

**Titre:** Méthodes numériques pour le calcul de l'écoulement dans l'artère  
Title: carotide

**Auteur:** Marion Verdier  
Author:

**Date:** 2007

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Verdier, M. (2007). Méthodes numériques pour le calcul de l'écoulement dans l'artère carotide [Master's thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
Citation: <https://publications.polymtl.ca/8114/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8114/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** André Garon, & Marie-Isabelle Farinas  
Advisors:

**Programme:** Unspecified  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LE CALCUL  
DE L'ÉCOULEMENT DANS L'ARTÈRE CAROTIDE

MARION VERDIER  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
DÉCEMBRE 2007



Library and  
Archives Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*

*ISBN: 978-0-494-36946-3*

*Our file* *Notre référence*

*ISBN: 978-0-494-36946-3*

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

  
**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LE CALCUL  
DE L'ÉCOULEMENT DANS L'ARTÈRE CAROTIDE

présenté par: VERDIER Marion

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., président

M. GARON André, Ph.D., membre et directeur de recherche

Mme. FARINAS Marie-Isabelle, Ph.D., membre et codirectrice de recherche

M. TRÉPANIÉRIE Jean-Yves, Ph.D., membre

## REMERCIEMENTS

Je tiens en premier lieu à remercier mon directeur de recherche, M. André Garon pour m'avoir offert la possibilité de faire cette maîtrise, mais aussi pour sa disponibilité et sa confiance.

Je remercie également ma codirectrice de recherche Marie-Isabelle Farinas pour ses conseils, ainsi que José Urquiza et Jérôme Vétel pour leur aide tout au long de ma maîtrise.

Je remercie Dominique Pelletier et Jean-Yves Trépanier, pour avoir accepté de faire partie du jury.

Enfin, je souhaite remercier Dr Marc Thiriet pour nous avoir fourni des éléments indispensables à cette étude.

## RÉSUMÉ

Le but de cette étude est de mettre en place une procédure de calcul pour la prédiction de l'écoulement du sang dans l'artère carotide. En effet, cette partie du corps humain est un lieu connu de formation de plaques athéromateuses responsables de nombreux problèmes vasculaires, et on souhaite évaluer les conséquences sur l'écoulement dans cette région, de l'utilisation d'une assistance ventriculaire à débit continu.

L'écoulement du sang est régi par les équations de Navier-Stokes incompressibles. Ces équations sont discrétisées par la méthode des éléments finis. Pour pouvoir utiliser l'élément P1P1, considéré comme instable, il faut stabiliser les équations par les méthodes SUPG et PSPG, puis ajouter une stabilisation sur la constante d'incompressibilité.

Dans un premier temps, on développe un estimateur d'erreur a posteriori de type Zienkewicz et Zhu, pour évaluer l'erreur en vitesse sur des simulations d'écoulements. Pour étudier l'efficacité de l'estimateur d'erreur, on réalise des tests sur des géométries 2D et 3D pour calculer, dans différentes situations et avec différents éléments, le taux de convergence de l'estimateur d'erreur a posteriori. Ce taux de convergence correspond à la pente de la droite logarithmique représentant l'erreur en fonction de la taille caractéristique des éléments. Pour pouvoir réaliser ces études, on développe un programme de raffinement global de maillage en 2D et en 3D.

L'estimateur d'erreur permet aussi de mettre en place une procédure de subdivision adaptative de maillage. En effet, l'erreur estimée sur chaque élément est comparée à une erreur cible élémentaire, tous les éléments présentant des erreurs trop importantes sont subdivisés en quatre triangles pour les maillages 2D ou en huit tétraèdres pour les maillages 3D. Lors de la subdivision des éléments, il faut également prendre en compte les éléments voisins qui doivent aussi être coupés pour obtenir un maillage conforme. À

chaque étape de la subdivision adaptative, l'erreur cible peut être fixée de différentes manières : l'utilisateur peut choisir une erreur cible absolue ou une erreur cible relative (l'erreur cible est définie comme un pourcentage de la norme de la solution), ou encore il peut choisir l'erreur totale qu'il souhaite sur le prochain maillage en pourcentage de l'erreur sur le maillage précédent (Réduction d'Erreur). On a testé la procédure de subdivision adaptative sur différents cas 2D et 3D, afin d'apprécier les apports de cette méthode par rapport au raffinement global du maillage. On constate alors que les paramètres optimaux pour le calcul de l'erreur cible varient d'un problème à un autre.

Toutes ces techniques sont enfin appliquées au cas de la simulation de l'écoulement du sang dans la bifurcation de la carotide. Après une revue bibliographique des travaux réalisés sur cette bifurcation, on simule l'écoulement du sang sur une série de maillages 3D homogènes de la carotide. Les résultats obtenus permettent de retrouver l'écoulement observé lors d'études expérimentales effectuées sur un modèle en silicone. Certaines zones de la carotide semblent être plus propices à la formation de plaques : elles présentent un faible taux de cisaillement pariétal et correspondent à une zone de recirculation du sang. On constate qu'en modifiant la répartition de débit entre les artères interne et externe, ces paramètres changent de manière significative pouvant ainsi entraîner la formation de plaques dans de nouvelles zones plus étendues, par exemple aux environs de la paroi extérieure du début de l'artère interne.

Enfin, on applique la procédure de subdivision adaptative au cas de la bifurcation de la carotide, en partant d'un maillage grossier de celle-ci. Les méthodes de raffinement ne permettent cependant pas d'obtenir un maillage optimal pour la carotide, car la subdivision d'un tétraèdre en huit entraîne une forte augmentation du nombre de nœuds. En conclusion, les méthodes de raffinement local sont efficaces lorsque les gradients de vitesse varient suffisamment sur le domaine, ce qui n'est pas le cas dans la bifurcation de la carotide.

## ABSTRACT

The subject of this master thesis is the numerical simulation of steady incompressible viscous flow in the human carotid. This artery and more specifically its bifurcation is a well known site of chronic atheromatous plaque formation. These plaques may either grow slowly leading to stenosis or may suddenly rupture causing instantaneous thrombus formation. In the carotid artery, this last event may yield permanent brain damage or death. Steady flow in the carotid artery occurs when the human heart, suffering from chronic heart failure, undergoes implantation of a continuous flow ventricular assist device. Abnormal wall shear stress, pressure and low washout regions may occur, which in turn could trigger plaque formation and growth.

A P1-P1 stabilized SUPG/PSPG/CONT finite element method was used to approximate the incompressible Navier-Stokes equations. Blood flows were simulated at Reynolds 320 for different but plausible outflow conditions corresponding to normal and abnormal flow separation at the carotid bifurcation. A sequence of nine grids was used to ascertain grid independence with a Zienkiewicz-Zhu a posteriori error estimator. These simulations agreed with experimental measurements obtained from fluid flow within a silicon model of the carotid. A time-resolved stereoscopic PIV test rig generated these experimental flow measurements.

The Zienkiewicz-Zhu (ZZ) a posteriori error estimator was tested on 2D and 3D simple geometries with manufactured solutions. A global mesh refinement was used to generate a sequence of imbedded elements to yield a constant ratio of 2 between the old mesh and the new one. Our numerical experiment showed that the convergence rate obtained with the ZZ estimator agreed very well with the theoretical values for the velocity error estimates. These numerical experiments also showed the effect of geometrical

singularities on the convergence rate for polygonal domains. This detrimental effect is local and reduces the efficiency of the estimator to near wall elements.

To reduce the number of grid points, an adaptive subdivision process was implemented and tested. Coupled with the ZZ error estimator it selects the elements to be subdivided thus, in theory, reducing the number of points required to obtain grid independent solution. In 2D this technique was used with success on both manufactured and numerical solutions. However in 3D, this process was successful only for the manufactured solution and unsatisfactory when applied to the carotid flow problem.

## TABLES DES MATIÈRES

<b>REMERCIEMENTS .....</b>	<b>IV</b>
<b>RÉSUMÉ.....</b>	<b>V</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>VII</b>
<b>TABLES DES MATIÈRES.....</b>	<b>IX</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX.....</b>	<b>XII</b>
<b>LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS .....</b>	<b>XVII</b>
<b>LISTE DES ANNEXES .....</b>	<b>XXI</b>
<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE 1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LA SIMULATION DE L'ÉCOULEMENT DU SANG DANS LA BIFURCATION DE LA CAROTIDE ....</b>	<b>3</b>
1.1 <b>HISTORIQUE .....</b>	<b>3</b>
1.2 <b>CHOIX DE MODÉLISATION .....</b>	<b>5</b>
1.2.1 <b>Viscosité.....</b>	<b>5</b>
1.2.2 <b>Conditions limites .....</b>	<b>11</b>
1.2.3 <b>Ratio de débits.....</b>	<b>14</b>
1.3 <b>CHOIX NUMÉRIQUES.....</b>	<b>15</b>
1.3.1 <b>Méthode de résolution.....</b>	<b>15</b>
1.3.2 <b>Discrétisation spatiale .....</b>	<b>15</b>
1.3.3 <b>Discrétisation temporelle .....</b>	<b>16</b>
1.4 <b>VALIDATION DES RÉSULTATS .....</b>	<b>17</b>
1.5 <b>CHOIX POUR CETTE ÉTUDE .....</b>	<b>17</b>
<b>CHAPITRE 2 ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES ET STABILISATION .....</b>	<b>20</b>
2.1 <b>ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES .....</b>	<b>20</b>

2.1.1	Formulation générale .....	20
2.1.2	Forme faible .....	22
2.2	CHOIX DES ÉLÉMENTS .....	24
2.2.1	Polynômes d'interpolation de Lagrange et éléments de référence.....	24
2.2.2	Élément MINI en 2D.....	25
2.2.3	Élément Taylor-Hood en 2D.....	26
2.2.4	Élément P1-P1 en 2D.....	27
2.2.5	Élément P1-P1 en 3D.....	28
2.3	STABILISATION DES ÉQUATIONS.....	29
2.3.1	Méthodes de stabilisation.....	29
2.3.2	Définition des fonctions de stabilisation.....	32
2.3.3	Définition de la longueur h .....	34
2.4	OUTILS NUMÉRIQUES .....	37
<b>CHAPITRE 3 ESTIMATION D'ERREUR A POSTERIORI .....</b>		<b>38</b>
3.1	ESTIMATION DE L'ERREUR SUR LA SOLUTION NUMÉRIQUE.....	38
3.1.1	Utilisation d'une solution approchée .....	38
3.1.2	Calcul des coefficients inconnus.....	40
3.1.3	Reconstruction de la solution enrichie .....	45
3.1.4	Taux de convergence de l'estimation d'erreur.....	47
3.1.5	Erreur cible.....	51
3.2	ÉTUDE DU TAUX DE CONVERGENCE PAR LA MÉTHODE INTÉGRALE.....	53
3.2.1	Solutions manufacturées 2D .....	53
3.2.2	Solutions non manufacturées 2D .....	64
3.2.3	Solution manufacturée 3D.....	72
<b>CHAPITRE 4 SUBDIVISION ADAPTATIVE DE MAILLAGE .....</b>		<b>76</b>
4.1	RAFFINEMENT DE MAILLAGE.....	76
4.1.1	Méthode de raffinement de maillage.....	77
4.1.2	Raffinement global.....	79

4.1.3	Principe de la subdivision adaptative.....	84
4.1.4	Raffinement local.....	85
4.2	TEST DU RAFFINEMENT LOCAL 2D.....	95
4.2.1	Présentation du premier problème.....	95
4.2.2	Comparaison du raffinement local de EF5 et de Comsol.....	97
4.2.3	Série de raffinements locaux avec EF5.....	100
4.2.4	Raffinement local sur une géométrie 2D plus complexe.....	103
4.3	TEST DU RAFFINEMENT LOCAL 3D.....	113
4.3.1	Présentation du problème.....	113
4.3.2	Raffinement local par Réduction d'Erreur.....	114
4.3.3	Série de maillages raffinés.....	115
<b>CHAPITRE 5 SIMULATION DE L'ÉCOULEMENT DU SANG DANS LA</b>		
<b>CAROTIDE.....</b>		<b>117</b>
5.1	ASSISTANCE VENTRICULAIRE.....	117
5.2	GÉOMÉTRIE DE LA BIFURCATION DE LA CAROTIDE.....	119
5.3	RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX.....	120
5.3.1	Dispositif expérimental.....	120
5.3.2	Mesures PIV.....	121
5.3.3	Résultats.....	123
5.4	SIMULATION NUMÉRIQUE.....	124
5.4.1	Choix de modélisation.....	124
5.4.2	Première série de calculs.....	125
5.4.3	Deuxième série de calculs.....	139
<b>CONCLUSION.....</b>		<b>144</b>
<b>RECOMMANDATIONS.....</b>		<b>149</b>
<b>RÉFÉRENCES.....</b>		<b>151</b>
<b>ANNEXES.....</b>		<b>158</b>

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1	Ratios de débit rencontrés dans la littérature .....	15
Tableau 2.1	Polynômes d'interpolation de Lagrange pour l'élément MINI.....	25
Tableau 2.2	Polynômes d'interpolation de Lagrange pour l'élément Taylor-Hood....	26
Tableau 2.3	Polynômes d'interpolation de Lagrange pour l'élément P1-P1 en 2D ....	27
Tableau 2.4	Polynômes d'interpolation de Lagrange pour l'élément P1-P1 en 3D ....	28
Tableau 3.1	Taux de convergence théoriques pour les différents types d'élément .....	49
Tableau 3.2	Taux de convergence de l'estimation d'erreur (Blasius) .....	57
Tableau 3.3	Taux de convergence de l'estimation d'erreur (Smith-Hutton) .....	60
Tableau 3.4	Taux de convergence de l'estimation d'erreur (Smith-Hutton), élément P1-P1 stabilisé.....	62
Tableau 3.5	Taux de convergence de l'estimation d'erreur pour le problème de Smith- Hutton appliqué au canal avec des trous carrés .....	63
Tableau 3.6	Taux de convergence de l'estimation d'erreur pour le problème de Smith- Hutton appliqué au canal avec des trous rond.....	64
Tableau 3.7	Taux de convergence de l'estimation d'erreur pour l'écoulement dans un canal avec trous carrés .....	67
Tableau 3.8	Taux de convergence de l'estimation d'erreur pour l'écoulement dans un canal avec trous ronds .....	67
Tableau 3.9	Taux de convergence de l'estimation d'erreur pour l'écoulement dans un canal avec trous carrés ou ronds pour l'élément P1-P1 stabilisé .....	68
Tableau 3.10	Taux de convergence des trois parties pour le canal avec trous carrés ....	70
Tableau 3.11	Taux de convergence des trois parties pour le canal avec trous ronds.....	70
Tableau 3.12	Tableau récapitulatif des taux de convergence sur les deux canaux.....	71
Tableau 3.13	Taux de convergence de l'estimation d'erreur (Smith-Hutton 3D) .....	75
Tableau 5.1	Valeurs caractéristiques de référence et expérimentales.....	121
Tableau 5.2	Taille des problèmes pour les neuf maillages de la première série.....	126

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Modèle de bifurcation de la carotide.....	5
Figure 1.2	Évolution de la contrainte de cisaillement avec le taux de cisaillement....	7
Figure 2.1	Triangle de référence en 2D et tétraèdre de référence en 3D.....	24
Figure 2.2	Nœuds en vitesse et en pression associés à l'élément MINI.....	25
Figure 2.3	Nœuds en vitesse et en pression associés à l'élément Taylor-Hood.....	26
Figure 2.4	Nœuds en vitesse et en pression associés à l'élément P1-P1 2D .....	27
Figure 2.5	Nœuds en vitesse et en pression associés à l'élément P1-P1 en 3D .....	28
Figure 2.6	Représentation de $\tau'$ en fonction du nombre de Reynolds.....	33
Figure 2.7	Variation de $h_{UGN}$ avec l'orientation du vecteur de vitesse pour deux triangles différents.....	36
Figure 3.1	Cellule associée à un nœud, pour un élément MINI ou Taylor-Hood .....	39
Figure 3.2	Définition d'une boîte entourant la cellule.....	41
Figure 3.3	Sélection des points d'interpolation, pour des éléments de type MINI ou Taylor-Hood.....	46
Figure 3.4	Exemple de répartition des interpolations (toutes les cellules ne sont pas traitées sur le dessin) .....	47
Figure 3.5	Subdivision d'un élément 2D en quatre éléments.....	50
Figure 3.6	Subdivision d'un élément 3D en huit éléments .....	50
Figure 3.7	Exemple des deux premiers maillages du domaine carré .....	54
Figure 3.8	Profil de $u$ obtenu pour le problème de Blasius .....	56
Figure 3.9	Estimation d'erreur (problème de Blasius), élément MINI .....	56
Figure 3.10	Estimation d'erreur (problème de Blasius), élément Taylor-Hood.....	57
Figure 3.11	Vecteurs vitesses pour une solution au problème de Smith-Hutton .....	59
Figure 3.12	Estimation d'erreur (problème de Smith-Hutton), élément MINI .....	59
Figure 3.13	Estimation d'erreur (problème de Smith-Hutton), élément Taylor-Hood.....	60
Figure 3.14	Estimation d'erreur (problème de Smith-Hutton), élément P1-P1 stabilisé .....	61

Figure 3.15	Maillage initial du canal avec des trous carrés.....	63
Figure 3.16	Maillage initial du canal avec des trous ronds .....	63
Figure 3.17	Profil de la vitesse axiale $u$ dans le canal avec trous carrés .....	65
Figure 3.18	Profil de la vitesse axiale $u$ dans le canal avec trous ronds.....	66
Figure 3.19	Profil de la pression $p$ dans le canal avec trous carrés .....	66
Figure 3.20	Séparation du domaine du canal avec trous carrés en trois sous-domaines .....	68
Figure 3.21	Erreurs estimées dans le canal avec trous carrés, élément Taylor-Hood .	69
Figure 3.22	Erreurs estimées dans le canal avec trous ronds, élément Taylor-Hood..	69
Figure 3.23	Modification de la géométrie lors du raffinement du maillage par Cmsol .....	72
Figure 3.24	Maillage initial du cube.....	73
Figure 3.25	Vecteurs vitesses pour une solution au problème de Smith-Hutton 3D ..	74
Figure 3.26	Estimation d'erreur pour le problème de Smith-Hutton 3D .....	75
Figure 4.1	Numérotation des éléments et des éléments du bord en 2D.....	78
Figure 4.2	Numérotation des éléments en 3D .....	79
Figure 4.3	Principe de subdivision d'un élément en 2D.....	79
Figure 4.4	Tétraèdre subdivisé en huit tétraèdres fils.....	80
Figure 4.5	Création d'une connectivité inverse, Sommets vers Éléments .....	81
Figure 4.6	Principe du processus de subdivision adaptative .....	84
Figure 4.7	Propagation de la coupe d'un élément 2D à ses voisins .....	86
Figure 4.8	Coupe 1 d'un élément 2D .....	88
Figure 4.9	Coupe 2 d'un élément 2D .....	88
Figure 4.10	Coupe 3 d'un élément 2D : deux possibilités de coupe .....	88
Figure 4.11	Six arêtes coupées : coupe 1 de l'élément 3D.....	91
Figure 4.12	Trois arêtes coupées sur une même face : coupe 2 de l'élément 3D.....	91
Figure 4.13	Deux arêtes coupées sur une même face : coupe 2 de l'élément 3D .....	92
Figure 4.14	Une seule arête coupée : coupe 3 de l'élément 3D .....	92
Figure 4.15	Problème de Smith-Hutton à l'ordre 9 : norme de la vitesse .....	96

Figure 4.16	Maillage initial à 100 éléments du carré .....	97
Figure 4.17	Comparaison du maillage EF5 (gauche) avec le maillage Comsol obtenu par la méthode 1 (droite).....	98
Figure 4.18	Comparaison du maillage EF5 (gauche) avec le maillage Comsol obtenu par la méthode 3 (droite).....	99
Figure 4.19	Cinq étapes de raffinement global (Smith-Hutton à l'ordre 9) .....	101
Figure 4.20	Sept étapes de raffinement local (Smith-Hutton à l'ordre 9).....	101
Figure 4.21	Comparaison des erreurs obtenues (Smith-Hutton à l'ordre 9) .....	102
Figure 4.22	Géométrie de la carotide 2D, maillage initial et conditions limites.....	104
Figure 4.23	Estimation d'erreur sur la carotide 2D (raffinée par Réduction d'Erreur) .....	105
Figure 4.24	Comparaison de l'erreur obtenue sur le maillage raffiné avec l'erreur cible (par Réduction d'Erreur) .....	108
Figure 4.25	Étude de la propagation de la subdivision des éléments.....	109
Figure 4.26	Séquence de maillages par raffinement local de la carotide 2D (Réduction d'Erreur, paramètre=100%) .....	112
Figure 4.27	Erreurs estimées pour le problème de Smith-Hutton 3D à l'ordre 10....	114
Figure 4.28	Séquence de maillages par raffinement local du cube pour le problème de Smith-Hutton 3D à l'ordre 10 (Réduction d'Erreur, paramètre=70%)...	116
Figure 5.1	Exemple de dispositif d'assistance ventriculaire .....	118
Figure 5.2	Modèle de bifurcation de la carotide utilisé pour les mesures expérimentales et les simulations numériques .....	119
Figure 5.3	Modèle de carotide en silicone.....	120
Figure 5.4	Comparaison des fenêtres d'acquisition aux deux instants.....	122
Figure 5.5	Principe de fonctionnement des mesures PIV.....	123
Figure 5.6	Géométrie de la bifurcation de la carotide et conditions limites.....	125
Figure 5.7	Visualisation de la densité des maillages de la carotide .....	127
Figure 5.8	Erreurs estimées sur la carotide pour un ratio normal de débit IC/EC=70/30 .....	128

Figure 5.9	Erreurs estimées sur la carotide pour un ratio anormal de débit IC/EC=30/70 .....	129
Figure 5.10	Comparaison des profils de vitesse de la simulation numérique sur le premier maillage, avec les résultats expérimentaux (ratio 50/50) .....	130
Figure 5.11	Comparaison des profils de vitesse de la simulation numérique sur le huitième maillage, avec les résultats expérimentaux (ratio 50/50).....	130
Figure 5.12	Comparaison des profils de vitesse obtenus sur le huitième maillage pour différentes valeurs du ratio de débit.....	132
Figure 5.13	Comparaison des taux de cisaillement à la paroi (WSS) adimensionnés, obtenus sur le huitième maillage pour différentes valeurs du ratio de débit .....	133
Figure 5.14	Identification des zones de recirculation (isosurfaces $w < -0,003$ ) sur le huitième maillage .....	134
Figure 5.15	Zones de recirculation artificiellement créées à l'entrée de la carotide commune.....	135
Figure 5.16	Représentation des lignes de courant au niveau de la bifurcation pour un ratio IC/EC = 70/30.....	136
Figure 5.17	Représentation des lignes de courant au niveau de la bifurcation pour un ratio IC/EC = 50/50.....	136
Figure 5.18	Représentation des lignes de courant au niveau de la bifurcation pour un ratio IC/EC = 30/70.....	137
Figure 5.19	Distribution de pression sur les parois de la carotide.....	138
Figure 5.20	Erreurs estimées sur la carotide 3D pour les différentes séries de maillage .....	141
Figure 5.21	Raffinement local de la carotide au niveau de la section d'entrée .....	142
Figure 5.22	Raffinement local de la carotide au niveau de la bifurcation.....	143
Figure A.1	Exemple d'arbres Octree réalisés sur une série de maillages .....	162

**LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS**

A	Aire de la section d'entrée du modèle de la carotide
$a_x$	Vecteur des coefficients à déterminer pour l'estimation d'erreur
CCA	Artère Commune de la Carotide (Commun Carotid Artery)
D	Tenseur du taux de déformation
e	Erreur de la solution sur tout le domaine
EAC	Erreur absolue cible
$e_c$	Erreur cible sur tout le domaine
$e_{c,k}$	Erreur cible élémentaire
$e_{c,r}$	Erreur cible relative
ECA (ou EC)	Artère Externe de la Carotide (Extern Carotid Artery)
EF5	Code maison de calcul par éléments finis
$e_k$	Erreur de la solution sur l'élément k
ERC	Erreur relative cible
f	Forces volumiques (termes sources)
F	Fonctionnelle à minimiser
$F_{uBl}, F_{vBl}$	Termes sources pour le problème de Blasius (2D)
$F_{uSH}, F_{vSH}$	Termes sources pour le problème de Smith-Hutton (2D)
$F_{uSH}, F_{vSH}, F_{wSH}$	Termes sources pour le problème de Smith-Hutton (3D)

$h$	Taille caractéristique d'un élément
$h_{\text{UGN}}$	Taille caractéristique dépendante de la direction de l'écoulement
$I$	Tenseur métrique
ICA (ou IC)	Artère Interne de la Carotide (Intern Carotid Artery)
IRM	Imagerie par Résonance Magnétique
$L$	Longueur de référence
LDA	Anémométrie Laser à effet Doppler (Laser Doppler Anemometry)
$N$	Nombre d'éléments du maillage
$N_p$	Nombre de fonctions d'interpolation en pression
$N_u$	Nombre de fonctions d'interpolation en vitesse
$p$	Pression du fluide
$\tilde{p}$	Fonction test de la pression
$P$	Vecteur du triangle de Pascal
$\rho$	Taux de convergence de l'estimation d'erreur
PIV	Vélocimétrie par Images de Particules (Particle Image Velocimetry)
PSPG	Pressure-Stabilizing Petrov-Galerkin
$\rho_{\text{th}}$	Taux de convergence théorique
$Q$	Débit d'entrée de la carotide
$Re$	Nombre de Reynolds
RE	Réduction d'Erreur
SUPG	Streamwise-Upwind Petrov-Galerkin

$t$	Temps
$u$	Vecteur vitesse de l'écoulement
$\tilde{u}$	Fonction test de la vitesse
$u^*$	Solution approchée
$u_{Bl}$	Composante horizontale de la solution de Blasius
$u_h$	Solution numérique
$u_{SH}, v_{SH}, p_{SH}$	Solutions manufacturées du problème de Smith-Hutton (2D)
$u_{SH}, v_{SH}, w_{SH}, p_{SH}$	Solutions manufacturées du problème de Smith-Hutton (3D)
$V$	Vitesse de référence
WSS	Taux de cisaillement à la paroi (Wall Shear Stress)
$x_{loc}, y_{loc}, z_{loc}$	Coordonnées locales
$x_{moy}, y_{moy}, z_{moy}$	Coordonnées moyennes
$x_P, y_P, z_P$	Coordonnées d'un point P
$\dot{\gamma}$	Taux de cisaillement
$\Gamma_i$	Frontière du domaine avec conditions de Neumann
$\Delta t$	Intervalle de temps
$\lambda_k$	Ratio de l'erreur de l'élément k sur l'erreur cible élémentaire
$\mu$	Viscosité dynamique
$\mu_\infty$	Viscosité dynamique du sang humain à 37°C
$\nu$	Viscosité cinématique

$\rho$	Masse volumique (ou densité)
$\sigma$	Tenseur des contraintes
$\tau$	Taux de stabilisation
$\tau_{\text{SUPG}}$	Taux de stabilisation SUPG
$\tau_{\text{PSPG}}$	Taux de stabilisation PSPG
$\tau_{\text{CONT}}$	Taux de stabilisation de la contrainte d'incompressibilité
$\Omega$	Domaine d'étude
$\nabla$	Opérateur gradient
$\  \cdot \ $	Norme
$\  \cdot \ _{0,\Omega}$	Norme L2
$\  \cdot \ _{1,\Omega}$	Norme Énergie

**LISTE DES ANNEXES**

ANNEXE 1 INTERPOLATION DUNE SOLUTION SUR UN MAILLAGE	
INDÉPENDANT .....	158
A.1    Comment savoir si un point P est à l'intérieur d'un élément E?.....	159
A.2    Construction de l'arbre Octree.....	160
A.3    Interpolation en un point P.....	163
A.4    Cas particuliers et remarques.....	165

## INTRODUCTION

La bifurcation de la carotide est depuis quelques années le sujet de nombreuses études. En effet, des plaques athéromateuses peuvent s'y développer, provoquant parfois une obstruction complète de l'artère amenant le sang du cœur au cerveau. La géométrie de l'artère, la périodicité et l'intensité de l'écoulement sont des facteurs qui influencent la distribution de l'intensité du cisaillement pariétal, jouant un rôle dans la formation des plaques. Suite à une thérapie, toute modification des paramètres de l'écoulement peut avoir des conséquences bénéfiques ou négatives. En particulier, si une assistance ventriculaire à débit continu est implantée, l'amplitude de l'écoulement est considérablement réduite, ce qui modifie la distribution du cisaillement pariétal.

Le but de cette étude est de mettre en place une procédure de calcul pour la prédiction de l'écoulement du sang dans l'artère carotide. Pour atteindre ce but, les objectifs suivants ont été fixés :

- Mettre en place et évaluer un estimateur d'erreur a posteriori
- Développer et tester une procédure de subdivision adaptative de maillage
- Effectuer des simulations 3D de l'écoulement dans la carotide
- Comparer les résultats numériques à des mesures expérimentales
- Analyser les résultats numériques pour différentes répartitions de débit

Le chapitre 1 présente une revue bibliographique des études de l'écoulement dans la bifurcation de la carotide. La simulation numérique nécessite de faire des choix de modélisation : conditions limites, type de fluide..., et des choix numériques : discrétisation des équations, type d'éléments... Les différents choix possibles sont présentés dans ce chapitre, ainsi que les choix finalement retenus pour cette étude.

Le chapitre 2 rappelle la formulation faible des équations de Navier-Stokes, et leur discrétisation par la méthode des éléments finis. Il liste également les divers éléments qui seront utilisés au cours de l'étude et explique les méthodes de stabilisation des équations employées.

Le chapitre 3 décrit une méthode d'estimation d'erreur a posteriori et définit le taux de convergence de cet estimateur. Quelques tests de l'estimateur d'erreur sont présentés pour des géométries 2D et 3D. Enfin, ce chapitre explique le principe de subdivision adaptative du maillage à partir de l'estimation d'erreur et présente différentes méthodes pour déterminer l'erreur cible.

Le chapitre 4 décrit les algorithmes de subdivision du maillage pour les cas 2D et 3D. Ces algorithmes sont testés sur des géométries 2D et 3D, pour valider leur efficacité avant de les appliquer au cas de la carotide.

Le chapitre 5 présente les études réalisées sur la bifurcation de la carotide. On y décrit d'abord la procédure expérimentale, puis on présente les résultats des simulations numériques. Ces résultats sont validés par comparaison avec les résultats expérimentaux, et on peut à nouveau évaluer l'efficacité de l'estimateur d'erreur. Enfin on applique les méthodes de subdivision adaptative sur le cas de la simulation de l'écoulement dans la bifurcation de la carotide.

# CHAPITRE 1

## REVUE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LA SIMULATION DE L'ÉCOULEMENT DU SANG DANS LA BIFURCATION DE LA CAROTIDE

### 1.1 Historique

L'artère carotide est située dans le cou. Elle a pour rôle d'acheminer le sang du cœur vers le cerveau et le visage. On observe la formation de plaques athéromateuses au niveau de la bifurcation de la carotide commune, de la carotide interne et de la carotide externe, la formation de plaques athéromateuses. À long terme, ces plaques peuvent réduire le débit sanguin au cerveau ou se déloger et provoquer un accident vasculaire cérébral.

L'écoulement dans la carotide a fait l'objet de nombreuses études numériques et expérimentales durant ces dernières décennies, pour confirmer l'influence du cisaillement à la paroi (Wall Shear Stress, WSS) sur la formation de ces plaques athéromateuses dans la bifurcation de la carotide. Cette relation avait en effet déjà été constatée sur d'autres géométries.

Les premières études de la bifurcation de la carotide ont été réalisées par Bharadvaj et al [1], [2] en 1982 et Ku et Giddens [3] en 1987. D'après l'observation des chirurgiens, les plaques athéromateuses ont tendance à se former au niveau de l'artère interne de la carotide, non loin de la bifurcation. Bharadvaj, Ku et Giddens ont donc étudié l'écoulement du sang dans la carotide pour montrer que l'apparition de ces plaques pouvait être liée au taux de cisaillement sur la paroi. Pour cela, ils ont construit un

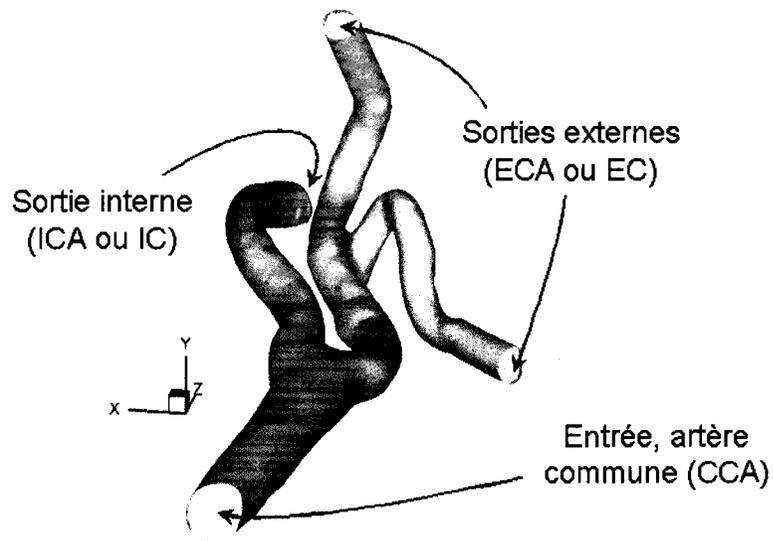
modèle en verre d'une carotide moyenne, dimensionnée à partir de mesures sur des patients (par angiographie).

En visualisant l'écoulement dans la carotide, ils ont constaté la présence d'une zone de recirculation près de la paroi extérieure de l'artère interne. Un écoulement axial inversé leur est apparu comme un facteur possible d'apparition de plaques. Pour valider ces observations, ils ont procédé à des mesures de vitesse par Anémométrie Laser à effet Doppler (LDA) à différents endroits dans la carotide. Les taux de cisaillement à la paroi ont été calculés à partir des vitesses mesurées, sous l'hypothèse d'un profil de vitesse linéaire à proximité de la paroi.

Ils ont alors vérifié que la présence de plaque s'observait où le WSS (cisaillement à la paroi) est bas. De plus, ils ont émis l'hypothèse que la formation de plaques pouvait également être favorisée par les oscillations de ce WSS au cours du cycle cardiaque, ou encore par une forte pression sur la paroi.

Par la suite, des simulations numériques ont confirmé ces mesures expérimentales, mentionnons entre autres les résultats importants obtenus par Perktold [4]. Généralement, la géométrie étudiée comprend l'artère commune (CCA), une bifurcation et deux artères de sortie : l'artère interne (ICA) et l'artère externe (ECA). L'artère interne alimente le cerveau en sang, tandis que l'artère externe alimente le visage.

Dans cette étude, la géométrie est plus complexe, avec une seconde bifurcation au niveau de la sortie externe.



**Figure 1.1** Modèle de bifurcation de la carotide

Pour que le modèle numérique soit représentatif de la réalité, certains choix de modélisation s'imposent. Les premiers choix concernent :

- la modélisation du fluide : viscosité, rhéologie
- la modélisation de l'écoulement : conditions limites (entrée, sorties)

Enfin, il faut également choisir les méthodes numériques qui seront utilisées pour les simulations.

## 1.2 Choix de modélisation

### 1.2.1 Viscosité

#### 1.2.1.1 *Fluide Newtonien ou non-Newtonien?*

Le comportement visqueux d'un fluide peut être représenté par l'évolution des contraintes de cisaillement en fonction du taux de cisaillement :

$$\sigma = f(\dot{\gamma}) \quad (1.1)$$

Avec :  $\sigma$  : la contrainte de cisaillement

$\dot{\gamma}$  : le taux de cisaillement

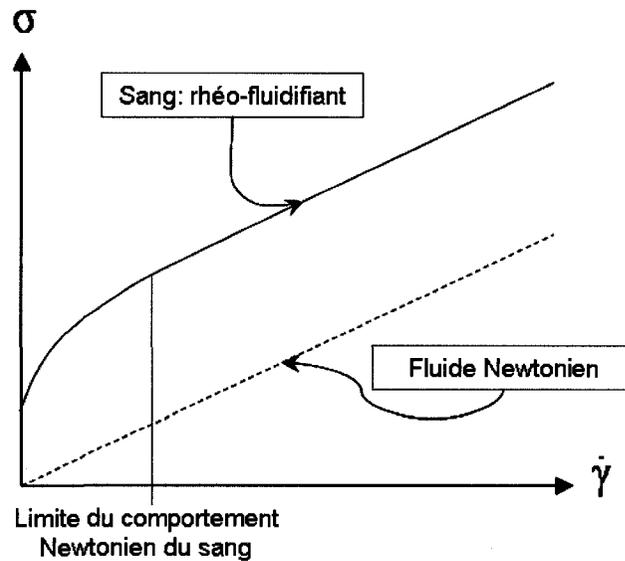
Le taux de cisaillement est défini comme le second invariant du tenseur de taux de déformation  $D$  :

$$D = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \quad (1.2)$$

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2Tr(D^2)} \quad (1.3)$$

Le rapport entre la contrainte et le taux de cisaillement est appelée viscosité dynamique  $\mu$ . Un fluide est dit Newtonien lorsque la contrainte de cisaillement est proportionnelle au taux de cisaillement. La viscosité dynamique d'un fluide Newtonien est donc constante.

Le sang est une suspension de globules rouges et blancs dans une solution aqueuse, le plasma [5]. De part sa constitution, le sang est un fluide non-Newtonien, il a un comportement rhéofluidifiant (« shear thinning ») : sa viscosité dynamique diminue quand le taux de cisaillement augmente. Ce comportement peut être visualisé en traçant l'évolution de  $\sigma$  avec  $\dot{\gamma}$ .



**Figure 1.2** Évolution de la contrainte de cisaillement avec le taux de cisaillement

Le modèle newtonien est acceptable pour des écoulements à haut taux de cisaillement, supérieur à  $100\text{s}^{-1}$ , par exemple pour l'écoulement du sang dans de grosses artères. Mais ce modèle n'est pas valide si le taux de cisaillement est de l'ordre de  $0.1\text{ s}^{-1}$ , comme c'est le cas dans les petites artères [6]. Il faut alors utiliser un modèle non-Newtonien, pour lequel la viscosité dynamique dépend du taux de cisaillement, permettant ainsi de tenir compte du comportement rhéofluidifiant du sang.

Il est tout de même courant d'utiliser un modèle de fluide newtonien (viscosité constante) pour représenter l'écoulement du sang dans les artères [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13]. Dans ce cas, la viscosité du sang est prise égale à sa viscosité limite pour des hauts taux de cisaillement. En règle générale, la viscosité dynamique et la masse volumique du sang humain à  $37^\circ\text{C}$  valent:

$$\begin{aligned}\mu_\infty &= 0.0035 \text{ Pa.s} \\ \rho &= 1050 \text{ kg.m}^{-3}\end{aligned}\tag{1.4}$$

Certains auteurs préfèrent utiliser des modèles de fluides non-Newtoniens. Plusieurs modèles ont été développés, chacun proposant une meilleure approximation du comportement réel du sang pour une plage donnée du taux de cisaillement. Dans la suite, le taux de cisaillement est toujours défini par la formule (1.3).

### 1.2.1.2 *Modèle de Casson*

Un des premiers modèles non-Newtoniens développé est le modèle de Casson. Ce modèle correspond bien à un fluide rhéofluidifiant avec une viscosité seuil  $\mu_0$ , la viscosité dynamique s'exprime de la manière suivante :

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) \frac{1}{\left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^b\right]^a} \quad (1.5)$$

Ce modèle est utilisé entre autres par Perktold [4], pour reproduire le comportement non pas du sang, mais d'un fluide simulant le sang (avec un ratio viscosité/densité égal). Il a imposé les valeurs suivantes pour les différentes constantes du modèle :

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 0.1315 Pa.s \\ \mu_{\infty} &= 0.03 Pa.s \\ \lambda &= 0.5 \\ b &= 1.7 \\ a &= 0.3 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Cependant, ce modèle est valide uniquement pour un taux de cisaillement modéré, c'est-à-dire inférieur à  $10 \text{ s}^{-1}$  [6].

### 1.2.1.3 Modèle de Carreau-Yasuda

Le modèle de Carreau-Yasuda est très semblable au modèle de Casson :

$$\frac{\mu - \mu_{\infty}}{\mu_0 - \mu_{\infty}} = \left[ 1 + \left( \lambda \dot{\gamma} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \quad (1.7)$$

Il a été utilisé par Gijsen [14], qui compare les résultats de ses simulations numériques avec des expériences réalisées sur une solution KSCN-X, reproduisant le comportement du sang (avec un ratio viscosité/masse volumique égal). Il a donc ajusté les paramètres du modèle de Carreau-Yasuda pour retrouver les valeurs de viscosité mesurées sur cette solution pour différents taux de cisaillement. C'est pourquoi la viscosité limite à haut taux de cisaillement ne correspond pas directement à celle du sang :

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 0.022 \text{ Pa.s} \\ \mu_{\infty} &= 0.0022 \text{ Pa.s} \\ \lambda &= 0.110 \text{ s} \\ a &= 0.644 \\ n &= 0.392 \end{aligned} \quad (1.8)$$

### 1.2.1.4 Modèle loi de puissance

Pour compenser la faiblesse du modèle de Casson pour des hauts taux de cisaillement, le modèle loi de puissance exprime la viscosité comme une puissance du taux de cisaillement, voici un exemple de loi de puissance :

$$\begin{aligned} \mu &= K \mu_0 \left[ \max \left( \dot{\gamma}, \dot{\gamma}_0 \right) \right]^c \\ c &= n - 1 + a_1 \ln \left( \dot{\gamma} \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Stroud [15] a préféré ce modèle à celui de Casson. Pour reproduire les données expérimentales dont il dispose, il a choisi :

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 0.0035 Pa.s \\ n &= 0.8 \\ K &= 1 \\ a_1 &= 0\end{aligned}\tag{1.10}$$

Il considère que ce modèle est meilleur que le modèle de Casson dans les régions d'écoulement séparé. Il affirme que ce modèle permet de mieux capturer les effets secondaires du comportement non-Newtonien du sang pour un écoulement transitoire, qui se traduisent par exemple par une légère modification du WSS moyen. Cependant, Stroud ne donne pas plus d'informations sur ces effets secondaires, et fait référence à un article qui n'est pas plus explicite.

#### 1.2.1.5 Modèle de Herschel-Bulkley

Tu et Deville [6] proposent d'utiliser le modèle de Herschel-Bulkley qui utilise une définition plus complexe de la viscosité dynamique en fonction du taux de cisaillement. Selon eux ce modèle est plus efficace que le modèle de Casson pour des faibles valeurs du taux de cisaillement.

$$\eta(\dot{\gamma}) = \begin{cases} \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} + K \left( \dot{\gamma} \right)^{n-1} & \text{si } \dot{\gamma} \geq \dot{\gamma}_c \\ \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}_c} \left( 2 - \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_c} \right) + K \left[ (2-n) + (n-1) \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_c} \right] \left( \dot{\gamma}_c \right)^{n-1} & \text{si } \dot{\gamma} < \dot{\gamma}_c \end{cases}\tag{1.11}$$

De plus en choisissant les bonnes valeurs pour les paramètres, ce modèle permet de représenter au choix un fluide newtonien, un fluide de Bingham, ou encore le modèle de loi de puissance. Mais Tu et Deville n'utilisent pas cette fonctionnalité dans leur article.

## 1.2.2 Conditions limites

### 1.2.2.1 *Vitesse d'entrée imposée*

La plupart des auteurs imposent un profil de vitesse particulier en entrée de l'artère commune de la carotide. Si cette entrée est cylindrique, alors il est possible d'appliquer un profil parabolique ou de Poiseuille [7], [11], [14]. Ainsi, l'écoulement est déjà pleinement développé. D'autres chercheurs préfèrent imposer une vitesse uniforme dans la direction normale à la section d'entrée, et annuler les deux autres composantes de vitesse [13], [15]. Ils s'assurent par la suite que l'écoulement devient pleinement développé avant la bifurcation. Mais les études se font très souvent sur des géométries plus complexes, le plus souvent issues de mesures sur un ou plusieurs patients. La section d'entrée n'est alors plus circulaire et le profil d'entrée imposé est généralement issu de mesures in vivo [4], [10].

Une fois le profil de vitesse imposé en entrée, il faut appliquer les conditions aux limites en sortie pour les deux artères interne et externe de la carotide. Une première méthode consiste à imposer une condition limite de type traction nulle sur les deux artères de sortie [7], [14], [15]. Dans ce cas, le niveau de pression est fixé en sortie. Il est également possible d'imposer directement la pression en sortie, la pression aux nœuds du plan de sortie sont alors définies égales aux valeurs de pression du plan intérieur adjacent. C'est la solution choisie par Younis [13], pour son modèle résolu par la méthode des volumes finis. Cependant cette méthode revient à imposer un gradient de pression nul à la sortie, et on peut se demander si l'écoulement obtenu est bien physique car cela revient à arrêter l'écoulement au plan de sortie dans les artères interne et externe. Une autre solution consiste à imposer un profil de vitesse pleinement développé en sortie de l'artère externe, et une condition de traction nulle pour l'artère interne [10], [11]. De cette manière le ratio de débit entre les deux artères de sortie est facilement contrôlé (voir section 1.2.3).

### 1.2.2.2 *Pression d'entrée imposée*

Plutôt que d'imposer un profil de vitesse en entrée, on peut choisir d'imposer un profil de pression [9]. En sortie, on impose alors des profils de vitesse pour les deux artères interne et externe.

### 1.2.2.3 *Profils dépendant du temps*

Dans le cas d'un calcul stationnaire, le profil de vitesse ou de pression imposé est unique. Mais dans le cas de simulations transitoires, il faut imposer l'évolution temporelle du profil.

Les profils imposés en entrée doivent alors dépendre du temps. La plupart des auteurs récupèrent des profils issus de mesures *in vivo* (Doppler) afin de reproduire des conditions physiologiques [4], [7], [8], [9], [11], [13], [15].

Le nombre de Womersley est un nombre adimensionnel permettant de décrire l'importance des forces de viscosité. Il est très utile dans le cas de simulations transitoires. Il est défini par :

$$\alpha = L \sqrt{\frac{\rho \omega}{\mu}} \quad (1.12)$$

Avec : L : une longueur de référence (par exemple le rayon de l'artère)

$\rho$  : la densité du fluide

$\mu$  : la viscosité dynamique du fluide

$\omega$  : la pulsation

Ce nombre de Womersley permet de reconstruire, à partir d'une vitesse moyenne, un profil d'écoulement laminaire pulsé périodique pleinement développé dans une géométrie proche de celle d'un tube circulaire. Ce profil s'écrit sous la forme d'une

somme d'harmoniques faisant intervenir la fonction de Bessel et le nombre de Womersley. Dans le cas d'un tube circulaire de diamètre  $D$ , ces harmoniques valent [16] :

$$u_n(r, t) = Re \left\{ \frac{A_n iT}{\rho 2\pi n} \left( \frac{J_0 \left( i^{\frac{3}{2}} \alpha \frac{2r}{D} \right)}{J_0 \left( i^{\frac{3}{2}} \alpha \right)} - 1 \right) \exp \left( 2\pi \frac{int}{T} \right) \right\} \quad (1.13)$$

Avec : Re : la partie réelle

$A_n$  : Amplitude calculée à partir d'une vitesse moyenne  $\bar{u}(t)$

$J_0$  : Fonction de Bessel

$D$  : diamètre du tube ( $D=2L$ )

$T$  : période de l'écoulement ( $T=2\pi\omega$ )

Ce profil peut être utilisé sur une géométrie plus complexe comme celle de l'artère commune. Perktold impose un profil d'entrée physiologique calculé avec un nombre de Womersley de 4,8. Le nombre de Womersley du profil utilisé par Stroud vaut 5.

Moyle [17] a choisi d'étudier l'influence de l'utilisation de conditions limites simplifiées. À la place d'un profil d'entrée physiologique, il a donc imposé un profil de Womersley, autrement dit le profil d'un écoulement pleinement développé dans un tube droit, avec seulement le débit qui varie au cours du temps. Il a alors constaté que l'influence de cette simplification est négligeable sur le champ de WSS à la bifurcation. Il conclut que l'influence du choix du profil d'entrée est moins importante que la précision de la géométrie, et qu'il est donc plus judicieux de passer du temps à obtenir une géométrie précise, plutôt qu'à mesurer les trois composantes de vitesse en entrée.

### 1.2.3 Ratio de débits

L'un des principaux enjeux des simulations numériques est de connaître le ratio des débits dans chacune des artères de sortie. Une première approche possible consiste à calculer ce ratio lors de la simulation en n'imposant aucun profil de vitesse en sortie [13], [18].

Mais généralement le ratio est imposé pour la simulation, à partir de mesures expérimentales sur des patients. Il suffit par exemple d'imposer un profil de vitesse en entrée, et d'imposer en sortie de l'artère externe un profil dont le débit est une fraction du débit d'entrée [4], [7], [10], [11], [17], [19]. Le ratio est ainsi fixé. Il est aussi possible d'imposer des profils de vitesse dans les deux artères de sorties [9], [20].

De nombreux auteurs définissent un ratio de débit constant ICA:ECA entre les artères interne et externe [20], [21]. Une valeur classique qu'on retrouve dans différentes études est 56:44 [7], [11].

Mais des mesures expérimentales par IRM sur des patients ont montré que ce ratio varie au cours du cycle cardiaque [22]. Certains auteurs ont alors récupéré la variation de ce débit grâce à des mesures in vivo (Doppler ou IRM) pour faire varier le ratio au cours du cycle cardiaque sur leurs simulations numériques transitoires [9], [19]. La valeur moyenne du ratio ICA:ECA sur le cycle cardiaque vaut alors environ 75:25.

**Tableau 1.1** Ratios de débit rencontrés dans la littérature

Auteurs	Années	Constante / Moyenne	% de débit	
			Interne	Externe
Bharadvaj et al	1982	Moyenne	70	30
Ku and Giddens	1987	Moyenne	70	30
Moore et al	1998, 2003	Constante	56	44
Zhao et al	2000	Moyenne	75	25
Glor et al	2002	Constante	70	30
Augst et al	2003	Constante	48	52
Marshall et al	2004	Moyenne	70	26

### 1.3 Choix numériques

#### 1.3.1 Méthode de résolution

La discrétisation des équations de Navier-Stokes peut se faire grâce à la méthode des volumes finis [9], [13], ou bien par la méthode des éléments finis de Galerkin [4], [8], [14]. La matrice assemblée peut être préconditionnée par la décomposition incomplète LU [12], [14], si une méthode itérative de type Gradient Conjugué est utilisée. Les termes convectifs sont linéarisés par la méthode des itérations de Picard [4], [8], [12], ou la méthode de Newton-Raphson [14].

#### 1.3.2 Discrétisation spatiale

On retrouve une grande diversité de maillage et de types d'éléments dans les publications. Perktold et Botnar utilisent des éléments briques à huit nœuds [4], [8], avec des fonctions d'interpolation trilineaires pour la vitesse, et une pression constante par élément. Il est également possible d'utiliser des tétraèdres, aussi bien quadratiques à dix

nœuds [7], [10], [11], que de type P1-P1 avec bulle [12] ou sans bulle. Enfin, Gijzen préconise quant à lui l'utilisation de l'élément Crouzeix-Raviart [14], sans préciser lequel.

Le maillage doit être plus dense au niveau des parois ainsi qu'au niveau de la bifurcation [15]. Le nombre de nœuds utilisés pour le modèle de la carotide varie énormément d'une étude à l'autre. Il varie de 686 nœuds dans l'étude d'Urquiza [12] à 300 000 nœuds pour le modèle de Tambasco [11]. Ce dernier utilise un algorithme de raffinement adaptatif du maillage. Enfin, dans le cas d'une étude de l'interaction fluide-solide entre le sang et les parois de la carotide, le domaine d'étude se déforme avec les parois, le maillage peut alors être déplacé en utilisant les équations de Laplace [12].

### 1.3.3 Discretisation temporelle

Dans le cas de calculs transitoires, la simulation est réalisée sur des cycles correspondant au cycle cardiaque. La durée de ce cycle varie entre 0,74s [15] et 0,8s [12]. Pour simplifier, cette période peut aussi être normalisée [4]. Chaque cycle est divisé en un certain nombre d'incrément de temps, dont la durée peut être fixe [10], [11], ou bien peut varier durant le cycle [4], [15]. Par exemple, Stroud [15] utilise des incréments de temps plus courts au moment d'accélération ou de décélération rapides.

Tambasco et Steinman [10], [11] simulent tout d'abord deux cycles entiers avant de récupérer des résultats, pour s'affranchir de leur solution initiale correspondant à des vitesses nulles partout. Stroud choisit de simuler trois cycles cardiaques afin de vérifier que l'écoulement est parfaitement périodique.

#### 1.4 Validation des résultats

Parmi les auteurs cités précédemment, seul Younis [13] explique avoir quantifié les erreurs numériques associées au maillage. Pour cela, il a estimé la distribution de l'erreur pour un paramètre de l'écoulement (vitesse, effort sur la paroi), en exprimant la variation de ce paramètre dans une direction à l'aide d'un polynôme de degré trois. Les coefficients de ce polynôme sont déterminés en utilisant à la fois les valeurs du paramètre et de ses gradients.

Pour la plupart des études réalisées, les résultats numériques sont comparés à des résultats expérimentaux obtenus en parallèle grâce à des mesures MRI [9], [10], [14], ou à des résultats numériques obtenus auparavant par d'autres équipes [14]. Enfin, Perktold [4] compare ses résultats à des études numériques et expérimentales, réalisées par d'autres équipes.

#### 1.5 Choix pour cette étude

Le profil de vitesse imposé en entrée est extrait de mesures PIV sur un modèle en silicone d'une bifurcation de la carotide. Le débit d'entrée utilisé pour les mesures expérimentales et les simulations numériques correspond au débit moyen sur le cycle cardiaque. Aucun écoulement n'est imposé en sortie, mais une force de traction normale est imposée dans l'artère de sortie interne. Cette force permet de contrôler la valeur du ratio de débit entre les deux artères à la bifurcation.

Dans le cadre de cette étude, seuls des calculs stationnaires seront réalisés, il n'est donc pas possible de faire varier le ratio de débit. Mais dans le but de représenter différentes situations possibles, les simulations sont réalisées pour différents ratios de débit :

- ICA : ECA = 30 : 70
- ICA : ECA = 40 : 60

- ICA : ECA = 50 : 50
- ICA : ECA = 60 : 40
- ICA : ECA = 70 : 30

Pour cette étude, le sang sera représenté par un fluide Newtonien. En effet, la géométrie de la carotide peut se rapprocher d'une conduite cylindrique, et le taux de cisaillement au rayon  $r$  dans une conduite cylindrique de rayon  $R_0$  s'écrit :

$$\dot{\gamma} = \frac{4Q}{\pi R_0^4} r \quad (1.14)$$

Avec :  $Q$  : le débit

Le rayon moyen  $R_0$  de l'artère commune de la carotide est calculé comme le rayon d'un cercle de même aire que l'aire de la section d'entrée de la carotide. Le débit d'entrée et le rayon de l'artère commune valent :

$$Q = 4915,1 \text{ mm}^3 \cdot \text{s}^{-1} \quad (1.15)$$

$$R_0 \approx 2,158 \text{ mm} \quad (1.16)$$

Finalement, on peut estimer le taux de cisaillement à la paroi pour une telle artère :

$$\dot{\gamma} \approx 623 \text{ s}^{-1} \quad (1.17)$$

Les artères en aval de la bifurcation sont toutes de tailles similaires. Par exemple, dans l'artère interne, à la sortie du modèle, le rayon moyen vaut :

$$R_0 \approx 2,158 \text{ mm} \quad (1.18)$$

Les débits dans l'artère interne pour les deux cas extrêmes de répartition de débit (30:70 et 70:30) valent  $1474,5 \text{ mm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  et  $3440,6 \text{ mm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Le taux de cisaillement vaut alors :

$$\begin{cases} \dot{\gamma} \approx 408 \text{ s}^{-1} & \text{si ICA : ECA} = 30 : 70 \\ \dot{\gamma} \approx 953 \text{ s}^{-1} & \text{si ICA : ECA} = 70 : 30 \end{cases} \quad (1.19)$$

Ces taux de cisaillement sont supérieurs au taux critique de  $100\text{s}^{-1}$ , on reste donc dans la limite de validité du modèle de fluide Newtonien. Ce modèle sera donc suffisant pour représenter l'écoulement global dans la carotide. Seul le cisaillement au voisinage du point de stagnation de l'écoulement sur la bifurcation pourrait nécessiter l'utilisation d'un modèle non-Newtonien, mais cela fera l'objet d'une autre étude.

La résolution des équations de Navier-Stokes se fait par la méthode des éléments finis, grâce à EF5, un code maison développé à l'École Polytechnique de Montréal. Ces équations sont discrétisées par la méthode de Galerkin. Le maillage de la carotide est constitué de tétraèdres à quatre nœuds. L'erreur de la solution sera estimée grâce à un estimateur d'erreur a posteriori de type Zienkiewicz-Zhu. Un algorithme de raffinement local du maillage sera appliqué sur la carotide afin de raffiner le maillage dans les zones présentant les plus forts gradients de vitesse et donc les plus fortes erreurs.

## CHAPITRE 2

### ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES ET STABILISATION

#### 2.1 Équations de Navier-Stokes

##### 2.1.1 Formulation générale

L'étude de l'écoulement du sang dans la carotide se fait sous l'hypothèse d'un écoulement incompressible et laminaire. De plus, on a vu dans le chapitre précédent que dans le cadre de l'étude de l'écoulement dans la bifurcation de la carotide qui correspond à de larges artères, on peut représenter le comportement du sang par un modèle Newtonien. Les équations de Navier-Stokes se résument donc à l'équation de conservation de la quantité de mouvement et à l'équation de continuité (ou conservation de la masse) :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u \cdot \nabla)u = \nabla \cdot \sigma + f \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot u = 0$$

Avec :  $u$  : le champ de vitesse

$\rho$  : la densité du fluide

$\sigma$  : le tenseur des contraintes

$f$  : les forces volumiques s'appliquant sur le fluide (termes sources)

Le tenseur des contraintes s'écrit de la façon suivante :

$$\sigma = -pI + \mu(\nabla u + \nabla^T u) \quad (2.2)$$

Avec :  $p$  : la pression

$I$  : le tenseur métrique

$\mu$  : la viscosité dynamique du fluide

Dans le cas de simulations stationnaires, le terme dépendant du temps disparaît de l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

Il est nécessaire de définir les espaces suivants :

$$\begin{aligned} L_2(\Omega) &= \left\{ v \mid \int_{\Omega} v^2 d\Omega < \infty \right\} \\ H^1(\Omega) &= \left\{ v \in L_2(\Omega) \mid \nabla v \in L_2(\Omega) \right\} \\ H_0^1(\Omega) &= \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid v(\Gamma) = 0 \right\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Avec :  $\Gamma$  : une partie de la frontière du domaine  $\Omega$

Généralement pour les équations de Navier-Stokes, l'espace des solutions admissibles en pression est l'espace des solutions de carré sommable  $L_2(\Omega)$ , tandis que les solutions en vitesse appartiennent à l'espace de Hilbert  $H_0^1(\Omega)$ . Ces espaces de solution entraînent des choix particuliers pour la définition des normes en vitesse et en pression (voir Chapitre 3). De plus, le choix de ces espaces a des conséquences :

- Sur le choix des éléments servant à la résolution de ces équations par la méthode des éléments finis : les éléments doivent respecter la condition de Babuška-Brezzi (voir section 2.3).
- Sur la construction polynomiale de l'approximation numérique de la solution : la vitesse est continue sur un élément et d'un élément à l'autre, tandis que la pression est continue sur un élément mais peut être discontinue d'un élément à l'autre.

### 2.1.2 Forme faible

La forme faible des équations de Navier-Stokes est obtenue par la méthode de Galerkin. Les équations (2.1) sont d'abord multipliées par des fonctions tests et intégrées sur le domaine  $\Omega$ .

$$\int_{\Omega} \tilde{u} \cdot \left\{ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u \cdot \nabla)u - \nabla \cdot \sigma \right\} d\Omega = \int_{\Omega} \tilde{u} \cdot f d\Omega \quad (2.4)$$

$$-\int_{\Omega} \tilde{p} \nabla \cdot u d\Omega = 0$$

Avec :  $\tilde{u}$  : la fonction test de la vitesse

$\tilde{p}$  : la fonction test de la pression

Puis, l'intégration par parties du terme contenant le tenseur des contraintes permet d'écrire la première équation du système (2.4) de la manière suivante :

$$\int_{\Omega} \tilde{u} \cdot \left\{ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u \cdot \nabla)u \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \{ \sigma : \nabla \tilde{u} - \nabla \cdot (\sigma \cdot \tilde{u}) \} d\Omega = \int_{\Omega} \tilde{u} \cdot f d\Omega \quad (2.5)$$

Or, le théorème de la divergence permet d'obtenir :

$$\int_{\Omega} \{ \nabla \cdot (\sigma \cdot \tilde{u}) \} d\Omega = \int_{\Gamma_i} (\sigma \cdot \tilde{u}) \cdot n d\Gamma \quad (2.6)$$

Avec :  $\Gamma_i$  : la frontière du domaine sur laquelle sont appliquées les conditions de Neumann

Finalement, la forme faible des équations de Navier-Stokes est :

$$\int_{\Omega} \tilde{u} \cdot \left\{ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u \cdot \nabla)u \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \sigma : \nabla \tilde{u} d\Omega = \int_{\Omega} \tilde{u} \cdot f d\Omega + \int_{\Gamma_i} (\sigma \cdot \tilde{u}) \cdot n d\Gamma \quad (2.7)$$

$$-\int_{\Omega} \tilde{p} \nabla \cdot u d\Omega = 0$$

Ces équations sont discrétisées par la méthode des éléments finis. En particulier, les fonctions d'interpolation en vitesse sont les mêmes pour les trois directions de l'espace.

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{j=1}^{Nu} N_j u_j & v &= \sum_{j=1}^{Nu} N_j v_j & w &= \sum_{j=1}^{Nu} N_j w_j \\
 p &= \sum_{j=1}^{Np} M_j p_j
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

Avec :

- $N_u$  : le nombre de fonctions d'interpolation en vitesse
- $N_p$  : le nombre de fonctions d'interpolation en pression
- $N_j$  : les fonctions d'interpolation en vitesse
- $M_j$  : les fonctions d'interpolation en pression

Les fonctions d'interpolation sont des fonctions polynomiales, par exemple les fonctions d'interpolation de Lagrange. Leur nombre et leur définition dépendront du type d'éléments choisi, de l'équation à résoudre et de l'espace solution.

Il faut maintenant choisir un échantillon de fonctions tests en vitesse et en pression, pour obtenir un système d'équations. Ces fonctions tests sont choisies égales aux fonctions d'interpolation, c'est la méthode dite de Galerkin.

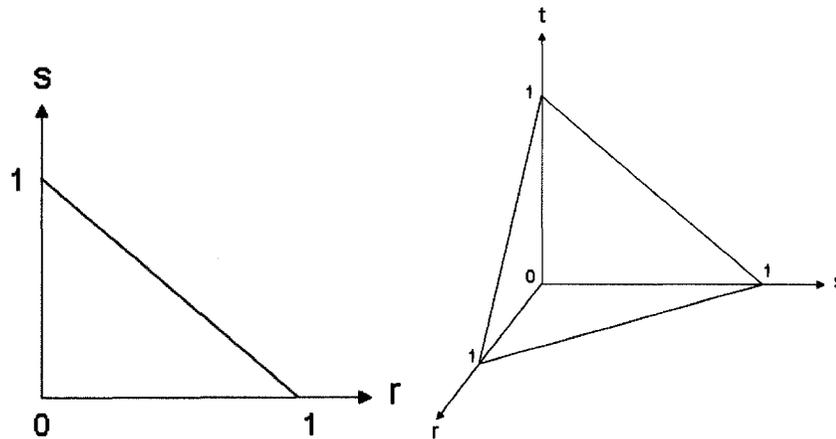
$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_j &= N_j & \tilde{v}_j &= N_j & \tilde{w}_j &= N_j \\
 \tilde{p}_j &= M_j
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

## 2.2 Choix des éléments

Dans le cas de simulations 2D, les éléments utilisés sont des éléments triangulaires. En 3D, il s'agit de tétraèdres. Plusieurs types d'éléments, avec des nombres différents de degrés de liberté en vitesse et en pression, ont été testés. Mais tous les éléments utilisent les polynômes d'interpolation de Lagrange.

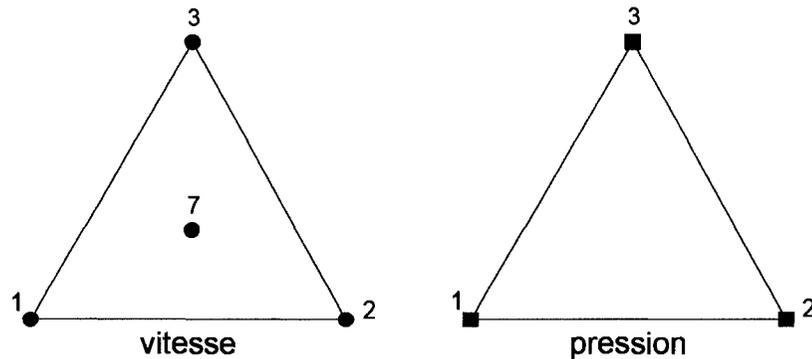
### 2.2.1 Polynômes d'interpolation de Lagrange et éléments de référence

Les polynômes d'interpolation de Lagrange sont définis sur le triangle de référence en fonction des coordonnées locales. En 2D ces coordonnées locales sont  $r$  et  $s$ , en 3D  $r$ ,  $s$  et  $t$ .



**Figure 2.1** Triangle de référence en 2D et tétraèdre de référence en 3D

### 2.2.2 Élément MINI en 2D



**Figure 2.2** Nœuds en vitesse et en pression associés à l'élément MINI

En 2D, le premier élément utilisé est l'élément MINI. Cet élément possède en plus de ses trois sommets, un nœud bulle situé au centre de l'élément. Les quatre nœuds sont utilisés pour l'interpolation en vitesse, mais seuls les trois nœuds sommets sont utilisés pour la pression. La pression est donc linéaire sur l'élément et continue d'un élément à l'autre, et la vitesse est linéaire avec un terme supplémentaire sur la bulle.

La discrétisation de la vitesse et de la pression s'écrit donc :

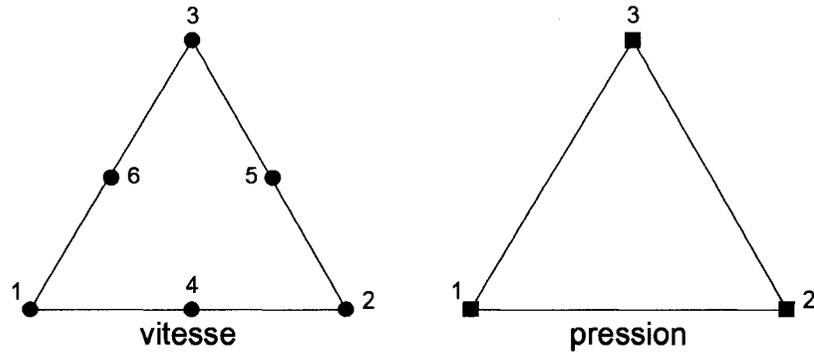
$$\begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_7 u_7 & v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_7 v_7 \\ p &= N_1 p_1 + N_2 p_2 + N_3 p_3 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Avec:  $u_1, u_2$  et  $u_3$  : les vitesses aux trois nœuds sommets  
 $u_7$  : la vitesse au nœud bulle

**Tableau 2.1** Polynômes d'interpolation de Lagrange pour l'élément MINI

$N_1$	$1-r-s$
$N_2$	$r$
$N_3$	$s$
$N_7$	$27(1-r-s)rs$

### 2.2.3 Élément Taylor-Hood en 2D



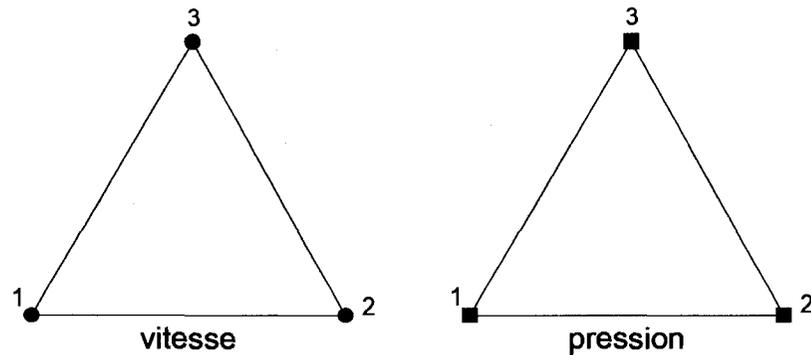
**Figure 2.3** Noeuds en vitesse et en pression associés à l'élément Taylor-Hood

Un autre élément utilisé en 2D est le Taylor-Hood. La pression est toujours linéaire et continue, mais la vitesse est quant à elle quadratique.

**Tableau 2.2** Polynômes d'interpolation de Lagrange pour l'élément Taylor-Hood

$N_1$	$-(1-r-s) [1-2(1-r-s)]$
$N_2$	$-r(1-2r)$
$N_3$	$-s(1-2s)$
$N_4$	$4r(1-r-s)$
$N_5$	$4rs$
$N_6$	$4s(1-r-s)$

### 2.2.4 Élément P1-P1 en 2D



**Figure 2.4** Nœuds en vitesse et en pression associés à l'élément P1-P1 2D

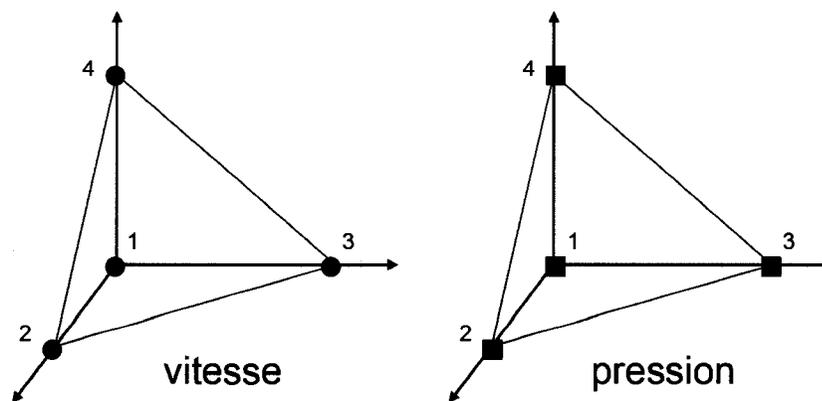
Un troisième élément utilisé en 2D est l'élément P1-P1. Il est linéaire en vitesse et en pression. Cependant, il ne respecte pas la condition de Babuška-Brezzi (voir section 2.3), il n'est donc pas stable. Pour l'utiliser, les équations seront stabilisées par la méthode PSPG.

Malgré cela, cet élément est intéressant car il est linéaire, il ne nécessite donc pas de calculs de Laplacien, seules les dérivées premières devront être calculées pour la stabilisation (voir section 2.3).

**Tableau 2.3** Polynômes d'interpolation de Lagrange pour l'élément P1-P1 en 2D

$N_1$	$1-r-s$
$N_2$	$r$
$N_3$	$s$

### 2.2.5 Élément P1-P1 en 3D



**Figure 2.5** Nœuds en vitesse et en pression associés à l'élément P1-P1 en 3D

Comme en 2D, l'élément P1-P1 en 3D est linéaire en vitesse et en pression mais nécessite une stabilisation des équations.

**Tableau 2.4** Polynômes d'interpolation de Lagrange pour l'élément P1-P1 en 3D

$N_1$	$1-r-s-t$
$N_2$	$r$
$N_3$	$s$
$N_4$	$t$

## 2.3 Stabilisation des équations

### 2.3.1 Méthodes de stabilisation

La stabilisation des équations de Navier-Stokes se fait en trois étapes, intervenant directement sur les fonctions tests apparaissant dans la forme faible des équations :

$$\int_{\Omega} \tilde{u} \cdot \left\{ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho (u \cdot \nabla) u \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \sigma : \nabla \tilde{u} d\Omega = \int_{\Omega} \tilde{u} \cdot f d\Omega + \int_{\Gamma_i} (\sigma \cdot \tilde{u}) \cdot nd\Gamma \quad (2.11)$$

$$-\int_{\Omega} \tilde{p} \nabla \cdot u d\Omega = 0$$

#### 2.3.1.1 Stabilisation SUPG

La stabilisation SUPG intervient sur l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Elle permet de supprimer les oscillations dues aux termes de convection. Cette méthode de stabilisation consiste à ajouter de la diffusion artificielle dans la direction de l'écoulement seulement. Cet ajout est interprété comme une modification des fonctions test [23], [24]. La solution exacte du problème satisfait toujours la forme faible stabilisée par SUPG.

Cette stabilisation n'est pour l'instant implémentée que pour l'élément P1-P1 dans cette étude, car la théorie a été développée à l'origine pour les interpolants linéaires, et des fonctions de stabilisation linéaires. Elle peut être vue comme une modification des fonctions tests de la vitesse :

$$\tilde{u}^* = \tilde{u} + \tau_{SUPG} (u \cdot \nabla) \tilde{u} \quad (2.12)$$

Avec :  $\tilde{u}$  : les fonctions tests initiales (correspondant aux fonctions d'interpolation)

$\tilde{u}^*$  : les nouvelles fonctions tests

### 2.3.1.2 Stabilisation PSPG

La formulation utilisée pour résoudre les équations de Navier-Stokes incompressible est la formulation mixte. La pression est alors le multiplicateur de Lagrange de la vitesse et est calculée implicitement avec la vitesse. Les inconnues en vitesse et en pression étant liées, la stabilité du système d'équations dépend alors des interpolations choisies, autrement dit des nœuds en vitesse et en pression. C'est la condition dite de Babuška-Brezzi [25] qui détermine la stabilité du choix des interpolants de la vitesse et de la pression. Si cette condition n'est pas satisfaite, des oscillations peuvent apparaître ou bien le système peut s'avérer singulier et n'aboutir à aucune solution.

Pour simplifier, cette condition peut s'énoncer de la manière suivante [26] : Un élément fini satisfait la condition de Brezzi si étant donnée une vitesse  $u$  continue et différentiable sur un domaine  $R$ , il est possible de construire une approximation discrète  $u_h$  telle que  $u$  et  $u_h$  aient la même projection de la divergence dans l'espace des pressions. Les éléments MINI et Taylor-Hood remplissent cette condition et sont donc stables, mais les éléments P1-P1 quant à eux ne respectent pas la condition de Babuška-Brezzi.

La stabilisation PSPG permet d'éliminer les oscillations et de se dispenser de la condition de Babuška-Brezzi [25]. Cette méthode introduit un nouveau terme dépendant uniquement de la fonction test du multiplicateur de Lagrange, c'est-à-dire de la pression. Elle peut également être interprétée comme une modification des fonctions tests :

$$\tilde{u}^* = \tilde{u} + \tau_{PSPG} \frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p} \quad (2.13)$$

Le taux PSPG est généralement choisi identique au taux SUPG, bien que ce ne soit pas obligatoire.

### 2.3.1.3 Stabilisation de la contrainte d'incompressibilité

Une troisième stabilisation est utilisée : elle concerne la contrainte d'incompressibilité (ou équation de continuité). Elle apparaît sous la forme d'un nouveau terme dans la forme faible, proportionnel à un nouveau taux appelé  $\tau_{CONT}$ . Elle s'appuie sur la méthode des moindres carrés [27].

$$\int_{\Omega} \tau_{CONT} (\nabla \cdot \tilde{u}) \rho (\nabla \cdot u) d\Omega \quad (2.14)$$

L'ajout de ce terme rend le processus de calcul habituellement plus robuste.

### 2.3.1.4 Écriture de la forme faible stabilisée

Ces trois stabilisations modifient la forme faible des équations de Navier-Stokes, en ajoutant des termes pour la stabilisation de la contrainte d'incompressibilité, ou bien à travers la modification des fonctions tests pour les stabilisations SUPG et PSPG. Mais en remplaçant l'expression des nouvelles fonctions tests dans la forme faible (2.11), ces modifications apparaissent également sous la forme de termes supplémentaires [27], fonctions du résidu de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Les fonctions tests restent alors les mêmes que dans la méthode de Galerkin. Les deux équations de la forme faible peuvent être alors être additionnées pour ne former qu'une seule équation :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \tilde{u} \cdot \left\{ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho (u \cdot \nabla) u - f \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \sigma : \nabla \tilde{u} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{p} \nabla \cdot u d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} [\tau_{SUPG} \rho (u \cdot \nabla) \tilde{u}] \cdot \left[ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho (u \cdot \nabla) u - \nabla \cdot \sigma - f \right] d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} [\tau_{PSPG} \nabla \tilde{p}] \cdot \left[ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho (u \cdot \nabla) u - \nabla \cdot \sigma - f \right] d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \tau_{CONT} (\nabla \cdot \tilde{u}) \rho (\nabla \cdot u) d\Omega = \int_{\Gamma_i} (\sigma \cdot \tilde{u}) \cdot n d\Gamma \end{aligned} \quad (2.15)$$

### 2.3.2 Définition des fonctions de stabilisation

Les fonctions  $\tau_{SUPG}$  et  $\tau_{PSPG}$  sont choisies identiques. En 1D, à partir d'une équation de convection-diffusion [26], il a été montré que l'expression optimale est :

$$\tau_{OPT} = \frac{h}{2\|u\|} \left[ \coth(Re) - \frac{1}{Re} \right] \quad (2.16)$$

$$Re = \frac{2\|u\|h}{\nu}$$

Avec :     $Re$  : le nombre de Reynolds local (estimé sur l'élément)  
            $h$  : une longueur caractéristique de la taille de l'élément  
            $\nu$  : la viscosité cinématique du fluide

Cependant on ignore toujours si cette définition de  $\tau$  est optimale en 2D ou en 3D. Finalement, on retrouve plusieurs variantes pour la définition de  $\tau$ , il faut principalement qu'elles conservent les bonnes valeurs asymptotiques de  $\tau$  quand le nombre de Reynolds local tend vers zéro ou vers l'infini :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau \rightarrow \frac{h}{2\|u\|} \quad \text{quand } Re \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow \frac{h^2}{3\nu} \quad \text{quand } Re \rightarrow 0 \\ \frac{d\tau}{dRe} \rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2\|u\|} \quad \text{quand } Re \rightarrow 0 \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Une solution possible est donc [27], [28] :

$$\tau_1 = \frac{h}{2\|u\|} \left[ \frac{1}{1 + \frac{1}{Re^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.18)$$

Mais cette forme ne respecte pas la pente en zéro. Pour corriger cela, il suffit de la modifier légèrement :

$$\tau_2 = \frac{h}{2\|u\|} \left[ \frac{1}{1 + \frac{9}{\text{Re}^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.19)$$

Une autre façon de définir ce taux est d'utiliser une définition conditionnelle qui permet d'avoir le bon comportement asymptotique :

$$\tau_3 = \frac{h}{2\|u\|} z \quad \text{avec} \quad z = \begin{cases} \frac{\text{Re}}{3} & \text{si } \text{Re} \leq 3 \\ 1 & \text{si } \text{Re} > 3 \end{cases} \quad (2.20)$$

Cette expression de  $\tau$  se met donc sous la forme d'un produit de  $\frac{h}{2\|u\|}$  avec une fonction du nombre de Reynolds qu'on appelle  $\tau'$ . Le tracé de cette fonction du nombre de Reynolds local pour les différentes définitions exposées ci-dessus permet de comparer le comportement de ces formulations.

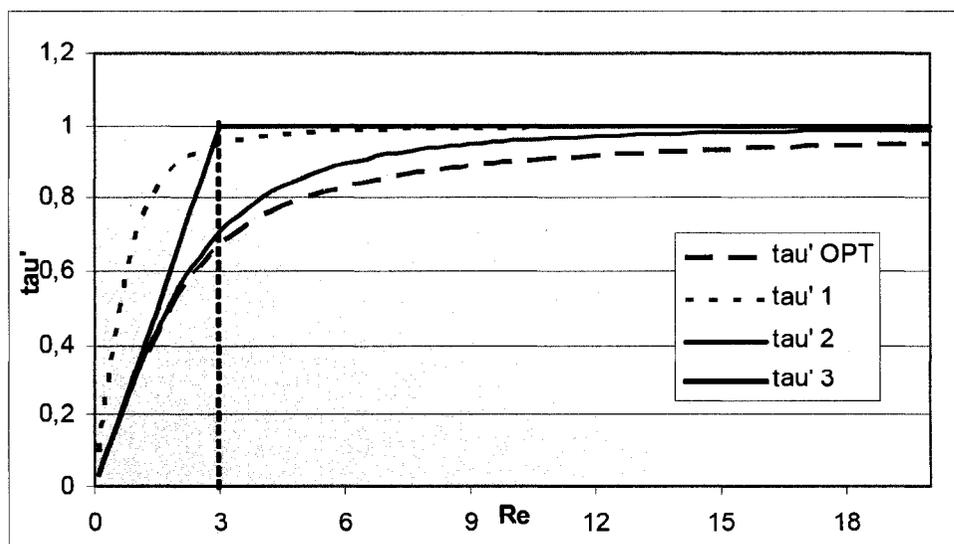


Figure 2.6 Représentation de  $\tau'$  en fonction du nombre de Reynolds

Finalement c'est la seconde solution, avec la correction de la pente, qui a été retenue pour la définition des taux SUPG et PSPG.

$$\tau_{PSPG} = \tau_{SUPG} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{\Delta t^2} + \frac{4\|u\|^2}{h^2} + 9 \cdot \frac{16\nu^2}{h^4}}} \quad (2.21)$$

Le terme faisant apparaître le pas de temps  $\Delta t$  n'est utile que pour des simulations transitoires. Dans cette étude ce terme disparaît car seuls des calculs stationnaires sont réalisés.

Pour la stabilisation de la contrainte d'incompressibilité, le  $\tau$  est pris semblable à la troisième solution proposée [27], [28] :

$$\tau_{CONT} = \frac{h}{2}\|u\|z \quad avec \quad z = \begin{cases} \frac{Re}{3} & \text{si } Re \leq 3 \\ 1 & \text{si } Re > 3 \end{cases} \quad (2.22)$$

### 2.3.3 Définition de la longueur h

La manière la plus simple de définir la longueur  $h$  apparaissant dans la définition des fonctions de stabilité, est de définir une longueur constante pour chaque élément, c'est-à-dire ne dépendant que de la forme de l'élément. En 1D, il suffit de prendre la longueur réelle de l'élément. En 2D la longueur  $h$  peut par exemple être définie à partir de l'aire de l'élément, en la calculant comme la longueur d'un côté du triangle équilatéral ayant la même aire. En 3D avec cette même méthode,  $h$  est égal à la longueur d'une arête du tétraèdre équilatéral de même volume.

Mais il est possible d'utiliser une définition plus complexe de  $h$  comme l'ont proposé Tezduyar et Osawa [27]. Nous avons introduit une modification à leur formule : nous utilisons des sommes de termes au carré. Le nouveau  $h$  est alors défini par :

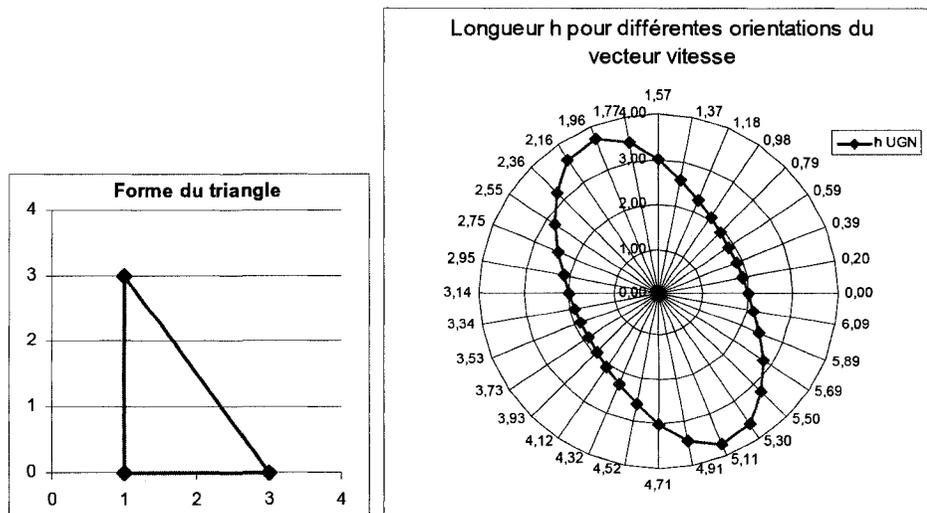
$$h_{UGN} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_u} \left( \frac{u}{\|u\|} \cdot \nabla N_i \right)^2}} \quad (2.23)$$

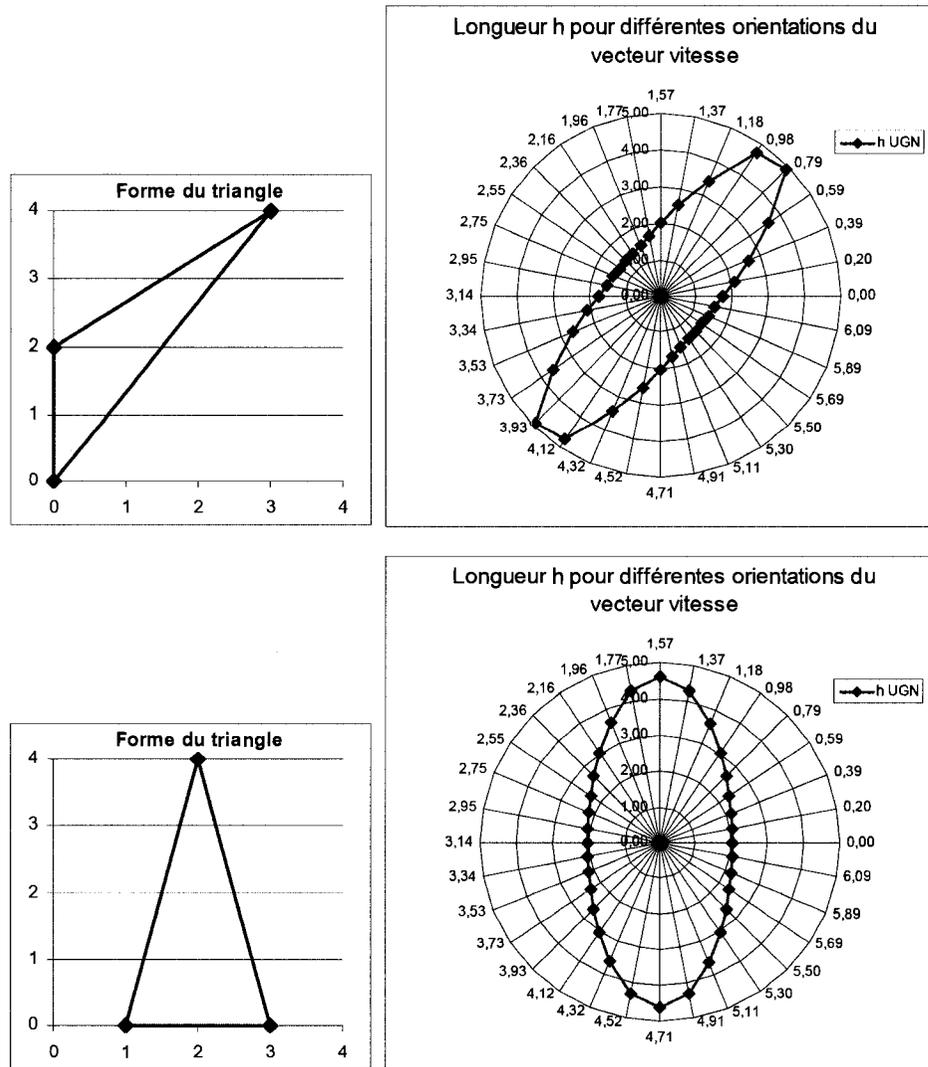
Avec :  $N_u$  : le nombre de nœuds en vitesse

$N_i$  : les fonctions d'interpolation en vitesse

Contrairement à la définition utilisée par Tezduyar et Osawa, notre relation n'utilise pas la valeur absolue, ce qui facilite l'implémentation numérique. Le principal intérêt de cette définition de  $h$  est qu'elle dépend de l'orientation du vecteur vitesse. Cette formulation est intéressante car si l'écoulement est parallèle à l'une des arêtes de l'élément (aussi bien pour les triangles en 2D que pour les tétraèdres en 3D), alors la longueur  $h_{UGN}$  sera exactement égale à la longueur de cette arête.

En 2D, pour un élément triangulaire quelconque, il est possible de visualiser la valeur  $h$  obtenue pour toutes les valeurs possibles de l'angle d'orientation du vecteur vitesse. En observant la définition de SUPG, on constate que  $\tau$  va évoluer comme  $h$ , autrement dit une valeur de  $h$  petite entraîne un petit  $\tau$  et une valeur de  $h$  grande entraîne un grand  $\tau$ .





**Figure 2.7** Variation de  $h_{UGN}$  avec l'orientation du vecteur de vitesse pour deux triangles différents

Le premier exemple correspond à un élément simple, ici un triangle rectangle. On voit bien que le  $h_{UGN}$  prend la valeur 2 si l'angle de l'écoulement est nul (écoulement horizontal) et vaut 3 si l'angle de l'écoulement vaut  $\pi/2$  (écoulement vertical). Autrement dit, cela confirme que si l'écoulement est parallèle à l'une des arêtes du triangle, alors la longueur caractéristique  $h_{UGN}$  est égale à la longueur de l'arête. Si la

vitesse est nulle, alors cette expression n'est pas calculable, elle est remplacée par la première définition indépendante de la solution.

Dans EF5, deux définitions de la longueur caractéristique sont implémentées : celle indépendante de l'écoulement qui utilise l'aire ou le volume de l'élément, et le  $h_{UGN}$  présenté ci-dessus. On a testé ces deux formulations, et on constaté que le  $h_{UGN}$  permet de faire converger des calculs qui ne convergeaient pas avec la première définition de  $h$  indépendante de l'écoulement. Cette définition est donc plus robuste, c'est pourquoi elle a été choisie pour la suite de l'étude. De plus, l'utilisation de  $h_{UGN}$  rend la solution moins sensible à l'orientation du maillage.

## 2.4 Outils numériques

Les calculs par éléments finis seront réalisés à l'aide du programme EF5, un code maison développé à l'École Polytechnique de Montréal. L'utilisation d'un code maison, programmé en C++, permet de contrôler parfaitement les méthodes utilisées et de réaliser des tests de comparaison entre différentes méthodes. Les principales méthodes numériques classiques ont été implémentées dans EF5.

Le solveur utilisé est un solveur direct appelé PARDISO [29], [30].

## CHAPITRE 3

### ESTIMATION D'ERREUR A POSTERIORI

#### 3.1 Estimation de l'erreur sur la solution numérique

##### 3.1.1 Utilisation d'une solution approchée

Afin d'estimer l'erreur de la solution numérique résultant d'un calcul par éléments finis, on utilise la norme énergie pour les vitesses et la norme  $L_2$  pour la pression. Ces normes sont définies de la manière suivante :

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 = \int_{\Omega} u \cdot u d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u d\Omega \quad (3.1)$$

$$\|p\|_{0,\Omega}^2 = \int_{\Omega} p \cdot p d\Omega \quad (3.2)$$

Cependant, dans le cas général, on ne connaît pas la solution exacte au problème. L'idée est donc de calculer une solution approchée de la solution exacte, et d'estimer l'erreur de la solution numérique  $u_h$  par rapport à cette solution approchée  $u^*$ . Ainsi, l'estimation de l'erreur est donnée par :

$$\|e\|_{1,\Omega} = \|u_h - u^*\|_{1,\Omega} \quad (3.3)$$

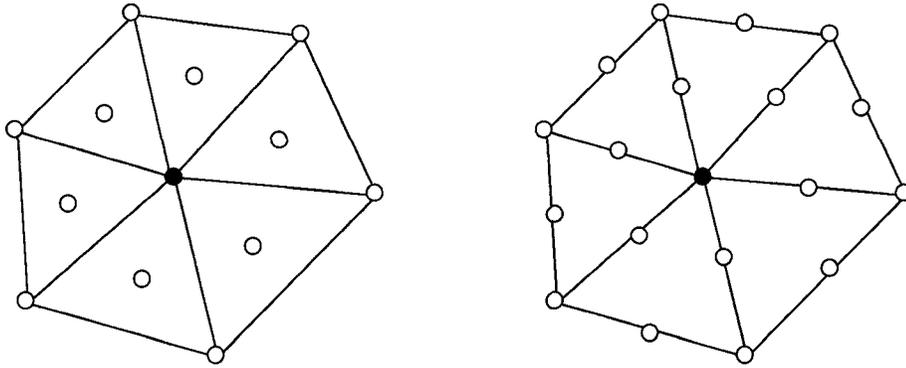
$$\|e\|_{1,\Omega} = \|u_h - u^*\|_{0,\Omega} + \|\nabla u_h - \nabla u^*\|_{0,\Omega} \quad (3.4)$$

Le but est d'obtenir la meilleure approximation des dérivées de la solution numérique aux nœuds du maillage. La solution approchée est donc choisie telle que ses valeurs aux nœuds soient identiques aux valeurs de la solution numérique. Le gradient de la solution approchée est obtenu en projetant le gradient de la solution numérique sur la base

polynomiale de la solution numérique. L'estimation de l'erreur s'écrit alors avec la semi-norme<sup>1</sup> :

$$|e|_{1,\Omega} = \|\nabla u_h - \nabla u^*\|_{0,\Omega} \quad (3.5)$$

Pour calculer le gradient de la solution approchée, on utilise la technique de projection locale de Zienkiewicz et Zhu [33], [34]. Les dérivées enrichies en un nœud du maillage sont calculées en tenant compte uniquement des éléments entourant ce nœud, autrement dit appartenant à la cellule associée à ce nœud.



**Figure 3.1** Cellule associée à un nœud, pour un élément MINI ou Taylor-Hood

Pour chacune des cellules du maillage, le gradient de la solution approchée s'exprime alors à l'aide des termes du triangle de Pascal. Par exemple en 2D, les dérivées de  $u^*$  s'expriment de la façon suivante :

$$\frac{du^*(x, y)}{dx} = \sum_{j=1}^M P_j(x, y) a_{xj} \quad (3.6)$$

$$\frac{du^*(x, y)}{dy} = \sum_{j=1}^M P_j(x, y) a_{yj} \quad (3.7)$$

<sup>1</sup> L'expression (3.5) est une norme si le problème est dans  $H^1_0(\Omega)$  ou  $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ . Par contre, si la solution est dans  $H^1(\Omega)$ , alors elle est une semi-norme.

Les  $P_j$  correspondent aux  $M$  premiers termes du triangle de Pascal. Pour l'élément Taylor-Hood, le nombre  $M$  de termes est choisi identique au nombre de termes utilisés pour l'interpolation de  $u_h$ , autrement dit  $M$  vaut 6. Pour l'élément MINI, on a vu que le terme bulle est cubique, il est donc négligeable par rapport aux autres termes. On choisit donc de ne pas prendre en compte le nœud bulle, ainsi seuls les trois sommets sont pris en compte pour l'estimation de l'erreur et  $M$  vaut 3.

Les coefficients  $a_{xj}$  et  $a_{yj}$  seront calculés à partir des informations contenues dans les éléments de la cellule. Deux méthodes de moindres carrés sont présentées pour calculer ces coefficients. La première utilise la minimisation d'une fonctionnelle définie par une somme discrète. La seconde méthode conserve la forme intégrale dans la définition de la fonctionnelle à minimiser.

### 3.1.2 Calcul des coefficients inconnus

#### 3.1.2.1 *Mise en forme de la cellule*

Pour calculer les dérivées enrichies, il faudra résoudre des systèmes linéaires définis à l'aide des coordonnées  $x$  et  $y$  de points situés dans la cellule. Or, si cette cellule est très éloignée de l'origine du repère, les coordonnées seront très grandes, ce qui entraînera un mauvais conditionnement de la matrice du système linéaire à résoudre.

C'est pourquoi on décide d'utiliser à la place des coordonnées usuelles, des coordonnées locales redéfinies en fonction de la position et de la taille de la cellule. Pour cela, on définit une boîte entourant la cellule. On définit  $x_{moy}$  et  $y_{moy}$  les coordonnées du milieu de la boîte, et  $\Delta x$  et  $\Delta y$  la moitié des dimensions de la boîte. Les coordonnées locales sont alors calculées de la manière suivante :

$$x_{loc} = \frac{x - x_{moy}}{\Delta x} \quad (3.8)$$

$$y_{loc} = \frac{y - y_{moy}}{\Delta y} \quad (3.9)$$

Ainsi, au sein d'une cellule, les coordonnées locales vont de -1 à 1, ce qui permet un meilleur conditionnement de la matrice du système linéaire à résoudre. La méthode devient ainsi plus robuste.

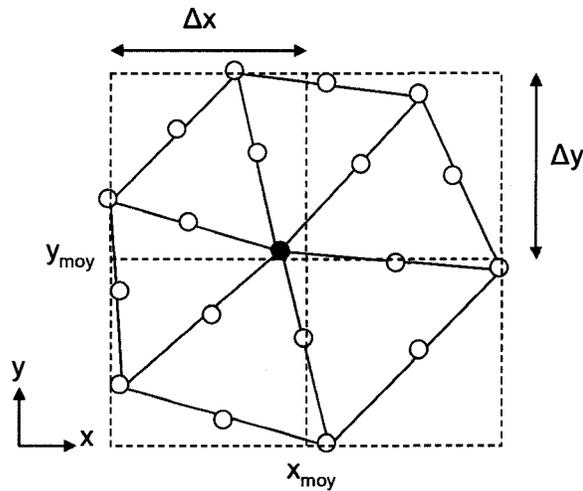


Figure 3.2 Définition d'une boîte entourant la cellule

Par la suite, pour ne pas surcharger les formules, les coordonnées locales sont directement notées  $x$  et  $y$ .

### 3.1.2.2 Méthode des moindres carrés discrète

Une première méthode pour calculer les coefficients  $a_{xj}$  (et de la même manière  $a_{yj}$ ), consiste à minimiser la fonctionnelle suivante :

$$F(a_{x1}, \dots, a_{xM}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[ \frac{du_h(x_i, y_i)}{dx} - \sum_{j=1}^M P_j(x_i, y_i) a_{xj} \right]^2 \quad (3.10)$$

Les  $(x_i, y_i)$  représentent les coordonnées des  $N$  points d'échantillonnage utilisés pour estimer la dérivée enrichie en un nœud. Ces points doivent faire partie de la cellule considérée.

On exige que la variation de cette fonctionnelle par rapport à chacun des coefficients  $a_{xj}$  soit nulle. Ainsi, on obtient un système linéaire qui permet de déterminer les coefficients  $a_{xj}$ , à condition que le nombre de points d'échantillonnage soit égal ou supérieur au nombre de coefficients à déterminer ( $N \geq M$ ) :

$$\sum_{i=0}^N P^T(x_i, y_i) P(x_i, y_i) a_x = \sum_{i=0}^N P^T(x_i, y_i) \frac{du_h(x_i, y_i)}{dx} \quad (3.11)$$

Le vecteur colonne  $a_x$  contient les  $M$  coefficients à déterminer.

$$a_x = \begin{bmatrix} a_{x1} \\ \vdots \\ a_{xM} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$P(x_i, y_i)$  contient les  $M$  premiers termes du triangle de Pascal. Par exemple, pour les triangles quadratiques, on a  $M=6$  et :

$$P(x, y) = [1, x, y, x^2, xy, y^2] \quad (3.13)$$

De la multiplication de la transposée de  $P$  par  $P$  lui-même, résulte la matrice carrée suivante :

$$P^T(x, y) P(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 \\ x & x^2 & xy & x^3 & x^2y & xy^2 \\ y & xy & y^2 & x^2y & xy^2 & y^3 \\ x^2 & x^3 & x^2y & x^4 & x^3y & x^2y^2 \\ xy & x^2y & xy^2 & x^3y & x^2y^2 & xy^3 \\ y^2 & xy^2 & y^3 & x^2y^2 & xy^3 & y^4 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Pour le choix des points d'échantillonnage, la solution idéale serait de choisir les points de convergence optimale, appelés également points de Barlow. Cependant, la position de ces points est encore inconnue pour les triangles en 2D, ces points n'existent probablement même pas au-delà de une dimension. Zienkiewicz et Zhu recommandent alors l'utilisation des points de superconvergence, correspondant au milieu de l'élément pour les triangles linéaires, et aux milieux des arêtes pour les triangles quadratiques.

Cependant, le nombre de points d'échantillonnage vaut alors un pour un triangle linéaire et trois pour un triangle quadratique. Or, il peut y avoir des nœuds situés sur la frontière du domaine dont la cellule ne contiendra qu'un élément. Pour le cas de triangles linéaires, le nombre de points d'échantillonnage sera alors égal à trois ( $N=3$ ), tandis que le nombre de coefficients à déterminer vaut six ( $M=6$ ). Le système est donc indéterminé.

Pour éviter ce problème, Labbé et Garon [35] proposent d'utiliser à la place les points de Gauss, dont la position est déjà connue, et qui sont au nombre de six par élément. Ainsi, un élément suffit pour avoir un nombre suffisant de points d'échantillonnage.

### 3.1.2.3 Méthode des moindres carrés intégrale

Dans cette méthode, les dérivées enrichies sont toujours exprimées sous la forme d'un polynôme de même degré que le polynôme d'interpolation de la solution numérique. Mais la fonctionnelle à minimiser est laissée sous forme intégrale :

$$\frac{du^*(x, y)}{dx} = \sum_{j=1}^M P_j(x, y) a_{xj} = P^*(x, y) \quad (3.15)$$

$$F(a_{x1}, \dots, a_{xM}) = \frac{1}{2} \int_{cellule} \left[ \frac{du_h(x, y)}{dx} - P^*(x, y) \right]^2 d\Omega \quad (3.16)$$

On souhaite à nouveau annuler la variation de cette fonctionnelle par rapport à chacun des  $M$  coefficients  $a_{xj}$  :

$$\frac{\partial F}{\partial a_{xi}}(x, y) = \int_{cellule} \left[ \frac{du_h(x, y)}{dx} - P^*(x, y) \right] \frac{\partial P^*}{\partial a_{xi}}(x, y) d\Omega = 0 \quad (3.17)$$

Or, d'après la définition de  $P^*$ , dans l'équation (3.15) :

$$\frac{\partial P^*}{\partial a_{xi}}(x, y) = P_i(x, y) \quad (3.18)$$

On obtient le système suivant à résoudre :

$$\int_{cellule} P^*(x, y) P_i(x, y) d\Omega = \int_{cellule} \frac{du_h(x, y)}{dx} P_i(x, y) d\Omega \quad (3.19)$$

De plus, on peut décomposer chacune des deux intégrales en une somme d'intégrales sur les éléments de la cellule :

$$\sum_{\substack{\text{éléments} \\ \in \text{cellule}}} \int_{\text{élément}} P^*(x, y) P_i(x, y) d\Omega = \sum_{\substack{\text{éléments} \\ \in \text{cellule}}} \int_{\text{élément}} \frac{du_h(x, y)}{dx} P_i(x, y) d\Omega \quad (3.20)$$

Pour calculer les intégrales sur un élément, on utilise la méthode d'intégration de Gauss.

Finalement, la méthode des moindres carrés intégrale est la méthode qui a été retenue pour l'estimation d'erreur, car il s'agit de la méthode la plus robuste. En effet, cette méthode fonctionne quel que soit le nombre d'éléments contenus dans une cellule.

### 3.1.3 Reconstruction de la solution enrichie

Quelle que soit la méthode utilisée pour déterminer les coefficients  $a_{xj}$ , il faut ensuite évaluer cette dérivée enrichie aux nœuds du maillage. En effet, on connaît désormais une expression générique de la dérivée reconstruite pour une cellule. Il faut donc maintenant l'interpoler aux nœuds afin d'y calculer une erreur estimée, pour ensuite obtenir l'estimation de l'erreur sur tout le domaine.

Pour les éléments de type MINI, l'erreur est estimée uniquement aux sommets du maillage, elle ne l'est pas sur les nœuds situés au milieu des éléments. Pour les éléments de type Taylor-Hood, l'erreur est estimée sur tous les nœuds du maillage.

Cependant, un nœud du maillage peut appartenir à plusieurs cellules. Il faut donc déterminer une stratégie pour la reconstruction de la solution approchée, ou plutôt de sa dérivée.

#### *3.1.3.1 Interpolation sur tous les nœuds de la cellule*

Dans un premier temps, la dérivée de la solution approchée a été interpolée sur tous les nœuds de la cellule, sauf les nœuds bulles pour les éléments MINI. Après avoir balayé toutes les cellules du maillage, pour la plupart des nœuds, plusieurs estimations de la dérivée enrichie y auront été calculées. On calcule alors la moyenne arithmétique de ces contributions pour avoir la valeur finale de la dérivée enrichie en ces nœuds.

#### *3.1.3.2 Sélection des nœuds de reconstruction*

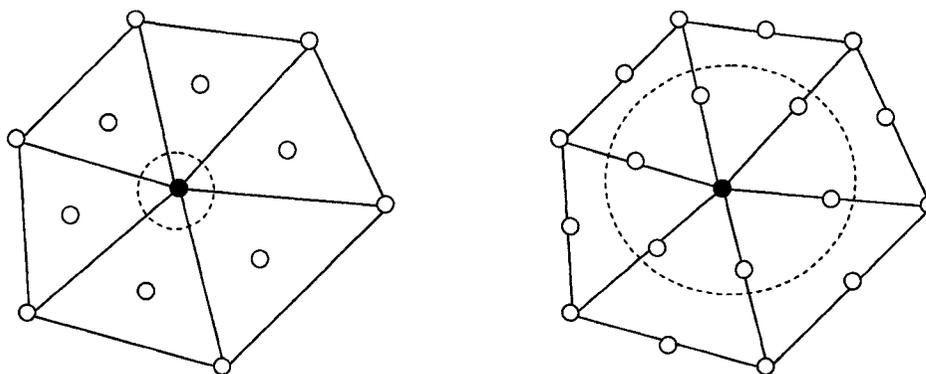
Dans un second temps, on sélectionne les nœuds de la cellule sur lesquels la dérivée enrichie sera interpolée. En effet, on peut supposer que pour un sommet du maillage, la cellule pour laquelle l'estimation de la dérivée enrichie est la meilleure, est la cellule

construite autour du nœud lui-même. Comme on balaye toutes les cellules du domaine, chaque sommet sera le centre d'une cellule. On choisit donc que la seule contribution apportée à un nœud sommet sera celle de la cellule construite autour de ce nœud.

Cependant, dans le cas d'éléments quadratiques, certains nœuds ne sont pas des nœuds sommets, ils sont situés au milieu d'une arête. Alors la dérivée enrichie est calculée grâce aux contributions des cellules associées aux deux sommets situés aux extrémités de l'arête sur laquelle est situé le nœud considéré.

Finalement, pour une cellule donnée, une fois les coefficients  $a_{xj}$  calculés, la dérivée enrichie est interpolée au nœud central de la cellule, et aux nœuds situés sur les arêtes reposant sur le nœud central.

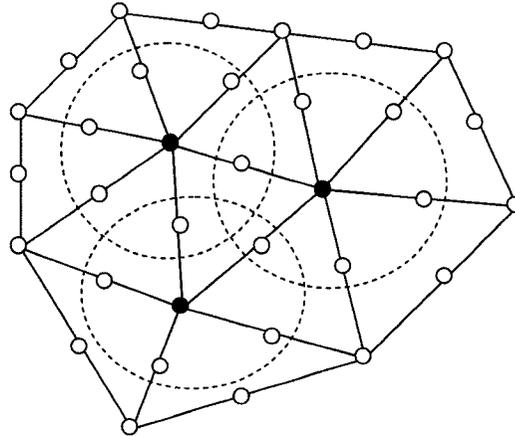
Sur la Figure 3.3 représentant la cellule associée au nœud central noir, l'interpolation est faite uniquement sur les nœuds contenus dans le cercle en pointillés.



**Figure 3.3** Sélection des points d'interpolation, pour des éléments de type MINI ou Taylor-Hood

Dans le cas d'éléments de type MINI, chaque sommet sera donc l'objet d'une seule interpolation. Dans le cas d'éléments de type Taylor-Hood, les nœuds sommets auront une seule contribution, tandis que les nœuds situés au milieu d'une arête auront deux

contributions. L'estimation finale de la dérivée enrichie sera donc la moyenne arithmétique de ces deux contributions.



**Figure 3.4** Exemple de répartition des interpolations (toutes les cellules ne sont pas traitées sur le dessin)

### 3.1.4 Taux de convergence de l'estimation d'erreur

#### 3.1.4.1 *Définition du taux de convergence*

La norme de l'erreur globale (sur tout le domaine) peut s'exprimer en fonction d'une taille caractéristique des éléments [36].

$$\|e\|_m \sim h^p \quad (3.21)$$

De plus, l'erreur globale peut s'exprimer en fonction de l'erreur sur chaque élément :

$$\|e\|_m = \left( \sum_{\text{éléments } k} \|e_k\|_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.22)$$

L'erreur élémentaire peut également s'exprimer en fonction de la taille de l'élément considéré :

$$\|e_k\|_m \sim h_k^p \quad (3.23)$$

Ici,  $m$  correspond au type de norme choisie pour exprimer l'erreur. Dans le cas de la norme énergie  $H^1$ , utilisée pour exprimer l'erreur en vitesse,  $m$  vaut un. Pour la norme  $L_2$ , utilisée pour la pression,  $m$  vaut zéro.

Sous l'hypothèse de la condition de Babuška-Brezzi (voir section 2.3.1) et en supposant que la vitesse et la pression soient suffisamment régulières, on a pour l'élément MINI [31 : théorème 4.21] :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} &\leq Ch (\|u\|_{2,\Omega} + \|p\|_{1,\Omega}) \\ \|u - u_h\|_{0,\Omega} &\leq Ch^2 (\|u\|_{2,\Omega} + \|p\|_{1,\Omega}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Pour l'élément Taylor-Hood [31 : théorème 4.26] :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} &\leq Ch^2 (\|u\|_{3,\Omega} + \|p\|_{2,\Omega}) \\ \|u - u_h\|_{0,\Omega} &\leq Ch^3 (\|u\|_{3,\Omega} + \|p\|_{2,\Omega}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

De même, pour l'élément stabilisé, puisqu'on utilise un polynôme de degré 1, on obtient [31 : théorème 4.40 et corollaire 4.41] :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} &\leq Ch (\|u\|_{2,\Omega} + \|p\|_{1,\Omega}) \\ \|u - u_h\|_{0,\Omega} &\leq Ch^2 (\|u\|_{2,\Omega} + \|p\|_{1,\Omega}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Même si l'espace des solutions ne respecte pas la condition de Babuška-Brezzi.

En utilisant les inégalités entre les normes  $H^1$  et  $L_2$  de la vitesse et ces relations, on en déduit les taux de convergence et les normes appropriées pour ces éléments. Ces résultats sont résumés dans le Tableau 3.1.

**Tableau 3.1** Taux de convergence théoriques pour les différents types d'élément

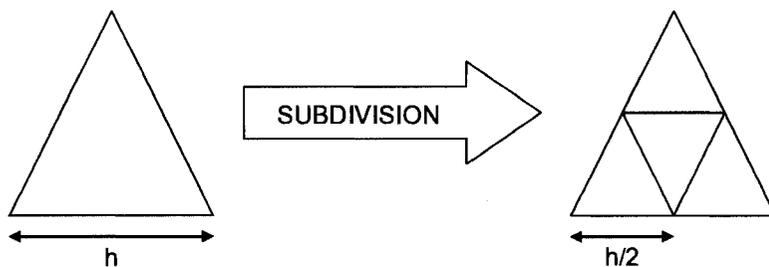
	MINI	TAYLOR-HOOD	P1-P1 STABILISÉ
$\ u - u_h\ _{1,\Omega}$	O(h)	O(h <sup>2</sup> )	O(h)
$\ p - p_h\ _{0,\Omega}$	O(h)	O(h <sup>2</sup> )	O(h)
Taux de convergence	<b>p<sub>th</sub>=1</b>	<b>p<sub>th</sub>=2</b>	<b>p<sub>th</sub>=1</b>

Ces taux de convergence théoriques sont des optimaux qui ne seront atteints qu'en l'absence d'irrégularités géométriques.

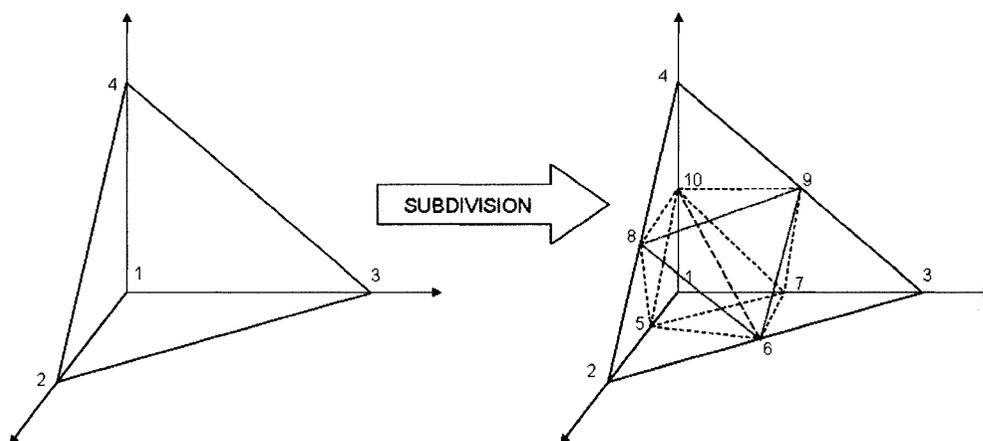
#### 3.1.4.2 *Calcul du taux de convergence par raffinement global du maillage*

Pour estimer le taux de convergence de l'erreur pour un problème donné, il suffit de générer un maillage initial, puis de générer une série de maillages en raffinant à chaque étape l'ensemble du maillage. En 2D, chaque élément est divisé en quatre éléments identiques, et la taille caractéristique du maillage raffiné correspond à la moitié de la taille caractéristique du maillage précédent. En 3D, chaque tétraèdre est divisé en 8 tétraèdres, là encore la taille caractéristique est divisée par deux. Les techniques de subdivision en 2D et en 3D sont décrites dans le chapitre suivant.

Si on représente, sur un graphique logarithmique, l'erreur globale de chaque maillage en fonction de sa taille caractéristique, alors on doit obtenir une droite, dont la pente vaut p, le taux de convergence.



**Figure 3.5** Subdivision d'un élément 2D en quatre éléments



**Figure 3.6** Subdivision d'un élément 3D en huit éléments

Cette procédure utilise une subdivision de tous les éléments et donc un raffinement de l'ensemble du maillage, y compris aux endroits où ce ne serait pas nécessaire. Après plusieurs maillages, les temps de calcul deviennent donc très importants, ce qui limite le nombre de maillages possibles. C'est pourquoi on observera parfois un taux de convergence qui tend vers une valeur limite, sans pour autant l'atteindre pour la série de maillages utilisée.

Cette procédure n'est pas adaptée dans le cas de l'analyse d'un problème, c'est pourquoi il est nécessaire de mettre en place une procédure de subdivision adaptative, pour raffiner le maillage uniquement aux endroits où l'erreur est trop importante.

### 3.1.5 Erreur cible

#### 3.1.5.1 *Utilisation de l'erreur cible pour la procédure de subdivision adaptative*

Il est possible d'estimer l'erreur globale de la solution numérique, mais aussi l'erreur sur chaque élément. Le programme de subdivision adaptative du maillage présenté au chapitre suivant utilise une procédure d'équi-répartition de l'erreur sur l'ensemble des éléments. Pour cela, il est nécessaire de définir une erreur cible élémentaire. L'erreur de chaque élément sera ensuite comparée à cette erreur cible élémentaire. Si l'erreur d'un élément est trop importante, alors cet élément devra être subdivisé.

Cependant, contrairement aux méthodes de remaillage adaptatif, l'équi-répartition de l'erreur ne sera pas atteinte, car les nœuds du maillage ne sont pas déplacés. Au final, le but est donc d'obtenir pour chaque élément une erreur inférieure ou égale à l'erreur cible élémentaire. L'erreur cible élémentaire peut être reliée à une taille caractéristique cible de la même manière que pour l'erreur globale réelle :

$$\|e_{c,k}\|_m \sim h_c^p \quad (3.27)$$

Comme la procédure utilisée est une procédure d'équi-répartition de l'erreur, cette erreur cible élémentaire est identique pour tous les éléments du maillage et l'erreur cible globale peut se calculer ainsi, avec  $N$  le nombre d'éléments du maillage :

$$\|e_c\|_m = \sqrt{N} \|e_{c,k}\|_m \quad (3.28)$$

On définit alors le ratio de la taille de l'élément sur la taille cible, qui s'exprime en fonction du rapport de l'erreur élémentaire estimée sur l'erreur élémentaire cible :

$$\lambda_k = \frac{h_k}{h_c} \sim \left( \frac{\|e_k\|_m}{\|e_{c,k}\|_m} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.29)$$

En fonction de la valeur de ce ratio, il est possible de déterminer si l'élément considéré doit être subdivisé ou non. En théorie, l'élément devrait être coupé si le ratio est supérieur à un, cependant, on ne souhaite pas découper inutilement des éléments, c'est pourquoi on se laisse une marge en fixant un ratio critique légèrement supérieur à un. Pour toute la suite de cette étude, ce ratio critique est fixé à 1,2.

### 3.1.5.2 Calcul de l'erreur cible

Il existe trois méthodes de subdivision adaptative, qui se distinguent par la manière de fixer l'erreur cible à atteindre.

#### **Première méthode : diminution continue de l'erreur (ou Réduction d'Erreur)**

Pour cette première méthode, l'erreur cible n'est pas fixée, elle varie à chaque étape de raffinement. En effet, pour chaque maillage, à l'issue du calcul, l'erreur cible globale est calculée comme une fraction de l'erreur globale obtenue. L'erreur cible élémentaire est alors obtenue en divisant l'erreur cible globale par la racine carrée du nombre d'éléments constituant le maillage, et les éléments à subdiviser peuvent être identifiés.

Avec cette méthode, le processus ne s'arrête jamais. En effet, après avoir atteint l'erreur cible à une étape, une nouvelle erreur cible plus petite est redéfinie. L'erreur globale de la solution diminue donc continuellement au fil des itérations. Cette méthode est très bien adaptée dans le cas de calculs indépendants du temps. Cependant, elle est moins pratique à utiliser dans le cas de calculs transitoires.

#### **Deuxième méthode : Erreur cible relative fixée**

Avec cette méthode, l'utilisateur fixe une erreur relative cible à atteindre  $\|e_{c,r}\|_m$ . Cette erreur relative cible sert ensuite à calculer l'erreur cible globale pour le prochain maillage, en multipliant cette erreur relative cible par la norme de la solution courante :

$$\|e_c\|_m = \|e_{c,r}\|_m \|u\|_m \quad (3.30)$$

À partir de cette erreur cible globale, on déduit la valeur de l'erreur cible élémentaire, puis la liste des éléments à subdiviser.

Finalement, l'utilisation de cette méthode permet à l'utilisateur de fixer l'erreur cible globale sous la forme d'un pourcentage de la norme de la solution précédente.

### **Troisième méthode : Erreur cible absolue fixée**

Cette troisième méthode est semblable à la deuxième méthode, sauf que c'est directement l'erreur cible globale (absolue) qui est fixée par l'utilisateur, par exemple après un premier calcul permettant d'estimer la norme de la solution. De la même manière, l'erreur cible élémentaire est ensuite calculée à l'aide du nombre d'éléments du maillage, et il est possible d'établir la liste des éléments à subdiviser lors du prochain maillage.

## **3.2 Étude du taux de convergence par la méthode intégrale**

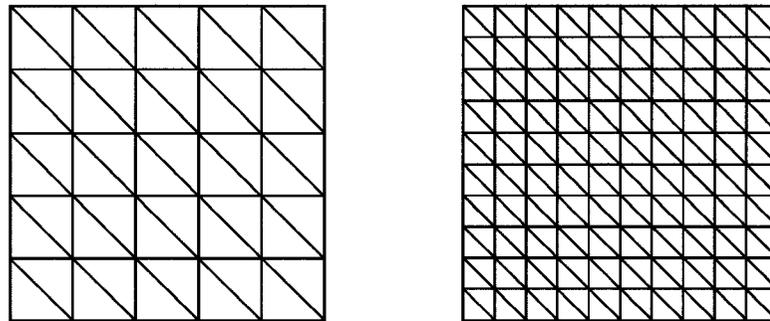
Pour étudier le taux de convergence obtenu par la méthode intégrale, il faut distinguer deux classes de problèmes : les solutions manufacturées et les solutions non manufacturées. On appelle solution manufacturée un problème dont on connaît la solution analytique. Ces problèmes sont intéressants, car il est alors possible de comparer l'erreur estimée de la solution numérique avec son erreur réelle.

### **3.2.1 Solutions manufacturées 2D**

Par solution manufacturée, on désigne un problème dont la solution analytique est connue et s'exprime de façon continue en fonction des coordonnées du problème.

### 3.2.1.1 Géométries régulières

Pour étudier les taux de convergence de solutions manufacturées, on utilise un carré, dont les coordonnées  $x$  et  $y$  vont de 0 à 1. Les maillages utilisés sont obtenus en générant un quadrillage régulier du carré. Les côtés du carré contiennent respectivement 5, 10, 20, 40, 80 et 160 éléments. La taille caractéristique d'un maillage correspond donc à la moitié de la taille caractéristique du maillage précédent.



**Figure 3.7** Exemple des deux premiers maillages du domaine carré

Les séries de calculs sont réalisées d'abord avec des éléments MINI. On devrait obtenir un taux de convergence de 1. Puis les mêmes calculs sont réalisés avec des éléments de type Taylor-Hood (TH), pour lesquels on devrait obtenir un taux de convergence de 2. Finalement on étudiera un troisième élément, l'élément P1-P1 stabilisé appelé plus loin STAB.

Deux problèmes sont analysés sur cette géométrie : le problème de Blasius et le problème de Smith-Hutton. On calcule pour chaque problème une solution numérique avec EF5 pour toute la série de maillages. Connaissant la solution analytique, l'erreur obtenue par la méthode intégrale est comparée à l'erreur calculée entre la solution numérique et la solution analytique.

Pour le problème de Blasius, la composante horizontale de vitesse s'écrit sous la forme [32] :

$$u_{Bl} = u_0 \left[ 1 - \exp \left( -\alpha y \sqrt{\frac{u_0 \eta}{x}} \right) \right] \quad (3.31)$$

Pour simplifier le problème, on impose les valeurs suivantes :

- l'amplitude de vitesse  $u_0$  vaut 1.
- La constante  $\alpha$  vaut 1.
- La viscosité  $\eta$  vaut 0.01.

Finalement, l'équation (3.31) se simplifie et l'expression de  $u$  devient :

$$u_{Bl} = 1 - \exp \left( -10 \frac{y}{\sqrt{x}} \right) \quad (3.32)$$

Pour déterminer l'expression de la composante verticale de vitesse  $v$ , on utilise l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u_{Bl}}{\partial x} + \frac{\partial v_{Bl}}{\partial y} = 0 \quad (3.33)$$

Ces expressions de  $u$  et  $v$  sont imposées aux bornes du domaine comme conditions de Dirichlet. De plus, afin de déterminer le niveau de pression, on impose une pression nulle en un nœud du maillage, car la pression théorique du problème de Blasius est nulle :

$$p_{Bl} = 0 \quad (3.34)$$

On résout alors sur ce domaine les équations de Stokes. Les termes sources qui apparaîtront dans les équations s'obtiennent grâce aux formules suivantes :

$$Fu_{Bl} = -\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.35)$$

$$Fv_{Bl} = -\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.36)$$

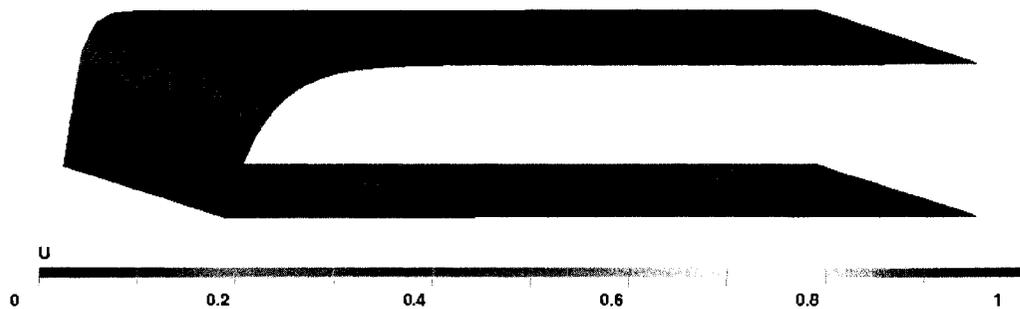


Figure 3.8 Profil de  $u$  obtenu pour le problème de Blasius

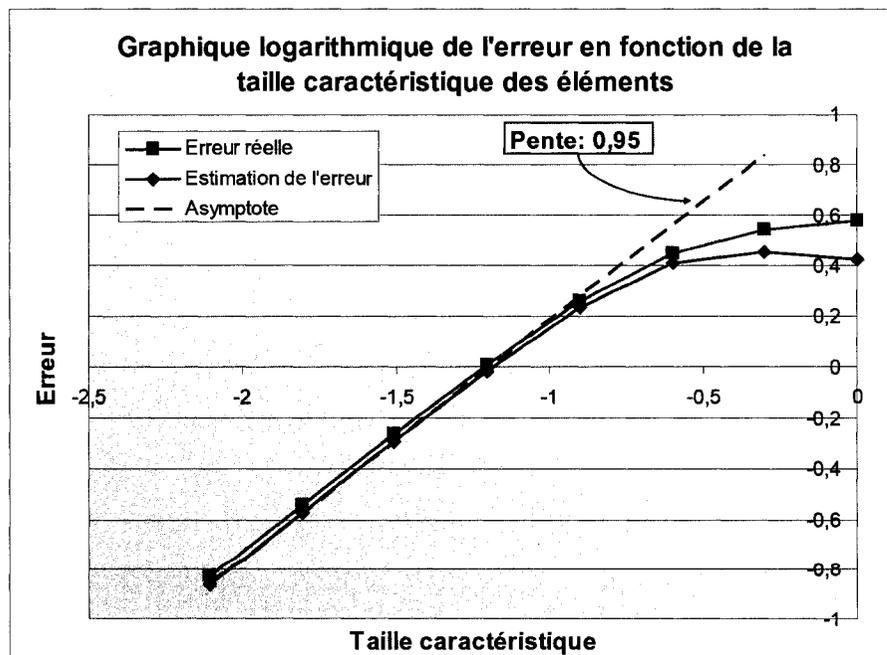
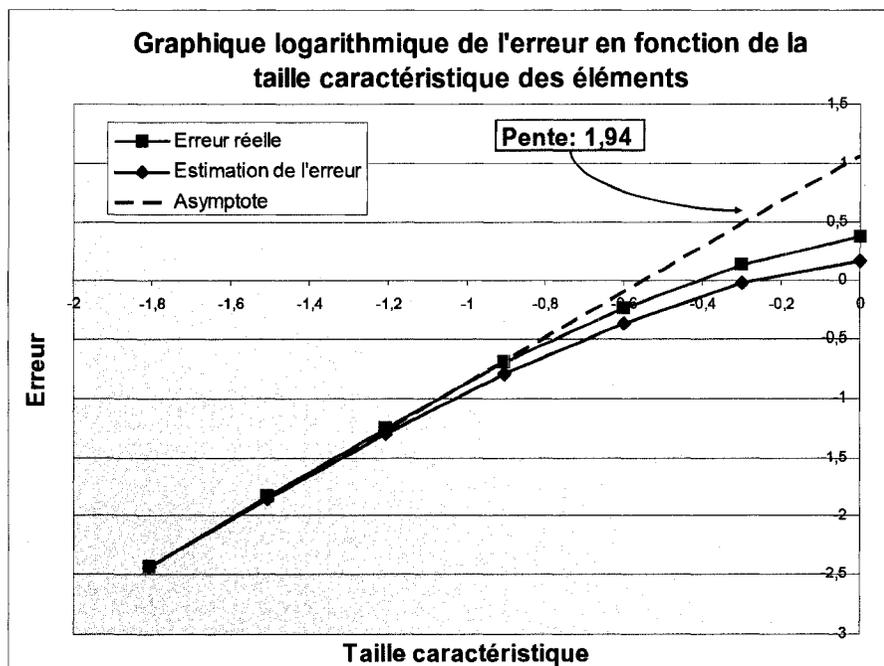


Figure 3.9 Estimation d'erreur (problème de Blasius), élément MINI



**Figure 3.10** Estimation d'erreur (problème de Blasius), élément Taylor-Hood

**Tableau 3.2** Taux de convergence de l'estimation d'erreur (Blasius)

Maillage	Triangles	Élément MINI		Élément Taylor-Hood	
		Nb de nœuds	Taux de convergence	Nb de nœuds	Taux de convergence
1	40	67	X	93	X
2	160	253	-0,103	345	0,589
3	640	985	0,153	1329	1,179
4	2560	3889	0,581	5217	1,408
5	10240	15457	0,829	20673	1,665
6	40960	61633	0,918	82305	1,849
7	163840	246145	0,944	328449	1,936
8	655360	983809	0,964	X	X

Pour chaque maillage, on calcule un taux de convergence local en tenant uniquement compte de l'erreur sur le maillage précédent. En observant l'évolution de ces taux de convergence, on constate qu'on tend vers un taux de 1 pour l'élément MINI et un taux de 2 pour l'élément Taylor-Hood, ce qui correspond aux taux théoriques attendus pour

ces deux types d'éléments. Mais ces taux ne sont toujours pas atteints avec près de 100 000 nœuds pour l'élément MINI. Cependant il ne s'agit pas d'une solution qui peut être approchée par la base polynomiale des éléments, contrairement au problème suivant (problème de Smith-Hutton). De plus, la pression n'est pas parfaitement nulle sur le domaine, on obtient une pression uniforme proche de -0,2 pour l'élément MINI et 0,002 pour l'élément Taylor-Hood.

Pour le problème de Smith-Hutton, les composantes de vitesse sont connues et imposées sur les bords du domaine :

$$u_{SH} = 2y(1 - x^2) \quad (3.37)$$

$$v_{SH} = -2x(1 - y^2) \quad (3.38)$$

De plus, pour le problème de Smith-Hutton on a :

$$p_{SH} = 0 \quad (3.39)$$

On impose donc une pression nulle en un point du domaine.

On en déduit les termes sources pour les équations de Navier-Stokes :

$$Fu_{SH} = 4\mu y + \rho \left[ -8y^2(1 - x^2)x - 2x(1 - y^2)(2 - 2x^2) \right] \quad (3.40)$$

$$Fv_{SH} = -4\mu x + \rho \left[ -8x^2(1 - y^2)y - 2y(1 - x^2)(2 - 2y^2) \right] \quad (3.41)$$

Pour les éléments MINI et Taylor-Hood, on résout les équations de Stokes pour que les calculs soient plus rapides. Mais les taux seraient les mêmes si on résolvait les équations de Navier-Stokes. Le même problème est ensuite résolu avec l'élément STAB, mais cette fois-ci avec les équations de Navier-Stokes.

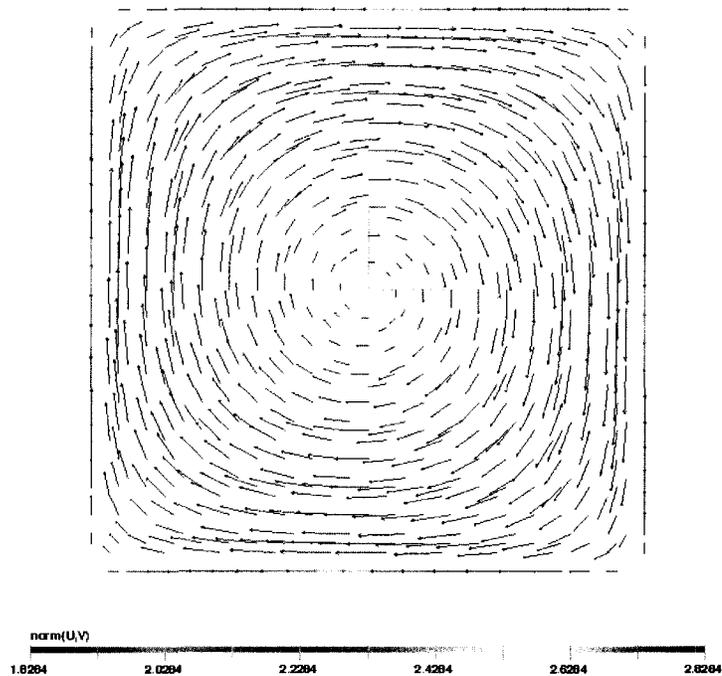


Figure 3.11 Vecteurs vitesses pour une solution au problème de Smith-Hutton

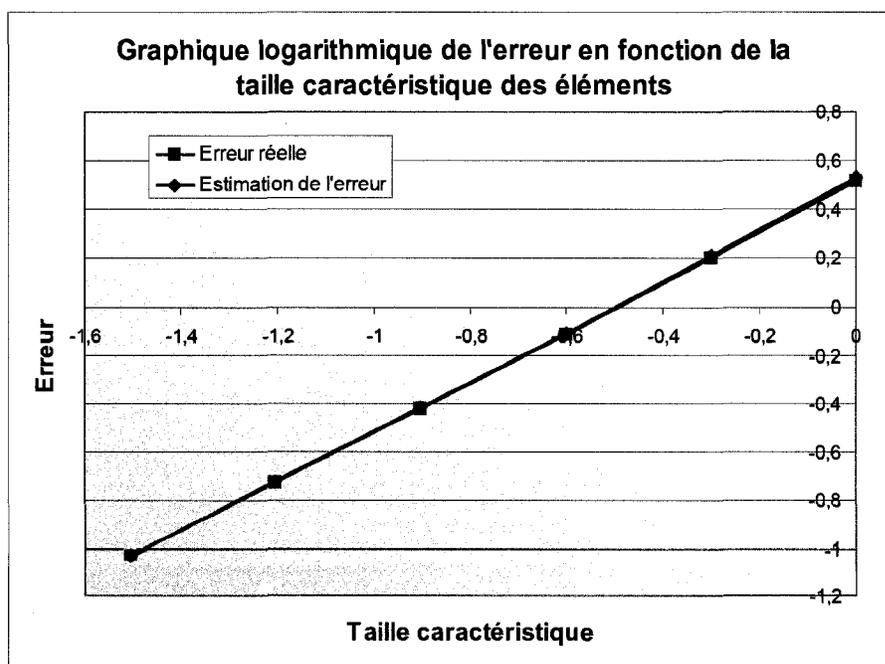
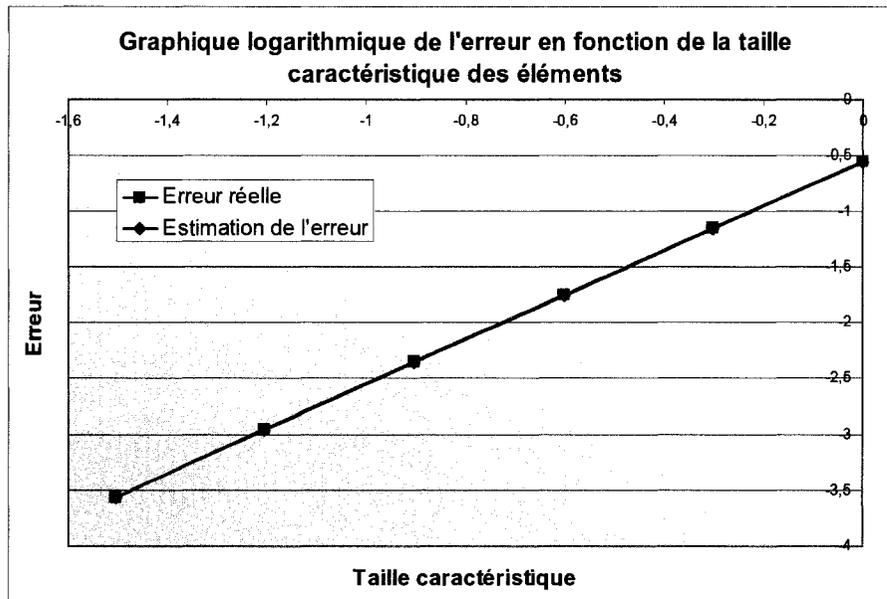


Figure 3.12 Estimation d'erreur (problème de Smith-Hutton), élément MINI



**Figure 3.13** Estimation d'erreur (problème de Smith-Hutton), élément Taylor-Hood

On constate que l'erreur estimée est très proche de l'erreur réelle, qui a été directement calculée entre la solution numérique et la solution analytique. De plus, la solution numérique en pression est bien nulle sur tout le domaine.

**Tableau 3.3** Taux de convergence de l'estimation d'erreur (Smith-Hutton)

Maillage	Triangles	Élément MINI		Élément Taylor-Hood	
		Nb de nœuds	Taux de convergence	Nb de nœuds	Taux de convergence
1	50	86	X	121	X
2	200	321	1,071	441	1,981
3	800	1241	1,051	1681	1,990
4	3200	4881	1,030	6561	1,995
5	12800	19361	1,016	25921	1,997
6	51200	77121	1,009	103041	1,999

On tend donc vers un taux de convergence de 1 pour l'élément MINI et un taux de convergence de 2 pour l'élément Taylor-Hood. À l'inverse du problème de Blasius, la zone asymptotique est directement atteinte pour le problème de Smith-Hutton. En effet,

la solution analytique, ainsi que les termes sources, sont polynomiaux en  $x$  et  $y$ . Ils peuvent donc être efficacement approchés par la base polynomiale des éléments.

Les mêmes simulations sont réalisées avec l'élément stabilisé, mais cette fois-ci en résolvant les équations de Navier-Stokes (avec un nombre de Reynolds égal à 1000) et non les équations de Stokes.

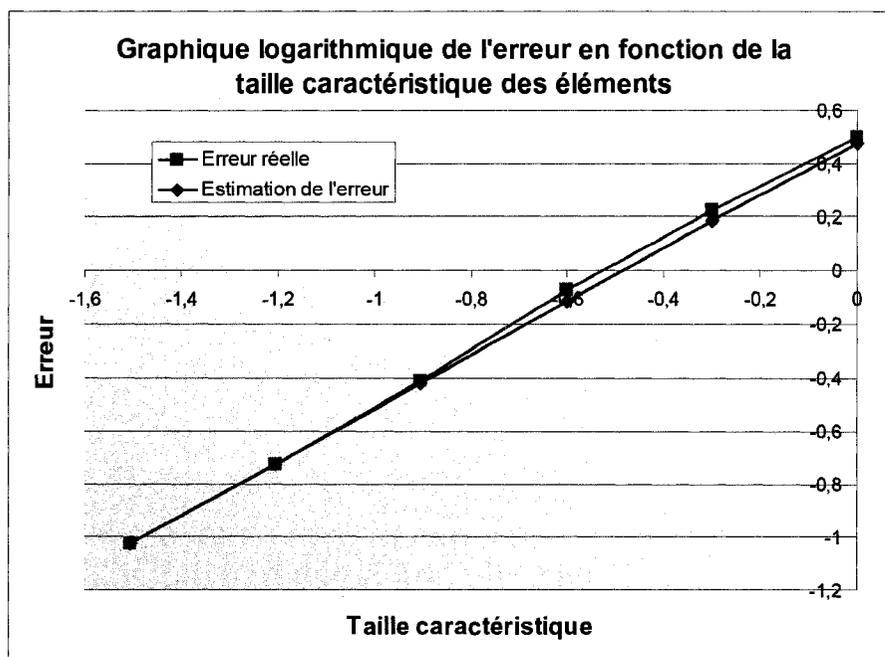


Figure 3.14 Estimation d'erreur (problème de Smith-Hutton), élément P1-P1 stabilisé

**Tableau 3.4** Taux de convergence de l'estimation d'erreur (Smith-Hutton), élément P1-P1 stabilisé

Maillage	Nb de triangles	Élément STAB	
		Nb de nœuds	Taux de convergence
1	50	36	X
2	200	121	0,959
3	800	441	1,002
4	3200	1681	1,016
5	12800	6561	1,008
6	51200	25921	1,003

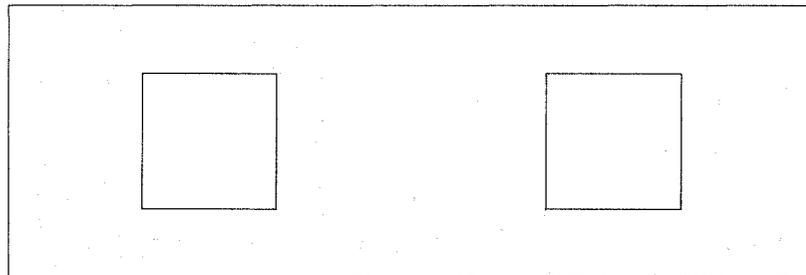
On tend donc vers un taux de convergence de 1 pour l'élément stabilisé.

Finalement, la méthode d'estimation d'erreur donne de bons taux de convergence pour des solutions manufacturées sur des géométries régulières.

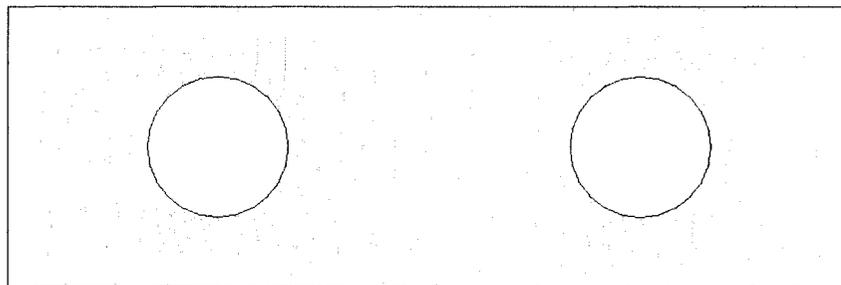
### 3.2.1.2 Géométries non régulières

Afin de vérifier que les solutions non manufacturées donnent de bons taux de convergence quelle que soit la géométrie, on applique le problème de Smith-Hutton à une géométrie non régulière.

Cette géométrie représente un canal rectangulaire comprenant deux obstacles ou trous, carrés puis ronds. Cette géométrie est maillée à l'aide de Comsol, qui permet de subdiviser tous les éléments du maillage. On crée donc une succession de maillages, dont la taille caractéristique est divisée par deux à chaque étape.



**Figure 3.15** Maillage initial du canal avec des trous carrés



**Figure 3.16** Maillage initial du canal avec des trous ronds

On reprend les termes sources calculés précédemment pour le problème de Smith-Hutton, et on applique des conditions de Dirichlet (avec les expressions de  $u_{SH}$  et de  $v_{SH}$ ) sur toutes les frontières, les bords du canal ainsi que sur les contours des trous. On détermine également le niveau de pression, en imposant une pression nulle sur un nœud du maillage ( $p_{SH}=0$ ).

**Tableau 3.5** Taux de convergence de l'estimation d'erreur pour le problème de Smith-Hutton appliqué au canal avec des trous carrés

Maillage	Nb de triangles	Élément MINI		Élément Taylor-Hood	
		Nb de nœuds	Taux de convergence	Nb de nœuds	Taux de convergence
1	260	421	X	583	X
2	1040	1623	1,010	2207	1,981
3	4160	6367	1,003	8575	1,989
4	16640	25215	1,005	33791	1,994
5	66560	100351	1,004	134143	1,997

**Tableau 3.6** Taux de convergence de l'estimation d'erreur pour le problème de Smith-Hutton appliqué au canal avec des trous rond

Maillage	Élément MINI			Élément Taylor-Hood	
	Nb de triangles	Nb de nœuds	Taux de convergence	Nb de nœuds	Taux de convergence
1	652	1024	X	1397	X
2	2608	40005	1,004	5403	1,967
3	10432	15835	0,998	21239	1,982
4	41728	62967	1,004	84207	1,991
5	166912	251119	1,004	335327	1,995

Quel que soit le type d'élément utilisé, les taux de convergence tendent bien vers les taux théoriques pour les deux géométries (1 pour l'élément MINI et 2 pour l'élément Taylor-Hood). Les singularités géométriques n'ont donc pas d'influence sur le taux de convergence de l'estimation d'erreur en vitesse, dans le cas de solutions manufacturées. En effet, les conditions limites du problème sont recalculées pour chaque maillage à partir de la solution analytique et ne changent donc pas d'un maillage à l'autre.

### 3.2.1.3 Conclusion sur les solutions manufacturées

Finalement, quelle que soit la géométrie, une solution manufacturée permet d'obtenir les bons taux de convergence pour l'estimation d'erreur par la méthode intégrale.

### 3.2.2 Solutions non manufacturées 2D

Après avoir étudié le taux de convergence de l'estimation d'erreur sur des solutions manufacturées, on s'intéresse à des solutions non manufacturées, afin de se rapprocher des situations réelles. Pour cela, on reprend les deux géométries présentées précédemment, le canal avec des trous carrés et le canal avec des trous ronds.

### 3.2.2.1 Définition du problème

On résout sur ces géométries les équations de Stokes. Le côté gauche du domaine correspond à l'entrée du canal. On impose un profil parabolique de vitesse  $u$  en entrée. La vitesse  $v$  est nulle à l'entrée.

À la sortie, sur le côté droit du canal, la vitesse  $v$  est nulle mais aucune condition n'est imposée sur  $u$ . De cette manière, on impose une condition de traction normale nulle en sortie, ce qui permet également de déterminer le niveau de pression. Il n'y a donc pas besoin d'imposer une pression sur un nœud du domaine. Sur toutes les autres frontières, les deux composantes de la vitesse sont nulles.

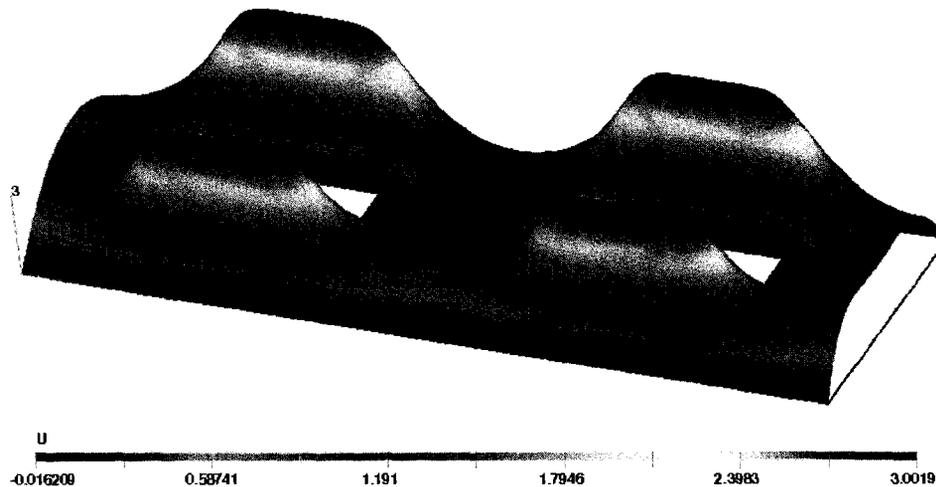
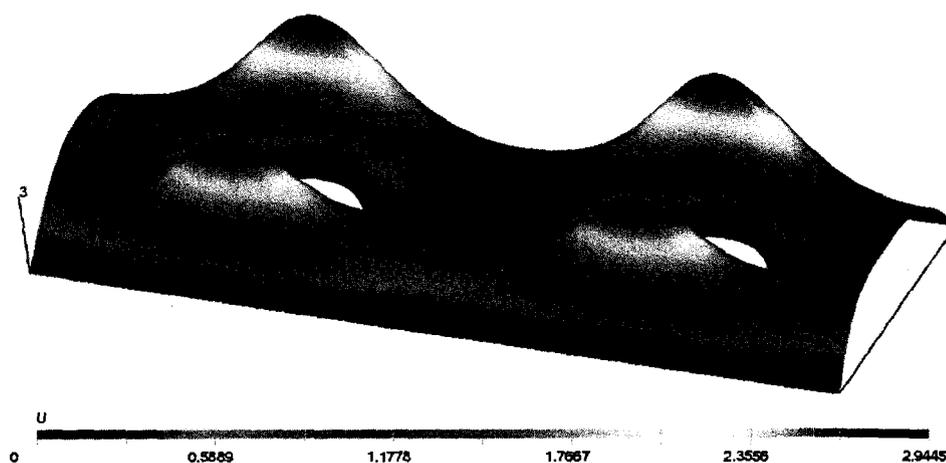
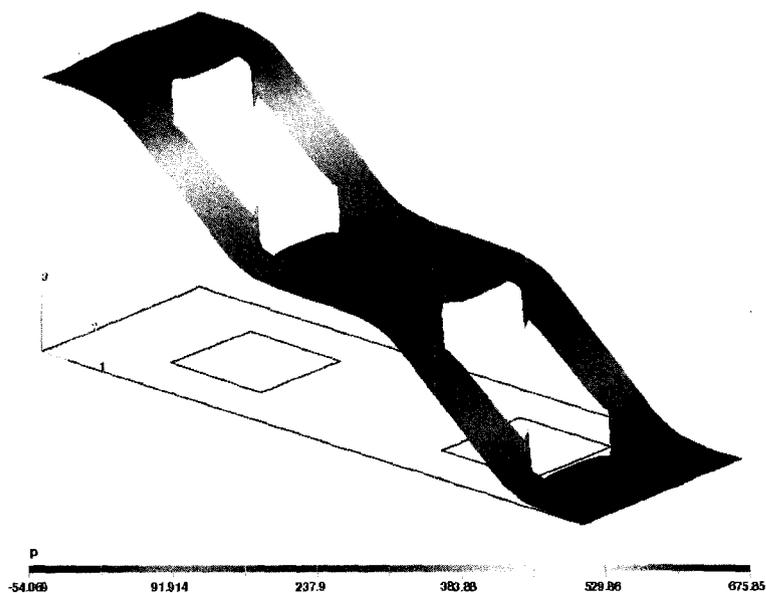


Figure 3.17 Profil de la vitesse axiale  $u$  dans le canal avec trous carrés



**Figure 3.18** Profil de la vitesse axiale  $u$  dans le canal avec trous ronds



**Figure 3.19** Profil de la pression  $p$  dans le canal avec trous carrés

En observant la répartition de la pression sur le canal avec des trous carrés, on constate huit singularités en pression au niveau des quatre coins de chacun des deux trous carrés. Or, la pression correspond au multiplicateur de Lagrange des équations de Navier-Stokes. Donc une singularité en pression affecte la vitesse.

### 3.2.2.2 Taux de convergence de l'estimation d'erreur

**Tableau 3.7** Taux de convergence de l'estimation d'erreur pour l'écoulement dans un canal avec trous carrés

Maillage	Nb de triangles	Élément MINI		Élément Taylor-Hood	
		Nb de nœuds	Taux de convergence	Nb de nœuds	Taux de convergence
1	260	421	X	583	X
2	1040	1623	0,965	2207	0,644
3	4160	6367	0,759	8575	0,578
4	16640	25215	0,666	33791	0,559
5	66560	100351	0,613	134143	0,552

**Tableau 3.8** Taux de convergence de l'estimation d'erreur pour l'écoulement dans un canal avec trous ronds

Maillage	Nb de triangles	Élément MINI		Élément Taylor-Hood	
		Nb de nœuds	Taux de convergence	Nb de nœuds	Taux de convergence
1	652	1024	X	1397	X
2	2608	4005	0,996	5403	1,632
3	10432	15835	0,997	21239	1,595
4	41728	62967	1,002	84207	1,556
5	166912	251119	1,003	335327	1,531

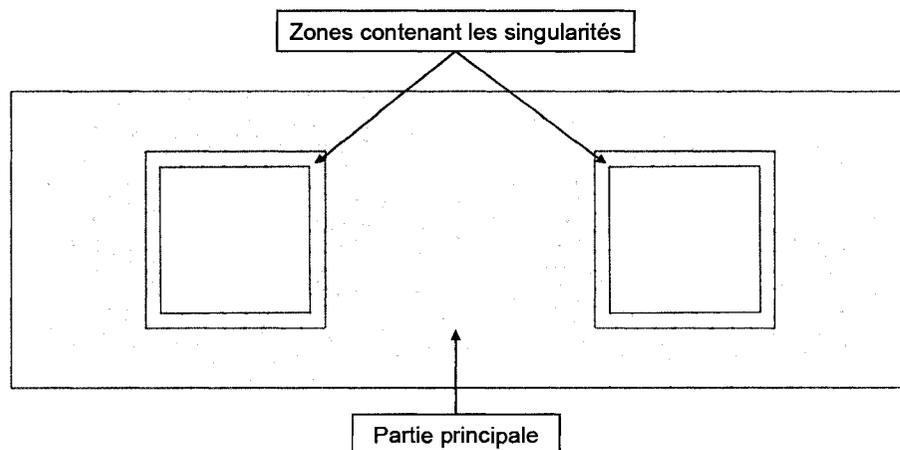
La récupération de l'erreur est tout d'abord réalisée sur l'ensemble du domaine maillé. On obtient alors des taux de convergence inférieurs aux taux théoriques attendus. En effet, pour le canal avec les trous carrés, le taux de convergence tend vers 0,6 pour l'élément MINI (au lieu de 1) et vers un taux de 0,55 pour l'élément Taylor-Hood (au lieu de 2). Pour le canal avec les trous ronds, le taux de convergence de l'élément MINI tend vers la valeur attendue 1, tandis que l'élément Taylor-Hood tend vers un taux de convergence légèrement inférieur à celui attendu (1,5).

Pour l'élément stabilisé, on résout les équations de Navier-Stokes, avec un nombre de Reynolds qui vaut 400.

**Tableau 3.9** Taux de convergence de l'estimation d'erreur pour l'écoulement dans un canal avec trous carrés ou ronds pour l'élément P1-P1 stabilisé

Maillage	Canal à trous carrés			Canal à trous ronds		
	Triangles	Nœuds	Convergence	Triangles	Nœuds	Convergence
1	260	161	X	652	372	X
2	1040	583	0,573	2608	1397	0,399
3	4160	2207	0,431	10432	5403	0,685
4	16640	8575	0,295	41728	21239	0,918
5	66560	33791	0,624	166912	84207	0,980

On retrouve pour l'élément stabilisé les mêmes résultats que pour l'élément MINI : on obtient le bon taux de convergence pour le canal avec les trous ronds, mais le taux de convergence du canal avec les trous carrés est inférieur au taux théorique attendu. Afin de vérifier que la présence des trous est responsable des mauvais taux de convergence obtenus, le domaine est séparé en trois sous-domaines, pour séparer les zones proches des trous du reste du domaine.



**Figure 3.20** Séparation du domaine du canal avec trous carrés en trois sous-domaines

L'estimation d'erreur est alors réalisée sur les trois parties séparément. Comme attendu, les deux zones contenant les singularités donnent les mêmes taux de convergence. De plus, on constate que les taux de convergence obtenus dans la partie principale tendent vers les taux théoriques attendus (1 pour l'élément MINI et 2 pour l'élément Taylor-Hood).

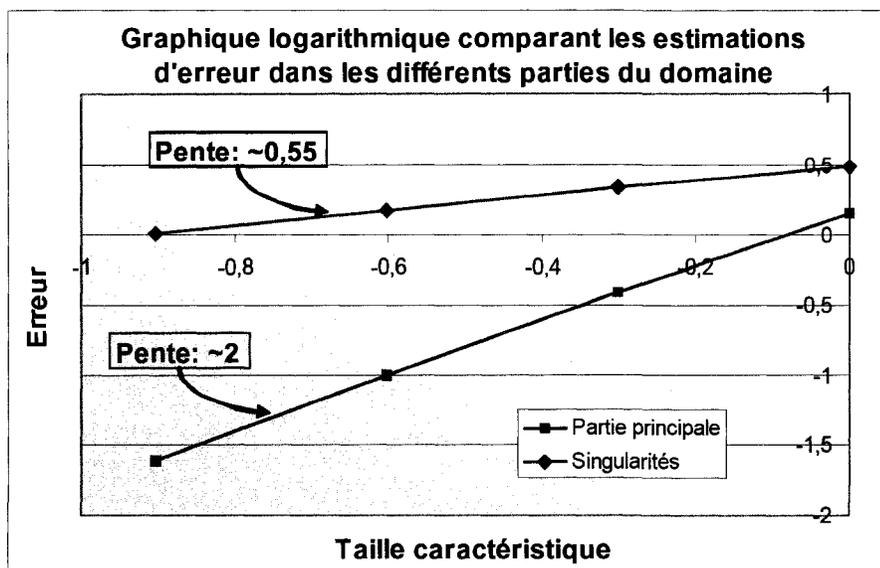


Figure 3.21 Erreurs estimées dans le canal avec trous carrés, élément Taylor-Hood

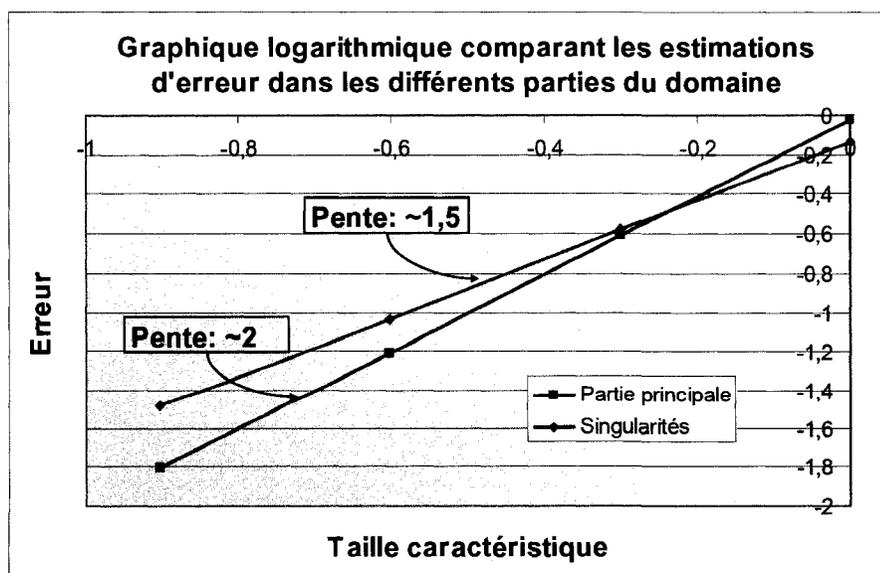


Figure 3.22 Erreurs estimées dans le canal avec trous ronds, élément Taylor-Hood

**Tableau 3.10** Taux de convergence des trois parties pour le canal avec trous carrés

Maillage	Triangles	Élément MINI		Élément Taylor-Hood	
		Partie Principale	Singularités	Partie Principale	Singularités
1	800	X	X	X	X
2	3200	1,033	0,309	1,857	0,481
3	12800	1,059	0,507	2,002	0,555
4	51200	1,021	0,542	1,997	0,552
5	204800	1,009	0,546	X	X

**Tableau 3.11** Taux de convergence des trois parties pour le canal avec trous ronds

Maillage	Triangles	Élément MINI		Élément Taylor-Hood	
		Partie Principale	Singularités	Partie Principale	Singularités
1	706	X	X	X	X
2	2824	1,005	0,807	1,950	1,468
3	11296	1,011	0,985	1,991	1,514
4	45184	1,009	1,000	1,995	1,510
5	180736	1,006	1,003	1,997	1,506

Les calculs ont également été refaits avec l'élément stabilisé, pour le canal avec les trous carrés, en isolant les zones de singularités. Cette fois-ci les équations résolues sont les équations de Navier-Stokes avec un nombre de Reynolds valant 400. On retrouve bien le taux de 1 dans la partie principale et des mauvais taux dans les zones de singularité. L'élément stabilisé se comporte donc comme l'élément MINI, en ce qui concerne la récupération de l'erreur.

Les calculs sur le canal avec des trous carrés et des domaines séparés ont été refaits avec les éléments MINI et Taylor-Hood, en résolvant non plus les équations de Stokes, mais bien les équations de Navier-Stokes, avec un nombre de Reynolds valant 400. En ce qui concerne l'élément MINI, on constate que le calcul converge vers une solution non symétrique sur le canal avec des trous carrés. En effet, l'élément MINI n'est pas adapté pour résoudre les équations de Navier-Stokes à cause des termes non linéaires, absents

dans l'équation de Stokes. À l'inverse, l'élément Taylor-Hood donne des résultats satisfaisants du point de vue de la symétrie, et l'étude de la récupération de l'erreur montre que les taux de convergence sont identiques à ceux obtenus pour les équations de Stokes.

### 3.2.2.3 Conclusions sur les solutions non manufacturées

**Tableau 3.12** Tableau récapitulatif des taux de convergence sur les deux canaux

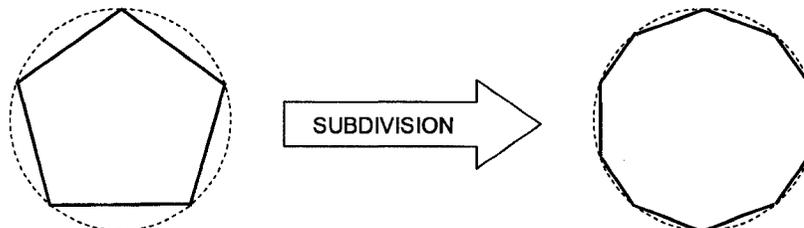
	Canal avec trous carrés		Canal avec trous ronds	
	MINI	Taylor-Hood	MINI	Taylor-Hood
Taux théoriques	1	2	1	2
Tout le domaine	0,61	0,55	1	1,5
Partie principale	1,01	2	1,01	1,99
Zones de singularités	0,55	0,55	1	1,51

La séparation en plusieurs parties montre que la méthode intégrale d'estimation d'erreur donne de bons taux de convergence pour des géométries régulières. Dans le premier cas, le cas du canal avec des trous carrés, les singularités correspondent aux huit coins des deux trous. Il s'agit de singularités géométriques, identiques d'un maillage sur l'autre, dues à la présence d'angles concaves. Ces singularités affectent le taux de convergence pour les deux types d'éléments considérés. En effet, on a vu que ces singularités géométriques ont créé des singularités de pression qui affectent la vitesse.

Dans le second cas, le cas du canal avec des trous ronds, l'erreur sur le taux de convergence s'explique par le fait que la géométrie change d'un maillage à l'autre. En effet, le cercle est approximé par un polygone, et le nombre d'arêtes de ce polygone augmente lorsqu'on raffine le maillage. La géométrie change donc d'un maillage à l'autre.

De plus, l'approximation du cercle par un polygone crée des angles concaves, qui affectent le taux de convergence, comme on a montré pour le canal avec les trous carrés (bien que la valeur de ces angles soit inférieure à celle des angles présents sur les trous carrés). Enfin, lorsqu'on raffine le maillage, la valeur de ces angles concaves diminue, ce qui fait à nouveau varier le taux de convergence. En effet, le raffinement du maillage est réalisé avec Comsol, qui prend en compte la géométrie, autrement dit la courbure des deux cercles. Par exemple, dans le cas de l'élément MINI dans les zones contenant les singularités, pour les premiers maillages, là où les angles sont les plus importants, le taux de convergence vaut environ 0,8. Pour les maillages plus fins, les singularités sont plus nombreuses mais moins intenses, on tend alors vers un taux de convergence de 1.

Finalement, les mauvais taux de convergence obtenus sur tout le domaine du canal avec ronds s'expliquent par l'accumulation de deux phénomènes : la présence d'angles concaves, et la modification de la géométrie d'un maillage sur l'autre.



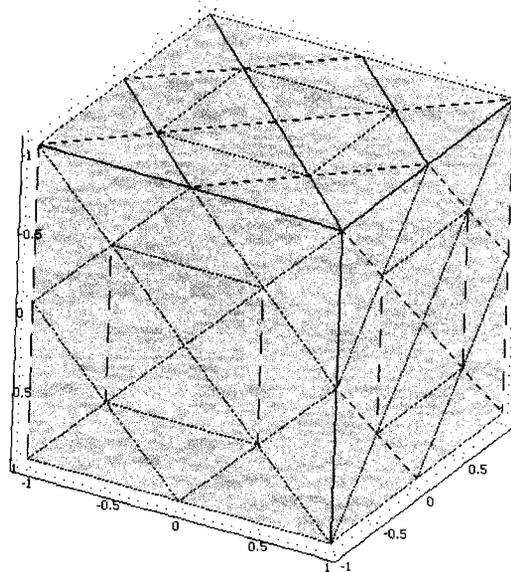
**Figure 3.23** Modification de la géométrie lors du raffinement du maillage par Comsol

En conclusion, la méthode intégrale d'estimation d'erreur permet d'obtenir de bons taux de convergence en dehors des zones contenant des singularités géométriques pour les solutions non manufacturées

### 3.2.3 Solution manufacturée 3D

Après avoir obtenu de bons résultats avec l'estimation d'erreur en 2D, celle-ci est testée en 3D. Pour cela, on construit une nouvelle solution manufacturée inspirée du problème de Smith-Hutton mais en 3D.

La géométrie utilisée est un cube centré en  $(0,0,0)$  de longueur 2. Chacune des trois coordonnées va donc de -1 à 1. Le maillage initial est un maillage structuré constitué de tétraèdres, les maillages suivants sont obtenus grâce au programme de raffinement global 3D. Les tétraèdres sont donc coupés en 8 à chaque étape, la taille caractéristique du maillage est donc divisée par 2.



**Figure 3.24** Maillage initial du cube

Les séries de calculs sont réalisées avec les éléments linéaires P1-P1 stabilisés. Le taux de convergence théorique de cet élément vaut 1. La solution au problème de Smith-Hutton étendu au 3D s'écrit :

$$u_{SH3D} = 2yz(1 - x^2) \quad (3.42)$$

$$v_{SH3D} = 2xz(1 - y^2) \quad (3.43)$$

$$w_{SH3D} = -2xy(1 - z^2) \quad (3.44)$$

$$p_{SH3D} = 0 \quad (3.45)$$

Ces vitesses sont imposées comme conditions de Dirichlet sur le bord du domaine. Pour fixer le niveau de pression à zéro, une pression nulle est imposée en un point du maillage.

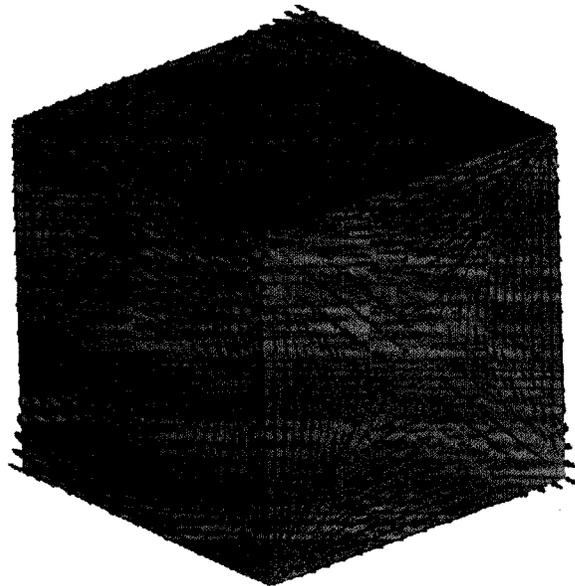
On en déduit les termes sources pour les équations de Navier-Stokes :

$$Fu_{SH3D} = 4\mu yz + \rho(1-x^2) \left[ -8xy^2z^2 + 4xz^2(1-y^2) - 8xy^2(1-z^2) \right] \quad (3.46)$$

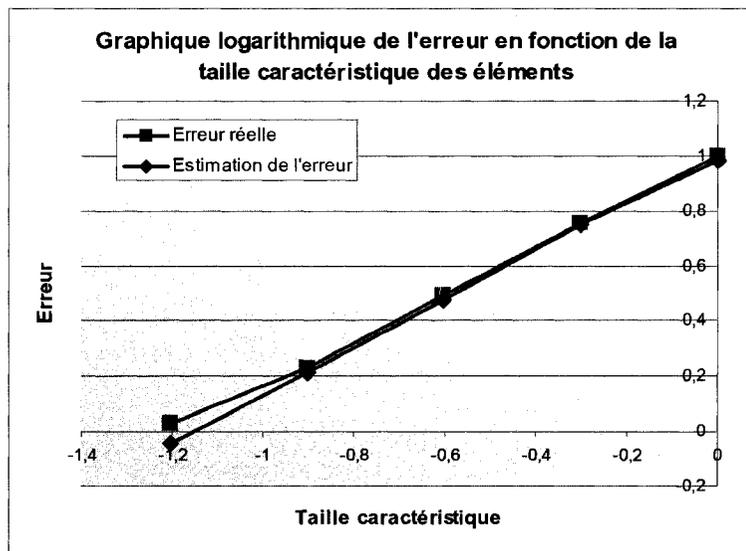
$$Fv_{SH3D} = 4\mu xz + \rho(1-y^2) \left[ -8x^2yz^2 + 4yz^2(1-x^2) - 8x^2y(1-z^2) \right] \quad (3.47)$$

$$Fw_{SH3D} = -8\mu xy + \rho(1-z^2) \left[ -32x^2y^2z - 8y^2z(1-x^2) - 8x^2z(1-y^2) \right] \quad (3.48)$$

On résout les équations de Navier-Stokes stabilisées, le nombre de Reynolds vaut 1000.



**Figure 3.25** Vecteurs vitesses pour une solution au problème de Smith-Hutton 3D



**Figure 3.26** Estimation d'erreur pour le problème de Smith-Hutton 3D

On constate que l'erreur estimée est à nouveau très proche de l'erreur réelle, qui a été directement calculée entre la solution numérique et la solution analytique.

**Tableau 3.13** Taux de convergence de l'estimation d'erreur (Smith-Hutton 3D)

Maillage	Nb de tétraèdres	Élément P1-P1	
		Nb de nœuds	Taux de convergence
1	192	63	X
2	1536	365	0,787
3	12 288	2457	0,899
4	98 304	17 969	0,883
5	786 432	137 313	0,843

On tend donc vers un taux de convergence de 0,85 ce qui inférieur au taux théorique valant 1. Des efforts ont été faits pour identifier un problème quelconque qui affecterait ce taux. Par exemple, on a augmenté le nombre de points de Gauss utilisés pour la méthode d'intégration de Gauss. Mais à date, aucune explication n'a été trouvée et 0,85 reste le meilleur taux que nous avons pu obtenir.

## CHAPITRE 4

### SUBDIVISION ADAPTATIVE DE MAILLAGE

#### 4.1 Raffinement de maillage

La taille des éléments est un choix essentiel pour obtenir une bonne solution. En effet, plus un maillage sera fin, plus l'erreur sur la solution sera faible. Ce lien entre la taille du maillage et l'erreur sur la solution a été mis en évidence au chapitre précédent lors de l'étude du taux de convergence de l'erreur sur la vitesse. Pour réaliser cette étude, il a fallu utiliser des séries de maillages de plus en plus fins. C'est pourquoi on a développé un programme de raffinement global de maillage, dont le fonctionnement est présenté dans ce chapitre.

Mais en règle générale, la solution d'un problème présente des zones de forts gradients de vitesse et des zones à faibles gradients de vitesse. L'erreur sera plus importante dans les zones à forts gradients de vitesse. L'idéal sera donc d'avoir un maillage plus fin dans ces zones pour diminuer l'erreur sur la solution, tout en gardant un maillage plus grossier dans les zones à faibles gradients de vitesse. En effet, en raffinant tout le maillage, on est certain de réduire l'erreur, mais les temps de calcul augmentent énormément. Il est donc préférable d'éviter de raffiner les zones où l'erreur est déjà faible.

On a donc développé un processus de subdivision adaptative de maillage afin de ne raffiner le maillage que dans les zones présentant des erreurs importantes.

#### 4.1.1 Méthode de raffinement de maillage

Le raffinement local d'un maillage en fonction de l'erreur sur les éléments peut se faire de différentes manières :

- Le maillage peut être entièrement refait, en contrôlant la densité d'éléments dans les différentes zones du domaine géométrique : il n'y a aucun lien entre le nouveau maillage et l'ancien maillage.
- L'ancien maillage est conservé et seuls certains de ses éléments sont raffinés : c'est la subdivision adaptative.

Après avoir réalisé une simulation sur l'ancien maillage, et obtenu un nouveau maillage raffiné localement, la même simulation sera refaite sur le nouveau maillage. Donc, il sera intéressant d'interpoler la première solution sur le nouveau maillage, pour constituer une solution initiale proche de la solution finale voulue. Ainsi, la convergence du second calcul sera facilitée.

Or, si le nouveau maillage est directement issu de l'ancien maillage, comme c'est le cas avec la subdivision adaptative, la solution aux nœuds déjà existants sera exacte et seuls les nœuds supplémentaires issus du raffinement de certains éléments pourront avoir des erreurs d'interpolation. Tandis que si le nouveau maillage est totalement indépendant de l'ancien, tous ses nœuds pourront avoir des erreurs d'interpolation.

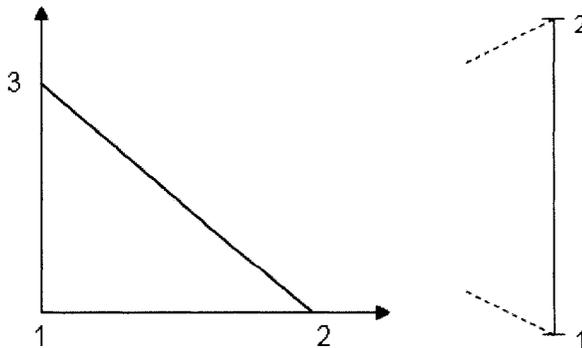
C'est pourquoi la méthode qui a finalement été sélectionnée est la méthode de subdivision adaptative. De plus, si on veut réaliser des simulations transitoires avec réadaptation de maillage, il sera également intéressant de pouvoir facilement et plus efficacement interpoler la solution de l'étape de temps précédente pour constituer une solution de départ pour le calcul de l'étape de temps suivante.

Deux programmes de raffinement ont donc été développés. Le premier raffine tous les éléments et est utilisé pour étudier l'influence de la taille de l'élément sur l'erreur de la solution (chapitre précédent). Le second raffine uniquement certains éléments et sera intégré au processus de subdivision adaptative.

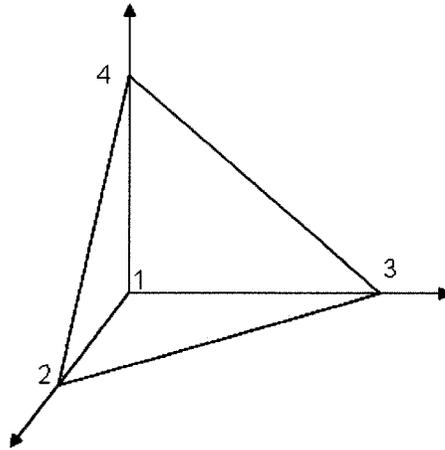
Ces programmes ont d'abord été construits et testés sur des géométries 2D, car les maillages sont plus faciles à visualiser et les simulations moins coûteuses en temps de calcul. Mais l'objectif était ensuite d'appliquer ces méthodes aux géométries 3D. Or, en 3D nous n'utilisons que l'élément linéaire P1-P1. Donc en 2D ces programmes n'ont été écrits que pour l'élément linéaire P1-P1. Les éléments seront donc uniquement définis par leurs sommets. Les maillages lus par le programme EF5 utilisent une connectivité de type Éléments vers Sommets. Autrement dit, on dispose des informations suivantes :

- les coordonnées de tous les nœuds du maillage (uniquement des sommets pour des éléments linéaires)
- pour chaque élément du domaine, les numéros de ses sommets (3 en 2D et 4 en 3D)
- pour chaque éléments du bord, les numéros de ses nœuds (2 en 2D et 3 en 3D)

L'ordre d'énumération des sommets est important, car il détermine l'orientation de l'élément. Les maillages lus par EF5 doivent être numérotés de la façon suivante :



**Figure 4.1** Numérotation des éléments et des éléments du bord en 2D

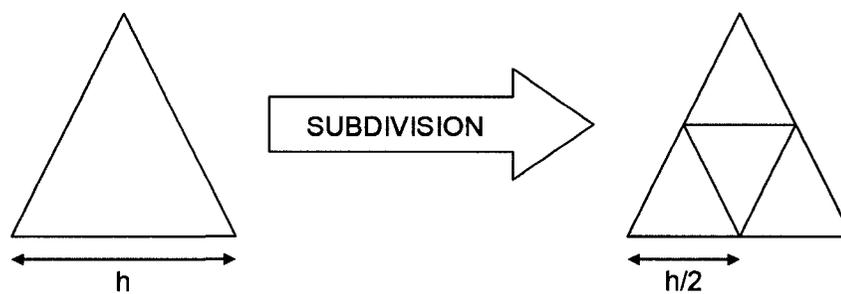


**Figure 4.2** Numérotation des éléments en 3D

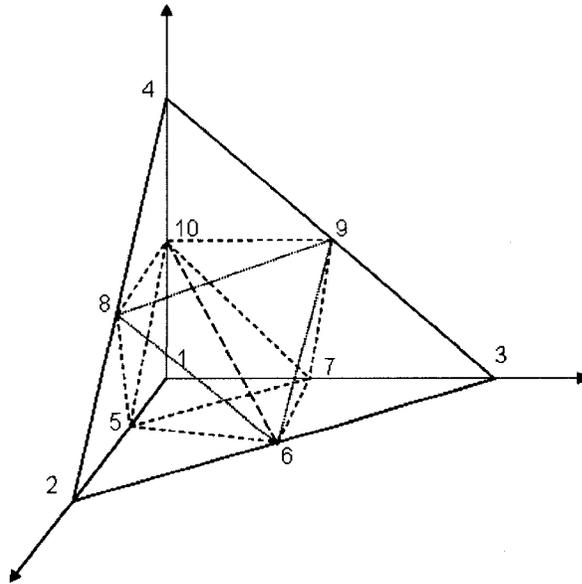
En 3D, les éléments du bord sont des triangles définis par leurs trois sommets. Dans l'exemple ci-dessus, la face de devant s'écrit : 2-4-3.

#### 4.1.2 Raffinement global

Le premier programme de raffinement subdivise tous les éléments du maillage de la manière suivante :



**Figure 4.3** Principe de subdivision d'un élément en 2D



**Figure 4.4** Tétraèdre subdivisé en huit tétraèdres fils

En 3D, les tétraèdres issus de la subdivision du tétraèdre 1-2-3-4 sont définis par :

1-5-7-10 , 2-6-5-8 , 3-7-6-9 , 9-10-8-4 , 8-6-10-9, 5-6-10-8, 5-6-7-10, 7-10-6-9

En 2D, les éléments fils ainsi obtenus sont identiques et possèdent les mêmes proportions que l'élément père dont ils sont issus. Ainsi, si l'élément père avait des proportions satisfaisantes (valeur des angles par exemple), alors les éléments fils seront aussi satisfaisants. En 3D, seuls quatre des tétraèdres conservent les proportions du père.

#### 4.1.2.1 Raffinement global 2D

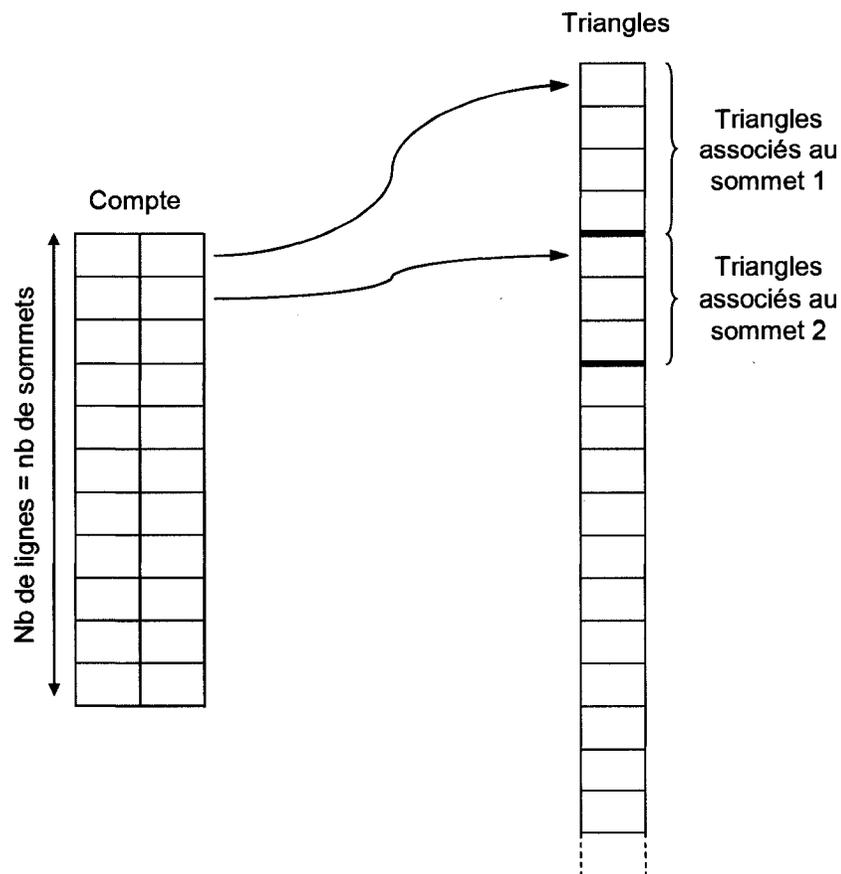
La principale difficulté de ce programme est de créer un nœud au milieu de chaque arête du maillage, sans considérer deux fois la même arête.

La première étape consiste à construire une connectivité de type Sommets vers Éléments : pour chaque sommet, on veut connaître la liste des éléments auxquels ce sommet appartient. Pour cela, il faut construire deux tableaux :

Le premier tableau, appelé **Compte**, possède autant de lignes que le maillage initial possède de nœuds (nombre de sommets du maillage). La première colonne contient pour chaque sommet (pour chaque ligne du tableau) le nombre de triangles s'appuyant sur ce nœud.

Le second tableau, appelé **Triangles**, constitué d'une seule colonne, contient la liste des triangles liés au sommet 1, puis la liste des triangles liés au sommet 2,...

La seconde colonne du tableau **Compte** contient le numéro de la première ligne du tableau **Triangles** correspondant aux triangles associés à ce sommet.



**Figure 4.5** Création d'une connectivité inverse, Sommets vers Éléments

La construction de ces deux tableaux facilite l'étape suivante : la construction d'un tableau **Arêtes** contenant toutes les arêtes du maillage. Chaque ligne de ce tableau contiendra les informations relatives à une arête du maillage, sans doublons. Les deux premières colonnes contiennent les numéros des deux nœuds extrémité de l'arête (donnés dans l'ordre croissant). Les troisième et quatrième colonnes contiennent les coordonnées du milieu de l'arête, calculées à partir des coordonnées des deux extrémités. Les colonnes suivantes pourront contenir les solutions interpolées en ces nœuds milieux (vitesse et pression).

Pour construire ce tableau, il faut boucler sur l'ensemble des sommets du maillage. En considérant un sommet **S**, grâce aux tableaux **Compte** et **Triangles**, les triangles associés à ce sommet sont connus. Pour chacun de ces triangles, les deux arêtes constituées du sommet **S** et de chacun des deux autres sommets **S1** et **S2**, peuvent être ajoutées au tableau **Arêtes**. Pour éviter d'ajouter deux fois la même arête, l'arête **S-S1** (ou **S-S2**) est ajoutée uniquement si le numéro de **S** est plus petit que celui de **S1** (ou **S2**). Dans ce cas, cette arête est ajoutée au moment de l'étude du sommet **S**, mais elle ne le sera pas au moment d'étudier **S1**. À l'inverse, si le numéro de **S** est plus grand que celui de **S1**, elle n'est pas ajoutée maintenant, mais elle aura déjà été ajoutée au moment d'étudier **S1**.

Cependant, une arête peut appartenir à deux triangles différents et dans ce cas sera trouvée deux fois au moment de l'étude de **S**. Pour ne pas inscrire deux fois une arête dans le tableau **Arêtes**, il faut donc tester, au moment d'ajouter une nouvelle arête, si celle-ci n'est pas déjà inscrite. La méthode de construction fait qu'il suffit de tester les dernières arêtes ajoutées, uniquement celles ajoutées au moment de l'étude de **S**.

Lorsque toutes les arêtes ont été ajoutées une seule fois, les nœuds supplémentaires qui seront créés au milieu de chacune d'elles seront numérotés à la suite des nœuds déjà

présents dans l'ancien maillage. Ce numéro peut par exemple être stocké dans une autre colonne du tableau **Arêtes**.

Pour construire les nouveaux triangles, il suffit de boucler sur les triangles de l'ancien maillage. Chaque triangle doit être remplacé par ses quatre triangles fils en prenant soin de respecter l'ordre de numérotation des sommets. Connaissant les numéros de deux nœuds partageant une arête de l'ancien maillage, il suffit de rechercher dans le tableau **Arêtes**, pour retrouver le numéro du nouveau nœud situé au milieu de l'arête. Cette recherche est facilitée par le fait que les sommets sont donnés dans l'ordre croissant.

Pour l'écriture des éléments du bord, la procédure est la même. Chaque élément de bord du maillage initial est remplacé par ses deux « moitiés », en retrouvant le numéro du nœud central dans le tableau **Arêtes**.

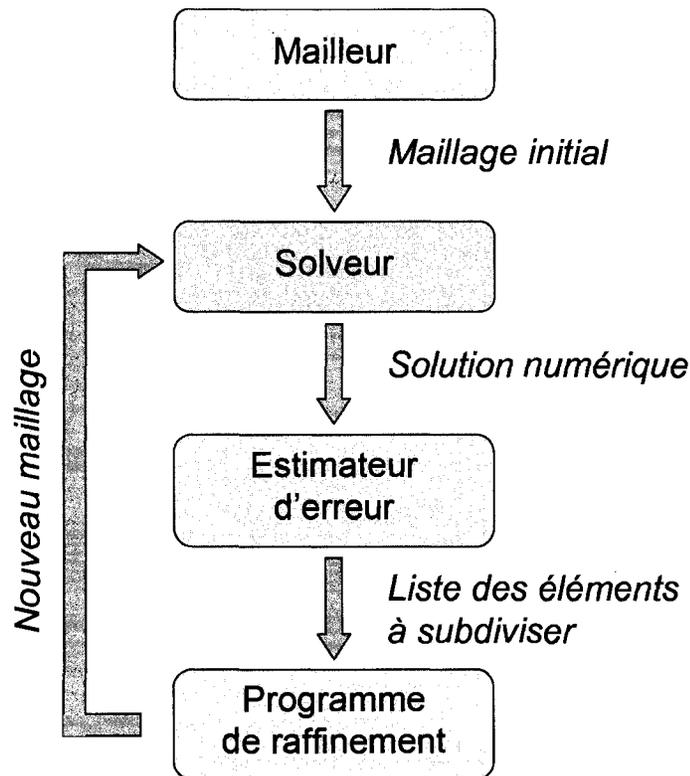
Parallèlement à l'écriture du nouveau maillage, on peut construire une solution initiale interpolée sur le nouveau maillage, en reprenant les solutions aux sommets de l'ancien maillage, et les solutions interpolées au milieu des arêtes.

#### 4.1.2.2 *Raffinement global 3D*

Pour raffiner intégralement un maillage de tétraèdres, on a à nouveau besoin de la connectivité inverse « Sommets vers Éléments », pour ensuite dresser la liste de toutes les arêtes du maillage. La méthode de construction de la connectivité inverse et du tableau **Arêtes** est identique à celle utilisée en 2D.

Pour la construction des nouveaux tétraèdres, il suffit de parcourir la liste des tétraèdres du maillage initial et remplacer chacun de ces tétraèdres par ses huit tétraèdres fils. L'écriture des éléments du bord est identique à l'écriture des nouveaux triangles dans la procédure 2D.

#### 4.1.3 Principe de la subdivision adaptative



**Figure 4.6** Principe du processus de subdivision adaptative

Un logiciel fournit le maillage initial qui servira au premier calcul par éléments finis. Ce maillage respecte la géométrie donnée, supposée polygonale. À partir de ce maillage, le solveur, ici EF5, calcule une solution numérique.

Le module d'estimation d'erreur fournit une approximation de l'erreur de chaque élément du maillage. Le but est d'obtenir une équi-répartition de l'erreur sur tous les éléments du maillage. On se fixe donc une erreur cible par élément. Les différentes méthodes possibles pour déterminer l'erreur cible élémentaire sont présentées dans le chapitre précédent. L'erreur de chaque élément est ensuite comparée à cette erreur cible, si son erreur est trop importante, alors l'élément doit être coupé. On obtient ainsi une liste des éléments à subdiviser. À partir de cette liste, le programme de raffinement local

du maillage génère un nouveau maillage, sur lequel on refait le calcul de la solution numérique. On réitère ce procédé jusqu'à ce l'obtention d'une erreur satisfaisante.

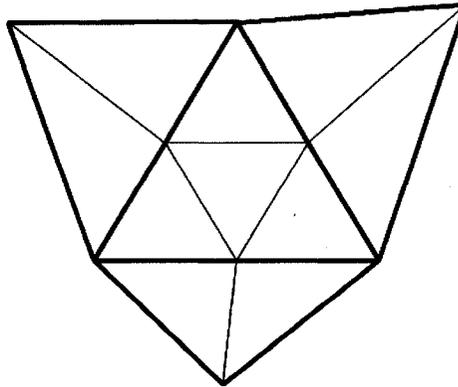
Dans ce programme, on n'a pas accès à la géométrie initiale. On suppose donc que la géométrie étudiée est polygonale. Ainsi, si le maillage initial respecte la géométrie, alors le maillage raffiné la respectera aussi. Cette hypothèse n'est pas trop contraignante, car le modèle géométrique de la carotide qui sera utilisé provient de mesures IRM sur un patient et est donc polygonale.

#### 4.1.4 Raffinement local

La stratégie employée pour le raffinement local est sensiblement la même pour les cas 2D et 3D. Au départ, on dispose d'un tableau dont la taille est égale au nombre d'éléments du maillage initial. Pour chaque élément du maillage, la valeur correspondante dans le tableau est un si l'élément doit être coupé et zéro sinon. Ce tableau est construit au moment du calcul de l'erreur.

##### 4.1.4.1 *Raffinement local 2D*

Ces programmes étant développés pour l'élément linéaire P1-P1, le maillage initial est constitué de triangles à trois nœuds seulement (les trois sommets). Comme dans le cas du raffinement global, les triangles devant être subdivisés seront remplacés par quatre triangles fils qui auront le même aspect que le triangle initial. Cependant, un triangle voisin d'un triangle subdivisé aura un nœud au milieu d'une de ses arêtes, ce qui rend le maillage non conforme. Ces nœuds en trop sont parfois appelés « hanging nodes » [37]. Pour résoudre ce problème, ce triangle devra donc aussi être découpé. Par exemple, dans le cas où un seul élément doit être subdivisé en quatre éléments, les triangles voisins seront coupés en deux.



**Figure 4.7** Propagation de la coupe d'un élément 2D à ses voisins

Mais si un triangle ne doit pas être subdivisé mais partage des arêtes avec plus d'un triangle qui doivent être subdivisés, alors ce triangle peut être amené à être coupé en plus de deux éléments.

Afin de déterminer la coupe que devra subir chaque triangle du maillage initial, on commence par construire une connectivité « Sommet vers Élément » pour connaître tous les éléments s'appuyant sur un nœud (voir Raffinement global).

Grâce à cela, on construit un tableau **Arêtes**, dont chaque ligne contiendra des informations sur une arête du maillage. Toutes les arêtes du maillage doivent être ajoutées à ce tableau. Le tableau **Arêtes** contiendra les informations suivantes :

- Colonnes 1 et 2 : les deux nœuds extrémités donnés dans l'ordre croissant
- Colonne 3 : le nombre de triangles s'appuyant sur cette arête (un ou deux)
- Colonne 4 : 1 si l'arête doit être coupée, 0 sinon
- Colonnes 5 et 6 : les numéros des deux triangles partageant cette arête (la colonne 6 pourra rester vide s'il s'agit d'une arête frontière)

Pour construire ce tableau, il suffit de parcourir l'ensemble des nœuds du maillage : pour chaque nœud **n**, on récupère les triangles s'appuyant dessus grâce à la connectivité inverse. On recherche alors les arêtes de ce triangle dont une des extrémités correspond à

$n$ . Si on appelle  $m$  l'autre extrémité de l'arête, cette arête ne pourra être ajoutée que si on a  $n < m$ . Dans le cas inverse, l'arête sera ajoutée au moment d'étudier le nœud  $m$ . Cela permet d'éviter d'ajouter plusieurs fois la même arête au tableau.

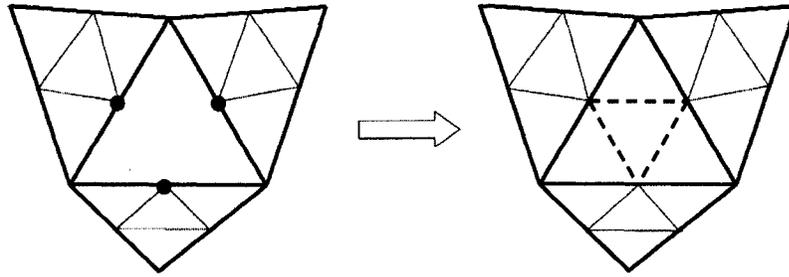
Si on est dans le cas  $n < m$  :

- Si l'arête n'est pas encore présente dans le tableau **Arêtes**, alors on l'ajoute à la ligne suivante. La colonne 3 est initialisée à un et le triangle dans lequel on a trouvé l'arête est ajouté dans la colonne 5. Si ce triangle doit être subdivisé, alors la colonne 4 est initialisée à 1, sinon elle est initialisée à 0.
- Si l'arête est déjà présente dans le tableau **Arêtes**, alors il faut retrouver la ligne la contenant. La colonne 3 de cette ligne passe alors de 1 à 2, car on vient de trouver le second triangle partageant cette arête. Ce second triangle est donc ajouté dans la colonne 6. Si le premier triangle s'appuyant sur cette arête ne devait pas être coupé, donc si la colonne 4 contient le chiffre zéro, alors il faut regarder si le nouveau triangle doit être coupé. Si c'est le cas, alors la valeur de la colonne 4 passe de 0 à 1.

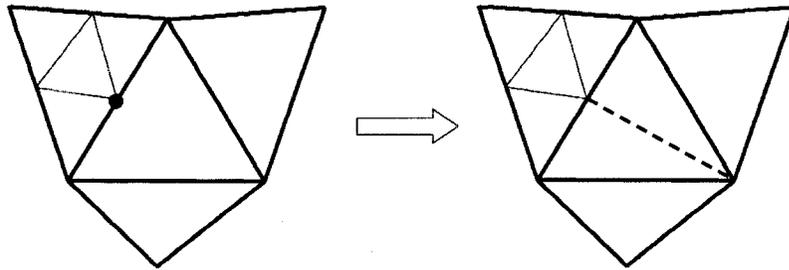
Une fois le tableau **Arêtes** construit, on connaît exactement toutes les arêtes du maillage, et on sait pour chaque arête si elle doit être coupée, autrement dit s'il faudra ajouter un nouveau nœud sur son milieu.

Il faut maintenant déterminer le type de coupe que devra subir chaque triangle. Pour cela, on va regarder parmi ses trois arêtes lesquelles doivent être coupées. Le type de coupe dépendra du nombre d'arêtes coupées :

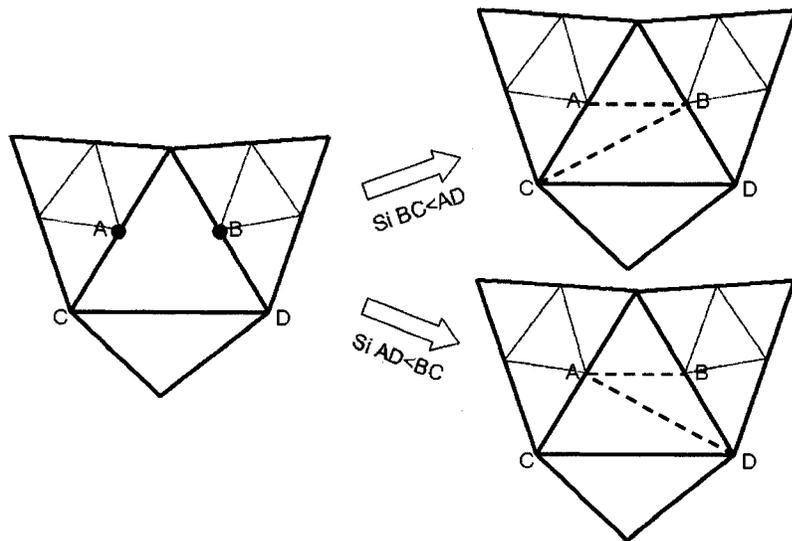
- Coupe 0 : Si aucune arête ne doit être coupée, alors le triangle n'est pas coupé.
- Coupe 1 : Si les trois arêtes doivent être coupées, alors le triangle est coupé en 4.
- Coupe 2 : Si une seule arête du triangle doit être coupée, alors le triangle est coupé en 2.
- Coupe 3 : Si deux arêtes doivent être coupées, alors le triangle est coupé en 3.



**Figure 4.8** Coupe 1 d'un élément 2D



**Figure 4.9** Coupe 2 d'un élément 2D



**Figure 4.10** Coupe 3 d'un élément 2D : deux possibilités de coupe

On construit un second tableau **Bilan** dont chaque ligne correspondra à un triangle du maillage initial. Le numéro de la ligne correspondra au numéro du triangle concerné. Ce tableau **Bilan** contient les informations suivantes :

- Colonnes 1 à 3 : les arêtes coupées du triangle (toutes les colonnes ne seront pas forcément remplies, dépendamment du nombre d'arêtes coupées du triangle)
- Colonne 4 : le nombre d'arêtes coupées du triangle
- Colonne 5 : le type de coupe du triangle

Pour remplir ce tableau, il suffit de parcourir toutes les lignes du tableau **Arêtes** précédemment construit. Pour chaque arête **A**, si celle-ci doit être coupée (colonne 4 du tableau **Arêtes**), alors on regarde les triangles s'appuyant sur cette arête (colonnes 5 et 6 du tableau **Arêtes**). Pour chacun de ces triangles, l'arête **A** est ajoutée à la ligne correspondante du tableau **Bilan**, dans la première colonne vide parmi les colonnes 1 à 3. La valeur de la colonne 4 est augmentée de 1. Une fois parcourues toutes les arêtes du maillage, on connaît donc le nombre d'arêtes coupées de chaque triangle. On en déduit donc le type de coupe qu'il devra subir (colonne 5).

Il est maintenant possible d'écrire le nouveau maillage. Pour l'écriture des points, il faut d'abord reprendre tous les points déjà présents dans le maillage, et ajouter les nœuds aux milieux des arêtes coupées. Pour cela, on construit un tableau d'entier **NouveauxNœuds** contenant autant de lignes qu'il y a d'arêtes dans le maillage. Ce tableau contiendra s'il y a lieu le numéro du nouveau nœud qui sera créé au milieu de l'arête. Si l'arête ne doit pas être coupée, aucun numéro ne sera inscrit dans le tableau. La numérotation des nouveaux nœuds commence à la suite des sommets déjà présents dans le maillage initial. En parallèle, on construit un autre tableau **NouvellesCoordonnées**, qui contiendra cette fois-ci des nombres flottants, qu'on remplira au fur et à mesure avec les coordonnées des nouveaux nœuds, calculées en moyennant les coordonnées des deux extrémités de l'arête. Il peut aussi contenir les solutions interpolées en ce nœud (vitesse et pression). Au final, ce tableau contiendra autant de lignes qu'il y aura de nouveaux nœuds, et

permettra d'écrire les coordonnées des nouveaux nœuds à la suite de celles des anciens nœuds.

Pour l'écriture des éléments, on parcourt tous les éléments du maillage initial. Pour chaque élément, on connaît le type de coupe qu'il devra subir (colonne 5 du tableau **Bilan**). Il suffit donc de le remplacer par le nombre adéquat de triangles fils, en prenant garde au sens de numérotation des sommets. Pour connaître le numéro des nœuds supplémentaires, il suffit d'identifier les arêtes coupées (colonnes 1 à 3 de **Bilan**) et de retrouver le numéro du nouveau nœud grâce au tableau **NouveauxNoeuds**.

Enfin, pour l'écriture des arêtes frontières, on utilise un procédé identique : pour chaque arête frontière du maillage initial, la colonne 4 du tableau **Arêtes** permet de savoir si l'arête doit être coupée. Si oui, alors le numéro du nouveau est récupéré grâce au tableau **NouveauxNoeuds** et l'arête est remplacée par deux nouvelles arêtes.

Parallèlement à l'écriture du nouveau maillage, on peut construire une solution initiale interpolée sur le nouveau maillage, en reprenant les solutions aux sommets de l'ancien maillage, et les solutions interpolées au milieu des arêtes coupées.

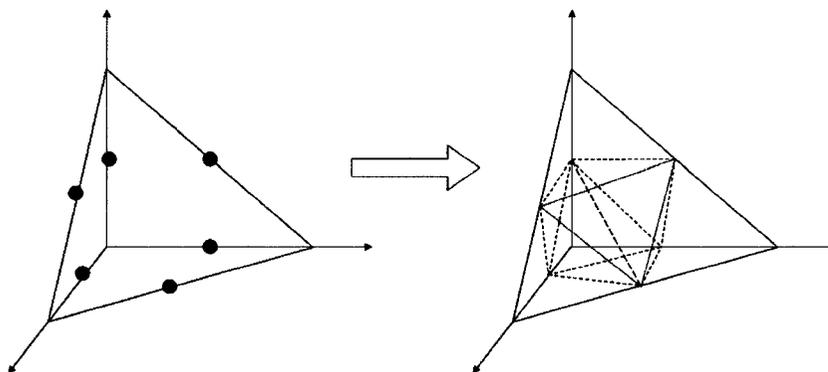
#### 4.1.4.2 *Raffinement local 3D*

En 3D, la méthodologie utilisée pour le raffinement local est très semblable à celle utilisée en 2D. Après avoir construit une connectivité inverse « Sommets vers Éléments », toutes les arêtes du maillage sont listées dans un tableau **Arêtes**. Cependant, il est impossible de connaître le nombre de tétraèdres s'appuyant sur une arête. Le tableau **Arêtes** pourra donc contenir plus de colonnes.

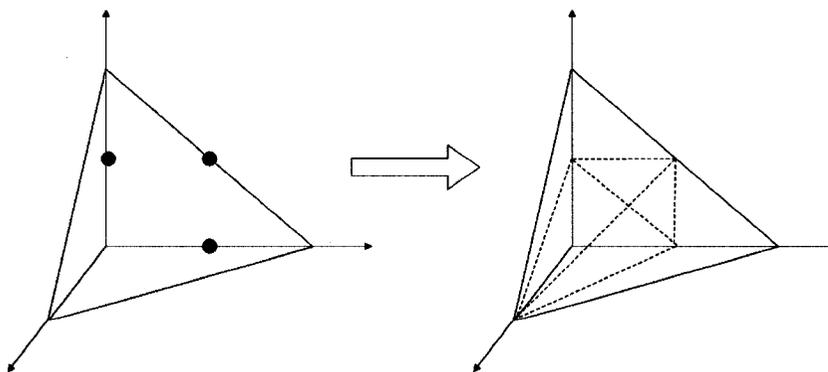
Un tableau **Bilan** est ensuite construit comme dans le cas 2D, mis à part le fait qu'un tétraèdre possède 6 et non 3 arêtes. Ce tableau permet de savoir quelles arêtes du

tétraèdre seront coupées. Mais contrairement au 2D, il est difficile en 3D de prendre en compte toutes les configurations possibles (nombre d'arêtes coupées et disposition de ces arêtes). En effet, il existe 56 configurations différentes [37]. Pour simplifier, nous avons sélectionné seulement cinq configurations qui seront prises en compte :

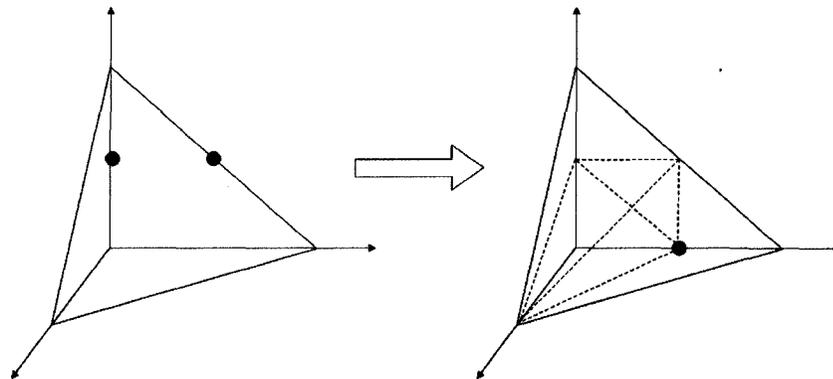
- Coupe 0 : Si aucune arête ne doit être coupée, alors le tétraèdre n'est pas coupé.
- Coupe 1 : Si les six arêtes doivent être coupées, alors le tétraèdre est coupé en 8.
- Coupe 2 : Si deux ou trois arêtes appartenant à une même face doivent être coupées, alors le tétraèdre est coupé en 4.
- Coupe 3 : Si une seule arête doit être coupée, alors le tétraèdre est coupé en 2.



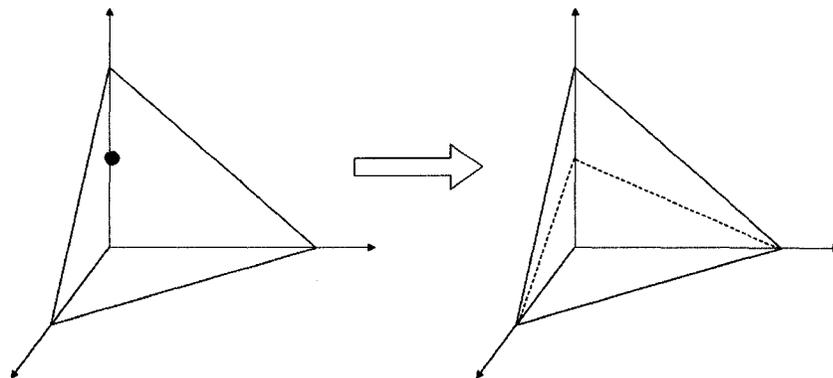
**Figure 4.11** Six arêtes coupées : coupe 1 de l'élément 3D



**Figure 4.12** Trois arêtes coupées sur une même face : coupe 2 de l'élément 3D



**Figure 4.13** Deux arêtes coupées sur une même face : coupe 2 de l'élément 3D



**Figure 4.14** Une seule arête coupée : coupe 3 de l'élément 3D

Dans tous les autres cas, le tétraèdre sera coupé intégralement (coupe 1 en 8 tétraèdres).

Ce sera le cas :

- Si deux ou trois arêtes n'appartenant pas à une même face doivent être coupées.
- Si quatre ou cinq arêtes doivent être coupées.

Dans certains cas, la coupe devra donc se propager et il faudra couper des arêtes supplémentaires. En effet, ce sera le cas si le tétraèdre doit subir une coupe de type 1, mais possède moins de six arêtes coupées : il faudra ajouter les nœuds manquants. Ce sera également le cas lorsqu'un tétraèdre devra subir une coupe de type 2 avec uniquement deux arêtes déjà coupées : il faudra aussi couper la troisième arête. Mais le fait de couper de nouvelles arêtes pourra changer la configuration des tétraèdres voisins,

qui devront peut-être à leur tour changer de type de coupe. Par exemple, si un tétraèdre possède initialement trois arêtes coupées sur une même face, il doit donc subir une coupe de type 2. Mais si un de ses voisins nécessite de couper des arêtes supplémentaires, alors le premier tétraèdre pourra éventuellement passer de trois à quatre arêtes coupées. Il devra alors subir une coupe de type 1, et il faudra de nouveau couper de nouvelles arêtes, ce qui propage le problème aux voisins.

Pour résoudre ce problème, le tableau **Bilan** est mis à jour jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de cas de propagation. L'algorithme est le suivant :

- Initialisation du tableau **Bilan** : les types de coupe sont déterminés d'après le nombre initial d'arêtes coupées.
- Initialisation d'une liste **Révision** contenant tous les éléments du maillage.
- Mise à jour du tableau **Bilan** :

Tant que la liste **Révision** n'est pas vide, faire :

Tous les éléments de la liste **Révision** sont parcourus dans l'ordre croissant : si la coupe se propage, les nouvelles arêtes sont coupées (modification de la colonne 4 du tableau **Arêtes**) et ajoutées sur la ligne de tous les tétraèdres la partageant. Les tétraèdres ainsi modifiés sont ajoutés à une nouvelle liste **Révision** (vidée au début de la boucle). Ils n'y sont ajoutés que s'ils ont déjà été étudiés lors de cette boucle.

Finalement, l'algorithme s'arrête lorsque aucune propagation n'a été détectée à la fin d'une boucle (la liste **Révision** est vide). Le type de coupe que devra subir chaque tétraèdre est alors définitif.

L'écriture des points se fait comme dans le cas du raffinement local 2D. Pour la construction des éléments, il suffit de parcourir tous les tétraèdres du maillage initial. Connaissant le type de coupe (tableau **Bilan**), le tétraèdre doit être remplacé par le nombre adéquat de tétraèdres fils. Les numéros des nouveaux nœuds sont connus grâce au tableau **NouveauxNœuds** comme en 2D.

Les éléments frontières dans le cas d'un maillage 3D sont des triangles. Comme dans ce programme les maillages sont uniquement constitués de tétraèdres à 4 nœuds, les éléments frontières sont des triangles à trois nœuds. Finalement, l'écriture des ces triangles se fait de façon identique à l'écriture des éléments du raffinement local 2D. Connaissant les nœuds constituant un triangle frontière, il est possible de savoir lesquelles de ses arêtes sont coupées en deux. Selon ce nombre, le triangle sera coupé en 4 triangles, en 2 triangles ou restera entier. Il ne pourra pas être coupé en 3 triangles compte tenu des découpes de tétraèdres existantes.

En raisonnant sur le nombre d'arêtes coupées, on est sûr que le raffinement des triangles du bord est compatible avec le raffinement des tétraèdres du domaine.

Ce programme de raffinement local 3D pourrait être amélioré en traitant plus de configurations d'arêtes coupées, afin de limiter la propagation du raffinement. Mais ces améliorations ne seront pas traitées lors de cette étude.

## 4.2 Test du raffinement local 2D

Avant de l'appliquer à des géométries 3D, le principe de subdivision adaptative a été testé sur des problèmes 2D, car la visualisation des maillages est plus facile. De plus, le programme de subdivision développé ici a pu être comparé en 2D au programme de subdivision proposé par Comsol qui utilise des techniques similaires. Ces techniques ne sont malheureusement pas disponibles en 3D, car Comsol ne peut pas subdiviser un tétraèdre en huit, il ne peut que le couper en deux mais perd alors la qualité du tétraèdre père.

Pour identifier les éléments à subdiviser, l'erreur de la solution est estimée en utilisant la méthode intégrale, autrement dit en minimisant la fonctionnelle sous forme intégrale.

### 4.2.1 Présentation du premier problème

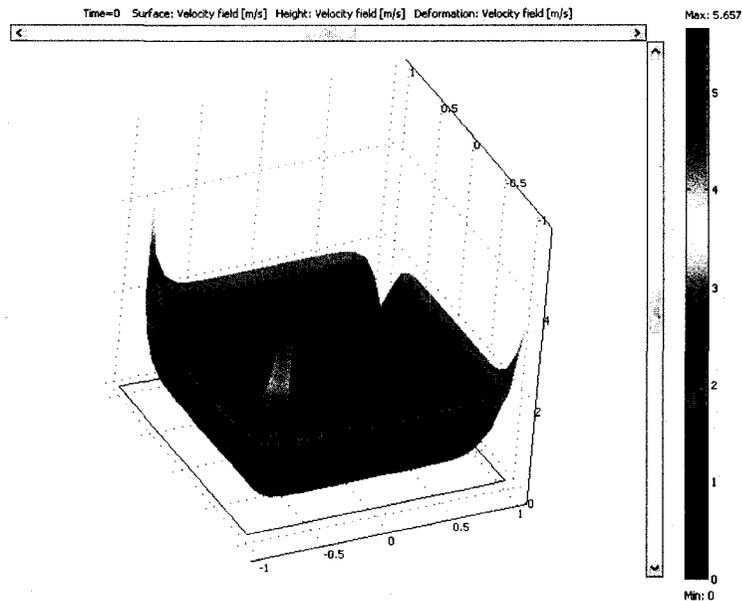
Le premier test de raffinement local 2D est réalisé sur une solution manufacturée, proche du problème de Smith-Hutton, mais avec des puissances supérieures (à l'ordre 9). Le domaine de calcul est un carré centré en (0,0), avec des côtés de longueur 2. Les simulations sont réalisées sur des éléments P1-P1 stabilisés, avec un nombre de Reynolds valant 1000.

$$u_{SH9} = 2y^8(1 - x^9) \quad (4.1)$$

$$v_{SH9} = -2x^8(1 - y^9) \quad (4.2)$$

$$p_{SH9} = 0 \quad (4.3)$$

Cette solution a été choisie car les gradients de vitesse sont principalement concentrés au voisinage des coins et des bords. Ainsi, le maillage obtenu devrait être beaucoup plus fin dans ces zones.



**Figure 4.15** Problème de Smith-Hutton à l'ordre 9 : norme de la vitesse

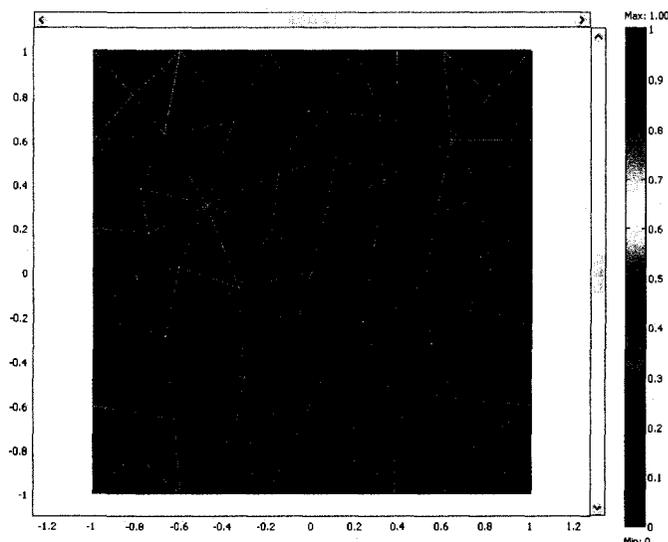
Le maillage initial a été construit avec Comsol puis traduit pour EF5, il s'agit d'un maillage non structuré, relativement grossier. Il contient 61 nœuds et 100 éléments. Afin d'apprécier la qualité des éléments, les maillages sont parfois représentés grâce à Comsol, y compris les maillages raffinés par EF5. En effet, Comsol permet de colorer les éléments en fonction de leur qualité. La qualité d'un élément prend en compte son aspect géométrique. Comsol la calcule de la manière suivante pour un triangle :

$$q = \frac{4\sqrt{3}A}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} \quad (4.4)$$

Avec : q : qualité du triangle

A : aire du triangle

$h_1, h_2$  et  $h_3$  : longueurs des trois côtés du triangle



**Figure 4.16** Maillage initial à 100 éléments du carré

#### 4.2.2 Comparaison du raffinement local de EF5 et de Comsol

La simulation a d'abord été réalisée avec EF5, la méthode de raffinement local employée est une réduction d'erreur de 70%, avec un ratio critique de 1,2 (voir la partie traitant l'estimation d'erreur). Autrement dit, l'erreur cible totale vaut 70% de l'erreur totale estimée. On en déduit une erreur cible élémentaire en divisant l'erreur cible totale par la racine carrée du nombre d'éléments du maillage. Chaque élément dont le ratio erreur estimée sur erreur cible élémentaire est supérieur à 1,2 est subdivisé en 4 éléments.

Avec ces critères, 40 éléments sur les 100 doivent être subdivisés. En théorie, le nombre d'éléments du maillage raffiné doit donc valoir 220 :

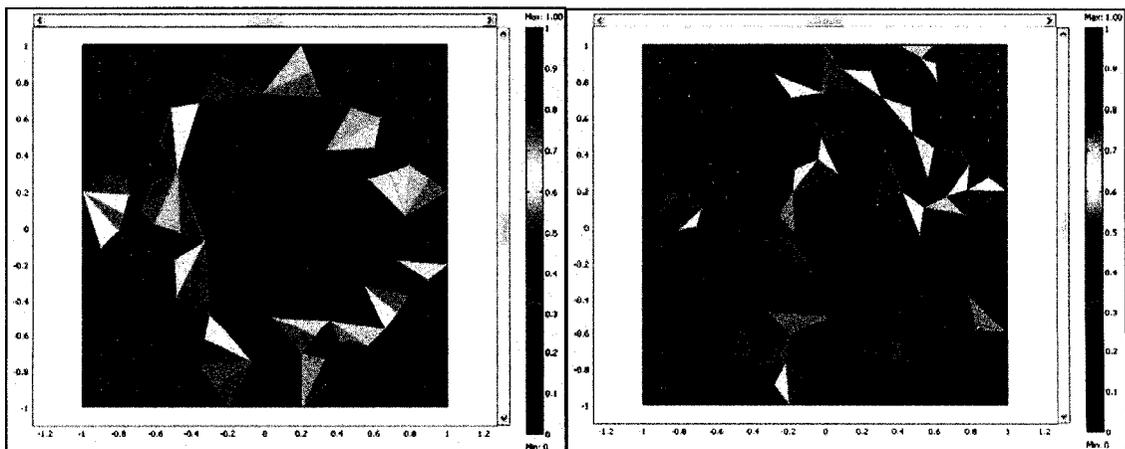
$$N = 100 + 40 \times 3 = 220 \quad (4.5)$$

Mais par propagation du raffinement d'autres éléments devront être découpés en quatre, trois ou deux éléments. Au final, le maillage raffiné contient 252 éléments et 145 nœuds.

La même simulation est réalisée avec le logiciel Comsol, qui propose deux méthodes de découpage des éléments. La première méthode coupe les éléments sur le côté le plus long, tandis que la seconde méthode découpe l'élément de façon régulière, c'est-à-dire en quatre éléments qui auront le même aspect que l'élément père. La seconde méthode est utilisée car le découpage est alors identique à celui de EF5. Pour la sélection des éléments à subdiviser, Comsol propose trois méthodes:

- 1) L'utilisateur peut déterminer l'augmentation du nombre d'éléments qu'il souhaite entre le maillage initial et le maillage raffiné, ainsi il est possible de contrôler le nombre d'éléments final.
- 2) L'utilisateur peut indiquer une fraction de l'erreur élémentaire la plus grande. Tous les éléments dont l'erreur est supérieure à cette fraction de l'erreur la plus grande seront subdivisés.
- 3) L'utilisateur peut choisir la proportion d'éléments qui sera subdivisée.

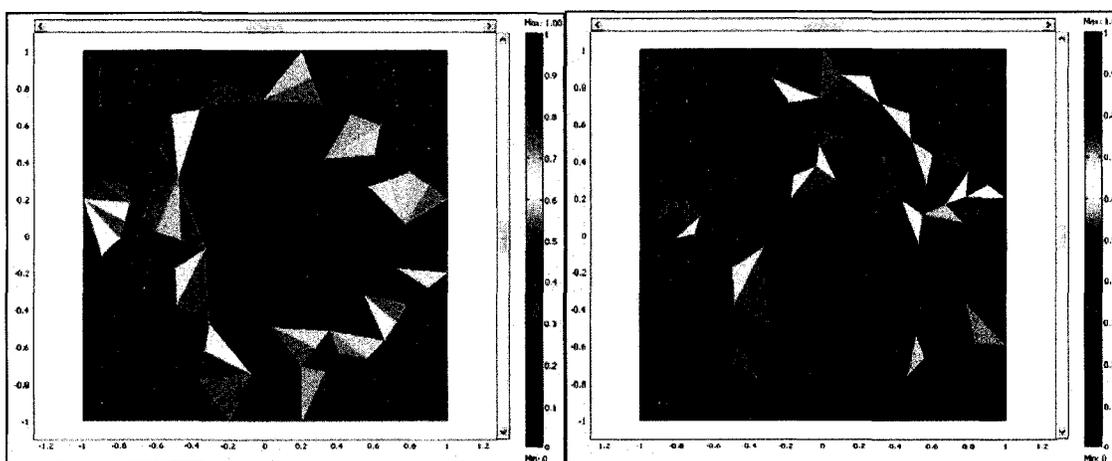
On utilise d'abord la première méthode proposée par Comsol, en fixant une augmentation de 252% du nombre d'éléments, afin d'obtenir un maillage de 252 éléments. En réalité le maillage ainsi construit contient 325 éléments et 184 nœuds.



**Figure 4.17** Comparaison du maillage EF5 (gauche) avec le maillage Comsol obtenu par la méthode 1 (droite)

On constate que le maillage Comsol (325 éléments) est beaucoup plus fin que le maillage EF5 (252 éléments). En effet, cette méthode de raffinement utilisée par Comsol autorise deux étapes de subdivision des éléments. Ainsi un élément comportant une erreur trop importante pourra être subdivisé en plus de quatre éléments, comme c'est le cas dans le coin supérieur droit, ce qui est impossible dans EF5. Les deux maillages ne sont donc pas comparables, car le maillage Comsol réalise en fait plusieurs étapes de raffinement.

Le raffinement adaptatif avec Comsol a donc été refait en utilisant la troisième méthode qui n'autorise qu'un raffinement de chaque élément. Comme EF5 a détecté 40 éléments à subdiviser, le paramètre a été fixé à 0,4 pour que 40 % des éléments (soit 40 éléments) soient raffinés. De par la méthode employée dans EF5, les 40 éléments sélectionnés étaient ceux dont l'erreur était la plus importante. On peut donc espérer que Comsol retrouve les mêmes 40 éléments à subdiviser, en supposant que l'erreur estimée de chaque élément soit proche de l'erreur estimée par EF5. Le maillage obtenu contient 273 éléments et 156 nœuds.



**Figure 4.18** Comparaison du maillage EF5 (gauche) avec le maillage Comsol obtenu par la méthode 3 (droite)

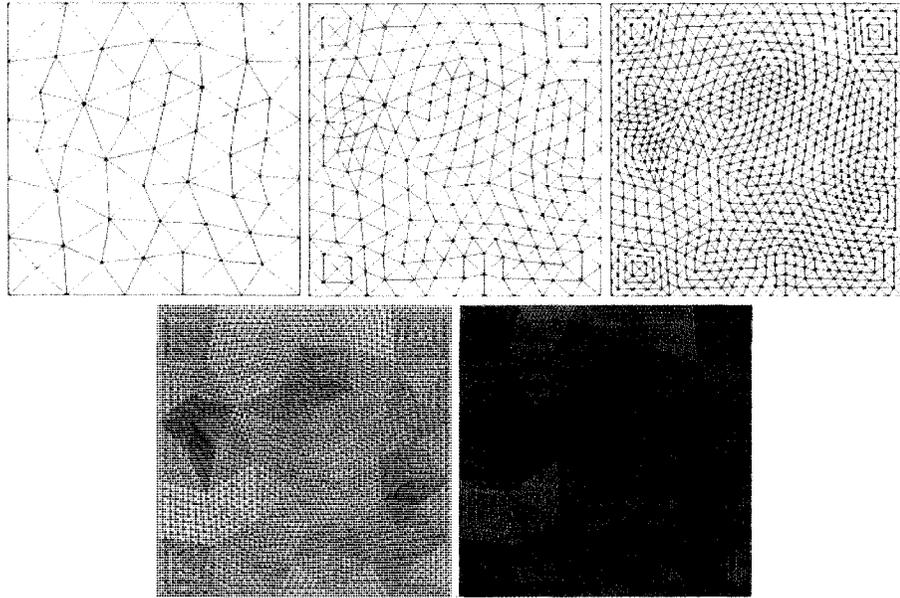
Ces deux maillages contiennent un nombre d'éléments comparable (273 pour Comsol et 252 pour EF5). Les zones raffinées sont sensiblement les mêmes sur les deux maillages, et dans les deux cas le centre du carré n'a pas été raffiné. D'un point de vue qualité des éléments, on constate que la qualité moyenne des éléments est semblable pour les deux maillages, mais le maillage obtenu par EF5 possède quelques éléments de qualité très faible.

En comparant les deux maillages Comsol (Figure 4.17 et Figure 4.18), on constate qu'ils sont quasiment identiques. En effet, seul le coin en haut à droite est différent car il est raffiné deux fois lors de l'utilisation de la première méthode.

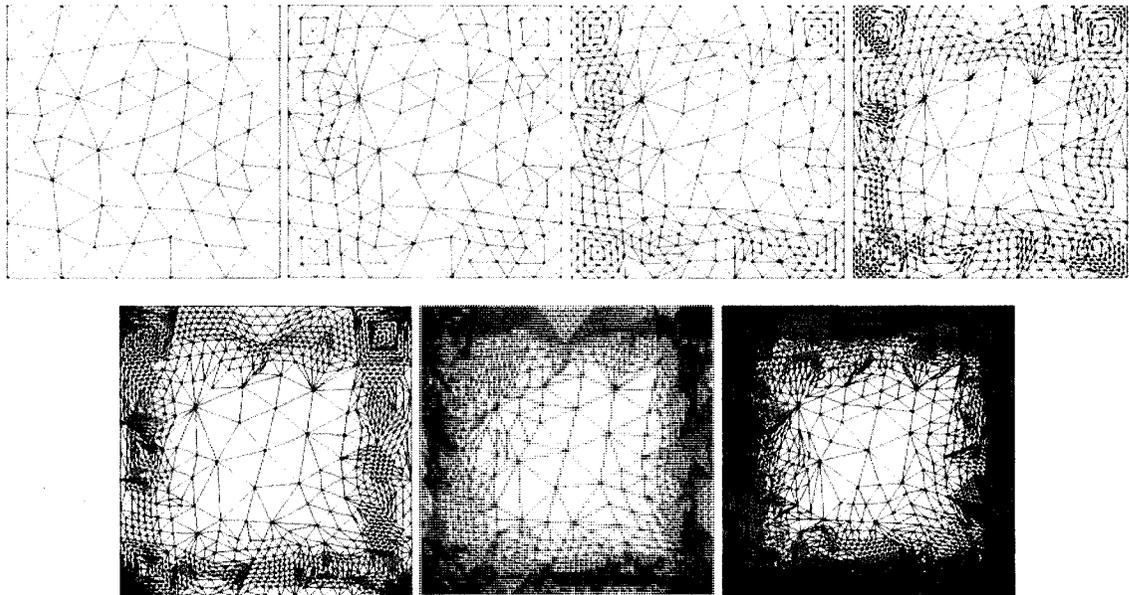
Finalement, l'algorithme programmé dans EF5 donne des résultats semblables à ceux obtenus avec Comsol.

#### 4.2.3 Série de raffinements locaux avec EF5

On réalise ensuite une série de raffinements locaux avec EF5. La méthode de raffinement local employée est toujours une réduction d'erreur de 70%, avec un ratio critique de 1,2. Cette série de raffinement local est comparée avec ce qu'on obtient si on découpe à chaque étape tous les éléments.



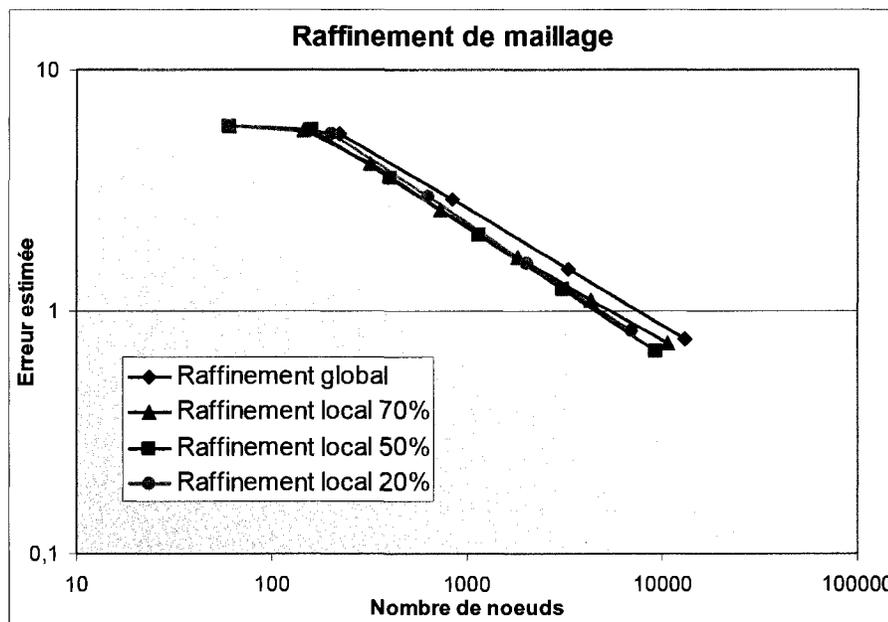
**Figure 4.19** Cinq étapes de raffinement global (Smith-Hutton à l'ordre 9)



**Figure 4.20** Sept étapes de raffinement local (Smith-Hutton à l'ordre 9)

Afin d'apprécier l'avantage du raffinement local, on représente sur un graphique logarithmique l'erreur estimée de la solution à chaque étape de raffinement, dans le cas d'un raffinement global et de trois séries de raffinement local, à 20%, 50% et 70%. La

valeur du pourcentage correspond à la manière de fixer l'erreur cible globale, celle-ci vaut ce pourcentage de l'erreur sur le maillage précédent. Ainsi, en choisissant 20%, plus d'éléments seront subdivisés, tandis qu'avec 70% seuls quelques éléments seront subdivisés. Les séries de raffinement sont poursuivies jusqu'à obtenir une erreur totale inférieure à 1.



**Figure 4.21** Comparaison des erreurs obtenues (Smith-Hutton à l'ordre 9)

On constate sur ce graphique que le raffinement global est moins efficace que le raffinement local : son taux de convergence est plus bas. Pour illustrer ce point, on peut comparer les derniers calculs de chaque série. Par exemple, le dernier calcul réalisé par la méthode de raffinement global a permis d'obtenir une erreur de 0,765 avec un maillage constitué de 12 961 nœuds. Le dernier calcul de la série correspondant au pourcentage de 70% a donné une erreur valant 0,736 donc proche de celle obtenue par raffinement global, mais avec seulement 10 707 nœuds. Concernant la série obtenue en fixant le pourcentage à 50%, le dernier calcul a permis d'obtenir une erreur égale à 0,683 donc plus petite encore que les deux précédentes, avec encore moins de nœuds (9 178). Finalement le raffinement global peut être considéré comme moins efficace dans ce cas.

Parmi les trois séries de raffinement local, la plus efficace est celle réalisée avec un pourcentage de 50%, c'est elle qui présente la plus forte pente sur le graphique. En effet, en choisissant un taux inférieur, plus d'éléments sont subdivisés, mais certains éléments sont alors subdivisés inutilement. À l'inverse, en choisissant un pourcentage supérieur, le nombre d'éléments subdivisés est insuffisant pour réduire efficacement l'erreur.

Finalement entre ces quatre séries, la méthode qui paraît la plus efficace est la réduction d'erreur avec une erreur cible valant 50% de l'erreur sur le maillage précédent. Mais le pourcentage optimal peut varier d'un problème à un autre, selon la quantité d'éléments à subdiviser en priorité.

Le calcul réalisé sur le premier maillage a nécessité une montée en Reynolds pour converger vers la solution. Ensuite à chaque étape de raffinement local, la solution précédente a été interpolée sur le nouveau maillage, comme expliqué précédemment. Mais contrairement à ce qui était attendu, lors des premières étapes, le calcul n'a pas convergé du premier coup grâce à cette solution initiale. Il a nécessité à nouveau une montée en Reynolds, même si le fait de disposer d'une solution initiale a quand même facilité la convergence. Ce problème s'est atténué lorsque les maillages sont devenus plus fins, et les deux derniers résultats ont pu être obtenus sans effectuer de nouvelles montées en Reynolds (en imposant directement le nombre de Reynolds voulu).

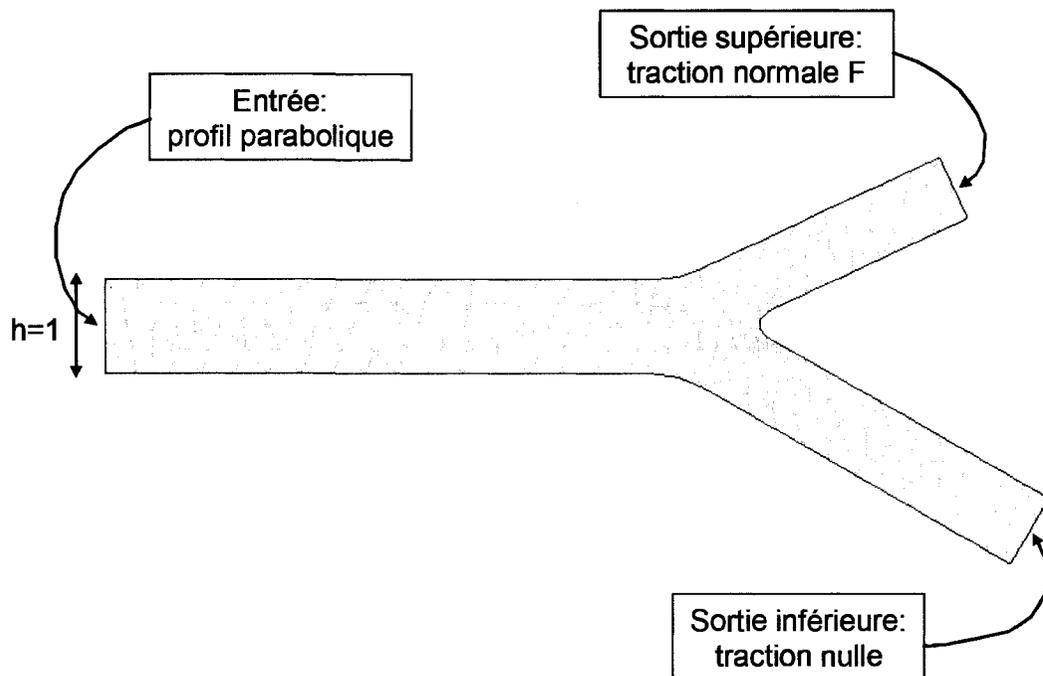
Mais ces constatations concernent uniquement des simulations réalisées avec l'élément P1-P1 et ne sont donc valides que pour cet élément.

#### 4.2.4 Raffinement local sur une géométrie 2D plus complexe

Une fois validée la qualité des résultats obtenus par le processus de subdivision adaptative, on voudrait savoir comment se comporte ce processus sur une géométrie rappelant la forme de la carotide, avec une bifurcation.

L'ajout de chanfreins sur la géométrie permet d'atténuer les angles et ainsi de limiter les discontinuités en pression.

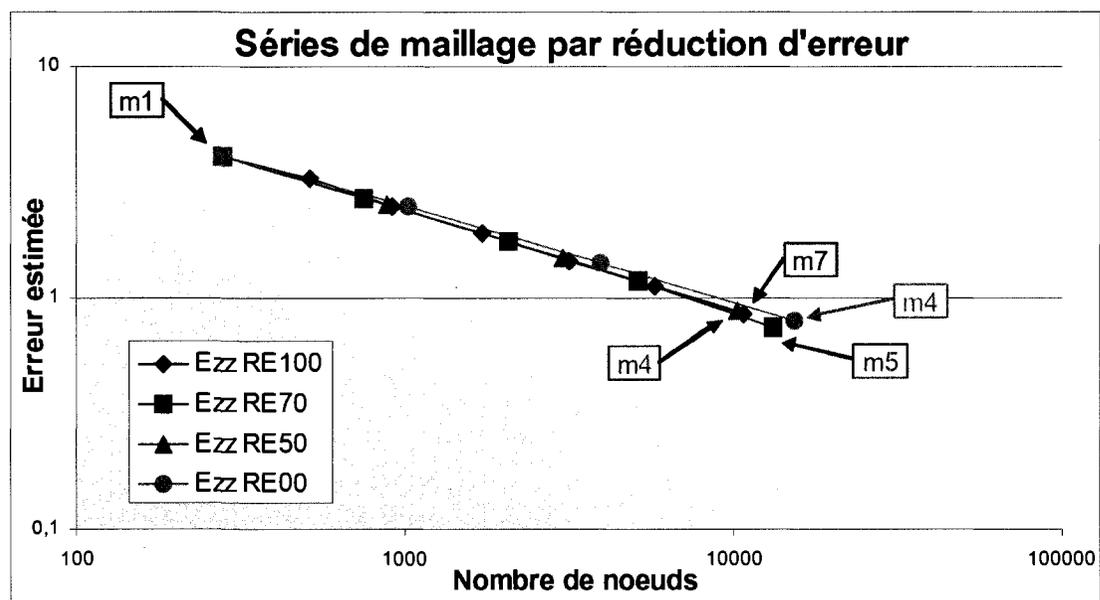
Un profil de vitesse parabolique est imposé sur la face d'entrée. Sur la sortie supérieure, on applique une force de traction normale  $\sigma \cdot n = F\vec{n}$ . Une condition de traction nulle est imposée sur la sortie supérieure.



**Figure 4.22** Géométrie de la carotide 2D, maillage initial et conditions limites

En imposant différentes valeurs de force normale sur la sortie supérieure, on obtient différents ratios de débit entre les deux sorties. On constate que la relation liant la répartition de débit à la force normale est linéaire. On peut donc en déduire la valeur de  $F_n$  à imposer pour obtenir une répartition de débit donnée. Pour l'étude de raffinement, le ratio de débit voulu est 50:50, c'est-à-dire que la moitié du débit d'entrée sort dans la sortie supérieure, l'autre moitié dans la sortie inférieure. Pour chaque maillage, la force  $F_n$  à imposer pour obtenir cette répartition est calculée en déterminant les coefficients de la relation linéaire liant la répartition de débit à la force normale.

De cette manière, il est possible d'obtenir une suite de maillage de plus en plus raffiné. La méthode de raffinement qui a d'abord été testée est la méthode de réduction d'erreur, en faisant varier la valeur du pourcentage représentant quelle fraction de l'erreur initiale on souhaite obtenir avec le maillage raffiné. Pour différentes valeurs de ce pourcentage, l'erreur estimée pour chaque maillage de la série est représentée sur un graphique commun en fonction du nombre de nœuds du maillage.



**Figure 4.23** Estimation d'erreur sur la carotide 2D (raffinée par Réduction d'Erreur)

Les différentes courbes représentées correspondent à quatre techniques de subdivision adaptative :

RE100: Erreur cible = Erreur précédente

RE70: Erreur cible = 70% de l'erreur précédente

RE50: Erreur cible = 50% de l'erreur précédente

RE00: Erreur cible = 0 (Raffinement de tout le maillage)

Pour la série « Ezz RE100 », l'erreur cible est fixée égale à l'erreur précédente, mais cela ne signifie pas qu'aucun élément ne sera subdivisé. En effet, la méthode de

subdivision adaptative est basée sur le principe d'équi-répartition de l'erreur. Ainsi, tous éléments présentant une erreur supérieure à l'erreur cible élémentaire (avec un ratio critique de 1,2) sera subdivisé. Au final, l'erreur sur le maillage obtenu sera donc plus petite que l'erreur précédente.

La série « Ezz RE00 » correspond à une erreur cible nulle (le pourcentage vaut zéro), tous les éléments sont alors subdivisés, ce qui correspond à un raffinement global du maillage à chaque étape. On constate que cette série est moins efficace que les trois autres : son taux de convergence est plus faible. Autrement dit, pour atteindre une erreur donnée, il faudra un plus grand nombre de nœuds qu'avec un raffinement local. On avait abouti à la même conclusion dans le cas du problème de Smith-Hutton à l'ordre 9.

Parmi les trois autres courbes, on constate que les droites sont quasiment superposées. Cela signifie que les trois méthodes ont la même efficacité, le même taux de convergence : il faudra le même nombre de nœuds pour atteindre une erreur donnée. Contrairement au cas de Smith-Hutton d'ordre 9 sur un carré, aucune série ne se distingue vraiment. Cependant, la série obtenue en visant une erreur cible valant 50% de l'erreur du maillage précédent, est plus rapide que la série à 100% : pour atteindre une erreur semblable, il a fallu réaliser 4 maillages pour la série à 50%, contre 7 maillages pour la série à 100%.

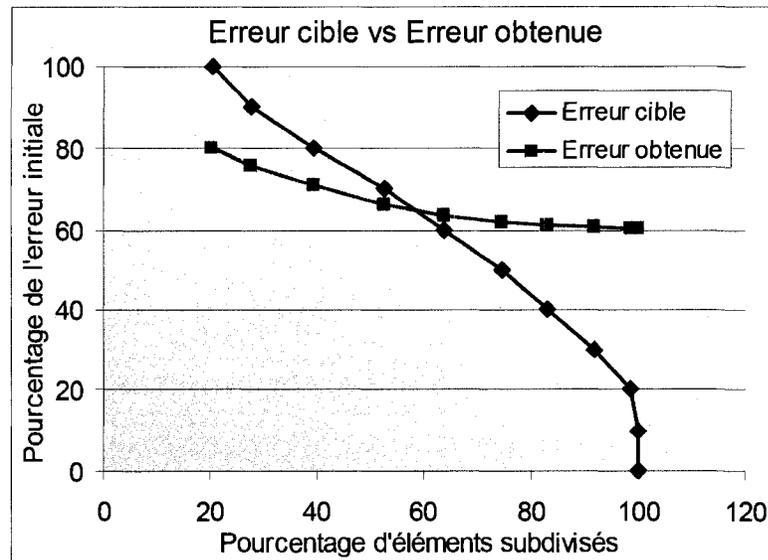
Finalement, la valeur du pourcentage de définition de l'erreur cible ne modifie que légèrement l'efficacité de la méthode pour ce problème, mais une valeur plus faible de ce pourcentage permet d'atteindre plus rapidement une erreur donnée, avec moins d'étapes de raffinement.

En effet, les éléments présentant une erreur élémentaire largement supérieure à la moyenne seront coupés quel que soit le pourcentage choisi. Si l'erreur ne varie pas énormément sur la géométrie, on peut supposer que les éléments fils obtenus par cette

subdivision auront une erreur élémentaire proche de l'erreur des éléments non subdivisés. Or, en demandant un pourcentage plus faible, plus d'éléments sont subdivisés. Les éléments supplémentaires qui sont subdivisés pour la série à 50% par exemple, seront probablement subdivisés à l'étape suivante pour la série à 100%. Imposer un pourcentage plus faible permet donc d'accélérer le processus en subdivisant plus d'éléments à chaque étape.

Mais ce raisonnement ne fonctionne que si la distribution de l'erreur sur le domaine est assez homogène, ce qui est le cas pour la carotide 2D, mais ce n'était pas le cas pour le problème de Smith-Hutton à l'ordre 9, où le milieu du carré n'avait pas besoin d'être subdivisé. C'est pourquoi dans ce premier problème, le pourcentage choisi pour la réduction de l'erreur avait une plus forte influence sur le taux de convergence.

On souhaite maintenant comparer l'erreur cible qui a servi à déterminer le nombre d'éléments à subdiviser, à l'erreur réelle obtenue sur le maillage raffiné. Pour cela, on simule l'écoulement sur le premier maillage de la carotide, et on raffine ce maillage en faisant varier la valeur du coefficient de réduction d'erreur. Le nombre d'éléments subdivisés sera plus grand lorsque le pourcentage de l'erreur initiale demandée sera plus petit (erreur cible plus petite). Pour chaque maillage raffiné obtenu, la simulation est refaite et l'erreur est estimée sur le nouveau maillage.



**Figure 4.24** Comparaison de l'erreur obtenue sur le maillage raffiné avec l'erreur cible (par Réduction d'Erreur)

Ce graphique (Figure 4.24) représente l'erreur cible et l'erreur obtenue sur le maillage raffiné, exprimées en pourcentage de l'erreur sur le maillage initial, en fonction du nombre d'éléments subdivisés. Cependant il faut garder en mémoire que pour déterminer si un élément doit être subdivisé, le ratio de l'erreur de cet élément sur l'erreur cible élémentaire est comparé à un ratio critique égal à 1,2. S'il est supérieur à ce ratio critique, alors il est subdivisé. Comme ce ratio critique est supérieur à un, certains éléments ne seront pas divisés même si leur erreur est supérieure à l'erreur cible élémentaire. Finalement l'erreur obtenue sur le nouveau maillage est supérieure à ce qu'elle aurait pu être avec un ratio critique égal à un.

En demandant un pourcentage d'erreur de 100%, on ne demande pas une réduction d'erreur, mais la méthode de sélection des éléments à subdiviser fait que les éléments présentant les erreurs les plus importantes sont quand même subdivisés (si leur erreur est plus importante que l'erreur moyenne multipliée par le critère 1,2). Ce phénomène est dû à la recherche de l'équi-répartition de l'erreur. Dans ce cas, plus de 17% des éléments sont subdivisés.

Finalement, on constate que l'erreur obtenue sur le maillage raffiné vaut environ 70% de l'erreur initiale quelle que soit le pourcentage d'erreur demandée (de 0% à 100%). La variation de l'erreur est très inférieure à la variation attendue. En effet, certains éléments possèdent des erreurs élémentaires bien plus grandes que les autres et leur subdivision suffit à diminuer l'erreur d'environ 20%. Ces éléments sont subdivisés quel que soit le pourcentage demandé, y compris pour un pourcentage de 100%. Les éléments supplémentaires qui sont subdivisés lorsque l'erreur cible est plus faible (pourcentage plus faible), ne diminuent pas l'erreur de manière significative.

Finalement, il ne semble pas utile de demander un pourcentage très faible car cela entraînera la découpe inutile d'éléments dont l'erreur n'est pas si importante.

En reprenant cette série de calculs réalisés à partir du maillage initial de la carotide 2D, on souhaite comparer le nombre d'éléments du maillage raffiné avec le nombre d'éléments théorique. Le nombre théorique est calculé en multipliant par 4 le nombre d'éléments subdivisés et en ajoutant le nombre d'éléments subdivisés. Ainsi, on ne prend pas en compte les triangles divisés en deux ou en trois à cause de leurs voisins.

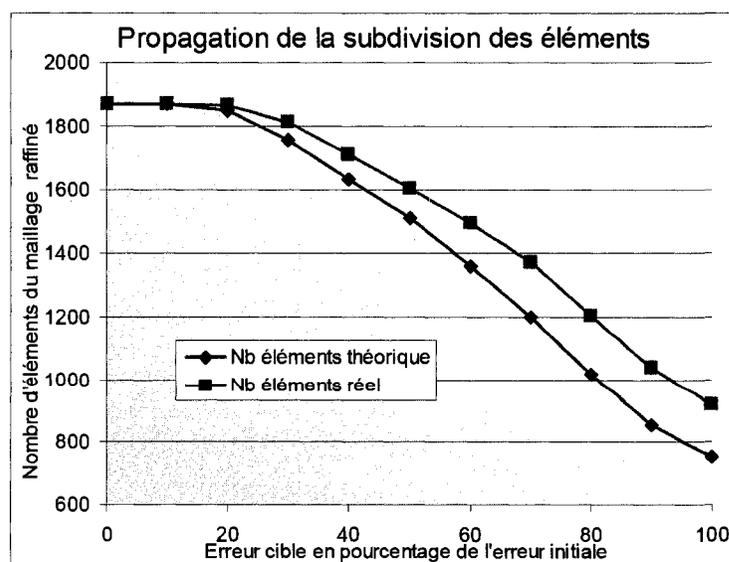


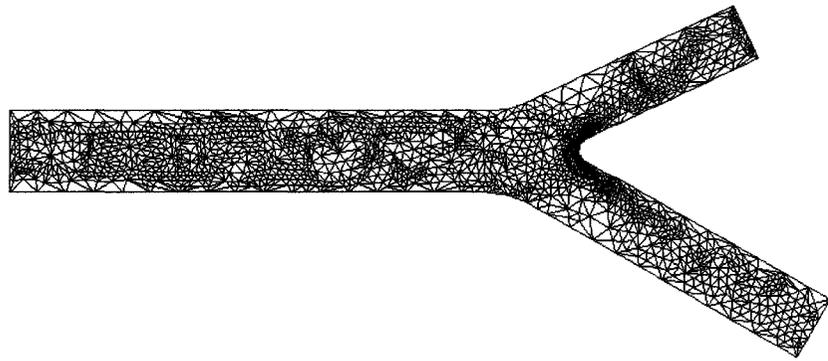
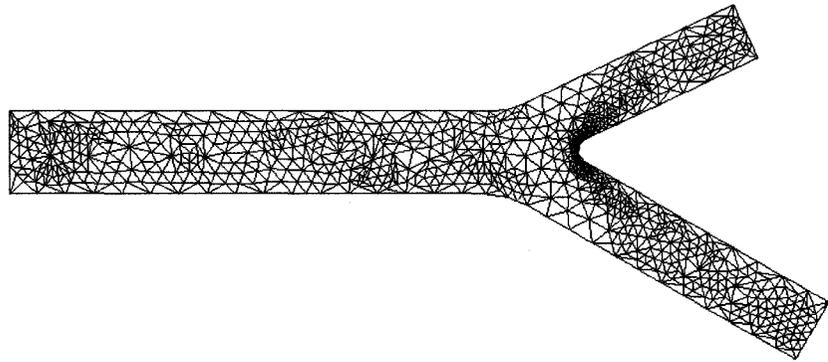
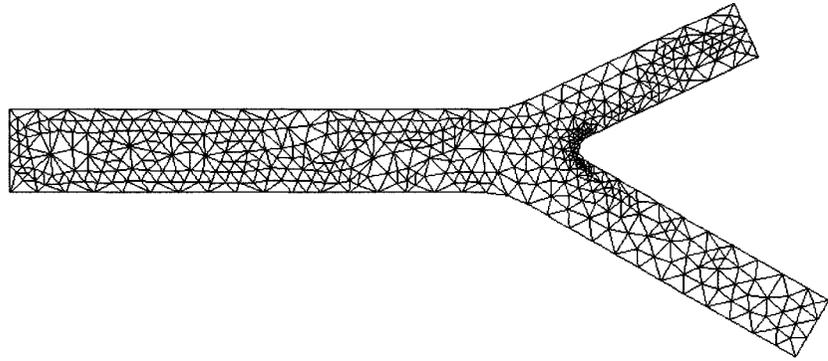
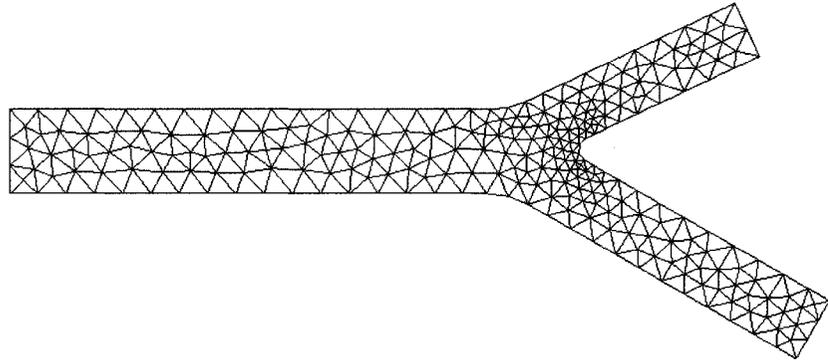
Figure 4.25 Étude de la propagation de la subdivision des éléments

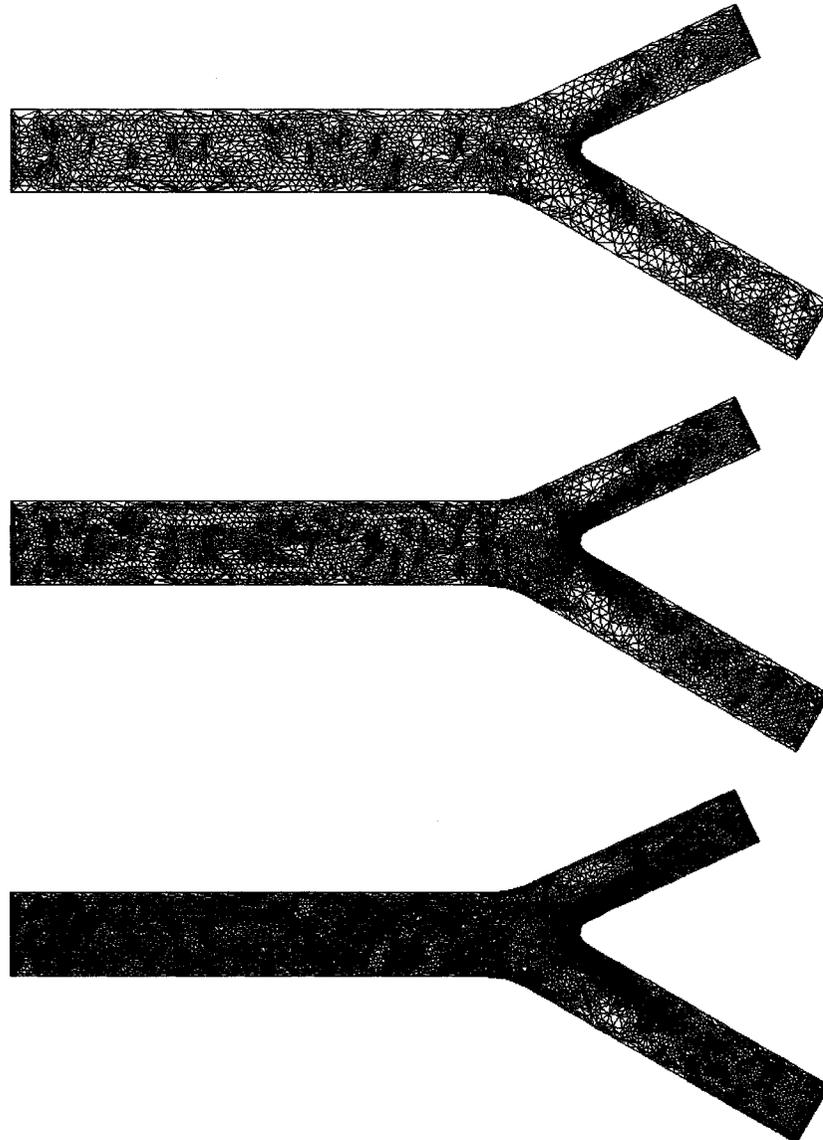
Lorsque l'erreur cible est très faible, quasiment tous les éléments doivent être subdivisés. Dans ce cas, seuls quelques éléments ne sont pas subdivisés intégralement et donc l'écart entre le nombre théorique et le nombre réel d'éléments est négligeable. Cet écart augmente lorsque le nombre d'éléments subdivisés diminue. En effet, si moins d'éléments doivent être subdivisés, ceux-ci peuvent se retrouver isolés et alors tous leurs voisins devront subir une coupe en deux ou trois triangles pour conserver un maillage conforme.

À chaque étape de raffinement, la solution a été interpolée sur le nouveau maillage pour constituer une solution initiale au calcul suivant. Contrairement au cas du problème de Smith-Hutton d'ordre 9, l'interpolation s'est révélée très efficace, et dans la majorité des cas, les solutions initiales permettaient de converger en quelques itérations, sans avoir recours à la montée en Reynolds.

En comparant les séquences de maillage obtenues avec les différentes méthodes de raffinement, on constate que contrairement au raffinement global pour lequel la répartition initiale d'éléments est conservée, le raffinement local mène à un maillage hétérogène, plus dense au niveau de la bifurcation, des surfaces d'entrée et de sortie. À l'inverse le maillage a été moins raffiné juste en amont de la bifurcation, ainsi qu'en aval sur le côté extérieur des deux artères de sortie.

Cependant, les trois méthodes de raffinement testées convergent vers des maillages assez semblables. Il n'y a pas de différence majeure dans la distribution des éléments. Seul le nombre de maillages nécessaires pour converger vers une erreur semblable diffère. Afin d'identifier plus facilement les zones où le raffinement était le plus nécessaire, la séquence de maillages obtenue par une réduction de l'erreur avec un pourcentage de 100% est représentée ci-dessous. En effet, avec cette méthode, grâce au principe de subdivision adaptative, seuls les éléments présentant des erreurs élémentaires largement au-dessus de la moyenne sont subdivisés.





**Figure 4.26** Séquence de maillages par raffinement local de la carotide 2D (Réduction d'Erreur, paramètre=100%)

### 4.3 Test du raffinement local 3D

#### 4.3.1 Présentation du problème

Pour étudier le raffinement local en 3D, on veut comme en 2D un problème dont on connaît la solution et dont on sait quelles zones ont besoin d'être raffinée en priorité.

On choisit donc de tester les techniques de raffinement 3D sur un problème de type Smith-Hutton à l'ordre 10. Le domaine de calcul est un cube centré en (0,0,0) dont les côtés sont de longueur 2. Les simulations sont réalisées avec l'élément P1-P1 stabilisé, avec un nombre de Reynolds de 1000. Les forces volumiques sont calculées et ajoutées aux équations de Navier-Stokes.

La solution analytique du problème s'écrit :

$$u_{SH3Dordre10} = y^9 z^9 (1 - x^{10}) \quad (4.6)$$

$$v_{SH3Dordre10} = x^9 z^9 (1 - y^{10}) \quad (4.7)$$

$$w_{SH3Dordre10} = -2x^9 y^9 (1 - z^{10}) \quad (4.8)$$

$$p_{SH3Dordre10} = 0 \quad (4.9)$$

Le premier maillage qui servira de maillage de départ est un maillage structuré et homogène, identique au premier maillage utilisé dans le chapitre précédent pour le problème de Smith-Hutton à l'ordre 2. Il est constitué de 63 nœuds et 192 éléments.

Cette solution analytique présente des forts gradients au voisinage des arêtes et des faces du cube. Ainsi, les maillages obtenus par les méthodes de raffinement local devraient être raffinés dans ces zones.

### 4.3.2 Raffinement local par Réduction d'Erreur

La méthode de Réduction d'Erreur a été utilisée sur ce problème en faisant varier la définition de l'erreur cible:

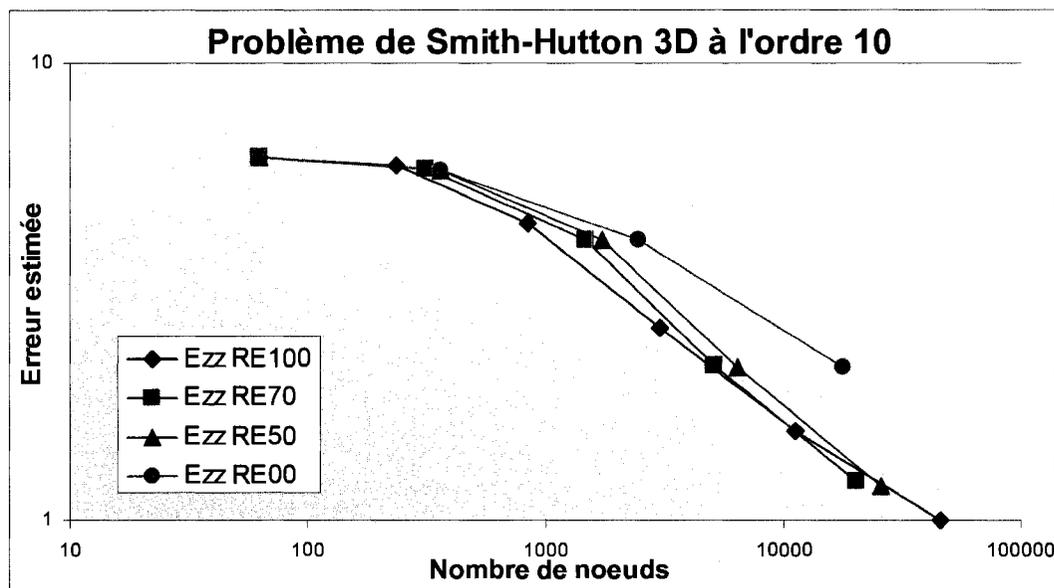
RE100: Erreur cible = Erreur précédente

RE70: Erreur cible = 70% de l'erreur précédente

RE50: Erreur cible = 50% de l'erreur précédente

RE00: Erreur cible = 0 (Raffinement de tout le maillage)

Les erreurs obtenues pour les différentes séries de maillage sont représentées en fonction du nombre de nœuds sur un graphique logarithmique.



**Figure 4.27** Erreurs estimées pour le problème de Smith-Hutton 3D à l'ordre 10

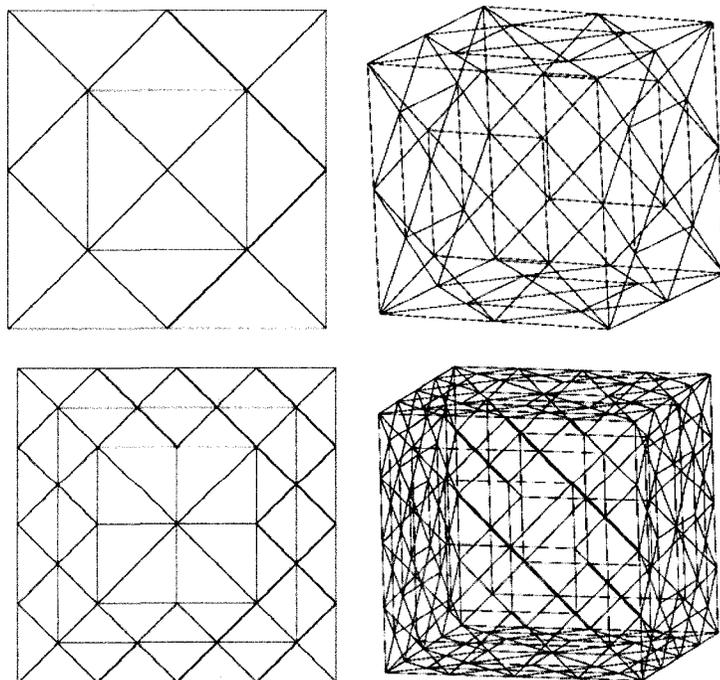
En observant ce graphique, on constate que le raffinement global du maillage est moins efficace (série RE00). Parmi les autres séries de maillage, la courbe « Ezz RE100 » est celle présentant la plus forte pente pour les premiers maillages, mais la courbe « Ezz RE70 » se révèle plus efficace (pente plus importante) pour les maillages plus denses.

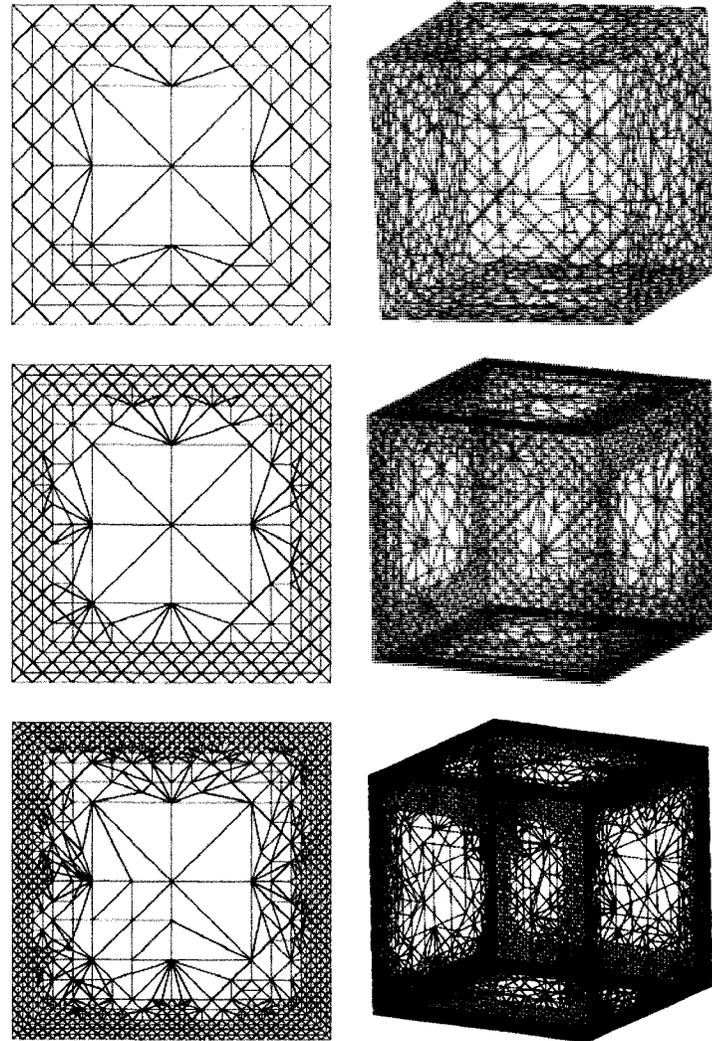
C'est finalement cette série qui est la plus efficace, elle a été obtenue en fixant l'erreur cible à 70% de l'erreur précédente à chaque étape de raffinement.

Sur les tests réalisés sur le problème de Smith-Hutton 2D à l'ordre 9, la série la plus efficace était celle à 50%. La définition optimale de l'erreur cible en fonction de l'erreur précédente dépend donc d'un problème à un autre.

#### 4.3.3 Série de maillages raffinés

La série de maillages obtenue par la méthode la plus efficace (70%) est représentée ci-dessous. Seule l'enveloppe (les éléments du bord du cube) est représentée, mais ces éléments nous donnent une indication de la densité du maillage à l'intérieur du cube. Le maillage est bien raffiné aux environ des arêtes du cube. De plus, ce test a permis de montrer l'intérêt d'utiliser une méthode de raffinement local en 3D, plutôt que de raffiner tout le maillage à chaque étape.





**Figure 4.28** Séquence de maillages par raffinement local du cube pour le problème de Smith-Hutton 3D à l'ordre 10 (Réduction d'Erreur, paramètre=70%)

## CHAPITRE 5

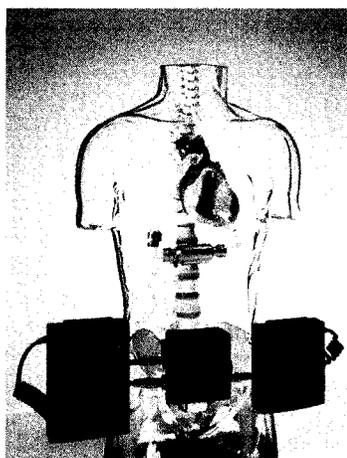
### SIMULATION DE L'ÉCOULEMENT DU SANG DANS LA CAROTIDE

#### 5.1 Assistance ventriculaire

L'insuffisance cardiaque est un syndrome clinique résultant d'une modification structurale ou fonctionnelle du cœur, qui altère le fonctionnement du ventricule. Les conséquences humaines et économiques de l'insuffisance cardiaque ont été évaluées aux États-Unis [38], montrant une augmentation du nombre de patients atteints de cette maladie. Avec 550 000 nouveaux cas détectés chaque année, on décompte environ 4,7 millions d'Américains souffrant d'insuffisance cardiaque (300 000 au Canada) [39]. Aux États-Unis, 500 millions de dollars US sont dépensés chaque année pour couvrir les médicaments contre l'insuffisance cardiaque. L'insuffisance cardiaque touche autant les hommes que les femmes, mais concerne plus particulièrement les personnes âgées : près de 1% des personnes de plus de 65 ans souffrent de cette maladie.

La transplantation d'un nouveau cœur est à ce jour le seul traitement chirurgical utilisé comme traitement définitif contre l'insuffisance cardiaque [40]. Cependant, cette possibilité est restreinte par le nombre de donneurs d'organe, plus faible encore chez les personnes âgées. Aux États-Unis, entre 50 000 et 70 000 patients pourraient bénéficier d'une transplantation cardiaque, mais seulement 3 000 cœurs sont disponibles dans le monde. Ce manque de donneurs a entraîné le développement rapide de dispositifs mécaniques pour aider ou remplacer le cœur. On retrouve tout d'abord le cœur mécanique (Total Artificial Heart) qui remplace totalement le muscle cardiaque. Celui-ci est alors complètement explanté. Par contre si le muscle cardiaque est partiellement fonctionnel, celui-ci peut être supporté dans sa fonction par un dispositif d'assistance

(pompe) nommé assistance ventriculaire gauche (LVAD = Left Ventricular Assist Device). Cette alternative est préférable dans une perspective de réhabilitation du muscle cardiaque et également pour réduire les risques de mortalité dus à une défaillance du dispositif. L'assistance ventriculaire est désormais reconnue comme un traitement efficace pour les personnes se remettant d'une attaque cardiaque, ou en attente d'une transplantation. Le REMATCH (Randomized Evaluation of Mechanical Assistance in the Treatment of Congestive Heart Failure) a confirmé fin 2001 l'efficacité de ce système à long terme sur des patients qui ne sont pas candidats à la transplantation, montrant que ces patients bénéficiaient grâce à ce système d'une meilleure qualité de vie et d'une plus longue espérance de vie [41].



**Figure 5.1** Exemple de dispositif d'assistance ventriculaire

Il existe deux types de pompes cardiaques permettant une assistance ventriculaire:

- Les pompes à débit continu (non-pulsé) [42]
- Les pompes à débit pulsé

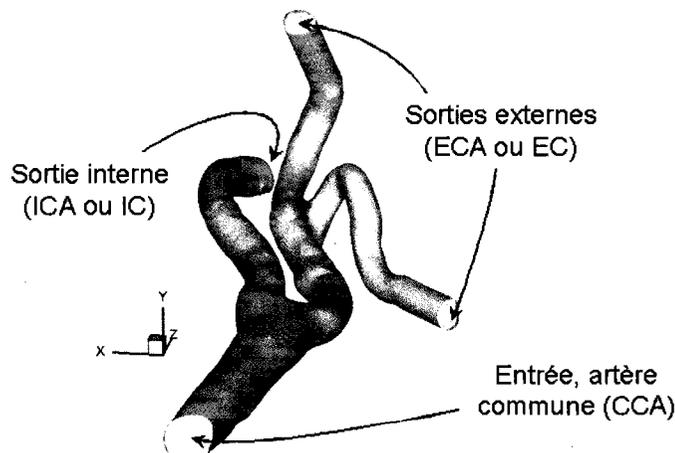
Dans cette étude on s'intéresse aux conséquences de l'utilisation d'une assistance ventriculaire à débit continu sur l'écoulement du sang dans la bifurcation de la carotide. Les conséquences déjà connues sont les suivantes :

- L'écoulement du sang se fait à débit continu dans tout le corps du patient, et donc dans l'artère carotide (le patient n'a plus de pouls).
- Il n'y a plus de compliance des artères (celle-ci était due au débit pulsé du sang), on peut donc utiliser un modèle à parois rigides pour les simulations numériques.

Finalement, la géométrie de l'artère carotide humaine, et plus particulièrement de la bifurcation, est parfaitement adaptée à un écoulement sanguin pulsé. On peut donc se demander si cette géométrie est toujours adaptée dans le cas d'un écoulement à débit continu, et si non, quels sont les risques liés à l'utilisation d'une pompe à débit continu.

## 5.2 Géométrie de la bifurcation de la carotide

Contrairement aux différentes études déjà réalisées sur la bifurcation de la carotide, celle-ci est réalisée sur une géométrie comprenant deux bifurcations. La géométrie provient de mesures IRM sur un patient réalisées par M. Thiriet et l'INRIA. Le modèle numérique est donc strictement identique à celui utilisé pour les mesures expérimentales.



**Figure 5.2** Modèle de bifurcation de la carotide utilisé pour les mesures expérimentales et les simulations numériques

### 5.3 Résultats expérimentaux

#### 5.3.1 Dispositif expérimental

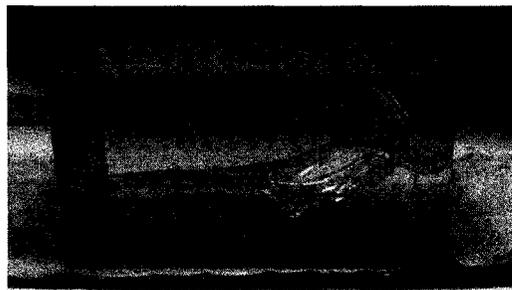
Les données de référence de la carotide proviennent de mesures IRM sur la personne ayant servi au modèle de carotide. Le débit  $Q$  imposé en entrée correspond au débit moyen mesuré sur un cycle cardiaque. On a également mesuré l'aire de la section d'entrée  $A$  de l'artère commune et les caractéristiques du sang humain à  $37^{\circ}\text{C}$  : sa masse volumique  $\rho$  et sa viscosité dynamique  $\mu$ .

À partir de ces données, on définit une longueur  $L$  et une vitesse  $U$  de référence :

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{A} \\ U &= \frac{Q}{A} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Étant données ces valeurs de référence et les caractéristiques du fluide, on peut calculer le nombre de Reynolds :

$$\text{Re} = \frac{\rho UL}{\mu} \approx 320 \quad (5.2)$$



**Figure 5.3** Modèle de carotide en silicone

Une reproduction de la carotide a été fabriquée en silicone à l'échelle 3 :1. Pour retrouver le nombre de Reynolds calculé à partir des données de référence, le sang humain à 37°C est remplacé par un mélange d'eau et de glycérine (40%-60% en masse) à 25°C.

**Tableau 5.1** Valeurs caractéristiques de référence et expérimentales

<b>DONNÉES DE RÉFÉRENCE</b>	<b>DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL</b>
<b>Mesures</b> $A \approx 21.10^{-6} \text{ m}^2$ $Q \approx 5.10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$	<b>Mesures</b> $A \approx 189.10^{-6} \text{ m}^2$ $Q \approx 33,33.10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$
<b>Sang humain à 37°C</b> $\rho \approx 1050 \text{ kg.m}^{-3}$ $\mu \approx 0,0035 \text{ Pa.s}$	<b>Mélange eau – glycérine à 25°C</b> $\rho \approx 1151 \text{ kg.m}^{-3}$ $\mu \approx 0,0088 \text{ Pa.s}$
<b>Échelles de longueur et de vitesse</b> $L = \sqrt{A} \approx 0,0046 \text{ m}$ $U = \frac{Q}{A} \approx 0,24 \text{ m.s}^{-1}$	<b>Échelles de longueur et de vitesse</b> $L = \sqrt{A} \approx 0,014 \text{ m}$ $U = \frac{Q}{A} \approx 0,18 \text{ m.s}^{-1}$
<b>Nombre de Reynolds</b> $Re = \frac{\rho UL}{\mu} \approx 320$	<b>Nombre de Reynolds</b> $Re = \frac{\rho UL}{\mu} \approx 320$

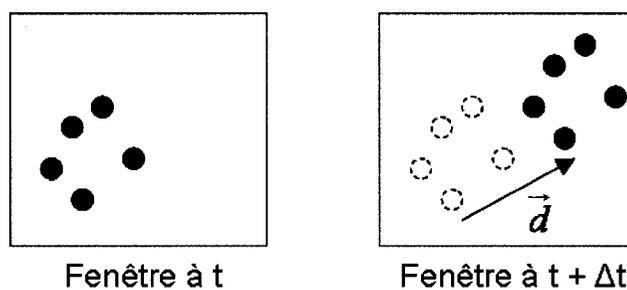
Le dispositif expérimental permet également de contrôler la répartition du débit entre les différentes artères de la carotide. Ainsi, il sera possible de comparer les résultats expérimentaux aux résultats numériques pour des répartitions identiques de débit.

### 5.3.2 Mesures PIV

Les profils de vitesse sont calculés par PIV (Particle Image Velocimetry) : un laser à double impulsion, dont le faisceau est ouvert par une lentille cylindrique, vient éclairer

une tranche de la carotide appelée nappe laser. Le liquide utilisé pour les expériences est transparent, mais il contient des particules phosphorescentes lorsqu'elles sont éclairées par un laser. Une caméra permet d'enregistrer des images de ces particules situées sur la tranche éclairée par le laser. L'utilisation d'un laser à double impulsion permet de récupérer des images de l'écoulement à deux instants séparés par un court intervalle de temps  $\Delta t$ . Il suffit alors d'observer le déplacement des particules pendant ce  $\Delta t$  pour en déduire la vitesse de l'écoulement [43].

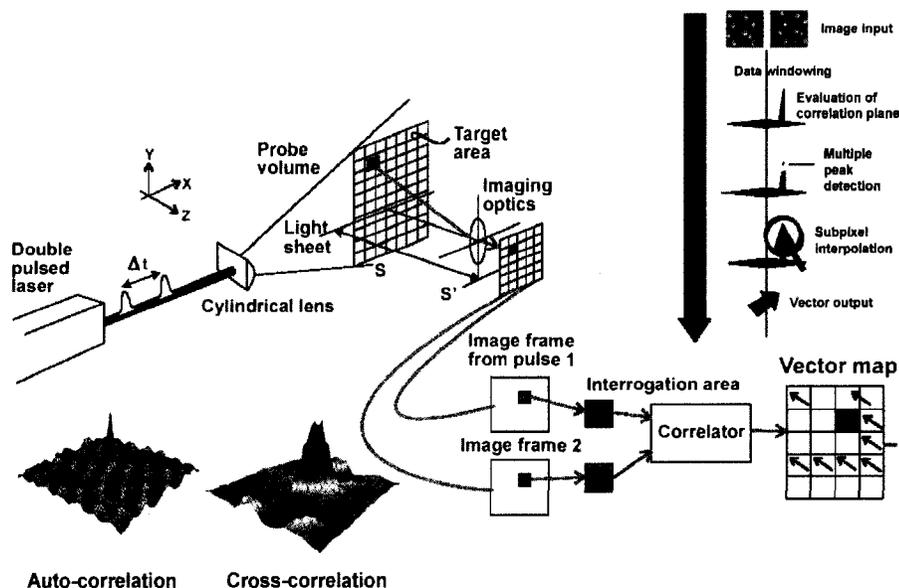
Mais la densité de particules est trop importante pour les identifier facilement d'une image à l'autre. Les images sont donc divisées en fenêtres d'interrogation. Le but est de reconnaître dans une fenêtre d'interrogation de l'image à  $t + \Delta t$ , la disposition des particules de la même fenêtre à l'instant  $t$ . La PIV repose sur l'hypothèse que toutes les particules d'une fenêtre d'interrogation se déplacent à la même vitesse et dans la même direction. Ainsi la disposition des particules est supposée rester inchangée entre les deux images. L'ensemble des particules se sera déplacé, et ce déplacement permettra d'obtenir la vitesse moyenne des particules de cette fenêtre.



**Figure 5.4** Comparaison des fenêtres d'acquisition aux deux instants

Pour identifier les particules d'une image à l'autre, les fenêtres d'interrogation sont corrélées. La détection du pic de corrélation permet de déterminer le déplacement moyen des particules. Le calcul direct de la fonction de corrélation dans le domaine temporel est trop coûteux, celui-ci est donc effectué dans le domaine spectral.

Disposant du déplacement moyen des particules d'une fenêtre d'interrogation et de l'écart de temps entre les deux photographies, on peut calculer un vecteur vitesse pour chaque fenêtre d'interrogation et ainsi construire un champ de vitesse.



**Figure 5.5** Principe de fonctionnement des mesures PIV

L'avantage de la PIV est de permettre la mesure de la vitesse sur toute une région de l'écoulement, contrairement à l'anémométrie laser à effet Doppler (LDA) qui ne permet de mesurer la vitesse qu'en un point.

### 5.3.3 Résultats

Ces mesures permettent d'obtenir le profil de l'écoulement du sang dans la carotide. Les résultats seront visualisés plus tard et ils seront alors comparés aux résultats numériques.

## 5.4 Simulation numérique

### 5.4.1 Choix de modélisation

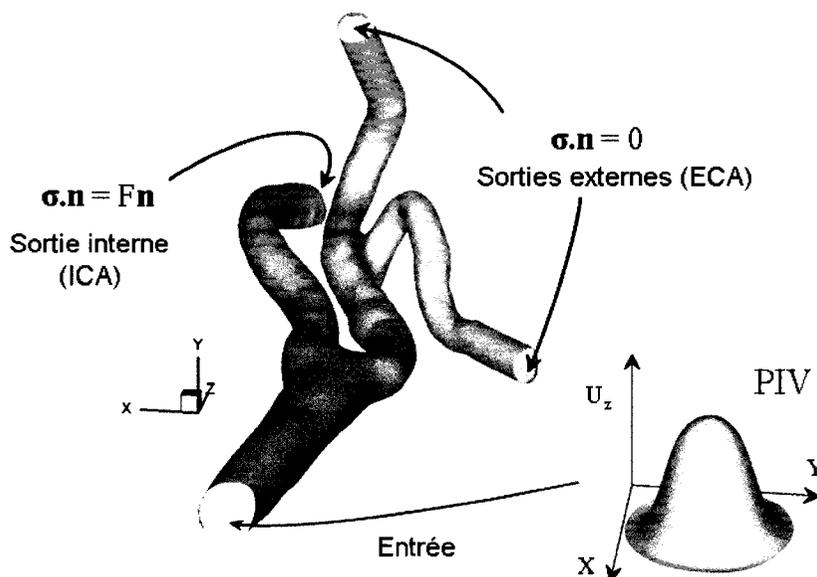
Pour la simulation numérique, le sang est représenté par un fluide incompressible et Newtonien. L'écoulement est supposé laminaire et on considère des parois rigides. Le code EF5 utilise des équations de Navier-Stokes normalisées. Les caractéristiques du fluide sont donc entièrement représentées par son nombre de Reynolds. Pour correspondre aux mesures et au dispositif expérimental, les simulations sont réalisées avec un nombre de Reynolds proche de 320.

Les simulations réalisées sont des simulations stationnaires, donc en régime permanent. Le ratio de débit entre les deux artères de sortie (IC/EC) ne peut donc pas varier au cours du temps. Cependant, dans le cas de l'utilisation d'une pompe cardiaque à débit continu, l'écoulement est non-pulsé, donc le ratio de débit entre les deux artères est constant. Mais on peut se demander quelle est la répartition de débit dans cette situation, si elle correspond par exemple à la répartition moyenne d'un écoulement pulsé. Les simulations sont alors faites pour différents ratios afin de comparer les résultats obtenus :

- IC/EC = 30/70
- IC/EC = 40/60
- IC/EC = 50/50
- IC/EC = 60/40
- IC/EC = 70/30

En entrée, le profil imposé sur la surface d'entrée est une interpolation des mesures PIV à l'entrée du modèle de carotide, ainsi on a exactement le même écoulement d'entrée pour les simulations expérimentales et numériques. Les vitesses sont nulles aux parois. Aucune condition de Dirichlet n'est imposée en sortie. Sur la sortie externe est appliquée une condition de traction nulle, tandis que sur la sortie interne, une force de traction est

imposée dans la direction normale à la paroi. La valeur de cette force va déterminer le ratio de débit.



**Figure 5.6** Géométrie de la bifurcation de la carotide et conditions limites

Initialement, l'évolution du ratio de débit en fonction de la force de traction est inconnue. Plusieurs simulations sont donc réalisées pour différentes valeurs de la force de traction. Les débits dans toutes les artères de sortie sont mesurés par le code EF5 pour chaque force de traction testée. Or, il s'avère que la relation qui lie la force de traction appliquée sur l'artère de sortie interne et le débit dans cette artère est linéaire. La bonne valeur de la force de traction peut donc être calculée pour chaque ratio de débit voulu, grâce à une régression linéaire des valeurs mesurées.

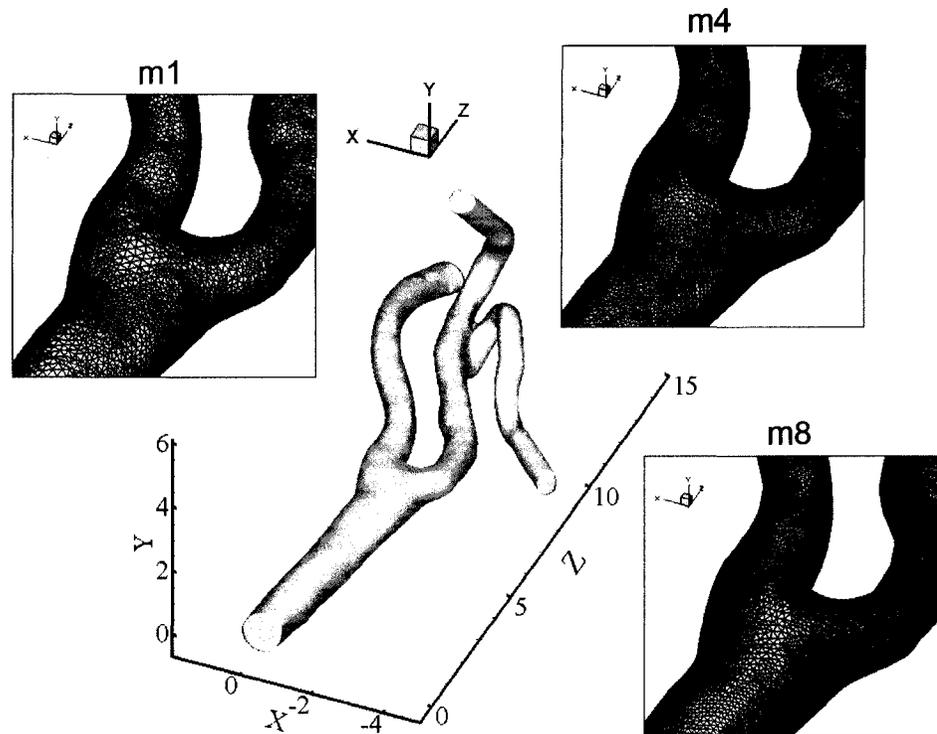
#### 5.4.2 Première série de calculs

##### 5.4.2.1 *Série de maillages*

Dans un premier temps, une série de neuf maillages relativement homogènes a été réalisée avec le logiciel Comsol, avec un nombre de nœuds allant de 103 397 à 471 633 nœuds. Pour chaque maillage, l'écoulement a été simulé avec différentes valeurs de forces normales afin d'obtenir la relation linéaire liant la répartition de débit à la valeur de la force de traction appliquée sur l'artère de sortie interne. Une fois cette relation connue, l'écoulement est à nouveau simulé avec les valeurs de forces de traction permettant d'obtenir les ratios de débit voulus.

**Tableau 5.2** Taille des problèmes pour les neuf maillages de la première série

Maillage	Nb de nœuds	Nb d'éléments	Nb d'inconnues	Mémoire en Gigas
1	103397	587472	346865	4.4
2	148236	851310	504765	7.1
3	211166	1225023	729662	11.0
4	253783	1478983	882493	14.4
5	305259	1785885	1067322	18.3
6	328399	1924702	1150657	20.0
7	347180	2032478	1215032	21.4
8	412222	2420967	1450312	26.9
9	471633	2682296	1703133	33.1



**Figure 5.7** Visualisation de la densité des maillages de la carotide

#### 5.4.2.2 Estimation d'erreur

Dans la section traitant l'estimation d'erreur, deux méthodes ont été développées : la méthode discrète et la méthode intégrale. Les premiers tests d'estimation d'erreur ont été réalisés avec la méthode intégrale, mais dans ce cas les deux méthodes vont être testées pour comparer leurs résultats.

Lors des tests réalisés sur les taux de convergence pour des problèmes simples, le taux de convergence pouvait être visualisé sur un graphique logarithmique représentant l'erreur en fonction de la taille caractéristique du maillage. Cette taille caractéristique était facile à calculer car elle était divisée par deux à chaque étape de raffinement global du maillage.

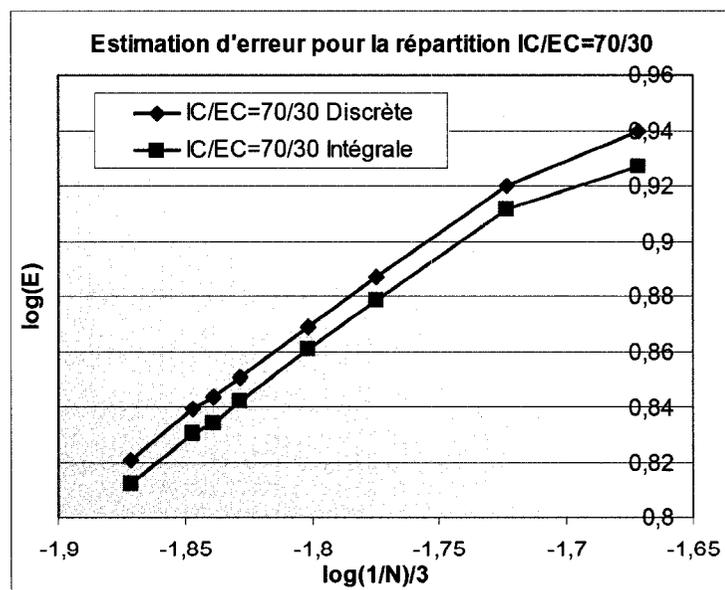
Cependant, dans le cas de la carotide, les maillages sont indépendants et on ne peut pas facilement estimer une taille caractéristique pour chaque maillage. On utilise alors une approximation de la loi de Reddy [36]:

$$\|e\|_m \sim \left[ \left( \frac{1}{N} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^p \quad (5.3)$$

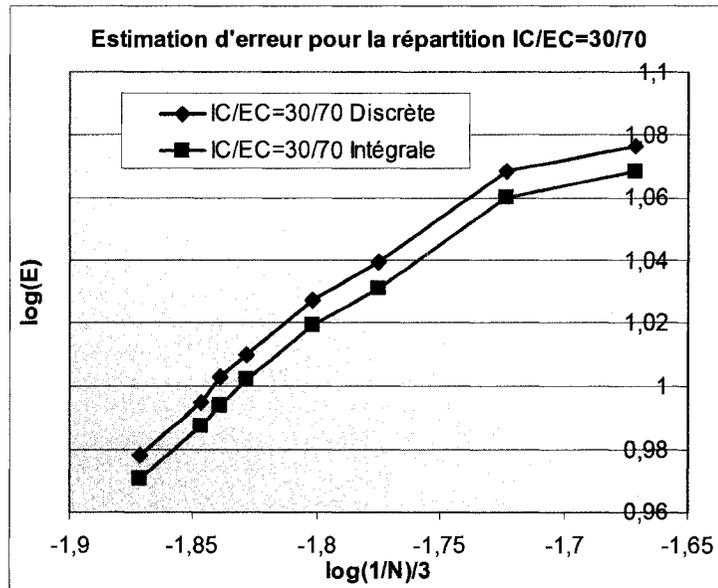
Avec :  $N$  : le nombre de nœuds du maillage

La taille caractéristique  $h$  est donc approchée par l'inverse de la racine cubique du nombre de nœuds du maillage.

Pour les deux méthodes d'estimation d'erreur (méthodes discrètes et intégrales), la reconstruction est faite seulement sur une sélection de nœuds, et non sur tous les nœuds de la cellule (voir chapitre 3).



**Figure 5.8** Erreurs estimées sur la carotide pour un ratio normal de débit  
IC/EC=70/30



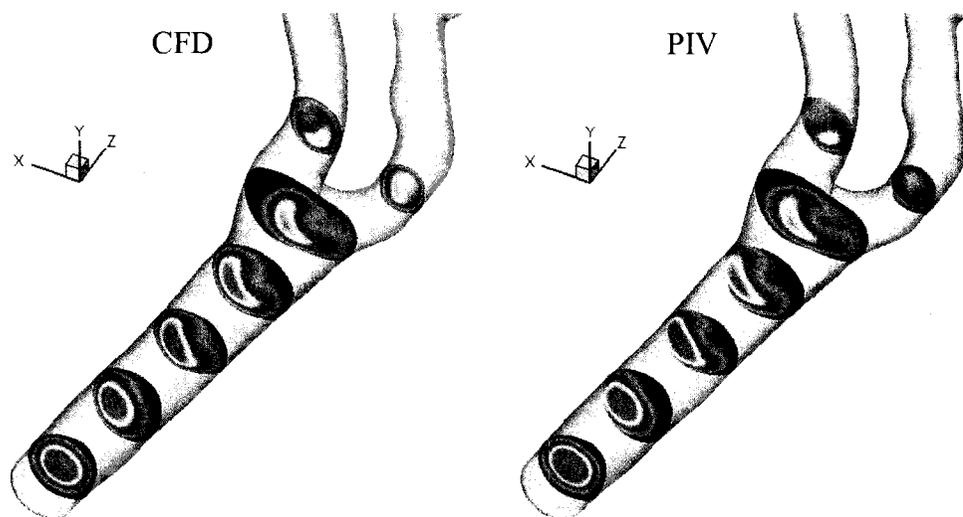
**Figure 5.9** Erreurs estimées sur la carotide pour un ratio anormal de débit IC/EC=30/70

Finalement, on observe uniquement un décalage de l'erreur entre les deux méthodes discrète et intégrale, on aura donc les mêmes taux de convergence. Le choix d'une de ces méthodes peut donc se faire de manière arbitraire. La méthode finalement retenue est la méthode des moindres carrés intégrale, car elle se révèle être plus robuste (voir section 3.1.2.3).

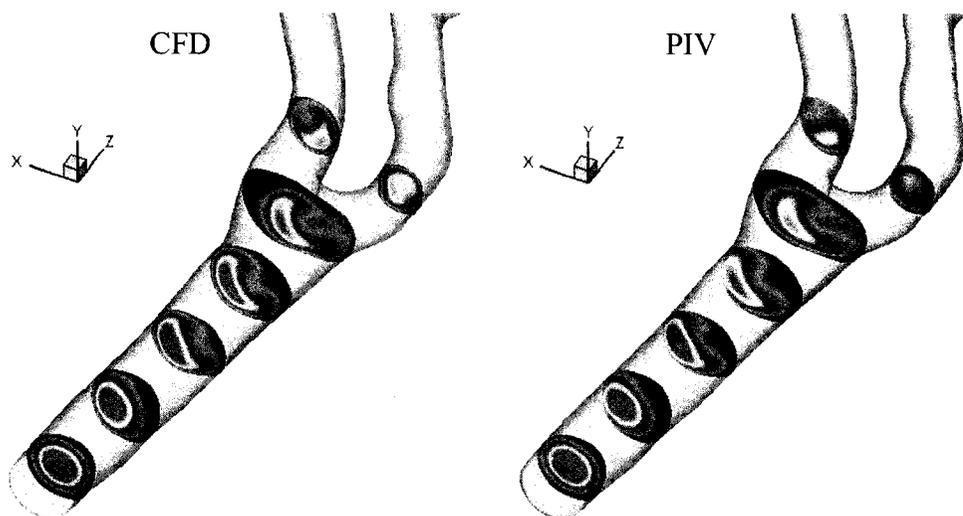
Les taux de convergence de l'estimateur d'erreur valent environ 0,67 dans le cas d'un ratio anormal de débit IC/EC=30/70, et environ 0,75 dans le cas d'un ratio normal de débit IC/EC=70/30. Les taux sont à nouveau inférieurs au taux de convergence théorique de l'élément stabilisé P1-P1 en 3D.

#### 5.4.2.3 Validation des résultats numériques

Dans un premier temps, les résultats obtenus grâce à cette série de calculs numériques sur la carotide sont comparés aux résultats expérimentaux.



**Figure 5.10** Comparaison des profils de vitesse de la simulation numérique sur le premier maillage, avec les résultats expérimentaux (ratio 50/50)



**Figure 5.11** Comparaison des profils de vitesse de la simulation numérique sur le huitième maillage, avec les résultats expérimentaux (ratio 50/50)

Les deux images ci-dessus présentent à droite les mesures PIV sur l'écoulement avec un ratio de débit de 50/50 entre les artères interne et externe, et à gauche les résultats

numériques obtenus pour ce même ratio, sur le premier puis le huitième maillage de la série. Les géométries sont identiques et les plans de représentation sont situés aux mêmes endroits. Pour analyser les résultats présentés sur ces deux images, il faut donc comparer tranche à tranche les profils d'écoulement obtenus par PIV et par simulation numérique.

On constate sur le premier maillage des différences dans le profil d'écoulement dès la deuxième tranche de la carotide commune. Sur la première tranche, il est logique de retrouver des écoulements semblables car le profil d'entrée imposé pour la simulation numérique est identique au profil d'entrée expérimental. Les différences s'accroissent au niveau de la bifurcation, et en aval de la bifurcation les écoulements ne sont plus du tout comparables.

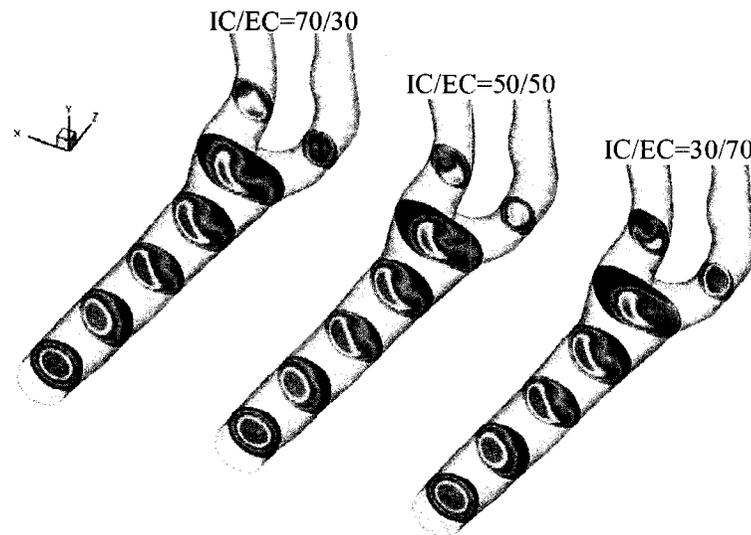
Sur le huitième maillage, on obtient de meilleurs résultats, les profils d'écoulement obtenus numériquement sont semblables aux profils expérimentaux dans toute l'artère commune. Les résultats sont légèrement moins satisfaisants au niveau de la bifurcation et en aval de celle-ci. Cependant, on constate qu'un maillage plus fin permet de mieux capturer l'écoulement. D'un point de vue qualitatif, les profils d'écoulement numériques correspondent aux résultats expérimentaux, ce qui permet de valider les simulations numériques. Ceux-ci capturent bien le comportement du fluide dans la carotide.

Cependant il reste quelques imperfections d'un point de vue quantitatif. Ces imperfections peuvent être causées par différents facteurs, par exemple :

- Le maillage n'est peut-être pas assez fin au niveau de la bifurcation.
- Il peut y avoir une légère variation de l'angle d'entrée de l'écoulement entre les simulations numériques et expérimentales.
- L'indice de réfraction du liquide a été ajusté à celui de la silicone, pour éviter les erreurs lors de l'acquisition d'image par les caméras, mais l'imprécision de ce réglage peut entraîner une imperfection des résultats.

- Pour la récupération du champ de vitesse au niveau de la bifurcation et en aval, la quantité de silicone traversée pour l'acquisition d'image est plus grande. L'imprécision due au facteur précédent est donc amplifiée quand on s'éloigne de l'entrée de la carotide commune, ce qui peut expliquer que les résultats coïncident moins quand on s'éloigne de cette entrée.

#### 5.4.2.4 Analyse des résultats numériques



**Figure 5.12** Comparaison des profils de vitesse obtenus sur le huitième maillage pour différentes valeurs du ratio de débit.

Les répartitions IC/EC de 70/30 et 50/50 sont des représentations physiologiquement normales, tandis que la dernière répartition 30/70 est anormale. Cependant, cette dernière répartition pourrait correspondre à une obstruction partielle de l'artère. Elle est donc également intéressante à observer. Toutes ces simulations ont été faites avec le même nombre de Reynolds. En amont de la bifurcation les profils de vitesse sont semblables pour les trois répartitions de débit. Changer le ratio de débit IC/EC ne modifie donc l'écoulement qu'à partir de la bifurcation. En observant les profils de vitesse dans les deux artères interne et externe en aval de la bifurcation, on constate bien

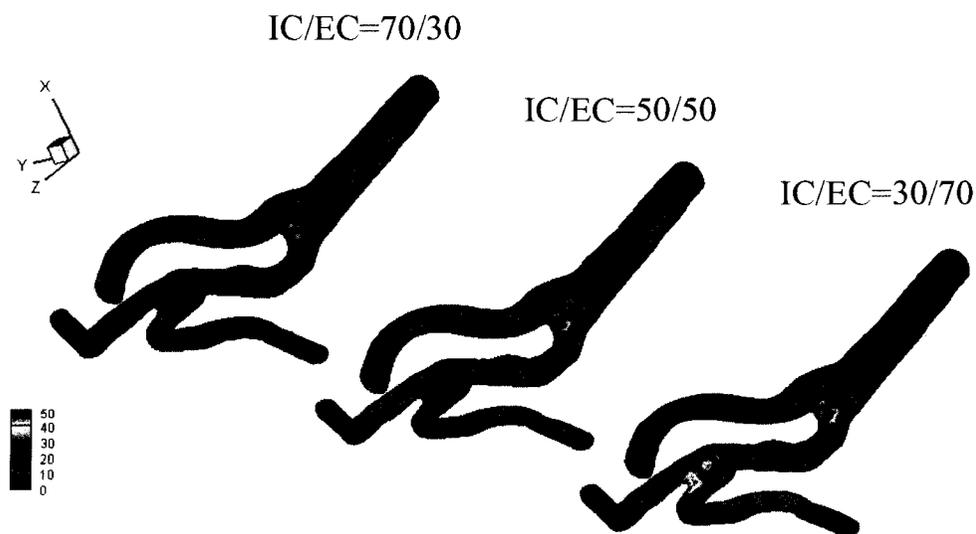
une vitesse plus élevée dans l'artère interne pour la répartition 70/30, et à l'inverse une vitesse plus élevée dans l'artère externe pour la répartition 30/70.

Les zones à risque pour la formation de plaques sont identifiables par deux caractéristiques de l'écoulement dans ces zones [3]:

- Un faible taux de cisaillement à la paroi (faible WSS).
- Une « recirculation » du sang dans ces zones : la recirculation est définie au sens large du terme, on considère qu'il y a recirculation du sang lorsque celui-ci ne suit pas la direction privilégiée de l'écoulement.

On souhaite identifier les zones présentant de faibles WSS ou une recirculation du sang pour identifier les zones à risque dans cette carotide. En effet, en repérant dès maintenant les zones à surveiller, on facilite les prochaines études qui seront réalisées sur l'écoulement transitoire du sang dans la carotide. On s'intéresse dans cette étude uniquement à la première bifurcation.

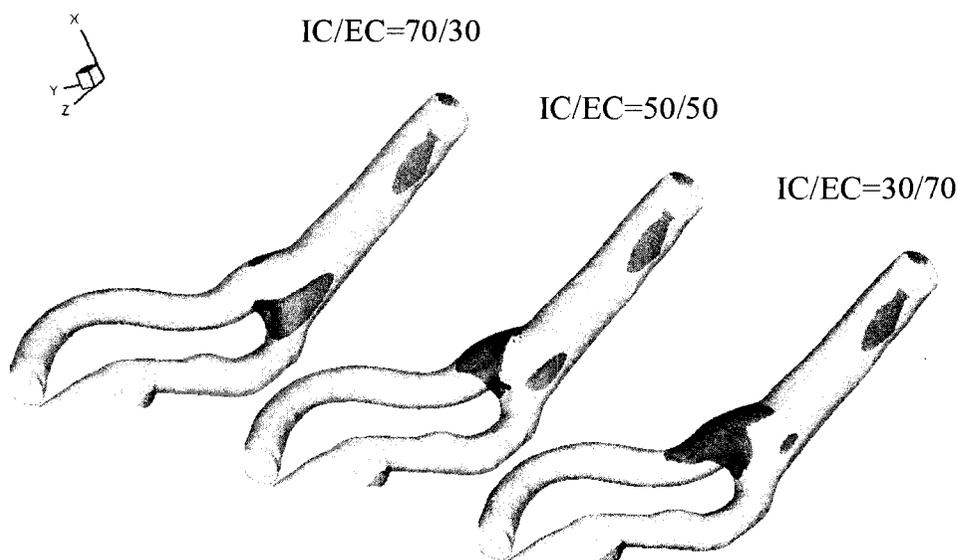
La Figure 5.13 présente les valeurs du rotationnel de la vitesse, proportionnel au WSS. Autrement dit, les valeurs présentées correspondent à un WSS adimensionné.



**Figure 5.13** Comparaison des taux de cisaillement à la paroi (WSS) adimensionnés, obtenus sur le huitième maillage pour différentes valeurs du ratio de débit

On constate tout d'abord un taux de cisaillement élevé au niveau du point de stagnation. Le taux de cisaillement à ce point augmente lorsque plus de débit passe par les artères externes. À l'entrée de la carotide commune, on observe la présence d'une zone à faible taux de cisaillement. Mais la zone présentant le plus faible taux de cisaillement pariétal est la paroi extérieure de l'artère interne juste en aval de la bifurcation.

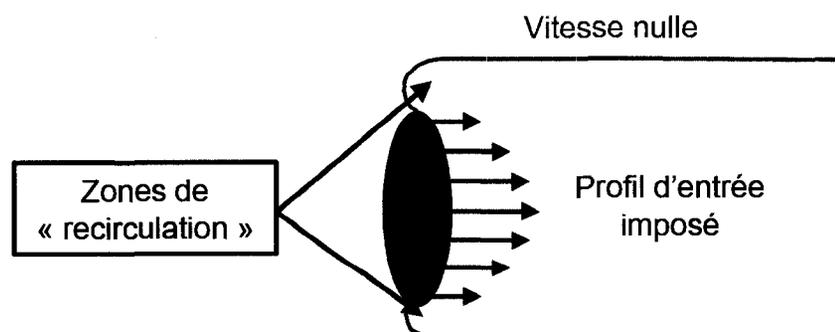
Pour vérifier si cette zone coïncide avec une zone de recirculation, on choisit de visualiser les isosurfaces du domaine présentant une vitesse  $w$  dans la direction  $z$  inférieure ou égale à  $w = -0,003$ . En effet, la direction  $z$  correspond à la direction privilégiée de l'écoulement dans la carotide commune jusqu'à la bifurcation. Cependant il ne faut pas tenir compte de ce critère dans les artères loin en aval de la bifurcation car la direction  $z$  n'est alors plus la direction privilégiée de l'écoulement. Cette valeur critique de  $w$  a été choisie car elle permettait d'identifier un plus grand nombre de zones pouvant correspondre à une recirculation du sang.



**Figure 5.14** Identification des zones de recirculation (isosurfaces  $w < -0,003$ ) sur le huitième maillage

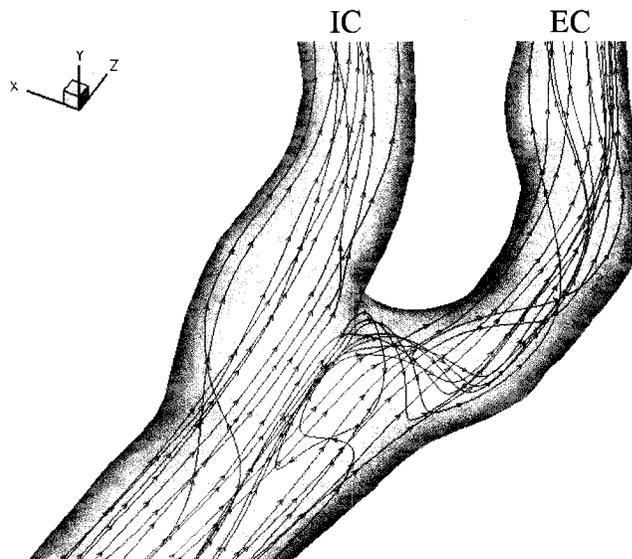
On observe tout d'abord une zone de recirculation s'étendant du point de stagnation à la paroi extérieure de l'artère interne. Une surface plus étendue signifie que le sang s'écoulant dans le sens inverse de la direction principale de l'écoulement, a une vitesse encore plus élevée. Or, on constate que plus le débit dans l'artère externe est grand, plus la surface représentée s'étend dans l'artère interne. Ce phénomène s'explique par le fait que le débit dans l'artère interne est alors moins fort, ce qui est plus propice à la formation de recirculation. De plus la paroi extérieure de l'artère interne est également une zone présentant un faible taux de cisaillement pariétal, elle devient donc une zone à risque pour la formation de plaques. On constate également qu'un écoulement anormal avec une répartition IC:EC=30:70 est encore plus propice à la formation de plaques.

Il y a aussi une autre zone de recirculation dans l'artère commune, identique pour les trois répartitions. On constate enfin la présence d'une petite zone de recirculation juste à l'entrée de la carotide commune pour les trois répartitions de débit. En réalité cette recirculation n'est pas physiologique et s'explique par la méthode utilisée pour imposer le profil de vitesse en entrée. En effet, la Figure 5.15 exagère la forme de l'entrée de la carotide commune sur le modèle. Le fait d'imposer un profil de vitesse non nul sur la surface d'entrée tout en imposant une vitesse nulle aux parois crée des zones de recirculation autour de la surface d'entrée.

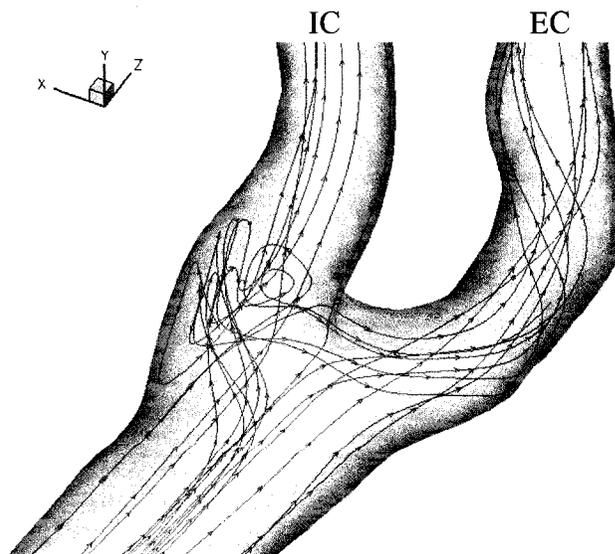


**Figure 5.15** Zones de recirculation artificiellement créées à l'entrée de la carotide commune

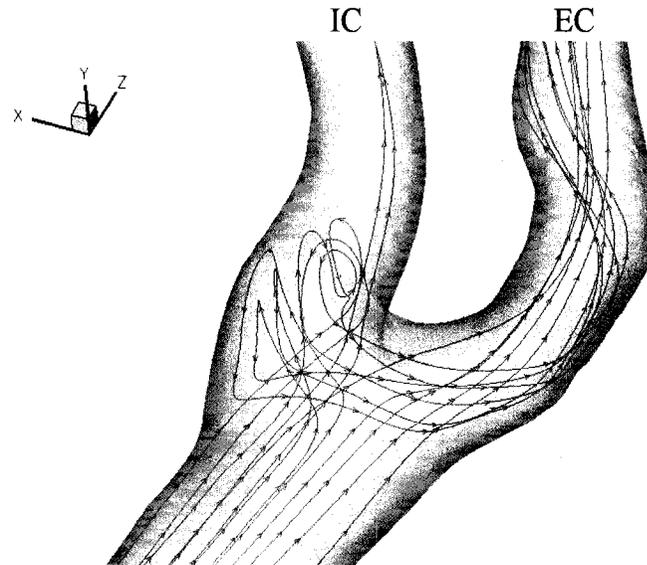
Pour vérifier que ces zones correspondent bien à une recirculation du sang, on visualise quelques lignes de courant au niveau de la bifurcation pour les trois répartitions de débit.



**Figure 5.16** Représentation des lignes de courant au niveau de la bifurcation pour un ratio IC/EC = 70/30



**Figure 5.17** Représentation des lignes de courant au niveau de la bifurcation pour un ratio IC/EC = 50/50



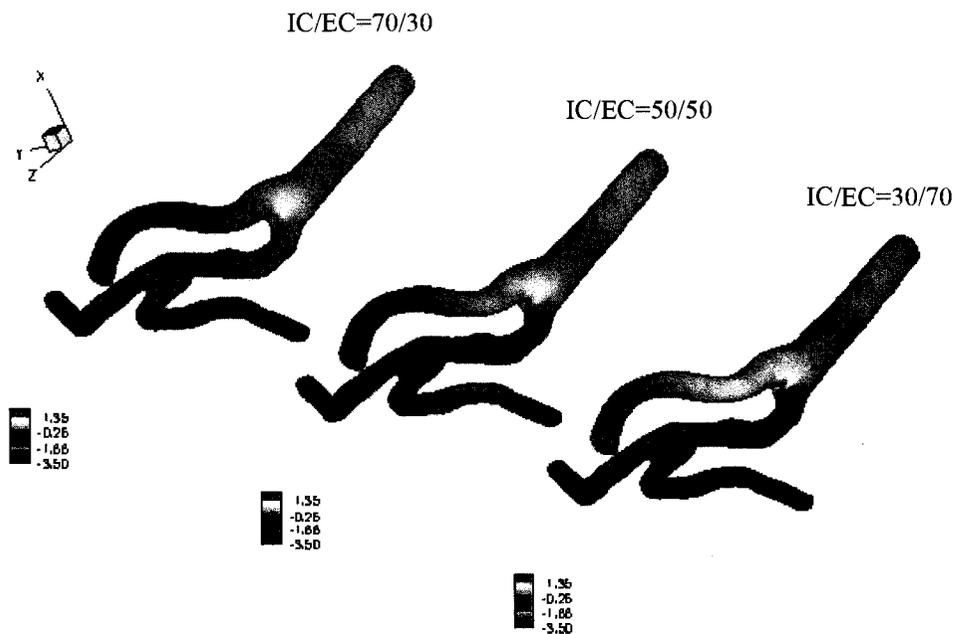
**Figure 5.18** Représentation des lignes de courant au niveau de la bifurcation pour un ratio IC/EC = 30/70

Sur les figures : Figure 5.16, Figure 5.17 et Figure 5.18, on retrouve bien les zones de recirculation qui avaient été identifiées avec les isosurfaces aux environs de la bifurcation. Dans le cas d'un ratio IC/EC = 70/30, on retrouve une légère recirculation du sang en amont de la bifurcation, plutôt du côté de l'artère externe. Mais ces zones présentent des forts taux de cisaillement pariétal. Dans le cas d'un ratio IC/EC = 50/50, la recirculation est située aux environs de la paroi extérieure de l'artère interne. Enfin dans le cas d'un ratio anormal IC/EC = 30/70, on observe une zone de recirculation encore plus étendue à l'entrée de l'artère interne, encore moins de débit s'écoule finalement dans l'artère interne. Or cette zone correspond justement au plus faible taux de cisaillement pariétal, les conditions nécessaires à la formation de plaques sont alors réunies.

Dans le cas d'une répartition normale de débit, environ 70% du débit de l'artère commune s'écoule dans l'artère interne. La géométrie de la bifurcation de la carotide est donc adaptée à l'écoulement d'une plus grande quantité de sang dans l'artère interne. Or lorsqu'on impose un débit plus bas dans l'artère interne et donc plus fort dans l'artère

externe, on constate que le sang s'écoule d'abord en direction de l'artère interne, puis change brutalement de direction pour s'écouler dans l'artère externe. Cette brusque modification de la direction de l'écoulement est à l'origine de ce qu'on a appelé recirculation. Finalement, on peut en conclure qu'une altération de la répartition du débit peut avoir des conséquences importantes sur la direction de l'écoulement du sang, créant des zones propices à la formation de plaques.

On a enfin représenté la distribution de pression sur la paroi pour les trois répartitions de débit. On considère ici une pression adimensionnelle. Le niveau de pression est fixé à zéro au même point pour les trois simulations, les graphiques sont donc comparables. L'échelle utilisée pour représenter ces pressions va de -3,5 à 2. En réalité, les pressions aux extrémités des artères de la sortie externe sont inférieures à -3,5. Cependant, cette échelle a été choisie afin de mieux capter les variations de pression dans le reste du domaine qui nous intéresse plus.



**Figure 5.19** Distribution de pression sur les parois de la carotide

Les profils de pression dans l'artère commune sont semblables pour les trois répartitions de débit considérées. Des différences apparaissent aux environs de la bifurcation. En effet, la variation de la pression dans une artère est plus importante lorsque le débit y est plus élevé. De plus, on constate évidemment dans les trois cas une forte pression sur la paroi au niveau de point de stagnation. Cette pression est encore plus forte dans le cas de la répartition anormale de débit  $IC/EC = 30/70$ . On peut alors se demander si cette forte pression, combinée avec un fort taux de cisaillement pariétal (voir Figure 5.13) ne pourrait pas entraîner à long terme une rupture de la paroi, ou la formation d'un anévrisme.

#### 5.4.3 Deuxième série de calculs

Après cette première série de calculs, le principe de subdivision a été appliqué au problème de la carotide. Pour cela, un maillage initial a été construit avec Comsol, plus grossier que les maillages précédents. Ce maillage initial contient 13 923 nœuds. Plusieurs techniques de raffinement local ont été utilisées. Mais seule la méthode intégrale d'estimation d'erreur a été retenue. L'estimation de l'erreur sur la solution présentant une répartition de débit 50:50 entre les sorties interne et externe, sert de point de départ pour chaque étape de raffinement.

##### 5.4.3.1 *Erreur Absolue Cible*

Dans un premier temps, une Erreur Absolue Cible a été fixée pour la subdivision du maillage. Le but étant de comparer les maillages obtenus avec la première série de calculs, l'erreur absolue cible qui a été fixée est l'erreur obtenue sur le neuvième et dernier maillage de la première série de maillages.

L'erreur cible (7,48086) étant beaucoup plus petite que l'erreur de départ (11,7949), beaucoup d'éléments sont subdivisés. Le maillage a pu être subdivisé seulement deux

fois, car le quatrième maillage obtenu est constitué de 1 997 958 nœuds. Or, le solveur direct Pardiso ne fonctionne plus au-delà de 450 000 nœuds.

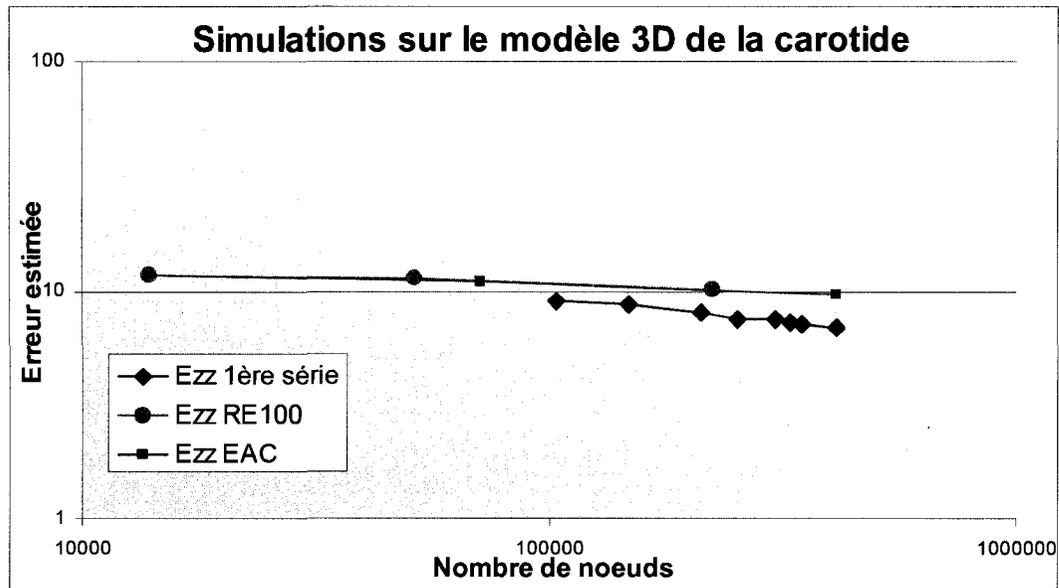
#### 5.4.3.2 *Réduction d'erreur*

Afin de ralentir le raffinement du maillage pour garder un nombre raisonnable de nœuds, on utilise à nouveau la méthode de réduction d'erreur. Dans un premier temps, l'erreur cible a été fixée égale à 50% de l'erreur sur le maillage précédent. Mais trop d'éléments étaient coupés et on retrouvait le même problème qu'en fixant une erreur cible absolue : le troisième maillage comportait trop de nœuds, on ne disposait donc que de deux maillages.

L'erreur cible a donc été fixée égale à 100% de l'erreur précédente, afin de construire des maillages intermédiaires. Autrement dit, on ne recherche pas une réduction de l'erreur, mais une équi-répartition de l'erreur en subdivisant les éléments ayant une erreur largement supérieure à la moyenne. Par cette méthode, on obtient une série de trois maillages, avant d'atteindre la limite du solveur.

#### 5.4.3.3 *Comparaison des erreurs*

Les erreurs obtenues sur les différents maillages par les méthodes d'Erreur Absolue Cible et Réduction d'Erreur sont visualisées sur un graphique logarithmique. Pour comparer ces résultats à ceux de la première série, on récupère les erreurs obtenues sur les maillages de la première série sur les simulations avec un ratio de débit de 50 :50, avec la même méthode d'estimation d'erreur (méthode intégrale).



**Figure 5.20** Erreurs estimées sur la carotide 3D pour les différentes séries de maillage

On constate que les techniques de raffinement ne permettent pas d'obtenir des erreurs plus petites que la première série de maillage avec le même nombre de nœuds. En effet, lorsqu'un tétraèdre est subdivisé en huit tétraèdres, l'erreur diminue mais le nombre de nœuds augmente beaucoup. Finalement, on obtient rapidement un nombre de nœuds important, sans pour autant avoir réduit considérablement l'erreur.

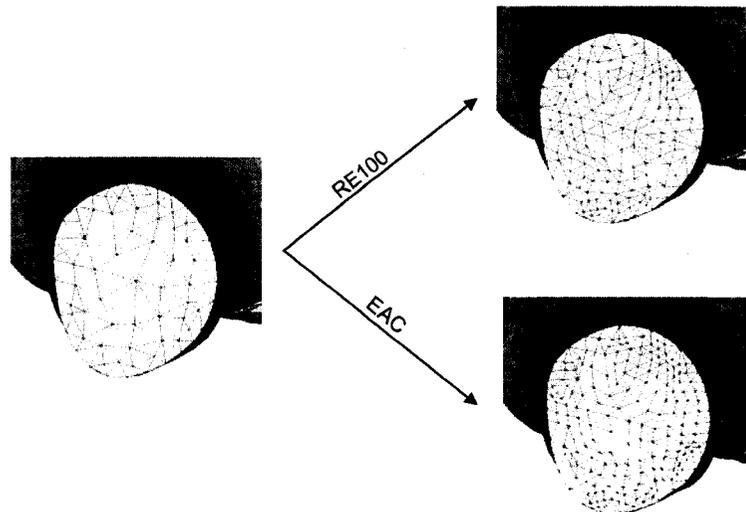
Dans le cas du problème de Smith-Hutton 3D à l'ordre 10, les méthodes de raffinement local s'étaient révélées efficaces, car les arêtes du cube nécessitaient une densité de maillage beaucoup plus forte que le milieu du cube. Dans le cas de la carotide, la différence de densité nécessaire est moins prononcée, et les zones raffinées sont finalement trop raffinées.

En conclusion, les techniques de raffinement local 3D sont beaucoup plus délicates à utiliser qu'en 2D, car elles entraînent une augmentation rapide du nombre de nœuds. Il est difficile avec ces méthodes d'obtenir des maillages raffinés dans les zones présentant des erreurs trop importantes, mais formés d'un nombre raisonnable de nœuds.

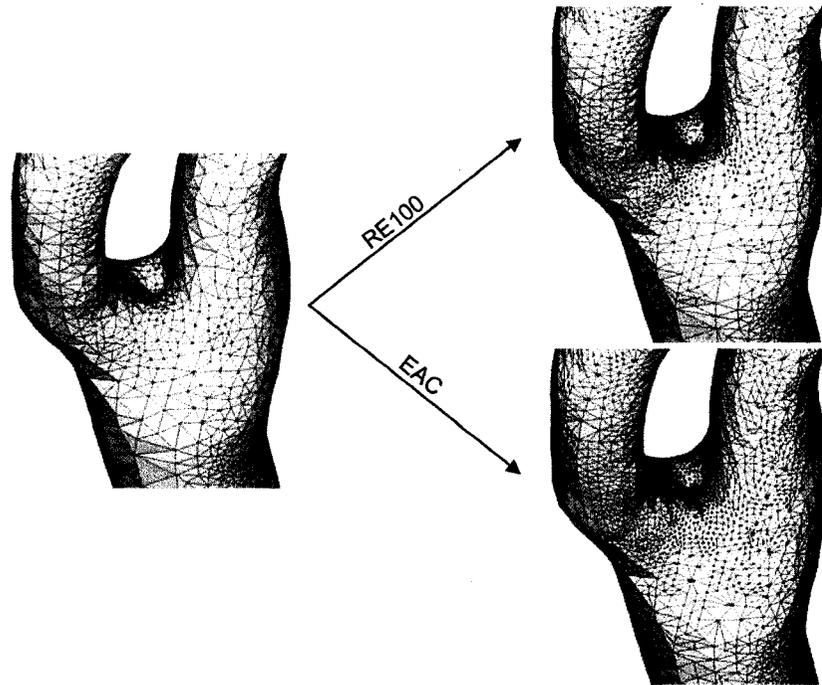
#### 5.4.3.4 Observation des maillages raffinés

L'observation des séries de maillage obtenues par les deux techniques de raffinement local va nous permettre de localiser les zones nécessitant plus d'éléments. Pour identifier ces zones, on observe le maillage surfacique de la frontière, car les artères n'étant pas très larges, un raffinement d'une zone volumique se traduit généralement par le raffinement de la frontière surfacique la plus proche.

La méthode d'Erreur Absolue Cible a créé des maillages plus fins que la méthode de Réduction d'Erreur, subdivisant plus d'éléments. Sur les exemples qui suivent, les maillages sont donc toujours plus raffinés avec la méthode d'Erreur Absolue Cible. La comparaison des maillages avec les deux techniques permet donc d'identifier les zones devant absolument être raffinées, c'est-à-dire les zones qui sont raffinées avec les deux techniques, et les zones pouvant être raffinées pour encore diminuer l'erreur, c'est-à-dire les zones uniquement raffinées avec la méthode d'Erreur Absolue Cible.



**Figure 5.21** Raffinement local de la carotide au niveau de la section d'entrée



**Figure 5.22** Raffinement local de la carotide au niveau de la bifurcation

On constate donc que la section d'entrée du maillage initial n'est pas assez finement discrétisée et doit donc être raffinée. On peut supposer qu'il en est de même pour les sections de sortie. De plus, le maillage initial doit être raffiné autour de la première bifurcation, au niveau du point de stagnation. En amont de la bifurcation, le maillage n'a pas besoin d'être raffiné, de même qu'au niveau des parois externes des deux artères en aval de la bifurcation. Les conclusions tirées de l'observation de la première bifurcation peuvent être étendues au cas de la seconde bifurcation.

Finalement, même si on n'a pas réussi à obtenir un maillage raffiné localement donnant de meilleurs résultats, ces observations nous donnent des informations sur les zones nécessitant un maillage plus fin.

## CONCLUSION

Cette étude reposait sur la résolution des équations de Navier-Stokes pour simuler l'écoulement du sang dans la bifurcation de la carotide. Les simulations numériques ont été réalisées avec un code maison par éléments finis, sur des maillages non-structurés de triangles en 2D et de tétraèdres en 3D.

Un des objectifs de ce mémoire était de mettre en place un estimateur d'erreur a posteriori de type Zienkewicz et Zhu. Pour analyser l'efficacité de l'estimateur d'erreur, on a calculé son taux de convergence pour chaque cas-test. Le taux de convergence correspond à la pente du graphique logarithmique représentant l'erreur de la solution en fonction de la taille caractéristique du maillage. Cet estimateur a été testé sur différentes géométries et avec divers éléments. Pour chaque élément, il est possible de calculer le taux de convergence théorique de l'estimateur d'erreur :

- l'élément MINI en 2D : Taux théorique = 1
- l'élément Taylor-Hood en 2D : Taux théorique = 2
- l'élément stabilisé P1-P1 en 2D et en 3D : Taux théorique = 1

Pour mener à bien les tests numériques, on a utilisé un programme de raffinement global du maillage. Lors du raffinement d'un maillage, les triangles sont divisés en quatre en 2D, ou les tétraèdres sont divisés en huit en 3D. Ainsi la taille caractéristique des maillages est divisée par deux à chaque étape de raffinement. Les séries de maillages ainsi obtenues permettent d'étudier les taux de convergence de l'estimateur d'erreur.

Les différents tests menés sur des géométries 2D ont permis de constater que les solutions manufacturées, autrement dit dont on connaît la solution analytique, permettent d'obtenir le taux de convergence théorique de chaque élément, quelle que soit la

géométrie du domaine, même en présence d'irrégularités géométriques. De plus, les erreurs estimées correspondent aux erreurs réelles calculées grâce à la solution analytique.

À l'inverse, dans le cas de solutions non manufacturées, la présence d'irrégularités géométriques affecte le taux de convergence de l'estimateur d'erreur, pour les éléments MINI et stabilisé P1-P1, mais surtout pour l'élément Taylor-Hood.

En 3D, on a dans un premier temps testé une solution manufacturée sur un domaine ne présentant pas d'irrégularités géométriques, avec l'élément stabilisé P1-P1. Les erreurs obtenues sont proches des erreurs réelles, mais le taux de convergence obtenu vaut 0,85. Il est donc inférieur au taux théorique de l'élément P1-P1 3D.

La méthode utilisée pour estimer l'erreur permet de récupérer l'erreur de la solution sur chaque élément du maillage. Grâce à cela, on a pu mettre en place un processus de subdivision adaptative, visant à raffiner le maillage uniquement dans les zones présentant des erreurs plus importantes. À partir de la solution sur un maillage, on fixe une erreur cible à obtenir sur le prochain maillage. Cette erreur cible peut être fixée de trois façons :

- Elle peut être définie comme un pourcentage de l'erreur sur le maillage précédent : c'est la Réduction d'Erreur.
- Elle peut être arbitrairement choisie par l'utilisateur.
- Elle peut être calculée comme un pourcentage de la norme de la solution précédente.

Une fois l'erreur cible totale déterminée, on calcule une erreur cible par élément. L'erreur estimée sur chaque élément est comparée à cette erreur cible élémentaire. Si l'erreur d'un élément est supérieure à l'erreur cible, alors cet élément est subdivisé, en quatre en 2D ou en huit en 3D.

On a testé ces techniques de raffinement local du maillage sur un problème de Smith-Hutton 2D modifié, sur un domaine carré. En modifiant le problème classique, on a concentré les gradients de vitesse sur les bords du domaine. Or les zones à fort gradient de vitesse sont aussi les zones à forte erreur. Ainsi, on s'attend à ce que le processus de subdivision adaptative converge vers un maillage très dense sur les bords du carré et très grossier au centre.

On a testé la méthode de Réduction d'Erreur sur ce problème, en faisant varier le pourcentage servant à la définition de l'erreur cible totale. On a bien obtenu un maillage raffiné sur les bords. De plus, en observant l'évolution de l'erreur de la solution par rapport au nombre de nœuds du maillage, on constate que la subdivision adaptative permet d'atteindre des erreurs plus basses avec moins de nœuds, en comparaison avec des maillages homogènes.

Ces techniques de raffinement local 2D ont également été testées sur une géométrie 2D plus complexe rappelant la forme d'une bifurcation de la carotide. Ainsi, on a pu observer que le maillage avait été raffiné au niveau du point de stagnation, et des surfaces d'entrée et de sortie. À l'inverse, le maillage n'avait été raffiné ni en amont de la bifurcation, ni en aval sur les parois extérieures des deux artères de sortie.

Enfin, pour tester l'efficacité de ce processus de subdivision adaptative en 3D, on a simulé un problème de Smith-Hutton sur un cube, en le modifiant pour à nouveau concentrer les gradients de vitesse au niveau des arêtes du cube. La Réduction d'Erreur se révèle être plus efficace qu'un raffinement global du maillage menant à une série de maillages homogènes. Les maillages obtenus sont bien raffinés au niveau des arêtes du cube.

Sur les différents tests réalisés, on constate que la valeur optimale du pourcentage à utiliser pour calculer l'erreur cible avec la méthode de Réduction d'Erreur dépend du problème considéré.

Finalement, après avoir étudié les différentes publications sur la simulation de l'écoulement du sang dans la bifurcation de la carotide, on a pu faire les choix de modélisation et les choix numériques nécessaires à cette étude. L'écoulement est simulé uniquement en stationnaire dans cette étude, mais dans le cas d'une pompe cardiaque à débit continu l'écoulement du sang est effectivement non-pulsé. Le sang est considéré comme non-Newtonien compte tenu des dimensions de l'artère de la carotide.

Dans un premier temps, on a réalisé des simulations sur une série de maillages homogènes de plus en plus fins. On n'a trouvé aucune publication présentant la répartition de débit entre les deux artères de sortie sous l'utilisation d'une pompe à débit continu. On a donc testé plusieurs répartitions de débit, deux normales ( $IC/EC=70/30$  et  $IC/EC=50/50$ ) et une anormale ( $IC/EC=30/70$ ). Les résultats obtenus sont comparés à des résultats expérimentaux obtenus par PIV sur le même modèle de la carotide, avec les mêmes répartitions de débit.

Les erreurs sur les simulations numériques ont été estimées grâce aux différentes techniques mises en place. Les taux de convergence obtenus valent environ 0,7. Ils sont de nouveau inférieurs au taux théorique de l'élément P1-P1 stabilisé 3D. En comparant les résultats numériques avec les mesures expérimentales, on retrouve qualitativement le même comportement de l'écoulement. Les différences quantitatives s'expliquent par diverses sources d'imprécision dans le dispositif expérimental et les choix de modélisation pour les simulations numériques.

Les zones les plus propices à la formation de plaques athéromateuses sont celles qui présentent un faible taux de cisaillement pariétal et qui correspondent à une zone de

recirculation du sang. Or on observe principalement un faible taux de cisaillement pariétal sur la paroi extérieure du début de l'artère interne. En étudiant les zones de recirculation dans la carotide, on constate que la répartition du débit joue un rôle important au niveau de la bifurcation. En effet, pour une répartition de débit normale ( $IC/EC=70/30$ ), on observe une légère recirculation au niveau du point de stagnation, mais cette zone possède également un fort taux de cisaillement pariétal. Lorsque plus de débit passe dans l'artère externe ( $IC/EC=50/50$ ), on observe la formation d'une zone de recirculation à l'entrée de l'artère interne (zone à faible taux de cisaillement pariétal), et cette zone s'élargit dans le cas d'une répartition anormale de débit ( $IC/EC=30/70$ ). Finalement, une altération du ratio de débit peut créer toutes les conditions nécessaires à la formation de plaques dans l'artère interne de la carotide.

Le processus de subdivision adaptative a enfin été appliqué au problème de la carotide, mais sans aboutir à des résultats satisfaisants. En effet, en 3D, le raffinement local d'une zone augmente fortement le nombre de nœuds et donc le nombre d'inconnues à résoudre. Finalement on n'a pas pu obtenir un maillage raffiné localement donnant de meilleurs résultats que les maillages homogènes.

## RECOMMANDATIONS

Voici quelques recommandations pour les travaux à mener dans le futur :

- 1) Dans la continuité des travaux présentés dans ce mémoire, il serait intéressant de réaliser des simulations transitoires sur la carotide, afin de comparer l'écoulement à débit continu, obtenu lors de cette étude, à un écoulement physiologique variant au cours du cycle cardiaque. On a déjà identifié les zones à risque pour la formation de plaques athéromateuses, ce qui permet de savoir quelles zones devront être le plus étudiées lors des simulations transitoires.
- 2) Pour l'instant seul l'élément P1-P1 est utilisé en 3D. Cependant cet élément n'est pas très efficace pour le processus de subdivision adaptative du maillage. En effet, l'utilisation d'un élément linéaire nécessite au final un maillage très dense partout. Or, dans l'artère commune de la carotide, le profil de l'écoulement est proche d'un profil parabolique, donc de degré 2 en vitesse. L'utilisation d'un élément P2-P1 (stabilisé ou non) permettrait donc d'obtenir des erreurs minimales dans cette zone. L'artère commune n'aurait ainsi pas besoin d'être raffinée, et la subdivision adaptative entraînerait le raffinement du maillage uniquement dans les zones à forts gradients de vitesse.
- 3) Pour limiter la propagation de la subdivision des éléments, il est possible d'étoffer le programme de raffinement local 3D en considérant plus de configurations pour la position des nœuds supplémentaires au milieu des arêtes. De plus, il serait intéressant de garder en mémoire les étapes de raffinement d'un maillage, dans le but d'introduire de nouvelles coupes. En 2D, on pourrait par exemple passer de deux triangles fils (issus de la division du triangle père en deux) à quatre triangles (subdivision complète du triangle père initial), afin de réduire le nombre d'éléments de moindre qualité et limiter la propagation inutile de la subdivision.

- 4) Il serait intéressant de comparer le processus de subdivision adaptative aux autres techniques d'adaptation de maillage. On pourrait par exemple le comparer au programme de remaillage adaptatif développé à l'INRIA par Paul-Louis George et Pascal Jean Frey. Ce programme s'applique uniquement à des éléments linéaires, mais il consiste en un remaillage total du domaine. De plus, le maillage est étiré dans le sens de l'écoulement, à partir du calcul des gradients de vitesse. Dans le cas de la carotide, on sait que le profil de vitesse varie peu dans l'artère commune. Ainsi un programme de ce type permettrait d'obtenir un maillage grossier dans la direction de l'écoulement et plus fin dans les directions perpendiculaires.
- 5) Il faudrait également améliorer les outils de visualisation des résultats. En effet, dans un contexte biomédical, il serait intéressant de disposer de techniques simples et efficaces pour visualiser les lignes de courant par exemple.
- 6) Enfin, la taille des calculs est limitée par les capacités du solveur direct Pardiso qui fonctionne pourtant sur une architecture en 64 bits. En effet, l'adressage des entiers ne se fait qu'en 32 bits, ce qui explique pourquoi on ne peut dépasser 450 000 nœuds pour nos maillages. Une solution possible serait d'utiliser un solveur itératif sur une architecture en 64 bits.

## RÉFÉRENCES

- [1] B.K. Bharadvaj, R.F. Mabon, D.P. Giddens, "Inlet steady flow in a model of the human carotid bifurcation. I. Flow visualization," *Journal of Biomechanics*, vol. 15, no. 5, pp. 349-362, 1982.
- [2] B.K. Bharadvaj, R.F. Mabon, D.P. Giddens, "Inlet steady flow in a model of the human carotid bifurcation. II. LDA measurements," *Journal of Biomechanics*, vol. 15, no. 5, pp. 363-378, 1982.
- [3] D.N. Ku, D.P. Giddens, "Laser Doppler anemometer measurements of pulsatile flow in a model carotid bifurcation," *Journal of Biomechanics*, vol. 20, no. 4, pp. 407-421, 1987.
- [4] K. Perktold, G. Rappitsch, "Computer simulation of local blood flow and vessel mechanics in a compliant carotid artery bifurcation model," *J. Biomechanics*, vol. 28, no. 7, pp. 845-856, 1995.
- [5] Z.Liu, Y.L. Young, "Physics of Shear Thinning Blood Flow through Stenotic Arteries," *Preprint submitted to Biorheology*, 2006.
- [6] C. Tu, M. Deville, "Pulsatile flow of non-Newtonian fluids through arterial stenoses," *J. Biomechanics.*, vol. 29, no. 7, pp. 899-908, 1996.
- [7] J.A. Moore, D.A. Steinman, D.W. Holdsworth, C.R. Ethier, "Accuracy of Computational Hemodynamics in Complex Arterial Geometries Reconstructed from Magnetic Resonance Imaging," *Annals of Biomedical Engineering*, vol. 27, pp. 32-41, 1999.

- [8] R. Botnar, G. Rappitsch, M.B. Scheidegger, D. Liepsch, K. Perktold, P. Boesiger, "Hemodynamics in the carotid artery bifurcation: a comparison between numerical simulations and in vitro MRI measurements," *Journal of Biomechanics*, vol. 33, pp. 137-144, 2000.
- [9] S.Z. Zhao, X.Y. Xu, A.D. Hughes, S.A. Thom, A.V. Stanton, B. Ariff, Q. Long, "Blood flow and vessel mechanics in a physiologically realistic model of a human carotid arterial bifurcation," *Journal of Biomechanics*, vol. 33, pp. 975-984, 2000.
- [10] D.A. Steinman, J.B. Thomas, H.M. Ladak, J.S. Milner, B.K. Rutt, J.D. Spence, "Reconstruction of Carotid Bifurcation Hemodynamics and Wall Thickness Using Computational Fluid Dynamics and MRI," *Magnetic Resonance in Medicine*, vol. 47, pp. 149-159, 2002.
- [11] M. Tambasco, D.A. Steinman, "Path-Dependent Hemodynamics of the Stenosed Carotid Bifurcation," *Annals of Biomedical Engineering*, vol. 31, pp. 1054-1065, 2003.
- [12] S.A. Urquiza, P.J. Blanco, M.J. Vénere, R.A. Feijoo, "Multidimensional modeling for the carotid artery blood flow," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 195, pp. 4002-4017, 2006.
- [13] B.A. Younis, S. Spring, S.O. Neumann, B. Weigand, "Simulation of flow in an exact replica of a diseased human carotid artery," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 31, pp. 2599-2609, 2007.

- [14] F.J.H. Gijssen, F.N. Van de Vosse, J.D. Janssen, "The influence of the non-Newtonian properties of blood on the flow in large arteries: steady flow in a carotid bifurcation model," *Journal of Biomechanics*, vol. 32, pp. 601-608, 1998.
- [15] J.S. Stroud, S.A. Berger, D. Saloner, "Numerical Analysis of Flow Through a Severely Stenotic Carotid Artery Bifurcation", *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 124, 2002.
- [16] H.M. Blackburn, S.J. Sherwin, "Instability modes and transition of pulsatile stenotic flow : pulse-period dependence," *J. Fluid Mech.*, vol. 573, pp. 57-88, 2007.
- [17] K.R. Moyle, L. Antiga, D.A. Steinman, "Inlet Conditions for Image-Based CFD Models of the Carotid Bifurcation: Is it Reasonable to Assume Fully Developed Flow?," *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 128, pp. 371-379, 2006.
- [18] F.M.A. Box, R.J. Van der Geest, M.C.M. Rutten, J.H.C. Reiben, "The influence of Flow, Vessel Diameter and non-Newtonian Blood Viscosity on the Wall Shear Stress in a Carotid Bifurcation Model for Unsteady Flow," *Investigative Radiology*, 2005.
- [19] J.S. Milner, J.A. Moore, B.K. Rutt, D.A. Steinman, "Hemodynamics of human carotid artery bifurcations: Computational studies with models reconstructed from magnetic resonance imaging of normal subjects," *Journal of Vascular Surgery*, 1998.

- [20] A.D. Augst, D.C. Baratt, A.D. Hughes, S.A. McG Thom, X.Y. Xu, "Various issues relating to computational fluid dynamics simulations of carotid bifurcation flow based on models reconstructed from three-dimensional ultrasound images," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part H: Journal of Engineering in Medicine*, vol. 217, no. 5, pp. 393-403, 2003.
- [21] F.P. Glor, Q. Long, A.D. Hughes, A.D. Augst, B. Ariff, S.A. McG Thom, P.R. Verdonck, X.Y. Xu, "Reproducibility Study of Magnetic Resonance Image-Based Computational Fluid Dynamics Prediction of Carotid Bifurcation Flow," *Annals of Biomedical Engineering*, vol. 31, pp. 142-152, 2003.
- [22] I. Marshall, P. Papathanasopoulou, K. Wartolowska, "Carotid flow rates and flow division at the bifurcation in healthy volunteers," *Physiological Measurement*, vol. 25, pp. 691-697, 2004.
- [23] T.P. Fries, H.G. Matthies, "A Review of Petrov-Galerkin Stabilization Approaches and an Extension to Meshfree Methods," *Scientific Computing*, 2004.
- [24] T.P. Fries, H.G. Matthies, "A stabilized and coupled meshfree/meshbased method for the incompressible Navier-Stokes equations - Part I: Stabilization," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 195, pp. 6205-6224, 2006.
- [25] I. Babuška, "Error-Bounds for Finite Element Method," *Numer. Math.*, vol. 16, pp. 322-333, 1971.
- [26] F. Thomasset, *Implementation of Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, New York: Springer Verlag, 1981.

- [27] T.E. Tezduyar, Y. Osawa, "Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 190, pp. 411-430, 2000.
- [28] S. Aliabadi, T.E. Tezduyar, "Stabilized-finite-element/interface-capturing technique for parallel computation of unsteady flows with interfaces," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 190, pp. 243-261, 2000.
- [29] O. Schenk, K. Gartner, "Solving Unsymmetric Sparse Systems of Linear Equations with PARDISO," *Journal of Future Generation Computer Systems*, vol. 20, no. 3, pp. 475-487, 2004.
- [30] O. Schenk, K. Gartner, "On fast factorization pivoting methods for sparse symmetric indefinite systems," *Elec. Trans. Numer. Anal.*, vol. 23, pp. 158-179, 2006.
- [31] A. Ern, J.-L. Guermont, *Theory and Practice of Finite Elements*, Springer, 2004.
- [32] D. Pelletier, P.J. Roache, "CFD Code Verification and the Method of Manufactured Solutions," *10th Annual Conference of the CFD Society of Canada*, 2002.
- [33] O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu, "A simple error estimator and adaptative procedure for practical engineering analysis," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 24, pp. 337-357, 1987.
- [34] O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu, "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part I: The recovery technique," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 33, pp. 1331-1364, 1992.

- [35] P. Labbé, A. Garon, "A robust implementation of Zienkiewicz and Zhu's local patch recovery method," *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 11, pp. 427-434, 1995.
- [36] J.N. Reddy, *An Introduction to the Finite Element Method*, 2<sup>nd</sup> ed. College Station, Texas 77843. McGraw-Hill, Inc., 1993.
- [37] Y. Kallinderis, P. Vijayan, "Adaptative Refinement-Coarsening Scheme of Three-Dimensional Unstructured Meshes," *AIAA Journal*, vol. 31, no. 8, pp. 1440-1447, 1993.
- [38] 2001 Heart and Stroke Statistical Update, Dallas, AHA 2000.
- [39] M. Jessup, "Mechanical Cardiac-Support Devices - Dreams and Devilish Details," *Editorial in New England J. Med.*, vol. 345, pp.1490-1492, 2001.
- [40] "ACC/AHA Guidelines for the Evaluation and Management of Chronic Heart Failure in the Adult," *Amer. College of Cardiology and American Heart Association*, 2001.
- [41] REMATCH (Randomized Evaluation of Mechanical Assistance for the Treatment of Congestive Heart Failure) study, "Long-term Use of a Left Ventricular Assist Device for end-stage Heart Failure," *New Engl. J. Med.*, vol. 345, pp.1435-1443, 2001.
- [42] M.I. Farinas, *Méthodologie de design de turbomachines de petite taille appliquée au développement d'une pompe d'assistance cardiaque*, Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, 208 p., 2002.

- [43] J. Vétel, *Introduction à la PIV et Application à la mesure de champs turbulents*, École Polytechnique de Montréal, 2006.
- [44] R. Löhner, *Applied CFD Techniques: An Introduction based on Finite Element Methods*, New York: J. Wiley & Sons, 1981.

## ANNEXES

### ANNEXE 1

#### INTERPOLATION D'UNE SOLUTION SUR UN MAILLAGE INDÉPENDANT

Si on dispose d'une solution sur un maillage 1, il peut être intéressant d'interpoler cette solution sur un autre maillage 2 de la même géométrie. Cette solution interpolée peut par exemple constituer une solution initiale idéale pour un calcul sur le deuxième maillage.

Lorsque le maillage 2 est issu du maillage 1 par subdivision de plusieurs ou de tous les éléments, on a vu qu'il était facile de construire une solution interpolée sur le maillage raffiné. En effet, le maillage 2 est alors constitué des sommets du maillage 1, et de nœuds supplémentaires situés au milieu d'arêtes du maillage 1. Pour les sommets qui étaient déjà présents sur le maillage 1, il suffit de récupérer les valeurs de la solution 1 en ces nœuds. Pour les autres nœuds situés au milieu d'une arête, la solution interpolée sera la moyenne des solutions aux deux nœuds extrémités de l'arête. Le calcul de cette moyenne se fait aisément au cours du programme de subdivision.

Mais si les deux maillages sont totalement indépendants, il n'existe pas de méthode simple et efficace pour obtenir une solution interpolée. Il faut trouver l'élément du maillage 1 à l'intérieur duquel se situerait le point sur lequel on veut interpoler la solution. Une fois cet élément identifié, la solution interpolée au point peut être obtenue en calculant la moyenne pondérée des solutions aux sommets de l'élément.

La méthode la plus simple serait donc pour chaque nœud du nouveau maillage, de tester tous les éléments du maillage 1 pour trouver celui contenant le nœud. Cette méthode fonctionne, mais elle est très coûteuse en temps de calcul.

La méthode qui a été choisie ici passe par la construction d'un arbre N-tree du maillage 1. Dans le cas d'un maillage 2D, il s'agit d'un Quadtree, et dans le cas d'un maillage 3D, d'un Octree. La méthode est décrite dans le cas 3D, pour une interpolation en 2D, l'algorithme à utiliser est le même.

### A.1 Comment savoir si un point P est à l'intérieur d'un élément E?

Pour savoir si un point P de coordonnées  $x_P$ ,  $y_P$  et  $z_P$ , est situé à l'intérieur de l'élément E, il faut calculer les coordonnées réduites de ce point P dans l'élément en question. Autrement dit, il faut trouver les fonctions d'interpolation  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  et  $N_4$  solutions de :

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Avec :  $x_1, \dots, z_4$  : les coordonnées x, y et z des quatre sommets de l'élément E  
 $x_P, \dots, z_P$  : les coordonnées x, y et z du point P

Pour chacune des fonctions d'interpolation  $N_k$ , il faut ensuite calculer :

$$M_k = \min(N_k, 1 - N_k) \quad (6.2)$$

En théorie, le point P est situé à l'intérieur du tétraèdre E si pour tout k,  $M_k$  est inférieur ou égal à zéro. En pratique, par prudence on choisit un epsilon petit et on teste si  $M_k < -\epsilon$ .

## A.2 Construction de l'arbre Octree

Le but est de découper le domaine géométrique en blocs parallélépipédiques (cubes), et de regrouper les nœuds du maillage 1 dans ces blocs. On se fixe une limite de 8 nœuds par cube.

Au départ, on construit le premier bloc qui doit contenir tous les nœuds du maillage. Pour cela, on calcule les coordonnées minimales et maximales de l'ensemble des nœuds du maillage. Le premier cube est défini légèrement plus grand (on définit un epsilon de précision). On va ensuite insérer les nœuds du maillage 1 dans ce cube. Lorsqu'on atteindra le nombre limite de 8 nœuds, c'est-à-dire à l'insertion du 9<sup>e</sup> nœud, le cube sera découpé en 8 cubes : le cube est coupé en deux dans les trois dimensions. Les nœuds vont ensuite être insérés dans le cube fils le contenant. Si un de ces cubes se remplit (s'il atteint 8 nœuds), il sera à son tour coupé en 8 cubes, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les nœuds soient insérés.

Pour construire l'arbre Octree du maillage 1, on va remplir petit à petit un tableau qui contiendra les informations suivantes [44]:

- Colonnes 1 à 8 : Nœuds contenus dans le bloc (ou numéro des blocs fils si le bloc est découpé)
- Colonne 9 : Place du cube dans son cube père (vide pour le premier cube)
- Colonne 10 : Numéro du cube père
- Colonne 11 : Nombre de nœuds dans le cube, -1 pour les cubes coupés en 8
- Colonne 12 : Coordonnée x minimale du cube ( $x_{\min}$ )
- Colonne 13 :  $x_{\max}$
- Colonne 14 :  $y_{\min}$
- Colonne 15 :  $y_{\max}$
- Colonne 16 :  $z_{\min}$
- Colonne 17 :  $z_{\max}$

Pour tester si un nouveau nœud de coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  est contenu dans un cube, il suffit de comparer ses coordonnées aux coordonnées minimales et maximales du cube.

Algorithme de construction de l'Octree

Boucle sur les nœuds du maillage 1

    Boucle sur les cubes

        Si le point est à l'intérieur du cube :

            Si le cube a été coupé (-1 dans la colonne 11)

                On reprend l'algorithme à partir du premier cube fils (colonne 1)

        Sinon

            Le nœud doit être inséré dans ce cube.

            Si ce cube contient moins de 8 nœuds :

                Le nouveau nœud est ajouté à ce cube, et le nombre de nœuds (colonne 11) augmente de 1.

            Si ce cube contient déjà 8 nœuds :

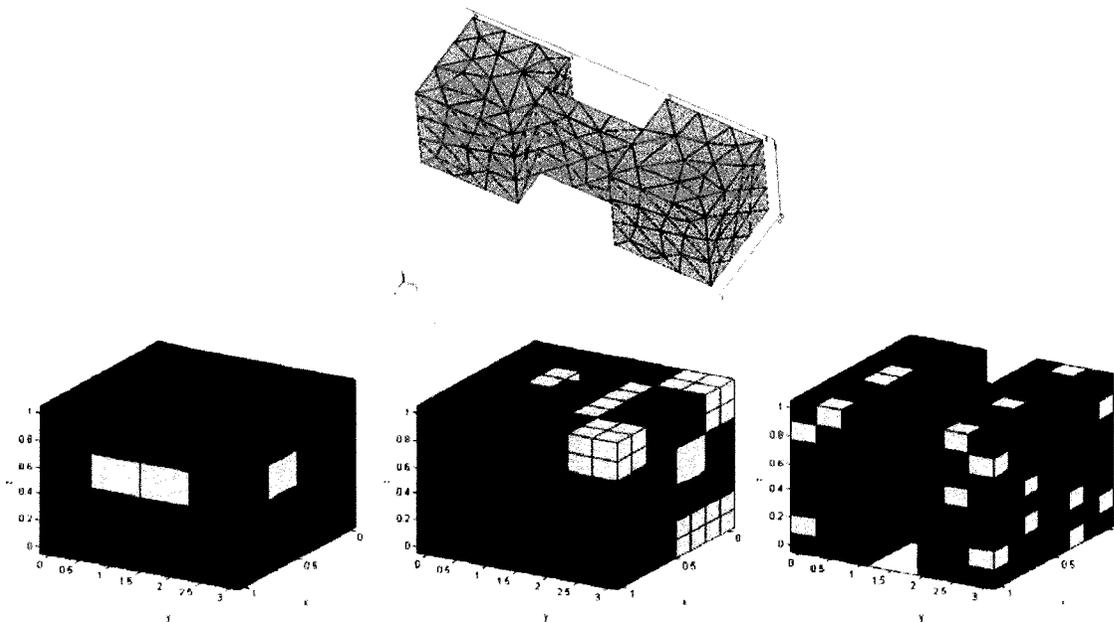
                Le cube est découpé et 8 nouveaux cubes sont créés à la suite du tableau. On impose la valeur -1 dans la colonne 11 du cube trouvé et on indique dans les 8 premières colonnes les numéros des lignes qui contiendront ses cubes fils. Les 8 nœuds déjà présents sont répartis dans les cubes fils. L'algorithme reprend au premier des 8 nouveaux fils.

Cet algorithme a été testé sur deux langages différents : Matlab et C++. La construction de l'Octree s'est révélée être très rapide dans les deux cas.

Finalement, le tableau de l'Octree contient tout l'historique de la fabrication de l'Octree. On y trouve les cubes constituant le découpage final de l'espace géométrique, mais aussi

les cubes intermédiaires qui ont été coupés. Pour chaque cube du découpage final, on connaît le nombre de nœuds du maillage 1 qui s'y trouvent, les numéros de ces nœuds, les dimensions du cube, et le cube père dont il est issu.

Pour illustrer le fonctionnement de ce programme, il a été testé sur une géométrie simple ayant une forme rappelant un haltère. Un maillage grossier est construit sur cette géométrie, puis raffiné en plusieurs étapes (raffinement global). Pour chaque maillage, l'arbre Octree des points du maillage est calculé. Le premier cube qui délimitera l'espace représenté sera toujours le parallélépipède englobant tout l'haltère. La Figure A.1 représente le maillage et les arbres Octree obtenus pour ce maillage et les deux maillages issus de deux raffinements successifs. Les cubes noirs contiennent 7 ou 8 nœuds, les cubes bleus 5 ou 6 nœuds, les cubes rouges 3 ou 4 nœuds et enfin les cubes jaunes 1 ou 2 nœuds. Les cubes ne contenant aucun nœud ne sont pas représentés. Ainsi les renforcements observés sur cette géométrie doivent pouvoir être visibles sur l'arbre Octree, car aucun nœud ne devrait se trouver dans ces zones.



**Figure A.1** Exemple d'arbres Octree réalisés sur une série de maillages

On constate que si le maillage est trop grossier, ce n'est pas possible de reconnaître la géométrie initiale. En effet, sur la première figure, le renforcement qui devrait être vide de nœuds est occupé par deux cubes contenant quelques nœuds, tous placés au bord du cube. Mais en raffinant le maillage, les cubes sont divisés, leur taille est en moyenne plus petite, la discrétisation est donc plus précise. Les espaces sans nœuds sont alors occupés par des cubes ne contenant aucun nœud, donc invisibles sur la représentation.

### **A.3 Interpolation en un point P**

Pour interpoler la solution sur tout le maillage 2, chaque nœud du maillage 2 va être traité l'un après l'autre, pour calculer sa solution interpolée. Une fois développé le processus d'interpolation en un point P quelconque du domaine, il suffit donc de l'utiliser pour tous les nœuds du maillage 2.

On cherche donc à interpoler la solution sur un point P du domaine. Pour cela, il faut trouver l'élément du maillage 1 à l'intérieur duquel se trouve le point P.

On commence par chercher dans quel cube du découpage en Octree du maillage 1 se situe le point P. Ainsi, on pourra trouver les éléments qui sont proches de ce nœud, et donc plus susceptibles de le contenir.

#### *Algorithme de recherche du cube contenant le point P*

Il faut parcourir le tableau Octree de l'arbre du maillage 1, en commençant par le premier cube (première ligne du tableau). Si le point n'est pas à l'intérieur de ce cube, on passe au cube suivant. Si le point est à l'intérieur de ce cube, on regarde si ce cube a été coupé. Si oui, alors on reprend l'algorithme au premier de ses fils. Sinon, l'algorithme est terminé, on a trouvé le cube de l'Octree final contenant P.

Identification des éléments voisins du point

Une fois ce cube identifié, on dresse la liste des nœuds du maillage 1 présents dans ce cube. Ces nœuds constituent la base de départ pour la recherche de l'élément. On cherche ensuite tous les éléments s'appuyant sur un de ces nœuds. Pour cela il faut disposer d'une connectivité nœud vers élément du maillage 1. Celle-ci peut être construite de la même manière que pour l'algorithme de raffinement de maillage. Une fois obtenue la liste de ces éléments, on les teste un par un pour savoir si le point se situe à l'intérieur.

Il peut arriver qu'aucun de ces éléments ne soit le bon. Dans ce cas, on élargit les recherches aux éléments voisins (élément de la « couronne »). Pour cela, on dresse la liste des nœuds sommets des éléments déjà testés, en excluant les nœuds qui étaient initialement dans le cube. À partir de ces nouveaux nœuds, on liste les éléments qui s'y appuient, sans les éléments déjà testés. Ces éléments seront les nouveaux éléments à tester. Si le point n'est contenu par aucun de ces éléments, alors on peut supposer que le nœud est à l'extérieur de l'enveloppe convexe du maillage 1.

Interpolation de la solution au point

Une fois trouvé l'élément contenant le point P, il faut interpoler la solution en ce point. Pour cela, on reprend les fonctions d'interpolation  $N_k$  présentées ci-dessus. La solution de P est donnée par :

$$\begin{bmatrix} U_P \\ V_P \\ W_P \\ P_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ W_1 & W_2 & W_3 & W_4 \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Avec :  $U_P, V_P, W_P$  et  $P_P$  : les solutions en vitesse et pression au nœud P  
 $U_1, V_1, W_1$  et  $P_1$  : les solutions au nœud 1 (idem pour les nœuds 2, 3 et 4)  
 $N_1, N_2, N_3$  et  $N_4$  : les fonctions d'interpolation

#### A.4 Cas particuliers et remarques

Si le cube où se situe le point ne contient aucun nœud, alors on remonte au cube père de ce cube, et on cherche parmi les fils de ce cube père, un cube contenant au moins un nœud. Ce nouveau cube et le cube trouvé initialement résultant du découpage d'un même cube, le point ne sera pas situé trop loin de ce nouveau cube.

Si le point est à l'extérieur de l'enveloppe convexe du maillage 1, alors on ne trouvera aucun élément du maillage 1 le contenant. Mais les solutions peuvent être extrapolées à partir de l'élément le plus proche. On a alors deux possibilités :

- Soit on impose des vitesses nulles et on extrapole uniquement la pression, car comme il s'agit en général d'une paroi, la vitesse doit y être nulle.
- Soit on extrapole toutes les solutions (vitesse et pression) et la condition limite de vitesse nulle à la paroi écrasera cette valeur extrapolée si besoin.

Pour déterminer quel élément est le plus proche du point, il faut se fixer une norme de distance entre un point et un tétraèdre. La distance choisie dans cet algorithme est égale à la distance entre le point P et le centre de gravité de l'élément.

En testant cet algorithme, on remarque que l'étape de création de l'arbre Octree du premier maillage est très rapide. L'étape prenant le plus de temps est l'interpolation de la solution sur le second maillage. De plus, lorsqu'un point du second maillage est situé à l'extérieur du domaine géométrique défini par le premier maillage, alors l'extrapolation de la solution sur ce point est très coûteuse, car il faut parcourir tous les éléments du premier maillage pour identifier l'élément le plus proche de ce point

La limite du nombre de nœuds par cube a été fixée à 8 nœuds. Si on augmente ce chiffre, alors l'arbre Octree contiendra au final moins de blocs, et sa construction sera donc plus rapide. Mais lorsqu'on voudra interpoler la solution en un point P, on trouvera un plus grand nombre de nœuds voisins à P et on aura donc un plus grand nombre d'éléments à tester.

Lorsque le maillage n'est pas assez fin, on a vu que l'Octree était beaucoup moins précis. De plus, un point P où on souhaite interpoler la solution pourra se trouver dans un cube de grande taille dont les nœuds sont finalement très espacés du point P, par exemple séparés de P par un trou dans la géométrie (comme le renforcement de l'haltère). La recherche de l'élément contenant P sera alors plus difficile. Finalement, cet algorithme de recherche est donc plus efficace quand le maillage est relativement fin.