



Titre: Simulation numérique de la convection naturelle induite par double diffusion et effet soret dans une cavité cylindrique concentrique
Title:

Auteur: Mohamed Amine Yahiaoui
Author:

Date: 2008

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Yahiaoui, M. A. (2008). Simulation numérique de la convection naturelle induite par double diffusion et effet soret dans une cavité cylindrique concentrique [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.
Citation: <https://publications.polymtl.ca/8173/>

 Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/8173/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Patrick Vasseur, Luc Robillard, & Hassen Béji
Advisors:

Programme: Non spécifié
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

SIMULATION NUMÉRIQUE DE LA CONVECTION NATURELLE INDUITE
PAR DOUBLE DIFFUSION ET EFFET SORÉT DANS UNE CAVITÉ
CYLINDRIQUE CONCENTRIQUE

MOHAMED AMINE YAHIAOUI
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR
(GÉNIE MÉCANIQUE)
DÉCEMBRE 2007



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 978-0-494-46120-4

Our file Notre référence

ISBN: 978-0-494-46120-4

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

SIMULATION NUMÉRIQUE DE LA CONVECTION NATURELLE INDUITE
PAR DOUBLE DIFFUSION ET EFFET SORET DANS UNE CAVITÉ
CYLINDRIQUE CONCENTRIQUE

présentée par: YAHIAOUI Mohamed Amine

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. CONAN Jean, Ph.D., président

M. VASSEUR Patrick, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. ROBILLARD Luc, D. Sc. A., membre et codirecteur de recherche

M. BÉJI Hassen, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. KAHAWITA René, Ph.D., membre

M. ASCH Mark, Ph.D., membre

À mon père Mouldi et ma mère Habouba

À ma femme Hajoura

À mes frères Adnen et Radhouane,

À ma sœur M'rioua,

À ma belle sœur Rim,

À ma nièce Nanou et mon neveu Sinou

REMERCIEMENTS

C'est avec une certaine émotion et beaucoup de sincérité que je voudrais remercier toutes les personnes ayant soutenu et apprécié mon travail.

En premier lieu, je remercie chaleureusement, mon directeur de thèse le professeur **Patrick Vasseur**, pour m'avoir accueilli dans son équipe, pour m'avoir offert les conditions favorables et pour m'avoir parfaitement guidé tout le long de la réalisation de ce travail. Mes plus vifs remerciements s'adressent également à l'associé de recherche, Monsieur **Ali Bahloul** pour sa disponibilité, ces idées et ses qualités humaines et scientifiques. Je remercie aussi mes codirecteurs de thèse les professeurs **Luc Robillard** et **Hassen Béji** pour leurs imminentes interventions et conseils précieux.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Monsieur **Jean Conan** pour avoir accepté de présider le jury d'examen de cette thèse. Je remercie également les professeurs **Mark Asch**, **René Kahawita** et **Romano De Santis** pour avoir bien accepté de participer à mon jury et pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail de recherche, malgré leurs multiples occupations.

La réalisation de ce travail s'appuie également sur un environnement qui est essentiel. Je désire alors remercier le personnel du département de génie mécanique de l'École Polytechnique de Montréal et celui de l'École Doctorale Sciences et Ingénierie de l'Université de Cergy-Pontoise. Je remercie aussi, le Conseil de Recherche Scientifique en Sciences Naturelles et en Génie du Canada pour m'avoir octroyé le support financier nécessaire à la réalisation de ce travail.

Mes plus profonds remerciements vont à mes parents. Tout au long de mon cursus, ils m'ont toujours soutenu, encouragé et aidé. Ils ont su me donner

toutes les chances pour réussir. Qu'ils trouvent, dans la réalisation de ce travail, l'aboutissement de leurs efforts ainsi que l'expression de ma plus affectueuse gratitude. Ô mon seigneur, fais-leur, à tous deux, miséricorde comme il nous on élevé tout petit.

Je remercie tout les membres de ma famille et en particulier mon frère Adnen et ma belle sœur Rim pour m'avoir accueilli et soutenu durant mes premières années à montréal.

Enfin, je dis : louange à Dieu, Seigneur de l'univers, qui m'a donné la force, le courage, et l'endurance jusqu'à l'accomplissement de ce travail.

RÉSUMÉ

Ces travaux de doctorat rapportent une étude numérique et analytique du comportement d'un fluide binaire en milieux fluide et poreux confinés. Les deux cas où la convection naturelle est induite par double diffusion ($a = 0$) et effet Soret ($a = 1$) ont été étudiés. Dans cette investigation, les mouvements convectifs sont pilotés par des conditions aux frontières thermiques et solutales de type Neumann (flux constants de chaleur et de concentration) et Dirichlet (température et concentration constantes imposés) sur les parois verticales, alors que les surfaces horizontales sont maintenues adiabatiques. Ce problème est gouverné par les nombres sans dimensions suivants: Rayleigh thermique R_T , rapport des forces de volumes N , nombre de Lewis Le , rapport des rayons η et rapport de forme A . En général, les solutions du problème sont obtenues par des voies numériques. La méthode des volumes de contrôle a été employée pour résoudre les équations de base en milieu fluide. Les méthodes des différences finies et des éléments finis ont été utilisées en milieu poreux. Une solution analytique, valide pour des cavités fluide et poreuse présentant un grand rapport de forme ($A \gg 1$), a été développée sur la base du concept de l'écoulement parallèle lorsque le cylindre est soumis à des conditions aux frontières de type Neumann. Pour les valeurs des paramètres de contrôle considérées dans cette étude, un excellent accord entre les prédictions analytique et numérique a été obtenu. Par la suite, le cas où les forces de volume sont de même intensité mais de sens opposé ($N = -1$) a été étudié en milieu poreux. Pour cette situation l'état de conduction pure est une solution stable du problème. La théorie de stabilité linéaire nous a alors permis de prédire le seuil critique de déclenchement de la convection en fonction des paramètres de contrôle. Aussi, la stabilité de l'état convectif, déjà prédit par le concept de l'écoulement parallèle, a été investie dans le but de prédire l'existence de la bifurcation de Hopf.

ABSTRACT

This thesis reports an analytical and numerical study of the behavior of a binary mixture in confined fluid and porous media. The convective motion is driven by either applying constant fluxes of heat and mass or constant temperatures and concentrations, on the vertical walls while the horizontal ones are impermeable and adiabatic. The thermosolutal convective phenomenon (double diffusive convection, $a = 0$) or Soret induced convection ($a = 1$) inside the enclosure are described by the Navier Stokes equations, the energy and species conservation equations. Governing parameters of the problem under study are the thermal Rayleigh R_T , buoyancy ratio N , Lewis number Le , curvature parameter η , and aspect ratio A . In general, the solutions are obtained numerically. The control volume approach is employed to solve the governing equations in fluid medium and both finite difference and finite element methods are used for porous medium. An analytical solution, valid for tall fluid and porous enclosures ($A \gg 1$) is derived on the basis of the parallel flow approximation when the annulus is subjected to constant heat and mass fluxes. In the range of the governing parameters considered in this study, a good agreement is found between the analytical predictions and the numerical results obtained by solving the full governing equations. The particular situation where the buoyancy forces induced by the thermal and solutal effects are opposing each other and of equal intensity ($N = -1$) is considered for the porous case. For this situation a purely diffusive rest state is possible. The linear stability theory is used to predict analytically the critical Rayleigh number for the onset of convection. Also the linear stability of the convective motion, predicted by the parallel flow approximation, is investigated numerically in order to predict the occurrence of Hopf's bifurcation.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vii
ABSTRACT	viii
TABLE DES MATIÈRES	ix
LISTE DES FIGURES	xii
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES	xviii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Généralités sur la convection naturelle thermosolutale	1
1.2 But de l'étude	2
1.3 Contenu de la thèse	3
1.4 Revue bibliographique	4
CHAPITRE 2 MODÈLES PHYSIQUE ET MATHÉMATIQUE	13
2.1 Description du problème	13
2.2 Hypothèses	15
2.3 Formulation mathématique du problème	17
2.3.1 Convection en milieu poreux	17
2.3.1.1 Équation de continuité	17
2.3.1.2 Équation de la quantité de mouvement	17
2.3.1.3 Équation de conservation de l'énergie	18
2.3.1.4 Équation de conservation de la fraction massique	20

2.3.1.5	Équations adimensionnelles	20
2.3.2	Convection en milieu fluide	22
2.3.2.1	Équation de continuité	22
2.3.2.2	Équation de la quantité de mouvement	23
2.3.2.3	Équation de conservation de l'énergie	23
2.3.2.4	Équation de conservation de la fraction massique	24
2.3.2.5	Équations adimensionnelles	24
2.3.3	Conditions aux limites	26
2.3.3.1	Frontières hydrodynamiques	26
2.3.3.2	Frontières thermiques	26
2.3.3.3	Frontières massiques	27
2.3.3.4	Conditions aux limites adimensionnelles	28
2.4	Transfert de chaleur et de masse	29
CHAPITRE 3 MÉTHODE NUMÉRIQUE		31
3.1	Introduction	31
3.2	Solution numérique en milieu poreux par la méthode des différences finies	33
3.2.1	Discrétisation de l'équation d'énergie	33
3.2.2	Discrétisation de l'équation de concentration	36
3.2.3	Discrétisation de l'équation de mouvement	37
3.3	Solution numérique en milieu fluide par la méthode des volumes finis	39
3.3.1	Discrétisation des équations par la méthode des volumes de contrôle	40
3.3.2	Équations discrétisées en milieu fluide	43
3.4	Algorithme de calcul	44
3.5	Validation du code numérique	45

CHAPITRE 4	SOLUTION ANALYTIQUE	47
4.1	Concept de l'écoulement parallèle	47
4.2	Démarche analytique	48
4.3	Solutions analytiques	51
4.3.1	Cas poreux	51
4.3.1.1	Solution générale pour $N \neq -1$	52
4.3.1.2	Solution particulière pour $N = -1$	55
4.3.1.3	Solution asymptotique en régime de couche limite	61
4.3.2	Cas fluide	66
4.3.2.1	Solution générale pour $N \neq -1$	66
4.3.2.2	Solution particulière pour $N = -1$	67
CHAPITRE 5	ANALYSE DES RÉSULTATS	73
5.1	Milieu poreux saturé par un fluide binaire	73
5.1.1	Solution générale pour $N \neq -1$	73
5.1.2	Cas particulier pour $N = -1$	93
5.1.3	Cas asymptotique	97
5.2	Milieu fluide	99
CHAPITRE 6	ÉTUDE DU PROBLÈME D'INSTABILITÉ	108
6.1	Introduction	108
6.2	Stabilité de l'état de repos (cas flux imposés)	111
6.2.1	Théorie de la stabilité linéaire	112
6.2.2	Résultats et discussions	114
6.3	Stabilité de l'écoulement convectif	120
6.4	Stabilité de l'état de repos (cas isotherme)	126
CONCLUSION		131
BIBLIOGRAPHIE		133

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	Représentation schématique du modèle physique	14
Figure 3.1	Maillage du domaine de calcul en (i, j)	32
Figure 4.1	Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations (flux imposés) pour $R_T = 100$, $Le = 10$, $N = 1$, $\eta = 0.9$, $a = 0$ et (a) $A = 8$ et (b) 1	50
Figure 4.2	Résolution graphique de la fonction de dispersion (4.30) . .	57
Figure 4.3	Variation du nombre de Rayleigh souscritique R_T^{sous} en fonction du nombre de Lewis Le pour $\eta = 0.5$ et 0.9 et $R_T = 50$	59
Figure 4.4	Solutions asymptotique du transfert thermique Nu et massique Sh en fonction du nombre de Rayleigh R_T (cas flux imposés) pour $Le = 10$, $N = 0.01$, $a = 0$ et $\eta = 0.5$. . .	65
Figure 4.5	Variation du nombre de Rayleigh sous critique R_T^{sous} en fonction du rapport des rayons η (flux imposés) pour $Le = 10$, $N = -1$ et $a = 0$	68
Figure 4.6	Limite de Ω_0 quand $\eta \rightarrow 1$	70
Figure 4.7	Variation de la fonction de courant ψ en fonction du nombre de Rayleigh R_T (flux imposés) pour $Le = 10$, $N = -1$ et $a = 0$	72
Figure 5.1	Influence du nombre de Rayleigh thermique R_T sur la variation du transfert thermique Nu (cas Neumann) pour $Le = 1.5$, $N = 0.5$, $a = 0$, $\eta = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ et 1	74
Figure 5.2	Influence du nombre de Rayleigh thermique R_T sur la variation du transfert thermique Nu (cas Dirichlet) pour $Le = 1.5$, $N = 0.5$, $a = 0$, $\eta = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ et 1	74

Figure 5.3	Influence du nombre de Rayleigh thermique R_T sur la variation du transfert massique Sh (cas Neumann) pour $Le = 1.5$, $N = 0.5$, $a = 0$, $\eta = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ et 1	76
Figure 5.4	Influence du nombre de Rayleigh thermique R_T sur la variation du transfert massique Sh (cas Dirichlet) pour $Le = 1.5$, $N = 0.5$, $a = 0$, $\eta = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ et 1	76
Figure 5.5	Influence du nombre de Rayleigh thermique R_T sur la variation de la fonction de courant ψ_{max} (cas Neumann) pour $Le = 1.5$, $N = 0.5$, $a = 0$, $\eta = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ et 1	78
Figure 5.6	Influence du nombre de Rayleigh thermique R_T sur la variation de la fonction de courant ψ_{max} (cas Dirichlet) pour $Le = 1.5$, $N = 0.5$, $a = 0$, $\eta = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ et 1	78
Figure 5.7	Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour $R_T = 50$, $Le = 1.5$ et $N = 0.5$ (cas Dirichlet) (a) Double diffusion (a.i) $\eta = 0.3$, $\psi_{max} = 16.53$, $Nu = 2.67$ et $Sh = 3.1952$ (a.ii) $\eta = 0.9$, $\psi_{max} = 9.65$, $Nu = 1.57$ et $Sh = 1.94$ (b) Effet Soret (b.i) $\eta = 0.3$, $\psi_{max} = 11.06$, $Nu = 2.38$ et $Sh = 2.38$ (b.ii) $\eta = 0.9$, $\psi_{max} = 6.47$, $Nu = 1.36$ et $Sh = 1.36$	79
Figure 5.8	Influence du nombre de Lewis Le sur la variation de la fonction de courant (cas Neumann) ψ_{max} pour $R_T = 50$, $N = 0.5$; -0.5 , $\eta = 0.5$; 0.9 et 1	81
Figure 5.9	Influence du nombre de Lewis Le sur la variation de la fonction de courant (cas Dirichlet) ψ_{max} pour $R_T = 100$, $N = 0.5$, $\eta = 0.1$ et 0.99 et $a = 0$ et 1	81

Figure 5.10	Lignes de courant(gauche), isotempérature(milieu), isoconcentration(droite) (cas Neumann) pour $R_T = 50$, $Le = 10$, $a = 1$, $\eta = 0.5$ et $A = 8$; a) $N = 0$, b) $N = 10$, et c) $N = -10$	83
Figure 5.11	Influence du rapport des forces de flottabilité N sur la variation de la fonction de courant ψ_{max} (cas Neumann) pour $R_T = 50$, $Le = 10$, $a = 0$, $\eta = 0.5, 0.7, 0.9$, et 1	84
Figure 5.12	Influence du rapport des forces de flottabilité N sur la variation de la fonction de courant ψ_{max} (cas Dirichlet) pour $R_T = 100$, $Le = 10$, $a = 0$ et 1 , $\eta = 0.1$ et 1	84
Figure 5.13	Lignes de courant (gauche), isotempérature (milieu), isoconcentration (droite) (cas flux imposés) pour $R_T = 50$, $N = -1.8$, $Le = 10$, $a = 1$ et $A = 4$, (a) $\eta = 1$, (b) $\eta = 0.5$. .	87
Figure 5.14	Effet de R_T et N sur le coefficient de séparation C_S pour $Le = 10$, $a = 0$ et $\eta = 1$	89
Figure 5.15	Contours des Isoconcentrations pour $Le = 10$, $N = 0$, $a = 0$ et $\eta = 1$ a) $R_T = 0.01$, b) $R_T = 1.1$ et c) $R_T = 10$	89
Figure 5.16	Effet du rapport des forces de flottabilité N sur le coefficient de séparation optimale C_S^{max} et le nombre de Rayleigh optimale R_T^{opt} pour $\eta = 1$, $a = 0$ et $Le = 10$	91
Figure 5.17	Effet du nombre de Lewis sur le coefficient de séparation optimale C_S^{max} et le nombre de Rayleigh optimale R_T^{opt} pour $\eta = 1$, $a = 0$ et $N = 0$	91
Figure 5.18	Effet du nombre de Rayleigh R_T sur le coefficient de séparation pour $N = 0$, $a = 0$ et $\eta = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ et 1	92
Figure 5.19	Effet du rapport des rayons η sur le coefficient de séparation optimale C_S^{max} pour $Le = 10$, $N = 0$ et $a = 0$	92

Figure 5.20	Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations (cas Neumann) pour $R_T = 50$, $Le = 10$, $a = 0$, $A = 1.75$ et $\eta = 0.7$: a) $N = 10$, b) $N = -1.5$, c) $N = -1.83$, d) $N = -1.85$ et e) $N = -10$	94
Figure 5.21	Influence du nombre de Rayleigh thermique R_T sur la variation du transfert thermique Nu pour $N = -1$, $a = 0$, $Le = 1.5$, $\eta = 0.5, 0.7, 0.9, 0.95$	95
Figure 5.22	Influence du nombre de Rayleigh thermique R_T sur la variation du transfert massique Sh pour $N = -1$, $a = 0$, $Le = 1.5$, $\eta = 0.5, 0.7, 0.9, 0.95$	95
Figure 5.23	Influence du nombre de Lewis Le sur l'intensité de la fonction de courant ψ pour $R_T = 50$, $N = -1$. $a = 0$ et $\eta = 0.5, 0.95$	98
Figure 5.24	Solutions asymptotique du transfert thermique et massique en fonction du nombre de Rayleigh R_T pour $Le = 0.01$, $N = 10$, $a = 0$ et $\eta = 0.9$	98
Figure 5.25	Lignes de courant (gauche), isothermes(centre) et isoconcentrations (droite) pour $R_T = 10^4$, $Le = 1.5$, $N = 0.5$, $A = 6$ et $\eta = 0.1$. (a) $a = 0$, $\psi_{max} = 11.31$, $Nu = 6.17$ et $Sh = 7.27$; (b) $a = 1$, $\psi_{max} = 9.40$, $Nu = 5.75$ et $Sh = 11.30$	101
Figure 5.26	Influence du nombre de Rayleigh thermique R_T sur la variation de la fonction de courant ψ_{max} (a), nombre de Nusselt Nu (b) et le nombre de Sherwood Sh (c) pour $N = 0.5$, $Le = 1.5$, $a = 0$, $\eta = 0.3, 0.5, 0.7$ et 1	102
Figure 5.27	Influence du nombre de Rayleigh thermique R_T sur la variation de la fonction de courant ψ_{max} (a), nombre de Nusselt Nu (b) et le nombre de Sherwood Sh (c) pour $N = 0.5$, $Le = 1.5$, $a = 1$ $\eta = 0.3, 0.5, 0.7$ et pour 1	103

Figure 5.28	Influence du nombre de Lewis Le sur la variation de la fonction de courant ψ pour $Ra = 10^4$, $N = 0.5$, $\eta = 0.1$ et 1	105
Figure 5.29	Influence des forces volumiques N sur la variation de la fonction de courant ψ pour $R_T = 10^4$, $Le = 10$, $a = 0$, $\eta = 0.3, 0.5$ et 1	105
Figure 6.1	Résultats numériques de l'enclenchement de la convection comme prédit par l'analyse de la stabilité linéaire. Structures des lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour (a) $\eta = 1$ et $A_C = 2.504$; (i) $R = 105.335$ et (ii) $R = -105.335$; (b) $\eta = 0.1$ et $A_C = 2.352$; (i) $R = 676.244$ et (ii) $R = -676.2445$	117
Figure 6.2	Effet de la porosité ε sur le nombre de Rayleigh critique de la première bifurcation R^{Hopf1} pour $Le = 1.5$ et plusieurs valeurs de η avec a) $a = 0$ b) $a = 1$	119
Figure 6.3	Effet du rapport de forme A sur le nombre de Rayleigh de la première bifurcation R^{Hopf1} pour $Le = 10$ et plusieurs valeurs de η avec $a = 0$	121
Figure 6.4	Effet du rapport de forme η sur les nombres de Rayleigh critiques R_{TC}^{Hopf2} , R_{TC}^{Hopf1} et R_{TC}^{sous} pour $a = 0$ et a) $Le = 2$ b) $Le = 10$	124
Figure 6.5	Effet du nombre de Lewis Le sur les nombres de Rayleigh critiques R_{TC}^{sous} , R_{TC}^{Hopf1} et R_{TC}^{Hopf2} pour $\eta = 0.5$ et $a = 0$. . .	124
Figure 6.6	Effet du nombre de Rayleigh R_T sur l'amplitude ψ_0 pour $Le = 2$, $\epsilon = 1$, $\eta = 0.5$ et $a = 1$	127
Figure 6.7	Variation temporelle de l'intensité de la fonction de courant pour $R_T = 80$, $Le = 2$, $\eta = 0.5$, $a = 1$ et $A = 10$	127

Figure 6.8	Variation de la quantité $R_0 = R_{TC}^{Sup}(Le - 1 + a)$ en fonction du rapport des rayons η pour $N = -1$, $Le = 1.5$ et 10 , $a = 0$ et 1	128
Figure 6.9	Variation de la longueur d'onde critique (k_C) et la fréquence d'oscillation p_i en fonction du rapport des rayons η pour $N = -1$, $Le = 1.5$ et 10 , $a = 0$ et 1	128
Figure 6.10	Variation de la fonction de courant maximum ψ_{max} en fonction du nombre de Rayleigh R_T pour $Le = 10$, $\eta = 0.5$ et $a = 0$	130

LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

a	Coefficient binaire, 0 ou 1
A	Rapport de forme cylindrique, (H'/L')
L'	Épaisseur du cylindre, $r'_o - r'_i$
D	Diffusivité massique, $m^2 s^{-1}$
j'	Flux de masse latéral, $kg m^{-2} s^{-1}$
H'	Hauteur du cylindre, m
g	Accélération gravitationnelle, $m s^{-2}$
k	Conductivité thermique du fluide, $W m^{-1} K^{-1}$
K	Perméabilité du milieu poreux, m^2
Le	Nombre de Lewis (α/D)
N	Rapport des forces de volume $(\beta'_S \Delta S' / \beta'_T \Delta T')$
Nu	Nombre de Nusselt, Eq. (2.42)
P'	Pression hydrodynamique, $kg m^{-1} s^{-1}$
Pr	Nombre de Prandtl (ν/α)
q'	Flux de chaleur latéral, $W m^{-2}$
r, z	Coordonnée radiale adimensionnelle, $r'/L', z'/L'$
R_T	Nombre de Rayleigh thermique en milieu poreux, Eq. (2.17)
Ra	Nombre de Rayleigh thermique en milieu fluide, Eq. (2.28)
S	Concentration adimensionnelle $((S' - S'_0)/\Delta S')$
S'	Concentration de la composante la plus dense, $kg m^{-3}$
S'_0	Concentration de référence en $r' = r'_i$ et $z' = 0$
Sh	Nombre de Sherwood, Eq. (2.43)
t	Temps adimensionnel, $t'\alpha/L'$
T	Température adimensionnelle $((T' - T'_0)/\Delta T')$
T'	Température du milieu, K
T'_0	Température de référence en $r' = r'_i$ et $z' = 0$

u	Vitesse radiale adimensionnelle, $u'L'/\alpha$
v	Vitesse axiale adimensionnelle, $v'L'/\alpha$

Symboles Grecs

α	Diffusivité thermique, m^2/s^{-1}
β_S	Coefficient d'expansion solutale, $m^3/kg - 1$
β'_T	Coefficient d'expansion thermique, K^{-1}
$\Delta S'$	Concentration caractéristique, Eq. (2.12)
$\Delta T'$	Température caractéristique, Eq. (2.13)
ε	Porosité normalisé du milieu poreux, ϕ/σ
η	Rapport des rayons (r'_i/r'_o)
μ	Viscosité dynamique, $kg\ m^{-1}s^{-1}$
ν	Viscosité cinématique, m^2s^{-1}
ρ	Densité du fluide, $kg\ m^{-3}$
$(\rho C)_f$	Capacité calorifique du fluide, $J\ m^{-3}\ K^{-1}$
$(\rho C)_p$	Capacité calorifique du milieu poreux saturé, $J\ m^{-3}\ K^{-1}$
σ	Rapport de capacité calorifique, $((\rho C)_p/(\rho C)_f)$
Ψ	Fonction de courant adimensionnelle, $(\psi'/\alpha L')$
ϕ	Porosité du milieu poreux

Superscripts

$'$	Variable dimensionnelle
<i>sous</i>	Régime souscritique
<i>sup</i>	Régime supercritique

Souscripts

0	Valeur à l'origine
i	Cylindre intérieur
o	Cylindre extérieur
f	Milieu fluide
s	Milieu solide

Autres symboles

∇ Gradient

$\nabla^2 = \Delta$ Laplacien

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 Généralités sur la convection naturelle thermosolutale

Il s'agit principalement de l'étude des mouvements convectifs (écoulements naturels) induits par un gradient de température et un gradient de concentration au sein d'espaces confinés ou semi-confinés, dont le contenu est généralement un milieu fluide ou un milieu poreux saturé par un fluide. Ces gradients (température et concentration) engendrent une distribution non uniforme de la densité du mélange qui génère à son tour un mouvement convectif sous l'effet de la gravité. Ces deux gradients peuvent agir, selon le cas, ensemble ou en opposition, donnant ainsi naissance à des comportements dynamiques intéressants et compliqués. Plusieurs variantes sont possibles : pour la convection thermosolutale, les gradients de chaleur et de concentration sont tous les deux imposés, tandis que dans le problème de *Soret*, le gradient de concentration est induit par le gradient thermique. Ce dernier phénomène est connu sous le nom de l'effet Soret (1880).

L'intérêt considérable qui a été porté, ces dernières années, à la convection naturelle thermosolutale est dû principalement à sa présence dans plusieurs applications industrielles tels que: les procédés de séparation en industries chimiques et pétrolières, le stockage des déchets nucléaires, la dispersion des contaminants chimiques dans les couches d'eau souterraine, la migration de l'humidité à travers les isolations fibreuses, les processus de séchage, les opérations de dessalement de l'eau de mer, la formation des régions dendritiques durant la solidification des alliages et l'exploration pétrolière afin de mieux rentabiliser les investissements

en prospection en améliorant la connaissance des gisements (Montel (1994), (Costesèque et al., 1987a,b)).

1.2 But de l'étude

La recherche proposée porte sur l'effet de la double diffusion et l'effet Soret en milieux fluide et poreux, confinés dans une enceinte verticale cylindrique concentrique et soumises à des gradients thermiques et solutaux. Ces derniers sont engendrés par des conditions limites de type Neumann et Dirichlet, imposées sur les parois verticales du système (parois actives). Le type de fluide considéré (binaire) engendre des mouvements convectifs inhabituels et intéressants. Nous souhaitons concentrer nos efforts sur l'étude des effets des paramètres de contrôle (nombre de Rayleigh, nombre de Lewis, nombre de Prandtl, rapport des forces volumiques et rapport de forme de la cavité) sur la structure de l'écoulement et sur les transferts de chaleur et de matière au sein du système.

Plusieurs méthodes numériques et analytiques seront utilisées pour résoudre les problèmes envisagés. Dans le cas d'enceintes élancées exposées à des flux constants de chaleur et de masse, nous avons développé des solutions analytiques sur la base du concept de l'écoulement parallèle (pas de composante verticale de la vitesse). L'un des objectifs principaux sera d'obtenir des expressions mathématiques pour les profils de vitesse, de température et de concentration au sein du modèle physique considéré. En particulier, nous souhaitons prédire la séparation horizontale des composants du fluide binaire, dominée simultanément par les phénomènes de thermodiffusion et de l'effet Soret. La validité du modèle analytique proposé sera vérifiée à l'aide d'une démarche numérique. Cette étude sera menée dans le but de résoudre les équations de Navier-Stokes, de l'énergie et de la diffusion massique instationnaire. Le code de calcul utilisé en milieu fluide est basé sur la méthode

des volumes finis à maillage variable. Par contre, en milieu poreux, la charge de calcul étant moins importante, alors nous avons adopté la technique des différences finies. Nous prévoyons aussi, simuler numériquement le cas particulier où les forces de volume d'origine solutale et thermique sont à l'opposé l'une de l'autre et de même intensité. Les seuils d'apparition de la convection, associés à un nombre de Rayleigh supercritique, seront déterminés par une étude de stabilité linéaire pour le cas d'une cavité verticale d'extension infinie. L'existence d'un régime convectif sous critique sera mise en évidence. On étudiera ensuite le cas plus général où les forces de volume d'origine solutale et thermique sont d'intensités différentes et ceci pour les milieux poreux et fluide et les deux types de conditions aux frontières envisagés.

Les objectifs ultimes de cette thèse sont d'une part, d'approfondir les connaissances des phénomènes de base thermoconvectifs et ceux induits par effet Soret au sein des milieux fluides et poreux afin de mieux les prédire, et d'autre part, de faire des recommandations pour améliorer le rendement des colonnes de séparation; utilisés dans l'industrie pour séparer les composants d'un mélange fluide.

1.3 Contenu de la thèse

La présente thèse de doctorat comporte six chapitres, le premier volet étant une introduction à la recherche proposée ainsi qu'un survol de tous les travaux antérieurs dans ce domaine. Le deuxième est une présentation mathématique du problème, au cours duquel on donne une forme adimensionnelle des équations régissantes et des paramètres caractéristiques. Toutes les étapes de la démarche numérique ainsi que l'algorithme de calcul utilisé sont exposés dans le troisième chapitre. Quant au chapitre suivant il est consacré à la présentation des principales étapes de la résolution analytique du problème. Le cinquième chapitre est dédié

à l'analyse des résultats trouvés pour la double diffusion et l'effet Soret dans un cylindre concentrique soumis aux deux types de conditions aux frontières imposées (flux imposés, température et concentration). Tous les résultats obtenus par la voie d'instabilité linéaire sont exposés dans le sixième chapitre. Une comparaison de ces résultats avec ceux obtenus par les méthodes de résolutions classiques est aussi présentée dans cette partie du présent rapport. Finalement nous concluons ce travail par un récapitulatif sur les principales remarques et conclusions que nous pouvons tirer à travers cette étude, ainsi que ses perspectives ultérieures.

1.4 Revue bibliographique

L'étude du phénomène de la convection naturelle est primordiale pour la compréhension des interactions fluide-énergie. De nombreuses études sur l'écoulement d'un fluide dans un milieu confiné ont été effectuées, tant expérimentales que théoriques et numériques. Une synthèse des travaux récents concernant la double diffusion par convection naturelle dans les milieux poreux et fluide a été rapportée dans les livres suivants: Bejan (1995), Nield and Bejan (1999) et Platten and Legros (1984). En se basant sur ces travaux, on observe que la grande majorité des études concerne exclusivement le cas de cavités rectangulaires. Pourtant les cavités cylindriques sont souvent rencontrées en pratique. C'est pour cette raison nous nous intéressons à ce type de géométrie dans cette thèse.

L'étude de la convection thermosolutale a commencé initialement par l'étude du déclenchement du mouvement dans une couche horizontale soumise à des gradients thermiques et solutaux verticaux. Les travaux de Nield en milieu fluide (1967) et poreux (1968), concernant la double diffusion sur des couches horizontales, générée par des gradients de température et de concentration opposés, ont permis la prédiction du nombre de Rayleigh supercritique marquant l'apparition de la

convection, pour plusieurs types de conditions aux limites. Il a aussi démontré que, lorsque les forces de volume d'origine solutale et thermique s'opposent, un écoulement convectif oscillant peut se déclencher à un nombre de Rayleigh bien inférieur au celui du supercritique. Les nombres de Rayleigh critiques permettant la séparation entre les trois régimes convectifs (stable, surstable et direct) ont été déterminés par la théorie de la stabilité linéaire (Taunton and Lightfoot (1972)). Dans le même axe de recherche, Legros et al. (1972), Platten and Chavepeyer (1973) et Caldwell (1974) ont aussi étudié la convection doublement diffusive dans une couche fluide horizontale, l'effet Soret étant pris en considération. Leurs études expérimentales et théoriques ont prédit les différents régimes mentionnés dans les travaux de Taunton et Lightfoot (1972). Par la suite, une étude analytique et numérique de la convection au sein d'une cavité carrée, remplie d'un gaz binaire et soumise à des gradients combinés de température et concentration, a été présentée par Ranganathan and Viskanta (1988). Ces derniers ont observé que le renversement du sens de l'écoulement se produit approximativement à $N = -1$, quand les forces de volume sont égales et opposées.

Récemment, un intérêt croissant a été réservé à la convection naturelle dans des milieux confinés soumis à un gradient horizontal de température et de concentration. Le cas d'une cavité rectangulaire, avec une température et une concentration imposées le long des frontières verticales, a été étudié pour la première fois par Trevisan and Bejan (1985). Un bon accord entre les simulations numériques et une analyse d'échelle du phénomène a été observé. Une étude numérique de la convection naturelle diffusive dans une enceinte carrée a été menée numériquement par Lin (1993). L'influence des paramètres régissant les nombres de Nusselt et de Sherwood a été examinée. Quelques études se sont également concentrées sur les écoulements induits par des flux de chaleur et des flux de masse uniformes imposés le long des deux murs verticaux de la cavité. Pour cette

situation, Mehta and Nandakumar (1987) ont étudié l'effet de la non homogénéité du milieu poreux. Les nombres de Nusselt et de Sherwood résultants se sont avérés tout à fait différents de ceux du milieu homogène.

Trevisan and Bejan (1986) ont démontré que des solutions analytiques sont possibles dans le cas d'une cavité verticale exposée à des flux uniformes de chaleur et de masse. Leurs résultats, valides pour le cas $Le = 1$, ont été repris par Alavyoon (1993), Alavyoon et al. (1994), et Mamou et al. (1995b) pour prédire le cas où $Le \neq 1$ et l'influence de l'inclinaison de la cavité. Les nombres de Nusselt et de Sherwood, prédits analytiquement par ces auteurs, se sont avérés en bon accord avec les solutions numériques pour une gamme étendue des paramètres régissant. L'existence de solutions multiples de convection dans le cas particulier, où les forces de flottabilité, sont approximativement égales et opposées, a été récemment démontrée numériquement par Mamou et al. (1995a). En effet, il a été observé que pour une valeur donnée du rapport de flottabilité N , les nombres de Lewis et de Rayleigh ont une grande influence sur le domaine de l'existence de ces états d'équilibres multiples. La convection thermosolutale coopérante induite dans une cavité rectangulaire a été considérée par Bennacer and Gobin (1996) et Mamou et al. (1996). Leurs travaux consistent en une analyse d'échelle suivie d'une simulation numérique des écoulements convectifs. La convection naturelle dans des cavités contenant des bains d'alliages de métaux liquides à faibles nombres de Prandtl a été étudiée par Hyun et al. (1995). Deux types d'alliages ont été considérées dans l'étude: un mélange de Al-Cu riche en aluminium et un mélange de Pb-Sn riche en plomb. La paroi verticale chaude était maintenue à une forte concentration en Cu ou en Sn alors que la paroi froide était maintenue à une concentration élevée de ces produits (Cu ou Sn). Ils ont constaté que les effets thermiques et solutaux dans la solution Al-Cu sont coopérants, alors que ceux dans la solution Pb-Sn sont opposés. Après l'établissement de l'écoulement convectif,

la solution Al-Cu devenait solutablement stratifiée en Cu et une faible circulation d'origine thermique occupait l'ensemble de la cavité. Par ailleurs, dans la solution de Pb-Sn, les effets thermiques apparaissaient au centre de la cavité sous la forme d'une petite cellule de convection entourée de deux cellules d'origine solutale. Des corrélations en termes des nombres de Nusselt et Sherwood ont été proposées en fonction de différents paramètres de contrôle (R_T , Pr , Le and N). La transition du régime thermique dominant vers un régime solutal dominant a été étudiée en fonction du paramètre N . Des écoulements monocellulaires et multicellulaires ont été observés. Dans le même genre d'étude, Goyeau et al. (1996) ont considéré la convection thermosolutale coopérante dans un milieu poreux de Brinkman. Les prédictions de la simulation numérique se sont avérées en accord avec celles obtenues par une analyse d'échelle en régime de couche limite. Des corrélations de Nu et de Sh ont été proposées par ces auteurs.

Ghorayeb and Mojtabi (1997) ont mené une étude sur les écoulements convectifs dans une cavité rectangulaire remplie d'un fluide binaire et soumise à des gradients horizontaux de température et de concentration. Les forces de poussée sont supposées égales et opposées. L'analyse de la stabilité linéaire a démontré l'existence d'un nombre de Rayleigh critique caractérisant le seuil de la convection supercritique. D'autre part, les résultats de la convection non linéaire révèlent l'existence de la convection souscritique. Il a été aussi montré que le problème admet des solutions multiples. Des résultats similaires ont été obtenus par Mamou et al. (1997c) dans le cas d'une couche fluide verticale soumise à des flux de chaleur et de masse constants. En étudiant la stabilité linéaire et non linéaire, ces auteurs ont déterminé les seuils de bifurcation souscritique et supercritique en fonction du nombre de Rayleigh solutal et du nombre de Lewis. Mamou et al. (1997a) et Mamou et al. (1997b) ont étudié la stabilité d'une couche fluide horizontale exposée à des flux verticaux de chaleur et de masse. Ils ont montré que l'existence

de la convection souscritique est liée directement aux valeurs du paramètre de flottabilité. Une étude de la thermodiffusion d'un fluide binaire compressible formé de méthane et de n-butane en cavité rectangulaire a été menée par Chacha and Saghir (2003). Cette étude, valide pour différents types de conditions aux limites, a été réalisée dans des conditions d'absence de la gravité. Il a été démontré que les pertes d'énergie par radiation influencent énormément les expériences de mesure des coefficients de Soret et de Fick.

Pour le cas de la cavité cylindrique, plusieurs investigations ont été menées durant les dernières décennies. Pour le cas poreux, Hickox and Gartling (1982) ont étudié par la méthode des éléments finis le cas où les parois intérieures du cylindre sont chauffées à des températures constantes. Ils ont obtenu plusieurs résultats concernant le transfert de chaleur pour un nombre de Rayleigh allant jusqu'à 100 et un rapport de forme compris entre 2 et 8. Ils ont aussi développé une solution analytique approximative valide pour des faibles valeurs de R_T . Le même problème a été repris par Havstad and Burns (1982), mais cette fois-ci en utilisant les trois techniques suivantes: différences finies, analyse d'échelle et technique de perturbation. Prasad and Kulacki (1984) ont repris cette étude pour une large gamme de valeur de contrôle. Ils ont aussi étudié le problème de la couche limite et l'effet de la courbure sur le comportement de l'écoulement. Plusieurs résultats et remarques ont été établies dans cette investigation, tels que l'influence de la centro-symétrie sur les champ de température et vitesse, l'influence du rapport des rayons sur l'épaisseur de la couche limite ainsi que la dépendance du nombre de Nusselt par rapport au nombre de Rayleigh. Mack and Bishop (1968) ont donné plusieurs caractéristiques telles que l'amplitude, la période et la longueur d'onde, concernant le problème de la convection oscillatoire dans des conduites horizontales de fluide. Ils ont étudié aussi l'enclenchement de la convection à partir d'un écoulement préalablement stable pour des faibles nombres de Grashof. L'étude

expérimentale de Sedahmed and Shemilt (1981) a été réalisée par la technique de l'électrochimie et a permis d'établir une corrélation du nombre de Sherwood pour des grandes valeurs du nombre de Grashof. Une étude numérique de la convection stationnaire en $3D$ et de la convection oscillante transitoire en $2D$ a été réalisée par Rao et al. (1985). Leurs expériences ont aussi mené à la visualisation de la structure de l'écoulement convective. Une extension de leurs travaux a été présentée par Ho and Lin (1997)

Une autre étude numérique et expérimentale concernant la convection naturelle dans un espace annulaire avec une paroi uniformément chauffée et l'autre adiabatique a été réalisée par Al-Arabi et al. (1987). Les simplifications de la couche limite laminaire ont été utilisées. L'accord entre leurs résultats numériques et expérimentales été bon. Prasad (1986) a utilisé la loi de Darcy pour étudié le cas d'un cylindre concentrique chauffé par l'intérieur. Il a démontré numériquement que la température de la parois intérieure s'accroît avec le nombre de Rayleigh. La température à l'intérieur du milieu poreux décroît avec le rapport des rayons et augmente avec le rapport de forme. Il s'est avéré aussi, que le transfert de chaleur pour le cas de flux imposé est supérieur à celui de température constante. Shipp et al. (1993a,b) ont étudié l'influence des nombres de Rayleigh thermique et Lewis sur la structure de l'écoulement et les valeur moyenne de Nu et Sh pour une cavité annulaire remplie de fluide binaire. L'investigation de Hyung et al. (1993) concerne la convection naturelle double diffusive dans un cylindre en rotation dans laquelle l'écoulement est piloté par les flux de chaleur horizontaux et des flux de concentration verticaux. L'influence de la rotation sur la structure globale de l'écoulement a été mise en évidence. Il a aussi été prouvé que pour des valeurs moyennes de rapport de flottabilité, l'écoulement devient fortement dépendant de l'effet de la rotation.

Le phénomène de la convection thermo-solutale se produisant dans un anneau

vertical concentrique, rempli d'un milieu poreux, avec température et concentration imposés verticalement sur la paroi extérieure, a été étudié par Beji et al. (1999). Dans cette étude l'effet de la courbure sur la symétrie de l'écoulement, la température et la concentration ainsi que l'influence de la poussée d'Archimède sont mis en évidence. Il a été démontré que les nombres de Rayleigh thermique et de Lewis ainsi que le rapport des rayons, influencent la valeur du rapport de flottabilité qui permet la transition de l'écoulement. Bennacer et al. (2000) ont utilisé le modèle de Brinkman pour étudier la convection thermosolutale dans un cylindre poreux saturé par un fluide binaire. Les influences de la variation du nombre de Darcy et du rapport des rayons sur le transfert de masse et de chaleur sont les principaux résultats obtenues par ces auteurs. L'étude analytique et numérique du comportement d'un mélange binaire saturant un milieu poreux confiné dans un anneau poreux vertical et soumis à un gradient de température horizontal, a été faite par Marcoux and Charrier-Mojtabi (1999) et Marcoux et al. (1999). La formulation du problème a été basée sur un modèle mathématique bidimensionnel associé à la loi de Darcy avec l'approximation de Boussinesq. Il a été démontré que la géométrie annulaire induit une rupture de la symétrie du système par rapport à une configuration rectangulaire. En se basant sur une analyse dimensionnelle, Choukairy et al. (2004) ont étudié l'effet de la conductivité et l'épaisseur de la paroi intérieure sur le transfert de chaleur, dans un cylindre concentrique fluide dont l'intérieur est couvert par une mince couche solide. Dans le cas poreux, une autre étude numérique et analytique par Bahloul et al. (2004) a porté sur la séparation des composants d'un fluide binaire saturant un milieu poreux cylindrique vertical. Dans cette investigation le milieu poreux est exposé à des flux de chaleur et de masse sur sa paroi intérieure. Les résultats ont été présentés sur la base des paramètres permettant une séparation optimale des composants du fluide binaire qui sature le milieu poreux. Les résultats analytiques basés sur le concept de l'écoulement parallèle sont en parfait accord avec ceux obtenues numériquement.

Toujours en milieux poreux, Bahloul et al. (2006) ont étudié le problème de la double diffusion et de l'effet Soret dans un cylindre concentrique verticale. Cette étude analytique, asymptotique et numérique (valide pour la double diffusion et l'effet Soret) a prouvé la crédibilité de l'approximation de l'écoulement parallèle pour prédire les caractéristiques des écoulements double-diffusif et ceux induit par effet Soret. L'effet de la courbure et du rapport des forces de flottabilité sur la structure et l'intensité de l'écoulement ont aussi été mis en exergue dans cet article. Récemment, la naissance de la convection d'un fluide binaire confiné dans un espace annulaire poreux vertical a été étudiée par Bahloul et al. (2005). Les conditions aux frontières considérées par ces auteurs sont des flux de chaleur et de masse imposées sur les parois verticales et des conditions adiabatiques et imperméables sur les parois horizontales. Les nombres de Rayleigh supercritiques et souscritiques ont été obtenus en termes des paramètres du problème. Dans le cas d'un régime convectif établi le nombre de Rayleigh critique de Hopf, marquant le début du régime oscillant, a également été prédit. La naissance de la convection d'un fluide binaire dans une cavité cylindrique soumise à une différence de température et de concentration pour ($N = -1$) a été étudiée par Yahiaoui et al. (2007a). Cette étude de stabilité linéaire et numérique a montré que l'enclenchement de la convection en cavité cylindrique s'effectue toujours selon des modes oscillatoires, contrairement, au cavités rectangulaires où les modes sont souvent stationnaires à l'exception de quelques situations extrêmes. Une légère différence a été observée entre la valeur du Rayleigh critique numérique et celui prédit par la méthode d'instabilité linéaire. Ceci est dû principalement au fait que les termes nonlinéaires sont négligés dans la méthode d'instabilité linéaire. L'apparition des régimes multicellulaires stables au voisinage du Rayleigh critique a aussi été observée numériquement. Une récente investigation en milieu cylindrique fluide a permis d'étudier l'influence de tous les paramètres de contrôle (Ra , Le , η et a) sur la structure de l'écoulement et des transferts de chaleur Nu et de masse Sh à l'intérieure de la cavité. Les solutions

numériques et analytiques obtenues, décrivent l'effet de la courbure pour ce type de géométrie pour une large gamme de paramètres de contrôle(Yahiaoui et al. (2007b)).

CHAPITRE 2

MODÈLES PHYSIQUE ET MATHÉMATIQUE

2.1 Description du problème

On propose d'étudier le phénomène de la convection naturelle d'un fluide binaire (mélange d'un solvant et d'un soluté) dans un espace confiné entre deux cylindres coaxiaux verticaux avec prise en compte de l'effet Soret. Ce type de fluide se présente le plus souvent sous deux formes: soit en saturant un milieu poreux donné (cas poreux) ou bien sous son état fluide normal (cas fluide). Nous allons alors étudier l'écoulement et les transferts de chaleur pour ces deux situations. Dans notre investigation, on cherche à comparer l'écoulement dans les milieux poreux avec celui des fluides purs, pour les deux types de conditions aux limites: flux de chaleur et de concentration imposés (condition de Neumann) et température et concentration imposées (condition de Dirichlet).

La géométrie spatiale considérée est illustrée sur le schéma (Figure 2.1). Il s'agit d'un cylindre de hauteur H' , de rayon intérieur r'_i et extérieur r'_o . Les frontières verticales (parois actives) sont soumises à des flux uniformes (cas flux imposés) de chaleur ($q'_o = q'_i \frac{r'_i}{r'_o}$) et de concentration ($j'_o = j'_i \frac{r'_i}{r'_o}$) ou maintenues à des températures ($T'_i > T'_o$) et des concentrations ($S'_i > S'_o$) constantes (cas températures et concentrations imposées). Par ailleurs nous supposons que les frontières horizontales sont adiabatiques et imperméables.

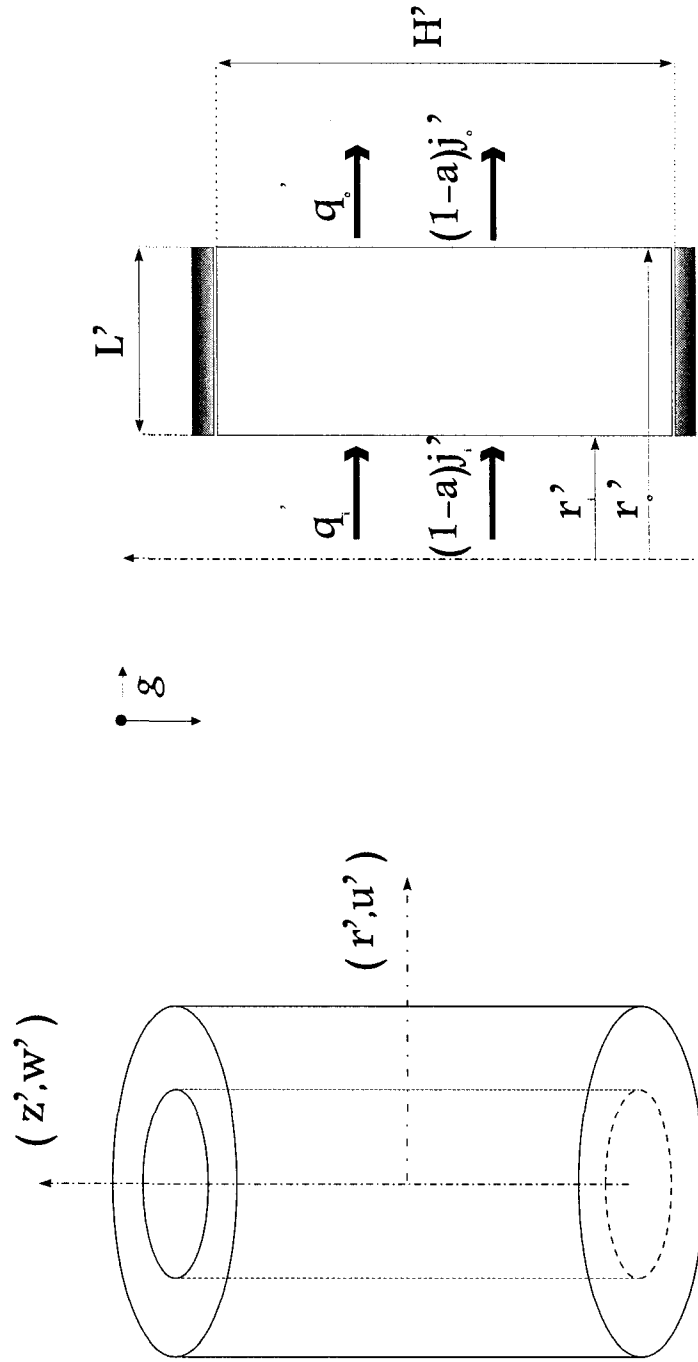


Figure 2.1 Représentation schématique du modèle physique

2.2 Hypothèses

Lors de notre étude plusieurs approximations ont été adoptées afin de simplifier la formulation du modèle mathématique :

- La hauteur du cylindre est supposée suffisamment grande par rapport au autres dimensions de façon à ce que les effets de bouts deviennent négligeables. Ceci nous ramène alors à un problème bidimensionnel comme le montre la figure (2.1).
- Le fluide binaire considéré est newtonien et incompressible.
- L'écoulement engendré est supposé laminaire, incompressible et bidimensionnel.
- Le travail des forces de pression ainsi que les échanges thermiques par rayonnement sont négligeables.
- Il n'y a ni source de chaleur ou de masse ni réaction chimique.
- L'effet Dufour¹ de diffusion de chaleur est négligé.
- Les propriétés thermophysiques du fluide sont constantes et sont évaluées à la température et à la concentration de référence. On suppose par ailleurs que la masse volumique varie linéairement en fonction de la température et de la concentration selon l'approximation de Boussinesq (1903).

¹effet Dufour : c'est le gradient de température induit par le gradient solutal

Approximation de Boussinesq

Cette approximation suppose que les différentes propriétés thermodynamiques et de transport du fluide sont indépendantes de la température et de la pression, et que le fluide est incompressible. Elle néglige aussi les variations de la densité, là où elles ne sont pas multipliées par la gravité g , et considère que la masse volumique ρ dépend linéairement de la température et de la concentration, ce qui se traduit par:

$$\rho = \rho_0[1 - \beta'_T(T' - T'_0) - \beta'_S(S' - S'_0)] \quad (2.1)$$

T' et S' représentent respectivement la température et la concentration du fluide en un point du système. T'_0 , S'_0 , et ρ_0 représentent la température, la concentration et la masse volumique de référence. β'_T et β'_S sont respectivement les coefficients d'expansion thermique et solutal. Il sont définis par :

$$\beta'_T = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T'} \right)_{P', S'} \quad \beta'_S = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_{P', T'} \quad (2.2)$$

Pour la plupart des fluides β'_T est positif à température et pression ordinaire, à l'exception de l'eau en dessous de 4°C, par contre β'_S peut être négatif ou positif en fonction de la contribution des composantes de diffusion à la densité du fluide. À titre d'exemple, dans le cas où l'eau est considérée comme un solvant et le sel comme un soluté, le coefficient β'_S est négatif car le sel contribue à l'augmentation de la densité de l'eau. Par contre dans le cas d'un mélange air-vapeur d'eau, le coefficient β'_S est positif car l'air humide est moins dense que l'air sec.

2.3 Formulation mathématique du problème

Dans cette section, nous allons établir les systèmes d'équations régissantes ainsi que les conditions aux limites. Nous considérons tout d'abord le cas de la convection thermosolutale en milieu poreux et par la suite, le cas du milieu fluide.

2.3.1 Convection en milieu poreux

Dans notre étude du phénomène de la convection naturelle dans les milieux poreux, nous avons supposé que la matrice poreuse est solide, perméable, homogène, isotrope et saturée par le fluide.

2.3.1.1 Équation de continuité

En projection cylindrique, le principe de conservation de masse appliqué localement à un petit volume de fluide qui sature la matrice poreuse donne:

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial(r' u')}{\partial r'} + \frac{\partial v'}{\partial z'} = 0 \quad (2.3)$$

2.3.1.2 Équation de la quantité de mouvement

Les investigations de Henry Darcy (1880) sur l'hydrologie des fontaines de Dijon et ses expériences sur les écoulements unidirectionnels en milieu homogène, ont révélé une proportionnalité entre la vitesse de l'écoulement en milieux poreux et la différence de pression appliquée. Dans le domaine de la modélisation des écoulements dans les milieux poreux, ce modèle de *Darcy* compte de nos jours parmi les plus utilisés (Nield and Bejan (1999)).

Selon notre notation et en présence des termes d'accélération gravitationnelle ($g = g_z$), ce modèle s'écrit:

$$u' = -\frac{K^*}{\mu} \frac{\partial P'}{\partial r'} \quad (2.4)$$

$$v' = -\frac{K^*}{\mu} \left[\frac{\partial P'}{\partial r'} + \rho_0 g [\beta'_T(T' - T'_0) + \beta'_S(S' - S'_0)] \right] \quad (2.5)$$

où K^* est la perméabilité du milieu poreux, P' la pression locale et μ la viscosité dynamique. En sommant les équations obtenues après injection de (2.1) dans les dérivés de (2.4) par rapport à r et celle de (2.5) par rapport à z , on obtient:

$$\frac{\partial v'}{\partial r'} - \frac{\partial u'}{\partial z'} = -\frac{K^*}{\mu} \rho_0 g \frac{\partial}{\partial r'} [\beta'_T(T' - T'_0) + \beta'_S(S' - S'_0)] \quad (2.6)$$

Ce modèle de Darcy est valable seulement quand l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds, basé sur la vitesse moyenne locale est inférieur à 1, Ward (1964). Pour un nombre de Reynolds local supérieur à 1, la relation entre la pression et la vitesse moyenne est approximée par la correction de Forchheimer (1901) au modèle de Darcy. Aussi, pour des valeurs très grandes de la perméabilité K^* , Brinkman (1964) a introduit une autre modification à la loi de Darcy permettant de prendre en considération les effets visqueux. Dans cette thèse, nous avons adopté le modèle de Darcy pour l'étude des écoulements double-diffusifs et ceux induits par effet Soret en milieu poreux.

2.3.1.3 Équation de conservation de l'énergie

Nous assumons, pour l'écriture de l'équation de conservation de l'énergie, que l'équilibre thermique locale est atteint, autrement dit, $T'_s = T'_f = T'$ où T'_s et T'_f représentent respectivement la température de la phase solide et fluide. L'hypothèse

de non existence de transfert de chaleur entre les deux phases est aussi prise en compte. Appliquons le premier principe de la thermodynamique à l'écoulement dans le cas général. Ce qui donne, pour la phase solide:

$$(1 - \phi)(\rho C)_s \frac{\partial T'_s}{\partial t'} = (1 - \phi)k_s \nabla'^2 T'_s \quad (2.7)$$

et pour la phase fluide:

$$\phi(\rho C_p)_f \frac{\partial T'_f}{\partial t'} + (\rho C_p)_f \left(u' \frac{\partial T'_f}{\partial r'} + v' \frac{\partial T'_f}{\partial z'} \right) = \phi k_f \nabla'^2 T'_f \quad (2.8)$$

Les indices s et f réfèrent respectivement, à la phase solide et fluide, $(C)_s$ est la chaleur spécifique du solide, $(C_p)_f$ est celle du fluide à pression constante et k est la conductivité thermique. En se basant sur l'hypothèse que $T'_s = T'_f = T'$ et en sommant (2.7) et (2.8), on obtient:

$$(\rho C)_m \frac{\partial T'}{\partial t'} + (\rho C_p)_f \left(u' \frac{\partial T'}{\partial r'} + v' \frac{\partial T'}{\partial z'} \right) = k_m \nabla'^2 T' \quad (2.9)$$

où $(\rho C)_m$ et $k_m = k$ représentent la chaleur massique et la conductivité thermique du milieu, respectivement. Avec :

$$\phi = \frac{\text{volume du vide contenu dans le milieu poreux}}{\text{volume total du milieu poreux}}$$

$$(\rho C)_m = (1 - \phi)(\rho C)_s + \phi(\rho C)_f$$

$$k_m = (1 - \phi)k_s + \phi k_f$$

et

$$\nabla'^2 = \frac{\partial}{r' \partial r'} \left(r' \frac{\partial}{\partial r'} \right) + \frac{\partial}{\partial z'^2}$$

2.3.1.4 Équation de conservation de la fraction massique

Considérons S' comme étant la concentration de la composante du fluide binaire la plus dense dont nous voulons étudier la diffusion. L'équation de conservation de la concentration s'écrit:

$$\phi \frac{\partial S'}{\partial t'} + u' \frac{\partial S'}{\partial r'} + v' \frac{\partial S'}{\partial z'} = D \nabla'^2 S' + a D' S' (1 - S') \nabla'^2 T' \quad (2.10)$$

où D est la diffusivité massique, D' étant le coefficient d'effet Soret et a un coefficient qui vaut 0 pour la double diffusion ou 1 pour la convection induite par l'effet Soret.

Remarques

- La double diffusion est un processus qui pilote la convection naturelle induite par l'imposition de gradients de température et de concentration sur la frontière d'un fluide binaire.
- L'effet Soret (Soret 1891) est le procédé de séparation observé dans un mélange de fluides (fluide binaire dans notre cas) soumis à un gradient thermique.

2.3.1.5 Équations adimensionnelles

Les équations précédentes, sont mises sous une forme adimensionnelle en utilisant des variables caractéristiques du problème. La procédure s'appuie sur une écriture adimensionnelle des équations régissantes (2.3)-(2.10), dégagant des groupement sans dimensions dits nombres caractéristiques. Les variables adimensionnelles utilisées sont les suivantes:

$$\begin{aligned}
(r, z) &= \frac{(r', z')}{L'} & (u, v) &= (u', v') \frac{L'}{\alpha} \\
w &= w' \frac{L'^2}{\alpha} & \psi &= \frac{\psi'}{\alpha L'} & t &= t' \frac{\nu}{H^2} \\
T &= \frac{T' - T'_0}{\Delta T'} & S &= \frac{S' - S'_0}{\Delta S'}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

avec $L' = r'_o - r'_i$ et $\alpha = \frac{k}{(\rho C)_f}$. Par ailleurs, $\Delta T'$ et $\Delta S'$ sont les différences caractéristiques de température et de concentration respectives et ils sont définies par:

$$\Delta T' = \frac{q' L'}{k}, \quad \Delta S' = \begin{cases} \frac{j' D}{\rho_0} & \text{si } a=0 \\ S'_0(1 - S'_0) \Delta T' \frac{D'}{D} & \text{si } a=1 \end{cases} \tag{2.12}$$

quand les parois actives sont exposées à des flux constants de chaleur et de masse, ou par :

$$\Delta T' = (T'_o - T'_i), \quad \Delta S' = \begin{cases} (S'_o - S'_i) & \text{si } a=0 \\ S'_0(1 - S'_0) \Delta T' \frac{D'}{D} & \text{si } a=1 \end{cases} \tag{2.13}$$

En introduisant les variables sans dimensions (2.11) dans les équations (2.3) - (2.10), nous obtenons le système d'équations suivant:

$$\Delta \psi - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -r R_T \left[\frac{\partial T}{\partial r} + N \frac{\partial S}{\partial r} \right] \tag{2.14}$$

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + v \frac{\partial T}{\partial z} = \Delta T \tag{2.15}$$

$$\varepsilon \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial r} + v \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{1}{Le} [\nabla^2 S - a \nabla^2 T] \quad (2.16)$$

À partir de ces équations nous remarquons que le présent problème est gouverné par R_T le nombre de Rayleigh thermique, N le rapport des forces de volume solutales et thermiques, Le le nombre de Lewis, ε la porosité normalisée de la matrice poreuse, σ le rapport de capacité calorifique et le paramètre a . Ils sont donnés par:

$$R_T = \frac{\rho g K^* \beta'_T \Delta T' L'}{\mu \alpha} \quad Le = \frac{\alpha}{D} \quad N = \frac{\beta'_S \Delta S'}{\beta'_T \Delta T'} \quad (2.17)$$

$$\varepsilon = \frac{\phi}{\sigma} \quad \sigma = \frac{(\rho C)_p}{(\rho C_p)_f}$$

2.3.2 Convection en milieu fluide

Dans le cas où notre géométrie cylindrique est remplie de fluide binaire, les équations de base régissant l'écoulement et les transferts de chaleur et de masse sont données respectivement par:

2.3.2.1 Équation de continuité

En projection cylindrique, le principe de conservation de masse appliqué localement à un petit volume de fluide donne:

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial(r' u')}{\partial r'} + \frac{\partial v'}{\partial z'} = 0 \quad (2.18)$$

2.3.2.2 Équation de la quantité de mouvement

$$\rho \left(\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial r'} + v' \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) = -\frac{\partial P'}{\partial r'} - \mu \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial u'}{\partial r'} - \frac{u'}{r'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \right) \quad (2.19)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial r'} + v' \frac{\partial v'}{\partial z'} \right) = -\frac{\partial P'}{\partial z'} - \mu \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial v'}{\partial r'} - \frac{v'}{r'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} \right) - \rho g \quad (2.20)$$

En sommant les équations obtenues après injection de (2.1) dans les dérivées de (2.19) par rapport à x et celle de (2.20) par rapport à y , on obtient:

$$\frac{\partial w'}{\partial t'} + u' \frac{\partial w'}{\partial r'} + v' \frac{\partial w'}{\partial z'} - \frac{u' w'}{r'} = \nu \left(\nabla'^2 w' - \frac{w'}{r'^2} \right) - g \left(\beta'_T \frac{\partial T'}{\partial r'} + \beta'_S \frac{\partial S'}{\partial r'} \right) \quad (2.21)$$

ou w est la vorticité, définie par:

$$w' = \frac{\partial v'}{\partial r'} - \frac{\partial u'}{\partial z'}$$

2.3.2.3 Équation de conservation de l'énergie

$$(\rho_p)_f \left[\frac{\partial T'}{\partial t'} + u' \frac{\partial T'}{\partial r'} + v' \frac{\partial T'}{\partial z'} \right] = k \nabla'^2 T' \quad (2.22)$$

avec

$$\nabla'^2 = \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial}{\partial r'} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}$$

2.3.2.4 Équation de conservation de la fraction massique

$$\frac{\partial S'}{\partial t'} + u' \frac{\partial S'}{\partial r'} + v' \frac{\partial S'}{\partial z'} = D \nabla'^2 S' + a D' S' (1 - S') \nabla'^2 T' \quad (2.23)$$

où D est la diffusivité massique, D' étant le coefficient d'effet Soret et a un coefficient qui vaut 0 pour la double diffusion où 1 pour la convection induite par l'effet Soret.

2.3.2.5 Équations adimensionnelles

Les équations précédentes (2.18)-(2.23), sont mises sous une forme adimensionnelle en utilisant des variables caractéristiques du problème (2.11), (2.12) et (2.13).

En introduisant ces variables sans dimensions dans les équations (2.18) - (2.23), nous obtenons le système d'équations suivant:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + v \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{uw}{r} = Pr \left(\nabla^2 w - \frac{w}{r^2} \right) - Pr Ra \left(\frac{\partial T}{\partial r} + N \frac{\partial S}{\partial r} \right) \quad (2.24)$$

$$rw = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + v \frac{\partial T}{\partial z} = \nabla^2 T \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial r} + v \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{1}{Le} (\nabla^2 S - a \nabla^2 T) \quad (2.27)$$

où Ra représente le nombre de Rayleigh thermique, Le le nombre de Lewis, Pr nombre de Prandtl et N le rapport des forces de volume solutales et thermiques.

$$Ra = \frac{\rho g \beta'_T \Delta T' L'^3}{\mu \alpha} \quad Le = \frac{\alpha}{D} \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad N = \frac{\beta'_S}{\beta'_T} \frac{\Delta N}{\Delta T'} \quad (2.28)$$

Remarques

- Le nombre Rayleigh Ra exprime le rapport entre les effets de la poussée d'Archimède, et ceux de la viscosité.
- Le nombre de Lewis Le rapporte le taux de conduction thermique au taux de diffusion de masse. Il quantifie la similitude entre les transports de matière et d'énergie thermique.
- Le nombre de Prandtl Pr caractérise l'importance relative des deux mécanismes qui pilotent la convection du fluide: la diffusion de quantité de mouvement et la diffusion de chaleur, plus il est grand, plus le mouvement du fluide est piloté par le processus thermique. Les nombres de Prandtl des métaux liquides tels que le mercure réalisent des Pr inférieurs à 0,1 tandis que les Pr des huiles peuvent atteindre plusieurs milliers. Le gaz parfait et l'eau présentent un Pr de valeurs intermédiaires respectives, égales à 0,7 et quelques unités.

2.3.3 Conditions aux limites

Étant donné que l'écoulement est considéré bidimensionnel, il existe alors une fonction $\psi(r, z)$ définie par:

$$u' = \frac{1}{r'} \frac{\partial \psi'}{\partial z'} \quad v' = -\frac{1}{r'} \frac{\partial \psi'}{\partial r'}$$

tels que les lignes $\psi(r, z) = C^{te}$ ne sont autres que les lignes de courant de l'écoulement. La fonction $\psi(r, z)$ est de ce fait dénommée *fonction de courant*. On en déduit:

$$r'w' = -\frac{\partial^2 \psi'}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial \psi'}{\partial r'} - \frac{\partial^2 \psi'}{\partial z'^2} \quad (2.29)$$

ainsi les conditions aux limites du problème s'écrivent:

2.3.3.1 Frontières hydrodynamiques

Les conditions d'imperméabilité imposées tout le long des frontières de la cavité se traduisent par:

$$r' = r'_i \quad \psi' = 0 \quad ; \quad r' = r'_o \quad \psi' = 0 \quad (2.30)$$

2.3.3.2 Frontières thermiques

En vertu de la *loi de Fourier*, les conditions thermiques aux frontières imposées par un flux de chaleur ou une différence de température , s'écrivent:

Flux de chaleur imposé

$$r' = r'_i \quad -k \frac{\partial T'}{\partial r'} = q'_i \quad ; \quad r' = r'_o \quad -k \frac{\partial T'}{\partial r'} = q'_o = q'_i \frac{r'_i}{r'_o} \quad (2.31)$$

Différence de température imposée

$$r' = r'_i \quad T' = T'_i \quad ; \quad r' = r'_o \quad T' = T'_o \quad (2.32)$$

2.3.3.3 Frontières massiques

En ce qui concerne les conditions aux limites solutales, les deux situations de flux de concentration et de différence de concentration sont aussi prises en considération. Ainsi, les conditions massiques aux frontières données par la *loi de Fick* sont:

Flux de concentration imposé

$$r' = r'_i \quad -\rho D \frac{\partial S'}{\partial r'} - a \rho D' S' (1 - S') \frac{\partial T'}{\partial r'} = (1 - a) j'_i \quad (2.33)$$

$$r' = r'_o \quad -\rho D \frac{\partial S'}{\partial r'} - a \rho D' S' (1 - S') \frac{\partial T'}{\partial r'} = (1 - a) j'_o \quad (2.34)$$

avec $j'_o = j'_i \eta$

Différence de concentration imposée

$$r' = r'_i \quad S' = S'_i \quad ; \quad r' = r'_o \quad S' = S'_o \quad (2.35)$$

2.3.3.4 Conditions aux limites adimensionnelles

En substituant les variables caractéristiques adimensionnalisées (2.11)-(2.13) dans les équations (2.30)-(2.34) on obtient les conditions aux frontières adimensionnelles suivantes :

Flux de chaleur et de concentration imposés

$$r = r_i = \frac{\eta}{1 - \eta} \quad \psi = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = -1 \quad ; \quad \frac{\partial S}{\partial r} = (a - 1) + a \frac{\partial T}{\partial r} \quad (2.36)$$

$$r = r_o = \frac{1}{1 - \eta} \quad \psi = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = -\eta \quad ; \quad \frac{\partial S}{\partial r} = (a - 1)\eta + a \frac{\partial T}{\partial r} \quad (2.37)$$

$$z = \pm \frac{A}{2} \quad \psi = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial S}{\partial r} = 0 \quad (2.38)$$

où $A = \frac{H'}{L'}$ et $\eta = \frac{r'_i}{r'_o}$.

Température et concentration imposées

$$r = r_i = \frac{\eta}{1-\eta} \quad \psi = 0 \quad ; \quad T = 1 \quad ; \quad \frac{\partial S}{\partial r} = (a-1) + a \frac{\partial T}{\partial r} \quad (2.39)$$

$$r = r_o = \frac{1}{1-\eta} \quad \psi = 0 \quad ; \quad T = 0 \quad ; \quad \frac{\partial S}{\partial r} = (a-1)\eta + a \frac{\partial T}{\partial r} \eta \quad (2.40)$$

$$z = \pm \frac{A}{2} \quad \psi = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial S}{\partial r} = 0 \quad (2.41)$$

2.4 Transfert de chaleur et de masse

Dans la présente étude on s'intéresse essentiellement au calcul du taux de transfert de chaleur transporté par convection et au celui du transfert de masse au sein du fluide, qui sont exprimés à travers les nombres de Nusselt et de Sherwood. Les valeurs locales de ces deux nombres adimensionnels peuvent être évaluées par:

$$Nu = \frac{q'_i}{k_f \frac{\Delta T'}{L'}} = \frac{1}{T(r_i, 0) - T(r_o, 0)} \quad (2.42)$$

$$Sh = \frac{j'_i}{D \frac{\Delta S'}{L'}} = \frac{1}{S(r_i, 0) - S(r_o, 0)} \quad (2.43)$$

dans le cas où les parois actives sont exposées à des flux constants de chaleur q'_i et de masse j'_i .

D'autre part, lorsque les parois verticales sont maintenues à des températures et concentrations constantes, les nombres de Nusselt et de Sherwood ont pour expressions respectives:

$$Nu = \frac{k_f \frac{\partial T'}{\partial r'}}{\frac{\Delta T'}{L'}} = \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_i \text{ ou } r=r_o} \quad (2.44)$$

$$Sh = \frac{k_f \frac{\partial S'}{\partial r'}}{\frac{\Delta S'}{L'}} = \frac{\partial S}{\partial r} \Big|_{r=r_i \text{ ou } r=r_o} \quad (2.45)$$

En milieu poreux, les propriétés k_f et D sont remplacées par k_p et D_p respectivement.

Notant qu'en régime de conduction pure et pour le cas de flux imposés, les nombres de Nusselt et de Sherwood s'approchent de la valeur asymptotique, donné par:

$$Nu_{cond} = Sh_{cond} = \frac{-1}{r_i \ln \eta} \quad (2.46)$$

par ailleurs, quand les parois actives sont soumises à des températures et concentrations constantes la valeur asymptotique est donnée par :

$$Nu_{cond} = Sh_{cond} = \frac{\eta - 1}{r_i \ln \eta} \quad (2.47)$$

CHAPITRE 3

MÉTHODE NUMÉRIQUE

3.1 Introduction

Au cours des dernières années on assiste à une augmentation fulgurante de la performance des ordinateurs, qui permet d'utiliser des techniques numériques de plus en plus efficaces pour la résolution de systèmes d'équations différentielles au dérivées partielles. Dans ce chapitre nous présentons les deux techniques utilisées pour simuler la convection en milieux fluide et poreux soit les méthodes de différences finies et celle des volumes finis. Par ailleurs et pour le cas du problème d'instabilité nous avons adopté la méthode des éléments finis, cette technique sera détaillée dans le dernier chapitre du présent rapport.

En premier lieu, nous détaillons dans ce qui suit la méthode utilisée pour résoudre la convection naturelle en milieu poreux, soit la méthode des différences finies. En deuxième lieu, nous présentons la méthode des volumes finis que nous avons utilisée pour le cas de la convection naturelle en milieu fluide. Nous développons avec ces techniques une forme discrétisée des équations de base (2.14)-(2.16) et (2.24)-(2.27) et nous décrivons par la suite toutes les étapes pour aboutir à une solution numérique des équations discrétisées, en milieu fluide et poreux. Nous terminons le chapitre par une validation du code numérique développé, en comparant nos résultats à ceux de la littérature.

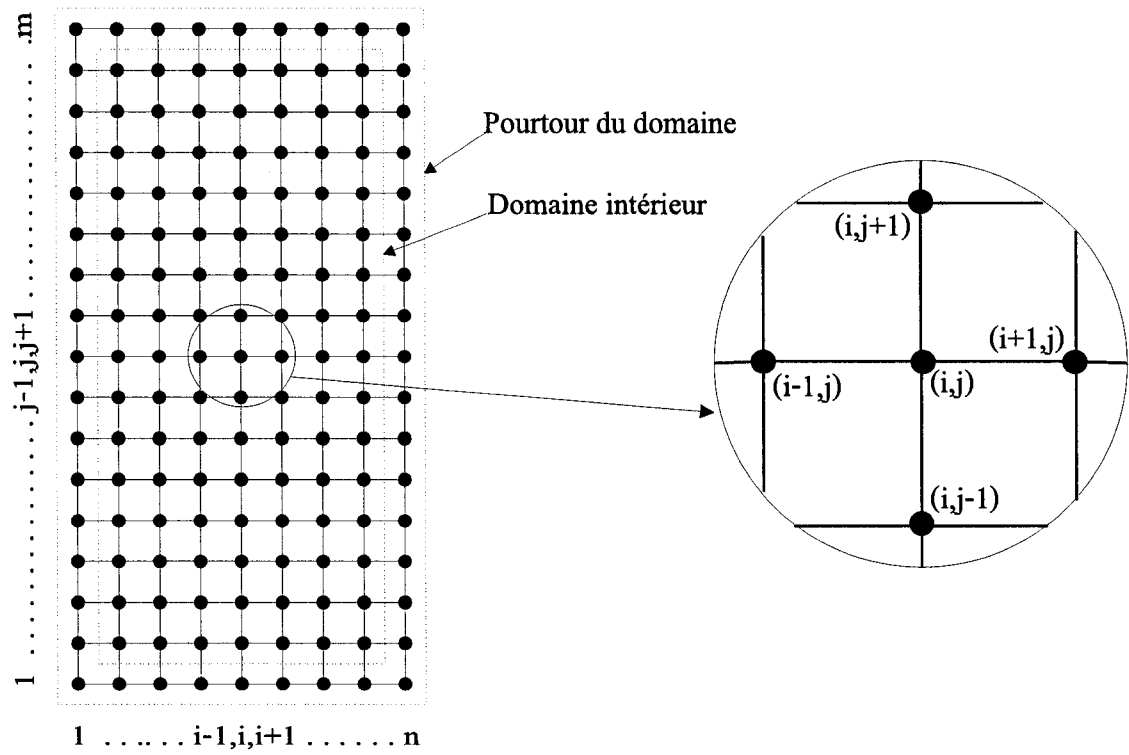


Figure 3.1 Maillage du domaine de calcul en (i, j)

3.2 Solution numérique en milieu poreux par la méthode des différences finies

Les équations de l'énergie (2.15) et de la concentration (2.16) sont discrétisées avec un schéma centré de deuxième ordre et en utilisant la forme conservatrice pour les termes convectifs. Pour chaque pas de temps la méthode *A.D.I* donne lieu à un système matriciel tridiagonal à résoudre, l'un résultant de la discrétisation implicite en r et l'autre de la discrétisation implicite en z . La méthode *A.D.I* divise le pas de temps en deux parties égales, dans le premier demi-pas de temps, le système est résolu implicitement en r , mais explicitement en z . Dans le deuxième demi-pas de temps, la procédure est inversée. Notons que cette méthode est inconditionnellement stable. Pour chaque étape de temps, la solution est obtenue en balayant le domaine de calcul dans la direction des r puis dans celle des z . Quand à l'équation de la fonction de courant, qui est une équation aux dérivées partielles d'ordre deux ne contenant pas de terme transitoire, elle sera résolue par la méthode de relaxation successive *S.O.R* par bloc, proposé par Frankel (1950), qui donne directement la valeur de ψ à l'instant $(n+1)\Delta t$, au bloc de nœuds considéré, moyennant un nombre suffisant d'itérations pour que le critère de convergence souhaité soit satisfait.

3.2.1 Discrétisation de l'équation d'énergie

L'équation de l'énergie étant parabolique par rapport au temps et elliptique par rapport aux coordonnées spatiales, nous avons choisi la méthode *A.D.I* pour l'intégrer. Cette méthode donne lieu à des systèmes matriciels tridiagonaux dans les directions r et z . Le système dans la direction de r est obtenu en faisant une discrétisation implicite par rapport à r et explicite par rapport z , tandis que le

système dans la direction de z est obtenu en faisant une discrétisation implicite par rapport à z et explicite selon r . Compte tenu de l'équation de la conservation de masse (2.3), l'équation d'énergie (2.15) se réécrit de la façon suivante:

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial r} + \frac{\partial(vT)}{\partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (3.1)$$

Schéma implicite en r et explicite en z

C'est un schéma aux différences centrées, au temps $(n + 1/2)$ pour les dérivées en r et au temps (n) pour les dérivées en z , la discrétisation des dérivées partielles est donnée par:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right|_{i,j} = \frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta r^2} \quad \left. \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right|_{i,j} = \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{\Delta z^2} \quad (3.2)$$

$$\left. \frac{\partial(uT)}{\partial r} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j}^n T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-1,j}^n T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta r} \quad \left. \frac{\partial(vT)}{\partial z} \right|_{i,j} = \frac{v_{i,j+1}^n T_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n T_{i,j-1}^n}{2\Delta z} \quad (3.3)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{i,j} = \frac{T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^n}{\frac{\Delta t}{2}} \quad \left. \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{i,j} = \frac{1}{r} \frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta r} \quad (3.4)$$

En substituant les équations (3.2), (3.3) et (3.4) dans l'équation (3.1), on obtient un système de la forme :

$$A_i T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + B_i T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_i T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = D_i \quad (3.5)$$

avec :

$$A_i = -\frac{u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta r} - \frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{2r\Delta r} \quad B_i = \frac{2\sigma}{\Delta t} + \frac{2}{(\Delta r)^2} \quad C_i = \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta r} - \frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{2r\Delta r}$$

$$D_i = \left[\frac{1}{(\Delta z)^2} + \frac{v_{i,j-1}^n}{2\Delta z} \right] T_{i,j-1}^n + \left[\frac{2\sigma}{(\Delta t)} - \frac{2}{(\Delta z)^2} \right] T_{i,j}^n + \left[\frac{1}{(\Delta z)^2} - \frac{v_{i,j+1}^n}{2(\Delta z)} \right] T_{i,j+1}^n$$

Schéma explicite en r et implicite en z

C'est un schéma aux différences centrées, au temps $(n + \frac{1}{2})$ pour les dérivées en r et au temps $(n + 1)$ pour les dérivées en z . La discrétisation des dérivées partielles est donnée par:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right|_{i,j} = \frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta r^2} \quad \left. \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right|_{i,j} = \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta z^2} \quad (3.6)$$

$$\left. \frac{\partial(uT)}{\partial r} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta r} \quad \left. \frac{\partial(vT)}{\partial z} \right|_{i,j} = \frac{v_{i,j+1}^n T_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^n T_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta z} \quad (3.7)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{i,j} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} \quad \left. \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{i,j} = \frac{1}{r} \frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta r} \quad (3.8)$$

En substituant les équations (3.6), (3.7) et (3.8) dans l'équation (3.1), on obtient un système de la forme :

$$A'_i T_{i,j-1}^{n+1} + B'_i T_{i,j}^{n+1} + A'_i T_{i,j+1}^{n+1} = D'_i \quad (3.9)$$

avec :

$$A'_i = -\frac{v_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta z} - \frac{1}{(\Delta z)^2} \quad B'_i = \frac{2\sigma}{\Delta t} + \frac{2}{(\Delta z)^2} \quad C'_i = \frac{v_{i,j+1}^{n+1}}{2\Delta z} - \frac{1}{(\Delta z)^2}$$

$$D'_i = \left[\frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{u_{i-1,j}^n}{2\Delta r} - \frac{1}{2r\Delta r} \right] T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left[\frac{2\sigma}{\Delta t} - \frac{2}{(\Delta r)^2} \right] T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta r} + \frac{1}{2r\Delta r} \right] T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}$$

3.2.2 Discrétisation de l'équation de concentration

De même pour l'équation de la concentration (2.16), nous exposons dans ce qui suit sa discrétisation en suivant exactement les mêmes démarches que le paragraphe précédent.

Schéma implicite en r et explicite en z

Nous obtenons un système de la forme suivante:

$$U_i S_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + X_i S_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + Y_i S_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = Z_i \quad (3.10)$$

avec:

$$\begin{aligned} U_i &= -\frac{u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta r} - \frac{1}{Le} \left(\frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{2r\Delta r} \right) & X_i &= \frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{Le(\Delta r)^2} \\ Y_i &= -\frac{1}{Le} \left(\frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{\varepsilon}{2r\Delta r} \right) + \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta r} \\ Z_i &= \left[\frac{1}{(\Delta z)^2} + \frac{v_{i,j-1}^n}{2\Delta z} \right] S_{i,j-1}^n + \left[\frac{2\varepsilon}{\Delta t} - \frac{2}{Le(\Delta z)^2} \right] S_{i,j}^n + \left[\frac{1}{Le(\Delta z)^2} - \frac{v_{i,j+1}^n}{2(\Delta z)} \right] S_{i,j+1}^n \\ &\quad - \frac{a}{Le} \left[\left(\frac{1}{\Delta r^2} - \frac{1}{2r\Delta r} \right) T_{i-1,j}^n + \left(\frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{2r\Delta r} \right) T_{i+1,j}^n + \frac{T_{i,j+1}^n}{\Delta z} + \frac{T_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2} \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(\frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right) T_{i,j}^n \right] \end{aligned}$$

Schéma implicite en z et explicite en r

$$U'_i S_{i,j-1}^{n+1} + X'_i S_{i,j}^{n+1} + Y'_i S_{i,j+1}^{n+1} = Z'_i \quad (3.11)$$

avec:

$$\begin{aligned} U'_i &= -\frac{v_{i,j-1}^{n+1}}{2(\Delta z)} - \frac{1}{Le(\Delta z)^2} & X'_i &= \frac{2\varepsilon}{\Delta t} + \frac{2}{Le(\Delta z)^2} & Y'_i &= -\frac{1}{Le} \frac{1}{(\Delta z)^2} + \frac{v_{i,j+1}^{n+1}}{2\Delta z} \\ Z'_i &= \left[\frac{1}{Le(\Delta r)^2} + \frac{u_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2(\Delta r)} - \frac{1}{2r\Delta r} \right] S_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left[\frac{2\varepsilon}{\Delta t} - \frac{2}{Le(\Delta r)^2} \right] S_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ &+ \left[\frac{-1}{Le(\Delta r)^2} + \frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2(\Delta r)} + \frac{1}{2r\Delta r} \right] S_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{a}{Le} \left[\left(\frac{1}{\Delta r^2} - \frac{1}{2r\Delta r} \right) T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \right. \\ &\left. - \left(\frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{2r\Delta r} \right) T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{T_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta z)^2} - \frac{T_{i,j-1}^{1+\frac{1}{2}}}{(\Delta z)^2} + 2 \left(\frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right) T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

La solution des équations (3.5), (3.9), (3.10) et (3.11) se ramène à l'inversion des matrices tridiagonales (selon r et z). Les champs de température et de concentration ainsi obtenus sur l'ensemble des noeuds du domaine seront utilisés pour résoudre l'équation de mouvement.

3.2.3 Discretisation de l'équation de mouvement

Connaissant les champs de température et de concentration à l'instant $(n+1)\Delta t$, l'étape suivante consiste à déterminer le champ de fonction de courant à partir de l'équation (2.25). La méthode *SOR* par point peut être utilisée au lieu de la méthode *SOR* par bloc, car l'exécution prend moins de temps. La méthode *SOR* par point est une méthode explicite qui donne directement la valeur de ψ à l'instant

$(n+1)\Delta t$, au noeud considéré, moyennant un nombre suffisant d'itérations pour que le critère de convergence souhaité soit satisfait. Les dérivées partielles du premier et du deuxième ordre sont approximées selon le schéma centré classique. Ainsi au noeud (i, j) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \psi_{i,j}^{(n+1),(k+1)} = & (1-w)\psi_{i,j}^{(n+1),(k)} + a_5 w \left\{ a_1 \psi_{i,j+1}^{(n+1),(k)} + a_2 \psi_{i,j-1}^{(n+1),(k)} \right. \\ & \left. + a_3 \left(\psi_{i+1,j}^{(n+1),(k)} + \psi_{i-1,j}^{(n+1),(k)} \right) + a_4 \left[T_{i+1,j}^{(n+1)} - T_{i-1,j}^{(n+1)} + N \left(S_{i+1,j}^{(n+1)} - S_{i-1,j}^{(n+1)} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

avec:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\Delta r^2} - \frac{1}{2r\Delta r} & a_2 &= \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{2r\Delta r} \\ a_3 &= \frac{1}{(\Delta z)^2} & a_4 &= \frac{rR_T}{2\Delta r} & a_5 &= \frac{(\Delta r\Delta z)^2}{2(\Delta r)^2 + (\Delta z)^2} \end{aligned}$$

où w est le coefficient de sur-relaxation, compris entre 1 et 2, et introduit pour accélérer la convergence et donc de diminuer le nombre d'itérations. Sa valeur optimale, w_0 dépend de la forme du domaine, du maillage et du type des conditions aux limites. Pour un domaine rectangulaire avec un maillage uniforme, w_0 est donnée par :

$$w_0 = 2 \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \zeta}}{\zeta} \right) \quad (3.13)$$

avec

$$\zeta = \left[\frac{\cos\left(\frac{\Pi}{I_{max}-1}\right) + \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2} \cos\left(\frac{\Pi}{J_{max}-1}\right)}{1 + \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2}} \right]^2 \quad (3.14)$$

où I_{max} et J_{max} désignent les nombres de noeuds suivant les directions horizontales et verticales respectivement. Le champ de vitesse peut être déduit facilement par:

$$u_{i,j} = \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1}}{2r\Delta z} \quad (3.15)$$

et

$$v_{i,j} = -\frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1}}{2r\Delta r} \quad (3.16)$$

3.3 Solution numérique en milieu fluide par la méthode des volumes finis

L'une des méthodes utilisées dans cette investigation est basée sur la technique des volumes de contrôle développée par Patankar and Spalding (1972). Cette méthode qui consiste à transformer un problème exact et continu en un problème approché et discret a été largement utilisée, dans le passé, pour résoudre les problèmes de convection naturelle confinée dans une géométrie simple. Sa puissance et sa grande simplicité de mise en oeuvre ont fait qu'elle est à l'origine de la majorité des codes de calcul commerciaux (Fluent, Phoenix...). La méthode des volumes de contrôle Patankar (1980) consiste, tout d'abord, à découper le domaine physique par un maillage (discrétisation) en un nombre fini de petits volumes limités par des nœuds, identifié chacun par un couple d'indice (i, j) (maille), qui ne se superposent pas et remplissent tout le domaine étudié sans laisser d'interstices. Le choix du maillage doit satisfaire l'hypothèse que *l'information aux nœuds doit être suffisante pour décrire la solution dans le domaine entier*. Ainsi notre domaine de calcul est discrétisé avec un maillage variable suivant les deux directions de l'espace. La deuxième étape est la discrétisation du problème exact sur ce maillage, qui conduit à un problème beaucoup moins difficile, dit problème approché du problème exact. Le principe de la méthode des volumes finis consiste à intégrer tous les termes de l'équation à résoudre dans chacun des éléments de volume dit volume de contrôle. Pour chaque pas de temps la méthode donne lieu à un système matriciel pentadiagonal, que nous résolvons par l'algorithme de Thomas PDMA (Penta-Diagonal Matrix Algorithm). Bien entendu, la solution finale est obtenue moyennant un

nombre suffisant d'itérations pour que le critère de convergence souhaité soit satisfait.

3.3.1 Discrétisation des équations par la méthode des volumes de contrôle

Les formulations conservatrices des équations aux dérivées partielles offrent l'avantage de pouvoir être reformulées de façon intégrale à l'aide du théorème de la divergence¹. Le principe de conservation est la loi fondamentale de la méthode des volumes finis. Il stipule que la variation d'une propriété dépend du flux net traversant la frontière Σ qui enveloppe le volume Π . Cette propriété dérive directement de l'interprétation physique du théorème de la divergence (3.17).

La méthode des volumes de contrôle est, donc, une technique de discrétisation pour la résolution des équations s'écrivant sous la forme conservatrice . Pour des fins explicatives de cette méthode, nous allons l'appliquer tout d'abord à l'équation généralisée du transport suivante:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{V} \Omega = \nabla \cdot \nabla \Omega + SC \quad (3.18)$$

¹L'intégrale de volume de la divergence d'un champ vectoriel F étendu sur un volume Π est égale à l'intégrale de contour de la projection de ce champ sur la normale traversant la frontière Σ qui limite Π :

$$\int_{\Pi} \text{div} F \, d\Pi = \oint_{\Sigma} F \cdot n \, d\Sigma \quad (3.17)$$

Ω	: La fonction à déterminer
$\frac{\partial \Omega}{\partial t}$	: Le terme transitoire
$\nabla \cdot \vec{V} \Omega$	: Le terme convectif
$\nabla \cdot \nabla \Omega$	: Le terme diffusif
SC	: Le terme source

En intégrant cette équation dans un volume de contrôle, tel qu'illustré sur la figure (3.1), nous obtenons :

Pour le terme transitoire :

$$\int_{V_c} \frac{\partial \Omega}{\partial t} dV_c = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \Omega 2 \pi r dr dz = \frac{\partial}{\partial t} \bar{\Omega} 2 \pi r dr dz \quad (3.19)$$

pour le terme convectif :

$$\begin{aligned} \int_{V_c} \nabla \cdot \vec{V} \Omega dV_c &= \int_S \vec{V} \Omega \cdot \vec{ds} \\ &= u_e \Omega_e 2 \pi r_e \Delta z - u_w \Omega_w 2 \pi r_w \Delta z \\ &\quad + u_n \Omega_n 2 \pi r \Delta r - u_s \Omega_s 2 \pi r \Delta r \end{aligned} \quad (3.20)$$

quant au terme diffusif, il s'intègre de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \int_{V_c} \nabla \cdot \nabla \Omega dV_c &= \int_S \nabla \Omega \cdot \vec{ds} \\ &= \left. \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right|_e 2 \pi r_e \Delta z - \left. \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right|_w 2 \pi r_w \Delta z \\ &\quad + \left. \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right|_n 2 \pi r \Delta r - \left. \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right|_s 2 \pi r \Delta r \end{aligned} \quad (3.21)$$

enfin pour le terme source on a :

$$\int_{V_c} SC \, dV_c = \int_{V_c} \overline{SC} \, 2 \pi \, dr \, dz = \overline{SC} \, 2 \pi \, \Delta r \, \Delta z \quad (3.22)$$

où $\overline{S}$ et $\overline{\Omega}$ sont les valeurs moyennes de S et Ω dans le volume de contrôle. Notons que toutes les interpolations utilisées sont linéaires, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \Omega_e &= \frac{\Omega + \Omega_E}{2} \quad , \quad \Omega_n = \frac{\Omega + \Omega_N}{2} \quad .. \\ \frac{\partial \Omega}{\partial r} \Big|_e &= \frac{\Omega_E - \Omega}{\Delta r} \quad , \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z} \Big|_n = \frac{\Omega_N - \Omega}{\Delta z} \quad .. \\ \frac{\partial \Omega}{\partial t} &= \frac{\Omega - \Omega^*}{\Delta t} \text{ avec } \Omega^* = \Omega(t - \Delta t) \end{aligned}$$

En tenant compte des résultats (3.19)-(3.22), l'équation (3.18) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$a_P \Omega + a_E \Omega_E + a_W \Omega_W + a_N \Omega_N + a_S \Omega_S = b \quad (3.23)$$

avec

$$\begin{aligned} a_P &= \frac{-2}{\Delta r^2} - \frac{2}{\Delta z^2} - \frac{1}{\Delta t} \quad , \quad a_E = \frac{r_e}{r \, \Delta r^2} - \frac{u_e \, r_e}{2 \, r \, \Delta r} \\ a_W &= \frac{r_w}{r \, \Delta r^2} - \frac{u_w \, r_w}{2 \, r \, \Delta r} \quad , \quad a_N = \frac{1}{\Delta z^2} - \frac{v_n}{2 \, \Delta z} \\ a_S &= \frac{1}{\Delta z^2} - \frac{v_s}{2 \, \Delta z} \quad , \quad b = -\frac{\Omega^*}{\Delta t} - S \end{aligned}$$

3.3.2 Équations discrétisées en milieu fluide

Écrivons maintenant les équations (2.24)-(2.27) sous leurs formes conservatrices:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{V}w = Pr \nabla \cdot \nabla w - Pr \frac{w}{r^2} - Pr R_T \left(\frac{\partial T}{\partial r} + N \frac{\partial S}{\partial r} \right) \quad (3.24)$$

$$w = -\frac{\nabla^2 \psi}{r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{V}T = \nabla \cdot \nabla T \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{V}S = \frac{1}{Le} \nabla \cdot \nabla (S - a T) \quad (3.27)$$

En appliquant la méthode des volumes de contrôle présentée dans les sections précédentes, nous déterminons les coefficients a_E , a_W , a_N , a_S , a_P et b pour les équations (3.24)-(3.27).

Pour l'équation du mouvement nous obtenons:

$$\begin{aligned} a_P &= \frac{-2Pr}{\Delta r^2} - \frac{2Pr}{\Delta z^2} - \frac{1}{\Delta t} - \frac{Pr}{r^2} , & a_E &= Pr \frac{r_e}{r \Delta r^2} - \frac{u_e r_e}{2r \Delta r} \\ a_W &= Pr \frac{r_w}{r \Delta r^2} - \frac{u_w r_w}{2r \Delta r} , & a_N &= Pr \frac{1}{\Delta z^2} - \frac{v_n}{2 \Delta z} \\ b &= -\frac{w^*}{\Delta t} - Ra Pr \left(\frac{T_E - T_W}{\Delta r} + N \frac{S_E - S_W}{\Delta r} \right) , & a_S &= Pr \frac{1}{\Delta z^2} - \frac{v_s}{2 \Delta z} \end{aligned}$$

Pour l'équation de la fonction de courant on a :

$$a_P = \frac{-2}{\Delta r^2} - \frac{2}{\Delta z^2} \quad , \quad a_E = \frac{r_e}{r \Delta r^2} + \frac{1}{r \Delta r}$$

$$a_W = \frac{r_w}{r \Delta r^2} - \frac{1}{r \Delta r} \quad , \quad a_N = \frac{1}{\Delta z^2}$$

$$a_S = \frac{1}{\Delta z^2} \quad , \quad b = -w r$$

Pour l'équation de l'énergie les coefficients sont donnés par :

$$a_P = \frac{-2}{\Delta r^2} - \frac{2}{\Delta z^2} - \frac{1}{\Delta t} \quad , \quad a_E = \frac{r_e}{r \Delta r^2} - \frac{u_e r_e}{2 r \Delta r}$$

$$a_W = \frac{r_w}{r \Delta r^2} - \frac{u_w r_w}{2 r \Delta r} \quad , \quad a_N = \frac{1}{\Delta z^2} - \frac{v_n}{2 \Delta z}$$

$$a_S = \frac{1}{\Delta z^2} - \frac{v_s}{2 \Delta z} \quad , \quad b = -\frac{T^*}{\Delta t}$$

enfin pour l'équation de conservation de la concentration nous trouvons:

$$a_P = \frac{-2}{Le \Delta r^2} - \frac{2}{Le \Delta z^2} - \frac{1}{\Delta t} \quad , \quad a_E = \frac{r_e}{Le r \Delta r^2} - \frac{u_e r_e}{2 r \Delta r}$$

$$a_W = \frac{r_w}{Le r \Delta r^2} - \frac{u_w r_w}{2 r \Delta r} \quad , \quad a_N = \frac{1}{Le \Delta z^2} - \frac{v_n}{2 \Delta z}$$

$$a_S = \frac{1}{Le \Delta z^2} - \frac{v_s}{2 \Delta z} \quad \text{et}$$

$$b = -\frac{S^*}{\Delta t} + a \left(\frac{T_E - T_P}{r \Delta r^2} r_e - \frac{T_P - T_W}{r \Delta r^2} r_w + \frac{T_N - T_P}{\Delta z^2} - \frac{T_P - T_S}{\Delta z^2} \right)$$

3.4 Algorithme de calcul

les principales étapes de notre algorithme de calcul sont :

1. Génération du maillage
2. Introduction des conditions initiales sur la température, sur la concentration, sur la fonction de courant et sur la fonction de vortacité (prendre, par exemple, les champs de l'étape précédente)
3. Résoudre l'équation de la vortacité
4. Résoudre l'équation de la fonction de courant
5. Calculer les vitesses $u_{i,j}$ et $v_{i,j}$ à partir de leurs expressions.
6. Résoudre les équations de l'énergie et de la concentration .
7. Retourner à l'étape 4 et répéter les opérations 3 – 6 jusqu'à la convergence.
8. Passer à l'étape de temps suivante $t + \Delta t$ et retourner à l'étape 4, Répéter les calculs jusqu'à l'obtention d'une solution permanente ou transitoire établie.

3.5 Validation du code numérique

L'exactitude du modèle numérique a été vérifiée en comparant les résultats du présent travail avec celles du problème de cavité rectangulaire reportés dans les publications de Mamou et al. (1995a,b). Il est à signaler que le problème étudié par ce dernier, n'est qu'un cas limite du notre quand $\eta \rightarrow 1$. On verra dans les prochains chapitres que l'accord entre les deux résultats est excellent.

Il est évident que la précision des résultats numériques est fonction de la taille du maillage. Le choix de ce dernier dépend à son tour des valeurs des paramètres de contrôle. Dans la présente étude, les résultats numériques sont obtenus pour un maillage de $(n \times m = 80 \times 200)$, Figure (3.1), et pour un rapport de forme $A = 8$,

sauf pour quelques cas particuliers où l'observation des phénomènes physique exige un maillage plus raffiné et un rapport de forme plus faible.

CHAPITRE 4

SOLUTION ANALYTIQUE

Les équations (2.14 - 2.16) en milieu poreux et (2.24 - 2.27) en milieu fluide qui régissent l'écoulement convectif, sont des équations aux dérivées partielles non linéaires et fortement couplées. Une solution analytique pour ces équations est en général impossible, sauf pour certains cas et hypothèses pour lesquels les équations se simplifient considérablement. Quant elles existent, les solutions analytiques permettent une compréhension rapide des phénomènes physiques impliqués dans la convection naturelle doublement diffusive et celle induite par effet Soret.

4.1 Concept de l'écoulement parallèle

Le concept de l'écoulement parallèle a été utilisé avec succès, dans le passé, par plusieurs auteurs pour l'étude de la convection naturelle dans plusieurs configurations de milieux confinés. Nous trouvons parmi ces auteurs Alavyoon (1993), Vasseur et al. (1995) et Mamou et al. (1995a). Ce concept suppose, pour les cavités à grand rapport de forme, que l'écoulement engendré devient parallèle relativement aux longues parois. Ceci permet bien sûr de négliger la composante de vitesse perpendiculaire à ces parois. Ainsi, pour le cas d'écoulement permanent, il est possible de déterminer une solution analytique vers laquelle la solution transitoire s'approche asymptotiquement. Une telle solution est valide pour les cavités qui présentent un rapport de forme relativement élevé et dont les effets de bouts, dus à la présence des frontières horizontales, sont négligeables.

4.2 Démarche analytique

La solution numérique du problème indique que les phénomènes de transferts de quantité de mouvement, d'énergie et de masse suivent une lente évolution vers un état permanent caractérisé par une stratification linéaire et stable selon la direction verticale. De plus, pour un rapport de forme A suffisamment élevé, et en dehors des régions de bouts, il est prouvé numériquement que le vecteur de vitesse est vertical à l'axe (oz) et complètement indépendant de la composante verticale z . En se basant sur ces observations la fonction de courant devient seulement fonction de la coordonnée r :

$$\psi(r, z) \simeq \psi(r) \quad (4.1)$$

L'injection de cette approximation (4.1) dans les équations de la quantité de mouvement (2.14) et (2.24) montre que les profils de température et de concentration peuvent s'écrire sous la forme $T(r, z) = \theta_T(r) + f_T(z)$ et $T(r, z) = \theta_S(r) + f_S(z)$, respectivement. D'autre part et dans le cas des flux de chaleur et de concentration imposés, les bilans d'énergie et de matière dans le volume de contrôle (Figure 2.1) s'écrivent sous les formes suivantes, Trevisan and Bejan (1986):

$$\int_{r_i}^{r_o} \frac{\partial T}{\partial z} dr - \int_{r_i}^{r_o} vT dr = 0 \quad (4.2)$$

et

$$\int_{r_i}^{r_o} \frac{\partial S}{\partial z} dr + a \int_{r_i}^{r_o} \frac{\partial T}{\partial z} dr - Le \int_{r_i}^{r_o} vS dr = 0 \quad (4.3)$$

Ces équations sont bien définies pour n'importe quelle section z et nous pouvons conclure que $\partial T/\partial z$ et $\partial S/\partial z$ sont des constantes. Par conséquent $f_T(z)$ et $f_S(z)$ sont des fonctions linéaires de z . Ainsi nous posons: $f_T(z) = C_T z$ et $f_S(z) = C_S z$ où C_T et C_S sont les gradients de température et de concentration dans la direction

z . On a alors:

$$T(r, z) = C_T z + \Theta_T(r) \quad S(r, z) = C_S z + \Theta_S(r) \quad (4.4)$$

Afin de valider le concept de l'écoulement parallèle et de vérifier aussi l'exactitude de cette notion, nous présentons le résultat numérique (figure (4.1)) pour le cas poreux avec $R_T = 100$, $Le = 10$, $N = 1$ et $A = 8$ et 1. L'effet du rapport de forme de la cavité sur la structure de l'écoulement et les profils de température et concentration, est important. Pour des grands rapports de forme ($A = 8$ par exemple), la figure (4.1) montre que l'écoulement est bien parallèle dans la partie centrale de la cavité considérée.

En introduisons les approximations (4.1) et (4.4) dans les équations (2.14-2.16) ou (2.25-2.27), nous obtenons pour les deux systèmes les équations différentielles suivantes :

$$\frac{\partial \Theta_T}{\partial r} = \frac{-1}{r} (C_T \psi + r_i) \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \Theta_S}{\partial r} = \frac{-1}{r} (\alpha \psi + r_i) \quad (4.6)$$

Ces équations permettent maintenant de déterminer les valeurs de C_T et C_S , qui sont données par :

$$C_T = \frac{-r_i X_1}{\frac{r_o^2 - r_i^2}{2} + X_2} \quad (4.7)$$

$$C_S = -\frac{-2Le}{r_o^2 - r_i^2} [\alpha X_2 + r_i X_1] - a C_T \quad (4.8)$$

avec $\alpha = Le C_S + a C_T$ et

$$X_1 = \int_{r_i}^{r_o} \frac{\psi}{r} dr \quad (4.9)$$

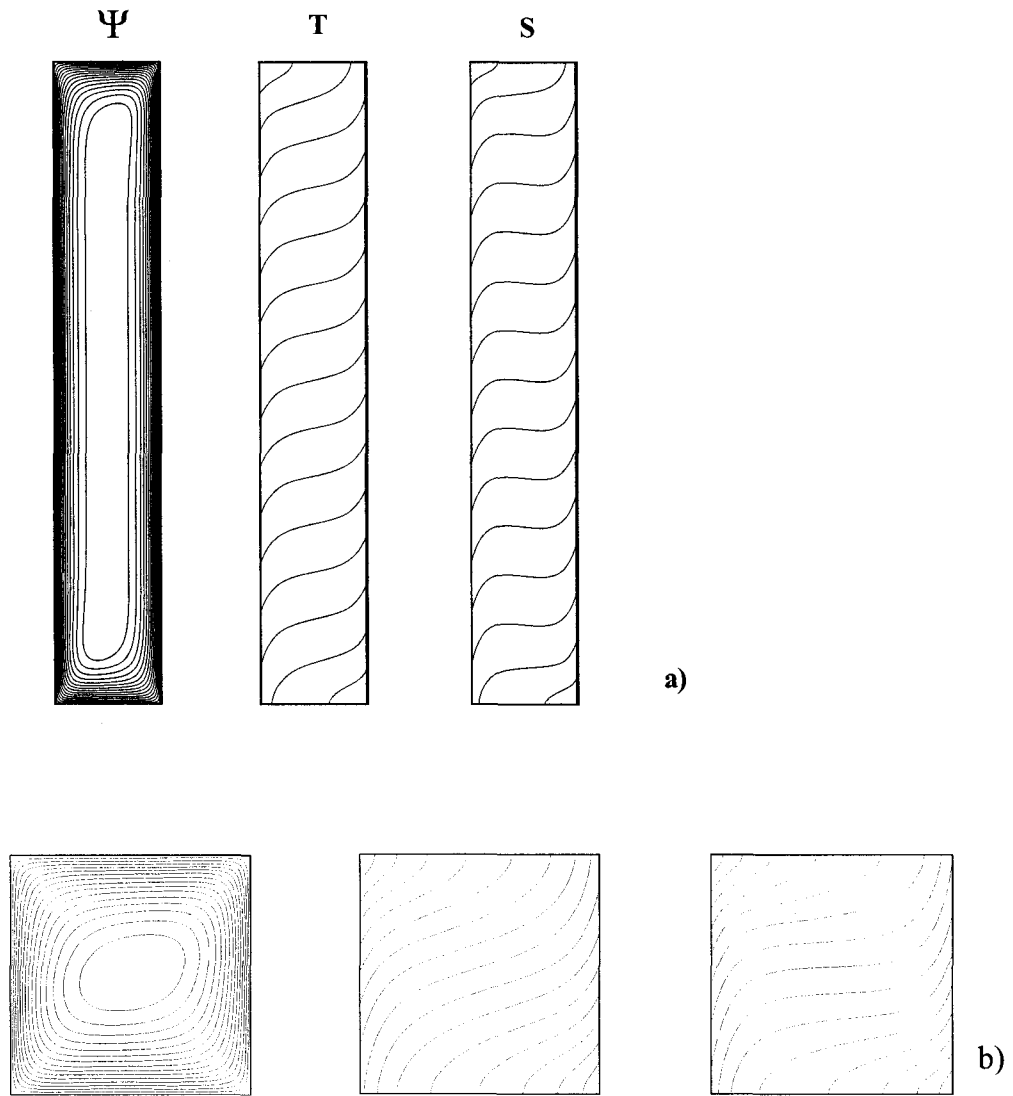


Figure 4.1 Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations (flux imposés) pour $R_T = 100$, $Le = 10$, $N = 1$, $\eta = 0.9$, $a = 0$ et (a) $A = 8$ et (b) 1

$$X_2 = \int_{r_i}^{r_o} \frac{\psi^2}{r} dr \quad (4.10)$$

Il est à préciser que les équations (4.7) et (4.8), ont été obtenues en intégrant les équations de conservation de l'énergie (4.2) et de la masse (4.3) par rapport à r , tout en respectant les conditions aux frontières de la fonction de courant, de la température et de la concentration (2.36)-(2.41).

4.3 Solutions analytiques

4.3.1 Cas poreux

En se basant sur le modèle de Darcy (2.14) et les expressions (4.5) et (4.6), l'équation différentielle à résoudre s'écrit sous la forme suivante:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \Lambda \psi = \Gamma \quad (4.11)$$

La solution de l'équation ci-dessus est une fonction des paramètres Λ et Γ ; leurs expressions sont données par:

$$\Lambda = R_T [C_T + N(LeC_S + aC_T)] \quad \Gamma = -R_T r_i (1 + N) \quad (4.12)$$

4.3.1.1 Solution générale pour $N \neq -1$

Cas $\Lambda > 0$

Pour des valeurs positives de Λ la solution de l'équation (4.11), pour des conditions aux frontières de type Neumann, s'écrit sous cette forme :

$$\psi(r) = -r_i \Psi_0 \frac{1 + f(r)}{1 + f(\xi)} \quad (4.13)$$

$$\theta_T(r) = C_T r_i \Psi_0 \frac{\ln r + g(r)}{1 + f(\xi)} - r_i \ln r \quad (4.14)$$

$$\theta_S(r) = (Le C_S + a C_T) r_i \Psi_0 \frac{\ln r + g(r)}{1 + f(\xi)} - r_i \ln r \quad (4.15)$$

avec

$$\begin{aligned} f(r) &= r [C_1 I_1(\Omega r) + C_2 K_1(\Omega r)] \\ g(r) &= C_1 I_0(\Omega r) + C_2 K_0(\Omega r) \\ \xi &= \frac{1 + \eta}{2(1 - \eta)} \quad \Psi_0 = \frac{\Gamma}{r_i \Omega^2} [1 + f(\xi)] \\ C_1 &= \frac{1}{r_i r_o} \frac{r_o K_1(\Omega r_o) - r_i K_1(\Omega r_i)}{I_1(\Omega r_o) K_1(\Omega r_i) - I_1(\Omega r_i) K_1(\Omega r_o)} \\ C_2 &= \frac{1}{r_i r_o} \frac{r_o I_1(\Omega r_o) - r_i I_1(\Omega r_i)}{I_1(\Omega r_o) K_1(\Omega r_i) - I_1(\Omega r_i) K_1(\Omega r_o)} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Notons que $\Omega^2 = \Lambda$, que I_i et K_i sont, respectivement, les fonctions de Bessel du i ème ordre, de première et deuxième espèce (Watson (1966)) et que $\Psi_C = -\Psi_0$ est la valeur de la fonction de courant au centre de la cavité.

À partir des conditions aux limites sur la fonction de courant ψ (2.36-2.38), nous déterminons les valeurs de C_1 , et C_2 . Ceci nous permet par la suite de trouver les

valeurs de X_1 (4.9) et X_2 (4.10). L'injection de leur valeurs dans les expressions de C_T (4.7) et C_S (4.8) puis dans celles de Θ_T (4.5) et Θ_S (4.8), nous permet de déterminer les expressions de la distribution de température et de concentration (4.4).

$$\begin{aligned} C_T &= \frac{2b}{c} \frac{\Psi_0}{1 + b \Psi_0^2} \\ C_S &= \frac{2b}{c} \frac{Le\Psi_0 + a\Psi_0(1 - Le b \Psi_0^2)/(1 + b \Psi_0^2)}{1 + Le^2 b \Psi_0^2} \end{aligned} \quad (4.17)$$

où

$$b = \frac{r_i^2 X_2}{\xi}; \quad c = \frac{2X_2}{X_1}; \quad X_1 = \int_{r_i}^{r_o} \frac{[1 + f(r)]}{r[1 + f(\xi)]} dr; \quad X_2 = \int_{r_i}^{r_o} \frac{[1 + f(r)]^2}{r[1 + f(\xi)]^2} dr \quad (4.18)$$

Pour le calcul de la valeur de Ω , une équation transcendente a été établie en combinant (4.12) et (4.17)

$$b^2 Le^2 \Psi_0^4 + b(1 + Le^2) \Psi_0^2 + \frac{2bR_T}{c \Omega^2} [1 + N[Le^2 - a(1 + Le)] \Psi_0 + (1 + N)bLe^2 \Psi_0^3] + 1 = 0 \quad (4.19)$$

Cette équation a été résolue numériquement selon la procédure de Newton-Raphson. Ceci permet par la suite d'exprimer les gradients de la température et la concentration C_T et C_S en fonction de R_T , N , Le , η et a .

Les taux de transfert de chaleur et de matière, exprimés en terme des nombres de Nusselt et de Sherwood, sont calculés à partir de (2.42), (2.43), (4.1), (4.4), (4.14) et (4.15):

$$Nu = \frac{r_i \ln \eta (1 + b \Psi_0^2)}{r_i \ln \eta + b (d + r_i \ln \eta) \Psi_0^2} \quad (4.20)$$

$$Sh = \frac{r_i \ln \eta (1 + b Le^2 \Psi_0^2)}{r_i \ln \eta + b (d + r_i \ln \eta) Le^2 \Psi_0^2 + a b c (1 + Le) \Psi_0 / (1 + b \Psi_0^2)} \quad (4.21)$$

avec $d = r_i X_1^2 / X_2$.

Cas $\Lambda < 0$

Quand les valeurs de Λ sont strictement négatives, nous avons considéré que le parametre $\Omega^2 = -\Lambda$. Ainsi la solution de l'équation (4.11) est obtenue en substituant $i\Omega = -\Omega$ dans les équations (4.13)-(4.16). La solution est très similaire à celle déjà obtenue pour le cas $\Lambda > 0$

$$\psi(r) = -r_i \Psi_0 \frac{1 + f(r)}{1 + f(\xi)} \quad (4.22)$$

avec

$$f(r) = r [C_1 I_1(\Omega r) + C_2 K_1(\Omega r)]$$

$$\Psi_0 = \frac{\Gamma}{r_i \Omega^2} [1 + f(\xi)] \quad (4.23)$$

L'équation transcendale (4.13) est maintenant donnée par:

$$b^2 Le^2 \Psi_0^4 + b(1 + Le^2) \Psi_0^2 + \frac{2bR_T}{c \Omega^2} [1 + N[Le^2 - a(1 + Le)]] \Psi_0 + (1 + N)bLe^2 \Psi_0^3 + 1 = 0 \quad (4.24)$$

où J_i et Y_i sont les fonctions de Bessel modifiées du ième ordre, de première et deuxième espèce respectivement. En procédant exactement comme dans le paragraphe précédent, l'injection des valeurs des intégrales dans les expressions de C_T (4.7) et C_S (4.8) puis dans celles de Θ_T (4.5) et Θ_S (4.8), permet de déterminer les expressions de la distribution de température et de concentration (4.4) et par la suite, celles des nombres de Nusselt (2.42) et Sherwood (2.43).

Cas $\Lambda = 0$

Pour ce cas particulier où $\Lambda = 0$ la solution de l'équation (4.11) devient :

$$\psi(r) = C_1 + C_2 r^2 + \Gamma \frac{r^2}{2} \ln(r) \quad (4.25)$$

avec :

$$C_1 = -\frac{\frac{\Gamma r^2}{2} \ln(\frac{r_i}{r_o})}{r_i^2 - r_o^2}$$

$$C_2 = -\frac{\frac{r_i^2 \Gamma r^2}{2} \ln(\frac{r_o}{r_i})}{r_i^2 - r_o^2}$$

En effectuant la même démarche que les deux paragraphes précédents, nous parviendrons à déterminer les expressions de la distribution de température et de concentration (4.4) et par la suite celles des nombres de Nusselt (2.42) et Sherwood (2.43).

4.3.1.2 Solution particulière pour $N = -1$

Pour un rapport de forces volumiques, thermiques et solutales, égal à -1 , une étude analytique de l'équation différentielle (4.11) est aussi possible.

La solution de l'équation (4.11) pour $N = -1$ s'écrit sous cette forme :

$$\Psi(r) = -r_i \Psi_0 \frac{f(r)}{f(\xi)} \quad (4.26)$$

$$\theta_T(r) = C_T r_i \Psi_0 \frac{g(r)}{f(\xi)} - r_i \ln r \quad (4.27)$$

$$\theta_S(r) = (LeC_S + aC_T)r_i\Psi_0\frac{g(r)}{f(\xi)} - r_i\ln r \quad (4.28)$$

avec

$$\begin{aligned} f(r) &= r [J_1(\Omega r)Y_1(\Omega r_i) - J_1(\Omega r_i)Y_1(\Omega r)] \\ g(r) &= J_0(\Omega r)Y_1(\Omega r_i) - J_1(\Omega r_i)Y_0(\Omega r) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Les conditions aux frontières de ψ , permettent d'écrire l'équation de dispersion suivante :

$$F(\Omega) = J_1(\Omega r_i)Y_1(\Omega r_o) - J_1(\Omega r_o)Y_1(\Omega r_i) = 0 \quad (4.30)$$

Cette équation admet deux solutions possibles. La première est une solution correspondante à l'état de conduction pure, elle est donnée par $\psi = 0$ et donc $\Omega = 0$. La deuxième, est une solution convective donnée par $\psi \neq 0$ et Ω égale à :

$$\Omega_k = (2k + 1)\pi, \quad k = 0, 1, 2.. \quad (4.31)$$

où k est un entier positif correspondant aux divers modes de convection. Notons que l'écoulement est unicellulaire seulement pour le cas où $k = 0$. Étant donné que nous n'avons pas pu confirmer numériquement l'existence d'un régime multicellulaire, seul le cas unicellulaire ($k = 0$) sera étudié. Des résultats numériques dans le cas d'une cavité rectangulaire, rapportés par Alavyoon et al. (1994), ont montré que lorsque $N \rightarrow -1$, la valeur de $\Omega \rightarrow \pi$ ce qui est en parfait accord avec nos résultats, (Figure 4.2). Cette figure montre la variation de Ω en fonction de η , tel que prédit par l'équation (4.30).

Introduisons (4.26)-(4.28) dans les expressions (4.2)-(4.3), nous établirons les

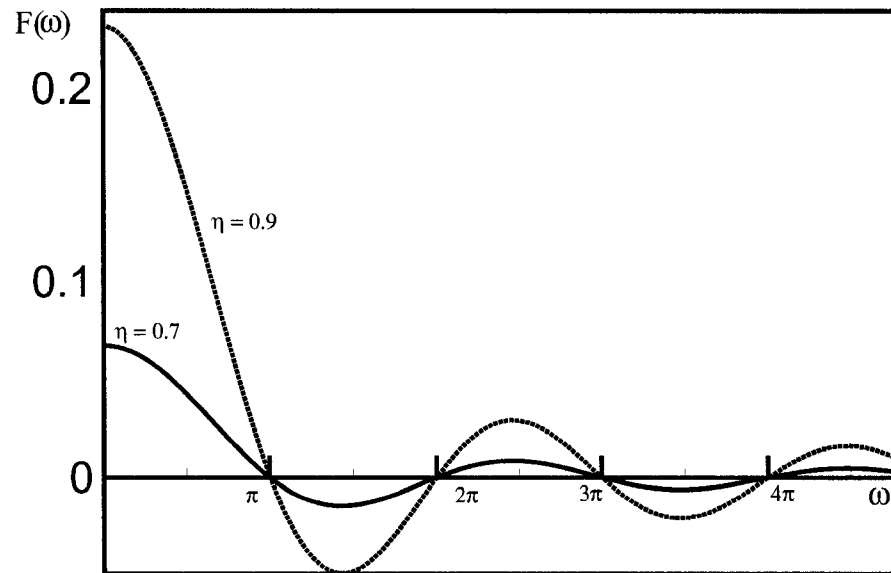


Figure 4.2 Résolution graphique de la fonction de dispersion (4.30)

valeurs de C_T et C_S

$$\begin{aligned} C_T &= \frac{2b}{c} \frac{\Psi_0}{1 + b \Psi_0^2} \\ C_S &= \frac{2b}{c} \frac{Le \Psi_0 + a \Psi_0 (1 - Le^2 b \Psi_0^2) / (1 + b \Psi_0^2)}{1 + Le^2 b \Psi_0^2} \end{aligned} \quad (4.32)$$

où

$$b = \frac{r_i^2 X_2}{\xi} \quad ; \quad c = \frac{2X_2}{X_1} \quad ; \quad X_1 = \int_{r_i}^{r_o} \frac{f(r)}{r f(\xi)} dr \quad ; \quad X_2 = \int_{r_i}^{r_o} \frac{f(r)^2}{r f(\xi)^2} dr \quad (4.33)$$

Il est à noter que les paramètres b et c sont seulement fonctions de η . Pour calculer la valeur de Ψ_0 dans les expressions ci-dessus, nous avons établi une equation transcendale en combinant (4.32) et (4.12)

$$b^2 Le^2 \Psi_0^4 + b(1 + Le^2) \Psi_0^2 - \frac{2 b R_T}{c \omega^2} [Le^2 - 1 + a (1 + Le)] \Psi_0 + 1 = 0 \quad (4.34)$$

qui est très similaire au cas de la cavité rectangulaire avec $b = 0.5$ et $c = \pi/2$.

Ainsi, pour des valeurs de R_T , Le , η et a données la valeur de Ψ_0 peut être déterminée en utilisant, par exemple, la méthode de Newton-Raphson. Le nombre de Rayleigh critique R_{TC}^{sous} , marquant l'enclenchement de la convection, peut être exprimé au terme du nombre de Lewis, Le , rapport des rayons, η et a . en introduisant l'expression de Ψ_0 en fonction de R_T dans (4.34), nous trouvons facilement que:

$$R_{TC}^{sous} = \frac{c \omega^2}{2b [Le^2 - 1 + a (Le + 1)]} [Le^2 b^2 \Psi_{0S}^3 + (1 + Le^2) b \Psi_{0S} + 1/\Psi_{0S}] \quad (4.35)$$

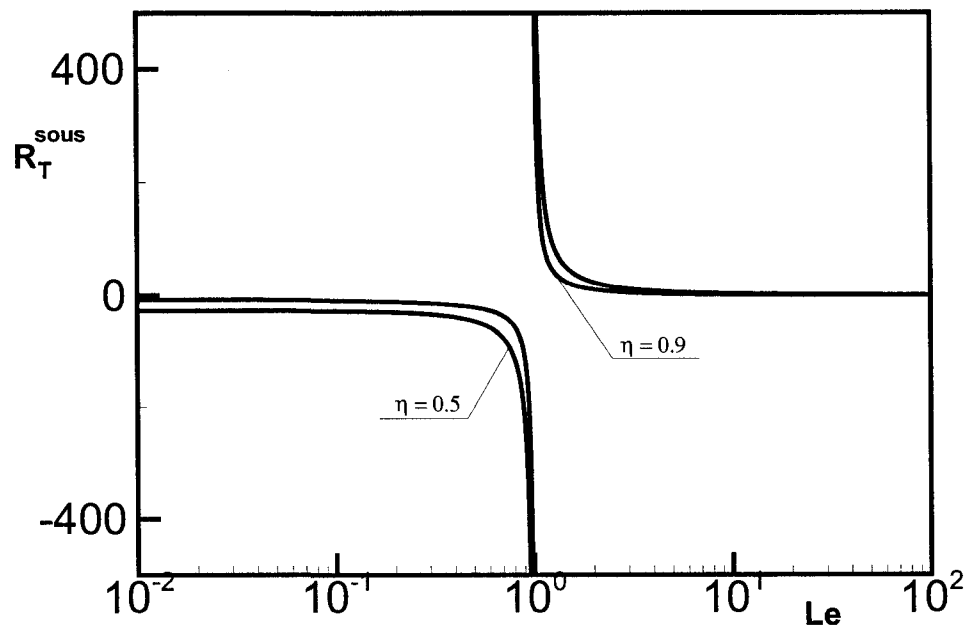


Figure 4.3 Variation du nombre de Rayleigh souscritique R_T^{sous} en fonction du nombre de Lewis Le pour $\eta = 0.5$ et 0.9 et $R_T = 50$

avec Ψ_{0S} la valeur de la fonction de courant critique $R = R_{TC}^{sous}$ qui est définie par:

$$\Psi_{0S} = \frac{1}{Le(6b)^{1/2}} [((1 + Le^2)^2 + 12 Le^2)^{1/2} - (1 + Le^2)]^{1/2} \quad (4.36)$$

Pour de larges et faibles valeurs du nombre de Lewis, l'expression de Rayleigh critique R_{TC}^{sous} peut être réduite considérablement. Ainsi, nous avons trouvé que:

$$R_{TC}^{sous} = \frac{R^{sub}}{1 - (Le + a)} \quad (4.37)$$

où R^{sous} est une constante ayant les valeurs suivantes:

$$R^{sous} = \frac{c \omega^2}{b^{1/2}} \quad \text{for } Le \ll 1 \quad (4.38)$$

$$R^{sous} = -\frac{c \omega^2}{b^{1/2}} \quad \text{for } Le \gg 1 \quad (4.39)$$

À partir de (2.42), (2.43) et (4.26)-(4.28) nous avons exprimé les expressions des nombres de Nusselt et Sherwood par:

$$Nu = r_i \ln \eta \frac{1 + b \Psi_0^2}{r_i \ln \eta + b (d + r_i \ln \eta) \Psi_0^2} \quad (4.40)$$

$$Sh = r_i \ln \eta \frac{1 + b Le^2 \Psi_0^2}{r_i \ln \eta + b (d + r_i \ln \eta) Le^2 \Psi_0^2 + a b c (1 + Le) \Psi_0 / (1 + b \Psi_0^2)} \quad (4.41)$$

avec $d = 2b(1 + \eta)/c^2\eta$. Notons qu'il est possible de démontrer que la valeur de d est donnée par $d \simeq b/[8(\eta + 1)/\eta\pi^2]$.

Pour le cas limite de cavité rectangulaire ($\eta \rightarrow 1$) nous avons trouvé que $b \rightarrow 0.5$,

$c = \pi/2$ et $d \rightarrow 8/\omega^2$ ce qui réduit d'avantage les expressions suivantes:

$$R^{sous} = \frac{\omega^3}{\sqrt{2}} \quad \text{pour } Le \ll 1 \quad (4.42)$$

et

$$R^{sous} = -\frac{\omega^3}{\sqrt{2}} \quad \text{pour } Le \gg 1 \quad (4.43)$$

$$Nu = \frac{2 + \Psi_0^2}{2 + (1 - 8/\omega^2)\Psi_0^2} \quad (4.44)$$

$$Sh = \frac{2 + Le^2\Psi_0^2}{2 + (1 - 8/\omega^2)Le^2\Psi_0^2 + a\omega(1 + Le)\Psi_0/(2 + \Psi_0^2)} \quad (4.45)$$

où $\omega = \pi$ est en parfait accord avec les références suivantes Alavyoon et al. (1994) et Mamou et al. (1998).

4.3.1.3 Solution asymptotique en régime de couche limite

Lorsque la valeur du nombre de Rayleigh est très grande, il est intéressant de présenter les résultats pour le cas dit de régime de la couche limite. Les équations présentées au début de ce chapitre peuvent être simplifiées considérablement pour ce régime asymptotique où $\Omega \gg 1$. Pour cette situation $I_0(\Omega r) \approx e^{\Omega r}(1 + 1/8\Omega r)/\sqrt{2\pi\Omega r}$, $I_1(\Omega r) \approx e^{\Omega r}(1 - 3/8\Omega r)/\sqrt{2\pi\Omega r}$, $K_0(\Omega r) \approx \sqrt{\pi}e^{-\Omega r}(1 - 1/8\Omega r)/\sqrt{2\Omega r}$ et $K_1(\Omega r) \approx \sqrt{\pi}e^{-\Omega r}(1 + 3/8\Omega r)/\sqrt{2\Omega r}$. Ceci permet de montrer que les expressions de X_1 et X_2 sont données par:

$$X_1 = -[\ln\eta + (1 - \eta^2)/\eta\Omega] \quad ; \quad X_2 = -[\ln\eta + 3(1 - \eta^2)/2\eta\Omega] \quad (4.46)$$

Aussi nous avons trouvé que (4.24) se réduit à:

$$\Psi_0^2 = \frac{\Omega^2 K_0}{2r_i^2 K_1} \left(1 \pm \sqrt{1 - \zeta}\right) \quad (4.47)$$

avec $\Psi_0 = \Gamma/r_i\Omega^2$ et

$$\begin{aligned} K_0 &= [Le^2 + N - aN(1 + Le)] \ln \eta & K_1 &= Le^2(1 + N)\Omega \ln \eta \\ K_2 &= (1 + N)\Omega^2 & \zeta &= 4K_1K_2/\Omega^4K_0^2 \end{aligned} \quad (4.48)$$

Ici aussi, la valeur de Ω est évaluée en résolvant numériquement l'équation (4.47).

Cependant en assumant $\zeta \rightarrow 0$ la solution de (4.47) devient:

$$\Omega = \left(\frac{\eta}{\alpha_0}\right)^{1/5} R_T^{2/5} (1 + N)^{2/5} \quad ; \quad \Psi_0^2 = \alpha_0/\eta \Omega \quad (4.49)$$

avec $\alpha_0 = (N + Le^2 - aN(1 + Le))/(1 + N)Le^2$ qui doit être positive pour obtenir une solution réelle (4.49), i. e.

$$N \leq \frac{Le^2}{a(1 + Le) - 1} \quad (4.50)$$

ce qui est une excellente approximation du régime de couche limite ($\zeta \rightarrow 0$) valable pour une large échelle de paramètres de contrôle.

D'après les équations (4.20), (4.21), (4.46) et (4.49), les nombres de Nusselt et Sherwood s'écrivent comme suit:

$$Nu = \frac{1 - \alpha_0(3 - Y)}{1 + \alpha_0(1 - 4/Y)} \quad (4.51)$$

$$Sh = \frac{1 - Le^2\alpha_0(3 - Y)}{1 + Le^2\alpha_0(1 - 4/Y) + so} \quad (4.52)$$

où $Y = 2 \Omega G(\eta)$, $G(\eta) = \eta \ln \eta / (\eta^2 - 1)$ et $so = a(1 + Le)(1 - \eta)/\eta \ln \eta Nu$

quand $Y \rightarrow \infty$. De plus (4.51) et (4.52) se réduisent à

$$Nu = 2 \alpha_1 G(\eta) \Omega + (1 - 4\alpha_1 + 4\alpha_1^2) \left(1 + \sum_{i=1}^n (Y_1)^i \right) \quad (4.53)$$

$$Sh = 2 \alpha_2 G(\eta) \Omega + (1 - 4\alpha_2 + 4\alpha_2^2 - \alpha_3) \left(1 + \sum_{i=1}^n (Y_2)^i \right) \quad (4.54)$$

tels que $\alpha_1 = \alpha_0/(1 + \alpha_0)$, $\alpha_2 = \alpha_0 Le^2/(1 + so + \alpha_0 Le^2)$, $\alpha_3 = so/(1 + so + \alpha_0 Le^2)$, $Y_1 = 4 \alpha_1/Y$ et $Y_2 = 4 \alpha_2/Y$

Pour une cavité rectangulaire ($\eta \rightarrow 1$ et $G(\eta) \rightarrow 1/2$) nous pouvons démontrer facilement que:

$$Nu = \alpha_1 \Omega + (1 - 4\alpha_1 + 4\alpha_1^2) \left(1 + \sum_{i=1}^n (Y_1)^i \right) \quad (4.55)$$

$$Sh = \alpha_2 \Omega + (1 - 4\alpha_2 + 4\alpha_2^2 - \alpha_3) \left(1 + \sum_{i=1}^n (Y_2)^i \right) \quad (4.56)$$

avec $Y_1 = 4 \alpha_1/\Omega$ et $Y_2 = 4 \alpha_2/\Omega$.

Les équations (4.53) et (4.54) peuvent être réduites d'avantage en considérant les deux régimes limites suivants:

Régime thermique dominant

Dans ce paragraphe nous avons considéré le cas où le régime de la couche limite est généré principalement par les effets thermiques dûs au chauffage latérale, ce qui correspond à $|N| \ll 1$. Sous ces conditions, (4.53) and (4.54) se réduisent à:

$$Nu = G(\eta) \Omega ; \quad Sh = (1 + 2 Nu) \quad Le \gg 1 \quad (4.57)$$

avec $\Omega = \eta^{1/5} R_T^{2/5} (1 + N)^{2/5}$ et $G(\eta) \rightarrow 1/2$ quand $\eta \rightarrow 1$.

et pour $Le \ll 1$

$$\begin{aligned} Nu &= 2G(\eta) \alpha_1 \Omega + 1 - 4\alpha_1 + 4\alpha_1^2 ; \\ Sh &= 2G(\eta) \alpha_2 \Omega + 1 - 4\alpha_2 + 4\alpha_2^2 - \alpha_3 \end{aligned} \quad (4.58)$$

Régime solutale dominant

Le régime asymptotique pour lequel les mouvements convectifs sont générés par la variation de la concentration est étudié dans ce paragraphe. Ce cas de figure correspond à $|N| \gg 1$. Pour cette situation (4.51) et (4.52) deviennent:

$$\begin{aligned} Nu &= 2G(\eta) \alpha_1 \Omega + 1 - 4\alpha_1 + 4\alpha_1^2 ; \\ Sh &= 2G(\eta) \alpha_2 \Omega + 1 - 4\alpha_2 + 4\alpha_2^2 - \alpha_3 \quad Le \gg 1 \end{aligned} \quad (4.59)$$

et

$$\begin{aligned} Nu &= 2G(\eta) \alpha_1 \Omega + 1 ; \\ Sh &= 2G(\eta) \alpha_2 \Omega + 1 \quad Le \ll 1 \end{aligned} \quad (4.60)$$

Ces solutions approximatives pour $Le \gg 1$ sont plus précises que celles prédites par Alavyoon (1993) pour $\eta \rightarrow 1$, et plus précisément quand Ω est petit. À titre d'exemple pour $R_T = 100$, $Le = 10$, $\eta = 1$ et $N = 10^{-3}$, (4.57) donne un nombre de Sherwood $Sh = 8.35$ qui est très proche de celui prédit par la solution exacte (4.21), soit $Sh = 8.37$. D'autre part, et pour le même cas de figure la valeur du nombre de Sherwood prédite par Alavyoon (1993) est de $Sh = 6.31$, l'écart de 25% entre les solutions est considéré comme important.

Ces solutions approximatives sont valides pour une large gamme de valeur du nombre de Lewis, Le , et de rapport de forces de volume N . Ceci est aussi valable même lorsque les forces de volumes sont approximativement égales. Les solutions

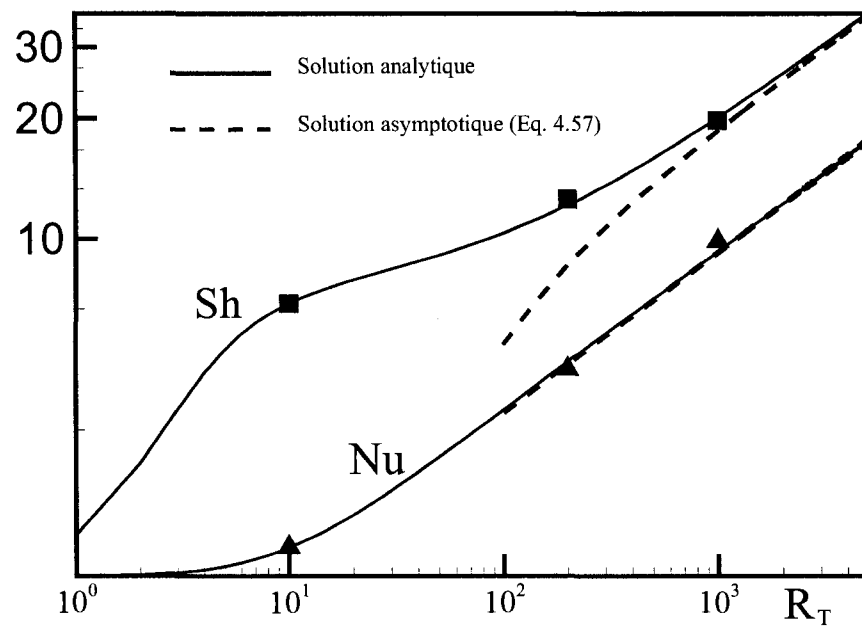


Figure 4.4 Solutions asymptotique du transfert thermique Nu et massique Sh en fonction du nombre de Rayleigh R_T (cas flux imposés) pour $Le = 10$, $N = 0.01$, $a = 0$ et $\eta = 0.5$

existantes dans la littérature ($\eta = 1$) concernent seulement le cas asymptotique pour lequel les mouvement convectifs sont soit conduit par les effets thermiques $N \rightarrow 0$ où par les effets solutales $N \rightarrow \infty$.

4.3.2 Cas fluide

Pour un milieu fluide, l'équation différentielle à résoudre s'écrit sous la forme suivante:

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial r^4} - \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} + \frac{3}{r^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \Lambda \psi = \Gamma \quad (4.61)$$

avec $\Lambda = R_T[C_T + N\alpha]$ et $\Gamma = R_T r_i[1 + N]$. La forme de la solution de l'équation différentielle (4.61) dépend essentiellement du signe du paramètre Λ (positif, négatif ou nul) et de la valeur de Γ (égale ou différent de zéro). Toutes les formes de ces solutions possibles sont décrites ci-dessous.

4.3.2.1 Solution générale pour $N \neq -1$

Cas $\Lambda \neq 0$

Dans le cas où le rapport des forces volumiques, thermiques et solutales, est différent de -1 , la solution de l'équation (4.61) s'écrit sous la forme :

$$\psi(r) = -r_i \Psi_0 \frac{1 + f(r)}{1 + f(\xi)} \quad (4.62)$$

avec

$$\begin{aligned} f(r) &= r [C_1 J_1(\Omega r) + C_2 Y_1(\Omega r) + C_3 Y_1(\Omega r) + C_4 Y_1(\Omega r)] \\ \xi &= \frac{1 + \eta}{2(1 - \eta)} \quad \Psi_0 = \frac{\Gamma}{r_i \Lambda} [1 + f(\xi)] \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\Omega = \sqrt[4]{\Lambda}, \quad \Lambda = \begin{cases} \Omega_1^4 & \text{si } \Lambda \geq 0 \\ -4\Omega_1^4 & \text{si } \Lambda < 0 \end{cases}$$

Cas $\Lambda = 0$

Pour ce cas particulier où $\Lambda = 0$ la solution de l'équation (4.61) devient :

$$\psi(r) = \frac{r^4}{4} \left[C_2 + \frac{\Gamma}{4} (\ln r - \frac{5}{4}) \right] + \frac{r^2}{2} \left[C_1 + C_3 (\ln r - \frac{1}{2}) \right] + C_4 \quad (4.64)$$

4.3.2.2 Solution particulière pour $N = -1$

La solution de cette équation pour $N = -1$ s'écrit sous cette forme :

$$\psi(r) = r [C_1 I_1((1+i)\Omega r) + C_2 K_1((1+i)\Omega r) + C_3 J_1((1+i)\Omega r) + C_4 Y_1((1+i)\Omega r)] \quad (4.65)$$

avec

$$4\Omega^4 = \sqrt{R_T((1-a)C_T - LeCs)}$$

L'équation de dispersion correspondante aux conditions aux frontières sur la fonction de courant ψ et la vitesse v s'écrit:

$$F(\Omega) = Det(M) = 0$$

avec

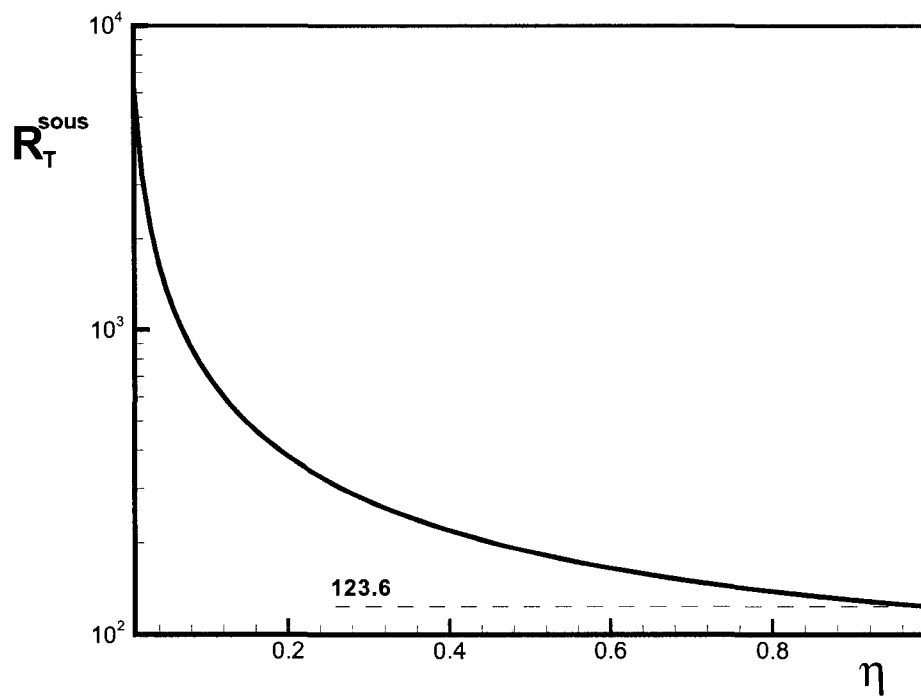


Figure 4.5 Variation du nombre de Rayleigh sous critique R_T^{sous} en fonction du rapport des rayons η (flux imposés) pour $Le = 10$, $N = -1$ et $a = 0$

$$M = \begin{pmatrix} I_1((1+i)\Omega r_i) & K_1((1+i)\Omega r_i) & J_1((1+i)\Omega r_i) & Y_1((1+i)\Omega r_i) \\ I_1((1+i)\Omega r_o) & K_1((1+i)\Omega r_o) & J_1((1+i)\Omega r_o) & Y_1((1+i)\Omega r_o) \\ I_0((1+i)\Omega r_i) & -K_0((1+i)\Omega r_i) & J_0((1+i)\Omega r_i) & Y_0((1+i)\Omega r_i) \\ I_0((1+i)\Omega r_o) & -K_0((1+i)\Omega r_o) & J_0((1+i)\Omega r_o) & Y_0((1+i)\Omega r_o) \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

Comme nous l'avons vu pour le cas poreux, cette équation admet deux solutions possibles. La première correspondant à l'état de conduction pure et est donnée par $\psi = 0$ et donc $\Omega = 0$. La deuxième, est une solution convective (Figure 4.6) donnée par $\psi \neq 0$ et Ω égale à :

$$\Omega_1 = 4.73 \quad \text{et} \quad \Omega_k = \frac{\pi}{2}(4k-1), \quad k = 2, 3, \dots \quad (4.67)$$

où k est un entier positif correspondant aux modes de convection qui sont définis pour chaque valeur de Ω . Ainsi, pour $\Omega = \Omega_1$, on a un mode unicellulaire, alors que les autres valeurs de Ω correspondent à des modes d'écoulements multicellulaires. Le nombre de cellules pour chaque mode est égale à $(2k+1)$. Dans le régime convectif, les gradients de température, C_T , et de concentration, C_S , sont déterminés à partir des bilans (4.7) et (4.8), permettant par la suite de trouver les expressions des nombres de Nusselt et Sherwood.

En combinant les expressions de C_T et C_S avec celle de Ω on aboutit à l'équation suivante:

$$\psi_0 [\psi_0^4 + a_0\psi_0^2 + a_1\psi_0 + a_2] = 0 \quad (4.68)$$

avec :

$$a_0 = \frac{1 + Le^2}{Le^2\Gamma} \quad a_2 = \frac{\xi^2}{Le^2\Upsilon^2} \quad \xi = \frac{r_o^2 - r_i^2}{2}$$

$$a_1 = \frac{R_T r_i \xi \Gamma (Le - 1 + a(1 + Le))}{4\Omega_0^4 Le^2 \Upsilon^2}$$

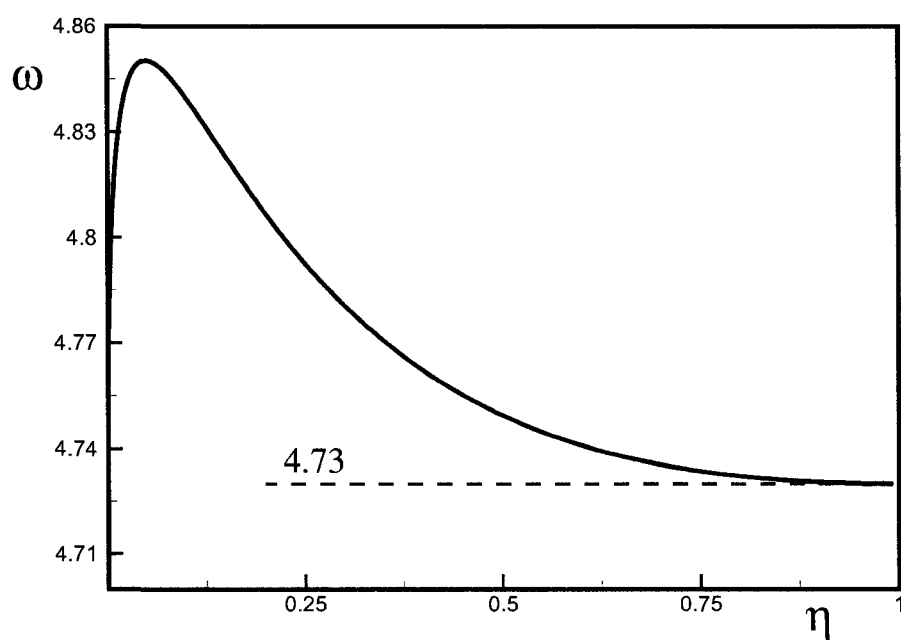


Figure 4.6 Limite de Ω_0 quand $\eta \rightarrow 1$

Cette équation de cinquième ordre admet cinq solutions dont une nulle, deux imaginaires et deux réelles (une stable et l'autre instable) pour $R_T \geq R_{TS}^{sous}$. Ce R_{TS}^{sous} qui marque la séparation entre le régime conductive et le convective est déterminé quand les solutions réelles de l'équation (4.68) sont identiques (solution double ψ_s).

On trouve que :

$$\psi_s = \sqrt{\frac{-a_0 + \sqrt{a_0^2 + 12a_2}}{6}} \quad (4.69)$$

ce qui nous permet de trouver la valeur de R_{TS}^{sous} à partir de (4.68):

$$R_{TC}^{sous} = \frac{2(1 - a_2)\Omega_0^2 Le^2 \Gamma^2 \psi_s^3}{r_i \xi \Upsilon [Le - 1 + a(1 + Le)]} \quad (4.70)$$

La figure (4.7) illustre l'évolution de l'amplitude de l'écoulement avec R_{TC}^{sous} et comme montrer sur le tableau (4.1), nos résultats sont en parfait accord avec le cas de la cavité rectangulaire élancée rapporter dans la thèse de Mamou (1998).

η	0.3	0.5	0.7	0.99	Mamou et al.
R_T^{sous}	273.50	186.30	149.70	123.52	122.90

Tableau 4.1 Variation du nombre de Rayleigh sous critique R_T^{sous} par rapport au rapport des rayons η

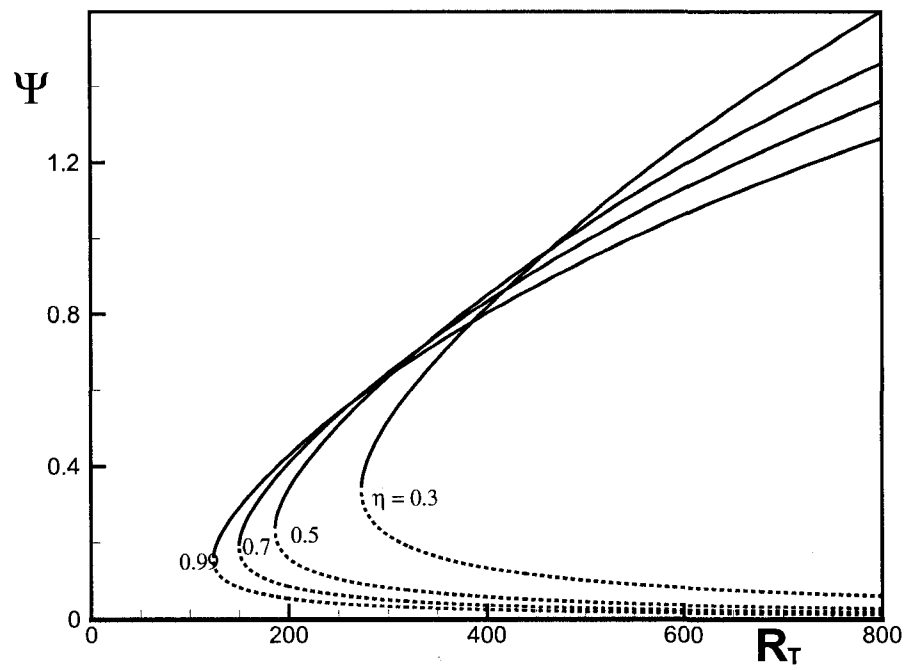


Figure 4.7 Variation de la fonction de courant ψ en fonction du nombre de Rayleigh R_T (flux imposés) pour $Le = 10$, $N = -1$ et $a = 0$

CHAPITRE 5

ANALYSE DES RÉSULTATS

Ce chapitre est consacré à la présentation des résultats analytiques et numériques de la double diffusion ($a = 0$) et de l'effet Soret ($a = 1$) dans une cavité cylindrique verticale poreuse et fluide, soumise à des conditions aux limites de type Dirichlet et Neumann. Notre principale tâche consiste à étudier l'influence des paramètres de contrôle sur l'écoulement et les mécanismes de transferts de chaleur et de masse. Nous considérons dans ce qui suit la convection coopérante ($N > 0$) et opposée ($N < 0$) ainsi que la transition du régime thermique dominant vers celui du solutal dominant. Le régime asymptotique, du type couche limite, en milieu poreux est aussi mis en évidence dans ce chapitre. Dans la limite $\eta \rightarrow 1$, nos résultats sont en accord avec le cas de la cavité rectangulaire étudié dans le passé par Mamou et al. (1995a). Notons que des points numériques ($\blacktriangle$, $\blacklozenge$, $\blacktriangleleft$) ont été placés sur la majorité des courbes présentées dans ce chapitre, dans le but de montrer la bonne concordance entre nos résultats numériques et analytiques.

5.1 Milieu poreux saturé par un fluide binaire

5.1.1 Solution générale pour $N \neq -1$

Les figures (5.1) - (5.6) montrent les effets du nombre de Rayleigh R_T et du rapport des rayons η sur le taux de transfert de chaleur Nu , le taux de transfert de masse Sh et l'intensité de la fonction de courant ψ_{max} . Tous ces résultats ont été obtenus pour $Le = 1.5$, $N = 0.5$, $a = 0$ et différentes valeurs de $\eta = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ et 1 .

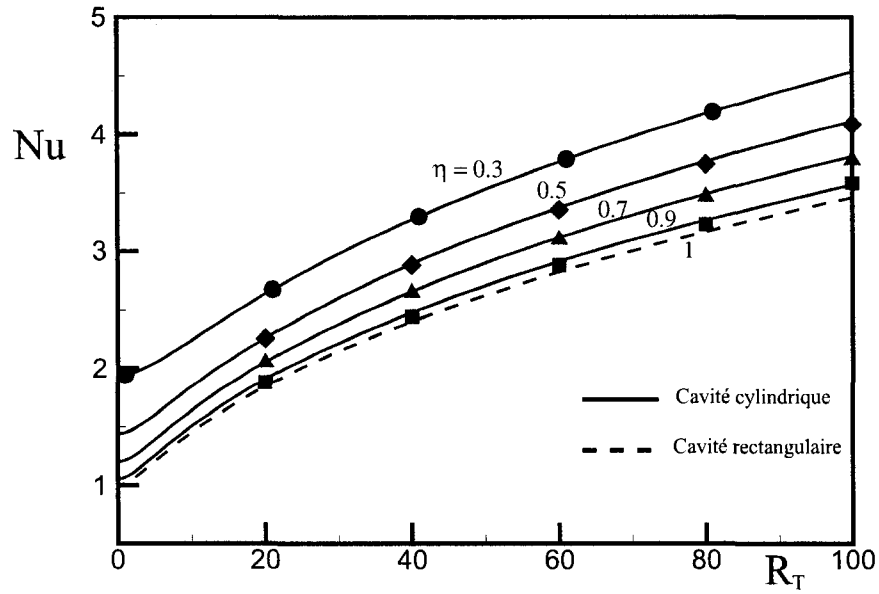


Figure 5.1 Influence du nombre de Rayleigh thermique R_T sur la variation du transfert thermique Nu (cas Neumann) pour $Le = 1.5$, $N = 0.5$, $a = 0$, $\eta = 0.3$, 0.5, 0.7, 0.9 et 1

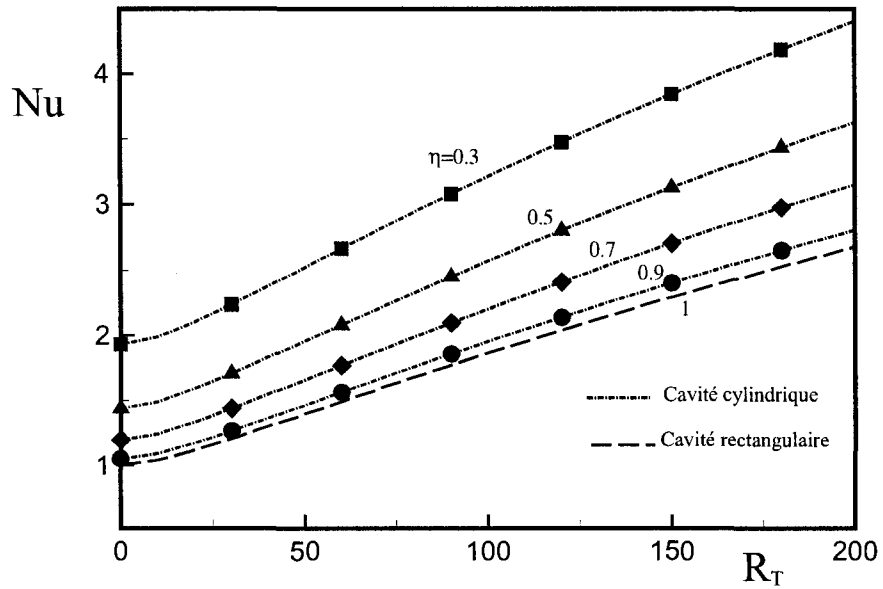


Figure 5.2 Influence du nombre de Rayleigh thermique R_T sur la variation du transfert thermique Nu (cas Dirichlet) pour $Le = 1.5$, $N = 0.5$, $a = 0$, $\eta = 0.3$, 0.5, 0.7, 0.9 et 1

La figures (5.1) et (5.2) illustrent l'effet de la variation du nombre de Rayleigh thermique R_T sur le transfert de chaleur Nu pour les deux conditions aux frontières considérées dans cette thèse. Nos résultats analytiques (dans le cas Neumann), représentés par des lignes continues, sont en parfait accord avec les résultats numériques. On observe aussi que pour toutes les valeurs de η , le transfert de chaleur Nu s'accroît avec l'augmentation de R_T (l'écoulement convectif s'accroît) et diminue avec l'augmentation de η . L'influence de l'épaisseur de la cavité η sur le transfert de chaleur est importante quelle que soit la valeur du nombre de Rayleigh. Notons que pour une même valeur de R_T le transfert de chaleur, représenté par le nombre de Nusselt Nu , est plus faible dans le cas de températures et concentrations imposées (5.2) que celui de flux imposés (5.1). Une différence entre les effets de η sur la variation de Nu est aussi observée, le transfert de chaleur dans le cas de conditions de Dirichlet (températures et concentrations constantes) s'accroissant d'avantage avec la diminution de η que dans le cas de conditions de Neumann (flux de chaleur et de masse constants imposés).

L'effet du nombre de Rayleigh thermique R_T sur la variation du transfert massique Sh , est représenté sur la figure (5.3) pour le cas de flux imposés, et sur la figure (5.4) dans le cas isotherme. Dans le cas de conditions aux frontières de type Neumann, nos résultats numériques sont là aussi en parfait accord avec ceux obtenus analytiquement sur la base de la théorie de l'écoulement parallèle. On constate un accroissement monotone du transfert de masse, représenté par le nombre de Sherwood Sh , quand R_T augmente et ceci malgré la domination des effets thermiques. Ce comportement est dû à la coopération des forces volumiques, $N = 0.5$. Le décroissement de Sh quand η augmente, s'explique par le fait que, plus η est élevé, moins l'effet de la courbure est ressenti. L'écoulement est donc plus stable, ce qui explique la diminution du transfert de masse. Quand $\eta \rightarrow 1$ nos résultats se superposent avec ceux de la cavité rectangulaire étudiée

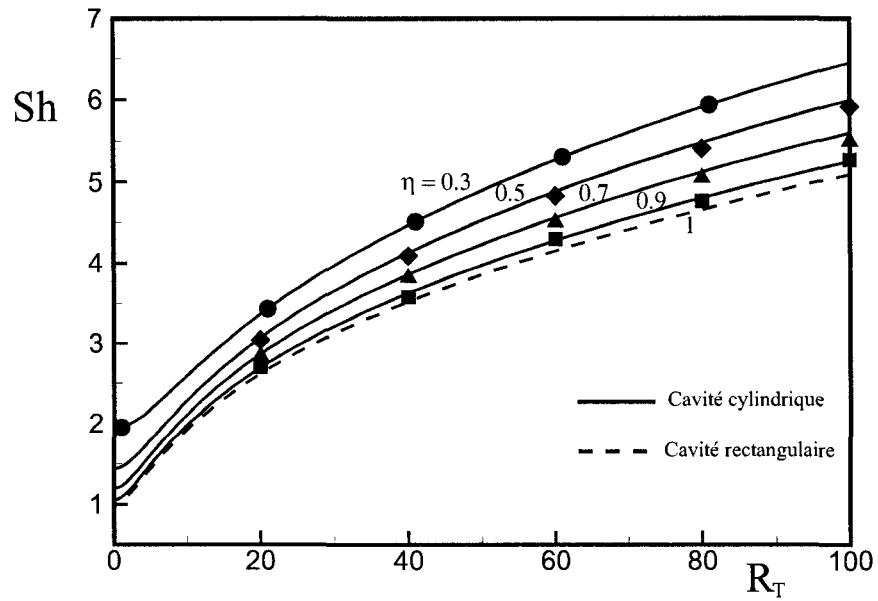


Figure 5.3 Influence du nombre de Rayleigh thermique R_T sur la variation du transfert massique Sh (cas Neumann) pour $Le = 1.5$, $N = 0.5$, $a = 0$, $\eta = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ et 1

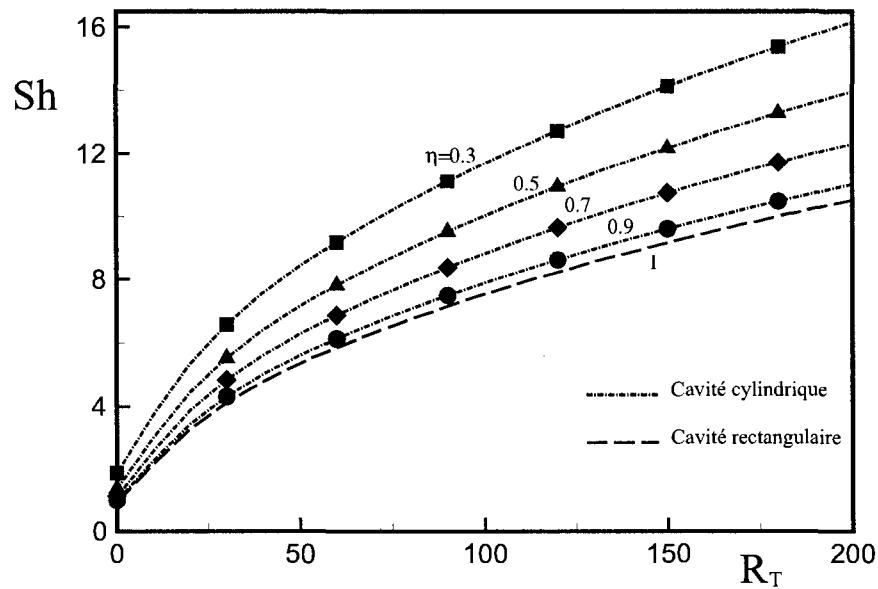


Figure 5.4 Influence du nombre de Rayleigh thermique R_T sur la variation du transfert massique Sh (cas Dirichlet) pour $Le = 1.5$, $N = 0.5$, $a = 0$, $\eta = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ et 1

dans le passé par Mamou et al. (1995a). Nous constatons également que la courbure joue un rôle stabilisateur de l'écoulement et des transferts de chaleur et de masse. Naturellement, l'introduction de la courbure détruit les propriétés centrosymétriques de l'écoulement, de la température et de la concentration observées pour une cavité rectangulaire. L'effet du nombre de Rayleigh R_T sur l'intensité de la fonction de courant ψ_{max} est illustré sur les figures (5.5) et (5.6). Les résultats sont validés par plusieurs points numériques pour différentes valeurs de R_T . Nous constatons l'augmentation de l'intensité de la fonction de courant avec l'accroissement de R_T , qui joue un rôle moteur dans l'intensification de la convection à l'intérieure de la cavité. La diminution de la valeur de η se manifeste par une hausse de l'intensité de ψ_{max} .

Les résultats numériques pour le cas où les parois sont soumises à des conditions aux frontières thermiques et solutales de type Dirichlet, sont représentés sur la figure (5.7) en termes de lignes de courant (gauche), isothermes (centre), et isoconcentrations (droite). Ces résultats sont présentés pour les deux types de problèmes considérés dans cette étude, c'est à dire la convection naturelle induite par double diffusion (cas $a = 0$) et par effet Soret (cas $a = 1$). Les paramètres de contrôle adoptés sont $R_T = 50$, $Le = 1.5$, $N = 0.5$, $A = 8$ et $\eta = 0.3$ et 0.9 . Pour le cas (5.7(a)(i)) correspondant à la double diffusion, nous observons l'existence d'une faible couche limite hydrodynamique, alors que les transferts thermique et solutale sont presque conductifs. Nous remarquons, l'existence d'une grande cellule convective tournante qui remplit l'ensemble de la cavité. Le sens de rotation de cette cellule est facilement identifiable à travers les isothermes et isoconcentrations, soit le sens horaire. Il est à signaler que la variation de température est assez faible. Elle varie presque linéairement selon la direction horizontale et elle est quasiment constante dans la direction verticale. Aussi la variation du champ de concentration est similaire à celle de la température. Les résultats obtenus pour deux valeurs de η

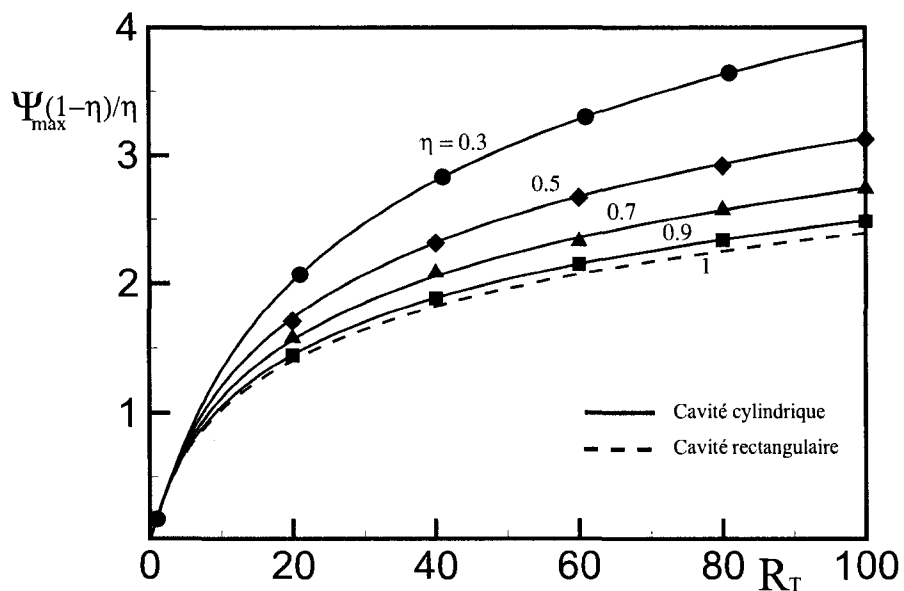


Figure 5.5 Influence du nombre de Rayleigh thermique R_T sur la variation de la fonction de courant $\psi_{\max}$ (cas Neumann) pour $Le = 1.5$, $N = 0.5$, $a = 0$, $\eta = 0.3$, 0.5, 0.7, 0.9 et 1

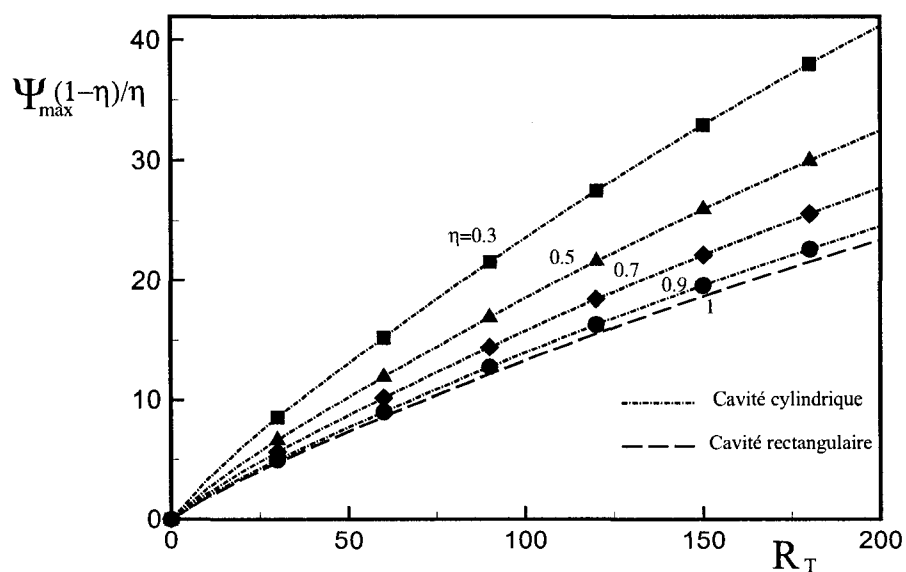


Figure 5.6 Influence du nombre de Rayleigh thermique R_T sur la variation de la fonction de courant $\psi_{\max}$ (cas Dirichlet) pour $Le = 1.5$, $N = 0.5$, $a = 0$, $\eta = 0.3$, 0.5, 0.7, 0.9 et 1

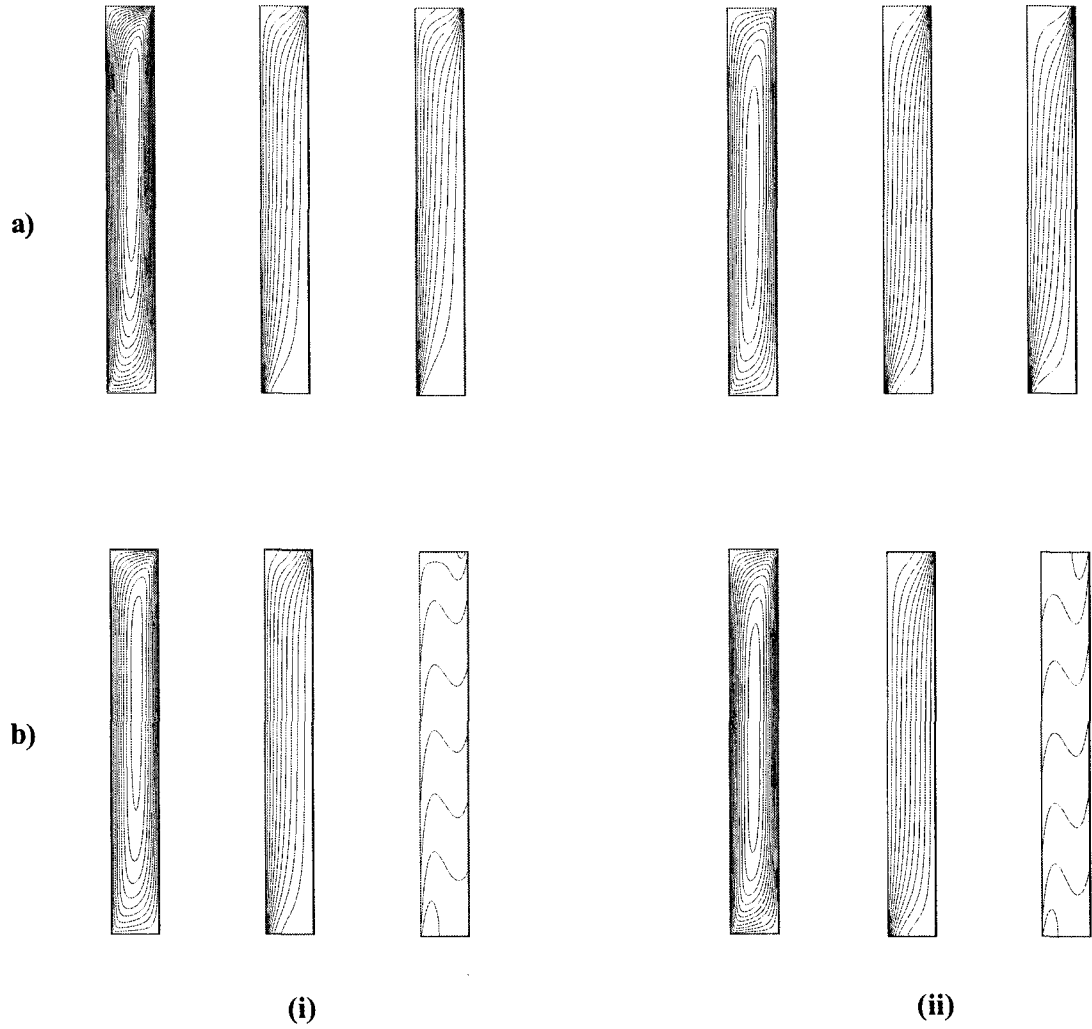


Figure 5.7 Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour $R_T = 50$, $Le = 1.5$ et $N = 0.5$ (cas Dirichlet) (a) Double diffusion (a.i) $\eta = 0.3$, $\psi_{max} = 16.53$, $Nu = 2.67$ et $Sh = 3.1952$ (a.ii) $\eta = 0.9$, $\psi_{max} = 9.65$, $Nu = 1.57$ et $Sh = 1.94$ (b) Effet Soret (b.i) $\eta = 0.3$, $\psi_{max} = 11.06$, $Nu = 2.38$ et $Sh = 2.38$ (b.ii) $\eta = 0.9$, $\psi_{max} = 6.47$, $Nu = 1.36$ et $Sh = 1.36$

(0.3 et 0.9), indiquent que la propriété de centro-symétrie de l'écoulement, observée dans le cas de cavité rectangulaire, est, comme on peut s'y attendre, de plus en plus détruite avec la diminution de la valeur du rapport des rayons η . En comparant nos résultats à ceux du cas de la cavité rectangulaire nous observons un changement remarquable de la structure de l'écoulement. Ainsi le taux d'augmentation de la couche limite hydraulique sur la paroi chaude diminue avec la valeur de η , cet effet est renversé sur la paroi froide. Ce phénomène est à l'origine du déplacement de la cellule de convection vers le haut de la parois verticale intérieure. Pour le cas de l'effet Soret (5.7(b)(i)) la structure parallèle au centre de la cavité est moins prononcée. Les isothermes quant à elles, indiquent qu'une large portion du fluide à l'intérieur de la cavité est stagnante à cause de l'effet de blocage induit par la stratification du champs de densité. L'effet Soret induit une grande stratification des isosalines selon la direction verticale, ce qui n'est pas le cas pour la double diffusion.

La figure (5.8) montre l'effet du nombre de Lewis Le sur l'intensité de la fonction de courant ψ_{max} pour $R_T = 100$, $N = 0.5$ et -0.5 , $\eta = 0.5$ et 0.9 et $a = 0$. Nos solutions analytiques sont là encore en bon accord avec les résultats numériques. Pour les deux valeurs du rapport des forces volumiques considérées, i.e $N = 0.5$ et -0.5 , l'influence de η est la même. Plus l'épaisseur de la cavité est faible plus l'intensité de la fonction de courant est faible. Pour des forces de volume coopérantes, $N = 0.5$, et de très faibles valeurs de Le , le gradient solutale devient très important et il domine à son tour l'écoulement convectif, ce qui explique en effet l'accentuation de l'intensité de ψ_{max} . On observe, dans la même zone, la grande diminution de l'intensité de ψ_{max} pour le cas où $N = -0.5$, qui est due essentiellement à l'opposition des forces de volume thermiques et solutales qui font baisser l'intensité de l'écoulement convectif. Pour $Le > 1$ la situation se renverse, les forces de volume solutales n'ont quasiment plus d'effet sur l'écoulement

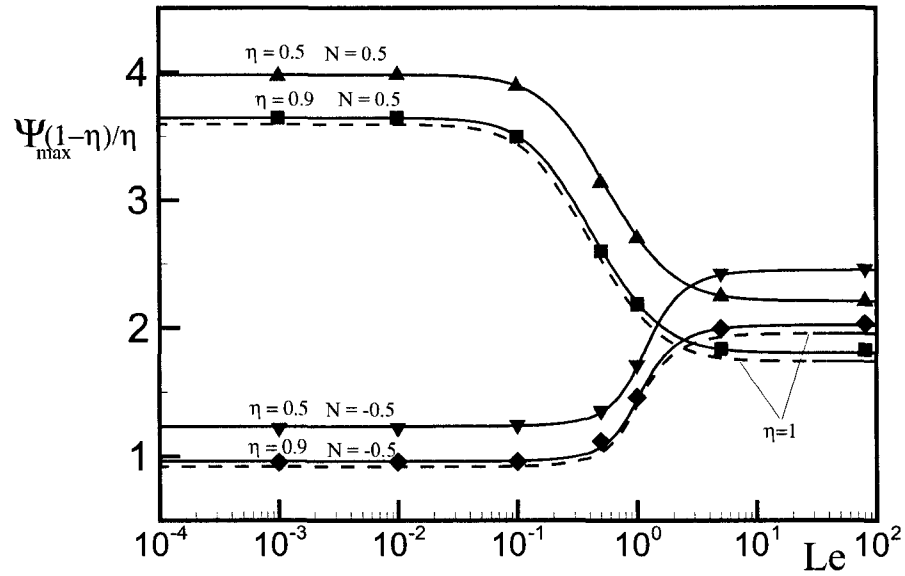


Figure 5.8 Influence du nombre de Lewis Le sur la variation de la fonction de courant (cas Neumann) ψ_{max} pour $R_T = 50$, $N = 0.5; -0.5$, $\eta = 0.5; 0.9$ et 1

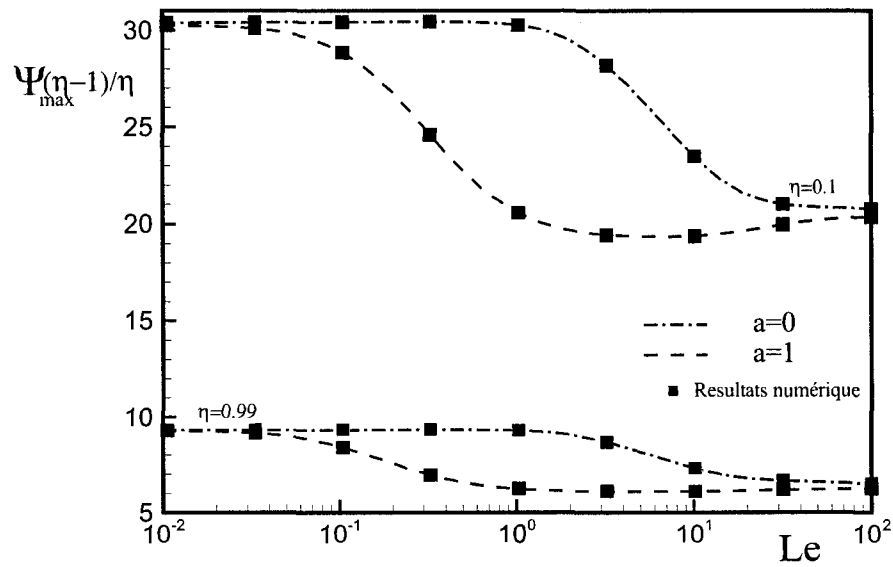


Figure 5.9 Influence du nombre de Lewis Le sur la variation de la fonction de courant (cas Dirichlet) ψ_{max} pour $R_T = 100$, $N = 0.5$, $\eta = 0.1$ et 0.99 et $a = 0$ et 1

convectif. Il en résulte la domination du gradient thermique horizontal. Ainsi l'écoulement est dominé par les effets thermiques, et puisque le flux de chaleur imposé est constant, on observe un déficit de masse au voisinage de la couche limite intérieure du cylindre et un surplus du côté droit. Ceci donne naissance à un gradient solutal négatif au centre de la cavité responsable de la baisse de l'intensité de ψ_{max} quand $N = -0.5$.

Pour le cas de températures et concentrations imposées sur la paroi intérieure du cylindre, nous avons représenté l'effet du nombre de Lewis Le sur l'intensité de la fonction de courant ψ_{max} , sur la figure (5.9). Ces résultats ont été obtenus pour $R_T = 100$, $N = 0.5$, $\eta = 0.1$ et 0.99 et $a = 0$ et 1 . Une diminution de l'intensité de la fonction de courant est observée lorsque on augmente soit le nombre de Lewis, soit la valeur de η , pour les deux situations $a = 0$ et 1 . Pour des valeurs ($0.1 \leq Le \leq 100$) l'influence de la variation du nombre de Lewis sur la fonction de courant est plus importante pour le cas de l'effet Soret que celui de la double diffusion. Pour une valeur donnée du nombre de Lewis l'influence de la courbure est plus importante lorsque η est faible que dans le cas de la cavité rectangulaire ($\eta = 1$). Ceci est dû exclusivement à l'effet de déstabilisation qu'introduit la courbure sur l'écoulement. Il est à mentionner que lorsque $a = 0$ aucune influence du nombre de Lewis n'est observée quand $Le \leq 1$ et $Le \geq 20$, et ceci pour les deux situations $\eta = 0.1$ et 0.99 .

La figure (5.10) montre les résultats numériques obtenus pour le cas $R_T = 50$, $Le = 10$, $a = 1$, $\eta = 0.5$, $A = 8$ et $N = 0, 10$ et -10 . La figure (5.10a) correspond au cas ($N = 0$). Ici les effets de la concentration sur l'écoulement sont nuls de telle façon que l'écoulement tournant dans le sens horaire résultant est complètement gouverné par les gradients de température. Lorsque le rapport des forces de volume est augmenté ($N > 0$), ces forces augmentent aussi ce qui amplifie encore plus l'écoulement engendré. Cette situation correspond à la région de l'écoulement dit coopérant. La figure (5.10b) montre les résultats obtenus pour

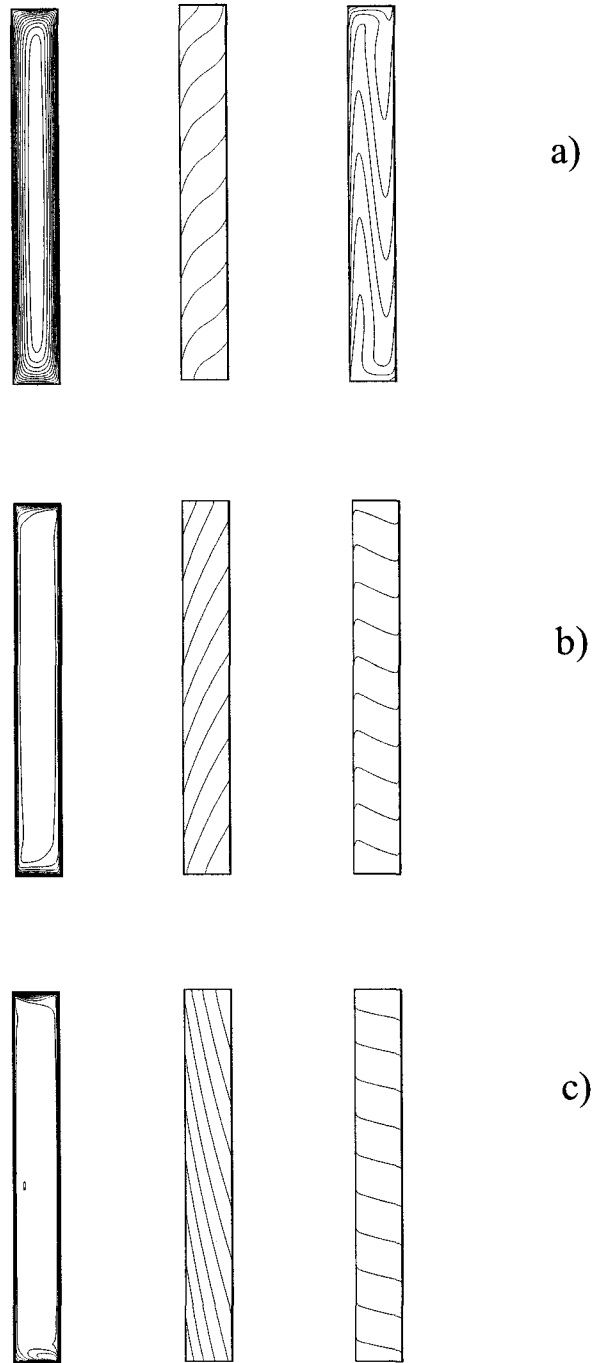


Figure 5.10 Lignes de courant(gauche), isothermature(milieu), isoconcentration(droite) (cas Neumann) pour $R_T = 50$, $Le = 10$, $a = 1$, $\eta = 0.5$ et $A = 8$; a) $N = 0$, b) $N = 10$, et c) $N = -10$

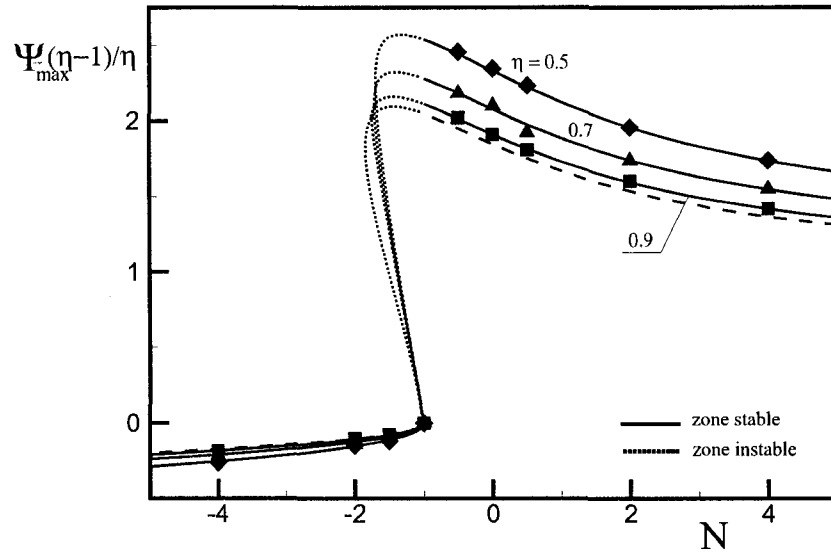


Figure 5.11 Influence du rapport des forces de flottabilité N sur la variation de la fonction de courant $\psi_{\max}$ (cas Neumann) pour $R_T = 50$, $Le = 10$, $a = 0$, $\eta = 0.5, 0.7, 0.9$, et 1

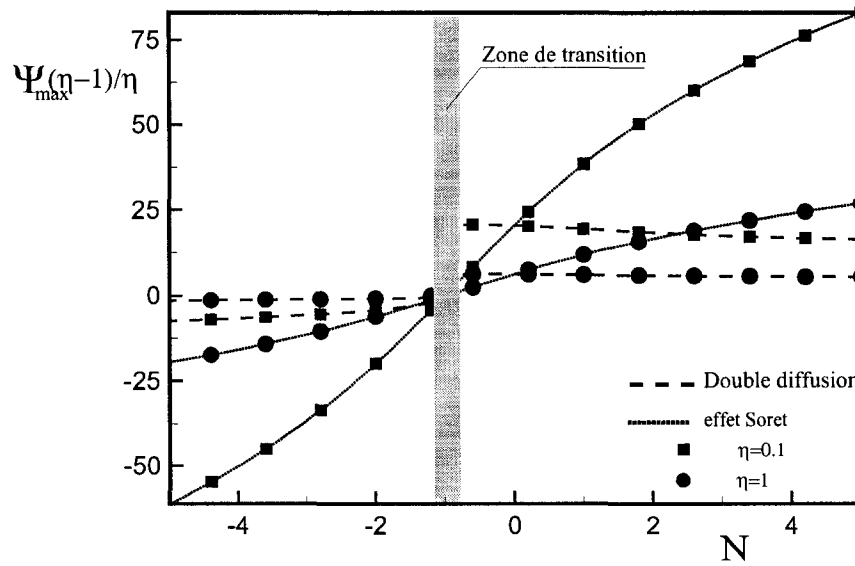


Figure 5.12 Influence du rapport des forces de flottabilité N sur la variation de la fonction de courant $\psi_{\max}$ (cas Dirichlet) pour $R_T = 100$, $Le = 10$, $a = 0$ et 1, $\eta = 0.1$ et 1

une forte valeur du rapport de flottabilité $N = 10$, pour laquelle l'écoulement est complètement dominé par les forces de volume solutales. Ces résultats indiquent qu'une large portion du fluide au centre du cylindre est stagnante à cause de l'effet de blocage qu'impose la stratification verticale de la densité. L'écoulement de type couche limite hydrodynamique est bien visible en examinant la structure des lignes de courant. D'autre part, quand le rapport des forces de volume est inférieur à zéro ($N < 0$) les forces de volume solutales et thermiques s'opposent. Cette situation fait évoluer l'écoulement d'un régime thermique dominant tournant dans le sens des aiguilles d'une montre vers un régime solutal dominant tournant dans le sens contraire (figure 5.10c). Nous verrons plus loin dans ce chapitre que pour des valeurs intermédiaires de N la transition entre le régime thermique et le régime solutal est caractérisée par un écoulement de structure multicellulaire; dans lequel les forces de volume thermiques et solutales vont dominer les écoulements séparés dans la cavité. L'effet du rapport des forces de volume N est illustré sur la figure (5.11) pour le cas $R_T = 50$, $Le = 10$, $a = 0$ et plusieurs valeurs de η . Ici aussi un excellent accord est observé entre les résultats analytiques et numériques. Le rapport N varie entre -5 et 5 , cette plage couvrant toutes les valeurs entre le cas où l'écoulement est opposé et les effets solutales sont dominants ($N = -5$), celui purement dominé par les effets thermiques ($N = 0$) et celui où l'écoulement est coopérant et dominé par les effets solutaux ($N = 5$). Lorsque N est au-dessus de zéro les deux forces de volume thermique et solutale agissent dans la même direction (écoulement coopérant). Les valeurs de ψ_{max} sont positives, indiquant la circulation de l'écoulement dans le sens horaire. En augmentant la valeur N de 0 vers 5 l'écoulement devient de plus en plus dominé par les forces de volume de nature solutale. D'autre part, lorsque N est inférieur à 0, les forces thermiques et solutales agissent dans des directions opposées. Dans l'intervalle $-1 \leq N < 0$ les forces thermiques dominent clairement l'écoulement de telle façon que ψ_{max} demeure positive. La situation $N = -1$ correspond au cas particulier où les forces de volume induites par les

effets de la température et de la concentration sont de même intensité mais de sens contraire. Cette situation particulière sera discutée dans la section suivante. La solution analytique (4.13)-(4.15) prédit l'existence possible de trois solutions selon la valeur de N . Deux solutions stables sont représentées par des lignes continues, correspondant au cas de régime unicellulaire, et une solution instable représentée par des lignes discontinues, correspondant à un régime multicellulaire.

La figure (5.12) montre la variation de la fonction de courant ψ_{max} en fonction du rapport de flottabilité N . Cette figure, obtenue pour le cas de la double diffusion et celui de l'effet Soret, correspond au cas $R_T = 100$, $Le = 10$ et $\eta = 0.1$ et 1 . Pour le cas de la double diffusion, $a = 0$, nous observons l'accentuation de l'intensité de l'écoulement avec l'augmentation du rapport des forces de volume N . Lorsque les forces d'archimède sont de sens contraire, $N < -1$, un changement du sens de la convection est observé à travers les valeurs négatives de ψ_{max} . L'influence du rapport des rayons η est plus grande quand $N > -1$ que pour $N < -1$. Pour le cas de l'effet Soret la situation se renverse et l'intensité de l'écoulement s'affaiblit avec l'augmentation de la valeur de N . Même si l'influence de η est moins prononcée que dans le cas de la double diffusion, nous constatons, que les effets de η sur l'écoulement dépendent de la zone dans laquelle se trouve l'écoulement ($N > -1$ convection coopérante ou $N < -1$ convection opposée). On observe que la valeur de N pour laquelle les structures multicellulaires apparaissent est faiblement dépendante du rapport des rayons η .

Une confirmation numérique de l'existence de solutions multiples est illustrée sur la figure (5.13) pour le cas $R_T = 50$, $Le = 10$, $N = -1.8$, $a = 1$ et $A = 4$. Nous abordons la discussion par le cas de la cavité rectangulaire ($\eta = 1$), figure (5.13a). Le premier cas (i) montre un écoulement unicellulaire tournant dans le sens anti-horaire, correspondant à la branche solutale inférieure. Cette solution a été obtenue en utilisant, comme solution initiale, les résultats numériques obtenus

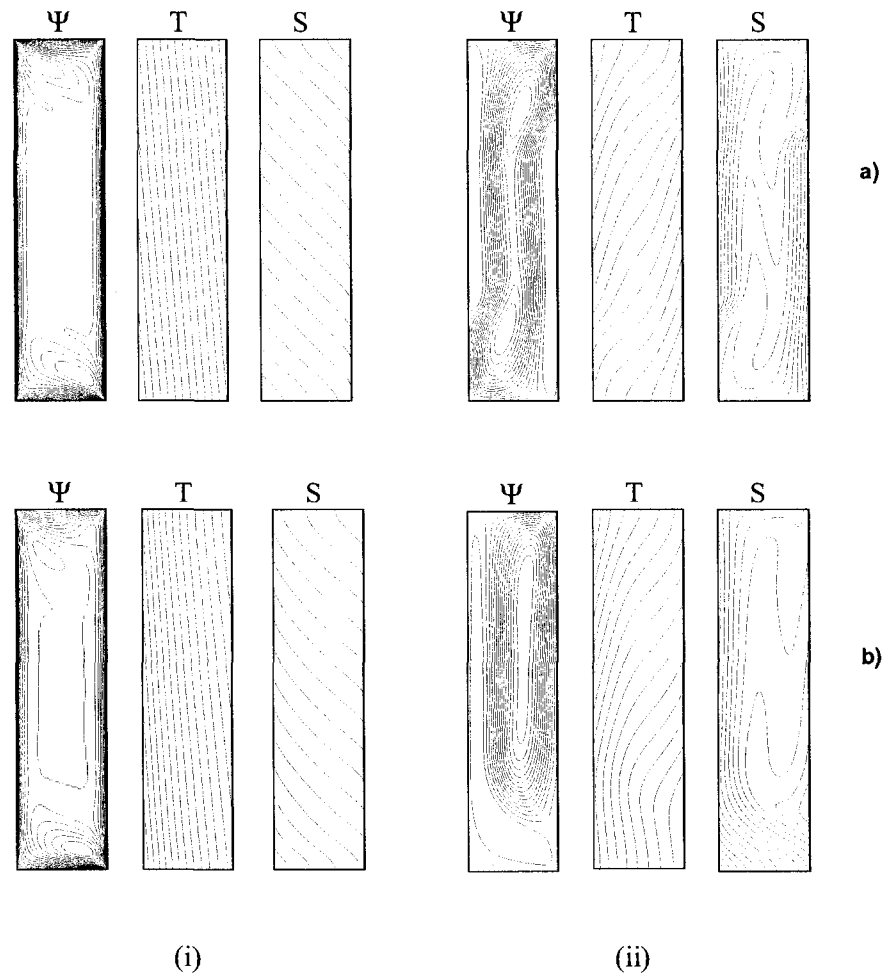


Figure 5.13 Lignes de courant (gauche), isotherme (milieu), isoconcentration (droite) (cas flux imposés) pour $R_T = 50$, $N = -1.8$, $Le = 10$, $a = 1$ et $A = 4$, (a) $\eta = 1$, (b) $\eta = 0.5$

pour $N = -3$, (i.e un écoulement anti-horaire intense, gouverné principalement par les forces de volume solutales). Le deuxième cas (ii) indique l'existence d'une large cellule, tournant dans le sens horaire, au sein de la cavité, induite par les forces de volume thermiques et de deux petites cellules, adjacentes au parois verticales, induites par les forces de volume solutales. Ces structures d'écoulement ont été obtenues numériquement moyennant une solution initiale d'écoulement perturbé consistant en deux cellules verticales symétriques. Il est à noter, que pour les paramètres de contrôle utilisés ici, on n'a pas été en mesure d'obtenir la troisième solution prédite par le modèle analytique, à savoir l'écoulement unicellulaire dominé par les forces de volume thermiques. Notons aussi que ces résultats ont été obtenus pour un rapport de forme $A = 4$ pour lequel l'écoulement n'est pas totalement parallèle. Ceci est dû au fait que pour des valeurs plus grandes de A , les régimes multicellulaires stables sont presque impossibles à atteindre. Les effets de η sur ces solutions sont montrés sur la figure (5.13 b) pour $\eta = 0.5$. Des solutions multiples sont aussi observées pour cette situation mais, naturellement, la structure symétrique de l'écoulement est détruite. En fait, l'écoulement multicellulaire est alors composé de deux cellules seulement. La cellule de recirculation d'origine solutale, qui a lieu à côté de la paroi verticale extérieure pour $\eta = 1$, a disparu pour $\eta = 0.5$ à cause de l'augmentation de la taille des vortex d'origine thermique.

Nous allons maintenant étudier les conditions nécessaires à l'obtention d'une séparation optimale des composants d'un fluide binaire saturant le milieu poreux. Selon la solution analytique, dans le cas de conditions de Neumann imposées sur les parois verticales, le problème est gouverné par cinq paramètres, à savoir R_T , Le , N , a et η . Dans ce qui suit, nous commençons en premier par le cas où $\eta = 1$, correspondant au problème de la cavité rectangulaire verticale. La figure (5.14) montre l'allure de la stratification massique verticale C_S à l'intérieur d'une cavité rectangulaire en fonction du nombre de Rayleigh R_T pour différentes valeurs

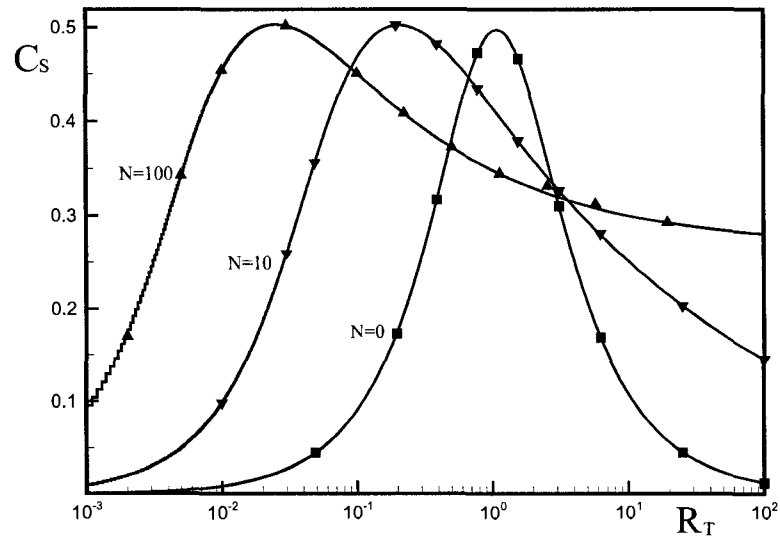


Figure 5.14 Effet de R_T et N sur le coefficient de séparation C_S pour $Le = 10$, $a = 0$ et $\eta = 1$

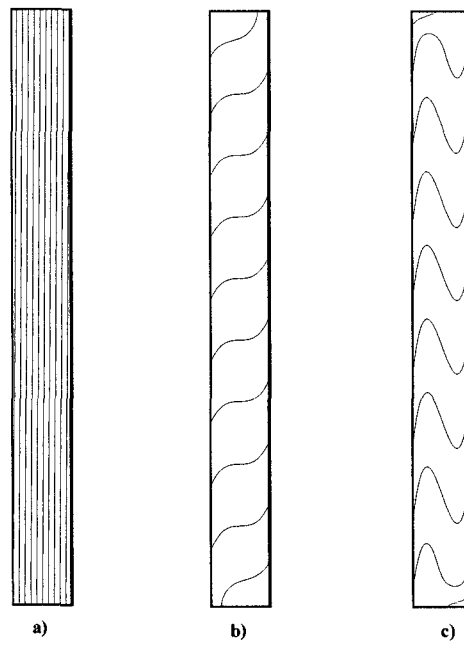


Figure 5.15 Contours des Isoconcentrations pour $Le = 10$, $N = 0$, $a = 0$ et $\eta = 1$
a) $R_T = 0.01$, b) $R_T = 1.1$ et c) $R_T = 10$

de N , et pour le cas $Le = 10$ et $a = 0$. La solution numérique de l'ensemble des équations gouvernantes (indiquée par des points noirs) est en parfait accord avec la solution analytique. La figure (5.15) illustre les contours numériques de la concentration obtenus pour $Le = 10$, $N = 0$, $a = 0$ et plusieurs valeurs de R_T . Il est clair, en examinant la figure (5.14), que pour une valeur donnée de N , les deux solutions numérique et analytique indiquent l'existence d'une valeur maximale de la séparation solutale C_S^{max} correspondante à une valeur optimale de Rayleigh R_T^{opt} . Pour $R_T \ll R_T^{opt}$. Il est observé que $C_S \rightarrow 0$ car la diffusion thermique est prédominante et la concentration se répartie dans une direction parallèle au parois thermiquement actives. Cette observation est illustrée sur la figure (5.15a), qui montre que pour $R_T = 10^{-2}$ (i.e $\ll R_T^{opt} \approx 1.1$, selon la figure (5.14)) les isoconcentrations sont presque des lignes verticales pour lesquelles $C_S \approx 0$. Pour $R_T \gg R_T^{opt}$, nous observons à travers la distorsion des isoconcentrations (figure(5.15c)) que la convection de nature thermique est prédominante. Le cas où $R_T = R_T^{opt}$ est montré sur la figure (5.15b). On observe que la combinaison des effets de la thermodiffusion et de la convection induit une séparation maximale. La figure (5.16)) illustre l'influence du rapport des forces de volume N sur les conditions de séparation optimale pour $Le = 10$, alors que les effets du nombre de Lewis sont montrés sur la figure (5.17) pour $N = 0$. Ces résultats indiquent d'une part, que la séparation maximale C_S^{max} est presque indépendante du nombre de lewis Le et du rapport de flottabilité N . D'autre part, le nombre de Rayleigh optimal R_T^{opt} diminue considérablement lorsque N et Le augmentent. Une tendance similaire, concernant l'influence du nombre de Lewis, a été trouvée analytiquement par Estèbe and Schott (1970) pour le cas de colonnes thermogravitationnelles poreuses et soumises à des conditions aux limites isothermes.

Nous considérons maintenant le cas d'un cylindre poreux vertical ($\eta \neq 1$). Le coefficient de stratification C_S en fonction de R_T , pour différentes valeurs du

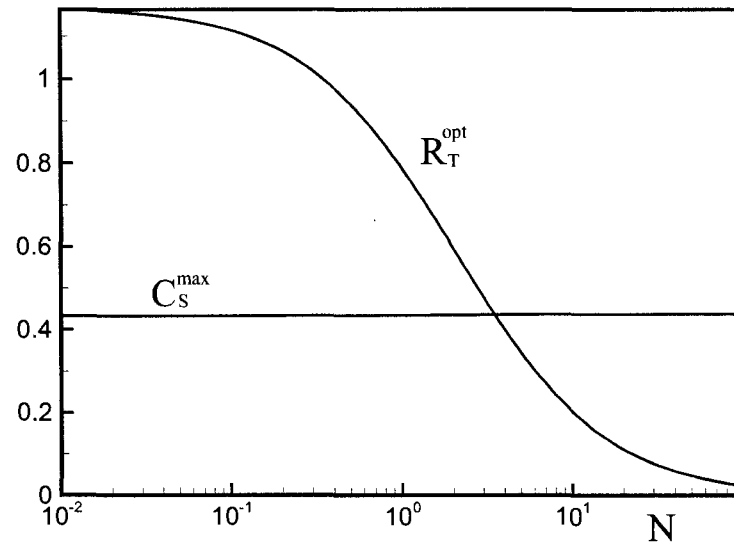


Figure 5.16 Effet du rapport des forces de flottabilité N sur le coefficient de séparation optimale $C_S^{\max}$ et le nombre de Rayleigh optimale R_T^{opt} pour $\eta = 1$, $a = 0$ et $Le = 10$

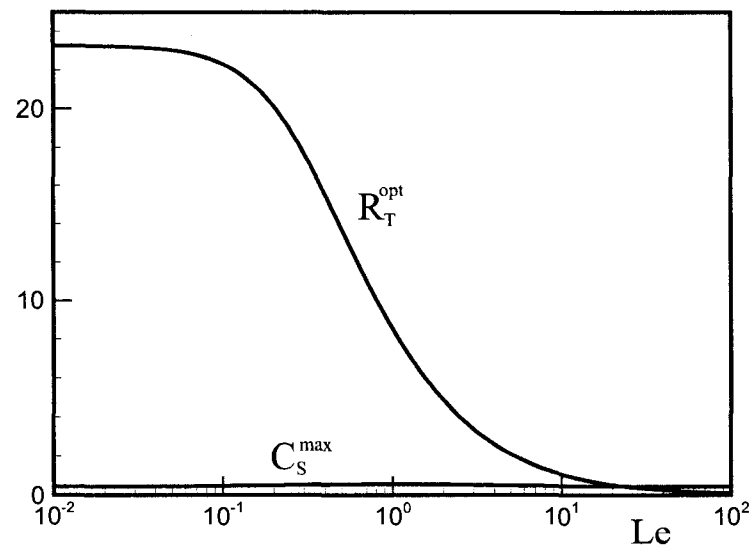


Figure 5.17 Effet du nombre de Lewis sur le coefficient de séparation optimale $C_S^{\max}$ et le nombre de Rayleigh optimale R_T^{opt} pour $\eta = 1$, $a = 0$ et $N = 0$

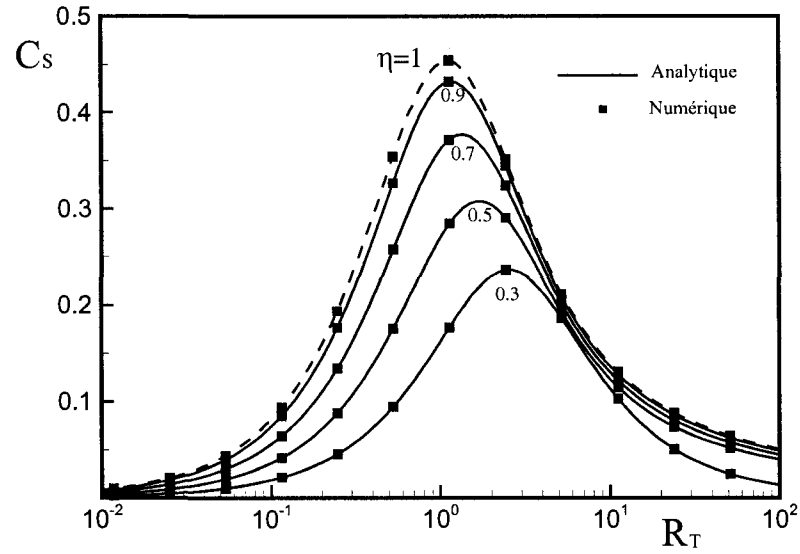


Figure 5.18 Effet du nombre de Rayleigh R_T sur le coefficient de séparation pour $N = 0$, $a = 0$ et $\eta = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ et 1

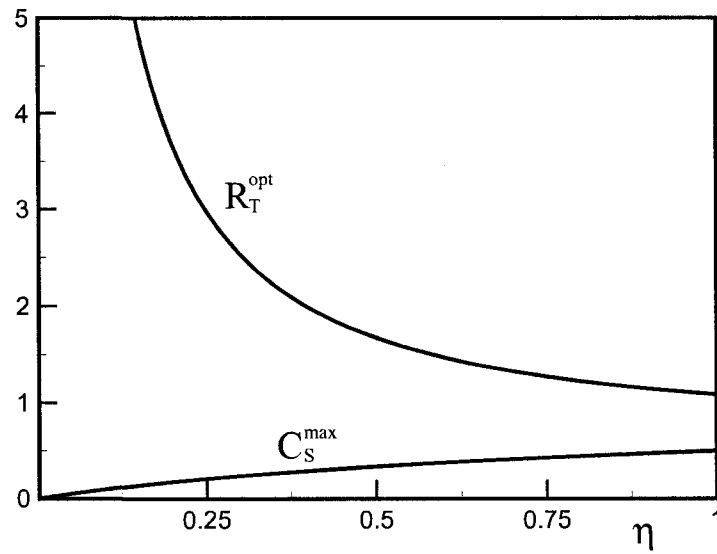


Figure 5.19 Effet du rapport des rayons η sur le coefficient de séparation optimale C_s^{max} pour $Le = 10$, $N = 0$ et $a = 0$

rapport des rayons η et pour $Le = 10$, $a = 0$ et $N = 0$ est montré sur la figure (5.18). Le cas limite du problème annulaire est aussi représenté sur le même graphique pour fin de comparaison. L'accord des deux résultats numérique et analytique est aussi excellent pour cette situation. L'influence de la courbure sur le processus de séparation est clairement illustré sur la figure (5.19). Il est observé, que pour un ensemble de paramètres donnés, le nombre de Rayleigh optimal R_T^{opt} augmente avec la courbure (i.e. quand η diminue). Il est aussi à signaler que l'influence de η sur C_S est de plus en plus importante lorsque le nombre de Rayleigh diminue au dessous de sa valeur optimale. Cependant, pour $R_T > R_T^{opt}$ la valeur de C_S est presque indépendante de η . L'effet de η sur R_T^{opt} est montré sur le graphique (5.19) pour $Le = 10$, $a = 0$ et $N = 0$. Nous remarquons que la séparation solutale atteint une valeur maximale pour le cas de la géométrie rectangulaire ($\eta = 1$) et diminue d'une façon monotone quand $\eta \rightarrow 0$. Le modèle analytique indique aussi, que le nombre de Rayleigh optimal R_T^{opt} diminue lorsque le rapport des rayons tend vers 0 .

5.1.2 Cas particulier pour $N = -1$

La transition du régime thermique dominant vers le régime solutal dominant se produit au voisinage de $N = -1$. Dans cette région, les forces de volume thermique et solutale sont comparables et opposées, leur résultante étant alors pratiquement nulle. D'après les résultats numériques et analytiques la coexistence des deux régimes, thermique et solutale, est possible. En fait, on a trouvé que dans cette région il peut exister des solutions multiples. La solution finale du problème dépend essentiellement de la façon d'amorcer l'écoulement convectif. Nous précisons aussi que dans cette section, nous étudions seulement le cas où des flux de chaleur et de masse sont imposées sur les parois verticales (cas Neumann). En effet c'est le seul cas pour lequel une solution analytique est possible.

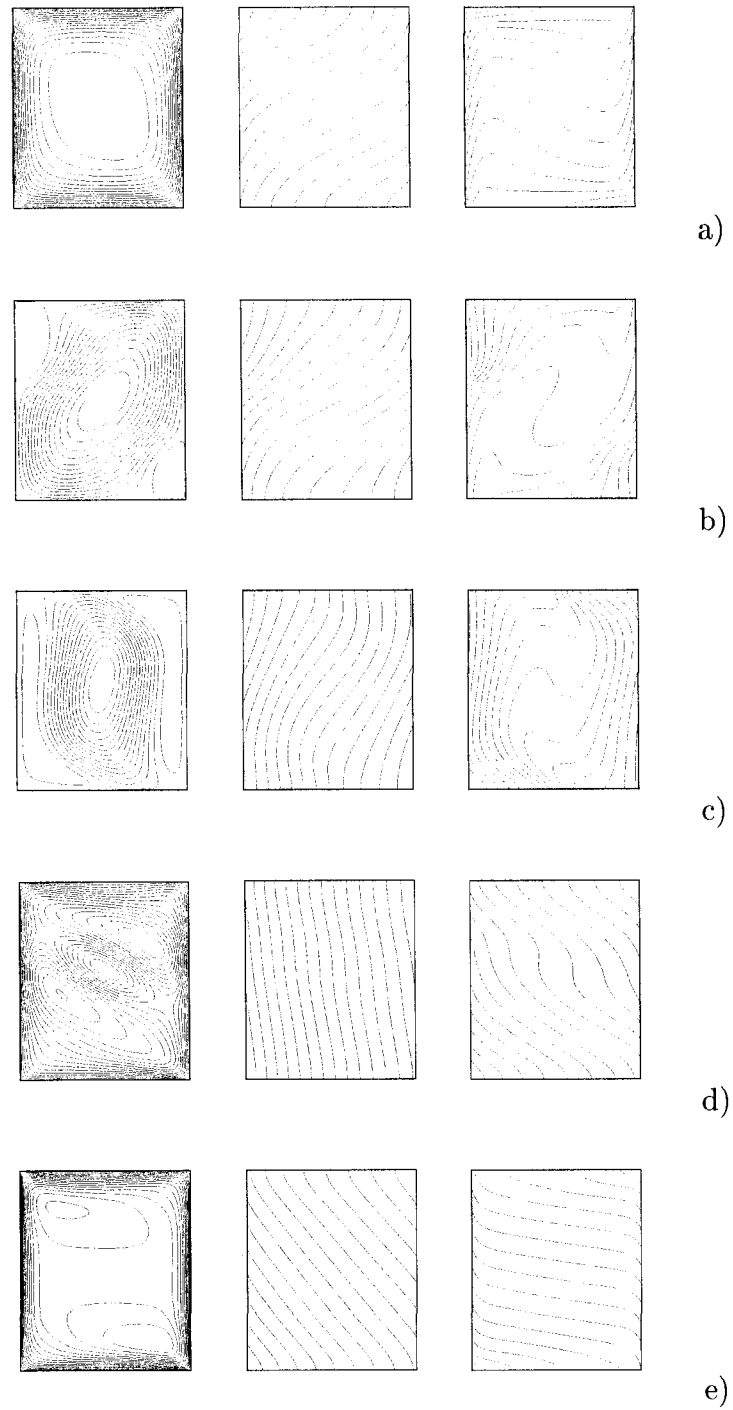


Figure 5.20 Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations (cas Neumann) pour $R_T = 50$, $Le = 10$, $a = 0$, $A = 1.75$ et $\eta = 0.7$: a) $N = 10$, b) $N = -1.5$, c) $N = -1.83$, d) $N = -1.85$ et e) $N = -10$

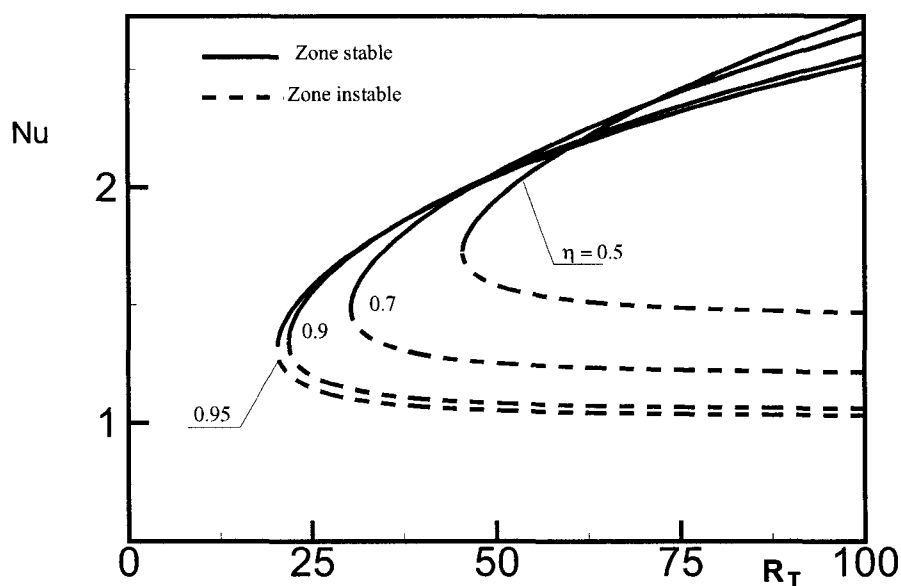


Figure 5.21 Influence du nombre de Rayleigh thermique R_T sur la variation du transfert thermique Nu pour $N = -1$, $a = 0$, $Le = 1.5$, $\eta = 0.5, 0.7, 0.9, 0.95$

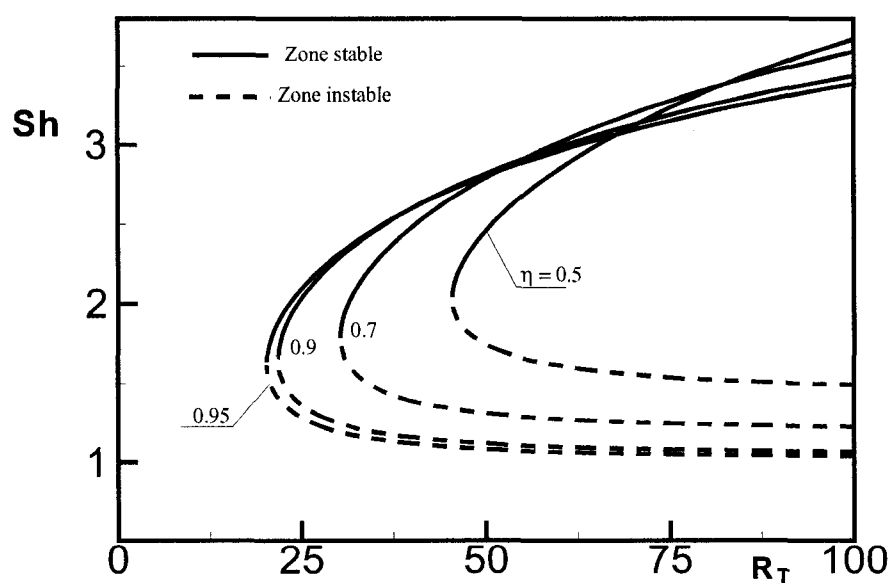


Figure 5.22 Influence du nombre de Rayleigh thermique R_T sur la variation du transfert massique Sh pour $N = -1$, $a = 0$, $Le = 1.5$, $\eta = 0.5, 0.7, 0.9, 0.95$

Afin de pouvoir observer la transition de l'écoulement entre la domination du thermique puis celle du solutal, nous avons représenté sur la figure (5.20) plusieurs configurations d'écoulements au voisinage de la zone de transition. Les résultats numériques montrent que la transition entre deux régimes se produit dans une gamme de valeur de N très étroite ($-2 < N < -1.3$). En prenant le cas du régime solutale dominant obtenu pour $N = 10$ (figure 5.20(a)) comme conditions initiales, les résultats numériques obtenues pour $N = -1.5$ (voir figure 5.20(b)) montrent que les effets thermiques engendrent une grande cellule de convection dans la région centrale de la cavité. Les effets solutaux, quant à eux, donnent naissance à deux petites cellules de convection tournant dans le sens trigonométrique. Ces dernières sont situées au voisinage du coin inférieur droit et du coin supérieur gauche de la cavité. En diminuant la valeur de N de -1.5 à -1.83 , on constate que les deux petites cellules prennent encore plus d'ampleur sur celle au centre (figure 5.20(c)) jusqu'à l'écraser complètement (figure 5.20(d)) et donner naissance à un écoulement convectif dominé par les effet solutaux tournant dans le sens anti-horaire (figure 5.20(e)). Notons qu'il est très difficile d'observer le phénomène de transition pour des grands rapports de forme. Pour cette raison, le cas considéré ici correspond à $A = 1.75$.

La figure (5.21) illustre la variation du transfert thermique Nu en fonction de R_T , prédite par la solution analytique. La bifurcation résultante est souscritique. Les traits continus sont les solutions stables de l'écoulement convectif alors que les traits discontinus sont des solutions instables, impossibles à observer numériquement. Cette solution instable, correspond en réalité à une deuxième solution de l'équation différentielle de ψ Eq.(4.36). La valeur du nombre de Rayleigh critique qui sépare le régime de convection et de la conduction pure augmente avec la diminution de l'épaisseur de la cavité η .

Cette bifurcation souscritique est aussi observée sur la figure (5.22), qui représente

l'influence du nombre de Rayleigh thermique R_T sur la variation du transfert massique Sh . Pour des faibles valeurs de η le transfert de masse croît plus rapidement que quand $\eta \rightarrow 1$. Aussi le nombre Rayleigh critique, marquant le début de la convection solutale, augmente considérablement pour des faibles valeurs du rapport des rayons η . La variation de l'amplitude de la fonction de courant ψ_{max} en fonction du nombre de Lewis Le est montrée sur la figure (5.23) pour $R_T = 50$. Les résultats indiquent que pour $Le > 1$, plus η est faible plus l'intensité ψ est importante, alors que pour $Le < 1$ la situation se renverse. Cependant, l'écart entre la fonction de courant pour $\eta = 0.5$ et 0.9 reste faible, à cause de la domination des effets solutaux face à un flux de chaleur moyennement important R_T .

5.1.3 Cas asymptotique

Sur la figure (4.4), illustrant les solutions asymptotiques du transfert thermique et massique en fonction du nombre de Rayleigh R_T pour $Le = 10$, $N = 0.01$, $a = 0$ et $\eta = 0.5$, une échelle logarithmique a été utilisée. Ici l'écoulement est totalement dominé par les effets thermiques à cause de la faible valeur de N . Le transfert de masse représenté par le nombre de Sh est beaucoup plus important que le transfert thermique Nu . La tendance des nombres de Sherwood et de Nusselt, quand R_T est très grand, coïncide parfaitement avec les expressions asymptotiques que nous avons obtenues dans le chapitre précédent, Eq.(4.57). Ces résultats asymptotique du régime de la couche limite sont en parfait accord avec ceux obtenus numériquement. Pour le cas de la figure (5.24), les résultats numériques sont là aussi en bon accord avec les résultats analytiques. Les solutions du transfert thermique et massique asymptotiques en fonction du nombre de Rayleigh R_T sont représentées pour $Le = 0.01$, $N = 10$ et $\eta = 0.9$. Les valeurs de Le et N considérées, font que les mouvements convectifs sont engendrés par les effets solutaux, ce qui permet l'intensification du transfert thermique par rapport au transfert solutal,

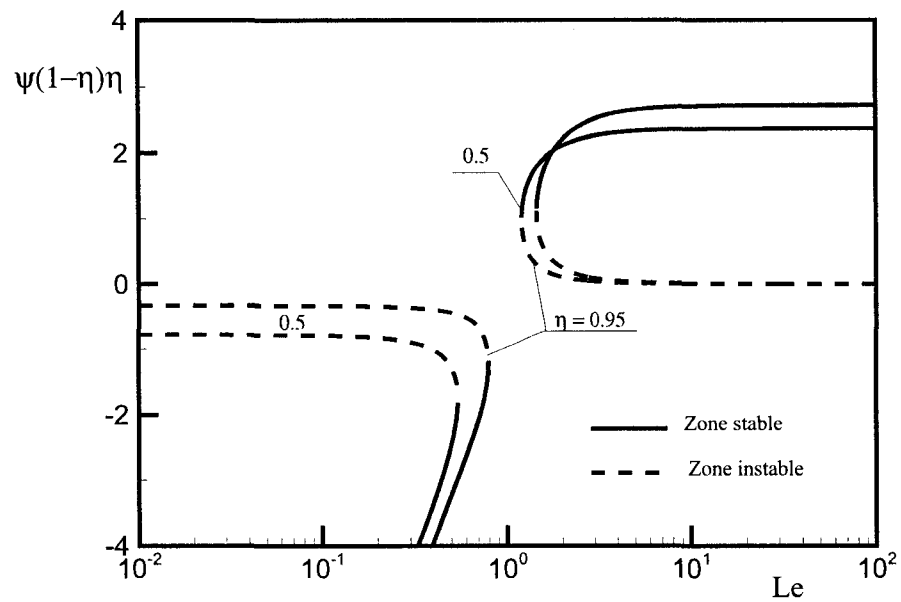


Figure 5.23 Influence du nombre de Lewis Le sur l'intensité de la fonction de courant ψ pour $R_T = 50$, $N = -1$, $a = 0$ et $\eta = 0.5, 0.95$

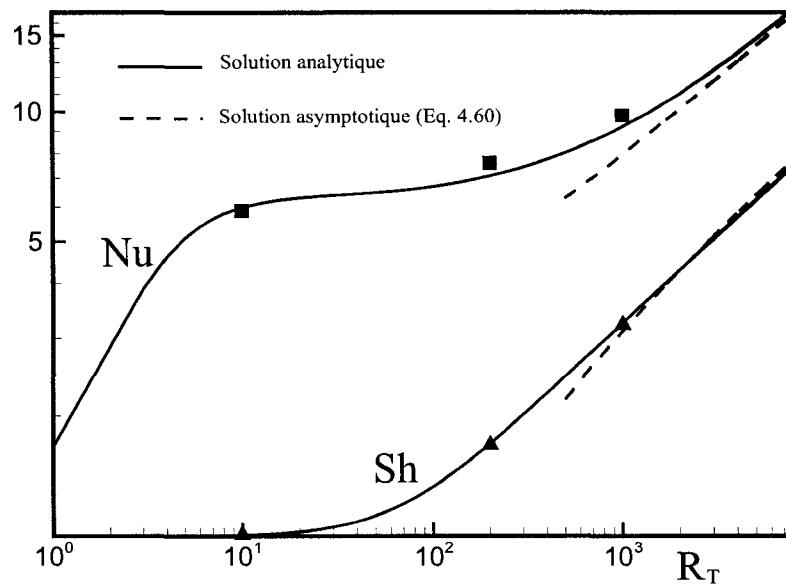


Figure 5.24 Solutions asymptotique du transfert thermique et massique en fonction du nombre de Rayleigh R_T pour $Le = 0.01$, $N = 10$, $a = 0$ et $\eta = 0.9$

à cause de l'intense flux de chaleur contrôlé par le nombre de Rayleigh R_T . La limite des nombres de Sherwood et de Nusselt quand R_T augmente, coïncide parfaitement avec les expressions asymptotiques que nous avons obtenues dans le chapitre précédent Éq. (4.58).

5.2 Milieu fluide

Dans cette section, seul le cas de la cavité cylindrique fluide, soumise à des flux de chaleur et de concentration constants, sera détaillé (conditions au limites de type Neumann). En fait une grande ressemblance des phénomènes présentés dans le cas poreux a été observée lorsque nous avons considéré la cavité remplie d'un fluide binaire.

Nous avons présenté sur la figure (5.25) des résultats numériques obtenus pour une cavité cylindrique verticale fluide soumise à des flux de chaleur et de concentration. Ces résultats ont été obtenus moyennant les paramètres de contrôle suivants: $Ra = 10^4$, $Le = 1.5$, $N = 0.5$, $\eta = 0.1$, $A = 6$ et $a = 0$ (convection double diffusive) et 1 (convection induite par effet Soret). Les lignes de courant, isothermes et isosalines sont représentées sur le graphe de la gauche vers la droite. Il est clair ici que les propriétés de centrosymétrie observées pour le cas de cavité rectangulaire (Boutana et al. (2004)) sont complètement détruites. Ainsi, l'effet de la diminution de η induit un décalage de la cellule de convection vers la paroi verticale extérieure, induisant ainsi la perte de symétrie sur les champs de température et de concentration. Ces résultats indiquent clairement que pour des cavités de grand rapport de forme ($A \gg 1$), l'écoulement est parallèle au coeur de la géométrie alors que les isothermes et les isoconcentrations sont linéairement stratifiées dans la direction verticale. Nous précisons que la solution analytique développée dans le chapitre précédent est basée sur ces observations. En fait, ces résultats sont bien sûr qualitativement

A	Résultats numériques				Résultats analytiques
	1	2	4	6	
ψ_0	4.33	4.71	4.50	4.50	4.49
Nu	3.10	3.66	3.61	3.61	3.59
Sh	4.04	4.45	4.38	4.38	4.37

Tableau 5.1 Influence du rapport de forme A sur les valeurs numériques de ψ_0 , Nu , Sh pour $Ra = 10^4$, $Le = 1.5$, $N = 0.5$, $\eta = 0.5$ et $a = 0$

similaires à ceux observés pour une cavité poreuse.

Des tests numériques ont été réalisés afin de déterminer la valeur minimale du rapport de forme A , au-dessus duquel l'écoulement peut être considéré parallèle. Ces résultats sont présentés sur la tableau (5.1). Il ont été obtenus pour des conditions aux limites de type Neumann et pour $Ra = 10^4$, $Le = 1.5$, $N = 0.5$ et $a = 0$. Pour fins de comparaison, les prédictions de la solution analytique (pour $A \gg 1$) sont aussi incluses dans ce tableau. Ces résultats indiquent un bon accord entre la solution numérique et celle obtenue analytiquement pour ($A \gg 4$). Pour cette raison tous les résultats numériques de cette section sont obtenus pour $A = 6$. Nous avons aussi adopté un nombre de $Pr = 7$, qui correspond au cas de l'eau.

Les figures (5.26(a)-(c)) illustrent les effets du nombre de Rayleigh thermique R_T sur la variation de la fonction de courant ψ_{max} , le transfert de chaleur Nu , et le transfert de masse Sh , pour $N = 0.5$, $Le = 1.5$, $a = 0$ et $\eta = 0.3, 0.5, 0.7$ et 1 . Ces

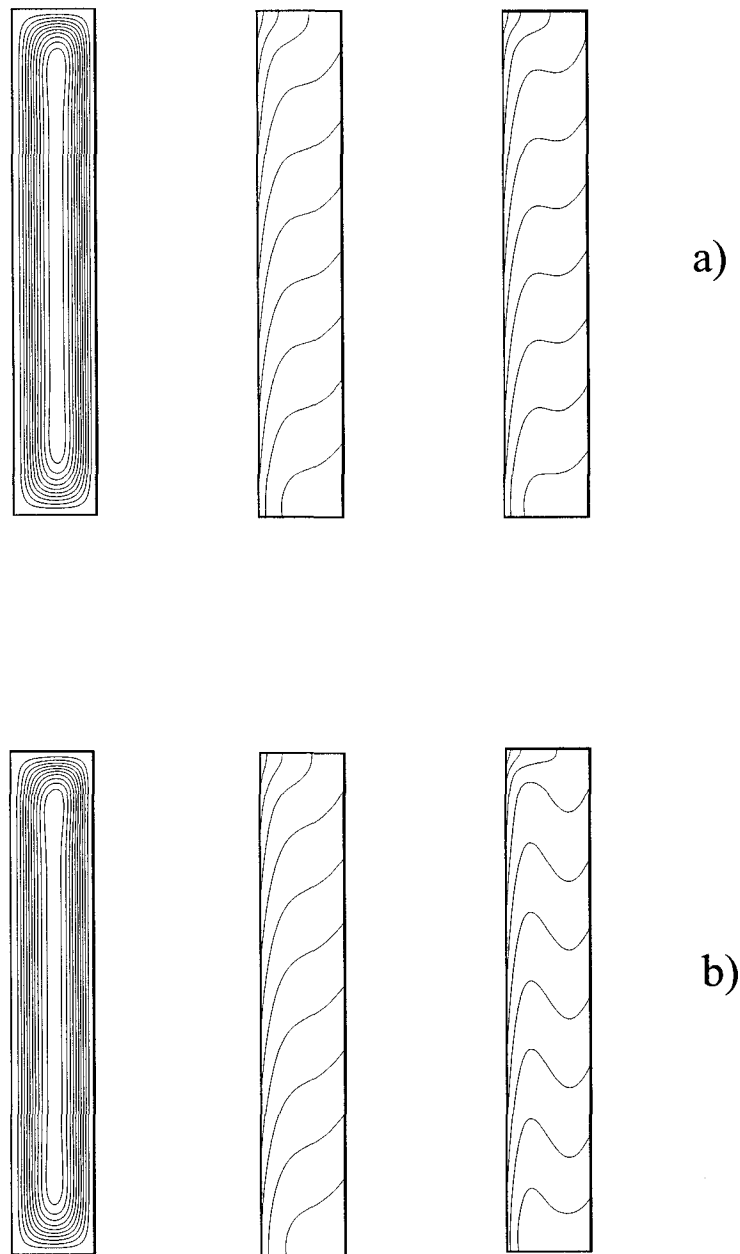
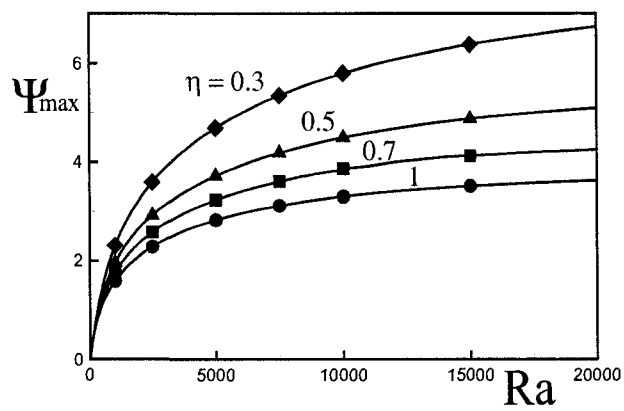
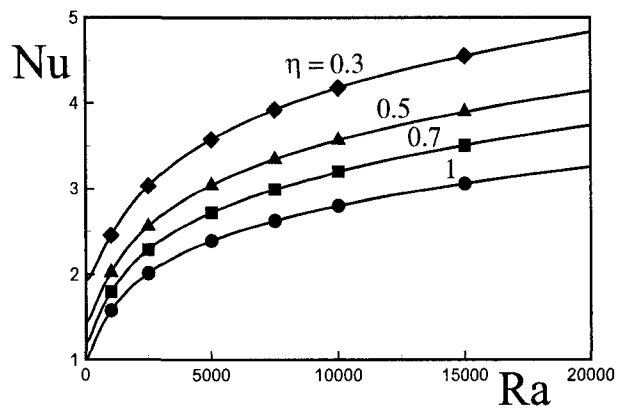


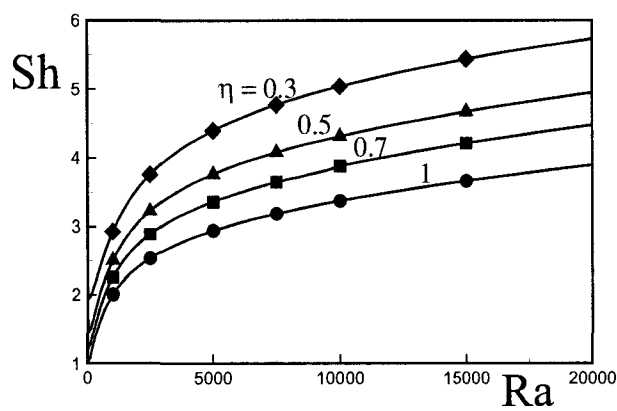
Figure 5.25 Lignes de courant (gauche), isothermes (centre) et isoconcentrations (droite) pour $R_T = 10^4$, $Le = 1.5$, $N = 0.5$, $A = 6$ et $\eta = 0.1$. (a) $a = 0$, $\psi_{max} = 11.31$, $Nu = 6.17$ et $Sh = 7.27$; (b) $a = 1$, $\psi_{max} = 9.40$, $Nu = 5.75$ et $Sh = 11.30$



a)

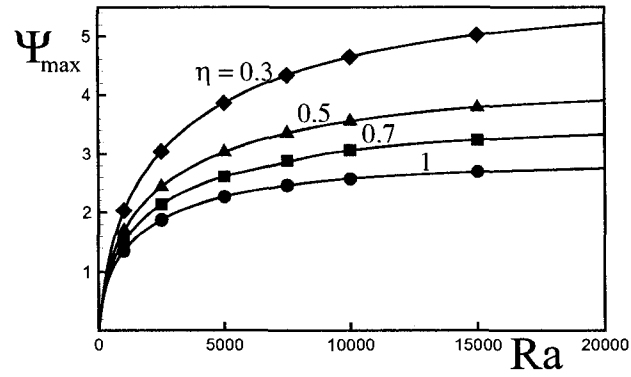


b)

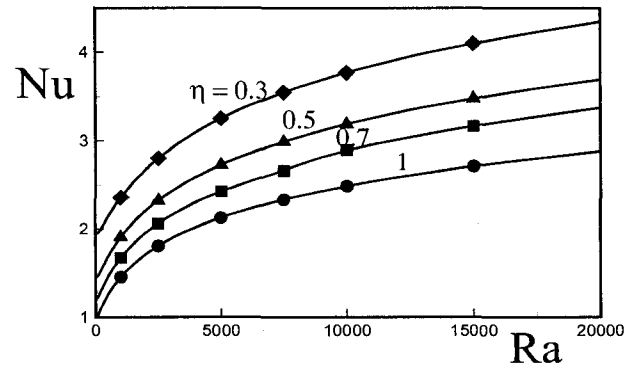


c)

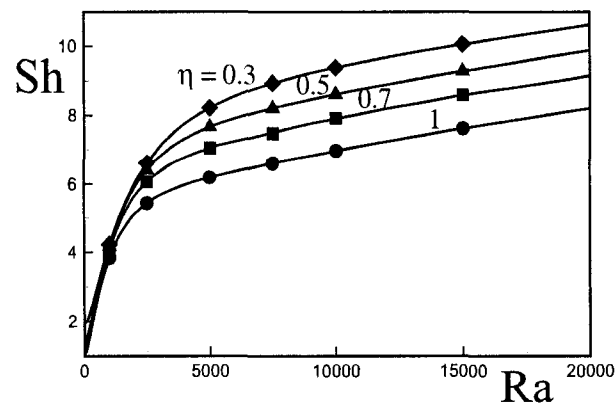
Figure 5.26 Influence du nombre de Rayleigh thermique R_T sur la variation de la fonction de courant $\psi_{\max}$ (a), nombre de Nusselt Nu (b) et le nombre de Sherwood Sh (c) pour $N = 0.5$, $Le = 1.5$, $a = 0$, $\eta = 0.3, 0.5, 0.7$ et 1



a)



b)



c)

Figure 5.27 Influence du nombre de Rayleigh thermique R_T sur la variation de la fonction de courant $\psi_{\max}$ (a), nombre de Nusselt Nu (b) et le nombre de Sherwood Sh (c) pour $N = 0.5$, $Le = 1.5$, $a = 1$ $\eta = 0.3, 0.5, 0.7$ et pour 1

résultats sont en accord avec les résultats numériques représentés par des points. Des résultats similaires sont aussi présentés sur les figures (5.27(a)-(c)) pour le cas de la convection induite par effet Soret ($a = 1$). Pour des faibles valeurs du nombre de Rayleigh, ψ_{max} devient très petit et les deux nombres de Nusselt et Sherwood approchent la valeur du régime de conduction pure soit $r_i \ln \eta$. Ceci découle de la normalisation utilisée dans cette thèse. Une augmentation du nombre de Rayleigh est associée avec une diminution de ΔT et ΔS de sorte que les nombres de Nusselt et Sherwood croissent d'une façon monotone avec Ra . Pour une valeur donnée de Ra il est clair que, selon les figures (5.26) et (5.27), toute augmentation du rapport des rayons η induit une diminution de la fonction de courant ψ_{max} .

La figure (5.28) montre l'effet du nombre de Lewis Le sur la fonction de courant ψ_{max} , la plus forte valeur de la fonction de courant à l'intérieure de la cavité. Les paramètres utilisés sont $Ra = 10^4$, $N = 0.5$, $a = 0$, $a = 1$, $\eta = 0.1$ et 1 . La solution analytique, représentée par des lignes solides (double diffusion) et des lignes discontinues (convection induite par effet Soret) est en parfait accord avec la solution numérique des équations gouvernantes, représentée ici par des points. D'une part, Nous remarquons que pour une valeur donnée du rapport des rayons η , et une grande valeur du nombre de Lewis ($Le \geq 10$), l'intensité de la fonction de courant devient complètement indépendante, non seulement du nombre de Lewis, mais aussi du mode convectif ($a = 0$ ou 1). D'autre part, lorsque le nombre de Lewis descend en dessous de 0.1 , l'intensité devient aussi indépendante de Le . Par contre ψ_{max} dépend fortement du paramètre a , et encore plus lorsque η augmente. Pour des valeurs intermédiaires de Le nous observons une bonne transition de la courbe de la fonction de courant entre les valeurs obtenues pour $Le \rightarrow 0$ et $Le \rightarrow \infty$.

L'effet du rapport des forces de volume N sur l'intensité de la convection ψ_{max} est représenté sur la figure (5.29), pour $Ra = 10^4$, $Le = 10$, $a = 0$, $\eta = 0.3$, 0.5 , 0.7 et 1 . Ici aussi on souligne encore l'excellence de l'accord entre les deux

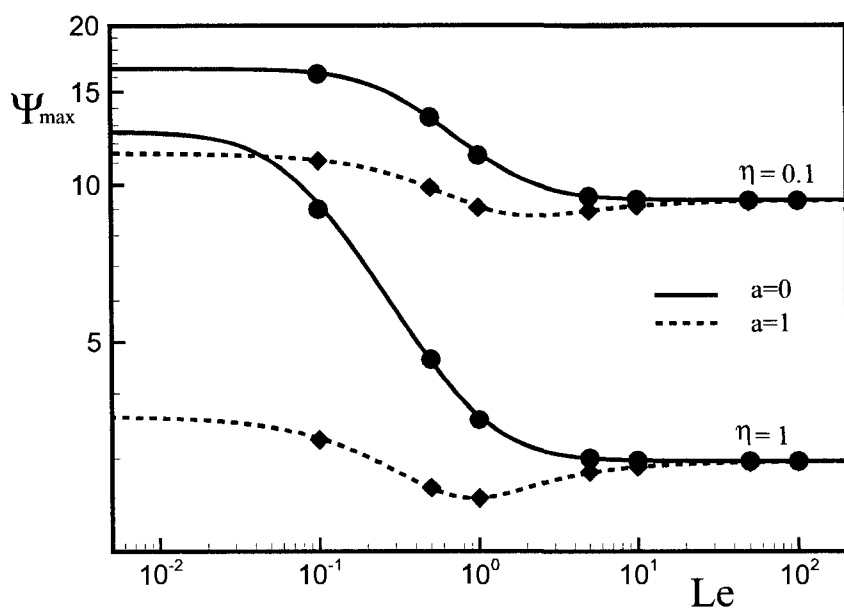


Figure 5.28 Influence du nombre de Lewis Le sur la variation de la fonction de courant ψ pour $Ra = 10^4$, $N = 0.5$, $\eta = 0.1$ et 1

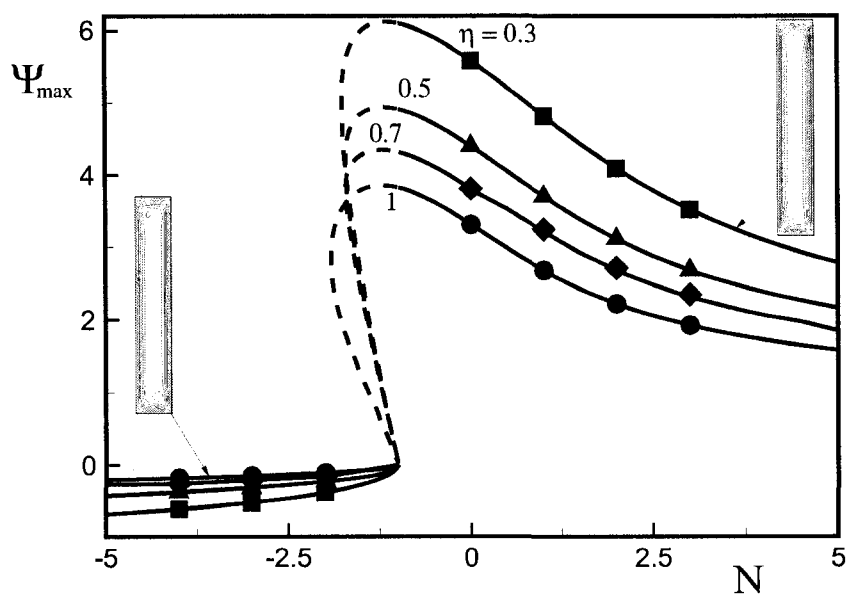


Figure 5.29 Influence des forces volumiques N sur la variation de la fonction de courant ψ pour $Ra = 10^4$, $Le = 10$, $a = 0$, $\eta = 0.3$, 0.5 et 1

solutions analytique et numérique. Le rapport des forces de flotabilité est varié de -5 vers 5 . Ceci couvre la zone où l'écoulement devient coopérant et dominé par les effet solutaux ($N = 5$), la zone d'écoulement purement dominé par les effets thermiques ($N = 0$) et celle où les forces sont opposées mais l'écoulement est dominé par les effets solutaux ($N = -5$). Lorsque $N = 0$, i.e en l'absence des effets de concentration, le mouvement convectif est induit par les gradients de température seulement, donnant ainsi naissance à une circulation dans le sens horaire ($\psi_{max} > 0$). Lorsque N dépasse zéro, les effets thermiques et solutaux agissent dans la même direction et le mouvement convectif dans le sens horaire ($\psi_{max} > 0$) est dit coopérant. Pour des valeurs plus grandes de N ($N \rightarrow \infty$) l'écoulement devient de plus en plus dominé par les effets les forces de volume de nature solutale. Pour $N < 0$ les deux forces de volume deviennent opposées l'une à l'autre. Pour une marge de N variant entre 0 et -1 , les forces de volume thermiques dominant clairement l'écoulement de telle facon que ψ_{max} reste positif. Pour des larges valeurs négatives de N ($N \rightarrow -\infty$) l'écoulement redevient dominé par les effets solutaux mais, étant donné que N est négatif, la circulation se produit dans le sens anti-horaire ($\psi_{max} < 0$). Naturellement, la solution analytique indique que pour $|N| \rightarrow \infty$ la solution est identique, à l'exception de la direction de circulation de l'écoulement.

Nous discutons maintenant de la transition de l'écoulement d'une direction à une autre. Le cas particulier $N = -1$ correspond à une circulation où les forces induites par les effets thermiques et solutaux sont à l'opposé l'un de l'autre mais de même intensité. Ce problème a été étudié pour le cas particulier d'une cavité rectangulaire ($\eta = 1$) par Mamou et al. (1998) et Joly et al. (2000). Cette situation correspond à un problème de stabilité similaire au problème classique de Bénard. La naissance de la convection a lieu selon un nombre de Rayleigh critique qui dépend du nombre de Lewis Le et du paramètre a . En dessous de cette valeur

critique le fluide demeure à l'état de repos ($\psi = 0$, $Nu = Sh = 1$). Pour notre géométrie, il est intéressant de prédire la valeur du nombre de Rayleigh critique en fonction du paramètre η . Au voisinage de $N = -1$, la figure (5.29) indique que les branches supérieures, correspondantes à des cellules circulant dans le sens positif, sont connectées à celles d'en bas par des lignes discontinues pour lesquelles la solution analytique indique la formation de trois cellules de sens contraire. Ce type d'écoulement a été observé numériquement par Mamou et al. (1998) dans le cas d'une cavité rectangulaire. Par ailleurs, et comme démontré par ces auteurs, cette situation ne peut être observée (numériquement) que pour des cavités présentant un faible rapport de forme ($A \approx 1$ ou 2). Pour des valeurs plus importante de A l'écoulement devient oscillant. Pour notre géométrie la solution analytique indique que cette structure d'écoulement multicellulaire dépend du rapport des rayons η . Numériquement, nous n'avons malheureusement pas pu prouver l'existence de telle structure d'écoulement multicellulaire.

CHAPITRE 6

ÉTUDE DU PROBLÈME D'INSTABILITÉ

6.1 Introduction

La différence fondamentale entre la convection naturelle dans les cavités chauffées latéralement et celles chauffées par le bas est bien connue, théoriquement et expérimentalement (Bejan (1995)). Cette différence réside dans le fait que pour les cavités chauffées par le bas, le gradient thermique imposé doit excéder une certaine valeur, dite seuil critique, pour pouvoir observer l'apparition des mouvements convectifs. Par contre, pour les cavités chauffées latéralement, la convection se déclenche aussitôt que nous appliquons le moindre gradient de chaleur. Une analyse de l'état conductif en cavité verticale chauffée latéralement s'avère à cette égard inutile. Cependant en convection thermosolutale, il existe un cas particulier pour lequel une solution d'équilibre est obtenue lorsque les forces de gravité d'origine thermique sont égales et opposées à celles d'origine solutale ($N = -1$). Nous précisons que l'état conductif peut devenir instable au delà d'une valeur critique du nombre de Rayleigh. Il est alors intéressant d'étudier, dans notre cavité cylindrique verticale poreuse chauffée différentiellement et isolée au niveau des parois horizontales, l'écoulement prenant naissance à l'approche de cette valeur critique lors de la perte de stabilité de la solution d'équilibre.

De nombreuses études du problème d'instabilité dans une couche poreuse horizontale ou verticale, soumise à diverses conditions aux limites, ont été entreprise dans le passé par de nombreux d'auteurs. En géométrie rectangulaire horizontale, nous citons les contributions de Nield (1967), Taunton and Lightfoot (1972),

Platten and Legros (1977), Nield and Bejan (1999), Mamou et al. (1995b) qui ont montré l'existence de nombres de Rayleigh supercritiques caractérisant le seuil de la convection. Ils ont aussi étudié, le régime de la convection surstable et oscillant ainsi que ses conditions d'existence. En cavité horizontale cylindrique, Mojtabi and Caltagirone (1979) ont étudié la stabilité de l'écoulement bidimensionnel sur la base de la méthode de perturbation. La solution obtenue s'est limitée à la simulation de la partie supérieure de la couche cylindrique, pour de faibles valeurs du nombre de Rayleigh R_T et de η . Une étude de la stabilité de la convection naturelle dans un cylindre présentant un faible rapport de rayons η a été menée par Walton (1980). Il a démontré que pour un nombre de Prandtl Pr supérieur à 0.24 l'enclenchement de l'instabilité de nature thermique aura lieu dans la partie supérieure du cylindre. Par contre, quand le nombre de Prandtl est inférieur à 0.24 les instabilités peuvent avoir lieu dans tout le cylindre. Une étude de stabilité linéaire de l'écoulement de l'air confiné entre deux cylindres horizontaux a été conduite par Choi and Kim (1993). L'étude tridimensionnelle numérique et expérimentale par Dyko et al. (1999) a permis d'observer le développement de l'écoulement secondaire en vortex hélicoïdal au sein d'un cylindre de mince épaisseur, ainsi que les interactions avec l'écoulement primaire de l'air. Les simulations numériques ont permis d'analyser les facteurs qui influent la taille et le nombre des vortex transitionnels.

Comme mentionné ci-haut, il est également possible pour une couche inclinée ou verticale, en présence d'un gradient thermique et solutale, que le fluide se trouve au repos. Cette situation particulière n'aura lieu que lorsque les forces de flottabilité thermique et solutale sont égales et opposées ($N = -1$). Ce type de problème particulier présente une complexité des équations de base pour lesquelles il est difficile de trouver des solutions analytiques. Ceci explique le nombre réduit de recherches réalisées jusqu'à présent dans le cadre de ce type de situation. Parmi les principales recherches en configuration rectangulaire verticale, nous mentionnons

les travaux de Birikh et al. (1972), Gill and Kirkham (1970), Bertholz (1978), Kamotani et al. (1985), Ostrach et al. (1995) et Ghorayeb and Mojtabi (1997) qui se sont intéressés à l'étude de l'enclenchement de la convection double-diffusive en cavités verticales pour différentes conditions au limites. Ils ont déterminé les valeurs des nombres de Rayleigh critique marquant le seuil critique de la convection. L'occurrence de mouvements de convection souscritique, i.e ayant lieu à un nombre de Rayleigh inférieur au Rayleigh super critique, ainsi que l'existence de solutions multiples ont été mises en évidence. En cavité cylindrique, nous citons Charlson and Sani (1970) qui ont étudié l'instabilité de l'état de repos. Ils ont démontré que, pour ce type de configuration physique, le nombre de Rayleigh critique R_{TC} est complètement indépendant du nombre de prandtl Pr . L'influence de l'effet Soret sur ce genre d'écoulement a été étudiée par Hardin et al. (1990) par une méthode de stabilité linéaire basée sur la technique de Galerkin. L'étude s'est étendue sur plusieurs types de mixture de fluide et de grandes valeurs du nombre de Lewis Le et du rapport de rayons η .

Cette dernière partie de la thèse est consacrée à l'étude de la stabilité dynamique d'un fluide binaire ($N = -1$) saturant un milieu poreux soumis, en premier lieu, à des flux de chaleur et de concentration imposés sur les parois verticales, et en deuxième lieu à des températures et concentrations fixes le long des parois actives. La configuration géométrique du système considéré est présentée sur la figure (2.1). Nous étudions en premier le cas de l'instabilité de l'état de repos, qui aura lieu lorsque les forces de volumes induites par les effets thermique et solutaux sont de même intensité et de sens opposés. Pour cette situation, l'état de conduction pure est une solution valable des équations (2.24)-(2.27). Ceci indique l'existence d'un nombre de Rayleigh souscritique R_T^{sous} marquant l'apparition de la convection. Ce nombre de Rayleigh critique sera prédit dans la section qui suit sur la base d'une analyse de stabilité linéaire. Le deuxième volet de ce chapitre sera

consacré à l'étude de l'écoulement convectif afin de prédire l'enclenchement de la bifurcation oscillatoire dite de Hopf. Par la suite et pour déterminer le nombre de Rayleigh critique ainsi que la structure de l'écoulement au seuil de la convection, nous utilisons l'approche classique de la stabilité linéaire. Cette dernière consiste à perturber hydrodynamiquement l'état stable du système et étudier, par la suite, l'évolution de cette petite perturbation dans le temps. L'analyse de stabilité linéaire permet d'identifier ces points de bifurcation possibles de l'écoulement secondaire, et de montrer aussi si cette bifurcation est stationnaire ou oscillatoire. Comme nous allons le voir plus loin dans ce chapitre, cette analyse permet non seulement de déterminer le seuil critique de stabilité mais encore, la courbe de stabilité marginale ainsi que la structure de l'écoulement.

6.2 Stabilité de l'état de repos (cas flux imposés)

Le fluide saturant le milieu poreux peut se maintenir au repos dans une cavité verticale lorsque les forces de volumes sont égales et opposées ($N = -1$). Dans ce cas particulier la force de poussée exercée sur le fluide est nulle. Comme le nombre de Lewis est différent de l'unité, la convection est possible mais seulement au-delà d'un seuil critique. Pour cette situation particulière ($N = -1$), la solution de conduction pure s'écrit ainsi:

$$\begin{aligned}\Psi_C &= 0 \\ T_C &= -r_i \ln r \\ S_C &= -r_i \ln r\end{aligned}\tag{6.1}$$

et est une solution possible des équations gouvernantes (2.24)-(2.27). Dans le but d'étudier la stabilité de cet état de repos, il est alors pratique de réécrire

les équations gouvernantes en fonction de $\tilde{\Psi} = \Psi - \Psi_C$, $\tilde{\Theta} = T - T_C$ et $\tilde{\Phi} = S - S_C$.

6.2.1 Théorie de la stabilité linéaire

Dans cette section la théorie de la stabilité linéaire, basée sur la technique des éléments finis, est appliquée au milieu poreux. La solution de l'état de perturbation est supposée avoir la forme suivante:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Psi}(t, r, z) &= \Psi_0 e^{pt} F(r, z) \\ \tilde{\Theta}(t, r, z) &= \Theta_0 e^{pt} G(r, z) \\ \tilde{\Phi}(t, r, z) &= \Phi_0 e^{pt} G(r, z) \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

où p est le taux de croissance de la perturbation, $F(r, z)$ et $G(r, z)$ sont des fonctions inconnues qui satisfont les conditions aux limites, données par (2.36)-(2.38). Les fonctions perturbées de la fonction de courant, température et concentration sont décrites par: $\tilde{\Psi}(r, z)$, $\tilde{\Theta}(r, z)$ et $\tilde{\Phi}(r, z)$; alors que Ψ_0 , Θ_0 et Φ_0 sont des petites amplitudes constantes.

En introduisant (6.2) dans les équations (2.24)-(2.27), et en négligeant les termes non linéaires de second ordre, nous obtenons le système linéaire suivant:

$$\Psi_0 \nabla^2 F - \Psi_0 \frac{2}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = -r R_T (\Theta_0 - \Phi_0) \frac{\partial G}{\partial r} \quad (6.3)$$

$$p \Theta_0 G + \frac{r_i}{r^2} \Psi_0 \frac{\partial F}{\partial z} = \Theta_0 \nabla^2 G \quad (6.4)$$

$$p \varepsilon \Phi_0 G + \frac{r_i}{r^2} \Psi_0 \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{Le} (\Phi_0 - a \Theta_0) \nabla^2 G \quad (6.5)$$

Les conditions aux limites correspondantes sont :

$$F = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial G}{\partial r} = 0 \quad \text{pour} \quad r = r_i; r_o \quad (6.6)$$

$$F = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial G}{\partial r} = 0 \quad \text{pour} \quad z = \pm \frac{A}{2} \quad (6.7)$$

En utilisant la méthode des résidus pondérés de Galerkin, la formulation variationnelle des équations (6.3)-(6.4) obtenue est la suivante:

$$\Psi_0 \left[\int_{\Omega} \nabla F \cdot \nabla w \, d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{\partial F}{\partial n} w \, d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{2}{r} \frac{\partial F}{\partial r} w \, d\Omega \right] = R_T(\Theta_0 - \Phi_0) \int_{\Omega} r \frac{\partial G}{\partial r} w \, d\Omega \quad (6.8)$$

$$p \, \Theta_0 \int_{\Omega} G \vartheta \, d\Omega + \Psi_0 \int_{\Omega} \frac{r_i}{r^2} \frac{\partial F}{\partial z} \vartheta \, d\Omega = \Theta_0 \left[\int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} \vartheta \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla G \cdot \nabla \vartheta \, d\Omega \right] \quad (6.9)$$

$$p\varepsilon\Phi_0 \int_{\Omega} G \vartheta d\Omega + \Psi_0 \int_{\Omega} \frac{r_i}{r^2} \frac{\partial F}{\partial z} \vartheta d\Omega = \frac{1}{Le}(\Phi_0 - a\Theta_0) \left[\int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} \vartheta d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla G \cdot \nabla \vartheta d\Omega \right] \quad (6.10)$$

où $w(r, z)$ et $\vartheta(r, z)$ sont les fonctions admissibles satisfaisant les conditions aux limites données par (6.6) et (6.7), $H^1(\Omega)$ le cadre fonctionnel, Γ le contour du domaine physique et n le vecteur normal.

Le domaine de calcul est discrétisé selon des éléments rectangulaires connus sous le nom d'éléments Lagrangiens cubiques à neuf noeuds (nine-nodded Lagrangian cubic elements), avec un maillage non uniforme. Dans chaque élément les profils

inconnus de $F(r, z)$ et $G(r, z)$ sont approximés par:

$$K^e(r, z) = \sum_{j=1}^9 \mathcal{N}_j(r, z) K_j^e \quad (6.11)$$

où K désigne F et G , $\mathcal{N}_j(r, z)$ sont les fonctions Lagrangiennes et F_j^e et G_j^e sont les valeurs nodales élémentaires.

Afin d'observer d'éventuels modes oscillatoires d'instabilité, la formulation de Galerkin a été utilisée. Elle a permis d'obtenir les équations intégrales suivantes:

$$\psi_0 [\mathcal{A}] \{F\} - R_T (\theta_0 - \Phi_0) [\mathcal{B}] \{G\} = 0 \quad (6.12)$$

$$\theta_0 [\mathcal{C}] \{G\} + \psi_0 [\mathcal{D}] \{F\} = -p \theta_0 [\mathcal{E}] \{G\} \quad (6.13)$$

$$\frac{1}{Le} (\Phi_0 - a\Theta_0) [\mathcal{C}] \{G\} + \psi_0 [\mathcal{D}] \{F\} = -p \varepsilon \Phi_0 [\mathcal{E}] \{G\} \quad (6.14)$$

avec

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}]^e &= \int_{\Omega^e} \left(\nabla \mathcal{N}_j \cdot \nabla \mathcal{N}_i + \frac{2}{r} \frac{\partial \mathcal{N}_j}{\partial r} \mathcal{N}_i \right) d\Omega^e & [\mathcal{B}]^e &= \int_{\Omega^e} r \frac{\partial \mathcal{N}_j}{\partial r} \mathcal{N}_i d\Omega^e \\ [\mathcal{C}]^e &= \int_{\Omega^e} \nabla \mathcal{N}_j \cdot \nabla \mathcal{N}_i d\Omega^e & [\mathcal{D}]^e &= \int_{\Omega^e} \frac{r_i}{r^2} \frac{\partial \mathcal{N}_j}{\partial z} \mathcal{N}_i d\Omega^e \\ [\mathcal{E}]^e &= \int_{\Omega^e} \mathcal{N}_j \mathcal{N}_i d\Omega^e \end{aligned} \quad (6.15)$$

où Ω est le domaine physique d'intégration et $d\Omega^e = r dr dz$

6.2.2 Résultats et discussions

Les équations de l'état perturbé (6.12)-(6.14) et ceux des conditions aux limites peuvent être réécrites suivant la forme matricielle compacte suivante: $\mathcal{L} \vec{Y} = p \mathcal{M} \vec{Y}$

	$\eta = 0.3$	$\eta = 0.5$	$\eta = 0.7$	$\eta = 0.99$	Mamou et al.(1998b)
R	491.6	318.0	252.3	209.8	209.8
p_i	3.54	0.31	0.16	0	0

Tableau 6.1 Valeurs de R et p_i dans une cavité carrée ($A = 1$) pour $Le = 10$ et $\varepsilon = 1$

avec $\vec{Y} = [\Psi_0, \Theta_0, \Phi_0]$ (fonction de courant, température et concentration), $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ sont deux opérateurs linéaires différentiels qui dépendent des paramètres de contrôle R_T , η , Le , a , ε et A . En utilisant la subroutine (EIGENC de IMSL), nous déterminons les valeurs propres en fonction des paramètres de contrôle. Ainsi et pour des valeurs données de η , Le , a , ε et A , nous pouvons obtenir la valeur de $R_{TC} = R_{TC}(A, \eta, Le, a, \varepsilon)$.

Le tableau 6.1 illustre les résultats obtenus par la présente méthode numérique pour le cas $A = 1$, $Le = 10$, $\varepsilon = 1$ et plusieurs valeurs de η . Cette situation a été étudiée auparavant par Mamou et al. (1998) pour une cavité carré ($\eta = 1$). Le nombre de Rayleigh critique marquant l'enclenchement de la convection est donné selon l'expression suivante:

$$R_{TC} = \frac{R}{(Le + a - 1)} \quad (6.16)$$

Généralement, le taux d'augmentation de la perturbation p dans l'équation (6.2) peut s'écrire comme $p = p_r + i p_i$ où p_r et p_i sont les parties réelle et imaginaire, respectivement. Alors, dépendamment de p_i , l'enclenchement de la convection est

caractérisé par différents régimes convectifs. Pour le cas de la cavité carrée, Mamou et al. (1998) ont déterminé que $R = \pm 209.8$ et $p_i = 0$. Pour $p_r = 0$, l'enclenchement de la convection a lieu à un nombre de Rayleigh supercritique R_{TC}^{sup} et ceci à travers une bifurcation fourche. Cette situation est confirmée par le présent travail pour $\eta \rightarrow 1$. Ainsi, pour $\eta = 0.99$, nous avons trouvé que $R = 209.8$ et $p_i = 0$. Par ailleurs nous souhaitons mettre en exergue la grande importance du paramètre η comme nous pouvons l'observer sur le Tableau 6.1. En effet, pour $\eta < 1$ la valeur de p_i est différente de zéro. Ceci indique que l'enclenchement de la convection aura lieu suivant une bifurcation de Hopf (régime convective oscillatoire) à un nombre de Rayleigh critique $R_{TC}^{Hopf1} = R/[(Le + a) - 1]$. Un accroissement des valeurs de R et p_i est observé, quand η diminue.

Dans le cas de la cavité rectangulaire, l'état marginal d'instabilité pour lequel la convection supercritique aura lieu est donnée par:

$$R_{TC}^{sup} = \frac{R^{sup}}{[1 - (Le + a)]} \quad (6.17)$$

Pour le cas d'une cavité élancée ($A \gg 1$), le domaine numérique considéré dans cette étude est un cylindre concentrique soumis à des conditions aux limites périodiques appliquées sur les frontières horizontales. Avec ces conditions, le nombre de Rayleigh R_{TC} a été obtenu pour plusieurs valeurs de A . La valeur minimale de R_{TC} obtenue pour $A = A_C$, correspond à la valeur critique de déclenchement du mouvement convectif.

L'influence de η sur R , A_C et p_i est illustrée sur le Tableau (6.2) pour $Le = 10$ et $\varepsilon = 1$. Un accroissement de la partie imaginaire du taux d'augmentation de la perturbation est observé pour des faibles valeurs de η . i.e l'enclenchement du régime convectif est de plus en plus oscillatoire quand η diminue pour les cavités cylindriques élancées.

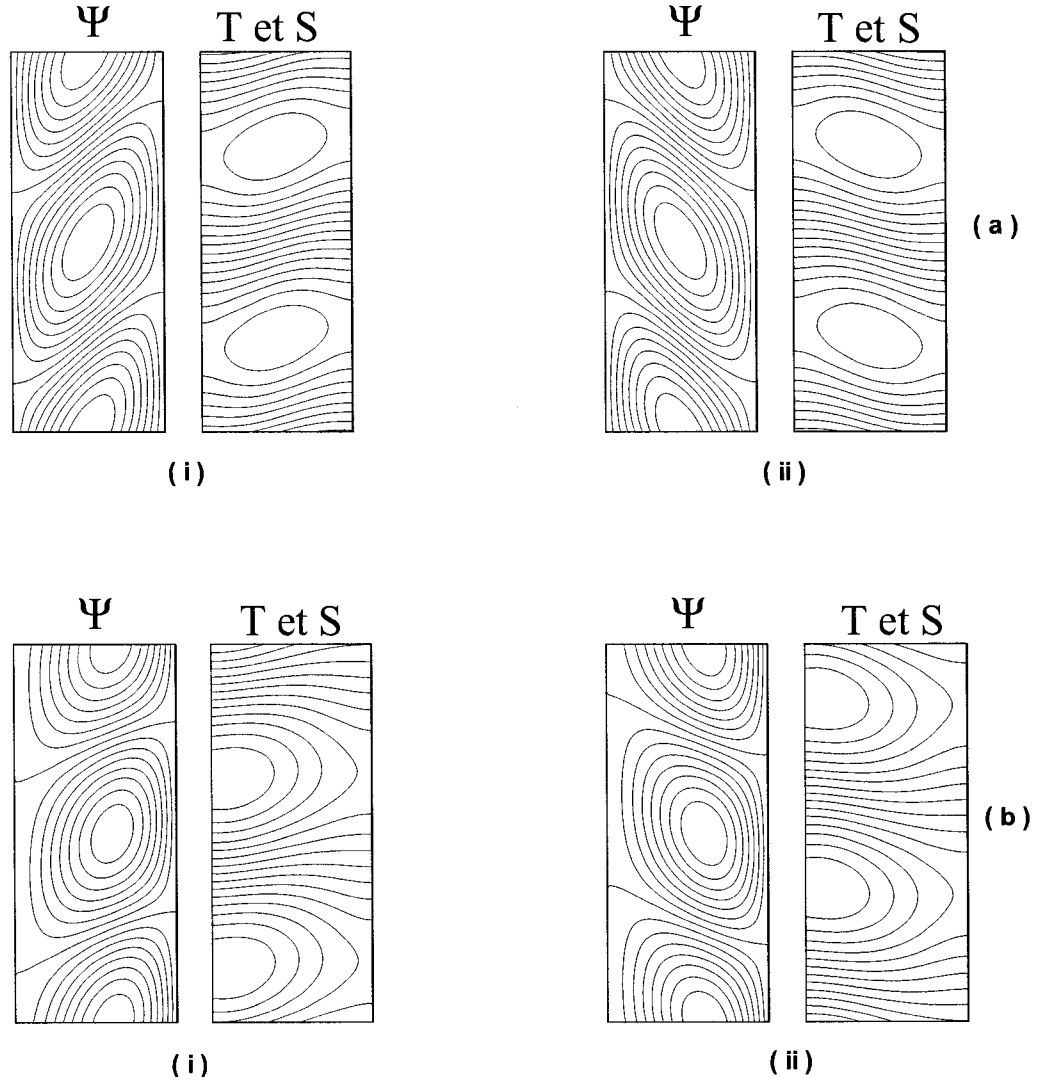


Figure 6.1 Résultats numériques de l'enclenchement de la convection comme prédit par l'analyse de la stabilité linéaire. Structures des lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour (a) $\eta = 1$ et $A_C = 2.504$; (i) $R = 105.335$ et (ii) $R = -105.335$; (b) $\eta = 0.1$ et $A_C = 2.352$; (i) $R = 676.244$ et (ii) $R = -676.2445$

	$\eta = 0.3$	$\eta = 0.5$	$\eta = 0.7$	$\eta = 0.99$	Mamou et al. (1998c)
R	233.8	158.8	128.1	105.8	105.4
A_{TC}	2.439	2.481	2.498	2.504	2.504
p_i	1.47	0.84	0.43	0.01	0

Tableau 6.2 Valeurs de R , A_{TC} et p_i dans une cavité élancée ($A \gg 1$) pour $Le = 10$ et $\varepsilon = 1$

La figure (6.1) représente les lignes de courant, les isothermes et les isoconcentrations au moment du départ de la convection, comme prédit par l'analyse de stabilité linéaire pour $A \gg 1$ et $\eta = 1$ et 0.1 . Ces résultats indiquent que pour une valeur du rapport de rayons η donnée, la stabilité linéaire prédit l'existence de deux valeurs propres identiques mais de signe contraire $R = \pm Cte$. Il est clair, à partir de l'équation (6.16), que le signe de R dépend essentiellement du fait que la valeur de $(Le + a)$, soit supérieur ou inférieur à l'unité. La figure (6.1(i)) montre les champs de perturbation pour $(Le + a) < 1$. Les résultats obtenus pour la situation $(Le + a) > 1$, sont la réflexion de la situation $(Le + a) < 1$, comme indique la figure (6.1(ii)). Comme nous pouvons l'observer aussi à travers ces équations, l'écoulement est composé d'une structure périodique de rouleaux en rotation dans le sens horaire. La dissymétrie de la structure des lignes de courant est bien visible (Figure (6.1b)) quand la valeur de η diminue par rapport à l'unité. Ceci est dû à l'effet de la courbure sur la structure des perturbations en particulier et de l'écoulement en général.

L'effet de la porosité normalisée ε sur le paramètre R_{TC}^{Hopf1} au départ de la convection de l'état de repos est illustré sur la figure (6.2) pour $Le = 1.5$ et plusieurs

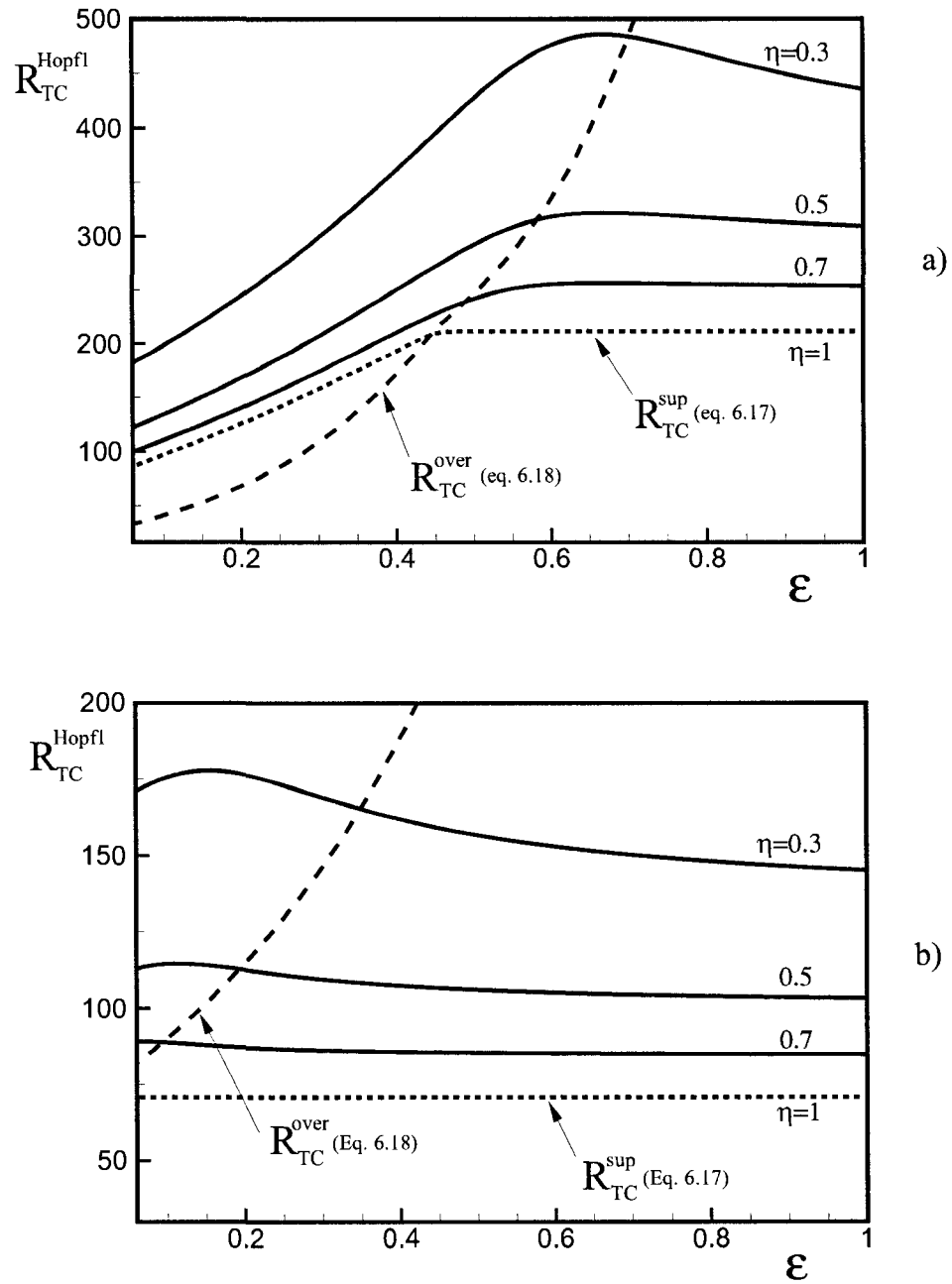


Figure 6.2 Effet de la porosité ε sur le nombre de Rayleigh critique de la première bifurcation R^{Hopf1} pour $Le = 1.5$ et plusieurs valeurs de η avec a) $a = 0$ b) $a = 1$

valeurs de η . Le cas limite ($\eta = 1$) a été étudié auparavant par Mamou et al. (1998). Ils ont démontré que la convection oscillatoire est possible dans certaines conditions. Cette situation, qui correspond à $p_r = 0$ et $p_i \neq 0$, mène à un nombre de Rayleigh (overstable) donné par:

$$R_{TC}^{over} = \frac{(\varepsilon Le + 1)}{Le(\varepsilon - 1)} R \quad (6.18)$$

Pour fins de comparaison, les deux prédictions de (6.16) et (6.18) sont incluses dans la figure (6.2) pour $Le = 10$ et plusieurs valeurs de η (0.3, 0.5, 0.7, 0.99).

L'influence du rapport de forme de la cavité sur le seuil de convection pour différentes valeurs du rapport de forme η est illustrée sur la figure (6.3) pour $Le = 10$ et $a = 0$. En augmentant A , le nombre de Rayleigh de la première bifurcation de Hopf (R_{TC}^{Hopf1}) décroît d'une façon monotone. Pour chaque valeur de η un changement brusque du taux de variation de R_{TC}^{Hopf1} est observé, cela étant dû à la transition vers une structure présentant un nombre de cellules plus grand. Ce processus est répété au fur et à mesure que le rapport de forme augmente. Lorsque A est suffisamment grand, R_{TC}^{Hopf1} devient indépendant de ce paramètre et tend asymptotiquement vers une valeur fixe ($R_{TC}^{Hopf1} = 11.75$ pour $\eta = 1$). Pour une cavité infiniment longue, la structure d'écoulement révèle une formation périodique de cellules de convection, circulant alternativement dans un sens et dans l'autre et empilées dans la direction verticale.

6.3 Stabilité de l'écoulement convectif

La stabilité de l'écoulement parallèle décrite par (4.13)-(4.15) est étudiée dans cette section. Au delà d'un nombre de Rayleigh critique R_{TC}^{Hopf2} , nous supposons que l'écoulement devient oscillant. Dans le but de déterminer ce point de bifurcation,

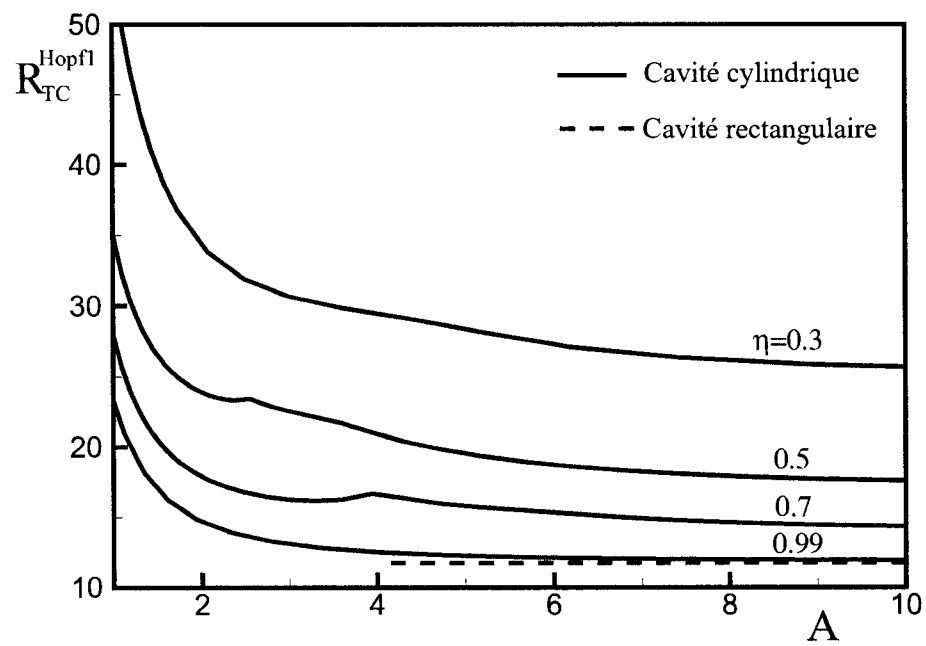


Figure 6.3 Effet du rapport de forme A sur le nombre de Rayleigh de la première bifurcation R^{Hopf1} pour $Le = 10$ et plusieurs valeurs de η avec $a = 0$

une analyse de stabilité de l'écoulement est requise.

Considérons l'écoulement parallèle décrit par les équations (4.26). Au tout début de l'instabilité, l'écoulement global est supposé être la superposition de l'écoulement de base $[\Psi(r, z) = \Psi(r), T(r, z) = C_T z + \theta_T(r), S(r, z) = C_S z + \theta_S(r)]$ et une perturbation infinitésimale:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\Psi}(t, r, z) &= \tilde{\Psi}(r) e^{pt+ikz} \\ \hat{\theta}_T(t, r, z) &= \tilde{\theta}_T(r) e^{pt+ikz} \\ \hat{\theta}_S(t, r, z) &= \tilde{\theta}_S(r) e^{pt+ikz} \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

avec k un nombre réel qui désigne le nombre d'onde. Après insertion de l'écoulement global dans les équations gouvernantes (2.14)-(2.16) et linéarisation par rapport à l'écoulement de base, nous obtenons les équations suivantes:

$$\left[D^2 - \frac{1}{r} D - k^2 \right] \tilde{\Psi} + R_T r D [\tilde{\theta}_T - \tilde{\theta}_S] = 0 \quad (6.20)$$

$$\left[D^2 + \left(\frac{1}{r} D - i k D \Psi \right) - k^2 \right] \tilde{\theta}_T + \frac{1}{r} [i k D \theta_T - C_T D] \tilde{\Psi} = p \tilde{\theta}_T \quad (6.21)$$

$$\frac{1}{Le} \left[D^2 + \frac{1}{r} D - k^2 \right] (\tilde{\theta}_S - a \tilde{\theta}_T) - i k D \Psi \tilde{\theta}_S + \frac{1}{r} [i k D \theta_S - C_S D] \tilde{\Psi} = p \tilde{\theta}_S \quad (6.22)$$

Les conditions aux limites correspondantes sont:

$$r = r_{i;o} \quad \tilde{\Psi} = 0 ; \quad D\tilde{\theta}_T = D\tilde{\theta}_S = 0 \quad (6.23)$$

avec $D = d/dr$. Les équations d'état perturbé (6.20)-(6.22), avec les conditions aux frontières (6.23) peuvent être écrites sous la forme matricielle suivante:

$$\mathcal{L}(k) \vec{Y} = p \mathcal{M}(k) \vec{Y} \quad (6.24)$$

où $\vec{Y} = [\tilde{\Psi}(r), \tilde{\theta}_T(r), \tilde{\theta}_S(y)]$ est le vecteur de perturbation (fonction de courant, température et concentration), $\mathcal{L}(k)$ et $\mathcal{M}(k)$ sont des opérateurs différentiels qui dépendent des paramètres de contrôle R_T , η , Le , a et ε . Les équations (6.24) sont résolues en utilisant la méthode des différence finies. Le système est résolu avec un schéma de quatrième ordre dans le domaine entre $r = r_i$ et $r = r_o$, et écrit sous la forme suivante ($\mathcal{L}_{ij}(k)Y_j = p \mathcal{M}_{ij}(k) Y_j$). En utilisant la subroutine standard des problèmes aux valeurs propres (EIGENC de IMSL), on détermine ces dernières en fonction des paramètres de contrôle R_T , η , Le , a , ε et du nombre d'onde k . Le minimum de la courbe de stabilité marginale fournit les paramètres de l'état critique (k_C , ω_C , R_{TC}). Notons qu'il a été trouvé que la procédure numérique converge pour un nombre de discrétisation N supérieur à 100.

Des résultats typiques de l'enclenchement de la bifurcation de Hopf (R_{TC}^{Hopf2}) pour l'écoulement parallèle sont présentés sur le tableau (6.3) pour le cas $Le = 10$ et $\varepsilon = 1$. Les résultats obtenus pour $\eta = 0.99$, à savoir $R = [(Le + a) - 1]R_{TC}^{Hopf2} = 719.4$, $A_{TC} = 2.646$ et $p_i = 14.59$ sont en parfait accord avec les valeurs $R = 719.3$, $A_{TC} = 2.650$ et $p_i = 14.60$ reportés par Mamou (2002) pour le cas de la cavité rectangulaire ($\eta = 1$).

Les effets de η sur le nombre de Rayleigh critique marquant le départ de la convection oscillante de l'écoulement permanent prédit par la théorie de la stabilité linéaire sont illustrés sur la figure (6.4) pour $Le = 10$ et $a = 1$. En dessous du nombre de Rayleigh souscritique R_{TC}^{sous} le fluide est inconditionnellement au repos. Pour $R_{TC}^{sous} < R < R_{TC}^{Hopf2}$ un écoulement parallèle stable est théoriquement possible. Au dessus de R_{TC}^{Hopf2} , l'écoulement est potentiellement non permanent.

On constate sur la figure (6.5) l'existence de trois régions distinctes délimitées par des lignes correspondants à R_{TC}^{Sous} , R_{TC}^{Hopf1} et R_{TC}^{Hopf2} . La première région désignée par (I), représente le régime de conduction pure dans lequel le fluide

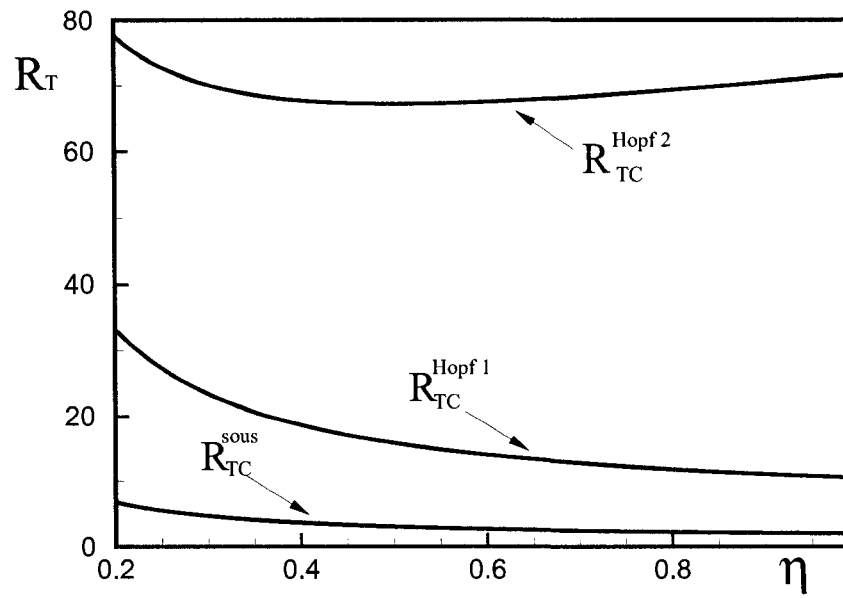


Figure 6.4 Effet du rapport de forme η sur les nombres de Rayleigh critiques R_{TC}^{Hopf2} , R_{TC}^{Hopf1} et R_{TC}^{sous} pour $a = 0$ et a) $Le = 2$ b) $Le = 10$

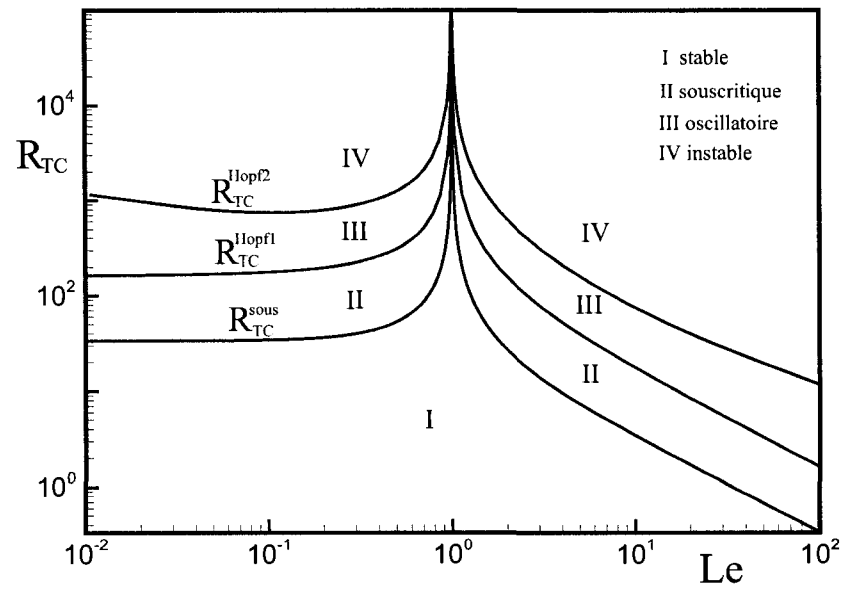


Figure 6.5 Effet du nombre de Lewis Le sur les nombres de Rayleigh critiques R_{TC}^{sous} , R_{TC}^{Hopf1} et R_{TC}^{Hopf2} pour $\eta = 0.5$ et $a = 0$

	$\eta = 0.3$	$\eta = 0.5$	$\eta = 0.7$	$\eta = 0.99$	Mamou (2002)
R	703.5	673.5	685.1	719.4	719.3
A_{TC}	2.775	2.733	2.693	2.646	2.650
p_i	12.63	13.47	14.01	14.59	14.60

Tableau 6.3 Valeurs de $R = [(Le + a) - 1]R_{TC}^{Hopf2}$, A_{TC} et p_i dans une cavité élancée ($A \gg 1$) pour $Le = 10$ et $\varepsilon = 1$

est inconditionnellement stable. La deuxième région (*II*), correspond au régime de convection souscritique prédit par la théorie de l'écoulement parallèle. Ce régime se maintient dans la région (*III*). Enfin dans la région (*IV*) l'écoulement parallèle est potentiellement non permanent. En prenant la solution de la conduction pure comme condition initiale, la solution numérique des équations de base révèle que l'écoulement convectif débute avec une structure multicellulaire conformément aux prédictions de la stabilité linéaire.

La figure (6.6) illustre le diagramme de bifurcation en termes de l'intensité de l'écoulement Ψ_0 et du nombre de Rayleigh pour $\eta = 0.5$, $Le = 2$, $\varepsilon = 1$ et $a = 1$. L'allure de la courbe sur le graphe est la prédiction de l'approximation de l'écoulement parallèle. Les résultats sont donc valides asymptotiquement pour une cavité élancée ($A \gg 1$). Avec les paramètres considérés, l'enclenchement de la convection souscritique prédite par la solution analytique $R_{TC}^{sous} = 13.37$ alors que la stabilité linéaire donne $R_{TC}^{Hopf1} = 77.65$ pour le départ de la convection oscillante et $R_{TC}^{Hopf2} = 312.73$ pour la convection oscillatoire de l'écoulement convectif. Audessous du nombre de Rayleigh souscritique le fluide est inconditionnellement stable

et la convection est impossible. Au début de la convection, pour $R_T > R_{TC}^{Hopf1} = 77.65$, l'écoulement commence à osciller et son amplitude peut croître ou décroître avec le temps.

Ceci est illustré à la figure (6.7) où la condition initiale pour les calculs numériques est l'état diffusif pur. Pour $t < 50$ les résultats pour ψ_0 indiquent que la convection est très faible. La structure de l'écoulement obtenue pour $t = 75$ montre la formation d'une structure périodique formée par des cellules inclinées en rotation similaires à celles prédites par la théorie de stabilité linéaire (figure 6.1). Pour $t \simeq 90$ l'écoulement se développe soudainement, après une petite zone de transition oscillatoire non permanente, vers une solution s'approchant de celle de l'écoulement parallèle ($t > 150$).

6.4 Stabilité de l'état de repos (cas isotherme)

Dans cette section, le problème de la stabilité de la solution convective prédite par la théorie de l'écoulement est étudié pour le cas où les parois verticales sont maintenues à des températures et des concentrations constantes et différentes.

Comme nous l'avons expliqué au début du présent chapitre, pour le cas particulier où les gradients thermiques et solutaux, appliqués sur les parois verticales de l'espace annulaire sont égaux et opposés ($N = -1$), il existe un état de repos qui demeure stable en dessous d'un nombre de Rayleigh critique. La stabilité de cet état a été étudiée numériquement sur la base de la théorie de stabilité linéaire. La figure (6.8) illustre les résultats obtenus pour la longueur d'onde critique k_c et la fréquence d'oscillation p_i en fonction du rapport des rayons de l'espace annulaire η , pour $Le = 1.5$ et 10 . Les résultats sont valides tant pour le cas de la double diffusion ($a = 0$) que de la convection induite par l'effet Soret ($a = 1$). On observe

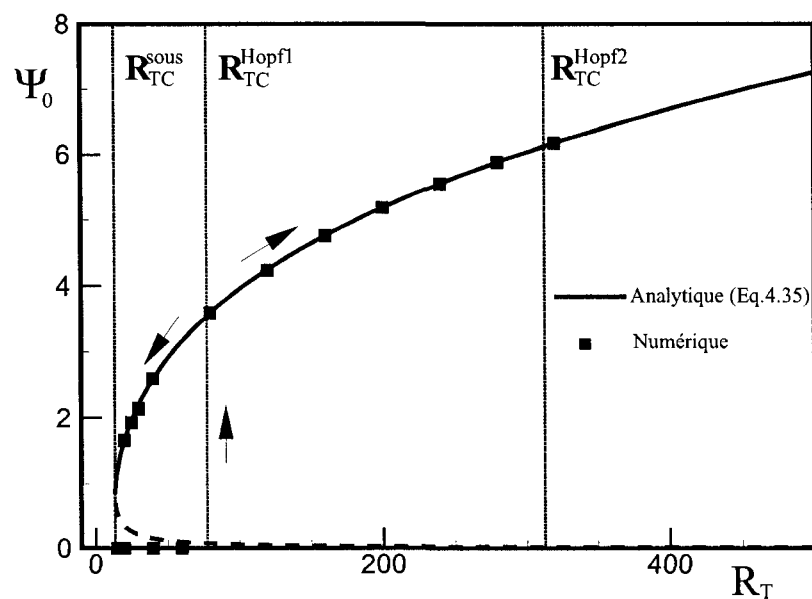


Figure 6.6 Effet du nombre de Rayleigh R_T sur l'amplitude ψ_0 pour $Le = 2$, $\epsilon = 1$, $\eta = 0.5$ et $a = 1$

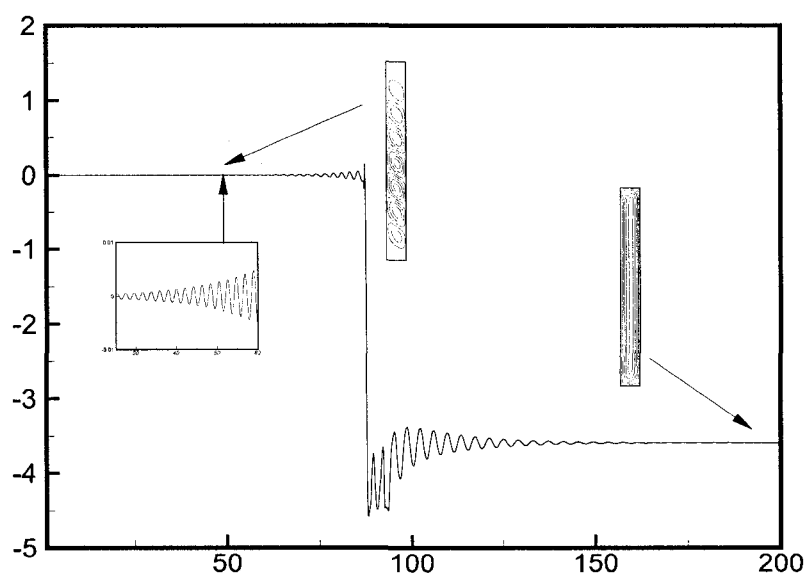


Figure 6.7 Variation temporelle de l'intensité de la fonction de courant pour $R_T = 80$, $Le = 2$, $\eta = 0.5$, $a = 1$ et $A = 10$

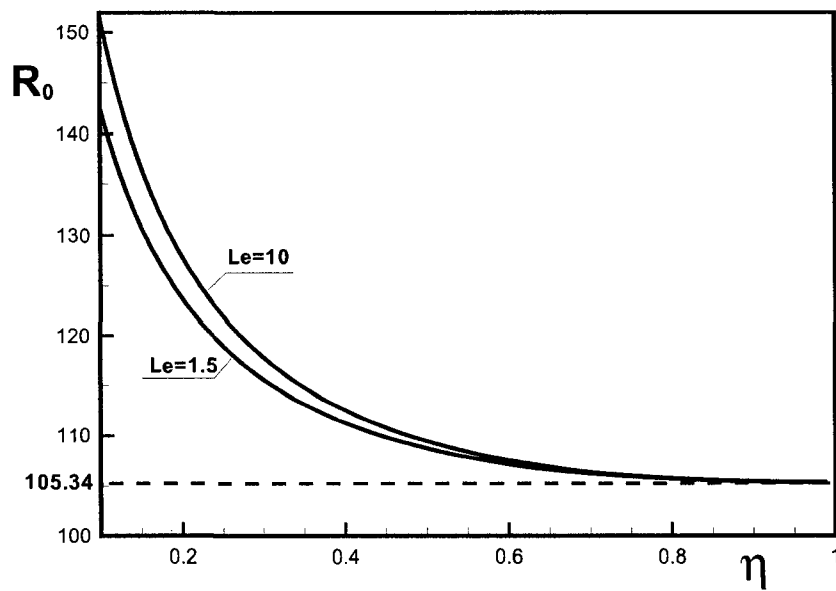


Figure 6.8 Variation de la quantité $R_0 = R_{TC}^{Sup}(Le - 1 + a)$ en fonction du rapport des rayons η pour $N = -1$, $Le = 1.5$ et 10 , $a = 0$ et 1

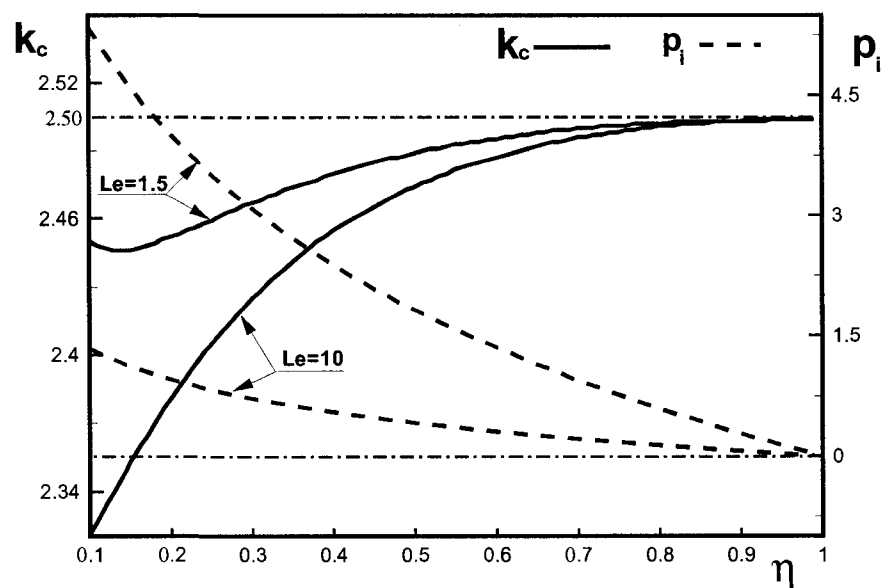


Figure 6.9 Variation de la longueur d'onde critique (k_C) et la fréquence d'oscillation p_i en fonction du rapport des rayons η pour $N = -1$, $Le = 1.5$ et 10 , $a = 0$ et 1

que pour $\eta = 1$ (cavité rectangulaire) on obtient $k_c = 2.504$ et $p_i = 0$ (naissance de la convection stationnaire), en accord avec les résultats de Mamou et al. (1998). Cependant, pour $\eta < 1$, il est clair que la naissance de la convection est oscillante ($p_i \neq 0$) et dépendante du nombre de Lewis.

La figure (6.9) illustre les résultats obtenus pour le nombre de Rayleigh supercritique ($R_0 = R_{TC}^{Sup}(Le - 1 + a)$) en fonction de η pour $Le = 1.5$ et 10 . Pour le cas d'une cavité rectangulaire ($\eta = 1$) on obtient $R_0 = 105.34$, indépendamment du nombre de Lewis, en accord avec les résultats de (Mamou et al. (1998)).

La Figure 6.10 illustre le diagramme de bifurcation ψ_{max} , la fonction de courant maximum dans la cavité, versus le nombre de Rayleigh thermique R_T , pour $Le = 10$, $\eta = 0.5$ et $a = 0$. Pour cette situation le nombre de Rayleigh supercritique est $R_{TC}^{Sup} = 12.16$. Cependant les résultats numériques indiquent que la convection est possible en dessous de cette valeur. Ceci est dû au fait que pour ce type de situation la convection sous critique est possible (Mamou et al. (1998)). Donc, des résultats numériques ont été obtenus jusqu'à la valeur $R_{TC}^{Sup} = 11.69$. En dessous de cette valeur l'état de repos est prédit par les résultats numériques. Une zone d'écoulement oscillant existe dans la région $12.4 \leq R_T \leq 13.8$. Dépendant des conditions, initiales utilisées avec le code numérique (état convectif ou état de repos), le phénomène d'hystérésis indiqué par les flèches dans la figure 6.10, est obtenu.

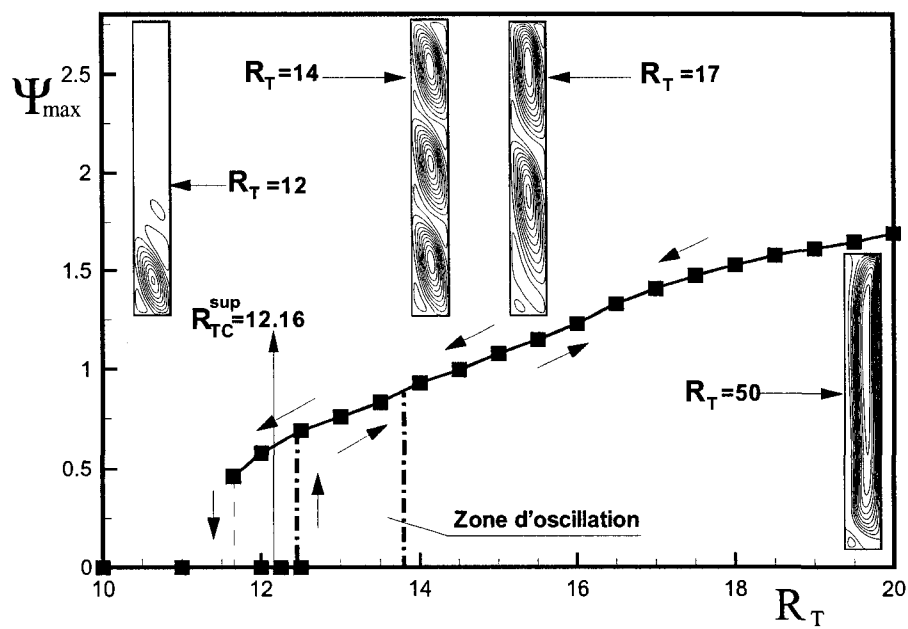


Figure 6.10 Variation de la fonction de courant maximum $\psi_{\max}$ en fonction du nombre de Rayleigh R_T pour $Le = 10$, $\eta = 0.5$ et $a = 0$

CONCLUSION

Dans cette thèse de doctorat nous avons présenté une étude des transferts de chaleur et de masse par convection naturelle en milieux poreux et fluide. La configuration géométrique du modèle physique considéré est une cavité cylindrique concentrique soumise à des conditions aux frontières verticales thermiques et solutales de type Neumann (flux constants de chaleur et de concentration) et Dirichlet (température et concentration constantes imposés), alors que les surfaces horizontales sont maintenues adiabatiques.

Grâce à l'approximation de Boussinesq, on a établi un modèle mathématique décrivant l'écoulement et les transferts de chaleur et de masse. En premier lieu, et pour résoudre les équations régissant dans leurs intégrités et avoir des résultats précis sur les transferts thermiques et solutales, la méthode numérique basée sur la technique des différences finies a été adoptée pour le cas où notre cavité est remplie d'un milieu poreux. D'autre part, pour le cas fluide, c'est l'approche des volumes de contrôle qui a été utilisée. En deuxième lieu, et afin d'avoir un aperçu général et une description qualitative de la convection naturelle dans la cavité considérée, nous avons développé une solution analytique du problème valable dans le cas de cavités élancées soumises à des flux constants de chaleur et de masse, et ceci en se basant essentiellement sur le concept de l'écoulement parallèle. Par la suite, et pour le cas où les forces de flottabilité (forces de volumes) sont de même intensité mais de sens contraire, nous avons étudié l'instabilité du régime conductif et celui de l'écoulement parallèle par la méthode des éléments finis.

Ces solutions ont conduit à plusieurs résultats illustrant l'influence des paramètres de contrôle (le nombre de Rayleigh thermique R_T , le rapport des forces volumiques N , le nombre de Lewis Le , le coefficient a et le rapport des rayons η) sur les nombres

de Nusselt Nu et de Sherwood Sh ainsi que sur l'intensité de fonction de courant ψ . En général nous avons constaté que nos solutions analytiques et numériques sont en parfait accord, et que les évolutions de l'écoulement et des transferts de chaleur et de masse en fonction des paramètres de contrôle, sont qualitativement identiques pour les milieux fluides et poreux.

Pour des conditions aux limites de type Neumann appliquées à une cavité poreuse, il a été démontré numériquement que l'écoulement au sein de la cavité est parallèle, en accord avec le modèle et les résultats analytiques proposés. Des approximations simplifiées de Nu et Sh ont été dérivées pour décrire les transferts de chaleur et de masse. Aussi, en régime de couche limite, des corrélations pour les taux de transfert de chaleur et de masse ont été obtenues. Selon le signe du rapport des forces de volume, deux types d'écoulement convectif ont été considérés, à savoir la convection coopérante et la convection opposée. Dans le régime intermédiaire dans lequel les forces de volume sont opposées et de même ordre de grandeur, les résultats analytiques et numériques indiquent que les évolutions de la structure de l'écoulement et des transferts de chaleur et de masse sont complètement différentes de celles observées dans le cas des forces coopérantes. Ainsi, il a été observé que la transition du régime solutal vers le régime thermique se produit avec un renversement brusque du sens de la rotation de l'écoulement convectif à une valeur de N qui dépend des autres paramètres de contrôle. Cependant la transition du régime thermique vers le régime solutal se produit d'une façon graduelle et le renversement de l'écoulement convectif est caractérisé par la formation d'une structure multicellulaire. Dans la zone de transition, la multiplicité de solutions a été démontrée et l'effet d'hystérésis a été observé. Dans le cas où les forces de volume sont égales et opposées, les résultats montrent l'existence d'un nombre de Rayleigh critique caractérisant le seuil de convection. Pour le cas de la cavité rectangulaire, il est bien connu que les instabilités peuvent être stationnaires ou

oscillatoires, selon les valeurs du nombre de Lewis Le , de la porosité normalisée ε et de la constante a (convection doublement diffusive ou induite par effet Soret). Nos résultats ont démontré que pour un cylindre vertical concentrique ($\eta < 1$), les instabilités auront toujours lieu en mode oscillatoire à un nombre de Rayleigh critique de Hopf (R_{TC}^{Hopf1}). Pour la convection en cavité élancée ($A \gg 1$), nous avons réalisé une étude d'instabilité linéaire afin d'analyser le comportement de l'écoulement parallèle permanent établi. Nous avons trouvé que des bifurcations de Hopf sont possibles à un nombre de Rayleigh (R_{TC}^{Hopf2}) qui dépend du nombre de Lewis Le , du rapport η , de ε et de a . Pour le cas poreux, nous avons étudié les conditions de séparation optimales en fonction des paramètres du problème. Nous avons constaté que le coefficient de séparation optimal est invariant face au nombre de Lewis et au rapport des forces de volumes. Cependant, il dépend fortement du nombre de Rayleigh et du rapport des rayons. Ces résultats indiquent que la géométrie cylindrique influence grandement les capacités de séparation des solutions binaires.

Enfin, la nécessité de comprendre convenablement la convection naturelle telle que rencontrées dans la pratique, prouve que la résolution des problèmes de la thermodiffusion et effet Soret est une orientation tout à fait prometteuse. Cette voie, représente alors une grande ouverture vers toute une autre série de possibilités à exploiter telles que l'application d'autres conditions aux limites (chauffage conjugué, local..) et tenir compte des effets d'un champ magnétique, d'un chauffage interne, de la rotation du cylindre interne ainsi que des vibrations et de la variation de la gravité. Les objectifs importants, sur lesquels il conviendra sans doute de porter des efforts prioritaires, sont: la vérification des résultats obtenus par voie expérimentale, la modification des codes numériques pour tenir compte des effets tridimensionnels et la prise en considération des variations des propriétés physiques du fluide (Fluides non-newtonien et milieux anisotropes).

BIBLIOGRAPHIE

- Al-Arabi, M., El Shaarawi, M. A. I., and Khamis, M. (1987). Natural convection in uniformly heated vertical annuli,. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **30**, 1381–1389.
- Alavyoon, F. (1993). On natural convection in a vertical porous enclosure due to prescribed fluxes of heat and mass at the vertical boundaries. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **29**, 2479–2498.
- Alavyoon, F., Masuda, Y., and Kimura, S. (1994). Natural convection in a vertical porous enclosure due to opposing fluxes of heat and mass prescribed at the vertical walls. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **37**, 1445–1456.
- Bahloul, A., Yahiaoui, M. A., Vasseur, P., Bennacer, R., and Beji, H. (2005). Natural convection of a binary mixture in a vertical closed annulus. *Proceeding of 4th ICCHMT, Paris-Cachan, France*, pages 523–529.
- Bahloul, A., Yahiaoui, M. A., Vasseur, P., Bennacer, R., and Beji, H. (2006). Natural convection of a two-component fluid in porous media bounded by tall concentric vertical cylinders. *Journal of Applied Mechanics*, **73**, 26–33.
- Bahloul, A., Yahiaoui, M. A., Vasseur, P., and Robillard, L. (2004). Thermogravitational separation in a vertical annular layer. *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, **31**, 783–794.
- Bejan, A. (1995). *Convection Heat Transfer*, 2nd ed. Wiley, New York.
- Beji, H., Bennacer, R., Duval, R., and Vasseur, P. (1999). Double diffusive natural convection in a vertical porous annulus. *Numer. Heat Transfer*, **36**, 153–170.
- Bennacer, R., Beji, H., and Duval, R. (2000). Brinkman model for thermosolutal convection in a vertical annular porous layer. *Int Comm. Heat and mass Transfer*, **27**, 68–80.

- Bennacer, R. and Gobin, D. (1996). Cooperating thermosolutal convection in enclosure, scale analysis and mass transfer. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **39**, 2671–2681.
- Bertholz, R. F. (1978). Instability of steady natural convection in a vertical layer. *J. Fluid Mechanics*, **84**, 743–768.
- Birikh, R. V., Gershuni, G. Z., zhukhovitskii, E. M., and Rudakov, R. N. (1972). Stability of steady convective plane-parallel convective motion in a vertical channel. *Prikl. Mat. Mekh*, **36**, 745–748.
- Boutana, N., Bahloul, A., Vasseur, P., and Joly, F. (2004). Soret and double diffusive convection in a porous cavity. *Journal Porous Media*, **7**, 41–57.
- Brinkman, H. C. (1964). A calculation of the viscous force extended by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *Appl. Sci. Res.*, **1**, 26–34.
- Caldwell, D. R. (1974). Experimental studies on the onset of thermohaline convection. *J. Fluid Mechanics*, **64**, 347–367.
- Chacha, M. and Saghir, M. (2003). Thermodiffusion in a compressible binary mixture subject to different thermal excitations,. *Annual Conference of the Canadian Society for Civil Engineering*, **485**, 1–10.
- Charlson, G. S. and Sani, R. L. (1970). Thermoconvective instability in a bounded cylindrical fluid layer. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **13**, 1479–1496.
- Choi, J. Y. and Kim, M. (1993). Three-dimensional linear stability of natural convective flow between concentric horizontal cylinders. *Int. J. Heat Transfer*, **36**, 4173–4180.
- Choukairy, K., Bennacer, R., and Vasseur, P. (2004). Natural convection in a vertical annulus boarded by an inner wall of finite thickness,. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **31**, 501–512.

- Costesèque, P., El Maataoui, M., and Sahores, J. (1987a). Sur la différentiation des hydrocarbures constituant la fraction légère d'un brut par thermodiffusion gravitationnelle en milieux poreux. *Compte-Rendu de l'Académie des sciences, Paris*, **305**, 1531–1536.
- Costesèque, P., Hridabba, M., and Sahores, J. (1987b). Sur la différentiation des hydrocarbures constituant la fraction légère d'un brut par thermodiffusion gravitationnelle en milieux poreux. *Compte-Rendu de l'Académie des sciences, Paris*, **304**, 1069–1074.
- Darcy, H. P. G. (1880). Les fontaines publiques de la ville de dijon. *Victor Dalmont, Paris*, pages 303–384.
- Dyko, M. P., Vafai, K., and Mojtabi, K. (1999). A numerical and experimental investigation of stability of natural convective flows within a horizontal annulus. *J. Fluid Mechanics*, **381**, 27–61.
- Estèbe, J. and Schott, J. (1970). Concentration des solutions salines et cristallisation dans les milieux poreux par effet thermogravitationnel. *Compte Rendu de l'Académie Scientifique de Paris*, **271**, 805.
- Forchheimer, P. (1901). Wasserbewegung durch boden. *Z. Ver. Deutsch. Ing.*, **45**, 1782–1788.
- Frankel, S. P. (1950). Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations. *Math Tables and Other Aids to Computations*, **4**, 65–75.
- Ghorayeb, K. and Mojtabi, A. (1997). Double diffusive convection in a vertical rectangular cavity. *Physics of Fluids*, **9**, 8–16.
- Gill, A. E. and Kirkham, C. C. (1970). A note on the stability of convection in a vertical slot. *J. Fluid Mechanics*, **42**, 125–127.

- Goyeau, B., Songbe, J. P., and Gobin, D. (1996). Numerical study of double-diffusive natural convection in a porous cavity using the darcy-brinkman formulation. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **40**, 1363–1378.
- Hardin, G. R., Sani, R. L., Henry, D., and Roux, B. (1990). Buoyancy-driven instability in a vertical cylinder: binary fluids with soret effect. part i: General theory and stationary stability results. *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, **10**, 117–125.
- Havstad, M. A. and Burns, P. J. (1982). Convective heat transfer in vertical cylindrical annuli filled with a porous medium,. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **25**, 1755–1766.
- Hickox, C. E. and Gartling, D. K. (1982). A numerical study of natural convection in a vertical, annular, porous layer,. *21st National Heat Transfer Conf, ASME*, pages 82HT–62.
- Ho, C. J. and Lin, F. H. (1997). Simulation of natural convection in a vertical enclosure by using a new incompressible flow formulation - pseudovorticity-velocity formulation. *Numerical Heat Transfer*, **31**, 881–896.
- Hyun, J. H., Kuo, D. C., Bergman, T. L., and Ball, K. S. (1995). Direct simulation of double-diffusive convection in low prandtl number liquids. *Num. Heat Transfer*, **27**, 639–650.
- Hyung, J. S., Won, K. C., and Jae, M. H. (1993). Double diffusive convection in a rotating annulus with horizontal temperature and vertical solutal gradients,. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **36**, 3773–3782.
- Joly, F., Vasseur, P., and Labrosse, G. (2000). Soret-driven thermosolutal convection in a vertical enclosure. *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, **27**, 755–764.

- Kamotani, Y., Wang, L., Ostrach, S., and Jiang, H. D. (1985). Experimental study of natural convection in shallow enclosures with horizontal temperature and concentration gradients. *Int. J. Heat mass Transfer*, **28**, 165–176.
- Legros, J. C., Platten, J. C., and Poty, P. G. (1972). Stability of a two component fluid layer heated from below. *The Physics of Fluids*, **15**, 1383–1390.
- Lin, T. F. (1993). Unsteady natural convection heat and mass transfer in saturated porous enclosure. *Warme-und Stoffübertragung*, **28**, 49–56.
- Mack, L. R. and Bishop, E. H. (1968). Natural convection between horizontal concentric cylinders for low rayleigh numbers. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, **21**, 223–241.
- Mamou, M. (1998). *Convection thermosolutale dans des milieux poreux et fluides confinés*. PhD thesis, Ecole Polytechnique de Montréal.
- Mamou, M. (2002). Stability analysis of thermosolutal convection in a vertical packed porous enclosure. *Physics of fluids*, **14**, 4301–4314.
- Mamou, M., Vasseur, P., and Bilgen, E. (1995a). Multiple solutions for double-diffusive convection in a vertical porous enclosure. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **38**, 1787–1798.
- Mamou, M., Vasseur, P., and Bilgen, E. (1997a). Finite element study of the onset of thermohaline convection in a confined enclosure heated and salted from below. *The Fifth Annual Conf. of the CFD Society of Canada*, **6**, 19–24.
- Mamou, M., Vasseur, P., and Bilgen, E. (1997b). Finite element study of the onset of thermohaline convection in a horizontal fluid layer. *The third Int. Thermal energy and environment congress, Marakech, Maroc*, **1**, 335–340.

- Mamou, M., Vasseur, P., and Bilgen, E. (1997c). Onset of double diffusive convection instability in a vertical fluid layer. *The Third Int. Thermal energy congress, Kitayushu, Japan*, **1**, 91–96.
- Mamou, M., Vasseur, P., and Bilgen, E. (1998). Double diffusive convection instability problem in a vertical porous enclosure. *J. Fluid Mechanics*, **368**, 263–289.
- Mamou, M., Vasseur, P., Bilgen, E., and Gobin, D. (1995b). Double-diffusive convection in an inclined slot filled with porous medium. *Eur. J. Mech. Fluids*, **14**, 629–652.
- Mamou, M., Vasseur, P., Bilgen, E., and Gobin, D. (1996). Cooperating thermosolutal convection in enclosure-ii, heat transfer and flow structure. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **39**, 2683–2697.
- Marcoux, M. and Charrier-Mojtabi, M. C. (1999). Diffusion thermogravitationnelle dans un mélange binaire saturant un espace annulaire poreux vertical. *Entropie*, **218**, 8–12.
- Marcoux, M., Charrier-Mojtabi, M. C., and Azaiez, M. (1999). Double-diffusive convection in an annular vertical porous layer. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **42**, 2313–2325.
- Mehta, K. N. and Nandakumar, K. (1987). Natural convection with combined heat and mass transfer with buoyancy effects in non-homogeneous porous medium. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **30**, 2651–2656.
- Mojtabi, A. and Caltagirone, J. P. (1979). Energy stability of a natural convective flow in a horizontal annular space. *Physics of Fluids*, **22**, 1208–1220.
- Montel, F. (1994). Importance de la thermodiffusion en exploration et production pétrolières. *Entropie*, **184**, 86–93.

- Nield, D. and Bejan, A. (1999). *Convection in Porous Media*, 2nd ed. Springer-verlang, New York Inc.
- Nield, D. A. (1967). The thermohaline rayleigh-jeffreys problem. *J. Fluid Mechanics*, **29**, 545–558.
- Nield, D. A. (1968). Onset of thermohaline convection in porous medium. *Water Ressources Research*, **4**, 553–560.
- Ostrach, S., Jiang, H. D., and Kamotani, Y. (1995). Bifurcation phenomena in confined thermosolutal convection with lateral heating: Commencement of double-diffusive regime. *Physics of Fluids*, **7**, 718.
- Patankar, S. V. (1980). *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Taylor&Francis.
- Patankar, S. V. and Spalding, D. B. (1972). A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **15**, 1787–1806.
- Platten, J. K. and Chavepeyer, G. (1973). Oscillatory motion in b nard cell due to the solet effect. *J. Fluid Mechanics*, **60**, 305–319.
- Platten, J. K. and Legros, J. C. (1977). Convection. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **20**, 113–122.
- Platten, J. K. and Legros, J. C. (1984). *Convection in liquids*. Springer-Verlag.
- Prasad, V. (1986). Numerical study of natural convection in a vertical, porous annulus with constant heat flux on the inner wall,. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **29**, 841–853.
- Prasad, V. and Kulacki, F. A. (1984). Natural convection in a vertical porous annulus,. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **27**, 207–219.

- Ranganathan, P. and Viskanta, R. (1988). Natural convection in a square cavity due to combined driving forces. *Num. Heat transfert*, **14**, 35–59.
- Rao, Y., Miki, Y., and Takata, Y. and Hasegawa, S. (1985). Flow patterns of natural convection in horizontal cylindrical annuli,. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **28**, 705–714.
- Sedahmed, G. H. and Shemilt, L. W. (1981). Natural convection mass transfer in horizontal annuli. *Letters in Heat and Mass Transfer*, **8**, 515–523.
- Shipp, P. W., Shoukrin, M., and Carver, M. B. (1993a). Double diffusive natural convection in a closed annulus,. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **24**, 339–356.
- Shipp, P. W., Shoukrin, M., and Carver, M. B. (1993b). Effect of thermal rayleigh and lewis numbers on double-diffusive natural convection in a closed annulus,. *Numer. Heat Transfer*, **24**, 451–465.
- Soret, C. (1880). Influence de la température sur la distribution des sels dans leurs solutions. *Compte-Rendu de l'Académie des Sciences, Paris*, **91**, 303–384.
- Taunton, J. and Lightfoot, E. N. (1972). Termohaline instability and salt fingers in porous medium. *The Physics of Fluids*, **15**, 748–753.
- Trevisan, O. V. and Bejan, A. (1985). Natural convection with combined heat and mass transfer buoyancy effects in porous medium. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **28**, 1597–1611.
- Trevisan, O. V. and Bejan, A. (1986). Mass and heat transfer by natural convection in a vertical slot filled with porous medium. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **29**, 403–415.
- Vasseur, P., Hasnaoui, M., and Bilgen, E. and Robillard, L. (1995). Natural convection in an inclined fluid layer with a transverse magnetic field. analogy with a porous medium. *Journal of Heat Transfer*, **117**, 121–129.

- Walton, I. C. (1980). The stability of free convection in a horizontal cylindrical annulus. *Q. J. Mech. Appl. Maths*, **33**, 125–139.
- Ward, J. C. (1964). Turbulent flow in porous media. *J. Hydraul. Div. ASCE*, **90**, 1–12.
- Watson, G. N. (1966). *Theory of Bessel functions*. Cambridge University press.
- Yahiaoui, M. A., Bahloul, A., Langlet, T., Beji, H., and Vasseur, P. (2007a). Naissance de la convection d'un fluide binaire dans un espace annulaire poreux vertical. *21st Canadian Congress of Applied Mechanics*, pages 426–428.
- Yahiaoui, M. A., Bahloul, A., Vasseur, P., and Robillard, L. (2007b). Natural convection of a binary mixture in a vertical closed annulus. *Chemical Engineering Communications*, **194**, 783–794.