

**Titre:** Synthèse d'algorithmes d'optimisation en-ligne par commande extrémale  
Title: extremal

**Auteur:** Moncef Chioua  
Author:

**Date:** 2008

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Chioua, M. (2008). Synthèse d'algorithmes d'optimisation en-ligne par commande extrémale [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
Citation: <https://publications.polymtl.ca/8136/>

## Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8136/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Michel Perrier, Balasubrahmanyam Srinivasan, & Sylvain Gendron  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

SYNTHÈSE D'ALGORITHMES D'OPTIMISATION EN-LIGNE PAR  
COMMANDÉ EXTRÉMALE

MONCEF CHIOUA  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE CHIMIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR  
(GÉNIE CHIMIQUE)  
MARS 2008



Library and  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*

ISBN: 978-0-494-41745-4

*Our file* *Notre référence*

ISBN: 978-0-494-41745-4

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

SYNTHÈSE D'ALGORITHMES D'OPTIMISATION EN-LIGNE PAR  
COMMANDÉ EXTRÉMALE

présentée par: CHIOUA Moncef

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. Mario Jolicoeur, Ph.D., président

M. Michel Perrier, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. Srinivasan Bala, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. Sylvain Gendron, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. Roland Malhamé, Ph.D., membre

M. Benoît Boulet, Ph.D., membre

*Pour Rachid et Nafissa*

*“Que la nature dans toutes ses opérations  
emploie le moins d’actions qu’il soit possible”*

Euler, Leonhard

Dissertation sur le principe de la moindre action,  
ex officina Michaelis (1753)

## REMERCIEMENTS

Ce travail n'aurait certainement pu voir le jour sans un certain nombre de personnes que la providence m'a permis de rencontrer, j'aimerais donc qu'elles trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

Michel Perrier, initiateur de ce projet a bien voulu m'accueillir dans son équipe de recherche et a accepté de diriger mes travaux. Ses nombreux conseils et encouragements ont été indispensables à l'aboutissement de cette thèse.

Le Trois bonnes fées se sont penchées sur mon berceau et m'ont fait partager leur passion et leur expérience. Bala Srinivasan, brillant, infatigable, a su de manière subtile me transmettre, en plus de son savoir, une méthode de travail basée sur l'intuition, l'observation et l'analyse que j'espère avoir réussi à mettre en pratique. Sylvain Gendron, reste pour moi un modèle de rigueur scientifique doublé de ce pragmatisme qui permet de passer naturellement d'une simple idée à une réalisation concrète. Il me reste quelques années pour tenter de l'atteindre.

Martin Guay, grand chercheur dont la sympathie autorise cependant de fructueux échanges. Il a toujours pris le temps de répondre à mes interrogations candides.

Paul Stuart, titulaire de la Chaire C.R.S.N.G. en génie de conception environnementale pour le soutien financier accordé à ce projet de recherche.

Lyne Woodward, pour nos nombreuses discussions et une patience légendaire face à mes soliloques bien souvent stériles.

Mes collègues de l'U.R.C.P.C. Danielle, Bertrand et Yanick. Ceux de la Chaire G.C.E. Caroline, Édouard, Jean-Christophe, Jean-Martin, Lucy, Matty, Martin, Rogério et Virginie pour l'ambiance simple et décontractée qu'ils ont su faire régner.

Agnès Dévarieux, pour sa gentillesse, sa disponibilité et sa bonne humeur communicative.

Alain Roche et son épouse Christine, ma "famille d'accueil canadienne". Alain, ami

et mentor m'a offert ma première chance au Canada et a, depuis, contribué au franchissement de chaque étape décisive.

Sylvie pour sa chaleur et son zen. Leïla pour sa relecture studieuse.

Et, évidemment, *fi khatar* Malek pour avoir, sans relâche, veillé au grain ces trente sept dernières années.

## RÉSUMÉ

Dans les méthodes de commande extrémale par perturbations, un signal d'excitation exogène est additionné à l'entrée de commande et le gradient, calculé par une corrélation entre les variations de l'entrée et celles de la sortie du système, est asservi à zéro. Le principal inconvénient de cette catégorie de méthodes est leur faible vitesse de convergence. Cette limitation est liée au fait qu'une triple séparation d'échelles de temps entre la dynamique du système, le signal d'excitation, l'estimation du gradient et l'adaptation de commande doit être respectée. Cette thèse examine attentivement ces séparations temporelles en vue d'améliorer les performances de ce type de schémas de commande extrémale en terme de vitesse de convergence.

Une solution classique consiste à accélérer la dynamique du système en utilisant un algorithme de commande approprié et de permettre, ainsi, une convergence arbitrairement rapide. Dans le cadre de ce travail, nous considérons le cas d'un système non linéaire dynamique, mono-entrée, mono-sortie, plat dont la dynamique de la sortie plate est inversée par linéarisation exacte. Il est démontré que, même pour ce scénario relativement avantageux, il existe une dynamique résiduelle entre la sortie plate commandée et la variable optimisée qui impose une limitation fondamentale. Si la dimension de la dynamique résiduelle est inférieure ou égale à un, une vitesse de convergence arbitrairement élevée peut être obtenue. Ce n'est cependant plus le cas pour une dynamique résiduelle de dimension supérieure.

Une limite sur l'accélération de la dynamique du système ayant été atteinte, une augmentation de la valeur de la fréquence du signal d'excitation est alors considérée. S'il est admis que le déphasage induit par un signal d'excitation rapide peut déstabiliser le système, un résultat original établit que lorsque la fréquence du signal d'excitation est augmentée, le système, tout en restant stable peut converger loin de l'optimum. Le problème de précision est analysé en détail et il est démontré que la distance entre l'optimum et la solution obtenue par une méthode de perturbations

est proportionnelle au carré de la fréquence de l'excitation et ne tend pas vers zéro pour une amplitude d'excitation tendant vers zéro. Une exception étant le cas d'une approximation de Wiener-Hammerstein, pour laquelle l'erreur tend vers zéro avec l'amplitude de l'excitation et donc pour laquelle la fréquence du signal d'excitation peut être arbitrairement élevée sans nuire à la précision.

Augmenter la fréquence du signal d'excitation pour une représentation de Wiener-Hammerstein permet d'accélérer la convergence mais peut cependant conduire à une instabilité due à l'apparition d'un déphasage. Un schéma de compensation de phase est donc proposé pour garantir la stabilité. Cette boucle de compensation de phase nécessitant la connaissance du signe du gradient, un signal d'excitation supplémentaire à basse fréquence doit être introduit.

Concernant les systèmes non linéaires dynamiques plus généraux, et comme discuté précédemment, la fréquence du signal d'excitation est choisie selon des critères de précision. Il apparaît donc naturel, pour une accélération de la convergence, de modifier l'algorithme d'estimation du gradient. L'idée la plus simple, consiste à remplacer l'estimation du gradient par filtrage et corrélation par l'algorithme classique des moindres carrés avec facteur d'oubli. Mathématiquement, l'utilisation des moindres carrés permet de réduire le problème d'une échelle de temps et donc de passer outre la séparation temporelle entre le signal d'excitation et l'estimation du gradient. Les résultats de simulation montrent que l'utilisation des moindres carrés au lieu du filtrage améliore la vitesse de convergence d'un ordre de grandeur.

L'algorithme des perturbations est équivalent à une interpolation des données par un modèle linéaire et au calcul du gradient à partir de ce modèle. La dernière partie de ce travail se pose la question de savoir si une augmentation de la complexité du modèle (e.g. modèle quadratique ou modèle de connaissance plutôt qu'un simple modèle linéaire) pourrait améliorer la précision ou la vitesse de convergence. Il est démontré que lorsqu'une mesure de la fonction objectif est disponible, l'ordre de l'erreur sur la commande optimisante est indépendant de la complexité du modèle

si l'amplitude et la fréquence du signal d'excitation sont suffisamment faibles. Les deux techniques proposées pour l'accélération de la convergence sont appliquées au problème d'optimisation en temps réel d'une colonne de flottation utilisée pour le désencrage de papier recyclé. Les résultats obtenus sont comparés aux performances de la méthode des perturbations standard.

En conclusion, cette thèse propose différentes techniques d'accélération pour différents scénarios. Une convergence arbitrairement rapide peut être rendue possible par une commande en cascade lorsque la dynamique résiduelle est de dimension un. Pour des systèmes de Wiener-Hammerstein, il est aussi possible d'obtenir une convergence arbitrairement rapide avec un signal d'excitation de fréquence élevée et une compensation de phase. Pour des systèmes non linéaires dynamiques plus généraux, la fréquence du signal d'excitation est limitée par la précision et un modèle de complexité arbitraire peut être utilisé avec un algorithme de moindres carrés pour l'obtention de la vitesse de convergence maximale atteignable.

## ABSTRACT

In perturbation-based extremum-seeking methods, an excitation dither signal is added to the input, and the gradient, computed from the correlation between the input and output variations, is forced to zero. The main drawback of this method is the speed of convergence, since several time-scale separations have to be respected ; between the system dynamics and the dither, dither and gradient estimation, and gradient estimation and control. This dissertation takes a close look on these time-scale separations in the interest of improving the convergence speed of the schemes. The traditional idea is to render the system dynamics as fast as possible by using appropriate control, thereby leading to arbitrarily fast convergence. In this work, we consider the fairly advantageous scenario of single-input single-output flat nonlinear dynamic system where the dynamics with respect to the flat output are inverted using feedback linearization. Even here, it is shown that there exists a residual dynamics between the controlled flat output and the optimized variable which may pose a fundamental limitation. If the dimension of the residual dynamics is less than or equal to one, arbitrary fast convergence can be achieved, though this is not the case for higher dimension residual dynamics.

Having touched the limit on accelerating the system dynamics, increasing the value of the dither frequency is considered. It is well known, that the phase shift caused by a fast dither could destabilize the system. However, what is new is that when the dither frequency is increased, the system might converge away from the optimum. The precision issue is analyzed in detail and it is shown that the distance between the optimum and solution reached by the perturbation method is proportional to the square of the frequency of excitation and does not go to zero even when the amplitude of the excitation goes to zero. However, for Wiener/Hammerstein approximations, the error will indeed go to zero with the excitation amplitude and so the dither frequency can be increased arbitrarily without loss of precision.

Increasing the value of the dither frequency in Wiener/Hammerstein representation can accelerate convergence, but may lead to instability due to the phase shift introduced. So, a phase compensation scheme is presented to ensure stability. The phase compensation loop in turn requires the sign of the gradient, for which an additional low frequency dither needs to be introduced.

For general nonlinear systems, as discussed before, the dither frequency is fixed from precision requirements. So, the next idea for accelerating convergence is to change the gradient estimation algorithm. It is proposed to change the gradient estimation using correlation and filtering into the traditional least squares algorithm with a forgetting factor. Mathematically, using least-squares avoids one time-scale, which in turn means that time-scale separation between the dither and gradient estimation can be done away with. Simulation results show that using least-squares instead of filtering improves the speed of convergence by an order of magnitude.

The perturbation algorithm is equivalent to fitting a linear model to the data and computing the gradient from this linear model. The last part of this work asks the question of whether increasing the model complexity (e.g., quadratic or a fundamental model instead of a simple linear one) would improve precision or convergence speed. It is shown that when a measurement of the objective function is available, the order of the error on the optimizing control is independent of the model complexity as long as the excitation amplitude and frequency are sufficiently small.

The two proposed methods for convergence speed improvement are used for the Real-Time Optimisation of a deinking flotation column and the obtained results are compared to the performance of the standard perturbation method.

In conclusion, the thesis provides various acceleration techniques for various scenarios. Arbitrarily fast convergence is possible by cascade control when the residual dynamics is of dimension one. For Wiener/Hammerstein system, again arbitrarily fast convergence is possible with fast dither and phase compensation. For general

nonlinear systems, the dither frequency is limited by the precision and a model of any complexity can be used with a least squares algorithm to provide the fastest convergence possible.

**TABLE DES MATIÈRES**

DÉDICACE . . . . .	iv
REMERCIEMENTS . . . . .	v
RÉSUMÉ . . . . .	vii
ABSTRACT . . . . .	x
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	xiii
LISTE DES FIGURES . . . . .	xvii
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xxi
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES . . . . .	xxii
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xxiii
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE 1 REVUE DE LA LITTÉRATURE . . . . .	7
1.1 Optimisation en temps réel à base de modèles de connaissance . . . . .	8
1.1.1 Optimisation numérique avec modèle de connaissance . . . . .	9
1.1.2 Commande extrémale avec modèle de connaissance . . . . .	14
1.2 Optimisation en temps réel à base de modèles empiriques . . . . .	22
1.2.1 Optimisation numérique avec modèle empirique . . . . .	22
1.2.1.1 Modèle non linéaire statique . . . . .	22
1.2.1.2 Modèle non linéaire dynamique . . . . .	24
1.2.2 Commande extrémale avec modèles empiriques . . . . .	26

1.2.2.1	Modèle linéaire statique et commande extrémale par la méthode des perturbations . . . . .	26
1.2.2.2	Modèle linéaire dynamique . . . . .	30
1.2.2.3	Modèle non linéaire statique . . . . .	31
<b>CHAPITRE 2 DÉPENDANCE DE L'ERREUR SUR LA SOLUTION OPTIMALE DES MÉTHODES DE PERTURBATIONS À LA FRÉQUENCE D'EXCITATION . . . . .</b>		<b>34</b>
2.1	Analyse classique de la position du point d'équilibre de la commande extrémale par perturbation . . . . .	35
2.2	Représentation de systèmes non linéaires . . . . .	40
2.2.1	Caractérisation de l'optimum d'un système non linéaire dynamique . . . . .	41
2.2.2	Exemple d'illustration . . . . .	42
2.3	Dépendance de la solution vis-à vis de la fréquence de la perturbation	44
2.3.1	Cas d'un système non-linéaire général . . . . .	45
2.3.1.1	Puissances impaires de $a$ . . . . .	52
2.3.2	Cas de modèles du type Wiener ou Hammerstein . . . . .	53
2.3.2.1	Solution optimale de fonctions paires . . . . .	55
2.4	Exemples illustratifs . . . . .	56
2.4.1	Réacteur continu infiniment mélangé avec réaction de Van De Vusse . . . . .	56
2.4.2	Description du système . . . . .	56
2.4.3	Résultats de simulation . . . . .	58
2.4.4	Réacteur piston avec réaction de Van De Vusse . . . . .	59
2.4.5	Description du système . . . . .	59
2.4.6	Linéarisation . . . . .	62
2.4.7	Résultats de simulation . . . . .	63

2.5	Conclusions . . . . .	64
<b>CHAPITRE 3 ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE . . . . .</b>		<b>66</b>
3.1	Influence de la phase du système sur la stabilité en boucle fermée . . . . .	67
3.2	Commande extrémale avec compensation de phase . . . . .	69
3.3	Analyse de la stratégie de commande extrémale avec compensation de phase . . . . .	72
3.4	Utilisation d'un algorithme d'estimation par moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli . . . . .	75
3.4.1	Phase d'un système non linéaire . . . . .	75
3.4.2	Analyse de convergence des schémas d'estimation par filtrage linéaire et par moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli	76
3.5	Analyse de la stratégie de commande extrémale utilisant une estimation par moindre carrés récursifs avec facteur d'oubli . . . . .	84
3.6	Exemple illustratif . . . . .	86
3.6.1	Réacteur continu infiniment mélangé avec réaction de Van De Vusse . . . . .	86
3.7	Conclusions . . . . .	88
<b>CHAPITRE 4 AMÉLIORATION DES PROPRIÉTÉS DE CONVERGENCE DE LA COMMANDE EXTRÉMALE PAR LA MÉTHODE DES PERTURBATIONS POUR UNE CLASSE DE SYSTÈMES DIFFÉRENTIELLEMENT PLATS . . . . .</b>		<b>90</b>
4.1	Commande extrémale par la méthode des perturbations de systèmes différentiellement plats en boucle fermée . . . . .	91
4.1.1	Formulation du problème . . . . .	91
4.1.2	Inversion d'un système différentiellement plat . . . . .	92
4.1.3	Commande extrémale d'un système différentiellement plat .	93
4.1.4	Dynamique résiduelle . . . . .	95

4.2	Analyse de la commande extrémale de systèmes différentiellement plats commandés . . . . .	97
4.3	Exemple illustratif . . . . .	103
4.3.1	Description du système . . . . .	103
4.3.2	Résultats de simulations . . . . .	103
4.4	Conclusions . . . . .	109
 CHAPITRE 5 ADÉQUATION DE MODÈLES POUR UNE OPTIMISATION PRÉCISE VIA LA COMMANDE EXTRÉMALE . .		110
5.1	Commande extrémale adaptative avec modèle statique . . . . .	110
5.2	Exemple illustratif . . . . .	117
5.2.1	Résultats de simulation . . . . .	119
5.3	Conclusions . . . . .	121
 CHAPITRE 6 APPLICATION À UNE COLONNE PILOTE DE FLOTTATION . . . . .		123
6.1	Commande extrémale d'une colonne de flottation . . . . .	123
6.1.1	Description du système . . . . .	123
6.1.2	Critère d'optimisation . . . . .	126
6.1.3	Identification de la dynamique du procédé . . . . .	126
6.1.4	Résultats de simulation . . . . .	127
6.2	Conclusions . . . . .	134
 CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS . . . . .		135
 BIBLIOGRAPHIE . . . . .		139
 ANNEXES . . . . .		146

## LISTE DES FIGURES

<b>FIGURE 1.1</b>	Optimisation en temps réel avec approche à deux phases. . . . .	9
<b>FIGURE 1.2</b>	Commande extrémale par la méthode des perturbations d'après Krstic et Wang (2000). . . . .	27
<b>FIGURE 2.1</b>	Approximation d'un système non linéaire par une représentation de Wiener ou de Hammerstein. . . . .	40
<b>FIGURE 2.2</b>	Approximation d'un système non linéaire général utilisant deux modèles de Wiener en parallèle. . . . .	41
<b>FIGURE 2.3</b>	Comparaison des solutions obtenues avec un modèle exact et son approximation par un modèle de Wiener, fréquence d'excitation = $0.2\pi h^{-1}$ . . . . .	59
<b>FIGURE 2.4</b>	Comparaison des solutions obtenues avec un modèle exact et son approximation par un modèle de Wiener, fréquence d'excitation = $2\pi h^{-1}$ . . . . .	60
<b>FIGURE 2.5</b>	Comparaison des solutions obtenues avec un modèle exact et son approximation par un modèle de Wiener, fréquence d'excitation = $4\pi h^{-1}$ . . . . .	60
<b>FIGURE 2.6</b>	Évolution de la solution en fonction de la fréquence du signal d'excitation. . . . .	61
<b>FIGURE 2.7</b>	Pôles et zéros du système linéarisé autour des points $q = q_{opt}$ , $q = q_{opt} + 0.5$ et $q = q_{opt} - 0.5$ . . . . .	63
<b>FIGURE 2.8</b>	Évolution de la solution en fonction de la fréquence du signal d'excitation. . . . .	65

FIGURE 3.1	Commande extrémale par la méthode des perturbations avec compensation de phase. La partie en pointillés représente les blocs introduits par la modification de la méthode classique des perturbations, le bloc déphasageur introduit un retard de phase $\hat{\varphi}$ .	70
FIGURE 3.2	Comparaison des vitesses de convergence, estimation paramètre $b$ (gradient), moindres carrés et filtrage linéaire, gain d'estimation par filtrage linéaire = 0.3.	81
FIGURE 3.3	Comparaison des vitesses de convergence, estimation paramètre $a$ , moindres carrés et filtrage linéaire, gain d'estimation par filtrage linéaire = 0.3.	82
FIGURE 3.4	Comparaison des vitesses de convergence, estimation paramètre $b$ (gradient), moindres carrés et filtrage linéaire, gain d'estimation par filtrage linéaire = 1.	82
FIGURE 3.5	Comparaison des vitesses de convergence, estimation paramètre $a$ , moindres carrés et filtrage linéaire, gain d'estimation par filtrage linéaire = 1.	83
FIGURE 3.6	Comparaison des vitesses de convergence, estimation paramètre $b$ (gradient), moindres carrés et filtrage linéaire, gain d'estimation par filtrage linéaire = 2.	83
FIGURE 3.7	Comparaison des vitesses de convergence, estimation paramètre $a$ , moindres carrés et filtrage linéaire, gain d'estimation par filtrage linéaire = 2.	84
FIGURE 3.8	Variables optimisée et manipulée, méthode de perturbations avec compensation de phase, fréquence d'excitation = $20\pi h^{-1}$	

FIGURE 3.9	Variables optimisée et manipulée, méthode de perturbations utilisant une estimation par moindres carrés avec facteur d'oubli, fréquence d'excitation = $0.2\pi h^{-1}$ . . . . .	89
FIGURE 4.1	Commande extrémale par la méthode des perturbations. $K$ est un opérateur dynamique fonction des dérivées de $\bar{r}_{ref}$ . . . . .	94
FIGURE 4.2	Fréquence d'excitation = $1 h^{-1}$ , sans commande en cascade, $J_1 = C_B$ ( $d_{int} = 1$ ). . . . .	105
FIGURE 4.3	Fréquence d'excitation = $1 h^{-1}$ , avec commande en cascade, $J_1 = C_B$ ( $d_{int} = 1$ ). . . . .	105
FIGURE 4.4	Évolution de la solution en fonction de la fréquence d'excitation, $J_1 = C_B$ ( $d_{int} = 1$ ). . . . .	106
FIGURE 4.5	Fréquence d'excitation = $1 h^{-1}$ , Précision = 3%, sans commande en cascade, $J_1 = C_B$ ( $d_{int} = 1$ ). . . . .	106
FIGURE 4.6	Fréquence d'excitation = $6 h^{-1}$ , Précision = 3%, avec commande en cascade, $J_1 = C_B$ ( $d_{int} = 1$ ). . . . .	107
FIGURE 4.7	Fréquence d'excitation = $3 h^{-1}$ , sans commande en cascade, $J_2 = DC_B^2$ ( $d_{int} = 2$ ). . . . .	107
FIGURE 4.8	Fréquence d'excitation = $3 h^{-1}$ , avec commande en cascade, $J_2 = DC_B^2$ ( $d_{int} = 2$ ). . . . .	108
FIGURE 4.9	Évolution de la solution en fonction de la fréquence d'excitation, $J_2 = DC_B^2$ ( $d_{int} = 2$ ). . . . .	108
FIGURE 5.1	Évolution de la solution en fonction de la fréquence et de l'amplitude du signal d'excitation, modèle linéaire, algorithme des moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli. . . . .	120
FIGURE 5.2	Évolution de la solution en fonction de la fréquence et de l'amplitude du signal d'excitation, modèle quadratique, algorithme des moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli. . . . .	120

FIGURE 5.3	Évolution de la solution en fonction de l'amplitude du signal d'excitation, modèles linéaire et quadratique, algorithme des moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli. . . . .	121
FIGURE 5.4	Évolution de la solution en fonction de la fréquence du signal d'excitation, modèles linéaire et quadratique, algorithme des moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli. . . . .	122
FIGURE 6.1	Schéma de principe de la colonne de flottation expérimentale.	124
FIGURE 6.2	Relation non linéaire statique entre la fonction objectif $J$ et le débit d'air. . . . .	127
FIGURE 6.3	Pressions différentielles mesurée et estimée . . . . .	128
FIGURE 6.4	Variables optimisée et manipulée avec une condition initiale $Q_g = 2 \text{ L}/\text{min}$ , méthode des perturbations classique. . . . .	129
FIGURE 6.5	Variables optimisée et manipulée avec une condition initiale $Q_g = 2 \text{ L}/\text{min}$ , méthode de compensation de phase . . . . .	131
FIGURE 6.6	Variables optimisée et manipulée avec une condition initiale $Q_g = 2 \text{ L}/\text{min}$ , algorithme des moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli. . . . .	132
FIGURE 6.7	Variables optimisée et manipulée avec une condition initiale $Q_g = 4 \text{ L}/\text{min}$ , méthode de compensation de phase . . . . .	133

## LISTE DES TABLEAUX

TABLE 1.1	Classification des méthodes d'optimisation en temps réel . . .	8
TABLE 2.1	Influence de la fréquence d'excitation sur la position d'équilibre du système . . . . .	64

## LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

$x(t)$ :	vecteur des variables d'état d'un système dynamique
$y(t)$ :	sortie d'un système dynamique
$u(t)$ :	vecteur des variables manipulées
$\theta$ :	vecteur des paramètres d'un modèle <sup>1</sup>
$P(\cdot)$ :	opérateur dynamique
$G(\omega)$ :	gain d'un système dynamique linéaire
$\phi(\omega)$ :	phase d'un système dynamique linéaire
$V(x)$ :	fonction de Lyapunov
$\dot{V}(x)$ :	dérivée temporelle d'une fonction de Lyapunov
$J(x)$ :	fonction objectif
$\frac{d(\cdot)}{d(\cdot)}$ :	dérivée totale
$\frac{\partial(\cdot)}{\partial(\cdot)}$ :	dérivée partielle
$(\hat{\cdot})$ :	variable estimée
$(\tilde{\cdot})$ :	variable d'écart ou erreur d'estimation
$(\cdot)^a$ :	variable d'un système moyenné
$(\cdot)^*$ :	valeur optimale d'une variable
$C_X$ :	concentration de l'espèce X
$D$ :	taux de dilution
$k$ :	constante cinétique

---

1. Dans un souci de cohérence avec les notations utilisées par Krstic and Wang (2000), le symbole  $\theta$  désigne une variable manipulée au Chapitre 2.

**LISTE DES ANNEXES**

ANNEXE I	PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ 5.21 . . . . .	146
ANNEXE II	THÉORÈME DE LA MOYENNE . . . . .	147

## INTRODUCTION

### Contexte

L'année 2007 a vu célébrer le trois-centième anniversaire de Leonhard Euler, mathématicien et physicien suisse qui reste jusqu'à aujourd'hui l'un des scientifiques les plus prolifiques de tous les temps. Son oeuvre comporte en effet trente volumes de mathématiques, trente-deux de mécanique et d'astronomie et douze de physique et de recherches diverses.

Dans sa "Dissertation sur le principe de la moindre action", Euler (1753) démontre que les lois de la nature répondent *systématiquement* à un "principe d'épargne" de l'énergie.

Deux siècles plus tard, il ne s'agit plus de laisser à la nature le pouvoir de décision en la matière, et la théorie de la commande automatique utilise le formalisme établi par Joseph Louis Lagrange, un disciple d'Euler, pour *contraindre* un système dynamique donné à évoluer de manière à optimiser un critère fixé par l'utilisateur. Rudolf Kalman, l'un des pionniers de la recherche dans ce domaine, résout le problème de commande optimale d'un système linéaire avec critère quadratique et montre que sa solution est celle d'une équation de Riccati (Kalman, 1960). Un problème de commande optimale consiste à trouver la séquence de commandes à appliquer à un système pour que sa sortie suive la meilleure trajectoire au sens d'un critère choisi par le concepteur.

La complexité de ce type de problèmes fait que la solution obtenue est dans la plupart des situations, une exception étant le cas d'un système linéaire avec critère quadratique mentionné précédemment, une fonction du temps et non des états du système et donc que son implantation est réalisée en boucle ouverte et ne bénéficie pas des avantages de la contre-réaction (feedback) notamment en terme de réduction de la sensibilité et de rejet de perturbations. C'est la commande prédictive par

modèle interne (Cutler and Ramaker, 1980), (Richalet et al., 1978), (Morari and Lee, 1999) qui apporte la solution à ce problème en proposant une optimisation du modèle embarqué dans l'algorithme de commande sur un horizon glissant et un recalage de ce modèle sur la mesure après chaque cycle de commande.

Pour l'ensemble de ces méthodes, le critère à optimiser est en général une distance entre la trajectoire ("problème de poursuite") ou la valeur ("problème de régulation") de la sortie mesurée ou estimée et celle de la sortie désirée. Un terme de coût énergétique ou économique peut aussi apparaître dans le critère. La sortie désirée est le plus souvent le résultat de l'expérience acquise dans la conduite du système. Elle peut aussi être fournie par une optimisation hors ligne effectuée sur un modèle de simulation suffisamment complexe pour refléter les propriétés du système réel sur une large gamme de fonctionnement.

Le problème générique de la détermination en ligne de la valeur de cette sortie désirée, notre principale préoccupation pour ce travail, reçoit le nom d'optimisation en temps réel. Aujourd'hui, alors que les industries de transformation de la matière font face à une forte compétition mondiale, les techniques d'optimisation en temps réel des procédés représentent une opportunité pour une meilleure exploitation des ressources disponibles.

L'optimisation en temps réel des procédés est souvent divisée en deux grandes familles de méthodes. D'abord les méthodes à base de modèle ("méthodes indirectes") qui utilisent des modèles de l'installation pour prédire les conditions optimales d'opération. Puis, les méthodes sans modèle ("méthodes directes") qui supposent que la fonction objectif est mesurée, et pour lesquelles les variables manipulées sont ajustées de manière à évoluer dans la direction de minimisation (ou de maximisation) du critère. Ces méthodes sont inspirées des techniques "E.V.O.P." (EVolutionary OPeration) introduites par Draper and Li (1954).

Une approche particulière de l'optimisation en temps réel est celle employant des techniques de commande extrémale. Dans Krstic and Wang (2000) la paternité de

cette approche est attribuée à Maurice Leblanc, ingénieur et industriel français du début du XX<sup>ème</sup> siècle. Le problème traité dans Leblanc (1922) est celui de la commande de moteurs de locomotives par un courant alternatif. L'auteur propose de faire varier de manière automatique une auto-induction (self-induction) pour rendre maximale l'intensité d'un courant induit. Comme souligné par Ariyur and Krstic (2003), cette méthode de commande extrémale représente le premier algorithme de commande adaptative. Au cours des années soixante, les travaux relatifs à la commande adaptative se scindent en deux axes de recherche, celui concernant le problème de la stabilisation de la sortie d'un système dynamique et celui dont l'objectif est l'optimisation d'une fonction de la sortie d'un système dynamique (Åström, 1995), (Sternby, 1980). Dans la première catégorie, la stabilité du schéma de commande adaptative par modèle de référence ("M.R.A.C." pour Model Reference Adaptive Control) est démontrée par Parks (1966) en utilisant le formalisme des fonctions de Lyapunov. La seconde catégorie n'a pu, quant à elle, faire l'objet d'une analyse de stabilité rigoureuse que jusqu'à récemment avec la publication par Krstic and Wang (2000) d'une preuve formelle de convergence du schéma de commande extrémale par la méthode des perturbations. Cette contribution majeure a renouvelé l'intérêt de la communauté automaticienne pour cette classe de méthodes et stimulé la publication de nombreux travaux portant autant sur la synthèse de méthodes originales que sur leurs applications. Guay and Zhang (2003) proposent une alternative à la méthode des perturbations n'exigeant plus de disposer d'une mesure de la fonction objectif mais où il est cependant nécessaire de connaître la structure paramétrique exacte de cette fonction. Ces travaux ont également contribué à raviver l'intérêt pour cette classe d'algorithmes d'optimisation en temps réel. Les auteurs font appel à des méthodes de commande adaptative non linéaire relativement récentes (Kokotovic, 1992), (Krstic et al., 1995), (Sepulchre et al., 1997) qui permettent de simultanément stabiliser et optimiser un système.

## Problématique

Un procédé industriel n'atteint que très rarement un régime permanent du fait de la présence régulière de perturbations externes affectant son opération. Cependant, l'objectif d'une loi commande extrémale, comme par ailleurs celui de l'ensemble des algorithmes d'optimisation en temps réel implantés dans l'industrie, est d'optimiser le système en régime permanent. Cette restriction au mode statique plutôt que dynamique, résultat de la limitation de capacité des calculateurs industriels actuellement disponibles, entraîne un ralentissement considérable de la convergence des méthodes se basant uniquement sur la mesure de la fonction objectif. Si cet aspect n'affecte que très peu les méthodes basées sur un modèle, ces dernières nécessitent, quant à elles, la connaissance d'une structure de modèle exacte, sous peine de faire converger l'algorithme vers un point d'opération non optimal. Or cette hypothèse est difficilement réalisable dans le cas de procédés industriels complexes. Il apparaît dès lors qu'opter pour une catégorie de méthodes plutôt qu'une autre représente un dilemme entre une précision suffisante sur l'optimum obtenu et une vitesse de convergence acceptable. Dans le cas d'un système rapide, il sera plus avantageux d'utiliser une méthode basée sur la mesure de la fonction objectif lorsque celle-ci est disponible. Cependant, pour des systèmes naturellement lents (en boucle ouverte) comme c'est le cas des procédés (bio)chimiques rencontrés dans l'industrie les deux approches conduiront à de faibles performances en terme de précision pour la première ou de vitesse de convergence pour la seconde.

## Objectif principal

Dans le cadre de ce travail, partant de méthodes basées sur une mesure de la fonction objectif, d'abord de la plus répandue d'entre elles : la méthode des perturbations, puis de méthodes plus générales, nous proposons d'analyser de manière quantita-

tive l'impact de l'accélération de la convergence sur la précision de l'optimisation obtenue, et de formuler par la suite des schémas de commande extrémale améliorés et suffisamment simples pour pouvoir être implantés sur un calculateur industriel. La réalisation de cet objectif principal nous a amené à formuler les objectifs suivants.

### **Objectifs spécifiques**

1. Analyser formellement les limitations en terme de précision de la méthode de commande extrémale par perturbations pour une classe spécifique de systèmes : ceux pouvant être représentés par un modèle de type Wiener-Hammerstein (Wittenmark and Evans, 2001).
2. Analyser formellement les limitations en terme de précision de la méthode de commande extrémale par perturbations pour une classe plus large de systèmes non linéaires.
3. Analyser formellement les limitations en termes de vitesse de convergence de la méthode de commande extrémale par perturbations.
4. Proposer des stratégies permettant d'accroître la vitesse de convergence de cette méthode.
5. Généraliser les résultats obtenus aux méthodes adaptatives d'ordre supérieur.
6. Valider ces résultats sur une unité industrielle.

### **Organisation de la thèse**

Le Chapitre 1 présente une brève revue de la littérature reliée aux méthodes d'optimisation en temps réel. Nous faisons, dans cette partie, le distinguo entre les deux grandes approches, i.e. les méthodes à deux phases soit celles pour lesquelles la mise à jour de la commande est effectuée à chaque cycle d'optimisation et celles à base de commande extrémale. Nous indiquons, par ailleurs, les principales limitations des méthodes disponibles soit la faible vitesse de convergence dans un cas et la

convergence vers un point d'équilibre non optimal dans l'autre.

Le Chapitre 2 prolonge l'analyse proposée par Krstic and Wang (2000) en mettant en évidence une dépendance du point d'équilibre de l'algorithme de commande extrémale par la méthode des perturbations à la fréquence du signal d'excitation.

Le Chapitre 3 propose deux méthodes simples d'accélération de la convergence. La première s'applique aux systèmes non linéaires dynamiques du type Wiener-Hammerstein et utilise le principe de compensation de la phase induite par le système. Une estimation de la phase en ligne dispense de la connaissance d'un modèle du système et permet de compenser la phase du système. La seconde méthode s'applique aux systèmes non linéaires dynamiques plus généraux et consiste à estimer le gradient requis par l'algorithme de commande extrémale en utilisant une méthode de moindres carrés avec facteur d'oubli.

Le Chapitre 4 analyse les limitations de la structure en cascade communément suggérée pour l'accélération de la méthode des perturbations.

Le Chapitre 5 décrit et analyse les conditions d'adéquation du modèle pour les méthodes d'optimisation en temps réel par commande extrémale. Nous montrons que sous la condition d'une excitation suffisamment faible, la complexité du modèle utilisé n'améliore pas la qualité de l'optimisation en terme de précision et donc qu'un modèle de degré 1 est suffisant pour garantir une précision d'ordre donné.

Le Chapitre 6 illustre les performances supérieures des deux stratégies d'accélération de la convergence proposées, au travers de la simulation d'une unité de désencrage de pâte à papier.

Nous achérons en présentant les principales conclusions de ce travail et suggérons quelques axes futurs de recherche.

## CHAPITRE 1

### REVUE DE LA LITTÉRATURE

La littérature traitant des algorithmes d'optimisation en temps réel distingue traditionnellement deux classes de méthodes. D'abord celles pour lesquelles la commande est calculée à chaque cycle d'optimisation et dont la solution s'écrit :

$$u^* = \arg \min_u \mathcal{J}(u) \quad (1.1)$$

avec  $u \in \mathbb{R}^m$  vecteur des variables indépendantes mesurées,  $\mathcal{J} \in \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  fonction objectif du problème d'optimisation.

Il y également les méthodes où les itérations de l'algorithme d'optimisation sont alignées avec le temps réel selon la loi d'évolution suivante.

$$\dot{u} = -k \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u} \quad (1.2)$$

avec  $k \in \mathbb{R}$  gain fixant la vitesse d'adaptation de la commande  $u$ .

La première catégorie de méthodes est désignée par le vocable "Optimisation en temps réel" (l'acronyme "R.T.O." pour "Real Time Optimization" est souvent utilisé). Dans cette thèse, nous appelerons ceci "optimisation numérique". La seconde catégorie a d'abord été présentée comme un problème de commande (Leblanc (1922), Blackman (1962)) dont une particularité est que la consigne à appliquer est inconnue. Elle est aujourd'hui approchée comme un problème d'optimisation sous le nom d'optimisation en temps réel par commande extrémale ("Extremum Seeking control", "Extremal Control" ou "Peek Seeking Control") (Ariyur and Krstic, 2003).

En plus de cette classification, nous ferons, comme indiqué au Tableau 1.1, une distinction supplémentaire entre deux familles d'approches : celles employant un modèle de connaissance du procédé et qui suppose donc une structure de modèle exacte et celles utilisant un modèle empirique ou "boîte noire", c'est-à-dire basées sur un choix arbitraire d'une structure de modèle.

TABLE 1.1 Classification des méthodes d'optimisation en temps réel

	<b>Modèle de connaissance</b>	<b>Modèle empirique</b>
<b>Optimisation</b> <b>numérique</b>	<b>Section 1.1.1</b> Marlin and Hrymak (1997) Zhang and Forbes (2006) Roberts (1979)	<b>Section 1.2.1</b> Wellstead and Scotson (1990) Bozin and Zarrop (1990) Nascimento Jr. (1994) Bamberger and Isermann (1978) Golden and Ydstie (1989)
<b>Commande</b> <b>extrémale</b>	<b>Section 1.1.2</b> Guay and Zhang (2003) DeHaan and Guay (2005) Marcos et al. (2004)	<b>Section 1.2.2</b> Krstic and Wang (2000) Wang et al. (2000) Tan et al. (2006c) Garcia and Morari (1981) McFarlane and Bacon (1989) Golden and Ydstie (1989) Guay et al. (2004) Favache et al. (2006) Cougnon et al. (2006)

Chacune des approches présentées dans le Tableau 1.1 est élaborée ci-dessous.

## 1.1 Optimisation en temps réel à base de modèles de connaissance

Cette classe de méthodes utilise l'application de lois fondamentales de la physique pour la dérivation d'un modèle et le choix d'une structure (ou "paramétrisation") de la fonction objectif utilisée pour l'optimisation du système. Cela correspond, en génie des procédés, à l'écriture de bilans de masse, d'énergie et de quantité de

mouvement (e.g. Dochain and Perrier, 2007) fournissant directement un modèle d'état de l'installation.

### 1.1.1 Optimisation numérique avec modèle de connaissance

#### Formulation générale

Marlin and Hrymak (1997) décrivent la structure générale d'un algorithme d'optimisation en temps réel à base de modèle de connaissance. Cette classe d'algorithme, rencontrée dans la littérature sous la dénomination d'"approche à deux phases" (Zhang and Forbes, 2006), est constituée d'une étape d'estimation des paramètres du modèle suivie d'une étape d'optimisation (Fig 1.1). Le problème d'estimation est

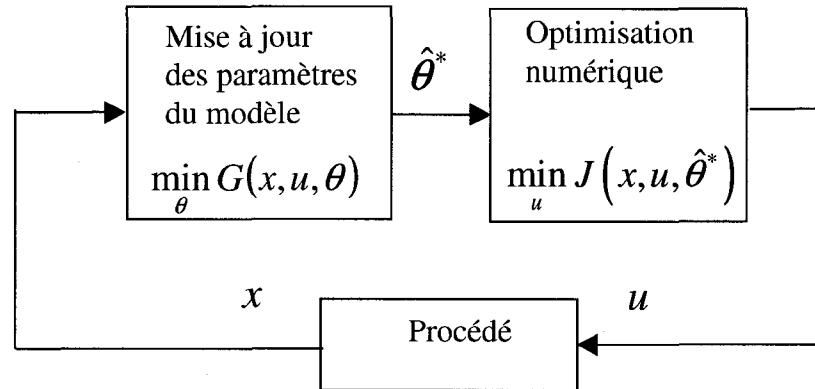


FIGURE 1.1 Optimisation en temps réel avec approche à deux phases.

celui de la détermination des paramètres d'un modèle statique et peut être formulé comme suit

$$\begin{aligned}\hat{\theta}^* &= \arg \min_{\theta} G(x, u, \theta) \\ F(u, x, \theta) &= 0\end{aligned}\tag{1.3}$$

avec  $u \in \mathbb{R}^m$  vecteur des variables indépendantes mesurées,  $x \in \mathbb{R}^q$  vecteur des variables dépendantes mesurées,  $\theta \in \mathbb{R}^p$  vecteur des paramètres inconnus,  $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  fonction vectorielle continue décrivant la dynamique du système et  $G : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  fonction objectif du problème d'estimation.

L'étape d'optimisation explicite s'écrit

$$\begin{aligned} & \min_u J(u, x, \hat{\theta}^*) \\ & \text{s.t. } S(u, x, \hat{\theta}^*) \leq 0 \\ & \quad F(u, x, \hat{\theta}^*) = 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

avec  $S : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^l$  fonction vectorielle continue décrivant les contraintes d'opération et  $J : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  fonction objectif du problème d'optimisation. Ces méthodes consistent en une optimisation numérique d'un modèle de l'installation et supposent que l'optimum du modèle utilisé est identique à celui de l'installation. L'égalité des deux optima résulte de la coïncidence du modèle avec le système au sens de la mesure utilisée en (1.3) par suite de l'étape d'adaptation paramétrique. Cependant, cette coïncidence suppose l'hypothèse d'une structure parfaite du modèle (Ljung, 1999). Si la structure du modèle et celle de l'installation sont différentes, l'algorithme R.T.O. peut conduire à opérer l'installation en un point différent de son optimum.

### Coïncidence des optima du modèle et du système

L'analyse des conditions de coïncidence des optima du modèle utilisé et de celui du système dans le cas d'une structure inexacte (ou volontairement approximée) apparaît pour la première fois dans Biegler et al. (1985) pour un problème voisin du schéma R.T.O.

Les auteurs considèrent le problème d'optimisation d'un modèle "rigoureux" (équivalent du procédé réel dans le schéma R.T.O.) avec contraintes d'égalités et d'in-

égalités :

$$\begin{aligned}
 & \min_u J(u, x, \theta) \\
 & \text{s.t. } S(u, x, \theta) \leq 0 \\
 & \quad \bar{F}(u, x, \theta) = 0 \\
 & \quad \theta - p(u, x, \theta, \gamma) = 0
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

et celui de son approximation (équivalent du modèle dans le schéma R.T.O.)

$$\begin{aligned}
 & \min_u J(u, x, \theta) \\
 & \text{s.t. } S(u, x, \theta) \leq 0 \\
 & \quad \bar{F}(u, x, \theta) = 0 \\
 & \quad \theta - K(u, x, \theta, \beta) = 0
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

avec  $u$  vecteur des variables indépendantes,  $x$  vecteur des variables dépendantes,  $\theta, \gamma$  et  $\beta$  paramètres. En imposant que l'optimum du modèle rigoureux satisfasse les conditions de Karush-Kuhn-Tucker pour le modèle approximé, Biegler et al. (1985) obtiennent les conditions suffisantes à l'optimum :

$$\begin{aligned}
 \nabla_u K &= \nabla_u p \\
 \nabla_x K &= \nabla_x p \\
 \nabla_\theta K &= \nabla_\theta p
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Forbes et al. (1994) fournit des conditions de coïncidence des deux optima dans le cas, plus général, où les variables apparaissant dans le modèle ne sont pas identiques à celles du procédé réel. Les auteurs utilisent le concept d'espace réduit c'est-à-dire une reformulation du problème initial d'optimisation avec contraintes en un

problème d'optimisation sans contraintes par projection sur les contraintes actives. Dans cet espace réduit le gradient (réduit) s'écrit

$$\nabla_r J = [\nabla_u J \nabla_x J] Z \quad (1.8)$$

où  $Z$  forme une base du noyau (espace nul) du Jacobien de l'ensemble des contraintes actives. Le Hessien (réduit) s'écrit

$$\nabla_r^2 J = Z^T \begin{bmatrix} \nabla_u^2 J & \nabla_{u,x}^2 J \\ \nabla_{u,x}^2 J & \nabla_u^2 J \end{bmatrix} Z$$

La condition de coïncidence des optima du modèle et du système est la suivante : Si  $u^*$  est le minimum unique du système, alors il doit exister au moins un ensemble de valeurs du paramètre ajustable  $\theta$  pour lequel

$$\nabla_r J_a|_{u=u^*} \equiv 0$$

et

$$u^T \nabla_r^2 J_a|_{u=u^*} u \geq 0, \forall u \in S$$

pour

$$u^T \nabla_r^2 J_p|_{u=u^*} u > 0, \forall u \in S$$

où  $J_p$  et  $J_a$  représentent respectivement les fonctions coût du système et du modèle et  $S$  l'ensemble des commandes admissibles.

Plusieurs stratégies sont proposées pour compenser l'effet d'une erreur de structure dans le modèle utilisé. Dans Roberts (1979), la méthode I.S.O.P.E. (Integrated System Optimization and Parameter Estimation) utilise un critère augmenté : à la fonction objectif initiale (considérant le modèle) s'ajoute un terme de correction approximant le biais entre le modèle et le système, la méthode amène le gradient

du système à zéro et conduit ainsi le système à son optimum : Plus spécifiquement, la technique de Roberts (1979) est

$$\begin{aligned} & \min_{x,u} P(u, x, \theta) - \lambda^T u \\ & \text{s.t. } F(u, x, \theta) = 0 \\ & S(u, x, \theta) \leq 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

avec

$$\lambda = [\nabla_u x_{\text{système}}^T - \nabla_u x^T] [\nabla_\theta x^T]^{-1} \nabla_\theta P \quad (1.10)$$

et

$\nabla_u x^T$  jacobien des variables dépendantes du modèle par rapport aux variables de commande,  $\nabla_u x_{\text{système}}^T$  jacobien des variables dépendantes du système par rapport aux variables de commande,  $\nabla_\theta x^T$  matrice de sensibilité des variables dépendantes par rapport aux paramètres et  $\nabla_\theta P$  sensibilité de la fonction objectif par rapport aux paramètres. Les conditions nécessaires d'optimalité au premier ordre conduisent à

$$\nabla_u P^T = \lambda^T = [\nabla_u x^T - \nabla_u x_{\text{système}}^T] [\nabla_\theta x^T]^{-1} \nabla_\theta P$$

et donc à

$$\nabla_u P^T = 0. \quad (1.11)$$

L'évaluation du terme de correction  $\lambda^T u$  dans (1.9) requiert l'estimation de la matrice  $\nabla_u x^T$ . Cette estimation est effectuée par une perturbation de chacune des variables manipulées et nécessite donc d'attendre l'établissement du régime permanent des mesures disponibles.

### 1.1.2 Commande extrémale avec modèle de connaissance

Dans l'approche à deux phases, les étapes d'estimation paramétrique et de calcul de la commande optimisante sont effectuées de manière séquentielle, les paramètres du modèle, après convergence, sont utilisés lors de la phase de calcul de la commande. À chaque cycle, les paramètres sont mis à jour et une nouvelle commande est synthétisée. En commande extrémale adaptative, les étapes d'estimation paramétrique et de calcul de la commande sont effectuées simultanément. Cette approche conduit cependant à une interaction entre les deux phases pouvant entraîner une instabilité de la boucle fermée.

Pour illustrer ce concept, considérons l'exemple suivant.

#### Exemple 1

Soit le système dynamique décrit par l'équation d'état

$$\dot{x} = f(x) + F(x)\theta + G(x)u \quad (1.12)$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  vecteur des variables d'état du système,  $u \in \mathbb{R}^m$  vecteur des variables manipulées,  $\theta \in \mathbb{R}^p$  vecteur des paramètres,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  fonction continue suffisamment dérivable,  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}$  fonction matricielle continue suffisamment dérivable,  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  fonction vectorielle continue suffisamment dérivable et une fonction objectif  $y$  de la forme

$$y = P(x, \theta) \quad (1.13)$$

avec  $P : \mathbb{R}^{n \times p} \rightarrow \mathbb{R}$  fonction continue suffisamment dérivable.

Pour résoudre en ligne ce problème d'optimisation en temps réel, l'application de la loi de gradient présentée en introduction à ce chapitre, conduit, dans le cas où la fonction objectif dépend du vecteur des variables d'état  $x$  à l'équation d'évolution

suivante

$$\dot{x} = -k \frac{\partial P}{\partial x}$$

Pour y parvenir, la loi de commande extrémale adaptative par linéarisation exacte suivante peut être utilisée

$$u = -G^{-1} \left( f(x) + F(x)\hat{\theta} + \Gamma_e \left( \frac{\partial P}{\partial x} - d \right) \right) \quad (1.14)$$

avec  $d(t)$  signal d'excitation exogène continu.

L'observateur "O.B.E." (pour "Observer Based Estimator") (Bastin and Dochain, 1986) et (Perrier et al., 2000)) suivant

$$\dot{\hat{x}} = f(x) + F(x)\hat{\theta} - G(x)u + Ke \quad (1.15)$$

$$e = x - \hat{x} \quad (1.16)$$

génère une erreur d'estimation  $e$  dont la dynamique s'écrit

$$\dot{e} = F(x)\tilde{\theta} - Ke \quad (1.17)$$

Cette erreur est utilisée pour la mise à jour des paramètres du modèle selon la loi d'adaptation suivante

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma_e Fe \quad (1.18)$$

avec  $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$  vecteur des erreurs d'estimation sur les paramètres,  $e = x - \hat{x}$ , vecteur des erreurs d'estimation sur les états,  $\Gamma_l = \Gamma_l^T > 0$   $l = e, o$ , matrices de pondérations.

En substituant (1.14) dans (1.12), on obtient la dynamique du système en boucle fermée suivante

$$\dot{x} = F(x)\tilde{\theta} - \left( \frac{\partial P}{\partial x} - d \right) \quad (1.19)$$

Sous réserve d'une convergence sans biais du vecteur des paramètres (i.e  $\tilde{\theta} = 0$ ), le système en boucle fermée évolue vers l'optimum de la fonction objectif en utilisant un intégrateur qui lui est inhérent.

Pour l'analyse de stabilité de ce schéma, considérons la fonction de Lyapunov suivante

$$V = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial P}{\partial x} - d \right)^T \left( \frac{\partial P}{\partial x} - d \right)^T + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma_e^{-1} \tilde{\theta} + \frac{1}{2} e^T e \quad (1.20)$$

dont la dérivée temporelle s'écrit

$$\dot{V} = \left( \frac{\partial P}{\partial x} - d \right)^T \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \dot{x} + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial \theta} \dot{\tilde{\theta}} - \dot{d} \right) + \tilde{\theta}^T \Gamma_e^{-1} \dot{\tilde{\theta}} + e^T \dot{e} \quad (1.21)$$

et après développement,

$$\dot{V} = - \left( \frac{\partial P}{\partial x} - d \right)^T \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} F(x) \tilde{\theta} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \left( \frac{\partial P}{\partial x} - d \right) + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial \theta} \dot{\tilde{\theta}} - \dot{d} \right) + \tilde{\theta}^T \Gamma_e^{-1} \dot{\tilde{\theta}} - e^T K e \quad (1.22)$$

Deux catégories de termes apparaissent dans l'expression précédente :

- Des termes de signe positif (formes quadratiques) :  $\left( \frac{\partial P}{\partial x} - d \right)^T \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \left( \frac{\partial P}{\partial x} - d \right)$  et  $e^T K e$
- Des termes de signe indéterminé :  $\left( \frac{\partial P}{\partial x} - d \right)^T \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} F(x) \tilde{\theta} + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial \theta} \dot{\tilde{\theta}} - \dot{d} \right)$

Pour garantir la convergence de la loi de commande extrémale, les lois de commande et d'adaptation doivent donc être modifiées pour compenser l'effet de ces termes de signe indéterminé

Soient alors, les lois de commande et d'estimation modifiées suivantes

$$u = -G^{-1} \left( f(x) + F(x) \hat{\theta} + \Gamma_e \left( \frac{\partial P}{\partial x} - d \right) + t_1 \right) \quad (1.23)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma_e F^T e + t_2 \quad (1.24)$$

Après développement, il apparaît que le choix

$$t_1 = - \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)^{-1} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial \theta} \dot{\theta} - \dot{d} \right) \quad (1.25)$$

$$t_2 = \Gamma_e F^T \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \left( \frac{\partial P}{\partial x} - d \right) \quad (1.26)$$

garantit la stabilité du schéma en boucle fermée.

Cet exemple a permis d'illustrer la difficulté de synthétiser une loi de commande extrémale adaptative du fait des interactions entre commande et estimation paramétrique. Cette difficulté est levée dans Guay and Zhang (2003) où les auteurs présentent une technique de stabilisation-optimisation adaptative désignée "Commande extrémale par recherche adaptative d'extremum (ou A.E.S.C. pour "Adaptive Extremum Seeking Control") basée sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov assignable (ou C.L.F "Control Lyapunov Function" (Sepulchre et al., 1997). Contrairement aux méthodes traditionnelles de synthèse de lois commandes adaptatives, cette approche "constructive" déduit, à partir des conditions de stabilité, des lois de commande et d'estimation qui ne sont donc plus choisies *a priori*. Les auteurs supposent la validité d'une paramétrisation de la fonction objectif  $y$  de la forme

$$y = p(x_p, \theta_p) \quad (1.27)$$

avec  $\theta_p$ , un vecteur de paramètres satisfaisant

$$\theta_p \in \Omega_\theta = \{ \theta_p \in \mathbb{R}^p \mid \frac{\partial^2 p(x_p, \theta_p)}{\partial x_p^2} \leq c_0 I < 0, x_p \in \mathbb{R}^m \} \quad (1.28)$$

le vecteur des variables d'état du système  $x \in \mathbb{R}^n$  est partitionné en  $x = [x_p^T x_q^T]^T$  avec respectivement,

$$\dot{x}_q = \phi(x) \quad (1.29)$$

$$\dot{x}_p = f(x) + F_p(x)\theta_p + F_q(x)\theta_q + G(x)u \quad (1.30)$$

avec  $u \in \mathbb{R}^m$  vecteur des variables manipulées,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  fonction continue suffisamment dérivable,  $F_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times p}$  fonction matricielle continue suffisamment dérivable et  $y : \mathbb{R}^{p \times p} \rightarrow \mathbb{R}$  fonction objectif continue suffisamment dérivable.

Une extension de l'algorithme de commande extrémale par recherche adaptative d'extremum en présence de contraintes inégalités est proposée dans DeHaan and Guay (2005).

Le problème s'écrit formellement

$$\begin{aligned} & \min_{x_p \in \mathbb{R}^m} p(t, x_p, s, \theta) \\ & \text{s.t. } g_j(t, x_p, s) \leq 0, j = 1 \dots m_g \\ & \quad h_j(t, x_p, s, \theta) \leq 0, j = 1 \dots m_h \end{aligned} \quad (1.31)$$

Le système est supposé admettre une partition de la forme  $x = [x_p^T x_q^T]^T$  avec respectivement,

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= f_p(x) + F_p(x)\theta_p + G_p(x)u \\ \dot{x}_q &= f_q(x) + F_q(x)\theta_q \end{aligned} \quad (1.32)$$

avec  $u \in \mathbb{R}^m$  vecteur des variables manipulées,  $f_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  et  $f_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  fonctions continues suffisamment dérивables.

L'utilisation d'un critère augmenté permet une prise en compte des contraintes

$$p_a(t, x_p, s, \theta) = p(t, x_p, s, \theta) + \frac{1}{\eta_g} \sum_{j=1}^{m_g} \Psi(g_j(t, x_p, s)) + \eta_h \sum_{j=1}^{m_h} \Phi(h_j(t, x_p, s, \theta)) \quad (1.33)$$

avec  $\eta_g, \eta_h > 0$  constante fixée. Les contraintes dures apparaissent dans le terme de fonction barrière ( $\Psi$ ) et les contraintes molles dans celui de fonction de pénalité ( $\Phi$ ).

La fonction de Lyapunov utilisée s'écrit :

$$V = \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial p(x_p, \hat{\theta}_p)}{\partial x_p} - d(t) \right\|^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_p^T \Gamma_p^{-1} \tilde{\theta}_p + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_q^T \Gamma_q^{-1} \tilde{\theta}_q + \frac{1}{2} \|e\|^2 \quad (1.34)$$

avec  $\tilde{\theta}_l = \hat{\theta}_l - \theta_l$   $l = p, q$ , vecteur des erreurs d'estimation sur les paramètres,  $e = x_p - \hat{x}_p$ , vecteur des erreurs d'estimation sur les états apparaissant dans la fonction objectif,  $\Gamma_l = \Gamma_l^T > 0$   $l = p, q$ , matrices de pondérations et  $d(t)$  signal d'excitation exogène continu.

L'estimation des paramètres est effectuée en utilisant un observateur O.B.E. couplé à un algorithme de projection. L'équation d'observation s'écrit :

$$\dot{\hat{x}}_p = f(x) + F_p(x)\hat{\theta}_p + F_q(x)\hat{\theta}_q + G(x)u + Ke \quad (1.35)$$

$$e = x_p - \hat{x}_p \quad (1.36)$$

avec  $K$  matrice de gains symétrique, définie positive.

Cette équation d'observation génère une erreur d'estimation de la forme :

$$\dot{e} = F_p(x)\tilde{\theta}_p + F_q(x)\tilde{\theta}_q - Ke \quad (1.37)$$

utilisée pour l'adaption des paramètres  $\hat{\theta}_p$  et  $\hat{\theta}_q$ , selon l'algorithme de projection suivant :

$$\dot{\hat{\theta}}_q = \Gamma_q F_q^T(x) \left[ \left( \frac{\partial p(x_p, \hat{\theta}_p)}{\partial x_p} - d(t) \right) \frac{\partial^2 p(x_p, \hat{\theta}_p)}{\partial x_p \partial x_p^T} + e^T \right] \quad (1.38)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_p = Proj \left\{ \hat{\theta}_p, \Gamma_p F_p^T(x) \left[ \left( \frac{\partial p(x_p, \hat{\theta}_p)}{\partial x_p} - d(t) \right) \frac{\partial^2 p(x_p, \hat{\theta}_p)}{\partial x_p \partial x_p^T} + e^T \right] \right\} \quad (1.39)$$

avec  $Proj\{\cdot, \cdot\}$  algorithme de projection (Krstic et al., 1995) choisi tel que

$$\left\{ \dot{\hat{\theta}}_p \Gamma_p^{-1} - \left[ \left( \frac{\partial p(x_p, \hat{\theta}_p)}{\partial x_p} - d(t) \right) \frac{\partial^2 p(x_p, \hat{\theta}_p)}{\partial x_p \partial x_p^T} + e^T \right] F_p \right\} \tilde{\theta}_p \geq 0 \quad (1.40)$$

et  $\hat{\theta}_p \in \Omega_\theta$ .

Comme souligné par les auteurs, l'utilisation d'un algorithme de projection garantit la convexité de l'estimée de la fonction objectif  $p(x_p, \hat{\theta}_p)$ . La loi de commande obtenue s'écrit :

$$u = -b^T(x, \hat{\theta})[b(x, \hat{\theta})b^T(x, \hat{\theta})]^{-1}[a(x, \hat{\theta}) + |a(x, \hat{\theta})| + b(x, \hat{\theta})b^T(x, \hat{\theta})] \quad (1.41)$$

avec

$$\begin{aligned} a(x, \hat{\theta}) &= \left[ \frac{\partial p(x_p, \hat{\theta}_p)}{\partial x_p} - d(t) \right] \left\{ \frac{\partial^2 p(x_p, \hat{\theta}_p)}{\partial x_p \partial \hat{\theta}_p} \dot{\hat{\theta}}_p - \dot{d}(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 p(x_p, \hat{\theta}_p)}{\partial x_p \partial x_p^T} [f(x) + F_p(x)\hat{\theta}_p + F_q(x)\hat{\theta}_q] \right\} \\ b(x, \hat{\theta}) &= \left[ \frac{\partial p(x_p, \hat{\theta}_p)}{\partial x_p} - d(t) \right] \frac{\partial^2 p(x_p, \hat{\theta}_p)}{\partial x_p \partial x_p^T} G(x) \end{aligned}$$

et  $d(t)$  signal exogène déterminé de manière à satisfaire une condition de persistence d'excitation.

Dans DeHaan and Guay (2005), le problème d'optimisation est décomposé en deux

étapes : Une première phase réalisée dans une boucle externe génère le point de consigne optimal en utilisant la fonction de Lyapunov assignable. La partie des états ( $x_q$ ), n'intervenant pas dans la fonction objectif  $y$ , est supposée stable ou stabilisée par une boucle interne de commande.

$$V_{es} = \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial p_a(t, r, s, \hat{\theta})}{\partial x_p} \right\|^2 \quad (1.42)$$

La loi de mise à jour du point de consigne optimal s'écrit

$$\dot{r} = - \left( \frac{\partial^2 p_a}{\partial x_p^2} \right)^{-1} \left[ \rho_t \frac{\partial^2 p_a}{\partial x_p \partial t} + \rho_{\theta} \frac{\partial^2 p_a}{\partial x_p \partial \theta} \dot{\hat{\theta}} + \frac{\partial^2 p_a}{\partial x_p \partial s} \dot{s} + \left( k_{es1} + k_{es2} M_s \left\| \frac{\partial p_a}{\partial x_p} \frac{\partial^2 p_a}{\partial x_p \partial s} \right\| \right) \right] \quad (1.43)$$

avec

$$\begin{aligned} \rho_t &= \frac{1}{2} \text{sat} \left( 2 \frac{\partial p_a}{\partial x_p} \frac{\partial^2 p_a}{\partial x_p \partial t} + 1 \right) + \frac{1}{2} \\ \rho_{\hat{\theta}} &= \frac{1}{2} \text{sat} \left( 2 \frac{\partial p_a}{\partial x_p} \frac{\partial^2 p_a}{\partial x_p \partial \hat{\theta}} + \dot{\hat{\theta}} \right) + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (1.44)$$

et  $k_{es1}, k_{es2} > 0$ , paramètres de réglages et  $M_s$ , constante fixée.

La seconde phase de l'algorithme est une boucle interne réalisant la poursuite de la trajectoire de référence générée par la boucle externe. La fonction de Lyapunov assignable utilisée est

$$V_t = \frac{1}{2} \|x_p - r - d\|^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + \frac{1}{2} \|e\|^2 \quad (1.45)$$

De manière similaire au cas sans contraintes (Guay and Zhang, 2003), un observateur O.B.E. permet de générer une erreur d'estimation utilisée pour la reconstruction des paramètres du modèle par une méthode de projection. La loi de commande

obtenue par les auteurs s'écrit

$$u = -G_p^{-1} \left( f_p(x) + F_p(x)\hat{\theta} - \dot{r} - \dot{d} - k_t z_t \right) \quad (1.46)$$

avec

$$\dot{z}_t = F_p(x)\hat{\theta} - k_t z_t \quad (1.47)$$

Mentionnons, enfin, que dans Marcos et al. (2004), l'algorithme est étendu au cas où une partie seulement du vecteur des variables d'état est mesurable. Le problème est alors résolu par l'utilisation d'un observateur d'ordre réduit (Khalil, 1996).

## 1.2 Optimisation en temps réel à base de modèles empiriques

Comme pour les méthodes à base de modèles de connaissance, celles utilisant des modèles empiriques peuvent être classées en deux catégories, les méthodes utilisant une approche à deux phases et celles utilisant une loi de commande extrémale.

### 1.2.1 Optimisation numérique avec modèle empirique

Les modèles empiriques utilisés pour l'optimisation en temps réel sont de natures diverses et nous les présentons ici par ordre de complexité croissante. Une double classification peut être entreprise pour cette catégorie de modèles : d'abord selon leur nature statique ou dynamique puis de leur caractère linéaire ou non linéaire,

#### 1.2.1.1 Modèle non linéaire statique

L'utilisation d'un modèle statique quadratique a été proposée par Wellstead and Scotson (1990). Les auteurs utilisent une forme incrémentale et justifient ce choix

par la réduction du nombre de paramètres à estimer qu'il entraîne. Si  $y(t)$  représente la fonction devant être maximisée à l'équilibre et  $x(t)$  la variable manipulée, le modèle du système s'écrit :

$$y(t) = y^* - a(x(t) - x^*)^2 \quad (1.48)$$

avec  $y^*$  valeur optimale de  $y(t)$ ,  $x^*$  commande optimale et  $a$  paramètre du modèle quadratique. La forme incrémentale de (1.48) s'écrit :

$$\Delta y(t) = 2x^*a\Delta x(t) - a\Delta x^2(t) \quad (1.49)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta y(t) &= y(t) - y(t-1) \\ \Delta x(t) &= x(t) - x(t-1) \\ \Delta x^2(t) &= x^2(t) - x^2(t-1) \end{aligned}$$

Un algorithme de type moindres carrés récursifs permet d'estimer les paramètres  $\hat{\alpha}_1$  et  $\hat{\alpha}_2$  du modèle :

$$\Delta \hat{y}(t) = \hat{\alpha}_1 \Delta x(t) + \hat{\alpha}_2 \Delta x^2(t) \quad (1.50)$$

et de calculer la commande optimale au temps suivant selon :

$$x(t+1) = -\frac{\hat{\alpha}_1}{2\hat{\alpha}_2} + x_{pert}(t+1) \quad (1.51)$$

le signal  $x_{pert}(t)$  est un signal exogène dont le rôle est d'assurer une condition de persistance d'excitation. Bozin and Zarrop (1990) montrent que sous réserve d'un choix adéquat du signal d'excitation  $x_{pert}(t)$ , l'algorithme converge. De plus, si les non-linéarités et les dynamiques négligées sont suffisamment faibles, la commande

(toujours si la condition de persistance d'excitation est satisfaite) converge vers une valeur proche de la commande optimale. Cependant, les auteurs montrent qu'un biais sur la commande à l'équilibre apparaît si la fonction objectif est impaire et que le signal d'excitation décroît trop rapidement, soit une situation où les non linéarités négligées ne sont plus suffisamment faibles (le modèle quadratique est une fonction paire de la commande). Pour pouvoir maintenir un niveau d'excitation permettant la poursuite de la commande optimale en présence de variations du système et ce même en présence d'un non linéarité impaire (anti-symétrique) dans le système, Nascimento Jr. (1994) propose d'utiliser un modèle réseaux de neurones dont les fonctions de bases sont asymétriques.

### 1.2.1.2 Modèle non linéaire dynamique

Bamberger and Isermann (1978) puis Golden and Ydstie (1989) utilisent une structure de modèle non linéaire de type Hammerstein

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + C(q^{-1})u^2(t-1) + v + R(t) \quad (1.52)$$

avec  $A(q^{-1})$ ,  $B(q^{-1})$  et  $C(q^{-1})$  polynômes d'ordre  $n$  et  $m$ ,  $v$  le biais sur l'estimation de la sortie et  $R(t)$  résidu contenant les dynamiques et non linéarités négligées. Les auteurs notent que dans le cas de la représentation utilisée (modèle de Hammerstein), le modèle, bien que non linéaire par rapport aux états, est linéaire en ses paramètres. Ce modèle peut être réécrit sous la forme standard utilisée en estimation paramétrique

$$y(t) = \theta^T \phi(t-1) + R(t) \quad (1.53)$$

où le régresseur  $\phi(t-1)$  est

$$\begin{aligned}
 \phi(t-1) &= [y(t-1), \dots, y(t-n), u(t-1), \dots, u(t-m-1), \\
 &\quad u^2(t-1), \dots, u^2(t-m-1), 1] \\
 \theta^T &= [-a_1, -a_2, \dots, -a_n, b_0, b_1, \dots, b_m, c_0, c_1, \dots, c_m, v]
 \end{aligned} \tag{1.54}$$

L'estimation des paramètres est effectuée en utilisant un algorithme de type moindres carrés pondérés récursifs avec facteur d'oubli variable qui s'écrit :

$$\begin{aligned}
 e(t) &= y(t) - \hat{\theta}(t-1)^T \phi(t-1) \\
 P(t) &= \lambda(t)^{-1} [P(t-1) - \frac{P(t-1)\phi(t-1)\phi^T(t-1)P(t-1)}{r(t)\lambda(t) + \phi(t-1)^T P(t-1)\phi(t-1)}] \\
 \hat{\theta}(t) &= \hat{\theta}(t-1) + P(t)\phi(t-1)e(t)/r(t)
 \end{aligned} \tag{1.55}$$

avec  $e(t)$  erreur de prédiction,  $P(t)$  matrice symétrique définie positive (matrice de covariance),  $r(t)$  estimation de la variance des mesures et  $\lambda(t)$  facteur d'oubli variable défini par

$$\lambda(t) = \max \left\{ \frac{\text{trace}P(t-1)}{\text{trace}P(t-1) + e^2(t)/(1 + \phi(t-1)^T P(t-1)\phi(t-1))}, \lambda_{\min} \right\}$$

où  $0 \leq \lambda_{\min} \leq 1$  est une borne inférieure de  $\lambda(t)$ .

Golden and Ydstie (1989) discute de l'extension de la méthode de Bamberger and Isermann (1978) dans le cas où le modèle est inexact et propose d'utiliser une approximation du modèle en régime permanent. Ce modèle approximé doit cependant posséder les mêmes dérivés premières (tangente au point courant et secondes (courbure au point courant) que le système. Les résultats de Golden and Ydstie (1989) complètent ainsi ceux proposés précédemment par Biegler et al. (1985).

## 1.2.2 Commande extrémale avec modèles empiriques

### 1.2.2.1 Modèle linéaire statique et commande extrémale par la méthode des perturbations

Dans un schéma de commande extrémale par perturbations, un signal d'excitation est superposé au signal de commande dans le but d'extraire l'information relative au gradient (Fig 1.2). On notera que pour cette classe de commandes extrémales, une mesure de la fonction objectif est supposée disponible ( $y = J(x, \theta)$ ) avec  $x \in \mathbb{R}^n$  vecteur des variables d'état,  $\theta \in \mathbb{R}^m$  vecteur des variables manipulées et  $J : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  fonction objectif (continue suffisamment dérivable).

Un filtre passe-haut de fréquence de coupure  $\omega_h$  isole les variations de la variable optimisée de sa valeur moyenne. L'état représentant le filtre passe-haut est noté  $\eta$ . Ce signal est ensuite modulé par une perturbation identique à celle ajoutée à la commande. Un filtre passe-bas de fréquence de coupure  $\omega_l$  et dont la sortie est notée  $\xi$ , réduit le niveau d'oscillation du signal résultant  $\xi = \frac{dJ}{d\theta}$  soit le gradient recherché. Finalement, un régulateur à action intégrale de gain  $k$  conduit ce gradient estimé à zéro.

Le schéma de commande s'écrit :

$$\dot{\hat{\theta}} = k\xi, \quad \theta = \hat{\theta} + a \sin(\omega t) \quad (1.56)$$

$$\dot{\xi} = -\omega_l \xi + \omega_l (y - \eta) a \sin(\omega t) \quad (1.57)$$

$$\dot{\eta} = -\omega_h \eta + \omega_h y \quad (1.58)$$

La valeur des états en régime permanent est obtenue en utilisant la condition d'équilibre  $\dot{x} = f(x, \theta) \equiv 0$  est notée  $x = l(\theta)$ . La fonction objectif en régime permanent

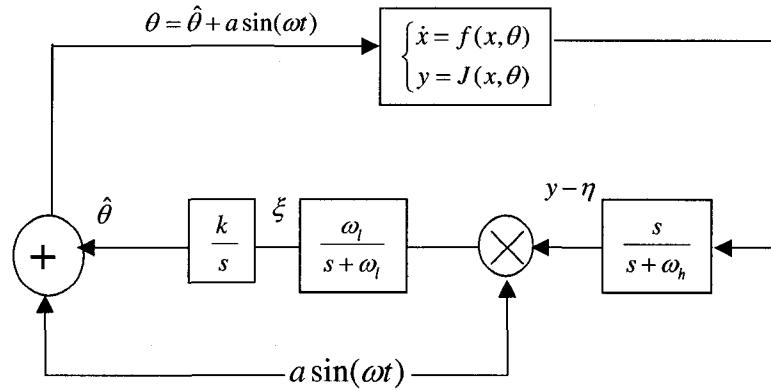


FIGURE 1.2 Commande extrémale par la méthode des perturbations d'après Krstic et Wang (2000).

s'écrit donc  $y = J(l(\theta), \theta)$ . Soient les variables d'écart par rapport à l'optimum recherché,

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^* \quad (1.59)$$

$$\tilde{y} = y - y^* \quad (1.60)$$

$$\tilde{\eta} = \eta - y^* \quad (1.61)$$

où  $y^*$  est la valeur minimale de la fonction objectif à l'équilibre de  $y$  obtenue pour  $\theta = \theta^*$ . Il s'ensuit que la relation entre  $\tilde{y}$  et  $\tilde{\theta}$  s'exprime comme

$$\tilde{y} = J(l(\theta^* + \tilde{\theta}), \theta^* + \tilde{\theta}) - J(l(\theta^*), \theta^*) \equiv \nu(\tilde{\theta}) \quad (1.62)$$

En supposant que  $x$  soit en régime permanent, le système moyenné pour les trois états ( $\theta$ ,  $\xi$ , et  $\eta$ ) est obtenu en prenant la moyenne du membre de droite des équations (1.56) à (1.56) sur l'intervalle  $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$ . Les états moyens sont notés  $(\cdot)^a$ . Le

système moyenné s'écrit (Khalil, 2002) :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}^a \\ \xi^a \\ \tilde{\eta}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}^a \\ k\xi^a \\ -\omega_l \xi^a + \frac{\omega_l \omega}{2\pi} a \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \nu(\tilde{\theta}) \sin(\omega t) dt \\ -\omega_h \tilde{\eta}^a + \frac{\omega_h \omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \nu(\tilde{\theta}) dt \end{bmatrix} \quad (1.63)$$

avec  $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}^a + a \sin(\omega t)$ .

La convergence de ce schéma de commande extrémale est établie par Krstic and Wang (2000) selon la démarche suivante :

- la stabilité exponentielle du point d'équilibre du système moyenné (1.63) ( $\tilde{\theta}^a$ ,  $\xi^a$ , et  $\tilde{\eta}^a$ ) est d'abord démontrée.
- à partir de là, la stabilité exponentielle de ( $\theta$ ,  $\xi$ , and  $\eta$ ) (système non moyenné) est établie en utilisant le théorème de la moyenne (Khalil, 2002).
- ce système non moyenné ( $\theta$ ,  $\xi$ , and  $\eta$ ) représente la partie lente, tandis que le système original  $\dot{x} = F(x, \theta)$  représente la partie rapide (couche limite) supposée exponentiellement stable. La théorie des perturbations singulières est alors appliquée pour prouver que leur interconnexion est aussi exponentiellement stable. (Khalil, 2002).

Une conséquence immédiate de cette preuve de convergence est la nécessité d'une séparation des échelles de temps entre la dynamique du système, la fréquence du signal de perturbation, la vitesse d'estimation du gradient et celle de l'adaptation de la commande. Cette séparation permet d'éviter les interactions et donc une éventuelle instabilité. L'aspect principal est que le signal d'excitation doit être suffisamment lent pour pouvoir considérer le système comme étant statique entraînant ainsi une convergence extrêmement lente i.e. inférieure de 2 à 3 ordres de grandeur à la dynamique du système. Si cette restriction reste acceptable pour des systèmes rapides possédant des constantes de temps de l'ordre de la seconde (typiquement rencontrés dans les systèmes électriques et mécaniques) (Wang et al., 2000), elle n'est plus ad-

missible pour des systèmes chimiques ou biochimiques dont les constantes de temps sont de l'ordre de l'heure ou parfois même du jour. Cette restriction signifie qu'une optimisation nécessiterait entre un mois et une année pour être complétée. La performance de la commande extrémale par la méthode des perturbations en terme de précision moyenne à l'équilibre, est analysée par Krstic and Wang (2000) et les auteurs affirment que la position du point d'équilibre du système moyenné est une fonction de l'amplitude du signal d'excitation de la forme

$$\tilde{\theta}^a = -\frac{\nu'''(0)}{8\nu''(0)}a^2 + O(a^4) \quad (1.64)$$

Ce résultat sera discuté plus en détails au Chapitre 2 où nous montrons que cette erreur dépend non seulement de l'amplitude mais aussi de la fréquence du signal d'excitation.

La preuve de convergence précédemment mentionnée est une approche locale. Cependant, dans une série de contributions récentes, le groupe de recherche dirigé par Iven Mareels, a montré que la méthode des perturbations n'est pas une méthode locale (Tan et al., 2006a), (Tan et al., 2006b), (Nesic et al., 2006). Les auteurs analysent, dans la situation où la caractéristique non-linéaire inconnue présente plusieurs extrema, la possibilité de converger vers l'extremum global (Tan et al., 2006c). Dans Tan et al. (2006c), un schéma simplifié comportant uniquement un intégrateur et une modulation est considéré. La technique proposée consiste à faire varier l'amplitude du signal d'excitation exogène selon une loi d'adaptation donnée qui fait décroître cette amplitude au fur et à mesure de la progression de la recherche. La loi utilisée s'écrit

$$\dot{a} = -\delta\varepsilon g(a) \quad (1.65)$$

$$a(0) = a_0 > 0$$

avec  $a$  amplitude du signal d'excitation,  $g(\cdot)$  application Lipschitzienne nulle à l'origine et positive ailleurs.  $\delta > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $a_0 > 0$ .

On notera enfin, que la commande extrémale par la méthode des perturbations a été étendue aux systèmes multi-entrées, mono sortie par Ariyur and Krstic (2002) et aux systèmes intégrateurs par Zhang et al. (2006).

### 1.2.2.2 Modèle linéaire dynamique

Garcia and Morari (1981) utilisent un modèle dynamique linéaire du type

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})m(k) + \nu(k) \quad (1.66)$$

avec  $y \in \mathbb{R}^p$ , sortie mesurée,  $\nu$ , bruit stationnaire corrélé.  $A(q^{-1})$ ,  $B(q^{-1})$  matrices de polynômes en  $q^{-1}$ , opérateur de retard défini par  $q^{-1}(y(k)) = y(k-1)$ . Le bruit étant corrélé, Garcia and Morari (1981) proposent d'estimer les paramètres du modèle par une méthode de type variable instrumentale avec facteur d'oubli de la forme :

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + K_{k+1} \left( y(k+1) - \phi_{k+1}^T \hat{\theta}_k \right) \quad (1.67)$$

$$K_{k+1} = P_{k+1} z_{k+1} \quad (1.68)$$

$$P_{k+1} = [P_k - P_k z_{k+1} [\lambda + \phi_{k+1}^T P_k z_{k+1}]^{-1} \phi_{k+1}^T P_k] / \lambda \quad (1.69)$$

La commande extrémale est calculée par un algorithme de gradient ("méthode de la plus grande pente") comme suit

$$m_{l+1} = m_l - \mu \nabla_m P|_l \quad (1.70)$$

avec  $\mu$  gain fixant la taille du pas d'itération, et  $\nabla_m P|_l$  gradient de la fonction

objectif évalué à  $m_l$ . Le gradient est calculé par :

$$\nabla_m^T P(y, m)|_l = \frac{\partial P(y, m)}{\partial m^T}|_l + \frac{\partial P(y, m)}{\partial y^T}|_l \left( \frac{dy}{dm^T} \right)_l \quad (1.71)$$

où le Jacobien  $\left( \frac{dy}{dm^T} \right)_l$  est déduit de manière analytique des paramètres du modèle dynamique par la relation :

$$\left( \frac{dy}{dm^T} \right)_l = (A^{-1}B)_l \quad (1.72)$$

Dans McFarlane and Bacon (1989), c'est directement la fonction objectif  $J(u, x)$  qui est estimée en utilisant un modèle auto régressif avec entrées exogènes multiples (A.R.X.)

$$A(q^{-1})J(k) = \sum_{i=1}^m B(q^{-1})u_i(k-1) + c + \nu(k) \quad (1.73)$$

où  $\nu$  est un bruit blanc centré.

Similairement à Garcia and Morari (1981), le vecteur de commandes est calculé par un algorithme de gradient comme suit

$$u_{i,k+1} = u_{i,k} + \mu (\nabla_u J)^T \quad (1.74)$$

### 1.2.2.3 Modèle non linéaire statique

Dans une variante de l'algorithme (A.E.S.C.) (voir Section 1.1.2), Guay et al. (2004), Favache et al. (2006), Cougnon et al. (2006) proposent de représenter la fonction objectif sous la forme d'un modèle réseaux de neurones et s'affranchissent, ainsi, de la nécessité de disposer de la structure de la fonction objectif et donc d'un modèle de connaissance.

La paramétrisation suivante de la fonction objectif  $y = \phi(u)$  est utilisée :

$$y = \phi(u) = W^{*T} S(u) + \mu(t) \quad (1.75)$$

avec  $\phi(u) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$

$\mu(t)$  : erreur d'approximation

$S(u) = [s_1(u), s_2(u), \dots, s_p(u)]^T$  : vecteur de fonctions de base  $s_i(u)$  définies par :

$$s_i(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp \left[ \frac{-(u - \omega_i)^T(u - \omega_i)}{\sigma_i^2} \right] \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (1.76)$$

$\omega_i$  et  $\sigma_i$  représentent respectivement le centre et la dispersion de la fonction Gaussienne, spécifiés a priori par l'utilisateur.

$W^{*T}$ , vecteur des paramètres inconnus du modèle, solution du problème d'optimisation :  $W^* = \arg \min_{W \in \Omega_W} \{ \sup_{u \in \Omega} |W^T S(u) - \phi(u)| \}$   
 avec  $\Omega$  sous ensemble compact de  $\mathbb{R}^p$ ,  $\Omega_W = \{W \mid \|W\| \leq w_m\}$  et  $w_m$  constante positive fixée.

De manière similaire à la méthode présentée à la Section 1.1.2, les auteurs utilisent une technique du type O.B.E. permettant de générer une erreur d'estimation pour la reconstruction des paramètres inconnus  $W$  réalisée, comme précédemment, par un algorithme de projection.

L'équation de l'observateur est

$$\dot{\hat{y}} = \hat{W} \frac{\partial S}{\partial u} \dot{u} + c(t)^T \dot{\hat{W}} + k(y - \hat{y}) \quad (1.77)$$

avec

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= -kc(t) + \dot{u} \frac{\partial S}{\partial u} \\ \hat{y} &= W^T S(u) \end{aligned} \quad (1.78)$$

La synthèse du contrôleur optimisant utilise la fonction de Lyapunov assignable suivante

$$V = \frac{1}{2}z_s^2 + \frac{1}{2}\eta^2 \quad (1.79)$$

avec  $z_s = \hat{W}^T \frac{\partial S}{\partial u} - d(t)$ , gradient de la fonction objectif perturbé par un signal d'excitation exogène  $d(t)$  et  $\eta = \tilde{y} - c(t)\hat{W}$  erreur d'estimation filtrée. Le système étant considéré statique, la commande obtenue est du type loi intégrale et s'écrit

$$\dot{u} = \frac{1}{\hat{W}^T \frac{\partial^2 S}{\partial u^2}} \left( -kz_s - \hat{W}^T \frac{\partial S}{\partial u} + \dot{d} \right) \quad (1.80)$$

## CHAPITRE 2

### DÉPENDANCE DE L'ERREUR SUR LA SOLUTION OPTIMALE DES MÉTHODES DE PERTURBATIONS À LA FRÉQUENCE D'EXCITATION

La trop lente vitesse de convergence des algorithmes d'optimisation en ligne utilisant des lois de commande extrémale basées sur la méthode des perturbations s'avère être leur limitation principale. Krstic and Wang (2000) montrent que la stabilité du schéma requiert une triple séparation des échelles de temps. Ainsi, le signal d'excitation (perturbation) doit être suffisamment lent par rapport à la dynamique du système. L'estimation du gradient par filtrage et corrélation doit à son tour être lente vis-à-vis de la période du signal d'excitation. Enfin, la loi d'adaptation de la commande doit être suffisamment lente relativement à la dynamique d'estimation. En déphasant le signal modulant, on peut contourner cette limitation inhérente à la méthode des perturbations. Cependant, à moins qu'elle ne soit exacte et parfaite, cette compensation de phase ne contribue qu'à stabiliser le système en boucle fermé et ne peut complètement éliminer un biais sur la variable manipulée qui est proportionnel au carré de la fréquence d'excitation. Dans Krstic and Wang (2000), il est démontré que le système converge en moyenne autour d'un voisinage de l'optimum, la taille de ce voisinage étant complètement déterminée par l'amplitude du signal d'excitation. Le système étant supposé quasi-statique à la fréquence du signal d'excitation, il n'est fait aucune mention dans cette publication d'une dépendance de la taille de ce voisinage vis-à-vis de la fréquence du signal d'excitation.

Après un rappel des résultats obtenus par Krstic and Wang (2000) dans la Section 2.1, la dépendance fréquentielle de l'erreur de la commande optimale est quantifiée dans la Section 2.3 où l'on démontre que pour la classe de systèmes non-linéaires

ne pouvant être représentés par des modèles de type Wiener-Hammerstein, la taille du voisinage est proportionnelle au carré de la fréquence du signal d'excitation. Une conséquence directe de ce résultat est que même lorsque l'amplitude du signal d'excitation tend vers zéro, la taille du voisinage ne se réduit pas à un point. Ce résultat signifie que lorsque la fréquence du signal d'excitation est élevée et qu'une éventuelle compensation de phase destinée à garantir la stabilité en boucle fermée est utilisée, la solution obtenue est biaisée. Nous démontrons finalement dans la Section 2.3 que cette dépendance fréquentielle ne représente pas un problème significatif pour la classe des systèmes non-linéaires de type Wiener-Hammerstein si l'amplitude du signal d'excitation est suffisamment faible.

Deux types de systèmes non linéaires dynamiques sont considérés dans ce chapitre. La première catégorie est constituée de l'ensemble des systèmes pouvant être représentés par une non linéarité statique en cascade avec une dynamique linéaire. Cette classe de système se rencontre dans la littérature (Wittenmark and Evans, 2001) sous le nom de modèles de Wiener/Hammerstein. La seconde catégorie est formée des systèmes ne pouvant être représentés par un modèle de Wiener ou de Hammerstein et qu'en l'absence de terme plus adéquat, nous dénommerons "système non linéaire général" (Fox et al., 1984), (Kuhlmann and Bogle, 1997). Les caractéristiques de ces deux classes de modèles du point de vue de l'optimisation sont discutées dans la Section 2.2.

## **2.1 Analyse classique de la position du point d'équilibre de la commande extrémale par perturbation**

Le problème à l'étude est celui de l'optimisation en régime permanent d'un système non linéaire dynamique. Ce problème peut être formulé comme suit

$$\begin{aligned} \min_{\theta} J(x, \theta) \\ \text{s.t. } \dot{x} = F(x, \theta) \equiv 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  vecteur des variables d'état,  $\theta \in \mathbb{R}^m$  vecteur des variables manipulées,  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  fonction continue suffisamment dérivable décrivant la dynamique du système et  $J : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction objectif (continue suffisamment dérivable).

Pour la résolution en ligne de ce problème d'optimisation, une loi de commande extrémale est déduite, sous l'hypothèse de convexité de la fonction objectif  $J$ , des conditions nécessaires d'optimalité

$$\dot{\theta} = k \frac{dJ}{d\theta} = k \left( \frac{\partial J}{\partial \theta} - \frac{\partial J}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \tag{2.2}$$

Une étape cruciale de la synthèse d'une commande extrémale est l'estimation du gradient  $\frac{dJ}{d\theta}$ . Pour la méthode des perturbations à l'étude dans cette partie de la thèse, cette estimation est, comme décrit à la Section 1.2.2.1, réalisée par filtrage et modulation.

Rappelons que le système moyenné comprend trois variables d'état ( $\theta$ ,  $\xi$ , et  $\eta$ ) et s'écrit en variables d'écart :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}^a \\ \xi^a \\ \tilde{\eta}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\xi^a \\ -\omega_l \xi^a + \frac{\omega_l \omega}{2\pi} a \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \nu(\tilde{\theta}) \sin(\omega t) dt \\ -\omega_h \tilde{\eta}^a + \frac{\omega_h \omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \nu(\tilde{\theta}) dt \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

avec  $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}^a + a \sin(\omega t)$ .

La condition d'équilibre de ce système moyenné (2.3) correspond à :

$$\xi^a = 0 \quad (2.4)$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \nu(\tilde{\theta}) \sin(\omega t) dt = 0 \quad (2.5)$$

$$\tilde{\eta}^a = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \nu(\tilde{\theta}) dt \quad (2.6)$$

$$(2.7)$$

La valeur de  $\tilde{\theta}^a$ , est obtenue en utilisant la deuxième condition d'équilibre :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \nu(\tilde{\theta}^a + a \sin(\omega t)) \sin(\omega t) dt = 0 \quad (2.8)$$

Cette équation est utilisée pour déterminer l'expression du point d'équilibre. La Proposition 1 reprend une partie des résultats de (Krstic and Wang, 2000) :

**Proposition 1** (Krstic and Wang, 2000) *La position du point d'équilibre du modèle moyené (2.3) est une fonction de l'amplitude du signal d'excitation :*

$$\tilde{\theta}^a = -\frac{\nu'''(0)}{8\nu''(0)} a^2 + O(a^4). \quad (2.9)$$

La preuve de cette proposition, tirée de (Krstic and Wang, 2000), est brièvement décrite ci-dessous en vue d'être comparée au résultat obtenu dans le cas dynamique. Le lecteur notera que l'ordre du développement de  $\tilde{\theta}^a$  est augmenté de 1 par rapport à la preuve originale de manière à mettre en évidence l'absence de termes en  $a^3$ .

*Preuve* : La valeur à l'équilibre de  $\tilde{\theta}^a$ , est obtenue par la condition (2.8). L'évaluation de cette intégrale requiert l'utilisation d'un développement en série de Taylor à

l'ordre  $N$  de  $\nu(\tilde{\theta})$  *autour de l'optimum*.

$$\nu(\tilde{\theta}) = \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \nu^{(i)}(0) \tilde{\theta}^i + O(\tilde{\theta}^{N+1}) \quad (2.10)$$

Où  $\nu^{(i)}(0)$  est la dérivée d'ordre  $i$  de  $\nu$  évaluée à l'optimum.

L'ordre de l'erreur de troncature  $O(\tilde{\theta}^{N+1})$  est identique à celui de l'erreur de troncature exprimée en fonction de l'amplitude du signal d'excitation  $a$  si  $\tilde{\theta}^{N+1} = \sum_{i=0}^N b_i a^i$  avec  $b_0 = 0$ . Pour prouver que le développement de  $\tilde{\theta}^{N+1}$  ne contient pas de terme constant  $b_0$ , procérons au développement en série de Taylor de la variable d'écart  $\nu(\hat{\theta} + d)$  *autour du point d'équilibre*  $\hat{\theta}$ .

$$\nu(\hat{\theta} + d) = \nu(\hat{\theta}) + \nu'(\hat{\theta})d + \frac{1}{2}\nu''(\hat{\theta})d^2 + O(a^3) \quad (2.11)$$

avec  $d = a \sin(\omega t)$

En substituant ce développement dans la condition d'équilibre (2.8), on obtient

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \nu(\hat{\theta} + d) dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left( \nu(\hat{\theta}) + \nu'(\hat{\theta})d + \frac{1}{2}\nu''(\hat{\theta})d^2 + O(a^3) \right) dt = 0 \quad (2.12)$$

et après simplification des termes nuls en moyenne

$$\frac{a^2}{2} \nu'(\hat{\theta}) + O(a^4) = 0 \quad (2.13)$$

et donc

$$\nu'(\hat{\theta}) = O(a^2) \quad (2.14)$$

Ce résultat signifie que  $\lim_{a \rightarrow 0} \nu'(\hat{\theta}) \propto 0$  et donc  $\lim_{a \rightarrow 0} \hat{\theta} \propto \theta^* \Leftrightarrow \lim_{a \rightarrow 0} \tilde{\theta} \propto 0$  et enfin que  $b_0 = 0$ . On peut donc écrire

$$\nu(\tilde{\theta}) = \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \nu^i(0) \tilde{\theta}^i + O(a^{N+1}) \quad (2.15)$$

L'identité suivante

$$\tilde{\theta}^i = (\tilde{\theta}^a + a \sin(\omega t))^i = \sum_{k=1}^i C_k^i \tilde{\theta}^{a^{i-k}} a^k \sin^k(\omega t) \quad (2.16)$$

avec  $C_k^i = \frac{i!}{k!(i-k)!}$ , est utilisée pour évaluer les différents termes de (3.1). L'intégrale (2.8) est donnée par,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \nu(\tilde{\theta}) \sin(\omega t) dt + O(a^{N+1}) \\ &= \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \nu^i(0) \sum_{k=1}^i C_k^i \tilde{\theta}^{a^{i-k}} a^k \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^{k+1}(\omega t) dt \\ &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{2j < (i-1)} \frac{C_{2j+1}^i}{i!} \nu^i(0) \tilde{\theta}^{a^{i-2j-1}} a^{2j+1} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^{2j+2}(\omega t) dt \\ &= a \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{2j < (i-1)} \left(\frac{-1}{4}\right)^{j+1} \frac{C_{2j+1}^i C_{j+1}^{2j+2}}{i!} \nu^i(0) \tilde{\theta}^{a^{i-2j-1}} a^{2j} = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

En particulier, le développement à l'ordre 4 s'écrit,

$$\nu' + \nu'' \tilde{\theta}^a + \nu^{(3)} \left( \frac{1}{2} \tilde{\theta}^a{}^2 + \frac{1}{8} a^2 \right) + \nu^{(4)} \left( \frac{1}{6} \tilde{\theta}^a{}^3 + \frac{1}{8} a^2 \tilde{\theta}^a \right) = O(a^4) \quad (2.18)$$

Un développement à l'ordre 3 de  $\tilde{\theta}^a$  est utilisé,

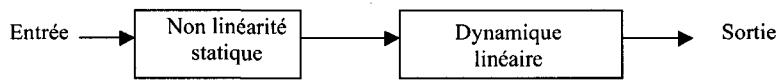
$$\tilde{\theta}^a = b_0 + b_1 a + b_2 a^2 + b_3 a^3 + O(a^4) \quad (2.19)$$

En notant que  $\nu' = 0$ , l'identification terme à terme des coefficients du polynôme en  $a$  conduit à  $b_0 = 0$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = -\frac{\nu'''}{8\nu''}$  et  $b_3 = 0$ .  $\square$

## 2.2 Représentation de systèmes non linéaires

Les modèles du type Wiener ou Hammerstein sont couramment utilisés pour la représentation de systèmes non linéaires (Wittenmark and Evans, 2001). Ces modèles possèdent une dynamique linéaire en cascade avec une non linéarité statique. La différence entre les modèles de Wiener et de Hammerstein est l'ordre d'apparition de la dynamique linéaire et de la non linéarité statique. Ainsi, le modèle de Hammerstein est constitué d'une non linéarité statique suivie d'une dynamique linéaire tandis que pour le modèle de Wiener, la dynamique linéaire précède la non linéarité statique (Figure 2.1).

**Hammerstein**



**Wiener**

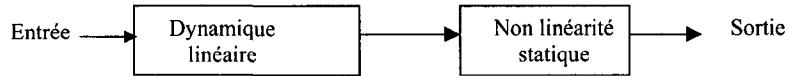


FIGURE 2.1 Approximation d'un système non linéaire par une représentation de Wiener ou de Hammerstein.

Alors qu'à l'optimum du régime permanent, le gain du système est nul pour toute fréquence pour une approximation de Wiener/ Hammerstein, il n'en est pas de même pour un système non linéaire général pour lequel, bien que le gain statique soit nul, le gain aux autres fréquences est généralement non nul. Cette propriété revient à représenter un système dynamique non linéaire comme la somme de deux modèles de Wiener ou de Hammerstein comme illustré à la Figure 2.2. La première

branche possède un gain nul à l'optimum statique, la seconde possède, elle, un gain non nul.

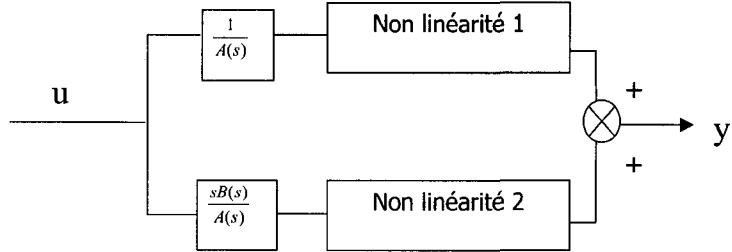


FIGURE 2.2 Approximation d'un système non linéaire général utilisant deux modèles de Wiener en parallèle.

### 2.2.1 Caractérisation de l'optimum d'un système non linéaire dynamique

Nous nous proposons dans cette partie de caractériser la classe des systèmes non linéaires possédant un optimum mais ne pouvant être représentés par un modèle de Wiener ou de Hammerstein. Le lemme suivant fourni une propriété essentielle de cette classe de systèmes.

**Lemme 1** *Soit un système non linéaire dynamique possédant un optimum statique et ne pouvant être représenté par un modèle de Wiener ou de Hammerstein, alors le zéro à l'optimum de la linéarisation Jacobienne est situé à l'origine du plan complexe.*

*Preuve :* Soit  $y = J : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction objectif (continue suffisamment dérivable) avec  $x \in \mathbb{R}^n$  vecteur des variables d'état,  $\theta \in \mathbb{R}^m$  vecteur des variables manipulées et  $G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$  la linéarisation Jacobienne du système non linéaire dynamique avec  $A(s)$  polynôme monique.

Le résultat utilise les propositions suivantes,

(i)  $\frac{\partial J}{\partial \theta} = G(0) = 0$  pour  $\theta = \theta^*$ .

(ii)  $G(j\omega) \neq 0$  pour au moins une valeur de  $\omega \neq 0$  et pour  $\theta = \theta^*$  car sinon  $G(j\omega) = 0, \forall \omega$  et le système serait alors de type Wiener ou Hammerstein ce qui contredit l'hypothèse.

De la proposition (i), on déduit que  $b_0 = 0$  pour  $\theta = \theta^*$  car  $G(0) = \frac{b_0}{a_0} = b_0$ .

De la proposition (ii), on déduit qu'il existe au moins un coefficient  $b_i \neq 0$  pour  $\theta = \theta^*$ .

Il en résulte,  $G(s) = \frac{s(\sum_{i=0}^m b_i s^i)}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = 0, \forall \omega$  et donc  $s = 0$ .  $\square$

### 2.2.2 Exemple d'illustration

Pour illustrer le résultat du Lemme (2.2.1), examinons dans l'exemple suivant le cas d'un système d'ordre 2.

Soit le système non linéaire

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \theta) \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{2.20}$$

avec  $x \in \mathbb{R}^2$  vecteur des variables d'état,  $\theta \in \mathbb{R}$  variable manipulée,  $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonction continue suffisamment dérivable décrivant la dynamique du système et  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  fonction continue suffisamment dérivable décrivant la sortie à optimiser  $y$ .

La linéarisation Jacobienne de ce système s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\theta \\ y &= Cx + D\theta \end{aligned} \tag{2.21}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 1]$$

et  $D = 0$ .

La fonction de transfert  $G(s) = \frac{Y(s)}{\Theta(s)}$  s'écrit

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= \frac{\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} + (s - \frac{\partial f_1}{\partial x_1}) \frac{\partial f_2}{\partial \theta}}{(s - \frac{\partial f_1}{\partial x_1})(s - \frac{\partial f_2}{\partial x_2}) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}} \end{aligned} \quad (2.22)$$

dont le zéro est

$$s = \frac{-\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_1}{\partial \theta}}{\frac{\partial f_2}{\partial \theta}} + \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \quad (2.23)$$

L'optimum statique du système (2.20) est défini par

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

sous la contrainte que le système (2.20) soit en régime permanent i.e. que

$$\dot{x} = f(x, \theta) = 0$$

dont la différentiation s'écrit,

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} = 0 \quad (2.25)$$

et donc

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x}^{-1} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (2.26)$$

en substituant (2.26) dans (2.24), on obtient la condition suivante

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}^{-1} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ &\equiv CA^{-1}B \\ &= \frac{-\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_1}{\partial \theta}}{\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2}} + \frac{\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial \theta}}{\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}} \\ &= 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Et cette dernière condition, lorsque substituée dans (2.23), conduit à l'obtention d'un zéro de la fonction de transfert  $G(s)$  nul à l'optimum.

### 2.3 Dépendance de la solution vis-à vis de la fréquence de la perturbation

Dans l'analyse présentée à la Section 2.1, il est supposé que  $x$  et  $y$  sont en régime établi i.e, que la relation  $\tilde{y} = \nu(\tilde{\theta})$  est algébrique. Cette relation est, en réalité, dynamique soit de la forme  $\tilde{y} = P(\tilde{\theta})$ ,  $P$  étant un opérateur dynamique. La conséquence du caractère dynamique de l'opérateur  $P$  est une modification du point d'équilibre. Nous démontrons dans cette section la dépendance du point de corrélation nulle vis-à-vis de la fréquence du signal d'excitation.

Plus précisément, dans (2.17) la constante  $\tilde{\theta}^a$  et la sinusoïde  $a \sin(\omega t)$  ont un même gain, i.e, le gain est indépendant de la fréquence d'excitation. Cette hypothèse n'est cependant valide que si la dynamique du système est négligée. En considérant une

relation dynamique du type  $\tilde{y} = P(\tilde{\theta})$ , le système moyenné (2.3) devient,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}^a \\ \xi^a \\ \tilde{\eta}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}^a \\ k\xi^a \\ -\omega_l \xi^a + \frac{\omega_l \omega}{2\pi} a \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P(\tilde{\theta}) \sin(\omega t) dt \\ -\omega_h \tilde{\eta}^a + \frac{\omega_h \omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P(\tilde{\theta}) dt \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

### 2.3.1 Cas d'un système non-linéaire général

Dans cette section, nous démontrons que dans le cas d'un système non-linéaire général, la distance entre l'optimum et le point de corrélation nulle est proportionnelle au carré de la fréquence. Ce résultat, qui utilise un développement en série de Taylor, est local.

**Théorème 1** *La position du point d'équilibre du système moyenné (2.3) est fonction de l'amplitude et de la fréquence du signal d'excitation,*

$$\tilde{\theta}^a = \alpha a^2 + \beta \omega^2 + \gamma a^2 \omega + \delta \omega^3 + O([\omega a]^4) \quad (2.29)$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , and  $\delta$  sont des constantes pouvant être évaluées à partir d'un développement en série de Taylor de l'opérateur dynamique  $P$ . La notation  $O([\omega a]^4)$  représente  $O([\omega a]^4) = O(a^4) + O(\omega^4) + O(\omega^2 a^2) + O(\omega a^3) + O(a \omega^3)$ .

*Preuve :* Comme précédemment, la position d'équilibre de  $\tilde{\theta}^a$ , se déduit de la condition

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P(\tilde{\theta}^a + a \sin(\omega t)) \sin(\omega t) dt = 0 \quad (2.30)$$

L'évaluation de l'intégrale (2.30) utilise un développement en série de Taylor à l'ordre 4 de  $P(\tilde{\theta})$  autour de l'optimum. L'ordre de troncature est déterminé de

manière à ce que seuls les termes d'ordre 4 soient négligés.

$$\begin{aligned} P(\tilde{\theta}) &= P(0) + P'(0)\tilde{\theta} + \frac{1}{2}P''(0)\tilde{\theta}^2 \\ &+ \frac{1}{3!}P^{(3)}(0)\tilde{\theta}^3 + \frac{1}{4!}P^{(4)}(0)\tilde{\theta}^4 + O(\tilde{\theta}^5) \end{aligned} \quad (2.31)$$

où  $P^{(i)}(0)$  représente la dérivée d'ordre  $i$  de  $P$  évaluée à l'optimum.

Les termes  $P^{(i)}(0)$  sont des opérateurs linéaires.

En exprimant les termes de la forme  $\sin^j(\omega t)$  comme une combinaison de termes du type  $\sin(j\omega t)$  et  $\cos(j\omega t)$ , les dérivées successives apparaissant dans (2.31) s'écrivent

$$P'(0)\tilde{\theta} = G_{10}\tilde{\theta}^a + G_{11}\sin(\omega t + \phi_{11})a \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} P''(0)\tilde{\theta}^2 &= G_{20}\left(\tilde{\theta}^a + \frac{a^2}{2}\right) + G_{21}\sin(\omega t + \phi_{21})2a\tilde{\theta}^a \\ &- G_{22}\cos(2\omega t + \phi_{22})\frac{a^2}{2} \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} P^{(3)}(0)\tilde{\theta}^3 &= G_{30}\left(\tilde{\theta}^a + \frac{3a^2\tilde{\theta}^a}{2}\right) + G_{31}\sin(\omega t + \phi_{31})\left(3a\tilde{\theta}^a + \frac{3a^3}{4}\right) \\ &- G_{32}\cos(2\omega t + \phi_{32})\frac{3a^2\tilde{\theta}^a}{2} - G_{33}\sin(3\omega t + \phi_{33})\frac{a^3}{4} \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} P^{(4)}(0)\tilde{\theta}^4 &= G_{40}\left(\tilde{\theta}^a + 3a^2\tilde{\theta}^a + \frac{3a^4}{8}\right) \\ &+ G_{41}\sin(\omega t + \phi_{41})\left(4a\tilde{\theta}^a + 3a^3\tilde{\theta}^a\right) \\ &- G_{42}\cos(2\omega t + \phi_{42})\left(3a^2\tilde{\theta}^a + \frac{a^4}{2}\right) \\ &- G_{43}\sin(3\omega t + \phi_{43})a^3\tilde{\theta}^a + G_{44}\cos(4\omega t + \phi_{44})\frac{a^4}{8} \end{aligned} \quad (2.35)$$

où  $G_{ij}$  et  $\phi_{ij}$  sont respectivement le gain et le déphasage introduits par l'opérateur dynamique  $P^{(i)}$  à la fréquence  $j\omega$ .

De manière analogue au développement utilisé pour la preuve de la proposition (2.3) (cas statique), le passage d'une expression de l'erreur de troncature dans le membre de droite de l'équation (2.31) en terme de  $\tilde{\theta}$  à une expression fonction de l'amplitude

$a$  et de la fréquence  $\omega$  du signal d'excitation de même ordre requiert l'absence de terme constant dans l'expression de  $\tilde{\theta}$ . Pour prouver que le développement de  $\tilde{\theta}^{N+1}$  ne contient pas de terme constant  $b_0$ , nous procérons de nouveau au développement en série de Taylor de la variable d'écart  $P(\hat{\theta} + d)$  *autour du point d'équilibre*  $\hat{\theta}$ .

$$P(\hat{\theta} + d) = P(\hat{\theta}) + P'(\hat{\theta})d + \frac{1}{2}P''(\hat{\theta})d^2 + O(a^3) \quad (2.36)$$

avec  $d = a \sin(\omega t)$

En substituant ce développement dans la condition d'équilibre (2.30), on obtient

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P(\hat{\theta} + d) dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left( P(\hat{\theta}) + P'(\hat{\theta})d + \frac{1}{2}P''(\hat{\theta})d^2 + O(a^3) \right) dt = 0 \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P(\hat{\theta} + d) dt &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (P(\hat{\theta}) + aG_1(\hat{\theta}, \omega) \sin(\omega t + \phi_1(\hat{\theta}, \omega))) \\ &+ \frac{1}{4}G_2(\hat{\theta}, 0) + \frac{a^2}{4}G_2(\hat{\theta}, 2\omega) \cos(2\omega t + \phi_2(\hat{\theta}, 2\omega)) + O(a^3) a \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{a^2}{2}G_1(\hat{\theta}, \omega) \cos(\phi_1(\hat{\theta}, \omega)) + O(a^4) \end{aligned} \quad (2.38)$$

qui conduit à

$$G_1(\hat{\theta}, \omega) \cos(\phi_1(\hat{\theta}, \omega)) = O(a^2) \quad (2.39)$$

et donc à

$$\lim_{a \rightarrow 0} G_1(\hat{\theta}, \omega) \cos(\phi_1(\hat{\theta}, \omega)) = 0 \quad (2.40)$$

deux cas sont alors possibles

– cas (i)

$$\begin{aligned}
 \lim_{a \rightarrow 0, \forall \omega} G_1(\hat{\theta}, \omega) &= 0 \\
 \Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0, \omega \rightarrow 0} G_1(\hat{\theta}, \omega) &= 0 \\
 \Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} G_1(\hat{\theta}, 0) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

– cas (ii)

$$\begin{aligned}
 \lim_{a \rightarrow 0, \forall \omega} \cos(\phi_1(\hat{\theta}, \omega)) &= 0 \\
 \Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0, \omega \rightarrow 0} \cos(\phi_1(\hat{\theta}, \omega)) &= 0 \\
 \Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} \cos(\phi_1(\hat{\theta}, 0)) &= 0 \\
 \Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} \phi_1(\hat{\theta}) &= (2k + 1) \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\
 \Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} P'(\hat{\theta}) &= \frac{sA(s)}{B(s)} \\
 \Rightarrow G_1(\hat{\theta}, 0) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

et dans ces deux cas

$$\begin{aligned}
 \lim_{a \rightarrow 0} G_1(\hat{\theta}, 0) &= 0 \\
 \Rightarrow \nu'(\hat{\theta}) &= 0 \\
 \Rightarrow \hat{\theta} &= \theta^* \\
 \Rightarrow \tilde{\theta} &= 0 \\
 \Rightarrow b_0 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

On peut donc finalement écrire (2.31) comme

$$\begin{aligned} P(\tilde{\theta}) &= P(0) + P'(0)\tilde{\theta} + \frac{1}{2}P''(0)\tilde{\theta}^2 \\ &+ \frac{1}{3!}P^{(3)}(0)\tilde{\theta}^3 + \frac{1}{4!}P^{(4)}(0)\tilde{\theta}^4 + O([\omega^5 a^4]) \end{aligned} \quad (2.44)$$

La substitution de (2.31) à (2.35) dans (2.44) puis dans (2.30) conduit à la condition d'équilibre suivante

$$\begin{aligned} G_{11} \cos(\phi_{11}) + G_{21} \cos(\phi_{21})\tilde{\theta}^a + G_{31} \cos(\phi_{31}) \left( \frac{1}{2}\tilde{\theta}^a{}^2 + \frac{1}{8}a^2 \right) \\ + G_{41} \cos(\phi_{41}) \left( \frac{1}{6}\tilde{\theta}^a{}^3 + \frac{1}{8}a^2\tilde{\theta}^a \right) = O([\omega a]^4) \end{aligned} \quad (2.45)$$

L'équation (2.45) possède la même structure que (2.18). Le gain statique  $\nu^{(i)}$  est remplacé par  $G_{i1} \cos(\phi_{i1})$  (soit le gain à la fréquence du signal d'excitation). Le déphasage introduit par l'opérateur dynamique  $P^{(i)}$  conduit donc à une modulation par  $\cos(\phi_{i1})$ . La corrélation par le signal  $\sin(\omega t)$  dans l'expression (2.45) élimine l'ensemble des harmoniques, par définition orthogonaux à ce signal, et seul le fondamental est préservé. Le développement à l'ordre  $N$  est donc donné par

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{2j < (i-1)} \left( \frac{-1}{4} \right)^{j+1} \frac{C_{2j+1}^i C_{j+1}^{2j+2}}{i!} G_{i1} \cos(\phi_{i1}) \tilde{\theta}^a{}^{i-2j-1} a^{2j} = 0 \quad (2.46)$$

À la place de (2.19), un développement à l'ordre 3 de  $\tilde{\theta}^a$  prenant en compte la dépendance fréquentielle est utilisé,

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}^a &= b_0 + b_1 a + b_2 \omega + b_3 a \omega + b_4 a^2 + b_5 \omega^2 + \\ &+ b_6 a^2 \omega + b_7 a \omega^2 + b_8 a^3 + b_9 \omega^3 + O([\omega a]^4) \end{aligned} \quad (2.47)$$

$G_{ij}$  et  $\cos(\phi_{ij})$  sont développés en fonction de  $\omega$

$$\begin{aligned} G_{ij} &= G_{ij0} + \omega G_{ij1} + \omega^2 G_{ij2} + \\ &\quad \omega^3 G_{ij3} + O(\omega^4) \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \cos(\phi_{ij}) &= C_{ij0} + \omega C_{ij1} + \omega^2 C_{ij2} + \\ &\quad \omega^3 C_{ij3} + O(\omega^4) \end{aligned} \quad (2.49)$$

$G_{110}$  est le gain statique de la dérivée première, nul par définition à l'optimum.  $C_{110}$  est le cosinus du déphasage introduit par  $G_{11}$  pour  $s \rightarrow 0$ . Soit  $N(s) = (n_0 + n_1 s + n_2 s^2 + \dots)$  le numérateur de la fonction de transfert représentant la dérivée première. Comme  $G_{110} = 0$ , alors  $n_0 = 0$ .  $s = 0$  est donc une racine de  $N(s)$  et  $s$  devient un facteur du numérateur donc  $\lim_{s \rightarrow 0} G_{11}(s) \propto s$ .  $G_{11}$  présente donc un déphasage de  $\frac{\pi}{2}$  quand  $s \rightarrow 0$  et son cosinus est nul.

Les coefficients  $b_i$  sont évalués en identifiant terme à terme les puissances en  $a$  et en  $\omega$ ,

$$b_i = 0, \quad i = \{0, 1, 2, 3, 7, 8\} \quad (2.50)$$

$$b_4 = -\frac{1}{8} \frac{G_{310}C_{310}}{G_{210}C_{210}} \quad (2.51)$$

$$b_5 = -\frac{G_{111}C_{111}}{G_{210}C_{210}} \quad (2.52)$$

$$b_6 = \frac{C_{310}}{8} \frac{(G_{310}G_{211} - G_{311}G_{210})}{G_{210}^2C_{210}} \quad (2.53)$$

$$b_9 = G_{111} \frac{(C_{111}C_{211} - C_{112}C_{210})}{G_{210}^2C_{210}} - C_{111} \frac{(G_{111}G_{211} + G_{112}G_{210})}{G_{210}^2C_{210}} \quad (2.54)$$

En retenant uniquement les termes non nuls, il s'en suit,

$$\alpha = b_4 \quad (2.55)$$

$$\beta = b_5 \quad (2.56)$$

$$\gamma = b_6 \quad (2.57)$$

$$\delta = b_9 \quad (2.58)$$

$$(2.59)$$

tels que définis par (2.29).  $\square$

Une conséquence importante de ce théorème, liée à la présence de termes en  $\omega^2$  dans l'erreur, est la convergence à un point de corrélation nulle différent de l'optimum, pour une amplitude nulle.

$$\lim_{a \rightarrow 0} \tilde{\theta}^a = \beta\omega^2 + \delta\omega^3 + O(\omega^4)$$

En comparant ce résultat avec celui présenté dans (Krstic and Wang, 2000), il apparaît une différence liée à la présence de termes du type  $O(\omega^2)$ . La présence de ces termes signifie que lorsqu'une fréquence trop élevée du signal d'excitation est utilisée, et ce même en présence d'une compensation de phase garantissant une évolution stable du système, la solution ne converge pas nécessairement vers l'optimum. L'erreur converge vers zéro uniquement si la compensation de phase est parfaite.

### 2.3.1.1 Puissances impaires de $a$

La condition d'équilibre (2.46) ne faisant apparaître que des puissances paires de  $a$  (de fait de la présence du terme  $2j$  dans l'exposant), le résultat suivant peut être énoncé,

**Lemme 2** *Dans le développement de  $\tilde{\theta}^a$  donné en (2.47), les coefficients de tous les termes possédant une puissance impaire de  $a$  sont nuls.*

*Preuve :* Ce résultat est démontré par récurrence. La propriété est vraie au rang zéro, puisque comme démontré au Théorème 1, les coefficients des termes en  $a$ ,  $a\omega$ ,  $a\omega^2$ ,  $a^3$  sont nuls. Supposons que dans le développement à l'ordre  $k$  de  $\tilde{\theta}^a$ , il n'existe aucun terme en puissance impaire de  $a$ , i.e., les coefficients de  $a^{2l-1}\omega^p$  pour  $p = 0, 1, 2, \dots, k-1, 2l-1+p \leq k$ , sont nuls. Sous l'hypothèse précédente, dans le développement à l'ordre  $k+1$  de  $\tilde{\theta}^a$ , les termes supplémentaires possédant une puissance impaire de  $a$  sont  $\sum_{l=1}^{2l \leq k+2} \xi_l a^{2l-1} \omega^{k+2-2l}$ . Ces termes sont introduits dans l'expression de  $\tilde{\theta}^a$  et les termes du type  $a^{2l-1} \omega^{k+2-2l}$  dans (2.46) sont regroupés. Les termes du type  $a^{2l-1} \omega^{k+2-2l}$  avec une puissance impaire de  $a$  ne peuvent provenir de produits croisés de termes d'ordres inférieurs car par l'hypothèse émise au rang  $k$ , aucun d'entre eux ne possède de termes en puissance impaire de  $a$ . Les termes

du type  $a^{2l-1}\omega^{k+2-2l}$  avec une puissance impaire de  $a$  doivent donc provenir des termes rajoutés. Cependant, lorsque  $\tilde{\theta}^a$  est élevé à une puissance d'ordre supérieure, l'ordre total doit augmenter du fait de l'absence de termes constants ( $b_0 = 0$ ) dans le Théorème 1. L'unique possibilité d'avoir des termes du type  $a^{2l-1}\omega^{k+2-2l}$  est donc que ces termes proviennent de  $\tilde{\theta}^{a^{i-2j-1}}a^{2j}$  avec  $i - 2j - 1 = 1$  et  $j = 0$ , i.e.,  $i = 2$ . Il en découle,

$$G_{210}C_{210}\mu_{20} \sum_{l=1}^{2l \leq k+2} \xi_l a^{2l-1}\omega^{k+2-2l} = 0 \quad (2.60)$$

Qui implique  $\xi_l = 0$  et démontre ainsi la proposition à l'ordre  $k + 1$ .  $\square$

### 2.3.2 Cas de modèles du type Wiener ou Hammerstein

Pour cette classe de modèles, le gain statique est nul à l'optimum indépendamment de la partie dynamique. Cette propriété d'indépendance de la phase du système vis-à-vis du point de fonctionnement sera exploitée dans le Chapitre 3 (Chioua et al., 2007b) de cette thèse dans le but d'améliorer les performances dynamiques de l'algorithme de commande extrémale par perturbations.

Par suite de cette propriété d'indépendance, l'opérateur  $G_{11}$  est nul pour toute fréquence. En utilisant cet argument dans le Théorème 1, il apparaît que les coefficients de  $\omega^2$  et  $\omega^3$ , i.e.  $\beta$  et  $\delta$  sont identiquement nuls. Dans ce qui suit, nous démontrons que lorsque  $G_{11} = 0$  pour toute fréquence, tous les termes indépendants de  $a$  dans l'expression de  $\tilde{\theta}^a$ , soit  $\omega^4, \omega^5$ , etc., sont identiquement nuls.

**Théorème 2** *Pour un système dynamique non linéaire représenté par un modèle*

du type Wiener ou Hammerstein, le point d'équilibre de (2.28) est donné par,

$$\tilde{\theta}^a = \alpha a^2 + \gamma a^2 \omega + O(a^2 \omega^2) + O(a^4) \quad (2.61)$$

*Preuve :* Le résultat est démontré par récurrence. La propriété est vraie au rang zéro, puisque comme démontré au Théorème 1, si  $G_{11} = 0$ , les coefficients des termes  $\omega$ ,  $\omega^2$ ,  $\omega^3$  sont nuls. Supposons que pour le développement à l'ordre  $k$  de  $\tilde{\theta}^a$  il n'existe aucun terme de la forme  $a^0 \omega^p$ ,  $p = 0, 1, \dots, k$ . Dans le développement à l'ordre  $k+1$  de  $\tilde{\theta}^a$ , considérons le terme  $\xi \omega^{k+1}$ . Ce terme est introduit dans l'expression de  $\tilde{\theta}^a$  et les termes du type  $\omega^{k+1}$  dans (2.46) sont regroupés. On note que  $G_{11}$  étant nul, la sommation commence à partir de  $i = 2$ . Lorsque  $\tilde{\theta}^a$  est élevé à une puissance d'ordre supérieur, l'ordre augmente par suite de l'absence de terme constant ( $b_0 = 0$  dans le Théorème 1). Il s'ensuit que les termes du type  $\omega^{k+1}$  proviennent obligatoirement de  $\tilde{\theta}^{a^{i-2j-1}} a^{2j}$  avec  $i - 2j - 1 = 1$  et  $j = 0$ , i.e.,  $i = 2$ . Donc,

$$G_{210} C_{210} \xi \omega^{k+1} = 0 \quad (2.62)$$

qui implique  $\xi = 0$ . Ce qui démontre la proposition à l'ordre  $k+1$ . Les termes  $O(a\omega^3)$ ,  $O(a^3\omega)$  sont éliminés en utilisant le Lemme 2.  $\square$

Ce résultat signifie que pour un modèle de Wiener ou de Hammerstein

1. la distance entre le point de corrélation nulle et l'optimum tend vers zéro lorsque  $a \rightarrow 0$ ,  $\lim_{a \rightarrow 0} \tilde{\theta}^a = 0$
2. l'erreur est proportionnelle à  $O(a^2)$  du fait de l'absence de termes du type  $O(a\omega)$  etc
3. la position du point d'équilibre reste dépendante de la fréquence pour  $a \neq 0$

### 2.3.2.1 Solution optimale de fonctions paires

Un résultat intéressant peut être établi lorsque la non linéarité statique d'un modèle de Wiener ou de Hammerstein est symétrique par rapport à l'optimum.

**Lemme 3** *Soit un système non linéaire dynamique représenté par un modèle de Wiener ou de Hammerstein pour lequel la non linéarité statique est une fonction paire de  $\tilde{\theta}$ . Alors,  $\tilde{\theta}^a = 0$  est le point d'équilibre de (2.28).*

*Preuve :* Ce résultat utilise les propositions suivantes,

- (i) Les dérivées d'ordre impair de la non linéarité statique sont nulles à l'origine.
- (ii) Les représentations de type Wiener/Hammerstein vérifient  $G_{11} = 0$ .

L'Équation (2.46) peut donc s'écrire,

$$\tilde{\theta}^a \sum_{i=1}^{2i < N} \sum_{j=1}^{2j < (i-1)} \left( \frac{-1}{4} \right)^{j+1} \frac{C_{2j+1}^{2i} C_{j+1}^{2j+2}}{2i!} G_{(2i)1} \cos(\phi_{(2i)1}) \tilde{\theta}^a {}^{2(i-j-1)} a^{2j} = 0 \quad (2.63)$$

Comme  $\tilde{\theta}^a$  est en facteur dans l'expression précédente,  $\tilde{\theta}^a = 0$  est une solution.  $\square$

Une interprétation possible de ce résultat est que l'erreur sur la commande optimale pour des modèles de Wiener ou de Hammerstein provient de l'assymétrie de la non linéarité statique. Notons, cependant, que rien ne peut être conclu dans le cas d'un système dynamique non linéaire ne pouvant être représenté par un modèle de Wiener ou de Hammerstein.

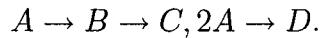
## 2.4 Exemples illustratifs

### 2.4.1 Réacteur continu infiniment mélangé avec réaction de Van De Vusse

#### 2.4.2 Description du système

Pour illustrer la dépendance du point de corrélation nulle à la fréquence d'excitation, nous considérons un système réactif isotherme dans un réacteur continu infiniment mélangé (Engell and Klatt, 1993)

– Réactions



– Modèle

Les bilans en régime transitoire sur les espèces  $A$  et  $B$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \frac{dC_A}{dt} &= D(C_{Ain} - C_A) - k_1 C_A - 2k_3 C_A^2 \\ \frac{dC_B}{dt} &= k_1 C_A - k_2 C_B - D C_B \end{aligned} \quad (2.64)$$

– Variables

–  $C_X$ , concentration de l'espèce  $X$

–  $C_{Ain}$ , concentration à l'entrée

–  $D$ , taux de dilution

–  $k_i$ , constantes cinétiques

– Objectif : Maximisation de la concentration du produit  $B$ ,  $C_B$

– Variable manipulée :  $D$ .

– Paramètres

–  $k_1 = 24 \text{ h}^{-1}$

- $k_2 = 24 \text{ h}^{-1}$
- $k_3 = 0.5 \text{ L mol}^{-1}\text{h}^{-1}$
- $C_{Ain} = 1 \text{ mol L}^{-1}$

En linéarisant ce système, on obtient la fonction de transfert suivante entre  $C_B$  et  $D$  :

$$G(s) = \frac{C_{B0}s + \alpha}{(s + D_0 + k_1 + 2k_3C_{A0})(s + D_0 + k_2)} \quad (2.65)$$

avec

$$\alpha = C_{B0}D_0 + k_1(C_{B0} + C_{A0} - C_{Ain}) + 2k_3C_{A0}C_{B0} \quad (2.66)$$

où l'indice  $(\cdot)_0$  représente le point autour duquel le système est linéarisé.

Notons que  $\alpha$  change de signe en fonction de sa position par rapport à l'optimum et est nul à l'optimum. Ce système ne peut donc pas être représenté de manière exacte en utilisant seulement un modèle de Wiener ou de Hammerstein (Figure 2.2) mais peut cependant être approximé par la somme de deux modèles de Wiener (ou de Hammerstein) avec

$$\begin{aligned} A(s) &= (s + D_0 + k_1 + 2k_3C_{A0})(s + D_0 + k_2) \\ B(s) &= 1 \end{aligned} \quad (2.67)$$

Dans ce cas particulier, la non linéarité présente dans la première branche (Figure 2.2) se réduit à une constante ( $C_{B0}$ ). La seconde non linéarité est égale à  $\alpha$ . La simulation suivante compare les résultats d'optimisation du système original (2.64) à ceux de son approximation par un modèle de Wiener. La non linéarité statique du modèle de Wiener est obtenue par la résolution des équations du modèle (2.64) à l'équilibre

$$\begin{aligned} 0 &= D(C_{Ain} - C_A) - k_1C_A - 2k_3C_A^2 \\ 0 &= k_1C_A - k_2C_B - DC_B \end{aligned} \quad (2.68)$$

dont la solution s'écrit

$$C_B = \frac{k_1}{4k_3(k_2 + D)} \left( (k_1 + D) - \sqrt{(k_1 + D)^2 - 8k_3 D C_{Ain}} \right) \quad (2.69)$$

La partie linéaire du modèle de Wiener utilisé est approximée par une dynamique formée des pôles de la linéarisation du système original (2.64) au voisinage de l'optimum, soit

$$G_{app}(s) = \frac{(D^* + k_1 + 2k_3 C_A^*)(D^* + k_2)}{(s + D^* + k_1 + 2k_3 C_A^*)(s + D^* + k_2)} \quad (2.70)$$

où  $D^*$  est le débit optimal donné par

$$D^* = \frac{k_2 k_3 C_{Ain} + (k_1 - k_2) \sqrt{k_2(k_1 + k_3 C_{Ain})}}{k_3 C_{Ain} + k_1 - k_2} \quad (2.71)$$

et  $C_A^*$ , la concentration du réactif A à l'optimum de  $C_B$  donnée par

$$C_A^* = \frac{(k_1 + D^*) - \sqrt{(k_1 + D^*)^2 - 8k_3 D^* C_{Ain}}}{4k_3} \quad (2.72)$$

#### 2.4.3 Résultats de simulation

Plusieurs fréquences d'excitation sont utilisées et les points de convergence (points de corrélation nulle) obtenus par simulation du modèle non linéaire (2.64) sont comparés d'une part à ceux obtenus par simulation de l'approximation par modèle de Wiener et d'autre part au taux de dilution optimal de  $24.016 \text{ h}^{-1}$ . Les réponses temporelles sont données pour 3 fréquences. À basse fréquence ( $0.2\pi \text{ h}^{-1}$ ), le point d'équilibre se confond pratiquement avec l'optimum théorique (Figure 2.3). Pour une fréquence d'excitation de ( $2\pi \text{ h}^{-1}$ ), un biais de ( $0.8\text{h}^{-1}$ ) apparaît sur la commande optimisante (Figure 2.4). Enfin, lorsque la fréquence d'excitation est très élevée par rapport à la fréquence de coupure du système linéarisé i.e.  $4\pi \text{ h}^{-1}$ , le point d'équilibre obtenu s'éloigne davantage ( $20.6\text{h}^{-1}$ ) de l'optimum théorique (Fi-

gure 2.5). Pour les 3 scénarios, l'approximation du système par un modèle de Wiener conduit à un point d'équilibre optimal. Un point intéressant à noter est que l'erreur reste faible jusqu'à une certaine fréquence critique puis augmente significativement lorsque la fréquence d'excitation dépasse cette valeur (Figure 2.6).

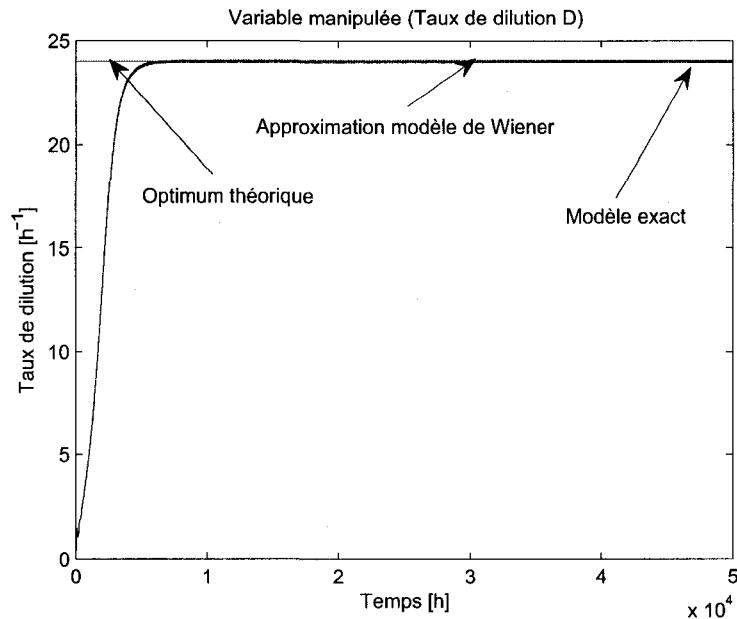


FIGURE 2.3 Comparaison des solutions obtenues avec un modèle exact et son approximation par un modèle de Wiener, fréquence d'excitation =  $0.2\pi h^{-1}$ .

#### 2.4.4 Réacteur piston avec réaction de Van De Vusse

La dépendance du point de corrélation nulle à la fréquence d'excitation illustrée pour un système à paramètres localisés, reste valable dans le cas d'un système à paramètres répartis comme le montre le cas d'étude suivant.

#### 2.4.5 Description du système

Considérons un système réactif isotherme dans un réacteur piston à alimentation distribuée (Cougnon et al., 2006).

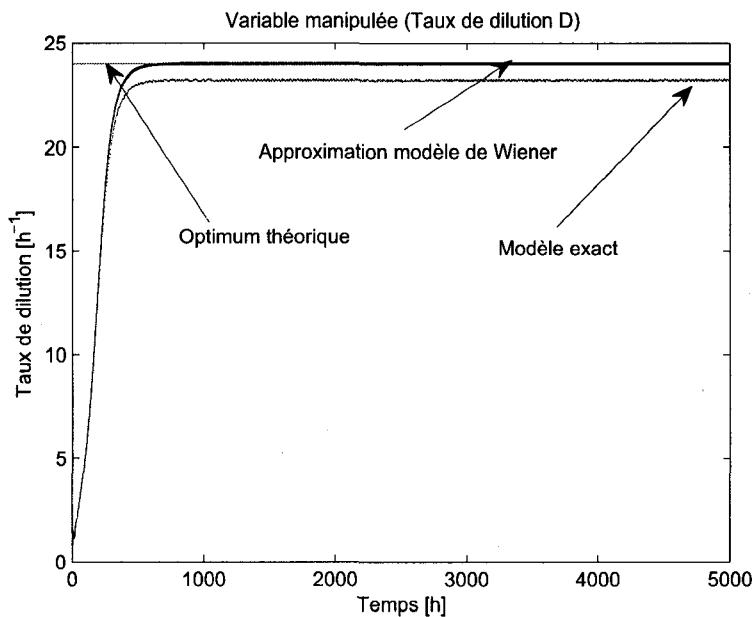


FIGURE 2.4 Comparaison des solutions obtenues avec un modèle exact et son approximation par un modèle de Wiener, fréquence d'excitation =  $2\pi h^{-1}$ .

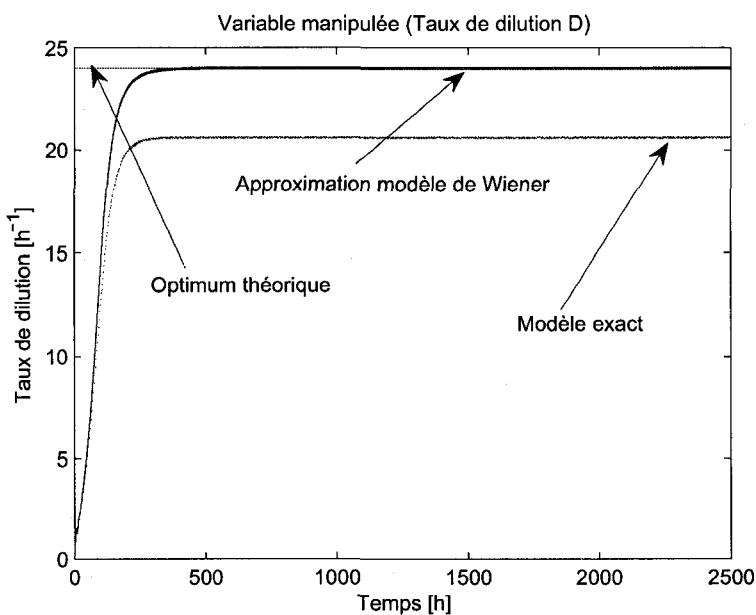


FIGURE 2.5 Comparaison des solutions obtenues avec un modèle exact et son approximation par un modèle de Wiener, fréquence d'excitation =  $4\pi h^{-1}$ .

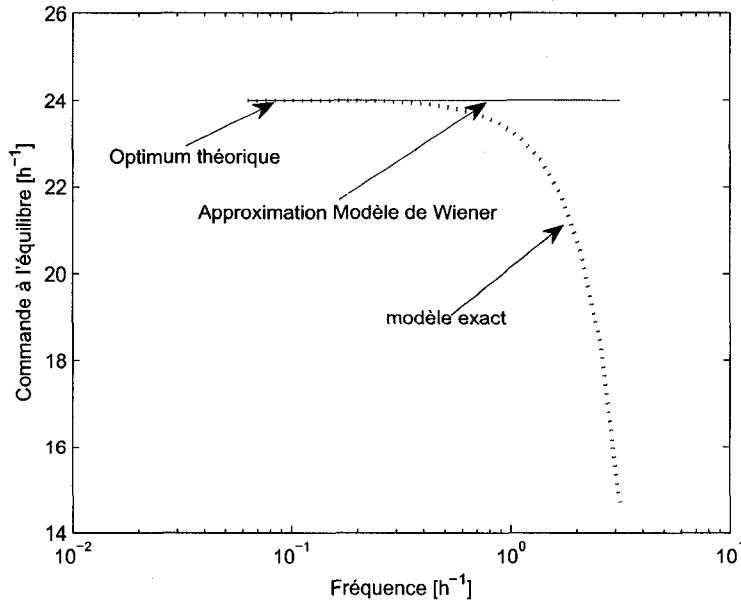


FIGURE 2.6 Évolution de la solution en fonction de la fréquence du signal d'excitation.

– Réaction :  $A \rightarrow B \rightarrow C, 2A \rightarrow D$ .

– Modèle :

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_A}{\partial t} &= -\frac{v}{S} \frac{\partial C_A}{\partial z} - \frac{C_A}{S} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{q}{S} C_{Ain}^{dist} - k_1 C_A - 2k_3 C_A^2 \\ \frac{\partial C_B}{\partial t} &= -\frac{v}{S} \frac{\partial C_B}{\partial z} - \frac{C_B}{S} \frac{\partial v}{\partial z} + k_1 C_A - k_2 C_B\end{aligned}\quad (2.73)$$

conditions initiales :

$$C_A(z, 0) = C_{A0}, C_B(z, 0) = C_{B0} \quad (2.74)$$

conditions aux frontières :

$$C_A(0, t) = C_{Ain}, C_B(0, t) = C_{Bin} \quad (2.75)$$

on suppose que  $\frac{\partial v}{\partial z} = q$ .

– Variables

–  $C_X$ , concentration de l'espèce  $X$

- $q$ , débit volumique par unité de longueur
- $k_i$ , constantes cinétiques
- $C_{Ain}$ , concentration à l'entrée
- $C_{Ain}^{dist}$ , concentration de l'alimentation distribuée
- $v$ , débit volumique
- $S$ , section du réacteur
- $L$ , longueur du réacteur
- Objectif : Maximisation de la concentration du produit  $B$  à la sortie du réacteur,  $C_B(L)$ .
- Variable manipulée :  $q$ .
- Paramètres
  - $k_1 = 5.6530 \text{ h}^{-1}$
  - $k_2 = 5.6530 \text{ h}^{-1}$
  - $k_3 = 140.2601 \text{ Lmol}^{-1} \text{ h}^{-1}$
  - $C_{Ain} = 1 \text{ mol L}^{-1}$
  - $C_{Ain}^{dist} = 10 \text{ mol L}^{-1}$
  - $v = 1 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$
  - $L = 1 \text{ m}$

#### 2.4.6 Linéarisation

Le système étudié est linéarisé autour de 3 points de fonctionnement

- $q = q_{opt}$
- $q = q_{opt} + 0.5$
- $q = q_{opt} - 0.5$

Le lieu des pôles/zéros de ces 3 points est représenté à la Figure 2.7. On observe que la plupart des pôles et zéros ne changent pratiquement pas de position excepté

pour le zéro au voisinage de l'optimum. Le système passe du caractère à minimum de phase au caractère à non-minimum de phase de part et d'autre de l'optimum et se comporte comme un déivateur filtré à l'optimum. Ce système ne peut donc être représenté par un modèle de Wiener ou de Hammerstein et doit être approximé localement par deux branches parallèles comme illustré par la Figure 2.2.

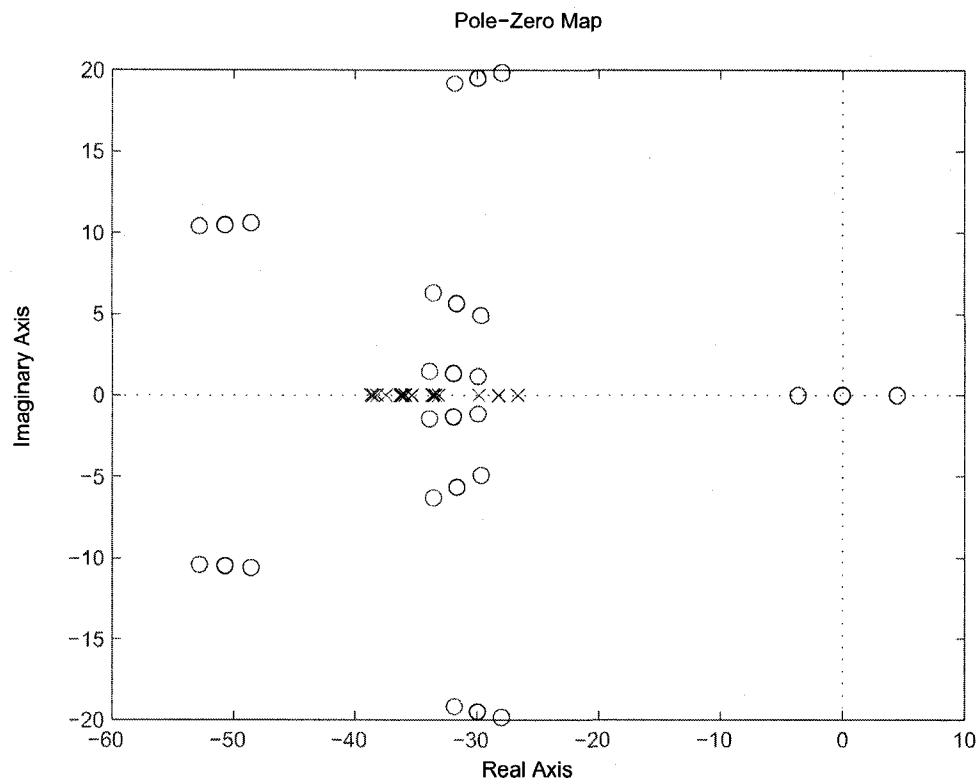


FIGURE 2.7 Pôles et zéros du système linéarisé autour des points  $q = q_{opt}$ ,  $q = q_{opt} + 0.5$  et  $q = q_{opt} - 0.5$ .

#### 2.4.7 Résultats de simulation

Comme indiqué au Tableau 2.1 et à la Figure 2.8 ci-dessous, plusieurs fréquences d'excitation sont utilisées et les points de convergence (points de corrélation nulle) obtenus par simulation du modèle non linéaire (2.73)-(2.75) sont comparés au taux

de dilution optimal de  $2.1006 \text{ } h^{-1}$ . Notons que les conditions initiales sont choisies dans une région localement stable (Krstic and Wang, 2000). Si les conditions initiales sont choisies dans cette région, la position du point d'équilibre est indépendante des conditions initiales. Comme pour le cas précédemment discuté d'un système à paramètres localisés, l'erreur sur l'optimum, faible jusqu'à une certaine fréquence critique, augmente significativement au delà de cette valeur.

TABLE 2.1 Influence de la fréquence d'excitation sur la position d'équilibre du système

Fréquence d'excitation [ $h^{-1}$ ]	$k_{opt}$	$\tau_h$ [h]	$\tau_l$ [h]	Équilibre [ $h^{-1}$ ]
0.0100	0.0100	1000	1000	2.1024
0.0464	0.0464	215.50	215.50	2.0911
0.1292	0.1292	77.40	77.40	2.0821
0.5995	0.5995	16.70	16.70	1.8712
1.0000	1.0000	10.00	10.00	1.5115

## 2.5 Conclusions

Dans cette partie de la thèse, il a été démontré que l'algorithme de commande extrémale par la méthode des perturbations converge en moyenne vers un point de corrélation nulle distinct de l'optimum. L'erreur pour un système non linéaire général est proportionnelle non seulement au carré de l'amplitude du signal d'excitation mais aussi au carré de la fréquence de ce signal d'excitation. Il s'ensuit qu'une optimisation lente est requise non seulement pour des considérations de stabilité mais aussi de précision. Dans le cas particulier de représentations du type Wiener ou Hammerstein, l'erreur est toujours multipliée par le carré de l'amplitude du signal d'excitation. En choisissant donc une amplitude du signal d'excitation suffisamment faible, (avec une limitation liée à une présence éventuelle de bruits de mesure) l'effet de la fréquence peut être minimisé et une convergence plus rapide peut être obte-

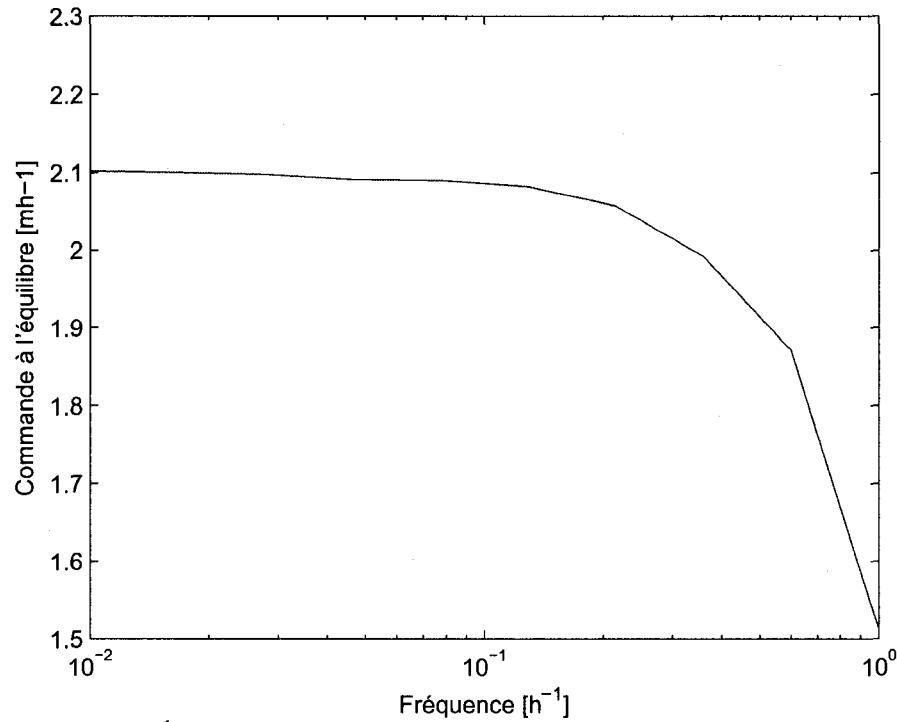


FIGURE 2.8 Évolution de la solution en fonction de la fréquence du signal d'excitation.

nue. Cette propriété des systèmes du type Wiener ou Hammerstein est exploitée au chapitre suivant pour améliorer les performances dynamiques de l'algorithme de commande extrémale par la méthode des perturbations.

## CHAPITRE 3

### ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE

Deux concepts sont traditionnellement utilisés pour améliorer la vitesse de convergence de l'algorithme de commande extrémale par la méthode des perturbations. Le premier utilise des algorithmes de commande qui sont appliqués au système en vue d'accélérer sa dynamique et donc d'accroître sa bande passante (voir par exemple Krstic (2000); Chioua et al. (2007d)). Le second concept fait appel à un compensateur de phase utilisé pour corriger le déphasage introduit par la dynamique du système à la fréquence du signal d'excitation Ariyur and Krstic (2003); Krstic (2000). Si les algorithmes de commande cherchent en général à réduire le déphasage sur une plus grande échelle de fréquences, leur utilisation est cependant limitée par le degré relatif du système, la stabilité de la dynamique interne et la présence de retards purs. Les compensateurs de phase se concentrent, eux, sur la fréquence du signal d'excitation et nécessitent la connaissance du déphasage à cette fréquence.

La première partie de ce chapitre reprend les idées relatives à la compensation de phase. Cependant, pour éviter la nécessité d'une connaissance a priori du déphasage introduit par le système, une estimation de ce déphasage basée sur les mesures disponibles est utilisée. La phase est estimée par modulation de la sortie avec un signal en quadrature de phase (déphasé de  $\frac{\pi}{2}$  radians) par rapport au signal d'excitation. Un signal d'excitation à basse fréquence est ajouté de manière à déterminer le signe du gradient. Ce signe est nécessaire pour garantir la stabilité de la boucle d'adaptation de phase.

La stratégie de compensation de phase proposée s'applique dans le cas où le système à optimiser peut être représenté par un modèle de Wiener-Hammerstein (Section 2.2).

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous proposons une modification relativement simple du schéma de commande extrémale par la méthode des perturbations pouvant être utilisée dans le cas plus général où une approximation par un modèle de Wiener-Hammerstein ne peut être justifiée. Cette modification consiste à substituer à l'estimation du gradient par filtrage linéaire telle que réalisée dans la méthode des perturbations, une estimation par moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli.

Les deux schémas de commande extrémale proposés sont testés en simulation sur un réacteur continu infiniment mélangé avec réaction de Van De Vusse.

La Section 3.1 reformule de manière simplifiée l'influence de la dynamique du système sur la stabilité du système en boucle fermée. La Section 3.2 présente la méthode modifiée de commande extrémale avec compensation de phase pour laquelle une preuve de stabilité est fournie dans la Section 3.3. La Section 3.4 justifie l'utilisation d'un algorithme d'estimation par moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli. Des résultats de simulation de l'optimisation d'un modèle approximé puis exact d'un réacteur continu infiniment mélangé avec réaction de Van De Vusse sont discutés dans la Section 3.6.

### 3.1 Influence de la phase du système sur la stabilité en boucle fermée

Si la dynamique du système est rapide par rapport à la fréquence du signal d'excitation, les états décrivant ce système peuvent être considérés quasi-statiques,

$$\nu(\tilde{\theta}) = \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \nu^{(i)}(0) \tilde{\theta}^i + O(a^N) \quad (3.1)$$

i.e., au second ordre,

$$\nu(\tilde{\theta}) = \frac{1}{2}\nu''((\tilde{\theta}^a)^2 + \frac{a^2}{2} + 2\tilde{\theta}^a a \sin(\omega t) - \frac{a^2}{2} \cos(2\omega t)) \quad (3.2)$$

En l'absence d'une séparation entre l'échelle de temps du signal d'excitation et celle du système, les sinusoïdes de fréquence  $\omega$  et  $2\omega$  possèdent un déphasage qui affecte la convergence. Ainsi, au lieu de  $\nu(\tilde{\theta})$  l'opérateur dynamique  $P(\tilde{\theta})$  doit être utilisé,

$$P(\tilde{\theta}) = \frac{1}{2}G_0((\tilde{\theta}^a)^2 + \frac{a^2}{2}) + 2G_\omega \tilde{\theta}^a a \sin(\omega t - \varphi_\omega) - G_{2\omega} \frac{a^2}{2} \cos(2\omega t - \varphi_{2\omega}) \quad (3.3)$$

où  $G_{i\omega}$  et  $\varphi_{i\omega}$  sont respectivement le gain et le déphasage de la dérivée seconde à la fréquence  $i\omega$ . Les équations du système moyenné prenant en compte ce déphasage s'écrivent alors

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}^a \\ \xi^a \\ \tilde{\eta}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k\xi^a \\ -\omega_l(\xi^a - G_\omega \tilde{\theta}^a a^2 \cos(\varphi_\omega)) \\ -\omega_h(\tilde{\eta}^a - G_0((\tilde{\theta}^a)^2 + \frac{a^2}{2})) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

La troisième variable  $\tilde{\eta}^a$  n'affecte pas les deux premières, sa stabilité peut donc être analysée indépendamment. En supposant que la dynamique de  $\tilde{\theta}^a$  est lente par rapport à celles des filtres,  $\xi^a$  peut être considéré quasi-statique. Cette hypothèse destinée à simplifier l'analyse de stabilité peut cependant être levée. L'équation d'état s'écrit alors

$$\dot{\tilde{\theta}}^a = -kG_\omega \tilde{\theta}^a a^2 \cos(\varphi_\omega) \quad (3.5)$$

ce qui signifie que la stabilité locale est garantie si et seulement si  $\cos(\varphi_\omega) > 0$ . En choisissant une fréquence du signal d'excitation suffisamment basse, le déphasage peut être maintenu inférieur à  $\pi/2$ , garantissant ainsi la stabilité.

### 3.2 Commande extrémale avec compensation de phase

La présence d'une composante dynamique dans le système conduit à un déphasage entre l'entrée et la sortie du système qui peut éventuellement conduire à une instabilité en boucle fermée. L'objectif du schéma de commande (Figure 3.1) est d'utiliser un signal d'excitation de fréquence plus élevée en vue de réduire le temps de convergence. Par ailleurs, des éléments supplémentaires sont inclus dans ce schéma de commande de manière à compenser le déphasage introduit par le système.

La sortie possède une composante continue, une composante à la fréquence du signal d'excitation ainsi que des composantes de fréquences plus élevées. La composante d'intérêt (soit celle qui n'est pas éliminée par corrélation) est celle à la fréquence du signal d'excitation,  $G_\omega \tilde{\theta}^a \sin(\omega t - \varphi_\omega)$ . Cette composante peut être décomposée à son tour en une première partie "en phase" et une seconde partie "en quadrature de phase" (relativement à la phase du signal d'excitation) soit  $b_1 \sin(\omega t) + b_2 \cos(\omega t)$ . La partie en phase est amenée à zéro par la boucle d'optimisation. L'originalité de la méthode proposée dans cette partie de la thèse est l'introduction d'une boucle supplémentaire de compensation de phase. Cette boucle conduit la partie en quadrature de phase à zéro. Si la compensation de phase est parfaite, la stabilité de la boucle d'optimisation est alors garantie.

Pour extraire la composante en quadrature, il est proposé de moduler le signal de sortie du système par un signal en quadrature de phase avec le signal d'excitation (i.e., si le signal d'excitation est  $\sin(\omega t)$ , alors  $\cos(\omega t)$  est utilisé pour la modulation) dans la boucle de compensation de phase. L'estimateur de phase est lui-même réalisé sous la forme d'une loi de commande intégrale, et est en moyenne de la forme,

$$\dot{\tilde{\varphi}} = -k_\varphi G_\omega \tilde{\theta}^a \sin(\tilde{\varphi}_\omega) \quad (3.6)$$

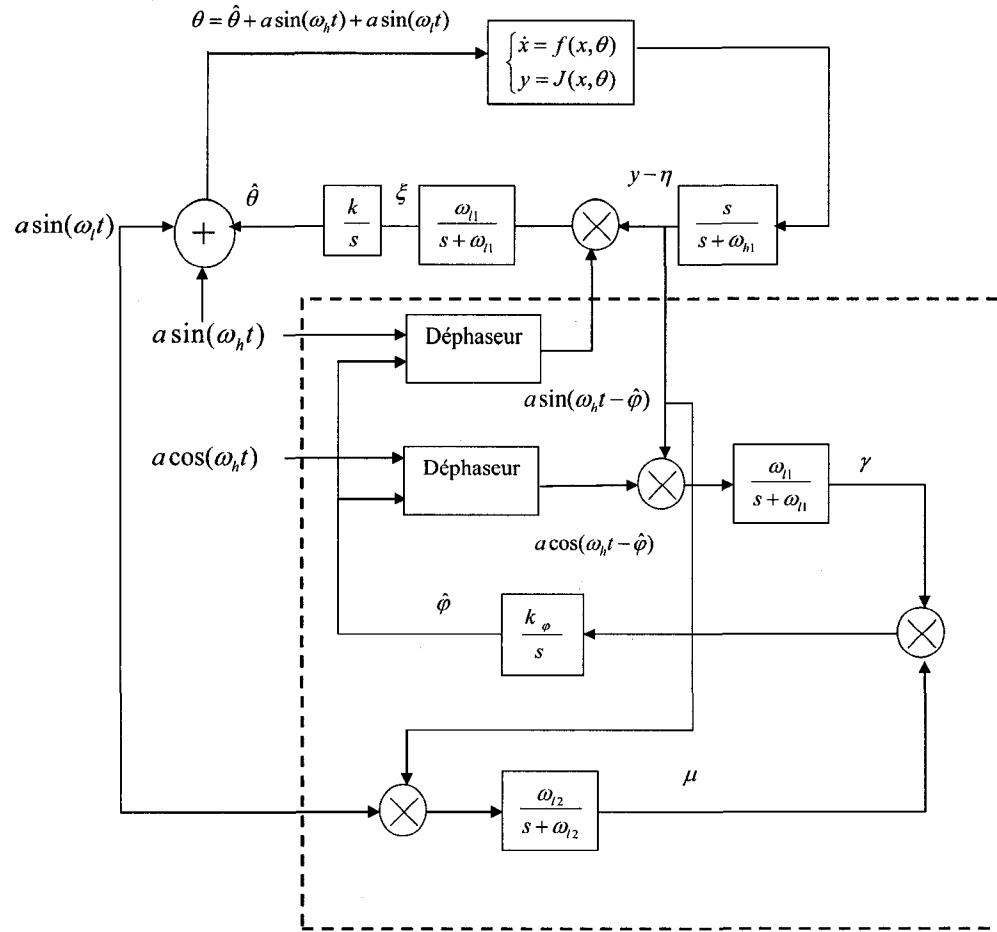


FIGURE 3.1 Commande extrémale par la méthode des perturbations avec compensation de phase. La partie en pointillés représente les blocs introduits par la modification de la méthode classique des perturbations, le bloc déphaseur introduit un retard de phase  $\hat{\varphi}$ .

dont on notera la similitude avec l'équation (3.4).

La principale difficulté introduite par l'équation de compensation de phase ci-dessus est que le signe du terme  $\tilde{\theta}^a$  influence directement la stabilité du système en boucle fermée. Pour lever cette dépendance, le signe de  $\tilde{\theta}^a$  doit être estimé indépendamment et multiplier la loi d'adaptation ce qui est précisément l'objectif de la troisième partie du schéma proposé dans laquelle le signe de  $\tilde{\theta}^a$  est obtenu en injectant un signal à basse fréquence puis en modulant la sortie avec ce signal à basse fréquence. Le produit en moyenne est  $G_{\omega_l} \tilde{\theta}^a \cos(\varphi_{\omega_l})$ . Comme le second signal d'excitation utilisé est à basse fréquence, le terme  $\cos(\varphi_{\omega_l})$  est positif et le signe de  $G_{\omega_l} \tilde{\theta}^a \cos(\varphi_{\omega_l})$  est donc aussi celui de  $\tilde{\theta}^a$ . Il s'ensuit qu'une multiplication du gain d'adaptation de phase par le signe de  $G_{\omega_l} \tilde{\theta}^a \cos(\varphi_{\omega_l})$  assure la stabilité du schéma. Le schéma proposé se distingue du schéma classique de commande extrémale par perturbations par le fait que le signal basse fréquence n'intervient que dans le cas d'une instabilité, sinon, c'est le signal haute fréquence qui fixe la vitesse de convergence.

### 3.3 Analyse de la stratégie de commande extrémale avec compensation de phase

Le schéma de commande extrémale avec compensation de phase peut être représenté par les équations suivantes,

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{\theta}} &= -k\xi, \quad \theta = \tilde{\theta} + a \sin(\omega_l t) + a \sin(\omega_h t) \\
 \dot{\xi} &= -\omega_{l1}\xi + \omega_{l1}(y - \eta)a \sin(\omega_h t - \hat{\varphi}) \\
 \dot{\eta} &= -\omega_{h1}\eta + \omega_{h1}y \\
 \dot{\gamma} &= -\omega_{l1}\gamma + \omega_{l1}(y - \eta)a \cos(\omega_h t - \hat{\varphi}) \\
 \dot{\mu} &= -\omega_{l2}\mu + \omega_{l2}(y - \eta)a \cos(\omega_l t) \\
 \dot{\hat{\varphi}} &= -k_\varphi \gamma \mu
 \end{aligned}$$

En plus des variables d'écart définies par (1.59) à (1.61), une nouvelle variable d'écart  $\tilde{\varphi} = \hat{\varphi} - \varphi_{\omega_h}$  avec  $\hat{\varphi}$  phase estimée du système et  $\varphi_{\omega_h}$  phase réelle du système à la fréquence  $\omega_h$ , sera utilisée dans les développements ultérieurs.

Le système moyenné sur une période du signal d'excitation haute fréquence,  $(2\pi/\omega_h)$ , s'écrit,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}^a \\ \xi^a \\ \tilde{\eta}^a \\ \gamma^a \\ \mu^a \\ \tilde{\varphi}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k\xi^a \\ -\omega_{l1}\xi^a + \frac{\omega_{l1}\omega_h}{2\pi} a \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_h}} P(\tilde{\theta}) \sin(\omega_h t - \hat{\varphi}^a) dt \\ -\omega_{h1}\tilde{\eta}^a + \frac{\omega_{h1}\omega_h}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_h}} P(\tilde{\theta}) dt \\ -\omega_{l1}\gamma^a + \frac{\omega_{l1}\omega_h}{2\pi} a \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_h}} P(\tilde{\theta}) \cos(\omega_h t - \hat{\varphi}^a) dt \\ -\omega_{l2}\mu^a + \frac{\omega_{l2}\omega_h}{2\pi} a \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_h}} P(\tilde{\theta}) \cos(\omega_l t) dt \\ -\frac{k_\varphi \omega_h}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_h}} \gamma^a \mu^a dt \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

avec  $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}^a + a \sin(\omega_h t) + a \sin(\omega_l t)$ .

l'opérateur  $P(\tilde{\theta})$  est donné par

$$\begin{aligned}
 P(\tilde{\theta}) = & \frac{1}{2}G_0((\tilde{\theta}^a)^2 + a^2) \\
 & + 2G_{\omega_l}\tilde{\theta}^a a \sin(\omega_l t - \varphi_{\omega_l}) \\
 & + 2G_{\omega_h}\tilde{\theta}^a a \sin(\omega_h t - \varphi_{\omega_h}) \\
 & - G_{2\omega_l}\frac{a^2}{2} \cos(2\omega_l t - \varphi_{2\omega_l}) \\
 & - G_{2\omega_h}\frac{a^2}{2} \cos(2\omega_h t - \varphi_{2\omega_h}) \\
 & - G_{\omega_h+\omega_l}a^2 \cos((\omega_h + \omega_l)t - \varphi_{\omega_h+\omega_l}) \\
 & + G_{\omega_h-\omega_l}a^2 \cos((\omega_h - \omega_l)t - \varphi_{\omega_h-\omega_l})
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Le système moyenné peut s'écrire,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}^a \\ \xi^a \\ \tilde{\eta}^a \\ \gamma^a \\ \mu^a \\ \tilde{\varphi}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k\xi^a \\ -\omega_{l1}(\xi^a - G_{\omega_h}\tilde{\theta}^a a \cos(\tilde{\varphi}^a)) \\ -\omega_{h1}(\tilde{\eta}^a - G_0((\tilde{\theta}^a)^2 + a^2)) \\ -\omega_{l1}(\gamma^a - G_{\omega_h}\tilde{\theta}^a a \sin(\tilde{\varphi}^a)) \\ -\omega_{l2}(\mu^a - G_{\omega_l}\tilde{\theta}^a a \cos(\varphi_{\omega_l})) \\ -k_\varphi \gamma^a \mu^a dt \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Parmi les six variables d'état apparaissant dans l'équation précédente,  $\tilde{\eta}^a$  n'influence pas les autres variables et est stable par construction. Il peut donc être ignoré dans l'analyse de stabilité. En supposant que les dynamiques de  $\tilde{\theta}^a$  de  $\tilde{\varphi}^a$  sont plus lentes que celles des filtres, les 3 états  $\xi^a$ ,  $\gamma^a$ ,  $\mu^a$  peuvent être considérés quasi-statiques. Comme dans la Section 2 de ce chapitre, cette hypothèse est uniquement destinée à simplifier l'analyse de stabilité et peut être levée. Par ailleurs, l'objectif de l'état  $\mu^a$  est d'extraire le signe du terme  $\tilde{\theta}^a$ . On note que  $G_{\omega_l} > 0$  et  $a > 0$ . Donc, si la plus faible des deux fréquences présentes dans le signal d'excitation, i.e.  $\omega_l$ , est choisie

suffisamment faible pour que le déphasage à cette fréquence satisfasse  $\varphi_{\omega_l} < \pi/2$ , alors  $\cos(\varphi_{\omega_l}) > 0$ , ce qui implique  $signe(\mu^a) = signe(\tilde{\theta}^a)$ . Finalement, le système d'équations d'état s'écrit,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}^a \\ \tilde{\varphi}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{k}_1 \tilde{\theta}^a \cos(\tilde{\varphi}^a) \\ -\bar{k}_2 (\tilde{\theta}^a)^2 \sin(\tilde{\varphi}^a) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

avec  $\bar{k}_1 = akG_{\omega_h}$  et  $\bar{k}_2 = a^2 k_\varphi G_{\omega_h} G_{\omega_l} \cos(\varphi_{\omega_l})$ . En utilisant les nouvelles variables,  $x_1 = \tilde{\theta}^a$  and  $x_2 = 1 - \cos(\tilde{\varphi}^a)$  et la condition  $0 \leq x_2 < 2$ , les équations d'état deviennent,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{k}_1 x_1 + \bar{k}_1 x_1 x_2 \\ -\bar{k}_2 x_1^2 x_2 (2 - x_2) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

On notera que si la valeur initiale  $x_{2init}$  de  $x_2$  est choisie telle que  $0 \leq x_{2init} < 2$ , (3.11) montre que  $x_2$  reste dans l'intervalle semi-ouvert  $[0,2)$ . La fonction de Lyapunov suivante est utilisée

$$V = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{\alpha x_2}{2 - x_2} \quad (3.12)$$

avec  $\alpha > 0$ . Cette fonction de Lyapunov est définie positive par construction et est nulle seulement pour  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ . La dérivée temporelle de cette fonction de Lyapunov est

$$\dot{V} = -\bar{k}_1 x_1^2 + \bar{k}_1 x_1^2 x_2 - \alpha \bar{k}_2 x_1^2 x_2 - \alpha \bar{k}_1 \frac{x_2}{2 - x_2} x_1^2 x_2 \quad (3.13)$$

En choisissant  $\alpha = \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}$ , on obtient

$$\dot{V} = -\bar{k}_1 x_1^2 \left(1 + \frac{x_2^2}{2 - x_2}\right) \leq 0 \quad (3.14)$$

ce qui montre que le système (3.11) converge vers  $x_1 = 0$  i.e.  $\tilde{\theta}^a = 0$ .

### 3.4 Utilisation d'un algorithme d'estimation par moindres carrés récurrents avec facteur d'oubli

#### 3.4.1 Phase d'un système non linéaire

Un modèle de Wiener ou de Hammerstein, comme détaillé à la Section (2.2), possède une dynamique linéaire en cascade avec une non linéarité statique. Si l'on considère, par exemple, le cas d'un modèle de Wiener, la sortie s'écrit

$$y = P(u) = f(u)G(s) \quad (3.15)$$

avec  $f(u)$ , fonction non linéaire de l'entrée  $u$  et  $G(s)$  une fonction de transfert représentant la partie dynamique du modèle. On peut donc écrire les dérivées première et seconde de cette sortie par rapport à la variable  $u$  comme

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u}G(s) \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} = \frac{\partial f^2}{\partial u^2}G(s) \quad (3.17)$$

et l'on observe que la phase de la sortie est identique à celle des ses dérivées première et seconde. Notons que dans le cas d'un modèle de Hammerstein, cette propriété reste vraie, l'ordre des termes relatifs aux parties linéaires et non linéaires étant inversé. C'est précisément cette particularité des représentations de Wiener-Hammerstein qui a été utilisée à la section précédente pour l'évaluation et la compensation de la phase du système en vue d'accélérer la convergence de la méthode

des perturbations. Ainsi, dans l'Équation (3.3) que nous rappelons ci-dessous,

$$P(\tilde{\theta}) = \frac{1}{2}G_0((\tilde{\theta}^a)^2 + \frac{a^2}{2}) + 2G_\omega \tilde{\theta}^a a \sin(\omega t - \varphi_\omega) - G_{2\omega} \frac{a^2}{2} \cos(2\omega t - \varphi_{2\omega}) \quad (3.18)$$

$P(\tilde{\theta})$  est un opérateur dynamique et  $G_{i\omega}$  et  $\varphi_{i\omega}$  sont respectivement le gain et le déphasage de la dérivée seconde à la fréquence  $i\omega$ . Dans le cas d'un modèle de Wiener (ou de Hammerstein), la phase est uniquement dépendante du terme  $G(s)$  dans l'Équation (3.15). De par ce fait  $\varphi_{i\omega}$  est aussi la phase de la sortie du système et de sa dérivée première à la fréquence  $i\omega$ . L'estimation de la phase peut donc être réalisée simplement par une mesure de sortie.

Cependant, si le système n'est plus du type Wiener-Hammerstein, le schéma de compensation de phase précédemment proposé nécessiterait d'évaluer la phase de la dérivée seconde du système non linéaire et proscrirait ainsi son utilisation.

### 3.4.2 Analyse de convergence des schémas d'estimation par filtrage linéaire et par moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli

#### Estimation du gradient par filtrage linéaire

L'algorithme d'estimation par filtrage linéaire utilisé par la méthode des perturbations s'écrit

$$\dot{\xi} = -\frac{a^2}{2}\omega_l \xi + \omega_l(y - \eta)d \quad (3.19)$$

$$\dot{\eta} = -\omega_h \eta + \omega_h y \quad (3.20)$$

où  $\xi$  et  $\eta$  sont respectivement les états des filtres passe-bas et passe haut (Fig.1.2) et  $d = a \sin(\omega t)$  le signal d'excitation.

Soit la fonction de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}\tilde{\eta}^2 + \frac{1}{2}\tilde{\xi}^2 \quad (3.21)$$

avec  $\tilde{\xi} = \xi - \xi^*$  et  $\tilde{\eta} = \eta - \eta^*$ .

En utilisant ces deux variables d'écart, les équations d'états (3.19) et (3.20) peuvent être réécrites sous la forme

$$\dot{\tilde{\xi}} = -\omega_l \tilde{\eta} d - \omega_l \tilde{\xi} \frac{a^2}{2} + \omega_l \xi^* (d^2 - \frac{a^2}{2}) \quad (3.22)$$

$$\dot{\tilde{\eta}} = -\omega_h \tilde{\eta} + \omega_h \xi^* d \quad (3.23)$$

La dérivée temporelle de cette fonction de Lyapunov est

$$\dot{V} = -\omega_h \tilde{\eta}^2 - \frac{a^2}{2} \omega_l \tilde{\xi}^2 + \omega_h \tilde{\eta} \xi^* d - \omega_l \tilde{\eta} \tilde{\xi} d + \omega_l \tilde{\xi} \xi^* (d^2 - \frac{a^2}{2}) \quad (3.24)$$

et l'on peut observer que rien ne peut être conclu concernant le signe de cette dérivée temporelle. Si l'on considère maintenant le système moyen pour les deux états  $(\xi, \eta)$  obtenu en prenant la moyenne du membre de droite des équations (3.19) et (3.20) sur l'intervalle  $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$ . Les états moyens sont notés  $(\cdot)^a$ . Le système moyen s'écrit (Khalil, 2002) :

$$\dot{\tilde{\xi}}^a = -\omega_l \tilde{\xi}^a \frac{a^2}{2} \quad (3.25)$$

$$\dot{\tilde{\eta}}^a = -\omega_h \tilde{\eta}^a \quad (3.26)$$

La même fonction de Lyapunov (3.21), dans le cas de ce système moyen possède une dérivée temporelle dont l'expression s'écrit, pour le choix  $\omega_l = \omega_h = k$

$$\dot{V}^a = -k(\tilde{\eta}^a)^2 + \frac{a^2}{2} (\tilde{\xi}^a)^2 \quad (3.27)$$

et  $\dot{V}^a \leq -kV^a \leq 0$

En invoquant, le théorème de la moyenne (voir Annexe 2), le système est donc exponentiellement stable pour une valeur de  $k$  suffisamment faible.

Examinons, maintenant la précision obtenue sur les paramètres estimés par filtrage

linéaire. Le point d'équilibre du système moyenné, (Équations 3.25 et 3.26) est  $(\dot{\xi}^a, \dot{\eta}^a)$  est  $(0, 0)$ . Cependant, selon le choix des fréquences de coupures  $(\omega_l, \omega_h)$  ou de manière équivalente de celui du gain  $k$ , un biais peut apparaître sur l'estimation de  $(\dot{\xi}, \dot{\eta})$  comme illustré par l'Exemple 1.

Ce biais peut être expliqué par le théorème de la moyenne qui stipule que la distance entre l'état d'un système dynamique et celui du même système dynamique après moyennage est borné par une fonction d'ordre  $O(k)$ .

Pour quantifier le biais obtenue par une estimation par filtrage linéaire, considérons d'abord l'Équation 3.23. Cette relation étant linéaire, une transformation de Laplace est applicable et s'écrit

$$\frac{\tilde{\eta}(s)}{d(s)} = \frac{\omega_h \xi^*}{\omega_h + s} \quad (3.28)$$

avec

$$d(s) = \frac{a\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (3.29)$$

dont la solution temporelle est

$$\tilde{\eta}(t) = \frac{a\omega_h \xi^*}{\sqrt{\omega^2 + \omega_h^2}} \sin(\omega t - \tan^{-1}(\frac{\omega}{\omega_h})) \quad (3.30)$$

En substituant cette solution dans l'Équation 3.22, on obtient

$$\dot{\tilde{\xi}} = -\omega_l \tilde{\xi} \frac{a^2}{2} + \omega_l f(t) \quad (3.31)$$

avec

$$f(t) = \frac{a^2 \omega_h \xi^*}{\sqrt{\omega^2 + \omega_h^2}} \left( \cos(2\omega t - \tan^{-1}(\frac{\omega}{\omega_h})) + \frac{\omega_h}{\sqrt{\omega^2 + \omega_h^2}} \right) \quad (3.32)$$

qui s'écrit après transformation de Laplace

$$\frac{\tilde{\xi}(s)}{f(s)} = \frac{\omega_l}{\frac{a^2}{2} \omega_h + s} \quad (3.33)$$

Le biais observé en moyenne peut alors être déduit en calculant la moyenne des solutions temporelles de 3.28 et 3.33 qui ne doivent pas être confondues avec la solution du système moyen (Équations 3.25 et 3.26).

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \tilde{\xi} dt = -\frac{\omega_h^2 \xi^*}{\sqrt{\omega^2 + \omega_h^2}} \quad (3.34)$$

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \tilde{\eta} dt = 0 \quad (3.35)$$

On notera finalement, que ce biais disparaît dans le cas d'une commande extrémale pour laquelle la valeur de  $\xi^*$  (gradient à l'optimum) est nulle, mais peut cependant nuire à la précision sur la commande optimisante si la stratégie est destinée à un asservissement de pente ("Slope Seeking") (voir e.g. Ariyur and Krstic (2004) pour un détail de cette technique).

### Estimation du gradient par moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli

Une estimation de gradient par une loi de moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli s'écrit

$$\dot{\hat{\theta}} = -R^{-1}\varphi\varepsilon \quad (3.36)$$

$$\dot{\hat{R}} = -2(\lambda R + \varphi\varphi^T) \quad (3.37)$$

avec  $\varepsilon = y - \hat{y}$  erreur d'estimation,  $\hat{y} = \varphi^T\hat{\theta}$  modèle de la sortie, linéaire vis à vis des paramètres  $\hat{\theta}$  et  $\lambda$  facteur d'oubli.

En utilisant cette paramétrisation de la sortie  $y$ , la loi d'estimation peut être réécrite comme

$$\dot{\tilde{\theta}} = -R^{-1}\varphi\varphi^T\tilde{\theta} \quad (3.38)$$

$$\dot{\hat{R}} = -2(\lambda R + \varphi^T\varphi) \quad (3.39)$$

où  $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \hat{\theta}$  représente l'estimation du gradient et  $\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$  l'erreur d'estimation.

L'existence d'un inverse de la matrice de covariance  $R = \int_0^t e^{-\lambda\tau} \varphi \varphi^T d\tau + R(0)e^{-\lambda t}$  est garantie par la condition de persistence d'excitation (Anderson et al., 1986).

Soit la fonction de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T R \tilde{\theta} \quad (3.40)$$

La dérivée temporelle de cette fonction de Lyapunov est

$$\dot{V} = -\lambda \tilde{\theta}^T R \tilde{\theta} = -2\lambda V \leq 0 \quad (3.41)$$

On observe donc que, contrairement au cas d'une estimation par filtrage linéaire, la convergence exponentielle de la méthode des moindres carrés avec facteur d'oubli, ne nécessite pas d'avoir recours au théorème de la moyenne dont les conditions d'application imposent une borne supérieure sur la valeur du gain d'estimation liée à la fréquence du signal d'excitation, elle même, déterminée par la dynamique du système. Cette restriction étant levée, la seule limitation sur la vitesse d'estimation est dans le cas de la méthode des moindres carrés avec facteur d'oubli uniquement liée à la présence de bruits de mesure.

Pour illustrer notre propos, l'exemple suivant compare les performances des deux algorithmes dans le cas d'un modèle sans erreur de structure.

### Exemple 1

Soit un système dont la caractéristique reliant l'entrée et la sortie est de la forme  $y = a + bu$ . L'estimation des paramètres  $a = 5$  et  $b = 6$  est effectuée par les deux algorithmes précédemment décrits. Le signal d'excitation utilisé est  $u = a \sin(\omega t)$  dont la fréquence est fixée à  $1h^{-1}$ . L'estimation par filtrage est testée pour 3 valeurs

de gain  $k = 0.3$ ,  $k = 1$  et  $k = 2$ .

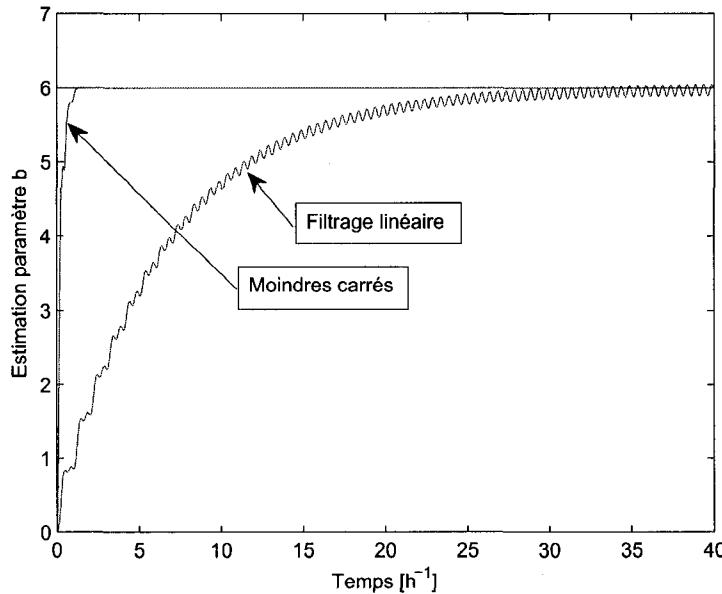


FIGURE 3.2 Comparaison des vitesses de convergence, estimation paramètre  $b$  (gradient), moindres carrés et filtrage linéaire, gain d'estimation par filtrage linéaire = 0.3.

Les Figures 3.2 à 3.7 comparent les résultats obtenus par chacune des méthodes d'estimation pour ces trois valeurs de gain. On peut observer qu'un accroissement de la valeur de ce gain conduit à un niveau d'oscillation croissant sur l'estimée du paramètre  $a$  et un biais sur celle du paramètre  $b$ . Ce phénomène est une conséquence du théorème de la moyenne : d'une part le système original (non moyenné) présente des oscillations qui n'apparaissent plus dans le système moyenné. Et d'autre part, l'erreur d'approximation par moyennage est bornée par une fonction qui croît linéairement avec le gain d'estimation.

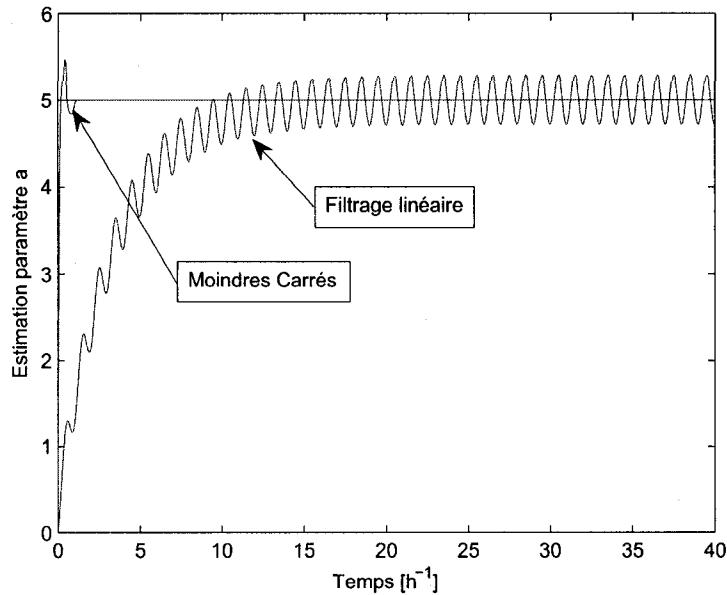


FIGURE 3.3 Comparaison des vitesses de convergence, estimation paramètre  $a$ , moindres carrés et filtrage linéaire, gain d'estimation par filtrage linéaire = 0.3.

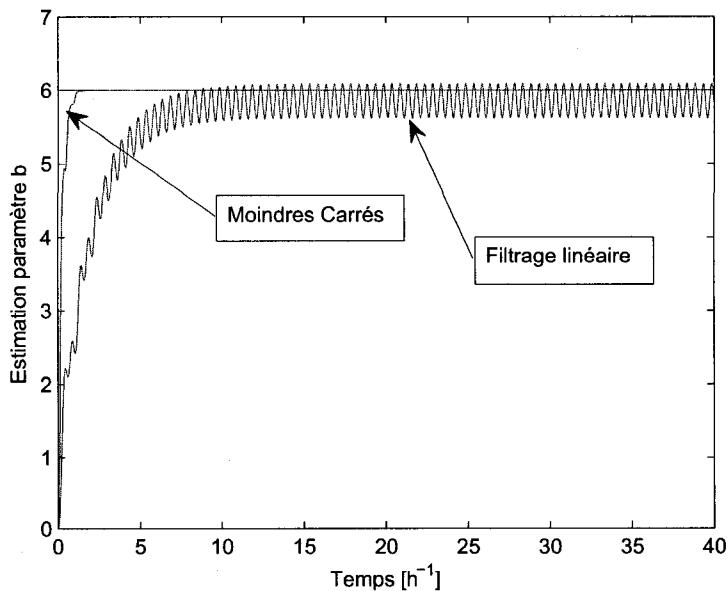


FIGURE 3.4 Comparaison des vitesses de convergence, estimation paramètre  $b$  (gradient), moindres carrés et filtrage linéaire, gain d'estimation par filtrage linéaire = 1.

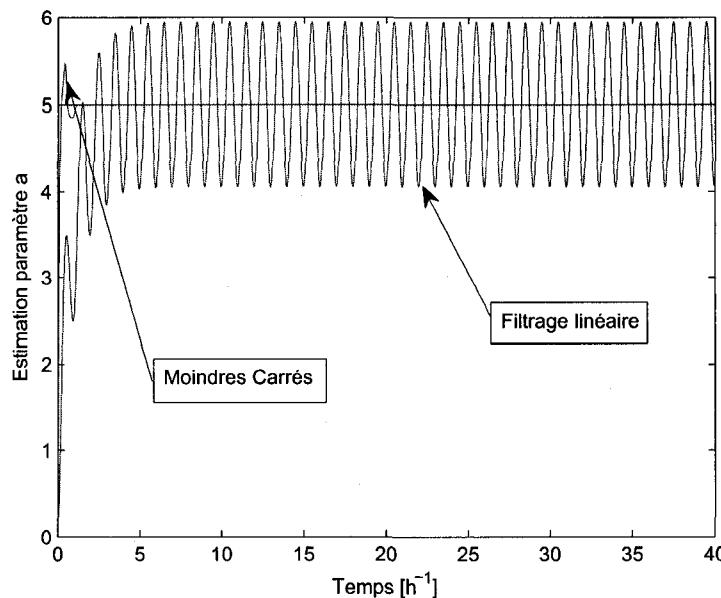


FIGURE 3.5 Comparaison des vitesses de convergence, estimation paramètre  $a$ , moindres carrés et filtrage linéaire, gain d'estimation par filtrage linéaire = 1.

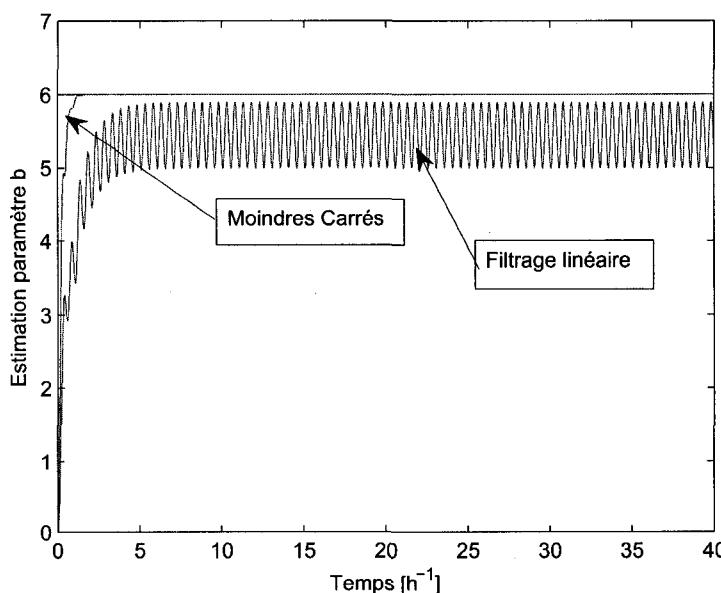


FIGURE 3.6 Comparaison des vitesses de convergence, estimation paramètre  $b$  (gradient), moindres carrés et filtrage linéaire, gain d'estimation par filtrage linéaire = 2.

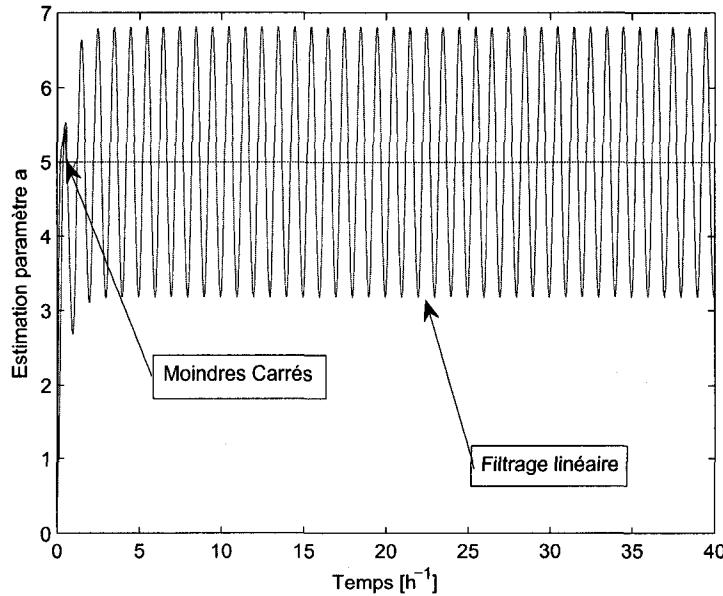


FIGURE 3.7 Comparaison des vitesses de convergence, estimation paramètre  $a$ , moindres carrés et filtrage linéaire, gain d'estimation par filtrage linéaire = 2.

### 3.5 Analyse de la stratégie de commande extrémale utilisant une estimation par moindre carrés récursifs avec facteur d'oubli

Soit une commande extrémale adaptative constituée d'une loi de gradient pour la synthèse de la commande optimisante

$$\dot{\hat{u}} = -\Gamma_o \frac{d\hat{y}}{du} \quad (3.42)$$

$$u = \hat{u} + d \quad (3.43)$$

avec

$$d = a \sin(\omega t) \quad (3.44)$$

et  $\Gamma_o$  gain d'adaptation de la commande.

Si l'estimation des paramètres utilise une loi de moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli (Équation 3.37), les lois d'adaptation de la commande et des paramètres

s'écrivent

$$\dot{u} = -\Gamma_o \frac{\partial \varphi}{\partial u} \hat{\theta} \quad (3.45)$$

$$\dot{R} = 2(\varphi^T \varphi - \lambda R) \quad (3.46)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -R^{-1}(\varphi y - \varphi \varphi^T \hat{\theta}) \quad (3.47)$$

La sortie du système devant être optimisée est écrite comme

$$J = y = \varphi^T \theta \quad (3.48)$$

La fonction de Lyapunov suivante est utilisée

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T R \tilde{\theta} + \frac{1}{2} \left( \frac{dJ}{du} \right)^2 \quad (3.49)$$

avec  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ . En notant que le gradient de la fonction objectif peut s'écrire comme

$$G = \frac{dJ}{du} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \theta \quad (3.50)$$

et son hessien comme

$$H = \frac{d^2 J}{du^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial u} \quad (3.51)$$

la dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov s'écrit

$$\dot{V} = -\lambda \tilde{\theta}^T R \tilde{\theta} - \Gamma_o H \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \theta \right)^2 - \tilde{\theta} \left( \Gamma_o \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial u} R \right) \tilde{\theta} + \Gamma_o \frac{\partial \varphi}{\partial u} \theta \left( H \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial u} R \right) \tilde{\theta} \quad (3.52)$$

si l'on note

$$A = \lambda R > 0 \quad (3.53)$$

$$B = \Gamma_o H > 0 \quad (3.54)$$

$$C = \Gamma_o \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial u} R \quad (3.55)$$

$$D = H \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial u} R \quad (3.56)$$

$$X = \tilde{\theta} \quad (3.57)$$

$$Y = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \theta \quad (3.58)$$

cette dérivée temporelle est de la forme

$$\dot{V} = -X^T(A - C)X - BY^2 + DXY \quad (3.59)$$

et il peut être observé que  $\dot{V} < 0$  pour  $D^2 < 4(A - C)B$  ce qui montre que le système (3.47) converge vers  $(X, Y) = (0, 0)$  i.e.  $\hat{\theta} \rightarrow \theta$  et  $G = \frac{dJ}{du} \rightarrow 0$  i.e.  $J \rightarrow J_{opt}$ .

### 3.6 Exemple illustratif

Nous reprenons dans cette section le problème d'optimisation présenté en (2.4.1) et évaluons les bénéfices des deux stratégies proposées en terme de vitesse de convergence à l'optimum.

#### 3.6.1 Réacteur continu infiniment mélangé avec réaction de Van De Vusse

Concernant la méthode de compensation de phase, elle est appliquée au modèle approximé au voisinage de l'optimum théorique par une représentation de Wiener,

constitué d'une partie linéaire qui s'écrit

$$G_{app}(s) = \frac{(D^* + k_1 + 2k_3C_A^*)(D^* + k_2)}{(s + D^* + k_1 + 2k_3C_A^*)(s + D^* + k_2)} \quad (3.60)$$

où  $D^*$  est le débit optimal donné par

$$D^* = \frac{k_2k_3C_{Ain} + (k_1 - k_2)\sqrt{k_2(k_1 + k_3C_{Ain})}}{k_3C_{Ain} + k_1 - k_2} \quad (3.61)$$

et  $C_A^*$ , la concentration du réactif A à l'optimum de  $C_B$  donnée par

$$C_A^* = \frac{(k_1 + D^*) - \sqrt{(k_1 + D^*)^2 - 8k_3D^*C_{Ain}}}{4k_3} \quad (3.62)$$

en cascade avec la non linéarité statique suivante

$$C_B = \frac{k_1}{4k_3(k_2 + D)} \left( (k_1 + D) - \sqrt{(k_1 + D)^2 - 8k_3DC_{Ain}} \right) \quad (3.63)$$

Dans la Section 2.4.1, l'optimisation en ligne de ce système par l'utilisation de la méthode des perturbations impose une fréquence maximale du signal d'excitation de  $4\pi h^{-1}$  (Figure 2.5). Une boucle de compensation de phase permet maintenant d'accroître cette fréquence d'un facteur 5 soit à une valeur de  $20\pi h^{-1}$  (Figure 3.8) tout en garantissant la stabilité de la boucle fermée. En conséquence de quoi, un temps de convergence initialement de 350 h est réduit à près de 75 h.

Pour la seconde approche, soit celle constituée d'une étape d'estimation par moindres carrés, les résultats en simulation (Figure 3.9) sont cette fois-ci comparés à ceux obtenus par la méthode des perturbations lorsqu'appliquée au modèle exact décrit par le système d'équations 2.64. Rappelons que pour cet exemple, une fréquence maximale du signal d'excitation de  $0.2\pi h^{-1}$  (Figure 2.3) était nécessaire pour garantir l'absence de biais sur la commande optimisante. Il apparaît que l'utilisation

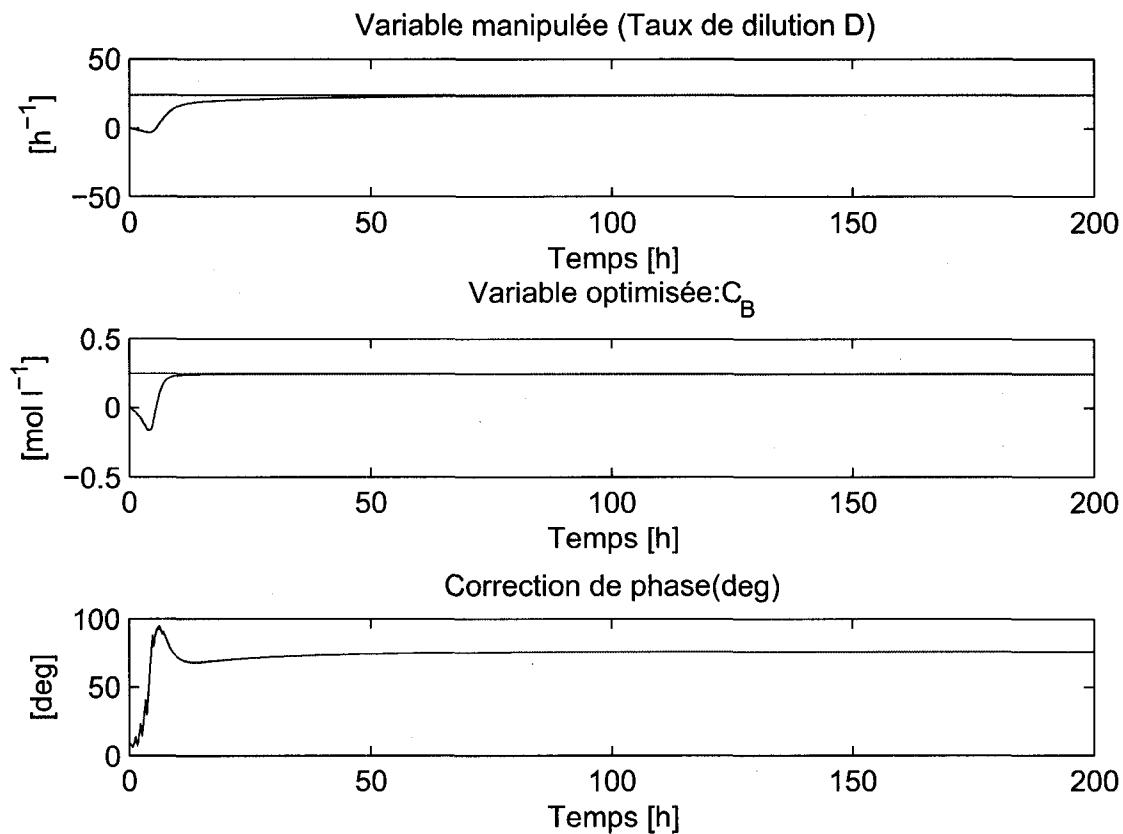


FIGURE 3.8 Variables optimisée et manipulée, méthode de perturbations avec compensation de phase, fréquence d'excitation =  $20\pi h^{-1}$

d'un algorithme d'estimation par moindres carrés avec facteur d'oubli permet de réduire le temps de convergence initialement de  $6300h$  à près de  $200h$  pour une même fréquence d'excitation de  $0.2\pi h^{-1}$ .

### 3.7 Conclusions

Nous avons proposé deux modifications de l'algorithme de commande extrémale par la méthode des perturbations permettant d'améliorer la vitesse de convergence

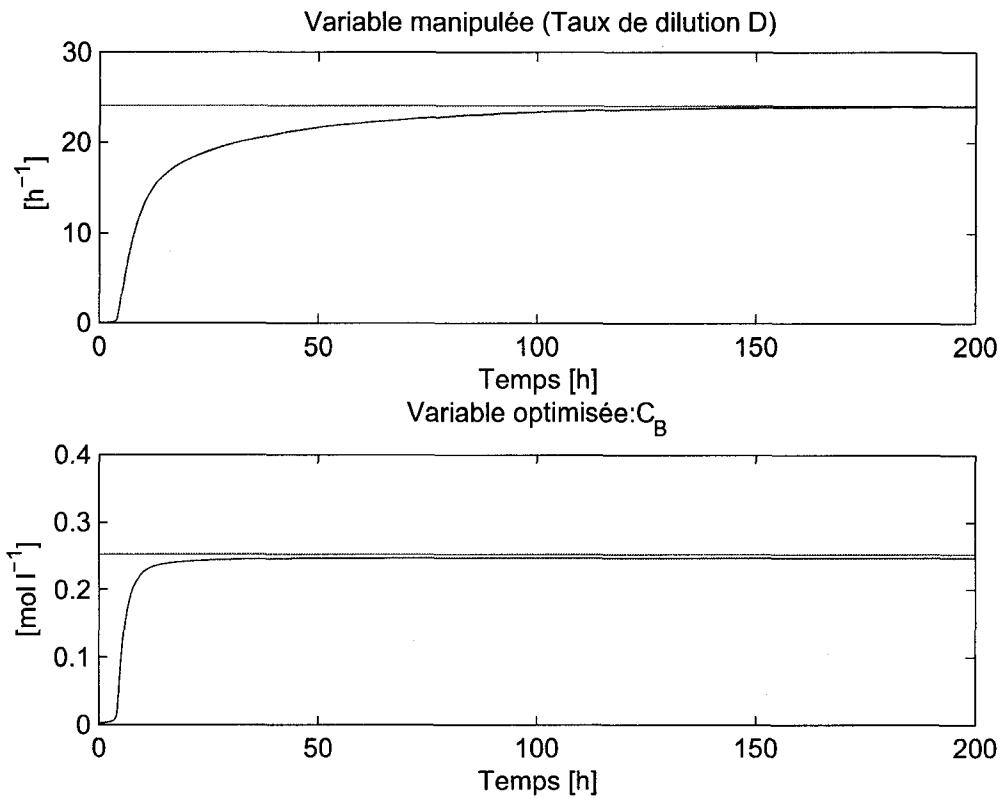


FIGURE 3.9 Variables optimisée et manipulée, méthode de perturbations utilisant une estimation par moindres carrés avec facteur d'oubli, fréquence d'excitation =  $0.2\pi h^{-1}$

tout en maintenant la stabilité de la boucle fermée en présence d'une dynamique non négligeable dans le système. Une première solution s'appliquant aux systèmes de Wiener-Hammerstein est constituée d'un algorithme de compensation de phase utilisé pour corriger le déphasage introduit par la dynamique du système à la fréquence du signal d'excitation. Une seconde solution s'appliquant aux systèmes non linéaires plus généraux utilise une estimation par moindres carrés récursif avec facteur d'oubli. Les résultats de la simulation de l'optimisation en temps réel d'un réacteur continu parfaitement mélangé avec réaction de Van de Vusse indiquent que la vitesse de convergence peut être significativement augmentée par l'utilisation des deux méthodes.

## CHAPITRE 4

### AMÉLIORATION DES PROPRIÉTÉS DE CONVERGENCE DE LA COMMANDÉ EXTRÉMALE PAR LA MÉTHODE DES PERTURBATIONS POUR UNE CLASSE DE SYSTÈMES DIFFÉRENTIELLEMENT PLATS

Cette partie de la thèse poursuit l'investigation de moyens permettant d'accélérer la vitesse de convergence de l'algorithme de commande extrémale par la méthode des perturbations. Nous nous posons, ici, la question de savoir si la vitesse de convergence peut être arbitrairement augmentée par une accélération de la dynamique du système réalisée par l'addition d'une commande par anticipation et/ou par rétroaction. Dans Krstic (2000) ce même problème est posé pour la classe des systèmes non linéaires du type Wiener ou Hammerstein. Dans ce chapitre, nous tentons d'étendre les résultats de Krstic (2000) à une autre catégorie de systèmes, i.e. la classe des systèmes différentiellement plats mono-entrée, mono-sortie. Le choix de cette classe de systèmes est motivé par la possibilité qu'ils offrent de réaliser une inversion de leur dynamique au degré relatif près. En plus de l'aspect stabilité du système en boucle fermée, nous nous intéressons à celui de la précision sur le point d'équilibre du système moyené. Il a été démontré au Chapitre 2 (Chioua et al., 2007c), (Chioua et al., 2007a) que pour les systèmes non linéaires ne pouvant être représentés par un modèle du type Wiener ou Hammerstein et dont une caractérisation est fournie par le Lemme (2.2.1), l'algorithme de commande extrémale par la méthode des perturbations converge en moyenne avec une erreur proportionnelle au carré de la fréquence du signal d'excitation. Nous analysons, ici, la possibilité de réduire cette erreur en utilisant une commande par anticipation et/ou par rétroaction. Le résultat de cette analyse indique que dans le cas général, la vitesse de convergence ne peut

être arbitrairement augmentée pour un niveau de précision donné. Le raisonnement utilisé se base sur les éléments suivants : comme la sortie à optimiser ne peut être contrôlée dans la boucle interne (perte de commandabilité à l'optimum), il existera toujours une relation statique ou dynamique entre la sortie contrôlée et la sortie optimisée. Si cette relation est dynamique et que la dimension de la "dynamique résiduelle" (concept que nous introduisons et définissons à la Section 4.1.4) est inférieure ou égale à 1, alors la vitesse d'adaptation peut être fixée arbitrairement. Cependant, si la dynamique résiduelle est de dimension supérieure à 1, le système converge vers un point d'équilibre distinct de l'optimum statique recherché et la vitesse maximale d'adaptation est limitée.

La Section 4.1 formule le problème de l'optimisation en ligne par la méthode des perturbations de la classe des systèmes différentiellement plats, mono-entrée, mono-sortie. Les résultats de l'analyse sont fournis dans la Section 4.2 et illustrés par deux exemples simples dans la Section 4.3.

## **4.1 Commande extrémale par la méthode des perturbations de systèmes différentiellement plats en boucle fermée**

### **4.1.1 Formulation du problème**

Le problème à l'étude est celui de l'optimisation en régime permanent d'un système non linéaire mono-entrée, mono-sortie, en boucle fermée et peut être formulé comme

suit :

$$\begin{aligned}
 & \min_{r_{ref}} J(x(r_{ref}), r_{ref}) & (4.1) \\
 & \text{s.t. } \dot{x} = F(x) + G(x)u \equiv 0 \\
 & \quad r = H(x) \\
 & \quad u = K(x, r_{ref})
 \end{aligned}$$

Avec  $x \in \mathbb{R}^n$  vecteur des variables d'état du système,  $u \in \mathbb{R}$  variable de commande,  $r \in \mathbb{R}$  sortie commandée,  $r_{ref} \in \mathbb{R}$  référence de la sortie commandée,  $F$  et  $G$  sont des fonctions continues suffisamment dérивables décrivant la dynamique du système,  $H$  une fonction des variables d'état décrivant la sortie,  $K$  un opérateur (statique ou dynamique) représentant le correcteur et  $J$  la fonction objectif (continue suffisamment dérivable). La première contrainte du problème (dérivées temporelles des variables d'état nulles) traduit le fait que l'optimisation est réalisé en régime permanent.

#### 4.1.2 Inversion d'un système différentiellement plat

La classe des systèmes différentiellement plats (Fliess et al., 1995), (Sira-Ramirez, 2004) étant considérée avec la variable  $r$  pour sortie plate, l'ensemble des variables d'état ainsi que l'entrée du système peuvent être reconstruits à partir de la sortie plate et de ses dérivées successives, on peut donc écrire

$$x = C_1(r, \dot{r}, \ddot{r}, \dots) \quad (4.2)$$

et

$$u = C_2(r, \dot{r}, \ddot{r}, \dots) \quad (4.3)$$

La fonction coût mesurée  $J$  dépend de  $r$  et de ses dérivées successives, i.e.

$$J(x) = f(r, \dot{r}, \ddot{r}, \dots) \quad (4.4)$$

La dynamique du système, peut, après transformation du vecteur d'état (Khalil, 2002), s'écrire comme :

$$r^{(n)} = \alpha(x) + \beta(x)u, \quad \beta(x) \neq 0 \quad (4.5)$$

Un simple correcteur basé sur l'inversion exacte est utilisé pour la commande du système, i.e.

$$u = \frac{(-\alpha(x) + r_{ref}^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} K_i (r_{ref}^{(i)} - r^{(i)}))}{\beta(x)} \quad (4.6)$$

#### 4.1.3 Commande extrémale d'un système différentiellement plat

À l'équilibre du système, les variables d'état ainsi que l'entrée du système sont des fonctions de la référence  $r_{ref}$ . La fonction coût peut donc s'écrire

$$J(x(r_{ref}), r_{ref}) = J(r_{ref}) \quad (4.7)$$

Pour la résolution en ligne de ce problème d'optimisation, une loi de commande extrémale est déduite des conditions nécessaires d'optimalité, sous l'hypothèse de convexité de la fonction objectif  $J$  :

$$\dot{r}_{ref} = -\bar{k} \frac{\partial J}{\partial r_{ref}} \quad (4.8)$$

Le schéma présenté à la Figure (4.1) est une version modifiée de celui proposé par Krstic and Wang (2000). Ainsi, le filtre passe-haut n'est plus utilisé et le filtre passe-bas est d'ordre supérieur. L'utilisation d'un filtre passe-bas d'ordre  $n$  est motivé par la nécessité de pouvoir évaluer  $r_{ref}^{(n)}$  de manière causale.

Comme dans le cas de la commande extrémale par la méthode des perturbations classique, la fonction objectif incluant la dynamique du système, ( $y = J(x, r)$ ) est supposée directement mesurable. Cette sortie mesurée est modulée par le même signal d'excitation injecté à l'entrée du système. Un filtre passe-bas d'ordre  $n$  constitué de  $n$  cellules élémentaires d'égales fréquences de coupure  $\omega_c$  et de sortie  $\beta_i$  permet d'éliminer les oscillations résiduelles et d'extraire le gradient requis  $\beta_n = \frac{\partial J}{\partial r_{ref}}$ . Finalement, un contrôleur intégral de gain  $k\omega_c$  conduit ce gradient estimé à zéro.

Le schéma de commande s'écrit

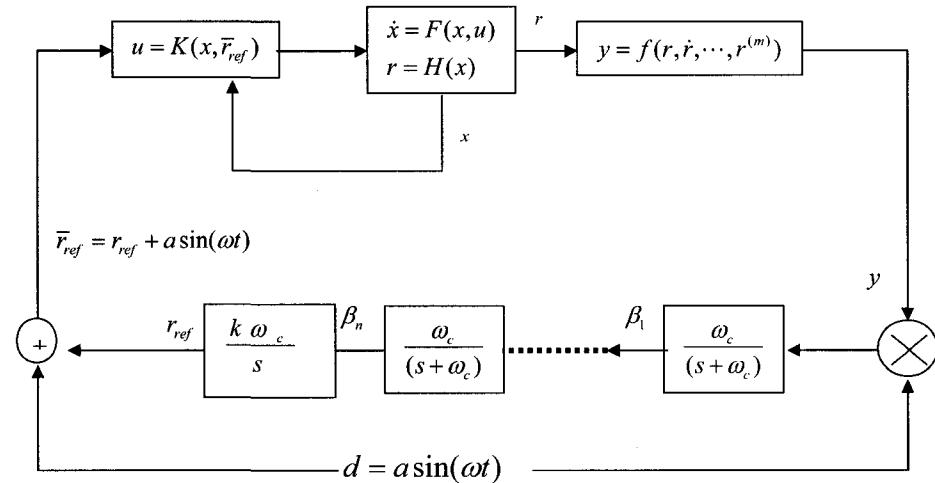


FIGURE 4.1 Commande extrémale par la méthode des perturbations.  $K$  est un opérateur dynamique fonction des dérivées de  $\bar{r}_{ref}$ .

$$\dot{\beta}_1 = -\omega_c(\beta_1 - f(r, \dot{r}, \ddot{r}, \dots)d) \quad (4.9)$$

$$\dot{\beta}_i = -\omega_c(\beta_i - \beta_{i-1}), \quad i = 2, \dots, n \quad (4.10)$$

$$\dot{r}_{ref} = -k\omega_c\beta_n \quad (4.11)$$

$$\bar{r}_{ref} = r_{ref} + d, \quad d = a \sin(\omega t) \quad (4.12)$$

$$\dot{\bar{r}}_{ref} = -k\omega_c\beta_n + \dot{d} \quad (4.13)$$

$$\bar{r}_{ref}^{(i)} = k(\omega_c)^i \sum_{j=0}^{i-1} ((-1)^{j+1} C_j^{i-1} \beta_{n-j}) + d^{(i)}, \quad i = 2, \dots, n \quad (4.14)$$

$$r^{(n)} = \bar{r}_{ref}^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} K_i(\bar{r}_{ref}^{(i)} - r^{(i)}) \quad (4.15)$$

La dynamique de l'erreur de poursuite ( $\varepsilon = r - r_{ref}$ ) est :

$$\varepsilon^{(n)} = - \sum_{i=0}^{n-1} K_i \varepsilon^{(i)} - \sum_{i=0}^n K_i d^{(i)} \quad (4.16)$$

avec  $K_0 = -1$ .

La stabilité de cette erreur de poursuite dépend uniquement du choix des coefficients  $K_i$ . On notera, enfin, que le terme d'anticipation  $r_{ref}^{(n)}$  élimine, en moyenne, la partie forcée et conduit à l'obtention d'une erreur nulle, en tout temps, sous réserve d'un choix approprié des conditions initiales.

#### 4.1.4 Dynamique résiduelle

Le degré relatif ( $d_{rel}$ ) d'une sortie donnée est défini comme le plus petit ordre de dérivation faisant apparaître l'entrée de manière explicite (Isidori, 1995). Le degré relatif d'une sortie plate pour la classe des systèmes mono-entrée, mono-sortie coïncide avec l'ordre  $n$  du système. Par ailleurs, la variable optimisée peut être exprimée comme une fonction de la sortie plate et de ses dérivées temporelles

successives :  $J(x) = f(r, \dot{r}, \ddot{r}, \dots)$ . Nous définissons le degré résiduel (dimension de la dynamique résiduelle) comme l'ordre de dérivation le plus élevé nécessaire pour reconstruire la variable optimisée i.e.  $J(x) = f(r, \dot{r}, \dots, r^{(d_{res})})$ . Le lemme ci-dessous permet de relier le degré résiduel au degré relatif

**Lemme 4** *La somme du degré relatif et du degré résiduel est égale à l'ordre du système*

$$d_{rel} + d_{res} = n.$$

*Preuve :*

La dérivée temporelle d'ordre  $i$  de  $J(x)$  est donnée par :

$$J^{(i)}(x) = f_1(r, \dot{r}, \dots, r^{(d_{res}+i)}) \quad (4.17)$$

La dérivée d'ordre  $d_{rel}$  de  $J(x)$  s'écrit donc :

$$J^{(d_{rel})}(x) = f_2(r, \dot{r}, \dots, r^{(d_{res}+d_{rel})}) \quad (4.18)$$

$J^{(d_{rel})}(x)$  étant, par la définition du degré relatif, une fonction explicite de l'entrée,  $r^{(d_{res}+d_{rel})}$  est une fonction explicite de l'entrée. Comme le degré relatif de  $r$  est  $n$ ,  $d_{res} + d_{rel} \geq n$ . Par ailleurs,  $J^{(d_{rel}-1)}(x)$  n'est pas une fonction explicite de l'entrée donc  $d_{res} + d_{rel} - 1 < n$  i.e.  $d_{res} + d_{rel} \leq n$ . Il s'ensuit que  $d_{res} + d_{rel} = n$ .  $\square$

Dans le cas d'un système linéaire,  $d_{res}$  correspond au nombre de zéros et la condition  $d_{rel} + d_{res} = n$  est effectivement la définition du degré relatif. Le Lemme 1 montre que la dynamique résiduelle coincide exactement avec la dynamique interne si la sortie du système est  $J(x)$ . Notons que ce résultat est une conséquence directe du Lemme 4 dans Hagenmeyer and Zeitz (2004).

## 4.2 Analyse de la commande extrémale de systèmes différentiellement plats commandés

Nous montrons, dans cette section, que pour un système différentiellement plat pour lequel le degré résiduel de la variable optimisée est 0 ou 1, la vitesse de convergence peut être fixée arbitrairement. Cependant, une vitesse de convergence arbitraire ne peut plus être obtenue si le degré relatif est supérieur à 1.

**Théorème 3** *Soit un système plat avec une loi de commande donnée par (4.6) et une loi de commande extrémale donnée par (4.9)-(4.15). Il existe une valeur de l'amplitude ( $a$ ), de la fréquence ( $\omega$ ) du signal d'excitation, de la fréquence de coupure ( $\omega_c$ ) et du gain d'adaptation de la commande ( $k$ ) tels qu'une vitesse de convergence arbitrairement fixée et une précision donnée puissent être localement obtenues, si et seulement si le degré résiduel de la variable à optimiser est inférieur ou égal à 1.*

*Preuve :*

*Commande parfaite du système plat :* De par la propriété de platitude du système, une commande parfaite de la sortie peut être réalisée en utilisant (4.6), i.e.,

$$r = r_{ref} + d \quad (4.19)$$

$$\dot{r} = \dot{r}_{ref} + \dot{d} \quad (4.20)$$

$$r^{(i)} = r_{ref}^{(i)} + d^{(i)} \quad (4.21)$$

Si une commande parfaite transforme la relation initialement dynamique entre  $r_{ref}$  et  $r$  en une relation statique, la relation entre  $r$  et  $J$  reste, elle, dynamique. Les dérivées successives de  $r$  étant des fonction des  $\beta_i$ , la dynamique résiduelle peut s'exprimer comme une fonction des  $\beta_i$  et sera formulée comme telle dans l'analyse qui suit.

*Moyennage* : Le théorème de la moyenne (Khalil, 2002) est utilisé après reformulation de la dynamique résiduelle. Le système moyenné s'écrit :

$$\dot{\beta}_1^a = -\omega_c \left( \beta_1^a - \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (fd) d\tau \right) \quad (4.22)$$

$$\dot{\beta}_i^a = -\omega_c (\beta_i^a - \beta_{i-1}^a), \quad i = 2, \dots, n \quad (4.23)$$

$$\dot{r}_{ref}^a = -k\omega_c \beta_n^a \quad (4.24)$$

*Développement en série de Taylor* : Un développement au second ordre de la sortie du système autour de l'optimum statique  $(r^*, 0, 0)$  s'écrit :

$$f(r_{ref} + d, r_{ref} + \dot{d}, \dots, r_{ref}^{(d_{res})} + d^{(d_{res})}) = \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} & f(r^*, 0, 0) + \sum_{i=0}^{d_{res}} \frac{\partial f}{\partial r^{(i)}} (\tilde{r} + d)^{(i)} + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{d_{res}} \sum_{j=0}^{d_{res}} \frac{\partial^2 f}{\partial r^{(i)} \partial r^{(j)}} (\tilde{r} + d)^{(i)} (\tilde{r} + d)^{(j)} + \\ & O \left( \sum_{i=0}^{d_{res}} \sum_{j=0}^{d_{res}} \sum_{k=0}^{d_{res}} (\tilde{r} + d)^{(i)} (\tilde{r} + d)^{(j)} (\tilde{r} + d)^{(k)} \right) \end{aligned}$$

avec  $\tilde{r} = r_{ref} - r^*$  et  $\tilde{r}^{(i)} = r_{ref}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$

le dernier terme du membre de droite représente l'erreur d'approximation du développement en série.

*Moyennage du développement en série de Taylor* : Avec  $d = a \sin(\omega t)$ , l'intégrale

dans (4.22) s'écrit :

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (fd) d\tau = \gamma + \sum_{i=0}^{d_{res}} \gamma_i \tilde{r}^{(i)} + O(a^4) + \bar{\epsilon} \quad (4.26)$$

$$\gamma = \frac{a^2}{2} \sum_{j=1}^{\text{floor}(d_{res}/2)} \frac{\partial f}{\partial r^{(2j)}} \omega^{2j} \quad (4.27)$$

$$\gamma_i = \frac{a^2}{2} \sum_{j=0}^{\text{floor}(d_{res}/2)} \frac{\partial^2 f}{\partial r^{(i)} \partial r^{(2j)}} \omega^{2j} \quad (4.28)$$

$$\bar{\epsilon} = O \left( a^2 \sum_{i=0}^{d_{res}} \sum_{j=0}^{d_{res}} \tilde{r}^{(i)} \tilde{r}^{(j)} \right) \quad (4.29)$$

avec  $\text{floor}(i/2) = i/2$  pour  $i$  pair et  $\text{floor}(i/2) = (i-1)/2$  pour  $i$  impair. L'expression de  $\tilde{r}^{(i)}$  en fonction de  $\beta_i$  utilise les relations (4.13)-(4.14) et est donnée par,

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_1^a &= -\omega_c (\beta_1^a + O(a^4) + \bar{\epsilon} + \gamma + \gamma_0(r_{ref}^a - r^*)) \\ &\quad - \omega_c k \sum_{j=1}^n \eta_j \beta_j^a \\ \dot{\beta}_i^a &= -\omega_c (\beta_i^a - \beta_{i-1}^a), \quad i = 2, \dots, n \\ \dot{r}_{ref}^a &= -k\omega_c \beta_n^a \end{aligned} \quad (4.30)$$

avec  $\eta = M\Gamma$ ,  $\eta = [\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_n]^T$ ,  $\Gamma = [\gamma_1 \omega_c \ \gamma_2 \omega_c^2 \ \dots \ \gamma_{d_{res}} \omega_c^{d_{res}}]^T$  et

$$M_{ij} = \begin{cases} (-1)^i C_{i-1}^{j-1} & \text{for } i+j > n \\ 0 & \text{for } i+j \leq n \end{cases}$$

*Expression en forme standard* : L'équation ci-dessus peut être écrite comme :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \omega_c(Ax + B(\gamma - \gamma_0 r^* + O(a^4)) + B\bar{\epsilon}) & (4.31) \\ x &= \begin{bmatrix} \beta_1^a & \beta_2^a & \cdots & \beta_n^a & r_{ref}^a \end{bmatrix}^T \\ A &= \begin{bmatrix} (-1 + k\eta_1) & k\eta_2 & k\eta_3 & \cdots & k\eta_{n-1} & k\eta_n & \gamma_0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

*Changement d'échelle de temps* : En considérant l'évolution du système bouclé dans l'échelle de temps de la perturbation  $\tau = wt$  et  $\delta = \frac{\omega_c}{\omega}$ , la dynamique du système devient

$$\frac{dx}{d\tau} = \delta Ax + \delta B(\gamma - \gamma_0 r^* + O(a^4)) + \delta B\bar{\epsilon} \quad (4.32)$$

*Stabilité du système linéarisé* : Les valeurs propres de  $A$  peuvent déterminées par résolution de l'équation  $\det(sI - A) = 0$  et l'on peut vérifier que le déterminant possède la structure suivante

$$\det(sI - A) = s(s + 1)^n + k\gamma_0 + k \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i s^i \quad (4.33)$$

Pour  $k = 0$ , le polynôme caractéristique possède une racine à l'origine du plan complexe et  $n$  racines à  $s = -1$ . Par continuité, pour  $k > 0$ ,  $k \rightarrow 0$ , la racine perturbée reste dans le voisinage de celle non perturbée. Pour des valeurs de  $k$  faibles, les racines au voisinage de  $s = -1$  restent stables et donc seul le comportement de la racine à l'origine doit être analysé. Soit pour  $k \rightarrow 0$ ,  $r_1 \rightarrow 0$  la racine au voisinage

de l'origine. Cette racine étant solution de l'équation caractéristique, i.e.,

$$r_1(r_1 + 1)^n + k\gamma_0 + k \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i r_1^i = 0 \quad (4.34)$$

Comme  $r_1 \rightarrow 0$ , les termes d'ordre supérieur peuvent être négligés il s'ensuit,

$$r_1 = -\frac{k\gamma_0}{1 + k\alpha_1} \quad (4.35)$$

Si  $\gamma_0 > 0$ , alors le système est stable pour des valeurs suffisamment faibles de  $k$ . De plus, le système est instable pour des valeurs positives de  $k$  si  $\gamma_0 < 0$ .

*Stabilité du système non linéaire :* Soit  $S_{ls}$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^{n+1}$  pour lequel la condition de stabilité du système linéarisé est satisfaite. Dans l'équation (4.32),  $\bar{\epsilon}$  contient des termes d'ordre 2 et plus,  $\bar{\epsilon} = O(\|x\|^2)$ , il existe un sous-ensemble compact  $S_{nls}$  inclus dans  $S_{ls}$  et tel que  $\bar{\epsilon} < c\|x\|$  avec  $c$  constante positive. De par le Lemme 9.1 dans Khalil (2002) sur les perturbations évanescentes ("vanishing perturbations"), il s'ensuit que la stabilité locale du système non linéaire (4.31) découle directement de la stabilité de sa partie linéaire.

*Précision :* Le point d'équilibre du système moyené est donné par,

$$(\beta_i^a)_{equ} = 0 \quad (4.36)$$

$$(r_{ref}^a)_{equ} = r^* - \frac{\gamma + O(a^4)}{\gamma_0} \quad (4.37)$$

$$(r_{ref}^a)_{equ} - r^* = -\frac{O(a^2) + \sum_{j=1}^{\text{floor}(d_{res}/2)} \frac{\partial f}{\partial r^{(2j)}} \omega^{2j}}{\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \sum_{j=1}^{\text{floor}(d_{res}/2)} \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial r^{(2j)}} \omega^{2j}}$$

*Résultats – Condition suffisante – Cas d'un degré résiduel 0 ou 1 :* si la dimension de la dynamique résiduelle est 0 ou 1, ( $d_{res} \leq 1$ ),  $\gamma = 0$ ,  $\gamma_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} > 0$  (Hessien au point minimum). De plus,  $\gamma_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \dot{r}}$  pour  $d_{res} = 1$  et  $\gamma_1 = 0$  pour  $d_{res} = 0$ . tous les autres termes  $\gamma_i$  sont nuls. Comme  $\gamma_0 > 0$ , une valeur de  $k$  peut être choisie pour stabiliser le système. Soit  $\lambda_{min} > 0$ , la plus petite valeur propre de  $(-A)$ ,

alors le système converge exponentiellement avec une vitesse donnée par  $e^{-\lambda_{min}\delta\tau} = e^{-\lambda_{min}\delta\omega t}$ . Comme  $\gamma$ ,  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  sont indépendants de  $\omega$ ,  $A$  et  $\lambda_{min}$  ne sont pas fonction de  $\omega$ . Ce résultat signifie qu'une fréquence d'excitation peut être choisie arbitrairement haute.

Concernant la précision, si  $d_{res} \leq 1$ , le point d'équilibre est indépendant de la fréquence. La distance entre ce point d'équilibre et l'optimum recherché  $((r_{ref}^a)_{equ} - r^*)$  étant uniquement proportionnelle à  $O(a^2)$ , cette erreur peut être rendue arbitrairement faible par un choix approprié de l'amplitude du signal d'excitation.

*Résultats – Condition nécessaire – Cas d'un degré résiduel supérieur à 1 :* Si la dynamique résiduelle est de dimension supérieure à 1 ( $d_{res} > 1$ ), dans l'équation (4.32) tous les termes  $\gamma_i$  définis par (4.28) sont fonction de la fréquence d'excitation  $\omega$ . Considérons en particulier  $\gamma_0$  : le premier terme  $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$  est par définition le Hessien de la fonction objectif  $J$  et est positif par l'hypothèse de convexité de  $J$ . Cependant, du fait de la présence de termes additionnels, il peut être seulement conclu qu'il existe une gamme de fréquences  $\omega$  telles que  $\gamma_0 > 0$ . Le système est donc stable uniquement à l'intérieur de cette gamme et instable à l'extérieur. Il s'ensuit qu'il existe une fréquence d'excitation maximale pouvant être utilisée sans déstabiliser le système et donc une limitation de la vitesse de convergence.

Concernant la précision, si  $d_{res} > 1$ , le point d'équilibre possède des termes qui dépendent seulement de la fréquence d'excitation (et non d'un produit amplitude-fréquence d'excitation) qui ne tendent pas vers zéro pour  $a \rightarrow 0$ . La fréquence d'excitation maximale utilisable n'est pas seulement limitée par des considérations de stabilité mais aussi de précision.  $\square$

### 4.3 Exemple illustratif

#### 4.3.1 Description du système

Nous reprenons, dans la suite, l'exemple décrit en (2.4.1) et constitué d'un système réactif isotherme dans un réacteur continu infiniment mélangé. Cet exemple nous permet d'illustrer l'effet de la dimension de la dynamique résiduelle sur la précision obtenue sur la commande optimale. Dans le premier cas, la sortie optimisée est  $J_1 = C_B$  (avec  $d_{res} = 1$ ). Dans le second, c'est la fonction objectif  $J_2 = DC_B^2$  (avec  $d_{res} = 2$ ) qui est optimisée.

- Objectif :
  - Cas 1 : Maximisation de la concentration du produit  $B$ ,  $C_B$ .
  - Cas 2 : Maximisation de la fonction objectif  $DC_B^2$ .
- Variable manipulée : Boucle interne –  $D$ , Boucle externe –  $r_{ref}$ .
- Variable commandée : Boucle interne –  $r = \frac{C_B}{C_{Ain} - CA} \equiv$  sortie plate .

#### 4.3.2 Résultats de simulations

*Précision de la commande optimale* : Les Figures 4.4 et 4.9 illustrent l'évolution du point d'équilibre de la commande extrémale par la méthode des perturbations pour une fréquence d'excitation variable. L'axe des ordonnées est une moyenne temporelle du taux de dilution. Cette moyenne est calculée sur une fenêtre de taille fixe à la fin de l'optimisation. Sur chacune des figures, la courbe en trait plein représente les valeurs à l'équilibre de cette moyenne en l'absence de boucle interne de commande. La courbe en trait pointillés représente, elle, cette même moyenne, dans le cas d'une commande parfaite réalisée par la boucle interne.

Le scénario illustré par la Figure 4.4 correspond au cas d'un degré résiduel égal

à 1. Pour ce cas, l'erreur due à la fréquence est complètement compensée et, en excluant les erreurs numériques liées au moyennage temporel décrit ci-dessus, aucune déviation par rapport à l'optimum n'est observée. Il s'ensuit que pour cette catégorie de systèmes, une fréquence d'excitation choisie arbitrairement élevée peut être utilisée et donc une accélération de la vitesse de convergence est réalisable. Ainsi, en comparant les Figures 4.3 et 4.2 qui correspondent respectivement aux scénarios avec et sans commande en cascade pour une fréquence d'excitation de  $1h^{-1}$ , on observe clairement que l'accélération du système par commande cascade entraîne une compensation de l'erreur sur la position du point d'équilibre due à la fréquence.

Concernant la seconde fonction objectif, le degré résiduel est de 2 et comme le montre la Figure 4.9, l'introduction d'une boucle interne de commande dégrade les performances de la commande extrémale. Pour les valeurs de fréquences au delà de  $2 h^{-1}$ , l'erreur obtenue en présence d'une boucle interne de commande est supérieure à celle sans commande. Ceci peut être expliqué par l'examen de la dynamique du système linéarisé. Ainsi, dans le cas  $d_{res} = 1$ , la fonction de transfert obtenue possède un zéro unique dont la position à l'optimum est l'origine du plan complexe. Ce zéro introduit un déphasage de  $\pi/2$ , non corrélé avec le signal d'excitation. Par contre dans le cas  $d_{res} = 2$ , deux zéros sont présents dans la fonction de transfert du système linéarisé. Si l'un de ces deux zéros est situé à l'origine du plan complexe, le second, ne l'est pas et est responsable de l'erreur mentionnée ci-dessus.

Dans la gamme de fréquences  $2 h^{-1}$  à  $6 h^{-1}$ , les pôles présents dans la dynamique du système linéarisé compensent l'effet du second zéro. Cependant, l'introduction d'une commande parfaite dans la boucle interne compense ces pôles et l'effet du second zéro est alors dominant et conduit donc à l'erreur observée sur la Figure 4.9.

*Accélération de la convergence par introduction d'une boucle interne de commande :*  
Il est important de relever que, comme établi par le Théorème 3, la vitesse de

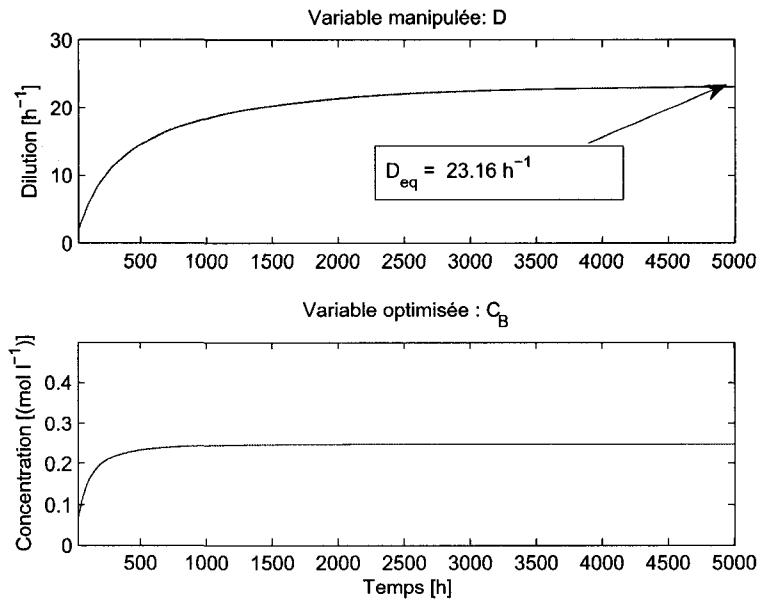


FIGURE 4.2 Fréquence d'excitation =  $1 \text{ h}^{-1}$ , sans commande en cascade,  $J_1 = C_B$  ( $d_{int} = 1$ ).

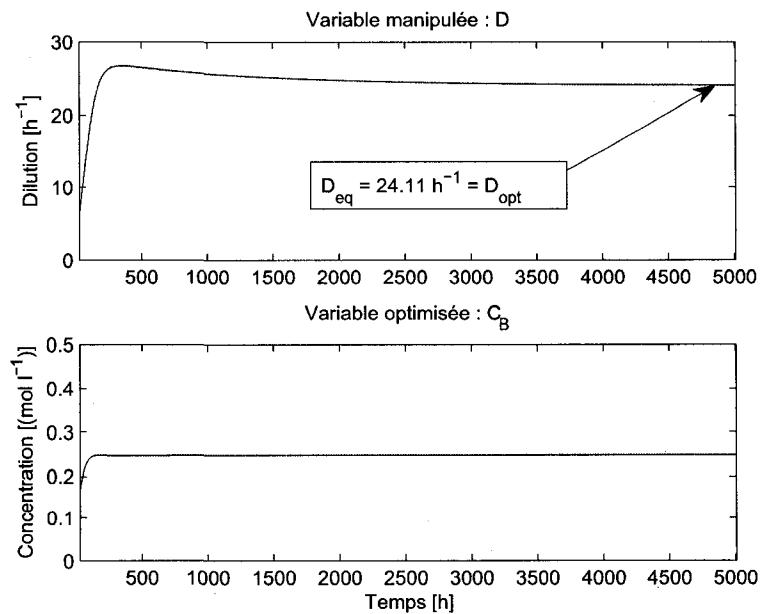


FIGURE 4.3 Fréquence d'excitation =  $1 \text{ h}^{-1}$ , avec commande en cascade,  $J_1 = C_B$  ( $d_{int} = 1$ ).

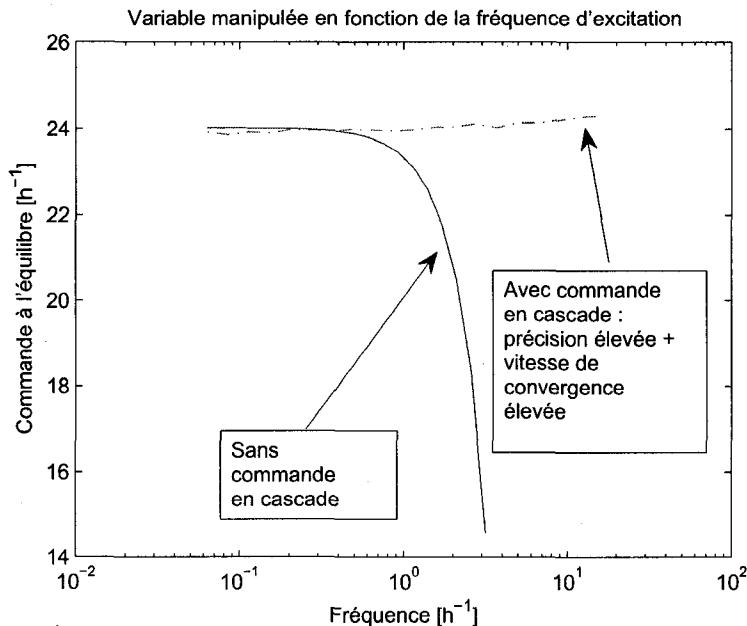


FIGURE 4.4 Évolution de la solution en fonction de la fréquence d'excitation,  $J_1 = C_B$  ( $d_{int} = 1.$ )

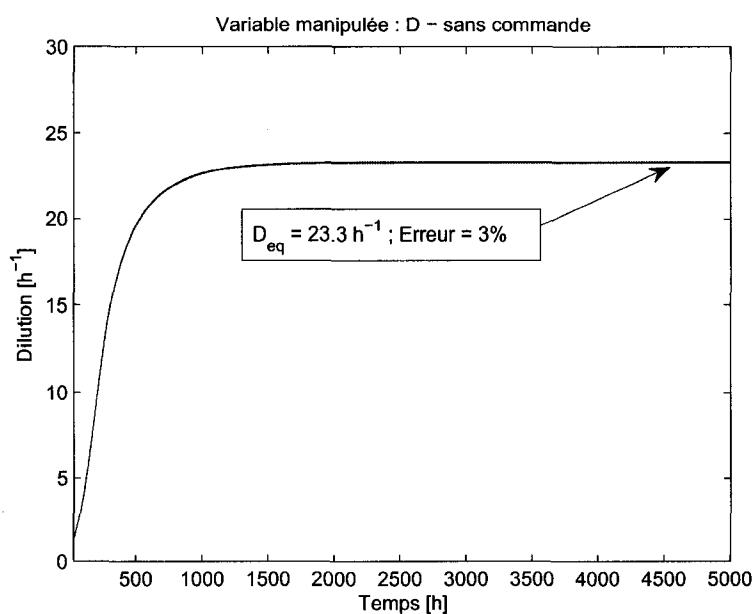


FIGURE 4.5 Fréquence d'excitation =  $1 h^{-1}$ , Précision = 3%, sans commande en cascade,  $J_1 = C_B$  ( $d_{int} = 1.$ ).

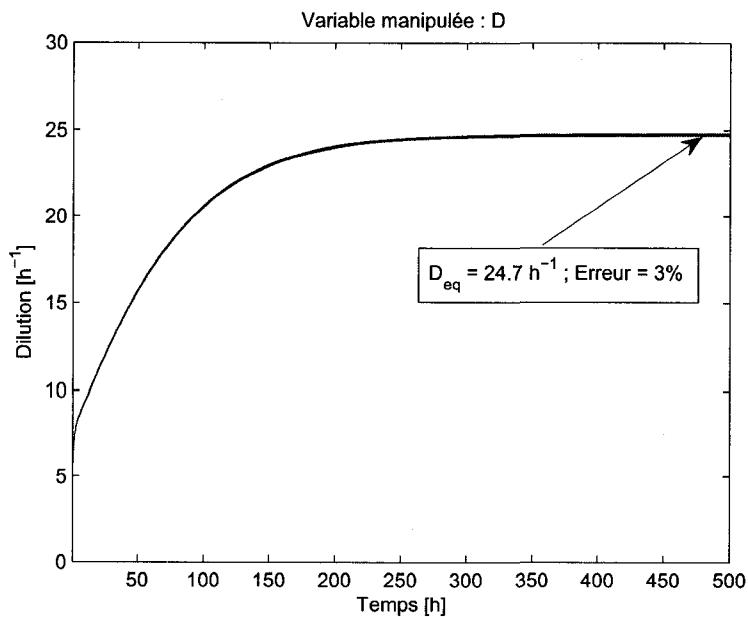


FIGURE 4.6 Fréquence d'excitation =  $6 \text{ h}^{-1}$ , Précision = 3%, avec commande en cascade,  $J_1 = C_B$  ( $d_{int} = 1$ ).

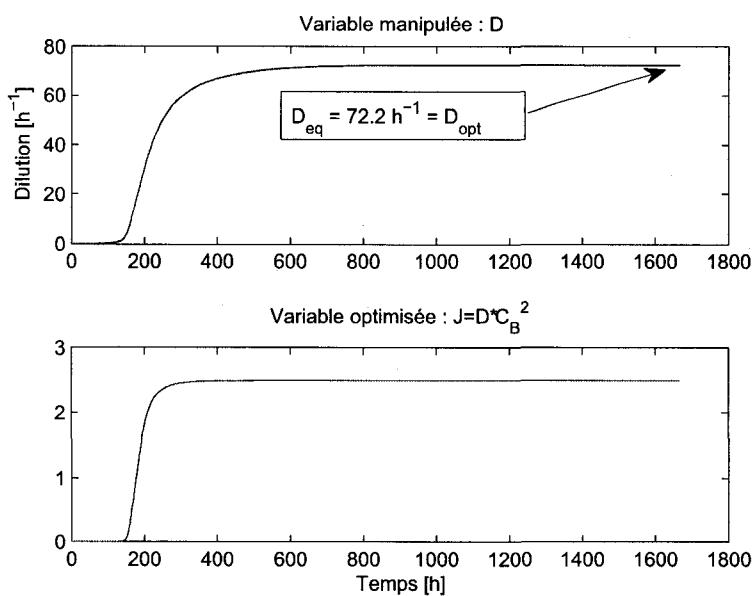


FIGURE 4.7 Fréquence d'excitation =  $3 \text{ h}^{-1}$ , sans commande en cascade,  $J_2 = D C_B^2$  ( $d_{int} = 2$ ).

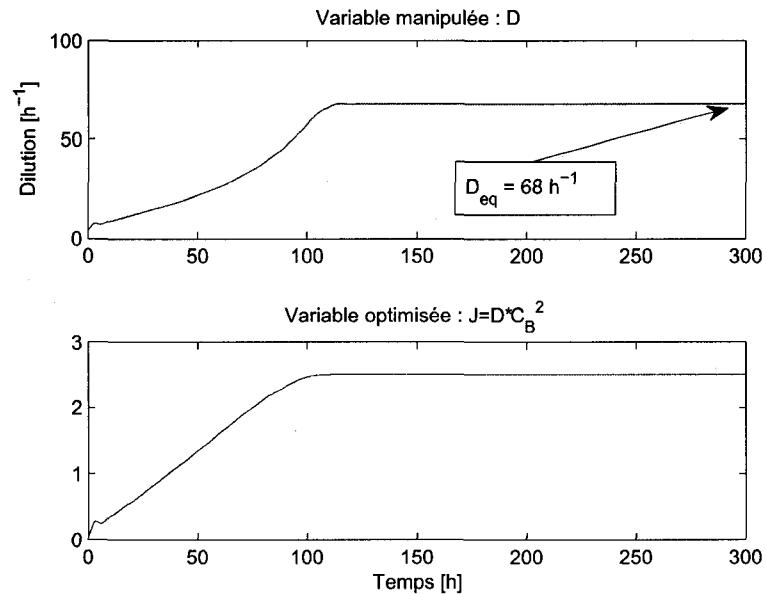


FIGURE 4.8 Fréquence d'excitation =  $3 \text{ h}^{-1}$ , avec commande en cascade,  $J_2 = DC_B^2 (d_{int} = 2)$ .

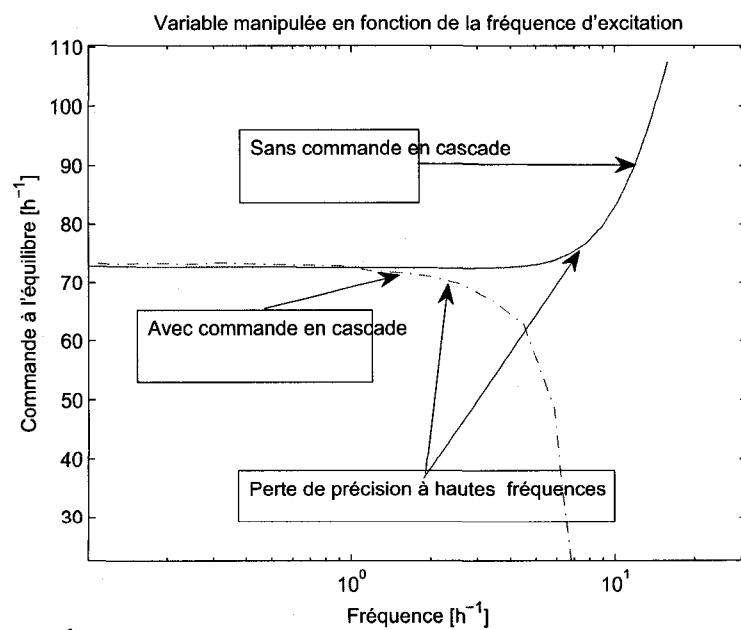


FIGURE 4.9 Évolution de la solution en fonction de la fréquence d'excitation,  $J_2 = DC_B^2 (d_{int} = 2)$ .

convergence est directement reliée à l'inverse de la fréquence du signal d'excitation. Soit une précision sur le taux de dilution fixée à 3% en moyenne. Dans le cas avec degré résiduel égal à 1 ( $J_1 = C_B$ ), la précision imposée est obtenue pour une vitesse de convergence maximale de  $1 \text{ h}^{-1}$  en l'absence d'une boucle interne de commande (Figure 4.9). L'addition d'une boucle interne de commande permet d'accroître la fréquence d'excitation à  $6 \text{ h}^{-1}$  (Figure 4.9). Dans le cas avec degré résiduel égal à 2 ( $J_2 = DC_B^2$ ), le phénomène opposé est observé : ainsi, pour le système sans boucle de commande interne une précision de 1.5% en moyenne est obtenue pour une fréquence du signal d'excitation de  $3 \text{ h}^{-1}$ , tandis qu'en présence d'une boucle de commande interne, la même fréquence d'excitation de  $3 \text{ h}^{-1}$  conduit à une précision de 7%.

#### 4.4 Conclusions

Cette partie de la thèse a montré les limitations des stratégies de contrôle en terme d'améliorations des performances (soit l'augmentation de la bande passante et la réduction de l'erreur de position) de la commande extrémale par la méthode des perturbations. Ainsi, une commande par anticipation/rétroaction permet d'obtenir une vitesse de convergence arbitrairement élevée pour un niveau de précision donné uniquement pour une classe limitée de systèmes non linéaires : ceux pour lesquels la dynamique résiduelle est de dimension inférieure ou égale à 1. Dans le cas où la dimension de la dynamique résiduelle est supérieure à 1, une boucle interne de commande peut au contraire dégrader les performances de la boucle de commande extrémale par une amplification de l'erreur et un ralentissement de la vitesse de convergence.

## CHAPITRE 5

### ADÉQUATION DE MODÈLES POUR UNE OPTIMISATION PRÉCISE VIA LA COMMANDE EXTRÉMALE

Nous avons présenté au Chapitre 1 divers algorithmes d'optimisation en temps réel et les avons classés selon l'ordre de complexité du modèle utilisé pour l'évaluation de la commande optimisante dans le cas des schémas R.T.O. standard ou pour celle du gradient de la fonction objectif dans le cas des schémas R.T.O. par commande extrémale. Dans ce chapitre nous analysons l'impact de l'ordre du modèle utilisé sur la précision de la commande obtenue. Il apparaît que dans le cas où une mesure de la fonction objectif est disponible et sous l'hypothèse d'une excitation d'amplitude et de fréquence suffisamment faibles, la précision obtenue sur la commande optimisante est indépendante du degré du modèle utilisé. Ce résultat signifie qu'un modèle de degré minimal (ordre 1) est suffisant pour garantir la convergence de la sortie à son optimum avec une précision d'ordre donné.

#### 5.1 Commande extrémale adaptative avec modèle statique

Dans cette section, nous démontrons que dans le cas d'un système non-linéaire général, la distance entre l'optimum et le point d'équilibre est proportionnelle au carré de l'amplitude et au carré de la fréquence indépendamment du degré du modèle statique utilisé.

Soit le schéma de commande extrémale adaptative constitué d'une loi de gradient

pour la synthèse de la commande optimisante

$$\dot{\hat{u}} = -\Gamma_o \frac{d\hat{y}}{du} \quad (5.1)$$

$$u = \hat{u} + d \quad (5.2)$$

avec

$$d = a \sin(\omega t) \quad (5.3)$$

et  $\Gamma_o$  gain d'adaptation de la commande.

La mise à jour des paramètres est effectuée selon une loi de moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli qui s'écrit

$$\dot{\hat{\theta}} = -R^{-1}\varphi\varepsilon \quad (5.4)$$

$$\dot{\hat{R}} = -\lambda R + \varphi^T \varphi \quad (5.5)$$

avec  $\varepsilon = (y - \hat{y})$  erreur d'estimation,  $\hat{y} = \varphi^T \hat{\theta}$  un modèle de la sortie, linéaire vis à vis des paramètres  $\hat{\theta}$  et enfin  $\lambda$  facteur d'oubli.

Cette paramétrisation de  $y$  permet d'écrire les lois d'adaptation de la commande et des paramètres comme

$$\dot{\hat{u}} = -\Gamma_o \frac{\partial \varphi}{\partial u} \hat{\theta} \quad (5.6)$$

$$\dot{\hat{R}} = -\lambda R + \varphi^T \varphi \quad (5.7)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -R^{-1}(\varphi y - \varphi \varphi^T \hat{\theta}) \quad (5.8)$$

Le système moyenné pour les trois états ( $\hat{u}$ ,  $\hat{R}$ , et  $\hat{\theta}$ ) est obtenu en prenant la moyenne du membre de droite de l'équation sur l'intervalle  $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$ . Les états moyens

sont notés  $(\cdot)^a$ . Le système moyenné (Khalil, 2002) s'écrit

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{u}^a \\ \hat{R}^a \\ \hat{\theta}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Gamma_o \frac{\partial \varphi}{\partial u} \hat{\theta}^a \\ -\lambda \hat{R}^a + \int_o^{\frac{2\pi}{\omega}} \varphi^T \varphi dt \\ -\int_o^{\frac{2\pi}{\omega}} (\hat{R}^a)^{-1} (\varphi y - \varphi \varphi^T \hat{\theta}^a) dt \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Les conditions d'équilibre du système moyenné sont

$$\int_o^{\frac{2\pi}{\omega}} \varphi y dt = \left( \int_o^{\frac{2\pi}{\omega}} \varphi \varphi^T dt \right) \theta^a \quad (5.10)$$

$$\hat{R}^a = \frac{1}{\lambda} \int_o^{\frac{2\pi}{\omega}} \varphi^T \varphi dt \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial \varphi^T}{\partial u} \theta^a = 0 \quad (5.12)$$

On note que le point d'équilibre de la seconde variable  $\hat{R}$  est  $\hat{R}^a = \int_o^{\frac{2\pi}{\omega}} \varphi^T \varphi dt$  et que ce terme est par suite de la condition de persistence d'excitation (Anderson et al., 1986) défini positif, garantissant ainsi l'existence d'un inverse  $(\hat{R}^a)^{-1}$ .

**Théorème 4** *Le point d'équilibre du système moyenné tel que décrit par (5.9) et déterminé par (5.10) à (5.12) est obtenu avec une précision d'ordre  $O([\omega^2 a^2])$  quel que soit le degré du modèle statique utilisé par l'algorithme de commande extrémale.*

*Preuve :* Le développement au second ordre du terme  $\int_o^{\frac{2\pi}{\omega}} \varphi \varphi^T dt$  autour du point courant  $\hat{u}$  s'écrit

$$\begin{aligned} \int_o^{\frac{2\pi}{\omega}} \varphi \varphi^T dt &= \int_o^{\frac{2\pi}{\omega}} \left( \varphi(\hat{u}) + d \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Big|_{u=\hat{u}} + \frac{1}{2} d^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \Big|_{u=\hat{u}} + O(a^3) \right) \\ &\quad \left( \varphi(\hat{u}) + d \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Big|_{u=\hat{u}} + \frac{1}{2} d^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \Big|_{u=\hat{u}} + O(a^3) \right)^T dt \end{aligned} \quad (5.13)$$

Après simplification des termes nuls en moyenne et en notant que

$$\frac{d^2}{2} \left( \varphi(\hat{u}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \Big|_{u=\hat{u}}^T + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \Big|_{u=\hat{u}} \varphi(\hat{u}) \right) = O(a^2) \quad (5.14)$$

on obtient

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \varphi \varphi^T dt = \left( \varphi(\hat{u}) \varphi(\hat{u})^T + \frac{a^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Big|_{u=\hat{u}} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Big|_{u=\hat{u}}^T + \frac{3a^4}{32} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \Big|_{u=\hat{u}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \Big|_{u=\hat{u}}^T + O(a^2) \right) \quad (5.15)$$

en posant

$$\begin{aligned} M &\equiv [M_1 \ M_2 \ M_3] \\ &\equiv \left[ \varphi(\hat{u}) \quad \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Big|_{u=\hat{u}} \quad \frac{3a^2}{\sqrt{32}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \Big|_{u=\hat{u}} \right] \end{aligned} \quad (5.16)$$

l'Équation 5.15 s'écrit

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \varphi \varphi^T dt = MM^T + O(a^2) \quad (5.17)$$

en combinant les Équations (5.10) et (5.12), on obtient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \Big|_{u=\hat{u}}^T \left( \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \varphi \varphi^T dt \right)^{-1} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \varphi y dt = 0 \quad (5.18)$$

en développant le terme  $\varphi$  au premier ordre, cette équation peut s'écrire

$$\frac{\sqrt{2}}{a} M_2^T (MM^T)^{-1} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left( \varphi(\hat{u}) + d \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Big|_{u=\hat{u}} + O(a^2) \right) y dt + O(a^2) = 0 \quad (5.19)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{a} M_2^T (MM^T)^{-1} M_1 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} y dt + \frac{2}{a^2} M_2^T (MM^T)^{-1} M_2 \sqrt{2} a \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} y d dt + O(a^2) = 0 \quad (5.20)$$

en utilisant la propriété suivante (une preuve de cette propriété est donnée à l'Annexe)

nexe I)

$$\begin{aligned} M_i(MM^T)^{-1}M_j &= 0 \quad \forall i \neq j \\ M_i(MM^T)^{-1}M_i &= 1 \quad \forall i \end{aligned} \quad (5.21)$$

on obtient

$$\frac{2}{a^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} yddt + O(a^2) = 0 \quad (5.22)$$

et donc

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} yddt = O(a^4) \quad (5.23)$$

Cette équation est identique à l'ordre 4 près, à la condition d'équilibre (2.30) utilisée au Chapitre 2 pour l'analyse de la précision sur la commande optimisante pour la méthode de commande extrémale par la méthode des perturbations. Le même raisonnement que celui utilisé en (2.3.1) est donc repris ci-dessous.

En développant le terme  $y = P(u)$  autour de l'optimum  $u^*$  et en notant  $\tilde{u} = \hat{u} - u^*$  et  $d = a\sin(\omega t)$  on obtient

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left( P|_{u=u^*} + P'|_{u=u^*}(\tilde{u} + d) + \frac{1}{2}P''|_{u=u^*}(\tilde{u} + d)^2 + O(\tilde{u} + d)^3 \right) ddt = O(a^4) \quad (5.24)$$

Pour démontrer que  $O(\tilde{u} + d)^3 = O(a)^3$  nous procédon, comme en (2.3.1) au développement en série de Taylor de la variable d'écart  $P(\hat{u} + d)$  autour du point d'équilibre  $\hat{u}$ .

$$P(\hat{u} + d) = P|_{u=\hat{u}} + P'|_{u=\hat{u}}d + \frac{1}{2}P''|_{u=\hat{u}}d^2 + O(a^3) \quad (5.25)$$

En substituant ce développement dans la condition d'équilibre (5.23), on obtient

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P(\hat{u} + d) dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left( P|_{u=\hat{u}} + P'|_{u=\hat{u}} d + \frac{1}{2} P''|_{u=\hat{u}} d^2 + O(a^3) \right) dt = O(a^4) \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P(\hat{u} + d) dt &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (P|_{u=\hat{u}} + aG_1(\hat{u}, \omega) \sin(\omega t + \phi_1(\hat{u}, \omega))) \\ &+ \frac{1}{4} G_2(\hat{u}, 0) + \frac{a^2}{4} G_2(\hat{u}, 2\omega) \cos(2\omega t + \phi_2(\hat{u}, 2\omega)) + O(a^3) a \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{a^2}{2} G_1(\hat{u}, \omega) \cos(\phi_1(\hat{u}, \omega)) + O(a^4) \end{aligned} \quad (5.27)$$

qui conduit à

$$G_1(\hat{u}, \omega) \cos(\phi_1(\hat{u}, \omega)) = O(a^2) \quad (5.28)$$

et donc à

$$\lim_{a \rightarrow 0} G_1(\hat{u}, \omega) \cos(\phi_1(\hat{u}, \omega)) = 0 \quad (5.29)$$

deux cas sont alors possibles

– cas(i)

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0, \forall \omega} G_1(\hat{u}, \omega) &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0, \omega \rightarrow 0} G_1(\hat{u}, \omega) &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} G_1(\hat{u}, 0) &= 0 \\ \Rightarrow \nu'(\hat{u}) &= 0 \\ \Rightarrow \hat{u} &= u^* \\ \Rightarrow \tilde{u} &= 0 \\ \Rightarrow b_0 &= 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

- cas(ii)

$$\begin{aligned}
& \lim_{a \rightarrow 0, \forall \omega} \cos(\phi_1(\hat{u}, \omega)) = 0 \\
& \Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0, \omega \rightarrow 0} \cos(\phi_1(\hat{u}, \omega)) = 0 \\
& \Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} \cos(\phi_1(\hat{u}, 0)) = 0 \\
& \Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} \phi_1(\hat{u}) = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\
& \Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} P'(\hat{u}) = \frac{sA(s)}{B(s)} \\
& \Rightarrow G_1(\hat{u}, 0) = 0 \Rightarrow \nu'(\hat{u}) = 0 \\
& \Rightarrow \hat{u} = u^* \\
& \Rightarrow \tilde{u} = 0 \\
& \Rightarrow b_0 = 0 \tag{5.31}
\end{aligned}$$

On peut donc écrire (5.24) comme

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left( P|_{u=u^*} + P'|_{u=u^*}(\tilde{u} + d) + \frac{1}{2} P''|_{u=u^*}(\tilde{u} + d)^2 + O([\omega a]^3) \right) dt = O(a^4) \tag{5.32}$$

et après élimination des termes nuls en moyenne

$$\frac{a^2}{2} G_1|_{u=u^*}(\omega) \cos(\phi_1|_{u=u^*}(\omega)) + \frac{a^2}{2} \tilde{u} G_2|_{u=u^*}(\omega) \cos(\phi_1|_{u=u^*}(\omega)) + O([\omega^3 a^4]) = O(a^4) \tag{5.33}$$

on obtient l'identité suivante

$$G_1|_{u=u^*}(\omega) \cos(\phi_1|_{u=u^*}(\omega)) + \tilde{u} G_2|_{u=u^*}(\omega) \cos(\phi_1|_{u=u^*}(\omega)) = O([\omega^3 a^2]) \tag{5.34}$$

soit

$$\tilde{u} = -\frac{G_1|_{u=u^*}(\omega) \cos(\phi_1|_{u=u^*}(\omega))}{G_2|_{u=u^*}(\omega) \cos(\phi_1|_{u=u^*}(\omega))} + O([\omega^3 a^2]) \tag{5.35}$$

Comme  $\lim_{\omega \rightarrow 0} G_1|_{u=u^*}(\omega) = G_1|_{u=u^*}(0)$  est le gain statique de la dérivée première

$\nu(\tilde{u}^*)$ , nul par définition à l'optimum alors  $G_1|_{u=u^*} = O(\omega)$ .

$C_{10} = \cos(\phi_i(\tilde{u}, 0))$  est le cosinus du déphasage introduit par  $G_1|_{u=u^*}(\omega)$  pour  $\omega \rightarrow 0$ . Soit  $N(s) = (n_0 + n_1s + n_2s^2 + \dots)$  le numérateur de la fonction de transfert représentant la dérivée première. Comme  $G_1|_{u=u^*}(0) = 0$ , alors  $n_0 = 0$ .  $s = 0$  est donc une racine de  $N(s)$  et  $s$  devient un facteur du numérateur donc  $\lim_{s \rightarrow 0} G_1|_{u=u^*}(s) \propto s$ .  $G_1|_{u=u^*}(s)$  présente donc un déphasage de  $\frac{\pi}{2}$  quand  $s \rightarrow 0$  donc  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \cos(\phi_1|_{u=u^*}(\omega))$  et donc  $\cos(\phi_1|_{u=u^*}(\omega)) = O(\omega)$ . Il s'ensuit  $G_1|_{u=u^*}(\omega) \cos(\phi_1|_{u=u^*}(\omega)) = O(\omega^2)$ .

Concernant le dénominateur,  $\lim_{\omega \rightarrow 0} G_2|_{u=u^*}(\omega) \cos(\phi_2|_{u=u^*}(\omega)) \neq 0$  comme le prouve le raisonnement par contradiction suivant :

Si  $\lim_{\omega \rightarrow 0} G_2|_{u=u^*}(\omega) = 0$  alors  $\nu''(u^*) \equiv G_2(\tilde{u}, 0) = 0$  cependant,  $\nu''(u^*) > 0$  par l'hypothèse de convexité. Si  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \cos(\phi_2|_{u=u^*}(\omega)) = 0$  alors  $\phi_2|_{u=u^*}(0) = (2k+1)\frac{\pi}{2}$  ce qui conduit à  $P''|_{u=u^*} = \frac{sB(s)}{A(s)}$  et à  $G_2|_{u=u^*}(0) = 0$  d'où  $\nu''(u^*) \equiv G_2|_{u=u^*}(0) = 0$  impossible car  $\nu''(u^*) > 0$  par l'hypothèse de convexité.

il s'ensuit  $\lim_{\omega \rightarrow 0} G_2|_{u=u^*}(\omega) \cos(\phi_2|_{u=u^*}(\omega)) \neq 0$  et

$$\tilde{u} = O(\omega^2) + O([\omega^3 a^2]) = O([\omega^2 a^2]) \quad (5.36)$$

.□

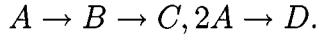
Ce résultat signifie que l'ordre du modèle utilisé, pour une amplitude et une fréquence d'excitation suffisamment faibles, n'influence pas la précision obtenue sur la commande optimisante.

## 5.2 Exemple illustratif

Nous reprenons ici l'exemple précédemment décrit à la Section 2.4.1, un système réactif isotherme dans un réacteur continu infiniment mélangé (Engell and Klatt,

1993)

– Réactions



– Modèle

Les bilans en régime transitoire sur les espèces  $A$  et  $B$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \frac{dC_A}{dt} &= D(C_{Ain} - C_A) - k_1 C_A - 2k_3 C_A^2 \\ \frac{dC_B}{dt} &= k_1 C_A - k_2 C_B - D C_B \end{aligned} \quad (5.37)$$

– Variables

- $C_X$ , concentration de l'espèce  $X$
- $C_{Ain}$ , concentration à l'entrée
- $D$ , taux de dilution
- $k_i$ , constantes cinétiques
- Objectif : Maximisation de la concentration du produit  $B$ ,  $C_B$
- Variable manipulée :  $D$ .

– Paramètres

- $k_1 = 24 \text{ h}^{-1}$
- $k_2 = 24 \text{ h}^{-1}$
- $k_3 = 0.5 \text{ lmol}^{-1} \text{ h}^{-1}$
- $C_{Ain} = 1 \text{ mol l}^{-1}$

Nous nous proposons ici de comparer les performances en termes de précision sur la commande optimisante obtenue par l'algorithme de commande extrémale utilisant une estimation paramétrique par moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli (5.8) pour deux types de modèles.

Le premier scénario utilise un modèle statique linéaire de la forme

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}u \quad (5.38)$$

i.e. un régresseur

$$\varphi = [1 \quad u] \quad (5.39)$$

Le second scénario utilise, quant à lui, un modèle statique quadratique de la forme

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}u + \hat{\gamma}u^2 \quad (5.40)$$

i.e. un régresseur

$$\varphi = [1 \quad u \quad u^2] \quad (5.41)$$

### 5.2.1 Résultats de simulation

L'évolution de l'erreur sur la commande optimisante en fonction de l'amplitude et de la fréquence du signal d'excitation est représentée par la Figure 5.2 dans le cas d'un modèle statique linéaire et par la Figure 5.2 dans celui d'un modèle statique quadratique. Il peut être observé que les deux courbes possèdent une allure similaire soit une croissance parabolique en amplitude et une décroissance parabolique en fréquence traduisant ainsi l'indépendance de l'ordre de l'erreur vis à vis du modèle employé.

Dans la Figure 5.3, plusieurs valeurs de l'amplitude du signal d'excitation sont utilisées et la fréquence est maintenue constante à  $0.2\pi h^{-1}$ . En comparant les valeurs de la commande à l'équilibre pour chacun des scénarios à la valeur optimale théorique de  $24 h^{-1}$ , on observe (Figure 5.3) que l'erreur possède une allure parabolique en

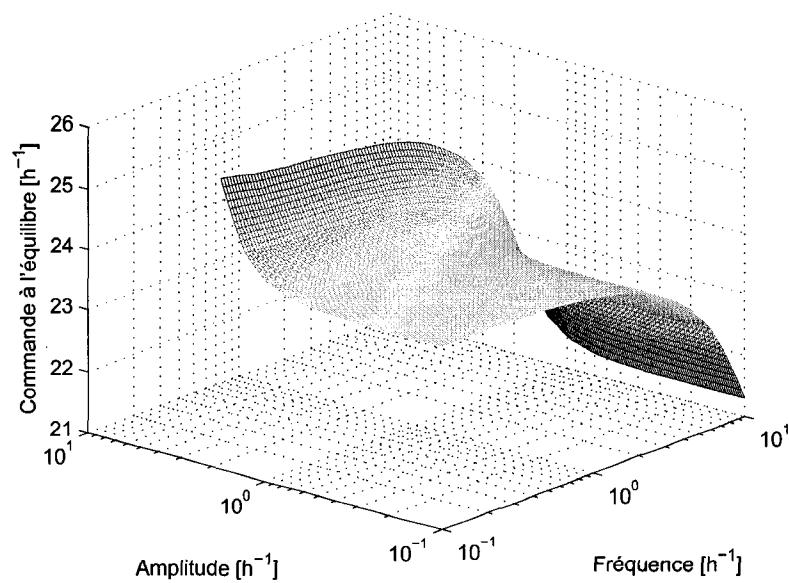


FIGURE 5.1 Évolution de la solution en fonction de la fréquence et de l'amplitude du signal d'excitation, modèle linéaire, algorithme des moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli.

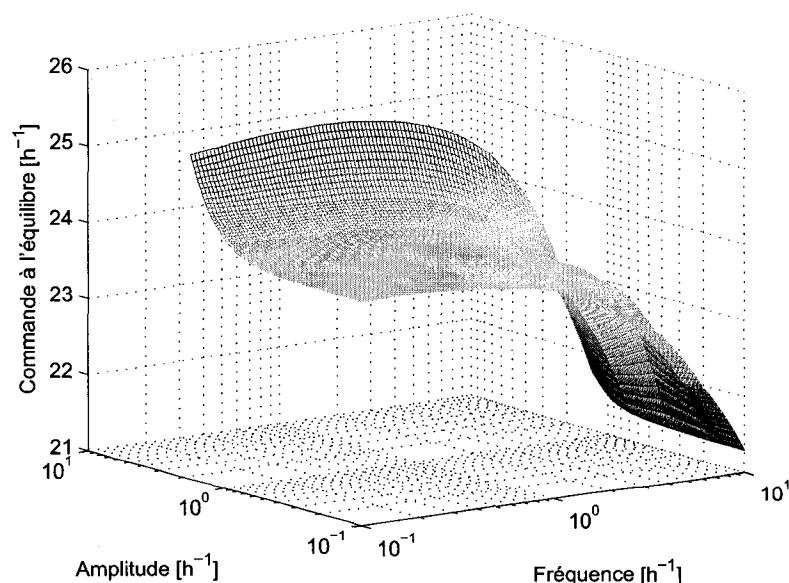


FIGURE 5.2 Évolution de la solution en fonction de la fréquence et de l'amplitude du signal d'excitation, modèle quadratique, algorithme des moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli.

amplitude ( $\tilde{u} = O(a^2)$ ) pour les deux scénarios. Enfin, la Figure 5.4, où plusieurs valeurs de la fréquence du signal d'excitation sont utilisées pour une amplitude constante de  $0.1 h^{-1}$  indique que l'erreur possède aussi une allure parabolique cette fois ci en fréquence ( $\tilde{u} = O(\omega^2)$ ).

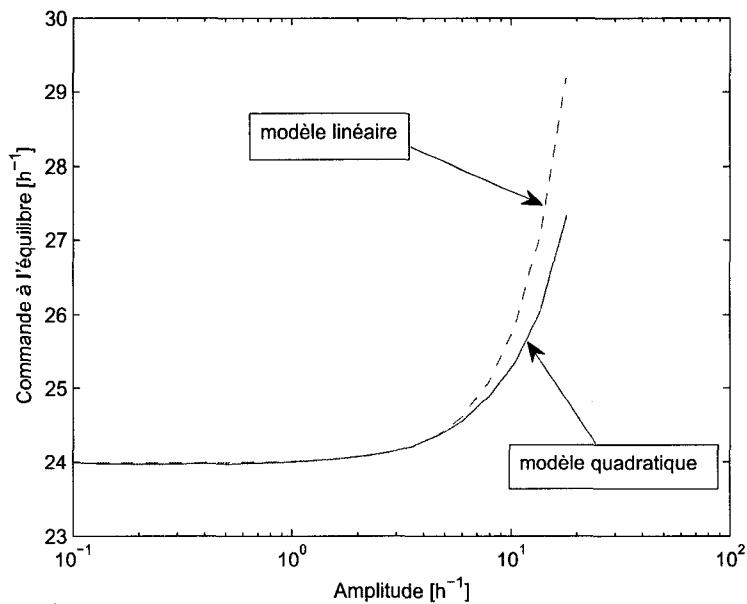


FIGURE 5.3 Évolution de la solution en fonction de l'amplitude du signal d'excitation, modèles linéaire et quadratique, algorithme des moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli.

### 5.3 Conclusions

Dans cette partie de la thèse, Nous avons analysé la distance entre le point de convergence d'un algorithme de commande extrémale utilisant une mesure de la sortie à optimiser et l'optimum. Il apparaît que l'erreur sur la commande optimisante obtenue est proportionnelle au carré de la fréquence et au carré de l'amplitude et ce, indépendamment du degré du modèle statique utilisé c'est à dire du nombre de paramètres utilisés pour la détermination du gradient. Il s'ensuit qu'un choix parcimonieux de la structure du modèle lors de la conception d'une loi de com-

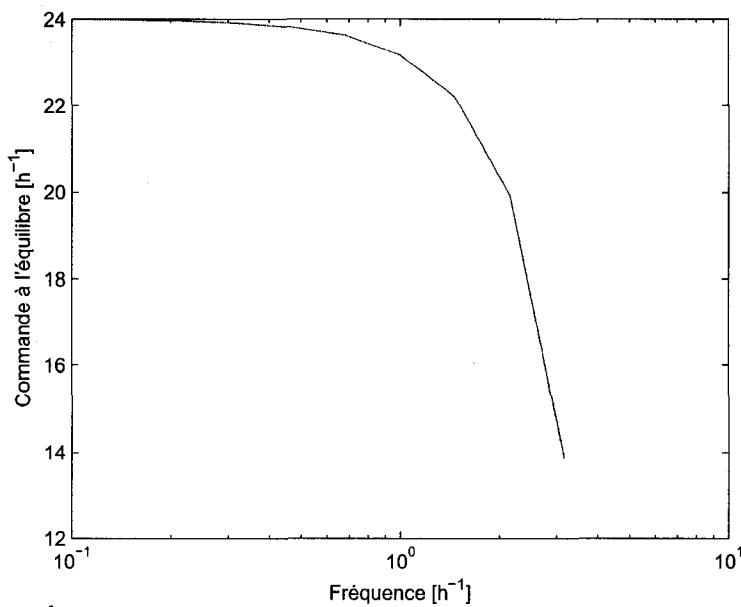


FIGURE 5.4 Évolution de la solution en fonction de la fréquence du signal d'excitation, modèles linéaire et quadratique, algorithme des moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli.

mande extrémale permet une réduction de la complexité des calculs sans nuire à ses performances en terme de précision.

## CHAPITRE 6

### APPLICATION À UNE COLONNE PILOTE DE FLOTTATION

#### 6.1 Commande extrémale d'une colonne de flottation

Les deux stratégies proposées au Chapitre 3 dans le but d'améliorer les performances de la commande extrémale par la méthode des perturbations en terme de vitesse de convergence, soit la méthode de compensation de phase et l'utilisation d'une estimation par moindres carrés récursifs sont maintenant appliquées à l'optimisation en temps réel de l'opération de désencrage de papier recyclé, un problème présentement à l'étude à l'Institut Canadien de Recherches sur les Pâtes et Papiers (PAPRICAN). Le désencrage est réalisé en utilisant une colonne pilote de flottation, procédé destiné à séparer les fibres de pâte à papier des particules d'encre qui leur sont attachées. Certaines parties du modèle utilisé dans ce chapitre sont dérivées d'équations constitutives tandis que d'autres résultent de données expérimentales.

##### 6.1.1 Description du système

Comme illustré à la Figure 6.1, la pâte contaminée est injectée dans la colonne par sa partie supérieure et après le processus de séparation, la pâte décontaminée quitte cette colonne par la partie inférieure. Les particules d'encre qui doivent être retirées, s'attachent aux bulles d'air circulant en sens opposé au flux de pâte, soit de bas en haut. La qualité de ce procédé de séparation dépend de plusieurs paramètres physiques et selon Gendron et al. (2008), les principaux facteurs affectant la séparation sont la taille et la vitesse des bulles d'air qui influencent respectivement la

surface totale disponible pour l'attachement des particules d'encre et la probabilité de collision entre bulle d'air et particule d'encre. Deux paramètres caractéristiques d'une colonne de flottation sont la fraction volumique d'air  $\varepsilon_g$  et le diamètre moyen des bulles d'air  $d_B$ .

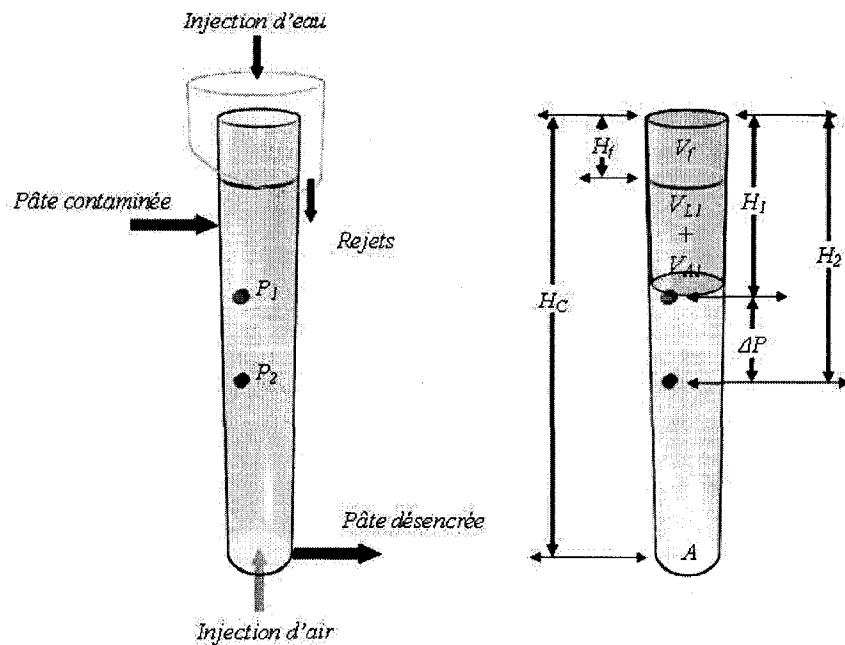


FIGURE 6.1 Schéma de principe de la colonne de flottation expérimentale.

Le développement des équations suivantes est tiré de (Gendron et al. (2008))

$$\varepsilon_g = 100 \left( 1 - \frac{\Delta P}{\Delta L} \right) \quad (6.1)$$

avec

- $\Delta P$ , pression différentielle en  $cm\ H_2O$
- $\Delta L$ , distance entre les capteurs de pression en  $cm$

Le diamètre moyen des bulles d'air  $d_B$  est obtenu par résolution de l'équation non linéaire suivante qui, de par sa nature semi-empirique, est la principale source d'in-

certitude du modèle

$$U_{sg} - \frac{gd_B^2\rho(1-\varepsilon_g)}{18\mu(1+Re^{0.687})} = 0 \quad (6.2)$$

où  $U_{sg}$  est la vitesse de glissement relative entre la phase gazeuse et la phase liquide et  $Re$  le nombre Reynolds respectivement définis par :

$$U_{sg} = \frac{J_g}{\varepsilon_g} + \frac{J_l}{(1-\varepsilon_g)} \quad (6.3)$$

$$Re = d_B U_{sg} \rho \frac{(1-\varepsilon_g)}{\mu} \quad (6.4)$$

avec

- $J_g$ , vitesse superficielle du gaz en  $cm/s$
- $J_l$ , vitesse du liquide descendant en  $cm/s$
- $g$ , accélération de la pesanteur en  $cm/s^2$
- $\rho$ , masse volumique en  $g/cm^3$
- $\mu$ , viscosité en  $g/(cm.s)$

la vitesse superficielle de bulle  $S_b$  est

$$S_b = \frac{6J_g}{d_b} \quad (6.5)$$

et le temps de rétention moyen  $\tau$  de la phase liquide

$$\tau = \frac{(1-\varepsilon_g)(H_{col} - H_{froth})}{J_l} \quad (6.6)$$

avec

- $H_{col}$ , hauteur de la colonne en  $cm$
- $H_{froth}$ , niveau de mousse en  $cm$

### 6.1.2 Critère d'optimisation

Le critère d'optimisation retenu reflète les deux objectifs à atteindre i.e. une vitesse de bulles minimale et une surface de bulle maximale en maximisant une fonction objectif formée du produit de la vitesse superficielle  $S_b$  qui peut interprétée comme étant la vitesse de génération de surface de bulles et du temps de rétention moyen  $\tau$  qui reflète la vitesse des bulles. De plus, la contrainte égalité signifie que l'optimisation est réalisée pour le système à l'équilibre.

$$\begin{aligned} \max_{Q_g} J &= S_b \tau & (6.7) \\ \text{s.t. } \frac{d\Delta P}{dt} &= \frac{1}{T}(-\Delta P(t) + KQ_g(t - D) \equiv 0) \end{aligned}$$

La dynamique du système est supposée linéaire et de premier ordre avec retard.

En résolvant les Équations 6.1 à 6.6 et en prenant en considération la contrainte égalité précédente, on peut représenter la fonction objectif  $J = S_b \tau$  en fonction du débit d'air  $Q_g$  et l'on observe la présence d'un maximum de  $1.4 \cdot 10^4$  pour un débit d'air de  $3.3 \text{ L/min}$  tel qu'illustré par la Figure 6.2.

### 6.1.3 Identification de la dynamique du procédé

Pour l'identification de la fonction de transfert reliant le débit d'air et la pression différentielle, des tests expérimentaux ont été réalisés sur une colonne de flottation pilote à l'Institut Canadien de Recherches sur les Pâtes et Papiers (PAPRICAN). La Figure 6.3 compare la sortie du modèle du premier ordre avec retard pur obtenu aux données mesurées. Les paramètres, estimés par une méthode de type erreur de

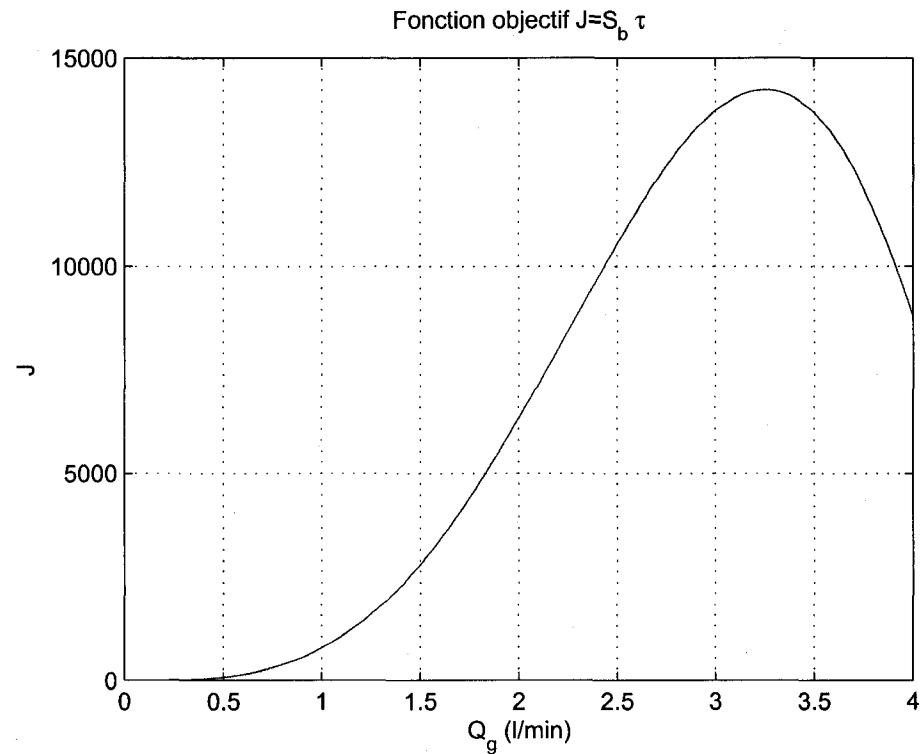


FIGURE 6.2 Relation non linéaire statique entre la fonction objectif  $J$  et le débit d'air.

sortie, sont

- Gain statique :  $K = -20 \text{ cmH}_2\text{O}/\text{L/min}$
- Constante de temps :  $\tau = 325 \text{ sec}$
- Retard pur :  $D = 28 \text{ sec}$

#### 6.1.4 Résultats de simulation

Les deux stratégies d'optimisation proposées sont validées sur le modèle semi-empirique obtenu dans les sections précédentes. Le système est représenté par un modèle de Wiener formé d'un système linéaire dynamique du premier ordre en cascade avec une non linéarité statique. La présence d'une dynamique entre la variable manipulée  $Q_g$  et la variable optimisée  $J = S_b\tau$  justifie l'utilisation des stratégies

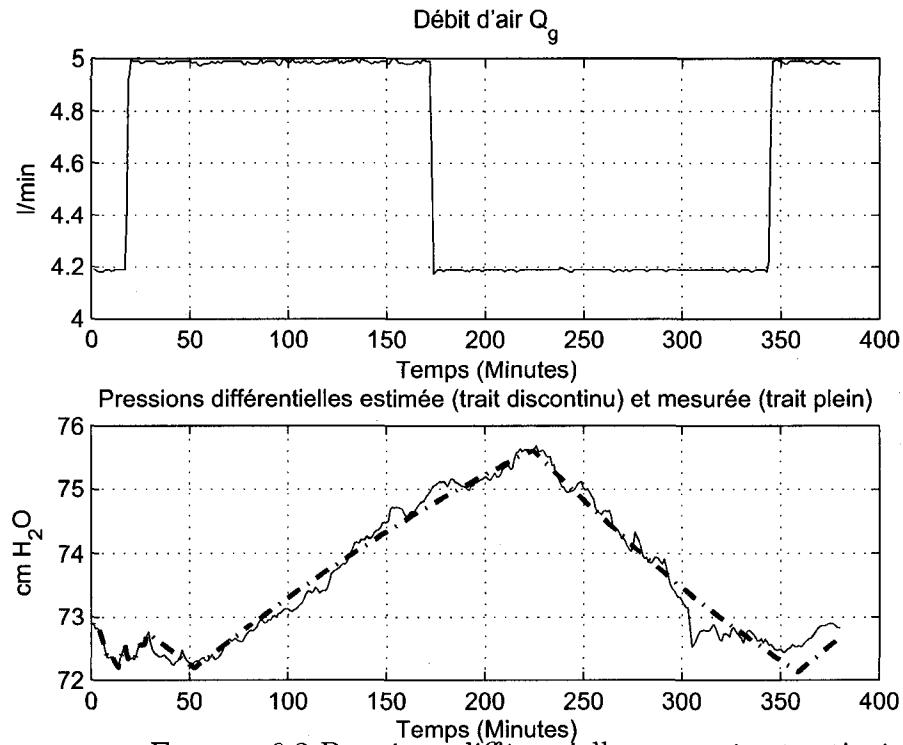


FIGURE 6.3 Pressions différentielles mesurée et estimée

proposées.

La figure 6.4 représente l'évolution du débit d'air  $Q_g$  et celle de la variable optimisée  $J = S_b \tau$  en utilisant la méthode des perturbations classique. On peut y observer que la convergence au point optimum requiert un temps d'environ 40 h.

L'accélération de la convergence par les méthodes de compensation de phase et d'estimation par moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli sont analysées pour cet exemple dans ce qui suit.

L'examen des Figures 6.5 et 6.6 permet d'observer qu'une nette accélération de la réponse du système en boucle fermée est obtenue. Ainsi, le temps de réponse est réduit à environ 10 h pour les deux stratégies. Les signaux d'excitation utilisés

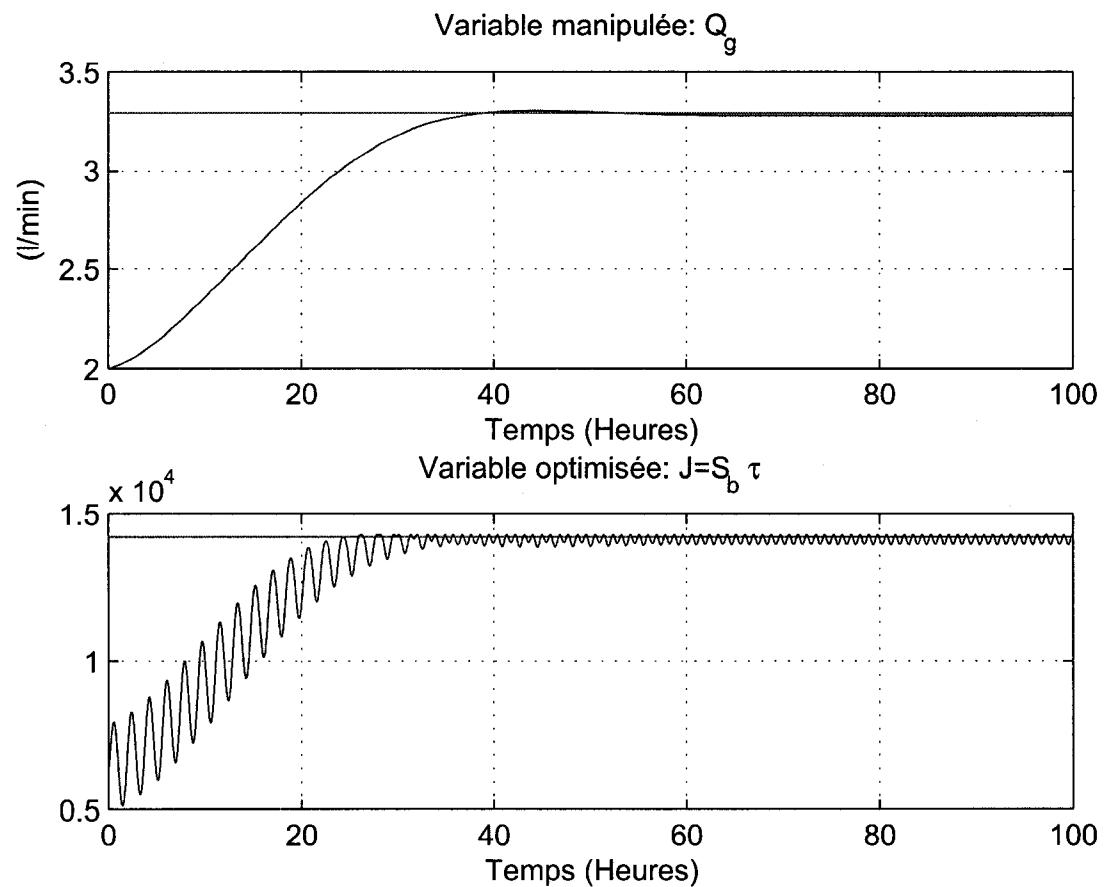


FIGURE 6.4 Variables optimisée et manipulée avec une condition initiale  $Q_g = 2 \text{ L/min}$ , méthode des perturbations classique.

par ces deux méthodes sont de même amplitude ( $0.2 \text{ L/min}$ ) mais de fréquences différentes. La méthode d'estimation par moindres carrés récursifs utilise une excitation basse fréquence identique à celle utilisée par la méthode des perturbations classique ( $3 \times 10^{-4}\pi \text{ h}^{-1}$ ). La méthode de compensation de phase utilise, quant à elle, deux signaux d'excitation de fréquence plus élevée i.e. ( $15 \times 10^{-4}\pi \text{ h}^{-1}$ ) et ( $75 \times 10^{-4}\pi \text{ h}^{-1}$ ).

La variable manipulée obtenue en utilisant une méthode d'estimation par moindres carrés récursifs présente de faibles oscillations, comme il peut être observé à la Figure 6.6. Un moyen permettant de réduire les oscillations serait une diminution de la valeur des gains d'estimation, d'optimisation ou de celle du facteur d'oubli. Cette option conduit cependant à un ralentissement de la convergence. L'absence d'oscillations dans le cas de la méthode des perturbation classique (Figure 6.4) est liée à un choix de valeurs de paramètres de réglage conduisant à un filtrage du signal d'excitation.

Pour vérifier la validité de la correction de signe utilisée par la méthode de compensation de phase, deux scénarios sont considérés. Pour le premier cas (Figure 6.5), la valeur de la condition initiale est inférieure à celle de la commande optimale égale à  $3.3 \text{ L/min}$ . Pour le second cas (Figure 6.7), la valeur de la condition initiale lui est supérieure. On note que dans chacun des cas, l'action de commande démarre dans la mauvaise direction, résultat de la présence d'un déphasage introduit par la dynamique. Au fur et à mesure que ce déphasage est compensé par la deuxième boucle, l'action de commande retrouve progressivement la bonne direction et converge vers la valeur optimale de  $3.3 \text{ L/min}$ .

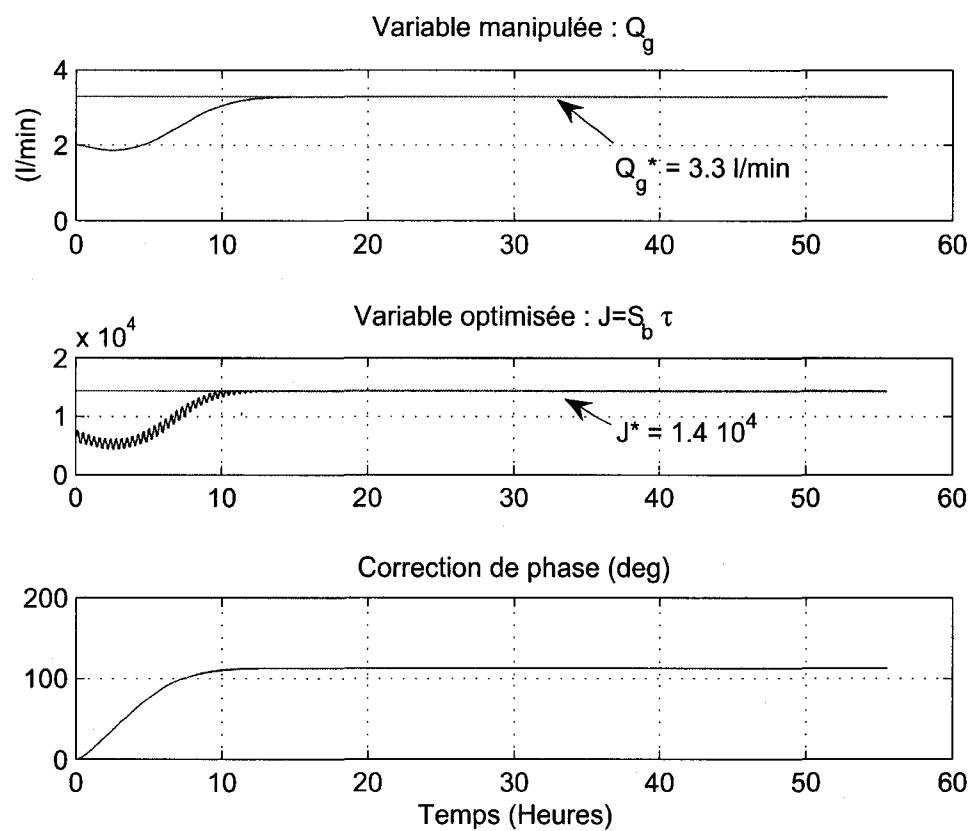


FIGURE 6.5 Variables optimisée et manipulée avec une condition initiale  $Q_g = 2 \text{ L/min}$ , méthode de compensation de phase

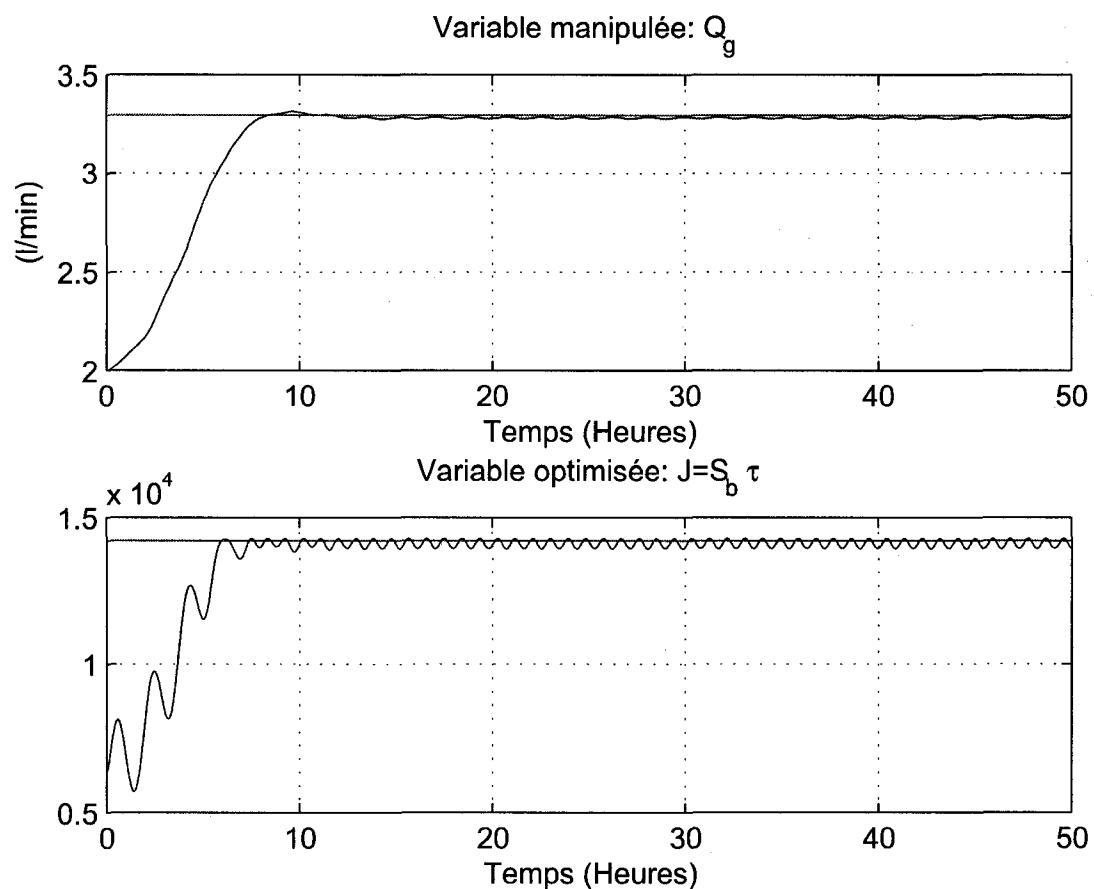


FIGURE 6.6 Variables optimisée et manipulée avec une condition initiale  $Q_g = 2 \text{ L/min}$ , algorithme des moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli.

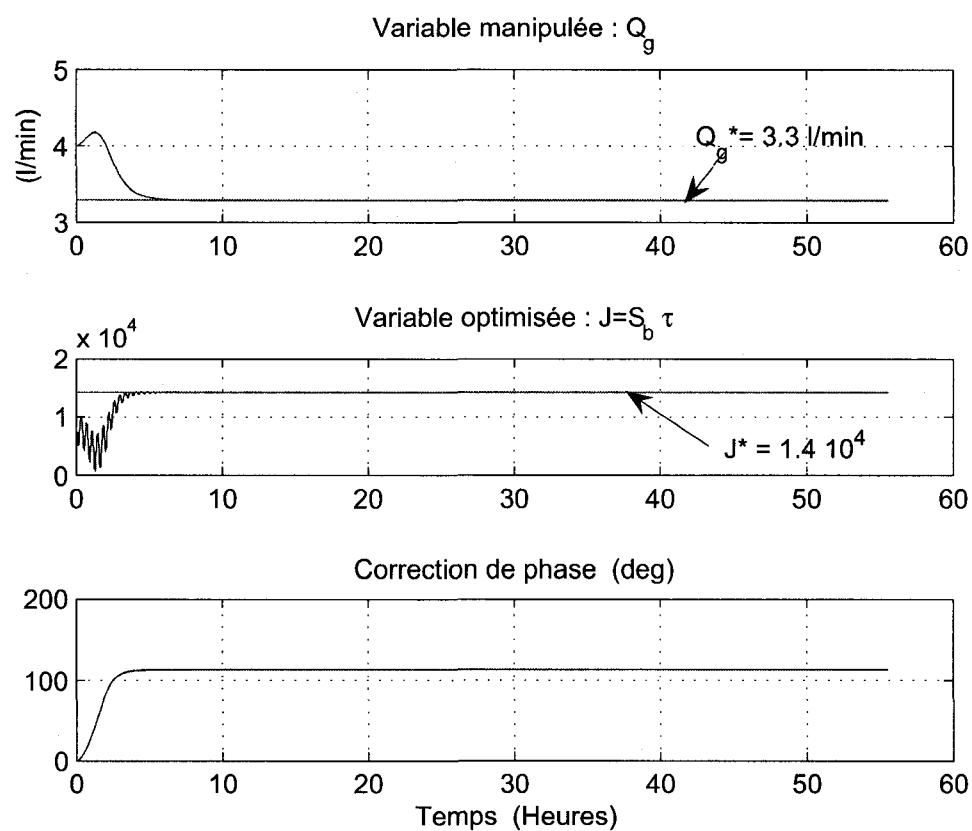


FIGURE 6.7 Variables optimisée et manipulée avec une condition initiale  $Q_g = 4 \text{ L/min}$ , méthode de compensation de phase

## 6.2 Conclusions

Ce chapitre a permis d'illustrer les bénéfices des deux solutions proposées en vue d'améliorer les performances de l'algorithme de commande extrémale par la méthode des perturbations. Les deux stratégies sont validées sur un modèle semi-empirique d'une colonne pilote de flottation présentant une dynamique non négligeable. Il est observé que la première solution, constituée d'un algorithme de compensation de phase ainsi que la seconde qui utilise une estimation par moindres carrés récursif avec facteur d'oubli permettent, toutes deux, de réduire significativement le temps de convergence à l'optimum.

## CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

### Conclusions

Nous avons contribué, dans le cadre de ce travail, à l'évaluation des performances en termes de précision et de vitesse de convergence des méthodes de commande extrémale par perturbations lorsqu'appliquées à des systèmes couramment rencontrés dans l'industrie chimique i.e. les processus à dynamique lente.

Si l'analyse de la stabilité des algorithmes d'optimisation en temps réel par commande extrémale peut aujourd'hui être considérée comme un sujet relativement mûr, il n'en est pas de même pour celle de leurs performances, un aspect qui intéresse particulièrement le praticien en commande et en optimisation des procédés industriels.

Rappelons que d'une part, les méthodes adaptatives à base de modèles de connaissance nécessitent une structure (paramétrisation) exacte de la fonction objectif, donnée rarement disponible pour des problèmes à l'échelle industrielle. Ces méthodes peuvent donc conduire à une dégradation de la précision sur la commande optimisante obtenue. D'autre part, les méthodes basées sur une mesure de la fonction objectif, e.g. la méthode des perturbations, nécessitent un temps de convergence extrêmement long du fait de la nécessité d'une triple séparation des échelles de temps.

L'analyse de la précision présentée au Chapitre 2 a démontré que la solution de l'algorithme de commande extrémale par la méthode des perturbations converge en moyenne vers un point de corrélation nulle distinct de l'optimum et que l'erreur pour un système non linéaire général est proportionnelle non seulement au carré de l'amplitude du signal d'excitation mais aussi au carré de la fréquence de ce signal d'excitation. Une conséquence immédiate de ce résultat est qu'une optimisation

lente est requise non seulement pour des considérations de stabilité mais aussi de précision.

L'erreur sur la commande optimisante a été quantifiée, dans ce même chapitre, pour deux catégories de systèmes, ceux pouvant être modélisés par une représentation de Wiener-Hammerstein puis ceux dont la dynamique non linéaire exclut ce type de représentation.

Dans le cas le plus général, une dépendance de l'erreur sur la commande optimisante au carré de la fréquence d'excitation a été démontrée. Dans celui, plus particulier, des représentations de Wiener-Hammerstein, nous avons mis en évidence que l'erreur est toujours proportionnelle au carré de l'amplitude du signal d'excitation. Dès lors, le choix d'une amplitude d'excitation suffisamment faible minimise l'effet de la fréquence et une convergence plus rapide peut ainsi être obtenue.

Une méthode d'accélération de la convergence couramment suggérée dans la littérature consiste en l'emploi d'une structure en cascade constituée d'une boucle interne de commande destinée à la stabilisation/accélération du système et d'une boucle externe générant la consigne optimale. Nous avons, au Chapitre 4, analysé l'impact d'incorporer une commande par anticipation/rétroaction en terme d'amélioration des performances (augmentation de la bande passante et réduction de l'erreur de position) de la méthode des perturbations. Nous avons démontré dans ce chapitre qu'il n'est possible d'obtenir une vitesse de convergence arbitrairement élevée pour un niveau de précision donné que pour des systèmes dont la dynamique interne pour la sortie à optimiser est de dimension inférieure ou égale à 1. Si la dimension de cette dynamique interne est supérieure à 1, l'introduction d'une commande en cascade peut au contraire dégrader les performances de la boucle de commande extrémale par une amplification de l'erreur et un ralentissement de la vitesse de

convergence.

Nous avons proposé deux modifications de l'algorithme de commande extrémale par la méthode des perturbations permettant d'améliorer la vitesse de convergence tout en maintenant la stabilité de la boucle fermée en présence d'une dynamique non négligeable dans le système. La première solution visait les systèmes pouvant être représentés par un modèle de Wiener-Hammerstein et consiste en un algorithme de compensation de phase utilisé pour corriger le déphasage introduit par la dynamique du système à la fréquence du signal d'excitation. Une preuve de convergence de cet algorithme utilisant le formalisme de Lyapunov a été fournie et cette méthode a été validée en simulation pour l'optimisation d'un système réactif et d'une unité industrielle de désencrage de pâte à papier successivement aux Chapitres 3 et 6. Les résultats, pour chacun de ces deux exemples, indiquent que la vitesse de convergence peut être significativement augmentée.

Une seconde solution destinée, cette fois, aux systèmes ne pouvant être représentés sous la forme de modèles de Wiener-Hammerstein consistait à substituer à l'estimation par filtrage utilisée par la méthode des perturbations, une estimation par moindres carrés récursif avec facteur d'oubli. Il a été démontré que l'utilisation d'un algorithme d'estimation d'ordre 2 permet de s'affranchir de l'une des trois séparations d'échelles de temps requises par la méthode des perturbations. Ainsi, l'effet d'une excitation à faible fréquence vis-à-vis de la dynamique du système n'entraîne plus un temps de convergence extrêmement long.

L'analyse de précision effectuée dans la première partie de ce travail a été généralisée aux méthodes de commande extrémale utilisant un modèle d'ordre supérieur, et il a été démontré, au Chapitre 5, que le degré de complexité du modèle utilisé, pour une amplitude et une fréquence d'excitation suffisamment faibles, n'influence pas l'ordre de précision obtenue sur la commande optimisante.

## Recommandations

Trois aspects pourraient, à notre avis, contribuer à compléter ce travail. Dans l'analyse effectuée au Chapitre 5, les résultats concernant la précision sur la commande optimisante ont été obtenus sous l'hypothèse que le modèle utilisé est statique. Il serait intéressant d'envisager le cas, plus général, où ce modèle est dynamique. La difficulté d'analyse, dans ce cas, provient notamment de la dépendance, vis à vis des entrées, de la sortie et de ses dérivées successives qui apparaissent alors dans l'expression du vecteur de regression.

Dans cette même partie, un second point concernant l'effet de la prise en compte de mesures auxiliaires mérite d'être étudié. Nous avons observé en simulation un phénomène a priori contre-intuitif : l'ajout de mesures auxiliaires tendrait à détériorer la précision obtenue sur l'estimation du gradient et donc sur la commande optimisante qui lui est proportionnelle. L'exemple étudié concerne le système réactif décrit au Chapitre 2 pour lequel deux mesures (soit la mesure d'un état du système en plus de celle de la sortie à optimiser) sont utilisées pour l'estimation du gradient. Un troisième et dernier aspect concerne l'hypothèse de différentiabilité invoquée tout au long de ce travail. Pour l'utilisation de la méthode des perturbations, la caractéristique non linéaire décrivant le système ne doit pas nécessairement être différentiable en tout point. Nos résultats préliminaires (non inclus dans ce travail) concernant le cas d'une caractéristique statique non différentiable à l'optimum montrent que l'erreur sur la commande optimisante est d'ordre 1 en amplitude du signal d'excitation. Cette erreur étant d'ordre 2 dans le cas d'une caractéristique différentiable, l'absence de cette propriété conduirait donc à une dégradation de la précision.

## BIBLIOGRAPHIE

- Anderson, B., Bitmead, R., Johnson, C., Kokotovic, P., Kosut, R., and Mareels, I. (1986). *Stability of adaptive systems : Passivity and averaging analysis*. MIT Press, Cambridge, MA.
- Ariyur, K. and Krstic, M. (2002). Analysis and Design of Multivariable Extremum Seeking. In *Proceedings of the 2002 American Control Conference*, Anchorage, AK, pages 2903–2908.
- Ariyur, K. and Krstic, M. (2003). *Real-Time Optimization by Extremum Seeking Control*. John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- Ariyur, K. and Krstic, M. (2004). Slope Seeking : A Generalization of Extremum Seeking. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, **18** :1, 1–22.
- Åström, K. (1995). Adaptive Control around 1960. In *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA, pages 2784–2789.
- Bamberger, W. and Isermann, R. (1978). Adaptive On-Line Steady State Optimization of Slow Dynamic Process. *Automatica*, **14** :3, 223–230.
- Bastin, G. and Dochain, D. (1986). On-Line Estimation of Microbial Growth Rates. *Automatica*, **22** :6, 705–711.
- Biegler, L., Grossmann, I., and Westerberg, A. (1985). A Note on Approximation Techniques Used for Process Optimization. *Computers and Chemical Engineering*, **9** :2, 201–206.
- Blackman, P. (1962). Extremum Seeking Regulators. In Westcott, J., editor, *An Exposition of Adaptive Control*. The Macmillan Company, New York.

- Bozin, A. and Zarrop, M. (1990). Self-Tuning Extremum Optimizer - Convergence and Robustness Properties. In *First European Control Conference (ECC-91)*, Manchester, UK, pages 672–677.
- Chioua, M., Srinivasan, B., Guay, M., and Perrier, M. (2007a). Dependence of the Error in the Optimal Solution of Perturbation-Based Extremum Seeking Methods on the Excitation Frequency. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, **85** :4, 447–453.
- Chioua, M., Srinivasan, B., Perrier, M., Gendron, S., and Guay, M. (2007b). Phase Compensation for Improved Convergence in Extremum Seeking Control of Systems with Delay : Application to a Deinking Flotation Column. In *Preprints of the APC 2007 Proceedings*, Vancouver, Canada.
- Chioua, M., Srinivasan, B., Perrier, M., and Guay, M. (2007c). Effect of Excitation Frequency in Perturbation Based Extremum Seeking Methods. In *Preprints of the 8th IFAC International Symposium on Dynamics and Control of Process Systems (DYCOPS) Proceedings*, Cancun, Mexico, pages 124–128.
- Chioua, M., Srinivasan, B., Perrier, M., and Guay, M. (2007d). Improving Convergence of Perturbation Based Extremum Seeking Methods for a Class of Differentially Flat Systems. In *Preprints of the 7th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS) Proceedings*, Pretoria, South Africa.
- Cougnon, P., Dochain, D., Guay, M., and Perrier, M. (2006). Real-Time Optimization of a Tubular Reactor with Distributed Feed. *AIChE Journal*, **52** :6, 2120–2128.
- Cutler, C. and Ramaker, B. (1980). Dynamic Matrix Control-A Computer Control Algorithm. In *Proceedings of the 1980 American Control Conference*, San Francisco, CA, pages WP5–B.

- DeHaan, D. and Guay, M. (2005). Extremum Seeking Control of State-Constrained Nonlinear Systems. *Automatica*, **41** :9, 1567–1574.
- Dochain, D. and Perrier, M. (2007). *Commande des procédés*. Manuscrit en préparation.
- Draper, C. S. and Li, Y. (1954). *Principles of Optimizing Control Systems*. ASME Publications.
- Engell, S. and Klatt, K. (1993). Nonlinear Control of a Non-Minimum-Phase cstr. In *Proceedings of the 1993 American Control Conference Part 3 (of 3)*, San Francisco, CA, pages 2941–2945.
- Euler, L. (1753). *Dissertation sur le principe de la moindre action*. ex officina Michaelis. Disponible sur <http://imgbase-scd-ulp.unistra.fr/displayimage.php?album=357&pos=3>.
- Favache, A., Dochain, D., Perrier, M., and Guay, M. (2006). Extremum Seeking Control of Retention for a Microparticulate System. In *IEEE Workshop on Advanced Process Control for Industry (APC 2006)*, Vancouver, Canada, page WA1.
- Fliess, M., Levine, J., Martin, P., and Rouchon, P. (1995). Flatness and Defect of Nonlinear Systems : Introductory Theory and Examples. *Int. J. Control*, **61** :6, 1327–1361.
- Forbes, J., Marlin, T., and MacGregor, J. (1994). Model Adequacy Requirements for Optimizing Plant Operations. *Computers and Chemical Engineering*, **18** :6, 497–510.
- Fox, J., Schmidt, W., and Kantor, J. (1984). Comparison of Sensitivity and Feedback Control for Optimized Chemical Reactors. In *Proceedings of the 1984 American Control Conference*, San Diego, CA, pages 1621–1627.

- Garcia, C. and Morari, M. (1981). Optimal Operation of Integrated Processing Systems. i. Open-Loop On-Line Optimizing Control. *AIChE Journal*, **27** :6, 960–968.
- Gendron, S., Pigeon, B., Dorris, G., Ben, Y., and Pagé, N. (2008). Modeling and Control of a Pulp Flotation Column. In *Preprints of Control Systems'08 Proceedings*, Vancouver, Canada. To appear.
- Golden, M. and Ydstie, B. (1989). Adaptive Extremum Control using Approximate Process Models. *AIChE Journal*, **35** :7, 1157 :1169.
- Guay, M., Perrier, M., and Dochain, D. (2004). Extremum Seeking Control of Retention for a Microparticulate System. In *Control Systems 2004 Conference*, Quebec city, Canada, pages 197–201.
- Guay, M. and Zhang, T. (2003). Adaptive Extremum Seeking Control of Nonlinear Dynamic Systems with Parametric Uncertainties. *Automatica*, **39** :7, 1283–1293.
- Hagenmeyer, V. and Zeitz, M. (2004). Internal Dynamics of Flat Nonlinear SISO Systems with Respect to a Non-Flat Output. *Syst. Contr. Lett.*, **52**, 323–327.
- Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems*. Springer, Berlin.
- Kalman, R. (1960). Contribution to the Theory of Optimal Control. *Boletin sociedad matematica mexicana*, **5**, 102–119.
- Khalil, H. (1996). Adaptive Output Feedback Control of Nonlinear Systems Re-presented by Input Output Models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **41** :2, 177–188.
- Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Kokotovic, P. (1992). The Joy of Feedback : Nonlinear and Adaptive. *IEEE Control Systems Magazine*, **12**, 7–17. 1991 Bode Prize Lecture.

- Krstic, M. (2000). Performance Improvement and Limitations in Extremum Seeking Control. *Systems and Control Letters*, **39** :5, 313–326.
- Krstic, M., Kokotovic, P., and Kanellakopoulos, I. (1995). *Nonlinear and Adaptive Control Design*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY.
- Krstic, M. and Wang, H.-H. (2000). Stability of Extremum Seeking Feedback for General Nonlinear Dynamic Systems. *Automatica*, **36** :4, 595–601.
- Kuhlmann, A. and Bogle, D. (1997). Study on nonminimum phase behaviour and optimal operation. *Computers and Chemical Engineering*, **21**, S397–S402.
- Leblanc, M. (1922). Sur l'électrification des chemins de fer au moyen de courants alternatifs de fréquence élevée. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, **175**, 196–200. Disponible sur <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3128v/f196.table>.
- Ljung, L. (1999). *System Identification - Theory For the User*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Marcos, N., Guay, M., and Dochain, D. (2004). Output Feedback Adaptive Extremum Seeking Control of a Continuous Stirred Tank Bioreactor with Monod's Kinetics. *Journal of Process Control*, **14**, 807–818.
- Marlin, T. and Hrymak, A. (1997). Real-time Operations Optimization of Continuous Processes. In *Fifth international conference on chemical process control (CPC-5, Lake Tahoe, Jan. 1996)*, volume 93 of *AIChe Symposium Series*, Lake Tahoe, Nevada, pages 156–164. AIChe.
- McFarlane, R. and Bacon, D. (1989). Empirical Strategies for Open-loop On-line optimization. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, **67**, 665–677.

- Morari, M. and Lee, J. (1999). Model Predictive Control : Past, Present and Future. *Computers and Chemical Engineering*, **23** :4, 667–682.
- Nascimento Jr., C. L. (1994). *Artificial Neural Networks in Control and Optimization*. PhD thesis, Control Systems Centre, UMIST, Manchester, UK.
- Nesic, D., Tan, Y., and Mareels, I. (2006). On the Choice of Dither in Extremum Seeking Systems : a Case Study. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, CA, pages 2789–2794.
- Parks, P. (1966). Liapunov Redesign of Model Reference Adaptive Control Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC11** :3, 362–327.
- Perrier, M., de Azevedo, S. F., Ferreira, E., and Dochain, D. (2000). Tuning of Observer-Based Estimators : Theory and Application to the On-Line Estimation of Kinetic Parameters. *Control Engineering Practice*, **8** :4, 377–388.
- Richalet, J., Rault, A., and Papon, J. T. J. (1978). Model Predictive Heuristic Control : Applications to Industrial Processes. *Automatica*, **14** :5, 413–428.
- Roberts, P. (1979). An Algorithm for Steady-state System Optimization and Parameter Estimation. *International Journal of Systems Science*, **10** :7, 719–734.
- Sepulchre, R., Jankovic, M., and Kokotovic, P. (1997). *Constructive Nonlinear Control*. Springer-Verlag, London, UK.
- Sira-Ramirez, H. (2004). *Differentially Flat Systems*. Marcel Dekker, New York, NY.
- Sternby, J. (1980). Extremum Control Systems : An Area for Adaptive Control ? In *Proceedings of the 1980 American Control Conference*, San Francisco, CA, pages WA2–A/12.

- Tan, Y., Nesic, D., and Mareels, I. (2006a). On Non-Local Stability Properties of Extremum Seeking Control. *Automatica*, **42** :6, 889–903.
- Tan, Y., Nesic, D., and Mareels, I. (2006b). On Stability Properties of A Simple Extremum Seeking Scheme. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, CA, pages 2807–2812.
- Tan, Y., Nesic, D., Mareels, I., and Astolfi, A. (2006c). On Global Extremum Seeking in the Presence of Local Extrema. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, CA, pages 5663–5668.
- Wang, H.-H., Yeung, S., and Krstic, M. (2000). Experimental Application of Extremum Seeking on an Axial-Flow Compressor. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **8** :2, 300–309.
- Wellstead, P. and Scotson, P. (1990). Self-Tuning Extremum Control. *IEE Proceedings*, **137** :3, 165–175.
- Wittenmark, B. and Evans, J. (2001). Extremal Control of Wiener Model Processes. Internal report ISRN LUTFD2 TFRT7599SE, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology.
- Zhang, C., Siranosian, A., and Krstic, M. (2006). Extremum Seeking for Moderately Unstable Systems and for Autonomous Vehicle Target Tracking without Position Measurements. In *Proceedings of the 2006 American Control Conference*, Piscataway, NJ, pages 4939–4944.
- Zhang, Y. and Forbes, J.-F. (2006). Performance Analysis of Perturbation-Based Methods for Real-Time Optimization. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, **84** :2, 209–218.

## ANNEXE I

## PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ 5.21

Soient  $M$  une matrice carrée inversible de dimension  $n$ ,  $M^T$  sa transposée et  $I_n$  la matrice identité d'ordre  $n$  alors

$$(M^T M)^{-1} (M^T M) = I \quad (I.1)$$

en multipliant (I.1) à droite par  $M^T$  et à gauche par  $M^{-T}$  on obtient

$$M^T (M^T M)^{-1} M = I \quad (I.2)$$

donc

$$M_i^T (M^T M)^{-1} M_j = I(i, j) = 0 \forall i \neq j \quad (I.3)$$

et

$$M_i^T (M^T M)^{-1} M_i = I(i, i) = 1 \quad (I.4)$$

.  $\square$

## ANNEXE II

## THÉORÈME DE LA MOYENNE

(Khalil, 2002) : Soient  $f(x, t, \varepsilon)$  et ses dérivées partielles premières et secondes par rapport à  $(x, \varepsilon)$  des fonctions continues et bornées pour  $(t, x, \varepsilon) \in [0, \infty) \times D_0 \times [0, \varepsilon_0]$ , pour chaque ensemble compact  $D_0 \subset D$ , avec  $D$ , un domaine de  $\mathbb{R}^n$ .

Supposons que  $f$  soit une fonction périodique en  $t$  et de période  $T > 0$  et  $\varepsilon$  un paramètre positif.

Soient  $x(t, \varepsilon)$  et  $x_{av}(\varepsilon t)$  les solutions respectives du système

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon) \quad (\text{II.1})$$

et du système autonome moyen

$$\dot{x} = \varepsilon f_{av}(x) \quad (\text{II.2})$$

avec

$$f_{av}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, x, 0) d\tau \quad (\text{II.3})$$

– si  $x_{av}(\varepsilon t) \in D \ \forall t \in [0, b/\varepsilon]$  et  $x(0, \varepsilon) - x_{av}(0) = O(\varepsilon)$ , alors il existe  $\varepsilon^* > 0$  tel que pour tout  $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ ,  $x(t, \varepsilon)$  est défini et

$$x(t, \varepsilon) - x_{av}(\varepsilon t) = O(\varepsilon) \quad (\text{II.4})$$

pour tout  $t \in [0, b/\varepsilon]$

– si l'origine  $x = 0 \in D$  est un point d'équilibre exponentiellement stable du Système II.2 et  $\Omega \in D$  est un sous-ensemble compact de sa région d'attraction,

$x_{av}(0) \in \Omega$  et  $x(0, \varepsilon) - x_{av}(0) = O(\varepsilon)$  alors il existe  $\varepsilon^* > 0$  tel que pour tout  $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ ,  $x(t, \varepsilon)$  est défini et

$$x(t, \varepsilon) - x_{av}(\varepsilon t) = O(\varepsilon) \quad (\text{II.5})$$

pour tout  $t \in [0, \infty)$

- si l'origine  $x = 0 \in D$  est un point d'équilibre exponentiellement stable du Système II.2, alors il existe des constantes positives  $\varepsilon^*$  et  $k$  telles que pour tout  $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ , le Système II.1 possède une solution unique  $\bar{x}(t, \varepsilon)$ , exponentiellement stable, périodique en  $t$ , de période  $T$  vérifiant  $\|\bar{x}(t, \varepsilon)\| \leq k\varepsilon$ .