

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

BASES COMPRESSÉES ET PROBLÈME INVERSE: APPLICATION À  
L'IMAGERIE PHOTO-ACOUSTIQUE

JEAN PROVOST

INSTITUT DE GÉNIE BIOMÉDICAL  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE BIOMÉDICAL)

NOVEMBRE 2007

© Jean Provost, 2007.



Library and  
Archives Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file    Votre référence*

*ISBN: 978-0-494-36933-3*

*Our file    Notre référence*

*ISBN: 978-0-494-36933-3*

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

BASES COMPRESSÉES ET PROBLÈME INVERSE: APPLICATION À  
L'IMAGERIE PHOTO-ACOUSTIQUE

présenté par: PROVOST Jean

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès science appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. GOUSSARD Yves, Ph. D., président

M. LESAGE Frédéric, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. LINA Jean-Marc, Ph. D., membre

Je dédie ce mémoire à mes parents, qui m'ont soutenu à chaque étape de ma vie.

## REMERCIEMENTS

Ce mémoire contient les résultats de recherches effectuées à l'École Polytechnique de Montréal et à l'institut universitaire de gériatrie de l'Université de Montréal. J'aimerais remercier ces deux institutions pour leur support matériel et logistique ainsi que le CRSNG pour son soutien financier.

J'aimerais remercier tous ceux et celles qui ont participé à ce projet. En particulier, j'aimerais remercier Frédéric Lesage pour son aide, ses conseils et pour l'ambiance de travail qu'il a su créer au sein du laboratoire.

J'aimerais remercier Mathieu Coursolle pour m'avoir introduit au montage expérimental et à l'imagerie photo-acoustique de manière générale, Mathieu Dehaes pour nos discussions concernant les aspects théoriques du sujet, Carl Matteau-Pelletier pour avoir réglé plusieurs problèmes expérimentaux et Maxime Abran pour son aide avec le montage. Enfin, parce qu'ils ont contribué à faire d'un laboratoire aux murs vert fluo un endroit agréable où travailler, je remercie Louis, Nicolas B., Aurélie, Nicolas P., Marie-Michèle, Marie, Audrey, Michèle et Sarah.

## SOMMAIRE

L'imagerie photo-acoustique est une nouvelle modalité développée pour diverses raisons mais qui jouit, aujourd'hui, d'un intérêt plus particulier quant à son utilisation sur les petits animaux. Comme en imagerie optique diffuse, elle est sensible au contraste endogène présent dans les tissus mais permet d'atteindre une meilleure résolution pour une portée moyenne de l'ordre de 3 à 10mm. Cependant, les temps d'acquisition nécessaires pour l'obtention d'une image satisfaisante avec les algorithmes de reconstruction actuels sont très longs, phénomène provoqué par la quantité de lumière limitée à laquelle un tissu peut être exposé. Ainsi, pour réaliser une mesure résolue en temps avec cette méthode, il est nécessaire de se doter d'une électronique complexe et coûteuse.

Ce mémoire propose une nouvelle stratégie de reconstruction impliquant les bases compressées. En utilisant le formalisme de l'échantillonnage compressé, il est possible, à partir d'un petit nombre de projections linéaires d'une image compressible de détenir suffisamment d'information pour la reconstruire exactement. En effet, en concevant la mesure adéquatement, il est possible de faire comme si l'on échantillonnait directement l'image à récupérer dans une base compressée. En utilisant cette méthode, le nombre de mesures nécessaires à la reconstruction pour une qualité donnée est grandement réduit. Dans certaines configurations, ce nombre est cinq fois plus petit que pour la méthode reconnue dans la littérature.

Une telle diminution permet d'abord la réduction du nombre de détecteurs et donc du coût de fabrication de l'appareil d'imagerie. À l'inverse, si ce nombre de détecteurs n'est pas réduit, l'échantillonnage compressé permet d'améliorer la qualité de la reconstruction ou d'obtenir une meilleure résolution temporelle.

## ABSTRACT

Photo-acoustic imaging has been developed for different purposes but recent years has seen the modality gain interest with applications to small animal imaging. As a technique it is sensitive to endogenous optical contrast present in tissues and, contrary to diffuse optical imaging, it promises to bring high resolution imaging for *in vivo* studies at mid-range depths (3mm-10mm). Because of the limited amount of radiation tissues can be exposed to, existing reconstruction algorithms for circular tomography require a great number of measurements and averaging, implying long acquisition times. Time-resolved photo-acoustic imaging is therefore possible only at the cost of complex and expensive electronics.

This thesis suggests a new reconstruction strategy using the compressed sensing formalism which states that a small number of linear projections of a compressible image contain enough information for reconstruction. By directly sampling the image to recover in a sparse representation, it is possible to dramatically reduce the number of measurements needed for a given quality of reconstruction. In given configurations, this number is reduced five-fold in comparison with the literature gold-standard.

Reducing the number of measurements translates directly in the possibility of reducing the number of detectors in the imaging system, which means a lower fabrication cost. On the other hand, if this number of detector is kept constant, the compressed sensing approach provides a better image reconstruction or a higher frame rate.

## TABLE DES MATIÈRES

|                                                  |      |
|--------------------------------------------------|------|
| DÉDICACE . . . . .                               | iv   |
| REMERCIEMENTS . . . . .                          | v    |
| SOMMAIRE . . . . .                               | vi   |
| ABSTRACT . . . . .                               | vii  |
| TABLE DES MATIÈRES . . . . .                     | viii |
| LISTE DES TABLEAUX . . . . .                     | xii  |
| LISTE DES FIGURES . . . . .                      | xiii |
| LISTE DES ANNEXES . . . . .                      | xv   |
| INTRODUCTION . . . . .                           | 2    |
| CHAPITRE 1 : Imagerie photo-acoustique . . . . . | 6    |
| 1.1 Modélisation du phénomène . . . . .          | 7    |
| 1.1.1 Fonctions de Green . . . . .               | 9    |
| 1.2 Problème direct . . . . .                    | 10   |
| 1.3 Inversion . . . . .                          | 11   |
| 1.3.1 Tomographie circulaire . . . . .           | 11   |
| 1.3.2 Tomographie planaire . . . . .             | 15   |
| 1.3.3 Microscopie . . . . .                      | 16   |
| 1.4 Montage . . . . .                            | 17   |
| 1.4.1 Chaîne ultrasonore . . . . .               | 17   |
| 1.4.2 Source laser . . . . .                     | 18   |

|                                            |           |
|--------------------------------------------|-----------|
| <b>CHAPITRE 2 : Problèmes linéaires</b>    | <b>21</b> |
| 2.1 Débruitage                             | 22        |
| 2.1.1 Risque Bayésien                      | 22        |
| 2.1.2 Risque minimax                       | 26        |
| 2.2 Représentations parcimonieuses         | 32        |
| 2.2.1 Transformée de Fourier               | 32        |
| 2.2.2 Transformée de Fourier fenêtrée      | 33        |
| 2.2.3 Ondelettes                           | 35        |
| 2.2.4 Ondelettes en deux dimensions        | 40        |
| 2.2.5 Curvelets                            | 42        |
| 2.2.6 Conclusion                           | 47        |
| 2.3 Problème inverse linéaire              | 47        |
| 2.3.1 Problème direct, problème inverse    | 48        |
| 2.3.2 Maximum a posteriori                 | 49        |
| 2.3.3 Décomposition en valeurs singulières | 52        |
| 2.3.4 Ondelettes-Vaguelettes               | 54        |
| 2.3.5 Normes $\ell_p$                      | 54        |
| <b>CHAPITRE 3 : Débruitage</b>             | <b>60</b> |
| 3.1 Métrique                               | 62        |
| 3.2 Fantômes                               | 62        |
| <b>CHAPITRE 4 : Déconvolution</b>          | <b>68</b> |
| 4.1 Lcurve                                 | 69        |
| 4.2 Normes $\ell_1$                        | 70        |
| 4.2.1 Simulations                          | 72        |
| 4.2.2 Résultats expérimentaux              | 75        |
| 4.2.3 Conclusion                           | 75        |

|                                                                                                   |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>CHAPITRE 5 : The Application of Compressed Sensing for Photo-Acoustic Tomography . . . . .</b> | <b>77</b>  |
| <b>ABSTRACT . . . . .</b>                                                                         | <b>78</b>  |
| 5.1 Introduction . . . . .                                                                        | 78         |
| 5.2 Photo-acoustic Imaging . . . . .                                                              | 80         |
| 5.3 Analytical Inversion . . . . .                                                                | 80         |
| 5.4 Pseudo-Solution . . . . .                                                                     | 82         |
| 5.5 Sparse Representations of Images . . . . .                                                    | 84         |
| 5.6 Compressed Sensing . . . . .                                                                  | 85         |
| 5.6.1 Theory . . . . .                                                                            | 85         |
| 5.6.2 The photo-acoustic forward operator as a CS-matrix . . . . .                                | 86         |
| 5.6.3 Proof of concept on small phantoms . . . . .                                                | 91         |
| 5.7 Results . . . . .                                                                             | 95         |
| 5.7.1 Simulations . . . . .                                                                       | 96         |
| 5.7.2 Experiments . . . . .                                                                       | 97         |
| 5.8 Conclusion . . . . .                                                                          | 98         |
| <b>CHAPITRE 6 : Discussion Générale . . . . .</b>                                                 | <b>100</b> |
| <b>CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS . . . . .</b>                                                    | <b>103</b> |
| <b>ANNEXE I : Compressive Sampling in Photo-Acoustic Imaging</b>                                  | <b>106</b> |
| <b>ABSTRACT . . . . .</b>                                                                         | <b>107</b> |
| I.1 Introduction . . . . .                                                                        | 107        |
| I.2 Photo-acoustic tomography . . . . .                                                           | 108        |
| I.3 Compressive Sampling . . . . .                                                                | 110        |
| I.4 Method . . . . .                                                                              | 112        |
| I.5 Results . . . . .                                                                             | 114        |

|                                |            |
|--------------------------------|------------|
| I.6 Conclusion . . . . .       | 117        |
| <b>BIBLIOGRAPHIE . . . . .</b> | <b>118</b> |

**LISTE DES TABLEAUX**

|     |                                                                   |    |
|-----|-------------------------------------------------------------------|----|
| 4.1 | PSNR obtenu pour différentes approches de déconvolution . . . . . | 72 |
|-----|-------------------------------------------------------------------|----|

## LISTE DES FIGURES

|     |                                                                                                      |    |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Tomographie circulaire . . . . .                                                                     | 13 |
| 1.2 | Sinogrammes simulés . . . . .                                                                        | 14 |
| 1.3 | Schéma du montage . . . . .                                                                          | 19 |
| 2.1 | Filtre de Wiener . . . . .                                                                           | 27 |
| 2.2 | Opérateurs de seuillage . . . . .                                                                    | 31 |
| 2.3 | Ondelette . . . . .                                                                                  | 38 |
| 2.4 | Plan temps-fréquence . . . . .                                                                       | 39 |
| 2.5 | Approximation non-linéaire d'un contour . . . . .                                                    | 41 |
| 2.6 | Transformée de Fourier d'une courbe . . . . .                                                        | 43 |
| 2.7 | Curvelets . . . . .                                                                                  | 45 |
| 2.8 | Évolution du risque en fonction du choix de la base . . . . .                                        | 48 |
| 2.9 | Oscillations de Gibbs . . . . .                                                                      | 53 |
| 3.1 | Fantômes . . . . .                                                                                   | 64 |
| 3.2 | Débruitage du fantôme par seuillage hard . . . . .                                                   | 65 |
| 3.3 | Débruitage du sinogramme par débruitage hard . . . . .                                               | 66 |
| 3.4 | Comparaison hard et soft thresholding . . . . .                                                      | 67 |
| 4.1 | Déconvolution d'un fantôme numérique suivant trois approches, re-<br>constructions totales . . . . . | 73 |
| 4.2 | Déconvolution d'un fantôme numérique suivant trois approches, si-<br>nogrammes . . . . .             | 74 |
| 4.3 | Déconvolution d'un fantôme réel suivant trois approches . . . . .                                    | 76 |
| 5.1 | Point Spread Function Transform for four different basis . . . . .                                   | 89 |
| 5.2 | QQplot for four different basis . . . . .                                                            | 90 |

|     |                                                                                                         |     |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.3 | Application of the CS reconstruction scheme on $64 \times 64$ numerical phantoms . . . . .              | 92  |
| 5.4 | Application of the CS reconstruction scheme on $256 \times 256$ numerical phantoms . . . . .            | 94  |
| 5.5 | Compressed sensing with curvelets . . . . .                                                             | 95  |
| 5.6 | Application of the CS reconstruction scheme on $256 \times 256$ real phantoms . . . . .                 | 98  |
| I.1 | Simulation of the far-field approximation reconstruction. . . . .                                       | 111 |
| I.2 | Images obtained using 20 tomographic angles and 40 Fourier samples per angle. . . . .                   | 114 |
| I.3 | Images obtained using 2048 measurements chosen among 12 tomographic angles . . . . .                    | 116 |
| I.4 | Pathological case. Images obtained using 2048 measurements chosen among 12 tomographic angles . . . . . | 116 |

## LISTE DES ANNEXES

|            |                                                |     |
|------------|------------------------------------------------|-----|
| ANNEXE I : | Compressive Sampling in Photo-Acoustic Imaging | 106 |
|------------|------------------------------------------------|-----|

Le contenu de ce mémoire a fait l'objet d'un article de conférence présenté le 5 juin 2007 dans le cadre de Photonics North intitulé Compressive Sampling in Photo-Acoustic Imaging. Cet article est présenté en annexe.

Un article a aussi été soumis au journal IEEE Transactions on Medical Imaging et a pour titre The Application of Compressed Sensing to Photo-Acoustic Tomography. Il est présenté au chapitre 5.

L'originalité de ces travaux réside dans l'utilisation d'une nouvelle théorie en traitement du signal, l'échantillonnage compressé, pour la conception d'un algorithme de formation de l'image en imagerie photo-acoustique. Ce nouvel algorithme permet une réduction significative du nombre de mesures nécessaires pour une qualité d'image donnée. Cela a pour principale conséquence une réduction des coûts de fabrication et ouvre la voie à l'imagerie photo-acoustique résolue en temps. Il s'agit aussi d'une des premières applications de la théorie de l'échantillonnage compressé.

## INTRODUCTION

Depuis quelques années, le domaine de l'imagerie médicale se transforme. De nouvelles méthodes, basées sur l'imagerie moléculaire, apparaissent et permettent de cibler très spécifiquement certains récepteurs biologiques et ce au niveau cellulaire. L'imagerie moléculaire est définie comme la caractérisation et la mesure *in vivo* des processus biologiques cellulaires et moléculaires en opposition à l'imagerie conventionnelle anatomique ou fonctionnelle. Ainsi, l'intention est de cibler des anomalies moléculaires qui sont à l'origine des maladies au lieu d'imager la condition résultante de celles-ci.

Il serait intéressant de pouvoir utiliser ces marqueurs pour suivre l'évolution d'une maladie dans un petit animal comme une souris à l'aide d'une modalité à faible coût. En général, ces molécules fonctionnalisées sont détectées grâce à une antenne fluorescente ou radioactive, mais les modalités disponibles commercialement permettant de les détecter souffrent soit d'un coût prohibitif pour une utilisation à grande échelle comme l'imagerie à résonance magnétique ou la tomographie à émission de positrons, d'une trop faible profondeur de détection comme l'imagerie à cohérence optique ou d'une trop faible résolution comme l'imagerie optique diffuse[1].

L'imagerie photo-acoustique est une nouvelle modalité non-invasive et fonctionnelle qui permet de mesurer les coefficients d'absorption de la lumière avec une résolution de quelques dizaines de microns (en fonction de la configuration choisie) à une profondeur variant de un à dix millimètres. Ces caractéristiques en font une modalité particulièrement adaptée aux petits animaux. Autre avantage non-négligeable, l'imagerie photo-acoustique est à la fois fonctionnelle [2, 3] et anatomique[4, 5] contrairement à l'imagerie optique diffuse et permet ainsi de détecter des régions fortement vascularisées comme le deviennent les tumeurs au stade de l'angiogénèse. Elle est donc prometteuse pour des applications de détection du cancer de la peau

ou même du sein[6].

Elle est basée sur le principe suivant : un chromophore illuminé par un laser pulsé émettra des ultrasons qu'il est possible de mesurer à l'aide d'un transducteur ultrasons à haute fréquence. Ainsi, le fait que l'excitation provienne de la lumière permet la mise à profit des propriétés de fluorescence des marqueurs moléculaires déjà développés pour les méthodes optiques et le retour en ultrasons permet de faire une image à haute résolution de l'anatomie. Cependant, la dose de lumière utilisée est limitée. Ainsi, pour imager de grands volumes chez l'être humain, la forte atténuation de la lumière mènera à un faible rapport signal à bruit. Quant à l'imagerie moléculaire, c'est le fait que les coefficients d'absorption des molécules fonctionnalisées soient, au mieux, semblables à celui du sang qui mène à un faible rapport signal à bruit. L'amélioration de ce rapport passe nécessairement par une augmentation du temps d'acquisition ou du nombre de détecteurs utilisés, ce qui implique une augmentation des coûts et une complexification de l'électronique. Je propose, dans ce mémoire, de mettre à profit de nouvelles découvertes en mathématiques appliquées pour pallier ce problème sans augmentation de coûts.

Depuis la fin des années 1980, un grand intérêt en mathématiques, en traitement du signal, en informatique et en physique s'est développé pour les représentations compressées qui font appel au concept de parcimonie, terme traduit librement de l'anglais *sparsity*. Ces représentations ont pour objectif de faire ressortir une structure commune inhérente aux signaux naturels comme les images ou les sons. Ces approches ont eu tellement de succès qu'elles sont désormais utilisées quotidiennement pour la compression de signal : par exemple, les formats mp3 pour la musique, jpeg et maintenant jpeg2000 pour les images et mpeg pour les films sont tous issus de ces développements mathématiques.

Les représentations compressées sont la solution au problème suivant : On dispose d'une image échantillonnée sur un certain nombre de pixels et on aimerait transmettre l'information qu'elle contient. Classiquement, on transmettra la valeur

de chacun des pixels. Or, ces pixels ont une structure : ils forment des lignes, des surfaces, des contours. Ne serait-il pas possible de transmettre cette information à la place ? Une solution qui s'applique à une large gamme de signaux est de concevoir une base qui a la caractéristique de pouvoir mesurer à chaque instant le contenu fréquentiel d'un signal. Plusieurs bases différentes ayant cette caractéristique commune sont apparues au cours des vingt dernières années : la transformée de Fourier fenêtrée, les ondelettes et, plus récemment, les *curvelets*[7, 8], les *brushlets*[9], les *contourlets*[10], etc. En fonction de l'application visée, ces bases seront plus ou moins performantes.

La capacité de représenter de manière optimale l'information contenue dans un signal en ayant comme unique donnée *a priori* le fait qu'il soit naturel a donné lieu à d'autres applications plus récentes. Nous nous intéresserons particulièrement ici au débruitage ; en effet, pouvoir faire ressortir les structures cohérentes d'un signal permet par la même occasion de discriminer les structures non-cohérentes qui, dans nombres d'applications, sont essentiellement un signal indésirable, soit, par définition, du bruit. Cette première application de la parcimonie au débruitage permettra de mettre en place des concepts et des définitions pour la suite du mémoire mais n'est pas nouvelle au domaine de l'imagerie biomédicale. Cependant l'utilisation d'une base récemment développée dans la littérature, les *curvelets*, est nouvelle au domaine de la tomographie photo-acoustique en particulier.

Généralement, le signal perçu en imagerie doit être transformé avant qu'il ne représente adéquatement une image qui permette le diagnostic. La transformation du signal perçu en image est définie comme le problème inverse. Ce problème inverse sera étudié en détail et nous permettra de venir à la conclusion que le débruitage du signal brut améliore mais n'optimise pas la qualité de l'image finale. En intégrant la parcimonie dans le problème inverse il sera possible d'améliorer grandement cette qualité. En particulier, une telle approche proposée par Daubechies et al[11]. sera appliquée au problème de la déconvolution d'un sinogramme.

La compréhension du problème inverse et de ses difficultés nous mènera, par équivalence entre problèmes d'optimisation, au concept récemment proposé d'échantillonnage compressé[12, 13]. L'idée à la base de ce concept est la suivante : plutôt que d'échantillonner chacun des pixels d'une image pour ensuite la compresser à un dixième - ou voire moins - de sa taille, ne serait-il pas possible d'échantillonner directement les (bons) éléments de la base qui a permis la compression. Il paraît utopique de pouvoir prédire, sans information *a priori*, quels seront les coefficients importants de cette base. Or il appert, de manière étonnante, que cette approche soit extrêmement fructueuse. Théoriquement, en échantillonnant différemment le signal, il est possible de reconstruire *parfaitement* l'image finale en utilisant un nombre de mesures égal à environ trois fois le nombre de coefficients nécessaires à sa représentation dans une base compressée.

De par sa grande généralité, ce développement mathématique risque de créer une petite révolution dans divers domaines. On peut déjà prédire un grand impact, grâce une expérience qui s'est déroulée l'université Rice[14], sur les appareils photo numériques. En imagerie biomédicale, cette approche pourrait aussi devenir une panacée car elle permet de réduire grandement, pour une qualité d'image donnée, le nombre de mesures. En imagerie non-invasive comme en imagerie par résonance magnétique[15] ou, dans le cas qui nous intéresse, en imagerie photo-acoustique, réduire le nombre de mesures entraîne au moins deux conséquences positives. Premièrement, réduire le nombre de mesures permet de réduire le nombre de détecteurs pour une même qualité de diagnostic, ce qui mène donc à une réduction des coûts de l'appareillage. Deuxièmement, un plus faible nombre de mesures peut mener à la réduction du temps requis pour une acquisition, ce qui implique une meilleure résolution temporelle.

## CHAPITRE 1

### IMAGERIE PHOTO-ACOUSTIQUE

L'imagerie photo-acoustique se sert du phénomène suivant pour arriver à obtenir une image de tissus biologiques. Si l'on chauffe rapidement un matériau, il prendra de l'expansion et reviendra à son état initial, provoquant l'émission d'une onde acoustique. Cette onde acoustique aura des propriétés dépendant de la chaleur injectée. Si l'on utilise une lumière laser à une longueur d'onde donnée pour effectuer cette augmentation de température, la chaleur injectée dépendra de la capacité des différents constituants du matériau à absorber cette longueur d'onde en particulier. Ainsi, il sera possible de différencier les constituants en fonction de leur coefficient d'absorption de la lumière.

Ce premier chapitre fait une revue de la littérature concernant l'imagerie photo-acoustique et s'intéresse plus spécifiquement aux algorithmes de formation de l'image. En première partie, une modélisation du phénomène photo-acoustique sera réalisée. À partir de celle-ci, différentes approches permettant d'obtenir les coefficients d'absorption à partir de la mesure des ondes de pression seront présentées.

Il sera utile de se placer le problème de formation de l'image dans un cadre formel. Un tel problème peut généralement se diviser en deux parties : le problème direct et le problème inverse. Modéliser le problème direct correspond à la capacité de prédire les mesures obtenues à partir des caractéristiques recherchées. Le problème inverse, comme son nom l'indique consiste à déterminer les caractéristiques recherchées à partir des mesures ; il s'agit donc de l'objectif final de tout problème d'imagerie et sera obtenu à partir du problème direct. Dans notre cas, ces caractéristiques seront les coefficients d'absorption de la lumière et les mesures, des ondes ultrasonores. L'objectif de ce chapitre est d'arriver à formuler ce problème direct et de présenter différentes formulations du problème inverse proposées dans la lit-

térature. Une description plus formelle et complète des problèmes direct et inverse linéaires est donnée au prochain chapitre.

### 1.1 Modélisation du phénomène

Pour arriver à formuler le problème direct, il faut d'abord modéliser adéquatement le phénomène que l'on cherche à mesurer. En imagerie photo-acoustique, on cherche donc à mettre en équation les ondes acoustiques générées par l'illumination laser de la matière.

En effet, lorsqu'il y a augmentation de température dans un milieu continu, le volume de ce milieu augmente. Ce phénomène est compensé par les propriétés élastiques du matériau qui retiendront cette expansion. Ces deux forces sont décrites par l'équation :

$$\nabla u(\vec{r}, t) = -\frac{p(\vec{r}, t)}{\rho_m v_s^2} + \beta T(\vec{r}, t) \quad (1.1)$$

où  $u$  est le déplacement,  $p$  la pression,  $\rho_m$  est la densité massique,  $\beta$  est le coefficient d'expansion volumique isobare,  $v_s$  est la vitesse du son dans le matériau, que l'on considère constante, et  $T$  est la température. Le signe moins montre bien l'opposition entre les deux phénomènes. De plus, cette variation du déplacement est liée à une force décrite par la deuxième loi de Newton :

$$\rho_m \frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\nabla p(\vec{r}, t) \quad (1.2)$$

où la pression joue le rôle de potentiel en l'absence de forces de frottement (que nous négligeons ici). En dérivant deux fois l'équation 1.1 par rapport au temps, il est possible de combiner ces deux équations et de ne considérer que la pression. On obtient

$$\nabla^2 p(\vec{r}, t) - \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 p(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\rho_m \beta \frac{\partial^2 T(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

qui est une équation d'onde inhomogène. On cherche à utiliser cette inhomogénéité, le terme source dépendant de la température, pour discriminer des structures. Cependant, on ne peut pas imposer une température mais bien une source de chaleur. L'équation de la diffusion nous montre le comportement du champ de température en présence d'une telle source :

$$\rho_m C \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} - \lambda \nabla^2 T(\vec{r}, t) = H(\vec{r}, t) \quad (1.4)$$

où  $C$  est la chaleur spécifique,  $\lambda$  est la conductivité thermique et  $H$  est la source de chaleur, en énergie par unité de temps et de volume.

Cette source de chaleur est un paramètre que l'on peut contrôler : en particulier, si l'on arrive à en produire une qui dépende de la nature de tissus biologiques, il sera possible de déduire, à partir de la mesure du champ de pression, la position de ces différents tissus. Ainsi, on illumine un tissu avec une impulsion laser, on peut écrire que la chaleur dégagée par unité de temps de volume est l'énergie contenue dans l'impulsion laser par unité de temps  $I(\vec{r}, t)$ , pondérée par la capacité de la matière à l'absorber par unité de volume  $A(\vec{r}, t)$  :

$$H(\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t)I(\vec{r}, t) \quad (1.5)$$

Dans les tissus mous, le laplacien de la température dans l'équation 1.4 est négligeable. En effet, en considérant un temps caractéristique de changement de température  $\tau$  qui sera du même ordre de grandeur que la durée de l'impulsion laser et une longueur caractéristique  $\ell$  qui elle sera du même ordre de grandeur que la distance de pénétration du médium par la lumière, on peut écrire :

$$\gamma = \frac{|\rho_m C \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t}|}{|\lambda \nabla^2 T(\vec{r}, t)|} \approx \frac{\rho_m C \ell^2}{\lambda \tau} \gg 1 \quad (1.6)$$

en faisant l'hypothèse raisonnable[16] que  $\tau < 1\mu s, \ell > 0,1cm$  et en utilisant le fait que dans les tissus mous,  $\lambda \in [0,002, 0,006]W/cm^\circ C$ ,  $\rho_m \approx 1g/cm^3$  et  $C \approx 1cal/g^\circ C$ . En effet, avec ces valeurs, on obtient  $\gamma > 7 \times 10^6 \gg 1$ .

Cette constatation nous amène donc, en combinant 1.3 et 1.4, à définir l'équation modélisant le phénomène photo-acoustique[1, 17] :

$$\nabla^2 p(\vec{r}, t) - \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 p(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\frac{\beta}{C} \frac{\partial H(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (1.7)$$

Il s'agit de la formulation la plus générale et complète que nous considérerons à partir d'ici.

Il sera intéressant de mettre le problème direct sous la forme  $y = Kx$  où  $y$  représente les mesures,  $K$  l'opérateur direct et  $x$  les données recherchées. En imagerie photo-acoustique, les mesures  $y$  sont la pression  $p(\vec{r}, t)$  ; ainsi, pour mettre le problème sous la forme  $y = Kx$ , il faut isoler  $p(\vec{r}, t)$  dans l'équation 1.7. Pour ce faire, on utilise un formalisme de Green qui nous permettra d'en déduire une formulation de type potentiels retardés, bien connue en électromagnétisme entre autres.

### 1.1.1 Fonctions de Green

Soit  $L$  l'opérateur  $\nabla^2 - \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ . On a donc

$$L(p(\vec{r}, t)) = S(\vec{r}, t) \quad (1.8)$$

où  $S = -\frac{\beta}{C} \frac{\partial H(\vec{r}, t)}{\partial t}$  est le terme source.

Soit  $G(\vec{r}, t)$  la fonction de Green associée au problème  $L$  définie par

$$L(G(\vec{r}, t)) = \delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t') \quad (1.9)$$

On peut démontrer que[18]

$$G(\vec{r}, t) * S(\vec{r}, t) = p(\vec{r}, t) \quad (1.10)$$

En effet, la transformée de Fourier de 1.8 nous permet d'écrire  $L$  sous la forme d'un polynôme  $\sigma(k, \omega)$  puisqu'il s'agit d'un opérateur différentiel linéaire :

$$TF\{p\}(k, \omega) = \frac{TF\{S\}(k, \omega)}{\sigma(k, \omega)} \quad (1.11)$$

et on remarque que dans le cas où  $S(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t')$ , on a

$$TF\{G\}(k, \omega) = \frac{1}{\sigma(k, \omega)} \quad (1.12)$$

Ainsi,

$$TF\{p\}(k, \omega) = TF\{G\}(k, \omega)TF\{S\}(k, \omega) \quad (1.13)$$

et enfin

$$p(\vec{r}, t) = G(\vec{r}, t) * S(\vec{r}, t) \quad (1.14)$$

ce qu'il fallait démontrer.

## 1.2 Problème direct

En utilisant les fonctions de Green, la pression s'écrit[16] :

$$p(\vec{r}, t) = \frac{\beta}{4\pi C} \int \frac{dr'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial H(\vec{r}', t')}{\partial t'} \quad (1.15)$$

avec  $t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v_s}$ . Faisons maintenant l'hypothèse que  $I(\vec{r}, t) = \delta(t')$ , c'est-à-dire que l'illumination est homogène spatialement et que l'impulsion laser est plus courte que la résolution temporelle de l'appareillage. On suppose aussi que  $A(\vec{r}, t) = A(\vec{r})$ , c'est-à-dire que les absorbeurs sont immobiles. La pression se réécrit alors :

$$p(\vec{r}, t) = \frac{\beta}{4\pi C} \int \frac{dr' A(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \frac{\partial \delta(t')}{\partial t'} \quad (1.16)$$

et on peut écrire,

$$y = K(x) \quad (1.17)$$

avec  $y = p(\vec{r}, t)$ ,  $x = A(\vec{r})$  et

$$K(.) = \frac{\beta}{4\pi C} \int \frac{dr' A(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \frac{\partial \delta(t')}{\partial t'} \quad (1.18)$$

Nous verrons plus loin qu'il pourra être avantageux de travailler dans l'espace de Fourier :

$$\hat{K}(\cdot) = -\frac{\beta}{4\pi C} \int dr'(\cdot) i\omega \frac{e^{i\frac{\omega}{v_s}|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (1.19)$$

Ici, l'intégrale est effectuée sur un volume comprenant toutes les sources de pression. L'opérateur direct est maintenant défini. Le reste du chapitre présentera une revue de la littérature des méthodes d'inversion analytiques existantes.

### 1.3 Inversion

Si l'on considère une surface  $S_0$  englobant tous les absorbeurs et que la pression est connue sur toute cette surface, il est possible[1, 19], en reliant le problème direct qui est une intégrale sur le volume à une intégrale de surface par le théorème de Green, d'obtenir une inversion exacte du problème direct par rétroprojection :

$$\frac{\beta}{C} A(\vec{r}) = \int_{\Omega_0} b(\vec{r}_0, t = \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{v_s}) \frac{d\Omega_0}{\Omega_0} \quad (1.20)$$

avec

$$b(\vec{r}_0, t) = 2p(\vec{r}_0, t) - 2t \frac{\partial p(\vec{r}_0, t)}{\partial t} \quad (1.21)$$

et

$$d\Omega_0 = \frac{dS_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2} \frac{n_0 \cdot (\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} \quad (1.22)$$

où  $n_0$  est le vecteur normal à la surface  $S_0$  et où  $\vec{r}_0 \in S_0$ . Ici,  $\Omega_0$  est l'angle solide sous-tendu par  $S_0$ .

#### 1.3.1 Tomographie circulaire

En particulier, on peut appliquer l'inversion (1.20) à une géométrie sphérique. Dans ce cas, on a

$$d\Omega_0 = \frac{d\psi d\phi}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2} \quad (1.23)$$

et  $\Omega_0 = 4\pi$ . On peut alors réécrire les coefficients d'absorption de la façon suivante :

$$\frac{\beta}{C}A(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ 2p(\vec{r}_0, t) - 2t \frac{\partial p(\vec{r}_0, t)}{\partial t} \right] \Big|_{t=\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{v_s}} \frac{d\psi d\phi}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|^2} \quad (1.24)$$

La reconstruction par retroprojection proposée dans [20] fait l'hypothèse que  $\frac{\omega}{v_s}|\vec{r}-\vec{r}_0| \gg 1$ . Pour justifier cette hypothèse, on doit prendre en compte les caractéristiques réelles du transducteur ultrasons qui nous permettra de mesurer la pression. Un transducteur ultrason est généralement passe-bande, c'est-à-dire qu'il ne permettra de détecter que des signaux à l'intérieur d'une bande de fréquence précise. Or, on remarque que dans l'équation 1.19, la pression mesurée est multipliée par  $\omega$ , et cette multiplication agit comme un filtre passe-haut. Ainsi, il sera avantageux d'utiliser des transducteurs à haute fréquence pour mesurer un signal. En pratique, on utilisera des transducteurs allant de quelques megahertz à une centaine de megahertz. La vitesse du son dans l'eau est environ 1500 mètres par seconde et les distances considérées seront de l'ordre du centimètre. Pour un transducteur de 5Mhz et une distance de 40mm, on obtient :

$$\frac{\omega}{v_s}|\vec{r}-\vec{r}_0| \approx 133.33 \quad (1.25)$$

On voit donc que cette approximation est discutable, mais devient meilleure en augmentant la fréquence du transducteur ou la distance entre celui-ci et l'objet à imager. En supposant que cette approximation est acceptable, on remarque que  $b(\vec{r}_0, t = \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{v_s})$  s'écrit :

$$b(\vec{r}_0, t) = 2TF^{-1}\{\hat{p}(\vec{r}_0, \omega) + i \frac{\omega}{v_s}|\vec{r}-\vec{r}_0|\hat{p}(\vec{r}_0, \omega)\} \Big|_{t=\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{v_s}} \quad (1.26)$$

$$\approx 2TF^{-1}\{i \frac{\omega}{v_s}|\vec{r}-\vec{r}_0|\hat{p}(\vec{r}_0, \omega)\} \Big|_{t=\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{v_s}} \quad (1.27)$$

$$= -2t \frac{\partial p(\vec{r}_0, t)}{\partial t} \Big|_{t=\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{v_s}} \quad (1.28)$$

Cette approximation permet de simplifier la reconstruction. De plus, en pratique,

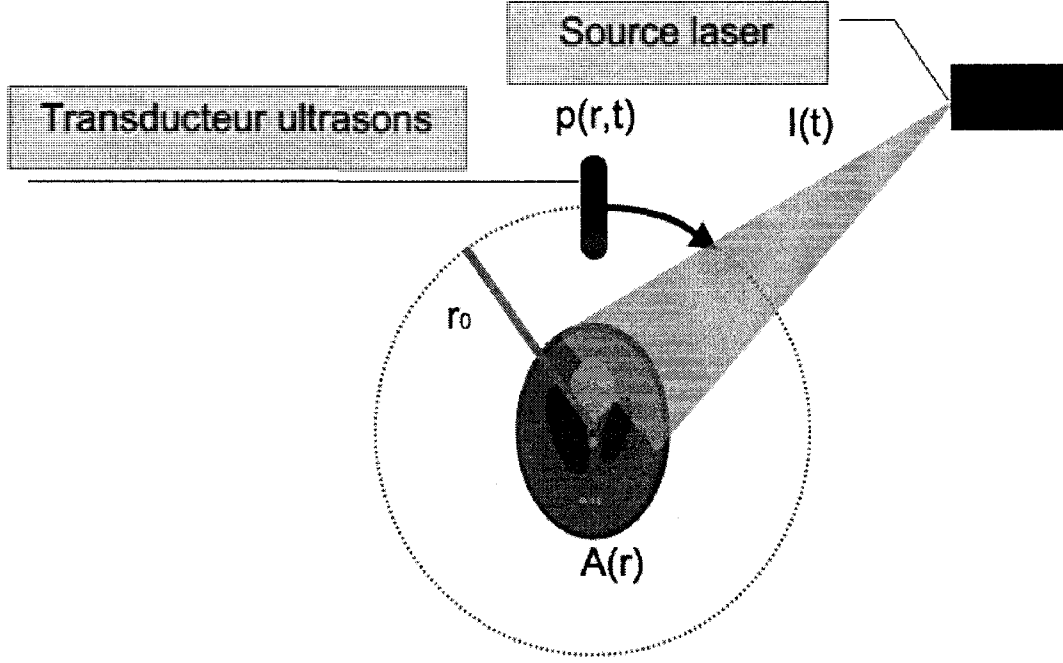


Figure 1.1 – Tomographie circulaire

la reconstruction se fera dans un plan en utilisant des transducteurs focalisés, ce qui implique une intégration par rapport à  $\psi$  seulement et un angle solide de  $2\pi$ . On obtient alors une nouvelle reconstruction

$$\frac{\beta}{C} A(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} -2t \frac{\partial p(\vec{r}_0, t)}{\partial t} \Big|_{t=\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{v_s}} \frac{d\psi}{2\pi |\vec{r}-\vec{r}_0|^2} \quad (1.29)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} -\frac{2}{v_s^2} \frac{1}{t} \frac{\partial p(\vec{r}_0, t)}{\partial t} \Big|_{t=\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{v_s}} d\psi \quad (1.30)$$

qui correspond à la notation de [20]. Désormais, on se référera à cette reconstruction par le terme *rétro-projection* et on ne tiendra pas compte des facteurs constants :

$$A(\vec{r}) \propto \int_0^{2\pi} \frac{1}{t} \frac{\partial p(\vec{r}_0, t)}{\partial t} \Big|_{t=\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{v_s}} d\psi \quad (1.31)$$

La figure 1.1 montre la configuration utilisée en tomographie circulaire. Dans le cas particulier de la tomographie circulaire, on référera aux mesures  $p(\vec{r}_0, t)$  par le terme *sinogramme*. Il s'agit en fait d'une représentation bidimensionnelle avec dans

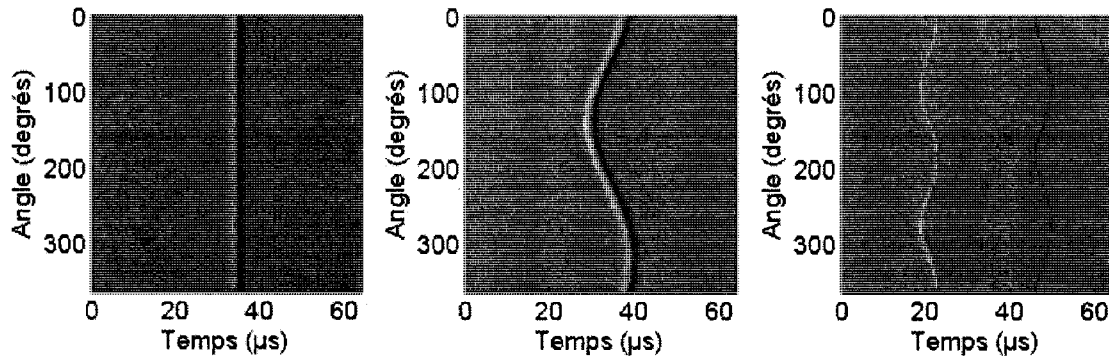


Figure 1.2 – L'image de gauche montre un sinogramme obtenu à partir d'un unique point absorbant au centre du cercle de rétro-projection considéré. L'image du centre montre que lorsque ce point n'est plus au centre, la distance entre ce point et les détecteurs varie en fonction de la position angulaire de ce dernier. La courbe obtenue est donc sinusoïdale. Enfin, l'image de droite montre un sinogramme plus complexe obtenu à partir du fantôme Shepp-Logan[21].

une dimension les angles des différentes positions mesurées sur le cercle défini par  $r_0$  et dans l'autre, le signal ultrasonore dépendant du temps. Le terme sinogramme provient des formes sinusoïdales observées dans le cas classique de la transformée de Radon. De plus, étant donné que l'effet photo-acoustique agit comme un filtre passe-haut, la pression associée aux contours des objets à imager sera amplifiée. Ainsi, le sinogramme sera composé principalement de courbes se recoupant comme le montre la figure 1.2. Cette propriété sera importante lorsque le bruit polluant le signal de pression sera pris en considération.

C'est cette reconstruction, utilisée initialement en imagerie thermo-acoustique (terme utilisé pour l'imagerie photo-acoustique utilisant une source radio-fréquence plutôt que laser), qui semble la plus maîtrisée car elle a permis de nombreuses applications in vivo. Parmi celles-ci, notons la reconstruction récente d'une tête entière d'une souris [22] et d'une tranche d'une tête de macaque rhésus [23]. Pour arriver à réaliser une reconstruction tridimensionnelle, il est possible de simplement

concaténer les différents plans mesurés.

Un facteur qui est simplifié dans cette description du problème est le fait que la lumière, et donc le signal photo-acoustique, sera plus ou moins atténuée en fonction de la profondeur. En effet, les tissus biologiques sont des milieux diffusant et hétérogènes et ces propriétés affecteront la propagation de la lumière. Il est possible de modéliser cette propagation par des simulations Monte-Carlo. Dans ce cas, il faut revenir sur l'hypothèse faite plus haut supposant que  $H(\vec{r}, t) = A(\vec{r})I(t)$ . En effet, l'illumination  $I$  ne sera plus homogène spatialement. Pour tenir compte de la diffusivité du tissu biologique, on suppose que  $H(\vec{r}, t) = A(\vec{r})I_r(\vec{r})I_t(t)$ , c'est-à-dire que les coefficients d'absorption sont simplement pondérés par l'illumination. Ainsi, les équations précédentes permettent de récupérer  $A(\vec{r})I_r(\vec{r})$ . Si  $I_r(\vec{r})$  est adéquatement modélisé, il est toujours possible d'obtenir  $A(\vec{r})$  par une simple division[24]. On peut même aller plus loin et modéliser l'hétérogénéité du tissu : en effet, il est plus juste d'affirmer que l'illumination dépendra aussi des coefficients d'absorption. Ainsi, on devrait plutôt écrire  $H(\vec{r}, t) = A(\vec{r})I_r\{A(\vec{r})\}I_t(t)$  et procéder de manière itérative[25].

### 1.3.2 Tomographie planaire

Une deuxième approche permettant de reconstruire les sources de pression est d'utiliser un plan de détection plutôt qu'une surface sphérique. L'approche présentée au chapitre précédent étant très générale, il est possible de l'appliquer à cette configuration directement. On peut aussi travailler dans l'espace de Fourier comme proposé dans [26], méthode qui a été utilisée[27, 28] en combinaison avec un système utilisant une membrane dont le mouvement est mesuré par interférométrie[29, 30] plutôt qu'un ensemble de transducteurs ultrasons piézoélectriques. Si l'on considère que l'on connaît parfaitement la transformée de Fourier de  $p(x, y, z = 0, t)$  pour tout  $t$ , il est alors possible de calculer  $p(x, y, z, 0)$ , c'est-à-dire la grandeur d'intérêt, par le biais d'une simple transformée de Fourier. Plus précisément, si  $\vec{k}$

la composante spatio-fréquentielle et  $\omega$  la composante temporelle-fréquentielle de la pression  $p$ , on peut écrire

$$p(\vec{r}, t = 0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int P(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3k \quad (1.32)$$

avec  $\omega = v_s |\vec{k}|$ . On peut par la suite démontrer[26] que

$$P(k_x, k_y, \kappa_z) = \frac{v_s^2 \kappa}{\omega} \int_0^\infty TF_{x,y}\{p(x, y, 0, t)\}(k_x, k_y, t) \cos(\omega t) dt \quad (1.33)$$

où  $\kappa_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{v_s}\right)^2 - k_x^2 - k_y^2}$ . Ainsi, la connaissance de  $p(x, y, 0, t)$  permet de déduire  $p(x, y, z, 0)$ .

### 1.3.3 Microscopie

Une troisième configuration permet d'obtenir une meilleure résolution en utilisant un transducteur et une illumination focalisés[1, 31]. L'idée est d'utiliser un transducteur à très haute fréquence, de l'ordre de 30 à 100Mhz, focalisé en un point. Quant à l'illumination, on la conçoit de telle façon qu'il n'y ait pas de lumière sur la surface directement sous le transducteur. On favorise donc une illumination en forme d'anneau autour du transducteur. Puisque le milieu que l'on cherche à imager est dispersif, les photons arriveront tout de même au champ focal du transducteur et permettront d'obtenir un signal photo-acoustique en profondeur (de 3 à 10mm) qui ne sera pas pollué par un fort signal photo-acoustique provenant de la surface. L'intérêt de cette méthode est que le signal de pression détecté peut être interprété sans traitement et ne nécessite que peu ou pas de moyennage pour qu'il soit satisfaisant. Il est aussi possible, bien sûr, d'inverser le problème direct pour obtenir les coefficients d'absorption. Dans ce cas, la difficulté réside plutôt dans la modélisation adéquate du champ focal du transducteur. Il s'agit en fait de la première configuration qui permet la détection de changement de saturation en oxygène de l'hémoglobine en imagerie photo-acoustique [32, 33].

## 1.4 Montage

La conception, la mise en place et la caractérisation du montage photo-acoustique utilisé pour générer des résultats dans ce mémoire ont été réalisés par Mathieu Cour-solle et ont déjà fait l'objet d'un mémoire de maîtrise[21]. Le système a été conçu avec l'objectif d'appliquer l'algorithme de reconstruction par rétroprojection en configuration circulaire. Ainsi, un moteur permet de faire tourner un transducteur ultrasons autour d'une cible illuminée par une source laser (voir figure 1.3).

### 1.4.1 Chaîne ultrasonore

Supposons que l'objet à imager est uniformément illuminé par une source laser adéquate. Pour mesurer le signal ultrasonore provenant de cette illumination, et ce, en champ lointain, il est nécessaire d'assurer la continuité de l'impédance acoustique des matériaux séparant le transducteur ultrasons de la source de pression. En effet, dans tous les développements faits ci-haut, on suppose que la vitesse du son est constante, ce qui correspond à une impédance acoustique constante. De plus, une variation brusque des propriétés acoustiques impliquerait des réflexions d'ondes qui ne sont pas prises en compte dans le modèle proposé. Pour ce faire, on fait l'hypothèse raisonnable que le son voyage à la même vitesse dans l'eau et dans les tissus biologiques, et on plonge l'objet à imager dans l'eau.

En fonction de la position de la source de pression, le transducteur ultrasons ne produira pas exactement le même signal électrique. On parle alors de champ acoustique, qui peut être divisé en deux parties : le champ lointain et le champ proche. Alors que la pression mesurée en champ proche est fortement distordue par ce phénomène, celle mesurée en champ lointain peut être, en première approximation, considérée comme valable sans modélisation additionnelle.

Dans le cas qui nous intéresse, soit la tomographie circulaire, nous ferons donc l'hypothèse que toutes les mesures effectuées dans ce mémoire le seront en champ

lointain. De plus, à l'exception des tout derniers résultats présentés au chapitre 5, nous ferons l'hypothèse que le transducteur mesure les sources de pression sur un arc de cercle de 180 degrés. Or, cela est faux ; le transducteur détecte plutôt uniquement ce qui se trouve dans un arc de cercle correspondant à sa largeur. A posteriori, cette hypothèse ne semble pas avoir un impact fondamental sur les méthodes de reconstruction étudiées ici.

Les signaux que le transducteur ultrasons détecte sont faibles et doivent être amplifiés pour être adéquatement numérisés. Pour ce faire, une chaîne d'amplification de 54dB est insérée entre le transducteur et le convertisseur analogique-numérique.

#### 1.4.2 Source laser

La source laser utilisée a été développée par la société OPOTEK. Il s'agit du modèle Opolette 355 II qui comprend une source laser pulsée de type Nd :YAG ainsi qu'un module permettant de sélectionner la longueur d'onde et la puissance d'émission. Cette caractéristique est utile pour différencier des absorbeurs selon leur longueur d'onde d'absorption. La fréquence d'opération maximale est de 20Hz, ce qui correspond donc à 20 impulsions laser par seconde. Cette impulsion est transmise vers l'objet à imager à l'aide d'une fibre optique multimode de 1mm de cœur.

Au début de chaque impulsion laser, le transducteur ultrasons mesure le signal acoustique produit. Pour diminuer le niveau de bruit, il est nécessaire de moyenner ; ainsi, le transducteur reste en place pour un nombre d'impulsions laser prédéterminé et les signaux obtenus sont sommés. Lorsque ce nombre est atteint, le moteur se met en marche et fait tourner le transducteur d'un angle précis. Toutes ces opérations sont gérées par un système de contrôle décrit dans [21].

Ce mémoire s'intéresse à l'optimisation de ce montage et plus particulièrement au temps nécessaire à l'obtention d'une image de qualité. Ce temps est long pour deux raisons : d'abord, les signaux ultrasonores sont très bruités et un grand nombre d'angles tomographiques est nécessaire pour que l'algorithme de rétroprojection

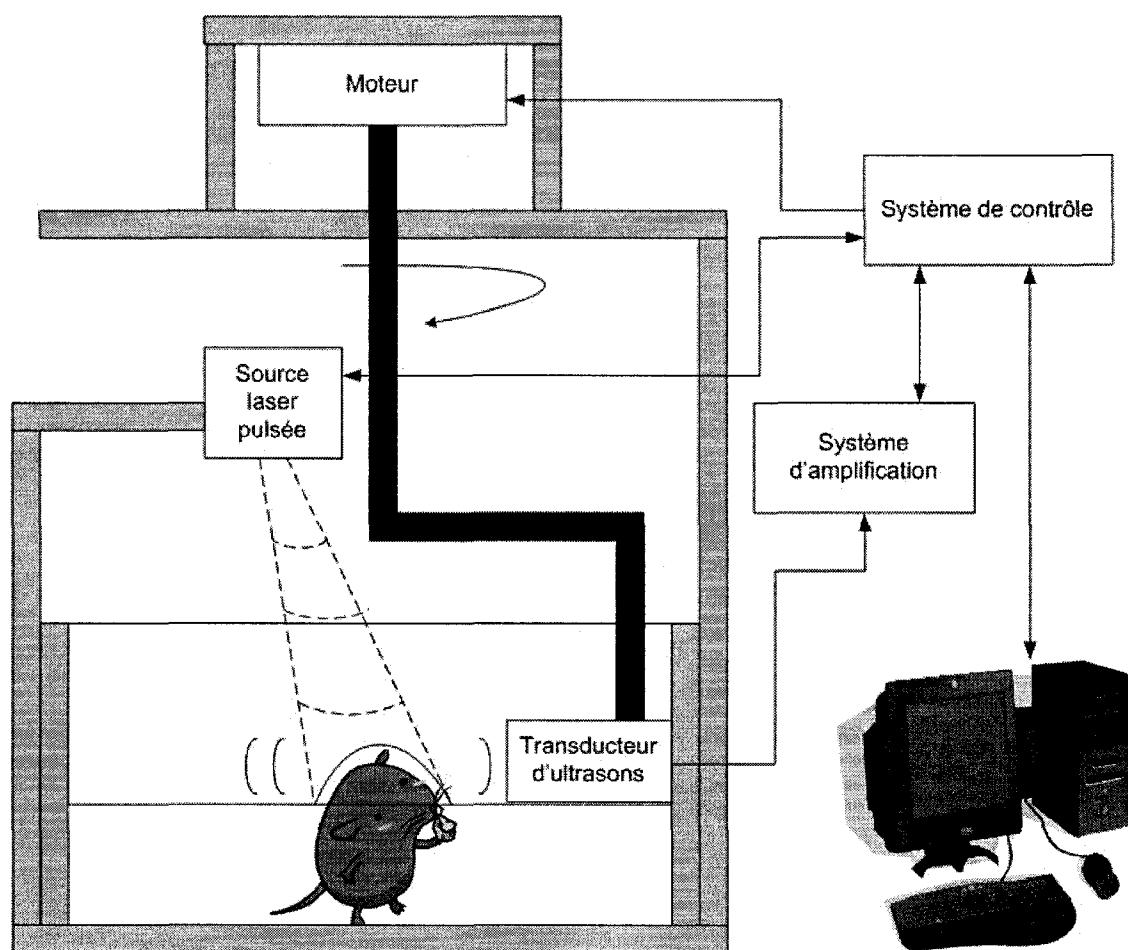


Figure 1.3 – Schéma du montage. Un bras motorisé contrôle un transducteur qui tourne autour d'une cible illuminée par un laser OPO. [21]

permette une bonne reconstruction. Actuellement, les signaux sont débruités en moyennant plusieurs fois le signal à chaque angle. Ainsi, non seulement il est nécessaire de mesurer plusieurs angles, le transducteur doit de plus rester plusieurs dizaines de secondes à chacun de ces angles. Pour un rayon de 40mm, il faut entre 100 et 250 angles pour une reconstruction satisfaisante, ce qui mène à des temps d'acquisition variant de vingt minutes à plus d'une heure.

La première stratégie adoptée a été d'arriver à débruiter plus efficacement les mesures à l'aide des bases compressées. Plutôt que d'améliorer simplement la qualité des mesures, la seconde stratégie consiste en une approche globale intégrant le débruitage qui sera utilisée pour obtenir directement les coefficients d'absorption en utilisant beaucoup moins d'angles tomographiques. Le prochain chapitre constitue une revue de la littérature du débruitage à l'aide des bases compressées, des caractéristiques de ces mêmes bases et enfin des approches possibles pour l'inversion du problème direct linéaire.

## CHAPITRE 2

### PROBLÈMES LINÉAIRES

Ce chapitre a pour but la mise en place des concepts et des définitions entourant les problèmes linéaires. En première partie, on présente le développement théorique du débruitage. Ce développement débruitera plus efficacement le sinogramme qu'un simple moyennage et il mettra en évidence la pertinence de l'utilisation des bases compressées. Avec cette justification, nous présenterons une description succincte de certaines bases compressées, soient la transformée de Fourier fenêtrée, les ondelettes en une et deux dimensions et enfin les curvelets, en plus d'une revue des autres bases proposées dans la littérature. Enfin, une troisième partie présentera le problème inverse et les approches classiques permettant de le résoudre. Finalement, nous présenterons l'intégration des bases compressées dans la solution de ce problème. C'est le dernier point qui est l'objectif principal de ce mémoire.

#### Notation

Ce chapitre ne cherche pas à présenter les résultats sous une forme générale mais bien dans l'objectif de les appliquer à un problème spécifique en imagerie photo-acoustique. Les images sont donc des fonctions  $R^2 \rightarrow R^1$  discrétisées vers un vecteur de  $R^n$ . De manière générale, la version continue sera notée avec des parenthèses et la version discrétisée avec des crochets. Il est souvent plus simple de travailler avec des fonctions plutôt qu'avec des vecteurs de  $R^n$  ; pour cette raison, nous oscillerons entre la représentation continue et discrétisée d'une image ou d'un signal pour faciliter le développement de certains résultats. Le coût en est un certain manque de rigueur et une perte de généralité lors de ces passages répétés. Cette rigueur pourra être retrouvée dans les diverses références citées tout au long du chapitre.

## 2.1 Débruitage

Le problème du débruitage est souvent approché de la façon suivante : on dispose d'une mesure  $X$  qui est la somme d'un signal  $f$  et d'un bruit  $W$  qui résulte d'un processus aléatoire :

$$X = f + W \quad (2.1)$$

On cherche une estimation  $\hat{f}$  à l'aide d'un opérateur de décision  $D$ ,

$$\hat{f} = DX \quad (2.2)$$

qui minimisera le risque d'erreur qui est la perte moyenne calculée par rapport à la distribution de probabilité de  $W$ <sup>1</sup>

$$r(D, f) = E\{\|f - DX\|^2\} \quad (2.3)$$

Cette section a comme objectif de caractériser cet opérateur de décision. En suivant la démarche de [34], nous débuterons par l'approche bayésienne et poursuivrons avec l'approche minimax. L'intérêt de cette démarche est de mettre en évidence les concepts qui sont utilisés pour montrer les résultats plus compliqués qui seront simplement admis plus loin.

### 2.1.1 Risque Bayésien

Supposons que  $f$  est la réalisation d'une variable aléatoire  $F$  dont la distribution de probabilité  $\pi$  est connue a priori ;

$$X[n] = F[n] + W[n] \quad (2.4)$$

On suppose de plus que les variables aléatoires  $F[n]$  et  $W[n]$  sont indépendantes pour tout  $n$  et donc la distribution de probabilité conjointe est le produit des

---

<sup>1</sup>Nous nous limitons ici à un risque quadratique qui sera suffisant pour le débruitage.

distributions de probabilité marginales. Cette fois-ci l'opérateur de décision  $D$  agit sur un vecteur aléatoire :  $\hat{F} = DX$ . On définit le risque de Bayes de la façon suivante :

$$r(D, \pi) = E_{\pi}\{r(D, F)\} \quad (2.5)$$

qui, puisque les variables sont indépendantes, s'écrit aussi

$$r(D, \pi) = E\{\|F - \hat{F}\|^2\} \quad (2.6)$$

où l'espérance est calculée à partir de la distribution conjointe. On définit ensuite le risque minimal de Bayes

$$r_n(\pi) = \inf_{D \in \mathcal{O}_n} r(D, \pi) \quad (2.7)$$

où  $\mathcal{O}_n$  est l'ensemble des opérateurs de décision, qu'ils soient linéaires ou non.

On peut démontrer en utilisant la règle de Bayes que l'estimateur correspondant à ce risque est donné par :

$$\hat{F}[n] = E\{F[n] | X[0], X[1], \dots, X[N-1]\} \quad (2.8)$$

qui constitue donc le résultat principal de l'approche bayésienne. Démontrons-le : soit  $\pi_n(y)$  la distribution de probabilité de la valeur  $y$  de  $F[n]$  et  $\hat{F}[n] = D_n(X)$ . On a,

$$r(D_n, \pi_n) = \int \int (D_n(x) - y)^2 dP_n(x|y) d\pi_n(y) \quad (2.9)$$

$$= \int \int (D_n(x) - y)^2 d\pi_n(y|x) dP(x) \quad (2.10)$$

par la formule de Bayes et où la distribution de probabilité marginale de  $x$  est donnée par  $P(x) = \int P_n(x|y) d\pi_n(y)$ . L'intégrale double sera minimisée si l'intégrale intérieure est minimale. En prenant la dérivée partielle, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial D_n} \int (D_n(x) - y)^2 d\pi_n(y|x) = 2 \int (D_n(x) - y) d\pi_n(y|x) = 0 \quad (2.11)$$

et donc,

$$D_n(x) = \int y d\pi_n(y|x) = E\{F[n]|X = x\} \quad (2.12)$$

d'où le résultat <sup>2</sup>, qui n'est cependant pas facilement applicable à un problème concret. En effet, cette fonction est généralement non-linéaire et compliquée. On tente donc l'approximation linéaire pour simplifier le problème. Cette approche peut être suffisante dans certain cas, mais nous verrons plus loin qu'une approche non-linéaire peut être beaucoup plus performante.

### Estimateur de Wiener

On appelle estimateur de Wiener l'opérateur de décision *linéaire* qui minimise la probabilité d'erreur. Il s'agit d'un opérateur important et récurrent dans diverses applications, entre autres dans les problèmes inverses. Parce que l'on restreint l'espace des opérateurs possibles, on peut conclure que l'opérateur est optimal si et seulement si  $\forall 0 \leq k, n < N$

$$E\{(F[n] - \hat{F}[n])X(k)\} = 0 \quad (2.13)$$

En effet,  $\forall 0 \leq n < N$  on doit trouver un estimateur linéaire :

$$\hat{F}[n] = D_n X = \sum_{k=0}^{N-1} h[n, k] X[k]$$

qui minimise

$$r(D_n, \pi_n) = E\{(F[n] - \sum_{k=0}^{N-1} h[n, k] X[k])^2\}.$$

En annulant la dérivée par rapport à  $h[n, k]$ , on obtient l'expression 2.13 à un facteur 2 près.

Cette expression est une condition de non-corrélation que nous utiliserons pour déterminer l'estimateur de Wiener.

---

<sup>2</sup>Ce résultat peut être obtenu plus simplement. L'intérêt d'utiliser le concept de risque apparaîtra lorsque nous voudrons comparer les performances de différentes bases.

Nous aurons besoin du concept de base de Karhunen-Loève pour poursuivre : il s'agit d'une base qui diagonalise à la fois les matrices de covariance de  $F$  et de  $W$ . Il peut sembler que cette condition soit très forte. Or, dans plusieurs applications le bruit est le même pour chaque échantillon et donc il peut être décrit uniquement par un écart-type  $\sigma$ . Ainsi, sa matrice de covariance devient  $\sigma^2 I$  où  $I$  est la matrice identité. Elle est donc diagonale dans toutes les bases orthonormales et en particulier dans la base qui diagonalise la matrice de covariance de  $F$ . Soit  $\mathcal{B} = \{g_m\}_{0 \leq m < N}$  la base de Karhunen-Loève de notre problème de débruitage. On a alors :

$$\begin{aligned} X_{\mathcal{B}}[m] &= \langle X, g_m \rangle & \hat{F}_{\mathcal{B}}[m] &= \langle \hat{F}, g_m \rangle \\ F_{\mathcal{B}}[m] &= \langle F, g_m \rangle & W_{\mathcal{B}}[m] &= \langle W, g_m \rangle \\ \beta_m^2 &= E\{|F_{\mathcal{B}}[m]|^2\} & \sigma_m^2 &= E\{|W_{\mathcal{B}}[m]|^2\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

On cherche à calculer explicitement l'expression de l'opérateur  $H$  (la représentation matricielle de  $h[n, k]$ ). De la condition de non-corrélation, on a la relation suivante :

$$E\{F[n]X[k]\} = E\{\hat{F}[n]X[k]\} = \sum_{l=0}^{N-1} h[n, l] E\{X[l]X[k]\} \quad (2.15)$$

De par l'expression de  $X$  et l'indépendance du bruit et du signal, on obtient de l'équation précédente :

$$E\{F[n]X[k]\} = \sum_{l=0}^{N-1} h[l, k] ((E\{F[l]F[k]\} + E\{W[l]W[k]\}))$$

En dénotant les matrices de covariance de  $F$  et  $W$  par  $C_F$  et  $C_W$ , l'expression devient :

$$C_F = H(C_F + C_W)$$

et donc

$$H = C_F(C_F + C_W)^{-1}$$

Dans une base de Karhunen-Loève, cet opérateur est diagonal et on obtient :

$$\hat{F}_B[m] = \frac{\beta_m^2}{\beta_m^2 + \sigma_m^2} X_B[m] \quad (2.16)$$

avec un risque donné par :

$$r_l(\pi) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\beta_m^2 \sigma_m^2}{\beta_m^2 + \sigma_m^2} \quad (2.17)$$

En regardant la figure 2.1, on arrive à mieux interpréter ce résultat : L'estimation  $\hat{F}_B[m]$  est obtenue en rétrécissant les composantes de  $X$  dans une base de Karhunen-Loève qui sont en deça d'un niveau de confiance déterminé par la variance de  $X$  et de  $F$ .

Cette démonstration justifie donc l'utilisation de la décomposition de Fourier pour le débruitage en traitement du signal typiquement réalisé en retirant les haute fréquence à l'aide d'un filtre passe-bas. En effet, si  $F$  et  $W$  sont des processus gaussiens et s'ils sont diagonalisés dans une base de Fourier (ce qui est le cas pour un vecteur aléatoire stationnaire et périodique au sens large), alors l'opérateur de Wiener est optimal. L'essentiel de l'approche bayésienne étant couvert, on se penche à présent sur le problème de la distribution de probabilité de  $F$ , qui n'est généralement pas connue a priori. On est cependant en mesure de l'inclure dans un espace  $\Theta$ . L'approche à privilégier alors est de caractériser l'erreur liée au pire estimateur que l'on peut trouver dans cet espace. On parle alors d'estimation minimax.

### 2.1.2 Risque minimax

L'approche du problème est différente ici mais on cherche toujours à caractériser  $D$ . Plutôt que de considérer une distribution de densité, on considère un espace dans lequel  $f$  peut se trouver. Par exemple, il est souvent possible de savoir qu'une fonction sera discontinue par morceaux avec  $n$  discontinuités ou bien qu'elle possède des dérivées bornées. Plus l'on disposera d'informations a priori, plus cet espace sera

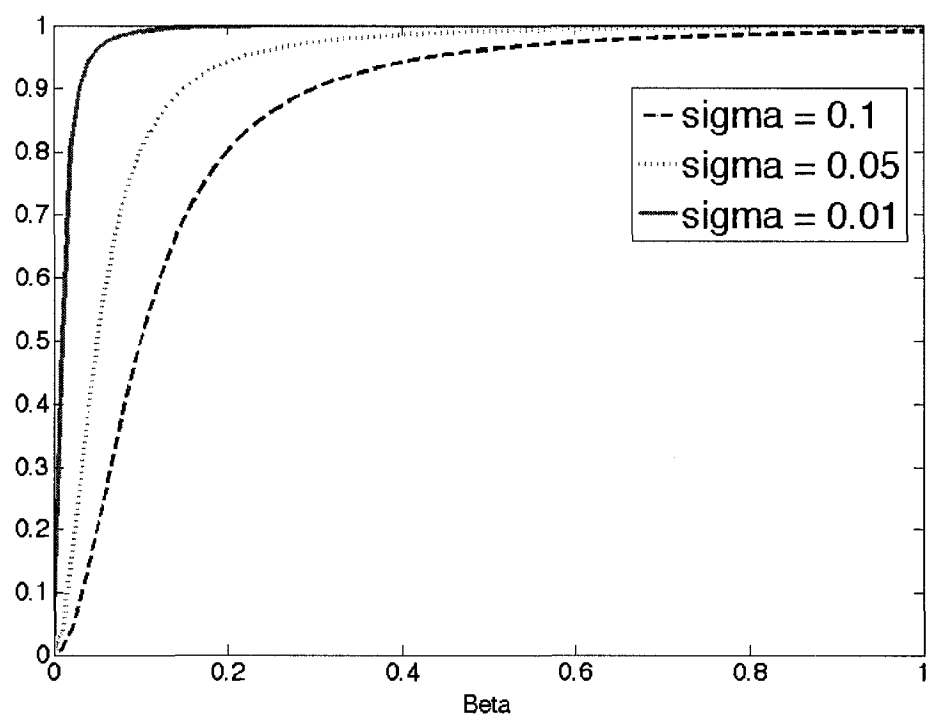


Figure 2.1 – Filtre de Wiener pour différents  $\sigma$

restreint. On nommera cet espace  $\Theta$  et le problème se réécrit,

$$X[n] = f[n] + W[n], \quad f \in \Theta$$

toujours avec un estimateur  $\hat{F} = DX$  et un risque  $r(D, f) = E\{\|DX - f\|^2\}$ . Cependant, puisque  $f$  est inconnue, nous n'allons pas minimiser le risque mais le maximum des risques obtenus dans l'espace des  $f$  :

$$r(D, \Theta) = \sup_{f \in \Theta} E\{\|DX - f\|^2\}$$

Ainsi, le risque minimax est

$$r_n(\Theta) = \inf_{D \in \mathcal{O}_n} r(D, \Theta) = \inf_{D \in \mathcal{O}_n} \sup_{f \in \Theta} E\{\|DX - f\|^2\}$$

Généralement, il n'est pas possible de déterminer l'opérateur qui atteindra le risque minimax. On est obligé de considérer certains types d'opérateurs, en l'occurrence linéaires ou diagonaux. Un opérateur diagonal  $d_m$  est un opérateur non linéaire mais qui n'estime  $f_B[m]$  qu'à partir de  $X_B[m]$ . On a

$$\hat{f} = \sum_{m=0}^{N-1} d_m(X) g_m = \sum_{m=0}^{N-1} a[m] X_B[m] g_m$$

On cherche d'abord à déterminer les bornes de notre estimation : quel est le meilleur débruitage que l'on puisse faire avec un opérateur diagonal? Un peu à l'instar de l'approche bayésienne, on suppose cette fois-ci que l'on connaît la solution a priori, c'est-à-dire que l'on connaît  $\|f_B[m]\|$ . L'espace contenant  $f$  est donc composé uniquement de  $f$ . L'espace ne contenant qu'un élément, il n'est plus nécessaire d'en prendre le supremum. On parle alors d'estimateur oracle. On cherche à minimiser

$$r(D, f) = E\{\|f - \hat{f}\|^2\} = \sum_{m=0}^{N-1} E\{|f_B[m] - X_B[m]a[m]|^2\}$$

Puisque  $X_B = f_B + W_B$  et  $E\{|W_B[m]|^2\} = \sigma^2$  on a :

$$E\{|f_B[m] - X_B[m]a[m]|^2\} = |f_B[m]|^2(1 - a[m]) + \sigma^2 a[m]^2 \quad (2.18)$$

et

$$r(D, f) = \sum_{m=0}^{N-1} |f_{\mathcal{B}}[m]|^2 (1 - a[m]) + \sigma^2 a[m]^2 \quad (2.19)$$

Le risque est donc minimum pour

$$a[m] = \frac{|f_{\mathcal{B}}[m]|^2}{|f_{\mathcal{B}}[m]|^2 + \sigma^2} \quad (2.20)$$

et est donné par

$$r_{inf}(f) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{|f_{\mathcal{B}}[m]|^2 \sigma^2}{|f_{\mathcal{B}}[m]|^2 + \sigma^2}$$

On retrouve encore une fois un filtre de type Wiener, sauf que le terme  $|f_{\mathcal{B}}[m]|$  est plus facile à caractériser. En effet, il s'agit de la mesure de la "qualité" de la représentation fournie par une base, i.e. le nombre de coefficients nécessaires pour atteindre une estimation donnée d'une image avec le débruitage. En effet, prenons par exemple un opérateur diagonal linéaire binaire, c'est-à-dire qu'il est égal à un pour  $M$  coefficients et nul pour les autres. On obtient l'expression du risque suivante :

$$r(D, f) = \sum_{m=M}^{N-1} |f_{\mathcal{B}}[m]|^2 + \sum_{m=0}^{M-1} \sigma^2 \quad (2.21)$$

$$= \epsilon[M] + M\sigma^2 \quad (2.22)$$

où  $\epsilon[M]$  est l'erreur d'estimation. Cette équation peut être expliquée de la façon suivante : pour chaque coefficient conservé, le risque correspond à la norme du bruit, alors que pour chaque coefficient éliminé, le risque correspond à la norme dudit coefficient. Ainsi, moins il faut de coefficients pour représenter adéquatement l'image  $f$ , moins le risque sera grand. Effectivement,  $\epsilon[M]$  diminue quand  $M$  augmente ; si cette diminution est rapide, on pourra prendre  $M$  plus faible et diminuer ainsi le terme  $M\sigma^2$ .

Cette expression est bien sûr inutilisable car elle nécessite la connaissance de la solution. On tente alors de la simplifier en utilisant un projecteur non-linéaire.

Celui qui minimise le risque est donné par :

$$a[m] = \begin{cases} 1 & \text{si } |f_{\mathcal{B}}[m]| \geq \sigma \\ 0 & \text{si } |f_{\mathcal{B}}[m]| < \sigma \end{cases} \quad (2.23)$$

En effet, l'expression du risque minimal devient :

$$r_p(f) = \sum_{m=0}^{N-1} \min(|f_{\mathcal{B}}[m]|^2, \sigma^2)$$

or, puisqu'on a l'inégalité

$$\min(x, y) \geq \frac{xy}{x+y} \geq \frac{1}{2} \min(x, y)$$

on peut écrire :

$$r_p(f) \geq r_{inf}(f) \geq \frac{1}{2} r_p(f)$$

et donc, on peut conclure que le risque lié à un projecteur non-linéaire est du même ordre de grandeur que celui lié à l'opérateur diagonal optimal. Le commentaire fait par rapport au choix de la base pour un opérateur diagonal linéaire est encore valable, c'est-à-dire que moins de coefficients sont nécessaires pour représenter une image dans une base donnée, plus le risque est faible.

En pratique, on utilisera le même genre d'opérateurs de projection mais dépendant de  $X$  plutôt que  $f$ . On parlera alors de seuillage, en anglais *thresholding*. Il en existe de plusieurs types, les plus importants étant le *hard-thresholding* (voir figure 2.2) :

$$d_m(X_{\mathcal{B}}[m]) = \begin{cases} X_{\mathcal{B}}[m] & \text{si } |X_{\mathcal{B}}[m]| \geq T \\ 0 & \text{si } |X_{\mathcal{B}}[m]| < T \end{cases} \quad (2.24)$$

et le *soft-thresholding* :

$$d_m(X_{\mathcal{B}}[m]) = \begin{cases} X_{\mathcal{B}}[m] - T & \text{si } X_{\mathcal{B}}[m] \geq T \\ 0 & \text{si } |X_{\mathcal{B}}[m]| < T \\ X_{\mathcal{B}}[m] + T & \text{si } X_{\mathcal{B}}[m] \leq -T \end{cases} \quad (2.25)$$

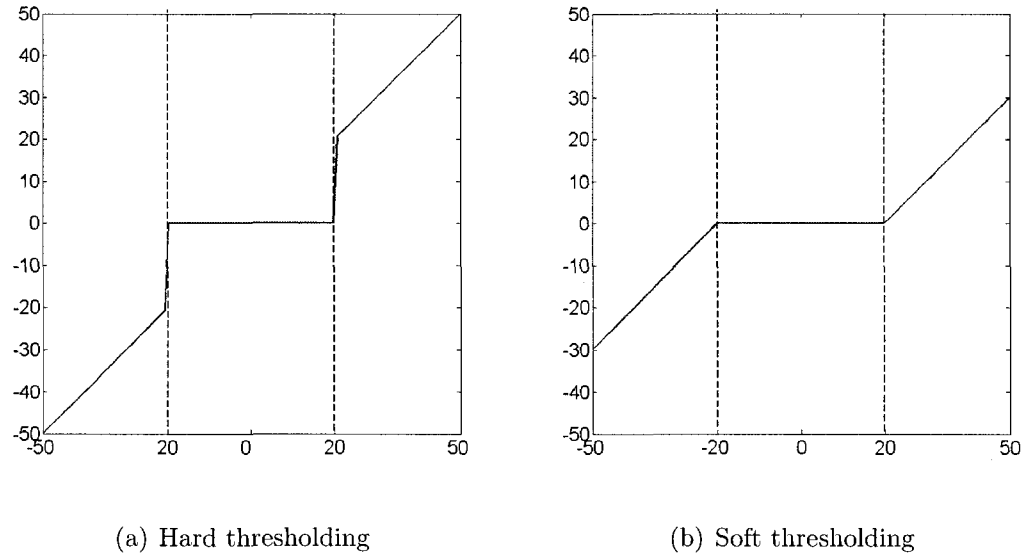


Figure 2.2 – Opérateurs de seuillage

Donoho et Johnstone ont démontré qu'en choisissant adéquatement  $T$  [35], on peut atteindre un risque approchant l'estimateur oracle. Théoriquement, la valeur optimale de  $T$  est  $T = \sigma\sqrt{2\ln N}$  [35] mais empiriquement, on trouve que pour le cas d'une image  $512 \times 512$  on obtient de meilleurs résultats avec  $T = 3\sigma$  [34]. Il est possible d'estimer l'écart-type du bruit ( $\sigma$ ) à l'aide d'une méthode utilisant les ondelettes, présentées dans la section suivante. En somme, la stratégie qui sera employée pour le débruitage sera d'arriver à représenter l'image dans une base qui produira une erreur d'approximation  $\epsilon[M]$  décroissant le plus rapidement possible et qui permettra de retirer les petits coefficients. La section suivante présentera différentes bases que nous considérerons.

## 2.2 Représentations parcimonieuses

### 2.2.1 Transformée de Fourier

La section précédente a démontré l'importance de l'erreur d'estimation

$$\epsilon[M] = \sum_{m=M}^{N-1} |f_{\mathcal{B}}[m]|^2 \quad (2.26)$$

On utilise souvent la base de Fourier pour débruiter en traitement du signal. Comment se comporte l'erreur d'estimation lorsque  $\mathcal{B}$  est la base de Fourier ? Pour arriver à répondre à cette question, il faut d'abord définir la dérivée au sens de Sobolev qui nous permettra de caractériser la régularité d'une fonction. Nous verrons que dans certains cas, la base de Fourier n'est pas optimale. Puisque

$$TF\left\{\frac{\partial}{\partial t}f(t)\right\}(\omega) = -i\omega TF\{f(t)\}(\omega) \quad (2.27)$$

on obtient de la relation de Plancherel que la dérivée de  $f$  est de carré sommable si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial}{\partial t}f(t)\right|^2 dt < \infty \quad (2.28)$$

Cette constatation amène une nouvelle définition : une fonction est  $s$  fois différentiable au sens de Sobolev si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^{2s} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega < \infty \quad (2.29)$$

L'approche générale pour mesurer l'erreur d'estimation sera de l'exprimer en fonction de  $s$ . Ainsi, pour une base de Fourier, il est possible de démontrer que si  $f$  est  $s$  fois différentiable au sens de Sobolev sur un intervalle  $[a, b]$ , ce qui s'écrit  $f \in W^s[a, b]$ , alors

$$\sum_{M=1}^{+\infty} M^{2s-1} \epsilon[M] < \infty \quad (2.30)$$

qui implique  $\epsilon[M] = o(M^{-2s})$ . Une fonction discontinue n'est pas  $s$  fois différentiable au sens de Sobolev pour  $s > \frac{1}{2}$ . On peut démontrer qu'une fonction discontinue mais dont la somme des variations est bornée fait partie de  $W^{\frac{1}{2}}[0, 1]$  et donc que l'erreur d'approximation se comporte comme  $o(M^{-1})$ . Les images à variation bornée sont typiquement ce qui surviendra en imagerie photo-acoustique ; il est donc intéressant de se concentrer sur cette classe de fonction en particulier. On remarque donc que les singularités ralentissent la décroissance de l'erreur d'approximation : plus une fonction est régulière, plus la base de Fourier sera efficace. Ainsi, une fonction très régulière en dehors d'une unique discontinuité sera mal représentée. L'idée qui s'impose est donc de tenter de découper le support de la fonction en intervalles contenant une partie de la fonction qui est régulière. C'est ce qui nous amènera à la transformée de Gabor.

### 2.2.2 Transformée de Fourier fenêtrée

La première idée pour découper le support d'une fonction est de considérer

$$TF\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.31)$$

$$= \sum_n \int_{I_n} f(t)e^{-i(\omega)t} dt \quad (2.32)$$

où  $\bigcup I_n = R$ , ce qui nous donne une transformée de Fourier par intervalle :

$$TFI\{f\}(\omega, n) = \int_{I_n} f(t)e^{-i(\omega)t} dt \quad (2.33)$$

Cependant, on remarque que

$$TFI\{f\}(\omega, n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t - t_n}{\sigma_n}\right) f(t) e^{-i(\omega)t} dt \quad (2.34)$$

$$= TF\{\text{rect}\left(\frac{t - t_n}{\sigma_n}\right)\}(\omega) TF\{f(t)\}(\omega) \quad (2.35)$$

où  $\sigma_n$  caractérise la largeur de la fenêtre considérée, et  $t_n$ , son centre. Or la fonction  $\text{rect}$  est elle-même discontinue ; il s'agit donc d'une approche qui n'est pas

satisfaisante. On cherchera plutôt une convolution avec une fonction très régulière (avec  $s$  grand) à décroissance rapide. Cependant, cette nouvelle convolution agira comme un filtre passe-bas et la transformation obtenue ne constituera pas une base complète car elle ne couvrira qu'une partie de l'espace fréquentiel possible. Pour pallier ce problème, on transformera donc ce filtre passe-bas en filtre passe-bande en ajoutant une translation dans l'espace de Fourier, ce qui correspond à une multiplication par une exponentielle complexe dans l'espace direct. Ces deux caractéristiques définissent donc la transformée de Fourier fenêtrée. Dans le cas particulier où la fenêtre utilisée est une gaussienne, cette transformée se nomme la transformée de Gabor :

$$TG\{f\}(\omega, n, m) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(\frac{t-t_n}{\sigma_n}\right)^2} e^{i\omega_m t} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.36)$$

qui devrait donc améliorer la vitesse de décroissance de l'erreur d'estimation. Cependant, le choix de  $\sigma_n$  pose problème : en effet, comment le choisir de façon optimale ? De plus, on vient ici d'augmenter de façon significative le nombre de coefficients par l'introduction du paramètre  $m$ .

On peut se demander aussi si cette augmentation du nombre de dimensions permettra une reconstruction du signal initial car nous ne sommes pas en présence d'une base. Nous recourrons au concept de repère pour s'assurer qu'une reconstruction soit possible. Un repère (*frame*) est une généralisation du concept de base qui admet des vecteurs linéairement dépendants. Plus précisément, un repère est un ensemble de vecteurs  $e_i$  d'un espace vectoriel  $V$  admettant un produit scalaire qui respecte la condition suivante :

$$A\|v\|^2 \leq \sum_k | \langle v, e_k \rangle | \leq B\|v\|^2 \quad (2.37)$$

$\forall v \in V$  et où  $A$  et  $B$  sont des constantes positives non nulles. À partir des vecteurs  $e_k$ , on peut construire un opérateur  $U$  de transformation dans un repère :

$$Uf[n] = \langle f, e_n \rangle \quad (2.38)$$

On cherche à trouver une matrice  $U'^{-1}$  tel que  $f = U'^{-1}Uf$  dans l'objectif de reconstruire le signal  $f$ . Ceci est fait en utilisant le pseudo-inverse, donné par  $U'^{-1} = (U^*U)^{-1}U^*$  et qui sera décrit précisément dans la section 2.3. Il existe alors un ensemble dual de vecteur  $e'_i$  tel que

$$v = \sum_k \langle v, e'_k \rangle e_k = \sum_k \langle v, e_k \rangle e'_k \quad (2.39)$$

où  $e'_k = (U^*U)^{-1}e_k$  qui permet la reconstruction d'un vecteur. Dans le cas particulier où  $A = B$  on dit qu'on a un repère étroit et l'identité de Parseval est respectée. De plus, l'ensemble dual est simplement donné par  $Ae'_k = e_k$ . On voit donc que dans le cas où  $A = B = 1$  et  $|e_k| = 1 \forall k$ ,  $e_k$  forme une base orthonormale. Dans ce document, on s'intéressera aux ensembles de vecteurs qui forment un repère étroit.

### 2.2.3 Ondelettes

L'idée ici est de trouver des relations entre  $m$ ,  $n$  et  $\sigma_n$  pour optimiser la transformée de Gabor. La localisation se faisant en temps et en fréquence, on peut la représenter dans un plan. Le principe d'incertitude d'Heisenberg nous interdisant d'avoir une connaissance exacte simultanée du temps et de la fréquence, l'information sera dispersée dans une fenêtre plus ou moins grande.

Une fonction  $w \in L^2$  est une fenêtre si  $xw(x) \in L^2$ . Le centre  $x^*$  et la largeur  $\Delta_w$  de cette fenêtre sont définis comme suit :

$$x^* := \langle x, |w(x)|^2 \rangle \quad (2.40)$$

$$\Delta_w := \sqrt{\langle (x - x^*)^2, |w(x)|^2 \rangle} \quad (2.41)$$

où  $\langle ., . \rangle$  désigne le produit scalaire dans  $L^2$ .

On peut interpréter ces définitions comme la moyenne et l'écart-type de l'énergie de la fenêtre. En ces termes, on peut exprimer le principe d'incertitude d'Heisenberg comme suit<sup>3</sup> :

---

<sup>3</sup>Ce théorème peut s'inscrire dans un cadre beaucoup plus général, cette définition nous sera suffisante.

$$\Delta_w^2 \Delta_{\hat{w}}^2 \geq \frac{1}{4} \quad (2.42)$$

En effet, on peut calculer facilement la largeur et le centre d'une fenêtre quelconque en espace et en fréquence :

$$[x^* - \Delta_w, x^* + \Delta_w] \times [\omega^* - \Delta_{\hat{w}}, \omega^* + \Delta_{\hat{w}}] \quad (2.43)$$

Soit  $\Psi(x)$  le noyau de la transformation de Gabor. Il est clair qu'il s'agit d'une fenêtre. En la déplaçant dans le plan temps-fréquence à l'aide de deux paramètres  $a$ , que l'on associera à la fréquence et  $b$ , que l'on associera au temps, on pourra se créer un ensemble de fonctions  $\Psi_{ab}$  qui couvrira la totalité de l'espace. On pourra alors par la suite décomposer notre signal  $I(x)$  selon cette ensemble :

$$c(a, b) = \langle I(x), \Psi_{ab} \rangle \quad (2.44)$$

Plus  $|c(a, b)|$  sera grand, plus l'énergie du signal sera présente dans la fenêtre associée aux paramètres  $a$  et  $b$ . Comment définir  $a$  et  $b$ ? L'approche paraissant la plus évidente est d'utiliser  $a$  et  $b$  pour effectuer des translations de telle sorte que  $\Psi_{ab}(x)$  devienne  $\Psi_a(x - b)$  et que  $\hat{\Psi}_{ab}(\omega)$  devienne  $\hat{\Psi}_b(\omega - a)$ . Cette approche sera cependant insuffisante. En effet, ce genre de translation n'a aucun effet sur la largeur de la fenêtre. Or, les fréquences à analyser auront un impact sur les largeurs de fenêtres spectrale et temporelle.

Notre analyse sur une fenêtre sera valable si le contenu fréquentiel varie peu sur un intervalle de temps associé. Or, une fréquence étant inversement proportionnelle à la longueur d'onde, l'intervalle de temps dont le contenu spectral est approximativement stable sera inversement proportionnel à l'intervalle de fréquence. En réutilisant les notations précédentes, on doit avoir

$$\Delta_\Psi \propto \frac{1}{\Delta_{\hat{\Psi}}} \quad (2.45)$$

On définit donc finalement une ondelette de la façon suivante, à partir d'une fenêtre, plus communément appelée ondelette mère  $\Psi(x)$  et de deux paramètres de translation  $a$  et  $b$  :  $\Psi(\frac{x-b}{a})$ . Cette définition amènera la fenêtre dans le plan temps fréquence suivante :

$$[b + ax^* - a\Delta_\Psi, b + ax^* + a\Delta_\Psi] \times [\frac{\omega^*}{a} - \frac{\Delta_{\hat{\Psi}}}{a}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{\Delta_{\hat{\Psi}}}{a}] \quad (2.46)$$

Généralement,  $x^*$  sera nul (de même que les moments d'ordre supérieur, propriété qui sera utile pour caractériser la régularité d'un signal).  $b$  est donc un paramètre permettant la translation en temps.  $a$ , sous l'hypothèse  $\omega^* > 0$ , permet de déplacer la fenêtre fréquentielle ; on voit que pour un  $a$  faible, on obtient une fréquence élevée, d'où le nom échelle qui lui est associé. Le produit des largeurs  $a\Delta_\Psi$  et  $\frac{\Delta_{\hat{\Psi}}}{a}$  ne dépend pas de  $a$  ce qui permet de choisir une taille de boîte d'Heisenberg dans la fonction mère, taille qui restera la même peu importe l'échelle. Et enfin, en considérant les écart-types comme des constantes (car choisis dans la fonction mère), on voit qu'ils sont inversement proportionnels, en accord avec l'équation 2.45. La figure 2.3 montre une ondelette construite à partir d'une fenêtre gaussienne.

Avec une telle définition, et en sélectionnant les  $M$  plus grands coefficients, on obtient une erreur d'estimation  $o(M^{-2})$  pour une fonction continue par morceaux à variation bornée.

### Exemple

Un type d'ondelette largement utilisé est le chapeau mexicain, défini comme étant la deuxième dérivée d'une gaussienne. Il s'agit d'une ondelette réelle où le comportement oscillatoire provient du polynôme de degré deux qui multiplie la gaussienne. Plus précisément,

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi^{\frac{1}{4}}\sqrt{(3\sigma)}} \left( \frac{t^2}{\sigma^2} - 1 \right) e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} \quad (2.47)$$

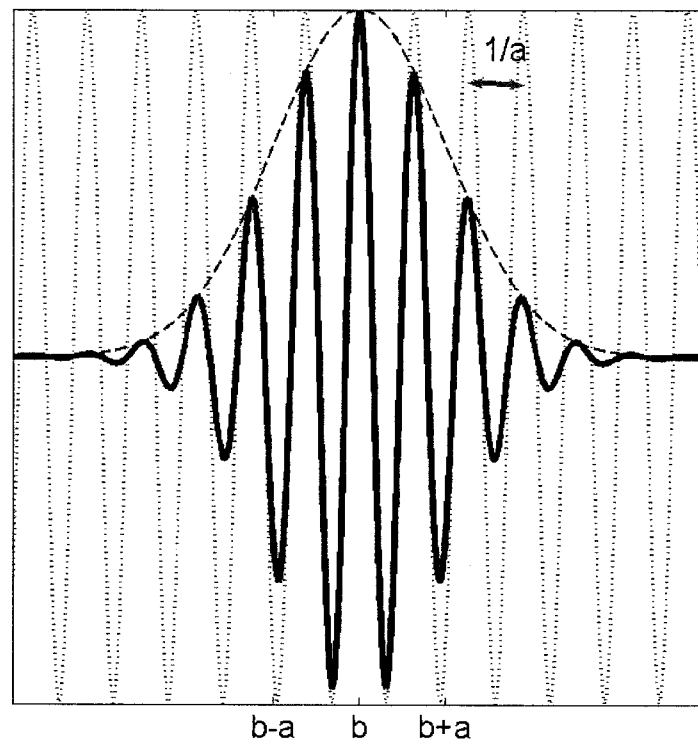


Figure 2.3 – Partie réelle d'une ondelette construite à partir d'une fenêtre gaussienne.



Figure 2.4 – Représentation dans le plan temps-fréquence d’une ondelette de type chapeau mexicain pour différents  $a$  et  $b$

La figure 2.4 montre le comportement de cette ondelette pour des  $a$  et  $b$  différents dans le plan temps-fréquence, où l’ordonnée est en fréquence et l’abscisse en temps. On remarque que pour un  $a$  grand, l’énergie de l’ondelette est concentrée dans les basses fréquences et sur un grand intervalle de temps, alors que pour  $a$  petit, l’énergie est très localisée en espace mais pas en fréquence. Les coefficients d’ondelettes sont obtenus par la transformée

$$TW\{f(t)\}(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (2.48)$$

et on peut reconstruire le signal grâce à la transformée inverse

$$TW^{-1}\{f(t)\}(a, b) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} TW\{f(t)\}(a, b) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db \frac{da}{a^2} \quad (2.49)$$

On remarque que certains facteurs dépendant de  $a$  ont été ajoutés pour tenir compte de sa mesure et ainsi assurer la conservation de l’énergie. Il s’agit ici d’une explication très succincte des ondelettes et de leurs applications. Pour plus de détails, [34] constitue une excellente référence.

On a donc obtenu une représentation optimale d'un signal contenant des discontinuités en une dimension. La section suivante montrera que le passage en deux dimensions implique d'autres difficultés.

#### 2.2.4 Ondelettes en deux dimensions

La transformation en ondelettes d'une fonction bidimensionnelle est typiquement réalisée en effectuant deux transformées unidimensionnelles dans les directions  $x$ - $y$  de l'image, comme cela est fait pour la transformée de Fourier en deux dimensions. On dit alors que l'on effectue le produit tensoriel entre la transformation en  $x$  et celle en  $y$ . L'ondelette utilisée sera donc simplement une fonction de deux variables séparables :

$$\Psi_x\left(\frac{x-b_1}{a}\right)\Psi_y\left(\frac{y-b_2}{a}\right) \quad (2.50)$$

Puisque les ondelettes représentent de manière très efficace, en terme d'erreur d'approximation, les signaux unidimensionnels continus par morceaux, on pourrait s'attendre au même comportement en  $o(M^{-2})$  pour les images continues par morceaux. Or ce n'est pas le cas. La raison en est que l'application en  $x$  et en  $y$  de la transformation en ondelettes implique que les plans spatial et fréquentiel sont divisés en carrés. On verra plus loin que cette approche n'est pas la représentation optimale d'une image. En effet, les ondelettes sont particulièrement adaptées pour détecter des points singuliers en une dimension. Or, en l'appliquant en deux dimensions de manière séparable, on ne tient pas compte d'une information que l'on a *a priori*. En effet, un point faisant partie d'une courbe est vu comme une discontinuité à la fois en  $x$  et en  $y$  alors qu'en réalité, elle est continue et même à variation lente selon la direction de ce contour.

Prenons un exemple pour déterminer comment le terme d'erreur se comporte avec une représentation en ondelettes bidimensionnelles : une courbe  $c(x) \in C^p$

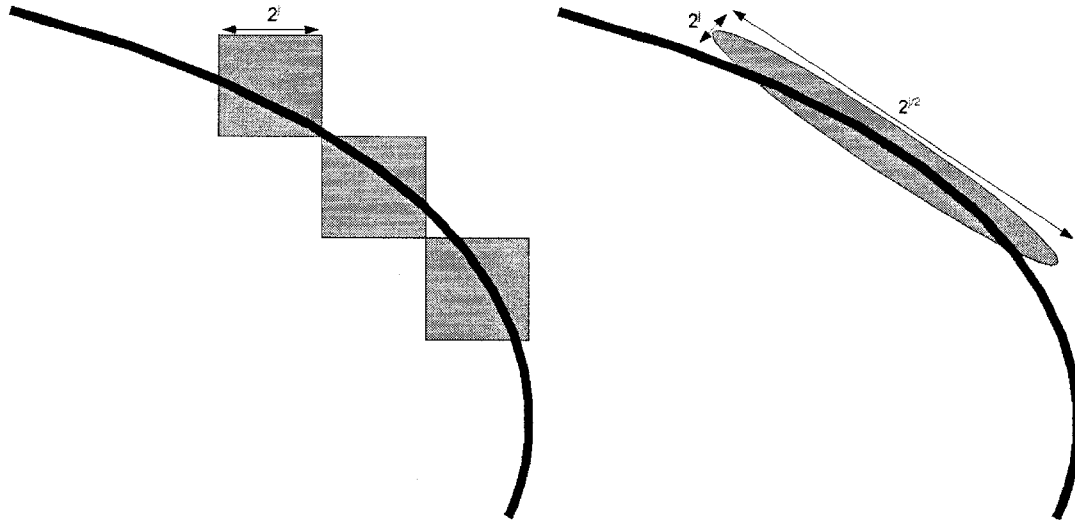


Figure 2.5 – Approximation non-linéaire d'un contour ; les curvelets peuvent être vues comme un regroupement local d'ondelettes

séparant<sup>4</sup> deux domaines dans un carré unité. D'un côté de la courbe les points prennent la valeur 1, de l'autre, 0. En d'autres termes, pour  $0 \leq x, y \leq 1$  :

$$f(x, y) = 1_{\{y \geq c(x)\}} \quad (2.51)$$

Ce modèle a été choisi car typiquement les termes dominants dans le taux d'approximation sont dus aux courbes singulières. Il est possible de prouver [34] que le terme d'erreur se comporte essentiellement de la même façon pour les images à variation bornée que pour les images continues par morceaux.

Dans le cas des ondelettes, le support à une échelle  $j$  est un carré de côté  $2^j$ . Puisque  $c(x)$  est de longueur  $L$  finie, il faudra un nombre de coefficients non nuls c'est-à-dire dont le support intersecte  $c(x)$  de l'ordre de  $L2^{-j}$  (voir figure 2.5).

La valeur de ces coefficients se comporte près de la frontière comme  $2^j$  pour une image bornée et à variation bornée ([34], p.400). Supposons que les  $M$  plus grands termes sont conservés et considérons pour simplifier que l'on conserve des échelles en entier. On note  $|f_B[k]|$  les coefficients en ondelettes ordonnés de telle façon que

<sup>4</sup>L'espace  $C^p$  est l'espace des fonctions continuellement différentiables  $p$  fois

$|f_B[k]| > |f_B[k+1]|$ . Puisque l'amplitude de ces coefficients décroît avec l'affinement de l'échelle  $j$  et puisqu'il y a un nombre de coefficients non-nuls à des échelles plus grandes que  $2^j$  de l'ordre de  $2^{-j}$ , le coefficient  $|f_B[k]|$  de rang  $k$  est situé à l'échelle  $2^j$  et donc  $k \sim L2^{-j}$ . On a alors  $|f_B[k]| \sim Lk^{-1}$ . Pour une approximation à  $M$  termes qui s'arrête à une échelle  $J$ , on a, puisque l'échelle  $J$  sera dominante dans la série, le terme d'erreur suivant[36] :

$$\epsilon[M] = \|f - f_M\| \sim M^{-1} \quad (2.52)$$

où  $f_M$  est la reconstruction obtenue à partir de  $M$  coefficients.

### 2.2.5 Curvelets

Il s'agit d'une performance qu'il est possible d'améliorer. En effet, en utilisant des ondelettes s'adaptant à la géométrie on peut atteindre un terme d'erreur se comportant comme  $M^{-2}$ . Cependant, cette approche n'est pas générale car elle nécessite la création d'une nouvelle base pour chacune des images considérées, ce qui en alourdit le traitement. On cherchera donc plutôt à construire une base générique qui pourra être appliquée avec un terme d'erreur en  $M^{-2}$  peu importe l'image. Pour ce faire, on conserve l'idée du découpage temps-fréquence des ondelettes, mais on n'appliquera pas directement le produit tensoriel (2.50). En effet, rien ne justifie le choix des directions cartésiennes en particulier.

On pourra arriver à un tel taux de décroissance pour l'erreur simplement en changeant le type de support utilisé pour les fonctions de la base. Comme à la section précédente, on utilise une fonction continue par morceaux car elle se comporte sensiblement de la même façon qu'une image naturelle. Ainsi, analysons une image de ce type pour comprendre la structure des curvelets.

La figure 2.6 montre une courbe, ici un polynôme de degré 3, et sa transformée de Fourier. Il est intéressant d'analyser le spectre de cette image : on remarque particulièrement la structure en étoile. À première vue, on pourrait même affirmer

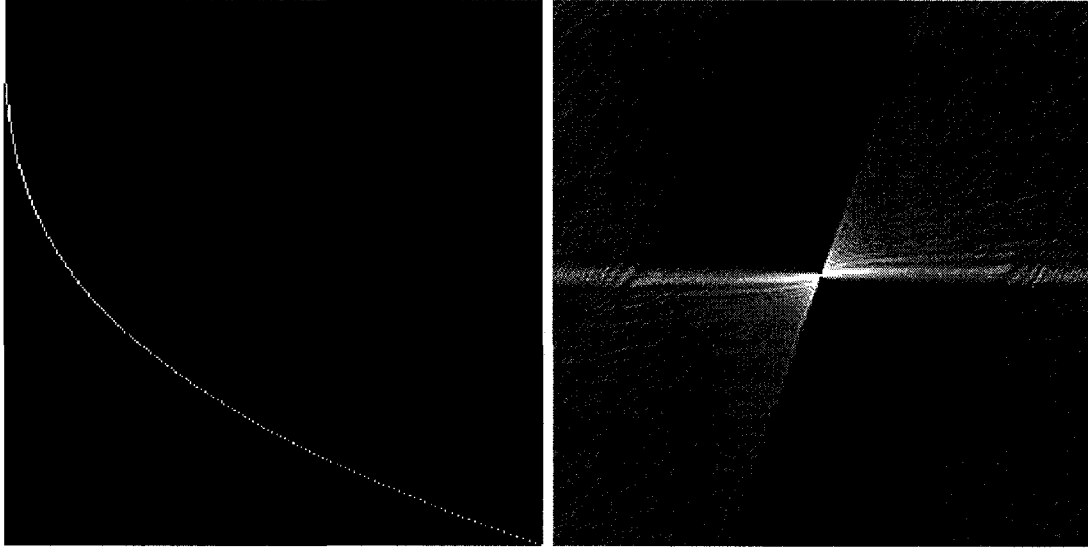


Figure 2.6 – Polynôme de degré 3 et sa transformée de Fourier, respectivement que ce que l'on voit est une famille de fonctions affines d'ordonnée à l'origine nulle ; c'est-à-dire

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = cste \quad (2.53)$$

De plus, on remarque que la densité de courbes est plus grande à proximité des basses fréquences. On suggère donc de prendre comme deux nouvelles coordonnées une distance et un quotient, ou en d'autres termes un rayon et un angle. La contrainte liée au principe d'incertitude d'Heisenberg étant toujours présente, on considérera des régions de cet espace, idéalement courtes selon l'angle et allongées selon le rayon.

La première solution est donc de considérer des ondelettes directionnelles. En effet, plutôt que de poser

$$\Psi_{ab}(x, y) = \Psi_x\left(\frac{x - b_1}{a}\right) \Psi_y\left(\frac{y - b_2}{a}\right) \quad (2.54)$$

on utilise

$$\Psi_{ab\theta}(x, y) = \Psi(R_\theta D(x, y)) \quad (2.55)$$

où  $D$ , une matrice de dilatation et  $R_\theta$ , une matrice de rotation, sont définies de la façon suivante :

$$D = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Or cette approche, quoique largement utilisée dans la littérature (ridgelets[37], directionlets[38], wedgelets[39]) n'est pas optimale. En effet, on peut montrer que ces ondelettes directionnelles ne "résolvent pas le front d'ondes"[40], i.e. qu'à une échelle suffisamment fine, on retrouve toutes les orientations alors qu'on voudrait seulement la tangente.

Toujours selon [40], la solution à ce problème est de conserver un lien longueur  $\propto$  largeur<sup>2</sup>. En d'autres termes, plutôt que de changer tous les supports avec une opération linéaire, on allonge le support en fonction de l'échelle. Plus l'échelle est fine, plus l'allongement du support sera important. Un autre exposant aurait pu être choisi, mais il est possible de montrer que le choix quadratique est optimal.

On peut aussi voir cette approche d'une autre façon [10] à l'aide de la figure 2.5. L'approche non-linéaire de déformation du support peut être vue comme le regroupement à une échelle de deux supports d'ondelettes classiques. Ainsi, plutôt que de changer la forme de chacun des supports, on arrive à "compresser" l'information en regroupant  $2^{-\frac{j}{2}}$  (pour atteindre le lien lien longueur  $\propto$  largeur<sup>2</sup>) coefficients. En reprenant l'exemple de la fonction continue par morceaux, on passe de  $2^{-j}$  coefficients pour représenter la courbe à  $2^{-\frac{j}{2}}$ , ce qui mène à une erreur de l'ordre de  $M^{-2}$ .

Ainsi, pour construire les curvelets, il suffit de remplacer  $D$  par  $D_a$  qui dépendra donc de l'échelle et s'écrira

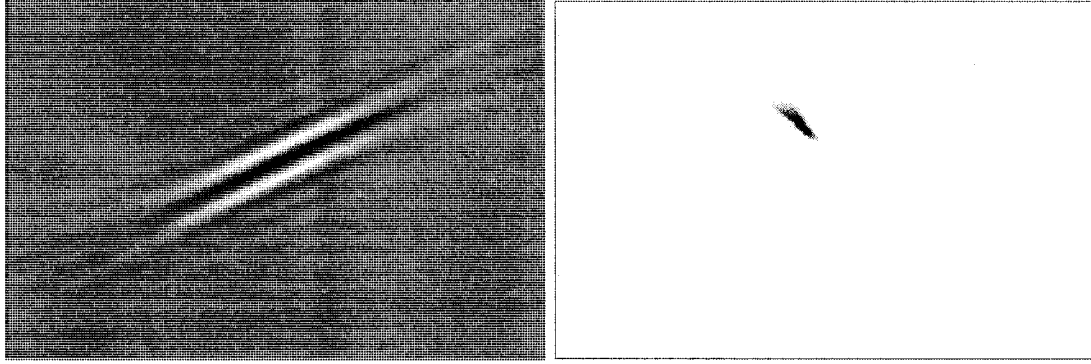


Figure 2.7 – Curvelets dans l'espace direct et sa transformée de Fourier, respectivement[43]

$$D_a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

D'autres transformées permettent d'atteindre une erreur d'approximation optimale comme les bandelets[41] et les platelets[42]. Cependant les premières sont adaptatives, c'est-à-dire que les vecteurs de la base changent selon l'image considérée. Cela permet d'obtenir une erreur d'approximation optimale pour une plus grande classe de fonction, mais ne sera pas (ou plus difficilement) applicables aux algorithmes de reconstruction d'image qui nous intéressent. Les platelets quant à elles ne peuvent être générées avec un algorithme rapide de type FFT, mais permettent de s'adapter plus facilement à un bruit de Poisson plutôt que gaussien, ce qui peut être utile dans certaines applications.

### Définition exacte

Il est donc possible de définir une curvelets à partir de trois coefficients :  $a$ ,  $b$  et  $\theta$ , l'échelle, la position et l'angle respectivement. On peut obtenir tous les vecteurs de la base à partir d'une fonction mère de la façon suivante[40] :

$$\Psi_{a,b,\theta}(x, y) = \Psi_{a,0,0}(R_\theta(x - b)) \quad (2.59)$$

avec

$$TF\{\Psi\}_{a,0,0}(\rho, \phi) = w_\rho(a\rho)w_\phi\left(\frac{\phi}{\sqrt{a}}\right)a^{\frac{3}{4}} \quad (2.60)$$

où  $\rho$  et  $\phi$  sont les coordonnées polaire dans l'espace de Fourier et où  $w_\rho(\rho)$  est une fenêtre radiale avec  $\rho \in (\frac{1}{2}, 2)$  et  $w_\phi(\phi)$  est une fenêtre angulaire avec  $\phi \in [-1, 1]$ . La figure 2.7 montre cette fenêtre et sa transformée de Fourier. Il est clair que cette définition respecte les caractéristiques recherchées : le support radial de  $TF\{\Psi\}_{a,0,0}(\rho, \phi)$  est donné par  $[\frac{1}{2a}, \frac{2}{a}]$  et donc grandit lorsque l'échelle diminue ; de même, son support angulaire est donné par  $[-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$  et grandit avec l'échelle. Si on note  $L$  la longueur et  $l$  la largeur, on remarque de plus que

$$L = \frac{2}{a} - \frac{1}{2a} = \frac{3}{2a} \quad (2.61)$$

$$l \approx \rho(2\sqrt{a}) \quad (2.62)$$

$$\approx \frac{1}{a}(2\sqrt{a}) = \frac{2}{\sqrt{a}} \quad (2.63)$$

et donc,

$$L \approx l^2 \quad (2.64)$$

Ce qui vérifie effectivement que la longueur est proportionnelle à la largeur au carré. La définition de la transformée en curvelets est donnée par

$$TC\{f(x, y)\}(a, b, \theta) = \int \Psi_{a,b,\theta}^*(x, y)f(x, y)dx dy \quad (2.65)$$

De même, la reconstruction s'obtient par

$$f(x, y) = \int TC\{f(x, y)\}(a, b, \theta)\Psi_{x,y}(a, b, \theta)\frac{da}{a^3}dbd\theta \quad (2.66)$$

Il est aussi possible de discrétiser ces transformées continues et de les calculer en utilisant un algorithme rapide de type FFT[44].

### 2.2.6 Conclusion

En revenant au problème du débruitage, on peut écrire que le risque minimax se comporte de la façon suivante

$$r(D, f) = \|f - f_M\|^2 + M\sigma^2 \quad (2.67)$$

$$= \epsilon[M] + M\sigma^2 \quad (2.68)$$

$$\sim \begin{cases} O(M^{-1/2}) + M\sigma^2 & \text{pour une base de Fourier} \\ O(M^{-1}) + M\sigma^2 & \text{pour une base en ondelettes} \\ O(M^{-2}) + M\sigma^2 & \text{pour une base en curvelets} \end{cases} \quad (2.69)$$

et en observant la figure 2.2.6, on remarque que les curvelets permettent non seulement de réduire le nombre de coefficients pour obtenir le minimum du risque mais également de réduire cette valeur minimale, améliorant à la fois les performances visuelles et de calcul. Pour estimer l'écart-type du bruit, on peut faire l'hypothèse qu'empiriquement, les coefficients d'ondelettes aux petites échelles contiendront principalement du bruit[35]. Il est possible de démontrer que l'espérance de la médiane d'une distribution gaussienne est donnée par  $0.6745\sigma$ . De plus, la médiane a la propriété de n'être que peu influencée par les valeurs extrêmes. Ainsi, le signal présent dans les petites échelles sera négligeable par rapport au bruit et on pourra faire l'hypothèse qu'en divisant par 0.6745 la valeur de la médiane des coefficients aux échelles fines, on obtiendra une bonne estimation de  $\sigma$ [34]. Le chapitre 3 présentera une application de cette stratégie.

### 2.3 Problème inverse linéaire

L'application d'un seuillage sur les coefficients de curvelets constitue donc théoriquement un outil permettant de débruiter les signaux ultrasonores de manière plus efficace que le moyennage. On aimerait désormais arriver à réduire le nombre

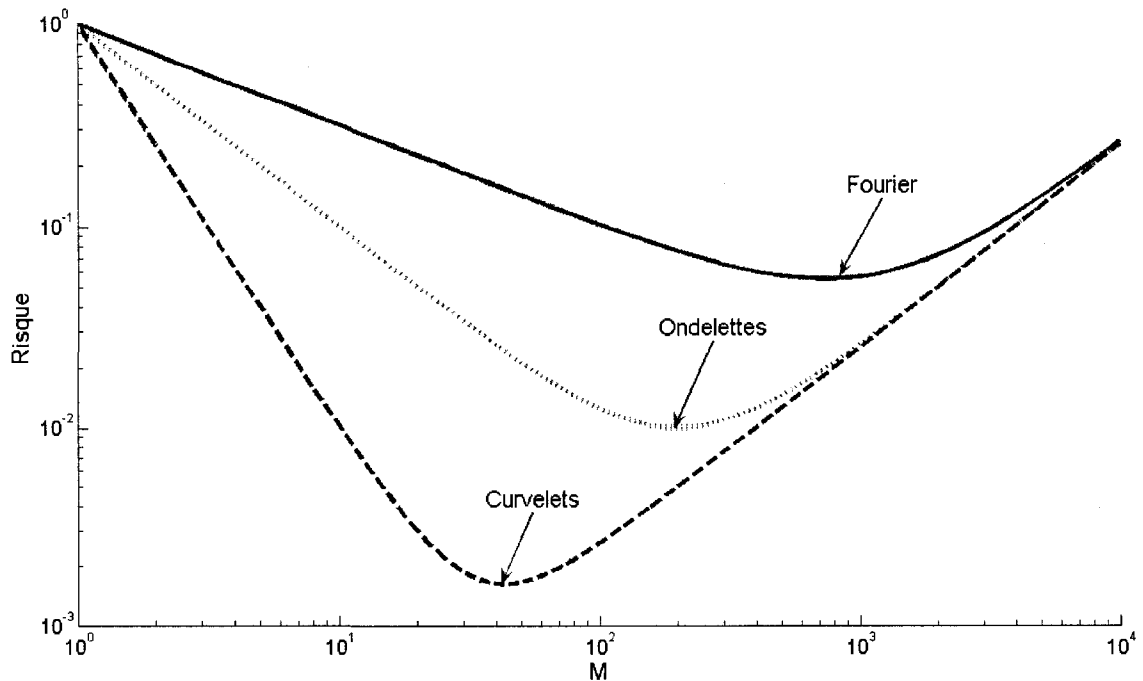


Figure 2.8 – Évolution du risque en fonction du choix de la base

d'angles nécessaire à une bonne reconstruction. Pour ce faire, on étudie de façon plus formelle le problème direct linéaire et son inversion.

### 2.3.1 Problème direct, problème inverse

La physique nous permet de faire des prédictions : à partir de la description complète d'un système, il est possible de déterminer quelles devraient être les mesures effectuées, du moins en physique classique. Prédire les sorties d'un système à partir des entrées définit le problème direct. Le problème inverse consiste donc à la déduction, à partir des sorties, i.e. des mesures, de certains paramètres du système physique ; les entrées[45].

Alors que le problème direct possède généralement une solution unique, le problème inverse en possède une infinité. Par exemple, dans un problème simple d'électromagnétisme, la mesure d'un champ électrique nul en un point peut être due à une absence de charge, mais aussi à la présence de deux charges de même signe.

Si l'on cherche à déterminer la disposition des charges à partir de cette mesure, il existe donc au moins deux solutions possibles. De plus, ces mesures ne sont jamais exactes : il existe toujours une incertitude sur celles-ci.

Plus formellement, on dispose de données mesurées  $y$  qui sont le résultat bruité par un processus  $e$  d'une opération  $K$  appliquée sur un vecteur recherché  $x$  :

$$y = Kx + e \quad (2.70)$$

Ici  $K$  est opérateur linéaire et peut donc être représenté par une matrice (éventuellement infinie). Le nombre de lignes de cet opérateur correspond au nombre de mesures effectuées. Puisque ce nombre est arbitraire, la matrice  $K$  est nécessairement rectangulaire et ne possède donc pas d'inverse. Il existe donc une infinité de vecteurs  $x$  différents permettant d'obtenir les mesures  $y$ .

On dit alors que le problème est mal posé, c'est-à-dire qu'il n'est pas un problème bien posé. Un problème bien posé, selon la définition d'Hadamard[46], est un problème inverse dont la solution existe, est unique et dont l'opérateur inverse est stable. La solution n'est pas unique donc le problème est mal posé. Dans le cas particulier d'une matrice carrée, il est possible que le problème soit mal conditionné, c'est-à-dire qu'il possède toutes les propriétés d'un problème bien posé mais qui devient instable parce que traité numériquement. Ceci apparaîtra dans le problème de convolution par un filtre passe-bande.

### 2.3.2 Maximum a posteriori

Puisque le bruit  $e$  provient d'un processus aléatoire  $E$ ,  $y$  lui-même provient d'une variable aléatoire  $Y$  et on peut réécrire l'équation 2.70 sous la forme

$$Y = Kx + E \quad (2.71)$$

Une première approche intéressante pour trouver une estimation de  $x$  satisfaisante est de maximiser la vraisemblance des paramètres  $x$  en considérant les mesures

$y$ . En d'autres termes, on cherche à maximiser la fonction de vraisemblance pour obtenir un estimateur de  $x$ <sup>5</sup>[48] :

$$\hat{x} = \arg \max_x L(x|y) = \arg \max_x p(Y = y|x) \quad (2.72)$$

Or, en faisant l'hypothèse que le bruit est gaussien, indépendant d'un pixel à l'autre et de même variance  $\sigma$  pour tous les pixels (i.i.d),

$$P(Y = y|x) = P(Kx + E = y|x) = P(y - Kx = E) \quad (2.73)$$

$$= \alpha e^{-\frac{(y-Kx)^T(y-Kx)}{2\sigma^2}} \quad (2.74)$$

En maximisant cette expression, on obtient :

$$\max_x \log(P(y|x)) = \max_x -(y - Kx)^2 \quad (2.75)$$

$$= \min_x \|y - Kx\|_2^2 \quad (2.76)$$

Ainsi, maximiser la vraisemblance sous l'hypothèse d'un bruit gaussien revient à effectuer une opération de moindres carrés. Pour ce faire, on note

$$\Delta(x) = \|Kx - y\|^2 \quad (2.77)$$

La minimisation de cette fonctionnelle peut se faire en annulant le gradient de  $\Delta(x)$ . Ce gradient se calcule à l'aide de la différentielle au sens de Gâteaux<sup>6</sup> définie pour une fonction  $F(x)$  de  $V$  (un espace vectoriel normé) dans  $R$  de la façon suivante[49] :

$$\frac{d}{d\lambda} F(x + \lambda h)|_{\lambda=0} = DF(x).h \quad (2.78)$$

où  $\lambda \in R$  et  $h \in V$ . Le gradient  $\nabla F(x)$  est alors défini comme

$$DF(x).h = \langle \nabla F(x), h \rangle \quad (2.79)$$

---

<sup>5</sup>Notons que cette approche est équivalente à minimiser un risque Bayésien uniforme[47].

<sup>6</sup>La différentielle au sens de Gâteaux est une forme plus faible de différentielle utile pour les applications car elle ramène au calcul de la dérivée d'une fonction d'une variable. Une fonction différentiable au sens de Fréchet est différentiable au sens de Gâteaux mais l'inverse n'est pas toujours vrai. Dans le cas qui nous intéresse, elles sont équivalentes.

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire. Puisqu'une norme est convexe, le minimum est unique et donné par  $\nabla F(x) = 0$ . Calculons à présent ce gradient. On peut réécrire  $\Delta(x)$  de la façon suivante :

$$\Delta(x) = \|Kx - y\|^2 \quad (2.80)$$

$$= \langle Kx, Kx \rangle - 2 \langle Kx, y \rangle + \langle y, y \rangle \quad (2.81)$$

En appliquant l'opération 2.78, on obtiendra la dérivée d'un polynôme en  $\lambda$ . Ainsi, les termes constants par rapport à  $x$  dans  $\Delta(x)$  disparaîtront, les termes constants du polynôme aussi et parce que l'on prend la dérivée en  $\lambda = 0$ , les termes non linéaires disparaîtront également. On obtient donc

$$D\Delta(x).h = \frac{d}{d\lambda} \Delta(x + \lambda h)|_{\lambda=0} \quad (2.82)$$

$$= \frac{d}{d\lambda} (\langle K(x + \lambda h), K(x + \lambda h) \rangle - 2 \langle K(x + \lambda h), y \rangle)|_{\lambda=0} \quad (2.83)$$

$$= \frac{d}{d\lambda} (2\lambda \langle Kx, Kh \rangle - 2\lambda \langle Kh, y \rangle)|_{\lambda=0} \quad (2.84)$$

$$= \frac{d}{d\lambda} (2\lambda \langle K^*Kx, h \rangle - 2\lambda \langle K^*y, h \rangle)|_{\lambda=0} \quad (2.85)$$

$$= \langle 2K^*Kx - 2K^*y, h \rangle = \langle \nabla[\Delta(x)], h \rangle \quad (2.86)$$

Ainsi,  $\hat{x}$  minimisant la fonctionnelle 2.77 est donné par

$$\hat{x} = (K^*K)^{-1}K^*y \quad (2.87)$$

$\hat{x}$  est appelé pseudo-solution et  $(K^*K)^{-1}K^*$  pseudo-inverse. Malheureusement, il est fréquent d'avoir un opérateur pseudo-inverse mal posé, c'est-à-dire qu'il est non-borné, ou dans le cas qui nous intéresse, mal conditionné, c'est-à-dire qu'il a une très grande norme. Dans les réels, cela correspond à une division par zéro ou numériquement par une division instable. Or, en imagerie,  $x$  est nécessairement d'énergie finie puisqu'il s'agit d'un phénomène physique ; il faudra donc remplacer l'opérateur pseudo-inverse par une approximation qui, elle, sera bornée pour le cas mal posé et à norme réduite pour le cas mal conditionné.

Ainsi, on ajoute une contrainte, par exemple que l'énergie de  $x$  est finie (ou bornée). On propose alors une fonctionnelle de la forme :

$$\Delta(x) + \mu \|x\|^2 \quad (2.88)$$

où  $\mu$  mesurera l'importance que l'on veut donner à cette contrainte additionnelle. On peut aussi obtenir une explication bayésienne : si on suppose que  $x$  provient d'un processus gaussien et que l'on pondère la fonction de vraisemblance par la probabilité d'obtenir  $X = x$  on obtient une fonctionnelle équivalente[50]. La nouvelle pseudo-solution est obtenue d'une manière similaire à la précédente et s'écrit maintenant

$$\hat{x} = (K^*K + \mu I)^{-1} K^*y \quad (2.89)$$

L'inversion est dite régularisée.

### 2.3.3 Décomposition en valeurs singulières

Lorsque l'opérateur  $K^*K$  est compact, on peut en faire une décomposition en valeurs singulières

$$Kx = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \langle x, v_k \rangle u_k$$

où les  $v_k$  et les  $u_k$  sont respectivement les vecteurs propres de  $K^*K$  et  $KK^*$  et les  $\sigma_k^2$  sont les valeurs propres. On obtient par la suite un ensemble de problèmes unidimensionnels à résoudre de la forme

$$\hat{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k}{\sigma_k^2 + \mu} \langle y, u_k \rangle v_k \quad (2.90)$$

On parle alors de régularisation Tikhonov. En déconvolution, puisque la base diagonalisant l'opérateur est celle de Fourier, on utilise plutôt l'expression filtre de Wiener.

Malheureusement, cette approche n'est toujours pas optimale. Comme le montre justement l'exemple de la déconvolution. Supposons que l'on dispose d'une fonction

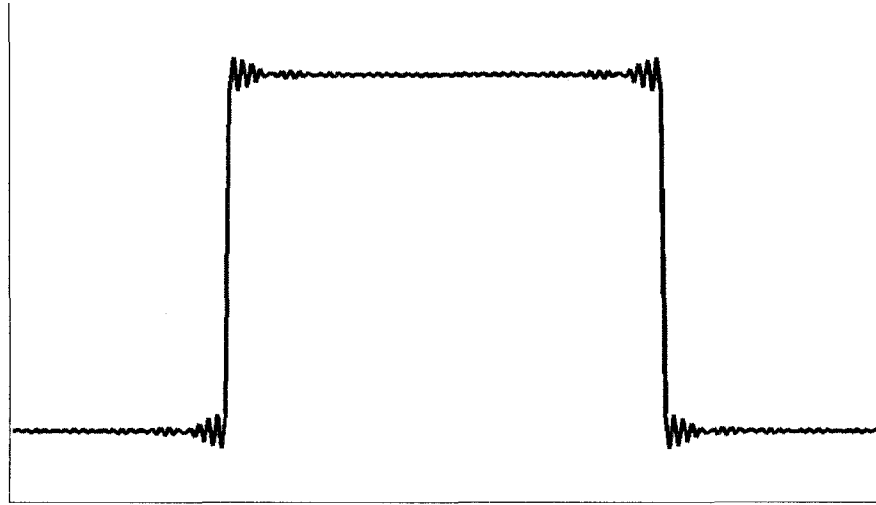


Figure 2.9 – Apparition des oscillations de Gibbs lorsqu’un petit nombre de vecteur de la base de Fourier sont retirés.

continue par morceaux représentative d’une image naturelle et que l’on tente de la déconvoluer avec le filtre de Tikhonov. Le terme  $\frac{\sigma_k}{\sigma_k^2 + \mu}$  de l’équation 5.12 peut être approximé par un seuillage et puisque la base de Fourier diagonalise les opérateurs de convolution,  $\langle y, u_k \rangle v_k$  est la transformée de Fourier de  $y$ . Ainsi, on seuille la décomposition de Fourier d’un signal à débruiter, ce qui, comme montré précédemment, n’est pas efficace car la qualité d’approximation n’est que de  $M^{-\frac{1}{2}}$  et donc le risque est élevé. De plus, le niveau de seuillage n’est pas déterminé par les propriétés de  $x$  mais bien par les valeurs propres de l’opérateur  $K$ . Ainsi, on limite l’énergie de  $x$  en retirant des composantes de  $y$  dans une base adaptée à  $K$ . En particulier, on observe le phénomène des oscillations de Gibbs lorsqu’on effectue un tel seuillage sur une fonction *rect* comme montré à la figure 2.9. Cependant, contrairement au problème du débruitage, il n’est pas simple de changer cette base, car elle doit aussi être adaptée à la contrainte supplémentaire qu’est la bonne représentation de l’opérateur  $K$ . Il faudra donc trouver le compromis optimal entre

la décomposition de  $K$  et la décomposition de  $y$ .

### 2.3.4 Ondelettes-Vaguelettes

Une première approche, la décomposition en ondelettes-vaguelettes proposée en 1991 par Donoho[51] et généralisée par la suite pour les curvelets[52] permet d'obtenir un compromis optimal dans ce problème pour certains opérateurs. On remarque qu'en multipliant par  $v_k$  des deux côtés de l'expression 2.90, on obtient :

$$\langle \hat{x}, v_k \rangle = \frac{\sigma_k}{\sigma_k^2 + \mu} \langle y, u_k \rangle \quad (2.91)$$

$$= \frac{\sigma_k}{\sigma_k^2 + \mu} \langle Kx, u_k \rangle \quad (2.92)$$

$$= \frac{\sigma_k}{\sigma_k^2 + \mu} \langle x, K^*u_k \rangle \quad (2.93)$$

L'idée consiste à remplacer  $K^*u_k$  par un vecteur d'une base adaptée au signal, donc, par exemple, on pourrait prendre des vecteurs d'une base d'ondelettes ou de curvelets. Ainsi, comme il a été montré dans la section précédente, le débruitage serait optimal. Sous des conditions contraignantes sur l'opérateur, cela est possible. Cependant, ces conditions nous limitent à certains opérateurs comme l'opérateur de convolution ou celui de la transformée de Radon. Par contre, son application à l'opérateur direct en photo-acoustique, qui sera décrit au prochain chapitre, est plus difficile. Toutefois, cette approche montre qu'il est possible d'améliorer, en intégrant des bases compressées, la résolution du problème inverse de la même façon qu'en débruitage. On propose donc de remplacer l'a priori qui stipule que l'énergie de la solution doit être finie par un a priori plus fort stipulant que la solution obtenue devrait être compressible dans une base donnée. Tel est le principe de base de l'échantillonnage compressé.

### 2.3.5 Normes $\ell_p$

L'équivalence entre la décomposition en valeurs singulières et l'approche bayésienne montre que parmi l'infinité de solutions possibles, celle minimisant l'énergie

de l'image n'est pas optimale car elle correspond à un débruitage par seuillage dans une base qui représente mal l'image à récupérer dans le cas général. De plus, minimiser l'énergie correspond à optimiser l'estimateur d'une image provenant d'une distribution gaussienne. Or, rien ne nous permet de faire cette hypothèse *a priori*.

Dans notre cas, une information *a priori* dont nous disposons est que l'image finale obtenue sera compressible dans une base multirésolution. parmi l'infinité de solutions possibles, s'il en existe une qui est composée de moins de coefficients, on fait l'hypothèse que cette solution est la meilleure approximation. D'abord, on définit la norme  $\ell_p$  pour un vecteur  $u = [u_1, \dots, u_i, \dots, u_N]$  :

$$\|u\|_{\ell_p} = \left( \sum_{i=1}^N |u_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.94)$$

Avec cette notation, choisir la solution la plus parcimonieuse correspond à solutionner le problème P0 :

$$\min \|\theta\|_{\ell_0} \quad \text{t.q.} \quad y = K\Phi\theta \quad (2.95)$$

où  $x = \Phi\theta$ ,  $\Phi$  étant une transformation multirésolution et où la norme  $\ell_0$  est simplement le nombre d'éléments. Cependant, il n'existe pas d'approche algorithmique efficace pour dans un temps raisonnable : il s'agit d'un problème NP-complet[12].

Donoho a démontré[53] que la solution du problème P1

$$\min \|\theta\|_{\ell_1} \quad \text{t.q.} \quad y = K\Phi\theta \quad (2.96)$$

était équivalente à la solution du problème P0 pour des problèmes à grande échelle comme celui que nous considérons. Dans le cas de calculs numériques, il est plus juste de réécrire P1 sous la forme

$$\min \|\theta\|_{\ell_1} \quad \text{t.q.} \quad \|y - K\Phi\theta\|_{\ell_2} < \epsilon \quad (2.97)$$

car il faut prendre en compte la bruit polluant les mesures. Ce bruit est toujours présent et ce même en simulations auquel cas il provient de la précision machine.

Il existe plusieurs méthodes pour arriver à trouver une solution à P1. Nous les présentons ici de manière succincte, mais elles seront reprises en détails dans les chapitres 4 et 5.

D'abord, il est possible d'approcher P1 à l'aide de programmation linéaire et du second ordre[54]. Ces méthodes utilisent le fait que les contraintes  $y = K\Phi\theta$  forment un polygone et que le minimum recherché se trouvera sur l'un des sommets de ce polygone. Une méthode bien connue est celle du simplexe qui cherche le sommet optimal par l'extérieur du polygone. Cependant, un type d'algorithme plus récent, dit de point intérieur, approche le problème de l'intérieur et est beaucoup plus efficace pour les problèmes à grande échelle que nous considérons[55]. Malgré cela, les algorithmes de programmation linéaire usuels impliquent des calculs lourds qui limitent la reconstruction d'images de haute résolution. Ils seront tout de même utilisés au chapitre 5.

En deuxième lieu, notons qu'avant que Donoho ne prouve la correspondance P0-P1, Daubechies et al. avaient proposé[11] une fonction auxiliaire qui permet minimiser la fonctionnelle  $P_p$  suivante

$$\|Kx - y\|_{\ell_2} + \mu\|\theta\|_{\ell_p} \quad (2.98)$$

par une série de seuillages où  $\mu$  est un scalaire<sup>7</sup>. Sous cette forme, on peut se ramener à une minimisation de la variation totale qui s'inscrit dans le cadre plus large de critères semi-quadratiques pour la restauration d'images[56] en choisissant adéquatement  $\Phi$ . Le raisonnement pour justifier que minimiser  $P_p$  avec  $p < 2$  permet d'améliorer la reconstruction est intéressant car intuitif : Si  $p = 2$ , on retrouve une minimisation de l'énergie par le théorème de Parseval-Plancherel. En diminuant  $p$ , on augmente la pénalisation sur les petits coefficients et on favorise les grands coefficients. Plus  $p$  se rapproche de 1, plus cet effet est important. Or,

---

<sup>7</sup>La méthode peut aussi être généralisée à un vecteur poids qui agit différemment sur chacun des coefficients de la base. Nous nous limiterons cependant au cas où  $\mu$  est un scalaire.

favoriser les grands coefficients correspond à favoriser la parcimonie de la solution obtenue.

Plus précisément, dans le cas  $p = 1$ , la solution  $x^n$  de

$$x_\gamma^n = \mathbf{S}_{\mathbf{w},1}(x_\gamma^{n-1} + [K^*(y - Kx^{n-1})]_\gamma) \quad (2.99)$$

où  $\mathbf{S}_{\mathbf{w},1}$  est un opérateur de soft-thresholding avec un seuillage établi à  $w/2$ , est solution de Pp.

Toujours dans le cas où  $p = 1$ , on peut montrer qu'il existe une relation entre  $\mu$  et  $\epsilon$  qui rend les problèmes Pp et P1 équivalents [57]. Il s'agit donc d'une deuxième approche possible pour solutionner P1.

Enfin, bien que ces deux dernières approches soient intéressantes, elles ne permettent pas de déterminer la valeur de  $\mu$  ou de  $\epsilon$  de façon optimale. Il est nécessaire, dans l'objectif de pouvoir fournir un algorithme de formation d'image facilement utilisable et robuste, de pouvoir les obtenir. Il faut aussi que l'inversion soit rapide. L'algorithme LASSO [57] remplit ces conditions.

Pour en comprendre les grandes lignes, analysons le comportement de la solution pour  $p = 1$  en fonction de  $\mu$  : Lorsque  $\mu$  est très grand, on trouvera la solution  $x_\mu = 0$  et plus  $\mu$  se rapprochera de zéro, plus  $x_\mu$  tendra vers la solution de 2.96 avec  $\epsilon = 0$ . On parle alors d'une trajectoire de solution[57] définie par l'ensemble  $\{x_\mu : \mu \in [0, \infty)\}$ , que l'on peut définir aussi pour  $\epsilon$ . Il existe une reparamétrisation  $q$  telle que  $\epsilon = q(\mu)$ . Ainsi, les deux problèmes suivent la même trajectoire. Osborne et al.[58] ont démontré, et c'est l'élément clé ici, que cette trajectoire est constante par morceaux. Ceci signifie qu'une variation de  $\mu$  n'implique pas nécessairement une variation de la solution  $x_\mu$ . Cette variation apparaîtra seulement pour un ensemble dénombrable de  $\mu$ , qui peut être associés aux sommets d'un polygone.

Il est donc possible de construire un algorithme qui, littéralement, sautera d'un sommet à l'autre comme le fait l'algorithme LASSO. En pratique, cela signifie, en partant d'un  $\mu_0$  suffisamment grand pour que  $x_{\mu_0}$  soit nul, que l'on ajoute

un coefficient de la base multirésolution à chaque itération. Ainsi, contrairement aux algorithmes de points intérieurs, cet algorithme profite du fait que l'image est compressible pour diminuer le temps de calcul. Cette approche est très efficace et permet de mener des calculs sur de bien plus gros problèmes.

En somme, nous disposons de trois algorithmes permettant de solutionner P1 : programmation linéaire ou du second ordre, fonction auxiliaire de Daubechies et al. et l'algorithme LASSO. Nous utiliserons au chapitre 4 la fonction auxiliaire de Daubechies et al. pour améliorer l'étape de déconvolution dans l'inversion du problème en photo-acoustique. Les deux autres méthodes seront utilisées pour l'inversion totale au chapitre 5.

### **Échantillonnage compressé**

Jusqu'à maintenant, presque tous les éléments du problème initial ont été optimisés. En effet, le choix de la norme  $\ell_2$  pour mesurer  $\|y - Kx\|$  est optimal car il est connu *a priori* que le bruit est gaussien. La contrainte sur la norme de  $x$  a elle aussi été optimisée par la correspondance entre les problèmes P0 et P1. Enfin, le choix de  $\mu$  a été étudié ce qui a mené à une approche ne nécessitant pas sa détermination. Un dernier paramètre reste à être optimisé :  $K$ .

Nous avons tenté de trouver la solution la plus plausible à un problème qui en admet une infinité. Or, une série d'articles récents[12, 13, 59–64] a montré que si  $K$  respectait une condition d'*incohérence* avec  $\Phi$ , que le nombre de mesures était suffisant et que la solution recherchée est compressible dans la base  $\Phi$  alors la solution trouvée en minimisant 2.95 sera la solution recherchée avec une très grande probabilité. C'est ce qu'on appelle l'échantillonnage compressé. Ce nom provient du fait que les mesures sont conçues dans l'objectif d'échantillonner non pas le temps ou la fréquence, mais bien un vecteur de la base  $\Phi$ .

Il est important ici de mettre en relief l'importance et la force de l'échantillonnage compressé. Sans ces conditions sur  $K$ , on imposait simplement un choix de

solution parmi l'infinité existante en choisissant arbitrairement un ou des a priori sur la solution. On supposait par la suite que ces a priori permettaient de rapprocher la solution choisie de la véritable solution, mais sans pouvoir le quantifier. Avec cette nouvelle approche, on est en mesure d'affirmer que le choix de l'a priori utilisant la norme  $\ell_1$  retrouvera l'unique véritable solution avec une très faible probabilité de se tromper.

La suite du mémoire se présentera donc comme suit : un chapitre présentera l'application des méthodes de débruitage suivi d'un autre présentant la déconvolution en utilisant une norme  $\ell_1$ . Le dernier chapitre contient un article soumis au journal IEEE Transactions on Medical Imaging qui explique comment il est possible d'obtenir un opérateur direct en imagerie photo-acoustique répondant aux critères de l'échantillonnage compressé. La théorie de l'échantillonnage compressé sera aussi décrite plus précisément. Il présentera de plus une application de la solution de P1 en utilisant une approche par programmation du second ordre et par l'algorithme LASSO.

## CHAPITRE 3

### DÉBRUITAGE

La théorie ayant été exposée, ce chapitre présente l'application des stratégies de débruitage élaborées dans le dernier chapitre. L'objectif ici est d'arriver à diminuer le nombre de moyennages des mesures de pression nécessaires pour obtenir une reconstruction satisfaisante. Comme expliqué au premier chapitre, un sinogramme typique obtenu en tomographie circulaire contiendra des courbes sinusoïdales associées aux contours des objets à imager et cela est dû au fait que l'effet photo-acoustique agit comme un filtre passe-haut sur les coefficients d'absorption. Les curvelets devraient être particulièrement bien adaptées à ce type d'image et ainsi fournir un débruitage plus efficace que les ondelettes bidimensionnelle. C'est ce qui sera vérifié en comparant la performance des ondelettes vis-à-vis des curvelets sur deux fantômes, présentés à la figure 3.1. Le premier fantôme contient deux niveaux de contraste différents ainsi qu'une structure en arbre qui nous permettra de voir la performance du débruitage à différentes échelles. Un soin particulier a aussi été apporté dans sa conception pour éviter de favoriser les coordonnées cartésiennes. Le second fantôme est le sinogramme associé au premier, qui s'approche donc grandement de la situation réelle à laquelle nous sommes confrontés.

Le niveau de bruit a été calculé à partir de l'estimateur de l'écart-type suivant :

$$\hat{\sigma} = \frac{MED\{\langle x, \phi_\gamma \rangle : \gamma \in I_H\}}{0,6745} \quad (3.1)$$

où  $I_H$  est l'ensemble des indices d'ondelettes à l'échelle la plus fine. On peut donc facilement déterminer le niveau de seuillage. Comme proposé dans [65], nous avons augmenté le niveau de seuillage pour l'échelle la plus fine dans un rapport de  $\frac{4}{3}$ . Une fois cette estimation obtenue, l'algorithme de débruitage est très simple :

1. Transformation de l'image en ondelettes

2. Évaluation de  $\hat{\sigma}$
3. Détermination du niveau de seuillage à partir de  $\hat{\sigma}$
4. Application du seuillage (hard ou soft)
5. Transformation inverse de l'image dans l'espace des ondelettes

Dans le cas d'une transformation en curvelets, on doit tenir compte du fait que cette transformation n'est pas orthonormale comme la transformée en ondelettes. En effet, la norme des curvelets dépend de l'échelle et de l'angle. Ainsi, il est nécessaire d'adapter le niveau de seuillage à ce contexte en déterminant un seuillage différent pour chaque angle et chaque échelle. Nous avons testé deux méthodes pour déterminer la norme des curvelets. La première consiste simplement à la transformation inverse d'un seul coefficient et de calculer la norme du résultat, et ce, pour tous les coefficients. Cette méthode est très précise mais est lourde numériquement. Une deuxième approche est de faire la transformation d'un delta de Dirac. En effet, on obtient dans ce cas :

$$TC\{\delta(x, y)\}(a, b, \theta) = \int \Psi_{a,b,\theta}^*(x, y) \delta(x, y) \mu(dxdy) \quad (3.2)$$

$$= \Psi_{(0,0)}^*(a, b, \theta) \quad (3.3)$$

En pratique, il est impossible de modéliser précisément une distribution de Dirac. En première approximation, nous avons effectué la transformée de Fourier inverse d'une fonction en deux dimensions, constante et égale à un, ce qui modélise une telle distribution. En sommant sur tous les  $b$  à chaque échelle et à chaque angle, et en divisant par la cardinalité de  $b$ , on obtient une estimation adéquate de la norme. En comparant avec la première approche, on obtient des résultats très similaires mais en une fraction du temps. Quelques secondes sont suffisantes pour effectuer ce calcul. On peut par la suite pondérer le seuillage avec la norme obtenue et on obtient l'algorithme suivant pour le débruitage en curvelets :

1. Transformation de l'image en ondelettes

2. Évaluation de  $\hat{\sigma}$
3. Transformation de l'image en curvelets
4. Évaluation de la norme des curvelets
5. Détermination du niveau de seuillage à partir de  $\hat{\sigma}$  et de la norme des curvelets
6. Application du seuillage (hard ou soft)
7. Transformation inverse de l'image dans l'espace des curvelets

où on applique toujours le rapport de  $\frac{4}{3}$  dans le niveau de seuillage pour l'échelle la plus fine.

### 3.1 Métrique

Il faut désormais définir une métrique pour évaluer la qualité du débruitage obtenu. Nous avons fait le choix -arbitraire- du PSNR car il est largement utilisé dans la littérature. Il ne constitue qu'une mesure parmi d'autres dont la principale qualité est l'objectivité. Selon [66], le PSNR entre deux images  $A$  et  $B$  est défini par

$$PSNR(I) = 20 \log_{10} \left( \frac{b}{\sqrt{E\{(A - B)^2\}}} \right) \quad (3.4)$$

où  $E\{.\}$  est la valeur moyenne et où  $b$  est la valeur maximale de l'image. Typiquement, on normalisera l'image entre 0 et 1 ce qui implique  $b = 1$ .

### 3.2 Fantômes

La figure 3.1 montre les fantômes choisis pour tester les méthodes de débruitage explicitées ci-haut. Le premier est un fantôme présentant des arborescences, ce qui permettra de voir l'impact du débruitage pour différentes fréquences spatiales. Le second est un sinogramme obtenu en appliquant le problème direct en photo-acoustique sur le premier fantôme, ce qui se rapproche davantage des signaux réels

qui nous intéresserons plus loin. Les versions bruitées de ces sinogrammes correspondent à un PSNR situé entre 15 et 16dB.

La figure 3.2 montre un débruitage hard en ondelettes et en curvelets. On remarque la présence d'artefacts pour les deux bases. Cependant, lorsque le bruit augmente, les curvelets permettent un bien meilleur débruitage avec une différence de PSNR de l'ordre de 5dB. La figure 3.3 montre la même expérience mais réalisée sur le second fantôme. On remarque le même comportement pour les forts niveaux de bruit, c'est-à-dire une meilleure performance des curvelets. Par contre, on voit apparaître aussi davantage d'artefacts pour cette base.

La figure 3.4 montre un comparatif entre les méthodes hard et soft effectué sur le premier fantôme. On y remarque une meilleure performance, en terme de PSNR, pour le débruitage soft.

On remarque donc que les curvelets permettent toujours d'obtenir un débruitage de niveau équivalent ou supérieur à un débruitage en ondelettes, comme le prédisait la théorie. C'est cette constatation qui nous mènera à vouloir intégrer les curvelets dans le processus de reconstruction en imagerie photo-acoustique. La première application de cette stratégie sera faite pour la première étape de la reconstruction : la déconvolution du sinogramme.

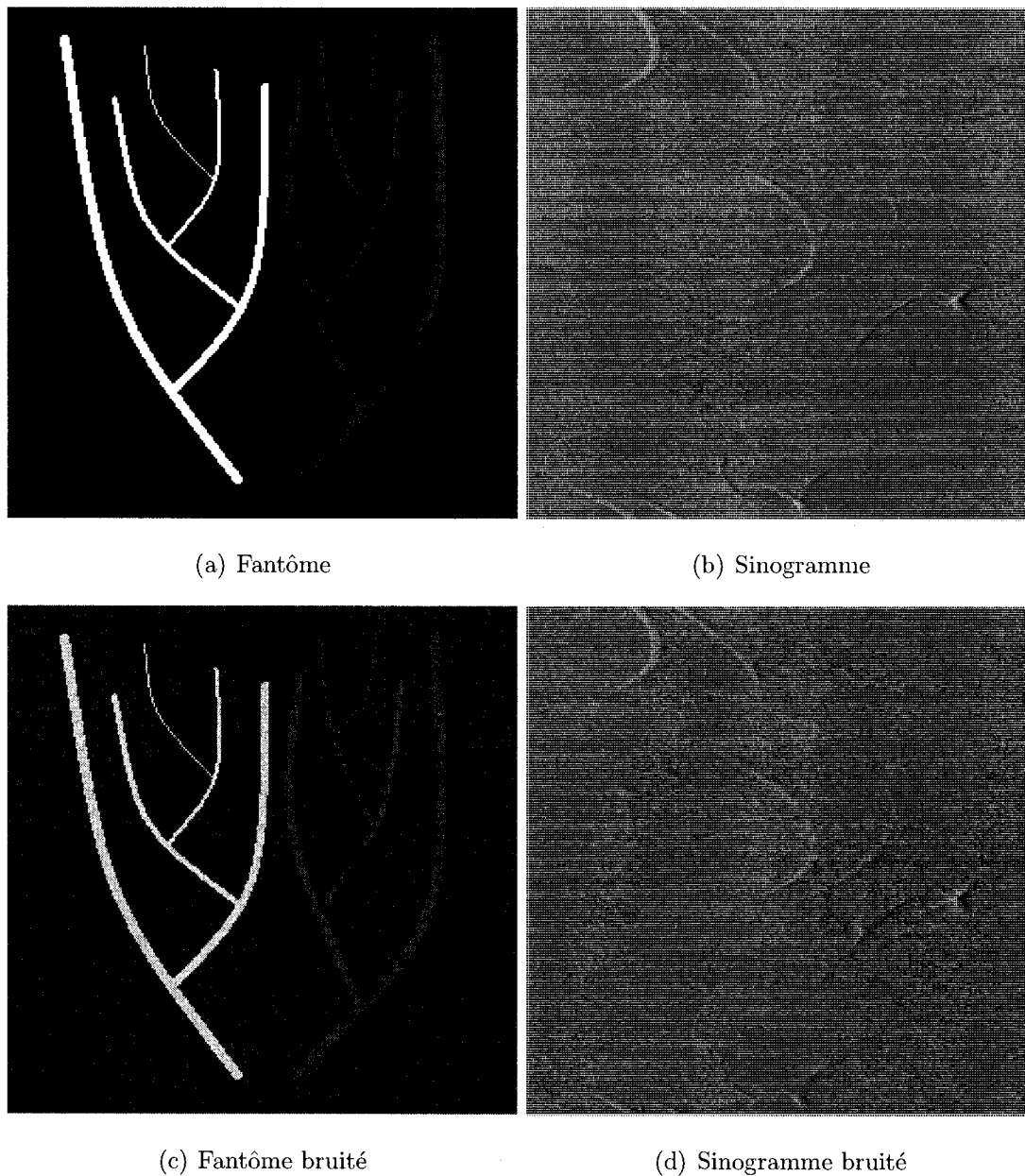
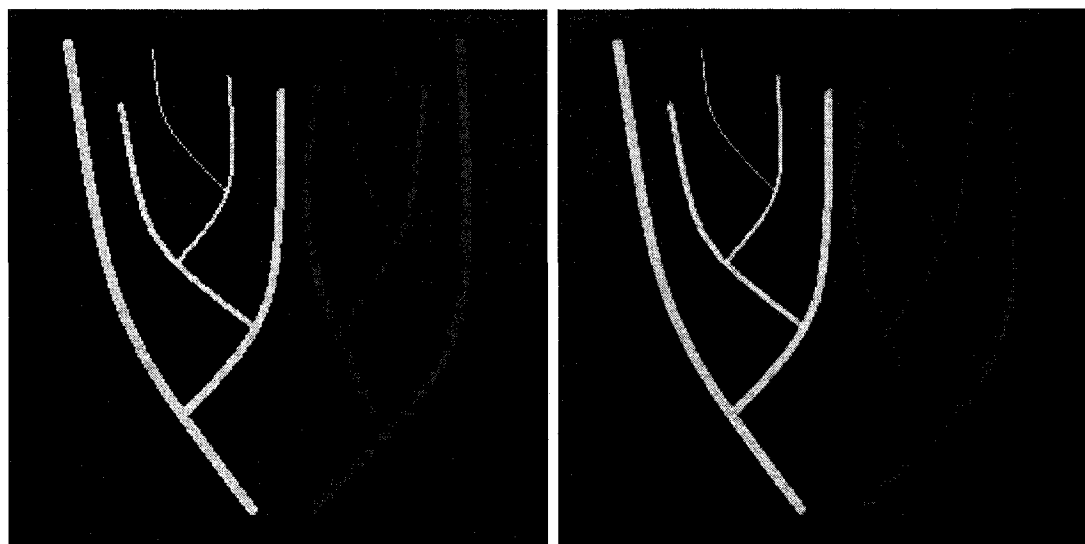
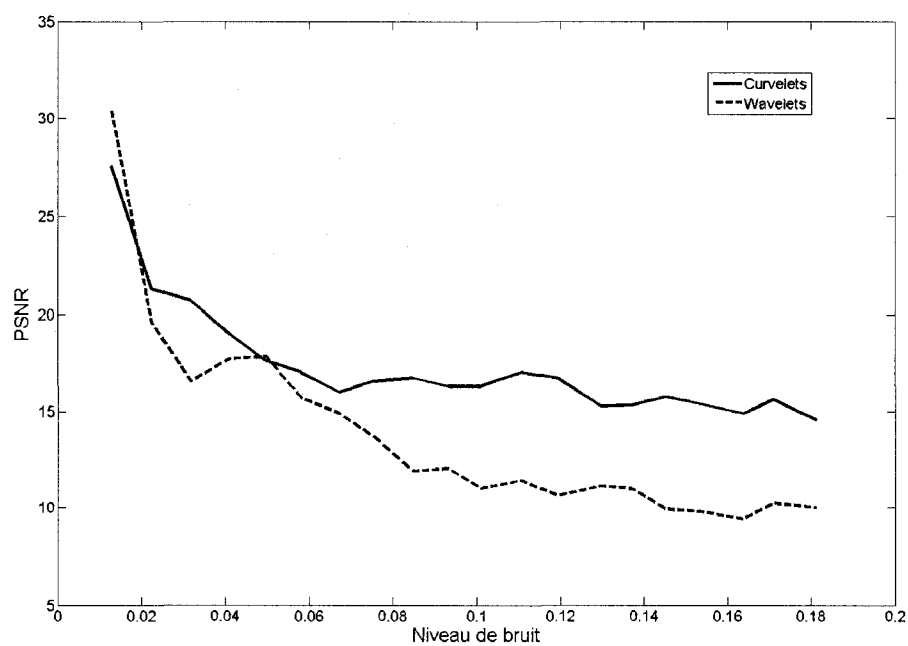


Figure 3.1 – Fantômes. (a) Fantôme permettant l'analyse du débruitage pour différentes échelles grâce aux différentes arborescences. Permet aussi l'analyse du comportement pour un faible contraste. (b) Sinogramme obtenu à partir du fantôme en (a). On remarque la présence de quelques instabilités numériques dues au calcul de la dérivée par rapport au temps. (c) Fantôme additionné d'un bruit blanc d'écart-type 0,05. (d) Sinogramme additionné d'un bruit blanc d'écart-type 0.05



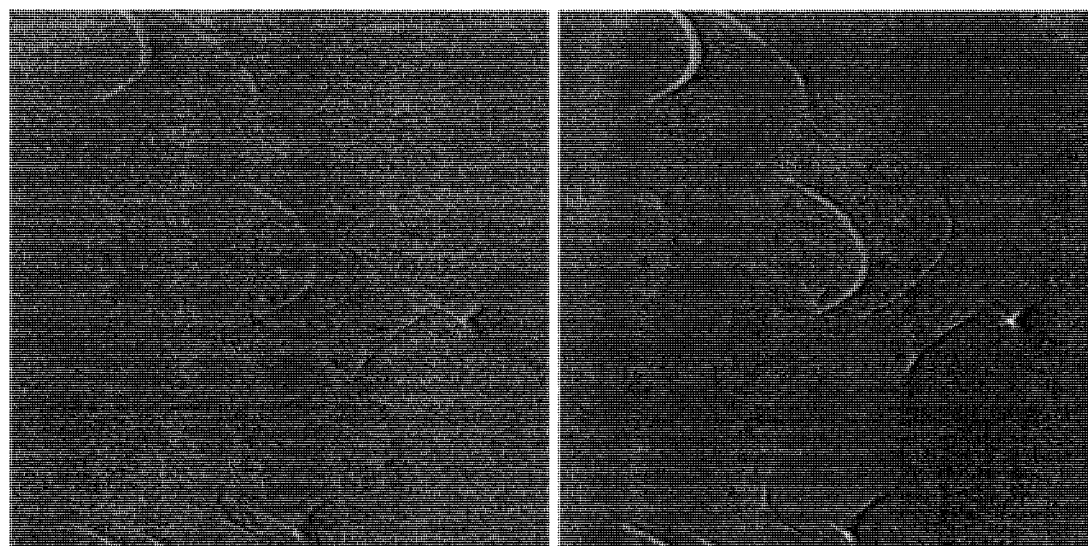
(a)

(b)



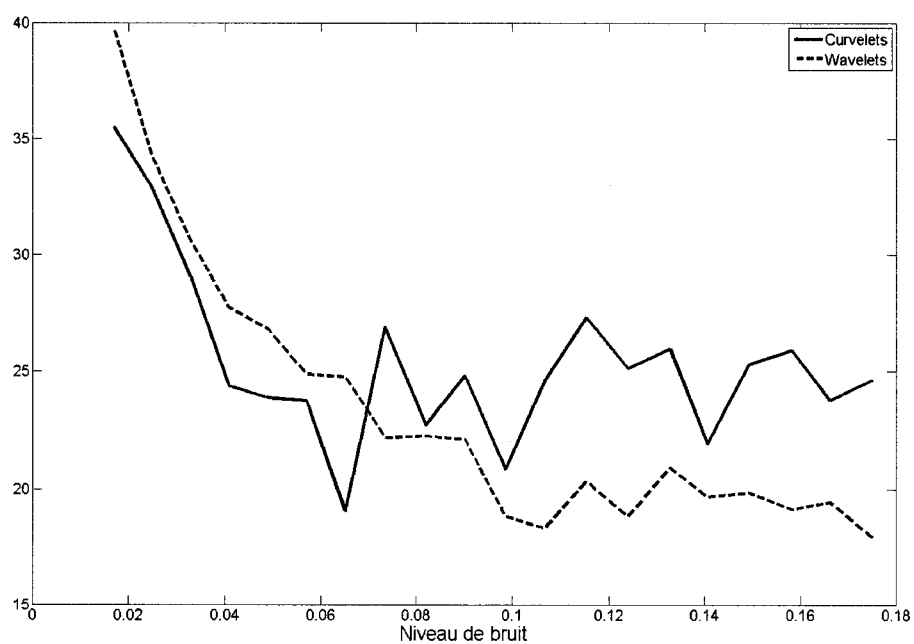
(c)

Figure 3.2 – Débruitage du fantôme par seuillage hard. (a) Utilisation de ondelettes. On remarque une difficulté à récupérer la partie de faible contraste et l'apparition d'artefacts dans l'arrière-plan. (b) Utilisation des curvelets. On remarque une meilleure récupération du fantôme en général, mais les artefacts d'arrière-plan semblent plus importants. (c) Évolution du PSNR obtenu après débruitage en ondelettes et en curvelets par seuillage hard pour différents niveaux de bruit.



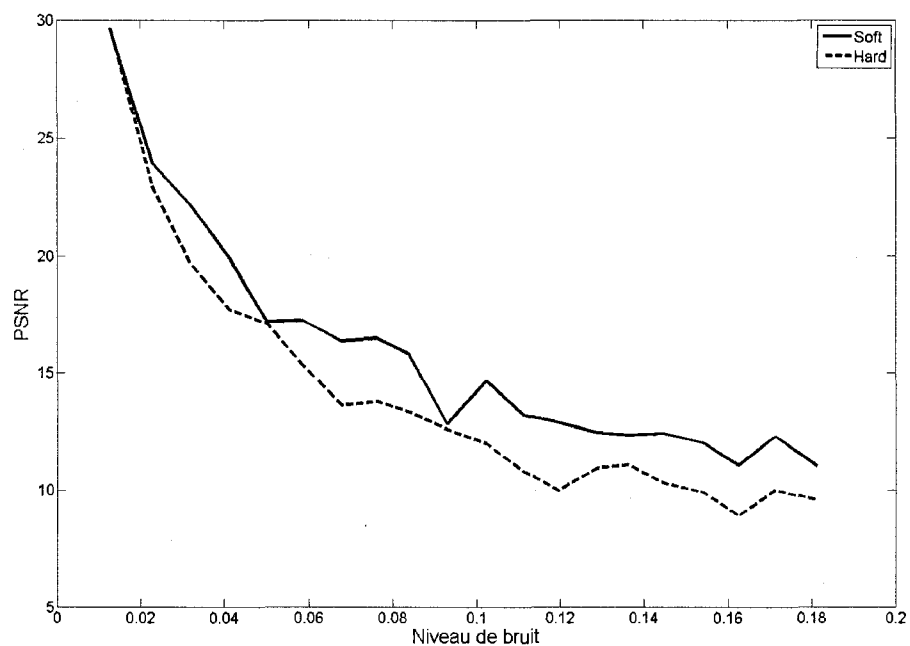
(a)

(b)

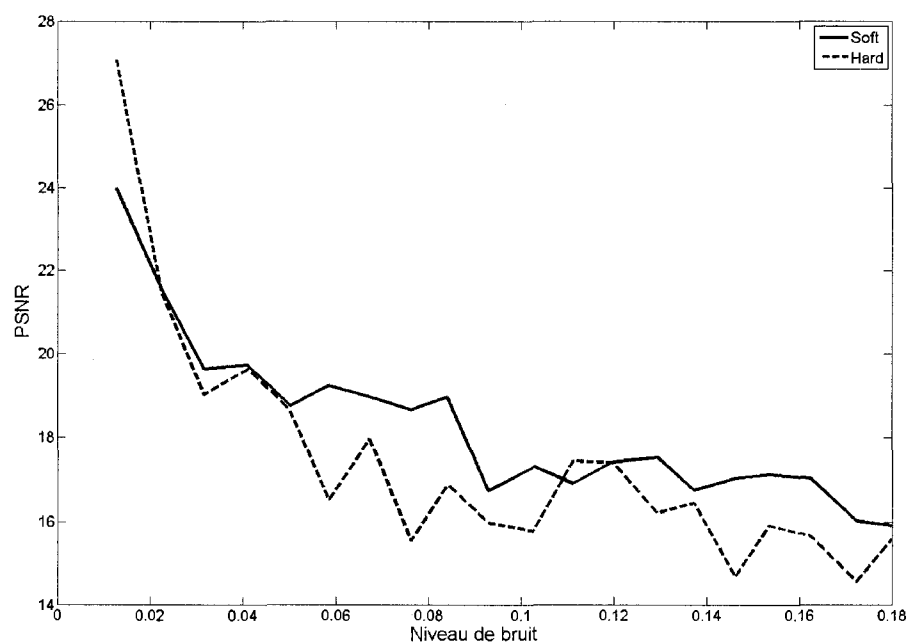


(c)

Figure 3.3 – Débruitage du sinogramme par débruitage hard. (a) Utilisation des ondelettes. (b) Utilisation des curvelets. On remarque une meilleure mise en évidence de certaines caractéristiques de l'image, mais aussi des artefacts importants dans l'arrière-plan. Dans le cas des ondelettes, ces artefacts sont inexistantes, mais le niveau de bruit restant est plus élevé. (c) Évolution du PSNR obtenu après débruitage en ondelettes et en curvelets par seuillage hard pour différents niveaux de bruit.



(a)



(b)

Figure 3.4 – Comparaison entre seuillages hard et soft. (a) Pour les ondelettes. (b) Pour les curvelets. On remarque un léger avantage pour le seuillage soft, et ce, de manière générale.

## CHAPITRE 4

### DÉCONVOLUTION

Le chapitre précédent a montré que l'utilisation des curvelets pour débruiter un sinogramme était efficace. Cependant, avant de pouvoir appliquer l'algorithme de rétro-projection, il faut d'abord tenir compte du fait que le transducteur a déformé le contenu fréquentiel du signal. En effet, il mesure plus efficacement les fréquences entourant sa fréquence centrale. Plus spécifiquement, on peut approximer cette réponse par une gaussienne centrée à la fréquence du transducteur. On a donc

$$s(f) = g(f)p(f) \quad (4.1)$$

où  $g(f)$  est la réponse du transducteur,  $p(f)$  est la pression recherchée et  $s(f)$  est le signal mesuré. On peut donc récupérer  $p(f)$  de la façon suivante :

$$p(f) = \frac{s(f)}{g(f)} \quad (4.2)$$

Cependant, en présence d'un bruit  $e$ , on exprime plutôt l'estimation de la pression par

$$\hat{p}(f) = \frac{s(f) + e(f)}{g(f)} \quad (4.3)$$

On remarque alors que pour une fréquence éloignée de la fréquence centrale,  $g(f)$  sera très petit et donc que l'erreur commise  $\frac{e(f)}{g(f)}$  qui est une division instable pourra être très grande de par le fait que  $e$  est aléatoire. On devra donc régulariser l'estimateur  $\hat{p}(f)$ . On remarque qu'il s'agit de l'inversion d'un problème direct et que toute la méthodologie développée au second chapitre est applicable. En considérant la totalité du sinogramme, on a

$$s = Gp + e \quad (4.4)$$

où  $G$  est l'opérateur de convolution,  $s$  est le sinogramme mesuré (donc convolué et bruité) et  $p$  est le sinogramme à récupérer.

Plus précisément, ce chapitre présente l'implémentation d'un algorithme permettant la minimisation d'une fonctionnelle comportant une norme  $\ell_1$  appliquée sur des coefficients de curvelets. En première partie, nous présenterons l'approche classique de la déconvolution, en utilisant un filtre de Tikhonov que nous optimiserons à l'aide d'une approche Lcurve.

Nous avons obtenu au chapitre 2 la solution (2.89) du problème de minimisation de la fonctionnelle :

$$\|y - Kx\|_{\ell_2} + \mu\|x\|_{\ell_2} \quad (4.5)$$

qui est appelée filtre de Tikhonov.

#### 4.1 Lcurve

Dans le but de comparer l'approche avec la norme  $\ell_1$  avec une normalisation  $\ell_2$ , il était nécessaire d'utiliser une version optimisée de cette dernière, c'est-à-dire de choisir de manière objective le paramètre  $\mu$  apparaissant dans la fonctionnelle à minimiser :

$$\|y - Kx\|_{\ell_2} + \mu\|x\|_{\ell_2} \quad (4.6)$$

Il existe diverses méthodes dans la littérature (UPRE, GCV, *Discrepancy principle*), toutes décrites dans [50]. Notre choix s'est cependant arrêté sur la méthode Lcurve, largement utilisée dans la littérature [67–69] car elle est simple à implémenter et ne demande pas de calculs lourds.

L'idée à la base de cette méthode est simple : lorsque  $\mu \rightarrow \infty$ , la solution  $x_\mu$  minimisera uniquement l'énergie de  $x$  et donc  $\|x_\mu\| \approx 0$ . À l'inverse, si  $\mu \rightarrow 0$ , puisque  $K$  est mal posé ou mal conditionné, la solution explosera, c'est-à-dire  $\|x_\mu\| \rightarrow \infty$ . Lorsque l'on trace le logarithme de l'énergie  $S(\mu) = \|x_\mu\|$  de la solution

en fonction du logarithme du résidu  $R(\mu) = \|Kx - y\|$ , on obtient une courbe en forme de L, d'où le nom Lcurve. Intuitivement, on postule donc que le  $\mu$  optimal est celui qui offre le meilleur compromis entre la limitation de l'énergie et la proximité de l'estimation à la solution, c'est-à-dire celui correspondant au coin du L.

Pour le déterminer, il suffit de maximiser la dérivée seconde de cette courbe, ce qui correspond à maximiser  $\kappa(\mu)$  défini par

$$\kappa(\mu) = \frac{X''(\mu)Y'(\mu) - X'(\mu)Y''(\mu)}{(X'(\mu)^2 + Y'(\mu)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.7)$$

où  $X(\mu) = \log R(\mu)$  et  $Y(\mu) = \log S(\mu)$ . Il apparaît utile, puisque les dérivées secondes sont instables numériquement, d'utiliser cette identité[70] :

$$R'(\mu) = -\mu S'(\mu) \quad (4.8)$$

pour réécrire  $\kappa$  sous la forme

$$\kappa(\mu) = -\frac{R(\mu)S(\mu)[\mu R(\mu) + \mu^2 S(\mu)] + \frac{R(\mu)^2 S(\mu)^2}{S'(\mu)}}{[R(\mu)^2 + \mu^2 S(\mu)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (4.9)$$

Cette méthode a été critiquée dans la littérature[70, 71] car elle ne converge pas toujours. Or dans [71], l'auteur suggère que cette non-convergence ne se produit que dans le cas où  $x$  est  $s$  fois différentiable au sens de Sobolev (voir équation 2.29) avec  $s$  grand. Dans notre cas, nous nous intéressons justement aux fonctions discontinues, donc qui ont un  $s$  inférieur à une demie. En effet, en déconvolution, le seuillage implicite effectué par la contrainte énergétique se fait sur une base de Fourier. Si  $s$  est grand, cette base représente efficacement la fonction à obtenir et il devient donc inutile d'utiliser une base multirésolution (voir chapitre 2.3).

## 4.2 Normes $\ell_1$

L'idée de cette approche est d'arriver à imposer une contrainte sur la parcimonie de la solution. On applique ici une norme  $\ell_1$ , qui, en comparaison avec un approche

$\ell_2$  favorisera les grands coefficients et pénalisera les petits. Cela est simplement dû au fait qu'une petite valeur au carré est plus faible qu'elle-même et qu'à l'inverse une grande valeur au carré est plus grande qu'elle-même. Ainsi, la norme  $\ell_2$  a tendance à pénaliser les grands coefficients qui, apparaissant plus gros dans la fonctionnelle, seront les premiers à être éliminés. La norme  $\ell_1$  ne provoque pas de telle distortion. Le problème direct que l'on veut inverser est le suivant :

$$s = Gp + e \quad (4.10)$$

où,  $s$  est le signal mesuré,  $G$  est un opérateur de convolution (filtre passe-bande dans notre cas)  $e$  est un bruit blanc gaussien et  $p$  est le véritable champ de pression que l'on voudrait récupérer. On peut décomposer le sinogramme  $p$  dans une base compressée et ici, on s'intéresse plus particulièrement aux curvelets  $\phi_\gamma$  :

$$p = \sum_{\gamma} p_{\gamma} \phi_{\gamma}, \quad (4.11)$$

Les curvelets sont particulièrement intéressantes car elles permettront de tirer profit de la structure bi-dimensionnelle du sinogramme pour effectuer une déconvolution unidimensionnelle.

On voudrait donc minimiser la fonctionnelle

$$\|s - Gp\|_{\ell_2} + \mu \|p_{\gamma}\|_{\ell_1} \quad (4.12)$$

Pour ce faire, on utilise l'algorithme itératif suivant proposé par Daubechies et al [11] qui converge vers la même solution que la minimisation de la fonctionnelle précédente.

$$p_{\gamma}^n = \mathbf{S}_{w,1}(p_{\gamma}^{n-1} + [K^*(s - Kp^{n-1})]_{\gamma}) \quad (4.13)$$

où  $\mathbf{S}_{w,1}$  est un opérateur de soft-thresholding :

$$\mathbf{S}_{w,1} = \begin{cases} x - \frac{w}{2} & \text{si } x \geq \frac{w}{2} \\ 0 & \text{si } |x| < \frac{w}{2} \\ x + \frac{w}{2} & \text{si } x \leq -\frac{w}{2} \end{cases} \quad (4.14)$$

Tableau 4.1 – PSNR obtenu pour différentes approches de déconvolution

|      | Tikhonov | Curvelets + Tikhonov | $\ell_1$ |
|------|----------|----------------------|----------|
| PSNR | 28.85    | 35.09                | 39.35    |

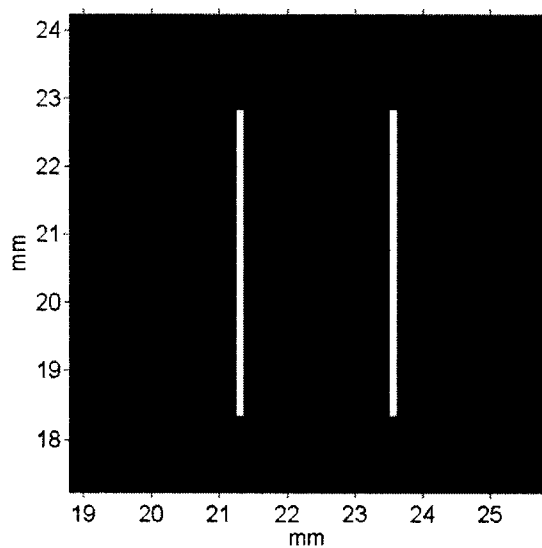
Nous avons implémenté cet algorithme et l'avons d'abord appliqué à des fantômes numériques. Nous avons modélisé le problème direct pour obtenir un sinogramme à partir d'une image. Ce sinogramme était par la suite convolué par une modélisation de la réponse à l'impulsion du transducteur et finalement ajouté d'un bruit blanc gaussien d'écart-type 0,05.

#### 4.2.1 Simulations

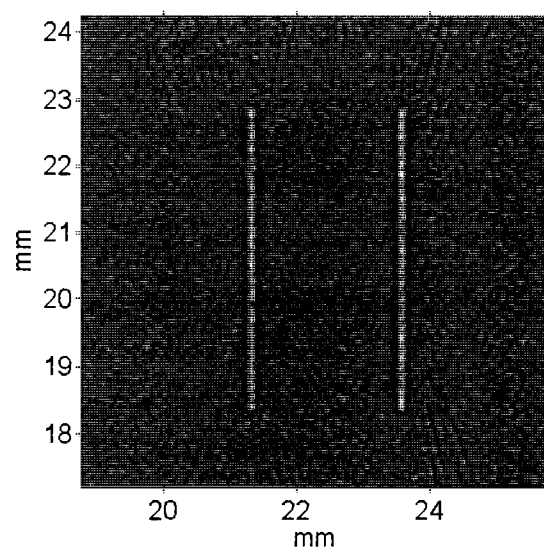
Nous avons simulé un fantôme numérique comportant deux inclusions linéaires de taille 25X10mm tel que montré à la figure 4.1(a). Nous avons comparé la déconvolution de Tikhonov à une déconvolution utilisant l'algorithme de Daubechies et al et enfin, pour éviter de percevoir une augmentation du PSNR uniquement à cause du débruitage en curvelets, l'avons comparé à un filtre de Tikhonov suivi d'un débruitage en curvelets par hard-thresholding.

Nous avons remarqué une hausse dans le PSNR calculé par rapport au sinogramme initial sans bruit et sans convolution. Les images montrées à la figure 4.1 représentent la reconstruction totale obtenue par rétroprojection. Les valeurs sont données dans le tableau 4.1.

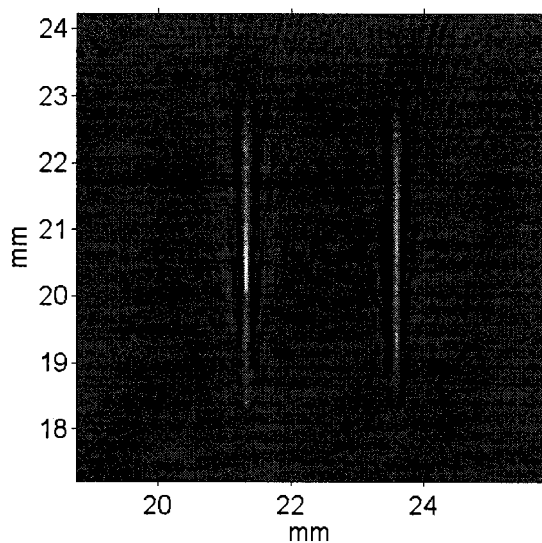
La figure 4.2 montrent une courbe du sinogramme simulé. On remarque trois phénomènes : la hauteur relative des deux pics, la largeurs de ces pics et le niveau de bruit. Alors que l'approche classique de Tikhonov montre de bons résultats pour les deux premiers critères, le niveau de bruit est élevé et le contraste du premier pic est faible. D'un autre côté, le débruitage en curvelets précédant une déconvolution Tikhonov donne un meilleur contraste mais les pics s'élargissent et leur hauteur relative n'est pas conservé. Enfin, l'approche de Daubechies et al. semble être un



(a) Fantôme initial



(b) Déconvolution Tikhonov



(c) Déconvolution Tikhonov appliquée à un signal débruité

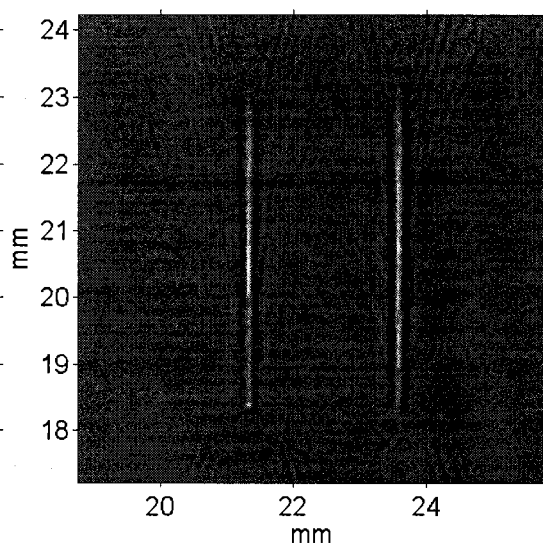
(d) Déconvolution  $\ell_1$ 

Figure 4.1 – Déconvolution d'un fantôme numérique suivant trois approches, reconstructions totales

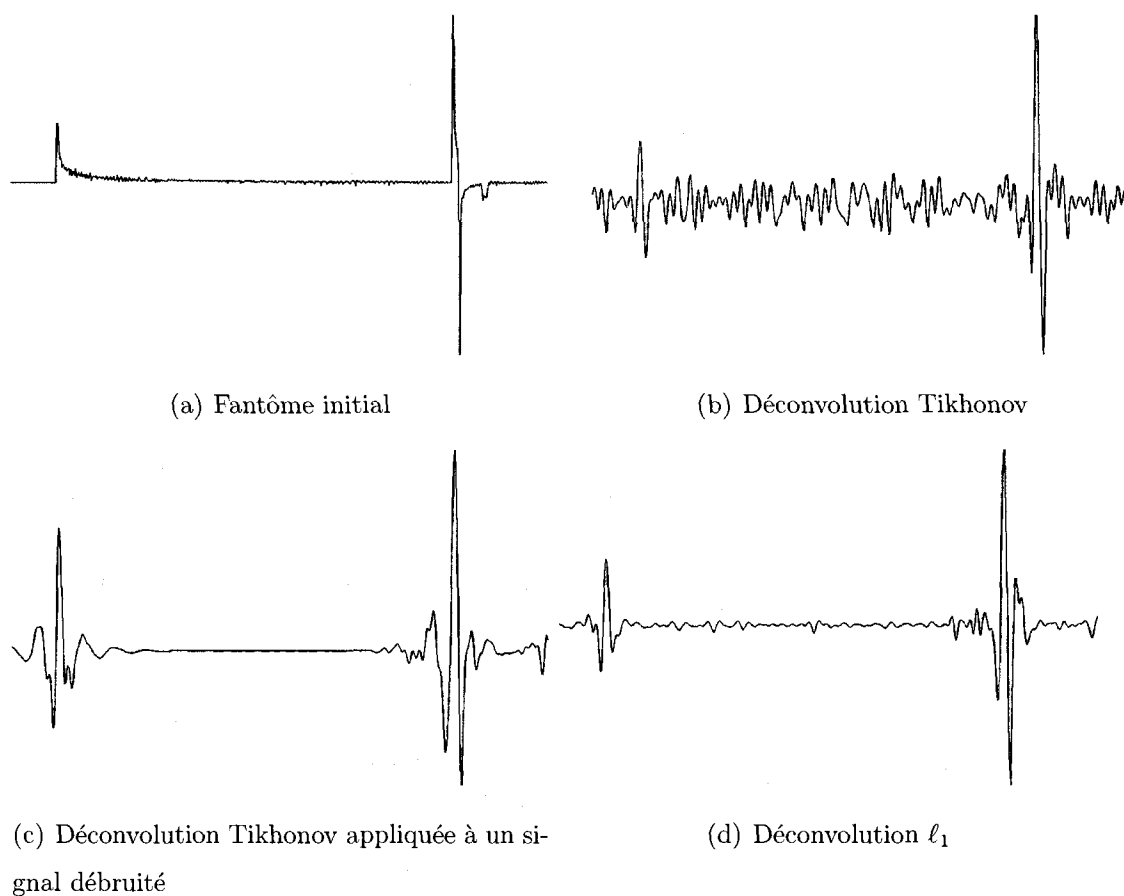


Figure 4.2 – Déconvolution d'un fantôme numérique suivant trois approches, sinogrammes

bon compromis : les pics sont étroits, leur hauteur relative est conservée et le niveau de bruit est faible.

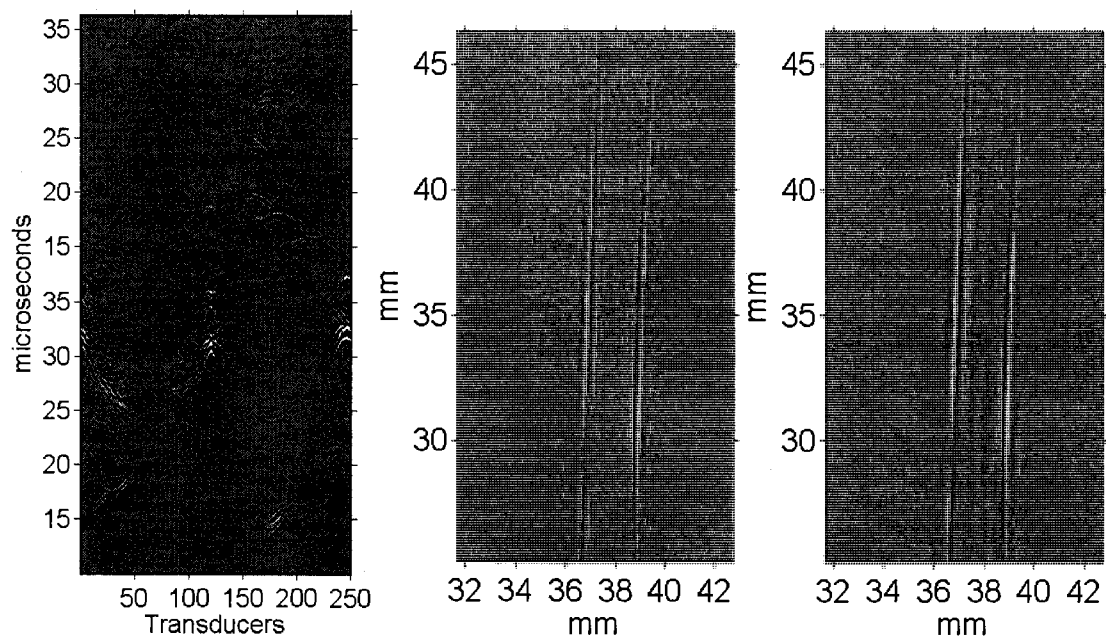
#### 4.2.2 Résultats expérimentaux

Pour valider cette approche, nous l'avons appliquée à un fantôme réel constitué de deux tubes de tygon de  $500\mu m$  contenant de l'encre et insérés dans une gélatine translucide. Les dimensions du fantôme correspondent à ce qui pourrait être observé *in vivo* pour le cerveau d'une souris.

Les résultats obtenus montrent (figure 4.3(d)) montrent des contours mieux définis et moins de bruit.

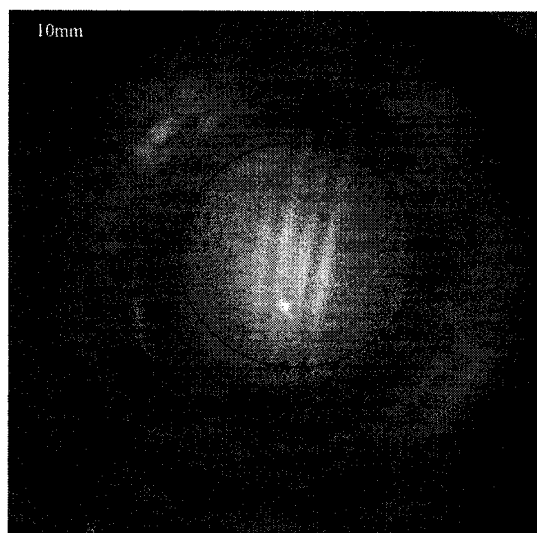
#### 4.2.3 Conclusion

Malgré le fait que cette approche soit prometteuse, elle a un désavantage important : le choix de  $\mu$  est très difficile à faire. En pratique, il est nécessaire d'avoir une approche de type *black box* pour que l'algorithme total de reconstruction soit facilement utilisé par un non-spécialiste. Une approche de type Lcurve pour une minimisation  $\ell_1$  pourrait être envisagée. Cependant, cela impliquerait de calculer la solution pour divers  $\mu$ , et étant donné le caractère itératif de l'algorithme, de plus longs calculs, qui ne convergent pas toujours selon la valeur de  $\mu$ . Il apparaîtra beaucoup plus efficace de considérer une approche globale intégrant les normes  $\ell_1$  à la fois pour la déconvolution et l'inversion du problème direct de la tomographie photo-acoustique présentée au chapitre suivant.



(a) Sinogramme

(b) Déconvolution Tikhonov

(c) Déconvolution  $\ell_1$ 

(d) Fantôme initial

Figure 4.3 – Déconvolution d'un fantôme réel suivant trois approches. Le cercle noir de (d) représente approximativement la région illuminée par le laser.

## CHAPITRE 5

### THE APPLICATION OF COMPRESSED SENSING FOR PHOTO-ACOUSTIC TOMOGRAPHY

L'article faisant l'objet de ce chapitre explique comment il est possible, en concevant l'opérateur direct  $K$  adéquatement, de faire appel à la théorie de l'échantillonnage compressé pour la tomographie circulaire en imagerie photo-acoustique. En utilisant une métrique définie dans [15], la TPSF, il sera possible de déterminer si l'opérateur direct associé à une base donnée est une 'CS-matrix', c'est-à-dire une matrice permettant l'application de l'échantillonnage compressé. Après avoir fixé l'opérateur direct dans sa formulation dans l'espace de Fourier, ce document compare différentes bases compressées possibles pour la reconstruction et conclut qu'une base d'ondelettes s'avère plus performante qu'une base en curvelets. Il se termine par une application de cette théorie sur des simulations et sur des données expérimentales provenant de fantômes.

## ABSTRACT

Photo-acoustic (PA) imaging has been developed for different purposes but recent years has seen the modality gain interest with applications to small animal imaging. As a technique it is sensitive to endogenous optical contrast present in tissues and, contrary to diffuse optical imaging, it promises to bring high resolution imaging for *in vivo* studies at mid-range depths (3mm-10mm). Because of the limited amount of radiation tissues can be exposed to, existing reconstruction algorithms for circular tomography require a great number of measurements and averaging, implying long acquisition times. Time-resolved photo-acoustic imaging is therefore possible only at the cost of complex and expensive electronics. This paper suggests a new reconstruction strategy using the compressed sensing formalism which states that a small number of linear projections of a compressible image contain enough information for reconstruction. By directly sampling the image to recover in a sparse representation, it is possible to dramatically reduce the number of measurements needed for a given quality of reconstruction.

### 5.1 Introduction

Photo-acoustic (PA) imaging has been developed for different purposes but recent years has seen the modality gain interest with applications to small animal imaging [4, 5]. As a technique it is sensitive to endogenous optical contrast present in tissues and, contrary to diffuse optical imaging, it promises to bring high resolution imaging for *in vivo* studies at mid-range depths (3mm-10mm). Gain in resolution originates from the acoustic detection whereby it is limited by transducer frequency. For example the vascularisation of a rat brain has been clearly imaged to high precision[4]. To this day, much work in the field is being done in instrumentation : techniques to accelerate the acquisition process and increase the resolution [31] are being explored as well as creating new applications. These results translate into

new opportunities for the modality : molecular imaging in small animals [2, 3] and human applications[6] are now becoming accessible.

PA imaging is being used for biomedical applications in three different configurations. Dark field photo-acoustic microscopy [31] uses focused ultrasound and illumination to image small portions of tissues. A backward-mode planar photoacoustic scanner using a transparent planar Fabry Perot polymer film ultrasound sensor allows fast measurements of 3D-volume [27]. In this paper we concentrate on circular tomography [1, 16, 72], where a transducer rotates around a target illuminated by a pulsed laser. Though our results are expected to translate, under some conditions, to other geometries.

In PA imaging, two issues emerge due to the limited amount of radiation one can use : for human studies light penetration in tissues is subject to strong attenuation and imaging large tissue portions leads to low signal to noise ratios (SNR). For molecular imaging the extinction coefficients of molecular compounds are on par with blood and to be able to make a distinction high SNR ratios are also required. In PA tomography, these problems can be addressed by averaging data and taking a large number of angles. This strategy leads to high resolution imaging but also to long acquisition times. Thus, it would be beneficial to obtain, as well, a good time resolution. For example, monitoring hemodynamic changes occurring over seconds in microvasculature are of great interest [32].

Reducing the total acquisition time is typically achieved by using an array of transducers that implies, however, complex and expensive electronics. In this paper, we propose to replace the back-projection algorithm typically used for circular PAT by a reconstruction paradigm based on the theory of compressed sensing(CS). By incorporating compression into the data acquisition process, images can be reconstructed from what appears to be highly incomplete data via nonlinear recovery algorithms based on convex optimization. Therefore, at the cost of longer calculations, the number of angles needed for a given image quality can be significantly

reduced. In combination with an array of transducers, this strategy opens the way to higher time resolution or, in combination with a single transducer, it becomes possible to produce an improved photo-acoustic imaging system at very low cost.

## 5.2 Photo-acoustic Imaging

The photo-acoustic phenomenon can be modelled with the following inhomogeneous wave equation[1]

$$\nabla^2 p(\vec{r}, t) - \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 p(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\frac{\beta}{C} \frac{\partial H(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (5.1)$$

where  $c$  is the sound velocity,  $p$  is the pressure,  $r$  is the position,  $t$  is the time,  $\beta$  is the isobaric volume expansion coefficient, and  $C$  is the heat capacity. The right hand side of the equation depends on the heat source  $H(r, t)$  that can be written as the product of a spatial absorption function  $A(r)$  and a temporal illumination function  $I(t)$  :

$$H(r, t) = A(r)I(t)$$

The objective here is to recover the light absorption coefficients  $A(r)$  from the pressure measurements  $p(r, t)$ . By using Green's functions,  $p(r, t)$  can be isolated, providing the forward problem :

$$p(\vec{r}, t) = \frac{\beta}{4\pi C} \int \frac{dr'}{|r - r'|} \frac{\partial H(r', t')}{\partial t'} \quad (5.2)$$

where  $t' = t - \frac{|r-r'|}{c}$ .

## 5.3 Analytical Inversion

Analytical inversions of (5.2) have been proposed in the literature in various geometries. For instance, an exact solution using back-projections that can be generalized to any geometry has been developed by Xu and Wang [19]. In particular, by considering a spherical geometry, it is possible to derive an exact 2D solution

by back-projecting measurements made over a circle. By considering a far-field approximation, the final solution proposed by [73] takes the form

$$A(r) \propto \int d\theta \frac{1}{t} \frac{\partial p(r_0, t)}{\partial t} \quad (5.3)$$

where  $r_0$  is the radius of the trajectory of the ultrasound transducer. Equation (5.3) can be rewritten in a more compact notation :

$$x = K_{bp}^{-1}(y) \quad (5.4)$$

where  $y = p(r, t)$ ,  $x = A(r)$ , and

$$K_{bp}^{-1}(\cdot) = \int d\theta \frac{1}{t} \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} \quad (5.5)$$

In the experiments, the received PA signals for each measurement are convolved by both the transducer impulse response and the laser pulse. The signal  $s(t)$  perceived by the transducer is thus :

$$s(t) = p \circ G \circ L \quad (5.6)$$

where  $G$  and  $L$  represent the convolution of the pressure signal with the transducer impulse response and the laser pulse respectively. If we assume the laser pulse is short (which is the case here, 10-20 ns), the PA signal can be rewritten

$$s(t) = p \circ G \quad (5.7)$$

The far-field approximation reconstruction algorithm amounts to two steps : first deconvolve the signal and then apply (5.3).

Since the transducer is band-limited, only a small part of the spectrum is measured and the first step is ill-conditioned, meaning that there is not enough information to perfectly recover the pressure signal.

Moreover, in practice, one must approximate the second step inverse operator  $K_{bp}^{-1}$  by sampling it. In other words, since both  $x$  and  $y$  have finite resolution,  $K_{bp}^{-1}$

lines and columns are chosen among an infinite number of possibilities. Suppose that one measurement  $y_j$  is not made. This back-projection algorithm will simply not reproject it ; in other words, it approximates the unknown  $y_j$  by zero. Assuming  $y_j = 0$  implies  $A(r) = 0$  which is obviously not true.

It is possible to better approximate these missing  $y_j$ 's - or, in other words, obtain a better estimate of  $x$  - by using the *a priori* knowledge we have over  $A(r)$ . The compressed sensing scheme incorporates the fact that  $A(r)$  is compressible in some basis to reduce the number of  $y_j$  needed for a given image quality.

#### 5.4 Pseudo-Solution

This section presents the classical approach to linear inverse problem and will justify the introduction of compressed sensing. Consider  $K$  being the total forward operator, including both convolution and tomography :

$$y = Kx \quad (5.8)$$

Since inverting this problem is ill-posed, constraints must be put over  $x$  in order to choose one solution among an infinite number of possibilities. A typical way to address this problem is to choose, among solutions explaining  $y$  in a range  $\epsilon$ , the one that has the smallest energy :

$$\min \|x\|_{\ell_2} \quad \text{s.t.} \quad \|y - Kx\|_{\ell_2} < \epsilon \quad (5.9)$$

There exists a mapping between  $\epsilon$  and  $\mu$  such that the minimization of the functional

$$\|Kx - y\|_{\ell_2} + \mu\|x\|_{\ell_2} \quad (5.10)$$

is equivalent. The minimum of this functional is unique and is called the Tikhonov-regularized pseudo-solution

$$\hat{x}_\mu = (KK^* + \mu I)^{-1}K^*y \quad (5.11)$$

The pseudo-solution however blurs the separation between two objects. To show this, let us consider the first step of the inversion alone, which is, to deconvolve the signal perceived by the transducer. The problem is therefore to recover the pressure  $p$  from the signal  $s$  convolved by the transducer response  $G : s = Gp$ . By using the SVD decomposition of  $G$  :

$$Gx = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \langle x, v_k \rangle u_k$$

where the  $v_k$ 's and  $u_k$ 's are the eigenvectors of  $G^*G$  and  $GG^*$  respectively and the  $\sigma_k^2$ 's are the eigenvalues, (5.11) can be rewritten [50] :

$$\hat{p}_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k} \frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2 + \mu} \langle s, u_k \rangle v_k \quad (5.12)$$

To better understand the implications of this equation, let  $\mathbf{H}_{\mu,\sigma}(x)$  define the hard-thresholding operator that approximates  $\frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2 + \mu} x$  :

$$\mathbf{H}_{\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} x & \text{if } \sigma_k^2 \geq \mu \\ 0 & \text{if } \sigma_k^2 < \mu \end{cases} \quad (5.13)$$

This, in fact, means limiting the energy of  $p$  is equivalent to remove components of  $s$  in the eigenbasis of  $GG^*$  when associated eigenvalues are small. In the case of the deconvolution operator, this eigenbasis is the Fourier basis. Since the latter is smooth, for  $\mu > 0$ , the estimate  $\hat{p}_\mu$  will be a smoothed version of  $p$ , without sharp features[11]. In PA imaging, since the forward operator acts as a high-pass filter due to the derivative with respect to  $t'$ , it is known beforehand that we want to recover sharp features of  $p$ .

It appears that working directly on the  $\ell_2$ -norm of  $x$  is sub-optimal when  $x$  contains discontinuities. Such a minimization removes components of  $y$  based on the properties of  $K$  in order to limit the energy of  $x$ . Instead, many publications [11, 51, 74] suggested to recover  $x$  by constraining the  $\ell_1$ -norm of the coefficients of  $x$  expressed in a basis *sparingly* representing it in order to keep track of these discontinuities.

### 5.5 Sparse Representations of Images

A sparse representation of an image can be built by using a priori knowledge regarding the structure of the image in order to define an adapted basis and then to compress the information contained in the image  $I$  in a few essential coefficients  $\langle I, \phi_\gamma \rangle$  :

$$I = \sum_{\gamma} \langle I, \phi_\gamma \rangle \phi_\gamma, \quad (5.14)$$

Examples of such sparse bases are numerous : smooth images are sparse in the Fourier basis, piecewise smooth images are sparse in a wavelets basis, and images with discontinuities along  $C^2$  edges are sparse in a curvelets basis. The curvelets basis is a multiresolution basis akin to wavelets. While a wavelet is defined by a scale and a position, a curvelet is defined by a scale, a position and an angle, leading to an almost optimal representation of images containing edges[7]. To quantify the performance of a basis one can define an approximation error

$$\epsilon_M = \|I - \sum_{\gamma=1}^M \langle I, \phi_\gamma \rangle \phi_\gamma\|_{\ell_2} \quad (5.15)$$

where  $\langle I, \phi_{\gamma-1} \rangle > \langle I, \phi_\gamma \rangle$ . It can be shown [7, 34] that for an image containing discontinuities the approximation error for the Fourier, wavelets and curvelets basis are given by :

$$\epsilon_M \sim \begin{cases} O(M^{-1/2}) & \text{Fourier} \\ O(M^{-1}) & \text{Wavelets} \\ O(M^{-2}) & \text{Curvelets} \end{cases} \quad (5.16)$$

The faster the decay, the sparser the representation is.

There is a distinction between sparse and compressible signals : the former is a representation where most of the coefficients are equal to zero while the latter is a representation where the coefficients decay rapidly but not to zero. However, we will interchangeably use the terms sparse and compressible in this paper since they behave similarly in the compressed sensing formalism.

Thus, constraining the  $\ell_1$ -norm of the coefficients of  $x$  in a basis *sparsely* representing still limits the energy of  $x$  but preserves important features appearing as large coefficients in that basis : consider a basis respecting the Parseval-Plancherel theorem such that minimizing the  $\ell_2$ -norm in that basis is equivalent to minimizing the  $\ell_2$ -norm of  $x$  directly. By diminishing the exponent from two to one, large coefficients contribute less to the functional while small coefficients contribute more. In other words, penalization on large coefficients is decreased while penalization on small ones is increased. This approach has shown interesting results but it is possible to go further. By designing adequately the operator  $K$ , not only will we obtain an enhanced estimate of  $x$  but will recover  $x$  exactly.

## 5.6 Compressed Sensing

The iconic application of sparse representations is compression : we sample a signal and then compress it in order to store or transmit the information. The idea behind compressed sensing is to reverse the process : in order to reduce the number of measurements and therefore acquisition time, we would like to directly sample the few essential coefficients containing the information. By non-linearly finding structure throughout incoherent measurements, CS performs as if it were possible to directly acquire just the important information about the image to reconstruct.

### 5.6.1 Theory

Mathematically, the image  $x$  containing  $N$  pixels to be recovered is sparse in some functional basis  $\Phi : x = \Phi\theta$  where  $\theta$  is a vector containing the coefficients and  $\|\theta\|_{\ell_0} < N$ . The  $\ell_0$ -norm is simply the number of non-zero coefficients; hence, sparsity (and in this case, not compressibility) can be defined as  $\|\theta\|_{\ell_0} \ll N$ .

Formally, the CS theory tells us that if a signal to recover  $x$  of length  $N$  is sparse in a basis  $\Phi$ , i.e.  $y = \Phi\theta$  where  $\|\theta\|_{\ell_0} < N$ , then  $\theta$  is the solution to the  $\ell_0$

minimization

$$\min \|\theta\|_{\ell_0} \quad \text{s.t.} \quad y = K\Phi\theta \quad (5.17)$$

with overwhelming probability[59] if  $K\Phi$  is a CS-matrix. We consider at this point that our operator  $K\Phi$  fulfills the conditions to be a CS-matrix for which an exact definition will be provided in the next section. If  $\|\theta\|_{\ell_0} = M$ , one can remarkably show that only  $M + 1$  measurements are necessary to recover perfectly  $x$ [75].

However, this problem is combinatorial and therefore not applicable to medical imaging. It has been shown recently that the  $\ell_1$  minimization problem is equivalent[53]

$$\min \|\theta\|_{\ell_1} \quad \text{s.t.} \quad y = K\Phi\theta \quad (5.18)$$

and is easily tractable through linear or second-order programming, or with a matching pursuit-type algorithm[57]. However, the drawback of this approach is that  $3M$  to  $5M$ [62] measurements will be needed to recover  $x$ . In the presence of noise, we rewrite this minimization as

$$\min \|\theta\|_{\ell_1} \quad \text{s.t.} \quad \|y - K\Phi\theta\|_{\ell_2} < \epsilon \quad (5.19)$$

which is equivalent to replace the  $\ell_2$ -norm of  $x$  in (5.10) by the  $\ell_1$ -norm of coefficients of  $x$  in a sparse basis as suggested before :

$$\|Kx - y\|_{\ell_2} + \mu\|\theta\|_{\ell_1} \quad (5.20)$$

with the difference that this time, there is a supplementary condition on  $K$ . Thus, if we can find a basis  $\Phi$  that sparsely represents  $x$  and express  $K$  in such a way that  $K\Phi$  is a CS-matrix, not only the reconstruction of  $x$  will be enhanced, it will be possible to recover *exactly* the image  $x$  with a small number of measurements.

### 5.6.2 The photo-acoustic forward operator as a CS-matrix

In order to justify the use of the compressed sensing scheme for photo-acoustic tomography, the matrix  $K\Phi$  must be a CS-matrix. The forward operator (5.2) can

be rewritten in the Fourier domain :

$$\bar{p}(r, k) = -ickg(k) \int dr' A(r') \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} \quad (5.21)$$

where  $k = \frac{\omega}{c}$  and  $g(k)$  is the impulse response of the transducer that we suppose in a first approximation to be spatially invariant. More compactly,

$$y = Kx + e \quad (5.22)$$

where  $y$  is the sinogram,  $x$  is the absorption map,  $e$  is white noise, and  $K$  is the forward operator that we discretize

$$K_{(m,n)(i,j)} = -ick_n \frac{e^{ik_n|r_m-r_{ij}|}}{|r_m-r_{ij}|} g_n$$

where  $i$  and  $j$  indicate the cartesian coordinates,  $n$  indicates the frequency, and  $m$  indicates the position of the transducer.

In previous work[59], Candes et al. showed that when  $K$  is the operator that samples randomly the Fourier domain and  $\Phi$  is the total variation basis,  $K\Phi$  is a CS-matrix. In fact, they conducted numerical experiments with a particular random realisation of such an operator  $K$  : the star-shaped domain appearing in a Radon transform and have recovered complex images perfectly with only a small number of tomographic angles.

Since our operator samples the Fourier domain but with a different kernel and that it is similar to a Radon transform, it seems reasonable to expect that such an operator may fulfill the necessary conditions for the CS scheme to work. The matrix obtained from the product between the forward operator in the Fourier domain with a basis sparsely representing  $x$  will be a CS-matrix if there is a certain quantitative degree of linear independence among all small groups of columns and if linear combinations of small groups of columns give vectors that look much like random noise. A third condition must be met but we refer the reader to [13] for more details. A column is the measurement of one basis vector of  $\Phi$ . Therefore, columns being

linearly independent implies that two different basis vectors output two different sets of measurements. At the same time, linear combinations of columns being noise-like implies that one measurement of a basis vector is not correlated to the measurement of another basis vector. These two conditions will be verified using the point spread transform (TPSF) introduced in [15]. To account for the third one, numerical experiments are conducted in the next sections to heuristically show that a well behaved TPSF is a sufficient condition to obtain convergence.

The TPSF is defined as

$$TPSF(n; m) = \frac{\langle K\phi_n, K\phi_m \rangle}{\|K\phi_n\| \|K\phi_m\|} \quad (5.23)$$

We would like this TPSF to have the following properties for  $m \neq n$ . First,  $TPSF(m; n)$  should be much smaller than 1. This property characterizes the fact that two different basis vectors output different measurements. Secondly,  $TPSF(m; n)$  should be noise-like to characterize the fact that one measurement of a basis vector is not correlated to the measurement of another basis vector.

In summary, for a given forward operator  $K$ , the basis  $\Phi$  must have the three following properties :

1. For  $m \neq n$ ,  $TPSF\{K, \Phi\}(m; n)$  is noise-like
2. For  $m \neq n$ ,  $TPSF\{K, \Phi\}(m; n) \ll 1$
3.  $\epsilon_M\{\Phi\}$  is rapidly decaying

Now that the operator  $K$  has been redefined in the Fourier space, we simply have to compare the TPSF associated with generic bases. We propose four of them : curvelets, wavelets, numerical derivative (ND), and Fourier. Note that minimizing the  $\ell_1$ -norm in the ND basis is equivalent to the minimization of the total variation.

Figures 5.1 and 5.2 shows TPSFs evaluated for one basis coefficient  $m$  and all  $n$ 's :  $TPSF(m, n)$  . The basis clearly showing the best properties is the wavelets basis since for  $n \neq m$ ,  $TPSF(n, m)$  is noise-like with a small average value. It

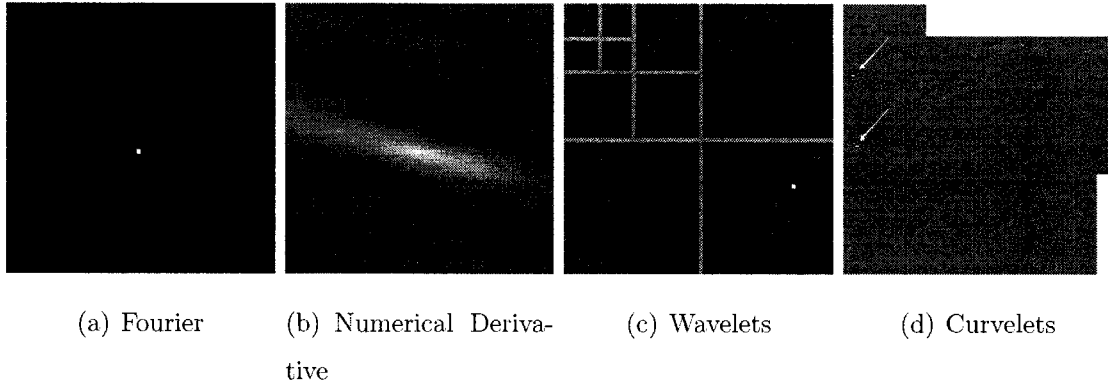
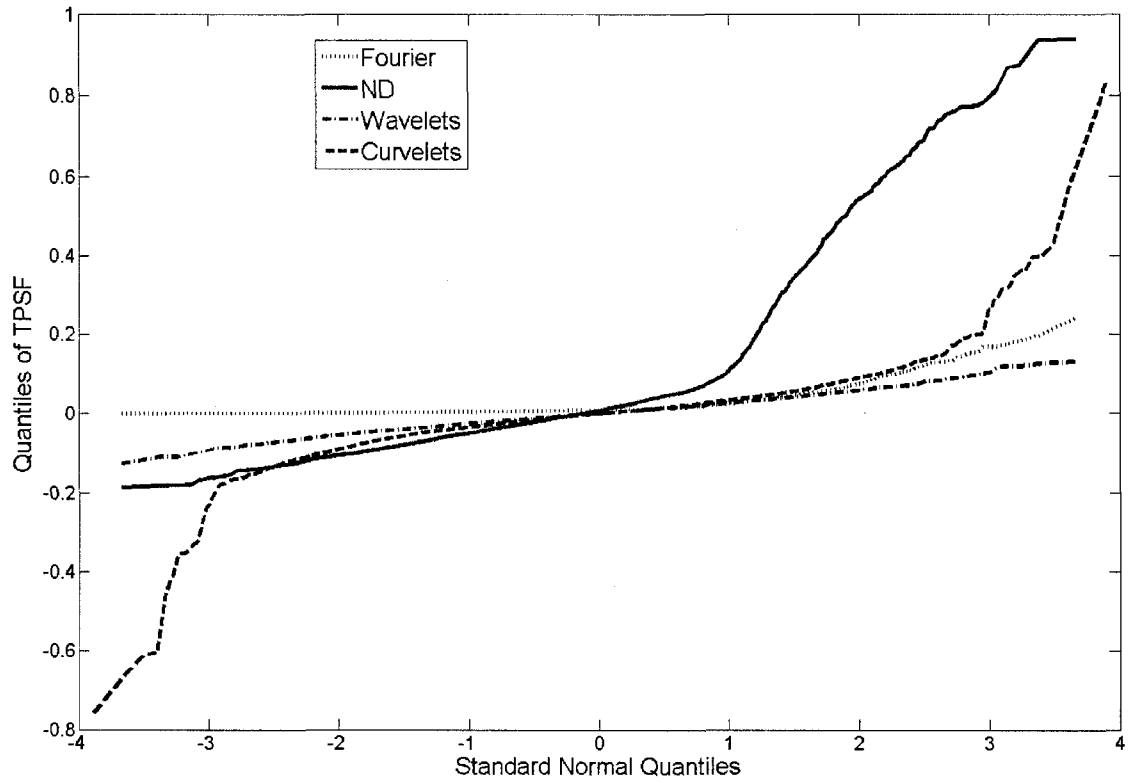


Figure 5.1 – (a) to (d) shows  $TPSF(m; n)$  of different basis for a fixed  $m$  and for all  $n$ 's. A value of the TPSF is therefore associated for each coefficient of the basis. (a) Absolute value of the  $TPSF(m, n)$  of the Fourier basis, the  $n$  corresponding to the DC component being at the upper left corner. A clear star-shaped structure can be seen around  $n = m$ . (b)  $TPSF(m, n)$  of the numerical derivative basis, where the pixel  $n$  corresponds to the numerical derivative computed with respect to the right and bottom neighbors of  $n$ . (c)  $TPSF(m, n)$  of the Haar wavelets basis. (d)  $TPSF(m, n)$  of the curvelets basis where the finest scale has been replaced by wavelets. The image is separated into three horizontal sections, the upper one being the coarse scale. While what is expected is to have  $TPSF(m, n)$  noise-like and of amplitude near zero for  $m \neq n$  and  $TPSF(m, n) = 1$  for  $m = n$ , there is a second coefficient giving a TPSF of 0.8. This other coefficient has the same scale and the same position as  $m$  but a slightly different angle.



(a) QQ plot

Figure 5.2 – Quantile-Quantile plots of  $TPSF(m, n)$  - $m$  is still fixed- of the four bases presented in figure 5.1, with respect to the normal distribution. If samples come from a normal distribution, the plot is linear. The only linear plot is given by the wavelets basis. The curvelets basis seems to show good properties around the center of the distribution but is corrupted by the presence extreme values coming from another important lobe around nearby angles.

does not, however, perform as well as the curvelets basis for the sparsity of the representation of natural images. The curvelets basis seems to show good properties with the exception of a second sidelobe that appears for the same scale and position, but with a slightly different angle. In order to verify how not respecting these three conditions will affect the reconstruction, the next section shows a simple numerical experiment with the ND basis which is not fulfilling conditions 1) and 2) adequately.

### 5.6.3 Proof of concept on small phantoms

Even though  $\ell_1$  minimization algorithms are numerically tractable by second-order programming, they are computationally demanding since they involve solving, for a  $n \times n$  resolution, full linear systems, each costing  $O(n^3)$  flops. The first numerical experiments have thus been conducted on  $64 \times 64$  phantoms. It is possible to reach higher resolution by using the LASSO algorithm [58] presented in the next section. Using such small phantoms also provides the opportunity to compare CS with a classical pseudo-inverse inside reasonable calculation times. We neglect noise in these examples in a first approximation, since small changes in CS algorithms[64] should be sufficient to consider inaccurate measurements and handle noise.

The simulation conducted can be summarized into three steps :

1. Generate measurements  $y_{(m,n)}$  from a phantom  $x_{(i,j)}$  using  $K_{(m,n)(i,j)} : y_{(m,n)} = K_{(m,n)(i,j)}x_{(i,j)}$ .
2. From  $y_{(m,n)}$ , compute the pseudo-inverse  $\hat{x} = (KK^* + \mu I)^{-1}K^*y_{(m,n)}$
3. Solve (5.19) with the pseudo-inverse as the first approximation, using the algorithm provided in the  $\ell_1$ -magic package [76].

However, one needs to model the transducer response  $g_n$  appearing in  $K_{(m,n)(i,j)}$ . As a first approximation, we used the simplest band-pass filter : frequencies at each angles have been sampled in a rectangular window between 1Mhz and 3Mhz which corresponds to the frequencies better detected with a 2.25MHz transducer

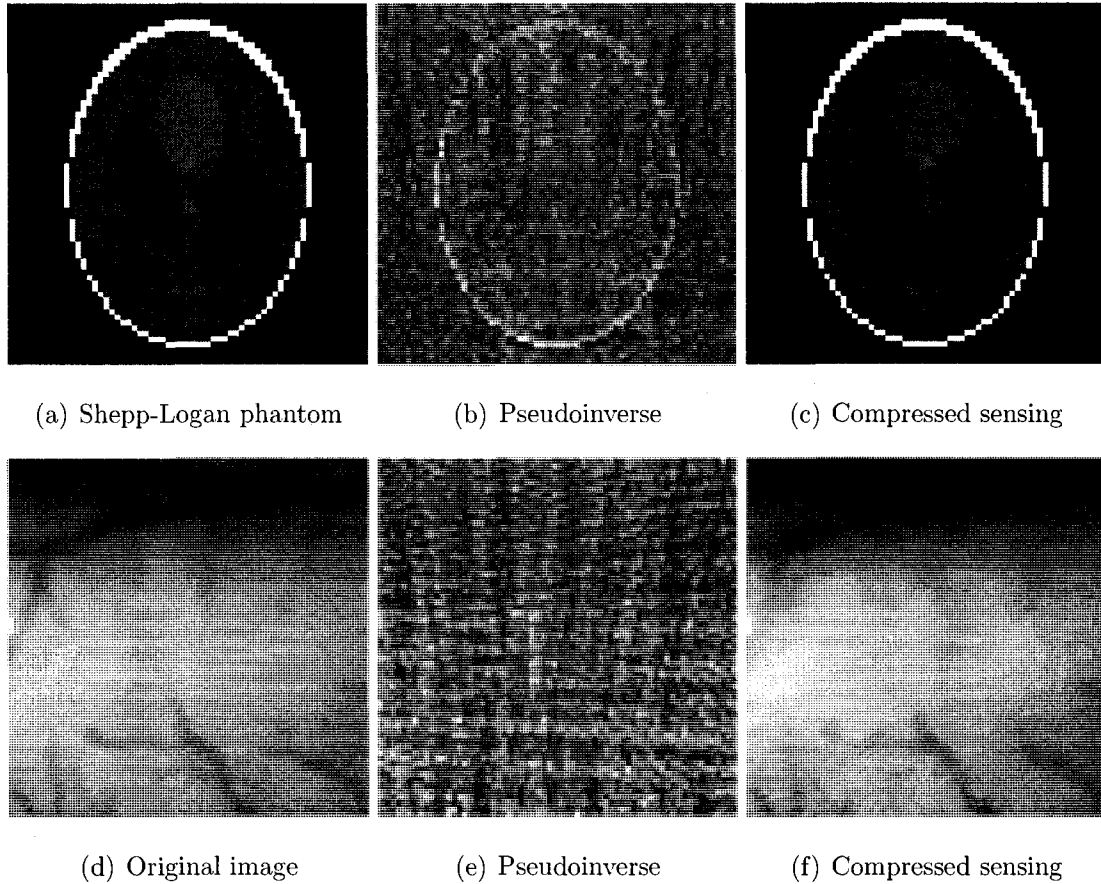


Figure 5.3 – Application of the CS reconstruction scheme on  $64 \times 64$  numerical phantoms. (a) and (d) shows the original phantoms, (b) and (e) the reconstruction obtained with the pseudo-inverse, and (c) and (f) the reconstruction using compressed sensing with the ND basis. These images were obtained using 20 equispaced tomographic angles and 40 Fourier samples per angle between 1 and 3 Mhz. A perfect reconstruction is achieved for the Shepp-Logan phantom which is particularly sparse in the ND basis. On the other hand, the phantom (b) is blurry and contains small details that are not sparse in the ND basis. It is also these small details that are not recovered with the CS reconstruction.

typically used in experiments. We also used the characteristics of the analog to digital converter used in our experiments in order to define the number of frequency samples that are used inside that window.

More precisely, to model the transducer response, the domains of  $k_n$ ,  $n$  and  $g_n$  were restricted to certain values :  $\frac{k_n}{2\pi c} \in [1, 3]Mhz$ ,  $n \in [1, 128]$  and  $g_n = 1$ . To completely define  $K_{(m,n)(i,j)}$ , we considered a fixed number of tomographic angles indexed by  $m$  with 40 randomly chosen  $\frac{k_n}{2\pi c}$ 's inside the  $[1, 3]Mhz$  window for each and the numerical derivative as a sparse basis.

Figure 5.3 shows quite impressive results for two phantoms using 20 tomographic angles. A total of  $20 \times 40 \times 2 = 1600$  measurements (where a factor 2 was added to take into account the fact that measurements are complex numbers) were used to recover  $64 \times 64 = 4096$  pixels. The shepp-logan phantom - which is particularly sparse in a numerical derivative basis - was perfectly recovered while a cat brain image taken with a ccd camera showed much better results than the pseudoinverse. A perfect reconstruction using the pseudoinverse typically needs 26 angles. Therefore, it seems CS does not provide the expected enhancement it promises when used in combination with the ND basis, which is coherent with the analysis of the TPSF. On the other hand, the CS formalism is robust enough so that even when the CS conditions are not fulfilled, it still provides a better reconstruction than the pseudo-inverse. This experiment also showed how the strong sparsity of the Shepp-Logan phantom in the numerical derivative basis lead to much better results.

The next section shows experiments made in the wavelets and curvelets basis, since even though the wavelets basis provides a better CS-matrix, the image to recover will be sparser in the curvelets domain.

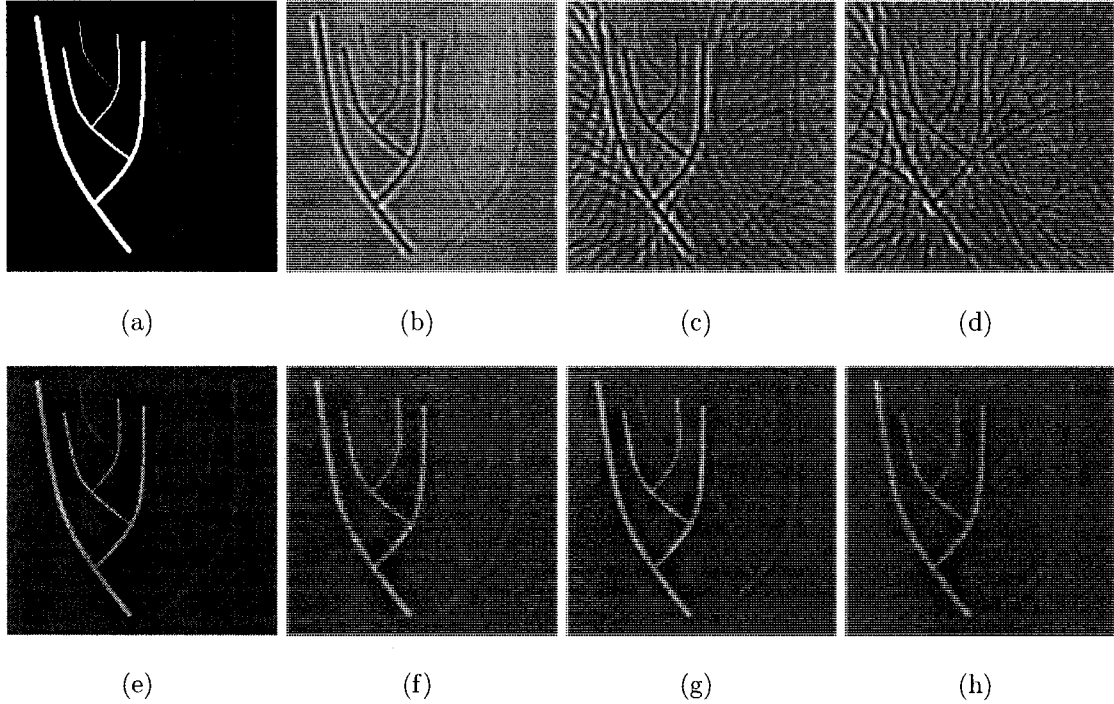


Figure 5.4 – Reconstructions using the back-projection algorithm, and the compressed sensing algorithm with wavelets. For all CS reconstructions, 15000 iterations of the LASSO algorithm were computed. (a) Original phantom. (b), (c), and (d) Reconstruction using back-projection over 250(b), 56(c) and 28(d) angles. Equispaced angles were used for (b) while for all other reconstructions, there was a dead angle of 30 degrees. The signal has been deconvolved with a Tikhonov filter where  $\mu$  was determined using the Lcurve method. (e) and (f) Reconstruction using the CS algorithm solved with wavelets using 56(e) and 23(f) angles and 128 Fourier samples per angle in a frequency window going from 0.3 to 2.3 MHz. (g) Reconstruction using the CS algorithm solved with wavelets using 56 tomographic angles and 128 Fourier samples per angle in a frequency window going from 0.3 to 4.3 MHz. (h) Reconstruction using the CS algorithm solved with wavelets using 23 tomographic angles and 56 Fourier samples per angle in a frequency window going from 0.3 to 2.3 MHz.

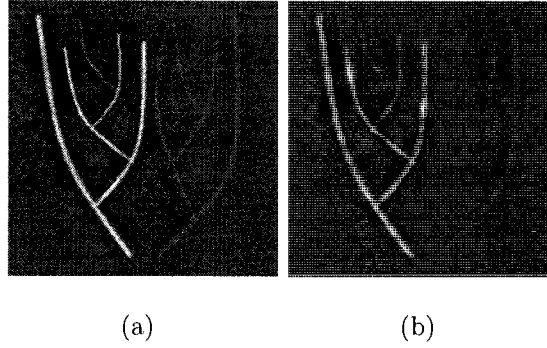


Figure 5.5 – Reconstruction using the CS algorithm solved with curvelets using 56(e) tomographic angles and 128 Fourier samples per angle in a frequency window going from 0.3 to 2.3 MHz (a) and from 0.3 to 4.3 MHz(b).

## 5.7 Results

In order to reach higher resolution, it was necessary to consider greedy algorithms. The LASSO algorithm proposed by Osborne et al. [58] and applied to underdetermined problems by Donoho and Tsaig [57] constructs the solution by finding one basis coefficient at a time. It is similar to the matching pursuit, orthogonal matching pursuit[74], and LARS algorithms[77]. Instead of constructing a solution from a dense initial approximation such as the pseudo-inverse, this algorithm builds the solution from  $\hat{\theta} = 0$ . In other words, it starts with the solution to the minimization of

$$\|y - K\Phi x\|_{\ell_2} + \lambda\|\theta\|_{\ell_1} \quad (5.24)$$

with  $\lambda \rightarrow \infty$ . There exists a mapping between  $\epsilon$  from (5.19) and  $\lambda$  making the two minimization problems equivalent. The choice of  $\lambda$  changes the solution  $\hat{\theta}$ , defining a "solution path"  $\hat{\theta}(\lambda)$ . When  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $\hat{\theta}(\lambda) \rightarrow \theta$ . It appears such a solution path is polygonal [58]. The idea behind the LASSO algorithm is to use this property to jump from one vertice to another. In other words, this algorithm adds or removes one basis coefficient to the solution estimate at each iteration. The sparser  $\theta$  is, the faster this algorithm converges since a smaller amount of coefficients will be

necessary in order to obtain a satisfactory approximation of  $x$ . We have applied the LASSO algorithm to numerical phantoms and on real data, using the curvelets and wavelets bases, and reconstructed  $256 \times 256$  images.

### 5.7.1 Simulations

As before, we generated measurements  $y_{(m,n)}$  from a phantom  $x_{(i,j)}$  using  $K_{(m,n)(i,j)}$  and changed four parameters : the number of tomographic angles, the frequency window width, the sampling of this frequency window, and the basis used for reconstruction.

In order to recover  $M$  coefficients of the image represented in the basis  $\Phi$ , one typically needs  $M_e = 3M$  to  $5M$  measurements. In the case of PAT, there are two ways to get more measurements : one can either increase the number of Fourier samples or get more tomographic angles. Since, for example, one can increase the number of Fourier sample by zero-padding measurements, it seems that these two types of measurements will not contribute in the same way to the quality of the reconstruction. In the following simulations,  $M_e$  never exceeds 15000 implying the highest number of coefficients that can be recovered is 5000. Thus, for all the simulations 15000 iterations of the LASSO algorithm were computed since one iteration should recover one coefficient. As predicted by theory, negligible changes can be observed in the last thousands of iterations.

Figure 5.4 shows a comparison between the backprojection and the CS reconstructions using wavelets. For the backprojection, the forward problem was implemented in the time domain and convolved using a model of a typical gaussian transducer response around 1MHz with a bandwidth at -3db of 2MHz in order to model the same frequency window as in CS but without the Gibbs oscillations generated by a rectangular window. This data was then deconvolved using a Tikhonov filter where  $\mu$  was determined using the Lcurve method [50]. We observe that CS reconstructions are clearly enhanced in comparison to back-projection, even when

using only one fifth of the tomographic angles. In a general manner, CS provides a better reconstruction and can handle dead angles effectively.

By comparing (e) and (g), we see that for a given number of frequencies, better contrast is achieved with a smaller frequency window. Note, however, that since the number of frequency sample is the same for the two simulations, the sampling rate of each of these window is not the same. Moreover, the diminished number of frequency samples did not affect much reconstruction between (f) and (h). Figure 5.5 shows CS reconstruction using curvelets for two different frequency windows. More artifacts are visible than for the reconstructions using wavelets. This is, once again, coherent with the TPSF analysis.

### 5.7.2 Experiments

The setup used is similar to that of [73] : an ultrasound transducer at 3.5 MHz is set to rotate on an arm around a phantom placed in water. A pulsed OPO laser (Opolette 355,Opotek) is used to inject a 1 mm core multimode fiber. The output of the fiber is collimated and directed towards the top of the phantom. The pulse energy of the OPO laser was 3mJ and pulses were generated at 20Hz. The incident light on the phantom had a diameter of 1.5cm leading to an energy density well below MPE standards. The recovered ultrasound signal is then amplified and filtered (Minicircuits and SLX Inc). Acquisition is done by a FPGA development board (Altera, Stratix II) by synchronizing the laser pulse with the acquisition window. Averaging of the signal is done on the FPGA board which then sends the information to a host computer. This same board controls, in parallel, the motorized arm, the acquisition, and the averaging.

In order to validate our hypothesis we created a set of phantoms by using gelatin and we embedded tygon tubes containing india ink and having  $250\ \mu\text{m}$  diameter to create inclusions. The phantom dimension is comparable to what would be observed *in vivo* for a mouse brain. Figure 5.6 shows two reconstructions using the wavelets

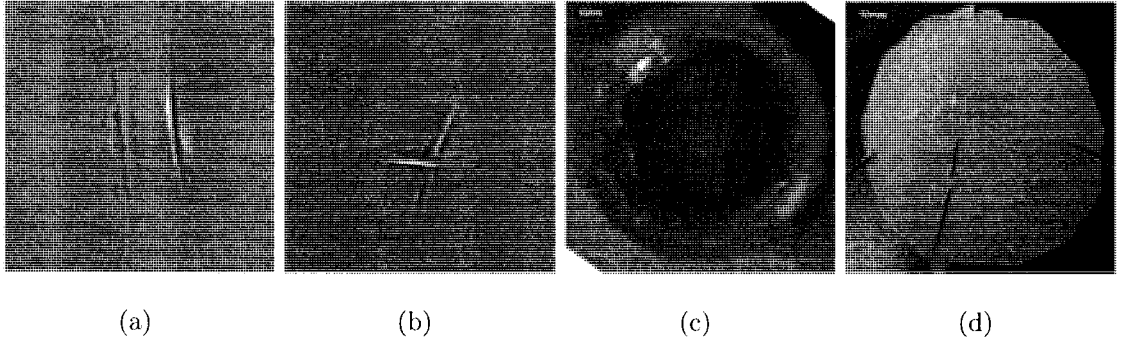


Figure 5.6 – (a) Reconstruction of a phantom containing two parallel  $250\ \mu\text{m}$  tygon tubes embedded in transparent gelatin. (b) Reconstruction of a phantom containing two crossing  $250\ \mu\text{m}$  tygon tubes embedded in gelatin made with 4% intralipid. The whole phantom is not visible because only part of it was illuminated and only signal coming from a plane was detected. (c) Photograph of the phantom reconstructed in (a). The black circle represent the region illuminated by the laser. (d) Photograph of the phantom reconstructed in (b).

basis. The forward operator was modified to take into account the fact that the transducer does not detect over a full 180 degrees range. This was done by replacing  $g_n$  by  $g_{(n,i,j)} = g_n h_{(i,j)}$  where  $h_{(i,j)} = 1$  inside the transducer spatial range and  $h_{(i,j)} = 0$  outside. Figure 5.6(a) shows reconstruction using 56 angles taken outside a dead angle of 45 degrees and 128 frequency samples randomly chosen inside the  $[0.5,6]\text{MHz}$  window. Figure 5.6(c) shows reconstruction using 50 angles taken outside a dead angle of 35 degrees and 128 frequency samples randomly chosen inside the  $[0.5,6]\text{MHz}$  window.

## 5.8 Conclusion

We have presented how the theory of compressed sensing can be used for reconstruction in photo-acoustic tomography using a small number of angles. Simulations demonstrated that even with a smaller number of measurements, our approach

provides better results than back-projection and pseudo-inversion. By comparing four possible bases through a TPSF analysis, we have showed that the wavelets basis has better properties than the Fourier, ND, and Curvelets basis for PAT reconstruction. Finally, the approach was validated on real phantoms.

The main goal of this study was to evaluate compressed sensing for photo-acoustic tomography. As such our observations show that the technique is apt at reconstructing images and we hope to pursue in separate work an application to dynamical imaging.

## CHAPITRE 6

### DISCUSSION GÉNÉRALE

L'imagerie photo-acoustique est une modalité d'imagerie qui semble vouée à un avenir intéressant par la mise en commun de la précision anatomique de l'imagerie ultrasonore et de l'aspect fonctionnel de l'imagerie optique. Cependant, les appareils photo-acoustiques existants ne permettent pas d'imager la dynamique des phénomènes physiologiques. La stratégie présentée dans ce mémoire pour y parvenir suppose qu'il n'est pas nécessaire d'obtenir une imagerie en temps réel, mais bien résolue en temps, ce qui signifie que l'échantillonnage temporel est suffisant pour percevoir tel ou tel phénomène sans que les calculs nécessaires à son obtention soient fait à l'intérieur d'un pas de temps. En effet, l'imagerie photo-acoustique fournit un type d'image qu'aucune autre modalité ne permet d'obtenir. On ne cherche donc pas ici à surpasser les performances d'une modalité existante, mais bien à atteindre une information qui est autrement inaccessible.

L'échantillonnage temporel sera dépendant de l'application visée et est limité par le nombre de mesures nécessaires à chaque pas de temps. En diminuant le nombre de mesures par pas de temps, on augmente donc le taux d'échantillonnage possible. Par contre, diminuer le nombre de mesures implique aussi une diminution de la qualité de l'information acquise, c'est-à-dire une plus faible résolution ou une présence plus importante d'artefacts. On peut donc affirmer qu'une amélioration de la résolution temporelle est équivalente à une diminution du nombre de mesures nécessaires pour une qualité d'image donnée.

C'est ce qui a été proposé dans ce mémoire par l'utilisation des bases compressées. Ces dernières sont le plus souvent utilisées pour retirer les mesures superflues, celles qui ne contiennent que peu d'information ou du bruit. Cela a en effet été montré dans le cas du bruit dans les chapitres 2 et 3 : il est possible de retirer un grand

nombre des coefficients d'une image compressée dans une base tout en conservant l'information de manière satisfaisante. Ce qui a été éliminé était donc du bruit dans sa définition la plus générale : un signal indésirable. En revenant au problème de l'imagerie photo-acoustique par tomographie circulaire, le débruitage utilisant les bases compressées s'est montré plus performant que le simple moyennage, c'est-à-dire que pour un nombre de mesures donné, la qualité de l'image est supérieure. Autrement dit, on arrive à réduire le nombre de mesures pour une qualité d'image donnée ce qui implique une accélération du taux d'acquisition.

Toujours dans la même optique, nous avons introduit le débruitage à l'intérieur du processus de formation d'image, plus précisément dans l'étape de la déconvolution. Les résultats obtenus, quoique probants, ne semblaient pas, à nos yeux, être suffisants pour diminuer de manière significative le temps d'acquisition. Cependant, cette étape intermédiaire utilisait une régularisation par une norme  $\ell_1$  tout comme l'échantillonnage compressé.

La compréhension de la stratégie de débruitage par rétrécissement du signal dans une base compressée a mis en évidence un autre phénomène : les mesures sont faites de manière inefficace. En effet, une importante proportion des mesures réalisées contiennent un signal peu utile à la reconstruction. Cette affirmation peut être faite car en analysant l'image dans une base compressée, seulement un faible nombre de coefficients est nécessaire pour fournir une image satisfaisante. La stratégie suivante a donc été de concevoir la prise de mesure de telle façon à ce que les grands coefficients d'une base compressée soient favorisés. Il a été étonnant de constater que la configuration initiale en tomographie circulaire présentait déjà ces conditions, dans la mesure où l'acquisition était représentée dans l'espace de Fourier et qu'une reconstruction de type  $\ell_1$  soit utilisée.

Un des principes fondamentaux de l'échantillonnage compressé stipule que la base des mesures et la base compressée doivent être incohérentes. Ceci signifie qu'un vecteur de la base compressée produit un ensemble de mesures *suffisamment* dif-

férent d'un autre ensemble de mesures généré par un autre vecteur arbitrairement choisi pour que l'on puisse les distinguer. La quantification de ce "suffisamment" a été fait en utilisant la TPSF. Cette quantification a permis de prouver que malgré le pouvoir de compression plus grand des curvelets, les ondelettes sont mieux adaptées au problème direct de l'imagerie photo-acoustique. Ainsi, optimiser une base compressée en aillant comme critère le niveau de compression d'une image naturelle n'est pas suffisant pour l'intégrer à un processus de reconstruction d'image ; il est aussi nécessaire d'ajouter un deuxième critère d'incohérence avec la matrice des mesures.

L'application des algorithmes qui permettent la reconstruction sous contraintes de type  $\ell_1$  est très lourde en temps de calcul et en mémoire. En première approche, nous avons considéré des algorithmes de points intérieurs. Le désavantage de ces méthodes est qu'elles se basent sur une approximation initiale. Ainsi, à chaque itération, une nouvelle image complète, comprenant un grand nombre de coefficients d'ondelettes, est générée. Ceci limitait la taille des images reconstruites à  $64 \times 64$ . Pour arriver à reconstruire des images de plus grande taille, soit  $256 \times 256$ , nous avons utilisé un algorithme de type LASSO, qui tire profit de la compressibilité de l'image pour accélérer la reconstruction. En effet, alors que les algorithmes de points intérieurs modifient la distribution de l'ensemble des coefficients, l'algorithme LASSO retrouve ou corrige un coefficient à chaque itération.

Le passage à l'expérimental fût particulièrement aisé dans le sens où l'algorithme permet une reconstruction dans sa forme utilisée pour les simulations. Pour en améliorer les résultats, nous avons affiné le modèle direct en considérant un champ de détection du transducteur inférieur à 180 degrés ainsi qu'une fonction de transfert gaussienne plutôt que rectangulaire.

## CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

L'objectif de ce travail était de réduire le nombre de mesures nécessaires pour obtenir une reconstruction satisfaisante en tomographie photo-acoustique. Ce nombre de mesures se présentait sous deux formes : le nombre d'angles échantillonnés et le nombre de moyennages effectués à chacun de ces angles. Pour ce faire, trois stratégies ont été développées. Pour diminuer le nombre de moyennages nécessaires, l'utilisation des curvelets pour optimiser le débruitage a été présentée. Ensuite, toujours dans la même optique, ce débruitage a été inclus dans l'opération plus large de déconvolution, et ce, en contraignant la norme des coefficients de curvelets. Enfin, pour réduire le nombre d'angles nécessaires à une bonne reconstruction, il a été nécessaire de définir une nouvelle inversion. En utilisant plutôt la formulation dans l'espace de Fourier de l'opérateur direct, une toute nouvelle méthode de reconstruction utilisant la théorie de l'échantillonnage compressé a été développée. Cette nouvelle formulation est globale, c'est-à-dire qu'elle inclut un débruitage et une déconvolution optimisés par l'utilisation d'une base compressée.

Cette nouvelle méthode de reconstruction d'images pour la tomographie photo-acoustique semble être, à ce jour, la plus performante dans la littérature. Cette performance se présente sous deux formes : elle permet soit une amélioration de la qualité de l'image obtenue ou une diminution, pour une qualité donnée, du nombre de détecteurs nécessaires. Réaliser moins de détecteurs implique une meilleure résolution temporelle ou une diminution des coûts de fabrication de l'appareillage.

Il s'agit aussi d'une des premières applications de la théorie de l'échantillonnage compressé. De plus, à notre connaissance, jamais cette théorie n'avait été appliquée sur un opérateur non sphérique, c'est-à-dire un opérateur dont la représentation matricielle ne contient que des colonnes de norme un. Cette constatation n'est pas triviale puisque toutes les preuves théoriques permettant d'affirmer qu'un opérateur remplit les conditions suffisantes à l'application de l'échantillonnage compressé ont

été faites sur des opérateurs sphériques. Ainsi, ce travail pourrait ouvrir la porte à un agrandissement de l'ensemble des opérateurs admissibles dans un cadre plus formel.

Pour la première fois, les curvelets ont été utilisées à l'extérieur du cadre du débruitage, de la compression et de l'analyse. Étonnament, malgré son fort potentiel de compression, cette base n'est pas nécessairement plus performantes que les ondelettes pour la reconstruction d'images.

Le montage expérimental peut aussi être simplifié grâce à cette nouvelle reconstruction. Premièrement, puisque le nombre de détections nécessaires a été grandement réduit, il devient plus simple et moins coûteux de remplacer le moteur par une matrice de transducteurs. Le retrait des pièces mobiles du montage améliore grandement la reproductibilité des résultats et la facilité d'utilisation de l'équipement. Deuxièmement, l'inversion proposée permet une très grande flexibilité dans la géométrie utilisée pour effectuer les mesures. Bien que cela n'ait pas été montré dans ce mémoire, il semble que la seule contrainte géométrique consiste en une superposition partielle des champs de détections associés aux positions des transducteurs. Ce gain en flexibilité et l'affranchissement du besoin de déplacer les détecteurs pourrait permettre, par exemple, la conception d'un casque pour petits animaux où seraient insérés des transducteurs. Le contact direct entre la tête de l'animal et le transducteur permettrait ainsi de remplacer l'eau par un gel et ainsi simplifier grandement le dispositif expérimental.

En contrepartie, cette méthode de reconstruction demande une puissance de calcul substantielle pour obtenir une bonne résolution. Ainsi, même si elle permet d'améliorer la résolution temporelle, le temps de reconstruction devient prohibitif avec les ordinateurs actuels lorsque l'on veut reconstruire plusieurs pas de temps.

Pour améliorer encore davantage la résolution temporelle, il apparaît logique de reconstruire, plutôt que l'image entière pour chaque pas temporel, la différence entre l'image au temps  $i$  et celle au temps  $i + 1$ . Plus la résolution temporelle

sera grande, plus ces changements seront petits impliquant que moins de mesures devraient être nécessaires par pas pour les obtenir. Il s'agit de l'avenue qui nous semble la plus intéressante aujourd'hui quant à la poursuite des développements théoriques.

Une autre avenue possible serait de considérer d'autres géométries. Par exemple, dans [15], il appert que de travailler directement en trois dimensions plutôt que de concaténer des reconstructions bidimensionnelles améliore les propriétés de l'opérateur direct par rapport à l'échantillonnage compressé. Ainsi, considérer des parcours hélicoïdaux ou planaires par exemple, pourrait permettre, mais cela reste à prouver, une reconstruction tridimensionnelle très efficace.

## ANNEXE I

### Compressive Sampling in Photo-Acoustic Imaging

Cet article de conférence a été présenté le 5 juin 2007 dans le cadre de Photonics North. Les auteurs sont Jean Provost et Frédéric Lesage.

## ABSTRACT

Photo-acoustic (PA) imaging has been developed for different purposes but recent years has seen the technique gain interest with applications to small animal imaging. As a technique it is sensitive to endogenous optical contrast present in tissues and, contrary to diffuse optical imaging, it promises to bring high resolution imaging for *in vivo* studies at mid-range depths (3mm-10mm). However, a typical acquisition for the reconstruction of one slice in PA tomography can take up to approximatively 30 minutes which is clearly prohibitive for 3D imaging. This paper suggests a new reconstruction strategy using the compressive sampling formalism which states that a small number of linear projection of a compressible image contains enough information for reconstruction. This new scheme allows perfect reconstruction of numerical phantoms with only a fraction of the measurements normally needed with classical methods such as the pseudo-inverse.

### I.1 Introduction

Photo-acoustic (PA) imaging has been developed for different purposes but recent years has seen the technique gain interest with applications to small animal imaging [4, 5]. As a technique it is sensitive to endogenous optical contrast present in tissues and, contrary to diffuse optical imaging, it promises to bring high resolution imaging for *in vivo* studies at mid-range depths (3mm-10mm). Gain in resolution originates from the acoustic detection whereby it is limited by transducer frequency. For example the vascularization of a rat brain has been clearly imaged to high precision[4]. To this day, much work in the field is being done in instrumentation : techniques to accelerate the acquisition process and increase the resolution [31] are being explored as well as creating new applications. These results translate into new opportunities for the modality : molecular imaging in small animals [2, 3] and human applications[6] are now becoming accessible.

When going towards the latter applications, two issues emerge due to the limited amount of radiation one can use : for human studies light penetration in tissues is subject to strong attenuation and imaging large tissue portions leads to low signal to noise ratios (SNR). For molecular imaging the extinction coefficients of molecular compounds are on par with blood and to be able to make a distinction high SNR ratios are also required. In PA tomography, these problems can be addressed by averaging data and taking a large number of angles, leading to a longer acquisition time.

Very recently, a theory of compressive sampling(CS) has emerged. By using nonlinear recovery algorithms based on convex optimization, images can be reconstructed from what appears to be highly incomplete data. The idea of compressive sampling is to implicitly incorporate compression into the data acquisition process. For example, in given tomography problems, it is possible to solve the inverse problem exactly with a dramatic decrease in the number of angles taken. Moreover, by choosing an appropriate basis, denoising can be performed at the same time, allowing the use of lower SNR.

In this paper, we investigate the use of such compressing algorithms for PA tomography on numerical phantoms. More precisely, the total variation is minimized under an equality constraint (or inequality in presence of noise). The results are impressive : compared to a classical pseudoinverse, it is possible to almost double the PSNR of the reconstruction for a given number of measures. In other words, this means that for a wanted SNR, the acquisition time decreases substantially.

## I.2 Photo-acoustic tomography

The forward problem in photo-acoustic tomography is based on the following inhomogeneous wave equation

$$\nabla^2 p(r, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p(r, t) = -B \frac{\partial}{\partial t} H(r, t) \quad (\text{I.1})$$

where  $c$  is the sound velocity,  $p$  is the pressure,  $r$  is the position,  $t$  is the time and  $B$  is a known constant. The right hand side of the equation depends on the heat source  $H(r, t)$  that can be written as the product of a spatial absorption function and a temporal illumination function

$$H(r, t) = A(r)I(t)$$

The solution, based on Green's function, gives the forward problem

$$p(r, t) = \frac{B}{4\pi} \int \int \frac{d^2 r'}{|r - r'|} A(r') \frac{\partial}{\partial t'} I(t') \quad (\text{I.2})$$

where  $t' = t - \frac{|r - r'|}{c}$ . By considering a spherical geometry, it is possible to derive an exact solution using the spherical harmonic function basis. This solution is however computationally expensive and can be simplified by considering a far-field approximation. The approximate solution[73] is given by

$$A(r) \propto \int d\theta \frac{1}{t} \frac{\partial p(r_0, t)}{\partial t} \quad (\text{I.3})$$

where  $r_0$  is the radius of the trajectory of the ultrasound transducer. In practice, the integral becomes a sum

$$A(r) = \sum_m \frac{1}{t} \frac{\partial p(r_m, t)}{\partial t} \quad (\text{I.4})$$

where the index  $m$  indicates the position of the transducer. An example of such a reconstruction is presented on figure I.1. This method will be referred to later on as the far-field approximation reconstruction algorithm.

In the experiments, the received PA signals for each measure are convoluted by both the transducer impulse response and the laser pulse. The signal  $S(t)$  perceived by the transducer is thus of the form :

$$S(t) = p \circ G \circ L \quad (\text{I.5})$$

where  $G$  and  $L$  represent the convolution of the pressure signal with the transducer impulse response and the laser pulse respectively.  $p$  is the wanted pressure. If we

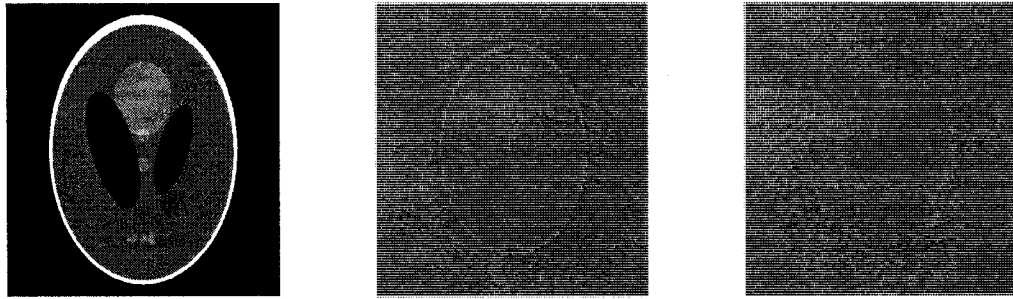
assume the laser pulse is small (which is the case here, 10-20 ns), the PA signal can be rewritten

$$S(t) = p \circ G \quad (\text{I.6})$$

The far-field approximation reconstruction algorithm is therefore 2-step : first deconvolve the signal and then apply equation I.4. Since only a small part of the spectrum is measured, the first step is ill-conditionned, which means that there is not enough information to perfectly reconstruct the absorption coefficients. The missing frequencies must be chosen and they are typically put to zero using a Tikhonov filter. However, doing so smooths edges and blurs the separation between two objects. Moreover, when backprojecting as equation I.4 does, the contribution from the tomographic angles that are missing is not considered. The new reconstruction scheme we propose will extrapolate more accurately the missing frequencies and estimate the information contained in the missing angles. A typical acquisition in PA tomography can take up to approximatively 30 minutes which allow the reconstruction for one slice and will not use a far field approximation. This is clearly prohibitive for 3D imaging. By using an algorithm that needs a lot less measurements for a given PSNR, it becomes possible to dramatically decrease the acquisition time.

### I.3 Compressive Sampling

There is a great interest in applied mathematics and in many applications for sparse representations of images. Such representations use a priori knowledge regarding the structure of the image in order to construct an adapted basis and then to compress the information contained in the image in a few essential coefficients. Examples of these basis are numerous : smooth images are sparse in the Fourier basis, and piecewise smooth images are sparse in a wavelets basis. The iconic application of these sparse representations is compression : we sample a signal and



(a) Shepp-Logan phantom    (b) Reconstruction using 200 angles    (c) Reconstruction using 50 angles

Figure I.1 – Simulation of the far-field approximation reconstruction.

then compress it in order to store or transmit the information.

The idea behind compressive sampling is to reverse the process : in order to reduce the number of measurements and therefore acquisition time, we would like to directly sample the few essential coefficients that contain the information. If we knew before making measurements which coefficients will contain most of the information, we could simply sample the value of each of these coefficients and not bother about the others. It is of course impossible to know beforehand where the information will have support. Instead, the strategy will be to ensure that information contained in each coefficient is distributed among *all* the measures and find the important ones by minimizing the number of coefficients needed to explain the measures.

Mathematically, the image  $x$  containing  $N$  pixels that we want to recover is sparse in some functional basis  $\Phi : x = \Phi\theta$  where  $\theta$  is a vector containing the coefficients and  $\|\theta\|_{\ell_0} < N$ . The norm  $\ell_0$  is simply the number of non-zero coefficients. Sparsity can therefore be defined as  $\|\theta\|_{\ell_0} \ll N$ . The goal is to sample the non-zero coefficients in  $\theta$ . In order to do that, we have measurements  $y = Kx$  where each  $y_i$ ,  $i \in M$ , contains partial information concerning all  $\theta_i$ . In other words,  $y$  is not sparse in  $\Phi$  and we say that  $K$  and  $\Phi$  are incoherent. We then try all possible com-

binations of  $\theta$  and keep the one solution that explains  $y$  with the smallest number of non-zero coefficients.

Formally, the CS theory tells us that if a signal to recover  $x$  of length  $N$  is sparse in a basis  $\Phi$ , i.e.  $y = \Phi\theta$  where  $\|\theta\|_{l_0} < N$ , then  $\theta$  is the solution to the  $l_0$  minimization

$$\min \|\theta\|_{l_0} \quad \text{s.t.} \quad y = K\Phi\theta \quad (\text{I.7})$$

with overwhelming probability[59]. However, this problem is combinatorial and therefore not applicable to medical imaging. It has been shown that the  $\ell_1$  minimization problem is, under some conditions[13] that we assume to be respected, equivalent

$$\min \|\theta\|_{\ell_1} \quad \text{s.t.} \quad y = K\Phi\theta \quad (\text{I.8})$$

and is easily tractable through linear or second-order programming. Moreover, it is possible to generalize these results to compressible signals (which have coefficients that decay rapidly but not to zero), which allows us to use them on natural images.

The strategy we propose to invert the forward problem in photo-acoustic tomography is to use this formalism in order to reduce acquisition time. The next section will present how it can be done.

## I.4 Method

Proving that two basis are incoherent is not a simple task. However, it has been shown in the literature[12] that randomly chosen Fourier samples constitute a good measurement matrix for delta spikes. The Fourier transform of the forward problem(equation I.2) is given by :

$$\bar{p}(r_0, \omega) = -i\omega \int dr A(r) \frac{e^{ik|r_0-r|}}{|r_0-r|} \quad (\text{I.9})$$

where  $k = \frac{w}{c}$ . More compactly,

$$y = Kx + e \quad (\text{I.10})$$

where  $y$  is the sinogram,  $x$  is the absorption map,  $e$  is white noise, and  $K$  is the forward operator that we discretize

$$K_{(m,n)(i,j)} = -ick_n \frac{e^{ik_n|r_m-r_{ij}|}}{|r_m-r_{ij}|}$$

where  $i$  and  $j$  indicate the cartesian coordinates,  $n$  indicates the frequency, and  $m$  indicates the position of the transducer.

What heuristically makes us think that random tomographic angles in the Fourier domain is a good measurement matrix choice is the fact that since high frequency transducers are used, typical photo-acoustic signals are mostly the derivative of edges. These type of signals have a smooth Fourier representation which means that one edge will have an impact on all  $y_i$ 's. Edges can be represented by the gradient of the image. Therefore, a sparse basis that can be used to our advantage for  $x$  is the absolute value of the gradient of the image. In other words, we minimize the total variation

$$\min \|x\|_{TV} \quad \text{s.t.} \quad y = Kx \quad (\text{I.11})$$

A gold standard inversion will be needed to evaluate the performance of the CS method. The pseudoinverse is widely used in the litterature and comes from the minimization of the discrepancy  $\Delta(x)$

$$\Delta(x) = \|Kx - y\|^2 \quad (\text{I.12})$$

Minimizing this quantity is equivalent to a least-square problem and has a unique minimum obtained by analytical differentiation :

$$\hat{x} = (KK^*)^{-1}K^*y \quad (\text{I.13})$$

The next section will show results of the application of such an algorithm, compared with the performance of the pseudoinverse.

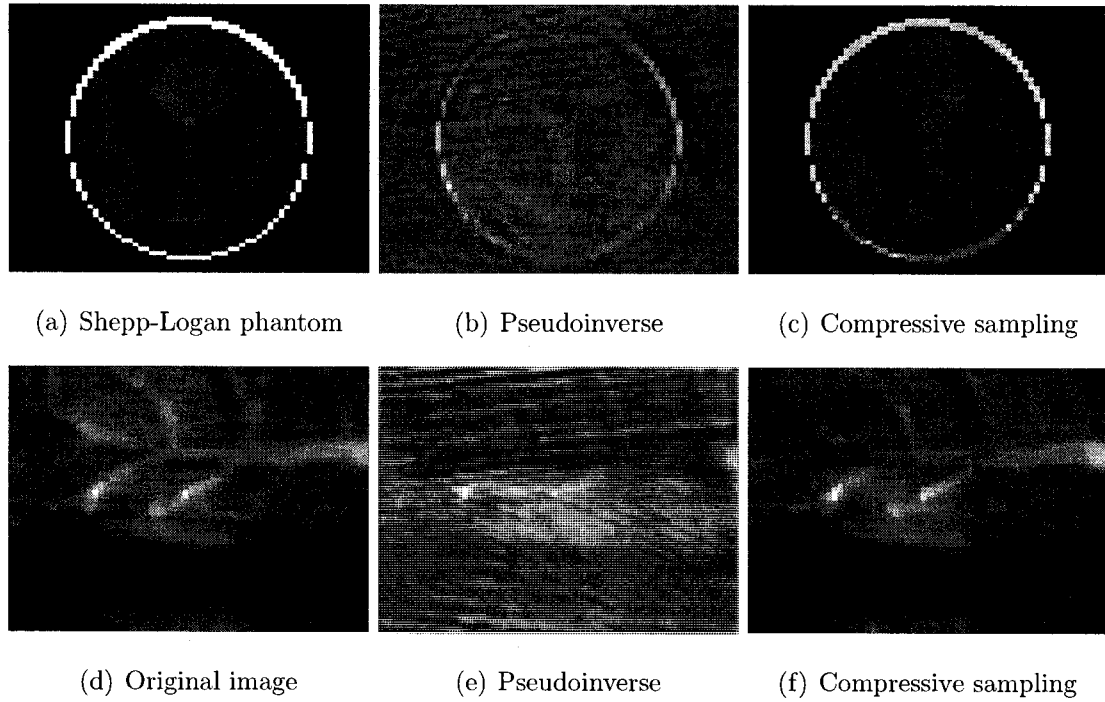


Figure I.2 – Images obtained using 20 tomographic angles and 40 Fourier samples per angle.

## I.5 Results

Even though  $\ell_1$  minimization algorithms are numerically tractable, they are computationally demanding and the numerical examples shown in this section will be conducted on  $64 \times 64$  phantoms. It is possible to reach higher resolution by enhancing the performance of present algorithms<sup>1</sup> or by using new approaches recently proposed[57]. We neglect noise in these examples in a first approximation, since small changes in CS algorithms[64] should be sufficient to consider inaccurate measurements and handle noise. This will be the object of future work.

In order to model the transducer response, frequencies at each angles have been sampled in a rectangular window between 1Mhz and 3Mhz that contains

---

<sup>1</sup>The implementation proposed by E. Candes and Justin Romberg in the l1-magic package was used. <http://www.acm.caltech.edu/l1magic/index.html>

128 equally spaced fourier samples. The forward operator was applied on these frequencies to generate simulated measurements from which the pseudoinverse was obtained. With these measurements and the pseudoinverse as a first approximation to the solution as inputs, the  $\ell_1$  minimization under equality constraints was solved using the second order linear programming algorithm of the l1-magic package.

The first experiment that was conducted was to simply consider a fixed number of tomographic angles with 128 fourier samples for each. This rapidly leads to numerical instabilities and in order to stabilize the algorithm, we reduced the number of Fourier samples to 40 for each tomographic angles and chose them randomly. Figure I.2 shows quite impressive results for two phantoms : both the shepp-logan phantom - which is particularly sparse in a variation basis - and a cat brain image taken with a ccd camera have been almost perfectly recovered with only 20 tomographic angles while the pseudoinverse typically needs 26 of these angles.

Choosing randomly the Fourier samples might not be an optimal approach. Therefore, instead of doing so, the measurement matrix was changed to a truncated SVD. More specifically, if  $K = USV'$ , where  $U$  and  $V$  are orthogonal and where  $S$  is diagonal, we kept a fixed number of singular values, in this case we chose arbitrarily the 2048 biggest singular values, and applied the algorithm on  $\hat{y} = U'y$  and  $\hat{K} = SV'$  since  $U'y = SV'x$ . The results obtained using this methodology are presented on figure I.3 and show that we get a perfect reconstruction of the shepp-logan phantom more rapidly than with the Fourier basis : only 12 angles were needed to get a similar PSNR.

Figure I.5 shows pathological cases for the total variation. In some cases, where we need to identify small details, the variation is not a sparse representation and therefore the algorithm never converge towards the solution. The use of a multiresolution basis such as wavelets or curvelets might lead to convergence.

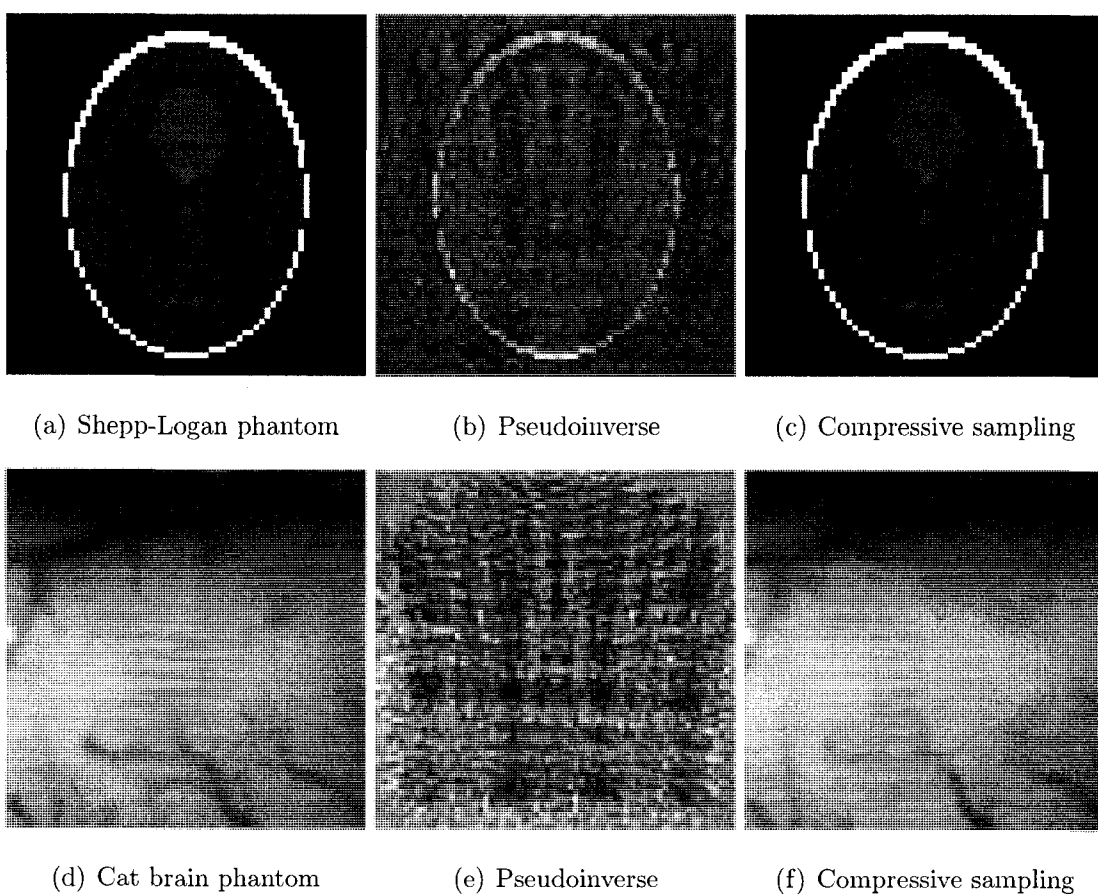


Figure I.3 – Images obtained using 2048 measurements chosen among 12 tomographic angles

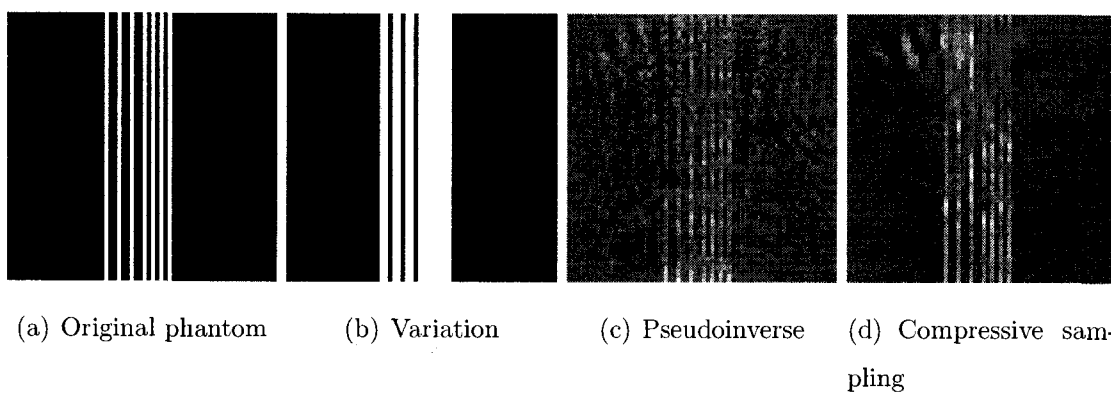


Figure I.4 – Pathological case. Images obtained using 2048 measurements chosen among 12 tomographic angles

## I.6 Conclusion

This paper shows that the minimization of a  $\ell_1$  problem under constraints can be a powerful approach in order to reduce the number of tomographic angles needed in photoacoustic tomography. It is limited by numerical instabilities that appear when too many measurements are taken. However, it is always equal or superior to a pseudoinverse approach. Because of the polynomial numerical complexity of the algorithm, only small images can be reconstructed. Future work will include the implementation of new algorithms which will reach higher resolution in combination with a multiresolution basis instead of the total variation. Such an approach should be better adapted to natural images containing vasculature which are typical to photo-acoustic imaging. In parallel, a characterization of the behavior of the solution in presence of noise will be conducted and tests will be run on experimental data.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. V. WANG et H. i WU, *Biomedical Optics : Principles and Imaging*. Wiley, 2007.
- [2] G. KU et L.-H. WANG, « Deeply penetrating photoacoustic tomography in biological tissues enhanced with an optical contrast agent », *Optics Letters*, vol. 30, p. 507–509, 2005.
- [3] L. LI, R. J. ZEMP, G. LUNGU, G. STOICA et L. V. WANG, « Photoacoustic imaging of lacz gene expression in vivo », *JBO Letters*, vol. 12(2), 2007.
- [4] G. KU, X. WANG, X. XIE, G. STOICA et L. V. WANG, « Imaging of tumor angiogenesis in rat brains in vivo by photoacoustic tomography », *Applied Optics*, vol. 44, p. 770–775, 2005.
- [5] R. A. KRUGER, W. L. KISER, D. R. REINECKE, G. A. KRUGER et K. MILLER, « Thermoacoustic optical molecular imaging of small animals », *Molecular Imaging*, vol. 2(2), p. 113, 2003.
- [6] A. A. ORAEVSKY, E. V. SAVATEEVA, S. V. SOLOMATIN et A. A. KARABUTOV, « Optoacoustic imaging of blood for visualization and diagnostics of breast cancer », *Proc. SPIE*, vol. 81, p. 4618, 2002.
- [7] E. J. CANDLES et D. L. DONOHO, « New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with smooth singularities », *Preprint*, 2002.
- [8] E. J. CANDLES, L. DEMANET, D. L. DONOHO et L. YING, « Fast discrete curvelets transform », *Preprint*, 2005.
- [9] F. G. MEYER et R. R. COIFMAN, « Brushlets : A tool for directional image analysis and image compression », *Applied and Computaional Harmonic Analysis*, vol. 4, p. 147–187, 1997.

- [10] M. N. DO et M. VETTERLI, « Contourlets : A new directional multiresolution image representation », *Proc. International Conference on Image Processing*, vol. 1, p. 357–360, 2002.
- [11] I. DAUBECHIES, M. DEFRISE et C. D. MOL, « An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint », *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. LVII, p. 1413–1457, 2004.
- [12] E. CANDÈS, « Compressive sampling », *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 2006.
- [13] D. L. DONOHO, « Compressed sensing », *Preprint*, 2004.
- [14] D. TAKHAR, J. LASKA, M. WAKIN, M. DUARTE, D. BARON, S. SARVOTHAM, K. KELLY et R. BARANIUK, « A new compressive imaging camera architecture using optical-domain compression », *Proc. of Computational Imaging IV at SPIE Electronic Imaging, San Jose, California*, 2006.
- [15] M. LUSTIG, D. DONOHO et J. M. PAULY, « Sparse mri : The application of compressed sensing for rapid mr imaging », *Submitted to Magnetic Resonance in Medicine as a Full Paper*, 2007.
- [16] R. A. KRUGER, P. LIU, Y. R. FANG et C. R. APPLIEDOM, « Photoacoustic ultrasound(paus)-reconstruction tomography », *Med Phys*, vol. 22(10), p. 1605–1609, 1995.
- [17] J. RIPOLL et V. NTZIACHRISTOS, « Quantitative point source photoacoustic inversion formulas for scattering and absorbing media », *Physical Review*, vol. E71, p. 031912, 2005.
- [18] J.-J. GREFFET et V. MICHAU, *Physique II. Notes de cours de l'École Centrale Paris*, 2005.

- [19] M. XU et L. V. WANG, « Universal back-projection algorithm for photoacoustic computed tomography », *Physical Review*, vol. E71 016706, 2005.
- [20] M. XU et L. V. WANG, « Time-domain reconstruction for thermoacoustic tomography in a spherical geometry », *IEEE transactions on medical imaging*, vol. 21, p. 814–822, 2002.
- [21] M. COURSOLLE, « Développement d'un appareil d'imagerie photo-acoustique pour les protéines fluorescentes », *Mémoire présenté à l'École de Technologie supérieure*, 2007.
- [22] K. H. SONG, G. STOICA et L. V. WANG, « In vivo three-dimensional photoacoustic tomography of a whole mouse head », *Optics Letters*, vol. 31, p. 2453–2455, 2006.
- [23] Y. XU et L. V. WANG, « Rhesus monkey brain imaging through intact skull with thermoacoustic tomography », *IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 53(3), p. 542–548, 2006.
- [24] L. V. WANG, S. L. JACQUES et L. ZHENG, « Mcml - monte carlo modeling of light transport in multi-layered tissues », *Computer methods and programs in biomedecine*, vol. 47, p. 131–146, 1995.
- [25] C. BT, A. SR, K. KÖSTLI et P. BEARD, « Quantitative photoacoustic imaging : fitting a model of light transport to the initial pressure distribution », *Proc. SPIE*, vol. 5697, p. 49–55, 2005.
- [26] K. P. KOSTLI, M. FRENZ, H. BEBIE et H. P. WEBER, « Temporal backward projection of optoacoustic pressure transients using fourier transform methods », *Physics in medecine and biology*, vol. 46, p. 1863–1871, 2001.
- [27] K. P. KOSTLI et P. C. BEARD, « Two-dimensionnal photoacoustic imaging by

use of fourier-transform image reconstruction and a detector with an anisotropic response », *Applied Optics*, vol. 42(10), p. 1899–1908, 2003.

- [28] J. LAUFER, D. DELPY, C. ELWELL et P. C. BEARD, « Quantitative spatially resolved measurements of tissue chromophore concentrations using photoacoustic spectroscopy : application to the measurement of blood oxygenation and haemoglobin concentration », *Physics in Medecine and Biology*, vol. 52, p. 141–167, 2007.
- [29] B. T. COX et P. C. BEARD, « The frequency-dependant directivity of a planar fabry-perot polymer film ultrasound sensor », *IEEE Transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, vol. 54(2), p. 394–404, 2007.
- [30] M. LAMONT et P. C. BEARD, « 2d imaging of ultrasound fields using ccd array to map output of fabry-perot polymer film sensor », *Electronics Letters*, vol. 42(3), 2006.
- [31] M.-L. LI, H. F. ZHANG, K. MASLOV, G. STOICA et L. WANG, « Improved in-vivo photoacoustic microscopy based on a virtual detector concept », *Optics Letters*, vol. 31(4), p. 474–476, 2006.
- [32] H. F. ZHANG, K. MASLOV, M. SIVARAMAKRISHNAN, G. STOICA et L. V. WANG, « Imaging of hemoglobin oxygen saturation variations in single vessels in vivo using photoacoustic microscopy », *Applied Physics Letters*, vol. 90, 2007.
- [33] H. F. ZHANG, K. MASLOV et L. V. WANG, « In vivo imaging of subcutaneous structures using functional photoacoustic microscopy », *Nature Protocols*, vol. 2, p. 797–804, 2007.
- [34] S. MALLAT, *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 1998.

- [35] D. DONOHO et I. JOHNSTONE, « Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage », *Biometrika*, vol. 81, p. 425–255, 1994.
- [36] G. WELLAND, *Beyond Wavelets*. Studies in Computational Mathematics 10, Academic Press, 2003.
- [37] E. J. CANDÉS, « Ridgelets and their derivatives : Representation of images with edges », *Curves and Surfaces*, 1999.
- [38] V. VELISAVLJEVIC, B. BEFERULL-LOZAN, M. VETTERLI et P. L. DRAGOTTI, « Ridgelets and their derivatives : Representation of images with edges », *IEEE Trans. on Image Proc*, 2005.
- [39] D. DONOHO, « Wedgelets : Nearly-minimax estimation of edges », *Ann. Statist.*, vol. 27, p. 859–897, 1999.
- [40] E. J. CANDÉS et D. L. DONOHO, « Continuous curvelet transform : I. resolution of the wavefront set », *preprint*, 2003.
- [41] E. L. PENNEC et S. MALLAT, « Sparse geometric image representations with bandelets », *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 14, p. 423–438, 2005.
- [42] R. M. WILLETT et R. D. NOWAK, « Platelets : A multiscale approach for recovering edges and surfaces in photon-limited medical imaging », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2001.
- [43] « [www.curvelets.org](http://www.curvelets.org) »,
- [44] E. CANDÉS, L. DEMANET, D. DONOHO et L. YING, « Fast discrete curvelet transforms », *preprint*, 2005.
- [45] A. TARANTOLA, *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. SIAM, 2005.

- [46] V. IVANOV, V. VASIN et V. P. TANANA, *Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications*. Springer, 2005.
- [47] J. KAIPIO et E. SOMERSALO, *Statistical and Computational Inverse Problems*. VSP, 2002.
- [48] D. SORENSEN et D. GIANOLA, *Likelihood, Bayesian, and MCMC Methods in Quantitative Genomics*. Frontiers in Applied Mathematics, SIAM, 2002.
- [49] P. LAURENT-GENGOUX, *Optimisation*. Notes de cours de l'École Centrale Paris, 2005.
- [50] C. R. VOGEL, *Computational Methods for Inverse Problems*. Statistics for Biology and Health, Springer, 2002.
- [51] D. DONOHO, « Nonlinear solution of linear inverse problems by wavelet-vaguelette decomposition », *Applied and Computational Harmonic Analysis* 2, 1995.
- [52] E. CANDÈS et D. DONOHO, « Recovering edges in ill-posed inverse problem : Optimality of curvelets frames », *Technical Report, Department of Statistics, Stanford University*, 2000.
- [53] D. L. DONOHO, « For most large underdetermined systems of equations, the minimal  $\ell_1$ -norm near solution approximates the sparsest near-solution », *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 59(6), p. 797–829, 2006.
- [54] BOYD et VANDENBERGHE, *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [55] A. ARBEL, *Exploring Interior-Point Linear Programming*. MIT press, 1993.
- [56] J. IDIER, « Convex half-quadratic criteria and interacting auxiliary variables for image restoration », *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 10, 2001.

- [57] D. L. DONOHO et Y. TSAIG, « Fast solution of  $\ell_1$ -norm minimization problems when the solution may be sparse », *Preprint*, 2006.
- [58] M. R. OSBORNE, B. PRESNELL et B. A. TURLACH, « On the lasso and its dual », *Journal of Computational and Graphical Statistics*, vol. 9, p. 319–337, 2000.
- [59] E. CANDES, J. ROMBERG et T. TAO, « Robust uncertainty principles : Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. », *IEEE Transactions on Information Theory*, 2004.
- [60] E. CANDES et J. ROMBERG, «  $\ell_1$ -magic : Recovery of sparse signal via convex programming », *Preprint*, 2005.
- [61] E. CANDES et T. TAO, « Near-optimal signal recovery from random projections and universal encoding strategies. », *IEEE Transactions on Information Theory*, 2004.
- [62] E. CANDES et J. ROMBERG, « Practical signal recovery from random projections. », *Wavelet Applications in Signal and Image Processing XI Proc. SPIE Conf. 5914*, 2004.
- [63] E. CANDES et T. TAO, « Decoding by linear programming. », *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 51, p. 4203–4215, 2004.
- [64] E. CANDES, J. ROMBERG et T. TAO, « Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements », *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 59, p. 1207–1223, 2006.
- [65] J. L. STARCK, D. L. DONOHO et E. CANDES, « Very high quality image restoration », *Proc. SPIE*, vol. 4478, 2001.
- [66] Y. FISHER, *Fractal Image Compression*. Springer Verlag, 1995.

- [67] G. AHMAD, D. BROOKS, G. MARATOS et R. MACLEOD, « Joint energy and laplacian regularization in the inverse problem of electrocardiography », *IEEE Bioengineering Conference*, vol. 52, p. 59–62, 1994.
- [68] D. FELDMANN, « Resolution of two-dimensionnal currents in superconductors from a two-dimensional magnetic field measurement by the method of regularization », *Physical Review B*, vol. 69, 2004.
- [69] M. HANKE et J. G. NAGY, « Restoration of atmospherically blurred images by symmetric indefinite conjugate gradient techniques », *Inverse Problem*, vol. 12, p. 157–173, 1996.
- [70] C. VOGEL, « Non-convergence of the l-curve regularization parameter selection method », *Inverse Problems*, vol. 12, p. 535–547, 1996.
- [71] M. HANKE, « Limitations of the l-curve method in ill-posed problems », *BIT Numerical Mathematics*, vol. 36(2), p. 287–301, 2005.
- [72] W. X., Y. XU, M. XU, Y. S., F. E. S. et W. L. V., « Photoacoustic tomography of biological tissues with high cross-section resolution : Reconstruction and experiment », *Physics in medecine*, vol. 29(12), p. 2799–2805, 2002.
- [73] M. XU et L. WANG, « Time-domain reconstruction for thermoacoustic tomography in a spherical geometry », *IEEE transactions on medical imaging*, vol. 21(7), p. 814–822, 2002.
- [74] G. DAVIS, S. MALLAT et M. AVELLANEDA, « Adaptive greedy approximations », *Journal of Constructive Approximation*, vol. 13, p. 57–98, 1997.
- [75] D. BARON, M. B. WAKIN, M. F. DUARTE, S. SARVOTHAM et R. G. BARANIUK, « Distributed compressed sensing », *Preprint*, 2005.
- [76] « [www.llmagic.org](http://www.llmagic.org) »,

- [77] B. EFRON, T. HASTIE, I. M. JOHNSTONE et R. TIBSHIRANI, « Least angle regression », *The Annals of Statistics*, vol. 32(2), p. 407–499, 2004.