

**Titre:** Analyse et reconstitution d'un alignement routier à partir de traces  
Title: GPS

**Auteur:** Sandrine Poteau  
Author:

**Date:** 2007

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Poteau, S. (2007). Analyse et reconstitution d'un alignement routier à partir de traces GPS [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
Citation: <https://publications.polymtl.ca/8101/>

## Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8101/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Karsten Baass  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

# **NOTE TO USERS**

This reproduction is the best copy available.

**UMI**<sup>®</sup>



UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ANALYSE ET RECONSTITUTION D'UN ALIGNEMENT ROUTIER À PARTIR DE  
TRACES GPS

SANDRINE POTEAU

DÉPARTEMENT DES GÉNIES CIVIL, GÉOLOGIQUE ET DES MINES  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE CIVIL)  
OCTOBRE 2007



Library and  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*  
ISBN: 978-0-494-36931-9

*Our file* *Notre référence*  
ISBN: 978-0-494-36931-9

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

\*\*  
Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

ANALYSE ET RECONSTITUTION D'UN ALIGNEMENT ROUTIER À PARTIR DE  
TRACES GPS

présenté par: POTEAU Sandrine

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées  
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

Mme MORENCY Catherine, Ph.D., président

M. BAASS Karsten, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. BARBER Patrick, M.Sc.A., membre

## **Remerciements**

En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de recherche, le professeur Karsten Baass, pour son aide précieuse tout au long de ce travail.

Je remercie également les étudiants du département de transport de l'Ecole Polytechnique de Montréal pour leur amitié et la bonne ambiance de travail.

Enfin, je remercie ma famille, mes amis et François pour leurs encouragements et leur soutien.

## Résumé

La connaissance des caractéristiques des alignements routiers est très importante pour les gestionnaires des réseaux routiers. Ces caractéristiques ont longtemps été obtenues par des relevés d'arpentage mais cela est long, fastidieux et coûteux. En effet, le réseau québécois compte plus de 20000 km de routes rurales à deux voies.

Désormais, avec le développement du GPS, il est possible d'envisager des méthodes plus rapides et moins onéreuses pour obtenir les caractéristiques des alignements routiers. Ainsi, le but de ce mémoire est de poursuivre les travaux amorcés par Vouland (2005) et corrigés par Jacquart (2005) et Durlut (2006) pour proposer un algorithme capable de reconstituer les caractéristiques des alignements routiers (tracé en plan et profil en long) à partir de relevés GPS faits sur le terrain.

Une approche théorique est développée dans un premier temps. Chaque point est alloué à une droite ou à une courbe et les caractéristiques des différentes droites et courbes sont alors calculées. Les cercles composés du tracé en plan et les paraboles composées du profil en long représentent une certaine difficulté dans la mesure où la tangente entre les courbes n'est pas connue. Une méthode pour obtenir leurs caractéristiques est alors proposée. Une fois tous les éléments du tracé connus, de nouvelles coordonnées sont générées par l'algorithme. Un programme est ensuite développé pour tester la théorie proposée et des données créées à partir d'éléments définis sont testées. L'avantage des données théoriques est que les résultats que l'algorithme doit fournir sont déjà connus. Cela permet de calibrer et de valider l'algorithme.

Ensuite, l'approche réelle se base sur les méthodes développées pour les tracés théoriques mais certaines différences sont à noter. Les données, qui sont des coordonnées GPS relevées sur le terrain environ tous les 20 mètres par un véhicule équipé d'un récepteur qui se déplace le long de l'axe central de la route doivent d'abord être filtrées. Puis, une valeur de sensibilité est ajoutée, des valeurs

aberrantes sont détectées, les éléments des cercles et des paraboles sont calculées par régression aux moindres carrés, la cohérence des données doit alors être vérifiée... Un algorithme est également développé et des données GPS fournies par le Ministère des Transports du Québec sont testées, qui permettent de valider l'algorithme.

Les caractéristiques des alignements routiers sont utiles pour constituer une base de données sur le réseau routier. Cette base de données pourra alors servir pour l'étude, par exemple, des niveaux de service, de la mise en place de la signalisation, des problèmes de dépassement.

## Abstract

The knowledge of the characteristics of road alignments is very important for roads network managers. These characteristics have been obtained by surveying for a long time, but these methods are long, tedious and expensive. In fact, the network in the province of Quebec counts more than 20000 km of two-lane rural roads.

Now, the development of the GPS is such that it is possible to expect the rise of faster and cheaper methods to obtain the characteristics of roads alignments. The goal of this paper is then to follow up the research led by Vouland (2005) and corrected by Jacquart (2005) and Durlut (2006) in order to provide an algorithm able to recreate the characteristics of horizontal and vertical alignments from GPS coordinates surveyed in the field.

First, a theoretical approach is developed. Each point is allocated to a straight line or a curve and the characteristics of these elements are calculated. Multiples circles and parabolas represent a difficulty because the tangents between the curves are not known. A method is therefore proposed in order to obtain their characteristics as well. Hence, as all the elements of the alignments are known, new coordinates can be computed. A VBA program is then developed to put into practice the theory and data created from known elements are tested. The advantage of these theoretical alignments is that the results the algorithm must provide are already available. Thereby, the algorithm can be calibrated and validated.

Then, a practical approach is developed, based on the theoretical approach. Some changes are however added. The GPS data are collected via a vehicle equipped with a GPS receiver which surveyed coordinates about every 20 meters along the central axis of roads. These data include therefore some errors linked to the GPS technology. For this reason a sensitivity value is added, outliers are detected, circular and parabolic paths are estimated via least squares regressions and the data consistency is checked. A program is also developed and tested with GPS data

provided by the Ministère des Transports du Québec, that enables the validation of the algorithm.

The features of road alignments are useful to establish a database with all the network roads. This database will be used to pursue studies on level of service, signalisation installation or passing problems for instance.

**Table des matières**

<b>REMERCIEMENTS .....</b>	<b>IV</b>
<b>RÉSUMÉ .....</b>	<b>V</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>VII</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES .....</b>	<b>IX</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX.....</b>	<b>XIV</b>
<b>LISTE DES FIGURES .....</b>	<b>XV</b>
<b>LISTES DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS.....</b>	<b>XXI</b>
<b>LISTE DES ANNEXES .....</b>	<b>XXII</b>
<b>CHAPITRE 1 : INTRODUCTION .....</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE 2 : REVUE DE LITTÉRATURE .....</b>	<b>4</b>
2.1.    Le tracé en plan.....	4
2.2.    Le profil en long .....	5
2.3.    Le tracé en plan et le profil en long .....	7
2.4.    Conclusion.....	8
<b>CHAPITRE 3 : DESCRIPTION DU RÉSEAU EXISTANT .....</b>	<b>9</b>
3.1.    Le réseau d'analyse .....	9
3.2.    Design des routes existantes.....	9
3.2.1.    Le tracé en plan.....	9
3.2.2.    Le profil en long .....	10
3.3.    Estimation des caractéristiques des alignements routiers.....	11

3.3.1. Les longueurs des courbes.....	12
3.3.2. Les rayons.....	13
3.3.3. Les déflexions .....	14
3.3.4. Les pentes.....	14
3.3.5. Conclusion.....	15
<b>CHAPITRE 4 : APPROCHE THÉORIQUE.....</b>	<b>16</b>
4.1. L'allocation des points .....	16
4.1.1. Indicateurs du tracé en plan .....	16
4.1.2. Cercles composés .....	20
4.1.3. Indicateurs du profil en long.....	25
4.1.4. Paraboles composées.....	28
4.1.5. Remarque.....	28
4.1.6. Conclusion.....	29
4.2. Les droites.....	29
4.2.1. Les régressions linéaires.....	29
4.2.2. A partir des droites .....	29
4.2.3. Cas particuliers : déflexions sans courbes.....	30
4.3. Les cercles .....	31
4.3.1. Caractéristiques générales .....	31
4.3.2. Le gisement $\Gamma_0$ .....	31
4.3.3. Cercles isolés .....	32
4.3.4. Cercles composés .....	34
4.4. Cas particuliers : courbes courtes.....	36
4.4.1. Traitement des courbes à deux points .....	36
4.4.2. Traitement des courbes à un point .....	38
4.5. Les paraboles .....	39
4.5.1. Caractéristiques générales .....	39
4.5.2. Les paraboles isolées .....	41
4.5.3. Les paraboles composées .....	42

4.6. Reconstitution de la trace .....	46
4.6.1. Principe .....	47
4.6.2. Reconstitution des droites .....	47
4.6.3. Reconstitution des cercles .....	47
4.6.4. Reconstitution des paraboles .....	49
4.6.5. Résultats .....	49
4.7. Les données .....	49
4.8. Le développement du programme .....	49
4.8.1. Langage utilisé .....	50
4.8.2. La structure de l'algorithme .....	50
4.9. Vérification des résultats .....	52
4.10. Application du programme .....	53
4.10.1. Tracé en plan .....	53
4.10.2. Tracé en plan composé de trois courbes consécutives .....	57
4.10.3. Profil en long .....	61
4.10.4. Profil en long composé de quatre paraboles successives .....	63
4.10.5. Conclusion .....	65
4.11. Conclusion .....	65
<b>CHAPITRE 5 : APPROCHE RÉELLE .....</b>	<b>66</b>
5.1. Différences entre réel et théorique .....	66
5.2. Les données .....	66
5.2.1. Relevé des données .....	66
5.2.2. Erreurs liées à l'utilisation du GPS .....	67
5.3. Le filtrage des données .....	67
5.3.1. Doublooms .....	68
5.3.2. Points consécutifs éloignés .....	68
5.3.3. Points trop rapprochés .....	69
5.3.4. Points mal positionnés .....	69

5.4. L'allocation .....	70
5.4.1. L'indicateur du tracé .....	70
5.4.2. La sensibilité.....	72
5.4.3. Détection des courbes courtes .....	73
5.4.4. Détection des cercles composés .....	74
5.4.5. Les paraboles composées.....	75
5.5. Les valeurs aberrantes .....	76
5.5.1. La détection des valeurs aberrantes .....	76
5.6. Les cercles .....	79
5.6.1. Caractéristiques des cercles réels composés .....	84
5.7. Les paraboles.....	86
5.7.1. Les paraboles isolées.....	86
5.8. Vérification de la cohérence des résultats.....	87
5.8.1. Vérification de l'alignement des PI et PVI .....	87
5.8.2. Vérification des positions des début et fin de courbes .....	89
5.8.3. Détection des chevauchements de courbes .....	90
5.9. Le développement du programme .....	93
5.9.1. Tracé en plan .....	93
5.9.2. Profil en long .....	95
5.10. Vérification des résultats .....	96
5.10.1. Superposition des résultats avec des photos aériennes.....	96
5.10.2. Calcul des erreurs.....	97
5.10.3. Calcul des erreurs sur les droites.....	98
5.10.4. Calcul des erreurs sur les cercles .....	98
5.10.5. Calcul des erreurs sur les paraboles .....	99
5.10.6. Calcul des erreurs pour les éléments .....	100
5.11. Application du programme .....	100
5.11.1. Route 112 – Tracé en plan.....	100
5.11.2. Route 222 – Tracé en plan.....	102

5.11.3.    Tracé en plan théorique : utilisation des erreurs.....	104
5.11.4.    Route 222 – Profil en long.....	110
5.11.5.    Route 220 - Profil en long .....	112
5.12.    Discussion sur la précision des résultats.....	113
5.13.    Conclusion .....	114
<b>CHAPITRE 6 : L'INTERFACE .....</b>	<b>115</b>
6.1.    Importation des données .....	115
6.2.    Choix des paramètres.....	116
6.3.    Affichage des résultats .....	118
<b>CHAPITRE 7 : APPLICATIONS .....</b>	<b>120</b>
7.1.    Recalculer une portion du tracé .....	120
7.1.1.    Principe .....	120
7.1.2.    Exemple .....	120
7.2.    Repositionnement éventuel de points.....	127
7.3.    Conclusion.....	128
<b>CHAPITRE 8 : CONCLUSION.....</b>	<b>129</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>131</b>
<b>ANNEXES .....</b>	<b>134</b>

## **Liste des annexes**

Annexe A : Rappels mathématiques .....	134
Annexe B : Rayons minimum et rayons souhaitables.....	154
Annexe C : Déviations séparant deux cercles consécutifs.....	157
Annexe D : Calcul des cercles théoriques .....	161
Annexe E : Calcul des paraboles théoriques.....	166
Annexe F : Différences de valeur de déflexion entre la longueur sur la courbe et sur la corde.....	174

## Chapitre 1 : Introduction

Les caractéristiques des alignements routiers sont importantes pour tout gestionnaire de réseaux. En effet, les études de dépassement, de niveaux de service, de signalisation, de simulation de circulation, d'études sur les accidents ou de cohérence du design des routes se basent sur ces données. Disposer de données complètes et fiables est donc nécessaire dans le travail de chaque gestionnaire.

Malheureusement ces données ne sont souvent plus disponibles étant donné l'âge du réseau et la grande quantité de documents qui n'ont pas été conservés. Cependant, des méthodes pour retrouver les caractéristiques des alignements routiers existent. Un arpenteur peut se rendre sur les lieux et mesurer les caractéristiques des routes. Néanmoins, cette méthode est longue, fastidieuse et coûteuse car le réseau routier québécois compte plus de 20000 km de routes à deux voies contigües.

Ainsi, avec le développement de technologies de plus en plus performantes, des méthodes plus rapides et automatiques pourraient voir le jour. Le GPS semble être un moyen particulièrement approprié pour obtenir les caractéristiques du réseau routier. En effet, il est possible d'obtenir des coordonnées géoréférencées le long des axes centraux des routes qui peuvent alors servir à obtenir des informations sur les alignements routiers.

L'outil GPS sera donc à la base de notre projet qui consistera à développer une méthode et à la mettre en application pour obtenir à partir de coordonnées GPS les caractéristiques des alignements routiers. Ces derniers seront reconstitués par des droites et des cercles pour le tracé en plan et des droites et des paraboles pour le profil en long. Ensuite, un programme facile d'utilisation avec une interface en français permettra de mettre en application les principes développés. Il sera destiné en priorité à l'usage du Ministère des Transports du Québec. C'est pourquoi tous les programmes utilisés devront être ceux utilisés par le Ministère.

Plusieurs auteurs se sont déjà intéressés à ce problème. Ils seront présentés dans la revue de littérature. Vouland (2005), Jacquart (2005) et Durlut (2006) en particulier ont déjà travaillé à la problématique de la reconstitution d'alignements routiers à partir de traces GPS. En effet, l'algorithme développé par Vouland a été amélioré en parties par Jacquart puis par Durlut. Les solutions qu'ils proposent, bien qu'efficaces, présentent néanmoins quelques insuffisances. Ce projet a donc pour but de reprendre puis d'améliorer les travaux existants.

Puis, une étude des caractéristiques du réseau existant sera conduite pour connaître les caractéristiques géométriques du réseau routier. Cela aura pour but d'avoir une idée précise des différentes situations que l'algorithme de reconstitution pourra avoir à traiter.

La recherche se divise ensuite en deux parties : la partie théorique et la partie réelle.

Dans un premier temps, une méthode de calcul sera développée de manière théorique pour trouver, à partir d'alignements de points, les caractéristiques des droites et des courbes qui les composent. Les caractéristiques des droites seront calculées par régression linéaire. Les éléments des cercles des tracés en plan seront obtenus à l'aide des coordonnées de points placés sur le cercle, de même pour les éléments des paraboles des profils en long. Une fois ces caractéristiques connues, une procédure sera développée pour recalculer des coordonnées à partir des éléments obtenus. Des données devront alors être produites pour pouvoir appliquer les théories développées. Elles seront créées à partir d'éléments définis à l'avance, ce qui présente l'avantage de connaître à l'avance les résultats qui devront être fournis. Ensuite, un programme sera développé afin de mettre en application le principe de reconstitution des alignements théoriques. Les données créées pourront alors être testées. Enfin, les résultats obtenus devront être vérifiés pour pouvoir accepter la méthode de calcul des éléments théoriques.

Dans un deuxième temps, la procédure de calcul sera adaptée pour des tracés réels. En effet, les tracés réels diffèrent des tracés théoriques dans la mesure où les données seront des coordonnées GPS qui comportent une certaine erreur liée à l'utilisation de cette technologie. Certains éléments devront alors être modifiés comme le filtrage préalable des données, l'introduction d'une valeur de sensibilité, la détection des valeurs aberrantes, l'utilisation de régressions aux moindres carrés pour l'obtention des éléments des cercles et des paraboles, la vérification de la cohérence des résultats et le calcul des erreurs. Les données utilisées seront celles recueillies par le Ministère des Transports du Québec. Elles seront étudiées à l'aide du programme développé pour les tracés théoriques adapté pour les tracés réels. Les résultats seront alors vérifiés à travers l'étude des erreurs et la superposition avec des photos aériennes. Puis, une discussion permettra de valider les résultats.

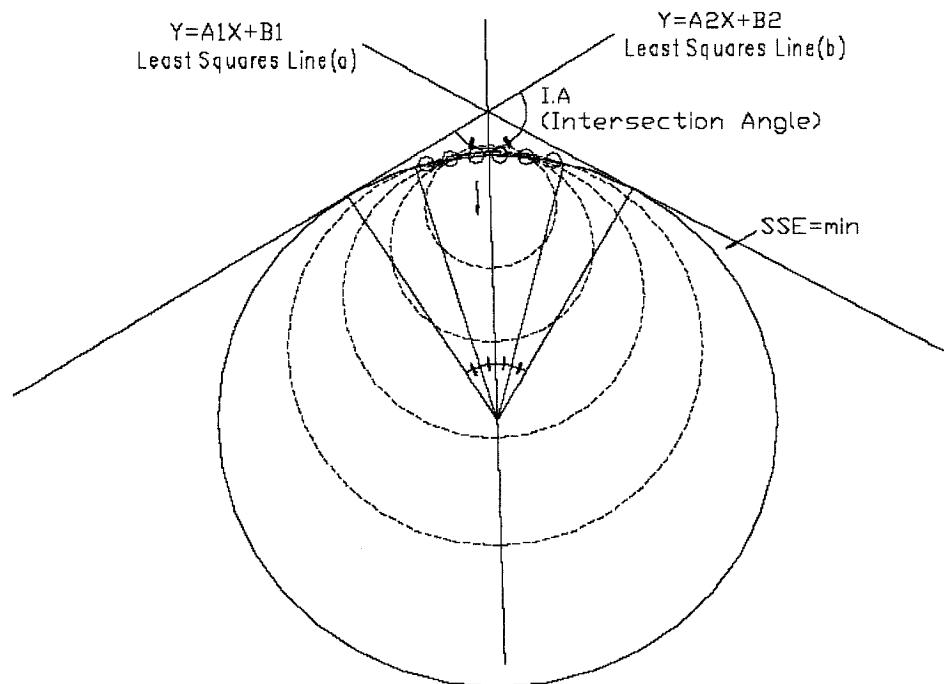
Ensuite, l'interface de l'algorithme sera présentée et finalement, quelques conseils pratiques seront développés.

## Chapitre 2 : Revue de littérature

La revue de littérature recense les auteurs qui se sont intéressés à la problématique de déterminer les caractéristiques des éléments routiers en se basant sur des coordonnées relevées par GPS.

### ***2.1. Le tracé en plan***

Lee, Seo et Heo (2001) désiraient trouver une manière d'acquérir l'alignement horizontal de routes coréennes où les accidents étaient nombreux. Pour cela, ils ont recueilli des données GPS tous les 5 mètres sur une route nationale près de Pusan. Ils ont ensuite déterminé les points qui appartenaient à des droites et ont fait des régressions linéaires aux moindres carrés sur ces points pour éviter que les erreurs négatives et positives ne s'annulent. Ils ont alors calculé les points d'intersection et les bissectrices entre les droites consécutives. Il restait alors à déterminer les courbes qui faisaient la transition entre les droites et les cercles. Pour cela, des régressions successives ont été faites sur les points qui appartenaient aux cercles en plaçant le centre du cercle au niveau du point d'intersection des droites puis en le déplaçant le long de la bissectrice, avec un pas de 10 cm (Figure 2.1).



**Figure 2.1 : Calcul du centre du cercle par itérations**

Lorsque la régression donnait une somme des carrés des erreurs la plus faible, le centre du cercle et le rayon étaient retenus. Les résultats trouvés étaient bons mais la méthode n'a été appliquée qu'à une seule route. Cette méthode ne sera pas retenue ici dans la mesure où les rayons trouvés pour les cercles ne sont pas forcément en tangence avec les droites avant et après les cercles.

## 2.2. Le profil en long

Plusieurs études ont été faites pour connaître les caractéristiques des profils en long de routes. Généralement, on obtient le profil en long d'une route visuellement en utilisant un tracé de la route et en essayant d'ajuster des droites et des paraboles sur le dessin. Néanmoins, cette méthode longue et fastidieuse offre des résultats peu précis. Easa (1999) a proposé une méthode analytique pour déterminer dans un premier temps les débuts et fins des paraboles du profil en long, puis de trouver par une analyse séquentielle, en déterminant des équations et des contraintes à

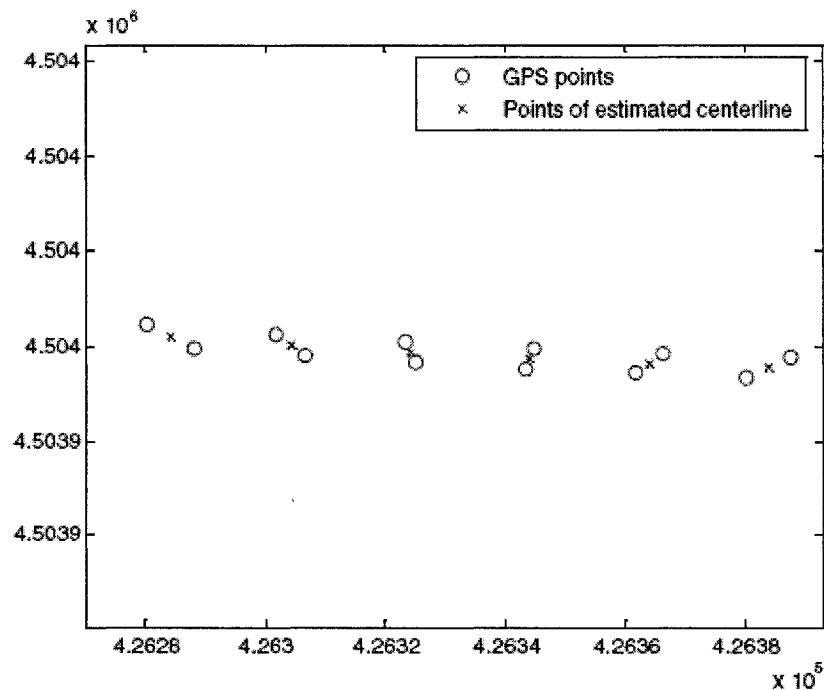
respecter, les lignes droites et les courbes qui s'adaptaient le mieux au tracé. L'objectif était de minimiser la somme des différences en valeur absolue entre les données observées sur le profil et les courbes verticales calculées tout en respectant certaines contraintes liées aux caractéristiques géométriques des paraboles. Néanmoins, il a supposé que les points de débuts et fins de courbe étaient connus ou les a cherchés par itérations successives, ce qui peut être long dans le cas d'un tronçon de route qui comporte plusieurs paraboles.

Han (1999) désirait connaître les caractéristiques verticales de la route australienne longue de 3010 km sur laquelle a lieu tous les 3 ans la compétition mondiale de voiture solaire, en vue d'améliorer la stratégie à adopter pour la course. Les données ont été relevées par GPS à l'aide de véhicules de mesure et de récepteurs puis elles ont été traitées par un nouvel algorithme du filtre de Kalmann pour déterminer les caractéristiques de la route. Cette méthode ne s'applique pourtant pas dans notre cas car la méthode de relevé des données est différente de celle définie dans le cadre de la problématique.

Ben-Arieh (2004) souhaitait utiliser les nombreuses données GPS d'autoroutes relevées par le département de transport du Kansas. Il a proposé une méthode de filtrage des données puis cherché une spline appropriée à l'autoroute. Les résultats obtenus sont bons. Pourtant, la reconstitution des courbes à l'aide de splines ne correspond pas à l'objectif fixé pour ce projet qui consiste à rechercher les éléments géométriques utilisés pour faire le design de la route, c'est-à-dire des paraboles.

Castro (2006) a étudié la cohérence du design des routes, qu'il définit comme étant la relation entre les caractéristiques géométriques d'une autoroute et celles que le conducteur s'attend à rencontrer le long de cette route. Pour cela, il désirait connaître les caractéristiques géométriques des autoroutes et a repris l'idée développée par Ben-Arieh. Il a fait des relevés GPS dans les deux sens de la route puis a recherché, grâce à un algorithme d'interpolation, les points de chaque passage les plus proches (Figure 2.2). Il a alors calculé les coordonnées des points situés entre les points de

chaque côté de la route pour obtenir des points GPS qui correspondaient à l'axe central de la route.



**Figure 2.2 : Estimation des points de l'axe central de la route**

Ensuite, il a estimé l'alignement routier à l'aide de splines lissées.

Remarque : Castro définit une spline comme suit : L'intervalle  $[a, b]$  considéré est divisé en  $m$  sous-intervalles. Une fonction spline de degré  $n$  est définie si, pour chaque sous-intervalle, il existe un polynôme de degré  $n$  continu, dérivable et sa dérivée de degré  $n-1$  est continue sur tout l'intervalle  $[a, b]$ .

### **2.3. Le tracé en plan et le profil en long**

Vouland (2005) s'est intéressé à la reconstitution des éléments géométriques de tracés en plan et de profils en long à partir de coordonnées GPS relevées le long de la route. Il a développé des bases théoriques pour séparer les points selon qu'ils appartiennent à des droites ou à des courbes puis a reconstitué les caractéristiques

des éléments par régressions aux moindres carrés. L'algorithme produit souvent de bons résultats mais n'est malheureusement pas totalement fiable.

Jacquart (2005) a repris le travail de Vouland (2005) pour en améliorer certains aspects, notamment la clarté de la programmation et la convergence des régressions sur les points appartenant aux cercles et aux paraboles.

Durlut (2006) a finalement repris le travail de Jacquart (2005) et y a ajouté certains aspects dont la reconstitution des alignements à l'aide des caractéristiques fournies par l'algorithme, le calcul des erreurs entre les données et les points reconstitués ainsi que l'utilisation des erreurs pour déceler la présence de courbes composées.

#### **2.4. Conclusion**

Plusieurs travaux ont déjà été réalisés quant à la recherche de moyens pour reconstituer les caractéristiques d'alignements routiers. Les travaux de Vouland (2005), Jacquart (2005) et Durlut (2006) posent des bases solides au projet de reconstitution des alignements routiers. Néanmoins, il reste certains points à améliorer. Une approche théorique peut être développée pour poser des bases solides pour l'approche réelle. La détection des courbes composées peut avoir lieu pendant l'allocation des points à des cercles et à des droites au lieu d'avoir lieu à la fin de la reconstitution. Ensuite, la reconstitution appliquée à des coordonnées GPS peut être améliorée en détectant les valeurs aberrantes, en filtrant les données GPS avant leur utilisation, en ajoutant des procédures pour essayer de corriger certaines erreurs de reconstitution.

## Chapitre 3 : Description du réseau existant

Aujourd’hui, un tracé en plan comporte une succession de lignes droites, de spirales et de cercles et un profil en long comporte une succession de lignes droites et de paraboles. Or il est possible que le réseau existant ne soit pas exactement constitué des mêmes éléments. C’est pourquoi ce chapitre vise à mettre en évidence les différences qui existent entre le design du réseau existant et un design actuel dans le but de connaître les situations que l’algorithme aura à résoudre.

### ***3.1. Le réseau d’analyse***

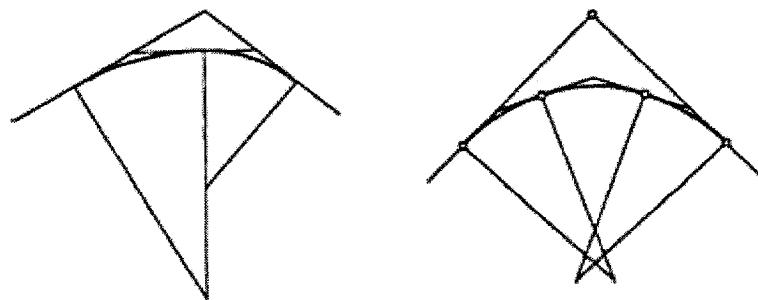
Le réseau d’analyse considéré est l’ensemble des routes rurales à deux voies. Aucune route locale ou urbaine n’est ici prise en compte.

### ***3.2. Design des routes existantes***

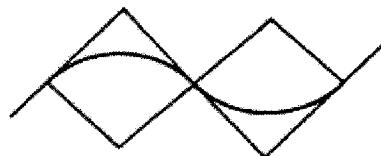
#### ***3.2.1. Le tracé en plan***

Le design des routes existantes est souvent différent de celui des routes modernes à cause de l’âge du réseau. Aujourd’hui, les normes imposent certaines contraintes de construction qui n’existaient pas à l’époque. Les spirales sont communément utilisées pour le tracé en plan car elles permettent « une transition en douceur entre un alignement droit et une courbe circulaire et [permettent] ainsi au conducteur de suivre un trajet naturel. » (AASHTO, 2004). Elles facilitent également la transition du dévers. Néanmoins, au début de la construction routière, les courbes de transition n’étaient pas utilisées, les transitions étant faites à l’aide de plusieurs courbes successives. Ainsi, au Québec, les tracés ne comportent pas de courbes de transition puisqu’ils ont été conçus au début de l’époque de construction routière et il est rare de voir un alignement être changé car cela occasionne beaucoup de coûts. C’est pourquoi l’algorithme de reconstitution ne prend pas en compte les spirales.

Par contre, l'algorithme doit considérer les courbes composées de plusieurs rayons. Une courbe composée consiste en deux ou plus courbes qui ont des déflexions de même sens (Figure 3.1) ou non (Figure 3.2) et sont tangentes les unes aux autres.



**Figure 3.1 : Courbes à deux et trois rayons successifs dans le même sens (source : Baass, Notes de cours (2006))**



**Figure 3.2 : Courbes à deux rayons de sens opposé**

Leur utilisation est délicate dans la mesure où le design de la route doit être sécuritaire pour l'usager. Les courbes ne doivent être ni trop courtes pour qu'il n'y ait pas de grand changement de vitesse, ni trompeuses pour ne pas induire le conducteur en erreur sur l'importance de la courbure (AASHTO, 2004).

### 3.2.2. Le profil en long

Dans le cas du profil en long, la norme (MTQ, 1995b) prescrit les pentes qui devraient être appliquées le long du tracé (Tableau 3.1). La pente s'exprime en pourcentage. Elle dépend du terrain sur lequel est construite la route. En effet, en terrain vallonnés, les pentes sont douces alors qu'en terrain montagneux, les pentes sont beaucoup plus raides.

**Tableau 3.1 : Pentes selon les classes de routes**

Classe de routes	Pentes	
	Souhaitable	Maximale
Autoroute Ascendante	3%	5%
Autoroute Descendante	5%	7%
Route nationale en milieu rural	4%	7%
Route régionale en milieu rural	4%	7%
Route locale et collectrice	4%	10%

Le pourcentage de pente souhaitable est celui qui ne modifie pas le comportement de tous les véhicules. En effet, la valeur des pentes est limitée par les véhicules lourds. Ainsi, si le pourcentage de pente maximale est atteint ou dépassé, les véhicules lourds vont ralentir et diminuer la capacité de la route. Néanmoins, la valeur de ces pentes n'a qu'un titre indicatif puisque selon la topographie du terrain, les pentes peuvent être plus raides et dans certains cas, des voies auxiliaires pour véhicules lents permettent aux véhicules lents de ne pas gêner la circulation. De plus, sur les routes rurales existantes, ces normes ne sont peut être pas respectées.

### ***3.3. Estimation des caractéristiques des alignements routiers***

L'inventaire Capacité-Courbes-Pentes des routes du Québec (MTQ, 1995a) recense 26154 courbes différentes relevées sur les routes rurales du Québec et plus de 65000 pentes. Les courbes et les pentes recensées dans cet inventaire seront celles que l'algorithme aura à reconstituer. L'étude des courbes qui comprennent les angles de déflexion, les longueurs et les rayons et des pentes permet donc d'avoir un aperçu du type d'éléments que l'algorithme aura à traiter. Néanmoins, l'inventaire Capacité-Courbes-Pentes présente des données peu précises, c'est pourquoi cette analyse permet uniquement d'obtenir des ordres de grandeur.

### 3.3.1.Les longueurs des courbes

Connaître la longueur des courbes permet de savoir combien de points GPS seront possiblement placés le long des courbes selon la distance qui sépare les points. En effet, une courbe longue comportera de nombreux points alors qu'au contraire, une courbe courte en comportera très peu. Il est alors utile de connaître les longueurs possibles des courbes surtout si elles sont courtes car leur détection sera plus difficile si peu de points GPS les composent. L'histogramme de fréquence des longueurs des 26154 courbes est présenté ci-dessous (Figure 3.3) :

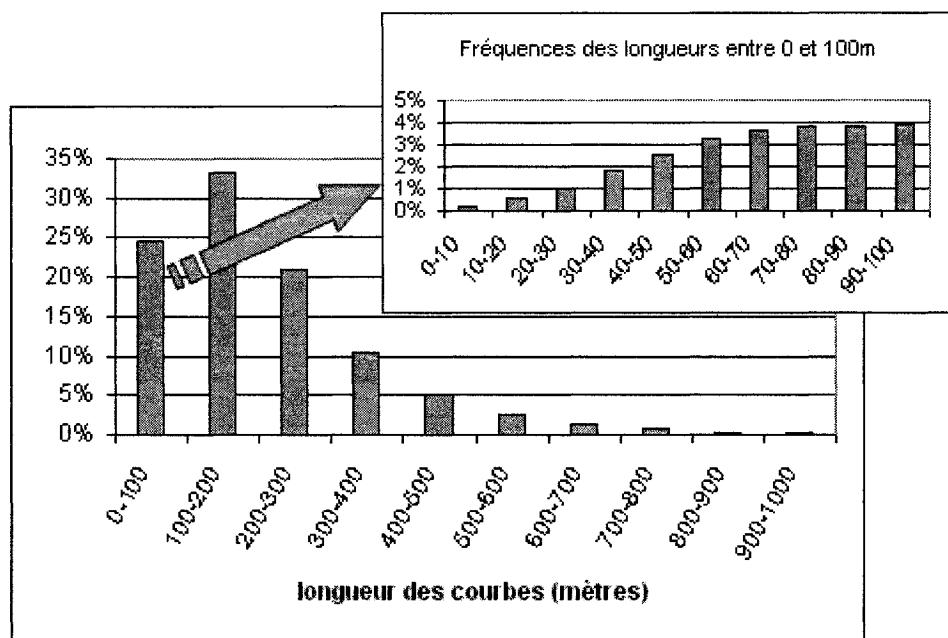


Figure 3.3 : Fréquence des longueurs de courbes

La plupart des courbes mesure entre 100 et 200 mètres mais près de 25% ont des longueurs inférieures à 100 mètres. De plus, 3.6% des courbes ont une longueur inférieure à 40 mètres. Elles peuvent alors ne contenir qu'un ou deux points GPS si le pas de mesure entre les points est approximativement de 20 mètres. Bien que des courbes de cette longueur ne soient pas les plus courantes, elles doivent tout de même être prises en compte dans l'élaboration de l'algorithme.

### 3.3.2. Les rayons

Cette partie permet de connaître les valeurs possibles que peuvent prendre les rayons. En effet, les grands rayons sont fréquents sur les routes dont le design est ancien ou récent, ce qui n'est pas le cas pour les petits rayons. Ainsi, les valeurs des rayons sont aujourd'hui limitées par les valeurs de rayons minimum et souhaitables (Annexe B : Rayons minimum et rayons souhaitables) mais ce n'était pas le cas lors de la construction des routes rurales. C'est pourquoi il peut être utile d'avoir un aperçu des valeurs des rayons. L'histogramme de fréquence des valeurs de rayons est présenté sur la Figure 3.4.

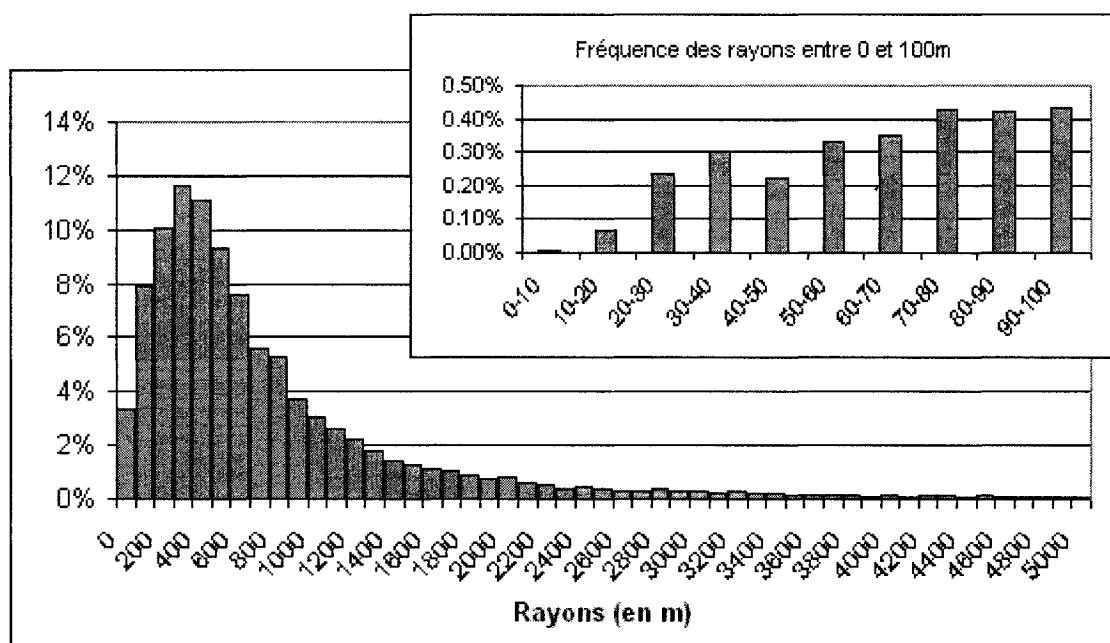


Figure 3.4 : Fréquence des rayons

La majorité des rayons est comprise entre 100 et 1000 mètres mais certains rayons peuvent prendre des valeurs beaucoup plus élevées, jusqu'à 26000 mètres ici. De plus, les rayons inférieurs à 100 mètres représentent 3.4% et certains ont même des valeurs entre 0 et 50 mètres. Ces rayons restent toutefois exceptionnels et sont sûrement associés à des virages dans des intersections.

### 3.3.3.Les déflexions

Les déflexions sont elles aussi importantes dans l'étude des courbes. Les valeurs des déflexions  $\Delta$  sont reliées aux valeurs des longueurs  $L$  des courbes et des rayons  $R$  par la relation :  $\Delta = \frac{180 \times L}{\pi \times R}$ .

Plus la défexion est grande, plus le changement de direction du tracé est grand. Par ailleurs, les déflexions inférieures à 0.5 degré ne nécessitent pas de courbes car le changement de direction est suffisamment petit pour que deux droites puissent se suivre sans cercle pour assurer leur transition (MTQ, 1995b).

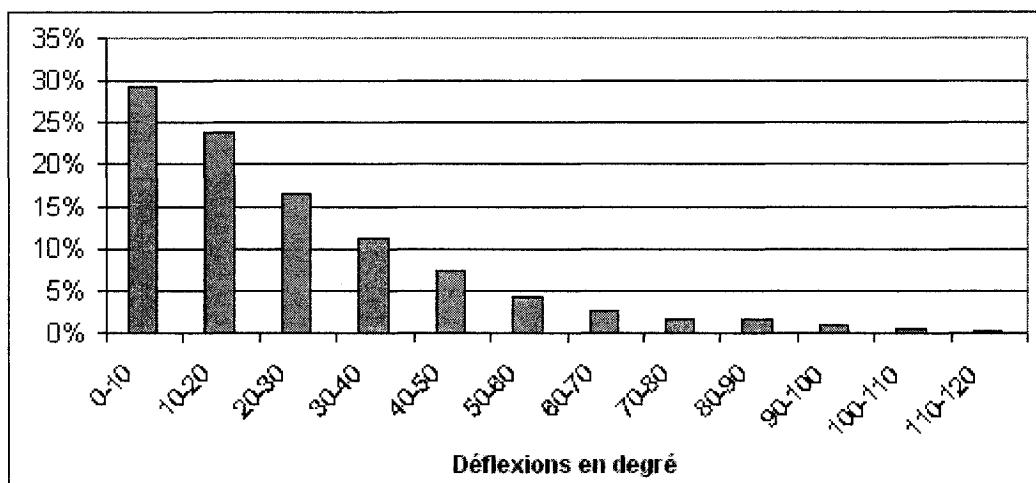


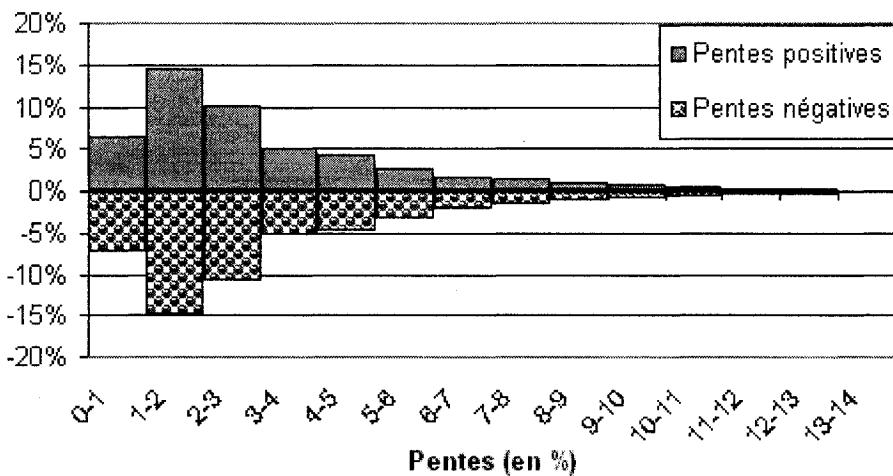
Figure 3.5 : Fréquence des déflexions

Les valeurs absolues des déflexions sont toutes comprises entre 0 et 180 degré, la majorité étant toutefois inférieure à 60° (92% des courbes). 1% des déflexions sont inférieures à 1°, les changements de direction sans courbes seront donc considérés par l'algorithme.

### 3.3.4.Les pentes

Le MTQ préconise que les pentes pour les routes rurales ne dépassent pas 7%. Or, comme pour les courbes, il est possible que les pentes sur les routes rurales existantes ne remplissent pas ces conditions. L'histogramme de fréquence des

valeurs des pentes (Figure 3.6) révèle que la plupart des pentes sont effectivement inférieures à 7% mais certaines pentes ont des valeurs plus élevées, jusqu'à 20%.



**Figure 3.6 : Fréquence des pentes**

### 3.3.5. Conclusion

Les courbes et les pentes existant sur le réseau québécois ont des valeurs qui excèdent parfois les normes prescrites par le MTQ. Cela est lié à l'âge du réseau qui a été construit avant que les conditions de design actuelles soient de rigueur. De plus, les données de l'inventaire Capacité-Courbes-Pentes peuvent comporter des erreurs liées à leur mode de collecte.

Cette étude permet néanmoins de mettre en évidence les caractéristiques des courbes et des pentes auxquels l'algorithme devra faire face.

## Chapitre 4 : Approche théorique

Cette partie présente la méthode pour reconstituer des alignements de manière théorique.

### 4.1. L'allocation des points

L'allocation des points consiste à définir pour chaque point s'il appartient à une droite ou à une courbe. Cette étape est très importante pour toute la suite de la procédure de calcul puisque c'est à partir des ensembles de points alloués à des droites ou à des courbes que l'on cherche les caractéristiques de ces éléments.

#### 4.1.1. Indicateurs du tracé en plan

Au départ, on ne dispose que d'une série de coordonnées GPS. A partir de ces données, il est possible de calculer la longueur entre les points, les gisements  $\gamma$  formés par les droites entre les points consécutifs puis les angles de déviation  $\delta$  entre ces droites consécutives.

Un gisement (noté  $\gamma$  pour toute la suite) est l'angle formé par la droite et une direction de référence qui est le Nord géographique (Figure 4.1). Le calcul des gisements est explicité en annexe (A.1 : Les gisements).

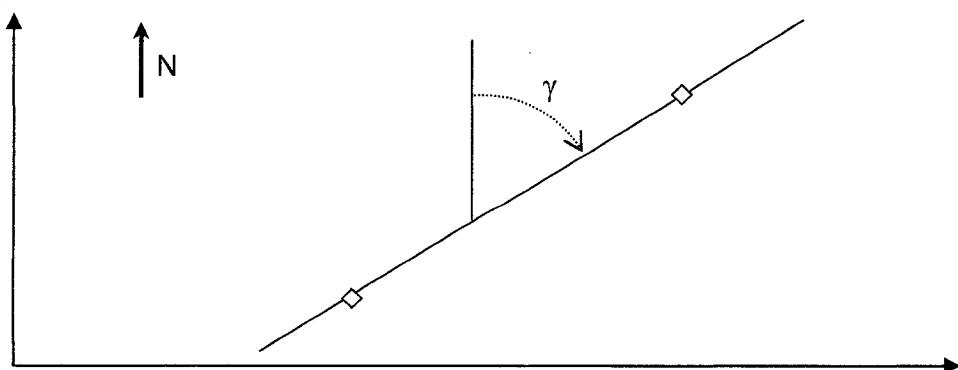


Figure 4.1 : Gisement d'une droite

Un angle de déviation (noté  $\delta$  pour toute la suite) est un angle compris entre  $-180^\circ$  et  $+180^\circ$  qui représente la différence entre deux gisements, dans le sens du chaînage. Un angle de déviation positif indique un virage vers la droite alors qu'un angle négatif indique un virage vers la gauche. Le calcul des angles de déviation, qui est directement lié à la valeur des deux gisements dont il représente la différence, est délicat car de nombreux cas sont possibles. Le calcul est présenté en annexe (A.2 : Les angles de déviation).

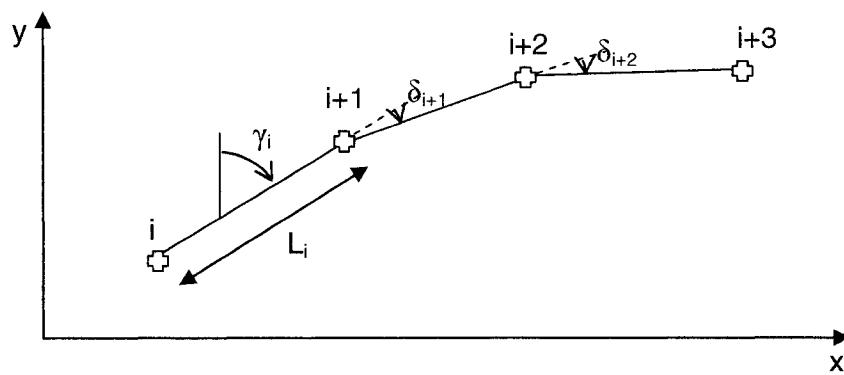
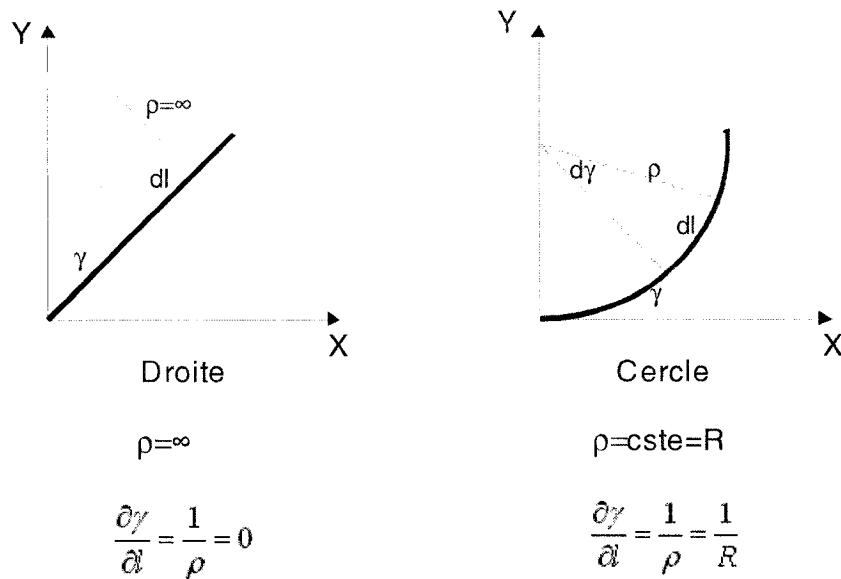


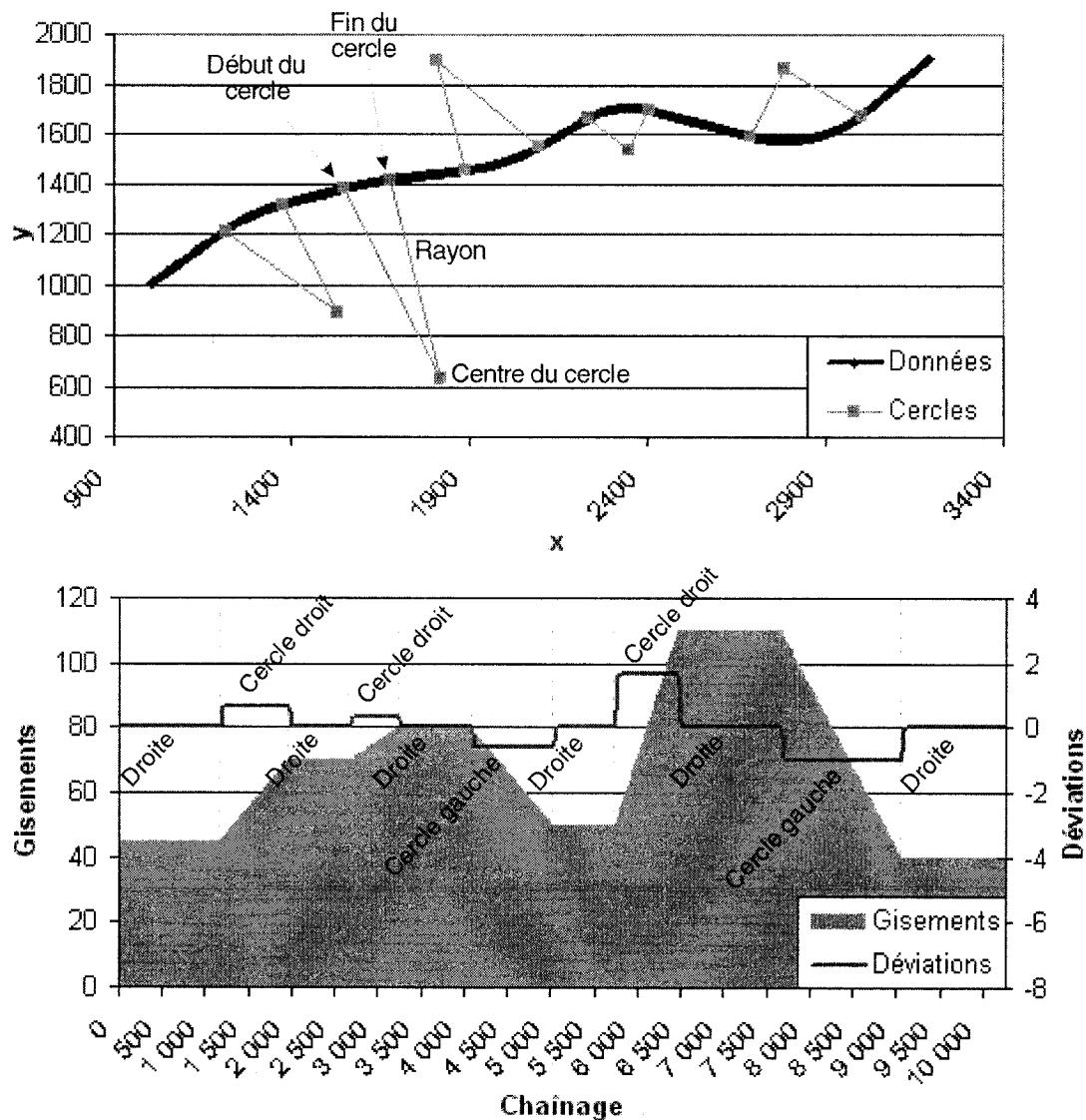
Figure 4.2 : Représentation des indicateurs du tracé en plan

Les valeurs des gisements et des angles de déviations fournissent des informations sur les points. En effet, pour une droite, la courbure est infinie alors que pour un cercle, le rayon de courbure a une valeur constante qui est le rayon. Si on considère un petit segment de longueur  $dl$ , la dérivée du gisement par rapport à la longueur est nulle pour une droite et vaut l'inverse du rayon pour un cercle (Figure 4.3).



**Figure 4.3 : Courbures dans le cas de droites et de cercles**

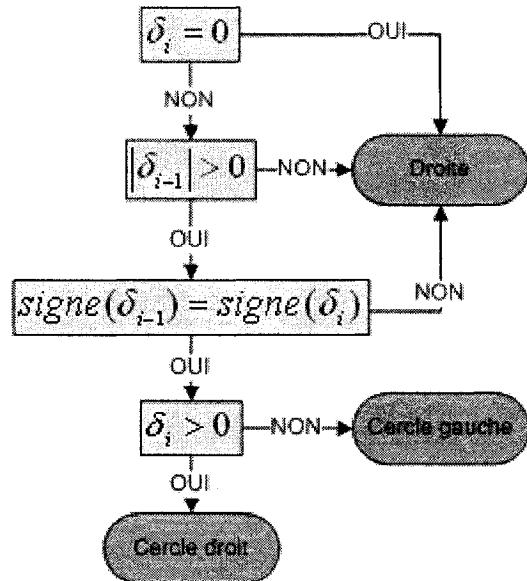
Ainsi, pour un tracé théorique, la représentation des valeurs des gisements en fonction du chaînage permet de mettre en évidence les droites qui sont caractérisées par une valeur de gisement constante et les cercles où les valeurs des gisements varient en fonction du chaînage (Figure 4.4). Ensuite, les valeurs des angles de déviations  $\frac{\partial \gamma}{\partial l}$  renseignent sur la courbure des cercles (Baass & Vouland, 2005). En effet, une valeur positive représente un cercle vers la droite (noté cercle droit) alors qu'une valeur négative représente un cercle vers la gauche (noté cercle gauche). De plus, la valeur des angles de déviation permet de connaître les rayons des cercles.



**Figure 4.4 : Valeurs des gisements et des angles de déviations pour un tracé en plan théorique**

Ainsi, la comparaison entre les valeurs des gisements et des angles de déviation pour des points consécutifs est un bon indicateur de l'appartenance d'un point à une droite ou à un cercle. Les angles de déviation sont donc retenus pour réaliser l'allocation des points. Un angle de déviation nul indique que le point appartient à une droite. Dans le cas contraire, le point appartient à un cercle et le signe de l'angle

indique s'il s'agit d'un cercle droit ou gauche. La Figure 4.5 illustre le principe général de l'allocation des points.



**Figure 4.5 : Principe d'allocation des points pour le tracé en plan**

L'allocation se fait dans le sens du chaînage puis dans le sens contraire et les résultats sont ensuite comparés pour fournir l'allocation finale.

#### 4.1.2. Cercles composés

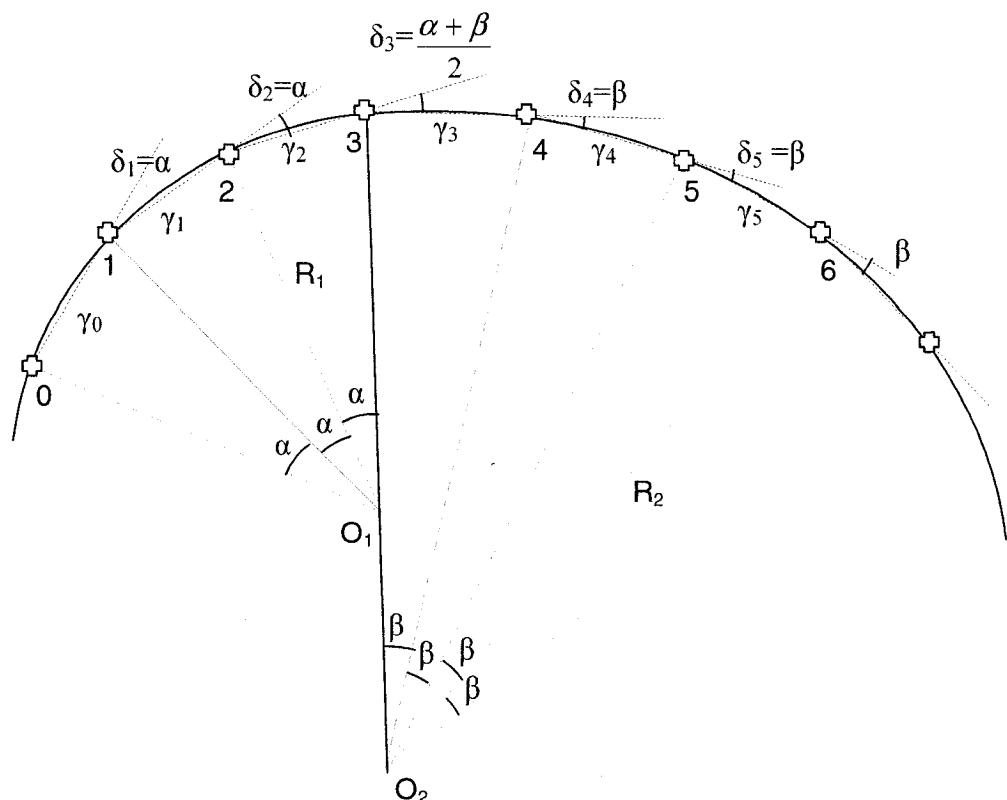
Le principe général de l'allocation des points permet de savoir pour chaque point s'il appartient à un cercle ou à une droite. Néanmoins, il ne permet pas de détecter les courbes composées. (Durlut, 2006) propose de détecter les courbes composées en analysant les erreurs, c'est-à-dire la distance entre les points et le cercle trouvé. En effet, une courbe composée de deux rayons différents et qui est traitée comme une courbe qui n'en compte qu'un seul révèle une distribution non aléatoire des erreurs. Malheureusement, cette méthode a l'inconvénient de ne détecter les courbes composées qu'à la fin de la reconstitution alors que l'allocation des points est la première étape de la reconstitution. De plus, cette méthode ne permet pas de trouver

précisément le point d'intersection des deux courbes. Il paraît donc avantageux de détecter les courbes composées à ce moment-ci, pendant l'allocation.

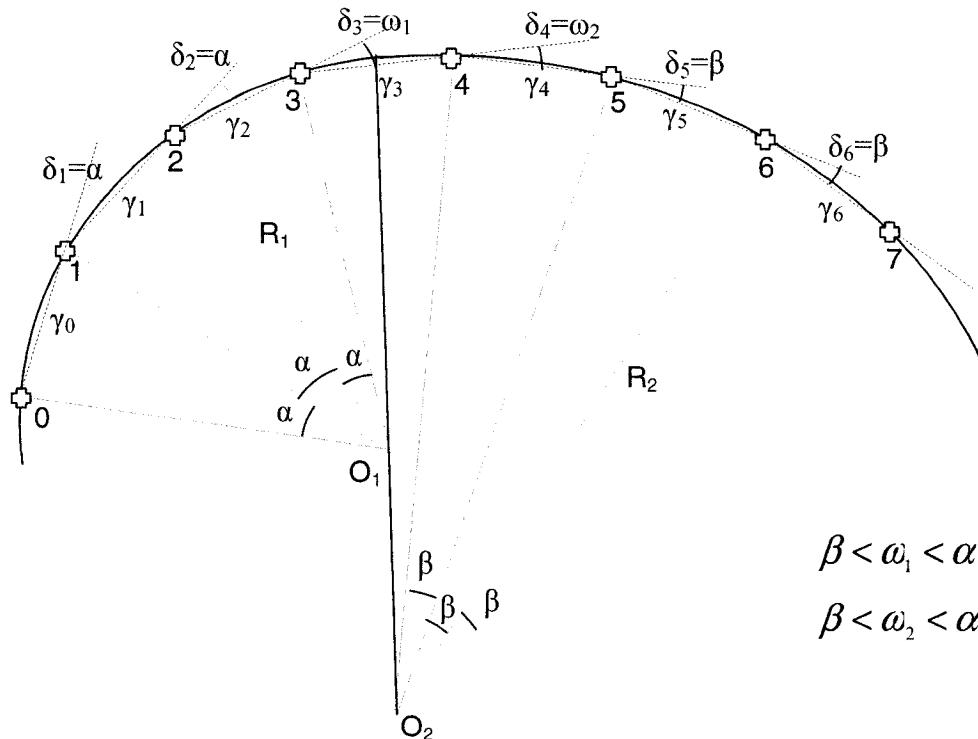
Dans le cas d'un tracé théorique, la détection des courbes à rayons multiples est facile puisque les angles de déviation entre les points consécutifs d'un même cercle sont les mêmes et deviennent différents lorsque l'on aborde le cercle suivant. Le principal problème réside toutefois dans la recherche du point commun aux deux cercles. Le passage d'un cercle à un autre entraîne une ou deux déviations dont les valeurs sont différentes de celles qui composent les deux courbes composées (voir détails en Annexe C : Déviations séparant deux cercles consécutifs). On distingue deux cas différents : le cas où un point est placé exactement entre les deux cercles et le cas où ce n'est pas le cas. Dans le premier cas, si l'angle de déviation entre les points du premier cercle est  $\alpha$  et  $\beta$  pour le deuxième cercle, l'angle de déviation pour

le point intermédiaire sera :  $\frac{\alpha + \beta}{2}$  (Figure 4.6). Dans le second cas, deux points de

transition existent pour passer du premier cercle au deuxième (Figure 4.7). La valeur de leur angle de déviation est comprise entre  $\alpha$  et  $\beta$ .



**Figure 4.6 : Valeurs des angles de déflexion dans le cas où un point est placé à l'intersection des deux cercles**



**Figure 4.7 : Valeurs des angles de déflexion dans le cas où il n'y a pas de point placé à l'intersection des deux cercles**

La méthode pour détecter les courbes composées se fait sur plusieurs points consécutifs. En effet, il est nécessaire dans un premier temps de détecter la présence d'une courbe puis, dans un second temps, les angles de déviation des points appartenant à cette courbe sont étudiés pour repérer éventuellement la présence d'une courbe composée. Les deux organigrammes suivants montrent la procédure pour détecter des courbes composées, selon qu'un point est placé exactement entre les deux courbes (Figure 4.8) ou non (Figure 4.9).

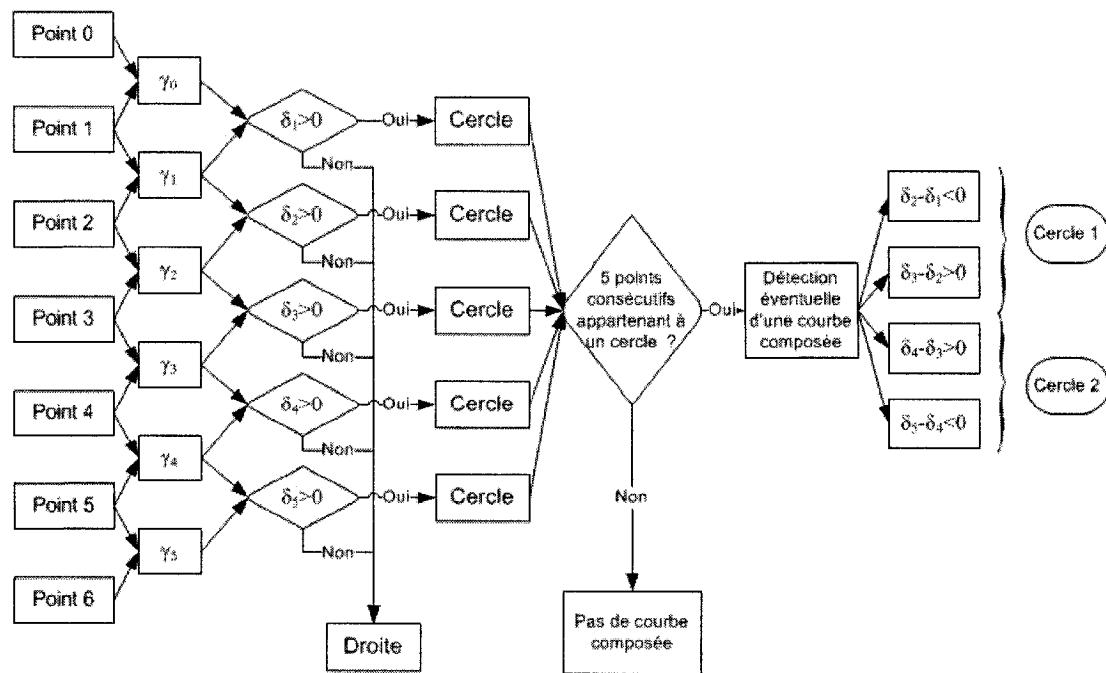
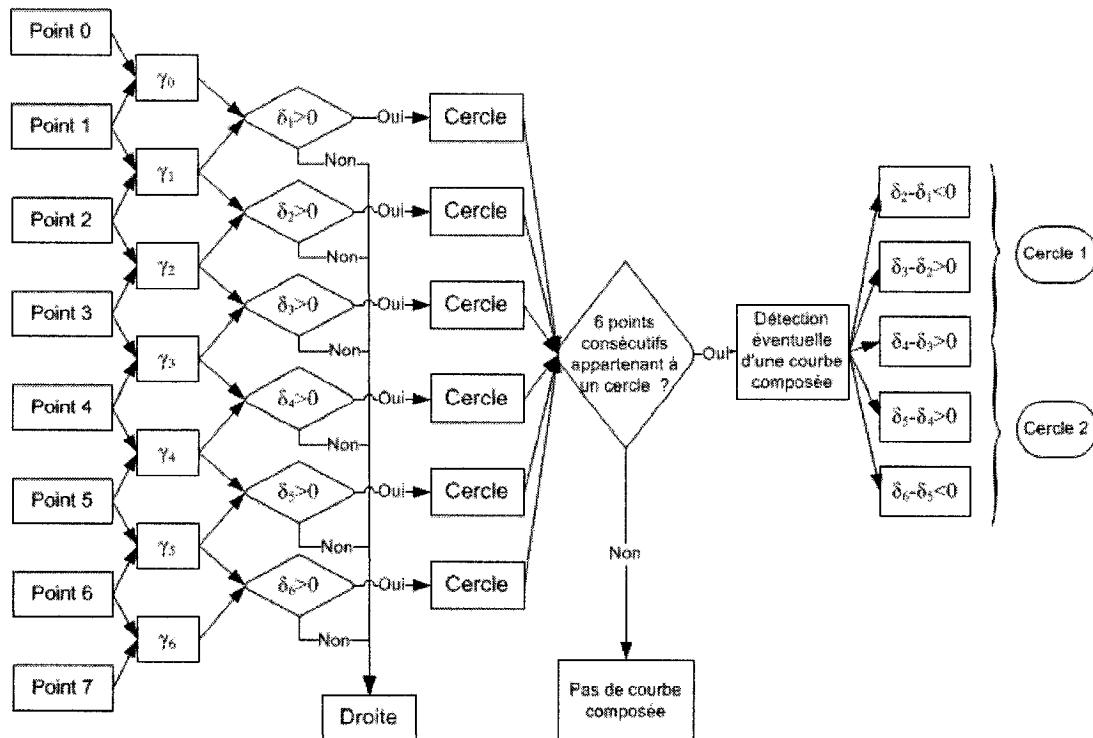


Figure 4.8 : Organigramme de détection des courbes composées, cas où un point est placé exactement entre les deux cercles

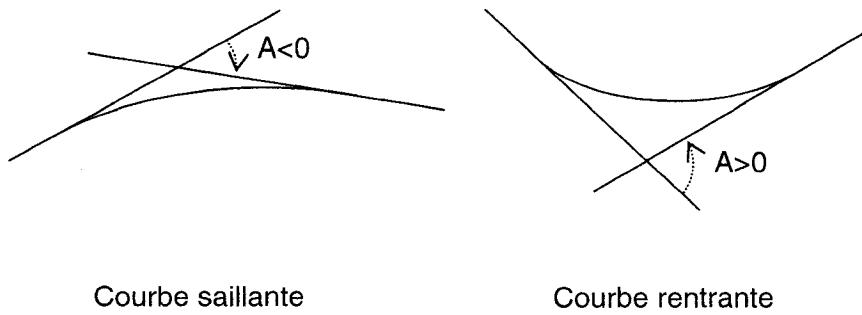


**Figure 4.9 : Organigramme de détection des courbes composées, cas où aucun point n'est placé exactement entre les deux cercles**

On détecte la présence de deux cercles consécutifs si les différences entre les deux premières et les deux dernières déviations angulaires considérées sont inférieures à la sensibilité et qu'une ou deux déviations entre les deux cercles possèdent des valeurs différentes. Les points suivants appartenant au deuxième cercle sont reconnus tant que la différence de déviation entre des points consécutifs est nulle.

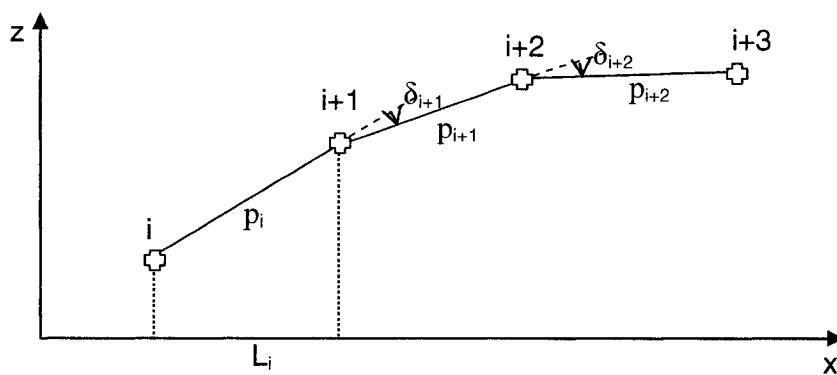
#### 4.1.3. Indicateurs du profil en long

Dans le cas du profil en long, les courbes verticales qui rattachent les pentes ne sont plus des cercles mais des paraboles. Elles peuvent être saillantes ou rentrantes (Figure 4.10). Les différences de pente sont notées A.



**Figure 4.10 : Exemple de courbes saillante et rentrante**

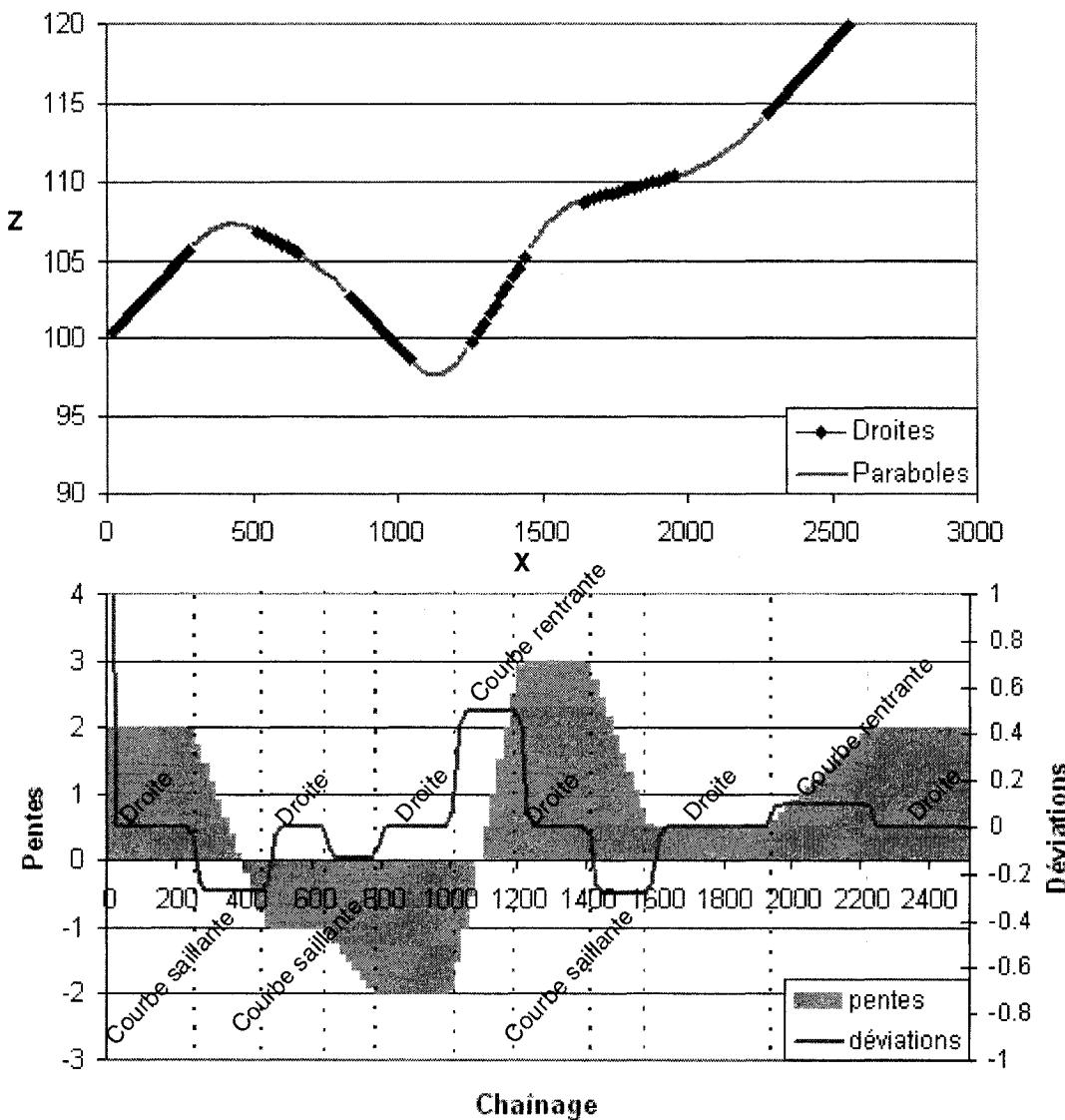
Certaines différences sont à noter par rapport au tracé en plan. La longueur entre les points n'est pas calculée comme la longueur entre deux points comme pour le tracé en plan mais comme une différence de chaînage qui est noté  $x$  ici. Ensuite, au lieu de calculer des gisements, ce sont les pentes qui sont calculées entre les points. Les angles de déviation pour le profil en long sont donc des différences de pente (Figure 4.11).



**Figure 4.11 : Représentation des indicateurs du profil en long**

Comme pour le tracé en plan, la représentation des pentes et des déviations en fonction du chaînage permet de se rendre compte que ces indicateurs fournissent des informations sur le tracé. Ainsi, des valeurs de pente constantes correspondent à une droite et des valeurs non constantes représentent des paraboles. De plus, la

comparaison des déviations révèle qu'une déviation positive représente une courbe rentrante et une déviation négative représente une courbe saillante (Figure 4.12).



**Figure 4.12 : Valeurs des pentes et des déviations pour un profil en long théorique**

Ainsi, les déviations entre les pentes représentent un bon indicateur pour le profil en long, comme pour le tracé en plan. Le principe de l'allocation est alors semblable à celui pour le tracé en plan (Figure 4.13).

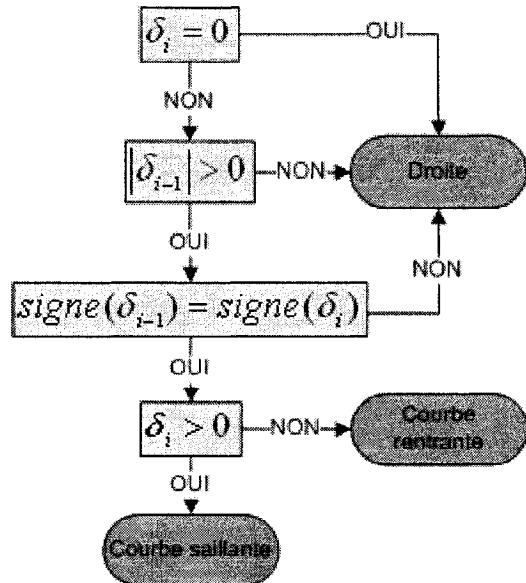


Figure 4.13 : Principe d'allocation pour le profil en long

L'allocation se fait dans le sens du chaînage puis dans le sens contraire et les résultats sont ensuite comparés pour fournir l'allocation finale.

#### 4.1.4. Paraboles composées

Le principe pour détecter les paraboles composées est semblable à celui pour détecter les cercles composés, à l'exception que ce ne sont plus les gisements qui sont calculés entre les points mais les pentes. Les différences entre les pentes permettent alors d'établir la présence de deux paraboles de la même manière que pour les cercles.

#### 4.1.5. Remarque

Les alignements commencent et finissent toujours par des droites car il n'est pas prévu par l'algorithme de calculer les caractéristiques des courbes sans droite avant ou après elles.

#### **4.1.6.Conclusion**

L'allocation est une étape importante pour tout le reste des calculs car elle permet de définir avec précision quels points appartiennent à des droites et quels points appartiennent à des courbes. A l'issue de cette étape, nous disposons d'une suite de courbes et de droites qui contiennent chacune certains points de l'alignement. La recherche des caractéristiques des éléments peut donc commencer.

### **4.2.Les droites**

Les points alloués à des droites sont traités en premier. La démarche est identique pour le tracé en plan et le profil en long.

#### **4.2.1.Les régressions linéaires**

Vouland (2005) propose de déterminer les caractéristiques des droites par régression linéaire aux moindres carrés sur les points alloués à des droites. Cette méthode est retenue. Elle permet d'obtenir les coefficients des équations des droites ( $y=ax+b$ ).

#### **4.2.2.A partir des droites**

Maintenant que l'on connaît les équations des droites, on peut en déduire certaines caractéristiques pour les alignements horizontaux et verticaux. On peut d'abord connaître les gisements des droites puis les points d'intersection (PI) des droites. La différence des gisements entre les droites consécutives permet d'obtenir les angles de déflexion  $\Delta$  qui serviront ensuite pour le calcul des courbes dans le cas du tracé en plan (Figure 4.14). Le signe de l'angle de déflexion permet de connaître la direction du virage : un angle de déflexion positif représente un virage vers la droite alors qu'un angle négatif représente un virage vers la gauche.

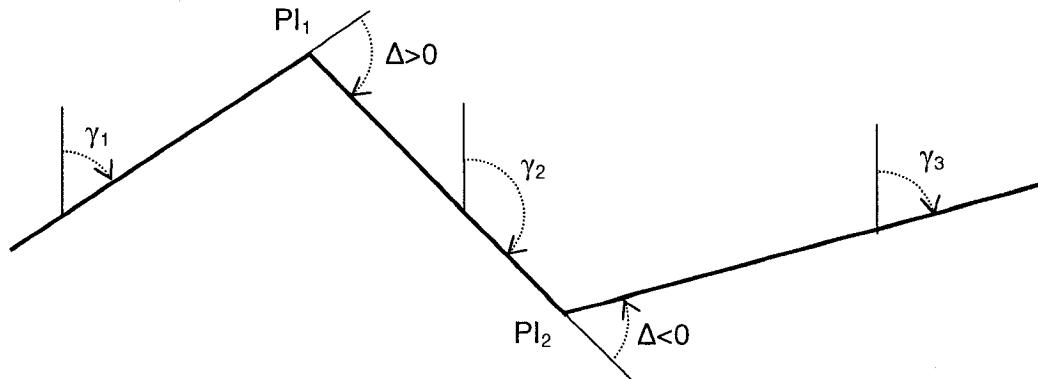


Figure 4.14 : Illustration des angles de déflexion pour le tracé en plan

Dans le cas du profil vertical, les points d'intersection des droites sont appelés point vertical d'intersection (PVI). Les changements de pente A entre les droites permettent ensuite de calculer les éléments des paraboles (Figure 4.15). Un changement de pente positif représente une courbe rentrante alors que négatif, il représente une courbe saillante.

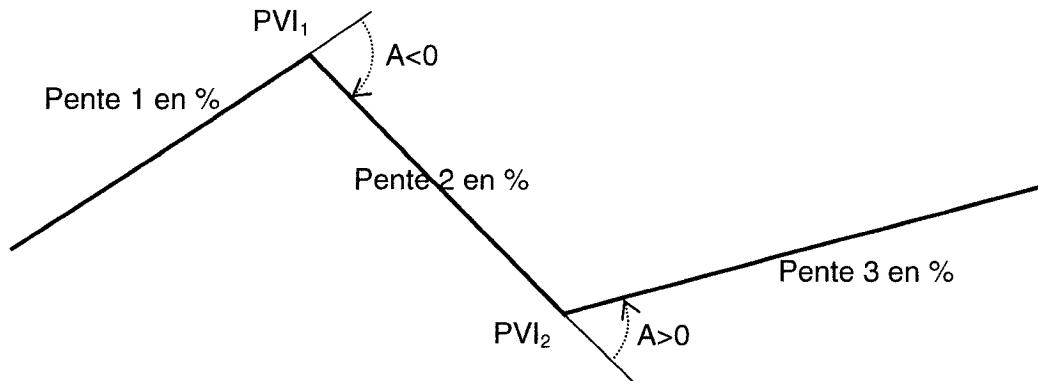


Figure 4.15 : Illustration des angles de déflexion pour le profil en long

#### 4.2.3.Cas particuliers : déflexions sans courbes

Selon la norme du Québec (MTQ, 1995b), lorsque la déflexion est inférieure à 0.5 degré, aucune courbe n'est requise pour le tracé en plan. On détecte alors, pour les

points qui appartiennent à des droites, si on remarque un changement de gisement compris entre 0.1 et 0.5 degré. Si c'est le cas, les deux droites sont traitées séparément, sans cercle entre elles.

### 4.3. Les cercles

#### 4.3.1. Caractéristiques générales

Les principales caractéristiques des courbes circulaires sont les suivantes (Figure 4.16) :

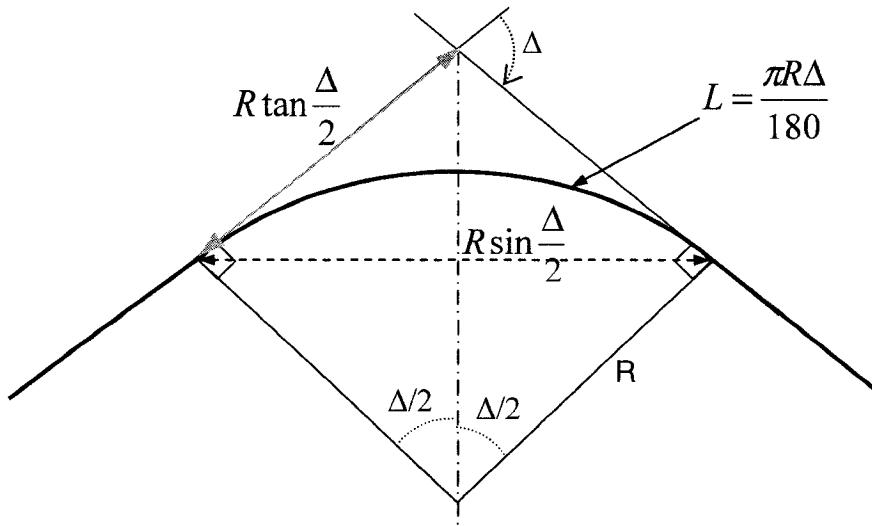


Figure 4.16 : Principales caractéristiques du cercle

#### 4.3.2. Le gisement $\Gamma_0$

Les gisements des droites sont désormais connus ainsi que les déflexions entre ces droites. A partir de ces données, il est possible de calculer le gisement  $\Gamma_0$ . Ce dernier représente la bissectrice entre les droites avant et après le cercle. Le centre du cercle se trouve sur cette droite qui peut être définie par son gisement et un point qui lui appartient : le PI.

$\Gamma_0$  se calcule en fonction du gisement de la droite avant la courbe  $\gamma_1$  ou celui après la courbe  $\gamma_2$  et de l'angle de déflexion  $\Delta$  entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . Le résultat se voit facilement sur un dessin mais il faut être très vigilant aux valeurs de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  car il existe de nombreux cas différents, 19 au total, en fonction de la valeur des gisements. Sur le dessin suivant (Figure 4.17), on voit deux exemples de position de  $\Gamma_0$  selon la position de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .

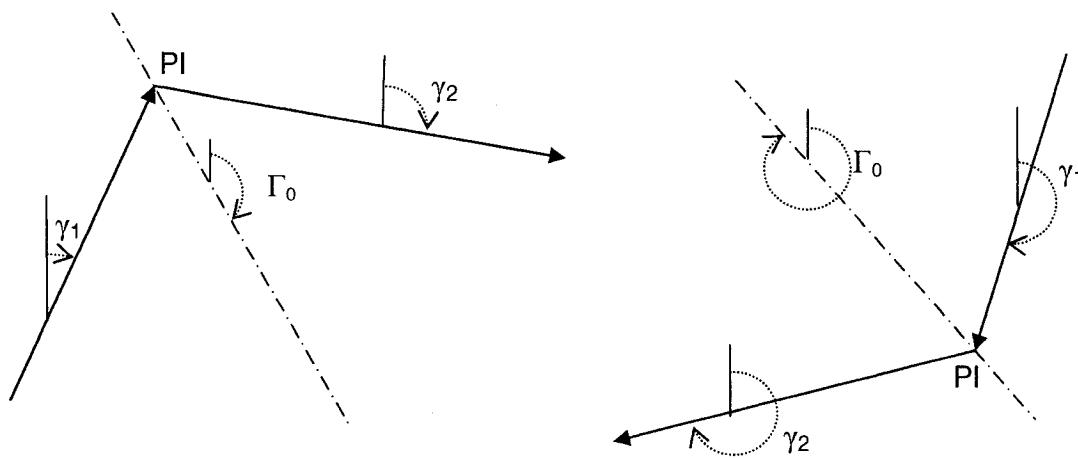


Figure 4.17 : Valeurs différentes de  $\Gamma_0$  selon la position de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$

Les détails des calculs se trouvent en annexe (A.3 : Le gisement  $\Gamma_0$ ).

#### 4.3.3. Cercles isolés

Dans le cas d'un cercle théorique, pour des longueurs entre les points sur la courbe égales, les déviations sont égales. Cette caractéristique des cercles est à la base de la méthode de calcul des cercles théoriques présentée ci-dessous (Figure 4.18).

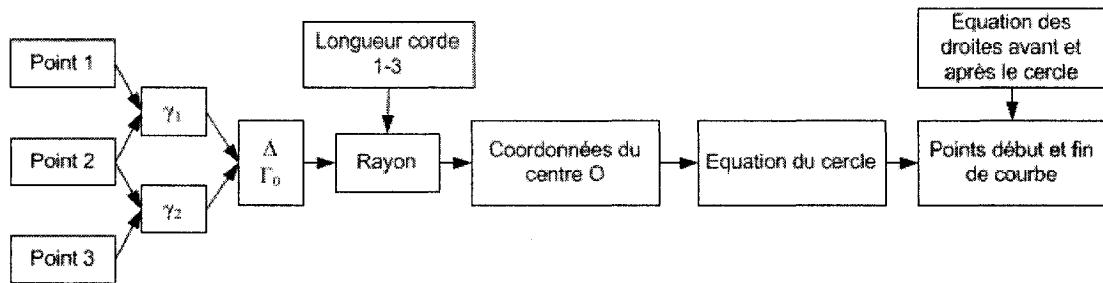


Figure 4.18 : Organigramme de calcul des éléments des cercles théoriques

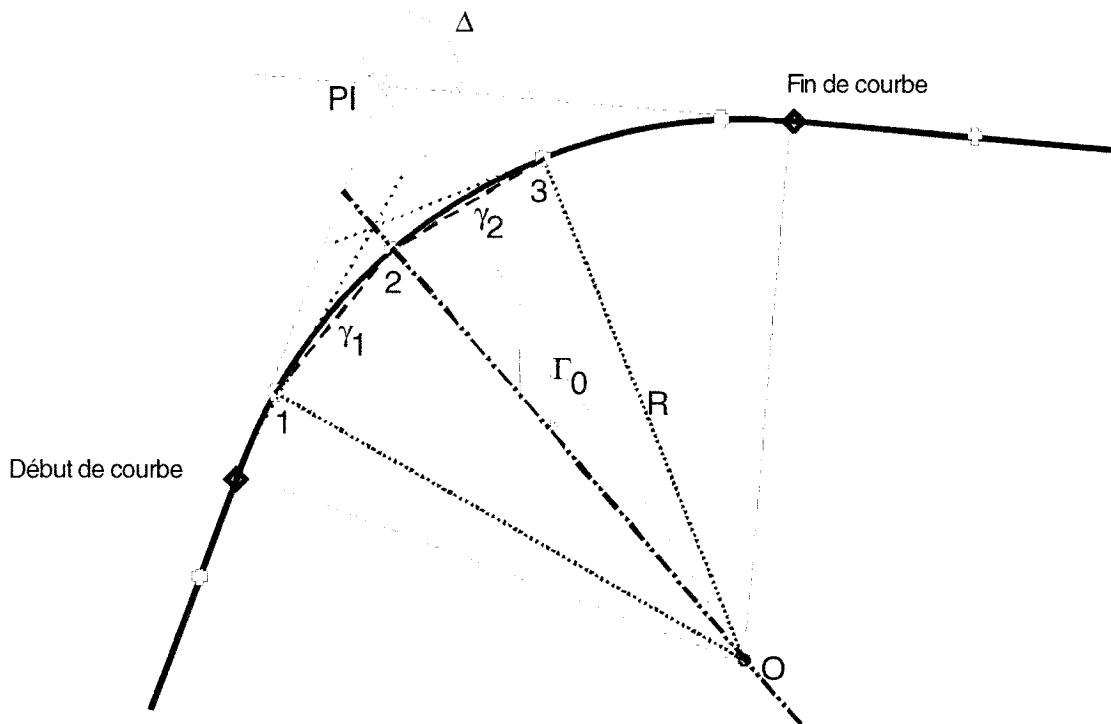


Figure 4.19 : Éléments de calcul des cercles théoriques

- ❖ Trois points du cercle sont choisis (Figure 4.19), les déflexions entre ces points sont alors calculées.
- ❖ Le gisement  $\Gamma_0$  qui représente la bissectrice de l'angle formé par les trois points est calculé. Il donne la direction du centre du cercle.
- ❖ La longueur de la corde entre les points 1 et 3 de chaque cercle et les angles de déviation permettent de calculer la valeur du rayon R.

- ❖ Ensuite, connaissant la valeur du gisement  $\Gamma_0$  et du rayon, les coordonnées du centre du cercle sont trouvées.
- ❖ Désormais, l'équation du cercle est connue et l'intersection du cercle avec les droites avant et après le cercle permettent de connaître les points de début et fin de la courbe.

Les calculs sont détaillés en annexe (D.1 : Cercles isolés).

#### 4.3.4. Cercles composés

Le principal problème des courbes composées réside dans le fait que l'on ignore les coordonnées du point où se joignent les deux cercles de rayons différents ni l'équation de la tangente entre ces cercles. Il est important de connaître l'équation de la tangente pour s'assurer que les deux cercles sont en tangence.

Dans le cas de cercles théoriques, les déviations entre les points d'un même cercle sont constantes pour une longueur sur la courbe constante. On utilise alors cette propriété pour obtenir toutes les caractéristiques des cercles à partir de trois points sur chacun des deux cercles. La méthode est la suivante (Figure 4.20) :

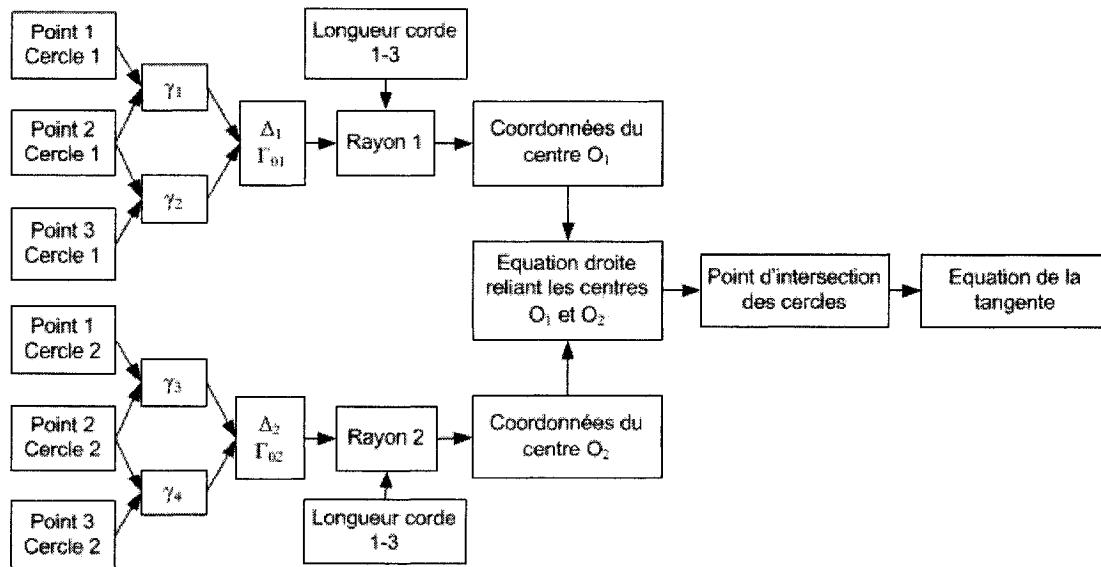
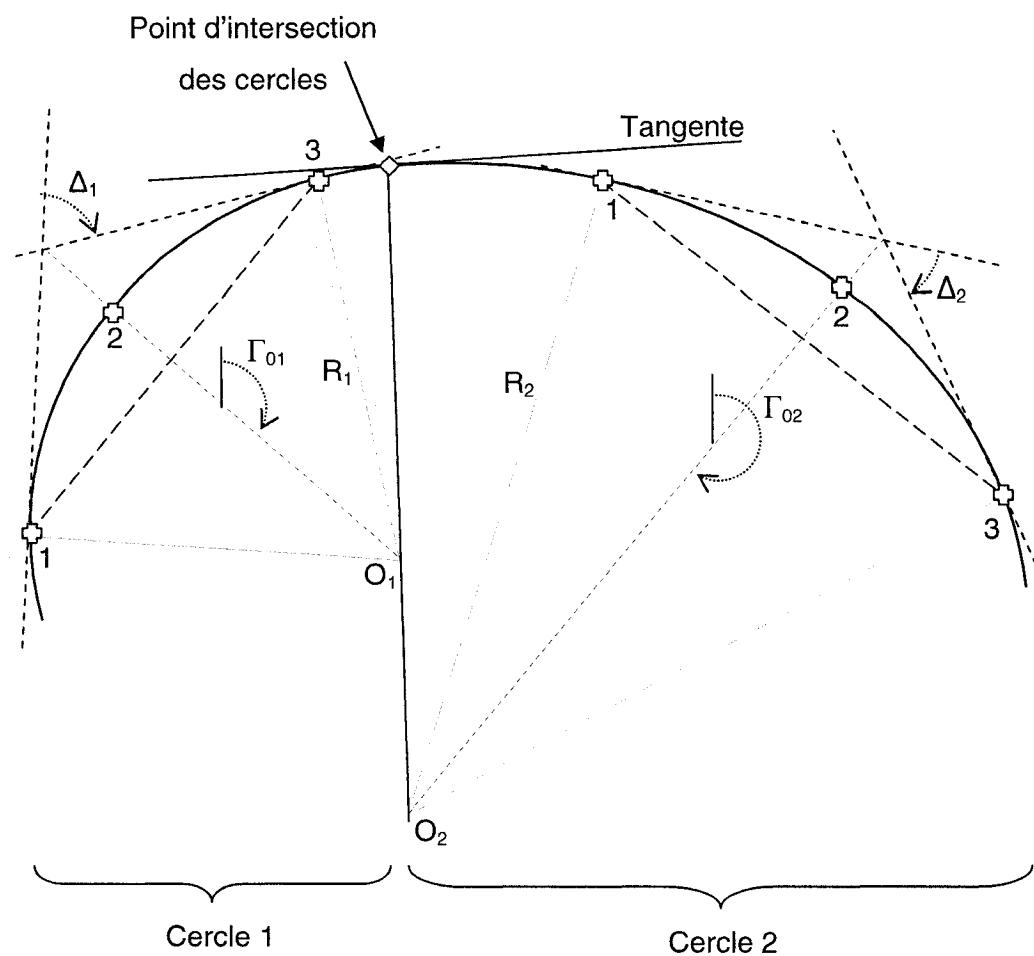


Figure 4.20 : Organigramme de calcul des caractéristiques des cercles composés



- ⊕ Point GPS
- ◇ Point d'intersection des cercles

**Figure 4.21 : Illustration de la méthode pour calculer les éléments des cercles composés**

- ❖ Trois points situés sur les deux cercles que l'on étudie sont sélectionnés (Figure 4.21).

- ❖ Les gisements des droites qui relient les points de chaque cercle sont calculés.
- ❖ Cela permet d'obtenir la déflexion entre les gisements calculés ainsi que le gisement  $\Gamma_0$  qui représente la bissectrice entre les droites qui relient les points de chaque cercle.
- ❖ La longueur de la corde entre les points 1 et 3 de chaque cercle et les angles de déviation permettent de calculer la valeur des rayons.
- ❖ Ensuite, connaissant des points qui appartiennent aux cercles ainsi que les gisements  $\Gamma_0$  et les rayons, les coordonnées des centres des cercles sont obtenues.
- ❖ La droite qui relie les centres des deux cercles coupe les cercles au point d'intersection des deux cercles, ce qui permet de connaître le point de fin du premier cercle et de début du deuxième.
- ❖ Finalement, la tangente aux cercles est perpendiculaire à la droite reliant les centres des deux cercles et passe par le point d'intersection des deux cercles.

Les détails des calculs sont présentés en annexe (D.2 : Cercles composés).

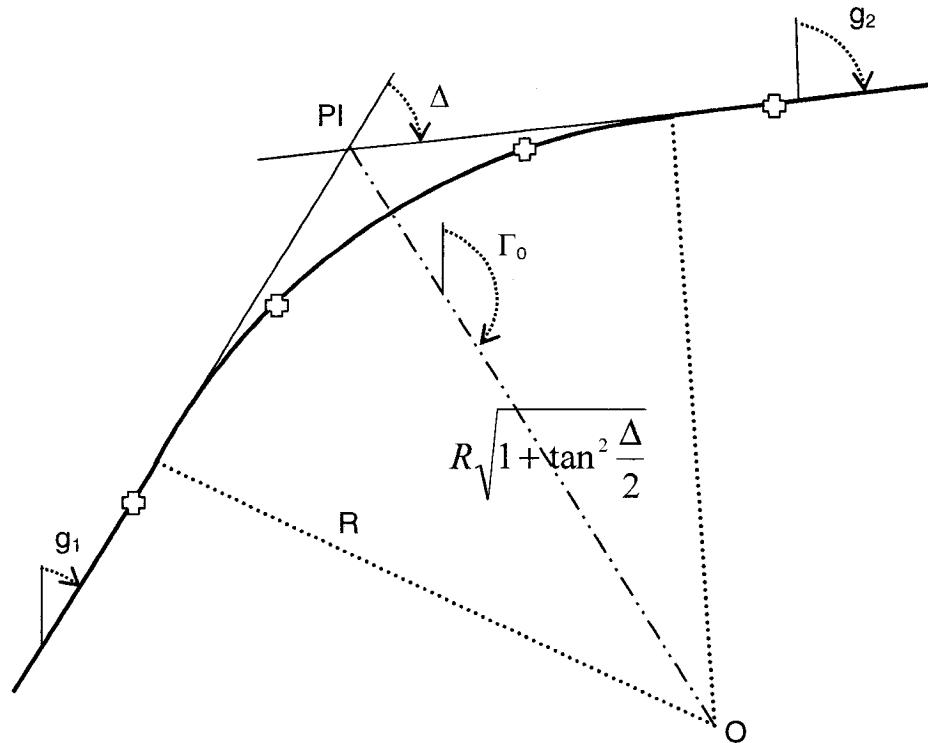
#### **4.4. Cas particuliers : courbes courtes**

Certaines courbes ont des longueurs très courtes, comme cela a été démontré au chapitre 5. Il n'est alors pas possible d'utiliser les méthodes pour trouver les caractéristiques des cercles décrites plus haut car trois points sur les cercles sont nécessaires et ce n'est pas toujours le cas pour certaines courbes qui peuvent ne comporter qu'un ou deux points. La méthode pour résoudre ce genre de problème est présentée ici.

##### **4.4.1. Traitement des courbes à deux points**

L'équation du cercle est une équation de deuxième degré. Ainsi, si l'on dispose uniquement de deux points sur le cercle, il est possible de trouver l'équation du

cercle à l'aide des coordonnées de ces deux points tout en respectant la condition de tangence aux droites avant et après le cercle.



**Figure 4.22 : Calcul des caractéristiques des courbes à deux points**

Le gisement  $\Gamma_0$ , la déflexion  $\Delta$  ainsi que le PI sont déjà connus (Figure 4.22). L'écriture de l'équation générale du cercle et les coordonnées du centre du cercle en fonction d'éléments connus et du rayon forme un système de trois équations :

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \\ x_0 = x_{PI} + R \sqrt{1 + \tan^2 \frac{\Delta}{2}} \sin \Gamma_0 \\ y_0 = y_{PI} + R \sqrt{1 + \tan^2 \frac{\Delta}{2}} \cos \Gamma_0 \end{cases}$$

Ce système d'équation donne, en remplaçant  $x_0$  et  $y_0$  dans la première équation et en posant  $a = \sqrt{1 + \tan^2 \frac{\Delta}{2}}$ , une équation en  $R^2$ :

$$(x - x_{PI})^2 + (y - y_{PI})^2 - 2 \times R \times a [\sin \Gamma_0 \times (x - x_{PI}) + \cos \Gamma_0 \times (y - y_{PI})] + R^2 (a^2 - 1) = 0$$

La connaissance des coordonnées des deux points qui appartiennent au cercle permettent de trouver la valeur unique du rayon qui vérifie cette équation.

#### 4.4.2.Traitement des courbes à un point

La méthode est semblable à celle pour calculer une courbe qui comporte deux points mais la différence réside dans le fait qu'il n'est pas possible de choisir facilement la bonne valeur de rayon puisque les coordonnées d'un seul point sont connues et l'équation est de deuxième degré : l'équation en  $R^2$  donne deux solutions entre lesquelles il faut choisir.

Pour départager les deux valeurs de rayon possibles, la longueur de la courbe est d'abord calculée avec les deux valeurs possibles du rayon. Le rayon qui fournit une longueur de courbe supérieure à deux fois la longueur du pas est éliminé. Dans un second temps, si les deux longueurs trouvées remplissent la condition précédente, les coordonnées du point de fin de courbe sont calculées de deux manières différentes pour chaque rayon puis comparées : le point de fin de courbe est calculé comme l'intersection du cercle et de la droite suivant le cercle puis il est calculé en partant du PI des droites à l'aide de la valeur de la tangente et du gisement de la droite après le cercle (Figure 4.23). Les résultats sont alors comparés et la plus petite différence entre les deux méthodes de calcul permet de choisir le meilleur rayon.

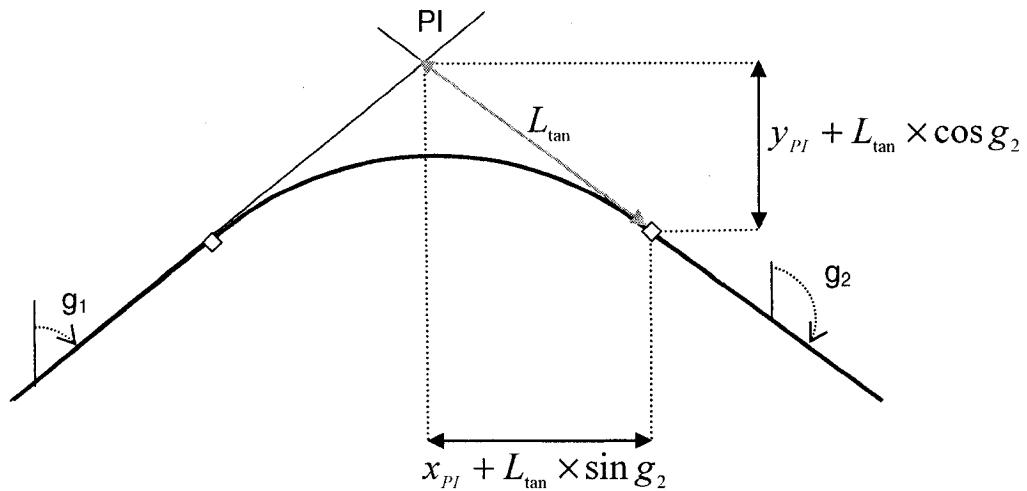


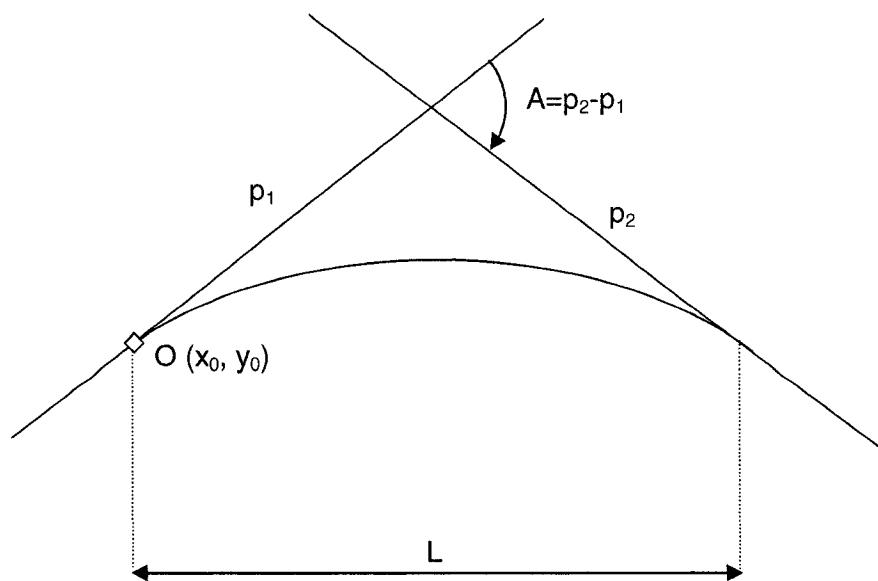
Figure 4.23 : Calcul des coordonnées de la fin du cercle en partant du PI

## 4.5. Les paraboles

### 4.5.1. Caractéristiques générales

L'équation générale de la parabole s'exprime en fonction des pentes des droites avant et après la parabole  $p_1$  et  $p_2$  dont la différence est appelée  $A$ , de la longueur de la parabole  $L$  et des coordonnées du point d'origine  $O$  de la parabole (Figure 4.24) :

$$z = \frac{p_2 - p_1}{200L} (x - x_0)^2 + \frac{p_1}{100} (x - x_0) + z_0$$



**Figure 4.24 : Caractéristiques de la parabole**

Le changement de déclivité d'une parabole par rapport à la longueur est constant. Le paramètre  $k$  de la parabole est la longueur de la courbe qui correspond à un changement de pente de 1% (Figure 4.25). Il est donc le même sur toute la courbe.

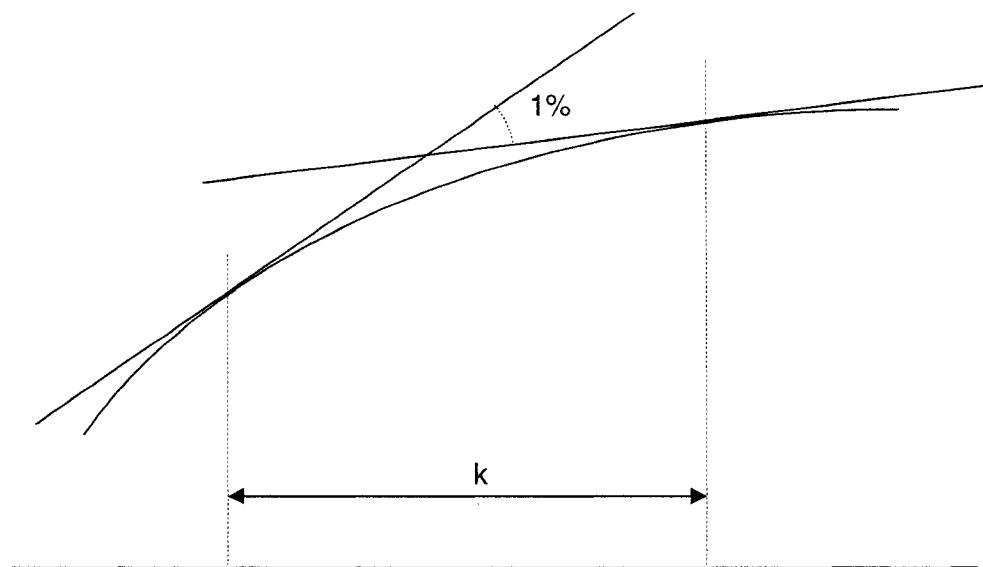


Figure 4.25 : Paramètre  $k$  de la parbole

Ainsi, si  $A$  est le changement de pente de la parbole, c'est-à-dire la différence entre les gisements des droites après et avant la parbole, la longueur totale de la parbole  $L$  peut s'exprimer ainsi :  $L = k \times A$

Puisque le changement de déclivité par rapport à la longueur est constant sur une parbole, « la distance de visibilité dont dispose un conducteur circulant dans une courbe saillante est constante tout le long de la courbe » (AASHTO, 2004). Cette caractéristique explique que les parboles sont utilisées pour les courbes verticales.

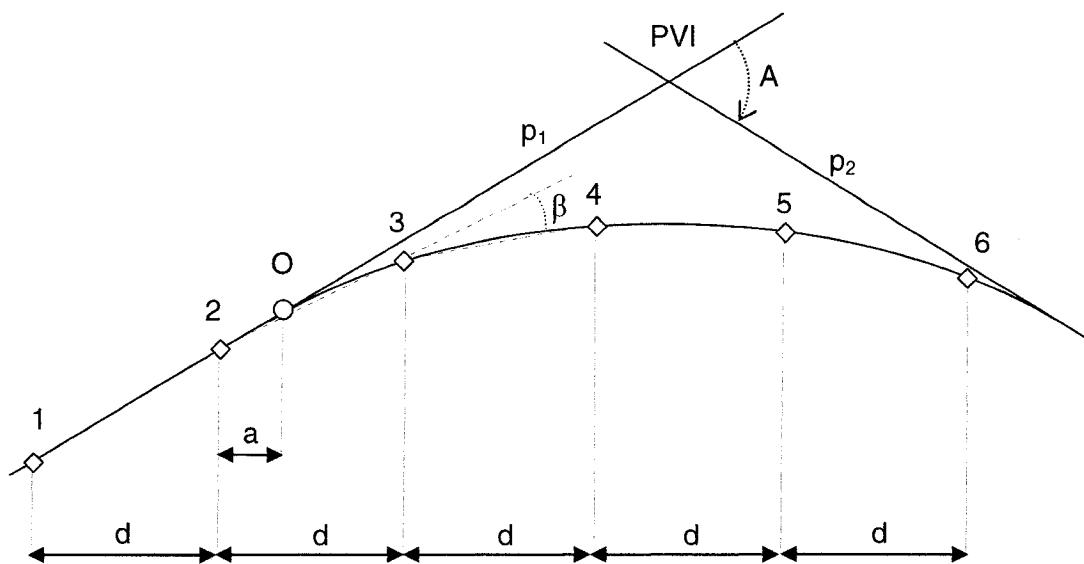
#### 4.5.2. Les parboles isolées

Lorsqu'on reconstitue le profil en long, on désire connaître les caractéristiques des parboles, c'est-à-dire leur longueur, leur paramètre  $k$  et leur point d'origine. Le paramètre  $k$  peut être déterminé grâce à la déviation  $\delta$  constante pour chaque

$$\text{longueur de pas } l_{\text{pas}} : k = \frac{l_{\text{pas}} \times 0.01}{\delta}.$$

On cherche ensuite le point d'origine de la parbole. Pour cela, on dispose de points espacés de la distance  $d$ , constante pour tout le tracé. Il est rare de trouver le cas où

un point est placé exactement au début et à la fin de la parabole. C'est pourquoi il faut commencer par trouver la distance «  $a$  » qui sépare le dernier point avant la parabole et le premier point théorique de la parabole (Figure 4.26).



**Figure 4.26 : Distance entre le premier point de la parabole et le dernier point de la droite précédente**

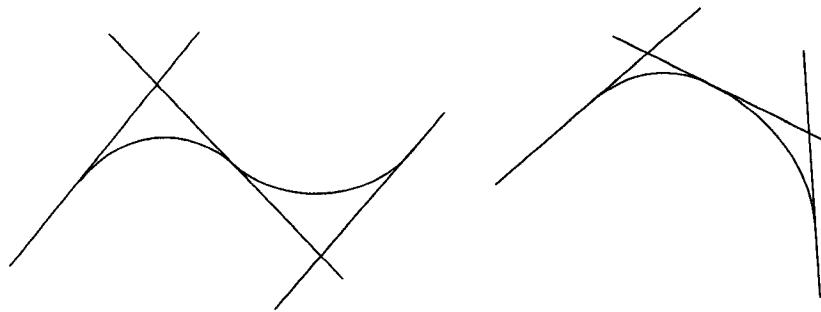
On peut démontrer que la distance « a » s'exprime en fonction de « d », de  $k_1$  et de «  $\beta$  » qui est la déviation au point 3 (détails en annexe E.1 : Calcul des paraboles simples) :

$$a^2 = 2d^2 - 2k_1 \times \beta \times d$$

De là, on peut calculer la longueur de la parabole puisque  $L = k \times A$ . On dispose donc des caractéristiques des paraboles.

### 4.5.3. Les paraboles composées

Les paraboles doubles sont deux paraboles qui sont à la suite l'une de l'autre sans droite entre elles. Elles peuvent avoir un paramètre  $k$  de même signe (courbes en C) ou de signe opposé (courbes en S) (Figure 4.27).



Courbes en S

Courbes en C

**Figure 4.27 : Exemples de courbes en S et en C**

Le même problème que pour les cercles composés se pose, c'est-à-dire qu'on ne connaît ni l'équation de la tangente aux paraboles, ni le point d'intersection des paraboles. On connaît néanmoins les pentes  $p_1$  et  $p_3$  des droites avant la première parabole et après la deuxième parabole et les paramètres  $k_1$  et  $k_2$  des paraboles (Figure 4.28). On cherche alors à calculer les longueurs des paraboles  $l_1$  et  $l_2$ . La méthode de calcul est explicitée sur la Figure 4.29.

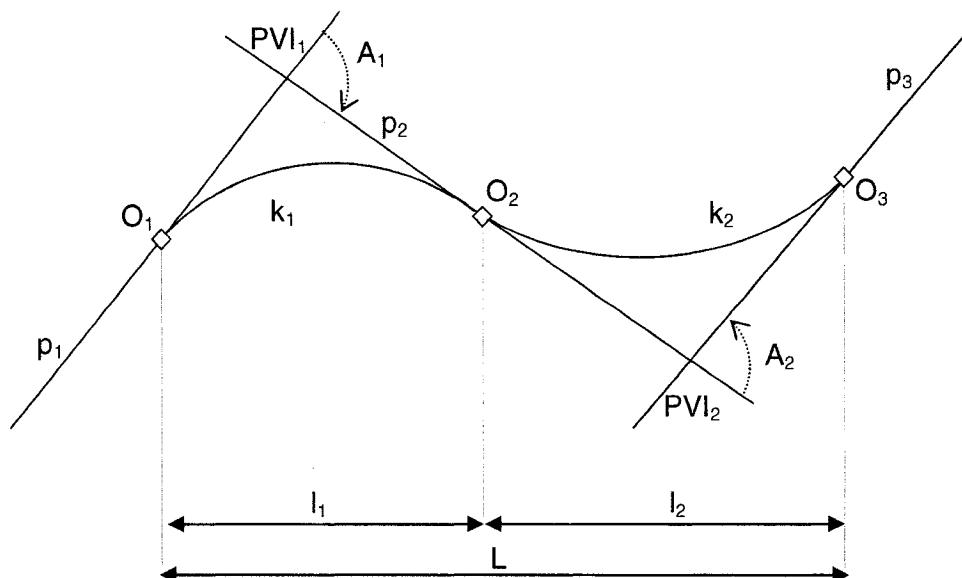


Figure 4.28 : Caractéristiques des courbes doubles

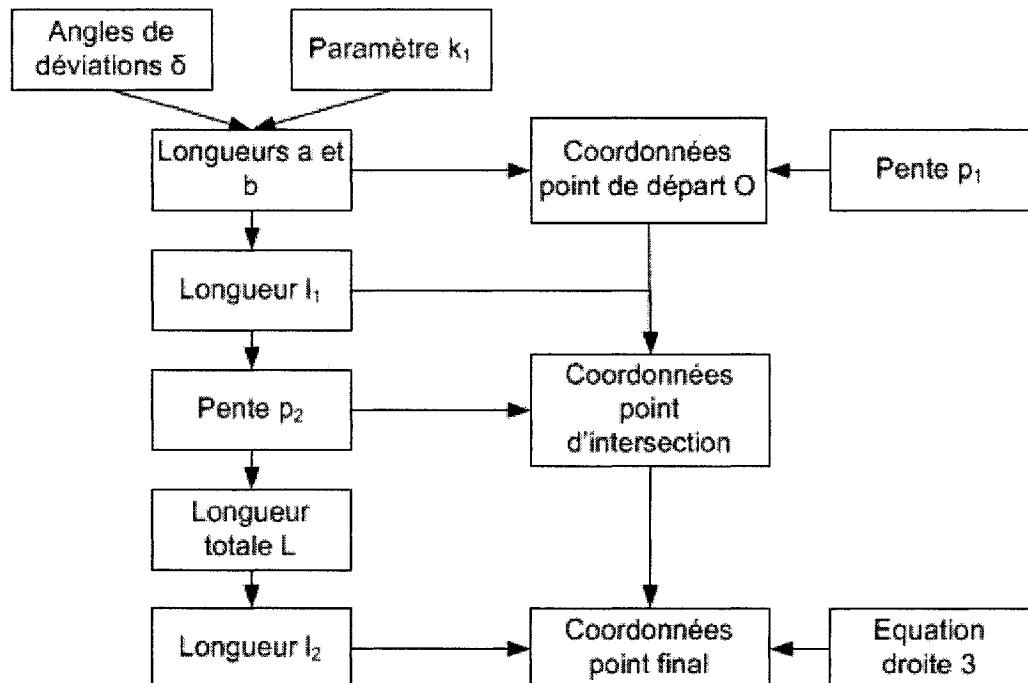


Figure 4.29 : Organigramme de calcul des paraboles doubles

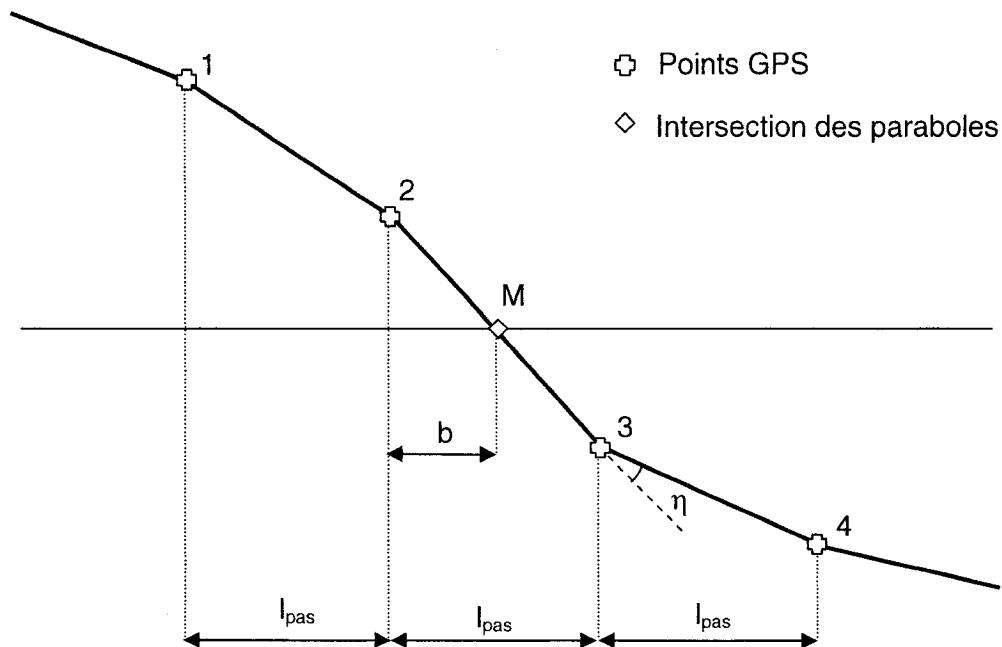


Figure 4.30 : Illustration de la longueur « b »

- ❖ Le paramètre  $k_1$  de la première parabole et la connaissance des angles de déviation entre les points de départ permettent d'obtenir les longueurs « a » (Figure 4.26) et « b » (Figure 4.30). La longueur « a » s'obtient de la même façon que pour une parabole simple et la longueur « b » peut s'exprimer

$$\text{ainsi : } b = \sqrt{\frac{2\eta \times l_{\text{pas}} - \frac{2l_{\text{pas}}}{k_2}}{\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}}} \quad (\text{Détails en annexe E.2 : Cas des paraboles doubles}).$$

- ❖ Les coordonnées du premier point de la première parabole sont alors calculés à l'aide des coordonnées du dernier point avant la parabole, la distance « a » et le gisement de la droite avant la parabole.

- ❖ On peut désormais calculer la longueur  $l_1$  de la première parabole :  

$$l_1 = n_{\text{point}} \times l_{\text{pas}} - a + b$$
, avec  $n_{\text{point}}$  le nombre de points sur la première parabole.
- ❖ La pente de la droite entre les deux paraboles se calcule ainsi :  

$$p_2 = k_1 \times l_1 + p_1$$
.
- ❖ Il est alors possible de calculer les coordonnées du point d'intersection des deux paraboles avec les coordonnées du premier point de la première parabole, la longueur de cette parabole et le gisement de la tangente aux paraboles.
- ❖ On peut alors trouver la longueur totale des deux paraboles selon la formule :  

$$L = (k_1 - k_2) * p_2 - k_1 \times p_1 + k_2 \times p_2$$
.
- ❖ On en déduit finalement la longueur de la deuxième parabole et des coordonnées du point de la fin de la deuxième parabole.

Les éléments des paraboles composés sont alors connus grâce à cette méthode.

#### **4.6. Reconstitution de la trace**

Désormais, tous les éléments qui composent le tracé sont connus : les caractéristiques des droites, des cercles et des paraboles. Ces éléments sont alors utilisés pour reconstituer l'ensemble du tracé. En effet, la trace est constituée d'une succession de droites et de courbes (cercles ou paraboles) dont on connaît les caractéristiques mais il est utile d'obtenir une série de coordonnées à partir de ces éléments. Celle-ci peut en effet différer de la série de coordonnées de départ en raison de la position des débuts et fins de courbes. De plus, l'utilisateur peut choisir la distance qui sépare les coordonnées reconstituées. L'objectif est de produire une série de coordonnées que l'utilisateur pourra utiliser en toute confiance car elle sera conforme aux éléments reconstitués par l'algorithme, contrairement aux données de départ qui peuvent comporter certains points mal positionnés.

#### 4.6.1.Principe

L'allocation a permis de déterminer les points qui appartiennent à des droites et ceux qui appartiennent à des courbes. Les alignements commencent et finissent par des droites. De plus, un alignement est constitué de droites entre lesquelles se trouvent des courbes. Une courbe est toujours entourée de deux droites ou tangentes et deux droites sont toujours séparées par des courbes, même si la longueur de ces courbes est nulle dans le cas de déflections sans courbe. Cet enchaînement droite-courbe-droite... permet alors de reconstituer les éléments du tracé. Les coordonnées sont donc calculées sur le premier élément qui est une droite puis sur la courbe suivante, puis la droite suivante... jusqu'à la fin de l'alignement.

#### 4.6.2.Reconstitution des droites

Les droites sont définies par leur gisement et leur longueur. A ce stade, les longueurs des droites ne sont pas encore connues mais elles sont obtenues à l'aide des débuts et fins de courbes : une droite commence à la fin de l'élément précédent ( cercle ou parabole) et se termine au niveau du début de l'élément suivant ( cercle ou parabole) dont les coordonnées sont déjà connues.

Les coordonnées des points qui appartiennent aux droites sont calculées à l'aide de la longueur du pas de reconstitution déterminé par l'usager et la valeur du gisement de la droite :

$$x_i = x_{i-1} + l_{pas} \times \sin \gamma_i$$

$$y_i = y_{i-1} + l_{pas} \times \cos \gamma_i$$

Les coordonnées sont ainsi calculées sur toute la longueur de chaque droite.

#### 4.6.3.Reconstitution des cercles

Pour reconstituer les points qui appartiennent à des cercles, on utilise la valeur du rayon R. Les coordonnées sur les cercles doivent être calculées pour une distance qui vaut la longueur d'un pas. L'angle de déviation v qui sépare deux points espacés de la longueur du pas vaut :

$$v = \frac{l_{pas}}{R}$$

Ensuite, la longueur de la tangente pour la déviation  $v$  est calculée, ce qui permet, en partant du point A par exemple, de trouver les coordonnées du point intermédiaire M puis les coordonnées du point B (Figure 4.31).

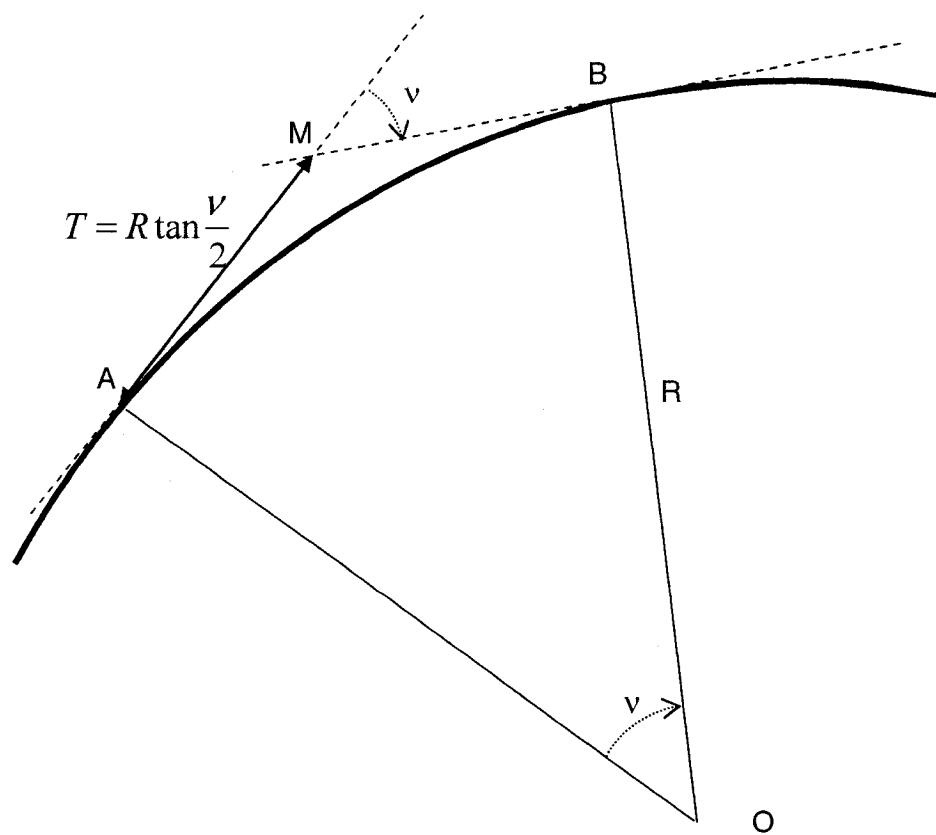


Figure 4.31 : Illustration de la reconstitution des éléments des droites

#### 4.6.4. Reconstitution des paraboles

Les coordonnées des paraboles sont reconstituées grâce à leur équation générale puisqu'on connaît tous les éléments qui les composent, c'est-à-dire le point de départ de la parabole, sa longueur et les gisements des droites avant et après la parabole.

$$x_i = x_{i-1} + l_{pas}$$

$$z_i = \frac{p_2 - p_1}{2L} (x_i - x_0)^2 + p_1 \times (x_i - x_0) + z_0$$

#### 4.6.5. Résultats

A l'issue de cette reconstitution des éléments, une suite de coordonnées (x, y) pour le tracé en plan et (x, z) pour le profil en long est produite. Cette suite de coordonnées représente les points qui appartiennent au tracé reconstitué. Elle est donc plus fiable que la série de coordonnées de départ.

### 4.7. Les données

Maintenant que la théorie pour reconstituer les éléments des alignements a été développée, des données doivent être produites pour pouvoir tester cette théorie. Les données théoriques utilisées sont des données créées à partir d'éléments connus. En effet, un algorithme conçu dans ce but permet de choisir les caractéristiques des droites et des courbes souhaitées puis il calcule les coordonnées qui correspondent aux caractéristiques des éléments. Cette méthode présente deux avantages. D'une part les points sont tous parfaitement dans l'alignement des autres. D'autre part, il est plus facile de valider des résultats puisque les résultats à trouver sont déjà connus.

### 4.8. Le développement du programme

Désormais, une méthode de calcul a été développée et des données ont été créées. Il est alors important de disposer d'un moyen pour mettre en application ces

méthodes et les vérifier. Un programme informatique permet de remplir ces fonctions. Son but est alors de lire les données entrées, de les traiter selon les principes de calcul décrits précédemment, de recalculer des coordonnées et de fournir en sortie la liste de ces coordonnées ainsi que les caractéristiques des éléments qui composent le tracé.

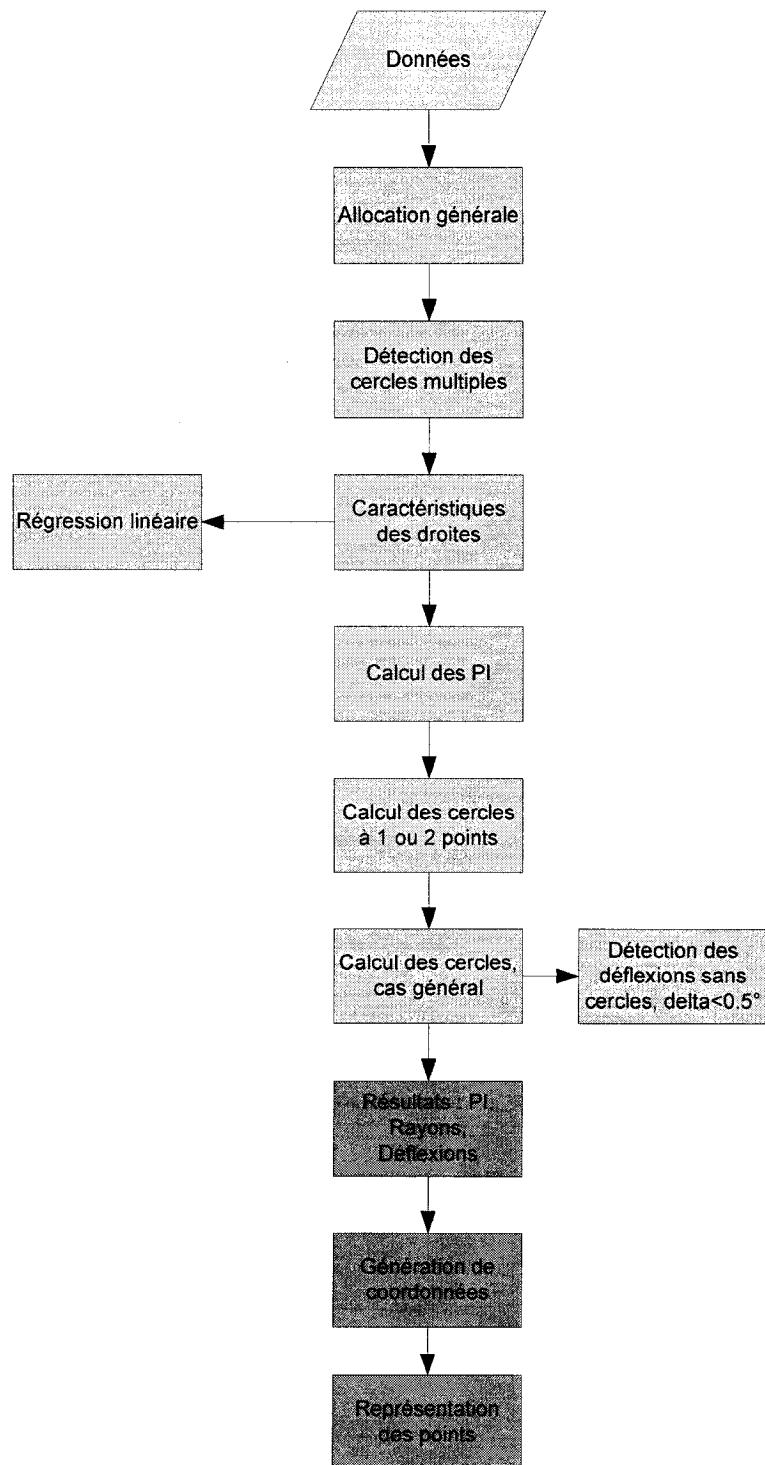
#### **4.8.1.Langage utilisé**

Le langage utilisé pour le programme est Visual Basic Applications (VBA). En effet, ce langage est facile à utiliser et permet d'être combiné à Excel. Les données d'entrée et de sortie peuvent donc être de format Excel, ce qui rend leur utilisation plus facile.

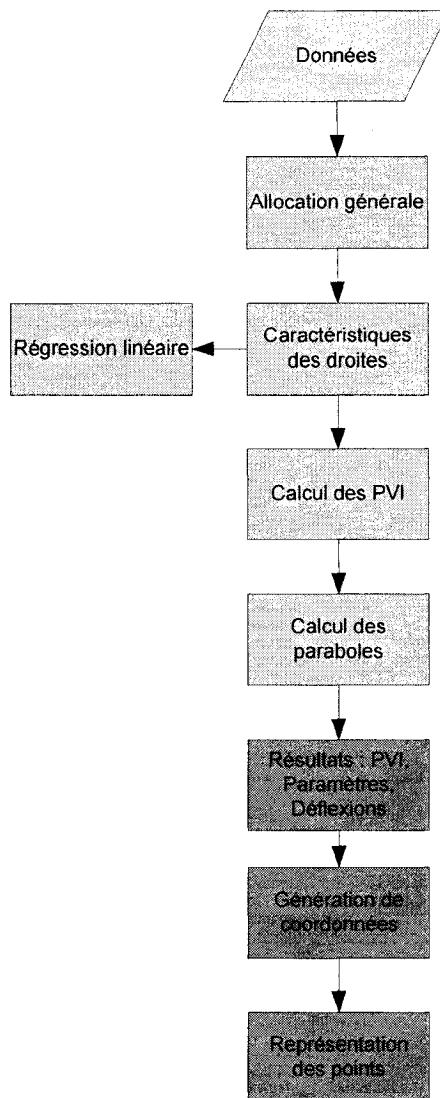
#### **4.8.2.La structure de l'algorithme**

L'algorithme est composé de plusieurs modules, un module principal et plusieurs modules qui sont appelés par le module principal. Chaque module regroupe plusieurs fonctions ou routines dont les principes sont ceux énoncés dans les procédures de calcul. A la fin de la reconstitution, les résultats obtenus sont une succession d'éléments, droites et courbes, avec leurs caractéristiques.

La structure des algorithmes de reconstitution du tracé en plan théorique (Figure 4.32) et du profil en long théoriques (Figure 4.33) est présentée ci-dessous.



**Figure 4.32 : Organigramme de fonctionnement de l'algorithme de reconstitution du tracé en plan théorique**



**Figure 4.33 : Organigramme de fonctionnement de l'algorithme de reconstitution pour le profil en long théorique**

#### **4.9. Vérification des résultats**

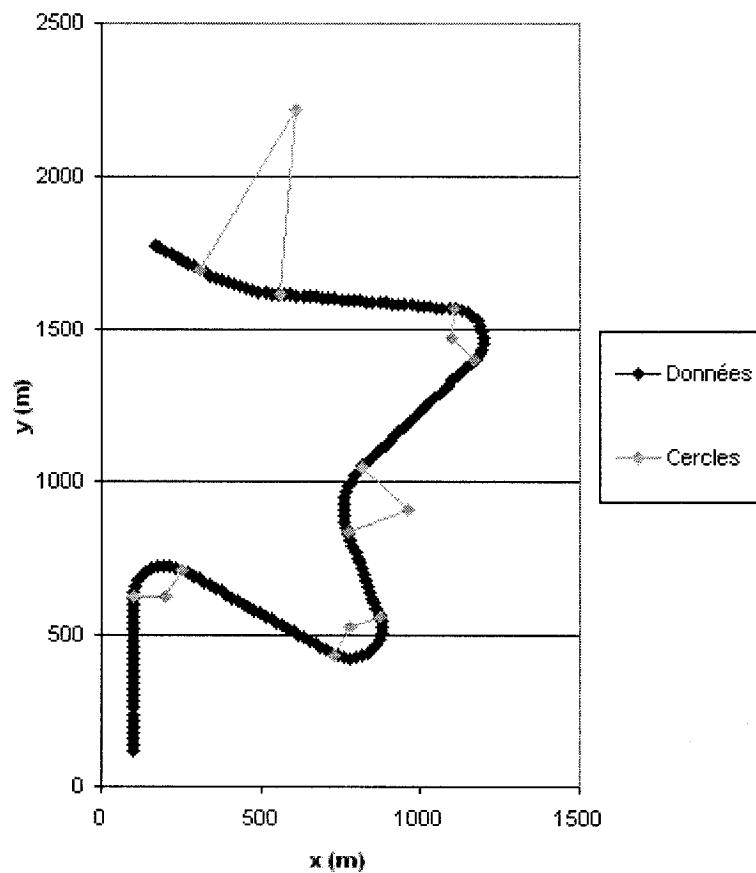
La vérification des résultats permet de savoir dans quelle mesure les résultats fournis par l'algorithme correspondent aux données de départ. Dans le cas de tracés théoriques, les éléments que le programme doit restituer sont ceux qui ont servi à créer les données. Il est donc facile de les comparer. De plus, une vérification

visuelle qui consiste à superposer les points de départ et les points de sortie permet de vérifier la correspondance entre les deux séries de points.

## ***4.10. Application du programme***

### **4.10.1. Tracé en plan**

Le premier tracé comporte une succession de courbes. Les rayons sont compris entre 100m et 600m, ce qui est courant pour les courbes des routes rurales (paragraphe 3.3.2). De plus, les gisements ont des valeurs dans tous les cadans, ce qui représente une difficulté pour l'estimation de leurs valeurs et de celles des déflexions. La longueur entre les points est de 20 mètres. Le tracé est représenté ci-dessous avec les débuts et fins de courbes ainsi que les centres des cercles (Figure 4.34).



**Figure 4.34 : Tracé en plan théorique 1**

Les résultats trouvés par l'algorithme sont dans un premier temps superposés aux données pour visualiser si les résultats correspondent aux données (Figure 4.35)

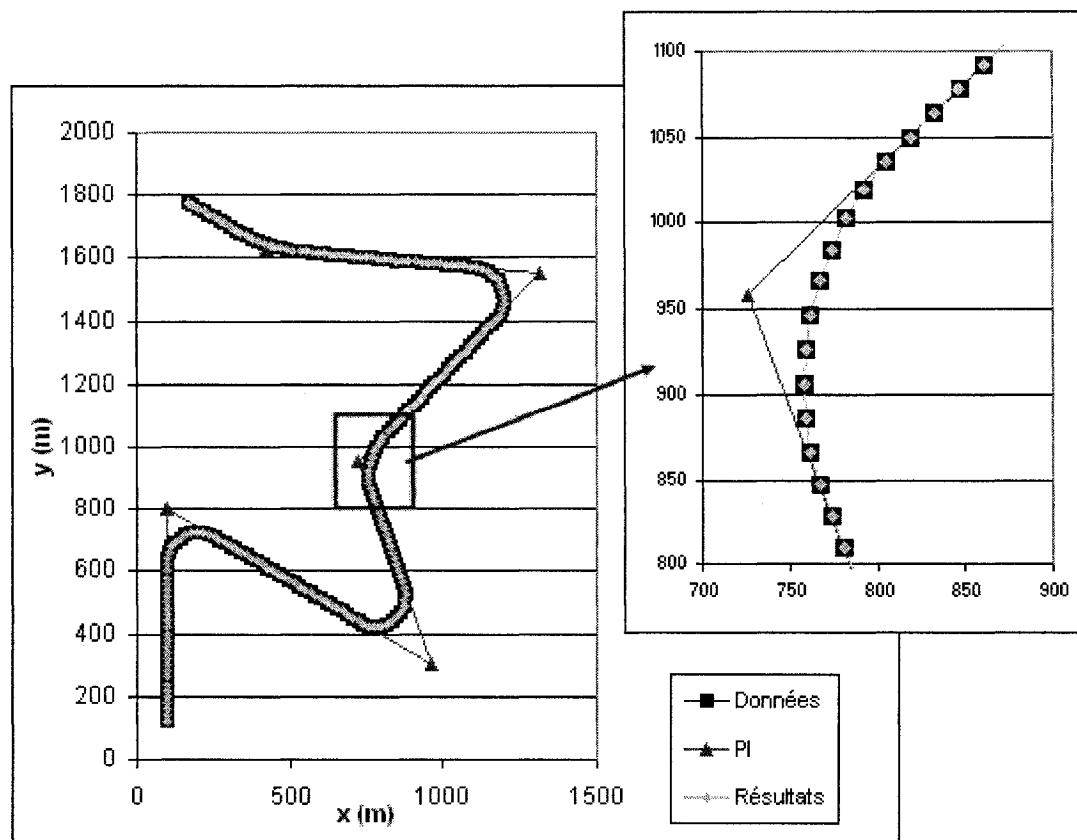


Figure 4.35 : Résultats de la reconstitution pour le tracé en plan théorique 1

Visuellement, les points calculés sont superposés avec les points de données. Cela indique à première vue que la reconstitution a été efficace mais est insuffisant pour déterminer si les résultats sont acceptés. Une comparaison quantitative des résultats avec les données qui ont servi à construire l'alignement théorique est nécessaire. Ainsi, la comparaison des valeurs des rayons des cercles et des déflexions entre les droites permet d'avoir une bonne idée sur la performance de l'algorithme (Tableau 4.1).

**Tableau 4.1 : Comparaison des éléments qui constituent le tracé en plan théorique 1**

	Théorique	Calculé	Différence
Gisement 1	0	0	0.0000%
Rayon 1	100	100	0.0000%
Gisement 2	120	120	0.0000%
Rayon 2	100	99.999	0.0010%
Gisement 3	340	339.999	0.0003%
Rayon 3	200	200	0.0000%
Gisement 4	45	45	0.0000%
Rayon 4	100	99.999	0.0010%
Gisement 5	275	275	0.0000%
Rayon 5	600	599.999	0.0002%
Gisement 6	300	299.999	0.0003%

Les valeurs des gisements et rayons calculés sont très proches des valeurs théoriques, les écarts entre les deux étant très faibles.

Il est également possible de comparer les coordonnées des centres des cercles (Tableau 4.2) et les longueurs des courbes (Tableau 4.3).

**Tableau 4.2 : Comparaison des coordonnées des centre des cercles calculées et théoriques**

	x centre			y centre		
	Théorique	Calculée	Différence	Théorique	Calculée	Différence
Cercle 1	200.000	200.000	0.0000%	626.795	626.795	0.0000%
Cercle 2	778.087	778.087	0.0000%	523.976	523.976	0.0000%
Cercle 3	958.128	958.128	0.0000%	906.459	906.459	0.0000%
Cercle 4	1098.231	1098.231	0.0000%	1470.826	1470.826	0.0000%
Cercle 5	608.810	608.810	0.0000%	2216.318	2216.318	0.0000%

**Tableau 4.3 : Comparaison des longueurs des courbes calculées et théoriques**

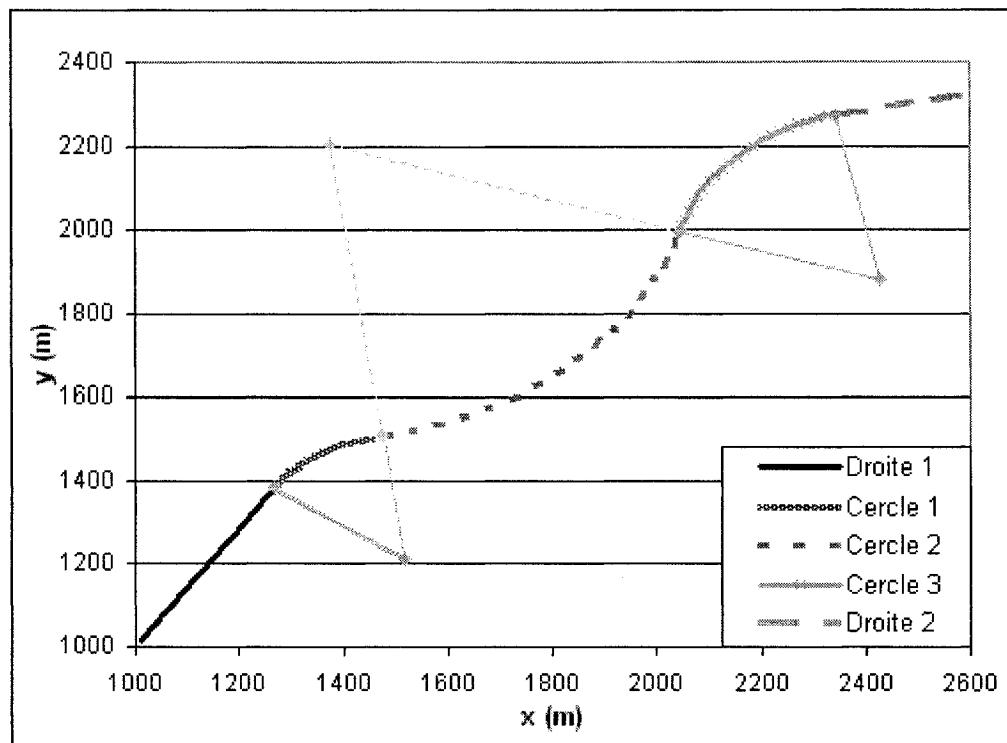
	Longueur des arcs		
	Théorique	Calculée	Différence
Cercle 1	209.440	209.439	0.0002%
Cercle 2	244.346	244.347	0.0004%
Cercle 3	226.893	226.896	0.0014%
Cercle 4	226.893	226.892	0.0004%
Cercle 5	261.799	261.788	0.0043%

La comparaison des coordonnées des centres des cercles calculées et théoriques révèle qu'il n'y a pas de différence entre les deux ensembles de coordonnées. En outre, la comparaison des longueurs des courbes montrent que la différence maximale est de 0.0043%.

En conclusion, les résultats trouvés pour ce tracé sont acceptés.

#### **4.10.2.Tracé en plan composé de trois courbes consécutives**

Le tracé présenté sur la Figure 4.36 comporte trois courbes consécutives sans droites entre elles. La difficulté pour résoudre ce tracé réside donc dans le fait que l'algorithme doit introduire deux tangentes consécutives.



**Figure 4.36 : Tracé théorique comportant trois courbes consécutives**

Les résultats produits par l'algorithme révèlent que les trois cercles consécutifs ont effectivement été détectés, comme cela se voit sur le tableau qui donne les caractéristiques des droites (Tableau 4.4) :

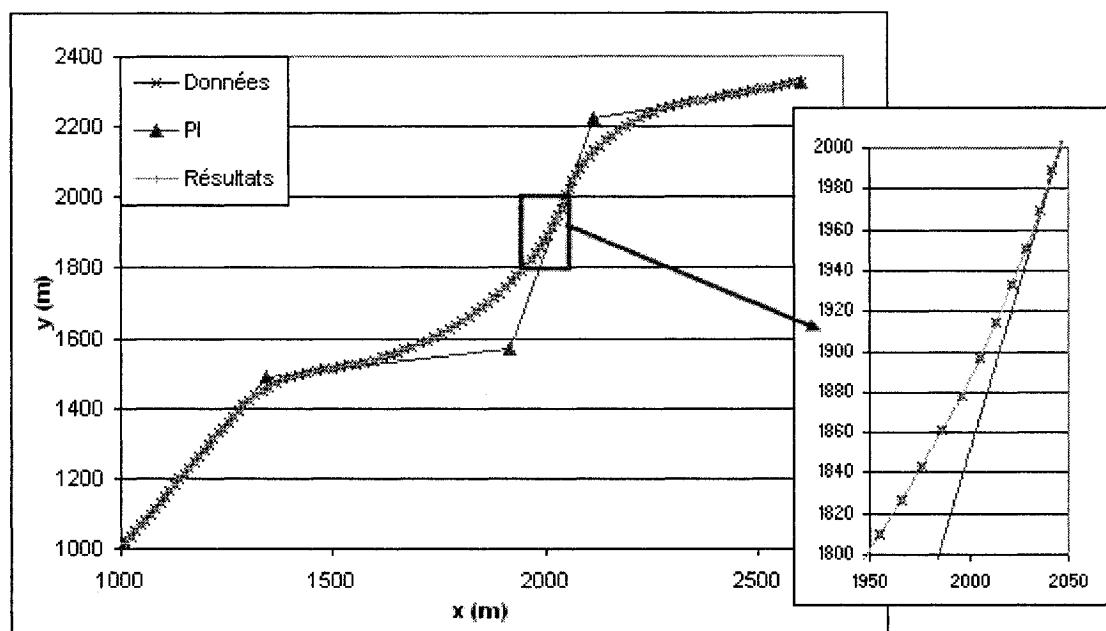
**Tableau 4.4 : Présence de deux tangentes consécutives dans le tableau de résultat**

	nombre points	a	b	c	gisement
DD 1	22	1.4281	-428.1480	0	35
Tangente	0	0.1405	1302.5839	0	82
Tangente	0	3.2709	-4691.7420	0	17
DD 2	13	0.2126	1774.1084	0	78

En effet, ce tableau témoigne que des tangentes ont été ajoutées entre les droites déjà existantes, comme le prouve l'indication « Tangente » dans la première colonne.

Celles-ci ne contiennent pas de points puisqu'elles ont été obtenues non pas par régression linéaire sur des points mais par calcul (4.3 : Les cercles).

La superposition des données et des résultats fournis par l'algorithme permet de se rendre compte que visuellement, les résultats correspondent bien aux données (Figure 4.37).



**Figure 4.37 : Résultats de la reconstitution pour le tracé en plan théorique 2**

La comparaison des données et des éléments reconstitués par l'algorithme permet une meilleure estimation de la précision de la reconstitution (Tableau 4.5).

**Tableau 4.5 : Comparaison des éléments théoriques et calculés**

	Théorique	Calculé	Différence
Gisement 1	35.000	35.000	0.0000%
Rayon 1	300.000	300.000	0.0000%
Gisement 2	82.000	82.000	0.0000%
Rayon 2	700.000	699.999	0.0001%
Gisement 3	17.000	17.000	0.0000%
Rayon 3	400.000	399.999	0.0002%
Gisement 4	78.000	78.000	0.0000%

L'écart maximal, mesuré sur le deuxième rayon, est de 0.001%. Les coordonnées des centres des cercles (Tableau 4.6) et les longueurs des courbes (Tableau 4.7) fournissent également des éléments de comparaison.

**Tableau 4.6 : Comparaison des coordonnées des centres des cercles**

	x centre			y centre		
	Théorique	Calculée	Différence	Théorique	Calculée	Différence
Cercle 1	1515.0720	1515.0720	0.0000%	1212.5651	1212.5651	0.0000%
Cercle 2	1375.8989	1375.8989	0.0000%	2202.8331	2202.8331	0.0000%
Cercle 3	2427.8342	2427.8342	0.0000%	1881.2243	1881.2243	0.0000%

**Tableau 4.7 : Comparaison des longueurs des courbes calculées et théoriques**

	Longueur arc		
	Théorique	Calculée	Différence
Cercle 1	246.09142	246.09100	0.00017%
Cercle 2	794.12481	794.12400	0.00010%
Cercle 3	425.86034	425.86000	0.00008%

Les écarts entre les caractéristiques théoriques et calculées sont faibles, ce qui permet de valider les résultats de la reconstitution pour ce tracé.

#### 4.10.3. Profil en long

Le profil en long théorique montré à la Figure 4.38 comporte une succession de courbes saillantes et rentrantes.

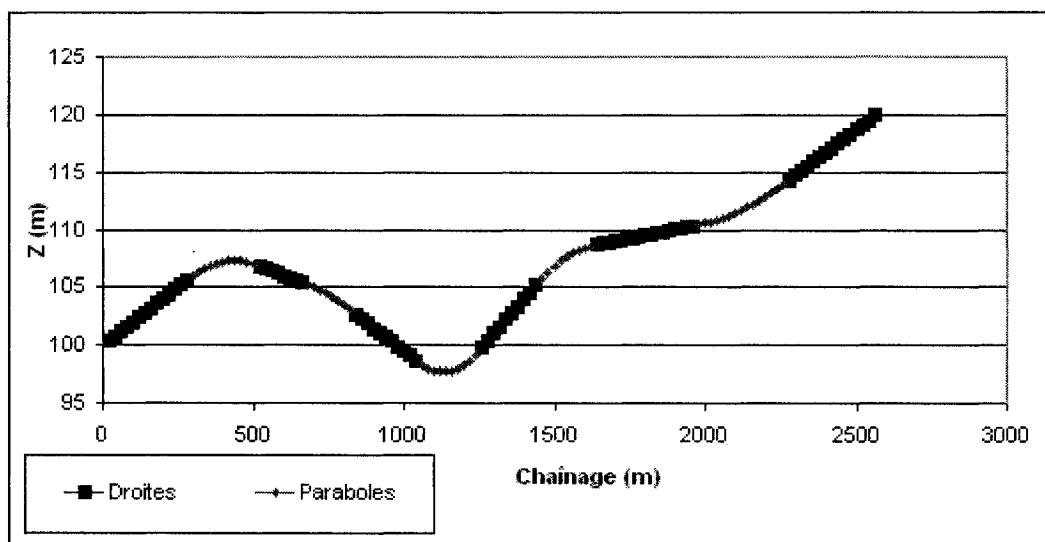


Figure 4.38 : Profil en long théorique

Les résultats obtenus par le programme de reconstitution correspondent bien visuellement aux coordonnées de départ (Figure 4.39).

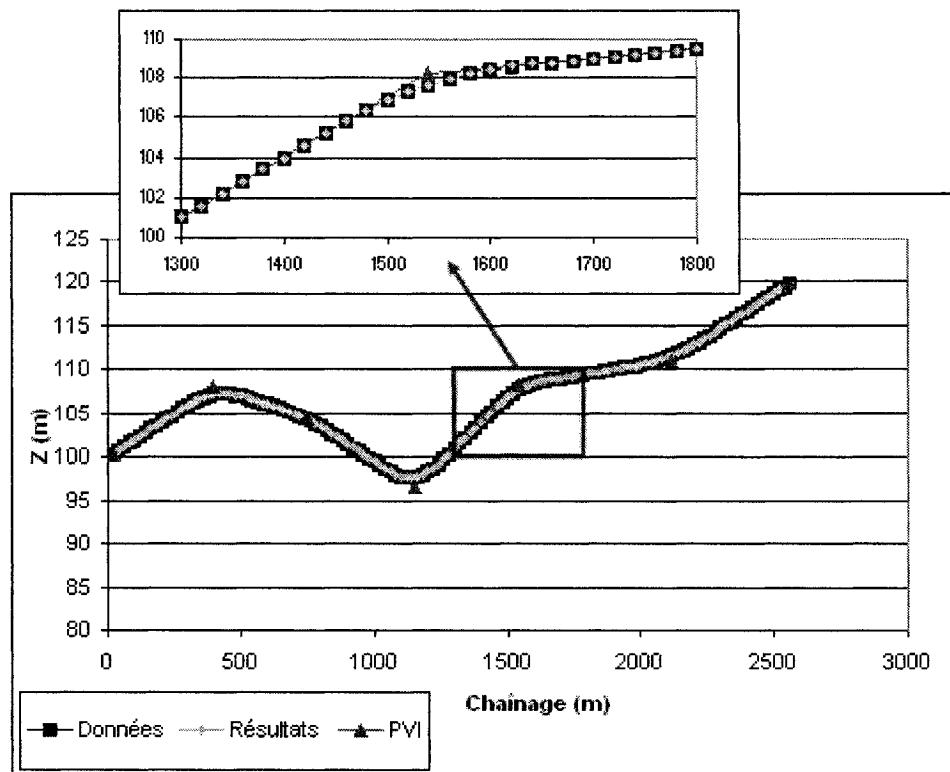


Figure 4.39 : Résultats de la reconstitution du profil en long théorique

Il faut néanmoins comparer les éléments obtenus par l'algorithme avec les éléments qui ont servi à constituer la série de coordonnées de départ (Tableau 4.8).

**Tableau 4.8 : Comparaison des éléments du profil en long**

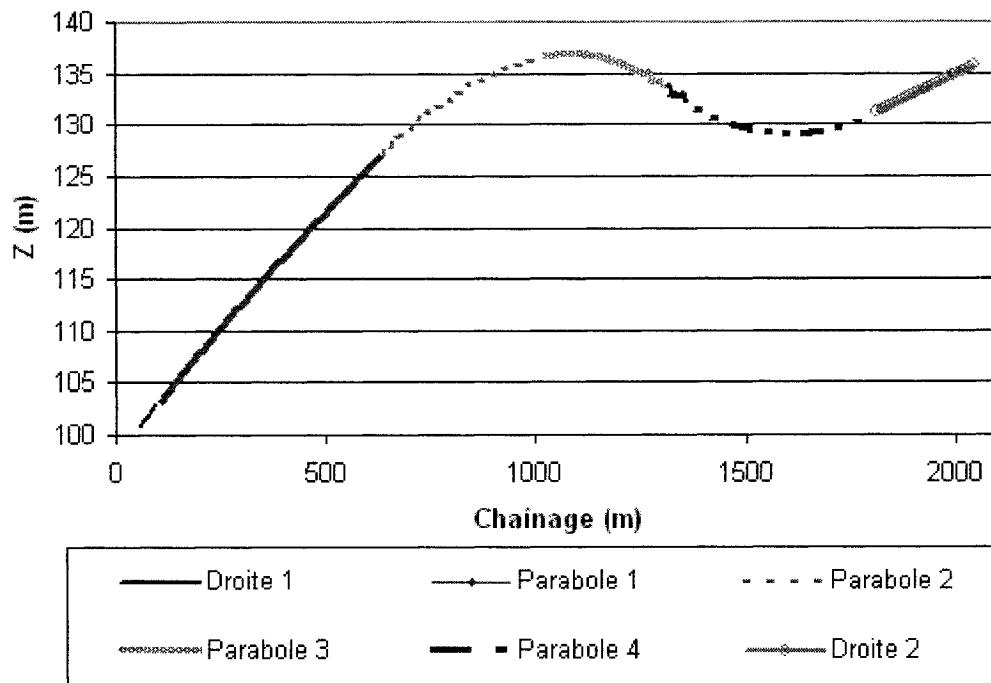
	Valeur théorique	Valeur calculée	Différence
Pente 1	2	2	0.0000%
Longueur 1	220	219.999	0.0005%
Pente 2	-1	-1	0.0000%
Longueur 2	150	149.999	0.0007%
Pente 3	-2	-2	0.0000%
Longueur 3	200	199.999	0.0005%
Pente 4	3	3	0.0000%
Longueur 4	180	180	0.0000%
Pente 5	0.5	0.5	0.0000%
Longueur 5	300	299.999	0.0003%
Pente 6	2	2	0.0000%

Les valeurs des pentes (exprimées en %) trouvées par le programme de reconstitution sont proches des valeurs théoriques.

#### **4.10.4. Profil en long composé de quatre paraboles**

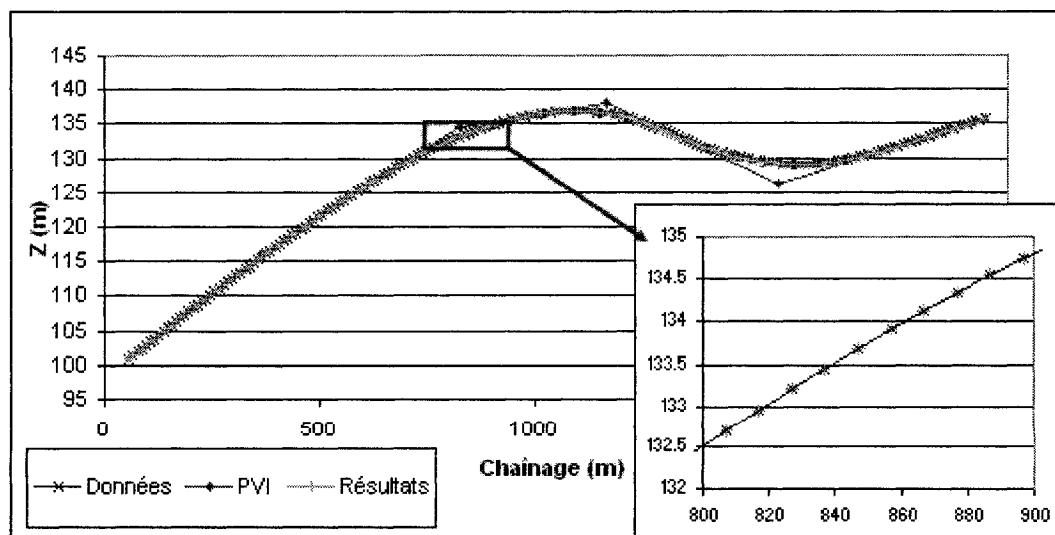
##### **successives**

Le profil en long suivant est composé de quatre paraboles successives sans droites entre elles. Cela représente une grande difficulté car l'algorithme doit introduire trois tangentes consécutives. Le pas entre les points est de 10m. Le tracé est présenté à la Figure 4.40.



**Figure 4.40 : Profil en long théorique composé de quatre paraboles consécutives**

Les résultats sont présentés sur la Figure 4.41. Visuellement, les résultats sont superposés aux données.



**Figure 4.41 : Résultats de la reconstitution du profil en long**

La comparaison des valeurs calculées des pentes et des longueurs des paraboles par rapport aux valeurs théoriques (Tableau 4.9) révèle que les différences sont inférieures à 0.35%.

**Tableau 4.9 : Comparaison des éléments du profil en long**

	Valeur calculée	Valeur théorique	Différence
Pente 1	5	5	0.0000%
Longueur 1	528	528	0.0000%
Pente 2	4	4	0.0000%
Longueur 2	391.132	391	0.0337%
Pente 3	0.999	1	0.1015%
Longueur 3	297.688	297	0.2311%
Pente 4	-3.010	-3	0.3415%
Longueur 4	499.023	498	0.2050%
Pente 5	2	2	0.0000%

Les résultats sont acceptés étant donné que ce tracé présente une grande difficulté à cause des quatre tangentes consécutives que l'algorithme a su correctement détecter et reconstituer.

#### **4.10.5. Conclusion**

Les deux algorithmes fournissent des résultats fiables sur les tracés théoriques. En effet, les reconstitutions des tracés en plan et des profils en long sont acceptés, même lorsque plusieurs courbes consécutives sont présentes dans les alignements.

#### **4.11. Conclusion**

Au vu des résultats, le programme de reconstitution des alignements théoriques est validé. Il est désormais possible de se concentrer sur des alignements réels.

## Chapitre 5 : Approche réelle

Maintenant que les tracés théoriques ont été étudiés et que des exemples ont permis de valider le modèle, des tracés réels vont être traités. Plusieurs différences existent entre les cas théorique et réel mais les principes généraux restent semblables. C'est pourquoi seules ces différences vont être explicitées dans les procédures de calcul de cette partie, qui seront ensuite testées sur des données.

### **5.1. Différences entre réel et théorique**

Plusieurs différences existent entre la reconstitution de tracés théoriques et de tracés réels. En effet, les tracés théoriques sont constitués de points qui sont parfaitement dans l'alignement général du tracé, ce qui n'est pas le cas pour des tracés réels. Ainsi, les données qu'il faut désormais reconstituer sont issues de relevés GPS qui comportent une certaine erreur inhérente à leur mode de collecte (voir 5.2 : Les données). Ces erreurs entraînent certains changements dans le principe général de l'algorithme. Les données sont filtrées avant d'être utilisées, une valeur de sensibilité est introduite dans l'algorithme d'allocation, les valeurs aberrantes sont détectées lors de la régression linéaire, des régressions sont utilisées pour déterminer les caractéristiques des cercles et des paraboles, les courbes composées peuvent être détectées ou non selon les cas et la cohérence des résultats est vérifiée.

### **5.2. Les données**

#### **5.2.1. Relevé des données**

Les données dont nous disposons sont une suite de coordonnées x, y et z relevées par GPS. Elles ont été recueillies par le Ministère des Transports du Québec. Dans ce but, ce dernier a muni un véhicule d'un récepteur GPS qui s'est déplacé le long de routes en essayant de rester autant que possible parallèle à l'axe central de la route.

La distance du récepteur par rapport à l'axe central de la route a été mesurée, ce qui a permis ensuite de rapporter les coordonnées relevées à l'axe central de la route. La prise de relevés GPS qui se fait par triangulation de satellites peut se faire selon un pas de temps constant ou une longueur parcourue constante. Dans le cas d'un intervalle de temps constant, les relevés se font au minimum au rythme d'un relevé par seconde, ce qui entraîne des distances parcourues par les véhicules entre 15 et 25 mètres.

### **5.2.2. Erreurs liées à l'utilisation du GPS**

Comme pour tout récepteur GPS, il existe une imprécision sur la mesure fournie par les satellites. Ces erreurs liées à l'utilisation du GPS sont :

- ❖ Les erreurs dans la position du satellite
- ❖ L'erreur dans l'horloge du satellite
- ❖ Les effets des conditions atmosphériques sur la transmission du signal radio
- ❖ L'erreur dans l'horloge du récepteur
- ❖ Les erreurs dépendant du site (Anderson & Mikhail, 1998).

Le récepteur utilisé par le MTQ a une imprécision de l'ordre de 25cm en horizontal et 50cm en vertical. Cette imprécision est à l'origine des difficultés qui existent entre la reconstitution d'un tracé théorique et d'un tracé réel puisque les points ne sont pas parfaitement alignés les uns par rapport aux autres.

### **5.3. Le filtrage des données**

Il est important de filtrer les données pour éviter que des erreurs ne surviennent dans le déroulement de l'algorithme. Ainsi, on filtre les données pour éliminer les valeurs qui sont trop éloignées des autres données et qui peuvent engendrer des erreurs dans les résultats. On commence par éliminer les valeurs qui sont en double puis on cherche les valeurs aberrantes.

### 5.3.1. Doublons

Il est fréquent de voir deux lignes de coordonnées ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) consécutives identiques. Cela pose problème dans la mesure où la longueur entre deux points identiques est nulle et entraîne des divisions par 0 dans l'algorithme. On commence donc par éliminer les données qui se répètent dans la suite de données car elles engendrent des erreurs.

### 5.3.2. Points consécutifs éloignés

On calcule les distances entre les points de coordonnées ( $x$ ,  $y$ ) pour détecter les points consécutifs très éloignés les uns des autres, comme on en voit un exemple sur la Figure 5.1. Ce tracé relevé le long de la route 141 était peut être longé par un village ou une forêt qui a empêché de relever des coordonnées GPS. Même s'il s'agit de la même route, il n'y a pas de continuité entre les deux parties du tracé. Il est donc préférable de traiter les séquences de points différentes séparément. Dans un tel cas, le programme détecte les points séparés par une distance supérieure à 100 m et affiche une boîte de dialogue informant l'usager que seule la première séquence de points sera traitée.

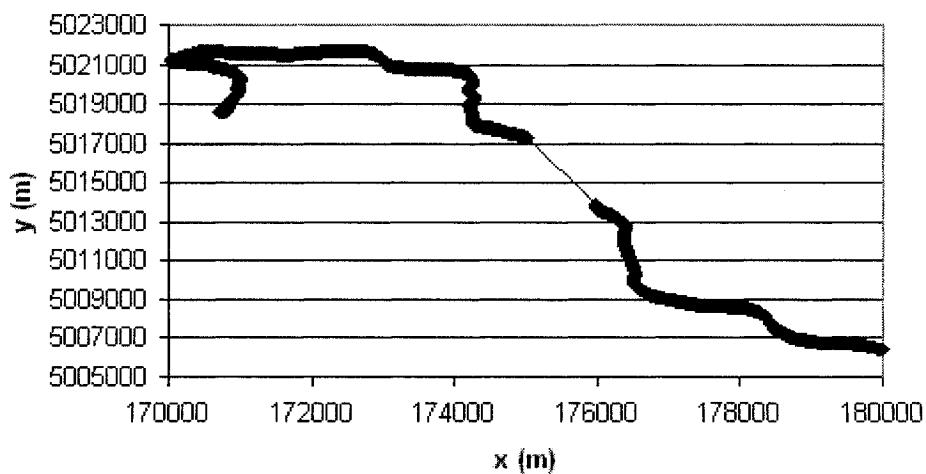


Figure 5.1 : Présence de points consécutifs éloignés

### 5.3.3. Points trop rapprochés

Les points très rapprochés posent problème lors de l'allocation des points (voir 5.4.1) dans la mesure où les différences entre les gisements consécutifs sont divisées par la longueur entre les points. Une distance inférieure à 1 m pourra alors poser problème. De plus, l'expérience montre que des points très proches les uns des autres nuisent à la qualité de la reconstitution, c'est pourquoi une distance minimale de 10m entre des points consécutifs est conservée. Certains points très proches sont alors supprimés.

### 5.3.4. Points mal positionnés

Il arrive que certains points soient mal positionnés par rapport aux autres, c'est-à-dire que le point est dans l'alignement général des autres points mais qu'il ne suit pas l'ordre logique dans la séquence des points. Ainsi, le point est placé comme s'il fallait revenir en arrière lorsqu'on suit la séquence des points (Figure 5.2). Ce genre de point est éliminé avant de commencer la reconstitution car il engendrerait des courbes avec des déflexions proches de  $180^\circ$  qui n'ont pas lieu d'être.

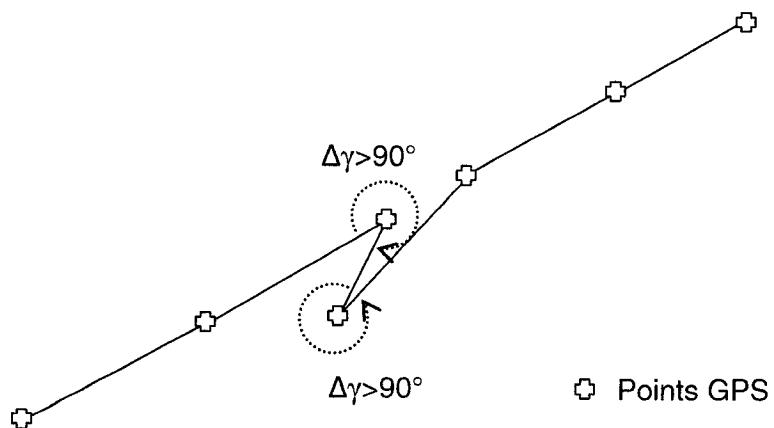


Figure 5.2 : Points GPS mal positionnés dans l'alignement général

## 5.4. L'allocation

### 5.4.1. L'indicateur du tracé

Dans le cas de tracés théoriques, les points sont espacés du même intervalle constant pour tout le tracé. La comparaison des valeurs des gisements et des angles de déviation sont alors d'excellents indicateurs pour réaliser l'allocation des points. Néanmoins, dans le cas de tracés réels, les points ne sont pas tous espacés du même intervalle et cela est problématique dans le cas de cercles et de paraboles où plusieurs points qui appartiennent à la même courbe pourront avoir des angles de déviation différents à cause de leur espacement différent. C'est pourquoi les déviations sont divisées par la longueur du segment correspondant pour uniformiser les valeurs des déviations sur un même cercle.

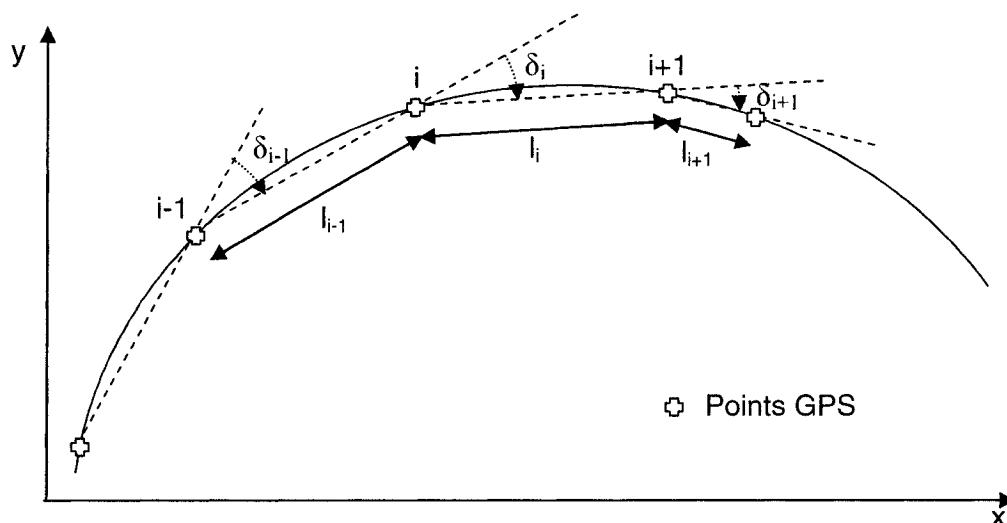


Figure 5.3 : Déflexions pour un tracé réel

Sur la Figure 5.3, on voit que la distance entre les points  $i$  et  $i+1$  est plus petite que la distance entre les points précédents. Ainsi, la déflexion  $\delta_{i+1}$  est plus petite que les déflexions  $\delta_i$  et  $\delta_{i-1}$ . En divisant les déflexions par les longueurs entre les points, les

déflexions obtenues ont des valeurs proches, ce qui permet d'allouer les points au même cercle.

Remarque : Pour un cercle, les valeurs des angles de déviation sont constantes pour une longueur sur la courbe constante. Or, ici, les déviations sont divisées par la distance euclidienne entre les points qui correspond à la longueur de la corde. Une analyse de sensibilité présentée en annexe (Annexe F : Différences de valeur de déflexion entre la longueur sur la courbe et sur la corde) indique la différence entre l'utilisation de ces deux longueurs différentes et dans quelle mesure l'utilisation de la longueur de la corde plutôt que sur la courbe est acceptée.

Même si les déviations sont désormais divisées par les longueurs pour tenir compte du fait que les espaces entre les points sont différents, ces indicateurs du tracé ne sont toujours pas aussi précis que dans le cas de tracés théoriques, et cela à cause des erreurs liées à l'utilisation du GPS. Sur l'exemple suivant d'un tronçon de la route 112 (Figure 5.4), les valeurs des gisements et des déviations par unité de longueur (Figure 5.5) ne permettent pas de positionner avec précision les débuts et fins de courbes. Il est alors nécessaire d'introduire une nouvelle variable : la sensibilité.

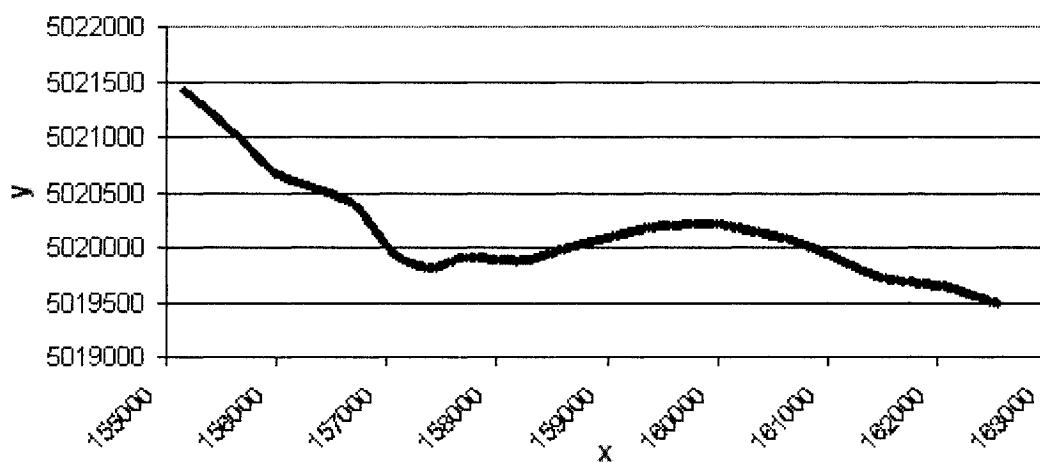


Figure 5.4 : Tracé en plan d'un tronçon de la route 112

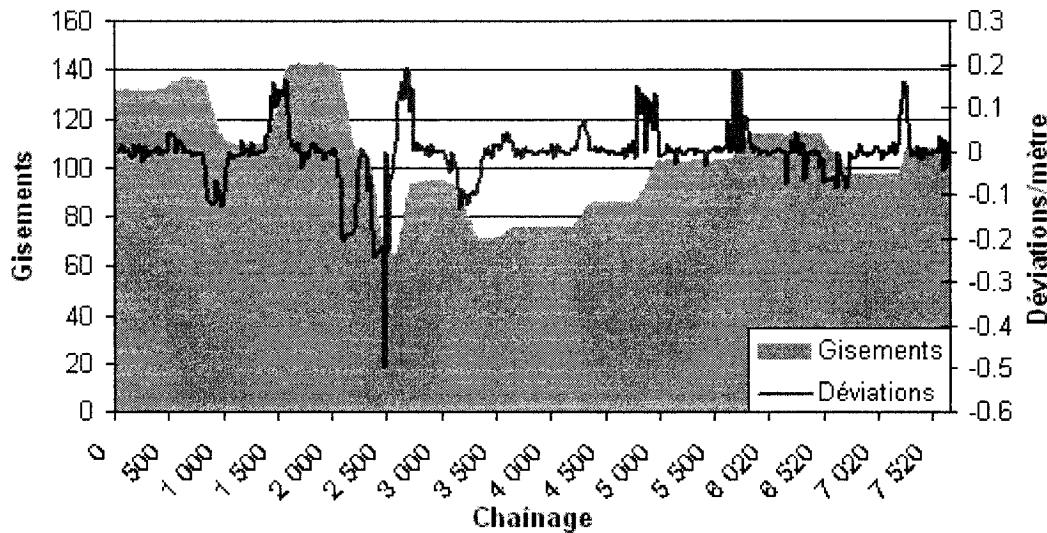
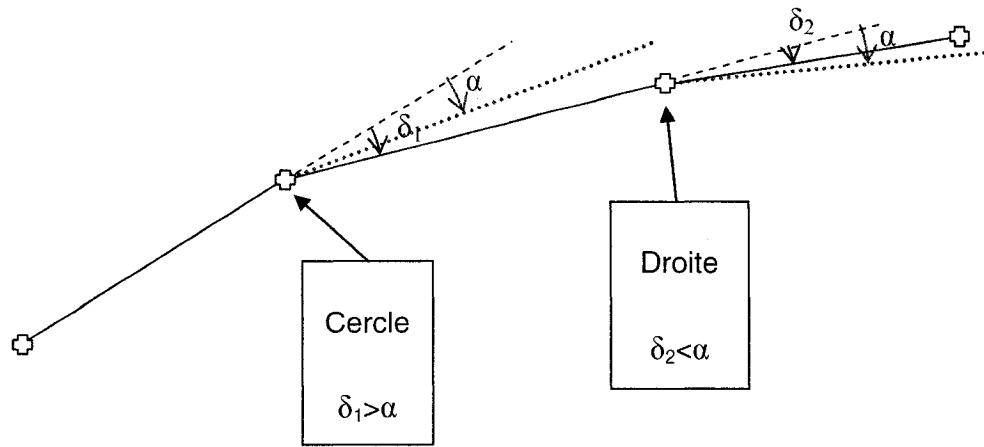


Figure 5.5 : Valeurs des gisements et des déflexions pour un tronçon de la route 112

#### 5.4.2. La sensibilité

L'introduction d'une valeur de sensibilité permet à l'usager de déterminer la « tolérance » qu'il souhaite appliquer dans l'allocation des points. En effet, pour les points d'une droite par exemple, les déviations entre les points devraient toutes être nulles. Néanmoins, à cause des erreurs liées à l'utilisation du GPS et du fait que le camion qui a fait les relevés n'a pas forcément toujours suivi exactement l'axe central de la route, les déviations n'ont pas la valeur exacte qu'elles devraient avoir en théorie. C'est pourquoi la valeur de la sensibilité permet de définir la marge de tolérance qui fait qu'un point sera plutôt attribué à une droite ou à un cercle.

La valeur des déviations divisées par les longueurs est ainsi comparée à une valeur  $\alpha$  définie par la sensibilité. Si la déflexion est plus petite que cette valeur  $\alpha$ , le point appartient à une droite, sinon, à une courbe (Figure 5.6).

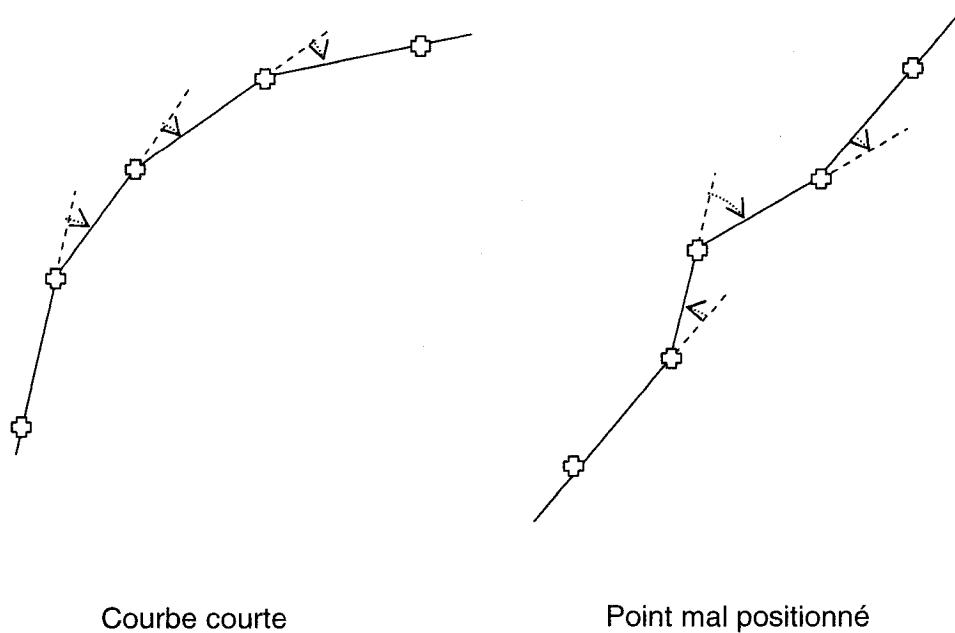


**Figure 5.6 : Allocation en fonction de la valeur de la sensibilité**

La sensibilité est comprise entre 0 et 100, 0 étant le moins sensible et 100 le plus sensible. Le choix d'une valeur de sensibilité correspond concrètement à un angle auquel seront comparées toutes les déviations divisées par les longueurs. Ces valeurs d'angle sont différentes pour le tracé en plan et pour le profil en long car les différences de pente sont plus petites pour les points des profils en long. Ainsi, pour une sensibilité de 60 par exemple, l'angle de tolérance auquel seront comparées les déflexions est de  $0.4^\circ$  pour le tracé en plan et  $0.04^\circ$  pour le profil en long. Plus la valeur de la sensibilité est élevée, plus l'angle de référence sera petit et les points seront moins facilement attribués à des droites.

#### 5.4.3. Détection des courbes courtes

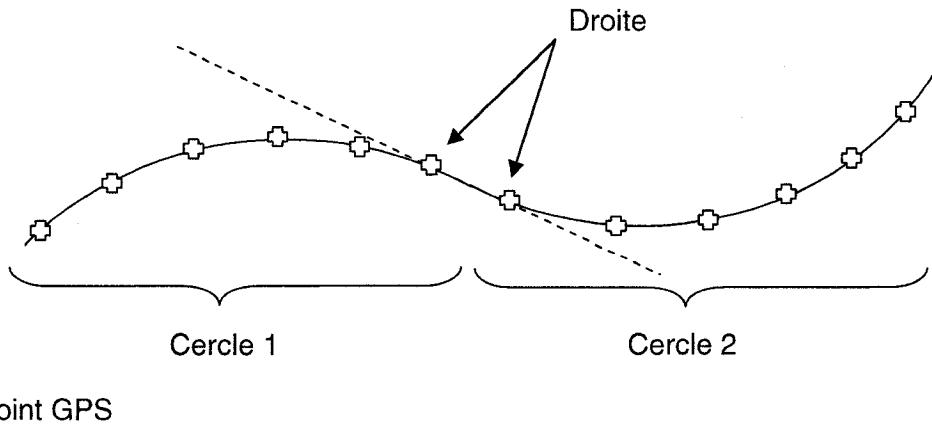
Il est important de différencier les courbes courtes qui ne sont composées que d'un ou deux points GPS des points GPS mal positionnés. En effet, un point qui s'écarte de l'alignement général des points présente, comme une courbe courte, deux déviations successives supérieures à la valeur de la sensibilité. Néanmoins, ces deux cas diffèrent dans la mesure où la déflexion au niveau du point et la suivante sont de même signe, contrairement à un point mal positionné (Figure 5.7).



**Figure 5.7 : Différence entre une courbe courte et un point mal positionné**

#### **5.4.4.Détection des cercles composés**

Ensuite, certaines corrections sont faites à l'allocation selon que l'utilisateur a choisi ou non de détecter les cercles composés. Dans le cas où l'usager ne souhaite pas détecter les cercles composés, des éléments de droite sont insérés entre les cercles multiples : ainsi, si un cercle droit et un cercle gauche se suivent, le dernier point du premier cercle et le premier point du deuxième cercle seront alloués à une droite (Figure 5.8). Le tracé ne sera alors composé que de courbes isolées.



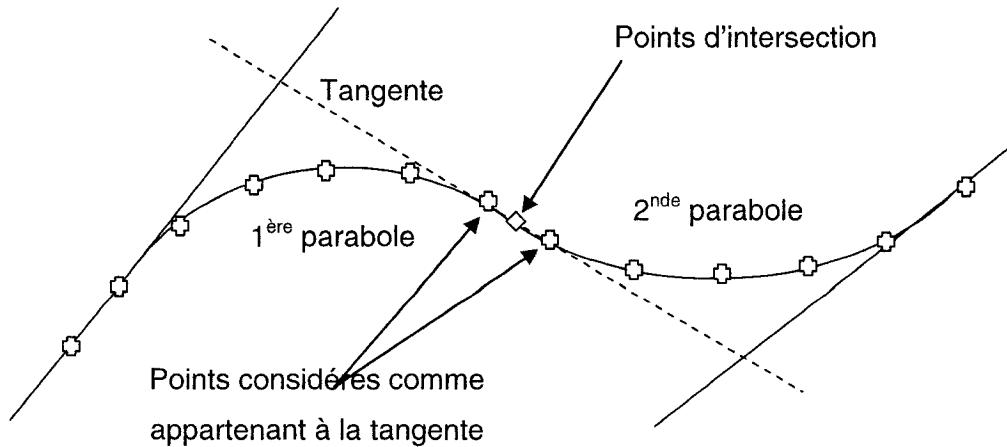
⊕ Point GPS

**Figure 5.8 : Allocation du dernier point du premier cercle et du premier point du deuxième cercle à une droite**

Dans le cas contraire, on ne rajoute pas de droites entre les cercles de sens contraires et on détecte les cercles composés de la même manière que dans le cas de tracés théoriques.

#### 5.4.5.Les paraboles composées

La méthode pour reconstituer les éléments des paraboles composées théoriques repose sur des valeurs particulières d'angles de déviation. Etant donné qu'il est impossible de se fier uniquement à une valeur étant donnés les erreurs liées au GPS, la méthode théorique ne peut pas s'appliquer dans le cas de tracés réels. Or, il est très rare de trouver des paraboles composées en C. Les paraboles en S sont plus fréquentes dans le cas de paraboles composées. On considère alors les paraboles réelles composées comme deux paraboles simples séparées par une droite composée du dernier point de la première parabole et du premier point de la deuxième parabole (Figure 5.9). Les caractéristiques de ces paraboles sont étudiées comme deux paraboles indépendantes.



**Figure 5.9 : Points servant à déterminer l'équation de la tangente aux paraboles**

## 5.5. Les valeurs aberrantes

Lors de la recherche des caractéristiques des droites par régression linéaire, si un ou plusieurs points sont mal placés sur la droite, ils peuvent parfois influencer fortement les résultats de la régression. C'est pourquoi il est souhaitable de repérer ces points pour les écarter et recommencer la régression linéaire sans eux. Ces points sont appelés valeurs aberrantes.

### 5.5.1. La détection des valeurs aberrantes

Une valeur aberrante est une donnée dont la valeur s'écarte fortement des valeurs des autres observations d'un ensemble (Canada. Bureau de la traduction, 2000).

Les régressions que nous effectuons sur les données sont des régressions aux moindres carrés. Or, une régression aux moindres carrés tente de minimiser au maximum les différences entre les coordonnées réelles et les coordonnées calculées. Ainsi, lorsqu'une valeur aberrante se trouve parmi les données, son influence sur les résultats de la régression est grande alors qu'elle ne devrait pas

l'être. Il est donc bon de diagnostiquer ces valeurs avant de commencer la régression.

(Maimon & Rokach, 2005) proposent une méthode de détection statistique des valeurs aberrantes : une valeur est dite aberrante si elle appartient au champ  $f(\alpha_n, \mu_n, \sigma_n)$  défini par :

$$f(\alpha_n, \mu_n, \sigma_n) = \{x : |x - \mu_n| > g(n, \alpha_n) \sigma_n\}$$

Avec  $\alpha_n$  un coefficient de confiance,  $\mu_n$  la moyenne,  $\sigma_n$  la déviation. La fonction  $g(n, \alpha_n)$  définit les limites de la région des valeurs aberrantes, c'est-à-dire la valeur critique des déviations standards.

De plus, la méthode utilisée doit éviter l'effet de masque qui peut se définir de la façon suivante : une valeur aberrante masque une autre valeur aberrante si la deuxième valeur aberrante peut être considérée comme aberrante par elle-même mais pas en présence de la première valeur aberrante. Ainsi, lorsqu'on élimine la première valeur aberrante, la deuxième valeur apparaît comme aberrante. L'effet de masque se produit lorsqu'un ensemble d'observations de valeurs aberrantes désaxe la moyenne et la covariance, rendant la distance entre la valeur aberrante et la valeur moyenne petite. (Maimon & Rokach, 2005)

Rousseeuw et Leroy (1987) proposent d'atteindre cet objectif en définissant un estimateur qui permettrait d'effacer toutes les données pour lesquelles le diagnostic dépasse une valeur critique puis d'effectuer la régression aux moindres carrés sur les données restantes. Pour cela, il propose un autre type d'indicateur qui, au lieu de minimiser la moyenne des différences entre les coordonnées calculées et les coordonnées réelles au carré, utilise la médiane au lieu de la moyenne. Ainsi, cela produit un résultat robuste tant pour les valeurs aberrantes en x qu'en y. On retient les données qui vérifient la condition suivante, avec  $r_i$  les résidus de la régression :

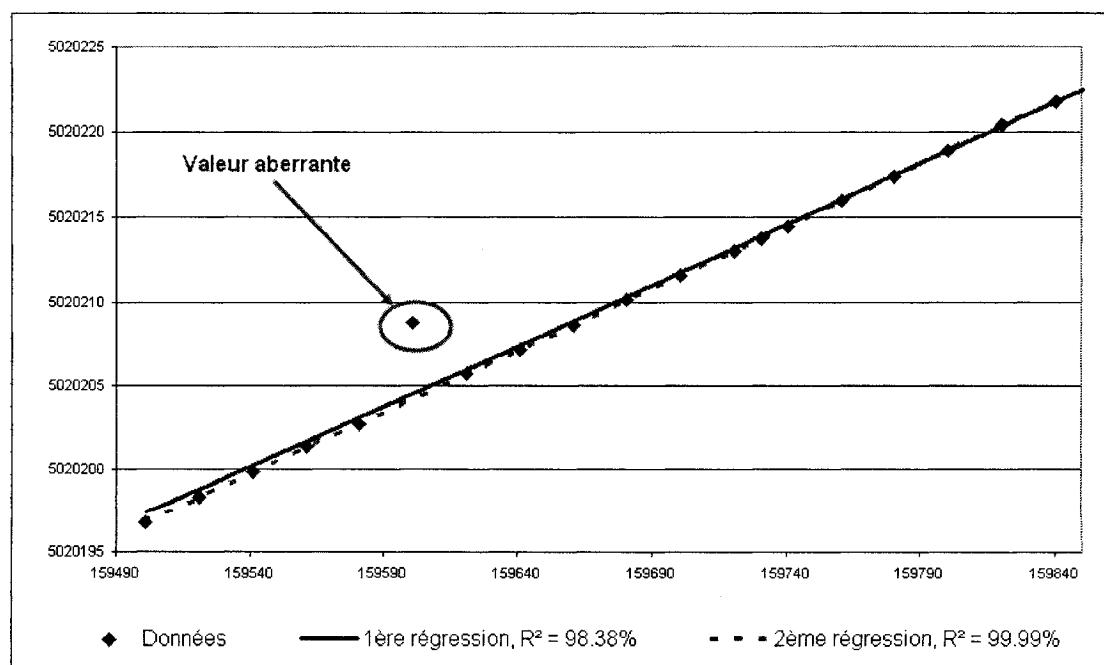
$$\left| \frac{r_i}{\sigma^*} \right| \leq 2.5$$

Le paramètre  $\sigma^*$  doit aussi être estimé de manière à être robuste. Ainsi, on le calcule selon la formule :

$$\sigma^* = 1.4826 \times \left(1 + \frac{5}{n-p}\right) \times \sqrt{\text{mediane}(r_i^2)}$$

Le facteur  $n$  représente le nombre d'observations,  $p$  le degré de liberté, le facteur 1.4826 qui est égal à  $\frac{1}{\Phi^{-1}(0.75)}$ , représente une bonne estimation de  $\sigma$  quand la distribution est une distribution normale  $N(0, \sigma^2)$ .

Lorsqu'une valeur aberrante est détectée sur une droite et qu'elle est ensuite supprimée, les résultats de la régression linéaire sont meilleurs pour la droite. La valeur aberrante n'est toutefois pas supprimée de la base de données, elle n'est juste plus utilisée.



**Figure 5.10 : Résultat de la régression sur toutes les données ( $R^2=98.38\%$ ) et sur les données sans la valeur aberrante ( $R^2=99.99\%$ )**

On voit sur la Figure 5.10 un exemple de coordonnées GPS de la route 112 détectées comme faisant partie d'une même droite. Avec tous les points, le coefficient de détermination  $R^2$  est de 98.38%. En enlevant la valeur aberrante, le coefficient de détermination augmente et vaut 99.99%. Ainsi, la droite est mieux ajustée aux points.

Plus les coordonnées de la valeur aberrante sont éloignées des autres données, plus le résultat de la régression va être mauvais. C'est pour cette raison qu'il est important de filtrer les valeurs aberrantes.

On applique exactement le même principe pour détecter les valeurs aberrantes sur les cercles.

### **5.6.Les cercles**

Vouland (2005) a développé une méthode pour trouver le meilleur rayon adapté aux points qui appartiennent aux cercles. Cette méthode a été revue et corrigée par Jacquot (2005). La recherche du meilleur rayon peut être effectuée par régression aux moindres carrés mais cela n'est pas suffisant car il est important que les cercles soient en tangence avec les droites avant et après la courbe. La principale contrainte dans la recherche des caractéristiques des cercles est donc que ces derniers doivent être en tangence avec les droites situées avant et après eux (Figure 5.11).

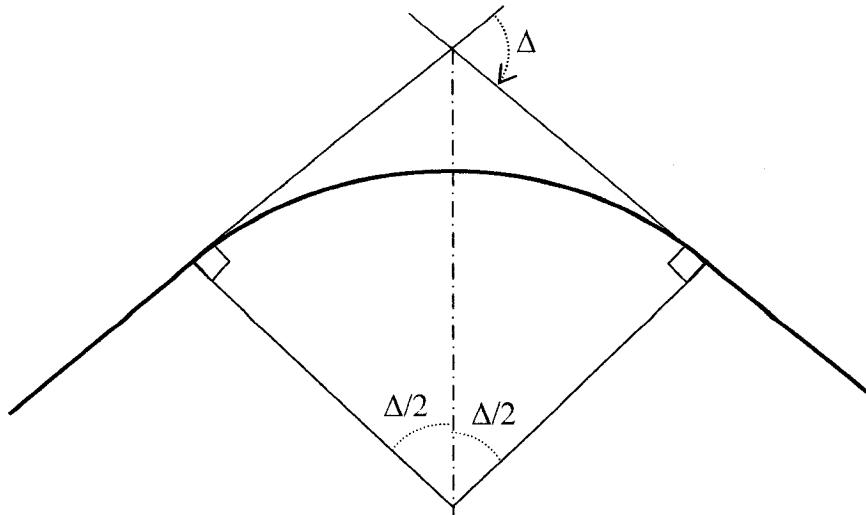
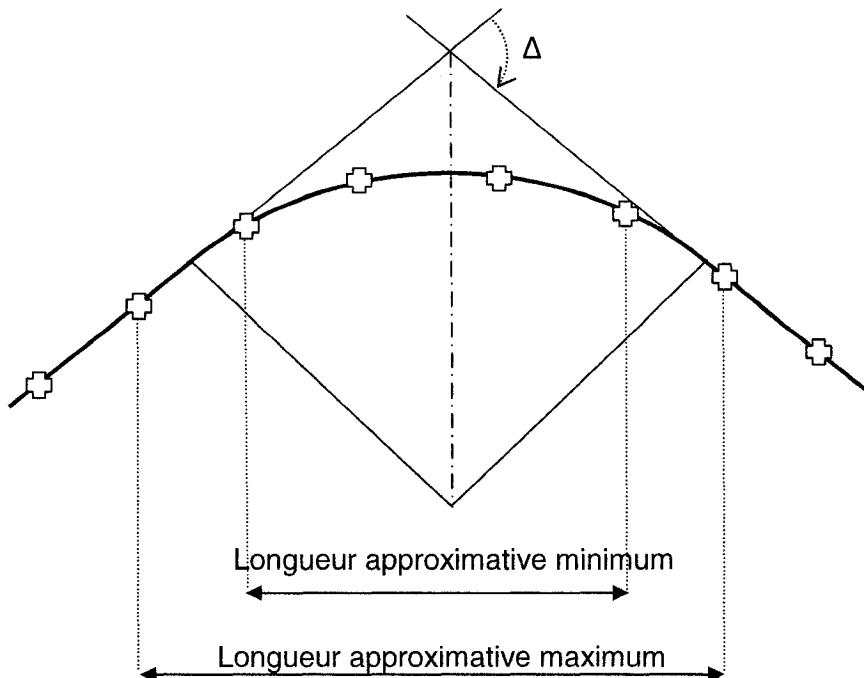


Figure 5.11 : Condition de tangence des droites avant et après le cercle

Dans un premier temps, il est possible d'estimer la longueur de la courbe grâce aux coordonnées des points GPS situés sur les droites avant et après la courbe et celles sur la courbe. La distance entre le dernier point de la droite avant le cercle et le premier sur la droite après le cercle donne une estimation supérieure de la longueur de la courbe alors que la longueur entre le premier et le dernier point du cercle donne une limite inférieure à la longueur de la courbe. La moyenne de ces longueurs est une longueur approximative de la courbe (Figure 5.12). Cela permet d'obtenir une

$$\text{approximation du rayon des cercles : } R = \frac{180 \times L_{approx}}{\pi \times \Delta}.$$



**Figure 5.12 : Approximation de la longueur de la courbe**

L'étape suivante consiste à déterminer le gisement  $\Gamma_0$  qui est le gisement entre le PI et le centre du cercle. Sa valeur dépend de la valeur des gisements avant et après la courbe et tient compte de la condition de tangence entre le cercle et les droites. Puis, à partir des coordonnées du PI et de la valeur du gisement  $\Gamma_0$ , il est possible d'obtenir les coordonnées du centre du cercle O car la distance entre le PI et le

centre du cercle peut s'exprimer de la façon suivante (Figure 5.13) :  $R\sqrt{1 + \tan^2 \frac{\Delta}{2}}$ .

Les coordonnées du centre du cercle s'expriment alors ainsi :

$$x_0 = x_{PI} + R\sqrt{1 + \tan^2 \frac{\Delta}{2}} \sin \Gamma_0 \quad y_0 = y_{PI} + R\sqrt{1 + \tan^2 \frac{\Delta}{2}} \cos \Gamma_0$$

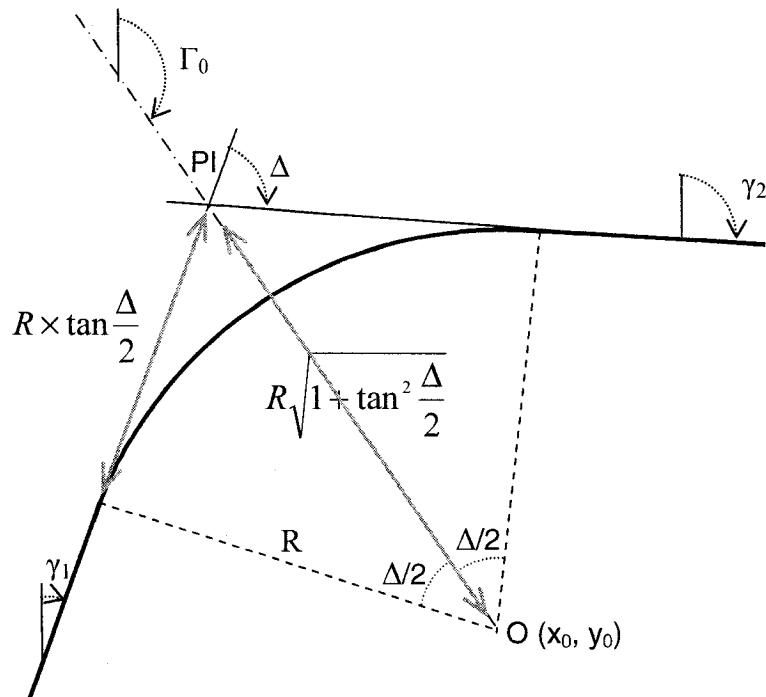


Figure 5.13 : Positionnement du centre du cercle

Le but de la régression aux moindres carrés est de minimiser la surface engendrée par les écarts  $\xi$  entre les points relevés de coordonnées  $(x_i, y_i)$  et les points estimés  $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$  (Figure 5.14).

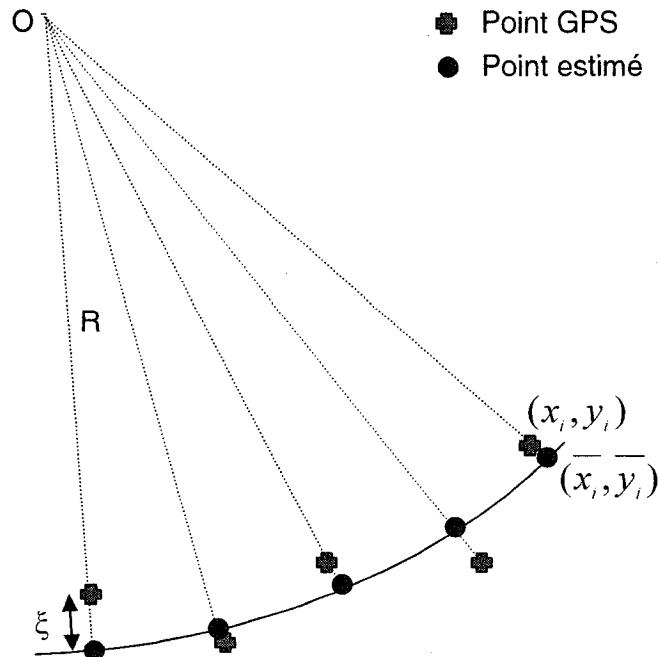


Figure 5.14 : Ecarts entre les points estimés et les points relevés

La somme sur tous les points  $i$  de la différence des surfaces s'exprime ainsi :

$$S = \pi^2 \sum_i \left( (\bar{x}_i - x_0)^2 + (\bar{y}_i - y_0)^2 - R^2 \right)^2$$

En remplaçant les coordonnées du centre du cercle et en posant :

$$a = \sqrt{1 + \tan^2 \frac{\Delta}{2} \sin \Gamma} \text{ et } b = \sqrt{1 + \tan^2 \frac{\Delta}{2} \cos \Gamma}, \text{ on obtient :}$$

$$S = \pi^2 \sum_i \left( (\bar{x}_i - x_{pI} - R \times a)^2 + (\bar{y}_i - y_{pI} - R \times b)^2 - R^2 \right)^2$$

Trouver le rayon qui minimise la somme des surfaces des écarts revient à différencier  $S$  en fonction de  $R$  et trouver le rayon qui annule l'expression obtenue :

$$\frac{\partial S}{\partial R} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \left[ (x_i - x_{pI})^2 + (y_i - y_{pI})^2 + R^2 \tan^2 \frac{\Delta}{2} - 2R(a+b) \right] \\ \times \left[ a(x_i - x_{pI}) + b(y_i - y_{pI}) - R \tan^2 \frac{\Delta}{2} \right] = 0$$

Ainsi, le rayon qui minimise cette fonction est le rayon le plus approprié au cercle.

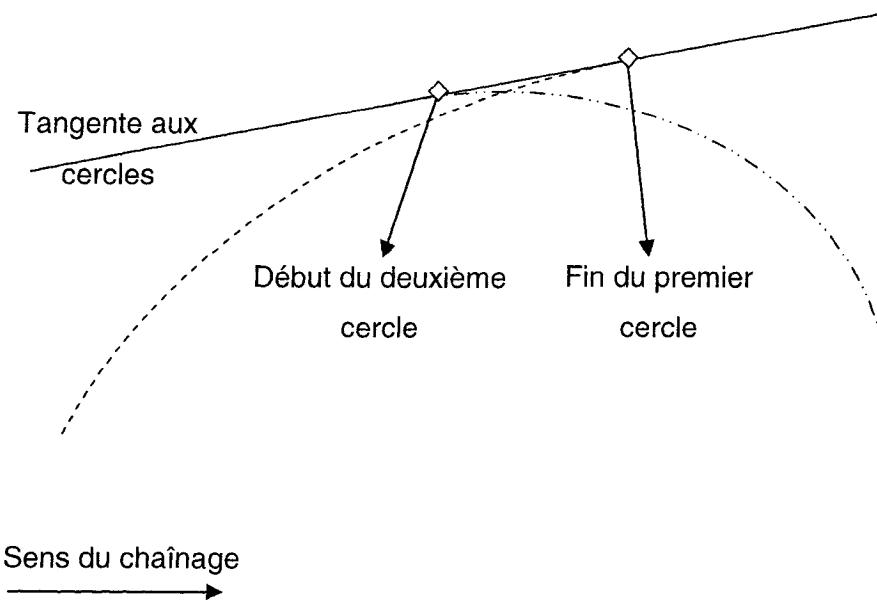
L'expression qui permet de trouver le rayon optimal est en fait un polynôme de troisième degré. Jacquot (2005) propose de chercher les racines réelles de ce polynôme grâce à la méthode de Cardan (Wikipédia). Dans le cas où plusieurs solutions réelles sont possibles, une estimation du rayon à l'aide de la longueur approximative de la courbe calculée plus haut permet de trancher.

Dès lors que les rayons et les centres des cercles sont connus, il est possible de trouver les débuts et fins de cercles. En effet, l'équation du cercle s'écrit ainsi :  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ . Comme on dispose déjà des équations des droites avant et après les cercles, l'intersection du cercle et des droites fournit les coordonnées des points de début et fin du cercle.

### 5.6.1. Caractéristiques des cercles réels composés

Dans le cas de tracés réels, il est approprié d'utiliser les régressions circulaires pour déterminer les caractéristiques des cercles. Néanmoins, dans le cas de cercles composés réels, il est nécessaire, comme dans le cas de cercles composés théoriques, de calculer au préalable l'équation de la tangente aux deux cercles avant de commencer à calculer les caractéristiques des cercles. Rappelons que dans le cas de cercles théoriques composés, la recherche de la tangente commune aux deux cercles passe par la recherche des caractéristiques des cercles et de leur point d'intersection à l'aide des valeurs des angles de déviation des points appartenant aux cercles. Si l'équation de la tangente est connue, les caractéristiques des cercles réels pourraient alors être calculées par régression aux moindres carrés mais le problème est que, avec les équations des cercles nouvellement calculées par régression, le point d'intersection des deux cercles est souvent mal placé, c'est-à-dire que soit une

droite est introduite entre les deux cercles, soit les deux cercles se chevauchent (Figure 5.15).



**Figure 5.15 : Exemple de chevauchement de cercles**

Pour éviter ce genre de situation, il est donc préférable de ne pas faire de régression sur les cercles composés mais plutôt d'utiliser la méthode des courbes composées théoriques adaptée pour les cercles réels. Au lieu d'utiliser les valeurs exactes des déviations entre les points, une valeur de déviation moyenne est calculée pour chaque cercle réel. De cette façon, les caractéristiques des cercles composés sont trouvées tout en s'assurant que le point d'intersection des deux cercles est bien situé sur la tangente aux deux cercles.

## 5.7. Les paraboles

### 5.7.1. Les paraboles isolées

La méthode utilisée pour calculer les caractéristiques des paraboles est celle développée par Vouland (2005) et corrigée par Jacquart (2005). Il s'agit d'une régression aux moindres carrés, explicitée ci-dessous.

L'équation générale de la parabole est :

$$z = \frac{p_2 - p_1}{2L} (x - x_0)^2 + p_1 (x - x_0) + z_0.$$

De plus, on connaît la relation suivante (Figure 5.16) :

$$\begin{cases} x_{PI} = x_0 + \frac{L}{2} \\ z_{PI} = z_0 + p_1 \times \frac{L}{2} \end{cases}$$

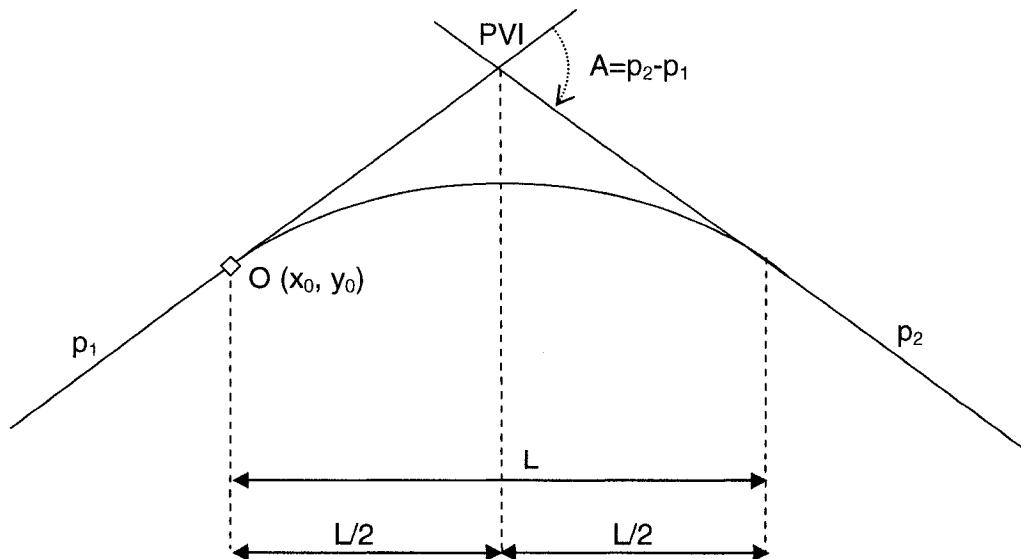


Figure 5.16 : Caractéristiques des paraboles

En remplaçant les coordonnées du point d'origine O de la parabole dans l'équation générale et en sommant les écarts  $\xi$  entre les coordonnées estimées  $(\bar{x}_i, \bar{z}_i)$  et les coordonnées réelles  $(x_i, z_i)$  sur tous les points, on obtient l'équation suivante:

$$S = \sum_{i=1}^n \left( \bar{z}_i - \frac{p_2 - p_1}{2L} (x_i - x_{Pl} - \frac{L}{2})^2 - p_1 (x_i - x_{Pl} - \frac{L}{2}) - z_o \right)^2$$

Le but de la régression est de réduire au maximum les écarts, ce qui revient à minimiser S. Pour cela, on différencie S selon L :

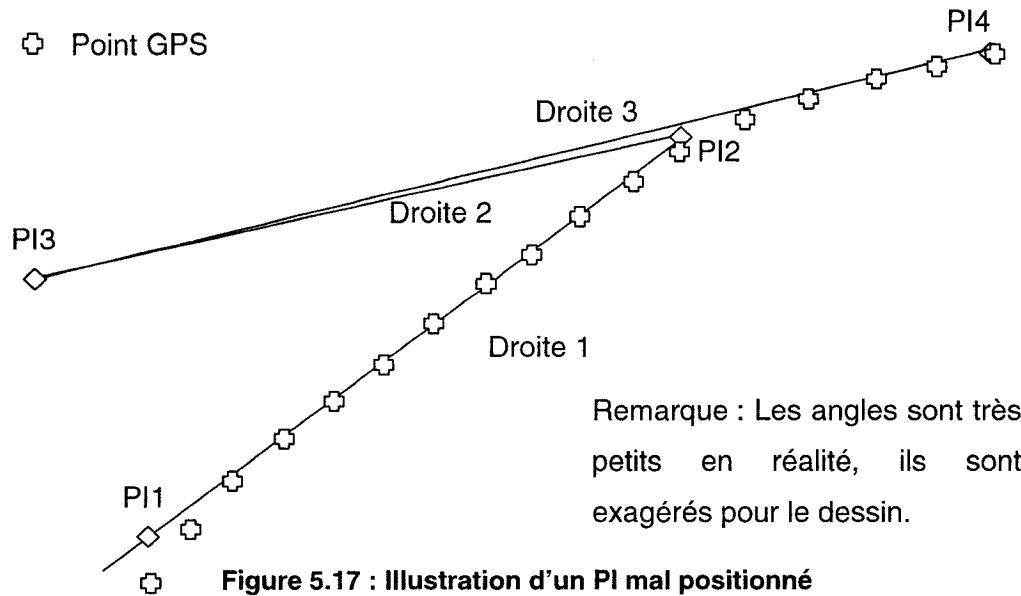
$$\frac{dS}{dL} = \sum_{i=1}^n \left( x_i^2 + x_{Pl}^2 - 2x_i x_{Pl} - \frac{L^2}{4} \right) \times \left( \bar{z}_i - \frac{p_2 - p_1}{2L} (x_i^2 - x_{Pl}^2 - 2x_i x_{Pl}) - \frac{p_2 - p_1}{2} (x_i - x_{Pl} - \frac{L}{4}) - p_1 (x_i - x_{Pl}) - z_o \right) = 0$$

La longueur de parabole qui permet de minimiser cette fonction est trouvée par résolution d'une équation de 4<sup>e</sup> degré. En effet, l'expression qui permet de calculer la longueur optimale peut se mettre sous la forme d'un polynôme de degré quatre. La méthode algébrique de résolution retenue par Jacquart (2005) est la méthode de Ferrari (Wikipédia). L'estimation de la longueur de la parabole, comme pour le tracé en plan, permet de choisir la bonne solution si plusieurs solutions réelles existent.

## 5.8. Vérification de la cohérence des résultats

### 5.8.1. Vérification de l'alignement des PI et PVI

Dans certains cas, le point d'intersection entre deux droites est mal positionné, il n'est plus dans l'alignement général des points. Cela se produit parfois quand deux droites successives ont des gisements très proches ou dans le cas de plusieurs cercles consécutifs qui ont peu de points.



Sur la Figure 5.17, le PI3 est mal placé car les droites 2 et 3 ont des gisements très proches et une légère erreur des coefficients de la régression linéaire fait que les droites ne se coupent pas là où elles devraient en réalité, c'est-à-dire entre les PI2 et 4.

Il est facile de détecter un point d'intersection mal positionné mais il est très difficile de le repositionner correctement car les résultats de la régression circulaire sur la courbe associée à ce PI dépendent directement de sa bonne position. De plus, on remarque que comme les gisements en cause sont très proches les uns des autres, il est possible de supprimer le PI en question ainsi que le cercle qui y est associé (qui a une déflexion très faible) sans nuire à la qualité de la reconstitution.

Pour détecter les points d'intersection mal positionnés, rappelons d'abord que ces derniers sont calculés comme étant l'intersection de deux droites trouvées par régression linéaire ou par calcul de tangente dans le cas où l'on a plusieurs courbes consécutives. On peut calculer ensuite la distance entre les points d'intersection consécutifs. Pour vérifier si un point est bien positionné dans le tracé, on vérifie qu'en

partant du premier point, on peut retrouver les coordonnées du point suivant avec la longueur entre les points et la valeur du gisement des droites :

$$x_{PI}(i) = x_{PI}(i-1) - \overline{PI(i-1)PI(i)} \times \sin(gisement(i))$$

Dans les cas où cette condition n'est pas vérifiée et que l'angle formé par les deux droites qui ont pour intersection ce PI est inférieur à  $1^\circ$ , si la détection des erreurs est activée, on supprime ce point.

### 5.8.2. Vérification des positions des début et fin de courbes

Dans de rares cas (par exemple cas des cercles à un point avec un rayon nul que l'on trouve à des intersections), les points de début et fin de courbe sont mal placés, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas situés sur la droite à laquelle ils devraient normalement appartenir. Cela engendre des problèmes car le calcul des éléments finaux utilise les coordonnées des points de début et fin de courbes. En effet, la longueur des droites entre les courbes est calculée entre la fin d'une courbe et le début de la courbe suivante.

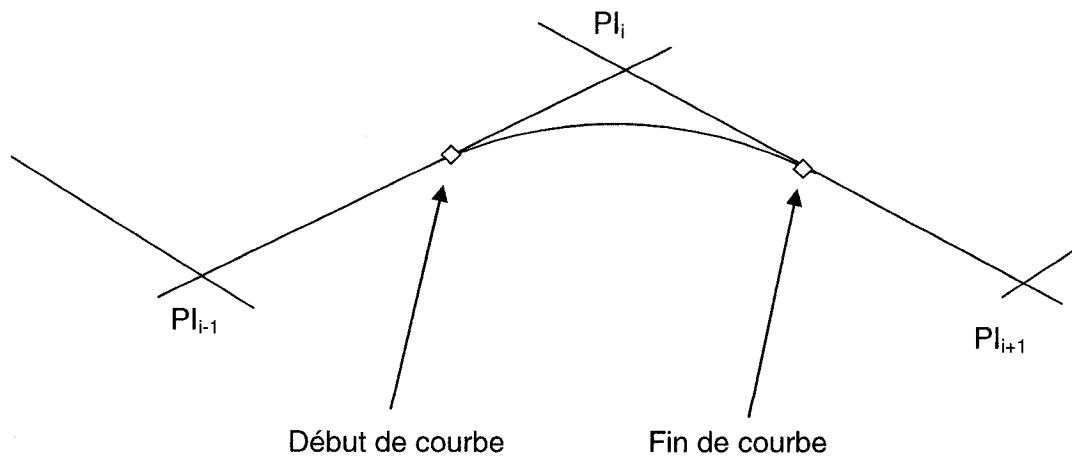


Figure 5.18 : Position des début et fin de courbes par rapport aux PI

Sur la Figure 5.18, le point de début de courbe doit être situé sur la droite qui relie les  $PI_{i-1}$  et  $i$  et le point de fin de courbe sur la droite qui relie les  $PI_i$  et  $i+1$ . Or, il arrive que les points soient mal placés. Dans le cas où le rayon trouvé est nul (exemple : intersection à  $90^\circ$ ), le point de fin de courbe est à la même position que le point de début de courbe.

C'est pourquoi on commence par vérifier si les points sont correctement alignés. Pour cela, en nommant  $PI_{avant}$  et  $PI_{après}$  les points d'intersection avant et après le point dont on veut vérifier la position et  $I$  le point en question, on vérifie la colinéarité des vecteurs  $\overrightarrow{PI_{avant}PI_{après}}$  et  $\overrightarrow{PI_{avant}I}$ .

Les vecteurs  $\overrightarrow{PI_{avant}PI_{après}} = (x_{Plaprès} - x_{Plavant}, y_{Plaprès} - y_{Plavant})$  et  $\overrightarrow{PI_{avant}I} = (x_I - x_{Plavant}, y_I - y_{Plavant})$  sont colinéaires si et seulement si  $(x_{Plaprès} - x_{Plavant}) \times (y_I - y_{Plavant}) = (x_I - x_{Plavant}) \times (y_{Plaprès} - y_{Plavant})$ .

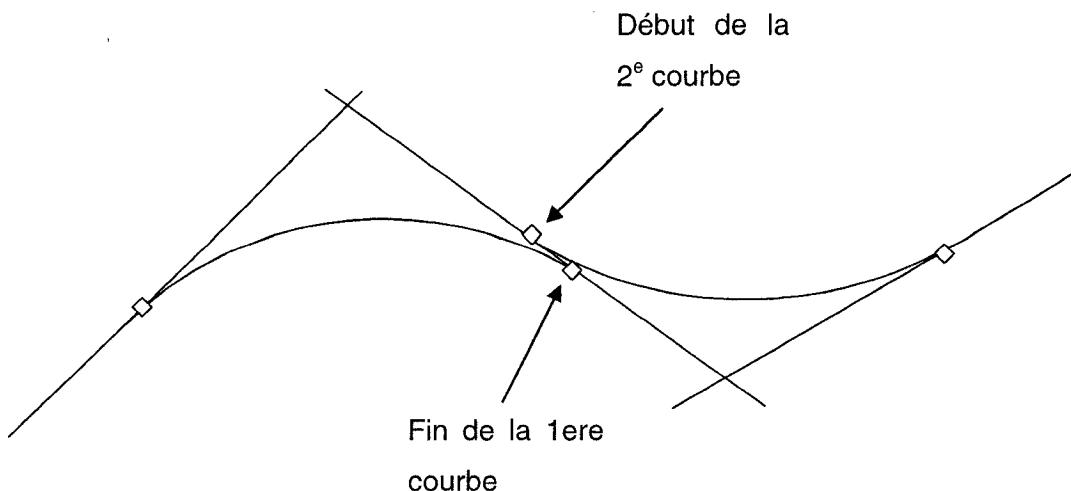
On vérifie donc que cette relation de colinéarité est respectée. Si elle ne l'est pas, c'est que le point est mal placé. Il faut donc essayer de le replacer. Pour cela, on garde l'abscisse ou l'ordonnée du point mal positionné, selon leur position par rapport aux abscisses et ordonnées des  $PI$ , et on recalcule l'autre coordonnée pour que le point appartienne à la droite formée par les points d'intersection. La formule pour recalculer l'ordonnée est la suivante:

$$y_I = \frac{(x_I - x_{Plavant}) \times (y_{Plaprès} - y_{Plavant})}{(x_{Plaprès} - x_{Plavant})} + y_{Plavant}$$

### 5.8.3. Détection des chevauchements de courbes

Il arrive que deux courbes consécutives se chevauchent, c'est-à-dire que le début de la deuxième courbe est situé plus loin dans l'alignement que la fin de la première courbe (Figure 5.19). Cela pose problème car la longueur des droites entre les courbes se calcule comme la distance entre la fin de la première courbe et le début

de la deuxième et un chevauchement de courbes entraîne une longueur négative entre ces deux courbes.



**Figure 5.19 : Chevauchement de deux cercles consécutifs**

Pour remédier à cette situation, on calcule la distance entre la fin de la première courbe et le début de la deuxième et on regarde son signe. Si la distance est négative, il y a chevauchement. On divise alors la longueur de chevauchement  $L_c$  par 2 et on déplace les points de début et de fin de courbe de manière à avoir une distance nulle entre les deux points (Figure 5.20). Cela revient à réduire la longueur des tangentes des cercles en réduisant la valeur des rayons (Figure 5.21).

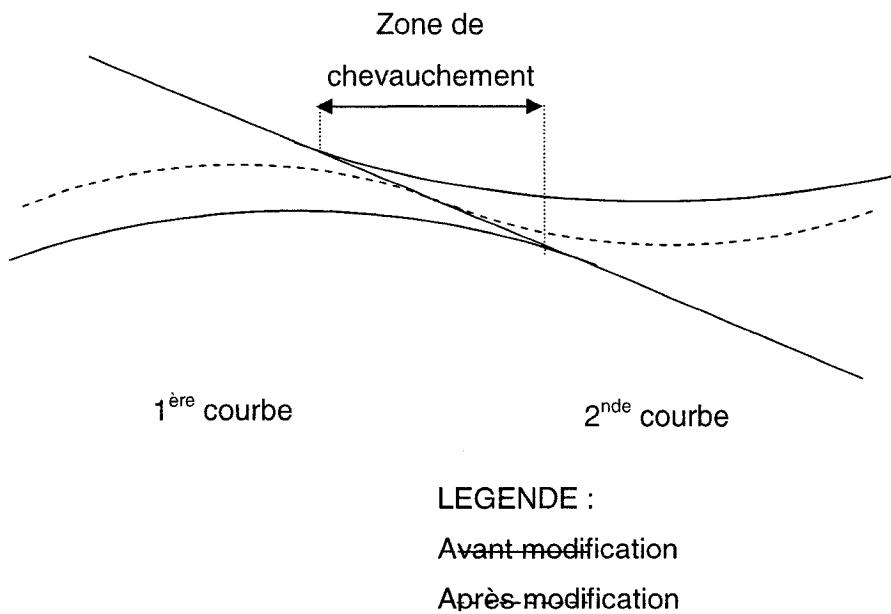


Figure 5.20 : Modification d'une zone de chevauchement

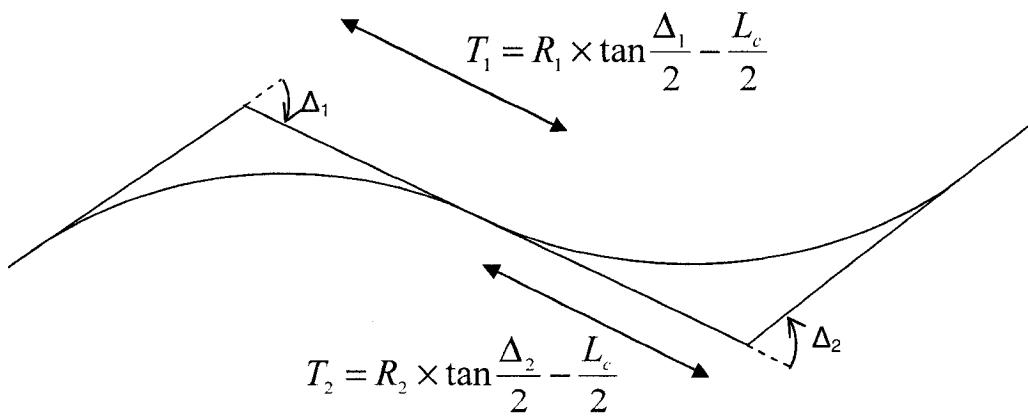


Figure 5.21 : Correction d'un chevauchement de courbes

## **5.9. Le développement du programme**

Les programmes développés pour rendre possible l'exécution des calculs développés dans cette partie sont en fait les programmes développés pour les tracés théoriques auxquels ont été ajoutés différents modules qui tiennent compte des différences entre les tracés réels et théoriques.

### **5.9.1. Tracé en plan**

L'organigramme général de la reconstitution horizontale est le suivant :

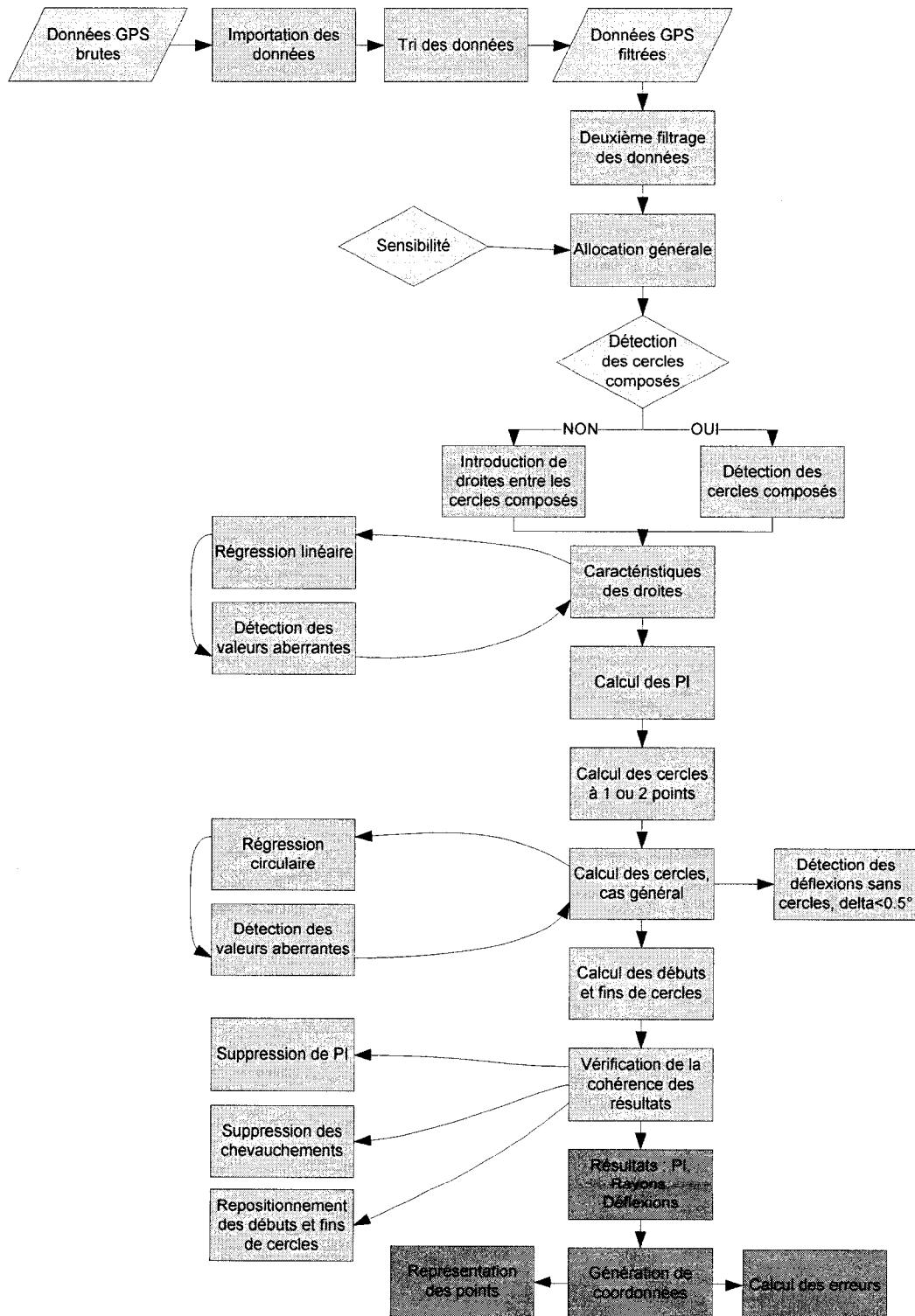


Figure 5.22 : Organigramme de fonctionnement de l'algorithme du tracé en plan

### 5.9.2. Profil en long

Pour le profil en long, la structure de l'algorithme est très semblable. Néanmoins, comme cela a été expliqué auparavant, les paraboles multiples ne sont pas traitées pour un tracé réel. C'est pourquoi l'algorithme est légèrement simplifié dans ce cas, en raison de l'inutilité de certaines vérifications.

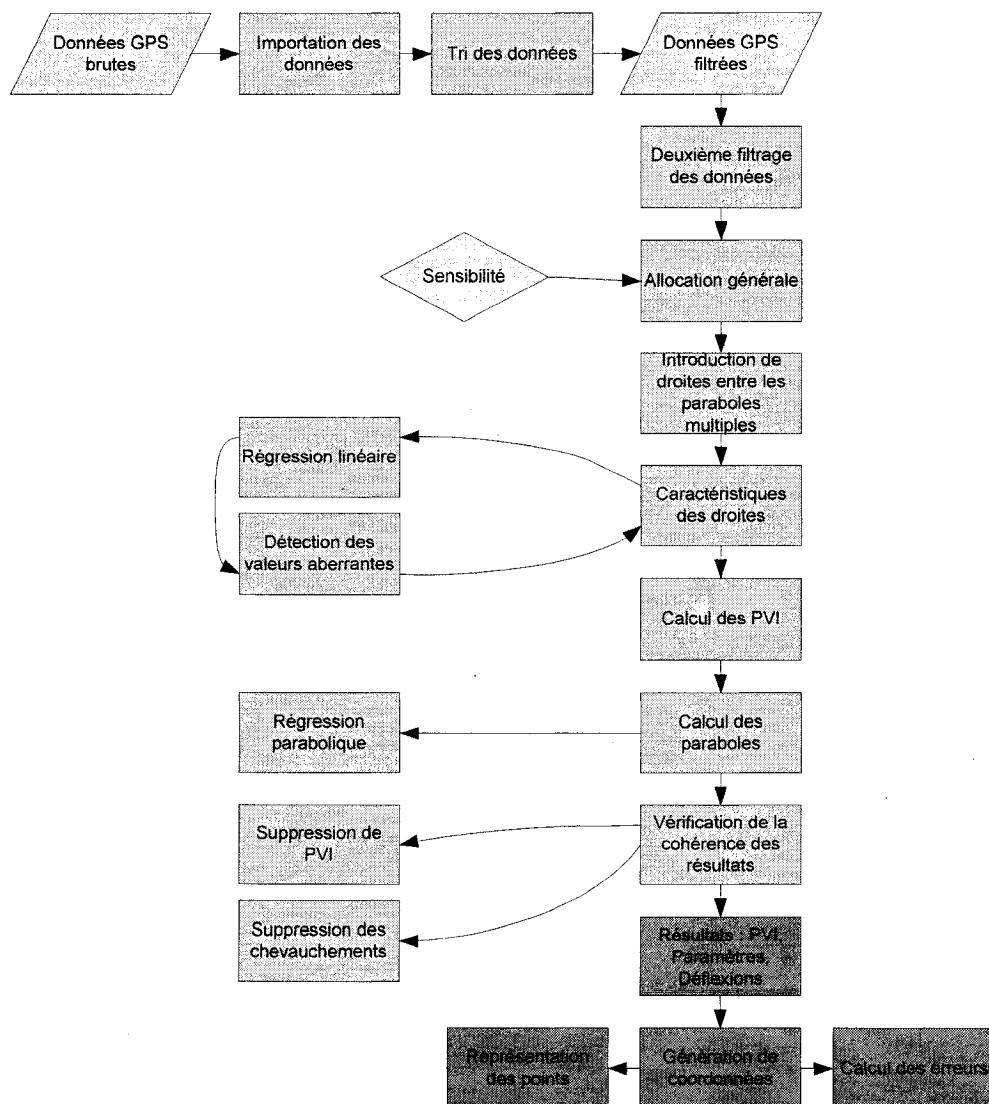


Figure 5.23 : Organigramme de fonctionnement de l'algorithme du profil en long

## **5.10. Vérification des résultats**

Une fois que la reconstitution est terminée, il est important de savoir dans quelle mesure les résultats produits par l'algorithme sont satisfaisants. En effet, malgré les différentes méthodes mises en œuvre pour obtenir un résultat fidèle aux données de départ, le fait de faire varier les différents paramètres de reconstitution donne des résultats différents. Il faut donc être en mesure de valider les résultats. La première méthode, la plus rapide, est visuelle. Il s'agit de superposer les coordonnées de départ avec les coordonnées recalculées pour voir si les deux séries de points sont superposées. Il est ensuite possible de superposer les coordonnées avec une photo aérienne de la route. Finalement, le calcul des erreurs permet d'avoir une idée quantitative de l'ajustement du tracé reconstitué avec les coordonnées GPS.

### **5.10.1. Superposition des résultats avec des photos aériennes**

La superposition des points avec des photos aériennes permet de comparer le positionnement des points par rapport à une photo aérienne prise sur le terrain. La superposition des points et des photos se fait à l'aide du logiciel Mapinfo et la procédure a été développée par Durlut (2006). Sur la figure suivante (Figure 5.24), les coordonnées GPS de départ (carrés rouges) de la route 245 sont superposées avec les coordonnées obtenues grâce à l'algorithme de reconstitution (losanges verts) et des photos aériennes.



**Figure 5.24 : Photo aérienne de la route 245 avec les coordonnées GPS et les coordonnées reconstituées**

Cette méthode de visualisation permet de donner une bonne idée à l'utilisateur de la fidélité des résultats fournis par l'algorithme.

#### **5.10.2.Calcul des erreurs**

Le calcul des erreurs consiste à calculer la distance entre les points GPS et les éléments produits par l'algorithme. Les erreurs permettent de voir dans quelle mesure la reconstitution est fidèle au tracé d'origine. La première étape consiste à recalculer les PI, PVI et centres des cercles à partir des coordonnées GPS

recalculées par l'algorithme, qui serviront à calculer les erreurs. Il est important de recalculer ces éléments car ils peuvent différer de ceux trouvés au début de la reconstitution.

### 5.10.3.Calcul des erreurs sur les droites

L'erreur  $\xi$  pour chaque point qui appartient à une droite est la distance qui sépare ce point de la droite (Figure 5.25). La distance entre un point de coordonnées  $(x_i, y_i)$  et une droite peut s'exprimer en fonction du gisement  $\gamma$  de la droite et du point d'intersection PI de coordonnées  $(x_{PI}, y_{PI})$  comme suit (détails en annexe A.4 : Distance d'un point à une droite) :

$$\xi = (y_{PI} - y_i) \times \sin(\gamma) - (x_{PI} - x_i) \times \cos(\gamma)$$

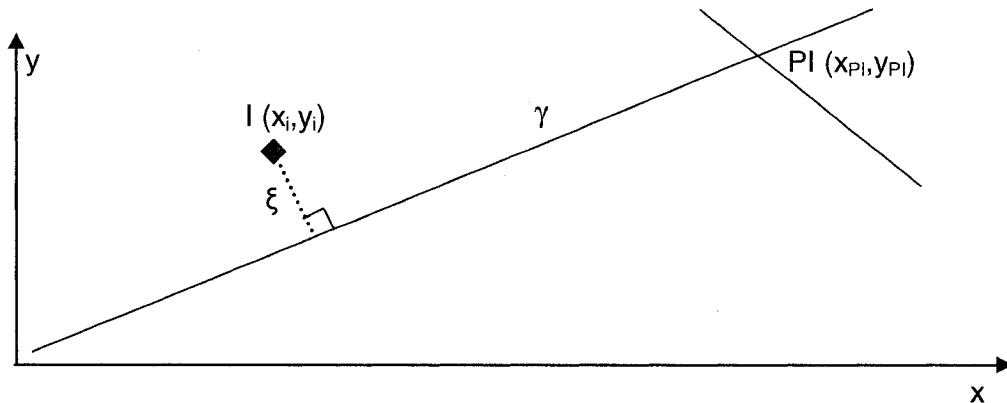


Figure 5.25 : Distance d'un point à une droite

Le calcul est le même pour le profil en long.

### 5.10.4.Calcul des erreurs sur les cercles

Pour chaque point qui appartient à un cercle, l'erreur  $\xi$  est calculée entre les coordonnées GPS relevées sur le terrain et les coordonnées calculées par le programme. L'erreur est calculée selon la formule :

$$\xi = \text{racine}\left[(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2\right] - \text{abs}(R)$$

$(x_0, y_0)$  sont les coordonnées du centre du cercle de rayon  $R$  et  $(x_i, y_i)$  sont les coordonnées du point  $i$  relevées sur le terrain (Figure 5.26).

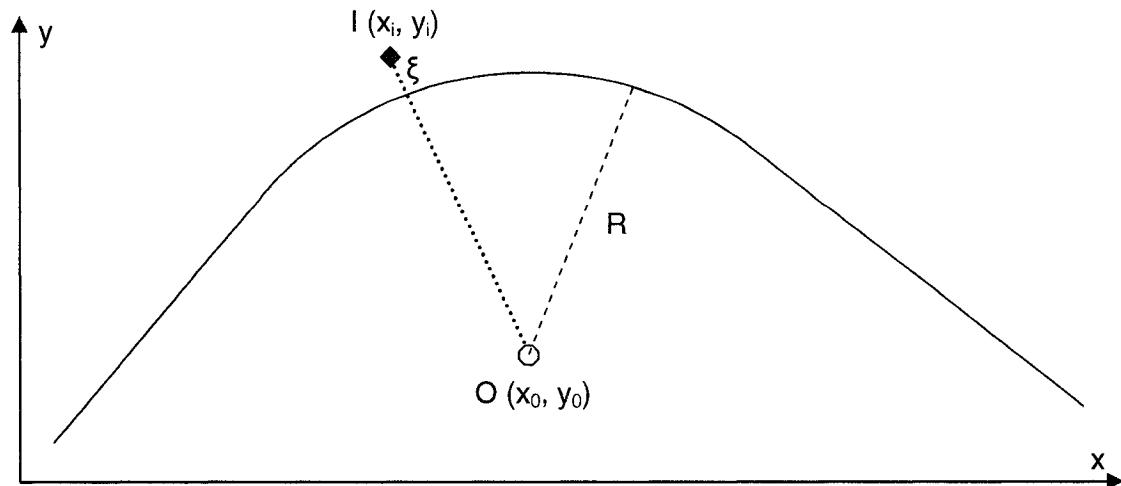


Figure 5.26: Distance d'un point à un cercle

#### 5.10.5. Calcul des erreurs sur les paraboles

L'erreur  $\xi$  pour un point qui appartient à une parabole est une différence d'élévation entre le point réel dont les coordonnées  $(x_i, y_i)$  ont été relevées par GPS et les coordonnées de ce point calculées après la reconstitution à l'aide de l'équation de la parabole. L'erreur s'exprime en fonction des pentes  $p_1$  et  $p_2$  avant et après la parabole, la longueur  $L$  de la parabole et les coordonnées  $(x_0, y_0)$  du début de la parabole (Figure 5.27) :

$$\xi = z_i - \frac{p_2 - p_1}{2L} (x_i - x_0)^2 - p_1(x_i - x_0) - z_0$$

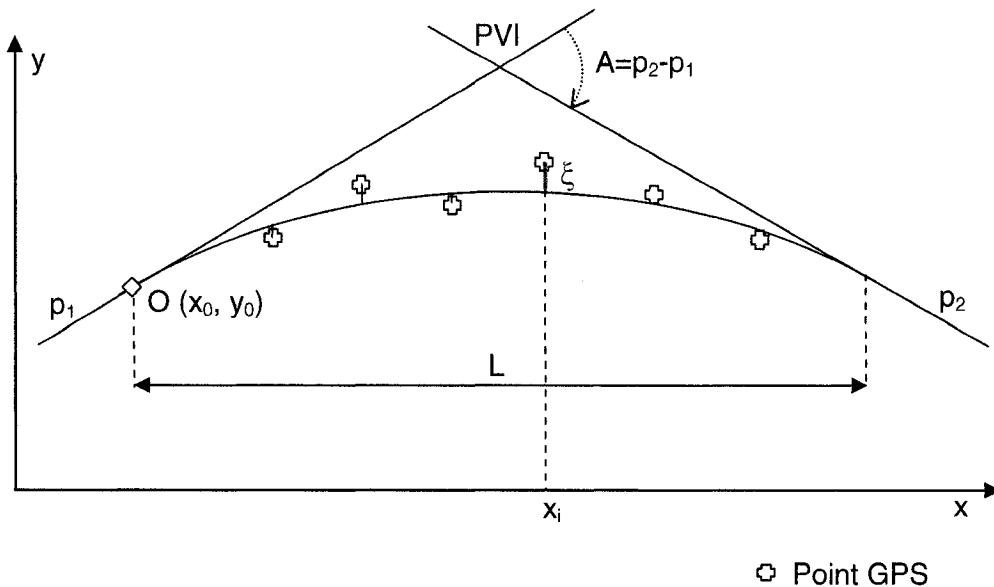


Figure 5.27 : Distance d'un point à une parabole

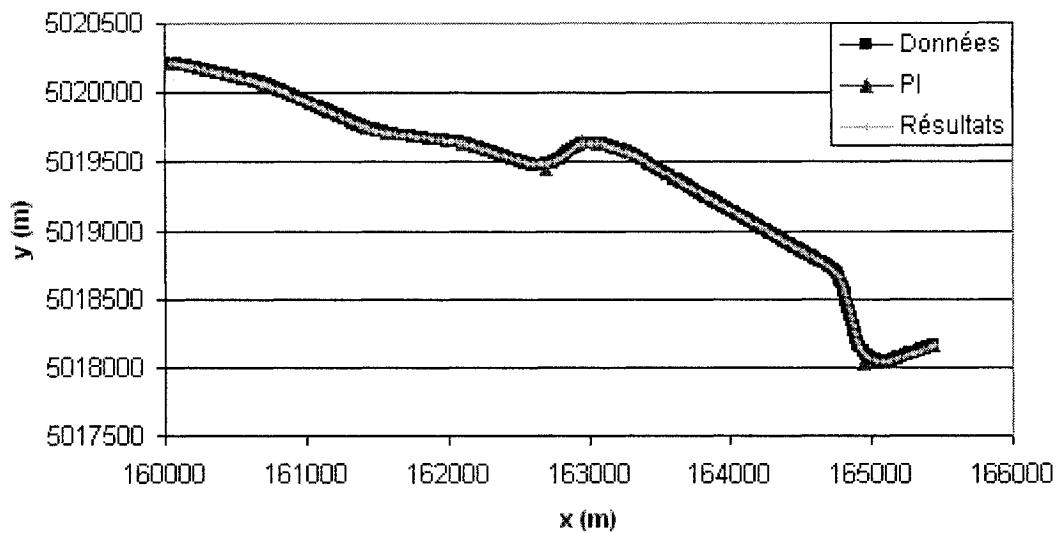
#### 5.10.6.Calcul des erreurs pour les éléments

A partir des erreurs pour chaque point des droites, des cercles et des paraboles, il est possible de calculer l'erreur minimale, maximale, l'erreur moyenne et l'écart-type pour chaque élément du tracé en plan et du profil en long, ainsi que les erreurs pour toutes les droites, cercles ou paraboles de tout le tracé.

### 5.11.*Application du programme*

#### 5.11.1.Route 112 – Tracé en plan

Le tracé en plan présenté sur la Figure 5.28 est un tronçon de la route 112. Les points GPS ainsi que les PI des droites et les résultats de la reconstitution y sont présentés. Cet alignement comporte de nombreuses difficultés car les courbes y sont nombreuses et certaines comportent peu de points.



**Figure 5.28 : Données de départ et reconstituées pour un tronçon de la route 112**

Visuellement, les résultats trouvés par l'algorithme se superposent aux coordonnées GPS de départ.

Les erreurs moyennes sur les droites et les cercles sont de l'ordre du décimètre pour les cercles mais de 6 m pour les droites (Tableau 5.1).

**Tableau 5.1 : Erreurs pour les éléments du tracé en plan de la route 112**

	nombre points	erreur moyenne	erreur min	erreur max	écart-type
Toutes les droites	245	0.2675	0.0018	4.7427	1.0767
Tous les cercles	70	6.0973	0.0126	59.4788	0.51

Néanmoins, l'histogramme de fréquence des erreurs (Figure 5.29) révèle que plus de 50% des erreurs sont inférieures à 50 cm et que les erreurs inférieures à 1 m représentent 74%. Ainsi, la valeur moyenne des erreurs est fortement influencée par quelques grands écarts entre les données et les coordonnées calculées.

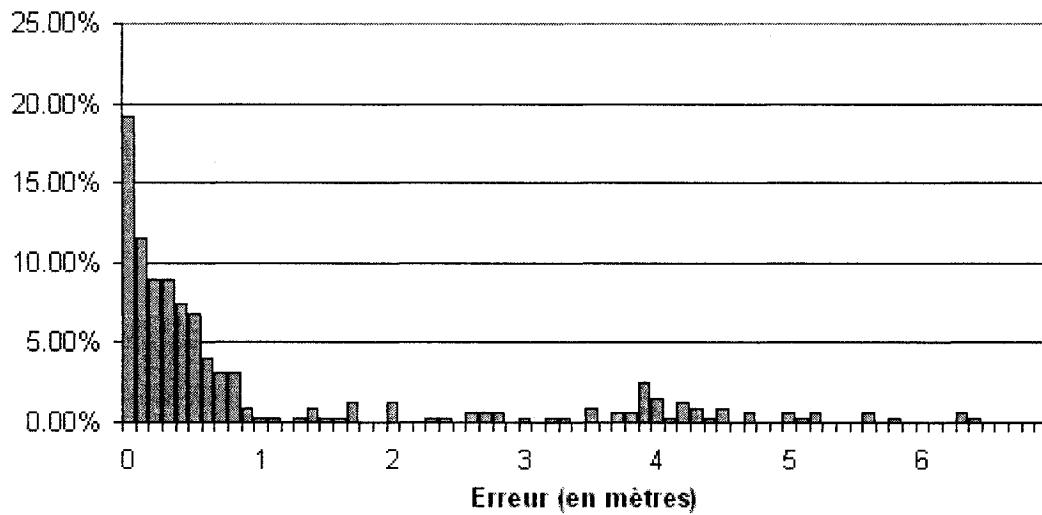


Figure 5.29 : Fréquence des erreurs sur le tracé en plan de la route 112

### 5.11.2. Route 222 – Tracé en plan

Le tracé suivant est un tronçon de la route 222 (Figure 5.30). Les coordonnées GPS, les PI et les résultats sont représentés.

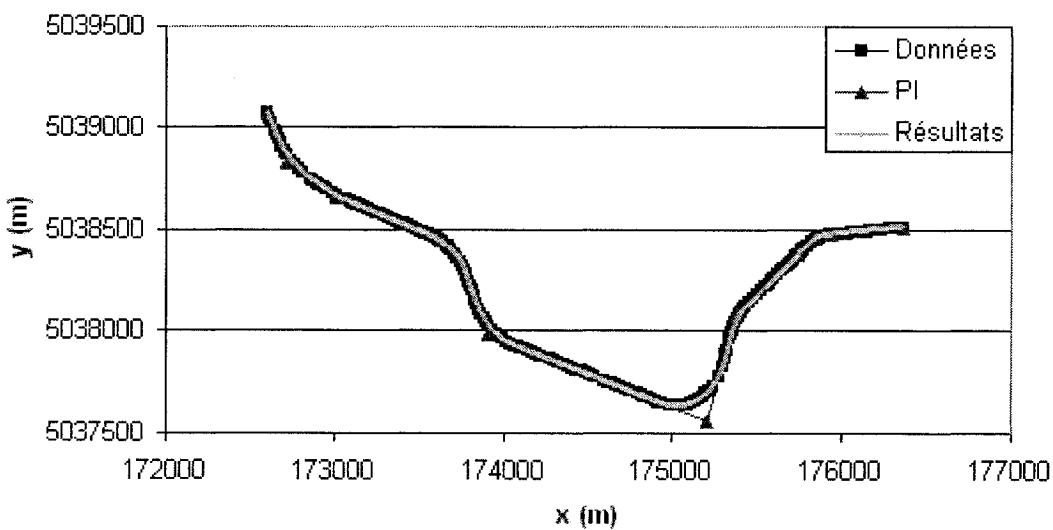


Figure 5.30 : Données de départ et reconstituées pour un tronçon de la route 222

La superposition des données et des résultats sur une photo aérienne permet de comparer la position des points (Figure 5.31). Les données représentées par des

carrés rouges ne sont pas également espacées. Les résultats représentés par des étoiles vertes sont ici espacés de 10m. Ils suivent visiblement l'alignement des coordonnées GPS.



**Figure 5.31 : Photo aérienne d'une partie de la route 222 avec les coordonnées GPS et les résultats**

L'étude des erreurs permet d'avoir une idée quantitative de la précision de la reconstitution. 26% des erreurs sont inférieures à 10cm et 64% des erreurs sont inférieures à 1m (Figure 5.32)

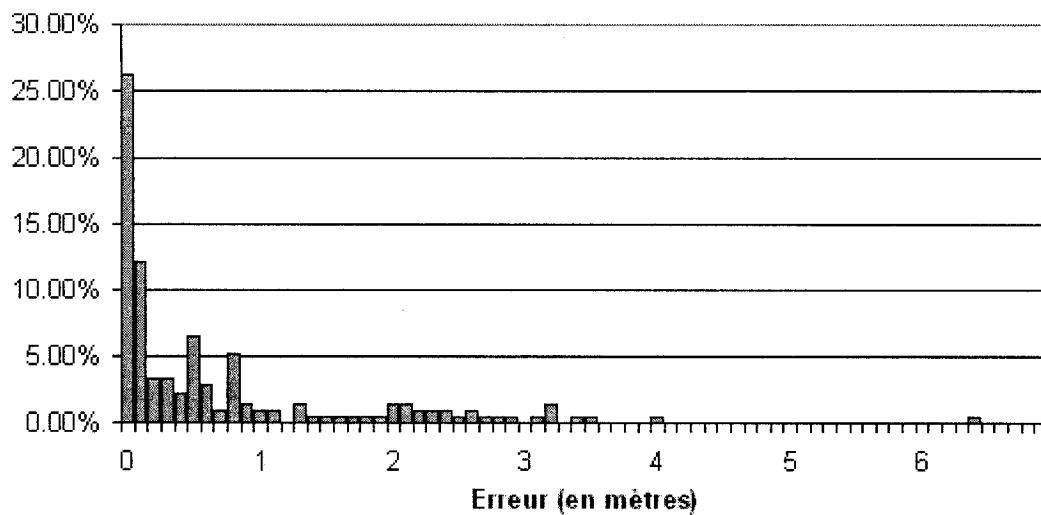


Figure 5.32 : Fréquence des erreurs sur le tracé en plan de la route 222

### 5.11.3.Tracé en plan théorique : utilisation des erreurs

Le tracé théorique présenté ici (Figure 5.33) comporte trois courbes consécutives sans droites entre elles (cercles 2, 3 et 4). Cela représente une difficulté puisque l'algorithme doit calculer deux tangentes aux cercles consécutives. Ce tracé théorique est étudié à l'aide de l'algorithme pour les tracés réels afin de mettre en évidence une utilisation possible du calcul des erreurs.

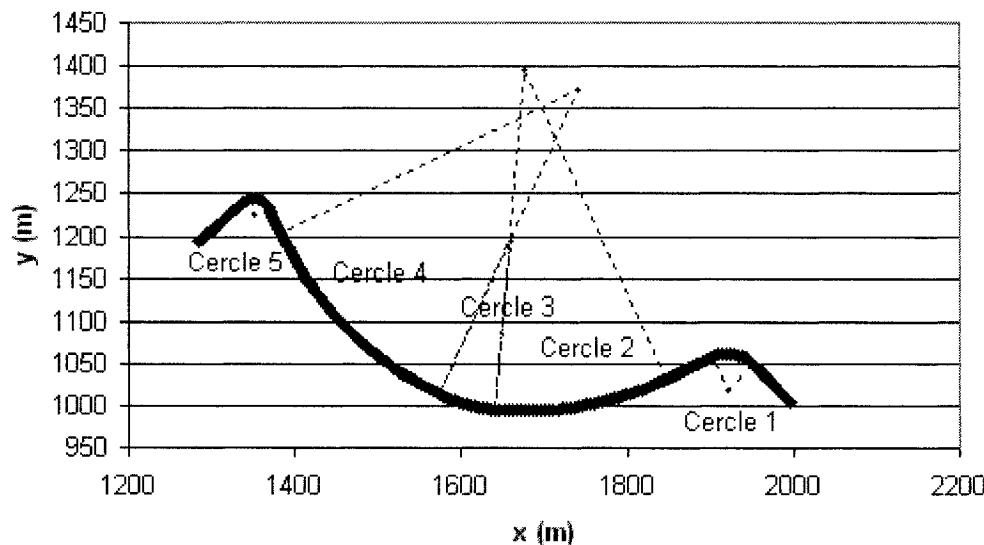
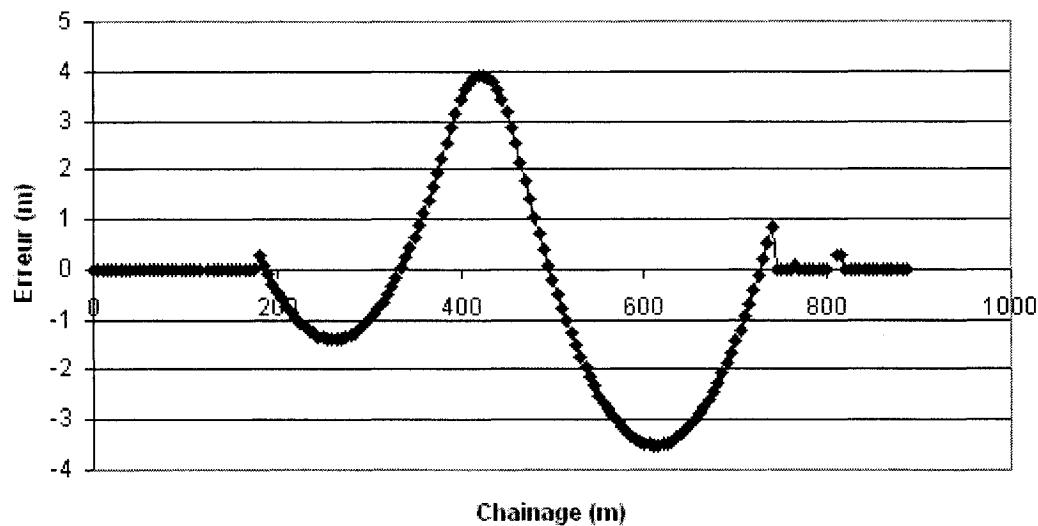


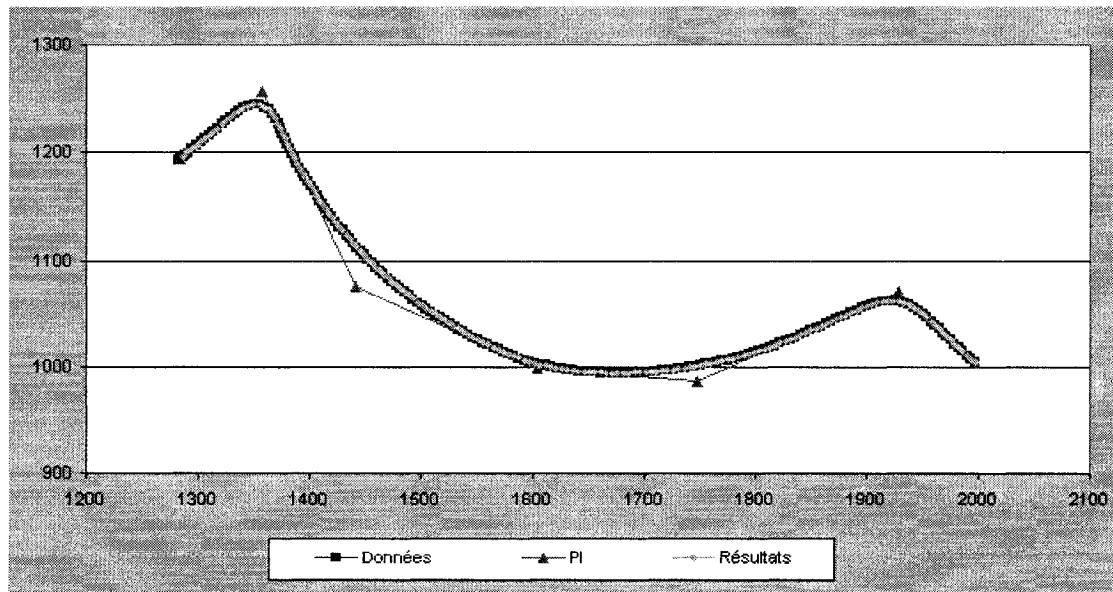
Figure 5.33 : Tracé en plan théorique

Il est possible de reconstituer le tracé en choisissant ou non de détecter les cercles multiples. Si on choisit de ne pas les détecter, le programme va allouer les trois cercles consécutifs à un seul cercle. L'étude des erreurs permet alors de remarquer que cette reconstitution n'est pas vraiment appropriée, dans la mesure où la répartition des erreurs sur ce cercle n'est pas aléatoire (Figure 5.34). En effet, les erreurs sont toutes négatives puis positives et à nouveau négatives alors que si la reconstitution était adaptée aux points de départ, les erreurs devraient être réparties aléatoirement.



**Figure 5.34 : Répartition des erreurs en ne détectant pas les cercles composés**

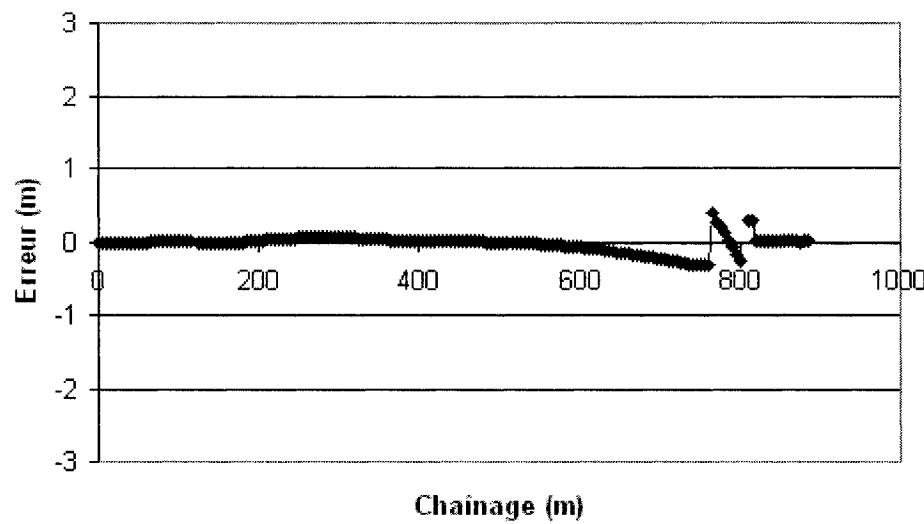
En choisissant de détecter les cercles multiples, le résultat est bien plus fidèle aux données de départ. Les résultats sont présentés sur la figure suivante (Figure 5.35) :



**Figure 5.35 : Résultats de la reconstitution**

La répartition des erreurs a désormais changé (Figure 5.36). Elle ne présente plus de tendance aussi marquée que lorsque les cercles composés n'étaient pas détectés.

Cependant, il reste encore une légère tendance dans la répartition des erreurs qui pourrait être améliorée mais étant données les valeurs de ces dernières, la répartition des erreurs est acceptée.



**Figure 5.36 : Répartition des erreurs en détectant les cercles composés**

La comparaison entre les éléments théoriques et calculés révèle que les écarts sont de l'ordre de 1%, ce qui est acceptable pour un tracé avec trois cercles consécutifs.

**Tableau 5.2 : Tableau des différences calculées sur le tracé en plan**

	Valeur théorique	Valeur calculée	Différence
Déflexion 1	-70	-70	0
Rayon 1	42.844	42.853	0.02%
Déflexion 2	30	30.149	0.50%
Rayon 2	400	401.78	0.44%
Déflexion 3	20	20.091	0.46%
Rayon 3	200	199.947	0.03%
Déflexion 4	40	39.759	0.60%
Rayon 4	400	395.894	1.03%
Déflexion 5	-105	-105	0.00%
Rayon 5	20	20.008	0.04%

Tableau 5.3 : Erreurs sur le tracé en plan

		erreur moyenne	erreur min	erreur max	écart- type	nombre points
Droites	DD 1	0.0007	0.0007	0.0007	0.0025	13
	DD 2	0.0005	0.0005	0.0005	0.0016	11
	Tangente	0	*	0	0	0
	Tangente	0	*	0	0	0
	DD 5	0.9379	0.9379	0.9379	2.0972	5
	DD 6	0.0251	0.0251	0.0251	0.0356	2
	Toutes les droites	0.0068	0	0.9379	0.0079	31
Cercles	CD 1	0.002	0.0007	0.0028	0.0069	11
	CG 2	0.041	0.0004	0.0629	0.2977	43
	CD 3	0.0007	0.0003	0.0018	0.0032	13
	CG 4	0.3143	0.0026	0.9244	3.1598	56
	CD 5	0.6705	0.1127	0.9602	2.0634	8
	Tous les cercles	0.189	0.0003	0.9602	0.1812	131

Les erreurs sur les éléments du tracé sont de l'ordre du centimètre pour les droites et du décimètre pour les cercles, ce qui est acceptable pour une route dont les éléments sont caractérisés en mètres.

#### 5.11.4.Route 222 – Profil en long

Le profil en long étudié provient de la route 222. Il mesure 1.9 km de long (Figure 5.37). Certaines parties du tracé comportent peu de points, certains étant espacés de plus de 50 m.

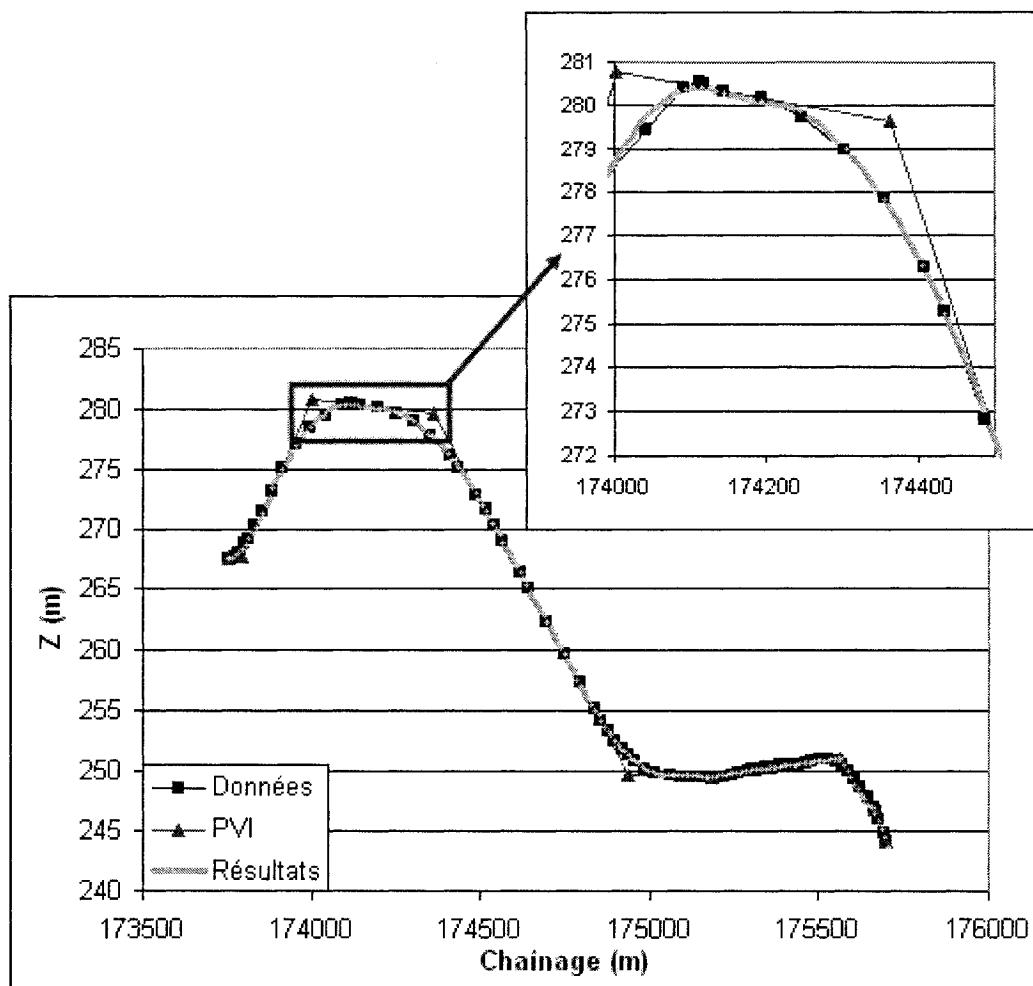


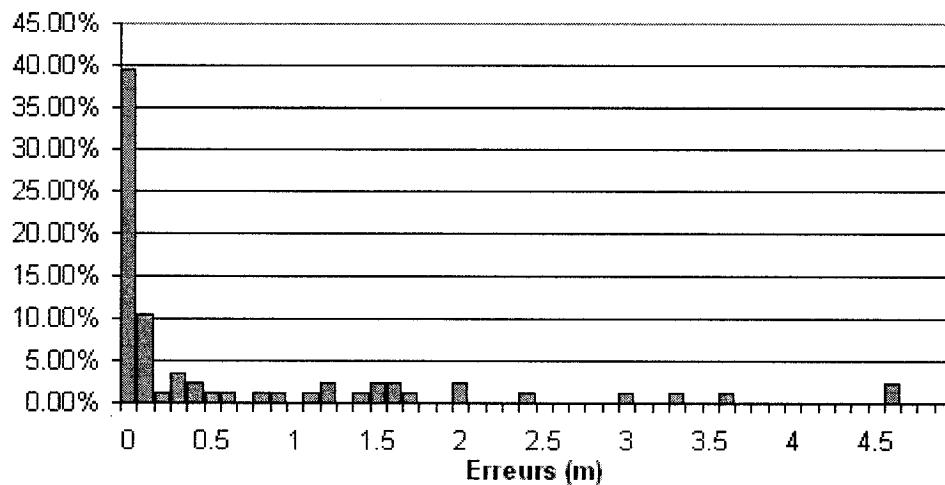
Figure 5.37 : Données de départ et reconstituées pour un tronçon de la route 222

Visuellement, les résultats sont superposés aux données de départ mais il est visible sur l'agrandi qu'il y a quelques différences entre le tracé reconstitué et les données GPS. Cela se confirme par l'analyse des erreurs. Les erreurs sur les droites sont de l'ordre du millimètre alors que pour les paraboles, elles sont en moyenne de 6 m (Tableau 5.4).

**Tableau 5.4 : Valeurs des erreurs sur les droites et les paraboles**

	erreur moyenne	erreur min	erreur max	écart-type	nombre points
Droites	0.008	0.0007	0.4789	0.0415	41
Paraboles	6.1961	0.0147	29.4867	0.7336	45

Néanmoins, l'histogramme de fréquence des erreurs (Figure 5.38) révèle que 50% des erreurs sont inférieures à 20 cm et 61% des erreurs sont inférieures à 1 m. Quelques erreurs qui ont des valeurs élevées influent donc beaucoup sur la valeur totale des erreurs, d'autant plus que ce tracé ne comporte que 86 points.

**Figure 5.38 : Fréquence des erreurs sur le tracé 222**

### 5.11.5.Route 220 - Profil en long

Le profil en long étudié est un tronçon de la route 220 de 5.4 km de long (Figure 5.39).

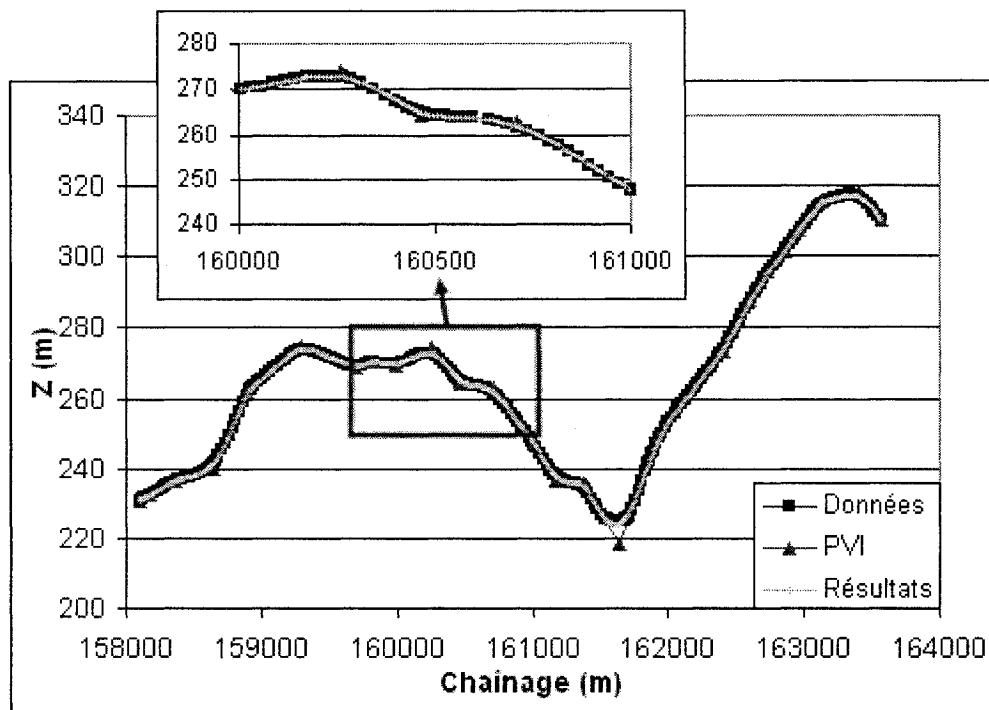


Figure 5.39 : Données de départ et reconstituées pour un tronçon de la route 220

Les résultats sont visuellement superposés aux données de départ. L'examen des erreurs est cependant nécessaire pour pouvoir valider les résultats de la reconstitution (Tableau 5.5). Ainsi, les erreurs moyennes sont de l'ordre du millimètre pour les droites et du décimètre pour les paraboles.

Tableau 5.5 : Erreurs pour les éléments du profil en long de la route 220

	erreur moyenne	erreur min	erreur max	écart-type	nombre points
Droites	0.0001	0	0.1057	0.0007	93
Paraboles	0.1373	0	1.0384	0.0297	155

De plus, 80% des erreurs sont inférieures à 10 cm (Figure 5.40).

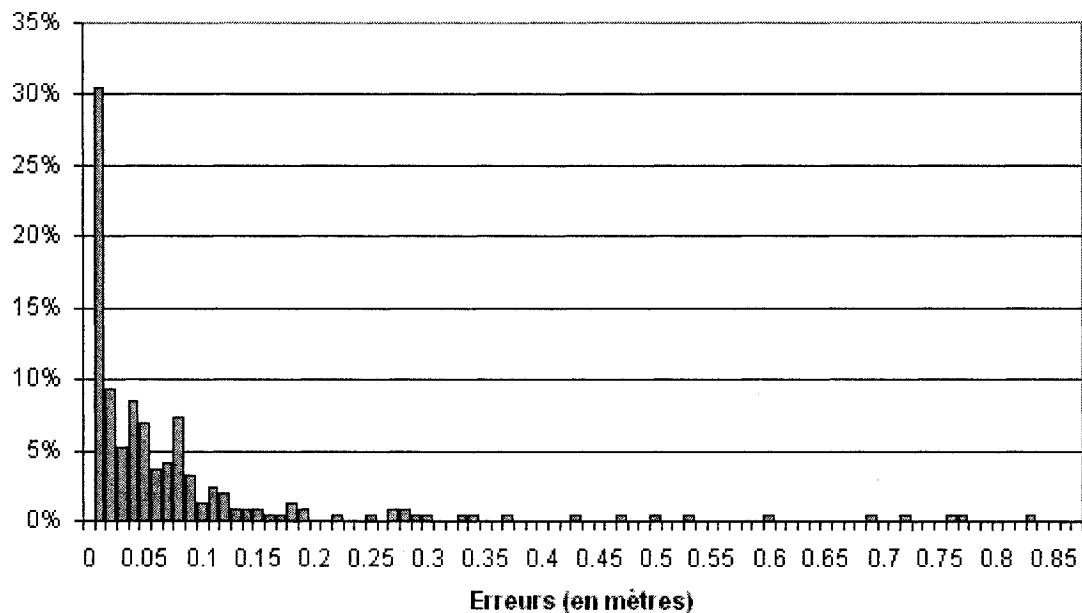
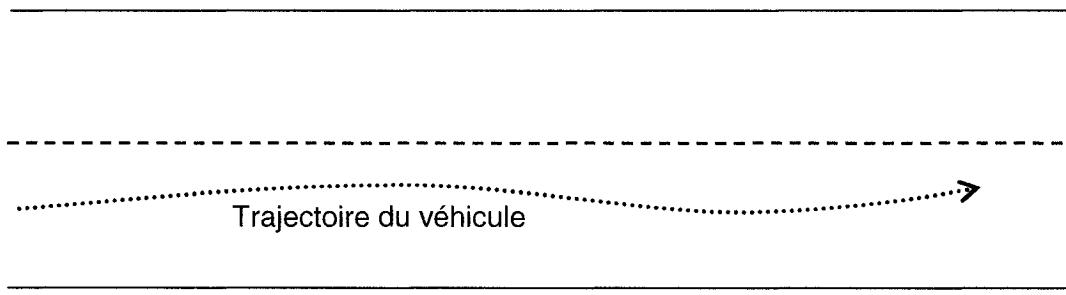


Figure 5.40 : Fréquence des erreurs pour le profil en long de la route 220

### 5.12. Discussion sur la précision des résultats

L'étude des erreurs permet de déterminer si les résultats sont précis et dans quelle mesure ils correspondent aux données de départ. Néanmoins, la difficulté dans la reconstitution des alignements routiers à partir de traces GPS repose sur le fait que les données utilisées sont des coordonnées relevées par GPS et qu'elles ne sont pas toutes parfaitement dans l'alignement général. C'est pourquoi, même si les écarts entre les données GPS et les éléments reconstitués permettent de mettre en évidence certaines inexactitudes dans la reconstitution, il ne faut pas oublier que certaines valeurs d'erreur doivent être acceptées car justement, les points GPS ne sont pas tous placés exactement dans l'alignement. En effet, certains points individuels peuvent avoir de grandes différences entre leur position relevée sur le terrain et celle recalculée par le programme, cela est dû aux erreurs de 25 cm en horizontal et 50 cm en vertical liées à la technologie utilisée. De plus, il existe un autre type d'erreur lié au fait que le récepteur GPS est fixé sur un véhicule en

mouvement le long de la route. Le véhicule a essayé de suivre le plus possible l'axe routier central mais il a pu rencontrer certains obstacles qu'il a dû éviter ou a pu légèrement dévier de son axe (Figure 5.41).



**Figure 5.41 : Irrégularités de la trajectoire du véhicule**

Cela entraîne des erreurs qui ne sont pas réparties aléatoirement et qui peuvent laisser supposer la présence d'une courbe. Cependant, dans ce cas, il est bon de ne pas trop augmenter la valeur de la sensibilité pour faire en sorte que l'algorithme détecte ces courbes car elles n'existent pas en réalité. Il est donc normal que toutes les erreurs n'aient pas des valeurs aussi petites que possible, les valeurs de certaines erreurs trouvant leur explication dans la méthode de relevés de coordonnées.

### **5.13. Conclusion**

L'utilisation de données réelles complexifie la méthode théorique pour déterminer les caractéristiques des éléments routiers. De nombreuses procédures doivent être ajoutées pour tenir compte des erreurs liées à l'utilisation de la technologie GPS. De plus, les méthodes pour valider les données sont désormais différentes : l'analyse des erreurs ainsi que la superposition avec des photos aériennes sont deux méthodes retenues. Ensuite, étant donnée la précision des coordonnées GPS, les résultats trouvés sur des exemples sont acceptés pour les tracés en plan et les profils en long.

## Chapitre 6 : L'interface

L'interface permet de faire le lien entre l'usager et l'algorithme. Elle doit être facile d'utilisation et offrir tous les renseignements nécessaires pour une bonne compréhension du mode de fonctionnement, de la sélection des options puis de la lecture des résultats.

### 6.1. Importation des données

Dans un premier temps, il faut importer des données à l'aide de la commande « Importer » (Figure 6.1). L'usager peut alors choisir un fichier qui doit contenir des données au format spécifié.

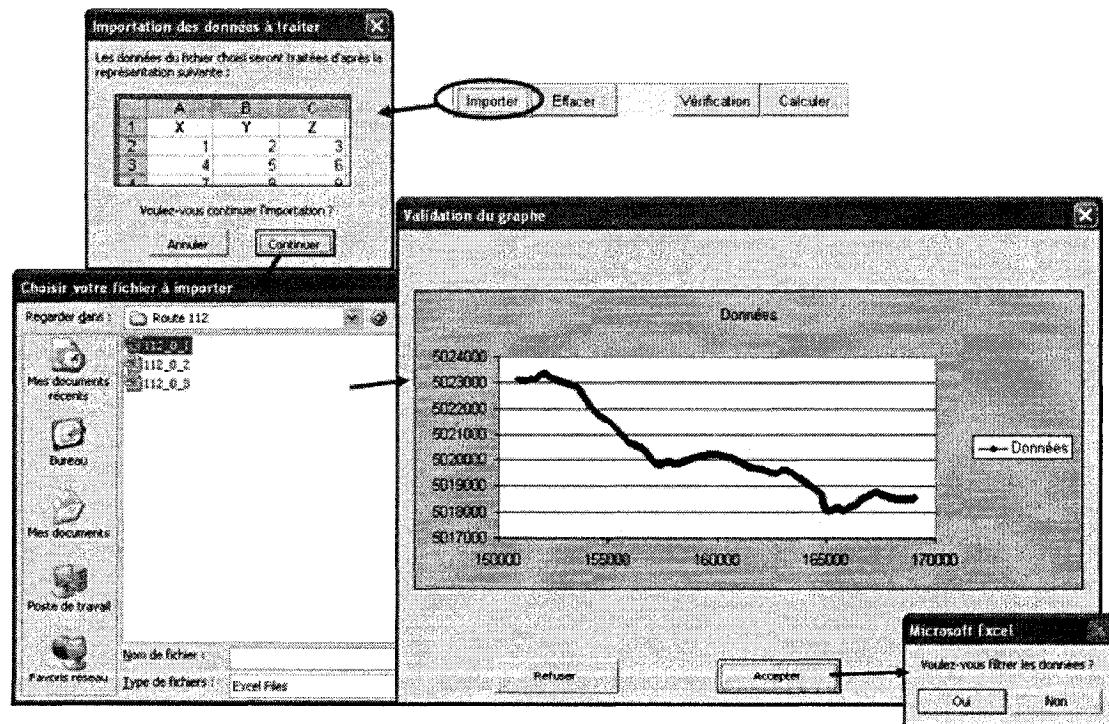


Figure 6.1 : Procédure d'importation des données

Un graphe apparaît alors avec les données sélectionnées pour une première visualisation. L'utilisateur peut alors choisir de continuer ou non avec les données sélectionnées puis il lui est proposé de filtrer les données. Cette étape permet à l'usager de s'assurer que les données qu'il entre dans le programme sont continues.

## 6.2. Choix des paramètres

Ensuite, à l'aide du bouton « Calculer », l'usager peut lancer l'algorithme. Une boîte de dialogue apparaît alors où l'usager peut choisir les paramètres de la reconstitution. L'onglet « Général » (Figure 6.2) permet de choisir la valeur de la sensibilité, le pas de reconstitution ainsi que de fixer les premiers et derniers points et entrer s'il le désire un chainage initial pour la reconstitution. L'onglet « Cercles » (Figure 6.3) est disponible uniquement pour le tracé en plan. Il permet à l'utilisateur de décider s'il désire détecter les courbes composées ou non. L'onglet « Erreurs » (Figure 6.4) permet à l'utilisateur de choisir si le programme essaiera de corriger les erreurs. Finalement, l'onglet « Droites » (Figure 6.5) permet de fixer les coefficients de l'équation des premières et dernières droites de l'alignement, si ce dernier s'inscrit à la suite ou entre un alignement dont les caractéristiques sont déjà connues.

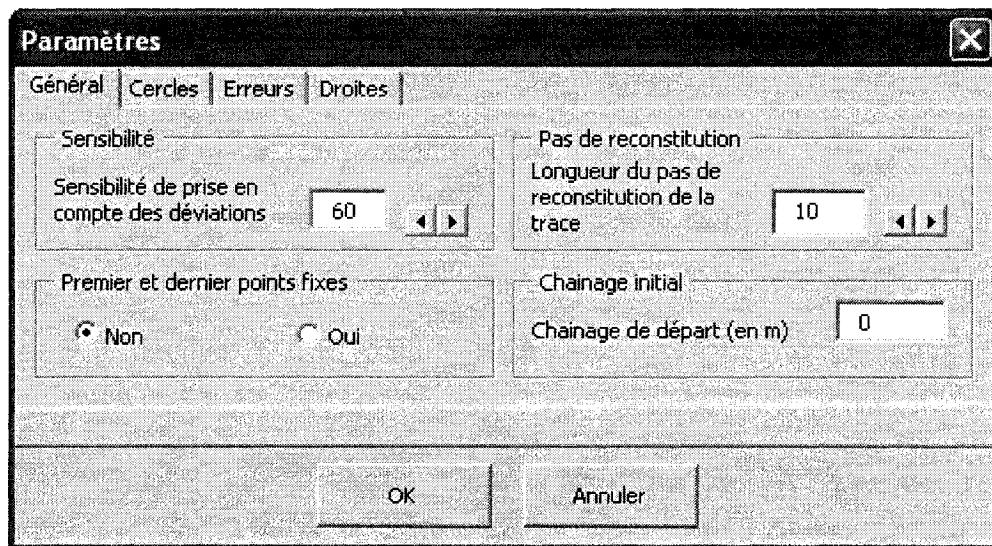


Figure 6.2 : Boîte de dialogue pour le choix des paramètres, onglet général

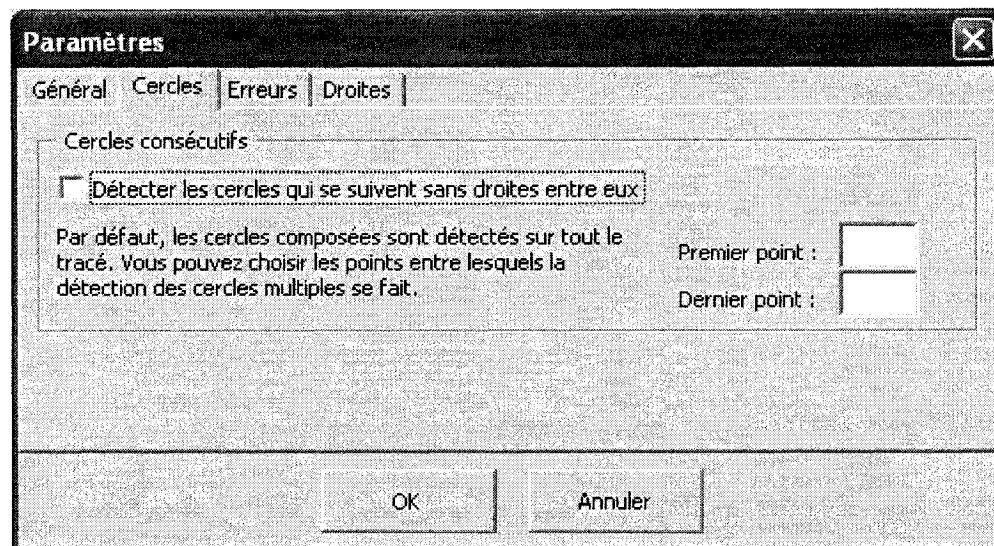


Figure 6.3 : Boîte de dialogue pour le choix des paramètres, onglet des cercles pour le tracé en plan

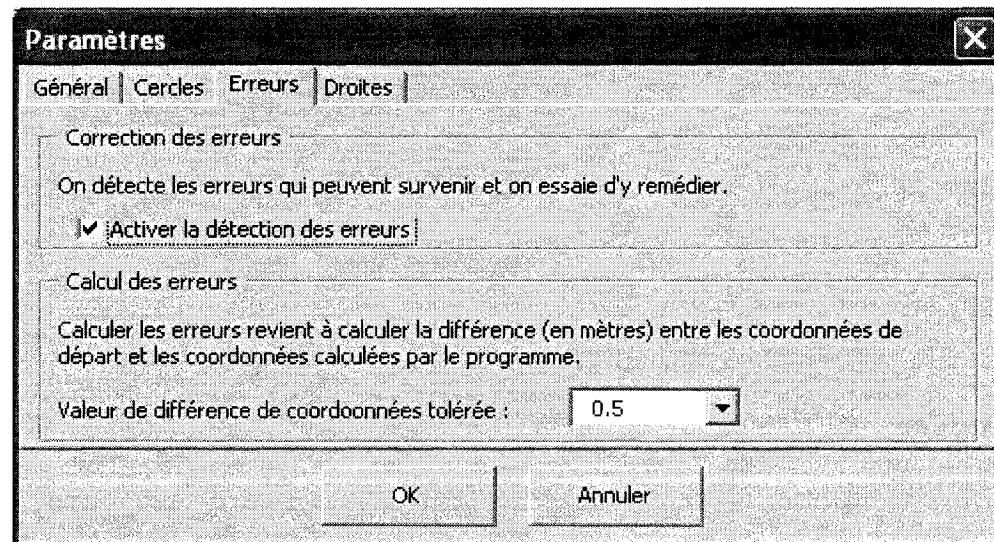
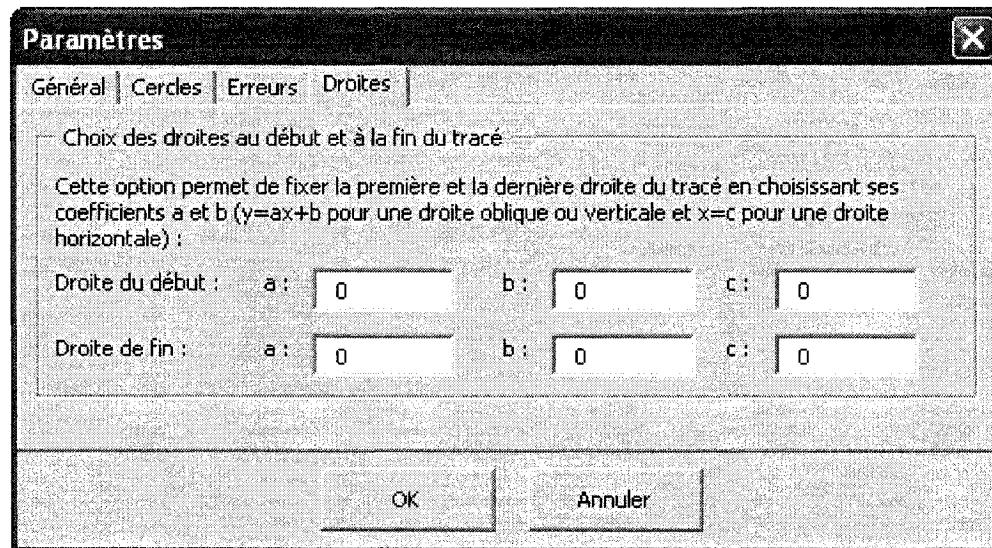


Figure 6.4 : Boîte de dialogue pour la détection des erreurs



**Figure 6.5 : Boîte de dialogue pour fixer les caractéristiques de la première et dernière droite de l'alignement**

### **6.3. Affichage des résultats**

Les résultats se présentent sous la forme d'un tableau qui recense les éléments qui constituent le tracé. Pour chaque droite, le tableau indique sa longueur alors que pour chaque courbe, l'angle de déflexion et le rayon sont indiqués dans le cas du tracé en plan et le changement de pente et la longueur de la parabole sont indiqués dans le cas d'une parabole (Figure 6.6). Des feuilles supplémentaires dans le fichier Excel permettent de voir les détails de chaque droite et courbe (Figure 6.7, Figure 6.8 et Figure 6.9), ainsi que les numéros de points qui les composent.

Afficher les points				Points générés:						
No. elem.	Longueur droite (m)	delta cercle (deg)	Rayon cercle (m)	No.	No. elem	x	y	Type	No elem	Chaînage
1	81.018	0	0	0	0	172606.544	5039062.39	DD	1	0
2	0	-36.707	551.274	1	1	172610.713	5039053.3	DD	1	10
3	161.181	0	0	2	2	172614.882	5039044.21	DD	1	20
4	0	-9.678	0	3	3	172619.051	5039035.12	DD	1	30
5	558.175	0	0	4	4	172623.219	5039026.03	DD	1	40
6	0	19.97	491.748	5	5	172627.388	5039016.94	DD	1	50
7	47.046	0	0	6	6	172631.557	5039007.85	DD	1	60
8	0	26.881	43.091	7	7	172635.726	5038998.76	DD	1	70
9	240.502	0	0	8	8	172639.895	5038989.67	DD	1	80
10	0	-47.869	368.12	9	9	172644.13	5038980.61	CG	2	90
11	905.389	0	0	10	1	172648.528	5038971.63	CG	2	100
12	0	-90.203	299.539	11	2	172653.068	5038962.73	CG	2	110
				12	3	172657.809	5038953.92	CG	2	120
				13	4	172662.689	5038945.19	CG	2	130
				14	5	172667.726	5038936.55	CG	2	140

Figure 6.6 : Présentation des résultats

nbre points	a	b	c	gisement	xp	yp	delta	distance PI		
DD 1	4	-2.18046169	5415424.35	0	155.362	172716.562	5038822.5	-36.707	263.914	oblique
DD 2	6	-0.54848182	5133208.96	0	118.655	173018.482	5038657.51	-9.677	344.062	oblique
DD 3	30	-0.34390942	5098160.19	0	108.978	173628.18	5038447.82	19.97	644.745	oblique
DD 4	2	-0.80830531	5178792.4	0	128.948	173740.113	5038357.35	26.881	143.926	oblique
DD 5	7	-2.22813275	5425473.39	0	155.829	173909.707	5037979.47	-47.868	414.192	oblique
DD 6	34	-0.32417315	5094356.33	0	107.961	175212.352	5037557.19	-90.203	1389.38	oblique
DD 7	6	3.12240636	4490473.03	0	17.758	175378.961	5038077.41	33.076	546.249	oblique
DD 8	15	0.81457942	4895217.32	0	50.834	175741.775	5038372.95	-50.834	467.951	oblique
DD 9	2	0	0	175741.776	0	175741.775	5038373	51.414	0.048	verticale
DD 10	4	0.79788442	4898151.37	0	51.414	175844.909	5038455.29	28.213	131.939	oblique

Figure 6.7 : Présentation des éléments détaillés des droites

nbre points	Rc	xc	yc	long arc	xdebcc	ydebcc	xfincc	yfincc	
CG 1	12	-551.2746102	173141.405	5039218.65	353.178	172640.318	5038988.75	172877.043	5038734.8
CG 2	3	-5.11591E-13	173016.482	5038657.51	0	173018.482	5038657.51	173018.482	5038657.51
CD 3	3	491.7484887	173386.391	5038010.96	171.395	173546.315	5038475.98	173695.516	5038393.4
CD 4	9	43.09194569	173705.016	5038330.31	20.217	173732.105	5038363.82	173744.33	5038347.95
CG 5	11	-368.120266	174178.651	5038279.27	307.547	173842.806	5038128.54	174065.132	5037929.08
CG 6	15	-299.5397807	175018.767	5037934.83	471.577	174926.397	5037649.89	175304.037	5037843.46
CD 7	8	266.9836981	175609.045	5037920.48	154.125	175354.782	5038001.91	175440.428	5038127.48

Figure 6.8 : Présentation des éléments détaillés des cercles

nbre points	long arc	xdebcc	zdebcc	xfincc	zfincc	k
courbe - 1	11	220.00	290	105.8	510	106.9
courbe - 2	8	150.00	675	105.25	825	103
courbe + 3	10	200	1050	98.5	1250	99.5
courbe - 4	9	180	1450	105.5	1630	108.65
courbe + 5	15	300	1970	110.35	2270	114.1
						200

Figure 6.9 : Présentation des éléments détaillés des paraboles

## Chapitre 7 : Applications

En pratique, l'usager peut utiliser certaines méthodes pour améliorer les résultats qu'il obtient. D'abord, il est impératif que l'alignement commence et termine par des lignes droites. Ensuite, l'usager peut avoir besoin de recalculer certaines portions du tracé pour améliorer les résultats qu'il obtient. Finalement, l'usager peut souhaiter repositionner des points dont il sait que ces derniers posent problème pour la reconstitution.

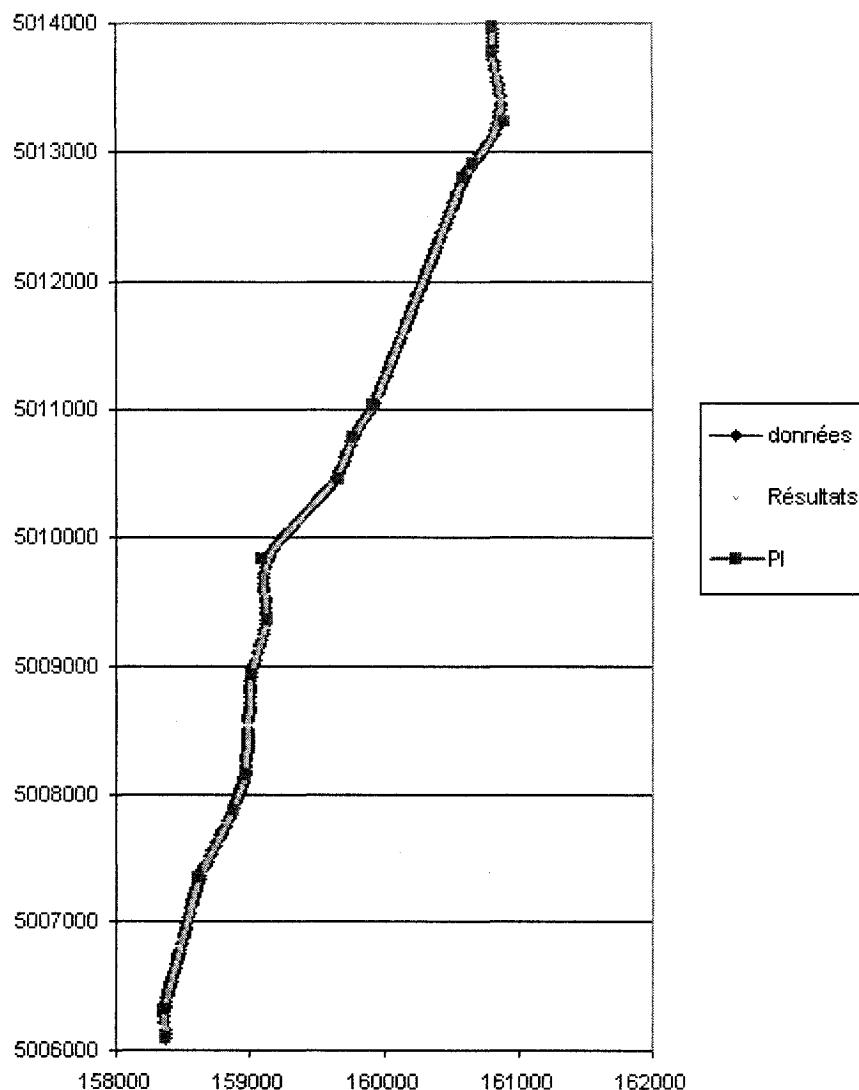
### ***7.1. Recalculer une portion du tracé***

#### **7.1.1. Principe**

Lorsqu'un usager désire reconstituer un alignement, il est possible que la même valeur de sensibilité ne puisse pas s'appliquer à tout l'alignement. L'algorithme fournit alors de bons résultats sur une partie du tracé mais certaines portions pourraient être améliorées. L'usager peut alors repérer la portion qu'il désire modifier et relever les valeurs des coefficients des droites au début et à la fin de la portion qu'il désire modifier. Ensuite, il peut exécuter une nouvelle fois le programme avec de nouveaux paramètres sur les points de la portion sélectionnée en fixant les valeurs des premières et dernières droites (Figure 6.5). Les nouvelles caractéristiques de la portion étudiée peuvent alors être remplacées dans l'alignement total puisque la continuité entre les deux tracés est assurée car les caractéristiques des droites qui auraient pu être modifiées par cette action sont les mêmes.

#### **7.1.2. Exemple**

Le tracé réel étudié est une portion de la route 245 de 8.4 km de long (Figure 7.1).



**Figure 7.1 : Données de départ et reconstituées pour une section de la route 245**

Visuellement, les coordonnées GPS de départ et les coordonnées reconstituées par l'algorithme sont bien superposées. L'analyse des erreurs et la superposition avec des photos aériennes vont permettre de mesurer la performance de l'algorithme de reconstitution.

Dans un premier temps, les erreurs révèlent que les résultats sur le cercle 10 sont peu satisfaisants par rapport aux résultats sur les autres cercles : l'erreur moyenne est de 11 m (Figure 7.2).

Erreurs sur les courbes					
	erreur moyen	erreur min	erreur max	écart-type	nombre points
CD 1	0.9426	0.5944	1.5844	2.6198	7
CD 2	0.1951	0.0441	0.505	0.5662	5
CG 3	0.6589	0.4663	0.8271	1.1698	3
CG 4	2.7665	0.4628	8.4712	11.9944	9
CD 5	0.6325	0.5322	0.7353	1.4261	5
CG 6	0.4944	0.35	0.6905	1.3367	7
CD 7	0.2725	0.0005	0.653	1.3525	14
CG 8	2.061	0.5886	3.4497	7.8914	12
CD 9	0.4422	0.1784	0.655	1.0781	5
CG 10	11.4687	1.2318	27.1107	34.6755	5
CD 11	1.535	1.2453	1.8247	2.2092	2
CG 12	0.3277	0.0037	0.6492	1.5925	17
CD 13	1.492	0.6668	2.0146	3.5074	5
Tous les cercles	1.5133	0.0005	27.1107	0.3663	96

**Figure 7.2 : Repérage d'un cercle avec des erreurs élevées**

L'usager peut alors décider de recalculer les caractéristiques de ce cercle pour améliorer les résultats. Il faut alors repérer les points qui appartiennent aux cercles (Figure 7.3) dans la feuille « Cercles » du fichier Excel, puis récupérer les coefficients « a », « b » et « c » des équations des droites avant et après le cercle considéré (Figure 7.4).

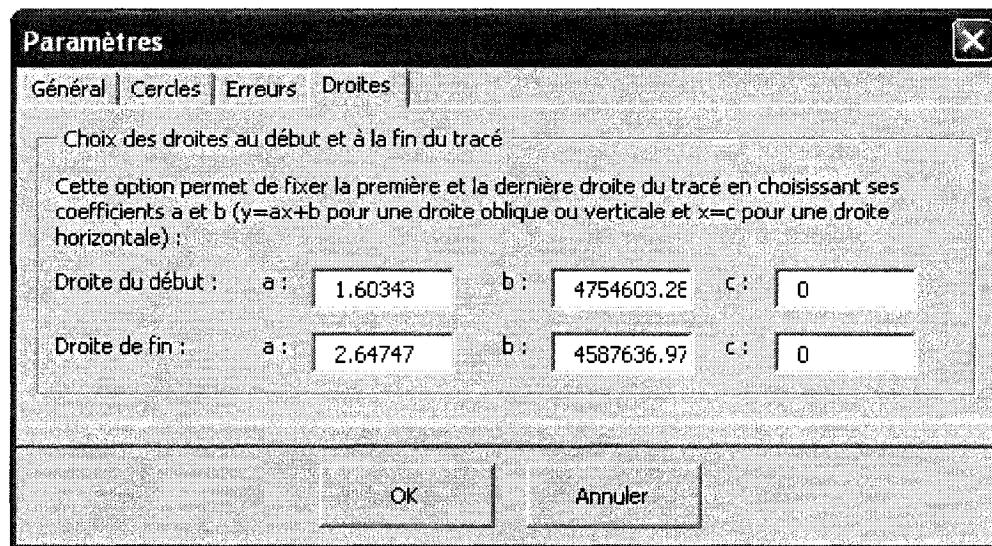
CD 9	218	219	220	221	222
CG 10	227	228	229	230	231
CD 11	328	329			

**Figure 7.3 : Repérage des points qui composent le cercle**

	nbre points	a	b	c	gisement	xp	yp	delta
DD 1	5	-17.7099417	7810802.51	0	356.788	158356.565	5006316.97	17.447
DD 2	44	3.94747748	4381208	0	14.215	158615.388	5007338.67	11.311
DD 3	17	2.09407602	4675185.99	0	25.526	158873.523	5007879.22	-6.876
DD 4	9	2.96280218	4537168.4	0	18.65	158965.543	5008151.86	-15.842
DD 5	40	20.3851901	1767609.04	0	2.808	159003.573	5008927.1	13.036
DD 6	8	3.52356076	4448668.35	0	15.844	159125.883	5009358.07	-20.885
DD 7	9	-11.4068035	6824475.76	0	354.989	159085.243	5009821.65	46.89
DD 8	15	1.11532214	4832390.35	0	41.879	159658.015	5010460.47	-22.88
DD 9	4	2.90433121	4546760.71	0	18.999	159767.664	5010778.93	12.951
DD 10	4	1.60342614	4754603.28	0	31.96	159925.262	5011038.42	-11.258
DD 11	78	2.64746634	4587636.97	0	20.692	160608.437	5012837.1	16.131
DD 12	6	1.33558703	4798333.23	0	36.823	160902.624	5013232.69	-47.186
DD 13	12	-5.46875127	5893169.12	0	349.637	160803.349	5013775.59	12.157
DD 14	5	31.9150885	-118277.553	0	1.794	160809.223	5013963.06	

**Figure 7.4 : Repérage des coefficients des équations des droites avant et après le cercle**

L'usager peut alors isoler les points du cercle et des droites avant et après le cercle dans la feuille « Données » puis relancer les calculs uniquement avec ces points. Il est alors important d'entrer les coefficients des droites avant et après la courbe lors du choix des paramètres (Figure 7.5) pour être sûr que le cercle pourra ensuite être replacé dans l'alignement général car les caractéristiques des droites avant et après le cercle n'auront pas changé.



**Figure 7.5 : Choix des coefficients des équations des droites**

En faisant varier la valeur de la sensibilité, il est possible d'obtenir de meilleurs résultats pour le cercle. Ici, la sensibilité a été diminuée et le cercle ne compte plus que deux points mais cela améliore les valeurs des erreurs (Figure 7.6). Une simple vérification permet de s'assurer que les coefficients des droites sont bien ceux choisis (Figure 7.7).

	erreur moyen	erreur min	erreur max	écart-type	nombre points
CG 1	2.1031	1.9585	2.2476	2.9812	2

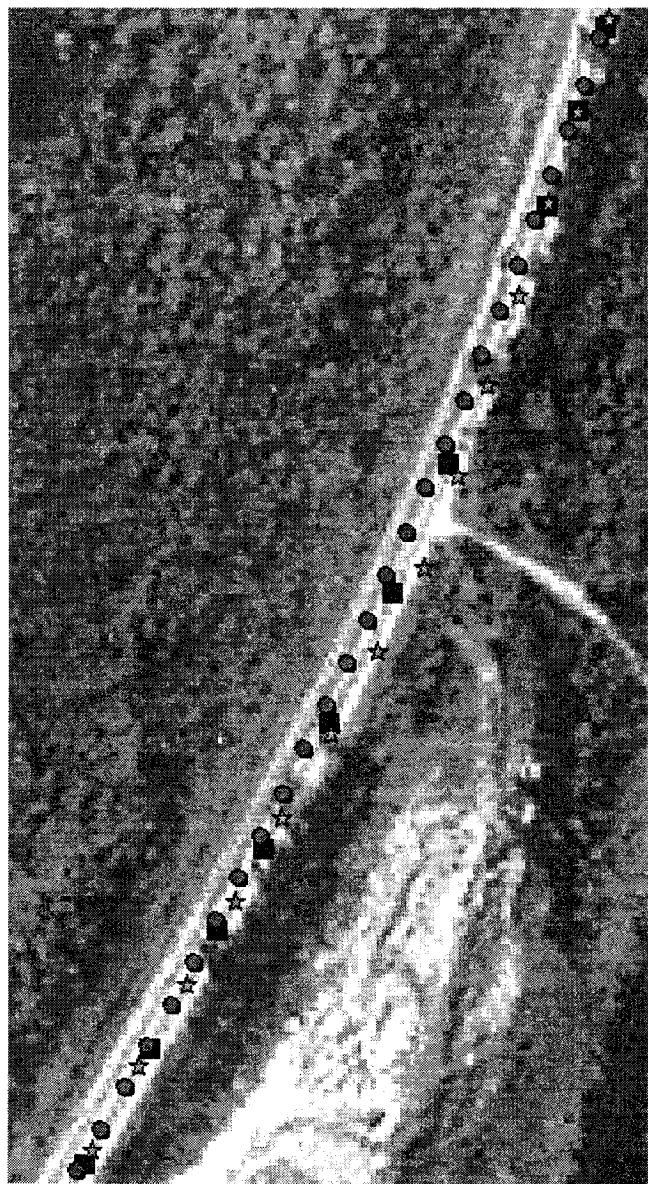
Figure 7.6 : Nouveaux résultats pour le cercle

	nbre points	a	b	c	gisement	xp	yp	delta
DD 1	5	1.60343	4754603.28	0	31.95	159819.042	5010861.93	
DD 2	73	2.64747	4587636.97	0	20.692	160548.55	5012679.15	-11.258

Figure 7.7 : Vérification des coefficients des équations des droites

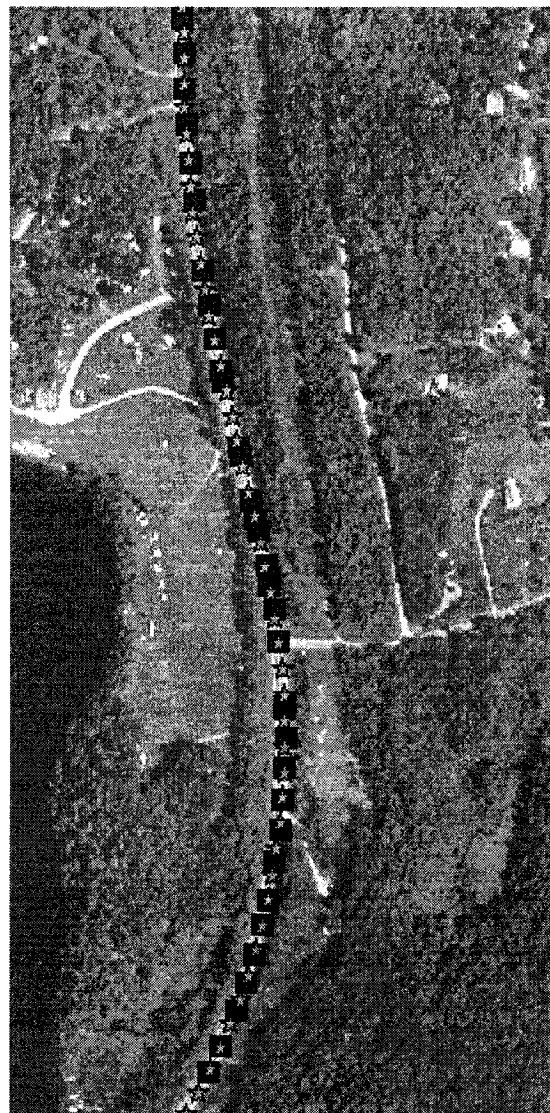
Cette méthode peut être appliquée à autant de cercles que souhaité. Pour cet exemple, seul le cercle 10 a été amélioré.

Il est également possible d'utiliser le logiciel MapInfo pour repérer les endroits qui peuvent être améliorés. Ainsi, la Figure 7.8 présente les coordonnées GPS en carrés rouges, les résultats de la reconstitution en étoiles vertes et les nouveaux résultats pour la courbe 10 en ronds violets. Il est alors possible de voir que ce cercle comporte peu de points, ce qui explique la difficulté pour en trouver les caractéristiques.



**Figure 7.8 : Résultats pour la courbe 10**

La Figure 7.9 présente des courbes correctement reconstituées dès le premier essai.



**Figure 7.9 : Courbes correctement reconstituées**

La distribution des erreurs pour le tracé, une fois les améliorations sur la courbe réalisées, est la suivante (Figure 7.10) :

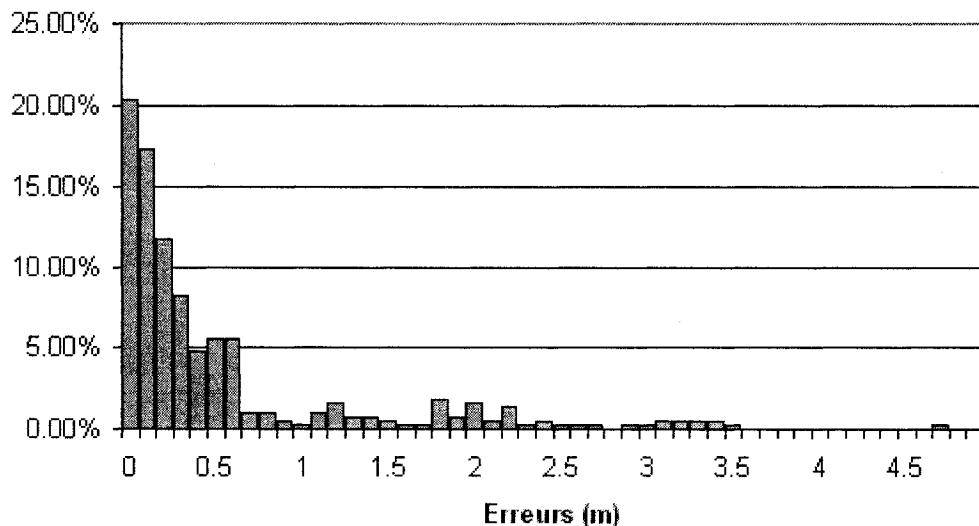


Figure 7.10 : Fréquence des erreurs

75% des erreurs sont inférieures à 1 m et 50% des erreurs sont inférieures à 0.5 m.

Un programme, basé sur le programme principal, génère des coordonnées à partir des caractéristiques des droites et des cercles pour permettre à l'usager d'obtenir une série de coordonnées même si certains éléments ont été reconstitués séparément.

## 7.2. Repositionnement éventuel de points

Pour avoir de bons résultats pour la reconstitution, il est important que les données introduites dans l'algorithme soient correctement nettoyées au préalable. En effet, les quelques filtres présents dans l'algorithme ne suffisent pas toujours à éliminer toutes les données erronées. Ainsi, l'utilisateur doit se montrer vigilant sur la qualité de la suite de coordonnées GPS. Le logiciel MapInfo peut être utilisé pour améliorer les séquences de points, comme le suggère Durlut (2006). Ce dernier propose de réaligner les points qui ne sont pas dans l'alignement ou d'écartier les points trop proches, ce qui a l'avantage de fournir un alignement de départ plus proche de celui auquel on souhaite aboutir et donne donc de meilleurs résultats.

### **7.3. Conclusion**

Ces méthodes non exhaustives permettent à l'usager d'améliorer les résultats. En effet, il n'est souvent pas possible d'obtenir de bons résultats à la première tentative de reconstitution et certaines parties du tracé ne sont correctement reconstituées qu'avec une certaine valeur de sensibilité différente de celle applicable à d'autres parties du tracé. De plus, il est primordial pour le bon fonctionnement de l'algorithme que les points soient correctement filtrés au préalable puisque si certains points sont mal positionnés, ils peuvent nuire à la reconstitution de tout ou une partie de l'alignement. Ainsi, l'usager a désormais à sa disposition quelques méthodes pour tenter d'améliorer les résultats.

## Chapitre 8 : Conclusion

Le but de ce mémoire était de proposer une méthode pour reconstituer les caractéristiques des alignements routiers à partir de traces GPS. Pour cela, une étude du réseau existant a d'abord été menée. En effet, les courbes et les pentes existantes sur le réseau québécois ont des valeurs qui excèdent parfois les normes prescrites par le MTQ. Cela est lié à l'âge du réseau qui a été construit avant que les conditions de design actuelles soient de rigueur. Cette étude a donc permis de mettre en évidence les caractéristiques des courbes et des pentes auxquels l'algorithme a à faire face.

Ensuite, une approche théorique a été développée. Les éléments des droites, cercles et paraboles ont été calculés mathématiquement puis une série de coordonnées a été produite à partir des éléments reconstitués. Un algorithme a alors été développé et des données théoriques obtenues à l'aide d'éléments géométriques définis ont permis de tester et de valider l'algorithme.

Puis, une approche réelle a été conçue à partir de l'approche théorique. Les données utilisées sont des coordonnées relevées par GPS. C'est pourquoi certaines procédures ont dû être ajoutées, comme le filtrage des données, la détection des valeurs aberrantes, l'ajout d'une valeur de sensibilité, des régressions aux moindres carrés pour obtenir les éléments des cercles et des paraboles, des éléments de vérification pour s'assurer de la cohérence des résultats et des calculs d'erreurs.

Les exemples étudiés ont permis de valider l'algorithme de reconstitution grâce à la superposition des résultats avec les données de départ, l'analyse des erreurs et éventuellement la superposition avec des photos aériennes. Les résultats mériteraient cependant d'être comparés avec des données d'arpentage relevées sur le terrain.

Cette étude s'est basée sur les travaux réalisés par Vouland (2005), Jacquard (2005) et Durlut (2006) qui ont développé une méthode pour reconstituer des alignements routiers à partir de traces GPS puis lui ont apporté des modifications. Ce mémoire a alors eu pour but de reprendre ces principes et de les améliorer en ajoutant une analyse du réseau existant, une approche théorique et certaines fonctions comme le filtrage des données, la détection des courbes composées, la détection des valeurs aberrantes et la vérification de la cohérence des éléments reconstitués.

Les prochains travaux pourraient se concentrer sur la façon de relever et de traiter les données GPS pour éliminer toutes les données erronées et éventuellement replacer les points mal positionnés afin d'assurer les meilleurs résultats de reconstitution possibles. Ensuite, il serait possible de se pencher sur les différentes applications que pourrait avoir cet algorithme, comme la constitution d'une base de données pour pouvoir résoudre des problèmes de dépassement, étudier les accidents ou la cohérence du design.

## Bibliographie

AASHTO. (2004). *A policy on geometric design of highways and streets, 2004* (5th<sup>e</sup> éd.). Washington, D.C.: American Association of State Highway and Transportation Officials.

Anderson, J. M., & Mikhail, E. M. (1998). *Surveying : theory and practice* (7th<sup>e</sup> éd.). Boston ; Toronto: McGraw-Hill.

Baass, K. (2006). *Eléments de base de la conception routière, Notes de cours CIV4602*. Ecole Polytechnique de Montréal.

Baass, K., & Vouland, J. (2005). Détermination de l'alignement routier à partir de traces GPS. *Congrès annuel 2005 de l'ATC*.

Ben-Arieh, D., & Chang, S., & Zhang, G. (2004). Geometric Modeling of Highways Using Global Positioning System (GPS) Data and B-Spline Approximation. *Journal of transportation engineering*, p. 632-637.

Canada. Bureau de la traduction. (2000). *Termium Plus [ressource électronique]*. Ottawa, Ontario: Bureau de la traduction.

Castro, M., Iglesias, Luis, Rodriguez-Solano, Roberto, Sanchez, Jose A. (2006). Geometric Modelling of Highways Using Global Positioning System (GPS) Data and Spline Approximation. *Transportation Research. , Part C: Emerging Technologies* Vol. 14 No. 4.

Durlut, A. (2006). *Développement d'un outil informatique pour l'analyse de la circulation sur des routes à deux voies contigües*. M.Sc.A inédit, Ecole polytechnique de Montréal. Département des génies civil géologique et des mines., Québec, Canada.

Easa, S. M. (1999). Optimum vertical curves for highway profiles. *Journal of surveying engineering*, Vol. 125 No. 3, p. 147-157.

Han, S., & Rizos, C. (1999). Road slope information from GPS-derived trajectory data. *Journal of surveying engineering*, Vol. 125 No. 3, p. 59-67.

Jacquart, M. (2005). *Reconstitution des alignements routiers à partir de la trace GPS*. Ecole polytechnique de Montréal. Département des génies civil géologique et des mines,, Québec, Canada.

Lee, J., & Seo, J., & Heo, J. (2001). Estimation of the design elements of horizontal alignment by the method of least squares. *New Technology for a New Century - International Conference - FIG Working Week 2001, Session 17 - The Use of Positioning and Measurement Technology in Engineering and Construction Applications* 2001. Consulté le 17.01.2007, tiré de <http://www.fig.net/pub/proceedings/korea/full-papers/session17/lee-seo-heo.htm>.

Maimon, O. Z., & Rokach, L. (2005). *Data mining and knowledge discovery handbook*. New York: Springer.

MTQ. (1995a). *Inventaire: Capacités, Courbes, Pentes des routes du Québec*.

MTQ. (1995b). *Normes - Ouvrages Routiers*. Sainte-Foy, Qc: PUBLICATIONS DU QUEBEC.

Rousseeuw, P. J., & Leroy, A. M. (1987). *Robust regression and outlier detection*. New York: Wiley.

Vouland, J. (2005). *Acquisition de l'alignement routier - profil en long et tracé en plan - à partir de traces GPS*. M.Sc.A inédit, Ecole polytechnique de Montréal. Département des génies civil géologique et des mines, Québec, Canada.

Wikipédia. Résolution des équations de quatrième degré, Méthode de Ferrari.

Consulté le 23.10.2007, tiré de [http://fr.wikipedia.org/wiki/méthode\\_de\\_ferrari](http://fr.wikipedia.org/wiki/méthode_de_ferrari).

Wikipédia. Résolution des équations de troisième degré, Méthode de Cardan.

Consulté le 23.10.2007, tiré de [http://fr.wikipedia.org/wiki/méthode\\_de\\_cardan](http://fr.wikipedia.org/wiki/méthode_de_cardan).

## Annexes

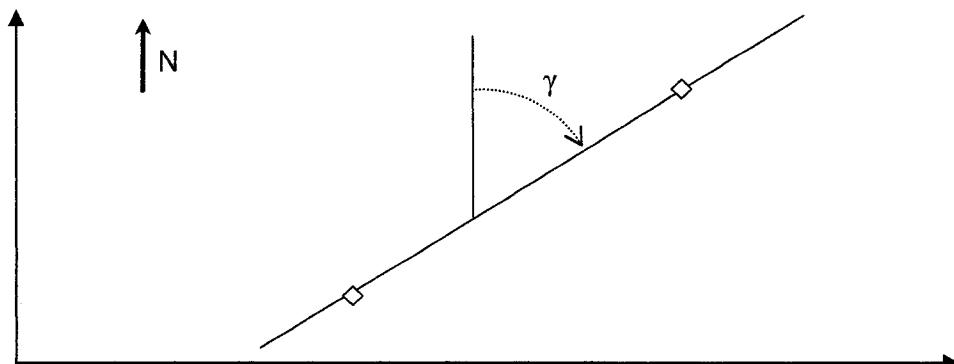
### Annexe A :Rappels mathématiques

#### A.1. *Les gisements*

##### A.1.1. **Définition**

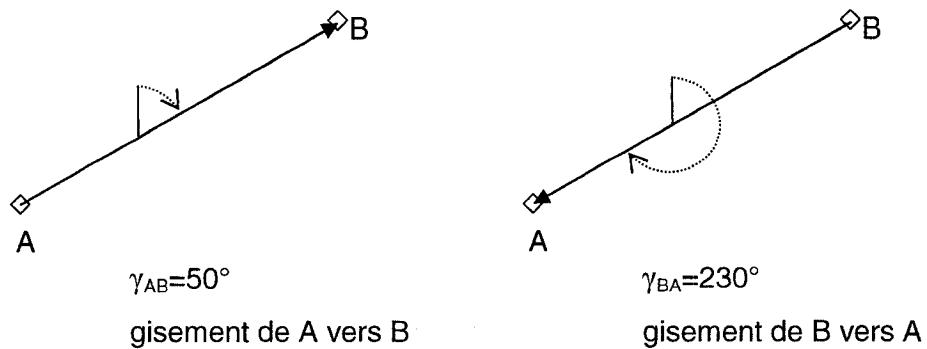
Le gisement d'une direction est l'angle que fait cette direction avec l'axe des ordonnées du système de projection utilisé. Il est compté de 0 à 400 grades dans le sens direct topographique, qui correspond au sens horaire (Figure. A.1). (Wikipedia) Dans notre cas, nous comptons le gisement de 0 à 360 degrés.

Pour toute la suite, on note un gisement  $\gamma$ .



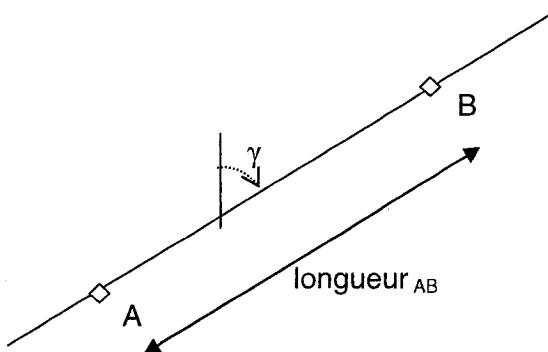
**Figure. A.1 : Représentation d'un gisement**

L'utilisation du gisement a l'avantage d'éviter les problèmes de signes. En effet, lorsque l'on calcule le gisement entre deux points, la valeur du gisement prend en compte la direction des points (Figure. A.2).



**Figure. A.2 : Valeur de gisements selon la direction entre deux points**

L'utilisation des gisements est très pratique pour calculer les coordonnées d'un point d'une droite lorsqu'on connaît les coordonnées d'un autre point sur la même droite, la longueur entre les points et le gisement de la droite (Figure. A.3).



**Figure. A.3 : Relation entre les coordonnées de deux points en fonction du gisement de la droite entre eux**

Si on connaît les coordonnées de A, le gisement  $\gamma$  et la longueur entre A et B, les coordonnées de B s'expriment ainsi :

$$x_B = x_A + longueur_{AB} \times \sin(\gamma)$$

$$y_B = y_A + longueur_{AB} \times \cos(\gamma)$$

### A.1.2. Calcul

Pour calculer un gisement entre deux points A et B, on dispose des coordonnées de ces deux points. Le calcul se fait en deux étapes. On commence par calculer  $\alpha$  :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}\right)$$

On applique ensuite une correction à  $\alpha$  selon le signe de  $dx = x_B - x_A$  et  $dy = y_B - y_A$ . On a quatre cas généraux possibles (Figure. A.4) et quatre cas particuliers lorsque  $dx$  ou  $dy$  est nul (Figure. A.5) :

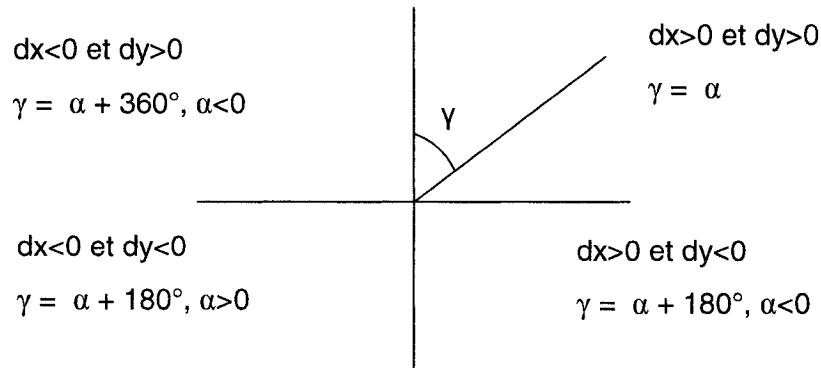


Figure. A.4 : Cas généraux pour l'obtention du gisement à partir de  $\alpha$

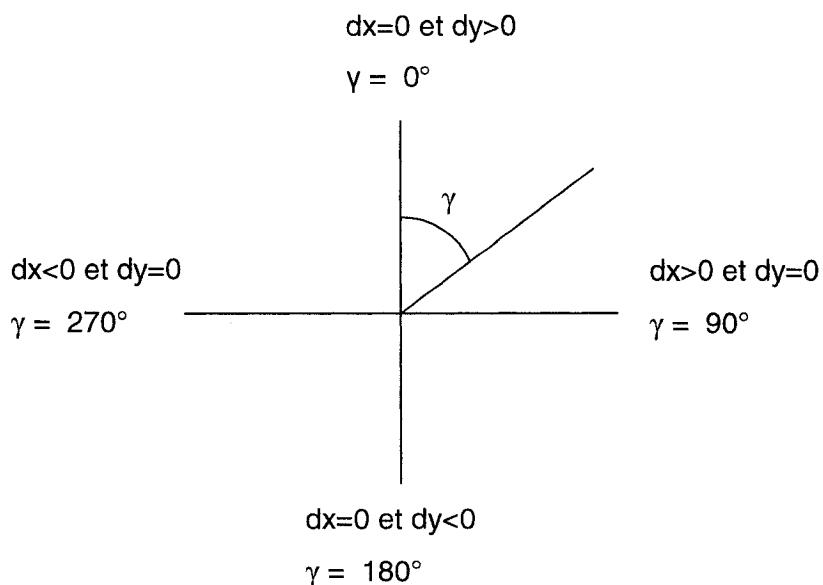


Figure. A.5 : Cas particuliers pour l'obtention du gisement à partir de  $\alpha$

### A.1.3. Code VBA

```

Function gisem(dx As Double, dy As Double) As Double
Pi = 3.14159265358979
If dy <> 0 Then
    Angle = Atn(dx / dy)
End If
If dx > 0 Then
    If dy > 0 Then
        gisem = Angle * 180 / Pi
    ElseIf dy = 0 Then
        gisem = 90
    Else
        gisem = Angle * 180 / Pi + 180
    End If
ElseIf dx < 0 Then
    If dy > 0 Then
        gisem = Angle * 180 / Pi + 360
    ElseIf dy = 0 Then
        gisem = 270
    Else
        gisem = Angle * 180 / Pi + 180
    End If
Else
    If dy < 0 Then

```

```
    gisem = 180
Else
    gisem = 0
End If
End If
End Function
```

## **A.2.           *Les angles de déviation - angles de déflexion***

### **A.2.1.           *Définition***

Un angle de déviation ou déflexion est un angle compris entre  $-180^\circ$  et  $+180^\circ$  qui représente la différence entre deux gisements, dans le sens du chaînage. On parle d'angle de déviation pour la différence de gisements entre deux points et d'angle de déflexion pour la différence de gisements entre deux droites. Un angle de déflexion  $\Delta$  positif indique un virage vers la droite alors qu'un angle négatif indique un virage vers la gauche (Figure. A.6).

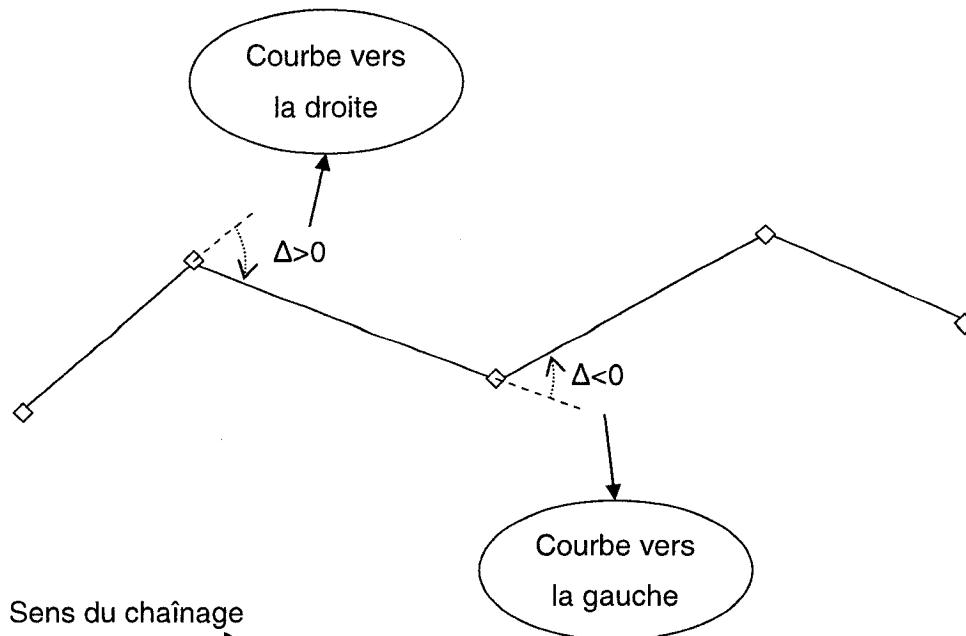


Figure. A.6 : Définition des angles de déflexions

Un autre avantage de l'utilisation des gisements est que si l'on connaît la valeur d'un gisement puis les déflexions pour toute la suite du tracé, il est possible de retrouver la valeur de tous les gisements du tracé.

### A.2.2. Calcul

Le calcul se fait à partir de la différence «  $d$  » entre deux gisements :

$$d = \gamma_2 - \gamma_1$$

Il faut ensuite appliquer une correction à cette valeur «  $d$  » pour que l'angle de déviation se situe entre  $-180^\circ$  et  $+180^\circ$ . La correction dépend de la valeur des deux gisements. On distingue huit cas représentés ci-dessous (Figure. A.7).

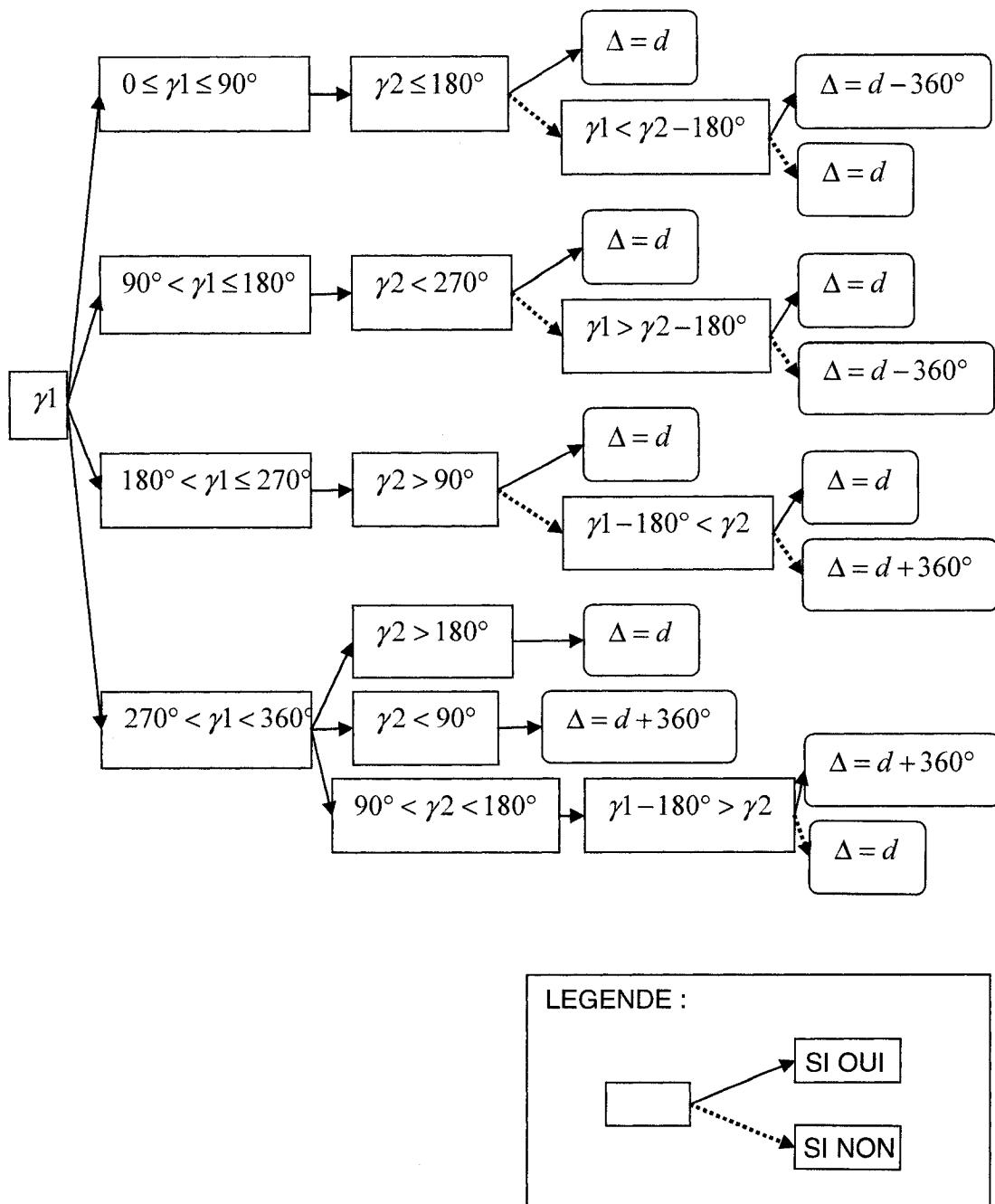


Figure. A.7 : Procédure de calcul de l'angle de déviation

### A.2.3. Code VBA

```
Function deflexion(gisementavant As Double, gisementapres As Double) As Double
```

```
d = gisementapres - gisementavant

If gisementavant <= 90 Then
  If gisementapres <= 180 Then
    deflexion = d
  Else
    If gisementavant < gisementapres - 180 Then
      deflexion = d - 360
    Else
      deflexion = d
    End If
  End If

ElseIf gisementavant > 90 And gisementavant <= 180 Then
  If gisementapres < 270 Then
    deflexion = d
  Else
    If gisementavant > gisementapres - 180 Then
      deflexion = d
    Else
      deflexion = d - 360
    End If
  End If

ElseIf gisementavant > 180 And gisementavant <= 270 Then
  If gisementapres > 90 Then
    deflexion = d
  Else
    If gisementavant - 180 < gisementapres Then
      deflexion = d
    Else
      deflexion = d + 360
    End If
  End If

ElseIf gisementavant > 270 And gisementavant <= 360 Then
  If gisementapres > 180 Then
    deflexion = d

  ElseIf gisementapres < 90 Then
    deflexion = 360 + d

  Else
    If gisementavant - 180 > gisementapres Then
      deflexion = d + 360
    Else
      deflexion = d
    End If
  End If
End If
```

End Function

### A.3. *Le gisement $\Gamma_0$*

#### A.3.1. Définition

Les cercles doivent être en tangence avec les droites qui les précèdent et les suivent. Pour calculer les éléments des cercles, on dispose des PI et des gisements  $\gamma_1$  avant et  $\gamma_2$  après le cercle. Ces éléments permettent de calculer le gisement de la droite qui relie le PI des droites avant et après le cercle et le centre du cercle en appliquant la condition de tangence (Figure. A.8).

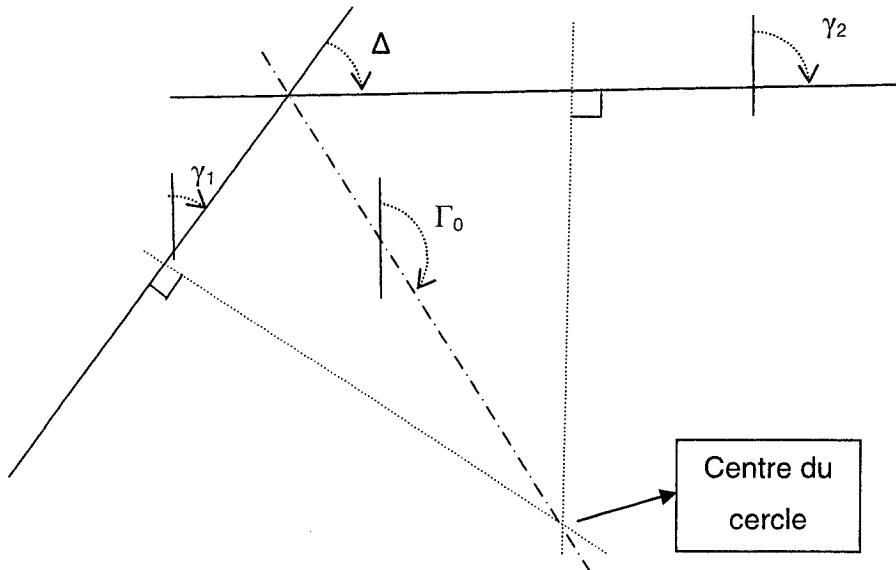


Figure. A.8 : Représentation du gisement  $\Gamma_0$

### A.3.2. Calcul

$\Gamma_0$  se calcule en fonction de  $\gamma_1$  ou  $\gamma_2$  et de l'angle de déflexion entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . Le résultat se voit facilement sur un dessin mais il faut être très vigilant aux valeurs de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  car il existe de nombreux cas différents en fonction de la valeur des gisements. Sur la Figure. A.9, on voit deux exemples de position de  $\Gamma_0$  selon la position de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .

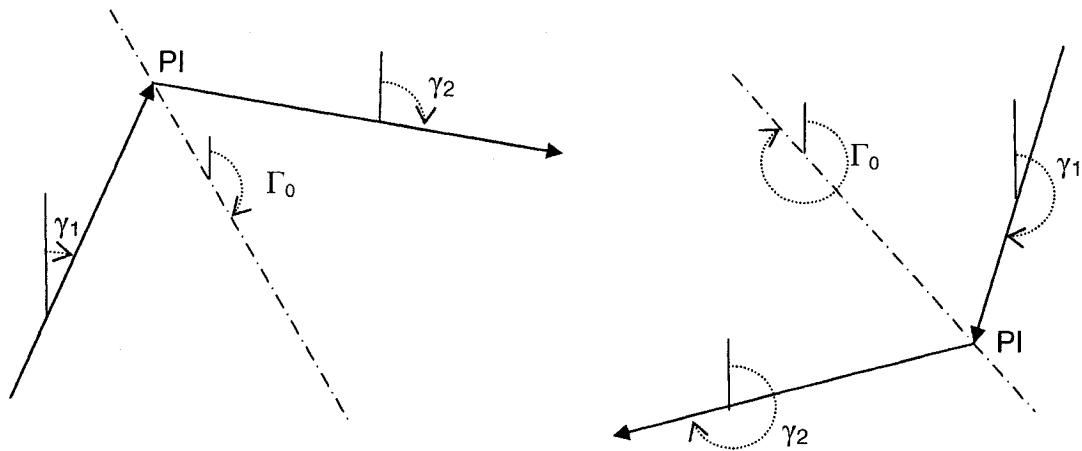


Figure. A.9 : Valeurs différentes de  $\Gamma_0$  selon la position de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$

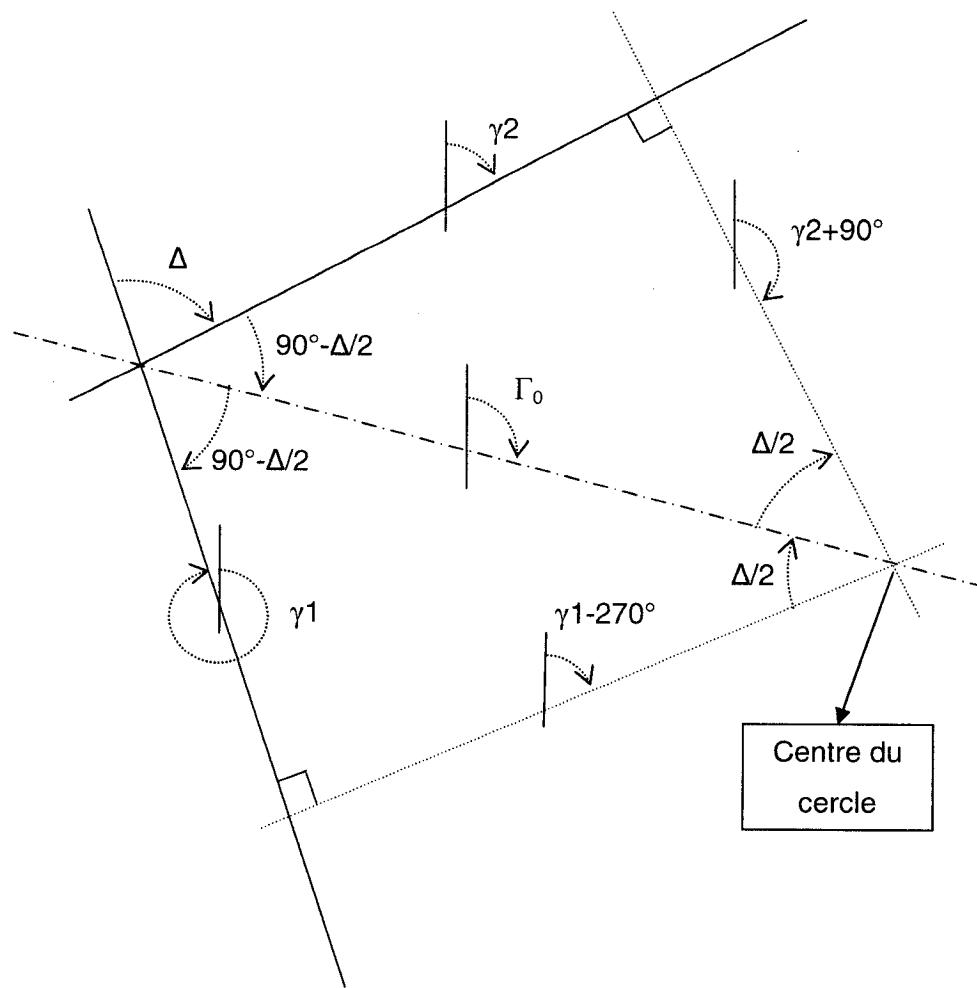


Figure. A.10 : Représentation de  $\Gamma_0$  en fonction de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$

Sur la Figure. A.10,  $\Gamma_0$  peut s'exprimer en fonction de  $\gamma_1$  ou  $\gamma_2$  de la façon suivante :

$$\Gamma_0 = \gamma_1 - 270^\circ + \frac{\Delta}{2}$$

$$\Gamma_0 = \gamma_2 + 90^\circ - \frac{\Delta}{2}$$

❖ Cas général

On distingue 19 cas au total selon la position des gisements avant et après le cercle. En effet,  $\Gamma_0$  a, comme tout gisement, une valeur comprise entre  $0^\circ$  et  $360^\circ$ . Les différents cas tiennent donc compte de cet impératif (Figure. A.11, Figure. A.12, Figure. A.13 et Figure. A.14).

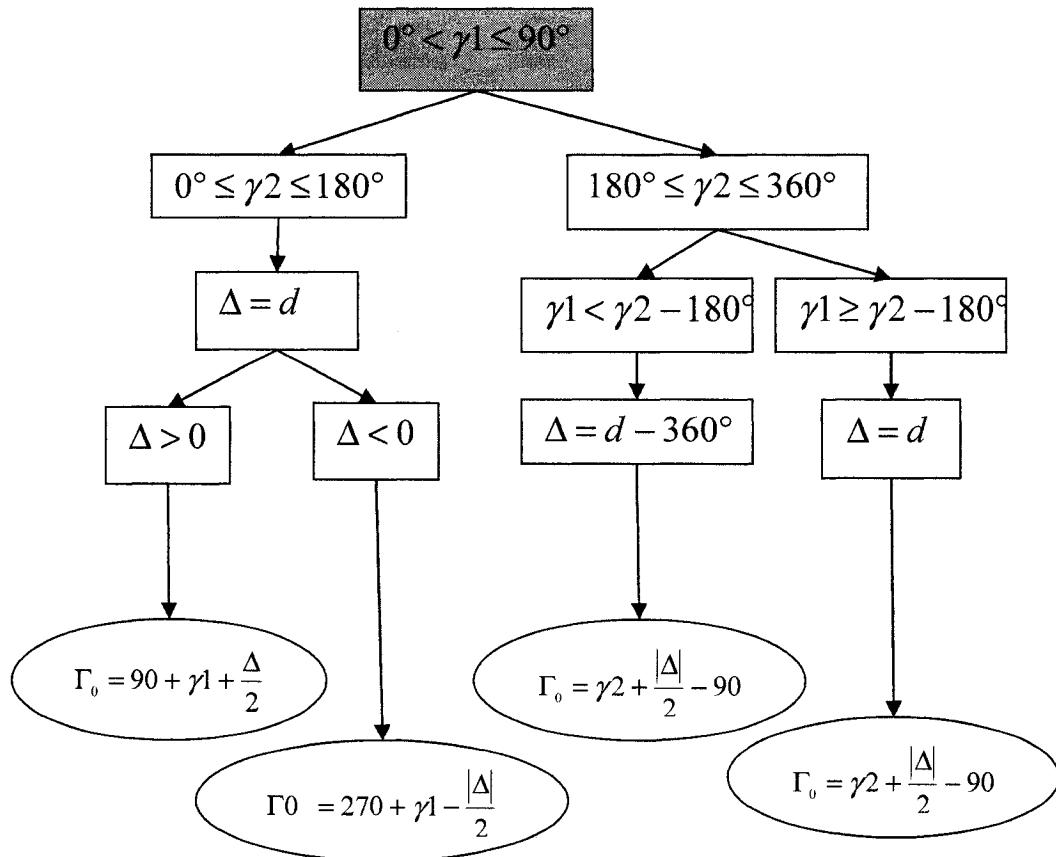


Figure. A.11 : Procédure de calcul de  $\Gamma_0$  pour  $\gamma_1$  compris entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$

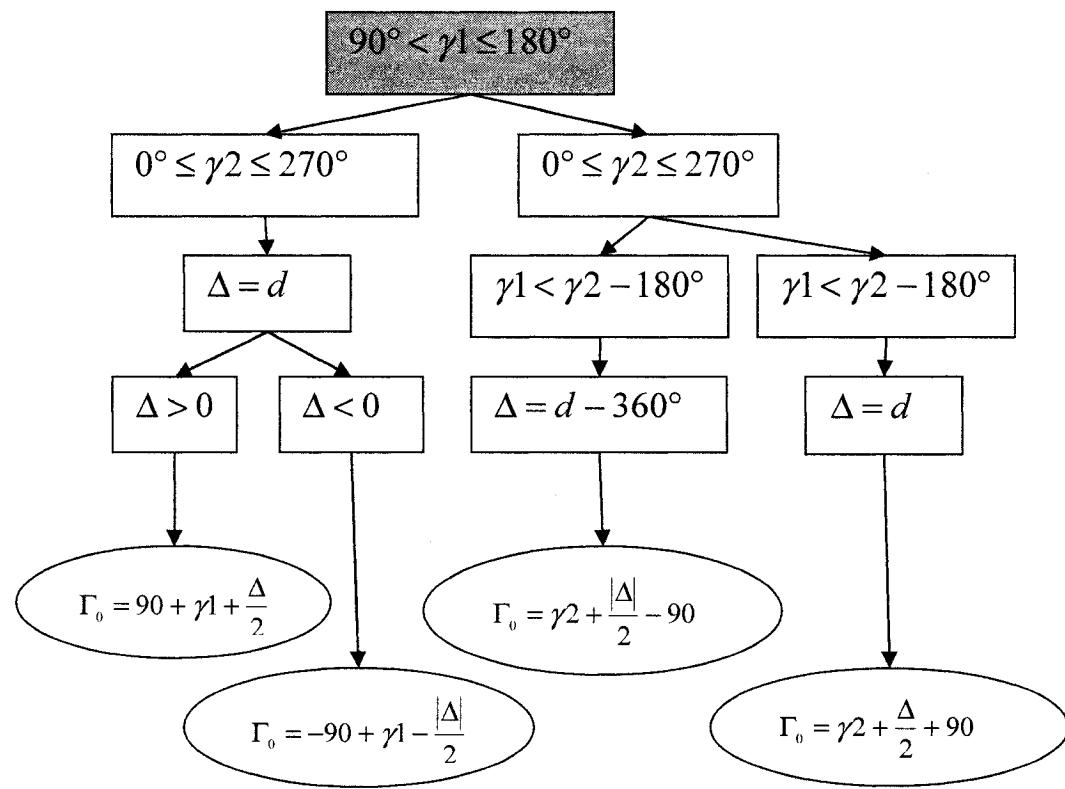


Figure. A.12 : Procédure de calcul de  $\Gamma_0$  pour  $\gamma_1$  compris entre  $90^\circ$  et  $180^\circ$

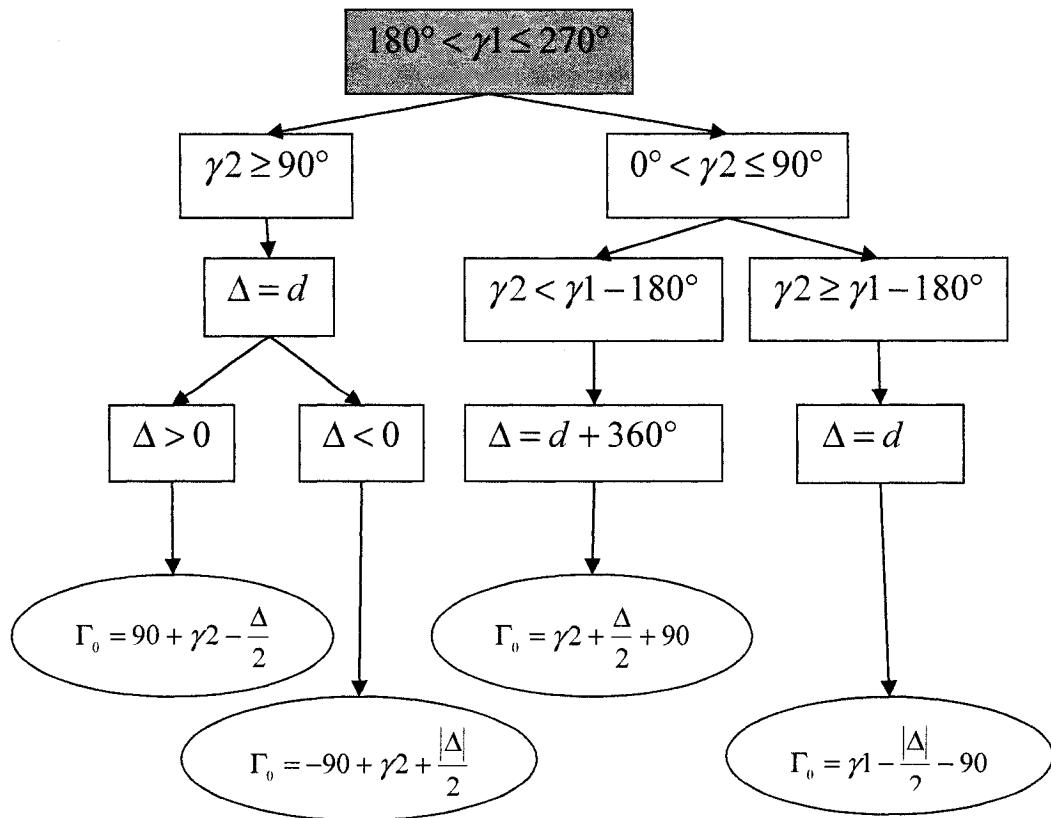


Figure. A.13 : Procédure de calcul de  $\Gamma_0$  pour  $\gamma_1$  compris entre  $180^\circ$  et  $270^\circ$

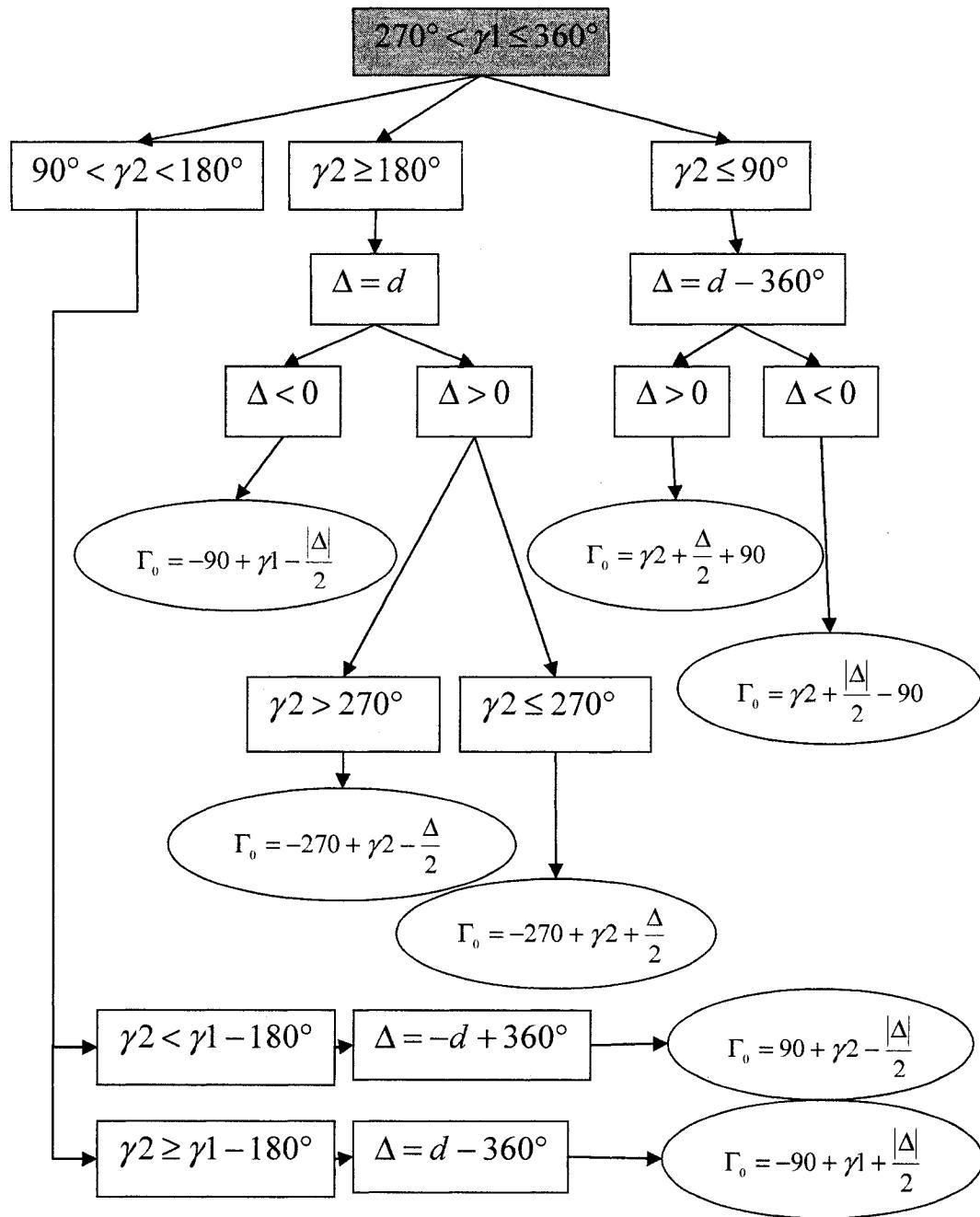


Figure. A.14 : Procédure de calcul de  $\Gamma_0$  pour  $\gamma_1$  compris entre  $270^\circ$  et  $360^\circ$

### A.3.3. Code VBA

```

Function gamma(gisementavant As Double, gisementapres As Double) As Double

Dim de As Double

de = gisementapres - gisementavant

Dim delta As Double
If gisementavant <= 90 Then
    If gisementapres <= 180 Then
        delta = de
    If delta > 0 Then gamma = 90 + gisementavant + delta / 2
    If delta < 0 Then gamma = 90 + gisementavant - Abs(delta) / 2 + 180

    Else
        If gisementavant < gisementapres - 180 Then
            delta = de - 360
            gamma = gisementapres + Abs(delta) / 2 - 90
        Else
            delta = de
            gamma = -90 + gisementapres + Abs(delta) / 2
        End If
    End If

ElseIf gisementavant > 90 And gisementavant <= 180 Then
    If gisementapres < 270 Then
        delta = de
    If delta > 0 Then gamma = 90 + gisementavant + delta / 2
    If delta < 0 Then gamma = 90 + gisementavant - Abs(delta) / 2 - 180
    Else
        If gisementavant < gisementapres - 180 Then
            delta = de - 360
            gamma = -90 + gisementapres + Abs(delta) / 2
        Else
            delta = de
            gamma = 90 + gisementavant + delta / 2
        End If
    End If

ElseIf gisementavant > 180 And gisementavant <= 270 Then
    If gisementapres >= 90 Then
        delta = de
    If delta > 0 Then gamma = 90 + gisementapres - delta / 2
    If delta < 0 Then gamma = -90 + gisementapres + Abs(delta) / 2
    Else
        If gisementavant - 180 > gisementapres Then
            delta = de + 360
            gamma = 90 + gisementapres + delta / 2
        Else
            delta = de
        End If
    End If
End If

```

```

gamma = 90 + gisementavant - Abs(delta) / 2 - 180
End If
End If

ElseIf gisementavant > 270 And gisementavant <= 360 Then
If gisementapres >= 180 Or gisementapres <= 90 Then

    If gisementapres >= 180 Then
        delta = de
        If delta > 0 Then
            If gisementapres > 270 Then
                gamma = 90 + gisementapres - delta / 2 - 360
            Else
                gamma = -90 + gisementapres + delta / 2 - 180
            End If
        End If
        If delta < 0 Then gamma = -90 + gisementapres + Abs(delta) / 2
    End If
    If gisementapres < 90 Then
        delta = 360 + de
        If delta > 0 Then gamma = 90 + gisementapres - delta / 2
        If delta < 0 Then gamma = -90 + gisementapres + Abs(delta) / 2
    End If
Else
    If gisementavant - 180 > gisementapres Then
        delta = -de + 360
        gamma = 90 + gisementapres - Abs(delta) / 2
    Else
        delta = 360 - de
        gamma = -90 + gisementapres + Abs(delta) / 2
    End If
End If
End If

End Function

```

#### A.4. *Distance d'un point à une droite*

On veut exprimer la distance d'un point à une droite en fonction du gisement de la droite, les coordonnées d'un point de la droite (on utilise un PI) et les coordonnées du point (x, y) dont on veut calculer la distance à la droite.

La distance la plus courte entre un point A et une droite D est la distance entre le point et son projeté orthogonal H sur la droite (Figure. A.15).

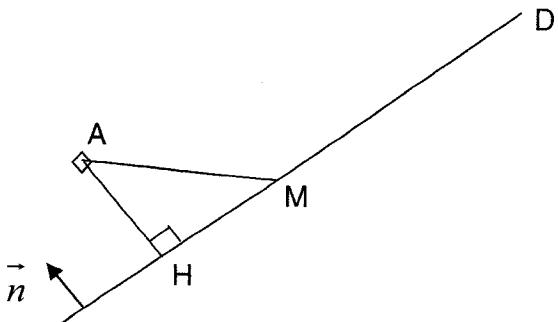


Figure. A.15 : Distance entre un point et une droite

Soit  $ax+by+c=0$  une équation cartésienne de la droite D.

Le vecteur  $\vec{n}$  de coordonnées  $(a, b)$  est un vecteur normal de la droite D.

Pour tout point M du plan, on a :

$$\vec{n}(a,b) \cdot \overrightarrow{AM}(x - x_A, y - y_A) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AH}$$

$$\Leftrightarrow a \times (x - x_A) + b \times (y - y_A) = \|\vec{n}\| \cdot \|\overrightarrow{AH}\| \cos(\vec{n}, \overrightarrow{AH})$$

$$\Leftrightarrow ax + by - ax_A - by_A = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot AH \cdot \cos(\vec{n}, \overrightarrow{AH})$$

$$M(x, y) \in D \Rightarrow ax + by + c = 0 \Rightarrow c = -ax - by$$

$$ax_A - by_A - c = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot AH \cdot \cos(\vec{n}, \overrightarrow{AH})$$

$$|ax_A - by_A - c| = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot AH$$

La distance AH s'exprime donc de la façon suivante :

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

On souhaite exprimer cette relation en fonction du gisement de la droite.

$$\text{La pente « a » d'une droite vaut : } a = \frac{dy}{dx}$$

Le gisement de la droite vaut :  $\gamma = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)$

$$\text{D'où : } a = \frac{1}{\tan \gamma}$$

Avec les coordonnées d'un point qui appartient à la droite D, on obtient une expression de b. Le PI de coordonnées  $(x_{PI}, y_{PI})$  appartient à la droite.

$$b = y_{PI} - \frac{1}{\tan \gamma} x_{PI}$$

On obtient donc une équation cartésienne de la droite D :

$$-\frac{1}{\tan \gamma} x + y - y_{PI} + \frac{1}{\tan \gamma} x_{PI} = 0$$

On a alors la distance AH qui vaut :

$$AH = \frac{\left| -\frac{1}{\tan \gamma} x_A + y_A - y_{PI} + \frac{1}{\tan \gamma} x_{PI} \right|}{\sqrt{\frac{1}{\tan^2 \gamma} + 1}}$$

Or on sait que  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$AH = \frac{\left| -\frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} x_A + y_A - y_{PI} + \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} x_{PI} \right|}{\sqrt{\frac{\cos^2 \gamma}{\sin^2 \gamma} + 1}}$$

On multiplie et on divise par  $\sin \gamma$  :

$$AH = \frac{|-(x_A - x_{PI}) \times \cos \gamma + (y_A - y_{PI}) \times \sin \gamma|}{\sin \gamma \times \sqrt{\frac{\cos^2 \gamma}{\sin^2 \gamma} + 1}}$$

$$AH = \frac{|-(x_A - x_{Pl}) \times \cos \gamma + (y_A - y_{Pl}) \times \sin \gamma|}{\sqrt{\frac{\sin^2 \gamma \times \cos^2 \gamma}{\sin^2 \gamma} + \sin^2 \gamma}}$$

De plus, on sait que  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , donc :

$$AH = \frac{|-(x_A - x_{Pl}) \times \cos \gamma + (y_A - y_{Pl}) \times \sin \gamma|}{\sqrt{1}}$$

Finalement, on a :

$$AH = |(y_A - y_{Pl}) \times \sin \gamma - (x_A - x_{Pl}) \times \cos \gamma|$$

## Annexe B : Rayons minimum et rayons souhaitables

### B.1. Rayons minimums

Le rayon minimal est défini en fonction de la vitesse de base en km/h, du frottement latéral  $f$  et du dévers maximal  $e$  qui est de 0.06 au Québec.

$$R_{\min} = \frac{V^2}{127(e_{\max} + f_{lateral\_max})}$$

Le tableau suivant (Tableau. B.1) recense les valeurs des rayons minimums pour les principales vitesses de base. (MTQ, 1995b)

Tableau. B.1 : Rayons minimums en milieu rural et urbain à haute vitesse

Vitesse	$f$	$0.06+f$	Rayon (m)
50	0.16	0.22	90
55	0.16	0.22	110
60	0.15	0.21	130
65	0.15	0.21	160
70	0.15	0.21	190
75	0.14	0.20	220
80	0.14	0.20	250
85	0.13	0.19	290
90	0.13	0.19	340
95	0.12	0.18	390
100	0.12	0.18	450
105	0.11	0.17	510
110	0.10	0.16	580

## B.2. Rayons souhaitables

Les valeurs des rayons souhaitables dépendent de plusieurs principes, soient l'esthétique, les temps de perception et d'anticipation, l'espace d'anticipation et le temps de parcours.

Le tableau suivant (Tableau. B.2) donne les valeurs des rayons souhaitables en fonction de la vitesse de base en km/h et de l'angle de déflexion de la courbe. (MTQ, 1995b)

**Tableau. B.2 : Rayons de courbure (en mètres) souhaitables dans le tracé en plan en milieu rural et urbain à haute vitesse**

Angle de déflexion	Vitesse de base en km/h						
	60	70	80	90	100	110	120
0"-00' - 0"-30'	Aucune courbe requise						
0"-30' - 10°	Utiliser une longueur minimale de courbure de 350m						
10° - 15°	1750	1750	1750	1750	1750	2000	2500
15° - 20°	1200	1200	1200	1500	1500	1750	2000
20° - 25°	1000	1000	1000	1200	1200	1500	1750
25° - 30°	800	850	900	1000	1000	1200	1500
30° - 35°	700	750	800	850	900	1000	1200
35° - 40°	650	675	700	750	800	900	1000
40° - 50°	550	575	600	650	700	750	900
50° - 60°	450	475	500	550	600	650	750
60° - 70°	350	400	450	475	500	580	
70° - 80°	300	325	350	400	450		
80° - 90°	250	275	300	340			

**Tableau. B.3 : Rayons de courbure (en mètres) souhaitables dans le tracé en plan en milieu rural et urbain à haute vitesse (suite)**

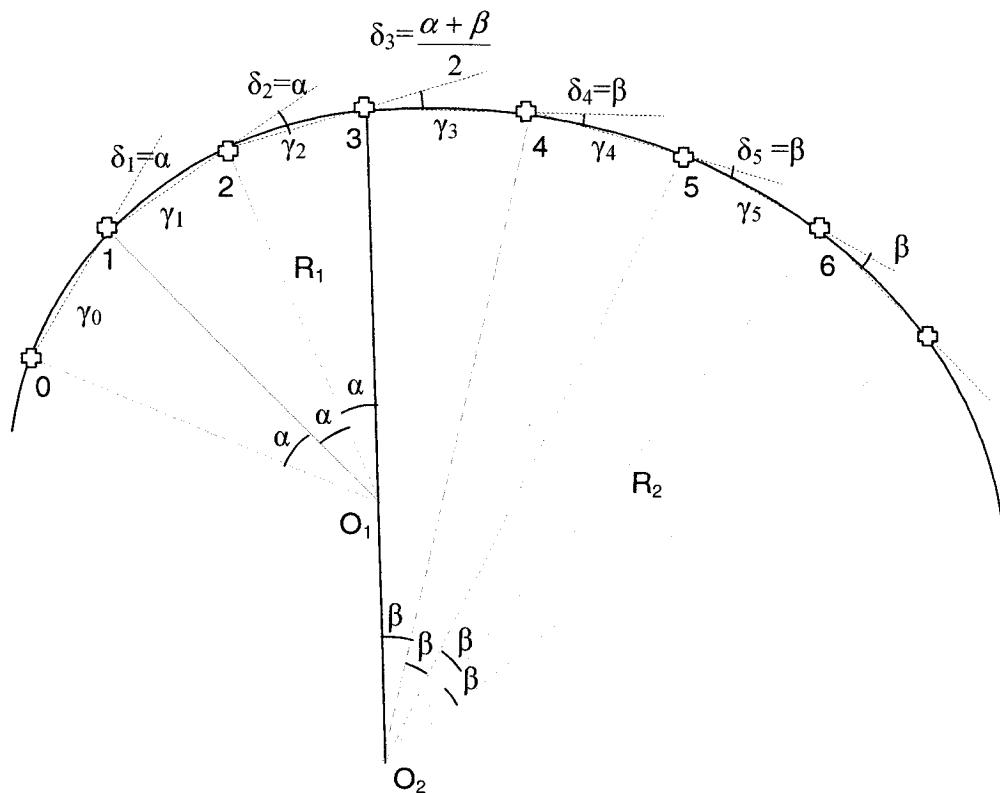
90° - 100°	220	235	Rmin = 250				
100° - 130°	200	Rmin = 190					
	Rmin = 130						

## Annexe C : Déviations séparant deux cercles consécutifs

Le passage d'un cercle à un autre entraîne une ou deux déviations dont les valeurs sont différentes de celles qui composent les deux courbes composées. Le but de cette partie est de démontrer que seules une ou deux déviations intermédiaires sont possibles, et non pas trois ou plus.

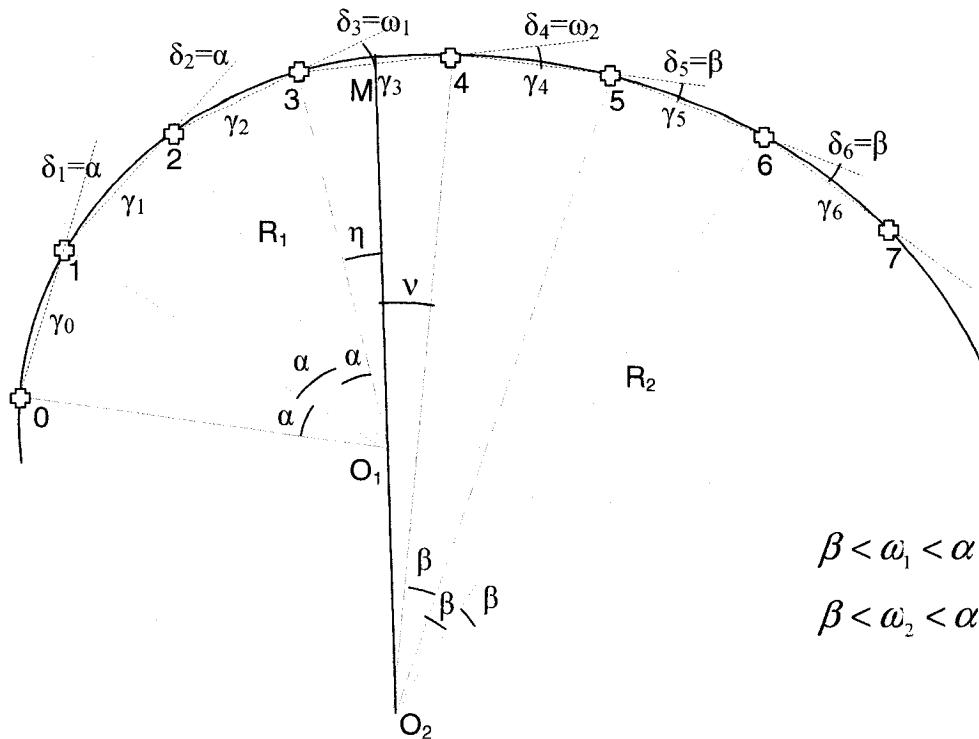
Dans le cas où un point est placé exactement entre les deux cercles, seule une déviation est différente. Si l'angle de déviation entre les points du premier cercle est  $\alpha$  et  $\beta$  pour le deuxième cercle (Figure. C.1), l'angle de déviation pour le point intermédiaire sera :  $\frac{\alpha + \beta}{2}$ .

$$\text{intervalle sera : } \frac{\alpha + \beta}{2}.$$



**Figure. C.1 : Valeurs des angles de déflexion dans le cas où un point est placé à l'intersection des deux cercles**

Dans le cas où il n'y a pas de point placé exactement entre les deux cercles, deux déviations ont des valeurs différentes (Figure. C.2).



**Figure. C.2 : Valeurs des angles de déflexion dans le cas où il n'y a pas de point placé à l'intersection des deux cercles**

En effet, appelons  $\alpha$  la déviation pour le premier cercle,  $\beta$  pour le deuxième cercle et  $\eta$  et  $\nu$  les déviations intermédiaires. Soit  $M$  le point d'intersection des deux cercles. La distance  $M4$  que nous nommons «  $a$  » va varier, «  $d$  » est la distance entre les points. Les déviations peuvent s'exprimer ainsi :

$$\alpha = \frac{180d}{\pi R_1}$$

$$\beta = \frac{180d}{\pi R_2}$$

$$\nu = \frac{180a}{\pi R_2}$$

$$\eta = \frac{180(d-a)}{\pi R_1}$$

Nous allons faire varier « a » de 0 à « d » (Tableau. C.1). Lorsque a tend vers 0,  $\nu$  tend vers 0 et  $\eta$  tend vers  $\alpha$  et lorsque « a » tend vers « d »,  $\nu$  tend vers  $\beta$  et  $\eta$  tend vers 0. Ainsi, lorsque « a » tend vers 0 ou « d », une des déviations augmente alors que l'autre diminue, ce qui entraîne qu'il n'existe jamais plus de deux déviations dont les valeurs sont différentes de  $\alpha$  ou  $\beta$ .

**Tableau. C.1 : Variation de « a » de 0 à « d »**

a	0	$d/2$	d
$\nu$	0	$\beta/2$	$\beta$
$\eta$	$\alpha$	$\alpha/2$	0

Prenons un exemple :  $R_1=200$ ,  $R_2=400$ ,  $x_{01}=1000$ ,  $y_{01}=1000$ ,  $x_{02}=800$ ,  $y_{02}=1000$ ,  $d=20$

Faisons varier « a » de 0 à « d » (Tableau. C.2) :

Tableau. C.2 : Variation de « a » de 0 à 20

a	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_4$	$\delta_5$	$\delta_6$
0	2.86479	2.86479	2.86479	4.29718	5.72958	5.72958
1	2.86479	2.86479	2.86837	4.43684	5.72958	5.72958
2	2.86479	2.86479	2.87911	4.56934	5.72958	5.72958
3	2.86479	2.86479	2.89701	4.69468	5.72958	5.72958
4	2.86479	2.86479	2.92207	4.81286	5.72958	5.72958
5	2.86479	2.86479	2.95430	4.92387	5.72958	5.72958
6	2.86479	2.86479	2.99368	5.02773	5.72958	5.72958
7	2.86479	2.86479	3.04023	5.12442	5.72958	5.72958
8	2.86479	2.86479	3.09394	5.21395	5.72958	5.72958
9	2.86479	2.86479	3.15481	5.29632	5.72958	5.72958
10	2.86479	2.86479	3.22285	5.37152	5.72958	5.72958
11	2.86479	2.86479	3.29804	5.43956	5.72958	5.72958
12	2.86479	2.86479	3.38041	5.50044	5.72958	5.72958
13	2.86479	2.86479	3.46993	5.55415	5.72958	5.72958
14	2.86479	2.86479	3.56662	5.60070	5.72958	5.72958
15	2.86479	2.86479	3.67048	5.64009	5.72958	5.72958
16	2.86479	2.86479	3.78150	5.67231	5.72958	5.72958
17	2.86479	2.86479	3.89968	5.69737	5.72958	5.72958
18	2.86479	2.86479	4.02502	5.71526	5.72958	5.72958
19	2.86479	2.86479	4.15752	5.72600	5.72958	5.72958
20	2.86479	2.86479	2.86479	2.86479	4.29718	5.72958

En faisant varier « a », seules deux déviations prennent des valeurs intermédiaires.

En conclusion, il n'existe pas de cas où il peut y avoir trois déviations intermédiaires, seules une ou deux déviations sont possibles.

## Annexe D : Calcul des cercles théoriques

### D.1. Cercles isolés

La méthode de calcul des cercles théoriques isolés est la suivante (Figure 4.18) :

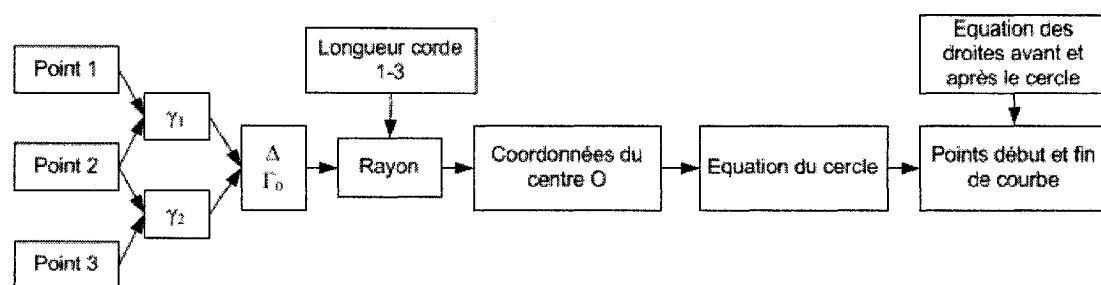


Figure. D.1: Organigramme de calcul des éléments des cercles théoriques

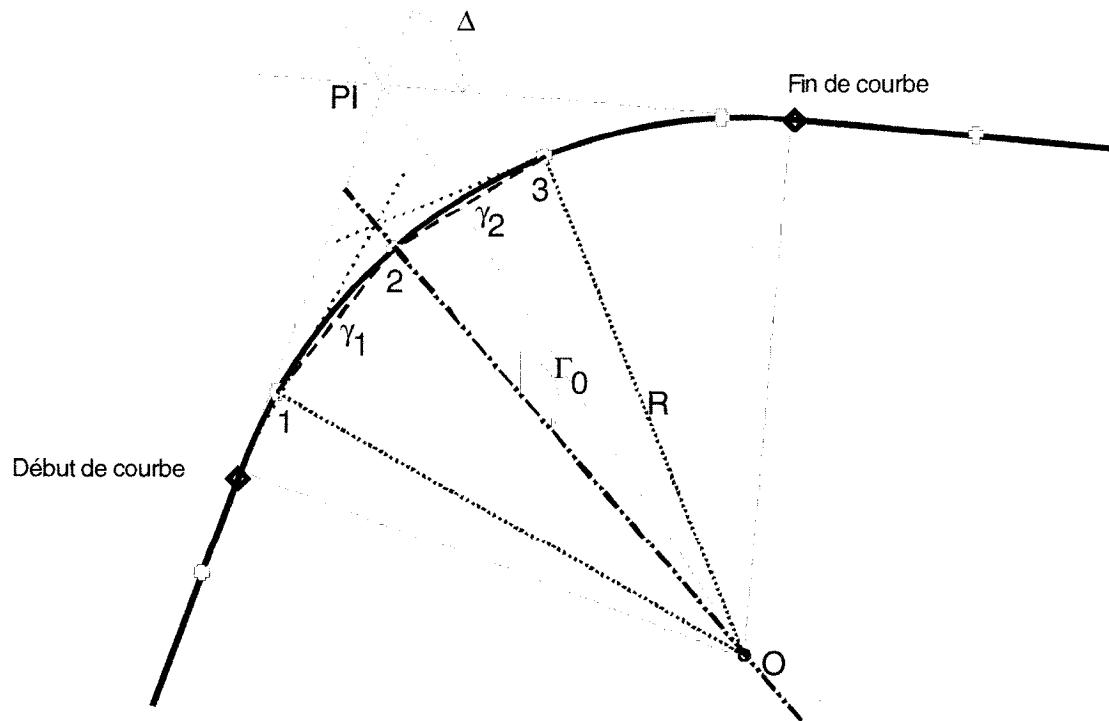


Figure. D.2 : Éléments de calcul des cercles théoriques

- ❖ Trois points du cercle sont choisis (Figure. D.2), les déflexions entre ces points sont alors calculées.
- ❖ Le gisement  $\Gamma_0$  qui représente la bissectrice de l'angle formé par les trois points est calculé. Il donne la direction du centre du cercle. La longueur de la corde entre les points 1 et 3 de chaque cercle et les angles de déviation permettent de calculer la valeur du rayon  $R$ . Le rayon se calcule selon la

$$\text{formule : } R = \frac{L_{\text{corde}}}{2 \times \sin \Delta}$$

- ❖ Ensuite, connaissant la valeur du gisement  $\Gamma_0$  et du rayon, les coordonnées du centre du cercle sont trouvées.

$$x_0 = x_2 + |R| \times \sin \Gamma_0$$

$$y_0 = y_2 + |R| \times \cos \Gamma_0$$

- ❖ Désormais, l'équation du cercle est connue et l'intersection du cercle avec les droites avant et après le cercle permet de connaître les points de début et fin de la courbe.

$$\left\{ \begin{array}{l} y = ax + b \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \end{array} \right.$$

## D.2. Cercles composés

La méthode de calcul pour les cercles composés théorique est la suivante (Figure. D.3) :

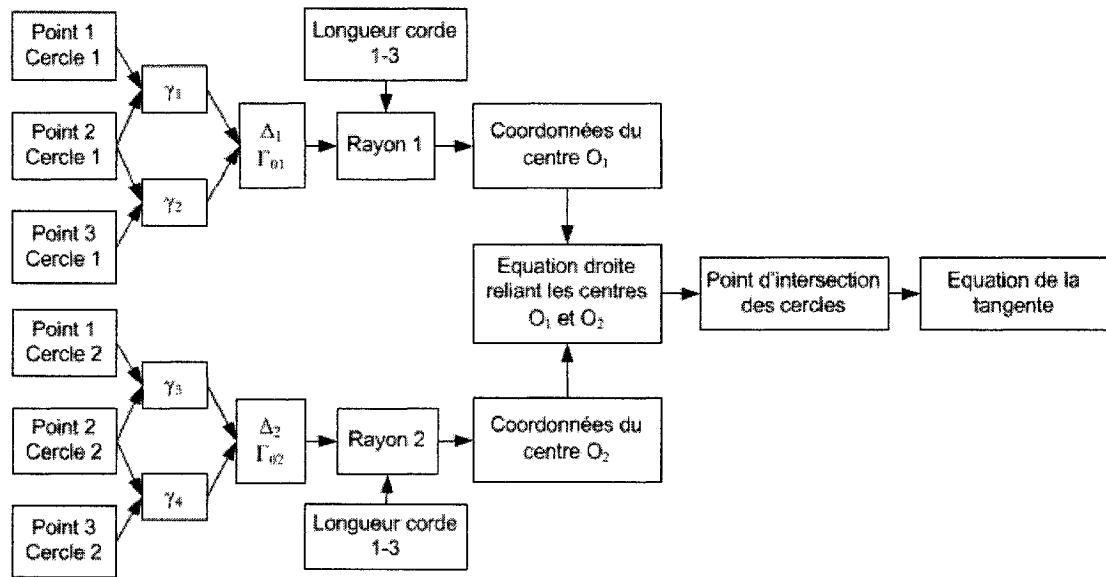
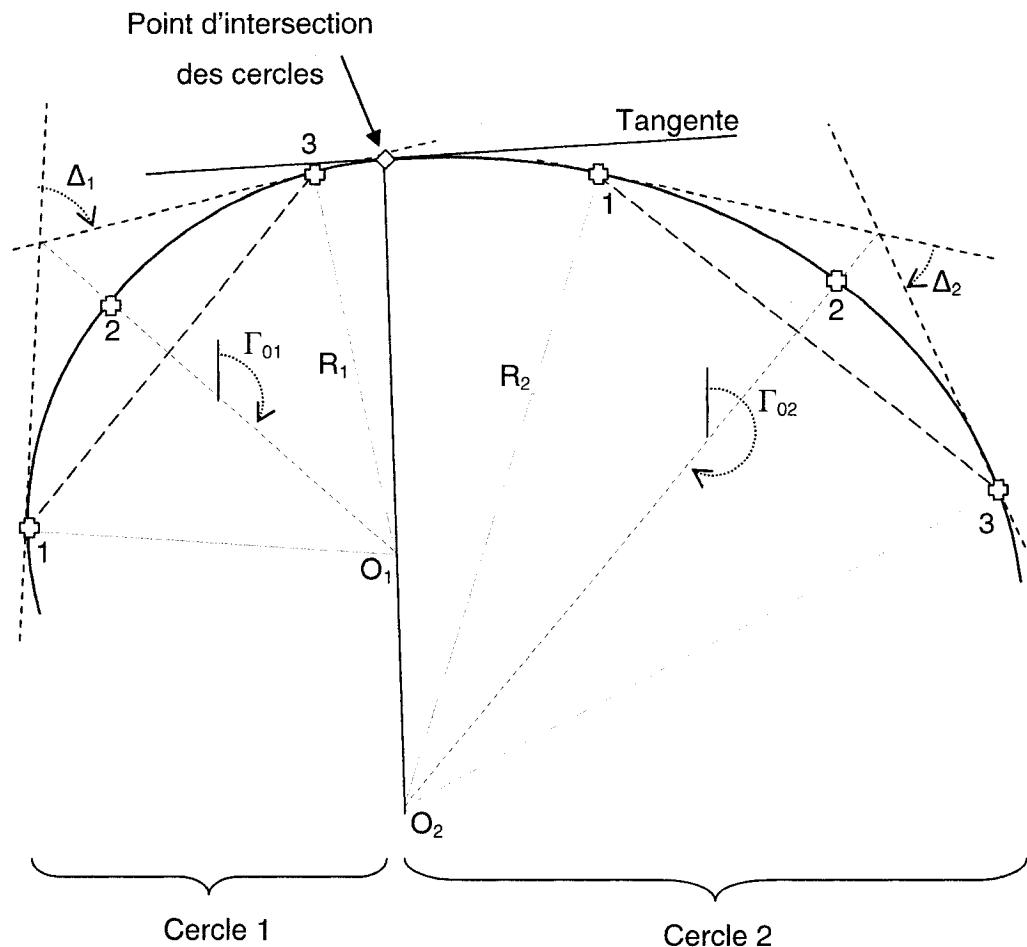


Figure. D.3 : Organigramme de calcul des caractéristiques des cercles composés



- ❖ Point GPS
- ❖ Point d'intersection des cercles

**Figure. D.4 : Illustration de la méthode pour calculer les éléments des cercles composés**

- ❖ Trois points situés sur les deux cercles que l'on étudie sont sélectionnés (Figure. D.4).
- ❖ Les gisements des droites qui relient les points de chaque cercle sont calculés.

- ❖ Cela permet d'obtenir la déflexion entre les gisements calculés ainsi que le gisement  $\Gamma_0$  qui représente la bissectrice entre les droites qui relient les points de chaque cercle.
- ❖ La longueur de la corde entre les points 1 et 3 de chaque cercle et les angles

$$\text{de déviation permettent de calculer la valeur des rayons : } R = \frac{L_{\text{corde}}}{2 \times \sin \delta}$$

- ❖ Ensuite, connaissant des points qui appartiennent aux cercles ainsi que les gisements  $\Gamma_0$  et les rayons, les coordonnées des centres des cercles sont obtenues.

$$x_0 = x_2 + |R| \times \sin \Gamma_0$$

$$y_0 = y_2 + |R| \times \cos \Gamma_0$$

- ❖ La droite qui relie les centres des deux cercles coupe les cercles au point d'intersection des deux cercles, ce qui permet de connaître le point de fin du premier cercle et de début du deuxième.

$$\begin{cases} y = ax + b \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \end{cases}$$

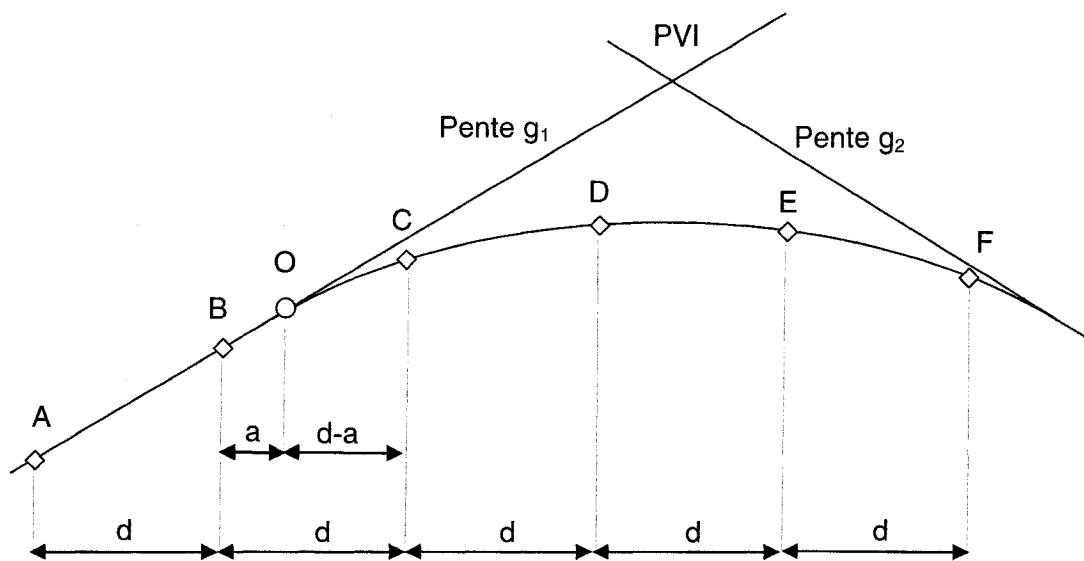
- ❖ Finalement, la tangente aux cercles est perpendiculaire à la droite reliant les centres des deux cercles et passe par le point d'intersection des deux cercles.

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y_2 = \frac{-1}{a}x + y_0 + \frac{1}{a}x_0 \end{cases}$$

## Annexe E : Calcul des paraboles théoriques

### E.1. Calcul des paraboles simples

On considère des points espacés de la distance  $d$ . Il est rare de trouver le cas où un point est placé exactement au début et à la fin de la parabole. C'est pourquoi il faut commencer par trouver la distance «  $a$  » qui sépare le dernier point avant la parabole et le premier point théorique de la parabole (Figure. E.1).



**Figure. E.1 : Distance entre le premier point de la parabole et le dernier point de la droite avant la parabole**

La pente entre les points B et C s'exprime de la façon suivante :

$$\delta_{BC} = \frac{1}{d} \left( \frac{g_2 - g_1}{2 \times L} (d - a)^2 + g_1 \times d \right)$$

La pente entre les points C et D s'exprime de la façon suivante :

$$\delta_{CD} = \frac{1}{d} \left( \frac{g_2 - g_1}{2 \times L} (3d^2 - 2d \times a) + g_1 \times d \right)$$

Le changement de pente entre les points B, C et D peut alors s'exprimer comme suit :

$$\beta = \delta_{CD} - \delta_{BC}$$

$$\beta = \frac{1}{d} \times \frac{g_2 - g_1}{2 \times L} (2d^2 - a^2)$$

D'où :

$$a^2 = 2d^2 - \frac{2L}{g_2 - g_1} \times \beta \times d$$

$$\text{Or } k_1 = \frac{L}{g_2 - g_1}$$

$$\text{Donc : } a^2 = 2d^2 - 2k_1 \times \beta \times d$$

De manière symétrique on peut calculer « b » la distance entre le chainage du point de fin de la parabole et le chainage du premier point de la droite suivant la parabole.

Ainsi, on peut calculer la longueur de la parabole :

$$l = (n_{\text{point}} + 1) \times l_{\text{pas}} - a - b$$

Où  $n_{\text{point}}$  est le nombre de points sur la parabole.

## E.2. Cas des paraboles doubles

La méthode de calcul des paraboles doubles est la suivante (Figure. E.2) :

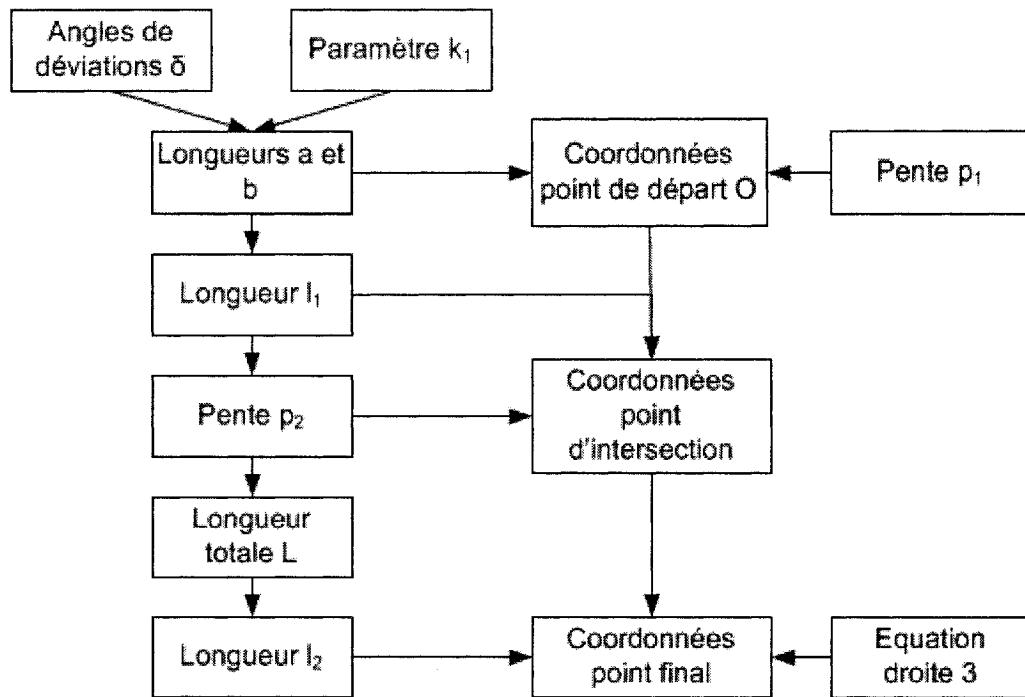
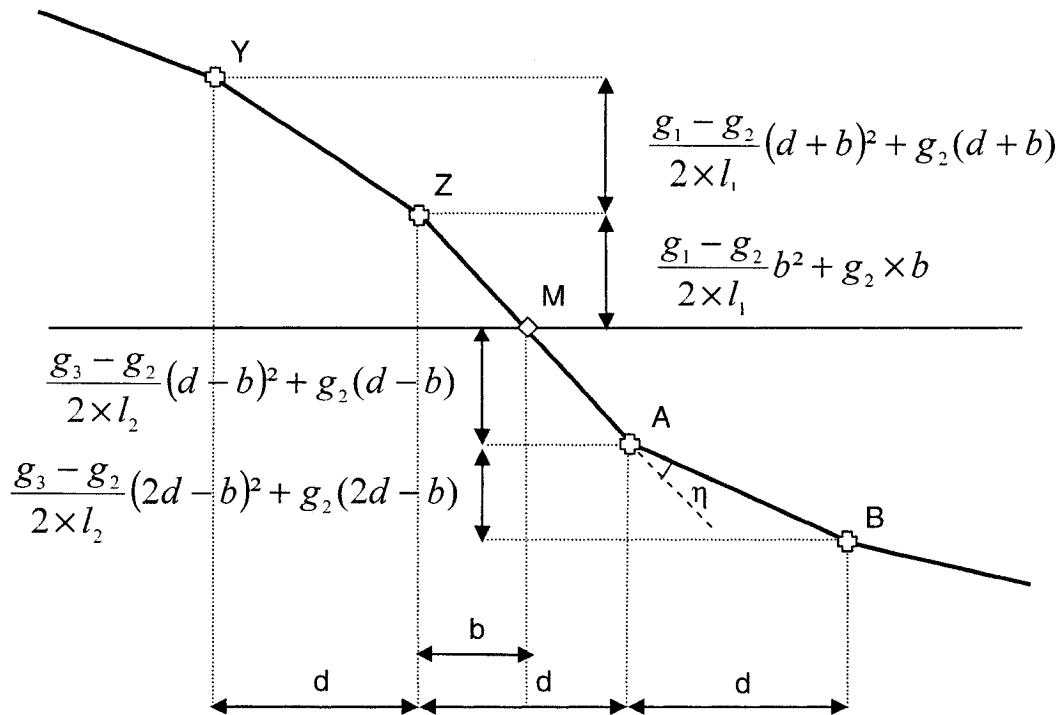


Figure. E.2 : Organigramme de calcul des paraboles doubles

### E.2.1. Calcul de la longueur de la première parabole

On connaît les pentes  $g_1$  et  $p_3$  des droites avant la première parabole et après la deuxième parabole. On cherche à calculer les longueurs des paraboles  $l_1$  et  $l_2$ .

On peut calculer la distance «  $a$  » comme dans le cas des paraboles simples. On cherche ensuite à calculer la distance entre le dernier point de la parabole et le point d'intersection entre les deux paraboles «  $b$  » (Figure. E.3).



⊕ Points GPS

◇ Intersection des paraboles

Figure. E.3 : Illustration du calcul de la longueur « b »

Pente entre les points A et B :

$$\frac{1}{l_{pas}} \left( \frac{g_3 - g_2}{2l_2} (2l_{pas} - b)^2 + g_2 \times (2l_{pas} - b) - \frac{g_3 - g_2}{2l_2} (l_{pas} - b)^2 - g_2 \times (l_{pas} - b) \right)$$

Pente entre les points Z et A :

$$\frac{1}{l_{pas}} \left( \frac{g_1 - g_2}{2l_1} \times b^2 + \frac{g_3 - g_2}{2l_2} (l_{pas} - b)^2 - g_2 \times l_{pas} \right)$$

On introduit les constantes  $k_1$  et  $k_2$  définies comme suit :

$$k_1 = \frac{g_2 - g_1}{l_1} \text{ et } k_2 = \frac{g_3 - g_2}{l_2}$$

Le changement de pente  $\delta$  entre les droites AB et ZA s'exprime comme la différence des deux pentes.

$$\eta = \frac{1}{l_{pas}} \left( \frac{1}{2k_2} (2l_{pas}^2 - b^2) + \frac{1}{2k_1} \times b^2 \right)$$

D'où :

$$b = \sqrt{\frac{2\eta \times l_{pas} - \frac{2l_{pas}}{k_2}}{\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}}}$$

On peut désormais calculer la longueur  $l_1$  de la première parabole :

$$l_1 = n_{point} \times l_{pas} - a + b$$

Où  $n_{point}$  est le nombre de points sur la parabole.

### E.2.2. Calcul de la pente g2

Pour calculer la longueur de la deuxième parabole, il nous faut d'abord calculer la pente  $g2$  que l'on trouve grâce à la formule :

$$k_1 = \frac{g_2 - g_1}{l_1}$$

Ainsi,  $g_2 = k_1 \times l_1 + g_1$ .

### E.2.3. Calcul de la longueur de la deuxième parabole

On peut démontrer la relation suivante :

$$g_2 = \frac{L + k_1 \times g_1 - k_2 \times g_2}{k_1 - k_2} \text{ avec } L = l_1 + l_2, \text{ la longueur totale de la parabole.}$$

$$\text{Ainsi } L = (k_1 - k_2) * g_2 - k_1 \times g_1 + k_2 \times g_2$$

On peut alors calculer  $I_2$  comme étant la différence de la longueur totale des deux paraboles et de la longueur de la première parabole :

$$l_2 = L - l_1$$

## E.2.4. Calcul du point de départ de la première parabole

De la même façon que pour les paraboles simples, on peut calculer l'abscisse du premier point de la parabole :

$x_{deb} = x_n + a$  avec  $x_n$  l'abscisse du dernier point de la droite précédent la parabole.

On calcule ensuite l'ordonnée du point de départ grâce à l'équation de la droite précédant la parabole puisque le point de départ de la parabole appartient à la parabole et à la droite précédant la parabole.

### E.2.5. Calcul des caractéristiques de la tangente

On connaît les caractéristiques de la droite précédant la première parabole ainsi que la pente de la droite entre les deux paraboles. On commence par calculer le point d'intersection entre la droite précédant les paraboles et la droite entre les deux paraboles.

On sait que l'abscisse du premier point de la parabole et celle du point d'intersection des deux droites sont reliées par la relation (Figure. E.4) :

$$x_p = x_0 + \frac{L}{2}$$

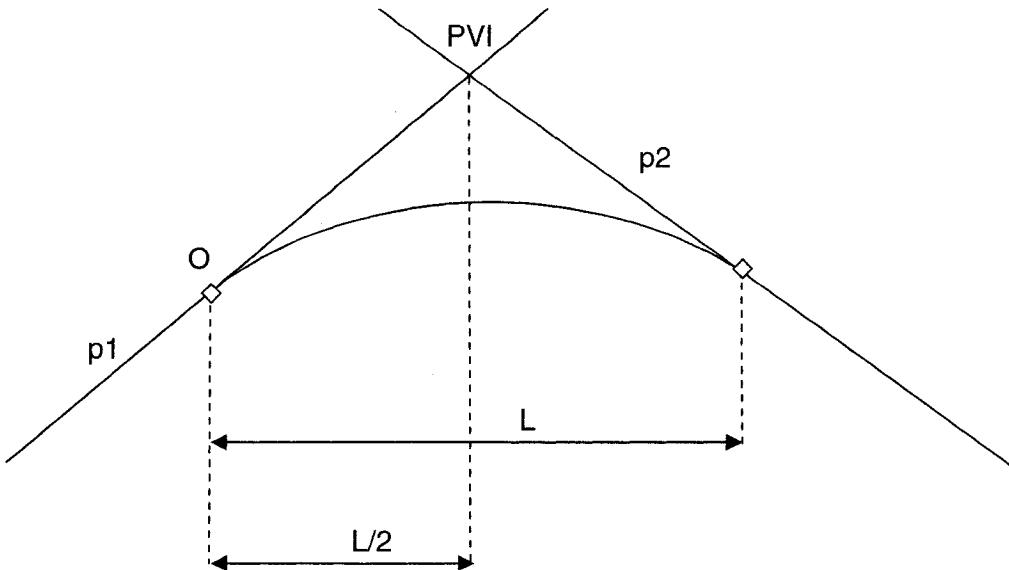


Figure. E.4 : Position du PVI par rapport à la longueur de la courbe

On sait ensuite que le point P appartient à la première droite dont on connaît les caractéristiques :

$$y_p = y_0 + p_1 \times \frac{L}{2}$$

On obtient donc les coordonnées du point d'intersection des deux droites.

Ensuite, puisque l'on dispose de la pente de la droite entre les deux paraboles et les coordonnées d'un point qui appartient à cette droite, on trouve l'équation de la droite entre les deux paraboles.

On calcule ensuite de la même manière les coordonnées du point d'intersection de la droite entre les deux paraboles et la droite suivant la deuxième parabole puisqu'on sait que :

$$x_{p2} = x_0 + l_1 + \frac{l_2}{2}$$

L'ordonnée de ce point se calcule grâce à l'équation de la troisième droite.

**E.2.6. Calcul du dernier point de la première parabole (point de départ de la deuxième parabole)**

On calcule l'abscisse du dernier point de la parabole à partir la longueur de la parabole  $l_1$  et de l'abscisse du premier point de la parabole  $x_{deb}$  :

$$x_{fin} = x_{deb} + l_1$$

L'ordonnée de ce point est ensuite calculée avec l'équation de la droite entre les deux paraboles.

Ce point est également le point de départ de la deuxième parabole.

On calcule de la même façon les coordonnées du dernier point de la deuxième parabole puisqu'on dispose de la longueur  $l_2$  de la deuxième parabole.

## Annexe F : Différences de valeur de déflexion entre la longueur sur la courbe et sur la corde

Dans le cadre de l'allocation des points à des cercles, la propriété des cercles utilisée est que pour une longueur de pas constante sur le cercle, la valeur de l'angle de déviation entre les deux points est constante pour un même cercle. A fortiori, si la longueur sur la corde est constante, les valeurs des angles de déviation seront les mêmes pour un même cercle. Cette propriété est à la base de la méthode d'allocation. Néanmoins, dans le cas de cercles réels, les longueurs entre les points ne sont pas constantes. Les valeurs des angles de déviation ne sont donc pas les mêmes pour un même cercle, c'est pourquoi ces valeurs sont divisées par la longueur entre les points pour uniformiser les valeurs. Or, les longueurs entre les points dans notre cas sont calculées comme une distance euclidienne entre deux points, qui correspond à la longueur de la corde, et non pas une longueur le long de la courbe (Figure. F.1).

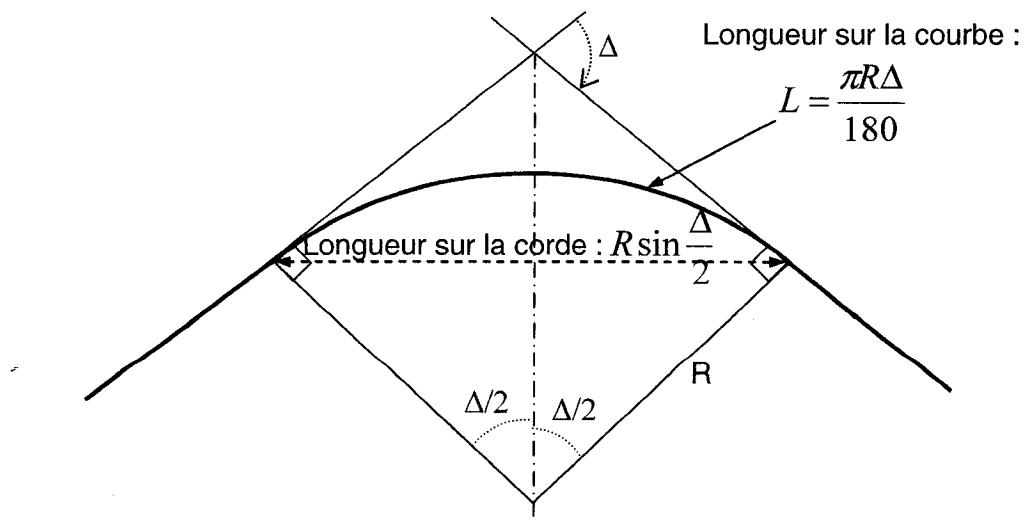


Figure. F.1 : Différence entre la longueur sur la corde et la longueur sur la courbe

Il n'est donc pas rigoureux de diviser les déviations par les longueurs entre les points. Les déviations devraient être divisées par les longueurs le long de la courbe. Une analyse de sensibilité est alors conduite pour étudier l'impact de cette inexactitude en fonction des valeurs moyennes de déviations et de rayons sur les courbes. Les déviations sont calculées pour des longueurs entre les points de 10, 20 et 30 mètres. Ainsi, le delta min correspond à la déviation pour une longueur entre les points de 10m, le delta moyen à une longueur de 20m et le delta max à une longueur de 30m et ce, pour des rayons de 100 à 1000m :

$$\text{delta} = 2 \times \arcsin\left(\frac{\ell}{R}\right)$$

Les longueurs sur la courbe et sur la corde sont alors calculées. Les résultats sont présentés sur le tableau suivant (Tableau. F.1).

**Tableau. F.1 : Différences entre les longueurs sur la courbe et sur la corde pour différents rayons et déflexions**

Rayon		Déflexion	Lcourbe	Lcorde	Différence
100	delta min	0.200	20.033	19.900	0.67%
	delta moyen	0.403	40.272	39.192	2.68%
	delta max	0.609	60.939	57.236	6.08%
200	delta min	0.100	20.008	19.975	0.17%
	delta moyen	0.200	40.067	39.799	0.67%
	delta max	0.301	60.227	59.321	1.50%
300	delta min	0.067	20.004	19.989	0.07%
	delta moyen	0.133	40.030	39.911	0.30%
	delta max	0.200	60.100	59.699	0.67%
400	delta min	0.050	20.002	19.994	0.04%
	delta moyen	0.100	40.017	39.950	0.17%
	delta max	0.150	60.056	59.831	0.38%
500	delta min	0.040	20.001	19.996	0.03%
	delta moyen	0.080	40.011	39.968	0.11%
	delta max	0.120	60.036	59.892	0.24%

**Tableau. F.2 : Différences entre les longueurs sur la courbe et sur la corde pour différents rayons et déflexions (suite)**

600	delta min	0.033	20.001	19.997	0.02%
	delta moyen	0.067	40.007	39.978	0.07%
	delta max	0.100	60.025	59.925	0.17%
700	delta min	0.029	20.001	19.998	0.01%
	delta moyen	0.057	40.005	39.984	0.05%
	delta max	0.086	60.018	59.945	0.12%
800	delta min	0.025	20.001	19.998	0.01%
	delta moyen	0.050	40.004	39.987	0.04%
	delta max	0.075	60.014	59.958	0.09%
900	delta min	0.022	20.000	19.999	0.01%
	delta moyen	0.044	40.003	39.990	0.03%
	delta max	0.067	60.011	59.967	0.07%
1000	delta min	0.020	20.000	19.999	0.01%
	delta moyen	0.040	40.003	39.992	0.03%
	delta max	0.060	60.009	59.973	0.06%

Plus le rayon est grand, plus l'importance de remplacer la longueur le long de la courbe par la longueur de la corde diminue. Seul pour un rayon de 100m, la différence pour un pas de 20m sur la courbe est supérieur à 1%, soit 2.7%. Néanmoins, cette approximation est acceptée et utilisée pour l'allocation des points dans le cas de cercles réels.