

**Titre:** Étude des limites de performance des systèmes de communication  
à antennes multiples  
Title: à antennes multiples

**Auteur:** Zouheir Rezki  
Author:

**Date:** 2008

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Rezki, Z. (2008). Étude des limites de performance des systèmes de  
communication à antennes multiples [Ph.D. thesis, École Polytechnique de  
Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/8165/>  
Citation:

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8165/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** David Haccoun, & François Gagnon  
Advisors:

**Programme:** Unspecified  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉTUDE DES LIMITES DE PERFORMANCE DES SYSTÈMES DE  
COMMUNICATION À ANTENNES MULTIPLES

ZOUHEIR REZKI

DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIE DOCTOR  
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)

JUIN 2008

© Zouheir Rezki,



Library and  
Archives Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*  
*ISBN: 978-0-494-46116-7*  
*Our file* *Notre référence*  
*ISBN: 978-0-494-46116-7*

**NOTICE:**

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

**AVIS:**

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

  
**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

ÉTUDE DES LIMITES DE PERFORMANCE DES SYSTÈMES DE  
COMMUNICATION À ANTENNES MULTIPLES

présentée par: REZKI Zouheir

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophie Doctor

a été dûment évaluée par le jury d'examen constitué de:

M. FRIGON Jean François, Ph.D., président

M. HACCOUN David, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. GAGNON François, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. NERGUIZIAN Chahé, Ph.D., membre

M. AFFES Sofiene, Ph.D., membre

À la mémoire de mon père, feu Haj Abdelwahed,  
décédé le 23 Novembre 2007...

## REMERCIEMENTS

Je tiens en premier lieu à exprimer ma profonde reconnaissance à mes directeurs de recherche, Dr. David Haccoun professeur au département de génie électrique à l'école Polytechnique de Montréal et Dr. François Gagnon, professeur au Département de génie électrique à l'école de technologie supérieure, pour leurs orientations et directives académiques, ainsi que pour leur soutien financier au cours de mon travail de doctorat.

Je remercie tous les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail en acceptant de l'évaluer. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma haute gratitude.

Je remercie également Dr. Wessam Ajib, professeur au département informatique à l'université du Québec à Montréal, pour les discussions fructueuses qu'on a eues durant ma thèse.

Je remercie particulièrement tous les membres de ma famille, notamment mon cher frère Naoufal et ma chère Nourel pour leur soutien psychologique.

Je remercie également mes collègues du laboratoire de communications avancées à l'école Polytechnique, pour leur aide et leurs échanges de points de vue durant la période de ma recherche. Je citerai pour mémoire Ali,Éric, Oualid, Samuel, Benjamin, Laurent, Nadia, Aniss, Zao, Olfa, Yagnish, Stéphane, Lamiaâ, Mohammed..., que ceux dont j'ai oublié le nom me pardonnent.

Enfin, que tout le personnel du département de génie électrique, professeurs, techniciens et administratifs, trouve ici l'expression de mes remerciements les plus sincères.

## RÉSUMÉ

De nouveaux axes de recherche en théorie de l'information ont établi qu'en utilisant plusieurs antennes à l'émission et à la réception (Multiple Input Multiple Output MIMO), les performances des systèmes de communication, en termes de débit de transmission et de probabilité d'erreur, s'améliorent considérablement. De ce fait, il est important d'établir les limites de performance des canaux à antennes multiples, en vue d'asseoir des critères de conception des codes spatio-temporels.

Récemment, le potentiel maximal des canaux à antennes multiples, en termes de gain de diversité et de gain de multiplexage, a été déterminé sous la forme d'un compromis fondamental régissant leur disponibilité dans le canal de communication. Cette caractérisation a ainsi donné lieu à un nouveau critère de conception des codes spatio-temporels appelé : le compromis diversité-multiplexage.

Dans la première partie de ce travail, on présente d'abord un encodage spatio-temporel à rétroaction non systématique et limitée, en vue d'atteindre ce compromis optimal. Cet encodage est avantageux en raison de la simplicité de sa stratégie d'adaptation et d'une complexité de décodage réduite. En second lieu, on a focalisé sur une caractérisation fondamentale du potentiel des canaux MIMO dans des contextes plus réalistes. En particulier, on a déterminé le potentiel de ces canaux en termes de gains en diversité et en multiplexage pour des valeurs finies de rapport signal à bruit (Signal-to-Noise Ratio : SNR) et dans des conditions plus réalistes de propagation. Notre but derrière cette caractérisation est la définition d'un nouveau critère de comparaison des codes spatio-temporels à des valeurs de SNR déterminés. Comme preuve de sa globalité, on a démontré que ce critère coïncide avec le compromis diversité-multiplexage établi à haut SNR.

Dans la deuxième partie de ce travail, on a étudié la capacité d'un canal discret,

sans mémoire à évanouissements de Rayleigh dans un contexte où la connaissance du canal n'est disponible ni à l'émetteur ni au récepteur. On a donné une forme analytique compacte de l'information mutuelle du canal à faible SNR, qui peut également être considérée comme une borne inférieure sur l'information mutuelle du canal pour des valeurs de SNR pas nécessairement faibles. De plus, on a établi une relation fondamentale entre la distribution optimale de la signalisation à l'entrée du canal et la valeur du SNR, de laquelle une expression exacte de la capacité est déduite.



## ABSTRACT

New researches in information theory have established that by using multiple antennas at the transmitter and at the receiver (Multiple Input Multiple Output : MIMO), the performances of communication systems, in terms of error probability and transmission rate, improve considerably. Therefore, it is important to establish the performance limits of multielement antenna channels, in order to derive design criteria of space-time codes.

Recently, the maximum potential of multielement antenna channels, in terms of the diversity gain and the multiplexing gain, has been given in the form of a fundamental tradeoff governing their availability in the channel. This characterization has thus established a new space-time code design criterion : The Diversity-Multiplexing Tradeoff.

In the first part of this work, we initially present a non-systematic limited feedback space-time code, in order to achieve this optimal tradeoff. This scheme is advantageous because of its simple adaptation strategy and its reduced decoding complexity. Then, we focus on a fundamental characterization of multielement antenna channels in more realistic contexts. In particular, we determine the potential of these channels in terms of the diversity gain and the multiplexing gain at finite Signal-to-Noise Ratio (SNR) values and under more realistic propagation conditions. The goal behind this characterization is to define a new comparison criterion of space-time codes at practical SNR values. Through asymptotic analysis, we show that our framework encompasses many recently established results.

In the second part of this work, we analyze the capacity of a discrete-time, memoryless Rayleigh fading channel, where the channel state information is neither available at the transmitter nor at the receiver. We give an analytical compact form

of the channel mutual information at low SNR, which can also be seen as a lower bound on the channel mutual information at not necessarily low SNR values. Moreover, we establish a fundamental relation between the optimal input distribution and the SNR value, from which an exact expression of the capacity is deduced.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iv
REMERCIEMENTS . . . . .	v
RÉSUMÉ . . . . .	vi
ABSTRACT . . . . .	viii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	x
LISTE DES FIGURES . . . . .	xiv
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES . . . . .	xvi
LISTE DES ANNEXES . . . . .	.xviii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	1
1.1 Systèmes de communication à plusieurs antennes . . . . .	1
1.2 Considérations conceptuelles : Gain de diversité / gain de multiplexage	1
1.2.1 Conception basée sur la maximisation de la diversité . . . . .	2
1.2.2 Conception basée sur la maximisation du gain de multiplexage	3
1.2.3 Le compromis diversité-multiplexage . . . . .	4
1.3 Problématique et motivation . . . . .	5
1.4 Contributions . . . . .	7
1.5 Organisation de la thèse . . . . .	9
CHAPITRE 2 SYSTÈMES À ANTENNES MULTIPLES, DÉFINITIONS ET REVUE DE LITTÉRATURE . . . . .	11
2.1 Introduction . . . . .	11
2.2 Modèle du canal MIMO . . . . .	12

2.3	La diversité . . . . .	13
2.4	Le multiplexage spatial . . . . .	15
2.5	Le compromis diversité-multiplexage . . . . .	17
2.6	Code de Yao et Wornell . . . . .	22
2.7	Les codes 'LAST' d'El Gamal et al. . . . .	23
2.8	Code de Dayal et Varanasi . . . . .	24
2.9	Construction de codes basée sur l'algèbre de division . . . . .	26
2.9.1	Construction générique (Generic Construction) . . . . .	27
2.9.2	Construction basée sur l'algèbre de division cyclique . . . . .	32
2.10	Construction de codes optimaux à partir de l'algèbre de division . . . . .	35
2.10.1	Les treillis quaternaires, les codes 'parfaits' et le code en or . . . . .	36
2.10.2	Construction explicite de codes STBC optimaux . . . . .	38
CHAPITRE 3 ENCODAGE ADAPTATIF POUR ATTEINDRE LE COM- PROMIS DIVERSITÉ-MULTIPLEXAGE . . . . .		42
3.1	Introduction . . . . .	42
3.2	Encodage spatio-temporel adaptatif à seuil . . . . .	43
3.3	Stratégie d'adaptation de l'encodage spatio-temporel adaptatif à seuil . . . . .	45
3.4	Encodage adaptatif optimal pour un système MIMO 2x2 . . . . .	48
3.5	Résultats de simulations . . . . .	54
3.6	Conclusion . . . . .	56
CHAPITRE 4 CARACTÉRISATION DU POTENTIEL DES CANAUX MIMO À SNR LIMITÉ ET IMPACT DE LA CORRÉLA- TION SPATIALE . . . . .		59
4.1	Introduction . . . . .	59
4.2	Le compromis diversité-multiplexage à SNR de valeurs limitées . . . . .	60
4.3	Impact de la corrélation spatiale sur le compromis diversité-multiplexage . . . . .	61
4.4	Étude asymptotique du gain de diversité . . . . .	68

4.5	Résultats numériques . . . . .	70
4.6	Conclusion . . . . .	74
CHAPITRE 5 LIMITE DE PERFORMANCES DES CANAUX À AN-		
TENNES MULTIPLES : COMMUNICATION NON COHÉ-		
RENTE . . . . . 79		
5.1	Introduction . . . . .	79
5.2	Capacité du canal pour une transmission non-cohérente . . . . .	80
5.3	Capacité du canal pour des configurations spécifiques . . . . .	83
5.3.1	Capacité du canal à SNR de valeurs finies . . . . .	83
5.3.1.1	Configuration du système où $N_t = N_r = 1$ et $T \rightarrow \infty$	84
5.3.1.2	Configuration du système où $N_t = N_r = 1$ et $T \geq 1$	84
5.3.1.3	Configuration du système où $N_t \geq 1$ , $N_r \geq 1$ et $T = 1$	85
5.3.2	Capacité du canal à SNR de valeurs infinies . . . . .	85
5.3.2.1	Configuration du système où $N_t = N_r$ et $T \geq 2N_t$	85
5.3.2.2	Configuration du système où $N_t > N_r$ , et $T \geq 2N_r$	86
5.3.2.3	Configuration du système où $N_t < N_r$ , et $T \geq N_t + N_r$	87
5.3.2.4	Configuration du système où le temps de cohérence est faible . . . . .	88
5.4	Le compromis diversité-multiplexage dans un scénario non-cohérent	88
CHAPITRE 6 CAPACITÉ DES CANAUX NON-COHÉRENTS DISCRETS		
SANS MÉMOIRE ET À ÉVANOUISSEMENTS DE RAY-		
LEIGH . . . . . 93		
6.1	Introduction . . . . .	93
6.2	Capacité du canal SISO . . . . .	95
6.2.1	Modèle du canal . . . . .	95
6.2.2	Information mutuelle du canal . . . . .	97
6.2.3	Capacité d'une communication non-cohérente à faible SNR	101

6.2.3.1	Relation fondamentale entre la distribution optimale de l'entrée et le SNR . . . . .	102
6.2.3.2	Efficacité énergétique et pénalité de non-cohérence . . . . .	106
6.2.3.3	Bornes supérieure et inférieure sur la capacité d'un canal non-cohérent . . . . .	110
6.3	Capacité du canal MIMO . . . . .	111
6.4	Résultats numériques et discussion . . . . .	115
6.5	Conclusion . . . . .	120
CONCLUSION . . . . .		124
RÉFÉRENCES . . . . .		127
ANNEXES . . . . .		135

## LISTE DES FIGURES

FIGURE 2.1	Modèle du canal MIMO . . . . .	12
FIGURE 2.2	Compromis optimal entre la diversité et le multiplexage . .	18
FIGURE 3.1	Le compromis diversité-multiplexage pour un système MIMO avec $N_t = N_r = T = 2$ . . . . .	44
FIGURE 3.2	L'encodage adaptatif atteignant chaque segment de la courbe optimale . . . . .	46
FIGURE 3.3	Performances de SM, avec M-QAM, $M^2 = 4, 16, 64, 256$ , $N_t = N_r = 2$ et $T = 1$ . . . . .	55
FIGURE 3.4	Performances du code donné par (3.5) avec M-QAM, $M =$ $2^{(\frac{3}{4}R)}$ , $R = 4, 16, 64, 256$ , $N_t = N_r = 2$ et $T = 3$ . . . . .	56
FIGURE 3.5	Performances du code donné par (3.16), avec $R = 8, 16$ , $N_t =$ $N_r = 2$ et $T = 2$ . . . . .	57
FIGURE 4.1	Comparaison de la borne inférieure de $P_{out}$ et la valeur exacte donnée par simulation pour un coefficient de corrélation $\rho =$ $0.9$ , un gain de multiplexage $r = 1$ et pour $N_t = N_r = 2$ . . .	71
FIGURE 4.2	Comparaison de la borne inférieure de $P_{out}$ et la valeur exacte donnée par simulation pour un coefficient de corrélation $\rho =$ $0.5$ , un gain de multiplexage $r = 0.5$ et pour $N_t = N_r = 2$ . . .	72
FIGURE 4.3	Comparaison de notre borne inférieure donnée par (4.12) et celle de Narasimhan, pour la corrélation spatiale à l'émission donnée par (49) dans [Narasimhan, 2006], et pour $N_t = N_r = 2$ .	73
FIGURE 4.4	Impact de la corrélation spatiale sur la valeur estimée de la diversité pour $N_t = N_r = 2$ et SNR=15 dB. . . . .	74
FIGURE 4.5	Comparaison de la valeur estimée de la diversité et la valeur exacte donnée par simulation pour $\rho = 0.5$ , SNR = 5 dB et $\rho = 0.9$ , SNR = 10 dB, pour un système $N_t = N_r = 2$ . . . .	75

FIGURE 4.6	Gain de diversité relative pour différentes valeurs du gain de multiplexage $r$ et pour $N_t = N_r = 2$ . . . . .	76
FIGURE 4.7	Convergence du gain de diversité estimé $\hat{d}^{uncorr}(r, \eta)$ vers la gain de diversité asymptotic $d_{asym}$ , à mesure que la valeur du SNR $\eta \rightarrow \infty$ . . . . .	77
FIGURE 5.1	Compromis optimal diversité-multiplexage pour un canal MIMO ayant $N_t = N_r = 4$ et $T = 16$ . . . . .	91
FIGURE 6.1	Borne inférieure sur l'information mutuelle du canal en fonction de la localisation du point de masse non nulle, pour trois régimes du SNR : a) Très faible SNR, b) faible SNR et c) SNR élevé . . . . .	100
FIGURE 6.2	Localisation du point de masse non nulle en fonction de la valeur $a$ du SNR (linéaire). . . . .	116
FIGURE 6.3	Capacité non-cohérente en fonction de la valeur $a$ du SNR (linéaire). . . . .	117
FIGURE 6.4	Pénalité de non-cohérence par SNR en fonction de la valeur $a$ du SNR (linéaire). . . . .	119
FIGURE 6.5	Localisation exacte du point de masse non nulle, nos bornes inférieure et supérieure ainsi que les bornes présentées dans [Zheng et al., 2007] en fonction de la valeur $a$ du SNR (linéaire). . . . .	120
FIGURE 6.6	Capacité du canal pour une transmission non-cohérente. . . . .	121
FIGURE 6.7	Capacité du canal pour une transmission non-cohérente, une vue à faible SNR. . . . .	122



## LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

AWGN	Bruit blanc additif Gaussien (Additive White Gaussian Noise)
BPSK	Modulation binaire par Déplacement de Phase (Binary Phase-Shift Keying)
BLAST	Bell Labs Layered Space Time
$C$	Capacité du canal
$\mathcal{C}$	Ensemble des codes spatio-temporels
CSI	Connaissance de l'état du canal (Channel State Information)
D-BLAST	Diagonal Bell Labs Layered Space Time
$d$	Gain de diversité
$\hat{d}$	Gain de diversité estimé
$\delta(\cdot)$	Impulsion de Dirac
$\eta$	Rapport signal sur bruit par antenne réceptrice
$\mathbf{H}$	Matrice de dimension $N_r \times N_t$ représentant un canal spatialement corrélé à l'émission et/ou à la réception
$\mathbf{H}_w$	Matrice de dimension $N_r \times N_t$ représentant le canal
i.i.d.	Indépendants identiquement distribués
LAST	LAttice Space-Time codes
MIMO	Système de communication à antennes multiples à l'émission et à la réception (Multiple Input Multiple Output)
NVD	Non-Vanishing Determinant
$N_r$	Nombre d'antennes à la réception
$N_t$	Nombre d'antennes à l'émission
ON-OFF	Marche-arrêt
OSTBC	Code en bloc spatio-temporel orthogonal (Orthogonal Space-Time Bloc Code)

$P$	Puissance disponible à l'émetteur
$P_e$	Probabilité d'erreur
PEP	Probabilité par paire (Pairwise Error Probability)
$P_{out}$	Probabilité de non-disponibilité du canal (Outage probability)
QAM	Modulation d'amplitude de deux porteuses en quadrature MAQ (Quadrature Amplitude Modulation)
QR	Décomposition orthogonale triangulaire
$R$	Efficacité spectrale en bits par seconde par Hertz
$r$	Gain de multiplexage
$\rho$	Coefficient de corrélation spatiale
$\mathbf{R}_r$	Matrice de corrélation à la réception
$\mathbf{R}_t$	Matrice de corrélation à l'émission
$\sigma_n^2$	Variance des composantes du bruit
SISO	Système de communication à une seule antenne à l'émission et une seule antenne à la réception (Single Input Single Output)
SM	Multiplexage spatial (Spatial Multiplexing)
SNR	Rapport signal sur bruit (Signal-to-Noise Ratio)
STBC	Code en bloc spatio-temporel (Space-Time Bloc Code)
SVD	Décomposition en valeurs singulières (Singular Values Decomposition)
$T$	Longueur de bloc en symboles
TAST	Threaded Algebraic Space-Time codes
$\mathbf{W}$	Bruit additif complexe blanc et Gaussien de dimension $N_r \times T$
$\mathbf{X}$	Bloc de symboles à émettre de dimension $N_t \times T$
$\mathbf{Y}$	Observation discrète à la sortie du canal de dimension $N_r \times T$

**LISTE DES ANNEXES**

ANNEXE I	INTRODUCTION À L'ALGÈBRE DE DIVISION . . . .	135
ANNEXE II	PREUVE DU COROLLAIRE 4.2 . . . . .	138
ANNEXE III	PREUVE DU LEMME 4.2 . . . . .	141
ANNEXE IV	PREUVE DU THÉORÈME 4.2 . . . . .	143
ANNEXE V	PREUVE DU COROLLAIRE 4.2 . . . . .	146
ANNEXE VI	PREUVE DU LEMME 6.1 . . . . .	147
ANNEXE VII	PREUVE DU THÉORÈME 6.1 . . . . .	152
ANNEXE VIII	PREUVE DU THÉORÈME 6.2 . . . . .	154

## CHAPITRE 1

### INTRODUCTION

#### 1.1 Systèmes de communication à plusieurs antennes

Une des tendances les plus importantes dans les systèmes de communication sans fil est l'utilisation des systèmes à plusieurs antennes à l'émission et à plusieurs antennes à la réception, connus sous le nom de systèmes MIMO (Multiple Input Multiple Output). L'avantage d'utiliser de tels systèmes n'est plus à démontrer. Que ce soit en termes d'augmentation de la capacité du lien de communication ou d'amélioration de la pertinence de ce lien, les systèmes MIMO offrent un potentiel important qui les placent comme candidats par excellence pour offrir des communications fiables et à très haut débit de future génération. Bien que des considérations pratiques, telles l'intégration des antennes et les techniques de traitement numérique du signal, constituent un vrai défi pour ces systèmes, ils sont considérés comme l'avenir des communications sans fil dans les canaux à bande passante limitée.

#### 1.2 Considérations conceptuelles : Gain de diversité / gain de multiplexage

Les systèmes MIMO constituent un changement important quant à la conception des systèmes de communication. Ce changement est lié à la manière dont on considère les multi-trajets dans les systèmes de communication sans fil : l'ancienne vision considère que l'objectif des systèmes de communication sans fil est de combattre

les distorsions causées par les multi-trajets afin d'approcher la limite théorique de la capacité pour une largeur de bande déterminée. La nouvelle vision avance que puisque les multi-trajets représentent plusieurs canaux entre l'émetteur et le récepteur, l'objectif des communications sans fil est alors de profiter des multi-trajets pour augmenter la capacité pour une largeur de bande limitée. Cette interprétation des multi-trajets dans les canaux de communication sans fil a généré deux critères de conceptions des systèmes de communication MIMO : Conception basée sur la maximisation de la fiabilité du lien de communication et conception basée sur la maximisation des degrés de liberté de ce lien.

### 1.2.1 Conception basée sur la maximisation de la diversité

L'émission de la même information à travers plusieurs antennes permet de véhiculer cette information sur différents trajets dont les évanouissements sont indépendants. Conceptuellement, le nombre de trajets indépendants représente la diversité maximale du canal MIMO. À la réception, une erreur se produirait si tous ces trajets étaient évanouis simultanément. De ce fait, en combinant ces répliques indépendantes de l'information au niveau du récepteur, une amélioration de la fiabilité du lien est obtenue. Par exemple, la communication entre  $N_t$  antennes émettrices et  $N_r$  antennes réceptrices, à travers un canal à évanouissements lents de Rayleigh, permet un gain maximal en diversité de  $N_t N_r$ . Ce gain peut être obtenu indépendamment de la connaissance ou non de l'état du canal (Channel State Information : CSI) au récepteur. Ceci a donné naissance au concept de codage spatio-temporel avec ses différentes variantes (codage en bloc, codage en treillis...) et a conduit à formaliser des critères de conception pour parvenir à cet objectif : Critère de rang, critère de déterminant [Tarokh et al., 1999, Alamouti, 1998].

### 1.2.2 Conception basée sur la maximisation du gain de multiplexage

Une autre interprétation du canal MIMO consiste à considérer l'évanouissement comme un moyen d'augmenter les degrés de liberté du lien de communication. Autrement dit, si les trajets entre chaque paire d'antenne émettrice-réceptrice s'évanouissaient indépendamment, alors la probabilité que le canal soit en 'bonne condition' (well-conditioned channel) serait grande. De manière plus formelle, le canal MIMO peut être subdivisé en canaux parallèles indépendants. La transmission de différentes informations en parallèle sur ces canaux permet d'augmenter le taux de transmission (en termes de nombre de symboles d'information indépendants émis par slot temporel). Ce schéma d'émission s'appelle le multiplexage spatial. De ce fait, le multiplexage spatial permet un gain en termes de degrés de liberté qui sont cruciaux à hauts rapports signal sur bruit (Signal-to-Noise Ratio : SNR), où les systèmes sont limités en bande-passante. Par ailleurs, les systèmes MIMO induisent aussi un gain en puissance, lequel est important à faible SNR, où les systèmes sont limités en puissance. Par exemple, il a été démontré qu'à haut SNR, dans un scénario cohérent, i.e., un scénario où CSI est disponible au récepteur, la capacité<sup>1</sup> du canal MIMO avec  $N_t$  antennes émettrices et  $N_r$  antennes réceptrices, dont les gains complexes entre antennes sont indépendants, identiquement distribués (i.i.d.) suivant une loi Normale, est donnée par [Foschini, 1996] :

$$C(SNR) = \min(N_t, N_r) \log(SNR) + O(1) \text{ bps/Hz}, \quad (1.1)$$

où la variable  $SNR$  désigne le rapport signal sur bruit par antenne réceptrice et où  $O(1)$  désigne une constante indépendante du SNR. Le gain de multiplexage caractérise comment varie la capacité en fonction de  $\log(SNR)$  à haut SNR. L'équation (1.1) stipule que dans un scénario cohérent, l'augmentation de la capacité en fonc-

---

<sup>1</sup>Nous confondons ici, par abus de langage, capacité et efficacité spectrale.

tion de  $\log(SNR)$  est linéaire et que le gain de multiplexage maximal est égal à  $\min(N_t, N_r)$ . Dans un scénario non-cohérent, le gain de multiplexage maximal dépend aussi du temps de cohérence du canal. Nous verrons ceci plus en détail dans le chapitre 5.

En résumé, les systèmes MIMO permettent d'obtenir deux types de gains à haut SNR : le gain de diversité et le gain de multiplexage. Jusqu'à présent, les travaux de recherche et les techniques de conception focalisaient sur la maximisation de l'un de ces paramètres en sacrifiant l'autre. Par exemple, tous les codes issus de la conception orthogonale (Orthogonal Design) [Alamouti, 1998, Tarokh et al., 1999] obtiennent une diversité maximale du canal en sacrifiant le gain de multiplexage maximal, alors que les techniques d'émission de type BLAST [Foschini, 1996] obtiennent un gain de multiplexage maximal en sacrifiant le gain de diversité maximal. Par conséquent, la comparaison des performances de codes spatio-temporels issus de ces deux critères de conception n'est pas une tâche facile et il y a lieu de penser à uniformiser ces deux critères en un seul critère plus global qui permet de comparer les techniques de codage pour un canal MIMO donné. En effet, dernièrement, Zheng et Tse ont pu répondre à cette question en proposant un nouveau critère, qui permet de comparer les techniques de codage spatio-temporel via une caractérisation optimale asymptotique (à haut SNR) des gains de diversité et de multiplexage [Zheng and Tse, 2003] : il s'agit du compromis diversité-multiplexage (Diversity-Multiplexing Tradeoff).

### 1.2.3 Le compromis diversité-multiplexage

Pour établir ce compromis, Zheng et Tse ont considéré un régime à haut SNR, et ont modélisé un schéma d'émission comme une famille de codes, chacun indexé par un SNR, notée  $\{C(SNR)\}$ . Ils ont par la suite formalisé les définitions de la diversité

et du multiplexage. Ainsi, un schéma d'émission a un gain de diversité  $d$  si sa probabilité d'erreur décroît suivant  $1/SNR^d$ . D'un autre côté, un schéma d'émission a un gain de multiplexage  $r$  si son taux de transmission (en bps/Hz)<sup>2</sup> varie suivant  $r \log(SNR)$ . De ce fait, le gain de multiplexage spatial peut être interprété comme la fraction des degrés de liberté disponibles dans le canal MIMO, tandis que le gain de diversité peut être interprété comme une mesure de la pertinence qu'un système peut atteindre à haut SNR. Le compromis optimal diversité-multiplexage définit le gain de diversité maximal possible pour un multiplexage donné pour n'importe quel schéma d'émission. En particulier, les codes conçus selon ces deux critères précités correspondent à deux points extrêmes de la courbe optimale : le point correspondant à la diversité maximale et un gain de multiplexage nul, et le point correspondant à un multiplexage spatial maximal et à un gain de diversité nul. En somme, ce compromis non seulement englobe ces deux critères, mais permet aussi de mieux comprendre le potentiel des canaux MIMO en termes de capacité et de performance d'erreur à haut SNR. Dans le chapitre suivant, on donnera une caractérisation plus formelle du compromis diversité-multiplexage.

### 1.3 Problématique et motivation

Le travail de Zheng et Tse a généré un nouveau critère plus global grâce auquel on peut mieux comparer les codes spatio-temporels. C'est en quelque sorte une limite de performance à haut SNR. Pour atteindre cette limite, des codes suffisamment longs sont requis. Toutefois, des codes aléatoires moins longs peuvent seulement atteindre une partie de cette limite. Ainsi, le compromis multiplexage-diversité de plusieurs stratégies d'émission a été évalué en [Zheng and Tse, 2003] : le codage

---

<sup>2</sup>Dans tout le texte, nous considérons des taux de transmissions normalisés par rapport à la largeur de bande disponible. De ce fait, nous confondons souvent le taux de transmission et l'efficacité spectrale sans perte de rigueur.



d'Alamouti [Alamouti, 1998], V-Blast [Wolniansky et al., 1998] et D-Blast [Foschini, 1996]. Il n'en demeure pas moins que le papier [Zheng and Tse, 2003] ne montre pas comment on peut concevoir des codes qui permettent d'atteindre cette limite. Cette question est restée un problème ouvert sur lequel beaucoup d'auteurs se sont penchés. Nous présentons un état de l'art concernant la construction des codes spatio-temporels optimaux dans le sens du compromis diversité-multiplexage dans le chapitre 2.

Cependant, bien que le compromis diversité-multiplexage représente un grand pas en avant vers la caractérisation des limites de performance des canaux à antennes multiples, il s'en dégage certaines interrogations qui constituent les principales motivations de ce travail :

1. La complexité de l'encodage et du décodage dépend entre autres de la longueur du code. Pour les constructions optimales présentées jusque là, le meilleur des codes en termes de longueur de bloc a une longueur  $T$  égale au nombre d'antennes à l'émission  $T = N_t$ . Il est clair que pour des configurations où  $N_t$  est grand, adopter un décodage à maximum de vraisemblance (Maximum Likelihood Decoding : MLD) vectoriel au récepteur est prohibitif en termes de complexité, de l'ordre de  $O(M^{TN_t})$ , où  $M$  est le nombre de points de la constellation utilisée. La substitution du MLD par un décodage sphérique [Zhao and Giannakis, 2005] permet une réduction de la complexité au prix d'une légère dégradation des performances.
2. Certes le compromis multiplexage-diversité permet d'établir les limites de performance des systèmes MIMO, mais ces limites sont très optimistes et quelque peu non réalistes dans la mesure où elles sont établies à haut SNR. Par ailleurs, dans des scénarios de communication pratiques, la plage de SNR

est plutôt limitée. Or, un code dont les performances sont médiocres à haut SNR peut être très concurrentiel à faible ou moyen SNR. De ce fait, il y a lieu d'adopter un critère plus réaliste qui s'étend à des valeurs de SNR plus pratiques, pour comparer les codes spatio-temporels.

3. Le compromis diversité-multiplexage a été établi sous l'hypothèse d'un canal à évanouissements de Rayleigh où les éléments du canal sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d.). Quel serait ce compromis pour des évanouissements plus généraux? En particulier, quel serait l'impact de la corrélation spatiale à l'émission ou à la réception, par exemple, sur le compromis multiplexage-diversité? Ceci conduirait à caractériser les limites de performance des canaux à antennes multiples dans des scénarios de communication plus réalistes.

Par ailleurs, en voulant relever le défi d'établir les limites de performance des canaux à antennes multiples dans des scénarios de communication plus réalistes, il est nécessaire de ne plus se restreindre au cas de transmission cohérente où "CSI" est disponible au récepteur ; pour la simple raison que ceci n'est pas toujours possible. En effet, dans une communication sans fil à très haute mobilité par exemple, il n'est pas raisonnable de supposer que le CSI est disponible au récepteur. Clairement, si les limites de performance des canaux MIMO sont relativement démystifiées dans un scénario cohérent, ils le sont beaucoup moins dans son vis-à-vis non-cohérent. Telle est une autre motivation de cette thèse.

## 1.4 Contributions

Les principales contributions présentées dans ce travail sont :

1. La conception d'un encodage adaptatif à rétroaction non systématique et li-

mitée (quelque bits) en vue d'atteindre le compromis diversité-multiplexage. L'utilité d'une telle conception est la minimisation du délai et de la complexité du décodage tout en minimisant la longueur de bloc  $T$ . À cet effet, un encodage optimal dans le sens du compromis diversité-multiplexage, pour un système de communication ayant  $N_t = N_r = 2$ , a été proposé. Il est le résultat de la commutation entre deux encodages ayant respectivement une longueur de bloc  $T = 1$  et  $T = 2$ . [Rezki et al., 2005a, Rezki et al., 2005b]

2. La caractérisation du potentiel des canaux MIMO dans un environnement plus réaliste par l'étude du compromis diversité-multiplexage à SNR fini dans des canaux à évanouissements de Rayleigh corrélés et non-corrélés. Plus particulièrement, la détermination d'une estimation du gain de diversité pour un SNR, un gain de multiplexage et un coefficient de corrélation donnés. En outre, quand des régimes asymptotiques à haut SNR ou à faible gain de multiplexage sont considérés, nous avons montré que notre démarche englobe des résultats connus dans la littérature concernant le compromis diversité-multiplexage asymptotique et par conséquent elle peut être considérée comme une généralisation de ceux-ci. [Rezki et al., 2006a, Rezki et al., 2008c, Rezki et al., 2006b, Rezki et al., 2007b]
  
3. L'analyse de la capacité des canaux de faible SNR, non-cohérents, discrets, sans mémoire et à évanouissements de Rayleigh. Nous avons calculé explicitement l'information mutuelle du canal à bas SNR qui est également une borne inférieure sur l'information mutuelle du canal à des valeurs de SNR pas nécessairement basses. Utilisant l'expression établie de l'information mutuelle du canal, et sachant qu'à faible SNR l'entrée optimale est discrète dont la

fonction de masse est donnée par :

$$f_x(t) = p_0\delta(t) + (1 - p_0)\delta(t - x_1),$$

où  $p_0$  est la probabilité que l'entrée soit nulle et où  $x_1$  est la localisation du point de masse non nulle ; nous avons pu fournir une relation fondamentale entre la localisation du point de masse non nulle  $x_1$  de la distribution optimale à l'entrée du canal et le SNR. Ensuite, une expression de la capacité non-cohérente exacte a été déterminée. Notre analyse a été aussi étendue à un canal MIMO, pour lequel nous avons établi des bornes sur la capacité pour une transmission non-cohérente. À bas SNR, nous avons démontré que ces bornes coïncident et de ce fait la capacité du canal MIMO est complètement caractérisée. Ceci constitue en soit, une autre façon de prouver que la signalisation marche-arrêt (ON-OFF) est optimale à faible SNR. [Rezki et al., 2007a]

## 1.5 Organisation de la thèse

Cette thèse est composée principalement de deux parties. La première partie focalise sur les communications cohérentes où le CSI est complètement disponible au récepteur. La deuxième partie concerne les communications non-cohérentes où aucune connaissance du canal au récepteur n'est supposée.

L'organisation de la première partie est comme suit : Dans le chapitre 2, nous commençons par décrire le modèle de communication adopté. Nous définissons ensuite, de manière formelle, les notions de diversité et de multiplexage et nous énonçons le résultat établi par Zheng et Tse relatif au compromis diversité-multiplexage à haut SNR. Nous expliquons aussi quelles sont les démarches qu'ils ont entreprises

pour établir ce compromis. Par la suite, une revue de littérature est présentée et quelques constructions de codes sont discutées. Dans le chapitre 3, nous présentons notre nouveau schéma d'encodage adaptatif. Nous analysons dans le chapitre 4 le potentiel des systèmes de communication à antennes multiples, en termes de gain de diversité, de pouvoir d'adaptation de grands taux de transmission (gain de multiplexage) et de gain de codage et/ou de gain d'antennes (Array Gain), dans des conditions plus réalistes de SNR et d'évanouissements.

Dans la deuxième partie, nous présentons un état de l'art des résultats obtenus récemment concernant le calcul de la capacité et le compromis diversité-multiplexage pour une transmission non-cohérente dans le chapitre 5. La capacité d'un canal SISO, discret, sans mémoire et à évanouissements de Rayleigh est analysée. Nous étendons cette analyse à un canal MIMO de même type dans le chapitre 6.

Enfin, une conclusion synthétise ce travail et propose des travaux futurs.

## CHAPITRE 2

### SYSTÈMES À ANTENNES MULTIPLES, DÉFINITIONS ET REVUE DE LITTÉRATURE

#### 2.1 Introduction

Ce chapitre porte sur la définition exacte de la problématique considérée, nous établissons aussi la notation utilisée et nous présentons les principaux résultats antérieurs.

La présentation de ce chapitre est comme suit : le modèle du système adopté sera donné dans la section 2.2. Dans la section 2.3, on explique conceptuellement la diversité et son impact quant à la pertinence du lien de communication dans les canaux à évanouissements. Par la suite, une relation entre la diversité maximale et le critère du rang des codes spatio-temporels sera élucidée [Tarokh et al., 1998]. La section 2.4, définit le multiplexage spatial en le rattachant avec les degrés de liberté disponibles dans les canaux MIMO. Dans la section 2.5, on définit le compromis diversité-multiplexage établi par Zheng et Tse [Zheng and Tse, 2003]. Une brève explication de la technique utilisée par ces auteurs pour établir ce compromis sera donnée. Les principales techniques de construction de codes spatio-temporels, optimaux dans le sens du compromis diversité-multiplexage seront discutées dans les sections 2.6 à 2.10.

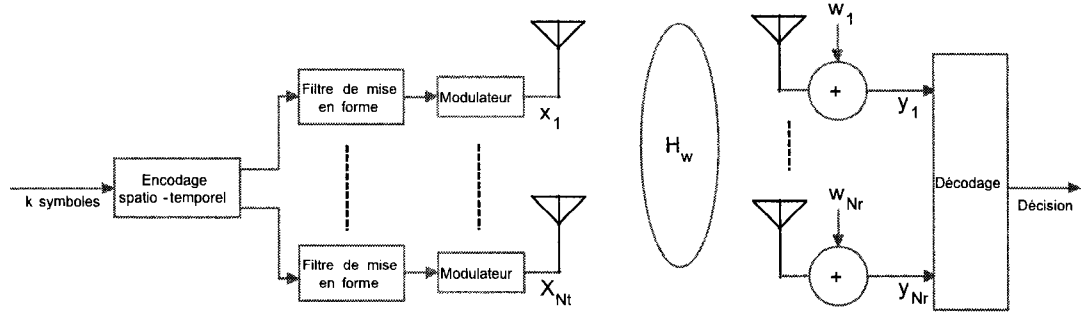


FIGURE 2.1 Modèle du canal MIMO

## 2.2 Modèle du canal MIMO

On considère un système de communication avec  $N_t$  antennes à l'émission et  $N_r$  antennes à la réception illustré à la figure 2.1. Ce modèle est régi par l'équation :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}_w \mathbf{X} + \mathbf{W}, \quad (2.1)$$

où le canal est représenté par la variable  $\mathbf{H}_w$ , une matrice complexe de dimension  $N_r \times N_t$ . Chaque élément  $(H_w)_{k,l}$  ( $k = 1, \dots, N_r$ ,  $l = 1, \dots, N_t$ ) de  $\mathbf{H}_w$  correspond au gain entre une antenne réceptrice  $k$  et une antenne émettrice  $l$ . Sauf indication contraire, ces éléments sont des variables aléatoires i.i.d., complexes et Gaussiens de moyenne nulle et de variance unitaire. Le modèle (2.1) suppose implicitement que la largeur de bande du signal d'entrée est très inférieure à la bande de cohérence du canal (Flat Fading Channel). On suppose un scénario de communication quasi-statique, où  $\mathbf{H}_w$  reste constante pendant la durée d'un bloc de longueur  $T$  symboles, mais peut varier d'un bloc à l'autre. Ceci peut être justifié si la longueur de bloc  $T$  est inférieure au temps de cohérence du canal (Slow Fading Channel). La variable  $\mathbf{X}$ , de dimension  $N_t \times T$ , représente le bloc de symboles à émettre. La variable  $\mathbf{Y}$ , de dimension  $N_r \times T$ , représente la collecte d'observations reçues durant  $T$  durées de symboles. La variable  $\mathbf{W}$ , de dimension  $N_r \times T$ , désigne un bruit additif complexe

blanc et Gaussien (Additif White Gaussian Noise : AWGN), de moyenne nulle et de variance  $\sigma_n^2$ . On désigne par  $P$  la puissance disponible par durée de symbole à l'émission. Dans tout ce qui suit, la variable  $SNR$  désigne le rapport entre la puissance du signal et la puissance du bruit par antenne réceptrice et s'exprime par :

$$SNR = \frac{P}{\sigma_n^2}. \quad (2.2)$$

Cette normalisation garantit que le  $SNR$  est indépendant du nombre d'antennes à l'émission et à la réception.

### 2.3 La diversité

Dans le cas d'un canal à évanouissement, la probabilité d'erreur de décodage est toujours supérieure à celle d'un canal Gaussien pour le même SNR. Ceci est dû principalement à l'effet des évanouissements dans le canal [Proakis, 2001]. De ce fait, une solution envisageable pour pallier aux dégradations causées par les évanouissements est de créer une sorte de redondance de l'information à émettre. Ainsi la probabilité que toutes ces répétitions s'évanouissent en même temps dans un canal à évanouissements lents décroît exponentiellement avec le nombre de répétitions émises. La redondance peut prendre plusieurs formes : codage à répétition (diversité temporelle), utilisation de plusieurs antennes à l'émission ou à la réception (diversité spatiale)...etc. Par exemple, si un signal non codé modulé en BPSK (Binary Phase-Shift Keying) est envoyé vers un récepteur équipé d'une seule antenne ( $N_t = 1, N_r = 1, T = 1$ ) à travers un canal à évanouissements de Rayleigh, alors la probabilité d'erreur moyenne à haut SNR est donnée par [Proakis, 2001] :

$$P_e(SNR) \approx \frac{1}{4} SNR^{-1}. \quad (2.3)$$



Par contre si le même signal est envoyé vers un récepteur équipé de deux antennes ( $N_t = 1, N_r = 2, T = 1$ ), la probabilité d'erreur devient [Proakis, 2001] :

$$P_e(SNR) \approx \frac{3}{16} SNR^{-2}. \quad (2.4)$$

Ainsi, la décroissance de la probabilité d'erreur dans le deuxième cas est plus rapide que dans le premier, et une antenne supplémentaire au niveau du récepteur permet d'obtenir une diversité de 2 contrairement à un système doté d'une seule antenne de part et d'autre, générant une diversité de 1 seulement. Une interprétation géométrique de la diversité consiste à considérer la pente de la courbe correspondant au tracé de  $\log P_e$  en fonction de  $\log SNR$  à haut SNR. De manière générale, pour un système MIMO muni de  $N_t$  antennes émettrices et  $N_r$  antennes réceptrices, et si le modèle de propagation adopté est à évanouissements lents, la diversité maximale disponible est  $N_t \times N_r$ . Pour obtenir cette diversité maximale, le code spatio-temporel  $\mathcal{C}$  doit satisfaire le critère de rang [Tarokh et al., 1998] :

$$\text{rank}(\mathbf{X} - \mathbf{X}') = N_t \quad \forall (\mathbf{X}, \mathbf{X}') \in \mathcal{C}^2, \mathbf{X} \neq \mathbf{X}', \quad (2.5)$$

où  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{X}'$  sont deux mots de code spatio-temporels distincts et où  $\mathcal{C}$  désigne l'ensemble des codes spatio-temporels. Le critère de rang stipule que pour atteindre une diversité maximale  $N_t \times N_r$ , il faut que la différence entre deux mots de codes distincts quelconques soit une matrice de 'rang plein' (Full Rank).

Par ailleurs, satisfaire le critère de rang nous assure une diversité maximale, sans pour autant garantir une bonne performance d'erreur du code spatio-temporel. Pour améliorer cette performance, il est nécessaire de veiller en plus à décaler la courbe  $P_e(SNR)$  vers la gauche le plus possible en vue d'augmenter le gain de codage. Ce critère est appelé critère de déterminant et s'énonce comme suit [Tarokh

et al., 1998] :

$$\max_{\substack{\mathbf{X}, \mathbf{X}' \in \mathcal{C} \\ \mathbf{X} \neq \mathbf{X}'}} \min |\det(\mathbf{X} - \mathbf{X}')| \quad (2.6)$$

Le critère de déterminant stipule que pour maximiser le gain de codage, il est nécessaire de maximiser le minimum des déterminants entre deux mots de codes distincts quelconques.

## 2.4 Le multiplexage spatial

Dans la section 1.2.2, nous avons montré comment les systèmes MIMO peuvent supporter de plus grands taux de transmission comparativement aux systèmes ayant une antenne à l'émission et une antenne à la réception, communément appelés SISO (Single Input Single Output). Nous donnons dans cette section une approche de la démonstration qui permet d'établir ceci.

Si on considère le modèle de canal quasi-statique décrit par l'équation (2.1), la capacité ergodique du canal a été calculée par Telatar [Telatar, 1999, Foschini, 1996]. Elle s'exprime par :

$$C(SNR) = E_{\mathbf{H}_w} \left[ \log \det \left( \mathbf{I}_{N_r} + \frac{SNR}{N_t} \mathbf{H}_w \mathbf{H}_w^\dagger \right) \right], \quad (2.7)$$

où  $E_{\mathbf{H}_w} [\cdot]$  désigne l'espérance mathématique sur toutes les réalisations du canal,  $\mathbf{I}_{N_r}$  est la matrice identité de dimension  $N_r$  et  $\mathbf{H}^\dagger$  est la transposée conjuguée de  $\mathbf{H}$ . À haut SNR, la capacité est donnée par la relation (1.1). Toutefois, pour communiquer de manière efficace (i.e. avec une probabilité d'erreur aussi petite qu'il est désiré), à des taux de transmission arbitrairement proches de la capacité ergodique, il est nécessaire de considérer une moyenne sur plusieurs réalisations du canal. Puisque notre modèle considère un encodage sur un bloc de durée  $T$ , il est

important d'adapter le taux de transmission en vue de compenser les variations du canal. Comme la capacité ergodique augmente linéairement avec le SNR, alors, pour communiquer à un taux de transmission égal à une fraction substantielle de la capacité, il est important de considérer des scénarios de communication où le taux de transmission varie aussi avec le SNR. On dit alors que ce schéma a un gain en multiplexage spatial  $r$ , si le taux de transmission qu'il supporte est donné par [Tse and Viswanath, 2005] :

$$R(\text{SNR}) \approx r \log(\text{SNR}) \quad (\text{bps/Hz}). \quad (2.8)$$

Le multiplexage spatial peut être interprété comme une réalisation d'une fraction des degrés de liberté du canal. Cette fraction reste constante même si le SNR augmente arbitrairement. À noter que si une telle définition est considérée, alors tout schéma de communication avec un taux de transmission constant, ne réalisera qu'une fraction négligeable de la capacité à haut SNR, et de ce fait, son gain de multiplexage spatial est nul.

Une autre interprétation du gain en multiplexage spatial consiste à considérer la décomposition de la matrice  $\mathbf{H}_w$  en valeurs singulières (Singular Value Decomposition : SVD). Cette décomposition permet de subdiviser le canal MIMO en un nombre  $\min(N_t, N_r)$  de canaux SISO. Les degrés de liberté disponibles dans un canal MIMO définissent ce qu'on appelle *les modes propres (Eigenmodes)*. Dans le cas d'une connaissance parfaite du canal à l'émission par exemple, la décomposition SVD peut être exploitée pour générer une allocation optimale de la puissance visant à maximiser la capacité. Cette allocation dépend en fait du régime du SNR. À SNR élevé, il est optimal d'allouer à chaque mode une puissance égale. Par contre à SNR faible, il est optimal de puiser la puissance disponible de façon successive en commençant d'abord par le mode le plus fort (ayant la valeur propre la plus élevée) (Waterfilling) [Paulraj et al., 2003].

## 2.5 Le compromis diversité-multiplexage

Pour un code spatio-temporel indexé par le SNR  $\{\mathcal{C}(SNR)\}$ , ayant un taux de transmission  $R(SNR)$ , la diversité  $d$  et le multiplexage  $r$  sont respectivement définis par :

$$d = - \lim_{SNR \rightarrow \infty} \frac{\log P_e(SNR)}{\log(SNR)} \quad (2.9)$$

$$r = \lim_{SNR \rightarrow \infty} \frac{R(SNR)}{\log(SNR)} \quad (2.10)$$

où  $P_e(SNR)$  est la probabilité d'erreur à un SNR donné et où  $\log(\cdot)$  désigne la fonction Logarithme à base 2. Il a été démontré dans [Zheng and Tse, 2003] que pour des codes de longueur  $T$ , le gain de diversité et le gain de multiplexage peuvent conjointement être obtenus moyennant un compromis optimal complètement caractérisé lorsque la longueur du code est suffisamment grande  $T \geq (N_t + N_r - 1)$ . Cette courbe optimale est l'ensemble des segments joignant les points  $(k, d^*(k))$ ,  $k = 0, \dots, \min(N_t, N_r)$  tels que :

$$d^*(k) = (N_t - k)(N_r - k). \quad (2.11)$$

La courbe optimale diversité-multiplexage est illustrée à la figure 2.2. Quand la longueur du code n'est pas assez grande, la courbe définie par l'équation (2.11) est une borne supérieure sur le gain maximum de diversité et de multiplexage. En particulier, la diversité maximale prévue par ce concept est égale à  $N_t N_r$  et correspond au point de la courbe où le multiplexage est nul :  $d^{max} = d^*(0) = N_t N_r$ . De manière réciproque, le multiplexage maximal obtenu par un code ne peut dépasser la valeur  $\min(N_t, N_r)$  correspondant au nombre maximal de degrés de liberté offert par le canal MIMO. Il s'agit du point de diversité nulle sur la courbe

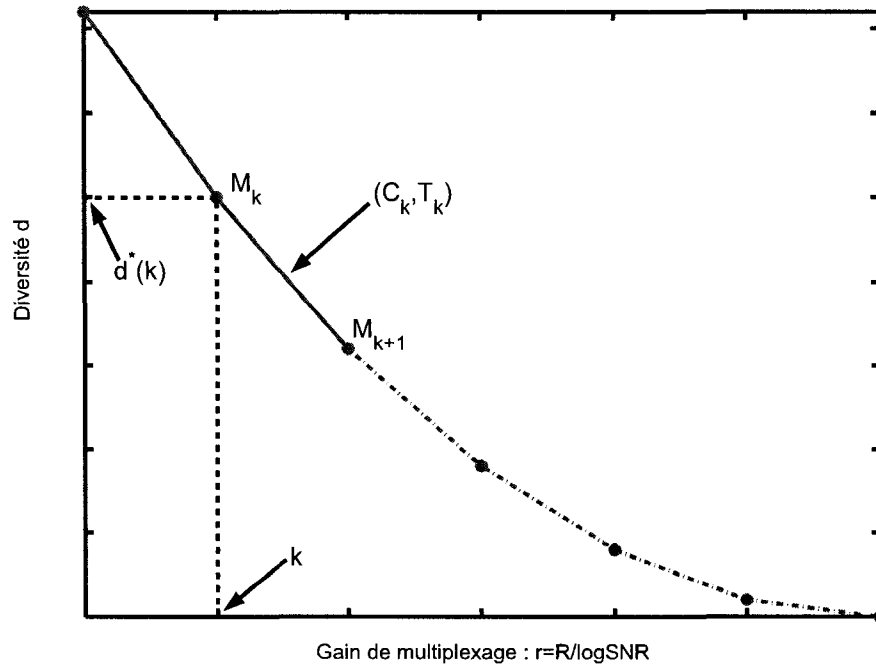


FIGURE 2.2 Compromis optimal entre la diversité et le multiplexage

optimale. Avant l'établissement du compromis diversité-multiplexage, la recherche en matière de codage spatio-temporel était focalisée sur la diversité pour un taux de transmission fixe ; pour évaluer cette diversité, on considère la probabilité d'erreur par paire. Ceci correspond en fait à la diversité maximale au point  $(r = 0, d(0))$ . Pour atteindre ce point, il suffit que la différence entre deux mots de codes distincts soient de rang total (critère de rang) [Tarokh et al., 1998]. Le problème qui se pose est comment distinguer entre deux codes qui atteignent tous les deux la diversité maximale. En définissant le gain de multiplexage comme le rapport entre le taux de transmission et la capacité ergodique, l'évaluation de la diversité en fonction du gain de multiplexage spatial est un critère de comparaison plus global des codes spatio-temporels. De ce fait, le compromis diversité-multiplexage définit un nouveau critère pour la conception des codes spatio-temporels où il est possible de maximiser de manière universelle le multiplexage et la diversité pour des taux de transmission

indexés par le SNR.

Pour établir le compromis diversité-multiplexage, Zheng et Tse ont distingué deux cas : le premier considère des codes de longueur suffisamment grande  $T \geq N_t + N_r - 1$  ; le deuxième considère des codes de longueur  $T < N_t + N_r - 1$  [Zheng and Tse, 2003].

Dans le cas où  $T \geq N_t + N_r - 1$ , ils ont prouvé que les erreurs de détection, à haut SNR, sont principalement dues aux événements de pannes. La panne ou la non disponibilité du canal est souvent considérée quand le canal à évanouissements n'est pas ergodique ou quand le canal est ergodique, mais varie lentement. C'est à dire que le canal  $\mathbf{H}_w$  est choisi arbitrairement selon un évanouissement déterminé, puis maintenu fixe pendant longtemps. On peut alors écrire :

$$\mathbf{y}_l = \mathbf{H}_w \mathbf{x}_l + \mathbf{w}_l, \quad l = 1, \dots, \infty \quad (2.12)$$

où  $\mathbf{x}_l \in \mathcal{C}^{N_t \times 1}$ ,  $\mathbf{y}_l \in \mathcal{C}^{N_r \times 1}$  sont, respectivement, l'entrée et la sortie du canal à l'instant  $l$  et où  $\mathbf{w}_l \in \mathcal{C}^{N_r \times 1}$  est un bruit additif Gaussien . Les événements de non disponibilité du canal sont définis comme l'ensemble des réalisations du canal pour lesquelles l'information mutuelle  $I$  (bps/Hz), définie par :

$$I(\mathbf{x}_l; \mathbf{y}_l | \mathbf{H}_w) = \log \det \left( \mathbf{I}_{N_r} + \frac{SNR}{N_t} \mathbf{H}_w \mathbf{Q} \mathbf{H}_w^\dagger \right), \quad (2.13)$$

est inférieure au taux de transmission :  $\{\mathbf{H}_w : I < R\}$ , où  $\mathbf{Q}$  est la matrice des covariances normalisées de l'entrée  $\mathbf{x}_l$ . De ce fait, la probabilité de non disponibilité  $P_{out}$  peut être définie par :

$$P_{out} = \inf_{\text{trace}(\mathbf{Q}) \leq N_t} \text{Prob} \left\{ \log \det \left( \mathbf{I}_{N_r} + \frac{SNR}{N_t} \mathbf{H}_w \mathbf{Q} \mathbf{H}_w^\dagger \right) < R \right\}. \quad (2.14)$$

Elle représente la borne inférieure sur toutes les valeurs de probabilité que la canal

soit non disponible ; et ce tenant compte de la contrainte de trace de l'entrée :  $trace(\mathbf{Q}) \leq N_t$ . Intuitivement, connaissant parfaitement le canal, un récepteur optimal peut commettre une erreur de décodage principalement en raison des faits suivants :

1. Un bruit additif atypiquement fort.
2. Certains mots de codes sont atypiquement trop rapprochés.
3. Un canal atypiquement singulier ('mauvais canal').

À haut  $SNR$ , les deux premières causes sont écartées. Il n'est donc pas étonnant que la probabilité d'erreur soit dominée par la probabilité de panne.

$$P_e(SNR) \doteq P_{out}, \quad (2.15)$$

où la notation  $f \doteq g$  signifie que  $\lim_{SNR \rightarrow \infty} \frac{\log f}{\log SNR} = \lim_{SNR \rightarrow \infty} \frac{\log g}{\log SNR}$ . Clairement, (2.15) est valable quand on dispose d'un code de longueur infinie,  $T = \infty$ . Quand  $T$  est fini,  $P_{out}$  est une borne inférieure sur la probabilité d'erreur. À mesure que  $T$  augmente, on devrait s'attendre à une amélioration des performances en termes de probabilité d'erreur. Toutefois, pour des valeurs de  $T \geq N_t + N_r - 1$ , le gain de diversité stagne et il n'est plus utile d'augmenter  $T$  davantage. Par conséquent, la caractérisation du compromis diversité-multiplexage consiste à établir comment varie  $P_{out}$  en fonction du SNR.

Dans le cas où  $T < N_t + N_r - 1$ , les événements de non disponibilité du canal ne sont plus prédominants et comme la longueur du code n'est pas assez grande, il est fort probable que des codes aléatoires issus d'un ensemble Gaussien i.i.d. soient très rapprochés et génèrent ainsi des erreurs. Dans ce cas, la probabilité de non disponibilité  $P_{out}$  n'est qu'une borne inférieure sur la probabilité d'erreur. Pour établir une borne supérieure sur  $P_e(SNR)$ , une borne de l'union sur la probabilité d'erreur par paire quand le canal n'est pas indisponible, a été utilisée [Zheng and

Tse, 2003]. Il s'avère que cette borne supérieure ne coïncide avec  $P_{out}(SNR)$  que pour de grandes valeurs du gain de multiplexage  $r$ . Pour l'améliorer, il est nécessaire d'isoler d'abord les événements d'erreurs typiques. En fait, il a été démontré que ces événements d'erreurs surviennent quand le canal n'est pas en panne et qu'ils sont plutôt dûs à l'existence de certains 'mauvais mots de codes' ('Bad Codes') qui ne sont pas très fréquents, mais qui ont une forte probabilité d'être confondus avec le mot de code réellement émis [Zheng and Tse, 2003]. Pour resserrer davantage la borne supérieure, une technique d'expurgation est adoptée. L'expurgation consiste à éliminer successivement ces 'mauvais mots de codes'. Malgré tous les efforts déployés, la borne supérieure trouvée ne coïncide pas avec la borne inférieure, et de ce fait, le compromis diversité-multiplexage est défini partiellement entre deux bornes.

Les auteurs ont par la suite calculé la diversité  $d(r)$  pour certains codes : Conception orthogonale (Orthogonal Design) et plus précisément le code d'Alamouti, V-BLAST avec un décorrelateur à la réception et D-BLAST avec un décorrelateur à erreur quadratique moyenne minimale (Minimum Mean Square Error : MMSE), et ont conclu qu'ils ne sont pas optimaux dans le sens du compromis diversité-multiplexage. Plus précisément, il a été avancé qu'à l'exception du code d'Alamouti [Alamouti, 1998] avec  $N_r = 1$ , aucun de ces codes n'est optimal au sens du compromis pour des nombres d'antennes  $N_t$  et  $N_r$  arbitraires. De ce fait, la problématique de trouver un code optimal au sens du compromis est mise en exergue, et plusieurs chercheurs se sont penchés sur la question. Avant de citer quelques travaux qui ont été présentés dans la littérature en réponse à cette problématique, il est important de distinguer entre les codes spatio-temporels optimaux dans le sens du compromis diversité-multiplexage et ceux dits à *plein taux de transmission et à pleine diversité (Full Rate Full Diversity)* [Ma and Giannakis, 2003, El Gamal and Damen, 2003]. Ces derniers sont conçus pour atteindre les deux points d'extrémités



du compromis seulement, alors que tout code optimal au sens du compromis est forcément à *plein taux de transmission et à pleine diversité*.

## 2.6 Code de Yao et Wornell

Pour construire des codes optimaux au sens du compromis diversité-multiplexage, Yao et Wornell ont considéré des systèmes MIMO ayant deux antennes à l'émission et au moins deux antennes à la réception  $N_t = 2$  et  $N_r \geq 2$  [Yao and Wornell, 2003]. Ils ont par la suite établi une condition suffisante pour qu'un code spatio-temporel soit optimal dans le sens du compromis. Pour plus de clarté, nous rappelons leur résultat principal [Yao and Wornell, 2003] :

**Théorème 1.** *Soit un système MIMO avec  $N_t = 2$ ,  $N_r \geq 2$  et  $T \geq 2$ . Considérons une famille de codes indexée par le taux de transmission  $R$ , telle que les énergies maximale et moyenne de chaque mot de code spatio-temporel obéit à :  $E_s \doteq \max_{\mathbf{X}} \|\mathbf{X}\|^2 \doteq 2^{R/2}$ , alors une condition suffisante pour que ce code soit optimal au sens du compromis diversité-multiplexage est que :*

$$\min_{\mathbf{X}_1 \neq \mathbf{X}_2} |\det(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)| \stackrel{\dot{\geq}}{\geq} 1. \quad (2.16)$$

Dans la relation (2.16), la notation  $f \stackrel{\dot{\geq}}{\geq} g$  signifie que  $\lim_{SNR \rightarrow \infty} \frac{\log f}{\log SNR} \geq \lim_{SNR \rightarrow \infty} \frac{\log g}{\log SNR}$ . La condition (2.16) signifie que le déterminant de la différence entre deux mots de code distincts quelconques ne tend pas vers zero (ne s'évanouit pas) pour des SNR grands. Elle est connue dans la littérature sous le nom NVD (Non-Vanishing-Determinant). Un code remplissant cette condition suffisante est ainsi construit. Quatre symboles d'informations  $s_{kl} \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}j$ , issus d'une constellation  $M^2$ -QAM

( $M^2 = 2^{R/2}$ ), sont codés en un seul mot de code  $\mathbf{X}$  comme suit :

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{22} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

et

$$\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{21} \\ s_{12} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Les rotations  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont choisies telles que la condition NVD est satisfaite. Plus intéressant encore, il est possible de choisir ces rotations de façon à maximiser le déterminant minimum, permettant ainsi de maximiser le gain de codage. Ces rotations sont ainsi calculées et valent :

$$(\theta_1, \theta_2) = \left( \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{2}\right), \frac{1}{2} \arctan(2) \right). \quad (2.19)$$

Au récepteur, un décodage sphérique vectoriel permet de détecter les symboles [Damen et al., 2003]. À noter que le code ainsi construit est optimal dans le sens du compromis même si sa longueur est  $T = 2 < N_t + N_r - 1$ . Ceci signifie que si des codes structurés sont utilisés, alors le compromis optimal est bien caractérisé même si  $T < N_t + N_r - 1$  et que les bornes supérieure et inférieure, caractérisant le compromis, coïncident.

## 2.7 Les codes 'LAST' d'El Gamal et al.

Dans [El Gamal et al., 2004], les auteurs ont considéré une construction à base de treillis ('Lattice'<sup>1</sup>) de codes spatio-temporels qu'ils ont appelé : les codes 'LAST' (Lattice Space-Time codes). Dans cette construction, un mot de code spatio-

---

<sup>1</sup>Une définition formelle du terme 'lattice' est fournie à l'annexe I.

temporel  $\mathbf{X}$  de dimension  $N_t \times T$  appartenant à  $\mathcal{C}$  est identifié par un vecteur  $\mathbf{x}$  de dimension  $N_t T \times 1$ , obtenu en alignant verticalement les colonnes de  $\mathbf{X}$ . Pour générer les éléments du mot de code, les auteurs utilisent un treillis  $\Lambda_c$  et un sous-treillis ('sublattice')  $\Lambda_s$ . Les éléments du mot de code sont assignés aux représentants  $\{\mathbf{c}\}$  d'une classe d'équivalence du sous-groupe  $\Lambda_s$  de  $\Lambda_c$ . Ces représentants doivent être inclus dans la région fondamentale  $\nu_s$  du sous-treillis  $\Lambda_s$ . Ainsi, le vecteur  $\mathbf{x}$  est donné par :

$$\mathbf{x} = \mathbf{c} - \mathbf{u} \quad (\text{mod } \Lambda_s), \quad (2.20)$$

où  $\mathbf{u}$  est un vecteur pseudo-aléatoire de  $\nu_s$ , choisi avec une probabilité uniforme. Le vecteur  $\mathbf{u}$  est supposé connu au niveau du récepteur. Les treillis  $\Lambda_s$  et  $\Lambda_c$  sont judicieusement choisis parmi un ensemble de treillis ayant une bonne couverture [El Gamal et al., 2004]. Il est établi par les auteurs de [El Gamal et al., 2004] que le code ainsi généré est optimal dans le sens du compromis diversité-multiplexage si  $T \geq N_t + N_r - 1$  et si un décodage en treillis à minimisation de la distance Euclidienne (Generalized Minimum Euclidean Distance Lattice Decoding) est utilisé.

## 2.8 Code de Dayal et Varanasi

La construction de codes spatio-temporels optimaux dans le sens du compromis diversité-multiplexage présentée par Dayal et Varanasi est basée sur la maximisation du gain de codage  $\Delta(\mathcal{C})$  du code  $\mathcal{C}$ , défini par [Dayal and Varanasi, 2005] :

$$\Delta(\mathcal{C}) = \min_{\text{rank}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) = d(\mathcal{C})} \prod_{k=1}^{d(\mathcal{C})} \lambda_k, \quad (2.21)$$

où la variable  $d(\mathcal{C})$  représente la diversité à l'émission définie par :

$$d(\mathcal{C}) = \min_{\mathbf{X}_1 \neq \mathbf{X}_2} \text{rank}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2), \quad (2.22)$$

et où  $\lambda_k$  sont les valeurs propres des matrices  $[(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)^\dagger]$ ,  $\mathbf{X}_1 \neq \mathbf{X}_2$ . Or, pour des systèmes dits à *pleine diversité à l'émission*, où  $N_t = T = d(\mathcal{C})$ , la relation (2.21) devient :

$$\Delta(\mathcal{C}) = \min_{\mathbf{X}_1 \neq \mathbf{X}_2} |\det(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)|^2. \quad (2.23)$$

Il s'avère donc que maximiser le gain de codage revient à maximiser le déterminant de la différence entre deux mots de code distincts. En particulier, si  $N_t = 2$ , si une matrice génératrice  $\mathbf{G}$  est judicieusement choisie, et si une modulation QAM est utilisée, la maximisation du gain de codage induit la propriété NVD qui garantit l'optimalité du code  $\mathcal{C}$  au sens du compromis diversité-multiplexage. En effet, pour  $\mathbf{G} = \mathbf{M}_\theta$ , une rotation réelle de dimension 2 définie par :

$$\mathbf{G} = \mathbf{M}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

le code  $\mathcal{C}$  est défini par :

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & \phi^{1/2}y_1 \\ \phi^{1/2}y_2 & x_2 \end{bmatrix} : [x_1, x_2]^T = \mathbf{M}_\theta \mathbf{u}, [y_1, y_2]^T = \mathbf{M}_\theta \mathbf{v}, \mathbf{u} \in I_q^2, \mathbf{v} \in I_q^2 \right\}, \quad (2.25)$$

où  $\phi = -j$  est un nombre qui garantit la séparation des couches  $[x_1, x_2]$  et  $[y_1, y_2]$ , en vue d'assurer la pleine diversité et où  $I_q$  désigne une constellation QAM standard de  $q$  points définie par  $I_q = \{a + jb : -\sqrt{q} + 1 \leq a, b \leq \sqrt{q} - 1, a, b \text{ impairs}\}$ . Le gain de codage maximal vaut  $\Delta(\mathcal{C}) = 3.2$ . Il est obtenu pour une valeur de  $\theta = 1/2 \arctan(2)$  et il est indépendant du SNR. Cette dernière propriété implique la propriété NVD et par conséquent ce code est aussi optimal dans le sens du compromis diversité-multiplexage pour  $N_t = T = 2$  et  $N_r$  arbitraire. De plus, ce code possède un gain de codage supérieur aux constructions précédentes. Ceci se traduit par de meilleures performances en termes de probabilité d'erreur.

## 2.9 Construction de codes basée sur l'algèbre de division

Dernièrement, des codes spatio-temporels basés sur l'algèbre ont été présentés [Belfiore et al., 2005, Elia et al., 2004, Kiran and Sundar Rajan, 2005, Sethuraman et al., 2003]. L'analyse de ces constructions fait appel à certaines définitions et propriétés de l'algèbre et de la théorie des nombres. Afin de ne pas alourdir le présent texte, nous les avons mises dans l'annexe I et proposons [Jacobson, 1985], [Herstein, 1968] et [Pierce, 1982] pour une lecture plus approfondie.

Un code spatio-temporel en bloc (Space-Time Bloc Code : STBC)  $\mathcal{C}$  a été défini comme un ensemble fini de mots de codes  $\mathbf{X}$  de dimension  $N_t \times T$ . Plus précisément,  $\mathcal{C}$  est un sous-ensemble de  $M_{N_t \times T}(\mathbb{C})$ , l'ensemble des matrices de dimension  $N_t \times T$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$ , l'ensemble des nombres complexes.

**Définition 1.** *Un STBC  $\mathcal{C}$  est défini sur une constellation de signaux  $\mathcal{S}$  si tous les éléments des matrices de  $\mathcal{C}$  sont des combinaisons linéaires complexes des éléments de  $\mathcal{S}$ . Par contre,  $\mathcal{C}$  est défini complètement sur  $\mathcal{S}$  si les éléments des matrices de  $\mathcal{C}$  appartiennent à  $\mathcal{S}$ .*

Pour concevoir de 'bons codes'<sup>2</sup>, il suffit de construire un ensemble de matrices qui a une structure algébrique adéquate. En particulier, il s'agit en premier lieu de créer un sous-ensemble infini  $\mathcal{C}_\infty$  d'un anneau de matrices, ayant certaines propriétés algébriques, puis choisir un sous-ensemble fini  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_\infty$ <sup>3</sup>. Pour mieux éclaircir ceci, commençons par un exemple.

Soit  $\mathcal{S}$  la constellation des signaux considérée et soit  $F = \mathbb{Q}(\mathcal{S})$  le corps formé par adjonction des éléments de  $\mathcal{S}$  à l'ensemble des rationnels  $\mathbb{Q}$ . Si on veut concevoir un ensemble de codes  $\mathcal{C} \subseteq M_{N_t \times T}(F)$  qui satisfait le critère de rang (2.5), il suffit

---

<sup>2</sup>le terme 'bons codes' veut dire des codes qui satisfont un critère de performance donné tel que : le critère de rang, le critère de déterminant, le compromis diversité-multiplexage...

<sup>3</sup>L'expression  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$  veut dire  $\mathcal{A}$  est inclus dans  $\mathcal{B}$  ou  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$

de trouver une algèbre de division  $A \subseteq M_{N_t \times T}(F)$  telle que : si  $\mathbf{X}, \mathbf{X}' \in A$ , alors  $(\mathbf{X} - \mathbf{X}') \in A$ , et donc  $(\mathbf{X} - \mathbf{X}')$  est inversible et de rang total. Pour parvenir à ceci, il suffit de trouver une algèbre de division  $D$  et un homomorphisme d'anneaux  $\phi : D \rightarrow M_{N_t \times T}(F)$ . Puisque une algèbre de division n'a pas d'idéal propre, alors le noyau de  $\phi$  (Kernel)  $\ker \phi = 0$ , et de ce fait  $\phi$  est une injection. Si on considère  $\mathcal{C}_\infty = \phi(D)$ , alors  $\mathcal{C}_\infty \subseteq M_{N_t \times T}(F)$  est aussi une algèbre de division, et satisfait aussi le critère de rang. Tout sous-ensemble  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_\infty$  est un STBC qui satisfait (2.5). Le choix de  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_\infty$  peut être réalisé sous différentes contraintes : satisfaire le critère de rang donné par (2.6), faciliter le codage et le décodage du STBC, atteindre le compromis diversité-multiplexage...etc. En somme, la conception des codes spatio-temporels à partir de l'algèbre de division se résume, dans ce cas, à trouver une algèbre de division  $D$  et un homomorphisme d'anneaux  $\phi : D \rightarrow M_{N_t \times T}(F)$ , étant donné une constellation  $\mathcal{S}$  et un nombre d'antennes à l'émission  $N_t$  [Sethuraman et al., 2003].

### 2.9.1 Construction générique (Generic Construction)

Supposons que  $D$  soit une algèbre de division donnée. Soit  $E$  un corps tel que  $E \subseteq Z(D)$ , où  $Z(D)$  est le centre de  $D$  (i.e,  $E \subseteq D$  et  $e \cdot d = d \cdot e$  pour tout  $e \in E$  et  $d \in D$ ). Naturellement,  $D$  est un espace vectoriel sur  $E$ . Dans la suite, on utilisera la notation  $D_E$  pour se référer à  $D$  comme espace vectoriel sur  $E$ . La fonction  $\lambda_d$  définie par :

$$\begin{aligned} \lambda_d & : D_E \rightarrow D_E \\ x & \mapsto d \cdot x, \end{aligned} \tag{2.26}$$

appartient à  $End_E(D)$ , l'ensemble des transformations linéaires sur  $D_E$ . De plus, il est facile de vérifier que l'application  $\Omega$  définie par :

$$\begin{aligned} \Omega &: D \rightarrow End_E(D) \\ d &\mapsto \lambda_d, \end{aligned} \tag{2.27}$$

est un homomorphisme d'anneaux. Par ailleurs, il est évident de construire un isomorphisme  $\cong$  de  $End_E(D)$  vers  $M_{N_t \times T}(E)$ . En effet, soit  $B = (d_1, \dots, d_N)$  une base de l'espace vectoriel  $D$  sur  $E$  supposé de dimension  $N$ . En appliquant la transformation (2.27) à chacun des éléments de cette base, nous obtenons une famille libre de transformations linéaires  $(\Omega(d_1), \dots, \Omega(d_N)) = (\lambda_{d_1}, \dots, \lambda_{d_N})$  sur  $End_E(D)$ . Si de plus, pour chacune des transformations linéaires  $\lambda_{d_i}, i = 1, \dots, N$  nous appliquons (2.26) pour les éléments  $d_j, j = 1, \dots, N$  de la base  $B$  et exprimons  $\lambda_{d_i}(d_j)$  comme une combinaison linéaire des éléments de la base  $B$  par :

$$\lambda_{d_i}(d_j) = \alpha_{j,1} \cdot d_1 + \dots + \alpha_{j,N} \cdot d_N, \tag{2.28}$$

où  $\alpha_{j,k}, j, k = 1, \dots, N$  appartiennent à  $D$ , alors le vecteur  $\alpha_j = (\alpha_{j,1}, \dots, \alpha_{j,N})^T$  représente la  $j^{\text{ième}}$  colonne de la matrice correspondante à la transformation  $\lambda_{d_i}$ . En utilisant cette technique, nous faisons correspondre à chaque transformation linéaire  $\lambda_{d_i}$  de  $End_E(D)$  une matrice  $\mathbf{M}$  de  $M_{N \times N}(E)$ . L'homomorphisme d'anneaux cherché sera donc  $\phi$  tel que :

$$\phi : D \xrightarrow{\Omega} End_E(D) \xrightarrow{\cong} M_{N \times N}(E). \tag{2.29}$$

De cette façon, il est possible de concevoir un code spatio-temporel de dimension  $N \times N$ , défini complètement sur  $E$ , où  $N$  est la dimension de l'algèbre  $D$  sur  $E$ , dénotée  $N = [D : E]$ . Si  $\mathcal{C}_\infty = Im(\phi)$ , alors tout sous-ensemble  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{C}_\infty$  est un candidat qui répond à (2.5). À titre d'exemple, nous considérons les corps qui

sont des exemples triviaux d'algèbres de division. Ainsi, étant donné  $F = \mathbb{Q}(\mathcal{S})$  et  $N \in \mathbb{N}$ , un corps extension  $K$  tel que  $N = [K : F]$ , satisfait  $F \subseteq Z(K) = K$ . Il suffit alors d'appliquer la construction décrite ci-haut pour construire le code spatio-temporel. Pour clarifier davantage la technique, nous décrivons quelques exemples présentés dans [Sethuraman et al., 2003].

Soient  $\mathcal{S}$  une constellation donnée et  $N = N_t$ , le nombre d'antennes à l'émission. Soit  $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}$  tel que  $\deg(\alpha) = N$ . Le polynôme minimal de  $\alpha$  sur  $F$  s'écrit sous la forme :

$$\min_F(\alpha) = X^N + a_{N-1}X^{N-1} + \dots + a_1X + a_0, \quad (2.30)$$

où  $a_i \in F$ . Soit  $K = F(\alpha)$ , alors  $K$  est un espace vectoriel sur  $F$  de dimension  $N$  et dont une base évidente est  $B = \{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{N-1}\}$ . Faisons ensuite correspondre à  $\alpha$  la transformation linéaire  $\lambda_\alpha$  définie par :

$$\lambda_\alpha(\alpha^i) = \alpha\alpha^i = \alpha^{i+1} \quad \text{pour } i = 0, \dots, N-2 \quad (2.31)$$

$$\lambda_\alpha(\alpha^{N-1}) = \alpha\alpha^{N-1} = \alpha^N = -a_0 - a_1\alpha^1 - \dots - a_{N-1}\alpha^{N-1}. \quad (2.32)$$

Par la suite, la matrice  $\mathbf{M}$  correspondant à  $\lambda_\alpha$ , relativement à la base  $B$  est donnée par :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{N-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Étant donné la structure de la matrice  $\mathbf{M}$  et la définition de  $\lambda_\alpha$ , il est facile de vérifier que la matrice correspondant à  $\lambda_{\alpha^i}$  est  $\mathbf{M}^i$ . L'homomorphisme d'anneaux



(2.29) s'écrit dans ce cas :

$$\begin{aligned} \phi : \quad K & \xrightarrow{\Omega} \text{End}_E(D) \xrightarrow{\cong} M_{N_t \times T}(E) \\ k = (b_0, b_1, \dots, b_N) & \mapsto \lambda_k \mapsto b_0 \mathbf{I}_N + b_1 \mathbf{M} + \dots + b_{N-1} \mathbf{M}^{N-1}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

De ce fait,  $\text{Im}(\phi) = \{b_0 \mathbf{I}_N + b_1 \mathbf{M} + \dots + b_{N-1} \mathbf{M}^{N-1} : b_i \in F\} \subset M_{N \times N}(F)$  est un sous-ensemble de matrices qui satisfont le critère de rang (2.5), et tout sous-ensemble  $\mathcal{C} \subset \text{Im}(\phi)$  est un STBC qui remplit aussi ce critère. Bien évidemment, des simplifications sont possibles si l'extension  $K$  est judicieusement choisie. En particulier, s'il existe  $\gamma \in F^*$  tel que le polynôme  $X^N - \gamma$  est irréductible dans  $F[X]$  et  $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}$  avec  $\min_F(\alpha) = X^N - \gamma$ , alors la matrice  $\mathbf{M}$  devient :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

et de ce fait, si  $k = (b_0, b_1, \dots, b_N) \in K$ , alors la matrice correspondante est :

$$\mathbf{M}_{(b_0, b_1, \dots, b_N)} = \begin{pmatrix} b_0 & \gamma b_{N-1} & \gamma b_{N-2} & \dots & \gamma b_3 & \gamma b_2 & \gamma b_1 \\ b_1 & b_0 & \gamma b_{N-1} & \dots & \gamma b_4 & \gamma b_3 & \gamma b_2 \\ b_2 & b_1 & b_0 & \dots & \gamma b_5 & \gamma b_4 & \gamma b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{N-2} & b_{N-3} & b_{N-4} & \dots & b_1 & b_0 & \gamma b_{N-1} \\ b_{N-1} & b_{N-2} & b_{N-3} & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

et le mot de code spatio-temporel a la même forme.

Toutefois, une question mérite d'être posée : comment choisir  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_\infty$  ? À première vue, il serait souhaitable de construire un STBC  $\mathcal{C}$  complètement défini sur  $\mathcal{S}$ . En effet, si tous les éléments du mot de code sont issus de  $\mathcal{S}$ , la répartition énergétique en termes de rapport entre l'énergie maximale et l'énergie moyenne serait conservée. De plus au niveau du récepteur, le décodage ne requiert pas plus d'opérations de prétraitement, réduisant ainsi la complexité de calcul. Néanmoins, ceci n'est pas sans prix, puisque si  $\mathcal{C}$  est complètement défini sur  $\mathcal{S}$ , le taux de transmission maximal est 1 symbole par slot temporel (1 symbol per time slot). Supposons, par exemple, que  $\mathcal{C} = \{\mathbf{M}_{(b_0, b_1, \dots, b_N)} : b_i \in \mathcal{S}\}$ , alors une condition suffisante pour que  $\mathcal{C}$  soit complètement défini sur  $\mathcal{S}$  est que  $\gamma\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$ . Si on choisit  $\gamma$  comme une racine de l'unité telle que  $\mathcal{S}$  est invariante par rotation de  $\gamma$ , alors cette condition est remplie [Sethuraman et al., 2003]. Par exemple, si la constellation considérée est M-PSK, alors  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_M = \{\omega_M^k : 0 \leq k < M\}$  est invariante sous une rotation  $\gamma = \omega_M = e^{2\pi j/M}$ . À titre d'illustration, nous citons l'exemple 2.9.1 tiré de [Sethuraman et al., 2003].

---

**Exemple 2.9.1**

---

$N = N_t = 3$ , 6-PSK,  $\mathcal{S}_6 = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^5\}$ , où  $\omega = \omega_6 = e^{2\pi j/6}$ ,  
 $F = \mathbb{Q}(\mathcal{S}) = \mathbb{Q}(\omega)$ . Le polynôme  $X^3 - \omega$  est irréductible sur  $\mathbb{Q}(\omega)$ , et  
le code  $\mathcal{C}$  défini par :

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} b_0 & \omega b_2 & \omega b_1 \\ b_1 & b_0 & \omega b_2 \\ b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix} : b_0, b_1, b_2 \in \mathcal{S}_6 \right\}, \quad (2.37)$$

est de diversité totale et son taux de transmission est de 1 symbole par slot temporel.

---

Il est important de noter que l'algèbre de division  $D$  n'est pas forcément commutative. C'est la raison pour laquelle  $D$  a été considérée comme un espace vectoriel sur son centre ou un corps inclus dans son centre. En fait, il est aussi possible de construire  $D$  comme un espace vectoriel défini à droite sur tout corps  $K \subseteq D$ , non forcément inclus dans  $Z(D)$ , en définissant une multiplication scalaire à droite. L'application  $\lambda_d$  continue d'être linéaire sur  $D_K$  et tout le mécanisme de construction du STBC demeure valide. Une illustration de ceci est la construction basée sur l'algèbre de division cyclique.

### 2.9.2 Construction basée sur l'algèbre de division cyclique

**Définition 2.** *Une algèbre de division cyclique  $D$  sur un corps  $F$  est une algèbre de division de centre  $Z(D) = F$  et ayant un sous-corps maximal  $K$  tel que  $K$  est un corps de Galois sur  $F$  et où  $Gal(K/F)$  est cyclique.<sup>4</sup>*

Naturellement  $D$  est un espace vectoriel sur son centre  $F$ . Si la dimension de  $D$  sur  $F$  est finie<sup>5</sup>, alors la dimensionnalité  $[D : F]$  est un carré parfait<sup>6</sup>. Posons  $N^2 = [D : F]$ , où  $N$  est appelé l'index de  $D$ . Soit  $\sigma$  un générateur du groupe cyclique  $Gal(K/F)$ , alors l'ordre de  $\sigma$  est  $N$  et on peut démontrer que [Jacobson, 1985], [Pierce, 1982], [Herstein, 1968] :

$$\exists z \in D, \exists \delta \in F^* \quad : z^N = \delta \quad (2.38)$$

$$\forall k \in K \quad : kz = z\sigma(k), \quad (2.39)$$

---

<sup>4</sup>Les définitions des différents termes sont fournies à l'annexe I

<sup>5</sup>Ce qu'on suppose ici pour les présentes constructions

<sup>6</sup>C'est un résultat d'algèbre bien connu et utilisé dans [Sethuraman et al., 2003]

et  $D$  est décomposable sous la forme :

$$D = K \oplus zK \oplus z^2K \oplus \dots \oplus z^{N-1}K, \quad (2.40)$$

où la notation  $C = A \oplus B$  signifie que tout élément  $c \in C$  s'écrit sous la forme  $c = a + b$ , où  $a \in A$  et  $b \in B$ . Ainsi,  $D$  est un espace vectoriel défini à droite sur  $K$ , dont une base triviale est  $B = \{1, z, z^2, \dots, z^{N-1}\}$ . Par le même mécanisme cité précédemment et en utilisant la relation (2.39), on démontre que pour tout  $d = k_0 + zk_1 + \dots + z^{N-1}k_{N-1} \in D$ , la matrice correspondante est  $\mathbf{M}_d$  donnée par :

$$\mathbf{M}_d = \begin{pmatrix} k_0 & \delta\sigma(k_{N-1}) & \delta\sigma^2(k_{N-2}) & \dots & \delta\sigma^{N-2}(k_2) & \delta\sigma^{N-1}(k_1) \\ k_1 & \sigma(k_0) & \delta\sigma^2(k_{N-1}) & \dots & \delta\sigma^{N-2}(k_3) & \delta\sigma^{N-1}(k_2) \\ k_2 & \sigma(k_1) & \sigma^2(k_0) & \dots & \delta\sigma^{N-2}(k_4) & \delta\sigma^{N-1}(k_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_{N-2} & \sigma(k_{N-3}) & \sigma^2(k_{N-4}) & \dots & \sigma^{N-2}(k_0) & \delta\sigma^{N-1}(k_{N-1}) \\ k_{N-1} & \sigma(k_{N-2}) & \sigma^2(k_{N-3}) & \dots & \sigma^{N-2}(k_1) & \sigma^{N-1}(k_0) \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

L'ensemble de toutes les matrices de cette forme définit  $\mathcal{C}_\infty = \{\mathbf{M}_{k_0+zk_1+\dots+z^{N-1}k_{N-1}} : k_i \in K\}$  et tout sous-ensemble fini de  $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_\infty$  est un STBC de diversité totale. L'exemple 2.9.2 illustre la construction de codes à partir de l'algèbre de division cyclique.

La question qui se pose maintenant est la suivante : Étant donné  $N = N_t$  antennes émettrices et une constellation  $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}$ , comment construire une algèbre de division  $D$  d'index  $N$  telle que :

$$D \overset{N}{\supseteq} K \overset{N}{\supseteq} F \supseteq \mathbb{Q}(\mathcal{S}) \quad (2.45)$$

Sethuraman et al. ont proposé la démarche suivante [Sethuraman et al., 2003] :

- Choisir  $t$  transcendant sur  $\mathbb{Q}(\mathcal{S})$
- Construire  $F = \mathbb{Q}(\mathcal{S}, t, \omega_N)$ , où  $\omega_N$  est une racine de l'unité.

---

**Exemple 2.9.2**


---

Les quaternaires de Hamilton  $\mathbb{H}$  sont des algèbres de division sur  $\mathbb{R}$ , l'ensemble des réels. Une base de  $\mathbb{H}$  sur  $\mathbb{R}$  est  $B = \{1, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ , où  $\hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = -1$  et où  $\hat{i}\hat{j} = -\hat{j}\hat{i} = \hat{k}$ . Un sous-corps maximal de  $\mathbb{H}$  est  $\mathbb{R} \oplus \hat{i}\mathbb{R}$ , qui n'est autre que  $\mathbb{C}$ . Puisque  $\mathbb{C}/\mathbb{R}$  est une extension de Galois cyclique, alors  $\mathbb{H}$  est une algèbre de division cyclique. L'application  $\sigma$  associe à chaque élément de  $\mathbb{C}$  son conjugué ( $a + \hat{i}b \mapsto a - \hat{i}b$ ),  $z = \hat{j}$  et  $\delta = z^2 = -1$ . On vérifie que :

$$(a + \hat{i}b)\hat{j} = \hat{j}\sigma(a + \hat{i}b) \quad (2.42)$$

$$\hat{j}^2 = -1 \in \mathbb{R}, \quad (2.43)$$

la décomposition (2.40) s'écrit dans ce cas :  $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \hat{j}\mathbb{C}$ . Le code  $\mathcal{C}_\infty$  généré en conséquence est l'ensemble des matrices de la forme :

$$M_{\omega_0 + \hat{j}\omega_1} = \begin{pmatrix} \omega_0 & -\bar{\omega}_1 \\ \omega_1 & \bar{\omega}_0 \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

qui n'est autre que le fameux code d'Alamouti [Alamouti, 1998].

---

– Construire  $K = F(t_N = t^{1/N})$  un corps extension de  $F$  tel que  $K$  est le corps de décomposition du polynôme  $X^N - t$  sur  $F$ .

Le corps  $K$  ainsi construit, est une extension cyclique de  $F$  de degré  $N$ . L'exemple (2.9.3) est donné à titre d'illustration.

Il est important de noter que comme le code construit dans l'exemple (2.9.3) n'est pas complètement défini sur  $\mathcal{S}$ , il est possible d'obtenir un taux de transmission, en termes de nombre de symboles émis par utilisation du canal, supérieur à 1. En effet,  $|\mathcal{C}| = |\mathcal{S}|^{62}$  et de ce fait, le taux de transmission vaut  $\frac{1}{6} \log_{|\mathcal{S}|} |\mathcal{S}|^{36} = 6$ .

En somme, les techniques présentées dans cette section ont pour objectif de construire des codes spatio-temporels ayant une diversité totale. Il est clair que les constructions à base de l'algèbre sont systématiques, diversifiées et s'inspirent d'une branche mathématique largement explorée et assez développée. Ceci lui confère en fait une souplesse quant au choix des différentes composantes de la construction ( $F$ ,

---

**Exemple 2.9.3**


---

Soient  $N = N_t = 6$  et  $\mathcal{S}$  la constellation considérée. Construisons  $F$  tel que  $F = \mathbb{Q}(\mathcal{S}, \omega_6, t)$ , où  $\omega_6 = e^{2i\pi/6}$  par exemple et  $t \in \mathbb{C}$  transcendant ( $t = e$  ou  $t = \pi$  par exemple). Le corps  $K = F(t_6 = t^{1/6})$  est une extension cyclique et la fonction génératrice  $\sigma$ , du groupe Galois  $Gal(K/F)$  est définie par :  $t_6 \mapsto \omega_6 t_6$ . De ce fait, on aboutit au STBC de pleine diversité, pour 6 antennes émettrices :

$$\mathcal{C} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{(6)}} \begin{pmatrix} g_{0,0} & \delta g_{1,5} & \delta g_{2,4} & \delta g_{3,3} & \delta g_{4,2} & \delta g_{5,1} \\ g_{0,1} & g_{1,0} & \delta g_{2,5} & \delta g_{3,4} & \delta g_{4,3} & \delta g_{5,2} \\ g_{0,2} & g_{1,1} & g_{2,0} & \delta g_{3,5} & \delta g_{4,4} & \delta g_{5,3} \\ g_{0,3} & g_{1,2} & g_{2,1} & g_{3,0} & \delta g_{4,5} & \delta g_{5,4} \\ g_{0,4} & g_{1,3} & g_{2,2} & g_{3,1} & g_{4,0} & \delta g_{5,5} \\ g_{0,5} & g_{1,4} & g_{2,3} & g_{3,2} & g_{4,1} & g_{5,0} \end{pmatrix} \right\}, \quad (2.46)$$

où  $\delta$  est transcendant sur  $\mathbb{C}$  et  $g_{i,j} = \sum_{l=0}^5 f_{j,l} (\omega_6^i t_6)^l$ , avec  $f_{i,j} \in \mathcal{S} \subset F$  pour  $i, j = 0, 1, \dots, 5$ . le facteur  $\frac{1}{\sqrt{6}}$  assure une normalisation de la puissance transmise par antenne émettrice par slot temporel ou par utilisation du canal.

---

$K$ , les éléments transcendants, ...etc.). À cet effet, on peut se demander s'il ne serait pas possible de tirer profit de cette souplesse en vue de construire des STBC qui répondent non seulement au critère de rang, mais à d'autres critères plus globaux. En particulier, y-a-t-il moyen de construire des STBC optimaux dans le sens du compromis diversité-multiplexage, à base de l'algèbre de division ? La réponse est oui, et quelques constructions ainsi générées, présentées dans la littérature, seront discutées dans ce qui suit.

## 2.10 Construction de codes optimaux à partir de l'algèbre de division

La méthode de construction de Sethuraman et al., décrite dans le section 2.9, est basée sur la maximisation du rang de la différence entre deux mots de code.

Naturellement  $\Delta_{min}(\mathcal{C}) = \min_{\substack{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathcal{C} \\ \mathbf{X}_1 \neq \mathbf{X}_2}} |\det(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)|^2$  est non nul. Toutefois, on sou-

haiterait maximiser  $\Delta_{min}(\mathcal{C})$  en vue d'obtenir un meilleur gain de codage. Or, la précédente construction ne donne aucune garantie quant au gain de codage. Plus précisément, si on veut émettre à grande efficacité spectrale, la constellation  $\mathcal{S}$  devient large et  $\Delta_{min}(\mathcal{C})$  devient de plus en plus petit. Ceci est dû au fait que l'ensemble  $\{\det(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) : \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathcal{C}_\infty\}$  est dense dans  $\mathbb{C}$  et donc  $\inf_{\substack{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathcal{C} \\ \mathbf{X}_1 \neq \mathbf{X}_2}} |\det(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)| = 0$ . Un moyen pour pallier à cette limitation est de choisir  $\delta$  tel que  $\delta \in F^*$  et  $\delta^t, t = 1, 2, \dots, N$ , n'est la norme d'aucun élément de  $K^*$  [Belfiore and Rekaya, 2003], [Elia et al., 2004], [Belfiore et al., 2005], [Kiran and Sundar Rajan, 2005]. Un tel choix garantit que :

$$\inf_{\substack{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathcal{C} \\ \mathbf{X}_1 \neq \mathbf{X}_2}} |\det(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)| = \min_{\substack{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathcal{C} \\ \mathbf{X}_1 \neq \mathbf{X}_2}} |\det(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)| > 0. \quad (2.47)$$

Mais la dernière inégalité est équivalente à la propriété NVD décrite dans (2.16)<sup>7</sup> qui, lorsque le code est de rendement total (le nombre de symboles émis par utilisation du canal est égal à  $N_t$ ), est une condition suffisante pour atteindre le compromis diversité-multiplexage. Nous présenterons ci-après des constructions à partir de l'algèbre de division qui sont de rendement total, remplissent la propriété NVD et par conséquent sont optimaux dans le sens du compromis diversité-multiplexage.

### 2.10.1 Les treillis quaternaires, les codes 'parfaits' et le code en or

En vue de construire des codes spatio-temporels avec la propriété NVD (le déterminant de la différence entre deux mots de code ne s'évanouit pas si la taille de la constellation considérée augmente arbitrairement), une classe de codes dont le déterminant reste constant indépendamment de la constellation, a été présentée

---

<sup>7</sup>Bien que la propriété NVD comme condition suffisante pour atteindre le compromis optimal diversité-multiplexage a été établie pour  $N_t = 2$ , on verra par la suite qu'elle est aussi suffisante pour  $N_t$  arbitraire comme il a été démontré dans [Elia et al., 2004].

par Belfiore et al. dans [Belfiore et al., 2005], [Belfiore and Rekaya, 2003] et [Oggier et al., 2006]. Cette construction est basée sur l'algèbre cyclique ou l'algèbre simple centrale (Central Simple Algebras). En effet, considérons par exemple une constellation QAM. Si les éléments du mot de code spatio-temporel sont issus de  $\mathcal{O}_K$ , l'anneau des entiers de  $K$ , et si  $\delta$  est choisi tel que  $\delta \in \mathcal{O}_F$ , l'anneau des entiers de  $F$  et  $\delta, \dots, \delta^{N-1}$  ne sont les normes d'aucun élément de  $K^*$ , alors l'ensemble  $\{\det(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) : \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathcal{C}_\infty\}$  n'est plus dense dans  $\mathbb{C}$ , il ne prend par contre que des valeurs discrètes de  $\mathcal{O}_F$  et de ce fait (2.47) est satisfaite indépendamment de la taille de la constellation QAM utilisée.

Plus précisément, l'approche adoptée dans cette construction est comme suit :

- considérant une constellation QAM par exemple, alors on a  $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}[j] = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(j)}$ , l'anneau des entiers de  $\mathbb{Q}(j)$ . Ainsi  $F = \mathbb{Q}(j)$  et la constellation  $\mathcal{S}$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{O}_F$ .
- Soient  $K$  une extension cyclique de  $F$  de degré  $N$  et  $\sigma$  un générateur du corps de Galois  $Gal(K/F)$  et  $\delta \in \mathcal{O}_F$ . L'algèbre ainsi construite  $\mathcal{D}$  s'écrit :

$$\mathcal{D} = (K/F, \sigma, \delta) = K \oplus zK \oplus z^2K \oplus \dots \oplus z^{N-1}K, \quad (2.48)$$

où  $(z, z^2, \dots, z^{N-1})$  est une base de  $D$  sur  $K$ .

- Choisir  $\mathcal{I}$  un idéal de  $\mathcal{O}_K$  et construire ainsi le code STBC  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$  défini par :

$$\mathcal{C}_{\mathcal{I}} = \left\{ \left( \begin{array}{ccccc} k_0 & \delta\sigma(k_{N-1}) & \dots & \delta\sigma^{N-2}(k_2) & \delta\sigma^{N-1}(k_1) \\ k_1 & \sigma(k_0) & \dots & \delta\sigma^{N-2}(k_3) & \delta\sigma^{N-1}(k_2) \\ k_2 & \sigma(k_1) & \dots & \delta\sigma^{N-2}(k_4) & \delta\sigma^{N-1}(k_3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_{N-2} & \sigma(k_{N-3}) & \dots & \sigma^{N-2}(k_0) & \delta\sigma^{N-1}(k_{N-1}) \\ k_{N-1} & \sigma(k_{N-2}) & \dots & \sigma^{N-2}(k_1) & \sigma^{N-1}(k_0) \end{array} \right) : k_i \in \mathcal{I}, i = 0, \dots, N-1 \right\}. \quad (2.49)$$



Ainsi, dans [Belfiore and Rekaya, 2003], les auteurs ont décrit une approche pour construire des codes spatio-temporels carrés ( $N_t = T$ ) pour des configurations où  $N_t = T = 2^k$  et  $N_t = T = 3 \cdot 2^k$ . Certains exemples y sont donnés pour  $N_t = T = 2, 3, 4$ . À partir de ce concept, Oggier et al. [Oggier et al., 2006] ont, de leur part, construit des codes qu'ils ont appelés 'codes parfaits' qui n'existent que pour des configurations spécifiques de  $N_t$  et  $T$  :  $N_t \times T = 2 \times 2, 3 \times 3, 4 \times 4, 6 \times 6$ . Selon [Oggier et al., 2006], un code de dimension  $N_t \times T$ , avec  $T = N_t$  est dit 'parfait' s'il répond aux critères suivants :

- il est de rendement total envoyant ainsi  $N_t^2$  symboles d'information indépendants issus d'une constellation QAM.
- le déterminant minimum du code  $\mathcal{C}_\infty$  est non nul.
- l'énergie nécessaire à l'envoi de chaque couche du mot de code, formée d'une combinaison linéaire de symboles d'information, est la même que celle nécessaire à l'envoi de ces mêmes symboles d'information (le codage des symboles d'information n'induit pas une expansion de l'énergie du système.)
- l'énergie moyenne utilisée par chaque antenne émettrice est constante durant tous les  $T$  durées de symboles.

Le code en or<sup>8</sup>, conçu pour une configuration MIMO à  $N_t = T = 2$  et présenté indépendamment dans [Belfiore et al., 2005], est membre de cette famille. Il est illustré dans l'exemple 2.10.1.

### 2.10.2 Construction explicite de codes STBC optimaux

La démarche présentée dans [Belfiore and Rekaya, 2003] et dans [Belfiore et al., 2005] constitue en fait un premier pas vers une construction systématique de codes STBC ayant un taux de transmission maximal en termes de nombre de symboles

---

<sup>8</sup>Le nom code en or est inspiré du nombre d'or bien connu dans la théorie des nombres.

---

**Exemple 2.10.1**


---

Soient  $N = N_t = T = 2$  et  $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  le nombre d'or. Supposons que la constellation considérée  $\mathcal{S}$  est une QAM telle que  $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}[j]$ . Soit  $K = \mathbb{Q}(j, \sqrt{5}) = \{a + b\theta : a, b \in \mathbb{Q}(j)\}$  une extension quadratique de  $\mathbb{Q}(j)$  de polynôme minimal  $X^2 - X - 1$ . Les racines de ce polynôme sont  $\theta$  et  $\bar{\theta} = 1 - \theta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Le code STBC  $\mathcal{C}$  est défini par :

$$\mathcal{C} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \alpha(a + b\theta) & \alpha(c + d\theta) \\ \delta\bar{\alpha}(c + d\theta) & \bar{\alpha}(a + b\theta) \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathcal{S} \right\},$$

où  $\alpha = 1 + j - j\theta$ ,  $\bar{\alpha} = 1 + j(1 - \bar{\theta})$  et le facteur  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  est pour la normalisation de l'énergie émise. Le déterminant minimum du code en or est :

$$\Delta_{min}(\mathcal{C}) = \min_{X_1, X_2 \in \mathcal{C}_{X_1 \neq X_2}} |\det(X_1 - X_2)|^2 = \frac{4}{5}.$$


---

indépendants par utilisation du canal (le nombre de symboles indépendants émis par utilisation du canal est égal à  $N_t$ ), une diversité maximale et qui sont optimaux dans le sens du compromis diversité-multiplexage. Toutefois, cette construction n'est possible que pour des configurations où  $N_t = T = 2^k$  et  $N_t = T = 3 \cdot 2^k$ . Cette limitation est due principalement à la difficulté de construire des corps extensions cycliques sur  $\mathbb{Q}(j)$  de degré arbitraire et de trouver  $\delta \in \mathcal{O}_F$  tel que  $\delta, \dots, \delta^{N-1}$  ne sont la norme d'aucun élément de  $K^*$ . De leur part, Kiran et Sundar Rajan ont étendu cette construction à toutes les configurations  $N_t = T = 2^k$ ,  $3 \cdot 2^k$ ,  $2 \cdot 3^k$  et  $N_t = T = q^k(q-1)/2$ , où  $q = 4s+3$  est un entier premier [Kiran and Sundar Rajan, 2005].

Par ailleurs, l'un des résultats le plus important, en matière de conception de STBC optimaux est présenté dans [Elia et al., 2004]. Il consiste en une généralisation de la condition suffisante (2.16) établie préalablement pour  $N_t = 2$  dans [Yao and Wornell, 2003], pour qu'un code soit optimal dans le sens du compromis diversité-multiplexage. Et d'ajouter, se basant sur la construction de Kiran et Sundar Rajan dans [Kiran and Sundar Rajan, 2005], Elia et al. étendent davantage la construc-

tion de STBC à base de l'algèbre de division cyclique pour  $N_t = T$  quelconque et pour un nombre d'antennes réceptrices  $N_r$  arbitraire [Elia et al., 2004], [Elia et al., 2005]. Cette construction est baptisée STBC à délai minimal ( $T = N_t$ ). De plus, une technique pour construire des STBC dits rectangulaires, où  $T > N_t$ , est aussi présentée dans [Elia et al., 2004]. Cette dernière se déduit de la première en construisant le STBC pour une configuration fictive où  $N'_t = T$ , puis en procédant à la suppression des  $T - N_t$  lignes des mots de codes initiaux. Le code de dimension  $N_t \times T$  ainsi obtenu, est optimal dans le sens du compromis diversité-multiplexage.

En résumé, la revue bibliographique décrite dans ce chapitre synthétise principalement les axes de recherche visant la conception de codes spatio-temporels en vue d'atteindre le compromis diversité-multiplexage de Zheng et Tse. D'autres axes de recherche, motivés par la conception de codes satisfaisant d'autres critères (codes orthogonaux, *codes à plein taux de transmission et à pleine diversité...etc.*) n'ont pas été discutés. Par exemple les codes spatio-temporels dits 'TAST' (Threaded Algebraic Space-Time codes), présentés dans [El Gamal and Damen, 2003] par El Gamal et al., sont conçus pour obtenir une pleine diversité et un plein taux de transmission. Cette construction consiste à considérer le mot de code comme un ensemble de 'threads' indépendants. Chaque 'thread' est généré à partir de la constellation considérée moyennant une matrice génératrice qui assure la pleine diversité si le mot de code est constitué uniquement dudit thread. Une famille indépendante de nombres (Diophantine Numbers) est utilisée en vue de garantir la transparence des 'threads' dans le mot de code. Bien que ces codes n'aient pas été conçus préalablement pour atteindre le compromis diversité-multiplexage, il a été récemment établi, via une analogie avec les codes conçus à partir de l'algèbre, qu'ils peuvent aussi remplir la propriété NVD [Damen et al., 2005]. De ce fait, les codes 'TAST' peuvent aussi être optimaux. Dans le chapitre suivant, nous présentons une

construction basée sur la même technique dont nous prouvons l'optimalité dans le sens du compromis diversité-multiplexage.

En présentant un état de l'art assez exhaustif de la construction des codes et en analysant les techniques utilisées pour les obtenir, nous avons voulu que ce travail serve de point de départ pour des travaux de recherche dédiés spécifiquement à la construction de codes. Il s'avère que ces constructions s'inspirent principalement de la théorie de l'algèbre ainsi que de la théorie des nombres. Malgré les travaux de recherche intéressants présentés dans cette perspective, beaucoup reste encore à faire aussi bien pour la construction de codes elle même que pour la diminution de la complexité de l'encodage ou du décodage.

## CHAPITRE 3

### ENCODAGE ADAPTATIF POUR ATTEINDRE LE COMPROMIS DIVERSITÉ-MULTIPLEXAGE

#### 3.1 Introduction

Le compromis diversité-multiplexage établi dans [Zheng and Tse, 2003] est une mesure asymptotique (à haut SNR) du potentiel des canaux à antennes multiples, en termes de gain de diversité et de gain de multiplexage. Ce potentiel a ainsi généré les travaux de recherche cités dans le chapitre 2 avec l'objectif de concevoir des codes spatio-temporels optimaux selon ce critère. En effet, les dernières sections du chapitre 2 prouvent que ce qui a été établi par Zheng et Tse comme une limite de performance des canaux à antennes multiples, peut être atteint par des codes spatio-temporels structurés judicieusement construits. Plus important encore, certaines constructions sont allées au-delà du compromis pour respecter d'autres critères [Oggier et al., 2006].

Dans ce chapitre, un nouveau schéma d'encodage adaptatif est présenté. Cet encodage est caractérisé par une rétroaction (feedback) très limitée et non-systématique envoyée du récepteur à l'émetteur via un canal supposé sans délai et sans erreur. Nous prouvons qu'il est possible de maximiser le gain de diversité pour un gain de multiplexage donné par commutation entre un ensemble d'encodeurs sous-optimaux. Plus particulièrement, quand un système avec deux antennes à l'émission et deux antennes à la réception est considéré, nous démontrons qu'en adaptant deux schémas d'encodage ayant, respectivement, des longueurs de blocs  $T = 1$  et  $T = 2$ , il est possible d'atteindre le compromis diversité-multiplexage optimal.

### 3.2 Encodage spatio-temporel adaptatif à seuil

Les travaux de recherche cités dans le chapitre 2, se sont concentrés sur la construction de codes STBC en vue d'atteindre tous les segments du compromis multiplexage diversité. Ceci est à même d'imposer une contrainte sur leur longueur de bloc. En effet, puisqu'un code optimal atteint le point de diversité maximal, alors il est forcément de rang total, et par conséquent  $T$  est au moins égal à  $N_t$  ( $T \geq N_t$ ). C'est d'ailleurs la raison pour laquelle les codes optimaux dans le sens du compromis diversité-multiplexage, ayant  $T = N_t$  sont dits de délai minimal [Elia et al., 2004]. Comme il a été mentionné dans [Rezki et al., 2005b] et dans [Rezki et al., 2005a], cette contrainte n'est en fait nécessaire que pour atteindre le segment à faible gain de multiplexage  $r$ . Rappelons que la longueur de bloc est cruciale quant à la complexité du décodage, d'où la nécessité d'opter pour la plus petite longueur de blocs qui garantit la performance désirée.

À cet effet, un schéma d'encodage adaptatif à rétroaction non-systématique, permettant de réduire cette complexité tout en améliorant le gain en diversité, est proposé. Le terme non-systématique veut dire ici que la rétroaction du récepteur à l'émetteur n'est pas réalisée dans le but d'informer ce dernier de l'état du canal, et de ce fait, elle n'est pas requise à chaque changement de réalisation du canal. Par contre, le schéma proposé ici concerne une rétroaction à seuil, où le récepteur, connaissant le taux de transmission en bits/s, informe l'émetteur à travers la retransmission de quelques bits via un lien de retour supposé parfait (sans erreur et sans délai), si et seulement si la valeur du SNR dépasse un seuil déterminé. Rappelons que la rétroaction à largeur de bande limitée, par exemple, est utilisée dans la plupart des systèmes cellulaires pour le contrôle de puissance [Heath Jr. and Paulraj, 2005, Haykin and Moher, 2004]. En effet, si un ensemble de codes est disponible à l'émetteur, alors on démontre dans cette thèse que, moyennant une commutation entre ces codes, il est possible d'obtenir un meilleur compromis

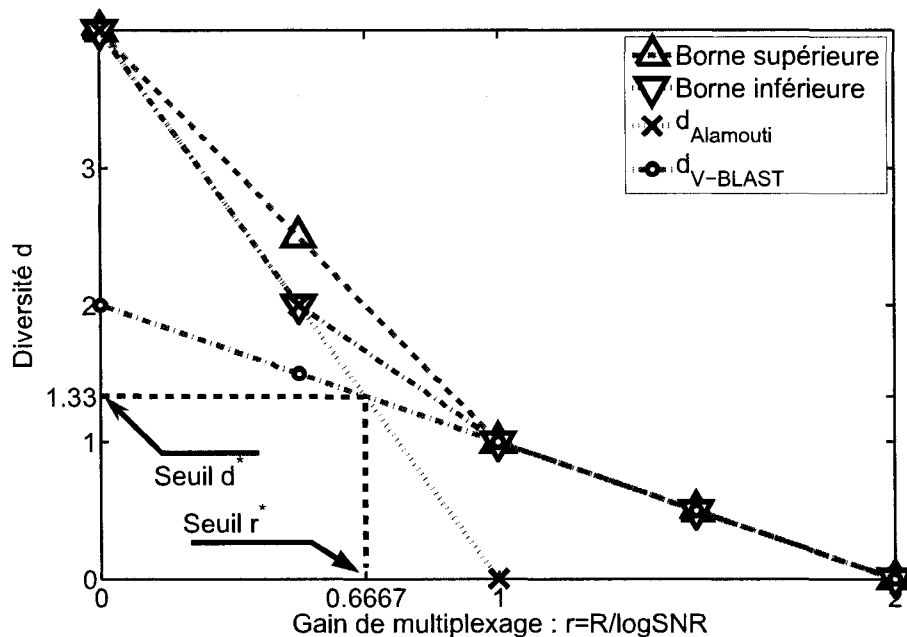


FIGURE 3.1 Le compromis diversité-multiplexage pour un système MIMO avec  $N_t = N_r = T = 2$

multiplexage-diversité. À la différence d'autres techniques d'encodage adaptatif désirent maximiser la capacité, ou la distance minimale entre les mots de codes, ou encore minimiser la probabilité d'erreurs [Seshadri and Winters, 1994, Heath Jr. and Paulraj, 2005], le critère d'adaptation proposé est la maximisation du compromis diversité-multiplexage. En particulier, quand un système MIMO avec  $N_t = N_r = 2$  est considéré, on démontre qu'il est possible d'atteindre le compromis diversité-multiplexage en utilisant deux codes sous-optimaux de longueurs respectives  $T = 1$  et  $T = 2$ . Commençons d'abord par un exemple simple qui illustre comment l'encodage adaptatif peut améliorer le compromis diversité-multiplexage. Mais l'intérêt de tout système adaptatif réside en la simplicité de sa stratégie d'adaptation et de sa faisabilité. Nous discutons ceci dans la section suivante.

---

**Exemple 3.2.1** L'encodage adaptatif améliore le compromis diversité-multiplexage
 

---

Soit un système MIMO avec  $N_t = N_r = 2$  dans lequel on considère qu'un code orthogonal (OSTBC) de type Alamouti [Alamouti, 1998], par exemple, ainsi qu'un code à multiplexage spatial (Spatial Multiplexing : SM) de type BLAST [Foschini, 1996] sont tous les deux disponibles au niveau de l'émetteur. Il est clair que le code d'Alamouti ne peut atteindre le gain de multiplexage maximal puis qu'il a un rendement de 1, alors que SM ne peut atteindre la diversité maximale à cause de la déficience du rang des mots de codes (vectoriels). La figure 3.1 illustre le compromis diversité-multiplexage de ces deux codes ainsi que le compromis optimal établi dans [Zheng and Tse, 2003].

Par ailleurs, si pour  $0 \leq r \leq r^*$ , l'encodage d'Alamouti est activé et pour  $r^* \leq r \leq 2$ , l'encodage SM est activé, alors le compromis diversité-multiplexage du schéma ainsi conçu est meilleur.

---

### 3.3 Stratégie d'adaptation de l'encodage spatio-temporel adaptatif à seuil

Commençons par rappeler que le compromis diversité-multiplexage, tel qu'illustré à la figure 3.2 a été établi comme un ensemble de segments. Chaque segment représente le gain de diversité maximal pour un intervalle donné de gains de multiplexage. En d'autres termes, un segment du compromis représente soit des performances à haut rendement (en termes de nombre de symboles indépendants émis par slot temporel) qui peuvent être atteintes par des constructions dites à plein rendement [Sandh and Paulraj, 2001, Hassibi and Hochwald, 2002], ou des performances à pleine diversité qui, à leur tour, peuvent être obtenues par des constructions dites à pleine diversité [Tarokh et al., 1999, El Gamal and Damen, 2003, Sethuraman et al., 2003] ou encore des performances intermédiaires entre ces deux cas extrêmes. Plus précisément, soit  $M_k$  un point de la courbe optimal de coordonnées  $(k, d^*(k))$ ,  $k = 0, 1, \dots, (\min(N_t, N_r) - 1)$  tel qu'illustré dans la figure 3.2. Supposons qu'il existe un ensemble de codes  $\{\mathcal{C}_k, k = 0, 1, \dots, (\min(N_t, N_r) - 1)\}$ ,



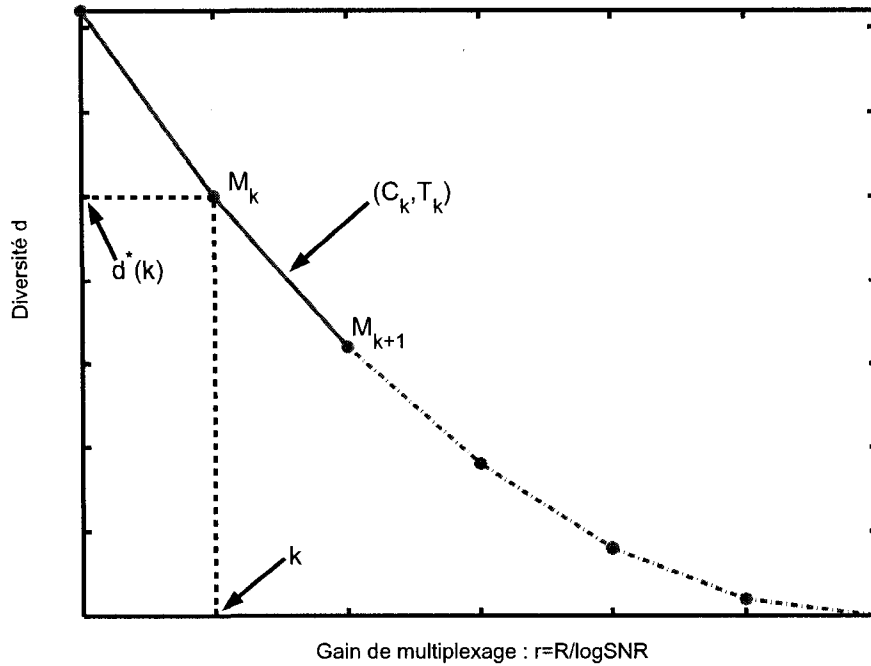


FIGURE 3.2 L'encodage adaptatif atteignant chaque segment de la courbe optimale

disponibles à l'émission, chacun de longueur  $T_k$  et atteignant chacun au moins le segment  $[M_k, M_{k+1}]$  ( $[M_k, M_{k+1}] \subset d_{C_k}$ ). Ainsi, chaque code  $C_k$  est sous-optimal dans le sens du compromis puisqu'il n'atteint qu'une partie de celui-ci. Le fait que  $C_k$  soit optimal sur un segment  $[M_k, M_{k+1}]$  peut en quelque sorte être interprété comme une relaxation de contraintes qui pourrait faciliter la construction de ces codes. La stratégie d'adaptation consiste alors à commuter entre les codes  $C_k$  en fonction de la valeur du  $SNR$  de façon à suivre chaque segment  $[M_k, M_{k+1}]$  de la courbe optimale. Plus précisément, si le code présentement actif est  $C_k$ , le  $SNR$  par antenne réceptrice calculé au niveau du récepteur est  $SNR^*$  et le taux de transmission est  $R^*$ , alors la stratégie d'adaptation à haut  $SNR$  est comme suit :

Le récepteur calcule  $k^* = \lfloor r^* \rfloor = \left\lfloor \frac{R^*}{\log_2 SNR^*} \right\rfloor^1$ , renvoie cette valeur à l'émetteur si et seulement si  $k^* \neq k$  afin d'activer le code  $\mathcal{C}_{k^*}$ .

Le système ainsi conçu est optimal par construction dans le sens du compromis diversité-multiplexage. Par ailleurs, à la différence de la rétroaction systématique où l'état du canal est renvoyé systématiquement à l'émetteur à chaque changement du canal, la rétroaction proposée ici est limitée (au plus  $\lceil \log_2(k) \rceil$  bits) et dépend de l'étendue de  $(R, SNR)$ .

Cependant, avant de pouvoir confirmer notre proposition, il y a lieu de se poser une question fondamentale : est-ce que le compromis diversité-multiplexage demeure inchangé lorsqu'une telle rétroaction est adoptée, ou est-il plutôt amélioré puisqu'une certaine quantité d'information est maintenant mise à la disposition de l'émetteur ? Pour répondre à cette question, supposons qu'un 'miracle' informe l'émetteur, avant l'envoi de chaque bloc de symboles, de la valeur  $k^* = \lfloor r^* \rfloor = \left\lfloor \frac{R^*}{\log_2 SNR^*} \right\rfloor$ , à travers  $\lceil \log_2(k) \rceil$  bits d'information. Soit  $1_{k^*}$  un indicateur d'une telle information. Maintenant, le canal à considérer n'est plus  $\mathbf{X} \rightarrow (\mathbf{Y}, \mathbf{H})$ , mais plutôt  $(\mathbf{X}, 1_{k^*}) \rightarrow (\mathbf{Y}, \mathbf{H})$ . Clairement, alimenter l'émetteur systématiquement de  $1_{k^*}$  l'informe principalement sur le niveau du bruit dans le canal et ne lui donne pas d'information pertinente sur l'état de l'évanouissement  $\mathbf{H}$ . Les événements de non disponibilité du canal sont alors définis comme  $\{\mathbf{H}, I(\mathbf{X}, 1_{k^*}; \mathbf{Y}, \mathbf{H}) < R\}$ , où  $I(\mathbf{X}, 1_{k^*}; \mathbf{Y}, \mathbf{H})$  est l'information mutuelle sur  $\mathbf{X}$  et  $1_{k^*}$ , observant  $\mathbf{Y}$  et  $\mathbf{H}$ . Il est clair que cette information mutuelle est une borne supérieure de l'information mutuelle dans le cas où la rétroaction n'est pas systématique, elle-même une borne supérieure de l'information mutuelle où il n'y a pas du tout rétroaction. Mais à l'échelle d'intérêt, lorsque  $R$  est élevé, ces informations mutuelles sont toutes sensiblement égales puisque 'le

---

<sup>1</sup> $\lfloor x \rfloor$  désigne la fonction partie entière de  $x$

miracle' n'identifie que  $\log_2(k)$  bits par bloc. En effet :

$$\begin{aligned} I(\mathbf{X}, 1_{k^*}; \mathbf{Y}, \mathbf{H}) &= I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}, \mathbf{H}) + I(\mathbf{Y}, \mathbf{H}; 1_{k^*} | \mathbf{X}) \\ &= I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}, \mathbf{H}) + h(1_{k^*} | \mathbf{X}) - h(1_{k^*} | \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{H}) \\ &= I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}, \mathbf{H}) + h(1_{k^*} | \mathbf{X}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\leq I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}, \mathbf{H}) + h(1_{k^*}) \quad (3.2)$$

$$\leq I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}, \mathbf{H}) + \log_2(k) \text{ bits/bloc}$$

L'équation (3.1) émane du fait qu'étant donné  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  et  $\mathbf{H}$ , il n'y a aucun aléa sur  $1_{k^*}$ , d'où  $h(1_{k^*} | \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{H}) = 0$ . L'inégalité (3.2) s'en suit en raison du fait que le conditionnement diminue l'entropie. Puisque l'information mutuelle est quasi inchangée, il en est de même de la probabilité de non disponibilité  $P_{out}(SNR)$ . Par conséquent, le compromis diversité-multiplexage pour  $R$  asymptotiquement grand est aussi inchangé par une telle rétroaction.

À noter que dans ce contexte, le compromis diversité-multiplexage est le même que la rétroaction soit systématique ou non-systématique. Toutefois, la rétroaction non-systématique requiert moins de ressources en termes de capacité du lien de retour.

### 3.4 Encodage adaptatif optimal pour un système MIMO 2x2

Dans [Rezki et al., 2005b, Rezki et al., 2005a], nous avons utilisé ce principe pour proposer un encodage adaptatif à seuil optimal dans le sens du compromis dans le cas d'un système MIMO  $2 \times 2$ . Étant donné que le compromis optimal est composé dans ce cas de deux segments : le segment à haut rendement ( $r \in [1, 2]$ ) et le segment à faible rendement ( $r \in [0, 1]$ ), nous proposons deux encodages pour atteindre séparément ces deux segments. Pour atteindre le premier segment, le

code SM de longueur  $T = 1$  est utilisé, tandis que pour atteindre le deuxième segment, deux encodages sont proposés. En premier lieu, un encodage de type D-BLAST [Tavildar and Viswanath, 2004] de longueur  $T = 3$  est présenté. Ensuite, un encodage de type LAST [El Gamal et al., 2004] de longueur  $T = 2$  est proposé. Nous présentons ci-dessous les principaux résultats, mais plus de détails peuvent être trouvés dans [Rezki et al., 2005b] et dans [Rezki et al., 2005a].

**Théorème 3.1.** *Pour un système MIMO avec  $N_t = N_r = N$ , le code SM de longueur  $T = 1$  atteint le segment de haut rendement ( $r \in [N - 1, N]$ ).*

*Démonstration.* La preuve est évidente. Nous rappelons seulement que le gain en diversité d'un encodage spatial ( $T = 1$ ) est donnée par [Zheng and Tse, 2003] :

$$d(r) = N_r \left(1 - \frac{r}{N_t}\right), \quad (3.3)$$

qui coïncide avec le gain en diversité optimal pour des gains de multiplexage élevés  $r \in [N - 1, N]$ , quand  $N_r = N_t$ .  $\square$

Pour atteindre le deuxième segment, considérons un code de type D-BLAST à deux couches (streams). La conception de chaque couche est réalisée à base du code TAST [El Gamal and Damen, 2003], choisi pour son bon gain de codage. Soit  $\mathbf{G}$  une matrice génératrice de rang total donnée par :

$$\mathbf{G} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\frac{\pi}{4}} \\ 1 & -e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

soit  $\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{G}\mathbf{u}^{(k)}$  pour  $k = 1, 2$  deux vecteurs indépendants de taux de transmission  $\tilde{R} = \tilde{r} \log_2(SNR)$  chacun, où  $\mathbf{u}^{(k)}$  est un vecteur  $2 \times 1$  issu d'une constellation M-

QAM standard. Le mot de code, de dimension  $2 \times 3$  est donné par :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & p^{(1)}(2) & p^{(2)}(2) \\ p^{(1)}(1) & p^{(2)}(1) & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Ce code transmet 4 symboles indépendants durant 3 slots temporels, il a par conséquent un rendement de  $4/3$ . De plus les couches sont réparties de façon diagonale pour garantir une diversité totale. Le gain de codage de ce code ainsi que son compromis diversité-multiplexage sont donnés par le Théorème 3.2

**Théorème 3.2.** *Le gain de codage  $\Delta$  du code donné par (3.5) est  $\Delta = 4$  et son compromis diversité-multiplexage est  $d(r) = 4 - 3r$ , et par conséquent il atteint le segment à faible rendement  $r \in [0, 1]$ .*

*Démonstration.* Commençons par rappeler que la propriété NVD donnée par (2.16) est une condition suffisante pour atteindre le compromis optimal [Yao and Wornell, 2003]. Soit  $\mathbf{X}'$  un mot de code différent de  $\mathbf{X}$  donné par :

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 0 & p'^{(1)}(2) & p'^{(2)}(2) \\ p'^{(1)}(1) & p'^{(2)}(1) & 0 \end{bmatrix},$$

où  $\mathbf{p}'^{(k)} = \mathbf{G}\mathbf{u}'^{(k)}$  pour  $k = 1, 2$ . Posons  $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{X}'$ , alors on a :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & D^{(1)}(2) & D^{(2)}(2) \\ D^{(1)}(1) & D^{(2)}(1) & 0 \end{bmatrix}.$$

Puisque le code est de pleine diversité, alors le gain de codage est défini par :

$$\Delta = \min_{\mathbf{D} \neq \mathbf{0}} \prod_{l=1}^2 \lambda_l [\mathbf{D}\mathbf{D}^\dagger] = \min_{\mathbf{D} \neq \mathbf{0}} \det(\mathbf{D}\mathbf{D}^\dagger), \quad (3.6)$$

où les  $\lambda_l [\cdot]$  sont les valeurs propres de l'argument. Le calcul de  $\det(\mathbf{D}\mathbf{D}^\dagger)$  donne :

$$\det(\mathbf{D}\mathbf{D}^\dagger) = |D^{(1)}(1)|^2 |D^{(1)}(2)|^2 + |D^{(1)}(1)|^2 |D^{(2)}(2)|^2 + |D^{(2)}(1)|^2 |D^{(2)}(2)|^2. \quad (3.7)$$

Utilisant la structure du code TAST, tenant compte du fait que la constellation considérée est une M-QAM et en calculant le premier terme de la partie gauche de l'équation (3.7), on obtient :

$$|D^{(1)}(1)|^2 |D^{(1)}(2)|^2 = \frac{1}{4} \left| (\Delta^{(1)}(1))^2 - i (\Delta^{(1)}(2))^2 \right|^2 \geq 4, \quad (3.8)$$

si  $\Delta^{(1)}(1) \neq 0$  ou  $\Delta^{(1)}(2) \neq 0$ , where  $\Delta^{(k)} = u^{(k)} - u'^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$ . Sinon, alors  $|D^{(1)}(1)|^2 |D^{(1)}(2)|^2 = 0$ . Mais dans ce cas, on a forcément  $\Delta^{(2)}(1) \neq 0$  ou  $\Delta^{(2)}(2) \neq 0$  et par conséquent, on aura :

$$|D^{(2)}(1)|^2 |D^{(2)}(2)|^2 = \frac{1}{4} \left| (\Delta^{(2)}(1))^2 - i (\Delta^{(2)}(2))^2 \right|^2 \geq 4, \quad (3.9)$$

et de ce fait  $\Delta \geq 4$ .

D'autre part,  $\mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$  est une différence possible de deux mots de codes, avec  $\det(\mathbf{D}_0\mathbf{D}_0^\dagger) = 4$ , donc  $\Delta \leq 4$ . Il s'en suit que le gain de codage de ce code est  $\Delta = 4$ .

Par ailleurs, une borne supérieure sur la probabilité d'erreur par paire (PEP) est donnée par [Yao and Wornell, 2003] :

$$P(\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}') \leq \left( \prod_{l=1}^2 \left( 1 + \frac{\lambda_l}{\sigma^2} \right) \right)^{-2}, \quad (3.10)$$

où la notation  $f \stackrel{\dot{<}}{\leq} g$  signifie que  $\lim_{SNR \rightarrow \infty} \frac{\log f}{\log SNR} \leq \lim_{SNR \rightarrow \infty} \frac{\log g}{\log SNR}$ . Puisqu'on se situe à haut régime de SNR, alors en omettant les 1 dans (3.10) et en utilisant le fait que la puissance de transmission moyenne  $P$  varie asymptotiquement avec l'ordre

de la modulation  $M$  comme :

$$P \doteq M = 2^{\frac{\tilde{R}}{2}} = SNR^{\frac{\tilde{r}}{2}}, \quad (3.11)$$

la borne (3.10) s'écrit :

$$P(\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}') \leq \left( \prod_{l=1}^2 \left( \frac{SNR}{P} \lambda_l \right) \right)^{-2} \doteq SNR^{-4+2\tilde{r}} (\det \mathbf{D})^{-2}. \quad (3.12)$$

Pour obtenir une borne supérieure sur la probabilité d'erreur, la borne de l'union est appliquée :

$$P_e \leq SNR^{-2\tilde{r}} \sum_{\mathbf{X} \neq \mathbf{X}'} P(\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}') \quad (3.13)$$

$$\leq SNR^{-4} \sum_{\mathbf{D} \neq \mathbf{0}} (\det \mathbf{D})^{-2}. \quad (3.14)$$

Clairement,  $P_e$  est dominée par la pire des PEP qui correspond aux paires de mots de codes dont la différence a le pire déterminant (le plus petit). Maintenant, étant donné un mot de code  $\mathbf{X}$ , le nombre de mots de codes  $\mathbf{X}'$  tels que la différence  $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{X}'$  possède le pire déterminant est majoré par 16. Ceci est dû au fait que pour un tel  $\mathbf{D}$ , tous les éléments doivent être nuls sauf un qui doit être égal à 2. Il y a au plus 4 points voisins possibles pour un point donné d'une constellation QAM standard. Ainsi, le nombre de paires de mots de codes dont la différence a le pire déterminant est de l'ordre de  $M^4$  à haut SNR, et par suite :

$$P_e \leq M^4 SNR^{-4} = SNR^{-4+2\tilde{r}}. \quad (3.15)$$

Puisque deux couches sont envoyées durant trois slots temporels, la diversité de ce code est  $d(r) = 4 - 3r$ , ce qui conclut la démonstration.  $\square$

Cependant, la longueur du code donné par (3.5) est  $T = 3$ , ce qui induit une latence et une complexité du décodage supplémentaire par rapport à un code similaire de longueur  $T = 2$ . De plus, le code donné par (3.5) est caractérisé par ses périodes de non transmission qui constitue un inconvénient en termes de rapport entre la puissance maximale et la puissance moyenne (peak-to-average power ratio). Pour pallier à ces limitations, un code de longueur  $T = 2$  est proposé. Les couches sont générées de la même façon mais en utilisant deux constellations de tailles différentes pour accommoder le rendement du code :  $4/3 = \frac{8/3}{2}$ . Les couches sont ensuite réparties en diagonale et séparées par un nombre de Diophantine (Diophantine number)  $\phi$  ( $|\phi| = 1$ ) pour garantir une diversité totale [Dayal and Varanasi, 2003], [El Gamal and Damen, 2003], [Elia et al., 2004]. Le mot de code ainsi obtenu est donné par :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} p^{(1)}(1) & \phi^{\frac{1}{2}}p^{(2)}(1) \\ \phi^{\frac{1}{2}}p^{(2)}(2) & p^{(1)}(2) \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

où  $p^{(k)} = \mathbf{M}_\theta \mathbf{u}^{(k)}$ ,  $\mathbf{u}^{(1)}$  est issu d'une constellation  $2^{3b}$ -QAM,  $\mathbf{u}^{(2)}$  est issu d'une constellation  $2^b$ -QAM ( $b \geq 2$ ) et  $\mathbf{M}_\theta$  ( $\theta \in [0, 2\pi[$ ) est donnée par [Dayal and Varanasi, 2003] :

$$\mathbf{M}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Le gain de codage de ce code ainsi que son compromis diversité-multiplexage sont donnés par le Théorème 3.3 :

**Théorème 3.3.** *Choisissant  $(\theta, \phi) = (\frac{1}{2} \arctan(2), -i)$ , le gain de codage  $\Delta$  du code donné par (3.16) est  $\Delta = 3.2$  et son compromis diversité-multiplexage est  $d(r) = 4 - 3r$  et par conséquent il atteint le segment à faible rendement  $r \in [0, 1]$ .*



*Démonstration.* La preuve est similaire à celle du Théorème 3.2 et sera donc omise. □

Ainsi, la courbe optimale est atteinte en utilisant deux codes sous-optimaux de longueur respectives  $T = 1$  et  $T = 2$  et la stratégie d'adaptation décrite dans la section 3.3. Ceci confirme que la contrainte  $N_t = T$ , nécessaire pour atteindre le segment de diversité maximale, peut être ignorée si l'on désire obtenir le segment de rendement maximal seulement.

### 3.5 Résultats de simulations

Pour estimer les valeurs des probabilités de non disponibilité du canal  $P_{out}(SNR)$  ainsi que celles des probabilités d'erreur des différents codes utilisés  $P_e(SNR)$ , des simulations par la méthode de Monte-Carlo ont été réalisées. Les résultats de simulations des performances des codes SM, du code donné par (3.5) et du code donné par (3.16) sont illustrés, respectivement, sur les figures 3.3, 3.4 et 3.5, pour des taux de transmission  $R = 4, 8, 12, 16$  bps/Hz. Sur ces même figures, on a aussi tracé la probabilité de non disponibilité  $P_{out}$  donnée par (2.14), dans le cas où une contrainte d'égalité de la puissance sur les antennes à l'émission est imposée ( $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_{N_t}$ ). Durant toutes ces simulations, un décodage sphérique est utilisé à la réception [Zhao and Giannakis, 2005], [Damen et al., 2003].

Dans la figure 3.3, on peut noter que la pente des courbes de performance du code SM est 2 à haut  $SNR$ . En effet, une augmentation du SNR de 10 dB induit une atténuation de la probabilité d'erreur de  $10^{-2}$ . Ceci confirme que la diversité maximale de ce code est 2. Par ailleurs, la séparation horizontale entre ces courbes est de 6 dB, ce qui correspond à un gain de multiplexage maximal de 2 par 3 dB. Étant donnée la continuité des courbes de performance, alors tous les points

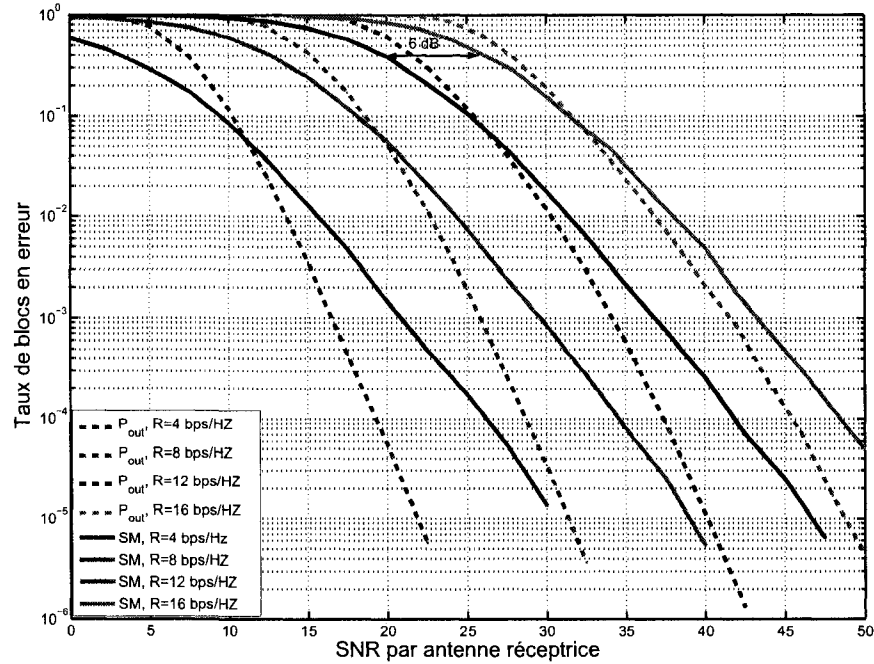


FIGURE 3.3 Performances de SM, avec M-QAM,  $M^2 = 4, 16, 64, 256$ ,  $N_t = N_r = 2$  et  $T = 1$

appartenant au segment joignant les points  $(d, r) = (0, 2)$  et  $(d, r) = (4, 0)$  sont atteints. À noter aussi dans la figure 3.3 qu'à haut SNR, la séparation horizontale entre deux courbes adjacentes de  $P_{out}$  est aussi égale à 6 dB, alors que la pente de la probabilité de non-disponibilité du canal  $P_{out}$  est de 4.

D'un autre côté, dans la figure 3.4, les courbes de performance du code donné par (3.5), atteignent une pente de 4 à haut SNR (similaire à la pente de  $P_{out}$ ). Par contre, la séparation horizontale entre ces courbes est de 9 dB, ce qui correspond à un gain de multiplexage maximal de  $r = \frac{4}{3}$  par 3 dB. De la même manière que précédemment, tous les points du segment joignant  $(d, r) = (0, \frac{4}{3})$  et  $(d, r) = (4, 0)$  sont atteints. Des constatations similaires peuvent être tirées de la figure 3.5 où le

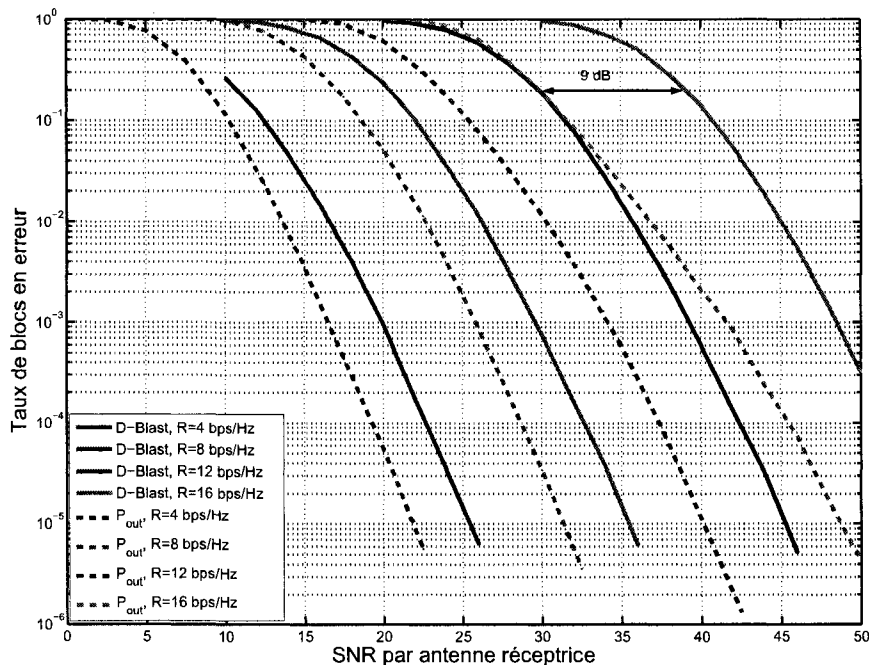


FIGURE 3.4 Performances du code donné par (3.5) avec M-QAM,  $M = 2^{\lfloor \frac{3}{4}R \rfloor}$ ,  $R = 4, 16, 64, 256$ ,  $N_t = N_r = 2$  et  $T = 3$

code donné par (3.16) est considéré. En effet, les courbes de performance ont une pente de 4 à haut  $SNR$  et la séparation horizontale maximale est de l'ordre de 18 dB, ce qui correspond à un gain de multiplexage maximal de  $\frac{4}{3}$  par 3 dB. Les résultats des simulations confirment bien les analyses théoriques présentées dans les Théorèmes 3.1, 3.2 et 3.3.

### 3.6 Conclusion

Nous avons présenté un encodage adaptatif à rétroaction non systématique limitée (quelques bits) en vue d'atteindre le compromis diversité-multiplexage. L'idée principale d'un tel schéma est de concevoir un ensemble d'encodages sous-optimaux,

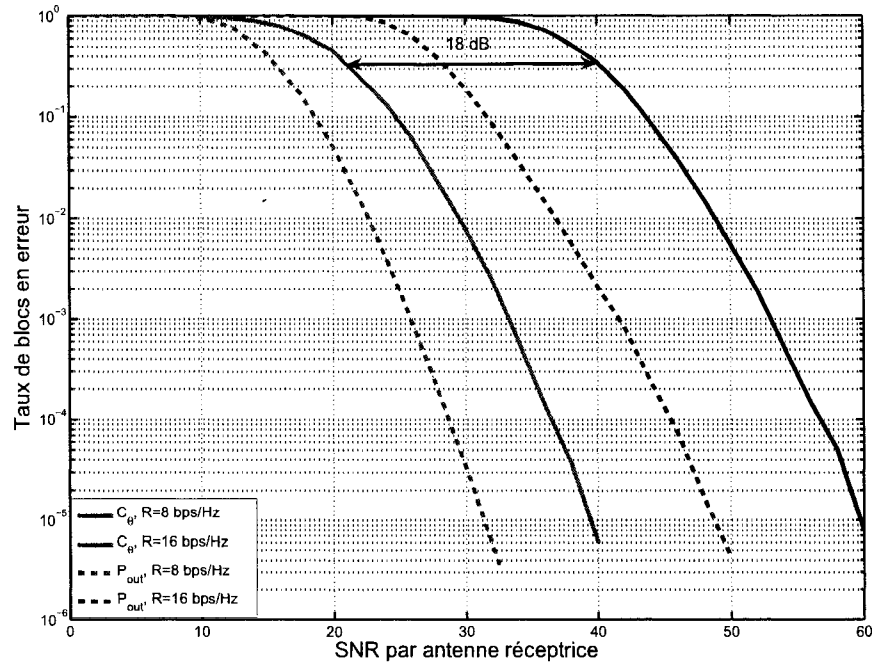


FIGURE 3.5 Performances du code donné par (3.16), avec  $R = 8, 16$ ,  $N_t = N_r = 2$  et  $T = 2$

chacun atteignant un segment de la courbe du compromis. L'utilité d'une telle conception est la minimisation du délai et de la complexité du décodage en minimisant la longueur de bloc  $T$ . Moyennant notre stratégie d'adaptation, nous avons d'abord prouvé que le compromis demeure le même, puis démontré qu'il est possible de l'atteindre par commutation entre les encodages disponibles à l'émission. Le critère de commutation est la maximisation du gain de multiplexage  $r$  pour un taux de transmission  $R(SNR)$  donné. À cet effet, un encodage optimal dans le sens du compromis diversité-multiplexage, pour un système de communication ayant  $N_t = N_r = 2$ , a été proposé. Il est le résultat de la commutation entre deux encodages ayant respectivement une longueur de bloc  $T = 1$  et  $T = 2$ .

Bien que la rétroaction soit une technique courante dans les systèmes de communi-

cation sans fil, il y a lieu de noter que dans notre approche, nous avons supposé un lien de retour sans erreur et sans délai. L'hypothèse 'sans erreur' peut être justifiée par l'utilisation d'un code correcteur d'erreur puissant en vue de protéger la rétroaction. Même si l'utilisation d'un code correcteur d'erreur augmenterait le nombre de bits dans la rétroaction, il est raisonnable de continuer à négliger son effet sur la capacité du canal à première approximation, puisque pour de grandes valeurs de SNR, l'information mutuelle du canal est aussi grande. Par contre, l'hypothèse 'sans délai' est plutôt moins réaliste et elle a été considérée pour faciliter l'analyse. L'impact du délai de la rétroaction sur le système n'a pas été considéré et pourrait être étudié dans les travaux futurs.

## CHAPITRE 4

### CARACTÉRISATION DU POTENTIEL DES CANAUX MIMO À SNR LIMITÉ ET IMPACT DE LA CORRÉLATION SPATIALE

#### 4.1 Introduction

On analyse dans ce chapitre le potentiel des systèmes de communication à antennes multiples, en termes de gain de diversité, de pouvoir d'adaptation de grands taux de transmission (gain de multiplexage) et de gain de codage et/ou de gain d'antennes (Array Gain), dans des conditions réalistes de SNR et d'évanouissements. Rappelons que tout ce qui a été discuté dans les chapitres 2 et 3 concerne un régime asymptotique à haut SNR. À des valeurs petites ou moyennes de SNR, typiquement entre 3 et 20 dB, le compromis diversité-multiplexage établi par Zheng et Tse [Zheng and Tse, 2003] est une limite de performance très optimiste et constitue en fait une borne supérieure du compromis diversité-multiplexage à SNR limité [Narasimhan, 2005]. Comme il en a été discuté dans le chapitre 2, l'idée principale pour trouver le compromis asymptotique optimal est de caractériser les événements de non disponibilité, qui sont les sources d'erreur prépondérantes pour une longueur de bloc  $T$  assez grande et un codage aléatoire<sup>1</sup>, puis de considérer un régime à haut SNR pour aboutir à une élégante caractérisation du compromis diversité-multiplexage asymptotique. Dans la perspective d'établir les limites de performance des canaux à antennes multiples dans des conditions réalistes d'évanouissements et de valeurs de SNR, la même démarche sera adoptée. Nous allons d'abord rappeler les défini-

---

<sup>1</sup>Le fait que  $T$  soit assez grand et que le codage soit aléatoire marginalise l'impact des deux autres sources d'erreur (un bruit additif grand et quelques mots de codes sont très rapprochés) sur la probabilité d'erreur. De ce fait, une détection fiable de l'information est assurée pourvu qu'on communique à un taux de transmission inférieur à l'information mutuelle du canal.

tions des gains de diversité et de multiplexage [Narasimhan, 2005] dans la section 4.2. Dans la section 4.3, on établit une borne inférieure de la probabilité de non disponibilité dans les cas où le canal est spatialement corrélé ou spatialement non corrélé. À partir de cette borne, une estimation du gain de diversité est calculée. Dans la section 4.4, on étend notre analyse à un régime à haut SNR et on démontre que le gain de diversité estimé coïncide dans ce cas avec le compromis diversité-multiplexage asymptotique optimal. La section 4.5 comporte les résultats numériques. On termine ce chapitre par une conclusion.

## 4.2 Le compromis diversité-multiplexage à SNR de valeurs limitées

Dans [Narasimhan, 2005], une technique, basée sur le calcul de la probabilité de non disponibilité  $P_{out}$ , a été présentée en vue de caractériser le compromis diversité-multiplexage à SNR limité. Étant donné que le régime de SNR considéré n'est plus asymptotique, les définitions des gains de multiplexage et de diversité, données par (2.9), doivent être accommodées. En effet, à SNR limité, le gain de multiplexage est défini comme le ratio entre le taux de transmission  $R$  et la capacité d'un canal Gaussien AWGN, de SNR global  $g \cdot \eta$ , où  $g$  est un gain d'antennes qui vaut  $N_r$  ( $g = N_r$ ) et où  $\eta$  est la valeur moyenne du SNR par antenne réceptrice. D'autre part, le gain de diversité est défini comme la valeur absolue de la pente de la fonction  $\log(P_{out}) = f(\log(\eta))$  :

$$r = \frac{R}{\log_2(1+g \cdot \eta)}, \quad (4.1)$$

$$d(r, \eta) = -\eta \frac{\partial \ln(P_{out}(r, \eta))}{\partial \ln(\eta)}. \quad (4.2)$$

De ce fait, le gain de multiplexage donne une indication sur la sensibilité d'une stratégie d'adaptation des taux de transmission. Par exemple, si  $r$  augmente, alors une petite variation de la valeur  $\eta$  du SNR induit un changement important du

taux de transmission. Le gain de diversité est interprété comme une mesure de l'augmentation de la valeur du SNR requise pour diminuer la probabilité de non disponibilité d'une certaine valeur, pour un gain de multiplexage donné.

Étant donné que le calcul de la probabilité de non disponibilité est compliqué et ne permet pas d'aboutir à une expression compacte de la diversité, une borne inférieure de  $P_{out}$  est utilisée. À partir de cette borne, une estimation de la diversité en fonction du gain de multiplexage est obtenue (cf. [Narasimhan, 2005] théorème 2). L'évaluation du gain de diversité pour des valeurs de SNR,  $\eta = 5, 10$  et  $15$  dB a montré que les gains obtenus sont très inférieurs aux gains asymptotiques prévus par Zheng et Tse.

### 4.3 Impact de la corrélation spatiale sur le compromis diversité-multiplexage

Pour établir le compromis diversité-multiplexage à SNR limité, l'auteur de [Narasimhan, 2005] a considéré des canaux i.i.d. à évanouissements de Rayleigh. Toutefois, dans des contextes plus réalistes de propagation, les évanouissements ne sont pas indépendants à cause, par exemple, d'un espacement insuffisant entre les antennes [Da-Shan et al., 2000]. Par ailleurs, il est établi que la corrélation spatiale est déterminante aussi bien du point de vue capacité que probabilité d'erreur d'un système de communication à antennes multiples [Oyman et al., 2003, Oyman et al., 2002, Da-Shan et al., 2000]. Dans [Rezki et al., 2006a], l'impact de la corrélation spatiale sur le compromis diversité-multiplexage à SNR limité a été étudié. Nous décrivons dans ce qui suit, les lignes principales de notre démarche.

Considérons le modèle de canal donné par (2.1), dans lequel  $\mathbf{H}_w$  est remplacé par  $\mathbf{H}$ , dont les éléments sont corrélés. L'effet de la corrélation spatiale peut être modélisé en adoptant le modèle de Kronecker que l'on choisira pour sa simplicité [Paulraj



et al., 2003]. Ce modèle permet de décomposer le canal en matrices déterministes décrivant séparément la corrélation à l'émission et à la réception et une matrice aléatoire décrivant un canal i.i.d. à évanouissement de Rayleigh. La matrice  $\mathbf{H}$  est donnée par :

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}_r^{1/2} \mathbf{H}_w \mathbf{R}_t^{1/2}, \quad (4.3)$$

où la matrice  $\mathbf{H}_w$  est définie comme dans la section 2.2, et où  $\mathbf{R}_r$  et  $\mathbf{R}_t$  sont des matrices Hermitiennes définies positives qui représentent la corrélation spatiale à la réception et à l'émission, respectivement [Paulraj et al., 2003].

Supposons en premier lieu que la puissance disponible  $P$  est équitablement répartie sur toutes les antennes à l'émission. De cette façon, la matrice  $\mathbf{Q}$  dans (2.13) est égale à  $\mathbf{I}_{N_t}$ . En remplaçant (4.3) dans (2.13) et en utilisant le fait que  $\mathbf{R}_t^{1/2} \mathbf{R}_t^{H/2} = \mathbf{R}_t$ , l'information mutuelle devient :

$$I = \log_2 \left( \det \left( \mathbf{I}_{N_r} + \frac{\eta}{N_t} \mathbf{R}_r^{1/2} \mathbf{H}_w \mathbf{R}_t \mathbf{H}_w^H \mathbf{R}_r^{H/2} \right) \right). \quad (4.4)$$

Puisque  $\mathbf{R}_t$  et  $\mathbf{R}_r$  ont le même impact sur l'information mutuelle  $I$ , nous allons focaliser, sans perte de généralité, sur l'impact de la corrélation à l'émission ( $\mathbf{R}_r^{1/2} = \mathbf{I}_{N_r}$ ). Les éléments de  $\mathbf{R}_t$  sont notés  $\rho_{i,j}$ . Le calcul de la probabilité de non disponibilité  $P_{out}$  nécessite le calcul de la distribution de l'information mutuelle  $I$ . Ceci est en fait possible en calculant la distribution des valeurs propres de  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ . Cependant cette démarche se prête beaucoup plus à une analyse numérique et ne permet pas de déterminer une expression analytique de la diversité. Pour éviter cette contrainte, nous calculons une borne supérieure de (4.4).

Soit la décomposition orthogonale-triangulaire QR de  $\mathbf{H}_w$  donnée par :

$$\mathbf{H}_w = \mathbf{L}\mathbf{R}, \quad (4.5)$$

où  $\mathbf{L}$  est une matrice unitaire de dimension  $N_r \times N_r$ , et où  $\mathbf{R}$  est une matrice

triangulaire supérieure de dimension  $N_r \times N_t$  [Golub and Van Loan, 1983]. Les modules au carré  $|R_{l,l}|^2$  des éléments de la diagonale de  $\mathbf{R}$  sont distribués suivant une loi chi-carré ayant  $2(N_r - l + 1)$  degrés de liberté. Les autres éléments sont i.i.d. Gaussiens de moyenne nulle et de variance 1. La décomposition en valeur singulière de  $\mathbf{R}_t^{1/2}$  donne :

$$\mathbf{R}_t^{1/2} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^H, \quad (4.6)$$

où  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$ , de dimension  $N_t \times N_t$ , satisfont  $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{I}_{N_t}$  et où  $\mathbf{D}$  est une matrice diagonale de dimension  $N_t \times N_t$ , dont les éléments sont les valeurs singulières de  $\mathbf{R}_t^{1/2}$ . Puisque  $\det(\mathbf{I} + \mathbf{X} \mathbf{Y}) = \det(\mathbf{I} + \mathbf{Y} \mathbf{X})$  et puisque la distribution d'une variable aléatoire est invariante par des transformations unitaires [Muirhead, 1982], alors utilisant (4.4), (4.5) et (4.6), on obtient :

$$\begin{aligned} I &= \log_2 \left( \det \left( \mathbf{I}_{N_r} + \frac{\eta}{N_t} \mathbf{L} \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{D}^2 \mathbf{U}^H \mathbf{R}^H \mathbf{L}^H \right) \right) \\ &\stackrel{d}{=} \log_2 \left( \det \left( \mathbf{I}_{N_r} + \frac{\eta}{N_t} \mathbf{R} \mathbf{D}^2 \mathbf{R}^H \right) \right) \\ &\leq \sum_{l=1}^t \log_2 \left( 1 + \frac{\eta}{N_t} \Delta_l \right), \end{aligned} \quad (4.7)$$

où  $t = \min(N_t, N_r)$ ,  $\Delta_l = \sum_{k=l}^{N_t} D_k^2 |R_{l,k}|^2$ ,  $l = 1, \dots, t$ , est le  $l^{\text{ème}}$  élément de la diagonale de  $\mathbf{R} \mathbf{D}^2 \mathbf{R}^H$  et le symbole  $\stackrel{d}{=}$  signifie égalité en distribution. L'inégalité (4.7) découle du fait que :  $\det(\mathbf{A}) \leq \prod_l A_{l,l}$  pour toute matrice  $\mathbf{A}$  définie positive. Pour déterminer une borne inférieure sur la probabilité de non disponibilité, la fonction de distribution de  $\Delta_l$  est requise. Puisque  $R_{l,k}$  sont indépendants, alors il en est de même pour  $\Delta_l$ . Si tous les  $D_k^2$ ,  $k = 1, \dots, N_t$ , sont égaux, ceci correspond en fait au cas non corrélé, la contrainte  $\text{trace}(\mathbf{R}_t^{1/2}) = N_t$ , impose  $D_k^2 = 1$   $k = 1, \dots, N_t$ . Ainsi,  $\Delta_l$  est distribué suivant une loi chi-carré ayant  $2(N_r + N_t - 2l + 1)$  degrés de liberté. Sinon,  $\Delta_l$  peut être vue comme une forme quadratique généralisée d'un vecteur Gaussien, et si tous les  $D_k^2$  ( $k = 1, \dots, N_t$ ) ne sont pas égaux, alors le calcul

de la fonction de distribution de  $\Delta_l$  n'est pas évident [Muirhead, 1982]. Supposons, sans perte de généralité, que tous les  $D_k^2$  ( $k = 1, \dots, N_t$ ) sont distincts, alors la fonction de distribution de  $\Delta_l$ , ( $l = 1, \dots, t$ ) est donnée par le Lemme 4.1 <sup>2</sup>.

**Lemme 4.1.** *Si tous les  $D_k^2$  ( $k = 1, \dots, N_t$ ) sont distincts, la fonction de distribution de  $\Delta_l$ , ( $l = 1, \dots, t$ ) est exprimée par :*

$$f_{\Delta_l}(x) = \sum_{k=1}^{N_r-l+1} a_k^{(l)} f_{G(k, D_l^2)}(x) + \sum_{k=1}^{N_t-l} a_1^{(l+k)} f_{G(1, D_{l+k}^2)}(x), \quad (4.8)$$

où  $G(\alpha, \beta)$  est une variable aléatoire distribuée suivant une loi Gamma, dont la fonction de distribution est donnée par :  $f_{G(\alpha, \beta)}(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \exp(-\frac{x}{\beta})$ ,  $x \geq 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ . Les coefficients  $a_k^{(l)}$  et  $a_1^{(l+k)}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} a_k^{(l)} &= \frac{(-D_l^2)^{-(N_r-l+1-k)}}{(N_r-l+1-k)!} \cdot \frac{d^{(N_r-l+1-k)}}{d(jv)^{(N_r-l+1-k)}} \left[ (1-jvD_l^2)^{N_r-l+1} \Psi_{\Delta_l}(jv) \right]_{jv=D_l^{-2}}, \\ a_1^{(l+k)} &= \left[ (1-jvD_{l+k}^2) \Psi_{\Delta_l}(jv) \right]_{jv=D_{l+k}^{-2}}, \end{aligned}$$

où  $\frac{d^{(k)}f(x)}{dx^{(k)}}$  est la dérivée d'ordre  $k$  de  $f(x)$  et où  $\Psi_{\Delta_l}(jv)$  est la fonction caractéristique de  $\Delta_l$  donnée par :

$$\Psi_{\Delta_l}(jv) = (1-jvD_l^2)^{-(N_r-l+1)} \prod_{k=1}^{N_t-l} (1-jvD_{l+k}^2)^{-1}. \quad (4.9)$$

*Démonstration.* La variable aléatoire  $\Delta_l$  est une somme pondérée de variables aléatoires distribuées suivant une chi-carré. Le degré de liberté de  $|R_{l,l}|^2$  est  $2(N_r-l+1)$  et celui de  $|R_{l,k}|^2$   $k \neq l$  est 2. Le calcul de la fonction caractéristique  $\Psi_{\Delta_l}(jv)$  conduit à l'expression (4.9) donnée dans Lemme 4.1. La décomposition de  $\Psi_{\Delta_l}(jv)$

---

<sup>2</sup>Si tous les  $D_k^2$  ( $k = 1, \dots, N_t$ ) ne sont pas distincts, il est possible d'obtenir des résultats en utilisant des transformations de Laplace avec pôles multiples.

en fractions partielles donne :

$$\Psi_{\Delta_l}(jv) = \sum_{k=1}^{N_r-l+1} a_k^{(l)} (1 - jvD_l^2)^{-k} + \sum_{k=1}^{N_t-l} a_1^{(l+k)} (1 - jvD_{l+k}^2)^{-1}. \quad (4.10)$$

Le calcul de la transformée inverse de chaque terme conclut la démonstration.  $\square$

Dans [Rezki et al., 2007b], nous avons calculé explicitement la fonction caractéristique de la borne supérieure donnée par (4.7). Ensuite, sa fonction de densité a été déduite en utilisant des algorithmes de calcul de la transformée inverse de Laplace. De manière similaire, une borne inférieure très serrée de la probabilité de non disponibilité  $P_{out}$  a été calculée. En effet, on a démontré que dans un canal très corrélé,<sup>3</sup> les pires écarts entre les valeurs exactes de  $P_{out}$  et les valeurs données par la borne inférieure sont respectivement de 0.2 et 0.3 dB pour des systèmes  $2 \times 2$  et  $3 \times 3$ . Nous avons aussi démontré la possibilité de calculer une estimation du compromis diversité-multiplexage aussi bien dans le cas corrélé que non-corrélé. Cette analyse est très utile du point de vue ingénierie puisqu'elle permet de calculer de manière efficace une approximation de la probabilité de non disponibilité, de la capacité de non disponibilité et du compromis diversité-multiplexage pour n'importe quel SNR et pour différentes valeurs de la corrélation spatiale. Cependant, l'étude présentée dans [Rezki et al., 2007b] ne permet pas d'obtenir des expressions compactes du compromis diversité-multiplexage en vue de mieux comprendre le potentiel des canaux à antennes multiples. Pour ce, nous adoptons dans ce qui suit une démarche différente.

Utilisant la définition (2.14), le Lemme 4.1 et la borne supérieure donnée par (4.7), nous déduisons une borne inférieure sur la probabilité de non disponibilité  $P_{out}$ , laquelle est donnée dans le Théorème 4.1.

---

<sup>3</sup>Les expressions "canal très corrélé", "canal moyennement corrélé" et "canal faiblement corrélé" seront définis formellement dans la section 4.5, où un modèle de corrélation spatiale est présenté.

**Théorème 4.1** (Borne inférieure). *Des bornes inférieures sur la probabilité de non disponibilité  $P_{out}$  dans le cas non-corrélé ( $D_k^2 = 1, k = 1, \dots, N_t$ ) ainsi que dans le cas corrélé sont, respectivement, exprimées par :*

$$P_{out}^{uncorr} > \prod_{l=1}^t \Gamma_{inc}(\xi_l, N_r + N_t - 2l + 1), \quad (4.11)$$

$$P_{out}^{corr} > \prod_{l=1}^t \left( \sum_{k=1}^{N_r-l+1} a_k^{(l)} \Gamma_{inc}\left(\frac{\xi_l}{D_l^2}, k\right) + \sum_{k=1}^{N_t-l} a_1^{(l+k)} \Gamma_{inc}\left(\frac{\xi_l}{D_{l+k}^2}, 1\right) \right), \quad (4.12)$$

où  $r = \sum_{l=1}^t b_l$ ,  $\xi_l = \frac{N_t}{\eta} ((1 + g\eta)^{b_l} - 1)$  et  $\Gamma_{inc}$  est la fonction Gamma incomplète définie par :  $\Gamma_{inc}(x, a) = \frac{1}{(a-1)!} \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt$ .

*Démonstration.* Utilisant la définition de  $P_{out}$  donnée par (2.14) et la contrainte d'équi-répartition de la puissance sur les antennes émettrices, la probabilité de non disponibilité s'écrit :

$$P_{out} = Prob(I < R). \quad (4.13)$$

La relation (4.7) et l'indépendance des  $\Delta_l$  permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} P_{out} &\geq Prob\left(\prod_{l=1}^t \left(1 + \frac{\eta}{N_t} \Delta_l\right) < (1 + g\eta)^r\right) \\ &\geq Prob\left(\left(1 + \frac{\eta}{N_t} \Delta_l\right) < (1 + g\eta)^{b_l}, \quad l = 1, \dots, t\right) \\ &= \prod_{l=1}^t Prob(\Delta_l < \xi_l). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dans le cas corrélé, la distribution de  $\Delta_l$  est donnée par (4.8) dans le Lemme 4.1. En combinant (4.8) et (4.14), on obtient (4.12). Dans le cas non corrélé,  $\Delta_l$  est distribuée suivant une loi chi-carré ayant  $2(N_r + N_t - 2l + 1)$  degrés de liberté et par suite (4.11) s'en suit automatiquement.  $\square$

Les bornes inférieures calculées dans le Théorème 4.1 sont ensuite maximisées sur l'ensemble  $\{b_l, l = 1, \dots, t\}$ , sous la contrainte  $r = \sum_{l=1}^t b_l$  pour donner de meilleurs résultats.

Utilisant la borne inférieure donnée par le Théorème 4.1 et la définition (4.2), une estimation du compromis diversité-multiplexage est calculée, laquelle est donnée dans le Corollaire 4.1.

**Corollaire 4.1** (Estimation du compromis). *Des estimations de la diversité  $\hat{d}(r, \eta)$ , dans le cas non-corrélé ( $D_k^2 = 1, k = 1, \dots, N_t$ ) ainsi que dans le cas corrélé sont, respectivement, données par :*

$$\hat{d}^{uncorr}(r, \eta) = \frac{N_t}{\eta} \sum_{l=1}^t ((1 + g\eta)^{b_l} - b_l g\eta(1 + g\eta)^{b_l-1} - 1) \frac{\xi_l^{N_t+N_r-2l} e^{-\xi_l} / (N_t + N_r - 2l)!}{\Gamma_{inc}(\xi_l, N_r + N_t - 2l + 1)} \quad (4.15)$$

$$\hat{d}^{corr}(r, \eta) = \frac{N_t}{\eta} \sum_{l=1}^t ((1 + g\eta)^{b_l} - b_l g\eta(1 + g\eta)^{b_l-1} - 1) \frac{Q_l(\xi_l)}{P_l(\xi_l)}, \quad (4.16)$$

où  $Q_l(\xi_l)$  and  $P_l(\xi_l)$  sont données par :

$$Q_l(\xi_l) = \sum_{k=1}^{N_r-l+1} \frac{a_k^{(l)}}{(k-1)!} \left(\frac{\xi_l}{D_l^2}\right)^{k-1} e^{-\frac{\xi_l}{D_l^2}} D_l^{-2} + \sum_{k=1}^{N_t-l} a_1^{(l+k)} e^{-\frac{\xi_l}{D_{l+k}^2}} D_{l+k}^{-2} \quad (4.17)$$

$$P_l(\xi_l) = \sum_{k=1}^{N_r-l+1} a_k^{(l)} \Gamma_{inc}\left(\frac{\xi_l}{D_l^2}, k\right) + \sum_{k=1}^{N_t-l} a_1^{(l+k)} \Gamma_{inc}\left(\frac{\xi_l}{D_{l+k}^2}, 1\right). \quad (4.18)$$

Notons que (4.15) et (4.16) ont des formes compactes similaires. En effet, (4.15) peut être obtenue à partir de (4.16) en remplaçant  $P_l(\xi_l)$  et  $Q_l(\xi_l)$  par  $\Gamma_{inc}(\xi_l, N_r + N_t - 2l + 1)$  et  $(\xi_l^{N_t+N_r-2l} e^{-\xi_l}) / (N_t + N_r - 2l)!$ , respectivement.

#### 4.4 Étude asymptotique du gain de diversité

En vue d'examiner si la diversité estimée donnée dans le Corollaire 4.1 coïncide avec le compromis diversité-multiplexage asymptotique à haut SNR établi dans [Zheng and Tse, 2003], on analyse le comportement asymptotique de la diversité estimée quand  $\eta \rightarrow \infty$  ou quand  $r \rightarrow 0$ . Nous présentons d'abord le lemme suivant.

**Lemme 4.2.** *En supposant que la matrice de corrélation spatiale à l'émission est de plein rang, on peut écrire :*

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \hat{d}^{uncorr}(r, \eta) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \hat{d}^{corr}(r, \eta). \quad (4.19)$$

*Démonstration.* Pour la fluidité de la présentation, la démonstration est reportée dans l'annexe III. □

Le résultat contenu dans le Lemme 4.2 est très évocateur. Il stipule qu'à haut SNR et pour un gain de multiplexage donné  $r$ , la diversité estimée est indépendante de la corrélation spatiale. Plus important encore, la diversité estimée asymptotique coïncide bien avec le fameux compromis diversité-multiplexage comme il est énoncé dans le théorème suivant.

**Théorème 4.2.** *En supposant que la matrice de corrélation spatiale à l'émission soit de plein rang, le compromis optimal diversité-multiplexage, pour les cas corrélé et non-corrélé, est donné par la diversité estimée asymptotique, soit :*

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \hat{d}^{uncorr}(r, \eta) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \hat{d}^{corr}(r, \eta) = d_{asym}, \quad (4.20)$$

$$\text{où } d_{asym} = - \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\log_2 P_{out}}{\log_2 \eta}.$$

*Démonstration.* La démonstration est présentée dans l'annexe IV. □

Le Théorème 4.2 indique que notre diversité estimée asymptotique correspond exactement au compromis diversité-multiplexage. De ce fait, il peut être vu comme une généralisation du compromis diversité-multiplexage pour les canaux corrélés et non-corrélés. À noter que le Lemme 4.2 et le Théorème 4.2 concordent bien avec les résultats établis dans [Narasimhan, 2006, Corollary 1]. D'un autre côté, le Lemme 4.2 et le Théorème 4.2 confirment un résultat récemment établi concernant la diversité asymptotique [Chang et al., 2006]. Cependant, notre résultat est plus étendu puisqu'il permet de comprendre aussi l'impact de la corrélation spatiale à SNR limité. De plus, l'analyse présentée ici esquisse quelques lignes directrices pour la construction des codes spatio-temporels à des valeurs pratiques de SNR. À titre d'exemple, le corollaire suivant identifie le gain de diversité maximal que l'on peut atteindre par n'importe quel code spatio-temporel.

**Corollaire 4.2** (diversité maximale). *Le gain de diversité maximal est le même pour les canaux à évanouissements corrélés et non-corrélés et est donné par :*

$$\begin{aligned} \hat{d}^{max}(\eta) &= \lim_{r \rightarrow 0} \hat{d}^{uncorr}(r, \eta) = \lim_{r \rightarrow 0} \hat{d}^{corr}(r, \eta) \\ &= N_t N_r \left[ 1 - \frac{g\eta}{(1 + g\eta) \ln(1 + g\eta)} \right]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

*Démonstration.* La démonstration est présentée dans l'annexe V. □

Le Corollaire 4.2 concorde avec [Narasimhan, 2006, Theorem 6] même si notre diversité estimée est différente de celle donnée dans [Narasimhan, 2006]. Le Corollaire 4.2 indique aussi que le gain de diversité estimé maximum n'est pas affecté par la corrélation spatiale. Ceci correspond au fait que la corrélation spatiale ne fait que perdre de l'énergie et n'affecte pas la pente de décroissance de la probabilité de non disponibilité du canal en fonction du SNR. Ceci a déjà été constaté pour un régime à haut SNR dans [Paulraj et al., 2003]. Toutefois, le Corollaire 4.2 est plus fort, puisqu'il est valable pour toute valeur de SNR  $\eta$ , et en particulier pour  $\eta = +\infty$ .



On ne manquera pas de préciser que pour établir ce résultat, nous avons supposé que  $\mathbf{R}_t$  est de plein rang. Cependant, si  $\mathbf{R}_t$  n'est pas de plein rang, alors il en serait de même pour  $\mathbf{H}$  et on s'attendrait à un gain de diversité inférieur à celui donné par (4.21). De plus, comme il a été prouvé dans [Rezki et al., 2008c], tous les résultats établis dans ce chapitre sont encore valables quand la corrélation spatiale à la réception est considérée seule.

#### 4.5 Résultats numériques

On présente les résultats de simulation d'un système de communication ayant 2 antennes à l'émission et deux antennes à la réception  $N_t = N_r = 2$ . Nous adoptons le même modèle de corrélation spatiale que [Zelst and Hammerschmidt, 2002] et [Paulraj et al., 2003], c'est à dire que les éléments de la matrice de corrélation à l'émission ne dépendent que d'un seul coefficient  $\rho$  :

$$\mathbf{R}_t = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^4 & \dots & \rho^{(N_t-1)^2} \\ \rho & 1 & \rho & \ddots & \vdots \\ \rho^4 & \rho & 1 & \ddots & \rho^4 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \rho \\ \rho^{(N_t-1)^2} & \dots & \rho^4 & \rho & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

La borne inférieure sur la probabilité de non disponibilité donnée par le Théorème 4.1 ainsi que la probabilité de non disponibilité exacte  $P_{out}$  obtenue par une simulation Monte-Carlo, sont tracées sur les figures 4.1 et 4.2, respectivement, pour des gains de multiplexage  $r = 0.5, 1$ . Les figures 4.1 et 4.2 montrent aussi la borne inférieure trouvée par Narasimhan dans [Narasimhan, 2006] pour le cas non corrélé. Dans ces figures, on peut observer que pour le cas non corrélé, notre borne infé-

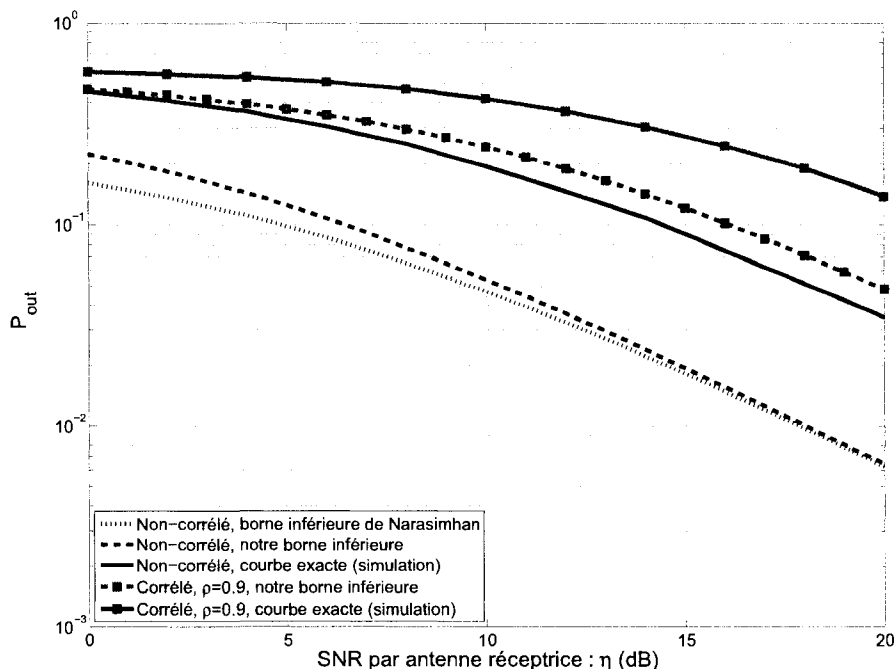


FIGURE 4.1 Comparaison de la borne inférieure de  $P_{out}$  et la valeur exacte donnée par simulation pour un coefficient de corrélation  $\rho = 0.9$ , un gain de multiplexage  $r = 1$  et pour  $N_t = N_r = 2$ .

rière est légèrement plus serrée notamment à faible SNR. En outre, notre borne inférieure suit la même allure que les courbes exactes aussi bien dans le cas corrélé que dans le cas non-corrélé.

Pour une comparaison dans le cas d'une corrélation spatiale à l'émission, on a tracé à la figure 4.3 la probabilité de non disponibilité exacte  $P_{out}$ , notre borne inférieure donnée par (4.12) et la borne inférieure établie dans [Narasimhan, 2006], pour  $r = 0.5$  and  $r = 1$ . Toutes les courbes dans la figure 4.3 ont été obtenues en utilisant la même matrice de corrélation adoptée dans [Narasimhan, 2006]. Sur cette figure, on peut observer qu'encore une fois notre borne inférieure est légèrement plus serrée que celle de Narasimhan à faible SNR. Au delà de SNR=30 dB,

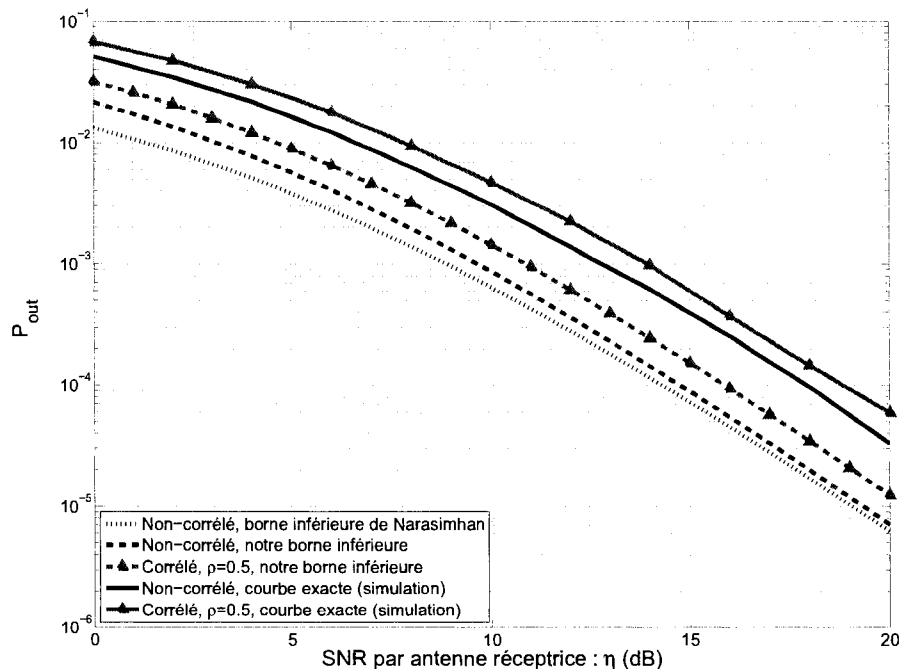


FIGURE 4.2 Comparaison de la borne inférieure de  $P_{out}$  et la valeur exacte donnée par simulation pour un coefficient de corrélation  $\rho = 0.5$ , un gain de multiplexage  $r = 0.5$  et pour  $N_t = N_r = 2$ .

les deux bornes inférieures coïncident complètement.

La diversité exacte calculée d'après (4.2) par simulation Monte-Carlo et une estimation de cette diversité calculée d'après le Corollaire 4.1 sont tracées dans la figure 4.4 pour un SNR=15 dB. On peut noter sur ladite figure que la courbe estimée du compromis diversité-multiplexage suit la même allure que la courbe exacte. Par conséquent, la valeur estimée du compromis peut être utilisée pour évaluer le potentiel des canaux MIMO corrélés et non corrélés, évitant ainsi des simulations gourmandes en temps d'exécution, notamment pour des configurations où  $N_t$  et  $N_r$  sont très grands. Il est intéressant de noter sur la figure 4.4 par exemple, que pour un coefficient de corrélation  $\rho = 0.5$ , le gain en diversité n'est dégradé que

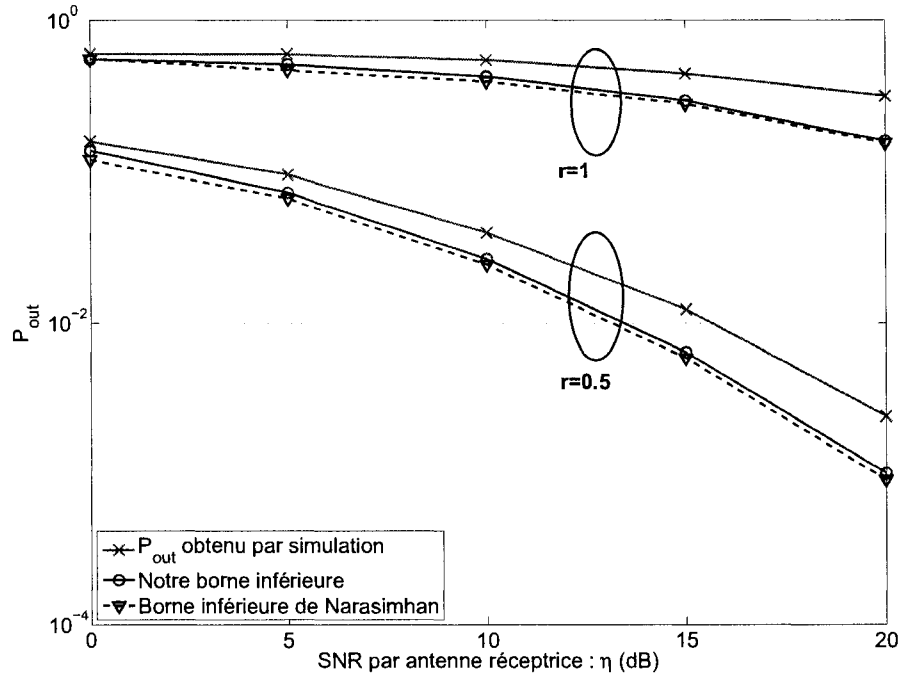


FIGURE 4.3 Comparaison de notre borne inférieure donnée par (4.12) et celle de Narasimhan, pour la corrélation spatiale à l'émission donnée par (49) dans [Narasimhan, 2006], et pour  $N_t = N_r = 2$ .

légèrement et on peut s'attendre à obtenir une performance quasi égale à celle d'un canal non corrélé. Toutefois, la diversité est très dégradée quand la corrélation spatiale augmente à  $\rho = 0.9$ . À titre d'illustration, la figure 4.5 montre qu'un système MIMO fonctionnant à un gain de multiplexage  $r = 0.8$  et un SNR de 5 dB dans un canal où la corrélation est modérée ( $\rho = 0.5$ ), atteint une meilleure diversité qu'un système fonctionnant à un même gain de multiplexage et à un SNR de 10 dB dans un canal où la corrélation est élevée ( $\rho = 0.9$ ). Cette constatation est confirmée si les valeurs exactes de la diversité sont considérées. [Rezki et al., 2006a].

Dans la figure 4.6, on a tracé le gain de diversité estimé relatif, défini par  $\frac{\hat{d}^{corr}}{\hat{d}^{uncorr}}$ , pour différentes valeurs de SNR. Comme il est prévu par le Lemme 4.2, le gain

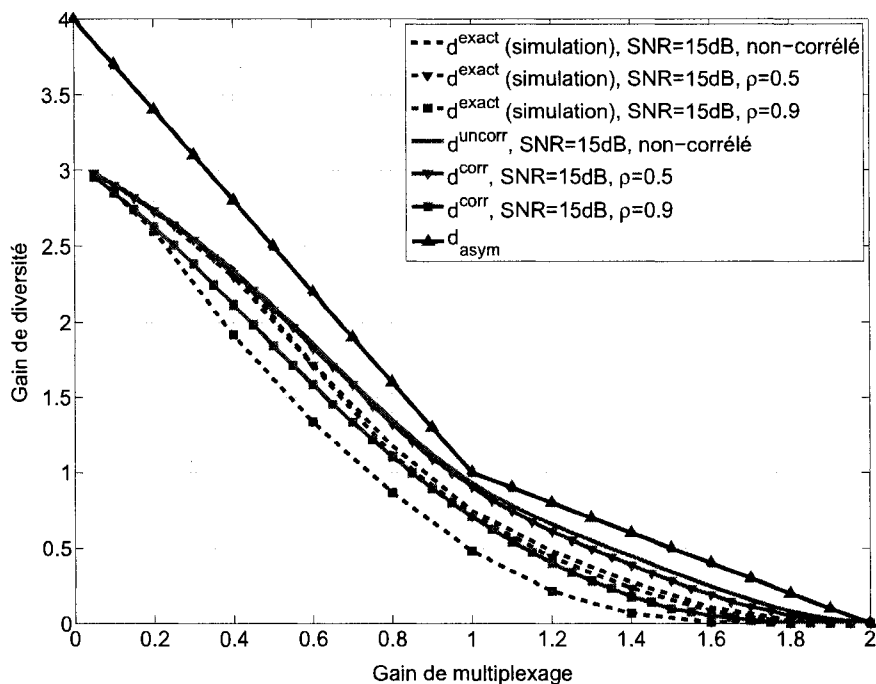


FIGURE 4.4 Impact de la corrélation spatiale sur la valeur estimée de la diversité pour  $N_t = N_r = 2$  et SNR=15 dB.

en diversité estimé relatif converge vers 1 au fur et à mesure que  $\eta \rightarrow \infty$  indépendamment de la valeur du gain de multiplexage. Cependant, la convergence est d'autant plus rapide pour de petites valeurs de  $r$ . Finalement et comme prévu par le Théorème 4.2, la figure 4.7 illustre la convergence de la diversité estimée dans le cas non corrélé vers le compromis asymptotique diversité-multiplexage à mesure que  $\eta \rightarrow \infty$ .

#### 4.6 Conclusion

Dans la perspective de définir les limites de performance des canaux à antennes multiples, nous avons étudié le compromis diversité-multiplexage à SNR fini dans

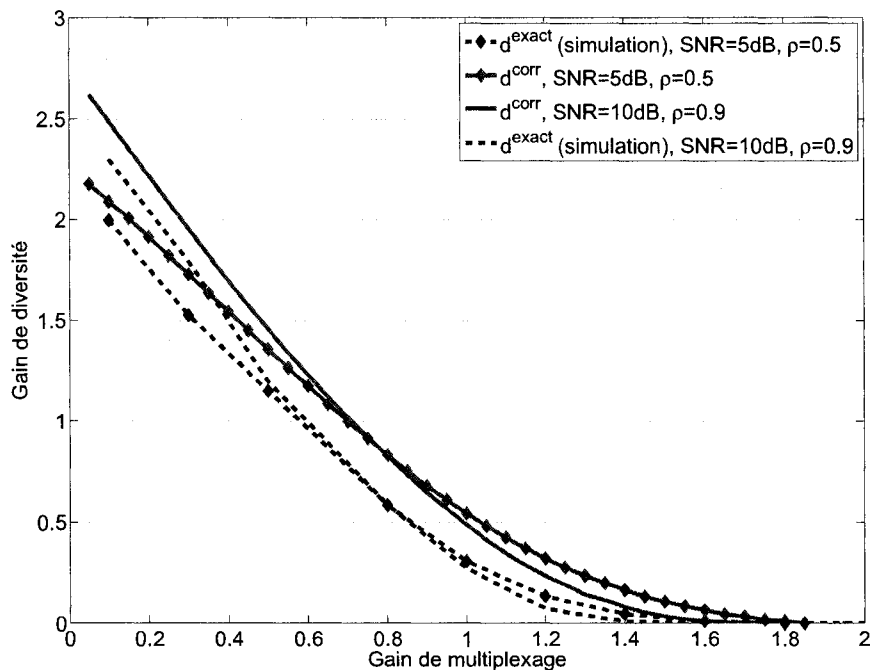


FIGURE 4.5 Comparaison de la valeur estimée de la diversité et la valeur exacte donnée par simulation pour  $\rho = 0.5$ ,  $SNR = 5$  dB et  $\rho = 0.9$ ,  $SNR = 10$  dB, pour un système  $N_t = N_r = 2$ .

des canaux à évanouissements de Rayleigh corrélés et non-corrélés. Nous avons en premier lieu, calculé une borne inférieure sur la probabilité de non disponibilité. Ensuite, nous avons déterminé des estimations du gain de diversité pour un SNR, un gain de multiplexage et un coefficient de corrélation donnés. Ces estimations sont très évocatrices et donnent une bonne approximation du gain de diversité maximum disponible dans le canal. Nous avons montré que dans un canal modérément corrélé, le gain de diversité n'est pas dégradé et on peut s'attendre à obtenir des performances quasi-similaires d'un canal non-corrélé. Par contre, à mesure que la corrélation augmente, le gain de diversité diminue. Pour rattraper cette diminution, deux options sont possibles. La première consiste à diminuer le gain

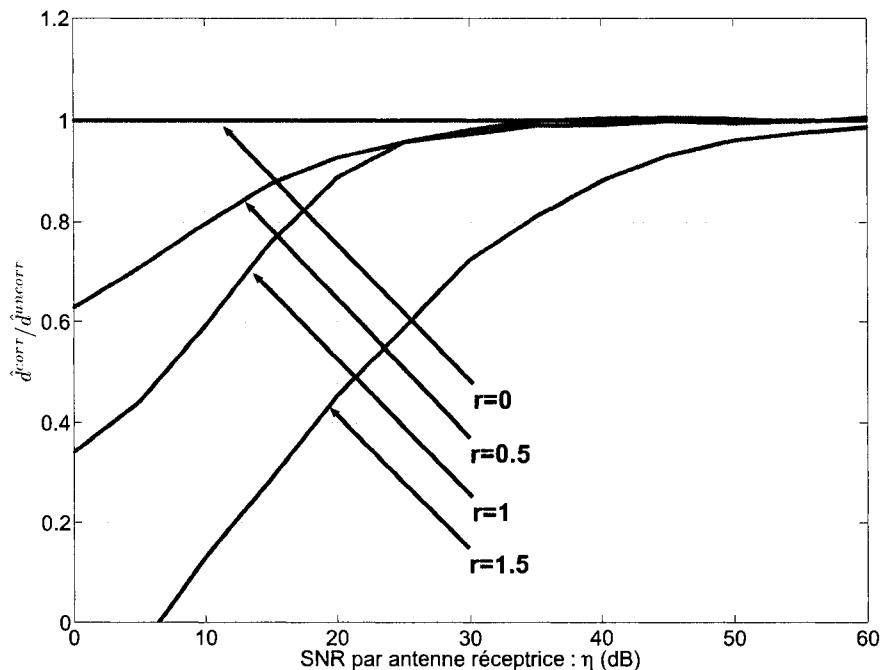


FIGURE 4.6 Gain de diversité relative pour différentes valeurs du gain de multiplexage  $r$  et pour  $N_t = N_r = 2$ .

de multiplexage en maintenant le même SNR, infligeant ainsi une dégradation du taux de transmission. La deuxième suggère d'augmenter la puissance à l'émission en maintenant constant le gain de multiplexage induisant ainsi une éventuelle dérogation de la contrainte de puissance.

En outre, quand des régimes asymptotiques à haut SNR ou à faible gain de multiplexage sont considérés, nous avons montré que la corrélation spatiale n'a plus d'effet sur le compromis diversité-multiplexage. L'analyse asymptotique permet aussi d'établir des lignes directrices pour la construction de codes spatio-temporels à pleine diversité. Et d'ajouter, l'étude asymptotique révèle que notre démarche englobe des résultats connus dans la littérature concernant le compromis diversité-multiplexage asymptotique et par conséquent elle peut être considérée comme une

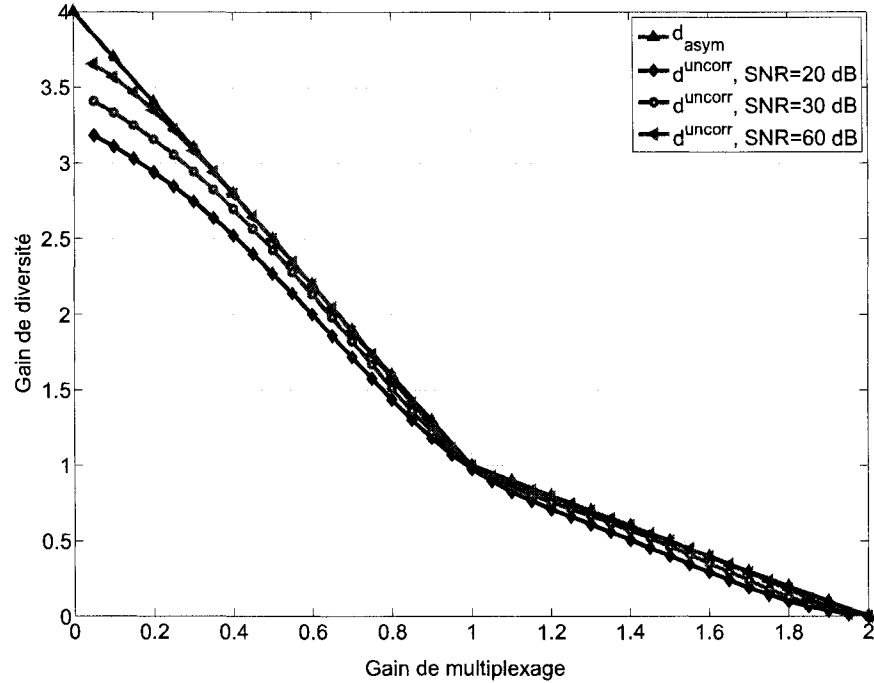


FIGURE 4.7 Convergence du gain de diversité estimé  $\hat{d}^{uncorr}(r, \eta)$  vers la gain de diversité asymptotic  $d_{asym}$ , à mesure que la valeur du SNR  $\eta \rightarrow \infty$ .

généralisation de ceux-ci.

Les résultats présentés dans ce chapitre sont encore valables lorsqu'on considère seulement la corrélation spatiale à la réception. Par ailleurs, dans notre démarche, nous avons supposé que la matrice de corrélation est de plein rang. Intuitivement, quand le rang du canal est déficient, on devrait s'attendre à une pénalité relative au gain de diversité. La caractérisation du compromis diversité-multiplexage à SNR fini pour un canal à rang déficient pourrait faire l'objet d'un travail futur. Enfin, l'analyse présentée dans ce chapitre a concerné un canal semi-corrélé où la corrélation spatiale existe soit à l'émission ou à la réception. C'est une hypothèse raisonnable dans un réseau cellulaire par exemple, où les liens montants et descendants sont considérés, puisqu'à la station de base, la contrainte d'espace est moins



cruciale. Toutefois, la détermination du compromis diversité-multiplexage à SNR fini dans un canal corrélé à l'émission et à la réception n'est pas sans utilité, et mérite d'être analysée dans des travaux futurs.

## CHAPITRE 5

### LIMITE DE PERFORMANCES DES CANAUX À ANTENNES MULTIPLES : COMMUNICATION NON COHÉRENTE

#### 5.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, on s'est placé dans une situation de communication où la connaissance de l'état du canal est disponible au récepteur. En effet, dans une communication de type point à point par exemple, le récepteur peut estimer les coefficients de propagation à travers des séquences d'apprentissage préalablement connues et émises au début de chaque trame. Étant donné que la mobilité de l'émetteur et du récepteur est limitée, le canal est supposé constant durant la transmission d'une trame et son estimation peut être réalisée de manière pertinente. Cependant, dans des situations de communication où la mobilité est très élevée, telles que les communications mobiles sans fil, la connaissance du canal au récepteur n'est pas toujours possible en raison, par exemple, d'une mobilité élevée de l'émetteur ou du récepteur ou des deux. Ainsi, l'établissement d'une communication fiable dans les canaux à évanouissement où l'état du canal (Channel State Information : CSI) n'est disponible ni à l'émetteur ni au récepteur, est d'intérêt particulier. Dans la suite, on désigne par transmission non-cohérente, une communication où le CSI n'est disponible ni à l'émetteur ni au récepteur.

Dans ce chapitre, on présente un état de l'art des résultats obtenus récemment concernant le calcul de la capacité et le compromis diversité-multiplexage pour une transmission non-cohérente.

## 5.2 Capacité du canal pour une transmission non-cohérente

Le modèle du canal d'une transmission non-cohérente est similaire à celui d'une transmission cohérente et est donné par (2.1) :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}_w \mathbf{X} + \mathbf{W},$$

où la matrice  $\mathbf{H}_w$  n'est connue ni à l'émetteur ni au récepteur. Si un codage du canal est réalisé sur plusieurs blocs indépendants de longueur  $T$ , les effets d'évanouissement se compensent et il est possible de communiquer de manière pertinente (avec une probabilité d'erreur aussi petite que désiré) à n'importe quel taux de transmission  $R$  ne dépassant pas la capacité du canal. De plus, cette capacité est définie par :

$$C = \sup_{p(\mathbf{X})} I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}),$$

en nats par bloc de  $T$  symboles, où  $I(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$  est l'information mutuelle sur l'entrée  $\mathbf{X}$  en observant  $\mathbf{Y}$  et où la maximisation est réalisée sur toutes les distributions à l'entrée du canal  $p(\mathbf{X})$ , tenant compte de la contrainte de puissance :

$$E[\mathbf{X}] \leq T \cdot P \tag{5.1}$$

L'information mutuelle, elle même, est définie par :

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = h(\mathbf{Y}) - h(\mathbf{Y} | \mathbf{X}), \tag{5.2}$$

où  $h(\cdot)$  désigne l'entropie différentielle définie par :

$$h(\mathbf{X}) = -E[\ln(p(\mathbf{X}))], \tag{5.3}$$

où  $E[\cdot]$  est la fonction espérance mathématique. En combinant (5.2) et (5.3), on obtient :

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = E\left[\ln \frac{p(\mathbf{Y} | \mathbf{X})}{p(\mathbf{X})}\right] \quad (5.4)$$

$$= \int_{\mathbf{X}} d\mathbf{X} p(\mathbf{X}) \int_{\mathbf{Y}} d\mathbf{Y} p(\mathbf{Y}) \ln \left\{ \frac{p(\mathbf{Y} | \mathbf{X})}{\int d\hat{\mathbf{S}} p(\hat{\mathbf{S}}) p(\mathbf{Y} | \hat{\mathbf{S}})} \right\}, \quad (5.5)$$

où  $\hat{\mathbf{S}}$  est une variable muette d'intégration. L'équation (5.5) suggère que pour calculer l'information mutuelle, il est nécessaire de calculer la distribution de probabilité conditionnelle de  $\mathbf{Y}$  sachant  $\mathbf{X}$ . En effet, étant donné  $\mathbf{X}$ , l'observation à la sortie du canal  $\mathbf{Y}$  est Gaussienne de moyenne nulle. Les vecteurs lignes de  $\mathbf{Y}$  sachant  $\mathbf{X}$  sont indépendants, de moyenne nulle et de même matrice de covariance. Celle-ci est donnée par :

$$\mathbf{K}_Y = \mathbf{X}^\dagger \mathbf{X} + \sigma^2 \mathbf{I}_T. \quad (5.6)$$

Par conséquent la densité de probabilité conditionnelle de  $\mathbf{Y}$  sachant  $\mathbf{X}$  est donnée par :

$$p(\mathbf{Y} | \mathbf{X}) = \frac{\exp(-\text{tr}\{\mathbf{K}_Y^{-1} \mathbf{Y}^\dagger \mathbf{Y}\})}{\pi^{TN_r} \det^{N_r}[\mathbf{K}_Y]}. \quad (5.7)$$

où "tr" désigne la fonction "trace". Il est intéressant de noter que  $p(\mathbf{Y} | \mathbf{X})$  ne dépend pas de  $\mathbf{H}_w$  et qu'elle ne dépend de  $\mathbf{X}$  qu'à travers le produit  $\mathbf{X}^\dagger \mathbf{X}$  de dimension  $T \times T$ , contenu dans la matrice de covariance  $\mathbf{K}_Y$ . Observant ceci, il est maintenant plus clair d'énoncer qu'on n'augmente pas la capacité en augmentant le nombre d'antennes émettrices  $N_t$  au delà de la longueur du mot de code  $T$ . Pour une preuve plus rigoureuse, le lecteur est référé à [Marzetta and Hochwald, 1999]. Par conséquent, on suppose dans ce qui suit que  $N_t \leq T$ .

La structure de l'entrée optimale a été établie dans [Marzetta and Hochwald, 1999]. En effet, en utilisant l'expression (5.7), Marzetta et Hochwald prouvent que l'entrée

permettant d'atteindre la capacité s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}\Phi, \quad (5.8)$$

où  $\Phi$  est une matrice unitaire de dimension  $N_t \times T$  ayant une distribution de probabilité isotrope ( $\Phi\Phi^\dagger = \mathbf{I}_{N_t}$ )<sup>1</sup> et  $\mathbf{V}$  est une matrice réelle diagonale de dimension  $N_t \times N_t$  dont la distribution conjointe des diagonales est invariante par toute permutation de celles-ci. La  $i^{\text{ème}}$  ligne  $\Phi_{\mathbf{x}_i}$  de  $\Phi$  représente la direction du signal transmis de l'antenne  $i$ , i.e.,  $\Phi_{\mathbf{x}_i} = \mathbf{x}_i / \|\mathbf{x}_i\|$ , où  $\mathbf{x}_i$  désigne la ligne  $i$  de  $\mathbf{X}$ ,  $i = 1, \dots, N_t$ . Les diagonales  $V_i = \|\mathbf{x}_i\|$  de  $\mathbf{V}$  représentent la norme de ce signal. Cette caractérisation spécifie clairement la distribution optimale de la direction des signaux sans pour autant donner de précisions sur la distribution de leurs normes. Elle réduit ainsi le nombre de variables du problème d'optimisation de  $N_t \cdot T$  à  $N_t$ . Tenant compte de (5.8), il a été démontré que l'information mutuelle s'exprime par [Marzetta and Hochwald, 1999] :

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = -TN_r - N_r \sum_{m=1}^{N_t} E \ln \left( 1 + \frac{\rho v_m^2}{N_t} \right) - \int d\lambda \cdot p(\lambda) \cdot f(\lambda) \cdot \left[ \ln f(\lambda) - \sum_{l=1}^{\min(T, N_r)} \lambda_l \right] \quad (5.9)$$

où  $p(\lambda)$  est donnée par :

$$p(\lambda) = \frac{e^{-\left(\sum_{l=1}^{\min(T, N_r)} \lambda_l\right)} \cdot \left(\prod_{l=1}^{\min(T, N_r)} \lambda_l\right)^{|T-N_r|} \cdot \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2}{\prod_{l=1}^{\min(T, N_r)} \Gamma(T - l + 1) \cdot \Gamma(N_r - l + 1)}, \quad (5.10)$$

---

<sup>1</sup>Une matrice unitaire est dite de distribution de probabilité isotrope si sa densité est invariante par multiplication par toute matrice unitaire déterministe.

où  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \lambda_{\min(T, N_r)}$  sont les valeurs propres ordonnées de  $\mathbf{Y}$  et  $f(\lambda)$  est donnée par :

$$f(\lambda) = \int d\mathbf{V} \cdot \frac{p(\mathbf{V})}{\det^{N_r}(\mathbf{V}^2 + \sigma^2 \mathbf{I}_{N_t})} \int d\Phi \cdot p(\Phi) \cdot \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\min(T, N_r)} \sum_{m=1}^{N_t} \lambda_n \cdot \left( \frac{v_m^2}{\sigma^2 + v_m^2} \right) \cdot |\phi_{n,m}| \right\} \quad (5.11)$$

La difficulté de calculer la capacité d'une transmission non-cohérente réside dans le fait que pour calculer  $I(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ , on doit effectuer des intégrales sur les  $N_t$  composantes réelles de  $\mathbf{V}$ ,  $\min(N_r, T)$  composantes réelles  $\lambda_i$  et  $N_t \cdot \min(N_r, T)$  composantes complexes de  $\Phi$ . Des formes compactes de ces intégrales ne sont généralement pas possibles. Toutefois, le calcul de la capacité est possible moyennant une optimisation numérique pour certaines valeurs spécifiques de  $N_t$ ,  $N_r$  et  $T$  et à différents régimes de SNR. Dans la section suivante, on donne des expressions de la capacité du canal pour certains des cas spécifiques.

### 5.3 Capacité du canal pour des configurations spécifiques

Bien qu'il soit très difficile de calculer une expression compacte de la capacité, il est possible d'établir des bornes qui expliquent le comportement de celle-ci en fonction de différents paramètres :  $N_t$ ,  $N_r$ ,  $T$  et  $SNR$ .

#### 5.3.1 Capacité du canal à SNR de valeurs finies

Généralement, la démarche adoptée consiste à majorer la capacité d'une transmission non-cohérente par la capacité d'une transmission cohérente où le canal est connu au récepteur et à la minorer en choisissant une distribution particulière de  $\mathbf{V}$ . Il s'avère que dans certains cas, la borne supérieure et la borne inférieure sont très serrées, ce qui nous renseigne pertinemment sur la valeur de la capacité.

### 5.3.1.1 Configuration du système où $N_t = N_r = 1$ et $T \rightarrow \infty$

Dans ce cas, la capacité normalisée en nats par symbole a été calculée dans [Marzetta and Hochwald, 1999]. Elle est donnée par :

$$e^{\frac{1}{SNR}} E_1(1/SNR) - O\left(\sqrt{\frac{\ln T}{T}}\right) \leq C/T \leq e^{\frac{1}{SNR}} E_1(1/SNR); \quad (5.12)$$

où  $E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy$  est la fonction intégrale exponentielle. Dans (5.12), la borne supérieure est la capacité d'une transmission cohérente, alors que la borne inférieure est obtenue en choisissant les  $v_i$ ,  $i = 1 \dots N_t$  tels que :  $p(v_i) = \delta\left(v_i - \sqrt{TP/N_t}\right)$ . Intuitivement, quand  $T \rightarrow \infty$ , la capacité dans un scénario non-cohérent est égale à la capacité dans un scénario cohérent. Ceci s'explique par le fait que si on alloue une fraction  $\delta \ll T$  de slots temporels pour estimer efficacement le canal et  $T - \delta$  pour communiquer, alors la capacité dans ce cas vaut  $(1 - \frac{\delta}{T})e^{\frac{1}{SNR}} E_1(1/SNR) \approx e^{\frac{1}{SNR}} E_1(1/SNR)$ . L'équation (5.12) stipule aussi que quand  $T \rightarrow \infty$ , si on alloue plus de  $O\left(\sqrt{T \ln T}\right)$  par bloc de longueur  $T$  pour la phase d'apprentissage, il n'y a pas d'espoir d'atteindre la capacité. À signaler que dans ce cas, l'entrée optimale est identique à celle d'une transmission cohérente, et de ce fait les éléments de la matrice  $\mathbf{X} = \mathbf{V}\Phi$  sont approximativement i.i.d. Gaussiens, de moyenne nulle et de variance  $\frac{P}{N_t}$  ( $\mathcal{CN}(0, P/N_t)$ ).

### 5.3.1.2 Configuration du système où $N_t = N_r = 1$ et $T \geq 1$

Les bornes données par (5.12) sont encore valides. L'entrée optimale est discrète à plusieurs points de masses. Ceux-ci se rapprochent au fur et à mesure que  $T$  augmente pour donner une distribution optimale à un seul point de masse. À ce moment là, la valeur de la capacité, obtenue par maximisation numérique de (5.9), coïncide avec la borne inférieure.

### 5.3.1.3 Configuration du système où $N_t \geq 1$ , $N_r \geq 1$ et $T = 1$

Puisque du point de vue capacité, on ne gagne rien à avoir  $N_t \geq T$ , on suppose que  $N_t = T$ . Dans ce cas, les bornes données par (5.9) ne sont pas consistantes. En effet, la borne inférieure vaut zéro, puisque si  $v_1$  est distribuée telle que  $p(v_i) = \delta(v_i - \sqrt{TP/N_t})$ , alors  $\mathbf{X}^\dagger \mathbf{X} = P$ , et de ce fait,  $p(\mathbf{Y}|\mathbf{X})$  est indépendante de  $\mathbf{X}$ . Soit  $I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = 0$ . D'autre part, puisque  $T = 1$ , le récepteur ne peut estimer le canal et par conséquent la capacité d'une transmission non-cohérente est bien loin de celle d'une transmission cohérente.

## 5.3.2 Capacité du canal à SNR de valeurs infinies

Les résultats contenus dans cette section ont été établis dans [Zheng and Tse, 2002a], [Hochwald and Marzetta, 2000]. Nous ne développons pas les détails de calcul de la capacité dans ce cas, mais nous en donnons une expression dans différents scénarios. À la fin de cette section, on présente une interprétation de ces expressions en termes de degrés de liberté. On considère plusieurs configurations de communication.

### 5.3.2.1 Configuration du système où $N_t = N_r$ et $T \geq 2N_t$

À haut SNR, la capacité est atteinte par une distribution à norme constante égale, i.e  $p(v_i) = \delta(v_i - \sqrt{TP/N_t})$ ,  $i = 1 \dots N_t$ . La capacité d'une transmission non-cohérente en nats par bloc de  $T$  symboles est donnée par :

$$C_{N_t, N_t}(SNR) = N_t \left(1 - \frac{N_t}{T}\right) \ln SNR + c_{N_t, N_t} + o(1), \quad (5.13)$$



où  $c_{N_t, N_t}$  est une constante explicitement calculable qui ne dépend pas du SNR. Il est d'intérêt d'exprimer cette capacité en fonction de la capacité d'une transmission cohérente. Sachant qu'à haut SNR, cette dernière s'exprime par :  $C_{coherent}(SNR) \approx N_t \ln SNR$ , alors (5.13) devient :

$$C_{N_t, N_t}(SNR) = \left(1 - \frac{N_t}{T}\right) C_{coherent}(SNR) + o(1). \quad (5.14)$$

Tenant compte de (5.14), il est important de noter que :

- Vu que la la distribution optimale à l'entrée est à norme constante égale, alors l'information est véhiculée par  $\Phi$ , matrice unitaire isotrope. La dimension du sous-espace formé par ces matrices est  $N_t(T - N_t)$  qui est exactement le degré de liberté de la capacité d'une transmission non-cohérente. Par ailleurs, dans le cas cohérent, l'information est plutôt véhiculée par  $\mathbf{X}$ . Puisque le sous-espace formé par ces matrices est de dimension  $N_t T$ , alors tel est le degré de liberté de la capacité d'une transmission cohérente. La pénalité en termes de degrés de liberté vaut  $N_t^2$ , c'est le prix de l'incertitude sur la connaissance du canal au récepteur.
- À mesure que  $T$  tend vers l'infini, la capacité d'une transmission non-cohérente s'approche de celle d'une transmission cohérente :  $C_{N_t, N_t}(SNR) \approx C_{coherent}(SNR)$ .

### 5.3.2.2 Configuration du système où $N_t > N_r$ , et $T \geq 2N_r$

Il est clair que si on utilise seulement un nombre  $N_r$  des  $N_t$  antennes émettrices, on se place dans le cas de la section 5.3.2.1. À cet effet, à haut SNR, une borne inférieure sur la capacité dans ce cas, est donnée par (5.13) en remplaçant  $N_t$  par  $N_r$ . Mais, peut-on faire mieux ? En réalité, s'obstiner à diffuser la puissance sur toutes les  $N_t$  antennes disponibles n'améliore point le degrés de liberté. Pour voir ceci, il suffit de noter que même pour une transmission cohérente, le degré de liberté est limité par  $TN_r$ . Au contraire, utiliser plus que  $N_r$  antennes émettrices

augmenterait la dimension de  $\mathbf{H}$ , accroît l'incertitude sur le canal et par conséquent réduit le degré de liberté effectif. Notons enfin que de manière similaire, utiliser plus que  $N_r$  antennes émettrices dans une transmission cohérente n'augmente pas le degré de liberté à haut SNR. Cependant, il augmente la capacité d'une constante indépendante du SNR. Cette augmentation découle de l'augmentation du gain de diversité.

### 5.3.2.3 Configuration du système où $N_t < N_r$ , et $T \geq N_t + N_r$

De manière similaire à celle de la section 5.3.2.2, le degré de liberté est limité par  $\min(N_t, N_r) = N_t$ . Le fait que  $N_r > N_t$  augmente le SNR total au récepteur qui est égal à  $N_r$  fois le SNR par antenne réceptrice, et par la suite améliore la capacité du canal d'une constante qui ne dépend pas du SNR. Au mieux de notre connaissance, il n'y a pas d'expression connue de la capacité dans ce cas. Cependant une approximation de la capacité (une borne inférieure à haut SNR) a été établie dans [Zheng and Tse, 2002a], elle s'exprime en nats par bloc de  $T$  symboles par :

$$C_{N_t, N_r}(SNR) \approx N_t \left(1 - \frac{N_t}{T}\right) \ln SNR + c_{N_t, N_r} \quad (5.15)$$

$$\approx \left(1 - \frac{N_t}{T}\right) C_{coherent}(SNR) \quad (5.16)$$

où  $c_{N_t, N_r}$  est une constante explicitement calculable qui ne dépend pas du SNR. Cette approximation a été obtenue en assignant une distribution à norme constante égale à l'entrée du canal. Remarquons que le nombre de degrés de liberté par symbole est  $N_t \left(1 - \frac{N_t}{T}\right)$ , et ne dépend pas de  $N_r$ . Encore une fois, à mesure que  $T \rightarrow \infty$ , la capacité d'une transmission non-cohérente s'approche de celle d'une transmission cohérente à haut SNR.

Pour synthétiser ces résultats en termes de degrés de liberté, posons  $t =$

$\min(N_t, N_r)$ . il y a lieu de noter que si on suppose que  $T > t + N_r$ , alors le degré de liberté par symbole est :

$$t \left(1 - \frac{t}{T}\right). \quad (5.17)$$

Ce degré de liberté apparaît comme le produit de deux facteurs :  $t$  qui représente le nombre de dimensions spatiales dans le système et  $\left(1 - \frac{t}{T}\right)$  qui lui, représente l'incertitude sur la connaissance du canal au niveau du récepteur.

#### 5.3.2.4 Configuration du système où le temps de cohérence est faible

Ce cas représente un scénario où le canal varie rapidement dans le temps. On suppose plus précisément que  $T < t + N_r$ . Encore une fois, il n'y a pas d'expression exacte de la capacité dans ce cas. Ceci est dû au fait que la distribution optimale de  $\mathbf{V}$  ne peut être calculée sous forme compacte. Assigner une distribution à l'entrée telle que  $M^* = \min(N_t, N_r, \lfloor \frac{T}{2} \rfloor)$  des antennes émettrices transmettent à SNR élevé, permet d'obtenir les bornes suivantes :

$$\underline{c} \leq C_{N_t, N_r}(SNR) - M^* \left(1 - \frac{M^*}{T}\right) \leq \bar{c} \quad (5.18)$$

où  $\underline{c}$  et  $\bar{c}$  sont des constantes indépendantes du SNR. Notons que dans ce cas, le nombre d'antennes émettrices utilisées n'est plus limité par  $N_r$  seulement, mais aussi par  $T$ .

### 5.4 Le compromis diversité-multiplexage dans un scénario non-cohérent

Avant de procéder à la caractérisation du compromis diversité multiplexage dans une transmission non-cohérente, il y a lieu d'identifier deux points évidents de ce

compromis :

- De manière similaire à une transmission cohérente, si la longueur de bloc est assez grande  $T \geq N_t$ , alors la diversité maximale dans un scénario non-cohérent est égale à  $N_t \times N_r$  [Tarokh et al., 1998]. Ceci définit le point de gain de multiplexage  $r = 0$  du compromis non-cohérent.
- De la section précédente, on déduit que le nombre de degrés de liberté spatio-temporels disponibles dans le canal lors d'une communication non-cohérente vaut  $M^*(T - M^*)$ . De ce fait, le gain de multiplexage maximal est  $r^{max} = M^*(1 - \frac{M^*}{T})$  correspondant à un gain de diversité nulle  $d(r^{max}) = 0$ .

Pour établir le compromis diversité-multiplexage dans une transmission cohérente, une technique d'isolation des événements de non disponibilité est utilisée. En effet, comme il a été discuté au chapitre 2, à haut SNR et lorsque la longueur de blocs  $T$  est assez grande, les erreurs de détection sont principalement dominées par les événements de pannes, i.e les événements où le canal est si singulier qu'il ne peut supporter le taux de transmission. Dans ce cas, on a  $P_e(SNR) \doteq P_{out}(SNR)$ . Le calcul de  $P_{out}$  permet alors de déterminer le gain en diversité  $d(r)$  pour tout multiplexage  $r$ .

Cependant, appliquer une technique similaire pour une transmission non-cohérente n'est pas si évident en raison de la définition des événements de non disponibilité. En effet, en transmission cohérente, l'information mutuelle est définie en fonction d'une réalisation du canal  $\mathbf{H}$ , alors que dans un scénario non-cohérent, l'aspect aléatoire de  $\mathbf{H}$  est déjà contenu dans la probabilité de transition  $p(\mathbf{Y} | \mathbf{X})$  apparaissant dans l'expression (5.5) de l'information mutuelle  $I(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ .

Pour définir l'événement de non disponibilité dans un scénario non-cohérent, il y a lieu d'éliminer toute supposition quant à une conception spécifique du récepteur. En effet, en transmission cohérente, connaissant le canal, un récepteur optimal réalise la détection en minimisant la probabilité d'erreur à priori. En transmission non-cohérente, la définition d'un tel récepteur optimal n'est pas triviale puisque la

structure de celui-ci dépend de la performance d'erreur requise.

Pour surmonter cette difficulté, une technique qui consiste à supposer qu'un 'miracle' informe le récepteur en utilisant un bit par bloc en vue de s'accommoder à une performance d'erreur requise, est utilisée [Zheng and Tse, 2002b]. Soient  $\varepsilon$  et  $1_\varepsilon$  un sous-ensemble de  $\mathcal{C}^{N_r \times N_t}$  des réalisations de  $\mathbf{H}$  et un indicateur de ces réalisations, respectivement. Soit  $I_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$  l'information mutuelle du canal sachant que l'événement  $\varepsilon$  est survenu. À un taux de transmission donné  $R$ , un événement de non disponibilité est défini comme l'événement  $\varepsilon$  tel que  $I_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) < R$ . La probabilité de non disponibilité est alors supérieure à la plus grande quantité de ces probabilités de non disponibilité :

$$P_{out} \geq \max_{\varepsilon: I_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) < R} P(\varepsilon). \quad (5.19)$$

À noter qu'en introduisant la notion de récepteur informé par un 'miracle' via l'indicateur  $1_\varepsilon$ , on obtient une borne supérieure sur l'information mutuelle du canal, ou de manière équivalente une borne inférieure sur la probabilité de non disponibilité, ce qui justifie l'inégalité de (5.19).

Clairement, le calcul de  $P_{out}$  donne une borne inférieure sur la probabilité d'erreur, ou de manière équivalente, une borne supérieure sur le gain de diversité pour un gain de multiplexage donné. Nous énonçons ci-dessous le résultat final établi dans [Zheng and Tse, 2002b] :

$$P_e(SNR) \doteq SNR^{-d^{nc}(r)} \underset{\geq}{\doteq} P_{out}(SNR) \doteq SNR^{-d_{out}^{nc}(r)}, \quad (5.20)$$

où  $d_{out}^{nc}(r)$  est le gain de diversité provenant de la probabilité de non disponibilité dans une transmission non-cohérente. Il est donné par :

$$d_{out}^{nc}(r) = \min_{\alpha \in \mathcal{A}} \sum_{l=1}^t (2l - 1 + |N_t - N_r|) \alpha_l, \quad (5.21)$$

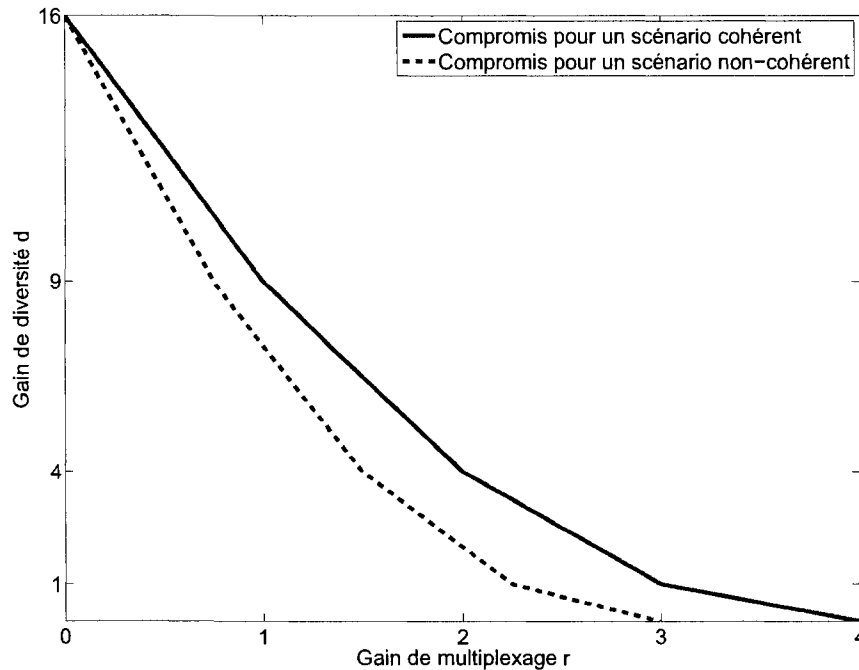


FIGURE 5.1 Compromis optimal diversité-multiplexage pour un canal MIMO ayant  $N_t = N_r = 4$  et  $T = 16$ .

où  $\mathcal{A} = \{\alpha \in [0, 1]^t : (T - t) \sum_{l=1}^t (1 - \alpha_l) \leq Tr\}$ . Comparant (5.21) au gain en diversité provenant de la probabilité de non disponibilité dans une transmission cohérente  $d_{out}^c(r) = d_{asym}(r)$  donné par (IV), nous déduisons que  $d_{out}^{nc}(r)$  diffère de  $d_{out}^c(r)$  seulement par un facteur multiplicateur  $\frac{T}{T-t}$  du taux de transmission. Tout se passe comme si en raison de la non connaissance du canal, on ne communique plus  $RT$  bits durant  $T$ , mais plutôt durant  $(T - t)$  durées de symbole. Pendant ces  $(T - t)$  durées de symbole, le canal se comporte comme cohérent. Ceci peut être formalisé comme suit :

$$d_{out}^{nc}(r) = d_{out}^c\left(\frac{T}{T-t} \cdot r\right). \quad (5.22)$$

De manière similaire au cas cohérent, si  $T$  est assez grand, les erreurs sont dominées par les événements de non disponibilité et la probabilité d'erreur est

asymptotiquement égale à la probabilité de non disponibilité. Plus précisément si  $T - t \geq N_t + N_r - 1$ , i.e  $T \geq N_t + N_r + t - 1$ , alors le compromis diversité-multiplexage dans une transmission cohérente est complètement caractérisé par (5.22).

Quand la longueur de bloc n'est pas assez grande  $T \leq N_t + N_r + t - 1$ , le compromis diversité-multiplexage n'est pas complètement caractérisé pour tout gain de multiplexage  $r$ . En fait, tout comme dans une transmission cohérente, le compromis est compris entre deux bornes : une borne supérieure donnée par (5.22) et une borne inférieure provenant d'un codage aléatoire et d'une technique d'expurgation.

Le compromis diversité-multiplexage asymptotique pour une transmission non-cohérente, donné par (5.22), est représenté dans la figure 5.1 pour  $N_t = N_r = 4$  et  $T = 16$ . À titre de comparaison, le compromis pour une transmission cohérente est aussi illustré sur la même figure. Alors que le gain de diversité maximale est atteint peu importe la connaissance ou non du canal au récepteur, la transmission non-cohérente ne parvient pas à atteindre le point de gain de multiplexage maximal (4,0) en raison de la limitation de son degré de liberté maximal par  $r^{max} = M^*(1 - \frac{M^*}{T}) = 3$ .

## CHAPITRE 6

### CAPACITÉ DES CANAUX NON-COHÉRENTS DISCRETS SANS MÉMOIRE ET À ÉVANOUISSEMENTS DE RAYLEIGH

#### 6.1 Introduction

L'établissement des limites de performance en termes de la capacité du canal, de la probabilité d'erreur, etc., dans un scénario non-cohérent, i.e. un scénario où le CSI n'est pas disponible au récepteur, a récemment motivé plusieurs travaux de recherche (voir par exemple [Verdú, 2002], [Médard, 2000]). Quand le CSI est disponible au récepteur, la capacité du canal, généralement connue sous le nom de capacité cohérente, a été étudiée par Ericson [Ericson, 1976] pour un canal SISO et récemment par d'autres auteurs pour un canal MIMO [Foschini, 1996] [Telatar, 1999]. Réciproquement, quand le CSI n'est pas disponible au récepteur, le calcul de la capacité du canal, connue sous le nom de capacité non-cohérente ainsi que la détermination de la distribution optimale permettant d'atteindre cette capacité pour des canaux discrets, sans mémoire SISO et MIMO, est plutôt difficile [Abou-Faycal et al., 2001] [Perera et al., 2006]. Cette difficulté est due principalement au fait que la distribution optimale à l'entrée du canal est discrète avec un nombre fini de points de masse dont l'un est situé à l'origine. Le nombre de ces points de masse augmente avec le SNR. Puisqu'aucune borne sur le nombre de ces points de masse en fonction du SNR n'est disponible, il est très difficile d'exprimer la capacité et la distribution optimale à l'entrée du canal en fonction du SNR. La détermination de la capacité et de la distribution optimale a été effectuée à l'aide de simulations numériques en utilisant la condition de Khun-Tucker qui est une condition nécessaire et suffisante pour l'optimalité, pour un canal SISO [Abou-



Faycal et al., 2001] et pour un canal MIMO [Perera et al., 2006].

Comme il a été discuté au chapitre 5, Marzetta et Hochwald ont obtenu la structure de l'entrée optimale, en utilisant un canal à évanouissements par bloc [Marzetta and Hochwald, 1999]. Ils ont aussi déterminé explicitement cette entrée pour le cas spécial d'un canal SISO, mais seulement asymptotiquement, à haut SNR ou à grand temps de cohérence  $T$  [Marzetta and Hochwald, 1999]. La capacité non-cohérente a été également calculée en fonction du nombre d'antennes émettrices, d'antennes réceptrices et du temps de cohérence à haut SNR dans [Zheng and Tse, 2002a]. À faible SNR, il a été également montré qu'à un premier ordre de grandeur du SNR, il n'y a aucune pénalité en termes de capacité à ne pas connaître le canal au récepteur, ce qui est contraire au cas à haut SNR. Plus précisément, il a été établi précédemment qu'à faible SNR, comme dans un canal à bruit additif blanc et Gaussien (AWGN), la capacité d'un canal à évanouissements varie linéairement avec le SNR que le CSI soit disponible au récepteur ou non [R. S. Kennedy, 1969], [Tse and Tse, 2000]. Cette efficacité énergétique de la transmission non-cohérente à faible SNR, ou d'une manière équivalente à grande largeur de bande du canal, a motivé beaucoup de travaux de recherche en vue de mieux comprendre la capacité non-cohérente à faible SNR, pour des canaux SISO et MIMO suivant différents modèles d'évanouissements [Verdú, 2002], [Zheng et al., 2007], [Ray et al., 2007].

Dans [Rezki et al., 2007a, Rezki et al., 2008a], nous avons analysé la capacité d'un canal SISO, discret, sans mémoire à évanouissements de Rayleigh. Les contributions principales de [Rezki et al., 2007a, Rezki et al., 2008a] sont :

1. La détermination d'une forme analytique compacte de l'information mutuelle du canal à faible SNR, qui peut également être considérée comme une borne inférieure sur l'information mutuelle du canal pour une valeur arbitraire du SNR.

2. La détermination d'une relation fondamentale entre la distribution optimale à l'entrée du canal et la valeur du SNR, de laquelle une expression exacte de la capacité est déduite.
3. La détermination de bornes supérieure et inférieure de la localisation du point de masse non nulle de l'entrée optimale, desquelles des bornes inférieures et supérieures sur la capacité non-cohérente sont, respectivement, déduites.

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats établis dans [Rezki et al., 2007a, Rezki et al., 2008a] pour un canal SISO dans la section 6.2. Nous étendons notre analyse à un canal MIMO discret, sans mémoire et à évanouissements de Rayleigh dans la section 6.3 [Rezki et al., 2008b].

## 6.2 Capacité du canal SISO

Dans cette section, nous analysons la capacité d'une transmission non-cohérente dans un canal discret ( $T = 1$ ), sans mémoire et à évanouissements de Rayleigh, ayant une entrée à l'émission et une entrée à la réception ( $N_t = N_r = 1$  : SISO).

### 6.2.1 Modèle du canal

Nous considérons un canal discret, sans mémoire et à évanouissements de Rayleigh, donné par :

$$r(l) = h(l)s(l) + w(l), \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (6.1)$$

où  $l$  est l'index de temps discret,  $s(l)$  est l'entrée du canal,  $r(l)$  est la sortie du canal,  $h(l)$  est le coefficient d'évanouissement et  $w(l)$  est un bruit additif. Plus spécifiquement,  $h(l)$  et  $w(l)$  sont des variables aléatoires Gaussiennes circulaires complexes indépendantes de moyenne zéro et de variances  $\sigma_h^2$  et  $\sigma_w^2$ , respectivement.

L'entrée  $s(l)$  obéit à une contrainte de puissance moyenne telle que :  $E[|s(l)|^2] \leq P$ , où  $E[.]$  indique la valeur moyenne. On suppose que l'état du canal, le CSI, n'est disponible ni à l'émetteur ni au récepteur. Cependant, quoique les valeurs exactes de  $h(l)$  et de  $w(l)$  ne soient pas connues, leurs statistiques le sont, aux deux extrémités.

Le modèle (6.1) apparaît par exemple pendant la décomposition d'un canal à large bande en canaux parallèles indépendants, ou quand un signal à bande étroite est émis par sauts successifs sur un ensemble de fréquences, un symbole par fréquence [Verdú, 2002].

Puisque le canal défini dans (6.1) est stationnaire et sans mémoire, les statistiques de l'entrée optimale permettant d'atteindre la capacité  $s(l)$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , sont également sans mémoire, indépendants et identiquement distribués (i.i.d.). Par conséquent et par commodité, nous pouvons ignorer l'index  $l$  du temps dans (6.1). De ce fait, la distribution de la sortie du canal  $r$  conditionnée sur l'entrée  $s$  peut être obtenue en prenant la moyenne sur toutes les réalisations du canal  $h$  :

$$f_{r|s}(r|s) = \frac{1}{\pi(\sigma_h^2|s|^2 + \sigma_w^2)} \exp \left[ \frac{-|r|^2}{\sigma_h^2|s|^2 + \sigma_w^2} \right]. \quad (6.2)$$

Puisque la distribution  $f_{r|s}$  dans (6.2) dépend seulement des grandeurs  $|s|^2$  et  $|r|^2$ , nous ne serons plus concernés par des quantités complexes, mais seulement par leurs modules au carré. Conditionnée sur l'entrée  $s$ ,  $|r|^2$  est distribuée suivant une loi chi-carré à deux degrés de liberté :

$$f_{|r|^2|s}(t|s) = \frac{1}{(\sigma_h^2|s|^2 + \sigma_w^2)} \exp \left[ \frac{-t}{\sigma_h^2|s|^2 + \sigma_w^2} \right]. \quad (6.3)$$

En vue de normaliser les variances des variables aléatoires, posons  $y = |r|^2/\sigma_w^2$  et

$x = |s|\sigma_h\sigma_w$ . Ainsi, l'équation (6.3) peut être exprimée plus commodément par :

$$f_{y|x}(y|x) = \frac{1}{(1+x^2)} \exp\left[\frac{-y}{1+x^2}\right], \quad (6.4)$$

avec la contrainte de puissance moyenne :  $E[x^2] \leq a$ , où  $a = P\sigma_h^2/\sigma_w^2$  est le SNR par durée de symbole.

### 6.2.2 Information mutuelle du canal

Pour la densité de probabilité conditionnelle (6.4) définissant le canal (6.1), l'information mutuelle est donnée par [Gallager, 1968] :

$$I(x; y) = \int \int f_{y|x}(y|x) f_x(x) \ln \frac{f_{y|x}(y|x)}{f_{(y;x)}(y; x)} dx dy. \quad (6.5)$$

La capacité du canal (6.4) est la borne supérieure donnée par :

$$C = \sup_{E[x^2] \leq a} I(x; y) \quad (6.6)$$

sur toutes les distributions d'entrée qui remplissent la contrainte de puissance. L'existence et l'unicité d'une telle distribution ont été établies dans [Abou-Faycal et al., 2001]. Plus spécifiquement, la distribution optimale d'entrée pour le canal (6.4) est discrète avec un nombre fini de points de masse dont l'un est nécessairement nul. C'est-à-dire, la capacité (6.6) peut être exprimée par :

$$C = \max_{E[x^2] \leq a} \sum_{i=0}^{N-1} p_i \int_0^\infty f_{y|x_i}(y|x_i) \ln \left[ \frac{f_{y|x_i}(y|x_i)}{\sum_j p_j f_{y|x_j}(y|x_j)} \right] dy, \quad (6.7)$$

où  $x_0 = 0 < x_1 < x_2 \dots < x_{N-1}$  sont les endroits des points de masse et où  $p_0 > p_1 > \dots > p_{N-1}$ , sont leurs probabilités respectives. Ce problème d'optimisation est très difficile puisque le nombre de points de masse, leurs localisations et

leurs probabilités optimales sont inconnus. Dans [Abou-Faycal et al., 2001], l'évaluation numérique de la capacité et la distribution optimale de l'entrée ont été données en utilisant la condition de Khun-Tucker qui est nécessaire et suffisante pour l'optimalité. Les auteurs ont trouvé empiriquement que deux points de masse sont optimaux à faible SNR et que le nombre de points de masse croît avec le SNR. Beaucoup d'autres auteurs ont employé ces résultats afin de comprendre davantage la capacité non-cohérente et le comportement de la distribution optimale de l'entrée aussi bien à haut SNR qu'à faible SNR [Zheng et al., 2007] [Ray et al., 2007]. Puisque nous nous concentrons sur le bas régime du SNR, nous pouvons utiliser dans (6.7) une entrée de distribution discrète avec deux points de masse, dont l'un est nul, pour obtenir la capacité optimale à faible SNR. En outre, cette signalisation marche-arrêt (On-Off Signaling) permet également d'obtenir une borne inférieure sur la capacité non-cohérente pour toute valeur du SNR. En effet, les résultats de simulation fournis dans [Abou-Faycal et al., 2001] montrent que la capacité atteinte par une signalisation ON-OFF est une borne inférieure assez serrée sur la capacité du canal pour les valeurs du SNR considérées. À cet effet, une borne inférieure sur la capacité peut être exprimée par :

$$C_{LB} = \max_{E[x^2] \leq a} I_{LB}(x; y), \quad (6.8)$$

où  $I_{LB}(x; y)$  est une borne inférieure sur l'information mutuelle du canal  $I(x; y)$  donnée par :

$$I_{LB}(x; y) = I_{LB}(x_1, p_1) = \sum_{i=0}^1 p_i \int_0^\infty f_{y|x_i}(y|x_i) \ln \left[ \frac{f_{y|x_i}(y|x_i)}{\sum_j p_j f_{y|x_j}(y|x_j)} \right] dy, \quad (6.9)$$

et la contrainte de puissance moyenne devient :  $p_1 x_1^2 \leq a$ . À noter que le problème d'optimisation dans (6.8) est moins complexe que dans (6.7) puisque (6.8) porte seulement sur deux inconnues  $p_1$  et  $x_1$ . En outre, on prouve ci-dessous que plus de

simplifications peuvent être obtenues, en utilisant le fait que  $I_{LB}(x_1, p_1)$  est monotone croissante en fonction de  $x_1$  et le problème (6.8) peut être réduit à un problème plus simple de maximisation sans contrainte. Nous récapitulons ce résultat dans le Lemme 6.1.

**Lemme 6.1.** *La capacité du canal à faible SNR et une borne inférieure sur cette capacité à toute valeur du SNR est donnée par :*

$$C_{LB} = \max_{x_1 \geq \sqrt{a}} I_{LB}(x_1, a), \quad (6.10)$$

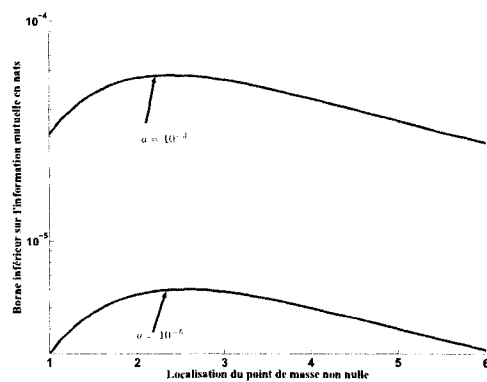
où  $I_{LB}(x_1, a)$  est l'information mutuelle du canal pour une localisation donnée  $x_1$  d'un point de masse et une valeur du SNR donnée  $a$ . De plus,  $I_{LB}(x_1, a)$  peut être exprimée par :

$$I_{LB}(x_1, a) = \begin{cases} a - a \left[ \frac{\ln(1+x_1^2)}{x_1^2} + \frac{1}{1+x_1^2} + \frac{x_1^2}{1+x_1^2} \cdot {}_2F_1 \left( 1, \frac{1}{x_1^2}, 1 + \frac{1}{x_1^2}, -\frac{(1+x_1^2)(x_1^2-a)}{a} \right) \right] \\ - \ln \left( 1 - \frac{a}{x_1^2} \right) - \ln \left( 1 + \frac{a}{(1+x_1^2)(x_1^2-a)} \right) & \text{si } x_1 > \sqrt{a}, \\ 0 & \text{si } x_1 = \sqrt{a} \end{cases} \quad (6.11)$$

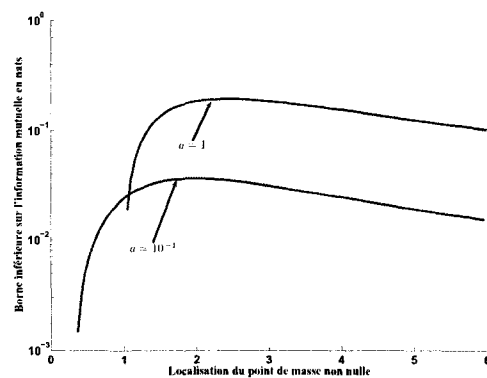
où  ${}_2F_1(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  est la fonction hypergéométrique de Gauss.

*Démonstration.* Par commodité, la démonstration est présentée dans l'annexe VI. □

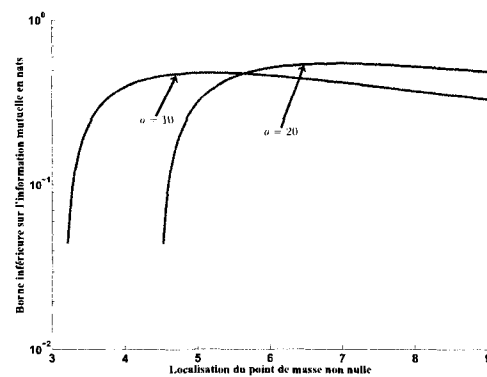
Dans le Lemme 6.1, l'existence d'un maximum pour une valeur donnée  $a$  du SNR est garantie par la continuité de  $I_{LB}(x_1, a)$  ainsi que par le fait qu'elle est bornée par rapport à  $x_1$  sur l'intervalle  $[\sqrt{a}, \infty[$ . Ceci peut être observé sur la figure 6.1, où nous avons tracé la borne inférieure  $I_{LB}(x_1, a)$  pour différentes valeurs de  $a$ . Comme il peut être observé sur la figure 6.1,  $I_{LB}(x_1, a)$  a un maximum pour les 3 régimes



(a) Régime à très faible SNR



(b) Régime à faible SNR



(c) Régime à SNR élevé

FIGURE 6.1 Borne inférieure sur l'information mutuelle du canal en fonction de la localisation du point de masse non nulle, pour trois régimes du SNR : a) Très faible SNR, b) faible SNR et c) SNR élevé

du SNR. L'existence d'un tel maximum est rigoureusement établie dans l'annexe VI. Clairement, comme il a été discuté dans l'annexe VI, la maximisation (6.10) consiste à résoudre l'équation  $\frac{\partial}{\partial x_1} I_{LB}(x_1, a) = 0$  pour une valeur donnée du SNR  $a$ . Idéalement, une solution analytique permettrait de mieux comprendre comment la capacité non-cohérente et la distribution optimale de l'entrée varient avec le SNR. Cependant, il est très difficile de trouver la solution d'une telle équation pour des valeurs arbitraires du SNR puisqu'elle implique des équations transcendantes. Néanmoins, quand un régime à faible SNR est considéré, le problème devient moins compliqué et on parvient à élucider le comportement de la capacité des canaux non-cohérents à faible SNR.

### 6.2.3 Capacité d'une communication non-cohérente à faible SNR

Dans cette section, on se place dans un régime à faible SNR, et nous utilisons le Lemme 6.1 pour établir une relation analytique fondamentale entre la distribution optimale de l'entrée et la valeur  $a$  du SNR. Nous montrons dans le Théorème 6.1 que cette relation fondamentale est valide à un ordre de  $a$  strictement inférieur à 2. Comme il est discuté ci-dessous, la relation établie est très utile puisqu'elle permet de calculer la distribution optimale à l'entrée du canal pour une valeur  $a$  donnée du SNR, tout en fournissant une caractérisation rigoureuse de la variation de la localisation du point de masse non nulle et de sa probabilité en fonction du SNR. De plus, la relation établie permet de calculer la capacité non-cohérente exacte à faible SNR.



### 6.2.3.1 Relation fondamentale entre la distribution optimale de l'entrée et le SNR

Nous présentons la relation fondamentale entre la distribution optimale de l'entrée et la valeur du SNR dans le théorème suivant :

**Théorème 6.1.** *À faible SNR, la densité de probabilité optimale de l'entrée à un ordre de grandeur de  $a$  inférieur à 2 ( $o(a^{2-\epsilon})$ ,  $\epsilon > 0$ ), est donnée par :*

$$f_x(x) = \begin{cases} x_1 & e. p. & p_1 = \frac{a}{x_1^2}, \\ 0 & e. p. & p_0 = 1 - p_1, \end{cases} \quad (6.12)$$

où l'abréviation *e. p.* signifie 'en probabilité' et  $x_1$  est solution de l'équation :

$$0 = x_1^2 - (1 + x_1^2) \ln(1 + x_1^2) - \pi \left( \frac{a}{x_1^2 + x_1^4} \right)^{\frac{1}{x_1^2}} \csc \left( \frac{\pi}{x_1^2} \right) \cdot \left[ 1 + x_1^2 - \pi \cot \left( \frac{\pi}{x_1^2} \right) + \ln \left( \frac{a}{x_1^2 + x_1^4} \right) \right] \quad (6.13)$$

De plus, la capacité d'une communication non-cohérente est donnée par :

$$C(a, x_1) = a - a \cdot \frac{\ln(1 + x_1^2)}{x_1^2} - a^{1 + \frac{1}{x_1^2}} \cdot \frac{\pi \csc \left( \frac{\pi}{x_1^2} \right) \left( \frac{1}{x_1^2 + x_1^4} \right)^{\frac{1}{x_1^2}}}{1 + x_1^2} + o(a^{2-\epsilon}). \quad (6.14)$$

*Démonstration.* Par commodité, la démonstration est présentée dans l'annexe VII. □

Clairement, (6.13) est également une équation transcendante, pour laquelle la détermination d'une solution analytique est très difficile. Cependant, bien qu'il soit très compliqué de déterminer une solution analytique de (6.13) sous la forme  $x_1 = f(a)$ ,

il est d'intérêt d'un point de vue ingénierie, de résoudre (6.13) numériquement et d'obtenir la localisation du point de masse non nulle  $x_1$  optimale, pour une valeur donnée  $a$  du SNR. On peut alors déduire la valeur de la capacité d'une communication non-cohérente en remplaçant dans (6.14) la valeur obtenue de  $x_1$ . Par ailleurs, (6.13) permet de comprendre le comportement de  $x_1$  quand  $a$  tend vers zéro. Par exemple, utilisant (6.13), on peut déterminer la limite de  $x_1$  quand  $a$  tend vers zéro. Pour voir ceci, soit  $M$  cette limite et supposons que  $M$  est fini. De l'annexe VII, on sait que pour la distribution optimale de l'entrée, la localisation du point de masse non nulle  $x_1$  est supérieure à un. De ce fait, sa limite quand  $a$  tend vers zéro est supérieure ou égale à un :  $M \geq 1$ . En prenant la limite des deux côtés de (6.13) quand  $a$  tend vers zéro, on obtient :

$$M^2 - (1 + M^2) \ln(1 + M^2) = 0. \quad (6.15)$$

Ainsi si  $M$  est fini, il serait égal à zéro, l'unique solution de (6.15), mais ceci est impossible puisque  $M \geq 1$ . Par conséquent, conformément avec [Abou-Faycal et al., 2001, Zheng et al., 2007] :

$$\lim_{a \rightarrow 0} x_1 = \infty.$$

En outre, nous avons trouvé que (6.13) peut être écrite de manière plus commode comme :

$$a = \exp \left[ x_1^2 W(k, \varphi(x_1)) - x_1^2 + \pi \cot\left(\frac{\pi}{x_1^2}\right) + \ln(x_1^2) + \ln(1 + x_1^2) - 1 \right], \quad (6.16)$$

avec  $k = -1$  si  $a \leq a_0$  et  $k = 0$  ailleurs, et où  $W(\cdot, \cdot)$  est la fonction de Lambert, avec  $\varphi(x)$  donnée par :

$$\varphi(x) = -\frac{\sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)(-x^2 + \ln(1 + x^2) + x^2 \ln(1 + x^2))}{\pi x^2} \cdot \exp\left(\frac{-\pi \cot\left(\frac{\pi}{x^2}\right)}{x^2} + 1 + \frac{1}{x^2}\right). \quad (6.17)$$

De plus,  $a_0$  est la solution de (6.13) pour  $x_1 = x_0$ , où  $x_0$  est la solution de l'équation  $\varphi(x) = -\frac{1}{e}$ . Le nombre  $-\frac{1}{e}$  apparaît dans notre analyse du fait que c'est le point unique partagé par la branche principale de la fonction de Lambert  $W(0, x)$  et la branche avec  $k = -1$ ,  $W(-1, x)$ . C'est à dire  $W(0, -\frac{1}{e}) = W(-1, -\frac{1}{e})$ . Ceci garantit la continuité de  $a$  dans (6.16) pour toutes les valeurs de  $x_1$ . Numériquement, nous avons trouvé que  $a_0 = 0.0582$  et  $x_0 = \sqrt{3.93388}$ . De ce fait, (6.16) peut également être vue comme une relation fondamentale entre la distribution de l'entrée optimale et la valeur  $a$  du SNR pour les canaux non-cohérents discrets sans mémoire à évanouissements de Rayleigh, à faible SNR. D'autre part, (6.16) fournit la réponse globale quant à la façon dont la localisation du point de masse non nulle de la signalisation marche-arrêt optimale et le SNR sont liés. À cette fin, l'analyse de la fonction  $a(x_1)$  donnée par (6.16) a été réalisée, et quelques résultats importants sont récapitulés dans le corollaire suivant.

**Corollaire 6.1.** *À faible SNR, on a :*

1. *Pout toute valeur de  $a \leq a_0$ ,  $a_0 = 0.0582$ , la fonction  $a(x_1)$  est décroissante en fonction de  $x_1$  et pour toute valeur de  $a > a_0$ , la fonction  $a(x_1)$  est croissante en fonction de  $x_1$ .*
2. *Pour toute valeur de  $a$ , on a  $x_1 \geq x_0$ , où  $x_0 = \sqrt{3.93388}$ .*
3. *La limite de  $a(x_1)$  quand  $x_1$  tend vers l'infini est égale à zéro :  $\lim_{x_1 \rightarrow \infty} a = 0$ , où  $x_1$  est la solution de l'équation (6.13).*

Le Corollaire 6.1 est conforme avec [Abou-Faycal et al., 2001], où il a été montré à l'aide de résultats de simulations que la localisation du point de masse non nulle décroît avec le SNR jusqu'à une certaine valeur, à partir de laquelle elle commence à croître. Cependant, en indiquant le point de bord  $(x_0, a_0)$ , le Corollaire 6.1 donne une caractérisation plus précise au sujet de ce comportement particulier de la localisation du point de masse non nulle. En outre, le Corollaire 6.1 raffine

également la borne inférieure sur  $x_1$ ,  $x_1 > 1$  et détermine  $x_0$  comme borne inférieure améliorée sur la localisation du point de masse non nulle à faible SNR. Par ailleurs, de (6.16), on peut écrire :

$$\ln(a) + x_1^2 = x_1^2 W(k, \varphi(x_1)) + \pi \cot\left(\frac{\pi}{x_1^2}\right) + \ln(x_1^2) + \ln(1 + x_1^2) - 1. \quad (6.18)$$

Il est alors facile de vérifier que le partie droite de (6.18) est une fonction décroissante de  $x_1$  pour  $x_1 < x_0$ , ce qui permet d'aboutir à une borne supérieure  $x_{1,UB}$  sur  $x_1$  :

$$x_1^2(a) \leq x_{1,UB}^2(a) = -\ln(a) + \xi_0, \quad (6.19)$$

où  $\xi_0 = \ln(a_0) + x_0^2$ , qui est encore une fois conforme avec la borne supérieure établie dans [Zheng et al., 2007]. À noter que la borne supérieure (6.19) est valide pour tout  $a \leq a_0$  tandis que la borne supérieure établie dans [Zheng et al., 2007] est valable pour tout  $a \ll a_0$ , pour lequel  $\xi_0$  est négligeable. D'autre part, en combinant (6.19) et la borne inférieure sur  $x_1$  donnée dans le Corollaire 6.1, on obtient :

$$a^\alpha x_0^2 \leq a^\alpha x_1^2 \leq a^\alpha (\xi_0 - \ln(a)). \quad (6.20)$$

pour tout  $\alpha > 0$ . C'est à dire que :

$$\lim_{a \rightarrow 0} (a^\alpha x_1^2) = 0, \quad (6.21)$$

ce qui signifie que  $a^\alpha$  tend vers zéro plus rapidement que  $x_1^2$  tend vers l'infini. Ce résultat peut également être utilisé pour comprendre davantage le comportement de la capacité à faible SNR. En effet, de (6.14), on peut exprimer la capacité d'un canal non-cohérent par :

$$C(a) = a + o(a), \quad (6.22)$$

où  $o(a) = -a \cdot \frac{\ln(1+x_1^2)}{x_1^2} - a^{1+\frac{1}{x_1^2}} \cdot \frac{\pi \csc\left(\frac{\pi}{x_1^2}\right) \left(\frac{1}{x_1^2+x_1^4}\right)^{\frac{1}{x_1^2}}}{1+x_1^2}$ . Ceci signifie qu'à un premier

ordre, la capacité varie linéairement avec la valeur  $a$  du SNR. Par conséquent, tout comme pour une communication dans un canal AWGN et dans un canal cohérent, la communication dans un canal non-cohérent peut aussi être qualifiée de communication efficace en énergie, à faible SNR.

### 6.2.3.2 Efficacité énergétique et pénalité de non-cohérence

En général, à faible SNR et à premier ordre, la capacité d'un canal Gaussien ainsi que celle d'un canal à évanouissements de Rayleigh, varient linéairement avec le SNR [Zheng et al., 2007]. La différence entre ces canaux en termes de capacité, ne peut être expliquée que par le terme pseudo-linéaire  $o(a)$  dans (6.22). Le terme pseudo-linéaire a été défini dans [Zheng et al., 2007] par :

$$\Delta(a) := a - C(a). \quad (6.23)$$

À faible SNR, le terme pseudo-linéaire  $\Delta(a)$  est également lié à l'efficacité énergétique définie comme l'énergie minimale requise pour transmettre un nat d'information de manière fiable. En effet, soit  $E_n$  l'énergie transmise en joules par nat d'information. Alors l'efficacité énergétique s'exprime par :

$$\frac{E_n}{\sigma_w^2} = \frac{C(a)}{a}. \quad (6.24)$$

À noter que puisque  $a \geq C(a)$ , alors l'efficacité énergétique  $\frac{E_n}{\sigma_w^2}$  est inférieure ou égale à 1. En utilisant (6.23), on peut écrire :

$$\frac{E_n}{\sigma_w^2} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta(a)}{a}} \approx 1 + \frac{\Delta(a)}{a}, \quad (6.25)$$

où l'approximation est valable si  $\frac{\Delta(a)}{a}$  est suffisamment petit. À noter que si

$$\frac{\Delta(a)}{a} \rightarrow 0, \quad (6.26)$$

alors de (6.23) et (6.25), il découle respectivement :

$$C(a) \approx a \quad (6.27)$$

$$\frac{E_n}{\sigma_w^2} \approx 1, \quad (6.28)$$

ce qui implique que l'efficacité énergétique maximale de -1.59 dB par bit d'information peut être théoriquement obtenue. Pour un canal Gaussien et un canal cohérent à évanouissements, les termes pseudo-linéaires sont, respectivement, donnés par [Zheng et al., 2007] :

$$\Delta_{AWGN}(a) = \frac{1}{2}a^2 + o(a^2), \quad (6.29)$$

$$\Delta_{coherent}(a) = \frac{1}{2}E[\|h\|^4]a^2 + o(a^2). \quad (6.30)$$

Pour un canal non-cohérent à évanouissements, le terme pseudo-linéaire peut être déterminé à l'aide de (6.14) :

$$\Delta(a) = a \cdot \frac{\ln(1+x_1^2)}{x_1^2} + a^{1+\frac{1}{x_1^2}} \cdot \frac{\pi \csc\left(\frac{\pi}{x_1^2}\right) \left(\frac{1}{x_1^2+x_1^4}\right)^{\frac{1}{x_1^2}}}{1+x_1^2}. \quad (6.31)$$

À noter qu'à très faible SNR et d'après (6.31),  $\frac{\Delta(a)}{a}$  converge vers zéro, impliquant que le canal non-cohérent à évanouissements de Rayleigh est également efficace en énergie. Cependant, à mesure que le SNR augmente, la convergence de  $\frac{\Delta(a)}{a}$  vers zéro est plus lente que  $\frac{\Delta_{AWGN}(a)}{a}$  et  $\frac{\Delta_{coherent}(a)}{a}$ . Ceci peut être vu par interprétation de (6.21) qui stipule que  $x_1$  converge plus lentement vers l'infini que  $a$  converge vers zéro. À titre d'illustration, calculons la valeur de  $\frac{\Delta(a)}{a}$  pour une valeur du SNR

$a = -30$  dB par exemple. D'après (6.31), on peut écrire :

$$\frac{\Delta(a)}{a} = \frac{\ln(1 + x_1^2)}{x_1^2} + a^{\frac{1}{x_1^2}} \cdot \frac{\pi \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{x_1^2}\right) \left(\frac{1}{x_1^2 + x_1^4}\right)^{\frac{1}{x_1^2}}}{1 + x_1^2}. \quad (6.32)$$

La résolution de (6.16) par rapport à  $x_1^2$  pour  $a = -30$  dB donne :  $x_1^2 \approx 4.96815$ . En substituant cette valeur dans (6.32), nous obtenons  $\frac{\Delta(a)}{a} \approx 49\%$ . Notez que pour un canal AWGN ainsi que pour un canal cohérent à évanouissements de Rayleigh,  $\frac{\Delta_{AWGN}(a)}{a}$  et  $\frac{\Delta_{coherent}(a)}{a}$  sont du même ordre de grandeur que la valeur du SNR dans ce cas. Il faut un SNR encore plus faible pour que la communication non-cohérente réalise la même efficacité énergétique qu'un canal AWGN et un canal cohérent à évanouissements de Rayleigh.

Dans l'intervalle des valeurs du SNR considéré, nous pouvons définir la pénalité de non-cohérence par SNR comme :

$$\frac{C_{coherent}(a) - C(a)}{a}, \quad (6.33)$$

où  $C_{coherent}$  est la capacité du canal cohérent. De [Zheng et al., 2007], on peut exprimer  $C_{coherent}$  par :

$$C_{coherent}(a) = a + O(a) = a + o(a^{2-\alpha}), \quad (6.34)$$

pour tout  $1 > \alpha > 0$ . Sachant que la capacité non-cohérente dans (6.14) a été obtenue en utilisant la décomposition en série à un ordre strictement inférieur à 2, et combinant (6.14) et (6.34), nous déduisons la pénalité de non-cohérence par

SNR à un ordre strictement inférieur à 2 :

$$\frac{C_{coherent}(a) - C(a)}{a} = \frac{C_{coherent} - C(a)}{C_{coherent}} = \frac{\ln(1 + x_1^2)}{x_1^2} + a^{\frac{1}{x_1^2}} \cdot \frac{\pi \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{x_1^2}\right) \left(\frac{1}{x_1^2 + x_1^4}\right)^{\frac{1}{x_1^2}}}{1 + x_1^2}. \quad (6.35)$$

Utilisant (6.21), divisant les deux côtés de (6.35) par  $a^\alpha$ , ( $\alpha > 0$ ) et prenant la limite quand  $a$  tend vers zéro, on obtient :

$$C_{coherent}(a) - C(a) \gg a^{1+\alpha}, \quad (6.36)$$

où  $\gg$  signifie :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{C_{coherent}(a) - C(a)}{a^{1+\alpha}} = \infty. \quad (6.37)$$

L'inégalité (6.36) indique que non seulement la pénalité de non-cohérence est beaucoup plus grande que  $a^2$  comme il a été établi dans [Verdú, 2002], mais plus précisément, que cette pénalité est beaucoup plus grande que  $a^{1+\alpha}$  pour tout  $1 > \alpha > 0$ . Encore une fois, ce résultat est en plein accord avec celui établi dans [Zheng et al., 2007].

Dans cette section, nous avons discuté les expressions analytiques exactes de la distribution optimale à l'entrée du canal non-cohérent et de la capacité en se basant sur la relation fondamentale (6.13) ou d'une manière équivalente sur (6.16). Cependant, nous pourrions être intéressés à établir des bornes inférieure et supérieure plus simples sur ces quantités afin de mieux comprendre comment elles changent avec la valeur  $a$  du SNR. C'est l'objet de la section suivante.



### 6.2.3.3 Bornes supérieure et inférieure sur la capacité d'un canal non-cohérent

Considérant (6.16) et puisque nous nous intéressons à un faible régime du SNR, nous supposons dans la suite que  $a \leq a_0$ . Ainsi la fonction de Lambert dans (6.16) est la branche avec  $k = -1$ , soit  $W(-1, x)$ . Une borne inférieure sur la capacité non-cohérente est facilement obtenue par la combinaison de (6.19) et (6.14) et sera notée par  $C_{LB}(a)$ . Nous présentons maintenant une borne inférieure sur la localisation du point de masse non nul de la distribution optimale et une borne supérieure sur la capacité non-cohérente dans le Théorème 6.2.

**Théorème 6.2.** *À faible SNR, une borne inférieure sur la localisation du point de masse non nulle de la distribution optimale est donnée par :*

$$x_{1,LB}(a) = \frac{y}{\sqrt{-W\left(-1, \varphi\left(\frac{y}{-\ln(-\varphi(y))}\right)\right)}}, \quad (6.38)$$

où  $y = \sqrt{1 + \ln \frac{1}{a}}$ . En outre, une borne supérieure sur la capacité d'un canal non-cohérent peut être déduite à partir de (6.14), elle est donnée par :

$$C_{UB}(a) = C(a, x_{1,LB}(a)). \quad (6.39)$$

*Démonstration.* Par commodité, la démonstration est présentée dans l'annexe VIII. □

Le Théorème 6.2 peut être utilisé pour évaluer la capacité et la distribution optimale sans avoir à résoudre numériquement l'équation (6.13) ou (6.16).

### 6.3 Capacité du canal MIMO

Nous considérons dans cette section un canal MIMO ayant, respectivement,  $N_t$  et  $N_r$  antennes à l'émission et à la réception. Puisque pour un canal discret sans mémoire la longueur de bloc est  $T = 1$  et qu'on ne gagne rien du point de vue capacité à avoir  $N_t > T$ , la capacité d'un canal MIMO est égale à celle d'un canal SIMO où  $N_t = 1$ . Dans la suite, on supposera que  $N_t = T = 1$ .

Nous considérons le modèle du canal donné par (2.1), dans lequel nous assignons  $N_t = T = 1$  :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}_w x + \mathbf{W},$$

avec la contrainte de puissance moyenne :  $E[x^2] \leq a$ . Nous établissons des bornes simples sur la capacité d'un canal MIMO et nous montrons une connexion entre la capacité d'un canal MIMO et celle d'un canal SISO. Il s'avère qu'à faible SNR,  $C_{MIMO}(a) \approx N_r \cdot C_{SISO}(a)$  et la signalisation marche-arrêt est encore une fois optimale. Une caractérisation plus précise de la capacité d'un canal MIMO Gaussien, discret et sans mémoire est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 6.3.** *À faible SNR, la capacité non-cohérente d'un canal MIMO Gaussien, discret et sans mémoire, ayant  $N_r$  antennes à la réception est bornée par :*

$$C_{SISO}(N_r \cdot a) \leq C_{MIMO}(a) \leq N_r \cdot C_{SISO}(a), \quad (6.40)$$

où  $C_{SISO}$  est la capacité d'un canal SISO donnée dans le Théorème 6.1.

*Démonstration.* Nous démontrons d'abord la borne supérieure.

$$\begin{aligned} I(x; \mathbf{Y}) &= h(\mathbf{Y}) - h(\mathbf{Y} | x) \\ &= h(y_1, \dots, y_{N_r}) - \sum_{i=1}^{N_r} h(y_i | x) \end{aligned} \quad (6.41)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N_r} h(y_i) - \sum_{i=1}^{N_r} h(y_i | x) \quad (6.42)$$

$$= \sum_{i=1}^{N_r} I(x; y_i) \quad (6.43)$$

L'égalité (6.41) suit du fait qu'étant donné  $x$ , les  $y_i$  sont indépendants et on a :  $h(\mathbf{Y} | x) = \sum_{i=1}^{N_r} h(y_i | x)$ ; alors que l'inégalité (6.42) découle du fait que le conditionnement réduit l'entropie. En maximisant les deux côtés de (6.43) sur toutes les distributions de l'entrée  $x$ , tenant compte de la contrainte de puissance  $E[x^2] \leq a$ , nous prouvons la borne supérieure.

Pour établir la borne inférieure, il suffit de constater que si le récepteur additionne, de manière non-cohérente, les observations  $y_i$   $i = 1, \dots, N_r$ , alors le canal SIMO est transformé en un canal SISO à évanouissements de Rayleigh, ayant  $N_r$  fois le SNR par antenne réceptrice, soit  $N_r \cdot a$  [Zheng and Tse, 2002a]. Clairement, la capacité du canal obtenu ne peut excéder celle du canal original en raison du théorème du traitement de données (Data Processing Theorem) [Gallager, 1968]. Ceci prouve la borne inférieure.  $\square$

Il y a lieu de signaler que pour établir le Théorème 6.3, on n'a jamais utilisé le fait que le SNR est faible. Par conséquent, les bornes données par (6.40) sont valables pour toute valeur du SNR. Néanmoins, l'hypothèse à faible SNR énoncé dans ce théorème est essentielle pour prouver que ces deux bornes coïncident, indépendamment de la valeur de  $N_r$ , comme on le verra par la suite. Par ailleurs,

le Théorème 6.3 est éloquent dans le sens qu'il rattache la capacité d'un canal MIMO à celle d'un canal SISO. Puisque dans la première partie de ce chapitre, nous avons établi des résultats exacts à un ordre de grandeur du SNR strictement inférieur à 2, nous allons voir que plusieurs interprétations vont pouvoir s'étendre automatiquement à un canal MIMO, du moins au même ordre de grandeur.

Par exemple, à premier ordre du SNR, la borne supérieure et la borne inférieure coïncident, confirmant que la signalisation marche-arrêt est optimale à cet ordre de grandeur, et la capacité du canal MIMO est donc complètement caractérisée. D'autre part, puisque la capacité d'un canal MIMO, où le CSI est disponible au récepteur, s'écrit :

$$\begin{aligned}
C_{MIMO}^{coh}(a) &= E_{\mathbf{H}_w} [\ln(1 + a\|\mathbf{H}_w\|^2)] \\
&= E_{\mathbf{H}_w} \left[ a\|\mathbf{H}_w\|^2 - \frac{a^2}{2}\|\mathbf{H}_w\|^4 + o(a^2) \right] \\
&= aE_{\mathbf{H}_w} [\|\mathbf{H}_w\|^2] - \frac{a^2}{2}E_{\mathbf{H}_w} [\|\mathbf{H}_w\|^4] + o(a^2) \\
&= N_r a - \frac{N_r(N_r + 1)}{2}a^2 + o(a^2), \tag{6.44}
\end{aligned}$$

alors à un premier ordre du SNR ( $o(a)$ ) et de manière similaire à un canal SISO, la capacité du canal MIMO pour une transmission cohérente est égale à celle pour une transmission non-cohérente. Il n'y a pas de gain à connaître le canal dans ce cas. Cependant, à mesure que le SNR augmente, une pénalité de non-cohérence commence à apparaître. Pour voir ceci, il est utile de comparer  $C_{MIMO}^{coh}(a)$  et  $C_{MIMO}(a)$  à un ordre de grandeur supérieur à 1 ( $o(a^{2-\epsilon})$ , pour  $\epsilon > 0$ ). Pour ce, et par analogie avec un canal SISO, on définit le terme pseudo-linéaire pour un canal MIMO par :

$$\Delta^{MIMO}(a) := N_r \cdot a - C_{MIMO}(a). \tag{6.45}$$

À noter que le terme pseudo-linéaire a une interprétation de pénalité de non-

cohérence à un ordre de grandeur du SNR strictement inférieur à 2, puisqu'à cet ordre,  $C_{MIMO}^{coh}(a) \approx N_r \cdot a$ . En réalité, on serait intéressé à connaître l'ordre du terme pseudo-linéaire. Plus cet ordre de grandeur est élevé, plus rapide est la convergence de  $C_{MIMO}(a)$  vers le terme linéaire  $N_r \cdot a$ . Clairement, cet ordre est majoré par 2, l'ordre du terme pseudo-linéaire pour un canal MIMO cohérent comme il est stipulé par (6.44). Toutefois, en utilisant le Théorème 6.3, on peut caractériser  $\Delta^{MIMO}(a)$  de manière plus précise, en le rattachant à son vis-à-vis  $\Delta(a)$  pour un canal SISO, défini par (6.31) :

$$N_r \cdot \Delta(a) \leq \Delta^{MIMO}(a) \leq \Delta(N_r \cdot a). \quad (6.46)$$

Il y a lieu de mentionner que les bornes inférieure et supérieure peuvent être explicitement calculées comme nous l'avons montré à la section 6.2. Même sans les calculer, ces bornes sont instructives. Par exemple, la relation (6.46) révèle l'autre facette de la médaille : certes l'utilisation de plusieurs antennes engendre une augmentation de la capacité telle qu'établie dans le Théorème 6.3, mais elle entraîne aussi une pénalité de non-cohérence au moins égale à  $N_r$  fois celle qu'engendrerait un canal SISO s'il n'est pas possible de connaître le canal au récepteur. Par ailleurs, en divisant (6.46) par  $a^{1+\alpha}$ , où  $1 > \alpha > 0$ , et en prenant la limite de la borne supérieure et de la borne inférieure quand  $a$  tend vers zéro, on obtient :

$$\Delta^{MIMO}(a) \gg a^{1+\alpha}. \quad (6.47)$$

L'équation (6.47) signifie que la convergence de la capacité du canal non-cohérent vers le terme linéaire est extrêmement lente. Autrement dit, il faut un SNR extrêmement faible, ou de manière équivalente une largeur de bande extrêmement grande, pour que la capacité  $C_{MIMO}(a)$  converge vers  $N_r \cdot a$ .

D'autre part, exactement comme dans le cas SISO, on peut rattacher le terme

pseudo-linéaire à l'efficacité énergétique :

$$\begin{aligned}
 \frac{E_n}{\sigma_w^2} &= \frac{a}{C_{MIMO}(a)} \\
 &= \frac{1}{N_r} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\Delta_{MIMO}(a)}{a}} \\
 &\approx \frac{1}{N_r} \left( 1 + \frac{\Delta_{MIMO}(a)}{a} \right). \tag{6.48}
 \end{aligned}$$

L'équation (6.48) est valable si  $\frac{\Delta_{MIMO}(a)}{a} \rightarrow 0$ . Maintenant, en divisant la relation (6.46) par  $a$  et en prenant la limite quand  $a$  tend vers zéro, on obtient :  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\Delta_{MIMO}(a)}{a} = 0$ . De ce fait, l'efficacité énergétique s'écrit :

$$\frac{E_n}{\sigma_w^2} \approx \frac{1}{N_r}, \tag{6.49}$$

ce qui signifie que, du point de vue énergétique, la communication non-cohérente serait aussi efficace que son vis-à-vis cohérente et qu'on pourrait communiquer pertinemment un nat d'information en déployant  $-10 \log_{10}(N_r)$  décibels. Cependant, et comme il a été précédemment discuté, il faut un SNR extrêmement faible ou une largeur de bande extrêmement grande pour que ceci soit vrai.

#### 6.4 Résultats numériques et discussion

Les courbes dans la figure 6.2 illustrent, respectivement, la localisation du point de masse non nulle de la distribution optimale  $x_1$  obtenue par la maximisation (6.10), et cette même localisation obtenue par la relation (6.13) ou d'une manière équivalente (6.16). Comme il peut être observé sur la figure 6.2, les deux courbes sont indissociables à faible SNR ( $a < 0.01$ ), confirmant que (6.16) est exacte à faible SNR. À mesure que le SNR augmente, un petit écart commence à apparaître entre les deux courbes. Ceci est prévisible puisque (6.16) est valable jusqu'à un ordre de

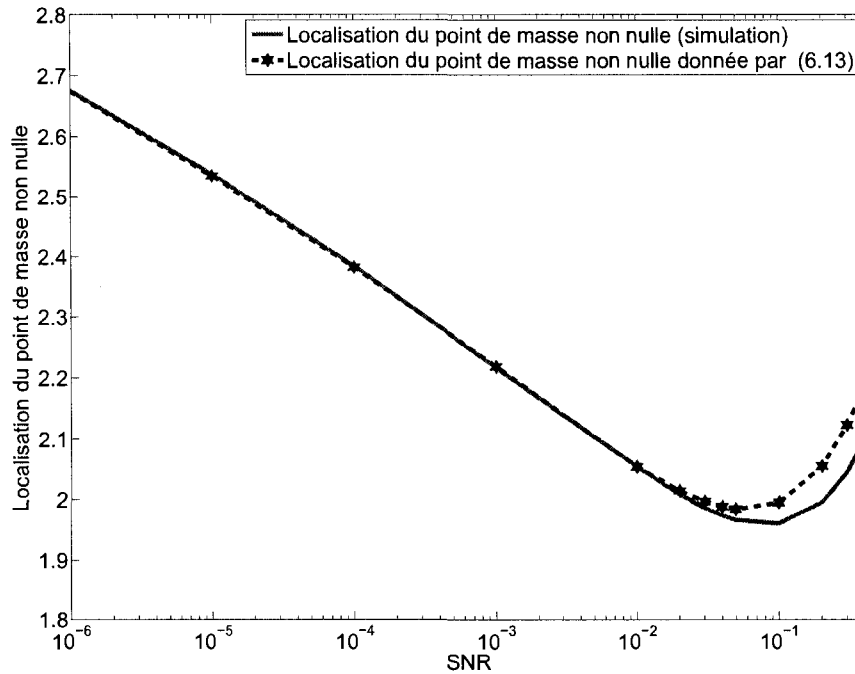


FIGURE 6.2 Localisation du point de masse non nulle en fonction de la valeur  $a$  du SNR (linéaire).

grandeur strictement inférieure à 2, et ainsi pour de petites valeurs du SNR (mais pas plus petites qu'environ  $2 \cdot 10^{-2}$ ), un écart pourrait apparaître. Néanmoins, même pour un SNR supérieur à  $2 \cdot 10^{-2}$ , la courbe obtenue par (6.16) est particulièrement instructive puisqu'elle suit la même allure que celle obtenue par la maximisation de (6.10). Il serait intéressant dans le cadre de travaux futurs d'utiliser (6.16) comme point de départ, afin de comprendre pourquoi un nouveau point de masse devrait apparaître à mesure que le SNR augmente. À signaler que l'écart observé dans la figure 6.2 peut être rendu aussi petit que désiré en utilisant une expansion en série d'ordre supérieur. Toutefois, l'analyse serait trop complexe pour être fructueuse.

À noter que dans toutes les courbes présentées dans cette section, nous avons considéré des valeurs du SNR à la sortie du canal qui sont très faibles (jusqu'à

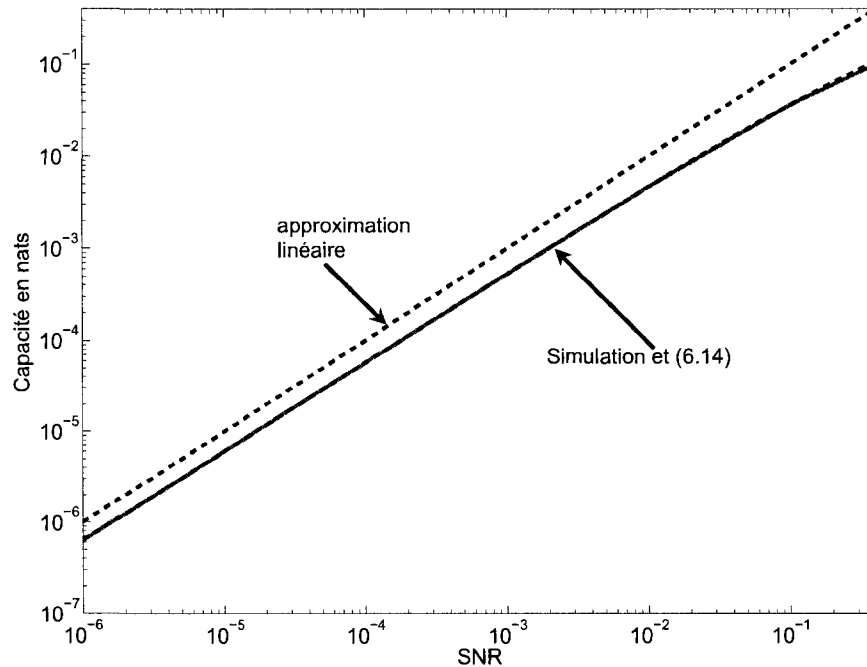


FIGURE 6.3 Capacité non-cohérente en fonction de la valeur  $a$  du SNR (linéaire).

$10^{-6}$ ). Ceci pourrait être justifié si on considère que le SNR dans ce cas désigne le SNR par chacun des sous-canaux indépendants (degrés de liberté en terme de largeur de bande). En effet, si on dispose d'une puissance  $P$  à l'émission et d'une largeur de bande  $W$  supposée grande (communication à large bande), alors il est possible de subdiviser le canal à large bande en  $L$  sous-canaux indépendants ayant chacun une largeur de bande  $W/L$  [Paulraj et al., 2003]. Clairement, la capacité du canal à large bande ayant une puissance  $P$  est égale à  $L$  fois la capacité de chacun des sous-canaux ayant une puissance  $P/L$ . Quand  $L$  est très grand, la puissance par canal  $P/L$  devient très petite et il en est de même du SNR par canal [Zheng et al., 2007].

La figure 6.3 dépeint les courbes de la capacité d'un canal non-cohérent. Encore



une fois, la courbe obtenue par la maximisation (6.10) et celle obtenue à partir de (6.14) sont indissociables. De manière plus intéressante, l'écart observé à des valeurs pas très basses du SNR ( $a > 5 \cdot 10^{-2}$ ) dans la figure 6.2 a disparu, impliquant que la capacité n'est pas très sensible à la localisation du point de masse non nulle. Sur la figure 6.3, on a aussi illustré l'approximation linéaire  $C(a) = a$ , qui est une borne supérieure sur la capacité. Comme il peut être observé dans la figure 6.3, l'approximation linéaire suit la même allure que les courbes exactes à faible SNR et devient moins serrée à des valeurs du SNR plus grandes que  $10^{-2}$ . Ceci implique que le terme pseudo-linéaire défini dans (6.23) est beaucoup plus important dans cet intervalle de valeurs du SNR. En effet, ceci peut être vu dans la figure 6.4, où nous avons tracé la pénalité de non-cohérence normalisée donnée par (6.35). La figure 6.4 confirme qu'il n'y a pas de gain substantiel dans la connaissance du canal au sens de la capacité à très faible SNR, et de ce fait elle confirme que la communication non-cohérente est presque aussi efficace en puissance que la communication dans des canaux AWGN ou des canaux cohérents à évanouissements de Rayleigh. À mesure que le SNR augmente, la pénalité de non-cohérence croît et dépasse 70%.

Les bornes supérieure et inférieure sur la localisation du point de masse non nulle, données, respectivement, par (6.19) et (6.38) ainsi que les bornes établies dans [Zheng et al., 2007] sont tracées à la figure 6.5. Les courbes exactes à faible SNR obtenues par évaluation de (6.13), y ont été aussi reportées. Comme il peut être observé sur la figure 6.5, la borne supérieure établie dans [Zheng et al., 2007], quoique plus serrée que (6.19), traverse les courbes exactes à environ  $2 \cdot 10^{-2}$ . À ces valeurs pas si basses du SNR, la borne donnée dans [Zheng et al., 2007] n'est plus une borne supérieure, conformément avec notre discussion dans la section 6.2.3.1. D'autre part, la borne inférieure (6.38) est plus serrée que celle établie dans [Zheng et al., 2007] pour toutes les valeurs du SNR.

Pour un canal MIMO, la figure 6.6 illustre les bornes supérieure et inférieure sur la

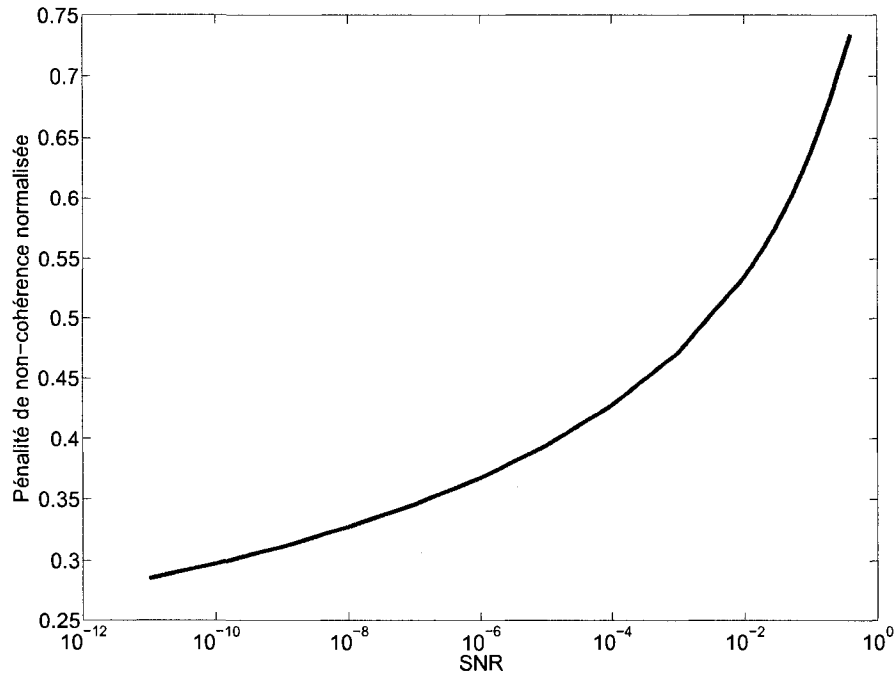


FIGURE 6.4 Pénalité de non-cohérence par SNR en fonction de la valeur  $a$  du SNR (linéaire).

capacité d'une transmission non-cohérente, pour un canal discret sans mémoire à évanouissements de Rayleigh, ayant deux antennes à la réception  $N_r = 2$  ( $N_t$  étant quelconque), établies dans le Théorème 6.3. Ces deux bornes ont été obtenues en utilisant la relation (6.14) qui donne la valeur exacte de la capacité à faible SNR. On peut constater sur la figure 6.7 que les bornes supérieure et inférieure coïncident parfaitement à faible SNR (jusqu'à une valeur du SNR égale à  $5 \cdot 10^{-2}$  dans ce cas), indiquant que la capacité est complètement caractérisée et confirmant que la signalisation marche-arrêt est optimale dans cet intervalle du SNR. Pour des valeurs supérieures à  $5 \cdot 10^{-2}$ , un écart commence à apparaître stipulant que la caractérisation de la capacité est partielle dans ce cas. Il va sans dire que si  $N_r$  augmente, on devrait s'attendre à un écart apparaissant à des valeurs du SNR.

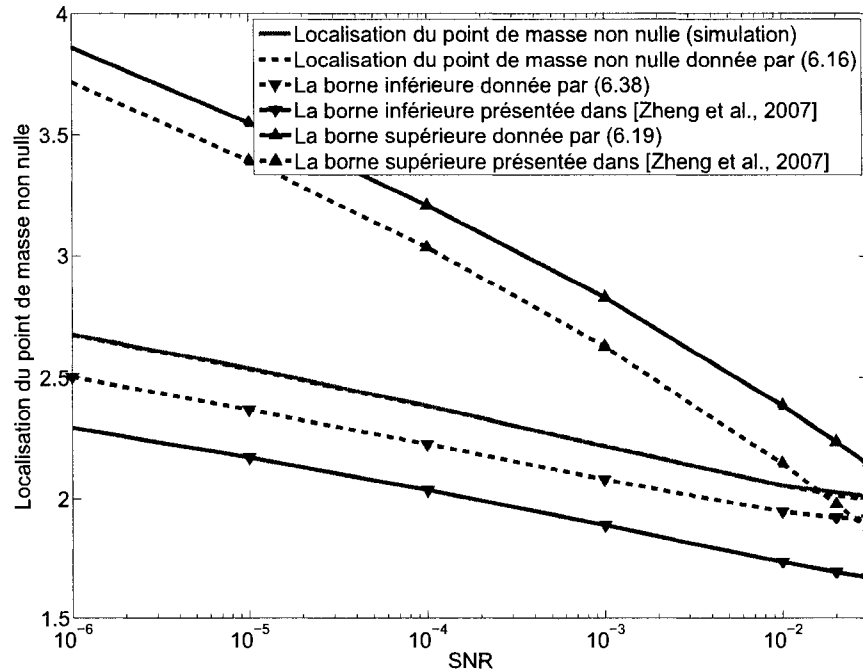


FIGURE 6.5 Localisation exacte du point de masse non nulle, nos bornes inférieure et supérieure ainsi que les bornes présentées dans [Zheng et al., 2007] en fonction de la valeur  $a$  du SNR (linéaire).

inférieures à  $5 \cdot 10^{-2}$ . Toutefois, la régression de cet écart vers des valeurs plus basses du SNR n'est pas significative, puisque la différence entre les bornes supérieure et inférieure est approximativement linéaire en  $N_r$ .

## 6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons analysé la capacité des canaux non-cohérents discrets sans mémoire et à évanouissements de Rayleigh à faible SNR. Nous avons calculé explicitement l'information mutuelle du canal à faible SNR qui est également une borne inférieure sur l'information mutuelle du canal à des valeurs du SNR pas

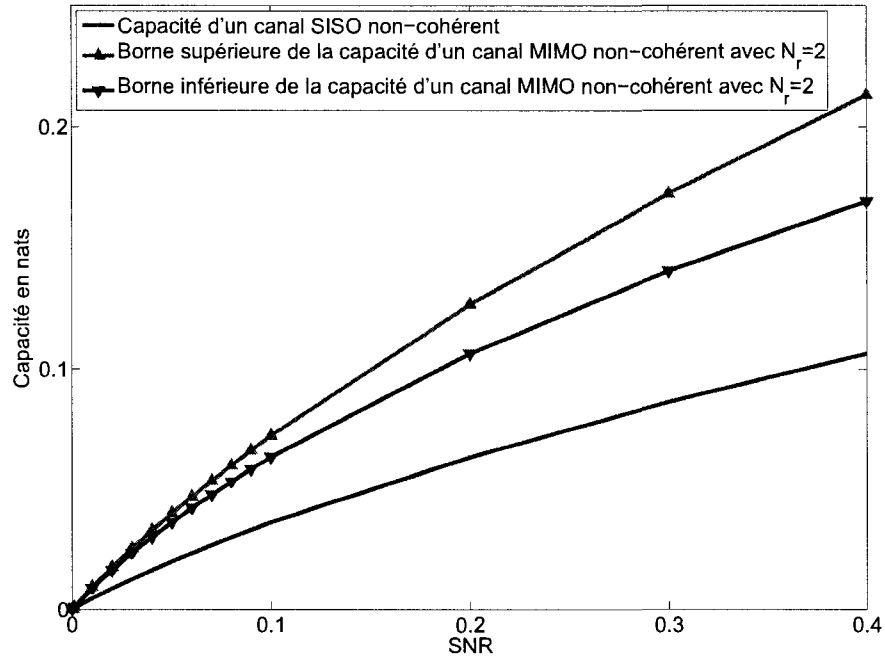


FIGURE 6.6 Capacité du canal pour une transmission non-cohérente.

nécessairement basses.

Utilisant l'expression établie de l'information mutuelle du canal, nous avons pu fournir une relation fondamentale entre la localisation du point de masse non nulle de la distribution optimale à l'entrée du canal et le SNR. Cette relation fondamentale apporte la réponse complète sur la façon dont la distribution optimale à l'entrée varie avec la contrainte de puissance à faible SNR. Elle fournit également une explication analytique sur ce qui a été précédemment observé par simulation dans [Abou-Faycal et al., 2001] au sujet du comportement particulier de la localisation du point de masse non nulle à faible SNR. Une expression de la capacité non-cohérente exacte a été déterminée, et une interprétation du comportement de la capacité a été obtenue à l'aide d'une simple analyse de fonctions.

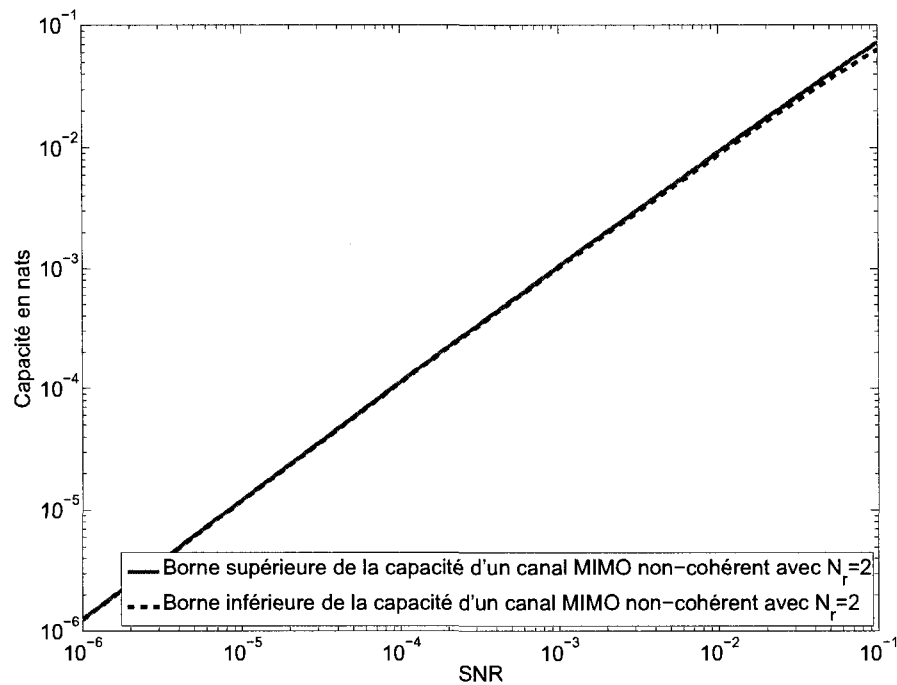


FIGURE 6.7 Capacité du canal pour une transmission non-cohérente, une vue à faible SNR.

Afin de mieux comprendre comment varie la localisation du point de masse non nulle avec le SNR, nous avons également établi des bornes inférieure et supérieure, qui ont été comparées aux bornes récemment établies par d'autres auteurs. La borne inférieure nouvellement établie est plus serrée pour toutes les valeurs d'intérêt du SNR, tandis que quoique légèrement moins serrée, la borne supérieure s'étend à un plus large intervalle du SNR.

Notre analyse a été aussi étendue à un canal MIMO. Nous avons établi des bornes sur la capacité de ce canal pour une transmission non-cohérente. Ces bornes rattachent la capacité d'un canal MIMO à son vis-à-vis SISO. Ceci nous a permis de profiter de l'exactitude de notre analyse dans le cas SISO pour mieux comprendre la capacité du canal non-cohérent MIMO. À faible SNR, nous avons démontré que

ces bornes coïncident et de ce fait la capacité du canal MIMO est complètement caractérisée, ce qui constitue en soi, une autre façon de prouver que la signalisation marche-arrêt est optimale à faible SNR. Ces bornes ont aussi permis une caractérisation plus précise de la pénalité de non-cohérence et de l'efficacité énergétique.

## CONCLUSION

L'intérêt des systèmes de communication à antennes multiples par rapport aux systèmes classiques à une antenne à l'émission et à une antenne à la réception, a conduit à la problématique d'établir les limites de performance des canaux à antennes multiples en vue d'établir des critères de conception des codes spatio-temporels. Ce travail s'inscrit dans cette perspective et apporte principalement les contributions suivantes :

1. La conception d'un encodage adaptatif à rétroaction non systématique limitée en vue d'atteindre le compromis diversité-multiplexage. L'utilité d'une telle conception est la minimisation du délai et de la complexité du décodage en minimisant la longueur de bloc  $T$ .
2. La caractérisation du potentiel réel en termes de gain en diversité et de gain de multiplexage, des canaux de communication à plusieurs antennes (Multiple Input Multiple Output : MIMO). L'analyse a permis, entre autres, l'identification de lignes directrices en terme de diversité maximale à SNR fini pour la conception de schémas d'émission/réception permettant d'atteindre ce potentiel maximal. La finalité de cette contribution est de permettre l'établissement d'une communication sans fil fiable dans des canaux à évanouissements où les conditions de propagation ne sont pas idéales (corrélation spatiale) et où la puissance disponible est limitée (SNR fini).
3. L'analyse de la capacité d'un canal SISO, discret, sans mémoire à évanouissements de Rayleigh dans un contexte où la connaissance du canal n'est disponible ni à l'émetteur ni au récepteur (Non-Coherent Channel). Plus précisément, la détermination d'une forme analytique compacte de l'information mutuelle du canal à bas SNR, qui peut également être considéré comme une

borne inférieure sur l'information mutuelle du canal pour une valeur arbitraire du SNR, ainsi que l'établissement d'une relation fondamentale entre la distribution optimale à l'entrée du canal et la valeur du SNR, de laquelle une expression exacte de la capacité est déduite. Cette étude a par la suite été étendue à un canal MIMO du même type. Cette contribution est d'une portée pratique notable puisque elle identifie les limites de performance des systèmes de communication à antennes multiples pour des applications où la puissance est limitée ou bien où la largeur de bande est grande (Wideband).

À cet effet, les problématiques qui ont motivé cette thèse ont été démystifiées en grande partie. Dans tous les cas, des solutions analytiques exactes ou des bornes sur les performances ont été fournies. Ces solutions analytiques ont été supportées par des résultats de simulations pour en assurer la validité. Pour certaines problématiques bien spécifiques, comme c'est le cas pour la construction de codes spatio-temporels pour atteindre le compromis diversité-multiplexage, nous avons prouvé analytiquement ou par simulations l'avantage de notre solution par rapport à celles déjà présentées dans la littérature, que ce soit en termes de complexité et/ou de performances.

En plus des contributions décrites ci-dessus, nous avons aussi présenté un état de l'art exhaustif concernant la construction de codes spatio-temporels dans le chapitre 2. De ce fait, nous sommes persuadés que cette thèse servira comme un excellent point de départ pour la construction de codes spatio-temporels en vue d'atteindre un critère de performance donné. Cet axe de recherche est d'intérêt particulier à court et à moyen termes en raison de l'adoption des systèmes à antennes multiples comme technologie privilégiée par la plupart des standards en matière de communication.



Par ailleurs, ce travail a aussi dégagé des axes de recherche pour des travaux futurs qui s'inscrivent dans la même problématique ou dans des problématiques adjacentes :

1. Comme il a été discuté au chapitre 2, la construction des codes spatio-temporels optimaux au sens du compromis diversité-multiplexage, tout en préservant une complexité raisonnable à l'encodage et au décodage, est un champ de recherche propice. Le chapitre 2 présente quelques ingrédients pour entamer cette problématique.
2. La généralisation de la caractérisation du compromis diversité-multiplexage à SNR fini pour un canal corrélé à l'émission et à la réception pourrait être aussi considérée dans un travail indépendant.
3. La généralisation de l'étude de la capacité d'un canal non-cohérent au modèle d'évanouissements par bloc  $T > 1$ . Le chapitre 6 ainsi que les références [Hasibi and Hochwald, 2002] et [Ray et al., 2007] sont un bon point de départ pour réaliser ceci. Cette étude devrait nous renseigner sur les stratégies optimales (au sens de la capacité) de communication pour un temps de cohérence et un SNR donnés.
4. L'extension de l'étude de la capacité d'un canal non-cohérent pour des évanouissements plus généraux (Rice, Nakagami) corrélés à l'émission et/ou à la réception.

Finalement, nous croyons que l'objectif de cette thèse a été principalement atteint. Des aspects fondamentaux et pratiques des communications dans des canaux à antennes multiples ont été analysés et des solutions inhérentes ont été fournies. D'autres aspects qui n'ont pas pu être étudiés, ont été identifiés pour des travaux futurs.

## RÉFÉRENCES

- Abou-Faycal, I. C., Trott, M. D., and Shamai (Shitz), S. (2001). “The Capacity of Discrete-Time Memoryless Rayleigh-Fading Channels”. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **47**(4), 1290–1301.
- Alamouti, S. M. (1998). “A simple Transmitter Diversity Scheme for Wireless Communication”. *IEEE J. Select. Areas Commun.*, **16**, 1451–1458.
- Belfiore, J.-C. and Rekaya, G. (31 March-4 April 2003). “Quaternionic Lattices for Space-Time Coding”. In *Info. Theory Workshop (ITW)*, Paris, France, pages 267–270.
- Belfiore, J.-C., Rekaya, G., and Viterbo, E. (2005). “The Golden Code : a  $2 \times 2$  Full-Rate Space-Time Code with Nonvanishing Determinants”. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **51**, 1432–1436.
- Chang, W., Chung, S. Y., and Lee, Y. H. (9-14 Jul. 2006). “Diversity-Multiplexing Tradeoff in Rank-Deficient and Spatially Correlated MIMO Channels”. In *Int. Symp. Inform. Theory*, Seattle, Washington.
- Da-Shan, S., Foschini, G., Gans, M., and Kahn, J. (2000). “Fading Correlation and its Effect on The Capacity of Multielement Antenna Systems”. *IEEE Trans. Commun.*, **48**(3), 502–513.
- Damen, M. O., El Gamal, H., and Beaulieu, N. C. (5-8 June 2005). “On the Connection Between the TAST Framework and Space-Time Codes From Division Algebra”. In *Proceedings of the 9th Canadian Workshop On Information Theory (CWIT)*, Montreal, Canada, pages 143–146.
- Damen, M. O., El Gamal, H., and Caire, G. (2003). “On Maximum-Likelihood Detection and the Search for the Closest Lattice Point”. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **49**(10), 2389–2402.

- Dayal, P. and Varanasi, M. K. (2005). “An Optimal Two Transmit Antenna Space-Time Code and its Stacked Extension”. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **51**(12), 4348–4355.
- Dayal, P. and Varanasi, M. K. (Nov. 2003). “An Optimal Two Transmit Antenna Space-Time Code and its Stacked Extension”. In *Proc. of the Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, Monterey, CA.
- El Gamal, H., Caire, G., and Damen, M. O. (2004). “Lattice Coding and Decoding Achieve the Optimal Diversity-Multiplexing Tradeoff of MIMO Channels”. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **50**(6), 968–985.
- El Gamal, H. and Damen, M. O. (2003). “Universal Space-Time Coding”. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **49**(5), 1097–1119.
- Elia, P., Kumar, K. R., Pawar, S., Kumar, P. V., and Lu, H. (submitted for publication, Sept. 2004). “Explicit, Minimum-Delay Space-Time Codes Achieving the Diversity-Multiplexing Gain Tradeoff”. *IEEE Trans. Inform. Theory*.
- Elia, P., Sethuraman, B., and Kumar, P. (13-16 June 2005). “Perfect Space-Time Codes with Minimum and Non-Minimum Delay for Any Number of Antennas”. In *International Conference on Wireless Networks, Communications and Mobile Computing*, Monticell, IL, pages 722– 727.
- Ericson, T. (1976). “A Gaussian Channel with Slow Fading”. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **16**, 353–356.
- Foschini, G. (Autumn 1996). “Layered Space Time Architecture for Wireless Communication in a Fading Environment when Using Multi-Element Antennas”. *Bell Systems Technical Journal*, **1**, 41–59.
- Gallager, R. G. (1968). “Information Theory and Reliable Communication”. New York : Wiley.
- Golub, G. H. and Van Loan, C. F. (1983). “*Matrix Computations*”. 3rd edition.

- Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M. (1980). *“Table of Integrals, Series, and Products”*. Academic Press, inc.
- Hassibi, B. and Hochwald, B. M. (2002). “High-Rates Codes That Are Linear in Space and Time”. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **48**(7), 1804–1824.
- Haykin, S. and Moher, M. (2004). *“Modern Wireless Communications”*. Pearson Prentice Hall, first edition.
- Heath Jr., R. W. and Paulraj, A. J. (2005). “Switching Between Diversity and Multiplexing in MIMO Systems”. *IEEE Trans. Commun.*, **53**(6), 962– 968.
- Herstein, I. N. (1968). *“Non-Commutative Rings”*. Washington, DC : Carus Mathematical Monographs, Math. Assocn. America,.
- Hochwald, B. M. and Marzetta, T. L. (2000). “Unitary Space-Time Modulation for mMultiple-Antenna Communications in Rayleigh Flat Fading”. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **46**(2), 543–564.
- Jacobson, N. (1985). *“Basic Algebra I,II”*. NewYork :W.H. Freeman,, 2nd ed. edition.
- Kiran, T. and Sundar Rajan, B. (submitted for publication, 2005). “STBC-Schemes with Non-Vanishing Determinant for Certain Number of Transmit Antennas”. *IEEE Trans. Inform. Theory*.
- Ma, X. and Giannakis, B. (2003). “Full-Diversity Full-Rate Complex-Field Space-Time Coding Multi-Element Antennas”. *IEEE Trans. Signal Processing*, **51**(11), 2917–2930.
- Marzetta, T. L. and Hochwald, B. M. (1999). “Capacity of a Mobile Multiple-Antenna Communication Link in Rayleigh Flat Fading”. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **45**(1), 139–157.
- Médard, M. (2000). “The Effect upon Channel Capacity in Wireless Communications of Perfect and Imperfect Knowledge of The Channel”. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **46**(3), 933–946.

- Muirhead, R. J. R. J. (1982). “*Aspects of Multivariate Statistical Theory*”.
- Narasimhan, R. (2006). “Finite-SNR Diversity-Multiplexing Tradeoff for Correlated Rayleigh and Rician MIMO Channels”. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **52**(9), 3965– 3979.
- Narasimhan, R. (28 Nov.-2 Dec. 2005). “Finite-SNR Diversity Performance of Rate-Adaptive MIMO Systems”. In *Proc., IEEE Global Telecomm. Conf.*, pages 1461– 1465.
- Oggier, F., Ghaya, R., Belfiore, J.-C., and Viterbo, E. (2006). “Perfect Space Time Block Codes”. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **52**(9), 3885–3902.
- Oyman, O., Nabar, R., Bolcskei, H., and Paulraj, A. (2002). “Characterizing The Statistical Properties of mMutual Information in MIMO Channels : Insights into Diversity-Multiplexing Tradeoff”. volume 1, pages 521–525.
- Oyman, O., Nabar, R., Bolcskei, H., and Paulraj, A. (2003). “Characterizing The Statistical Properties of mMutual Information in MIMO Channels”. *IEEE Trans. Signal Processing*, **51**(11), 2784– 2795.
- Paulraj, A., Nabar, R., and Gore, D. (2003). “*Introduction to Space-Time Wireless Communications*”. 1st edition.
- Perera, R. R., Nguyen, K., Pollock, T., and Abhayapala, T. (2006). “Capacity of Non-Coherent Rayleigh Fading MIMO Channels”. *Communications, IEE Proceedings-*, **153**(6), 976–983.
- Pickett, G. and Millev, Y. (2002). “On The Analytic Inversion of Functions, Solution of Transcendental Equations and Infinite Self-Mappings”. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, **35**, 4485–4494.
- Pierce, R. S. (1982,). “*Associative Algebras Graduate Texts in Mathematics*”, volume 88. New York : Springer-Verlag,.
- Proakis, J. G. (2001). “*Digital Communications*”. 4th edition.

- R. S. Kennedy (1969). “Fading Dispersive Communication Channels”. New York : Wiley.
- Ray, S., Médard, M., and Zheng, L. (2007). “On Non-Coherent MIMO Channels in The Wideband Regime : Capacity and Reliability”. *IEEE Trans. on Information Theory*, **53**(6), 1983–2009.
- Rezki, Z., Cotruta, B., Haccoun, D., and Gagnon, F. (25-28 Sept. 2006a). “Finite Diversity-Multiplexing Tradeoff over Spatially Correlated Channels”. In *Veh. Technol. Conf.*, Montreal, Canada, pages 1–5.
- Rezki, Z., Haccoun, D., and Gagnon, F. (2007a). “Capacity of the Discrete-Time Non-Coherent Memoryless Rayleigh Fading Channels at Low SNR”. submitted to *IEEE Trans. on Information Theory*, available at <http://arxiv.org/abs/0801.0581v1>.
- Rezki, Z., Haccoun, D., and Gagnon, F. (2008a). “Capacity of the Discrete-Time Non-Coherent Memoryless Gaussian Channels at Low SNR”. *Information Theory, 2008. ISIT 2008. Proceedings. International Symposium on*.
- Rezki, Z., Haccoun, D., and Gagnon, F. (2008b). “Capacity of the Discrete-Time Non-Coherent Memoryless MIMO Channels at Low SNR”. *Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, 2008. PIMRC 2008. IEEE 19th International Symposium on*.
- Rezki, Z., Haccoun, D., and Gagnon, F. (5-7 Sept. 2005a). “A Treshold-Based Adaptive Encoding for Achieving the Diversity-Multiplexing Tradeoff”. In *2nd International Symposium on Wireless Communication Systems*, Siena, Italy, pages 8–12.
- Rezki, Z., Haccoun, D., and Gagnon, F. (June. 2005b). “Achieving the Diversity-Multiplexing Tradeoff with Adaptive Encoding”. In *Proceedings of the 9th Canadian Workshop On Information Theory (CWIT)*, Montreal, Canada, pages 410–413.

- Rezki, Z., Haccoun, D., Gagnon, F., and Ajib, W. (2008c). “Impact of Spatial Correlation on the Finite-SNR Diversity-Multiplexing Tradeoff”. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, **7**(4), 1184–1189.
- Rezki, Z., Haccoun, D., Gagnon, F., and Ajib, W. (22-25 April 2007b). “A Tight Lower Bound on The Outage Probability of Spatially Correlated MIMO Channels”. In *Veh. Technol. Conf.*, Dublin, Ireland, pages 2058–2062.
- Rezki, Z., Haccoun, D., Gagnon, F., and Ajib, W. (6-8 Sept. 2006b). “On The Impact of Spatial Correlation on the Finite Diversity-Multiplexing Tradeoff”. In *3rd International Symposium on Wireless Communication Systems*, Valence, Spain, pages 214–218.
- Sandh, S. and Paulraj, A. (Nov. 2001). “Unified Design of Linear Space-Time Block Codes”. In *Proc., IEEE Global Telecomm. Conf.*, pages 1073–1077.
- Seshadri, N. and Winters, J. H. (1994). “Two Signaling Schemes for Improving The Error Performance of Frequency-Division-Duplex (FDD) Transmission Systems Using Transmitter Antennas Diversity”. *Int. J. Wireless Inform. Netw.*, **1**(1), 49–60.
- Sethuraman, B., Rajan, B., and Shashidhar, V. (2003). “Full-Diversity, High-Rate Space-Time Block Codes from Division Algebras”. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **49**(10), 2596–2616.
- Tarokh, V., Jafarkhani, H., and Calderbank, A. R. (1999). “Space-Time Block Codes from Orthogonal Designs”. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **45**, 1456–1467.
- Tarokh, V., Seshadri, N., and Calderbank, A. R. (1998). “Space-Time Codes for High Data Rate Wireless Communication : Performance Criterion and Code Construction”. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **44**(2), 744–764.
- Tavildar, S. and Viswanath, P. (Oct. 2004). “Tradeoff-optimality of D-BLAST”. In *Info. Theory Workshop (ITW)*, San Antonio, Tx.

- Telatar, I. E. (Nov/Dec 1999). "Capacity of Multi-Antenna Gaussian Channels". *Europ. Trans. Telecommu.*, **10**, 585–595.
- Telatar, I. E. and Tse, N. C. D. (2000). "Capacity and Mutual Information of Wideband Multipath Fading Channels". *IEEE Trans. on Information Theory*, **46**(4), 1384–1400.
- Tse, D. and Viswanath, P. (2005). "*Fundamentals of Wireless Communication*". 1st edition.
- Verdú, S. (2002). "Spectral Efficiency in The Wideband Regime". *IEEE Trans. Inform. Theory*, **48**(6), 1319–1343.
- Wolniansky, P., Foschini, G., Golden, G., and Valenzuela, R. (29 Sep-2 Oct 1998). "V-BLAST : an Architecture for Realizing Very High Data Rates over the Rich-Scattering Wireless Channel". In *Signals, Systems, and Electronics, 1998. ISSSE 98. 1998 URSI International Symposium on*, Monterey, CA, pages 295–300.
- Yao, H. and Wornell, G. W. (Oct. 2003). "Achieving the Full MIMO Diversity-Multiplexing Frontier with Rotation-Based Space-Time Codes". In *Allerton Conf.*, Monticell, IL.
- Zelst, A. V. and Hammerschmidt, J. (Aug.2002.). "A Single Coefficient Spatial Correlation Model for Multiple-Input Multiple-Output (MIMO) Radio Channels". In *27th General Assembly of the International Union of Radio Science (URSI), Maastricht, the Netherlands*, pages 1461– 1465.
- Zhao, W. and Giannakis, G. (2005). "Sphere Decoding Algorithms with Improved Radius Search". *IEEE Trans. Commun.*, **53**(7), 1104– 1109.
- Zheng, L. and Tse, D. N. C. (2002a). "Communication on the Grassmann Manifold : A Geometric Approach to the Noncoherent Multiple-Antenna Channel". *IEEE Trans. Inform. Theory*, **48**(2), 359–383.



Zheng, L. and Tse, D. N. C. (2002b). “The Diversity-Multiplexing Tradeoff for Non-coherent Multiple Antenna Channels”. In *Allerton Conference*, Monterey, CA.

Zheng, L. and Tse, D. N. C. (2003). “Diversity and Multiplexing : A Fundamental Tradeoff in Multiple-Antenna Channels”. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **49**(5), 1073–1096.

Zheng, L., Tse, N. C. D., and Médard, M. (2007). “Channel Coherence in the Low-SNR Regime”. *IEEE Trans. on Information Theory*, **53**(3), 976–997.

## ANNEXE I

## INTRODUCTION À L'ALGÈBRE DE DIVISION

**Définition I.1.** *Un groupe  $G$  est un ensemble muni d'une loi de composition interne, que nous noterons multiplicativement, et vérifiant les conditions suivantes :*

1.  *$G$  est un demi-groupe, en d'autres termes sa loi de composition est associative  
 $((xy)z = x(yz), \quad \forall x, y, z \in G)$ ;*
2.  *$G$  possède un élément neutre  $e$  ( $ex = xe = x, \quad \forall x \in G$ );*
3. *Tout élément  $x$  de  $G$  possède un symétrique par rapport à  $e$  ( $\forall x \in G, \exists x^* \in G : xx^* = x^*x = e$ ). Si de plus la loi multiplication est commutative dans  $G$ , alors  $G$  est dit abélien.*

**Définition I.2.** *Un anneau  $A$  est un ensemble muni de deux lois de compositions, une addition et une multiplication, et vérifiant les conditions suivantes :*

1.  *$A$  est un groupe abélien pour l'addition ;*
2.  *$A$  est un demi-groupe pour la multiplication ;*
3. *La multiplication est distributive, à droite et à gauche, par rapport à l'addition. Si de plus la multiplication est commutative, l'anneau est dit commutatif. S'il existe dans  $A$  un élément  $e$  neutre pour la multiplication :*

$$ex = xe = x \quad \forall x \in A, \tag{I.1}$$

*alors  $A$  est anneau unitaire.*

**Définition I.3.** *On appelle corps un anneau  $K$  unitaire et dans lequel tout élément  $a \neq 0$  poss'ede un inverse  $a^{-1}$  ( $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ ).*

**Définition I.4.** On appelle champs Galois tout corps d'ordre fini. L'ordre d'un corps est le nombre de ses éléments.

**Théorème I.1.** Étant donné un corps  $K$  et un sous corps  $L$  de  $K$ , commutatif, appelons  $K$ -automorphisme de  $L$  un automorphisme  $\sigma$  de  $L$  laissant fixe chaque élément de  $K$  :  $\forall a \in K, \sigma a = a$ .

L'ensemble  $G$  des  $K$ -automorphismes de  $L$  est un groupe, appelé groupe Galois de  $L$  sur  $K$  et désigné par  $G_{L:K}$ . Si  $K'$  est un corps intermédiaire, c'est à dire compris entre  $K$  et  $L$ ,  $G_{L:K'}$  est un sous groupe de  $G_{L:K}$ .

**Définition I.5.** Une algèbre de division est un anneau avec un élément neutre, pour lequel chaque élément a un inverse. C'est en fait un corps non forcément commutatif.

**Définition I.6.** Le centre d'une algèbre de division  $D$  est l'ensemble des éléments qui, pour la multiplication, sont permutables avec tout élément de  $D$ .

**Définition I.7.** Soient deux ensembles  $E$  et  $F$  munis de deux lois de composition internes  $\top$  et  $\perp$  respectivement. Une application  $h$  de  $E$  dans  $F$  est un homomorphisme de  $E$  dans  $F$  si l'on a :  $h(x \top y) = h(x) \perp h(y) \quad \forall x, y \in E$ . Si les ensembles  $E$  et  $F$  sont des groupes par rapport à leur loi respective, alors  $h$  est un homomorphisme de groupes. Si de plus  $(E, \top, o_1)$  et  $(F, \perp, o_2)$  sont des anneaux tels que :  $h(x o_1 y) = h(x) o_2 h(y)$ , alors  $h$  est un homomorphisme d'anneaux. Si  $h$  est bijective, alors  $h$  est dit isomorphisme de  $E$  sur  $F$ .

**Définition I.8.** Le noyau d'un homomorphisme  $h$  désigné par  $\ker(h)$  est l'ensemble défini par :  $\ker(h) = \{x \in E : h(x) = 0_F\}$ . De la même manière, l'image d'un homomorphisme, désigné par  $Im(h)$  est l'ensemble défini par :  $Im(h) = \{y \in F \mid \exists x \in E : h(x) = y\}$

**Définition I.9.** On appelle idéal bilatéral d'un anneau  $A$  tout sous-groupe additif de  $A$  qui est en outre multiplicativement permis, donc tout sous-ensemble non vide  $\mathcal{I}$  vérifiant les deux conditions :

1.  $m_1, m_2 \in \mathcal{I}$  entraîne  $m_1 - m_2 \in \mathcal{I}$
2.  $\forall m \in \mathcal{I}, \forall m \in A, xm \in \mathcal{I}$  et  $mx \in \mathcal{I}$

Dans tout anneau, le sous-ensemble constitué uniquement par l'élément zéro est un idéal bilatéral, appelé idéal-zéro et désigné par  $(0)$ . De même, l'anneau tout entier  $A$  est un idéal bilatéral; Quand  $A$  possède un élément unité  $e$ , l'idéal  $A$  est appelé idéal-unité et désigné par  $(e)$ . Tout idéal de  $A$  distinct des deux précédents est dit propre.

**Définition I.10.** *Considérons deux espaces vectoriels  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$ , sur un même corps commutatif  $K$ , et les  $K$ -homomorphismes de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}'$  que nous appelons des applications linéaires de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}'$ . À tout  $x \in \mathcal{E}$  est associé par un tel homomorphisme  $h$  un vecteur  $ax = y$  de  $\mathcal{E}$  et un seul, de façon que :*

$$\begin{aligned} a(x_1 + x_2) &= ax_1 + ax_2 \\ a(\lambda x) &= \lambda(ax), \quad \forall \lambda \in K \end{aligned}$$

**Définition I.11.** *Un élément  $\alpha$  est transcendant sur un corps  $K$  s'il n'existe aucun polynôme  $f(x)$  non nul de  $k[x]$  prenant pour  $x = \alpha$  la valeur zéro. Un élément  $\phi$  de  $\mathbb{C}$  est dit algébrique s'il n'est pas transcendant. Le polynôme  $f(x)$  de  $k[x]$  de plus bas degré, de coefficient directeur égal à 1 tel que  $f(\phi) = 0$  est appelé le polynôme minimal de  $\phi$ . De plus un polynôme est dit irréductible sur  $K$  s'il n'est pas décomposable en polynôme de plus bas degrés sur  $K$ .*

**Définition I.12.** *Un treillis ('Lattice')  $(L, \leq)$  ou  $L$*

1. *est un ensemble partiellement ordonné, c'est à dire reflexive, anti-symétrique et transitive*
2. *admet pour chaque paire  $a, b \in L$  une plus grande borne inférieure et une plus petite borne supérieure.*

## ANNEXE II

## PREUVE DU COROLLAIRE 4.2

Nous calculons la diversité maximale pour les cas corrélé et non-corrélé séparément.

1. Évanouissement non corrélé :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \hat{d}^{uncorr}(r, \eta, \rho) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{N_t}{\eta} \sum_{l=1}^t J_l(\xi_l) K_l(\xi_l), \quad (\text{II.1})$$

où  $J_l(\xi_l)$  and  $K_l(\xi_l)$  sont donnés par :

$$J_l(\xi_l) = \frac{\left( \xi_l^{N_t + N_r - 2l} e^{-\xi_l} \right) / (N_t + N_r - 2l)!}{\Gamma_{inc}(\xi_l, N_r + N_t - 2l + 1)}, \quad (\text{II.2})$$

$$K_l(\xi_l) = \left( (1 + g\eta)^{b_l} - b_l g\eta (1 + g\eta)^{b_l - 1} - 1 \right). \quad (\text{II.3})$$

Quand  $r \rightarrow 0$ , tous les  $b_l \rightarrow 0$ ,  $l = 1, \dots, t$ . À noter que  $J_l(\xi_l) = \frac{f'(\xi_l)}{f(\xi_l)}$ , où

$$f(\xi_l) = \Gamma_{inc}(\xi_l, N_r + N_t - 2l + 1), \quad (\text{II.4})$$

et  $f'(\xi_l)$  désigne la dérivée de  $f(\xi_l)$ . Soient  $A_l(\xi_l) = J_l(\xi_l) \times \xi_l$  et  $B_l(\xi_l) = K_l(\xi_l)/\xi_l$ . En utilisant le développement de Taylor de  $f(\xi_l)$  et  $f'(\xi_l)$  autour de 0, on obtient :

$$J_l(\xi_l) \approx \frac{1/(N_t + N_r - 2l)! \xi_l^{N_t + N_r - 2l}}{1/(N_t + N_r - 2l + 1)! \xi_l^{N_t + N_r - 2l + 1}}, \quad (\text{II.5})$$

ce qui conduit à :

$$\lim_{b_l \rightarrow 0} A_l(\xi_l) = \lim_{r \rightarrow 0} J_l(\xi_l) \times \xi_l = N_t + N_r - 2l + 1. \quad (\text{II.6})$$

D'autre part, en écrivant  $B_l(\xi_l)$  comme :

$$B_l(\xi_l) = \frac{\eta}{N_t} \left( 1 - \frac{b_l g \eta (1 + g \eta)^{b_l - 1}}{(1 + g \eta)^{b_l} - 1} \right), \quad (\text{II.7})$$

et en calculant

$$\lim_{b_l \rightarrow 0} \frac{b_l g \eta (1 + g \eta)^{b_l - 1}}{(1 + g \eta)^{b_l} - 1} = \frac{g \eta}{(1 + g \eta) \log(1 + g \eta)}, \quad (\text{II.8})$$

on obtient :

$$\lim_{b_l \rightarrow 0} B_l(\xi_l) = \frac{\eta}{N_t} \left( 1 - \frac{g \eta}{(1 + g \eta) \log(1 + g \eta)} \right) \quad (\text{II.9})$$

De ce fait ,

$$\begin{aligned} \lim_{b_l \rightarrow 0} J_l(\xi_l) K_l(\xi_l) &= \lim_{b_l \rightarrow 0} A_l(\xi_l) B_l(\xi_l) \\ &= \frac{\eta}{N_t} \left( 1 - \frac{g \eta}{(1 + g \eta) \log(1 + g \eta)} \right) \times (N_t + N_r - 2l + 1), \end{aligned}$$

De quoi (4.21) suit immédiatement .

2. Évanouissement corrélé :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \hat{d}^{corr}(r, \eta, \rho) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{N_t}{\eta} \sum_{l=1}^t \frac{Q_l(\xi_l)}{P_l(\xi_l)} K_l(\xi_l), \quad (\text{II.10})$$

où  $P_l(\xi_l)$ ,  $Q_l(\xi_l)$  et  $K_l(\xi_l)$  sont respectivement donnés (4.18), (4.17) and (II.3).

Notons que  $Q_l(\xi_l) = f_{\Delta_l}(\xi_l)$ . Ainsi,

$$Q_l(0) = f_{\Delta_l}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{\Delta_l}(j\nu) d(j\nu). \quad (\text{II.11})$$

Puisque la transformée de Fourier de la dérivée  $n^{ime}$  de  $f_{\Delta_l}(x)$  est  $(jv)^n \Psi_{\Delta_l}(jv)$ , alors en utilisant le théorème des Résidus, on démontre que  $f_{\Delta_l}(0) = 0$ , ainsi que que toutes les  $n^{ime}$  dérivées de  $f_{\Delta_l}(0)$  pour  $n < N_t + N_r - 2l + 1$ .<sup>1</sup> En notant encore une fois que  $Q_l(\xi_l)$  est la dérivée de  $P_l(\xi_l)$  et en utilisant le développement de Taylor à l'ordre  $(N_t + N_r - 2l + 1)$ , on trouve que :

$$\lim_{b_l \rightarrow 0} \frac{Q_l(\xi_l)}{P_l(\xi_l)} = \frac{N_t + N_r - 2l + 1}{\xi_l}. \quad (\text{II.12})$$

Par conséquent,

$$\lim_{b_l \rightarrow 0} \frac{Q_l(\xi_l)}{P_l(\xi_l)} K_l(\xi_l) = \frac{\eta}{N_t} \left( 1 - \frac{g\eta}{(1 + g\eta) \log(1 + g\eta)} \right) \times (N_t + N_r - 2l + 1),$$

de quoi (4.21) suit immédiatement.

---

<sup>1</sup>Ceci est en raison du fait que  $N_t + N_r - 2l + 1$  est le degré du dénominateur de  $\Psi_{\Delta_l}(jv)$ .

## ANNEXE III

## PREUVE DU LEMME 4.2

D'abord, notons que quand  $\eta \rightarrow \infty$ , on a :

$$\xi_l \approx N_t g^{b_l} \eta^{b_l - 1}. \quad (\text{III.1})$$

Définissons  $J_l(\xi_l)$  et  $K_l(\xi_l)$  tels que :

$$\begin{aligned} J_l(\xi_l) &= \frac{\xi_l^{N_t + N_r - 2l} e^{-\xi_l} / (N_t + N_r - 2l)!}{\Gamma_{inc}(\xi_l, N_r + N_t - 2l + 1)} \\ K_l(\xi_l) &= ((1 + g\eta)^{b_l} - b_l g \eta (1 + g\eta)^{b_l - 1} - 1) \end{aligned}$$

pour  $l = 1, \dots, t$ . Pour démontrer le Lemme 4.2, il suffit de démontrer que :

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} J_l(\xi_l) K_l(\xi_l) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{Q_l(\xi_l)}{P_l(\xi_l)} K_l(\xi_l). \quad (\text{III.2})$$

Ainsi, pour démontrer (III.2) pour chaque  $l = 1, \dots, t$ , on distingue trois cas :

- $b_l > 1$  : Dans ce cas,  $\xi_l \rightarrow \infty$ . Puisque  $\Gamma_{inc}(\xi_l, N_r + N_t - 2l + 1) \rightarrow 1$  quand  $\xi_l \rightarrow \infty$ , alors  $J_l(\xi_l) K_l(\xi_l) \rightarrow 0$ , et ainsi est le terme  $\frac{Q_l(\xi_l)}{P_l(\xi_l)} K_l(\xi_l)$ .
- $b_l < 1$  : Dans ce cas,  $\xi_l \rightarrow 0$ . Notons que  $J_l(\xi_l) = \frac{f'(\xi_l)}{f(\xi_l)}$ , où  $f(\xi_l) = \Gamma_{inc}(\xi_l, N_r + N_t - 2l + 1)$ , et  $f'(\xi_l)$  désigne la dérivée de  $f(\xi_l)$ . En appliquant le développement de Taylor à  $f(\xi_l)$  et  $f'(\xi_l)$  autour de 0, on obtient :

$$\begin{aligned} J_l(\xi_l) &\approx \frac{1/(N_t + N_r - 2l)! \xi_l^{N_t + N_r - 2l}}{1/(N_t + N_r - 2l + 1)! \xi_l^{N_t + N_r - 2l + 1}} \\ &= \frac{N_t + N_r - 2l + 1}{\xi_l}. \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$



D'un autre côté, on a  $Q_l(\xi_l) = f_{\Delta_l}(\xi_l)$ . Puisque la  $n^{ime}$  dérivée de  $f_{\Delta_l}(x)$  peut aussi être exprimée par :

$$f_{\Delta_l}^{(n)}(x) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} (-jv)^n e^{-jvx} \Psi_{\Delta_l}(jv) d(jv) \quad n \geq 0, \quad (\text{III.4})$$

alors on démontre à l'aide du théorème des résidus que  $f_{\Delta_l}^{(n)}(0) = 0$  for  $n \leq N_t + N_r - 2l - 1$ . Ceci découle du fait que  $N_t + N_r - 2l + 1$  est le degré du dénominateur des  $\Psi_{\Delta_l}(jv)$ . Constatant encore une fois que  $Q_l(\xi_l)$  est la dérivée de  $P_l(\xi_l)$  et effectuant un développement de Taylor de  $Q_l(\xi_l)$  et de  $P_l(\xi_l)$  à l'ordre  $(N_t + N_r - 2l)$ , on trouve aussi que :

$$\frac{Q_l(\xi_l)}{P_l(\xi_l)} \approx \frac{N_t + N_r - 2l + 1}{\xi_l}. \quad (\text{III.5})$$

- $b_l = 1$  : Dans ce cas,  $\xi_l = gN_t$ . Puisque  $J_l(\xi_l)$  et  $\frac{Q_l(\xi_l)}{P_l(\xi_l)}$  sont finis et  $K_l(\xi_l) = 0$ , la relation (III.2) est toujours valide.

Ceci achève la démonstration du Lemme 4.2.

## ANNEXE IV

## PREUVE DU THÉORÈME 4.2

Pour prouver le théorème 4.2, il suffit de démontrer que  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \hat{d}^{uncorr}(r, \eta) = d_{asym}$ , puisque l'autre égalité découle du Lemme 4.2. Dans l'annexe III, il a été démontré que si  $b_l \geq 1$ ,  $l = 1, \dots, t$ , alors  $J_l(\xi_l)K_l(\xi_l) \rightarrow 0$  quand  $\eta \rightarrow \infty$ . Par conséquent, seul le cas  $b_l < 1$  est d'intérêt. De plus, utilisant (III.1), (III.3) et le fait que  $K_l(\xi_l)$  peut être approximée par  $K_l(\xi_l) \approx g^{b_l}(1 - b_l)\eta^{b_l}$ , on obtient que  $J_l(\xi_l)K_l(\xi_l) \approx \frac{N_t + N_r - 2l + 1}{N_t}(1 - b_l)\eta$ . De ce fait,  $\hat{d}^{uncorr}(r, \eta)$  donnée par (4.15), peut être exprimée par :

$$\begin{aligned} \hat{d}^{uncorr}(r, \infty) &= \sum_{l=1, b_l < 1}^t (N_t + N_r - 2l + 1)(1 - b_l) \\ &= \sum_{l=1}^t (N_t + N_r - 2l + 1)(1 - b_l)^+ \\ &= \sum_{l=1}^t (N_t + N_r - 2l + 1)\alpha_l, \end{aligned} \tag{IV.1}$$

où  $\alpha_l = (1 - b_l)^+$  et  $(x)^+ = \max(x, 0)$  pour tout nombre réel  $x$ . Dans la suite, on montre que les coefficients  $\alpha_l$  qui satisfont (IV.1) sont exactement les mêmes coefficients qui mènent vers le compromis diversité-multiplexage asymptotique établi dans [Zheng and Tse, 2003].

Commençons par rappeler que  $b = (b_1, \dots, b_t) \in \mathcal{A} = \{(b_1, \dots, b_t) \in \mathcal{R}^{t+} \mid \sum_{l=1}^t b_l = r\}$ , et que  $b$  maximise la borne inférieure (4.11).

$$\max_{b \in \mathcal{A}} \prod_{l=1}^t \Gamma_{inc}(\xi_l, N_r + N_t - 2l + 1). \tag{IV.2}$$

À mesure que  $\eta \rightarrow \infty$ , la fonction  $\Gamma_{inc}(\xi_l, N_r + N_t - 2l + 1)$  est indépendante de  $b_l$ , for  $b_l \geq 1$ . Ceci émane du fait que quand  $b_l = 1$  alors  $\xi_l = gN_t$ , et quand  $b_l > 1$  alors  $\xi_l \rightarrow \infty$  et  $\Gamma_{inc}(\xi_l, N_r + N_t - 2l + 1) \rightarrow 1$ . Ainsi, si on suppose que  $\kappa$  est le nombre de coefficients  $b_l < 1$ , le problème de maximisation (IV.2) est réduit à :

$$K \cdot \max_{b \in \mathcal{B}} \prod_{l=1}^{\kappa} \Gamma_{inc}(\xi_l, N_r + N_t - 2l + 1), \quad (\text{IV.3})$$

où  $K$  est une constante et  $\mathcal{B}$  est donné par :

$$\mathcal{B} = \{(b_1, \dots, b_{\kappa}) \in \mathcal{R}^{\kappa+} \mid \sum_{l=1}^{\kappa} b_l \leq r\}.$$

La maximisation (IV.3) implique seulement les  $b_l < 1$ , pour lesquels  $\xi_l \rightarrow 0$  quand  $\eta \rightarrow \infty$ . En utilisant (III.1) et le fait qu'au voisinage de zéro,  $\Gamma_{inc}(x, m)$  peut être approximé par  $\Gamma_{inc}(x, m) \approx \frac{x^m}{m!}$ , on obtient :  $\Gamma_{inc}(\xi_l, N_r + N_t - 2l + 1) \approx C(g\eta)^{(b_l-1)(N_r+N_t-2l+1)}$ , où  $C = \frac{gN_t}{(N_t+N_r-2l+1)!}$  est une constante indépendante des  $b_l$ ,  $l = 1, \dots, t$ . Ainsi, (IV.3) est équivalente à :

$$\min_{b \in \mathcal{B}} \sum_{l=1}^{\kappa} (1 - b_l)(N_r + N_t - 2l + 1).$$

Ainsi la diversité estimée asymptotique donnée par (IV.1) peut être exprimée par :

$$\hat{d}^{uncorr}(r, \infty) = \min_{\alpha \in \mathcal{A}'} \sum_{l=1}^t (N_r + N_t - 2l + 1)\alpha_l,$$

où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ , et  $\mathcal{A}'$  est donné par :

$$\mathcal{A}' = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_t) \in \mathcal{R}^{t+} \mid \sum_{l=1}^t (1 - \alpha_l)^+ \leq r\},$$

ce qui correspond exactement à la diversité asymptotique  $d_{asym}$  établi dans [Zheng and Tse, 2003].

Ceci achève la démonstration du Théorème 4.2.

## ANNEXE V

## PREUVE DU COROLLAIRE 4.2

Quand  $r \rightarrow 0$ , tous les  $b_l \rightarrow 0$ ,  $l = 1, \dots, t$ . Puisque dans ce cas  $\xi_l \rightarrow 0$ , (III.3) et (III.5) sont toujours valides. Ceci est en fait un cas particulier de  $b_l < 1$ , et comme il a été montré dans l'annexe III, on a toujours  $\hat{d}^{uncorr}(0, \eta) = \hat{d}^{corr}(0, \eta)$ . Dans la suite, on calcule  $\hat{d}^{uncorr}(0, \eta)$ .

Posons :  $A_l(\xi_l) = J_l(\xi_l) \times \xi_l$  et  $B_l(\xi_l) = K_l(\xi_l)/\xi_l$ , alors en utilisant (III.3), on obtient :

$$\lim_{b_l \rightarrow 0} A_l(\xi_l) = \lim_{r \rightarrow 0} J_l(\xi_l) \times \xi_l = N_t + N_r - 2l + 1.$$

D'un autre côté, puisque

$$\lim_{b_l \rightarrow 0} \frac{b_l g \eta (1 + g \eta)^{b_l - 1}}{(1 + g \eta)^{b_l} - 1} = \frac{g \eta}{(1 + g \eta) \log(1 + g \eta)},$$

alors en écrivant  $B_l(\xi_l)$  sous la forme :

$$B_l(\xi_l) = \frac{\eta}{N_t} \left( 1 - \frac{b_l g \eta (1 + g \eta)^{b_l - 1}}{(1 + g \eta)^{b_l} - 1} \right),$$

on obtient :

$$\lim_{b_l \rightarrow 0} B_l(\xi_l) = \frac{\eta}{N_t} \left( 1 - \frac{g \eta}{(1 + g \eta) \log(1 + g \eta)} \right).$$

Par conséquent, on a :

$$\lim_{b_l \rightarrow 0} J_l(\xi_l) K_l(\xi_l) = \lim_{b_l \rightarrow 0} A_l(\xi_l) B_l(\xi_l) = \frac{\eta}{N_t} \left( 1 - \frac{g \eta}{(1 + g \eta) \log(1 + g \eta)} \right) (N_t + N_r - 2l + 1),$$

de laquelle (4.21) suit immédiatement. Ceci achève la preuve du Corollaire 4.2.

## ANNEXE VI

## PREUVE DU LEMME 6.1

Par commodité, on utilise  $f(x)$  au lieu de  $f_x(x)$  pour dénoter la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire  $x$  à la valeur  $x$ . En premier lieu, on démontre que  $I_{LB}(x; y)$  est strictement monotone croissante par rapport à  $x_1$ .<sup>1</sup> En dérivant (6.9) par rapport à  $x_1$ , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} I_{LB}(x_1, p_1) = p_1 \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_1} f(y|x_1) \ln \left( \frac{f(y|x_1)}{f(y)} \right) dy \quad (\text{VI.1})$$

Dérivons (6.4), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(y|x_1) = \frac{2x_1}{(1+x_1^2)^2} [y - (1+x_1^2)] f(y|x_1) \quad (\text{VI.2})$$

Substituant (VI.2) dans (VI.1) on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} I_{LB}(x_1, p_1) = \frac{2p_1 x_1}{(1+x_1^2)^2} \int_0^\infty [y - (1+x_1^2)] f(y|x_1) \ln \left( \frac{f(y|x_1)}{f(y)} \right) dy \quad (\text{VI.3})$$

Soit  $g(y)$  la fonction définie par :  $g(y) = \ln \left( \frac{f(y|x_1)}{f(y)} \right)$ . Maintenant, on a besoin du lemme suivant :

**Lemme VI.1.** *Soit  $f(y)$  une fonction de densité de probabilité de moyenne  $m$ . Si*

---

<sup>1</sup>À signaler que la technique adoptée ici pour montrer que  $I_{LB}(x; y)$  est strictement monotone croissante par rapport à  $x_1$  est similaire à la technique utilisée dans [Abou-Faycal et al., 2001] pour démontrer que la distribution de l'entrée optimale a nécessairement un point de masse nulle, quoique les deux techniques aient des objectifs différents.

$g(y)$  est une fonction strictement monotone croissante, alors :

$$\int (y - m)f(y)g(y) > 0 \quad (\text{VI.4})$$

*Démonstration.* La démonstration découle d'une démarche similaire à celle adoptée pour établir le Lemme 1 dans [Abou-Faycal et al., 2001].  $\square$

Pour appliquer le Lemme VI.1, il suffit de noter que

$$\frac{f(y)}{f(y|x_1)} = p_1 + p_0(1 + x_1^2) \exp \left[ y \left( \frac{1}{1 + x_1^2} - 1 \right) \right], \quad (\text{VI.5})$$

est strictement décroissante par rapport à  $y$  puisque l'exposant de la fonction exponentielle est négatif. De ce fait,  $\frac{f(y|x_1)}{f(y)}$  est strictement croissante et  $g(y)$  l'est aussi. Finalement, sachant que  $(1 + x_1^2)$  est la moyenne de  $f(y|x_1)$  et en appliquant le Lemme VI.1 à (VI.3), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} I_{LB}(x_1, p_1) > 0, \quad (\text{VI.6})$$

qui signifie que  $I_{LB}(x_1, p_1)$  est strictement croissante par rapport à  $x_1$ . Par conséquent, la contrainte de puissance moyenne est satisfaite avec égalité. C'est à dire :  $E[x^2] = p_1 x_1^2 = a$ . Ainsi, (6.8) est équivalente à :

$$\begin{cases} C_{LB} = \max_{x_1 \geq \sqrt{a}} I_{LB}(x_1, p_1) \\ p_1 x_1^2 = a. \end{cases} \quad (\text{VI.7})$$

Par la suite, nous démontrons l'existence du maximum dans (VI.7). Clairement,  $I_{LB}(x_1, p_1)$  est maintenant une fonction de  $x_1$  et de  $a$ , puisque  $p_1 x_1^2 = a$ . L'inégalité  $x_1 \geq \sqrt{a}$  s'en suit automatiquement du fait que  $p_1 \leq 1$ . D'autre part,  $I_{LB}(x_1, p_1)$  dans (6.9) est définie positive et continue par rapport à  $x_1$  et  $p_1$  et donc  $I_{LB}(x_1, a)$

l'est aussi pour toute valeur donnée  $a$  du SNR. D'autre part,  $I_{LB}(x_1, a)$  admet forcément une borne supérieure dans l'intervalle  $[\sqrt{a}, \infty[$ , sinon il existerait une valeur  $a^0$  du SNR telle que :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists x_1^0 > \sqrt{a^0} \quad | \quad I_{LB}(x_1^0, a^0) > \epsilon. \quad (\text{VI.8})$$

Mais cette proposition signifie que l'information mutuelle du canal -une borne supérieure sur  $I_{LB}(x_1, a^0)$  - est non bornée pour  $a^0$ , ce qui contredit le fait que la capacité du canal existe pour toute valeur du SNR [Abou-Faycal et al., 2001]. par conséquent,  $I_{LB}(x_1, a)$  admet nécessairement une borne supérieure. En outre, la continuité de  $I_{LB}(x_1, a)$  sur  $[\sqrt{a}, \infty[$  implique que la borne supérieure est soit atteinte à une valeur finie  $x_1$  ou à  $\infty$ . Ce dernier cas est toutefois impossible. Pour voir ceci, il suffit de noter que pour une valeur donnée  $a$  du SNR, quand  $x_1$  tend vers l'infini,  $p_1$  tend vers zero. Ainsi et d'après (6.9),  $\lim_{x_1 \rightarrow \infty} I_{LB}(x_1, a) = I_{LB}(\infty, 0) = 0$ , et par conséquent  $I_{LB}(x_1, a) = 0$  pour tout  $x_1 \in [\sqrt{a}, \infty[$ , ce qui est impossible puisque l'entrée du canal  $x$  et sa sortie  $y$  sont dépendantes. Il s'en suit que la borne supérieure est forcément atteinte à une valeur finie  $x_1$  et ceci établit l'existence du maximum dans (VI.7). De plus, puisque ce maximum n'est pas aux bords de  $[\sqrt{a}, \infty[$ , on a forcément au point maximum :  $\frac{\partial}{\partial x_1} I_{LB}(x_1, a) = 0$ .

Finalement, pour démontrer (6.11), on calcule la borne inférieure  $I_{LB}(x_1, p_1)$  dans (6.9) :

$$\begin{aligned} I_{LB}(x_1, p_1) = & \underbrace{p_0 \int_0^\infty f(y|0) \ln(f(y|0)) dy}_{I_1} - \underbrace{p_0 \int_0^\infty f(y|0) \ln(f(y))}_{I_2} \\ & + \underbrace{p_1 \int_0^\infty f(y|x_1) \ln(f(y|x_1))}_{I_3} - \underbrace{p_1 \int_0^\infty f(y|x_1) \ln(f(y))}_{I_4} \end{aligned} \quad (\text{VI.9})$$



$I_1$  and  $I_3$  sont calculés aisément :

$$I_1 = p_0 \int_0^\infty e^{-y} \ln(e^{-y}) dy = -p_0 = 1 - p_1 \quad (\text{VI.10})$$

$$\begin{aligned} I_3 &= p_1 \int_0^\infty \frac{1}{1+x_1^2} e^{-\frac{y}{1+x_1^2}} \ln\left(\frac{1}{1+x_1^2} e^{-\frac{y}{1+x_1^2}}\right) dy \\ &= -p_1 (1 + \ln(1+x_1^2)) \end{aligned} \quad (\text{VI.11})$$

$$\begin{aligned} I_2 &= p_0 \int_0^\infty e^{-y} \ln\left(p_0 e^{-y} + \frac{p_1}{1+x_1^2} e^{-\frac{y}{1+x_1^2}}\right) dy \\ &= \underbrace{\int_0^\infty p_0 e^{-y} \ln(p_0 e^{-y}) dy}_{I_{21}} + \underbrace{\int_0^\infty p_0 e^{-y} \ln\left(1 + \frac{p_1}{p_0(1+x_1^2)} e^{\left(1-\frac{1}{1+x_1^2}\right)y}\right) dy}_{I_{22}} \end{aligned} \quad (\text{VI.12})$$

$I_{21}$  peut aussi être calculé aisément :

$$I_{21} = p_0 [\ln(p_0) - 1] \quad (\text{VI.13})$$

Pour calculer  $I_{22}$ , posons :  $\alpha = 1 + x_1^2$  et  $\beta = \frac{p_1}{p_0\alpha} = \frac{p_1}{(1-p_1)\alpha}$ . Ainsi,  $I_{22}$  peut être écrite :

$$\begin{aligned} I_{22} &= \frac{p_0\alpha}{\alpha-1} \int_1^\infty t^{\frac{1-2\alpha}{\alpha-1}} \ln(1+\beta t) dt \\ &= \frac{p_0\alpha}{\alpha-1} \left\{ \left[ \frac{1-\alpha}{\alpha} t^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}} \ln(1+\beta t) \right]_1^\infty - \frac{1-\alpha}{\alpha} \beta \int_1^\infty \frac{t^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{1+\beta t} dt \right\} \end{aligned} \quad (\text{VI.14})$$

L'intégrale à droite de (VI.14) peut être calculée comme [Gradshteyn and Ryzhik, 1980] :

$$\int_1^\infty \frac{t^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{1+\beta t} dt = \frac{\alpha-1}{\alpha\beta} \cdot {}_2F_1\left(1, 1 + \frac{1}{\alpha-1}, 2 + \frac{1}{\alpha-1}, -\frac{1}{\beta}\right) \quad (\text{VI.15})$$

Substituant (VI.15) dans (VI.14), on obtient :

$$I_{22} = p_0 \left[ \ln(1 + \beta) + \frac{\alpha - 1}{\alpha} {}_2F_1 \left( 1, 1 + \frac{1}{\alpha - 1}, 2 + \frac{1}{\alpha - 1}, -\frac{1}{\beta} \right) \right], \quad (\text{VI.16})$$

et donc en combinant (VI.12), (VI.13) et (VI.16), on aboutit à :

$$I_2 = p_0 [\ln(p_0) - 1] + p_0 \left[ \ln(1 + \beta) + \frac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot {}_2F_1 \left( 1, 1 + \frac{1}{\alpha - 1}, 2 + \frac{1}{\alpha - 1}, -\frac{1}{\beta} \right) \right]. \quad (\text{VI.17})$$

L'intégrale  $I_4$  peut être calculée de façon similaire. on évite les détails et on donne le résultat final :

$$I_4 = p_1 \ln(p_0) - p_1 \alpha + p_1 \left[ \ln(1 + \beta) + (\alpha - 1) \cdot {}_2F_1 \left( 1, \frac{1}{\alpha - 1}, 1 + \frac{1}{\alpha - 1}, -\frac{1}{\beta} \right) \right]. \quad (\text{VI.18})$$

D'après (VI.9), (VI.10), (VI.11), (VI.17), (VI.18) et utilisant le fait que :

$${}_2F_1 \left( 1, \frac{1}{\alpha - 1}, 1 + \frac{1}{\alpha - 1}, -\frac{1}{\beta} \right) + \frac{1 - p_1}{p_1} \cdot {}_2F_1 \left( 1, 1 + \frac{1}{\alpha - 1}, 2 + \frac{1}{\alpha - 1}, -\frac{1}{\beta} \right) = 1, \quad (\text{VI.19})$$

on obtient :

$$I_{LB}(x_1, p_1) = -\ln(1 - p_1) + p_1 (x_1^2 - \ln(1 + x_1^2)) - \ln(1 + \beta) - \frac{p_1(\alpha - 1)}{\alpha} \left[ (\alpha - 1) \cdot {}_2F_1 \left( 1, \frac{1}{\alpha - 1}, 1 + \frac{1}{\alpha - 1}, -\frac{1}{\beta} \right) + (\text{VI.20}) \right]$$

En combinant (VI.20) et (VI.7) on obtient (6.11) ce qui achève la démonstration du Lemme 6.1.

## ANNEXE VII

## PREUVE DU THÉORÈME 6.1

À bas SNR une distribution discrete à l'entrée, avec deux points de masse dont l'un est situé à l'origine, atteint la capacité non-cohérente [Abou-Faycal et al., 2001]. L'égalité  $p_1 = a/x_1^2$  a été démontrée dans l'annexe VI et donc (6.12) est vraie. Pour démontrer la suite, nous procédons à un calcul par développement en série.

Avant de procéder, il y a lieu de rappeler que pour la distribution optimale spécifiée dans le Théorème 6.1, la localisation du point de masse non nulle  $x_1$  est supérieure à 1 ( $x_1 > 1$ ) [Abou-Faycal et al., 2001, Zheng et al., 2007]. L'expansion en série de (6.11) au second ordre, autour du point  $(x_1, a) = (x_1, 0)$ , où  $x_1$  est un nombre arbitraire supérieur à 1, peut être obtenue à l'aide de Mathematica :

$$\begin{aligned}
I_{LB}(x_1, a) = & \left( \left(1 - \frac{\log(1 + x_1^2)}{x_1^2}\right)a + \frac{1}{2(x_1^2 - 1)}a^2 + o(a^2) \right) \\
& - a^{\frac{1}{x_1}} \left( \pi x_1^2 \left( x_1^2(1 + x_1^2) \right)^{-\frac{1+x_1^2}{x_1^2}} \csc \left( \frac{\pi}{x_1^2} \right) a \right. \\
& \left. + \frac{\pi \left( x_1^2(1 + x_1^2) \right)^{-\frac{1+x_1^2}{x_1^2}} \csc \left( \frac{\pi}{x_1^2} \right)}{x_1^2} a^2 + o(a^2) \right), \quad (\text{VII.1})
\end{aligned}$$

où le symbole  $o(a^n)$  représente une fonction  $g(x_1, a)$  par exemple, telle que  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{g(x_1, a)}{a^n} = 0$ . Puisque  $x_1 > 1$ , alors il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $1 + \frac{1}{x_1^2} < 2 - \epsilon$ . De ce fait, (VII.1) peut être écrite comme :

$$I_{LB}(x_1, a) = \left(1 - \frac{\log(1 + x_1^2)}{x_1^2}\right)a - \pi x_1^2 \left( x_1^2(1 + x_1^2) \right)^{-\frac{1+x_1^2}{x_1^2}} \csc \left( \frac{\pi}{x_1^2} \right) a^{1+\frac{1}{x_1^2}} + o(a^{2-\epsilon}), \quad (\text{VII.2})$$

qui représente l'expansion en série à un ordre strictement inférieur à 2. À cet ordre de grandeur, on peut abuser de notation en omettant le terme  $o(a^{2-\epsilon})$  et écrire (VII.2) comme :

$$I_{LB}(x_1, a) = \left(1 - \frac{\log(1 + x_1^2)}{x_1^2}\right) a - \pi x_1^2 \left(x_1^2(1 + x_1^2)\right)^{-\frac{1+x_1^2}{x_1^2}} \csc\left(\frac{\pi}{x_1^2}\right) a^{1+\frac{1}{x_1^2}}. \quad (\text{VII.3})$$

La maximisation de (VII.3) par rapport à  $x_1 > 1$  est équivalente à :

$$\min_{x_1 > 1} \left[ \frac{\log(1 + x_1^2)}{x_1^2} + \pi x_1^2 \left(x_1^2(1 + x_1^2)\right)^{-\frac{1+x_1^2}{x_1^2}} \csc\left(\frac{\pi}{x_1^2}\right) a^{\frac{1}{x_1^2}} \right]. \quad (\text{VII.4})$$

Il a été démontré dans l'annexe VI, qu'au maximum, nous avons nécessairement  $\frac{\partial}{\partial x_1} I_{LB}(x_1, a) = 0$ . En dérivant (VII.4) par rapport à  $x_1$ , on obtient (6.13). Finalement, (6.14) suit de (VII.3). Ce qui achève la preuve du Théorème 6.1.

## ANNEXE VIII

## PREUVE DU THÉORÈME 6.2

Pour  $a < a_0$  et  $x_1 > x_0$ , (6.16) peut être exprimée par :

$$a(x_1) = \exp \left[ x_1^2 W \left( -1, \varphi(x_1) \right) - x_1^2 + \pi \cot \left( \frac{\pi}{x_1^2} \right) + \ln(x_1^2) + \ln(1 + x_1^2) - 1 \right]. \quad (\text{VIII.1})$$

De plus, il est facile de vérifier que  $a$  dans (VIII.1) est une fonction décroissante par rapport à  $x_1$  et que :

$$-x_1^2 + \pi \cot \left( \frac{\pi}{x_1^2} \right) + \ln(x_1^2) + \ln(1 + x_1^2) - 1 > 1, \quad (\text{VIII.2})$$

pour  $x_1 > x_0$ . Par conséquent, en utilisant (VIII.1) et (VIII.2), on obtient :

$$a(x_1) > a_{lb}(x_1) = \exp \left[ x_1^2 W \left( -1, \varphi(x_1) \right) + 1 \right], \quad (\text{VIII.3})$$

où  $a_{lb}(x_1)$  est une borne inférieure sur  $a(x_1)$ . Puisque  $a_{lb}(x_1)$  est aussi une fonction décroissante par rapport à  $x_1$ , alors à petite valeur de SNR  $a$ , (VIII.3) peut être interprétée comme une borne inférieure sur la localisation du point de masse non nulle optimal  $x_1$  et on a de manière équivalente :

$$x_1 > x_{1,lb}, \quad (\text{VIII.4})$$

où  $x_{1,lb}$  est solution de  $a_{lb}(x_1) = a$ . Dans ce qui suit, on établit une borne inférieure sur  $x_{1,lb}$ .

Fixons une petite valeur de SNR  $a < a_0$  et considérons la fonction dans le côté

droit de (VIII.3), exprimée par convenance par :

$$a = \exp [x_{1,lb}^2 W(-1, \varphi(x_{1,lb})) + 1], \quad (\text{VIII.5})$$

ou de manière équivalente, en posant  $y = \sqrt{1 + \ln(\frac{1}{a})}$  :

$$x_{1,lb}^2 = \frac{y^2}{-W(-1, \varphi(x_{1,lb}))}. \quad (\text{VIII.6})$$

Puisque  $-W(-1, \varphi(x_{1,lb})) > 1$  pour  $x_{1,lb} > x_0$ , il est facile de vérifier que  $y^2 > x_{1,lb}^2$ . Ainsi, en utilisant le fait que  $\varphi(\cdot)$  et  $-W(-1, \cdot)$  sont des fonctions strictement croissantes, on obtient :

$$x_{1,LB}^{(1)} = \frac{y}{\sqrt{-W(-1, \varphi(y))}} < x_{1,lb} = \frac{y}{\sqrt{-W(-1, \varphi(x_{1,lb}))}}, \quad (\text{VIII.7})$$

où l'exposant <sup>(1)</sup> au côté gauche de (VIII.7) signifie une première borne inférieure. Dans la suite, on améliore cette borne inférieure  $x_{1,LB}^{(1)}$  afin d'obtenir une borne plus serrée. Mais avant de continuer, rappelons ce résultat de [Pickett and Millev, 2002] qui se propose de résoudre des équations transcendantes impliquant des fonctions Lambert de manière itérative en utilisant une technique d'auto-application (self-mapping) :

**Lemme VIII.1.** *Pour la région caractérisée par  $x < 1$  et  $-\frac{1}{e} < y < 0$ , une solution à échelle infinie (infinite-ladder) à l'équation :*

$$y(x) = xe^x \quad (\text{VIII.8})$$

*est facilement identifiée par*

$$x(y) = L_{<}(y), \quad (\text{VIII.9})$$

où l'échelle  $L_{<}(y)$  est définie par :

$$L_{<}(y) = -\ln\left(\frac{\ln\frac{\ln(\dots)}{-y}}{-y}\right). \quad (\text{VIII.10})$$

*Démonstration.* La démonstration ainsi que plus de détails à propos de la fonction Lambert peuvent être trouvés dans [Pickett and Millev, 2002].  $\square$

Clairement, utilisant (VIII.10) et le fait que la solution de (VIII.8) est aussi  $x(y) = W(-1, y)$ , il est possible d'obtenir une borne supérieure simple sur la fonction Lambert dans l'intervalle d'intérêt :

$$W(-1, y) \leq \ln(-y) - \ln(-\ln(-y)). \quad (\text{VIII.11})$$

Puisque pour  $x_{1,lb} > x_0$ ,  $\varphi(x_{1,lb}) \in ]-\frac{1}{e}, 0[$  and  $W(-1, \varphi(x_{1,lb})) < 0$ , alors en appliquant (VIII.11) à  $\varphi(x_{1,lb})$  on a :

$$W(-1, \varphi(x_{1,lb})) \leq \ln\left(\frac{-\varphi(x_{1,lb})}{-\ln(-\varphi(x_{1,lb}))}\right) \quad (\text{VIII.12})$$

$$\leq \ln\left(\frac{-\varphi(y)}{-\ln(-\varphi(x_{1,lb}))}\right) \quad (\text{VIII.13})$$

$$\leq \ln(-\varphi(y)). \quad (\text{VIII.14})$$

L'inégalité (VIII.13) est vraie parce que  $y > x_{1,lb}$  et  $\varphi(\cdot)$  est une fonction croissante, alors que (VIII.14) suit du fait que pour  $x > x_0$ ,  $\varphi(x) > -\frac{1}{e}$  et de ce fait  $\frac{1}{-\ln(-\varphi(x))} < 1$ . De plus, (VIII.14) implique

$$\frac{y}{-\ln(-\varphi(y))} \geq \frac{y}{-W(-1, \varphi(x_{1,lb}))} = x_{1,lb} \quad (\text{VIII.15})$$

En appliquant encore une fois  $\varphi(\cdot)$  et  $-W(-1, \cdot)$  respectivement de part et d'autre

de (VIII.15), on obtient :

$$x_{1,LB}^{(2)} = \frac{y}{\sqrt{-W\left(-1, \varphi\left(\frac{y}{-\ln(-\varphi(y))}\right)\right)}} \leq \frac{y}{\sqrt{-W(-1, \varphi(x_{1,lb}))}} = x_{1,lb}. \quad (\text{VIII.16})$$

Finalement, pour démontrer que  $x_{1,LB}^{(2)}$  est plus serrée que  $x_{1,LB}^{(1)}$ , il suffit de noter que, puisque  $\varphi(x_{1,lb}) \in ]-\frac{1}{e}, 0[$ ,  $y > x_{1,lb}$  et  $\varphi(\cdot)$  est une fonction croissante, alors  $\varphi(y) \in ]-\frac{1}{e}, 0[$  et par conséquent on a :  $y > \frac{y}{-\ln(-\varphi(y))}$ . En appliquant encore une fois  $\varphi(\cdot)$  and  $-W(-1, \cdot)$  respectivement à cette équation, on aboutit à :

$$x_{1,LB}^{(1)} = \frac{y}{\sqrt{-W(-1, \varphi(y))}} \leq \frac{y}{\sqrt{-W\left(-1, \varphi\left(\frac{y}{-\ln(-\varphi(y))}\right)\right)}} = x_{1,LB}^{(2)}. \quad (\text{VIII.17})$$

En combinant (VIII.16) et (VIII.17), on obtient :

$$x_{1,LB}^{(1)} \leq x_{1,LB}^{(2)} \leq x_{1,lb}, \quad (\text{VIII.18})$$

de laquelle (6.38) suit en posant  $x_{1,LB}^{(2)} = x_{1,LB}$ . Finalement, (6.39) peut être obtenue en appliquant (6.14) à  $x_{1,LB}$ . Ceci achève la preuve du Théorème 6.2.