

Titre: Optimisation simultanée des caractéristiques de la qualité d'un produit en environnement distribué
Title: [Optimisation simultanée des caractéristiques de la qualité d'un produit en environnement distribué](#)

Auteur: Chantal Baril
Author: [Chantal Baril](#)

Date: 2008

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Baril, C. (2008). Optimisation simultanée des caractéristiques de la qualité d'un produit en environnement distribué [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/8127/>
Citation: [Baril, C. \(2008\). Optimisation simultanée des caractéristiques de la qualité d'un produit en environnement distribué \[Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal\]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/8127/](#)

Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/8127/>
PolyPublie URL: [https://publications.polymtl.ca/8127/](#)

Directeurs de recherche: Soumaya Yacout, & Bernard Clément
Advisors: [Soumaya Yacout](#), [Bernard Clément](#)

Programme: Non spécifié
Program: [Non spécifié](#)

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

OPTIMISATION SIMULTANÉE DES CARACTÉRISTIQUES DE LA QUALITÉ
D'UN PRODUIT EN ENVIRONNEMENT DISTRIBUÉ

CHANTAL BARIL

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)
(GÉNIE INDUSTRIEL)

MAI 2008



Library and
Archives Canada

Published Heritage
Branch

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Direction du
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file *Votre référence*

ISBN: 978-0-494-41740-9

Our file *Notre référence*

ISBN: 978-0-494-41740-9

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

OPTIMISATION SIMULTANÉE DES CARACTÉRISTIQUES DE LA QUALITÉ
D'UN PRODUIT EN ENVIRONNEMENT DISTRIBUÉ

présentée par : BARIL Chantal
en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiae Doctor
a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. GAMACHE Michel ing. Ph.D., président

Mme YACOUT Soumaya, D.Sc., directrice de recherche

M. CLÉMENT Bernard, Ph.D., codirecteur de recherche

M. DESAULNIERS Guy, Ph.D., membre

M. GHARBI Ali, Ph.D., membre externe

REMERCIEMENTS

Mes études de troisième cycle et cette thèse de doctorat n'auraient pas pu se faire sans l'appui et la collaboration de certaines personnes. Ainsi, j'aimerais exprimer ma plus vive reconnaissance à madame Soumaya Yacout, ma directrice de recherche, pour sa précieuse collaboration tout au long de la recherche et de la préparation de cette thèse. Son esprit scientifique, sa rigueur mathématique, son expérience et ses judicieux conseils ont été déterminants dans la réussite de ce projet de recherche.

Merci aussi à monsieur Bernard Clément, mon co-directeur de recherche, pour son support constant durant mon programme de doctorat.

Un remerciement spécial à mes collègues du département de génie industriel de l'Université du Québec à Trois-Rivières pour leur soutien et leurs encouragements au cours des quatre dernières années.

Finalement, je souhaite remercier mon conjoint, Alain, pour sa patience, sa compréhension et son soutien moral durant les moments difficiles, ainsi que ma famille et mes amis pour leur appui tout au long de cette aventure.

RÉSUMÉ

Pour répondre à la concurrence des pays en émergence, plusieurs entreprises se sont engagées dans des démarches d'amélioration de la productivité. Cependant, il est de plus en plus difficile de concurrencer sur le plan de la fabrication puisque les coûts de main-d'œuvre de ces pays sont très bas. Dans un mouvement d'innovation, les entreprises se concentrent de plus en plus sur leur processus de développement de produit afin de le rendre plus rapide et elles tentent d'utiliser des technologies qui demanderont plusieurs années avant d'être copiées. N'ayant pas nécessairement les compétences de base requises et les outils de conception spécialisés pour y arriver, les entreprises sont forcées de distribuer le travail de conception au sein de plusieurs acteurs, créant ainsi un devoir de collaboration avec ces partenaires.

La recherche effectuée dans le cadre de cette thèse s'inscrit dans les défis actuels que les entreprises doivent relever en ce qui concerne la conception de produit c'est-à-dire:

- développer de nouveaux produits en collaboration avec d'autres groupes de travail (internes ou externes à l'entreprise);
- obtenir un produit répondant aux besoins et attentes du client;
- réduire le temps de développement de produit en faisant du développement simultané;
- et réduire le coût de développement du produit.

Le but des travaux présentés dans ce document est de développer un algorithme interactif pouvant être utilisé dans un environnement distribué et capable de faire l'optimisation de multiples objectifs. L'algorithme doit être interactif afin que plusieurs partenaires puissent collaborer, il doit considérer plusieurs objectifs dans le but d'optimiser plusieurs caractéristiques de la qualité du produit et il doit fonctionner dans

un environnement distribué de manière à ce que les partenaires puissent travailler simultanément.

Pour ce faire, un algorithme interactif basé sur la programmation par objectif (goal programming) a été jumelé à une technique appelée *Linear Physical Programming*. Cette technique permet aux groupes de travail d'énoncer leurs préférences lors du processus d'optimisation. L'algorithme Interactif pour résoudre des Problèmes à Objectifs Multiples basé sur les Préférences des groupes de travail est nommé l'algorithme IPOMP. Il génère des solutions Pareto-optimales. Cependant, la partie optimisation demeure sous le contrôle d'une seule personne (environnement centralisé). L'algorithme a été testé sur deux problèmes: un problème mathématique et un problème de conception réel. Les résultats montrent que l'algorithme fonctionne bien et que peu d'itérations sont nécessaires pour obtenir les solutions Pareto-optimales. L'algorithme est utile car il permet d'éviter bien des discussions entre les groupes de travail et d'arriver à un consensus.

Dans un deuxième temps, l'algorithme IPOMP a été amalgamé à une structure d'optimisation distribuée. Cette structure est intéressante puisqu'elle permet aux groupes de travail de fonctionner simultanément et de façon décentralisée. Le nouvel algorithme est appelé IPOMP-ED, où ED signifie environnement distribué, et il permet de résoudre des problèmes à objectifs multiples en environnement distribué. Dans la majorité des cas, les solutions obtenues en environnement distribué sont les mêmes que les solutions trouvées en environnement centralisé. Lorsque des différences sont observées, elles s'expliquent par le comportement de l'algorithme d'optimisation *Sequential Quadratic Programming* du logiciel DONLP2.

Finalement, les différentes méthodes d'analyse de robustesse et d'analyse de sensibilité ont été démystifiées afin de définir un processus pour trouver des solutions réalisables sous variation et choisir la solution la plus robuste. La méthodologie proposée permet

d'identifier les variables qui influencent la variation des fonctions-objectifs afin de prendre des actions pour réduire cette variabilité. Les résultats montrent que, dans certains cas, les solutions trouvées sont déjà réalisables sous variation et robustes, tandis que dans d'autres cas des solutions robustes sont obtenues. Le processus suggéré permet d'étudier la variabilité des fonctions-objectifs et d'améliorer la qualité du produit dès la phase de conception.

ABSTRACT

In an effort to respond to competition from the emergent economies, many companies have been engaged in processes of productivity improvement. Despite this, it is increasingly difficult to compete at the manufacturing level, since labour costs in these countries are very low. As an innovative strategic response, companies are concentrating increasingly on their product development process with a view to rendering this faster, attempting to utilize technologies that will require several years before being copied. Not necessarily possessing the core competencies required or the specialized design tools to accomplish this, businesses have been forced to outsource this design work to a number of different outside actors, creating a need for collaboration among these partners.

The research performed in this thesis revolved around the challenges to which companies must rise in regard to product design, that is to say:

- developing new products in collaboration with other work groups (within and external to the company);
- producing a product which responds to the needs and expectations of the client;
- reducing product development time through simultaneous development and,
- reducing the costs of development of the product.

The goal of the work presented in this document is to develop an interactive algorithm amenable to use in a distributed environment and capable of executing multi-objective optimization. The algorithm must be interactive so that a number of partners may collaborate on one project, it must be able to take into account several objectives with the goal of optimizing a number of quality features of the product, and it must function in a distributed environment such that the partners are able to work simultaneously. To accomplish this, an interactive algorithm based on goal programming was twinned with a technique called *Linear Physical Programming* which permits work groups to input

their preferences during the optimization process. The algorithm created was designated the IPOMP algorithm (*algorithme Interactif pour résoudre des Problèmes à Objectifs Multiples basé sur les Préférences des groupes de travail*). The algorithm is simple to use and generates Pareto-optimal solutions. However, optimization remains under the control of one single person (centralized environment). The algorithm was tested on two problems: a mathematical problem and a real design problem. The results obtained show that the algorithm functions well, and that only a small number of iterations are necessary to obtain Pareto-optimal solutions. The algorithm is useful because it avoids discussion between work groups to get a consensus.

In a second case, the IPOMP algorithm was amalgamated into a distributed optimization structure. This structure is advantageous since it permits groups to work simultaneously and in a physically decentralized fashion. The algorithm thus created is called IPOMP-ED, where ED stands for distributed environment, and permits resolution of multi-objective problems in a distributed environment. The solutions obtained are identical to the solutions found in a centralized environment. When differences are observed, the reasons that might be given to explain these differences are associated with the behaviour of the Sequential Quadratic Programming optimization algorithm of the software program DONLP2.

Finally, different methods of robustness analysis and sensitivity analysis were demystified so as to be able to define a process for choosing a robust solution. The methodology proposed permits identification of variables influencing the variation of objective functions so as to be able to take actions to reduce this. The results obtained show that, in certain cases, the deterministic solutions found are already robust, while in other cases robust solutions are obtained. The process suggested is simple but it permits study of the variability of objective functions and improvement of product quality from the design phase.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	viii
TABLE DES MATIÈRES	x
LISTE DES TABLEAUX	xiv
LISTE DES FIGURES	xx
LISTE DES SYMBOLES	xxiii
LISTE DES ANNEXES	xxviii
CHAPITRE 1- LA CONCEPTION DE PRODUIT	1
1.0 Introduction	1
1.1 Évolution de la prise de décision en conception de produit	4
1.1.1 Ingénierie séquentielle	4
1.1.2 Ingénierie simultanée	5
1.1.3 Ingénierie collaborative	5
1.2 Le Design for Six Sigma	10
1.3 Problématique	15
1.4 Conclusion	16
CHAPITRE 2- LES APPROCHES D'OPTIMISATION	17
2.0 Introduction	17
2.1 Méthode à un seul niveau	18
2.2 Méthode à multiples niveaux	18
2.3 Méthodes à objectifs multiples	22
2.3.1 Concept de solutions Pareto-optimales	22
2.3.2 Les méthodes à objectifs multiples	23

2.3.2.1	Méthodes génératives (pas de préférences)	24
2.3.2.2	Méthodes génératives (a posteriori)	25
2.3.2.2.1	Méthode des poids	25
2.3.2.2.2	Méthode des contraintes	26
2.3.2.3	Méthodes basées sur les préférences (a priori)	27
2.3.2.3.1	Fonction utilité	27
2.3.2.3.2	Programmation par objectif	28
2.3.2.4	Méthodes basées sur les préférences (interactives)	29
2.4	Les approches multidisciplinaires	30
2.5	Conclusion	43

CHAPITRE 3- DÉVELOPPEMENT D'UN ALGORITHME INTERACTIF POUR RÉSOUTRE DES PROBLÈMES À OBJECTIFS MULTIPLES INTÉGRANT LES PRÉFÉRENCES DES GROUPES DE TRAVAIL	44	
3.0	Introduction	44
3.1	Notations	46
3.2	Le <i>linear physical programming</i>	47
3.3	Un algorithme interactif basé sur la programmation par objectif	53
3.4	L'algorithme IPOMP	56
3.5	Algorithme d'optimisation	62
3.6	Application 1: problème mathématique proposé par Abdel Haleem (1991)	63
3.7	Application 2 : problème mathématique proposé par Tappeta et Renaud (2000)	65
3.8	Application 3 : problème de conception d'une structure à deux barres	70
3.9	Conclusion	75

CHAPITRE 4- DÉVELOPPEMENT D'UN ALGORITHME INTERACTIF POUR RÉSOUDRE DES PROBLÈMES À OBJECTIFS MULTIPLES INTÉGRANT LES PRÉFÉRENCES DES GROUPES DE TRAVAIL DANS UN ENVIRONNEMENT DISTRIBUÉ	76
4.0 Introduction	76
4.1 Définitions, notations et formulation générale	78
4.1.1 Définitions	78
4.1.2 Notations	78
4.1.3 Formulation générale	82
4.2 Algorithme d'optimisation	83
4.3 La fonction de Rosenbrock	84
4.3.1 Formulation distribuée de la fonction de Rosenbrock	84
4.3.2 Résolution du problème distribué	89
4.4 Bornes sur les variables auxiliaires et les valeurs cibles associées.....	89
4.5 L'algorithme IPOMP-ED	91
4.6 Conclusion	107
CHAPITRE 5- APPLICATIONS DE L'ALGORITHME IPOMP-ED	108
5.0 Introduction	108
5.1 Application 1: problème mathématique d'Abel Haleem (1991)	109
5.2 Application 2: problème de conception d'une structure à deux barres.....	122
5.3 Conclusion	134
CHAPITRE 6- LA CONCEPTION DE PRODUIT ROBUSTE EN ENVIRONNEMENT DISTRIBUÉ	135
6.0 Introduction	135
6.1 L'analyse de robustesse	136
6.2 L'analyse de sensibilité	140

6.3	Méthodes d'analyse de sensibilité	142
6.4	Conception réalisable robuste	143
6.5	Optimisation distribuée à objectifs multiples dans un contexte stochastique	144
6.6	Processus pour l'analyse de sensibilité avec des objectifs multiples	149
6.7	Application 1: problème mathématique d'Abdel Haleem (1991)	153
6.8	Application 2: problème de conception d'une structure à deux barres ..	164
6.9	Conclusion	177
 CHAPITRE 7- CONCLUSION		178
7.0	Contexte	178
7.1	Synthèse	179
7.2	Limitations de la recherche	181
7.3	Principales contributions	182
7.4	Perspectives de recherche	184
7.5	Conclusion	186
 BIBLIOGRAPHIE		187
ANNEXES		203

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1 : Outils et techniques de développement de produit utilisés par les entreprises.....	4
Tableau 1.2 : Les outils relatifs aux phases ICOV proposés par Creveling et al. (2003).....	12
Tableau 1.3 : Les outils relatifs aux phases DMACV proposés par Ginn et al. (2004).....	14
Tableau 2.1 : Comparaison des méthodes d'optimisation multidisciplinaires (Yi et al., 2007)	32
Tableau 2.2 : Nomenclature utilisées dans l'approche de Gu et al. (2006).....	37
Tableau 3.1 : Notations utilisées dans le chapitre 3.....	46
Tableau 3.2 : Classification des fonctions-objectifs selon la technique du <i>linear physical programming</i>	48
Tableau 3.3 : Table des valeurs des fonctions-objectifs (environnement centralisé).....	58
Tableau 3.4 : Degrés de désirabilité pour le problème mathématique d'Abdel Haleem (1991) selon le scénario 1	64
Tableau 3.5 : Résumé des solutions obtenues pour le problème mathématique d'Abdel Haleem (1991).....	65
Tableau 3.6 : Degrés de désirabilité pour le problème mathématique Tappeta et al. (2000) selon le scénario 3	66
Tableau 3.7 : Résumé des solutions obtenues pour le problème mathématique Tappeta et al. (2000)	67
Tableau 3.8 : Degrés de désirabilité fixés par Tappeta et al. (2000)	68
Tableau 3.9 : Résultats obtenus en utilisant les degrés de désirabilité de Tappeta et al. (2000)	68
Tableau 3.10 : Comparaison des points Pareto-optimaux obtenus par Tappeta et al. (2000) avec ceux obtenus avec l'algorithme IPOMP	69

Tableau 3.11 : Degrés de désirabilité pour le problème de structure selon le scénario 2	72
Tableau 3.12 : Résumé des solutions obtenues pour le problème de structure	72
Tableau 3.13 : Degrés de désirabilité fixés par Messac et Ismail-Yahaya (2002)	73
Tableau 3.14 : Résumé des solutions obtenues pour le problème de structure avec les degrés de désirabilités fixés par Messac et Ismail-Yahaya (2002)	74
Tableau 3.15 : Comparaison de la solution obtenue par Messac et Ismail-Yahaya (2002) avec celle obtenue avec l'algorithme IPOMP	74
Tableau 4.1 : Notations utilisées dans le chapitre 4	78
Tableau 4.2 : Transformation des variables pour la fonction de Rosenbrock	85
Tableau 4.3 : Résultats de la fonction de Rosenbrock	89
Tableau 4.4 : Table des valeurs des fonctions-objectifs du directeur (environnement distribué)	97
Tableau 5.1 : Transformation des variables pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991)	111
Tableau 5.2 : Degrés de désirabilité pour les fonctions-objectifs du directeur et du groupe de travail 2	114
Tableau 5.3 : Résultats obtenus avec l'algorithme IPOMP-ED pour différentes valeurs cibles pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991)	115
Tableau 5.4 : Différence (en pourcentage) entre les valeurs des fonctions-objectifs obtenues en environnement centralisé et distribué pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991)	116
Tableau 5.5 : Transformation des variables pour le problème de structure	125
Tableau 5.6 : Degrés de désirabilité des fonctions-objectifs du système et du sous-système 1 pour le problème de structure	127
Tableau 5.7 : Résultats obtenus avec l'algorithme IPOMP-ED pour le problème de structure avec $\gamma = 100$	128
Tableau 5.8 : Comparaison des résultats obtenus avec l'algorithme IPOMP-ED pour le problème de structure avec $\gamma = 100$ et $\gamma = 25$	129

Tableau 6.1 : Notations supplémentaires utilisées dans le chapitre 6	150
Tableau 6.2 : Solutions réalisables sous variation obtenues avec l'algorithme IPOMP-ED pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991)	156
Tableau 6.3 : Statistiques descriptives pour la solution réalisable sous variation 1 du problème mathématique de Abdel Haleem (1991)	157
Tableau 6.4 : Statistiques descriptives pour la solution réalisable sous variation 2 du problème mathématique de Abdel Haleem (1991).....	158
Tableau 6.5 : Statistiques descriptives pour la solution réalisable sous variation 3 du problème mathématique de Abdel Haleem (1991)	159
Tableau 6.6 : Statistiques descriptives pour la solution réalisable sous variation 4 du problème mathématique de Abdel Haleem (1991)	160
Tableau 6.7 : Comparaison des solutions réalisables sous variation obtenues pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991)	162
Tableau 6.8 : Pourcentage de variation des fonctions et contraintes attribuable à chacune des variables pour la solution robuste 2 du problème mathématique de Abdel Haleem (1991).....	163
Tableau 6.9 : Comparaison des solutions déterministe et robustes du problème mathématique de Abdel Haleem (1991)	164
Tableau 6.10 : Solutions réalisables sous variation obtenues avec l'algorithme IPOMP-ED pour le problème de structure	169
Tableau 6.11 : Statistiques descriptives pour la solution réalisable sous variation 1 du problème de structure	170
Tableau 6.12 : Statistiques descriptives pour la solution réalisable sous variation 2 du problème de structure	171
Tableau 6.13 : Statistiques descriptives pour la solution réalisable sous variation 3 du problème de structure	172
Tableau 6.14 : Statistiques descriptives pour la solution réalisable sous variation 4 du problème de structure	173
Tableau 6.15 : Comparaison des solutions robustes pour le problème de structure	174

Tableau 6.16 : Pourcentage de variation des fonctions et contraintes attribuable à chacune des variables pour la solution robuste 3 du problème de structure	175
Tableau 6.17 : Comparaison des solutions déterministes et robustes du problème de structure	176
Tableau E.1 : Valeurs optimales de chacun des objectifs pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991)	212
Tableau E.2 : Table des valeurs des fonctions-objectifs pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991)	213
Tableau E.3 : Degrés de désirabilité pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991) selon le scénario 1	213
Tableau E.4 : Résumé des solutions obtenues pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991)	216
Tableau F.1 : Valeurs optimales de chacun des objectifs pour le problème mathématique de Tappeta et al. (2000)	217
Tableau F.2 : Table des valeurs des fonctions-objectifs pour le problème mathématique de Tappeta et al. (2000)	218
Tableau F.3 : Degrés de désirabilité pour le problème mathématique de Tappeta et al. (2000) selon le scénario 3	218
Tableau F.4 : Résumé des solutions obtenues pour le problème mathématique de Tappeta et al. (2000)	221
Tableau G.1 : Solutions optimales de chacun des objectifs pour le problème de structure	222
Tableau G.2 : Table des valeurs des fonctions-objectifs pour le problème de structure	222
Tableau G.3 : Degrés de désirabilité pour le problème de structure selon le scénario 2	223
Tableau G.4 : Résumé des solutions obtenues pour le problème de structure	225

Tableau I.1 : Solutions individuelles obtenues par le groupe 1 pour les fonctions-objectifs du système du problème mathématique de Abdel Haleem (1991)	233
Tableau I.2 : Solutions individuelles obtenues par le groupe 2 pour les fonctions-objectifs du système du problème mathématique de Abdel Haleem (1991)	233
Tableau I.3 : Table des valeurs des fonctions-objectifs du système pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991)	234
Tableau I.4 : Degrés de désirabilité pour les fonctions-objectifs du système	234
Tableau I.5 : Solution individuelle obtenue par le groupe 2 pour sa fonction-objectif locale du problème mathématique de Abdel Haleem (1991)	235
Tableau I.6 : La valeur des fonctions-objectifs du système à la solution optimale de f_{22}^*	235
Tableau I.7 : Pointeur pour la fonction-objectif F_1 du système pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991)	235
Tableau I.8 : Pointeur pour la fonction-objectif F_2 du système pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991)	236
Tableau I.9 : Degrés de désirabilité de la fonction-objectif locale f_{22} du groupe 2 pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991)	236
Tableau I.10 : Première solution générée par l'algorithme IPOMP-ED pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991)	238
Tableau K.1 : Résolution individuelle des fonctions-objectifs du système par le groupe 1 pour le problème de structure	246
Tableau K.2 : Résolution individuelle des fonctions-objectifs du système par le groupe 2 pour le problème de structure	247
Tableau K.3 : Table des valeurs des fonctions-objectifs du système pour le problème de structure	248
Tableau K.4 : Degrés de désirabilité des fonctions-objectifs du système pour le problème de structure	248

Tableau K.5 : Solution individuelle obtenue par le groupe de travail 1 pour sa fonction-objectif locale du problème de structure	249
Tableau K.6 : La valeur des fonctions-objectifs du système à la solution optimale A^{*21}	249
Tableau K.7 : Pointeur pour la fonction-objectif F_1 du système pour le problème de structure	249
Tableau K.8 : Pointeur pour la fonction-objectif F_2 du système pour le problème de structure	250
Tableau K.9 : Degrés de désirabilité pour la fonction locale du groupe 1 pour le problème de structure	250
Tableau K.10 : Première solution générée par l'algorithme IPOMP-ED pour le problème de structure	252

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 :	Les maisons de la qualité (Bouchereau et Rowlands, 2000)	6
Figure 1.2 :	Les étapes de la méthodologie DFSS proposées par Ginn et al. (2004)	13
Figure 2.1 :	Les méthodes à objectifs multiples.....	24
Figure 2.2 :	Décomposition d'un problème selon l'approche de Braun (1996).....	34
Figure 2.3 :	Décomposition d'un problème selon l'approche de Tappeta et Renaud (1997).....	36
Figure 2.4 :	Structure collaborative simultanée (Ying et al., 2006)	41
Figure 2.5 :	Résumé des différentes approches d'optimisation	43
Figure 3.1 :	Principales étapes de l'algorithme interactif (environnement centralisé)	45
Figure 3.2 :	Fonction de désirabilité pour la classe souple 1S (minimisation)	48
Figure 3.3 :	Fonction de désirabilité pour la classe souple 2S (maximisation)	49
Figure 3.4 :	Fonction de désirabilité pour la classe souple 3S (valeur cible)	50
Figure 3.5 :	Fonction de désirabilité pour la classe souple 4S (étendue)	51
Figure 3.6 :	L'algorithme IPOMP.....	57
Figure 3.7 :	Structure à deux barres.....	70
Figure 4.1 :	Algorithme simplifié (environnement distribué)	77
Figure 4.2 :	Algorithme IPOMP-ED	92
Figure 5.1 :	Convergence des fonctions F_1 et F_2 du directeur et de la fonction f_{22} du groupe de travail 2 pour la solution 1 du problème de Abdel Haleem (1991).....	118
Figure 5.2 :	Convergence des fonctions F_1 et F_2 du directeur et de la fonction f_{22} du groupe de travail 2 pour la solution 2 du problème de Abdel Haleem (1991).....	119

Figure 5.3 : Convergence des fonctions F_1 et F_2 du directeur et de la fonction f_{22} du groupe de travail 2 pour la solution 3 du problème de Abdel Haleem (1991)	120
Figure 5.4 : Convergence des fonctions F_1 et F_2 du directeur et de la fonction f_{22} du groupe de travail 2 pour la solution 4 du problème de Abdel Haleem (1991)	121
Figure 5.5 : Convergence des fonctions F_1 et F_2 du directeur et de la fonction f_{21} du groupe de travail 1 pour la solution 1 du problème de structure	130
Figure 5.6 : Convergence des fonctions F_1 et F_2 du directeur et de la fonction f_{21} du groupe de travail 1 pour la solution 2 du problème de structure	131
Figure 5.7 : Convergence des fonctions F_1 et F_2 du directeur et de la fonction f_{21} du groupe de travail 1 pour la solution 3 du problème de structure	132
Figure 5.8 : Convergence des fonctions F_1 et F_2 du directeur et de la fonction f_{21} du groupe de travail 1 pour la solution 4 du problème de structure	133
Figure 6.1 : Histogrammes des distributions de F_1 , F_2 , f_{22} , c_{11} , c_{12} et c_{22} pour la solution réalisable sous variation 1 du problème mathématique de Abdel Haleem (1991)	158
Figure 6.2 : Histogrammes des distributions de F_1 , F_2 , f_{22} , c_{11} , c_{12} et c_{22} pour la solution réalisable sous variation 2 du problème mathématique de Abdel Haleem (1991)	159
Figure 6.3 : Histogrammes des distributions de F_1 , F_2 , f_{22} , c_{11} , c_{12} et c_{22} pour la solution réalisable sous variation 3 du problème mathématique de Abdel Haleem (1991)	160
Figure 6.4 : Histogrammes des distributions de F_1 , F_2 , f_{22} , c_{11} , c_{12} et c_{22} pour la solution réalisable sous variation 4 du problème mathématique de Abdel Haleem (1991)	161
Figure 6.5 : Histogrammes des distributions de F_1 , F_2 , f_{21} et c_{12} pour la solution réalisable sous variation 1 du problème de structure	170

Figure 6.6 : Histogrammes des distributions de F_1 , F_2 , f_{21} et c_{12} pour la solution réalisable sous variation 2 du problème de structure	171
Figure 6.7 : Histogrammes des distributions de F_1 , F_2 , f_{21} et c_{12} pour la solution réalisable sous variation 3 du problème de structure	172
Figure 6.8 : Histogrammes des distributions de F_1 , F_2 , f_{21} et c_{12} pour la solution réalisable sous variation 4 du problème de structure	173
Figure 7.1 : Structure de la méthode AHP	186

LISTE DES SYMBOLES

Les notations suivantes ont été utilisées pour développer les nouveaux algorithmes. Ces notations sont donc utilisées dans les chapitres 3, 4, 5 et 6.

A	vecteur des variables décisionnelles utilisé en environnement centralisé.
\bar{A}_h	$h^{\text{ième}}$ solution Pareto-optimale du problème à multiples objectifs en environnement centralisé.
A_j	vecteur des variables décisionnelles sous le contrôle du groupe de travail j utilisé en environnement distribué. $A = [y_{ij}, x_{ij}, (x_{\text{aux}})_{jki}]$.
A^{*m}	solution optimale individuelle de la fonction m obtenue en environnement centralisé.
A^{*mj}	solution optimale individuelle de la fonction m obtenue par le groupe de travail j en environnement distribué.
\bar{A}_{hnj}	$h^{\text{ième}}$ solution Pareto-optimale du problème à multiples objectifs obtenue après n itérations entre le directeur et le groupe de travail j en environnement distribué.
b^h	vecteur des valeurs cibles à l'itération h où $b^h = [b_1^h, b_2^h, \dots, b_m^h]$
b_m^h	valeur cible de la fonction-objectif m à l'itération h .
b_{mj}^h	valeur cible de la fonction-objectif m du groupe de travail j à l'itération h .
b_q	membre de droite de la $q^{\text{ième}}$ contrainte ferme.
$b_{m \min}, b_{m \max}$	meilleures et pires valeurs obtenues pour la fonction-objectif m .
$b_{mj \min}, b_{mj \max}$	meilleures et pires valeurs obtenues par le groupe de travail j pour la fonction-objectif m .
$c_q(A)$	contrainte q où $q = 1 \dots Q$. Notation utilisée en environnement centralisé.
$c_{qj}(A_j)$	contrainte q contrôlée par le groupe de travail j où $q = 1 \dots Q$ et $j = 1 \dots J$. Notation utilisée en environnement distribué.
$c_q(Z)$	contrainte q contrôlée par le directeur (niveau système) où $q = 1 \dots Q$
d_m	variables de déviation des fonctions objectif m
d_{mj}	variables de déviation des fonctions objectif m du groupe de travail j .
d_{ms}^-, d_{ms}^+	variables de déviation des fonctions-objectifs m pour le degré de désirabilité s . Notation utilisée en environnement centralisé.
D	ensemble de solvabilité c'est-à-dire ensemble des valeurs pour lesquelles le problème est résoluble. Notation utilisée en environnement centralisé.
D°	ensemble des valeurs cibles possibles pour les fonctions-objectifs du directeur. Notation utilisée en environnement distribué.

D_j^*	ensemble des valeurs cibles possibles pour les fonctions-objectifs du groupe de travail j . Notation utilisée en environnement distribué.
D^*	ensemble de solvabilité réduit. Notation utilisée en environnement centralisé.
D^{*1}	ensemble réduit des valeurs cibles possibles pour les fonctions-objectifs du directeur. Notation utilisée en environnement distribué.
D_j^{*1}	ensemble réduit des valeurs cibles possibles pour les fonctions-objectifs du groupe de travail j . Notation utilisée en environnement distribué.
e_j	fonction-objectif de compatibilité du groupe de travail j (équivalent à f_{1j}) en environnement distribué
$f_m(A)$	fonction-objectif m . Notation utilisée en environnement centralisé.
$f_{mj}(A_j)$	fonction-objectif m du groupe de travail j . Notation utilisée en environnement distribué.
$f_{mj}^{hn}(A_j)$	fonction-objectif m du groupe de travail j de l'itération h à l'itération n . Notation utilisée en environnement distribué.
$F_m(Z)$	fonction-objectif m du directeur. Notation utilisée en environnement distribué.
$F_m^{hn}(Z)$	fonction-objectif m du directeur de l'itération h à l'itération n . Notation utilisée en environnement distribué.
$F_{mj}(A_j)$	fonction-objectif m du directeur évalué par le groupe de travail j . Notation utilisée en environnement distribué.
g_j	fonction de pénalité du groupe j apparaissant dans la fonction-objectif du problème d'optimisation du directeur (système). Notation utilisée en environnement distribué.
$G(\bar{A}_h)$	ensemble de stabilité, c'est-à-dire l'ensemble où la solution \bar{A}_h demeure optimale (voir annexe A). Notation utilisée en environnement centralisé.
$G(\bar{A}_{hj})$	ensemble de stabilité, c'est-à-dire l'ensemble où la solution \bar{A}_h obtenue par le groupe de travail j demeure optimale (voir annexe A). Notation utilisée en environnement distribué.
$G(\bar{Z}_h)$	ensemble de stabilité, c'est-à-dire l'ensemble où la solution \bar{Z}_h obtenue par le directeur (système) demeure optimale (voir annexe A). Notation utilisée en environnement distribué.
H	nombre d'itérations correspondant au nombre de solutions générées où $h = 1 \dots H$.
i	nombre de variables décisionnelles (disciplinaires, interdisciplinaires, auxiliaires ou couplées) où $i = 1 \dots I$
J	nombre de groupes de travail où $j = 1 \dots J$
k_q	facteur de pénalité pour la contrainte q du directeur (système). Notation utilisée en environnement distribué.
k_{qj}	facteur de pénalité pour la contrainte q du groupe j . Notation utilisée en environnement distribué.
l	nombre de fonctions-objectifs dans les classes fermes où $l = 1 \dots L$
LM	fonction de perte quadratique moyenne

M	nombre de fonctions-objectifs dans les classes souples où $m = 1 \dots M$
n	nombre d'itérations entre le système et les groupes de travail pour obtenir la solution Pareto-optimale h .
Q	nombre de contraintes où $q = 1 \dots Q$.
r_{ij}	variable de surplus correspondant à la valeur cible de la variable interdisciplinaire i apparaissant dans le groupe j . Donc $r_{ij} \in R_j$ où $R_j = (r_{1j}, r_{2j}, \dots, r_{ij})$.
$(r_{aux})_{jki}$	variable de surplus correspondant à la valeur cible de la variable auxiliaire i apparaissant dans le problème d'optimisation du groupe k mais calculée par le groupe j . Donc $(r_{aux})_{jki} \in (R_{aux})_j$ où $(R_{aux})_j = ((r_{aux})_{jk1}, (r_{aux})_{jk2}, \dots, (r_{aux})_{jki})$ et $(j \neq k)$.
$(r_c)_{jki}$	variable de surplus correspondant à la valeur cible de la variable couplée i calculée par le groupe j et nécessaire au groupe k . Elle apparaît dans le problème d'optimisation du groupe j . Donc $(r_c)_{jki} \in (R_c)_j$ où $(R_c)_j = ((r_c)_{jk1}, (r_c)_{jk2}, \dots, (r_c)_{jki})$ et $(j \neq k)$.
s_{ij}	variable d'écart correspondant à la valeur cible de la variable interdisciplinaire i apparaissant dans le groupe j . Donc $s_{ij} \in S_j$ où $S_j = (s_{1j}, s_{2j}, \dots, s_{ij})$.
$(s_{aux})_{jki}$	variable d'écart correspondant à la valeur cible de la variable auxiliaire i apparaissant dans le problème d'optimisation du groupe k mais calculée par le groupe j . Donc $(s_{aux})_{jki} \in (S_{aux})_j$ où $(S_{aux})_j = ((s_{aux})_{jk1}, (s_{aux})_{jk2}, \dots, (s_{aux})_{jki})$ et $(j \neq k)$.
$(s_c)_{jki}$	variable d'écart correspondant à la valeur cible de la variable couplée i calculée par le groupe j et nécessaire au groupe k . Elle apparaît dans le problème d'optimisation du groupe j . Donc $(s_c)_{jki} \in (S_c)_j$ où $(S_c)_j = ((s_c)_{jk1}, (s_c)_{jk2}, \dots, (s_c)_{jki})$ et $(j \neq k)$.
$t_{ms}^-, t_{ms}, t_{ms}^+$	degrés de désirabilité s de la fonction-objectif m où $s = 1, \dots, 5$ pour les classes souples.
$t_{mjs}^-, t_{mjs}, t_{mjs}^+$	degré de désirabilité s de la fonction-objectif m du groupe de travail j où $s = 1, \dots, 5$ pour les classes souples.
$t_{l,\min}, t_{l,\text{val}}, t_{l,\max}$	membres de droite des fonctions objectif dans les classes fermes.
\bar{u}_q	valeur du multiplicateur de KKT pour la contrainte q du directeur. Notation utilisée en environnement centralisé et distribué.
\bar{u}_{qj}	valeur du multiplicateur de KKT pour la contrainte q du groupe de travail j . Notation utilisée en environnement distribué.
$U_{opt}(b_m^h)$	ensemble de toutes les solutions optimales.
v_{ij}	variable disciplinaire i du groupe de travail j et $v_{ij} \in V_j$, $V_j = (v_{1j}, v_{2j}, \dots, v_{ij})$.

$V(f_m)$	variance de la fonction-objectif m
$\tilde{w}_{ms}^-, \tilde{w}_{ms}^+$	poids associés aux variables de déviation.
x_{ij}	variable interdisciplinaire i apparaissant dans un groupe de travail j . Elle doit être dupliquée selon le nombre de groupes de travail dans lesquels elle apparaît. Par exemple si cette variable est sous la responsabilité des groupes de travail 1 et 2, on retrouvera la notation suivante: x_{i1} et x_{i2} , ce qui signifie que la variable interdisciplinaire i apparaît dans le problème d'optimisation du groupe de travail 1 et 2. On a $x_{ij} \in X_j$, $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{ij})$.
$(x_{aux})_{jki}$	variable auxiliaire i calculée par le groupe de travail j et nécessaire au groupe de travail k pour résoudre son problème d'optimisation, et qui paraît comme variable décisionnelle dans le problème du groupe k . Cette variable remplace la variable couplée y_{jki} dans le problème d'optimisation du groupe k afin d'être en mesure d'exécuter les problèmes d'optimisation de j et k simultanément de sorte que $(x_{aux})_{jki} = y_{jki}$. Donc $(x_{aux})_{jki} \in (X_{aux})_j$ où $(X_{aux})_j = ((x_{aux})_{jk1}, (x_{aux})_{jk2}, \dots, (x_{aux})_{jki})$ et $(j \neq k)$.
y_{jki}	variable couplée i calculée par le groupe de travail j et nécessaire au groupe de travail k pour résoudre son problème d'optimisation. Cette variable apparaît dans le problème d'optimisation du groupe j . Par exemple, pour le groupe de travail 1 on a y_{1ki} qui représente la variable couplée i calculée par le groupe de travail 1 et nécessaire au groupe de travail k . A cette variable y_{1ki} correspond une variable auxiliaire $(x_{aux})_{1ki}$ dans le problème du groupe de travail k . Donc $y_{jki} \in Y_j$ et $Y_j = (y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{jki})$ et $(j \neq k)$.
$(z_{int})_i$	valeur cible pour la variable interdisciplinaire i du problème d'optimisation. Une variable $(z_{int})_i$ est introduite pour chaque variable interdisciplinaire x_{ij} . C'est une variable décisionnelle du niveau système. Donc $(z_{int})_i \in Z$.
$(z_c)_{jki}$	valeur cible pour la variable couplée i calculée par le groupe j et nécessaire au groupe k . Une variable $(z_c)_{jki}$ est introduite pour chaque variable couplée y_{jki} . On utilise les mêmes valeurs cibles pour les variables auxiliaires $(x_{aux})_{jki}$. C'est aussi une variable décisionnelle du niveau système. Donc $(z_c)_{jki} \in Z$.
Z	vecteur des variables décisionnelles au niveau système (directeur): $Z = [(z_{int})_i, (z_c)_{jki}]$.
Z^{*mj}	solution optimale individuelle de la fonction m du directeur calculée par le groupe de travail j .
\bar{Z}_{hn}	$h^{\text{ème}}$ solution optimale du problème à objectifs multiples du directeur à l'itération n .
$(\cdot)^*$	valeur optimale d'une variable (valeur cible) ou d'une fonction-objectif. Les valeurs optimales, Z^* trouvées par le système sont considérées comme des

	valeurs cibles (paramètres) dans les problèmes d'optimisation des groupes de travail. Les valeurs optimales, x_{ij}^* , $(x_{aux})_{jki}^*$ et y_{jki}^* trouvées par les groupes de travail sont considérées comme des valeurs cibles (paramètres) dans le problème d'optimisation du système.
∂	dérivée partielle
ϵ	critère d'arrêt de l'algorithme IPOMP-ED fixé à 0.000001
γ	paramètre de pénalité pour la fonction-objectif du problème d'optimisation du système (directeur) en environnement distribué.
$\sigma_{(z_{int})_i}^2$	variance de la variable $(z_{int})_i$.
$\sigma_{(z_c)_{jki}}^2$	variance de la variable $(z_c)_{jki}$.
$\sigma_{x_{ij}}^2$	variance de la variable x_{ij} .
$\sigma_{v_{ij}}^2$	variance de la variable v_{ij} .
$\sigma_{(x_{aux})_{jki}}^2$	variance de la variable $(x_{aux})_{jki}$.
$\sigma_{y_{jki}}^2$	variance de la variable y_{jki} .
$\Delta(z_{int})_i$	Déviation de la variable $(z_{int})_i$ exprimée en nombre d'écart-type.
$\Delta(z_c)_{jki}$	Déviation de la variable $(z_c)_{jki}$ exprimée en nombre d'écart-type.
Δv_{ij}	Déviation de la variable v_{ij} exprimée en nombre d'écart-type.
Δx_{ij}	Déviation de la variable x_{ij} exprimée en nombre d'écart-type.

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE A : Procédure pour déterminer l'ensemble de stabilité	203
ANNEXE B : Scénarios possibles pour déterminer les degrés de désirabilité	204
ANNEXE C : Algorithme de Dauer et Krueger (1977)	206
ANNEXE D : Programme Matlab de l'algorithme IPOMP.....	209
ANNEXE E : Étapes de l'algorithme IPOMP du problème d'Abdel Haleem (1991).....	212
ANNEXE F : Étapes de l'algorithme IPOMP du problème de Tappeta et Renaud (1999) ..	217
ANNEXE G : Étapes de l'algorithme IPOMP du problème de structure à deux barres.....	222
ANNEXE H : Programme AMPL du problème d'Abdel Haleem (1991)	226
ANNEXE I : Étapes de l'algorithme IPOMP-ED du problème d'Abdel Haleem (1991)	230
ANNEXE J : Programme AMPL du problème de structure à deux barres	241
ANNEXE K : Étapes de l'algorithme IPOMP-ED du problème de structure à deux barres.....	244
ANNEXE L : Programme AMPL du problème d'Abdel Haleem (1991) robuste.....	255
ANNEXE M : Programme AMPL du problème de structure à deux barres robuste	259

CHAPITRE 1

LA CONCEPTION DE PRODUIT

1.0 Introduction

En réponse à la concurrence des pays en émergence, les entreprises sont forcées d'utiliser des approches renouvelées et de faire preuve d'imagination afin de se doter de moyens novateurs pour assurer leur prospérité. La prospérité des entreprises passe nécessairement par leur processus de développement de produit. Puisqu'il est très difficile de concurrencer sur le plan de la fabrication, les coûts de main-d'œuvre des pays en émergence étant très bas, les entreprises cherchent à rendre leur processus de développement de produit plus rapide et à utiliser des technologies nécessitant plusieurs années avant d'être copiées (Conseil de la Science et de la Technologie, 2006).

Développer un bon produit n'est pas chose facile. Les équipes de conception doivent souvent composer avec plusieurs difficultés. Ces difficultés peuvent être regroupées en cinq grandes catégories (Ulrich et Eppinger, 2000):

- ***Les compromis*** : Un des aspects les plus difficiles du développement de produit est de reconnaître, arranger et contrôler les compromis de manière à maximiser le succès du produit. Par exemple, les équipes de conception peuvent vouloir fabriquer un avion léger, mais cette action augmentera probablement le coût de fabrication.
- ***La dynamique*** : Les technologies s'améliorent, les préférences des clients évoluent, les concurrents présentent de nouveaux produits et l'environnement

économique change. La prise de décision dans un environnement en continual changement représente tout un défi.

- ***Les détails*** : Développer un produit, même de complexité modeste, exige que les concepteurs prennent des milliers de décisions. Par exemple, le choix entre l'utilisation de vis ou de "snap-fits" pour l'assemblage d'un boîtier d'ordinateur peut avoir des implications économiques de l'ordre de millions de dollars.
- ***Le temps*** : Il est possible de surmonter toutes les difficultés lorsque le temps disponible est illimité. Cependant les décisions concernant le développement de produit doivent habituellement être prises rapidement et sans avoir toute l'information nécessaire.
- ***L'économie*** : Développer, produire et vendre un nouveau produit exige un grand investissement. Pour obtenir un retour sur investissement satisfaisant, le produit doit être attrayant pour les clients et peu coûteux à produire.

En plus de ces difficultés, les équipes de conception sont soumises à plusieurs critères d'évaluation de performance afin de mesurer le succès du processus de développement de produit. Ces critères sont, selon Ulrich et Eppinger (2000):

- ***La qualité du produit*** : La qualité du produit se reflète dans les parts de marché et le prix que les clients sont disposés à payer. Ainsi, le produit résultant du processus de conception doit être bon, doit satisfaire les besoins du client, être robuste et fiable.
- ***Le coût du produit*** : Le coût de fabrication du produit inclut la dépense sur les biens d'équipement et l'outillage aussi bien que le coût pour produire chaque unité de produit. Le coût du produit détermine les bénéfices auxquels l'entreprise peut s'attendre pour un volume de vente donné et un prix de vente donné.
- ***Le temps de développement*** : Il est important de connaître la rapidité avec laquelle l'équipe de conception peut développer un produit. Le temps de développement détermine comment l'entreprise réagit face à la compétition et

aux développements technologiques. Aussi, cela détermine avec quelle rapidité l'entreprise perçoit les retombées économiques des efforts de conception de son équipe.

- ***Le coût de développement de produit*** : Ce coût correspond au montant dépensé par l'entreprise pour développer le produit. Le coût de développement est habituellement une fraction significative de l'investissement exigé pour réaliser les bénéfices.
- ***La capacité de développement*** : Cela représente la capacité de l'équipe et de la société à développer des produits futurs en raison de leur expérience. La capacité de développement est un atout que la société doit utiliser pour développer, plus efficacement et économiquement, les produits futurs.

Dans le même ordre d'idée, une étude réalisée par l'A.P.Q.C. (American Productivity and Quality Center, 2003) montre que les nouveaux produits lancés dans les trois dernières années expliquent, en moyenne, 27.5% des ventes actuelles des entreprises. De plus, le cycle de vie des produits est de plus en plus court : une réduction de 400% au cours des 50 dernières années, s'expliquant par une accélération de l'innovation des produits. Cependant, beaucoup de produits ne connaissent pas le succès: la même étude indique qu'un peu plus de la moitié (56%) des projets de développement de nouveaux produits réalisent leurs objectifs financiers et seulement 51% sont lancés à temps.

D'un autre côté, la compétitivité des marchés, les compétences de base requises et les outils de conception spécialisés poussent les entreprises à distribuer le travail de conception au sein de plusieurs acteurs, produisant ainsi de la fragmentation. La multiplicité des acteurs peut survenir au sein d'une même compagnie, par exemple, lorsque la compagnie est composé de plusieurs bureaux et que le travail est organisé sur plusieurs sites ou encore lorsque la compagnie fait affaire avec des sous-traitants. Cette multiplicité occasionne des prises de décision complexes devant s'effectuer dans un processus de collaboration (Giassi et al., 2004).

Selon une étude menée par le "Product Development & Management Association" (Kahn, 2005), une des tendances observées dans les processus de développement de nouveaux produits est la collaboration avec des partenaires externes (fournisseurs, sous-traitants ou clients). En effet, les répondants à cette étude emploient la collaboration avec des partenaires dans 51% du temps pour des innovations radicales.

L'étude réalisée par l'A.P.C.Q. démontre aussi que plusieurs entreprises n'utilisent aucun outil ou technique pour les appuyer dans leur processus de conception de produit. Cependant pour certaines entreprises, ils sont nécessaires afin d'assurer leur succès. L'outil le plus utilisé par les entreprises les plus performantes est l'analyse des modes de défaillances et de leurs effets (AMDE), suivi de près par l'ingénierie simultanée et le *Design for X*. Le Six Sigma est la méthodologie la moins employée. Le tableau 1.1 compare les résultats obtenus lors des études réalisées en 1995 et en 2003.

Tableau 1.1: Outils et techniques de développement de produit utilisés par les entreprises.

Outils/techniques	Rang en 2003	Rang en 1995
Analyse des modes de défaillances et de leurs effets	1	4
Ingénierie simultanée	2	2
Design for X	3	1
Analyse de la valeur	4	3
Déploiement de la fonction qualité	5	5
Six sigma	6	Non inclus

1.1 Évolution de la prise de décision en conception de produit

1.1.1 Ingénierie séquentielle

Il y a plusieurs années, l'approche préconisée pour le développement de nouveaux produits était l'ingénierie séquentielle (Cantamessa et Villa, 2000). L'ingénierie

séquentielle est une approche traditionnelle de conception où toutes les activités de conception sont effectuées séquentiellement avant l'élaboration des procédés de production. Selon Bernard (2004), lors du développement de produit en ingénierie séquentielle, les activités sont distribuées dans des départements spécifiques. Chaque département se cantonne à ses objectifs sans intervenir directement dans les activités des autres départements. Les activités sont coordonnées par les documents validés par le département en amont. Le problème majeur avec cette approche est le coût des modifications. En effet, plus une erreur est détectée tardivement, plus les modifications à apporter sont complexes, étant donné la maturité du développement.

1.1.2 Ingénierie simultanée

En raison des inconvénients rencontrés lors de l'application de l'ingénierie séquentielle, de nouvelles méthodes sont devenues nécessaires dans le but de réduire les délais de développement et les coûts induits par ces derniers. L'ingénierie simultanée est apparue dans les années 1970 comme une approche beaucoup plus radicale pour développer de nouveaux produits (Cantamessa et Villa, 2000). L'ingénierie simultanée est une méthode de conception systématique et multidisciplinaire pour intégrer, de façon simultanée, les différentes étapes de développement d'un produit et de la gestion de son processus. L'ingénierie simultanée demande donc une étroite collaboration entre les membres de l'équipe de conception et entre les départements de l'entreprise.

L'outil principal de l'ingénierie simultanée est sans contredit le déploiement de la fonction qualité (DFQ). Le concept du DFQ a été introduit par Akao Yogi en 1967 (Prasad, 1998). Une approche un peu plus viable de la méthode a été développée en 1972 lors de l'implantation de la gestion intégrale de la qualité chez Mitsubishi Shipyard à Kobe au Japon. Plus tard, dans les années 70, Toyota traduit le concept du déploiement de la fonction qualité en un processus détaillé qui est aujourd'hui utilisé dans plusieurs

industries manufacturières. Dans les années 80, plusieurs compagnies telles que Ford Motor Company et Xerox s'intéressent au déploiement de la fonction qualité. La diminution du coût et du temps de conception obtenue par l'application du déploiement de la fonction qualité encourage les compagnies à adopter cet outil (Eldin, 2002).

Le DFQ est un concept global fournissant les moyens nécessaires pour traduire les exigences du client en caractéristiques techniques à chacune des étapes du développement de produit et de la production (Chan et Wu, 2002). La maison de la qualité est l'outil premier du déploiement de la fonction qualité (Hauser et Clausing, 1988). La maison de la qualité est en fait une matrice représentant la voix du client (quoi) et les exigences de conception (comment). La maison de la qualité fournit une structure pour évaluer systématiquement la relation entre les exigences du client et les caractéristiques de conception du produit ou du processus. Tel qu'illustré à la figure 1.1, le processus du DFQ implique les quatre phases suivantes (maisons de la qualité):

- la planification du produit (caractéristiques d'ingénierie ou techniques),
- la conception du produit (déploiement des pièces),
- la planification des procédés,
- le contrôle des procédés.

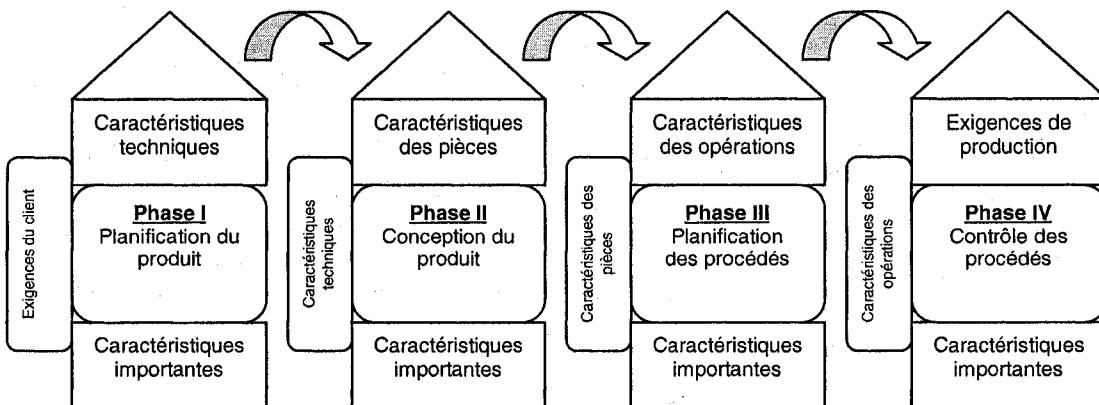


Figure 1.1: Les maisons de la qualité (Bouchereau et Rowlands, 2000)

Le DFQ est une technique subjective et, ces dernières années, plusieurs chercheurs ont développé des méthodes quantitatives afin d'améliorer la fiabilité et l'objectivité du DFQ et, par le fait même, faciliter son utilisation lors de l'ingénierie simultanée. On retrouve dans la littérature des méthodes faisant appel, entre autres, à la programmation mathématique et à la logique floue.

Parmi les méthodes utilisées pour fixer les valeurs des caractéristiques techniques et faisant appel à la programmation mathématique, on retrouve des modèles basés sur une fonction de valeur construite pour capturer les exigences de client (Askin et Dawson, 2000), un programme mathématique non linéaire (Dawson et Askin, 1999), un programme mathématique en nombres entiers (Karsak et al., 2002), un système d'aide à la décision basé sur un programme à multiples objectifs (Moskowitz et Kim, 1997) et un programme mathématique à multiples objectifs utilisant les fonctions de désirabilité pour représenter les exigences techniques et capable de générer des solutions Pareto-optimales (Tang et Paoli, 2004).

La logique floue a aussi été employée pour modéliser le processus de DFQ afin de déterminer les valeurs cibles pour les caractéristiques d'ingénierie (Chen et al., 2005), prioriser les exigences de conception en étant jumelé avec le *Analytic Hierarchy Process* (Fung et al., 1998) ou non (Wang, 1999; Liu, 2005) ou pour développer un programme à multiples objectifs afin de déterminer l'atteinte des exigences de conception (Karsak, 2004).

Ces modèles ont été développés pour rendre plus objectif le processus d'identification des priorités des exigences du client et pour optimiser les valeurs des caractéristiques techniques. Ces modèles sont reliés à la phase I du DFQ. Plus récemment, des chercheurs se sont intéressés à l'optimisation simultanée de deux phases du DFQ. Lamghabbar et al. (2004) ont développé un modèle mathématique, dont la fonction-objectif est la fonction de perte de qualité de Taguchi, pour optimiser simultanément les

phases 2 et 3 du processus DFQ. Leur modèle permet de trouver les valeurs optimales des caractéristiques techniques et des caractéristiques de procédé simultanément. Yacout et al. (2006) proposent trois formulations des phases 1 et 2 du processus DFQ. Les deux premières formulations permettent l'optimisation séquentielle tandis que la troisième formulation optimise simultanément les deux premières phases du DFQ. Ils concluent que la formulation séquentielle ne conduit pas nécessairement à la meilleure solution puisque la priorité est donnée à la première phase et que ces exigences sont imposées aux phases suivantes, ce qui peut conduire à des solutions irréalisables ou inadéquates.

L'ingénierie simultanée est un processus permettant de développer de nouveaux produits dans un environnement où les départements collaborent les uns avec les autres. Cependant, les processus des entreprises manufacturières tendent à être décentralisés et, aujourd'hui, ce sont les entreprises qui doivent collaborer entre elles et non plus seulement les départements.

1.1.3 Ingénierie collaborative

La conception d'un produit exigeant que plusieurs personnes travaillent en collaboration pour réaliser un but commun est ce qu'on appelle l'ingénierie collaborative (Zhao, 2002). Elle met l'emphasis sur la création intégrée des processus et des produits systématiquement. L'ingénierie collaborative implique l'utilisation de moyens informatiques, de communication Internet et de gestion organisationnelle afin de réduire le temps de développement, diminuer les coûts et améliorer la qualité du produit.

Selon Willaert et al. (1998), l'ingénierie collaborative est une approche systématique pour contrôler le coût du cycle de vie, la qualité du produit et le délai d'arrivée sur le marché lors du développement de produit, et ce

- en développant simultanément les produits et leurs processus de façon à ce qu'ils répondent aux attentes du client,
- de façon à ce que les décisions soient prises en tenant compte des données d'entrée et de l'évaluation de toutes les disciplines concernées par le cycle de vie du produit, y compris les fournisseurs et,
- en utilisant la technologie de l'information comme soutien et pour l'échange d'information en cas de besoin.

La littérature propose beaucoup de recherches sur les moyens informatiques à mettre en place pour l'application de l'ingénierie collaborative. Wang et al. (2002) clarifient les pratiques actuelles en matière de création conceptuelle et classifient les méthodologies, les architectures, les outils et les technologies informatiques disponibles. Salhieh (2003) présente un cadre pour la conception et le développement de produit collaboratif supporté informatiquement et fonctionnant dans un environnement distribué. Le cadre se compose de six modules et fournit une procédure systématique pour planifier l'ingénierie collaborative assistée par ordinateur.

Bernard (2004) introduit le concept de l'ingénierie collaborative par le biais du travail coopératif assisté par ordinateur. Selon lui, le travail coopératif assisté par ordinateur regroupe l'ensemble des techniques et des méthodes contribuant à la réalisation d'un objectif commun à plusieurs acteurs, séparés ou réunis par le temps et par l'espace, à l'aide de tout dispositif interactif faisant appel à l'informatique, aux télécommunications et aux méthodes de conduite de groupe. Cependant, il ne suffit pas de mettre à la disposition des acteurs des outils de communication pour parler d'environnement d'ingénierie collaborative multisites. Il faut tenir compte de l'environnement de travail dans la globalité de ses aspects techniques et organisationnels.

De leur côté, Littler et al. (1995) ont étudié les risques, les bénéfices ainsi que les critères de succès associés au développement de produit collaboratif. Dans leur étude, ils se sont intéressés aux différentes entreprises indépendantes obligées de collaborer pour développer un nouveau produit. Les bénéfices du travail collaboratif sont principalement la réduction du temps de développement et la réduction des coûts. Les risques identifiés au développement de produit collaboratif sont l'accès par les partenaires au savoir-faire et à l'expérience d'un autre partenaire, la réduction du contrôle du processus de développement de produit et, les coûts et le temps supplémentaire engendrés par la gestion de la relation de collaboration.

1.2 Le Design For Six Sigma

Le Design For Six Sigma (DFSS) est un ensemble de méthodes statistiques et d'ingénierie utilisées lors du développement de produit (Creveling et al., 2003). La méthodologie comprend les phases suivantes: inventer, concevoir, optimiser et vérifier. Les objectifs de la méthode DFSS est d'assurer que les fonctions du produit satisferont les besoins du client et que la technologie choisie garantira la robustesse du produit durant toute sa vie utile.

Dans le cas des systèmes complexes, la méthode DFSS proposée par Creveling et al. (2003) ajoute une autre dimension au processus de développement de produit. Cette dimension est appelée le Management des Paramètres Critiques (MPC). Le MPC se concentre sur les fonctions, les paramètres et les réponses critiques d'un système pour satisfaire les besoins du client. Le MPC est une amélioration pouvant être ajoutée au processus existant de développement de produit pour le rendre meilleur, c'est-à-dire plus structuré, plus discipliné et plus concret. Le MPC clarifie le processus de conception pour générer, choisir, intégrer, optimiser et équilibrer les fonctions d'un produit dans un contexte de système. Le DFSS fournit la plupart des outils permettant la pratique du

MPC, par exemple, le déploiement de la fonction qualité, les techniques de décomposition des systèmes, l'analyse des modes de défaillances, l'analyse de la capacité des processus, etc.

Le DFSS vise donc à prévenir les problèmes et à faire les bonnes choses au bon moment durant le processus de développement de produit. Du point de vue de la gestion, le DFSS permet le développement de nouveaux produits dans un temps de cycle plus court. Il permet d'inventer, de développer, d'optimiser et de transférer une nouvelle technologie en projets de conception. Il permet également le développement, la conception, l'optimisation et la vérification des nouveaux produits avant leur lancement dans leur marché respectif. La méthodologie de DFSS repose sur une gamme d'outils et sur les meilleures pratiques de gestion afin de permettre, à une équipe de développement de produit, de réaliser les objectifs suivants :

1. *Inventer* de nouveaux produits et de nouveaux systèmes, tout en conservant un équilibre entre les besoins de client et l'avancement actuel de la technologie, afin de commercialiser efficacement et économiquement ces nouveaux produits.
2. *Concevoir* les fonctions de base du système afin que ce dernier soit stable et capable de rencontrer les conditions nominales établies.
3. *Optimiser* les performances du système de sorte qu'elles soient robustes et ajustables en présence des sources de variation réalistes lors de la livraison, l'utilisation et le service du produit.
4. *Vérifier* la capacité du système (au niveau de qualité exigé) et de le comparer avec les exigences du produit.

Le DFSS est géré par un ensemble d'outils. Ces outils sont déployés dans chacune des phases du processus de développement de produit comme proposé au tableau 1.2.

Tableau 1.2 : Les outils relatifs aux phases ICOV proposés par Creveling et al. (2003)

Inventer	Concevoir	Optimiser	Vérifier
Interviews avec le client	AMDE	Méthode Taguchi	Design des tolérances
DFQ	Fiabilité	Analyse de la surface de réponse	Évaluation de la fiabilité
Génération des concepts	Inférence statistique	Méthodes d'optimisation	Contrôle statistique des procédés
Design for X	Analyse des systèmes de mesure		
Matrice de PUGH	Étude de capabilité		
Fonction de transfert	Études multi-vari		
Robustesse	Analyse de régression		
Analyse de la variance	Design expérimental		

Une autre approche est suggérée par Ginn et al. (2004). Selon eux, le DFSS est une méthode en 5 étapes pour la conception de nouveaux processus, produits ou services, ou encore pour réinventer complètement des processus, produits ou services déjà existants.

La figure 1.2 montre les cinq étapes et leurs sous-étapes proposées par les auteurs.

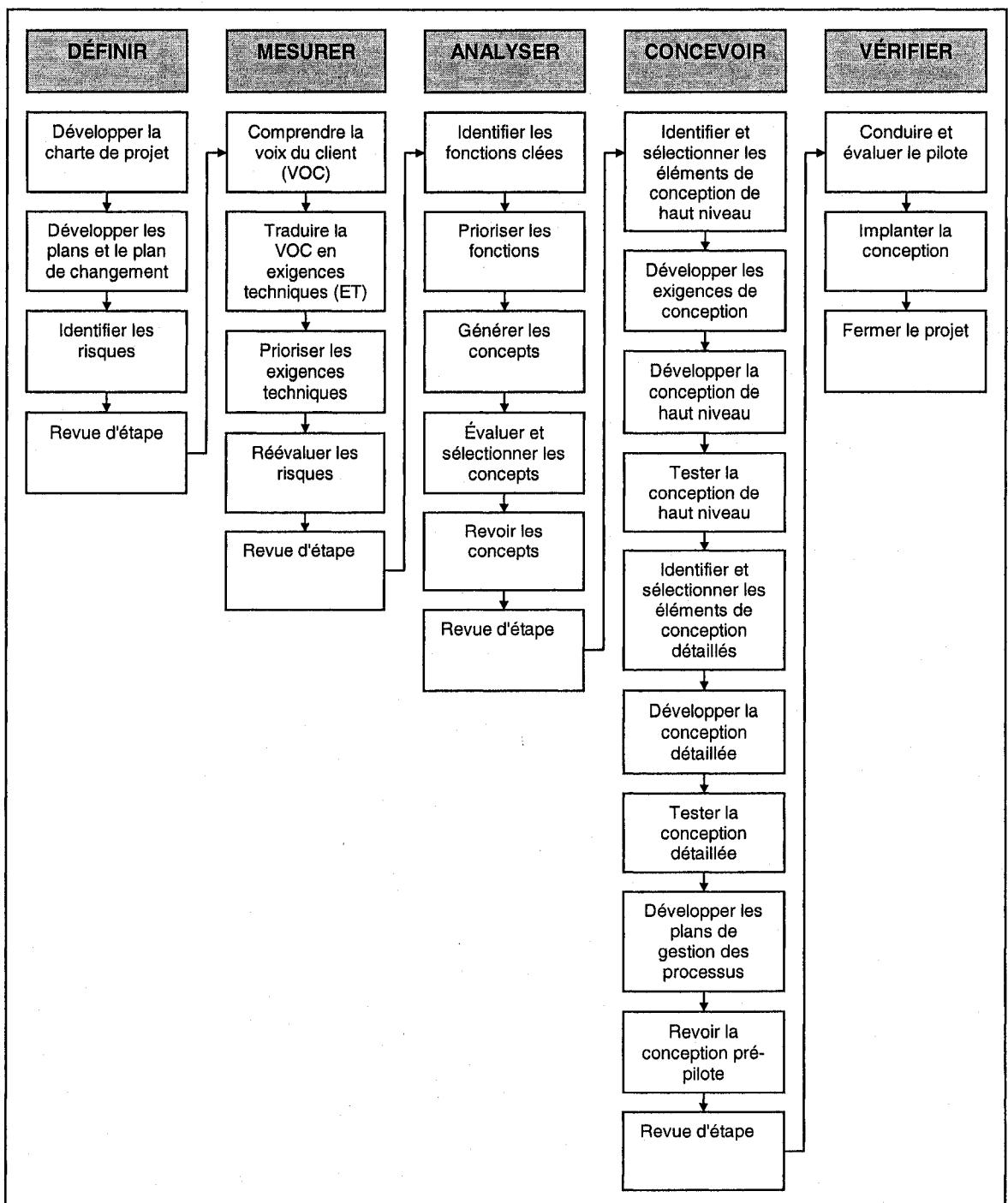


Figure 1.2 : Les étapes de la méthodologie DFSS proposées par Ginn et al. (2004)

Des outils sont aussi utilisés pour réaliser les objectifs visés par chacune des étapes de la méthodologie DFSS. Le tableau 1.3 montre des exemples d'outils employés dans la méthodologie proposée par Ginn et al. (2004). Il faut noter que les outils ne sont pas exclusifs à l'étape à laquelle ils sont associés et peuvent être utilisés à une autre étape si nécessaire. De plus, d'autres outils peuvent être ajoutés à chacune des étapes.

Tableau 1.3: Les outils relatifs aux phases DMACV proposés par Ginn et al. (2004)

Définir	Mesurer	Analyser	Concevoir	Vérifier
Analyse de marché	Arbre de segmentation	DFQ	DFQ	Carte de contrôle
Analyse des processus	Collecte des besoins du client : interview et <i>focus group</i>	Brainstorming	Simulation	Diagramme de Pareto
Carte de contrôle		Matrice de Pugh	Prototypage	Flowchart
Diagramme de Pareto	Diagramme des affinités		Design expérimental	
Diagramme de Gantt	Modèle de KANO		AMDE	
Diagramme de PERT	Analyse benchmarking			
Charte de projet	QFD			
	Matrice des risques			

Comme nous venons de le constater, les définitions du DFSS sont semblables. Certains auteurs décrivent la méthodologie comme un processus en quatre étapes, d'autres en cinq étapes, mais les objectifs demeurent les mêmes. En ce qui concerne les outils, ils diffèrent aussi d'une étape à l'autre mais ce sont sensiblement les mêmes outils. Dans la méthodologie décrite par Creveling et al. (2003), les outils sont plus complexes que ceux présentés par Ginn et al. (2004), puisque Creveling et al. (2003) mettent l'accent sur le développement de système complexe. Cependant, il faut remarquer que les outils mentionnés dans les deux approches ne sont pas nouveaux, ils sont même utilisés depuis des années.

1.3 Problématique

Il ne fait nul doute que de nouvelles approches de prise de décision doivent être développées et intégrées dans les techniques actuelles, comme le Six Sigma ou l'ingénierie simultanée, afin d'aider les entreprises à développer des produits plus rapidement et à être plus compétitives. Cette recherche a donc pour but de développer un algorithme d'optimisation à multiples objectifs pouvant être utilisé dans un environnement distribué. Elle s'inscrit dans les défis actuels que les entreprises doivent relever en conception de produit, c'est-à-dire:

- développer de nouveaux produits en collaboration avec d'autres groupes de travail (internes ou externes à l'entreprise);
- obtenir un produit répondant aux besoins et attentes du client;
- réduire le temps de développement de produit en faisant du développement simultané;
- réduire le coût de développement du produit.

La revue de la littérature a démontré que plusieurs études qualitatives existent sur le sujet du développement de produit collaboratif. Cependant, le domaine de l'optimisation collaborative est moins exploré. Depuis une dizaine d'année, les chercheurs, surtout dans les secteurs de l'aéronautique et de l'aérospace, ont exploré de nouvelle structure d'optimisation permettant de décomposer les grands problèmes en sous-problèmes afin de distribuer les tâches d'optimisation de ces sous-problèmes. Très peu d'études ont été réalisées afin de traiter l'aspect d'objectifs multiples dans les structures d'optimisation distribuées. L'algorithme développé dans le cadre de cette recherche pourra s'intégrer dans un processus de développement de produit comme le DFSS.

1.4 Conclusion

Ce chapitre a permis de bien comprendre le contexte dans lequel les entreprises doivent évoluer pour développer de nouveaux produits et les défis qu'elles doivent relever pour faire face à la compétition. Cette thèse est organisée en sept sections.

Le chapitre 2 explique les différentes approches d'optimisation existantes. La revue de ces approches permettra de mieux comprendre les algorithmes développés.

Le chapitre 3 présente un algorithme interactif pour résoudre des problèmes à objectifs multiples tout en permettant à des groupes de travail d'intervenir dans le processus de résolution en définissant leurs degrés de désirabilité pour leur(s) fonction(s) objectif(s). L'algorithme est créé en combinant un algorithme basé sur la programmation par objectif et une technique appelée *linear physical programming*.

Le chapitre 4 décrit un algorithme pour résoudre des problèmes à multiples objectifs de façon simultanée dans un environnement distribué. Pour ce faire, l'algorithme développé au chapitre 3 est jumelé à une structure d'optimisation distribuée. Le chapitre 5 montre des applications de cet algorithme.

Le chapitre 6 fait la lumière sur les différentes approches disponibles pour étudier les effets de la variation sur la conception du produit. Un processus pour l'analyse de sensibilité avec des objectifs multiples est proposé. Tous les algorithmes et processus développés dans cette thèse sont testés sur deux problèmes: un problème mathématique et un problème réel de conception.

Finalement, une discussion, les principales contributions et les limites de la recherche concluent ce travail. Des orientations pour des travaux futurs sont aussi suggérées dans le dernier chapitre.

CHAPITRE 2

LES APPROCHES D'OPTIMISATION

2.0 Introduction

La recherche d'une solution optimale à un problème de conception, ou autre, peut se faire de différentes façons. Si un seul objectif et un seul décideur sont en cause alors l'approche traditionnelle à un niveau est parfaite. Si plusieurs objectifs sont en jeu alors deux méthodes sont possibles: les méthodes à plusieurs niveaux (les méthodes bi-niveaux étant les plus utilisées) dans le cas où les objectifs sont dans une structure hiérarchique et les méthodes à objectifs multiples. Les méthodes bi-niveaux (deux objectifs) impliquent deux décideurs : un leader et un suiveur. Les méthodes à objectifs multiples peuvent être utilisées lorsqu'il y a un décideur ou plusieurs décideurs. En présence d'un seul décideur, les méthodes traditionnelles sont utilisées, tandis que lorsqu'il y a plusieurs décideurs, des méthodes d'optimisation multidisciplinaire ou d'optimisation collaborative sont employées.

L'objectif visé par ce chapitre est de faire une revue des différentes approches d'optimisation. En plus de situer ce travail, cette revue permettra de bien comprendre le fonctionnement des approches et de faire ressortir les principaux avantages et inconvénients de ces méthodes. Ainsi, il sera plus facile de comprendre le développement des nouveaux algorithmes et leur utilisation en environnement centralisé et décentralisé.

2.1 Méthode à un seul niveau

C'est la méthode classique d'optimisation. Le processus d'analyse regroupe toutes les disciplines et l'ensemble du modèle est sollicité par l'algorithme d'optimisation. On suppose qu'il est possible de regrouper toutes les exigences en une seule et même fonction-objectif. Dans cette approche, il y a un seul décideur qui contrôle toutes les variables décisionnelles. L'approche traditionnelle se formule de la façon suivante:

$$\text{Minimiser } f(X) \quad (2.1)$$

$$\text{sujet à } g(X) \leq 0 \quad (2.2)$$

$$h(X) = 0 \quad (2.3)$$

où X est le vecteur des variables décisionnelles, $f(X)$ est la fonction-objectif, $g(X)$ et $h(X)$ représentent respectivement les contraintes d'inégalité et les contraintes d'égalité.

Cette méthode possède plusieurs inconvénients:

- généralement, par manque de compétence, il est impossible qu'un seul décideur puisse contrôler toutes les variables dans un problème de grande taille;
- il est souvent difficile de regrouper toutes les exigences sous un même objectif;
- la structure traditionnelle enlève toute autorité de conception aux équipes de conception.

2.2 Méthode à multiples niveaux

La programmation à multiples niveaux a été développée pour résoudre des problèmes de planification décentralisés et dans lesquels les décideurs sont placés dans une structure hiérarchique. Par exemple, dans un problème bi-niveaux, les deux décideurs contrôlent indépendamment leur propre ensemble de variables et peuvent avoir des objectifs

conflictuels. Le décideur au deuxième niveau, appelé ci-après le suiveur, exécute sa politique d'optimisation après que le décideur du premier niveau, appelé le leader, ait pris sa décision. Pour illustrer la formulation, considérons un problème à deux niveaux où le leader contrôle les variables décisionnelles X et où le suiveur contrôle l'ensemble des variables décisionnelles Y . Le système est décrit par un ensemble de contraintes qui détermine le domaine réalisable S . L'ensemble S est un polyèdre borné en programmation linéaire. Comme mentionné précédemment, le leader choisit le vecteur des variables décisionnelles X afin de maximiser sa fonction de profit $F(X, Y)$ et où Y est le vecteur des variables décisionnelles du suiveur dont la fonction de profit est $f(X, Y)$. Donc, on obtient la formulation suivante (Wen et Hsu, 1991) pour un problème linéaire:

$$P1: \underset{X}{\text{Max}} F(X, Y) = aX + bY \quad (2.4)$$

$$\text{ sujet à } AX + BY \leq r \quad (2.5)$$

où Y résout

$$P2: \underset{Y}{\text{Max}} f(X, Y) = cX + dY \quad (2.6)$$

$$\text{ sujet à } AX + BY \leq r \quad (2.7)$$

Le domaine des solutions réalisables est donné par l'ensemble: $S = \{(X, Y) \mid AX + BY \leq r\}$.

Toutes les solutions à un problème à deux niveaux supposent que le leader spécifiera en premier le vecteur des variables X et qu'ensuite le suiveur décidera des variables Y . Pour un X donné, notons $W(X)$ l'ensemble des solutions optimales du problème suivant:

$$\underset{Y \in Q(X)}{\text{Max}} \tilde{f}(Y) = dY \quad (2.8)$$

où $Q(X) = \{Y \mid BY \leq r - AX\}$ représente l'ensemble des réactions possibles du suiveur. Cet ensemble peut s'écrire sur l'ensemble S comme suit: $S' = \{(X, Y) \mid (X, Y) \in S, Y \in W\}$.

Les techniques, permettant de résoudre un problème mathématique à deux niveaux, peuvent être classifiées en deux principales catégories. Bialas et Karwan (1978, 1979) et Bard (1983a, 1983b) utilisent le fait qu'une solution optimale à un problème à deux niveaux est une solution de base réalisable de l'ensemble des contraintes impliquées au premier et deuxième niveaux et donc, est une solution apparaissant à un point extrême du domaine réalisable S . Les algorithmes, utilisés par ces chercheurs, sont développés à partir de la méthode du simplexe.

Bard et Falk (1982) et Anandalingam (1988) transforment le problème original en un seul problème d'optimisation en employant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) pour transformer le problème du deuxième niveau. Une fois le problème à deux niveaux reformulé avec les conditions de KKT, on obtient le problème suivant :

$$\underset{X, Y, u}{\text{Max}} F(X, Y) \quad (2.9)$$

$$\text{ sujet à } \nabla_Y f(X, Y) + u \nabla_Y g(X, Y) = 0 \quad (2.10)$$

$$\langle u, g(X, Y) \rangle = 0 \quad (2.11)$$

$$g(X, Y) \leq 0 \quad (2.12)$$

$$u \geq 0 \quad (2.13)$$

D'autres méthodes de résolution ont aussi été explorées (Tanino et Ogawa, 1984; Bard, 1988; Ryu et al., 2004). Cependant, les solutions trouvées, lors de la résolution d'un problème à deux niveaux, ne sont pas nécessairement Pareto-optimales (Bard, 1984; Bialas et Karwan, 1979). C'est-à-dire qu'il existe une solution où une des deux parties peut accroître son objectif sans diminuer l'objectif de l'autre partie. Wen et Hsu (1991) proposent deux façons de générer des solutions Pareto-optimales à partir d'une solution non Pareto-optimale. La première approche propose que le leader et le suiveur fassent un accord pour ajuster leurs politiques de décision en remplaçant l'ensemble des solutions S par un ensemble réduit des solutions réalisables S' . Il est à noter que dans ce cas les

caractéristiques hiérarchiques sont maintenues. S' constitue l'ensemble des points satisfaisant le système d'inégalités suivant:

$$AX + BY \leq r \quad (2.14)$$

$$F(X, Y) \geq F(X^*, Y^*) \quad (2.15)$$

$$f(X, Y) \geq f(X^*, Y^*) \quad (2.16)$$

où X^* et Y^* sont les vecteurs des solutions optimales du leader et du suiveur.

La deuxième approche suggère que le leader et le suiveur obtiennent une solution Pareto-optimale par un processus de coopération. Dans ce cas, les caractéristiques hiérarchiques ne sont plus préservées et le problème est traité comme un problème à objectifs multiples. Les problèmes à objectifs multiples seront abordés à la section suivante.

La programmation à multiples niveaux, particulièrement la programmation à deux niveaux, a été utilisée dans le domaine politique (Cassidy et al., 1971), pour déterminer des politiques régionales de contrôle de la pollution (Schenk et al., 1980), pour modéliser la décentralisation d'une organisation à divisions multiples (Bard, 1983b), pour analyser diverses caractéristiques économiques qui affectent la planification d'une compagnie d'électricité (Hobbs et Nelson, 1992) et pour sélectionner la capacité d'usine dans un environnement de fabrication décentralisé (Cao et Chen, 2006).

L'inconvénient principal de l'approche à multiples niveaux est que chaque décideur optimise sa propre fonction-objectif sans tenir compte des autres niveaux. Cette situation peut donc conduire à des solutions non compatibles, c'est-à-dire l'obtention de valeurs différentes pour une même variable.

2.3 Méthodes à objectifs multiples

Lorsqu'il est impossible de regrouper toutes les exigences en une seule et même fonction-objectif (ce qui est le cas de la plupart des problèmes rencontrés), nous faisons face à un problème à objectifs multiples. Lorsque les objectifs sont contradictoires, alors le problème consiste à trouver la meilleure solution satisfaisant les objectifs en opposition, c'est-à-dire à trouver des solutions appelées Pareto-optimales. Les méthodes présentées dans cette section sont utilisées pour résoudre des problèmes à un décideur. La résolution d'un problème d'optimisation à multiples objectifs consiste à trouver les valeurs des variables décisionnelles qui optimisent le vecteur de fonctions-objectifs suivant: $F(X) = \{f_1, f_2, \dots, f_M\}$. La formulation standard d'un problème de minimisation ayant M objectifs multiples est la suivante:

$$\text{Minimiser} \quad F(X) = \{f_1(X), f_2(X), \dots, f_M(X)\} \quad (2.17)$$

$$\text{ sujet à } \quad h(X) = 0 \quad (2.18)$$

$$g(X) \leq 0 \quad (2.19)$$

$$X^l \leq X \leq X^u \quad (2.20)$$

2.3.1 Concept de solutions Pareto-optimales

Un problème de conception à objectifs multiples est en quelque sorte semblable à un problème de conception à objectif simple. Dans un problème à objectif simple, l'idée est de trouver un ensemble de valeurs pour les variables de conception qui, sujettes à un certain nombre de contraintes, donnent une valeur optimale de la fonction-objectif. Dans les problèmes à objectifs multiples, le concepteur essaie de trouver les valeurs pour les variables de conception qui optimisent les fonctions-objectifs simultanément. De cette manière, la solution est choisie dans un ensemble de solutions dites Pareto-optimales.

Une solution Pareto-optimale est une solution qui permet à un participant de gagner plus aux dépens d'un autre participant qui, lui, perdra dans cette solution. On appelle l'ensemble Pareto-optimal, l'ensemble des solutions non dominées. Mathématiquement, un vecteur X^* est Pareto-optimal si et seulement si il n'existe pas d'autre vecteur réalisable X tel que: $f(X) \leq f(X^*)$ signifiant que $f_m(X) \leq f_m(X^*)$ pour tout $m = 1, \dots, M$ avec une inégalité stricte pour au moins un m (Chankong et Haimes, 1983).

En général, pour les problèmes à objectifs multiples, les solutions optimales obtenues par l'optimisation individuelle des objectifs ne sont pas des solutions réalisables au problème à objectifs multiples ou ne sont pas Pareto-optimales. Il faut alors trouver une solution de rechange qui est non dominée. Comme nous le verrons dans les prochaines sections, il y a différentes façons de générer des solutions Pareto-optimales et de choisir une solution parmi celles-ci.

2.3.2 Les méthodes à objectifs multiples

Les techniques pour résoudre les problèmes à objectifs multiples peuvent être classées selon la figure 2.1 (Diwekar, 2003). Les méthodes basées sur les préférences tentent de quantifier les préférences du décideur afin d'identifier la solution qui satisfait au mieux ses préférences. Pour ce faire, il est nécessaire que le décideur formule ses préférences de façon formelle et structurée. Les méthodes génératives ont été développées pour trouver l'ensemble exact des solutions Pareto-optimales ou pour donner une approximation de cet ensemble et choisir une solution parmi cet ensemble pour implantation. Dans ces cas, le décideur doit faire un jugement de valeur pour choisir une solution parmi l'ensemble des solutions Pareto-optimales.

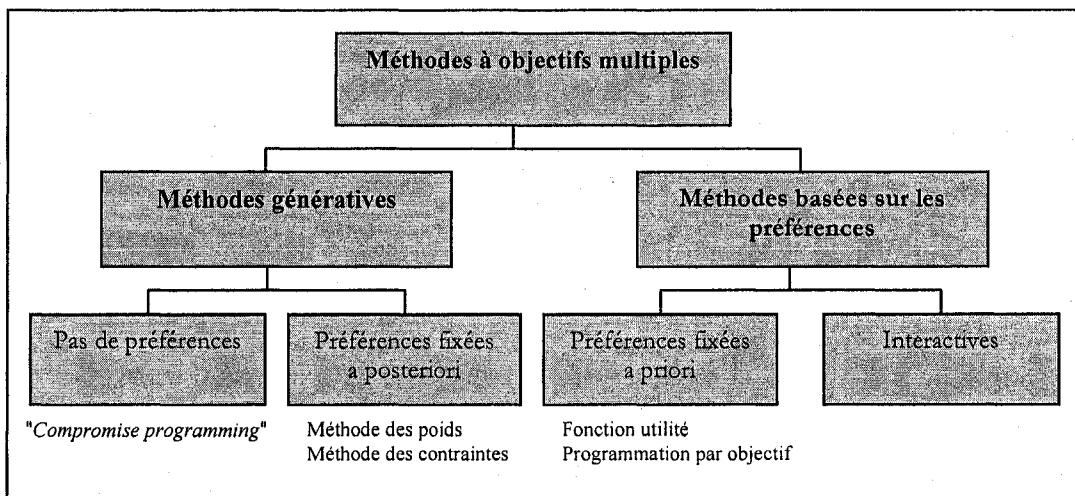


Figure 2.1 : Les méthodes à objectifs multiples.

Les méthodes pour résoudre des problèmes à multiples objectifs, telles que montrées à la figure 2.1, sont habituellement utilisées lorsque le processus d'optimisation est sous le contrôle d'un seul décideur.

2.3.2.1 Méthodes génératives (pas de préférences)

Parmi les méthodes où le décideur n'a pas à fixer de préférences, on retrouve le *Compromise Programming* (Tappeta et Renaud, 1999). C'est une méthode permettant de trouver l'ensemble des solutions Pareto-optimales à l'aide d'un point dit "idéal", f^u comme le montre la figure 2.2. Le point idéal est un vecteur dont les composantes sont les valeurs des solutions pour chacune des fonctions-objectifs trouvées individuellement. La méthode du *Compromise Programming* consiste à minimiser la distance entre un point réalisable et le point idéal.

Le problème général se formule comme suit:

$$\text{Minimiser} \quad F = \|f(X) - f^\mu\| \quad (2.21)$$

$$\text{sujet à } h(X) = 0 \quad (2.22)$$

$$g(X) \leq 0 \quad (2.23)$$

$$X_{\min} \leq X \leq X_{\max} \quad (2.24)$$

où $\|\cdot\|$ représente la mesure de distance entre les deux points.

Pour une mesure L_p pondérée (w_i), la distance entre deux points r et s est donnée par:

$$\|r - s\|_p^w = \left(\sum_{i=1}^m (w_i |r_i - s_i|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.25)$$

où $p \in \{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ et $w_i \geq 0, i = 1, \dots, m$. Il y a différentes mesures, par exemples: L_1 est la mesure Manhattan, L_2 est la mesure Euclidienne et L_∞ est la mesure Tchebycheff (Chen et al., 1999).

2.3.2.2 Méthodes génératives (préférences fixées a posteriori)

Parmi les méthodes génératives où les préférences sont fixées a posteriori, les méthodes des poids et des contraintes sont probablement les plus utilisées.

2.3.2.2.1 Méthode des poids

La méthode des poids est utilisée pour approximer l'ensemble des solutions non dominées en identifiant les points extrêmes le long de l'enveloppe non dominée. L'ensemble des solutions non dominées est alors formé par les connections des points extrêmes identifiés. L'idée de la méthode des poids est d'associer un coefficient de poids à chaque fonction-objectif et de minimiser la somme pondérée des fonctions. Ainsi, le

problème d'optimisation à objectifs multiples est transformé en un problème d'optimisation à objectif simple. Le problème prend la forme suivante (Diwekar, 2003):

$$\text{Optimiser } F = \sum_{q=1}^Q w_q f_q(X) \quad (2.26)$$

$$\text{sujet à } h(X) = 0 \quad (2.27)$$

$$g(X) \leq 0 \quad (2.28)$$

Les conditions de KKT indiquent que tant et aussi longtemps que les poids sont plus grands que zéro alors la solution optimale du problème pondéré est une solution non dominée du problème original à objectifs multiples. L'ensemble des solutions Pareto-optimales peut être trouvé en changeant les facteurs de poids w_i .

2.3.2.2.2 Méthode des contraintes

Une autre méthode utilisée pour générer l'ensemble des solutions Pareto-optimales est la méthode des contraintes. La stratégie de base de cette méthode est aussi de transformer le problème d'optimisation à objectifs multiples en une série de problèmes d'optimisation à objectif simple. L'idée est de prendre un des objectifs à minimiser (par exemple f_1) et de convertir les autres objectifs ($f_i, i = 2, \dots, m$) en contraintes d'inégalité en fixant des paramètres comme membres de droite des contraintes ($b_i, i = 2, \dots, m$). Le problème prend la forme suivante (Diwekar, 2003).

$$\text{Optimiser } F = f_c(X) \quad (2.29)$$

$$\text{sujet à }$$

$$f_i(X) \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad i \neq c \quad (2.30)$$

$$f_i(X) \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad i \neq c \quad (2.31)$$

$$h(X) = 0 \quad (2.32)$$

$$g(X) \leq 0 \quad (2.33)$$

Encore une fois, les conditions de KKT indiquent que la solution optimale du problème contraint est une solution non dominée du problème original à multiples objectifs. L'ensemble des solutions Pareto-optimales peut aussi être trouvé en changeant les membres de droite (b_i) lors de la résolution du problème à objectif simple.

Les méthodes génératives fournissent beaucoup d'informations par l'ensemble des solutions Pareto-optimales générée (la gamme de choix qui s'offre au décideur). Ces méthodes n'exigent pas que le décideur exprime un jugement de valeur explicite: il peut exprimer ses valeurs implicitement par le choix d'une alternative. Par contre, les algorithmes sont complexes et difficiles à comprendre pour les décideurs. Le nombre de solutions Pareto-optimales est souvent très grand donc le décideur ne peut les analyser efficacement. De plus, le coût de calcul informatique augmente avec le nombre d'objectifs et il est difficile de résoudre des problèmes de grande dimension avec ces techniques.

2.3.2.3 Méthodes basées sur les préférences (a priori)

Parmi les méthodes basées sur les préférences où ces dernières sont fixées a priori, les méthodes les plus connues sont la fonction d'utilité et la programmation par objectif. Plus récemment, une nouvelle méthode appelée le *linear physical programming* est apparue et peut être considérée comme une extension de la programmation par objectif.

2.3.2.3.1 Fonction utilité

Avec cette méthode, le décideur doit fournir une représentation exacte de ses préférences lors de la formulation de la fonction-objectif. Le problème est résolu en utilisant n'importe quelle technique d'optimisation pour objectif simple (Diwekar, 2003).

2.3.2.3.2 Programmation par objectif

Parmi les méthodes basées sur les préférences, la programmation par objectif est la méthode la plus reconnue pour résoudre des problèmes à objectifs multiples. Avec cette approche, le décideur choisit une valeur cible pour chacun des objectifs et l'optimisation est utilisée pour minimiser le total des déviations par rapport aux valeurs cibles fixées. Le problème d'optimisation à objectif simple prend la forme suivante (Diwekar, 2003):

$$\text{Minimiser } F = \sum_{i=1}^m |f_i(X) - G_i(X)| \quad (2.34)$$

$$\text{sujet à } h(X) = 0 \quad (2.35)$$

$$g(X) \leq 0 \quad (2.36)$$

Cette formulation implique de définir une déviation négative (d^-) et positive (d^+) par rapport aux valeurs cibles (G_i) et de résoudre un problème d'optimisation pour les variables de décision originales et aussi pour les variables de déviation comme montré ci-dessous:

$$\text{Minimiser } F = \sum_{i=1}^m d_i^- + d_i^+ \quad (2.37)$$

$$\text{sujet à } f_i(X) - G_i(X) = d_i^+ - d_i^- \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.38)$$

$$h(X) = 0 \quad (2.39)$$

$$g(X) \leq 0 \quad (2.40)$$

$$d_i^+ \geq 0; \quad d_i^- \geq 0 \quad (2.41)$$

Dauer et Krueger (1977) ont développé une approche itérative pour résoudre des problèmes généraux de programmation par objectif ayant M objectifs. L'avantage de cet algorithme est qu'il peut être utilisé pour résoudre des problèmes linéaires, non linéaires ou en nombres entiers. Il a été développé pour résoudre des problèmes ayant différents

types de buts et de contraintes: égalités, inégalités, pondérées, etc. C'est un algorithme très flexible.

2.3.2.4 Méthodes basées sur les préférences (interactives)

Dans les techniques non interactives, on retrouve par exemple la fonction utilité et la programmation par objectif. Une technique *non interactive* exige que les préférences soient énoncées seulement une fois: avant ou après l'analyse. Une technique *interactive* exige une interaction progressive active entre le décideur et ses participants à travers le processus de solution. Habituellement, un processus interactif comprend au moins ces trois étapes (Chankong et Haimes, 1983):

1. Résoudre le problème avec un ensemble de paramètres afin d'obtenir une solution réalisable, préféablement Pareto-optimale.
2. Demander au décideur de réagir à cette solution.
3. Utiliser la réponse du décideur pour formuler un nouvel ensemble de paramètres et résoudre ce nouveau problème.

Ces trois étapes sont répétées jusqu'à ce que le décideur soit satisfait de la solution ou qu'aucune autre action ne puisse être entreprise par la méthode. Le choix de la meilleure solution peut se faire dans un processus collaboratif. Plusieurs auteurs ont développé des algorithmes interactifs. Tappeta et Renaud (1999, 2001) et Tappeta et al. (2000) ont développé et testé un algorithme d'optimisation interactif pour résoudre des problèmes à objectifs multiples tout en tenant compte des préférences du concepteur pendant le processus de conception. L'inconvénient de leur méthode est que le décideur doit fixer un point de référence pour débuter l'algorithme et qu'aucune méthode n'est définie pour le guider dans ce choix. Malgré les efforts déployés pour diminuer la génération de solutions non Pareto-optimales, il est toujours possible que l'algorithme génère une telle solution.

D'autres auteurs ont aussi développé des algorithmes interactifs pour résoudre des problèmes à objectifs multiples. Dans l'approche de Vassilev et al. (2001), le décideur doit préciser ses préférences dans un point de référence et aucun guide ne lui est fourni. Dans l'approche de Miettinen et Mäkelä (2006), le décideur doit classifier les fonctions-objectifs et spécifier un point de référence correspondant à ses aspirations. Comme dans les approches précédentes, aucun guide n'est donné au décideur pour déterminer ses préférences.

Les méthodes basées sur les préférences permettent de réduire le temps de calcul informatique afin de générer les solutions pour approximer l'ensemble Pareto-optimal. D'un autre côté, ces méthodes requièrent du temps, des connaissances et une expérience de la part du décideur pour fixer correctement ses préférences.

Toutes les méthodes vues dans cette section pour résoudre des problèmes à multiples objectifs sont généralement utilisées en présence d'un seul décideur.

2.4 Les approches multidisciplinaires (plusieurs décideurs)

L'optimisation multidisciplinaire est une méthodologie utilisée pour la conception de systèmes complexes ayant beaucoup de contraintes et avec des analyses distribuées. Les systèmes complexes sont des systèmes dont la grande taille et/ou l'hétérogénéité ne permettent pas l'utilisation directe des méthodes d'optimisation standards. Une façon de surmonter les difficultés dues à la grande taille des problèmes à résoudre est d'utiliser la décomposition. La décomposition consiste à formuler des sous-problèmes d'optimisation pour chacun des sous-systèmes identifiables afin de pouvoir les résoudre indépendamment. Par exemple, chaque sous-système pourrait être sous le contrôle d'un groupe de travail. Dans un tel contexte, il est nécessaire d'avoir un processus itératif de

coordination (par exemple un directeur) permettant d'échanger de l'information avec les groupes de travail pour influencer ces derniers et pouvoir les diriger vers une solution globale (optimisation du système sous le contrôle du directeur) qui n'est pas nécessairement la juxtaposition des optima locaux (optimisation de chacun des sous-systèmes sous le contrôle des groupes de travail).

Ces méthodes ont été développées dans un premier temps pour résoudre des problèmes d'optimisation à un seul objectif mais en présence de plusieurs décideurs (directeur et groupes de travail). Par la suite, elles ont été utilisées pour résoudre des problèmes à multiples objectifs. En optimisation multidisciplinaire, les variables décisionnelles sont sous le contrôle de plusieurs décideurs. De prime abord, la structure d'optimisation multidisciplinaire peut ressembler à la structure d'optimisation à deux niveaux. Cependant, son fonctionnement est très différent puisqu'on suppose une forme de collaboration entre les décideurs, ce qui n'est pas vrai pour l'optimisation à deux niveaux. Il existe très peu d'approches d'optimisation multidisciplinaires. En effet, il y a le *Concurrent subspace optimization* (CSSO), le *Bi-level integrated system synthesis* (BLISS) et le *Collaborative optimization* (CO).

La performance de ces méthodes a été évaluée et comparée dans Yi et al. (2007). Pour atteindre leur objectif, Yi et al. (2007) ont résolus différents problèmes mathématiques avec ces méthodes et ont comparé le nombre d'itérations entre le niveau système (directeur) et sous-systèmes (groupes de travail). D'un point plus qualitatif, ils ont dégagé les difficultés d'application de chacune de ces approches. Les performances sont présentées au tableau 2.1.

Tableau 2.1: Comparaison des méthodes d'optimisation multidisciplinaires (Yi et al., 2007)

Méthodes	Performances	
<i>Concurrent subspace optimization</i> (CSSO)	Avantages	Les résultats d'analyse des groupes de travail sont gardés dans une base de données.
	Inconvénients	Formulation du problème complexe. Méthode peu documentée dans la littérature.
<i>Bi-level integrated system synthesis</i> (BLISS)	Avantages	Nombre d'itérations, entre le niveau système et les groupes de travail, est peu élevé.
	Inconvénients	Ne s'applique pas lorsqu'il y a seulement des variables partagées. Nécessite le calcul d'équation de sensibilité.
<i>Collaborative optimization</i> (CO)	Avantages	Les groupes de travail déterminent la conception du produit (trouvent les valeurs des variables de conception).
	Inconvénients	Nombre d'itérations, entre le niveau système et les groupes de travail, est élevé Problèmes de convergence.

Malgré ses problèmes de convergence, l'approche d'optimisation collaborative est la plus employée et une des plus documentée dans la littérature. Récemment, Gu et al. (2006) ont modifié la formulation du problème d'optimisation collaborative pour pallier les problèmes de convergence, ce qui en fait une approche très intéressante pour résoudre des problèmes en présence de plusieurs décideurs.

La première architecture d'optimisation collaborative a été développée par Braun (1996). Pour expliquer son approche, considérons le problème d'optimisation suivant:

$$\underset{X}{\text{Min}} \quad F(X) \quad (2.42)$$

$$\text{s.à} \quad g_q(X) \geq 0; q = 1, \dots, Q \quad (2.43)$$

$$X_{\min} \leq X \leq X_{\max} \quad \text{où} \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_I) \quad (2.44)$$

où Q représente le nombre de contraintes.

Pour décomposer ce problème :

- Braun (1996) divise le vecteur des variables décisionnelles X en deux groupes (\bar{x}_i, x_{ij}) .
- Les variables \bar{x}_i sont appelées variables disciplinaires car elles sont sous le contrôle d'un seul sous-système (groupe de travail) j tandis que les variables x_{ij} sont appelées interdisciplinaires car elles sont contrôlées par plusieurs sous-systèmes (groupes de travail) j .
- Les contraintes sont elles aussi distribuées parmi les J sous-systèmes selon les variables traitées par ces derniers.
- Les liens entre les sous-systèmes sont assurés avec les variables y_{ij} , $i \neq j$ qui sont contrôlées par un sous-système i et utilisées par un autre sous-système j .
- La compatibilité entre les sous-systèmes est assurée par l'introduction d'un vecteur des valeurs cibles Z déterminées par le niveau système (variables décisionnelles du décideur). Un élément z_i est défini pour chaque variable interdisciplinaire x_{ij} et chaque variable couplée y_{ij} , $i \neq j$. L'objectif de chaque sous-système est de minimiser la somme des écarts entre les variables x_{ij} et y_{ij} et les valeurs cibles z_i fournies par le système (décideur), et ce tout en satisfaisant les contraintes. Au niveau des sous-systèmes, les valeurs cibles z_i sont considérées comme des paramètres fixes imposés par le système (directeur).
- Pour forcer la compatibilité entre les sous-systèmes, les fonctions-objectifs des sous-systèmes, d_j^* , sont traitées comme des contraintes par le niveau système (directeur). La décomposition du problème original est montrée à la figure 2.2.

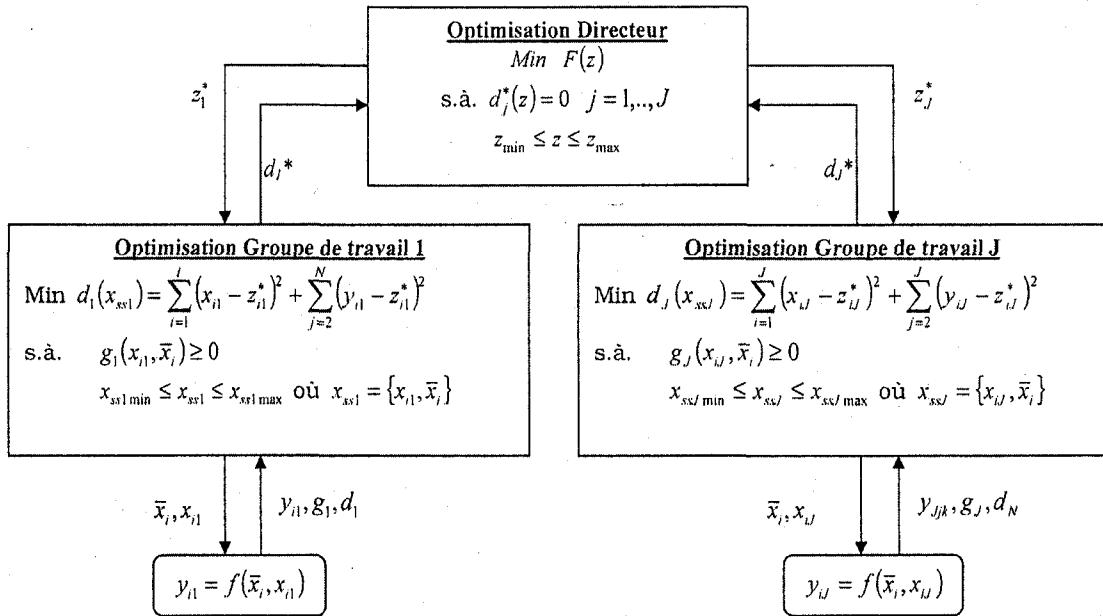


Figure 2.2 : Décomposition d'un problème selon l'approche de Braun (1996).

Le processus d'optimisation de la structure collaborative se déroule comme suit:

1. Le processus débute au niveau système (directeur) avec un ensemble initial des cibles $Z_0 = \{z_i\}$ (fixées par le système). Aucune façon pour déterminer ces valeurs cibles n'est mentionnée dans les travaux de Braun (1996).
2. Ces cibles sont envoyées aux sous-systèmes comme des paramètres fixes z_i^* .
3. À l'aide de ces valeurs cibles, les problèmes d'optimisation des sous-systèmes (groupes de travail) sont résolus.
4. Les valeurs d_j^* , x_{ij}^* et y_{ij}^* trouvées par les sous-systèmes sont retournées au système (directeur) où un nouvel ensemble de valeurs cibles est sélectionné. Les valeurs retournées par les sous-systèmes sont considérées comme des paramètres fixes par le système (directeur).
5. Les étapes se répètent jusqu'à ce que les contraintes de compatibilité d_j^* soient égales à zéro ou plus petites qu'une certaine tolérance.

Les avantages de l'approche collaborative sont multiples:

- ajustement naturel à la structure de conception qu'on retrouve dans les industries.
- réduction du temps de conception puisque chaque groupe de travail analyse leurs propres variables sans attendre les informations des autres groupes.
- les différents groupes de travail peuvent effectuer des changements sans invalider nécessairement les décisions que les autres groupes ont déjà prises.
- structure adéquate pour les groupes de travail utilisant déjà un algorithme d'optimisation. Ce dernier peut être inséré dans cette architecture sans modification.
- cette structure permet de réduire au minimum les chemins de communication ainsi que l'échange des données.
- elle constitue une approche non biaisée par l'intuition ou l'expérience.

Tappeta et Renaud (1997) ont apporté certaines précisions à l'approche de Braun (1996) en ajoutant des variables auxiliaires, $(x_{aux})_{ij}$, $i \neq j$ pour remplacer les variables y_{ij} , $i \neq j$ afin d'être en mesure d'exécuter les problèmes d'optimisation des sous-systèmes i et j simultanément. La décomposition du problème original de Braun (1996) selon l'approche de Tappeta et Renaud (1997) est montrée à la figure 2.3.

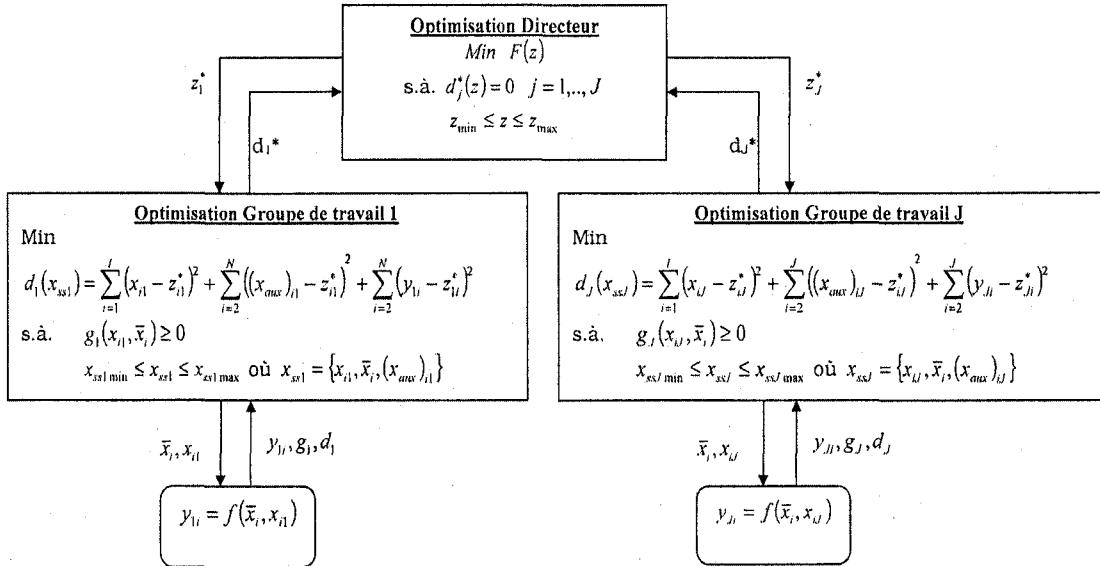


Figure 2.3 : Décomposition d'un problème selon l'approche de Tappeta et Renaud (1997).

Cependant la formulation des fonctions-objectifs des sous-systèmes crée des problèmes de convergence lors du processus d'optimisation collaborative. Ces problèmes sont discutés en détail dans Kroo (2004) et Alexandrov et Lewis (2000). Afin de pallier ces problèmes de convergence, Gu et al. (2006) ont développé une autre approche d'optimisation. Dans leur approche, les problèmes d'optimisation des sous-systèmes sont formulés en utilisant la formulation modifiée des problèmes d'optimisation des sous-systèmes de l'approche de DeMiguel et Murray (2000). La nouvelle formulation possède alors les propriétés nécessaires pour la convergence de problèmes généraux non convexes. Les notations, utilisées par les auteurs pour formuler le problème sont montrées au tableau 2.2.

Tableau 2.2 : Nomenclature utilisée dans l'approche de Gu et al. (2006).

Variables	Description
F	fonction-objectif du problème d'optimisation du directeur (système)
d_i	fonction-objectif de compatibilité du groupe de travail (sous-système) i
g_i	vecteur des contraintes dans le groupe de travail (sous-système) i
x_{sys}	vecteur des variables de conception du directeur (système)
x_{sys}^*	vecteur des valeurs cibles (pour les variables de conception du système) et qui sont envoyées au sous-système i
$(x_{sh})_i$	vecteur des variables interdisciplinaires utilisées par le groupe de travail i
x_{sh}^*	vecteur des valeurs cibles pour les variables interdisciplinaires utilisées par le groupe de travail i
$(x_{aux})_{ij}$	vecteur des variables auxiliaires correspondant aux y_{ij}
x_{aux}^*	vecteur des valeurs cibles pour les variables auxiliaires utilisées par le groupe de travail i
x_{ssi}	vecteur des variables de conception du groupe de travail i
s	vecteur des variables d'écart
t	vecteur des variables de surplus
y_{ij}	vecteur des variables couplées calculée par le groupe de travail i et utilisée par j
n_{ss}	nombre de groupes de travail
m_1	longueur des vecteurs s et t
γ	facteur de pénalité dans la fonction-objectif du problème d'optimisation du directeur
$(\)^*$	variable cible au niveau du directeur (système)

Le problème d'optimisation du directeur est établi comme suit (Gu et al., 2006):

$$\underset{x_{sys}}{\text{Min}} \quad F(x_{sys}^*) + \gamma \sum_{i=1}^{n_{ss}} d_i^*(x_{sys}^*) \quad (2.45)$$

$$\text{s.à} \quad (x_{sys}^*)_{\min} \leq x_{sys}^* \leq (x_{sys}^*)_{\max} \quad \text{où} \quad x_{sys}^* = \{x_{sh}^*, x_{aux}^*\} \quad (2.46)$$

Le problème d'optimisation du groupe de travail 1 est établi comme suit (Gu et al., 2006):

$$\underset{x_{ss1}, s_{11}, t_{11}}{\text{Min}} \quad d_1 = \sum_{m=1}^{m_1} (s_{1m} + t_{1m}) \quad (2.47)$$

$$\text{s.à} \quad g_1 \geq 0 \quad (2.48)$$

$$(x_{sh})_1 + (s_{sh})_1 - (t_{sh})_1 = (x_{sh}^*)_1 \quad (2.49)$$

$$(x_{aux})_{j1} + (s_{aux})_{j1} - (t_{aux})_{j1} = (x^*_{aux})_{j1} \text{ où } j = 2, \dots, n_{ss} \quad (2.50)$$

$$y_{1k} + (s_{aux})_{1k} - (t_{aux})_{1k} = (x^*_{aux})_{1k} \text{ où } k = 2, \dots, n_{ss} \quad (2.51)$$

$$x_{ss1\min} \leq x_{ss1} \leq x_{ss1\max} \text{ où } x_{ss1} = \{(x_{sh})_1, (x_{aux})_{j1}, x_1\} \quad (2.52)$$

$$s_1 \geq 0 \text{ où } s_1 = \{(s_{sh})_1, (s_{aux})_{j1}, (s_{aux})_{1k}\} \quad (2.53)$$

$$t_1 \geq 0 \text{ où } t_1 = \{(t_{sh})_1, (t_{aux})_{j1}, (t_{aux})_{1k}\} \quad (2.54)$$

Le premier constat qui peut être fait, à la lumière de cette revue de la littérature, est qu'il y a très peu de travaux qui ont été effectués dans ce domaine. Deuxièmement, les approches collaboratives recensées traitent d'un seul objectif au niveau du système (directeur) et des sous-systèmes (groupes de travail). En réalité, lors de la conception d'un produit, il faut optimiser plusieurs objectifs et non un seul. Pour les problèmes à objectifs multiples, Braun (1996) suppose que les objectifs peuvent être mis dans une seule fonction-objectif ou que l'objectif le plus significatif est sélectionné pour minimisation et que les autres sont posés comme contraintes.

La revue de la littérature a aussi démontré que peu de recherches ont été réalisées pour jumeler une approche d'optimisation collaborative avec les méthodes à objectifs multiples. Tappeta et Renaud (1997) ont développé trois formulations différentes en modifiant l'approche développée par Braun (1996) pour une structure ayant un directeur et trois groupes de travail. La *première stratégie* de Tappeta et Renaud (1997) consiste à compléter le travail de Kroo et al. (1994). Dans cette première formulation, l'objectif du directeur est de minimiser une fonction à objectifs multiples pondérée

$$F(x^*) = \sum_{i=1}^2 w_i f_i(x^*) \text{ où } x^* = [x^*_{sh}, x^*_{aux}, x^*_{j1}] \text{ et } j = 1, 2 \text{ tout en satisfaisant des contraintes de}$$

compatibilité $d_i^* = 0, i = 1, 2, 3$ pour chacun des groupes de travail. Dans cette formulation, le directeur fixe les valeurs cibles pour les variables partagées et auxiliaires ainsi que pour les variables de conception locales qui contribuent à la fonction-objectif $F(x^*)$. La fonction-objectif des groupes de travail est une fonction quadratique qui minimise les déviations par rapport aux valeurs cibles fixées par le directeur.

Dans la *deuxième stratégie* proposée par les auteurs, le directeur détermine les valeurs cibles pour les variables partagées et auxiliaires et aussi pour chacune des composantes f_i^0 de la fonction-objectif $F(x^0)$. L'objectif du directeur est aussi de minimiser une fonction à multiples objectifs pondérée $F(x^0) = \sum_{i=1}^2 w_i f_i^0$ où $x^0 = [x_{sh}^0, x_{aux}^0, f_j^0]$ et $j = 1, 2$ tout en satisfaisant les contraintes de compatibilité $d_i^* = 0, i = 1, 2, 3$. Dans cette formulation, les groupes de travail ont la responsabilité de rencontrer les cibles de leur fonction-objectif f_i . Contrairement à la stratégie 1, cette méthode ne requiert pas que le directeur fixe les valeurs cibles pour les variables de conception locales. Ainsi, les groupes de travail ont la liberté de changer ces variables de conception locales. L'objectif visé par les groupes de travail est de minimiser les déviations par rapport aux valeurs cibles fixées par le directeur à l'aide d'une fonction quadratique.

Dans la *troisième stratégie* proposée par les auteurs, le directeur fixe les valeurs cibles seulement pour les variables partagées et auxiliaires. Contrairement aux autres formulations, cette méthode ne requiert pas que le directeur fixe les valeurs cibles pour les variables de conception locales x_i , ni pour les objectifs de conception f_i . L'objectif du directeur est de minimiser une fonction à objectifs multiples pondérée $F(x^0) = \sum_i w_i f_i$ où $x^0 = [x_{sh}^0, x_{aux}^0]$ tout en satisfaisant les contraintes de compatibilité $d_i^* = 0, i = 1, 2, 3$. L'objectif visé par les groupes de travail est aussi de minimiser les déviations par rapport aux valeurs cibles fixées par le directeur à l'aide d'une fonction quadratique. Comme on peut le constater, l'aspect multiples objectifs est traité seulement par le directeur en utilisant la méthode des poids. Les groupes de travail minimisent une seule fonction. Les auteurs ont appliqué les trois formulations proposées sur un problème simplifié de conception de la taille d'un avion.

McAllister et al. (2000) ont développé une structure d'optimisation collaborative multidisciplinaire pour la conception de système complexe en utilisant une approche à

objectifs multiples au niveau du directeur et des groupes de travail. Leur approche permet d'adapter une méthode appelée le *Compromise Decision Support Problem* (CDSP) et de l'intégrer à l'intérieur de la structure de l'optimisation collaborative. Le CDSP est une formulation hybride qui incorpore les concepts de la programmation mathématique traditionnelle et de la programmation par objectif. Cette approche est décrite en détail dans Mistree et al. (1993). L'inconvénient de la méthode CDSP est qu'une seule solution est obtenue lors du processus d'optimisation et celle-ci n'est pas nécessairement Pareto-optimale. Les auteurs ont jumelé le CDSP avec la structure d'optimisation collaborative proposé par Braun (1996) pour créer une approche collaborative à objectifs multiples au niveau du directeur et des groupes de travail. Dans l'approche de McAllister et al. (2000), l'optimisation à objectifs multiples est réalisée par le directeur en minimisant la déviation des variables associées aux objectifs multiples (conflictuels dans certain cas). Au niveau des groupes de travail, la première priorité est de minimiser la différence entre les valeurs cibles et les variables locales couplées pour assurer la compatibilité du système. Une fois cela atteint, la seconde priorité est de minimiser n'importe quel objectif local qui n'influence pas le directeur. Les auteurs ont appliqué cette approche pour la conception simplifiée d'un véhicule sous-marin impliquant quatre groupes de travail et un directeur. Bien que le temps informatique pour résoudre le problème avec leur approche ait augmenté, leur approche montre de petites améliorations dans l'atteinte des valeurs cibles par rapport à l'approche standard.

Plus récemment, McAllister et al. (2004) et McAllister et al. (2005) ont étendu leurs travaux en intégrant le *linear physical programming* dans leur approche d'optimisation collaborative à objectifs multiples (McAllister et al., 2000). Le directeur détermine alors les valeurs cibles pour les variables couplées et minimise la fonction-objectif sujette aux contraintes du système et aux contraintes de compatibilité interdisciplinaires. Les préférences pour les objectifs à atteindre sont fixées avec le *linear physical programming*. Au niveau des groupes de travail, l'objectif est de déterminer la valeur des variables locales couplées qui minimise la somme des déviations au carré sujette aux

contraintes du sous-système. Une fois les cibles atteintes, l'optimisation par les groupes de travail se poursuit avec les objectifs locaux. Les préférences pour ces objectifs peuvent aussi être fixées avec le *linear physical programming*. Les valeurs des variables couplées locales sont retournées au directeur pour évaluer les contraintes de compatibilité et assurer la faisabilité de tous les sous-systèmes. Les auteurs démontrent leur approche avec un problème de conception d'une voiture de course.

Malgré le fait que certains travaux aient été réalisés dans ce domaine, les approches mentionnées ne permettent pas de générer des solutions Pareto-optimales. Plus récemment, Aute et Azarm (2006) ont jumelé un algorithme génétique (MOGA : *MultiObjective Genetic Algorithm*) avec la structure d'optimisation collaborative de Braun (1996). La formulation de leur problème est réalisée selon l'approche de Tappeta et Renaud (1997). Ying et al. (2006) ont modifié la structure collaborative séquentielle (système et sous-systèmes) en une structure collaborative simultanée dans laquelle le système et les sous-systèmes travaillent avec une base de données commune comme montré à la figure 2.4.

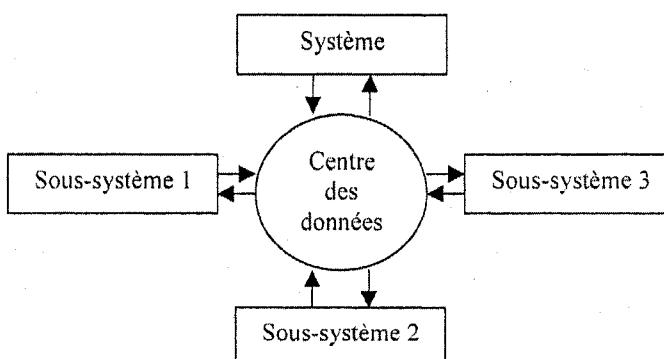


Figure 2.4 : Structure collaborative simultanée (Ying et al., 2006)

Puisque Ying et al. (2006) emploient l'algorithme génétique (NSGA-II: *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm*) pour la résolution des problèmes à multiples objectifs, cette modification de structure devenait essentielle pour contrer le temps de calcul immense au niveau système.

Cependant plusieurs limitations entourent les algorithmes génétiques (Kurapati et Azarm, 2000). En voici quelques-unes:

- l'algorithme génétique n'est pas une méthode d'optimisation efficace lorsque toutes les variables sont continues;
- les groupes de travail (sous-systèmes) ont besoin de connaître toute l'information concernant les dépendances du problème (variables couplées ou paramètres);
- il n'est pas possible de trouver tous les points Pareto-optimaux.

Malgré que ces algorithmes soient de bonnes tentatives pour résoudre des problèmes à objectifs multiples dans un environnement distribué, ils ne considèrent pas les préférences des groupes de travail. Les objectifs visés par cette thèse de doctorat sont les suivants.

- Développer un algorithme capable de résoudre des problèmes à multiples objectifs rencontrant les exigences du client en environnement centralisé (un seul décideur). Cet algorithme sera basé sur la programmation par objectif.
- Utiliser cet algorithme pour résoudre des problèmes à multiples objectifs mais en environnement distribué (plusieurs décideurs). Cet algorithme est basé sur l'optimisation collaborative (formulation de Gu et al. (2006)).

2.5 Conclusion

En plus de différencier les approches d'optimisation, ce chapitre a identifié les principaux avantages et inconvénients de chacune d'elle. Les diagrammes de la figure 2.5 illustrent les différentes approches d'optimisation.

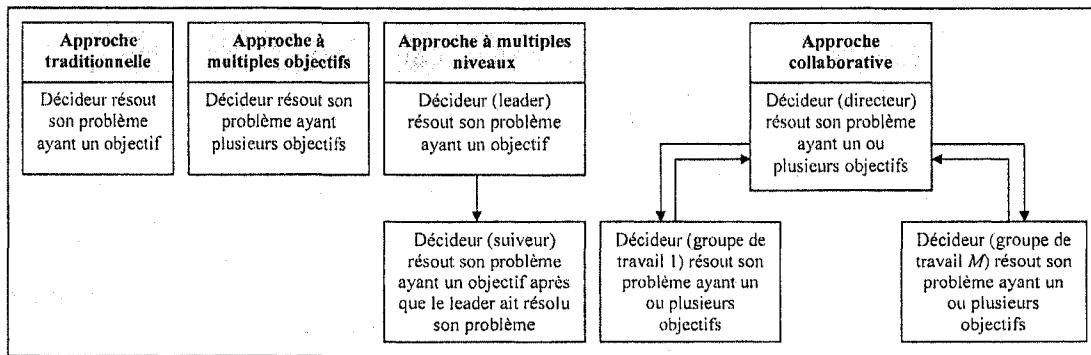


Figure 2.5 : Résumé des différentes approches d'optimisation

La connaissance de ces méthodes d'optimisation favorisera la compréhension des algorithmes qui seront développés dans les chapitres suivants.

CHAPITRE 3

DÉVELOPPEMENT D'UN ALGORITHME INTERACTIF POUR RÉSOUDRE DES PROBLÈMES À OBJECTIFS MULTIPLES EN ENVIRONNEMENT CENTRALISÉ ET EN INTÉGRANT LES PRÉFÉRENCES DES GROUPES DE TRAVAIL

3.0 Introduction

Lors de la conception d'un produit, les connaissances requises (compétences de base) et les outils de conception spécialisés exigent habituellement que le travail soit réalisé par plusieurs équipes de travail, chacune étant responsable d'atteindre ses propres objectifs. Souvent ces objectifs sont reliés entre eux par le même ensemble de variables de conception et, dans certains cas, les objectifs peuvent être contradictoires. Aussi, les équipes de travail sont souvent chapeautées par un directeur qui coordonne et contrôle les activités de conception. Le défi pour le directeur et ses équipes de travail est d'arriver à une solution dite Pareto-optimale. Rappelons qu'une solution Pareto-optimale est une solution qui permet à un participant de gagner plus aux dépens d'un autre participant qui, lui, perdra dans cette solution. On appelle l'ensemble Pareto-optimal, l'ensemble des solutions non dominées. Ce chapitre présente un algorithme interactif pour résoudre des problèmes à objectifs multiples tout en permettant aux équipes de travail d'intervenir dans le processus en définissant leurs préférences pour leur objectif. Pour ce faire, la technique de la programmation par objectif, vue au chapitre 2, sera utilisée. Dans cet algorithme, les groupes de travail ne sont pas considérés comme des décideurs car ils ne contrôlent aucune variable décisionnelle : le problème

d'optimisation est entièrement sous le contrôle du directeur (qui agit comme décideur) comme le montre la figure 3.1.

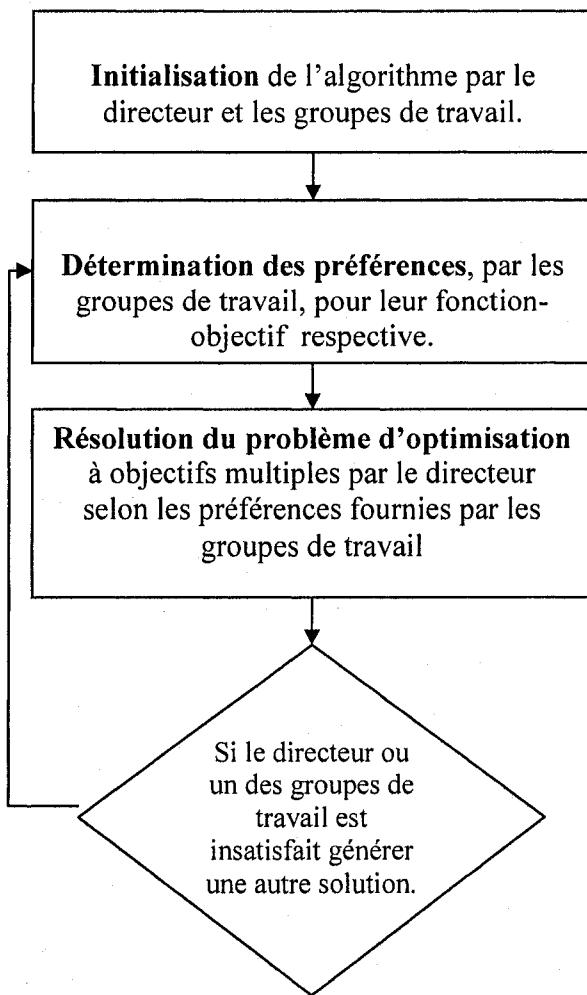


Figure 3.1 : Principales étapes de l'algorithme interactif (environnement centralisé).

Des règles sont fournies au directeur (décideur) et aux groupes de travail afin de les aider à déterminer les valeurs cibles à chacune des itérations. L'algorithme est créé en combinant un algorithme interactif, basé sur la programmation par objectif, développé par Abdel Haleem et al. (2006) pour résoudre le problème d'optimisation et une technique appelée le *linear physical programming* (Messac, 1996) pour déterminer les

degrés de désirabilité. L'algorithme a été testé sur deux problèmes mathématiques et sur un problème de conception de structure.

3.1 Notations

Les notations utilisées dans ce chapitre sont présentées au tableau 3.1.

Tableau 3.1 : Notations utilisées dans le chapitre 3

A	vecteur des variables décisionnelles.
\bar{A}_h	$h^{\text{ième}}$ solution Pareto-optimale du problème à multiples objectifs.
A^{*m}	solution optimale individuelle de la fonction m .
b^h	vecteur des valeurs cibles à l'itération h où $b^h = [b_1^h, b_2^h, \dots, b_m^h]$
b_m^h	valeur cible de la fonction-objectif m à l'itération h .
$b_{m\min}, b_{m\max}$	meilleures et pires valeurs obtenues pour la fonction-objectif m .
$c_q(A)$	contrainte q où $q = 1 \dots Q$.
d_m	variables de déviation des fonctions-objectifs m
d_{ms}^-, d_{ms}^+	variables de déviation des fonctions-objectifs m pour le degré de désirabilité s .
D	ensemble des solutions réalisables c'est-à-dire ensemble des valeurs pour lesquelles le problème est réalisable.
D'	ensemble réduit des solutions réalisables.
$f_m(A)$	fonction-objectif m .
$G(\bar{A}_h)$	ensemble de stabilité, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de b où la solution \bar{A}_h demeure optimale.
h	nombre d'itérations correspondant au nombre de solutions générées où $h = 1, \dots, H$.
i	nombre de variables décisionnelles (disciplinaires, interdisciplinaires, auxiliaires ou couplées) où $i = 1, \dots, I$
L	nombre de fonctions-objectifs dans les classes fermes où $l = 1, \dots, L$
M	nombre de fonctions-objectifs dans les classes souples où $m = 1, \dots, M$

Tableau 3.1 : Notations utilisées dans le chapitre 3 (suite et fin)

q	nombre de contraintes où $q = 1, \dots, Q$.
$t_{ms}^-, t_{ms}, t_{ms}^+$	degrés de désirabilité s de la fonction-objectif m où $s = 1, \dots, 5$ pour les classes souples.
$t_{l,\min}, t_{l,\text{val}}, t_{l,\max}$	membres de droite des fonctions-objectifs dans les classes fermes.
\bar{u}_q	valeur du multiplicateur de KKT pour la contrainte q du directeur.
$U_{\text{opt}}(b_m^h)$	ensemble de toutes les solutions optimales.
$\tilde{w}_{ms}^-, \tilde{w}_{ms}^+$	poids associés aux variables de déviation.
$(\cdot)^*$	valeur optimale d'une variable (valeur cible) ou d'une fonction-objectif.

3.2 Le *linear physical programming*

Le *linear physical programming* (LPP) est une approche d'optimisation de la conception développée par Messac (1996). Contrairement aux approches conventionnelles de résolution de problème à objectifs multiples, le LPP offre une structure pour la formulation et la solution d'un problème à objectifs multiples en utilisant des degrés de désirabilité. Les termes idéal, désirable, tolérable, indésirable et inacceptable forment l'épine dorsale de cette nouvelle structure et apportent une flexibilité, une rigueur et une précision au processus de conception. Obtenir une conception optimale devient donc un processus moins évasif et beaucoup plus déterministe.

Selon l'approche de Messac et al. (1996), et comme montré au tableau 3.2, les fonctions-objectifs (f_m) sont classifiées en utilisant huit différentes classes divisées en deux catégories: souple (*soft*) et ferme (*hard*). Une fois la classe choisie pour chaque fonction-objectif, les préférences sont exprimées selon les termes du lexique caractérisant son degré de désirabilité: idéal, désirable, tolérable, indésirable et inacceptable.

Tableau 3.2: Classification des fonctions-objectifs selon la technique du *linear physical programming*.

Souple	Classe 1S	<i>Small is better</i> (minimisation)
	Classe 2S	<i>Larger is better</i> (maximisation)
	Classe 3S	<i>Value is better</i>
	Classe 4S	<i>Range is better</i>
Ferme	Classe 1H	<i>Must be smaller</i> ($f_l \leq t_{l,\max}$)
	Classe 2H	<i>Must be larger</i> ($f_l \geq t_{l,\min}$)
	Classe 3H	<i>Must be equal</i> ($f_l = t_{l,\text{val}}$)
	Classe 4H	<i>Must be in range</i> ($t_{l,\min} \leq f_l \leq t_{l,\max}$)

La valeur de la fonction-objectif f_m est sur l'axe horizontal et la fonction qui est minimisée pour cet objectif $p_m(f_m)$, appelée la fonction de désirabilité, est sur l'axe vertical. Les fonctions de désirabilité de chacune des classes sont montrées aux figures 3.2, 3.3, 3.4 et 3.5. Pour les classes souples, les paramètres t_{m1} à t_{m5} sont des valeurs spécifiées par le décideur. Pour les classes de la catégorie ferme, il y a seulement deux cas possibles: acceptable et inacceptable.

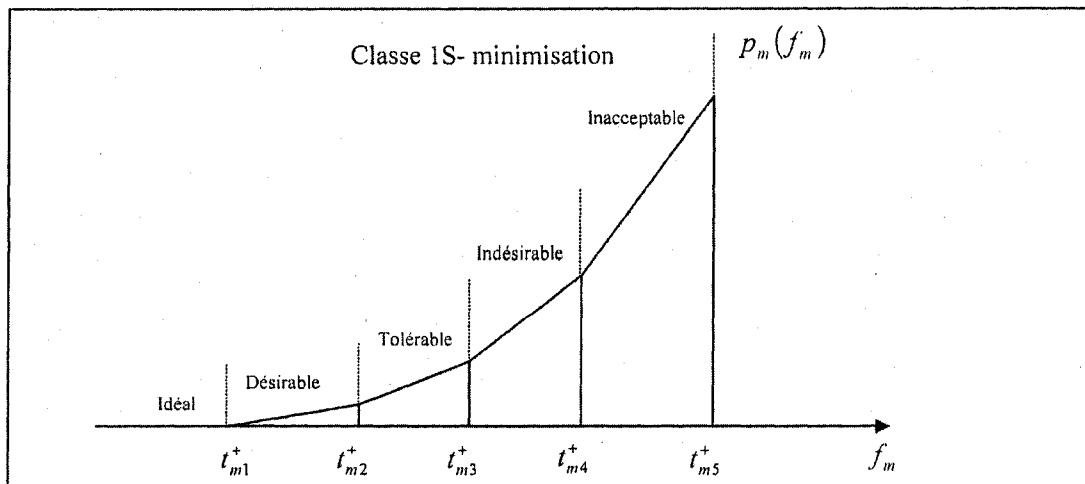


Figure 3.2 : Fonction de désirabilité pour la classe souple 1S (minimisation).

L'interprétation des zones idéale, désirable, tolérable, indésirable et inacceptable de la figure 3.2 se fait comme suit :

- Idéale : $f_m \leq t_{m1}^+$
- Désirable : $t_{m1}^+ < f_m \leq t_{m2}^+$
- Tolérable : $t_{m2}^+ < f_m \leq t_{m3}^+$
- Indésirable : $t_{m3}^+ < f_m \leq t_{m4}^+$
- Inacceptable : $t_{m4}^+ < f_m \leq t_{m5}^+$

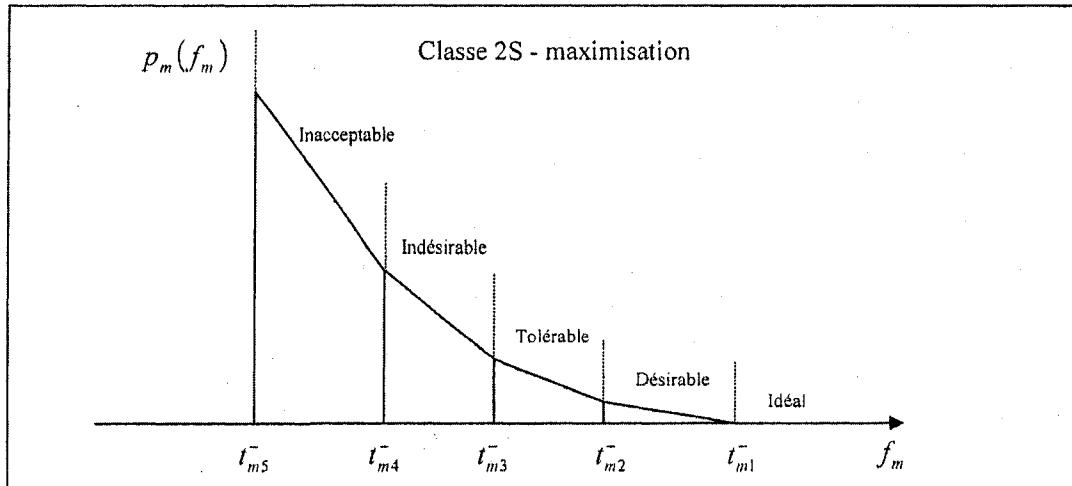


Figure 3.3 : Fonction de désirabilité pour la classe souple 2S (maximisation).

L'interprétation des zones idéale, désirable, tolérable, indésirable et inacceptable de la figure 3.3 se fait comme suit :

- Idéale : $f_m \geq t_{m1}^-$
- Désirable : $t_{m2}^- \leq f_m < t_{m1}^-$
- Tolérable : $t_{m3}^- \leq f_m < t_{m2}^-$
- Indésirable : $t_{m4}^- \leq f_m < t_{m3}^-$
- Inacceptable : $t_{m5}^- \leq f_m < t_{m4}^-$

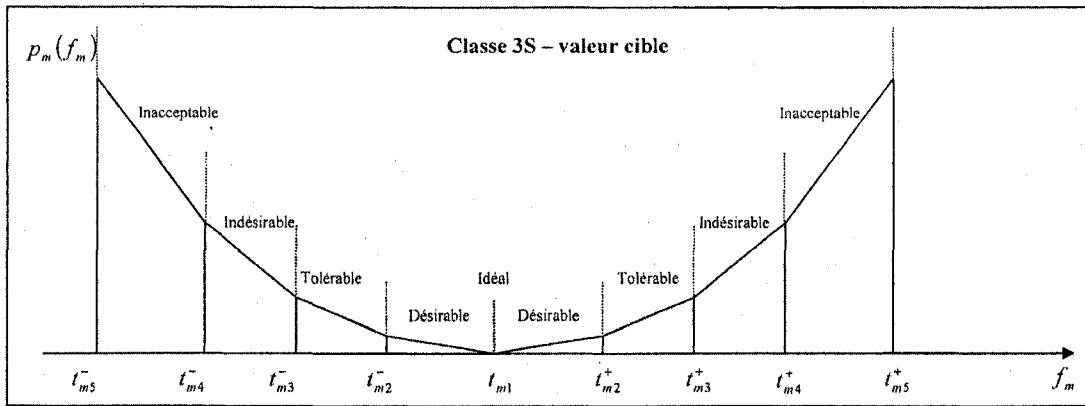


Figure 3.4 : Fonction de désirabilité pour la classe souple 3S (valeur cible).

L'interprétation des zones idéale, désirable, tolérable, indésirable et inacceptable de la figure 3.4 se fait comme suit :

- Idéale : $f_m = t_{m1}$
- Désirable : $t_{m2}^- \leq f_m < t_{m1}$ et $t_{m1} < f_m \leq t_{m2}^+$
- Tolérable : $t_{m3}^- \leq f_m < t_{m2}^-$ et $t_{m2}^+ < f_m \leq t_{m3}^+$
- Indésirable : $t_{m4}^- \leq f_m < t_{m3}^-$ et $t_{m3}^+ < f_m \leq t_{m4}^+$
- Inacceptable : $t_{m5}^- \leq f_m < t_{m4}^-$ et $t_{m4}^+ < f_m \leq t_{m5}^+$

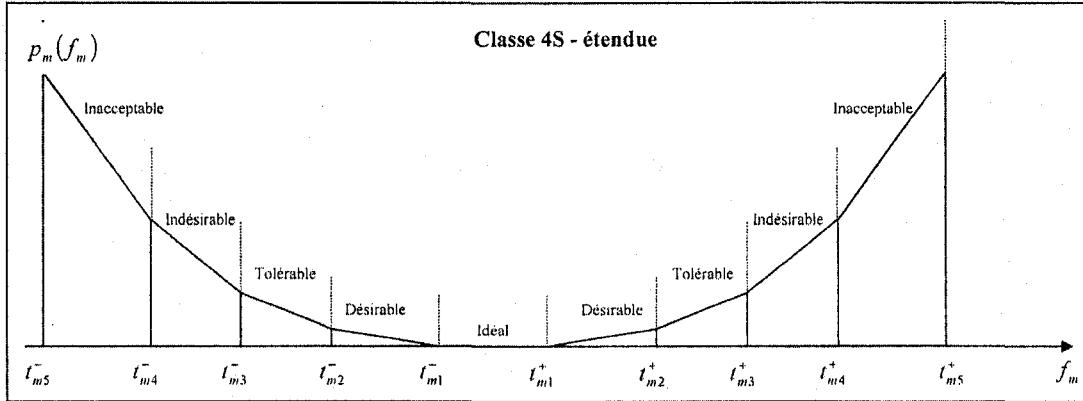


Figure 3.5 : Fonction de désirabilité pour la classe souple 4S (étendue).

L'interprétation des zones idéale, désirable, tolérable, indésirable et inacceptable de la figure 3.5 se fait comme suit :

- Idéale : $t_{m1}^- \leq f_m \leq t_{m1}^+$
- Désirable : $t_{m2}^- \leq f_m < t_{m1}^-$ et $t_{m1}^+ < f_m \leq t_{m2}^+$
- Tolérable : $t_{m3}^- \leq f_m < t_{m2}^-$ et $t_{m2}^+ < f_m \leq t_{m3}^+$
- Indésirable : $t_{m4}^- \leq f_m < t_{m3}^-$ et $t_{m3}^+ < f_m \leq t_{m4}^+$
- Inacceptable : $t_{m5}^- \leq f_m < t_{m4}^-$ et $t_{m4}^+ < f_m \leq t_{m5}^+$

La procédure pour former le modèle mathématique est la suivante:

- pour chaque fonction-objectif, $f_m(A)$, la catégorie (souple ou ferme) et la classe (1 à 4) sont déterminées.
- pour chaque fonction-objectif, les limites de chaque classe et les différents degrés de désirabilité (t_{m1} à t_{m5}) sont définis.

- des poids \tilde{w}_{ms}^- et \tilde{w}_{ms}^+ sont générés selon les fonctions de désirabilité et les degrés de désirabilité spécifiés en utilisant un algorithme. Messac et al. (1996) en proposent un permettant d'assurer la convexité des fonctions de désirabilité.
- finalement, le problème suivant est résolu:

$$\text{Min } J = \sum_{m=1}^M p_m(f_m) \text{ où } p_m(f_m) = \underset{d_{ms}^-, d_{ms}^+}{\text{Min}} \sum_{s=2}^5 (\tilde{w}_{ms}^- d_{ms}^- + \tilde{w}_{ms}^+ d_{ms}^+) \quad (3.1)$$

sujet à

$$f_m(A) - d_{ms}^+ \leq t_{m(s-1)}^+ \quad \forall m \in \text{classes } 1S, 3S, 4S; \quad m = 1, 2, \dots, M; \quad s = 2, \dots, 5 \quad (3.2)$$

$$d_{ms}^+ \geq 0 \quad \forall m \in \text{classes } 1S, 3S, 4S; \quad m = 1, 2, \dots, M; \quad s = 2, \dots, 5 \quad (3.3)$$

$$f_m(A) \leq t_{m5}^+ \quad \forall m \in \text{classes } 1S, 3S, 4S; \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (3.4)$$

$$f_m(A) + d_{ms}^- \geq t_{m(s-1)}^- \quad \forall m \in \text{classes } 2S, 3S, 4S; \quad m = 1, 2, \dots, M; \quad s = 2, \dots, 5 \quad (3.5)$$

$$d_{ms}^- \geq 0 \quad \forall m \in \text{classes } 2S, 3S, 4S; \quad m = 1, 2, \dots, M; \quad s = 2, \dots, 5 \quad (3.6)$$

$$f_m(A) \geq t_{m5}^- \quad \forall m \in \text{classes } 2S, 3S, 4S; \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (3.7)$$

$$f_l(A) \leq t_{l,\max} \quad \forall l \in \text{classe } 1H; \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (3.8)$$

$$f_l(A) \geq t_{l,\min} \quad \forall l \in \text{classe } 2H; \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (3.9)$$

$$f_l(A) = t_{l,\text{val}} \quad \forall l \in \text{classe } 3H; \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (3.10)$$

$$t_{l,\min} \leq f_l(A) \leq t_{l,\max} \quad \forall l \in \text{classe } 4H; \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (3.11)$$

$$A_{\min} \leq A \leq A_{\max} \quad (3.12)$$

Les limitations du *linear physical programming* sont les suivantes:

- il est nécessaire de fixer les degrés de désirabilité a priori pour chacune des fonctions-objectifs;
- une seule solution Pareto-optimale est obtenue.

Tappeta et al. (2000) ont jumelé le *linear physical programming* avec leur algorithme interactif développé dans Tappeta et Renaud (1999). Leur nouvel algorithme converge vers une solution Pareto-optimale et peut générer d'autres solutions Pareto-optimales dans le voisinage de la solution trouvée. Cependant aucune aide n'est fournie pour déterminer les différents degrés de désirabilité.

3.3 Un algorithme interactif basé sur la programmation par objectif

Abdel Haleem (1991) a développé un algorithme interactif permettant de résoudre des problèmes à multiples objectifs non linéaires et de générer différentes solutions Pareto-optimales. Les avantages de cet algorithme sont les suivants:

- l'algorithme fournit une aide au décideur pour définir son point de référence;
- le décideur n'a pas besoin d'ordonner les M fonctions-objectifs selon un ordre de priorité;
- l'algorithme garantit des solutions Pareto-optimales à chaque itération.

L'algorithme, sous le contrôle d'une seule personne, appelée décideur dans le texte, se déroule comme suit:

Étape 1 : Pour les M fonctions-objectifs, le décideur résout les problèmes individuels. Les solutions optimales sont notées $A^{*m}, m = 1, \dots, M$. Les valeurs optimales pour les fonctions-objectifs sont notées $f_m^*, m = 1, \dots, M$.

Étape 2 : Le décideur évalue les $M-1$ autres fonctions-objectifs à partir de la solution optimale M et construit la table des valeurs des fonctions-objectifs. À partir de cette table, le décideur connaît les meilleures et pires valeurs ($b_{m\min}, b_{m\max}, m = 1, \dots, M$) de chacune des fonctions-objectifs (pour un problème de minimisation). Avec ces valeurs,

l'algorithme détermine l'ensemble réduit des solutions réalisables : D' où $D' = \{D \mid b_{m \min} \leq b_m^h \leq b_{m \max}, m = 1, \dots, M\}$, D est l'ensemble des valeurs des paramètres pour lesquels le problème à multiples objectifs est réalisable et h est le nombre d'itérations correspondant au nombre de solutions générées. Mathématiquement, on a $D = \{b_m^h \in R^{M+Q} \mid U_{opt}(b_m^h) \neq \emptyset\}$ et $U_{opt}(b_m^h)$ est l'ensemble de toutes les solutions optimales.

Étape 3 : Fixer l'itération $h=1$. À partir de l'ensemble réduit des solutions réalisables D' le décideur sélectionne des valeurs cibles $(b_m^h, m=1, \dots, M)$ pour chacune des fonctions-objectifs.

Étape 4 : Le décideur utilise l'algorithme proposé par Dauer et Krueger (1977) pour solutionner le problème suivant:

$$\text{Min} \quad f_1(A) \leq b_1^h, f_2(A) \leq b_2^h, \dots, f_M(A) \leq b_M^h \quad (3.13)$$

$$\text{ sujet à } \quad c_q(A) \leq 0, \quad q = 1, \dots, Q \quad (3.14)$$

$$A \geq 0 \quad (3.15)$$

et obtenir la solution optimale \bar{A}_h . Le fonctionnement de cet algorithme est décrit dans Abdel Haleem (1991) et Abdel Haleem et al. (2006). Si le décideur est satisfait de cette solution, aller à l'étape 11. Sinon, aller à l'étape 5. Il est suggéré que le décideur génère un certain nombre de solutions Pareto-optimales avant d'arrêter.

Étape 5 : Le décideur formule les conditions de KKT du problème précédent à la solution \bar{A}_h et détermine la valeur des multiplicateurs de KKT $\bar{u}_q, q = 1, \dots, M+Q$. L'algorithme de Steuer (1990) peut être utilisé.

Étape 6 : Selon les valeurs \bar{u}_q obtenues pour les contraintes de but, le décideur détermine l'ensemble de stabilité $G(\bar{A}_h)$ tel que présenté à l'annexe A.

Étape 7 : Utiliser l'algorithme de soustraction des ensembles (Osman, 1979) pour obtenir le nouvel ensemble réduit des solutions réalisables $\{D' - \bigcup G(\bar{A}_p), p = 1, \dots, h\}$ excluant les valeurs cibles déjà analysées à l'étape 3. Les détails de cet algorithme sont donnés dans Abdel Haleem (1991) et Abdel Haleem et al. (2006).

Étape 8 : Si aucune autre valeur cible ne peut être choisie à l'intérieur de $\{D' - \bigcup G(\bar{A}_p), p = 1, \dots, h\}$ aller à l'étape 10, sinon aller à l'étape 9.

Étape 9 : Fixer $h = h + 1$. Le décideur sélectionne d'autres valeurs cibles $b_m^h \in \{D' - \bigcup G(\bar{A}_p), p = 1, \dots, h - 1\}$. Aller à l'étape 4.

Étape 10 : Le décideur choisit sa solution préférée.

Étape 11 : Arrêter.

Cet algorithme a été utilisé, entre autres, pour l'optimisation des conditions de coupage lors d'une opération de tournage (Abdel Haleem, 1991) et pour la conception d'un circuit électrique (Lamghabbar et al., 2004).

3.4 L'algorithme interactif pour résoudre des problèmes à multiples objectifs intégrant les préférences des groupes de travail

L'objectif visé par le travail réalisé dans ce chapitre est de créer un algorithme qui peut être utilisé dans les structures organisationnelles de développement de produit que l'on retrouve dans les entreprises. Ces structures organisationnelles comprennent habituellement un directeur et des groupes de travail.

Comme il a été mentionné à la section précédente, l'algorithme d'Abdel Haleem (1991) aide le décideur à choisir son point de référence en lui présentant un ensemble réduit des solutions réalisables. En jumelant cet algorithme avec l'approche du *linear physical programming*, il sera possible de diviser l'ensemble réduit des solutions réalisables selon les degrés de désirabilité. En plus, ce jumelage permettra d'intégrer d'autres personnes, outre le décideur (appelé ci-après le directeur), dans le processus de résolution. En effet, des groupes de travail pourront participer à la procédure d'optimisation en fixant leurs degrés de désirabilité et en définissant à chaque itération leurs préférences.

Dans cette nouvelle procédure, le directeur, qui agit comme décideur, contrôle toutes les variables décisionnelles, coordonne les activités et guide les groupes de travail dans leur choix des valeurs cibles. Dans un premier temps, une seule fonction-objectif est assignée par groupe de travail. Donc, si le problème à multiples objectifs comporte trois objectifs alors la procédure se déroule avec un directeur et trois groupes de travail (une fonction-objectif par groupe).

Le fonctionnement de l'algorithme Interactif pour résoudre des Problèmes à Objectifs Multiples tenant compte des Préférences des groupes de travail (nommé ci-après l'algorithme IPOMP) est montré à la figure 3.6. Les étapes encadrées en double représentent les ajouts faits à l'algorithme d'Abdel Haleem (1991). La procédure et les rôles du directeur et des groupes de travail sont expliqués à la suite de l'organigramme.

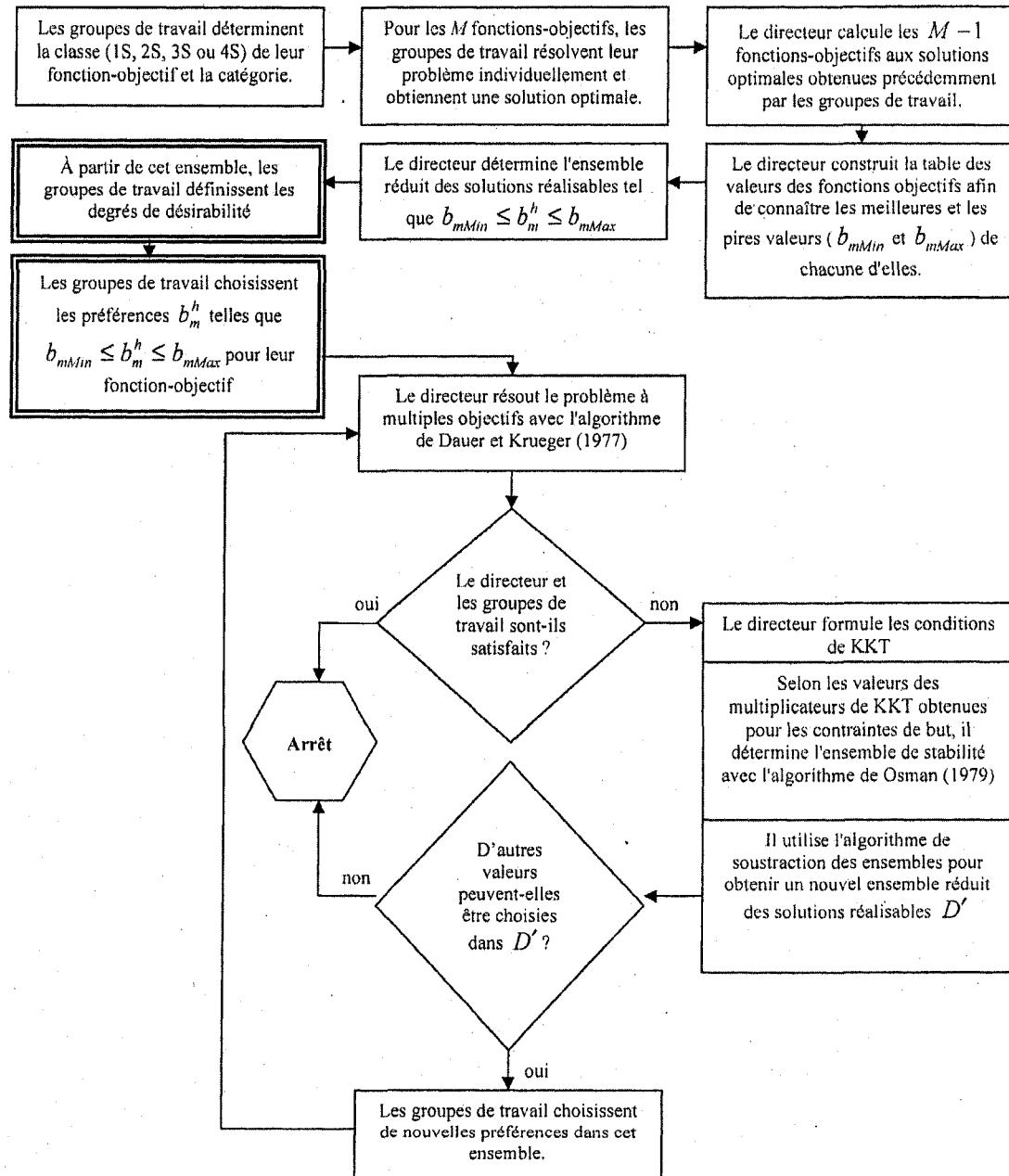


Figure 3.6 : L'algorithme IPOMP.

Étape 1 : Chaque groupe de travail détermine la classe de sa fonction-objectif selon le tableau 3.2.

Étape 2 : Pour les M fonctions-objectifs, les groupes de travail résolvent leur problème individuel selon la classe choisie. Les solutions optimales sont notées $A^{*m}, m = 1, \dots, M$. Les valeurs optimales pour les fonctions-objectifs sont notées $f_m^*, m = 1, \dots, M$.

Étape 3 : Comme illustré au tableau 3.3, le directeur évalue la valeur des $M-1$ autres fonctions-objectifs en utilisant la solution optimale m et construit la table des valeurs des fonctions-objectifs. À partir de cette table, le directeur connaît les meilleures valeurs ($b_{m\min} = \min f_m^*, m = 1, \dots, M$) et pires valeurs ($b_{m\max} = \max f_m^*, m = 1, \dots, M$) de chacune des fonctions-objectifs. Avec ces valeurs, l'algorithme détermine l'ensemble réduit des solutions réalisables D' où $D' = \{D \mid b_{m\min} \leq b_m^h \leq b_{m\max}, m = 1, \dots, M\}$, $D = \{b_m^h \in R^{M+Q} \mid U_{opt}(b_m^h) \neq \phi\}$ et $U_{opt}(b_m^h)$ est l'ensemble de toutes les solutions optimales.

Tableau 3.3 : Table des valeurs des fonctions-objectifs (environnement centralisé)

Solutions optimales	Fonctions-objectifs			
A^{*1}	$f_1^*(A^{*1})$	$f_2^*(A^{*1})$	$f_m^*(A^{*1})$
A^{*2}	$f_1^*(A^{*2})$	$f_2^*(A^{*2})$	$f_m^*(A^{*2})$
.....
A^{*m}	$f_1^*(A^{*m})$	$f_2^*(A^{*m})$	$f_m^*(A^{*m})$

Étape 4 : Le directeur présente l'ensemble réduit des solutions réalisables D' aux groupes de travail. Les groupes de travail divisent l'ensemble selon le nombre de degrés de désirabilité associés à la classe de la fonction-objectif:

- pour la classe 1S, déterminer les degrés de désirabilité idéal (t_{m1}^+), désirable (t_{m2}^+), tolérable (t_{m3}^+), indésirable (t_{m4}^+) et inacceptable (t_{m5}^+).

- pour la classe 2S, déterminer les degrés de désirabilité idéal (t_{m1}^-), désirable (t_{m2}^-), tolérable (t_{m3}^-), indésirable (t_{m4}^-) et inacceptable (t_{m5}^-).
- pour la classe 3S, déterminer les degrés de désirabilité idéal (t_{m1}^-), désirables (t_{m2}^- et t_{m2}^+), tolérables (t_{m3}^- et t_{m3}^+), indésirables (t_{m4}^- et t_{m4}^+) et inacceptables (t_{m5}^- et t_{m5}^+).
- pour la classe 4S, déterminer les degrés de désirabilité idéaux (t_{m1}^- et t_{m1}^+), désirables (t_{m2}^- et t_{m2}^+), tolérables (t_{m3}^- et t_{m3}^+), indésirables (t_{m4}^- et t_{m4}^+) et inacceptables (t_{m5}^- et t_{m5}^+).

Habituellement, les valeurs de $t_{m5}^-, t_{m4}^-, t_{m3}^-, t_{m2}^-, t_{m1}^-$ et $t_{m1}^+, t_{m2}^+, t_{m3}^+, t_{m4}^+, t_{m5}^+$ sont assignées selon l'expérience des groupes de travail. Pour des problèmes purement mathématiques, les degrés de désirabilité peuvent être déterminés selon plusieurs scénarios. Ces scénarios sont présentés à l'annexe B.

Étape 5 : Fixer l'itération $h=1$. Le directeur demande aux groupes de travail de choisir leurs préférences b_m^h pour leur fonction-objectif.

Étape 6 : Le directeur utilise l'algorithme proposé par Dauer et Krueger (1977) pour solutionner le problème à objectifs multiples et obtenir la solution Pareto-optimale \bar{A}_h . L'annexe C présente les détails de cet algorithme. Le $M^{\text{ième}}$ problème résolu est P_M :

$$\text{Minimiser } d_M \quad (3.16)$$

$$\text{sujet à } c_q(A) \leq 0, \quad q = 1, \dots, Q \quad (3.17)$$

$$A_{\min} \leq A \leq A_{\max} \quad (3.18)$$

et pour les classes 1S, 3S et 4S

$$c_{Q+m}(A) \equiv f_m(A) - d_m \leq b_m^h \quad 1 \leq m \leq M \quad (3.19)$$

$$d_m = d_m^* \quad 1 \leq m \leq M-1 \quad (3.20)$$

$$f_m(A) \leq t_{m5}^+ \quad 1 \leq m \leq M \quad (3.21)$$

$$d_M \geq 0 \quad (3.22)$$

et pour les classes 2S, 3S et 4S

$$c_{Q+m}(A) \equiv f_m(A) + d_m \geq b_m^h \quad 1 \leq m \leq M \quad (3.23)$$

$$d_m = d_m^* \quad 1 \leq m \leq M-1 \quad (3.24)$$

$$f_m(A) \geq t_{m5}^- \quad 1 \leq m \leq M \quad (3.25)$$

$$d_M \geq 0 \quad (3.26)$$

et pour les classes 1H, 2H, 3H et 4H

$$f_l(A) \leq t_{l,\max} \quad \forall l \in \text{classe 1H} \quad 1 \leq l \leq L \quad (3.27)$$

$$f_l(A) \geq t_{l,\min} \quad \forall l \in \text{classe 2H} \quad 1 \leq l \leq L \quad (3.28)$$

$$f_l(A) = t_{l,\text{val}} \quad \forall l \in \text{classe 3H} \quad 1 \leq l \leq L \quad (3.29)$$

$$t_{l,\min} \leq f_l(A) \leq t_{l,\max} \quad \forall l \in \text{classe 4H} \quad 1 \leq l \leq L \quad (3.30)$$

Les contraintes $c_{Q+m}(A)$ sont appelées des contraintes de but. Des contraintes $f_m(A) \leq t_{m5}^+$ et $f_m(A) \geq t_{m5}^-$ sont ajoutées au problème original d'Abdel Haleem (2006) pour assurer que les solutions obtenues sont meilleures que la valeur jugée inacceptable.

Étape 7 : Si le directeur et les groupes de travail sont satisfaits de cette solution, aller à l'étape 14. Sinon, aller à l'étape 8. Il est recommandé que le directeur et les groupes de travail génèrent quelques solutions afin de les comparer.

Étape 8 : Le directeur formule les conditions de KKT et détermine la valeur des multiplicateurs de KKT \bar{u}_q , $q = Q+1, \dots, Q+M$ pour les contraintes de but.

Étape 9 : Selon les valeurs obtenues \bar{u}_q pour les contraintes de but et selon la procédure présentée à l'annexe A, le directeur détermine l'ensemble de stabilité $G(\bar{A}_h)$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de b où la solution demeure optimale.

Étape 10 : Le directeur utilise l'algorithme de soustraction des ensembles (Osman, 1979) pour obtenir l'ensemble réduit des solutions réalisables $\{D' - \bigcup G(\bar{A}_p), p = 1, \dots, h\}$ excluant les valeurs cibles déjà analysées. De cette façon, on s'assure qu'une solution différente sera générée. Les détails de cet algorithme sont donnés dans Abdel Haleem et al. (2006).

Étape 11 : Si aucune autres valeurs cibles ne peuvent être choisies à l'intérieur de $\{D' - \bigcup G(\bar{A}_p), p = 1, \dots, h\}$ aller à l'étape 14, sinon aller à l'étape 12.

Étape 12 : Fixer $h = h+1$. Le directeur demande aux groupes de travail de sélectionner d'autres valeurs pour les valeurs cibles $b_m^h \in \{D' - \bigcup G(\bar{A}_p), p = 1, \dots, h-1\}$ et aller à l'étape 6. Le directeur peut utiliser les règles suivantes pour guider les groupes de travail dans leur sélection des valeurs cibles.

- Règle#1 : Il faut toujours améliorer l'objectif ayant la pire valeur en choisissant sa valeur dans une zone meilleure et en sacrifiant le ou les autres objectifs en choisissant leur valeur dans une zone moindre. Le but visé par ces choix est

d'obtenir, si possible, des valeurs dans une même zone (ou mieux) pour chacun des objectifs.

- Règle #2 : Un fois dans la même zone, essayer d'autres valeurs dans cette zone afin d'obtenir d'autres solutions Pareto-optimales. Les valeurs choisies devraient couvrir toute la zone. Par exemple, choisir une valeur à une extrémité de la zone et les autres valeurs à l'autre extrémité. On peut aussi essayer de choisir une des valeurs dans une zone meilleure en laissant les autres valeurs dans la même zone.
- Règle#3 : S'il est impossible de suivre la règle #2 à cause de l'ensemble réduit des solutions réalisables, essayer les possibilités (s'il n'y en a pas beaucoup) pour trouver le meilleur choix.

Étape 13 : Le directeur présente les solutions obtenues aux groupes de travail pour effectuer un choix satisfaisant tout le monde. Si d'autres solutions sont requises, le processus peut reprendre à l'étape 5.

Étape 14 : Arrêter.

3.5 Algorithme d'optimisation

Le logiciel utilisé pour programmer l'algorithme IPOMP est *Matlab*. Plus précisément, la fonction *fmincon* a été employée pour l'optimisation des fonctions-objectifs. *fmincon* recourt à une méthode de programmation séquentielle quadratique pour résoudre un programme non linéaire avec contraintes d'égalité et d'inégalité. Pour débuter, l'algorithme a besoin d'un point de départ. Le point choisi est $(1, 1, \dots, 1)$. Tous les autres paramètres nécessaires au fonctionnement de l'algorithme d'optimisation

(tolérance d'arrêt, etc...) ont été fixés aux valeurs par défaut proposées par *Matlab*. Le programme *Matlab* de l'algorithme IPOMP est disponible à l'annexe D.

3.6 Application 1: problème mathématique proposé par Abdel Haleem (1991)

Le premier problème sur lequel l'algorithme IPOMP sera testé est un problème purement mathématique. Ce problème simple, a été choisi pour démontrer le fonctionnement de l'algorithme. Le problème comprend cinq variables de décision, trois fonctions-objectifs non linéaires et trois contraintes linéaires. Le vecteur des variables décisionnelles est le suivant : $A = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Le problème a été développé originalement par Abdel Haleem (1991) et se décrit comme suit:

$$\text{Min } f_1(A) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - x_4 - 3x_5 \leq b_1 \quad (3.31)$$

$$\text{Min } f_2(A) = -2x_1 + 3x_2 + 4x_3^3 - 5x_4 - 2x_5 \leq b_2 \quad (3.32)$$

$$\text{Min } f_3(A) = 3x_1 + x_2^2 - 5x_3 + x_4^2 - 2x_5 \leq b_3 \quad (3.33)$$

sujet à $c_1(A) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \leq 6 \quad (3.34)$

$$c_2(A) = 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 10 \quad (3.35)$$

$$c_3(A) = 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 3x_5 \leq 15 \quad (3.36)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \quad (3.37)$$

Dans ce problème supposons qu'il y ait trois groupes de travail, chacun étant responsable d'une fonction-objectif et un directeur qui contrôle le processus de résolution et d'optimisation. Le détail du processus de résolution de ce problème avec l'algorithme IPOMP est présenté à l'annexe E. Les degrés de désirabilité fixés par les groupes de travail, à partir de leur ensemble réduit des solutions réalisables, sont présentés au tableau 3.4.

Tableau 3.4 : Degrés de désirabilité pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991) selon le scénario 1.

		I	D	T	ID	IA
Critère	Classe	t_{m1}^+	t_{m2}^+	t_{m3}^+	t_{m4}^+	t_{m5}^+
f_1	1S	-15	-12.5	-10	-7.5	-5
f_2	1S	-25	-20.2025	-15.405	-10.6075	-5.81
f_3	1S	-11.25	-2.1875	6.875	15.9375	25

I : (Idéale $\leq t_{m1}^+$) D : ($t_{m1}^+ <$ Désirable $\leq t_{m2}^+$) T : ($t_{m2}^+ <$ Tolérable $\leq t_{m3}^+$)
ID : ($t_{m3}^+ <$ Indésirable $\leq t_{m4}^+$) IA : ($t_{m4}^+ <$ Inacceptable $\leq t_{m5}^+$)

Le tableau 3.5 présente un résumé des solutions obtenues. Le vecteur b^h représente les valeurs désirées par les groupes de travail, tandis que les valeurs des fonctions-objectifs f_m sont les valeurs obtenues lors du processus d'optimisation.

La meilleure solution Pareto-optimale obtenue, selon les degrés de désirabilité fixés par les groupes de travail, est la solution 5. En effet, les groupes de travail 1 et 2 voient leur fonction-objectif atteindre un niveau tolérable tandis que la fonction-objectif du groupe de travail 3 atteint le niveau désirable. Cette solution peut être retenue pour implantation.

Comme il est démontré à l'annexe E, l'application des règles pour choisir les valeurs cibles permet de converger vers des solutions Pareto-optimales dans une même zone (ou mieux) pour tous les objectifs.

Tableau 3.5 : Résumé des solutions obtenues pour le problème mathématique de Abdel Haleem.

Itération h	Vecteur des valeurs cibles (b^h)	Valeurs des fonctions-objectifs (f_m)
1	(-15, -25, -11.25)	$f_1 = -15$ (Idéale) $f_2 = -10$ (Inacceptable) $f_3 = -10$ (Désirable)
	Solution optimale	(0, 0, 0, 0, 5)
2	(-12, -18, -1)	$f_1 = -12$ (Tolérable) $f_2 = -14.5$ (Indésirable) $f_3 = -4.75$ (Désirable)
	Solution optimale	(0, 0, 0, 1.3, 3.5)
3	(-10.5, -19, 6)	$f_1 = -10.5$ (Tolérable) $f_2 = -16.75$ (Tolérable) $f_3 = -0.4375$ (Tolérable)
	Solution optimale	(0, 0, 0, 2.25, 2.75)
4	(-8, -16, -11)	$f_1 = -11$ (Tolérable) $f_2 = -16$ (Tolérable) $f_3 = -2$ (Tolérable)
	Solution optimale	(0, 0, 0, 2, 3)
5	(-10, -15.5, -3)	$f_1 = -11.33$ (Tolérable) $f_2 = -15.5$ (Tolérable) $f_3 = -2.97$ (Désirable)
	Solution optimale	(0, 0, 0, 1.83, 3.17)

3.7 Application 2 : problème mathématique proposé par Tappeta et al. (2000)

Cet autre problème test comporte trois variables de conception, trois fonctions-objectifs et une seule contrainte. Ce problème a été choisi afin de comparer les résultats obtenus par l'algorithme IPOMP avec les résultats obtenus par l'algorithme de Tappeta et al. (2000). La définition du problème dans sa forme standard est la suivante:

$$\text{Minimiser} \quad f_1 = 10 - (x_1^3 + x_1^2(1 + x_2 + x_3) + x_2^3 + x_3^3)/10 \quad (3.38)$$

$$f_2 = 15 - (x_1^3 + 2x_2^3 + x_2^2(2 + x_1 + x_3) + x_3^3)/10 \quad (3.39)$$

$$f_3 = 20 - (x_1^3 + x_2^3 + 3x_3^3 + x_3^2(3 + x_1 + x_2))/10 \quad (3.40)$$

$$\text{ sujet à } \quad c_1(A) = 12 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \geq 0 \quad (3.41)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (3.42)$$

Dans ce problème supposons encore une fois qu'il y ait trois groupes de travail, chacun étant responsable d'une fonction-objectif. Encore une fois, le processus de résolution et d'optimisation est sous le contrôle du directeur. Le détail du processus de résolution de ce problème avec l'algorithme IPOMP est présenté à l'annexe F. Les degrés de désirabilité déterminés par les groupes de travail, à partir de leur ensemble réduit des solutions réalisables, sont montrés au tableau 3.6.

Tableau 3.6 : Degrés de désirabilité pour le problème mathématique de Tappeta et al. (2000) selon le scénario 3

		I	D	T	ID	IA
Critère	Classe	t_{m1}^+	t_{m2}^+	t_{m3}^+	t_{m4}^+	t_{m5}^+
f_1	1S	4.1836	4.7693	5.3549	5.9405	6.5261
f_2	1S	5.5282	7.3343	9.1404	10.9465	12.7526
f_3	1S	6.6296	9.7121	12.7946	15.8771	18.9596

I : (Idéal $\leq t_{m1}^+$) D : ($t_{m1}^+ <$ Désirable $\leq t_{m2}^+$) T : ($t_{m2}^+ <$ Tolérable $\leq t_{m3}^+$)
ID : ($t_{m3}^+ <$ Indésirable $\leq t_{m4}^+$) IA : ($t_{m4}^+ <$ Inacceptable $\leq t_{m5}^+$)

Le tableau 3.7 présente un résumé des solutions obtenues. Le vecteur b^h représente les valeurs désirées par les groupes de travail, tandis que les valeurs des fonctions f_m sont les valeurs obtenues lors du processus d'optimisation. Puisque f_3 est toujours dans la zone indésirable alors la solution 3 ou 4 peut être choisie pour implantation.

Tableau 3.7 : Résumé des solutions obtenues pour le problème mathématique de Tappeta et al. (2000).

Itération h	Vecteur des valeurs cibles (b^h)	Valeurs des fonctions-objectifs (f_m)
1	(4.1836, 5.5282, 6.6296)	$f_1 = 4.1836$ (idéale) $f_2 = 9.4178$ (indésirable) $f_3 = 16.7115$ (inacceptable)
2	(4.5, 8, 13)	$f_1 = 4.5$ (désirable) $f_2 = 8.6799$ (tolérable) $f_3 = 16.8579$ (inacceptable)
3	(5.2, 9, 14)	$f_1 = 5.2$ (tolérable) $f_2 = 9$ (tolérable) $f_3 = 14.8087$ (indésirable)
4	(5.3, 9.1, 12.5)	$f_1 = 5.3$ (tolérable) $f_2 = 9.1$ (tolérable) $f_3 = 14.4381$ (indésirable)
5	(5.9, 8.9, 12.6)	$f_1 = 5.9$ (indésirable) $f_2 = 8.9$ (tolérable) $f_3 = 13.0147$ (indésirable)
6	(5, 10, 12)	$f_1 = 5$ (tolérable) $f_2 = 10$ (indésirable) $f_3 = 13.9899$ (indésirable)

Les résultats obtenus précédemment sont dépendants des degrés de désirabilité qui ont été fixés au départ. Si les degrés de désirabilité fixés par Tappeta et al. (2000) avaient été utilisés, certains résultats auraient été différents mais l'interprétation surtout aurait été différente. Le tableau 3.8 montre les degrés de désirabilité fixés par Tappeta et al. (2000).

Tableau 3.8: Degrés de désirabilité fixés par Tappeta et al. (2000)

		I	D	T	ID	IA
Critère	Classe	t_{m1}^+	t_{m2}^+	t_{m3}^+	t_{m4}^+	t_{m5}^+
f_1	1S	3.0	4.25	6.0	7.5	9.0
f_2	1S	3.7	7.0	9.25	11.8	12.5
f_3	1S	6.0	12.0	15.0	18.0	20.0
I : (Idéal $\leq t_{m1}^+$) D : ($t_{m1}^+ <$ Désirable $\leq t_{m2}^+$) T : ($t_{m2}^+ <$ Tolérable $\leq t_{m3}^+$) ID : ($t_{m3}^+ <$ Indésirable $\leq t_{m4}^+$) IA : ($t_{m4}^+ <$ Inacceptable $\leq t_{m5}^+$)						

Le tableau 3.9 présente les résultats obtenus avec ces degrés de désirabilité.

Tableau 3.9: Résultats obtenus en utilisant les degrés de désirabilité de Tappeta et al. (2000).

Itérations h	Vecteur des valeurs cibles (b^h)	Valeurs des fonctions-objectifs (f_m)
1	(3, 3.7, 6)	$f_1 = 3.5980$ (désirable) $f_2 = 10.9465$ (indésirable) $f_3 = 15.8166$ (indésirable)
2	(4.5, 8, 13)	$f_1 = 4.5$ (tolérable) $f_2 = 8.6799$ (tolérable) $f_3 = 16.8579$ (indésirable)
3	(5.2, 9, 14)	$f_1 = 5.2$ (tolérable) $f_2 = 9$ (tolérable) $f_3 = 14.8087$ (tolérable)
4	(5.3, 9.1, 12.5)	$f_1 = 5.3$ (tolérable) $f_2 = 9.1$ (tolérable) $f_3 = 14.4381$ (tolérable)
5	(5.9, 8.9, 12.6)	$f_1 = 5.9$ (tolérable) $f_2 = 8.9$ (tolérable) $f_3 = 13.0147$ (tolérable)
6	(5, 10, 12)	$f_1 = 5$ (tolérable) $f_2 = 10$ (indésirable) $f_3 = 13.9899$ (tolérable)

Mise à part la première solution (qui a été obtenue à partir de valeurs cibles différentes), les valeurs des fonctions-objectifs sont les mêmes mais c'est le degré de désirabilité qui change. On remarque que, en utilisant les degrés de désirabilité de Tappeta et al. (2000) et en appliquant les règles pour choisir les valeurs cibles, les solutions Pareto-optimales convergent aussi vers une même zone pour tous les objectifs. Dans ce cas-ci, plusieurs solutions peuvent être retenues pour implantation. En effet, les solutions 3, 4 et 5 sont dans la zone tolérable pour toutes les fonctions-objectifs.

Il est aussi intéressant de comparer les points Pareto-optimaux obtenus par Tappeta et al. (2000) avec ceux obtenus avec l'algorithme IPOMP et ce pour différents points d'aspiration (valeurs cibles). Le tableau 3.10 présente la comparaison. Pour assurer une bonne comparaison, les degrés de désirabilité fixés par Tappeta et al. (2000) ont été utilisés dans les deux cas. Sous les résultats obtenus, un sigle est inscrit entre parenthèses afin de savoir si la valeur obtenue pour une fonction-objectif donnée est plus petite (-), plus grande (+) ou égale (=) à la valeur d'aspiration (valeur cible). Naturellement, dans le cas d'un problème de minimisation, des valeurs plus petites ou égales aux valeurs cibles sont souhaitables.

Tableau 3.10 : Comparaison des points Pareto-optimaux obtenus par Tappeta et al. (2000) avec ceux obtenus avec l'algorithme IPOMP.

Point d'aspiration (valeurs cibles)			Point Pareto (Tappeta et al. (2000))			Point Pareto (Algorithme IPOMP)		
f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3
7.483	6.788	11.285	6.956 (-)	7.437 (+)	11.496 (+)	6.9722 (-)	6.7880 (=)	12.3239 (+)
5.400	6.788	16.927	5.413 (+)	6.916 (+)	16.218 (-)	4.4679 (-)	5.1878 (-)	16.3795 (-)
6.016	10.183	11.285	3.994 (-)	10.095 (-)	16.130 (+)	6.0002 (-)	9.9646 (-)	10.7528 (-)
3.933	10.183	16.927	4.708 (+)	8.689 (-)	16.259 (-)	3.9235 (-)	10.0191 (-)	16.4693 (-)

Les points Pareto-optimaux, générés avec l'algorithme décrit dans ce chapitre, sont près et souvent mieux que le point d'aspiration visé. Les points trouvés avec l'algorithme IPOMP sont aussi meilleurs que ceux obtenus par l'algorithme de Tappeta et al. (2000) dans le sens où ils sont plus petits ou égaux aux points trouvés par eux.

3.8 Application 3 : problème de conception d'une structure à deux barres

Le troisième problème consiste à concevoir une structure à deux barres (Messac et Ismail-Yahaya, 2002) comme montré à la figure 3.7. Ce problème a été choisi afin d'illustrer comment l'algorithme IPOMP peut être utilisé pour résoudre un problème de conception réel.

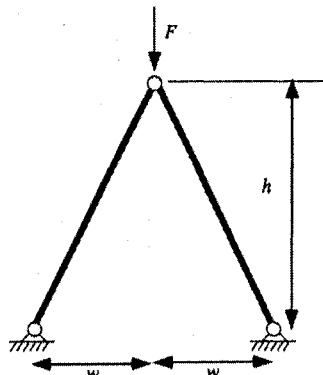


Figure 3.7 : Structure à deux barres

La structure est soumise à une force verticale F qui provoque une déflexion d . Le problème d'optimisation implique trois objectifs:

- Minimiser la masse (m) de la structure
- Minimiser l'effort normal (s)
- Minimiser la déflexion verticale (d)

Pour ce problème, le vecteur A comporte deux variables de conception:

x_1 = diamètre des barres

x_2 = hauteur de la structure

Les paramètres suivants sont considérés:

Force: $F = 150$ kN

Largeur de la structure: $w = 750$ mm

Densité de la masse: $\rho = 0.0078$ g/mm³

Coefficient d'élasticité: $E = 210\,000$ N.mm²

Autre paramètre $t = 2.5$ mm

Le problème se formule comme suit:

$$\text{Minimiser} \quad f_1 = m = 2\pi\rho x_1 \sqrt{w^2 + x_2^2} \quad (3.43)$$

$$f_2 = s = \frac{F}{2\pi x_1 x_2} \sqrt{w^2 + x_2^2} \quad (3.44)$$

$$f_3 = d = \frac{F(w^2 + x_2^2)^{3/2}}{2\pi E x_1 x_2^2} \quad (3.45)$$

$$\text{sujet à} \quad c_1 = \frac{F}{2\pi x_1 x_2} \sqrt{w^2 + x_2^2} - \frac{1}{8} \pi^2 E \frac{t^2 + x_1^2}{w^2 + x_2^2} \leq 0 \quad (3.46)$$

$$1 \leq x_1 \leq 100 \quad (3.47)$$

$$10 \leq x_2 \leq 1000 \quad (3.48)$$

Encore une fois, supposons qu'il y ait trois groupes de travail, chacun étant responsable d'une discipline (fonction-objectif): masse, effort et déflexion. Le processus de résolution et d'optimisation est toujours sous le contrôle du directeur. Le détail du processus de résolution de ce problème avec l'algorithme IPOMP est présenté à l'annexe

G. Les degrés de désirabilité choisis par les groupes de travail sont montrés au tableau 3.11.

Tableau 3.11 : Degrés de désirabilité pour le problème de structure selon le scénario 2.

Critère	Classe	<i>I</i>	<i>D</i>	<i>T</i>	<i>ID</i>	<i>IA</i>
		t_{m1}^+	t_{m2}^+	t_{m3}^+	t_{m4}^+	t_{m5}^+
f_1	1S	5849	7742	9635	11528	13421
f_2	1S	198	277	356	435	514
f_3	1S	1.7	2.6	3.4	4.3	5.1

I : (Idéal $\leq t_{m1}^+$) D : ($t_{m1}^+ <$ Désirable $\leq t_{m2}^+$) T : ($t_{m2}^+ <$ Tolérable $\leq t_{m3}^+$)
 ID : ($t_{m3}^+ <$ Indésirable $\leq t_{m4}^+$) IA : ($t_{m4}^+ <$ Inacceptable $\leq t_{m5}^+$)

Le tableau 3.12 résume les solutions générées avec l'algorithme. Le vecteur b^h représente les valeurs désirées par les groupes de travail, tandis que les valeurs des fonctions-objectifs f_m sont les valeurs obtenues lors du processus d'optimisation.

Tableau 3.12 : Résumé des solutions obtenues pour le problème de structure.

Itération h	Vecteur des valeurs cibles (b^h)	Valeurs des fonctions-objectifs (f_m)
1	(5849, 198, 1.7)	$f_1 = 5849$ (idéal) $f_2 = 300.0513$ (tolérable) $f_3 = 2.1432$ (désirable) Solution optimale : (45.0097, 749.9463)
2	(6000, 250, 2.5)	$f_1 = 6000$ (désirable) $f_2 = 292.5$ (tolérable) $f_3 = 2.0893$ (désirable) Solution optimale : (46.1718, 749.9452)
3	(7000, 200, 2.6)	$f_1 = 7000$ (désirable) $f_2 = 250.7143$ (désirable) $f_3 = 1.7908$ (désirable) Solution optimale : (53.8672, 749.9403)

La solution 3 semble désirable pour tous les groupes de travail et cette solution peut être retenue pour implantation. Les caractéristiques de la structure sont les suivantes :

- le diamètre des barres est 5.39 cm et la hauteur de la structure est de 74.99 cm
- la masse est de 7 kg (f_1)
- l'effort normal est de 250.7143 N (f_2)
- la déflexion verticale est de 1.7908 (f_3)

Si les degrés de désirabilité fixés par Messac et Ismail-Yahaya (2002), et montrés au tableau 3.13, avaient été utilisés, des solutions différentes auraient été obtenues.

Tableau 3.13: Degrés de désirabilité fixés par Messac et Ismail-Yahaya (2002)

		<i>I</i>	<i>D</i>	<i>T</i>	<i>ID</i>	<i>IA</i>
Critère	Classe	t_{m1}^+	t_{m2}^+	t_{m3}^+	t_{m4}^+	t_{m5}^+
f_1	1S	4450	4550	4650	4750	4850
f_2	1S	370	390	400	450	500
f_3	1S	2	2.5	3	3.5	4

I : (Idéal $\leq t_{m1}^+$) D : ($t_{m1}^+ <$ Désirable $\leq t_{m2}^+$) T : ($t_{m2}^+ <$ Tolérable $\leq t_{m3}^+$)
 ID : ($t_{m3}^+ <$ Indésirable $\leq t_{m4}^+$) IA : ($t_{m4}^+ <$ Inacceptable $\leq t_{m5}^+$)

Le tableau 3.14 présente les solutions obtenues avec les degrés de désirabilité fixés par Messac et Ismail-Yahaya (2002). Il ne fait nul doute que la meilleure solution, selon les degrés de désirabilité, est la deuxième. Il est intéressant de comparer cette solution avec celle obtenue par Messac et Ismail-Yahaya (2002). Il faut noter, qu'avec leur méthode, ces derniers génèrent une seule solution. La solution qu'ils obtiennent correspond à la solution 3 trouvée par l'algorithme IPOMP.

Tableau 3.14 : Résumé des solutions obtenues pour le problème de structure avec les degrés de désirabilité fixés par Messac et Ismail-Yahaya (2002).

Itération h	Vecteur des valeurs cibles (b^h)	Valeurs des fonctions-objectifs (f_m)
1	(4450, 370, 2)	$f_1 = 4450$ (idéal) $f_2 = 404.3889$ (indésirable) $f_3 = 2.9618$ (tolérable)
		Solution optimale : (37.8392, 599.0083)
2	(4600, 395, 1.8)	$f_1 = 4600$ (tolérable) $f_2 = 386.1490$ (désirable) $f_3 = 2.7917$ (tolérable)
		Solution optimale : (38.0308, 641.9333)
3	(4565, 369, 2.8)	$f_1 = 4565$ (tolérable) $f_2 = 390.0621$ (tolérable) $f_3 = 2.8269$ (tolérable)
		Solution optimale : (37.9813, 632.3013)

Le tableau 3.15 montre les caractéristiques de la structure de la solution 2 (algorithme IPOMP) en comparaison à la solution 3 (obtenue par Messac et Ismail-Yahaya (2002)).

Tableau 3.15 : Comparaison de la solution obtenue par Messac et Ismail-Yahaya (2002) avec celle obtenue avec l'algorithme IPOMP.

Caractéristiques de la structure	Solution avec l'algorithme IPOMP	Solution de Messac et Ismail-Yahaya (2002)
Diamètre des barres	3.80 cm	3.80 cm
Hauteur de la structure	64.2 cm	63.26 cm
Masse	4.600 kg (tolérable)	4.565 kg (tolérable)
Effort normal	386 N (désirable)	390 N (tolérable)
Déflexion verticale	2.7917 (tolérable)	2.826 (tolérable)

3.9 Conclusion

L'algorithme développé dans ce chapitre s'ajuste aux structures organisationnelles de développement de produit que l'on retrouve dans les entreprises et permet une collaboration entre le directeur et ses groupes de travail. En effet, l'algorithme IPOMP permet aux groupes de travail de définir leurs degrés de désirabilité pour leur fonction-objectif respective et de choisir les valeurs cibles. Le directeur peut donc générer de nouvelles solutions (alternatives de conception) satisfaisant au mieux les exigences des groupes de travail.

Les solutions générées par l'algorithme sont Pareto-optimales. Cependant toute la partie optimisation demeure sous le contrôle du directeur. L'application des règles pour choisir les valeurs cibles permet de converger vers des solutions Pareto-optimales dans une même zone (ou mieux) pour tous les objectifs. L'algorithme a été testé sur trois problèmes. Les résultats montrent que l'algorithme fonctionne bien et que peu d'itérations furent nécessaires pour obtenir les solutions. Le directeur peut avoir confiance que l'algorithme est en mesure de fournir des solutions Pareto-optimales différentes et ce, en un petit nombre d'itérations. L'algorithme est utile car il permet d'éviter bien des discussions entre les groupes de travail afin d'arriver à un consensus.

CHAPITRE 4

DÉVELOPPEMENT D'UN ALGORITHME INTERACTIF POUR RÉSOUDRE DES PROBLÈMES À OBJECTIFS MULTIPLES INTÉGRANT LES PRÉFÉRENCES DES GROUPES DE TRAVAIL DANS UN ENVIRONNEMENT DISTRIBUÉ

4.0 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de donner plus de responsabilités et de flexibilité aux groupes de travail en leur permettant de contrôler leurs variables décisionnelles et de travailler simultanément. Cela signifie que les variables décisionnelles sont maintenant sous le contrôle de plusieurs groupes de travail. Pour ce faire, l'algorithme IPOMP, développé au chapitre précédent, sera jumelé à une structure d'optimisation distribuée appelée optimisation collaborative. Comme il a été vu au chapitre 2, les termes système et sous-système sont souvent utilisés pour décrire la décomposition et le fonctionnement des approches collaboratives et multidisciplinaires. Ces termes ont été remplacés par directeur et groupes de travail respectivement afin d'assurer une cohérence avec les termes utilisés au chapitre 3. La responsabilité du directeur est d'optimiser les fonctions-objectifs du système tandis que les groupes de travail sont responsables de l'optimisation des sous-systèmes (fonctions-objectifs locales) tout en s'assurant que le système satisfasse les contraintes sous leur charge. L'algorithme développé ici permet de résoudre un problème à objectifs multiples lorsqu'il y a plusieurs décideurs (par exemple un directeur et des groupes de travail). Une version simplifiée de l'algorithme est présentée à la figure 4.1.

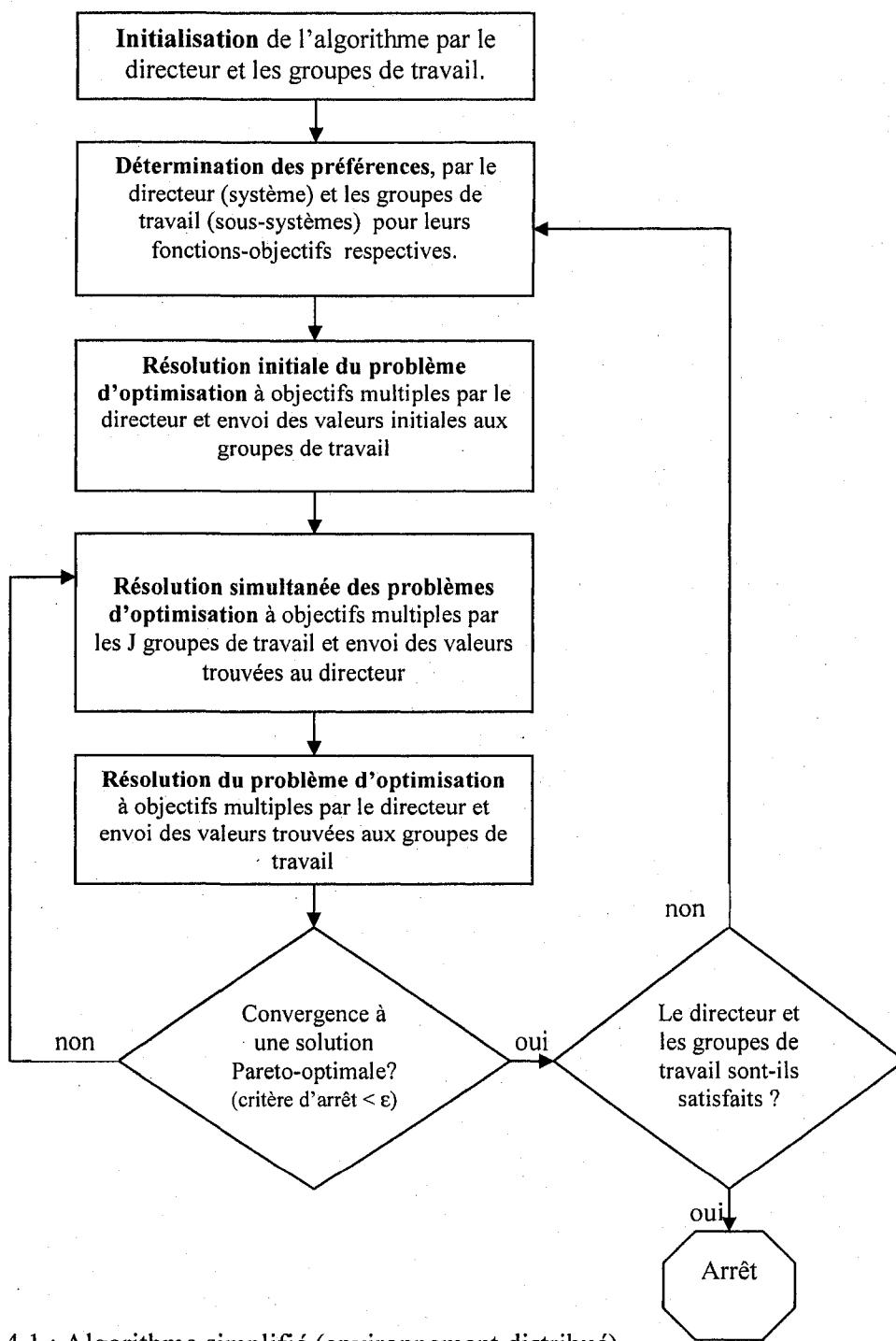


Figure 4.1 : Algorithme simplifié (environnement distribué)

4.1 Définitions, notations et formulation générale

4.1.1 Définitions

Variable disciplinaire: une variable sous le contrôle d'un seul groupe de travail et qui n'affecte pas les problèmes d'optimisation des autres groupes.

Variable interdisciplinaire: une variable sous le contrôle de plus d'un groupe de travail.

Variable couplée ou partagée: une variable sous le contrôle d'un groupe de travail mais nécessaire dans le problème d'optimisation d'un autre groupe de travail. Elle peut être représentée par une fonction de variables disciplinaires et interdisciplinaires.

Variable auxiliaire: une variable apparaissant dans le problème d'optimisation du groupe de travail où la variable couplée est nécessaire. La variable auxiliaire remplace donc la variable couplée dans ce problème.

4.1.2 Notations

Les notations présentées au tableau 4.1 ont été utilisées dans ce chapitre.

Tableau 4.1: Notations utilisées dans le chapitre 4.

A_j	vecteur des variables décisionnelles sous le contrôle du groupe de travail j . $A = [v_{ij}, x_{ij}, (x_{aux})_{jki}]$.
A^{*mj}	solution optimale individuelle de la fonction m obtenue par le groupe de travail j
\bar{A}_{hnj}	$h^{\text{ème}}$ solution Pareto-optimale du problème à multiples objectifs obtenue après n itérations entre le directeur et le groupe de travail j
b^h	vecteur des valeurs cibles à l'itération h où $b^h = [b_1^h, b_2^h, \dots, b_m^h]$

Tableau 4.1: Notations utilisées dans le chapitre 4 (suite).

b_m^h	valeur cible de la fonction-objectif m à l'itération h .
b_{mj}^h	valeur cible de la fonction-objectif m du groupe de travail j à l'itération h .
$b_{m\min}, b_{m\max}$	meilleures et pires valeurs obtenues pour la fonction-objectif m .
$b_{mj\min}, b_{mj\max}$	meilleures et pires valeurs obtenues par le groupe de travail j pour la fonction-objectif m .
$c_{qj}(A_j)$	contrainte q contrôlée par le groupe de travail j où $q = 1, \dots, Q$ et $j = 1, \dots, J$.
$c_q(Z)$	contrainte q contrôlée par le directeur (niveau système) où $q = 1, \dots, Q$
d_m	variables de déviation des fonctions-objectifs m
d_{mj}	variables de déviation des fonctions-objectifs m du groupe de travail j .
D°	ensemble des valeurs cibles possibles pour les fonctions-objectifs du directeur.
D_j°	ensemble des valeurs cibles possibles pour les fonctions-objectifs du groupe de travail j . Notation utilisée en environnement distribué.
D'°	ensemble réduit des valeurs cibles possibles pour les fonctions-objectifs du directeur.
$D_j'^\circ$	ensemble réduit des valeurs cibles possibles pour les fonctions-objectifs du groupe de travail j .
e_j	fonction-objectif de compatibilité du groupe de travail j (équivalent à f_{1j})
$f_{mj}(A_j)$	fonction-objectif m du groupe de travail j . Notation utilisée en environnement distribué.
$f_{mj}^{hn}(A_j)$	fonction-objectif m du groupe de travail j de l'itération h à l'itération n .
$F_m(Z)$	fonction-objectif m du directeur (système).
$F_m^{hn}(Z)$	fonction-objectif m du directeur de l'itération h à l'itération n .
$F_{mj}(A_j)$	fonction-objectif m du directeur évalué par le groupe de travail j .
g_j	fonction de pénalité du groupe j apparaissant dans la fonction-objectif du problème d'optimisation du directeur (système).
$G(\bar{A}_{hj})$	ensemble de stabilité, c'est-à-dire l'ensemble où la solution \bar{A}_h obtenue par le groupe de travail j demeure optimale (voir annexe A).
$G(\bar{Z}_h)$	ensemble de stabilité, c'est-à-dire l'ensemble où la solution \bar{Z}_h obtenue par le directeur (système) demeure optimale (voir annexe A).
H	nombre d'itérations correspondant au nombre de solutions générées où $h = 1, \dots, H$.
I	nombre de variables décisionnelles (disciplinaires, interdisciplinaires, auxiliaires ou couplées) où $i = 1, \dots, I$
J	nombre de groupes de travail où $j = 1, \dots, J$
L	nombre de fonctions-objectifs dans les classes fermes où $l = 1, \dots, L$

Tableau 4.1: Notations utilisées dans le chapitre 4 (suite)

m	nombre de fonctions-objectifs dans les classes souples où $m = 1, \dots, M$
n	nombre d'itérations entre le système et les groupes de travail pour obtenir la solution Pareto-optimale h .
q	nombre de contraintes où $q = 1, \dots, Q$.
r_{ij}	variable de surplus correspondant à la valeur cible de la variable interdisciplinaire i apparaissant dans le groupe j . Donc $r_{ij} \in R_j$ où $R_j = (r_{1j}, r_{2j}, \dots, r_{ij})$.
$(r_{aux})_{jki}$	variable de surplus correspondant à la valeur cible de la variable auxiliaire i apparaissant dans le problème d'optimisation du groupe k mais calculée par le groupe j . Donc $(r_{aux})_{jki} \in (R_{aux})_j$ où $(R_{aux})_j = ((r_{aux})_{jk1}, (r_{aux})_{jk2}, \dots, (r_{aux})_{jki})$ et $(j \neq k)$.
$(r_c)_{jki}$	variables de surplus correspondant à la valeur cible de la variable couplée i calculée par le groupe j et nécessaire au groupe k . Elle apparaît dans le problème d'optimisation du groupe j . Donc $(r_c)_{jki} \in (R_c)_j$ où $(R_c)_j = ((r_c)_{jk1}, (r_c)_{jk2}, \dots, (r_c)_{jki})$ et $(j \neq k)$.
s_{ij}	variable d'écart correspondant à la valeur cible de la variable interdisciplinaire i apparaissant dans le groupe j . Donc $s_{ij} \in S_j$ où $S_j = (s_{1j}, s_{2j}, \dots, s_{ij})$.
$(s_{aux})_{jki}$	variable d'écart correspondant à la valeur cible de la variable auxiliaire i apparaissant dans le problème d'optimisation du groupe k mais calculée par le groupe j . Donc $(s_{aux})_{jki} \in (S_{aux})_j$ où $(S_{aux})_j = ((s_{aux})_{jk1}, (s_{aux})_{jk2}, \dots, (s_{aux})_{jki})$ et $(j \neq k)$.
$(s_c)_{jki}$	variable d'écart correspondant à la valeur cible de la variable couplée i calculée par le groupe j et nécessaire au groupe k . Elle apparaît dans le problème d'optimisation du groupe j . Donc $(s_c)_{jki} \in (S_c)_j$ où $(S_c)_j = ((s_c)_{jk1}, (s_c)_{jk2}, \dots, (s_c)_{jki})$ et $(j \neq k)$.
$t_{ms}^-, t_{ms}, t_{ms}^+$	degrés de désirabilité s de la fonction-objectif m où $s = 1, \dots, 5$ pour les classes souples.
$t_{mjs}^-, t_{mjs}, t_{mjs}^+$	degré de désirabilité s de la fonction-objectif m du groupe de travail j où $s = 1, \dots, 5$ pour les classes souples.
$t_{l,min}, t_{l,val}, t_{l,max}$	membres de droite des fonctions-objectifs dans les classes fermes.
\bar{u}_q	valeur du multiplicateur de KKT pour la contrainte q du directeur.
\bar{u}_{qj}	valeur du multiplicateur de KKT pour la contrainte q du groupe de travail j .
v_{ij}	variable disciplinaire i du groupe de travail j et $v_{ij} \in V_j$, $V_j = (v_{1j}, v_{2j}, \dots, v_{ij})$.

Tableau 4.1: Notations utilisées dans le chapitre 4 (suite)

x_{ij}	variable décisionnelle interdisciplinaire i apparaissant dans un groupe de travail j . Elle doit être dupliquée selon le nombre de groupes de travail dans lesquels elle apparaît. Par exemple si cette variable est sous la responsabilité des groupes de travail 1 et 2, on retrouvera la notation suivante: x_{i1} et x_{i2} , ce qui signifie que la variable interdisciplinaire i apparaît dans le problème d'optimisation du groupe de travail 1 et 2. On a $x_{ij} \in X_j$, $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{ij})$.
$(x_{aux})_{jki}$	variable décisionnelle auxiliaire i calculée par le groupe de travail j et nécessaire au groupe de travail k pour résoudre son problème d'optimisation, et qui paraît comme variable décisionnelle dans le problème du groupe k . Cette variable remplace la variable couplée y_{jki} dans le problème d'optimisation du groupe k afin d'être en mesure d'exécuter les problèmes d'optimisation de j et k simultanément de sorte que $(x_{aux})_{jki} = y_{jki}$. Donc $(x_{aux})_{jki} \in (X_{aux})_j$ où $(X_{aux})_j = ((x_{aux})_{jkl}, (x_{aux})_{jkl}, \dots, (x_{aux})_{jkl})$ et $(j \neq k)$.
y_{jki}	variable décisionnelle couplée i calculée par le groupe de travail j et nécessaire au groupe de travail k pour résoudre son problème d'optimisation. Cette variable apparaît dans le problème d'optimisation du groupe j . Par exemple, pour le groupe de travail 1 on a y_{1ki} qui représente la variable couplée i calculée par le groupe de travail 1 et nécessaire au groupe de travail k . A cette variable y_{1ki} correspond une variable auxiliaire $(x_{aux})_{1ki}$ dans le problème du groupe de travail k . Donc $y_{jki} \in Y_j$ et $Y_j = (y_{jkl}, y_{jkl}, \dots, y_{jkl})$ et $(j \neq k)$.
$(z_{int})_i$	valeur cible pour la variable décisionnelle interdisciplinaire i du problème d'optimisation. Une variable $(z_{int})_i$ est introduite pour chaque variable interdisciplinaire x_{ij} . C'est une variable décisionnelle du niveau système. Donc $(z_{int})_i \in Z$.
$(z_c)_{jki}$	valeur cible pour la variable décisionnelle couplée i calculée par le groupe j et nécessaire au groupe k . Une variable $(z_c)_{jki}$ est introduite pour chaque variable couplée y_{jki} . On utilise les mêmes valeurs cibles pour les variables auxiliaires $(x_{aux})_{jki}$. C'est aussi une variable décisionnelle du niveau système. Donc $(z_c)_{jki} \in Z$.
Z	vecteur des variables décisionnelles au niveau système (directeur): $Z = [(z_{int})_i, (z_c)_{jki}]$.
Z^{*mj}	solution optimale individuelle de la fonction m du directeur calculée par le groupe de travail j .
\bar{Z}_{hn}	$h^{\text{ème}}$ solution optimale du problème à objectifs multiples du directeur à l'itération n .

Tableau 4.1: Notations utilisées dans le chapitre 4 (suite et fin)

$(\cdot)^*$	valeur optimale d'une variable (valeur cible) ou d'une fonction-objectif. Les valeurs optimales, Z^* trouvées par le système sont considérées comme des valeurs cibles (paramètres) dans les problèmes d'optimisation des groupes de travail. Les valeurs optimales, x_{ij}^* , $(x_{aux})_{jki}^*$ et y_{jki}^* trouvées par les groupes de travail sont considérées comme des valeurs cibles (paramètres) dans le problème d'optimisation du système.
ε	critère d'arrêt de l'algorithme IPOMP-ED fixé à 0.000001
γ	paramètre de pénalité pour les fonctions-objectifs du système (directeur).

4.1.3 Formulation générale

Pour décomposer et formuler le problème à multiples objectifs en un problème d'optimisation distribué, l'approche de Gu et al. (2006), telle que vue au chapitre 2, est employée. La formulation générale du problème d'optimisation du directeur est:

$$\underset{(z_{int})_i, (z_c)_{jki}}{\text{Min}} \quad F((z_{int})_i, (z_c)_{jki}) + \gamma \sum_{j=1}^N g_j((z_{int})_i, (z_c)_{jki}) \quad (4.1)$$

$$\text{ sujet à } \quad (z_{int})_{i,\min} \leq (z_{int})_i \leq (z_{int})_{i,\max} \quad \text{ où } (z_{int})_i \in Z \quad (4.2)$$

$$\quad (z_c)_{jki,\min} \leq (z_c)_{jki} \leq (z_c)_{jki,\max} \quad \text{ où } (z_c)_{jki} \in Z \quad (4.3)$$

où γ est un paramètre de pénalité et, pour le groupe de travail j , on a la fonction de pénalité:

$$g_j((z_{int})_i, (z_c)_{jki}) = \sum_{x_{ij}^* \in X_j^*} (x_{ij}^* - (z_{int})_i)^2 + \sum_{(x_{aux})_{jki}^* \in (X_{aux})_j^*} ((x_{aux})_{jki}^* - (z_c)_{jki})^2 + \sum_{y_{jki}^* \in Y_j^*} (y_{jki}^* - (z_c)_{jki})^2 \quad (4.4)$$

La formulation générale du problème d'optimisation du groupe de travail j se lit :

$$\underset{s_{ij}, r_{ij}, (s_{aux})_{jki}, (r_{aux})_{jki}, (s_c)_{jki}, (r_c)_{jki}}{\text{Min}} \quad e_j = \sum_k \sum_i s_{ij} + r_{ij} + (s_{aux})_{jki} + (r_{aux})_{jki} + (s_c)_{jki} + (r_c)_{jki} \quad (4.5)$$

$$\text{sujet à } c(v_{ij}, x_{ij}) \geq 0 \quad (4.6)$$

$$x_{ij} + s_{ij} - r_{ij} = (z_{\text{int}})_i^* \quad \text{où } x_{ij} \in X_j, \quad s_{ij} \in S_j, \quad r_{ij} \in R_j \quad (4.7)$$

$$(x_{aux})_{jki} + (s_{aux})_{jki} - (r_{aux})_{jki} = (z_c)_{jki}^* \quad \text{où } (x_{aux})_{jki} \in (X_{aux})_j, \quad (s_{aux})_{jki} \in (S_{aux})_j,$$

$$(r_{aux})_{jki} \in (R_{aux})_j \quad (4.8)$$

$$y_{jki} + (s_c)_{jki} - (r_c)_{jki} = (z_c)_{jki}^* \quad \text{où } y_{jki} \in Y_j, \quad (s_c)_{jki} \in (S_c)_j, \quad (r_c)_{jki} \in (R_c)_j \quad (4.9)$$

$$x_{ij\min} \leq x_{ij} \leq x_{ij\max} \quad \text{où } x_{ij} \in X_j \quad (4.10)$$

$$(x_{aux})_{jki\min} \leq (x_{aux})_{jki} \leq (x_{aux})_{jki\max} \quad \text{où } (x_{aux})_{jki} \in (X_{aux})_j \quad (4.11)$$

$$v_{ij\min} \leq v_{ij} \leq v_{ij\max} \quad \text{où } v_{ij} \in V_j \quad (4.12)$$

$$s_{ij}, (s_{aux})_{jki}, (s_c)_{jki}, r_{ij}, (r_{aux})_{jki}, (r_c)_{jki} \geq 0 \quad (4.13)$$

$$y_{jki} = f(v_{ij}, x_{ij}). \quad (4.14)$$

4.2 Algorithme d'optimisation

À l'intérieur de cette structure distribuée, n'importe quel algorithme d'optimisation peut être utilisé pour solutionner les problèmes d'optimisation du directeur et des groupes de travail. Puisque Gu et al. (2006) et Kroo (2004) ont noté que l'algorithme d'optimisation SQP (*sequential quadratic programming*) de Matlab ne performe pas bien en environnement distribué, le solveur DONLP2 de AMPL (Spellucci, 2005), qui emploie aussi un algorithme d'optimisation basé sur la programmation quadratique séquentielle, sera utilisé par le directeur et les groupes de travail pour résoudre leur problème d'optimisation. De plus, deux paramètres doivent être fixés lors du processus d'optimisation : le paramètre de pénalité (γ) a été fixé à 100 et le critère d'arrêt du processus d'optimisation (ϵ) a été fixé à 0.000001. Le critère d'arrêt met fin à

l'algorithme IPOMP-ED lorsque pour la solution (itération) h , la différence dans les m fonctions-objectifs du directeur entre l'itération $n-1$ et l'itération n est plus petite que ε

4.3 La fonction de Rosenbrock

Afin de bien comprendre la formulation présentée à la section précédente, ainsi que les différents types de variables impliquées, le problème bien connu de la fonction de Rosenbrock sera utilisé. Le problème original sera résolu par deux groupes de travail afin de démontrer le fonctionnement de la structure proposée lors de la résolution du problème distribué impliquant des variables disciplinaires, interdisciplinaires et couplées.

Le problème original de la fonction de Rosenbrock se lit comme suit:

$$\text{Min} \quad F = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \quad (4.15)$$

$$\text{sujet à} \quad -10 \leq x_1 \leq 10 \quad (4.16)$$

$$-10 \leq x_2 \leq 10 \quad (4.17)$$

En résolvant le problème original avec le solveur DONLP2 de AMPL, on obtient la solution suivante: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ et $F = 4.31185 \times 10^{-12} = 0$.

4.3.1 Formulation distribuée de la fonction de Rosenbrock

Afin de formuler ce problème selon l'approche proposée par Gu et al. (2006), supposons que le problème original soit décomposé en deux groupes de travail. Le groupe de travail 1 contrôle la première partie de la fonction de Rosenbrock soit $100(x_2 - x_1^2)^2$ tandis que

le groupe de travail 2 contrôle la deuxième partie $(1 - x_1)^2$ et l'objectif. Pour ce faire, considérons que:

- x_1 est une variable interdisciplinaire (sous le contrôle du groupe 1 et du groupe 2). Donc le groupe 1 travaillera avec la variable x_{11} et le groupe 2 avec la variable x_{12} .
- x_2 est une variable disciplinaire (sous le contrôle du groupe 1 seulement). Cette variable est renommée v_{11} au niveau du groupe 1.
- y_{121} est une variable couplée c'est-à-dire qu'elle est calculée par le groupe 1 selon la fonction $y_{121} = 100(v_{11} - x_{11}^2)^2$ mais qu'elle est nécessaire au groupe 2 pour calculer la valeur de la fonction-objectif. Elle apparaît dans le problème du groupe 2 sous la notation $(x_{aux})_{121}$.

La transformation des variables est montrée au tableau 4.2.

Tableau 4.2: Transformation des variables pour la fonction de Rosenbrock

Transformation des variables			
Variables du Groupe 1	Variables du Groupe 2	Valeurs cibles	Système
x_{11}	x_{12}	$(z_{int})_1$	$(1 - (z_{int})_1)^2$
v_{11}			
$y_{121} = 100(v_{11} - x_{11}^2)^2$	$(x_{aux})_{121}$	$(z_c)_{121}$	$(z_c)_{121}$

Donc, on obtient au niveau système la formulation suivante:

$$\underset{(z_{int})_1, (z_c)_{121}}{\text{Min}} \quad F = (z_c)_{121} + (1 - (z_{int})_1)^2 + \gamma \left(\frac{(x_{11}^* - (z_{int})_1)^2 + (y_{121}^* - (z_c)_{121})^2}{(x_{12}^* - (z_{int})_1)^2 + ((x_{aux})_{121}^* - (z_c)_{121})^2} \right) \quad (4.18)$$

$$\text{ sujet à } \quad -10 \leq (z_{int})_1 \leq 10 \quad (4.19)$$

$$(z_c)_{121} \geq 0 \quad (4.20)$$

On obtient $(z_{int})_1^*$ et $(z_c)_{121}^*$.

La formulation du problème d'optimisation du groupe de travail 1 est:

$$\underset{s_{11}, (s_c)_{121}, r_{11}, (r_c)_{121}, x_{11}, v_{11}}{\text{Min}} \quad e_1 = (s_{11} + r_{11}) + ((s_c)_{121} + (r_c)_{121}) \quad (4.21)$$

$$\text{sujet à } x_{11} + s_{11} - r_{11} = (z_{\text{int}})_1^* \quad (4.22)$$

$$100(v_{11} - x_{11}^2) + (s_c)_{121} - (r_c)_{121} = (z_c)_{121}^* \quad (4.23)$$

$$-10 \leq x_{11} \leq 10 \quad (4.24)$$

$$-10 \leq v_{11} \leq 10 \quad (4.25)$$

$$s_{11}, (s_c)_{121}, r_{11}, (r_c)_{121} \geq 0 \quad (4.26)$$

On obtient les valeurs optimales des variables d'écart et de surplus : s_{11}^* , $(s_c)_{121}^*$, r_{11}^* , $(r_c)_{121}^*$ et des variables décisionnelles : x_{11}^* , v_{11}^* . Le groupe 1 calcule $y_{121}^* = 100(v_{11}^* - x_{11}^{*2})^2$.

La formulation du problème d'optimisation du groupe de travail 2 est:

$$\underset{s_{12}, (s_{\text{aux}})_{121}, r_{12}, (r_{\text{aux}})_{121}, x_{12}, (x_{\text{aux}})_{121}}{\text{Min}} \quad e_2 = (s_{12} + r_{12}) + ((s_{\text{aux}})_{121} + (r_{\text{aux}})_{121}) \quad (4.27)$$

$$\text{sujet à } x_{12} + s_{12} - r_{12} = (z_{\text{int}})_2^* \quad (4.28)$$

$$(x_{\text{aux}})_{121} + (s_{\text{aux}})_{121} - (r_{\text{aux}})_{121} = (z_c)_{121}^* \quad (4.29)$$

$$-10 \leq x_{12} \leq 10 \quad (4.30)$$

$$(x_{\text{aux}})_{121} \geq 0 \quad (4.31)$$

$$s_{12}, (s_{\text{aux}})_{121}, r_{12}, (r_{\text{aux}})_{121} \geq 0 \quad (4.32)$$

On obtient les valeurs optimales des variables d'écart et de surplus : s_{12}^* , $(s_{\text{aux}})_{121}^*$, r_{12}^* , $(r_{\text{aux}})_{121}^*$ et des variables décisionnelles : x_{12}^* , $(x_{\text{aux}})_{121}^*$.

Le processus de résolution débute par l'initialisation des valeurs cibles. Cependant aucune méthode n'est mentionnée dans la littérature pour déterminer les valeurs initiales

des valeurs cibles. Dans un premier temps, des valeurs au hasard ont été attribuées aux valeurs cibles. Cela n'a pas été concluant puisque la solution obtenue n'était pas la solution optimale. Il est donc nécessaire de fixer de bonnes valeurs cibles afin d'assurer la convergence et éviter de faire travailler les groupes de travail inutilement.

Voici ce qui est proposé:

1. Au lieu de fixer au hasard des valeurs cibles, résoudre l'objectif du problème directeur (sans la pénalité) avec les contraintes de borne afin de trouver la meilleure valeur de F .
2. Envoyer les valeurs cibles trouvées aux groupes de travail pour qu'ils puissent résoudre leur objectifs.
3. Une fois que les groupes de travail ont résolu leur problème d'optimisation respectif, ils envoient les valeurs trouvées au niveau du problème directeur.
4. Le système résout maintenant son problème en tenant compte de la pénalité

Afin de bien comprendre comment se déroule le processus d'optimisation, reprenons les différentes étapes mentionnées plus haut. La première étape consiste à initialiser les valeurs cibles. Cette étape est réalisée par le directeur en résolvant le problème suivant (sans la pénalité):

$$\underset{(z_{\text{int}})_1, (z_c)_{121}}{\text{Min}} \quad F = (z_c)_{121} + (1 - (z_{\text{int}})_1)^2 \quad (4.33)$$

$$\text{sujet à} \quad -10 \leq (z_{\text{int}})_1 \leq 10 \quad (4.34)$$

$$(z_c)_{121} \geq 0 \quad (4.35)$$

On obtient $(z_{\text{int}})_1^*$ et $(z_c)_{121}^*$.

Avec ces valeurs les groupes de travail 1 et 2 résolvent leur problème simultanément. Le problème du groupe 1 est:

$$\underset{s_{11}, (s_c)_{121}, r_{11}, (r_c)_{121}, x_{11}, v_{11}}{\text{Min}} \quad e_1 = (s_{11} + r_{11}) + ((s_c)_{121} + (r_c)_{121}) \quad (4.36)$$

$$\text{ sujet à } x_{11} + s_{11} - r_{11} = (z_{\text{int}})_1^* \quad (4.37)$$

$$100(v_{11} - x_{11}^2)^2 + (s_c)_{121} - (r_c)_{121} = (z_c)_{121}^* \quad (4.38)$$

$$-10 \leq x_{11} \leq 10 \quad (4.39)$$

$$-10 \leq v_{11} \leq 10 \quad (4.40)$$

$$s_{11}, (s_c)_{121}, r_{11}, (r_c)_{121} \geq 0 \quad (4.41)$$

Les valeurs des variables d'écart et de surplus s_{11}^* , $(s_c)_{121}^*$, r_{11}^* , $(r_c)_{121}^*$ et des variables décisionnelles x_{11}^* , v_{11}^* sont obtenues et le groupe 1 calcule $y_{121}^* = 100(v_{11}^* - x_{11}^{*2})^2$. Les valeurs de x_{11}^* et y_{121}^* sont retournées au directeur.

Le problème du groupe 2 est :

$$\underset{s_{12}, (s_{\text{aux}})_{121}, r_{12}, (r_{\text{aux}})_{121}, x_{12}, (x_{\text{aux}})_{121}}{\text{Min}} \quad e_2 = (s_{12} + r_{12}) + ((s_{\text{aux}})_{121} + (r_{\text{aux}})_{121}) \quad (4.42)$$

$$\text{ sujet à } x_{12} + s_{12} - r_{12} = (z_{\text{int}})_1^* \quad (4.43)$$

$$(x_{\text{aux}})_{121} + (s_{\text{aux}})_{121} - (r_{\text{aux}})_{121} = (z_c)_{121}^* \quad (4.44)$$

$$-10 \leq x_{12} \leq 10 \quad (4.45)$$

$$(x_{\text{aux}})_{121} \geq 0 \quad (4.46)$$

$$s_{12}, (s_{\text{aux}})_{121}, r_{12}, (r_{\text{aux}})_{121} \geq 0 \quad (4.47)$$

Les valeurs des variables d'écart et de surplus s_{12}^* , $(s_{\text{aux}})_{121}^*$, r_{12}^* , $(r_{\text{aux}})_{121}^*$ et des variables décisionnelles x_{12}^* , $(x_{\text{aux}})_{121}^*$ sont obtenues. Les valeurs de x_{12}^* et $(x_{\text{aux}})_{121}^*$ sont retournées au directeur.

Par la suite, c'est le système qui résout son problème en tenant compte de la pénalité.

$$\underset{(z_{\text{int}})_1, (z_c)_{121}}{\text{Min}} \quad F = (z_c)_{121} + (1 - (z_{\text{int}})_1)^2 + \gamma \left[\begin{array}{l} (x_{11}^* - (z_{\text{int}})_1)^2 + (y_{121}^* - (z_c)_{121})^2 + \\ (x_{12}^* - (z_{\text{int}})_1)^2 + ((x_{\text{aux}})_{121}^* - (z_c)_{121})^2 \end{array} \right] \quad (4.48)$$

$$\text{sujet à} \quad -10 \leq (z_{\text{int}})_1 \leq 10 \quad (4.49)$$

$$(z_c)_{121} \geq 0 \quad (4.50)$$

Les valeurs $(z_{\text{int}})_1^*$ et $(z_c)_{121}^*$ sont obtenues. Ces valeurs sont retournées aux groupes de travail. Ces étapes sont répétées jusqu'à l'obtention de la solution optimale.

4.3.2 Résolution du problème distribué

En résolvant ce problème avec le solveur DONLP2 de AMPL, il suffit d'une itération pour obtenir la réponse, comme montré au tableau 4.3:

Tableau 4.3 : Résultats de la fonction de Rosenbrock

Itér.	Directeur		Groupe de travail 1				Groupe de travail 2			
	$(z_{\text{int}})_1$	$(z_c)_{121}$	F	x_{11}	y_{11}	e_1	x_{12}	$(x_{\text{aux}})_{121}$	e_2	
1	1	0	$1.17e^{-25}$	1	0.999928	$5.21e^{-7}$	$3.06e^{-26}$	1	$-4.23e^{-22}$	$1.97e^{-31}$

Cette solution est très près de la solution trouvée par la méthode traditionnelle.

4.4 Bornes sur les variables auxiliaires et les valeurs cibles associées

Lors de la décomposition du système en sous-systèmes et lorsque des variables couplées (y_{jki}) sont introduites, il est important de bien borner le problème. En effet, cela prend toute son importance lors de la résolution d'un problème réel afin d'assurer la faisabilité

de la solution. Une façon de borner le problème est de calculer la valeur minimale et maximale que peut prendre la variable couplée.

Dans le cas de la fonction de Rosenbrock, la variable couplée est la suivante:

$y_{121} = 100(x_2 - x_1^2)^2$ et $-10 \leq x_1 \leq 10$ et $-10 \leq x_2 \leq 10$. Donc on a les problèmes suivants:

$$\underset{x_1, x_2}{\text{Min}} \quad y_{121} = 100(x_2 - x_1^2)^2 \quad (4.51)$$

$$\text{sujet à} \quad -10 \leq x_1 \leq 10 \quad (4.52)$$

$$-10 \leq x_2 \leq 10 \quad (4.53)$$

$$\underset{x_1, x_2}{\text{Max}} \quad y_{121} = 100(x_2 - x_1^2)^2 \quad (4.54)$$

$$\text{sujet à} \quad -10 \leq x_1 \leq 10 \quad (4.55)$$

$$-10 \leq x_2 \leq 10 \quad (4.56)$$

Dans ce cas-ci, la plus petite valeur que peut prendre la variable couplée y_{121} est 0 et la valeur maximale est 1 210 000. Ainsi, la variable auxiliaire $(x_{\text{aux}})_{121}$ et la valeur cible $(z_c)_{121}$ associées à la variable couplée ont été bornées comme suit: $(z_c)_{121} \geq 0$ et $(x_{\text{aux}})_{121} \geq 0$.

Les bornes sur les variables auxiliaires devraient être fournies aux groupes de travail par le directeur pour éviter que les groupes de travail aient à fixer eux-mêmes ces bornes, ce qui pourrait occasionner des divergences.

4.5 L'algorithme interactif à multiples objectifs collaboratif

Cette section a pour but de jumeler l'algorithme IPOMP, développé au chapitre précédent, avec la structure d'optimisation collaborative proposée par Gu et al. (2006) afin de créer un nouvel algorithme interactif capable de générer des solutions Pareto-optimales dans un environnement distribué. L'intégration des deux approches implique plusieurs choses. Premièrement, le nouvel algorithme doit permettre de calculer les bornes sur les variables auxiliaires. Une nouvelle étape devra donc être ajoutée au niveau du système. Dans un deuxièmement temps, une étape d'initialisation des valeurs cibles par un processus d'optimisation doit aussi être incluse dans le nouvel algorithme. Cette étape sera réalisée par le directeur au niveau système. Finalement, certaines précisions doivent être apportées concernant l'ensemble réduit des solutions réalisables et le processus de soustraction des ensembles. En effet, dans un environnement distribué, la résolution individuelle des fonctions-objectifs et la construction de la table des valeurs des fonctions-objectifs se fait différemment car le problème n'est plus considéré comme un tout étant donné que les fonctions-objectifs et les contraintes sont distribuées parmi plusieurs groupes de travail. Ainsi l'ensemble réduit des solutions réalisables peut contenir des solutions non réalisables. Donc il sera appelé l'ensemble réduit des valeurs cibles. Cela ne constitue pas un problème car l'objectif visé ici est de restreindre l'ensemble des valeurs cibles afin de donner un aperçu des choix possibles au directeur et aux groupes de travail.

L'algorithme créé dans ce chapitre permet de résoudre des problèmes à multiples objectifs au niveau du système et des groupes de travail dans un environnement distribué tout en considérant les préférences des groupes de travail. Aussi, il génère des solutions Pareto-optimales. Il est présenté, sous la forme d'un organigramme, à la figure 4.2. Il sera nommé, dans les pages suivantes, l'algorithme IPOMP-ED où ED signifie environnement distribué. Les étapes encadrées en double, dans le diagramme, indiquent les ajouts reliés aux travaux réalisés dans ce chapitre.

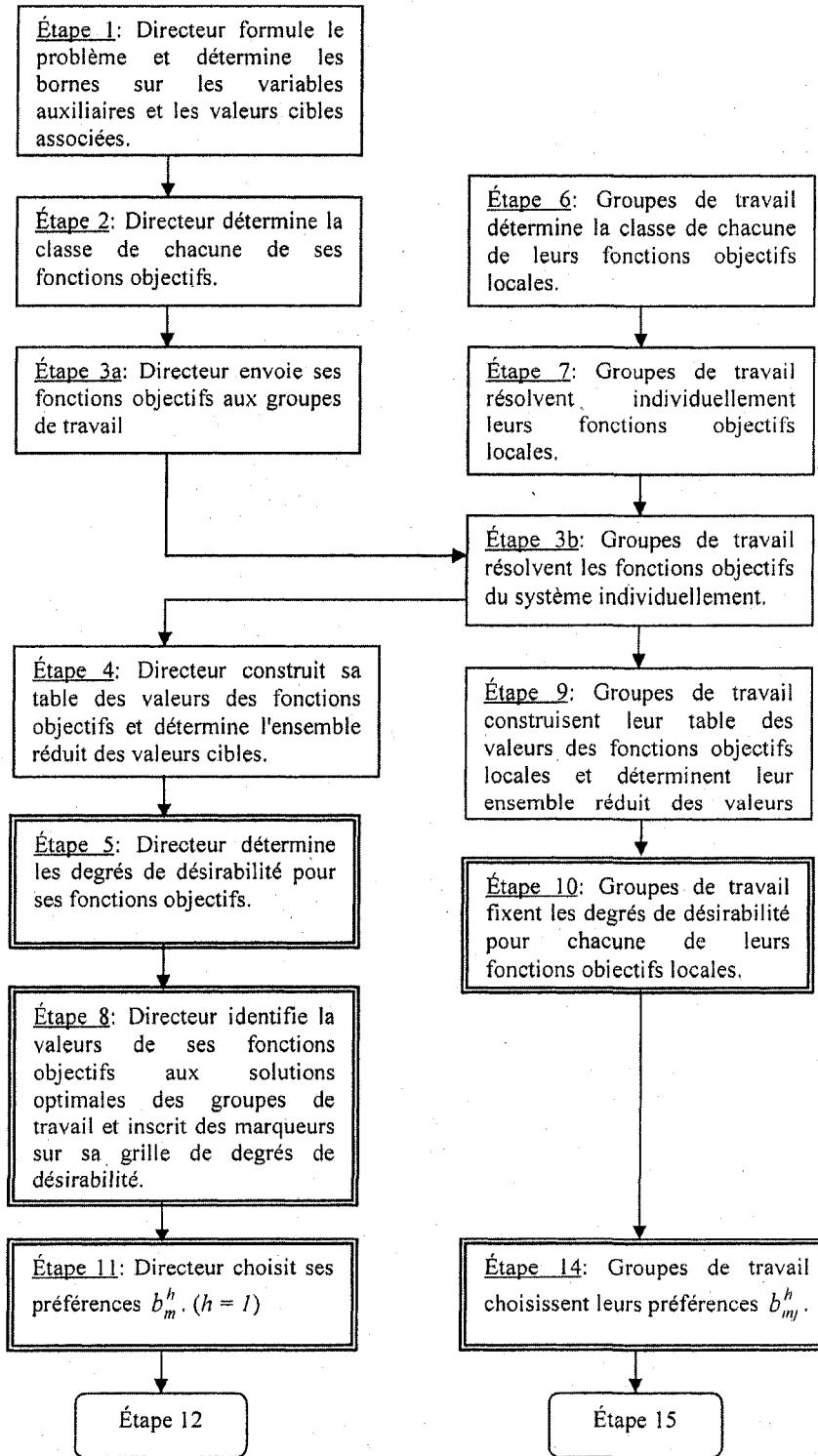


Figure 4.2: Algorithme IPOMP-ED.

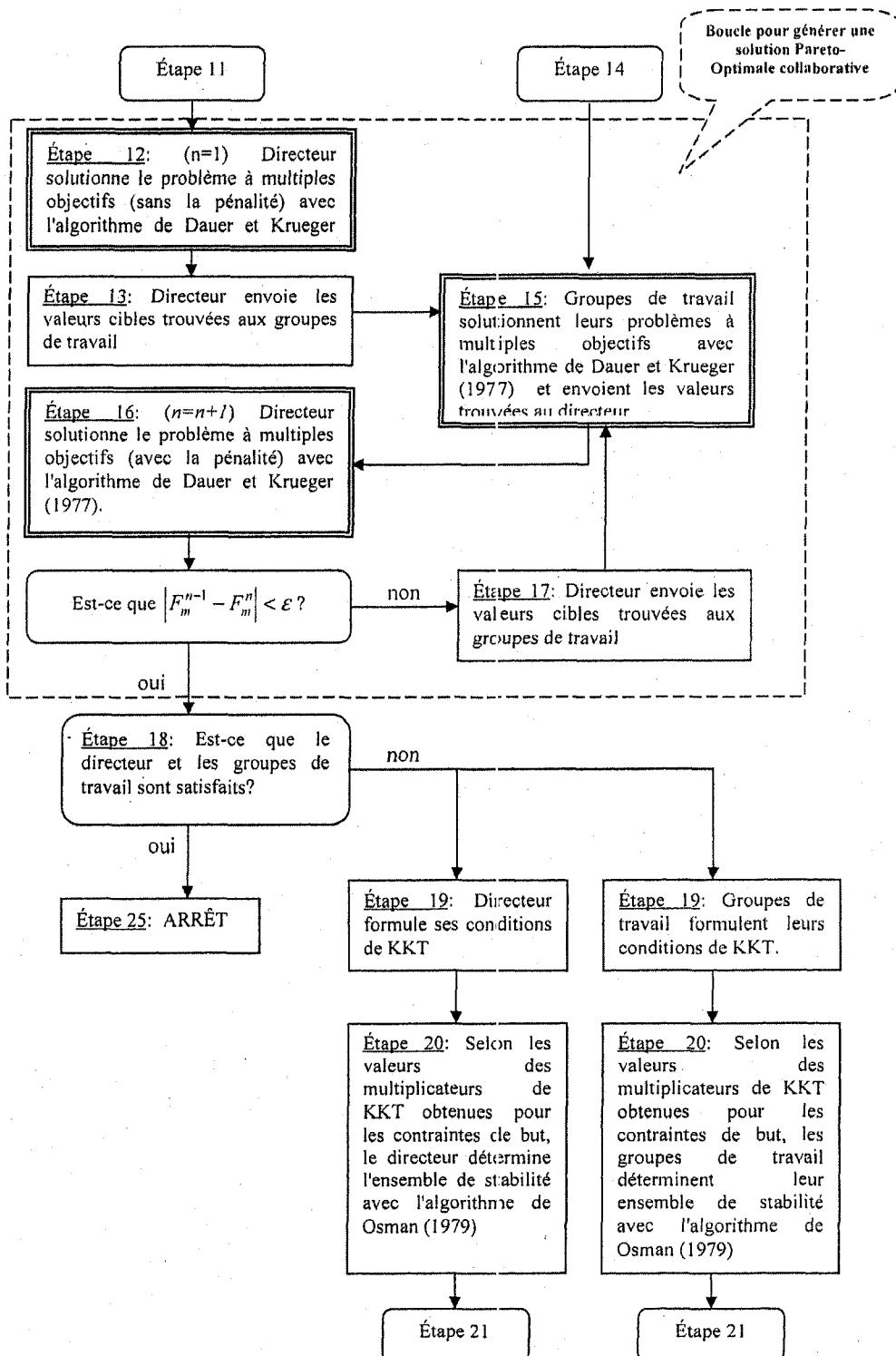


Figure 4.2: Algorithme IPOMP-ED (suite).

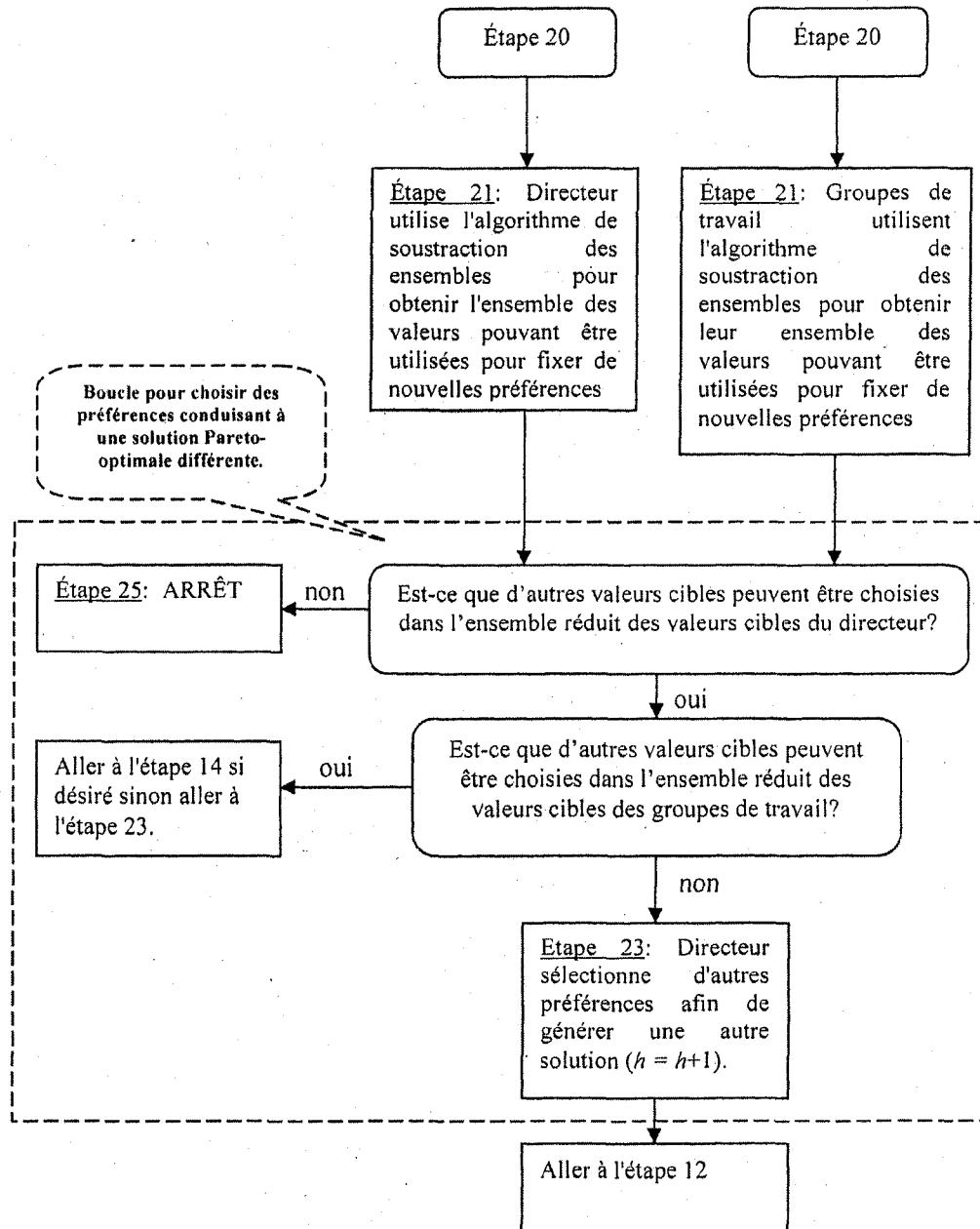


Figure 4.2: Algorithme IPOMP-ED (suite et fin).

Maintenant, dans le but de bien comprendre le fonctionnement de l'algorithme, chacune des étapes présentées à la figure 4.4 sera expliquée. À titre de rappel, la notation F (en majuscule) réfère aux fonctions-objectifs sous le contrôle du directeur (système) tandis que la notation f (en minuscule) se rapporte aux fonctions-objectifs sous le contrôle des groupes de travail.

Étape 1: Le directeur formule le problème à objectifs multiples sous la forme d'un problème collaboratif selon l'approche de Gu et al. (2006) et détermine les bornes pour les variables auxiliaires $(x_{aux})_{jki}$ et les valeurs cibles $(z_c)_{jki}$ associées aux variables couplées y_{jki} en résolvant les problèmes d'optimisation suivants. Ces valeurs sont envoyées aux groupes de travail concernés.

$$\underset{v_{ij}, x_{ij}}{\text{Min}} \quad y_{jki} \quad (4.57)$$

$$\text{sujet à } v_{ij\min} \leq v_{ij} \leq v_{ij\max} \quad (4.58)$$

$$x_{ij\min} \leq x_{ij} \leq x_{ij\max} \quad (4.59)$$

$$\underset{v_{ij}, x_{ij}}{\text{Max}} \quad y_{jki} \quad (4.60)$$

$$\text{sujet à } v_{ij\min} \leq v_{ij} \leq v_{ij\max} \quad (4.61)$$

$$x_{ij\min} \leq x_{ij} \leq x_{ij\max} \quad (4.62)$$

Le directeur s'assure que les bornes sur les variables interdisciplinaires x_{ij} sont les mêmes pour tous les groupes de travail concernés. Suite à cette étape, le directeur et les groupes de travail ont chacun un problème d'optimisation à résoudre et les variables interdisciplinaires, couplées et auxiliaires sont bien bornées.

Étape 2 : Le directeur détermine la classe de sa (ses) fonction(s) objectif(s) selon le tableau 3.2 du chapitre 3.

Étape 3 : Afin de prendre des décisions éclairées et de générer des solutions Pareto-optimales différentes, le directeur sonde les groupes de travail afin de connaître ce qu'ils peuvent lui offrir de mieux. Pour ce faire, le directeur envoie ses M fonctions-objectifs aux groupes de travail pour que ceux-ci les résolvent individuellement avec les contraintes sous leur contrôle. Dans le cas où une des fonctions-objectifs du directeur contient une variable couplée, le groupe de travail responsable de calculer cette variable doit la remplacer par sa fonction dans la fonction-objectif du directeur. Les solutions optimales obtenues par le groupe j sont notées $Z^{*mj}, m = 1, \dots, M$. Les valeurs optimales pour les fonctions-objectifs sont notées $F_{mj}^*, m = 1, \dots, M$. Ces résultats sont retournés au système. Ainsi, le groupe j doit résoudre les m problèmes du directeur (système). Le $M^{ième}$ problème à résoudre est (pour un problème de minimisation) :

$$\min_{v_{ij}, x_{ij}, (x_{aux})_{jki}} F_{mj}(x_{ij}, v_{ij}, (x_{aux})_{jki}) \quad (4.63)$$

$$\text{sujet à } c_{qj}(v_{ij}, x_{ij}) \leq b_q, q = 1, \dots, Q \quad (4.64)$$

$$v_{ij\min} \leq v_{ij} \leq v_{ij\max} \quad (4.65)$$

$$x_{ij\min} \leq x_{ij} \leq x_{ij\max} \quad (4.66)$$

$$(x_{aux})_{jki\min} \leq (x_{aux})_{jki} \leq (x_{aux})_{jki\max} \quad (4.67)$$

$$\text{où } y_{jki} = f(v_{ij}, x_{ij}) \quad (4.68)$$

Étape 4 : Comme montré au tableau 4.4 et avec les M solutions fournies par les J groupes de travail, le directeur évalue la valeur des $M-1$ autres fonctions-objectifs à la solution optimale m de chacun des groupes de travail et construit la table des valeurs des fonctions-objectifs de taille $(M \times M) \times J$. À partir de cette table, le directeur connaît les meilleures valeurs $b_{m\min} = \min F_m(Z^{*mj}) \quad \forall j = 1, \dots, J \quad m = 1, \dots, M$ et les pires valeurs $(b_{m\max} = \max F_m(Z^{*mj}) \quad \forall j = 1, \dots, J \quad m = 1, \dots, M)$ qu'il peut obtenir pour chacune de ses fonctions-objectifs. Avec ces valeurs, l'algorithme détermine l'ensemble

réduit des valeurs cibles $D^* = \{D^* \mid b_{m \min} \leq b_m^* \leq b_{m \max}, m = 1, \dots, M\}$ où D^* est l'ensemble de toutes les valeurs cibles.

Tableau 4.4 : Table des valeurs des fonctions-objectifs du directeur (environnement distribué)

Solutions optimales obtenues par les groupes de travail j		Fonctions-objectifs du directeur			
Z^{*11}		$F_1(Z^{*11})$	$F_2(Z^{*11})$...	$F_m(Z^{*11})$
Z^{*21}		$F_1(Z^{*21})$	$F_2(Z^{*21})$...	$F_m(Z^{*21})$
...	
Z^{*m1}		$F_1(Z^{*m1})$	$F_2(Z^{*m1})$...	$F_m(Z^{*m1})$
Z^{*12}		$F_1(Z^{*12})$	$F_2(Z^{*12})$...	$F_m(Z^{*12})$
Z^{*22}		$F_1(Z^{*22})$	$F_2(Z^{*22})$...	$F_m(Z^{*22})$
...	
Z^{*m2}		$F_1(Z^{*m2})$	$F_2(Z^{*m2})$...	$F_m(Z^{*m2})$
...	
Z^{*1j}		$F_1(Z^{*1j})$	$F_2(Z^{*1j})$...	$F_m(Z^{*1j})$
Z^{*2j}		$F_1(Z^{*2j})$	$F_2(Z^{*2j})$...	$F_m(Z^{*2j})$
...	
Z^{*mj}		$F_1(Z^{*mj})$	$F_2(Z^{*mj})$...	$F_m(Z^{*mj})$

Étape 5 : À partir de l'ensemble réduit des valeurs cibles D^o , le directeur fixe les degrés de désirabilité pour chacune de ses fonctions-objectifs, selon la classe de la fonction-objectif:

- Pour la classe 1S, déterminer $t_{m1}^+, t_{m2}^+, t_{m3}^+, t_{m4}^+, t_{m5}^+$
- Pour la classe 2S, déterminer $t_{m5}^-, t_{m4}^-, t_{m3}^-, t_{m2}^-, t_{m1}^-$
- Pour la classe 3S, déterminer $t_{m5}^-, t_{m4}^-, t_{m3}^-, t_{m2}^-$ et $t_{m1}, t_{m2}^+, t_{m3}^+, t_{m4}^+, t_{m5}^+$
- Pour la classe 4S, déterminer $t_{m5}^-, t_{m4}^-, t_{m3}^-, t_{m2}^-, t_{m1}^-$ et $t_{m1}^+, t_{m2}^+, t_{m3}^+, t_{m4}^+, t_{m5}^+$

Habituellement, les valeurs de $t_{m5}^-, t_{m4}^-, t_{m3}^-, t_{m2}^-, t_{m1}^-$ et $t_{m1}^+, t_{m2}^+, t_{m3}^+, t_{m4}^+, t_{m5}^+$ sont assignées selon l'expérience du directeur. Pour des problèmes purement mathématiques, les degrés de désirabilité peuvent être déterminés selon plusieurs scénarios. Ces scénarios sont présentés à l'annexe B.

Étape 6 : Parallèlement, chaque groupe de travail j détermine la classe de sa (ses) fonction(s) objectif(s) locale(s) selon le tableau 3.1 du chapitre 3.

Étape 7 : Pour les M_j fonctions-objectifs locales traitées par le groupe de travail j , ce dernier résout ses problèmes individuels f_{mj} (sauf pour $f_{1j} = e_j$, la fonction de compatibilité du groupe j) selon la classe choisie. Les solutions optimales sont notées $A^{*mj}, m = 1, \dots, M_j$. Les valeurs optimales pour les fonctions-objectifs locales du groupe de travail j sont notées $f_{mj}^*, m = 1, \dots, M_j$. Les solutions optimales sont envoyées au système.

Étape 8 : Le directeur peut maintenant identifier la valeur de ses M fonctions-objectifs aux solutions optimales $A^{*mj}, m = 1, \dots, M_j$ des groupes de travail. Un pointeur peut être inscrit sur sa grille de degrés de désirabilité afin de le guider dans le choix de ses valeurs

cibles afin de générer de nouvelles solutions plus satisfaisantes pour les groupes de travail.

Étape 9 : De façon similaire au tableau 3.3 du chapitre 3, le groupe de travail j évalue la valeur des $M_j - 1$ autres fonctions-objectifs locales à la solution optimale m_j et construit sa table des valeurs des fonctions-objectifs locales. A partir de cette table, il connaît les meilleures et pires valeurs ($b_{mj\min}, b_{mj\max}, m = 1, \dots, M_j$) de chacune de ses fonctions-objectifs. Avec ces valeurs, l'algorithme détermine l'ensemble réduit des valeurs cibles $D_j^* = \{D_j^* \mid b_{mj\min} \leq b_{mj}^* \leq b_{mj\max}, m = 1, \dots, M_j\}$ où D_j^* est l'ensemble des valeurs cibles possibles pour le groupe j .

Étape 10 : Les groupes de travail divisent l'ensemble réduit des valeurs cibles selon le nombre de degrés de désirabilité associés à la classe de chacune de leur fonction-objectif locale:

- Pour la classe 1S, déterminer $t_{mj1}^+, t_{mj2}^+, t_{mj3}^+, t_{mj4}^+, t_{mj5}^+$
- Pour la classe 2S, déterminer $t_{mj5}^-, t_{mj4}^-, t_{mj3}^-, t_{mj2}^-, t_{mj1}^-$
- Pour la classe 3S, déterminer $t_{mj5}^-, t_{mj4}^-, t_{mj3}^-, t_{mj2}^-$ et $t_{mj1}, t_{mj2}^+, t_{mj3}^+, t_{mj4}^+, t_{mj5}^+$
- Pour la classe 4S, déterminer $t_{mj5}^-, t_{mj4}^-, t_{mj3}^-, t_{mj2}^-, t_{mj1}^-$ et $t_{mj1}^+, t_{mj2}^+, t_{mj3}^+, t_{mj4}^+, t_{mj5}^+$

Habituellement, les valeurs de $t_{mj5}^-, t_{mj4}^-, t_{mj3}^-, t_{mj2}^-, t_{mj1}^-$ et $t_{mj1}^+, t_{mj2}^+, t_{mj3}^+, t_{mj4}^+, t_{mj5}^+$ sont assignées selon l'expérience des groupes de travail. Pour des problèmes purement mathématiques, les degrés de désirabilité peuvent être déterminés selon plusieurs scénarios. Ces scénarios sont présentés à l'annexe B. Pour la fonction-objectif de compatibilité, $f_{1j} = e_j$, le degré de désirabilité est zéro afin d'assurer la compatibilité entre les groupes de travail et de rencontrer les exigences du système. Donc il n'y a pas de compromis possible avec cette fonction-objectif.

Étape 11 : Fixer l'itération $h=1$. Le directeur au niveau système choisit ses préférences b_m^h pour chacune de ses fonctions-objectifs.

Étape 12 : Fixer l'itération $n=1$. Le directeur initialise les valeurs cibles en utilisant l'algorithme proposé par Dauer et Krueger (1977). Des détails sur le fonctionnement de cet algorithme sont donnés à l'annexe C. Pour ce faire, il solutionne son problème à objectifs multiples (sans la pénalité) et obtient une solution initiale optimale \bar{Z}_{hn} et la valeur des fonctions-objectifs $F_m^{hn}(Z)$. Le problème d'optimisation du directeur est:

$$\underset{(z_{\text{int}})_i, (z_c)_{jki}}{\text{Min}} \{F_1((z_{\text{int}})_i, (z_c)_{jki}), F_2((z_{\text{int}})_i, (z_c)_{jki}), \dots, F_m((z_{\text{int}})_i, (z_c)_{jki})\} \quad (4.69)$$

$$\text{sujet à } (z_{\text{int}})_{i,\min} \leq (z_{\text{int}})_i \leq (z_{\text{int}})_{i,\max} \quad \text{où } (z_{\text{int}})_i \in Z \quad (4.70)$$

$$(z_c)_{jki,\min} \leq (z_c)_{jki} \leq (z_c)_{jki,\max} \quad \text{où } (z_c)_{jki} \in Z \quad (4.71)$$

Le $M^{\text{ème}}$ problème résolu par le directeur avec l'algorithme de Dauer et Krueger (1977) est P_M :

$$\text{Minimiser } d_M \quad (4.72)$$

$$\text{sujet à } c_q(Z) \leq b_q, \quad q = 1, \dots, Q \quad (4.73)$$

$$Z_{\min} \leq Z \leq Z_{\max} \quad (4.74)$$

et pour les classes 1S, 3S et 4S

$$c_{Q+m}(Z) \equiv F_m(Z) - d_m \leq b_m^h \quad 1 \leq m \leq M \quad (4.75)$$

$$d_m = d_m^* \quad 1 \leq m \leq M-1 \quad (4.76)$$

$$F_m(Z) \leq t_{m5}^+ \quad 1 \leq m \leq M \quad (4.77)$$

$$d_M \geq 0 \quad (4.78)$$

et pour les classes 2S, 3S et 4S

$$c_{Q+m}(Z) \equiv F_m(Z) + d_m \geq b_m^h \quad 1 \leq m \leq M \quad (4.79)$$

$$d_m = d_m^* \quad 1 \leq m \leq M-1 \quad (4.80)$$

$$F_m(Z) \geq t_{m5}^- \quad 1 \leq m \leq M \quad (4.81)$$

$$d_M \geq 0 \quad (4.82)$$

et pour les classes 1H, 2H, 3H et 4H

$$F_l(Z) \leq t_{l,\max} \quad \forall l \in \text{classe } 1H \quad 1 \leq l \leq L \quad (4.83)$$

$$F_l(Z) \geq t_{l,\min} \quad \forall l \in \text{classe } 2H \quad 1 \leq l \leq L \quad (4.84)$$

$$F_l(Z) = t_{l,\text{val}} \quad \forall l \in \text{classe } 3H \quad 1 \leq l \leq L \quad (4.85)$$

$$t_{l,\min} \leq F_l(Z) \leq t_{l,\max} \quad \forall l \in \text{classe } 4H \quad 1 \leq l \leq L \quad (4.86)$$

Étape 13 : Le directeur envoie les valeurs cibles trouvées, $(z_{\text{int}})_i^*$ et $(z_c)_{jkl}^*$ aux groupes de travail.

Étape 14 : Le groupe de travail j choisit ses préférences b_{mj}^h pour chacune de ses fonctions-objectifs locales dans D_j^h . Pour la fonction-objectif de compatibilité, la préférence est fixée à zéro.

Étape 15 : Les groupes de travail j utilisent l'algorithme proposé par Dauer et Krueger (1977) pour solutionner simultanément leur problème à objectifs multiples et obtenir une solution optimale \bar{A}_{hnj} et la valeur de leurs fonctions-objectifs $f_{mj}^{hn}(A)$. Le problème d'optimisation du groupe de travail j est :

$$\underset{v_{ij}, x_{ij}, (x_{\text{aux}})_{jki}}{\text{Min}} \{e_j, f_{2j}(v_{ij}, x_{ij}), f_{3j}(v_{ij}, x_{ij}), \dots, f_{mj}(v_{ij}, x_{ij})\} \quad (4.87)$$

$$\text{où } e_j = \sum_k \sum_i s_{ij} + r_{ij} + (s_{\text{aux}})_{jki} + (r_{\text{aux}})_{jki} + (s_c)_{jki} + (r_c)_{jki} \quad (4.88)$$

$$\text{ sujet à } c_{qj}(v_{ij}, x_{ij}) \leq b_q \quad (4.89)$$

$$x_{ij} + s_{ij} - r_{ij} = (z_{\text{int}})_i^* \quad (4.90)$$

$$(x_{\text{aux}})_{jki} + (s_{\text{aux}})_{jki} - (r_{\text{aux}})_{jki} = (z_c)_{jki}^* \quad (4.91)$$

$$y_{jki} + (s_c)_{jki} - (r_c)_{jki} = (z_c)_{jki}^* \quad (4.92)$$

$$x_{ij\min} \leq x_{ij} \leq x_{ij\max} \quad (4.93)$$

$$(x_{\text{aux}})_{jki\min} \leq (x_{\text{aux}})_{jki} \leq (x_{\text{aux}})_{jki\max} \quad (4.94)$$

$$v_{ij\min} \leq v_{ij} \leq v_{ij\max} \quad (4.95)$$

$$s_{ij} \geq 0, (s_{\text{aux}})_{jki} \geq 0, (s_c)_{jki} \geq 0 \quad (4.96)$$

$$r_{ij} \geq 0, (r_{\text{aux}})_{jki} \geq 0, (r_c)_{jki} \geq 0 \text{ et } y_{jki} = f(v_{ij}, x_{ij}). \quad (4.97)$$

Le $M_j^{\text{ième}}$ problème du groupe de travail j résolu avec l'algorithme de Dauer et Krueger (1977) est P_{Mj} :

$$\text{Minimiser } d_{Mj} \quad (4.98)$$

$$\text{sujet à } c_{qj}(A) \leq b_q, \quad q = 1, \dots, Q \quad (4.99)$$

$$A_{\min} \leq A \leq A_{\max} \quad (4.100)$$

et pour les classes 1S, 3S et 4S

$$c_{Q+m}(A) \equiv f_m(A) - d_m \leq b_{mj}^h \quad 1 \leq m \leq M_j \quad (4.101)$$

$$d_{mj} = d_{mj}^* \quad 1 \leq m \leq M_j - 1 \quad (4.102)$$

$$f_{mj}(A) \leq t_{mj5}^+ \quad 1 \leq m \leq M_j \quad (4.103)$$

$$d_{Mj} \geq 0 \quad (4.104)$$

et pour les classes 2S, 3S et 4S

$$c_{Q+mj}(A) \equiv f_{mj}(A) + d_{mj} \geq b_{mj}^h \quad 1 \leq m \leq M_j \quad (4.105)$$

$$d_{mj} = d_{mj}^* \quad 1 \leq m \leq M_j - 1 \quad (4.106)$$

$$f_{mj}(A) \geq t_{mj5}^- \quad 1 \leq m \leq M_j \quad (4.107)$$

$$d_{Mj} \geq 0 \quad (4.108)$$

et pour les classes 1H, 2H, 3H et 4H

$$f_{lj}(A) \leq t_{lj,\max} \quad \forall l \in \text{classe } 1H \quad 1 \leq l \leq L_j \quad (4.109)$$

$$f_{lj}(A) \geq t_{lj,\min} \quad \forall l \in \text{classe } 2H \quad 1 \leq l \leq L_j \quad (4.110)$$

$$f_{lj}(A) = t_{lj,\text{val}} \quad \forall l \in \text{classe } 3H \quad 1 \leq l \leq L_j \quad (4.111)$$

$$t_{lj,\min} \leq f_{lj}(A) \leq t_{lj,\max} \quad \forall l \in \text{classe } 4H \quad 1 \leq l \leq L_j \quad (4.112)$$

Les valeurs optimales obtenues par les groupes de travail, x_{ij}^* , $(x_{\text{aux}})_{jki}^*$ et y_{jki}^* , sont envoyées au directeur (étape 16) où elles seront considérées comme des paramètres dans son problème d'optimisation.

Étape 16 : Fixer $n = n+1$. Le directeur utilise l'algorithme proposé par Dauer et Krueger (1977) pour solutionner le problème à objectifs multiples (avec la pénalité) et obtient la solution optimale \bar{Z}_{hn} et la valeur des fonctions-objectifs $F_m^{hn}(Z)$. Le problème d'optimisation du directeur est:

$$\underset{(z_{\text{int}})_i, (z_c)_{jki}}{\text{Min}} \left\{ \begin{array}{l} F_1((z_{\text{int}})_i, (z_c)_{jki}) + \gamma \sum_{j=1}^N g_j((z_{\text{int}})_i, (z_c)_{jki}), \\ F_2((z_{\text{int}})_i, (z_c)_{jki}) + \gamma \sum_{j=1}^N g_j((z_{\text{int}})_i, (z_c)_{jki}), \dots, \\ F_m((z_{\text{int}})_i, (z_c)_{jki}) + \gamma \sum_{j=1}^N g_j((z_{\text{int}})_i, (z_c)_{jki}) \end{array} \right\} \quad (4.113)$$

$$\text{ sujet à } (z_{\text{int}})_{i,\min} \leq (z_{\text{int}})_i \leq (z_{\text{int}})_{i,\max} \quad \text{où } (z_{\text{int}})_i \in Z \quad (4.114)$$

$$(z_c)_{jki,\min} \leq (z_c)_{jki} \leq (z_c)_{jki,\max} \quad \text{où } (z_c)_{jki} \in Z \quad (4.115)$$

où γ est un paramètre de pénalité et, pour le groupe de travail j , on a

$$g_j((z_{\text{int}})_i, (z_c)_{jki}) = \sum_{x_{ij}^* \in X_j^*} (x_{ij}^* - (z_{\text{int}})_i)^2 + \sum_{(x_{\text{aux}})_{jki}^* \in (X_{\text{aux}})_{jki}^*} ((x_{\text{aux}})_{jki}^* - (z_c)_{jki})^2 + \sum_{y_{jki}^* \in Y_j^*} (y_{jki}^* - (z_c)_{jki})^2 \quad (4.116)$$

Le $M^{\text{ème}}$ problème résolu avec l'algorithme de Dauer et Krueger est P_M :

$$\text{Minimiser } d_M \quad (4.117)$$

$$\text{sujet à } c_q(Z) \leq b_q, \quad q = 1, \dots, Q \quad (4.118)$$

$$Z_{\min} \leq Z \leq Z_{\max} \quad (4.119)$$

et pour les classes 1S, 3S et 4S

$$c_{Q+m}(Z) \equiv F_m(Z) - d_m \leq b_m^h \quad 1 \leq m \leq M \quad (4.120)$$

$$d_m = d_m^* \quad 1 \leq m \leq M-1 \quad (4.121)$$

$$F_m(Z) \leq t_{m5}^+ \quad 1 \leq m \leq M \quad (4.122)$$

$$d_M \geq 0 \quad (4.123)$$

et pour les classes 2S, 3S et 4S

$$c_{Q+m}(Z) \equiv F_m(Z) + d_m \geq b_m^h \quad 1 \leq m \leq M \quad (4.124)$$

$$d_m = d_m^* \quad 1 \leq m \leq M-1 \quad (4.125)$$

$$F_m(Z) \geq t_{m5}^- \quad 1 \leq m \leq M \quad (4.126)$$

$$d_M \geq 0 \quad (4.127)$$

et pour les classes 1H, 2H, 3H et 4H

$$F_l(Z) \leq t_{l,\max} \quad \forall l \in \text{classe 1H} \quad 1 \leq l \leq L \quad (4.128)$$

$$F_l(Z) \geq t_{l,\min} \quad \forall l \in \text{classe 2H} \quad 1 \leq l \leq L \quad (4.129)$$

$$F_l(Z) = t_{l,\text{val}} \quad \forall l \in \text{classe 3H} \quad 1 \leq l \leq L \quad (4.130)$$

$$t_{l,\min} \leq F_l(Z) \leq t_{l,\max} \quad \forall l \in \text{classe 4H} \quad 1 \leq l \leq L \quad (4.131)$$

Étape 17 : Si les fonctions-objectifs du système sont telles que $F_m^{n-1} - F_m^n < \varepsilon$, $m = 1, \dots, M$, alors l'algorithme a convergé vers une solution Pareto-optimale et aller à l'étape suivante. Sinon le directeur envoie les valeurs cibles trouvées, $(z_{\text{int}})_i^*$ et $(z_c)_{jki}^*$ aux groupes de travail j à l'étape 15 afin de continuer le processus de convergence.

Étape 18 : Si le directeur et les groupes de travail sont satisfaits de cette solution, arrêter (étape 25). Dans tous les autres cas, aller à l'étape 19. Les étapes 19 à 22 sont effectuées en parallèle par le directeur et les groupes de travail.

Étape 19 : Le directeur et les groupes de travail j formulent leurs conditions de KKT et déterminent la valeur de leurs multiplicateurs de KKT respectifs \bar{u}_q et \bar{u}_{qj} $q = Q+1, \dots, Q+M$ pour leurs contraintes de but.

Étape 20 : Selon les valeurs obtenues \bar{u}_q et \bar{u}_{qj} pour les contraintes de but, le directeur et les groupes de travail j déterminent, selon l'annexe A, leur ensemble de stabilité respectifs $G(\bar{Z}_h)$ et $G(\bar{A}_{hj})$, c'est-à-dire l'ensemble des points où la solution demeure optimale.

Étape 21 : Le directeur et les groupes de travail utilisent l'algorithme de soustraction des ensembles (Osman, 1979) pour obtenir leur ensemble réduit des valeurs cibles respectif $\{D^\circ - \bigcup G(\bar{Z}_p), p = 1, \dots, h\}$ et $\{D_j^\circ - \bigcup G(\bar{A}_{pj}), p = 1, \dots, h\}$ excluant les valeurs cibles déjà analysées. De cette façon, on s'assure qu'une solution différente sera générée. Le fonctionnement de l'algorithme de soustraction des ensembles est aussi bien expliqué dans Abdel Haleem (1991) et Abdel Haleem et al. (2006).

Étape 22 : Si aucune autre valeur cible ne peut être choisie dans l'ensemble du directeur $\{D^\circ - \bigcup G(\bar{Z}_p), p = 1, \dots, h\}$ arrêter et aller à l'étape 25. Si des valeurs cibles peuvent être choisies dans l'ensemble du directeur $\{D^\circ - \bigcup G(\bar{Z}_p), p = 1, \dots, h\}$ mais qu'aucune

valeur cible ne peut être choisie dans l'ensemble du groupe de travail j $\{D_j^* - \bigcup G(\bar{A}_{pj}), p = 1, \dots, h\}$ aller à l'étape 23. Si des valeurs cibles peuvent être choisies dans l'ensemble du directeur $\{D^* - \bigcup G(\bar{Z}_p), p = 1, \dots, h\}$ et dans l'ensemble du groupe de travail j $\{D_j^* - \bigcup G(\bar{A}_{pj}), p = 1, \dots, h\}$, aller à l'étape 14 si le groupe de travail j désire choisir d'autres valeurs cibles et fixer $h = h+1$, sinon aller à l'étape 23.

Étape 23 : Fixer $h = h+1$. Le directeur sélectionne d'autres valeurs cibles b_m^h dans $\{D^* - \bigcup G(\bar{Z}_p), p = 1, \dots, h\}$. Pour sélectionner les valeurs cibles et obtenir d'autres solutions Pareto-optimales, les règles suivantes peuvent être utilisées. Aller à l'étape 12.

- Règle#1 : Il faut toujours améliorer l'objectif ayant la pire valeur en choisissant sa valeur dans une zone meilleure et en sacrifiant le ou les autres objectifs en choisissant leur valeur dans une zone moindre. Le but visé par ces choix est d'obtenir, si possible, des valeurs dans une même zone (ou mieux) pour chacun des objectifs.
- Règle #2 : Un fois dans la même zone, essayer d'autres valeurs dans cette zone afin d'obtenir d'autres solutions Pareto-optimales. Les valeurs choisies devraient couvrir toute la zone. Par exemple, choisir une valeur à une extrémité de la zone et les autres valeurs à l'autre extrémité. On peut aussi essayer de choisir une des valeurs dans une meilleure zone en laissant les autres valeurs dans leur zone.
- Règle#3 : S'il est impossible de suivre la règle #2 à cause de l'ensemble réduit des valeurs cibles potentielles, essayer les possibilités (s'il n'y en a pas beaucoup) pour trouver le meilleur choix.

Étape 24 : Le directeur présente les solutions obtenues aux groupes de travail pour choisir la solution finale.

Étape 25 : Arrêter

4.6 Conclusion

Il est maintenant possible, avec les travaux réalisés dans ce chapitre, de donner plus de responsabilité aux groupes de travail en leur permettant de contrôler leurs variables décisionnelles. Avec l'algorithme IPOMP-ED, des problèmes à multiples objectifs peuvent maintenant être considérés au niveau du système (par le directeur) et au niveau des sous-systèmes (par les groupes de travail). Le directeur et les groupes de travail peuvent déterminer leurs propres préférences pour chacune de leurs fonctions-objectifs à partir d'un ensemble réduit de valeurs cibles. À chaque itération h , l'algorithme génère des solutions Pareto-optimales différentes puisque l'ensemble de stabilité de la solution courante est déduit de l'ensemble réduit des valeurs cibles possibles par l'utilisation d'un algorithme de soustraction des ensembles. Cela est particulièrement intéressant puisque plusieurs alternatives de conception peuvent être envisagées. La description détaillée des étapes de l'algorithme fait ressortir le processus itératif de coordination entre le directeur et ses groupes de travail afin de converger vers une solution.

Le chapitre suivant permettra d'observer le comportement de l'algorithme IPOMP-ED lors de la résolution de problèmes à multiples objectifs.

CHAPITRE 5

APPLICATIONS DE L'ALGORITHME IPOMP-ED

5.0 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de tester l'algorithme IPOMP-ED développé au chapitre précédent. Les sections suivantes présentent deux exemples où l'algorithme est appliqué. Un premier problème, purement mathématique, permettra de comprendre le fonctionnement de l'algorithme. Le deuxième exemple est un problème de conception réel. Cet exemple est intéressant puisqu'il implique les différents types de variables: disciplinaires, interdisciplinaires et partagées.

À titre de rappel, la responsabilité du directeur est d'optimiser les fonctions-objectifs du système tandis que les groupes de travail sont responsables de l'optimisation des sous-systèmes (fonctions-objectifs locales) tout en s'assurant que le système rencontre les contraintes sous leur charge. De plus, la notation F (en majuscule) désigne les fonctions-objectifs sous le contrôle du directeur (système) tandis que la notation f (en minuscule) réfère aux fonctions-objectifs locales sous le contrôle des groupes de travail (sous-systèmes).

De plus, à l'intérieur de la structure distribuée, les problèmes d'optimisation du directeur et des groupes de travail sont solutionnés par un algorithme d'optimisation basé sur la programmation quadratique séquentielle. Le solveur DONLP2 de AMPL (Spellucci, 2005) est employé par le directeur et les groupes de travail pour résoudre leur problème d'optimisation. DeMiguel, (2001) et Tribes et al., (2005) suggèrent de choisir une petite valeur pour le paramètre de pénalité (γ) puisque une valeur trop élevée occasionne des

problèmes numériques. Aussi, DeMiguel (2001) recommande de choisir une valeur suffisamment grande afin d'obtenir de meilleurs résultats. Ainsi, ce paramètre a été fixé à 100. Le critère d'arrêt du processus d'optimisation (ε) a, quant à lui, été fixé à 0.000001. Cela signifie que pour la solution h la différence dans les m fonctions-objectifs du directeur entre l'itération $n-1$ et l'itération n est plus petite que ε .

5.1 Application 1: problème mathématique proposé par Abdel Haleem (1991)

Le premier problème sur lequel l'algorithme IPOMP-ED sera testé est le problème introduit originalement par Abdel Haleem (1991). Comme au chapitre 3, ce problème, simple, a été choisi pour démontrer le fonctionnement et l'efficacité de l'algorithme IPOMP-ED et aussi, parce qu'il est possible de le décomposer de façon à avoir un problème à multiples objectifs au niveau du système et des groupes de travail. Les programmes AMPL (*fichier.mod* et *fichier.run*) de ce problème sont disponibles à l'annexe H. Ce problème comprend cinq variables de décision, trois fonctions-objectifs non linéaires et trois contraintes linéaires.

Le problème original est le suivant:

$$\text{Min} \quad f_1 = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - x_4 - 3x_5 \leq b_1 \quad (5.1)$$

$$f_2 = -2x_1 + 3x_2 + 4x_3^3 - 5x_4 - 2x_5 \leq b_2 \quad (5.2)$$

$$f_3 = 3x_1 + x_2^2 - 5x_3 + x_4^2 - 2x_5 \leq b_3 \quad (5.3)$$

$$\text{sujet à } c_1(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \leq 6 \quad (5.4)$$

$$c_2(x) = 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 10 \quad (5.5)$$

$$c_3(x) = 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 3x_5 \leq 15 \quad (5.6)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \quad (5.7)$$

La décomposition du problème original permettra de considérer des objectifs multiples au niveau système et des groupes de travail. Supposons qu'il y ait deux objectifs au niveau système à minimiser. Le directeur doit donc résoudre ce problème:

$$\underset{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5}{\text{Min}} \quad f_1 = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - x_4 - 3x_5 \quad (5.8)$$

$$f_2 = -2x_1 + 3x_2 + 4x_3^3 - 5x_4 - 2x_5 \quad (5.9)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \quad (5.10)$$

Puisque le problème du directeur en est un de minimisation et qu'il n'y a aucune contrainte sous son contrôle (ces dernières étant distribuées aux groupes de travail), il est important de borner les variables sinon l'algorithme d'optimisation minimisera à l'infini. Pour une question de faisabilité, les variables ont été bornées comme suit :

$0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \leq 10$. Donc le directeur doit plutôt résoudre ce problème :

$$\underset{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5}{\text{Min}} \quad f_1 = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - x_4 - 3x_5 \quad (5.11)$$

$$f_2 = -2x_1 + 3x_2 + 4x_3^3 - 5x_4 - 2x_5 \quad (5.12)$$

$$0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \leq 10 \quad (5.13)$$

On suppose que le groupe 1 contrôle la contrainte $c_1(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \leq 6$ et qu'il y a un seul objectif (de compatibilité). Le problème du groupe de travail 1 est :

$$\text{Min } \text{fonction de compatibilité} \quad (5.14)$$

$$\text{sujet à } c_1(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \leq 6 \quad (5.15)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \quad (5.16)$$

On suppose que le groupe 2 contrôle les contraintes $c_2(x) = 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 10$ et $c_3(x) = 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 3x_5 \leq 15$ et deux fonctions-objectifs : une fonction de compatibilité et un objectif local : $f_3 = 3x_1 + x_2^2 - 5x_3 + x_4^2 - 2x_5$. Le problème du groupe de travail 2 est :

Min fonction de compatibilité (5.17)

$$f_3 = 3x_1 + x_2^2 - 5x_3 + x_4^2 - 2x_5 \quad (5.18)$$

$$sujet \ à \ c_2(x) = 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 10 \quad (5.19)$$

$$c_3(x) = 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 3x_5 \leq 15 \quad (5.20)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \quad (5.21)$$

Avec cette décomposition il n'y a que des variables interdisciplinaires x_{ij} . Puisque ces variables sont utilisées par les groupes de travail 1 et 2, elles doivent être doublées pour obtenir: x_{i1} pour le groupe 1 et x_{i2} pour le groupe 2. Donc la transformation des variables se fait selon le tableau 5.1.

Tableau 5.1: Transformation des variables pour le problème de Abdel Haleem (1991).

Transformation des variables		
Variables du Groupe 1	Variables du Groupe 2	Valeur cible au niveau Système
x_{11}	x_{12}	$(z_{\text{int}})_1$
x_{21}	x_{22}	$(z_{\text{int}})_2$
x_{31}	x_{32}	$(z_{\text{int}})_3$
x_{41}	x_{42}	$(z_{\text{int}})_4$
x_{51}	x_{52}	$(z_{\text{int}})_5$

Pour résoudre ce problème en environnement distribué, il faut le formuler selon l'approche de Gu et al. (2006). La formulation du problème du décideur se fait comme suit:

$$\begin{array}{c} \text{Min} \\ \{z_{\text{int}}\}_1, \{z_{\text{int}}\}_2 \\ \{z_{\text{int}}\}_3, \{z_{\text{int}}\}_4 \\ \{z_{\text{int}}\}_5 \end{array}$$

$$F_1 = (z_{\text{int}})_1^2 + 2(z_{\text{int}})_2^2 + 4(z_{\text{int}})_3^2 - (z_{\text{int}})_4^2 - 3(z_{\text{int}})_5^2 + \gamma \left[\begin{array}{l} (x_{11}^* - (z_{\text{int}})_1)^2 + (x_{21}^* - (z_{\text{int}})_2)^2 + \\ (x_{31}^* - (z_{\text{int}})_3)^2 + (x_{41}^* - (z_{\text{int}})_4)^2 + \\ (x_{51}^* - (z_{\text{int}})_5)^2 + (x_{12}^* - (z_{\text{int}})_1)^2 + \\ (x_{22}^* - (z_{\text{int}})_2)^2 + (x_{32}^* - (z_{\text{int}})_3)^2 + \\ (x_{42}^* - (z_{\text{int}})_4)^2 + (x_{52}^* - (z_{\text{int}})_5)^2 \end{array} \right] \quad (5.22)$$

$$F_2 = -2(z_{\text{int}})_1 + 3(z_{\text{int}})_2 + 4(z_{\text{int}})_3^3 - 5(z_{\text{int}})_4^2 - 2(z_{\text{int}})_5^2 + \gamma \left[\begin{array}{l} (x_{11}^* - (z_{\text{int}})_1)^2 + (x_{21}^* - (z_{\text{int}})_2)^2 + \\ (x_{31}^* - (z_{\text{int}})_3)^2 + (x_{41}^* - (z_{\text{int}})_4)^2 + \\ (x_{51}^* - (z_{\text{int}})_5)^2 + (x_{12}^* - (z_{\text{int}})_1)^2 + \\ (x_{22}^* - (z_{\text{int}})_2)^2 + (x_{32}^* - (z_{\text{int}})_3)^2 + \\ (x_{42}^* - (z_{\text{int}})_4)^2 + (x_{52}^* - (z_{\text{int}})_5)^2 \end{array} \right] \quad (5.23)$$

$$\text{sujet à} \quad 0 \leq (z_{\text{int}})_1, (z_{\text{int}})_2, (z_{\text{int}})_3, (z_{\text{int}})_4, (z_{\text{int}})_5 \leq 10 \quad (5.24)$$

Les valeurs de $(z_{\text{int}})_1^*, (z_{\text{int}})_2^*, (z_{\text{int}})_3^*, (z_{\text{int}})_4^*$ et $(z_{\text{int}})_5^*$ sont obtenues.

La formulation du problème d'optimisation pour le groupe 1 est:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f_{11} = e_1 = (s_{11} + r_{11}) + (s_{21} + r_{21}) + (s_{31} + r_{31}) + (s_{41} + r_{41}) + (s_{51} + r_{51}) \\ & s_{11}, s_{21}, s_{31}, s_{41}, s_{51} \\ & r_{11}, r_{21}, r_{31}, r_{41}, r_{51} \\ & x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}, x_{51} \end{array} \quad (5.25)$$

$$\text{sujet à} \quad c_{11} = x_{11} + 2x_{21} + 3x_{31} + x_{41} + x_{51} \leq 6 \quad (5.26)$$

$$x_{11} + s_{11} - r_{11} = (z_{\text{int}})_1^* \quad (5.27)$$

$$x_{21} + s_{21} - r_{21} = (z_{\text{int}})_2^* \quad (5.28)$$

$$x_{31} + s_{31} - r_{31} = (z_{\text{int}})_3^* \quad (5.29)$$

$$x_{41} + s_{41} - r_{41} = (z_{\text{int}})_4^* \quad (5.30)$$

$$x_{51} + s_{51} - r_{51} = (z_{\text{int}})_5^* \quad (5.31)$$

$$x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}, x_{51} \geq 0 \quad (5.32)$$

$$s_{11}, s_{21}, s_{31}, s_{41}, s_{51} \geq 0 \quad (5.33)$$

$$r_{11}, r_{21}, r_{31}, r_{41}, r_{51} \geq 0 \quad (5.34)$$

On obtient $s_{11}^*, s_{21}^*, s_{31}^*, s_{41}^*, s_{51}^*, r_{11}^*, r_{21}^*, r_{31}^*, r_{41}^*, r_{51}^*, x_{11}^*, x_{21}^*, x_{31}^*, x_{41}^*$ et x_{51}^* .

La formulation du problème d'optimisation pour le groupe 2 est:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f_{12} = e_2 = (s_{12} + r_{12}) + (s_{22} + r_{22}) + (s_{32} + r_{32}) + (s_{42} + r_{42}) + (s_{52} + r_{52}) \\ & s_{12}, s_{22}, s_{32}, s_{42}, s_{52}, \\ & r_{12}, r_{22}, r_{32}, r_{42}, r_{52}, \\ & x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}, x_{52} \end{array} \quad (5.35)$$

$$f_{22} = 3x_{12} + x_{22}^2 - 5x_{32} + x_{42}^2 - 2x_{52} \quad (5.36)$$

$$\text{ sujet à } c_{12} = 5x_{12} + x_{22} + x_{32} + 2x_{42} + 2x_{52} \leq 10 \quad (5.37)$$

$$c_{22} = 3x_{12} + x_{22} + 5x_{32} + 3x_{42} + 3x_{52} \leq 15 \quad (5.38)$$

$$x_{12} + s_{12} - r_{12} = (z_{\text{int}})_1^* \quad (5.39)$$

$$x_{22} + s_{22} - r_{22} = (z_{\text{int}})_2^* \quad (5.40)$$

$$x_{32} + s_{32} - r_{32} = (z_{\text{int}})_3^* \quad (5.41)$$

$$x_{42} + s_{42} - r_{42} = (z_{\text{int}})_4^* \quad (5.42)$$

$$x_{52} + s_{52} - r_{52} = (z_{\text{int}})_5^* \quad (5.43)$$

$$x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}, x_{52} \geq 0 \quad (5.44)$$

$$s_{12}, s_{22}, s_{32}, s_{42}, s_{52} \geq 0 \quad (5.45)$$

$$r_{12}, r_{22}, r_{32}, r_{42}, r_{52} \geq 0 \quad (5.46)$$

On obtient $s_{12}^*, s_{22}^*, s_{32}^*, s_{42}^*, s_{52}^*, r_{12}^*, r_{22}^*, r_{32}^*, r_{42}^*, r_{52}^*, x_{12}^*, x_{22}^*, x_{32}^*, x_{42}^*$ et x_{52}^* .

Le détail des étapes de l'algorithme est présenté à l'annexe I. Le tableau 5.2 montre les degrés de désirabilité déterminés par le directeur et le groupe de travail 2, à partir de leurs ensembles réduits des valeurs cibles, pour leurs fonctions-objectifs respectives (F_1 et F_2) et (f_{22}). Les degrés de désirabilité sont utilisés pour classer les fonctions-objectifs dans une des 5 catégories définies (idéale, désirable, tolérable, indésirable et inacceptable).

Tableau 5.2 : Degrés de désirabilité pour les fonctions-objectifs du directeur et du groupe de travail 2.

		I	D	T	ID	IA
Critère	Classe	t_{m1}^+	t_{m2}^+	t_{m3}^+	t_{m4}^+	t_{m5}^+
F_1	1S	-15	-12.5	-10	-7.5	-5
F_2	1S	-25	-21.25	-17.5	-13.75	-10
f_{22}	1S	-15	-5	5	15	25

I : (Idéale $\leq t_{m1}^+$) D : ($t_{m1}^+ <$ Désirable $\leq t_{m2}^+$) T : ($t_{m2}^+ <$ Tolérable $\leq t_{m3}^+$)
ID : ($t_{m3}^+ <$ Indésirable $\leq t_{m4}^+$) IA : ($t_{m4}^+ <$ Inacceptable $\leq t_{m5}^+$)

Le problème a été résolu avec l'algorithme IPOMP-ED et en fixant le paramètre de pénalité à 100 et le critère d'arrêt à 0.000001. Les solutions sont montrées au tableau 5.3. Les termes entre parenthèses dans le tableau représentent les degrés de désirabilité des valeurs trouvées pour les fonctions-objectifs. Les solutions 3 et 4 montrent des différences avec les solutions qui ont été trouvées en environnement centralisé. Deux raisons peuvent expliquer ces différences. Premièrement, il faut s'assurer que la valeur associée au paramètre de pénalité était suffisamment grande pour converger à la bonne solution (DeMiguel, 2001). Deuxièmement, l'algorithme SQP du solveur DONLP2 peut mal se comporter en environnement distribué.

Tableau 5.3 : Résultats obtenus avec l'algorithme IPOMP-ED pour différentes valeurs cibles pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991).

Iter. <i>h</i>	Niveau	Vecteur b Initial	Valeurs des solutions avec IPOMP (centralisé)	Valeurs des solutions avec IPOMP-ED (distribué) $\gamma = 100$
1	Système	$b_1 = -15$ (I) $b_2 = -25$ (I)	$F_1 = -15$ (I) $F_2 = -10$ (IA)	$F_1 = -15$ (I) $F_2 = -10$ (IA)
	Groupe 2	$b_{22} = -15$ (I)	$f_{22} = -10$ (D)	$f_{22} = -10$ (D)
	Solution optimale		(0, 0, 0, 0, 5)	(0, 0, 0, 0, 5)
2	Système	$b_1 = -12$ (T) $b_2 = -18$ (T)	$F_1 = -12$ (T) $F_2 = -14.5$ (ID)	$F_1 = -11.9818$ (T) $F_2 = -14.5272$ (ID)
	Groupe 2	$b_{22} = -1$ (T)	$f_{22} = -4.75$ (T)	$f_{22} = -4.7044$ (T)
	Solution optimale		(0, 0, 0, 1.5, 3.5)	(0, 0, 0, 1.51, 3.49)
3	Système	$b_1 = -10$ (T) $b_2 = -15.5$ (ID)	$F_1 = -11.33$ (T) $F_2 = -15.5$ (ID)	$F_1 = -10.092$ (T) $F_2 = -15.5131$ (ID)
	Groupe 2	$b_{22} = -3$ (T)	$f_{22} = -2.97$ (T)	$f_{22} = -1.2664$ (T)
	Solution optimale		(0, 0, 0, 1.83, 3.17)	(0, 0, 0, 2.0273, 2.6882)
4	Système	$b_1 = -8$ (ID) $b_2 = -16$ (ID)	$F_1 = -11$ (T) $F_2 = -16$ (ID)	$F_1 = -8.8890$ (ID) $F_2 = -19.1667$ (T)
	Groupe 2	$b_{22} = -11$ (D)	$f_{22} = -2$ (T)	$f_{22} = 5.4472$ (ID)
	Solution optimale		(0, 0, 0, 2, 3)	(0, 0, 0, 3.0555, 1.9445)

I: Idéal D: Désirable T: Tolérable ID: Indésirable IA: Inacceptable

Afin de vérifier la première hypothèse, le problème a été résolu une deuxième fois en augmentant le paramètre de pénalité à 1000. Le tableau 5.4 montre les solutions obtenues pour différentes valeurs cibles et les différentes valeurs du facteur de pénalité. Les différences (en pourcentage) entre les solutions obtenues en environnement distribué et celle trouvées en environnement centralisé sont aussi indiquées dans ce tableau.

Tableau 5.4 : Différence (en pourcentage) entre les valeurs des fonctions-objectifs obtenues en environnement centralisé et distribué pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991).

Iter. <i>h</i>	Vecteur b Initial	Valeurs des solutions environnement centralisé	Valeurs des solutions environnement distribué $\gamma = 100$	Déférence $\gamma = 100$	Valeurs des solutions environnement distribué $\gamma = 1000$	Déférence $\gamma = 1000$
1	$b_1^1 = -15$	$F_1 = -15$ (I)	$F_1 = -15$ (I)	0 %	$F_1 = -15$ (I)	0 %
	$b_2^1 = -25$	$F_2 = -10$ (IA)	$F_2 = -10$ (IA)	0 %	$F_2 = -10$ (IA)	0 %
	$b_{22}^1 = -15$	$f_{22} = -10$ (D)	$f_{22} = -10$ (D)	0 %	$f_{22} = -10$ (D)	0 %
	Solution optimale		(0, 0, 0, 0, 5)		(0, 0, 0, 0, 5)	
Nombre d'itérations		129			4337	
2	$b_1^2 = -12$	$F_1 = -12$ (T)	$F_1 = -12.03$ (T)	0.25 %	$F_1 = -12.00$ (T)	0 %
	$b_2^2 = -18$	$F_2 = -14.5$ (ID)	$F_2 = -14.62$ (ID)	0.83 %	$F_2 = -14.50$ (ID)	0 %
	$b_{22}^2 = -1$	$f_{22} = -4.75$ (T)	$f_{22} = -4.70$ (T)	-0.96 %	$f_{22} = -4.75$ (T)	0 %
	Solution optimale		(0, 0, 0, 1.51, 3.49)		(0, 0, 0, 1.5, 3.5)	
Nombre d'itérations		62			63	
3	$b_1^3 = -10$	$F_1 = -11.33$ (T)	$F_1 = -10.09$ (T)	-10.93 %	$F_1 = -11.34$ (T)	0.09 %
	$b_2^3 = -15.5$	$F_2 = -15.5$ (ID)	$F_2 = -15.51$ (ID)	0.08 %	$F_2 = -15.49$ (ID)	0.06 %
	$b_{22}^3 = -3$	$f_{22} = -2.97$ (T)	$f_{22} = -1.27$ (T)	-57.4 %	$f_{22} = -3$ (T)	1.01 %
	Solution optimale		(0, 0, 0, 2.0273, 2.6882)		(0, 0, 0, 1.8284, 3.1716)	
Nombre d'itérations		307			676	
4	$b_1^4 = -8$	$F_1 = -11$ (T)	$F_1 = -8.92$ (ID)	-18.9 %	$F_1 = -8.02$ (ID)	-27.09 %
	$b_2^4 = -16$	$F_2 = -16$ (ID)	$F_2 = -19.34$ (T)	20.9 %	$F_2 = -16$ (ID)	0 %
	$b_{22}^4 = -11$	$f_{22} = -2$ (T)	$f_{22} = 5.45$ (ID)	-372.4 %	$f_{22} = 2.33$ (T)	-57.25 %
	Solution optimale		(0, 0, 0, 3.0555, 1.9445)		(0, 0, 0, 2.4580, 1.8549)	
Nombre d'itérations		640			1612	

I: Idéal D: Désirable T: Tolérable ID: Indésirable IA: Inacceptable

En augmentant le paramètre de pénalité, les solutions 1 et 2 correspondent toujours à celle obtenues en environnement centralisé et la solution 3 s'est beaucoup améliorée. Cependant, la solution 4 est encore très différente de celle obtenue en environnement centralisé. Pour expliquer cette différence, la deuxième hypothèse est retenue. En effet, à la première itération du processus d'optimisation du problème 4, le message suivant est

apparu "*relaxed KKT conditions satisfied : singular point*". Ce message apparaît lorsque les gradients sont linéairement dépendants ce qui contrevient à une des conditions de qualification des contraintes (Orban, 2005). Comme Gu et al. (2006) et Kroo (2004) l'ont noté pour l'algorithme d'optimisation SQP de Matlab, il se peut que l'algorithme d'optimisation SQP (*Sequential Quadratic Programming*) du solveur DONLP2 ne performe pas bien en environnement distribué (c'est-à-dire lorsque les processus d'optimisation sont distribués). Il est difficile de choisir un logiciel d'optimisation pour résoudre un problème en environnement distribué. Aucune étude ne met à jour les différences entre les solveurs. Si une telle étude existait, cela permettrait de mieux comprendre pourquoi certains solveurs fonctionnent mieux que d'autres et d'améliorer la formulation du problème en environnement distribué.

Les figures 5.1, 5.2, 5.3 et 5.4 montrent la convergence des fonctions-objectifs pour chacune des solutions trouvées avec l'algorithme IPOMP-ED (avec $\gamma = 1000$). On remarque que, pour les solutions 1, 2 et 3, les fonctions-objectifs convergent graduellement à la solution optimale. Par contre les graphiques de convergence de la solution 4 montrent que les valeurs des fonctions-objectifs s'éloignent des valeurs optimales trouvées en environnement centralisé.

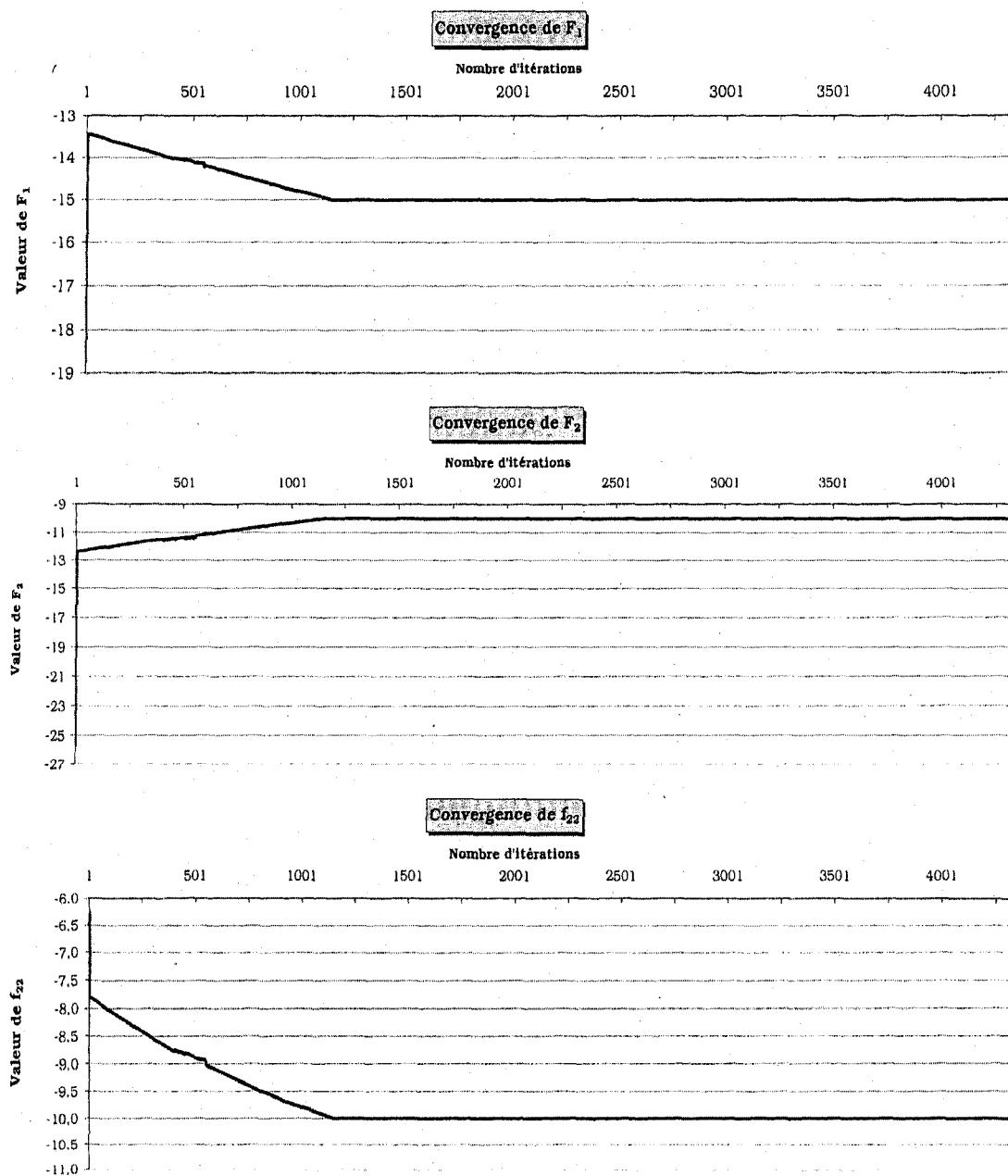


Figure 5.1: Convergence des fonctions F_1 et F_2 du directeur (système) et de la fonction f_{22} du groupe de travail 2 (sous-système 2) pour la solution 1 du problème de Abdel Haleem (1991).

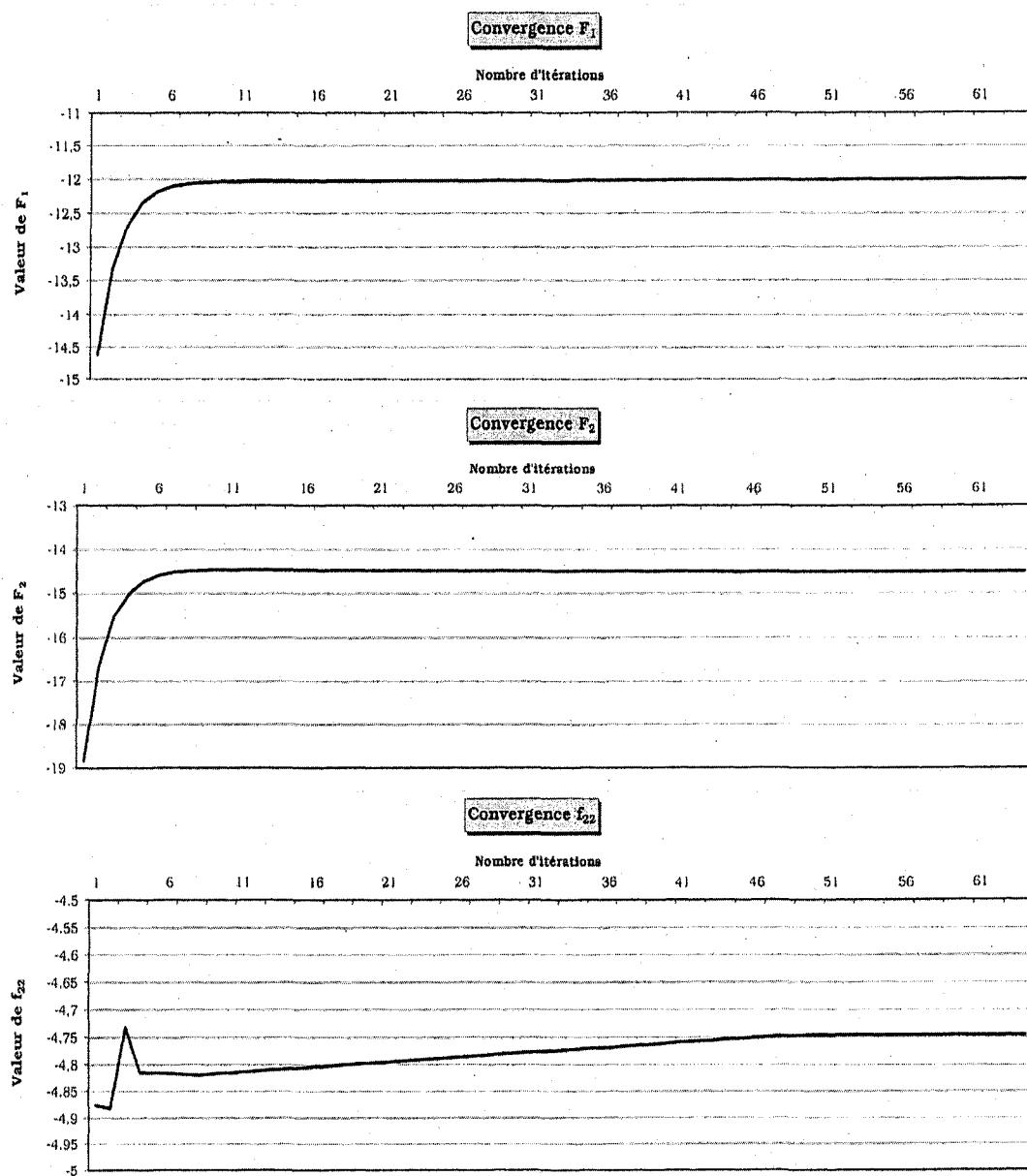


Figure 5.2: Convergence des fonctions F_1 et F_2 du directeur (système) et de la fonction f_{22} du groupe de travail 2 (sous-système 2) pour la solution 2 du problème de Abdel Haleem (1991).

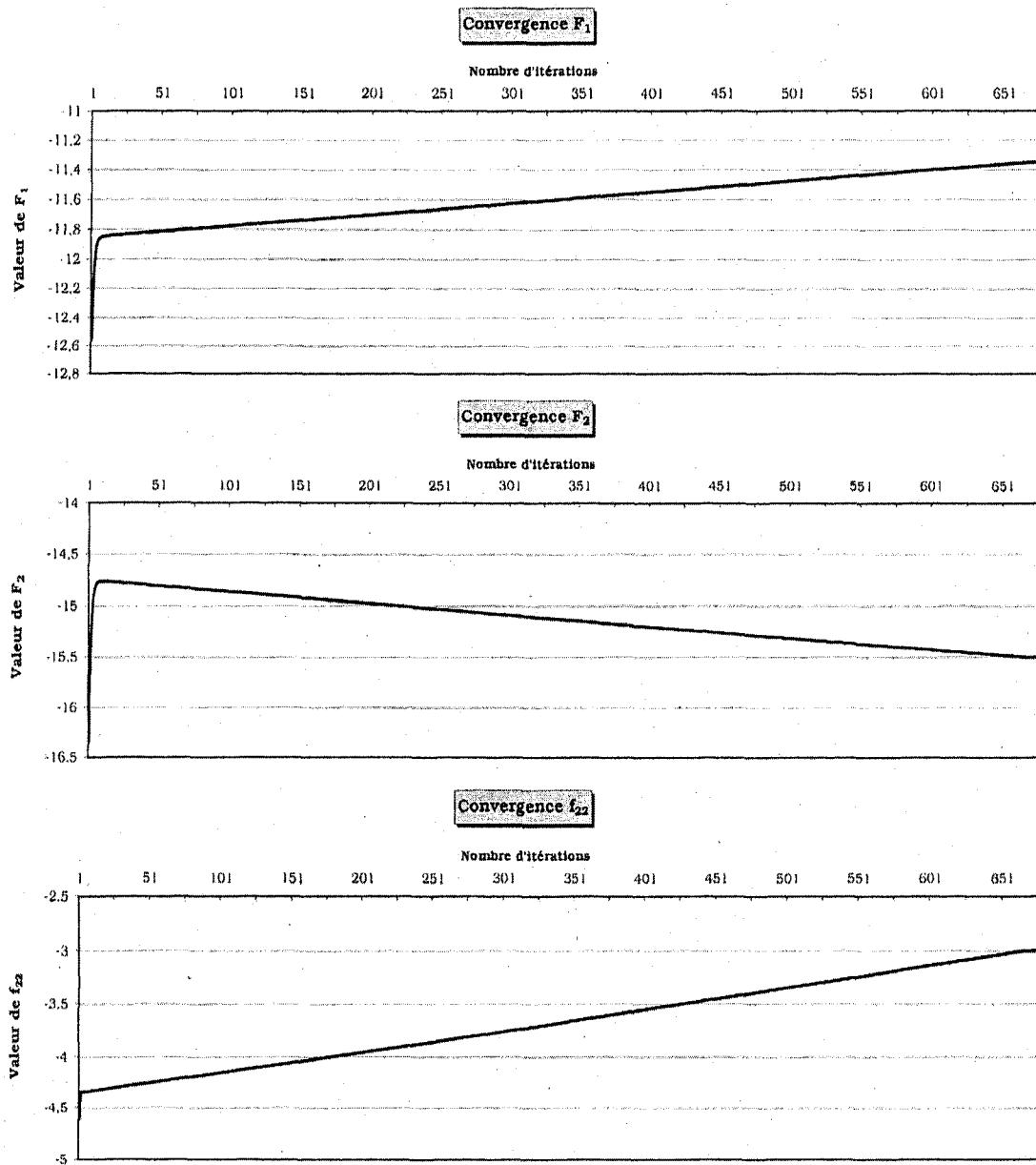


Figure 5.3: Convergence des fonctions F_1 et F_2 du directeur (système) et de la fonction f_{22} du groupe de travail 2 (sous-système 2) pour la solution 3 du problème de Abdel Haleem (1991).

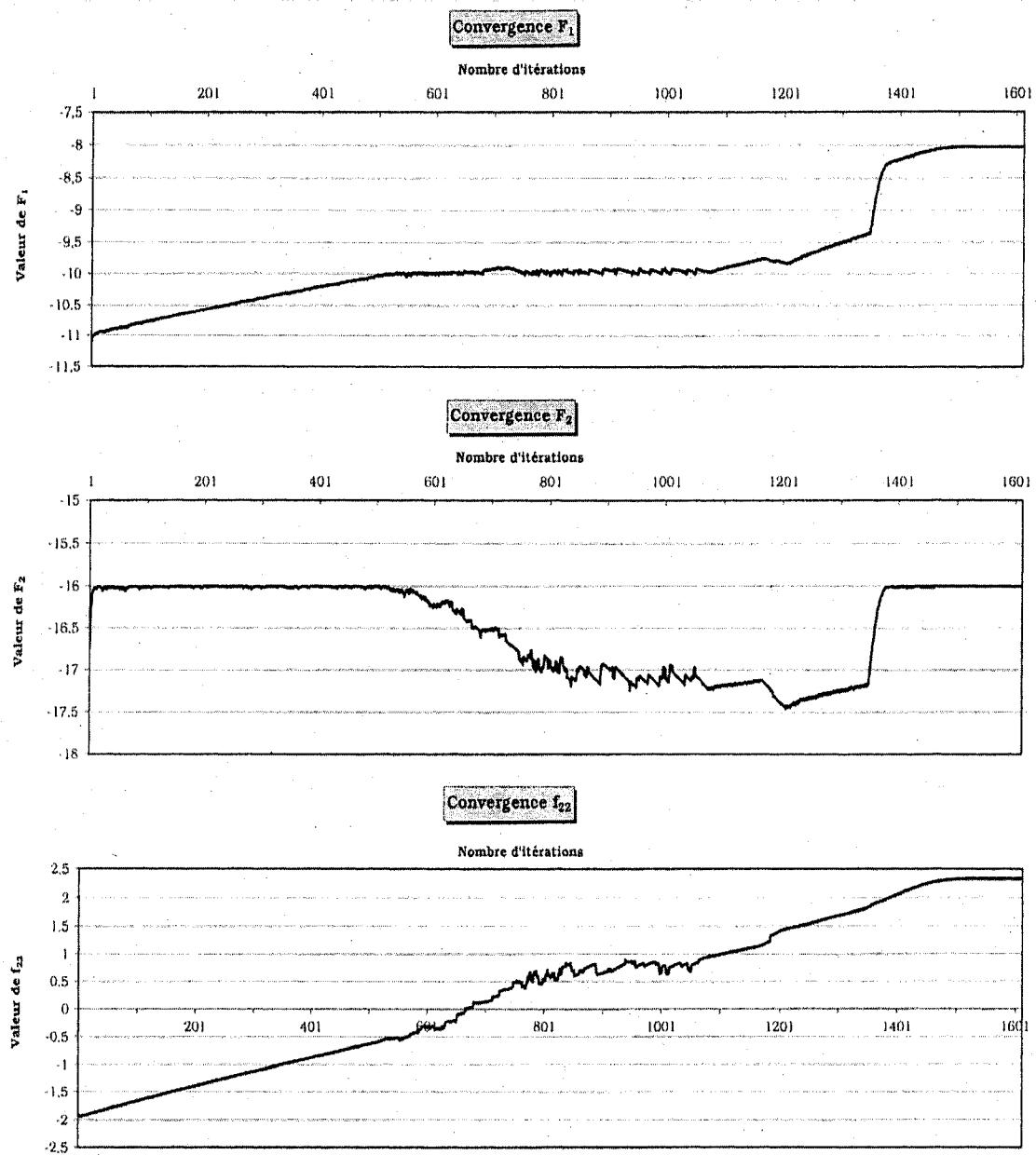


Figure 5.4: Convergence des fonctions F_1 et F_2 du directeur (système) et de la fonction f_{22} du groupe de travail 2 (sous-système 2) pour la solution 4 du problème de Abdel Haleem (1991).

Le fait que les deux premières solutions obtenues en environnement distribué sont les mêmes que celles trouvées en environnement centralisé (les meilleures solutions que l'on puisse obtenir) permet de conclure que l'algorithme développé dans cette thèse converge aux bonnes solutions. Le directeur et les groupes de travail peuvent donc avoir confiance en l'algorithme. Cependant, le choix du paramètre de pénalité est important. En effet, les différences entre les solutions trouvées en environnement centralisé et celle obtenues en environnement distribué avec un terme de pénalité (γ) fixé à 1000 sont plus petites que les différences observées avec un terme de pénalité fixé à 100. D'autres recherches devront être effectuées pour déterminer s'il est possible de trouver une combinaison optimale du paramètre de pénalité et du critère d'arrêt afin de converger le plus rapidement possible à la solution. Malgré tout, les solutions trouvées, en environnement distribué, sont très acceptables et surtout elles sont Pareto-optimales.

5.2 Application 2: problème de conception d'une structure à deux barres

Pour tester l'algorithme IPOMP-ED sur un problème de conception réel, considérons le problème de structure introduit au chapitre 3. En modifiant quelque peu ce problème, il est possible de l'ajuster à la structure d'optimisation distribuée. En effet, les deux premiers objectifs peuvent être minimisés par le décideur tandis que le troisième peut être sous le contrôle d'un groupe de travail. Donc, il est possible, avec ce problème, d'avoir des objectifs multiples au niveau système et groupes de travail (un objectif de compatibilité et un ou plusieurs objectif(s) local(aux)) ce qui est le but recherché pour tester l'algorithme. Également, une variable couplée peut être introduite. Les programmes AMPL (*fichier.mod* et *fichier.run*) de ce problème sont disponibles à l'annexe J.

À titre de rappel, la structure est soumise à une force verticale F qui provoque une déflexion d . Le problème d'optimisation implique trois objectifs:

- Minimiser la masse (m) de la structure
- Minimiser l'effort normal (s)
- Minimiser la déflexion verticale (d)

Le problème comporte deux variables de conception: x_1 = diamètre des barres et x_2 = hauteur de la structure.

Les paramètres suivants sont utilisés:

$$\text{Force: } F = 150 \text{ kN}$$

$$\text{Largeur de la structure: } w = 750 \text{ mm}$$

$$\text{Densité de la masse: } \rho = 0.0078 \text{ g/mm}^3$$

$$\text{Coefficient d'élasticité: } E = 210\,000 \text{ N.mm}^2$$

$$\text{Autre paramètre } t = 2.5 \text{ mm}$$

Le problème original est le suivant:

$$\underset{x_1, x_2}{\text{Min}} \quad f_1 = m = 2\pi\rho x_1 \sqrt{w^2 + x_2^2} \quad (5.47)$$

$$f_2 = s = \frac{F}{2\pi x_1 x_2} \sqrt{w^2 + x_2^2} \quad (5.48)$$

$$f_3 = d = \frac{F(w^2 + x_2^2)^{3/2}}{2\pi E x_1 x_2^2} \quad (5.49)$$

$$\text{sujet à} \quad c_1 = \frac{F}{2\pi x_1 x_2} \sqrt{w^2 + x_2^2} - \frac{1}{8} \pi^2 E \frac{t^2 + x_1^2}{w^2 + x_2^2} \leq 0 \quad (5.50)$$

$$1 \leq x_1 \leq 100 \quad (5.51)$$

$$10 \leq x_2 \leq 1000 \quad (5.52)$$

Supposons que le problème soit décomposé en deux groupes de travail: le groupe 1 appelé géométrie de la structure et déflexion, et le groupe 2 nommé vérification du flambement. Le système souhaite minimiser deux objectifs soit la masse de la structure et l'effort normal:

$$\underset{x_1, x_2}{\text{Min}} \quad F_1 = 2\pi\rho t x_1 \sqrt{w^2 + x_2^2} \quad (5.53)$$

$$F_2 = \frac{F}{2\pi t x_1 x_2} \sqrt{w^2 + x_2^2} \quad (5.54)$$

Le groupe 1 (Géométrie et déflexion) calcule la géométrie de la structure donnée par $\sqrt{w^2 + x_2^2}$ et minimise un objectif local soit la déflexion de la structure,

$f_3 = \frac{F(w^2 + x_2^2)^{3/2}}{2\pi E x_1 x_2}$. Le groupe 2 (Flambement) vérifie que l'effort normal est plus petit

que l'effort de flambage en contrôlant la contrainte

$$c_1 = \frac{F}{2\pi t x_1 x_2} \sqrt{w^2 + x_2^2} - \frac{1}{8} \pi^2 E \frac{t^2 + x_1^2}{w^2 + x_2^2} \leq 0.$$

En décomposant le problème de cette façon, une variable couplée $y_{121} = \sqrt{w^2 + x_2^2}$ est introduite en plus des deux variables interdisciplinaires x_1 et x_2 . La variable couplée, y_{121} , est calculée par le groupe de travail 1 mais est nécessaire au groupe de travail 2 dans le calcul de sa contrainte. Elle apparaît, dans le problème du groupe de travail 2 sous la variable $(x_{\text{aux}})_{121}$. Puisque les variables x_1 et x_2 sont utilisées par les groupes 1 et 2, il faut doubler ces variables pour obtenir: x_{11} pour le groupe 1 et x_{12} pour le groupe 2. Donc la transformation des variables se fait selon le tableau 5.5.

Tableau 5.5: Transformation des variables pour le problème de structure.

Transformation des variables		
Variables du Groupe 1	Variables du Groupe 2	Valeur cible du décideur
x_{11}	x_{12}	$(z_{\text{int}})_1$
x_{21}	x_{22}	$(z_{\text{int}})_2$
$y_{121} = \sqrt{w^2 + x_{21}^2}$	$(x_{\text{aux}})_{121}$	$(z_c)_{121}$

Pour résoudre ce problème, il faut le formuler selon l'approche de Gu et al. (2006).

La formulation du problème du décideur se fait comme suit:

$$\underset{(z_{\text{int}})_1, (z_{\text{int}})_2, (z_c)_{121}}{\text{Min}} \quad F_1 = 2\pi\sigma(z_{\text{int}})_1(z_c)_{121} + \sqrt{\left(x_{11}^* - (z_{\text{int}})_1\right)^2 + \left(x_{21}^* - (z_{\text{int}})_2\right)^2 + \left(y_{121}^* - (z_c)_{121}\right)^2 + \left(x_{12}^* - (z_{\text{int}})_1\right)^2 + \left(x_{22}^* - (z_{\text{int}})_2\right)^2 + \left((x_{\text{aux}})_{121}^* - (z_c)_{121}\right)^2} \quad (5.55)$$

$$F_2 = \frac{F}{2\pi(z_{\text{int}})_1(z_{\text{int}})_2}(z_c)_{121} + \sqrt{\left(x_{11}^* - (z_{\text{int}})_1\right)^2 + \left(x_{21}^* - (z_{\text{int}})_2\right)^2 + \left(y_{121}^* - (z_c)_{121}\right)^2 + \left(x_{12}^* - (z_{\text{int}})_1\right)^2 + \left(x_{22}^* - (z_{\text{int}})_2\right)^2 + \left((x_{\text{aux}})_{121}^* - (z_c)_{121}\right)^2} \quad (5.56)$$

$$\text{ sujet à } \quad 1 \leq (z_{\text{int}})_1 \leq 100 \quad (5.57)$$

$$10 \leq (z_{\text{int}})_2 \leq 1000 \quad (5.58)$$

$$750 \leq (z_c)_{121} \leq 1250 \quad (5.59)$$

On obtient $(z_{\text{int}})_1^*$, $(z_{\text{int}})_2^*$ et $(z_c)_{121}^*$.

La formulation du problème d'optimisation pour le groupe de travail 1 est:

$$\underset{s_{11}, s_{21}, (s_c)_{121}, r_{11}, r_{21}, (r_c)_{121}, x_{11}, x_{21}}{\text{Min}} \quad f_{11} = e_1 = (s_{11} + r_{11}) + (s_{21} + r_{21}) + ((s_c)_{121} + (r_c)_{121}) \quad (5.60)$$

$$f_{21} = \frac{F(w^2 + x_{21}^2)^{3/2}}{2\pi\sigma x_{11}x_{21}} \quad (5.61)$$

$$sujet \ à \ x_{11} + s_{11} - r_{11} = (z_{int})_1^* \quad (5.62)$$

$$x_{21} + s_{21} - r_{21} = (z_{int})_2^* \quad (5.63)$$

$$\sqrt{w^2 + x_{21}^2} + (s_c)_{121} - (r_c)_{121} = (z_c)_{121}^* \quad (5.64)$$

$$1 \leq x_{11} \leq 100 \quad (5.65)$$

$$10 \leq x_{21} \leq 1000 \quad (5.66)$$

$$s_{11}, s_{21}, (s_c)_{121} \geq 0 \quad (5.67)$$

$$r_{11}, r_{21}, (r_c)_{121} \geq 0 \quad (5.68)$$

On obtient s_{11}^* , s_{21}^* , $(s_c)_{121}^*$, r_{11}^* , r_{21}^* , $(r_c)_{121}^*$, x_{11}^* et x_{21}^* . Le groupe de travail 1 calcule

$$y_{121}^* = \sqrt{w^2 + x_{21}^2}$$

La formulation du problème d'optimisation pour le groupe de travail 2 est:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f_{12} = e_2 = (s_{12} + r_{12}) + (s_{22} + r_{22}) + ((s_{aux})_{121} + (r_{aux})_{121}) \\ & s_{12}, s_{22}, (s_{aux})_{121}, \\ & r_{12}, r_{22}, (r_{aux})_{121}, \\ & x_{12}, x_{22}, (x_{aux})_{121} \end{array} \quad (5.69)$$

$$sujet \ à \ c_{12} = \frac{F}{2\pi x_{12} x_{22}} (x_{aux})_{121} - \frac{1}{8} \pi^2 E \frac{t^2 + x_{12}^2}{w^2 + x_{22}^2} \leq 0 \quad (5.70)$$

$$x_{12} + s_{12} - r_{12} = (z_{int})_1^* \quad (5.71)$$

$$x_{22} + s_{22} - r_{22} = (z_{int})_2^* \quad (5.72)$$

$$(x_{aux})_{121} + (s_{aux})_{121} - (r_{aux})_{121} = (z_c)_{121}^* \quad (5.73)$$

$$1 \leq x_{12} \leq 100 \quad (5.74)$$

$$10 \leq x_{22} \leq 1000 \quad (5.75)$$

$$750 \leq (x_{aux})_{121} \leq 1250 \quad (5.76)$$

$$s_{12}, s_{22}, (s_{aux})_{121} \geq 0 \quad (5.77)$$

$$r_{12}, r_{22}, (r_{aux})_{121} \geq 0 \quad (5.78)$$

On obtient $s_{12}^*, s_{22}^*, (s_{aux})_{121}^*, r_{12}^*, r_{22}^*, (r_{aux})_{121}^*, x_{12}^*, x_{22}^*, (x_{aux})_{121}^*$.

Le détail des étapes de l'algorithme est présenté à l'annexe K. Le tableau 5.6 montre les degrés de désirabilité déterminés par le directeur et le groupe de travail 1, à partir de leurs ensembles réduits des valeurs cibles, pour leurs fonctions-objectifs respectives (F_1 et F_2) et (f_{21}). Les degrés de désirabilité sont utilisés pour classer les fonctions-objectifs dans une des 5 catégories définies (idéale, désirable, tolérable, indésirable et inacceptable).

Tableau 5.6 : Degrés de désirabilité des fonctions-objectifs du système et du sous-système 1 pour le problème de structure.

Critère	Classe	I	D	T	ID	IA
F_1	1S	5849	7742	9635	11528	13421
F_2	1S	198	277	356	435	514
f_{21}	1S	1.7762	2.6643	3.5524	4.4405	5.3286

I : (Idéal $\leq t_{m1}^+$) D : ($t_{m1}^+ <$ Désirable $\leq t_{m2}^+$) T : ($t_{m2}^+ <$ Tolérable $\leq t_{m3}^+$)
 ID : ($t_{m3}^+ <$ Indésirable $\leq t_{m4}^+$) IA : ($t_{m4}^+ <$ Inacceptable $\leq t_{m5}^+$)

Le problème a été résolu avec l'algorithme IPOMP-ED en fixant le paramètre de pénalité à 100 et le critère d'arrêt à 0.000001. Après plus de 40 000 itérations (près de 10 heures de résolution), l'algorithme n'avait pas encore convergé pour les solutions 1, 3 et 4. Seule la solution 2 a été obtenue après 15 922 itérations. Afin d'analyser le comportement des données, le nombre d'itérations a été fixé à 20 000. En observant les données, on remarque que les fonctions-objectifs semblent vouloir converger vers une solution mais très lentement. Le tableau 5.7 montre les résultats obtenus après 20 000

itérations et $\gamma = 100$. Dans certains cas (solutions 1, 2 et 3), la solution obtenue en environnement distribué est près de celle trouvée en environnement centralisé et d'en d'autres cas (solution 4) non.

Tableau 5.7 : Résultats obtenus avec l'algorithme IPOMP-ED pour le problème de structure avec $\gamma = 100$.

Iter. <i>h</i>	Niveau	Vecteur b Initial	Valeurs obtenues avec IPOMP (centralisé)	Valeurs obtenues avec IPOMP-ED (distribué) et $\gamma = 100$
1	Système	$b_1^1 = 5849$ (I) $b_2^1 = 198$ (I)	$F_1 = 5849$ (I) $F_2 = 300.0513$ (T)	$F_1 = 5849$ (I) $F_2 = 300.841$ (T)
	Groupe 1	$b_{21}^1 = 1.7$ (I)	$f_{21} = 2.1432$ (D)	$f_{21} = 2.15455$ (D)
	Solution optimale			(46.6121, 697.434)
2	Système	$b_1^2 = 6000$ (D) $b_2^2 = 250$ (D)	$F_1 = 6000$ (D) $F_2 = 292.5$ (T)	$F_1 = 6000$ (D) $F_2 = 292.499$ (T)
	Groupe 1	$b_{21}^2 = 2.5$ (D)	$f_{21} = 2.0893$ (D)	$f_{21} = 2.0893$ (D)
	Solution optimale			(46.2345, 747.914)
3	Système	$b_1^3 = 7000$ (D) $b_2^3 = 200$ (D)	$F_1 = 7000$ (D) $F_2 = 250.7143$ (D)	$F_1 = 7000$ (D) $F_2 = 252.017$ (D)
	Groupe 1	$b_{21}^3 = 2.6$ (D)	$f_{21} = 1.7908$ (D)	$f_{21} = 1.8095$ (D)
	Solution optimale			(56.536, 677.29)
4	Système	$b_1^4 = 4565$ (I) $b_2^4 = 390$ (ID)	$F_1 = 4565$ (I) $F_2 = 390.0621$ (ID)	$F_1 = 4565$ (I) $F_2 = 434.403$ (ID)
	Groupe 1	$b_{21}^4 = 2.83$ (T)	$f_{21} = 2.8269$ (T)	$f_{21} = 3.50615$ (T)
	Solution optimale			(42.5268, 452.875)
I: Idéal D: Désirable T: Tolérable ID: Indésirable IA: Inacceptable				

Comme au problème précédent, il faut s'assurer que la valeur associée au paramètre de pénalité est suffisamment grande (DeMiguel, 2001). Pour vérifier ce fait, le paramètre de pénalité a été augmenté à 1000 et le problème a été résolu une fois de plus. Comme l'ont établi DeMiguel (2001) et Tribes et al., (2005), des problèmes numériques associés à une valeur trop élevée du paramètre ont été observés. La conclusion de cet essai est que la valeur (100) donnée, au départ, au paramètre de pénalité était trop grande, donc le

facteur de pénalité a été diminué et fixé à 25. Le tableau 5.8 montre les résultats obtenus pour les différentes valeurs cibles et les différentes valeurs du paramètre de pénalité. Les termes entre parenthèses dans le tableau représentent les degrés de désirabilité des valeurs trouvées pour les fonctions-objectifs. Dans tous les cas, avec un paramètre de pénalité de 25, l'algorithme a convergé à la solution optimale trouvée en environnement centralisé.

Tableau 5.8 : Comparaison des résultats obtenus avec l'algorithme IPOMP-ED pour le problème de structure avec $\gamma = 100$ et $\gamma = 25$.

<i>h</i>	Vecteur b Initial	Valeurs obtenues environnement centralisé	Valeurs obtenues environnement distribué $\gamma = 100$	Déférence $\gamma = 100$	Valeurs obtenues environnement distribué $\gamma = 25$	Déférence $\gamma = 25$
1	$b_1^1 = 5849$	$F_1 = 5849$	$F_1 = 5849$ (I)	0 %	$F_1 = 5848.99$ (I)	0 %
	$b_2^1 = 198$	$F_2 = 300.05$	$F_2 = 300.84$ (T)	0.26 %	$F_2 = 300.04$ (T)	0 %
	$b_{21}^1 = 1.7$	$f_{21} = 2.14$	$f_{21} = 2.15$ (D)	0.47 %	$f_{21} = 2.14$ (D)	0 %
	Solution optimale Nombre d'itérations			(46.6121, 697.434) 20 000 (max)	(45.0256, 749.439) 18 294	
2	$b_1^2 = 6000$	$F_1 = 6000$	$F_1 = 6000$ (D)	0 %	$F_1 = 5999.99$ (D)	0 %
	$b_2^2 = 250$	$F_2 = 292.5$	$F_2 = 292.5$ (T)	0 %	$F_2 = 292.49$ (T)	0 %
	$b_{21}^2 = 2.5$	$f_{21} = 2.09$	$f_{21} = 2.09$ (D)	0 %	$f_{21} = 2.09$ (D)	0 %
	Solution optimale Nombre d'itérations			(46.2345, 747.914) 15 922	(46.1882, 749.432) 4 530	
3	$b_1^3 = 7000$	$F_1 = 7000$	$F_1 = 7000$ (D)	0 %	$F_1 = 7000$ (D)	0 %
	$b_2^3 = 200$	$F_2 = 250.71$	$F_2 = 252.02$ (D)	0.52 %	$F_2 = 250.71$ (D)	0 %
	$b_{21}^3 = 2.6$	$f_{21} = 1.79$	$f_{21} = 1.81$ (D)	1.12 %	$f_{21} = 1.79$ (D)	0 %
	Solution optimale Nombre d'itérations			(56.536, 677.29) 20 000 (max)	(53.8922, 749.264) 28 041	
4	$b_1^4 = 4565$	$F_1 = 4565$	$F_1 = 4565$ (I)	0 %	$F_1 = 4564.98$ (I)	0 %
	$b_2^4 = 390$	$F_2 = 390.06$	$F_2 = 434.40$ (ID)	11.37 %	$F_2 = 389.98$ (ID)	0 %
	$b_{21}^4 = 2.83$	$f_{21} = 2.83$	$f_{21} = 3.51$ (T)	24.03 %	$f_{21} = 2.83$ (T)	0 %
	Solution optimale Nombre d'itérations			(42.5268, 452.875) 20 000 (max)	(37.9662, 632.93) 31 359	

I: Idéal D: Désirable T: Tolérable ID: Indésirable IA: Inacceptable

La convergence des fonctions-objectifs du directeur (système) et du groupe de travail 1 (sous-système 1) peut être observée aux figures 5.5, 5.6, 5.7 et 5.8.

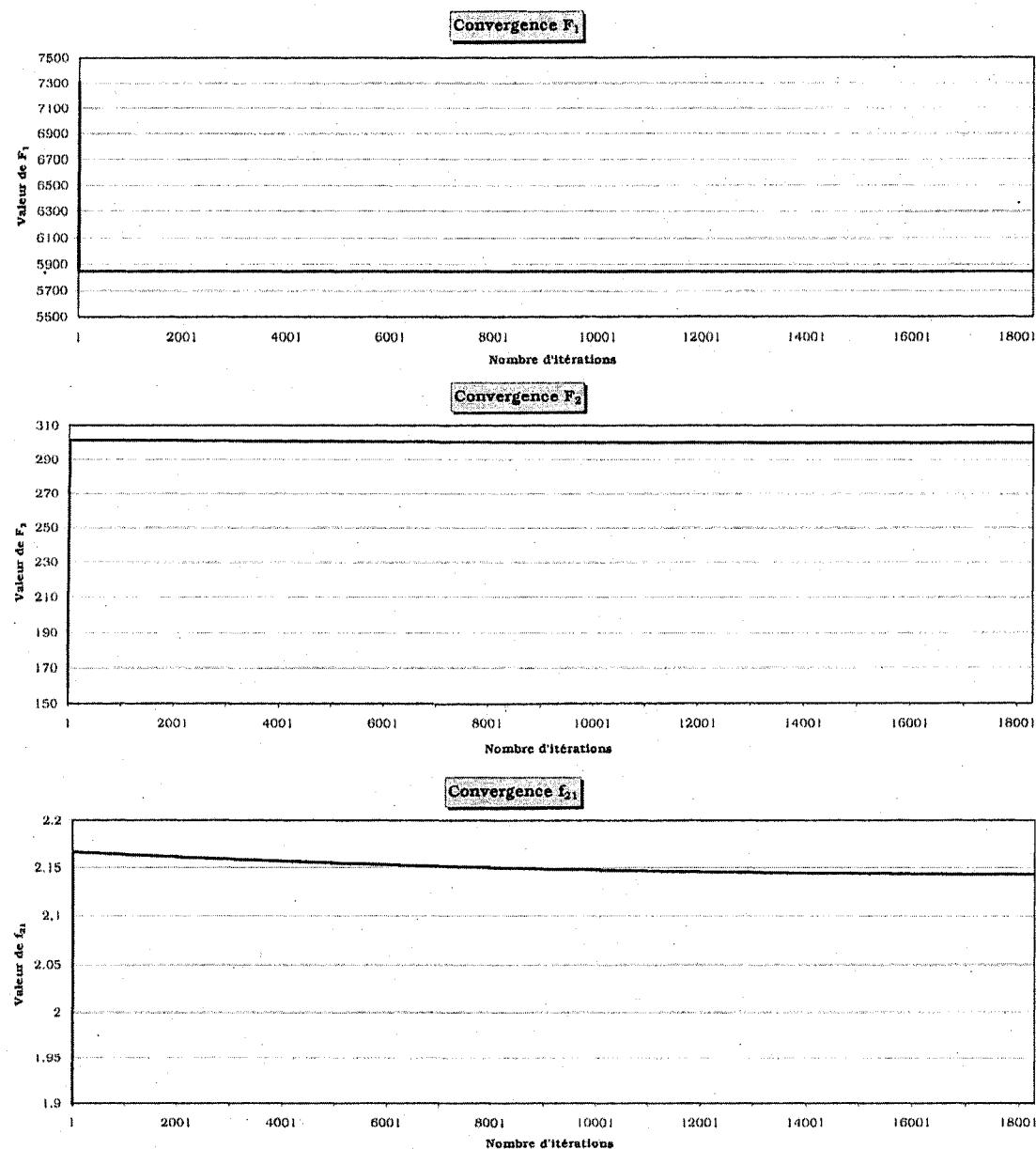


Figure 5.5: Convergence des fonctions F_1 et F_2 du directeur (système) et de la fonction f_{21} du groupe de travail 1 (sous-système 1) pour la solution 1 du problème de structure.

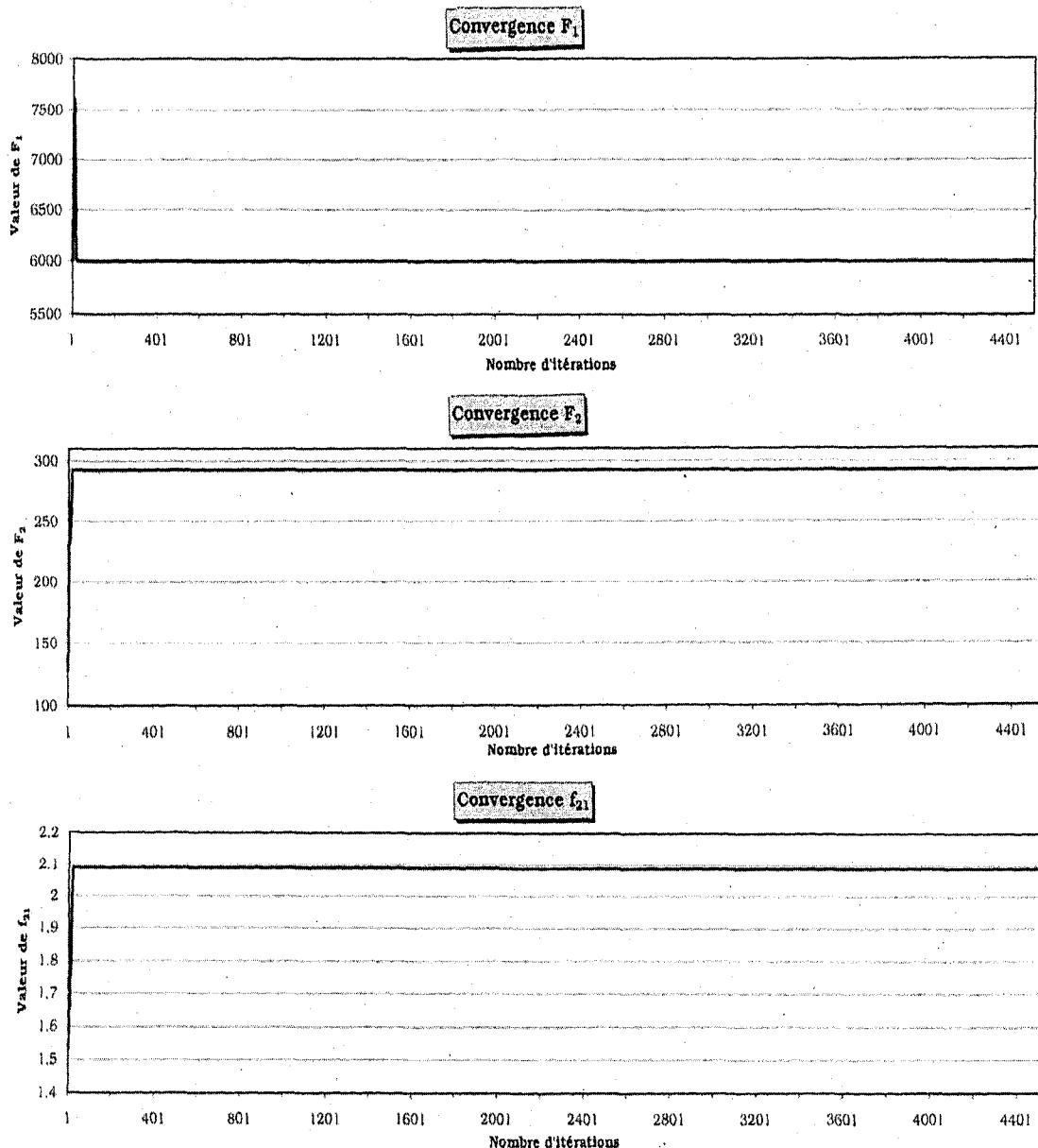


Figure 5.6: Convergence des fonctions F_1 et F_2 du directeur (système) et de la fonction f_{21} du groupe de travail 1 (sous-système 1) pour la solution 2 du problème de structure.

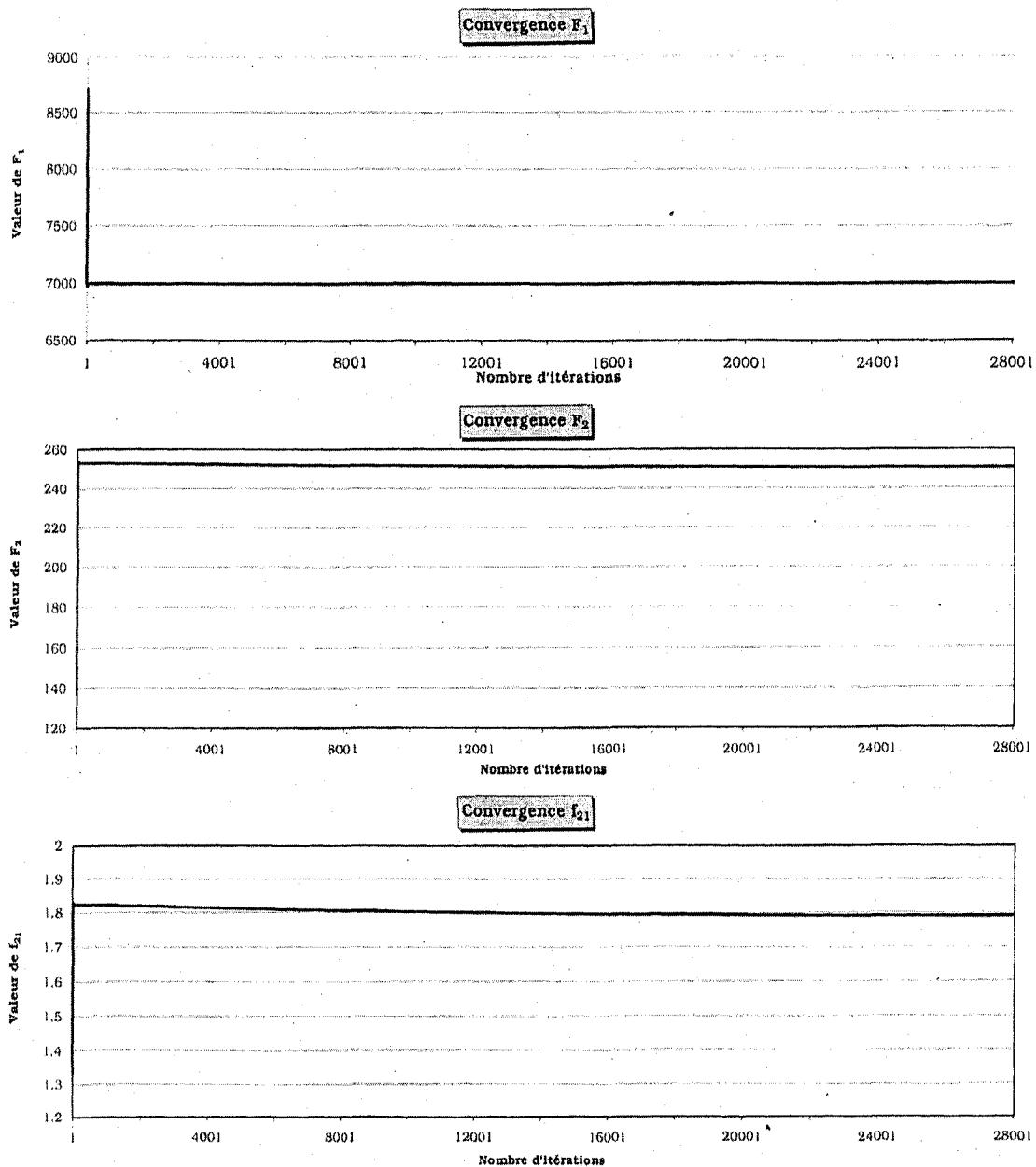


Figure 5.7: Convergence des fonctions F_1 et F_2 du directeur (système) et de la fonction f_{21} du groupe de travail 1 (sous-système 1) pour la solution 3 du problème de structure.

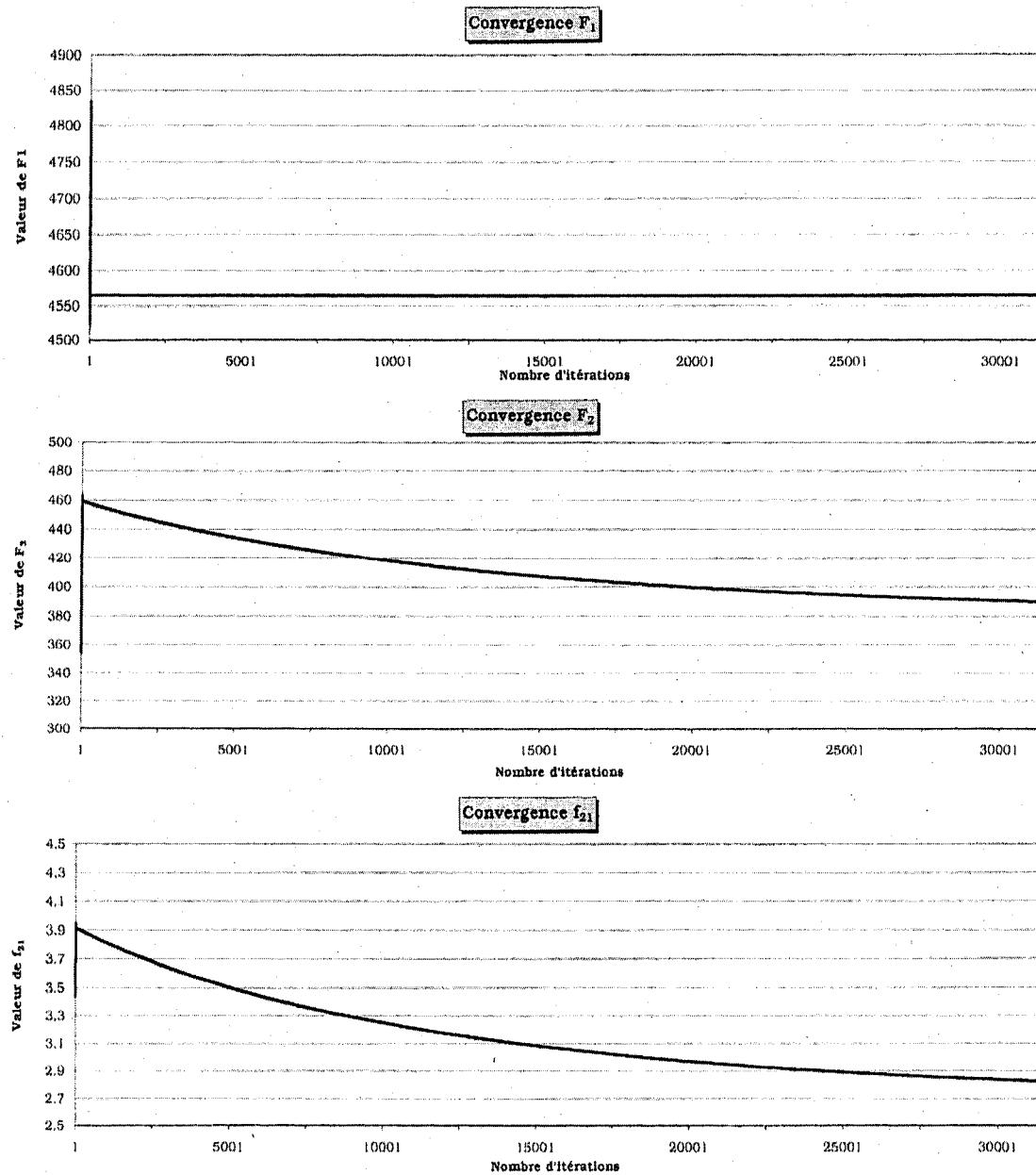


Figure 5.8: Convergence des fonctions F_1 et F_2 du directeur (système) et de la fonction f_{21} du groupe de travail 1 (sous-système 1) pour la solution 4 du problème de structure.

5.3 Conclusion

Ce chapitre a démontré que l'algorithme IPOMP-ED permet de résoudre des problèmes à objectifs multiples en environnement distribué. Les solutions trouvées en environnement distribué sont les mêmes (ou presque) que celles obtenues avec un algorithme traditionnel d'optimisation à multiples objectifs. La vitesse de convergence dépend en grande partie du choix du paramètre de pénalité et, comme il a été démontré, le choix de ce paramètre n'est pas facile. Suite aux travaux effectués dans ce chapitre, il est suggéré d'associer une petite valeur à ce paramètre (par exemple 10) et de l'augmenter graduellement. De plus, le critère d'arrêt devrait être diminué et fixé à 1×10^{-8} au lieu de 1×10^{-6} afin d'améliorer la précision des solutions trouvées. Finalement, d'autres solveurs, plus robustes, devraient être considérés pour résoudre les problèmes en environnement distribué.

Malgré cela, il est important de retenir que l'algorithme permet de résoudre des problèmes à objectifs multiples dans un environnement distribué. De plus, les solutions trouvées sont Pareto-optimales ce qui signifie que plusieurs alternatives de conception différentes peuvent être générées. Par contre, certaines de ces alternatives sont obtenues en un temps de résolution assez long. Ce temps peut sûrement être optimisé par un choix judicieux du paramètre de pénalité, du critère d'arrêt et du solveur. D'autres recherches (et essais) devront être effectuées dans ce domaine.

CHAPITRE 6

LA CONCEPTION DE PRODUIT ROBUSTE EN ENVIRONNEMENT DISTRIBUÉ

6.0 Introduction

Les variations dues aux processus manufacturiers et à l'utilisation du produit dans des environnements différents peuvent affecter la qualité et la performance du produit. Plusieurs méthodes permettent d'étudier l'effet de la variabilité sur la conception de produit. L'objectif visé par toutes ces méthodes est le même: comprendre ce qui influence la variation de la performance du produit et la réduire au minimum. Cependant, il est encore plus important d'évaluer la faisabilité de la conception (satisfaction des contraintes) lorsque les variables sont soumises à des variations. Encore là, plusieurs approches permettent d'assurer la faisabilité des solutions.

Ce chapitre permettra de faire la lumière sur toutes ces méthodes et de définir une méthodologie pour étudier la robustesse des solutions Pareto-optimales déterministes. L'objectif visé par la méthodologie proposée n'est pas de recommencer le processus de résolution en environnement distribué mais de fournir au directeur et aux groupes de travail un outil d'aide à l'analyse des solutions Pareto-optimales déterministes trouvées au chapitre précédent. L'analyse effectuée dans ce chapitre diffère de l'analyse de sensibilité qui accompagne généralement un problème traditionnel d'optimisation, par exemple en programmation linéaire. En effet, en recherche opérationnelle, l'analyse de sensibilité permet de vérifier le comportement de la solution optimale d'un problème lorsque des changements sont effectués dans les paramètres du modèle. Sont considérés comme paramètres les coefficients des variables de décision dans les contraintes et les

fonctions-objectifs ainsi que les membres de droite des contraintes (Hillier et Liberman, 2001). L'analyse de sensibilité réalisée dans ce chapitre est relié au domaine de la qualité et de la robustesse et consiste plutôt à mettre sous variation la solution optimale (variables de décision) et à observer le comportement de la réponse (valeur des fonctions-objectifs) afin de déterminer quelles variables influencent le plus les fonctions-objectifs.

6.1 L'analyse de robustesse

La notion de conception robuste a été introduite par l'ingénieur japonais Taguchi (Kackar, 1985). Ce dernier propose d'améliorer la qualité dès la phase de conception et de réduire les coûts de développement des nouveaux produits. Les problèmes de qualité sont principalement causés par l'écart entre ce qui est produit par le processus de fabrication et la cible visée par la conception (T). On distingue trois types de cas pour les cibles: viser la cible nominale T ($0 < T < \infty$) ("*nominal is the best*"), viser la cible $T = 0$ ("*lower the better*") et viser la cible $T = \infty$ ("*larger the better*"). L'écart, entre ce qui est fabriqué et la cible définie par la conception, est créé par des facteurs dits contrôlables et ceux appelés incontrôlables ou bruit. La méthode Taguchi met l'accent sur les facteurs contrôlables pour réduire au minimum l'impact des facteurs bruit sur la performance (cible visée). La méthodologie de Taguchi comporte trois étapes (Nguyen, 2006): la conception du système, la définition des paramètres et l'établissement des limites de spécifications.

La *conception du système* fait appel aux connaissances scientifiques et aux lois de la physique pour concevoir un produit et créer un prototype qui permettra de rencontrer à la fois les besoins du consommateur et les exigences de la production. Le défi pour les concepteurs est de traduire fidèlement les exigences du consommateur en

caractéristiques techniques et mesurables du produit et d'établir correctement les cibles liées à ces caractéristiques. La maison de la qualité (DFQ), présentée au chapitre 1, est un des outils utilisés pour réaliser ce travail.

La *définition des paramètres* consiste à déterminer le niveau optimal des paramètres du produit et du processus afin de minimiser la variabilité de la qualité. La variabilité est causée par les facteurs de bruits internes et de bruits externes. Les facteurs de bruits internes proviennent de l'usure et de la détérioration des équipements, des variations incontrôlables de matières premières et des conditions de production non parfaitement contrôlées. Les facteurs de bruits externes sont composés des conditions variables d'utilisation du produit et des conditions d'environnement comme l'humidité et la température.

La détermination des *limites de spécifications* sert à fixer, pour chaque caractéristique de la qualité, un intervalle de valeurs acceptables (tolérances ou spécifications) autour des cibles. La fixation des limites de tolérance s'appuie souvent sur la conception même du produit, sur celle du processus concerné, sur l'expérience antérieure relative à ce type de produit ou de processus ainsi que sur les exigences des clients. Les concepteurs sont constamment confrontés avec le dilemme suivant: doivent-ils déterminer des limites de spécification serrées ou larges ? Un intervalle étroit engendre généralement des coûts de fabrication plus importants. Par contre, il contribue à augmenter la qualité des pièces et donc la satisfaction du consommateur. D'un autre côté, un intervalle large permet une plus grande variation de la performance du produit et donc il contribue à une moindre satisfaction du client. Le défi est de trouver des limites qui relèvent d'un compromis entre les coûts engendrés par un intervalle étroit et les pertes occasionnées par un intervalle large.

Taguchi propose la fonction quadratique de perte pour représenter la perte $L(X)$ due à l'écart entre la caractéristique de la qualité X et la cible visée T (cas d'une cible fixe):

$$L(X) = k(X - T)^2 \quad (6.1)$$

où k est une constante appropriée choisie pour représenter la valeur de la perte.

Pour le cas où la valeur cible visée est la plus petite possible $T = 0$, la fonction de perte prend la forme particulière suivante:

$$L(X) = kX^2 \quad (6.2)$$

Lorsque la valeur cible visée est la plus grande possible ($T = \infty$), on utilise la fonction suivante:

$$L(X) = k(1/X^2) \quad (6.3)$$

La perte de qualité décrite plus haut assume que la caractéristique X correspond à un système statique (Besterfield et al., 2003). Un système statique est caractérisé par un signal d'entrée constant. Il existe aussi d'autres systèmes appelés dynamiques car le signal d'entrée n'est pas constant mais plutôt une fonction variable. Un exemple d'un système dynamique est la direction d'une voiture: la variable de réponse est le rayon de courbure de la voiture et le signal d'entrée est l'angle du volant.

En réalité, il est quasi impossible d'atteindre la valeur cible et donc il faut considérer une certaine variation due aux facteurs de bruit. La fonction de perte doit donc tenir compte de la variation d'une production de plusieurs pièces représentée par une distribution $f(X)$. Pour le cas d'une valeur cible nominale, il faut évaluer la fonction de perte quadratique moyenne LM :

$$LM = k \int (X - T)^2 f(X) dX = k[(\mu - T)^2 + \sigma^2] \quad (6.4)$$

qui fait intervenir seulement la variance σ^2 et la moyenne μ de la production des pièces. On cherche donc à minimiser la perte moyenne LM .

Pour le cas où la valeur cible est $T = 0$, l'expression est la suivante:

$$LM = k \int X^2 f(X) dX = k[\mu^2 + \sigma^2] \quad (6.5)$$

En pratique, les paramètres σ^2 et μ^2 sont inconnus et ils sont remplacés par une estimation basée sur un échantillonnage de caractéristiques de produit X_1, X_2, \dots, X_n .

Alors il est possible de calculer:

$$\hat{\mu} = \bar{X} = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i \quad (6.6)$$

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = (1/(n-1)) \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (6.7)$$

La fonction de perte moyenne LM est elle-même estimée par:

$$LM = k[s^2 + (\bar{X} - T)^2] \quad (6.8)$$

Pour le cas $T = 0$, la perte moyenne LM peut s'écrire

$$LM = k(1/n) \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (6.9)$$

et pour le cas $T = \infty$, l'équation est la suivante :

$$LM = k(1/n) \sum_{i=1}^n (1/X_i)^2 \quad (6.10)$$

Pour minimiser la perte quadratique moyenne LM dans le cas d'une valeur cible nominale, il faut minimiser la variance s^2 ainsi que la différence entre la moyenne et la valeur cible désirée $(\bar{X} - T)^2$. Plusieurs auteurs ont développé un modèle d'optimisation de la moyenne et la variance d'une réponse (Vining et Myers, 1990; Lin et Tu, 1995; Copeland et Nelson, 1996; Kim et Lin, 1998; Ding et al., 2004). Cependant aucun d'entre eux l'a incorporé dans une structure d'optimisation distribuée à multiples objectifs. Lamghabbar et al. (2004) ont développé un modèle mathématique, dont la

fonction-objectif est la fonction de perte de qualité de Taguchi, pour optimiser simultanément les phases 2 et 3 du processus DFQ. Leur modèle permet de trouver les valeurs optimales des caractéristiques techniques et des caractéristiques de procédé simultanément.

6.2 L'analyse de sensibilité

L'analyse de sensibilité étudie comment des perturbations sur les entrées du modèle engendrent des perturbations sur la réponse. Il est possible de grouper les méthodes d'analyse de sensibilité en trois classes: les méthodes de *screening*, *l'analyse de sensibilité locale* et *l'analyse de sensibilité globale* (Jacques, 2005).

Les méthodes de *screening* (Saltelli et al., 2000) analysent quantitativement l'importance des variables d'entrée sur la variabilité de la réponse du modèle. Elles permettent d'établir une hiérarchie au sein des variables d'entrée en fonction de leur influence sur la variabilité de la réponse.

L'analyse de sensibilité locale, tout comme l'analyse globale, est une méthode d'analyse quantitative, qui permet d'établir une hiérarchie au sein des variables d'entrée ainsi que de donner un ordre de grandeur des écarts au sein de cette hiérarchie. L'analyse de sensibilité locale étudie comment de petites perturbations autour des valeurs locales des entrées se répercutent sur la valeur de la sortie. La méthode d'analyse locale la plus classique est l'approche OFAT (*One Factor At Time*), qui consiste à calculer ou estimer les indices de sensibilité exprimant l'effet sur la valeur de la réponse de perturber les valeurs des variables d'entrée autour d'une valeur nominale (Jacques, 2005).

L'analyse de sensibilité globale s'intéresse à la variabilité de la sortie du modèle d'optimisation dans tout son domaine de variation. Elle étudie comment la variabilité des entrées se répercute sur celle de la sortie, en déterminant quelle part de variance de la sortie est due à telles entrées ou tel ensemble d'entrées. Selon Jacques (2005), il est possible de distinguer l'analyse locale de l'analyse globale de la façon suivante: l'analyse locale s'intéresse à la valeur de la réponse, tandis que l'analyse globale s'intéresse à sa variabilité.

En étudiant comment la réponse du modèle d'optimisation réagit aux variations de ses variables d'entrée, l'analyse de sensibilité permet de déterminer (Jacques, 2005):

1. Quelle est la fiabilité du modèle par rapport au processus qu'il modélise? En effet, si l'analyse de sensibilité montre une importance forte d'une variable d'entrée qui en réalité est connue comme non influente, le modèle ne reflétera pas correctement le processus. Il sera alors nécessaire de modifier le modèle.
2. Quelles sont les variables qui contribuent le plus à la variabilité de la réponse du modèle? Connaissant les variables d'entrée les plus influentes, les erreurs sur la sortie du modèle pourront être diminuées, soit lorsque cela est possible en diminuant les erreurs sur les entrées les plus influentes, soit en adaptant la structure du modèle pour réduire l'effet des erreurs sur ces entrées.
3. Quelles sont les variables les moins influentes ? Il sera possible de les considérer comme des paramètres, en les fixant par exemple à leur espérance, et ainsi obtenir un modèle plus simple avec moins de variables d'entrée.
4. Quelles variables ou quels groupes de variables interagissent avec quelles (ou quels) autres: l'analyse de sensibilité permet de mieux comprendre le phénomène modélisé, en éclaircissant les relations entre les variables d'entrée et la variable de sortie.

L'analyse de robustesse peut être considérée comme un cas particulier de l'analyse de sensibilité où l'objectif recherché est de rendre un système insensible à des variables de bruit. Pour simplifier le texte, seul le terme analyse de sensibilité sera utilisé par la suite.

6.3 Méthode d'analyse de sensibilité

Il existe trois méthodes pour faire de l'analyse de sensibilité : expérimentale, analytique et numérique (Wikipédia, 2007).

L'approche expérimentale est probablement la plus connue. Cette méthode implique l'identification des variables qui peuvent être contrôlées et des variables qui sont traitées comme bruit. Une expérience est alors conçue pour étudier comment les changements à la valeur nominale des variables contrôlables peuvent limiter le transfert des variations des variables de bruit à la réponse. Cette approche est souvent associée aux méthodes de Taguchi.

L'approche analytique est fondée sur le développement d'un modèle analytique du système étudié. La variabilité prévue pour la réponse est alors trouvée en employant une méthode comme la propagation des erreurs ou par les fonctions de variables aléatoires. Celles-ci produisent typiquement une expression algébrique qui peut être analysée pour l'optimisation et la robustesse. Cette approche est aussi précise que l'est le modèle et elle peut être très difficile, voire impossible, à utiliser pour des systèmes complexes. L'approche analytique pourrait être employée conjointement avec un modèle basé sur des résultats d'expériences ou des simulations numériques du système.

Dans *l'approche numérique*, le modèle est généré un certain nombre de fois par la simulation de Monte Carlo ou par la formule de la propagation des erreurs afin de

prévoir la variabilité des réponses. Des méthodes numériques d'optimisation telles que "Hill Climbing" ou les algorithmes évolutifs sont alors employés pour trouver les valeurs nominales optimales pour les variables d'entrée. Cette approche exige typiquement moins de temps et d'effort que les deux autres méthodes, mais la simulation et l'optimisation demandent des ressources informatiques plus importantes.

Cependant, il est possible d'utiliser un mélange de ces trois méthodes afin d'obtenir les meilleurs résultats et de réduire les ressources nécessaires et le temps d'exécution.

6.4 Conception réalisable robuste

Les techniques d'optimisation déterministes ont fréquemment été appliquées avec succès pour résoudre plusieurs problèmes de conception. Cependant, il est reconnu qu'il existe toujours des sources de variation dans tout système dues aux conditions de conception (propriété des matériaux, dimensions physiques des pièces, conditions d'opération, conditions d'utilisation, etc.). Les approches déterministes ne considèrent pas l'impact de ces variations et la solution trouvée peut être très sensible à ces variations.

Dans certains cas, lors du processus de conception robuste, peu importe la méthode employée pour obtenir un produit robuste (peu de variations dans les fonctions-objectifs), il est plus critique de maintenir la faisabilité de la conception robuste en satisfaisant les contraintes. Par exemple, pour un problème de structure, satisfaire la contrainte d'effort lorsque soumise à des variations est plus important que d'obtenir une performance du produit robuste (minimiser la masse par exemple). Il existe plusieurs approches pour considérer l'aspect faisabilité lors de la conception robuste. On peut les diviser en deux groupes. Les méthodes requérant des analyses statistiques et probabilistes (*the probabilistic feasibility analysis, the moment matching method*) et

celles ne nécessitant pas d'analyses statistiques et probabilistes (*the worst case, the method of corner space evaluation et the variation patterns method*). Ces méthodes sont décrites et comparées dans Du et Chen (2000b).

En conception robuste, deux aspects sont considérés: la robustesse des fonctions-objectifs (qui souvent représentent les performances du système) et la robustesse des contraintes (qui assurent la faisabilité et la sécurité du système). En ce qui concerne les fonctions-objectifs, la robustesse se traduit par la minimisation de la variance des fonctions-objectifs. La variance des fonctions-objectifs est souvent estimée par la formule de propagation des erreurs (Chen et al., 1999; Messac et Ismail-Yahaya, 2002; McAllister et Simpson, 2003). Cependant, Messac et Ismail-Yahaya (2002) spécifient que la formule de propagation des erreurs, utilisée intensivement dans la littérature, n'est pas adéquate pour prévoir le niveau de variation. Pour les contraintes, c'est différent. Puisqu'elles assurent la faisabilité et la sécurité du système, on ne cherche donc pas à minimiser leurs variances mais bien à s'assurer qu'elles soient toujours respectées lorsque les variables de conception sont soumises à des variations. Dans ce cas, un terme de pénalité doit être ajouté aux contraintes pour compenser la variation des variables de conception. Pour sa simplicité, la méthode *the worst case analysis* est la plus employée (Chen et al., 1999; Messac et Ismail-Yahaya, 2002; McAllister et Simpson, 2003; Gu et al., 2006). Lorsque cette méthode est employée, Du et Chen (2000b) propose d'utiliser $\Delta x = 3\sigma_x$ pour obtenir un niveau de confiance de 99.73%.

6.5 Optimisation distribuée à objectifs multiples dans un contexte stochastique

Les modèles d'optimisation multidisciplinaire, présentés dans les chapitres précédents, donnent des conceptions optimales déterministes, qui sont fréquemment poussées aux limites des contraintes de conception, laissant peu de place pour des incertitudes dans les

entrées du système. En conséquence, la solution de conception obtenue peut être extrêmement sensible à la variation des entrées du système ce qui mènera à une perte de performance et à une solution souvent risquée si les contraintes ne sont pas respectées (Du et Chen, 2000b). Cette section présente les récents développements pour l'intégration de l'incertitude dans les approches à objectifs multiples et collaboratives.

Chen et al. (1999) intègrent l'aspect multiples objectifs de la conception robuste en transformant le problème conventionnel suivant en un problème de robustesse. De plus, ils considèrent la faisabilité de la conception robuste. Le problème conventionnel est le suivant:

$$\text{Min } f(x) \quad (6.11)$$

$$\text{sujet à } c_q(x) \leq 0 \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (6.12)$$

$$x_L \leq x \leq x_U \quad (6.13)$$

où x , x_L et x_U sont les vecteurs des variables de conception, des bornes inférieures et des bornes supérieures respectivement, $f(x)$ est la fonction-objectif et $c_q(x) \leq 0$ est la $q^{\text{ième}}$ contrainte. Ainsi, le problème robuste est formulé sous la forme d'un problème à deux objectifs:

$$\text{Min } [\mu_f, \sigma_f] \quad (6.14)$$

$$\text{sujet à } c_q(x) + k_q \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial c_q}{\partial x_i} \right| \Delta x_i \leq 0 \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (6.15)$$

$$x_L + \Delta x \leq x \leq x_U - \Delta x \quad (6.16)$$

où μ_f et σ_f sont la moyenne et l'écart-type de la fonction-objectif $f(x)$.

La valeur de l'écart-type peut être obtenue, dans le cas où la variation des variables de conception x est petite, par l'approximation d'ordre 1 de Taylor. Pour étudier la variation des contraintes, les auteurs ont utilisé la méthode *the Worst Case Analysis*. Les contraintes originales sont modifiées en ajoutant un terme de pénalité à chacune d'elles

et où k_q est le poids associé à ce terme. Les termes de pénalité sont déterminés par le concepteur. Les bornes sur les variables de conception sont aussi modifiées pour assurer la faisabilité. Le problème à objectifs multiples proposé par Chen et al. (1999) est résolu par l'approche du *Compromise Programming*. Pour valider leur approche, deux problèmes tests ont été utilisés: un problème purement mathématique et un problème de conception d'une structure à deux barres.

Messac et Ismail-Yahaya (2002) ont proposé une approche de conception robuste qui maintient la nature multiples objectifs de la formulation mathématique. En plus des variables de conception (x), le modèle peut aussi comprendre des paramètres (p). Sont considérés comme paramètres les coefficients des variables de décision dans les contraintes et les fonctions-objectifs ainsi que les membres de droite des contraintes (Hillier et Liberman, 2001). Les auteurs considèrent que ces paramètres peuvent être sujets à de la variabilité. Ils formulent le problème robuste en employant la méthode du *Linear Physical Programming*. Cette méthode leur permet d'exprimer les préférences indépendamment pour chaque objectif de conception ($f(x, p)$), chaque variation de l'objectif de conception ($\tilde{f}(x, p)$), chaque variation des variables de conception (\tilde{x}) et chaque variation des paramètres (\tilde{p}). Leur formulation considère deux cas. Dans le premier cas, la variation des variables de conception et des paramètres est fixe (\tilde{x}_p, \tilde{p}_p). Le deuxième cas considère que les variables et les paramètres sont assujettis à de la variabilité non contrôlée (\tilde{x}_v, \tilde{p}_v). Les indices p et v représentent respectivement la variation fixe et la variation non contrôlée.

Dans le premier cas, l'approche comprend deux étapes:

- minimiser les fonctions-objectifs.
- minimiser la variation des fonctions-objectifs afin d'avoir une performance robuste selon la variation des variables de conception.

Dans le cas où les variables et les paramètres sont assujettis à des variations incontrôlées, il faut ajouter une troisième étape:

- minimiser les fonctions-objectifs.
- minimiser la variation des fonctions-objectifs afin d'avoir une performance robuste selon la variation des variables de conception.
- maximiser la variation permise sur chaque variable de conception afin de minimiser les coûts de fabrication.

Pour quantifier la variation de la performance des fonctions-objectifs due aux variations des variables de conception, plusieurs méthodes peuvent être utilisées. Messac et Ismail-Yahaya (2002) emploient l'approche analytique (propagation des erreurs):

$$\tilde{f}_m(x, p) = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_i} \tilde{x}_i \right)^2 + \sum_i \left(\frac{\partial f_m}{\partial p_i} \tilde{p}_i \right)^2} \quad (6.17)$$

Ils spécifient que cette approche n'est pas adéquate pour prévoir le niveau de variation.

De manière similaire, la variation des contraintes peut être évaluée de différentes façons. Messac et Ismail-Yahaya (2002) ont choisi la suivante, qui s'apparente à la méthode "*the worst case*":

$$\tilde{c}_q(x, p) = \sum_i \left| \frac{\partial c_q}{\partial x_i} \tilde{x}_i \right| + \sum_i \left| \frac{\partial c_q}{\partial p_i} \tilde{p}_i \right| \quad (6.18)$$

L'aspect multiples objectifs est considéré dans une fonction-objectif globale et leur approche n'a pas été utilisée dans un environnement distribué.

McAllister et Simpson (2003) ont incorporé l'incertitude dans leur structure d'optimisation multidisciplinaire collaborative déterministe développée auparavant (McAllister et al., 2000) en utilisant l'approche proposée par Chen et al. (1999). Leur approche fournit une flexibilité additionnelle par rapport à l'approche traditionnelle de

Taguchi, qui maximise le ratio signal-bruit en permettant au concepteur de considérer explicitement un compromis entre l'atteinte de la performance et sa robustesse. Ainsi, McAllister et Simpson (2003) proposent une formulation d'optimisation collaborative probabiliste pour la conception robuste de système complexe. En général, nous avons:

$$Y = f(x, z) \quad (6.19)$$

où Y est la réponse, x sont les variables de conception et z représente la source d'incertitude. La moyenne et la variance de la réponse sont déterminées par l'équation de Taylor de premier ordre en supposant que les variations sont petites et que les sources d'incertitudes sont indépendantes.

$$\mu_Y = f(\mu_x, \mu_z) \quad (6.20)$$

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^l \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 + \sum_{i=1}^l \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} \right)^2 \sigma_{z_i}^2 \quad (6.21)$$

Dans une formulation déterministe, l'objectif est soit de maximiser, minimiser ou de rencontrer la valeur cible désirée représentée par l'équation $\mu_Y = f(\mu_x, \mu_z)$. La formulation robuste incorpore aussi la variance σ^2 de la réponse Y . Les équations ci-dessus sont utilisées pour établir les objectifs au niveau système dans la nouvelle formulation pour atteindre la conception robuste. Au niveau des groupes de travail, il y a une seule fonction-objectif (de compatibilité) et l'incertitude est intégrée dans les contraintes par la méthode *the worst case*. Les bornes sur les variables de conception ne sont pas modifiées. Les auteurs démontrent l'applicabilité de cette approche avec la conception d'une chambre à combustion interne d'un moteur. Initialement ce problème a une seule fonction-objectif. En ajoutant la variance, le décideur doit maintenant résoudre un problème à objectifs multiples. Pour examiner l'impact de l'incertitude sur le système, ils introduisent de la variation dans trois variables de conception afin de refléter les variations dues à la fabrication et dans trois paramètres afin de refléter la variation due aux conditions d'utilisation et à l'environnement.

Gu et al. (2006) ont développé une méthode de propagation des erreurs pour estimer l'incertitude des variables couplées dans une structure multidisciplinaire afin de tenir compte de la variation dans les variables de conception et des erreurs de prédiction associées aux outils de conception utilisés par les groupes de travail. Leur approche permet de considérer l'incertitude au niveau des groupes de travail en intégrant la robustesse dans les contraintes lorsque ces dernières comprennent des variables couplées. Cependant, leur approche ne traite pas de la variation des fonctions-objectifs. De plus, l'aspect multiples objectifs n'est pas considéré.

6.6 Processus pour l'analyse de sensibilité avec des objectifs multiples

La méthodologie proposée dans cette thèse vise deux principaux objectifs. Premièrement, lorsque les variables de conception sont soumises à des variations, il est important d'assurer la faisabilité de la conception. Pour ce faire, des termes de pénalité sont ajoutés aux contraintes pour tenir compte de la variation des variables et les problèmes sont résolus à nouveau aux degrés de désirabilité déjà établis par le directeur et les groupes de travail. Deuxièmement, il est important de connaître parmi les solutions réalisables sous variations, celle produisant le moins de variations dans les réponses (fonctions-objectifs). Puisque Messac et Ismail-Yahaya (2002) spécifient que la formule de propagation des erreurs n'est pas adéquate pour prévoir le niveau de variation, la variance des fonctions-objectifs sera plutôt calculée par simulation. En plus des notations présentées au chapitre 4, les notations supplémentaires figurant au tableau 6.1 sont utilisées dans ce chapitre.

Tableau 6.1: Notations supplémentaires utilisées dans le chapitre 6.

k_q	facteur de pénalité pour la contrainte q du décideur (système).
k_{qj}	facteur de pénalité pour la contrainte q du groupe j .
$V(f_m)$	variance de la fonction-objectif m
∂	dérivée partielle
$\sigma_{(z_{\text{int}})_i}^2$	variance de la variable $(z_{\text{int}})_i$.
$\sigma_{(z_c)_{jki}}^2$	variance de la variable $(z_c)_{jki}$.
$\sigma_{x_{ij}}^2$	variance de la variable x_{ij} .
$\sigma_{v_{ij}}^2$	variance de la variable v_{ij} .
$\sigma_{(x_{\text{aux}})_{jki}}^2$	variance de la variable $(x_{\text{aux}})_{jki}$.
$\sigma_{y_{jki}}^2$	variance de la variable y_{jki} .
$\Delta(z_{\text{int}})_i$	déviation de la variable $(z_{\text{int}})_i$ exprimée en nombre d'écart-type.
$\Delta(z_c)_{jki}$	déviation de la variable $(z_c)_{jki}$ exprimée en nombre d'écart-type.
Δv_{ij}	déviation de la variable v_{ij} exprimée en nombre d'écart-type.
Δx_{ij}	déviation de la variable x_{ij} exprimée en nombre d'écart-type.

Les étapes du processus d'analyse de sensibilité sont les suivantes:

1. Utiliser la méthode du pire cas (*the worst case analysis*) pour considérer la variation dans les contraintes. Au niveau système, on a:

$$c_q((z_{\text{int}})_i, (z_c)_{jki}) + k_q \left(\sum_{i=1}^I \left| \frac{\partial c_q}{\partial (z_{\text{int}})_i} \right| \Delta(z_{\text{int}})_i + \left| \frac{\partial c_q}{\partial (z_c)_{jki}} \right| \Delta(z_c)_{jki} \right) \leq 0 \quad (6.22)$$

où $\Delta(z_{\text{int}})_i = 3\sigma_{(z_{\text{int}})_i}$, $\Delta(z_c)_{jki} = 3\sigma_{(z_c)_{jki}}$ et k_q est le paramètre de pénalité.

Au niveau des groupes de travail:

$$c_{qj}(v_{ij}, x_{ij}) + k_{qj} \left(\sum_{i=1}^I \left| \frac{\partial c_{qj}}{\partial v_{ij}} \right| \Delta v_{ij} + \left| \frac{\partial c_{qj}}{\partial x_{ij}} \right| \Delta x_{ij} \right) \leq 0 \quad (6.23)$$

où $\Delta v_{ij} = 3\sigma_{v_{ij}}$, $\Delta x_{ij} = 3\sigma_{x_{ij}}$ et k_{qj} est le terme de pénalité.

La variation des contraintes ayant des variables auxiliaires sera calculée selon l'approche proposée par Gu et al. (2006).

$$\sigma_{y_{jki}}^2 = \sigma_{(x_{aux})_{jki}}^2 = \sum_{i=1}^I \left(\frac{\partial y_{jki}}{\partial x_{ij}} \right)^2 \sigma_{x_{ij}}^2 + \sum_{i=1}^I \left(\frac{\partial y_{jki}}{\partial v_{ij}} \right)^2 \sigma_{v_{ij}}^2 \quad (6.24)$$

Le groupe de travail peut alors considérer la variation des contraintes ayant des variables auxiliaires de la façon suivante:

$$c_{qj}(v_{ij}, x_{ij}, (x_{aux})_{jki}) + k_{qj} \left(\sum_{i=1}^I \left| \frac{\partial c_{qj}}{\partial v_{ij}} \right| \Delta v_{ij} + \left| \frac{\partial c_{qj}}{\partial x_{ij}} \right| \Delta x_{ij} + \left| \frac{\partial c_{qj}}{\partial (x_{aux})_{jki}} \right| \Delta (x_{aux})_{jki} \right) \leq 0 \quad (6.25)$$

où $\Delta v_{ij} = 3\sigma_{v_{ij}}$, $\Delta x_{ij} = 3\sigma_{x_{ij}}$, $\Delta (x_{aux})_{ij} = 3\sigma_{(x_{aux})_{ij}}$ et k_{qj} est le terme de pénalité.

2. Résoudre à nouveau les problèmes du chapitre précédent en considérant maintenant la variation dans les contraintes. Pour résoudre ces problèmes, l'algorithme IPOMP-ED n'a pas besoin d'être repris au complet. Seules les étapes 12 à 17 sont reprises. Des solutions réalisables sous variations sont alors trouvées. Ces solutions sont très conservatrices car elles supposent que toutes les variables sont influentes et que la pire combinaison de variation sur les variables se produit c'est-à-dire qu'elles sont toutes influentes en même temps.

3. Effectuer une simulation en associant des distributions aux variables (solutions réalisables sous variations trouvées à l'étape 2) et générer des scénarios. Le logiciel *Microsoft Excel* est utilisé pour générer les scénarios selon la distribution normale. Ces scénarios visent à reproduire la variation qui pourrait se produire lors de la fabrication par exemple. Ils permettront d'analyser la variation des fonctions-objectifs et des contraintes et de déterminer les variables les plus influentes. Les statistiques descriptives de chaque réponse (fonction-objectif) et de chaque contrainte sont calculées à partir des scénarios générés et comprennent la moyenne, l'écart-type, la variance et la plage de variation. L'erreur absolue est aussi calculée pour chaque fonction-objectif. Cette étape permet de choisir, parmi les solutions réalisables sous variation, celle qui est la plus robuste.
4. Pour la solution robuste choisie, déterminer les variables les plus influentes sur chacune des réponses et des contraintes. Pour ce faire, l'indice de sensibilité suivant peut être utilisé:

$$S = \left(\left| \frac{V(f_m) - V(f_m | x_{ij} = x_{ij}^*)}{V(f_m)} \right| \right) \quad (6.26)$$

où $V(f_m)$ est la variance de la fonction-objectif m lorsque toutes les variables sont soumises à la variation (la variance obtenue pour tous les scénarios générés selon la distribution normale) et $V(f_m | x_{ij} = x_{ij}^*)$ est la variance de la fonction-objectif m lorsque l'une des variables est fixée à la valeur qu'elle a dans la solution réalisable sous variation trouvée à l'étape 2. Cette étape permet de réduire encore plus la variation des fonctions-objectifs en déterminant des tolérances sur les variables les plus influentes. Pour les variables jugées non influentes, elles sont considérées comme des paramètres et la variation de ces dernières peut être éliminée dans les contraintes afin d'obtenir une solution robuste moins conservatrice.

5. Résoudre à nouveau le problème en considérant maintenant les variables jugées non influentes comme des paramètres afin de trouver une solution robuste moins conservatrice.

Les sections suivantes présentent les deux mêmes exemples où le processus proposé pour l'analyse de sensibilité sera appliqué.

6.7 Application 1 : problème mathématique proposé par Abdel Haleem (1991)

Pour vérifier l'efficacité de la méthodologie proposée, le problème d'Abdel Haleem (1991) sera encore une fois utilisé. Les programmes AMPL (*fichier.mod* et *fichier.run*) de ce problème sont disponibles à l'annexe L.

La première étape consiste à considérer la variation dans les contraintes afin d'obtenir une solution réalisable sous variation. La formulation des contraintes selon la méthode *the worst case* (en fixant $k_q = 1$) se fait comme suit:

$$c_1(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 + \Delta_{x_1} + 2\Delta_{x_2} + 3\Delta_{x_3} + \Delta_{x_4} + \Delta_{x_5} \leq 6 \quad (6.27)$$

$$c_2(x) = 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 5\Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} + \Delta_{x_3} + 2\Delta_{x_4} + 2\Delta_{x_5} \leq 10 \quad (6.28)$$

$$c_3(x) = 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3\Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} + 5\Delta_{x_3} + 3\Delta_{x_4} + 3\Delta_{x_5} \leq 15 \quad (6.29)$$

où Δx_i représente la déviation de la variable x_i en nombre d'écart-type.

La formulation du problème original selon l'approche de Gu et al. (2006) donne maintenant au niveau système:

$$\begin{aligned}
 \underset{\substack{(z_{\text{int}})_1, (z_{\text{int}})_2, \\ (z_{\text{int}})_3, (z_{\text{int}})_4, \\ (z_{\text{int}})_5}}{\text{Min}} \quad F_1 = (z_{\text{int}})_1^2 + 2(z_{\text{int}})_2^2 + 4(z_{\text{int}})_3^2 - (z_{\text{int}})_4^2 - 3(z_{\text{int}})_5^2 + \gamma \left[\begin{array}{l} (x_{11}^* - (z_{\text{int}})_1)^2 + (x_{21}^* - (z_{\text{int}})_2)^2 + \\ (x_{31}^* - (z_{\text{int}})_3)^2 + (x_{41}^* - (z_{\text{int}})_4)^2 + \\ (x_{51}^* - (z_{\text{int}})_5)^2 + (x_{12}^* - (z_{\text{int}})_1)^2 + \\ (x_{22}^* - (z_{\text{int}})_2)^2 + (x_{32}^* - (z_{\text{int}})_3)^2 + \\ (x_{42}^* - (z_{\text{int}})_4)^2 + (x_{52}^* - (z_{\text{int}})_5)^2 \end{array} \right] \quad (6.30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_2 = -2(z_{\text{int}})_1 + 3(z_{\text{int}})_2 + 4(z_{\text{int}})_3^3 - 5(z_{\text{int}})_4^2 - 2(z_{\text{int}})_5^2 + \gamma \left[\begin{array}{l} (x_{11}^* - (z_{\text{int}})_1)^2 + (x_{21}^* - (z_{\text{int}})_2)^2 + \\ (x_{31}^* - (z_{\text{int}})_3)^2 + (x_{41}^* - (z_{\text{int}})_4)^2 + \\ (x_{51}^* - (z_{\text{int}})_5)^2 + (x_{12}^* - (z_{\text{int}})_1)^2 + \\ (x_{22}^* - (z_{\text{int}})_2)^2 + (x_{32}^* - (z_{\text{int}})_3)^2 + \\ (x_{42}^* - (z_{\text{int}})_4)^2 + (x_{52}^* - (z_{\text{int}})_5)^2 \end{array} \right] \quad (6.31)
 \end{aligned}$$

$$\text{ sujet à } \quad 0 \leq (z_{\text{int}})_1, (z_{\text{int}})_2, (z_{\text{int}})_3, (z_{\text{int}})_4, (z_{\text{int}})_5 \leq 10 \quad (6.32)$$

On obtient $(z_{\text{int}})_1^*, (z_{\text{int}})_2^*, (z_{\text{int}})_3^*, (z_{\text{int}})_4^*$ et $(z_{\text{int}})_5^*$

La formulation du problème d'optimisation pour le groupe de travail 1 est:

$$\underset{\substack{s_{11}, s_{21}, s_{31}, s_{41}, s_{51} \\ r_{11}, r_{21}, r_{31}, r_{41}, r_{51} \\ x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}, x_{51}}}{\text{Min}} \quad f_{11} = e_1 = (s_{11} + r_{11}) + (s_{21} + r_{21}) + (s_{31} + r_{31}) + (s_{41} + r_{41}) + (s_{51} + r_{51}) \quad (6.33)$$

$$\text{ sujet à } \quad c_{11} = x_{11} + 2x_{21} + 3x_{31} + x_{41} + x_{51} + \Delta_{x_{11}} + 2\Delta_{x_{21}} + 3\Delta_{x_{31}} + \Delta_{x_{41}} + \Delta_{x_{51}} \leq 6 \quad (6.34)$$

$$x_{11} + s_{11} - r_{11} = (z_{\text{int}})_1^* \quad (6.35)$$

$$x_{21} + s_{21} - r_{21} = (z_{\text{int}})_2^* \quad (6.36)$$

$$x_{31} + s_{31} - r_{31} = (z_{\text{int}})_3^* \quad (6.37)$$

$$x_{41} + s_{41} - r_{41} = (z_{\text{int}})_4^* \quad (6.38)$$

$$x_{51} + s_{51} - r_{51} = (z_{\text{int}})_5^* \quad (6.39)$$

$$x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}, x_{51} \geq 0 \quad (6.40)$$

$$s_{11}, s_{21}, s_{31}, s_{41}, s_{51} \geq 0 \quad (6.41)$$

$$r_{11}, r_{21}, r_{31}, r_{41}, r_{51} \geq 0 \quad (6.42)$$

On obtient $s_{11}^*, s_{21}^*, s_{31}^*, s_{41}^*, s_{51}^*, r_{11}^*, r_{21}^*, r_{31}^*, r_{41}^*, r_{51}^*, x_{11}^*, x_{21}^*, x_{31}^*, x_{41}^*, x_{51}^*$.

La formulation du problème d'optimisation pour le groupe de travail 2 est:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f_{12} = e_2 = (s_{12} + r_{12}) + (s_{22} + r_{22}) + (s_{32} + r_{32}) + (s_{42} + r_{42}) + (s_{52} + r_{52}) \\ & s_{12}, s_{22}, s_{32}, s_{42}, s_{52} \\ & r_{12}, r_{22}, r_{32}, r_{42}, r_{52}, \\ & x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}, x_{52} \end{array} \quad (6.43)$$

$$\text{Min} \quad f_{22} = 3x_{12} + x_{22}^2 - 5x_{32} + x_{42}^2 - 2x_{52} \leq b_3 \quad (6.44)$$

$$\text{ sujet à } c_{12} = 5x_{12} + x_{22} + x_{32} + 2x_{42} + 2x_{52} + 5\Delta_{x_{12}} + \Delta_{x_{22}} + \Delta_{x_{32}} + 2\Delta_{x_{42}} + 2\Delta_{x_{52}} \leq 10 \quad (6.46)$$

$$c_{22} = 3x_{12} + x_{22} + 5x_{32} + 3x_{42} + 3x_{52} + 3\Delta_{x_{12}} + \Delta_{x_{22}} + 5\Delta_{x_{32}} + 3\Delta_{x_{42}} + 3\Delta_{x_{52}} \leq 15 \quad (6.47)$$

$$x_{12} + s_{12} - r_{12} = (z_{\text{int}})_1^* \quad (6.48)$$

$$x_{22} + s_{22} - r_{22} = (z_{\text{int}})_2^* \quad (6.49)$$

$$x_{32} + s_{32} - r_{32} = (z_{\text{int}})_3^* \quad (6.50)$$

$$x_{42} + s_{42} - r_{42} = (z_{\text{int}})_4^* \quad (6.51)$$

$$x_{52} + s_{52} - r_{52} = (z_{\text{int}})_5^* \quad (6.52)$$

$$x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}, x_{52} \geq 0 \quad (6.53)$$

$$s_{12}, s_{22}, s_{32}, s_{42}, s_{52} \geq 0 \quad (6.54)$$

$$r_{12}, r_{22}, r_{32}, r_{42}, r_{52} \geq 0 \quad (6.55)$$

On obtient $s_{12}^*, s_{22}^*, s_{32}^*, s_{42}^*, s_{52}^*, r_{12}^*, r_{22}^*, r_{32}^*, r_{42}^*, r_{52}^*, x_{12}^*, x_{22}^*, x_{32}^*, x_{42}^*$ et x_{52}^* .

Le problème à objectifs multiples est résolu avec l'algorithme IPOMP-ED (étape 12 à 17). Les paramètres suivants ont été utilisés, dans les contraintes, pour obtenir les solutions réalisables sous variation : $\Delta x_{ij} = 3\sigma_{x_{ij}}$ (tel que suggéré par Du et Chen (2000b)) et $\sigma_{x_{ij}} = 0.1$. Les résultats obtenus sont montrés au tableau 6.2.

Tableau 6.2: Solutions réalisables sous variation obtenues avec l'algorithme IPOMP-ED pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991).

<i>h</i>	Niveau	Vecteur b Initial	Valeurs déterministes IPOMP-ED ($\gamma = 1000$)	Valeurs réalisables sous variation IPOMP-ED ($\gamma = 1000$)
1	Système	$b_1^1 = -15$ (I) $b_2^1 = -25$ (I)	$F_1 = -15$ (I) $F_2 = -10$ (IA)	$F_1 = -10.05$ (T) $F_2 = -6.70$ (-)
	Groupe 2	$b_{22}^1 = -15$ (I)	$f_{22} = -10$ (D)	$f_{22} = -6.70$ (D)
	Solution optimale Nombre d'itérations		(0, 0, 0, 0, 5) 4338	(0, 0, 0, 0, 3.5) 2302
	Système	$b_1^2 = -12$ (D) $b_2^2 = -18$ (T)	$F_1 = -12$ (T) $F_2 = -14.5$ (ID)	$F_1 = -8.62$ (ID) $F_2 = -8.85$ (-)
2	Groupe 2	$b_{22}^2 = -1$ (T)	$f_{22} = -4.75$ (T)	$f_{22} = -4.75$ (T)
	Solution optimale Nombre d'itérations		(0, 0, 0, 1.5, 3.5) 64	(0, 0, 0, 0.7176, 2.6324) 152
	Système	$b_1^3 = -10$ (T) $b_2^3 = -15.5$ (T)	$F_1 = -11.34$ (T) $F_2 = -15.49$ (ID)	$F_1 = -7.71$ (ID) $F_2 = -10.2$ (IA)
	Groupe 2	$b_{22}^3 = -3$ (T)	$f_{22} = -3$ (T)	$f_{22} = -3$ (T)
3	Solution optimale Nombre d'itérations		(0, 0, 0, 1.8284, 3.1716) 676	(0, 0, 0, 0.0005, 1.1684, 2.1814) 61
	Système	$b_1^4 = -8$ (T) $b_2^4 = -16$ (T)	$F_1 = -8.02$ (ID) $F_2 = -16$ (ID)	$F_1 = -6.70$ (IA) $F_2 = -11.72$ (IA)
	Groupe 2	$b_{22}^4 = -11$ (T)	$f_{22} = 2.33$ (T)	$f_{22} = -0.55$ (T)
	Solution optimale Nombre d'itérations		(0, 0, 0, 2.4580, 1.8549) 1612	(0, 0, 0, 1.6745, 1.6755) 607

Par la suite, des distributions sont associées aux variables afin de générer différents scénarios. La distribution normale dont la moyenne est fixée à la solution optimale et

l'écart-type à 0.1 ($N(x_{ij}^*, 0.1)$) a été utilisée. En réalité, l'écart-type de chacune des variables devra être estimé (à partir de produit similaire) ou encore fourni par le fabricant de la pièce. Pour cette étude, 1000 scénarios ont été générés avec le logiciel *Microsoft Excel*. Ces scénarios permettront d'identifier les variables les plus influentes et celles qui le sont moins. Ces connaissances sont importantes afin de prendre les actions nécessaires pour réduire le plus possible la variabilité des variables influentes.

Afin d'analyser la robustesse des solutions réalisables sous variation, les statistiques descriptives de chacune des réponses (fonctions-objectifs) et des contraintes sont présentées aux tableaux 6.3, 6.4, 6.5 et 6.6. Ces statistiques sont obtenues directement à partir des données générées avec le logiciel *Microsoft Excel*. Il est intéressant de noter que 100% des contraintes demeurent satisfaites lorsque les variables sont soumises à des variations et ce pour toutes les solutions réalisables sous variation.

Les figures 6.1, 6.2, 6.3 et 6.4 montrent les histogrammes des distributions des fonctions-objectifs et des contraintes pour chacune des solutions réalisables sous variation.

Tableau 6.3 : Statistiques descriptives pour la solution réalisable sous variation 1 du problème mathématique de Abdel Haleem (1991).

Solution réalisable sous variation 1 : (0, 0, 0, 0, 3.35)						
100% des contraintes satisfaites sous variation						
Statistiques descriptives	F_1	F_2	f_{22}	c_{11}	c_{12}	c_{22}
Moyenne	-9.9924	-6.7206	-6.7132	3.3660	6.6965	10.0765
Écart-type	0.3220	0.6650	0.7879	0.4602	0.6177	0.9026
Variance	0.1037	0.4422	0.6209	0.2117	0.3816	0.8148
Plage de variation	1.68	4.77	4.55	2.58	3.99	5.44
Erreur absolue moyenne	0.2598	0.5266	0.6449			

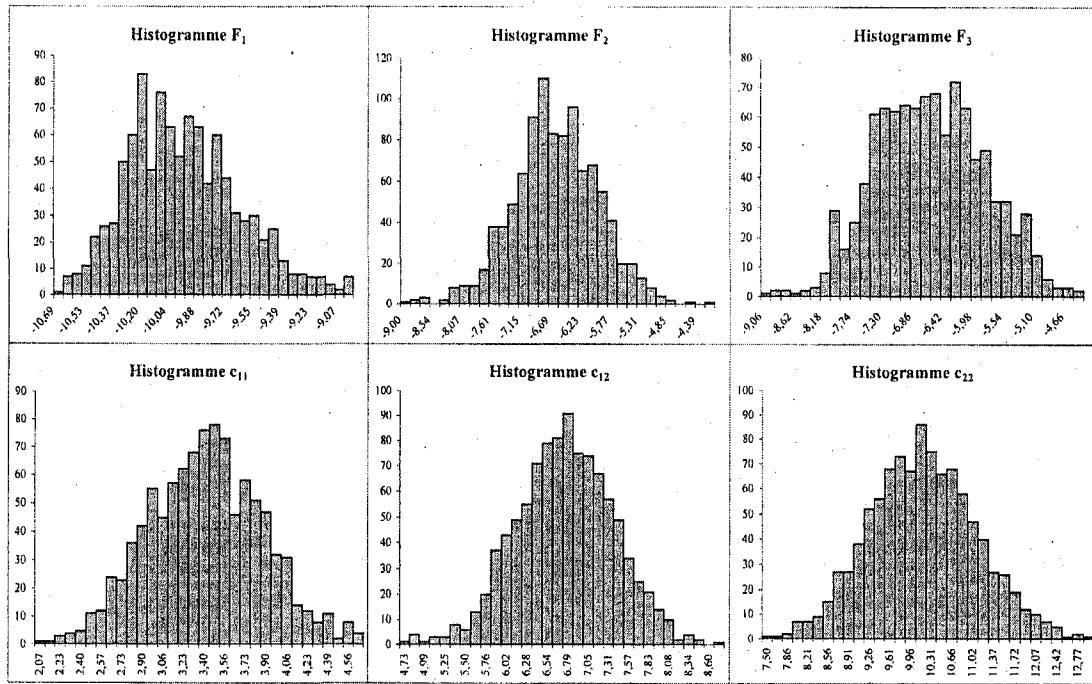


Figure 6.1 : Histogrammes des distributions de F_1 , F_2 , f_{22} , c_{11} , c_{12} et c_{22} pour la solution réalisable sous variation 1 du problème mathématique de Abdel Haleem (1991).

Tableau 6.4 : Statistiques descriptives pour la solution réalisable sous variation 2 du problème mathématique de Abdel Haleem (1991).

Solution réalisable sous variation 2 : (0, 0, 0, 0.7176, 2.6324)						
100% des contraintes satisfaites sous variation						
Statistiques descriptives	F_1	F_2	f_{22}	c_{11}	c_{12}	c_{22}
Moyenne	-8.5438	-8.8263	-4.7366	3.3399	6.6697	10.0186
Écart-type	0.3267	0.6767	0.6389	0.3903	0.5963	0.7173
Variance	0.1067	0.4579	0.4082	0.1523	0.3556	0.5145
Plage de variation	2.21	4.3868	4.1246	2.79	3.52	4.79
Erreur absolue moyenne	0.2664	0.5431	0.5081			

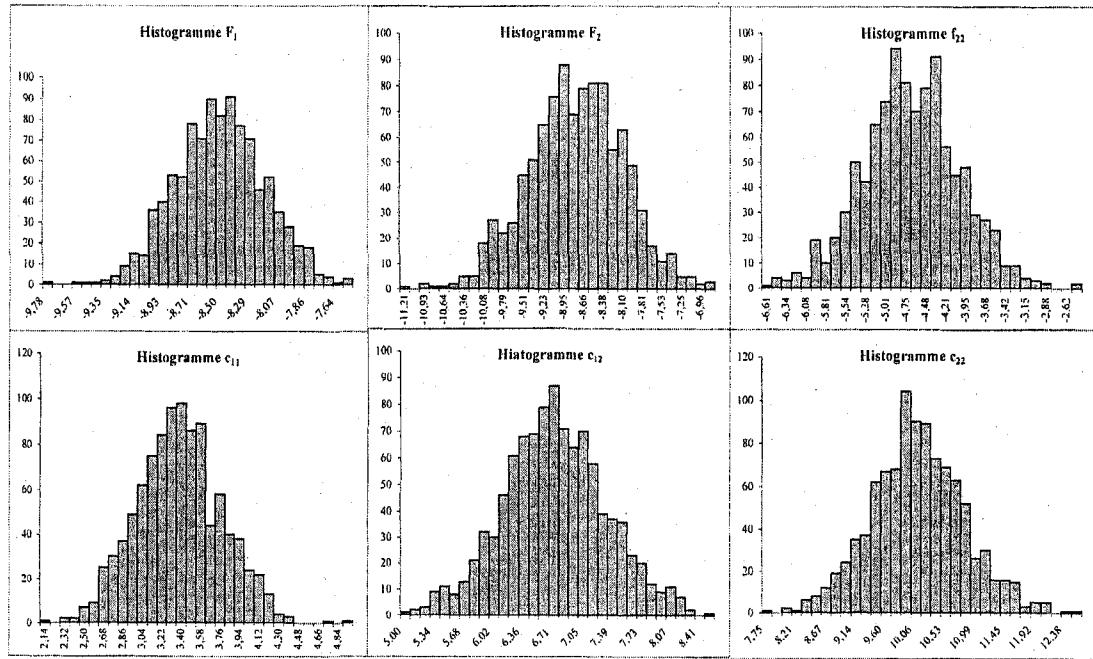


Figure 6.2 : Histogrammes des distributions de F_1 , F_2 , f_{22} , c_{11} , c_{12} et c_{22} pour la solution réalisable sous variation 2 du problème mathématique de Abdel Haleem (1991).

Tableau 6.5 : Statistiques descriptives pour la solution réalisable sous variation 3 du problème mathématique de Abdel Haleem (1991).

Solution réalisable sous variation 3 : (0, 0, 0.0005, 1.1684, 2.1814)						
100% des contraintes satisfaites sous variation						
Statistiques descriptives	F_1	F_2	f_{22}	c_{11}	c_{12}	c_{22}
Moyenne	-7.6229	-10.1871	-2.9835	3.3405	6.6744	10.0250
Écart-type	0.3488	0.6598	0.6471	0.4008	0.5849	0.7246
Variance	0.1217	0.4353	0.4187	0.1607	0.3421	0.5250
Plage de variation	4.79	5.52	7.86	3.80	3.93	6.18
Erreur absolue moyenne	0.2711	0.5188	0.5051			

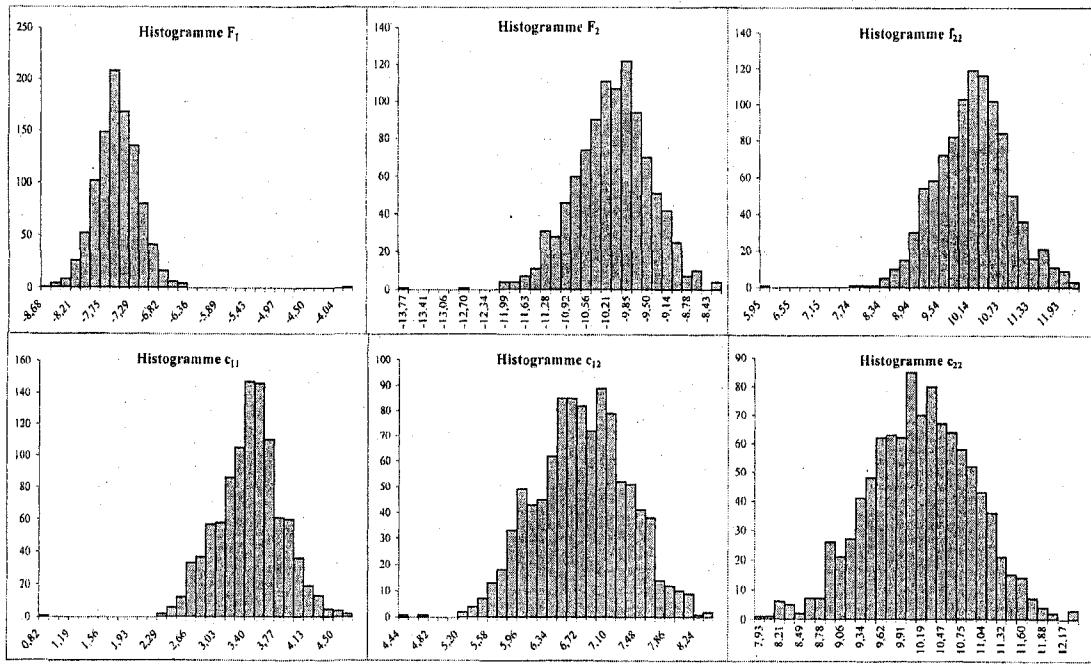


Figure 6.3 : Histogrammes des distributions de F_1 , F_2 , f_{22} , c_{11} , c_{12} et c_{22} pour la solution réalisable sous variation 3 du problème mathématique de Abdel Haleem (1991).

Tableau 6.6 : Statistiques descriptives pour la solution réalisable sous variation 4 du problème mathématique de Abdel Haleem (1991).

Solution réalisable sous variation 4 : (0, 0, 0, 1.6745, 1.6755)						
100% des contraintes satisfaites sous variation						
Statistiques descriptives	F_1	F_2	f_{22}	c_{11}	c_{12}	c_{22}
Moyenne	-6.6213	-11.7328	-0.5225	3.3575	6.7070	10.0646
Écart-type	0.3211	0.6558	0.7155	0.4134	0.6252	0.7498
Variance	0.1031	0.4301	0.5119	0.1709	0.3908	0.5622
Plage de variation	2.20	3.95	4.14	2.71	3.80	4.55
Erreur absolue moyenne	0.2629	0.5255	0.5780			

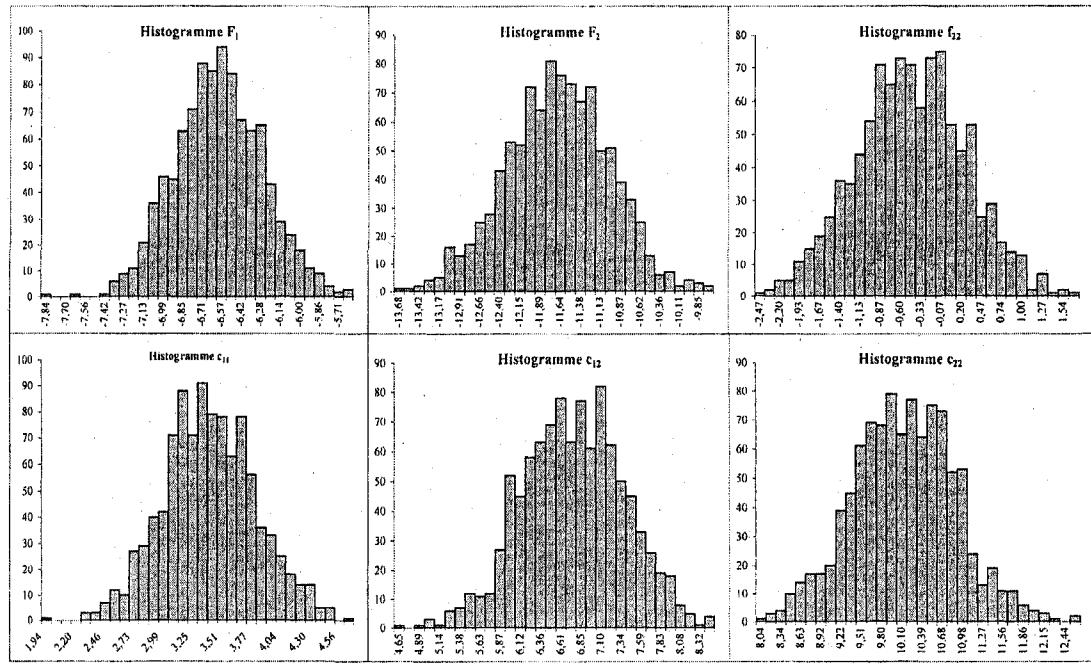


Figure 6.4 : Histogrammes des distributions de F_1 , F_2 , f_{22} , c_{11} , c_{12} et c_{22} pour la solution réalisable sous variation 4 du problème mathématique de Abdel Haleem (1991).

Les scénarios générés et les statistiques descriptives présentées précédemment permettent de calculer deux indices pour comparer les solutions: la somme des variances des fonctions-objectifs ou la somme des erreurs absolues des fonctions-objectifs. Les résultats sont présentés au tableau 6.7. Ces deux indices s'ajoutent aux degrés de désirabilité comme critères pour choisir l'alternative de conception.

La comparaison des variances permet de découvrir que la solution réalisable sous variation 2 semble être la solution qui réduit le plus la variabilité des réponses (fonctions-objectifs). Par contre, en comparant les erreurs absolues, c'est la solution 3 qui est la meilleure. Cette étape constitue l'étape de la définition des paramètres de l'approche de Taguchi. En effet, la solution qui rend le système moins sensible aux variables qui sont peu ou mal contrôlées est choisie.

Tableau 6.7: Comparaison des solutions réalisables sous variation obtenues pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991).

Indices	Solution 1	Solution 2	Solution 3	Solution 4
Somme des variances des fonctions-objectifs obtenues avec le logiciel <i>Microsoft Excel</i> .	1.1668	0.9728	0.9757	1.0451
Somme des erreurs absolues des fonctions-objectifs	1.4313	1.3176	1.2950	1.3664
Degrés de désirabilité	F_1 = tolérable F_2 = inacceptable f_{22} = désirable	F_1 = indésirable F_2 = inacceptable f_{22} = tolérable	F_1 = indésirable F_2 = inacceptable f_{22} = tolérable	F_1 = inacceptable F_2 = inacceptable f_{22} = tolérable

Si les degrés de désirabilité sont considérés, la solution 1 est la meilleure. Supposons que la solution 2 soit retenue comme compromis entre la variabilité et le respect des degrés de désirabilité. La solution 3 aurait été aussi un bon choix.

L'intérêt maintenant est de déterminer les variables les plus influentes. Pour ce faire, l'indice de sensibilité (S) a été calculé pour chaque variable de chacune des fonctions-objectifs et des contraintes. À partir des scénarios générés, chaque variable a été fixée à sa valeur optimale afin de mesurer l'impact de sa variation sur la variation des fonctions-objectifs et des contraintes. Le tableau 6.8 présente le pourcentage de variation de la réponse attribuable à la variable x_{ij} pour la solution robuste choisie à l'étape précédente.

Les variables qui influencent le plus les fonctions-objectifs sont les variables x_{3j} , x_{4j} et x_{5j} , tandis que les variables qui affectent les contraintes sont x_{1j} et x_{3j} . Donc dépendamment de l'importance des contraintes et des fonctions-objectifs, le directeur et les groupes de travail peuvent déterminer les variables sur lesquelles ils veulent travailler. Supposons que les variables x_{3j} , x_{4j} et x_{5j} aient été choisies comme les variables les plus influentes.

Tableau 6.8: Pourcentage de variation des fonctions et contraintes attribuable à chacune des variables pour la solution robuste 2 du problème mathématique de Abdel Haleem (1991).

	F_1	F_2	f_{22}	c_{11}	c_{12}	c_{22}
x_{1j}	0%	10.4%	22.3%	6.4%	72.8%	18.6%
x_{2j}	0%	24.2%	0.1%	23.0%	1.0%	0.6%
x_{3j}	1.9%	0.3%	61.4%	56.2%	2.1%	44.4%
x_{4j}	9%	60.4%	7.5%	3.4%	10.9%	14.4%
x_{5j}	86.3%	9.7%	9.0%	5.1%	11.2%	16.4%

La connaissance des variables les plus influentes est importante puisque si la variation des fonctions-objectifs et des contraintes doit être encore réduite, des limites de spécifications (dernière étape de l'approche Taguchi) plus serrée peuvent être envisagées sur ces variables.

Pour les variables jugées non influentes, x_{1j} et x_{2j} , la variation de ces variables peut être éliminée dans les contraintes afin d'obtenir une solution robuste moins conservatrice. Ces variables sont considérées comme des paramètres et sont fixées à leurs valeurs optimales (zéro dans ce cas) dans les fonctions-objectifs et les contraintes. Donc, dans les contraintes, la pénalité peut être réduite. Les contraintes s'écrivent de la façon suivante:

$$c_{11} = 3x_{31} + x_{41} + x_{51} + 3\Delta_{x_{31}} + \Delta_{x_{41}} + \Delta_{x_{51}} \leq 6 \quad (6.56)$$

$$c_{12} = x_{32} + 2x_{42} + 2x_{52} + \Delta_{x_{32}} + 2\Delta_{x_{42}} + 2\Delta_{x_{52}} \leq 10 \quad (6.57)$$

$$c_{22} = 5x_{32} + 3x_{42} + 3x_{52} + 5\Delta_{x_{32}} + 3\Delta_{x_{42}} + 3\Delta_{x_{52}} \leq 15 \quad (6.58)$$

Le problème est à nouveau résolu avec l'algorithme IPOMP-ED, en considérant x_{1j} et x_{2j} comme des paramètres, afin de trouver une solution robuste moins conservatrice. Les résultats sont montrés au tableau 6.9.

Tableau 6.9 : Comparaison des solutions déterministe et robustes du problème mathématique de Abdel Haleem (1991)

Solution déterministe	Solution robuste (conservatrice)	Solution robuste (moins conservatrice)
(0, 0, 0, 1.5, 3.5)	(0, 0, 0, 0.7176, 2.6324)	(0, 0, 0, 0, 3.90)
$F_1 = -12$ (T)	$F_1 = -8.61$ (ID)	$F_1 = -11.70$ (T)
$F_2 = -14.5$ (ID)	$F_2 = -8.85$ (IA)	$F_2 = -7.80$ (IA)
$f_{22} = -4.75$ (T)	$f_{22} = -4.75$ (D)	$f_{22} = -7.80$ (D)
77% des contraintes satisfaites sous variation	100% des contraintes satisfaites sous variation	100% des contraintes satisfaites sous variation
I: Idéal D:Désirable T: Tolérable ID: Indésirable IA: Inacceptable		

La solution robuste (moins conservatrice) est légèrement différente de la solution robuste conservatrice. Elle permet une meilleure performance des fonctions-objectifs 1 et 3. La solution demeure toutefois Pareto-optimale car la fonction-objectif 2 diminue. Il faut noter aussi que la faisabilité de la conception est maintenue. Les paramètres suivants ont été utilisés pour obtenir les solutions robustes : $\Delta x_{ij} = 3\sigma_{x_{ij}}$ et $\sigma_{x_{ij}} = 0.1$.

D'autres solutions robustes peuvent être obtenues en changeant ces paramètres.

6.8 Application 2 : problème de structure à deux barres

Le problème de structure à deux barres servira à tester le processus d'analyse de sensibilité sur un problème de conception réel. Les programmes AMPL (*fichier.mod* et *fichier.run*) de ce problème sont disponibles à l'annexe M.

La première étape consiste à considérer la variation dans les contraintes afin d'obtenir une solution réalisable sous variation. Puisque la contrainte contient une variable

auxiliaire, la formulation de la contrainte selon la méthode *the worst case* (avec $k_q = 1$) se fait comme suit:

$$\begin{aligned}
 c_1 = & \frac{F}{2\pi x_1 x_2} \sqrt{w^2 + x_2^2} - \frac{1}{8} \pi^2 E \frac{t^2 + x_1^2}{w^2 + x_2^2} + \left| \left(\sqrt{w^2 + x_2^2} \left(\frac{-F 2\pi x_2}{(2\pi x_1 x_2)^2} \right) \right) - 1/8 \pi^2 E \left(\frac{2x_1(w^2 + x_2^2)}{(w^2 + x_2^2)^2} \right) \right| \Delta x_1 \\
 & + \left| \left(\frac{Fx_2}{2\pi x_1 x_2 \sqrt{w^2 + x_2^2}} + \sqrt{w^2 + x_2^2} \left(\frac{-F 2\pi x_1}{(2\pi x_1 x_2)^2} \right) \right) - 1/8 \pi^2 E \left(\frac{2x_2(-t^2 + x_1^2)}{(w^2 + x_2^2)^2} \right) \right| \Delta x_2 \\
 & + \left| \left(\frac{F}{2\pi x_{12} x_{22}} \right) \Delta (x_{aux})_{12i} \right| \leq 0
 \end{aligned}$$

où Δx_i et $\Delta (x_{aux})_{jki}$ représentent la déviation des variables x_i et $(x_{aux})_{jki}$ en nombre d'écart-type.

La formulation du problème original selon l'approche de Gu et al. (2006) se fait comme suit : les bornes pour la variable auxiliaire et la valeur cible associée sont calculées de la façon suivante:

$$\underset{x_2}{\text{Min}} \sqrt{w^2 + x_2^2} \quad (6.59)$$

$$\text{sujet à } 10 \leq x_2 \leq 1000 \quad (6.60)$$

$$\underset{x_2}{\text{Max}} \sqrt{w^2 + x_2^2} \quad (6.61)$$

$$\text{sujet à } 10 \leq x_2 \leq 1000 \quad (6.62)$$

Les bornes sont : $750 \leq (x_{aux})_{121} \leq 1250$ et $750 \leq (z_c)_{121} \leq 1250$.

La formulation du problème au niveau système est:

$$\underset{(z_{\text{int}})_1, (z_{\text{int}})_2, (z_c)_{121}}{\text{Min}} \quad F_1 = 2\pi\rho t (z_{\text{int}})_1 (z_c)_{121} + \gamma \left\{ \begin{array}{l} (x_{11}^* - (z_{\text{int}})_1)^2 + (x_{21}^* - (z_{\text{int}})_2)^2 + \\ (y_{121}^* - (z_c)_{121})^2 + (x_{12}^* - (z_{\text{int}})_1)^2 + \\ (x_{22}^* - (z_{\text{int}})_2)^2 + ((x_{\text{aux}})_{121}^* - (z_c)_{121})^2 \end{array} \right\} \quad (6.63)$$

$$F_2 = \frac{F}{2\pi t (z_{\text{int}})_1 (z_{\text{int}})_2} (z_c)_{121} + \gamma \left\{ \begin{array}{l} (x_{11}^* - (z_{\text{int}})_1)^2 + (x_{21}^* - (z_{\text{int}})_2)^2 + \\ (y_{121}^* - (z_c)_{121})^2 + (x_{12}^* - (z_{\text{int}})_1)^2 + \\ (x_{22}^* - (z_{\text{int}})_2)^2 + ((x_{\text{aux}})_{121}^* - (z_c)_{121})^2 \end{array} \right\} \quad (6.64)$$

(6.65)

$$\text{ sujet à } \quad 1 \leq (z_{\text{int}})_1 \leq 100 \quad (6.66)$$

$$10 \leq (z_{\text{int}})_2 \leq 1000 \quad (6.67)$$

$$750 \leq (z_c)_{121} \leq 1250 \quad (6.68)$$

On obtient $(z_{\text{int}})_1^*$, $(z_{\text{int}})_2^*$ et $(z_c)_{121}^*$.

La formulation du problème d'optimisation pour le groupe de travail 1 est:

$$\underset{s_{11}, s_{21}, (s_c)_{121}, r_{11}, r_{21}, (r_c)_{121}, x_{11}, x_{21}}{\text{Min}} \quad f_{11} = e_1 = (s_{11} + r_{11}) + (s_{21} + r_{21}) + ((s_c)_{121} + (r_c)_{121}) \quad (6.69)$$

$$f_{21} = \frac{F(w^2 + x_{21}^2)^{3/2}}{2\pi E x_{11} x_{21}} \quad (6.70)$$

$$\text{ sujet à } \quad x_{11} + s_{11} - r_{11} = (z_{\text{int}})_1^* \quad (6.71)$$

$$x_{21} + s_{21} - r_{21} = (z_{\text{int}})_2^* \quad (6.72)$$

$$\sqrt{w^2 + x_{21}^2} + (s_c)_{121} - (r_c)_{121} = (z_c)_{121}^* \quad (6.73)$$

$$1 \leq x_{11} \leq 100 \quad (6.74)$$

$$10 \leq x_{21} \leq 1000 \quad (6.75)$$

$$s_{11}, s_{21}, (s_c)_{121} \geq 0 \quad (6.76)$$

$$r_{11}, r_{21}, (r_c)_{121} \geq 0 \quad (6.77)$$

On obtient s_{11}^* , s_{21}^* , $(s_c)_{121}^*$, r_{11}^* , r_{21}^* , $(r_c)_{121}^*$, x_{11}^* et x_{21}^* . Le groupe 1 calcule $y_{121}^* = \sqrt{w^2 + x_{21}^2}$.

La formulation du problème d'optimisation pour le groupe de travail 2 est:

$$\underset{\substack{s_{12}, s_{22}, (s_{aux})_{121}, \\ r_{12}, r_{22}, (r_{aux})_{121}, \\ x_{12}, x_{22}, (x_{aux})_{121}}}{\text{Min}} \quad f_{12} = e_2 = (s_{12} + r_{12}) + (s_{22} + r_{22}) + ((s_{aux})_{121} + (r_{aux})_{121}) \quad (6.78)$$

sujet à

$$\begin{aligned} c_{12} = & \frac{F}{2\pi x_{12} x_{22}} (x_{aux})_{121} - \frac{1}{8} \pi^2 E \frac{t^2 + x_{12}^2}{w^2 + x_{22}^2} + \\ & \left| \left(\left((x_{aux})_{121} \left(\frac{-F 2\pi x_{22}}{(2\pi x_{12} x_{22})^2} \right) \right) - 1/8 \pi^2 E \left(\frac{2x_{12}(w^2 + x_{22}^2)}{(w^2 + x_{22}^2)^2} \right) \right) \right| \Delta x_{12} \\ & + \left| \left(\left(\frac{Fx_{22}}{2\pi x_{12} x_{22} (x_{aux})_{121}} + (x_{aux})_{121} \left(\frac{-F 2\pi x_{12}}{(2\pi x_{12} x_{22})^2} \right) \right) - 1/8 \pi^2 E \left(\frac{2x_{22}(-t^2 + x_{12}^2)}{(w^2 + x_{22}^2)^2} \right) \right) \right| \Delta x_{22} \quad (6.79) \\ & + \left| \left(\frac{F}{2\pi x_{12} x_{22}} \right) \right| \Delta (x_{aux})_{121} \leq 0 \end{aligned}$$

$$x_{12} + s_{12} - r_{12} = (z_{\text{int}})_1^* \quad (6.80)$$

$$x_{22} + s_{22} - r_{22} = (z_{\text{int}})_2^* \quad (6.81)$$

$$(x_{aux})_{121} + (s_{aux})_{121} - (r_{aux})_{121} = (z_c)_{121}^* \quad (6.82)$$

$$1 \leq x_{12} \leq 100 \quad (6.83)$$

$$10 \leq x_{22} \leq 1000 \quad (6.84)$$

$$750 \leq (x_{aux})_{121} \leq 1250 \quad (6.85)$$

$$s_{12}, s_{22}, (s_{aux})_{121} \geq 0 \quad (6.86)$$

$$r_{12}, r_{22}, (r_{aux})_{121} \geq 0 \quad (6.87)$$

$$\Delta (x_{aux})_{121} = 3\sigma_{(x_{aux})_{121}} \quad (6.88)$$

$$\sigma_{(x_{aux})_{121}} = \sqrt{\left(\frac{x_{22}}{(x_{aux})_{121}}\right)^2 (0.1)^2} \quad (6.89)$$

On obtient s_{12}^* , s_{22}^* , $(s_{aux})_{121}^*$, r_{12}^* , r_{22}^* , $(r_{aux})_{121}^*$, x_{12}^* , x_{22}^* , x_{32}^* .

Le problème à objectifs multiples est résolu avec l'algorithme IPOMP-ED (étape 12 à 17). Le paramètre de pénalité est fixé à 25. Les paramètres suivants ont été utilisés, dans les contraintes, pour obtenir les solutions réalisables sous variation : $\Delta x_{ij} = 3\sigma_{x_{ij}}$ (tel que suggéré par Du et Chen (2000b)) et $\sigma_{x_{ij}} = 0.1$. Après 40 000 itérations, les problèmes 1 et 4 n'avaient pas encore convergé vers une solution réalisable. Comme cela a été fait au chapitre 5, le paramètre de pénalité a donc été diminué et fixé à 10. Les problèmes ont de nouveau été résolus et ont convergé vers une solution réalisable. Les résultats obtenus sont montrés au tableau 6.10.

Par la suite, des distributions sont associées aux variables afin de générer différents scénarios. La distribution normale, dont la moyenne est fixée à la valeur qu'elle a dans la solution optimale et l'écart-type à 0.1 ($N(x_{ij}^*, 0.1)$), a été utilisée. En réalité, l'écart-type de chacune des variables devra être estimé (à partir de produit similaire) ou encore fourni par le fabricant de la pièce. Encore une fois, 1000 scénarios ont été générés avec le logiciel *Microsoft Excel*. Les scénarios permettront d'identifier les variables les plus influentes et celles qui le sont moins.

Tableau 6.10: Solutions réalisables sous variation obtenues avec l'algorithme IPOMP-ED pour le problème de structure.

Iter. <i>h</i>	Niveau	Vecteur Initial b^h	Valeurs déterministes avec IPOMP-ED ($\gamma = 25$)	Valeurs réalisables sous variation avec IPOMP-ED ($\gamma = 10$)
1	Système	$b_1^1 = 5849$ $b_2^1 = 198$	$F_1 = 5849$ (I) $F_2 = 300.04$ (T)	$F_1 = 5849.04$ (D) $F_2 = 300.084$ (T)
	Groupe 1	$b_{21}^1 = 1.7$	$f_{21} = 2.14$ (D)	$f_{21} = 2.1440$ (D)
	Solution optimale		(45.0256, 749.439)	(45.4521, 735.345)
	Nombre d'itérations		18 294	25 689
2	Système	$b_1^2 = 6000$ $b_2^2 = 250$	$F_1 = 6000$ (D) $F_2 = 292.49$ (T)	$F_1 = 6000.01$ (D) $F_2 = 292.496$ (T)
	Groupe 1	$b_{21}^2 = 2.5$	$f_{21} = 2.09$ (D)	$f_{21} = 2.0895$ (D)
	Solution optimale		(46.1882, 749.432)	(46.4298, 741.643)
	Nombre d'itérations		4530	947
3	Système	$b_1^3 = 7000$ $b_2^3 = 200$	$F_1 = 7000$ (D) $F_2 = 250.71$ (D)	$F_1 = 7000.01$ (D) $F_2 = 250.719$ (D)
	Groupe 1	$b_{21}^3 = 2.6$	$f_{21} = 1.79$ (D)	$f_{21} = 1.79106$ (D)
	Solution optimale		(53.8922, 749.264)	(54.2149, 740.34)
	Nombre d'itérations		28 041	9 381
4	Système	$b_1^4 = 4565$ $b_2^4 = 390$	$F_1 = 4565$ (I) $F_2 = 389.98$ (ID)	$F_1 = 4564.98$ (I) $F_2 = 392.264$ (ID)
	Groupe 1	$b_{21}^4 = 2.83$	$f_{21} = 2.83$ (T)	$f_{21} = 2.8595$ (T)
	Solution optimale		(37.9662, 632.93)	(38.4694, 612.867)
	Nombre d'itérations		31 359	11 648
I: Idéal D:Désirable T: Tolérable ID: Indésirable IA: Inacceptable				

Les statistiques descriptives de chacune des réponses (fonctions-objectifs) et des contraintes sont présentées aux tableaux 6.11, 6.12, 6.13 et 6.14. Ces statistiques sont obtenues directement à partir des données générées avec le logiciel *Microsoft Excel*. Il faut noter que 100% des contraintes demeurent satisfaites lorsque les variables sont soumises à des variations et ce pour toutes les solutions réalisables sous variation. Les figures 6.5, 6.6, 6.7 et 6.8 montrent les histogrammes des distributions des fonctions-objectifs et des contraintes pour chacune des solutions réalisables sous variation.

Tableau 6.11 : Statistiques descriptives pour la solution réalisable sous variation 1 du problème de structure.

Solution réalisable sous variation 1 : (45.4521, 735.345)				
100% des contraintes satisfaites sous variation				
Statistiques descriptives	F_1	F_2	f_{21}	c_{12}
Moyenne	5849.5878	300.0811	2.1439	-186.5872
Écart-type	13.1285	0.6734	0.0048	2.8564
Variance	172.3583	0.4535	0.0000	8.1590
Plage de variation	73.43	3.76	0.03	16.29
Erreur absolue moyenne	10.6778	0.5480	0.0039	-

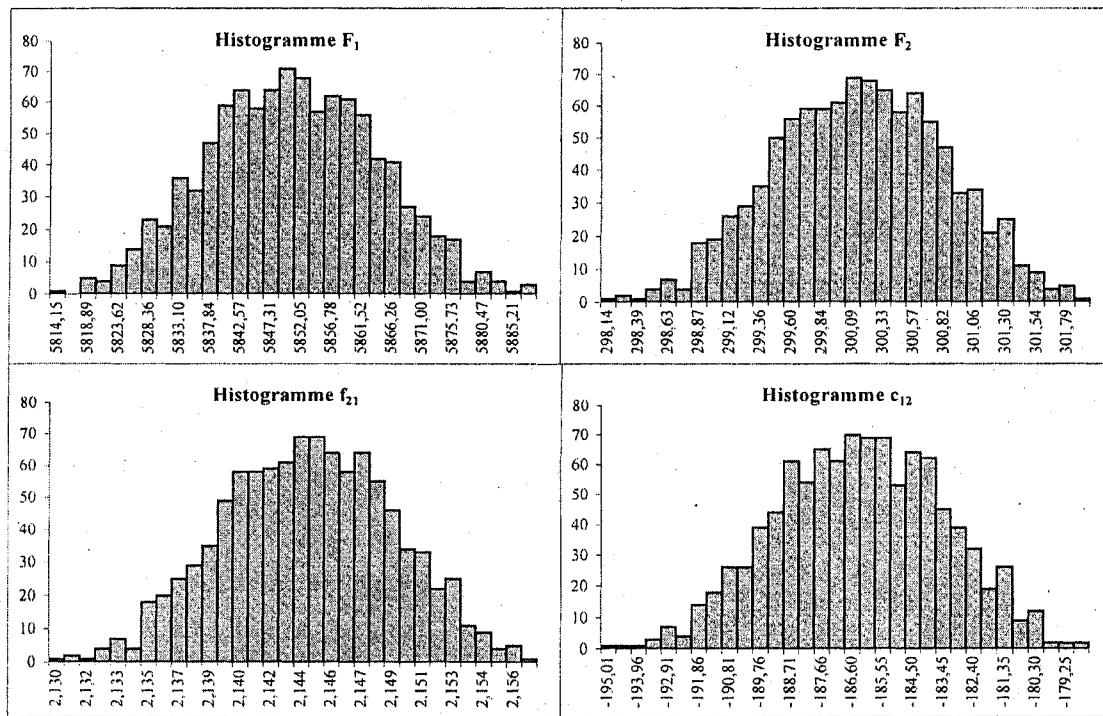


Figure 6.5 : Histogrammes des distributions de F_1 , F_2 , f_{21} et c_{12} pour la solution réalisable sous variation 1 du problème de structure.

Tableau 6.12 : Statistiques descriptives pour la solution réalisable sous variation 2 du problème de structure.

Solution réalisable sous variation 2 : (46.4298, 741.643)				
100% des contraintes satisfaites sous variation				
Statistiques descriptives	F_1	F_2	f_{21}	c_{12}
Moyenne	6000.2906	292.5056	2.0895	-210.9678
Écart-type	13.2407	0.6454	0.0046	2.8665
Variance	175.3172	0.4165	0.0000	8.2171
Plage de variation	95.18	4.64	0.03	20.57
Erreur absolue moyenne	10.5921	0.5162	0.0037	-

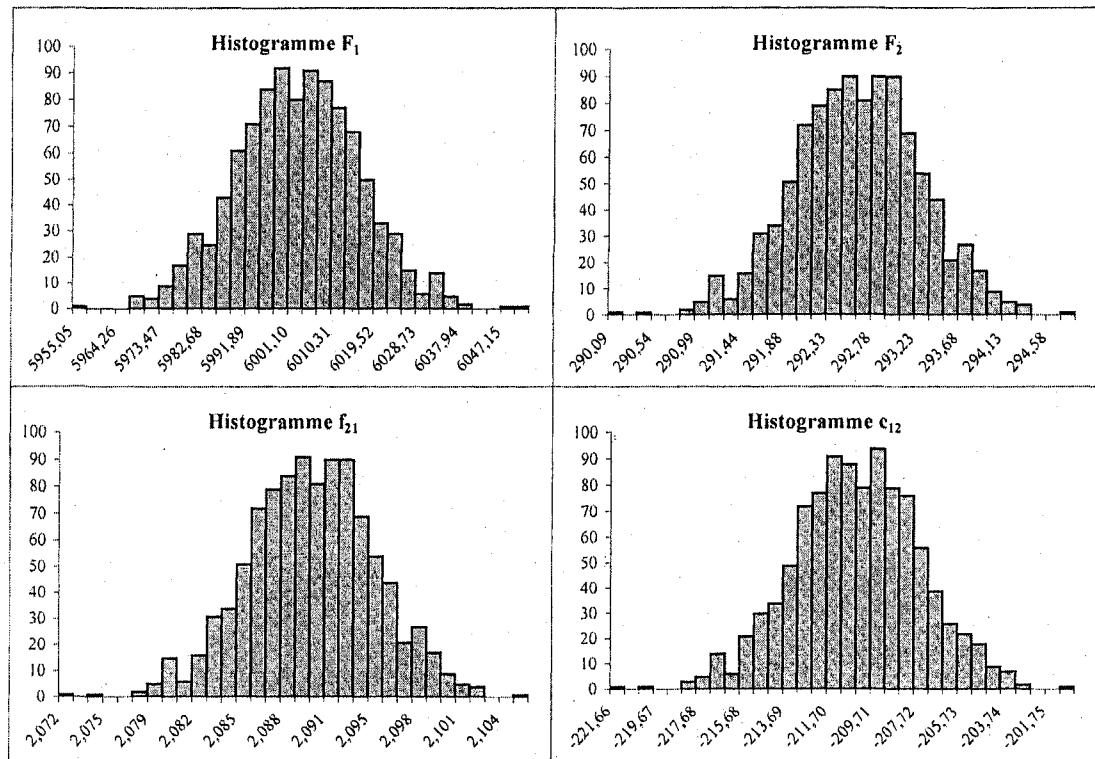


Figure 6.6 : Histogrammes des distributions de F_1 , F_2 , f_{21} et c_{12} pour la solution réalisable sous variation 2 du problème de structure.

Tableau 6.13 : Statistiques descriptives pour la solution réalisable sous variation 3 du problème de structure.

Solution réalisable sous variation 3 : (54.2149, 740.34)				
100% des contraintes satisfaites sous variation				
Statistiques descriptives	F_1	F_2	f_{21}	c_{12}
Moyenne	6999.9285	250.7388	1.7911	-436.3290
Écart-type	12.8293	0.4595	0.0033	2.9693
Variance	164.5916	0.2111	0.0000	8.8170
Plage de variation	89.86	3.22	0.0230	20.60
Erreur absolue moyenne	10.2737	0.3682	0.0026	-

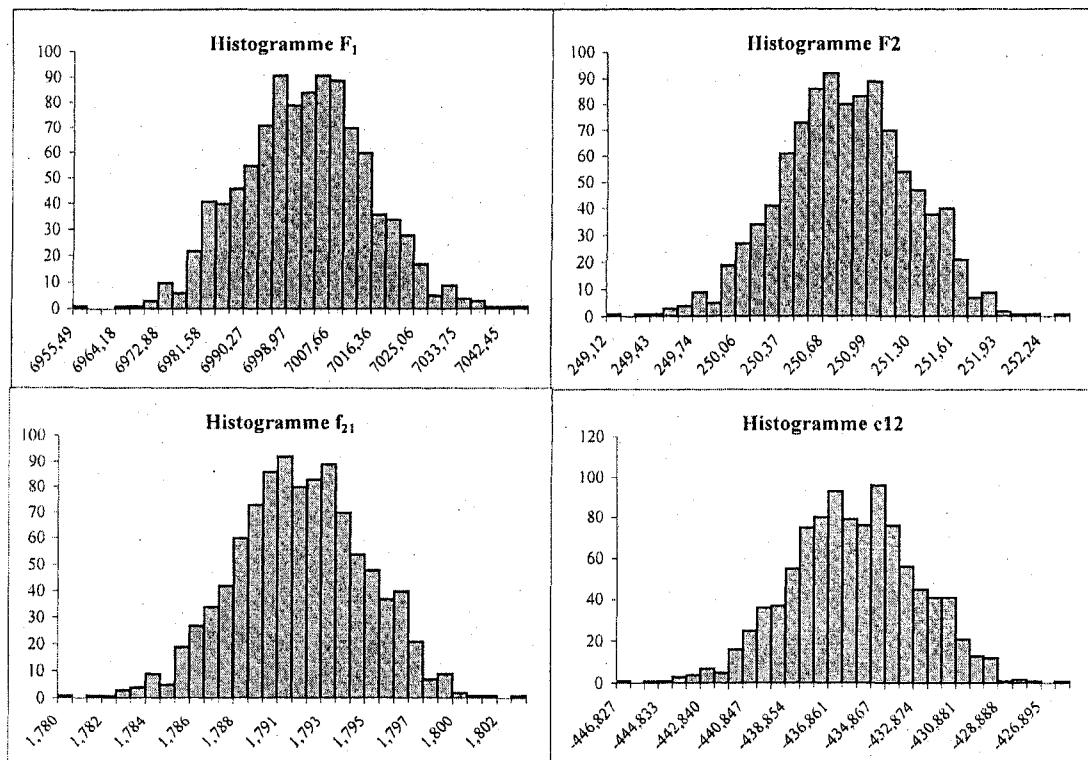


Figure 6.7 : Histogrammes des distributions de F_1 , F_2 , f_{21} et c_{12} pour la solution réalisable sous variation 3 du problème de structure.

Tableau 6.14 : Statistiques descriptives pour la solution réalisable sous variation 4 du problème de structure.

Solution réalisable sous variation 4 : (38.4694, 612.867)				
100% des contraintes satisfaites sous variation				
Statistiques descriptives	F_1	F_2	f_{21}	c_{12}
Moyenne	4565.4229	392.2778	2.8593	-18.2042
Écart-type	11.8283	1.0167	0.0074	3.1335
Variance	139.9076	1.0337	0.0001	9.8191
Plage de variation	81.52	6.99	0.05	21.80
Erreur absolue moyenne	9.4212	0.8091	0.0059	-

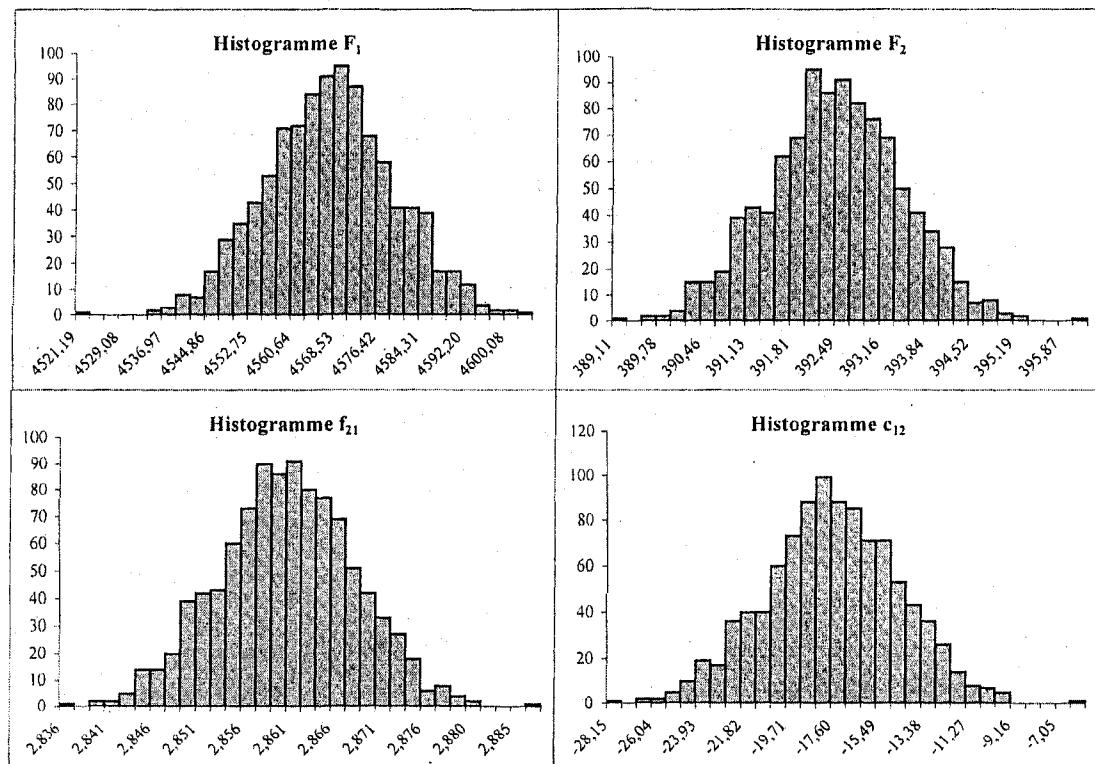


Figure 6.8 : Histogrammes des distributions de F_1 , F_2 , f_{21} et c_{12} pour la solution réalisable sous variation 4 du problème de structure.

Avec ces données, il est maintenant possible de calculer deux indices pour comparer les solutions: la somme des variances des fonctions-objectifs ou la somme des erreurs absolues des fonctions-objectifs. Les résultats sont présentés au tableau 6.15. Ces deux indices s'ajoutent aux degrés de désirabilité comme critères pour choisir l'alternative de conception.

La comparaison des variances et des valeurs absolues permet de découvrir que la solution 4 semble être la solution qui réduit le plus la variabilité des réponses (fonctions-objectifs), c'est-à-dire la solution la plus robuste. D'ailleurs, elle domine les trois autres solutions. Cette étape constitue l'étape de la définition des paramètres de l'approche de Taguchi.

Tableau 6.15: Comparaison des solutions réalisables sous variation pour le problème du structure.

Indices	Solution 1	Solution 2	Solution 3	Solution 4
Somme des variances des fonctions-objectifs	172.8118	175.7337	164.8027	140.9414
Somme des erreurs absolues des fonctions-objectifs	11.2397	11.1120	10.6445	10.2362
Degrés de désirabilité	F_1 = idéale F_2 = tolérable f_{21} = désirable	F_1 = désirable F_2 = tolérable f_{21} = désirable	F_1 = désirable F_2 = désirable f_{21} = désirable	F_1 = idéale F_2 = indésirable f_{21} = tolérable

Si les degrés de désirabilité sont considérés, la solution 3 est la meilleure. Supposons que la solution 3 soit retenue comme compromis entre la variabilité et le respect des degrés de désirabilité. Cette solution est appelée la solution robuste.

Pour déterminer les variables les plus influentes, l'indice de sensibilité (S) a été calculé pour chaque variable de chaque fonction-objectif et contrainte. À partir des scénarios

générés, chaque variable a été fixée à sa valeur optimale afin de mesurer l'impact de sa variation sur la variation des fonctions-objectifs et des contraintes. Le tableau 6.16 présente le pourcentage de variation de la réponse attribuable à la variable x_{ij} pour la solution robuste.

La variable qui influence le plus les fonctions-objectifs et la contrainte est la variable x_{1j} . Cette variable est donc la variable influente.

Tableau 6.16: Pourcentage de variation des fonctions et contraintes attribuable à chacune des variables pour la solution robuste 3 du problème de structure.

	F_1	F_2	f_{21}	c_t
x_{1j}	99.86 %	100 %	99.85 %	99.94 %
x_{2j}	0.23 %	0 %	0.93 %	0.001 %

Si la variation des fonctions-objectifs et des contraintes doit être encore réduite, des limites de spécifications (dernière étape de l'approche Taguchi) plus serrée sur la variable x_{1j} peuvent être envisagées.

Pour la variable jugée non influente, x_{2j} , la variation de cette variable peut être éliminée dans les contraintes afin d'obtenir une solution robuste moins conservatrice. Cette variable est alors considérée comme un paramètre et est fixée à sa valeur optimale (740.34 dans ce cas) dans les fonctions-objectifs et la contrainte. Donc, dans la contrainte, la pénalité peut être réduite. La contrainte devient alors:

$$\begin{aligned}
c_{12} = & \frac{F}{2\pi x_{12} x_{22}} (x_{aux})_{121} - \frac{1}{8} \pi^2 E \frac{t^2 + x_{12}^2}{w^2 + x_{22}^2} + \\
& \left[\left((x_{aux})_{121} \left(\frac{-F 2\pi x_{22}}{(2\pi x_{12} x_{22})^2} \right) \right) - 1/8\pi^2 E \left(\frac{2x_{12}(w^2 + x_{22}^2)}{(w^2 + x_{22}^2)^2} \right) \right] \Delta x_{12} + \left(\frac{F}{2\pi x_{12} x_{22}} \right) \Delta (x_{aux})_{121} \leq 0
\end{aligned} \tag{6.90}$$

Le problème est à nouveau résolu avec l'algorithme IPOMP-ED, en considérant x_{2j} comme un paramètre, afin de trouver une solution robuste moins conservatrice. Les résultats sont montrés au tableau 6.17.

Tableau 6.17 : Comparaison des solutions déterministes et robustes du problème de structure.

Solution déterministe	Solution robuste (conservatrice)	Solution robuste (moins conservatrice)
(53.8922, 749.264)	(54.2149, 740.34)	(54.2142, 740.34)
$F_1 = 7000$	$F_1 = 7000.0100$	$F_1 = 6999.99$
$F_2 = 250.71$	$F_2 = 250.7190$	$F_2 = 250.725$
$f_{21} = 1.79$	$f_{21} = 1.7911$	$f_{21} = 1.7911$
100% des contraintes satisfaites sous variation	100% des contraintes satisfaites sous variation	100% des contraintes satisfaites sous variation

Il y a peu de différence entre la solution déterministe et la solution robuste (conservatrice). Cela s'explique par le fait que la solution déterministe trouvée n'est pas située à la limite de la contrainte. Donc, même en pénalisant la contrainte (pour tenir compte de la variation), la solution robuste est sensiblement la même que la solution déterministe. De plus, les 2 solutions robustes (conservatrice et moins conservatrice) sont sensiblement les mêmes. Cette situation se produit car l'impact de la variable x_{2j} sur la contrainte et les fonctions-objectifs est très faible. Donc, en considérant cette variable comme un paramètre, cela n'apporte aucun changement dans les solutions. Les paramètres suivants ont été utilisés pour obtenir les solutions robustes : $\Delta x_{ij} = 3\sigma_{x_{ij}}$ et $\sigma_{x_{ij}} = 0.1$. D'autres solutions robustes peuvent être obtenues en changeant ces paramètres.

6.9 Conclusion

Dans ce chapitre, les différentes méthodes d'analyse de robustesse et d'analyse de sensibilité ont été démystifiées afin de définir un processus pour trouver des solutions réalisables sous variation et, parmi ces dernières, choisir la solution la plus robuste. La méthodologie proposée permet d'identifier les variables qui influencent la variation des fonctions-objectifs afin de prendre des actions nécessaires pour déterminer les tolérances de ces variables. C'est une étape à ne pas négliger en conception afin d'assurer la faisabilité des produits, la sécurité des personnes et de mieux satisfaire les clients. Les résultats montrent que l'algorithme IPOMP-ED jumelé à une analyse de sensibilité permet d'obtenir des solutions robustes. La méthodologie suggérée permet d'étudier la variabilité des fonctions-objectifs et d'améliorer la qualité dès la phase de conception de produit.

CHAPITRE 7

CONCLUSION

7.0 Contexte

Le succès économique des entreprises manufacturières dépend en grande partie de leur capacité à bien identifier les besoins de leurs clients, à développer rapidement des produits correspondant à ces besoins et à fabriquer ces produits à faible coût. Avec l'émergence de la Chine, de l'Inde ainsi que d'autres pays en voie d'industrialisation, cette situation constitue un grand défi pour la plupart des entreprises. Les travaux effectués dans cette thèse de doctorat visaient à répondre à deux de ces besoins: développer des produits, répondant le plus possible aux besoins des clients et le plus rapidement possible en faisant de la conception de produit en environnement distribué et de façon simultanée.

Cette recherche a donc permis de faire avancer les connaissances dans plusieurs domaines, notamment en ingénierie simultanée, en qualité, en recherche opérationnelle et en optimisation. Cependant, il reste encore beaucoup de travail à faire pour utiliser ces algorithmes dans un environnement distribué. Ce dernier chapitre fait la synthèse des développements et résultats obtenus dans cette thèse et présente les limites, les contributions et les perspectives de recherche.

7.1 Synthèse

Le contexte, dans lequel évoluent les entreprises, constitue le point de départ des travaux de recherche exécutés dans cette thèse. Les premiers chapitres ont permis de bien comprendre ce contexte, de cerner le sujet de recherche et de positionner les travaux de façon bien précise dans la phase d'optimisation des processus de développement de produit. Les approches d'optimisation ont été revues afin de bien comprendre les moyens actuels de résolution de problèmes à multiples objectifs (avec un ou plusieurs décideurs) mais aussi à titre d'introduction au développement des nouveaux algorithmes.

Dans un premier temps, l'assemblage de deux techniques a permis de créer un algorithme interactif pour résoudre des problèmes à objectifs multiples, tout en considérant les préférences des équipes de conception (algorithme IPOMP). L'algorithme assiste les équipes de travail dans la détermination de leurs degrés de désirabilité pour leurs objectifs. Cela aide considérablement le décideur à fixer des valeurs cibles afin de générer différentes alternatives de conception satisfaisant au mieux les exigences des groupes de travail. Cependant toute la partie optimisation est demeurée sous le contrôle du décideur.

Pour réduire le temps de développement et donner plus de flexibilité aux groupes de travail, les structures d'optimisation distribuée sont intéressantes. Dans cette perspective, l'algorithme IPOMP a été amalgamé à une technique d'optimisation collaborative afin de l'utiliser dans un environnement distribué (IPOMP-ED).

L'utilisation de l'algorithme IPOMP dans un environnement distribué comporte plusieurs avantages:

- En décomposant le problème, les équipes de conception acquièrent plus de flexibilité et d'autonomie. En effet, les équipes peuvent maintenant considérer des performances locales sans affecter les autres groupes de travail.

- La structure d'optimisation distribuée permet de diviser des problèmes (systèmes) en sous-problèmes (sous-systèmes) et de les traiter séparément (par le directeur et les groupes de travail).
- Chaque problème ou sous-problème peut être traité avec un algorithme d'optimisation différent et approprié selon le type de problème. Ce dernier peut être inséré dans l'architecture distribuée sans modification.
- L'architecture distribuée s'ajuste naturellement à la structure de conception qui est utilisée dans les industries.
- Le temps de conception est réduit dû au fait que chaque groupe de travail analyse leur propre ensemble de variables sans attendre les informations des autres groupes de travail.
- Les différents groupes de travail peuvent effectuer des changements sans invalider nécessairement les décisions que les autres groupes de travail ont déjà prises.
- L'architecture distribuée permet de réduire au minimum les chemins de communication ainsi que l'échange de données.
- L'algorithme IPOMP-ED constitue une approche non biaisée par l'intuition ou l'expérience.

Les algorithmes IPOMP et IPOMP-ED ont été testés sur un problème mathématique afin de bien comprendre leur fonctionnement mais aussi sur un problème de conception réel. Dans la majorité des cas, les solutions obtenues, lors de la résolution des problèmes en environnement distribué, sont les mêmes que celles trouvées en environnement centralisé. Lorsque des différences sont observées, elles peuvent s'expliquer par le fait que l'algorithme d'optimisation SQP (*Sequential Quadratic Programming*) du solveur DONLP2 se comporte mal en environnement distribué, ce qui engendre des problèmes de convergence. Malgré tout, les solutions trouvées en environnement distribué sont similaires à celles obtenues en environnement centralisé et elles sont Pareto-optimales.

D'autre part, pour converger à la bonne solution en un temps raisonnable, il faut choisir judicieusement le paramètre de pénalité. En effet, une valeur trop grande de ce paramètre provoque des problèmes numériques tandis qu'une valeur trop petite amène un temps de convergence très long. Le paramètre de pénalité doit cependant être suffisamment grand pour obtenir de bons résultats. Donc pour choisir ce paramètre, il est préférable de commencer par une petite valeur et l'augmenter graduellement. Cela revient à dire qu'il faut faire quelques essais.

Puisque les solutions produites par les algorithmes IPOMP et IPOMP-ED sont déterministes et que ces solutions peuvent être très sensibles à diverses sources de variations, il était important de considérer cet aspect. Ainsi un processus a été développé pour étudier la sensibilité des solutions déterministes aux variations et ainsi trouver des solutions réalisables robustes. Comme nous le savons, la variation due aux processus manufacturiers et à l'utilisation d'un produit dans des environnements différents peut affecter la qualité et la performance du produit. La méthodologie développée permet d'obtenir des solutions robustes très conservatrices qui assurent que 100% des contraintes seront satisfaites, mais aussi de trouver des solutions alternatives moins conservatrices.

7.2 Limitations de la recherche

Certaines limites ont été cernées lors de la réalisation de cette recherche. La première est que l'utilisation de ces algorithmes exige que la modélisation du système ou du problème soit réalisée. Cette modélisation n'est pas toujours facile à faire et peut, dans certains cas, être impossible. Cette situation constitue certainement une limitation mais aussi une ouverture de recherche pour l'utilisation de la simulation.

Deuxièmement, pour que l'algorithme IPOMP-ED puisse fonctionner en environnement distribué, l'utilisation des systèmes de communication et des moyens informatiques sont nécessaires. Cet aspect n'a pas été considéré dans ces travaux et peuvent impliquer des changements dans l'algorithme.

Troisièmement, l'algorithme a été testé sur des petits problèmes de conception ayant seulement quelques variables. Il serait intéressant de l'utiliser pour résoudre des problèmes plus complexes, impliquant plusieurs variables. Certains problèmes plus complexes ont été recensés dans la littérature, surtout dans le domaine de l'aérospatiale et de l'aéronautique, mais le détail de la modélisation n'était pas donné.

Quatrièmement, le comportement des algorithmes SQP de certains solveurs n'est pas adéquat en environnement distribué. Cela peut compliquer l'implantation de l'algorithme IPOMP-ED si les groupes de travail utilisent des algorithmes SQP différents. Des algorithmes d'optimisation plus rapides et efficaces sont nécessaires.

En dernier lieu, la structure distribuée proposée implique que les variables interdisciplinaires et couplées soient doublées. Il est évident que cela augmente la taille du problème et que le temps de résolution informatique s'en trouve ainsi augmenté.

7.3 Principales contributions

La présente recherche s'inscrit dans un courant de recherche très spécifique qui vise à concevoir et optimiser des produits dans un environnement distribué. Malgré le fait que cette recherche révèle, actuellement, très peu de contributions pratiques, elle présente néanmoins des contributions significatives au niveau théorique.

La recension des écrits sur les approches d'optimisation en environnement distribué a montré que très peu de travaux avaient été faits en ce sens. En effet, seulement deux approches ont été développées: celle de Braun (1996) et celle de Gu et al. (2006). **Les travaux réalisés dans cette thèse ont permis de jumeler, pour la première fois, l'approche distribuée de Gu et al. (2006) avec une technique pour résoudre des problèmes à multiples objectifs.** Cette contribution est significative puisque l'approche de Gu et al. (2006) est beaucoup plus robuste que celle de Braun (1996). L'algorithme IPOMP-ED ainsi créé est donc unique et plus robuste.

Puisque l'algorithme d'Abdel Haleem (1991) est à la base de l'algorithme IPOMP-ED, ce dernier permet de générer plusieurs alternatives de conception Pareto-optimales tandis que la technique du *linear physical programming* permet de tenir compte des préférences des groupes de travail lors de la génération des alternatives de conception. Cette contribution est aussi significative car, dans la littérature, les approches recensées permettaient de générer une seule solution, et cette solution n'était pas nécessairement Pareto-optimale.

À la lecture des approches distribuées recensées, deux questions étaient sans réponse. La première question visait la façon de déterminer les valeurs cibles initiales par le décideur: devait-on les fixer au hasard ou de façon précise? Cette recherche a donc démontré que les valeurs cibles doivent être fixées par le décideur de manière précise. Une procédure a donc été établie. La deuxième question concernait la détermination des bornes sur les variables auxiliaires et leurs valeurs cibles. Cette question était importante pour assurer la faisabilité de la solution obtenue par l'algorithme IPOMP-ED et pour éviter que les groupes aient à fixer eux-mêmes ces bornes ce qui auraient pu causer des divergences. Une méthode pour déterminer les bornes sur les variables auxiliaires et leurs valeurs cibles associées a donc été définie.

La dernière contribution concerne bien sûr le fait que des solutions robustes peuvent être identifiées. L'analyse de sensibilité ne doit pas être négligée car elle assure la faisabilité des produits mais plus important encore, la sécurité des utilisateurs. **Dans le processus proposé pour trouver une solution Pareto-optimale robuste, l'identification des variables les plus influentes permet de réduire encore plus la variation des fonctions-objectifs.** Cela n'avait jamais été fait lors de l'optimisation de multiples objectifs en environnement distribué.

7.4 Perspectives de recherche

Comme il a été mentionné précédemment dans ce chapitre, les travaux effectués dans le cadre de cette thèse visaient à concevoir et optimiser des produits dans un environnement distribué. Les travaux réalisés n'ont qu'effleuré ce domaine de recherche et plusieurs concepts peuvent encore être approfondis.

La rapidité de la convergence de l'algorithme IPOMP-ED dépend en grande partie au choix du paramètre de pénalité et du critère d'arrêt. Peu d'informations ont été trouvées dans la littérature pour choisir ce paramètre. Des essais devraient être effectuées pour vérifier s'il est possible de choisir le paramètre de pénalité et le critère d'arrêt de façon à optimiser le temps de résolution et la précision de la solution.

Puisque l'algorithme IPOMP-ED permet de résoudre des problèmes à objectifs multiples au niveau système et sous-systèmes, il serait possible de considérer la variance des fonctions-objectifs comme une fonction à optimiser (par exemple par la formule de propagation des erreurs) et ainsi, générer des solutions robustes sans passer par un processus de simulation.

Les algorithmes présentés dans ce document permettent de trouver des solutions Pareto-optimales différentes dans le but de créer une banque de solutions afin d'en choisir une pour implantation. Cependant, si aucune solution satisfaisante n'est trouvée, les contraintes et l'aspect fonctionnel du système devront peut-être être réexaminés. Des liens possibles peuvent être envisagés avec d'autres techniques comme l'analyse de la valeur ou encore les méthodes TRIZ. Des passerelles méthodologiques pourraient être élaborées afin d'enrichir la procédure d'optimisation et d'arriver à une solution plus satisfaisante.

L'algorithme développé exige que la modélisation du problème soit effectuée. Des recherches pourraient être effectuées dans le cas où la modélisation des performances du système n'est pas possible. Dans le même ordre d'idée, une approche de modélisation pourrait être intégrée à l'approche d'optimisation distribuée.

Dans le cadre de cette recherche, les étapes de l'algorithme IPOMP-ED (le calcul de la tables des valeurs, la détermination de l'ensemble réduit des valeurs cibles possibles, la détermination des degrés de désirabilité, l'algorithme de Dauer et Krueger (1977) pour la résolution du problèmes à objectifs multiples, l'algorithme de soustraction des ensembles, etc.) ont été programmés indépendamment les unes des autres. Des travaux supplémentaires permettraient bien sûr d'informatiser l'algorithme complet afin d'en faciliter son utilisation. Une interface plus conviviale pourrait aussi être créée, le but étant d'automatiser le plus possible le processus d'optimisation.

Afin de créer une approche méthodologique complète, les algorithmes IPOMP et IPOMP-ED pourraient être positionnés dans les démarches connues de développement de produit. Une démarche comme le Design For Six Sigma (DFSS) comprend déjà plusieurs outils statistiques et d'optimisation. L'algorithme IPOMP-ED, une fois informatisé, pourrait s'inscrire dans le coffre d'outils des méthodes Six Sigma et DFSS.

Finalement, la méthode AHP (*Analytic Hierarchy Process*) pourrait être utilisée pour choisir la meilleure solution Pareto-optimale parmi celles générées par l'algorithme IPOMP-ED. En effet, la méthode AHP permettrait de diminuer le nombre des alternatives de conception par une comparaison systématique des solutions Pareto-optimales en sélectionnant, considérant et appliquant des critères. La figure 7.1 montre la structure de la méthode AHP.

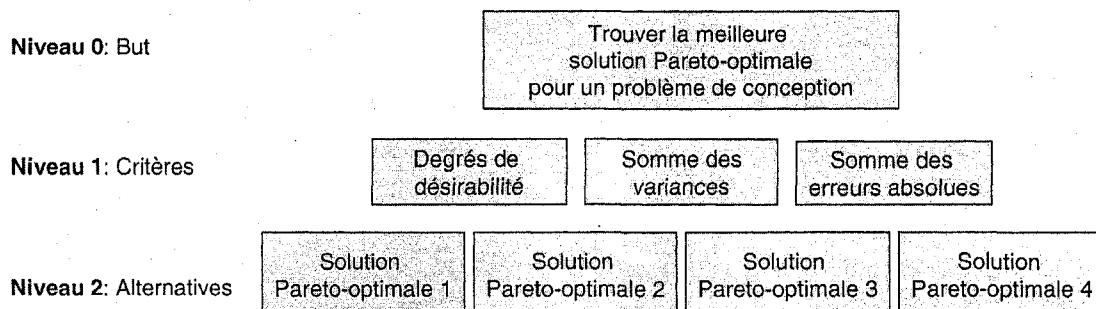


Figure 7.1 : Structure de la méthode AHP.

7.5 Conclusion

Cette thèse de doctorat constitue une étape dans la quête et le développement des connaissances dans le domaine de l'optimisation distribuée. Les sujets abordés sont assez pointus et encore peu explorés. La poursuite des travaux dans ce domaine permettra d'améliorer la qualité des produits développés, le temps de développement et par le fait même, la compétitivité des entreprises. Il serait souhaitable que ces travaux contribuent à d'autres champs de recherche comme l'informatique, les mathématiques et l'analyse numérique qui, dans certains cas, limitent l'utilisation des algorithmes en environnement distribué.

BIBLIOGRAPHIE

- ABDEL HALEEM, B. (1991). *A study on interactive multiple criteria decision making problem*. Thèse de doctorat. Mechanical Design and Production Department, Faculty of Engineering, Cairo university.
- ABDEL HALEEM, B., YACOUT, S. and OSMAN, M. (2006). An interactive nonlinear goal programming algorithm. *Canadian Journal of Operational Research and Information processing*. INFOR. (soumis).
- ALEXANDROV, N.M. and LEWIS, R.M. (2002). Analytical and Computational Aspects of Collaborative Optimization for Multidisciplinary Design. *AIAA Journal*, 40(2), 301-309.
- AMERICAN PRODUCTIVITY & QUALITY CENTER. (2003). *Improving New Product Development Performance and Practices*. Houston. Texas. APQC.
- ANANDALINGAM, G. (1988). A mathematical programming model of decentralized multi-level systems. *Journal of Operational Research Science*, 39(11), 1021-1033.
- ARTILES-LÉON, N. (1996-97). A pragmatic approach to multiple-response problems using loss functions. *Quality Engineering*, 9(2), 213-220.
- ASKIN, R.G. and DAWSON, D.W. (2000). Maximizing customer satisfaction by optimal specification of engineering characteristics. *IIE Transactions*, 32(1), 9-20.

- AUTE, V. and AZARM, S. (2006). A genetic algorithm based approach for multidisciplinary multiobjective collaborative optimization. *11th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, Portsmouth, Virginia.
- BALLING, R. and RAWLINGS, M.R. (2000). Collaborative optimization with disciplinary conceptual design. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 20, 232-241.
- BARD, J.F. and FALK, J.E. (1982). An explicit solution to the multi-level programming problem. *Computers and Operations Research*, 9(1), 77-100.
- BARD, J.F. (1983a). An algorithm for solving the general bilevel programming problem. *Mathematics of Operations Research*, 8(2), 260-272.
- BARD, J.F. (1983b). Coordination of a multidivisional organization through two levels of management. *OMEGA the International Journal of Management Science*, 11(5), 457-468.
- BARD, J.F. (1984). An investigation of the linear three level programming problem. *IEEE Transactions on Systems, Management and Cybernetics*, 14(5), 711-717.
- BARD, J.F. (1988). Convex two-level optimization. *Mathematical Programming*, 40, 15-27.
- BENNIS, F., GIASSI, A. and MAISONNEUVE, J-J. (2004). Optimisation collaborative multi-sites: application à la conception des navires. *Mécanique & Industries*, 5, 103-114.

BERNARD, S. (2004). *Spécification d'un environnement d'ingénierie collaborative multisite – Application à l'industrie aéronautique européenne*. Thèse de doctorat. École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Centre d'Aix-en-Provence.

BESTERFIELD, D.H., BESTERFIELD-MICHNA, C., BESTERFIELD, G.H. and BESTERFIELD-SACRE, M. (2003). *Total Quality Management* (Third Edition). New-Jersey: Prentice-Hall.

BIALAS, W.F. and KARWAN, M.H. (1978). *Multilevel linear programming*. (Research Report No. 78-1). Buffalo: State University of New-York, Department of industrial engineering.

BIALAS, W.F. and KARWAN, M.H. (1979). *Mathematical methods for multilevel planning*. (Research Report No. 79-2). Buffalo: State University of New-York, Department of industrial engineering.

BILES, W.E. (1975). A response surface method for experimental optimization of multi-response processes. *Industrial Engineering Chemical Process Design Development*, 14(2), 152-158.

BOUCHEREAU, V. and ROWLANDS, H. (2000). Methods and techniques to help quality function deployment (QFD). *Benchmarking: An International Journal*, 17(1), 8-19.

BRADY, J.E. and ALLEN, T.T. (2006). Six Sigma Literature: A Review and Agenda for Future research. *Quality and Reliability Engineering International*, 22, 335-367.

BRAUN, R.D. (1996). *Collaborative Optimization: An Architecture for large-scale distributed design*. Thèse de doctorat, Stanford University, États-Unis.

CANTAMESSA, C. and VILLA, A. (2000). Product and Process Design Effort Allocation in Concurrent Engineering. *International Journal of Production Research*, 38(4), 3131-3147.

CAO, D. and LEUNG, L.C. (2002). A partial cooperation model for non-unique linear two-level decision problems. *European Journal of Operational Research*, 140, 134-141.

CAO, D. and CHEN, M. (2006). Capacitated plant selection in a decentralized manufacturing environment: a bilevel optimization approach. *European Journal of Operational Research*, 169, 97-110.

CASSIDY, R.G., KIRBY, J.L. and RAIKE, W.M. (1971). Efficient distribution of resources through three levels of government. *Management Science*, 17(8), 462-473.

CHAN, L-K. and WU, M-L. (2002). Quality Function Deployment: A Literature Review. *European Journal of Operational Research*, 143, 463-497.

CHANKONG, V. and HAIMES, Y.Y. (1983). *Multiobjective Decision Making : theory and methodology*. North-Holland series in system science and engineering. Volume 8. Elsevier.

CHEN W., WIECEK, M.M. and ZHANG, J. (1999). Quality Utility – A Compromise Programming Approach to Robust Design. *Journal of Mechanical Design*, 121, 179-187.

CHEN, W., SAHAI, A., MESSAC, A. and SUNDARARAJ, G.J. (2000). Exploration of the Effectiveness of Physical Programming in Robust Design. *Journal of Mechanical Design*, 122, 155-163.

- CHEN, Y., FUNG, R.Y.K. and TANG, J. (2005). Fuzzy expected value modelling approach for determining target values of engineering characteristics in QFD. *International Journal of Production Research*, 43(17), 3583-3604.
- CONSEIL DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE. (2006). *Avis – Pour une gestion stratégique de l'innovation dans le secteur manufacturier*. Gouvernement du Québec, 134 pages.
- COPELAND, K. and NELSON, P. (1996). Dual response optimization via direct function minimization. *Journal of Quality Technology*, 28, 331-336.
- CREVELING, C.M., SLUTSKY, J.L. and ANTIS, D.Jr. (2003). *Design for six sigma in technology and product development*. New Jersey (USA): Prentice Hall PTR.
- CROCKER, O.L., CHARNEY, C. and SIK LEUNG CHIU, J. (1991). *Guide pratique des cercles de qualité*. Paris (France): Eyrolles.
- DAUER, J.P. and KRUEGER, R.J. (1977). An Iterative Approach to Goal Programming. *Operational Research Quarterly*, 28(3), 671-681.
- DAWSON, D. and ASKIN, R.G. (1999). Optimal New Product Design using Quality Function Deployment with Empirical Value Functions. *Quality and Reliability Engineering International*, 15, 17-32.
- DE LIGNY, G. (1982). *Pratiques des cercles de qualité*. France: Éditions Hommes et Techniques.
- DEL CASTILLO, E. (1996). Multiresponse process optimization via constrained confidence regions. *Journal of Quality Technology*, 28(1), 61-70.

- DEL CASTILLO, E., MONTGOMERY, D.C. and MC CARVILLE, D.R. (1996). Modified desirability functions for multiple responses optimization. *Journal of Quality Technology*, 28(3), 337-345.
- DEMIGUEL, A-V. and MURRAY, W. (2000). *An Analysis of Collaborative Optimization Methods* (AIAA-2000-4720). American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- DEMIGUEL, A-V. (2001). *Two decomposition algorithms for nonconvex optimization problems with global variables*. Thèse de doctorat. Université de Standford.
- DERRINGER, G. and SUICH, R. (1980). Simultaneous optimization of several response variables. *Journal of Quality Technology*, 12(4), 214-219.
- DING, R., LIN, D.K.J. and WEI, D. (2004). Dual-Response Surface Optimization: A Weighted MSE Approach. *Quality Engineering*, 16(3), 377-385.
- DIWEKAR, U. (2003). Introduction to applied optimization. *Applied Optimization*, 80. États-Unis: Kluwer Academic Publishers.
- DU, X. and CHEN, W. (2000a). *Concurrent Subsystem Uncertainty Analysis in Multidisciplinary Design* (AIAA-2000-4928). American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc.
- DU, X. and CHEN, W. (2000b). Towards a Better Understanding of Modeling Feasibility Robustness in Engineering Design. *Journal of Mechanical Design*, 122(4), 385-394.

- DU, X. (2005). Collaborative Reliability Analysis under the Framework of Multidisciplinary Systems Design. *Optimization and Engineering*, 6, 63-84.
- ELDIN, N. (2002). A promising planning tool: quality function deployment. *Cost Engineering*, 44(3), 28-37.
- FUNG, R.Y.K., POPPLEWELL, K. and XIE, J. (1998). An intelligent hybrid system for customer requirements analysis and product attribute targets determination. *International Journal of Production Research*, 36(1), 13-34.
- GIASSI, A., BENNIS, F. and MAISONNEUVE, J.-J. (2004). Multidisciplinary design optimisation and robust design approaches applied to concurrent design. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 28, 356-371.
- GINN, D., VARNER, E., STREIBEL, B. and JERSILD, C. (2004). *The Design for Six sigma* (First edition). Memory jogger. USA: GOAL/PC.
- GU, X.S., RENAUD, J.E. and PENNINGER, C.L. (2006). Implicit Uncertainty Propagation for Robust Collaborative Optimization. *Journal of Mechanical Design*, 128, 1001-1013.
- HARRINGTON, E.C. Jr. (1965). The desirability function. *Industrial Quality Control*, April, 494-498.
- HAUSER, J.R. and CLAUSING, D. (1988). The House of Quality. *Harvard Business Review*, May-June, 63-73.
- HILLIER, F.S. and LIBERMAN, G.J. (2001). *Introduction to Operations Research* (Seventh Edition). New-York: McGraw-Hill Higher Education.

HOBBS, B.F. and NELSON, S.K. (1992). A nonlinear bilevel model for analysis of electric utility demand-side planning issues. *Annals of Operations Research*, 34, 225-274.

JACQUES, J. (2005). *Contributions à l'Analyse de Sensibilité et à l'Analyse Discriminante Généralisée*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier. <http://math.univ-lille1.fr/~jacques/>.

KACKAR, R.N. (1985). Off-line quality control, parameter design, and the Taguchi method. *Journal of Quality Technology*, 17(4), 176-188.

KAHN, K.B. (2005). *The PDMA Handbook of New product Development* (Second Edition). Etats-Unis: John Wiley & Sons Inc.

KARSAK, E.E., SOZER, S. and ALPTEKIN, S.E. (2002). Product planning in quality function deployment using combined analytic network process and goal programming approach. *Computers & Industrial Engineering*, 44, 171-190.

KARSAK, E.E. (2004). Fuzzy multiple objective programming framework to prioritize design requirements in quality function deployment. *Computers & Industrial Engineering*, 47, 149-163.

KASPRZAK, E.M. and LEWIS, K.E. (2001). Pareto analysis in multiobjective optimization using the collinearity theorem and scaling method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 22, 208-218.

KIM, K. and LIN, D.K.J. (1998). Dual response surface optimization : A fuzzy modeling approach. *Journal of Quality Technology*, 30, 1-10.

- KROO, I., ALTUS, S., BRAUN, R., GAGE, P. and SOBIESKI, J. (1994). Multidisciplinary optimization methods for aircraft preliminary design (AIAA-94-4325-CP). *Symposium on multidisciplinary, analysis and optimization (September 7-9, 697-707)*. Panama city, Floride, États-Unis.
- KROO, I. and MANNING, V. (2000). Collaborative optimization: status and direction (AIAA-2000-4721). *8th AIAA/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*. Long Beach, California.
- KROO, I. (2004). Distributed Multidisciplinary Design and Collaborative Optimization. *VKI Lecture Series on Optimization Methods & Tools for Multicriteria/Multidisciplinary Design*.
- KURAPATI, A. and AZARM, S. (2000). Immune network simulation with multiobjective genetic algorithms for multidisciplinary design optimization. *Engineering Operation*, 33, 245-260
- LAMGHABBAR, A., YACOUT, S. and OUALI, M.S. (2004). Concurrent optimization of the design and manufacturing stages of product development. *International Journal of Production Research*, 42(21), 4495-4512.
- LIN, D.K.J. and TU, W. (1995). Dual Response Surface Optimization. *Journal of Quality Technology*, 27, 34-39.
- LITTLER, D., LEVERICK, F. and BRUCE, M. (1995). Factors Affecting the Process of Collaborative Product Development: A Study of UK Manufacturers of Information and Communications Technology Products. *Journal of Production and Innovation Management*, 12, 16-32.

LIU, S-T. (2005). Rating design requirements in fuzzy quality function deployment via a mathematical programming approach. *International Journal of Production Research*, 43(3), 497-513.

MCALLISTER, C.D., SIMPSON, T.W. and YUKISH, M. (2000). Goal programming applications in multidisciplinary design optimization. *8th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, Long Beach, CA*. AIAA.

MCALLISTER, C.D. and SIMPSON, T.W. (2003). Multidisciplinary Robust Design Optimization of an Internal Combustion Engine. *Transactions of the ASME*, 125, 124-130.

MCALLISTER, C.D., SIMPSON, T.W., LEWIS, K. and MESSAC, A. (2004). Robust Multiobjective Optimization through Collaborative Optimization and Linear Physical Programming. *10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference, Albany, New York*.

MCALLISTER, C.D., SIMPSON, T.W., HACKER, K., LEWIS, K. and MESSAC, A. (2005). Integrating linear physical programming within collaborative optimization for multiobjective multidisciplinary design optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 29, 178-189.

MESSAC, A. (1996). Physical Programming: Effective Optimization for Computational Design. *AIAA Journal*, 34(1).

MESSAC, A., GUPTA, S.M. and AKBULUT, B. (1996). Linear physical programming: a new approach to multiple objective optimization. *Transactions on Operational Research*, 8, 39-59.

- MESSAC, A. and ISMAIL-YAHAYA, A. (2002). Multiobjective robust design using physical programming. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 23, 357-371.
- MIETTINEN, K. and MAKELA, M. (2006). Synchronous approach in interactive multiobjective optimization. *European Journal of Operational Research*, 170, 909-922.
- MISTREE, F., HUGHES, O.F. and BRAS, B. (1993). Compromise Decision Support Problem and the Adaptive Linear Programming Algorithm. *Structural optimization : status and promise* (Progress in Astronautics and Aeronautics American institute, 50, 251-290). Washington, USA.
- MONTGOMERY, D.C. (2005). *Design and analysis of experiments* (6th edition). USA: John Wiley & sons inc..
- MOSKOWITZ, H. and KIM, K.J. (1997). QFD optimizer: a novice friendly quality function deployment decision support system for optimizing product designs. *Computers & Industrial Engineering*, 32(3), 641-655.
- MOTTELET, S. (2003). *Optimisation Non Linéaire* (R004/TI07), Notes de cours, Université de Technologie de Compiègne.
- MYERS, R.H., MONTGOMERY, D.C., VINING, G.G., BORNOR, C.M. and KOWALSKI, S.M. (2004). Response surface methodology: A retrospective and literature survey. *Journal of Quality Technology*, 36(1), 53-77.
- NGUYEN, N. (2006). *Gestion de la qualité*. Québec: Chenelière Education.

- NOORI, H. and Lee, W.B. (2004). Collaborative design in a networked enterprise: the case of the telecommunications industry. *International Journal of Production Research*, 42(15), 3041-3054.
- ORBAN, D. (2005). *Numerical Methods for Nonlinear Optimization and Control*. Notes de cours. Département de Mathématiques et de Génie Industriel, École Polytechnique de Montréal.
- OSMAN, M.S.A. (1979). Characterization of the Stability Set of the First Kind with Parameters in the Objective Function. *Proceedings of the 10th International Conference on Mathematical Programming*, Montréal, 27-31.
- PAPALAMBROS, P.Y. and WILDE, D.J. (2000). *Principles of optimal design: modeling and computation*. New-York: Cambridge University Press.
- PRASAD, B. (1998). Review of QFD and related deployment techniques. *Journal of Manufacturing Systems*, 17(3), 221-234.
- RIBEIRO, J.L., FOGLIATTO, F.S. and TEN CATEN, C.S. (2000-01). Minimizing manufacturing and quality costs in multiresponse optimization. *Quality Engineering*, 13(2), 191-201.
- ROBINSON, T.J., BORROR, C.M. and MYERS, R.H. (2004). Robust parameter design: a review. *Quality and Reliability Engineering International*, 20, 81-101.
- RYU, J-H., DUA, V. and PISTIKOPOULOS, E.N. (2004). A bilevel programming framework for enterprise-wide process networks under uncertainty. *Computers and Chemical Engineering*, 28, 1121-1129.

SALHIEH, S.M. (2003). Collaborative planning framework to support distributed product development. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 14(6).

SALTELLI, A., CHAN, K. and SCOTT, E.M. (2000). *Sensitivity Analysis*. England: John Wiley & Sons Ltd.

SCHENK, G.R., BIALAS, W.F. and KARWAN, M.H. (1980). *A multilevel programming model to determine optimal effluent control policies*. Department of Industrial Engineering, State University of New-York at Buffalo, tiré de: <http://www.acsu.buffalo.edu/~bialas/public/pub/Papers/SCHENK80.PDF>

SOBIESKI, I.P. and KROO, I.M. (2000). Collaborative Optimization using Response Surface Estimation. *AIAA Journal*, 38(10), 1031-1038.

SOBIESZCZANSKI-SOBIESKI, J. and HAFTKA, R.T. (1997). Multidisciplinary aerospace design optimization: survey of recent developments. *Structural Optimization*, 14, 1-23.

SPELLUCCI, P. (2005). *DONLP2 User's Guide*, tiré de: <ftp://plato.la.asu.edu/pub/donlp2>.

TANG, L-C. and PAOLI, P. (2004). A spreadsheet-based multiple criteria optimization framework for quality function deployment. *International Journal of Quality and Reliability Management*, 21(3), 329-347.

TANINO, T. and OGAWA, T. (1984). An algorithm for solving two-level convex optimization problems. *International Journal of Systems Science*, 15(2), 163-174.

TAPPETA, R.V. and RENAUD, J.E. (1997). Multiobjective collaborative optimization. *Journal of mechanical design, 119*, 403-411.

TAPPETA, R.V. and RENAUD, J.E. (1999). Interactive Multiobjective Optimization Procedure. *AIAA Journal, 37*(7), 881-889.

TAPPETA, R.V., RENAUD, J.E., MESSAC, A. and SUNDARARAJ, G.J. (2000). Interactive Physical Programming: tradeoff analysis and decision making in multicriteria optimization. *AIAA Journal, 38*(5), 917-926.

TAPPETA, R.V. and RENAUD, J.E. (2001). Interactive multiobjective optimization design strategy for decision based design. *Journal of mechanical design, 123*, 205-215.

TRIBES, C., DUBÉ, J-F. and TRÉPANIER, J-Y. (2005). Decomposition of Multidisciplinary Optimization Problems: Formulations and Application to a Simplified Wing Design. *Engineering Optimization, 37*(8), 775-796.

ULRICH, K.T., and EPPINGER, D. (2000). *Product design and development*. (3^e éd.). New-York: McGraw Hill/Irwin.

VASSILEV, V., NARULA, S.C. and GOULJASHKI, V.G. (2001). An interactive reference direction algorithm for solving multi-objective convex nonlinear integer programming problems. *International Transactions in Operational Research, 8*(4), 367-380.

VINING, G.G. and MYERS, R.H. (1990). Combining Taguchi and Response Surface Philosophies: a Dual Response Approach. *Journal of Quality Technology, 22*, 38-45.

WANG, J. (1999). Fuzzy outranking approach to prioritize design requirements in quality function deployment. *International Journal of Production Research*, 37(4), 899-916.

WANG, L., SHEN, W., XIE, H., NEELAMKAVIL, J. and PARDASANI, A. (2002). Collaborative conceptual design – state of the art and future trends. *Computer-Aided Design*, 34, 981-996.

WEN, U-P. and HSU, S-T. (1991). Efficient solutions for the linear bilevel programming problem. *European Journal of Operational Research*, 62, 354-362.

WIKIPEDIA THE FREE ENCYCLOPEDIA. (2007). *Robustification*. Wikipedia The Free Encyclopedia. Consulté en juin 2007, tiré de: <http://en.wikipedia.org>.

WILLAERT, S.S.A., DE GRAAF, R. and MINDERHOUD, S. (1998). Collaborative engineering: A case study of concurrent engineering in a wider context. *Journal of Engineering Technology Management*, 15, 87-109.

WU, C.F.J. and HAMADA, M. (2000). *Experiments planning, analysis and parameter design optimization*. États-Unis: Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons Inc.

WU, F-C. and CHYU, C-C. (2004). Optimization of robust design for multiple quality characteristics. *International Journal of Production Research*, 42(2), 337-354.

YACOUT, S., PIEDRAS, H. and SAVARD, G. (2006). Concurrent optimization of customer requirements and the design of a new product. *International Journal of Production Research*, 44(20), 4401-4416.

YI, S.I., SHIN, J.K. and PARK, G.J. (2007). Comparison of MDO methods with mathematical examples. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 10.1007/s00158-007-0150-2

YING, H., GANG, C., ZI-MING, W., MIN, X. and SHI-LU, C. (2006). Multi-objective pareto collaborative optimization and its application. *11th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, Portsmouth, Virginia.

ZHAO, L. (2002). *A work structure based approach to collaborative engineering design*. Thèse de doctorat, University of Southern California, États-Unis.

ANNEXE A

PROCÉDURE POUR DÉTERMINER L'ENSEMBLE DE STABILITÉ

L'ensemble de stabilité $G(\bar{A}_h)$ est déterminer comme suit (Osman, 1979):

1. Pour $\bar{u}_q = 0$, $q = Q+1, \dots, Q+M$, $G_1(\bar{A}_h) = \{b \mid b_q \geq c_q(\bar{A}_h)\}$.
 2. Pour $\bar{u}_q > 0$, $q = Q+1, \dots, Q+M$, $G_2(\bar{A}_h) = \{b \mid b_q \geq c_q(\bar{A}_h), q = Q+1, \dots, Q+M\}$.
 3. $\bar{u}_q = 0$, $q \in J \subseteq \{Q+1, \dots, Q+M\}$ et $\bar{u}_q > 0$, $q \notin J$
- $$G_J(\bar{A}_h) = \{b \mid b_q \geq C_q(\bar{A}_h), r \in J, b_q = C_q(\bar{A}_h), r \in J\}$$
- $$G_3(\bar{A}_h) = \bigcup_J G_J(\bar{A}_h)$$

ANNEXE B

SCÉNARIOS POSSIBLES POUR DÉTERMINER LES DEGRÉS DE DÉSIRABILITÉ

Pour assigner les valeurs aux $t_{i5}^-, t_{i4}^-, t_{i3}^-, t_{i2}^-, t_{i1}^-$ et $t_{i1}^+, t_{i2}^+, t_{i3}^+, t_{i4}^+, t_{i5}^+$, les groupes de travail peuvent utiliser l'ensemble de solvabilité réduit ou l'ensemble réduit des valeurs cibles et choisir un des scénarios suivants (la classe 1S sera utilisée pour expliquer les scénarios):

Scénario #1 : $t_{i1}^+ = b_{iMin}$ et $t_{i5}^+ = b_{iMax}$ et $\frac{b_{iMax} - b_{iMin}}{4} = x_i$, donc on a les classes suivantes:

$$t_{i1}^+ = b_{iMin}$$

$$t_{i2}^+ = t_{i1}^+ + x_i$$

$$t_{i3}^+ = t_{i2}^+ + x_i$$

$$t_{i4}^+ = t_{i3}^+ + x_i$$

$$t_{i5}^+ = b_{iMax}$$

Scénario #2 : $\frac{b_{iMax} - b_{iMin}}{6} = x_i$, donc on a les classes suivantes:

$$t_{i1}^+ = b_{iMin} + x_i$$

$$t_{i2}^+ = t_{i1}^+ + x_i$$

$$t_{i3}^+ = t_{i2}^+ + x_i$$

$$t_{i4}^+ = t_{i3}^+ + x_i$$

$$t_{i5}^+ = t_{i4}^+ + x_i$$

Scénario #3 : $t_{i4}^+ = b_{iMax}$ donc on considère que la pire valeur est indésirable et on calcule $\frac{b_{iMax} - b_{iMin}}{4} = x_i$ pour obtenir les classes suivantes:

$$t_{i1}^+ = t_{i2}^+ - x_i$$

$$t_{i2}^+ = t_{i3}^+ - x_i$$

$$t_{i3}^+ = t_{i4}^+ - x_i$$

$$t_{i4}^+ = b_{iMax}$$

$$t_{i5}^+ = t_{i4}^+ + x_i$$

ANNEXE C

ALGORITHME DE DAUER ET KRUEGER (1977)

(tiré de Abdel Haleem et al. (2006))

Considérons un problème classique d'optimisation non linéaire à multiples objectifs (NLMO) ayant k objectifs et sujet à un ensemble de contraintes M :

$$(NLMO) : \quad f_1(X) \leq b_1$$

$$f_2(X) \leq b_2$$

.....

$$f_k(X) \leq b_k$$

sujet à
$$M = \{X \in R^n \mid g_r(X) \leq 0, r = 1, \dots, m, X \geq 0\}$$

où X est le vecteur des variables de décisions $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $b_i, i = 1, \dots, k$ représente la valeur cible de la fonction objectif $f_i(X), i = 1, \dots, k$. Les objectifs sont ordonnés selon leur priorité de sorte que si $i \leq j$ alors $i, f_i(X) \leq b_i$ a une priorité plus élevée que l'objectif $j, f_j(X) \leq b_j$.

Il est bien connu, en programmation par but, que l'on tente d'atteindre l'objectif i sans se soucier de l'atteinte des autres objectifs j ayant des priorités plus basses. Cette idée a été employée par Dauer et Krueger (1977) pour développer un algorithme permettant de résoudre des problèmes linéaires, nonlinéaires et en nombres entiers. L'algorithme est expliqué comme suit :

Résoudre le problème pour l'objectif 1, P_1

$$P_1 : \text{Minimiser } d_1$$

$$\text{sujet à } f_1(X) - d_1 \leq b_1$$

$$g_r(X) \leq 0, r = 1, \dots, m$$

$$d_1 \geq 0 \text{ et } X \geq 0$$

où d_1 est la déviation positive de l'objectif $f_1(X)$ par rapport à sa valeur cible b_1 . La solution de ce problème est d_1^* .

Le dernier problème à résoudre (objectif k) est P_k

$$P_k : \text{Minimiser } d_k$$

$$\text{sujet à } f_i(X) - d_i \leq b_i, 1 \leq i \leq k$$

$$d_i = d_i^*, 1 \leq i \leq k-1$$

$$g_r(X) \leq 0, r = 1, \dots, m$$

$$d_k \geq 0 \text{ et } X \geq 0$$

Si $d_i = x_{n+k}, i = 1, \dots, k$ alors le dernier problème à résoudre peut s'écrire sous la forme suivante :

$$P' : \text{Minimiser } x_{n+k}$$

$$\text{sujet à } g_r(X) \leq b_r, r = 1, \dots, m$$

$$x_a = x_a^*, n+1 \leq a \leq n+k-1$$

$$x_{n+k} \geq 0 \text{ et } x_i \geq 0, i = 1, \dots, n$$

où $X \in R^{n+k}$.

La solution optimale à ce problème est notée : $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n+k})$. Le problème P' peut être considéré comme un problème de programmation paramétrique ayant les paramètres b_r comme membres de droite dans les contraintes. Il peut s'écrire sous la forme suivante :

$$P : \text{Minimiser } f(X) \equiv x_{n+k}$$

$$\text{sujet à } M(b) = \{X \in R^{n+k} \mid g_r(X) \leq b_r, r = 1, \dots, k+m, X \geq 0\}$$

où b_r est un nombre réel arbitraire. Notons que $x_a^*, n+1 \leq a \leq n+k-1$ a été substitué directement dans les contraintes d'inégalité du problème P' . La solution au problème P est la même que celle du problème P' et l'ensemble de stabilité du problème P peut être calculé.

ANNEXE D

PROGRAMME MATLAB DE L'ALGORITHME IPOMP

```

% Initialisation des contraintes linéaires, de bornes et du point initial
lb=[0 0 0]; % contraintes de bornes sur les variables
x0=[1 1 1]; %Points de départ de l'algorithme
options=optimset('LargeScale','off','MaxFunEvals',10000,'MaxIter',30000);

%Minimisation du premier objectif
[x1]=fmincon(@objectif1ITR,x0,[],[],[],[],lb,[],@contrainteITR,options);

%Minimisation du deuxième objectif
[x2]=fmincon(@objectif2ITR,x0,[],[],[],[],lb,[],@contrainteITR,options);

%Minimisation du troisième objectif
[x3]=fmincon(@objectif3ITR,x0,[],[],[],[],lb,[],@contrainteITR,options);

%Construction de la matrice des profits
T=[feval(@objectif1ITR,x1) feval(@objectif2ITR,x1) feval(@objectif3ITR,x1);
   feval(@objectif1ITR,x2) feval(@objectif2ITR,x2) feval(@objectif3ITR,x2);
   feval(@objectif1ITR,x3) feval(@objectif2ITR,x3) feval(@objectif3ITR,x3)];

%Détermination des valeurs maximales et minimales
bmax=max(T);
bmin=min(T);

b1min=bmin(1,1)
b1max=bmax(1,1)
t11 = input('Choisir le degré de désirabilité idéal = ');
t12 = input('Choisir le degré de désirabilité désirable = ');
t13 = input('Choisir le degré de désirabilité tolérable = ');
t14 = input('Choisir le degré de désirabilité indésirable = ');
t15 = input('Choisir le degré de désirabilité inacceptable = ');
T1 = {'Idéal', 'Désirable', 'Tolérable', 'Indésirable', 'Inacceptable';t11,
      t12, t13, t14, t15};
fprintf('\nLes degrés de désirabilités pour la fonction objectif f1 sont:\n');
disp(T1);
b1=input('choisir la valeur de b1 = ');

b2min=bmin(1,2)
b2max=bmax(1,2)
t21 = input('Choisir le degré de désirabilité idéal = ');
t22 = input('Choisir le degré de désirabilité désirable = ');
t23 = input('Choisir le degré de désirabilité tolérable = ');
t24 = input('Choisir le degré de désirabilité indésirable = ');
t25 = input('Choisir le degré de désirabilité inacceptable = ');
T2 = {'Idéal', 'Désirable', 'Tolérable', 'Indésirable', 'Inacceptable';t21,
      t22, t23, t24, t25};
fprintf('\nLes degrés de désirabilités pour la fonction objectif f2 sont:\n');
disp(T2);
b2=input('choisir la valeur de b2 = ');

b3min=bmin(1,3)
b3max=bmax(1,3)

t31 = input('Choisir le degré de désirabilité idéal = ');
t32 = input('Choisir le degré de désirabilité désirable = ');

```

```

t33 = input('Choisir le degré de désirabilité tolérable = ');
t34 = input('Choisir le degré de désirabilité indésirable = ');
t35 = input('Choisir le degré de désirabilité inacceptable = ');
T3 = {'Idéal', 'Désirable', 'Tolérable', 'Indésirable', 'Inacceptable';t31,
      t32, t33, t34, t35};
fprintf('\nLes degrés de désirabilités pour la fonction objectif f3 sont:\n');
disp(T3);
b3=input('choisir la valeur de b3 = ');

k=0;
while k < 100
%
%Première itération de l'algorithme de Dauer
lb=[0 0 0 0];
x0=[1 1 1 1];
[xbar1,d1]=fmincon(@dauer1ITR,x0,[],[],[],[],lb,[],@contrainte1ITR,options,b1,
b2,b3,t15);

%Deuxième itération de l'algorithme de Dauer
Aeq=[0 0 0 1 0];
beq=[d1];
lb=[0 0 0 0 0];
x0=[1 1 1 1 1];
[xbar2,d2]=fmincon(@dauer2ITR,x0,[],[],Aeq,beq,lb,[],@contrainte2ITR,options,b
1,b2,b3,t15,t25);

%Troisième itération de l'algorithme de Dauer
Aeq=[0 0 0 1 0 0;0 0 0 0 1 0];
beq=[d1;d2];
lb=[0 0 0 0 0 0];
x0=[1 1 1 1 1 1];
[xbar3,d3,exitflag,output,lambda]=fmincon(@dauer3ITR,x0,[],[],Aeq,beq,lb,[],@c
ontrainte3ITR,options,b1,b2,b3,t15,t25,t35);
x=xbar3(:,[1,2,3])

% La valeur des fonctions objectifs au point x
f1=feval(@objectif1ITR,x)
if f1 <= t11
    fprintf('\nLa valeur de f1 est dans la zone idéal\n');
elseif f1 > t11 & f1 <= t12
    fprintf('\nLa valeur de f1 est dans la zone désirable\n');
elseif f1 > t12 & f1 <= t13
    fprintf('\nLa valeur de f1 est dans la zone tolérable\n');
elseif f1 > t13 & f1 <= t14
    fprintf('\nLa valeur de f1 est dans la zone indésirable\n');
elseif f1 > t14
    fprintf('\nLa valeur de f1 est dans la zone inacceptable\n');
end;

f2=feval(@objectif2ITR,x)
if f2 <= t21
    fprintf('\nLa valeur de f2 est dans la zone idéal\n');
elseif f2 > t21 & f2 <= t22
    fprintf('\nLa valeur de f2 est dans la zone désirable\n');
elseif f2 > t22 & f2 <= t23
    fprintf('\nLa valeur de f2 est dans la zone tolérable\n');
elseif f2 > t23 & f2 <= t24
    fprintf('\nLa valeur de f2 est dans la zone indésirable\n');
elseif f2 > t24
    fprintf('\nLa valeur de f2 est dans la zone inacceptable\n');
end;

f3=feval(@objectif3ITR,x)
if f3 <= t31
    fprintf('\nLa valeur de f3 est dans la zone idéal\n');
elseif f3 > t31 & f3 <= t32
    fprintf('\nLa valeur de f3 est dans la zone désirable\n');

```

```

elseif f3 > t32 & f3 <= t33
    fprintf('\nLa valeur de f3 est dans la zone tolérable\n');
elseif f3 > t33 & f3 <= t34
    fprintf('\nLa valeur de f3 est dans la zone indésirable\n');
elseif f3 > t34
    fprintf('\nLa valeur de f3 est dans la zone inacceptable\n');
end;

% La valeur des contraintes de but au point x
g1=feval(@objectif1ITR,x)-d1
g2=feval(@objectif2ITR,x)-d2
g3=feval(@objectif3ITR,x)-d3

%Calcul des multiplicateurs de lagrange associés aux contraintes de but
U=lambda.ineqnonlin;

% Les multiplicateurs associés aux contraintes de but
u1=U(1,1)
u2=U(2,1)
u3=U(3,1)

AlgoSoustractionTR;

fprintf('\nLes degrés de désirabilités pour la fonction objectif f1 sont:\n');
disp(T1);
fprintf('\nLes degrés de désirabilités pour la fonction objectif f2 sont:\n');
disp(T2);
fprintf('\nLes degrés de désirabilités pour la fonction objectif f3 sont:\n');
disp(T3);

b1=input('choisir la valeur de b1 = ');
b2=input('choisir la valeur de b2 = ');
b3=input('choisir la valeur de b3 = ');
k=k+1;
end;

```

ANNEXE E

ÉTAPES DE L'ALGORITHME IPOMP DU PROBLÈME D'ABDEL HALEEM (1991)

Étape 1 : Chaque groupe de travail détermine la catégorie et la classe de sa fonction-objectif selon le tableau 3.2 du chapitre 3. Les fonctions-objectifs sont toutes dans la classe souple.

$$\text{Groupe 1: } f_1 = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - x_4 - 3x_5 \leq b_1 \quad \text{classe 1S}$$

$$\text{Groupe 2: } f_2 = -2x_1 + 3x_2 + 4x_3^3 - 5x_4 - 2x_5 \leq b_2 \quad \text{classe 1S}$$

$$\text{Groupe 3: } f_3 = 3x_1 + x_2^2 - 5x_3 + x_4^2 - 2x_5 \leq b_3 \quad \text{classe 1S}$$

Étape 2 : Les groupes de travail résolvent leur problème individuel. Les résultats sont présentés au tableau E.1.

Tableau E.1 : Valeurs optimales de chacun des objectifs pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f_m^*
Groupe 1	0	0	0	0	5	-15
Groupe 2	0	0	0	5	0	-25
Groupe 3	0	0	0.75	0	3.75	-11.25

Étape 3 : Le directeur construit la table des valeurs des fonctions-objectifs comme montrée au tableau E.2. Le directeur détermine aussi l'ensemble réduit des solutions réalisables.

Tableau E.2 : Table des valeurs des fonctions-objectifs pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f_1	f_2	f_3
A^{*1}	0	0	0	0	5	-15	-10	-10
A^{*2}	0	0	0	5	0	-5	-25	25
A^{*3}	0	0	0.75	0	3.75	-9	-5.81	-11.25

L'ensemble réduit des solutions réalisables D' est:

$$-15 \leq b_1^h \leq -5 \quad -25 \leq b_2^h \leq -5.81 \quad -11.25 \leq b_3^h \leq 25$$

Étape 4 : Le directeur présente l'ensemble réduit des solutions réalisables aux groupes de travail pour qu'ils fixent leurs degrés de désirabilité. Supposons que le scénario 1 est utilisé pour fixer les degrés de désirabilité. Le scénario 1 est présenté à l'annexe B tandis que les degrés de désirabilité sont présentés au tableau E.3.

Tableau E.3 : Degrés de désirabilité pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991) selon le scénario 1.

		I	D	T	ID	IA
Critère	Classe	t_{m1}^+	t_{m2}^+	t_{m3}^+	t_{m4}^+	t_{m5}^+
f_1	1S	-15	-12.5	-10	-7.5	-5
f_2	1S	-25	-20.2025	-15.405	-10.6075	-5.81
f_3	1S	-11.25	-2.1875	6.875	15.9375	25

I: Idéal D: Désirable T: Tolérable ID: Indésirable IA : Inacceptable

Étape 5 : Fixer $h = 1$. Le directeur demande aux groupes de travail de choisir leurs préférences b_m^1 pour leurs fonctions-objectifs. A cette étape, il est probable que les groupes de travail choisissent la valeur la plus avantageuse dans la zone idéale. L'algorithme débute avec les valeurs correspondant aux degrés de désirabilité t_{m1}^+ .

Le groupe 1 choisit $b_1^1 = -15$

Le groupe 2 choisit $b_2^1 = -25$

Le groupe 3 choisit $b_3^1 = -11.25$

Étape 6 : Avec les valeurs fournies par les groupes de travail, le directeur solutionne le problème à objectifs multiples avec l'algorithme de Dauer et Krueger (1977) (annexe C) et obtient une première solution optimale \bar{A}_h .

$$\bar{A}_h = (0, 0, 0, 0, 5)$$

$f_1 = -15$ et la valeur de f_1 est dans la zone idéale

$f_2 = -10$ et la valeur de f_2 est dans la zone inacceptable

$f_3 = -10$ et la valeur de f_3 est dans la zone désirable

Étape 7 : Si le directeur et les groupes de travail sont satisfaits de cette solution, aller à l'étape 14. Sinon, aller à l'étape 8. Le groupe de travail 2 n'est pas satisfait de la valeur de sa fonction-objectif alors allons à l'étape 8.

Étape 8 : Le directeur formule les conditions de KKT et détermine la valeur des multiplicateurs de KKT pour les contraintes de but.

$$\bar{u}_4 = 0$$

$$\bar{u}_5 = 0.6667$$

$$\bar{u}_6 = 1$$

Étape 9 : Selon les valeurs \bar{u}_q obtenues pour les contraintes de but, il détermine l'ensemble de stabilité $G(\bar{A}_h)$ selon l'annexe A.

Puisque $\bar{u}_4 = 0$ et $c_4 = -15$ donc $b_1 \geq -15$

Puisque $\bar{u}_5 > 0$ et $c_5 = -25$ donc $b_2 = -25$

Puisque $\bar{u}_6 > 0$ et $c_6 = -11.25$ donc $b_3 = -11.25$

Étape 10 : Il utilise l'algorithme de soustraction des ensembles (Osman, 1979) pour obtenir l'ensemble réduit des solutions réalisables $\{D' - \bigcup G(\bar{A}_p), p = 1, \dots, h\}$.

b_1 min	b_1 max	b_2 min	b_2 max	b_3 min	b_3 max
-	-	-25.0000	-5.8125	-11.2500	25.0000
-15.0000	-5.0000	-25.0000	-5.8125	-11.2500	25.0000
-15.0000	-5.0000	-25.0000	-25.0000	-11.2500	25.0000

Étape 11: Si aucune autre valeur cible ne peut être choisie dans $\{D' - \bigcup G(\bar{A}_p), p = 1, \dots, h\}$ aller à l'étape 14, sinon aller à l'étape 12.

Étape 12: Fixer $h = h + 1$. Demander aux groupes de travail de sélectionner d'autres valeurs cibles $b_m^h \in \{D' - \bigcup G(\bar{A}_p), p = 1, \dots, h-1\}$ et aller à l'étape 6.

Puisque $f_1 = -15$ est dans la zone idéale, $f_2 = -10$ est dans la zone inacceptable et que $f_3 = -10$ est dans la zone désirable, il faut améliorer f_2 . Alors choisissons f_2 dans la zone tolérable et sacrifions f_1 et f_3 en choisissant aussi leur valeur dans la zone désirable et tolérable (règle#1). Ainsi reprenons, pour l'itération $h = 2$, les étapes 6 jusqu'à 12. Supposons que $b^2 = (-12, -18, -1)$ est choisi dans l'ensemble souligné à l'étape 10. En résolvant à nouveau le problème on obtient la solution optimale suivante: $\bar{A}_2 = (0, 0, 0, 1.5, 3.5)$. Les valeurs des fonctions-objectifs au point \bar{A}_2 sont:

$f_1 = -12$ et la valeur de f_1 est dans la zone tolérable

$f_2 = -14.5$ et la valeur de f_2 est dans la zone indésirable

$f_3 = -4.75$ et la valeur de f_3 est dans la zone désirable

Les valeurs des contraintes de but sont: $c_4 = -12$, $c_5 = -18$ et $c_6 = -4.75$. Puisque

$\bar{u}_4 = 0$ et $c_4 = -12$ donc $b_1 \geq -12$

$\bar{u}_5 = 0$ et $c_5 = -18$ donc $b_2 \geq -18$

$\bar{u}_6 = 0$ et $c_6 = -4.75$ donc $b_3 \geq -4.75$

alors l'ensemble réduit des solutions réalisables est le suivant:

b_1 min	b_1 max	b_2 min	b_2 max	b_3 min	b_3 max
0	0	-25.0000	-5.8125	-11.2500	25.0000
-12.0000	-5.0000	-18.0000	-5.8125	-11.2500	-4.7500
-12.0000	-5.0000	-25.0000	-18.0000	-11.2500	25.0000
-12.0000	-5.0000	-25.0000	-25.0000	-11.2500	25.0000
-15.0000	-12.0000	-25.0000	-5.8125	-11.2500	25.0000
-15.0000	-12.0000	-25.0000	-25.0000	-11.2500	25.0000

Puisque f_2 est dans la zone indésirable, choisissons sa prochaine valeur dans la zone tolérable et sacrifions f_3 qui est dans la zone désirable en choisissant sa valeur dans la zone tolérable (règle#1). De plus, assurons nous de bien couvrir la zone tolérable en choisissant les valeurs aux extrémités (règle#2). On poursuit l'itération $h = 3$ afin de générer une autre solution Pareto-optimale.

Étape 13 : Comme montré au tableau E.4, le directeur présente les solutions obtenues aux groupes de travail pour effectuer un choix satisfaisant tout le monde.

Tableau E.4 : Résumé des solutions obtenues pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991).

Itération h	Vecteur des valeurs cibles (b^h)	Valeurs des fonctions-objectifs (f_m)	Ensembles de stabilité à soustraire
1	(-15, -25, -11.25)	$f_1 = -15$ (Idéale) $f_2 = -10$ (Inacceptable) $f_3 = -10$ (Désirable)	$b_1 \geq -15$ $b_2 = -25$ $b_3 = -11.25$
2	(-12, -18, -1)	$f_1 = -12$ (Tolérable) $f_2 = -14.5$ (Indésirable) $f_3 = -4.75$ (Désirable)	$b_1 \geq -12$ $b_2 \geq -18$ $b_3 \geq -4.75$
3	(-10.5, -19, 6)	$f_1 = -10.5$ (Tolérable) $f_2 = -16.75$ (Tolérable) $f_3 = -0.4375$ (Tolérable)	$b_1 \geq -10.5$ $b_2 \geq -19$ $b_3 \geq -14.5664$
4	(-8, -16, -11)	$f_1 = -11$ (Tolérable) $f_2 = -16$ (Tolérable) $f_3 = -2$ (Tolérable)	$b_1 \geq -11$ $b_2 = -16$ $b_3 = -17$
5	(-10, -15.5, -3)	$f_1 = -11.33$ (Tolérable) $f_2 = -15.5$ (Tolérable) $f_3 = -2.97$ (Désirable)	$b_1 \geq -11.33$ $b_2 = -15.5$ $b_3 = -10.9360$

Étape 14 : Arrêter.

ANNEXE F

ÉTAPES DE L'ALGORITHME IPOMP DU PROBLÈME DE TAPPETA ET RENAUD

Étape 1 : Chaque groupe de travail détermine la catégorie et la classe de sa fonction-objectif.

Groupe 1: $f_1 = 25 - (x_1^3 + x_1^2(1 + x_2 + x_3) + x_2^3 + x_3^3)/10$ dans la classe 1S

Groupe 2: $f_2 = 35 - (x_1^3 + 2x_2^3 + x_2^2(2 + x_1 + x_3) + x_3^3)/10$ dans la classe 1S

Groupe 3: $f_3 = 50 - (x_1^3 + x_2^3 + 3x_3^3 + x_3^2(3 + x_1 + x_2))/10$ dans la classe 1S

Étape 2 : Les groupes de travail résolvent leur problème individuel. Les résultats sont présentés au tableau F.1.

Tableau F.1 : Valeurs optimales de chacun des objectifs pour le problème mathématique de Tappeta et al. (2000).

	x_1	x_2	x_3	f_m
Groupe 1	3.2539	0.8402	0.8402	3.5980
Groupe 2	0.4651	3.4011	0.4651	3.7221
Groupe 3	0.3169	0.3169	3.4350	3.5471

Étape 3 : Le directeur construit la table des valeurs des fonctions-objectifs comme montrée au tableau F.2, et il détermine l'ensemble réduit des solutions réalisables.

Tableau F.2 : Table des valeurs des fonctions-objectifs pour le problème mathématique de Tappeta et al. (2000).

	x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3
A^{*1}	3.2539	0.8402	0.8402	3.5980	10.9465	15.8166
A^{*2}	0.4651	3.4011	0.4651	5.9405	3.7221	15.8771
A^{*3}	0.3169	0.3169	3.4350	5.8929	10.8797	3.5471

L'ensemble réduit des solutions réalisables D' est:

$$3.5980 \leq b_1^h \leq 5.9405 \quad 3.7221 \leq b_2^h \leq 10.9465 \quad 3.5471 \leq b_3^h \leq 15.8771$$

Étape 4 : Les groupes de travail fixent leurs degrés de désirabilité. Supposons que le scénario 3 est utilisé pour fixer les degrés de désirabilité, comme montré au tableau F.3 :

Tableau F.3 : Degrés de désirabilité pour le problème mathématique de Tappeta et al. (2000) selon le scénario 3

		I	D	T	ID	IA
Critère	Classe	t_{m1}^+	t_{m2}^+	t_{m3}^+	t_{m4}^+	t_{m5}^+
f_1	1S	4.1836	4.7693	5.3549	5.9405	6.5261
f_2	1S	5.5282	7.3343	9.1404	10.9465	12.7526
f_3	1S	6.6296	9.7121	12.7946	15.8771	18.9596

I: Idéal D: Désirable T: Tolérable ID: Indésirable IA: Inacceptable

Étape 5 : Fixer $h = 1$. Le directeur demande aux groupes de travail de choisir leurs préférences b_m^h pour leurs fonctions-objectifs. A cette étape, il est probable que les groupes de travail choisissent la valeur la plus avantageuse. Donc l'algorithme débute avec les valeurs correspondant aux degrés de désirabilité t_{m1}^+ .

Le groupe 1 choisit $b_1^1 = 4.1836$

Le groupe 2 choisit $b_2^1 = 5.5282$

Le groupe 3 choisit $b_3^1 = 6.6296$

Étape 6 : Le directeur solutionne le problème à multiples objectifs avec l'algorithme de Dauer et Krueger (1977) (annexe C) et obtient une première solution optimale \bar{A}_h .

$\bar{A}_h = (2.8568, 1.8775, 0.5598)$ et la valeur des fonctions-objectifs sont:

$f_1 = 4.1836$ et la valeur de f_1 est dans la zone idéale

$f_2 = 9.4178$ et la valeur de f_2 est dans la zone indésirable

$f_3 = 16.7115$ et la valeur de f_3 est dans la zone inacceptable

Étape 7 : Si le directeur et les groupes de travail sont satisfaits de cette solution, aller à l'étape 14. Sinon, aller à l'étape 8. Les groupes 2 et 3 sont insatisfaits des résultats obtenus alors allons à l'étape 8.

Étape 8 : Le directeur formule les conditions de KKT et détermine la valeur des multiplicateurs de KKT pour les contraintes de but.

$$\bar{u}_2 = 1.2771e+005$$

$$\bar{u}_3 = 5.6776e+004$$

$$\bar{u}_4 = 1$$

Étape 9 : Selon les valeurs obtenues \bar{u}_q , il détermine l'ensemble stabilité $G(\bar{A}_h)$ comme présenté à l'annexe A.

Puisque $\bar{u}_2 > 0$ et $c_2 = 4.1836$ donc $b_1 = 4.1836$

Puisque $\bar{u}_3 > 0$ et $c_3 = 5.5282$ donc $b_2 = 5.5282$

Puisque $\bar{u}_4 > 0$ et $c_4 = 6.6296$ donc $b_3 = 6.6296$

Étape 10 : Le directeur détermine l'ensemble réduit des solutions réalisables avec l'algorithme de Osman (1979).

b_1 min	b_1 max	b_2 min	b_2 max	b_3 min	b_3 max
3.5980	4.1836	3.7221	10.9465	3.5471	15.8771
<u>4.1836</u>	<u>5.9405</u>	<u>3.7221</u>	<u>10.9465</u>	<u>3.5471</u>	<u>15.8771</u>
4.1836	4.1836	3.7221	5.5282	3.5471	15.8771
4.1836	4.1836	5.5282	10.9465	3.5471	15.8771
4.1836	4.1836	5.5282	5.5282	3.5471	6.6296
4.1836	4.1836	5.5282	5.5282	6.6296	15.8771

Étape 11 : Si aucune autre valeur cible ne peut être choisie dans $\{D' - \bigcup G(\bar{A}_p), p = 1, \dots, h\}$ aller à l'étape 14, sinon aller à l'étape 12.

Étape 12 : Fixer $h = h + 1$. Demander aux groupes de travail de sélectionner d'autres valeurs cibles et aller à l'étape 6.

Puisque f_1 est dans la zone idéale, f_2 est dans la zone indésirable et que f_3 est dans la zone unacceptable, il faut améliorer f_2 et f_3 . Alors choisissons f_2 dans la zone tolérable, f_3 dans la zone indésirable et sacrifions f_1 en choisissant sa valeur dans la zone désirable (règle#1). Le vecteur $b^2 = (4.5, 8, 13)$. On résout le problème pour obtenir une deuxième solution. Le processus se poursuit afin de générer plusieurs solutions.

Étape 13 : Le directeur présente les solutions obtenues (tableau F.4) aux groupes de travail.

Tableau F.4 : Résumé des solutions obtenues pour le problème mathématique de Tappeta et al. (2000).

Itération h	Vecteur des valeurs cibles (b^h)	Valeurs des fonctions-objectifs (f_m)
1	(4.1836, 5.5282, 6.6296)	$f_1 = 4.1836$ (idéal) $f_2 = 9.4178$ (indésirable) $f_3 = 16.7115$ (inacceptable)
2	(4.5, 8, 13)	$f_1 = 4.5$ (désirable) $f_2 = 8.6799$ (tolérable) $f_3 = 16.8579$ (inacceptable)
3	(5.2, 9, 14)	$f_1 = 5.2$ (tolérable) $f_2 = 9$ (tolérable) $f_3 = 14.8087$ (indésirable)
4	(5.3, 9.1, 12.5)	$f_1 = 5.3$ (tolérable) $f_2 = 9.1$ (tolérable) $f_3 = 14.4381$ (indésirable)
5	(5.9, 8.9, 12.6)	$f_1 = 5.9$ (indésirable) $f_2 = 8.9$ (tolérable) $f_3 = 13.0147$ (indésirable)
6	(5, 10, 12)	$f_1 = 5$ (tolérable) $f_2 = 10$ (indésirable) $f_3 = 13.9899$ (indésirable)

Étape 14 : Arrêter.

ANNEXE G

ÉTAPES DE L'ALGORITHME IPOMP DU PROBLÈME DE STRUCTURE À DEUX BARRES

Étape 1 : Chaque groupe de travail détermine la catégorie et la classe de sa fonction-objectif.

Groupe 1: classe $f_1(x) = m = 2\pi\rho t x_1 \sqrt{w^2 + x_2^2}$ dans 1S

Groupe 2: classe $f_2(x) = s = \frac{F}{2\pi x_1 x_2} \sqrt{w^2 + x_2^2}$ dans 1S

Groupe 3: classe $f_3(x) = d = \frac{F(w^2 + x_2^2)^{3/2}}{2\pi E x_1 x_2}$ dans 1S

Étape 2 : Les groupes de travail résolvent leur problème individuel. Les résultats sont présentés au tableau G.1.

Tableau G.1 : Solutions optimales de chacun des objectifs pour le problème de structure

	x_1	x_2	f_m
Groupe 1	39.2944	335.6810	3956
Groupe 2	100	1000	119.3662
Groupe 3	100	1000	0.8881

Étape 3 : Le directeur construit la table des valeurs des fonctions-objectifs et il détermine l'ensemble réduit des solutions réalisables comme montré au tableau G.2.

Tableau G.2 : Table des valeurs des fonctions-objectifs pour le problème de structure

	x_1	x_2	f_1	f_2	f_3
A^{*1}	39.2944	335.6810	3956	595	6
A^{*2}	100	1000	15 315	119.3662	0.8881
A^{*3}	100	1000	15 315	119.3662	0.8881

L'ensemble réduit des solutions réalisables est:

$$3956 \leq b_1^h \leq 15315$$

$$119.3662 \leq b_2^h \leq 595$$

$$0.8881 \leq b_3^h \leq 6$$

Étape 4 : Les groupes de travail fixent leurs degrés de désirabilité. Supposons que le scénario 2 est utilisé pour fixer les degrés de désirabilité, comme montré au tableau G.3. Le scénario 2 est présenté à l'annexe B.

Tableau G.3 : Degrés de désirabilité pour le problème de structure selon le scénario 2.

Critère	Classe	I	D	T	ID	IA
f_1	1S	5849	7742	9635	11528	13421
f_2	1S	198	277	356	435	514
f_3	1S	1.7	2.6	3.4	4.3	5.1

I: Idéal D: Désirable T: Tolérable ID: Indésirable IA: Inacceptable

Étape 5 : Fixer $h = 1$. Le directeur demande aux groupes de travail de choisir leurs préférences, b_m^h , pour leurs fonctions-objectifs. A cette étape, il est probable que les groupes de travail ne voudront pas sacrifier beaucoup de profit. Donc l'algorithme débute avec les valeurs correspondant aux degrés de désirabilité t_{m1}^+ .

Le groupe 1 choisit $b_1^1 = 5849$

Le groupe 2 choisit $b_2^1 = 198$

Le groupe 3 choisit $b_3^1 = 1.7$

Étape 6 : Le directeur solutionne le problème à objectifs multiples avec l'algorithme de Dauer et Krueger (1977) (annexe C) et obtient une première solution optimale \bar{A}_h .

$\bar{A}_1 = (45.0097, 749.9463)$ et les valeurs des fonctions-objectifs sont:

$f_1 = 5.8490e+003$ et la valeur de f_1 est dans la zone idéale

$f_2 = 300.0513$ et la valeur de f_2 est dans la zone tolérable

$f_3 = 2.1432$ et la valeur de f_3 est dans la zone désirable

Étape 7 : Si le directeur et les groupes de travail sont satisfaits de cette solution, aller à l'étape 14. Sinon, aller à l'étape 8. Le groupe 2 désire améliorer sa fonction-objectif alors allons à l'étape 8.

Étape 8 : Le directeur formule les conditions de KKT et détermine la valeur des multiplicateurs de KKT pour les contraintes de but.

$$\bar{u}_2 = 0.0012$$

$$\bar{u}_3 = 0.0168$$

$$\bar{u}_4 = 1.0000$$

Étape 9 : Selon les valeurs obtenues \bar{u}_q , pour les contraintes de but, il détermine l'ensemble stabilité $G(\bar{A}_h)$ selon l'annexe A.

Puisque $\bar{u}_2 > 0$ et $c_2 = 5849$ alors $b_1 = 5849$

Puisque $\bar{u}_3 > 0$ et $c_3 = 198$ alors $b_2 = 198$

Puisque $\bar{u}_4 > 0$ et $c_4 = 1.7$ alors $b_3 = 1.7$

Étape 10 : Le directeur détermine l'ensemble réduit des solutions réalisables avec l'algorithme de Osman (1979).

b_1 min	b_1 max	b_2 min	b_2 max	b_3 min	b_3 max
3956	5849	119	595	1	6
<u>5849</u>	<u>15 315</u>	<u>119</u>	<u>595</u>	<u>1</u>	<u>6</u>
5849	5849	119	198	1	6
5849	5849	198	595	1	6
5849	5849	198	198	1	1.7
5849	5849	198	198	1.7	6

Étape 11 : Si aucune autre valeur cible ne peut être choisie dans $\{D' - \bigcup G(\bar{A}_p), p = 1, \dots, h\}$ aller à l'étape 14, sinon aller à l'étape 12.

Étape 12 : Fixer $h = h + 1$. Le directeur demande aux groupes de travail de sélectionner d'autres valeurs cibles et aller à l'étape 6.

Puisque f_1 est dans la zone idéale, f_2 est dans la zone tolérable et que f_3 est dans la zone désirable, alors essayons de trouver une solution dans la zone désirable. Alors améliorons f_2 en choisissant sa valeur dans la zone désirable et sacrifions f_1 en choisissant sa valeur dans la zone désirable (règle#1). Le vecteur $b^2 = (6000, 250, 2.5)$. On résout le problème pour obtenir une deuxième solution. Le processus se poursuit ainsi jusqu'à ce que plusieurs solutions soient générées.

Étape 13 : Le directeur présente les solutions obtenues aux groupes de travail. Le tableau G.4 résume ces solutions.

Tableau G.4 : Résumé des solutions obtenues pour le problème de structure.

Itération h	Vecteur des valeurs cibles (b^h)	Valeurs des fonctions-objectifs (f_m)
1	(5849, 198, 1.7)	$f_1 = 5849$ (idéal) $f_2 = 300.0513$ (tolérable) $f_3 = 2.1432$ (désirable)
Solution optimale : (45.0097, 749.9463)		
2	(6000, 250, 2.5)	$f_1 = 6000$ (désirable) $f_2 = 292.5$ (tolérable) $f_3 = 2.0893$ (désirable)
Solution optimale : (46.1718, 749.9452)		
3	(7000, 200, 2.6)	$f_1 = 7000$ (désirable) $f_2 = 250.7143$ (désirable) $f_3 = 1.7908$ (désirable)
Solution optimale : (53.8672, 749.9403)		

Étape 14 : Arrêter.

ANNEXE H

PROGRAMMES AMPL
DU PROBLÈME MATHÉMATIQUE D'ABDEL HALEEM

Problème mathématique 1 (Abdel Haleem)- Fichier.mod

```

# -----
# INITIALISATION SYSTEME PREMIÈRE FONCTION
# -----
param i integer >=0;
param tau >=0;
param f1{0..i};
param f2{0..i};
param g1{0..i};
param g2{0..i};
param g3{0..i};
param g4{0..i};
param b1{0..i} := -10;
param b2{0..i} := -15.5;
var z1{0..i} >=0, <=10;
var z2{0..i} >=0, <=10;
var z3{0..i} >=0, <=10;
var z4{0..i} >=0, <=10;
var z5{0..i} >=0, <=10;
var z6{0..i} >=0;

minimize FCT_INI1: z6[i];
subject to CONTRAINTE11: z1[i]^2+2*z2[i]^2+4*z3[i]^2-z4[i]-3*z5[i]-z6[i] <=
           b1[i];
subject to CONTRAINTE11a: z1[i]^2+2*z2[i]^2+4*z3[i]^2-z4[i]-3*z5[i] <= -5;

# -----
# INITIALISATION SYSTEME DEUXIÈME FONCTION
# -----
var z61{0..i} >=0;
var z7{0..i} >=0;

minimize FCT_INI2: z7[i];
subject to CONTRAINTE12: z1[i]^2+2*z2[i]^2+4*z3[i]^2-z4[i]-3*z5[i]-z61[i] <=
           b1[i];
subject to CONTRAINTE22: -2*z1[i]^2+3*z2[i]^2+4*z3[i]^2-5*z4[i]-2*z5[i]-z7[i] <=
           b2[i];
subject to CONTRAINTE22a: -2*z1[i]^2+3*z2[i]^2+4*z3[i]^2-5*z4[i]-2*z5[i] <= -10;
subject to CEQ1: z61[i]=z6[i];

# -----
# PROBLEME GROUPE#1
# -----
param d1{0..i};

var x11{0..i} >=0;
var x21{0..i} >=0;
var x31{0..i} >=0;
var x41{0..i} >=0;
var x51{0..i} >=0;

```

```

var s11{0..i} >=0;
var s12{0..i} >=0;
var s13{0..i} >=0;
var s14{0..i} >=0;
var s15{0..i} >=0;
var t11{0..i} >=0;
var t12{0..i} >=0;
var t13{0..i} >=0;
var t14{0..i} >=0;
var t15{0..i} >=0;

minimize FCT_GR1:
  (s11[i]+t11[i])+(s12[i]+t12[i])+(s13[i]+t13[i])+(s14[i]+t14[i])+(s15[i]+t15
  [i]);

subject to CONTRAINTE1_GR1: x11[i]+2*x21[i]+3*x31[i]+x41[i]+x51[i] <= 6;
subject to C1_1: x11[i]+s11[i]-t11[i]=z1[i];
subject to C2_1: x21[i]+s12[i]-t12[i]=z2[i];
subject to C3_1: x31[i]+s13[i]-t13[i]=z3[i];
subject to C4_1: x41[i]+s14[i]-t14[i]=z4[i];
subject to C5_1: x51[i]+s15[i]-t15[i]=z5[i];

# -----
# PROBLEME GROUPE#2 - PREMIERE FONCTION
# -----
```

param c2{0..i} :=0;
param b3{0..i} := -3;
param d2{0..i};
param f3{0..i};
param e2{0..i};

var x12{0..i} >=0;
var x22{0..i} >=0;
var x32{0..i} >=0;
var x42{0..i} >=0;
var x52{0..i} >=0;
var x621{0..i}>=0;
var x62{0..i} >=0;
var x72{0..i} >=0;

var s21{0..i} >=0;
var s22{0..i} >=0;
var s23{0..i} >=0;
var s24{0..i} >=0;
var s25{0..i} >=0;

var t21{0..i} >=0;
var t22{0..i} >=0;
var t23{0..i} >=0;
var t24{0..i} >=0;
var t25{0..i} >=0;

minimize FCT_GR2_1: x62[i];
subject to
 CONTRAINTE11_GR2:(s21[i]+t21[i])+(s22[i]+t22[i])+(s23[i]+t23[i])+(s24[i]+t2
 4[i])+(s25[i]+t25[i])-x62[i] <= c2[i];
subject to CONT_LIN2: 5*x12[i]+x22[i]+x32[i]+2*x42[i]+2*x52[i] <= 10;
subject to CONT_LIN3: 3*x12[i]+x22[i]+5*x32[i]+3*x42[i]+3*x52[i] <= 15;
subject to C1_2: x12[i]+s21[i]-t21[i]=z1[i];
subject to C2_2: x22[i]+s22[i]-t22[i]=z2[i];
subject to C3_2: x32[i]+s23[i]-t23[i]=z3[i];
subject to C4_2: x42[i]+s24[i]-t24[i]=z4[i];
subject to C5_2: x52[i]+s25[i]-t25[i]=z5[i];

```

# -----
# PROBLEME GROUPE#2 - DEUXIÈME FONCTION
# ----

minimize FCT_GR2_2: x72[i];
subject to
  CONTRAINE12_GR2: (s21[i]+t21[i])+(s22[i]+t22[i])+(s23[i]+t23[i])+(s24[i]+t2
  4[i])+(s25[i]+t25[i])-x621[i] <= c2[i];
subject to CONTRAINE22_GR2: 3*x12[i]+x22[i]^2-5*x32[i]+x42[i]^2-2*x52[i]-
  x72[i] <= b3[i];
subject to CONTRAINE22_GR2a: 3*x12[i]+x22[i]^2-5*x32[i]+x42[i]^2-2*x52[i] <=
  25;
subject to CEQ2: x621[i] = x62[i];

# -----
# PROBLEME SYSTEME
# ----

minimize FCT_1: z6[i];
subject to CONTRAINE_11: z1[i]^2+2*z2[i]^2+4*z3[i]^2-z4[i]-
  3*z5[i]+tau*((x11[i-1]-z1[i])^2+(x21[i-1]-z2[i])^2+(x31[i-1]-
  z3[i])^2+(x41[i-1]-z4[i])^2+(x51[i-1]-z5[i])^2+(x12[i-1]-z1[i])^2+(x22[i-
  1]-z2[i])^2+(x32[i-1]-z3[i])^2+(x42[i-1]-z4[i])^2+(x52[i-1]-z5[i])^2)-z6[i]
  <= b1[i];

minimize FCT_2: z7[i];
subject to CONTRAINE_12: z1[i]^2+2*z2[i]^2+4*z3[i]^2-z4[i]-
  3*z5[i]+tau*((x11[i-1]-z1[i])^2+(x21[i-1]-z2[i])^2+(x31[i-1]-
  z3[i])^2+(x41[i-1]-z4[i])^2+(x51[i-1]-z5[i])^2+(x12[i-1]-z1[i])^2+(x22[i-
  1]-z2[i])^2+(x32[i-1]-z3[i])^2+(x42[i-1]-z4[i])^2+(x52[i-1]-z5[i])^2)-z6[i]-
  z61[i] <= b1[i];

subject to CONTRAINE_22: -2*z1[i]^2+3*z2[i]^2+4*z3[i]^2-5*z4[i]-
  2*z5[i]+tau*((x11[i-1]-z1[i])^2+(x21[i-1]-z2[i])^2+(x31[i-1]-
  z3[i])^2+(x41[i-1]-z4[i])^2+(x51[i-1]-z5[i])^2+(x12[i-1]-z1[i])^2+(x22[i-
  1]-z2[i])^2+(x32[i-1]-z3[i])^2+(x42[i-1]-z4[i])^2+(x52[i-1]-z5[i])^2)-z7[i]
  <= b2[i];

subject to CEQ3:z61[i]=z6[i];

```

Problème mathématique 1 (Abdel Haleem)- Fichier.run

```

reset;
option solver donlp2;
option presolve 0;
#option donlp2_options "silent=0 outlev=0010";

model decomp2xia.mod;
let i:=0;
let tau :=100;

# INITIALISATION DU SYSTÈME
# ----

problem SYSTEME1_INI: z1,z2,z3,z4,z5,z6,FCT_INI1,CONTRAINE11,CONTRAINE11a;
problem SYSTEME2_INI:
  z1,z2,z3,z4,z5,z61,z7,FCT_INI2,CONTRAINE12,CONTRAINE22,CONTRAINE22a,CEQ1
  ;

```

```

solve SYSTEME1_INI;
solve SYSTEME2_INI;
let f1[i] := z1[i]^2+2*z2[i]^2+4*z3[i]^2-z4[i]-3*z5[i];
let f2[i] := -2*z1[i]^2+3*z2[i]^2+4*z3[i]^2-5*z4[i]-2*z5[i];

problem GROUPE1:
  x11,x21,x31,x41,x51,FCT_GR1,CONTRAINTE1_GR1,C1_1,C2_1,C3_1,C4_1,C5_1;

problem GROUPE2_1:
  x12,x22,x32,x42,x52,x62,FCT_GR2_1,CONTRAINTE11_GR2,CONT_LIN2,CONT_LIN3,C1_2
  ,C2_2,C3_2,C4_2,C5_2;

problem GROUPE2_2:
  x12,x22,x32,x42,x52,x621,x72,FCT_GR2_2,CONTRAINTE12_GR2,CONTRAINTE22_GR2,CO
  NTRAINTE22_GR2a,CONT_LIN2,CONT_LIN3,CEQ2,C1_2,C2_2,C3_2,C4_2,C5_2;

problem SYSTEME1: z1,z2,z3,z4,z5,z6,FCT_1,CONTRAINTE_11,CONTRAINTE11a;

problem SYSTEME2:
  z1,z2,z3,z4,z5,z61,z7,FCT_2,CONTRAINTE_12,CONTRAINTE_22,CONTRAINTE22a,CEQ3;

repeat while i<40000{

# GROUPE#1
# -----
solve GROUPE1;

#GROUPE#2
#-----
solve GROUPE2_1;
solve GROUPE2_2;
let g3[i] :=
  (s21[i]+t21[i])+(s22[i]+t22[i])+(s23[i]+t23[i])+(s24[i]+t24[i])+(s25[i]+t25
  [i])-x62[i];
let e2[i] :=
  (s21[i]+t21[i])+(s22[i]+t22[i])+(s23[i]+t23[i])+(s24[i]+t24[i])+(s25[i]+t25
  [i]);
let g4[i] := 3*x12[i]+x22[i]^2-5*x32[i]+x42[i]^2-2*x52[i]-x72[i];
let f3[i] := 3*x12[i]+x22[i]^2-5*x32[i]+x42[i]^2-2*x52[i];
display i;

# SYSTÈME
# -----
let i := i + 1;
solve SYSTEME1;
solve SYSTEME2;
let f1[i] := z1[i]^2+2*z2[i]^2+4*z3[i]^2-z4[i]-3*z5[i];
let f2[i] := -2*z1[i]^2+3*z2[i]^2+4*z3[i]^2-5*z4[i]-2*z5[i];
let g1[i]:= z1[i]^2+2*z2[i]^2+4*z3[i]^2-z4[i]-3*z5[i]+tau*((x11[i-1]-
  z1[i])^2+(x21[i-1]-z2[i])^2+(x31[i-1]-z3[i])^2+(x41[i-1]-z4[i])^2+(x51[i-
  1]-z5[i])^2+(x12[i-1]-z1[i])^2+(x22[i-1]-z2[i])^2+(x32[i-1]-
  z3[i])^2+(x42[i-1]-z4[i])^2+(x52[i-1]-z5[i])^2)-z61[i];
let g2[i] := -2*z1[i]^2+3*z2[i]^2+4*z3[i]^2-5*z4[i]-2*z5[i]+tau*((x11[i-1]-
  z1[i])^2+(x21[i-1]-z2[i])^2+(x31[i-1]-z3[i])^2+(x41[i-1]-z4[i])^2+(x51[i-
  1]-z5[i])^2+(x12[i-1]-z1[i])^2+(x22[i-1]-z2[i])^2+(x32[i-1]-
  z3[i])^2+(x42[i-1]-z4[i])^2+(x52[i-1]-z5[i])^2)-z7[i];

if abs(f1[i-1]-f1[i]) <= 0.000001 and abs(f2[i-1]-f2[i]) <=0.000001 then
break;
};

display f1,f2,f3 > résultatsdecomp2xiasol.out;
close résultatsdecomp2xiasol.out;

```

ANNEXE I

**ÉTAPES DE L'ALGORITHME IPOMP-ED
DU PROBLÈME D'ABDEL HALEEM
(paramètre de pénalité $\gamma = 100$)**

Étape 1: La formulation du problème du directeur se fait comme suit:

$$\begin{aligned}
 & \underset{\substack{(z_{\text{int}})_1, (z_{\text{int}})_2 \\ (z_{\text{int}})_3, (z_{\text{int}})_4 \\ (z_{\text{int}})_5}}{\text{Min}} \\
 F_1 = & (z_{\text{int}})_1^2 + 2(z_{\text{int}})_2^2 + 4(z_{\text{int}})_3^2 - (z_{\text{int}})_4 - 3(z_{\text{int}})_5 + \gamma \left[\begin{array}{l} (x_{11}^* - (z_{\text{int}})_1)^2 + (x_{21}^* - (z_{\text{int}})_2)^2 + \\ (x_{31}^* - (z_{\text{int}})_3)^2 + (x_{41}^* - (z_{\text{int}})_4)^2 + \\ (x_{51}^* - (z_{\text{int}})_5)^2 + (x_{12}^* - (z_{\text{int}})_1)^2 + \\ (x_{22}^* - (z_{\text{int}})_2)^2 + (x_{32}^* - (z_{\text{int}})_3)^2 + \\ (x_{42}^* - (z_{\text{int}})_4)^2 + (x_{52}^* - (z_{\text{int}})_5)^2 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

$$F_2 = -2(z_{\text{int}})_1 + 3(z_{\text{int}})_2 + 4(z_{\text{int}})_3^3 - 5(z_{\text{int}})_4 - 2(z_{\text{int}})_5 + \gamma \left[\begin{array}{l} (x_{11}^* - (z_{\text{int}})_1)^2 + (x_{21}^* - (z_{\text{int}})_2)^2 + \\ (x_{31}^* - (z_{\text{int}})_3)^2 + (x_{41}^* - (z_{\text{int}})_4)^2 + \\ (x_{51}^* - (z_{\text{int}})_5)^2 + (x_{12}^* - (z_{\text{int}})_1)^2 + \\ (x_{22}^* - (z_{\text{int}})_2)^2 + (x_{32}^* - (z_{\text{int}})_3)^2 + \\ (x_{42}^* - (z_{\text{int}})_4)^2 + (x_{52}^* - (z_{\text{int}})_5)^2 \end{array} \right]$$

sujet à $0 \leq (z_{\text{int}})_1, (z_{\text{int}})_2, (z_{\text{int}})_3, (z_{\text{int}})_4, (z_{\text{int}})_5 \leq 10$

Les valeurs de $(z_{\text{int}})_1^*, (z_{\text{int}})_2^*, (z_{\text{int}})_3^*, (z_{\text{int}})_4^*$ et $(z_{\text{int}})_5^*$ sont obtenues.

La formulation du problème d'optimisation pour le groupe 1 est:

$$\underset{s_{11}, s_{21}, s_{31}, s_{41}, s_{51}, r_{11}, r_{21}, r_{31}, r_{41}, r_{51}, x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}, x_{51}}{\text{Min}} \quad f_{11} = e_1 = (s_{11} + r_{11}) + (s_{21} + r_{21}) + (s_{31} + r_{31}) + (s_{41} + r_{41}) + (s_{51} + r_{51})$$

$$\text{sujet à } c_{11} = x_{11} + 2x_{21} + 3x_{31} + x_{41} + x_{51} \leq 6$$

$$x_{11} + s_{11} - r_{11} = (z_{\text{int}})_1^*$$

$$x_{21} + s_{21} - r_{21} = (z_{\text{int}})_2^*$$

$$x_{31} + s_{31} - r_{31} = (z_{\text{int}})_3^*$$

$$x_{41} + s_{41} - r_{41} = (z_{\text{int}})_4^*$$

$$x_{51} + s_{51} - r_{51} = (z_{\text{int}})_5^*$$

$$x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}, x_{51} \geq 0$$

$$s_{11}, s_{21}, s_{31}, s_{41}, s_{51} \geq 0$$

$$r_{11}, r_{21}, r_{31}, r_{41}, r_{51} \geq 0$$

On obtient $s_{11}^*, s_{21}^*, s_{31}^*, s_{41}^*, s_{51}^*, r_{11}^*, r_{21}^*, r_{31}^*, r_{41}^*, r_{51}^*, x_{11}^*, x_{21}^*, x_{31}^*, x_{41}^*$ et x_{51}^* .

La formulation du problème d'optimisation pour le groupe 2 est:

$$\underset{s_{12}, s_{22}, s_{32}, s_{42}, s_{52}, r_{12}, r_{22}, r_{32}, r_{42}, r_{52}, x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}, x_{52}}{\text{Min}} \quad f_{12} = e_2 = (s_{12} + r_{12}) + (s_{22} + r_{22}) + (s_{32} + r_{32}) + (s_{42} + r_{42}) + (s_{52} + r_{52})$$

$$\text{Min } f_{22} = 3x_{12} + x_{22}^2 - 5x_{32} + x_{42}^2 - 2x_{52}$$

$$\text{sujet à } c_{12} = 5x_{12} + x_{22} + x_{32} + 2x_{42} + 2x_{52} \leq 10$$

$$c_{22} = 3x_{12} + x_{22} + 5x_{32} + 3x_{42} + 3x_{52} \leq 15$$

$$x_{12} + s_{12} - r_{12} = (z_{\text{int}})_1^*$$

$$x_{22} + s_{22} - r_{22} = (z_{\text{int}})_2^*$$

$$x_{32} + s_{32} - r_{32} = (z_{\text{int}})_3^*$$

$$x_{42} + s_{42} - r_{42} = (z_{\text{int}})_4^*$$

$$x_{52} + s_{52} - r_{52} = (z_{\text{int}})_5^*$$

$$x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}, x_{52} \geq 0$$

$$s_{12}, s_{22}, s_{32}, s_{42}, s_{52} \geq 0$$

$$r_{12}, r_{22}, r_{32}, r_{42}, r_{52} \geq 0$$

On obtient $s_{12}^*, s_{22}^*, s_{32}^*, s_{42}^*, s_{52}^*, r_{12}^*, r_{22}^*, r_{32}^*, r_{42}^*, r_{52}^*, x_{12}^*, x_{22}^*, x_{32}^*, x_{42}^*$ et x_{52}^* .

Dans ce cas-ci il n'y a pas de variables couplées donc il n'est pas nécessaire de déterminer les bornes sur les variables auxiliaires et les valeurs cibles associées à ces variables.

Étape 2: Le directeur classe sa fonction-objectif F_1 dans la classe 1S et sa fonction-objectif F_2 dans la classe 1S.

Étape 3: Le groupe de travail 1 résout individuellement les fonctions-objectifs du système ce qui correspond aux deux problèmes suivants:

$$\underset{x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}, x_{51}}{\text{Min}} \quad F_{11} = x_{11}^2 + 2x_{21}^2 + 4x_{31}^2 - x_{41} - 3x_{51}$$

$$\text{sujet à} \quad c_{11} = x_{11} + 2x_{21} + 3x_{31} + x_{41} + x_{51} \leq 6$$

$$x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}, x_{51} \geq 0$$

$$\underset{x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}, x_{51}}{\text{Min}} \quad F_{21} = -2x_{11} + 3x_{21} + 4x_{31}^3 - 5x_{41} - 2x_{51}$$

$$\text{sujet à} \quad c_{11} = x_{11} + 2x_{21} + 3x_{31} + x_{41} + x_{51} \leq 6$$

$$x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}, x_{51} \geq 0$$

Les résultats obtenus par le groupe 1 sont présentés au tableau I.1.

Tableau I.1 : Solutions individuelles obtenues par le groupe 1 pour les fonctions-objectifs du système du problème mathématique de Abdel Haleem (1991).

	x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{41}	x_{51}	F_{m1}^*
Z^{*11}	0	0	0	0	6	-18
Z^{*21}	0	0	0	6	0	-30

Le groupe de travail 2, quant à lui, résout les deux problèmes suivants:

$$\underset{x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}, x_{52}}{\text{Min}} \quad F_{12} = x_{12}^2 + 2x_{22}^2 + 4x_{32}^2 - x_{42} - 3x_{52}$$

$$\text{ sujet à } \quad c_{12} = 5x_{12} + x_{22} + x_{32} + 2x_{42} + 2x_{52} \leq 10$$

$$c_{22} = 3x_{12} + x_{22} + 5x_{32} + 3x_{42} + 3x_{52} \leq 15$$

$$x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}, x_{52} \geq 0$$

$$\underset{x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}, x_{52}}{\text{Min}} \quad F_{22} = -2x_{12} + 3x_{22} + 4x_{32}^3 - 5x_{42} - 2x_{52}$$

$$\text{ sujet à } \quad c_{12} = 5x_{12} + x_{22} + x_{32} + 2x_{42} + 2x_{52} \leq 10$$

$$c_{22} = 3x_{12} + x_{22} + 5x_{32} + 3x_{42} + 3x_{52} \leq 15$$

$$x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}, x_{52} \geq 0$$

Les résultats trouvés par le groupe 2 sont présentés au tableau I.2.

Tableau I.2: Solutions individuelles obtenues par le groupe 2 pour les fonctions-objectifs du système du problème mathématique de Abdel Haleem (1991).

	x_{12}	x_{22}	x_{32}	x_{42}	x_{52}	F_{m2}^*
Z^{*12}	0	0	0	0	5	-15
Z^{*22}	0	0	0	5	0	-25

Étape 4: La table des valeurs des fonctions-objectifs obtenue par le directeur est présentée au tableau I.3. Pour définir l'ensemble réduit des valeurs cibles, le directeur choisit, pour chacune de ses fonctions, les valeurs minimale et maximale les plus contraignantes entre les deux groupes de travail.

Tableau I.3: Table des valeurs des fonctions-objectifs du système pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	F_1	F_2
Z^{*11}	0	0	0	0	6	-18	-12
Z^{*21}	0	0	0	6	0	-6	-30
Z^{*12}	0	0	0	0	5	-15	-10
Z^{*22}	0	0	0	5	0	-5	-25

L'ensemble réduit des valeurs cibles est: $-15 \leq b_1^h \leq -5$ et $-25 \leq b_2^h \leq -10$. Comme mentionné au chapitre 4, l'ensemble réduit des valeurs cibles est différent de celui trouvé en environnement centralisé. Dans ce cas-ci, il est plus restreint et les solutions qu'il contient sont toutes réalisables.

Étape 5: Les degrés de désirabilité fixés par le directeur du système sont présentés au tableau I.4. Le scénario 1 a été utilisé (annexe B).

Tableau I.4 : Degrés de désirabilité pour les fonctions-objectifs du système

Critère	Classe	I	D	T	ID	IA
		t_{m1}^+	t_{m2}^+	t_{m3}^+	t_{m4}^+	t_{m5}^+
F_1	1S	-15	-12.5	-10	-7.5	-5
F_2	1S	-25	-21.25	-17.5	-13.75	-10

I: Idéal D: Désirable T: Tolérable ID: Indésirable IA : Inacceptable

Étape 6: Le groupe de travail 1 n'a pas de fonction locale. Le groupe de travail 2 classe sa fonction-objectif f_{22} dans la classe 1S.

Étape 7: Le groupe de travail 2 résout son problème local ce qui correspond à:

$$\underset{x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}, x_{52}}{\text{Min}} \quad f_{22} = 3x_{12} + x_{22}^2 - 5x_{32} + x_{42}^2 - 2x_{52}$$

$$\text{sujet à} \quad c_{12} = 5x_{12} + x_{22} + x_{32} + 2x_{42} + 2x_{52} \leq 10$$

$$c_{22} = 3x_{12} + x_{22} + 5x_{32} + 3x_{42} + 3x_{52} \leq 15$$

$$x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}, x_{52} \geq 0$$

Les résultats obtenus par le groupe de travail 2 sont présentés au tableau I.5.

Tableau I.5: Solution individuelle obtenue par le groupe 2 pour sa fonction-objectif locale du problème mathématique de Abdel Haleem (1991).

	x_{12}	x_{22}	x_{32}	x_{42}	x_{52}	f_{22}^*
A^{*22}	0	0	3	0	0	-15

Étape 8: Les valeurs des fonctions-objectifs du système à la solution optimale f_{22}^* sont présentées au tableau I.6.

Tableau I.6: La valeur des fonctions-objectifs du système à la solution optimale de f_{22}^*

	x_{12}	x_{22}	x_{32}	x_{42}	x_{52}	f_{22}^*	F_1	F_2
A^{*22}	0	0	3	0	0	-15	36	108

On remarque que la solution optimale de la fonction f_{22}^* du groupe de travail 2 conduit à des valeurs inacceptables pour les fonctions-objectifs du système. Les pointeurs sur les grilles de degrés de désirabilités des fonctions F_1 et F_2 du système sont montrés aux tableaux I.7 et I.8.

Tableau I.7: Pointeur pour la fonction-objectif F_1 du système pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991).

F_1	1S	-15	-12.5	-10	-7.5	-5
	<i>I</i>	<i>D</i>	<i>T</i>	<i>ID</i>	<i>IA</i>	

I: Idéal D: Désirable T: Tolérable ID: Indésirable IA : Inacceptable

Valeur de F_1 à la solution A^{*22}

Tableau I.8: Pointeur pour la fonction-objectif F_2 du système pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991).

F_2	1S	-25	-21.25	-17.5	-13.75	-10
	I	D	T	ID	IA	

I: Idéal D: Désirable T: Tolérable ID: Indésirable IA : Inacceptable

Valeur de F_2 à la solution A^{*22}

Étape 9: L'ensemble réduit des valeurs cibles pour la fonction de compatibilité des groupes de travail 1 et 2 est toujours défini par: $0 \leq b_{11}^h \leq \inf$ et $0 \leq b_{12}^h \leq \inf$. L'ensemble réduit des valeurs cibles pour la fonction-objectif locale du groupe de travail 2 est donné par: $b_{22}^h \geq -15$. Dans ce cas-ci, l'ensemble est plus grand que celui trouvé au chapitre 3, $-11.25 \leq b_{22}^h \leq 25$, donc il contient des solutions non réalisables. La borne maximale de cet ensemble pourra prendre la valeur du degré de désirabilité jugé inacceptable à l'étape 10 au lieu de l'infini afin de restreindre l'ensemble des valeurs cibles possibles.

Étape 10: Le groupe 1 n'a pas de fonctions-objectifs locales donc il n'a pas à déterminer ses degrés de désirabilité. Pour la fonction-objectif de compatibilité $f_{11} = e_1$, le degré de désirabilité est de zéro afin d'assurer la compatibilité entre les groupes de travail et de rencontrer les exigences du système. Donc il n'y a pas de compromis possible avec cette fonction-objectif. Pour les mêmes raisons, le degré de désirabilité de la fonction-objectif de compatibilité $f_{12} = e_2$ du groupe de travail 2 est de zéro. Les degrés de désirabilité pour la fonction-objectif locale du groupe de travail 2 f_{22} sont montrés au tableau I.9.

Tableau I.9 : Degrés de désirabilité de la fonction-objectif locale f_{22} du groupe 2 pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991).

Critère	Classe	I	D	T	ID	IA
		t_{221}^+	t_{222}^+	t_{223}^+	t_{224}^+	t_{225}^+
f_{22}	1S	-15	-5	5	15	25

I: Idéal D: Désirable T: Tolérable ID: Indésirable IA : Inacceptable

Étape 11: Le directeur choisit les valeurs cibles suivantes $b_1^1 = -15$ et $b_2^1 = -25$ dans son ensemble réduit.

Étape 12: Le directeur résout son problème à objectifs multiples (sans la pénalité) et obtient une solution initiale optimale \bar{Z}_{hn} et la valeur de ses fonctions-objectifs $F_m^{hn}(Z)$.

$$\bar{Z}_{11} = (0, 0, 0, 3.0455, 5.2364)$$

$$F_1^{11} = -18.7545$$

$$F_2^{11} = -25.7$$

Étape 13: Les valeurs cibles $(z_{int})_1^* = 0$, $(z_{int})_2^* = 0$, $(z_{int})_3^* = 0$, $(z_{int})_4^* = 3.0455$ et $(z_{int})_5^* = 5.2364$ sont envoyées aux groupes de travail 1 et 2.

Étape 14: Pour sa fonction locale, le groupe de travail 2 choisit la valeur cible $b_{22}^1 = -15$. Les valeurs cibles b_{11}^1 et b_{12}^1 reliées aux fonctions de compatibilité des groupes 1 et 2, sont fixées à 0.

Étape 15: Le groupe de travail 1 résout son problème d'optimisation et obtient les résultats suivants: $\bar{A}_{111} = (0, 0, 0, 3.0455, 5.2364)$

$$f_{11}^{11} = e_1 = 0$$

Les valeurs de $x_{11}^* = 0$, $x_{21}^* = 0$, $x_{31}^* = 0$, $x_{41}^* = 3.0455$ et $x_{51}^* = 5.2364$ sont envoyées au directeur (étape 16) où elles seront considérées comme des paramètres dans son problème d'optimisation.

Simultanément, le groupe de travail 2 résout son problème d'optimisation et obtient les résultats suivants:

$$\bar{A}_{112} = (0, 0, 0, 0.9478, 4.0522)$$

$$f_{12}^{11} = e_2 = 0$$

$$f_{22}^{11} = -7.20614$$

Les valeurs de $x_{12}^* = 0$, $x_{22}^* = 0$, $x_{32}^* = 0$, $x_{42}^* = 0.9478$ et $x_{52}^* = 4.0522$ sont envoyées au directeur (étape 16) où elles seront considérées comme des paramètres dans son problème d'optimisation.

Étape 16: Le directeur solutionne son problème à objectifs multiples (avec la pénalité et les données fournies par les groupes de travail) et obtient la solution optimale \bar{Z}_{hn} et la valeur de ses fonctions-objectifs $F_m^{hn}(Z)$.

$$\bar{Z}_{12} = (0, 0, 0, 1.9991, 4.6518)$$

$$F_1^{12} = -15.9545 \quad \text{et} \quad F_2^{12} = -19.2992$$

Étape 17 : Puisque $|F_m^{h(n-1)} - F_m^{hn}| > \varepsilon$, le directeur envoie les valeurs cibles trouvées, $(z_{int})_i^*$ et $(z_c)_{jki}^*$ aux groupes de travail j à l'étape 15. Les étapes 15, 16 et 17 sont répétées jusqu'à ce que le changement dans les fonctions du système F_1 et F_2 soit minime c'est-à-dire < 0.000001 . La solution optimale est obtenue après $n = 129$ itérations et est présentée au tableau I.10.

Tableau I.10 : Première solution générée par l'algorithme IPOMP-ED pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991).

Type d'algorithme	x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	x_{4j}	x_{5j}	F_1	F_2	f_{22} ou f_3
IPOMP-ED	0	0	0	0	5	-15	-10	-10
IPOMP	0	0	0	0	5	-15	-10	-10

La solution retenue est celle du groupe 2 parce que c'est la solution la plus contraignante.

La valeur de F_1 est dans la zone idéale

La valeur de F_2 est dans la zone inacceptable

La valeur de f_{22} est dans la zone désirable

Étape 18: Le directeur est insatisfait du résultat de la fonction F_2 et aimerait générer une autre solution. Aller à l'étape 19.

Étape 19: Le directeur et les groupes de travail j formulent leurs conditions de KKT et déterminent la valeur de leurs multiplicateurs de KKT pour leurs contraintes de but respectives. Le système obtient: $\bar{u}_1 = 0.3038$ et $\bar{u}_2 = 1$ et le groupe 2 obtient: $\bar{u}_{32} = 0$ et $\bar{u}_{42} = 0$.

Étape 20 : Le directeur et le groupe de travail 2 déterminent leur ensemble de stabilité respectifs selon l'annexe A.

Système

Puisque $\bar{u}_1 = 0.3038$ et $c_1 = -15$ alors $b_1 = -15$

Puisque $\bar{u}_2 = 1$ et $c_2 = -25$ alors $b_2 = -25$

Groupe 2

Puisque $\bar{u}_{32} = 0$ et $c_{32} = 0$ alors $b_{12} \geq 0$.

Puisque $\bar{u}_{42} = 0$ et $c_{42} = -15$ alors $b_{22} \geq -15$.

Le groupe de travail 1 n'a pas à réaliser cette étape puisqu'il n'y a qu'une seule fonction sous son contrôle soit la fonction de compatibilité.

Étape 21 : Le directeur et les groupes de travail utilisent l'algorithme de soustraction des ensembles (Osman, 1979) pour obtenir leur ensemble réduit des cibles.

Le directeur obtient l'ensemble réduit de ses cibles possibles:

$b_{1\min}$	$b_{1\max}$	$b_{2\min}$	$b_{2\max}$
-15	-5	-25	-10
-15	-15	-25	-10

Le groupe 2 obtient l'ensemble réduit de ses cibles possibles:

$b_{12 \min}$	$b_{12 \max}$	$b_{22 \min}$	$b_{22 \max}$
-	-	-15	25
0	inf	-	-

Étape 22: Le directeur peut choisir d'autres valeurs cibles dans $\{D^* - \bigcup G(\bar{Z}_p), p = 1, \dots, h\}$ tandis que le groupe de travail 2 ne peut plus choisir aucune valeur cible dans $\{D_j^* - \bigcup G(\bar{A}_{pj}), p = 1, \dots, h\}$. Cela signifie que le groupe 2 ne peut plus générer d'autres solutions avec les valeurs cibles fixées par le directeur. Pour obtenir une autre solution il faut que le directeur choisisse d'autres valeurs cibles. Aller à l'étape 23.

Étape 23 : Le processus se poursuit jusqu'à ce que plusieurs solutions soient générées. Le directeur a choisi les valeurs cibles de l'itération $h = 2$ dans l'ensemble souligné à l'étape 21. Le groupe de travail 2 peut choisir n'importe quelles valeurs cibles, pour sa fonction-objectif locale, dans son ensemble réduit de valeurs cibles $-15 \leq b_{22}^h \leq 25$.

Étape 24 : Le directeur présente les solutions obtenues aux groupes de travail pour choisir une solution finale.

Étape 25 : Arrêter.

ANNEXE J

PROGRAMMES AMPL
DU PROBLÈME DE STRUCTURE À DEUX BARRES

Problème de structure - Fichier.mod

```

# -----
# INITIALISATION SYSTEME PREMIÈRE FONCTION
# -----
param i integer >=0;
param tau >=0;
param F := 150000;
param w := 750;
param p := 0.0078;
param E := 210000;
param t := 2.5;
param pi := 3.141592654;
param f1{0..i};
param f2{0..i};
param g1{0..i};
param g2{0..i};
param g3{0..i};
param b1{0..i}:= 7000;
param b2{0..i} := 200;

var z1{0..i} >=1,<=100;
var z2{0..i} >=10,<=1000;
var z3{0..i} >=750;
var z4{0..i} >=0;
var z5{0..i} >=0;

minimize FCT_INI1: z4[i];
subject to CONTRAINTE111: (2*pi*p*t*z1[i]*z3[i])-z4[i] <= b1[i];
subject to CONTRAINTE112: 2*pi*p*t*z1[i]*z3[i] <= 13421;

# -----
# INITIALISATION SYSTEME DEUXIÈME FONCTION
# -----
minimize FCT_INI2: z5[i];
subject to CONTRAINTE221: ((F/(2*pi*t*z1[i]*z2[i]))*z3[i])-z5[i] <= b2[i];
subject to CONTRAINTE222: ((F/(2*pi*t*z1[i]*z2[i]))*z3[i]) <= 514;

# -----
# PROBLEME GROUPE#1- PREMIÈRE FONCTION
# -----
param e1{0..i};
param g1{0..i};
param f3{0..i};
param b3{0..i} := 2.6;

param y121{0..i} >=0;
var x11{0..i} >=1,<=100;
var x21{0..i} >=10,<=1000;
var x31{0..i} >=0;
var x41{0..i} >=0;

```

```

var s11{0..i} >=0;
var s12{0..i} >=0;
var s13{0..i} >=0;
var t11{0..i} >=0;
var t12{0..i} >=0;
var t13{0..i} >=0;

minimize FCT1_GR1: x31[i];
subject to C11: (s11[i]+t11[i])+(s12[i]+t12[i])+(s13[i]+t13[i])-x31[i]<=0;
subject to C1_1: x11[i]+s11[i]-t11[i]=z1[i];
subject to C2_1: x21[i]+s12[i]-t12[i]=z2[i];
subject to C3_1: sqrt(w^2+x21[i]^2)+s13[i]-t13[i]=z3[i];

# -----
# PROBLEME GROUPE#1 - DEUXIÈME FONCTION
# -----
minimize FCT2_GR1: x41[i];
subject to C21: ((F*((w^2+x21[i]^2)^1.5))/(2*pi*t*E*x11[i]*x21[i]^2))-x41[i]
    <= b3[i];
subject to C22: ((F*((w^2+x21[i]^2)^1.5))/(2*pi*t*E*x11[i]*x21[i]^2)) <=
    5.3286;

# -----
# PROBLEME GROUPE#2 - PREMIÈRE FONCTION
# -----
param e2{0..i};
var x12{0..i} >=1,<=100;
var x22{0..i} >=10,<=1000;
var xaux121{0..i} >=750;
var s21{0..i} >=0;
var s22{0..i} >=0;
var s23{0..i} >=0;
var t21{0..i} >=0;
var t22{0..i} >=0;
var t23{0..i} >=0;

minimize FCT1_GR2: (s21[i]+t21[i])+(s22[i]+t22[i])+(s23[i]+t23[i]);
subject to C12: ((F/(2*pi*t*x12[i]*x22[i]))*xaux121[i])-
    ((1/8)*pi^2*E*((t^2+x12[i]^2)/(w^2+x22[i]^2))) <= 0;
subject to C1_2: x12[i]+s21[i]-t21[i]=z1[i];
subject to C2_2: x22[i]+s22[i]-t22[i]=z2[i];
subject to C3_2: xaux121[i]+s23[i]-t23[i]=z3[i];

# -----
# PROBLEME SYSTEME PREMIÈRE FONCTION
# -----
minimize FCT_1: z4[i];
subject to CONTRAINTE_11: 2*pi*p*t*z1[i]*z3[i]+tau*((x11[i-1]-z1[i])^2+(x21[i-
    1]-z2[i])^2+(y121[i-1]-z3[i])^2+(x12[i-1]-z1[i])^2+(x22[i-1]-
    z2[i])^2+(xaux121[i-1]-z3[i])^2)-z4[i] <= b1[i];

# -----
# PROBLEME SYSTEME DEUXIÈME FONCTION
# -----
minimize FCT_2: z5[i];
subject to CONTRAINTE_22: ((F/(2*pi*t*z1[i]*z2[i]))*z3[i])+tau*((x11[i-1]-
    z1[i])^2+(x21[i-1]-z2[i])^2+(y121[i-1]-z3[i])^2+(x12[i-1]-z1[i])^2+(x22[i-
    1]-z2[i])^2+(xaux121[i-1]-z3[i])^2)-z5[i] <= b2[i];

```

Problème de structure - Fichier.run

```

reset;
option solver donlp2;
option presolve 0;
model structurexia.mod;
let i:=0;
let tau :=100;

# INITIALISATION DU SYSTÈME
# -----
problem SYSTEME1_INI: z1,z2,z3,z4,FCT_INI1,CONTRAINTE111,CONTRAINTE112;
problem SYSTEME2_INI:
z1,z2,z3,z5,FCT_INI2,CONTRAINTE111,CONTRAINTE112,CONTRAINTE221,CONTRAINTE22
2;

solve SYSTEME1_INI;
solve SYSTEME2_INI;
let f1[i] := 2*pi*p*t*z1[i]*z3[i];
let f2[i] := (F/(2*pi*p*t*z1[i]*z2[i]))*z3[i];

problem GROUPE1_1: x11,x21,x31,FCT1_GR1,C11,C22,C1_1,C2_1,C3_1;
problem GROUPE1_2: x11,x21,x41,FCT2_GR1,C11,C22,C21,C1_1,C2_1,C3_1;
problem GROUPE2: x12,x22,xaux121,FCT1_GR2,C12,C1_2,C2_2,C3_2;
problem SYSTEME1: z1,z2,z3,z4,FCT_1,CONTRAINTE_11,CONTRAINTE112;
problem SYSTEME2:
z1,z2,z3,z5,FCT_2,CONTRAINTE_11,CONTRAINTE_22,CONTRAINTE112,CONTRAINTE222;
repeat while i<40000{

# GROUPE#1
# -----
solve GROUPE1_1;
let e1[i] := (s11[i]+t11[i])+(s12[i]+t12[i])+(s13[i]+t13[i]);
solve GROUPE1_2;
let e1[i] :=(s11[i]+t11[i])+(s12[i]+t12[i])+(s13[i]+t13[i]);
let g1[i] :=(s11[i]+t11[i])+(s12[i]+t12[i])+(s13[i]+t13[i])-x31[i];
let g3[i] := (F*(w^2+x21[i]^2)^(3/2)/(2*pi*t*E*x11[i]*x21[i]^2))-x41[i];
let f3[i] := (F*(w^2+x21[i]^2)^(3/2)/(2*pi*t*E*x11[i]*x21[i]^2));
let y121[i] := sqrt(w^2+x21[i]^2);

#GROUPE#2
# -----
solve GROUPE2;
let e2[i] := (s21[i]+t21[i])+(s22[i]+t22[i])+(s23[i]+t23[i]);
display i;

# SYSTÈME
# -----
let i := i + 1;
solve SYSTEME1;
solve SYSTEME2;
let f1[i] := 2*pi*p*t*z1[i]*z3[i];
let f2[i] := (F/(2*pi*p*t*z1[i]*z2[i]))*z3[i];
let g1[i] := 2*pi*p*t*z1[i]*z3[i]+tau*((x11[i-1]-z1[i])^2+(x21[i-1]-
z2[i])^2+(y121[i-1]-z3[i])^2+(x12[i-1]-z1[i])^2+(x22[i-1]-
z2[i])^2+(xaux121[i-1]-z3[i])^2)-z4[i];
let g2[i] := ((F/(2*pi*p*t*z1[i]*z2[i]))*z3[i])+tau*((x11[i-1]-z1[i])^2+(x21[i-
1]-z2[i])^2+(y121[i-1]-z3[i])^2+(x12[i-1]-z1[i])^2+(x22[i-1]-
z2[i])^2+(xaux121[i-1]-z3[i])^2)-z5[i];

if abs(f1[i-1]-f1[i]) <= 0.000001 and abs(f2[i-1]-f2[i]) <=0.000001 then
break;};

display f1,f2,f3 > structuresol.out;
close structuresol.out;

```

ANNEXE K

ÉTAPES DE L'ALGORITHME IPOMP-ED DU PROBLÈME DE STRUCTURE (paramètre de pénalité $\gamma = 100$)

Étape 1 : Les bornes pour la variable auxiliaire et la valeur cible associée ont été obtenues en résolvant les problèmes suivants:

$$\underset{x_2}{\text{Min}} \sqrt{w^2 + x_2^2} \\ \text{sujet à } 10 \leq x_2 \leq 1000$$

$$\underset{x_2}{\text{Max}} \sqrt{w^2 + x_2^2} \\ \text{sujet à } 10 \leq x_2 \leq 1000$$

Les bornes sont : $750 \leq (x_{\text{aux}})_{121} \leq 1250$ et $750 \leq (z_c)_{121} \leq 1250$.

La formulation du problème du directeur se fait comme suit:

$$\underset{(z_{\text{int}})_{121}, (z_{\text{int}})_2, (z_c)_{121}}{\text{Min}} F_1 = 2\pi\rho t (z_{\text{int}})_1 (z_c)_{121} + \gamma \left(\begin{array}{l} (x_{11}^* - (z_{\text{int}})_1)^2 + (x_{21}^* - (z_{\text{int}})_2)^2 + \\ (y_{121}^* - (z_c)_{121})^2 + (x_{12}^* - (z_{\text{int}})_1)^2 + \\ (x_{22}^* - (z_{\text{int}})_2)^2 + ((x_{\text{aux}})_{121}^* - (z_c)_{121})^2 \end{array} \right)$$

$$F_2 = \frac{F}{2\pi t (z_{\text{int}})_1 (z_{\text{int}})_2} (z_c)_{121} + \gamma \left(\begin{array}{l} (x_{11}^* - (z_{\text{int}})_1)^2 + (x_{21}^* - (z_{\text{int}})_2)^2 + \\ (y_{121}^* - (z_c)_{121})^2 + (x_{12}^* - (z_{\text{int}})_1)^2 + \\ (x_{22}^* - (z_{\text{int}})_2)^2 + ((x_{\text{aux}})_{121}^* - (z_c)_{121})^2 \end{array} \right)$$

$$\text{sujet à } 1 \leq (z_{\text{int}})_1 \leq 100$$

$$10 \leq (z_{\text{int}})_2 \leq 1000$$

$$750 \leq (z_c)_{121} \leq 1250$$

On obtient $(z_{\text{int}})_1^*$, $(z_{\text{int}})_2^*$ et $(z_c)_{121}^*$

La formulation du problème d'optimisation pour le groupe 1 est:

$$\underset{s_{11}, s_{21}, (s_c)_{121}, r_{11}, r_{21}, (r_c)_{121}, x_{11}, x_{21}}{\text{Min}} \quad f_{11} = e_1 = (s_{11} + r_{11}) + (s_{21} + r_{21}) + ((s_c)_{121} + (r_c)_{121})$$

$$f_{21} = \frac{F(w^2 + x_{21}^2)^{3/2}}{2\pi E x_{11} x_{21}^2}$$

$$\text{ sujet à } x_{11} + s_{11} - r_{11} = (z_{\text{int}})_1^*$$

$$x_{21} + s_{21} - r_{21} = (z_{\text{int}})_2^*$$

$$\sqrt{w^2 + x_{21}^2} + (s_c)_{121} - (r_c)_{121} = (z_c)_{121}^*$$

$$1 \leq x_{11} \leq 100$$

$$10 \leq x_{21} \leq 1000$$

$$s_{11}, s_{21}, (s_c)_{121} \geq 0$$

$$r_{11}, r_{21}, (r_c)_{121} \geq 0$$

On obtient s_{11}^* , s_{21}^* , $(s_c)_{121}^*$, r_{11}^* , r_{21}^* , $(r_c)_{121}^*$, x_{11}^* et x_{21}^* . Le groupe 1 calcule

$$y_{121}^* = \sqrt{w^2 + x_{21}^2}$$

La formulation du problème d'optimisation pour le groupe 2 est:

$$\underset{s_{12}, s_{22}, (s_{\text{aux}})_{121}, r_{12}, r_{22}, (r_{\text{aux}})_{121}, x_{12}, x_{22}, (x_{\text{aux}})_{121}}{\text{Min}} \quad f_{12} = e_2 = (s_{12} + r_{12}) + (s_{22} + r_{22}) + ((s_{\text{aux}})_{121} + (r_{\text{aux}})_{121})$$

$$\text{ sujet à } c_{12} = \frac{F}{2\pi x_{12} x_{22}} (x_{\text{aux}})_{121} - \frac{1}{8} \pi^2 E \frac{t^2 + x_{12}^2}{w^2 + x_{22}^2} \leq 0$$

$$x_{12} + s_{12} - r_{12} = (z_{\text{int}})_1^*$$

$$x_{22} + s_{22} - r_{22} = (z_{\text{int}})_2^*$$

$$(x_{\text{aux}})_{121} + (s_{\text{aux}})_{121} - (r_{\text{aux}})_{121} = (z_c)_{121}^*$$

$$1 \leq x_{12} \leq 100$$

$$10 \leq x_{22} \leq 1000$$

$$750 \leq (x_{aux})_{121} \leq 1250$$

$$s_{12}, s_{22}, (s_{aux})_{121} \geq 0$$

$$r_{12}, r_{22}, (r_{aux})_{121} \geq 0$$

On obtient $s_{12}^*, s_{22}^*, (s_{aux})_{121}^*, r_{12}^*, r_{22}^*, (r_{aux})_{121}^*, x_{12}^*, x_{22}^*, (x_{aux})_{121}^*$.

Étape 2 : Le directeur classe sa fonction-objectif F_1 dans la classe 1S et sa fonction-objectif F_2 dans la classe 1S.

Étape 3: Le groupe de travail 1 résout individuellement les fonctions-objectifs du système ce qui correspond aux deux problèmes suivants:

$$\underset{x_{11}, x_{21}}{\text{Min}} \quad F_{11} = m = 2\pi\rho t x_{11} \sqrt{w^2 + x_{21}^2}$$

sujet à $1 \leq x_{11} \leq 100$

$$10 \leq x_{21} \leq 1000$$

$$\underset{x_{11}, x_{21}}{\text{Min}} \quad F_{21} = s = \frac{F}{2\pi t x_{11} x_{21}} \sqrt{w^2 + x_{21}^2}$$

sujet à $1 \leq x_{11} \leq 100$

$$10 \leq x_{21} \leq 1000$$

Les résultats obtenus par le groupe 1 sont présentés au tableau K.1.

Tableau K.1: Résolution individuelle des fonctions-objectifs du système par le groupe 1 pour le problème de structure.

	x_{11}	x_{21}	F_{m1}^*
Z^{*11}	1	10	91.8999
Z^{*21}	100	1000	119.366

Le groupe de travail 2, quant à lui, résout les deux problèmes suivants:

$$\underset{x_{12}, x_{22}}{\text{Min}} \quad F_{12} = m = 2\pi\rho t x_{12} \sqrt{w^2 + x_{22}^2}$$

sujet à

$$c_{12} = \frac{F}{2\pi t x_{12} x_{22}} \sqrt{w^2 + x_{22}^2} - \frac{1}{8} \pi^2 E \frac{t^2 + x_{12}^2}{w^2 + x_{22}^2} \leq 0$$

$$1 \leq x_{12} \leq 100$$

$$10 \leq x_{22} \leq 1000$$

$$\underset{x_{12}, x_{22}}{\text{Min}} \quad F_{22} = s = \frac{F}{2\pi t x_{12} x_{22}} \sqrt{w^2 + x_{22}^2}$$

sujet à

$$c_{12} = \frac{F}{2\pi t x_{12} x_{22}} \sqrt{w^2 + x_{22}^2} - \frac{1}{8} \pi^2 E \frac{t^2 + x_{12}^2}{w^2 + x_{22}^2} \leq 0$$

$$1 \leq x_{12} \leq 100$$

$$10 \leq x_{22} \leq 1000$$

Les résultats trouvés par le groupe de travail 2 sont présentés au tableau K.2.

Tableau K.2: Résolution individuelle des fonctions-objectifs du système par le groupe 2 pour le problème de structure.

	x_{12}	x_{22}	F_{m2}^*
Z^{*12}	39.2944	335.681	3955.99
Z^{*22}	100	1000	119.366

Étape 4 : La table des valeurs des fonctions-objectifs obtenue par le directeur est présentée au tableau K.3. Pour définir l'ensemble réduit des valeurs cibles, le directeur choisit, pour chacune de ses fonctions, les valeurs minimale et maximale les plus contraignantes entre les deux groupes de travail.

Tableau K.3: Table des valeurs des fonctions-objectifs du système pour le problème de structure.

	x_1	x_2	F_1	F_2
Z^{*11}	1	10	91.9	716 259.0
Z^{*21}	100	1000	15 315.3	119.4
Z^{*12}	39.2944	335.681	3955.9	594.9
Z^{*22}	100	1000	15 315.3	119.4

L'ensemble réduit des valeurs cibles est: $3955.9 \leq b_1^h \leq 15315.3$ et $119.4 \leq b_2^h \leq 716259$.

Dans ce cas-ci, cet ensemble est plus grand que celui trouvé en environnement centralisé donc il contient des solutions non réalisables.

Étape 5 : Les degrés de désirabilité fixés par le directeur du système sont inspirés du scénario 2 (annexe B) et sont présentés au tableau K.4.

Tableau K.4 : Degrés de désirabilité des fonctions-objectifs du système pour le problème de structure.

		I	D	T	ID	IA
Critère	Classe	t_{m1}^+	t_{m2}^+	t_{m3}^+	t_{m4}^+	t_{m5}^+
F_1	1S	5849	7742	9635	11528	13421
F_2	1S	198	277	356	435	514

I: Idéal D: Désirable T: Tolérable ID: Indésirable IA : Inacceptable

Étape 6 : Le groupe de travail 1 classe sa fonction-objectif locale f_{21} dans la classe 1S.

Le groupe de travail 2 n'a pas de fonction locale.

Étape 7 : Le groupe de travail 1 résout son problème local ce qui correspond à:

$$\underset{x_{11}, x_{21}}{\text{Min}} \quad f_{21} = d = \frac{F(w^2 + x_{21}^2)^{3/2}}{2\pi E x_{11} x_{21}^2}$$

sujet à $1 \leq x_{11} \leq 100$

$$10 \leq x_{21} \leq 1000$$

Les résultats obtenus par le groupe de travail 1 sont présentés au tableau K.5.

Tableau K.5: Solution individuelle obtenue par le groupe de travail 1 pour sa fonction-objectif locale du problème de structure.

	x_{11}	x_{21}	f_{21}^*
A^{*21}	100	1000	0.8881

Étape 8 : Les valeurs des fonctions-objectifs du système à la solution optimale A^{*21} sont présentées au tableau K.6.

Tableau K.6: La valeur des fonctions-objectifs du système à la solution optimale A^{*21}

	x_{11}	x_{21}	f_{21}^*	F_1	F_2
A^{*21}	100	1000	0.8881	15315.3	119.366

Dans ce cas, la solution optimale de la fonction f_{21} du groupe de travail 1 conduit à une valeur inacceptable pour le système pour sa fonction F_1 et à une valeur idéale pour sa fonction F_2 . Les pointeurs sur les grilles de degrés de désirabilités des fonctions F_1 et F_2 sont montrés aux tableaux K.7 et K.8.

Tableau K.7 : Pointeur pour la fonction-objectif F_1 du système pour le problème de structure

F_1	1S	5849	7742	9635	11528	13421
		<i>I</i>	<i>D</i>	<i>T</i>	<i>ID</i>	<i>IA</i>

Valeur optimale de f_{21}^*

Tableau K.8 : Pointeur pour la fonction-objectif F_2 du système pour le problème de structure

F_2	1S	198	277	356	435	514
	I	D	T	ID	IA	

Valeur optimale de f_{21}^*

Étape 9 : L'ensemble réduit des valeurs cibles pour la fonction de compatibilité des groupes de travail 1 et 2 est toujours défini par: $0 \leq b_{11}^h \leq \inf$ et $0 \leq b_{12}^h \leq \inf$. L'ensemble réduit des valeurs cibles pour la fonction-objectif locale du groupe de travail 1 est défini par $b_{21}^h \geq 0.8881$. Dans ce cas-ci cet ensemble est plus grand que celui trouvé en environnement centralisé donc il peut contenir des solutions non réalisables. La borne maximale de cet ensemble pourra prendre la valeur du degré de désirabilité jugé inacceptable à l'étape 10 au lieu de l'infini.

Étape 10 : Le groupe de travail 2 n'a pas de fonctions-objectifs locales donc il n'a pas à définir des degrés de désirabilité. Pour la fonction-objectif de compatibilité, $f_{12} = e_2$, le degré de désirabilité est zéro afin d'assurer la compatibilité entre les groupes de travail et de rencontrer les exigences du système. Donc il n'y a pas de compromis possible avec cette fonction-objectif. Pour les mêmes raisons, le degré de désirabilité de la fonction-objectif de compatibilité $f_{11} = e_1$ du groupe de travail 1 est de zéro. Les degrés de désirabilité pour sa fonction-objectif locale f_{21} sont montrés au tableau K.9.

Tableau K.9: Degrés de désirabilité pour la fonction locale du groupe 1 pour le problème de structure.

		<i>I</i>	<i>D</i>	<i>T</i>	<i>ID</i>	<i>IA</i>
Critère	Classe	t_{21}^+	t_{22}^+	t_{23}^+	t_{24}^+	t_{25}^+
f_{21}	1S	1.7762	2.6643	3.5524	4.4405	5.3286

I: Idéal D: Désirable T: Tolérable ID: Indésirable IA : Inacceptable

Étape 11 : Le directeur choisit ses préférences dans son ensemble réduit des valeurs cibles $b_1^1 = 5849$ et $b_2^1 = 198$.

Étape 12 : Le directeur solutionne le problème à multiples objectifs (sans la pénalité) et obtient une solution initiale optimale \bar{Z}_m et la valeur de ses fonctions-objectifs $F_m^{hn}(Z)$.

$$\bar{Z}_{11} = (63.6511, 705.642, 750)$$

$$F_1^{11} = 5849$$

$$F_2^{11} = 159.456$$

Étape 13 : Les valeurs cibles $(z_{int})_1^* = 63.6511$, $(z_{int})_2^* = 705.642$, $(z_c)_{121}^* = 750$ sont envoyées aux groupes de travail 1 et 2.

Étape 14 : Pour sa fonction locale, le groupe de travail 1 choisit $b_{21}^1 = 1.7762$. Les valeurs de b_{11}^1 et b_{12}^1 reliées aux fonctions de compatibilité des groupes de travail 1 et 2, sont fixées à 0.

Étape 15 : Le groupe de travail 1 résout son problème et obtient les résultats suivants:

$$\bar{A}_{111} = (63.6511, 705.642) \text{ et } y_{121}^* = 1029.77$$

$$f_{11}^{11} = e_1 = 0$$

$$f_{21}^{11} = 1.5668$$

Les valeurs de $x_{11}^* = 63.6511$, $x_{21}^* = 705.642$ et $y_{121}^* = 1029.77$ sont envoyées au directeur (étape 16) où elles seront considérées comme des paramètres dans son problème d'optimisation.

Simultanément, le groupe de travail 2 solutionne son problème et obtient les résultats suivants:

$$\bar{A}_{112} = (63.6511, 705.642, 750)$$

$$f_{12}^{11} = e_2 = 0$$

Les valeurs de $x_{12}^* = 63.6511$, $x_{22}^* = 705.642$ et $(x_{aux})_{121}^* = 750$ sont envoyées au directeur (étape 16) où elles seront considérées comme des paramètres dans son problème d'optimisation.

Étape 16 : Le directeur solutionne le problème à multiples objectifs (avec la pénalité et les données fournies par les groupes de travail) et obtient la solution optimale \bar{Z}_{hn} et la valeur des fonctions-objectifs $F_m^{hn}(Z)$.

$$\bar{Z}_{12} = (63.3795, 705.642, 889.867)$$

$$F_1^{12} = 6910.16$$

$$F_2^{12} = 190.004$$

Étape 17 : Les étapes 15, 16 et 17 sont répétées jusqu'à ce que le changement dans les fonctions du système F_1 et F_2 soit minime c'est-à-dire < 0.000001 . La solution optimale est obtenue après $n = 1500$ itérations et est présentée au tableau K.10.

Tableau K.10 : Première solution générée par l'algorithme IPOMP-ED pour le problème de structure.

Type d'algorithme	x_{1j}	x_{2j}	F_1	F_2	f_3 ou f_{21}
IPOMP-ED	47.2121	678.176	5849	301.57	2.1650
IPOMP	45.0097	749.946	5849	300.0513	2.1432

La valeur de F_1 est dans la zone idéale

La valeur de F_2 est dans la zone tolérable

La valeur de f_{21} est dans la zone désirable

Étape 18 : Le groupe 1 est satisfait du résultat. Cependant, le directeur est insatisfait du résultat de la fonction F_2 et veut générer une autre solution. Aller à l'étape 19.

Étape 19 : Le directeur et les groupes de travail j formulent leurs conditions de KKT et déterminent la valeur de leurs multiplicateurs de KKT pour leurs contraintes de but respectives. Le directeur obtient: $\bar{u}_1 = 0.3038$ et $\bar{u}_2 = 1$ et le groupe 1 obtient: $\bar{u}_{11} = 0$ et $\bar{u}_{21} = 0$.

Étape 20 : Le directeur et les groupes de travail déterminent leur ensemble de stabilité respectifs selon l'annexe A :

Système

Puisque $\bar{u}_1 = 0.0517$ et $c_1 = 5849$ alors $b_1 = 5849$

Puisque $\bar{u}_2 = 1$ et $c_2 = 198$ alors $b_2 = 198$

Groupe 1

Puisque $\bar{u}_{11} = 0$ et $c_{11} = 0$ alors $b_{11} \geq 0$.

Puisque $\bar{u}_{21} = 0$ et $c_{21} = 1.7762$ alors $b_{21} \geq 1.7762$.

Étape 21 : Le directeur obtient l'ensemble réduit des valeurs cibles possibles:

$b_{1\min}$	$b_{1\max}$	$b_{2\min}$	$b_{2\max}$
3955.9	5849	119.4	716 259
<u>5849</u>	<u>15 315.3</u>	<u>119.4</u>	<u>716 259</u>
5849	5849	119.4	198
5849	5849	198	716 259

Le groupe de travail 1 obtient l'ensemble réduit des valeurs cibles possibles:

$b_{12\min}$	$b_{12\max}$	$b_{22\min}$	$b_{22\max}$
-	-	0.8881	5.3286
0	inf	0.8881	1.7762

Étape 22 : Puisque le directeur peut choisir d'autre valeur cible dans $\{D^* - \bigcup G(\bar{Z}_p), p = 1, \dots, h\}$ et que le groupe de travail 1 peut en faire autant dans $\{D_j^* - \bigcup G(\bar{A}_{pj}), p = 1, \dots, h\}$, une des possibilités est que le groupe 1 choisisse une autre

valeur pour sa fonction-objectif locale sans que le directeur ne change ses propres valeurs cibles. L'autre possibilité est que le directeur et le groupe de travail 1 choisissent d'autre valeur cible dans leur ensemble respectif afin de générer une autre solution. Supposons que le groupe 1 choisisse les valeurs $b_{11}^h = 0$ et $b_{21}^h = 0.9$ sans que le directeur ne change ses choix. Donc, en résolvant le problème avec les valeurs cibles suivantes: $b_1^h = 5849$, $b_2^h = 198$, $b_{11}^h = 0$ et $b_{21}^h = 0.9$, on trouve $F_1 = 5849$, $F_2 = 301.521$ et $f_{21} = 2.1643$ au lieu de $F_1 = 5849$, $F_2 = 301.57$ et $f_{21} = 2.1650$. La différence est minime mais cela constitue une solution différente. Dans ce cas, c'est le directeur qui est insatisfait alors allons à l'étape 23.

Étape 23 : Le processus se poursuit jusqu'à ce que plusieurs solutions soient générées. Le directeur choisit les valeurs cibles de l'itération $h = 2$ dans l'ensemble souligné à l'étape 21. Le groupe de travail 1 peut choisir n'importe quelles valeurs cibles, pour sa fonction-objectif locale, dans son ensemble réduit des valeurs cibles $0.8881 \leq b_{21}^2 \leq 5.3286$.

Étape 24 : Le directeur présente les solutions obtenues aux groupes de travail pour effectuer un choix satisfaisant pour tout le monde.

Étape 25 : Arrêter.

ANNEXE L

**PROGRAMMES AMPL DU PROBLÈME MATHÉMATIQUE
DE ABDEL HALEEM (1991) ROBUSTE**

Problème mathématique 1 (Abdel Haleem) robuste - Fichier.mod

```

# -----
# INITIALISATION SYSTEME
# -----
param i integer >=0;
param tau >=0;
param f1{0..i};
param f2{0..i};
param f1a{0..i};
param f2a{0..i};
param g1{0..i};
param g2{0..i};
param g3{0..i};
param g4{0..i};
param b1{0..i} := -15;
param b2{0..i} := -10;
var z1{0..i} >=0, <=10; var z2{0..i} >=0, <=10;
var z3{0..i} >=0, <=10; var z4{0..i} >=0, <=10;
var z5{0..i} >=0, <=10;
var z6{0..i} >=0; var z7{0..i} >=0;
var z9{0..i} >=0; var z8{0..i} >=0;

minimize FCT_INI1: z6[i];
subject to CONTRAINTE11: z1[i]^2+2*z2[i]^2+4*z3[i]^2-z4[i]-3*z5[i]-z6[i]
    <=b1[i] ;
subject to CONTRAINTE11a: z1[i]^2+2*z2[i]^2+4*z3[i]^2-z4[i]-3*z5[i] <= 5;

minimize FCT_INI2: z7[i];
subject to CONTRAINTE22: -2*z1[i]^2+3*z2[i]+4*z3[i]^3-5*z4[i]-2*z5[i]-z7[i] <=
    b2[i];
subject to CONTRAINTE22a: -2*z1[i]^2+3*z2[i]+4*z3[i]^3-5*z4[i]-2*z5[i] <= 10;

# -----
# PROBLEME GROUPE#1
# -----
param d1{0..i};
var x11{0..i} >=0;
var x21{0..i} >=0;
var x31{0..i} >=0;
var x41{0..i} >=0;
var x51{0..i} >=0;
var s11{0..i} >=0;
var s12{0..i} >=0;
var s13{0..i} >=0;
var s14{0..i} >=0;
var s15{0..i} >=0;
var t11{0..i} >=0;
var t12{0..i} >=0;
var t13{0..i} >=0;
var t14{0..i} >=0;

```

```

var t15{0..i} >=0;

minimize FCT_GR1:
  (s11[i]+t11[i])+(s12[i]+t12[i])+(s13[i]+t13[i])+(s14[i]+t14[i])+(s15[i]+t15
  [i]);
subject to CONTRAINTE1_GR1: x11[i]+2*x21[i]+3*x31[i]+x41[i]+x51[i] <= 3.6;
subject to C1_1: x11[i]+s11[i]-t11[i]=z1[i];
subject to C2_1: x21[i]+s12[i]-t12[i]=z2[i];
subject to C3_1: x31[i]+s13[i]-t13[i]=z3[i];
subject to C4_1: x41[i]+s14[i]-t14[i]=z4[i];
subject to C5_1: x51[i]+s15[i]-t15[i]=z5[i];

# -----
# PROBLEME GROUPE#2
# -----
param c2{0..i} :=0;
param b3{0..i} := -10;
param d2{0..i};
param f3{0..i};
param e2{0..i};
var x12{0..i} >=0; var x22{0..i} >=0;
var x32{0..i} >=0; var x42{0..i} >=0;
var x52{0..i} >=0; var x621{0..i} >=0;
var x62{0..i} >=0; var x72{0..i} >=0;
var x82{0..i} >=0; var s21{0..i} >=0;
var s22{0..i} >=0; var s23{0..i} >=0;
var s24{0..i} >=0; var s25{0..i} >=0;
var t21{0..i} >=0; var t22{0..i} >=0;
var t23{0..i} >=0; var t24{0..i} >=0;
var t25{0..i} >=0;

minimize FCT_GR2_1: x62[i];
subject to
  CONTRAINTE11_GR2:(s21[i]+t21[i])+(s22[i]+t22[i])+(s23[i]+t23[i])+(s24[i]+t2
  4[i])+(s25[i]+t25[i])-x62[i] <= c2[i];
subject to CONT_LIN2: 5*x12[i]+x22[i]+x32[i]+2*x42[i]+2*x52[i] <= 6.7;
subject to CONT_LIN3: 3*x12[i]+x22[i]+5*x32[i]+3*x42[i]+3*x52[i] <= 10.5;
subject to C1_2: x12[i]+s21[i]-t21[i]=z1[i];
subject to C2_2: x22[i]+s22[i]-t22[i]=z2[i];
subject to C3_2: x32[i]+s23[i]-t23[i]=z3[i];
subject to C4_2: x42[i]+s24[i]-t24[i]=z4[i];
subject to C5_2: x52[i]+s25[i]-t25[i]=z5[i];

minimize FCT_GR2_2: x72[i];
subject to CONTRAINTE22_GR2: 3*x12[i]+x22[i]^2-5*x32[i]+x42[i]^2-2*x52[i]-
  x72[i] <= b3[i];
subject to CONTRAINTE22_GR2a: 3*x12[i]+x22[i]^2-5*x32[i]+x42[i]^2-2*x52[i]<=
  25;

# -----
# PROBLEME SYSTEME
# -----
minimize FCT_1: z6[i];
subject to CONTRAINTE_11: z1[i]^2+2*z2[i]^2+4*z3[i]^2-z4[i]-
  3*z5[i]+tau*((x11[i-1]-z1[i])^2+(x21[i-1]-z2[i])^2+(x31[i-1]-
  z3[i])^2+(x41[i-1]-z4[i])^2+(x51[i-1]-z5[i])^2+(x12[i-1]-z1[i])^2+(x22[i-
  1]-z2[i])^2+(x32[i-1]-z3[i])^2+(x42[i-1]-z4[i])^2+(x52[i-1]-z5[i])^2)-z6[i]
  <= b1[i] ;

minimize FCT_2: z7[i];
subject to CONTRAINTE_22: -2*z1[i]^2+3*z2[i]^2+4*z3[i]^2-5*z4[i]-
  2*z5[i]+tau*((x11[i-1]-z1[i])^2+(x21[i-1]-z2[i])^2+(x31[i-1]-
  z3[i])^2+(x41[i-1]-z4[i])^2+(x51[i-1]-z5[i])^2+(x12[i-1]-z1[i])^2+(x22[i-
  1]-z2[i])^2+(x32[i-1]-z3[i])^2+(x42[i-1]-z4[i])^2+(x52[i-1]-z5[i])^2)-z7[i]
  <= b2[i];

```

Problème mathématique 1 (Abdel Haleem) robsute - Fichier.run

```

reset;
option solver donlp2;
option presolve 0;
#option donlp2_options "silent=0 outlev=0010";

model decomp2xiaRobust1.mod;
let i:=0;
let tau :=1000;

problem SYSTEME1_INI: z1,z2,z3,z4,z5,z6,FCT_INI1,CONTRAINTE11,CONTRAINTE11a;
problem SYSTEME2_INI:
z1,z2,z3,z4,z5,z7,FCT_INI2,CONTRAINTE11,CONTRAINTE11a,CONTRAINTE22,CONTRAINTE22a;

solve SYSTEME1_INI;
solve SYSTEME2_INI;

let f1[i] := z1[i]^2+2*z2[i]^2+4*z3[i]^2-z4[i]-3*z5[i];
let f2[i] := -2*z1[i]^2+3*z2[i]^2+4*z3[i]^2-5*z4[i]-2*z5[i];

problem GROUPE1:
s11,s12,s13,s14,s15,t11,t12,t13,t14,t15,x11,x21,x31,x41,x51,FCT_GR1,CONTRAINTE11_GR1,C1_1,C2_1,C3_1,C4_1,C5_1;

problem GROUPE2_1:
s21,s22,s23,s24,s25,t21,t22,t23,t24,t25,x12,x22,x32,x42,x52,x62,FCT_GR2_1,CONTRAINTE11_GR2,CONT_LIN2,CONT_LIN3,C1_2,C2_2,C3_2,C4_2,C5_2;

problem GROUPE2_2:
s21,s22,s23,s24,s25,t21,t22,t23,t24,t25,x12,x22,x32,x42,x52,x72,FCT_GR2_2,CONTRAINTE11_GR2,CONTRAINTE22_GR2,CONTRAINTE22_GR2a,CONT_LIN2,CONT_LIN3,C1_2,C2_2,C3_2,C4_2,C5_2;

problem SYSTEME1: z1,z2,z3,z4,z5,z6,FCT_1,CONTRAINTE_11,CONTRAINTE11a;
problem SYSTEME2:
z1,z2,z3,z4,z5,z7,FCT_2,CONTRAINTE_11,CONTRAINTE11a,CONTRAINTE_22,CONTRAINTE22a;

repeat while i<40000{

# GROUPE#1
# -----
solve GROUPE1;

#GROUPE#2
#-----
solve GROUPE2_1;
solve GROUPE2_2;

let f3[i] := 3*x12[i]+x22[i]^2-5*x32[i]+x42[i]^2-2*x52[i];
let f1a[i] := x12[i]^2+2*x22[i]^2+4*x32[i]^2-x42[i]-3*x52[i];
let f2a[i] := -2*x12[i]^2+3*x22[i]^2+4*x32[i]^2-5*x42[i]-2*x52[i];

let g3[i] := 3*x12[i]+x22[i]^2-5*x32[i]+x42[i]^2-2*x52[i]-x72[i];

display i;

# SYSTÈME
# -----
let i := i + 1;

solve SYSTEME1;
solve SYSTEME2;
}

```

```
let f1[i] := z1[i]^2+2*z2[i]^2+4*z3[i]^2-z4[i]-3*z5[i];  
let g1[i]:= z1[i]^2+2*z2[i]^2+4*z3[i]^2-z4[i]-3*z5[i]+tau*((x11[i-1]-  
z1[i])^2+(x21[i-1]-z2[i])^2+(x31[i-1]-z3[i])^2+(x41[i-1]-z4[i])^2+(x51[i-  
1]-z5[i])^2+(x12[i-1]-z1[i])^2+(x22[i-1]-z2[i])^2+(x32[i-1]-  
z3[i])^2+(x42[i-1]-z4[i])^2+(x52[i-1]-z5[i])^2)-z6[i];  
let g2[i] := -2*z1[i]^2+3*z2[i]^2+4*z3[i]^2-5*z4[i]^2-2*z5[i]^2+tau*((x11[i-1]-  
z1[i])^2+(x21[i-1]-z2[i])^2+(x31[i-1]-z3[i])^2+(x41[i-1]-z4[i])^2+(x51[i-  
1]-z5[i])^2+(x12[i-1]-z1[i])^2+(x22[i-1]-z2[i])^2+(x32[i-1]-  
z3[i])^2+(x42[i-1]-z4[i])^2+(x52[i-1]-z5[i])^2)-z7[i];  
if abs(f1[i-1]-f1[i]) <= 0.000001 and abs(f2[i-1]-f2[i]) <=0.000001 then  
  break;  
};  
  
display x12,x22,x32,x42,x52,f1,f2,f3 > résultatsdecomp2xiarobust1t.out;  
close résultatsdecomp2xiarobust1t.out;
```

ANNEXE M

**PROGRAMMES AMPL DU PROBLÈME
DU STRUCTURE À DEUX BARRES ROBUSTE**

Problème de structure robuste - Fichier.mod

```

param i integer >=0;
param tau >=0;
param F := 150000;
param w := 750;
param p := 0.0078;
param E := 210000;
param t := 2.5;
param pi := 3.141592654;
param c1{0..i};
param f1{0..i};
param f2{0..i};
param g1{0..i};
param g2{0..i};
param g3{0..i};
param y121{0..i} >=0;
param b1{0..i} := 5849;
param b2{0..i} := 300.04;
var z1{0..i} >=1,<=100;
var z2{0..i} >=10,<=1000;
var z3{0..i} >=750;
var z4{0..i} >=0;
var z5{0..i} >=0;
var z6{0..i} >=0;
var z7{0..i} >=0;

# -----
# INITIALISATION SYSTEME PREMIÈRE ITÉRATION
# -----
minimize FCT_INI1: z4[i];
subject to CONTRAINTE11: (2*pi*p*t*z1[i]*z3[i])-z4[i] <= b1[i];
subject to CONTRAINTE12: 2*pi*p*t*z1[i]*z3[i] <= 13421;

# -----
# INITIALISATION SYSTEME TROISIÈME ITÉRATION
# -----
minimize FCT_INI3: z6[i];
subject to CONTRAINTE31: ((F/(2*pi*t*z1[i]*z2[i]))*z3[i])-z6[i] <= b2[i];
subject to CONTRAINTE32: ((F/(2*pi*t*z1[i]*z2[i]))*z3[i]) <= 514;

# -----
# PROBLEME GROUPE#1
# -----
param f3{0..i};
param b3{0..i} := 2.14;
param y121{0..i} >=0;
var x11{0..i} >=1,<=100;
var x21{0..i} >=10,<=1000;
var x31{0..i} >=0;
var x41{0..i} >=0;

```

```

var x51{0..i} >=0;
var s11{0..i} >=0;
var s12{0..i} >=0;
var s13{0..i} >=0;
var t11{0..i} >=0;
var t12{0..i} >=0;
var t13{0..i} >=0;

minimize FCT1_GR1: x31[i];
subject to C11: (s11[i]+t11[i])+(s12[i]+t12[i])+(s13[i]+t13[i])-x31[i]<=0;
subject to C1_1: x11[i]+s11[i]-t11[i]=z1[i];
subject to C2_1: x21[i]+s12[i]-t12[i]=z2[i];
subject to C3_1: sqrt(w^2+x21[i]^2)+s13[i]-t13[i]=z3[i];

# -----
# PROBLEME GROUPE#1 - DEUXIÈME ITÉRATION
# -----
minimize FCT2_GR1: x41[i];
subject to C21: ((F*((w^2+x21[i]^2)^1.5))/(2*pi*t*E*x11[i]*x21[i]^2))-x41[i]
<= b3[i];
subject to C22: ((F*((w^2+x21[i]^2)^1.5))/(2*pi*t*E*x11[i]*x21[i]^2)) <=
5.3286;

# -----
# PROBLEME GROUPE#2 - PREMIÈRE ITÉRATION
# -----
param e2{0..i};
var x12{0..i} >=1, <=100;
var x22{0..i} >=10, <=1000;
var xaux121{0..i} >=750;
var s21{0..i} >=0;
var s22{0..i} >=0;
var s23{0..i} >=0;
var t21{0..i} >=0;
var t22{0..i} >=0;
var t23{0..i} >=0;

minimize FCT1_GR2: (s21[i]+t21[i])+(s22[i]+t22[i])+(s23[i]+t23[i]);
subject to C12: ((F/(2*pi*t*x12[i]*x22[i]))*xaux121[i])-((1/8)*pi^2*E*((t^2+x12[i]^2)/(w^2+x22[i]^2)))+abs((xaux121[i]*((-F^2*pi*t*x22[i])/(2*pi*t*x12[i]*x22[i]^2))-
1/8*pi^2*E*((w^2+x22[i]^2)*2*x12[i]/(w^2+x22[i]^2)^2))*3*0.1+abs(((F*x22[i])/(2*pi*t*x12[i]*x22[i])*xaux121[i]))+(xaux121[i]*((-F^2*pi*t*x12[i])/(2*pi*t*x12[i]^2*x22[i]^2))-1/8*pi^2*E*((t^2+x12[i]^2)*2*x22[i]/(w^2+x22[i]^2)^2))*3*0.1+abs((F/(2*pi*t*x12[i]*x22[i]))*3*sqrt((x22[i]/xaux121[i])^2*0.1^2))<=0;
subject to C1_2: x12[i]+s21[i]-t21[i]=z1[i];
subject to C2_2: x22[i]+s22[i]-t22[i]=z2[i];
subject to C3_2: xaux121[i]+s23[i]-t23[i]=z3[i];

# -----
# PROBLEME SYSTEME PREMIÈRE ITÉRATION
# -----
minimize FCT_1: z4[i];
subject to CONTRAINE_11: 2*pi*p*t*z1[i]*z3[i]+tau*((x11[i-1]-z1[i])^2+(x21[i-1]-z2[i])^2+(y121[i-1]-z3[i])^2+(x12[i-1]-z1[i])^2+(x22[i-1]-z2[i])^2+(xaux121[i-1]-z3[i])^2)-z4[i] <= b1[i];

# -----
# PROBLEME SYSTEME TROISIÈME ITÉRATION
# -----
minimize FCT_3: z6[i];
subject to CONTRAINE_33: ((F/(2*pi*t*z1[i]*z2[i]))*z3[i])+tau*((x11[i-1]-z1[i])^2+(x21[i-1]-z2[i])^2+(x12[i-1]-z1[i])^2+(x22[i-1]-z2[i])^2+(xaux121[i-1]-z3[i])^2)-z6[i] <= b2[i];

```

Problème de structure robuste - Fichier.run

```

reset;
option solver donlp2;
option presolve 0;
#option donlp2_options "silent=0 outlev=0010";
model structurexiaRobust1.mod;
let i:=0;
let tau :=10;

# INITIALISATION DU SYSTÈME
# -----
problem SYSTEME1_INI: z1,z2,z3,z4,FCT_INI1,CONTRAINTE11,CONTRAINTE12;
problem SYSTEME3_INI:
  z1,z2,z3,z6,FCT_INI3,CONTRAINTE11,CONTRAINTE12,CONTRAINTE31,CONTRAINTE32;

solve SYSTEME1_INI;
solve SYSTEME3_INI;

let f1[i] := 2*pi*p*t*z1[i]*z3[i];
let f2[i] := (F/(2*pi*t*z1[i]*z2[i]))*z3[i];

problem GROUPE1_1: x11,x21,x31,FCT1_GR1,C11,C1_1,C2_1,C3_1;
problem GROUPE1_2: x11,x21,x41,FCT2_GR1,C11,C21,C22,C1_1,C2_1,C3_1;
problem GROUPE2: x12,x22,xaux121,FCT1_GR2,C12,C1_2,C2_2,C3_2;
problem SYSTEME1: z1,z2,z3,z4,FCT_1,CONTRAINTE_11,CONTRAINTE12;
problem SYSTEME3:
  z1,z2,z3,z6,FCT_3,CONTRAINTE_11,CONTRAINTE12,CONTRAINTE_33,CONTRAINTE32;

repeat while i<40000{

# GROUPE#1
# -----
solve GROUPE1_1;
solve GROUPE1_2;

let f3[i] := (F*(w^2+x21[i]^2)^(3/2)/(2*pi*t*E*x11[i]*x21[i]^2));
let y121[i] := sqrt(w^2+x21[i]^2);

#GROUPE#2
#-----
solve GROUPE2;
let c1[i]:= ((F/(2*pi*t*x12[i]*x22[i]))*xaux121[i])-((1/8)*pi^2*E*((t^2+x12[i]^2)/(w^2+x22[i]^2)))+(xaux121[i]*((-F^2*pi*t*x22[i])/(2*pi*t*x12[i]*x22[i])^2))-1/8*pi^2*E*((w^2+x22[i]^2)*2*x12[i]/(w^2+x22[i]^2)^2)*3*0.1+((F*x22[i])/(2*pi*t*x12[i]*x22[i])*xaux121[i])+(xaux121[i]*((-F^2*pi*t*x12[i])/(2*pi*t*x12[i]*x22[i])^2))-1/8*pi^2*E*((t^2+x12[i]^2)*2*x22[i]/(w^2+x22[i]^2)^2)*3*0.1+(F/(2*pi*t*x12[i]*x22[i]))*3*sqrt((x22[i]/xaux121[i])^2*0.1^2);
display i;

# SYSTÈME
# -----
let i := i + 1;
solve SYSTEME1;
solve SYSTEME3;
let f1[i] := 2*pi*p*t*z1[i]*z3[i];
let f2[i] := (F/(2*pi*t*z1[i]*z2[i]))*z3[i];
if abs(f1[i-1]-f1[i]) <= 0.000001 and abs(f2[i-1]-f2[i]) <=0.000001 then
break;
};

display x11,x21,x12,x22,f1,f2,f3 > structureRobust1t.out;
close structureRobust1t.out;

```