



Titre: Recherche directe en programmation multiobjectif
Title:

Auteur: Walid Zghal
Author:

Date: 2008

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Zghal, W. (2008). Recherche directe en programmation multiobjectif [Ph.D. thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.
Citation: <https://publications.polymtl.ca/8171/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/8171/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Gilles Savard, & Charles Audet
Advisors:

Programme: Unspecified
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

RECHERCHE DIRECTE EN PROGRAMMATION MULTIOBJECTIF

WALID ZGHAL

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION

DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR (Ph.D.)

(MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR)

JUIN 2008



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence
ISBN: 978-0-494-46122-8
Our file Notre référence
ISBN: 978-0-494-46122-8

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

RECHERCHE DIRECTE EN PROGRAMMATION MULTIOBJECTIF

présentée par : ZGHAL Walid

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. OUALI Mohamed-Salah, Doct. Sc., président

M. SAVARD Gilles, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. AUDET Charles, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. MARCOTTE Patrice, Ph.D., membre

M. ANJOS Miguel F., Ph.D., membre externe

à mes parents, à Meriem et à Khaled

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de recherche, M. Charles Audet et M. Gilles Savard pour leur soutien constant et les précieux conseils qu'ils m'ont prodigués.

Je remercie également Slim, Sébastien, Gilles, Francine et Vincent pour l'aide qu'ils m'ont apporté dans la réalisation de ce travail.

Je remercie vivement M. Mohamed-Salah Ouali, M. Patrice Marcotte, M. Miguel F. Anjos et M. Michel Perrier d'avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse.

Je remercie mon épouse Meriem pour son écoute, sa patience, ses conseils et son aide incontestable durant cette période.

Mes sincères remerciements vont à mes parents, mon frère Lotfi, Rim et mes beaux parents Tawfik et Jamila pour leurs encouragements. Je remercie aussi mes neveux Emna, Abdou et Youssef d'être le petit rayon de soleil de ma vie.

Je désire remercier particulièrement Faika, Esma, Chedly, Joseph Carlton et Judith pour leur soutien pendant les moments difficiles et leur grande disponibilité.

Finalement, je remercie tous mes amis en Tunisie, au Canada et partout dans le monde !

RÉSUMÉ

Dans la plupart de problèmes réels, la prise de décision dépend de plusieurs critères souvent contradictoires. Ainsi, l'optimisation multiobjectif *MOP* permet d'identifier les meilleurs compromis entre les différents critères selon la relation de dominance Pareto. Dans ce cadre, nous proposons des algorithmes permettant de générer l'ensemble des solutions Pareto optimales, appelé communément le front Pareto.

Nous nous intéressons aux problèmes de type boîte noire souvent rencontrés en industrie pour fin de simulation. Les fonctions objectifs décrivant ces boîtes noires n'ont pas une structure spécifique pouvant être exploitée par un algorithme d'optimisation s'appuyant sur la notion de dérivée. Pour ce faire, nous faisons appel à l'optimisation non-lisse. Ainsi, nous proposons des approches qui résolvent une série de formulations mono-objectifs en utilisant l'algorithme de recherche directe MADS.

Deux algorithmes de résolution sont proposés. Le premier algorithme BIMADS permet de générer le front Pareto d'un problème biobjectif. BIMADS exploite la relation d'ordre qui existe dans l'optimisation biobjectif pour générer un ensemble de solutions uniformément réparties à proximité du front Pareto. À défaut de cette relation d'ordre, nous proposons l'algorithme MULTIMADS pour l'optimisation multiobjectif générale présentant un nombre quelconque d'objectifs. MULTIMADS produit des solutions vérifiant les conditions d'optimalité de premier ordre.

Les deux algorithmes sont testés sur des problèmes académiques conçus pour mettre en évidence les difficultés rencontrées en optimisation multiobjectif notamment pour les problèmes réels. Les tests montrent l'efficacité des algorithmes concernant la proximité des solutions du front Pareto et la qualité de leur distribution. Nos approches sont également appliquées pour résoudre des problèmes réels.

D'une part, BIMADS est utilisé pour résoudre le problème de sélection de portefeuille en finance. Ce problème comporte trois objectifs : maximiser le retour moyen, minimiser la variance et maximiser l'asymétrie. Nous montrons que ce problème tri-objectif peut-être reformulé en un problème biobjectif. L'application de BIMADS sur une instance réelle génère un large ensemble de solutions optimales.

D'autre part, MULTIMADS est utilisé pour résoudre un problème de génie chimique pour la production de styrène. Ce problème comporte trois objectifs et plusieurs contraintes non-lisses. Les valeurs des objectifs et des contraintes sont retournées par un code informatique qui simule les procédés utilisés dans la production du styrène. MULTIMADS produit un ensemble de solutions compromis.

ABSTRACT

In many real-world problems, decisions depend on multiple and conflicting criteria. There is usually no unique solution simultaneously optimal for all criteria; multiobjective optimization *MOP* aims at identifying the best trade-offs between them. Hence, the solution of *MOP* consists of the set of optimal points selected according to the Pareto dominance. The image in the objective space of these points is called the *Pareto frontier*.

We are interested in blackbox problems in which the structure of the objective functions is either absent, unreliable or cannot be exploited. Within this framework, we propose some approaches to solve single-objective formulations using the derivative-free algorithm MADS for nonsmooth optimization.

Two solution algorithms are proposed. The first algorithm BIMADS aims at generating the Pareto front of a biobjective problem *BOP*. The property that Pareto points may be ordered in *BOP* and not in *MOP* is exploited by our algorithm to generate a uniformly spread approximation of the Pareto front. This approach can not be implemented in *MOP* due to the lack of ordering property. So, we propose another algorithm called MULTIMADS for the general multiobjective problem for an arbitrary number of objective functions. The Pareto front approximation is shown to satisfy some first order necessary optimality conditions based on the Clarke nonsmooth calculus.

BIMADS and MULTIMADS are tested on problems from the literature designed to

illustrate specific difficulties encountered in multiobjective optimization. The tests show the effectiveness of the two algorithms in term of proximity of solutions set to the Pareto front and its entire coverage. Our approaches are also applied on real-world problems.

On the one hand, BIMADS is used to solve the portfolio selection problem in Finance. The selection of efficient portfolios requires the optimization of three objective functions : maximizing expected return and skewness while minimizing risk. Hence, the portfolio selection can be formulated as a tri-objective programming problem to solve the mean-variance-skewness efficient set. We reformulate it as a lower dimensional bound constrained biobjective problem. The implementation of BIMADS on a test problem generates an efficient set of portfolios on a test problem.

On the other hand, MULTIMADS is used to optimize a styrene production process problem from chemical engineering. This problem includes three nonsmooth objective functions and several nonsmooth constraints. The objectives and the constraints values are computed as the result of a computer simulation. MULTIMADS generates a set of trade-off solutions.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	viii
TABLE DES MATIÈRES	x
LISTE DES TABLEAUX	xiv
LISTE DES FIGURES	xv
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 OPTIMISATION MULTIOBJECTIF	6
1.1 Dominance au sens Pareto	7
1.2 Classes des méthodes pour l'optimisation multiobjectif	12
1.2.1 La méthode des combinaisons linéaires	13

1.2.2	L'approximation à un point de référence	14
1.2.3	L'approche de la moyenne arithmétique géométrique	16
1.2.4	La méthode NBI	16
1.2.5	Les approches évolutionnistes	19
1.3	Conditions nécessaires d'optimalité non-lisse pour l'optimisation multiobjectif	22
1.4	Formulations mono-objectifs de l'optimisation multiobjectif	24
1.4.1	Formulation normalisée mono-objectif	26
1.4.2	Formulation produit mono-objectif	29
1.5	Les algorithmes MADS et GPS pour l'optimisation mono-objectif	32
1.5.1	Schéma général de l'algorithme GPS	33
1.5.2	Résolution des problèmes avec contraintes	36
1.5.3	Présentation de l'algorithme MADS	41
1.6	Discussion	45
CHAPITRE 2 ALGORITHME DE RÉOLUTION POUR LA PROGRAM-		
MATION BIOBJECTIF		47
2.1	L'algorithme BIMADS pour l'optimisation biobjectif	48

2.1.1	Schéma de l'algorithme BIMADS	48
2.1.2	Analyse de convergence	53
2.2	Résultats numériques sur les problèmes tests	58
2.2.1	Fronts Pareto convexe et non-convexe	60
2.2.2	Front Pareto discontinu	66
2.2.3	Espace de recherche biaisé	68
2.2.4	Front Pareto non-uniforme	69
2.3	Discussion	71

CHAPITRE 3 SÉLECTION OPTIMALE D'UN PORTEFEUILLE EN FI- NANCE 73

3.1	Formulations multiobjectifs pour la sélection de portefeuille avec asymétrie	75
3.2	Une nouvelle approche multiobjectif pour la sélection de portefeuille . .	77
3.3	Application de BIMADS sur le problème de sélection de portefeuilles .	82
3.3.1	Résultats numériques du problème test de Lai	83
3.3.2	Problèmes à investissement risqué unitaire	86
3.4	Discussion	90

CHAPITRE 4	ALGORITHME DE RÉOLUTION POUR LA PROGRAM-	
	MATION MULTIOBJECTIF	91
4.1	L'algorithme MULTIMADS pour l'optimisation multiobjectif	92
4.1.1	Une formulation alternative pour la programmation multiobjectif	92
4.1.2	L'algorithme MULTIMADS	95
4.1.3	Analyse de convergence	99
4.2	Résultats numériques sur les problèmes tests	101
4.2.1	Un problème avec un front Pareto sous la forme d'un hyperplan	102
4.2.2	Un problème avec un front Pareto sphérique	104
4.2.3	Un problème avec un front Pareto unidimensionnel	106
4.2.4	Un problème d'optimisation contraint	108
4.3	Un problème d'ingénierie multiobjectif : optimisation de la production du styrène	110
4.4	Discussion	115
	DISCUSSION GÉNÉRALE ET CONCLUSION	116
	RÉFÉRENCES	119

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1	<i>Mesure de couverture \tilde{c} de chaque région Pareto disjointe</i>	67
Tableau 2.2	<i>Mesure de couverture \tilde{c} pour les problèmes tests</i>	72
Tableau 3.1	Portefeuilles optimaux du problème L^2	85
Tableau 3.2	Portefeuilles optimaux à investissement unitaire	89
Tableau 4.1	Les variables du problème du styrène	111
Tableau 4.2	Les objectifs et les contraintes du problème du styrène	111
Tableau 4.3	Les solutions du problème du styrène	114

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Dominance au sens Pareto illustrée dans le problème biobjectif avec 3 variables	9
Figure 1.2	Le front Pareto, le point Idéal et le point Nadir d'un problème biobjectif	10
Figure 1.3	La méthode des combinaisons linéaires peut générer uniquement un sous ensemble du front Pareto	14
Figure 1.4	L'approximation à un point de référence peut générer un point non-efficent	15
Figure 1.5	La méthode NBI génère des points uniformément espacés pour approcher le front Pareto	18
Figure 1.6	La méthode NBI ne parvient pas à couvrir entièrement le front Pareto quand deux minima individuels coïncident	19
Figure 1.7	Courbes de niveau dans l'espace des objectifs de la formulation normalisée mono-objectif \hat{R}_r pour un problème d'optimisation biobjectif	27

Figure 1.8	Courbes de niveau dans l'espace des objectifs de la formulation produit mono-objectif \tilde{R}_r pour le problème d'optimisation biobjectif	30
Figure 1.9	L'algorithme GPS	35
Figure 1.10	L'algorithme GPS avec filtre	39
Figure 2.1	Schéma de l'algorithme BIMADS pour la programmation biobjectif	49
Figure 2.2	Une itération de BIMADS	52
Figure 2.3	Front global convexe : BIMADS avec 10 et 30 itérations majeures de MADS	62
Figure 2.4	Front global non-convexe : BIMADS avec 10 et 30 itérations majeures de MADS	64
Figure 2.5	Front local non-convexe et front global convexe : BIMADS avec 10 et 30 itérations majeures de MADS	65
Figure 2.6	Front global discontinu : BIMADS avec 10 et 30 itérations majeures MADS	67
Figure 2.7	Recherche biaisée : BIMADS avec 10, 30 et 500 itérations majeures de MADS	70

Figure 2.8	Non-uniformité représentant le front Pareto : BIMADS avec 10 et 30 itérations majeures de MADS	71
Figure 3.1	Programmation polynomiale par but : approximation du point idéal	77
Figure 3.2	portefeuilles optimaux : BIMADS avec 10 et 30 itérations majeures de MADS	85
Figure 3.3	portefeuilles optimaux à investissement unitaire : BIMADS avec 30 itérations majeures de MADS	88
Figure 4.1	Courbes de niveau dans l'espace des objectifs de la formulation distance mono-objectif \bar{R}_τ pour un problème d'optimisation biobjectif utilisant les normes L_1 , L_2 et L_∞	94
Figure 4.2	Le TS pour un problème biobjectif	97
Figure 4.3	Schéma de l'algorithme MULTIMADS pour la programmation multiobjectif	98
Figure 4.4	Front Pareto sous la forme d'un hyperplan : MULTIMADS avec 30000 évaluations de MADS	103
Figure 4.5	Front Pareto sphérique : MULTIMADS avec 30000 évaluations de MADS	105
Figure 4.6	Front Pareto unidimensionnel : MULTIMADS avec 30000 évaluations de MADS	107

Figure 4.7	Front Pareto d'un problème contraint : MULTIMADS avec 30000 évaluations de MADS	109
Figure 4.8	Front Pareto du problème du styrène : MULTIMADS avec 30000 évaluations de MADS	113

INTRODUCTION

L'optimisation multiobjectif est une branche des mathématiques en pleine expansion depuis quelques années. Ce domaine étudie dans un cadre général la question de trouver parmi un grand nombre de solutions, les meilleurs compromis selon des critères définis par le décideur. Nous nous intéressons aux problèmes multiobjectifs rencontrés dans l'industrie qui font intervenir des boîtes noires dans l'évaluation des fonctions objectifs. Celles-ci peuvent requérir de longues simulations ou nécessiter la résolution de systèmes d'équations différentielles couplées. Ces fonctions sont souvent affectées par un bruit numérique et donc l'utilisation ou même l'estimation de dérivées est problématique. Quelques exemples d'optimisation mono-objectif des problèmes en boîtes noires sont détaillés dans [2, 8, 18, 22, 56, 67]).

Étant donné la nature complexe de tels problèmes, les outils d'optimisation classiques ne sont pas appropriés pour les résoudre et l'optimisation sans dérivées est alors nécessaire. C'est pour cela que nous proposons d'utiliser une nouvelle approche à savoir la *Recherche Directe sur Treillis Adaptatifs* (MADS) [13]. MADS est une généralisation des algorithmes de *recherche par motifs* (GPS) proposés par Torczon [82].

Les méthodes de recherche par motifs furent initialement développées pour l'optimisation à un seul objectif sans contraintes. Elles permettent la résolution d'un problème dont la fonction objectif est non différentiable ou coûteuse à évaluer. Elles furent étendues au cas à contraintes de bornes [62], à contraintes linéaires [63], à variables mixtes [10]

et à contraintes non-linéaires [13] via les méthodes de filtres [12, 27, 42]. L'analyse de convergence de ces méthodes [11, 13] repose sur le calcul non-lisse de Clarke [25].

Les méthodes de filtres consistent essentiellement à résoudre un problème biobjectif où d'un côté on cherche à minimiser une fonction objectif, et de l'autre, on cherche à minimiser une fonction synthétisant la violation de contraintes. Nous proposons d'utiliser cette méthodologie au cas multiobjectif afin de concevoir une approche permettant d'estimer la courbe Pareto optimale pour un problème multicritère dont les fonctions objectifs sont non-lisses. Cette méthodologie est accompagnée d'une étude rigoureuse de la convergence basée sur des propriétés locales de différentiabilité. Nous ne connaissons pas de travaux traitant rigoureusement des problèmes multiobjectifs non-lisses avec une analyse de convergence. Ainsi, notre contribution est double : contribuer au développement théorique pour les deux domaines à savoir la recherche directe et la programmation multiobjectif ; et proposer des algorithmes efficaces permettant de résoudre des applications pratiques, multidisciplinaires notamment en ingénierie. Ainsi, la thèse comporte quatre chapitres, organisés de la façon suivante.

Le premier chapitre, servant de référence aux autres, introduit le problème d'optimisation multiobjectif (*MOP*). Nous présentons, notamment, le concept d'optimalité Pareto ainsi qu'un ensemble d'approches de résolution pour générer les solutions compromises. Les conditions nécessaires d'optimalité de *MOP* sont décrites à l'aide du calcul de Clarke[25]. En se basant sur ces conditions, nous proposons une classe de formulations mono-objectifs de *MOP*.

Le second chapitre s'intéresse particulièrement au problème biobjectif (*BOP*) sous les contraintes de bornes. *BOP* est l'instance de *MOP* faisant appel à deux objectifs. Dans ce cadre, nous proposons un algorithme appelé BIMADS pour résoudre *BOP* en exploitant la propriété d'ordre qui caractérise le problème *BOP* vis-à-vis de *MOP*. BIMADS génère une approximation du front Pareto en résolvant une série de formulations mono-objectifs de *BOP* en utilisant l'algorithme de recherche directe sur treillis adaptifs (MADS). Nous montrons que l'ensemble produit par BIMADS satisfait certaines conditions nécessaires de premier ordre en utilisant le calcul de Clarke. Finalement, BIMADS est testé sur des problèmes de la littérature conçus pour illustrer les difficultés spécifiques à l'optimisation biobjectif, en particulier celles qui sont sous-jacentes à un front Pareto non-convexe, un front Pareto disjoint, des fronts Pareto locaux ou à un front Pareto non-uniforme.

Dans le troisième chapitre, nous proposons une approche pour résoudre le problème multiobjectif de sélection de portefeuilles. La sélection des portefeuilles optimaux en présence d'asymétrie dans la distribution des rendements nécessite l'optimisation de divers critères conflictuels : maximiser le rendement attendu, minimiser la variance et finalement maximiser l'asymétrie. Ainsi, la sélection de portefeuilles peut être formulée comme un problème tri-objectif pour résoudre l'ensemble efficient dans l'espace moyenne-variance-asymétrie. La mise à l'échelle de la composition des portefeuilles à l'unité de variance réduit le problème de sélection en un problème biobjectif, mais rajoute une contrainte d'égalité non-linéaire au modèle. Par le biais d'un changement de

variable, nous reformulons le modèle en un problème biobjectif de plus petite taille. l'algorithme BIMADS proposé dans le chapitre 2 pour l'optimisation biobjectif est alors appliqué afin de générer un ensemble efficient de portefeuilles pour un problème test issu de la littérature.

Dans le quatrième chapitre, nous poursuivons l'étude du problème multiobjectif non-lisse (*MOP*). En contraste avec le modèle présenté au chapitre 2, nous rajoutons deux niveaux de difficultés. D'une part, nous traitons les contraintes générales au lieu des contraintes de bornes. D'autre part, nous augmentons le nombre des fonctions objectifs. Avec la deuxième extension, la relation d'ordre exploitée dans l'algorithme BIMADS n'est plus valable. Nous présentons une nouvelle stratégie pour définir les formulations mono-objectifs à partir d'un ensemble de points de référence appartenant au simplexe tangent au front Pareto. En se basant sur cette stratégie, nous proposons un algorithme appelé MULTIMADS (recherche directe multiobjectif sur treillis adaptifs) pour résoudre le problème *MOP* sous sa forme générale. MULTIMADS génère une approximation du front Pareto en résolvant une série de formulations mono-objectifs de *MOP*. Chaque formulation est définie à partir d'un point de référence appartenant au simplexe tangent. Ces problèmes mono-objectifs sont résolus en utilisant l'algorithme MADS pour l'optimisation non-lisse. L'approximation du front Pareto satisfait certaines conditions d'optimalité de premier ordre en se basant sur le calcul de Clarke. MULTIMADS est testé sur des problèmes académiques avec divers formats du front Pareto tel qu'un front Pareto sous la forme d'un hyperplan, un front Pareto sphérique et un front Pareto unidimension-

nel. Finalement, MULTIMADS est appliqué sur un problème tri-objectif non-lisse pour la production de styrène en génie chimique.

La dernière partie de la thèse est une conclusion générale sur les contributions de la thèse et les perspectives d'avenir que peut offrir ce travail.

CHAPITRE 1

OPTIMISATION MULTIOBJECTIF

Plusieurs problèmes pratiques de décision dépendent de critères multiples et contradictoires. Par exemple, dans la gestion de portefeuille, deux critères sont souvent considérés : le retour du portefeuille et son risque volatil [66]. Dans la plupart des cas, il n'existe pas de solution unique qui soit simultanément optimale pour les deux critères. L'optimisation multiobjectif cherche à identifier les meilleurs compromis entre les différents critères. La programmation multiobjectif sous contraintes générales se formule de la manière suivante :

$$MOP : \min_{x \in \Omega} F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))$$

avec

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \text{ et } \Omega \subseteq X = \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq x \leq b\}$$

où n est le nombre de variables, p est le nombre de fonctions objectifs, $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^n$ et $b \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ sont des vecteurs de borne et finalement Ω représente l'ensemble réalisable. Tout au long de la thèse, X est supposé de pleine dimension, c'est-à-dire, $a < b$ par élément. Au chapitre 2, nous nous intéressons au problème biobjectif sous contraintes de bornes. Dans ce cas, le domaine réalisable Ω coïncide avec X . Par contre,

au chapitre 4, nous étudions le problème multiobjectif sous contraintes générales, c'est-à-dire, $\Omega \subseteq X$. La solution de *MOP* est l'ensemble des meilleurs points compromis sélectionnés selon la relation de dominance au sens Pareto présentée à la section 1.1. L'image selon l'application F de ces points est appelée *front Pareto*.

Le chapitre est divisé comme suit. La relation de dominance au sens Pareto est présentée à la section 1.1. Une revue des méthodes tirées de la littérature est donnée à la section 1.2. Quelques conditions nécessaires d'optimalité utilisant le calcul de Clarke [25] sont détaillées à la section 1.3. Des nouvelles formulations mono-objectifs sont proposées dans la section 1.4. Finalement, les algorithmes MADS et GPS pour résoudre les formulations mono-objectifs des problèmes en boîtes noires sont détaillés à la section 1.5.

1.1 Dominance au sens Pareto

La comparaison entre solutions optimales requiert une relation d'ordre, appelée relation de dominance, entre les différents points [83]. Plusieurs relations de dominance telles que la dominance Geoffrion [44] et la dominance lexicographique [40] ont été proposées. La plus utilisée est basée sur la dominance au sens Pareto :

Définition 1.1.1 Soit u, v deux vecteurs de décision. Nous définissons :

- $u \preceq v$ (u domine faiblement v) si et seulement si $f_i(u) \leq f_i(v)$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$.

- $u \prec v$ (u domine v) si et seulement si $u \preceq v$ et $f_j(u) < f_j(v)$ pour au moins un indice $j \in \{1, 2, \dots, p\}$.
- $u \sim v$ (u est indifférent à v) si et seulement si u ne domine pas v , et v ne domine pas u .

Ainsi, la relation de dominance au sens Pareto s'appuie uniquement sur les valeurs des fonctions objectifs. Par la suite, en se basant sur cette relation, on peut être indifférent quant au choix entre deux solutions. Dans ce cas, il serait approprié de prendre en considération les préférences du décideur. La définition 1.1.1 est illustrée à la figure 1.1 pour un problème biobjectif dans lequel $\Omega = X$ est un hypercube dans \mathbb{R}^3 . La région Ω est projetée dans l'espace des objectifs ; l'image de l'ensemble réalisable Ω sous l'application F est dénotée par $Y \subseteq \mathbb{R}^p$, et délimitée par la courbe dans la partie droite de la figure.

La figure met en évidence trois zones dans l'espace des objectifs, relativement au point réalisable $x_1 \in \Omega$. La *zone dominée* est l'ensemble des points dominés par x_1 . La *zone dominante* est l'ensemble des points qui dominent x_1 . La *zone d'indifférence* est l'ensemble des points indifférents à x_1 . Dans la figure, x_1 domine x_2 mais il est dominé par x_3 et indifférent à x_4 , c'est-à-dire, $x_3 \prec x_1 \prec x_2$ et $x_1 \sim x_4$. x_4 est aussi indifférent à x_2 et x_3 , c'est-à-dire, $x_2 \sim x_4 \sim x_3$.

La relation de dominance présentée ci-dessus définit un concept d'optimalité pour la programmation multiobjectif. Nous distinguons entre l'optimalité locale et l'optimalité

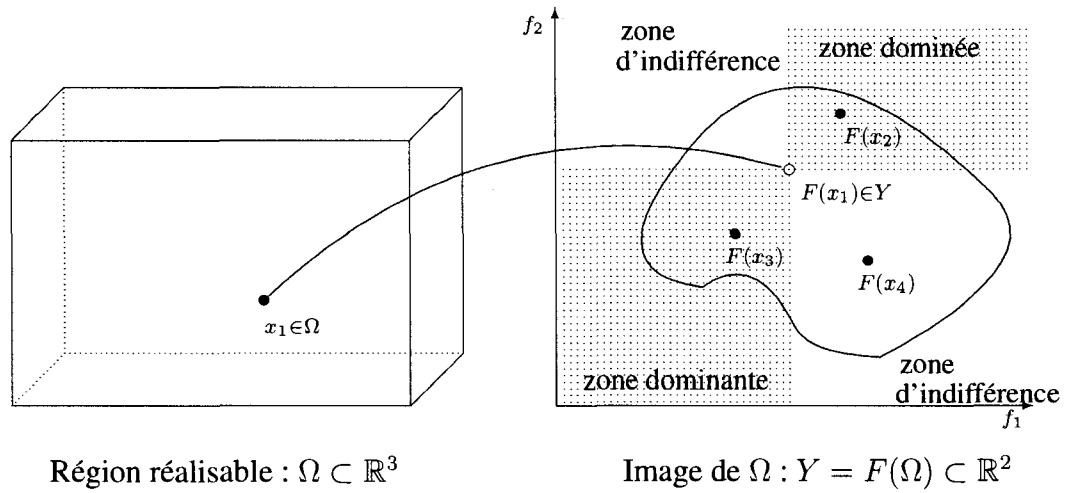


Figure 1.1 – Dominance au sens Pareto illustrée dans le problème biobjectif avec 3 variables

globale au sens Pareto.

Définition 1.1.2 *Un point $x^* \in \Omega$ est dit Pareto globalement optimal si et seulement s'il n'existe aucun $x \in \Omega$ tel que $x \prec x^*$. Si x^* est Pareto globalement optimal alors $F(x^*)$ est appelé globalement efficient.*

La plupart des méthodes ne garantissent pas l'optimalité globale mais assurent au mieux l'optimalité locale :

Définition 1.1.3 *Un point $\tilde{x} \in \Omega$ est dit Pareto localement optimal si et seulement s'il existe un certain $\epsilon > 0$ pour lequel l'ensemble*

$$\{x \in B_\epsilon(\tilde{x}) \cap X : x \prec \tilde{x}\}$$

est vide, où $B_\epsilon(\tilde{x})$ dénote une boule ouverte centrée en \tilde{x} de rayon ϵ . Si \tilde{x} est localement Pareto optimal alors $F(\tilde{x})$ est dit localement efficient.

Les deux notions sont illustrées à la figure 1.2. Le point $\tilde{x} \in \Omega$ est localement Pareto optimal alors que tous les points qui se trouvent à la frontière de Y dans la zone hachurée sont Pareto globalement optimaux. L'optimalité au sens Pareto réfèrera désormais à l'optimalité globale au sens Pareto sauf indication contraire. L'ensemble des points globalement optimaux est appelé ensemble globalement Pareto optimal et noté par $X_{\mathcal{P}}$. L'image sous l'application F de $X_{\mathcal{P}}$ définit l'ensemble des solutions du problème multiobjectif, et cet ensemble est appelé le *front Pareto global*, denoté par $Y_{\mathcal{P}} \in \mathbb{R}^p$. L'image de l'ensemble des points localement Pareto optimaux est appelé un *front Pareto local*. Ainsi, le front Pareto correspond à l'ensemble des meilleurs compromis du problème multiobjectif selon les critères définis par le décideur.

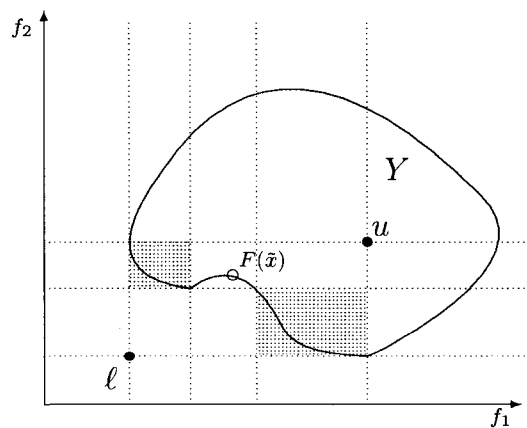


Figure 1.2 – Le front Pareto, le point Idéal et le point Nadir d'un problème biobjectif

La figure 1.2 met aussi en évidence deux points importants dans l'espace des objectifs. Le *point Idéal* $\ell \in (\mathbb{R} \cup -\infty)^p$ correspond au vecteur composé des minima individuels de chaque fonction objectif :

$$\ell = \left(\min_{x \in X} f_1(x), \min_{x \in X} f_2(x), \dots, \min_{x \in X} f_p(x) \right)^T.$$

Le *point Nadir* $u \in (\mathbb{R} \cup \infty)^p$ est le vecteur dont les composantes sont les maxima individuels dans le front Pareto de chaque fonction objectif :

$$u = \left(\max_{x \in X_{\mathcal{P}}} f_1(x), \max_{x \in X_{\mathcal{P}}} f_2(x), \dots, \max_{x \in X_{\mathcal{P}}} f_p(x) \right)^T.$$

Pour conclure la section, notons les caractéristiques du problème biobjectif qui le distinguent du problème multiobjectif. Tout d'abord, on peut reproduire les solutions du problème biobjectif dans un graphique à deux dimensions. La représentation graphique constitue ainsi, un outil efficace pour évaluer la qualité des solutions. Par contre, pour un problème multiobjectif avec un nombre de fonctions objectifs p supérieur à deux, il faut utiliser des coupes et des sections transversales. Une autre distinction du problème biobjectif par rapport au problème multiobjectif réside dans la propriété d'ordre que possède le front Pareto. En particulier, les points Pareto peuvent être ordonnés selon une seule fonction objectif. Cette propriété est absente dans le cas multiobjectif général, ce qui représente une difficulté supplémentaire pour la résolution. Ainsi, nous présentons

au chapitre 2 un algorithme pour le problème biobjectif exploitant la propriété d'ordre. À défaut de cette propriété, nous proposons au chapitre 4 un autre algorithme pour le problème multiobjectif général.

1.2 Classes des méthodes pour l'optimisation multiobjectif

Nous discutons de différentes classes de méthodes pour *MOP* [41]. Une première classe consiste à reformuler *MOP* en une série de programmes mono-objectifs en agrégeant les fonctions objectifs. Quatre méthodes de cette classe sont présentées. La méthode des combinaisons linéaires est détaillée à la section 1.2.1. L'approximation à un point de référence est décrite à la section 1.2.2. L'approche de la moyenne arithmétique géométrique est présentée à la section 1.2.3. Finalement, la méthode NBI est décrite à la section 1.2.4. Une deuxième classe s'appuie directement sur la notion de dominance pour la sélection des solutions contrairement aux autres méthodes qui transforment le problème *MOP*. Ces approches ont été implémentées à l'aide des algorithmes évolutionnistes présentées à la section 1.2.5.

Selon la nature des problèmes traités, certaines méthodes génèrent des solutions exactes, notamment pour l'optimisation multiobjectif linéaire [6, 21]. Dans le cas non linéaire, les méthodes présentées dans cette section génèrent souvent un ensemble des points $Y_{\mathcal{L}}$ qui donne une approximation du front Pareto $Y_{\mathcal{P}}$. Deux stratégies naturelles sont considérées en mettant en place ces approches heuristiques pour *MOP* [85]. Une

stratégie consiste à s'assurer que l'algorithme génère des points dont les images convergent rapidement vers des points du front Pareto $Y_{\mathcal{P}}$. La seconde stratégie permet de bien répartir ces points ; ainsi ils forment un ensemble bien réparti de solutions non dominées $Y_{\mathcal{L}}$.

1.2.1 La méthode des combinaisons linéaires

La méthode des combinaisons linéaires [26] consiste à convertir le *MOP* en un problème d'optimisation mono-objectif en minimisant une combinaison convexe des objectifs :

$$LC : \min_{x \in \Omega} \sum_{i=1}^p w_i f_i(x),$$

où $w_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, \dots, p$ sont des poids tels que $\sum_{i=1}^p w_i = 1$. Toute solution optimale de *LC* est Pareto optimale pour *MOP*. La réciproque n'est pas vraie. Ainsi, la résolution de *LC* pour différentes combinaisons de poids produit un sous-ensemble de solutions Pareto. Une difficulté bien connue de cette méthode est le fait qu'elle ne génère aucun point dans la partie non-convexe du front Pareto $Y_{\mathcal{P}}$ tel qu'illustré à la figure 1.3. Aucune valeur des poids w_1 et w_2 n'assure la convergence vers un point au voisinage du point efficient $F(x^*)$, et les seuls points du front Pareto pouvant être générés sont ceux qui appartiennent à la zone hachurée de la figure 1.3. Les zones hachurées sont significativement plus petites que celles de la figure 1.2 qui délimitent le front Pareto.

Une seconde difficulté de la méthode des combinaisons linéaires réside dans le fait

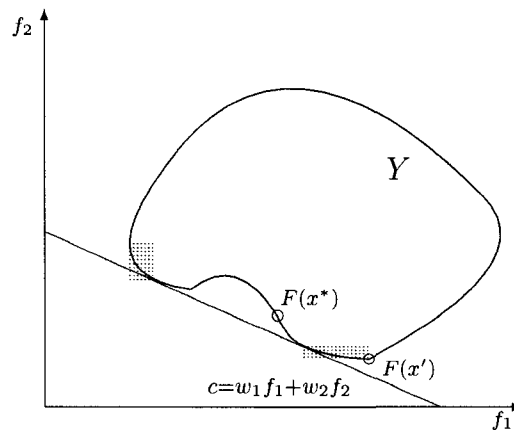


Figure 1.3 – La méthode des combinaisons linéaires peut générer uniquement un sous ensemble du front Pareto

que le même point peut-être généré par divers combinaisons des poids, tel qu'illustré par $F(x')$ à la figure 1.3.

Les deux difficultés constituent l'inconvénient principal de la méthode des combinaisons linéaires et entraînent le manque d'uniformité dans la distribution des points approchant le front Pareto.

1.2.2 L'approximation à un point de référence

La méthode consiste à trouver une solution réalisable $x \in \Omega$ telle que $F(x)$ est au voisinage d'un certain point $r \in \mathbb{R}^p$ [83, 84]. Souvent, le point Idéal défini à la section 1.1 est utilisé comme le point de référence, c'est-à-dire, $r = \ell$. Le problème est formulé comme suit :

$$PI_r : \min_{x \in \Omega} \|F(x) - r\|_q = \left(\sum_{i=1}^p |f_i(x) - r_i|^q \right)^{1/q},$$

où $\|\cdot\|_q$ est la norme q avec $1 \leq q \leq \infty$. La méthode utilisant la norme $\|\cdot\|_2$ est illustrée à la figure 1.4 pour un problème biobjectif. La résolution de PI_r avec différents points de référence produit un ensemble de points qui approche le front Pareto. Dans la figure 1.4, la méthode utilisant ℓ comme point de référence génère un point efficient $F(x^*)$. Contrairement à la méthode des combinaisons linéaires, l'approximation à un point de référence peut générer des points dans la partie non-convexe du front Pareto. Cependant, elle peut générer des points non-efficients, tel qu'illustré à la figure 1.4 par la génération de $F(x)$ à partir du point de référence r .

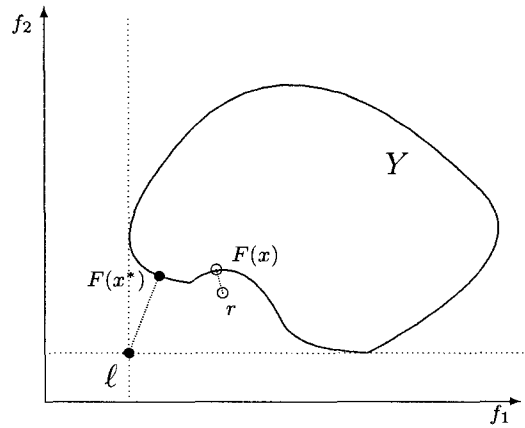


Figure 1.4 – L'approximation à un point de référence peut générer un point non-efficient

1.2.3 L'approche de la moyenne arithmétique géométrique

L'approche de la moyenne arithmétique géométrique consiste à convertir le *MOP* en un problème d'optimisation mono-objectif en maximisant la moyenne géométrique des différences entre les composantes du point Nadir u définie à la section 1.1 et les fonctions objectifs :

$$GMP : \quad \max_{x \in \Omega} \prod_{i=1}^p (u_i - f_i(x))^{\lambda_i}$$

$$\text{s.à. } f_i(x) \leq u_i, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, p,$$

avec $\lambda_i > 0$ pour $i = 1, 2, \dots, p$. Lootsma et al. [65] montre que si f_1, f_2, \dots, f_p sont convexes, alors la solution de *GMP* est Pareto optimale. Un des inconvénients de cette approche est le fait que le problème *GMP* contient p contraintes générales en plus des contraintes définissant Ω . Cette approche partage des points en commun avec la méthode que nous proposons au chapitre 2 sans introduire des contraintes supplémentaires.

1.2.4 La méthode NBI

Contrairement aux approches précédentes, l'algorithme NBI proposée par Das et Dennis [32] génère un ensemble de points non-dominés uniformément répartis. La méthode n'est pas sensible au nombre des fonctions objectifs et leurs ordres de grandeur. D'abord, Das et Dennis [32] introduit l'*Enveloppe Convexe des Minima Individuels* (*CHIM*) comme suit :

Définition 1.2.1 Soit x_i^* un minimum de f_i pour $i = 1, 2, \dots, p$. Soit $F_i^* = F(x_i^*)$ pour $i = 1, 2, \dots, p$ et $\ell = (f_1^*, f_2^*, \dots, f_p^*)$ le point idéal. Soit \mathcal{F} la matrice $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est $F_i^* - \ell$. Soit l'ensemble $B = \{\beta \in \mathbb{R}^p : \sum_{i=1}^p \beta_i = 1, \beta_i \geq 0\}$. Alors, l'ensemble $\{\ell + \mathcal{F}\beta : \beta \in B\}$, est référé comme l'Enveloppe Convexe des Minima Individuels.

Se basant sur le concept du *CHIM*, l'approche NBI [32] produit une approximation du front Pareto en résolvant une série de problèmes mono-objectifs NBI_β paramétré par un vecteur de combinaison convexe $\beta \in B$, et dans lesquels des contraintes d'égalité sont rajoutés :

$$\begin{aligned} \max_{x,t} \quad & t \\ NBI_\beta : \quad & \text{s.à.} \quad \ell + \mathcal{F}\beta + t\hat{n} = F(x) \\ & x \in \Omega, \end{aligned}$$

où \hat{n} dénote le vecteur unitaire normal au simplexe *CHIM*, pointant vers le point idéal. En pratique, \hat{n} est la somme des colonnes de \mathcal{F} . La solution de NBI_β est l'intersection de la normale au *CHIM* et la frontière de $F(\Omega)$ au voisinage du point idéal. Résoudre NBI_β pour différentes valeurs de β fournit une approximation du front Pareto. Notons que cette approche n'est pas appropriée dans le contexte de l'optimisation non-lisse à cause des contraintes d'égalité. Das et Dennis [32] propose une stratégie pour générer des vecteurs de combinaison uniformément répartis $\beta \in B$. Dans cette stratégie, les valeurs de chaque composante de β sont simplement $0, \delta, 2\delta, \dots, 1$ où $\delta \leq 1$ est un pas

fixe tel que $\frac{1}{\delta}$ est un entier positif. Ainsi, le nombre de sous-problèmes NBI est égal à $\binom{p + \frac{1}{\delta} - 1}{\frac{1}{\delta}}$. Cet ensemble uniformément réparti β génère des points uniformément espacés dans le *CHIM*. L'intersection des normales au *CHIM* émanant de $\ell + \mathcal{F}\beta$ et la frontière de $F(\Omega)$ donne une approximation uniforme du front Pareto. L'approche NBI est illustré à la figure 1.5 pour un problème biobjectif. Le *CHIM* est représenté par un segment pointillé et les flèches sont utilisées pour représenter ses normales.

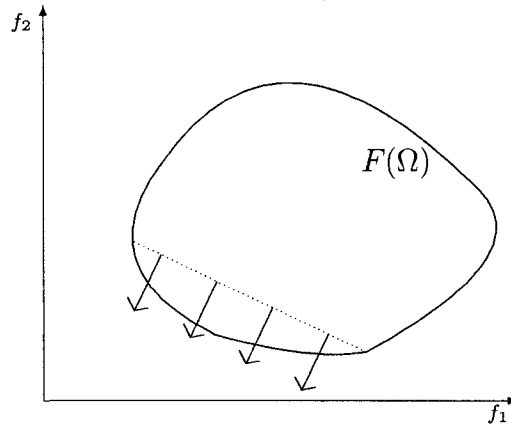


Figure 1.5 – La méthode NBI génère des points uniformément espacés pour approcher le front Pareto

Malgré la distribution uniforme des points générés par NBI, Das [31] et Kim et al. [55] présentent de nombreuses limitations de la méthode. En particulier, la méthode NBI ne parvient pas à couvrir entièrement le front Pareto lorsque le minimum d'une fonction objectif n'est pas unique. Pour illustrer cette limitation, considérons un simple exemple tri-objectif. Supposons que le front Pareto appartient est le simplexe défini par $\sum_{i=1}^3 y_i = 1$ tel que $y_i \geq 0$. Tel qu'illustré à la figure 1.6, le front Pareto est l'enveloppe

convexe du triangle ABC . Notons que tout le segment \overline{AB} minimise f_1 . Alors que le segment \overline{BC} minimise f_2 . Finalement, le segment \overline{AC} minimise l'objectif f_3 . Ainsi, pour différentes fonctions objectifs, NBI peut trouver le même minimum individuel. Par exemple, NBI peut identifier le point A qui minimise simultanément f_2 et f_3 d'une part et identifier le point C qui minimise f_1 d'autre part. Par conséquent, le *CHIM* se limiterait uniquement dans ce cas au segment \overline{AC} . Il s'ensuit que seulement les points non-dominés appartenant au segment \overline{AC} peuvent être générés par NBI.

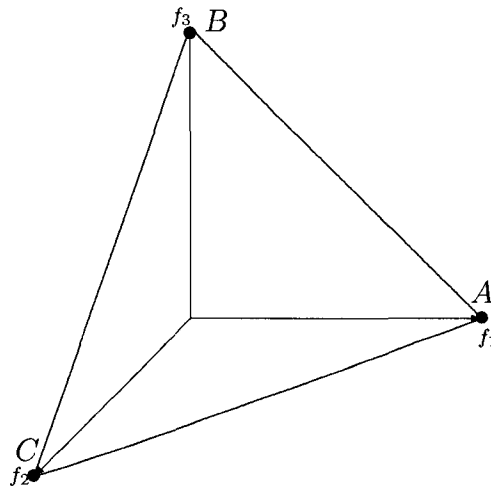


Figure 1.6 – La méthode NBI ne parvient pas à couvrir entièrement le front Pareto quand deux minima individuels coïncident

1.2.5 Les approches évolutionnistes

Certaines approches se basent directement sur le concept de la dominance au sens Pareto pour générer des solutions optimales sans reformuler le problème multiobjectif. Elles sont souvent mises en application par des algorithmes évolutionnistes [20]. Ces approches sont caractérisées par trois notions : une *population* composée d'un ensemble

de solutions appelées individus, un *mécanisme d'évaluation* qui assigne une valeur dite d'adaptation pour mesurer la qualité de chaque individu, et un *mécanisme d'évolution* qui utilise des opérateurs génétiques [85] à savoir la recombinaison, la mutation et la sélection afin de générer une nouvelle population. La sélection permet de garder les meilleurs individus selon le mécanisme d'évaluation. La mutation consiste à transformer un individu pour créer un autre et la recombinaison consiste à générer un individu à partir de deux autres appelés parents. À chaque itération, les algorithmes évolutionnistes génèrent un ensemble de points non-dominés entre eux qui approchent le front Pareto. Plusieurs mécanismes ont été développés afin d'améliorer la qualité de l'approximation. On y distingue : la sélection Pareto, l'élitisme et le maintien de la diversité.

La sélection Pareto

Les algorithmes évolutionnistes permettent l'exploitation de la notion de dominance pour la sélection des solutions. Plusieurs méthodes, appelées méthodes de *ranking*, ont été développées afin d'établir un ordre entre les individus. La première méthode a été proposée par Goldberg [46] et implémentée dans l'algorithme *NSGA* par Srinivas et Deb [77]. Dans cette procédure, tous les individus non dominés de la population reçoivent le rang 1. Ces individus sont ensuite retirés de la population et les individus non dominés de la population résultante reçoivent le rang 2. Le processus est réitéré tant qu'il y a des individus dans la population. À la fin, chaque individu est affecté d'un rang qui correspond à sa valeur d'adaptation. Notons que l'efficacité de la méthode est sensible à la

taille du problème. Lorsque le nombre de variables est grand, les individus ont souvent le même rang. Dans ce cas, la sélection devient problématique.

L'élitisme

L'élitisme consiste à conserver en mémoire une population comprenant toutes les solutions Pareto optimales obtenues au cours de l'optimisation [59]. Cette population externe représente la meilleure approximation du front Pareto. Ses individus participent dans la définition des opérateurs génétiques. Cette technique permet d'améliorer l'efficacité des algorithmes en donnant une meilleure approximation du front Pareto [69].

Le maintien de la diversité

Le maintien de la diversité consiste à produire une bonne répartition des individus au sein d'une population. Ce mécanisme permet de remédier à la convergence prématurée des algorithmes vers une seule partie du front Pareto en explorant différentes zones de l'espace de recherche. Plusieurs techniques ont été proposées dans ce cadre. On y distingue, la technique du *sharing* [45] qui consiste à pénaliser la valeur d'adaptation d'un individu en fonction de la densité de population dans un voisinage prédéterminé. Holland [49] propose une autre technique appelée *crowding* qui consiste à identifier un représentant pour chaque concentration d'individus. Seuls les représentants sont candidats aux opérations de sélection, de croisement et de mutation.

1.3 Conditions nécessaires d'optimalité non-lisse pour l'optimisation multiobjectif

Cette section contient des conditions nécessaires d'optimalité pour la l'optimisation multiobjectif qui étendent les conditions de premier ordre pour l'optimisation mono-objectif. En particulier, nous nous intéressons aux problèmes faisant appel à des boîtes noires pour l'évaluation des fonctions objectifs. Étant donné la nature complexe de ces problèmes, l'optimisation non-lisse est alors nécessaire pour les résoudre. L'analyse de convergence utilise le calcul de Clarke [25] pour les fonctions non-lisses. Pour une fonction localement Lipschitz $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, Clarke [25] définit la *dérivée directionnelle généralisée* de f évaluée à $\tilde{x} \in \Omega$ dans la direction tangente $v \in \mathbb{R}^n$ comme suit :

$$f^\circ(\tilde{x}; v) = \limsup_{y \rightarrow \tilde{x}, t \downarrow 0} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t}. \quad (1.1)$$

Un point $\tilde{x} \in \Omega$ est dit point stationnaire de Clarke de f sur le domaine Ω si la dérivée généralisée est non-négative pour toute direction dans $T_\Omega^{Cl}(\tilde{x})$, le cône tangent de Clarke à Ω en \tilde{x} [25]. $T_\Omega^{Cl}(\tilde{x})$ est l'ensemble des directions $v \in \mathbb{R}^n$ vérifiant la condition suivante [51, 52] : Pour toute suite de points réalisables $\{y_k\}$ telle que $y_k \rightarrow \tilde{x}$ et pour toute suite de nombres réels positifs $\{t_k\}$ telle que $t_k \rightarrow 0$, il existe une suite $\{w_k\}$ telle que $w_k \rightarrow v$ et $y_k + t_k w_k \in \Omega$.

Un autre concept important du calcul de Clarke est le *gradient généralisé*. Il représente

l'ensemble $\partial f(\hat{x}) = \{s \in \mathbb{R}^n : f^\circ(\hat{x}; v) \geq v^T s \text{ pour tout } v \in \mathbb{R}^n\}$.

Le théorème suivant présente une condition nécessaire pour l'optimalité au sens Pareto pour *MOP* analogue aux conditions d'optimalité pour les fonctions ensemble-valeurs [29] réécrites suivant notre notation.

Théorème 1.3.1 *Considérons le cas où les fonctions f_i sont Lipschitz au voisinage de $\tilde{x} \in \Omega$, $i = 1, 2, \dots, p$. Si \tilde{x} est localement Pareto optimale, alors pour toute direction d dans le cône tangent de Clarke $T_\Omega^{Cl}(\tilde{x})$, il existe $\hat{j} \in \{1, 2, \dots, p\}$ pour laquelle*

$$f_{\hat{j}}^\circ(\tilde{x}; d) \geq 0.$$

Le théorème 1.3.1 permet d'analyser la convergence des méthodes dédiées à l'optimisation non-lisse. Puisque la plupart des problèmes académiques sont différentiables, ces méthodes devraient également garantir les conditions standard pour l'optimisation lisse. Ainsi, en supposant la différentiabilité stricte [60] de F (c'est-à-dire, pour chaque fonction objectif f_i pour $i = 1, 2, \dots, p$) nous obtenons le corollaire suivant [41]. La différentiabilité stricte de f_i en $\tilde{\Omega}$ est la condition assurant que le gradient généralisé est un singleton, c'est-à-dire, $\partial f_i(\tilde{x}) = \{\nabla f_i(\tilde{x})\}$ outre la condition assurant que f_i est Lipschitz au voisinage de \tilde{x} .

Corollaire 1.3.2 *Supposons que F est strictement différentiable en $\tilde{x} \in \Omega$. Si \tilde{x} est localement Pareto optimale alors pour toute direction d dans le cône tangent de Clarke*

$T_{\Omega}^{Cl}(\tilde{x})$, il existe un certain $\hat{j} \in \{1, 2, \dots, p\}$ tel que $\nabla f_{\hat{j}}(\tilde{x})^T d \geq 0$. Le point \tilde{x} est appelé une solution KKT-proprement efficiente pour MOP .

Notons que dans le cas où $p = 1$, c'est-à-dire, lorsqu'il n'y a qu'une seule fonction objectif, le théorème 1.3.1 et le corollaire 1.3.2 correspondent aux conditions standard d'optimalité non-lisse pour l'optimisation mono-objectif à savoir :

Théorème 1.3.3 *Si f est Lipschitz au voisinage $\tilde{x} \in \Omega$. Si \tilde{x} est localement Pareto optimale, alors pour toute direction d dans le cône tangent de Clarke $T_{\Omega}^{Cl}(\tilde{x})$, on a*

$$f^{\circ}(\tilde{x}; d) \geq 0.$$

Corollaire 1.3.4 *Supposons que f est strictement différentiable en $\tilde{x} \in \Omega$. Si \tilde{x} est localement Pareto optimale alors pour toute direction d dans le cône tangent de Clarke $T_{\Omega}^{Cl}(\tilde{x})$, on a $\nabla f(\tilde{x})^T d \geq 0$.*

1.4 Formulations mono-objectifs de l'optimisation multiobjectif

Dans la section 1.2, nous avons présenté un ensemble de méthodes reformulant les problèmes multiobjectifs en agrégeant les objectifs. Nous nous proposons de définir formellement une classe de problèmes permettant de résoudre MOP par une série de problèmes d'optimisation mono-objectif. Chaque problème d'optimisation mono-objectif

dépend d'un point de référence r dans l'espace des objectifs \mathbb{R}^p et doit satisfaire les conditions présentées dans la définition suivante :

Définition 1.4.1 *Considérons le problème d'optimisation mono-objectif :*

$$R_r : \min_{x \in \Omega} \psi_r(x) \quad \text{avec} \quad \psi_r(x) = \phi_r(f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)),$$

où $\phi_r : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ est paramétrisée selon un point de référence $r \in \mathbb{R}^p$. Alors, R_r est appelé une formulation mono-objectif en r de MOP si les conditions suivantes sont remplies :

- Soit $u, v \in \Omega$. Si $u \preceq v$ (u domine faiblement v) alors $\psi_r(u) \leq \psi_r(v)$.
- Si F est Lipschitz au voisinage d'un point $\tilde{x} \in \Omega$, alors ψ_r est également Lipschitz au voisinage de $\tilde{x} \in \Omega$.
- Si F est Lipschitz au voisinage d'un point $\tilde{x} \in \Omega$ avec $F(\tilde{x}) < r$ par composante, et si $d \in T_{\Omega}^{Cl}(\tilde{x})$, le cône tangent de Clarke à Ω en \tilde{x} , est tel que $f_i^{\circ}(\tilde{x}; d) < 0$ pour $i = 1, 2, \dots, p$ alors $\psi_r^{\circ}(\tilde{x}; d) < 0$.

La première condition assure que la formulation R_r préserve la dominance au sens Pareto. La deuxième condition assure que R_r préserve la continuité localement Lipschitz alors que la troisième condition implique des directions de descente selon Clarke pour toute fonction f_i et ψ_r . En assumant que la fonction ϕ_r est plus lisse, nous obtenons le théorème suivant.

Théorème 1.4.1 Soit R_r une formulation mono-objectif en $r \in \mathbb{R}^p$ de MOP. Si F et ψ_r sont strictement différentiables au voisinage de $\tilde{x} \in \Omega$ avec $F(\tilde{x}) < r$ par composante, et si $d \in T_{\Omega}^{Cl}(\tilde{x})$ est telle que $\nabla f_i(\tilde{x})^T d < 0$ pour $i = 1, 2, \dots, p$ alors $\nabla \psi_r(\tilde{x})^T d < 0$.

Démonstration: La différentiabilité stricte de ϕ_r et F en \tilde{x} assure la différentiabilité stricte de ψ_r en \tilde{x} avec $\nabla \psi_r(\tilde{x})^T d = \psi_r^\circ(\tilde{x}; d)$. Il découle de la seconde condition de la définition 1.4.1 que $\nabla \phi_r(\tilde{x})^T d < 0$ si $\nabla f_i(\tilde{x})^T d = f_i^\circ(\tilde{x}; d) < 0$ pour $i = 1, 2, \dots, p$. ■

Les sections suivantes introduisent deux formulations mono-objectifs : la *formulation normalisée mono-objectif* et la *formulation produit mono-objectif*. Les deux formulations sont similaires à l'approche de la moyenne arithmétique géométrique décrite dans la section 1.2.3 mais elles ont l'avantage de ne pas introduire des contraintes non-linéaires au domaine Ω .

1.4.1 Formulation normalisée mono-objectif

Soit $r \in \mathbb{R}^p$ un point de référence dans l'espace des objectifs, et $s \in \mathbb{R}^n$ un facteur de mise à l'échelle non-négatif. La *formulation normalisée mono-objectif* est définie de la manière suivante :

$$\hat{R}_r : \min_{x \in \Omega} \hat{\psi}_r \quad \text{avec} \quad \hat{\psi}_r(x) = \hat{\phi}_r(f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) = \max_{i \in \{1, 2, \dots, p\}} \frac{f_i(x) - r_i}{s_i}.$$

Les courbes de niveau de la fonction $\hat{\phi}_r$ dans l'espace des objectifs sont représentées par des lignes horizontales et des lignes verticales à la figure 1.7 pour le problème d'optimisation biobjectif.

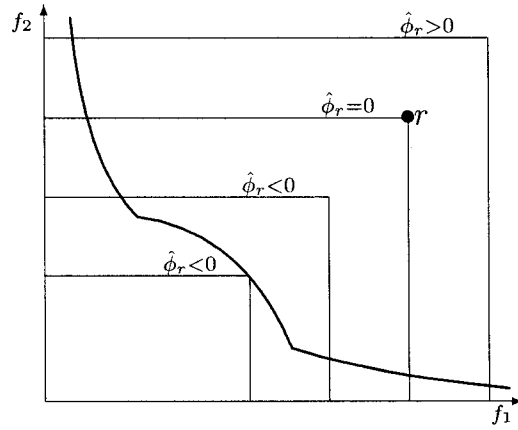


Figure 1.7 – Courbes de niveau dans l'espace des objectifs de la formulation normalisée mono-objectif \hat{R}_r pour un problème d'optimisation biobjectif

Le théorème suivant montre que \hat{R}_r est une formulation mono-objectif de MOP.

Théorème 1.4.2 \hat{R}_r est une formulation mono-objectif en r de MOP au sens de la définition 1.4.1.

Démonstration: Soit $u, v \in \Omega$. Si $u \preceq v$ alors $\hat{\psi}_r(u) \leq \hat{\psi}_r(v)$. Supposons que F est Lipschitz au voisinage de $x \in \Omega$. Choisissons $j \in \operatorname{argmax}_{i \in \{1, 2, \dots, p\}} \frac{f_i(x) - r_i}{s_i}$ et pour certain $y \in \Omega$,

soit $k \in \operatorname{argmax}_{i \in \{1, 2, \dots, p\}} \frac{f_i(y) - r_i}{s_i}$. Il s'ensuit que :

$$|\hat{\psi}_r(x) - \hat{\psi}_r(y)| = \begin{cases} \frac{f_j(x) - r_j}{s_j} - \frac{f_k(y) - r_k}{s_k} \leq \frac{f_j(x) - r_j}{s_j} - \frac{f_j(y) - r_j}{s_j} = \frac{f_j(x) - f_j(y)}{s_j} \\ \text{ou} \\ \frac{f_k(y) - r_k}{s_k} - \frac{f_j(x) - r_j}{s_j} \leq \frac{f_k(y) - r_k}{s_k} - \frac{f_k(x) - r_k}{s_k} = \frac{f_k(y) - f_k(x)}{s_k}. \end{cases}$$

Ainsi, $|\hat{\psi}_r(x) - \hat{\psi}_r(y)| \leq \max_{i \in \{1, 2, \dots, p\}} \frac{|f_i(x) - f_i(y)|}{s_i} \leq \frac{\max(k_1, k_2, \dots, k_p)}{\min(s_1, s_2, \dots, s_p)} \|x - y\|$.

La troisième condition de la définition 1.4.1 découle directement de [25],[Proposition 2.3.12]. ■

En se basant sur la formulation \hat{R}_r , la proposition suivante fournit une condition nécessaire que doit satisfaire une solution Pareto optimale de MOP .

Proposition 1.4.3 *S'il existe des vecteurs $r \in \mathbb{R}^p$ et $s \in \mathbb{R}_+^p$ tel que \tilde{x} est l'unique solution optimale de \hat{R}_r alors \tilde{x} est Pareto optimale pour MOP .*

Démonstration: Soit \tilde{x} l'unique solution optimale de \hat{R}_r et $x \in \Omega$ tel que $x \neq \tilde{x}$.

Alors, $\hat{\psi}(\tilde{x}) < \hat{\psi}(x)$ et par conséquent, il existe un indice $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ tel que $\frac{f_j(\tilde{x}) - r_j}{s_j} < \frac{f_j(x) - r_j}{s_j}$. Il s'ensuit que $f_j(\tilde{x}) < f_j(x)$ et par la suite x ne domine pas \tilde{x} .

Ainsi, \tilde{x} est Pareto optimal. ■

Le même argument assure que l'unique solution localement optimale de (\hat{R}_r) est localement Pareto optimale.

1.4.2 Formulation produit mono-objectif

Soit $r \in \mathbb{R}^p$ un point de référence de l'espace des objectifs. La *formulation produit mono-objectif* est définie de la manière suivante :

$$\tilde{R}_r : \min_{x \in \Omega} \tilde{\psi}_r \quad \text{avec} \quad \hat{\psi}_r(x) = \tilde{\phi}_r(f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) = - \prod_{i=1}^p ((r_i - f_i(x))_+)^2,$$

où $(r_i - f_i(x))_+ = \max\{r_i - f_i(x), 0\}$ pour $i = 1, 2, \dots, p$. Un avantage de \tilde{R}_r par rapport à \hat{R}_r réside dans le fait que la fonction de p variables $\tilde{\phi}_r$ est continûment différentiable dans tout l'espace, et ainsi la formulation préserve la différentiabilité du problème originel. Plus précisément, si $F(x)$ est continûment différentiable au voisinage de $\tilde{x} \in \Omega$, alors $\tilde{\psi}_r$ sera aussi continûment différentiable au voisinage de $\tilde{x} \in \Omega$ [12] ; et si $F(x)$ est strictement différentiable au voisinage $\tilde{x} \in \Omega$, alors $\tilde{\psi}_r$ sera aussi strictement différentiable au voisinage de $\tilde{x} \in \Omega$.

\tilde{R}_r est obtenue à partir de *GMP* présentée dans la section 1.2.3 en prenant $\lambda_k = 2$ pour $k = 1, 2, \dots, p$ et en traitant les contraintes additionnelles introduites par *GMP* dans les fonctions objectifs. Les courbes de niveau de la formulation \tilde{R}_r pour un problème biobjectif sont représentées par des courbes fines à la figure 1.8. La courbe de niveau $\tilde{R}_r = 0$ correspond à toute la région hachurée.

Le théorème suivant montre que \tilde{R}_r est une formulation mono-objectif de MOP.

Théorème 1.4.4 \tilde{R}_r est une formulation mono-objectif en r de MOP selon la

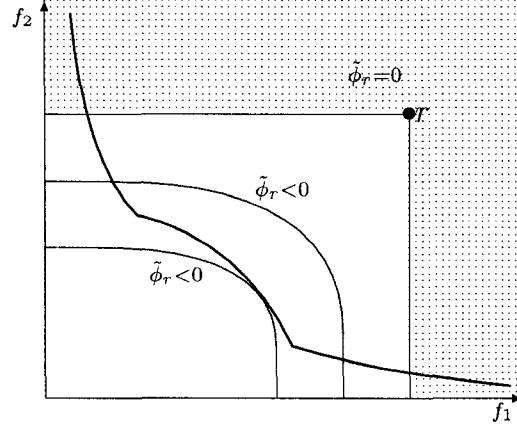


Figure 1.8 – Courbes de niveau dans l’espace des objectifs de la formulation produit mono-objectif \tilde{R}_r pour le problème d’optimisation biobjectif

définition 1.4.1.

Démonstration: Soit $u, v \in \Omega$. Si $u \preceq v$ alors $\tilde{\psi}_r(u) \leq \tilde{\psi}_r(v)$. Supposons que F est Lipschitz au voisinage de $x \in \Omega$. $\tilde{\psi}_r$ est Lipschitz au voisinage de x puisque le produit de fonctions Lipschitz est également Lipschitz.

Pour prouver la troisième condition de la définition 1.4.1, nous calculons la dérivée directionnelle généralisée de $\tilde{\psi}_r$ évaluée à $\tilde{x} \in \Omega$ satisfaisant $F(\tilde{x}) < r$ par composante, dans certaine direction tangente $d \in T_\Omega(\tilde{x})$. Afin de simplifier la présentation des résultats, nous définissons la fonction $c_i(x) = r_i - f_i(x)$ pour $i = 1, 2, \dots, p$. Il découle

de [25],[Proposition 2.3.13] que :

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_r^\circ(\tilde{x}; d) &\leq -2 \sum_{i=1}^p \left((c_i(\tilde{x}; d)_+)^{\circ} (c_i(\tilde{x})_+) \prod_{j \neq i} (c_j(\tilde{x})_+)^2 \right) \\ &= -2 \sum_{i=1}^p \left(c_i^\circ(\tilde{x}; d) (c_i(\tilde{x})_+) \prod_{j \neq i} (c_j(\tilde{x})_+)^2 \right).\end{aligned}$$

Puisque, $c_i^\circ(\tilde{x}; d) = -f_i^\circ(\tilde{x}; d)$, nous obtenons :

$$\tilde{\psi}_r^\circ(\tilde{x}; d) \leq \sum_{i=1}^p \left(f_i^\circ(\tilde{x}; d) ((r_i - f_i(\tilde{x}))_+) \prod_{j \neq i} ((r_j - f_j(\tilde{x}))_+)^2 \right).$$

Il s'ensuit que si $f_i^\circ(\tilde{x}; d) < 0$ pour $i = 1, 2, \dots, p$ alors $\tilde{\psi}_r^\circ(\tilde{x}; d) < 0$. ■

Basée sur la formulation \tilde{R}_r , la proposition suivante montre qu'une solution optimale de \tilde{R}_r dont la valeur optimale est non-nulle est Pareto optimale.

Proposition 1.4.5 *S'il existe un vecteur $r \in \mathbb{R}^p$ tel que \tilde{x} est une solution optimale de \tilde{R}_r avec $\tilde{\psi}_r(\tilde{x}) < 0$, alors \tilde{x} est une solution Pareto optimale de MOP.*

Démonstration: Supposons que $x \in \Omega$ satisfait $x \prec \tilde{x}$. Ainsi, $f_i(x) \leq f_i(\tilde{x})$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ avec au moins une inégalité stricte. Il s'ensuit que $\tilde{\psi}_r(x) < \tilde{\psi}_r(\tilde{x}) < 0$, ce qui contredit l'optimalité de \tilde{x} pour la formulation \tilde{R}_r . ■

Le même argument peut-être donné pour prouver qu'un optimum local de \tilde{R}_r avec une valeur non-nulle est localement Pareto optimal.

1.5 Les algorithmes MADS et GPS pour l'optimisation mono-objectif

Nous présentons dans cette section deux algorithmes pour résoudre les formulations mono-objectif introduites à la section 1.4. L'algorithme *Generalized Pattern Search* (GPS) ou *recherche par motifs* a été introduit par Torczon [82] pour résoudre les problèmes d'optimisation non-contraints sans utiliser le gradient. Ce cadre général englobe plusieurs algorithmes de recherche directe existants. On y distingue la méthode de Hooke et Jeeves [50], la méthode de recherche par coordonnées (en préface de [33]) et la méthode de recherche multidirectionnelle [82] qui est une adaptation de la méthode Nelder et Mead [68]. L'algorithme GPS a été étendu par la suite pour résoudre les problèmes d'optimisation sous contraintes en utilisant notamment la méthode de barrière [62] [63] pour les contraintes de bornes et les contraintes linéaires, la méthode du filtre [12] et plus récemment la méthode de la barrière progressive [14] pour les contraintes générales. L'algorithme résout efficacement un problème d'optimisation sous la forme la plus générale :

$$\min_{x \in \Omega \subseteq X} f(x)$$

avec X un ensemble défini par des contraintes de bornes et des contraintes linéaires et $\Omega = \{x \in X : g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m\}$. La fonction objectif $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$ et les fonctions $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$ pour $i = 1, 2, \dots, m$ peuvent être non-continues, non-lisses, coûteuses à évaluer et même contenir du bruit. L'avantage de GPS comparé aux méthodes de recherche directe réside dans l'analyse de convergence. En supposant

que la fonction objectif est continûment différentiable, l'optimalité de premier ordre est assurée pour les problèmes non-contraints [82], avec contraintes de bornes [62] et avec contraintes linéaires [63]. Cependant, ces hypothèses ne sont pas conformes aux classes de problèmes pour lesquelles l'algorithme GPS a été conçu. D'où, une analyse de convergence basée sur les dérivées de Clarke [25] est présentée par Audet et Dennis [11] assurant certains résultats d'optimalité pour un problème non-lisse. Ces résultats étant confinés dans un ensemble fini de directions, une nouvelle classe d'algorithmes MADS [13], une généralisation de GPS, est proposée assurant les conditions d'optimalité de premier ordre.

Cette section est organisée comme suit. Le schéma général de l'algorithme GPS pour les problèmes non contraints est présenté dans la section 1.5.1. Le traitement des contraintes est examiné à la section 1.5.2. Finalement, la classe d'algorithmes MADS est décrite à la section 1.5.3.

1.5.1 Schéma général de l'algorithme GPS

L'algorithme GPS a été initialement introduit pour résoudre les problèmes d'optimisation sans contraintes $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$. Pour ce type de problèmes, GPS génère une séquence d'itérés $\{x_k\} \in \mathbb{R}^n : f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$. À chaque itération k , la fonction f est évaluée en un nombre fini de points d'un treillis M_k et comparée à la meilleure valeur trouvée $f(x_k)$. Le treillis M_k est construit à partir d'un ensemble de n_d directions prédéterminé $D \subset \mathbb{R}^n$ et un pas $\Delta_k \in \mathbb{R}^+$. D doit être un ensemble générateur positif de direc-

tions s'écrivant sous la forme $D = GZ$ avec $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice non singulière et $Z \in \mathbb{Z}^{n \times n_D}$. Le treillis est alors défini de la manière suivante :

$$M_k = \bigcup_{x \in V_k} \{x + \Delta_k Dz : z \in \mathbb{N}^{n_D}\} \quad (1.2)$$

avec V_k l'ensemble des points où la fonction f a été évaluée au début de l'itération k . La recherche se fait selon deux phases. La première est une *recherche globale* qui consiste à chercher des points prometteurs du treillis selon une stratégie définie par l'utilisateur. Ce qui permet de mener une recherche ciblée exploitant les connaissances du problème. Nous distinguons notamment la recherche sur l'hypercube latin [9]. Une discussion plus détaillée de la recherche globale est disponible dans [1]. La deuxième phase est une recherche locale appelée *sonde* qui consiste à évaluer f aux points t de P_k l'ensemble des points du treillis voisins de x_k :

$$P_k = \{x_k + \Delta_k d : d \in D_k\} \subseteq M_k. \quad (1.3)$$

Si la recherche trouve un point t du treillis tel que $f(t) < f(x_k)$, l'itération est qualifiée de *succès* sinon elle est qualifiée d'*échec* : x_k est un minimum local par rapport au treillis M_k . Selon le résultat de l'itération, le pas Δ_k est mis à jour selon la formule suivante :

$$\Delta_{k+1} = \tau^{\omega_k} \Delta_k \quad (1.4)$$

avec $\tau \in \mathbb{Q}_+$ et $\omega_k \in \mathbb{Z}$ compris entre deux entiers $\omega^- \leq -1$ et $\omega^+ \geq 0$. La figure 1.9 résume les différentes étapes de l'algorithme.

- **INITIALISATION :**
Soit $x_0 \in \Omega$, $\Delta_0 > 0$, G , Z , τ , V_0 , ω^- et ω^+ satisfaisant l'ensemble des conditions présentées ci-dessous et initialiser $k = 0$.
- **RECHERCHE GLOBALE ET LOCALE :**
Évaluer f :
 - dans un sous ensemble fini S_k de M_k défini en 1.2 :
Recherche globale (optionnelle).
 - dans l'ensemble P_k défini en 1.3 : *Recherche locale.*
 jusqu'à ce que tous les points de S_k et P_k soient évalués ou un point $t \in M_k$ tel que $f(t) < f(x_k)$ soit identifié.
- **MISE À JOUR DES PARAMÈTRES :**
 - Mettre à jour V_k .
 - Si $\exists t \in V_k : f(t) < f(x_k)$ (succès) alors $x_{k+1} = t$,
Sinon (échec) $x_{k+1} = v \in V_k : f(v) = f(x_k)$.
 - Mettre à jour Δ_{k+1} selon la règle 1.4.
 - $k \leftarrow k + 1$ et aller à RECHERCHE GLOBALE ET LOCALE.

Figure 1.9 – L'algorithme GPS

Le schéma général présenté à la figure 1.9 offre une grande flexibilité pour le choix de la stratégie de recherche locale. Par exemple, au lieu d'évaluer f pour tous les points de P_k , une stratégie opportuniste permet d'arrêter la recherche locale dès qu'un meilleur point t est identifié. Une autre amélioration consiste à ordonner les directions selon le nombre de succès et commencer la recherche suivant les directions les plus prometteuses. GPS produit une suite de minimums locaux x_k par rapport au treillis M_k . Sous l'hypothèse que l'ensemble des itérés appartiennent à un ensemble compact, Audet et

Dennis [11] montrent qu'il existe une telle sous-suite $\{x_k\}_{k \in K}$ convergente. Certaines conditions d'optimalité ont été établies selon les propriétés de f autour du point \hat{x} . Notamment, il a été démontré que si f est Lipschitz autour de \hat{x} , alors les dérivées de Clarke vérifient $f^\circ(\hat{x}, d) \geq 0$ pour toute direction $d \in D$ évaluée en un nombre infini d'itérés de $\{x_k\}_{k \in K}$, et de plus l'ensemble de ces directions est un ensemble générateur positif. Néanmoins, Audet [7] montre certaines limitations de l'algorithme GPS. En particulier, il propose un exemple avec une fonction différentiable mais non strictement différentiable où tous les itérés de GPS convergent vers un point où le gradient existe et est non nul.

1.5.2 Résolution des problèmes avec contraintes

Différentes approches sont proposées pour traiter les contraintes à l'aide d'algorithmes GPS. On y distingue la méthode de la barrière et la méthode du filtre. Notons aussi la méthode de Lewis et Torczon [64] qui consiste à résoudre le Lagrangien augmenté en utilisant l'algorithme GPS. Cependant, l'analyse de convergence de cette méthode nécessite que les fonctions f et g_i pour $i = 1, 2, \dots, m$ soient deux fois continûment différentiables.

Méthode de la barrière

L'approche consiste à appliquer GPS non pas sur la fonction f mais sur la fonction barrière $f_\Omega = f + \zeta_\Omega$ avec ζ_Ω est une fonction qui vaut zéro en Ω et ∞ ailleurs. La fonction f_Ω peut être formulée de la manière suivante :

$$f_\Omega(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque $f_\Omega(x) = \infty$ lorsque $x \notin \Omega$, l'application de GPS sur f_Ω permet de rejeter toute solution non réalisable. Lewis et Torczon utilisent la méthode de la barrière pour résoudre les problèmes d'optimisation avec contraintes de bornes [62] et un nombre fini de contraintes linéaires [63]. Ce qui revient à considérer que $\Omega = X$. À chaque itération, l'ensemble D_k doit contenir les directions qui engendrent les cônes tangents $T_\Omega(y)$ pour tous les points y de la frontière du domaine Ω qui sont à une distance prédéterminée $\epsilon > 0$ de x_k . Les mêmes résultats d'optimalité obtenus pour les problèmes sans contraintes peuvent être généralisés pour les problèmes avec contraintes de borne et un nombre fini de contraintes linéaires [11] sous condition que l'ensemble D_k est choisi de façon à se conformer à la frontière du domaine X . En particulier, si f est strictement différentiable alors la méthode de la barrière converge vers un point KKT . Si f est Lipschitz autour de \hat{x} , alors les dérivées de Clarke vérifient $f^\circ(\hat{x}, d) \geq 0$ pour toute direction $d \in D^{\hat{x}} \subset D$. $D^{\hat{x}}$ représente un ensemble de directions engendrant le cône tangent $T_\Omega(\hat{x})$ et évaluées

en un nombre infinie d'itérés de $\{x_k\}_{k \in K}$.

Méthode du filtre

Une autre approche est proposée par Audet et Dennis [12] pour traiter les contraintes sous forme générale. L'approche est basée sur la méthode du filtre présentée par Fletcher et al. [42]. Elle consiste à introduire une fonction h qui mesure la violation des contraintes. La fonction h vérifie les conditions suivantes :

- $h(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$,
- $h(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \Omega$,
- $h_i(x) = +\infty \Leftrightarrow \exists i : g_i(x) = +\infty$.

Ces conditions sont satisfaites en considérant par exemple la fonction $h(x) = \|g_+(x)\|_2^2$ avec $(g_+(x))_i = \max\{0, g_i(x)\}$, $\forall i = 1, 2, \dots, m$. Les contraintes de bornes et les contraintes linéaires définissant le domaine X sont prises en charge par la méthode de la barrière en utilisant la fonction :

$$h_X(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in X, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'approche proposée consiste à traiter le problème initial comme étant un problème à deux objectifs f et h_X en utilisant la relation de dominance Pareto définie à la section 1.1. Ainsi à chaque itération de l'algorithme GPS, un ensemble \mathcal{F} appelé filtre, est mis

à jour contenant tous les points irréalisables non-dominés. Un point x' est filtré s'il est dominé par un point du filtre $x \in \mathcal{F}$ ou si $h_X(x') \geq h_{max}$ ou bien x' est réalisable tel que $f(x') \geq f^F$. h_{max} correspond à une borne supérieure de h_X et f^F correspond à la meilleure valeur jusqu'à date de f sur l'ensemble des points réalisables. L'ensemble des points filtrés est noté $\bar{\mathcal{F}}$:

$$\bar{\mathcal{F}} = \bigcup_{x \in \mathcal{F}} \{x' : x' \succeq x\} \cup \{x' : h_X(x') \geq h_{max}\} \cup \{x' : h_X(x') = 0, f(x') \geq f^F\}.$$

L'algorithme GPS avec filtre est donné à la figure 1.10.

- **INITIALISATION :**
Soit \mathcal{F}_0 le filtre correspondant à un ensemble de points initiaux V_0 . Soit $x_0 \in \mathcal{F}_0$. Initialiser $\Delta_0 > 0$ et fixer le compteur k à 0.
- **DÉTERMINATION DES VALEURS OPTIMALES :** f_k^F , h_k^I et f_k^I .
- **RECHERCHE GLOBALE ET LOCALE :**
Soit S_k un sous-ensemble fini de M_k défini en 1.2. Évaluer f et h_X :
 - dans S_k : *Recherche globale (optionnelle)*.
 - dans l'ensemble P_k défini en 1.5 : *Recherche locale*.
 jusqu'à ce que tous les points de S_k et P_k soient évalués ou un point t non filtré soit identifié.
- **MISE À JOUR DES PARAMÈTRES :**
 - Mettre à jour V_k .
 - Si $\exists t \in V_k : t \notin \bar{\mathcal{F}}_k$ (succès) alors

$\mathcal{F}_{k+1} \leftarrow \mathcal{F}_k \setminus \{u : t \prec u\} \cup \{t\},$
 $x_{k+1} = t.$
 - Sinon (échec : s_k est un point-filtre isolé du treillis)

$\mathcal{F}_{k+1} \leftarrow \mathcal{F}_k,$
 $x_{k+1} = v \in V_k : f(v) = f(x_k).$
 - Mettre à jour Δ_{k+1} selon la règle 1.4.
 - $k \leftarrow k + 1$ et aller à DÉTERMINATION DES VALEURS OPTI-

MALES.

Figure 1.10 – L'algorithme GPS avec filtre

Notons que la recherche locale diffère de l'algorithme présenté à la figure 1.9 à deux niveaux : le choix du centre de la sonde et la mise à jour du pas Δ . À l'itération k , le centre de la sonde dans (1.10) n'est pas nécessairement la meilleure solution courante mais un point de l'ensemble I_k des meilleurs candidats :

$$P_k = \{s_k + \Delta_k d : d \in D_k\} \subseteq M_k \quad \text{avec} \quad s_k \in I_k. \quad (1.5)$$

On distingue deux sous-ensembles de I_k :

- $I_k^F = \{x \in V_k : (h_X(x), f(x)) = (0, f_k^F)\}$ représente l'ensemble des meilleurs candidats réalisables,
- $I_k^I = \{x \in V_k : (h_X(x), f(x)) = (h_k^I, f_k^I)\}$ représente l'ensemble des meilleurs candidats non réalisables.

où f_k^F , h_k^I et f_k^I sont donnés par les formules suivantes :

$$f_k^F = \min_{\substack{x \in V_k \\ h_X(x)=0}} f(x), \quad h_k^I = \min_{\substack{x \in V_k \\ h_X(x)>0}} h_X(x) \quad \text{et} \quad f_k^I = \min_{\substack{x \in V_k \\ h_X(x)=h_k^I}} f(x).$$

Le choix du centre de la sonde est flexible et peut être guidé selon une stratégie prédéterminée. Si la recherche locale échoue, s_k est dit *point-filtre isolé* du treillis. Dans ce cas, on pourrait sonder autour d'un autre point sans décroître le pas Δ tout en considérant les évaluations de la première recherche comme étant les résultats d'une recherche globale. Notons que la mise à jour de Δ respecte la règle 1.4 avec éventuellement différentes valeurs de ω . Ainsi, le pas Δ peut être doublé si un nouveau candidat est identifié, de-

meure inchangé si uniquement un point non-filtré est trouvé et divisé par deux si le centre de sonde est un point-filtre isolé. On considère \hat{x} limite d'une sous-suite $\{s_k\}_{k \in K}$ de points-filtre isolés du treillis telle que $\lim_{k \in K} \Delta_k = 0$. L'analyse de convergence [12] assure certaines conditions d'optimalité de premier ordre pour les fonctions f et h au point \hat{x} en supposant que les directions D_k sont conformes à la géométrie de X . Notons que l'analyse considère la fonction de violation de contraintes h et non pas h_X . Ainsi, Audet et Dennis [12] montrent que si h est Lipschitz près de \hat{x} alors $h^\circ(\hat{x}; v) \geq 0$ pour tout vecteur v appartenant à un ensemble de direction D' dont l'enveloppe convexe génère le cône tangent $T_X(\hat{x})$. La définition de D' est donnée dans [12]. Si, h est strictement différentiable en \hat{x} alors $\nabla h(\hat{x})^T v \geq 0, \forall v \in T_X(\hat{x})$. Les mêmes conditions sont satisfaites par la fonction f au point limite sous l'hypothèse que \hat{x} est strictement réalisable : $\hat{x} \in \text{int}(\Omega)$. Ainsi, si f est Lipschitz près de \hat{x} alors $f^\circ(\hat{x}; v) \geq 0, \forall v \in D'$ et si f est strictement différentiable en \hat{x} alors $\nabla f(\hat{x})^T v \geq 0, \forall v \in T_X(\hat{x})$.

1.5.3 Présentation de l'algorithme MADS

Audet et Dennis [13] proposent un nouvel algorithme MADS qui est une généralisation de GPS. La contribution majeure de MADS consiste à générer un ensemble dense de directions de sonde ce qui assure des conditions d'optimalité plus fortes que celles de GPS. L'algorithme reprend le schéma général de GPS et utilise la méthode de barrière pour le traitement des contraintes. À chaque itération k , MADS considère le treillis M_k

avec un paramètre Δ_k^m équivalent à Δ_k considéré dans GPS :

$$M_k = \{x + \Delta_k^m Dz : z \in \mathbb{N}^{n_D}, x \in V_k\}.$$

MADS introduit un nouveau paramètre Δ_k^p pour définir la sonde locale ou cadre autour du point d'essai x_k appelé centre du cadre :

$$P_k = \{x_k + \Delta_k^m d : d \in D_k\} \subseteq M_k.$$

avec D_k un ensemble générateur positif de directions d vérifiant :

- $d \neq 0$ est une combinaison entière des directions de $D : \exists u \in \mathbb{N}^{n_D} : d = Du$.
- La distance entre x_k et un point du cadre $x_k + \Delta_k^m d$ est bornée : $\Delta_k^m \|d\| \leq \Delta_k^p \max\{\|d'\| : d' \in D\}$.
- les limites (telles que définies dans Coope et Price [28]) des ensembles D_k normalisés sont des ensembles générateurs positifs.

À l'itération k , si $f_\Omega(x_k) \leq f_\Omega(t)$, $\forall t \in P_k$ alors x_k est appelé un *minimum local du cadre*. Pour assurer la convergence de l'algorithme, les deux paramètres Δ_k^p et Δ_k^m doivent satisfaire les conditions suivantes :

- $\Delta_k^m \leq \Delta_k^p$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
- $\lim_{k \in K} \Delta_k^m = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \in K} \Delta_k^p = 0$ pour tout sous-ensemble fini d'indices K .

Les deux conditions permettent de garantir le résultat suivant :

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \Delta_k^p = \liminf_{k \rightarrow +\infty} \Delta_k^m = 0.$$

Audet et Dennis [13] présentent un ensemble de résultats de convergence au point limite \hat{x} d'une sous-suite dite raffinante définie en 1.5.1.

Définition 1.5.1 Une sous-suite de minimums locaux du cadre $\{x_k\}_{k \in K}$ est dite raffinante si $\{\Delta_k^p\}_{k \in K}$ converge vers 0.

Si la limite $\lim_{k \in L} \frac{d_k}{\|d_k\|}$ existe pour $L \subseteq K$ avec $d_k \in D_k$ et si $x_k + \Delta_k^m d_k \in \Omega$ pour un nombre infini d'indices $k \in L$, alors la limite est appelée direction raffinante pour \hat{x} .

En considérant une fonction f Lipschitz autour de \hat{x} , l'analyse de convergence montre que si $v \in T_\Omega^H(\hat{x})$ est une direction raffinante alors $f^\circ(\hat{x}, v) \geq 0$. Ainsi, en supposant que l'ensemble des directions raffinantes pour \hat{x} est dense dans $T_\Omega^H(\hat{x}) \neq \emptyset$ alors \hat{x} est un point stationnaire de Clarke de f sur Ω : $f^\circ(\hat{x}, v) \geq 0, \forall v \in T_\Omega^{Cl}(\hat{x})$. Si, de plus, f est strictement différentiable alors \hat{x} est un point KKT de Clarke de f sur Ω : $\nabla f(\hat{x}) \leq 0, \forall v \in T_\Omega^{Cl}(\hat{x})$. Rappelons que les résultats de convergence sont obtenus sous l'hypothèse que l'ensemble des directions raffinantes pour \hat{x} est dense dans $T_\Omega^H(\hat{x})$. Audet et Dennis [13] propose une stratégie permettant d'assurer cette condition. L'approche proposée est une implémentation stochastique de MADS appelée LTMADS. Elle commence par fixer $D = Z = [I \ -I], \tau = 4, \omega^- = -1, \omega^+ = 1$ et initialiser

$\Delta_0^m = 1, \Delta_0^p = 1$. La mise à jour du pas du treillis suit la règle la suivante :

$$\Delta_{k+1}^m = \begin{cases} \frac{\Delta_k^m}{4} & \text{si } x_k \text{ est un minimum local du cadre.} \\ 4\Delta_k^m & \text{si un meilleur point du treillis est identifié et si } \Delta_k^m \leq \frac{1}{4}. \\ \Delta_k^m & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le choix des directions s'effectue à partir d'une matrice $B \in \{\mathbb{R}^{n \times n}\}$ triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont égaux à $\pm \Delta_k^m$ et les éléments sous la diagonale sont des entiers de l'intervalle $]-\frac{1}{\sqrt{\Delta_k^m}}, \frac{1}{\sqrt{\Delta_k^m}}[$. Toutes ces composantes sont sélectionnées aléatoirement avec la même probabilité. À chaque itération, les n premières colonnes de D_k , notées d^i correspondent à celles de la matrice B dont on permute les lignes et les colonnes pour assurer une génération aléatoire des directions. La base résultante est complétée pour obtenir un ensemble générateur positif. Deux ensembles sont proposés :

- Ensemble à $n + 1$ directions obtenu en ajoutant $d^{N+1} = -\sum_{i=1}^N d^i$ et en posant

$$\Delta_k^p = n\sqrt{\Delta_k^m} \geq \Delta_k^m.$$

- Ensemble à $2n$ directions obtenu en ajoutant $d^{N+i} = -d^i, i = 1, 2, \dots, N$ et en

$$\text{posant } \Delta_k^p = \sqrt{\Delta_k^m} \geq \Delta_k^m.$$

La procédure LTMADS permet ainsi de générer un ensemble de directions raffinantes dense dans $T_\Omega^H(\hat{x})$ et donc assure sous certaines hypothèses de produire un point stationnaire de Clarke.

Notons finalement que des extensions à l'algorithme MADS ont été récemment rajoutées [61] telles que le développement d'un algorithme déterministe ORTHOMADS [3] au lieu de LTMADS, la parallélisation de MADS [15], l'utilisation de la barrière progressive pour le traitement des contraintes [14] et l'intégration de l'algorithme de recherche à voisinages variables RVV [9] dans la recherche globale de MADS.

1.6 Discussion

Nous avons introduit dans ce chapitre l'optimisation multiobjectif *MOP* et défini le concept d'optimalité selon la dominance Pareto. Une revue des méthodes de résolution a été présentée. On y distingue notamment les méthodes à base de reformulation qui permettent de résoudre *MOP* par une série de formulations mono-objectifs. Par la suite, nous avons formellement défini une classe de formulations assurant certaines conditions d'optimalité pour *MOP*. Ces conditions s'appuient sur le calcul de Clarke pour l'optimisation non-lisse. Dans les chapitres qui suivent, nous présentons des algorithmes pour résoudre *MOP* en nous basant sur la classe de formulations mono-objectifs. Notamment, deux algorithmes sont proposés faisant appel à l'algorithme MADS. L'algorithme BIMADS concerne l'optimisation biobjectif en exploitant la relation d'ordre qui caractérise les solutions biobjectifs. À défaut de cette relation, nous proposons un algorithme appelé MULTIMADS pour le problème multiobjectif général. Puisque ces algorithmes sont conçus pour résoudre les applications réelles, nous les appliquons sur des

problèmes concrets d'ingénierie et de finance.

CHAPITRE 2

ALGORITHME DE RÉOLUTION POUR LA PROGRAMMATION

BIOBJECTIF

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème d'optimisation biobjectif (*BOP*) et nous présentons une approche de résolution pour *BOP* sous contraintes de bornes. Ainsi, $\Omega = X$. Le problème biobjectif peut être alors, réécrit de la manière suivante :

$$BOP : \min_{x \in X} F(x) = (f_1(x), f_2(x))$$

avec

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ et } X = \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq x \leq b\}$$

avec n le nombre de variables, $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^n$ et $b \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ sont des vecteurs de borne. *BOP* est la seule instance de *MOP* qui possède la propriété d'ordre du front Pareto. Basé sur cette propriété d'ordre et l'approche d'agrégation présentée à la section 1.4, un nouvel algorithme BIMADS est proposé pour obtenir l'approximation du front Pareto d'un problème de *BOP*. BIMADS génère essentiellement une séquence de formulations mono-objectifs de *BOP* et les résout de façon séquentielle en utilisant l'algorithme MADS [13] avec des critères de terminaison de plus en plus stricts. Cette série de formulations est conçue dans le but d'atteindre une couverture uniforme du front

Pareto, même si le front est non-convexe ou disjoint. Le chapitre est divisé comme suit. Une présentation de BIMADS est faite à la section 2.1. Dans la section 2.2, BIMADS est testé sur des problèmes de la littérature conçus pour illustrer les difficultés pouvant être rencontrées dans les problèmes réels [34].

2.1 L'algorithme BIMADS pour l'optimisation biobjectif

Dans cette section, nous présentons un algorithme de résolution pour le problème biobjectif. L'algorithme fait appel à l'algorithme MADS pour résoudre une série de formulations mono-objectifs d'un problème biobjectif. Cette section est organisée comme suit. Dans la section 2.1.1, nous exposons le schéma général de BIMADS et dans la section 2.1.2, nous proposons une analyse de convergence et d'uniformité de BIMADS.

2.1.1 Schéma de l'algorithme BIMADS

Le schéma général de BIMADS est présenté à la figure 2.1, et détaillé dans les paragraphes suivants. BIMADS est un algorithme itératif qui construit des ensembles de points qui approchent l'ensemble Pareto optimal $X_{\mathcal{P}}$. À chaque itération, l'ensemble des points non-dominés (relativement à tous les points générés jusqu'à date) est noté par $X_{\mathcal{L}}$. L'image selon l'application F de $X_{\mathcal{L}}$ est notée par $Y_{\mathcal{L}} \in \mathbb{R}^p$. $Y_{\mathcal{L}}$ donne une approximation du front Pareto $Y_{\mathcal{P}}$.

INITIALISATION :

- Appliquer l'algorithme MADS à partir x_0 pour résoudre $\min_{x \in X} f_1(x)$ et $\min_{x \in X} f_2(x)$.
- Soit $X_{\mathcal{L}} = \{x^1, x^2, \dots, x^J\}$ une liste ordonnée de points non-dominés entre eux tels que $f_1(x^1) < f_1(x^2) < \dots < f_1(x^J)$ et $f_2(x^1) > f_2(x^2) > \dots > f_2(x^J)$.
Initialiser le poids $w(x) = 0$ pour tout $x \in X$ et soit $\delta > 0$.

ITÉRATIONS MAJEURES : Répéter– **DÉTERMINATION DU POINT DE RÉFÉRENCE :**

- Si $J > 2$, soit $\hat{j} \in \operatorname{argmax}_{j=2 \dots J-1} \delta^j = \frac{\|F(x^j) - F(x^{j-1})\|^2 + \|F(x^j) - F(x^{j+1})\|^2}{w(x^j) + 1}$, et définir le point de référence $r = (f_1(x^{\hat{j}+1}), f_2(x^{\hat{j}-1}))$.
- Si $J = 2$, soit $x^{\hat{j}} = x^2$, définir le point de référence $r = (f_1(x^2), f_2(x^1))$ et soit $\delta^{\hat{j}} = \frac{\|F(x^2) - F(x^1)\|^2}{w(x^2) + 1}$.
- Si $J = 1$, soit $x^{\hat{j}} = x^1$, $\delta^{\hat{j}} = \frac{\delta}{w(x^{\hat{j}}) + 1}$ et appliquer l'algorithme MADS à partir de $x^{\hat{j}}$ pour résoudre $\min_{x \in X} f_1(x)$ et $\min_{x \in X} f_2(x)$. Terminer MADS lorsque le pas du treillis Δ^m est inférieur à $\Delta(\delta^{\hat{j}}) = O(\delta^{\hat{j}})$ et continuer à l'étape MISE À JOUR DE $X_{\mathcal{L}}$.
- **MINIMISATION DE LA FORMULATION MONO-OBJECTIF :** Résoudre une formulation mono-objectif R_r en utilisant l'algorithme MADS à partir du point de départ $x^{\hat{j}}$. Terminer MADS lorsque le pas du treillis Δ^m est inférieur $\Delta(\delta^{\hat{j}}) = O(\delta^{\hat{j}})$ ou si un nombre prédéfini d'évaluations de fonctions objectifs est atteint.
- **MISE À JOUR DE $X_{\mathcal{L}}$:**
Augmenter la valeur du poids : $w(x^{\hat{j}}) \leftarrow w(x^{\hat{j}}) + 1$.
Ajouter à $X_{\mathcal{L}}$ tous les points non-dominés trouvés dans l'itération courante, retirer les points dominés de $X_{\mathcal{L}}$, et ordonner la liste des points.

Figure 2.1 – Schéma de l'algorithme BIMADS pour la programmation biobjectif

À l'étape d'initialisation, l'algorithme résout deux problèmes mono-objectifs :

$$\min_{x \in X} f_1(x) \quad \text{et} \quad \min_{x \in X} f_2(x) \quad (2.1)$$

en utilisant l'algorithme MADS à partir d'un point prédéfini de départ $x_0 \in X$. Notons que plusieurs points de départ peuvent être utilisés en effectuant, par exemple, une recherche sur l'hypercube latin. Par souci de clarté notamment en ce qui concerne la preuve sous-jacente à l'analyse de l'uniformité, nous nous contentons d'un seul point de départ dans le schéma de l'algorithme. Une première liste $X_{\mathcal{L}}$ de points non-dominés est obtenue à partir de tous les points d'essai du treillis générés par les deux itérations majeures de MADS. La cardinalité de cet ensemble est dénotée par J .

Chaque itération de BIMADS comporte trois étapes. D'abord, la liste ordonnée $Y_{\mathcal{L}}$ est utilisée pour identifier un point de référence r dans l'espace des objectifs. Si $J > 2$, la stratégie considère la somme algébrique δ^j des carrés des distances séparant chaque point non-dominé $F(x_j) \in Y_{\mathcal{L}}$ à son prédécesseur $F(x_{j-1})$ et à son successeur $F(x_{j+1})$ pour $j = 2, 3, \dots, J - 1$. Ainsi, un point $F(x^j)$ est identifié à partir d'une liste $Y_{\mathcal{L}}$ maximisant la mesure δ^j . Si $J = 2$, x^j est fixé à x^2 , le point de référence r est fixé à $(f_1(x^2), f_2(x^1))$ et δ^j est pris égal aux carrés pondérés des distances entre les deux points non-dominés. Le poids $w(x^j)$ apparaissant au dénominateur de x^j est augmenté d'une unité à la fin de l'itération pour réduire des fréquentes définitions de r au voisinage du même point. Si $J = 1$, c'est-à-dire, si un point singulier x^1 domine tous les

autres générés jusqu'à date, alors l'algorithme résout encore les deux problèmes mono-objectifs (2.1).

Afin d'évaluer la qualité de la distribution des points non-dominés générés par l'algorithme, deux mesures de l'uniformité de la distribution sont introduites :

- la *Mesure de couverture* $\tilde{c} = \max_{j=1\dots J} \delta^j$ et
- la *Mesure de couverture pondérée* $\tilde{c}_w = \max_{j=1\dots J} \frac{\delta^j}{w(x^j)+1}$.

Les deux mesures fournissent un indice de l'uniformité de l'approximation. Rappelons que cette caractéristique, en plus de la convergence vers le front Pareto forment les deux critères considérés au chapitre 1 pour évaluer la qualité de la distribution. Plus la valeur de la mesure est petite moins l'approximation du front Pareto contient des écarts larges. La mesure de couverture pondérée a été introduite pour traiter un problème dont le front Pareto est discontinu. Dans ce cas, les écarts entre les points ne sont jamais tous nuls, par contre, \tilde{c}_w peut tendre vers zéro.

La partie gauche de la figure 2.2 illustre la sélection du point de référence r lorsque $J > 2$. Le symbole ‘.’ est utilisé pour les points générés par BIMADS dans l'espace des objectifs, le symbole ‘*’ est utilisé pour les points non-dominés générés par l'algorithme.

La seconde étape de l'itération consiste à résoudre la formulation mono-objectif R_r en utilisant l'algorithme MADS. L'image des points d'essai produits par l'algorithme appartiendra vraisemblablement à la zone de dominance relativement à r . La partie droite de la figure 2.2 illustre quelques points générés par MADS. Chaque itération MADS se

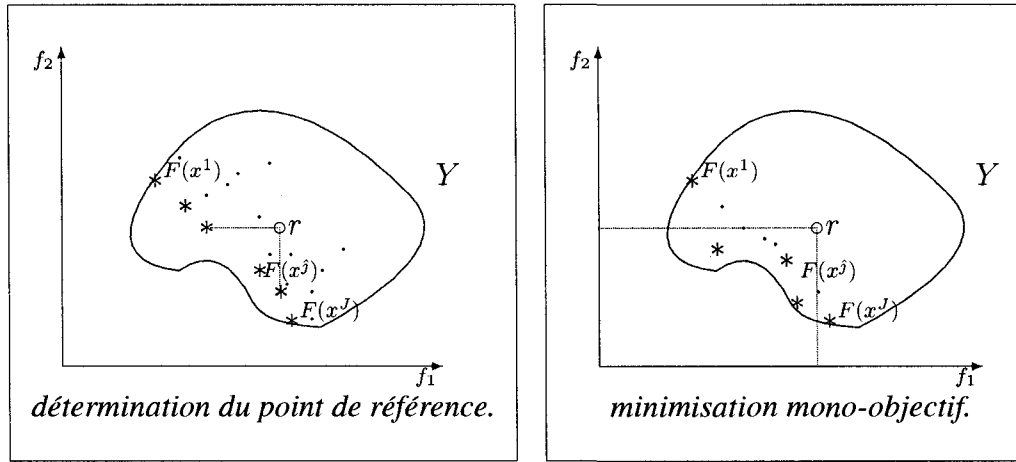


Figure 2.2 – Une itération de BIMADS

termine lorsque le pas du treillis Δ^m est inférieur à $\Delta(\delta^j) = O(\delta^j)$ ou quand un nombre prédéfini d'évaluations de fonctions objectifs est atteint.

Finalement, à la fin de chaque itération le nouvel ensemble des points non-dominés $X_{\mathcal{L}}$ est mis à jour. Des nouveaux points non-dominés sont ajoutés et des points dominés sont enlevés. Le nouveau ensemble est représenté à la partie droite de la figure 2.2 par le symbole '*'.

Ces trois étapes sont répétées par BIMADS. En pratique, la fin de l'itération majeure prend fin soit après un nombre prédéfini d'évaluations de MADS, soit lorsque δ^j est inférieure une valeur prédéterminée. Noter que d'autres algorithmes d'optimisation mono-objectif peuvent être utilisés pour résoudre R_r . Néanmoins, nous choisissons l'algorithme MADS pour résoudre la formulation mono-objectif puisqu'il est conçu pour les problèmes d'optimisation en boîtes noires tout en assurant une analyse de convergence

rigoureuse.

2.1.2 Analyse de convergence

Dans cette section, la qualité des points produits par BIMADS est étudiée et les résultats de convergence pour BIMADS sont présentés. Nous émettons des hypothèses standard concernant l'optimisation en boîtes noires en supposant que tous les points d'essai générés par l'algorithme appartiennent à un ensemble borné. Nous supposons également, que les formulations mono-objectifs sont résolues en utilisant l'implémentation LTMADS. Le théorème suivant montre que BIMADS produit des points satisfaisant les conditions nécessaires d'optimalité pour l'optimisation biobjectif présentées à la section 1.3 lorsque les fonctions objectifs sont localement Lipschitz. Nous dénotons par R_r une formulation mono-objectif de *BOP* en un point de référence $r \in \mathbb{R}^p$, tel que défini à la définition 1.4.1. Ainsi, nous montrons que toute direction du cône tangent de Clarke $T_X^{Cl}(\hat{x})$ en un point limite $\hat{x} \in X$ généré par LTMADS appliqué à R_r est une direction de montée pour au moins une fonction objectif. Notons que pour un ensemble défini par des contraintes de bornes le cône de Clarke $T_X^{cl}(\hat{x})$ coïncide avec le cône tangent $T_X(\hat{x})$.

Théorème 2.1.1 *Soit f_1 et f_2 deux fonctions Lipschitz au voisinage d'un point limite $\hat{x} \in X$ généré par LTMADS appliqué à une formulation mono-objectif R_r de BOP en*

un point de référence $r \in \mathbb{R}^p$, alors

pour tout $d \in T_X(\hat{x})$, il existe $j \in \{1, 2\}$ tel que $f_j^\circ(\hat{x}; d) \geq 0$,

où $T_X(\hat{x})$ est le cône tangent en \hat{x} .

Démonstration: La solution \hat{x} générée par LTMADS est un point stationnaire de R_r sur X [13], c'est-à-dire, pour tout $d \in T_X(\hat{x})$, $R_r^\circ(\hat{x}, d) \geq 0$. La seconde condition apparaissant à la définition de la formulation mono-objectif 1.4.1 assure que pour tout $d \in T_X(\hat{x})$, il existe un indice $j \in \{1, 2\}$ pour lequel $f_j^\circ(\hat{x}; d) \geq 0$. ■

Un corollaire à ce résultat est obtenu lorsque f_1 et f_2 sont strictement différentiables en \hat{x} .

Corollaire 2.1.2 *Supposons que f_1, f_2 et ψ_r sont strictement différentiables en un point limite $\hat{x} \in X$ généré par LTMADS appliqué à une formulation mono-objectif R_r de BOP en un point de référence $r \in \mathbb{R}^p$, alors \hat{x} est une solution KKT-proprement efficiente de BOP :*

pour tout $d \in T_X(\hat{x})$, il existe $j \in \{1, 2\}$ tel que $\nabla f_j(\hat{x})^T d \geq 0$,

où $T_X(\hat{x})$ est le cône tangent en \hat{x} .

Démonstration: Soit $d \in T_X(\hat{x})$. Selon [13], \hat{x} est un point KKT stationnaire de R_τ sur X . Ainsi, $\nabla \psi_r(\hat{x})^T d \geq 0$. La contraposée du théorème 1.4.1 assure qu'il existe un indice $j \in \{1, 2\}$ tel que $\nabla f_j(\hat{x})^T d \geq 0$. ■

Outre l'analyse de convergence, une analyse d'uniformité de la distribution des solutions dans $Y_{\mathcal{L}}$ est menée. L'analyse d'uniformité utilise la *mesure pondérée de couverture* \tilde{c}_w introduite à la section 2.1. Nous introduisons l'indice η pour représenter l'indice de l'itération de BIMADS. Le théorème suivant montre que \tilde{c}_w^η tend vers zéro.

Théorème 2.1.3 *La mesure pondérée de couverture \tilde{c}_w^η de la liste $Y_{\mathcal{L}}^\eta$ des points deux à deux non-dominés trouvés à l'itération η satisfait la condition $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \tilde{c}_w^\eta = 0$.*

Démonstration: Par contradiction, supposons qu'il existe un certain scalaire $L > 0$ pour lequel $c_w^\eta > L$ pour toute itération $\eta > 0$. Ainsi, $\delta^{j^\eta} \geq \frac{\delta^{j^\eta}}{w(j^\eta)+1} > L$ pour toutes les itérations $\eta > 0$. Puisque chaque itération majeure η de MADS se termine lorsque le pas du treillis Δ^m est inférieur à $\Delta(\delta^{j^\eta}) = O(\delta^{j^\eta})$, nous obtenons le résultat suivant :

$$\text{Il existe } \underline{\delta} > 0 : \Delta_k^\eta \geq \underline{\delta} \text{ pour toute évaluation } k \text{ et pour toute itération majeure } \eta, \quad (2.2)$$

où Δ_k^η est la taille du treillis à l'évaluation k pour l'itération majeure η de MADS. En outre, puisque le domaine réalisable X est bornée, il existe $\bar{\delta} > 0$ tel que $\Delta_k^\eta \leq \bar{\delta}$ pour tout $\eta > 0$ et $k > 0$. Soit x_0^η le point initial de la itération majeure η . Montrons que sous les hypothèses citées dans cette section, que tous les points d'essai appartiennent à un

même treillis indépendamment de l'itération majeure ou du nombre d'évaluations.

Considérons $x_{k_0}^{\eta_0}$ le point d'essai k_0 généré à l'itération majeure η_0 . Selon [13], nous avons :

$$x_{k_0}^{\eta_0} = x_0^{\eta_0} + D \sum_{i=0}^{k_0-1} \Delta_i^{\eta_0} z_i^{\eta_0},$$

où D est l'ensemble des $n_D \in \mathbb{N}$ directions vérifiant les conditions citées dans [13], $z_i^{\eta_0} \in \mathbb{N}^{n_D}$ et $\Delta_i^{\eta_0}$ est le pas du treillis à l'évaluation i de l'itération majeure η_0 de MADS. Le point initial $x_0^{\eta_0}$ a été déjà généré comme étant le point d'essai k_1 d'une itération majeure $0 \leq \eta_1 < \eta_0$. Ainsi, à partir de $x_{k_0}^{\eta_0}$, nous pouvons construire la série finie de points :

$$x_{k_0}^{\eta_0}, x_0^{\eta_0} = x_{k_1}^{\eta_1}, x_0^{\eta_1} = x_{k_2}^{\eta_2}, \dots, x_0^{\eta_p} = x_{k_{p+1}}^0, x_0^0,$$

tels que $\eta_0 > \eta_1 > \dots > \eta_p > 0$ forment une suite décroissante d'entiers et $x_{k_l}^{\eta_l}$ a été généré à l'itération majeure η_l à partir d'un point initial $x_0^{\eta_l}$. Ce point initial a été généré comme étant le point d'essai k_{l+1} d'une itération majeure η_{l+1} , *c.à.d.* $x_0^{\eta_l} = x_{k_{l+1}}^{\eta_{l+1}}$. $x_0^{\eta_p}$ a été généré comme étant le point d'essai k_{p+1} de la première itération majeure. Utilisant cette notation, nous avons alors, pour tout $l = 1, 2, \dots, p$,

$$x_{k_l}^{\eta_l} = x_0^{\eta_l} + D \sum_{i=0}^{k_l-1} \Delta_i^{\eta_l} z_i^{\eta_l},$$

avec, $z_i^{\eta_l} \in \mathbb{N}$. D'où, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 x_{k_0}^{\eta_0} &= x_0^{\eta_0} + D \sum_{i=0}^{k_0-1} \Delta_i^{\eta_0} z_i^{\eta_0} \\
 &= x_{k_1}^{\eta_1} + D \sum_{i=0}^{k_0-1} \Delta_i^{\eta_0} z_i^{\eta_0} \\
 &= x_0^{\eta_1} + D \left(\sum_{i=0}^{k_0-1} \Delta_i^{\eta_0} z_i^{\eta_0} + \sum_{i=0}^{k_1-1} \Delta_i^{\eta_1} z_i^{\eta_1} \right) \\
 &= x_{k_2}^{\eta_2} + D \left(\sum_{i=0}^{k_0-1} \Delta_i^{\eta_0} z_i^{\eta_0} + \sum_{i=0}^{k_1-1} \Delta_i^{\eta_1} z_i^{\eta_1} \right) \\
 &\dots \\
 &= x_0^0 + D \left(\sum_{l=0}^{p+1} \sum_{i=0}^{k_l-1} \Delta_i^{\eta_l} z_i^{\eta_l} \right)
 \end{aligned}$$

Torczon [82] a montré que si $\Delta_i^{\eta_l}$ sont des multiples de puissances entières d'un certain nombre rationnel (ce qui est le cas pour notre algorithme puisque Δ_0^{η} sont identiques pour toutes les itérations majeures η), si tous les itérés sont dans un ensemble borné, et si (2.2) est vérifiée, alors $x_{k_0}^{\eta_0}$ est un point du treillis qui dépend de $D, \underline{\delta}, \bar{\delta}$. Ainsi, $x_{k_0}^{\eta_0}$ appartient à un même treillis indépendamment de l'évaluation et de l'itération majeure. Conséquemment, il existe un point sélectionné par BIMADS un nombre infini de fois autour duquel $Y_{\mathcal{L}}^{\eta}$ est affiné sans changer la valeur δ^{η} . Nous obtenons, alors, $w(\hat{j}^{\eta}) \rightarrow \infty$ et par la suite, $c_w^{\eta} \rightarrow 0$. Ce qui contredit le fait que c_w^{η} est bornée inférieurement par $L > 0$. ■

La mesure de couverture pondérée c_w a été définie pour surmonter les difficultés que représente le front discontinu. En effet, dans ce cas particulier, à cause des écarts séparant

les ensembles disjoints, un même point peut être sélectionné un nombre infini de fois autour duquel le front est affiné. Pour ce faire, une pénalité a été introduite pour limiter une sélection multiple d'un même point. Avec cette pénalité, le théorème 2.1.3 montre que la mesure de couverture pondérée tend vers zéro même si le front est discontinu.

2.2 Résultats numériques sur les problèmes tests

Le comportement de BiMADS est évalué en utilisant les problèmes tests proposés par Deb [34]. Les fonctions de ces problèmes biobjectifs sont construits de la manière suivante :

$$f_1(x) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \text{ et}$$

$$f_2(x) = g(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)h(f_1(x_1, x_2, \dots, x_m), g(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)).$$

La fonction f_1 dépend de m variables x_1, x_2, \dots, x_m avec $m < n$ et f_2 est une fonction de n variables. La fonction g dépend de $n - m$ variables $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ qui n'apparaissent pas dans la fonction f_1 ; h est une fonction qui dépend des valeurs de f_1 et g .

Des difficultés dans les problèmes tests sont introduites en choisissant des fonctions appropriées pour f_1 , g et h [34] :

- La convexité et la discontinuité dans le front Pareto sont gérées par la fonction h ;
- La convergence au front Pareto réel est gérée par la fonction g ;

- La diversité dans le front Pareto est gérée par la fonction f_1 .

Les problèmes tests que nous considérons sont définis à travers des choix bien spécifiques de f_1 , g et h .

L'algorithme est codé en C++ et utilise le logiciel NOMAD 0.6 [30] qui implémente LTMADS, comme une sous-routine pour résoudre chaque formulation mono-objectif. Le point $x_0 = (0.51, 0.51)$ est utilisé comme itéré initial pour initialiser l'algorithme et le pas initial du treillis est fixé à 0.01. Deux critères d'arrêt sont sélectionnés pour chaque itération majeure de MADS sur les formulations mono-objectifs :

- Arrêt par le pas du treillis : l'itération majeure se termine lorsque le pas du treillis Δ^m descend au-dessous de $\frac{\delta^j}{1000}$ où δ^j est défini à la figure 2.1.
- Arrêt par le nombre d'évaluations : l'itération majeure se termine après un nombre d'évaluations des fonctions objectifs reformulées égale à 50 sauf exception et dans ce cas ce nombre est précisé.

Dans nos tests numériques, BIMADS génère soit 10 ou 30 formulations mono-objectifs résolues avec l'algorithme MADS. La stratégie génère respectivement au maximum 500 et 1500 évaluations des fonctions objectifs.

Pour chaque problème test, une figure contenant quatre graphiques est présentée : deux d'entre elles pour chaque formulation mono-objectif, et les deux autres pour les itérations majeures impliquant 10 ou 30 appels de MADS. Chaque graphe représente les valeurs des fonctions évaluées aux points d'essai générés par BIMADS en utilisant le symbole '·'. Le symbole '*' est utilisé pour les points non-dominés trouvés par l'algo-

arithme. Les courbes représentent les fronts Pareto globaux et locaux, ou la frontière de l'image Y de X . Pour chaque série de tests, la qualité de l'approximation $Y_{\mathcal{L}}$ fournie par l'algorithme BIMADS est analysée selon les deux critères présentés au chapitre 1 : convergence des solutions au front Pareto $Y_{\mathcal{P}}$ et l'uniformité de la distribution des solutions dans $Y_{\mathcal{L}}$. La mesure de la couverture \tilde{c} introduite dans 2.1 est donnée pour chaque problème test.

2.2.1 Fronts Pareto convexe et non-convexe

La convexité du front Pareto est gérée par la fonction h . Deb [34] propose la fonction suivante :

$$h(f_1, g) = \begin{cases} 1 - (\frac{f_1}{g})^\alpha & \text{if } f_1 \leq g, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Le paramètre α contrôle la forme du front Pareto. Le front Pareto est non-convexe si $\alpha > 1$ et convexe autrement. Noter que les solutions globalement Pareto optimales sont obtenues aux minima globaux de la fonction g . Nous considérons les fonctions suivantes pour g et f_1 :

$$\begin{aligned}
g(x_2) &= \begin{cases} 4 - 3 \exp\left(-\frac{x_2 - 0.2}{0.02}\right)^2, & \text{if } 0 \leq x_2 \leq 0.4, \\ 4 - 2 \exp\left(-\frac{x_2 - 0.7}{0.2}\right)^2, & \text{if } 0.4 \leq x_2 \leq 1, \end{cases} \\
f_1(x_1) &= 4x_1,
\end{aligned}$$

où les deux solutions x_1 et $x_2 \in [0, 1]$.

Trois séries de test sont générées avec différentes valeurs de α . Dans le premier test, le front Pareto global est convexe. Dans le second test, le front Pareto global est non-convexe. Finalement, dans le troisième test, le front Pareto global est convexe mais le front Pareto local est non-convexe.

Front Pareto globalement convexe

En fixant α à 0.25 dans le problème (2.3), nous obtenons un problème biobjectif avec un front Pareto globalement convexe. Les résultats obtenus en appliquant BIMADS avec 10 itérations majeures de MADS et 30 itérations majeures de MADS sont illustrés à la figure 2.3. La figure montre que tous les points non-dominés $Y_{\mathcal{L}}$ trouvés par BIMADS appartiennent à la courbe globalement Pareto $Y_{\mathcal{P}}$ pour toutes les séries tests. En outre, la figure suggère que BIMADS réalise une bonne distribution et une bonne diffusion des points non-dominés dans le front Pareto global pour chaque formulation.

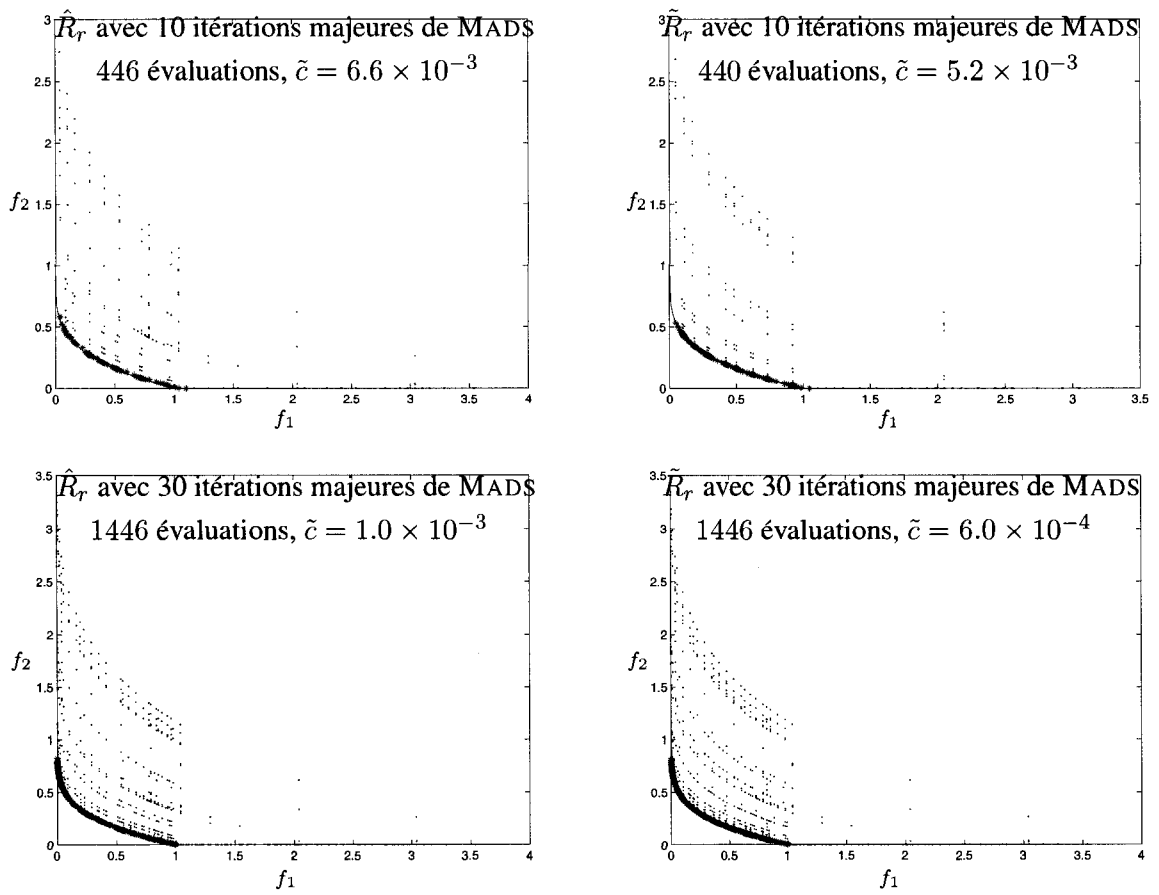


Figure 2.3 – Front global convexe : BIMADS avec 10 et 30 itérations majeures de MADS

Front Pareto global non-convexe

En fixant α à 4 dans le problème (2.3), nous obtenons un problème biobjectif avec un front global non-convexe. Les résultats obtenus en appliquant BIMADS avec 10 itérations majeures de MADS et 30 itérations majeures de MADS sont donnés à la figure 2.4. Excepté le premier test correspondant aux résultats de BIMADS avec 10 itérations majeures de MADS appliqué à la formulation normalisée mono-objectif, tous les tests génèrent des solutions non-dominées $Y_{\mathcal{L}}$ dans le front global $Y_{\mathcal{P}}$. Une bonne répartition des solutions Pareto est obtenue en utilisant 30 itérations majeures de MADS.

Front local non-convexe et front global convexe

Nous fixons $\alpha = 0.25 + 3.75(g(x_2) - 1)$ [34] dans le problème (2.3). Le problème résultant est difficile à résoudre pour les algorithmes qui explorent la forme de la courbe Pareto [34]. Les résultats obtenus en appliquant BIMADS avec 10 itérations majeures de MADS et 30 itérations majeures de MADS sont illustrés à la figure 2.5. En utilisant 10 itérations majeures de MADS, BIMADS génère un ensemble de points non-dominés $Y_{\mathcal{L}}$ tout près de la courbe Pareto $Y_{\mathcal{P}}$. La qualité de l'approximation est meilleure en utilisant la formulation produit mono-objectif. En utilisant 30 itérations majeures de MADS, tous les points non-dominés trouvés par BIMADS appartiennent à la courbe globalement Pareto optimale, c'est-à-dire, $Y_{\mathcal{L}} \subset Y_{\mathcal{P}}$. Les points non-dominés $Y_{\mathcal{L}}$ sont bien répartis dans la courbe Pareto.

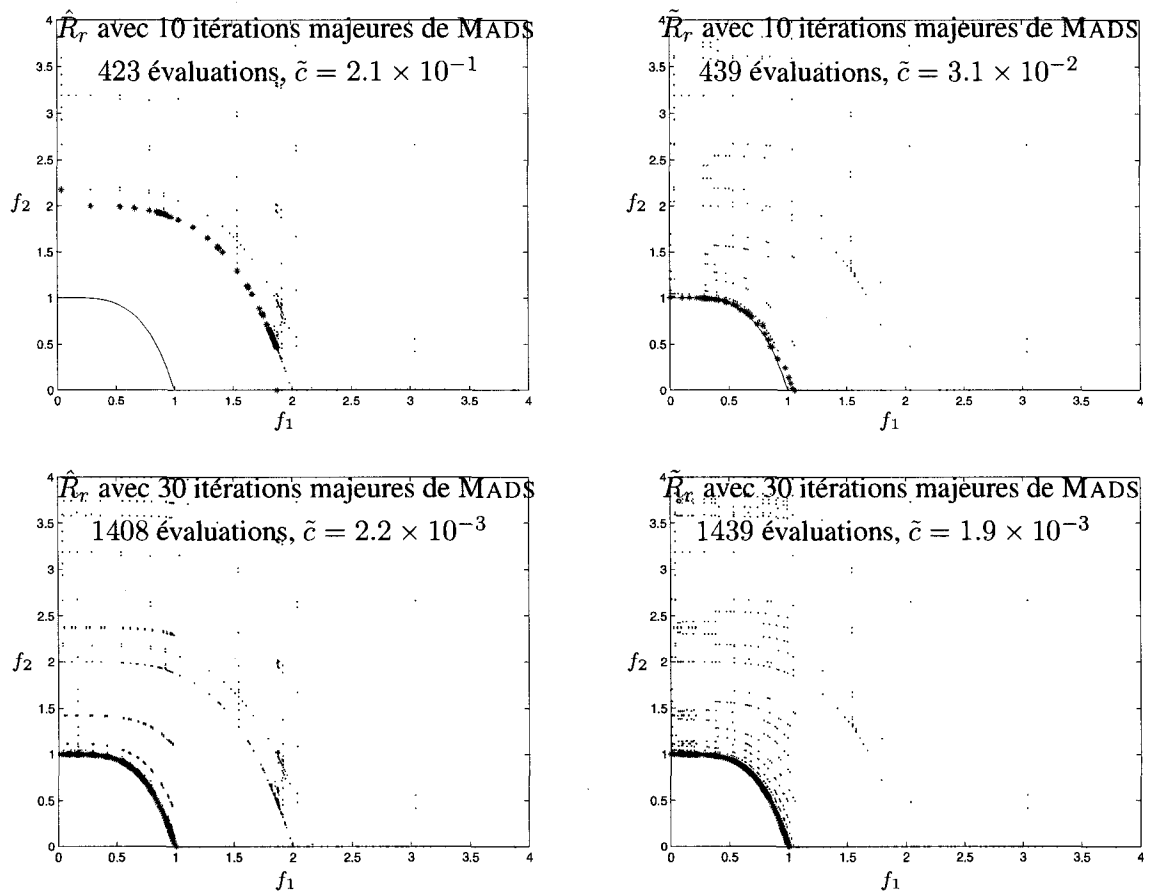


Figure 2.4 – Front global non-convexe : BIMADS avec 10 et 30 itérations majeures de MADS

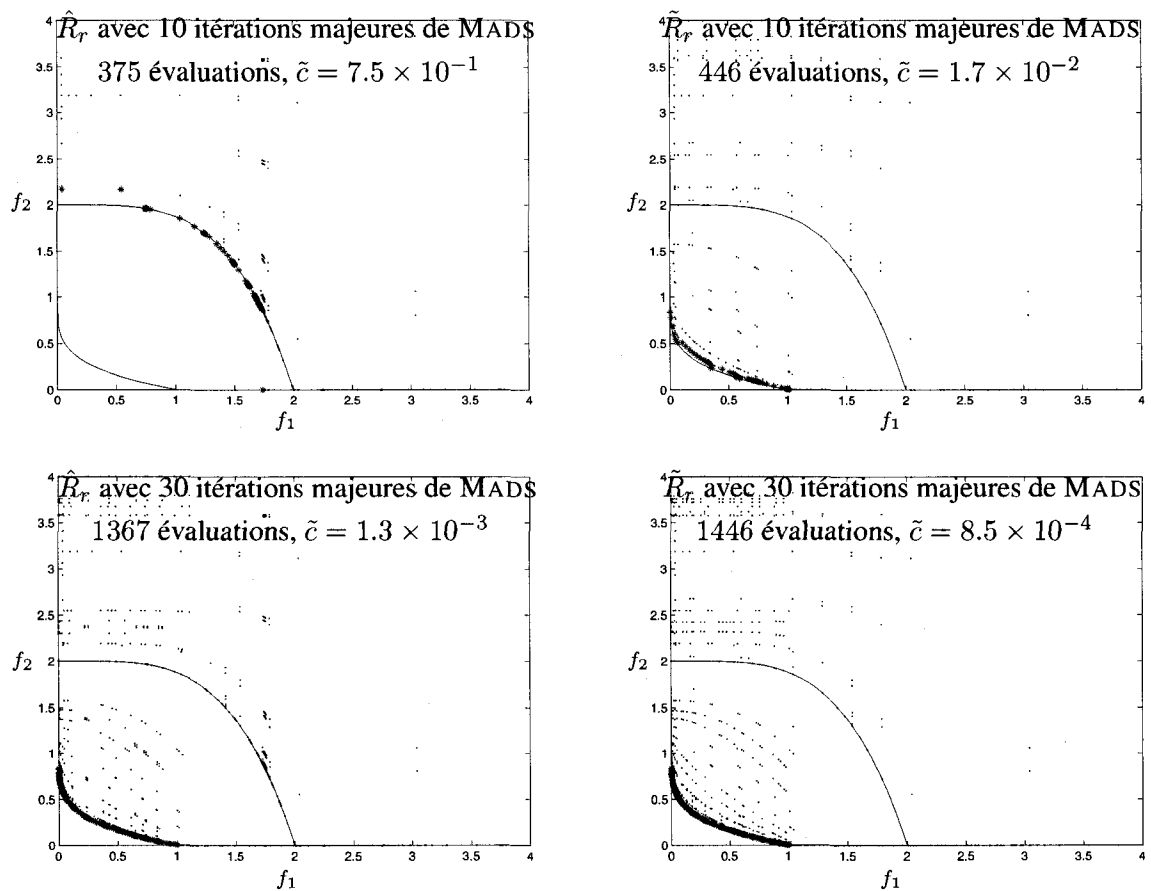


Figure 2.5 – Front local non-convexe et front global convexe : BIMADS avec 10 et 30 itérations majeures de MADS

2.2.2 Front Pareto discontinu

Deb [34] propose une famille de problèmes tests pour lesquels le front Pareto est discontinu :

$$h(f_1, g) = 1 - \left(\frac{f_1}{g}\right)^\alpha - \frac{f_1}{g} \sin(2\pi q f_1),$$

$$f_1(x_1) = x_1,$$

$$g(x_2) = 1 + 10x_2,$$

où x_1 et $x_2 \in [0, 1]$, $\alpha > 0$ et q est le nombre de régions disjointes. Nous utilisons les mêmes valeurs pour α et q que celles proposées en [34], c'est-à-dire, $\alpha = 2$ et $q = 4$. Les résultats obtenus en appliquant BIMADS avec 10 et 30 itérations majeures de MADS sont donnés à la figure 2.6.

La figure 2.6 montre que BIMADS génère des solutions non-dominées $Y_{\mathcal{L}}$ pour les quatre régions disjointes. Les solutions $Y_{\mathcal{L}}$ sont bien réparties au long de la courbe Pareto $Y_{\mathcal{P}}$. Le tableau 2.1 donne la mesure de couverture \tilde{c} pour chacune des quatre régions disjointes. Le tableau rapporte également la valeur moyenne μ et l'écart type σ de \tilde{c} pour ces régions. En outre, en utilisant 30 itérations majeures de MADS, les résultats obtenus en appliquant la formulation \tilde{R}_r sont légèrement meilleurs que ceux obtenus en appliquant la formulation \hat{R}_r .

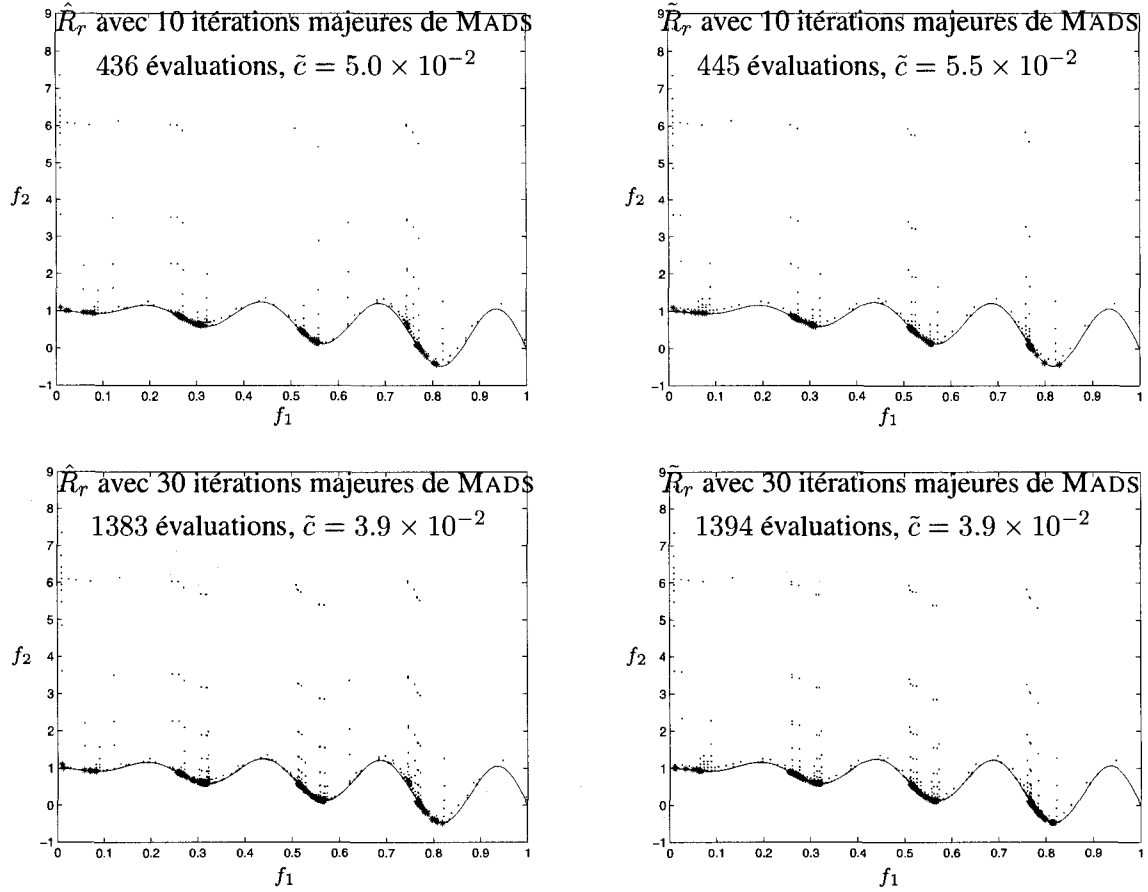


Figure 2.6 – Front global discontinu : BIMADS avec 10 et 30 itérations majeures MADS

Tableau 2.1 – *Mesure de couverture \tilde{c} de chaque région Pareto disjointe*

\tilde{c}	Formulation \hat{R}_r					
Région	1	2	3	4	μ	σ
10 itérations majeures	.0078	.0039	.0098	.0433	.0162	.0182
30 itérations majeures	.0100	.0054	.0040	.0025	.0054	.0032
\tilde{c}	Formulation \tilde{R}_r					
Région	1	2	3	4	μ	σ
10 itérations majeures	.0076	.0033	.0091	.0552	.0188	.0243
30 itérations majeures	.0012	.0030	.0029	.0059	.0032	.0019

2.2.3 Espace de recherche biaisé

Afin de rendre la convergence au front Pareto plus problématique, Deb [34] propose la fonction g suivante :

$$g(x_2) = 1 + x_2^\gamma,$$

où γ est un paramètre réel qui contrôle le biais dans l'espace de recherche. Pour compléter l'exemple, les fonctions suivantes pour f_1 et h sont utilisées [34] :

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= x_1, \\ h(f_1, g) &= 1 - \left(\frac{f_1}{g}\right)^2. \end{aligned}$$

Les résultats obtenus pour $\gamma = 0.25$ en appliquant BiMADS avec 10 et 30 itérations majeures de MADS sont illustrés dans la partie supérieure de la figure 2.7. Toutes les solutions non-dominées trouvées par l'algorithme sont près de la courbe globalement Pareto optimale ; mais aucune solution n'appartient à la courbe Pareto. Deb [34] observe que si $\gamma < 1$, la densité des solutions augmente en s'éloignant du front Pareto. Ainsi, en générant aléatoirement 50,000 solutions pour $\gamma = 0.25$, aucune solution générée ne se trouve à proximité du front Pareto optimal [34]. Par comparaison, le nombre maximal des évaluations des objectifs a été augmenté à 50,000 (c'est-à-dire, le nombre de itérations majeures de MADS a été augmenté à 500 et le nombre maximal des évaluations des fonctions a été augmenté à 100 pour chaque itération majeure). Les résultats sont donnés dans la partie inférieure de la figure 2.7. En augmentant le nombre d'évaluations

des objectifs, tous les points non-dominés $Y_{\mathcal{L}}$ trouvés par BIMADS appartiennent au front Pareto global $Y_{\mathcal{P}}$. Les points sont bien répartis au long de $Y_{\mathcal{P}}$.

2.2.4 Front Pareto non-uniforme

La non-uniformité des solutions au long du front Pareto peut-être créée en choisissant une fonction non-linéaire pour f_1 . Un exemple est donné dans [34] à l'aide des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= 1 - \exp(-4x_1) \sin^4(5\pi x_1), \\ h(f_1, g) &= \begin{cases} 1 - (\frac{f_1}{g})^4 & \text{if } f_1 \leq g. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\ g(x_2) &= \begin{cases} 4 - 3 \exp(-\frac{x_2-0.2}{0.02})^2, & \text{if } 0 \leq x_2 \leq 0.4, \\ 4 - 2 \exp(-\frac{x_2-0.7}{0.2})^2, & \text{if } 0.4 \leq x_2 \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

En utilisant 500 points uniformément espacés selon x_1 , Deb [34] montre que la courbe Pareto correspondante est biaisée pour les solutions pour lesquelles la valeur de f_1 est près de 1 : la plupart des solutions générées ont la valeur de la fonction objectif $f_1 = 1$. Ainsi, les solutions se concentrent autour de $f_1 = 1$. Les résultats obtenus en appliquant BIMADS avec 10 et 30 itérations majeures de MADS sont présentés à la figure 2.8. BIMADS surmonte ce biais autour de la valeur $f_1 = 1$. Les deux méthodes trouvent des

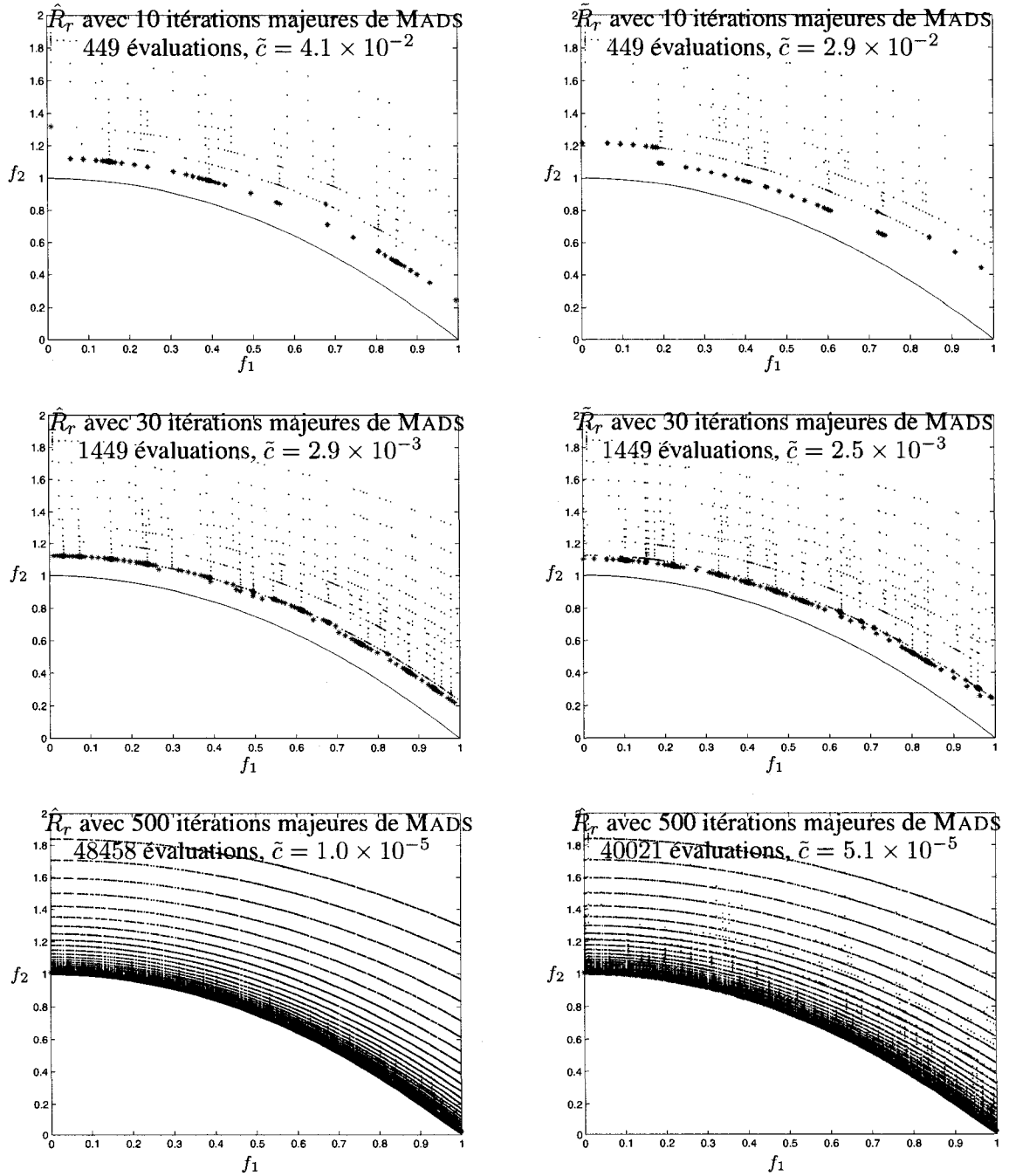


Figure 2.7 – Recherche biaisée : BIMADS avec 10, 30 et 500 itérations majeures de MADS

solutions non-dominées Y_L bien réparties appartenant à la courbe Pareto Y_P . Avec 30 itérations majeures, les solutions Pareto solutions sont plus uniformément réparties.

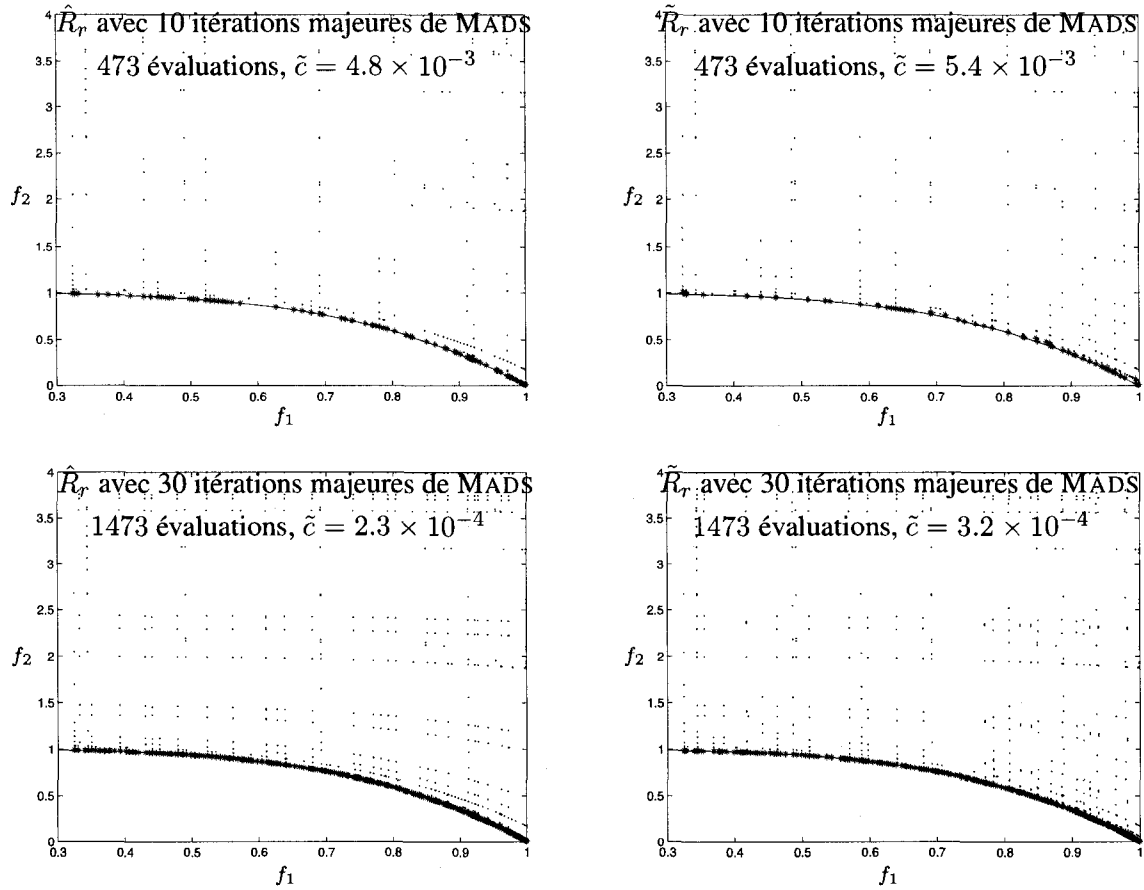


Figure 2.8 – Non-uniformité représentant le front Pareto : BIMADS avec 10 et 30 itérations majeures de MADS

2.3 Discussion

Nous proposons une nouvelle approche pour résoudre *BOP* assurant quelques conditions nécessaires de premier ordre pour les fonctions non-lisses. Outre l'analyse de

convergence, une nouvelle analyse d'uniformité est proposée. Notre nouvel algorithme BIMADS pour l'optimisation biobjectif *BOP* a été présenté et appliqué à six problèmes tirés de la littérature conçus pour mettre en valeur quelques difficultés intrinsèques de *BOP*. La performance de l'algorithme est évaluée en étudiant la qualité de l'ensemble des solutions en terme de proximité au front Pareto et l'uniformité de la répartition des solutions.

Les résultats des problèmes tests sont résumés au tableau 2.2. Les entrées du tableau 2.2 sont la valeur moyenne μ et l'écart type σ de la mesure de la couverture \tilde{c} pour les six problèmes tests.

Tableau 2.2 – *Mesure de couverture \tilde{c} pour les problèmes tests*

\tilde{c}	Formulation \hat{R}_r		Formulation \tilde{R}_r	
Itérations majeures	μ	σ	μ	σ
10 itérations majeures	.1714	.349	.0177	.0105
30 itérations majeures	.0025	.002	.0017	.0013

Le tableau 2.2 montre que l'uniformité de la répartition des solutions Pareto est sensible au nombre des itérations majeures et la formulation adoptée. Les meilleurs résultats sont obtenus en appliquant 30 itérations majeures de MADS et en utilisant la formulation \tilde{R}_r .

CHAPITRE 3

SÉLECTION OPTIMALE D'UN PORTEFEUILLE EN FINANCE

L'objectif visé de ce chapitre est d'illustrer l'algorithme BIMADS que nous appliquons sur un problème concret de sélection de portefeuille en finance. Dans son ouvrage, Markowitz [66] définit un premier modèle pour le problème de sélection de portefeuille qui tient compte du couple de paramètres : la moyenne et la variance du rendement. Selon ce modèle, l'ensemble optimal de portefeuilles composés d'actifs risqués est appelé la *frontière efficiente*. Le rendement moyen de chaque actif est utilisé pour estimer le rendement attendu du portefeuille, alors que la variance donne une mesure du risque. Le modèle suppose que les rendements des actifs sont normalement distribués et par conséquent il néglige tous les moments au-delà du premier. En effet, pour bien modéliser les problèmes réels, Markowitz met en évidence l'importance de la diversification, ce qui implique la normalité du rendement du portefeuille.

Lorsque la décision d'investir concerne des intervalles finis de temps, le modèle moyenne-variance n'est plus approprié et des moments de degrés plus élevés devraient être considérés [53, 71, 72]. En particulier, l'asymétrie, le deuxième moment de la distribution, devient non-négligeable tel qu'illustré par de nombreuses études empiriques [5, 43, 74, 75] mettant en valeur l'asymétrie de la distribution des rendements des portefeuilles. En outre, plusieurs contributions en finance soulignent le rôle de l'asymétrie

dans la prise du risque [4, 54, 57, 78].

Lai [58] modélise la sélection du portefeuille avec asymétrie comme un problème de programmation tri-objectif (dénnoté par L^3 dans ce chapitre, et présenté dans la section 3.1) qui vise à maximiser le rendement attendu, minimiser la variance et finalement maximiser l'asymétrie. Lai [58] restreint le portefeuille à avoir une variance unitaire et applique la programmation polynomiale par but (polynomial goal programming) *PGP* introduite par Tayi et Leonard [80] pour résoudre problème biobjectif contraint qui en résulte (dénnoté ici par L^2) en incorporant la préférence a priori de l'investisseur entre les objectifs. *PGP* a été par la suite adopté par Chunhachinda et al. [24], Sun et Yan [79], et Prakash et al. [70] pour résoudre le problème de sélection de portefeuille en tenant compte du critère de l'asymétrie.

Le chapitre est organisé comme suit. Le problème de sélection de portefeuille avec asymétrie est présenté à la section 3.1. Les formulations de Lai L^3 et L^2 , ainsi que l'approche de programmation par but sont détaillées. Dans la section 3.2, nous proposons des reformulations tri-objectifs et biobjectifs sous contraintes de bornes en se basant sur les coordonnées hypersphériques standard. Ensuite, la reformulation biobjectif est résolue en utilisant l'algorithme BIMADS [19] présenté au chapitre 2 qui garantit une convergence vers un large ensemble de portefeuilles optimaux dans l'espace défini par les paramètres : moyenne-variance-asymétrie. Notre approche est testée dans la section 3.3 sur un exemple proposé par Lai [58].

3.1 Formulations multiobjectifs pour la sélection de portefeuille avec asymétrie

La formulation de Lai [58] du problème de sélection de portefeuille est adoptée dans le reste du chapitre. Le portefeuille est composé de $n + 1$ actifs. Les n premiers actifs sont des actifs risqués et le $(n + 1)^{ème}$ actif est l'actif sans risque avec un rendement $\mathcal{R} \geq 0$. Tous les actifs ont des dettes limitées, et les rendements sont uniquement obtenus sous la forme de gains sur le capital. Le marché des capitaux est parfait et compétitif avec divisibilité, sans taxes, ni coûts de transactions. Finalement, les ventes à découvert de tous les actifs avec utilisation totale des revenus sont permises. Outre les hypothèses standard, on suppose que la moyenne, la variance et l'asymétrie du rendement $\tilde{\mathcal{R}}_i$ de l'actif risqué i existent pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$. La matrice de variance-covariance V du rendement de l'actif est définie positive. Soit $\bar{\mathcal{R}}$ le vecteur $n \times 1$ composé des rendements moyens des actifs et x_i le pourcentage de la richesse investie pour le $i^{ème}$ actif risqué. Le problème de sélection de portefeuille consiste à choisir une composition optimale du portefeuille $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ en maximisant le rendement moyen du portefeuille $M(x) = x^T(\bar{\mathcal{R}} - \mathcal{R})$ tout en minimisant la variance $V(x) = x^T V x$ et maximisant l'asymétrie $S(x) = \sum_{i,j,k=1}^n \frac{s_{ijk} x_i x_j x_k}{(x^T V x)^{\frac{3}{2}}}$, avec s_{ijk} le moment central [58] entre les actifs i, j et k . Ainsi, en tenant compte du critère de l'asymétrie, le problème de sélection de portefeuille implique trois critères conflictuels. Il n'existe pas une solution unique optimisant simultanément les différents critères. L'optimisation multiobjectif, définie dans le chapitre 1 permet d'identifier l'ensemble des meilleurs compromis. Ainsi le problème

de portefeuille peut être formulé comme un problème d'optimisation tri-objectif non

contraint :

$$L^3 : \max_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \begin{array}{l} M(x) = x^T(\bar{\mathcal{R}} - \mathcal{R}), \\ -V(x) = -x^T V x, \\ S(x) = \sum_{i,j,k=1}^n \frac{s_{ijk} x_i x_j x_k}{(x^T V x)^{\frac{3}{2}}}. \end{array} \right.$$

Lai [58] propose l'approche de résolution suivante pour le problème de sélection de portefeuille L^3 . Puisque la prise de décision quant au choix du portefeuille est sous-jacente au pourcentage relatif investi pour chaque actif risqué, la composition $x \in \mathbb{R}^n$ est mise à l'échelle telle que $x^T V x = 1$ [58]. Ainsi, le problème tri-objectif L^3 est réduit au problème biobjectif contraint L^2 .

$$L^2 : \max_{x \in \mathbb{R}^n : V(x)=1} \left\{ \begin{array}{l} M(x) = x^T(\bar{\mathcal{R}} - \mathcal{R}), \\ S(x) = \sum_{i,j,k=1}^n \frac{s_{ijk} x_i x_j x_k}{(x^T V x)^{\frac{3}{2}}}. \end{array} \right.$$

Notons que L^2 contient maintenant une contrainte d'égalité non-linéaire difficile à traiter en optimisation. Pour résoudre L^2 , Lai construit un problème de programmation polynomial par but L^1 , c'est-à-dire, un problème mono-objectif dont la solution dépend des préférences de l'investisseur.

$$L^1 : \min_{x \in \mathbb{R}^n : V(x)=1} Z(x) = |u_1 - M(x)|^\alpha + |u_3 - S(x)|^\beta,$$

avec $u = (u_1, u_3)$ le point idéal pour le problème de maximisation, c'est-à-dire, u_1 et u_3 sont les valeurs maximales de $M(x)$ et $S(x)$ sous la contrainte de l'unité de variance. L^1 correspond à la méthode d'approximation à un point de référence PI_r présentée au chapitre 1 pour $\alpha = \beta$. Les scalaires α et β sont des paramètres non-négatifs, spécifiques à l'investisseur et représentent le degré de préférence subjectif de l'investisseur vis-à-vis de la moyenne et l'asymétrie du rendement du portefeuille. La méthode, illustrée dans la figure 3.1, consiste à trouver une solution Pareto x^* telle que $F(x^*) = (M(x^*), S(x^*))$ est près du point idéal u . Résoudre L^1 avec différents paramètres spécifiques à l'investisseur produit un ensemble de points qui donne une approximation du front Pareto.

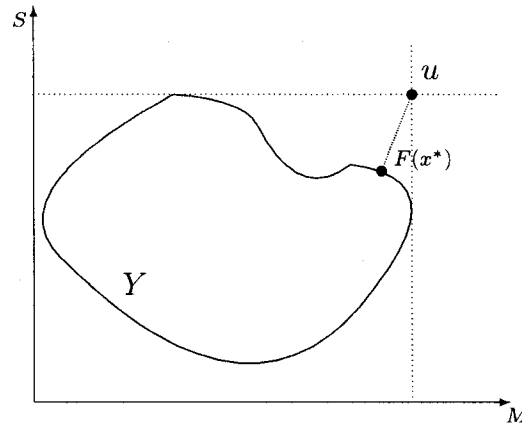


Figure 3.1 – Programmation polynomiale par but : approximation du point idéal

3.2 Une nouvelle approche multiobjectif pour la sélection de portefeuille

Nous proposons une nouvelle approche pour résoudre le modèle multiobjectif L^3 pour la sélection de portefeuille avec asymétrie. L'approche consiste à reformuler L^3

en un problème biobjectif R^2 sous contraintes de bornes. Nous utilisons la définition suivante de la reformulation entre différents problèmes d'optimisation [17] :

Définition 3.2.1 *Soit P_A et P_B deux problèmes d'optimisation. Une reformulation $B(\cdot)$ de P_A à P_B est une application P_A à P_B telle que, pour toute instance A de P_A et une solution optimale de $B(A)$, une solution optimale de A peut être obtenue en un temps polynomial.*

La reformulation présentée dans cette section comprend deux étapes. La première étape est inspirée de la méthode proposée par Dreisigney [37–39] pour traiter les contraintes d'égalité explicitement données. Elle consiste en un changement de variable en utilisant les coordonnées hypersphériques. La deuxième étape correspond à une réduction du problème tri-objectif en un problème biobjectif. Dans la première étape, nous exploitons la structure spécifique de la matrice variance-covariance pour reformuler L^3 en utilisant un changement de variable approprié. Puisque la matrice variance-covariance V est définie positive, il existe une matrice inversible $P \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tel que :

$$V = P^T P. \quad (3.1)$$

La proposition 3.2.1 introduit la première étape de la reformulation utilisant la condition (3.1).

Proposition 3.2.1 L^3 est reformulé comme suit

$$R^3 : \max_{(\rho, \theta) \in \Omega} \begin{cases} \rho f_m(\theta) = \rho \sum_{i=1}^n (\bar{R}_i - r) \sum_{l=1}^n P_{il}^{-1} \left[\prod_{w=1}^{n-l} \sin \theta_w \cos \theta_{n-l+1} + \prod_{w=1}^{n-1} \sin \theta_w \right] \\ f_v(\rho) = -\rho^2 \\ f_s(\theta) = \sum_{i,j,k=1}^n s_{ijk} \prod_{t=i,j,k} \sum_{l=1}^n P_{tl}^{-1} \left[\prod_{w=1}^{n-l} \sin \theta_w \cos \theta_{n-l+1} + \prod_{w=1}^{n-1} \sin \theta_w \right] \end{cases}$$

avec $\Omega = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} : 0 \leq \theta_i \leq 2\pi \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n-1, \rho \geq 0\}$ et

$P \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ vérifiant la condition (3.1). Soit $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_1^* = \sum_{l=1}^n P_{1l}^{-1} \prod_{w=1}^{n-1} \sin \theta_w$ et

$x_i^* = \sum_{l=1}^n P_{il}^{-1} \prod_{w=1}^{n-l} \sin \theta_w \cos \theta_{n-l+1}$ pour $i = 2, 3, \dots, n$. Alors (ρ^*, θ^*) est une solution

Pareto optimal de R^3 si et seulement x^* est une solution Pareto optimal de L^3 .

Démonstration: Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et définissons $y = Px$. Noter que la variance satisfait

$x^T V x = x^T P^T P x = y^T y = \|y\|^2$. En substituant y dans L^3 , nous obtenons la reformulation suivante :

$$L_y^3 : \max_{y \in \mathbb{R}^n} \begin{cases} (\bar{R} - r)^T P^{-1} y, \\ -\|y\|^2 \\ \sum_{i,j,k=1}^n \frac{s_{ijk} (P^{-1} y)_i (P^{-1} y)_j (P^{-1} y)_k}{\|y\|^3}, \end{cases}$$

Ainsi, on obtient la reformulation R^3 puisque

$$\|y\| = \rho, y_1 = \rho \prod_{w=1}^{n-1} \sin \theta_w \text{ et } y_l = \rho \prod_{w=1}^{n-l} \sin \theta_w \cos \theta_{n-l+1} \text{ pour } l = 2, 3, \dots, n,$$

où $(\rho, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$ sont les coordonnées hypersphériques de $y \in \mathbb{R}^n$. ■

Dans le problème R^3 , le rendement moyen $\rho f_m(\theta)$ est le produit de ρ et une fonction qui dépend uniquement des coordonnées angulaires θ , et ne dépend pas de la valeur de la variance. Par conséquent, les coordonnées angulaires des points Pareto optimaux dans R^3 ne sont pas sensibles à la valeur de la variance. Cette propriété spécifique est exploitée dans le théorème 3.2.2 afin de reformuler le problème de sélection de portefeuille R^3 en un problème biobjectif R^2 .

Théorème 3.2.2 R^3 est reformulé comme suit :

$$R^2 : \max_{\theta \in \Omega_\theta} \begin{cases} f_m(\theta) = \sum_{i=1}^n (\bar{R}_i - r) \sum_{l=1}^n P_{il}^{-1} \left[\prod_{w=1}^{n-l} \sin \theta_w \cos \theta_{n-l+1} + \prod_{w=1}^{n-1} \sin \theta_w \right] \\ f_s(\theta) = \sum_{i,j,k=1}^n s_{ijk} \prod_{t=i,j,k} \sum_{l=1}^n P_{tl}^{-1} \left[\prod_{w=1}^{n-l} \sin \theta_w \cos \theta_{n-l+1} + \prod_{w=1}^{n-1} \sin \theta_w \right] \end{cases}$$

où $\Omega_\theta = \{\theta \in \mathbb{R}^{n-1} : 0 \leq \theta_i \leq 2\pi \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n-1\}$ et $P \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ satisfait la condition (3.1). Soit $\rho^* > 0$

1. Si (ρ^*, θ^*) est une solution Pareto optimale de R^3 alors θ^* une solution Pareto optimale de R^2 .
2. Si θ^* est une solution Pareto optimal de R^2 tel que $f_m(\theta^*) \geq 0$ alors (ρ^*, θ^*) est une solution Pareto optimale de R^3 .

Démonstration: Soit $\rho^* > 0$.

1. Supposons que (ρ^*, θ^*) est une solution Pareto optimale de R^3 . Par contradiction,

supposons que θ^* n'est pas Pareto optimale pour R^2 . Soit $\theta \in \mathbb{R}^{n-1}$ une solution réalisable de R^2 telle que θ domine θ^* dans R^3 . Alors soit $f_m(\theta) \geq f_m(\theta^*)$ ou $f_s(\theta) \geq f_s(\theta^*)$ avec au moins une égalité stricte. En multipliant les deux inégalités par $\rho^* > 0$, nous obtenons (ρ^*, θ^*) est dominé par (ρ^*, θ) dans R^3 ce qui contredit l'hypothèse.

2. Supposons que θ^* est une solution optimale de R^2 . Par contradiction, supposons que (ρ^*, θ^*) n'est pas une solution optimale de R^3 . Soit (ρ, θ) une solution réalisable de R^3 telle que (ρ, θ) domine (ρ^*, θ^*) . Il s'ensuit que $0 \leq \rho \leq \rho^*$. Nous obtenons soit $\rho f_m(\theta) \geq \rho^* f_m(\theta^*) \geq \rho f_m(\theta^*)$ ou $f_s(\theta) \geq f_s(\theta^*)$ avec au moins une inégalité stricte. Par conséquent, θ^* n'est pas Pareto optimal pour R^2 , ce qui contredit l'hypothèse. ■

Comme un corollaire du théorème 3.2.2, le problème biobjectif R^2 est une reformulation du problème de sélection de portefeuille avec asymétrie L^3 .

Corollaire 3.2.3 *L^3 est reformulé en R^2 . Soit θ^* une solution réalisable de R^2 et $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_1^* = \sum_{l=1}^n P_{1l}^{-1} \prod_{w=1}^{n-1} \sin \theta_w$ et $x_i^* = \sum_{l=1}^n P_{il}^{-1} \prod_{w=1}^{n-l} \sin \theta_w \cos \theta_{n-l+1}$ pour $i = 2, 3, \dots, n$; où $P \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ satisfait la condition (3.1).*

1. Si x^* est une solution Pareto optimal de L^3 , alors θ^* est une solution Pareto optimale de R^2 ,
2. Si θ^* est une solution Pareto optimale de R^2 tel que $f_m(\theta^*) \geq 0$, alors x^* est une solution Pareto optimal de L^3 .

Démonstration: La preuve découle directement de la proposition 3.2.1 et du théorème

3.2.2 ■

Il résulte de ce corollaire que tous portefeuilles optimaux du problème tri-objectif L^3 peuvent être générés en résolvant le problème biobjectif R^2 . R^2 est une reformulation du problème biobjectif L^2 . Deux avantages concernent la résolution de R^2 au lieu de L^2 . Le premier avantage, et le plus important, réside dans le fait que les contraintes présentes dans R^2 sont des contraintes de borne alors que celles de L^2 sont des contraintes non-linéaires d'égalité. Cette propriété rend R^2 plus facile à résoudre. En effet, il est difficile de traiter ce genre de contraintes. Par exemple, aucune solution de L^2 proposée par Lai ne satisfait exactement la contrainte de variance unitaire. En outre, la formulation R^2 contient $n - 1$ variables libres alors que L^2 contient n variables.

3.3 Application de BIMADS sur le problème de sélection de portefeuilles

La reformulation R^2 présentée à la section 3.2 réduit la taille du vecteur de décision pour le problème de sélection de portefeuille à $n - 1$, et réduit le nombre de fonctions objectifs à deux sans introduire de contraintes d'égalité. Cependant, la fonction du rendement moyen n'est plus linéaire et la structure des fonctions objectifs est plus complexe puisque f_m et f_s contiennent des fonctions trigonométriques. Afin de surmonter cette difficulté, nous proposons de résoudre le problème reformulé de la sélection de portefeuille R^2 en utilisant l'algorithme BIMADS [19], présenté au chapitre 2. Précisément,

BIMADS est appliqué au problème R^2 exprimé sous forme de minimisation :

$$R^2 : \min_{\theta \in \Omega_\theta} \begin{cases} -f_m(\theta) = - \sum_{i=1}^n (\bar{R}_i - r) \sum_{l=1}^n P_{il}^{-1} \left[\prod_{w=1}^{n-l} \sin \theta_w \cos \theta_{n-l+1} + \prod_{w=1}^{n-1} \sin \theta_w \right] \\ -f_s(\theta) = - \sum_{i,j,k=1}^n s_{ijk} \prod_{t=i,j,k} \sum_{l=1}^n P_{tl}^{-1} \left[\prod_{w=1}^{n-l} \sin \theta_w \cos \theta_{n-l+1} + \prod_{w=1}^{n-1} \sin \theta_w \right] \end{cases}$$

où $\Omega_\theta = \{\theta \in \mathbb{R}^{n-1} : 0 \leq \theta_i \leq 2\pi \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n-1\}$ et $P \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ satisfait la condition (3.1). BIMADS n'est pas sensible à la structure complexe des fonctions objectifs puisqu'il est conçu pour les problèmes de type boîte noire.

La section est organisée comme suit. Notre approche est testée sur le problème test de Lai à la section 3.3.1. Quelques résultats sur les problèmes à investissement risqué unitaire sont présentés à la section 3.3.2.

3.3.1 Résultats numériques du problème test de Lai

Notre approche est testée sur l'exemple présenté par Lai [58]. Dans cet exemple, cinq actifs risqués et un actif sans risque sont utilisés. Les données historiques (fournies par the Wall Street Journal et CRSP de janvier 1985 à décembre 1986) sont utilisées pour estimer le rendement attendu \bar{R}_i de l'actif risqué, la covariance σ_{ij} et le moment central s_{ijk} pour $i, j, k = 1, 2, \dots, 5$. La programmation polynomiale par but proposée par Lai [58] pour résoudre L^2 génère 6 solutions avec 6 combinaisons différentes de préférences.

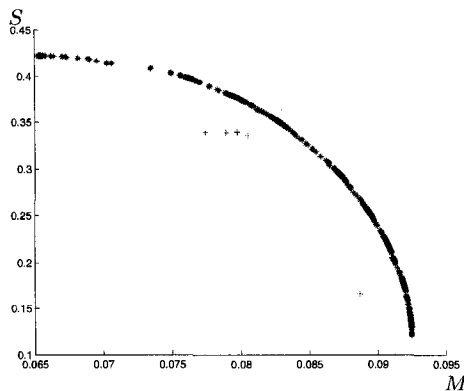
Nos résultats numériques illustrent deux scénarios de l'algorithme BIMADS pour

résoudre le problème biobjectif R^2 . Le premier fait appel à 10 itérations majeures de l'algorithme MADS appliqué sur la formulation normalisée mono-objectif. Le second scénario fait appel à 30 itérations majeures.

Les expériences sont réalisées sur un ordinateur POWERPC G4 1.33 GHz sous MAC OS X version 10.4. L'application de BiMADS avec 10 et 30 itérations majeures de MADS nécessite, respectivement 2.94 sec et 13.69 sec de temps CPU. Les résultats dans l'espace des objectifs : moyenne-asymétrie obtenus en appliquant BiMADS sont illustrés à la figure 3.2. Le symbole “*” représente un portefeuille optimal trouvé par BiMADS et le symbole “+” représente un portefeuille optimal trouvé par Lai [58]. Les portefeuilles optimaux générés par BiMADS avec 10 et 30 itérations majeures de MADS dominent clairement les six portefeuilles générés par l'approche de Lai (les six solutions sont représentées par des croix au-dessous de la courbe en noir, et deux des six solutions se superposent).

Le tableau 3.1 présente six portefeuilles optimaux produits par BiMADS. Le rendement moyen maximal est atteint par le premier portefeuille trouvé par BiMADS et la valeur maximale de l'asymétrie est atteinte par le sixième portefeuille B_6 trouvé BiMADS. À part le premier portefeuille, tous les portefeuilles trouvés par Lai sont dominés par B_4 et B_5 . Alors que le premier portefeuille trouvé par Lai est dominé par B_2 et B_3 . En outre, contrairement aux solutions proposées par Lai [58], celles générées par notre approche satisfont exactement la condition de variance unitaire. Les variances des solutions proposées par Lai varient entre 1.0163 et 1.0229.

BIMADS avec 10 itérations majeures de MADS



BIMADS avec 30 itérations majeures de MADS

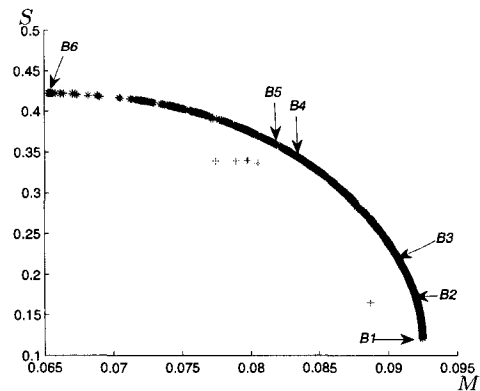


Figure 3.2 – portefeuilles optimaux : BIMADS avec 10 et 30 itérations majeures de MADS

Tableau 3.1 – Portefeuilles optimaux du problème L^2

BIMADS						
portefeuille	$B1$	$B2$	$B3$	$B4$	$B5$	$B6$
\hat{x}_1	0.9872	0.8528	0.7308	0.2382	0.04696	-0.4597
\hat{x}_2	-0.6023	-0.6942	-0.7001	-0.4977	-0.10715	-0.0782
\hat{x}_3	1.4598	1.5750	1.6410	1.7790	0.35220	1.7836
\hat{x}_4	0.9682	0.7320	0.5334	-0.1946	-0.04341	-1.1459
\hat{x}_5	2.0365	2.5015	2.8261	3.7245	0.75139	4.4473
M	0.0924	0.0918	0.0907	0.0832	0.0825	0.0652
V	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
S	0.1214	0.1765	0.2184	0.3457	0.3524	0.4222
Programmation polynomiale par but de Lai						
portefeuille	$L1$	$L2$	$L3$	$L4$	$L5$	$L6$
\hat{x}_1	1.0449	0.5532	0.5294	0.4856	0.4482	0.5822
\hat{x}_2	0.2420	-0.6386	-0.5827	-0.4376	-0.4478	-0.6657
\hat{x}_3	0.5632	1.1339	0.8741	1.0458	1.0475	1.0317
\hat{x}_4	0.6909	0.1340	0.2186	0.1044	0.1042	0.1276
\hat{x}_5	2.8271	3.8675	3.9662	3.9029	3.9041	3.9254
M	0.0887	0.0805	0.0774	0.0797	0.0797	0.0789
V	1.0229	1.0198	1.0210	1.0181	1.0178	1.0163
S	0.1654	0.3358	0.3390	0.3392	0.3394	0.3388

Sans surprise, les résultats illustrent que la densité des points non-dominés augmente avec le nombre de itérations majeures de MADS. Les meilleurs résultats sont obtenus en utilisant BIMADS avec 30 itérations majeures de MADS qui génère un ensemble de 4491 portefeuilles optimaux. Néanmoins, la densité des solutions décroît en diminuant le rendement moyen. Ceci peut s'expliquer par le fait que le premier objectif $f_m(\theta)$ dans R^2 est non linéaire. En effet, tel qu'indiqué dans chapitre 2, Deb [34] montre qu'un biais autour de certaines valeurs de l'objectif peut être créé en choisissant une fonction non-linéaire pour f_m .

3.3.2 Problèmes à investissement risqué unitaire

Puisque la prise de décision quant au choix du portefeuille concerne le pourcentage relatif investi pour chaque actif risqué [58], nous considérons le problème de sélection de portefeuille sous contrainte d'investissement unitaire :

$$R_1^3 : \max_{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1} \left\{ \begin{array}{l} M(x) = x^T(\bar{R} - r), \\ - V(x) = -x^T V x, \\ S(x) = \sum_{i,j,k=1}^n \frac{s_{ijk} x_i x_j x_k}{(x^T V x)^{\frac{3}{2}}}. \end{array} \right.$$

Tel que suggéré par [58], afin de générer des portefeuilles optimaux de R_1^3 , les solutions de L^2 sont mises à l'échelle de sorte que l'investissement total est égal à un. Soit $\bar{x} = \hat{x} / \sum_{i=1}^5 \hat{x}_i$, le portefeuille obtenu de \hat{x} après la mise à l'échelle, où \hat{x} est une solu-

tion optimale pour L^2 . La valeur \bar{x}_i représente le pourcentage investi à l'actif i dans le portefeuille optimal \hat{x} pour $i = 1, 2, \dots, 5$. Ainsi, \bar{x} est réalisable pour R_1^3 .

Nous avons ensuite calculé M , V et S pour l'ensemble de tous les points mis à l'échelle produits par l'application de BIMADS au problème décrit à la section précédente. La figure 3.3 montre la valeur de ces fonctions en ces points mis à l'échelle (le nuage gris sur la figure) selon quatre perspectives différentes (M, V, S) , (M, V) , (M, S) et (V, S) . Les six points proposés par Lai sont représentés par le symbole "+". À titre comparatif, nous avons aussi sélectionné six points. Ceux-ci sont représentés par le symbole "o" et apparaissent au tableau 3.2 selon l'ordre décroissant de M . $\bar{B}1$, $\bar{B}5$ et $\bar{B}6$ sont ceux produits par BIMADS qui donnent les meilleurs valeurs de M , V et S respectivement. $\bar{B}2$ domine tous les points de Lai sauf $L1$. $\bar{B}3$ domine $L2$, $L5$ et $L6$. Finalement, $\bar{B}4$ domine $L3$, $L4$, $L5$ et $L6$.

Notons finalement que la stratégie proposée par Lai [58] ne garantit pas l'optimalité des solutions suggérées. En effet, pour obtenir des portefeuilles optimaux, il faut résoudre le problème tri-objectif sous contrainte d'égalité R_1^3 . Néanmoins, nous avons utilisé la stratégie de Lai afin de comparer la performance de l'algorithme BIMADS par rapport à l'approche de programmation polynomial par but [58] sur un problème biobjectif.

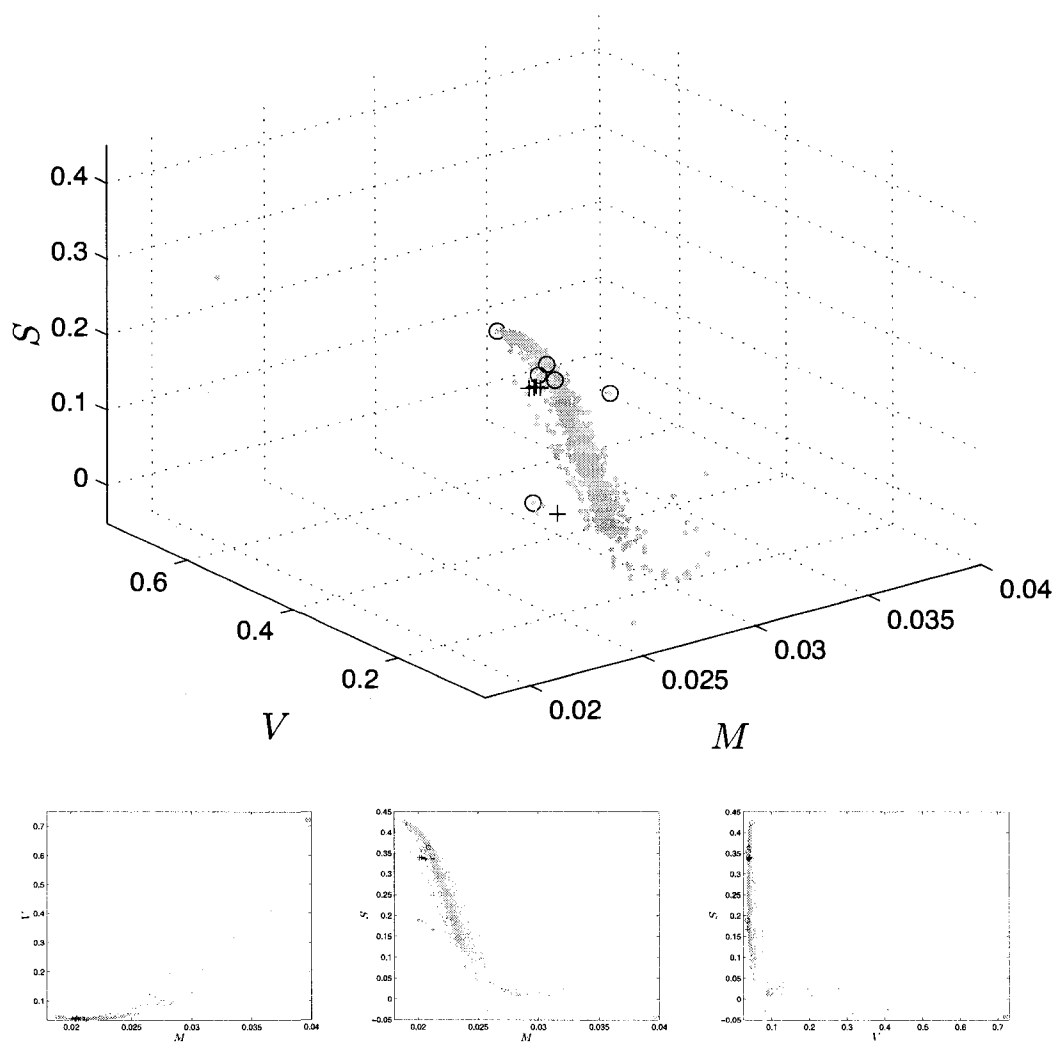


Figure 3.3 – portefeuilles optimaux à investissement unitaire : BIMADS avec 30 itérations majeures de MADS

Tableau 3.2 – Portefeuilles optimaux à investissement unitaire

BIMADS						
portefeuille	$B1$	$B2$	$B3$	$B4$	$B5$	$B6$
\bar{x}_1	.36538	.05791	.03811	.07417	.20386	-.10123
\bar{x}_2	.87347	-.11334	-.10853	-.03959	.17838	-.01752
\bar{x}_3	.74568	.34835	.34946	.27587	.11250	.39245
\bar{x}_4	1.0751	-.02666	-.05288	-.06945	-.10927	-.25190
\bar{x}_5	-2.05964	.73374	.77384	.75900	.61453	.97821
M	.03974	.02123	.02088	.02045	.02016	.01888
V	.72043	.03931	.03999	.03766	.03528	.04838
S	-.04172	.34158	.36471	.35502	.18851	.422262
L'approche de Lai						
portefeuille	$L1$	$L2$	$L3$	$L4$	$L5$	$L6$
\bar{x}_1	.19464	.10955	.09520	.09581	.11641	.10577
\bar{x}_2	.04509	-.12646	-.08580	-.08788	-.13311	-.11642
\bar{x}_3	.10492	.22454	.20502	.20544	.20629	.17463
\bar{x}_4	.12871	.02654	.02047	.02045	.02551	.04368
\bar{x}_5	.52664	.76583	.76512	.76608	.78489	.79234
M	.02124	.02060	.02030	.02030	.02042	.02011
V	.03549	.03999	.03913	.03919	.04063	.04075
S	.16602	.33639	.33981	.33901	.33945	.33918

3.4 Discussion

Une reformulation biobjectif R^2 avec contraintes de bornes est proposée pour la sélection de portefeuille avec asymétrie. Nous prouvons que tous portefeuilles optimaux pour le problème tri-objectif L^3 peuvent-être obtenus en résolvant R^2 . La reformulation R^2 n'inclut aucune contrainte d'égalité. Ensuite, l'algorithme BIMADS est appliqué à la reformulation biobjectif R^2 sous contraintes de bornes. Testé sur le problème de Lai, BIMADS génère un large ensemble de portefeuilles optimaux. Notre approche est indépendante des préférences subjectives et relatives de l'investisseur. En effet, modéliser ces préférences peut-être à la fois difficile et biaisé. Connaissant la frontière efficiente, l'investisseur choisit a posteriori la solution qui lui est appropriée.

CHAPITRE 4

ALGORITHME DE RÉOLUTION POUR LA PROGRAMMATION MULTIOBJECTIF

Au chapitre 2, nous avons présenté un algorithme pour résoudre le problème biobjectif sous contraintes de bornes. Faisant appel à MADS pour résoudre les formulations mono-objectifs, l'algorithme permet également de traiter les contraintes générales. Dans ce chapitre, nous proposons un algorithme pour le problème multiobjectif sous contraintes générales. Rappelons que le modèle mathématique est formulé comme suit :

$$MOP : \min_{x \in \Omega} F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))$$

avec

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \{\mathbb{R} \cup \{+\infty\}\}^p \text{ et } \Omega \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}^n,$$

où n est le nombre de variables et p est le nombre de fonctions objectifs. L'ensemble Ω est typiquement défini par des contraintes de type boîte noire, tel qu'un code informatique qui retourne une réponse binaire (oui ou non) indiquant si un point d'essai est réalisable. Le présent chapitre est organisé comme suit. L'algorithme MULTIMADS est décrit à la section 4.1. MULTIMADS combine certaines techniques utilisées dans NBI et BIMADS présentés aux chapitres 1 et 2. En particulier, MULTIMADS étend le concept

de formulation mono-objectif proposé dans le chapitre 2. À la section 4.2, MULTIMADS est testé sur des problèmes de la littérature avec différentes complexités conçues pour illustrer les difficultés qui peuvent être rencontrées dans les problèmes réels [35]. Les problèmes tests comportent un plus grand nombre de variables que ceux traités dans le chapitre 2. Finalement, nous proposons à la section 4.3 d'appliquer l'algorithme MULTIMADS sur un problème concret issu du génie chimique.

4.1 L'algorithme MULTIMADS pour l'optimisation multiobjectif

La propriété d'ordre permettant d'ordonner les points Pareto dans *BOP* est exploitée par BIMADS afin de définir les points de référence. À défaut de cette propriété, cette stratégie ne peut être utilisée dans *MOP*. Ainsi, nous proposons dans cette section une autre définition du point de référence à partir d'un simplexe substituant l'Enveloppe Convexe des Minima Individuels (*CHIM*). Cette section est organisée comme suit. Dans la section 4.1.1, une nouvelle formulation mono-objectif est proposée et le schéma général de MULTIMADS est présenté à la section 4.1.2.

4.1.1 Une formulation alternative pour la programmation multiobjectif

Soit $r \in \mathbb{R}^p$ un point de référence dans l'espace des objectifs, Z la zone de dominance relative à r et $\partial F(Z)$ la frontière de Z . La condition d'optimalité caractérisant la formulation différentiable \tilde{R}_r présentée dans le chapitre 1 restreint le choix de r . La

condition implique que la zone de dominance relative à r est non-vide. C'est pourquoi, à chaque itération de l'algorithme BIMADS, l'ordre des points non-dominés est utilisé pour identifier le point de référence dont la zone de dominance est non-vide. La relation d'ordre étant absente lorsque le nombre d'objectifs p est supérieur à deux, nous proposons dans cette section une formulation alternative plus flexible pour le choix du point de référence. La *formulation distance mono-objectif* est définie comme suit :

$$\bar{R}_r : \min_{x \in \Omega} \bar{\psi}_r \quad \text{avec} \quad \bar{\psi}_r(x) = \bar{\phi}_r(F(x)) = \begin{cases} -dist^2(\partial F(Z), F(x)), & \text{si } x \in Z \\ dist^2(\partial F(Z), F(x)), & \text{sinon} \end{cases}$$

où $dist(\partial F(Z), F(x))$ représente la distance séparant $F(x)$ de $\partial F(Z)$. La *formulation mono-objectif normalisée* \hat{R}_r [19], présentée au chapitre 1.4 est une instance de \bar{R}_r utilisant la norme infinie. Les courbes de niveau de la formulation \bar{R}_r utilisant différentes normes pour un problème biobjectif sont présentées par des courbes fines dans la figure 4.1. Les normes utilisées dans \bar{R}_r sont la norme infinie L_∞ , la norme euclidienne L_2 et la norme 1 L_1 .

Le théorème suivant montre que \bar{R}_r est une formulation mono-objectif de MOP.

Théorème 4.1.1 \bar{R}_r est une formulation mono-objectif en r de MOP selon la définition 1.4.1.

Démonstration: Soit $u, v \in \Omega$. Si $u \preceq v$ (u domine faiblement v) alors $\bar{\psi}_r(u) \leq \bar{\psi}_r(v)$.

Supposons que F est Lipschitz au voisinage de $x \in \Omega$. Il s'ensuit de [25],[Proposition

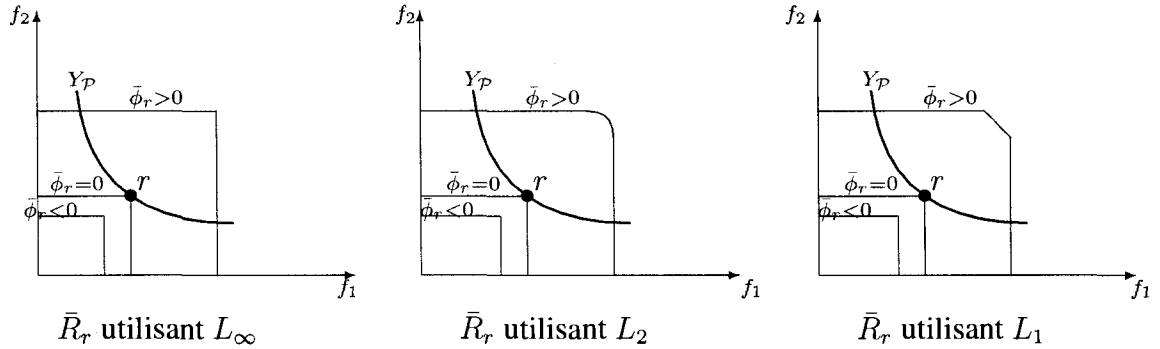


Figure 4.1 – Courbes de niveau dans l'espace des objectifs de la formulation distance mono-objectif \bar{R}_r pour un problème d'optimisation biobjectif utilisant les normes L_1 , L_2 et L_∞

2.4.1] que $\bar{\psi}_r$ est Lipschitz au voisinage de x . Soit $\tilde{x} \in D$. Peu importe la norme utilisée, nous avons :

$$\bar{\psi}_r(x) = \bar{\phi}_r(F(x)) = -\|F(D), F(x)\|_\infty^2.$$

La troisième condition de la définition 1.4.1 découle directement de [25],[Proposition 2.3.12]. ■

La formulation \bar{R}_r généralise \hat{R}_r , tout en fournissant une condition d'optimalité plus flexible tel qu'illustré dans la Proposition 4.1.2. En effet, la solution optimale n'est pas restreinte à avoir une valeur non-négative. Par conséquent, le point de référence peut-être choisi n'importe où dans l'espace des objectifs.

Proposition 4.1.2 *Si \tilde{x} est l'unique solution optimale de \bar{R}_r en un point de référence $r \in \mathbb{R}^p$, alors \tilde{x} est Pareto optimale pour MOP.*

Démonstration: Soit \tilde{x} l'unique solution optimale de \bar{R}_r et $x \in X$, $x \neq \tilde{x}$. Alors $\bar{\psi}(\tilde{x}) < \bar{\psi}(x)$ et conséquemment, il existe un certain indice $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ pour lequel $f_j(\tilde{x}) < f_j(x)$ et par la suite x ne domine pas \tilde{x} . On en déduit que \tilde{x} est Pareto optimale. ■

4.1.2 L'algorithme MULTIMADS

MULTIMADS est un algorithme itératif qui construit une série de points faisant l'approximation de l'ensemble Pareto optimale X_P . MULTIMADS diffère de BIMADS quant au choix des points de référence. En effet, BIMADS s'appuie sur la relation qui caractérise le problème biobjectif pour choisir un point de référence à partir de différent points non-dominés consécutifs. Le choix du point de référence permet de combler le plus grand écart entre les points non-dominés.

À défaut de la relation d'ordre, nous proposons une autre stratégie pour le choix des points de référence à partir d'un simplexe semblable au *CHIM* [32]. Contrairement à l'algorithme BIMADS, le choix des points de référence dans l'algorithme MULTIMADS est bien connu une fois le simplexe construit. Ainsi, le choix des points de référence ne dépend pas de l'évolution de l'algorithme et par la suite de la qualité de la distribution des points non-dominés à chaque itération.

À la première itération, le point idéal ℓ est défini en résolvant les p problèmes mono-objectifs : $\min_{x \in \Omega} f_i(x)$ pour $i = 1, 2, \dots, p$. Ensuite, l'algorithme définit un simplexe

alternatif au *CHIM*. Deux stratégies sont considérées en concevant ce simplexe. La première stratégie consiste à s'assurer qu'il soit près du front Pareto. Pour ce faire, le simplexe est construit à partir de l'hyperplan H tangent au front Pareto. Une manière simple pour définir H consiste à minimiser $z = \sum_{i=1}^p s_i f_i(x)$ avec $x \in \Omega$ et s_i un facteur de mise à l'échelle non-négatif pour $i = 1, \dots, p$. Soit z^* la valeur optimale de z , alors H est l'ensemble $\{y \in \mathbb{R}^p : \sum_{i=1}^p y_i = z^*\}$. La seconde stratégie consiste à choisir p sommets distants pour définir un simplexe dans H afin de couvrir entièrement le front Pareto. Les sommets du simplexe peuvent-être obtenus par application des p projections émanantes du point idéal sur H et parallèlement aux axes de coordonnées dans l'espace des objectifs. Ainsi, les composantes des sommets du simplexe sont simplement les colonnes de la matrice : $z^* I_p$, où I_p est la matrice identité $p \times p$.

De manière équivalente au *CHIM* [32], nous définissons le *simplexe tangent (TS)* comme suit :

Définition 4.1.1 Soit z^* la valeur optimale de $z = \sum_{i=1}^p f_i(x)$. Soit l'ensemble $B = \{\beta \in \mathbb{R}^p : \sum_{i=1}^p \beta_i = 1, \beta_i \geq 0\}$. Alors, l'ensemble $\{z^* \beta I_p : \beta \in B\}$, où I_p désigne la matrice identité $p \times p$ est référé comme étant le *Simplexe Tangent (TS)*.

Le *TS* est représenté par une ligne pointillé, dans la figure 4.2 pour un problème biobjectif. L'avantage de *TS* par rapport au *CHIM* consiste dans le fait que les sommets *TS* sont différents alors que ceux de *CHIM* peuvent coïncider, ce qui limite l'ensemble des points non-dominés couverts par l'algorithme.

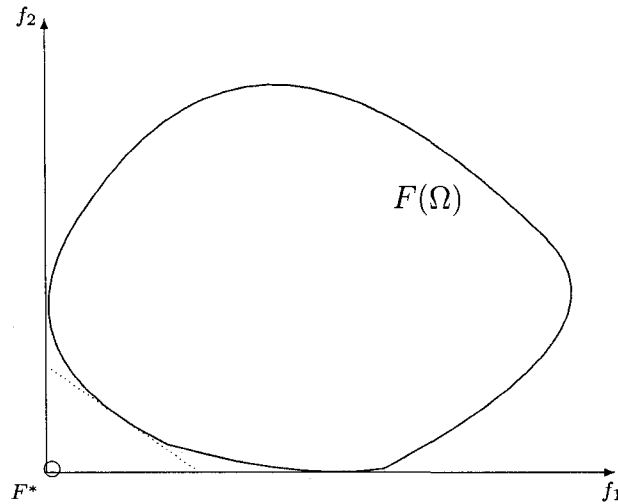


Figure 4.2 – Le *TS* pour un problème biobjectif

Chaque itération de MULTIMADS comprend deux étapes. À la première, un vecteur de combinaison convexe $\beta \in B$ est généré pour choisir un point de référence r du *TS*. Nous utilisons la stratégie présentée dans le chapitre 1 pour générer un ensemble uniformément réparti de vecteurs de combinaison convexe $\beta \in B$ avec un pas fixe [32]. La seconde étape consiste à résoudre la formulation mono-objectif R_r défini selon r . Finalement, une liste $X_{\mathcal{L}}$ de points non-dominés est obtenue à partir de l'ensemble de tous les points d'essai du treillis générés par MADS dans les étapes précédentes. Le schéma de MULTIMADS est présenté à la figure 4.3.

INITIALISATION :

- Appliquer l’algorithme MADS en utilisant l’hypercube latin pour initialiser la recherche afin de résoudre $\min_{x \in \Omega} f_i(x)$ pour $i = 1, 2, \dots, p$. Soit x_i^* la solution optimale trouvée par MADS et soit $\ell \in \mathbb{R}^p$ le point idéal tel que $\ell = F(x_i^*)$ pour $i = 1, 2, \dots, n$.
- Appliquer l’algorithme MADS utilisant l’hypercube latin pour initialiser la recherche afin de résoudre $z = \min_{x \in \Omega} \sum_{i=1}^p s_i f_i(x)$ avec s_i un facteur de mise à l’échelle non-négatif pour $i = 1, \dots, p$. Soit z^* la valeur optimale de z .

ITÉRATIONS PRINCIPALES : Répéter

- Générer un vecteur de combinaison convexe $\beta \in \mathbb{R}_+^p$ tel que $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$ selon la stratégie proposée dans [32].
- Considérer le point de référence $r = z^* \beta I_p$
- Appliquer l’algorithme MADS pour résoudre la formulation distance mono-objectif \bar{R}_r à partir du meilleur point trouvé à date pour \bar{R}_r .

MISE À JOUR DES POINTS NON-DOMINÉS :

Soit $X_{\mathcal{L}}$ l’ensemble de tous les points non-dominés générés par MADS dans les itérations précédentes.

Figure 4.3 – Schéma de l’algorithme MULTIMADS pour la programmation multiobjectif

4.1.3 Analyse de convergence

Tel que mentionné au chapitre 1, l'analyse de convergence de l'algorithme MADS dépend de certaines conditions assurées par l'implémentation LTMADS [13]. Comme pour l'algorithme BIMADS, nous supposons que les formulations mono-objectifs sont résolus en utilisant LTMADS. Nous émettons également, les mêmes hypothèses standard énoncées au chapitre 2 concernant l'optimisation en boîtes noires en supposant que tous les points d'essai générés par l'algorithme appartiennent à un ensemble borné. Le théorème suivant montre que MULTIMADS produit des points satisfaisant les conditions nécessaires pour l'optimisation multiobjectif [29]. Nous notons par R_r une formulation mono-objectif de MOP en un point de référence $r \in \mathbb{R}^p$, telle que définie dans la définition 1.4.1.

Théorème 4.1.3 *Supposons que f_i pour $i = 1, 2, \dots, p$ est Lipschitz au voisinage d'un point limite $\hat{x} \in \Omega$ généré par LTMADS appliqué à une formulation distance mono-objectif \bar{R}_r de MOP en un point de référence $r \in \mathbb{R}^p$. Nous supposons que le cône hyper-tangent en \hat{x} est non-vide, alors*

$$\text{pour tout } d \in T_{\Omega}^{Cl}(\hat{x}), \text{ il existe } j \in \{1, 2, \dots, p\} \text{ tel que } f_j^{\circ}(\hat{x}; d) \geq 0,$$

où $T_{\Omega}^{Cl}(\hat{x})$ est le cône tangent de Clarke en \hat{x} .

Démonstration: La solution \hat{x} produite par MADS est un point stationnaire de \bar{R}_r sur Ω [13], c'est-à-dire, pour tout $d \in T_{\Omega}^{Cl}(\hat{x})$, $\bar{R}_r^{\circ}(\hat{x}, d) \geq 0$. La deuxième condition de la définition de la formulation mono-objectif 1.4.1 assure que pour tout $d \in T_{\Omega}^{Cl}(\hat{x})$, il existe un indice $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ pour lequel $f_j^{\circ}(\hat{x}; d) \geq 0$. ■

Un corollaire à ce résultat est obtenu lorsque f_i sont strictement différentiables en \hat{x} pour $i = 1, 2, \dots, p$.

Corollaire 4.1.4 *Supposons que f_1, f_2, \dots, f_p et ψ_r sont strictement différentiables en un point limite $\hat{x} \in \Omega$ généré par LTMADS appliqué à une formulation mono-objectif \bar{R}_r de MOP en un point de référence $r \in \mathbb{R}^p$. Nous supposons que le cône hyper-tangent en \hat{x} est non-vide, alors \hat{x} est une solution KKT-proprement efficiente de MOP :*

$$\text{pour tout } d \in T_{\Omega}^{Cl}(\hat{x}), \text{ il existe } j \in \{1, 2, \dots, p\} \text{ tel que } \nabla f_j(\hat{x})^T d \geq 0,$$

où $T_{\Omega}^{Cl}(\hat{x})$ est cône tangent de Clarke en \hat{x} .

Démonstration: Soit $d \in T_{\Omega}^{Cl}(\hat{x})$. Selon [13], \hat{x} un point stationnaire de \bar{R}_r sur Ω . Ainsi, $\nabla \psi_r(\hat{x})^T d \geq 0$. La contraposée du Théorème 1.4.1 assure qu'il existe $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ tel que $\nabla f_j(\hat{x})^T d \geq 0$. ■

4.2 Résultats numériques sur les problèmes tests

La performance de MULTIMADS est évaluée en utilisant les problèmes tests de Deb et al. [35]. La simplicité de construction, l'extensibilité quant aux nombres de variables et d'objectifs, la connaissance a priori du front Pareto et la possibilité d'introduire diverses complexités pouvant être présentes dans les problèmes réels sont les principales caractéristiques de cette série de tests. En effet, ces problèmes testent la capacité d'un algorithme à surmonter les différents aspects du front Pareto en introduisant des difficultés spécifiques en ce qui concerne la convergence et la répartition des solutions optimales.

Nous testons la performance de MULTIMADS sur trois problèmes non contraints et un problème contraint possédant des fronts Pareto d'aspect différent : un hyperplan, un octant de sphère et une courbe. Par souci de clarté, nous illustrons notre approche en utilisant trois fonctions objectifs. Le nombre de variables de décision est fixé à 12. Ce nombre est relativement élevé en comparaison aux problèmes résolus dans [19] et présentés au chapitre 2. La taille du treillis initial est fixé à 0.1. Pour tous les problèmes tests, MULTIMADS génère 28 formulations distance mono-objectifs, et par conséquent fait 28 appels à MADS. Chaque itération de MADS se termine après 1000 évaluations. Tandis que, 2000 évaluations de MADS sont utilisées pour résoudre $z = \min_{x \in \Omega} \sum_{i=1}^p f_i(x)$ afin de construire le *TS*. Avec cette stratégie, MULTIMADS génère 30000 évaluations de la fonction objectif. Ce nombre est identique au nombre de solutions (individus) suggéré par Deb et al. [35].

Pour chaque problème test, une figure contenant douze graphes est présentée, trois graphes correspondent aux normes utilisées : la norme infinie L_∞ , la norme euclidienne L_2 et la norme 1 L_1 , et quatre graphes pour les différentes perspectives (f_1, f_2, f_3) , (f_1, f_2) , (f_1, f_3) et (f_2, f_3) . Chaque graphe représente les valeurs des fonctions objectifs en chaque point généré par MULTIMADS en utilisant le symbole ‘o’.

4.2.1 Un problème avec un front Pareto sous la forme d’un hyperplan

Le problème à front Pareto sous la forme d’un hyperplan est présenté comme suit :

$$HP : \min \begin{cases} f_1(x) = \frac{1}{2}x_1x_2(1 + g(x)) \\ f_2(x) = \frac{1}{2}x_1(1 - x_2)(1 + g(x)) \\ f_3(x) = \frac{1}{2}(1 - x_1)(1 + g(x)), \end{cases}$$

où $g(x) = 100[10 + \sum_{i=3}^{12}(x_i - 0.5)^2 - \cos(20\pi(x_i - 0.5))]$ et $0 \leq x_i \leq 1$ pour $i = 1, 2, \dots, 12$. L’ensemble Pareto optimal X_P correspond à $x_i = 0.5$, pour tout $i = 3, 4, \dots, 12$ et le front Pareto front appartient à l’hyperplan défini par : $\sum_{i=1}^3 y_i = 0.5$. La fonction multimodale g introduit une difficulté pour converger au front Pareto. Ainsi, l’espace de recherche contient $(11^{10} - 1)$ fronts localement Pareto-optimaux qui correspondent aux ensembles des points localement Pareto optimaux. Les résultats obtenus par application de MULTIMADS sont illustrés à la figure 4.4 selon quatre perspectives différentes. La figure montre que tous les points non-dominés Y_L trouvés par MULTI-

MADS sont au voisinage du front Pareto global Y_P . En outre, la figure suggère que pour chaque formulation, MULTIMADS génère des points non-dominés bien répartis couvrant l'ensemble du front Pareto global.

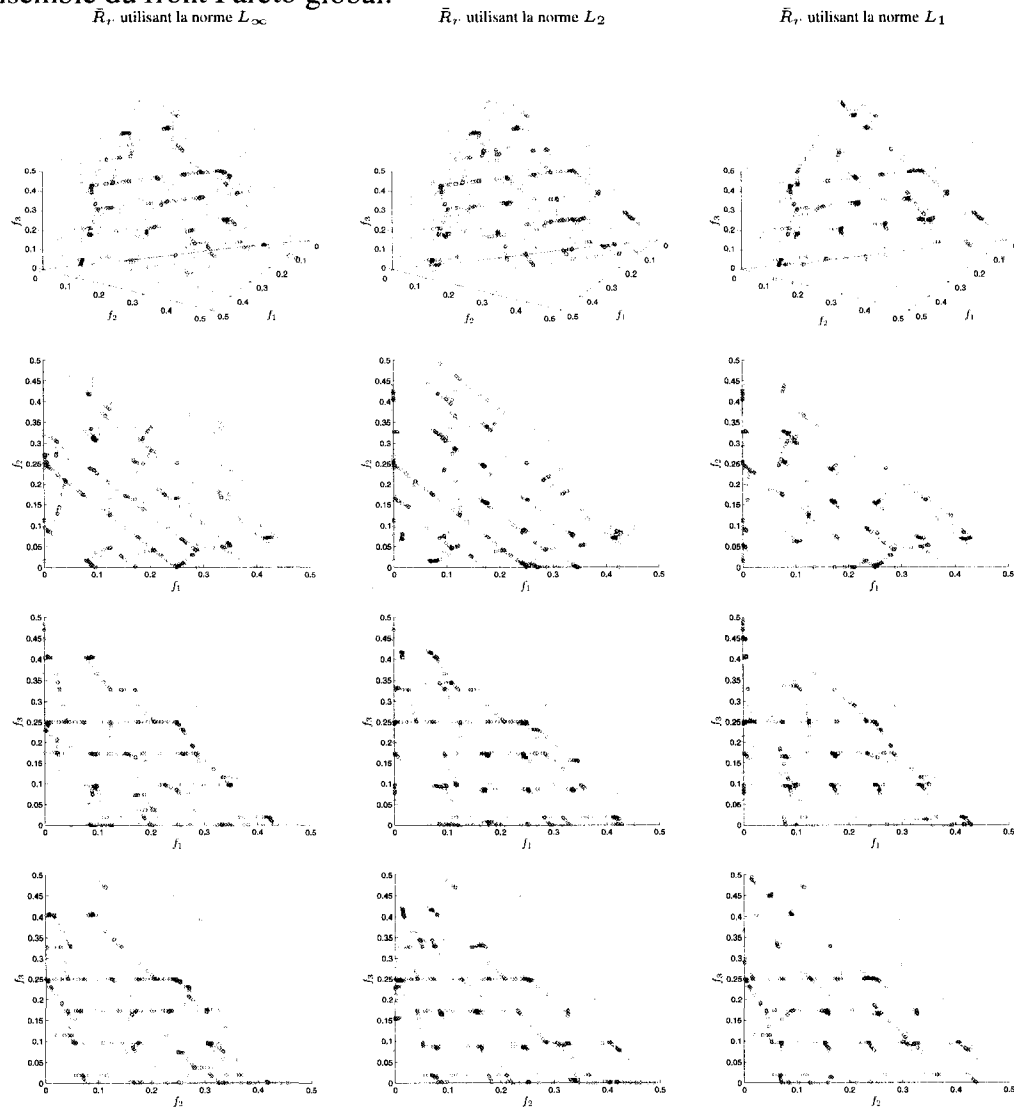


Figure 4.4 – Front Pareto sous la forme d'un hyperplan : MULTIMADS avec 30000 évaluations de MADS

4.2.2 Un problème avec un front Pareto sphérique

Le problème à front Pareto sphérique est présenté comme suit :

$$SP : \min \begin{cases} f_1(x) = \cos(x_1 \frac{\pi}{2}) \cos(x_2 \frac{\pi}{2})(1 + g(x)) \\ f_2(x) = \cos(x_1 \frac{\pi}{2}) \sin(x_2 \frac{\pi}{2})(1 + g(x)) \\ f_3(x) = \sin(x_1 \frac{\pi}{2})(1 + g(x)), \end{cases}$$

où $g(x) = 100[10 + \sum_{i=3}^{12} (x_i - 0.5)^2 - \cos(20\pi(x_i - 0.5))]$ et $0 \leq x_i \leq 1$ pour $i = 1, 2, \dots, 12$. L'ensemble Pareto optimal $X_{\mathcal{P}}$ correspond à $x_i = 0.5$ pour tout $i = 3, 4, \dots, 12$ et le front Pareto appartient au premier octant de la sphère unitaire : $\sum_{i=1}^3 y_i^2 = 1$. Comme dans le problème à front Pareto plan présenté dans la section 4.2.1, l'espace de recherche contient $(11^{10} - 1)$ fronts localement Pareto-optimaux, à cause de la fonction multimodale g . Les résultats obtenus par l'application de MULTIMADS sont illustrés à la figure 4.5 selon quatre différentes perspectives. Pour chaque formulation, MULTIMADS génère un large ensemble de points non-dominés bien répartis $Y_{\mathcal{L}}$ au voisinage du front Pareto global $Y_{\mathcal{P}}$.

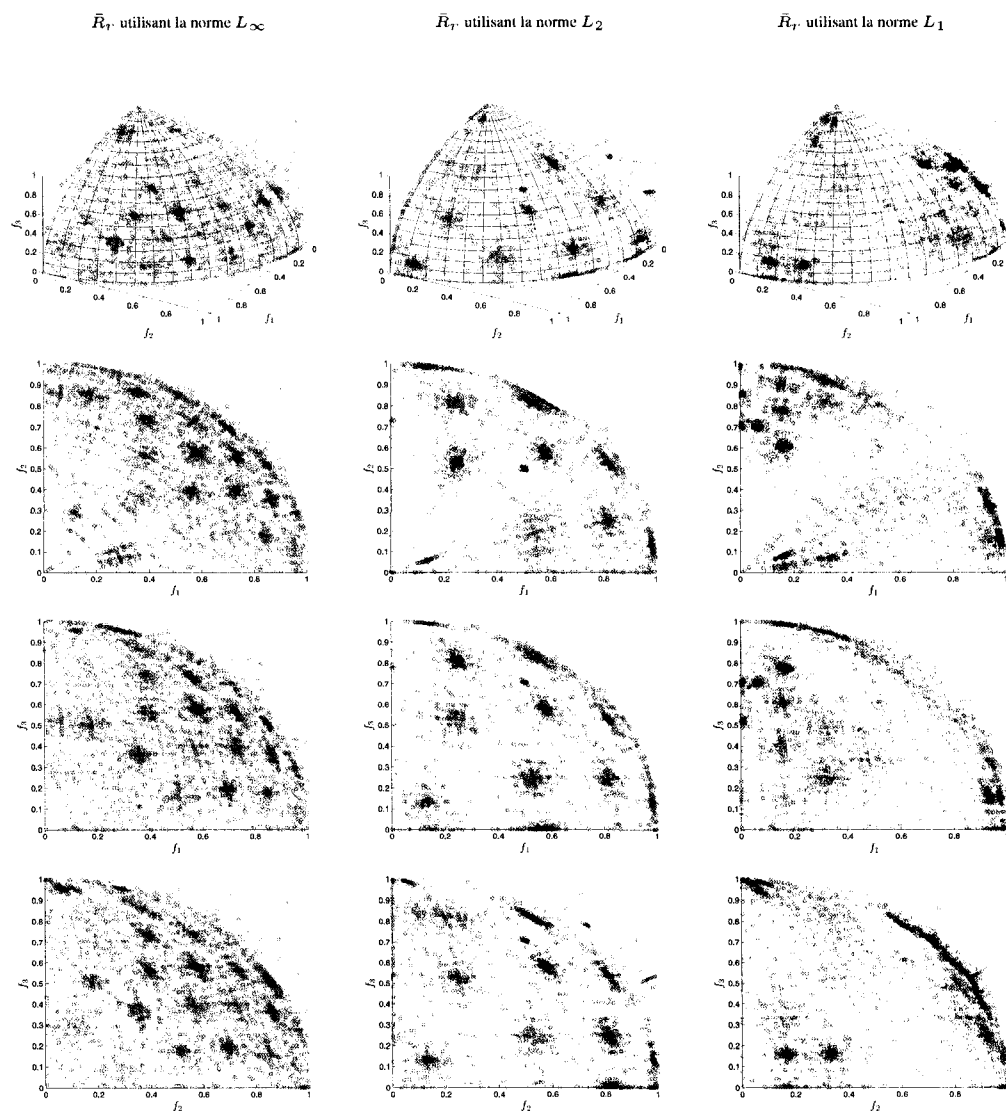


Figure 4.5 – Front Pareto sphérique : MULTIMADS avec 30000 évaluations de MADS

4.2.3 Un problème avec un front Pareto unidimensionnel

Le problème à front Pareto unidimensionnel est présenté comme suit :

$$UP : \min \begin{cases} f_1(x) = \cos(x_1 \frac{\pi}{2}) \cos(\frac{\pi}{4(1+g(x))}(1 + 2g(x)x_2))(1 + g(x)) \\ f_2(x) = \cos(x_1 \frac{\pi}{2}) \sin(\frac{\pi}{4(1+g(x))}(1 + 2g(x)x_2))(1 + g(x)) \\ f_3(x) = \sin(x_1 \frac{\pi}{2})(1 + g(x)), \end{cases}$$

où $g(x) = \sum_{i=3}^{12} (x_i - 0.5)^2$, $0 \leq x_i \leq 1$ pour $i = 1, 2, \dots, 12$, et $\theta_2 = \frac{\pi}{4(1+g(x))}(1 + 2g(x)x_2)$. L'ensemble Pareto optimal $X_{\mathcal{P}}$ correspond à $x_i = 0.5$ pour tout $i = 3, 4, \dots, 12$. Puisqu'il existe une seule variable indépendante décrivant $X_{\mathcal{P}}$, le front Pareto $Y_{\mathcal{P}}$ est une courbe appartenant à la sphère définie par : $\sum_{i=1}^3 y_i^2 = 1$. Le problème présente une manière simple pour vérifier l'exactitude des résultats générés par un algorithme quelconque. En effet, les graphiques à deux dimensions de $Y_{\mathcal{P}}$ dans l'espace f_3 d'une part et f_1 ou f_2 d'autre part sont des ellipses. Tandis que, le graphique $Y_{\mathcal{P}}$ dans l'espace f_1 et f_2 correspond à une droite. Les résultats obtenus par application MULTIMADS sont illustrés à la figure 4.6. La figure montre que tous les points non-dominés $Y_{\mathcal{L}}$ trouvés par MULTIMADS sont au voisinage du front Pareto global $Y_{\mathcal{P}}$. En outre, la figure suggère que pour toute formulation, MULTIMADS produit des points non-dominés bien répartis sur le front Pareto global.

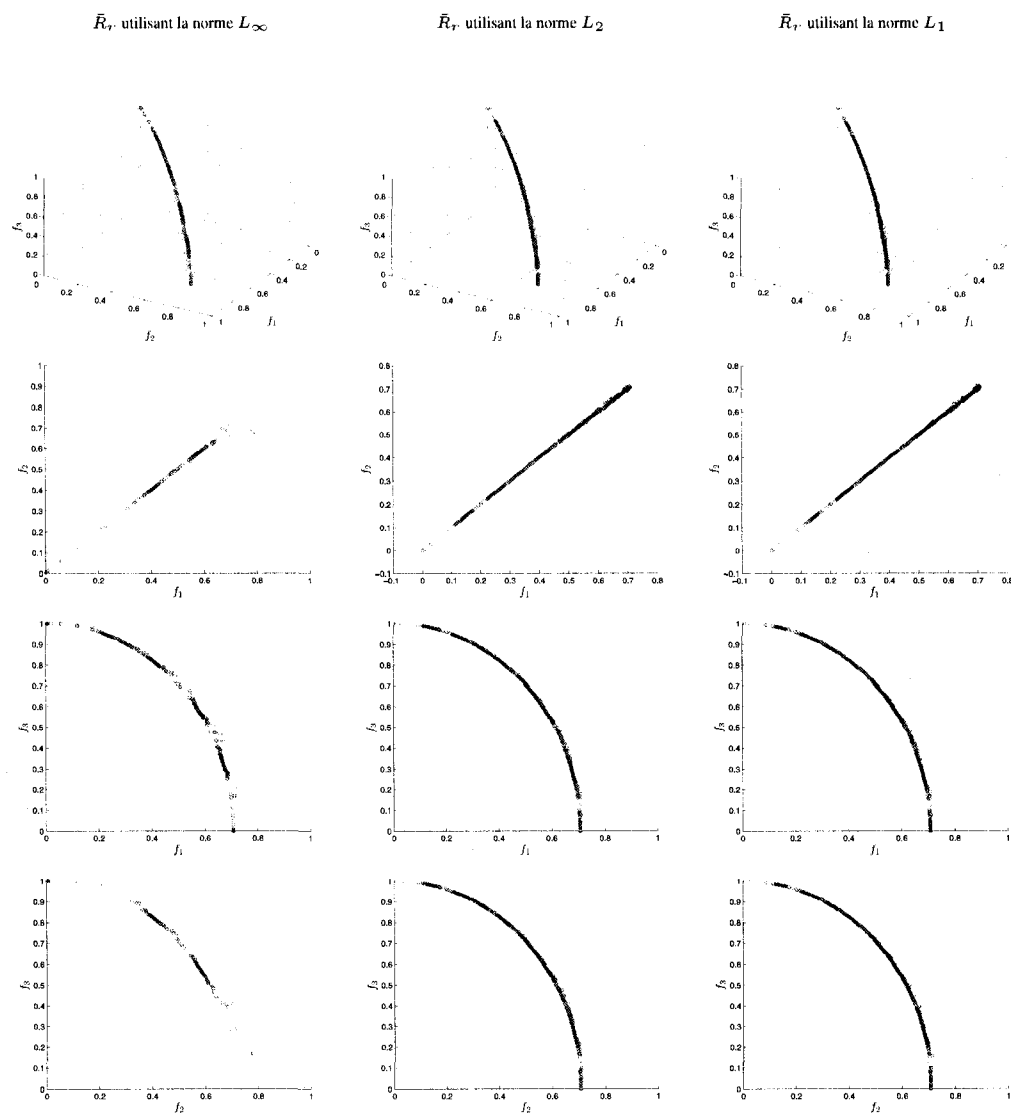


Figure 4.6 – Front Pareto unidimensionnel : MULTIMADS avec 30000 évaluations de MADS

4.2.4 Un problème d'optimisation contraint

Le problème contraint est présenté comme suit :

$$CSP : \min \begin{cases} f_1(x) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_i \\ f_2(x) = \frac{1}{4} \sum_{i=5}^8 x_i \\ f_3(x) = \frac{1}{4} \sum_{i=9}^{12} x_i, \end{cases}$$

$$\text{s.à.} \begin{cases} g_1(x) = f_3(x) - 4f_1(x) - 1 \geq 0 \\ g_2(x) = f_3(x) - 4f_1(x) - 1 \geq 0 \\ g_3(x) = 2f_3(x) + f_1(x) + f_2(x) - 1 \geq 0 \end{cases}$$

où $0 \leq x_i \leq 1$ pour $i = 1, 2, \dots, 12$. Trois contraintes linéaires sont présentes dans ce problème. Le front Pareto est la réunion d'un segment de droite et un hyperplan. La droite est l'intersection dans l'espace des objectifs des deux plans définis par les deux premières contraintes avec le plan défini par l'équation $f_1 = f_2$. Alors que l'hyperplan est défini par la contrainte g_3 . Il est difficile pour certaines méthodes d'approximation de trouver des solutions dans les deux régions tout assurant une bonne distribution des solutions non-dominées [35]. Les résultats obtenus par l'application de MULTIMADS sont illustrés dans la figure 4.7 selon quatre perspectives. MULTIMADS génère un ensemble bien réparti de solutions non-dominées $Y_{\mathcal{L}}$ au voisinage du front $Y_{\mathcal{P}}$. En outre, la figure suggère que $Y_{\mathcal{L}}$ couvre entièrement le front Pareto.

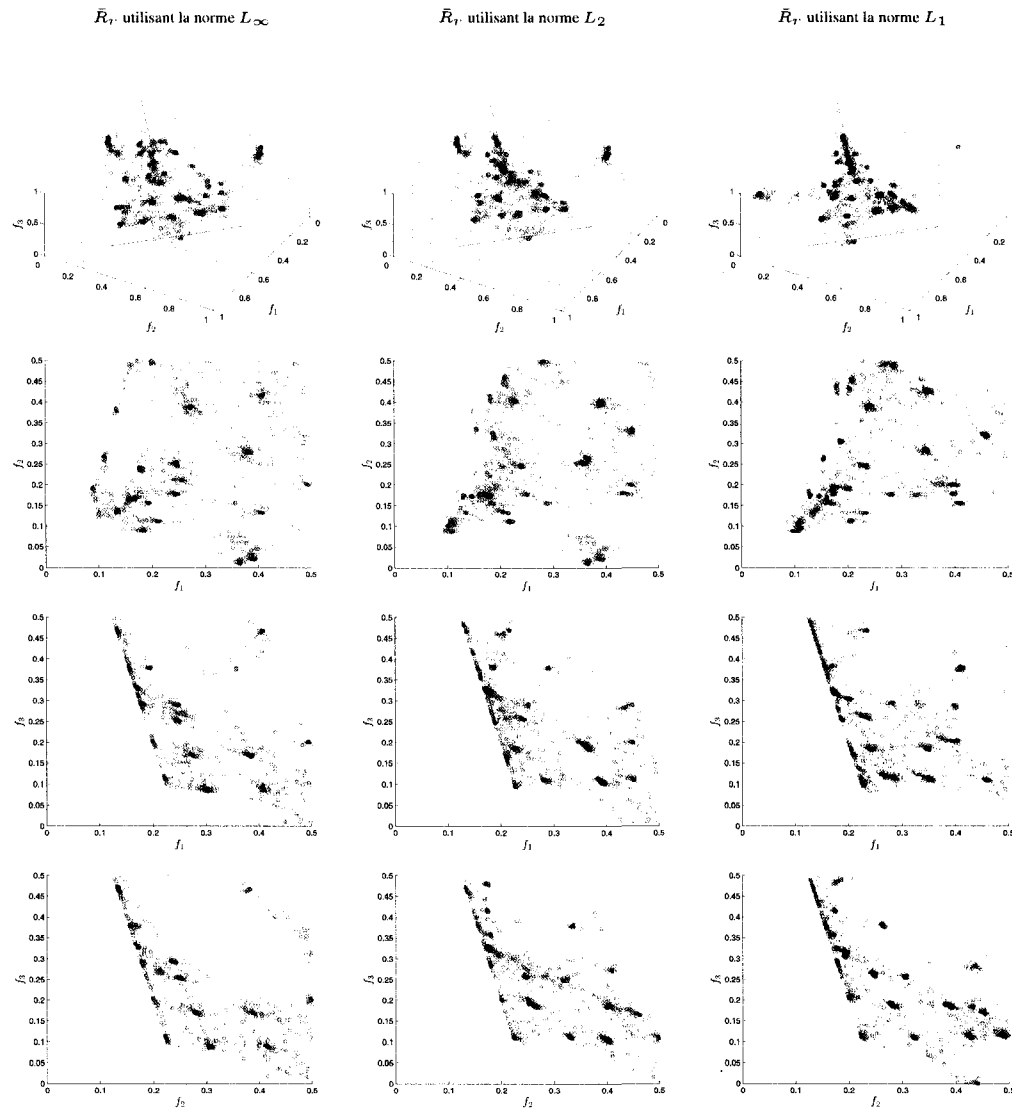


Figure 4.7 – Front Pareto d'un problème contraint : MULTIMADS avec 30000 évaluations de MADS

4.3 Un problème d'ingénierie multiobjectif : optimisation de la production du styrène

Nous considérons dans cette section le problème de production du styrène à partir d'un modèle de simulation présenté dans [9] et récemment analysé dans [3]. L'optimisation des procédés chimiques a déjà été étudiée dans [23, 48]. Le procédé tel que défini dans [9] est composé de quatre étapes : la préparation des réactifs (augmentation de la pression et évaporation), les réactions catalytiques [76], la récupération du styrène (première distillation) et finalement la récupération du benzène (deuxième distillation). Dans ce procédé, il faut tenir compte d'une étape importante concernant le recyclage de l'éthylbenzène inaltéré.

Audet et al. [9] définit un simulateur pour ce procédé en se basant sur le paradigme appelé Simulation Modulaire Séquentielle (SMS), largement utilisé pour modéliser les procédés chimiques [36, 73, 81]. Le simulateur subdivise le procédé en plusieurs blocs. La sortie de chaque bloc est entièrement déterminée par la valeur de son entrée. La difficulté majeure dans ce procédé correspond aux phases de recyclage qui implique que l'entrée des premiers blocs de simulation dépendent de la sortie des derniers. Le simulateur a été codé par Audet et al. [9] et constitue la boîte noire de notre algorithme MULTIMADS. Ce simulateur fournit à la fois les contraintes et les objectifs du problème en faisant appel à des méthodes d'analyse numérique. Par conséquent, le code définissant le domaine réalisable ainsi que les fonctions objectifs sont non-lisses.

Le tableau 4.1 présente les variables du problème et leurs bornes inférieures L et supérieures U . Les objectifs et les contraintes du problème sont donnés au tableau 4.2. Notons que toutes les variables sont intrinsèques au procédé et particulièrement aux blocs chimiques. Les contraintes et les objectifs dépendent des sorties du simulateur.

Tableau 4.1 – Les variables du problème du styrène

variable	unité	L	U
x_0	K	600	1,100
x_1	m	2	20
x_2	-	10^{-4}	0.1
x_3	-	10^{-4}	0.1
x_4	atm	2	20
x_5	-	0.01	0.5
x_6	-	0.1	5
x_7	K	300	500

Tableau 4.2 – Les objectifs et les contraintes du problème du styrène

Groupe de contraintes /objectifs	Description des contraintes et des objectifs
Objectif – f_1	maximiser la valeur actualisée nette du projet
Objectif – f_2	maximiser la pureté du styrène
Objectif – f_3	maximiser le taux de conversion de l'éthylbenzène en styrène
Contraintes du Procédé chimique	5 contraintes industrielles liées à la structure des blocs et aux exigences environnementales
Contraintes économiques	4 contraintes qui concernent le délai de récupération, le flux de trésorerie, l'investissement et les coûts

L'algorithme MULTIMADS est utilisé pour résoudre le problème tri-objectif de la production du styrène. Notons que dans [9] et [3], les objectifs f_2 et f_3 sont traités comme des contraintes en imposant des bornes supérieures. Nous utilisons les mêmes

paramètres algorithmiques présentés dans la section 4.2. Ainsi, la taille du treillis initial est fixé à 0.1. MULTIMADS génère 28 formulations distance mono-objectifs L_∞ et par conséquent fait 28 appels à MADS. Chaque itération de MADS se termine après 1000 évaluations. Tandis que, 2000 évaluations de MADS sont utilisées pour construire le *TS*. Avec cette stratégie, MULTIMADS génère 30000 évaluations de la fonction objectif. Les résultats sont illustrés à la figure 4.8 selon quatre perspectives. La figure 4.8 représente les 22 solutions Pareto optimales trouvées par MULTIMADS dans l'espace des objectifs. Ces résultats ainsi que la solution trouvée dans [9] utilisant plus que 10000 évaluations de MADS pour minimiser f_1 sont détaillées au tableau 4.3.

Notons que ces solutions peuvent être regroupés en deux sous-ensembles. Le premier sous-ensemble minimise l'objectif f_1 aux dépens de f_3 . Alors que, le deuxième sous-ensemble minimise l'objectif f_3 aux dépens de f_1 . La figure 4.8 montre un écart entre ces deux sous-ensembles, ce qui confirme que f_1 et f_3 sont bien contradictoires. C'est au décideur de choisir la solution qui lui convient en favorisant un objectif aux dépens de l'autre. La solution fournie par [9] est également non-dominée. En effet un grand nombre d'évaluations a été utilisé dépassant les 10000 évaluations pour minimiser uniquement f_1 . L'optimisation utilisée dans [9] incorpore la métaheuristique RVV [47] dans la phase de recherche de MULTIMADS. Elle fait également appel aux fonctions substitués [16]. Ceci explique que la valeur de la fonction objectif f_1 pour la solution proposée par [9] est légèrement meilleure que celles fournies par MULTIMADS. Par contre, les valeurs des fonctions f_2 et f_3 de la solution proposée par [9] dépassent les valeurs atteintes par

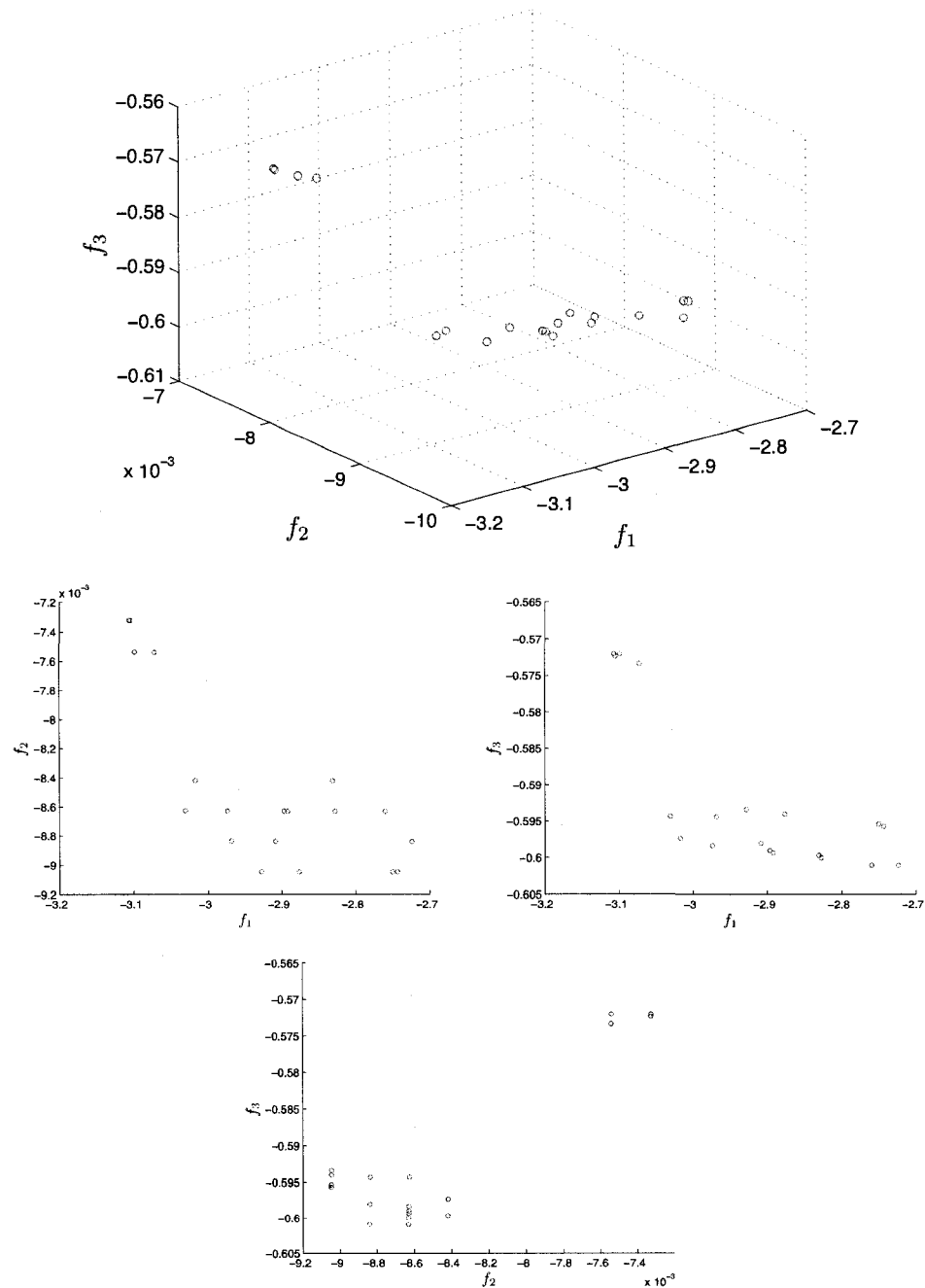


Figure 4.8 – Front Pareto du problème du styrène : MULTIMADS avec 30000 évaluations de MADS

Tableau 4.3 – Les solutions du problème du styrène

	f_1	f_2	f_3
Les solutions générées par MULTIMADS			
1	-2.72399	-0.00884075	-0.601
2	-2.7436	-0.00904706	-0.595667
3	-2.75015	-0.00904684	-0.595333
4	-2.75986	-0.00863101	-0.601
5	-2.82753	-0.00863009	-0.6
6	-2.83072	-0.00841996	-0.599667
7	-2.87616	-0.00904596	-0.594
8	-2.89155	-0.00862948	-0.599333
9	-2.89642	-0.00862917	-0.599
10	-2.90846	-0.00883838	-0.598
11	-2.92797	-0.00904552	-0.593333
12	-2.96815	-0.00883548	-0.594333
13	-2.97364	-0.00862856	-0.598333
14	-3.01728	-0.00841751	-0.597333
15	-3.03039	-0.00862487	-0.594333
16	-3.07219	-0.00753947	-0.573333
17	-3.09835	-0.0075373	-0.572
18	-3.1046	-0.00732483	-0.572333
19	-3.1046	-0.00732483	-0.572333
20	-3.1046	-0.00732483	-0.572333
21	-3.1046	-0.00732483	-0.572333
22	-3.10636	-0.00732425	-0.572
La solution fournie par [9]			
	-3.35391	-0.00670357	-0.580333

la plupart des solutions fournies par MULTIMADS.

4.4 Discussion

Nous proposons une nouvelle approche pour résoudre le problème multiobjectif contraint *MOP* assurant certaines conditions nécessaires d'optimalité de premier degré pour les fonctions non-lisses. Notre algorithme MULTIMADS combine certaines stratégies améliorées de la méthode NBI et celles de BIMADS. MULTIMADS est appliqué sur quatre problèmes de la littérature avec des aspects différents pour le front Pareto. La performance de l'algorithme est évaluée en étudiant la qualité des solutions en terme de proximité du front Pareto et sa couverture. Finalement, MULTIMADS est appliqué sur un problème de production de styrène qui fait appel à trois objectifs et plusieurs contraintes non-lisses.

DISCUSSION GÉNÉRALE ET CONCLUSION

L'objectif de cette thèse de doctorat était de développer des outils fiables pour l'aide à la décision multicritère. Dans ce cadre, deux algorithmes ont été développés pour la programmation multiobjectif (*MOP*). BIMADS exploite la relation d'ordre qui existe dans l'optimisation biobjectif pour générer l'ensemble des solutions Pareto optimales. À défaut de cette relation, nous avons proposé l'algorithme MULTIMADS pour résoudre le problème multiobjectif général. Nos algorithmes ont été testés sur une série de problèmes mettant en évidence l'efficacité de nos approches. L'objectif primordial de notre recherche est de proposer des algorithmes pour la résolution des problèmes réels. Ainsi, BIMADS et MULTIMADS ont été appliqués dans deux domaines différents. BIMADS a été utilisé pour résoudre le problème de sélection de portefeuille en finance pour générer les portefeuilles optimaux dans l'espace moyenne-variance-asymétrie du rendement. Alors que MULTIMADS a été utilisé pour résoudre un problème de production de styrène en génie chimique. Ce problème comporte notamment trois objectifs et plusieurs contraintes non-lisses qui sont les résultats d'un code informatique simulant les procédés chimiques employés.

En résumé, la thèse de doctorat nous a permis d'atteindre les objectifs fixés. À ce propos, notre contribution se situe à deux niveaux. D'une part, nous avons proposé des algorithmes efficaces en optimisation multiobjectif. D'autre part, nous avons présenté des approches pour l'optimisation non-lisse afin de résoudre des problèmes réels. Cette

étude est accompagnée d'une analyse rigoureuse de convergence.

Nous prévoyons poursuivre notre recherche en programmation multiobjectif non-lisse. Une première perspective consiste à intégrer d'autres algorithmes pour la résolution des formulations mono-objectifs. En particulier, nous projetons d'utiliser l'algorithme déterministe ORTHOMADS [3] au lieu de LTMADS qui a une composante aléatoire. Nous prévoyons également considérer les variables de catégorie dans nos modèles mathématiques.

Une autre perspective consiste à étendre nos algorithmes pour résoudre les problèmes de grande taille. Nos algorithmes actuels résolvent des problèmes d'optimisation contenant une cinquantaine de variables. Cette limite est imposée par l'algorithme servant à résoudre les formulations mono-objectifs. Nous pouvons augmenter ce nombre en utilisant notamment les fonctions substitués [16]. Nous prévoyons aussi d'améliorer le temps de calcul en parallélisant MULTIMADS et BIMADS. Une autre alternative pour la parallélisation consiste à utiliser la version parallèle de MADS [15].

Une troisième perspective consiste à mettre en place un algorithme de type recherche directe qui ne s'appuie pas sur une série de formulations mono-objectifs. L'algorithme est une approche, dite Pareto, qui part d'un ensemble initial de solutions et essaye de l'améliorer au fil des itérations. Cette stratégie est utilisée dans les algorithmes évolutionnistes. Nous prévoyons de l'intégrer aux algorithmes de recherche directe.

Nous espérons finalement que cette thèse a permis d'apporter une contribution à l'op-

timisation multiobjectif à la fois mathématique et algorithmique. Nous souhaitons, surtout, appliquer nos algorithmes dans un cadre pratique pour résoudre les problèmes réels. N'est-ce pas la finalité qui fait toute la beauté de l'optimisation ?

RÉFÉRENCES

- [1] Abramson M. A. (2002), Pattern search for mixed variable general constrained optimization problems , Thèse de doctorat, Department of Computational and Applied Mathematics. Rice University, Houston Texas.
- [2] Abramson M. A. (2004), Mixed variable optimization of a load-bearing thermal insulation system using a filter pattern search algorithm, *Optimization and Engineering*, Vol.5 No.2, 157–177.
- [3] Abramson M. A., Audet C., Dennis J. E. Jr. et Le Digabel S. (2008), Orthomads : A deterministic MADS instance with orthogonal directions, Rapport technique G-2008-15, Les Cahiers du GERAD, Février 2008.
- [4] Arditti F.D. et Levy H. (1967) Risk and the required return on equity, *Journal of Finance*, Vol.22 No.1, 19–36.
- [5] Arditti F.D. (1971), Another look at mutual funds performance, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 6, 909–912.
- [6] Armand P. (1993), Finding all maximal efficient faces in multiobjective linear programming, *Mathematical Programming* 6, 357–375.
- [7] Audet C. (2004), Convergence results for pattern search algorithms are tight, *Optimization and Engineering*, Vol.5 No.2, 101–122.

- [8] Audet C., Bécharde V. et Le Digabel S. (2008), Spent Potliner Treatment Process Optimization using a MADS Algorithm, *Optimization and Engineering* 9, 143–160.
- [9] Audet C., Bécharde V. et Le Digabel S. (2008), Nonsmooth optimization through Mesh Adaptive Direct Search and Variable Neighborhood Search, *Journal of Global Optimization*, Vol. 41 No.2, 299–318.
- [10] Audet C. et Dennis J. E. Jr. (2000), Pattern search algorithms for mixed variable programming, *SIAM Journal on Optimization* 11, 573–594.
- [11] Audet C. et Dennis J.E.Jr. (2003), Analysis of generalized pattern searches, *SIAM Journal on Optimization*, Vol.13 No.3, 889–903.
- [12] Audet C. et Dennis J.E.Jr. (2004), A pattern search filter method for non-linear programming without derivatives, *SIAM Journal on Optimization*, Vol.14 No.4, 980–1010.
- [13] Audet C. et Dennis J.E.Jr. (2006), Mesh adaptive direct search algorithms for constrained optimization, *SIAM Journal on Optimization*, Vol.17 No.1, 188–217, 2006.
- [14] Audet C. et Dennis J. E. Jr. (2007), A MADS Algorithm with a Progressive Barrier for Derivative-Free Nonlinear Programming , Rapport technique G-2007-37, Les Cahiers du GERAD, mai 2007.

- [15] Audet C., Dennis J.E.Jr. et Le Digabel S. (2007), Parallel space decomposition of the mesh adaptive direct search algorithm, Rapport technique G-2007-81, Les Cahiers du GERAD, Novembre 2007.
- [16] Audet C., Dennis J.E.Jr. et Vicente L. (2004), Special issue on surrogate optimization, *Optimization and Engineering*, Vol.5 No.2, 99–144.
- [17] Audet C., Hansen P., Jaumard B. et G. Savard. (1997), Links between linear bi-level and mixed 0-1 programming problems, *Journal of Optimization Theory and Applications* 93, 273–300.
- [18] Audet C. et Orban D. (2006), Finding optimal algorithmic parameters using the mesh adaptive direct search algorithm, *SIAM Journal on Optimization*, Vol.17 No.3, 642–664.
- [19] Audet C., Savard G. et Zghal W. (2008), Multiobjective optimization through a series of single-objective formulations, *SIAM Journal On Optimization*, vol.19 No.1, 188–210.
- [20] Back T., Hoffmeister F. et Swefel H. (1997), A survey of evolution strategies, *Proceeding of the Fourth International Conference on Genetic Algorithms*, 2–9.
- [21] Benson H.P. (1998), An outer approximation algorithm for generating all efficient extreme points in the outcome set of a multiple objective linear programming problem, *Journal of Global Optimization* 13, 1–24.

- [22] BOOKER A.J., DENNIS J.E. Jr., FRANK P.D., SERAFINI D.B. et TORCZON V. (1998), Optimization using surrogate objectives on a helicopter test example, dans «*Optimal Design and Control*» (Cambridge, MA), J.Borggaard, J.Burns, E.Cliff, et S.Schreck, Eds., Progress in Systems and Control Theory, Birkhäuser, p.49–58.
- [23] Bowden R.O. et Hall J.D. (1998), Simulation optimization research and development, dans *Simulation conference*, 1693–1698.
- [24] Chunhachinda P., Dandapani K., Hamid S. et Prakash A.J. (1997), Portfolio selection and skewness evidence from international stock markets, *Journal of Banking and Finance* 21, 143–167.
- [25] Clarke F. H. (1990), «*Optimization and Nonsmooth Analysis*», *SIAM Publication, Classics in Applied Mathematics*, Vol.5, Philadelphia.
- [26] Cohon J. L. (1978), «*Multiobjective programming and planning*», Academic Press, New York.
- [27] Colson B. (2003), Trust-region algorithms for derivative-free optimization and nonlinear bilevel programming, Dissertation doctorale en sciences mathématiques, Facultés universitaires Notre-Dame de la Paix, Belgique.
- [28] Coope I.D et Price C.J. (2000), Frame-based methods for unconstrained optimization , *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol.107 No.2, 261–274.

- [29] Corley H.W. (1998), Optimality conditions for maximizations of set-valued functions, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol.58 No.1, 1–10.
- [30] Couture G., Audet C., Dennis J. E. Jr. et Abramson M.A. (2003), The NOMAD project, [http ://www.gerad.ca/NOMAD/](http://www.gerad.ca/NOMAD/).
- [31] Das I. (1997), Nonlinear Multicriteria Optimization and Robust Optimality, Thèse de doctorat, Rice University, Houston, Texas, Avril 1997.
- [32] Das I. et Dennis J. E. Jr. (1998), Normal-boundary intersection : A new method for generating the pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems, *SIAM Journal on Optimization*, Vol.8 No.3, 631–657.
- [33] Davidon W.C. (1991), Variable metric method for minimization, *SIAM Journal on Optimization*, Vol.1 No.1, 1–17.
- [34] Deb K. (1999), Multi-objective genetic algorithms : Problem difficulties and construction of test problems, *Evolutionary Computation Journal*, Vol.7 No.3, 205–230.
- [35] Deb K., Thiele L., Laumanns M. et Zitzler E. (2005), Scalable test problems for evolutionary multi-objective optimization, dans «*Evolutionary Multiobjective Optimization : Theoretical Advances and Applications*», chapitre 6, Springer (éditeurs Abraham A., Jain R. et Goldberg R.), 105–145.

- [36] Douglas J.M. (1988), «*Conceptual Design of Chemical Processes*», McGraw-Hill, New York.
- [37] Dreisigmeyer D.W. (2007), Direct search methods over lipschitz manifolds, Rapport technique LA-UR-07-1073, LANL, 2007.
- [38] Dreisigmeyer D.W. (2007), Direct search methods over riemannian manifolds, Rapport technique LA-UR-06-7416, LANL, 2007.
- [39] Dreisigmeyer D.W. (2007), Equality constraints, riemannian manifolds and direct search methods, Rapport technique LA-UR-06-7406, LANL, 2007.
- [40] Ehrgott M. (2000), Multicriteria Optimization, volume 491 de *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer Verlag, Berlin.
- [41] Ehrgott M. et Wiecek M.M. (2005), Multiple criteria decision analysis state of the art surveys, dans *Multiobjective Programming*, chapitre 17, Springer, 667–772.
- [42] Fletcher R., Leyffer S. et Toint Ph.L. (2002) On the global convergence of an SQP-Filter algorithm, *SIAM Journal on Optimization*, vol.13, No.1, 44–59.
- [43] Fielitz B. (1976) Further results on asymmetric stable distributions of stock price changes, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 11, 39–55.

- [44] Geoffrion A.M. (1968), Proper efficiency and the theory of vector maximization, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 22, 618–630.
- [45] Goldberg D.E. et Richardson J. (1987), Genetic algorithms with sharing for multimodal function optimization, In *Genetic Algorithms and their Applications : Proceedings of the second International Conference on Genetic Algorithms*, Lawrence, Erlbaum, 41–49.
- [46] Goldberg D.E. (1989), «*Genetic algorithms for search, optimization, and machine learning*», Reading MA, Addison-Wesley.
- [47] Hansen P. et Mladenović N. (2003), A tutorial on variable neighborhood search, Rapport technique Les cahiers du gerad, GERAD, Juillet 2003.
- [48] Himmelblau D.M., Edgar T.F., et Lasdon L.S. (2003), «*Optimization of Chemical Processes*», McGraw-Hill, New York.
- [49] Holland J.H. (1975), «*Adaptation in natural and artificial systems*», Michigan Press University
- [50] Hooke R. et Jeeves T.A. (1961), Direct search, solution of numerical and statistical problems, *Journal of the Association for Computing Machinery* 8, 212–229.
- [51] Jahn J. (1994), «*Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization*», Springer, Berlin.

- [52] Jahn J. (2004), «*Vector Optimization : Theory, Applications, and Extensions*», Springer, Berlin.
- [53] Jean W.H. (1971), The extension of portfolio analysis to three or more parameters, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.6 N0.1, 505–515.
- [54] Kane A. (1982), Skewness preference and portfolio choice, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 17, 15–25.
- [55] Kim J. et Kim S.K. (2006), A chim-based interactive tchebycheff procedure for multiple objective decision making, *Computers and Operations Research* 33, 1557–1574.
- [56] Kokkolaras M., Audet C. et Dennis J.E.Jr. (2001), Mixed variable optimization of the number and composition of heat intercepts in a thermal insulation system, *Optimization and Engineering*, Vol.2 No.1, 5–29.
- [57] Kraus A. et Litzenberger R.H. (1976), Skewness preference and the valuation of risk assets, *Journal of Finance*, Vol.31 No.4, 1085–1100.
- [58] Lai T.Y. (1991), Portfolio selection with skewness : a multiple-objective approach, *Review of Quantitative Finance and Accounting* 1, 293–305.
- [59] Laumanns M., Zitzler E., Thiele L. (2000), A unified model for multi-objective evolutionary algorithms with elitism, dans *Proceedings of the 2000 Congress on Evolutionary Computation CEC00*, 46–53.

- [60] Leach E. B. (1961), A note on inverse function theorem, dans *Proceedings of the AMS* 12, 694–697.
- [61] Le Digabel S. (2008), Extensions à l’algorithme de recherche directe MADS pour l’optimisation non-lisse, Thèse de doctorat, Département de mathématiques et de génie industriel, École Polytechnique de Montréal, Montréal, Québec, Mai 2008.
- [62] Lewis R.M. et Torczon V. (1999), Pattern search algorithms for bound constrained minimization, *SIAM Journal on Optimization* 9, 1082–1099.
- [63] Lewis R.M. et Torczon V. (2000), Pattern search methods for linearly constrained minimization, *SIAM Journal on Optimization* 10, 917–941.
- [64] Lewis R.M. et Torczon V. (2002) A globally convergent augmented Lagrangian pattern search algorithm for optimization with general constraints and simple bounds, *SIAM Journal on Optimization*, Vol.12 No.4, 1075–1089.
- [65] Lootsma F. A., Athan T.W. et Papalambros P.W. (1998), Controlling the search for a compromise solution in multi-objective optimization, *Engineering optimization*, Vol.25 No.1, 65–81.
- [66] Markowitz H. (1952), Portfolio selection, *Journal of Finance*, Vol.7 No.1, 77–91.
- [67] Marsden A. L., Wang M., Dennis J.E.Jr. et Moin P. (2004), Optimal aeroacoustic shape design using the surrogate management framework, *Optimization and Engineering*, Vol.5 No.2, 235–262.

- [68] Nelder J.A. et Mead R. (1965), A simplex method for function minimization, *Computer Journal* 7, 308–313.
- [69] Obayashi S., Takahashi S. et Takeguchi Y. (1998), Niching and elitist models for multi-objective genetic algorithms, *Proceedings of the 5th International Conference on Parallel Problem Solving from Nature*, Springer, Verlag, 260–269.
- [70] Prakash A.J., Chang C. et Pactwa T.E. (2003), Selecting a portfolio with skewness : Recent evidence from US, European, and Latin American equity markets, *Journal of Banking and Finance* 27, 1375–1390, 2003.
- [71] Samuelson P.A. (1970), The fundamental approximation theorem of portfolio analysis in terms of means, variances and higher moments, *Review of Economic Studies*, Vol.37 No.4, 537–542.
- [72] Scott R.C. et Horvath P.A. (1980), On the direction of preference for moments of higher order than the variance, *Journal of Finance*, Vol.35 No.4, 915–919.
- [73] Seider W.D., Seader J.D. et Lewin D.R. (1999), «*Process Design Principles : Synthesis, Analysis and Evaluation*», John Wiley and Sons Inc., New York.
- [74] Simkowitz M. et Beedles W. (1978), Diversification in a three moment world, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 13, 927–941.

- [75] Singleton J. et Wingender J. (1986), Skewness persistence in common stock returns, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 13, 335–341.
- [76] Snyder J.D. et Subramaniam B. (1995), A novel reverse flow strategy for ethylbenzene dehydrogenation in a packed-bed reactor, *Chemical Engineering Science* 49, 5585–5601.
- [77] Srinivas N. et Deb K. (1995), Multiobjective optimization using non-dominated sorting in genetic algorithms, *Evolutionary Computation*, Vol2 No.8, 221-248.
- [78] Stephens A. et Proffitt D. (1991), Performance measurement when return distributions are nonsymmetric, *Quarterly Journal of Business and Economics*, Vol.30 No.4, 23–41.
- [79] Sun Q. et Yan Y(2003), Skewness persistence with optimal portfolio selection, *Journal of Banking and Finance*, Vol.27 No.6, 1111–1121.
- [80] Tayi G. et Leonard P. (1988), Bank balance-sheet management : An alternative multi-objective model, *Journal of the Operational Research Society* 39, 401–410.
- [81] Timmerhaus K.D., Peters M.S et West R.E(2003), «*Plant Design and Economics for Chemical Engineers*», McGraw-Hill, New York.
- [82] Torczon V. (1997), On the convergence of pattern search algorithms, *SIAM Journal on Optimization*, Vol.7 No.1, 1–25.

- [83] Yu P.L. (1974), Cone convexity, cone extreme points and nondominated solutions in decision problems with multi-objectives, *Journal of Optimization Theory and Application* 14, 319–377.
- [84] Zeleny M. (1973), Compromise programming, «*Multiple criteria decision making*», University of South Carolina Press (éditeurs Cochrane J.L. et Zeleny M.), 262–301.
- [85] Zitzler E. (1999) *Evolutionary algorithms for multiobjective optimization : methods and applications*. PhD thesis, Institute of Technology, Zurich, Swiss Federal.