean-Jacques Laurin. C'est le hasard qui m'a mis sur la route de chacun d'eux et celui-ci a très bien fait les choses. Leur travail rigoureux, leur disponibilité, leur honnêteté, leur ingéniosité et leurs grandes qualités pédagogiques m'ont été d'un grand soutien. Toute ma reconnaissance pour l'ébauche de chercheur qu'ils ont réussi à faire de moi. Un merci particulier à Jérôme pour son accueil lors de mon arrivée à Nantes.

Merci à mesdames Ginette Desparois, Nathalie Lévesque, Emily Thureau et Françoise Palvadeau pour leur soutien tout au long de cette thèse. Remerciements particuliers à Nathalie pour sa bonne humeur quotidienne et tout le soin mis dans le suivi de nos dossiers, à Ginette pour son efficacité, pour le café, pour le hockey et pour sa connivence et à Emily pour s'être occupé de moi même après mon retour au Québec.

Merci à monsieur Jean-Sébastien Décarie, administrateur réseau du Poly-Grames. Ses compétences et sa disponibilité n'ont d'égales que sa gentillesse ; qu'il sache que ses qualités sont très appréciées.

Les collègues qui m'ont précédé ont habituellement utilisé cet espace pour remercier les autres techniciens du laboratoire pour leur aide à la conception de leurs circuits. Dans le cadre de ma thèse, je n'ai pas eu l'occasion de recourir aux compétences de ces messieurs. Je tiens quand même à leur témoigner mon admiration : monsieur Jules Gauthier, d'abord, pour ses connaissances encyclopédiques, son inventivité et son énergie, monsieur Steve Dubé, pour la finesse de son travail et son ingéniosité, et monsieur Traian Antonescu, pour le nombre infini de ses talents. Tous les trois, enfin et surtout, je les remercie pour leur amitié et leur affabilité. À mon humble avis, ces trois hommes constituent, avec Jean-Sébastien, la base sans laquelle le Poly-Grames s'écroulerait et ce, tant sur le plan scientifique qu'humain.

Je tiens aussi à saluer tous ces consœurs et confrères ainsi que leurs proches, devenus amis. À Nantes, toute ma gratitude à Alexis, Anne-Claire, Fabien et Christian pour leur accueil, leurs invitations et les dîners partagés ainsi qu'à Saïd et Nassira pour leur présence toujours souriante. Merci à Pedro pour sa complicité et son sens de l'humour si près du mien. Merci à Isabelle et Sébastien pour leur douce simplicité, pour la guitare et les chansons ainsi que pour leur maison peuplée de fées. Merci à Charlotte pour la joie que procure sa compagnie, pour ses connaissances étonnantes et pour l'honneur véritable qu'elle m'a fait en venant me visiter à Montréal. Merci à Jordan pour son incroyable bonne humeur, à Di pour m'avoir supporté et avoir été un si bon voisin de bureau et à Louis-Marie, dont la discrète présence est toujours des plus agréable. Merci à Morgan, sans qui je serais bien plus ignorant à propos de la politique française, des mangas et de la blogosphère et à Didier, pour son humour tout aussi particulier qu'agréable. Un dernier merci, enfin, à Jonathan, pour sa sympathique originalité ainsi qu'à Jamil, pour la bouffe de chez lui et pour sa bonne humeur.

Côté montréalais, je veux d'abord témoigner ma reconnaissance à mes "colocataires" : Alvaro et Patrick, pour leur bonne humeur ainsi que pour les rires et le bon temps parta-

gés, Azin et Hamidreza, pour leur profonde gentillesse. Ce fut un réel plaisir de partager un bureau avec eux. À Tarek, presque aussi vieux que moi au Poly-Grames, merci d'être tel qu'il est et je formule le souhait qu'il ne change jamais. Salutations aussi aux autres "vieux", partis en cours de route : Zacharia, Stella, Dominic, Mathieu, Badr et tous les autres. Au 5^e, ma gratitude à Benoît, pour ses nombreux conseils et à David, pour sa disponibilité. Merci aussi à Saul, pour les rayons de soleil toulousains qu'il a su apporter avec lui et à Sylvain, pour sa facilité d'approche et ses connaissances sur 1000 sujets.

Un énorme merci aux amis de toujours ainsi qu'à ceux rencontrés en cours de route. À Lena et Manu, connus là-bas et retrouvés ici, merci pour leur façon d'être qui sait nous rappeler les beautés simples de la vie. À Sandrine, venue de là-bas et connue ici, merci pour sa présence indispensable. À Yann enfin, d'ici comme moi, merci de son indéfectible amitié.

Merci à Gabriella, pour tout le calme que sa présence amène dans ma vie et ce, malgré l'éloignement.

Merci à ma mère, pour tout et un peu plus.

Je termine avec une pensée que je laisse s'envoler vers mon père.

RÉSUMÉ

Cette thèse porte sur la tomographie micro-ondes, une technique d'imagerie dont l'objectif est d'estimer la distribution des propriétés électriques internes d'un objet sous test à partir des mesures du champ électrique diffusé par celui-ci. L'application visée est la détection du cancer du sein qui, parmi les nombreuses applications possibles de cette technologie, semble particulièrement prometteuse. Tant les aspects algorithmiques que ceux reliés à la problématique du montage de mesures sont abordés dans ce travail. Toutefois, l'accent est davantage mis sur les questions algorithmiques alors que les propositions relatives au montage de mesures demeurent à un niveau embryonnaire.

Mathématiquement, le problème de tomographie micro-ondes est mal-posé et non-linéaire. Dans la pratique, cela a pour effet d'en compliquer la résolution de manière importante. Notamment, les temps de calcul nécessaires à la reconstruction des images peuvent être excessivement prohibitifs. Dans le contexte biomédical, cette problématique constitue un des principaux obstacles à l'application clinique de la tomographie micro-ondes. Dans un premier temps, la thèse vise donc à proposer des méthodes de reconstruction offrant des temps de calcul améliorés par rapport aux méthodes actuelles.

Pour ce faire, nous repérons d'abord dans la littérature la méthode offrant le meilleur compromis entre qualité de solution et temps de calcul. La méthode *current source inversion* est ainsi retenue comme point de départ de notre réflexion. Nous en effectuons une analyse en profondeur et nous identifions quelques points faibles, tant au niveau du critère d'optimisation que de l'algorithme de minimisation proposés (l'ensemble des méthodes étudiées posant le problème dans le cadre de l'optimisation). Nous développons ensuite deux généralisations de l'algorithme original, basées sur les théories de l'optimisation et de la régularisation, capables d'éviter les pièges identifiés. Ces méthodes offrent des gains tant au niveau de la robustesse que de la rapidité. Ceci dit, nous soulignons que

différents goulots d'étranglement limitent tout de même de façon importante la rapidité de ces méthodes.

Deux nouvelles familles d'algorithmes de reconstruction sont proposées afin de s'attaquer à ces problèmes. Toutes deux sont basées sur différentes formulations alternatives de l'expérience de tomographie micro-ondes. La première de ces formulations est mathématiquement équivalente à l'originale. Toutefois, le critère d'optimisation qui en découle est plus simple à minimiser et ce, malgré le fait qu'il soit fonction d'un plus grand nombre d'inconnues. En effet le contraste, les courants équivalents et le champ électrique total doivent être estimés alors que les méthodes de type *contrast source inversion* nécessitent seulement l'estimation du contraste et des courants. Conséquemment, nous baptisons cette nouvelle approche *contrast field source inversion*. Deux versions sont proposées ; la première pour le cas général et la seconde, pour un cas particulier mais relativement commun en tomographie micro-ondes où la structure particulière d'une matrice importante du système peut être exploitée afin d'accélérer le processus d'inversion.

Les deux autres formulations proposées ne sont pas strictement équivalentes aux formulations précédentes puisque basées sur des approximations. Elles permettent par contre de réduire de façon significative la taille des matrices à manipuler et/ou le nombre d'inconnues dans le système. La première formulation utilise simplement une version tronquée de la plus grosse matrice du système original alors que la seconde est basée sur une nouvelle paramétrisation du problème. Dans ce dernier cas, nous montrons que plusieurs éléments de cette paramétrisation peuvent être négligés. Par ailleurs, contrairement aux autres approches approximatives proposées dans la littérature, celles présentées dans ce travail permettent de traiter de façon efficace des problèmes à contrastes importants.

Au final, l'ensemble des méthodes proposées permettent des temps de calcul réduits d'un

facteur 2 à 20, ce qui est significatif, tout en offrant des solutions de qualité équivalente à celles des méthodes concurrentes.

En ce qui a trait au système de mesures, l'objectif de cette thèse est de proposer des configurations plus compactes que celles des montages existants à l'heure actuelle et/ou offrant un gain en regard de la résolution des images reconstruites. Pour ce dernier point, nous montrons d'abord que le champ mesuré à proximité d'un objet est plus informatif et discriminant que le champ mesuré à une certaine distance de celui-ci. Nous proposons donc une nouvelle configuration, très semblable aux configurations actuelles, à la différence près que des plaques sont utilisées pour compresser le sein. Ceci permet de rapprocher les capteurs des éventuelles tumeurs. Des résultats obtenus à partir de données simulées montrent que ce genre de montage permet une amélioration notable de la résolution, en particulier dans le cas où l'objet à imager est à pertes, *i.e.* que sa conductivité électrique est non nulle.

D'autre part, nous exploitons les propriétés des guides d'ondes diélectriques afin de proposer un montage tel que les mesures sont prises dans l'air plutôt que dans un liquide d'adaptation, comme c'est le cas pour tous les autres montages proposés. Nous montrons que la principale limitation d'un tel montage provient du nombre limité d'éclairages indépendants pouvant être générés. Ceci dit, les résultats de simulation montrent que, à nombre d'éclairages égal et à compression équivalente, ces configurations sont tout aussi efficaces que celles utilisant un liquide d'adaptation. Cela ouvre la voie au développement de montages beaucoup plus compacts.

ABSTRACT

This thesis is about microwave tomography. The objective of this imaging technique is to reconstruct the permittivity and conductivity distributions of an object under test from the scattered field. The aimed application is breast cancer detection which appears, among others possible applications, as particularly promising. Both algorithmic aspects and questions related to the measurement setup are treated. However, we mainly focus on the algorithmic aspects while only a preliminary study about the measurement setup is presented.

Mathematically, the microwave tomography problem is ill-posed and nonlinear. Practically, these properties greatly complicate the reconstruction process. More precisely, the time needed for the inversion can be highly prohibitive. In the biomedical field, the question of the reconstruction time is critical if clinical applications are envisioned. In the first part of this thesis, the objective is to propose some reconstruction algorithms leading to a decrease of the computation time.

We first perform a literature review in order to find the method offering the better trade-off between solution quality and computation time. The *current source inversion* (CSI) method is chosen as starting point of the reflection. A deep analysis of CSI is proposed and some pitfalls related to both the optimisation criterion and the minimization algorithm (all studied methods being cast into an optimization framework) are underlined. We then propose two generalizations of the original method based on the optimization and regularization theories. These new methods are both more robust and faster than original CSI. However, we also underline that they exhibit some important bottlenecks which limit their efficiency.

Two new families of reconstruction algorithms are introduced to avoid these bottlenecks.

Both of them are based on alternative formulations of the microwave tomography experiment. The first formulation is mathematically equivalent to the original one. However, the derived optimization criterion is easier to minimize even if it is a function of a larger number of unknowns. Indeed, the contrast, equivalent currents and the electrical field must be estimated while current source inversion methods only requires the estimation of equivalent currents and contrast. Our new methods are then named *Current Field Source Inversion* (CFSI). Once again, two versions of the algorithm are proposed ; the first one for the general case, the other one for a particular but quite common case where the structure of an important matrix of the system can be exploited to accelerate the inversion process.

The two other proposed formulations are not mathematically equivalent to the previous ones since they are based on approximations. However, they lead to an important decrease of the size of the matrices and/or of the number of unknowns. The first of these formulations is simply based on a truncated version of the largest matrix of the system. The second one is rather based on a new parametrization of the problem. It is shown that some components of this parametrization can be neglected. Contrarily to other approximate approaches proposed in the literature, our methods can be used for problems involving high contrasts.

All methods proposed in this thesis lead to a decrease of the computation time by a factor from 2 to 20, which is quite significant. On the other side, the solutions obtained with our methods are comparable to those obtained with other methods

Regarding the measurement setup, the objective of the thesis is to propose more compact configurations and/or setups offering an improvement of the resolution of the reconstructed images. About this latter aspect, we first show that the field measured in the vicinity of the scatterer is more informative than the field measured far away from it. We then

suggest a new configuration which is quite similar to the ones previously proposed but which uses plates to compress the breast. The receiver can then be placed at a shorter distance of potential tumors. Results obtained from synthetic data show that the resolution of the images reconstructed on this type of setup is significantly higher than the resolution obtained with classical setups. Moreover, the improvement of the resolution seems to be more important when the object under test and/or the background media are lossy.

We also propose a new configuration which takes advantage of the properties of the dielectric waveguides. This setup allows to perform measurements in the air region rather than in a matching liquid (as it is done with classical setups). We show that the main limitation of this configuration comes from the fact that a relatively small number of illuminations can be generated. However, results on synthetic data show that, for equivalent number of illuminations and compression level, the dielectric waveguide configuration is as efficient as setups using a matching media. This opens the door to the development of more compact setups.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	viii
ABSTRACT	xi
TABLE DES MATIÈRES	xiv
LISTE DES TABLEAUX	.xviii
LISTE DES FIGURES	xx
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES	.xxvii
LISTE DES ANNEXES	.xxxi
 1 INTRODUCTION	 1
1.1 Imagerie micro-ondes	1
1.2 Application visée	3
1.3 Différentes approches en imagerie micro-ondes active	4
1.4 Difficultés et limites de la tomographie micro-ondes	5
1.5 Objectifs	6
1.5.1 Aspects algorithmiques	6
1.5.2 Montage de mesures	7
1.6 Cadre du travail	7
1.7 Division de la thèse	8
1.7.1 Contributions	10

2	MÉTHODES D'INVERSION EN TOMOGRAPHIE MICRO- ONDES	11
2.1	Domaine temporel vs domaine fréquentiel	11
2.2	Mise en équations dans le domaine fréquentiel	12
2.3	Choix de la paramétrisation	16
2.4	Méthodes de résolution	18
2.4.1	Linéarisation du problème	18
2.4.2	Méthodes non-linéaires	20
2.4.2.1	Méthodes d'optimisation globales	20
2.4.2.2	Méthodes d'optimisation locales	21
2.4.2.2.1	Méthodes de type Born itératives distordues	22
2.4.2.2.2	Méthodes CSI	24
2.5	Méthode retenue	24
2.6	2-D vs 3-D	25
3	ANALYSE ET GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE <i>CON- TRAST SOURCE INVERSION</i>	27
3.1	Fondements de la méthode CSI	28
3.2	Optimisation sous contraintes	29
3.2.1	Explicitation de la contrainte	29
3.2.2	Pénalisation quadratique	30
3.2.3	Pénalisation ℓ_1	31
3.2.4	Lagrangien augmenté	32
3.2.5	Approche de la méthode CSI	32
3.3	Schémas d'optimisation	33
3.4	Gradients conjugués	34
3.5	Méthodes CSI	36
3.6	Conclusion	36

3.7	Nomenclature	37
4	MÉTHODES <i>CONTRAST FIELD SOURCE INVERSION</i> . .	38
4.1	Goulot d'étranglement attaqué	38
4.2	Cas Toeplitz-bloc-Toeplitz	39
4.3	Méthodes CFSI	42
4.4	Analyse	42
4.4.1	Cas général	43
4.4.2	Cas TBT	44
5	MÉTHODES BASÉES SUR DES FORMULATIONS APPROXI- MATIVES	47
5.1	Goulots d'étranglement attaqués	48
5.2	Théorème des surfaces équivalentes	49
5.3	Méthodes basées sur des formulations approximatives	50
5.4	Analyse	50
5.4.1	Valeur optimale de P	50
5.4.2	Formulation Truncated- G_c	52
5.4.3	Formulation V-basis	54
6	PROPOSITION D'UN MONTAGE DE MESURES ORIGINAL	56
6.1	Montages existants	56
6.2	Qualités recherchées d'un montage de mesures	58
6.3	Relation entre la configuration du montage de mesures et la résolution de l'image reconstruite	59
6.3.1	Déduction intuitive	59
6.3.2	Configuration <i>compression+liquide</i>	61
6.4	Mesures dans l'air	62
6.4.1	Propriétés des guides d'ondes diélectriques	63

6.4.2	Proposition d'un tomographe de type guide d'ondes diélectrique	66
6.4.3	Limites du montage proposé	67
6.5	Résultats	68
6.5.1	Configuration <i>compression+liquide</i>	69
6.5.2	Tomographe de type guide d'ondes	75
6.6	Analyse et perspectives	77
7	CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	84
7.1	Algorithmes proposés	84
7.2	Montage de mesures	87
7.3	Perspectives	89
7.3.1	Algorithmes	89
7.3.1.1	Caractérisation des performances	89
7.3.1.2	Améliorations des méthodes proposées	90
7.3.1.2.1	Gradient conjugué groupé	90
7.3.1.2.2	Méthode CFSI utilisant une formulation ap- proximative	91
7.3.1.2.3	Nouvelles bases de projection des courants .	91
7.3.1.2.4	Méthode Born itérative distordue de type V- basis	92
7.3.1.2.5	Régularisation non quadratique	93
7.3.1.2.6	Méthodes de choix non supervisées des fac- teurs de poids	94
7.3.1.2.7	Mise en œuvre	94
7.3.2	Montage de mesures	94
	ANNEXES	109

LISTE DES TABLEAUX

Tab. 6.1	Erreurs quadratiques des solutions obtenues pour les cas avec et sans pertes et pour chacune des configurations.	72
Tab. 6.2	Comparaison des erreurs quadratiques moyennes selon le nombre d'émetteurs utilisés et le type de configuration.	76
Tab. 7.1	Caractéristiques des méthodes d'inversion étudiées ou proposées	88
Tab. I.1	Implementation of the CSI method according to [Abubakar et van den Berg (2001)]	117
Tab. I.2	Alternated conjugate gradient for CSI algorithm	125
Tab. I.3	Preconditioned conjugate gradient algorithm in the case of a complex-valued unknown vector	127
Tab. I.4	Linear conjugate gradient algorithm in the case of a complex-valued unknown vector	141
Tab. I.5	Nonlinear Polak-Ribière-Polyak conjugate gradient algorithm in the case of a complex-valued unknown vector	142
Tab. II.1	Alternated conjugate gradient for CSI algorithm according to [Barrière et al. (2008c)].	156
Tab. II.2	Novel CFSI algorithm	160
Tab. II.3	Preconditioned CFSI algorithm	166
Tab. II.4	Comparison of the computation time (in seconds) of preconditioned CFSI (P-CFSI) and alternated conjugate gradient for CSI (ACG-CSI) methods for all tested objects.	170
Tab. II.5	Linear preconditioned conjugate gradient algorithm in the case of a complex-valued unknown vector	175
Tab. III.1	Comparison between the three proposed formulations	189
Tab. III.2	Δ_y for different values of P and for both proposed formulations. Square cylinder object.	193

Tab. III.3	Δ_x and computation time for different values of P and for both approximative formulations. <i>Square cylinder object</i> and <i>circular cylinder object</i>	195
Tab. III.4	Computation time and Δ_x for all formulations and all objects under test.	196

LISTE DES FIGURES

Fig. 1.1	Coupes 2-D de montages typiques utilisés en imagerie micro-ondes active : (a) détection du cancer du sein, (b) géosciences, configuration <i>classique</i> , (c) géosciences, configuration <i>cross bore-hole</i>	2
Fig. 1.2	Mammographe à rayons X.	3
Fig. 5.1	Évolution de δ_p en fonction de p pour différentes tailles de problèmes et de domaines D	51
Fig. 6.1	Coupe 2-D dans le plan $y-z$ du montage présenté dans [Meaney et al. (2000)]	57
Fig. 6.2	Montage constitué de deux sources filamenteuses, espacées d'une distance d électriquement petite, et de capteurs distribués sur un axe parallèle à x , situé à une hauteur $y = R$	60
Fig. 6.3	Différence relative entre le champ électrique produit par le système de deux sources et celui produit par la source unique, pour différentes valeurs de R	61
Fig. 6.4	Montage <i>compression+liquide</i>	62
Fig. 6.5	Montage "idéal" sans liquide d'adaptation	63
Fig. 6.6	Guide d'ondes diélectrique	64
Fig. 6.7	Phénomènes de fuite se produisant lorsqu'un champ incident rencontre une inhomogénéité dans un guide diélectrique.	65
Fig. 6.8	Tomographe de type guide d'ondes diélectrique.	66
Fig. 6.9	Configurations testées : (a) aucune compression, (b) compression d'un facteur 2, (c) compression d'un facteur 4.	70

Fig. 6.10	Pour chacun des niveaux de compression, les émetteurs-récepteurs sont positionnés sur le périmètre d'un cylindre rectangulaire situé à une distance Δ_d de la frontière entre le sein et le milieu ambiant.	70
Fig. 6.11	Partie réelle des contrastes sur D' pour le cas sans pertes : (a) contraste original, (b) contraste reconstruit sans compression, (c) contraste reconstruit avec compression d'un facteur 2, (d) contraste reconstruit avec compression d'un facteur 4.	72
Fig. 6.12	Partie réelle des contrastes sur D' pour le cas avec pertes : (a) contraste original, (b) contraste reconstruit sans compression, (c) contraste reconstruit avec compression d'un facteur 2, (d) contraste reconstruit avec compression d'un facteur 4.	73
Fig. 6.13	Opposé de la partie imaginaire des contrastes sur D' pour le cas avec pertes : (a) contraste original, (b) contraste reconstruit sans compression, (c) contraste reconstruit avec compression d'un facteur 2, (d) contraste reconstruit avec compression d'un facteur 4.	74
Fig. 6.14	Partie réelle des contrastes reconstruits pour le cas avec pertes sur l'ensemble du domaine D : (a) sans compression, (b) avec compression d'un facteur 2, (c) avec compression d'un facteur 4.	75
Fig. 6.15	Partie réelle des contrastes reconstruits sur le domaine D' pour le cas sans pertes : (a) <i>compression+liquide</i> avec $N = 48$, (b) <i>compression+liquide</i> avec $N = 8$, (c) configuration guide d'ondes avec $N = 8$	78
Fig. 6.16	Partie réelle des contrastes reconstruits sur le domaine D' pour le cas avec pertes : (a) <i>compression+liquide</i> avec $N = 48$, (b) <i>compression+liquide</i> avec $N = 8$, (c) configuration guide d'ondes avec $N = 8$	78

Fig. 6.17	Opposé de la partie imaginaire des contrastes reconstruits sur le domaine D' pour le cas avec pertes : (a) <i>compression+liquide</i> avec $N = 48$, (b) <i>compression+liquide</i> avec $N = 8$, (c) configuration guide d'ondes avec $N = 8$	79
Fig. 6.18	Partie réelle des contrastes reconstruits sur le domaine D pour le cas avec pertes : (a) <i>compression+liquide</i> avec $N = 48$, (b) <i>compression+liquide</i> avec $N = 8$, (c) configuration guide d'ondes avec $N = 8$	79
Fig. 7.1	Énergie du champ électrique produit dans D par chacun des éléments de la bases $\mathcal{V}$ et de celle de Fourier.	92
Fig. I.1	Typical microwave tomography setup	113
Fig. I.2	(a) Real and (b) minus the imaginary parts of the contrast of the <i>small square cylinders object</i> . The <i>large square cylinder object</i> has the same shape but all contrast values are multiplied by a factor of 3. The x and y axes are indexed by the sample number.	129
Fig. I.3	Real part of the contrast of the <i>circular cylinder object</i> . The imaginary part is zero. The x and y axes are indexed by the sample number.	130
Fig. I.4	Modulus of $\hat{x}$ minimizing F with $\lambda = \lambda_{\text{CSI}}$ and $\lambda_r = 0$. <i>Large square cylinder object</i> . The x and y axes are indexed by the sample number.	131
Fig. I.5	Magnitude of total E-field (in V/m) for the degenerate solution presented in Fig. I.4. Illuminations (a) 1 and (b) 5. The field vanishes for all pixels k such that $ \hat{x}_k \rightarrow \infty$. The x and y axes are indexed by the sample number.	131

Fig. I.6	Effect of the weight factor λ on the solution quality (mean square error) and on the computation time. The <i>small square cylinder object</i> was used with the <i>alternated conjugate gradient for CSI</i> method.	132
Fig. I.7	<i>Small square cylinder object</i> , real part of the reconstructed contrast : (a) Unregularized criterion, optimization stopped at convergence, (b) unregularized criterion, optimization stopped before convergence, (c) regularized criterion, optimization stopped at convergence. The x and y axes are indexed by the sample number.	133
Fig. I.8	Evolution of norm of the gradient with respect to $\mathbf{x}$ for the CSI method when (-) a gradient approximation is used to calculate update directions and when (- -) no approximation is used. Remark : the plotted quantity is the exact value of the norm of the gradient, not its approximation.	134
Fig. I.9	Evolution of F as a function of time for CSI and <i>alternated conjugate gradient for CSI</i> (ACG) schemes : (a) <i>small square cylinder object</i> , (b) <i>circular cylinder object</i> . The same criterion, with $\lambda = 0.01$ and $\lambda_r = 0.001$, was used for both methods. . . .	134
Fig. I.10	Evolution of F as a function of time for : <i>alternated conjugate gradient for CSI</i> (ACG) algorithm with scaling 1, preconditioned conjugate gradient (PCG) algorithm with scaling 1, unpreconditioned conjugate gradient (CG) algorithm with scaling 1 and unpreconditioned conjugate gradient algorithm with scaling 2. For preconditioned conjugate gradient and <i>alternated conjugate gradient for CSI</i> algorithms, the results are identical for scalings 1 and 2. (a) <i>small square cylinder object</i> , (b) <i>circular cylinder object</i>	136

Fig. I.11	Real parts of the contrasts of objects under test tested in [Belkebir et Saillard (2001)]. (a) <i>One cylinder object</i> (b) <i>two cylinder object</i> . Both objects under test have a purely real contrast. . . .	136
Fig. I.12	Evolution of Δ_x in function of time for CSI algorithm, <i>alternated conjugate gradient for CSI</i> (ACG) method and preconditioned conjugate gradient (PCG) algorithm. $\lambda = \lambda_{\text{CSI}}$ for the CSI method. For <i>alternated conjugate gradient for CSI</i> and preconditioned conjugate gradient methods : (a) λ equal the final value of λ_{CSI} , (b) λ set heuristically. Data from [Belkebir et Saillard (2001)].	138
Fig. II.1	(a) Real and (b) minus the imaginary parts of the contrast of the <i>square cylinder object</i> . The x and y axes are indexed by the sample number.	167
Fig. II.2	Real part of the contrast of the <i>circular cylinder object</i> . The imaginary part is zero. The x and y axes are indexed by the sample number.	167
Fig. II.3	Real parts of the contrasts of objects under test tested in [Belkebir et Saillard (2001)]. (a) <i>one cylinder object</i> (b) <i>two cylinder object</i> . Both objects under test have a purely real contrast. . . .	168
Fig. II.4	Evolution of the mean square error as a function of time for preconditioned CFSI (P-CFSI) and <i>alternated conjugate gradient for CSI</i> (ACG-CSI) methods. <i>Square cylinder object</i> . (a) <i>best solution case</i> , (b) <i>fast solution case</i>	169
Fig. II.5	Evolution of the mean square error as a function of time for preconditioned CFSI (P-CFSI) and <i>alternated conjugate gradient for CSI</i> (ACG-CSI) methods. <i>One cylinder object</i> . (a) <i>best solution case</i> , (b) <i>fast solution case</i> . Data from [Belkebir et Saillard (2001)].	170

Fig. II.6	<i>Circular cylinder object</i> , real part of the reconstructed contrasts for the <i>best solution</i> cases : (a) preconditioned CFSI (b) <i>alternated conjugate gradient for CSI</i> . The x and y axes are indexed by the sample number.	171
Fig. II.7	<i>Two cylinder object</i> , real part of the reconstructed contrasts for the <i>best solution</i> cases : (a) preconditioned CFSI (b) <i>alternated conjugate gradient for CSI</i> . The x and y axes are indexed by the sample number. Data from [Belkebir et Saillard (2001)].	171
Fig. II.8	Evolution of Δ_F as a function of the number of iterations. <i>Square cylinder object</i> , <i>best solution case</i>	172
Fig. II.9	Evolution of δ_p as a function of p for a typical set of weight factors λ_1 and λ_2	172
Fig. III.1	(a) real (b) and minus the imaginary parts of the contrast of the <i>square cylinder object</i> . The x and y axes are indexed by the sample number.	191
Fig. III.2	Real part of the contrast of the <i>circular cylinder object</i> . The imaginary part is set to zero. The x and y axes are indexed by the sample number.	191
Fig. III.3	Real parts of the contrasts of objects tested in [Belkebir et Saillard (2001)]. (a) <i>one cylinder object</i> (b) <i>two cylinder object</i> . Both objects have a purely real contrast.	192
Fig. III.4	Amplitude of the expected measured scattered field for classical formulation, for the Truncated- G_c formulation and for the V-basis formulation ; illumination 1, <i>square cylinder object</i> , $P = 50$.	193
Fig. III.5	Evolution of Δ_x as a function of time for different values of P . (a) Truncated- G_c formulation, (b) V-basis formulation ; <i>circular cylinder object</i>	194

- Fig. III.6 Evolution of Δ_x as a function of time for all presented formulations. (a) *square cylinder object*, (b) *circular cylinder object*, (c) *single cylinder object*, (d) *two cylinder object*. For (c) and (d) data are from [Belkebir et Saillard (2001)]. 196
- Fig. III.7 Reconstructed contrasts for the *square cylinder object*. Real part on the left side and minus the imaginary part on the right side. (a) Classical formulation, (b) Truncated- G_c formulation, (c) V-basis formulation. The x and y axes are indexed by the sample number. 197
- Fig. III.8 Reconstructed contrasts for the *two cylinder object*. Real part on the left side and minus the imaginary part on the right side. (a) Classical formulation, (b) Truncated- G_c formulation, (c) V-basis formulation. The x and y axes are indexed by the sample number. Data from [Belkebir et Saillard (2001)]. 198

LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

D :	Domaine imagé dans une expérience de tomographie micro-ondes
D' :	Sous-domaine de D
$\mathbf{D}$:	Matrice de régularisation
$\mathcal{E}$:	Champ électrique total
$\mathcal{E}^0$:	Champ électrique incident
$\mathcal{E}^s$:	Champ électrique diffusé
$\mathbf{E}$:	Champ électrique total discrétisé
$\mathbf{E}$:	Matrice définie par $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_M)$
$\mathbf{E}^0$:	Champ électrique incident discrétisé
f :	Critère d'optimisation pour un problème général
F :	Critère d'optimisation utilisé en tomographie micro-ondes
F_{CSI} :	Critère d'optimisation relié à la méthode CSI
G :	Fonction de Green
$\mathbf{G}_c$:	Matrice de couplage (matrice de Green)
$\mathbf{G}_o$:	Matrice d'observation (matrice de Green)
$\mathbf{I}$:	Matrice identité
$\mathcal{J}$:	Courants électriques équivalents
j :	Unité imaginaire
$\mathbf{k}$:	Vecteur défini comme la projection d'un vecteur $\mathbf{w}$ sur la base $\mathcal{V}$
M :	Nombre d'éclairages
N :	Nombre de récepteurs
N_m :	Nombre de modes guidés dans un guide diélectrique
n :	Nombre de points de discrétisation
$\mathbf{n}_i^o$:	Vecteur de bruit

P :	Nombre de valeurs propres ou de valeurs singulières considérées dans les formulations <i>preconditioned CFSI</i> , Truncated- G_c et V-basis
$\mathbf{P}$:	Préconditionneur
$\mathbf{p}$:	Vecteur de direction de descente associé à un algorithme d'optimisation locale
$\mathbf{r}$:	Vecteur de position
$\mathbf{U}$:	Matrice de vecteurs propres ou de vecteurs singuliers
$\mathbf{u}$:	Vecteurs propres ou singuliers
$\mathbf{V}$:	Matrice de vecteurs singuliers
$\mathbf{v}$:	Vecteurs propres ou singuliers
$\mathbf{W}$:	Matrice définie par $\mathbf{W} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_M)$
$\mathbf{w}$:	Courants équivalents discrétisés
$\mathbf{X}$:	Matrice de contraste définie par $\mathbf{x} = \text{diag}\{\mathbf{X}\}$
$\mathbf{x}$:	Contraste discrétisé
$\mathbf{y}$:	Vecteur de mesures
α :	Longueur de pas associé à un algorithme d'optimisation locale
β :	Facteur de mélange menant à la direction de descente dans les algorithmes de gradients conjugués
Δ :	Matrice définie par $\Delta = \text{diag}\{\delta\}$
$\Delta_{\mathbf{x}}$:	Erreur quadratique moyenne commise sur le contraste reconstruit
$\Delta_{\mathbf{y}}$:	Erreur quadratique moyenne commise sur le champ diffusé au niveau des récepteurs
δ :	Vecteur de valeurs propres ou singulières
δ :	Valeur propre ou singulière
ϵ :	Permittivité complexe

ϵ' :	Permittivité
ϵ_0 :	Permittivité du vide
ϵ_r :	Permittivité relative
θ :	Coefficient de surrelaxation
λ_0 :	Longueur d'onde dans l'air
$\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_{\text{CSI}}$:	Facteurs de poids
λ_r :	Facteur de régularisation
μ_0 :	Perméabilité du vide
σ :	Conductivité
ϕ :	Fonction de régularisation
χ :	Contraste
ω :	Fréquence angulaire

INDICES et EXPOSANTS

$i = 1, \dots, M$: Numéro de l'éclairage utilisé

ℓ : Numéro de l'itération

$p = 1, \dots, n$: Indice associé aux valeurs propres de $\mathbf{H}_w^{-1}$ ou aux valeurs singulières de $\mathbf{G}_c$

ACRONYMES

ACG :	Alternated conjugate gradient
BID :	Born itérative distordue
CFSI :	Contrast field source inversion
CG :	Conjugate gradient
CSI :	Contrast source inversion
IRX :	Imagerie à rayons X

IMA :	Imagerie micro-ondes active
PCG :	Preconditioned conjugate gradient
OST :	Objet sous test
SVD :	Singular value decomposition
TBT :	Toeplitz-bloc-Toeplitz
TM :	Transverse magnétique
TMO :	Tomographie micro-ondes

LISTE DES ANNEXES

I	ON ALGORITHMS BASED ON JOINT ESTIMATION OF CUR- RENTS AND CONTRAST IN MICROWAVE TOMOGRAPHY	109
I.1	Abstract	109
I.2	Introduction	109
I.3	Context	112
I.4	Analysis of the CSI method	115
I.4.1	Background results on CSI	115
I.4.2	Pitfalls of the CSI method	116
I.4.2.1	Criterion	116
I.4.2.2	Optimization scheme	118
I.5	Proposed algorithms	119
I.5.1	Weight factor	119
I.5.2	Regularization	120
I.5.3	Optimization algorithms	122
I.5.3.1	Alternated conjugate gradient method	122
I.5.3.2	Simultaneous update algorithm	124
I.6	Results	128
I.6.1	Criterion characteristics	130
I.6.2	Optimization process	132
I.6.3	Experimental data	135
I.7	Conclusion	138
I.8	Appendices	139
I.8.1	Proof of the degeneracy of minimizers of $F_{\text{CSI}} = F_1 + \lambda_{\text{CSI}} F_2$.	139
I.8.2	Conjugate gradient algorithms for complex unknown values . .	140

I.8.3	Optimal step length calculation for simultaneous optimization schemes	141
I.8.4	Expression of preconditioner $\mathbf{P}$	144
II	CONTRAST FIELD SOURCE INVERSION FOR FASTER RE-CONSTRUCTION IN MICROWAVE TOMOGRAPHY . . .	145
II.1	Abstract	145
II.2	Introduction	145
II.3	CONTEXT	149
II.4	CSI-like algorithms	151
II.4.1	Criterion	151
II.4.2	Optimization algorithm	153
II.5	CFSI algorithm	155
II.6	A preconditioned CFSI method	161
II.6.1	Toeplitz-block-Toeplitz structure of $\mathbf{G}_c$	161
II.6.2	Preconditioned conjugate gradient algorithm	162
II.6.3	Preconditioner choice	163
II.6.4	Preconditioned CFSI method	165
II.7	Results	165
II.8	Conclusion	173
II.9	Appendices	174
II.9.1	Preconditioned conjugate gradient algorithm	174
III	NEW APPROXIMATE FORMULATIONS FOR FAST INVERSION OF HIGHLY NONLINEAR PROBLEMS IN MICROWAVE TOMOGRAPHY	176
III.1	Abstract	176
III.2	Introduction	176
III.3	CSI-like methods	179

III.3.1	Formulation of the microwave tomography experiment	179
III.3.2	Optimization problem	181
III.3.3	Pitfalls of the optimization criterion	182
III.4	Two alternative formulations	182
III.4.1	Truncated-SVD approximation of $\mathbf{G}_c$	183
III.4.2	Alternative vector basis for the representation of contrast sources	185
III.4.3	Comparison of the proposed criteria	188
III.5	Minimization schemes	189
III.6	Results	190
III.6.1	Forward Problem	191
III.6.2	Inverse Problem	193
III.7	Conclusions	197
III.8	Appendices	199
III.8.1	Used preconditioners	199

INTRODUCTION

L'imagerie se définit comme toute "technique permettant d'obtenir des images à partir de différents types de rayonnements ¹". Dans le domaine biomédical, une grande variété de ces techniques sont utilisées au niveau clinique. Mentionnons par exemple l'imagerie ultra-sonore, l'imagerie à rayons X (IRX) et l'imagerie par résonance magnétique. Bien que relativement efficaces dans les champs d'applications qui leur sont réservés, chacune de ces méthodes présente certains points faibles (coût, résolution de l'image, méthode invasive, etc.) qui motivent la recherche de nouvelles avenues. Parmi celles-ci, on retrouve la tomographie d'impédance, l'élastographie et l'imagerie micro-ondes active (IMA), à laquelle nous nous intéressons dans le cadre de cette thèse.

1.1 Imagerie micro-ondes

Différentes approches ont été proposées afin d'exploiter l'énergie micro-ondes dans un contexte d'imagerie. On les divise usuellement en trois grandes familles : l'imagerie passive, les méthodes hybrides et l'imagerie active.

L'imagerie passive consiste essentiellement à distinguer, à l'aide d'un radiomètre micro-ondes, les différences de température entre certaines régions d'un objet sous test (OST) [Carr (1989); Xie et al. (2006)]. Du côté des méthodes hybrides, les micro-ondes sont utilisées pour chauffer certaines régions de l'OST ; les ondes de pression générées par l'extension des zones excitées étant ensuite détectées à l'aide d'un transducteur à ultra-

1. Grand dictionnaire terminologique, <http://www.granddictionnaire.com>.

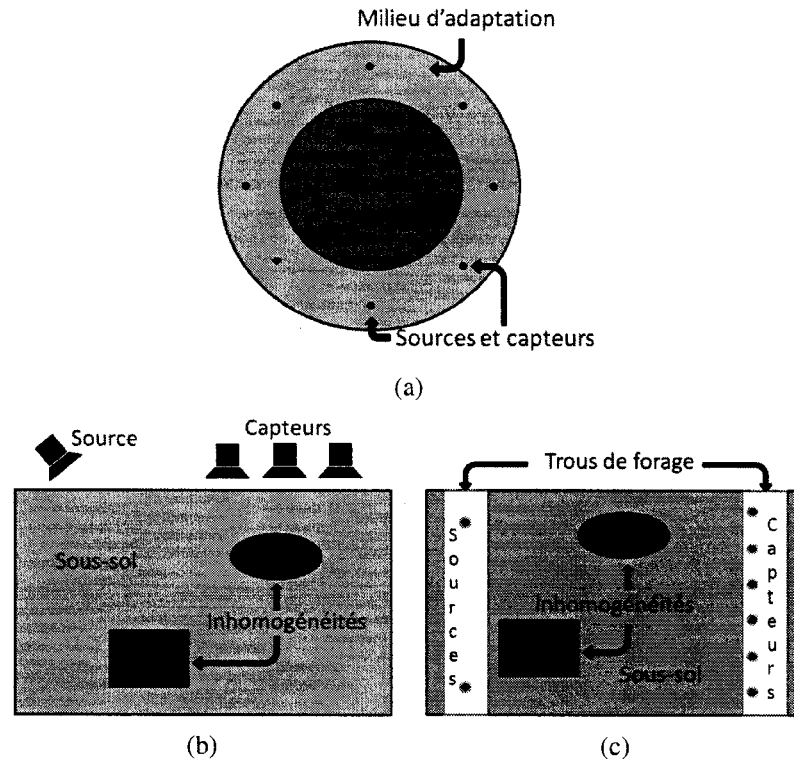


Fig. 1.1 Coupes 2-D de montages typiques utilisés en imagerie micro-ondes active : (a) détection du cancer du sein, (b) géosciences, configuration *classique*, (c) géosciences, configuration *cross bore-hole*.

sons [Wang et al. (1999); Xie et al. (2006)].

L'imagerie active, enfin, a pour objectif de reconstruire les caractéristiques internes d'un OST, éclairé par différentes sources micro-ondes, à partir du champ électromagnétique diffusé par celui-ci. Elle offre des perspectives intéressantes dans de nombreux domaines d'application. Par exemple : les géosciences, où l'objectif est de déterminer la constitution du sous-sol d'une région donnée [Jia et al. (2002); Li et al. (2004); Cui et al. (2003); Song et Liu (2005)], le contrôle non-destructif [Lam et al. (2007)], la caractérisation de matériaux [Omrane et al. (2006)] et l'imagerie biomédicale [Bolomey et al. (1982); Semenov et al. (1996, 2000, 2002, 2007)]. La figure 1.1 présente des montages typiques d'IMA.

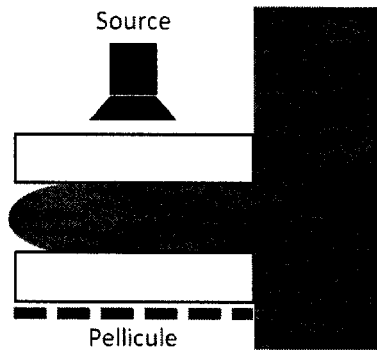


Fig. 1.2 Mammographe à rayons X.

1.2 Application visée

Le cancer du sein est un problème de santé publique important. Selon une étude publiée par l'Agence de Santé Publique du Canada en 2008 [Pogany (2008)], on prévoyait qu'au cours de cette seule année 22 400 femmes apprendraient qu'elles en étaient atteintes et que 5 300 en mourraient. Ce type de cancer est le plus fréquent et le deuxième plus meurtrier chez les Canadiennes. À ce jour, la méthode de prévention s'étant montrée la plus efficace est le dépistage au moyen de mammographies. Celles-ci sont obtenues à partir de mammographes à rayon X dont un schéma est présenté à la figure 1.2. Ces appareils sont munis de deux plaques qui compressent le sein. Une source de rayons X éclaire ce dernier et l'image est formée sur une pellicule sensible au rayonnement.

Au cours de la dernière décennie, l'application de l'IMA à la détection du cancer du sein a suscité un intérêt sans cesse grandissant [Meaney et al. (2000); Bulyshev et al. (2001); Fear et al. (2003); Meany et al. (2004); Yu et al. (2008)]. Cet intérêt est principalement justifié par les grands contrastes qui existent, aux fréquences micro-ondes, entre les propriétés électriques des tissus sains et celles des tissus pathologiques. En effet, les contrastes rencontrés peuvent être supérieurs à 100% [Lazebnik et al. (2007)] alors qu'en IRX, ils ne sont de l'ordre que de quelques pour-cent [Fhager et Persson (2005)]. Cette constatation suscite naturellement l'espoir de développer de nouveaux outils capables

d'améliorer la précision des diagnostics. C'est dans cette perspective que s'inscrivent les travaux présentés dans cette thèse.

1.3 Différentes approches en imagerie micro-ondes active

À l'heure actuelle, deux approches distinctes d'IMA sont proposées : l'imagerie confocale et la tomographie micro-ondes (TMO).

En imagerie confocale [Li et al. (2005); Xie et al. (2006)], l'OST est éclairé par une série d'impulsions larges-bandes. L'image est reconstruite en comparant le temps de parcours des signaux entre différentes paires d'émetteurs et de récepteurs. Cette approche a comme principal avantage d'être basée sur des algorithmes de reconstruction simples et rapides. De plus, l'excitation étant large-bande, une résolution relativement élevée est envisageable [Xie et al. (2006)]. Par contre, l'imagerie confocale ne permet pas de reconstruction quantitative des paramètres électriques de l'OST ; l'objectif est plutôt de déterminer la position et la taille des éventuelles inhomogénéités.

À l'opposé, l'objectif de la tomographie micro-ondes est d'estimer quantitativement les distributions de permittivité et de conductivité à l'intérieur de l'OST. De ce point de vue, les images obtenues par TMO sont plus informatives que celles obtenues par imagerie confocale. Ceci étant, et comme il en sera discuté à la section suivante, le coût algorithmique engendré par cet ajout d'information est considérable. Néanmoins, dans le cadre de l'application qui nous intéresse, la reconstruction quantitative des structures de l'OST pourrait s'avérer particulièrement intéressante en permettant, par exemple, de distinguer les natures saine ou pathologique des inhomogénéités identifiées. C'est cet avantage non négligeable qui nous a incité à opter pour la TMO.

1.4 Difficultés et limites de la tomographie micro-ondes

Le coût algorithmique souvent important nécessaire à la résolution du problème de TMO est principalement dû aux longueurs d'ondes utilisées. En effet, comme celles-ci sont du même ordre de grandeur que les structures à imager on ne peut pas recourir à une approximation de propagation en rayons comme on le fait, par exemple, en tomographie à rayons X. Une modélisation plus complexe, prenant en compte les différents effets de diffusion, est donc nécessaire. Or, les systèmes d'équations découlant de cette modélisation, présentés au prochain chapitre, sont fortement non-linéaires [Isernia et al. (2001)] et mal-posés [Paulsen (2006)] (au sens de Hadamard [Idier (2001)]). D'un point de vue pratique, ces caractéristiques ont pour principaux effets de compliquer et d'allonger fortement le processus d'inversion en plus de le rendre très sensible au bruit.

Il importe également de souligner les limites intrinsèques de la TMO (et de l'imagerie micro-ondes active en général d'ailleurs), elles-aussi liées aux longueurs d'ondes. On sait que la résolution des images obtenues par un processus d'imagerie est fonction, d'une façon souvent floue et mal maîtrisée, des longueurs d'ondes. Or en TMO, celles-ci, de l'ordre du centimètre, sont beaucoup plus grandes que celles, de l'ordre du nanomètre, utilisées en IRX. Ainsi, on ne peut en aucun cas espérer une résolution comparable à ce qui est obtenu en IRX. Ceci dit, la question consiste plutôt à déterminer si la résolution possible est suffisante pour l'application visée. Selon plusieurs [Fear et al. (2003); Meaney et al. (2000); Meaney et al. (2004)], cela serait le cas pour la détection du cancer du sein.

1.5 Objectifs

On peut diviser l'expérience de TMO en deux parties distinctes : la prise de mesures et le traitement des données permettant la reconstruction de l'image.

L'objectif global de cette thèse est de présenter une solution complète au problème de TMO dans un cadre d'application à la détection du cancer du sein. Autrement dit, de proposer à la fois un montage de mesures et différents algorithmes de reconstruction. Ceci dit, l'accent est davantage mis sur les aspects algorithmiques, les travaux relatifs au montage restant à un niveau plus embryonnaire et se limitant à des validations basées sur des modèles simplifiés et des données synthétiques.

1.5.1 Aspects algorithmiques

Plusieurs méthodes de reconstruction proposées dans la littérature s'avèrent relativement efficaces du point de vue de la qualité des images obtenues (les principales sont présentées au chapitre suivant). Toutefois, parmi celles-ci, celles pouvant être utilisées dans un contexte d'imagerie biomédicale nécessitent, étant donné la complexité du problème, des coûts de calcul très importants. À nos yeux, cette caractéristique constitue un des principaux problèmes qui, pour l'instant, éloignent la TMO de véritables applications cliniques.

Le principal sous-objectif de cette thèse est donc de développer des algorithmes permettant d'accélérer le processus d'inversion. Pour ce faire, une revue des méthodes proposées dans la littérature est effectuée et celle semblant offrir le meilleur compromis entre temps de calculs et qualité de solution est choisie comme point de départ. Une analyse en profondeur de cette méthode est réalisée afin d'identifier certaines de ses faiblesses et certains de ses goulots d'étranglement. Cela nous permet de proposer de nouvelles

méthodes, pouvant être vues comme des variations de l'algorithme original, mais évitant les pièges identifiés.

1.5.2 Montage de mesures

Contrairement aux méthodes d'inversion, très peu de concepts distincts ont été proposés en ce qui a trait aux montages de mesures. Pour la détection du cancer du sein, ceux-ci sont essentiellement constitués d'un contenant, rempli d'un liquide d'adaptation, dans lequel le sein est laissé pendant. Les émetteurs et récepteurs, placés en périphérie, sont eux aussi immergés dans le liquide.

Deux questions peuvent se poser relativement à cette configuration :

1. Quel est, du point de vue de la résolution des images reconstruites, la qualité des mesures obtenues ?
2. Pourrait-on imaginer un montage moins contraignant et encombrant, *i.e.* pourrait-on éviter d'avoir recours à un liquide d'adaptation ?

Un autre sous-objectif de la thèse est donc de proposer des réponses à ces questions et, après y avoir répondu, de proposer de nouvelles configurations issues de notre analyse.

1.6 Cadre du travail

Les travaux présentés dans cette thèse sont le fruit d'une collaboration entre l'Institut de Recherche en Communication et Cybernétique de Nantes (IRCCyN) et le département de génie électrique de l'École Polytechnique de Montréal (ÉPM). Ils sont partie intégrante d'un projet de recherche visant à implanter à l'ÉPM un système de tomographie micro-ondes. Il est intéressant de noter que cette thèse constitue, pour chacun des laboratoires, le premier travail de niveau doctoral effectué dans ce domaine.

Le problème de TMO relève autant de la communauté du traitement de signal que de celle de l'électromagnétisme. Cependant, plusieurs travaux présentés dans la littérature semblent avoir été réalisés par des équipes n'appartenant qu'à l'une de ces deux communautés. L'encadrement donné à cette thèse se veut en ce sens original, en tirant profit d'expertises provenant tant du domaine du traitement du signal que de celui de l'électromagnétisme.

1.7 Division de la thèse

Cette thèse se divise en deux parties : les chapitres 2 à 5 sont consacrés aux aspects algorithmiques et le chapitre 6 traite de la problématique liée au montage de mesures.

Le chapitre 2 dresse une liste des différentes méthodes de reconstruction proposées dans la littérature. On y met en évidence le fait que plusieurs de celles-ci ne peuvent être envisagées dans le contexte qui nous intéresse, soit parce qu'elles ne sont pas efficaces pour des contrastes de l'ordre de ceux rencontrés en imagerie biomédicale, soit parce qu'elles ont des coûts de calcul prohibitifs. Parmi les méthodes potentiellement intéressantes, celle dite *Current Source Inversion* (CSI) est retenue comme point de départ de notre travail.

Au chapitre 3 cette méthode, qui pose le problème de TMO dans le cadre de l'optimisation, est analysée en profondeur. Certaines propriétés indésirables du critère d'optimisation et de la stratégie de minimisation sont mises en évidence, puis deux nouvelles versions de la méthode sont proposées. Toutes deux sont basées sur un même critère, légèrement différent de l'original, mais utilisent des schémas de minimisation distincts. Les deux algorithmes s'avèrent à la fois plus robustes et plus rapides que la méthode originale.

Malgré les améliorations obtenues par ces généralisations de la méthode CSI, on montre, au chapitre 4, qu'un des schémas d'optimisation proposés souffre, du point de vue de la rapidité d'exécution, du fait qu'il est constitué de deux algorithmes itératifs imbriqués. On montre aussi que ce problème peut être évité en ayant recours à une nouvelle formulation de l'expérience de TMO. Deux approches complémentaires tirant profit de cette formulation sont proposées, chacune étant adaptée à certaines caractéristiques des montages utilisés. Ces méthodes permettent d'accélérer de façon sensible le processus d'inversion tout en offrant des solutions de qualité équivalente à celles des méthodes concurrentes.

Au chapitre 5, on s'attaque à deux autres points faibles des méthodes présentées au chapitre 3, soit la taille des matrices à manipuler et le nombre d'inconnues à estimer. On propose, encore une fois, deux nouvelles formulations du problème. Toutefois, contrairement au chapitre précédent, celles-ci sont basées sur des approximations. On arrive à montrer que les pertes d'information engendrées par ces approximations sont négligeables et ce même pour des problèmes ayant des contrastes élevés. Ainsi, les algorithmes d'inversion proposés permettent des reconstructions de qualité en un temps de calcul fortement diminué comparativement aux méthodes antérieures.

Au chapitre 6, comme mentionné précédemment, on s'éloigne des questions algorithmiques pour s'intéresser à la configuration du montage de mesures. On montre d'abord que la résolution des images reconstruites peut être améliorée si le champ est mesuré à proximité des inhomogénéités. À partir de cette observation, nous proposons une nouvelle configuration tirant profit de la compression du sein. Puis on montre comment on peut modifier légèrement cette dernière configuration pour obtenir un montage qui, en exploitant les propriétés des guides d'ondes diélectriques, permet d'effectuer les mesures dans l'air plutôt que dans un liquide, ce qui est d'un intérêt pratique non négligeable.

1.7.1 Contributions

En résumé, les principales contributions de ce travail sont :

1. Une version généralisée de la méthode CSI (chapitre 3).
2. Une méthode de type CSI basée sur un nouveau schéma d'optimisation (chapitre 3).
3. Une méthode de type CSI approximée (chapitre 5).
4. Deux méthodes d'inversion basées sur l'estimation du contraste, du champ électrique total et des courants équivalents (CFSI) (chapitre 4).
5. Une méthode d'inversion basée sur une nouvelle paramétrisation du problème (chapitre 5).
6. Une nouvelle configuration du système de mesures tirant profit de la compression du sein (chapitre 6).
7. Une nouvelle configuration du système de mesures de type guide d'ondes diélectrique (chapitre 6).

MÉTHODES D'INVERSION EN TOMOGRAPHIE MICRO-ONDES

Dans ce chapitre, un survol des différentes approches proposées dans la littérature pour résoudre le problème de TMO est effectué. L'objectif est de repérer celle qui, tout en étant utilisable dans un contexte biomédical, offre le meilleur compromis entre temps de calcul et qualité de solution. Avant de débiter cette revue de la littérature, les différentes mises en équations sur lesquelles sont basées les méthodes étudiées sont dérivées.

2.1 Domaine temporel vs domaine fréquentiel

Différentes formulations du problème de TMO ont été proposées et ce, tant dans le domaine temporel que fréquentiel. Comme pour l'imagerie confocale, les méthodes temporelles [Tanaka et al. (1999); Takenaka et al. (2000); Jia et al. (2002)] utilisent des impulsions larges-bandes pour illuminer l'OST. Le champ diffusé est mesuré à différents points de l'espace mais aussi à différents temps d'échantillonnage. L'inversion est ensuite basée sur des algorithmes itératifs minimisant un critère d'adéquation aux données et nécessitant, à chaque itération, la résolution du problème direct par des méthodes numériques temporelles telles que la méthode des différences finies (*FDTD*).

Dans ce travail, nous nous intéressons plutôt aux méthodes œuvrant dans le domaine fréquentiel. Dans ce cas, le signal d'excitation est une onde sinusoïdale de fréquence fixe et déterminée. À notre connaissance, ces méthodes sont plus répandues et plus faciles à mettre en œuvre, tant au niveau algorithmique que matériel.

2.2 Mise en équations dans le domaine fréquentiel

Dans une expérience de TMO l'OST, placé dans un domaine D , est éclairé de façon séquentielle par un nombre M d'émetteurs. Pour chacune des illuminations, l'amplitude complexe (amplitude et phase) du champ électrique diffusé est mesurée par N récepteurs.

L'objectif est d'estimer les distributions de permittivité (ϵ') et de conductivité (σ) à l'intérieur de D . Dans ce travail nous supposons que la perméabilité des matériaux utilisés est constante et égale à la perméabilité du vide μ_0 .

Les différentes méthodes d'inversion proposées dans la littérature sont basées sur une modélisation de l'expérience de TMO déduite du théorème des volumes équivalents [Balanis (1989)]. Selon la méthode, trois formulations sont généralement dérivées.

Remarque : Avant de poursuivre, soulignons que, dans l'ensemble de ce travail, des caractères gras italiques sont utilisés pour décrire les quantités vectorielles alors que des caractères gras et droits sont utilisés pour décrire les quantités matricielles. Les scalaires sont représentés par des caractères italiques. Mentionnons aussi que les champs électromagnétiques et les courants sont décrits par des quantités complexes dont la variation temporelle est représentée par le facteur $e^{j\omega t}$ (avec ω la fréquence angulaire, t le temps et j l'unité imaginaire). Pour alléger l'écriture, ce facteur sera omis et sous-entendu dans l'ensemble de la thèse.

Le théorème des volumes équivalents stipule que le champ diffusé par l'OST, $\mathcal{E}^s$, est égal au champ que produirait une certaine distribution de courants équivalents, $\mathbf{J}$, dans le milieu ambiant, *i.e.* en l'absence de l'OST. Ces courants sont proportionnels au produit

du contraste χ et du champ électrique total $\mathcal{E}$. Plus précisément nous avons :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = j\omega\epsilon_b\chi(\mathbf{r})\mathcal{E}(\mathbf{r}) \quad (2.1)$$

où $\mathbf{r}$ est le vecteur de position et ϵ_b la permittivité complexe du milieu ambiant (soulignons que les courants peuvent être décomposés en courants de conduction, en phase avec $\mathcal{E}$, et en courants de polarisation, en quadrature avec $\mathcal{E}$). En TMO, le contraste est la quantité d'intérêt puisqu'il est fonction des caractéristiques électriques de l'OST :

$$\chi(\mathbf{r}) = (\epsilon(\mathbf{r}) - \epsilon_b(\mathbf{r}))/\epsilon_b(\mathbf{r}) \quad (2.2)$$

où ϵ représente la permittivité complexe dans le domaine D en présence de l'OST. Notons que la permittivité complexe s'exprime comme :

$$\epsilon = \epsilon' - j\sigma/\omega \quad (2.3)$$

On peut ainsi déduire l'expression du champ diffusé en utilisant, dans l'équation de rayonnement [Stutzman et Thiele (1997)] (qui exprime le champ électrique produit par une certaine distribution de courants), les courants équivalents présentés à l'équation (2.1) :

$$\mathcal{E}^s(\mathbf{r}) = (k_b^2 + \nabla\nabla\cdot) \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\chi(\mathbf{r}')\mathcal{E}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \quad (2.4)$$

où $k_b = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_b}$ et $\nabla\nabla\cdot$ représente le gradient de la divergence. G est la fonction de Green du milieu ambiant ; dans un milieu homogène 3-D elle s'exprime comme :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp(-jk_b\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{4\pi\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \quad (2.5)$$

où $\|\cdot\|$ représente la norme vectorielle.

Cette expression du champ diffusé $\mathcal{E}^s$ peut être simplifiée si on se limite au cas bidimen-

tionnel avec un éclairage transverse magnétique (TM) *i.e.* si on suppose que toutes les quantités sont constantes selon un axe donné et que le champ électrique est parallèle à celui-ci. Dans ce cas, le second terme du membre de droite de l'équation (2.4) est nul et celle-ci peut s'exprimer de façon scalaire :

$$\mathcal{E}^s(\mathbf{r}) = k_b^2 \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \chi(\mathbf{r}') \mathcal{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.6)$$

où G , toujours dans le cas d'un milieu homogène, s'exprime comme :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{j}{4} H_0^{(2)}(k_b \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) \quad (2.7)$$

avec $H_0^{(2)}$, la fonction de Hankel de deuxième espèce et d'ordre 0. Dans ce travail, on se limitera au cas 2-D TM. La justification de ce choix est présentée à la section 2.6.

Dans (2.4) et (2.6), le champ diffusé, qui est la quantité mesurée en TMO, est exprimé en fonction du contraste et du champ total. Or le champ total, égal à la somme du champ diffusé $\mathcal{E}^s$ et du champ incident $\mathcal{E}^0$ (le champ en absence de l'OST), dépend aussi du contraste. En général, on utilise donc un système à deux équations pour décrire l'expérience de TMO. Pour le cas 2-D TM, on obtient : pour $i = 1, \dots, M$

$$\mathcal{Y}_i(\mathbf{r}_k) = k_b^2 \int_D G(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}') \chi(\mathbf{r}') \mathcal{E}_i(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \mathcal{N}_i^o(\mathbf{r}_k) \quad (2.8a)$$

$$\mathcal{E}_i(\mathbf{r}) = \mathcal{E}_i^0(\mathbf{r}) + k_b^2 \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \chi(\mathbf{r}') \mathcal{E}_i(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.8b)$$

où $\mathcal{Y}_i$ est le champ diffusé mesuré, $\mathbf{r}_k$ est le vecteur position du k^e récepteur et $\mathcal{N}_i^o$ modélise l'ensemble des perturbations rencontrées. L'indice i fait référence à la $i^{\text{ème}}$ illumination.

Après discrétisation par la méthode des moments [Harington (1982)], ce système peut

s'écrire : pour $i = 1, \dots, M$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{G}_o \mathbf{X} \mathbf{E}_i + \mathbf{n}_i^o \quad (2.9a)$$

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_i^0 + \mathbf{G}_c \mathbf{X} \mathbf{E}_i \quad (2.9b)$$

où, avec n représentant le nombre de points de discrétisation, les différentes quantités sont définies ainsi :

- $\mathbf{y}_i$ est un vecteur de longueur N contenant les mesures du champ diffusé,
- $\mathbf{E}_i$ est un vecteur de longueur n contenant une version discrétisée du champ électrique total,
- $\mathbf{E}_i^0$ est un vecteur de longueur n contenant une version discrétisée du champ électrique incident,
- $\mathbf{G}_o$ est une matrice de Green, nommée matrice d'observation, de taille $N \times n$,
- $\mathbf{G}_c$ est une matrice de Green, nommée matrice de couplage, de taille $n \times n$,
- $\mathbf{X}$ est une matrice diagonale de taille $n \times n$ définie par $\mathbf{X} = \text{diag}\{\mathbf{x}\}$,
- $\mathbf{x}$ est un vecteur de longueur n contenant une version discrétisée du contraste,
- $\mathbf{n}_i^o$ est un vecteur de bruit de longueur n contenant une version discrétisée de la quantité $\mathcal{N}_i^o$.

Un autre système d'équations, équivalent à (2.9), peut être dérivé en définissant les vecteurs de courants $\mathbf{w}_i$ comme :

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{X} \mathbf{E}_i \quad (2.10)$$

Ainsi, on peut réécrire (2.9) de la façon suivante : pour $i = 1, \dots, M$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{G}_o \mathbf{w}_i + \mathbf{n}_i^o \quad (2.11a)$$

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{X}(\mathbf{E}_i^0 + \mathbf{G}_c \mathbf{w}_i) \quad (2.11b)$$

On note que les vecteurs $\mathbf{w}_i$ sont directement reliés aux courants équivalents $\mathbf{J}$ mentionnés plus haut. On nomme (2.9a) et (2.11a) *équations d'observation* et (2.9b) et (2.11b)

équations de couplage.

Deux quantités sont inconnues dans chacun des systèmes : le contraste (qui apparaît à la fois dans (2.9) et dans (2.11)) ainsi que le champ total, dans (2.9), et les courants, dans (2.11). En couplant les équations (2.9a) et (2.9b) (ou, de façon équivalente, (2.11a) et (2.11b)) on arrive à exprimer le champ diffusé mesuré en fonction du contraste seulement :

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{G}_o \mathbf{X} (\mathbf{I} - \mathbf{G}_c \mathbf{X})^{-1} \mathbf{E}_i^0 + \mathbf{n}_i^o \quad (2.12)$$

Cette dernière équation met bien en évidence le caractère non-linéaire du problème.

De manière générale, les méthodes d'inversion proposées dans la littérature ont pour objectif de résoudre, d'une certaine manière, les systèmes (2.9), (2.11) ou (2.12).

2.3 Choix de la paramétrisation

Les formulations dérivées précédemment permettent d'exprimer le champ mesuré en fonction du contraste et/ou des courants ou du champ électrique total. Ceci dit, d'autres paramétrisations sont envisageables, le but recherché étant souvent de diminuer le nombre d'inconnues dans le système.

Ces paramétrisations alternatives nécessitent généralement des hypothèses fortes sur la nature de l'objet à imager ainsi que sur le milieu qui l'entoure. Par exemple, dans [Rekanos et Tsiboukis (2002)] on cherche à reconstruire des images binaires, *i.e.* on suppose que les caractéristiques électriques dans le domaine d'intérêt ne peuvent prendre que deux valeurs connues. Autre stratégie, dans la première partie de l'algorithme proposé dans [Jia et al. (2002)] ainsi que dans [Caorsi et Cevini (2005); Fhager et Persson (2007)], on suppose que le domaine d'intérêt est constitué d'un milieu homogène et d'un certain nombre de cylindres circulaires dont on cherche à estimer la position, le rayon

et les caractéristiques électriques. Le même genre d'approche est utilisé dans [Benedetti et al. (2005); Caorsi et al. (2004)] mais, cette fois-ci, on cherche à localiser des cylindres rectangulaires plutôt que circulaires. Les paramètres à estimer sont donc la position, la largeur, la hauteur et l'orientation.

Comme on l'a mentionné, ces techniques ont pour principal avantage de réduire, de façon souvent spectaculaire, le nombre d'inconnues à estimer (ou le domaine d'existence de ces inconnues). Cependant, elles ont aussi souvent pour effet d'augmenter la non-linéarité du problème. De plus, leur efficacité est fortement liée à la validité des hypothèses posées. Les avantages obtenus par rapport à une paramétrisation classique ne sont donc pas systématiques et doivent être évalués au cas par cas.

Appliquer ces méthodes au domaine de la détection du cancer du sein implique de supposer que le sein forme un milieu essentiellement homogène, de caractéristiques électriques probablement connues, dans lequel les tumeurs sont aussi homogènes et, selon la méthode, de formes et/ou de caractéristiques électriques connues. D'après les connaissances biologiques que nous avons du sein, ces hypothèses s'éloignent significativement de la réalité [Lazebnik et al. (2007)]. En effet, il semble que les propriétés électriques des tissus mammaires varient énormément d'une femme à l'autre et que, dû à la grande variété des tissus présents (glandes, graisse, tissu conjonctif, etc.), le sein forme tout sauf un milieu homogène. De plus, la forme d'une tumeur peut varier de façon importante d'un cas à l'autre. Il nous apparaît donc que l'utilisation de méthodes basées sur des hypothèses aussi fortes que celles présentées ci-haut sont risquées dans le cadre qui nous intéresse. Nous nous limiterons donc, dans ce travail, à des approches utilisant une paramétrisation classique et posant, de ce fait, un minimum d'*a priori* relativement à la solution recherchée.

Ceci dit, il faut mentionner que des opinions différentes de la nôtre ont aussi été exprimées, notamment dans [Fhager et Persson (2007)] où l'on présente une méthode basée

sur une paramétrisation *simplifiée* dans un contexte d'imagerie biomédicale. Considérant les données disponibles à l'heure actuelle et l'état d'avancement dans le domaine, il faut admettre qu'il nous est impossible de déterminer avec certitude laquelle des deux approches serait la plus efficace dans un cas pratique. Il nous semble donc sain que ces méthodes continuent d'évoluer en parallèle en attendant d'en savoir plus sur la nature réelle des choses.

2.4 Méthodes de résolution

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la nature non-linéaire et mal posée du problème de TMO complique de façon non négligeable le processus d'inversion. Afin de faciliter les choses, une variété d'approximations et d'hypothèses simplificatrices sont possibles. Ainsi, plusieurs méthodes ont été proposées offrant différents compromis entre complexité algorithmique (reliée à la rapidité du processus d'inversion) et robustesse (*i.e.* la capacité de mener à des reconstructions de qualité pour une large gamme de problèmes).

2.4.1 Linéarisation du problème

D'un côté du spectre on retrouve les méthodes basées sur une linéarisation du problème. La première de celles-ci est sans doute la méthode de Born [van den Berg et Abubakar (2002); Carfantan (1996)] qui consiste à approximer le champ total comme étant égal au champ incident (on suppose en fait que la perturbation de l'OST sur le champ total est négligeable). L'équation (2.9a) devient alors :

$$y_i = \mathbf{G}_o \mathbf{X} E_i^0 + n_i^o \quad (2.13)$$

Le contraste peut ainsi être estimé à faible coût en résolvant cette dernière équation, linéaire, au sens des moindres carrés ou des moindres carrés régularisés [Idier (2001)]. Ceci étant, le domaine de validité de l'approximation de Born est réduit et celle-ci ne peut être utilisée que pour des contrastes faibles et/ou petits [Carfantan (1996)].

La robustesse d'une telle approche peut être quelque peu améliorée en utilisant une version itérative [Li et al. (2004); van den Berg et Abubakar (2002); Carfantan et Djafari (1997)]. L'idée est de résoudre d'abord l'équation (2.13) puis d'utiliser le contraste obtenu pour faire une nouvelle estimation du champ total en résolvant (2.9b). Cette nouvelle valeur de champ total est ensuite utilisée dans (2.9a) pour remettre à jour la valeur du contraste et ainsi de suite. Le domaine de validité de cette méthode, bien qu'étant plus grand que celui obtenu avec l'approximation de Born, reste très limité.

D'autres propositions de linéarisation du problème ont aussi été faites. Mentionnons l'approximation de Born étendue (*extended Born approximation*) et l'approximation par tenseur diagonal (*diagonal tensor approximation*) [Song et Liu (2004, 2005); Yu et al. (2005)]. Bien que celles-ci s'avèrent plus précises que l'approximation de Born, elles sont, elles aussi, non valides pour des contrastes importants. Il en va de même pour la méthode présentée dans [Abubakar et van den Berg (2004)] qui est un croisement entre la méthode de Born et la méthode CSI, introduite au paragraphe 2.4.2.2.2.

Une autre approche, qui se distingue par son originalité et qui peut également être interprétée comme une méthode de linéarisation, est la *Chirp-Pulse Microwave Computed Tomography* [Bertero et al. (2000); Fhager et Persson (2005)]. L'idée est de prétraiter les signaux mesurés (dans le domaine temporel) afin de n'en conserver que les composantes qui ont traversé l'OST en ligne droite. Par la suite, le problème peut être traité de la même manière qu'un problème de tomographie à rayons X (qui est linéaire sous certaines hypothèses). Il faut cependant noter que les images ainsi reconstruites ne peuvent pas apporter d'informations quantitativement interprétables.

Tout cela étant dit, le point important à noter dans le cadre de notre travail est qu'aucune de ces méthodes n'est efficace pour des contrastes de l'ordre de ceux rencontrés dans le domaine biomédical, typiquement situés entre 1 et 5. On doit donc se tourner vers des méthodes prenant mieux en compte le caractère non-linéaire du problème.

2.4.2 Méthodes non-linéaires

Les méthodes non-linéaires que nous présentons dans cette section formulent le problème de TMO dans le cadre de l'optimisation. Autrement dit, de façon très générale, on choisit comme solution la quantité $\hat{v}$ minimisant un certain critère $f(v)$ ¹ :

$$\hat{v} = \underset{v}{\operatorname{argmin}} f(v) \quad (2.14)$$

Les approches proposées varient essentiellement selon la forme du critère utilisé et selon l'algorithme d'optimisation appliqué. En fait, on peut diviser les différentes méthodes en deux grandes familles selon qu'elles sont basées sur des algorithmes d'optimisation globaux ou locaux.

2.4.2.1 Méthodes d'optimisation globales

Les méthodes de minimisation globales assurent que la solution obtenue correspond bien à un minimum global du critère (qui se définit par opposition aux minima locaux [Nocedal et Wright (1999)]). De ce fait, ces approches semblent particulièrement adaptées au domaine de la TMO. En effet, les critères déduits de formulations non-linéaires, comme

1. Il serait plus juste de définir $\hat{v}$ comme $\hat{v} \in \operatorname{argmin}_v f(v)$, toutefois, pour des raisons de simplicité, nous supposons dans le cadre de ce travail que les fonctions à minimiser ne possèdent qu'un seul minimum global.

c'est le cas ici, sont susceptibles d'être multimodaux (*i.e.* de posséder des minima locaux).

Dans [Garnero et al. (1991)], un algorithme de recuit simulé est proposé pour minimiser un critère d'adéquation aux données, ce qui revient à résoudre (2.12) au sens des moindres carrés. Dans [Caorsi et al. (2004); Benedetti et al. (2005); Massa et al. (2005)] on utilise plutôt des algorithmes génétiques avec un critère formé par la somme pondérée des erreurs commises sur (2.9a) et (2.9b). Dans [Donelli et Massa (2005); Donelli et al. (2005)], enfin, le même genre de critère est utilisé mais avec un algorithme nommé *particle swarm optimizer*.

Bien que robustes du point de vue de la solution obtenue, ces méthodes nécessitent un coût de calcul qui augmente très rapidement avec le nombre d'inconnues à estimer. Or, pour des tailles de problèmes réalistes dans le champ d'application visé, ce coût de calcul est fortement prohibitif.

2.4.2.2 Méthodes d'optimisation locales

En comparaison aux méthodes globales, le coût de calcul associé aux méthodes d'optimisation locales est relativement faible. Par contre, seule la convergence vers un minimum local est garantie, *i.e.* on risque de ne pas identifier le (ou un des) véritable(s) minimiseur(s) du critère. L'utilisation de ces méthodes en TMO peut donc paraître risquée. Néanmoins, l'expérience montre que, pour bon nombre de cas réalistes, les méthodes locales convergent vers des solutions acceptables. C'est ce qui explique leur grande popularité dans le domaine.

En se référant à la notation de (2.14), le principe des méthodes d'optimisation locales est de générer, à chaque itération k , une direction de descente $\mathbf{p}^k$ et une longueur de pas α^k

telles que :

$$\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{v}^k + \alpha^k \mathbf{p}^k \quad (2.15)$$

et

$$f(\mathbf{v}^{k+1}) < f(\mathbf{v}^k) \quad (2.16)$$

La convergence est obtenue lorsque le gradient du critère par rapport à $\mathbf{v}$ est nul ($\nabla_{\mathbf{v}} f = 0$) ou, dans la pratique, lorsque ce gradient est inférieur à un seuil acceptable.

Deux principales approches basées sur une minimisation locale du critère ont été proposées en tomographie micro-ondes : les méthodes de type Born itératives distordues (BID) et celles de type *current source inversion*.

2.4.2.2.1 Méthodes de type Born itératives distordues Tout comme la méthode de Born itérative et ses variantes, présentées à la section 2.4.1, les méthodes BID [Chew et Wang (1990); Li et al. (2004); Yu et al. (2008)] sont basées sur des linéarisations successives. Toutefois, les linéarisations proposées sont *meilleures* que celle faite par l'approximation de Born [Carfantan et Djafari (1997)] (elles sont en fait égales à l'approximation de Taylor d'ordre 1). De plus, ces méthodes peuvent être développées dans le cadre de la théorie de l'optimisation et leur convergence peut être garantie sous certaines conditions [Carfantan et Djafari (1997)].

Il a également été montré [Franchois et Pichot (1997); Remis et van den Berg (2000); Carfantan et Djafari (1997)] que la méthode Newton-Kantorovich [Joachimowicz et al. (1991, 1998); Souvorov et al. (1998); Semenov et al. (2005)], inspirée des travaux de Roger [Roger (1981)], et la méthode Levenberg-Marquardt [Franchois et Pichot (1997); Bandyopadhyay et al. (2005); Paulsen (2002)] sont équivalentes à la méthode BID.

Pour toutes ces méthodes, donc, l'objectif est d'estimer le contraste $\hat{\mathbf{x}}$ minimisant un certain critère $f_{\text{BID}}(\mathbf{x})$. Celui-ci est une mesure de l'écart entre les données et la solution

du problème direct. Par exemple :

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} f_{\text{BID}}(\mathbf{x}) \quad (2.17a)$$

$$f_{\text{BID}}(\mathbf{x}) = \sum_i \|\Delta_{\mathbf{y}_i}\|^2 \quad (2.17b)$$

$$\Delta_{\mathbf{y}_i} = \mathbf{y}_i - \mathbf{G}_o \mathbf{X} (\mathbf{I} - \mathbf{G}_c \mathbf{X})^{-1} \mathbf{E}_i^0 \quad (2.17c)$$

La direction de descente est obtenue par l'équation suivante :

$$(\mathbf{H}^{k\dagger} \mathbf{H}^k + \lambda_D \mathbf{I}) \mathbf{p}^k = \mathbf{H}^{k\dagger} \Delta_y^k \quad (2.18)$$

où $\cdot^\dagger$ représente l'opération transposée conjuguée. La matrice $\mathbf{H}^k$ représente le Hessien de Δ_y^k et peut être dérivée élégamment des équations (2.9a) et (2.9b) [Franchois et Pichot (1997)]. Le paramètre λ_D limite la longueur du vecteur $\mathbf{p}^k$ et assure ainsi la convergence de l'algorithme (sachant que la longueur de pas α^k est fixée à 1).

De par sa proche parenté avec la méthode de Newton [Nocedal et Wright (1999)], l'algorithme de Levenberg-Marquardt offre de bonnes propriétés de convergence [Nocedal et Wright (1999)]. Aussi, les méthodes BID convergent habituellement en relativement peu d'itérations. Par contre, le coût de calcul associé à chacune des itérations peut être très important. En fait, trois opérations coûteuses doivent être effectuées : 1- Le système linéaire (2.18) doit être résolu (notons que la matrice normale de ce système est de taille $n \times n$). 2- Le problème direct doit être résolu (*i.e.* le champ diffusé au niveau des récepteurs par le contraste $\mathbf{x}^k$ doit être calculé) pour mettre à jour Δ_y^k . 3- La matrice $\mathbf{H}$ (de taille $n \times n$) doit être calculée. L'importance de la tâche à accomplir à chacune des itérations constitue sans doute la principale faiblesse des algorithmes BID.

2.4.2.2.2 Méthodes CSI Ceci nous amène aux méthodes CSI qui, contrairement aux méthodes BID, ne requièrent pas la solution du problème direct. Par contre, la minimisation étant effectuée à l'aide d'un algorithme de gradient conjugué, un nombre relativement élevé d'itérations est nécessaire avant que la convergence ne soit obtenue.

L'idée générale de ces méthodes est d'estimer non seulement le contraste $\hat{x}$ mais aussi les courants $\hat{\mathbf{W}} = (\hat{\mathbf{w}}_1, \dots, \hat{\mathbf{w}}_m)$ minimisant un critère F_{CSI} . Ce dernier pénalise la somme pondérée des erreurs commises sur les équations (2.11a) et (2.11b). Les méthodes CSI sont des évolutions de la méthode présentée dans [Kleinman et van den Berg (1993)] qui cherche plutôt à estimer le contraste $\hat{x}$ et les champs totaux $\hat{\mathbf{E}} = (\hat{\mathbf{E}}_1, \dots, \hat{\mathbf{E}}_m)$ (au lieu des courants) minimisant l'erreur commise sur (2.9a) et (2.9b).

Soulignons ici que, du fait qu'elles sont basées sur l'estimation conjointe des courants et du contraste, les méthodes CSI nécessitent l'estimation d'un nombre d'inconnues beaucoup plus grand ($Mn + n$) que les méthodes BID (n).

2.5 Méthode retenue

Étant donné les objectifs de ce travail, établis à la section 1.5.1, et en fonction des caractéristiques des différents algorithmes que nous venons de présenter, il apparaît évident que le choix de la méthode de référence doit se faire entre les algorithmes BID et CSI. Notons d'abord que ces approches apparaissent comme très comparables du point de vue de la qualité des solutions générées. Ceci dit, la méthode CSI nous semble la plus prometteuse d'un point de vue temps de calcul.

Ce choix est essentiellement justifié par le fait que cette méthode ne requiert ni la solution du problème direct ni l'inversion complète d'un système linéaire à chaque itération. Nous croyons que cette économie permet de compenser largement pour le plus grand nombre

d'itérations à effectuer et d'inconnues à estimer.

Cela étant, nous sommes conscients que le choix contraire aurait aussi pu être envisagé. C'est d'ailleurs ce qui est fait dans [Wei et al. (2007); Yu et al. (2008)] où l'on favorise plutôt la méthode BID en tablant sur un *solveur* rapide pour résoudre le problème direct (*stabilized biconjugate gradient fast Fourier transform* [van der Vorst (1992); Xu et Liu (2002); Zhang et al. (2003)]), sur l'algorithme de gradient conjugué pour inverser le système linéaire et sur une astuce permettant de déduire les valeurs de $\mathbf{H}$ de la solution du problème direct. Malgré tout, il nous semble qu'un nombre important d'opérations restent à effectuer et qu'une tentative de réduction de celles-ci (comme l'utilisation d'un algorithme de gradient conjugué tronqué pour inverser partiellement le système linéaire) laisse des incertitudes quant aux garanties de convergence de l'algorithme.

2.6 2-D vs 3-D

La modélisation d'objets 3-D par une superposition de couches 2-D n'est pas très bonne en TMO (contrairement aux techniques qui utilisent des longueurs d'ondes courtes, comme la tomographie à rayons X). Toutefois, la complexité du problème, déjà très importante en 2-D, explose littéralement lorsqu'une troisième dimension est ajoutée. De ce fait, le choix de la modélisation utilisée revêt une importance qui n'est pas à négliger.

Il est d'ailleurs intéressant de noter que, si quelques essais utilisant une modélisation complètement 3-D ont été effectués [Semenov et al. (1999, 2002); Bulyshev et al. (2004); Franceschini et al. (2005); Catapano et al. (2006); Yu et al. (2008)], la grande majorité des travaux publiés dans la littérature se limitent au cas 2-D. Cela se comprend lorsqu'on jette un regard aux temps de calculs nécessaires aux reconstructions 3-D. Par exemple, dans [Yu et al. (2008)], alors qu'on utilise une méthode qu'on décrit comme rapide, le temps de reconstruction d'une image de $32 \times 32 \times 32$ voxels est de plus de trois heures.

Dans [Zhang et Liu (2004)], le temps de calcul pour un problème de même taille est de 72 heures.

De plus il faut mentionner que la modélisation 2-D d'un problème 3-D, bien qu'ayant des limites importantes explorées dans [Meaney et al. (2002)], mène à des reconstructions qualitativement interprétables. Selon nous, il n'en demeure pas moins que, si des applications cliniques offrant des images quantitativement valables sont souhaitées, une modélisation 3-D du problème est de loin préférable.

Ceci étant, comme on l'a mentionné, les algorithmes 2-D actuellement proposés nécessitent déjà des coûts de calculs prohibitifs. L'objectif de cette thèse étant de proposer de nouveaux algorithmes, il semble plus sage de se limiter, dans cette étape de développement, au cas 2-D, plus simple. Comme il en sera discuté en ultérieurement, l'extension des méthodes proposées au cas 3-D constituerait la suite logique de nos travaux.

ANALYSE ET GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE *CONTRAST SOURCE INVERSION*

Au chapitre précédent nous avons choisi la méthode *contrast source inversion* comme point de départ de notre étude. Dans ce chapitre, nous en proposons une analyse en profondeur. Plus précisément, nous étudions les caractéristiques du critère d'optimisation et de l'algorithme de minimisation proposés. De manière simplifiée, le critère d'optimisation règle la qualité de la solution alors que l'algorithme de minimisation règle la vitesse à laquelle cette solution est obtenue. Notre objectif est donc de déterminer si le critère utilisé par la CSI mène à des solutions de qualité et si le schéma de minimisation est efficace. Pour ce faire, nous basons notre argumentation sur les théories de l'optimisation et de la régularisation.

Notre étude mettant en évidence certains point faibles de la CSI, nous présentons aussi dans ce chapitre deux premières alternatives. Celles-ci sont de proches parentes de la méthode originale mais offrent des gains tant du point de vue de la robustesse que de la rapidité. La première peut être interprétée comme une simple généralisation de la méthode originale alors que la seconde exploite un nouveau schéma d'optimisation.

Les travaux relatifs à ce sujet ont fait l'objet d'un article soumis à publication [Barrière et al. (2008c)] que nous reproduisons en Annexe I. Avant d'y référer, le lecteur trouvera dans les sections qui suivent les bases de la démarche effectuée ainsi que quelques rappels théoriques en relation avec celle-ci.

3.1 Fondements de la méthode CSI

La méthode CSI se base sur la formulation (2.11) qui décrit l'expérience de TMO à l'aide d'un système de deux équations couplées, fonctions des courants $\mathbf{W} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_M)$ et du contraste $\mathbf{x}$. Une approche communément utilisée pour résoudre ce type de système est de se placer dans un cadre d'optimisation sous contraintes. De façon plus précise, on peut choisir comme solution le couple $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{W}})$ tel que : pour $i = 1, \dots, M$

$$(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{W}}) = \underset{\mathbf{x}, \mathbf{W}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^M \|\mathbf{y}_i - \mathbf{G}_o \mathbf{w}_i\|^2 \quad (3.1)$$

sous contraintes :

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{X}(\mathbf{E}_i^0 + \mathbf{G}_c \mathbf{w}_i) \quad (3.2)$$

Ceci étant, la résolution d'un problème d'optimisation avec contraintes peut s'avérer relativement périlleuse. Une façon de simplifier les choses est de le transformer en un problème d'optimisation sans contraintes. De façon plus ou moins explicite, c'est la stratégie retenue par la CSI. Pour pouvoir juger de la pertinence de l'approche proposée, nous présentons quelques fondements théoriques sur le sujet à la section 3.2.

D'autre part, la méthode CSI requiert l'estimation conjointe de deux quantités physiques différentes. Dans ce cas, deux schémas d'optimisation principaux peuvent être envisagés : l'optimisation par blocs, *i.e.* la mise à jour alternée de chacune des quantités, et l'optimisation simultanée. Les avantages et inconvénients de ces approches sont présentés à la section 3.3.

En dernier lieu, on verra que la méthode CSI repose sur l'utilisation d'un algorithme de minimisation bien connu, nommé gradient conjugué. Nous en proposons une présentation rapide à la section 3.4.

3.2 Optimisation sous contraintes

Comme on vient de le mentionner, une façon commode de résoudre un problème d'optimisation sous contraintes consiste à le "transformer" en un problème d'optimisation sans contraintes. Ce dernier type de problème est en général mieux maîtrisé et plus simple à résoudre.

Nous présentons brièvement quatre de ces approches : 1- l'explicitation de la contrainte 2- la pénalisation quadratique de la contrainte, 3- la pénalisation ℓ_1 de la contrainte, 4- le Lagrangien augmenté.

3.2.1 Explicitation de la contrainte

L'explicitation de la contrainte consiste à utiliser un nouveau critère d'optimisation qui satisfait la contrainte de façon intrinsèque. La minimisation sans contraintes d'un tel critère est mathématiquement équivalente à la minimisation du problème sous contrainte original.

Une telle stratégie est envisageable en TMO. Comme on a vu, l'équation (2.12) permet d'exprimer le champ diffusé mesuré en fonction du contraste seulement. En utilisant cette formulation on peut développer un critère où (3.2) est implicitement respectée. Ce critère n'est nul autre que f_{BID} donné par l'équation (2.17b).

C'est donc dire que les méthodes BID peuvent être interprétées comme des méthodes utilisant l'explicitation de la contrainte. L'algorithme de minimisation coordonnées par coordonnées présenté dans [Carfantan et al. (1997)] appartient aussi à cette famille.

Toutefois, comme on l'a dit au chapitre précédent, les méthodes BID ont des coûts de calcul par itérations qui peuvent être prohibitifs. D'autre part, des méthodes utilisant des

algorithmes de minimisation plus simples que celui utilisé par BID (tels que des algorithmes de premier ordre, présentés à la section 3.4) nécessiteraient aussi des coûts de calcul importants puisque la simple évaluation du gradient $\nabla_{\mathbf{x}} f_{\text{BID}}$ nécessite l'inversion d'un système [Franchois et Pichot (1997)].

Dans une certaine mesure, l'algorithme présenté dans [Carfantan et al. (1997)] échappe à ce constat. Néanmoins, le coût de calcul pour la mise à jour de l'ensemble des pixels est d'ordre $O(n^3)$ ce qui, comme on verra dans la suite de ce travail, est relativement élevé.

3.2.2 Pénalisation quadratique

Comme son nom l'indique, l'idée de la pénalisation quadratique consiste à ajouter au critère f un terme qui pénalise de façon quadratique l'erreur commise sur la contrainte. En d'autres mots, cette approche consiste à remplacer le problème d'optimisation sous contraintes :

$$\hat{\mathbf{v}} = \underset{\mathbf{v}}{\operatorname{argmin}} f(\mathbf{v}) \quad (3.3)$$

sous contraintes :

$$\mathbf{c}(\mathbf{v}) = 0$$

avec $\mathbf{c}(\mathbf{v}) = (c_1, \dots, c_P)^t$ (où $\cdot^t$ représente l'opération transposée), par :

$$\hat{\mathbf{v}} = \underset{\mathbf{v}}{\operatorname{argmin}} f(\mathbf{v}) + \lambda \|\mathbf{c}(\mathbf{v})\|^2 \quad (3.4)$$

où λ est un facteur de poids (ou paramètre de pénalisation).

Les solutions de (3.3) et (3.4) ne sont les mêmes que lorsque $\lambda \rightarrow \infty$ [Nocedal et Wright (1999)] ce qui, évidemment, est un peu gênant. Une approche classique pour contourner,

d'une certaine façon, cette difficulté consiste à résoudre à plusieurs reprises le problème (3.4) en augmentant à chaque fois la valeur de λ et en utilisant la solution obtenue à l'itération précédente pour initialiser le problème à l'itération courante. L'algorithme est stoppé lorsque la solution se stabilise, *i.e.* lorsque les solutions obtenues pour deux (ou plusieurs) λ consécutifs sont à peu près les mêmes.

Cette stratégie peut par contre être compliquée par une autre caractéristique propre au problème (3.4) ; en effet le conditionnement de celui-ci se dégrade rapidement lorsque λ augmente [Nocedal et Wright (1999)]. En d'autres mots, plus λ est grand, plus (3.4) est difficile à résoudre. Malgré ces désavantages, la pénalisation quadratique de la contrainte demeure une approche relativement populaire dû principalement au fait qu'elle est souvent très simple à mettre en œuvre.

3.2.3 Pénalisation ℓ_1

La pénalisation ℓ_1 ressemble beaucoup à la pénalisation quadratique, à cette différence près que le terme ajouté au critère f pénalise la norme ℓ_1 de l'erreur commise sur la contrainte :

$$\hat{\mathbf{v}} = \underset{\mathbf{v}}{\operatorname{argmin}} f(\mathbf{v}) + \lambda \sum_{p=1}^P |c_p(\mathbf{v})| \quad (3.5)$$

L'avantage de cette approche est que la solution de (3.5) est mathématiquement la même que celle de (3.3) $\forall \lambda > \lambda_{\min}$ (notons toutefois que $\lambda_{\min}$ est *a priori* inconnu). Par contre, le critère à minimiser est non continûment différentiable, ce qui complique l'optimisation. C'est probablement une des raisons pour lesquelles, à notre connaissance, aucune approche de ce type n'a encore été proposée en TMO.

3.2.4 Lagrangien augmenté

Le Lagrangien augmenté, enfin, permet de résoudre de façon exacte le problème (3.3) tout en étant basé sur un critère continûment différentiable. Il est constitué du Lagrangien du problème auquel on ajoute un terme de pénalisation quadratique de l'erreur commise sur la contrainte :

$$\hat{\mathbf{v}} = \underset{\mathbf{v}}{\operatorname{argmin}} f(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\mu}^t \mathbf{c}(\mathbf{v}) + \frac{1}{2} \lambda \|\mathbf{c}(\mathbf{v})\|^2 \quad (3.6)$$

Dans cette dernière équation, le vecteur $\boldsymbol{\mu}$ représente les multiplicateurs de Lagrange. Ceux-ci sont inconnus et doivent être estimés. L'algorithme du Lagrangien augmenté consiste donc à résoudre (3.6) à plusieurs reprises en mettant à jour les valeurs de λ et de $\boldsymbol{\mu}$ avant chaque nouvelle résolution (par exemple en choisissant $\boldsymbol{\mu}^{k+1} = \boldsymbol{\mu}^k + \lambda^k \mathbf{c}(\mathbf{v}^k)$ et $\lambda^{k+1} = \Gamma \lambda^k$ avec $\Gamma > 0$ [Nocedal et Wright (1999)]). Ce genre d'approche a été implanté avec succès en TMO dans [Carfantan (1996)].

3.2.5 Approche de la méthode CSI

De façon stricte, la méthode CSI et ses variantes, présentées ci-après, ne correspondent à aucune des quatre approches précédentes. Comme nous l'avons mentionné, et comme il en sera question tout au long de cette thèse, le problème de TMO est très lourd à résoudre. Pour obtenir une solution rapidement, il faut donc utiliser des algorithmes très efficaces, quitte à négliger quelque peu la qualité de la solution.

Ainsi, l'absence de méthodes rapides permettant de minimiser f_{BID} ou de résoudre (3.5) disqualifie pour le moment les approches par explicitation de la contrainte et par pénalisation ℓ_1 . D'autre part, les méthodes de pénalisation quadratique et du lagrangien augmenté demandent la résolution séquentielle de plusieurs sous-problèmes d'optimi-

sation (avec ajustement des différents paramètres entre chaque étape). Or, même si ces sous-problèmes peuvent être stoppés avec la convergence, ce genre de stratégie allonge l'ensemble du processus.

Ainsi, les méthodes CSI se rabattent plutôt sur une approche de type pénalisation quadratique où le critère n'est minimisé qu'une seule fois. Cette version tronquée de l'algorithme de pénalisation quadratique est utilisée de façon relativement fréquente dans différents domaines. Par contre, une telle approche est non robuste en ce sens que la qualité de la solution dépend directement du choix du paramètre λ . Nous consacrons donc une partie de notre étude à l'analyse de la proposition faite par la CSI relativement à ce paramètre ainsi qu'aux différentes alternatives qui peuvent être envisagées.

3.3 Schémas d'optimisation

On a mentionné, à la section 3.1, que le fait que les méthodes CSI soient basées sur l'estimation de deux quantités physiques différentes ouvre la porte à deux types de schémas d'optimisation principaux : l'optimisation par blocs et l'optimisation simultanée.

L'idée de l'optimisation par blocs est de mettre à jour de façon alternée chacune des quantités du système. En d'autres mots, le problème est fractionné en une série de sous-problèmes d'optimisation, traités séquentiellement, dont l'objectif est de minimiser le critère par rapport à une seule quantité (les autres étant fixées). On peut montrer que cette stratégie offre des garanties de convergence [Bertsekas (1999)].

À l'opposé, comme leur nom l'indique, les méthodes simultanées sont basées sur une mise à jour simultanée de l'ensemble des inconnues.

L'approche par blocs s'avère particulièrement intéressante lorsque les sous-problèmes sont plus simples à traiter que le problème global. On montrera que c'est le cas avec une

approche de type CSI puisque les sous-problèmes obtenus consistent à minimiser des critères quadratiques. Or, ce type de critère possède nombre de caractéristiques qui en facilitent grandement la minimisation.

Cela dit, la vitesse de convergence des schémas par blocs peut être ralentie pour des raisons décrites dans la suite de ce travail. Ainsi, il peut être pertinent de comparer leur efficacité à celle des approches simultanées.

Une caractéristique à étudier de près lorsque vient le temps d'envisager une approche simultanée est l'existence ou non de l'expression analytique du pas optimal. En se référant aux équations (2.15) et (2.16), on se souvient qu'à chaque itération d'un algorithme de minimisation locale, une longueur de pas α^k assurant une diminution du critère doit être trouvée. Pour ce faire, on utilise généralement un algorithme de recherche de pas qui s'avère souvent coûteux. Une exception notable se produit lorsque la longueur de pas optimale (*i.e.* la longueur de pas α permettant de minimiser $f(\mathbf{v}^k + \alpha \mathbf{p}^k)$) peut être trouvée de façon analytique. Comme nous le monterons, une telle expression est disponible dans le cas du critère utilisé par la CSI.

3.4 Gradients conjugués

La méthode CSI, ainsi que les méthodes que nous nous apprêtons à présenter, utilise différentes versions de l'algorithme de gradient conjugué. Nous présentons ici en quoi celui-ci se révèle intéressant.

De façon générale, deux grandes options sont disponibles dans le domaine de l'optimisation locale : les algorithmes de type gradient (ou algorithmes du premier ordre) et les algorithmes de type Newton (ou algorithmes du second ordre).

Les méthodes de type Newton utilisent l'information relative au Hessien du critère à mi-

nimiser (ou à une quelconque approximation) afin de déterminer la direction de descente $\mathbf{p}^k$. Comme on l'a mentionné au sujet des méthodes BID, qui utilisent un tel schéma d'optimisation, ces algorithmes ont l'avantage de converger en relativement peu d'itérations et le désavantage de nécessiter, souvent, un coût de calcul par itération très élevé.

Ainsi dans certains cas, on peut avoir avantage à se passer de l'information de second ordre et à se contenter de l'information de premier ordre apportée par le seul gradient du critère. La plus simple de ces approches consiste sans doute à utiliser la direction opposée au gradient comme direction de descente. Par contre, cette stratégie présente une vitesse de convergence plutôt médiocre (*i.e.* linéaire) [Bertsekas (1999)].

Le gradient conjugué linéaire [Nocedal et Wright (1999)] est une méthode de premier ordre beaucoup plus efficace que la méthode de gradient simple qui, dans plusieurs cas, peut se présenter comme une alternative intéressante aux méthodes du second ordre. Il a été développé pour résoudre des équations linéaires dont la matrice normale est symétrique et définie positive. La solution d'un tel système pouvant être présentée comme le minimiseur d'un certain critère quadratique, le gradient conjugué a rapidement été rapatrié dans le giron de l'optimisation.

Il se distingue des autres méthodes par le fait que, pour les critères quadratiques, il permet d'obtenir une solution exacte en un nombre fini d'itérations (alors que beaucoup de méthodes convergent vers la solution de façon asymptotique). De plus, on peut montrer que, en arithmétique exacte, ce nombre d'itérations est inférieur ou égal au nombre d'inconnues dans le système.

L'algorithme utilise comme direction de descente un mélange entre la direction opposée au gradient du critère à l'itération courante et la direction de descente de l'itération précédente. Plus précisément :

$$\mathbf{p}^{k+1} = -\nabla_v f(\mathbf{v}^{k+1}) + \beta \mathbf{p}^k \quad (3.7)$$

où β est un scalaire dont on donne l'expression plus loin. Les directions de descente ainsi générées sont conjuguées par rapport à $\mathbf{H}$, le Hessien de f ; c'est-à-dire que :

$$\mathbf{p}^{i\top} \mathbf{H} \mathbf{p}^j = 0, \forall i \neq j \quad (3.8)$$

Des variantes de l'algorithme de gradient conjugué linéaire ont été proposées afin de s'attaquer aux problèmes d'optimisation non quadratiques. Contrairement à la version originale, celles-ci, que l'on nomme gradients conjugués non-linéaires, ne garantissent pas la convergence de façon exacte en un nombre fini d'itérations. Néanmoins, elles se sont avérées efficaces dans de nombreuses applications [Hager et Zhang (2006)].

Mentionnons en terminant que les différentes versions de ces algorithmes ont été proposées pour des problèmes impliquant des quantités réelles. Nous présentons dans nos travaux des versions complexes de ces méthodes, complètement équivalentes aux algorithmes originaux.

3.5 Méthodes CSI

Nous invitons ici le lecteur à lire l'Annexe I, où les méthodes CSI sont présentées et analysées et où des variantes sont proposées.

3.6 Conclusion

À la lumière des résultats présentés on constate que les méthodes proposées dans ce chapitre, bien que plus rapides que la méthode CSI originale, ne conduisent pas à des diminutions spectaculaires du temps de calcul sauf, peut-être, la méthode *preconditioned conjugate gradient* pour le cas des données réelles. À cette exception près, toutes les mé-

thodes nécessitent des temps de reconstruction du même ordre de grandeur. Conséquemment l'objectif, dans la suite de notre travail, a été de proposer de nouveaux algorithmes qui mènent à des réductions plus significatives du coût algorithmique.

Lors du développement de nos nouvelles méthodes nous avons tenté de ne pas trop nous éloigner des méthodes CSI afin de profiter des relativement bonnes performances de celles-ci des points de vue de la rapidité et de la qualité de la solution. Nous nous sommes plutôt attaqués à certains des goulots d'étranglement des méthodes *alternated conjugate gradient for CSI* et/ou *preconditioned conjugate gradient*. Celles-ci ont d'ailleurs été utilisées comme références pour valider la qualité des nouveaux algorithmes.

Plus précisément, les méthodes présentées au chapitre 4 sont basées sur des schémas d'optimisation par blocs, comme la méthode *alternated conjugate gradient for CSI*, mais utilisent un nouveau critère qui permet de diminuer le coût relié à la mise à jour des courants. Au chapitre 5 nous proposons des formulations approximatives du problème direct qui mènent à des critères de la même forme que celui utilisé par la méthode CSI tout en permettant de diminuer la taille des matrices à manipuler et/ou le nombre d'inconnues à estimer.

3.7 Nomenclature

En terminant nous soulignons que, pour la suite de ce document, nous engloberons dans notre définition des méthodes CSI la méthode originale, la méthode *alternated conjugate gradient for CSI* et la méthode *preconditioned conjugate gradient*. Nous ferons d'ailleurs référence à cette dernière par *preconditioned conjugate gradient for CSI* afin de bien la distinguer de méthodes présentées ultérieurement.

MÉTHODES *CONTRAST FIELD SOURCE INVERSION*

Dans ce chapitre, une nouvelle famille d'algorithmes de reconstruction capables de s'attaquer au principal goulot d'étranglement de la méthode *alternated conjugate gradient for CSI* est proposée. Issus d'une formulation alternative de l'expérience de TMO mathématiquement équivalente aux formulations présentées au chapitre 2, les algorithmes présentés sont basés sur l'estimation conjointe du contraste, des courants équivalents ET du champ électrique total d'où leur nom de *contrast field source inversion* (CFSI). De façon contre intuitive, l'ajout d'une quantité à estimer n'entraîne pas d'augmentation du temps de calcul ; au contraire, certaines propriétés du critère d'optimisation utilisé facilitent le processus d'inversion.

Deux méthodes de type CFSI sont proposées : une première pour le cas général et une seconde pour tirer parti des caractéristiques propres à certaines configurations.

Les travaux relatifs aux méthodes CFSI ont fait l'objet d'un article soumis à publication [Barrière et al. (2008b)] que nous reproduisons en Annexe II.

4.1 Goulot d'étranglement attaqué

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la méthode *alternated conjugate gradient for CSI* nécessite deux niveaux d'algorithmes itératifs, le second étant imbriqué dans le premier. Plus précisément, les mises à jour de $\mathbf{W}$ et $\mathbf{x}$ sont assurées par des algorithmes itératifs internes de la boucle principale. Une telle stratégie peut s'avérer discutable du point de vue de la rapidité. Cela dit, étant donné la taille et les structures des matrices

impliquées, on verra que la mise à jour des courants $\mathbf{W}$ est beaucoup plus coûteuse que la mise à jour du contraste x .

Les méthodes CFSI ont été développées dans le but de s'attaquer à ce problème. Elles sont basées sur un schéma d'optimisation semblable à celui de la méthode *alternated conjugate gradient for CSI* mais utilisent un critère tel que la minimisation par rapport à chacun des w_i est facilitée. Plus précisément, celle-ci peut être effectuée de façon exacte au coût d'un seul produit matrice-vecteur. Le critère en question est dérivé d'une nouvelle formulation qui décrit l'expérience de TMO à l'aide de trois équations au lieu de deux, et nécessite l'estimation d'une quantité supplémentaire, à savoir le champ électrique total. Par contre, la minimisation par rapport à cette nouvelle quantité peut aussi s'effectuer de façon exacte, à relativement faible coût.

4.2 Cas Toeplitz-bloc-Toeplitz

Jusqu'ici nous avons passé sous silence une approximation effectuée de façon relativement fréquente dans le domaine de la TMO. Celle-ci permet d'accélérer certains algorithmes, notamment les méthodes CSI, de façon significative. Il apparaît maintenant pertinent de donner quelques détails sur ce sujet puisque, comme nous le verrons ultérieurement, on est amené à développer une variante de l'algorithme CFSI original pour pouvoir profiter de cette approximation.

À partir de ce qui a été établi au chapitre 2, on sait que le produit matrice-vecteur $\mathbf{G}_c \mathbf{v}$, où $\mathbf{v}$ est un vecteur quelconque, équivaut, dans le cas continu, à l'opération d'intégration :

$$\int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathcal{V}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (4.1)$$

où $\mathcal{V}$ est la fonction continue associée à $\mathbf{v}$.

Penchons-nous sur le cas où la fonction de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ne dépend que de la quantité $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. L'opération intégrale (4.1) représente alors un produit de convolution 2-D entre les fonctions G et $\mathcal{V}$ et peut être exprimée comme la transformée de Fourier 2-D inverse du produit des transformées de Fourier 2-D de G et $\mathcal{V}$.

La fonction $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ représente le champ électrique produit au point $\mathbf{r}$ par une source située au point $\mathbf{r}'$. Pour que ce champ ne soit fonction que de la quantité $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, il faut que la réponse impulsionnelle du milieu soit indépendante de la position. Ceci ne peut être le cas que pour des milieux dont les propriétés électriques sont entièrement homogènes.

En revenant au cas discret nous pouvons donc conclure que, dans le cas d'un milieu homogène, le produit $\mathbf{G}_c \mathbf{v}$ peut s'exprimer comme :

$$\mathbf{G}_c \mathbf{v} = \text{TFD}_2^{-1}(\text{TFD}_2(\mathbf{G}_c^N) \otimes \text{TFD}_2(\mathbf{v})) \quad (4.2)$$

où $\mathbf{G}_c^N$ est le noyau de convolution associé à la matrice $\mathbf{G}_c$, " $\otimes$ " représente le produit terme à terme et où TFD_2 et TFD_2^{-1} représentent respectivement la transformée de Fourier 2-D discrète et la transformée de Fourier 2-D discrète inverse.

Le coût algorithmique associé au calcul explicite de $\mathbf{G}_c \mathbf{v}$ est $O(n^2)$. En utilisant l'algorithme de la transformée de Fourier rapide (*fast Fourier transform* ou FFT), le coût algorithmique d'une transformée de Fourier discrète (ou de son inverse) est de $O(n \log n)$. Ainsi, en effectuant les opérations :

1. FFT de $\mathbf{v}$, $O(n \log n)$
2. Produit terme à terme $\text{TFD}_2(\mathbf{G}_c^N) \otimes \text{TFD}_2(\mathbf{v})$, $O(n)$
3. FFT inverse du produit $\text{TFD}(\mathbf{G}_c) \otimes \text{TFD}(\mathbf{v})$, $O(n \log n)$

on peut ramener le coût associé au produit $\mathbf{G}_c \mathbf{v}$ à $O(n \log n)$. De façon plus précise, le nombre de multiplications nécessaires aux 3 étapes précédentes, si on suppose que D est

discrétisé selon une grille de $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$, est de $(12 \log_2 n + 40)n$ (on dénombre ici les multiplications de nombres réels). Pour arriver à ce résultat, il faut noter que toutes les matrices impliquées dans le calcul

$$\mathbf{G}_c \mathbf{v} = \text{TFD}_2^{-1}(\text{TFD}_2(\mathbf{G}_c^N) \otimes \text{TFD}_2(\mathbf{v}))$$

doivent avoir la même taille. Or, pour la grille de discrétisation mentionnée, le noyau de convolution $\mathbf{G}_c^N$ est de taille $2\sqrt{n} \times 2\sqrt{n}$ (plus précisément $(2\sqrt{n} - 1) \times (2\sqrt{n} - 1)$). Ainsi, même si $\mathbf{v}$ ne contient que n entrées, on doit calculer sa FFT 2-D sur $4n$ points. Le nombre de multiplications nécessaires à une FFT 2-D (ou à une FFT 2-D inverse), pour une matrice de taille $N_c \times N_c$, est de $3N_c^2 \log_2 N_c$ (ou $3/4 N_c^2 \log_2 N_c$ multiplications complexes) [Dudgeon et Mersereau (1984)]. Dans notre calcul, il faut aussi tenir compte des $16n$ multiplications nécessaires au produit terme à terme $\text{TFD}_2(\mathbf{G}_c^N) \otimes \text{TFD}_2(\mathbf{v})$ ($4n$ multiplications complexes). On note finalement que le coût de la FFT 2-D de $\mathbf{G}_c^N$ n'est pas pris en compte dans le calcul puisqu'elle ne doit être calculée qu'une seule fois pour une configuration donnée.

En comparaison, le produit explicite $\mathbf{G}_c \mathbf{v}$ nécessite $4n^2$ multiplications (n^2 multiplications complexes).

On réalise donc que l'approche proposée permet de réduire de façon significative le nombre d'opérations à effectuer. De plus, elle permet de diminuer l'encombrement mémoire du système puisque seul le noyau de convolution $\mathbf{G}_c^N$ doit être stocké (plutôt que l'ensemble de la matrice $\mathbf{G}_c$). Soulignons d'ailleurs que la matrice $\mathbf{G}_c$ associée au noyau de convolution $\mathbf{G}_c^N$ possède une structure bien particulière, dite Toeplitz-bloc-Toeplitz (TBT).

Si la stratégie proposée s'avère très attrayante, on rappelle que celle-ci ne peut être envisagée que pour des milieux homogènes du point de vue électrique. De plus, la FFT ne

peut être utilisée que dans le cas où D est discrétisé selon une grille uniforme.

Bien que, de façon stricte, les milieux parfaitement homogènes n'existent pas dans la nature, certains milieux peuvent être approximatés, de façon plus ou moins précise, comme tels. Étant donné les gains qu'elle accorde du point de vue du temps de calcul, cette approximation est souvent exploitée en TMO. Nous discuterons brièvement de sa validité aux chapitres 5 et 6.

Cela étant dit, dans la suite de ce travail nous désignerons les cas où les deux conditions précisées ci-haut sont respectées (milieu homogène et grille de discrétisation uniforme) par "cas TBT" en référence à la structure des matrices G_c qui y sont reliées.

4.3 Méthodes CFSI

Nous invitons maintenant le lecteur à consulter l'Annexe II où les méthodes CFSI sont présentées.

4.4 Analyse

Les résultats obtenus s'avèrent très encourageants. Pour l'ensemble des problèmes testés, la CFSI a mené à une diminution importante du temps de calcul.

Soulignons que le nombre de points de discrétisation utilisés dans nos tests ($n=32 \times 32=1024$) constitue une taille de problème typique couramment rencontrée dans la littérature. Pour le cas 2-D, cette taille peut être qualifiée de *moyenne*. Rappelons aussi que nous utilisons dans cette thèse des problèmes de relativement petites tailles pour faciliter le développement de nos méthodes mais que l'objectif à moyen terme est de pouvoir appliquer celles-ci à des problèmes de tailles plus importantes et même, éventuellement,

à des problèmes 3-D. Il apparaît donc pertinent de se questionner sur le comportement attendu des méthodes CFSI lorsque la taille du problème augmente.

Pour ce faire, nous divisons notre analyse en deux parties, séparant le cas général (*i.e.* le cas où G_c est sans structure) du cas TBT.

4.4.1 Cas général

Dans un premier temps nous cherchons donc à comparer l'évolution des coûts algorithmiques liée à l'augmentation de la taille du problème, pour les méthodes CFSI originale et *alternated conjugate gradient for CSI*.

Comme on l'a mentionné, dans le cas général les multiplications impliquant les matrices pleines de taille $n \times n$, *i.e.* la matrice G_c , pour les méthodes CSI, et les matrices G_c et H_w^{-1} , pour la méthode CFSI, sont de loin les opérations les plus coûteuses. Or, à chaque itération, la méthode *alternated conjugate gradient for CSI* requiert $2K_{CSI}$ de ces multiplications (où K_{CSI} est le nombre d'itérations de l'algorithme de gradient conjugué utilisé pour mettre à jour W) alors que la méthode CFSI en requiert 3.

À première vue, nous n'avons aucune raison de penser que K_{CSI} diminuerait pour une augmentation de la taille du problème. Au contraire, on pourrait s'attendre à ce qu'une augmentation de n mène à une augmentation de K_{CSI} . En effet, pour des vecteurs w_i plus longs, il est envisageable qu'un plus grand nombre d'itérations de l'algorithme de gradient conjugué soit nécessaire pour obtenir la décroissance *suffisante* de $\nabla_{w_i} F_{CSI}$ demandée par l'algorithme *alternated conjugate gradient for CSI* (réf. Table I.2). Ainsi, il semble raisonnable de croire que l'avantage de la CFSI quant au nombre d'opérations par itération devrait au moins se maintenir et peut-être même augmenter avec n .

Cela dit, encore une fois, dû au fait que les méthodes étudiées utilisent différents critères

et nécessitent l'estimation d'un nombre différent d'inconnues, seule l'expérimentation pourra confirmer que l'avantage par itération de la CFSI se traduit par un avantage sur l'ensemble de l'algorithme. Toutefois, il est encourageant de noter que le rapport entre le nombre d'inconnues à estimer pour chacune des deux méthodes est à peu près constant (≈ 2) pour toutes les tailles de problèmes.

4.4.2 Cas TBT

Pour le cas TBT l'analyse comparative des méthodes *preconditioned CFSI* et *alternated conjugate gradient for CSI* est un peu plus complexe.

Rappelons que l'intérêt de la méthode *preconditioned CFSI* provient du fait qu'elle repose sur un algorithme de gradient conjugué préconditionné qui permet une mise à jour des courants en moins d'itérations que l'algorithme de gradient conjugué utilisé par la méthode *alternated conjugate gradient for CSI*. Toutefois, comme nous l'avons précisé antérieurement, pour que cet avantage se traduise par une diminution du temps de calcul, il faut que le coût associé aux multiplications par $\tilde{\mathbf{H}}_w^{-1}$ soit *raisonnable*. Mais qu'entend-on ici par *raisonnable* ?

Pour répondre à cette question il faut d'abord observer que, à partir d'une certaine taille de problème, les opérations les plus coûteuses de la méthode *alternated conjugate gradient for CSI* sont celles reliées aux multiplications par la matrice d'observation $\mathbf{G}_o$. En effet, le coût d'un produit matrice-vecteur impliquant cette matrice est $O(Nn)$ (avec, pour la configuration testée ici et de façon relativement typique, $N = \sqrt{n}$) alors que le coût associé à une multiplication par $\mathbf{G}_c$ est de $O(n \log n)$.

Remarque : Mentionnons à ce sujet que la taille des problèmes utilisée dans nos tests constitue, d'une certaine façon, un cas limite puisque que le coût d'une multiplica-

tion par G_c , en ayant recours à la FTT, est du même ordre de grandeur que le coût d'une multiplication par la matrice G_o . En effet, avec $n = 1024$ et $N = 32$, une multiplication par G_o nécessite $128n$ multiplications de nombres réels alors qu'une multiplication par G_c en nécessite $160n$ (réf. : section 4.2).

Ceci nous amène à conclure que, pour que la méthode *preconditioned CFSI* demeure compétitive par rapport à la méthode *alternated conjugate gradient for CSI*, il faut que le coût de calcul associé aux multiplications par $\tilde{H}_w^{-1}$, d'ordre $O(Pn)$, progresse, au maximum, de la même façon que celui associé aux multiplications par G_o . Si on conserve la configuration présentée ici, P devrait donc progresser comme $\sqrt{n}$. Cela est-il envisageable ?

Dans notre algorithme, P règle seulement la valeur du préconditionneur $P = \tilde{H}_w^{-1}$. De ce fait, P peut être choisi aussi petit que l'on veut sans que cela n'affecte la qualité de la solution obtenue. Par contre, en fixant la valeur de $\tilde{H}_w^{-1}$, P influence directement l'efficacité de l'algorithme du gradient conjugué préconditionné, *i.e.* le nombre d'itérations nécessaire à la mise à jour des courants. On peut donc envisager une série de compromis, allant d'un P relativement grand, mais offrant une convergence rapide de l'algorithme de gradient conjugué préconditionné, à un P plus petit, menant à un plus grand nombre d'itérations de cet algorithme.

De plus, on doit réaliser que, pour un problème de taille donnée, le lien entre la valeur de P et la distance séparant $\tilde{H}_w^{-1}$ de H_w^{-1} (et donc, la qualité du préconditionneur) varie de façon significative selon les caractéristiques du système. Ce sujet sera d'ailleurs traité en détail au prochain chapitre.

Toute cela nous incite à la prudence quant à l'extrapolation des performances de l'algorithme *preconditioned CFSI*. En effet si, par nos résultats, nous avons montré que celui-ci pouvait s'avérer très efficace par rapport à la méthode *alternated conjugate gra-*

dient for CSI, il faut être conscient que cette efficacité relative risque de varier de façon importante selon la taille et les autres caractéristiques du problème. Une étape d'expérimentation sur une large gamme de problèmes serait donc souhaitable afin de déterminer l'influence des différents paramètres sur les performances de l'algorithme.

MÉTHODES BASÉES SUR DES FORMULATIONS APPROXIMATIVES

Les approches présentées dans ce chapitre s'attaquent à deux goulots d'étranglement qui affectent l'ensemble des méthodes CSI. Comme les méthodes CFSI, ces nouvelles approches sont basées sur des formulations alternatives de l'expérience de tomographie micro-ondes. Cette fois-ci, cependant, les formulations proposées sont approximatives et, de ce fait, ne sont pas mathématiquement équivalentes à celles utilisées précédemment.

Cela dit, contrairement aux méthodes reposant sur des approximations proposées dans la littérature (présentées au chapitre 2), qui sont basées sur différentes tentatives de linéarisation, nos méthodes prennent complètement en compte le caractère non-linéaire du problème. Elles permettent ainsi de traiter des problèmes avec des contrastes importants ce qui n'est pas le cas, on le rappelle, pour les autres méthodes utilisant des approximations.

Un autre aspect intéressant est que les critères d'optimisation dérivés de nos nouvelles formulations ont essentiellement la même forme que celui utilisé par les méthodes CSI (*i.e.* deux termes plus un terme de régularisation). Ainsi, les schémas d'optimisation développés au chapitre 3 peuvent être appliqués directement.

Les travaux portant sur les approches utilisant des formulations approximatives ont fait l'objet d'un article soumis à publication [Barrière et al. (2008a)] que nous reproduisons en Annexe III. Avant d'y référer, nous présentons en détail les failles des méthodes CSI attaquées et nous exposons brièvement le théorème des surfaces équivalentes, utilisé dans l'un de nos développements.

5.1 Goulots d'étranglement attaqués

On a déjà mentionné que, étant basées sur des algorithmes de gradient conjugué, les méthodes de type CSI requièrent un nombre relativement élevé d'itérations (par comparaison aux méthodes BID par exemple, réf. chapitre 2). Bien que les opérations à effectuer à chacune de celles-ci soient relativement simples (essentiellement quelques produits matrice-vecteur), les méthodes CSI souffrent du fait que les matrices à manipuler, G_c et G_o , sont pleines (par opposition à des matrices creuses) et de grandes tailles. Cela est d'autant plus vrai dans le cas où G_c est sans structure.

On a aussi souligné que le nombre d'inconnues à estimer dans les méthodes CSI est significativement plus élevé que ce qui est demandé, à l'origine, par le problème de TMO. En effet, alors que l'objectif premier est d'estimer les n inconnues du contraste, les méthodes CSI nécessitent en plus d'estimer les Mn inconnues représentant les courants. Même si, au chapitre précédent, on a montré que le lien entre le nombre d'inconnues à estimer et le coût de calcul n'est pas direct, on peut se douter que cette caractéristique n'est pas des plus avantageuses d'un point de vue rapidité.

La première méthode que nous proposons dans ce chapitre repose simplement sur une formulation de l'expérience de TMO où G_c est remplacée par une version tronquée. Cela permet de s'attaquer au premier des deux points que nous venons de mentionner. La seconde méthode est un peu plus subtile en ce sens qu'elle se base sur une nouvelle paramétrisation du problème dont certains éléments peuvent être négligés. Cela a pour effet de diminuer à la fois la taille des matrices et le nombre d'inconnues à estimer.

5.2 Théorème des surfaces équivalentes

Une partie de la démarche démontrant l'effet négligeable de certains éléments de la paramétrisation dont nous venons de faire mention réfère au théorème des surfaces équivalentes (ou principe d'équivalence de Love) [Balanis (1989)]. Nous le présentons brièvement ici.

Soit une certaine distribution de sources de courants électriques $\mathcal{J}$ placées à l'intérieur d'un volume V , celui-ci étant délimité par la surface S . On nomme $\mathcal{E}_S$ et $\mathcal{H}_S$ les champs électrique et magnétique produits par $\mathcal{J}$ sur S . Le théorème des surfaces équivalentes stipule que les champs produits par $\mathcal{J}$ à l'extérieur de V sont les mêmes que les champs produits par des sources équivalentes $\mathcal{J}_S$ (courants électriques) et $\mathcal{M}_S$ (courants magnétiques) situés sur la surface S et s'exprimant comme :

$$\mathcal{J}_S = \hat{n} \times \mathcal{H}_S \quad (5.1)$$

$$\mathcal{M}_S = -\hat{n} \times \mathcal{E}_S \quad (5.2)$$

où $\hat{n}$ est le vecteur unitaire normal à S pointant vers l'extérieur de V .

Ainsi si on savait, par le théorème des volumes équivalents, que les champs diffusés par un OST placé dans un domaine D sont les mêmes que les champs produits par une certaine distribution de courants à l'intérieur de D (réf. section 2.2), on sait maintenant aussi, par le théorèmes des surfaces équivalentes, qu'à l'extérieur de D ces champs sont entièrement déterminés par ceux situés à la périphérie de D .

5.3 Méthodes basées sur des formulations approximatives

Nous invitons maintenant le lecteur à lire l'Annexe III dans laquelle les méthodes basées sur des formulations approximatives sont présentées. Une analyse de ces méthodes est proposée à la section suivante.

5.4 Analyse

Nous proposons ici une discussion sur les facteurs pouvant faire varier les performances de nos méthodes.

5.4.1 Valeur optimale de P

L'efficacité des méthodes présentées dans ce chapitre dépend évidemment du rapport entre la valeur de P et celle de n . Un peu comme au chapitre précédent, on doit donc se questionner sur le lien entre ces deux quantités.

Remarque : On doit souligner que, contrairement à la méthode *preconditioned CFSI*, P a ici une influence directe sur la qualité de la solution puisque sa valeur affecte le niveau d'approximation du modèle adopté.

Malheureusement, plusieurs caractéristiques influent sur la valeur de P . Pour illustrer ce fait, nous présentons à la figure 5.1 la décomposition en valeurs singulières des matrices de couplage associées à trois configurations :

1. La configuration utilisée dans le cadre de nos tests sur des données synthétiques (où $n = 32 \times 32 = 1024$).

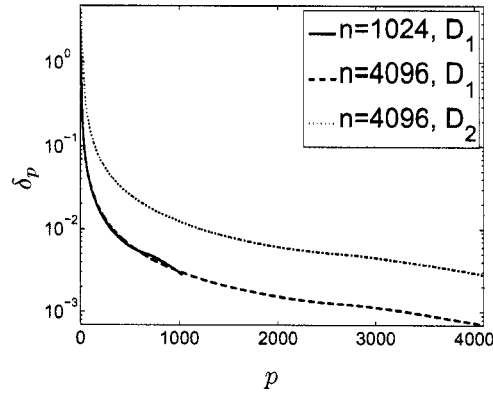


Fig. 5.1 Évolution de δ_p en fonction de p pour différentes tailles de problèmes et de domaines D

2. Une configuration basée sur un domaine D de même taille que celui utilisé dans nos tests mais utilisant un pas de discrétisation deux fois plus petit (ce qui mène à $n = 64 \times 64 = 4096$).
3. Une configuration basée sur un domaine D 4 fois plus grand que ce qui a été utilisé dans nos tests mais utilisant le même pas de discrétisation (ce qui mène aussi à $n = 64 \times 64 = 4096$).

Nous nommons D_1 le domaine associé aux deux premières configurations et D_2 , celui associé au troisième.

À la lumière de ces résultats on constate que, en plus du nombre d'inconnues n , la dimension de D a aussi une forte influence sur P (on rappelle que P doit être choisi tel que $\delta_p \approx 0 \forall p > P$). Or, ces deux paramètres (n et la taille de D) dépendent directement du problème traité : la taille de D dépend évidemment de la dimension de l'objet à imager alors que le nombre d'inconnues dépend à la fois de la dimension de l'objet et du pas de discrétisation qui, à son tour, dépend des longueurs d'ondes impliquées (notons que celles-ci sont fonctions des paramètres électriques de l'objet à imager). De plus, on peut imaginer que d'autres paramètres viendront influencer la valeur de P , notamment la forme de D (carrée vs rectangulaire) et la fonction de Green du milieu.

Tout cela nous amène à conclure, encore une fois, que l'efficacité de nos méthodes variera selon les caractéristiques du problème. Il appert donc que, ici aussi, l'expérimentation sur une large gamme de cas serait souhaitable afin de mieux comprendre l'influence de chacun des paramètres.

Ceci dit, dans les deux prochaines sous-sections on se penche sur les comportements attendus de chacune des méthodes pour des tailles de problèmes plus importantes que ce qui a été testé ici.

5.4.2 Formulation Truncated- G_c

Les méthodes basées sur la formulation Truncated- G_c sont presque identiques à celles basées sur la formulation classique, à l'exception que toutes les multiplications par G_c sont remplacées par deux multiplications impliquant des matrices de taille $n \times P$.

Ainsi, dans le cas général (par opposition au cas TBT), la formulation Truncated- G_c devrait permettre une réduction du temps de calcul pour toutes les tailles de problèmes. Cependant, pour les raisons que nous venons d'énoncer, l'importance de cette réduction sera fonction des caractéristiques du système traité.

Par contre, dans le cas TBT on doit s'attendre à ce que les méthodes Truncated- G_c soient moins efficaces que les méthodes CSI. En effet, avec la formulation classique, le coût d'une multiplication par G_2 (selon la notation de (III.26)) est $O(n \log n)$ alors que dans le cas Truncated- G_c , il est $O(Pn)$. Or, P risque fort d'augmenter plus rapidement que $\log n$.

De ce point de vue, les résultats que nous avons présentés peuvent sembler surprenants puisque les méthodes Truncated- G_c se sont avérées plus rapides que les méthodes classiques même si, pour ces dernières, nous avons profité de la structure de G_c . Comment

expliquer cela ?

Dans un premier temps comparons le nombre exact d'opérations (multiplications de nombres réels) nécessaires pour effectuer les produits $G_c v$ et $\tilde{G}_c v$ (où v est un vecteur quelconque).

D'après ce qui a été mentionné aux sections 4.2 et 4.4.2, le calcul de

$$G_c v = \text{TFD}_2^{-1}(\text{TFD}_2(G_c^N) \otimes \text{TFD}_2(v))$$

avec $n = 1024$ nécessite $160n$ multiplications.

D'autre part, la multiplication $\tilde{G}_c v$ nécessite $2Pn$ multiplications complexes. Dans notre cas, avec $P = 50$, on a donc $400n$ multiplications impliquant des nombres réels.

On remarque donc que, pour cette taille de problème, les nombres d'opérations nécessaires aux calculs de $G_c v$ et $\tilde{G}_c v$ sont du même ordre de grandeur (contrairement à ce qui aurait d'abord pu être pensé). Cependant, ces calculs n'expliquent toujours pas pourquoi les méthodes Truncated- G_c se sont avérées les plus rapides lors de nos tests.

En fait, cela s'explique par les choix que nous avons fait relativement à la mise en œuvre des méthodes. Comme nous l'avons précisé antérieurement, le logiciel Matlab a été utilisé. Celui-ci s'avère très efficace pour effectuer des produits matriciels. Or, le calcul de $\tilde{G}_c v$ ne requiert que deux de ces produits. Les multiplications par G_c , de leur côté, impliquent différentes opérations de manipulations des données et l'appel de la fonction FFT2 de Matlab. Il faut donc supposer que certaines de ces opérations sont implantées de façon moins efficace que ne le sont les produits matriciels.

Cela met en évidence que, outre le nombre brut d'opérations à effectuer, d'autres facteurs relativement importants peuvent influencer l'efficacité d'un algorithme d'inversion.

5.4.3 Formulation V-basis

Dans le cas général, pour les mêmes raisons que celles énoncées à la sous-section précédente, les approches de type V-basis devraient s'avérer nettement plus efficaces que les méthodes classiques et que les méthodes Truncated- G_c , quelle que soit la taille des problèmes.

Qu'en est-il pour le cas TBT ? D'une part, comme nous l'avons souligné au chapitre précédent, à partir d'une certaine taille de problèmes, le goulot d'étranglement des méthodes basées sur la formulation classique se situe au niveau des produits impliquant la matrice G_1 (selon la notation de (III.26)), de taille $N \times n$. Du côté de la formulation V-basis, la taille de G_1 est considérablement réduite ($N \times P$) et les opérations les plus coûteuses sont celles impliquant les matrices $\tilde{V}$ et $\tilde{U}_s$, toutes deux de taille $n \times P$.

Ainsi, à partir d'une certaine taille de problème, pour des problèmes où $P \approx N$ (comme ceux testés dans cette thèse), le coût par itération des méthodes V-basis sera du même ordre de grandeur que le coût par itération des méthodes classiques. À cette observation il faut ajouter que la formulation V-basis table sur un nombre considérablement réduit d'inconnues, ce qui permet d'accélérer la convergence. Tout cela incite à penser que, pour certains problèmes de grandes tailles, les méthodes V-basis pourront être compétitives et peut-être même plus rapides que les méthodes classiques. Cela dit, il est illusoire d'espérer que les accélérations obtenues seront du même ordre de grandeur que celles observées dans le cas général.

Vaut-il donc la peine de considérer les méthodes V-basis pour les problèmes TBT de grande taille ? Notre réponse est "probablement", puisque ces méthodes pourraient, à temps de calcul comparables, mener à de meilleures solutions que les méthodes classiques. Voici pourquoi :

Il faut se rappeler que le cas TBT découle d'une hypothèse de milieu ambiant homogène (réf. : section 4.2). Ce genre de milieu n'existant jamais de façon stricte, cette hypothèse oblige à ne pas tenir compte, dans la modélisation du système, de certains éléments de l'environnement. Les antennes ou la frontière entre le liquide d'adaptation et l'air, dont nous parlerons au prochain chapitre, en sont les principaux exemples.

La formulation V-basis, de son côté, n'oblige pas à de telles approximations puisque ses performances sont indépendantes de la structure de la matrice de couplage. Pour un même problème, les méthodes V-basis pourraient donc utiliser des modèles plus précis du milieu environnant que les méthodes classiques. Or, il va de soit qu'une meilleure modélisation mènera à de meilleures solutions.

Quoiqu'il en soit, comme nous l'avons déjà indiqué, l'utilisation de ces méthodes sur une large gamme de problèmes pourra nous donner une image plus exacte de leurs forces et de leurs faiblesses.

PROPOSITION D'UN MONTAGE DE MESURES ORIGINAL

Dans ce chapitre, nous délaissions les aspects algorithmiques pour nous intéresser au montage de mesures. Dans un premier temps, nous présentons les dispositifs proposés dans la littérature, puis nous suggérons deux alternatives : l'une issue d'une étude reliant la position des capteurs à la résolution des images reconstruites, l'autre développée dans l'objectif d'obtenir des montages plus compacts. Les deux tirent parti des caractéristiques propres à l'application visée, c'est-à-dire à la détection du cancer du sein. Loin d'être finales et complètes, les idées exposées ici se veulent davantage des pistes exploratoires qui devront être approfondies avant de pouvoir être sérieusement envisagées pour la fabrication d'un véritable tomographe.

6.1 Montages existants

À l'heure actuelle relativement peu de montages expérimentaux, utilisables dans le cadre d'applications semblables à celle qui nous intéresse, ont été conçus. Comme principaux exemples, mentionnons les dispositifs présentés dans [Semenov et al. (2002)], [Yu et al. (2008)] et [Meaney et al. (2000)]. Le premier de ceux-ci a été testé sur des animaux. Le second, très épuré, a été conçu dans une perspective d'application à la détection du cancer du sein mais n'a été testé, pour l'instant, que sur des fantômes simplifiés. Le troisième, aussi dédié à la détection du cancer du sein, est certainement le plus complet dans le domaine. Il est le seul, à notre connaissance, à avoir été testé sur de véritables patientes (soulignons toutefois que ce dispositif est toujours à un stade de développement et n'est pas utilisé de façon clinique).

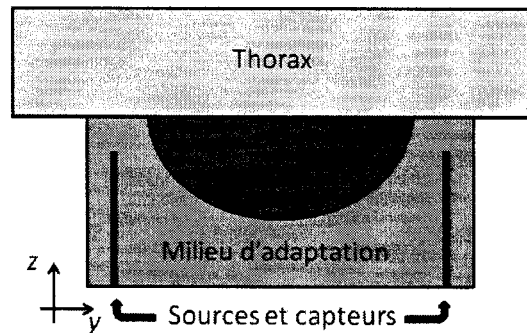


Fig. 6.1 Coupe 2-D dans le plan $y - z$ du montage présenté dans [Meaney et al. (2000)]

Bien que variant par leur taille, par le type d'antennes utilisées, par le nombre et la mobilité de celles-ci, etc., tous ces montages sont basés sur les mêmes principes : l'OST, immergé dans un liquide d'adaptation, est entouré par des antennes émettrices et réceptrices qui, elles aussi, baignent dans le liquide. Pour exemple, la figure 6.1 présente une coupe 2-D, dans le plan $y - z$, du montage présenté dans [Meaney et al. (2000)]. La figure 1.1 (a) du chapitre 1 présente le même montage dans le plan $x - y$. Pour avoir une idée de l'ensemble du système, précisons que le réservoir contenant le liquide et les antennes est situé sous un lit dans lequel une ouverture a été pratiquée à la hauteur de la poitrine. Le sein est ainsi laissé pendant dans le liquide. Cela constitue un avantage non négligeable en termes de confort puisque, contrairement aux mammographes à rayons X actuellement utilisés, il n'y a pas de compression des tissus (réf. : figure 1.2).

Le rôle du liquide d'adaptation est de favoriser le transfert de puissance du milieu ambiant (le liquide) vers le sein et, à l'inverse, du sein vers le milieu ambiant. Cette stratégie s'avère nécessaire étant donné les grandes permittivités relatives des différents tissus mammaires. En effet, selon des mesures faites sur des échantillons provenant d'opérations de réductions mammaires, celles-ci varieraient entre $\epsilon_r = 5$ et $\epsilon_r = 50$ [Lazebnik et al. (2007)].

Mentionnons aussi que, généralement, le liquide d'adaptation utilisé est à pertes (*i.e.* $\sigma \neq 0$). En plus de permettre une meilleure adaptation entre le liquide et le sein, lui

aussi à pertes (importantes comme on le verra), cela permet d'approximer le milieu ambiant comme étant homogène. En effet, les pertes causant une décroissance rapide des champs lors de la propagation, on peut négliger, plus ou moins justement, l'effet des réflexions causées par les différents éléments du système de mesure, telles les antennes et la paroi du réservoir. En plus de simplifier la modélisation, cette approximation permet d'obtenir une matrice de couplage G_c structurée ce qui, comme nous l'avons vu au chapitre 4, peut s'avérer intéressant pour certains algorithmes d'inversion. Ceci étant, nous soulignons aussi le travail présenté dans [Franza et al. (2002)] où une méthode prenant en compte la présence des divers émetteurs et récepteurs est proposée. On peut imaginer que ce genre d'approche serait particulièrement intéressant dans un cas où le milieu d'adaptation serait à faibles pertes ou sans pertes.

6.2 Qualités recherchées d'un montage de mesures

Dans plusieurs domaines, dont le nôtre, l'appréciation d'un montage de mesures est essentiellement basée sur la qualité des mesures obtenues et sur son caractère pratique (facilité d'utilisation, encombrement, temps nécessaire pour l'acquisition des données, etc.). Inutile de dire que, bien souvent, ces deux caractéristiques sont antinomiques : l'amélioration de l'une menant à la détérioration de l'autre et *vice versa*.

En imagerie, la qualité des mesures peut entre autres s'évaluer par la résolution des images qu'elles permettent de reconstruire. Il apparaît donc intéressant de se pencher sur le lien qui unit la configuration du système et la résolution des images. Cela semble d'autant plus important que, comme nous l'avons mentionné à la section 1.4, la résolution est déjà fortement limitée par la nature du rayonnement utilisé.

D'autre part, comparativement aux mammographes à rayons X actuels, les montages de TMO présentés plus haut semblent peu pratiques et plutôt encombrants. Le fait qu'un

liquide soit utilisé, qu'une partie de l'équipement baigne dans ce liquide et que, conséquemment, un lit soit nécessaire en sont les principales illustrations.

Ces points étant établis, nous posons deux questions qui servent de guides pour la suite de notre réflexion :

1. De quelle façon la configuration *classique* (*i.e.* celle présentée à la section 6.1) peut-elle être modifiée de manière à favoriser la résolution des images reconstruites ?
2. Est-il possible de concevoir un montage qui ne nécessiterait pas l'utilisation de liquide d'adaptation et qui, de ce fait, serait plus compact ?

6.3 Relation entre la configuration du montage de mesures et la résolution de l'image reconstruite

Dans un premier temps on cherche donc à déterminer le lien, ou au moins l'un des liens, qui unit la configuration du système de mesures et la résolution des images obtenues. Pour ce faire, on présente d'abord une expérience permettant d'arriver à une déduction intuitive de celui-ci. Ensuite, on propose une nouvelle configuration, semblable à celle des montages *classiques*, mais tirant parti de nos observations.

6.3.1 Déduction intuitive

On formule un problème d'inversion simple :

Soit un système constitué de deux sources de courant filamenteuses ayant la même amplitude complexe (même amplitude et même phase) A et baignant dans un milieu ambiant homogène (on suppose ce milieu sans pertes, *i.e.* $\sigma = 0$). Ces deux sources sont positionnées aux coordonnées $(-d/2, 0)$ et $(d/2, 0)$ d'un référentiel cartésien, avec d élec-

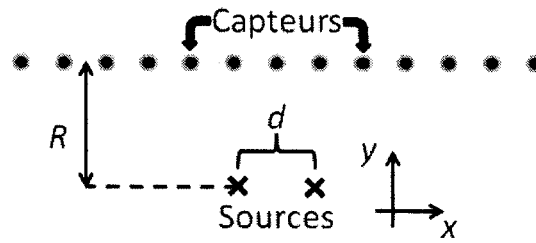


Fig. 6.2 Montage constitué de deux sources filamenteuses, espacées d'une distance d électriquement petite, et de capteurs distribués sur un axe parallèle à x , situé à une hauteur $y = R$.

triquement petit, *i.e.* petit par rapport à la longueur d'onde. Le champ électrique produit par ce système est mesuré à un nombre N de points, distribués uniformément sur un axe parallèle à l'axe des x et situé à une hauteur $y = R$. La figure 6.2 présente ce montage.

Le problème d'inversion est le suivant : en supposant A connu, estimer la distance d à partir des mesures du champ électrique. On réalise que le conditionnement d'un tel problème se dégrade avec la distance R . En fait, si les mesures sont prises à une trop grande distance des sources, il devient impossible de distinguer ces dernières, *i.e.* elles apparaîtront comme une seule source, d'amplitude $2A$, centrée à l'origine. Pour s'en convaincre, on peut observer les résultats de la figure 6.3 qui présentent, pour différentes valeurs de R , la différence relative Δ_E entre le champ électrique E_2 , produit par le système de deux sources, et le champ électrique E_1 , produit par une source unique (*i.e.* $\Delta_E = |E_2 - E_1|/|E_1|$). On utilise ici $d = \lambda/8$ où λ est la longueur d'onde. L'axe des x est gradué en longueurs d'ondes.

Comme on peut le constater, plus R est grand, plus les champs produits par le système de deux sources se confond avec celui produit par la source unique. En revenant au problème d'inversion que nous avons énoncé (*i.e.* estimer d) et en utilisant un vocabulaire d'imagerie, on pourrait dire que, lorsque la distance entre les sources et les capteurs augmente, la *résolution* que l'on peut obtenir sur la quantité estimée diminue.

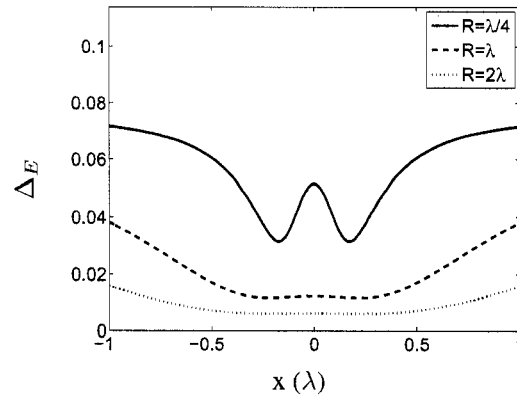


Fig. 6.3 Différence relative entre le champ électrique produit par le système de deux sources et celui produit par la source unique, pour différentes valeurs de R .

Nous examinons maintenant de quelle façon ces observations peuvent être prises en compte pour la conception d'un montage de mesures de TMO destiné à la détection du cancer du sein.

6.3.2 Configuration *compression+liquide*

On se souvient que le théorème des volumes équivalents stipule que le problème de TMO peut être assimilé à un problème d'estimation de courants équivalents (réf. section 2.2). On peut ainsi établir un lien fort entre l'expérience de TMO et celle présentée à la sous-section précédente.

On sait que les courants équivalents sont proportionnels au produit du contraste et du champ électrique total (réf. équation (2.1)). Leur localisation physique est donc la même que celle des inhomogénéités. Dans l'application qui nous intéresse, les inhomogénéités que l'on cherche à imager sont, évidemment, d'éventuelles tumeurs. D'après nos observations antérieures, on aurait donc tout intérêt à minimiser la distance capteurs-tumeurs.

Pour y arriver, on propose une nouvelle configuration, présentée à la figure 6.4, qui utilise des plaques afin de compresser le sein (en comparant cette figure à la figure 1.1 (a),

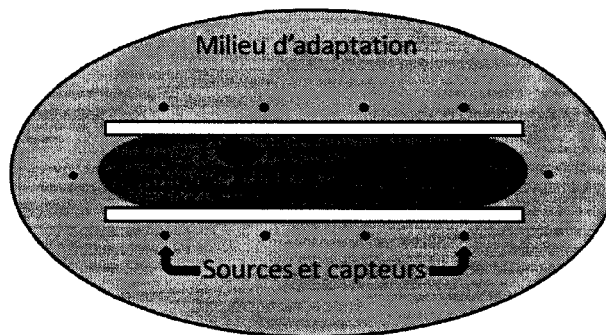


Fig. 6.4 Montage *compression+liquide*

on peut visualiser clairement de quelle façon la compression permet d'approcher les capteurs de la tumeur). Notre hypothèse est qu'en procédant ainsi, on peut améliorer la qualité des reconstructions.

Ceci dit, à l'exception des plaques, ce montage est essentiellement identique aux montages *classiques* en ce sens que le sein et les antennes baignent toujours dans un liquide d'adaptation. Nous le désignerons donc par configuration *compression+liquide*. Son efficacité est évaluée à la section 6.5.

En terminant soulignons qu'un des avantages importants des dispositifs *classiques*, à savoir leur haut niveau de confort, est perdu avec ce montage. On se retrouve en fait avec une configuration qui se rapproche de celle des mammographes à rayons X (notons toutefois que cette similarité se limite à l'utilisation de plaques de compression, les deux types de montages étant très différents d'autres parts, notamment quant à la position des sources et des capteurs).

6.4 Mesures dans l'air

Nous passons maintenant au second point de notre étude, soit la recherche d'un concept pouvant mener à un système de mesures sans liquide d'adaptation. À partir des conclu-

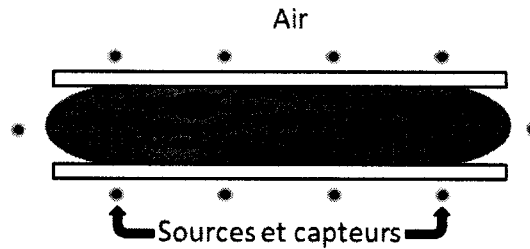


Fig. 6.5 Montage "idéal" sans liquide d'adaptation

sions de la section précédente, on cherche aussi à ce que le nouveau montage tire parti de la compression du sein. Idéalement, on voudrait donc passer de la configuration de la figure 6.4 à celle de la figure 6.5, qui est la même que la précédente à cette différence que les antennes sont dans l'air plutôt que dans un liquide.

Comme nous l'avons expliqué d'entrée de jeu, ce genre de dispositif peut difficilement être envisagé étant donné les grands contrastes entre les permittivités des tissus biologiques et celle de l'air. Ceci étant, on remarque que la structure de la figure 6.5 est très semblable à la celle des guides d'ondes diélectriques. Or, ces derniers ont des propriétés intéressantes d'un point de vue TMO. Celles-ci sont introduites à la sous-section suivante.

6.4.1 Propriétés des guides d'ondes diélectriques

Un guide d'ondes diélectrique est constitué d'une ou de plusieurs couches de diélectriques ayant des permittivités supérieures à celle du milieu ambiant dans lequel elles sont placées. De telles structures exploitent les phénomènes de réflexions totales qui peuvent se produire lorsqu'un champ se présente à l'interface séparant deux milieux de permittivités différentes. Pour certains angles d'incidence, les champs ainsi réfléchis interfèrent de façon constructive et donnent naissance à des *modes guidés*, *i.e.* à des champs électromagnétiques qui se propagent dans la direction du guide. La figure 6.6

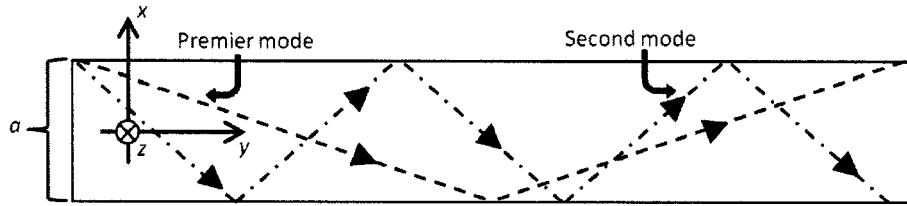


Fig. 6.6 Guide d'ondes diélectrique

présente un exemple de guide à une couche. On se limitera d'ailleurs à ce cas simplifié pour la suite de la présentation.

On associe à chacun des modes guidés une constante de propagation γ_i^y telle que, dans le cas 2-D TM :

$$\mathcal{E}_i(x, y) = \mathcal{E}_i(x)^+ e^{-\gamma_i^y y} + \mathcal{E}_i(x)^- e^{+\gamma_i^y y} \quad (6.1)$$

où l'indice i fait référence au numéro du mode et où le premier terme du membre de droite représente les champs se propageant dans la direction $+\vec{y}$ alors que le second terme représente les champs se propageant dans la direction opposée (on utilise les notations $\vec{y}$ et $\vec{x}$ pour représenter les vecteurs unitaires associés respectivement aux axes y et x). Si les diélectriques en présence sont sans pertes, les constantes de propagation γ_i^y sont purement imaginaires et, de ce fait, les champs se propagent sans atténuation.

Malgré les phénomènes de réflexion totale, et de façon contre intuitive peut-être, il existe pour chacun des modes un champ électromagnétique associé non nul dans la région externe du guide. Par contre, l'atténuation de ces champs dans la direction perpendiculaire à la direction de propagation (*i.e.* $+$ ou $-\vec{x}$) se fait de manière exponentielle. De façon plus précise, pour un guide à une couche, la distribution des champs selon cette direction

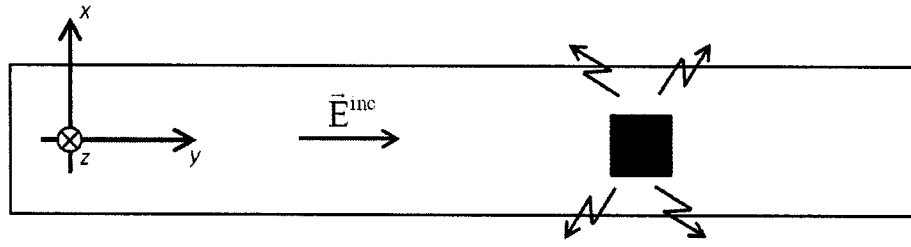


Fig. 6.7 Phénomènes de fuite se produisant lorsqu'un champ incident rencontre une inhomogénéité dans un guide diélectrique.

est la suivante :

$$\mathcal{E}_i^+(x, y) = e^{-\gamma_i^y y} \begin{cases} \mathcal{B}_i^+ e^{-q_i x} & x > a/2 \\ \mathcal{C}_i^+ \cos p_i x + \mathcal{D}_i^+ \sin p_i x & |x| \leq a/2 \\ \mathcal{B}_i^+ e^{q_i x} & x < -a/2 \end{cases} \quad (6.2)$$

où les valeurs de $\mathcal{B}_i^+$, $\mathcal{C}_i^+$, $\mathcal{D}_i^+$, p_i et q_i sont déterminées par la géométrie du système, c'est-à-dire par l'épaisseur a du guide, par les permittivités relatives du guide et du milieu ambiant et par la fréquence d'excitation.

Le nombre de modes pouvant être excités est aussi fonction de l'épaisseur du guide et de la différence de permittivité entre les milieux. Sans entrer dans les détails, mentionnons simplement que ce nombre est d'autant plus grand que le guide est épais et que la différence de permittivité est importante.

Soulignons enfin que dans le cas où des inhomogénéités sont présentes dans le guide, celles-ci produisent des phénomènes de fuites, illustrés à la figure 6.7, qui permettent à une certaine quantité d'énergie de sortir du guide. Or, dans la région externe du guide, la décroissance des champs associés à ces phénomènes est moins rapide que celle des champs associés aux modes guidés (du moins dans la région du champ proche de l'inhomogénéité). Pour plus de détails sur les guides d'ondes diélectriques, nous référons à [Balanis (1989)].

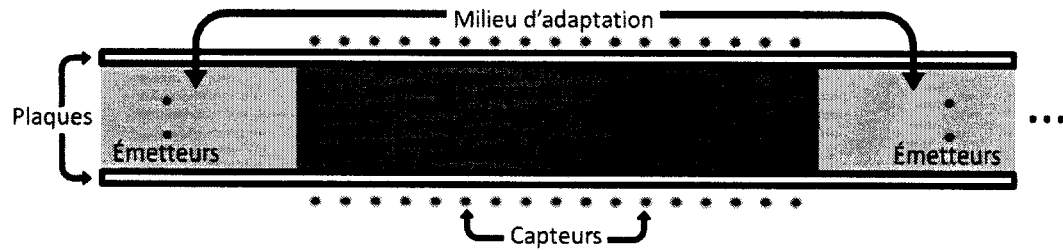


Fig. 6.8 Tomographe de type guide d'ondes diélectrique.

6.4.2 Proposition d'un tomographe de type guide d'ondes diélectrique

Nous proposons un montage de tomographie micro-ondes, présenté à la figure 6.8, qui exploite les propriétés des guides d'ondes diélectriques.

Des plaques sont utilisées afin de profiter des effets bénéfiques de la compression. Entre celles-ci, de chaque côté du sein, on introduit un liquide d'adaptation (de façon pratique, on pourrait imaginer un liquide contenu dans un ballon qui serait compressé avec la poitrine) dont les propriétés électriques sont semblables à celles des tissus mammaires. On obtient ainsi tout à fait une structure de guide diélectrique.

Les sources sont placées à l'intérieur du milieu d'adaptation. De cette façon, la partie de l'énergie qui est couplée en modes guidés se propage directement dans la direction du sein. En d'autres mots, le guide produit un certain effet de focalisation des champs. La présence du liquide d'adaptation permet de maximiser la pénétration de l'énergie à l'intérieur de l'organe. Si on suppose, en première approximation, que le sein est homogène (on discute de la validité de cette approximation à la section 6.6) on peut supposer aussi que la propagation guidée se poursuivra à l'intérieur de celui-ci puisque ses propriétés électriques sont semblables à celles du milieu d'adaptation. Enfin, notre hypothèse est que les effets de fuites générés par une éventuelle tumeur permettront à une quantité suffisante d'énergie de sortir du guide. Les mesures du champ diffusé sont faites par une série de capteurs situés au-dessus et en dessous du sein.

Évidemment, un tel montage ne permet pas de se passer totalement du liquide d'adaptation. On en limite toutefois grandement l'utilisation : seuls les émetteurs (et non les récepteurs) baignent dans le liquide. La configuration proposée semble donc offrir de bonnes perspectives quant à l'éventualité de développer un montage relativement compact.

6.4.3 Limites du montage proposé

Jusqu'ici nous n'avons pas fait mention de l'effet du nombre d'illuminations (*i.e.* la valeur de M) sur la qualité des images reconstruites. Il est intéressant de noter à ce sujet qu'il est nécessaire d'utiliser $M > 1$ pour que l'inversion soit possible. En effet, il a été démontré [Kastner (1987); Devaney (1982)] que le problème est non inversible dans le cas contraire. Par contre il n'existe, à notre connaissance, aucun résultat théorique sur le nombre minimal d'éclairages à utiliser. Ceci dit, on peut considérer grossièrement que plus on utilise d'éclairages différents, meilleure est la solution. On entend ici par *éclairages différents* des éclairages linéairement indépendants les uns des autres. Il est en effet trivial de démontrer qu'une combinaison linéaire d'éclairages déjà utilisés n'apporte aucune information nouvelle à l'expérience.

À notre avis la principale limite de la configuration guide d'ondes est liée au nombre d'illuminations qui peuvent être générées. À partir des équations présentées à la sous-section 6.4.1, on peut exprimer le champ électrique total se propageant dans un guide diélectrique comme :

$$\mathcal{E}(x, y) = \sum_{i=1}^{N_m} \mathcal{E}_i^+(x) e^{-\gamma_i y} + \sum_{i=1}^{N_m} \mathcal{E}_i^-(x) e^{+\gamma_i y} \quad (6.3)$$

où N_m est le nombre de modes guidés.

La distribution des champs selon l'axe x ($\mathcal{E}_i(x)$) étant déterminée par la géométrie du système, cette dernière équation met en évidence que le nombre d'éclairages linéairement indépendants pouvant être générés (en supposant qu'on se limite aux modes guidés, réf. : section 6.6) est le double du nombre de modes (soit $2N_m$). Ici, le facteur 2 représente le fait qu'on peut éclairer l'objet de deux côtés différents. Comme on le verra par la suite, pour des permittivités typiques des tissus mammaires et pour des épaisseurs de guides correspondant aux compressions utilisées en mammographie, ce nombre est relativement réduit à notre fréquence de travail, qui est de 2,45 GHz.

6.5 Résultats

Dans cette section on cherche à valider les hypothèses et suggestions présentées précédemment à l'aide de données de simulations. Plus précisément on veut vérifier : 1- si la compression du sein permet d'améliorer la qualité des images reconstruites, 2- si une configuration de type guide d'ondes mène à des reconstructions de qualité.

Afin de contrôler au maximum les paramètres de nos tests, et étant conscients que cette étude se veut d'abord exploratoire, nous utilisons des modèles simplifiés du tomographe et du système sein-tumeur. Plus précisément nous négligeons la présence des plaques, pour les montages ayant recours à la compression, et nous supposons que le sein et la tumeur sont tous deux homogènes (de permittivités complexes relatives ϵ_s^r et ϵ_t^r respectivement) et de forme cylindrique carrée (on se positionne toujours dans le cas 2-D). La figure 6.9 (a) présente le modèle sans compression. La tumeur est positionnée au centre du sein ; cette configuration peut être qualifiée de *pire cas* puisque la distance séparant la tumeur des antennes réceptrices et émettrices est maximale. La section du sein est de taille $\lambda_0 \times \lambda_0$ où λ_0 est la longueur d'onde dans l'air (à la fréquence d'opération de 2,45 GHz, on a $\lambda_0 = 12,45$ cm).

Deux scénarios sont envisagés : un premier où le système sein-tumeur est sans pertes et un second où des pertes sont présentes. Dans chacun des cas, on a $\epsilon_s^{r'} = 10$. Tout en appartenant à la fourchette des permittivités *réalistes* selon les données publiées dans [Lazebnik et al. (2007)], cette valeur est relativement faible. Ceci permet de limiter la taille du problème (le pas de discrétisation étant proportionnel à longueur d'onde qui, elle même, est proportionnelle à l'inverse de la racine carrée de la permittivité). Pour le cas avec pertes on choisit $p = \epsilon_s^{r''}/\epsilon_s^{r'} = 0,25$ qui, toujours selon [Lazebnik et al. (2007)], serait une valeur typique. En ce qui a trait à la tumeur, on a $\epsilon_t^r = 20$ pour le cas sans pertes et $\epsilon_t^r = 20 - j0,48$ pour le cas avec pertes.

Le domaine D est choisi de la même dimension que le sein et est discrétisé selon un pas Δ_d uniforme dans les deux directions. Le nombre de points de discrétisation est $n = 48^2 = 2304$. La taille de la tumeur est de 4×4 pixels, soit environ $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$ (cette taille, relativement grande, est utilisée afin de faciliter l'interprétation des résultats).

Le liquide d'adaptation utilisé est sans pertes et de permittivité relative $\epsilon_b^r = \epsilon_s^{r'}$.

6.5.1 Configuration *compression+liquide*

Dans un premier temps on s'attarde à l'effet de la compression du sein sur la qualité des images reconstruites. Pour ce faire, les trois configurations présentées à la figure 6.9 sont testées en simulation. On compare donc le cas sans compression aux cas où des compressions de facteurs 2 et 4 sont exercées. Évidemment, la surface totale du sein est préservée pour chacune des configurations. Les grilles de discrétisation sont donc de 48×48 , 96×24 et 192×12 points. On suppose la tumeur indéformable.

On utilise $N = M = 48$ de telle façon que $N \times M = n$ où, on le rappelle, M représente le nombre d'éclairages et N , le nombre de récepteurs. Pour chacun des cas, les émetteurs-récepteurs sont distribués uniformément sur le périmètre d'un cylindre rec-

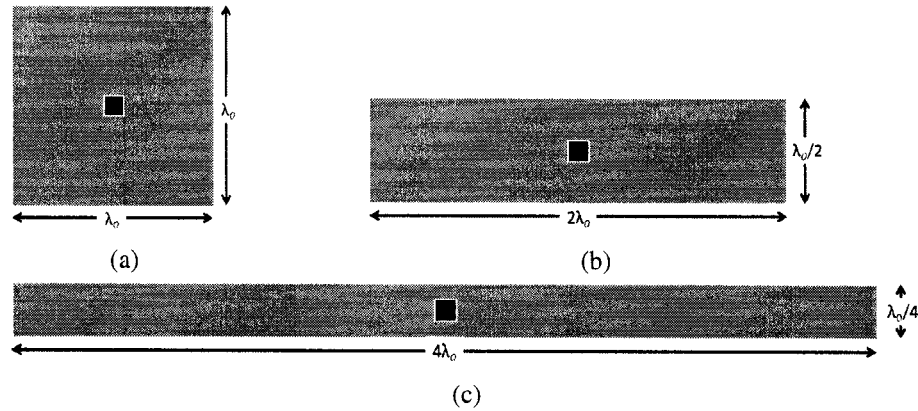


Fig. 6.9 Configurations testées : (a) aucune compression, (b) compression d'un facteur 2, (c) compression d'un facteur 4.

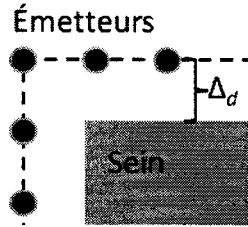


Fig. 6.10 Pour chacun des niveaux de compression, les émetteurs-récepteurs sont positionnés sur le périmètre d'un cylindre rectangulaire situé à une distance Δ_d de la frontière entre le sein et le milieu ambiant.

tangulaire entourant le sein et de dimension telle que la distance entre les antennes et la frontière sein-milieu-ambiant est d'un pas de discrétisation Δ_d (voir figure 6.10).

Finalement, le même vecteur de bruit est ajouté aux données de chacune des trois simulations. Celui-ci est tel que le rapport signal-à-bruit est de 20 dB pour le cas du sein sans pertes et sans compression (soulignons ici que le signal considéré est le champ diffusé mesuré et non pas le champ total).

Comme précédemment, nous utilisons l'erreur quadratique moyenne (EQM) comme métrique de la qualité des solutions. Toutefois, dans un cas comme celui-ci, *i.e.* où l'OST est essentiellement homogène à l'exception d'une région (la tumeur) relativement petite par rapport à D , l'EQM calculée à partir du contraste reconstruit sur l'ensemble de D peut

s'avérer une mesure trompeuse. En effet, les solutions présentant un très faible niveau de bruit dans la région homogène et surlissant l'objet d'intérêt (la tumeur) pourront présenter des EQM plus faibles que les solutions ayant un niveau de bruit à peine plus élevé dans la région homogène mais représentant mieux les discontinuités relatives à la présence de cet objet. On arrive ainsi à des cas un peu gênants où les mesures quantitatives favorisent des solutions de piètre qualité.

Pour surmonter cette difficulté, on propose de ne calculer l'EQM des contrastes reconstruits que sur une certaine sous-région D' entourant la tumeur. On complète toutefois cette analyse avec une inspection visuelle des solutions retenues sur l'ensemble de D afin de valider que le niveau de bruit dans la partie homogène n'est pas trop élevé.

L'inversion est effectuée à l'aide d'une méthode de type V-basis, présentée au chapitre 5. La valeur de P (réf. section III.4.2) est choisie suffisamment élevée pour garantir que l'erreur d'approximation est minime (on a $P = 500$). Le but étant ici de valider l'efficacité des montages et non celle des algorithmes de reconstruction, nous nous assurons que *la meilleure solution possible* est retenue pour chacune des configurations testées. En d'autres mots, pour chacun des tests nous faisons varier les paramètres λ et λ_r du critère d'optimisation et nous ne conservons que la meilleure solution.

Le tableau 6.1 présente les erreurs quadratiques obtenues pour les cas avec et sans pertes ainsi que pour chacune des configurations. Tel qu'on peut le constater et tel que prévu, l'erreur quadratique est d'autant plus petite que le sein est compressé. Ceci étant, la question est maintenant de déterminer si cette amélioration quantitative se traduit par une amélioration qualitative suffisante pour justifier le recours à la compression.

Observons d'abord les résultats obtenus dans le cas sans pertes. La sous-figure 6.11 (a) présente la partie réelle du contraste original alors que les sous-figures (b), (c) et (d) présentent les parties réelles des contrastes reconstruits pour le cas sans compression et

Niveau de compression	Cas sans pertes	Cas avec pertes
$\lambda_0 \times \lambda_0$	0.255	0.167
$2\lambda_0 \times \lambda_0/2$	0.241	0.137
$4\lambda_0 \times \lambda_0/4$	0.212	0.121

Tab. 6.1 Erreurs quadratiques des solutions obtenues pour les cas avec et sans pertes et pour chacune des configurations.

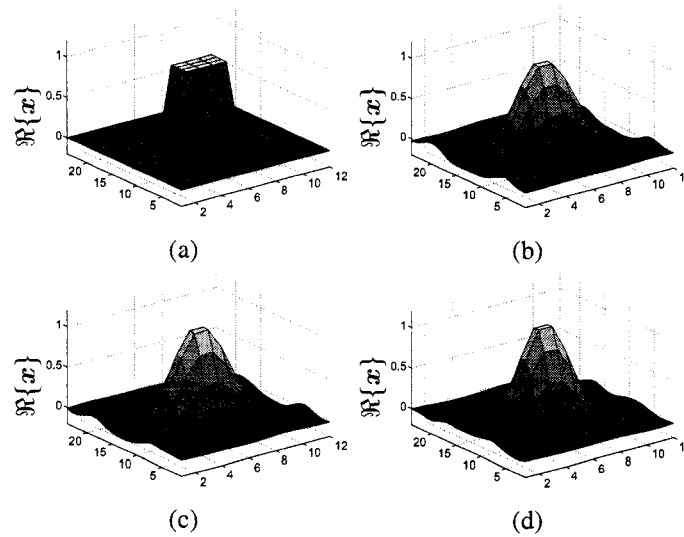


Fig. 6.11 Partie réelle des contrastes sur D' pour le cas sans pertes : (a) contraste original, (b) contraste reconstruit sans compression, (c) contraste reconstruit avec compression d'un facteur 2, (d) contraste reconstruit avec compression d'un facteur 4.

pour les cas avec compression de facteurs 2 et 4 respectivement. Afin de mieux comparer la qualité des solutions, on ne présente ici que la région D' , de 12×24 pixels. Comme on devait s'y attendre, on remarque une amélioration des reconstructions allant de paire avec le niveau de compression. En effet, plus celle-ci est importante, plus les discontinuités sont franches et plus l'estimation du contraste de la tumeur s'approche des valeurs effectives. Néanmoins, force est d'admettre que les gains obtenus ne sont pas spectaculaires.

On compare maintenant ces résultats avec ceux du cas avec pertes. La figure 6.12 pré-

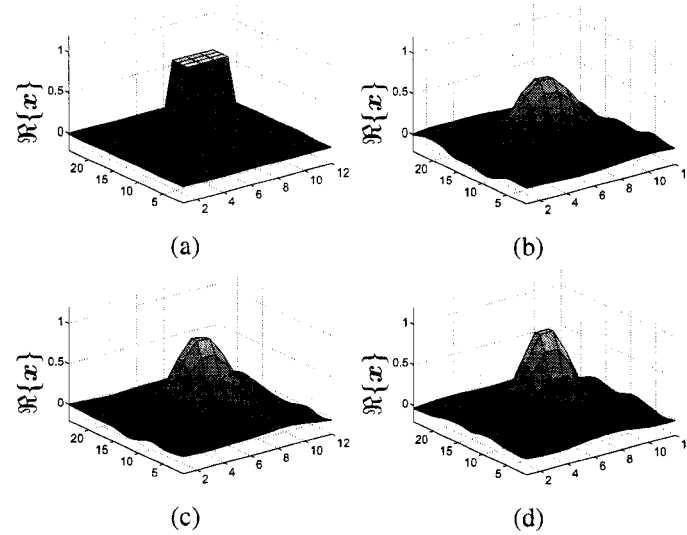


Fig. 6.12 Partie réelle des contrastes sur D' pour le cas avec pertes : (a) contraste original, (b) contraste reconstruit sans compression, (c) contraste reconstruit avec compression d'un facteur 2, (d) contraste reconstruit avec compression d'un facteur 4.

sente les parties réelles des contrastes reconstruits alors que la figure 6.13 présente leurs parties imaginaires.

On remarque d'abord, en comparant la sous-figure 6.11 (b) à la sous-figures 6.12 (b), que les résultats obtenus sans compression sont plus lissés dans le cas à pertes que dans le cas sans pertes. En se rappelant que le niveau de pertes p utilisé est caractéristique de véritables tissus mammaires, on réalise ainsi que l'effet des pertes est non-négligeable dans le cadre de notre application. Heureusement, il semble que la compression permette justement d'en limiter les effets néfastes. En comparant la sous-figure 6.11 (d) à la sous-figure 6.12 (d), on remarque que, pour le sein compressé d'un facteur 4, les reconstructions des cas avec et sans pertes sont de qualités similaires (d'un point de vue qualitatif). En d'autres mots, il semble que les améliorations apportées par la compression (discontinuités plus franches et meilleure estimation quantitative du contraste) sont plus significatives dans le cas avec pertes que dans le cas sans pertes.

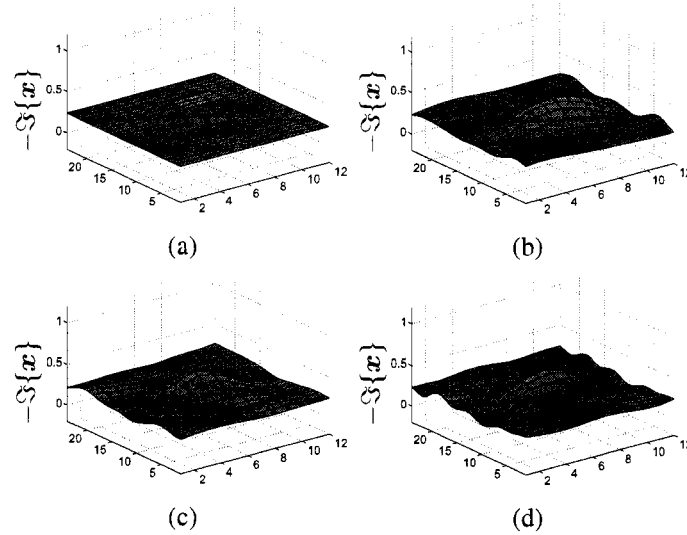


Fig. 6.13 Opposé de la partie imaginaire des contrastes sur D' pour le cas avec pertes : (a) contraste original, (b) contraste reconstruit sans compression, (c) contraste reconstruit avec compression d'un facteur 2, (d) contraste reconstruit avec compression d'un facteur 4.

Remarque : Le fait que les EQM soient plus petites dans le cas avec pertes que dans le cas sans pertes ne signifie pas que les solutions sont de meilleure qualité. En effet, dans le cas avec pertes, la valeur de contraste du sein est non nulle (puisque $\epsilon_b \neq \epsilon_s$) et, de ce fait, la norme du contraste original $\|x_0\|$ est plus grande ; ce qui a pour effet de diminuer les valeurs de l'EQM (réf. : équation (I.17)).

En terminant, afin de démontrer la qualité globale des solutions obtenues, nous présentons à la figure 6.14 la partie réelle des contrastes reconstruits sur l'ensemble du domaine D dans le cas avec pertes. Comme on peut le voir, dans chacun des cas le niveau de bruit dans la région homogène est relativement faible et n'amène pas d'ambiguïté quant à la position de la tumeur et à l'amplitude du contraste qu'elle induit.

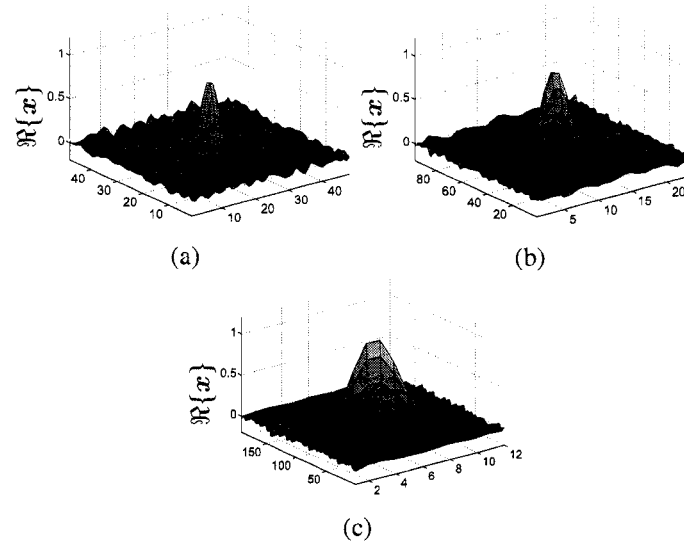


Fig. 6.14 Partie réelle des contrastes reconstruits pour le cas avec pertes sur l'ensemble du domaine D : (a) sans compression, (b) avec compression d'un facteur 2, (c) avec compression d'un facteur 4.

6.5.2 Tomographe de type guide d'ondes

Nous passons maintenant à la validation du montage guide d'ondes. L'objectif ici est de comparer son efficacité à celle de la configuration *compression+liquide*.

On utilise une compression du système sein-tumeur d'un facteur 2. Celle-ci offre un bon compromis entre le nombre d'éclairages (8, N_m étant égal à 4) et le niveau de compression. Ceci étant dit, le nombre d'éclairages possibles est tout de même nettement inférieur à ce qui a été utilisé à la section précédente. Afin de bien découpler les effets reliés à la diminution du nombre d'éclairages de ceux reliés au montage guide d'ondes, trois configurations (utilisant toutes la compression d'un facteur 2) sont comparées : 1- configuration *compression+liquide* avec $N = M = 48$ (configuration testée à la section précédente), 2- configuration *compression+liquide* avec $N = 8$ et $M = 288$, 3- configuration guide d'ondes avec $N = 8$ et $M = 288$. On souligne que pour chacun des cas on a $N \times M = n$. Encore une fois, les cas avec et sans pertes sont traités.

Pour la configuration guide d'ondes, les capteurs sont disposés de façon uniforme de chaque côté du sein, tel que présenté à la figure 6.8. La distance entre les capteurs et la frontière sein-air est encore une fois d'un pas de discrétisation Δ_d . De plus, on suppose que le guide d'ondes formé est infiniment long dans la direction y . Le même vecteur de bruit qu'à la section précédente est ajouté sur les données de simulation.

Remarque : Le calcul des matrices de Green associées à un milieu stratifié du type de ce que nous avons ici n'est pas trivial. Certaines méthodes sont disponibles pour ce faire [Alonso-Monferrer et al. (1992); Michalski et Mosig (1997)] mais nous avons plutôt opté pour un logiciel commercial de calcul de champs (CST Microwave Studio™) qui résout les équations de Maxwell à l'aide d'une méthode numérique (*finite integration technique*) s'approchant de la méthode des différences finies.

Le tableau 6.2 présente les erreurs quadratiques des différentes solutions obtenues (encore une fois l'EQM est calculée sur D' plutôt que sur D).

	Compression+liquide N=48	Compression+liquide N=8	Guide d'ondes N=8
Cas sans pertes	0.241	0.244	0.248
Cas avec pertes	0.137	0.174	0.166

Tab. 6.2 Comparaison des erreurs quadratiques moyennes selon le nombre d'émetteurs utilisés et le type de configuration.

Dans un premier temps on s'attarde aux deux premières colonnes de ce tableau. Celles-ci permettent d'évaluer l'effet de la diminution du nombre d'éclairages sur la qualité de la solution. Il est intéressant de noter que pour le cas sans pertes, cet effet semble négligeable, les EQM obtenues étant similaires. Cela est confirmé par l'évaluation qualitative des reconstructions, dont les parties réelles sont présentées aux sous-figures 6.15 (a) et (b).

Pour le cas avec pertes, par contre, on observe une détérioration sensible (tant quantitative que qualitative) de la qualité de la solution lorsque le nombre d'éclairages diminue. Les sous-figures 6.16 (a) et (b), présentent les parties réelles des reconstructions et les sous-figures 6.17 (a) et (b) présentent les parties imaginaires. Cela dit, la solution obtenue avec un nombre réduit d'émetteurs peut être qualifiée d'acceptable et d'interprétable.

Maintenant, comme on peut le constater en comparant les deux dernières colonnes du tableau 6.2, les solutions obtenues avec la configuration guide d'ondes apparaissent comme équivalentes à celles obtenues avec la configuration *compression+liquide* utilisant le même nombre d'éclairages. Les reconstructions du montage guide d'ondes sont présentées à la sous-figure 6.15 (c), pour le cas sans pertes, et aux sous-figures 6.16 (c) (partie réelle) et 6.17 (c) (partie imaginaire) pour le cas avec pertes. Ces résultats confirment, d'une certaine manière, l'efficacité de la configuration guide d'ondes. En fait, si les résultats obtenus avec celle-ci sont de moindre qualité que ceux présentés à la section précédente, il semble que ce soit essentiellement dû au nombre réduit d'éclairages. On peut donc penser que, si l'on peut se satisfaire d'un nombre relativement restreint d'éclairages, la configuration guide d'ondes s'avérera tout aussi valable que la configuration *compression+liquide*. Est-ce le cas pour la détection du cancer du sein ? Nous en discutons à la section suivante.

On termine cette section en présentant, à la figure 6.18, les contrastes reconstruits sur l'ensemble du domaine D pour le cas avec pertes. Encore une fois, pour chacune des configurations le niveau de bruit dans la région homogène est des plus acceptable.

6.6 Analyse et perspectives

L'objectif de ce chapitre était d'explorer différentes avenues originales en ce qui a trait à la configuration du montage de mesures. Bien que les concepts présentés n'aient été

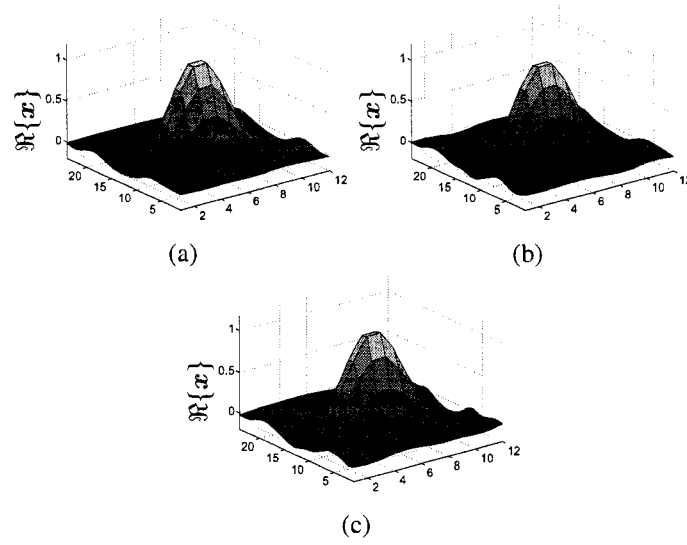


Fig. 6.15 Partie réelle des contrastes reconstruits sur le domaine D' pour le cas sans pertes : (a) *compression+liquide* avec $N = 48$, (b) *compression+liquide* avec $N = 8$, (c) configuration guide d'ondes avec $N = 8$.

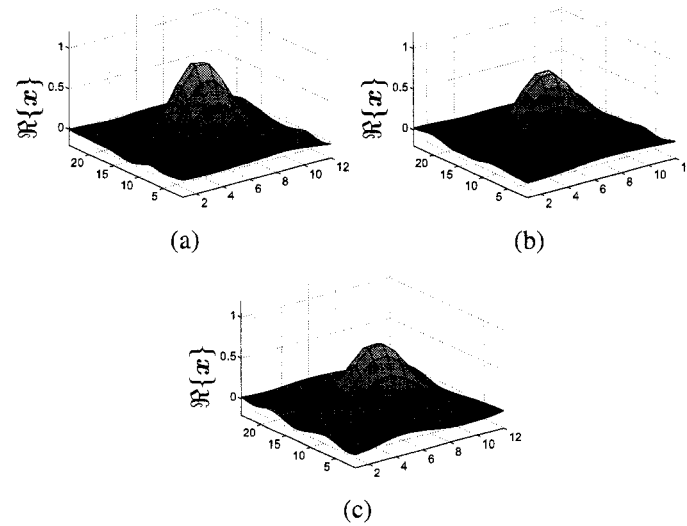


Fig. 6.16 Partie réelle des contrastes reconstruits sur le domaine D' pour le cas avec pertes : (a) *compression+liquide* avec $N = 48$, (b) *compression+liquide* avec $N = 8$, (c) configuration guide d'ondes avec $N = 8$.

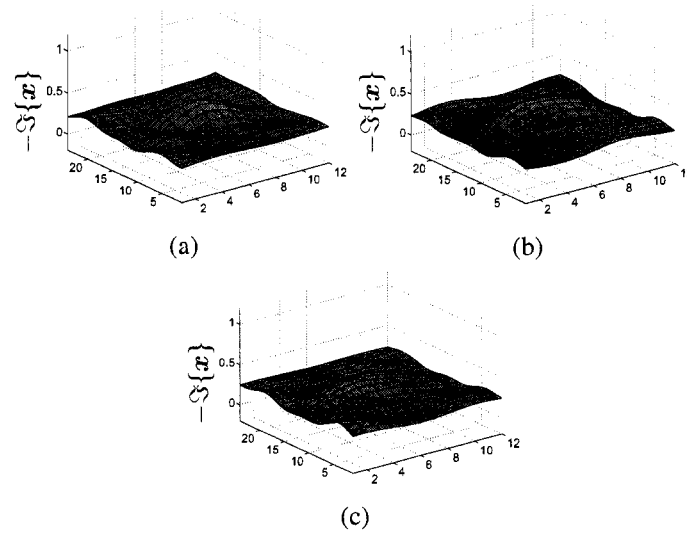


Fig. 6.17 Opposé de la partie imaginaire des contrastes reconstruits sur le domaine D' pour le cas avec pertes : (a) *compression+liquide* avec $N = 48$, (b) *compression+liquide* avec $N = 8$, (c) configuration guide d'ondes avec $N = 8$.

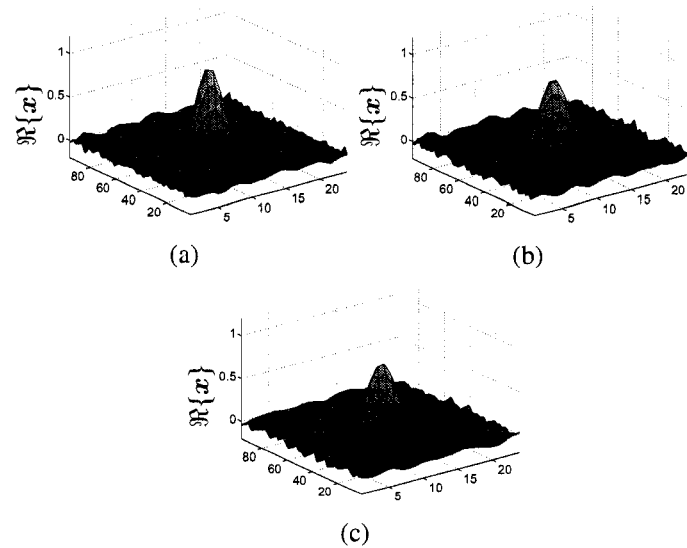


Fig. 6.18 Partie réelle des contrastes reconstruits sur le domaine D pour le cas avec pertes : (a) *compression+liquide* avec $N = 48$, (b) *compression+liquide* avec $N = 8$, (c) configuration guide d'ondes avec $N = 8$.

testés que sur des modèles simplifiés, la qualité des résultats nous permet de proposer une suite à nos travaux.

Notre principale contribution est certainement d'avoir mis en évidence l'existence d'un lien entre la distance capteurs-inhomogénéités et la qualité des reconstructions. Cette observation est d'autant plus intéressante que, dans le cadre de l'application visée, la distance capteurs-tumeur peut être réduite en ayant recours à la compression des tissus mammaires.

Ceci dit, il nous semble qu'il serait pertinent de se pencher de façon plus approfondie sur la configuration *compression+liquide*. Entre autres, la façon dont les plaques peuvent être intégrées au montage, tant d'un point de vue pratique que modélisation, doit être étudiée. D'abord, une recherche des matériaux envisageables pour leur conception devrait être entreprise. Évidemment, l'idéal serait d'avoir des plaques très minces (donc très rigides), puisque leur rôle est de minimiser la distance entre les capteurs et les tumeurs éventuelles, et de permittivité égale à celle du liquide d'adaptation. Par contre il est fort probable que, dans la pratique, une certaine différence subsistera entre la permittivité du liquide et celle des plaques. L'effet d'une telle différence sur le système doit donc aussi être analysé. On peut imaginer qu'un effet guide d'ondes, dont il est difficile de prévoir les conséquences sur la qualité des mesures, pourrait apparaître.

Un autre facteur qui n'est pas à négliger est l'influence de l'utilisation des plaques sur l'efficacité des algorithmes de reconstruction. Il faut noter que le milieu ambiant devient non homogène si la permittivité des plaques diffère de celle du liquide d'adaptation. De ce fait, la matrice de couplage G_c ne sera pas Toeplitz-bloc-Toeplitz (ni d'aucune autre structure intéressante d'ailleurs). Or, comme on l'a vu précédemment, cela peut avoir un effet important sur l'efficacité des méthodes CSI et CFSI en termes de coût de calcul. Les méthodes de type Truncated- G_c et V-basis seraient donc probablement à favoriser dans ce cas.

Tout cela étant dit, la conception pratique d'un montage de type *compression+liquide* peut être facilitée du fait qu'à l'exception des plaques, il est essentiellement identique aux montages *classiques*. Les techniques et le savoir-faire développés pour la réalisation de ces derniers pourront donc être mis à profit.

La seconde grande conclusion de nos travaux est que la configuration guide d'ondes permet d'effectuer les mesures dans l'air plutôt que dans un liquide. En effet, à compression égale et pour un même nombre d'éclairages, les reconstructions obtenues avec ce genre de montage semblent de qualité équivalente à celles de la configuration *compression+liquide*.

La question est maintenant de déterminer si le nombre d'éclairages disponibles est suffisant dans le cadre de notre application. Cette analyse reste à faire et pourra être compliquée par le fait que tant la taille que les propriétés électriques de la poitrine varient énormément d'une patiente à l'autre. Par conséquent, les caractéristiques des guides diélectriques formés, et donc le nombre d'éclairages disponibles, varieront aussi.

D'autre part, différentes façons d'améliorer les choses du point de vue du nombre d'éclairages disponibles pourraient être envisagées. Parmi celles-ci, on note la possibilité de ne pas se limiter aux modes guidés mais de tenir compte aussi des modes évanescents. Comme leur nom l'indique, ceux-ci s'atténuent rapidement en s'éloignant de la source. Il faudrait donc, pour en tirer profit, utiliser un certain nombre d'émetteurs situés le plus près possible de la périphérie du sein. L'endroit exact où positionner ces antennes et le gain d'information ainsi obtenu sont les principaux points sur lesquels il faudra d'abord se pencher.

Dans un autre ordre d'idées, on a supposé dans ce travail que les tissus mammaires étaient essentiellement homogènes et, qu'ainsi, avec la configuration guide d'ondes, la propagation guidée pouvait se poursuivre à l'intérieur du sein. Or on a souligné, au

chapitre 2, que cette hypothèse de tissus homogènes était probablement éloignée de la réalité. Il apparaît donc important de s'intéresser au comportement de la configuration guide d'ondes pour un sein fortement non-homogène. En fait, si on peut se douter que le fonctionnement du système sera modifié, il est difficile de prévoir exactement de quelle manière.

Comme dans le cas de la configuration *compression+liquide*, on doit aussi se questionner sur l'effet de la présence des plaques. Une hypothèse intéressante ici est que, si la permittivité des plaques est inférieure à celle du sein, il est possible que ces dernières favorisent le passage de l'énergie du sein vers l'air. Ceci dit, cette hypothèse reste entièrement à valider.

L'efficacité des algorithmes d'inversion pour les montages guide d'ondes reste aussi à analyser. Dans les tests réalisés ici, nous avons supposé des guides infiniment longs. Sans être Toeplitz-bloc-Toeplitz, les matrices de couplage liées à de telles configurations présentent une certaine structure dont il est possible de tirer parti d'un point de vue algorithmique. Il faudra cependant valider la possibilité de réaliser des guides se comportant comme des guides infinis dans la pratique. Pour y arriver, on devra sans doute avoir recours à un certain nombre d'absorbants qui permettront d'éviter que des réflexions soient produites aux extrémités du guide. Dans le cas où ces absorbants ne seraient pas suffisamment efficaces, la matrice G_c se retrouvera sans structure et, comme précédemment, les algorithmes de type Truncated- G_c et V-basis devraient être favorisés.

Nous terminons en traitant deux points communs à chacune des configurations proposées. D'une part, bien que nous ayons utilisé des valeurs réalistes de permittivité et de conductivité, nous nous sommes placés, de ce point de vue, dans un cas relativement favorable. Le comportement et l'efficacité des deux configurations devraient donc être étudiés pour des niveaux de permittivité et de conductivité plus élevés que ce qui a été testé. Ceci semble d'autant plus nécessaire au regard des résultats présentés dans ce cha-

pitre, qui ont mis en évidence que les pertes peuvent avoir des effets néfastes sur la qualité des reconstructions.

Finalement, on peut se questionner sur le comportement des versions 3-D de ces configurations. Dans le cas guide d'ondes, par exemple, si l'ajout d'une 3^e dimension provoquera une atténuation supplémentaire du champ électrique dû à l'étalement, il est intéressant de noter que nous ne serons plus limités par le nombre de modes guidés qui pourront être excités. En effet, chaque orientation de la source dans le plan du guide pourra générer un éclairage indépendant.

En conclusion, bien qu'ils aient validé certaines avenues de recherche, les travaux présentés ici ont surtout donné naissance à une panoplie de questions auxquelles il faudra répondre avant de pouvoir proposer des dispositifs complets.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

L'objectif de cette thèse était d'étudier différentes avenues relatives aux algorithmes d'inversion et à la configuration du montage de mesures dans un contexte de tomographie micro-ondes appliquée à la détection du cancer du sein. Cependant, l'accent a davantage été mis sur les aspects algorithmiques, plus précisément sur des alternatives envisageables pour accélérer le processus d'inversion. En ce qui a trait au montage de mesures, une étude exploratoire sur les façons d'améliorer la résolution des images et/ou de développer des montages plus compacts a été présentée.

7.1 Algorithmes proposés

La méthode *contrast source inversion* a été utilisée comme référence. Basée sur l'estimation conjointe des courants équivalents et du contraste, celle-ci utilise un algorithme de mise à jour par blocs. L'analyse présentée au chapitre 3 a mis en évidence quelques faiblesses de la méthode.

D'abord, nous avons montré que le critère proposé admettait des solutions dégénérées. Ensuite, nous avons souligné que le schéma d'optimisation ne profitait pas au maximum des propriétés de l'algorithme de gradient conjugué. Enfin, nous avons montré à l'aide d'un exemple que, dû à une approximation effectuée lors du calcul du gradient, l'ensemble de l'algorithme ne convergait pas vers un minimum du critère.

À partir de ces observations, deux nouvelles versions de la CSI ont été proposées. Toutes deux sont basées sur un même critère, très semblable à l'original, à la différence que le

facteur de poids est constant et indépendant des données (sa valeur est choisie de façon empirique). La première méthode, *alternated conjugate gradient for CSI*, utilise un schéma de mise à jour par blocs. De ce fait, elle peut être considérée comme la généralisation de la méthode originale. La principale nouveauté de notre approche consiste à effectuer plus d'un pas de l'algorithme de gradient conjugué lors de la mise à jour des différentes quantités. Cela permet de profiter des bonnes propriétés de convergence de ce dernier. La seconde méthode, *preconditioned conjugate gradient for CSI*, opte plutôt pour une mise à jour simultanée de l'ensemble des inconnues. Un préconditionneur simple est utilisé afin de rendre l'algorithme indépendant des échelles relatives de α et W . Ces deux méthodes se sont montrées plus robustes et légèrement plus rapides que l'algorithme classique.

Afin d'accélérer davantage le processus d'inversion, nous avons par la suite proposé une série de nouvelles approches s'attaquant à différents goulots d'étranglement des méthodes CSI. Celles présentées au chapitre 4, nommées CFSI, s'appuient sur une nouvelle formulation de l'expérience de TMO tout à fait équivalente à celle utilisée par les méthodes CSI mais basée sur 3 équations plutôt que 2. Nous avons montré que le critère issu de cette formulation est relativement facile à minimiser à l'aide d'un schéma d'optimisation par blocs. En effet, la mise à jour des courants, très coûteuse du côté de la méthode *alternated conjugate gradient for CSI*, peut, dans ce cas, être effectuée de façon exacte en un seul produit matrice-vecteur. Les résultats expérimentaux ont montré que, même si la CFSI implique l'estimation d'un nombre d'inconnues pratiquement deux fois plus grand que les méthodes CSI, elle permet de réduire le temps d'inversion d'un facteur 2 à 4. Nous avons aussi montré que la méthode CFSI originale n'était pas adaptée dans le cas où une grille de discrétisation uniforme et un milieu ambiant homogène sont utilisés (ce que nous avons appelé le cas TBT). Cette constatation nous a poussé à en proposer une variante, appelée *preconditioned CFSI*. Cette dernière est très semblable à la méthode *alternated conjugate gradient for CSI* et peut, comme celle-ci, tirer parti de la

structure TBT de la matrice G_c , le cas échéant. De plus, on profite du fait que la matrice normale de l'équation de mise à jour des courants est indépendante des données pour développer un préconditionneur de bonne qualité (*i.e.* offrant à la fois une bonne proximité à l'inverse de la matrice normale et impliquant un coût de calcul relativement faible). Cette stratégie permet d'accélérer de façon significative la convergence de l'algorithme de gradient conjugué.

Au chapitre 5, nous nous sommes attaqués à deux autres goulots d'étranglement des méthodes CSI, soit la taille des matrices à manipuler et le nombre d'inconnues dans le système. Encore une fois, nous avons proposé deux formulations alternatives de l'expérience de TMO ; nous les avons nommées Truncated- G_c et V-basis. Ces dernières sont basées sur des approximations mais, contrairement aux autres formulations approximatives proposées dans la littérature, elles n'ont pas pour objectif de linéariser le problème. En fait, elles ont exactement la même forme que la formulation originale. Ainsi, les algorithmes de minimisation présentés au chapitre 3 peuvent être utilisés directement. De plus, étant donné la qualité des approximations, les méthodes développées s'avèrent très efficaces même pour des problèmes à contrastes importants. En fait, des solutions de qualité équivalente à celles des méthodes n'ayant pas recours à des approximations ont été obtenues alors que des diminutions du temps de calcul pouvant aller jusqu'à un facteur 20 ont été observées.

Le tableau 7.1 présente un résumé des méthodes étudiées ou proposées dans ce travail et souligne les caractéristiques, avantages et défauts de chacune (la rapidité présentée est la rapidité attendue pour des problèmes de grande taille plutôt que pour des problèmes de taille moyenne tels que ceux présentés dans cette thèse). Nous y avons classé la formulation Truncated- G_c dans la famille des méthodes CSI puisqu'elle est basée, elle aussi, sur l'estimation conjointe des courants et du contraste. Dans ce tableau, le "?" apparaissant dans la colonne "Rapidité cas général" souligne que l'algorithme *preconditioned CFSI* n'a pas été testé dans le cas général. D'autre part, les "*" soulignent que l'on suspecte

des variations importantes des performances des algorithmes liées aux caractéristiques du système.

7.2 Montage de mesures

Deux objectifs ont guidé nos travaux relatifs au montage de mesures : 1- Proposer une configuration offrant la meilleure résolution possible, 2- Proposer une configuration compacte.

Relativement au premier point nous avons démontré, à l'aide d'une expérience simple d'inversion, que le champ diffusé mesuré à proximité des inhomogénéités est plus informatif et discriminant que le champ mesuré à une certaine distance de celles-ci. Cette observation a mené à une nouvelle configuration, appelée *compression+liquide*, qui profite de la compressibilité des tissus mammaires pour diminuer la distance entre les capteurs et les éventuelles tumeurs. D'autre part, comme dans les montages *classiques*, le sein est plongé dans un liquide d'adaptation afin de favoriser les transferts d'énergie.

Les résultats ont montré que la compression du sein mène à des reconstructions de qualité significativement supérieures à celles obtenues sans compression. Il a aussi été mis en évidence que la compression est d'autant plus bénéfique que les pertes sont élevées. Cette conclusion prend toute son importance lorsqu'on remarque, comme nous l'avons fait, que les pertes dans les tissus mammaires sont relativement importantes.

En ce qui a trait au développement d'un montage compact, nous avons proposé une configuration reprenant la structure d'un guide d'ondes diélectrique. Nous avons montré qu'en procédant de la sorte, on pouvait obtenir une certaine focalisation du champ incident. Jumelé à l'utilisation d'un milieu d'adaptation entre les plaques, cela permet de maximiser la quantité d'énergie éclairant le sein. D'autre part, le montage exploite les

Méthode	Nombre de facteurs de poids à fixer	Formulation approximative	Peut exploiter la structure de G_c	Rapidité cas général	Rapidité cas TBT
Famille CSI	CSI originale	Non	Oui	0	0
	<i>Alternated CG for CSI</i>	Non	Oui	+	+
	<i>Preconditioned CG for CSI</i>	Non	Oui	+	+
	Formulation Truncated- G_c	Oui	Non	++	-*
Famille CFSI	CFSI originale	Non	Non	++	-
	<i>Preconditioned CFSI</i>	Non	Oui	?	++
	Formulation V-basis	Oui	Non	+++	+

Tab. 7.1 Caractéristiques des méthodes d'inversion étudiées ou proposées

effets de fuites créés par les inhomogénéités qui permettent à une certaine quantité de l'énergie diffusée de sortir du guide.

La limitation principale de la configuration guide d'ondes s'est avérée provenir du nombre réduit d'éclairages indépendants pouvant être générés (soit deux fois le nombre de modes guidés). Cependant, une conclusion intéressante de nos résultats est que, à compression et à nombre d'éclairages égaux, la configuration guide d'ondes semble permettre des reconstructions d'aussi bonne qualité que la configuration *compression+liquide*.

7.3 Perspectives

En dernier lieu, nous proposons quelques suggestions quant à la façon dont les travaux présentés dans cette thèse pourraient être poursuivis.

7.3.1 Algorithmes

À notre avis, les travaux relatifs aux aspects algorithmiques devraient se poursuivre selon deux voies parallèles : 1- La caractérisation des performances des méthodes actuelles pour une grande variété de problèmes. 2- La poursuite du développement des méthodes.

7.3.1.1 Caractérisation des performances

On a souligné que les performances des algorithmes pouvaient changer de façon significative selon les caractéristiques des problèmes. Nous croyons que le temps est venu de tester nos méthodes sur une grande variété de problèmes différents. L'objectif serait de déterminer l'influence des différents paramètres tels la taille, les caractéristiques du

système, celles de l'OST, etc.

7.3.1.2 Améliorations des méthodes proposées

Outre la validation des versions actuelles, certaines pistes pouvant mener à l'amélioration de nos méthodes ou au développement de nouvelles approches pourraient aussi être explorées. Nous en dressons ici un bref aperçu.

7.3.1.2.1 Gradient conjugué groupé On se souvient que les algorithmes *alternated conjugate gradient for CSI* et *preconditioned CFSI* nécessitent, à chaque itération, la résolution tronquée d'un système linéaire du genre $\mathbf{A}\mathbf{W} = \mathbf{B}$. En d'autres mots, on doit résoudre M problèmes linéaires ayant la même matrice normale :

$$\mathbf{A}\mathbf{w}_i = \mathbf{b}_i \quad (7.1)$$

avec $i = 1, \dots, M$.

Dans [Dubrulle (2001)], on présente des versions du gradient conjugué capables de traiter globalement le système $\mathbf{A}\mathbf{W} = \mathbf{B}$. Des essais préliminaires ont montré que ces méthodes peuvent être beaucoup plus rapides que les algorithmes de gradient conjugué classiques qui doivent de leur côté se contenter de résoudre de façon séquentielle les M systèmes $\mathbf{A}\mathbf{w}_i = \mathbf{b}_i$.

Les algorithmes groupés semblent donc on ne peut plus adaptés pour les méthodes mentionnées ci-haut. Toutefois, toujours selon des essais préliminaires, il semble que l'avantage des méthodes groupées ne se fasse ressentir qu'après un certain nombre d'itérations. Or, comme seulement quelques itérations de l'algorithme de gradient conjugué sont effectuées dans nos méthodes, il n'est pas évident que l'utilisation d'une approche groupée

mènera à une amélioration significative. Néanmoins, une telle stratégie serait peut-être plus intéressante pour des problèmes de grandes tailles. En effet on doit s'attendre, dans ce cas, à ce qu'un plus grand nombre d'itérations du gradient conjugué soient nécessaires.

7.3.1.2.2 Méthode CFSI utilisant une formulation approximative Il est possible d'utiliser la formulation Truncated- $\mathbf{G}_c$ (*i.e.* de remplacer la matrice $\mathbf{G}_c$ par son approximation tronquée) dans le système II.16. L'équation normale reliée à la mise à jour des courants s'écrit alors :

$$\tilde{\mathbf{H}}_w \mathbf{w}_i = \tilde{\mathbf{q}}_{w_i} \quad (7.2a)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_w = \mathbf{G}_o^\dagger \mathbf{G}_o + \lambda_1 \tilde{\mathbf{G}}_c^\dagger \tilde{\mathbf{G}}_c + \lambda_1 \mathbf{I} \quad (7.2b)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_{w_i} = \mathbf{G}_o^\dagger \mathbf{y}_i + \lambda_1 \tilde{\mathbf{G}}_c^\dagger (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_i^0) + \lambda_2 \mathbf{X} \mathbf{E}_i \quad (7.2c)$$

En ayant recours au lemme d'inversion, on arrive à exprimer la matrice $\tilde{\mathbf{H}}_w^{-1}$ à l'aide des matrices $\mathbf{G}_o$, $\tilde{\mathbf{U}}_s$ et $\tilde{\mathbf{V}}$. La mise à jour des courants peut donc être effectuée de façon exacte à l'aide d'opérations qui n'impliquent aucune matrice de taille $n \times n$. On peut ainsi concevoir une méthode CFSI basée sur une formulation approximative. Des expériences ont déjà été effectuées et une telle approche s'est avérée plus rapide que la méthode CFSI originale. Il faudrait maintenant évaluer ses performances par rapport aux méthodes présentées au chapitre 5.

7.3.1.2.3 Nouvelles bases de projection des courants En conclusion de l'Annexe III nous avons rapidement souligné qu'il serait intéressant de rechercher de nouvelles bases de projection des courants pour développer une approche du type V-basis qui ne nécessiterait pas de calcul de décomposition en valeurs singulières.

En observant les différents vecteurs constituant la base $\mathcal{V}$, on remarque une simili-

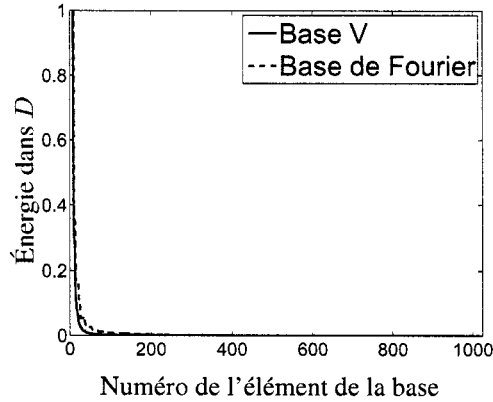


Fig. 7.1 Énergie du champ électrique produit dans D par chacun des éléments de la bases $\mathcal{V}$ et de celle de Fourier.

tude assez forte entre ceux-ci et les éléments de la base de Fourier 2-D. Il serait donc sans doute intéressant d'utiliser cette dernière comme base de projection. La figure 7.1 présente l'énergie du champ électrique produit dans D par chacun des éléments de $\mathcal{V}$ (*i.e.* $\|\mathbf{G}_c \mathbf{v}_i\|^2, i = 1, \dots, n$) et chacun des éléments de la base de Fourier (*i.e.* $\|\mathbf{G}_c \mathbf{f}_i\|^2, i = 1, \dots, n$, où $\mathbf{f}_i$ est le i^{e} élément de la base de Fourier) pour un cas typique. La décroissance très rapide de la courbe reliée à la base de Fourier semble confirmer qu'on pourrait utiliser cette dernière de façon relativement efficace. Toutefois, cette décroissance étant légèrement plus lente que celle de la courbe reliée à la base $\mathcal{V}$, on doit supposer que moins d'inconnues pourraient être retranchées du problème.

7.3.1.2.4 Méthode Born itérative distordue de type V-basis Dans le chapitre 2 on a dit que l'un des principaux points faibles de la méthode Born itérative distordue était de nécessiter la résolution du problème direct à chaque itération, *i.e.* de trouver le champ diffusé au niveau des capteurs pour un contraste connu. Une façon de solutionner le problème direct est de résoudre successivement les équations (2.11b) et (2.11a) ((2.11b) permet de calculer $\mathbf{w}_i$ et (2.11a), d'en déduire $\mathbf{y}_i$). Il peut être relativement efficace d'utiliser un algorithme de gradient conjugué pour résoudre (2.11b), *i.e.* pour résoudre

l'équation linéaire :

$$(\mathbf{I} - \mathbf{XG}_c)\mathbf{w}_i = \mathbf{XE}_i^0 \quad (7.3)$$

Pour accélérer le processus, on pourrait envisager d'utiliser la formulation V-basis . La résolution du problème direct se ferait alors par la résolution successive des équations (III.22b) et (III.22a). Ainsi, au lieu de (7.3) on aurait plutôt à résoudre :

$$(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{V}}^\dagger \mathbf{X} \tilde{\mathbf{U}}_s) \tilde{\mathbf{k}}_i = \tilde{\mathbf{V}}^\dagger \mathbf{XE}_i^0 \quad (7.4)$$

Ce système compte beaucoup moins d'inconnues que le précédent et il est basé sur des matrices beaucoup plus petites. En utilisant une telle stratégie dans un algorithme de type BID, on pourrait espérer réduire de façon considérable le temps nécessaire à la résolution du problème direct et, du même coup, le temps nécessaire à l'inversion. Il faudrait cependant évaluer l'influence de cette approche approximative sur les garanties de convergence de la méthode ainsi que sur la qualité des solutions.

7.3.1.2.5 Régularisation non quadratique La régularisation non quadratique ($\ell_2\ell_1$ par exemple) a fait ses preuves dans de nombreux domaines d'application de l'imagerie [Allain (2002); Carfantan (1996)]. L'idée est d'utiliser une fonction de régularisation $\phi(\mathbf{x})$ (réf. : équation I.6d) qui pénalise les grandes différences entre pixels voisins de façon moins importante que la régularisation quadratique. Cela permet des reconstructions ayant des discontinuités plus franches (moins lissées) que ce qui est obtenu avec la régularisation quadratique.

De plus, des algorithmes relativement efficaces [Geman et Reynolds (1992); Geman et Yang (1995)] ont été développés pour minimiser des critères utilisant ce genre de régularisation. Cela est particulièrement vrai pour les critères dont le terme d'adéquation aux données est quadratique. Ces algorithmes pourraient donc être tout à fait adaptés pour

remplacer le gradient conjugué ou le gradient conjugué préconditionné des méthodes *alternated conjugate gradient for CSI* et *preconditioned CFSI*.

7.3.1.2.6 Méthodes de choix non supervisées des facteurs de poids Dans chacune des méthodes que nous avons proposées, 2 ou 3 facteurs de poids doivent être ajustés heuristiquement. Comme nous l'avons mentionné à quelques reprises, ceci représente sans doute un des points les plus gênants de ce genre d'approche. Nous nous permettons de souligner de nouveau tout l'intérêt qu'il pourrait y avoir à développer une méthode de choix non supervisée de ces facteurs. Nous devons par contre avouer notre ignorance sur les façons de procéder pour ce faire.

7.3.1.2.7 Mise en œuvre Au chapitre 5 nous avons mis en évidence le fait que les choix relatifs à l'implémentation peuvent avoir un effet non négligeable sur les performances des algorithmes. Bien que le logiciel Matlab s'avère très efficace pour effectuer des produits matriciels, qui sont légions dans nos algorithmes, il serait intéressant d'évaluer la possibilité d'implanter nos méthodes avec d'autres langages de programmation. Les questions relatives à la gestion de la mémoire ainsi qu'à l'exploitation d'architectures parallèles pourraient aussi être étudiées.

7.3.2 Montage de mesures

Les perspectives relatives à l'étude et au développement des montages de mesures ont été présentées en détail au chapitre 6.

Rappelons que, pour chacune des configurations proposées, l'effet des plaques sur la qualité des reconstructions ainsi que sur les performances des algorithmes d'inversion doit être analysé. Une étude sérieuse des matériaux envisageables pour la conception de

ces plaques doit aussi être entreprise. Enfin, les performances de la configuration guide d'ondes pour un sein fortement non-homogène devront être étudiées.

D'autre part, une évolution intéressante de la configuration guide d'ondes consisterait à y ajouter des antennes permettant de tirer profit des modes non-guidés. Cette stratégie, si elle s'avère fructueuse, pourrait éliminer le principal défaut de ces montages.

Finalement, une étape de validation des deux configurations proposées sur une grande variété de problèmes (*i.e.* différentes grosseurs de seins, différentes permittivité, différents niveaux de pertes, différents degrés d'inhomogénéités, etc.) devrait être entreprise.

BIBLIOGRAPHIE

- Abubakar, A. et van den Berg, P. M. (2001). Total variation as a multiplicative constraint for solving inverse problems. *IEEE Transactions on Image Processing*, **10**(9), 1384–1392.
- Abubakar, A. et van den Berg, P. M. (2004). A robust iterative method for Born inversion. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **42**(2), 342–354.
- Abubakar, A., van den Berg, P. M., et Mallorqui, J. J. (2002). Imaging of biomedical data using a multiplicative regularized contrast source inversion method. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **50**(7), 1761–1771.
- Allain, M. (2002). *Approche pénalisée en tomographie hélicoïdale : Application à la conception d'une prothèse personnalisée du genou*. PhD thesis, Université Paris XI Orsay.
- Alonso-Monferrer, F., Kishk, A., et Glisson, A. (1992). Green's functions analysis of planar circuits in a two-layer grounded medium. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **40**(6), 690–696.
- Balanis, C. A. (1989). *Advanced Engineering Electromagnetics*. Wiley.
- Bandyopadhyay, B., Kundu, A., et Datta, A. N. (2005). Iterative algorithm for microwave tomography using Levenberg-Marquardt regularization technique. *Indian Journal of Pure and Applied Physics*, **43**(9), 649–653.
- Barkeshli, S. et Lautzenheiser, R. (1994). An iterative method for inverse scattering problems based on an exact gradient search. *Radio Science*, **29**(4), 1119–1130.
- Barrière, P.-A., Goussard, Y., Laurin, J.-J., et Idier, J. (2008a). New approximate formulations for fast inversion of highly nonlinear problems in microwave tomography. *Submitted in October 2008 to IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*

- Barrière, P.-A., Idier, J., Goussard, Y., et Laurin, J.-J. (2007). 3-term optimization criterion for faster inversion in microwave tomography. In *IEEE International Symposium on Biological Imaging : From Macro to Nano*, volume 2, pages 225–228.
- Barrière, P.-A., Idier, J., Goussard, Y., et Laurin, J.-J. (2008b). Contrast field source inversion for faster reconstruction in microwave tomography. *Submitted in September 2008 to IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*
- Barrière, P.-A., Idier, J., Goussard, Y., et Laurin, J.-J. (2008c). On algorithms based on joint estimation of currents and contrast in microwave tomography. *Submitted in September 2008 to IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*
- Belkebir, K. et Saillard, M. (2001). Special section : Testing inversion algorithms against experimental data. *Inverse Problems*, **17**(6), 1565–1571.
- Benedetti, M., Donelli, M., Franceschini, G., Pastorino, M., et Massa, A. (2005). Effective exploitation of the a priori information through a microwave imaging procedure based on the SMW for NDE/NDT applications. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **43**(11), 2584–2592.
- Bertero, M., Miyakawa, M., Boccacci, P., Conte, F., Orikasa, K., et Furutani, M. (2000). Image restoration in chirp-pulse microwave CT (CP-MCT). *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, **47**(5), 690–699.
- Bertsekas, D. P. (1999). *Nonlinear Programming : Second Edition*. Athena Scientific.
- Bolomey, J. C., Izadnegahdar, A., Jofre, L., Pichot, C., Peronnet, G., et Solaimani, M. (1982). Microwave diffraction tomography for biomedical applications. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **MIT-30**(11), 1998–2000.
- Bulyshchov, A. E., Semenov, S. Y., Souvorov, A. E., Svenson, R. H., Nazarov, A. G., Sizov, Y. E., et Tatsis, G. P. (2001). Computational modeling of three-dimensional microwave

- tomography of breast cancer. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, **48**(9), 1053–1056.
- Bulyshev, A. E., Souvorov, A., Semenov, S., Posukh, V., et Sizov., Y. (2004). Three-dimensional vector microwave tomography : Theory and computational experiments. *Inverse Problems*, **20**(4), 1239–1259.
- Caorsi, S. et Cevini, G. (2005). Assessments of the robustness of a neural network approach for the electromagnetic reconstruction of buried cylinders. In *11th International symposium on antenna technology and applied electromagnetics ANTEM*, Saint-Malo, France, pages 94–95.
- Caorsi, S., Massa, A., Pastorino, M., et Rosani, A. (2004). Microwave medical imaging : Potentialities and limitations of a stochastic optimization technique. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **52**(8), 1909–1916.
- Carfantan, H. (1996). *Approche bayésienne pour un problème inverse non linéaire en imagerie à ondes diffractées*. PhD thesis, Université de Paris-Sud.
- Carfantan, H. et Djafari, A. M. (1997). *Overview of nonlinear diffraction tomography within a Bayesian estimation framework*, volume 486, pages 107–124. Lecture Notes in Physics.
- Carfantan, H., Mohammad-Djafari, A., et Idier, J. (1997). A single site update algorithm for nonlinear diffraction tomography. In *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Munich, Germany, pages 2837–2840.
- Carr, K. L. (1989). Microwave radiometry : Its importance to the detection of cancer. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **12**(12), 1862–1869.
- Catapano, I., Crocco, L., D’Urso, M., et Isernia, T. (2006). A novel effective model for solving 3-d nonlinear inverse scattering problems in lossy scenarios. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, **3**(3), 302–306.

- Chew, W. C. et Wang, Y. M. (1990). Reconstruction of two-dimensional permittivity distribution using the distorted Born iterative method. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, **9**(2), 218–225.
- Cui, T. J., Chew, W. C., Aydinler, A. A., et Zhang, Y. H. (2003). Fast-forward solvers for the low-frequency detection of buried objects. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **41**(9), 2026–2036.
- Devaney, A. J. (1982). Nonuniqueness in inverse source and scattering problems. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **30**(5), 1034–1037.
- Donelli, M., Franceschini, G., Martini, A., et Massa, A. (2005). Swarm intelligence for solving two- and three-dimensional inverse scattering problems. In *11th International Symposium on Antenna Technology and Applied Electromagnetics ANTEM 2005*, Saint-Malo, France.
- Donelli, M. et Massa, A. (2005). Computational approach based on a particle swarm optimizer for microwave imaging of two-dimensional dielectric scatterers. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **53**(5), 1761–1775.
- Dubrule, A. A. (2001). Retooling the method of block conjugate gradients. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, **12**, 216–233.
- Dudgeon, D. E. et Mersereau, R. M. (1984). *Multidimensional Digital Signal Processing*. Prentice-Hall.
- Fear, E. C., Meaney, P. M., et Stuchly, M. A. (2003). Microwaves for breast cancer detection ? *IEEE Potentials*, **22**(1), 12–18.
- Phager, A. et Persson, M. (2005). Comparison of two image reconstruction algorithms for microwave tomography. *Radio Science*, **40**(3), RS3017–RS3031.

- Phager, A. et Persson, M. (2007). Using a priori data to improve the reconstruction of small objects in microwave tomography. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **55**(11), 2454–2462.
- Franceschini, G., Franceschini, D., et Massa, A. (2005). Full-vectorial three-dimensional microwave imaging through the iterative multiscaling strategy - a preliminary assessment. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, **2**(4), 428–432.
- Franchois, A. et Pichot, C. (1997). Microwave imaging – complex permittivity reconstruction with a Levenberg-Marquardt method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **45**(2), 203–215.
- Franza, O., Joachimowicz, N., et Bolomey, J.-C. (2002). Sics : A sensor interaction compensation scheme for microwave imaging. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **50**(2), 211–216.
- Garnero, L., Franchois, A., Hugonin, J.-P., Pichot, C., et Joachimowicz, N. (1991). Microwave imaging– complex permittivity reconstruction by simulated annealing. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **39**(11), 1801–1807.
- Geman, D. et Reynolds, G. (1992). Constrained restoration and the recovery of discontinuities. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **14**, 367–383.
- Geman, D. et Yang, C. (1995). Nonlinear image recovery with half-quadratic regularization. *IEEE Transactions on Image Processing*, **4**, 932–946.
- Hager, W. W. et Zhang, H. (2006). Algorithm 851 : CG_DESCENT, a conjugate gradient method with guaranteed descent. *ACM Transactions on Mathematical Software*, **32**(1), 113–137.
- Harrington, R. F. (1982). *Field Computation by Moment Methods*. Krieger Pub Co.

- Idier, J. (2001). *Approche bayésienne pour les problèmes inverses*. Traité IC2, Série traitement du signal et de l'image, Hermès, Paris.
- Idier, J., editor (2008). *Bayesian Approach to Inverse Problems*. ISTE Ltd and John Wiley & Sons Inc.
- Isernia, T., Pascazio, V., et Pierri, R. (2001). On the local minima in a tomographic imaging technique. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **39**(7), 1596–1607.
- Isernia, T. et Pierri, R. (1997). A nonlinear estimation method in tomographic imaging. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **35**(4), 910–922.
- Jia, H., Takenaka, T., et Tanaka, T. (2002). Time-domain inverse scattering method for cross-borehole radar imaging. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **40**(7), 1640–1647.
- Joachimowicz, N., Mallorqui, J. J., Bolomey, J.-C., et Broquetas, A. (1998). Convergence and stability assessment of Newton-Kantorovich reconstruction algorithms for microwave tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, **17**(4), 562–570.
- Joachimowicz, N., Pichot, C., et Hugonin, J.-P. (1991). Inverse scattering : An iterative numerical method for electromagnetic imaging. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **39**(12), 1742–1752.
- Kastner, R. (1987). On the singularity of the full spectral Green's dyad. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **35**(11), 1303–1305.
- Kleinman, R. E. et van den Berg, P. M. (1993). An extended range-modified gradient technique for profile inversion. *Radio Science*, **28**(5), 877–884.
- Legendijk, R. L., Biemond, J., et Boekee, D. E. (1988). Regularized iterative image restoration with ringing reduction. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, **36**(12), 1874–1888.

- Lam, K., Yedlin, M. J., et Farquarson, C. G. (2007). Two-dimensional radio-frequency tomography. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **55**(4), 801–808.
- Lazebnik, M., McCartney, L., Popovic, D., Watkins, C. B., Lindstrom, M. J., Harter, J., Sewall, S., Magliocco, A., Booske, J. H., Okoniewski, M., et Hagness, S. C. (2007). A large-scale study of the ultra-wideband microwave dielectric properties of normal breast tissue obtained from surgeries. *Physics in Medicine and Biology*, **52**(20), 2637–2656.
- Li, F., Liu, Q. H., et Song, L.-P. (2004). Three-dimensional reconstruction of objects burried in layered media using Born and distorted Born iterative methods. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, **1**(2), 107–111.
- Li, X., Bond, E. J., Veen, B. D. V., et Hagness, S. C. (2005). An overview of ultra-wideband microwave imaging via space-time beamforming for early-stage breast-cancer detection. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, **47**(1), 19–34.
- Liu, Q. H., Zhang, Z. Q., Wang, T. T., Bryan, J., Ybarra, G. A., Nolte, L. W., et Joines, W. T. (2002). Active microwave imaging i – 2-D forward and inverse scattering methods. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **50**(1), 123–133.
- Massa, A., Franceschini, D., Franceschini, G., Pastorino, M., Raffetto, M., et Donelli, M. (2005). Parallel GA-based approach for microwave imaging applications. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **53**(10), 3118–3126.
- Meaney, P. M., Fanning, M. W., Li, D., Poplack, S. P., et Paulsen, K. D. (2000). A clinical prototype for active microwave imaging of the breast. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **48**(11), 1841–1853.
- Meaney, P. M., Paulsen, K. D., Geimer, S. D., Haider, S. A., et Fanning, M. W. (2002).

- Quantification of 3-D field effects during 2-d microwave imaging. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, **49**(7), 708–720.
- Meany, P. M., Fang, Q., Fanning, M. W., Pendergrass, S. A., Raynolds, T., Fox, C. J., et Paulsen, K. D. (2004). Microwave breast imaging with an under-determined reconstruction parameter mesh. In *IEEE ISBI from macro to nano*, volume 52, pages 1369–1372.
- Michalski, K. et Mosig, J. (1997). Multilayered media Green's functions in integral equation formulations. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **43**(3), 508–519.
- Nashed, M. Z. (1981). Operator-theoretic and computational approaches to ill-posed problems with applications to antenna theory. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **29**, 220–231.
- Nocedal, J. et Wright, S. J. (1999). *Numerical Optimization*. Springer.
- Omrane, B., Laurin, J.-J., et Goussard, Y. (2006). Subwavelength-resolution microwave tomography using wire grid models and enhanced regularization techniques. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **54**(4), 1438–1450.
- Paulsen, P. M. M. N. K. Y. K. D. (2002). Pre-scaled two-parameter Gauss-Newton image reconstruction to reduce property recovery imbalance. *Physics in Medicine and Biology*, **47**(7), 1101–1119.
- Paulsen, Q. F. P. M. M. K. D. (2006). Singular value analysis of the Jacobian matrix in microwave image reconstruction. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **54**(8), 2371–2380.
- Pogany, L. (2008). Programmes organisés de dépistage du cancer du sein au Canada - Rapport sur la performance des programmes en 2003 et en 2004.

- Technical report, Agence de la santé publique du Canada, <http://www.phac-aspc.gc.ca/publicat/2008/obcsp-podcs-03-04/pdf/podcs-obcsp-03-04-fra.pdf>.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., et Flannery, B. P. (1992). *Numerical recipes in C, the art of scientific computing*. Cambridge Univ. Press, New York, 2nd edition.
- Rekanos, I. T. et Tsiboukis, T. D. (2002). An inverse scattering technique for microwave imaging of binary objects. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **50**(5), 1439–1441.
- Remis, R. F. et van den Berg, P. M. (2000). On the equivalence of the Newton-Kantorovich and distorted Born methods. *Inverse Problems*, **16**(1), L1–L4.
- Roger, A. (1981). Newton-Kantorovitch algorithm applied to electromagnetic inverse problem. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **29**(2), 232–238.
- Semenov, S., Kellam, J., Althausen, P., Williams, T., Abubakar, A., Bulyshev, A., et Sizov, Y. (2007). Microwave tomography for functional imaging of extremity soft tissues : Feasibility assessment. *Physics in Medicine and Biology*, **52**(18), 5705–5719.
- Semenov, S. Y., Bulyshev, A. E., Abubakar, A., Posukh, V. G., Sizoz, Y. E., Souvorov, A. E., van den Berg, P. M., et Williams, T. C. (2005). Microwave-tomographic imaging of the high dielectric-contrast objects using different image-reconstruction approaches. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **53**(7), 2284–2294.
- Semenov, S. Y., Svenson, R. H., Boulyshev, A. E., Souvorov, A. E., Borisov, V. Y., Sizov, Y., Starostin, A. N., Dezern, K. R., Tatsis, G. P., et Baranov, V. Y. (1996). Microwave tomography : Two-dimensional system for biological imaging. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, **43**(9), 13–26.
- Semenov, S. Y., Svenson, R. H., Bulyshev, A. E., Souvorov, A. E., Nazarov, A. G., Sizov, Y. E., Pavlosky, A. V., Borisov, V. Y., Voinov, B. A., Simonova, G. I., Starostin, A. N.,

- Posukh, V. G., Tatsis, G. P., et Baranov, V. Y. (1999). Three-dimensional microwave tomography : Experimental prototype of the system and vector Born reconstruction method. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, **46**(8), 937–946.
- Semenov, S. Y., Svenson, R. H., Bulyshev, A. E., Souvorov, A. E., Nazarov, A. G., Sizov, Y. E., Posukh, V. G., Pavlosky, A. V., Repin, P. N., Starostin, A. N., Voinov, B. A., Taran, M., Tatsis, G. P., et Baranov, V. Y. (2002). Three-dimensional microwave tomography : Initial experimental imaging of animals. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, **49**(1), 55–63.
- Semenov, S. Y., Svenson, R. H., Bulyshev, A. E., Souvorov, A. E., Nazarov, A. G., Sizov, Y. E., Posukh, V. G., Pavlosky, A. V., Repin, P. N., et Tatsis, G. P. (2000). Spatial resolution of microwave tomography for detection of myocardial ischemia and infarction-experimental study on two-dimensional models. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **48**(4), 538–544.
- Song, L.-P. et Liu, Q. H. (2004). Fast three-dimensional electromagnetic nonlinear inversion in layered media with a novel scattering approximation. *Inverse Problems*, **20**(6), S171–S194.
- Song, L.-P. et Liu, Q. H. (2005). A new approximation of the three-dimensional electromagnetic scattering. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, **2**(2), 238–242.
- Souvorov, A. E., Bulyshev, A. E., Semenov, S. Y., Svenson, R. H., Nazarov, A. G., Sizov, Y. E., et Tatsis, G. P. (1998). Microwave tomography : A two-dimensional Newton iterative scheme. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **46**(11), 1654–1659.
- Stutzman, W. L. et Thiele, G. A. (1997). *Antenna Theory and Design*. John Wiley & Sons, 2nd edition.

- Takenaka, T., Jia, H., et Tanaka, T. (2000). Microwave imaging of electrical property distributions by a forward-backward time-stepping method. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, **14**(12), 1607–1764.
- Tanaka, T., Takenaka, T., et He, S. (1999). An FDTD approach to the time-domain inverse problem for an inhomogeneous cylindrical object. *Microwave and Optical Technologies Letters*, **20**(1), 72–76.
- Tikhonov, A. N. et Arsenin, V. Y. (1977). *Solution of ill-posed problems*. John Wiley & Sons.
- van den Berg, P. et Abubakar, A. (2002). Inverse scattering and its applications to medical imaging and subsurface sensing. *The Radio Science Bulletin*, (303), 869–877.
- van den Berg, P. M. et Kleinman, R. E. (1997). A contrast source inversion method. *Inverse Problems*, **13**, 1607–1619.
- van der Vorst, H. A. (1992). Bi-CGSTAB : a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal of Statistical Scientific Computing*, **13**(2), 631–644.
- Wang, L. V., Zhao, X., Sun, H., et Ku, G. (1999). Microwave-induced acoustic imaging of biological tissues. *Review of Scientific Instruments*, **70**(9), 3744–3748.
- Wei, B., Imek, E., Yu, C., et Liu, Q. H. (2007). Three-dimensional electromagnetic nonlinear inversion in layered media by a hybrid diagonal tensor approximation : Stabilized biconjugate gradient fast fourier transform method. *Waves in Random and Complex Media*, **17**(2), 129–147.
- Xie, Y., Guo, B., Xu, L., Li, J., et Stoica, P. (2006). Multistatic adaptative microwave imaging for early breast cancer detection. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, **53**(8), 1647–1657.

- Xu, X. M. et Liu, Q. H. (2002). The BCGS-FFT method for electromagnetic scattering from inhomogenous objects in a planary layered medium. *IEEE Antennas and Wireless Letters*, **1**, 77–80.
- Yu, C., Song, L.-P., et Liu, Q. H. (2005). Inversion of multi-frequency experimental data for complex objects by a DTA-CSI method. *Inverse Problems*, **21**(6), S165–S178.
- Yu, C., Yuan, M., Stang, J., Bresslour, E., George, R. T., Ybarra, G. A., Joines, W. T., et Liu, Q. H. (2008). Active microwave imaging II : 3-D system prototype and image reconstruction from experimental data. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **56**(4), 991–1000.
- Zhang, Z. Q. et Liu, Q. H. (2004). Three-dimensional nonlinear image reconstruction for microwave biomedical imaging. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, **51**(3), 544–548.
- Zhang, Z. Q., Liu, Q. H., Xiao, C., Ward, E., Ybarra, G., et Joines, W. T. (2003). Microwave breast imaging : 3-D forward scattering simulation. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, **50**(10), 1180–1189.

ANNEXES

I

ON ALGORITHMS BASED ON JOINT ESTIMATION OF CURRENTS AND CONTRAST IN MICROWAVE TOMOGRAPHY

Cette annexe reproduit un article soumis à IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, en septembre 2008, et dont les coauteurs sont Jérôme Idier, Yves Goussard et Jean-Jacques Laurin [Barrière et al. (2008c)].

I.1 Abstract

This paper deals with improvements to the contrast source inversion method which is widely used in microwave tomography. First, the method is reviewed and weaknesses of both the criterion form and the optimization strategy are underlined. Then, two new algorithms are proposed. Both of them are based on the same criterion, similar but more robust than the one used in contrast source inversion. The first technique keeps the main characteristics of the contrast source inversion optimization scheme but is based on a better exploitation of the conjugate gradient algorithm. The second technique is based on a preconditioned conjugate gradient algorithm and performs simultaneous updates of sets of unknowns that are normally processed sequentially. Both techniques are shown to be more efficient than original contrast source inversion.

I.2 Introduction

The objective of microwave tomography is to reconstruct the permittivity and conductivity distributions of an object under test. This is performed from measurements of the

field scattered by this object under various conditions of illumination. Microwave tomography has shown great potential in several application areas, notably biomedical imaging, non destructive testing and geoscience.

Unlike other well-known imaging techniques (e.g. X-ray tomography), the involved wavelengths are long compared to the structural features of the object under test. Consequently, ray propagation approximation is not suitable. Instead an integral equation formulation, which is nonlinear and ill-posed [Isernia et Pierri (1997)], must be used.

A large number of techniques have been proposed to perform inversion (*i.e.*, finding the permittivity and conductivity distributions from the measurements). In most of them inversion is formulated as an optimization problem. Differences between methods then come from the nature of the criterion and the type of minimization algorithm.

Proposed criteria are made up of one, two or three terms with the possible addition of a regularization term. When only one term is used, the quadratic error between actual and predicted measurements is minimized. In the two- and three-term cases, criteria penalize both the error on the measurements and the error on some constraint inside the domain of interest.

The problem being nonlinear, the criteria to be minimized may have local minima. To avoid being trapped in them, some methods use global minimization algorithms [Benedetti et al. (2005); Donelli et Massa (2005); Massa et al. (2005); Caorsi et al. (2004); Donelli et Massa (2005); Garnero et al. (1991)]. However, as the complexity of such algorithms grows very rapidly with the number of unknowns, most proposed methods use local optimization schemes and assume that no local minima will be encountered.

Some of these methods are based on successive linearizations of the problem using the Born approximation or some variants [Semenov et al. (1999); van den Berg et Abubakar (2002); Liu et al. (2002); Abubakar et van den Berg (2004); Souvorov et al. (1998); Fran-

chois et Pichot (1997); Joachimowicz et al. (1998, 1991); Bandyopadhyay et al. (2005)]. The capacity of these methods to provide accurate solutions to problems with large scatterers varies according to the used approximation. For instance, the distorted Born method [Chew et Wang (1990)] (which is equivalent to the Newton-Kantorovich [Joachimowicz et al. (1991); Remis et van den Berg (2000)] and Levenberg-Marquardt [Franchois et Pichot (1997)] methods) is more efficient for large scatterers than the Born iterative method [Li et al. (2004)] or some extensions like the one presented in [Song et Liu (2004)]. Nevertheless, most of these methods require complete computation of the forward problem at each iteration which is computationally burdensome.

To avoid the necessity for solving the forward problem at each iteration, two-term criterion techniques were proposed. The idea is to performed optimization not only with respect to electrical properties but also with respect to the total field in the region of interest. This is done with a so-called modified gradient technique in [Kleinman et van den Berg (1993)], a conjugate gradient algorithm in [Barkeshli et Lautzenheiser (1994)] and a quasi-Newton minimization procedure in [Isernia et Pierri (1997)].

The contrast source inversion (CSI) method [van den Berg et Kleinman (1997); van den Berg et Abubakar (2002); Abubakar et van den Berg (2001); Abubakar et al. (2002); Omrane et al. (2006)] is also a 2-term criterion technique but this time the problem is formulated as a function of equivalent currents and electrical properties of the object under test (instead of the electric field and electrical properties). Optimization is performed by a conjugate gradient algorithm with an alternate update of the unknowns.

We mentioned that, due to the nonlinearity of the problem, global optimization schemes could be a good choice. In [Benedetti et al. (2005); Donelli et Massa (2005); Massa et al. (2005); Caorsi et al. (2004); Donelli et Massa (2005)], such algorithms are proposed for optimization of a two-term criterion. In [Garnero et al. (1991)] a simulated annealing algorithm is used to minimize a one-term criterion.

In this paper, the emphasis is placed on well-known CSI methods which offer a good compromise between quality of the solution and computational effort. We address both questions of the form of the criterion and of the corresponding optimization algorithms. We first give background information on the CSI method ; then we show that the corresponding criterion exhibits unwanted characteristics and could lead to degenerate solutions. Two pitfalls of the optimization scheme are also underlined.

Based on this analysis two new methods are proposed ; both use the same criterion, the form of which is deduced from optimization and regularization theories. Therefore, these techniques only differ by their respective minimization strategies. The first one retains the main characteristics of the CSI method but is based on a better exploitation of the linear conjugate gradient algorithm. The second one is based on simultaneous updates of sets of unknowns and a preconditioned nonlinear conjugate gradient algorithm is used to perform the minimization. The two proposed methods exhibit improved robustness and convergence speed compared to CSI.

Note that the scope of the study is limited to analysis of and improvements to techniques that retain the main characteristics of the original CSI methods. Further performance gains, either by significantly altering the nature of the objective function or by using approximate forms thereof, are investigated in [Barrière et al. (2008b)] and [Barrière et al. (2008a)].

I.3 Context

In a microwave tomography experiment the objective is to find permittivity (ϵ') and conductivity (σ) distributions of an object under test placed into a domain D and sequentially illuminated by M different microwave emitters. For each illumination, the scattered field is gathered at N points. A typical setup is depicted in Fig. I.1. In this

study, we limit ourselves to the 2-D TM case. This means we assume that all quantities are constant along the z direction and that the electric field is parallel to it.

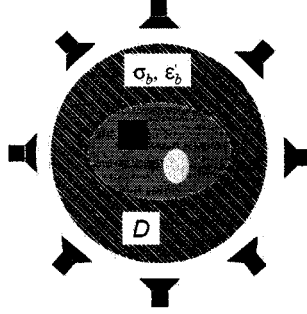


Fig. I.1 Typical microwave tomography setup

By referring to the volume equivalence theorem and by using the method of moments as a discretization technique, the microwave tomography experiment can be described by the following system of equations (for more detail on the derivation we refer to [Abubakar et al. (2002)]) :

For $i = 1, \dots, M$,

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{G}_o \mathbf{w}_i + \mathbf{n}_i^o \quad (\text{I.1a})$$

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{X}(\mathbf{E}_i^0 + \mathbf{G}_c \mathbf{w}_i) \quad (\text{I.1b})$$

where bold-italic fonts and bold-straight fonts denote column vectors and matrices, respectively. $\mathbf{y}_i$ is a length N vector that contains the measured scattered field related to the i th illumination. $\mathbf{E}_i^0$ is the discretized incident field in D (i.e., the field when D is completely filled with the background media). Its length is the number of discretization points, denoted by n . $\mathbf{G}_o$ and $\mathbf{G}_c$ are Green matrices of size $N \times n$ and $n \times n$, respectively. $\mathbf{X}$ is a diagonal matrix such that $\mathbf{X} = \text{diag}\{\mathbf{x}\}$. $\mathbf{x}$ and $\mathbf{w}_i$ are vectors of length n and are called contrast vector and current vector, respectively. Finally, $\mathbf{n}_i^o$ is a noise vector that models all perturbations encountered in a microwave tomography experiment.

Equations (I.1a) and (I.1b) are called *observation* and *coupling* equations, respectively.

The unknown quantities are $\mathbf{x}$ and $\mathbf{W} = (w_1, \dots, w_M)$ while $\mathbf{x}$ represents the actual quantity of interest, since it contains all relevant information about the permittivity and conductivity of the object under test. Indeed, $\mathbf{x}$ is related to the electrical characteristics as follow :

$$\mathbf{x} = (\epsilon^d - \epsilon_b^d) / \epsilon_b^d \quad (\text{I.2})$$

where the division is performed term by term and where ϵ^d and ϵ_b^d are the discretized complex permittivity of the object under test and of background media, respectively. Complex permittivity is expressed by

$$\epsilon = \epsilon' - j\sigma/\omega \quad (\text{I.3})$$

where ω denotes the angular frequency. Estimating $\mathbf{x}$ is then equivalent to estimate ϵ and σ .

It is possible to eliminate w_i from (I.1). The following equation is then obtained :

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{G}_o(\mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{G}_c)^{-1}\mathbf{X}\mathbf{E}_i^0 + \mathbf{n}_i^o \quad (\text{I.4})$$

where $\mathbf{I}$ is the identity matrix. Note that now, $\mathbf{y}_i$ is a function of $\mathbf{x}$ only. The above expression highlights the nonlinearity of the problem which greatly complicates its resolution.

Some approaches are based on (or equivalent to) solving (I.4) in the least-squares sense [Carfantan et al. (1997); Franchois et Pichot (1997)]. Meanwhile, those methods necessitate a high calculation cost. In order to circumvent the difficulty, two term criterion methods are based on system (I.1) (or an equivalent system based on the total field and the contrast instead of the currents and the contrast) [Abubakar et al. (2002); Kleinman et van den Berg (1993)] and minimize the sum of errors on both observation and coupling equations. Such an approach is not equivalent to solving (I.4), since the coupling

equation is not fulfilled exactly. However, under most circumstances, the solutions are extremely similar. Therefore, the rest of the study is dedicated to this type of approach.

I.4 Analysis of the CSI method

In this section we present the background results on CSI and underline some of weaknesses. Both the criterion form and the optimization scheme are studied.

I.4.1 Background results on CSI

CSI formulates the microwave tomography problem in the framework of optimization. The objective is to estimate $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{W}})$ minimizing a given criterion F . This criterion makes a trade-off between the errors that respectively affect the observation (I.1a) and coupling (I.1b) equations. A possible regularization term can be added to deal with the ill-posed nature of the problem [Isernia et Pierri (1997)]. More precisely, we have

$$(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{W}}) = \underset{\mathbf{x}, \mathbf{W}}{\operatorname{argmin}} F \quad (\text{I.5})$$

$$F = F_1 + \lambda F_2 + \lambda_r F_r \quad (\text{I.6a})$$

$$F_1 = \sum_i \|\mathbf{y}_i - \mathbf{G}_o \mathbf{w}_i\|^2 \quad (\text{I.6b})$$

$$F_2 = \sum_i \|\mathbf{X}(\mathbf{E}_i^0 + \mathbf{G}_c \mathbf{w}_i) - \mathbf{w}_i\|^2 \quad (\text{I.6c})$$

$$F_r = \phi(\mathbf{x}) \quad (\text{I.6d})$$

where λ and λ_r respectively denote the weight and the regularization factor, $\|\cdot\|$ is the Euclidean norm, and ϕ is a regularization function.

Remark 1: In [Abubakar et van den Berg (2001)], the concept of multiplicative regularization was introduced. The idea is to multiply $F_1 + \lambda F_2$ by the penalty term F_r , instead of adding it. Here, we shall not pursue in this direction ; we shall rather adopt the classical penalized least-square framework.

CSI proposes the following explicit expression of λ as a function of $\mathbf{x}$:

$$\lambda = \lambda_{\text{CSI}} = \frac{\sum_i \|\mathbf{y}_i\|^2}{\sum_i \|\mathbf{X}\mathbf{E}_i^0\|^2} . \quad (\text{I.7})$$

This choice is justified by the fact that F_1 and λF_2 are equal when the currents vanish.

The optimization is performed according to a block-component scheme based on alternate updates of each set of unknowns. More precisely, minimization with respect to each $\mathbf{w}_i$ is performed for fixed values of $\mathbf{x}$ and $\mathbf{w}_j$, $j \neq i$; then, $\mathbf{W}$ is fixed at its current value and minimization is performed with respect to $\mathbf{x}$. These updates form one iteration of the algorithm, and they are repeated until convergence. Each update of the CSI method consists of a single conjugate gradient step. Table I.1 presents the algorithm. More details are given in [Abubakar et van den Berg (2001)].

I.4.2 Pitfalls of the CSI method

It seems that both the criterion and the optimization algorithm proposed in the CSI method suffer from some weaknesses.

I.4.2.1 Criterion

The choice (I.7) for λ seems to be inappropriate essentially because the resulting criterion F reaches its minimum value for degenerate solutions if no regularization is

```

 $k \leftarrow 0$ 
Initialize  $\mathbf{x}$  and  $\mathbf{W}$ 
repeat
  for  $i = 1, \dots, M$  do
    Perform one iteration of the conjugate gradient algorithm to minimize  $F$  with
    respect to  $w_i$ 
  end for
  Perform one iteration of the conjugate gradient algorithm to minimize  $F$  with
  respect to  $\mathbf{x}$ 
   $k \leftarrow k + 1$ 
until Convergence

```

Tab. I.1 Implementation of the CSI method according to [Abubakar et van den Berg (2001)]

used. More precisely, it is shown in Appendix I.8.1 that solutions $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{W}})$ exist such that $\|\hat{\mathbf{x}}\| \rightarrow \infty$ and $F_1 + \lambda_{\text{CSI}} F_2 \rightarrow 0$. This is obviously an undesirable feature, since it shows that any globally converging minimization method will produce a degenerate solution. As for more realistic, locally converging methods, they could either converge towards a local minimum, possibly near the expected solution, or towards a degenerate global minimum. In Section I.6, an example is shown where a local optimization algorithm converges toward a degenerate solution.

From a theoretical standpoint, an additional regularization term could solve the problem, provided that $F_r(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ when $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$. However, local (or even global) minima with large norms may still exist if λ_r is not chosen large enough, while too large values of λ_r will produce overregularized solutions.

From a practical standpoint, CSI is widely used and, to our knowledge, convergence to degenerate solutions has not been reported yet. A reason could be that, in a widespread version of the method, the dependence of λ_{CSI} on $\mathbf{x}$ is omitted in the calculation of the gradient component $\nabla_{\mathbf{x}} F$. However, it is shown in the next section that this leads to

undesirable properties of the optimization algorithm.

Finally, it should be underlined that the choice (I.7) is not justified by solution quality or computation cost arguments. It could then be expected that better choices be possible from those points of view.

I.4.2.2 Optimization scheme

The first problem with the CSI optimization scheme is to rely on conjugacy formulas in an unfounded way. Indeed, the conjugate gradient algorithm has been designed to minimize a criterion with respect to one set of unknowns [Nocedal et Wright (1999)]. The conjugacy of the descent directions can be defined only if this criterion remains the same during the optimization process. Meanwhile, in CSI, the criterion with respect to each set of unknowns change between two updates. For instance, between two updates of $\mathbf{w}_i$ at iterations k and $k+1$, the criterion $F(\mathbf{w}_i)$ changes due to update of $\mathbf{x}$ at iteration k . The properties of the conjugate gradient algorithm then do not hold.

The second weakness is that the algorithm does not use the exact expression of the gradient term $\nabla_{\mathbf{x}}F$ [Abubakar et van den Berg (2001)]. For all criterions based on (I.6a), we have

$$\nabla_{\mathbf{x}}F = 2\lambda \sum_i (\Delta_i^\dagger \Delta_i \mathbf{x} - \Delta_i^\dagger \mathbf{w}_i) + F_2 \nabla_{\mathbf{x}}\lambda + \lambda_r \nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}) \quad (\text{I.8})$$

where $\Delta_i = \text{diag}\{\mathbf{E}_i^0 + \mathbf{G}_c \mathbf{w}_i\}$ and † represents the transposed conjugate operation.

In CSI [Abubakar et van den Berg (2001)], the term $\nabla_{\mathbf{x}}\lambda$ is neglected even though λ is a function of $\mathbf{x}$ according to (I.7). The *approximate* gradient is also normalized by the amplitude of the total field. This latter step is neglected in this paper not to interfere with our additive regularization term. In practice, we have observed that these approximations

prevent the convergence towards a degenerate minimizer. However, they also prevent the convergence towards a local minimizer, as illustrated in the Section I.6. Actually, the solution does not correspond to the stated goal of minimizing F .

In the next section, new algorithms designed to avoid the previous pitfalls are proposed.

I.5 Proposed algorithms

Two new algorithms with improved performance with respect to the original CSI method are now introduced. The first one retains the main structure of CSI (*i.e.*, block-component optimization) while compensating for its deficiencies. The second one is based on a simultaneous optimization scheme. Both algorithms use the same unique criterion based on (I.6a).

We first detail the exact form of this criterion. To do so, the expected characteristics of the weight factor are deduced from the optimization theory and the role of the regularization term is analyzed. Then, we introduce our two optimization strategies.

I.5.1 Weight factor

The choice of parameter λ is crucial since a bad choice may lead to an inappropriate solution or to a prohibitive computation time. In this subsection we deduce the expected characteristics of the weight factor from optimization theory and propose a strategy to set its value. The possible presence of an additional regularization term is deliberately omitted here since it does not interfere with the weight factor. Regularization issues will be discussed in Subsection I.5.2.

According to optimization theory [Nocedal et Wright (1999)], if $\lambda \rightarrow \infty$ in (I.6a), sol-

ving (I.5) is equivalent to solving

$$\underset{\mathbf{x}, \mathbf{W}}{\operatorname{argmin}} F_1 \quad \text{under constraint (I.1b)} \quad (\text{I.9})$$

which amounts solving (I.1), or equivalently (I.4), in the least-squares sense. It is therefore quite natural to consider very large values of λ in F . Unfortunately, optimization theory [Nocedal et Wright (1999)] also states that the minimization problem (I.5) becomes ill-conditioned for arbitrary large values of λ . Practically, this implies that the computation time rises with λ .

According to these considerations, λ should be set to a value large enough to approximately fulfill the constraint and small enough to preserve the conditioning of the optimization problem. This trade-off effect and its impact on both solution accuracy and computation time will be illustrated in the results section.

To our knowledge, no unsupervised method is available to ensure an appropriate choice of λ . Thus, we rather suggest to turn to a heuristic tuning. In our experiments, we have observed that an appropriate weight factor for a given contrast is still quite efficient for "similar" contrasts. We could then imagine that an appropriate λ could be set during a training step, involving one or several known typical contrasts.

We also note that the suggested λ_{CSI} presented in previous section also stems from heuristics since it is not justified by the solution quality. Hand tuning can then be seen as a generalization of the existing suggestions that gives more flexibility to the user, offering a trade-off between computation time and accuracy of the solution.

I.5.2 Regularization

In this section we analyze the necessity of using a regularization term in criterion F .

The continuous-variable microwave tomography problem is intrinsically ill-posed [Isernia et Pierri (1997)]. After discretization, it yields an ill-conditioned problem [Idier (2008)] which, in practice, is very sensitive to noise : small perturbations on the measurements cause large variations on the solution.

Regularization, introduced by Tikhonov [Tikhonov et Arsenin (1977)], is a well known technique to overcome this difficulty. The objective is to restore the well-posed nature of the problem by incorporating *a priori* information. According to Tikhonov's approach, this is done by adding a penalty term to the data-adequation component, weighted by a positive parameter λ_r that modulates its relative importance.

The simplest penalty term is the squared norm of the vector of unknowns. Here, we rather penalize the squared norm of first order differences of $\mathbf{x}$ between neighboring points in domain D , *i.e.*,

$$F_r = \phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{D}\mathbf{x}\|^2 \quad (\text{I.10})$$

where each row of $\mathbf{D}$ contains only two nonzero values, 1 and -1 , in order to properly implement the desired difference.

In a number of existing methods, no penalization is incorporated into the criterion. One could argue that this would lead to degenerate solutions due to the ill-conditioned nature of the problem. This is not necessarily true if the algorithm is stopped before convergence. Actually, it has been shown mathematically, in the simpler case of deconvolution-type inverse problems, that stopping a gradient-descent algorithm after K iterations has a similar effect than penalizing the criterion using $F_r = \|\mathbf{x}\|^2$, with a weight factor λ_r proportional to $1/K$ [Lagendijk et al. (1988)]. We will illustrate this equivalence for the microwave tomography case in the results section.

In the sequel, we shall focus on the penalization approach since it appears as a more explicit way of performing regularization. From the previous analysis, we choose a cri-

terion based on (I.6a) with (I.10) and with λ and λ_r constant and set heuristically.

I.5.3 Optimization algorithms

In this subsection we propose two schemes to minimize the criterion defined previously. The first one, like CSI, is based on block-component optimization. Meanwhile, it is designed to take full advantage of the conjugate gradient properties. Our second method is based on a simultaneous update of $\mathbf{W}$ and $\mathbf{x}$. Unlike block-component algorithms, the simplest form of this procedure has the drawback of being sensitive to the relative scaling of unknowns. Therefore, we propose a technique capable of overcoming this scaling issue.

I.5.3.1 Alternated conjugate gradient method

According to our choices of λ , λ_r and F_r , the criterion F is quadratic with respect to $\mathbf{w}_i$ when $\mathbf{x}$ and $\mathbf{w}_j$, $j \neq i$, are held constant and is also quadratic with respect to $\mathbf{x}$ when $\mathbf{W}$ is held constant.

Indeed, for all i , F admits the quadratic expression

$$F(\mathbf{w}_i) = \mathbf{w}_i^\dagger \mathbf{A} \mathbf{w}_i - 2\Re(\mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{w}_i) + c_i \quad (\text{I.11})$$

as a function of $\mathbf{w}_i$, where

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}_o^\dagger \mathbf{G}_o + \lambda(\mathbf{X}\mathbf{G}_c - \mathbf{I})^\dagger (\mathbf{X}\mathbf{G}_c - \mathbf{I}) \quad (\text{I.12})$$

and

$$\mathbf{b}_i = -\mathbf{G}_o^\dagger \mathbf{y}_i + \lambda(\mathbf{X}\mathbf{G}_c - \mathbf{I})^\dagger \mathbf{X}\mathbf{E}_i^0 \quad (\text{I.13})$$

and the quadratic expression

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\dagger \mathbf{Q} \mathbf{x} - 2\Re(\mathbf{b}^\dagger \mathbf{x}) + c \quad (\text{I.14})$$

as a function of $\mathbf{x}$, where

$$\mathbf{Q} = \lambda \sum_i \Delta_i^\dagger \Delta_i + \lambda_r \mathbf{D}^\dagger \mathbf{D} \quad (\text{I.15})$$

and

$$\mathbf{b} = \lambda \sum_i \Delta_i^\dagger \mathbf{w}_i . \quad (\text{I.16})$$

Constants c_i and c are not defined here since they are not used in the following analysis.

The linear conjugate gradient algorithm is a gradient-based minimization technique developed to solve symmetric positive-definite linear systems, *i.e.*, to minimize strictly convex quadratic criteria. It has the advantage of producing computationally low-cost iterations while offering good convergence properties. It is then perfectly suited to minimize F with respect to each $\mathbf{w}_i$ and with respect to $\mathbf{x}$ (the complete form of the linear conjugate gradient algorithm for a complex-valued unknown vector is given in Appendix I.8.2, Table I.4).

We then propose an algorithm based on two nested iterative procedures. The main loop consists of alternated updates on each sets of unknowns. Each of these updates is performed by a linear conjugate gradient algorithm. To truly benefit from the efficiency of the conjugate gradient method, we propose to perform several steps of the algorithm, the first of which not being conjugated with the last one of the previous iteration. This is the main difference with standard CSI method.

We also use overrelaxation after each update. Convergence of the algorithm is still guaranteed due to the quadratic nature of the subproblems. Overrelaxation is a well-known

[Press et al. (1992)] strategy aimed at limiting the zigzagging effect that will be described in I.5.3.2. The resulting algorithm, which will be referred to as *alternated conjugate gradient for CSI* method, is presented in Table I.2. Despite nested iterations, it appears that, due to a better use of conjugacy, this algorithm is faster than standard CSI.

As indicated in Table I.2, we propose to perform conjugate gradient steps until a *sufficient decrease* of the gradient is obtained. The computation cost would be prohibitive if iterations were performed until full convergence (*i.e.*, until $\|\nabla F\| = 0$). We then suggest to stop the conjugate gradient algorithm once the initial gradient norm has been reduced by a factor of T *i.e.*, to use a *truncated* version of conjugate gradient algorithm. Typical values of T and overrelaxation coefficients $\theta \in [1, 2)$ are $T = 10$ or 20 and $\theta_w = \theta_x = 1.5$.

It should also be underlined that the minimization with respect to $w_1 \dots w_M$ can be performed in parallel, since, according to (I.11), neither A nor b_i depend on the current values of w_j , $j \neq i$.

I.5.3.2 Simultaneous update algorithm

Both CSI and *alternated conjugate gradient for CSI* algorithms rely on alternated updates of W and x . However, such schemes are often reported to be inefficient in classical numerical analysis textbooks such as [Press et al. (1992)] (see Fig. 10.5.1 therein). More precisely, successive minimization along coordinate directions suffers from the so-called zigzagging phenomenon : if the minimizer is located within a narrow valley, many small steps are required to come close to it.

Instead of alternated updates, minimization along conjugate directions is usually recommended. In the microwave tomography context, we are thus driven to apply a nonlinear conjugate gradient algorithm to the complete set (x, W) of unknown quantities. Non-

```

Initialize  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$  and  $\mathbf{W} = \mathbf{W}^0$ 
 $\ell \leftarrow 1$ 
repeat
  for  $i = 1, \dots, M$  do
     $k \leftarrow 0$ 
    Initialize  $\mathbf{w}_i$  to  $\mathbf{w}_i^{\ell-1}$ 
    repeat
      Perform one iteration of the linear conjugate gradient algorithm of Table I.4
      to minimize  $F$  with respect to  $\mathbf{w}_i$  according to (I.11)
       $k \leftarrow k + 1$ 
    until Sufficient decrease of  $\|\nabla_{\mathbf{w}_i} F\|^2$ 
     $\mathbf{w}_i^\ell \leftarrow \mathbf{w}_i^{\ell-1} + \theta_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_i^{\ell-1})$  {Overrelaxation}
  end for

   $k \leftarrow 0$ 
  Initialize  $\mathbf{x}$  to  $\mathbf{x}^{\ell-1}$ 
  repeat
    Perform one iteration of the linear conjugate gradient algorithm of Table I.4 to
    minimize  $F$  with respect to  $\mathbf{x}$  according to (I.14)
     $k \leftarrow k + 1$ 
  until Sufficient decrease of  $\|\nabla_{\mathbf{x}} F\|^2$ 
   $\mathbf{x}^\ell \leftarrow \mathbf{x}^{\ell-1} + \theta_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\ell-1})$  {Overrelaxation}
   $\ell \leftarrow \ell + 1$ 
until Convergence

```

Tab. I.2 Alternated conjugate gradient for CSI algorithm

linear conjugate gradient is an extension of the linear conjugate gradient whose form for complex-valued unknown vector is detailed in Appendix I.8.2, Table I.5. The resulting scheme exactly corresponds to Table I.5, with $\mathbf{v} = (\mathbf{x}, \mathbf{W})$ (after arrangement in a column-vector form) and $f = F$. Obviously, we have

$$\nabla_{\mathbf{v}} f = (\nabla_{\mathbf{x}} F, \nabla_{w_1} F, \dots, \nabla_{w_M} F) .$$

A less trivial property is that the optimal step length $\arg\min_{\alpha} f(\mathbf{v} + \alpha \mathbf{p})$ can be computed analytically. It is actually equivalent to finding the zeros of a third order polynomial. The expression of this polynomial is given in Appendix I.8.3.

However, the resulting simultaneous optimization scheme has a drawback compared to alternated optimization schemes : $\mathbf{x}$ and $\mathbf{W}$ correspond to different physical quantities, which are not measured in the same unit system, and the efficiency of the simultaneous optimization scheme happens to depend significantly on the chosen units, *i.e.*, on the respective scale of $\mathbf{x}$ and $\mathbf{W}$. Rescaling the variables may result in faster convergence but our observations indicate that the range for appropriate factors varies widely from experiment to experiment. Therefore, our approach is to devise a technique that makes the simultaneous optimization scheme insensitive to the relative scales of $\mathbf{x}$ and $\mathbf{W}$. An elegant way to get rid of scaling problems is to use a suitably *preconditioned* version of conjugate gradient algorithm. The general idea of preconditioning is to resort to the basic conjugate gradient algorithm after a linear invertible change of variables $\mathbf{v} = \mathbf{S}\mathbf{v}'$, in order to solve an equivalent but better-conditioned problem [Nocedal et Wright (1999)]. Table I.3 displays the preconditioned conjugate gradient algorithm in the case of a complex-valued unknown vector. The only difference with Table I.5 is the presence of the preconditioner $\mathbf{P} = \mathbf{S}\mathbf{S}^\dagger$, which is a positive definite Hermitian matrix by construction.

Here, we use a classical preconditioning strategy in which $\mathbf{P}$ is a diagonal matrix formed

{Minimization of a non quadratic function f with respect to $\mathbf{v}$ }

Initialize $\mathbf{v}$

$k \leftarrow 0$

repeat

$\mathbf{g} \leftarrow \nabla_{\mathbf{v}} f$

if $k = 0$ **then**

$\mathbf{p} \leftarrow -\mathbf{P}\mathbf{g}$

else

$\beta \leftarrow \Re((\mathbf{g} - \mathbf{g}^{\text{old}})^\dagger \mathbf{P}\mathbf{g}) / (\mathbf{g}^{\text{old}})^\dagger \mathbf{P}\mathbf{g}^{\text{old}}$

$\mathbf{p} \leftarrow -\mathbf{P}\mathbf{g} + \beta\mathbf{p}$

end if

$\alpha \leftarrow \operatorname{argmin}_{\alpha} f(\mathbf{v} + \alpha\mathbf{p})$

$\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v} + \alpha\mathbf{p}$

$\mathbf{g}^{\text{old}} \leftarrow \mathbf{g}$

$k \leftarrow k + 1$

until Sufficient decrease of $\mathbf{g}^\dagger \mathbf{P}\mathbf{g}$

Tab. I.3 Preconditioned conjugate gradient algorithm in the case of a complex-valued unknown vector

with the inverse of the diagonal entries of the Hessian of F . Thus, the algorithm becomes independent of a change of units. The proof is rather straightforward and is omitted here.

The main cost of such an algorithm, compared to the unpreconditioned conjugate gradient method, comes from the computation of $\mathbf{P}$ which must be done at each iteration. This computation required a matrix-vector multiplication involving a $n \times n$ matrix (as detailed in Appendix I.8.4). In the results section we will show that despite this additional cost, preconditioned conjugate gradient performs well compared to *alternated conjugate gradient for CSI*.

Remark 2: While the conjugate gradient algorithm for a complex-valued unknown vector can always be put into the form of Table I.5, Table I.3 does not give the general form of preconditioned conjugate gradient in the complex case. The reason is that $\mathbf{v} = \mathbf{S}\mathbf{v}'$ is not the general expression for a linear invertible change of variables in the complex case, which would rather read $[\Re(\mathbf{v})^t, \Im(\mathbf{v})^t]^t = \tilde{\mathbf{S}}[\Re(\mathbf{v}')^t, \Im(\mathbf{v}')^t]^t$ where $\cdot^t$ represents the transpose operation. Therefore, the complex-valued vectors should be replaced by their equivalent real-valued representation to obtain the general form of preconditioned conjugate gradient. Nonetheless, preconditioning by a diagonal scaling matrix can always be implemented using complex-valued quantities, so we restrict ourselves to this type of implementation.

I.6 Results

We now present some experimental results. First, the pitfalls of the CSI method and the behavior of the proposed techniques are illustrated on synthetic data examples. Second, the global performance of the three studied algorithms (CSI, *alternated conjugate gradient for CSI* and preconditioned conjugate gradient methods) are compared using

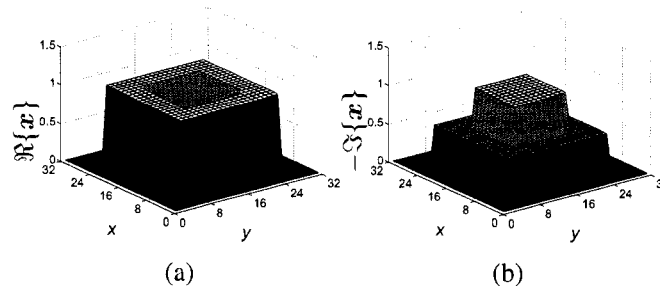


Fig. I.2 (a) Real and (b) minus the imaginary parts of the contrast of the *small square cylinders object*. The *large square cylinder object* has the same shape but all contrast values are multiplied by a factor of 3. The x and y axes are indexed by the sample number.

experimental data published in [Belkebir et Saillard (2001)].

Synthetic data were generated with a 2D simulator solving the electrical field integral equation using a pulse basis functions and point-matching scheme. The domain of interest D was of one squared wavelength ($\lambda_0 \times \lambda_0$) of size. We used $M = N$ with emitters and receivers equally spaced on a circle with radius $\lambda_0/\sqrt{2}$ centered on D . Unless otherwise specified, $M = 32$ and $n = 32^2 = 1024$. White Gaussian noise was added to each set of simulated data in order to get a signal-to-noise ratio of 20 dB.

Performance of the algorithms greatly varies according to the shape and magnitude of the object under test. Tests were thus performed with three different objects. The first one, shown in Fig. I.2, is made of two concentric square cylinders having contrasts of $1 - j0.5$, for the outer one, and $0.5 - j$, for the inner one. The second object under test has the same shape but all the contrast values are multiplied by a factor 3. These objects will be referred to as the *small square cylinder object* and *large square cylinder object*, respectively. The third object under test, shown in Fig. I.3, is made of a single circular cylinder with a radius of $\lambda_0/2$. The contrast of the cylinder is constant and purely real with a value of 2. It will be referred to as the *circular cylinder object*.

Quantitative assessment of the solution quality is performed using a mean square error

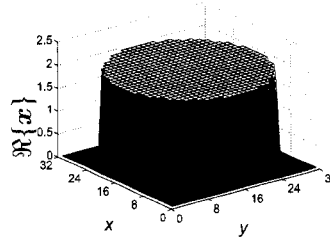


Fig. I.3 Real part of the contrast of the *circular cylinder object*. The imaginary part is zero. The x and y axes are indexed by the sample number.

criterion defined as

$$\Delta_{\mathbf{x}} = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\|^2 / \|\mathbf{x}_o\|^2 \quad (\text{I.17})$$

where $\mathbf{x}_o$ is the actual contrast.

We first illustrate our claims relative to the criterion characteristics and then turn to comparisons related to the optimization process.

I.6.1 Criterion characteristics

Here we give an example where a local optimization algorithm converges toward a degenerate solution. We demonstrated the existence of such solutions if $\lambda = \lambda_{\text{CSI}}$ and $\lambda_r = 0$ in I.4.2 and Appendix I.8.1. We used the *large square cylinders object* with $N = M = 20$ and $n = 20^2 = 400$.

Fig. I.4 presents the modulus of the contrast at the solution while Fig. I.5 gives the amplitude of the total field in D for $i = 1$ and 5. As predicted in Appendix I.8.1, the field vanishes for the pixels k such that $|\hat{x}_k| \rightarrow \infty$ (for reference, we had $\|\mathbf{E}_i^0\| = 0.37 \text{ V}^2/\text{m}^2$ in the middle of D for each illuminations). This is also true for all other illuminations. It should be underlined that, in the same conditions, the solution obtained with the *small square cylinder object* and *circular cylinder object* are not degenerate.

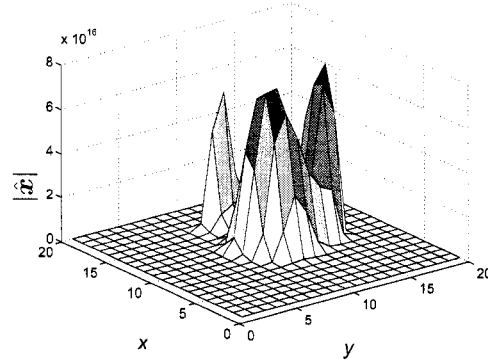


Fig. I.4 Modulus of $\hat{x}$ minimizing F with $\lambda = \lambda_{\text{CSI}}$ and $\lambda_r = 0$. *Large square cylinder object*. The x and y axes are indexed by the sample number.

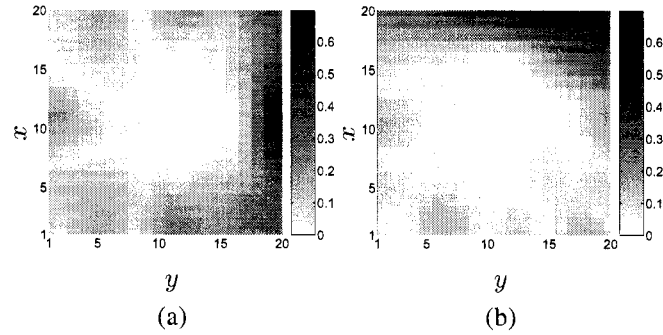


Fig. I.5 Magnitude of total E-field (in V/m) for the degenerate solution presented in Fig. I.4. Illuminations (a) 1 and (b) 5. The field vanishes for all pixels k such that $|\hat{x}_k| \rightarrow \infty$. The x and y axes are indexed by the sample number.

According to these results, we suggested, in Subsection I.5.1, to replace λ_{CSI} by a hand-tuned value of λ . In Fig. I.6 we illustrate the effect of the weight factor on both mean square error and computation time. The *small square cylinder object* and the *alternated conjugate gradient for CSI* method were used.

We remark that, for increasing values of λ , the computation time rises and quickly becomes prohibitive. On the other hand, we observe that, for any value of λ above a certain threshold, the solution quality remains approximatively unchanged. Moreover, for a given range of λ , both solution quality and computation time are acceptable. Within this range, a trade-off can be achieved between computation time and solution quality.

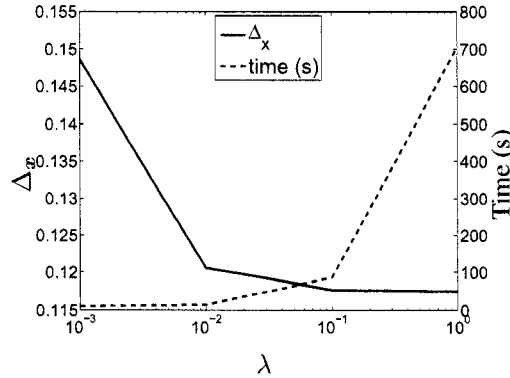


Fig. I.6 Effect of the weight factor λ on the solution quality (mean square error) and on the computation time. The *small square cylinder object* was used with the *alternated conjugate gradient for CSI* method.

Finally, we illustrate our assertions of Subsection I.5.2 about regularization. We used the *small square cylinder object* with the *alternated conjugate gradient for CSI* method. Fig. I.7 (a) presents the solution at convergence (only the real part of the contrast is displayed for the sake of clarity) when an unregularized criterion is used ($\lambda_r = 0$). We clearly see that the solution is degenerate. In Fig. I.7 (b) the same criterion was used but the algorithm was stopped before convergence. Finally, Fig. I.7 (c) presents the solution obtained at convergence with a regularized criterion ($\lambda_r = 0.001$). As expected, these two solutions are quite similar.

I.6.2 Optimization process

We now give examples comparing the CSI optimization scheme to the proposed methods.

In Subsection I.4.2.2 we stated without proof that the approximations on which standard CSI relies prevent the convergence toward a local minimizer of F . This point is illustrated in Fig. I.8, which depicts the evolution of norm of the gradient as a function of the number of iterations. With the CSI approximations [Abubakar et van den Berg (2001)]

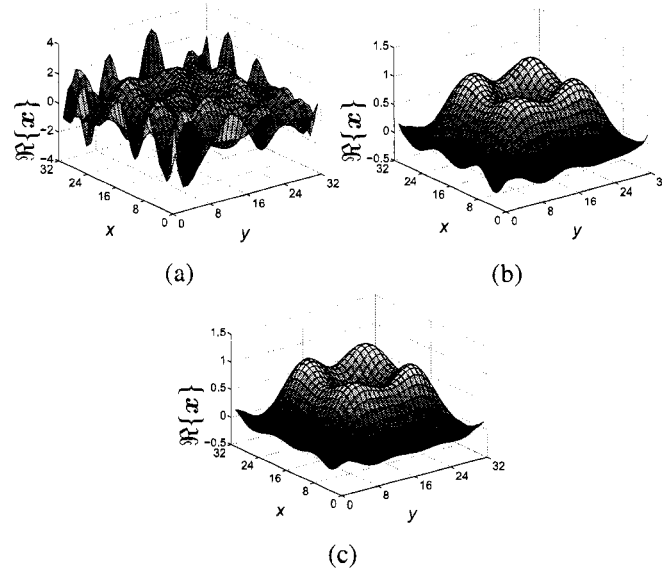


Fig. I.7 *Small square cylinder object*, real part of the reconstructed contrast : (a) Unregularized criterion, optimization stopped at convergence, (b) unregularized criterion, optimization stopped before convergence, (c) regularized criterion, optimization stopped at convergence. The x and y axes are indexed by the sample number.

(solid lines) the gradient norm goes toward a nonzero value, thereby indicating that the convergence point is not a local minimizer. When no approximations are made (dashed lines), the gradient norm decreases toward zero as expected.

Another comment in Subsection I.4.2.2 was related to the non-optimal exploitation of the conjugate gradient algorithm in the standard CSI optimization scheme. Here we validate that the *alternated conjugate gradient for CSI* scheme is actually more efficient than the original CSI : both methods were tested using the same criterion. Parameters λ and λ_r were set by hand to 0.01 and 0.001, respectively. Tests were performed with the *small square cylinder object* and on the *circular cylinder object*.

Figs. I.9 (a) and (b) present the evolution of criterion F as a function of time for the *small square cylinder object* and the *circular cylinder object*, respectively. In both cases, the *alternated conjugate gradient for CSI* algorithm is faster, suggesting that a better use of conjugacy pays off. Experience shows that the gain in computation time can be as high

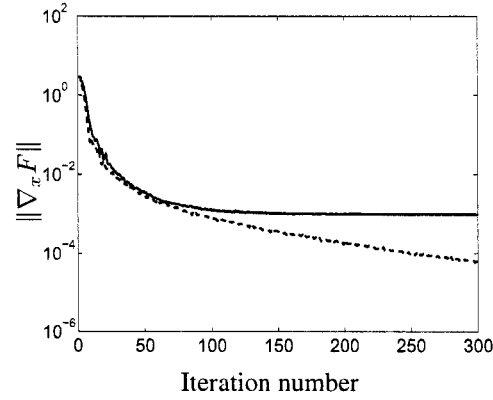


Fig. I.8 Evolution of norm of the gradient with respect to $\mathbf{x}$ for the CSI method when (-) a gradient approximation is used to calculate update directions and when (- -) no approximation is used. Remark : the plotted quantity is the exact value of the norm of the gradient, not its approximation.

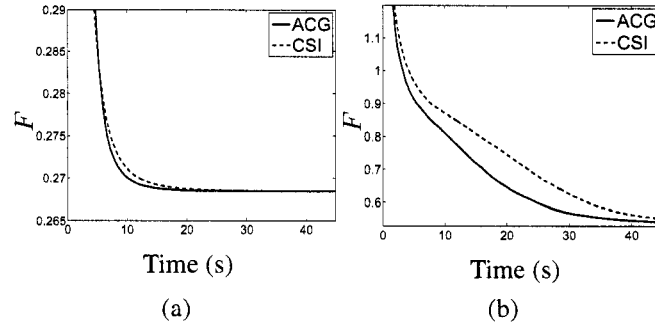


Fig. I.9 Evolution of F as a function of time for CSI and *alternated conjugate gradient for CSI* (ACG) schemes : (a) *small square cylinder object*, (b) *circular cylinder object*. The same criterion, with $\lambda = 0.01$ and $\lambda_r = 0.001$, was used for both methods.

as 20% depending on the object under test and on the chosen stopping rule. Obviously, it cannot be proved that the *alternated conjugate gradient for CSI* scheme is always faster than CSI. Nevertheless, *alternated conjugate gradient for CSI* outperformed CSI in all test cases.

In Subsection I.5.3.2 we proposed algorithms performing simultaneous updates of the unknowns. We illustrate how these simultaneous conjugate gradient and preconditioned conjugate gradient algorithms behave and we compare them to the *alternated conjugate gradient for CSI* method.

In Fig. I.10, the evolution of the criterion is presented for unpreconditioned conjugate gradient, preconditioned conjugate gradient and *alternated conjugate gradient for CSI* methods. Two different scales were used. The results in Fig. I.10 (a) were obtained with the *small square cylinder object* while those in Fig. I.10 (b) were obtained with the *circular cylinder object*¹. Scaling 2 differs from scaling 1 by the fact that a factor of one tenth was applied to the currents.

The scaling sensitivity of the unpreconditioned conjugate gradient algorithm appears clearly in the results. The convergence speed of the algorithm exhibits large variations when units are changed. This is not the case for the other two methods. Moreover, according to our experience, the preconditioned conjugate gradient method always provides results at least as good as those produced by the unpreconditioned conjugate gradient technique, and should therefore be preferred.

However, comparison of simultaneous preconditioned conjugate gradient and block-component optimization is rather inconclusive, as the nature of the object under test seems to have a significant impact. Indeed, while the simultaneous scheme is a little bit faster for the *small square cylinder object*, its convergence speed is not even competitive for the *circular cylinder object*. Those variations prevent us from systematically favoring one type of algorithm over the other. More details are given on this subject in the next subsection.

I.6.3 Experimental data

We now compare the studied algorithms using the experimental data published in [Belkebir et Saillard (2001)] (the 3 GHz dataset was used). In this paper, a quasi 2-D setup is used to perform measurements over two different objects under test, presented in

1. Note that we did not use the same parameters than for the results presented in Fig I.9 (b).

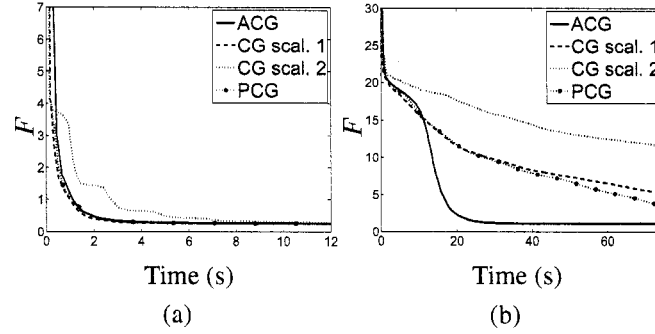


Fig. I.10 Evolution of F as a function of time for : *alternated conjugate gradient for CSI* (ACG) algorithm with scaling 1, preconditioned conjugate gradient (PCG) algorithm with scaling 1, unpreconditioned conjugate gradient (CG) algorithm with scaling 1 and unpreconditioned conjugate gradient algorithm with scaling 2. For preconditioned conjugate gradient and *alternated conjugate gradient for CSI* algorithms, the results are identical for scalings 1 and 2. (a) *small square cylinder object*, (b) *circular cylinder object*

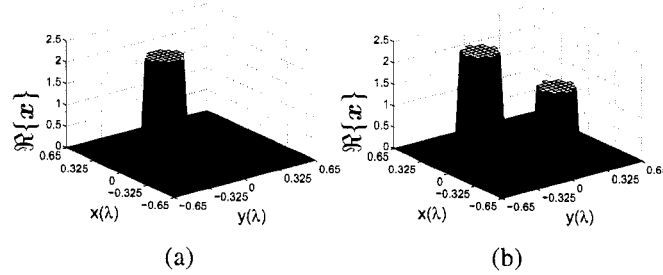


Fig. I.11 Real parts of the contrasts of objects under test tested in [Belkebir et Saillard (2001)]. (a) *One cylinder object* (b) *two cylinder object*. Both objects under test have a purely real contrast.

Fig. I.11 (a) and (b). They will be referred to as the *one cylinder* and *two cylinder* cases, respectively. Their contrasts are purely real. For more detail on the setup, see [Belkebir et Saillard (2001)].

In our tests, parameter λ was set as follows : For CSI, we always used λ_{CSI} as defined in (I.7). For *alternated conjugate gradient for CSI* and preconditioned conjugate gradient, two values were used : the final value of λ_{CSI} (test 1) ; a heuristic value offering a good trade-off between solution quality and computation time (test 2). Finally, we used the same regularization factor λ_r for all tests and all three methods.

Fig. I.12 presents the evolution of the mean square error (Δ_x) as a function of time (the evolution of F cannot be used here for comparison purpose since the criteria are not the same for all algorithms). Figs. I.12 (a) and I.12 (b) present the results for test 1 and 2, respectively. The *one cylinder* object was used.

The results of the first test show that *alternated conjugate gradient for CSI* and preconditioned conjugate gradient provide better solutions than CSI. This seems to contradict the fact that the values of λ were selected so as to obtain identical criterion values at the solution point. Actually, this difference can be attributed to the fact that the CSI algorithm does not converge toward a local minimum of the criterion, as illustrated in Subsection I.6.2.

Moreover, the *alternated conjugate gradient for CSI* method is faster than CSI in the first test. This once again suggests that the better use of conjugacy made in the *alternated conjugate gradient for CSI* method pays off.

The second test also reveals that the hand tuning of λ yields a significant increase of the speed of *alternated conjugate gradient for CSI* and preconditioned conjugate gradient algorithms without decreasing the solution quality. Indeed, for both algorithms, convergence is about 3 time faster when λ is set by hand while the mean square errors are almost the same.

Finally, preconditioned conjugate gradient is from 5 to 10 times faster than *alternated conjugate gradient for CSI* according to the chosen stopping rule and the value of λ . Further research should be conducted in order to explain such large variations in convergence speed, but a first analysis suggests that the preconditioned conjugate gradient algorithm is particularly efficient for "easy" object under test, *i.e.*, for small object under test and/or object under tests with a low contrast.

We performed the same two tests with the *two cylinder* object under test using the same

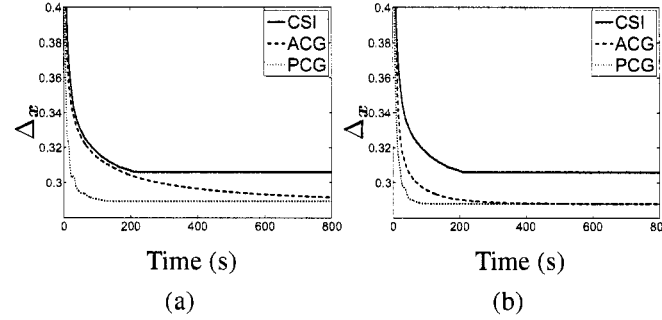


Fig. I.12 Evolution of Δ_x in function of time for CSI algorithm, *alternated conjugate gradient for CSI* (ACG) method and preconditioned conjugate gradient (PCG) algorithm. $\lambda = \lambda_{\text{CSI}}$ for the CSI method. For *alternated conjugate gradient for CSI* and preconditioned conjugate gradient methods : (a) λ equal the final value of λ_{CSI} , (b) λ set heuristically. Data from [Belkebir et Saillard (2001)].

parameters than for the *one cylinder* case. Results were quite similar and are not presented here. They nevertheless confirm, as stated in Subsection I.5.1, that a set of parameters λ and λ_r which is efficient for a given contrast, will remain efficient for a whole set of *similar* contrasts. This then confirms the possibility of choosing the value of λ and λ_r by performing a training step using known contrasts.

I.7 Conclusion

Both the criterion form and the optimization scheme of the CSI method were analyzed. We established that the weight factor prescribed in the CSI method was not suitable and could lead to a degenerate solution. We also underlined that the CSI optimization scheme does not take advantage of conjugacy in an optimal way.

We then proposed two new methods, both making use of the same criterion which is similar to the one used in CSI. However, the weight factor is set heuristically. We put forward that solution quality and computation time were directly related to the value of this factor. The role of the regularization term was also investigated and we chose to use a regularization penalty term in our criterion.

Alternated conjugate gradient for CSI, despite nested iterative algorithms, appears to be faster than CSI. We also proposed a preconditioned conjugate gradient algorithm for simultaneous updates of the unknowns. The latter scheme is insensitive to the relative scale of the data. Our results indicate that preconditioned conjugate gradient is sometimes faster and sometimes slower than block component approaches. Indeed, their respective behavior strongly depends on the nature of object under test.

A more precise study of the behavior of block-component and simultaneous update approaches should be undertaken in order to better evaluate their relative performance. We could then expect to determine which algorithm should be favored according to the experimental conditions.

Obviously, an unsupervised method for tuning the weight factor could be of great interest. In some cases the hand-tuning of λ from training step is a good choice but it may be sometimes difficult to apply.

I.8 Appendices

I.8.1 Proof of the degeneracy of minimizers of $F_{\text{CSI}} = F_1 + \lambda_{\text{CSI}} F_2$

Let us first assume that there exist a set $\mathbf{W}$ of current distributions $\mathbf{w}_i$ such that F_1 cancels, *i.e.*,

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{G}_o \mathbf{w}_i \quad (\text{I.18})$$

and a point of the domain D where the total field $\mathbf{E}_i^0 + \mathbf{G}_c \mathbf{w}_i$ simultaneously cancels for all i , *i.e.*,

$$\mathbf{e}_k^t(\mathbf{E}_i^0 + \mathbf{G}_c \mathbf{w}_i) = 0 \quad (\text{I.19})$$

for some $k \in \{1, \dots, n\}$ where e_k is the k th basis vector. Then we have

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{W}) \rightarrow F_1 = 0 \quad (\text{I.20})$$

provided that $\lambda_r = 0$ and $x_k \rightarrow \infty$. Indeed, in such conditions, F_2 does not depend on x_k , according to (I.6c) and (I.19), while the denominator of λ_{CSI} does, in such a way that λ_{CSI} decreases to zero when x_k takes arbitrarily large values.

Finally, let us justify the existence of such a set of current distributions. For fixed values of i and k , constraints (I.18) and (I.19) together form a linear system of $N + 1$ equations, depending of the n unknowns formed by w_i . Since $n \gg N$ (typically, $n \approx N^2$), this system is likely to be undeterminate, *i.e.*, it has infinitely many solutions. This actually holds for any values of i and k , hence the proof.

I.8.2 Conjugate gradient algorithms for complex unknown values

We present here the linear and nonlinear Polak-Ribière-Polyak conjugate gradient algorithms in Table I.4 and Table I.5, respectively. In all cases, $\mathbf{g} = \nabla_v f$ denotes the gradient of a criterion f with respect to an unknown vector $\mathbf{v}$, $\mathbf{p}$ the descent direction induced by conjugate gradient, β the conjugacy factor that allows to compute the successive conjugate descent directions $-\mathbf{g} + \beta\mathbf{p}$, α the optimal step length $\arg\min_{\alpha} f(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{p}^k)$, and k the current iteration number.

Tables I.4 and I.5 address the case of complex-valued unknown vectors, which corresponds to the relevant situation here, while classical numerical optimization textbooks such as [Nocedal et Wright (1999)] are restricted to real-valued vectors. Indeed, it can be shown that our complex-valued implementations of conjugate gradient produce the same iterations as the reference real-valued schemes, where all complex-valued quantities would be replaced by an equivalent real-valued representation. For instance, $\mathbf{x}$

{Minimization of a quadratic function $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{v} - 2\Re(\mathbf{b}^\dagger \mathbf{v}) + c$ with respect to $\mathbf{v}$, where $\mathbf{A}$ is a Hermitian matrix, $\mathbf{v}$ and $\mathbf{b}$ complex-valued vectors and c a real-valued constant}

Initialize $\mathbf{v}$

$\mathbf{g} \leftarrow \mathbf{A} \mathbf{v} - \mathbf{b}$ {i.e., $\mathbf{g} = \nabla_{\mathbf{v}} f/2$ }

$k \leftarrow 0$

repeat

$\rho = \|\mathbf{g}\|^2$

if $k = 0$ **then**

$\mathbf{p} \leftarrow -\mathbf{g}$

else

$\beta \leftarrow \rho / \rho^{\text{old}}$

$\mathbf{p} \leftarrow -\mathbf{g} + \beta \mathbf{p}$

end if

$\mathbf{h} \leftarrow \mathbf{A} \mathbf{p}$

$\alpha \leftarrow \rho / \mathbf{p}^\dagger \mathbf{h}$

$\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v} + \alpha \mathbf{p}$

$\mathbf{g} \leftarrow \mathbf{g} + \alpha \mathbf{h}$

$\rho^{\text{old}} \leftarrow \rho$

$k \leftarrow k + 1$

until Sufficient decrease of $\rho = \|\mathbf{g}\|^2$

Tab. I.4 Linear conjugate gradient algorithm in the case of a complex-valued unknown vector

should be substituted by a real vector of length $2n$ such as $[\Re(\mathbf{x})^\dagger, \Im(\mathbf{x})^\dagger]^\dagger$.

I.8.3 Optimal step length calculation for simultaneous optimization schemes

For the simultaneous optimization schemes, the optimal step length $\hat{\alpha}$ is the minimizer of $F(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{p}_x, [\mathbf{w}_i + \alpha \mathbf{p}_i]_i)$. According to (I.6a), (I.6b), (I.6c) and (I.10), F is a quartic

{Minimization of a non quadratic function f with respect to $\mathbf{v}$ }

Initialize $\mathbf{v}$

$k \leftarrow 0$

repeat

$\mathbf{g} \leftarrow \nabla_{\mathbf{v}} f$

if $k = 0$ **then**

$\mathbf{p} \leftarrow -\mathbf{g}$

else

$\beta \leftarrow \Re((\mathbf{g} - \mathbf{g}^{\text{old}})^\dagger \mathbf{g}) / \|\mathbf{g}^{\text{old}}\|^2$

$\mathbf{p} \leftarrow -\mathbf{g} + \beta \mathbf{p}$

end if

$\alpha \leftarrow \operatorname{argmin}_{\alpha} f(\mathbf{v} + \alpha \mathbf{p})$

$\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v} + \alpha \mathbf{p}$

$\mathbf{g}^{\text{old}} \leftarrow \mathbf{g}$

$k \leftarrow k + 1$

until Sufficient decrease of $\|\mathbf{g}\|^2$

Tab. I.5 Nonlinear Polak-Ribière-Polyak conjugate gradient algorithm in the case of a complex-valued unknown vector

polynomial function of α with real coefficients

$$F(\alpha) = R_0 + \alpha R_1 + \alpha^2 R_2 + \alpha^3 R_3 + \alpha^4 R_4 \quad (\text{I.21})$$

where

$$\begin{aligned} R_0 &= F(\mathbf{x}, \mathbf{W}) \\ R_1 &= 2\Re \left(- \sum_i (\mathbf{r}_{1i}^\dagger \mathbf{G}_o \mathbf{p}_i + \lambda \mathbf{r}_{2i}^\dagger \mathbf{q}_{2i}) + \lambda_r \mathbf{r}_r^\dagger \mathbf{p}_x \right) \\ R_2 &= \sum_i \left(\|\mathbf{G}_o \mathbf{p}_i\|^2 + \lambda \left(2\Re(\mathbf{r}_{2i}^\dagger \mathbf{s}_{2i}) + \|\mathbf{q}_{2i}\|^2 \right) \right) \\ &\quad + \lambda_r \|\mathbf{D} \mathbf{p}_x\|^2 \\ R_3 &= 2\lambda \sum_i \Re(\mathbf{q}_{2i}^\dagger \mathbf{s}_{2i}) \\ R_4 &= \lambda \sum_i \|\mathbf{s}_{2i}\|^2 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1i} &= \mathbf{y}_i - \mathbf{G}_o \mathbf{w}_i \\ \mathbf{r}_{2i} &= \mathbf{X}(\mathbf{E}_i^0 + \mathbf{G}_c \mathbf{w}_i) - \mathbf{w}_i \\ \mathbf{r}_r &= \mathbf{D} \mathbf{x} \\ \mathbf{q}_{2i} &= \text{diag}\{\mathbf{p}_x\}(\mathbf{E}_i^0 + \mathbf{G}_c \mathbf{w}_i) + (\mathbf{X} \mathbf{G}_c - \mathbf{I}) \mathbf{p}_i \\ \mathbf{s}_{2i} &= \text{diag}\{\mathbf{p}_x\} \mathbf{G}_c \mathbf{p}_i . \end{aligned}$$

By necessary condition, the minimizer $\hat{\alpha}$ cancels the derivative of $F(\alpha)$

$$F'(\alpha) = R_1 + 2\alpha R_2 + 3\alpha^2 R_3 + 4\alpha^3 R_4 \quad (\text{I.22})$$

which is a cubic polynomial function with real coefficients. Thus, $\hat{\alpha}$ can be calculated exactly : it suffices to determine the solutions of $F'(\alpha) = 0$ (for instance, by Cardano's method), and to select the one that minimizes $F(\alpha)$ among the real solutions.

I.8.4 Expression of preconditioner $\mathbf{P}$

We detail the expression of the proposed preconditioner $\mathbf{P}$. In the preconditioned conjugate gradient method the unknown vector is formed by $(\mathbf{x}, \mathbf{W})$. The proposed preconditioner is then the inverse of the diagonal matrix formed by the diagonal entries of $\mathbf{Q}$ followed by M instances of the diagonal entries of $\mathbf{A}$

$$\mathbf{P} = \text{diag}\{\text{diag}\{\mathbf{Q}\}^t, \text{diag}\{\mathbf{A}\}^t, \dots, \text{diag}\{\mathbf{A}\}^t\}^{-1} . \quad (\text{I.23})$$

According to (I.12) and (I.15), all these elements can be computed off-line or at a relatively low cost (term by term vector multiplications) except for $\text{diag}\{(\mathbf{X}\mathbf{G}_c - \mathbf{I})^\dagger(\mathbf{X}\mathbf{G}_c - \mathbf{I})\}$ that can be expressed as

$$\begin{aligned} \text{diag}\{(\mathbf{X}\mathbf{G}_c - \mathbf{I})^\dagger(\mathbf{X}\mathbf{G}_c - \mathbf{I})\} \\ = |\mathbf{G}_c|^2 |\mathbf{x}|^2 - 2\Re(\text{diag}\{\text{diag}\{\mathbf{G}_c\}\}\mathbf{x}) - 1 \end{aligned}$$

where $|\mathbf{G}_c|^2$ and $|\mathbf{x}|^2$ represent the matrix and the vector formed with the square modulus of the entries of $\mathbf{G}_c$ and $\mathbf{x}$, respectively. Therefore, evaluation of this term essentially requires one multiplication by a $n \times n$ full matrix at each iteration.

II

CONTRAST FIELD SOURCE INVERSION FOR FASTER RECONSTRUCTION IN MICROWAVE TOMOGRAPHY

Cette annexe reproduit un article soumis à IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, en septembre 2008, et dont les coauteurs sont Jérôme Idier, Yves Goussard et Jean-Jacques Laurin [Barrière et al. (2008b)].

II.1 Abstract

This paper deals with algorithms suitable for fast reconstruction of high-contrast objects in microwave tomography. First, we show that the speed of contrast source inversion methods, which offer an interesting trade-off between solution quality and computation time, is limited by the characteristics of the optimization criterion. We then suggest a new criterion to be minimized with respect to the contrast sources, the total electric field and the contrast. Two minimization schemes are proposed : one for the general case and one for a specific but quite common case where a uniform meshing and an homogenous background media are used. The resulting algorithms are shown to be from 2 to 4 times faster than the corresponding original contrast source inversion methods.

II.2 Introduction

The objective of microwave imaging is to reconstruct the internal structure of an object under test from the measurements of the field scattered by this object. Microwave imaging has shown great potential in geoscience [Jia et al. (2002)], non destructive tes-

ting [Lam et al. (2007)] and biomedical imaging [Semenov et al. (2002, 2000, 1996)]. Among possible applications, breast cancer detection seems particularly promising [Fear et al. (2003); Xie et al. (2006); Li et al. (2005); Fhager et Persson (2005); Meaney et al. (2000)]. Here, the interest comes from the large permittivity and conductivity contrasts existing between normal and malignant breast tissues.

Active microwave imaging methods can be divided into two main modalities : confocal microwave imaging and microwave tomography. In confocal microwave imaging [Li et al. (2005); Xie et al. (2006)], wideband pulses are sequentially transmitted to the object under test. The image is reconstructed by comparing the propagation time between different pairs of emitters and receivers. The main advantage of this technique is the simplicity of the algorithms used for image reconstruction. A relatively high resolution is also possible since a wideband signal is used. However, such a method is not adapted for quantitative estimation of electrical characteristics of the object. The objective is rather to localize potential scattering *targets*.

As opposed to confocal microwave imaging, the objective of microwave tomography is to estimate the permittivity and conductivity distributions of the object under test. It is then expected that images reconstructed with this modality contain more information than images obtained by confocal microwave imaging. Meanwhile, the drawback of microwave tomography is to require the solution of a large, ill-posed and highly non-linear system [Isernia et Pierri (1997)].

To overcome these problems, some microwave tomography methods are based on simplified models. This is the case for the chirp-pulse microwave computed tomography method (inspired from X-ray computed tomography) [Bertero et al. (2000); Fhager et Persson (2005)] and Born-type methods [van den Berg et Abubakar (2002); Abubakar et van den Berg (2004); Li et al. (2004)]. Both types of methods present a low computational cost, but are only efficient for low and/or small contrasts. Moreover, like confocal

microwave imaging, chirp-pulse microwave computed tomography only generates qualitative images. Therefore, such methods are not suited for breast cancer detection (and biomedical imaging in general) where the involved contrasts are rather high [Lazebnik et al. (2007)].

Other methods based on a complete nonlinear formulation of the problem have then been proposed. Both time-domain [Takenaka et al. (2000); Fhager et Persson (2007); Tanaka et al. (1999); Fhager et Persson (2005); Jia et al. (2002)] and frequency-domain [Souvorov et al. (1998); Kleinman et van den Berg (1993); Liu et al. (2002); van den Berg et Kleinman (1997)] modalities have been investigated. In all cases, the inverse problem is formulated as an optimization problem.

Due to the nonlinearity of the system, the criterion to be minimized may have local minima [Isernia et al. (2001)]. To avoid being trapped in them, global minimization algorithms have been proposed [Caorsi et al. (2004); Donelli et Massa (2005); Massa et al. (2005); Benedetti et al. (2005); Garnero et al. (1991)]. The resulting methods are quite robust due to the guarantee of convergence toward a global minimizer of the criterion. However, the complexity of global algorithms grows rapidly with the number of unknowns and the computation time required to solve a realistic microwave tomography problem is prohibitively high if no *a priori* is made on the solution.

Methods based on local optimization schemes have also been proposed. Despite the fact that these algorithms are not guaranteed to converge towards a global minimizer, experience shows that satisfactory solutions can be obtained in many realistic cases. Moreover, the solutions are obtained significantly faster than with global minimization approaches. Nevertheless, methods proposed in [Franchois et Pichot (1997); Joachimowicz et al. (1991); Souvorov et al. (1998)] necessitate the complete computation of the direct problem at each iteration, which is computationally burdensome.

Another group of methods are also based on a complete nonlinear formulation but do not necessitate the computation of the direct problem [van den Berg et Abubakar (2002); van den Berg et Kleinman (1997); Kleinman et van den Berg (1993); Isernia et Pierri (1997)]. The idea is to perform optimization with respect to both the electric characteristics of the object under test and the electric field or equivalent currents. The contrast source inversion (CSI) method [van den Berg et Abubakar (2002); van den Berg et Kleinman (1997); Abubakar et al. (2002); Abubakar et van den Berg (2001)] is probably the most popular of these methods.

In order to envision clinical application of microwave tomography, further reduction of the computation time is required. Our objective is to propose new algorithms suitable for reconstruction of high-contrast objects in biomedical applications and offering an improved computational cost. In [Barrière et al. (2008c)], we introduced two generalized versions of the CSI method dubbed *alternated conjugate gradient for CSI* and *preconditioned conjugate gradient*. Both methods appear to be more robust and faster than original CSI, but nonetheless exhibit bottlenecks that limit their efficiency.

In this paper we focus on one of these bottlenecks. More precisely, we show that the update of the currents is the most costly operation of the *alternated conjugate gradient for CSI* method. We then introduce a new family of methods designed to deal with this problem. These approaches are based on a new formulation of microwave tomography which is equivalent to the one used by the CSI methods.

A preliminary version of the first method was briefly introduced in [Barrière et al. (2007)]. Here, we present a complete version of the algorithm including overrelaxation and a strategy to deal with the presence of the regularization term and validation on experimental data.

Finally, it should be underlined that the scope of the study is limited to techniques based

on *exact formulations* of the microwave tomography problem. Alternative techniques, based on *approximate formulations* with the aim of reducing the size of various algebraic quantities and the number of unknowns, are investigated in [Barrière et al. (2008a)].

II.3 CONTEXT

Let us consider a microwave tomography setup in which the object under test is placed into a domain D and illuminated sequentially under M different conditions. A single-frequency continuous wave signal is assumed for each illumination and the scattered field is measured at N points. In this study, we limit ourselves to the 2-D TM case. This means we assume that all quantities are constant along the z direction and that the electric field is parallel to it. In the equations that follow, the $e^{j\omega t}$ factor, where ω denotes the angular frequency, is assumed and suppressed on all field and current quantities.

Methods considered in this paper are based on formulations of the forward problem that are deduced from the volume equivalence theorem [Balanis (1989)]. Two different formulations can be derived.

The volume equivalence theorem states that the field scattered by an object under test is equal to the field produced by some equivalent currents located into the background media. These currents are functions of the total electric field and of the electrical characteristics of the object under test. By using the method of moment as a discretization technique, the microwave tomography problem can then be described by the following system of equations (for more details on the derivation, see [Abubakar et al. (2002)]) :

For $i = 1, \dots, M$:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{G}_o \mathbf{X} \mathbf{E}_i + \mathbf{n}_i^o \quad (\text{II.1a})$$

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_i^0 + \mathbf{G}_c \mathbf{X} \mathbf{E}_i \quad (\text{II.1b})$$

where bold-italic fonts and bold-straight fonts represent column vectors and matrices, respectively. Vector $\mathbf{y}_i$ is of length N and contains the measured scattered field. $\mathbf{E}_i$ and $\mathbf{E}_i^0$ are the discretized total electric field and the discretized incident field (*i.e.*, the field when D is completely filled with the background media) in D , respectively. Their common length is the number of discretization points, say n . $\mathbf{G}_o$ and $\mathbf{G}_c$ are Green matrices of size $N \times n$ and $n \times n$, respectively. $\mathbf{X}$ is a diagonal matrix such that $\mathbf{X} = \text{diag}\{\mathbf{x}\}$, where $\mathbf{x}$ is a vector of length n called the contrast. Finally, $\mathbf{n}_i^o$ is a noise vector that models all perturbations encountered in a microwave tomography experiment. Index i refers to the i th illumination.

The contrast $\mathbf{x}$ is related to the electrical characteristics of the object under test as follows :

$$\mathbf{x} = (\boldsymbol{\epsilon}^d - \boldsymbol{\epsilon}_b^d) / \boldsymbol{\epsilon}_b^d \quad (\text{II.2})$$

where the division is performed term by term and where $\boldsymbol{\epsilon}^d$ and $\boldsymbol{\epsilon}_b^d$ are the discretized complex permittivity of the object under test and of background media, respectively. Complex permittivity is expressed by

$$\epsilon = \epsilon' - j\sigma/\omega . \quad (\text{II.3})$$

Estimation of the contrast is then equivalent to the estimation of the permittivity ϵ' and conductivity σ .

Another formulation of the problem can be obtained by defining currents vectors $\mathbf{w}_i$ related to the equivalent currents mentioned above :

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{X}\mathbf{E}_i . \quad (\text{II.4})$$

According to (II.4), (II.1) equivalently reads

For $i = 1, \dots, M$,

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{G}_o \mathbf{w}_i + \mathbf{n}_i^o \quad (\text{II.5a})$$

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{X}(\mathbf{E}_i^0 + \mathbf{G}_c \mathbf{w}_i) . \quad (\text{II.5b})$$

Equation (II.1a) and (II.5a) are called *observation* equations while (II.1b) and (II.5b) are called *coupling* equations. In a microwave tomography experiment, the contrast $\mathbf{x}$ is the quantity of interest but $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_M)$, in (II.1), and $\mathbf{W} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_M)$, in (II.5), are also unknown.

II.4 CSI-like algorithms

In this section, existing CSI-like methods, and more precisely *alternated conjugate gradient for CSI* presented in [Barrière et al. (2008c)], are reintroduced with the aim to highlight the main bottleneck of the optimization process.

II.4.1 Criterion

CSI-like methods formulate the microwave tomography problem in the framework of optimization. The objective is to estimate the quantities $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{W}})$ that minimize a given criterion F_{CSI} . The latter penalizes the error done on both observation (II.5a) and coupling (II.5b) equations. A possible regularization term can be added to deal with the ill-posed nature of the problem [Isernia et Pierri (1997)]. More precisely we have

$$(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{W}}) = \underset{\mathbf{x}, \mathbf{W}}{\operatorname{argmin}} F_{\text{CSI}} \quad (\text{II.6})$$

with

$$F_{\text{CSI}} = F_1 + \lambda F_2 + \lambda_r F_r \quad (\text{II.7a})$$

$$F_1 = \sum_i \|\mathbf{y}_i - \mathbf{G}_o \mathbf{w}_i\|^2 \quad (\text{II.7b})$$

$$F_2 = \sum_i \|\mathbf{X}(\mathbf{E}_i^0 + \mathbf{G}_c \mathbf{w}_i) - \mathbf{w}_i\|^2 \quad (\text{II.7c})$$

$$F_r = \phi(\mathbf{x}) \quad (\text{II.7d})$$

where λ and λ_r are weight factors, $\|\cdot\|$ is the Euclidean norm, and ϕ is a regularization function.

It has been suggested to use $\lambda = \sum_i \|\mathbf{y}_i\|^2 / \sum_i \|\mathbf{X}\mathbf{E}_i^0\|^2$ [van den Berg et Kleinman (1997)] but it can be shown that for such a choice F_{CSI} is minimized for degenerate solutions if $\lambda_r = 0$, *i.e.*, $F_{\text{CSI}} \rightarrow 0$ for $\|\hat{\mathbf{x}}\| \rightarrow \infty$ [Barrière et al. (2008c)]. Then, we will assume in this paper that λ and λ_r are set heuristically and are independent of the unknowns. We also choose $\phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{D}\mathbf{x}\|^2$ where each row of $\mathbf{D}$ contains only two nonzero values, 1 and -1 , positioned in such a way that the first order differences of $\mathbf{x}$ between neighboring points is penalized.

As a consequence of these choices, criterion (II.7a) is quadratic with respect to each set of unknowns when the others are fixed. More precisely, it is quadratic with respect to all $\mathbf{w}_i$ when $\mathbf{x}$ and $\mathbf{w}_j$, $j \neq i$, are fixed and with respect to $\mathbf{x}$ when $\mathbf{W}$ is fixed. Indeed, (II.7a) admits the following quadratic expressions :

$$F_{\text{CSI}}(\mathbf{w}_i) = \mathbf{w}_i^\dagger \mathbf{A}_w \mathbf{w}_i - 2\Re(\mathbf{b}_{w_i}^\dagger \mathbf{w}_i) + c_{w_i} \quad (\text{II.8})$$

as a function of $\mathbf{w}_i$, and

$$F_{\text{CSI}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\dagger \mathbf{A}_x \mathbf{x} - 2\Re(\mathbf{b}_x^\dagger \mathbf{x}) + c_x \quad (\text{II.9})$$

as a function of $\mathbf{x}$, where

$$\mathbf{A}_w = \mathbf{G}_o^\dagger \mathbf{G}_o + \lambda(\mathbf{X}\mathbf{G}_c - \mathbf{I})^\dagger (\mathbf{X}\mathbf{G}_c - \mathbf{I}) \quad (\text{II.10})$$

$$\mathbf{b}_{w_i} = \mathbf{G}_o^\dagger \mathbf{y}_i - \lambda(\mathbf{X}\mathbf{G}_c - \mathbf{I})^\dagger \mathbf{X}\mathbf{E}_i^0 \quad (\text{II.11})$$

and

$$\mathbf{A}_x = \lambda \sum_i \Delta_i^\dagger \Delta_i + \lambda_r \mathbf{D}^\dagger \mathbf{D} \quad (\text{II.12})$$

$$\mathbf{b}_x = \lambda \sum_i \Delta_i^\dagger \mathbf{w}_i \quad (\text{II.13})$$

with $\Delta_i \triangleq \text{diag}\{\mathbf{E}_i^0 + \mathbf{G}_c \mathbf{w}_i\}$, $\mathbf{I}$ denotes the identity matrix and $\cdot^\dagger$ represents the transposed conjugate operation. Constants c_{w_i} and c_x are not specified here since they are not used in the following analysis.

II.4.2 Optimization algorithm

Some CSI-like methods are based on block-component optimization schemes. More precisely, the criterion is minimized with respect to $\mathbf{W}$ for a fixed value of $\mathbf{x}$, and then, with respect to $\mathbf{x}$ for a fixed value of $\mathbf{W}$. Minimization with respect to $\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_M$ can be performed in parallel, since, according to (II.10) and (II.11), neither $\mathbf{A}_w$ nor $\mathbf{b}_{w_i}$ depend on the current values of $\mathbf{w}_j$, $j \neq i$.

Equations (II.8) and (II.9) being quadratic, the minimizers of F_{CSI} with respect to $\mathbf{W}$ and $\mathbf{x}$ can be obtained by solving simple normal equations

$$\mathbf{A}_w \mathbf{W} = \mathbf{B} \quad (\text{II.14})$$

for $\mathbf{W}$, with $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_{w_1}, \dots, \mathbf{b}_{w_M})$, and

$$\mathbf{A}_x \mathbf{x} = \mathbf{b}_x \quad (\text{II.15})$$

for $\mathbf{x}$.

At first glance, an attractive approach for the minimization process could then be to alternately perform the exact inversion of (II.14) and (II.15). Nevertheless, $\mathbf{A}_w$ is a full matrix and depends on variable $\mathbf{x}$. Such an optimization scheme would then require the inversion of a system involving a full matrix *at each iteration* (since $\mathbf{x}$, and then $\mathbf{A}_w$, change from one iteration to the other). This is intractable in practice given the size of $\mathbf{A}_w$. The exact solution of (II.15) would also require the inversion of a system at each iteration since $\mathbf{A}_x$ depends on $\mathbf{W}$.

CSI-like methods are rather based on a *partial* (i.e., truncated) inversion of (II.14) and (II.15) by using iterative algorithms. In the classical CSI method [Abubakar et van den Berg (2001); van den Berg et Kleinman (1997)] a single step of the conjugate gradient algorithm is performed at each iteration. In *alternated conjugate gradient for CSI* method [Barrière et al. (2008c)], which is a generalization of the classical CSI, several conjugate gradient steps are performed.

It should be underlined that, for both algorithms, the computational cost of the update of $\mathbf{x}$ is quite low compared to the computational cost of the update of $\mathbf{W}$. This is due to the structure of $\mathbf{A}_x$, which is sparse by construction, and to the fact that the number of unknowns in $\mathbf{W}$ is M times larger than the number of unknowns in $\mathbf{x}$.

According to these considerations, even if both CSI and *alternated conjugate gradient for CSI* perform relatively fast compared to other microwave tomography methods, their convergence speed is mainly limited by the fact that (II.14) cannot be solved efficiently.

In practice, the *alternated conjugate gradient for CSI* method seems to be faster than CSI [Barrière et al. (2008c)] and it will be used as base of comparison with the CFSI approaches presented in the next sections. The method is detailed in Table II.1. It can be observed that we use overrelaxation after each update. Overrelaxation is a well-known strategy aimed at limiting the zigzagging phenomenon coming from the successive minimization along coordinate directions [Press et al. (1992)]. Convergence of the algorithm is still guaranteed due to the quadratic nature of the subproblems. Typical values of overrelaxation coefficients $\theta \in [1, 2)$ are $\theta_w = \theta_x = 1.5$.

We now introduce a new method developed to decrease the computational cost of each iteration.

II.5 CFSI algorithm

A possible way to improve the convergence speed of the inversion process could be to develop a criterion where the minimization with respect to $\mathbf{W}$ can be achieved exactly in a single operation. This can be done by using a new formulation of the forward problem based on three equations. By combining (II.1) and (II.4), a system which is totally equivalent to (II.1) and (II.5) can be derived :

For $i = 1 \dots M$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{G}_o \mathbf{w}_i + \mathbf{n}_i^o \quad (\text{II.16a})$$

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_i^0 + \mathbf{G}_c \mathbf{w}_i \quad (\text{II.16b})$$

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{X} \mathbf{E}_i . \quad (\text{II.16c})$$

Using the same approach as for CSI methods, a new criterion F_{CFSI} based on (II.16) can be obtained. The inversion problem then amounts to compute the quantities $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{W}}, \hat{\mathbf{E}})$

```

Initialize  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$  and  $\mathbf{W} = \mathbf{W}^0$ 
 $\ell \leftarrow 1$ 
repeat
  for  $i = 1, \dots, M$  do
     $k \leftarrow 0$ 
    Initialize  $\mathbf{w}_i$  to  $\mathbf{w}_i^{\ell-1}$ 
    repeat
      Perform one iteration of the linear conjugate gradient algorithm to minimize
       $F_{\text{CSI}}$  with respect to  $\mathbf{w}_i$ 
       $k \leftarrow k + 1$ 
    until Sufficient decrease of  $\|\nabla_{\mathbf{w}_i} F_{\text{CSI}}\|^2$ 
     $\mathbf{w}_i^\ell \leftarrow \mathbf{w}_i^{\ell-1} + \theta_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_i^{\ell-1})$  {Overrelaxation}
  end for

   $k \leftarrow 0$ 
  Initialize  $\mathbf{x}$  to  $\mathbf{x}^{\ell-1}$ 
  repeat
    Perform one iteration of the linear conjugate gradient algorithm to minimize
     $F_{\text{CSI}}$  with respect to  $\mathbf{x}$ 
     $k \leftarrow k + 1$ 
  until Sufficient decrease of  $\|\nabla_{\mathbf{x}} F_{\text{CSI}}\|^2$ 
   $\mathbf{x}^\ell \leftarrow \mathbf{x}^{\ell-1} + \theta_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\ell-1})$  {Overrelaxation}
   $\ell \leftarrow \ell + 1$ 
until Convergence

```

Tab. II.1 Alternated conjugate gradient for CSI algorithm according to [Barrière et al. (2008c)].

such that

$$(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{W}}, \hat{\mathbf{E}}) = \underset{\mathbf{x}, \mathbf{W}, \mathbf{E}}{\operatorname{argmin}} F_{\text{CFSI}} \quad (\text{II.17})$$

$$F_{\text{CFSI}} = F_1 + \lambda_1 F_2 + \lambda_2 F_3 + \lambda_r F_r \quad (\text{II.18a})$$

$$F_1 = \sum_i \|\mathbf{y}_i - \mathbf{G}_o \mathbf{w}_i\|^2 \quad (\text{II.18b})$$

$$F_2 = \sum_i \|\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_i^0 - \mathbf{G}_c \mathbf{w}_i\|^2 \quad (\text{II.18c})$$

$$F_3 = \sum_i \|\mathbf{w}_i - \mathbf{X} \mathbf{E}_i\|^2 \quad (\text{II.18d})$$

$$F_r = \phi(\mathbf{x}) \quad (\text{II.18e})$$

where λ_1 and λ_2 are weight factors.

It should be underlined that, in general, (II.6) and (II.17) do not yield the same solution. Indeed, while (II.4) is exactly satisfied in (II.7) by construction, it is only approximately satisfied in (II.18) (excepted for cases where $\lambda_2 \rightarrow \infty$). However, it will be shown in Section II.7 that, even if the solutions of (II.6) and (II.17) are not mathematically the same, they are quite comparable in practice.

Moreover, F_{CFSI} presents the same important characteristics as F_{CSI} , *i.e.*, being quadratic with respect to each set of unknowns when the others are fixed. More precisely, F_{CFSI} can be expressed as

$$F(\mathbf{w}_i) = \mathbf{w}_i^\dagger \mathbf{H}_w \mathbf{w}_i - 2\Re(\mathbf{q}_{\mathbf{w}_i}^\dagger \mathbf{w}_i) + m_{\mathbf{w}_i} \quad (\text{II.19})$$

as a function of $\mathbf{w}_i$,

$$F(\mathbf{E}_i) = \mathbf{E}_i^\dagger \mathbf{H}_E \mathbf{E}_i - 2\Re(\mathbf{q}_{\mathbf{E}_i}^\dagger \mathbf{E}_i) + m_{\mathbf{E}_i} \quad (\text{II.20})$$

as a function of $\mathbf{E}_i$, and

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\dagger \mathbf{H}_x \mathbf{x} - 2\Re(\mathbf{q}_x^\dagger \mathbf{x}) + m_x \quad (\text{II.21})$$

as a function of $\mathbf{x}$, where

$$\mathbf{H}_w = \mathbf{G}_o^\dagger \mathbf{G}_o + \lambda_1 \mathbf{G}_c^\dagger \mathbf{G}_c + \lambda_2 \mathbf{I} \quad (\text{II.22})$$

$$\mathbf{q}_{w_i} = \mathbf{G}_o^\dagger \mathbf{y}_i + \lambda_1 \mathbf{G}_c^\dagger (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_i^0) + \lambda_2 \mathbf{X} \mathbf{E}_i \quad (\text{II.23})$$

$$\mathbf{H}_E = \lambda_1 \mathbf{I} + \lambda_2 \mathbf{X}^\dagger \mathbf{X} \quad (\text{II.24})$$

$$\mathbf{q}_{E_i} = \lambda_1 (\mathbf{E}_i^0 + \mathbf{G}_c \mathbf{w}_i) + \lambda_2 \mathbf{X}^\dagger \mathbf{w}_i \quad (\text{II.25})$$

and

$$\mathbf{H}_x = \lambda_2 \sum_i \Delta_{E_i}^\dagger \Delta_{E_i} + \lambda_r \mathbf{D}^\dagger \mathbf{D} \quad (\text{II.26})$$

$$\mathbf{q}_x = \lambda_2 \sum_i \Delta_{E_i}^\dagger \mathbf{w}_i \quad (\text{II.27})$$

with $\Delta_{E_i} \triangleq \text{diag}\{\mathbf{E}_i\}$. Constants m_{w_i} , m_{E_i} and m_x are not specified since they are not used in the following analysis.

Once again, the exact minimizers of the criterion with respect to each set of unknowns are simply the solution of normal equations

$$\mathbf{H}_w \mathbf{W} = \mathbf{Q}_w \quad (\text{II.28})$$

for $\mathbf{W}$,

$$\mathbf{H}_E \mathbf{E} = \mathbf{Q}_E \quad (\text{II.29})$$

for $\mathbf{E}$ and

$$\mathbf{H}_x \mathbf{x} = \mathbf{q}_x \quad (\text{II.30})$$

for $\mathbf{x}$, where $\mathbf{Q}_w = (\mathbf{q}_{w_1}, \dots, \mathbf{q}_{w_M})$ and $\mathbf{Q}_E = (\mathbf{q}_{E_1}, \dots, \mathbf{q}_{E_M})$.

However, unlike the CSI case, the exact minimization with respect to $\mathbf{W}$ can now be performed at a low computational cost. Indeed, according to (II.22), $\mathbf{H}_w$ is *independent* of the unknowns. It is a function of the weight parameters and of the physical characteristics of the experimental setup only. Thus, $\mathbf{H}_w$ can be inverted only once for a given configuration and, once it is done, (II.28) can be solved exactly in a single matrix-vector multiplication.

Moreover, the exact minimization with respect to $\mathbf{E}$ can also be performed easily. The normal matrix $\mathbf{H}_E$ is not independent of the unknowns but it has a diagonal structure. Therefore, (II.29) can be solved at a negligible calculation cost.

Finally, $\mathbf{H}_x$ is neither independent of the unknowns nor diagonal. An iterative procedure must then be used to partially solve (II.30) as done in *alternated conjugate gradient for CSI* to partially solve (II.15). However, $\mathbf{H}_x$ is sparse and the computational cost of such a procedure is quite low.

Sequential resolution of (II.28), (II.29) and (II.30) can be iteratively repeated to form the CFSI method detailed in Table II.2. CFSI can also be speeded up using overrelaxation.

Compared to *alternated conjugate gradient for CSI*, the CFSI method requires only one nested algorithm instead of two. The computation cost by iteration is then significantly reduced. However, a new set of unknowns has been introduced. This complicates the analytical comparison of the convergence speed of both algorithms. Tests presented in Section II.7 show that, for the general case, CFSI is actually significantly faster than *alternated conjugate gradient for CSI*. However, contrarily to *alternated conjugate gra-*

```

Initialize  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ ,  $\mathbf{W} = \mathbf{W}^0$  and  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_t^0$ 
 $\ell \leftarrow 1$ 
repeat
   $\mathbf{W} \leftarrow \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{Q}_w$ 
   $\mathbf{W}^\ell \leftarrow \mathbf{W}^{\ell-1} + \theta_w (\mathbf{W} - \mathbf{W}^{\ell-1})$ 

   $\mathbf{E} \leftarrow \mathbf{H}_E^{-1} \mathbf{Q}_E$ 
   $\mathbf{E}^\ell \leftarrow \mathbf{E}^{\ell-1} + \theta_E (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{\ell-1})$ 

   $k \leftarrow 0$ 
  Initialize  $\mathbf{x}$  to  $\mathbf{x}^{\ell-1}$ 
  repeat
    Perform one iteration of the linear conjugate gradient algorithm to minimize
     $F_{\text{CFSI}}$  with respect to  $\mathbf{x}$ 
     $k \leftarrow k + 1$ 
  until Sufficient decrease of  $\|\nabla_{\mathbf{x}} F_{\text{CFSI}}\|^2$ 
   $\mathbf{x}^\ell \leftarrow \mathbf{x}^{\ell-1} + \theta_x (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\ell-1})$ 
   $\ell \leftarrow \ell + 1$ 
until Convergence

```

Tab. II.2 Novel CFSI algorithm

dient for CSI, CFSI cannot take advantage of the particular structure of the matrix $\mathbf{G}_c$ encountered in a specific but quite common case which is studied in the next section.

II.6 A preconditioned CFSI method

When a uniform discretization grid and a homogenous background medium are used, which is often the case in practice, $\mathbf{G}_c$ exhibits a Toeplitz-block-Toeplitz structure that, as we will now show, the CFSI method cannot fully take advantage of. A new algorithm, better-adapted to this specific case, is then proposed. It relies on the fact that $\mathbf{H}_w$ is independent of the unknowns.

II.6.1 Toeplitz-block-Toeplitz structure of $\mathbf{G}_c$

The largest part of the computational effort in both *alternated conjugate gradient for CSI* and CFSI methods is related, for the general case, to matrix-vector multiplications involving full-matrices of size $n \times n$, i.e., matrix $\mathbf{G}_c$ in *alternated conjugate gradient for CSI* and matrices $\mathbf{G}_c$ and $\mathbf{H}_w^{-1}$ in CFSI (let us remark that in *alternated conjugate gradient for CSI*, matrix $\mathbf{A}_w$ does not have to be explicitly computed).

In the cases where $\mathbf{G}_c$ has a Toeplitz-block-Toeplitz structure, the calculation cost of a multiplication involving this matrix can be reduced from $O(n^2)$ to $O(n \log n)$ by using a fast-Fourier-transform (FFT) algorithm. On the other hand, neither $\mathbf{H}_w$ nor $\mathbf{H}_w^{-1}$ have a Toeplitz-block-Toeplitz structure.

Then, the CFSI method cannot fully take advantage of the structure of $\mathbf{G}_c$, since it still requires one multiplication of order $O(n^2)$ per iteration, whereas the *alternated conjugate gradient for CSI* only requires multiplications of order $O(n \log n)$. This latter method is then faster than CFSI.

A possible way to improve the performances of CFSI for this specific case could be to use a conjugate gradient algorithm to partially solve (II.28). Indeed, in this case, the Toeplitz-block-Toeplitz structure of $\mathbf{G}_c$ could be exploited like it is done in *alternated conjugate gradient for CSI* for solving (II.14). Meanwhile, CFSI was actually developed to avoid the use of a nested iterative procedure for the update of $\mathbf{W}$. A good compromise can be obtained by using a preconditioned conjugate gradient algorithm instead of a conjugate gradient algorithm, as shown in the next subsection.

II.6.2 Preconditioned conjugate gradient algorithm

The general idea of preconditioning is to resort to the basic conjugate gradient algorithm after a linear invertible change of variables $\mathbf{v} = \mathbf{S}\mathbf{v}'$, in order to solve an equivalent but better-conditioned problem [Nocedal et Wright (1999)]. The preconditioned conjugate gradient algorithm for complex-valued unknown vector is presented in appendix II.9.1.

Practically, preconditioning allows to speed-up conjugate gradient algorithms. By using preconditioned conjugate gradient to partially solve (II.28), a decrease of the number of iterations can be expected.

Preconditioned conjugate gradient and conjugate gradient algorithms are quite similar. In fact, the only new quantity in preconditioned conjugate gradient is the preconditioner $\mathbf{P} = \mathbf{S}^\dagger \mathbf{S}$. The acceleration of the convergence rate of the algorithm is related to the choice of this preconditioner. For a linear problem $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b}$, the objective is usually to take $\mathbf{P}$ as close as possible to $\mathbf{A}^{-1}$. For instance, if $\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}$, the algorithm converges in only one iteration.

On the other hand, the computational cost by iteration is higher for preconditioned conjugate gradient than for conjugate gradient since one more multiplication by $\mathbf{P}$ is needed at each iteration. Our objective is then to find a preconditioner that is close to $\mathbf{H}_w^{-1}$, while

offering a low matrix-vector calculation cost.

II.6.3 Preconditioner choice

We suggest to base our preconditioner on the truncated eigenvalue decomposition of $\mathbf{H}_w^{-1}$. As shown in this subsection, this produces a very good trade-off between the two expected characteristics of a preconditioner stated above.

$\mathbf{H}_w$ being Hermitian by construction, $\mathbf{H}_w^{-1}$ is also Hermitian and admits an eigenvalue decomposition such that

$$\mathbf{H}_w^{-1} = \mathbf{U}\Delta\mathbf{U}^\dagger \quad (\text{II.31})$$

with

$$\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \quad (\text{II.32a})$$

$$\Delta = \text{diag}\{\boldsymbol{\delta}\} \quad (\text{II.32b})$$

$$\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_n)^\dagger, 0 < \delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_n. \quad (\text{II.32c})$$

Scalars δ_p and vectors $\mathbf{u}_p$, $p = 1 \dots n$, are called eigenvalues and eigenvectors, respectively. The eigenvectors form an orthonormal basis such that

$$\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = \mathbf{I}. \quad (\text{II.33})$$

It can be observed that for increasing values of p , δ_p converges relatively fast toward $1/\lambda_2$. This type of characteristics is well known and forms the basis of truncated singular value decomposition inversion [Nashed (1981)].

For a given $P < n$, we then have $\delta_p \approx 1/\lambda_2$ for $p > P$. Therefore $\mathbf{H}_w^{-1}$ can be approxi-

mated by

$$\tilde{\mathbf{H}}_w^{-1} = 1/\lambda_2 \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\Delta}_d \tilde{\mathbf{U}}^\dagger \quad (\text{II.34})$$

with

$$\tilde{\mathbf{U}} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_P) \quad (\text{II.35a})$$

$$\tilde{\Delta}_d = \text{diag}\{\tilde{\delta}_d\} \quad (\text{II.35b})$$

$$\tilde{\delta}_d = 1/\lambda_2 - (\delta_1, \dots, \delta_P)^t. \quad (\text{II.35c})$$

According to (II.34), the computation cost of a matrix-vector multiplication involving the $n \times n$ matrix $\tilde{\mathbf{H}}_w^{-1}$ can be reduced to $O(Pn)$. On the other hand, it can easily be shown that the difference between $\tilde{\mathbf{H}}_w^{-1}$ and $\mathbf{H}_w^{-1}$ is bounded in norm :

$$\|\mathbf{H}_w^{-1} - \tilde{\mathbf{H}}_w^{-1}\|_2 \leq 1/\lambda_2 - \delta_P \quad (\text{II.36})$$

where the spectral norm operator $\|\cdot\|_2$ gives the eigenvalue of largest magnitude. Moreover, $\tilde{\mathbf{H}}_w^{-1} = \mathbf{H}_w^{-1}$ if $P = n$. Due to the fast convergence of δ_p toward $1/\lambda_2$, we can then choose P such that $\tilde{\mathbf{H}}_w^{-1}$ is relatively close to $\mathbf{H}_w^{-1}$ and such that the computation cost of a multiplication by $\tilde{\mathbf{H}}_w^{-1}$ remains low. According to these considerations, we suggest to use $\tilde{\mathbf{H}}_w^{-1}$ as preconditioner.

The eigenvalue decomposition is quite a costly operation. Nevertheless, as stated in Section II.5, $\mathbf{H}_w$ is independent of the unknowns and is determined solely from the characteristics of the setup and from parameters λ_1 and λ_2 . Thus, the eigenvalue decomposition must be performed only once for a given configuration.

In Section II.4 we also stated that, in CSI-like methods, matrix $\mathbf{A}_w$ changes from one iteration to the other. This explains why the suggested preconditioned conjugate gradient algorithm cannot be considered for these methods. Indeed, it would necessitate one ei-

genvalue decomposition at each iteration, which is intractable in practice.

II.6.4 Preconditioned CFSI method

We can now introduce our new CFSI method adapted to cases where $\mathbf{G}_c$ has a Toeplitz-block-Toeplitz structure. We will refer to it as preconditioned CFSI. It is based on a block-component optimization of (II.18). The minimization with respect to $\mathbf{W}$ is performed using a preconditioned conjugate gradient algorithm with $\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{H}}_w^{-1}$. Minimizations with respect to $\mathbf{E}$ and $\mathbf{x}$ are performed as in the CFSI method. Table II.3 presents the complete algorithm.

For the moment, the value of P is set heuristically. Typically we choose it such that all the singular values $\delta_p < 0.95/\lambda_2$ are kept in the approximation.

Compared to the CFSI method, the only full $n \times n$ matrix involved in preconditioned CFSI is $\mathbf{G}_c$ (neither $\mathbf{H}_w$ nor $\mathbf{H}_w^{-1}$ have to be explicitly computed). Its Toeplitz-block-Toeplitz structure can then be exploited. Moreover, due to the preconditioning, updates of the currents should be faster in preconditioned CFSI than in *alternated conjugate gradient for CSI*. Therefore, the calculation cost of one iteration of preconditioned CFSI should also be lower than for one iteration of *alternated conjugate gradient for CSI*.

II.7 Results

As discussed previously, it is quite complicated to conduct an analytical comparison of the convergence speeds of the whole algorithms. Instead, performances of CFSI, preconditioned CFSI and *alternated conjugate gradient for CSI* will be compared by applying them on few examples of objects under test.

```

Initialize  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ ,  $\mathbf{W} = \mathbf{W}^0$ ,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_t^0$  and  $\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}^{-1}$ 
 $\ell \leftarrow 1$ 
repeat
  for  $i = 1, \dots, M$  do
     $k \leftarrow 0$ 
    Initialize  $\mathbf{w}_i$  to  $\mathbf{w}_i^{\ell-1}$ 
    repeat
      Perform one iteration of the linear preconditioned conjugate gradient algorithm of Table II.5 to minimize  $F_{\text{CFSI}}$  with respect to  $\mathbf{w}_i$ 
       $k \leftarrow k + 1$ 
    until Sufficient decrease of  $\|\nabla_{\mathbf{w}_i} F_{\text{CFSI}}\|^2$ 
     $\mathbf{w}_i^\ell \leftarrow \mathbf{w}_i^{\ell-1} + \theta_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_i^{\ell-1})$ 
  end for

   $\mathbf{E} \leftarrow \mathbf{H}_{\mathbf{E}}^{-1} \mathbf{Q}_{\mathbf{E}}$ 
   $\mathbf{E}^\ell \leftarrow \mathbf{E}^{\ell-1} + \theta_{\mathbf{E}}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{\ell-1})$ 

   $k \leftarrow 0$ 
  Initialize  $\mathbf{x}$  to  $\mathbf{x}^{\ell-1}$ 
  repeat
    Perform one iteration of the linear conjugate gradient algorithm to minimize  $F_{\text{CFSI}}$  with respect to  $\mathbf{x}$ 
     $k \leftarrow k + 1$ 
  until Sufficient decrease of  $\|\nabla_{\mathbf{x}} F_{\text{CFSI}}\|^2$ 
   $\mathbf{x}^\ell \leftarrow \mathbf{x}^{\ell-1} + \theta_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\ell-1})$ 
   $\ell \leftarrow \ell + 1$ 
until Convergence

```

Tab. II.3 Preconditioned CFSI algorithm

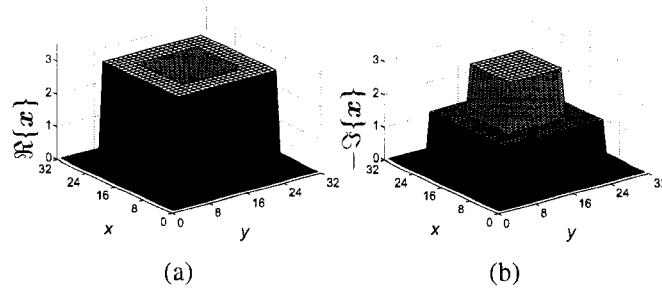


Fig. II.1 (a) Real and (b) minus the imaginary parts of the contrast of the *square cylinder object*. The x and y axes are indexed by the sample number.

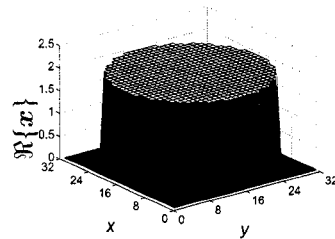


Fig. II.2 Real part of the contrast of the *circular cylinder object*. The imaginary part is zero. The x and y axes are indexed by the sample number.

Tests were performed using both synthetic and experimental data. Synthetic data were generated by a 2D simulator. The domain of interest D was a square with edge of one wavelength in the background media (λ_0). We used $n = 32^2 = 1024$ and $M = N = 32$ with emitters and receivers equally spaced on a circle with radius $\lambda_0/\sqrt{2}$ centered on D .

Simulations were performed with two different objects under test. The first one, which will be referred to as *square cylinder object*, presented in Fig. II.1, is made of two concentric square cylinders. Contrasts of the outer and inner cylinders are $3 - j1.5$ and $1.5 - 3j$, respectively. The second object under test, which will be referred to as *circular cylinder object*, is made of a single cylinder with a radius of $\lambda_0/2$. The contrast of the cylinder is constant and purely real with a value of 2 (see Fig. II.2). White Gaussian noise was added to each set of simulated data in order to get a signal-to-noise ratio of 20 dB.

We also performed tests on experimental data published in [Belkebir et Saillard (2001)]

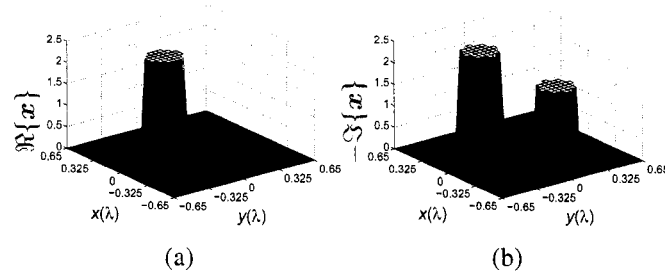


Fig. II.3 Real parts of the contrasts of objects under test tested in [Belkebir et Saillard (2001)]. (a) *one cylinder object* (b) *two cylinder object*. Both objects under test have a purely real contrast.

(the 3 GHz dataset was used). In this paper, a quasi 2-D setup is used to perform measurements over two different objects under test, presented in Fig. II.3. We will refer to them as *one cylinder object* and *two cylinder object*. Their contrasts are purely real. For more details on the setup, see [Belkebir et Saillard (2001)].

Algorithms were implemented using Matlab and all reconstructions were performed on a Pentium 4 processor at 3.2 GHz.

In all our tests, parameters λ , λ_1 , λ_2 and λ_r were set heuristically. Quantitative assessment of the solution quality is performed using a mean square error criterion defined as

$$\Delta_{\mathbf{x}} = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\|^2 / \|\mathbf{x}_o\|^2 \quad (\text{II.37})$$

where $\mathbf{x}_o$ is the actual contrast.

The performances of the algorithms greatly vary according to the choice of weight and regularization factors [Barrière et al. (2008c)]. Different trade-offs between solution quality and computation time are then possible. We tested all methods with two different sets of parameters. For the first set, the solution quality was favored over the computation time (we will refer to this test as the *best solution case*) while, on the contrary, the computation time was favored over the solution quality for the second set (we will refer to this test as the *fast solution case*).

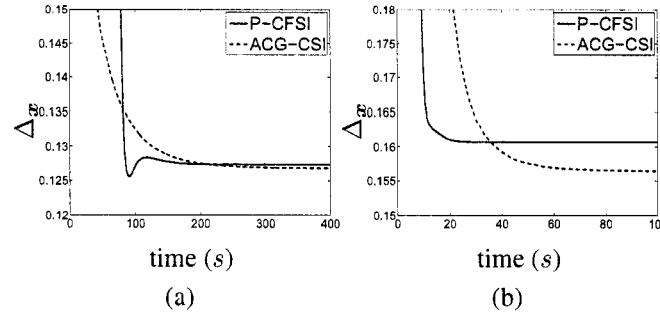


Fig. II.4 Evolution of the mean square error as a function of time for preconditioned CFSI (P-CFSI) and *alternated conjugate gradient for CSI* (ACG-CSI) methods. *Square cylinder object*. (a) *best solution case*, (b) *fast solution case*.

For all test cases, the matrix G_c had a Toeplitz-block-Toeplitz structure. We first compare preconditioned CFSI and *alternated conjugate gradient for CSI* methods which can both take advantage of this structure. Figs. II.4 and II.5 present the evolution of the mean square error as a function of time for the *square cylinder object* and the *one cylinder object*, respectively (the evolution of F cannot be used for comparison purposes since the criterion is not the same for the two methods). For both figures, the left subfigure presents the *best solution case* while the right one presents the *fast solution case*. It can be observed that, for all tests, the preconditioned CFSI method is significantly faster than *alternated conjugate gradient for CSI*.

Table II.4 presents the total computation time required for both methods and for all tests. Obviously, this quantity widely varies according to the chosen stopping rule. Here, we define the computation time as the time T such that $|(\Delta_x(t) - \Delta_x^b)|/\Delta_x^b < 10^{-3} \forall t > T$ where Δ_x^b is the mean square error obtained at convergence of the algorithm, *i.e.*, the mean square error when the iteration number $\ell \rightarrow \infty$. Obviously, such a criterion could not be used in real practical cases.

According to these results, the preconditioned CFSI is from two to four times faster than *alternated conjugate gradient for CSI* depending on the object under test and on the chosen set of weight factors. The only exception is for the *best solution case* of the

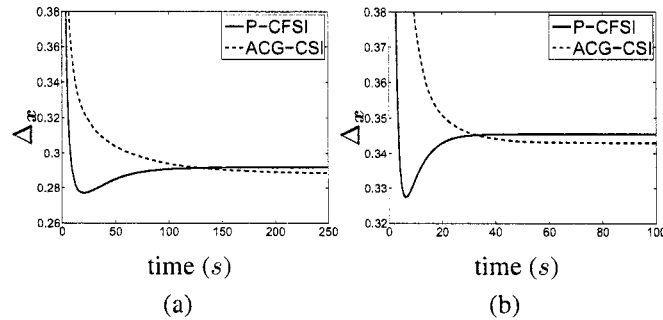


Fig. II.5 Evolution of the mean square error as a function of time for preconditioned CFSI (P-CFSI) and *alternated conjugate gradient for CSI* (ACG-CSI) methods. *One cylinder object*. (a) *best solution case*, (b) *fast solution case*. Data from [Belkebir et Saillard (2001)].

Object under test	<i>Best solution case</i>		<i>Fast solution case</i>	
	P-CFSI	ACG-CSI	P-CFSI	ACG-CSI
<i>Square cylinder</i>	212	400	25	101
<i>Circular cylinder</i>	28	89	6	27
<i>One cylinder</i>	202	429	21	46
<i>Two cylinder</i>	159	109	44	75

Tab. II.4 Comparison of the computation time (in seconds) of preconditioned CFSI (P-CFSI) and *alternated conjugate gradient for CSI* (ACG-CSI) methods for all tested objects.

two cylinder object where the preconditioned CFSI method seems slower than *alternated conjugate gradient for CSI*. Nevertheless, for this case, the mean square error of the *alternated conjugate gradient for CSI* method stabilizes while the criterion is still decreasing. The unexpected results is then probably due to the choice of the stopping rule. This highlights the fact that for both algorithms the appropriate choice of the stopping rule remains an open question.

Figs. II.6 and II.7 present the real part of reconstructed contrasts obtained by both methods for the *circular cylinder object* and the *two cylinder object*, respectively. These results, obtained with the *best solution case*, confirm that solutions of both methods are quite comparable. The same conclusion can be drawn by the observations of the other

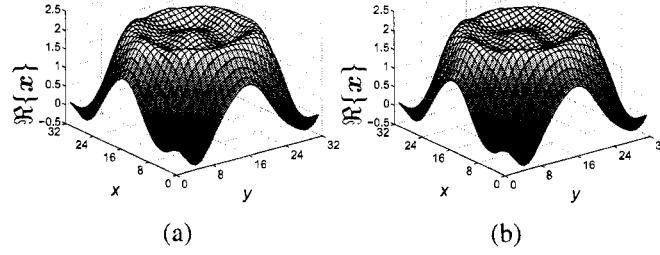


Fig. II.6 *Circular cylinder object*, real part of the reconstructed contrasts for the *best solution* cases : (a) preconditioned CFSI (b) *alternated conjugate gradient for CSI*. The x and y axes are indexed by the sample number.

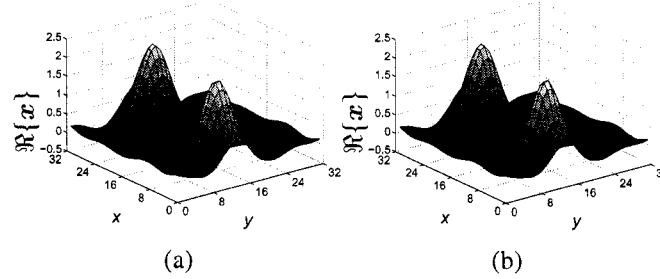


Fig. II.7 *Two cylinder object*, real part of the reconstructed contrasts for the *best solution* cases : (a) preconditioned CFSI (b) *alternated conjugate gradient for CSI*. The x and y axes are indexed by the sample number. Data from [Belkebir et Saillard (2001)].

results, which are not presented here.

For all tests, only one iteration of the preconditioned conjugate gradient algorithm was necessary at each iteration of the preconditioned CFSI method. In fact, it seems that the updates generated by the preconditioned CFSI method were quasi identical to those generated by the CFSI method. For instance, Fig. II.8 presents the evolution of Δ_F , the relative difference between the criteria of both methods, as a function of the number of iterations (*i.e.*, $\Delta_F(k) = (F_{PC}(k) - F_C(k))/F_{PC}(k)$ where $F_{PC}(k)$ and $F_C(k)$ are the values of the criterion F_{CFSI} at iteration k for preconditioned CFSI and CFSI methods, respectively). As it can be seen, this relative difference is never larger than 0.5%. The *square cylinder object* with the *best solution* case was used.

These results confirm the proximity of the chosen preconditioner to $\mathbf{H}_w^{-1}$ despite the fact

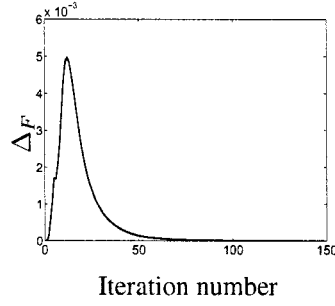


Fig. II.8 Evolution of Δ_F as a function of the number of iterations. *Square cylinder object, best solution case.*

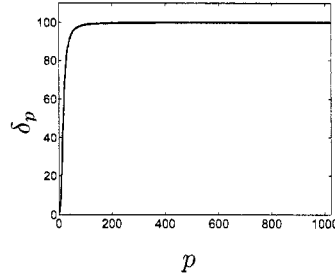


Fig. II.9 Evolution of δ_p as a function of p for a typical set of weight factors λ_1 and λ_2 .

that relatively small values of P were used ($25 < P < 60$). This is due to the fast convergence of δ_p towards $1/\lambda_2$, illustrated in Fig. II.9 where the evolution of δ_p as a function of p for typical values of λ_1 and λ_2 is presented.

We also performed tests comparing the CFSI and *alternated conjugate gradient for CSI* methods. The objective was to evaluate the performances of both methods for the general case. Then, we did not take advantage of the structure of $\mathbf{G}_c$ in the implementation of the methods. Consequently and as expected, the computation times obtained for these tests are larger than those presented in Table II.4. However, as a consequence of the proximity of $\mathbf{P}$ to $\mathbf{H}_w^{-1}$, the observed relative performances are quite comparable to those observed above, *i.e.*, the CFSI method reveals to be from two to four times faster than the *alternated conjugate gradient for CSI* method. Obviously, solutions obtained with the CFSI method are identical to those obtained with preconditioned CFSI (e.g Fig. II.6) since they both minimize the same criterion.

Finally, it should be underlined that, for CFSI methods, three weight factors have to be set heuristically instead of two for CSI-like methods. This is the main drawback of the proposed methods since it significantly complicates the tuning step. According to our experience, some simplifications can be done by limiting the choice of λ_2 to $\mu\lambda_1$ where μ is an element of a relatively small sub-space. For instance, for all our tests, we found $\mu \in [0.1, 1]$. Nevertheless, further investigations should be undertaken to validate and to justify such empirical rules.

II.8 Conclusion

The optimization scheme of CSI-like methods was analyzed. We established that the speed of such algorithms was limited by the important computation cost related to the update of the currents. To overcome this difficulty, we proposed a new criterion based on an alternative formulation of the forward problem. This criterion can be exactly minimized with respect to the currents in a single operation. The resulting CFSI method proves to be faster than CSI-like methods for the general case.

We also proposed a modified version of CFSI, called preconditioned CFSI, that is better adapted to the case where $\mathbf{G}_c$ has a Toeplitz-block-Toeplitz structure. The idea is to perform the updates of the currents by using a preconditioned conjugate gradient algorithm. The preconditioner is based on the truncated eigenvalue decomposition of $\mathbf{H}_w^{-1}$. Results show that preconditioned CFSI is actually significantly faster than *alternated conjugate gradient for CSI* in most cases.

Note that CFSI methods require the *a priori* specification of a larger number of tuning parameters than CSI-like methods, which may make the former slightly more delicate to employ in practical situations. This highlights the potential usefulness of *unsupervised methods* in which the values of the tuning parameters are estimated in addition the

contrast values.

II.9 Appendices

II.9.1 Preconditioned conjugate gradient algorithm

Table II.5 displays the preconditioned conjugate gradient algorithm in the case of a complex-valued unknown vector. $\mathbf{g} = \nabla_{\mathbf{v}} f$ denotes the gradient of a criterion f with respect to an unknown vector $\mathbf{v}$, $\mathbf{p}$ the descent direction induced by conjugate gradient, β the conjugacy factor that allows to compute the successive conjugate descent directions $-\mathbf{g} + \beta\mathbf{p}$, α the optimal step length $\operatorname{argmin}_{\alpha} f(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{p}^k)$, $\mathbf{P} = \mathbf{S}\mathbf{S}^\dagger$ the preconditioner, and k the current iteration number.

Classical numerical optimization textbooks such as [Nocedal et Wright (1999)] are restricted to real-valued vectors. It can be shown that our complex-valued implementations of the preconditioned conjugate gradient produce the same iterations as the reference real-valued schemes, where all complex-valued quantities would be replaced by an equivalent real-valued representation.

{Minimization of a quadratic function $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{v} - 2\Re(\mathbf{b}^\dagger \mathbf{v}) + c$ with respect to $\mathbf{v}$, where $\mathbf{A}$ and $\mathbf{P}$ are Hermitian matrices, $\mathbf{v}$ and $\mathbf{b}$ complex-valued vectors and c a real-valued constant}

Initialize $\mathbf{v}$

$\mathbf{g} \leftarrow \mathbf{A} \mathbf{v} - \mathbf{b}$

$k \leftarrow 0$

repeat

$\rho = \mathbf{g}^\dagger \mathbf{P} \mathbf{g}$

if $k = 0$ **then**

$\mathbf{p} \leftarrow -\mathbf{P} \mathbf{g}$

else

$\beta \leftarrow \rho / \rho^{\text{old}}$

$\mathbf{p} \leftarrow -\mathbf{P} \mathbf{g} + \beta \mathbf{p}$

end if

$\mathbf{h} \leftarrow \mathbf{A} \mathbf{p}$

$\alpha \leftarrow \rho / \mathbf{p}^\dagger \mathbf{h}$

$\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v} + \alpha \mathbf{p}$

$\mathbf{g} \leftarrow \mathbf{g} + \alpha \mathbf{h}$

$\rho^{\text{old}} \leftarrow \rho$

$k \leftarrow k + 1$

until Sufficient decrease of $\rho = \mathbf{g}^\dagger \mathbf{P} \mathbf{g}$

Tab. II.5 Linear preconditioned conjugate gradient algorithm in the case of a complex-valued unknown vector

III

NEW APPROXIMATE FORMULATIONS FOR FAST INVERSION OF HIGHLY NONLINEAR PROBLEMS IN MICROWAVE TOMOGRAPHY

Cette annexe reproduit un article soumis à IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, en octobre 2008, et dont les coauteurs sont Yves Goussard, Jean-Jacques Laurin et Jérôme Idier [Barrière et al. (2008a)].

III.1 Abstract

In this paper, two alternative formulations of the contrast source inversion method are proposed, with the aim of reducing the computation time in microwave tomography. Both formulations are based on truncated singular value decompositions. The first one yields a decrease in the amount of computation for the most time-consuming matrix-vector products. The second one yields a decrease in both the size of the involved matrices and the number of unknowns. Despite the fact that the proposed formulations rely on approximations, the results do not show any degradation of the quality of the solutions even for high complex permittivity contrasts, while the computation times are reduced by a factor ranging between 2 and 20 with respect to classical methods.

III.2 Introduction

Unlike confocal microwave imaging [Li et al. (2005); Xie et al. (2006)], which aims at localizing potential targets, the goal of microwave tomography is to provide a quantitative estimate of the permittivity and conductivity distribution of an unknown object under

test. However, microwave tomography relies on more complex algorithms designed to deal with the nonlinearity and ill-posed nature of the problem [Isernia et Pierri (1997)]. Due to computational complexity issues, existing algorithms offer a range of trade-offs between computation cost and the ability to deal with problems involving large scatterers. For instance, methods based on the linearization of the problem, such as Born iterative [Li et al. (2004)] and diagonal tensor approximation [Song et Liu (2004)] methods, require a relatively low computation cost but are accurate for low contrasts only. On the opposite, methods based on a complete nonlinear formulation of the problem and using global minimization algorithms [Benedetti et al. (2005); Donelli et Massa (2005); Massa et al. (2005); Caorsi et al. (2004); Donelli et Massa (2005); Garnero et al. (1991)] are efficient for any contrasts but present a very high computation cost if no *a priori* is made on the solution.

A good compromise between computation time and robustness can be obtained by methods that account for the nonlinearity of the problem but are based on local optimization schemes. It is the case for the distorted Born method [Chew et Wang (1990)] (which is equivalent to the Newton-Kantorovich [Joachimowicz et al. (1991); Remis et van den Berg (2000)] and Levenberg-Marquardt [Franchois et Pichot (1997)] methods) and the contrast source inversion (CSI) method [van den Berg et Kleinman (1997); van den Berg et Abubakar (2002); Abubakar et van den Berg (2001); Abubakar et al. (2002); Yu et al. (2005); Barrière et al. (2007, 2008c)].

Biomedical imaging is quite a promising field of application for microwave tomography [Semenov et al. (2002, 2000, 1996)]. More precisely, applications to breast cancer detection seem particularly interesting [Fear et al. (2003); Xie et al. (2006); Li et al. (2005); Fhager et Persson (2005); Bulyshev et al. (2001); Zhang et al. (2003); Meaney et al. (2000); Meaney et al. (2004)], essentially because the contrast between pathological and healthy tissues is quite important at microwave frequencies [Lazebnik et al. (2007)]. However, if clinical applications are considered, the computation time may become a

critical issue. Thus, this type of application is a typical example where neither the methods based on linearization, due to their inefficiency for large contrasts, nor those using global algorithms, since the computation costs are too important, seem appropriate. Here, distorted Born and CSI-like methods appear as better choices.

A drawback of distorted Born method is the requirement of complete computation of the forward problem at each iteration. An attempt to overcome this problem is proposed in [Yu et al. (2008); Wei et al. (2007)] where a distorted Born method is used with a fast forward solver.

As opposed to distorted Born, CSI does not require solving the forward problem. It thus offers a pretty good trade-off between solution quality and computation time. Nonetheless, recent analyses show that significant improvements can be brought to original CSI. In [Barrière et al. (2008c)], we proposed two generalized versions of CSI. Their major advantages are better robustness, improved convergence properties and some gains in volume of computation, even though the reconstruction times remain in the same range as those of original CSI. In [Barrière et al. (2008b)], the computational issue was specifically addressed within the framework of *exact* formulation of the microwave tomography problem. The proposed methods proved to yield significant reductions in the volume of computation, with the drawback of increased difficulties in practical implementation.

Here, the scope of the study is to bring further reductions in the volume of computation by relying on approximate formulations of the microwave tomography problem and by focusing on two bottlenecks of CSI-like methods (*i.e.*, original CSI and alternatives proposed in [Barrière et al. (2008c)]) : the size of the matrices and the number of unknown to estimate. More precisely, two formulations are proposed. Both are based on singular value decompositions. In the first one, one of the Green's matrices present in the tomography equations is simply replaced by a truncated version. In the second one, a new vector-basis is used to describe the equivalent currents. It is shown that some com-

ponents of this basis have a very low influence on the scattered field, both inside the domain of interest and at the receiver level. These components are removed from the system of equations, thereby producing a decrease in the size of the involved matrices and in the number of unknowns. Results on both synthetic and experimental data show that, in spite of these approximations, both methods remain very efficient even for high contrasts problems.

III.3 CSI-like methods

In this section, the formulation of the microwave tomography experiment on which CSI-like methods are based, as well as the optimization problem derived from this formulation, are introduced. It is shown that some characteristics of the proposed optimization criterion complicate the inversion process from a computation time point of view.

III.3.1 Formulation of the microwave tomography experiment

The objective of microwave tomography is to reconstruct permittivity (ϵ') and conductivity (σ) distributions of an object under test immersed into a domain D containing the background media. The object under test is illuminated under M different conditions and, for each of them, the scattered field is measured at N points. In this study, only the 2-D TM case is treated : it is assumed that all quantities are constant along the z direction and that the electric field is parallel to this axis.

CSI-like methods are based on a formulation of the microwave tomography problem which is derived from the volume equivalence theorem [Balanis (1989)]. This theorem states that the field scattered by the object under test is equal to the field produced by equivalent currents placed into the background media. These currents are functions of

the total electric field and of the electrical characteristics of the object under test. Using the method of moments as a discretization technique, a system of two equations, referred to as the microwave tomography equations, can be derived (see [Abubakar et al. (2002)] for a detailed derivation) :

for $i = 1 \dots M$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{G}_o \mathbf{w}_i + \mathbf{n}_i^o \quad (\text{III.1a})$$

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{X}(\mathbf{E}_i^0 + \mathbf{G}_c \mathbf{w}_i) \quad (\text{III.1b})$$

where bold-italic fonts and bold-straight fonts are used to represent column vectors and matrices, respectively. Length N vectors $\mathbf{y}_i$ and $\mathbf{n}_i^o$ respectively contain the measured scattered field and observation noise, which models all perturbations encountered in a microwave tomography experiment. $\mathbf{E}_i^0$ is the discretized incident field in D (i.e., the field when D is completely filled with the background media). Its length is the number of discretization points, denoted by n . Matrices $\mathbf{G}_o$ and $\mathbf{G}_c$ are Green's matrices of size $N \times n$ and $n \times n$, respectively. Matrix $\mathbf{X}$ is diagonal and defined as $\mathbf{X} = \text{diag}\{\mathbf{x}\}$, where length n vector $\mathbf{x}$ is called the contrast. The equivalent currents are stored in length n vectors $\mathbf{w}_i$. Index i , between 1 and M , refers to the i^{th} illumination.

The contrast $\mathbf{x}$ is related to the electrical characteristics of the object under test as follows :

$$\mathbf{x} = (\epsilon^d - \epsilon_b^d) / \epsilon_b^d \quad (\text{III.2})$$

where the division is performed term by term and where ϵ^d and ϵ_b^d are the discretized complex permittivity of the object under test and of background media, respectively. The complex permittivity can be expressed by

$$\epsilon = \epsilon' - j\sigma/\omega \quad (\text{III.3})$$

with ω the angular frequency. Here the contrast $\mathbf{x}$ is then the quantity of interest. Never-

theless, currents $\mathbf{W} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N)$ are also unknown.

III.3.2 Optimization problem

CSI-like methods formulate the microwave tomography problem in the framework of optimization and are based on joint estimation of contrast and currents. The objective is to estimate a solution $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{W}})$ minimizing a given criterion F which provides a trade-off between the errors associated to (III.1a) and (III.1b). A possible regularization term can be added to deal with the ill-posed nature of the problem [Isernia et Pierri (1997)]. More precisely we have

$$(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{W}}) = \underset{\mathbf{x}, \mathbf{W}}{\operatorname{argmin}} F \quad (\text{III.4})$$

$$F = F_1 + \lambda F_2 + \lambda_r F_r \quad (\text{III.5a})$$

$$F_1 = \sum_i \|\mathbf{y}_i - \mathbf{G}_o \mathbf{w}_i\|^2 \quad (\text{III.5b})$$

$$F_2 = \sum_i \|\mathbf{X}(\mathbf{E}_i^0 + \mathbf{G}_c \mathbf{w}_i) - \mathbf{w}_i\|^2 \quad (\text{III.5c})$$

$$F_r = \phi(\mathbf{x}) \quad (\text{III.5d})$$

where λ and λ_r respectively denote the weighting and the regularization factors, $\|\cdot\|$ is the Euclidean norm, and ϕ is a regularization function chosen in agreement with *a priori* knowledge on the contrast. For reasons presented in [Barrière et al. (2008c)], it is assumed in this paper that λ and λ_r are set heuristically. We also choose $\phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{D}\mathbf{x}\|^2$ where each row of $\mathbf{D}$ contains only two nonzero values, 1 and -1 , positioned in such a way that the first order differences of $\mathbf{x}$ between neighboring points is penalized.

III.3.3 Pitfalls of the optimization criterion

Solving (III.4) in a computationally efficient manner is difficult for two major reasons : the structure of $\mathbf{G}_c$ and $\mathbf{G}_o$, which are large and full (*i.e.*, non-sparse) matrices, and the size of $\mathbf{x}$ and $\mathbf{W}$, which can also be quite large. Regarding the first aspect, it should be underlined that most algorithms proposed to solve (III.4) are iterative and then require several matrix-vector multiplications involving $\mathbf{G}_c$ and $\mathbf{G}_o$ [van den Berg et Kleinman (1997); Abubakar et van den Berg (2001); Barrière et al. (2007, 2008c)]. The major part of the computation time is spent on these matrix-vector products.

Remark 3: If a uniform discretization grid is used with a setup having a homogenous background media, $\mathbf{G}_c$ has a Toeplitz-block-Toeplitz structure. In such a case, the calculation cost of a multiplication involving this matrix can be reduced from $O(n^2)$ to $O(n \log n)$ by using a fast-Fourier-transform (FFT) algorithm. However, multiplications involving $\mathbf{G}_c$ then remain costly compared to other operations.

Regarding the number of unknowns, it can be observed that $Mn + n$ unknowns have to be estimated while only n (those related to $\mathbf{x}$) are of interest. This obviously lengthens the inversion process.

III.4 Two alternative formulations

In this section two alternative formulations of the microwave tomography equations, based on the singular value decomposition (SVD) of $\mathbf{G}_c$, are proposed. Optimization problems derived from these formulations are also presented. For each formulation, the objective is to decrease the size of the involved matrices and/or to decrease to number of unknowns in the system.

III.4.1 Truncated-SVD approximation of $\mathbf{G}_c$

We first present an approach which consists of replacing $\mathbf{G}_c$ by its truncated SVD approximation.

$\mathbf{G}_c$ admits the following singular value decomposition :

$$\mathbf{G}_c = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{V}^\dagger \quad (\text{III.6})$$

where

$$\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \quad (\text{III.7a})$$

$$\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \quad (\text{III.7b})$$

$$\mathbf{\Delta} = \text{diag}\{\boldsymbol{\delta}\} \quad (\text{III.7c})$$

$$\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_n)^\dagger, \delta_1 \geq \dots \geq \delta_n \geq 0 \quad (\text{III.7d})$$

and where $\cdot^\dagger$ and $\cdot^\dagger$ represent the transpose conjugate and transpose operations, respectively. It should be underlined that matrices $\mathbf{U}$ and $\mathbf{V}$ are square with size $n \times n$.

It can be observed that $\delta_p, p = 1, \dots, n$, decreases relatively rapidly towards zero when p increases. This type of characteristics is well known and forms the basis of truncated SVD inversion [Nashed (1981)].

For a given $P < n$, we then have

$$\delta_p \approx 0 \quad \forall p > P \quad (\text{III.8})$$

Therefore, $\mathbf{G}_c$ can be approximated by

$$\mathbf{G}_c \approx \tilde{\mathbf{G}}_c = \tilde{\mathbf{U}}_s \tilde{\mathbf{V}}^\dagger \quad (\text{III.9})$$

where

$$\tilde{\mathbf{U}}_s = \tilde{\mathbf{U}}\tilde{\Delta} \quad (\text{III.10a})$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_P) \quad (\text{III.10b})$$

$$\tilde{\mathbf{V}} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_P) \quad (\text{III.10c})$$

$$\tilde{\Delta} = \text{diag}\{\tilde{\delta}\} \quad (\text{III.10d})$$

$$\tilde{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_P)^t, \delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_P. \quad (\text{III.10e})$$

This approximation can be used to form a new formulation of the microwave tomography problem where (III.1a) remains unchanged and where (III.1b) is replaced by

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{X}(\mathbf{E}_i^0 + \tilde{\mathbf{U}}_s \tilde{\mathbf{V}}^\dagger \mathbf{w}_i) + \tilde{\mathbf{n}}_i^c \quad (\text{III.11})$$

where $\tilde{\mathbf{n}}_i^c$ models the errors due to approximation (III.8). We propose to use this alternative formulation, which will be referred to as the Truncated- $\mathbf{G}_c$ formulation, to derive a new approximate microwave tomography solution. More precisely :

$$(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{W}}) = \underset{\mathbf{x}, \mathbf{W}}{\text{argmin}} F^a \quad (\text{III.12})$$

$$F^a = F_1 + \lambda F_2^a + \lambda_r F_r \quad (\text{III.13a})$$

$$F_2^a = \sum_i \|\mathbf{X}(\mathbf{E}_i^0 + \tilde{\mathbf{U}}_s \tilde{\mathbf{V}}^\dagger \mathbf{w}_i) - \mathbf{w}_i\|^2. \quad (\text{III.13b})$$

The only difference between (III.5a) and (III.13a) is that $(n \times n)$ matrix $\mathbf{G}_c$ has been replaced by the product of two $(P \times n)$ matrices. Methods used to solve (III.4) can thus be used to solve (III.12) with the difference that each product by $\mathbf{G}_c$ is replaced by two products with a total elementary multiplications cost of $2Pn$. As shown in the Section III.6, due to the fast decrease of δ_p towards 0, the solution of (III.12) remains quite good

for relatively small values of P .

However, it should also be underlined that the number of unknowns is the same in (III.4) and in (III.12). Moreover, matrix-vector products involving $(N \times n)$ matrix $\mathbf{G}_o$ are still required during the inversion process. In the next subsection, another formulation, which results in a reduced number of unknowns, is proposed.

III.4.2 Alternative vector basis for the representation of contrast sources

The second proposed alternative formulation of the microwave tomography equations relies on a new parameterization of the problem. The idea is to use unknowns defined as the projection of the currents on a basis $\mathcal{V}$ made of the singular vectors formed by the columns of matrix $\mathbf{V}$, *i.e.*, $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_p; 1 \leq p \leq n\}$. It is expected that some components of this basis have a small influence on the scattered fields and can thus be removed from the formulation.

According to the singular value decomposition theory, vectors $\mathbf{v}_p$ and $\mathbf{u}_p$, $p = 1 \dots n$, form two orthonormal bases :

$$\mathbf{V}^\dagger \mathbf{V} = \mathbf{I} \quad (\text{III.14})$$

$$\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = \mathbf{I} \quad (\text{III.15})$$

where $\mathbf{I}$ is the identity matrix.

We define vector $\mathbf{k}_i \equiv (k_1^i, \dots, k_n^i)^\dagger$ as the projection of vector $\mathbf{w}_i$ onto the basis $\mathcal{V}$. More precisely :

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{V}^\dagger \mathbf{w}_i \quad (\text{III.16})$$

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{V} \mathbf{k}_i. \quad (\text{III.17})$$

The microwave tomography equations can be reformulated in terms of $\mathbf{x}$ and $\mathbf{K} = (\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_M)$ instead of $\mathbf{x}$ and $\mathbf{W}$. Equations (III.1a) and (III.1b) therefore become

for $i = 1 \dots M$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{G}_o \mathbf{V} \mathbf{k}_i + \mathbf{n}_i^o \quad (\text{III.18a})$$

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{V}^\dagger \mathbf{X} (\mathbf{E}_i^0 + \mathbf{G}_c \mathbf{V} \mathbf{k}_i) . \quad (\text{III.18b})$$

In the above expressions, quantities $\mathbf{E}_i^s \triangleq \mathbf{G}_c \mathbf{V} \mathbf{k}_i$ and $\mathbf{y}_i^s \triangleq \mathbf{G}_o \mathbf{V} \mathbf{k}_i$ represent the fields produced by currents $\mathbf{w}_i = \mathbf{V} \mathbf{k}_i$ inside the domain D and at the receiver level, respectively. We now show that some components of the vector $\mathbf{k}_i$ have very low influence on both $\mathbf{E}_i^s$ and $\mathbf{y}_i^s$.

Let us define $\mathbf{e}_p^s \triangleq \mathbf{G}_c \mathbf{v}_p$ and $\mathbf{y}_p^s \triangleq \mathbf{G}_o \mathbf{v}_p$, the fields produced by the current vector $\mathbf{v}_p$ (*i.e.*, by one component of the basis $\mathcal{V}$) inside D and at the receivers level, respectively. Then, $\mathbf{y}_i^s$ and $\mathbf{E}_i^s$ can be expressed as

$$\mathbf{y}_i^s = \sum_{p=1}^n k_p^i \mathbf{y}_p^s \quad (\text{III.19a})$$

$$\mathbf{E}_i^s = \sum_{p=1}^n k_p^i \mathbf{e}_p^s . \quad (\text{III.19b})$$

From (III.6), (III.8), (III.14) and (III.15) we have

$$\mathbf{e}_p^s = \delta_p \mathbf{u}_p \approx 0 \quad \forall p > P . \quad (\text{III.20})$$

According to (III.19b), this means that the components $k_p^i, p > P$, have very low influence on the field $\mathbf{E}_i^s \forall i$. Moreover, according to the surface equivalence theorem [Balanis (1989)], $\mathbf{y}_p^s$ is entirely defined by the value of $\mathbf{e}_p^s$ at the boundary of D (we assume that the receivers lie outside of D). Therefore, if the receivers are also assumed to be in

the near-field region of the object under test, we can write

$$\mathbf{y}_p^s \approx 0 \quad \forall p > P. \quad (\text{III.21})$$

According to (III.19a), this means that, $\forall i$, $\mathbf{y}_i^s$ is also not much influenced by the components k_p^i , $p > P$.

Since the components k_p^i , $p > P$, do not affect the fields significantly, both inside and outside D , we suggest to remove them from the microwave tomography equations. Equations (III.18a) and (III.18b) then become

for $i = 1 \dots M$

$$\mathbf{y}_i = \tilde{\mathbf{G}}_o^V \tilde{\mathbf{k}}_i + \tilde{\mathbf{n}}_i \quad (\text{III.22a})$$

$$\tilde{\mathbf{k}}_i = \tilde{\mathbf{V}}^\dagger \mathbf{X}(\mathbf{E}_i^0 + \tilde{\mathbf{U}}_s \tilde{\mathbf{k}}_i) + \tilde{\mathbf{n}}_i^{ck} \quad (\text{III.22b})$$

where

$$\tilde{\mathbf{G}}_o^V = \mathbf{G}_o \tilde{\mathbf{V}} \quad (\text{III.23a})$$

$$\tilde{\mathbf{k}}_i = (k_1^i, \dots, k_P^i)^\dagger \quad (\text{III.23b})$$

$$\tilde{\mathbf{n}}_i = \mathbf{n}_i^o + \mathbf{n}_i^{ok} \quad (\text{III.23c})$$

and where $\mathbf{n}_i^{ck}$ and $\mathbf{n}_i^{ok}$ model the errors due to the approximations (III.20) and (III.21), respectively. We will refer to this formulation as the V-basis formulation.

Using (III.22), we can define the microwave tomography solution as

$$(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{K}}) = \underset{\mathbf{x}, \mathbf{K}}{\operatorname{argmin}} F^k \quad (\text{III.24})$$

$$F^k = F_1^k + \lambda F_2^k + \lambda_r F_r \quad (\text{III.25a})$$

$$F_1^k = \sum_i \|\mathbf{y}_i - \tilde{\mathbf{G}}_o^V \tilde{\mathbf{k}}_i\|^2 \quad (\text{III.25b})$$

$$F_2^k = \sum_i \|\tilde{\mathbf{V}}^\dagger \mathbf{X}(\mathbf{E}_i^0 + \tilde{\mathbf{U}}_s \tilde{\mathbf{k}}_i) - \tilde{\mathbf{k}}_i\|^2 \quad (\text{III.25c})$$

where $\tilde{\mathbf{K}} = (\tilde{\mathbf{k}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{k}}_M)$ and with F_r given by (III.5d).

It can be observed that the forms of (III.5a) and (III.25a) are quite similar. The same methods that are used to solve (III.4) can thus be used to solve (III.24). Meanwhile, the number of unknowns and the size of the involved matrices is significantly reduced in (III.25a). A more detailed comparison between the three formulations is presented in the next subsection.

III.4.3 Comparison of the proposed criteria

In this subsection we summarize the characteristics of the three proposed optimization criteria. All of them can be expressed in the following general form :

$$F^g = F_1^g + \lambda F_2^g + \lambda_r F_r \quad (\text{III.26a})$$

$$F_1^g = \sum_i \|\mathbf{y}_i - \mathbf{G}_1 \mathbf{a}_i\|^2 \quad (\text{III.26b})$$

$$F_2^g = \sum_i \|\mathbf{B}\mathbf{X}(\mathbf{E}_i^0 + \mathbf{G}_2 \mathbf{a}_i) - \mathbf{a}_i\|^2. \quad (\text{III.26c})$$

Table III.1 presents the number of unknowns and the value of quantities $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{B}$ and $\mathbf{a}_i$ in each case. Compared to the original formulation, the V-basis formulation has three main advantages : the number of unknowns is reduced from $Mn + n$ to $MP + n$, the size of $\mathbf{G}_1$ is reduced from $N \times n$ to $N \times P$ and the size of $\mathbf{G}_2$ is reduced from $n \times n$ to $n \times P$. The only drawback of this formulation is that the matrix $\mathbf{B}$ is full with size

Method	Nb of unknowns.	$\mathbf{a}_i$	$\mathbf{G}_1$	$\mathbf{G}_2$	$\mathbf{B}$
Classical formulation	$Mn + n$	$\mathbf{w}_i$	$\mathbf{G}_o$	$\mathbf{G}_c$	$\mathbf{I}$
Truncated- $\mathbf{G}_c$ formulation	$Mn + n$	$\mathbf{w}_i$	$\mathbf{G}_o$	$\tilde{\mathbf{G}}_c$	$\mathbf{I}$
V-basis formulation	$MP + n$	$\tilde{\mathbf{k}}_i$	$\tilde{\mathbf{G}}_o^V$	$\tilde{\mathbf{U}}_s$	$\tilde{\mathbf{V}}^\dagger$

Tab. III.1 Comparison between the three proposed formulations

$(P \times n)$ while it is equal to the identity matrix in the original formulation.

The Truncated- $\mathbf{G}_c$ formulation is somewhere in between the classical and the V-basis formulations. On the one hand, the number of unknowns in (III.13a) is $Mn + n$ and the size of $\mathbf{G}_1$ is $N \times n$, like in (III.5a). On the other hand, the only full matrices involved in F_2^a are $\tilde{\mathbf{U}}_s$ and $\tilde{\mathbf{V}}$ like in F_2^k .

III.5 Minimization schemes

Different strategies can be considered to solve problems (III.4), (III.12) and (III.24). For instance, in the original CSI method or in *alternated conjugate gradient for CSI* [Barrière et al. (2008c)], it is proposed to use a block-component scheme, *i.e.*, to perform updates alternatively with respect to $\mathbf{W}$ and $\mathbf{x}$.

In this paper, we rather use a preconditioned conjugate gradient algorithm [Nocedal et Wright (1999)] which performs simultaneous updates of $\mathbf{W}$ and $\mathbf{x}$. This choice is justified by the fact that, according to our experience, for the setups and objects under test used in the Section III.6, the preconditioned conjugate gradient algorithm has shown to be generally faster than block component schemes.

As proposed in [Barrière et al. (2008c)], we choose the exact diagonal Hessian precon-

ditioner in the classical formulation (III.4). In the two alternative formulations, we rather adopt diagonal preconditioner that are close to (but not identical with) the diagonal Hessian preconditioner, in order to preserve the computational advantage provided by the adopted approximations. The derivation and expression of the proposed preconditioners can be found in Appendix III.8.1.

III.6 Results

In this section we validate the efficiency of the proposed formulations and we compare the performance of the corresponding inversion techniques.

First, the forward problem is solved for each formulations and the obtained scattered fields are compared in order to validate the range of validity of the proposed approximations. Then, the three optimization problems (III.4), (III.12) and (III.24) are solved using preconditioned conjugate gradient as proposed in Section III.5. The solutions are compared from both quality and computation time points of view. The comparisons are performed on both synthetic and experimental data.

Synthetic data were generated for two different objects under test. For each of them, the domain of interest D was a square cylinder with side length equal to one wavelength (λ_0). We used $n = 32^2 = 1024$ and $M = N = 32$ with emitters and receivers equally spaced on a circle with radius $\lambda_0/\sqrt{2}$ whose center coincides with the center of D .

The first synthetic object, shown in Fig. III.1, is made of two concentric square cylinders having contrasts of $3 - 1.5j$, for the outer one, and $1.5 - 3j$, for the inner one. The second one, shown in Fig. III.2, is made of a single circular cylinder with a radius of $\lambda_0/2$. The contrast of the cylinder is constant and purely real with a value of 2. These objects will be referred to as the *square cylinder object* and *circular cylinder object*, respectively. For

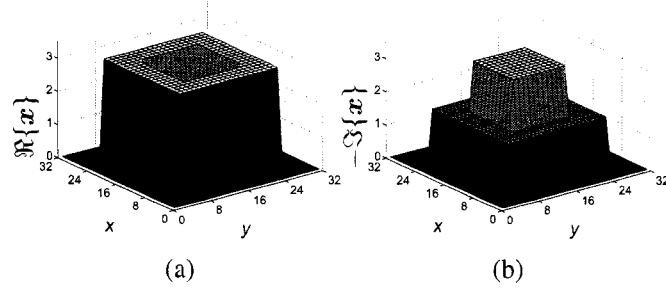


Fig. III.1 (a) real (b) and minus the imaginary parts of the contrast of the *square cylinder object*. The x and y axes are indexed by the sample number.

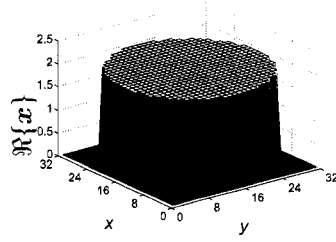


Fig. III.2 Real part of the contrast of the *circular cylinder object*. The imaginary part is set to zero. The x and y axes are indexed by the sample number.

the inversion process, white Gaussian noise was added to each set of simulated data in order to get a signal-to-noise ratio of 20 dB.

We also used experimental data published in [Belkebir et Saillard (2001)] (the 3 GHz dataset was used). In this paper, a quasi 2-D setup is used to perform measurements over two different objects under test, presented in Fig. III.3. We will refer to them as *one cylinder* and *two cylinder* objects. Their contrasts are purely real.

III.6.1 Forward Problem

In this subsection we solve the forward problem with each proposed formulation and we compare the obtained scattered fields at the receivers level. In other words, we compute

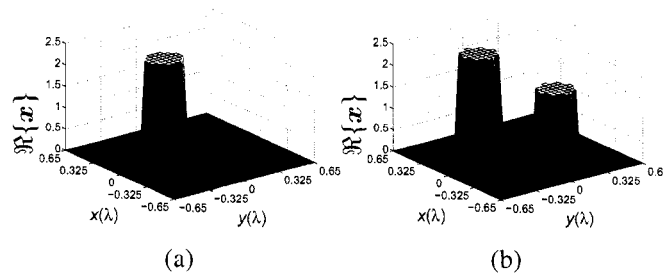


Fig. III.3 Real parts of the contrasts of objects tested in [Belkebir et Saillard (2001)]. (a) *one cylinder object* (b) *two cylinder object*. Both objects have a purely real contrast.

$\mathbf{y}_i^s$ using the following equation :

$$\mathbf{y}_i^s = \mathbf{G}_1(\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{G}_2)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{E}_i^0 \quad (\text{III.27})$$

for each proposed set $(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{B})$. Quantitative assessment of the solution quality is performed using a mean square error criterion defined as

$$\Delta_y = \frac{\sum_{i=1}^M \|\mathbf{y}_i^s - \mathbf{y}_i^o\|^2}{\sum_{i=1}^M \|\mathbf{y}_i^o\|^2} \quad (\text{III.28})$$

where the solution obtained with the classical formulation, say $\mathbf{y}_i^o$, is used as reference.

We tested three different values of P : 50, 100 and 150. Fig. III.4 presents the amplitude of the field $\mathbf{y}_1^s$ for each formulation. The *square cylinder object* with $P = 50$ was used. It can be observed that the fit between the three curves is excellent. These results suggest that approximations (III.8), (III.20) and (III.21) are valid even for values of P that are relatively small compared to n (let us recall that $n = 1024$ here).

This is confirmed by Table III.2 where mean square errors obtained for all alternative formulations and for all values of P are reported. Once again, the *square cylinder object* was used. In all cases, mean square errors are quite small for all values of P . Moreover, the errors are in the same range for $P = 100$ and for $P = 150$. Finally, the mean square errors obtained with the Truncated- $\mathbf{G}_c$ formulation is between 2 and 10 times

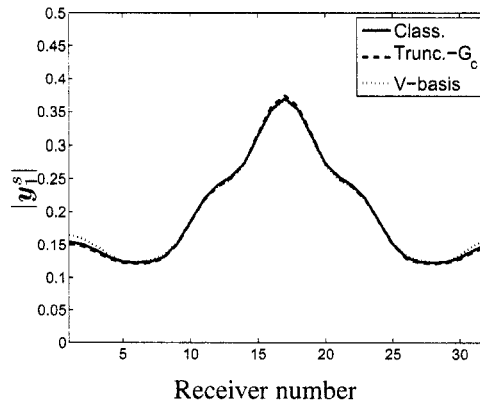


Fig. III.4 Amplitude of the expected measured scattered field for classical formulation, for the Truncated- G_c formulation and for the V-basis formulation ; illumination 1, *square cylinder object*, $P = 50$.

P	truncated- G_c	V-basis
50	1.40×10^{-4}	3.46×10^{-4}
100	3.55×10^{-6}	2.19×10^{-5}
150	1.86×10^{-6}	1.65×10^{-5}

Tab. III.2 Δ_y for different values of P and for both proposed formulations. Square cylinder object.

smaller than the mean square errors obtained with the V-basis formulation. This suggest that the Truncated- G_c formulation is more precise than the V-basis formulation. Results obtained with the *circular cylinder object* are quite similar to those obtained with the *square cylinder object* and are not presented here.

III.6.2 Inverse Problem

In this section we solve the three optimization problems (III.4), (III.12) and (III.24) using the optimization schemes presented in Section III.5. Both the quality of the solution and the required computation time are analyzed. FFT algorithm was used to accelerate matrix-vector products involving Toeplitz-block-Toeplitz matrices. Once again, quanti-

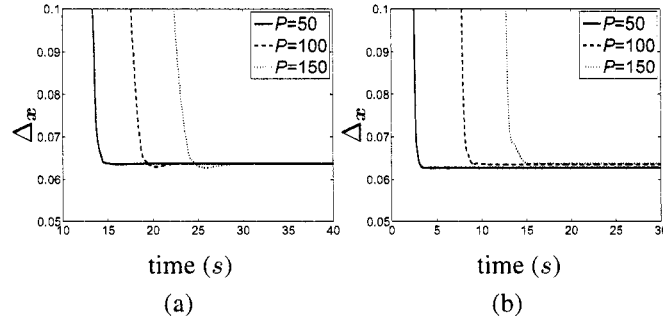


Fig. III.5 Evolution of Δ_x as a function of time for different values of P . (a) Truncated- G_c formulation, (b) V-basis formulation; *circular cylinder object*.

tative assessment of the quality of the solution is performed using a mean square error criterion defined as

$$\Delta_x = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\|^2 / \|\mathbf{x}_o\|^2 \quad (\text{III.29})$$

where $\mathbf{x}_o$ is the actual contrast.

First, we investigate the effect of P on the solutions of (III.12) and (III.24). As in the previous subsection, we performed three different tests with $P = 50, 100$ and 150 . Fig. III.5 presents the evolution of Δ_x as a function of time for both Truncated- G_c and V-basis formulations. The *circular cylinder object* was used. Table III.3 summarizes all the results by presenting the mean square errors and computation times, using the same stopping rule, obtained for all tests and with the two synthetic objects under test. Algorithms were implemented using Matlab and all reconstructions were performed on a Pentium 4 processor at 3.2 GHz.

As expected, in all cases, the computation time increases with P . Moreover, for both formulations, the computation time varies approximatively linearly with P . It can also be observed that, for the *square cylinder object*, the mean square error is higher for cases where $P = 50$ while the mean square errors obtained with $P = 100$ and $P = 150$ are quite comparable. This seems consistent with the results obtained in the previous subsection. In addition, it should be noted that, for the *circular cylinder object*, the result

Object	P	Truncated- G_c		V-basis	
		Δ_x	Time (s)	Δ_x	Time (s)
<i>Square cylinder object</i>	50	0.129	19.28	0.136	2.99
	100	0.127	25.56	0.1279	5.00
	150	0.127	31.53	0.1266	8.52
<i>Circular cylinder object</i>	50	0.0637	17.15	0.0627	3.39
	100	0.0637	22.33	0.0635	10.06
	150	0.0637	29.09	0.0637	15.87

Tab. III.3 Δ_x and computation time for different values of P and for both approximative formulations. *Square cylinder object* and *circular cylinder object*.

obtained with $P = 50$ is almost identical to those obtained with $P = 100$ and 150 (it is even slightly better). In any case, it appears that for both objects under test, all obtained solutions are quite comparable from a qualitative point of view. According to these observations, we chose $P = 50$ for the remaining tests.

We now compare the global performance of all formulations for inversion. Fig. III.6 presents the evolution of Δ_x as a function of time for all objects under test and all proposed criteria. Table III.4 summarizes the results by presenting the final values of Δ_x and the corresponding computation times.

As it can be observed, the V-basis formulation leads to a much smaller (from 5 to 20 times) computation time compared to the classical formulation. On the other hand, algorithms based on the Truncated- G_c formulation are significantly faster than algorithms based on the classical formulation (from 2.5 to 3.5 times) while being significantly slower than algorithms based on the V-basis formulation (from 2 to 6 times).

From a solution quality point of view, it can be observed that mean square errors obtained by all three formulations are comparable. However, it appears that the mean square errors obtained with the V-basis formulation are often slightly higher than those obtained with the other two formulations. Nevertheless once again, from a qualitative point of view, all

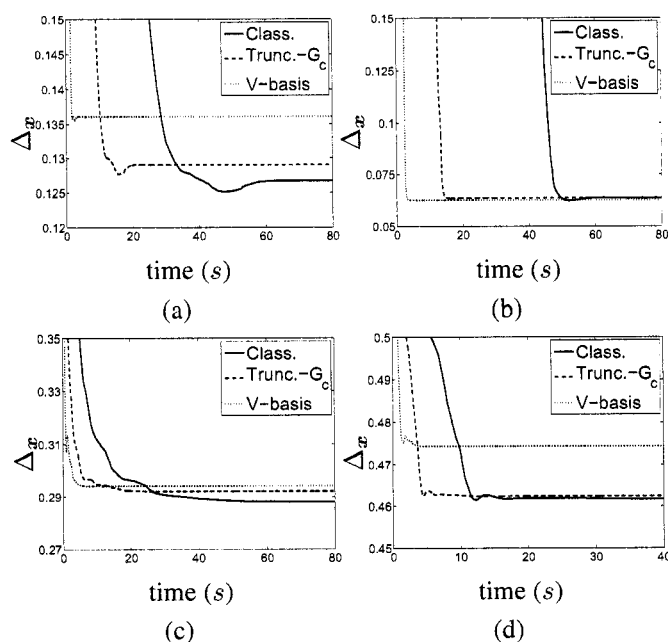


Fig. III.6 Evolution of Δ_x as a function of time for all presented formulations. (a) *square cylinder object*, (b) *circular cylinder object*, (c) *single cylinder object*, (d) *two cylinder object*. For (c) and (d) data are from [Belkebir et Saillard (2001)].

Object	Form.	Δ_x	Time (s)
<i>Square cylinder object</i>	Class. form.	0.1268	58.96
	Truncated- G_c	0.1290	19.28
	V-basis	0.1361	2.98
<i>Circular cylinder object</i>	Class. form.	0.064	61.69
	Truncated- G_c	0.064	17.16
	V-basis	0.063	3.39
<i>One cylinder object</i>	Class. form.	0.2879	53.34
	Truncated- G_c	0.2920	18.70
	V-basis	0.2941	5.25
<i>Two cylinder object</i>	Class. form.	0.4617	15.08
	Truncated- G_c	0.4624	6.01
	V-basis	0.4743	3.01

Tab. III.4 Computation time and Δ_x for all formulations and all objects under test.

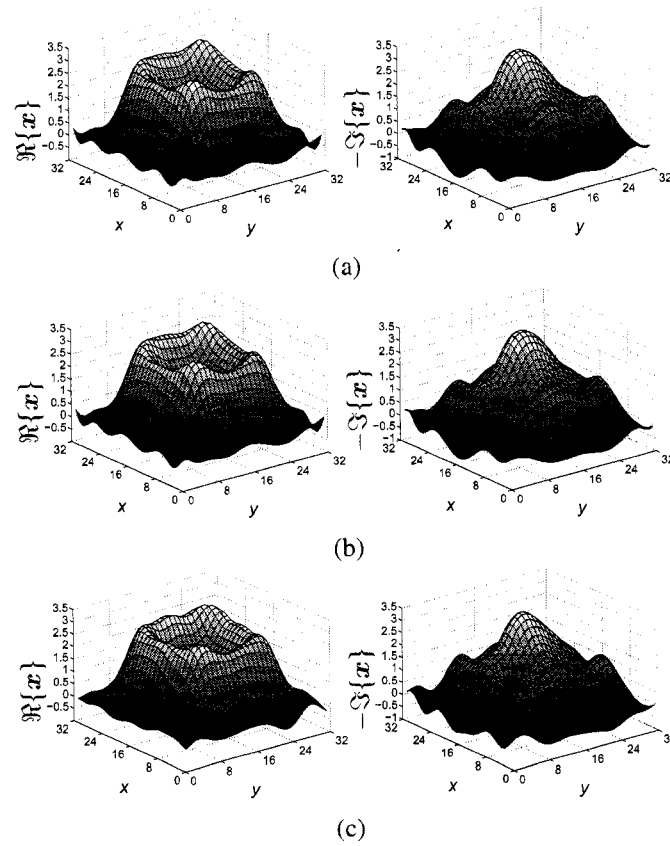


Fig. III.7 Reconstructed contrasts for the *square cylinder object*. Real part on the left side and minus the imaginary part on the right side. (a) Classical formulation, (b) Truncated- G_c formulation, (c) V-basis formulation. The x and y axes are indexed by the sample number.

results are comparable. This is illustrated by Figs. III.7 and III.8 where the reconstructed contrasts obtained by the different formulations are shown for the *square cylinder object* and the *two cylinder object*, respectively.

III.7 Conclusions

The goal of this paper was to develop new algorithms able to deal with highly nonlinear problems while offering an improved computation time. We used CSI-like methods as a reference. We established that the speed of these methods was limited by the fact that

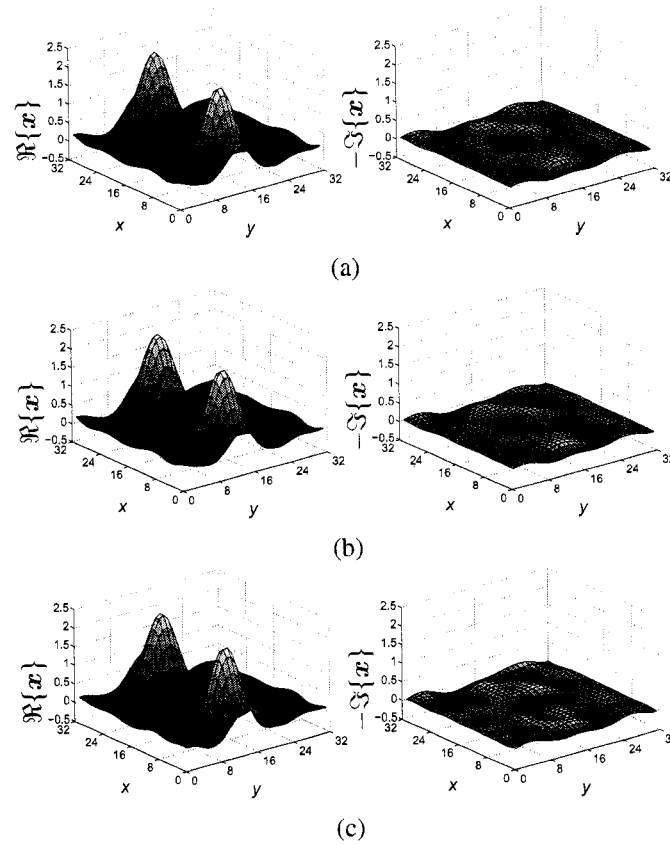


Fig. III.8 Reconstructed contrasts for the *two cylinder object*. Real part on the left side and minus the imaginary part on the right side. (a) Classical formulation, (b) Truncated- G_c formulation, (c) V-basis formulation. The x and y axes are indexed by the sample number. Data from [Belkebir et Saillard (2001)].

the matrices involved in the microwave tomography equations are large and full and by the fact that a large number of unknowns has to be estimated.

We proposed two alternative formulations of the microwave tomography problem. Both of them are based on the singular value decomposition of G_c . In the Truncated- G_c formulation, matrix G_c is simply replaced by its truncated SVD approximation. In the V-basis formulation, the currents are projected onto a truncated basis made up of singular vectors of G_c .

The criteria derived from each proposed formulation have the same form than the cri-

terion derived from the classical formulation. Therefore, the same inversion algorithms can be used with the classical and proposed formulations. In this paper, a preconditioned conjugate gradient algorithm was selected.

We showed, by solving the forward problem, that the used approximations remain good even for values of P that are small compared to n . This is confirmed by the results obtained for the inversion process. Indeed, the quality of the solutions is comparable for all proposed formulations.

Obviously, the choice of P is critical, since too small a value may lead to an inappropriate solution. At this point, we are not able to provide any tuning rule for P that could guarantee the quality of the solution. From this point of view, methods presented in [Barrière et al. (2008c)] and [Barrière et al. (2008b)], which do not rely on approximations, appear as *safer* approaches.

Despite this fact, results presented here are quite encouraging. The next step should then be to evaluate the performances of the proposed methods on problems of larger sizes, including realistic 3-D biomedical-type scenarios. It could also be interesting to investigate the possibility of using other alternative bases, which would be less costly to compute than $\mathcal{V}$, for the representation of the equivalent currents.

III.8 Appendices

III.8.1 Used preconditioners

In this section, we detail the expressions of the preconditioners used with each formulation. The general idea is to use a diagonal preconditioner whose entries are the inverse of the diagonal entries of the Hessian of the criterion. If we assume that the whole set of

unknowns is arranged as $(\mathbf{x}; \mathbf{w}_1; \dots; \mathbf{w}_M)$, the preconditioner can be expressed as (see [Barrière et al. (2008c)] for more details)

$$\mathbf{P} = \text{diag}\{\text{diag}\{\mathbf{Q}\}; \text{diag}\{\mathbf{A}\}; \dots; \text{diag}\{\mathbf{A}\}\}^{-1}$$

where the term $\text{diag}\{\mathbf{A}\}$ is repeated M times and where

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} &= \lambda \sum_i \Lambda_i^\dagger \mathbf{B}^\dagger \mathbf{B} \Lambda_i + \lambda_r \mathbf{D}^\dagger \mathbf{D} \\ \mathbf{A} &= \mathbf{G}_1^\dagger \mathbf{G}_1 + \lambda (\mathbf{B} \mathbf{X} \mathbf{G}_2 - \mathbf{I})^\dagger (\mathbf{B} \mathbf{X} \mathbf{G}_2 - \mathbf{I})\end{aligned}$$

with

$$\Lambda_i = \text{diag}\{\mathbf{E}_i^0 + \mathbf{G}_2 \mathbf{a}_i\}.$$

All the terms of the previous equation can be computed off-line or at a relative low cost (term-by-term vector multiplications) except for $\text{diag}\{(\mathbf{B} \mathbf{X} \mathbf{G}_2 - \mathbf{I})^\dagger (\mathbf{B} \mathbf{X} \mathbf{G}_2 - \mathbf{I})\}$. If the classical formulation is used, this term can be expressed as

$$\begin{aligned}\text{diag}\{(\mathbf{X} \mathbf{G}_c - \mathbf{I})^\dagger (\mathbf{X} \mathbf{G}_c - \mathbf{I})\} \\ = |\mathbf{G}_c|^2 |\mathbf{x}|^2 - 2\Re(\text{diag}\{\text{diag}\{\mathbf{G}_c\}\} \mathbf{x}) - 1\end{aligned}$$

where $|\mathbf{G}_c|^2$ and $|\mathbf{x}|^2$ represent the matrix and vector formed with the squared modulus of the entries of $\mathbf{G}_c$ and $\mathbf{x}$, respectively. The main part of the computational effort for the calculation of $\mathbf{P}$ is then the cost of a matrix-vector multiplication involving $|\mathbf{G}_c|^2$ (we note that if $\mathbf{G}_c$ has a Toeplitz-block-Toeplitz structure, then it is also the case for $|\mathbf{G}_c|^2$).

For our two alternative formulations, we would like to use preconditioners that could take advantage of the proposed approximations.

For the Truncated- $\mathbf{G}_c$ formulation, the term $\text{diag}\{(\mathbf{B} \mathbf{X} \mathbf{G}_2 - \mathbf{I})^\dagger (\mathbf{B} \mathbf{X} \mathbf{G}_2 - \mathbf{I})\}$ can be

expressed as

$$\begin{aligned} & \text{diag}\{(\mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{G}_2 - \mathbf{I})^\dagger(\mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{G}_2 - \mathbf{I})\} \\ &= |\tilde{\mathbf{U}}_s \tilde{\mathbf{V}}|^2 |\mathbf{x}|^2 - 2\Re(\text{diag}\{\text{diag}\{\tilde{\mathbf{U}}_s \tilde{\mathbf{V}}\}\} \mathbf{x}) - 1. \end{aligned}$$

The size of matrix $|\tilde{\mathbf{U}}_s \tilde{\mathbf{V}}|^2$ is $(n \times n)$ and we cannot take advantage of the reduced size of matrices $\tilde{\mathbf{U}}_s$ and $\tilde{\mathbf{V}}$ to compute the multiplication by $|\mathbf{x}|^2$. Therefore we rather suggest to use the truncated SVD decomposition of the matrix $|\tilde{\mathbf{U}}_s \tilde{\mathbf{V}}|^2$ using the same P as for the truncated SVD of $\mathbf{G}_c$. The main part of the computational effort for the calculation of $\mathbf{P}$ is then of order $O(Pn)$.

For the V-basis formulation we have :

$$\begin{aligned} & \text{diag}\{(\mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{G}_2 - \mathbf{I})^\dagger(\mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{G}_2 - \mathbf{I})\} \\ &= \text{diag}\{\mathbf{G}_2^\dagger \mathbf{X}^\dagger \mathbf{B}^\dagger \mathbf{B} \mathbf{X} \mathbf{G}_2\} - 2\Re((\mathbf{B} \otimes \mathbf{G}_2^t) \mathbf{x}) - 1 \end{aligned}$$

where $\otimes$ represents the entrywise matrix product.

The computation of $\text{diag}\{\mathbf{G}_2^\dagger \mathbf{X}^\dagger \mathbf{B}^\dagger \mathbf{B} \mathbf{X} \mathbf{G}_2\}$ is complicated by the presence of the matrix $\mathbf{B}$ which is not equal to the identity matrix for this formulation. To simplify the computation of $\mathbf{P}$, we suggest to assume that $\mathbf{B}^\dagger \mathbf{B} \approx \mathbf{I}$ (we note that $\mathbf{B}^\dagger \mathbf{B} = \mathbf{I}$ if $P = n$). By using this approximation we have :

$$\begin{aligned} & \text{diag}\{(\mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{G}_2 - \mathbf{I})^\dagger(\mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{G}_2 - \mathbf{I})\} \\ &\approx |\tilde{\mathbf{U}}_s|^2 |\mathbf{x}|^2 - 2\Re((\mathbf{B} \otimes \mathbf{G}_2^t) \mathbf{x}) - 1 \end{aligned}$$

which has a computation cost of order $O(Pn)$.