

Titre: Étude de la performance de machines à mesurer tridimensionnelles
Title: en utilisant un calibre étagé

Auteur: Abdelhak Nafi
Author:

Date: 2007

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Nafi, A. (2007). Étude de la performance de machines à mesurer tridimensionnelles en utilisant un calibre étagé [Master's thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/8016/>
Citation:

Document en libre accès dans PolyPublie Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/8016/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: René Mayer
Advisors:

Programme: Unspecified
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉTUDE DE LA PERFORMANCE DE MACHINES À MESURER
TRIDIMENSIONNELLES EN UTILISANT UN CALIBRE ÉTAGÉ

ABDELHAK NAFI
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)
AOÛT 2007



Library and
Archives Canada

Published Heritage
Branch

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Direction du
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file *Votre référence*
ISBN: 978-0-494-35691-3

Our file *Notre référence*
ISBN: 978-0-494-35691-3

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

**
Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

ÉTUDE DE LA PERFORMANCE DE MACHINES À MESURER
TRIDIMENSIONNELLES EN UTILISANT UN CALIBRE ÉTAGÉ

présenté par : NAFI Abdelhak

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. BALAZINSKI Marek, Ph.D., président

M. MAYER René, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. CLOUTIER Guy, Doct., membre

REMERCIEMENTS

Le travail de recherche que décrit ce mémoire a été effectué dans le cadre d'un projet industriel en partenariat avec Pratt & Whitney Canada, sous la direction du Professeur René Mayer du département Génie Mécanique de l'École Polytechnique de Montréal. Je tiens à le remercier pour m'avoir accueilli à son Laboratoire et de m'avoir assuré, avec rigueur et disponibilité, l'encadrement de mes travaux. Ses conseils ses encouragements constants et sa gentillesse ont été très appréciables durant la durée du travail. Je tiens à le remercier aussi pour la confiance qu'il m'a accordée.

Ce travail n'aurait jamais vu le jour sans Monsieur Mario Blais de la société Pratt & Whitney Canada, je tiens à le remercier pour son support technique et ses encouragements ainsi pour le temps qu'il a consacré au suivi de ce travail.

Je remercie Monsieur Félix-Étienne Delorme de la société Pratt & Whitney Canada pour le temps qu'il a consacré pour le suivi de ce travail.

Je remercie Monsieur Marek Balazinski - Professeur à L'École Polytechnique de Montréal - pour m'avoir, fait l'honneur de participer au jury d'examen en tant que président.

J'exprime également toute ma gratitude à Monsieur Guy Cloutier – Professeur à L'École Polytechnique de Montréal – en tant que membre du jury.

Je tiens à remercier également Monsieur François Ménard pour la formation dispensée et pour son aide à manipuler la machine à mesurer tridimensionnelle.

Enfin, j'aimerais associer à ce moment particulier mes parents, ma femme, mon fils Amine, mes frères et sœurs et tous mes amis.

RÉSUMÉ

Les machines à mesurer tridimensionnelles (MMT) jouent un rôle central dans la vérification dimensionnelle et géométrique des pièces mécaniques. Pour s'assurer du bon fonctionnement de la MMT, il faut vérifier d'une façon périodique sa précision. La machine est affectée par 21 écarts géométriques dont 18 écarts articulaires et 3 écarts de perpendicularité qui peuvent se dégrader avec le temps. Les écarts liés à l'effet d'échelle et les écarts de perpendicularité entre les axes de la machine sont particulièrement à risque. Les écarts volumétriques résultats des 21 écarts géométriques sont principalement contrôlés à l'aide des cales étalons de différentes tailles qu'on mesure dans le volume de la machine selon des normes internationales. Pratt & Whitney Canada (notre partenaire industriel) utilise son propre protocole de vérification périodique de la MMT en utilisant un calibre étagé que l'on mesure suivant 6 positions spécifiques. Dans ce projet, deux topologies de machines sont modélisées, soit les topologies WFYXZT et WFXYZT. Le modèle géométrique complet développé considère chaque écart cinématique comme étant un polynôme d'ordre 3. La caractérisation de la machine est basée sur le protocole de mesure de Pratt & Whitney Canada duquel sont identifiés les 3 écarts de perpendicularité et les 3 gains d'échelle. Ces écarts ont été utilisés pour déterminer la direction de pire erreur dans le volume de la machine et aussi pour évaluer la plus grande erreur dans un volume restreint. Les 6 écarts identifiés donnent une bonne estimation de la direction de pire erreur, tel que validé par des mesures expérimentales et par la simulation par génération aléatoire de machines. La détermination de la septième direction donnera, pour le protocole de mesure selon P&WC, une extension vers la norme ISO tout en mesurant dans les directions optimales dans le volume de mesure de la machine.

ABSTRACT

The coordinate measuring machine (CMM) is very important for the dimensional and geometric control of the parts. To ensure of the correct operation of the CMM, it is necessary to check periodically its precision. The machine is affected by 21 geometric variations including 18 joint errors and three squarenesses which can degrade over time. The variations related to scale errors and squarenesses between axes are particularly at risk. The volumetric variations resulting from the 21 geometrical variations are mainly controlled by using block gauges of various sizes measured in the volume of the machine according to international standards. Pratt & Whitney Canada (our industrial partner) uses its own protocol for routine checks of the CMM by using a step gauge measured in six specific locations. In this project, two topologies of machines are modelled, WFYXZT and WFXYZT, and polynomials of order three are used for modelling each joint error variation. The characterization of the machine is based on the protocol of measurement of Pratt & Whitney Canada from which squarenesses and the three scale errors are identified. The identified parameters are then used to determine the direction of worse error in the machine volume and also to evaluate the worst error in a restricted volume. The six identified variations give a good estimate of the direction of worse error, as validated by experimental measurements and simulations by randomly generated machines. The determination of the seventh direction, the worse direction, allows extending the protocol of measurement according to P&WC to the ISO standard.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS.....	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vi
TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES TABLEAUX.....	x
LISTE DES FIGURES	xi
LISTE DES SYMBOLES ET ABRÉVIATIONS.....	xiii
LISTE DES ANNEXES	xv
INTRODUCTION	1
1 Étude Bibliographique.....	4
1.1 Machines à mesurer tridimensionnelles	4
1.1.1 Historique de la machine à mesurer tridimensionnelle	4
1.1.2 Principe de la machine à mesurer tridimensionnelle.....	4
1.1.3 Différentes structures des machines à mesurer tridimensionnelles.....	6
1.2 Erreurs de mesures sur une machine à mesurer tridimensionnelle	7
1.3 Vérification des machines à mesurer tridimensionnelles	8
1.3.1 Détermination des écarts de perpendicularité	9
1.4 Vérifications périodiques des machines à mesurer tridimensionnelles.....	10
1.4.1 Normes.....	11
1.4.2 Comparaison entre le protocole de mesures selon P&WC et selon la norme ISO 10360.....	13
1.5 La machine à mesurer tridimensionnelle et son environnement.....	18
2 Méthode utilisée par P&WC	19
2.1 Matériel utilisé	19
2.2 Procédures de mesures	20
2.3 Erreurs de mesures	21
2.3.1 Traitement des données	22
3 Modélisation des Écarts.....	24
3.1 Machine de topologie WFYXZT	24
3.1.1 Schéma cinématique d'une MMT de topologie WFYXZT	24

3.1.2	Position nominale de la touche du stylet dans le système de coordonnées de la MMT de topologie WFYXZT	25
3.1.3	Position nominale de la pièce à mesurer dans le système de coordonnées de la MMT de topologie WFYXZT	27
3.1.4	Modélisation des petits écarts	30
3.1.5	Position vraie de la touche du stylet dans le cas d'une machine de topologie WFYXZT	35
3.1.6	Erreur de position de la touche du stylet.....	40
3.1.7	Erreurs de mesures sur le calibre étagé.....	42
3.1.8	Expression générale des erreurs mesurées sur un calibre étagé	44
3.1.9	Ecarts de perpendicularité et gains d'échelles	50
3.2	Machine de topologie WFXYZT	54
3.2.1	Schéma cinématique d'une MMT de topologie WFXYZT	54
3.2.2	Position nominale de la touche du stylet dans le système de coordonnées de la MMT de topologie WFXYZT	54
3.2.3	Position vraie de la touche du stylet T dans le système de coordonnées d'une MMT de topologie WFXYZT	56
3.2.4	Erreur de position de la touche du stylet.....	58
3.2.5	Erreurs de mesures sur un calibre étagé positionné dans le volume d'une MMT de topologie WFXYZT	61
3.2.6	Ecarts de perpendicularité et gains d'échelles	64
3.3	Direction de pires erreurs	67
3.3.1	Erreur de mesures du calibre dans une direction quelconque.....	67
3.3.2	Procédure de calcul de la direction de pires erreurs	71
3.4	Erreurs de mesures dans un volume restreint	74
3.4.1	Procédure de calcul de la plus grande erreur dans le volume restreint	75
3.4.2	Procédure de détermination de la position du volume restreint ayant la plus grande erreur estimée.....	77
4	Présentation du logiciel et résultats de calcul	80
4.1.1	Introduction	80
4.1.2	Organigramme du programme	80
4.1.3	Mesures expérimentales suivant les six configurations prédefinies....	82

4.1.4 Résultats de calcul par le logiciel	85
4.1.5 Résultat de mesure dans la direction de pires erreurs et validation expérimentale.....	87
4.1.6 Mesures expérimentales dans quelques directions dans le volume inspecté de la machine.....	88
4.1.7 Présentation du simulateur de mesures.....	91
4.1.8 Résultats de simulation	91
5 Conclusions et perspectives	99
RÉFÉRENCES.....	102
ANNEXES	105

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1-1 : Comparaison entre la norme ISO10360 et le Protocole de mesure selon P&WC.....	17
Tableau 4-1 : Machine aléatoire générée par le simulateur de mesure -1-	92
Tableau 4-2 : Résultats de mesure sur la machine virtuelle créée	94
Tableau 4-3 : Machine aléatoire générée par le simulateur de mesure - 2 -	97
Tableau 4-4 : Tableau récapitulatif des résultats.....	98

LISTE DES FIGURES

Figure 1-1 : Machine à mesurer tridimensionnelle.....	5
Figure 1-2 : Système de palpation articulé.....	5
Figure 1-3 : Différentes structures de MMTs	7
Figure 1-4 : Exemple d'erreur de mesure	8
Figure 1-5 : Système de coordonnées non perpendiculaire	10
Figure 1-6 : Estimation de l'erreur de perpendicularité.....	10
Figure 2-1 : Schéma simplifié d'un calibre étagé.....	19
Figure 2-2 : Six positions de mesure selon le protocole de mesure P&WC.....	20
Figure 2-3 : Mesure unidirectionnelle du calibre étagé	21
Figure 3-1 : Schéma cinématique de la MMT de topologie WFYXZT	24
Figure 3-2 : Position de la touche du stylet par rapport au repère fondation {F} pour le cas d'une machine de topologie WFYXZT.....	25
Figure 3-3 : Orientation du système de palpation (Zoom de la zone H de la figure 3-2)	
	26
Figure 3-4 : Position de la pièce à mesurer dans le système de coordonnées de la MMT	27
Figure 3-5 : Ecarts cinématiques liés aux articulations pour la MMT de topologie WFYXZT	30
Figure 3-6 : Ecarts de mouvement de l'articulation X	31
Figure 3-7 : Propagation des écarts cinématiques dans un corps rigide	32
Figure 3-8 : Effet de bras de levier.....	33
Figure 3-9 : Propagation des écarts dans un corps rigide	34
Figure 3-10 : Position vraie de la touche du stylet T pour une machine de topologie WFYXZT	35
Figure 3-11 : Calibre étagé placé dans une direction n_i dans le repère {F}	43
Figure 3-12 : Schéma cinématique de la machine MMT de topologie WFXYZT.....	54
Figure 3-13 : Position de la touche du stylet par rapport au repère fondation{F} - Machine de topologie WFXYZT -	55
Figure 3-14 : Orientation du système de palpation (Zoom de la zone H du figure 3-13)	
	55

Figure 3-15 : Position vraie de la touche du stylet T dans le système de coordonnées d'une MMT de topologie WFXYZT	57
Figure 3-16 : Ecarts cinématiques associés aux articulations	59
Figure 3-17 : Illustration du calibre étagée placé dans le volume de mesure de la machine	61
Figure 3-18 : Mode de mesures d'un segment dans toutes les directions du volume inspecté de la MMT	73
Figure 3-19 : Volume restreint dans le volume inspecté de la MMT	74
Figure 3-20 : Discréétisation du volume restreint et calcul des erreurs volumétriques aux nœuds dans le volume restreint.....	76
Figure 3-21 : Discréétisation du volume inspecté et détermination du volume restreint ayant la plus grande erreur estimée	77
Figure 3-22 : Mode de balayage du volume inspecté par le volume restreint	79
Figure 4-1 : Organigramme du logiciel POLYCMM.....	81
Figure 4-2 : Machine LK du laboratoire de mesures dimensionnelles de l'École Polytechnique de Montréal	82
Figure 4-3 : Calibre cylindrique monté sur son support et posé sur le marbre de la MMT	83
Figure 4-4 : Position du calibre étagé dans le volume de la machine	83
Figure 4-5 : Résultats de mesures du calibre étagé cylindrique suivant les six configurations prédéfinies.....	85
Figure 4-6 : Interface graphique du logiciel.....	86
Figure 4-7 : Résultats de mesures et de calculs dans le direction de pires erreurs.....	88
Figure 4-8 : Erreurs de mesures dans quelques directions dans le volume inspecté..	89
Figure 4-9 : Erreurs de mesures dans quelques directions dans le volume inspecté..	90
Figure 4-10 : Mesure du calibre étagé dans différentes directions du volume inspecté de la MMT	91
Figure 4-11 : Résultats de calcul pour des données simulées	95
Figure 4-12 : Résultat de mesures par simulation	96
Figure 4-13 : Gains d'échelles et écarts de perpendicularité identifiés	97

LISTE DES SYMBOLES ET ABRÉVIATIONS

${}_{\{R_2\}R_1}M$: Point M vu du repère $\{R_1\}$ est projeté dans le repère $\{R_2\}$.

${}_{R_1}^{R_2}R$: Matrice de rotation du repère $\{R_1\}$ par rapport au repère $\{R_2\}$

${}_{W}^F Trans$: Vecteur de 3 lignes, composé des coordonnées de l'origine O_w du repère $\{W\}$ dans le repère $\{F\}$.

${}_{R_1}^{R_2}T$: Matrice de transformation homogène décrivant la situation du repère $\{R_1\}$ dans le repère $\{R_2\}$

δ : Ecart linéaire

ε : Ecart angulaire

$\delta_x(X_j)$: Écart d'échelle de l'articulation X à la coordonnée articulaire X_j

$\delta_y(X_j)$: Écart de rectitude de l'articulation X dans la direction y à la coordonnée articulaire X_j

$\delta_z(X_j)$: Écart de rectitude de l'articulation X dans la direction z à la coordonnée articulaire X_j

$\varepsilon_x(X_j)$: Roulis de l'articulation X autour de la direction x à la coordonnée articulaire X_j

$\varepsilon_y(X_j)$: Tangage de l'articulation X autour de la direction y à la coordonnée articulaire X_j

$\varepsilon_z(X_j)$: Lacet de l'articulation X autour de la direction z à la coordonnée articulaire X_j

${}_{\{F\}F}P^V$: Position vraie du point P par rapport au repère $\{F\}$

${}_{\{F\}F}P^N$: Position nominale du point P par rapport au repère $\{F\}$

$\vec{e}_{M_j,i}$: Erreur volumétrique au point M_j du calibre positionnée dans la direction i dans le volume de la machine

\vec{n}_i : Vecteur unitaire définissant la position du calibre dans le volume de la machine

J : Matrice d'identification

α_i : Azimuth, angle qui oriente le vecteur \vec{n}_i par rapport à l'axe X dans le plan XY

β_i : Élevation, angle qui oriente le vecteur \vec{n}_i par rapport au plan XY

cc_i : Expression simplifiée de $\cos(\beta_i).\cos(\alpha_i)$

cs_i : Expression simplifiée de $\cos(\beta_i).\sin(\alpha_i)$

s_i : Expression simplifiée de $\sin(\beta_i)$

$MVDM_{j,i}$: Matrice de Vandermonde calculée en fonction des coordonnées articulaires correspondantes au point M_j quand le calibre est positionné suivant la direction \vec{n}_i

δv : Vecteur colonne composé des 72 coefficients des polynômes caractérisants les écarts cinématiques articulaires

$\delta v_{j,i}$: Vecteur colonne composé des 18 écarts cinématiques de la machine, calculés en fonction des coordonnées articulaires de la machine lorsque la touche du stylet est au point M_j et la direction du calibre est \vec{n}_i

$x_{j,i}, y_{j,i}, z_{j,i}$: Coordonnées du point touché M_j quand le calibre étagé est orienté dans la direction définie par le vecteur unitaire \vec{n}_i

$X_{j,i}, Y_{j,i}, Z_{j,i}$: Coordonnées articulaires quand la touche du stylet est au point touché M_j et quand le calibre étagé est orienté dans la direction définie par le vecteur unitaire \vec{n}_i

t_x, t_y, t_z : Composantes de la touche du stylet par rapport au repère lié au support du système de palpation et coparallèle au repère fondation

$Rot(\varepsilon_z(Y), z)$: Matrice de rotation de l'articulation Y autour de l'axe z d'un angle égal à l'écart angulaire $\varepsilon_z(Y)$

$Rot(\varepsilon_y(X), y)$: Matrice de rotation de l'articulation X autour de l'axe y d'un angle égal à l'écart angulaire $\varepsilon_y(X)$

$Rot(\varepsilon_x(Z), x)$: Matrice de rotation de l'articulation Z autour de l'axe x d'un angle égal à l'écart angulaire $\varepsilon_x(Z)$

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE A : Calcul de la matrice jacobienne en utilisant les matrices de transports	105
ANNEXE B : Calcul de la matrice d'identification en utilisant les petits écarts.....	113
ANNEXE C : Matrice d'identification donnant les écarts de perpendicularité et le gains d'échelles	118
ANNEXE D : Résultats de simulation.....	120
ANNEXE E : Outils mathématiques	128
ANNEXE F : Simulateur de mesures	129

INTRODUCTION

Les machines à mesurer tridimensionnelles (MMT) sont des unités importantes dans les systèmes de contrôle dimensionnel et géométrique des pièces mécaniques. Elles permettent de contrôler la conformité des pièces de forme complexe, en 3D, rapidement et avec une grande précision. Les MMTs doivent être fiables pour réussir leur mission au sein de la chaîne de production. Les pièces mécaniques qui sont contrôlées et certifiées à l'aide des MMTs seront assemblées, sur la chaîne de montage, rapidement et sans problème, et compléteront leur mission durant leurs cycles de vie anticipés.

La performance de la MMT est en partie représentée par l'exactitude de la position de la touche du stylet dans le système de coordonnées de la machine. Les écarts cinématiques associées aux articulations de la MMT sont parmi les principales causes de l'inexactitude de la position de la touche du stylet, et affectent la qualité du résultat de mesures des pièces mécaniques. Afin de pouvoir prédire l'exactitude de la position de la touche du stylet, nous devrions d'abord modéliser et identifier ces écarts cinématiques.

La machine est affectée par 21 écarts géométriques dont 18 écarts articulaires et trois écarts de perpendicularités qui peuvent se dégrader avec le temps. Les écarts liés à l'effet d'échelle et les écarts de perpendicularité entre les articulations de la machine sont particulièrement à risque. Les écarts volumétriques, résultats des 21 écarts géométriques, sont principalement vérifiés à l'aide de cales étalons de différentes tailles qu'on mesure dans le volume de la machine selon des normes internationales.

La norme la plus utilisée par les constructeurs des MMTs est l'ISO 10360 : Evaluation des performances des machines à mesurer tridimensionnelles. Elle concerne la réception et la vérification périodique des MMTs. Le principe consiste à mesurer des étalons de longueur matérialisés, dans différentes positions du volume de la machine afin de vérifier l'erreur de mesure de la machine. Cinq longueurs d'essais doivent être mesurées 3 fois dans 7 configurations différentes au choix de l'utilisateur. Les écarts constatés sur l'ensemble des 105 mesures ne doivent pas dépasser la valeur spécifiée par le fabricant.

Pour la vérification périodique des MMTs, Pratt & Whitney Canada (P&WC) - le partenaire du projet de recherche - utilise son propre protocole de mesure qui consiste à mesurer un calibre étagé dans les six configurations correspondant aux petites diagonales des 3 plans XY, XZ et YZ. Les mesures sont répétées 5 fois dans chaque configuration, le résultat d'essais est basé sur l'analyse de la répétabilité des mesures et sur la détermination des indices de perpendicularités entre les axes de la machine.

Dans le travail que décrit ce mémoire, une comparaison est faite entre les protocole de mesure selon P&WC et selon la norme ISO afin de faire ressortir les avantages et désavantages, similarités, différences et limitations entre les deux approches, dans le but de faire une extension du protocole de mesure P&WC vers la norme ISO, en se basant sur les essais actuels de P&WC. Cette étude a été menée sur les deux topologies de machines qui sont : WFYXZT et WFXYZT.

Nous avons bâti nos systèmes d'équations en se basant sur l'hypothèse des petits écarts. Les écarts cinématiques articulaires sont modélisés par des polynômes de degrés 3 et la représentation matricielle du système d'équations a été développée en utilisant une extension par la matrice de Vandermonde pour faire apparaître les coefficients des polynômes comme variables de notre système. La matrice d'identification a été calculée et validée en utilisant les matrices de transports. La richesse des données issues des essais expérimentaux a permis d'identifier les 3 écarts de perpendicularités et les 3 gains d'échelles.

La résolution du système d'équation donnant les écarts identifiables a été la base du développement du logiciel POLYCMM qui prend en entrée les erreurs mesurées sur un calibre étagé, suivant les 6 configurations prédéfinies par le protocole de mesure selon P&WC, et qui donne en sortie les indices de performance de la MMT selon le protocole de mesure P&WC, les écarts de perpendicularité, les gains d'échelles et donne aussi la direction de pire erreurs dans le volume de la machine ainsi que la plus grande erreur dans un volume restreint inclus dans le volume inspecté. La direction de pires erreurs déterminée pourra être ajouter aux 6 configurations de mesure selon le protocole de mesure de P&WC afin de compléter 7 configurations bon choix pour faire les mesures selon la norme ISO 10360.

Le résultat de calculs de ce logiciel a été validé par des essais expérimentaux et des simulations numériques.

Ce mémoire expose le détail des travaux qui ont été menés à l'École Polytechnique de Montréal dans le cadre d'une collaboration avec notre partenaire industriel (Pratt & Whitney Canada). Il est composé de quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à l'état de l'art de machines à mesurer tridimensionnelles (MMT) et présente l'historique, le principe et les types de MMT, les différents travaux menés sur l'étalonnage ainsi qu'une étude comparative entre la norme ISO 10360 (utilisé pour la vérification périodique des MMTs) et le protocole de vérification selon P&WC .

Le deuxième chapitre présente le calibre étagé et la procédure de mesures selon le protocole P&WC.

Le troisième chapitre traite de la modélisation des MMTs de topologie WFYXZT et de topologie WFXYZT, il présente aussi la formule générale donnant les erreurs de mesures sur un calibre étagée en fonction des écarts cinématique de machines, ainsi que la matrice d'identification permettant de déterminer les écarts de perpendicularité et les gains d'échelles à partir des mesures effectuées selon le protocole P&WC.

Le quatrième chapitre présente le logiciel qui traite les résultats de mesures selon le protocole P&WC, et qui identifie les écarts de perpendicularité et les gains d'échelles. Ce chapitre présente aussi des mesures expérimentales et des simulations pour valider les mesures dans la direction de pires erreurs déterminées par le logiciel. Une conclusion générale apporte un jugement général sur ces travaux et énonce quelques pistes et quelques recommandations pour des études ultérieures.

1 ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Ce chapitre présente l'état des connaissances antérieures relatives aux sujets développés ou exploités plus loin dans ce mémoire. La revue de l'état porte sur :

- L'historique, le principe et les types des machines à mesurer tridimensionnelles (MMT),
- La calibration des MMTs,
- La vérification périodique des MMTs et normes utilisées,
- Une étude comparative entre la norme ISO 10360 et le protocole de mesures selon P&WC.

1.1 Machines à mesurer tridimensionnelles

1.1.1 Historique de la machine à mesurer tridimensionnelle

La première machine à mesurer tridimensionnelle a été mise au point, en 1965 à Turin en Italie, par l'italien Franco Sartorio, fondateur de la société DEA (Digital Electronic Automation). Chez Mitutoyo, le développement de MMTs a débuté en 1968, en commençant par des machines qui mesurent dans le plan X-Y, puis à développer des MMTs avec l'axe Z.

Depuis les années 70 ces machines ont largement évolué que ce soit sur le plan mécanique, électronique ou informatique, mais le principe reste le même: un palpeur à déclenchement ou statique, monté sur un mécanisme pour le déplacer et mesurer sa position, un outil informatique autorisant des calculs puissants pour le calcul de cotes et l'édition de résultats facilement exploitables [1].

1.1.2 Principe de la machine à mesurer tridimensionnelle

Les machines à mesurer tridimensionnelles, sont constituées principalement de trois axes de mesure et d'un système de palpation doté d'une touche de contact fixé à l'extrémité du dernier axe ; en fonction des déplacements des axes de mesures qui sont liés à des règles de mesure de haute précision il est possible de calculer les coordonnées x, y et z du point de contact entre la touche du palpeur et la surface à mesurer [14, 19].

La pièce à mesurer est montée sur un marbre. Le système de palpation établit une relation entre le contact physique de la touche du palpeur sur la surface à mesurer et la lecture des trois déplacements,

Figure 1-1. Les coordonnées calculées sont, par la suite, traitées par un logiciel dans le but d'effectuer des mesures tridimensionnelles et de vérifier les caractéristiques des tolérances géométriques des pièces mécaniques.

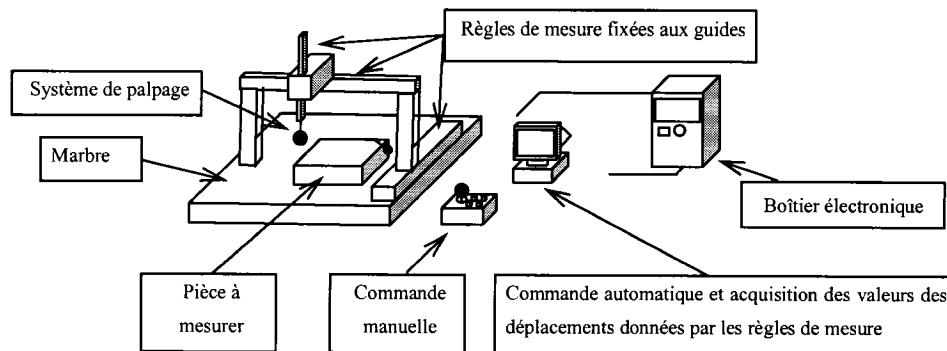


Figure 1-1 : Machine à mesurer tridimensionnelle

1.1.2.1 Système de palpation articulé

La Figure 1-2 montre les différentes composantes du système de palpation articulé [2,12]. Ce système est caractérisé par deux angles de rotations A et B, par rapport à son support, permettant à la touche de stylet de balayer une demie sphère dans l'espace.

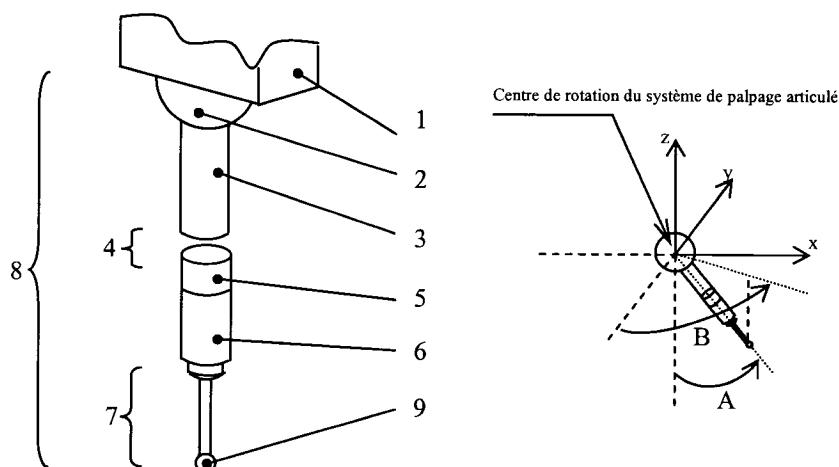


Figure 1-2 : Système de palpation articulé

Figure 1-2 : Système de palpage articulé

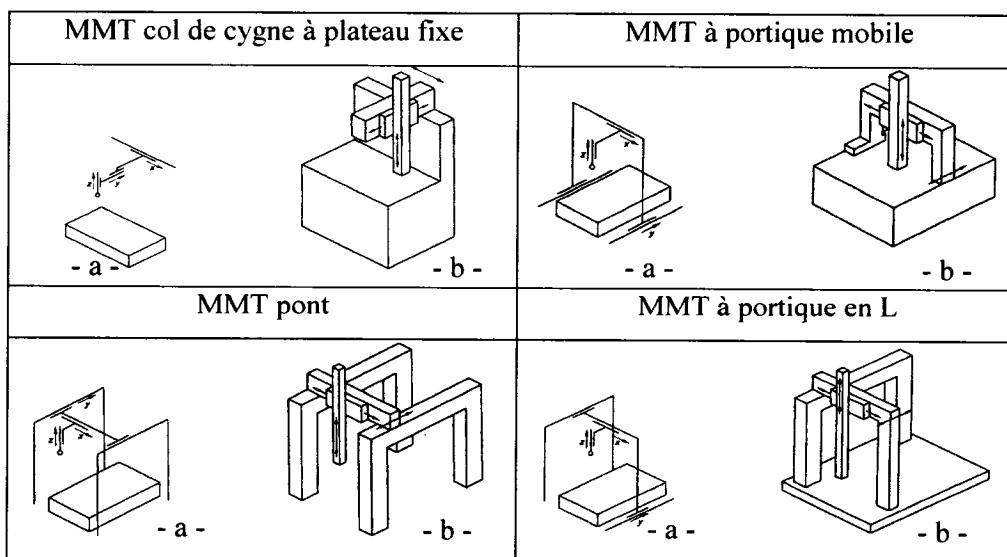
1 : Support du système de palpage	; 6 : Rallonge du stylet
2 : Système d'orientation	; 7 : Stylet
3 : Rallonge du palpeur	; 8 : Système de palpage articulé
4 : Système de changement de palpeur	; 9 : Touche du stylet
5 : Palpeur	

1.1.3 Différentes structures des machines à mesurer tridimensionnelles

Les MMTs sont regroupées en plusieurs structures selon leurs utilisations et leur taille, allant du contrôle des pièces mécaniques de petite taille au contrôle des carrosseries des véhicules. Les MMTs utilisent trois parties mobiles se déplaçant chacune le long de glissières perpendiculaires entre elles ; le système de palpage est fixé solidairement à la dernière partie.

Chaque structure répond à un besoin différent en terme de volume de contrôle et de précision, mais le principe reste le même : trois guidages orthogonaux deux à deux repérés par les 3 dernières lettres de l'alphabet X, Y et Z ; X et Y représentants les axes horizontaux, l'axe vertical étant communément appelé Z.

La Figure 1-3 présente les différentes structures des MMTs : la lettre – a – indique le schéma cinématique de la machine et la lettre - b - indique un exemple de la structure de la machine [12].



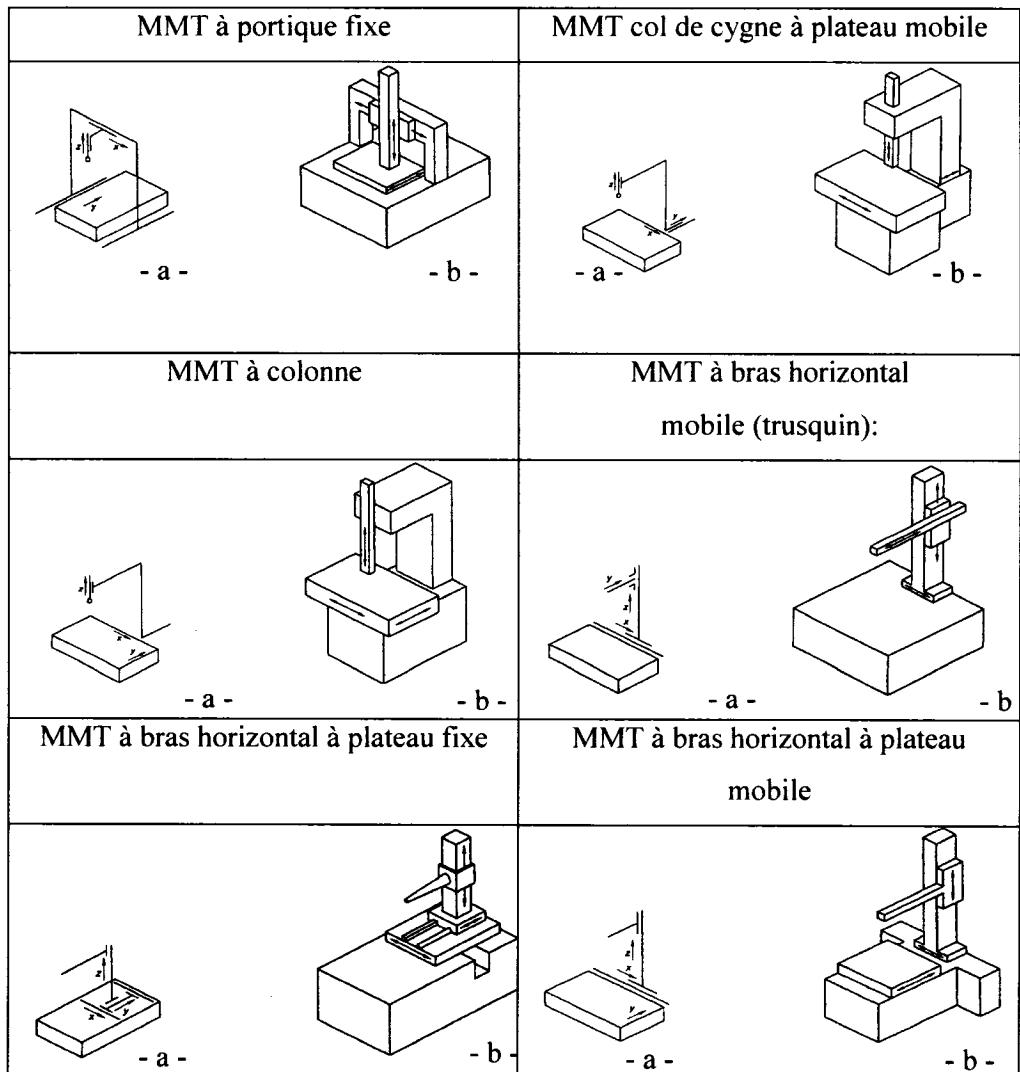


Figure 1-3 : Différentes structures de MMTs

1.2 Erreurs de mesures sur une machine à mesurer tridimensionnelle

Les mesures d'une pièce mécanique à l'aide d'une MMT, ne représentent pas exactement les caractéristiques dimensionnelles et géométriques de la pièce, car les résultats de mesures sont affectés par des erreurs géométriques et systématiques associées aux articulations et au système de palpage de la MMT. Il faut toujours ajouter ou soustraire de la distance nominale mesurée l'erreur de la machine avant de comparer le résultat avec les tolérances exigées sur le dessin de définition de la pièce mécanique.

Exemple d'illustration :

La Figure 1-4 donne un exemple de la vérification d'une cote d'une pièce mécanique à l'aide d'une MMT ayant une erreur δ suivant la direction de mesure.

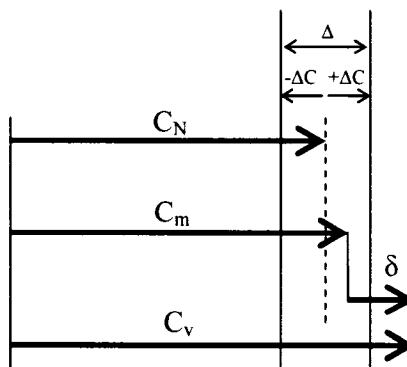


Figure 1-4 : Exemple d'erreur de mesure

La pièce est conforme si sa cote est égale à $C_N \pm \Delta C$. Dans cet exemple, la valeur mesurée par la machine est C_m . En faisant une compensation de l'erreur de la machine δ , on trouve la cote vraie de la pièce, C_v , cette cote ne se situe pas dans l'intervalle de tolérance Δ .

Malgré que la valeur C_m , mesurée par la machine, se trouve dans l'intervalle de tolérance désirée, cette pièce pourrait être rejetée parce que sa cote vraie est en dehors de l'intervalle de tolérance. La MMT, dans ce cas, n'est pas exacte. On devrait la corriger pour diminuer l'erreur δ . Les MMTs modernes ont des logiciels capables de faire cette compensation.

1.3 Vérification des machines à mesurer tridimensionnelles

La vérification et l'étalonnage des machines à mesurer tridimensionnelles a fait l'objet de plusieurs études, différentes types de calibres ont été utilisés, calibres simples, calibres étagés, plaque à billes, plaque à trous, barre à billes [6, 7, 8, 10, 11]. G. Zhang et al. [3] modélisent les écarts cinématiques des MMTs par 18 écarts et ajoutent les 3 écarts de perpendicularité qui sont les coefficients linéaires des écarts de rectitudes. Les écarts de perpendicularité sont déterminés par des mesures de déplacements de la touche du stylet dans les diagonales des trois plans XY, XZ et

YZ. Le reste des écarts sont déterminés en mesurant les déplacements de la touche du stylet suivant 22 directions dans le volume de mesure de la machine. En ayant la formule qui donne les composantes de la position vraie de la touche du stylet en fonction des écarts, l'auteur a fait des choix des déplacements des axes de la machine pour former un système d'équations dont les inconnus sont les écarts de la machine. J.P. Kruth et al. [4] ont développé une méthode de correction d'écarts de la MMT par logiciel en utilisant une auto-calibration des MMTs ; cette méthode est basée sur la minimisation de la différence entre les distances mesurées, selon différentes configurations, sur un calibre de type plaque à trous ("ball plate"). L'avantage de cette méthode est qu'il n'est pas besoin d'étalonner les distances entre les sphères de l'artifact, mais un nombre important de configurations est requis pour pouvoir corriger les 18 écarts. Pour évaluer la performance des MMTs de grandes tailles, allant jusqu'à 4 mètres, S.D. Phillips et al. [5] ont utilisé un calibre équipé du laser. Un rétro-réflecteur est attaché à une sphère qu'on palpe par la touche du stylet de la machine, le rétro-réflecteur et la sphère se déplacent le long du calibre, la source du laser est fixée à l'extrémité du calibre, le déplacement de la sphère le long du calibre égal au déplacement du rétro-réflecteur qu'est mesuré par le laser. Il y a très peu d'études sur la calibration et la détermination des erreurs des MMTs en utilisant un calibre étagé. La norme ISO 10360 [9] utilise le calibre étagé pour fournir des indices de la performance de la MMT, mais sans évaluer les écarts de la machine.

1.3.1 Détermination des écarts de perpendicularité

Les écarts de perpendicularité entre les axes de la machine ont un effet plus important quand la longueur à mesurer est plus importante et selon l'orientation de la pièce à mesurer dans le volume de la machine. Certaines orientations maximisent l'erreur de mesure. Elles permettent, par conséquent, de déterminer les écarts de perpendicularité si on effectue les mesures sur des cales étalons.

La Figure 1-5 donne l'exemple d'une longueur L_1 mesurée par une MMT parfaite et une longueur L_2 mesurée par une MMT ayant un écart de perpendicularité [1].

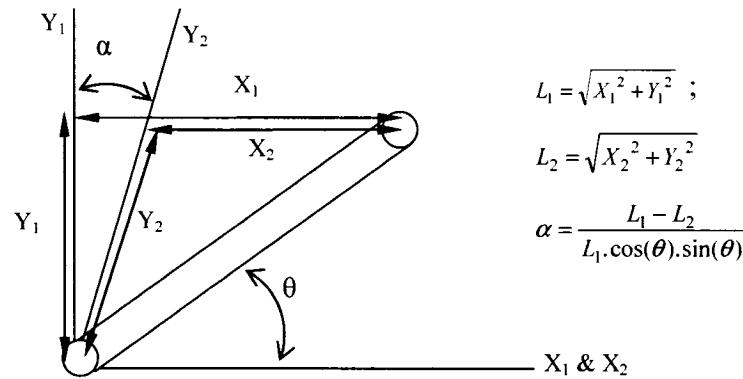


Figure 1-5 : Système de coordonnées non perpendiculaire

L'écart de perpendicularité, α , entre les articulation X et Y peut être estimé en mesurant le même calibre étalon dans les deux directions correspondantes aux petites diagonales, Figure 1-6.

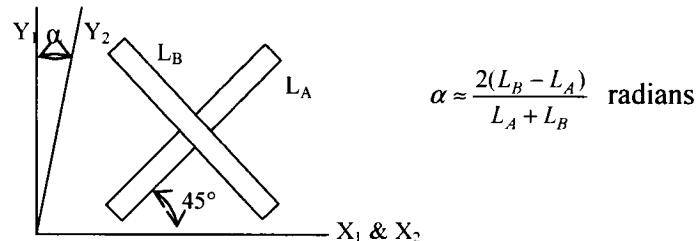


Figure 1-6 : Estimation de l'erreur de perpendicularité

1.4 Vérifications périodiques des machines à mesurer tridimensionnelles

Plusieurs phénomènes peuvent influencer la précision de la MMT, tels que, la variation de la température, et les collisions entre les membres de la machine et les pièces à mesurer. Pour garder la fiabilité de la machine dans la chaîne de production, les industriels suivent un plan d'intervention périodique pour la vérification de la précision de la MMT. Entre chaque période d'étalonnage par un organisme extérieur, il reste malgré tout primordial de mettre en place des vérifications intermédiaires qui seront déclenchées soit de façon cyclique (toutes les semaines, tous les mois,...) soit

en cas de doute sur une dérive éventuelle de la machine. La vérification périodique de la machine se fait suivant des normes internationales.

Entre deux vérifications périodiques, la norme ISO 10360-2 conseille fortement de réaliser des vérifications intermédiaires à l'aide d'une pièce type ou de tout élément représentatif des pièces contrôlées régulièrement sur la machine.

1.4.1 Normes

Durant les années qui ont suivi l'apparition des MMT, les cahiers des charges ne spécifiaient que des tolérances partielles sur les paramètres géométriques. Les caractéristiques les plus fréquemment spécifiées étaient :

- orthogonalités,
- écarts de rectitude,
- erreurs de justesse du positionnement.

Le contrôle de réception et les opérations de maintenance ne portaient, la plupart du temps, que sur ces paramètres. Progressivement et parallèlement à l'arrivée des logiciels de correction des erreurs géométriques, le manque d'intérêt de ces spécifications est apparu. On pouvait en effet se trouver confronté aux deux cas de figure suivants :

- une MMT à l'intérieur des spécifications géométriques pouvait mesurer avec des incertitudes de mesure incompatibles avec les tolérances des produits à contrôler ;
- une autre MMT pouvait se trouver à l'extérieur des spécifications géométriques mais être corrigée par logiciel et néanmoins mesurer avec des incertitudes acceptables. Actuellement, il est généralement admis que ces caractéristiques ne présentent pas d'intérêt pour l'utilisateur, si ce n'est qu'elles doivent présenter une bonne répétabilité pour que le logiciel de correction soit efficace. L'ensemble des normes et recommandations mentionnées ci-après précisent d'évaluer les performances des MMT en termes de mesure de longueur sur des étalons matérialisés raccordés aux étalons nationaux.

La norme ISO 10360-2 : Évaluation des performances des machines à mesurer tridimensionnelles concerne la réception et la vérification périodique des MMTs. Le principe consiste à mesurer des étalons matérialisés de longueur, raccordés aux

étalons nationaux, dans différentes positions du volume de la machine afin de vérifier l'erreur de mesure de la machine. Cinq longueurs d'essais doivent être mesurées 3 fois dans 7 configurations différentes au choix de l'utilisateur. Les écarts constatés sur l'ensemble des 105 mesures ne doivent pas dépasser la valeur spécifiée par le fabricant. Celle-ci, appelée erreur d'indication E, est en général exprimée de la façon suivante :

$$E = A + L/K \leq B$$

où A est une constante exprimée en micromètre, donnée par le fabricant

K est une constante sans dimension donnée par le fabricant

L est la longueur mesurée en millimètres

Et B est la valeur maximale de E, en micromètres, spécifiée par le fabricant.

Cette norme prend également en compte la performance du système de palpage. Le mode opératoire consiste à palper 25 points sur une sphère de référence certifiée et différente de celle utilisée pour la qualification du palpeur. L'étendue des 25 distances radiales entre chaque points et le centre de la sphère calculé par la méthode des moindres carrés, ne doit pas dépasser l'erreur de palpage R spécifiée par le fabricant de la MMT.

La norme CMMA (Coordinate Measuring Machine Manufacturers Association) recommande l'utilisation de trois cales de longueur égale à environ 1/3, 1/2 et 3/4 de la capacité du de déplacement du plus grand axe sans dépasser 1 000 mm. On effectue une mesure de ces 3 cales dans 4 directions. Le document CMMA préconise les 4 grandes diagonales mais on peut opter pour des mesures parallèles aux axes. Le nombre de positions volumétriques et (ou) axiales ne doit pas excéder 4. Chaque mesure de cale est répétée 3 fois. On obtient donc 36 résultats de mesure, mais seulement 12 sont indépendants. La configuration du palpeur doit être conforme aux spécifications du constructeur ce qui peut être limitatif et non représentatif de certaines applications.

Les erreurs maximales d'indication sont de la forme :

$$G \text{ ou } M = K + H \cdot L$$

où G est une erreur maximale d'indication parallèle aux axes,

M est une erreur maximale d'indication dans le volume,

K et H sont des constantes spécifiées par le constructeur,

Et L est longueur mesurée.

La norme française E11-150 (1986) traite de l'ensemble des machines à mesurer (uni-, bi- et tridimensionnelles). La partie concernant les MMT présente une procédure de contrôle complète basée sur une méthode globale faisant intervenir l'ensemble des éléments de la machine. La procédure consiste à mesurer des étalons matérialisés raccordés aux étalons nationaux dans différentes positions du volume avec les moyens de mesure de la machine et dans les conditions normales d'utilisation prévues par le constructeur. Ces étalons sont des cales, bagues, tampons, cônes et sphères. Cette procédure permet, dans le cas d'un contrôle de réception, de vérifier la conformité de la machine par rapport au cahier des charges et, dans le cas d'un contrôle périodique, de vérifier si les performances de la machine sont compatibles avec les tolérances des produits à contrôler. Le constructeur doit spécifier l'erreur maximale d'indication tolérée sous la forme suivante :

$$e_t = \pm (a + b \cdot L)$$

où a est représentatif de l'erreur de fidélité,

b est représentatif de l'erreur de justesse.

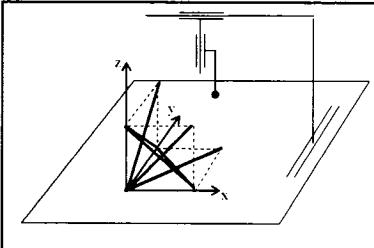
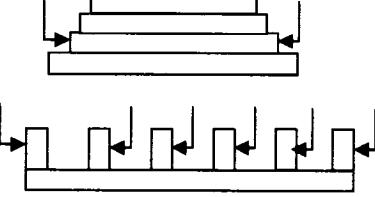
Et L est la longueur mesurée

L'incertitude de mesure des étalons utilisés doit être inférieure à $\pm e_t/4$

Ce type de contrôle pour une machine à commande numérique d'1m³ dure environ une journée. La norme NF E 11-150 préconise des contrôles avec une périodicité de 2 ans ou après 3 000 h de fonctionnement ou si un incident, ou une détérioration, est constaté ou présumé [15].

1.4.2 Comparaison entre le protocole de mesures selon P&WC et selon la norme ISO 10360

Le Tableau 1-1 ci-dessous présente une comparaison entre le protocole de mesure selon P&WC et selon la norme ISO 10360. La colonne 1 présente le matériel et les opérations, la colonne 2 présente le mode opératoire selon l'approche P&WC, la colonne 3 présente le mode opératoire selon l'approche ISO 10360. [9,18].

	P&WC	ISO 10360
Étalon de travail	Calibre étagé : Longueurs : 12", 18", 24" et 40"	5 étalons matérialisés de taille - Soit un calibre étagé, - Soit une série de cales étalons conformes à l'ISO 6350 sont fortement recommandés, dont la plus grande taille est au moins 66% de la plus longue diagonale spatiale du volume de mesure de la MMT, et la plus petite taille inférieure à 30 mm. La longueur de chaque étalon matérialisé de taille doit être étalonnée et l'incertitude doit être prise en compte.
Positions de mesure	6 positions correspondantes aux 6 petites diagonales dans les plans XY, XZ et YZ 	7 positions (libre choix). L'utilisateur est libre de choisir les sept positions et orientations différentes des cinq étalons matérialisés de taille dans les limites spécifiées. Note : Le choix des positions et orientations peut affecter le résultat d'essai de manière significative.
Mode de mesure	Unidirectionnel 	Bidirectionnel 
Répétitivité	5 mesures pour chaque configuration np_1 : nbre de point touches pour la configuration 1 np_2 : nbre de point touches pour la configuration 2 np_3 : nbre de point touches pour la configuration 3	3 mesures pour chaque configuration, soit un total de 105 mesures $105 = 3 * 5 * 7$ 3 répétitions 5 cales 7 positions

	np_4 : nbre de point touches pour la configuration 4 np_5 : nbre de point touches pour la configuration 5 np_6 : nbre de point touches pour la configuration 6 $Totale de mesure = \sum_{i=1}^6 np_i * 5$	
Rendement volumétrique	<p>Perpendicularité</p> <ul style="list-style-type: none"> - Évaluée en mesurant la différence entre les deux lectures (entre les positions 1 et 2, 3 et 4, 5 et 6) ; P. ex. entre les positions 1 et 2 : on prend la plus grande valeur de l'erreur correspondant à la plus grande longueur, moins la plus petite valeur de l'erreur correspondant à la plus grande longueur et on devise le résultat par 2 , on obtient la "perpendicularité" dans le plan XY. - Autre version : La perpendicularité évaluée en mesurant la différence entre les deux lectures (p. ex. entre les positions 1 et 2, 3 et 4, 5 et 6). La différence divisée par la longueur nominale et multipliée par 206264.806 (pour obtenir une lecture en arcsec.) $Perp (arcsec) = D/N * 206264.806$ <p>N : Longueur nominale de la barre D : Différence de lecture (delta)</p>	L'erreur maximale tolérée d'indication d'une MMT est : MPE_E (valeur donnée par le constructeur de la MMT), <ul style="list-style-type: none"> - Pour les 105 mesures, calculer chaque erreur d'indication pour la mesure de taille, E, en faisant la différence entre la valeur indiqué et la valeur vraie de chaque étalon. - Noter graphiquement toutes les erreurs (valeur de E) sur un diagramme
Erreur de palpation	Aucune vérification	L'erreur de palpation maximale spécifiée est : MPE_p (valeur donnée par le constructeur de la MMT), On détermine l'étendue des distances entre les points mesurés et le centre de la sphère d'essai. La sphère d'essai a un diamètre

		<p>nominal compris entre 10 mm et 50 mm est différente de la sphère de référence et doit être placée à un emplacement autre que celui de la sphère de référence cette dernière utilisée pour la qualification du système de palpation.</p> <p>L'utilisateur est libre de choisir l'orientation du stylet de montage de la sphère d'essai dans les limites spécifiées, il est recommandé que l'orientation du stylet ne soit parallèle à aucun des axes de la MMT.</p> <p>Note : le choix de l'orientation du stylet et la position de montage de la sphère d'essai peut effectuer le résultat d'essai de manière significative.</p> <p>L'erreur de palpation est calculée comme l'étendue des 25 distances radiales gaussiennes.</p> $P = R_{\max} - R_{\min}$
Erreur maximale spécifiée	<p>Erreur de perpendicularité : 0.002" sur 48 pouces (ajustement mécanique est requis)</p> <p>L'erreur de perpendicularité ne doit pas être supérieure à :</p> <p>$LK < 1$ arcsecond</p> <p>ZEISS Prismo < 0.5 arcseconds</p> <p>ZEISS UPMC < 0.2 arcseconds</p>	<p>L'erreur maximale tolérée d'indication d'une MMT pour les mesures de tailles, MPE_E, est donnée par l'une des trois formes suivantes :</p> <p>*$MPE_E = \pm \text{minimum de } (A + L/K)$ et B, ou (a)</p> <p>*$MPE_E = \pm (A + L/K)$, ou (b)</p> <p>*$MPE_E = \pm B$ (c)</p> <p>(a) </p>

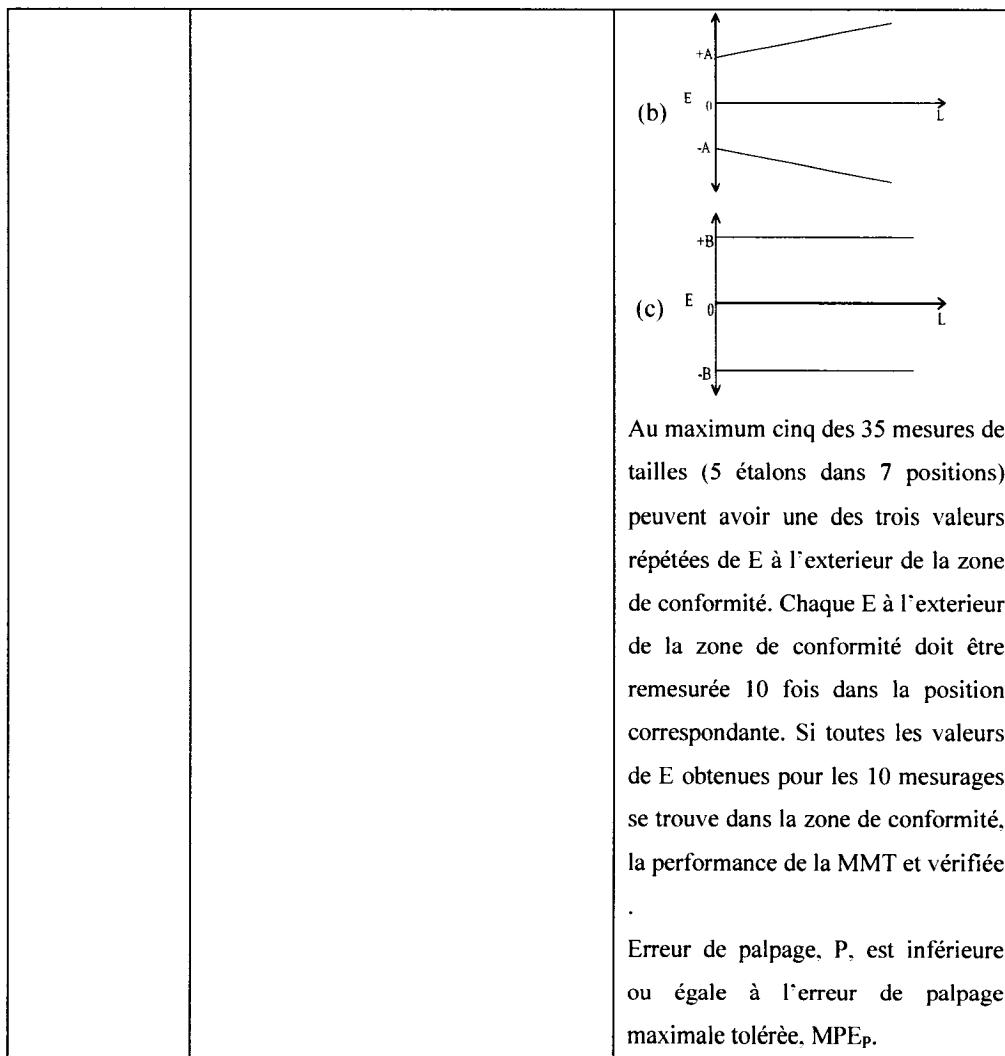


Tableau 1-1 : Comparaison entre la norme ISO10360 et le Protocole de mesure selon P&WC

Extension vers la norme ISO

D'après cette étude comparative on constate qu'il y a une différence de fond entre les deux approches, que ce soit sur les procédures de mesures, ou encore sur la méthode d'analyse. Le point faible de l'approche de mesure selon la norme ISO 10360 est le choix des configurations des mesures. Puisque ces choix sont faits d'une façon arbitraire, cela ne reflète pas nécessairement le comportement de la MMT. Toutefois, il est possible d'enrichir l'approche de mesures de P&WC pour s'approcher de la norme ISO 10360 en cherchant une 7^{me} direction de mesure sur la base des 6 premières directions prédefinies par l'approche P&WC.

1.5 La machine à mesurer tridimensionnelle et son environnement.

Il est très important de parler des conditions d'environnement dans lesquelles les mesures sont effectuées. Les spécifications de précision des constructeurs de MMTs, le sont toujours pour une certaine plage de température. Même si de plus en plus de fabricants proposent des systèmes sophistiqués de compensation de variations de température, il est préférable de s'assurer que le local, dans lequel est implanté la machine, répond aux critères suivants: absence de source de chaleur, absence de vibrations.

Afin d'éviter l'apparition d'erreurs dues à la dilatation de la pièce à contrôler et de la machine, il est conseillé de climatiser le local de mesure. Cette climatisation devra répondre à certains critères comme sa capacité à maintenir une température constante (à +/- 0,5°C) et homogène dans toute la salle. Dans tous les cas, il faudra éviter que la machine soit soumise à toute source de rayonnement extérieur (soleil) ou intérieur (luminaires).

Si le local de contrôle se trouve à proximité d'un atelier de presses ou de forges ou, d'une voie de chemin de fer, il faudra prévoir une isolation dynamique afin d'éviter que ces vibrations viennent perturber les mesures. De plus, la machine devra reposer sur un sol stable et homogène pour ne pas faire subir de déformations à la machine (surtout utile pour les machines de très grandes dimensions type à bras ou à pont reposant sur le sol par de nombreux points d'appuis). Il est alors conseillé de faire réaliser une dalle sur laquelle reposera la machine [13].

2 METHODE UTILISEE PAR P&WC

Ce chapitre décrit le protocole de mesure de P&WC pour l'évaluation de la performance des machines à mesurer tridimensionnels, le matériel utilisé, les procédures et les conditions expérimentales sont discutées. La méthode d'analyse des données expérimentales est également présentée.

2.1 Matériel utilisé

Pratt & Whitney Canada utilise un calibre étagé, Figure 2-1, pour la vérification périodique des machines à mesurer tridimensionnelles. C'est un instrument portatif et facile à employer composé de plusieurs cales étalons montés en série. Les distances entre les cales étalons sont déterminées avec précision. Le calibre étagé est doté d'un capteur de température pour prendre en compte l'effet de la température de l'environnement et l'acquisition des données de mesures des distances se fait à l'aide d'un logiciel installé dans l'ordinateur qui pilote la machine.

Pour effectuer des mesures, on place le calibre étagé dans le volume de la machine dans une direction prédéfinie. On commande la machine manuellement, d'abord, pour définir le repère local, puis, le reste des déplacements de la machine se font automatiquement à l'aide d'un programme informatique.

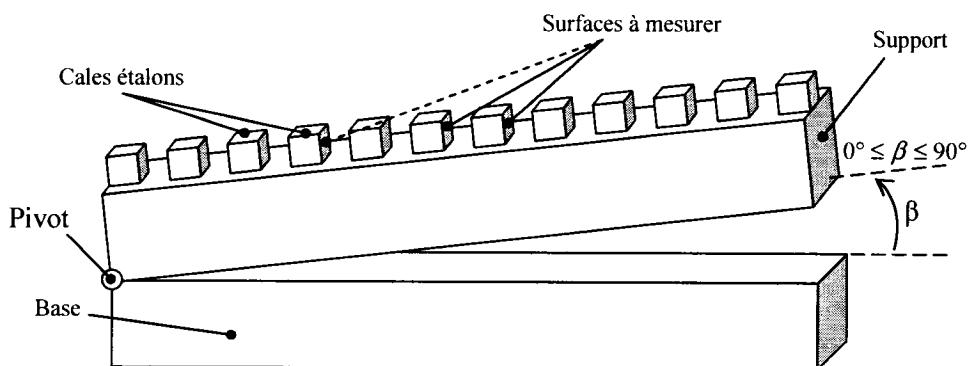


Figure 2-1 : Schéma simplifié d'un calibre étagé

2.2 Procédures de mesures

Selon le protocole de mesure P&WC, pour la vérification périodique des erreurs volumétrique des machines à mesurer tridimensionnelle, le calibre étagé est mesuré suivant 6 directions correspondant au petites diagonales des trois plans XY, XZ et YZ. La Figure 2-2 montre ces 6 configurations de mesure, les flèches dessinées sur les schémas indiquent les sens de mesure.

Exemple : pour la position 1, le calibre est positionné dans le plan XY, à 45° par rapport à l'axe X, les mesures du calibre sont effectuées suivant le sens indiqué par la flèche vers les x et y positifs.

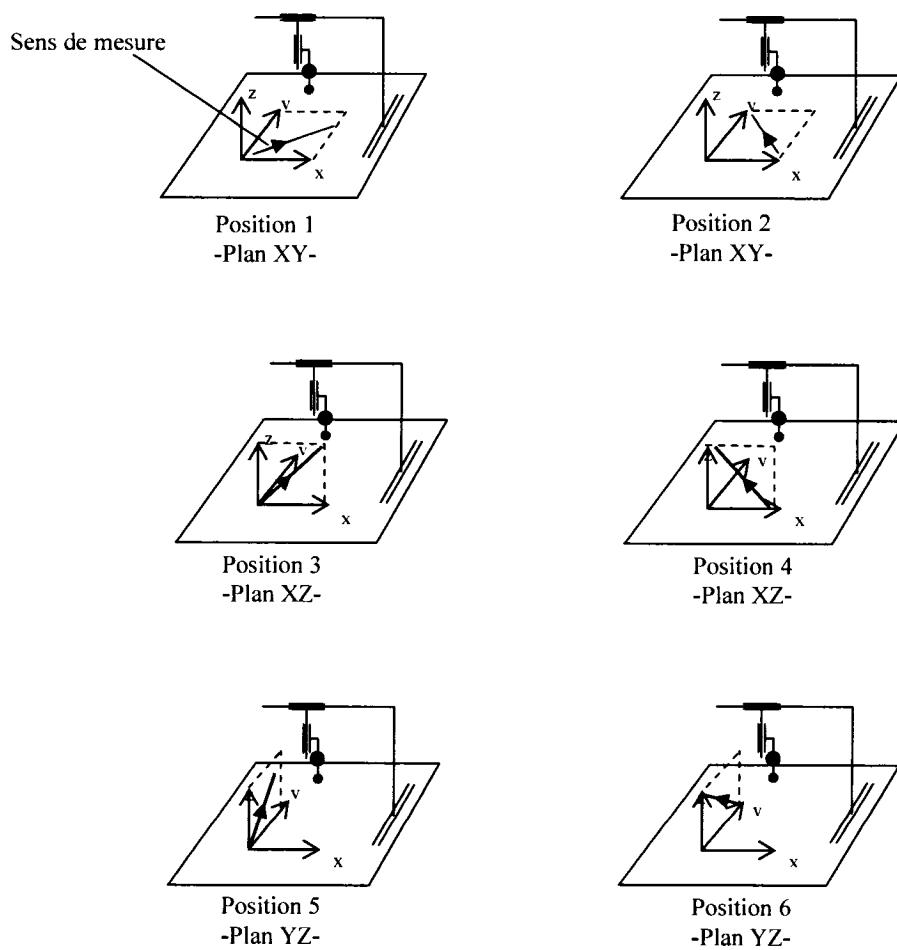


Figure 2-2 : Six positions de mesure selon le protocole de mesure P&WC

Les mesures sur le calibre étagé sont effectuées d'une façon unidirectionnelle suivant les 6 configurations prédéfinies et le stylet reste toujours vertical, Figure 2-3.

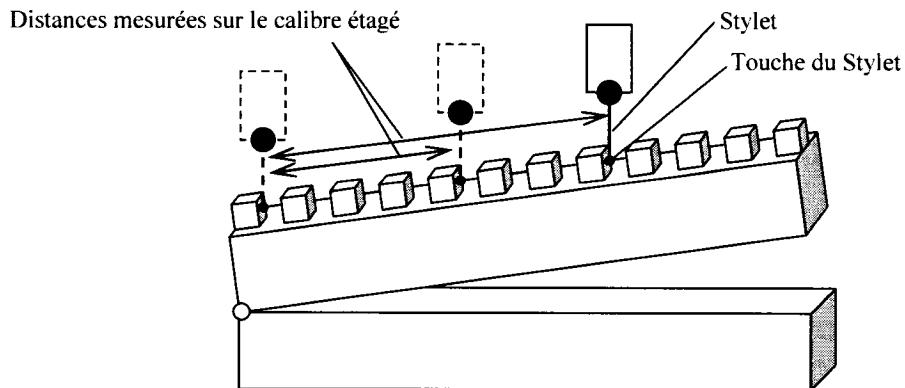


Figure 2-3 : Mesure unidirectionnelle du calibre étagé

2.3 Erreurs de mesures

L'erreur de mesure est la différence entre la distance mesurée sur le calibre et la distance conventionnellement vraie. Suivant chaque position i , on effectue N_i mesures que l'on répète 5 fois afin d'analyser la répétabilité des mesures. Les résultats de toutes les mesures sont stockés dans un fichier et sont présentés, sous forme de trois colonnes (Actuel ; Nominal ; Erreur) ; La colonne "Actuel" indique les valeurs des distances mesurées par la machine, la colonne "Nominal" indique les valeurs conventionnellement vraies des distances mesurées, la colonne "Erreur" indique les erreurs mesurées.

On note :

$i = 1, 2, \dots, 6$ (indice de la configuration du calibre)

$j = 1, 2, \dots, 5$ (indice de la répétition de mesure)

$k = 1, 2, \dots, n_i$ (indice de la distance mesurée sur le calibre)

d_{ijk} : distance actuelle correspondant à la k^e distance mesurée sur le calibre étagé, mesurée pour la j^e fois, quand le calibre est positionnée suivant la i^e position

$dNijk$: distance conventionnellement vraie correspondant à la k^e distance mesurée sur le calibre étagé, mesurée pour la j^e fois quand le calibre est positionnée suivant la i^e position

$Eijk$: Erreur de mesure correspondante à la k^e distance mesurée sur le calibre étagé, mesurée pour la j^e fois quand le calibre est positionnée suivant la i^e position
où $Eijk = dAijk - dNijk$

2.3.1 Traitement des données

Pour chaque configuration de mesure on calcule les valeurs moyennes des cinq résultats. Les répétabilités de mesures sont calculées comme étant l'étendue entre la valeur maximale et la valeur minimale des erreurs mesurées.

Exemple : pour la configuration i de mesure, les résultats de mesure de la k^e distance sur le calibre sont :

	Actuel	Nominal	Erreur
Première mesure :	$dAi1k$	$dNi1k$	$Ei1k = dAi1k - dNi1k$
Deuxième mesure :	$dAi2k$	$dNi2k$	$Ei2k = dAi2k - dNi2k$
Troisième mesure :	$dAi3k$	$dNi3k$	$Ei3k = dAi3k - dNi3k$
Quatrième mesure :	$dAi4k$	$dNi4k$	$Ei4k = dAi4k - dNi4k$
Cinquième mesure :	$dAi5k$	$dNi5k$	$Ei5k = dAi5k - dNi5k$

Le traitement de ces données est le suivant :

- Valeur moyenne des distances mesurées

$$dAik = \frac{dAi1k + dAi2k + dAi3k + dAi4k + dAi5k}{5}$$

- Distance conventionnellement vraie

$$dNik = dNi1k = dNi2k = dNi3k = dNi4k = dNi5k$$

- Valeur moyenne d'erreurs mesurées

$$Eik = \frac{Ei1k + Ei2k + Ei3k + Ei4k + Ei5k}{5}$$

- Répétabilité des mesures

$$Rik = \max(Eik, Ei2k, Ei3k, Ei4k, Ei5k) - \min(Eik, Ei2k, Ei3k, Ei4k, Ei5k)$$

2.3.1.1 Présentation des données traitées

Les données traitées sont présentées selon 4 colonnes, La première colonne "Actuel" indique les valeurs moyennes des distances mesurées par la machine, le deuxième colonne "Nominal" indique les valeurs conventionnellement vraies des distances mesurées, la troisième colonne "Erreur" indique les valeurs moyennes des erreurs mesurées, le quatrième colonne indique les répétabilités des mesures.

2.3.1.2 Analyse des données

Cette section présente un regard critique de la méthode d'analyse selon P&WC. Les indices des perpendicularités entre les axes de la machine sont déterminés en mesurant la différence entre les deux lectures correspondants aux plus grandes distances mesurées sur le calibre (p.ex. entre les position 1 et 2, 3 et 4, 5 et 6), la différence est divisée par 2. Cette méthode ne présente pas nécessairement les écarts de perpendicularité entre les axes de la machine, puisqu'il ne prend pas en compte toutes les mesures effectuées sur le calibre, il serait bon de chercher une méthode pour évaluer les écarts de perpendicularité et d'autres écarts visibles en en prenant en compte toutes les mesures intermédiaires.

3 MODELISATION DES ÉCARTS

Ce chapitre présente la modélisation des écarts cinématiques et des erreurs volumétriques en un point dans le volume de la MMT. Il présente aussi le modèle général décrivant les erreurs de mesures sur un calibre étagé placé dans le volume de mesure de la MMT, et ce en fonctions des écarts cinématiques.

Ce chapitre est divisé en deux parties principales, la première partie traite de la modélisation de la machine de topologie WFYXZT et la deuxième partie traite de la modélisation de la machine de topologie WFXYZT

3.1 Machine de topologie WFYXZT

3.1.1 Schéma cinématique d'une MMT de topologie WFYXZT

La Figure 3-1 montre un schéma cinématique d'une MMT de topologie WFYXZT. La pièce à mesurer est placée dans le volume de mesure de la machine et est portée par la fondation $\{F\}$.

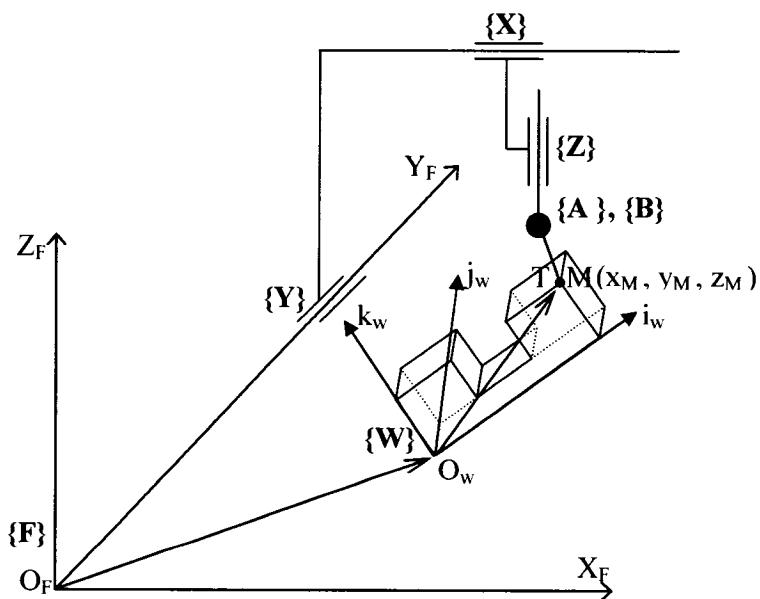


Figure 3-1 : Schéma cinématique de la MMT de topologie WFYXZT

Pour connaître la position de la pièce dans le système de coordonnées de la machine, on associe à la pièce un repère $\{W\}$ d'origine O_w . La machine a une structure

sérielles, l'articulation $\{Y\}$ est porté par la fondation $\{F\}$, l' articulation $\{X\}$ est porté par l' articulation $\{Y\}$, l' articulation $\{Z\}$ est porté par l'articulation $\{X\}$, la touche du stylet T est portée par l'articulation $\{Z\}$. Les deux articulations A et B définissent la position de la touche du stylet T par rapport à un repère local monté sur l'axe Z et coparallèle au repère fondation $\{F\}$.

La position de la pièce et la position de la touche du stylet T sont bien définies par rapport au repère fondation $\{F\}$ et par conséquent la touche du stylet T est bien définie par rapport au repère pièce $\{W\}$.

3.1.2 Position nominale de la touche du stylet dans le système de coordonnées de la MMT de topologie WFYXZT

La Figure 3-2 illustre le système de coordonnées articulaires (X, Y, Z) correspondant à la position du centre O_z du système articulé du palpeur. Ces coordonnées sont définies par rapport au repère fondation $\{F\}$ et calculées à partir des déplacements des chariots de la machine. Les coordonnées de la touche du stylet T (x_t, y_t, z_t) , dans le repère fondation $\{F\}$, sont définies par les coordonnées articulaires X, Y, Z , par la longueur L_s (longueur du centre du système articulé jusqu'au centre de la touche du stylet) et par l'orientation du système de palpation (angles A et B), Figure 3-2 et figure 3-3.

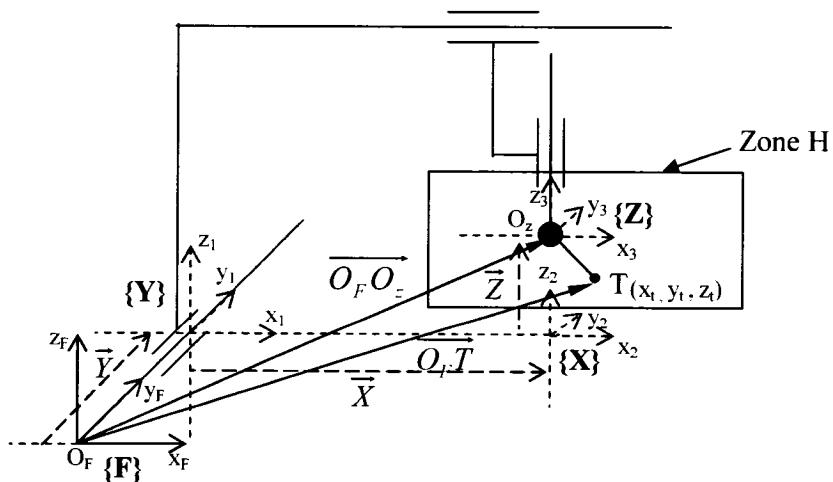


Figure 3-2 : Position de la touche du stylet par rapport au repère fondation $\{F\}$ pour le cas d'une machine de topologie WFYXZT

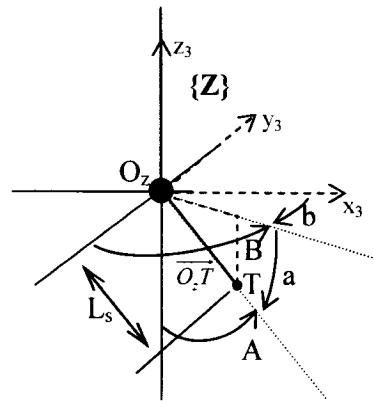


figure 3-3 : Orientation du système de palpation (Zoom de la zone H de la Figure 3-2)

La position nominale de la touche du stylet, par rapport au repère fondation $\{F\}$ est définie par l'expression vectorielle suivante

$$\overrightarrow{O_F T} = \overrightarrow{O_F O_z} + \overrightarrow{O_z T} . \quad (3-1)$$

En décomposant le vecteur $\overrightarrow{O_F O_z}$ on a

$$\overrightarrow{O_F T} = \vec{Y} + \vec{X} + \vec{Z} + \overrightarrow{O_z T} . \quad (3-2)$$

Les coordonnées de la touche du stylet dans le repère fondation $\{F\}$ sont :

$$\begin{aligned} x_t &= X + t_x \\ y_t &= Y + t_y \\ z_t &= Z + t_z \end{aligned} \quad (3-3)$$

où t_x , t_y et t_z sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{O_z T}$ projetées dans le repère fondation $\{F\}$

Le repère $\{Z\}$ est coparallèle au repère fondation $\{F\}$, Figure 3-2, nous avons alors :

$$\begin{aligned} t_x &= L_s \cdot \cos(a) \cdot \cos(b) = L_s \cdot \cos(A - \frac{\pi}{2}) \cdot \cos(B - \frac{\pi}{2}) \\ t_y &= L_s \cdot \cos(a) \cdot \sin(b) = L_s \cdot \cos(A - \frac{\pi}{2}) \cdot \sin(B - \frac{\pi}{2}) \\ t_z &= L_s \cdot \sin(a) = L_s \cdot \sin(A - \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (3-4)$$

où a et b sont respectivement les deux angles, l'azimuth et l'élévation, qui définissent la position de la touche du stylet dans le repère $\{Z\}$

A et B sont les angles qui définissent la position de la touche du stylet dans le repère $\{Z\}$, et qui sont visibles pour l'opérateur de la machine, ($A + a = \pi/2$ et $B + b = \pi/2$), figure 3-3.

La position nominale de la touche du stylet, $\{F\}^F T^N$, observée et projetée dans le repère fondation $\{F\}$, est alors :

$$\{F\}^F T^N = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X + L_s \cdot \cos(A - \frac{\pi}{2}) \cdot \cos(B - \frac{\pi}{2}) \\ Y + L_s \cdot \cos(A - \frac{\pi}{2}) \cdot \sin(B - \frac{\pi}{2}) \\ Z + L_s \cdot \sin(A - \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

3.1.3 Position nominale de la pièce à mesurer dans le système de coordonnées de la MMT de topologie WFYXZT

La position du repère pièce $\{W\}$ par rapport au repère fondation $\{F\}$ est définie par les coordonnées de son origine O_w et par sa rotation par rapport au repère $\{F\}$, Figure 3-4 .

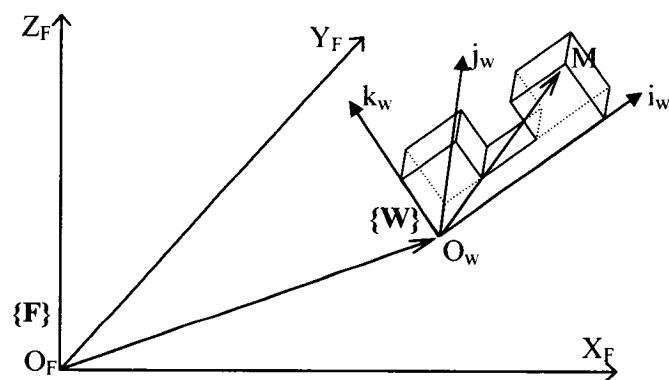


Figure 3-4 : Position de la pièce à mesurer dans le système de coordonnées de la MMT

On note ${}^{(W),W}M$ les coordonnées du point M, appartenant à la pièce à mesurer, exprimé dans le repère pièce {W}. Il y a deux façons d'exprimer ce point dans le repère fondation {F}, soit en utilisant une expression vectorielle, ou encore par la matrice de transformation homogène.

3.1.3.1 Expression vectorielle de la position d'un point M de la pièce par rapport au repère fondation {F}

L'expression qui donne la décomposition du point M, dans le repère fondation {F}, en fonction de la décomposition du point M dans le repère pièce {W} est :

$${}^{(F),F}M = {}^{(F),F}O_W + {}_W^F R \cdot {}^{(W),W}M \quad (3-6)$$

où

${}^{(F),F}M$: Le point M vu du repère {F} est projeté dans {F}.

${}^{(F),F}O_W$: L'origine du repère {W} vu du repère {F} et projeté dans {F}, ce point représente aussi la translation du repère {W} par rapport au repère {F}.

${}_W^F R$: Matrice de rotation du repère {W} par rapport au repère {F}, elle est composée des projections des vecteurs unitaires i_w , j_w et k_w du repère {W} dans le repère fondation {F}

${}^{(W),W}M$: Le point M vu du repère {W} est projeté dans {W}.

La décomposition matricielle de cette expression (3-6) est :

$$\begin{bmatrix} {}^{(F),F}M_x \\ {}^{(F),F}M_y \\ {}^{(F),F}M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{(F),F}O_{W,x} \\ {}^{(F),F}O_{W,y} \\ {}^{(F),F}O_{W,z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^{(F),F}i_{w,x} & {}^{(F),F}j_{w,x} & {}^{(F),F}k_{w,x} \\ {}^{(F),F}i_{w,y} & {}^{(F),F}j_{w,y} & {}^{(F),F}k_{w,y} \\ {}^{(F),F}i_{w,z} & {}^{(F),F}j_{w,z} & {}^{(F),F}k_{w,z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{(W),W}M_x \\ {}^{(W),W}M_y \\ {}^{(W),W}M_z \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

3.1.3.2 Expression matricielle de la position d'un point M de la pièce par rapport au repère fondation {F}

En utilisant la matrice de transformation homogène ${}^F_w T$ (voir annexe E pour plus de détails sur la matrice TH), l'expression qui donne la décomposition $({}^F_w M_x, {}^F_w M_y, {}^F_w M_z)$ du point M, dans le repère fondation {F} en fonction de la décomposition $({}^W_w M_x, {}^W_w M_y, {}^W_w M_z)$ du point M dans le repère pièce {W} est :

$${}^F_w M = {}^F_w T \cdot {}^W_w M \quad (3-8)$$

La décomposition matricielle de l'expression (3-8) est :

$$\begin{bmatrix} {}^F_w M_x \\ {}^F_w M_y \\ {}^F_w M_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^F_w R & {}^F_w Trans \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^W_w M_x \\ {}^W_w M_y \\ {}^W_w M_z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

où,

${}^F_w Trans$: vecteur de 3 lignes, composé des coordonnées de l'origine O_w du repère {W} par rapport au repère fondation {F}.

En remplaçant les expressions de ${}^F_w R$ et ${}^F_w Trans$ par leurs décompositions dans l'expression

(3-9), on obtient les coordonnées du point M dans le repère fondation {F} en fonction des coordonnées du point M dans le repère pièce {W} :

$$\begin{bmatrix} {}^F_w M_x \\ {}^F_w M_y \\ {}^F_w M_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^F_w i_{w,x} & {}^F_w j_{w,x} & {}^F_w k_{w,x} & {}^F_w O_{w,x} \\ {}^F_w i_{w,y} & {}^F_w j_{w,y} & {}^F_w k_{w,y} & {}^F_w O_{w,y} \\ {}^F_w i_{w,z} & {}^F_w j_{w,z} & {}^F_w k_{w,z} & {}^F_w O_{w,z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^W_w M_x \\ {}^W_w M_y \\ {}^W_w M_z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

3.1.4 Modélisation des petits écarts

Dans la réalité, la position de la touche du stylet ne correspond pas exactement à sa position nominale car les articulations qui contrôlent les déplacements des chariots de la MMT sont affectés par des écarts cinématiques. À Chaque articulation est

associée un torseur d'écarts $\begin{Bmatrix} \delta \\ \varepsilon \end{Bmatrix}$, Figure 3-5.

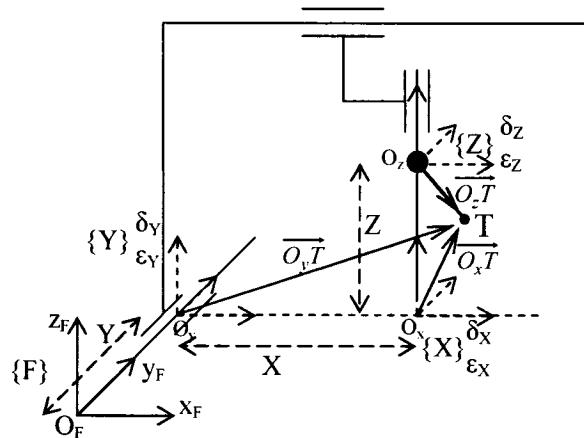


Figure 3-5 : Ecarts cinématiques liés aux articulations pour la MMT de topologie WFYXZT

- À l'articulation X est associé le torseur d'écarts $\begin{Bmatrix} \delta_X \\ \varepsilon_X \end{Bmatrix}$,

δ_X est composé des trois écarts linéaires, qui sont : $\delta_x(X)$, $\delta_y(X)$ et $\delta_z(X)$

ε_X est composé des trois écarts angulaires, qui sont : $\varepsilon_x(X)$, $\varepsilon_y(X)$ et $\varepsilon_z(X)$

Les six écarts associés à l'articulation X dépendent de la coordonnée articulaire :

$\delta_x(X_j)$: Écart d'échelle de l'articulation X à la coordonnée articulaire X_j

$\delta_y(X_j)$: Écart de rectitude de l'articulation X dans la direction y à la coordonnée articulaire X_j

$\delta_z(X_j)$: Écart de rectitude de l'articulation X dans la direction z à la coordonnée articulaire X_j

$\varepsilon_x(X_j)$: Roulis de l'articulation X autour de la direction x à la coordonnée articulaire X_j

$\varepsilon_y(X_j)$: Tangage de l'articulation X autour de la direction y à la coordonnée articulaire X_j

$\varepsilon_z(X_j)$: Lacet de l'articulation X autour de la direction z à la coordonnée articulaire X_j

- À l'articulation Y est associé le torseur d'écarts $\begin{Bmatrix} \delta_Y \\ \varepsilon_Y \end{Bmatrix}$

δ_Y est composé des trois écarts linéaires, qui sont : $\delta_x(Y)$, $\delta_y(Y)$ et $\delta_z(Y)$

ε_Y est composé des trois écarts angulaires, qui sont : $\varepsilon_x(Y)$, $\varepsilon_y(Y)$ et $\varepsilon_z(Y)$

- À l'articulation Z est associé le torseur d'écarts $\begin{Bmatrix} \delta_Z \\ \varepsilon_Z \end{Bmatrix}$

δ_Z est composé des trois écarts linéaires, qui sont : $\delta_x(Z)$, $\delta_y(Z)$ et $\delta_z(Z)$

ε_Z est composé des trois écarts angulaires, qui sont : $\varepsilon_x(Z)$, $\varepsilon_y(Z)$ et $\varepsilon_z(Z)$

Exemple d'illustration :

La Figure 3-6 représente un exemple de mouvement de l'articulation X affecté par des écarts cinématiques. Pendant son déplacement suivant l'axe X, le chariot qui est supposé être à la position nominale définie par le repère $\{N\}$, se trouve à sa position vraie (actuelle) définie par le repère $\{V\}$, et par conséquent la touche P ne se trouve pas à sa position nominal $\{F\}^F P^N$, mais plutôt à sa position vraie $\{F\}^F P^V$.

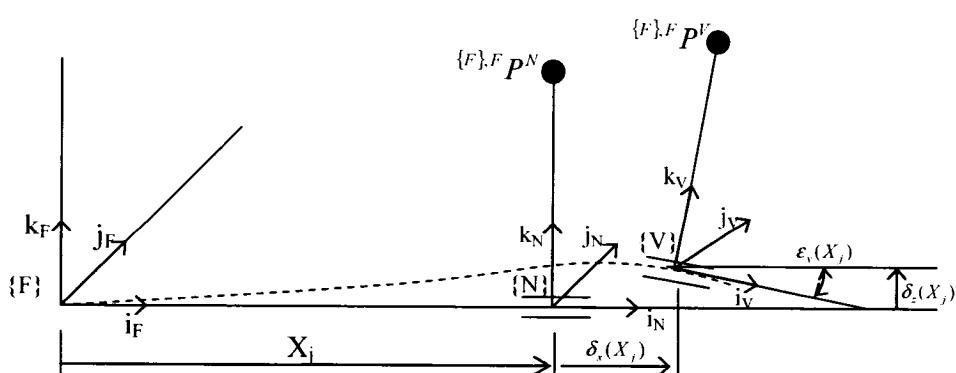


Figure 3-6 : Ecarts de mouvement de l'articulation X

Les écarts associés aux articulations se propagent dans les corps rigides, qui composent la structure de la MMT, et affectent la position de la touche du stylet. En résumé, les écarts associés aux articulations de la machine causent des effets sur la position de la touche du stylet

Principe cause effet dans un corps rigide [16] :

Soit A et B deux points liés par un corps rigide, Figure 3-7.

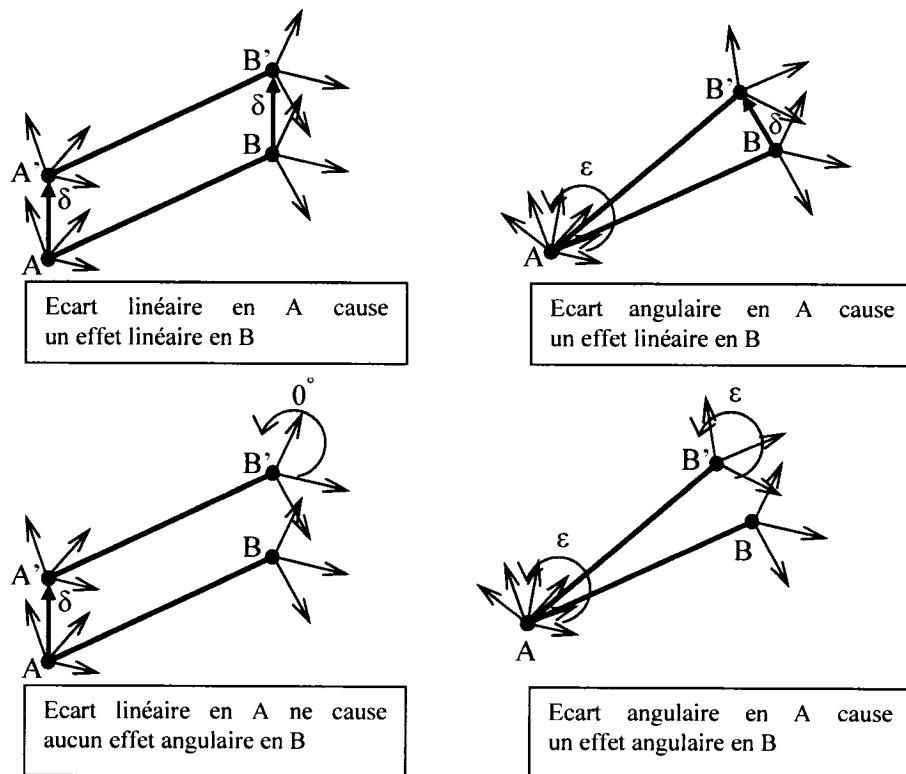


Figure 3-7 : Propagation des écarts cinématiques dans un corps rigide

Un écart angulaire en A a un effet de plus en plus considérable en B, si le point B est plus loin du point A, cet effet est quantifié par un produit vectoriel.

Exemple de quantification de l'effet d'un écart angulaire :

Soit une barre rigide AB, placée verticalement suivant l'axe k, Figure 3-8. Le point A subit un petit écart angulaire ε , suivant l'axe i, cet écart cause un petit déplacement

δ qui amène le point B au point B', ce déplacement est le résultat d'un produit vectoriel de la rotation ε_i par le vecteur \overrightarrow{AB} .

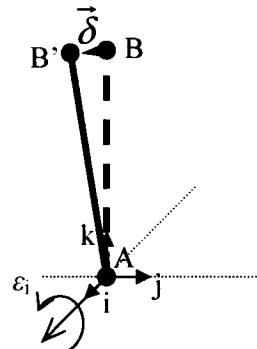


Figure 3-8 : Effet de bras de levier

L'expression de l'écart linéaire causé en B est

$$\vec{\delta} = \vec{\varepsilon}_i \wedge \overrightarrow{AB} \quad (3-11)$$

On remplace les expressions de $\vec{\varepsilon}_i$ et \overrightarrow{AB} par leurs décompositions dans l'expression (3-11)

$$\vec{\delta} = \begin{pmatrix} \varepsilon_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\varepsilon_i).AB \\ \cos(\varepsilon_i).AB \end{pmatrix} \quad (3-12)$$

$$\text{où } AB = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Après calcul du produit vectoriel on obtient

$$\vec{\delta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon_i.AB.\cos(\varepsilon_i) \\ -\varepsilon_i.AB.\sin(\varepsilon_i) \end{pmatrix} \quad (3-13)$$

Approximation de petits écarts :

$$\sin(\varepsilon_i) \approx \varepsilon_i$$

$$\cos(\varepsilon_i) \approx 1$$

$$\varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \approx 0$$

L'expression de l'écart linéaire causé en B est donc

$$\vec{\delta} \cong \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon_i \cdot AB \\ -\varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \cdot AB \end{pmatrix} \quad (3-14)$$

La composante du déplacement $\vec{\delta}$ suivant l'axe k est négligeable, seule la composante suivant l'axe j sera pris en compte, la décomposition du vecteur $\vec{\delta}$ est donc :

$$\vec{\delta} \cong \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon_i \cdot AB \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3-15)$$

Dans le cas général :

AB est un corps rigide, l'écart linéaire δ_A en A cause un écart linéaire, en B, égale à δ_B . L'écart angulaire ε en A cause un écart linéaire, en B, égale à $\varepsilon \wedge \overrightarrow{AB}$, Figure 3-9:

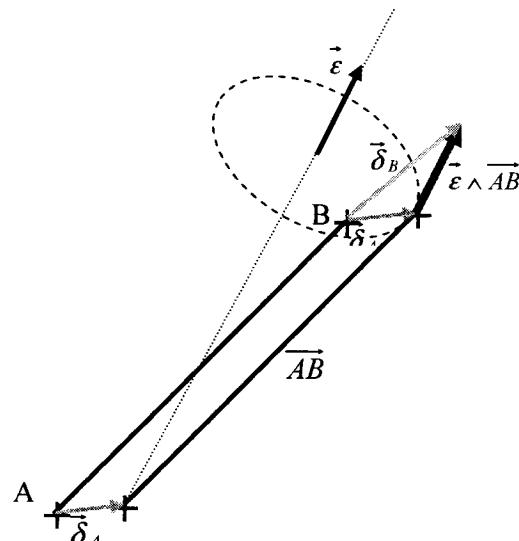


Figure 3-9 : Propagation des écarts dans un corps rigide

L'écart linéaire $\vec{\delta}_B$ résultant en B est :

$$\vec{\delta}_B = \vec{\delta}_A + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{AB} \quad (3-16)$$

3.1.5 Position vraie de la touche du stylet dans le cas d'une machine de topologie WFYXZT

Vu la structure serielle de la MMT, la position vraie de la touche du stylet T est la résultante des déplacement nominaux des chariots de la machine et d'une accumulation d'erreurs du repère fondation $\{F\}$ jusqu'au point cible (position de la touche du stylet). Les positions vraies des chariots sont décalées par rapport aux positions nominales. Pour chaque articulation, ce décalage est modélisé par trois translations et trois rotations. Les repères $\{Y'\}$, $\{X'\}$ et $\{Z'\}$ correspondent respectivement aux positions vraies des articulations Y, X et Z, Figure 3-10.

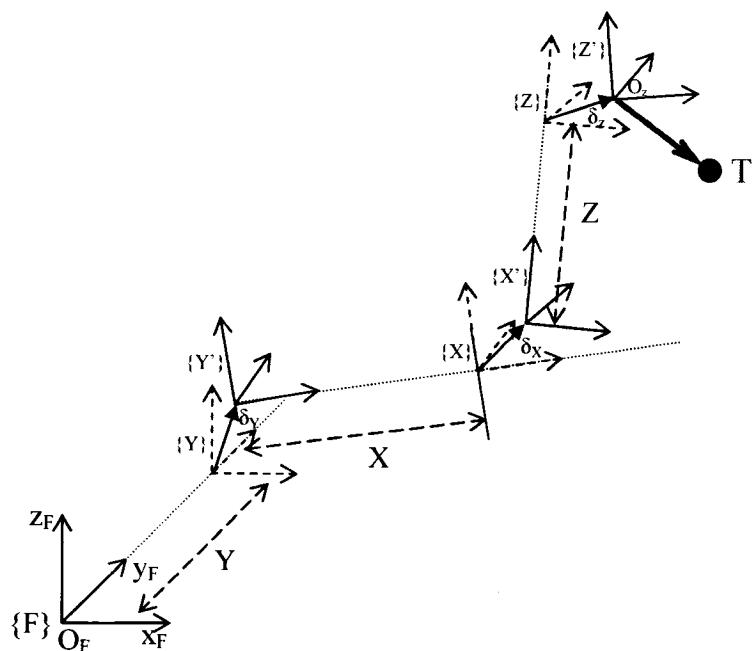


Figure 3-10 : Position vraie de la touche du stylet T pour une machine de topologie WFYXZT

3.1.5.1 Expression vectorielle de la position vraie de la touche du stylet

D'après la Figure 3-10, et selon la structure de la machine, les écarts associés à l'articulation Y affectent la position des articulations X, Z et de la touche T. Les écarts liés à l'articulation X affectent la position de l'articulation Z et de la touche T.

Les écarts liés à l'articulation Z affectent la position de la touche T. Pour les 3 articulations, chaque écart est représenté par une translation (3 écarts linéaires) suivie d'une rotation (trois écarts angulaires) qui amènent le repère $\{X\}$ à $\{X'\}$, $\{Y\}$ à $\{Y'\}$ et $\{Z\}$ à $\{Z'\}$.

L'expression de la position vraie de la touche du stylet par rapport au repère fondation $\{F\}$ est :

$$\{F\}^F T^V = \vec{Y} + {}^F_R[\vec{\delta}_Y + {}^Y_R[\vec{X} + {}^X_R[\vec{\delta}_X + {}^X_R[\vec{Z} + {}^Z_R[\vec{\delta}_Z + {}^Z_R \vec{O}_z T]]]]]] \quad (3-17)$$

Cette expression est inspirée de la référence [16], elle prend en compte l'ensemble des écarts linéaires et angulaires qui affectent la position de la touche du stylet dans le repère fondation $\{F\}$

où :

\vec{Y} , \vec{X} et \vec{Z} sont, respectivement, les translations nominales du centre O_z du système articulaire du palpeur, suivant l'axe Y, X et Z.

$\vec{\delta}_Y$: Vecteur d'écart résultant composé des trois écarts linéaires $\delta_x(Y)$, $\delta_y(Y)$ et $\delta_z(Y)$.

$\vec{\delta}_X$: Vecteur d'écart résultant composé des trois écarts linéaires $\delta_x(X)$, $\delta_y(X)$ et $\delta_z(X)$.

$\vec{\delta}_Z$: Vecteur d'écart résultant composé des trois écarts linéaires $\delta_x(Z)$, $\delta_y(Z)$ et $\delta_z(Z)$.

$\vec{O}_z T$ est un vecteur qui définit la position de la touche du stylet T par rapport à un repère local d'origine O_z et coparallèle à $\{F\}$.

F_R : est la matrice de rotation du repère $\{Y\}$ par rapport à $\{F\}$, cette rotation est égale à la matrice identité puisque les repères $\{Y\}$ et $\{F\}$ sont parallèles.

Y_R : est la matrice de rotation du repère $\{Y'\}$ par rapport à $\{Y\}$, cette rotation est exprimée en fonction des écarts angulaires $\varepsilon_x(Y)$, $\varepsilon_y(Y)$ et $\varepsilon_z(Y)$.

$${}^Y_R = Rot(\varepsilon_z(Y), z).Rot(\varepsilon_y(Y), y).Rot(\varepsilon_x(Y), x) \quad (3-18)$$

où

$$Rot(\varepsilon_z(Y), z) = \begin{bmatrix} \cos(\varepsilon_z(Y)) & -\sin(\varepsilon_z(Y)) & 0 \\ \sin(\varepsilon_z(Y)) & \cos(\varepsilon_z(Y)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rot(\varepsilon_y(Y), y) = \begin{bmatrix} \cos(\varepsilon_y(Y)) & 0 & \sin(\varepsilon_y(Y)) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varepsilon_y(Y)) & 0 & \cos(\varepsilon_y(Y)) \end{bmatrix}$$

$$Rot(\varepsilon_x(Y), x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varepsilon_x(Y)) & -\sin(\varepsilon_x(Y)) \\ 0 & \sin(\varepsilon_x(Y)) & \cos(\varepsilon_x(Y)) \end{bmatrix}$$

${}_X^Y R$: est la matrice de rotation du repère $\{Y'\}$ par rapport à $\{X\}$, cette rotation est égale à la matrice identité puisque le repère $\{Y'\}$ et $\{X\}$ sont parallèles.

${}_X^Y R$: est la matrice de rotation du repère $\{X'\}$ par rapport à $\{X\}$ cette rotation est exprimée en fonction des écarts angulaires $\varepsilon_x(X)$, $\varepsilon_y(X)$ et $\varepsilon_z(X)$.

$${}_X^Y R = Rot(\varepsilon_z(X), z).Rot(\varepsilon_y(X), y).Rot(\varepsilon_x(X), x) \quad (3-19)$$

où

$$Rot(\varepsilon_z(X), z) = \begin{bmatrix} \cos(\varepsilon_z(X)) & -\sin(\varepsilon_z(X)) & 0 \\ \sin(\varepsilon_z(X)) & \cos(\varepsilon_z(X)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rot(\varepsilon_y(X), y) = \begin{bmatrix} \cos(\varepsilon_y(X)) & 0 & \sin(\varepsilon_y(X)) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varepsilon_y(X)) & 0 & \cos(\varepsilon_y(X)) \end{bmatrix}$$

$$Rot(\varepsilon_x(X), x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varepsilon_x(X)) & -\sin(\varepsilon_x(X)) \\ 0 & \sin(\varepsilon_x(X)) & \cos(\varepsilon_x(X)) \end{bmatrix}$$

${}_Z^X R$: est la matrice de rotation du repère $\{Z\}$ par rapport à $\{X'\}$, cette rotation est égale à la matrice identité puisque le repère $\{Z\}$ et $\{X'\}$ sont parallèles.

${}_Z^X R$: est la matrice de rotation du repère $\{Z'\}$ par rapport à $\{Z\}$ cette rotation est exprimée en fonction des écarts angulaires $\varepsilon_x(Z)$, $\varepsilon_y(Z)$ et $\varepsilon_z(Z)$

$${}^Z_R = \text{Rot}(\varepsilon_z(Z), z) \cdot \text{Rot}(\varepsilon_y(Z), y) \cdot \text{Rot}(\varepsilon_x(Z), x) \quad (3-20)$$

où

$$\text{Rot}(\varepsilon_z(Z), z) = \begin{bmatrix} \cos(\varepsilon_z(Z)) & -\sin(\varepsilon_z(Z)) & 0 \\ \sin(\varepsilon_z(Z)) & \cos(\varepsilon_z(Z)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rot}(\varepsilon_y(Z), y) = \begin{bmatrix} \cos(\varepsilon_y(Z)) & 0 & \sin(\varepsilon_y(Z)) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varepsilon_y(Z)) & 0 & \cos(\varepsilon_y(Z)) \end{bmatrix}$$

$$\text{Rot}(\varepsilon_x(Z), x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varepsilon_x(Z)) & -\sin(\varepsilon_x(Z)) \\ 0 & \sin(\varepsilon_x(Z)) & \cos(\varepsilon_x(Z)) \end{bmatrix}$$

3.1.5.2 Expression de la position vraie de la touche du stylet en utilisant les matrices de transformations homogène

La position vraie de la touche du stylet peut être aussi exprimé en utilisant les matrices de transports, le passage d'un repère à un autre est représenté par une translation suivie d'une rotation, Figure 3-10, l'expression de la position vraie de la touche du stylet est :

$$\{F\}{}_FT^V = {}_Y^FT \cdot {}_Y^YT \cdot {}_X^YT \cdot {}_X^XT \cdot {}_Z^ZT \cdot {}_Z^ZT \cdot \{Z'\}{}_ZT \quad (3-21)$$

où

$\{F\}{}_FT^V$ est la position vraie de la touche du stylet par rapport au repère fondation $\{F\}$
 $\{Z'\}{}_ZT$ est la position de la touche du stylet T par rapport à un repère local d'origine O_z et nominalement coparallèle à $\{F\}$.

${}_Y^FT$ est la matrice de transformation homogène du repère $\{Y\}$ dans $\{F\}$

Les repères $\{Y\}$ et $\{F\}$ sont coparallèles

$${}^F_Y T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & Y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y_T est la matrice de transformation homogène du repère $\{Y'\}$ dans $\{Y\}$

Y_R est la matrice de rotation du repère $\{Y'\}$ par rapport à $\{Y\}$ (voir expression (3-18))

$${}^Y_T = \begin{bmatrix} {}^Y_R & \delta_x(Y) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

X_T est la matrice de transformation homogène du repère $\{X\}$ dans $\{Y'\}$

Les repères $\{X\}$ et $\{Y'\}$ sont coparallèles

$${}^X_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

X_T est la matrice de transformation homogène du repère $\{X'\}$ dans $\{X\}$

X_R est la matrice de rotation du repère $\{X'\}$ par rapport à $\{X\}$ (voir expression (3-19))

$${}^X_T = \begin{bmatrix} {}^X_R & \delta_x(X) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Z_T est la matrice de transformation homogène du repère $\{Z\}$ dans $\{X'\}$

Les repères $\{X'\}$ et $\{Z\}$ sont coparallèles

$${}_{\bar{z}}{}^x T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

${}_{\bar{z}}{}^x T$ est la matrice de transformation homogène du repère $\{Z'\}$ dans $\{Z\}$

${}_{\bar{z}}{}^z R$ est la matrice de rotation du repère $\{Z'\}$ par rapport à $\{Z\}$ (voir expression (3-20))

$${}_{\bar{z}}{}^z T = \begin{bmatrix} & & \delta_x(Z) \\ {}_{\bar{z}}{}^z R & & \delta_y(Z) \\ & & \delta_z(Z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.1.6 Erreur de position de la touche du stylet

L'erreur de position de la touche du stylet est l'écart linéaire résultant au point cible. Elle est calculée par la différence entre la position vraie et la position nominale de la touche du stylet :

$$\vec{e}_M = {}^{\{F\}} T^V - {}^{\{F\}} T^N \quad (3-22)$$

${}^{\{F\}} T^V$: Position vraie de la touche du stylet

${}^{\{F\}} T^N$: Position nominale de la touche du stylet

En utilisant une modélisation approximative directe pour petits écarts, nous pouvons bâtir l'expression de l'erreur volumétrique $\overrightarrow{e_M}$ de la position de la touche du stylet T.

Pour illustration, voir la Figure 3-5 à la page 30.

$$\vec{e}_M = \vec{\delta}_{Y/T} + \vec{\delta}_{X/T} + \vec{\delta}_{Z/T} \quad (3-23)$$

$\vec{\delta}_{Y/T}$: Ecart linéaire résultant, à la touche du stylet, dû à l'effet du torseur des écarts associés à l'articulation Y

$$\vec{\delta}_{Y/T} = \vec{\delta}_Y + \vec{\varepsilon}_Y \wedge \overrightarrow{O_y T}$$

$\vec{\delta}_{X/T}$: Ecart linéaire résultant, à la touche du stylet, dû à l'effet du torseur des écarts associés à l'articulation X

$$\vec{\delta}_{X/T} = \vec{\delta}_X + \vec{\varepsilon}_X \wedge \overrightarrow{O_x T}$$

$\vec{\delta}_{Z/T}$: Ecart linéaire résultant, à la touche du stylet, dû à l'effet du torseur des écarts associés à l'articulation Z

$$\vec{\delta}_{Z/T} = \vec{\delta}_Z + \vec{\varepsilon}_Z \wedge \overrightarrow{O_z T}$$

L'expression de l'erreur volumétrique $\overrightarrow{e_M}$ est

$$\vec{e}_M = \vec{\delta}_Y + \vec{\varepsilon}_Y \wedge \overrightarrow{O_y T} + \vec{\delta}_X + \vec{\varepsilon}_X \wedge \overrightarrow{O_x T} + \vec{\delta}_Z + \vec{\varepsilon}_Z \wedge \overrightarrow{O_z T} \quad (3-24)$$

Après décomposition des vecteurs $\overrightarrow{O_y T}$, $\overrightarrow{O_x T}$ et $\overrightarrow{O_z T}$ dans le repère fondation {F}

$$\vec{e}_M = \vec{\delta}_Y + \vec{\varepsilon}_Y \wedge \begin{pmatrix} X + t_x \\ t_y \\ Z + t_z \end{pmatrix} + \vec{\delta}_X + \vec{\varepsilon}_X \wedge \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ Z + t_z \end{pmatrix} + \vec{\delta}_Z + \vec{\varepsilon}_Z \wedge \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} \quad (3-25)$$

Nous remplaçons les écarts linéaires et les écarts angulaires par leurs expressions dans l'expression (3-25)

$$\vec{e}_M = \begin{pmatrix} \delta_x(Y) \\ \delta_y(Y) \\ \delta_z(Y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_x(Y) \\ \varepsilon_y(Y) \\ \varepsilon_z(Y) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X + t_x \\ t_y \\ Z + t_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_x(X) \\ \delta_y(X) \\ \delta_z(X) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_x(X) \\ \varepsilon_y(X) \\ \varepsilon_z(X) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ Z + t_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_x(Z) \\ \delta_y(Z) \\ \delta_z(Z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_x(Z) \\ \varepsilon_y(Z) \\ \varepsilon_z(Z) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}$$

Nous arrangeons les écarts linéaires et les écarts angulaires

$$\vec{e}_M = \begin{pmatrix} \delta_x(Y) \\ \delta_y(Y) \\ \delta_z(Y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_x(X) \\ \delta_y(X) \\ \delta_z(X) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_x(Z) \\ \delta_y(Z) \\ \delta_z(Z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_x(Y) \\ \varepsilon_y(Y) \\ \varepsilon_z(Y) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X + t_x \\ t_y \\ Z + t_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_x(X) \\ \varepsilon_y(X) \\ \varepsilon_z(X) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ Z + t_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_x(Z) \\ \varepsilon_y(Z) \\ \varepsilon_z(Z) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} \quad (3-26)$$

Les coordonnées nominales de la touche du stylet par rapport au repère fondation {F} sont :

$$\begin{aligned}x_t &= X + t_x \\y_t &= Y + t_y \\z_t &= Z + t_z\end{aligned}$$

On remplace ces coordonnées par leurs expressions dans l'expression (3-26) Nous avons donc

$$\vec{e}_M = \begin{pmatrix} \delta_x(Y) \\ \delta_y(Y) \\ \delta_z(Y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_x(X) \\ \delta_y(X) \\ \delta_z(X) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_x(Z) \\ \delta_y(Z) \\ \delta_z(Z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_x(Y) \\ \varepsilon_y(Y) \\ \varepsilon_z(Y) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_t \\ t_y \\ z_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_x(X) \\ \varepsilon_y(X) \\ \varepsilon_z(X) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ z_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_x(Z) \\ \varepsilon_y(Z) \\ \varepsilon_z(Z) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} \quad (3-27)$$

Le vecteur de l'erreur volumétrique en un point cible M dans le volume de mesure de la MMT de topologie WFYXZT est :

$$\vec{e}_M = \begin{pmatrix} \delta_x(X) + \delta_x(Y) + \delta_x(Z) + \varepsilon_y(Y).z_t - \varepsilon_z(Y).t_y + \varepsilon_y(X).z_t - \varepsilon_z(X).t_y + \varepsilon_y(Z).t_z - \varepsilon_z(Z).t_y \\ \delta_y(X) + \delta_y(Y) + \delta_y(Z) + \varepsilon_z(Y).x_t - \varepsilon_x(Y).z_t + t_x \varepsilon_z(X) - \varepsilon_x(X).z_t + \varepsilon_z(Z).t_x - \varepsilon_x(Z).t_z \\ \delta_z(X) + \delta_z(Y) + \delta_z(Z) + \varepsilon_x(Y).t_y - \varepsilon_y(Y).x_t + \varepsilon_x(X).t_y - \varepsilon_y(X).t_x + \varepsilon_x(Z).t_y - \varepsilon_y(Z).t_x \end{pmatrix} \quad (3-28)$$

D'après cette expression, on constate que la présence des écarts cinématique dans les articulations crée un champ d'erreurs dans le volume de mesure de la machine, c'est-à-dire un vecteur d'erreur \vec{e}_M est associé à chaque point M dans le volume de la machine

3.1.7 Erreurs de mesures sur le calibre étagé

3.1.7.1 Définition du calibre

Le calibre choisis dans cette étude est un calibre étagé composé de plusieurs cales étalons montées en série, les distances entre les cales du calibre sont supposées connues. La position du calibre dans le repère fondation $\{F\}$ est déterminée par un point initial M_1 sur le calibre et une direction exprimée par un vecteur unitaire \hat{n}_i qui définit l'orientation du calibre, le vecteur n_i est déterminé par ces coordonnées sphériques (α_i : Azimuth et β_i : Élevation), Figure 3-11.

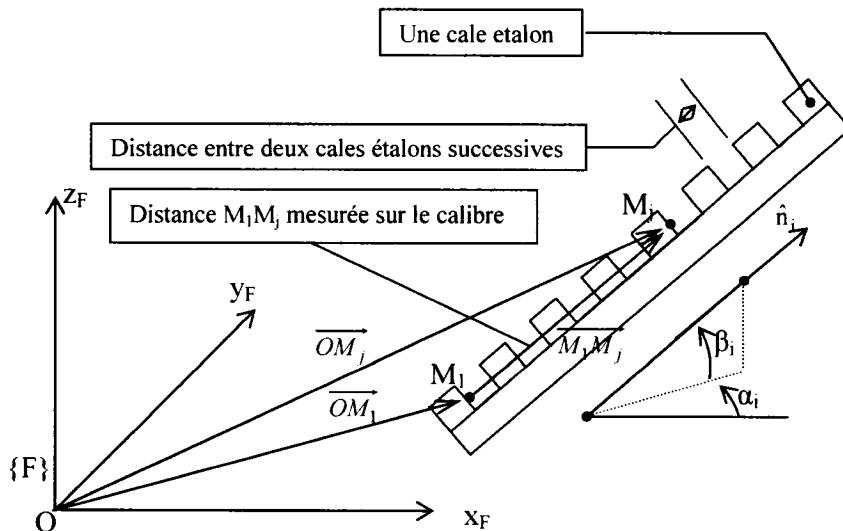


Figure 3-11 : Calibre étagé placé dans une direction \hat{n}_i dans le repère $\{F\}$

Pour pouvoir expliquer les erreurs mesurées sur le calibre étagé, il faut simuler la procédure de mesure réelle. Suivant l'approche de mesure de P&WC, les mesures sont effectuées d'une façon unidirectionnelle tout au long du calibre étagé et suivant six positions correspondantes aux petites diagonales dans les trois plans : XY, XZ et YZ. La procédure de mesures est expliquée en détail dans le chapitre 2 de ce mémoire.

Étant donné les coordonnées du point initial M_1 : $x_{t1,i}$, $y_{t1,i}$ et $z_{t1,i}$ et les distances nominales à mesurer sur le calibre étagé “ M_1M_j ”, nous pouvons connaître les coordonnées nominales de tous les points touches M_j sur le calibre étagé, et ce, pour les six positions de mesure.

La décomposition du vecteur \hat{n}_i dans le repère $\{F\}$ est:

$$\vec{n}_i = \begin{pmatrix} \cos(\beta_i) \cos(\alpha_i) \\ \cos(\beta_i) \sin(\alpha_i) \\ \sin(\beta_i) \end{pmatrix} \quad (3-29)$$

Le point touche M_j sur le calibre est déterminé par l'expression vectorielle

$$\overrightarrow{OM_j} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_j}$$

Après décomposition des vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{M_1M_j}$ nous avons

$$\overrightarrow{OM_j} = \begin{pmatrix} x_{n_i,j} \\ y_{n_i,j} \\ z_{n_i,j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_1M_j \cdot \cos(\beta_i) \cdot \cos(\alpha_i) \\ M_1M_j \cdot \cos(\beta_i) \cdot \sin(\alpha_i) \\ M_1M_j \cdot \sin(\beta_i) \end{pmatrix} \quad (3-30)$$

où $M_1M_j = \|\overrightarrow{M_1M_j}\|$

Pour simplifier les expressions mathématiques par la suite, on pose :

$$\begin{aligned} cc_i &= \cos(\beta_i) \cdot \cos(\alpha_i) \\ cs_i &= \cos(\beta_i) \cdot \sin(\alpha_i) \\ s_i &= \sin(\beta_i) \end{aligned}$$

3.1.8 Expression générale des erreurs mesurées sur un calibre étagé

Dans cette section, l'expression analytique générale expliquant l'erreur de mesure d'une distance entre le point M_1 et le point M_j d'un calibre étagé positionné, suivant la direction n_i , dans le volume d'une MMT de topologie WFYXZT sera développée.

Au point M_j du calibre

L'erreur volumétrique en un point M_j appartient au calibre étagé, quand ce dernier est positionné suivant la direction n_i est :

$$\begin{aligned} \vec{e}_{M_{j,i}} &= \begin{pmatrix} \delta_x(X_{j,i}) + \delta_x(Y_{j,i}) + \delta_x(Z_{j,i}) + \epsilon_x(Y_{j,i})z_{y,i} - \epsilon_z(Y_{j,i})t_x + \epsilon_x(X_{j,i})z_{y,i} - \epsilon_z(X_{j,i})t_x + \epsilon_x(Z_{j,i})t_z - \epsilon_z(Z_{j,i})t_y \\ \delta_y(X_{j,i}) + \delta_y(Y_{j,i}) + \delta_y(Z_{j,i}) + \epsilon_x(Y_{j,i})x_{y,i} - \epsilon_x(Y_{j,i})z_y + t_x \epsilon_z(X_{j,i}) - \epsilon_x(X_{j,i})z_{y,i} + \epsilon_z(Z_{j,i})t_x - \epsilon_x(Z_{j,i})t_z \\ \delta_z(X_{j,i}) + \delta_z(Y_{j,i}) + \delta_z(Z_{j,i}) + \epsilon_x(Y_{j,i})t_y - \epsilon_z(Y_{j,i})x_{y,i} + \epsilon_x(X_{j,i})t_y - \epsilon_y(X_{j,i})t_x + \epsilon_x(Z_{j,i})t_y - \epsilon_y(Z_{j,i})t_x \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3-31)$$

L'expression matricielle de cette erreur volumétrique est :

$$\begin{aligned}
\vec{e}_{M_j} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{y,i} & -t_y & 1 & 0 & 0 & 0 & z_{y,i} & -t_y & 1 & 0 & 0 & 0 & t_z & -t_y \\ 0 & 1 & 0 & -z_{y,i} & 0 & t_x & 0 & 1 & 0 & -z_{y,i} & 0 & x_{y,i} & 0 & 1 & 0 & -t_z & 0 & t_x \\ 0 & 0 & 1 & t_y & -t_x & 0 & 0 & 0 & 1 & t_y & -x_{y,i} & 0 & 0 & 0 & 1 & t_y & -t_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x(X_{j,i}) \\ \delta_y(X_{j,i}) \\ \delta_z(X_{j,i}) \\ \epsilon_x(X_{j,i}) \\ \epsilon_y(X_{j,i}) \\ \epsilon_z(X_{j,i}) \\ \delta_x(Y_{j,i}) \\ \delta_y(Y_{j,i}) \\ \delta_z(Y_{j,i}) \\ \epsilon_x(Y_{j,i}) \\ \epsilon_y(Y_{j,i}) \\ \epsilon_z(Y_{j,i}) \\ \delta_x(Z_{j,i}) \\ \delta_y(Z_{j,i}) \\ \delta_z(Z_{j,i}) \\ \epsilon_x(Z_{j,i}) \\ \epsilon_y(Z_{j,i}) \\ \epsilon_z(Z_{j,i}) \end{bmatrix} & (3-32) \\
& \quad (3x18) \quad (18x1)
\end{aligned}$$

On pose

$$J_{j,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{y,i} & -t_y & 1 & 0 & 0 & 0 & z_{y,i} & -t_y & 1 & 0 & 0 & 0 & t_z & -t_y \\ 0 & 1 & 0 & -z_{y,i} & 0 & t_x & 0 & 1 & 0 & -z_{y,i} & 0 & x_{y,i} & 0 & 1 & 0 & -t_z & 0 & t_x \\ 0 & 0 & 1 & t_y & -t_x & 0 & 0 & 0 & 1 & t_y & -x_{y,i} & 0 & 0 & 0 & 1 & t_y & -t_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3-33) \\
(3x18)$$

Nous avons alors :

$$\vec{e}_{M_{j,i}} = J_{j,i} \cdot \delta V_{j,i} \quad (3-34)$$

Au point initial M₁

En appliquant la relation (3-34), l'erreur volumétrique au point initial M₁ appartenant au calibre étagé, quand ce dernier est positionné suivant la direction n_i est:

$$\vec{e}_{M_{1,i}} = J_{1,i} \cdot \delta V_{1,i} \quad (3-35)$$

Extension de Vandermonde

Pour généraliser la modélisation des écarts de la machine à mesurer tridimensionnelle, nous avons modélisé chaque écart cinématique articulaire par un polynôme de degré 3, chaque polynôme aura donc 4 coefficients, les erreurs de mesure seront donc sensibles aux coefficients des polynômes. Pour un modèle complet, les erreurs mesurées sur le calibre étagé dépendent de 72 coefficients (72 =

18 x 4) ; 18 est le nombre d'écarts cinématiques, 4 est le nombre de coefficients de chaque polynôme.

$\delta V_{j,i}$ est la matrice colonne composée des écarts cinématiques. Chaque écart est modélisé par un polynôme de degré 3. Les variables $X_{j,i}$, $Y_{j,i}$ et $Z_{j,i}$ sont les coordonnées articulaires correspondants aux positions des chariots de la machine quand la touche du stylet est au point M_j et quand le calibre étagé est positionné suivant la direction n_i .

$$\delta V_{j,i} = \begin{bmatrix} \delta_x(X_{j,i}) \\ \delta_y(X_{j,i}) \\ \delta_z(X_{j,i}) \\ \epsilon_x(X_{j,i}) \\ \epsilon_y(X_{j,i}) \\ \epsilon_z(X_{j,i}) \\ \delta_x(Y_{j,i}) \\ \delta_y(Y_{j,i}) \\ \delta_z(Y_{j,i}) \\ \epsilon_x(Y_{j,i}) \\ \epsilon_y(Y_{j,i}) \\ \epsilon_z(Y_{j,i}) \\ \delta_x(Z_{j,i}) \\ \delta_y(Z_{j,i}) \\ \delta_z(Z_{j,i}) \\ \epsilon_x(Z_{j,i}) \\ \epsilon_y(Z_{j,i}) \\ \epsilon_z(Z_{j,i}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{x,X,0} + \delta_{x,X,1} \cdot X_{j,i} + \delta_{x,X,2} \cdot (X_{j,i})^2 + \delta_{x,X,3} \cdot (X_{j,i})^3 \\ \delta_{y,X,0} + \delta_{y,X,1} \cdot X_{j,i} + \delta_{y,X,2} \cdot (X_{j,i})^2 + \delta_{y,X,3} \cdot (X_{j,i})^3 \\ \delta_{z,X,0} + \delta_{z,X,1} \cdot X_{j,i} + \delta_{z,X,2} \cdot (X_{j,i})^2 + \delta_{z,X,3} \cdot (X_{j,i})^3 \\ \epsilon_{x,X,0} + \epsilon_{x,X,1} \cdot X_{j,i} + \epsilon_{x,X,2} \cdot (X_{j,i})^2 + \epsilon_{x,X,3} \cdot (X_{j,i})^3 \\ \epsilon_{y,X,0} + \epsilon_{y,X,1} \cdot X_{j,i} + \epsilon_{y,X,2} \cdot (X_{j,i})^2 + \epsilon_{y,X,3} \cdot (X_{j,i})^3 \\ \epsilon_{z,X,0} + \epsilon_{z,X,1} \cdot X_{j,i} + \epsilon_{z,X,2} \cdot (X_{j,i})^2 + \epsilon_{z,X,3} \cdot (X_{j,i})^3 \\ \delta_{x,Y,0} + \delta_{x,Y,1} \cdot Y_{j,i} + \delta_{x,Y,2} \cdot (Y_{j,i})^2 + \delta_{x,Y,3} \cdot (Y_{j,i})^3 \\ \delta_{y,Y,0} + \delta_{y,Y,1} \cdot Y_{j,i} + \delta_{y,Y,2} \cdot (Y_{j,i})^2 + \delta_{y,Y,3} \cdot (Y_{j,i})^3 \\ \delta_{z,Y,0} + \delta_{z,Y,1} \cdot Y_{j,i} + \delta_{z,Y,2} \cdot (Y_{j,i})^2 + \delta_{z,Y,3} \cdot (Y_{j,i})^3 \\ \epsilon_{x,Y,0} + \epsilon_{x,Y,1} \cdot Y_{j,i} + \epsilon_{x,Y,2} \cdot (Y_{j,i})^2 + \epsilon_{x,Y,3} \cdot (Y_{j,i})^3 \\ \epsilon_{y,Y,0} + \epsilon_{y,Y,1} \cdot Y_{j,i} + \epsilon_{y,Y,2} \cdot (Y_{j,i})^2 + \epsilon_{y,Y,3} \cdot (Y_{j,i})^3 \\ \epsilon_{z,Y,0} + \epsilon_{z,Y,1} \cdot Y_{j,i} + \epsilon_{z,Y,2} \cdot (Y_{j,i})^2 + \epsilon_{z,Y,3} \cdot (Y_{j,i})^3 \\ \delta_{x,Z,0} + \delta_{x,Z,1} \cdot Z_{j,i} + \delta_{x,Z,2} \cdot (Z_{j,i})^2 + \delta_{x,Z,3} \cdot (Z_{j,i})^3 \\ \delta_{y,Z,0} + \delta_{y,Z,1} \cdot Z_{j,i} + \delta_{y,Z,2} \cdot (Z_{j,i})^2 + \delta_{y,Z,3} \cdot (Z_{j,i})^3 \\ \delta_{z,Z,0} + \delta_{z,Z,1} \cdot Z_{j,i} + \delta_{z,Z,2} \cdot (Z_{j,i})^2 + \delta_{z,Z,3} \cdot (Z_{j,i})^3 \\ \epsilon_{x,Z,0} + \epsilon_{x,Z,1} \cdot Z_{j,i} + \epsilon_{x,Z,2} \cdot (Z_{j,i})^2 + \epsilon_{x,Z,3} \cdot (Z_{j,i})^3 \\ \epsilon_{y,Z,0} + \epsilon_{y,Z,1} \cdot Z_{j,i} + \epsilon_{y,Z,2} \cdot (Z_{j,i})^2 + \epsilon_{y,Z,3} \cdot (Z_{j,i})^3 \\ \epsilon_{z,Z,0} + \epsilon_{z,Z,1} \cdot Z_{j,i} + \epsilon_{z,Z,2} \cdot (Z_{j,i})^2 + \epsilon_{z,Z,3} \cdot (Z_{j,i})^3 \end{bmatrix} \quad (3-36)$$

Pour simplifier l'expression de la matrice $\delta V_{j,i}$, on pose

$$[X] = [1 \quad X_{j,i} \quad (X_{j,i})^2 \quad (X_{j,i})^3] ; \quad [Y] = [1 \quad Y_{j,i} \quad (Y_{j,i})^2 \quad (Y_{j,i})^3] ; \quad [Z] = [1 \quad Z_{j,i} \quad (Z_{j,i})^2 \quad (Z_{j,i})^3] ;$$

$$[0] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$[\delta_{x,X}] = \begin{bmatrix} \delta_{x,X,0} \\ \delta_{x,X,1} \\ \delta_{x,X,2} \\ \delta_{x,X,3} \end{bmatrix} ; \quad [\delta_{y,X}] = \begin{bmatrix} \delta_{y,X,0} \\ \delta_{y,X,1} \\ \delta_{y,X,2} \\ \delta_{y,X,3} \end{bmatrix} ; \quad [\delta_{z,X}] = \begin{bmatrix} \delta_{z,X,0} \\ \delta_{z,X,1} \\ \delta_{z,X,2} \\ \delta_{z,X,3} \end{bmatrix} ; \quad [\epsilon_{x,X}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{x,X,0} \\ \epsilon_{x,X,1} \\ \epsilon_{x,X,2} \\ \epsilon_{x,X,3} \end{bmatrix} ; \quad [\epsilon_{y,X}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{y,X,0} \\ \epsilon_{y,X,1} \\ \epsilon_{y,X,2} \\ \epsilon_{y,X,3} \end{bmatrix} ;$$

$$[\epsilon_{z,X}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{z,X,0} \\ \epsilon_{z,X,1} \\ \epsilon_{z,X,2} \\ \epsilon_{z,X,3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
[\delta_{x,Y}] &= \begin{bmatrix} \delta_{x,Y,0} \\ \delta_{x,Y,1} \\ \delta_{x,Y,2} \\ \delta_{x,Y,3} \end{bmatrix}; \quad [\delta_{y,Y}] = \begin{bmatrix} \delta_{x,Y,0} \\ \delta_{y,Y,1} \\ \delta_{y,Y,2} \\ \delta_{y,Y,3} \end{bmatrix}; \quad [\delta_{z,Y}] = \begin{bmatrix} \delta_{x,Y,0} \\ \delta_{z,Y,1} \\ \delta_{z,Y,2} \\ \delta_{z,Y,3} \end{bmatrix}; \quad [\varepsilon_{x,Y}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x,Y,0} \\ \varepsilon_{x,Y,1} \\ \varepsilon_{x,Y,2} \\ \varepsilon_{x,Y,3} \end{bmatrix}; \quad [\varepsilon_{y,Y}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{y,Y,0} \\ \varepsilon_{y,Y,1} \\ \varepsilon_{y,Y,2} \\ \varepsilon_{y,Y,3} \end{bmatrix}; \\
[\varepsilon_{z,Y}] &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{z,Y,0} \\ \varepsilon_{z,Y,1} \\ \varepsilon_{z,Y,2} \\ \varepsilon_{z,Y,3} \end{bmatrix} \\
\\
[\delta_{x,Z}] &= \begin{bmatrix} \delta_{x,Z,0} \\ \delta_{x,Z,1} \\ \delta_{x,Z,2} \\ \delta_{x,Z,3} \end{bmatrix}; \quad [\delta_{y,Z}] = \begin{bmatrix} \delta_{x,Z,0} \\ \delta_{y,Z,1} \\ \delta_{y,Z,2} \\ \delta_{y,Z,3} \end{bmatrix}; \quad [\delta_{z,Z}] = \begin{bmatrix} \delta_{x,Z,0} \\ \delta_{z,Z,1} \\ \delta_{z,Z,2} \\ \delta_{z,Z,3} \end{bmatrix}; \quad [\varepsilon_{x,Z}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x,Z,0} \\ \varepsilon_{x,Z,1} \\ \varepsilon_{x,Z,2} \\ \varepsilon_{x,Z,3} \end{bmatrix}; \quad [\varepsilon_{y,Z}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{y,Z,0} \\ \varepsilon_{y,Z,1} \\ \varepsilon_{y,Z,2} \\ \varepsilon_{y,Z,3} \end{bmatrix}; \\
[\varepsilon_{z,Z}] &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{z,Z,0} \\ \varepsilon_{z,Z,1} \\ \varepsilon_{z,Z,2} \\ \varepsilon_{z,Z,3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

On peut écrire donc

$$\delta v_{j,i} = \begin{bmatrix} \delta_{x,X,0} + \delta_{x,X,1}X_{j,i} + \delta_{x,X,2}(X_{j,i})^2 + \delta_{x,X,3}(X_{j,i})^3 \\ \delta_{y,X,0} + \delta_{y,X,1}X_{j,i} + \delta_{y,X,2}(X_{j,i})^2 + \delta_{y,X,3}(X_{j,i})^3 \\ \delta_{z,X,0} + \delta_{z,X,1}X_{j,i} + \delta_{z,X,2}(X_{j,i})^2 + \delta_{z,X,3}(X_{j,i})^3 \\ \varepsilon_{x,X,0} + \varepsilon_{x,X,1}X_{j,i} + \varepsilon_{x,X,2}(X_{j,i})^2 + \varepsilon_{x,X,3}(X_{j,i})^3 \\ \varepsilon_{y,X,0} + \varepsilon_{y,X,1}X_{j,i} + \varepsilon_{y,X,2}(X_{j,i})^2 + \varepsilon_{y,X,3}(X_{j,i})^3 \\ \varepsilon_{z,X,0} + \varepsilon_{z,X,1}X_{j,i} + \varepsilon_{z,X,2}(X_{j,i})^2 + \varepsilon_{z,X,3}(X_{j,i})^3 \\ \delta_{x,Y,0} + \delta_{x,Y,1}Y_{j,i} + \delta_{x,Y,2}(Y_{j,i})^2 + \delta_{x,Y,3}(Y_{j,i})^3 \\ \delta_{y,Y,0} + \delta_{y,Y,1}Y_{j,i} + \delta_{y,Y,2}(Y_{j,i})^2 + \delta_{y,Y,3}(Y_{j,i})^3 \\ \delta_{z,Y,0} + \delta_{z,Y,1}Y_{j,i} + \delta_{z,Y,2}(Y_{j,i})^2 + \delta_{z,Y,3}(Y_{j,i})^3 \\ \varepsilon_{x,Y,0} + \varepsilon_{x,Y,1}Y_{j,i} + \varepsilon_{x,Y,2}(Y_{j,i})^2 + \varepsilon_{x,Y,3}(Y_{j,i})^3 \\ \varepsilon_{y,Y,0} + \varepsilon_{y,Y,1}Y_{j,i} + \varepsilon_{y,Y,2}(Y_{j,i})^2 + \varepsilon_{y,Y,3}(Y_{j,i})^3 \\ \varepsilon_{z,Y,0} + \varepsilon_{z,Y,1}Y_{j,i} + \varepsilon_{z,Y,2}(Y_{j,i})^2 + \varepsilon_{z,Y,3}(Y_{j,i})^3 \\ \delta_{x,Z,0} + \delta_{x,Z,1}Z_{j,i} + \delta_{x,Z,2}(Z_{j,i})^2 + \delta_{x,Z,3}(Z_{j,i})^3 \\ \delta_{y,Z,0} + \delta_{y,Z,1}Z_{j,i} + \delta_{y,Z,2}(Z_{j,i})^2 + \delta_{y,Z,3}(Z_{j,i})^3 \\ \delta_{z,Z,0} + \delta_{z,Z,1}Z_{j,i} + \delta_{z,Z,2}(Z_{j,i})^2 + \delta_{z,Z,3}(Z_{j,i})^3 \\ \varepsilon_{x,Z,0} + \varepsilon_{x,Z,1}Z_{j,i} + \varepsilon_{x,Z,2}(Z_{j,i})^2 + \varepsilon_{x,Z,3}(Z_{j,i})^3 \\ \varepsilon_{y,Z,0} + \varepsilon_{y,Z,1}Z_{j,i} + \varepsilon_{y,Z,2}(Z_{j,i})^2 + \varepsilon_{y,Z,3}(Z_{j,i})^3 \\ \varepsilon_{z,Z,0} + \varepsilon_{z,Z,1}Z_{j,i} + \varepsilon_{z,Z,2}(Z_{j,i})^2 + \varepsilon_{z,Z,3}(Z_{j,i})^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [X][\delta_{x,X}] \\ [X][\delta_{y,X}] \\ [X][\delta_{z,X}] \\ [X][\varepsilon_{x,X}] \\ [X][\varepsilon_{y,X}] \\ [X][\varepsilon_{z,X}] \\ [Y][\delta_{x,Y}] \\ [Y][\delta_{y,Y}] \\ [Y][\delta_{z,Y}] \\ [Y][\varepsilon_{x,Y}] \\ [Y][\varepsilon_{y,Y}] \\ [Y][\varepsilon_{z,Y}] \\ [Z][\delta_{x,Z}] \\ [Z][\delta_{y,Z}] \\ [Z][\delta_{z,Z}] \\ [Z][\varepsilon_{x,Z}] \\ [Z][\varepsilon_{y,Z}] \\ [Z][\varepsilon_{z,Z}] \end{bmatrix}$$

La décomposition de la matrice colonne des écarts en une matrice de Vandermonde $MVDM_{j,i}$ et une matrice colonne δv composée des 72 coefficients des polynômes prends la forme suivante :

$$\delta v_{j,j} = \begin{bmatrix} [X] & [0] & [0] & \dots & & & & [0] & [0] & [\delta_{x,x}] \\ [0] & [X] & [0] & \dots & & & & [0] & [0] & [\delta_{y,x}] \\ [0] & [0] & [X] & [0] & \dots & & & [0] & [0] & [\delta_{z,x}] \\ [0] & [0] & [0] & [X] & [0] & \dots & & [0] & [0] & [\epsilon_{x,X}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [X] & [0] & \dots & [0] & [0] & [\epsilon_{y,X}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [X] & [0] & \dots & [0] & [0] & [\epsilon_{z,X}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [X] & [0] & \dots & [0] & [0] & [\delta_{x,Y}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [Y] & [0] & \dots & [0] & [0] & [\delta_{y,Y}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [Y] & [0] & \dots & [0] & [0] & [\delta_{z,Y}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [Y] & [0] & \dots & [0] & [0] & [\epsilon_{x,Y}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [Y] & [0] & \dots & [0] & [0] & [\epsilon_{y,Y}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [Z] & [0] & \dots & [0] & [0] & [\delta_{x,Z}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [Z] & [0] & \dots & [0] & [0] & [\delta_{y,Z}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [Z] & [0] & \dots & [0] & [0] & [\delta_{z,Z}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [Z] & [0] & \dots & [0] & [0] & [\epsilon_{x,Z}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [Z] & [0] & \dots & [0] & [0] & [\epsilon_{y,Z}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [Z] & [0] & \dots & [0] & [0] & [\epsilon_{z,Z}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [Z] & [0] & \dots & [0] & [0] & [\epsilon_{x,Z}] \end{bmatrix} \quad (18 \times 72) \quad (72 \times 1)$$

$$\delta v_{j,i} = MVDM_{j,i} \cdot \delta v \quad (3-37)$$

Erreur de mesure sur le calibre étagé entre le point initial M_1 et le point M_2

L'erreur $E_{1j,i}$ mesurée expérimentalement entre le point M_1 et le point M_j du calibre étagé est la projection de la différence entre l'erreur volumétrique calculée au point M_j et celui calculée au point M_1 :

$$E_{1j,i} = (\vec{e}_{M_{1j}} - \vec{e}_{M_{1i}}) \cdot \vec{n}_i \quad (3-38)$$

En remplaçant les expressions (3-34) et (3-35) dans l'expression (3-38), on aura :

$$E_{1i,i} = (J_{1i,i} \cdot \delta V_{1i,i} - J_{1i,i} \cdot \delta V_{1i,i})^T \vec{n}_i \quad (3-39)$$

En appliquant l'extension de vandermonde pour le vecteur des écarts cinématiques au point M_i et au point M_1 , nous avons :

$$\delta v_{j,i} = MVDM_{j,i} \cdot \delta v \quad (3-40)$$

$$\delta v_{1,i} = MVDM_{1,i} \cdot \delta v \quad (3-41)$$

On remplace les expressions (3-40) et (3-41) dans l'expression (3-39), on a l'expression de l'erreur mesurée expérimentalement entre le point M_1 et le point M_j , quand le calibre est positionné suivant la direction n_i , est :

$$E_{1j,i} = (J_{j,i} \cdot MVDM_j \cdot \delta v - J_{1,i} \cdot MVDM_1 \cdot \delta v)^T \cdot \vec{n}_i \quad (3-42)$$

$$E_{1j,i} = (J_{j,i} \cdot MVDM_j \cdot \delta v)^T \cdot \vec{n}_i - (J_{1,i} \cdot MVDM_1 \cdot \delta v)^T \cdot \vec{n}_i \quad (3-43)$$

$$E_{1j,i} = \left(\vec{n}_i^T \cdot (J_{j,i} \cdot MVDM_j \cdot \delta v) \right)^T - \left(\vec{n}_i^T \cdot (J_{1,i} \cdot MVDM_1 \cdot \delta v) \right)^T \quad (3-44)$$

$$E_{1j,i} = \left(\vec{n}_i^T \cdot J_{j,i} \cdot MVDM_j \cdot \delta v \right)^T - \left(\vec{n}_i^T \cdot J_{1,i} \cdot MVDM_1 \cdot \delta v \right)^T \quad (3-45)$$

Le terme $E_{j1,i}$ est une matrice (1x1) donc $E_{j1,i} = (E_{j1,i})^T$

Nous avons donc

$$E_{1j,i} = \vec{n}_i^T \cdot J_{j,i} \cdot MVDM_j \cdot \delta v - \vec{n}_i^T \cdot J_{1,i} \cdot MVDM_1 \cdot \delta v \quad (3-46)$$

$$E_{1j,i} = (J_{j,i}^T \cdot \vec{n}_i)^T \cdot MVDM_j \cdot \delta v - (J_{1,i}^T \cdot \vec{n}_i)^T \cdot MVDM_1 \cdot \delta v \quad (3-47)$$

D'après l'expression (3-47), **l'expression générale** de l'erreur mesurée entre le point M_1 et le point M_j du calibre étagé suivant une direction n_i est :

$$E_{1j,i} = \left[(J_{j,i}^T \cdot \vec{n}_i)^T \cdot MVDM_j - (J_{1,i}^T \cdot \vec{n}_i)^T \cdot MVDM_1 \right] \cdot \delta v \quad (3-48)$$

On pose

$$J_{1j,i} = \left[(J_{j,i}^T \cdot \vec{n}_i)^T \cdot MVDM_j - (J_{1,i}^T \cdot \vec{n}_i)^T \cdot MVDM_1 \right] \quad (3-49)$$

On a alors

$$E_{1j,i} = J_{1j,i} \cdot \delta v \quad (3-50)$$

$J_{1j,i}$: Une ligne, de la matrice d'identification, correspondante au mesure du $j^{\text{ème}}$ point de la $i^{\text{ème}}$ position du calibre étagé, cette matrice dépend de la topologie de machines.

δv : Vecteur composé des 72 coefficients des polynômes modélisants les écarts cinématique

3.1.9 Ecarts de perpendicularité et gains d'échelles

Si on ne prend en considération que les écarts de perpendicularité entre les axes de la machine et les gains d'échelles alors l'erreur volumétrique approximative en un point M_j quand le calibre étagé est positionné dans la direction n_i est

$$\vec{e}_{M_{i,i}} = \begin{pmatrix} \delta_x(X_{j,i}) - \varepsilon_z(Y_{j,i})t_y + \varepsilon_y(X_{j,i})z_{t,i} \\ \delta_y(Y_{j,i}) + \varepsilon_z(Y_{j,i})x_{t,i} - \varepsilon_x(X_{j,i})z_{t,x,i} \\ \delta_z(Z_{j,i}) + \varepsilon_x(X_{j,i})t_y - \varepsilon_y(X_{j,i})t_x \end{pmatrix} \quad (3-51)$$

On décompose l'expression (3-51) en une expression matricielle

$$\vec{e}_{M_{i,i}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{y,i} & -t_y \\ 0 & 1 & 0 & -z_{y,i} & 0 & x_{y,i} \\ 0 & 0 & 1 & t_y & -t_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x(X_{j,i}) \\ \delta_y(Y_{j,i}) \\ \delta_z(Z_{j,i}) \\ \varepsilon_x(X_{j,i}) \\ \varepsilon_y(X_{j,i}) \\ \varepsilon_z(Y_{j,i}) \end{bmatrix} \quad (3-52)$$

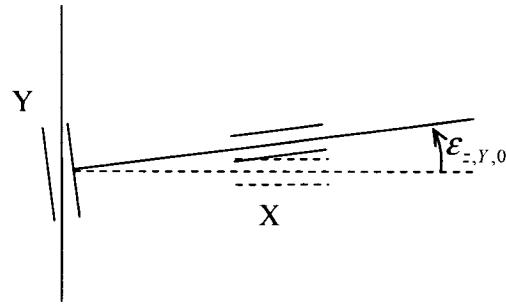
On peut alors écrire

$$\vec{e}_{M_{i,i}} = J_{j,i} \cdot \delta v_{j,i} \quad (3-53)$$

Notons que les écarts de perpendicularités sont modélisés par les écarts angulaires $\varepsilon_x(X)$, $\varepsilon_y(Y)$ et $\varepsilon_z(Z)$ et les écarts d'échelle par les termes linéaires des polynômes de degré 1 qui modélisent les écarts $\delta_x(X)$, $\delta_y(Y)$ et $\delta_z(Z)$

Exemple d'illustration

L'écart de perpendicularité entre les articulations X et Y est représenté par un terme constant d'écart de lacet $\varepsilon_z(Y) = \varepsilon_{z,Y,0} + \varepsilon_{z,Y,1}Y + \varepsilon_{z,Y,2}Y^2 + \varepsilon_{z,Y,3}Y^3$



Le vecteur $\delta v_{j,i}$ d'écart calculés au point M_j est

$$\delta v_{j,i} = \begin{bmatrix} \delta_x(X_{j,i}) \\ \delta_y(Y_{j,i}) \\ \delta_z(Z_{j,i}) \\ \varepsilon_x(X_{j,i}) \\ \varepsilon_y(Y_{j,i}) \\ \varepsilon_z(Y_{j,i}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{x,X,1}X_{j,i} \\ \delta_{y,Y,1}Y_{j,i} \\ \delta_{z,Z,1}Z_{j,i} \\ \varepsilon_{x,X,0} \\ \varepsilon_{y,X,0} \\ \varepsilon_{z,Y,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{j,i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{j,i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{j,i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x,X,1} \\ \delta_{y,Y,1} \\ \delta_{z,Z,1} \\ \varepsilon_{x,X,0} \\ \varepsilon_{y,X,0} \\ \varepsilon_{z,Y,0} \end{bmatrix} \quad (3-54)$$

D'après l'expression (3-52), Le vecteur $\delta v_{1,i}$ d'écart calculés au point initial M_1 est

$$\delta v_{1,i} = \begin{bmatrix} \delta_x(X_1) \\ \delta_y(Y_1) \\ \delta_z(Z_1) \\ \varepsilon_x(X_1) \\ \varepsilon_y(Y_1) \\ \varepsilon_z(Y_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{x,X,1}X_{1,i} \\ \delta_{y,Y,1}Y_{1,i} \\ \delta_{z,Z,1}Z_{1,i} \\ \varepsilon_{x,X,0} \\ \varepsilon_{y,X,0} \\ \varepsilon_{z,Y,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{1,i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{1,i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x,X,1} \\ \delta_{y,Y,1} \\ \delta_{z,Z,1} \\ \varepsilon_{x,X,0} \\ \varepsilon_{y,X,0} \\ \varepsilon_{z,Y,0} \end{bmatrix} \quad (3-55)$$

L'expression décomposée de l'erreur volumétrique en un point M_j est donc :

$$\vec{e}_{M_{j,i}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{y,j} & -t_y \\ 0 & 1 & 0 & -z_{y,j} & 0 & x_{y,j} \\ 0 & 0 & 1 & t_y & -t_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{j,i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{j,i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{j,i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x,X,1} \\ \delta_{y,Y,1} \\ \delta_{z,Z,1} \\ \varepsilon_{x,X,0} \\ \varepsilon_{y,X,0} \\ \varepsilon_{z,Y,0} \end{bmatrix} \quad (3-56)$$

On écrit finalement

$$\vec{e}_{M_{j,i}} = J_{j,i} \cdot MVD M_{j,i} \cdot \delta v. \quad (3-57)$$

On applique la formule générale, donnée par l'expression (3-48), de l'erreur mesurée entre le point M_1 et le point M_j du calibre, quand ce dernier est positionné suivant la direction n_i

$$E_{1j,i} = \left[\left(J_{j,i}^T \vec{n}_i \right)^T . MVDM_j - \left(J_{1,i}^T \vec{n}_i \right)^T . MVDM_1 \right] . \delta \nu \quad (3-58)$$

où

$$J_{j,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{y,i} & -t_y \\ 0 & 1 & 0 & -z_{y,i} & 0 & x_{y,i} \\ 0 & 0 & 1 & t_y & -t_x & 0 \end{bmatrix}, \quad MVDM_j = \begin{bmatrix} X_{j,i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{j,i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{j,i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n}_i = \begin{bmatrix} cc_i \\ cs_i \\ s_i \end{bmatrix}$$

On remplace les termes de l'équation (3-58) par leurs expressions, on trouve

$$E_{1j,i} = \left[\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{y,i} & -t_y \\ 0 & 1 & 0 & -z_{y,i} & 0 & x_{y,i} \\ 0 & 0 & 1 & t_y & -t_x & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} cc_i \\ cs_i \\ s_i \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} X_{j,i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{j,i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{j,i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right. \\ \left. - \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{t1,i} & -t_y \\ 0 & 1 & 0 & -z_{t1,i} & 0 & x_{t1,i} \\ 0 & 0 & 1 & t_y & -t_x & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} cc_i \\ cs_i \\ s_i \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} X_{1,i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{1,i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{1,i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \delta \nu \quad (3-59)$$

On obtient après calcul

$$E_{1j,i} = \left[(X_{j,i} - X_{1,i}) . cc_i - (Y_{j,i} - Y_{1,i}) . cs_i - (Z_{j,i} - Z_{1,i}) . s_i \right. \\ \left. - (z_{t1,i} - z_{y,i}) . cs_i - (z_{y,i} - z_{t1,i}) . cc_i - (x_{y,i} - x_{t1,i}) . cs_i \right] \begin{bmatrix} \delta_{x,X,1} \\ \delta_{y,Y,1} \\ \delta_{z,Z,1} \\ \varepsilon_{x,X,0} \\ \varepsilon_{y,Y,0} \\ \varepsilon_{z,Z,0} \end{bmatrix} \quad (3-60)$$

On change l'ordre des variables dans le vecteur des écarts de l'équation (3-60), on retrouve l'expression de l'erreur mesurée entre le point M_1 et le point M_j du calibre étagé quand ce dernier est positionnée dans la direction n_i

$$E_{1,j,i} = \begin{bmatrix} (x_{j,i} - x_{1,i}) \cdot cs_i & (z_{j,i} - z_{1,i}) \cdot cc_i & (z_{1,i} - z_{j,i}) \cdot cs_i \\ (X_{j,i} - X_{1,i}) \cdot cc_i & (Y_{j,i} - Y_{1,i}) \cdot cs_i & (Z_{j,i} - Z_{1,i}) \cdot si_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{z,Y,0} \\ \varepsilon_{y,X,0} \\ \varepsilon_{x,X,0} \\ \delta_{x,X,1} \\ \delta_{y,Y,1} \\ \delta_{z,Z,1} \end{bmatrix} \quad (3-61)$$

où

$\varepsilon_{z,Y,0}$: Ecart de perpendicularité entre les deux axes X et Y

$\varepsilon_{y,X,0}$: Ecart de perpendicularité entre les deux axes X et Z

$\varepsilon_{x,X,0}$: Ecart de perpendicularité entre les deux axes Y et Z

$\delta_{x,X,0}$: Gain d'échelle suivant l'axe X

$\delta_{y,Y,0}$: Gain d'échelle suivant l'axe Y

$\delta_{z,Z,0}$: Gain d'échelle suivant l'axe Z

Suivant l'approche de mesures de P&WC, on mesure le calibre étagé suivant 6 configurations,

$i = 1, 6$. Dans chaque configuration, on mesure N_i distances sur le calibre étagé, $j = 1, N_i$

La forme générale du système d'équations permettant de déterminer les écarts de perpendicularité et les gains d'échelle est présentée dans l'annexe C de ce mémoire.

3.2 Machine de topologie WFXYZT

3.2.1 Schéma cinématique d'une MMT de topologie WFXYZT

La Figure 3-12 montre un schéma cinématique d'une machine MMT de topologie WFXYZT. La pièce à mesurer est placée dans le volume de mesure de la machine et portée par la fondation $\{F\}$.

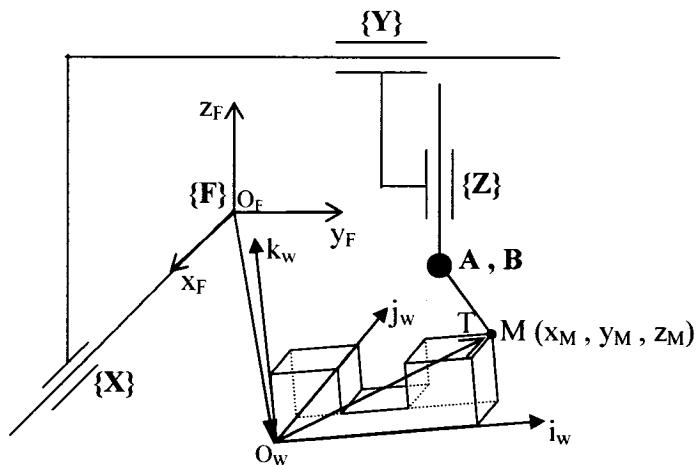


Figure 3-12 : Schéma cinématique de la machine MMT de topologie WFXYZT

Pour connaître la position de la pièce dans le système de coordonnées de la machine, on associe à la pièce un repère $\{W\}$ d'origine O_w . La machine a une structure serielle, l'articulation $\{X\}$ est porté par la fondation $\{F\}$, l'articulation $\{Y\}$ est porté par l'articulation $\{X\}$, l'articulation $\{Z\}$ est porté par l'articulation $\{Y\}$, la touche du stylet T est portée par l'articulation $\{Z\}$. Les deux articulations A et B définissent la position de la touche du stylet T par rapport à un repère local monté sur l'axe Z et coparallèle au repère fondation $\{F\}$.

3.2.2 Position nominale de la touche du stylet dans le système de coordonnées de la MMT de topologie WFXYZT

La Figure 3-13 illustre le système de coordonnées articulaires (X , Y , Z) d'une machine de topologie WFXYZT. Ces coordonnées sont définies par rapport au repère fondation $\{F\}$ et calculées à partir des déplacements des chariots de la

machine. Les coordonnées de la touche du stylet T (x_t, y_t, z_t) sont définies par les coordonnées articulaires, la longueur L_s et les deux angles A et B , Figure 3-14 et Figure 3-14 .

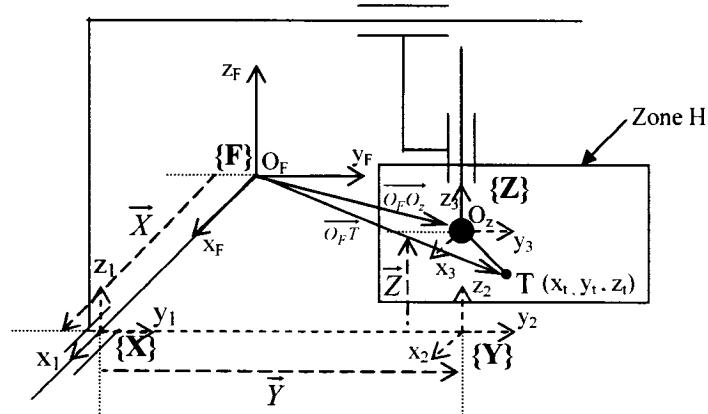


Figure 3-13 : Position de la touche du stylet par rapport au repère fondation $\{F\}$ -
Machine de topologie WFXYZT -

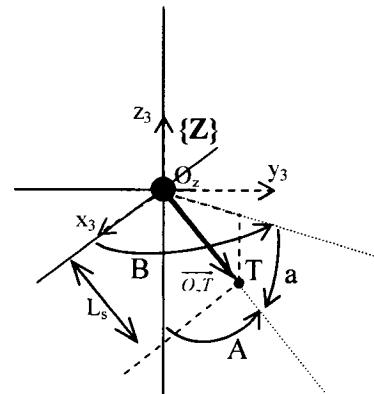


Figure 3-14 : Orientation du système de palpation (Zoom de la zone H du Figure 3-13)

L'expression vectorielle de la position nominale de la touche du stylet, par rapport au repère fondation $\{F\}$ est :

$$\overrightarrow{O_F T} = \overrightarrow{O_F O_z} + \overrightarrow{O_z T} \quad (3-62)$$

Après décomposition du vecteur $\overrightarrow{O_F O_z}$

$$\overrightarrow{O_F T} = \overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z} + \overrightarrow{O_z T} \quad (3-63)$$

Les coordonnées de la touche du stylet sont

$$x_t = X + t_x$$

$$y_t = Y + t_y$$

$$z_t = Z + t_z$$

où t_x , t_y et t_z sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{O_z T}$ projetées dans le repère fondation $\{F\}$. Le repère $\{Z\}$ est nominalement coparallèle au repère fondation $\{F\}$, Figure 3-14

$$\begin{aligned} t_x &= L_s \cdot \cos(a) \cdot \cos(B) = L_s \cdot \cos(A - \frac{\pi}{2}) \cdot \cos(B) \\ t_y &= L_s \cdot \cos(a) \cdot \sin(B) = L_s \cdot \cos(A - \frac{\pi}{2}) \cdot \sin(B) \\ t_z &= L_s \cdot \sin(a) = L_s \cdot \sin(A - \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (3-64)$$

a et b sont respectivement les deux angles, l'azimuth et l'élévation, qui définissent la position de la touche du stylet dans le repère $\{Z\}$

A et B sont les angles qui définissent la position de la touche du stylet dans le repère $\{Z\}$, et qui sont visibles pour l'opérateur de la machine, ($A + a = \pi/2$ et $B + b = \pi/2$), figure 3-3.

La position nominale de la touche du stylet, $\{F\}^F T^N$, observée et projetée dans le repère fondation $\{F\}$, est alors :

$$\{F\}^F T^N = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X + L_s \cdot \cos(A - \frac{\pi}{2}) \cdot \cos(B) \\ Y + L_s \cdot \cos(A - \frac{\pi}{2}) \cdot \sin(B) \\ Z + L_s \cdot \sin(A - \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \quad (3-65)$$

3.2.3 Position vraie de la touche du stylet T dans le système de coordonnées d'une MMT de topologie WFXYZT

Vu la structure sérielle de la MMT, la position vraie de la touche du stylet T est la résultante des déplacement nominaux des chariots de la machine et d'une accumulation d'erreurs du repère fondation $\{F\}$ jusqu'au point cible (position de la

touche du stylet). Les positions vraies des chariots sont décalées par rapport aux positions nominales. Pour chaque articulation, ce décalage est modélisé par trois translations et trois rotations. Les repères $\{Y'\}$, $\{X'\}$ et $\{Z'\}$ correspondent respectivement aux positions vraies des articulations Y, X et Z, Figure 3-15.

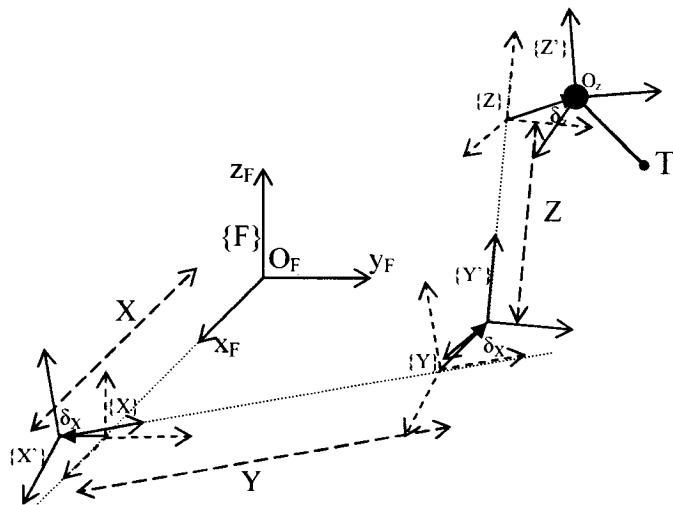


Figure 3-15 : Position vraie de la touche du stylet T dans le système de coordonnées d'une MMT de topologie WFXYZT

L'expression vectorielle de la position vraie de la touche du stylet par rapport au repère fondation est :

$$\{F\}^F T^V = \vec{X} + {}_X^F R. [\vec{\delta}_X + {}_{X'}^X R. [\vec{Y} + {}_Y^{X'} R. [\vec{\delta}_Y + {}_Y^Y R. [\vec{Z} + {}_Z^Y R. [\vec{\delta}_Z + {}_Z^Z R. \vec{O}_z T]]]]]] \quad (3-66)$$

où

$\vec{\delta}_X$: Vecteur d'écart résultant composé des trois écarts linéaires $\delta_x(X)$, $\delta_y(X)$ et $\delta_z(X)$.

$\vec{\delta}_Y$: Vecteur d'écart résultant composé des trois écarts linéaires $\delta_x(Y)$, $\delta_y(Y)$ et $\delta_z(Y)$.

$\vec{\delta}_Z$: Vecteur d'écart résultant composé des trois écarts linéaires $\delta_x(Z)$, $\delta_y(Z)$ et $\delta_z(Z)$.

$\overrightarrow{O_z T}$: est un vecteur qui définit la position de la touche du stylet T par rapport à un repère local d'origine O_z et nominalement coparallèle à $\{F\}$.

${}_X^F R$: est la rotation du repère $\{X\}$ par rapport à $\{F\}$, cette rotation est égale à la matrice identité puisque le repère $\{X\}$ et $\{F\}$ sont coparallèles.

${}_X^{X'} R$: est la rotation du repère $\{X'\}$ par rapport à $\{X\}$, cette rotation est exprimée en fonction des écarts angulaires $\varepsilon_x(X)$, $\varepsilon_y(X)$ et $\varepsilon_z(X)$.

${}_Y^{X'} R$: est la rotation du repère $\{Y\}$ par rapport à $\{X'\}$, cette rotation est égale à la matrice identité puisque le repère $\{Y\}$ et $\{X'\}$ sont coparallèles.

${}_Y^Y R$: est la rotation du repère $\{Y'\}$ par rapport à $\{Y\}$, cette rotation est exprimée en fonction des écarts angulaires $\varepsilon_x(Y)$, $\varepsilon_y(Y)$ et $\varepsilon_z(Y)$.

${}_Z^Y R$: est la rotation du repère $\{Z\}$ par rapport à $\{Y'\}$, cette rotation est égale à la matrice identité puisque le repère $\{Z\}$ et $\{Y'\}$ sont coparallèles.

${}_Z^Z R$: est la rotation du repère $\{Z'\}$ par rapport à $\{Z\}$, cette rotation est exprimée en fonction des écarts angulaires $\varepsilon_x(Z)$, $\varepsilon_y(Z)$ et $\varepsilon_z(Z)$.

3.2.4 Erreur de position de la touche du stylet

L'erreur de position de la touche du stylet est l'écart linéaire résultant, elle est calculée par la différence entre la position nominale et la position vraie de la touche du stylet :

$$\overrightarrow{e_M} = {}^{(F),F}T^V - {}^{(F),F}T^N \quad (3-67)$$

${}^{(F),F}T^V$: Position vraie de la touche du stylet

${}^{(F),F}T^N$: Position nominale de la touche du stylet

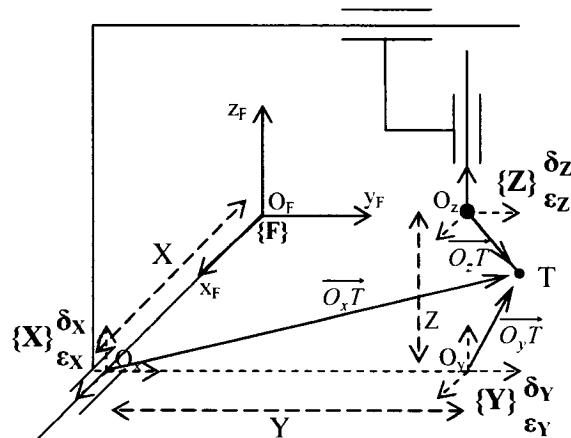


Figure 3-16 : Ecarts cinématiques associés aux articulations

En utilisant une modélisation approximative directe pour petits écarts, nous pouvons bâtir l'expression de l'erreur volumétrique $\overrightarrow{e_M}$ de la position de la touche T, Figure 3-16.

$$\overrightarrow{e_M} = \overrightarrow{\delta_{X/T}} + \overrightarrow{\delta_{Y/T}} + \overrightarrow{\delta_{Z/T}} \quad (3-68)$$

$\overrightarrow{\delta_{X/T}}$: Ecart linéaire résultant, au point T, dû à l'effet du torseur des écarts associés à l'articulation X

$$\overrightarrow{\delta_{X/T}} = \overrightarrow{\delta_X} + \overrightarrow{\varepsilon_X} \wedge \overrightarrow{O_x T}$$

$\overrightarrow{\delta_{Y/T}}$: Ecart linéaire résultant, au point T, dû à l'effet du torseur des écarts associés à l'articulation Y

$$\overrightarrow{\delta_{Y/T}} = \overrightarrow{\delta_Y} + \overrightarrow{\varepsilon_Y} \wedge \overrightarrow{O_y T}$$

$\overrightarrow{\delta_{Z/T}}$: Ecart linéaire résultant, au point T, dû à l'effet du torseur des écarts associés à l'articulation Z

$$\overrightarrow{\delta_{Z/T}} = \overrightarrow{\delta_Z} + \overrightarrow{\varepsilon_Z} \wedge \overrightarrow{O_z T}$$

L'expression de l'erreur volumétrique $\overrightarrow{e_M}$ est :

$$\overrightarrow{e_M} = \overrightarrow{\delta_X} + \overrightarrow{\varepsilon_X} \wedge \overrightarrow{O_x T} + \overrightarrow{\delta_Y} + \overrightarrow{\varepsilon_Y} \wedge \overrightarrow{O_y T} + \overrightarrow{\delta_Z} + \overrightarrow{\varepsilon_Z} \wedge \overrightarrow{O_z T} \quad (3-69)$$

Après décomposition des vecteurs $\overrightarrow{O_x T}$, $\overrightarrow{O_y T}$ et $\overrightarrow{O_z T}$ dans le repère fondation $\{F\}$ on a :

$$\vec{e}_M = \vec{\delta}_X + \vec{\varepsilon}_X \wedge \begin{pmatrix} t_x \\ Y + t_y \\ Z + t_z \end{pmatrix} + \vec{\delta}_Y + \vec{\varepsilon}_Y \wedge \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ Z + t_z \end{pmatrix} + \vec{\delta}_Z + \vec{\varepsilon}_Z \wedge \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} \quad (3-70)$$

Nous remplaçons les écarts linéaires et les écarts angulaires par leurs expressions :

$$\vec{e}_M = \begin{pmatrix} \delta_x(X) \\ \delta_y(X) \\ \delta_z(X) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_x(X) \\ \varepsilon_y(X) \\ \varepsilon_z(X) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} t_x \\ Y + t_y \\ Z + t_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_x(Y) \\ \delta_y(Y) \\ \delta_z(Y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_x(Y) \\ \varepsilon_y(Y) \\ \varepsilon_z(Y) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ Z + t_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_x(Z) \\ \delta_y(Z) \\ \delta_z(Z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_x(Z) \\ \varepsilon_y(Z) \\ \varepsilon_z(Z) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} \quad (3-71)$$

Les coordonnées nominales de la touche du stylet par rapport au repère fondation $\{F\}$ sont :

$$\begin{aligned} x_t &= X + t_x \\ y_t &= Y + t_y \\ z_t &= Z + t_z \end{aligned}$$

On remplace ces coordonnées dans l'expression (3-71)

$$\vec{e}_M = \begin{pmatrix} \delta_x(X) \\ \delta_y(X) \\ \delta_z(X) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_x(X) \\ \varepsilon_y(X) \\ \varepsilon_z(X) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} t_x \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_x(Y) \\ \delta_y(Y) \\ \delta_z(Y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_x(Y) \\ \varepsilon_y(Y) \\ \varepsilon_z(Y) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ z_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_x(Z) \\ \delta_y(Z) \\ \delta_z(Z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_x(Z) \\ \varepsilon_y(Z) \\ \varepsilon_z(Z) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} \quad (3-72)$$

Le vecteur de l'erreur volumétrique en un point M dans le volume de mesure de la MMT de topologie WFXYZT est donc

$$\vec{e}_M = \begin{pmatrix} \delta_x(X) + \delta_x(Y) + \delta_x(Z) + z_t \cdot \varepsilon_y(X) - y_t \cdot \varepsilon_z(X) + z_t \cdot \varepsilon_y(Y) - t_y \cdot \varepsilon_z(Y) + t_z \cdot \varepsilon_y(Z) - t_y \cdot \varepsilon_z(Z) \\ \delta_y(X) + \delta_y(Y) + \delta_y(Z) + t_x \cdot \varepsilon_z(X) - z_t \cdot \varepsilon_x(X) + t_x \cdot \varepsilon_z(Y) - z_t \cdot \varepsilon_x(Y) + t_x \cdot \varepsilon_z(Z) - t_z \cdot \varepsilon_x(Z) \\ \delta_z(X) + \delta_z(Y) + \delta_z(Z) + y_t \cdot \varepsilon_x(X) - t_x \cdot \varepsilon_y(X) + t_y \cdot \varepsilon_x(Y) - t_x \cdot \varepsilon_y(Y) + t_y \cdot \varepsilon_x(Z) - t_x \cdot \varepsilon_y(Z) \end{pmatrix} \quad (3-73)$$

La présence des écarts cinématique dans les axes articulaire crée un champ d'erreurs dans le volume de mesure de la machine, c'est-à-dire un vecteur d'erreur $\overrightarrow{e_M}$ est associé à chaque point M dans le volume de la machine.

3.2.5 Erreurs de mesures sur un calibre étagé positionné dans le volume d'une MMT de topologie WFXYZT

3.2.5.1 Position du calibre étagé dans le volume de la machine

La Figure 3-17 illustre un calibre étagé positionné dans le volume de la MMT et orienté suivant la direction définie par le vecteur unitaire \hat{n}_i .

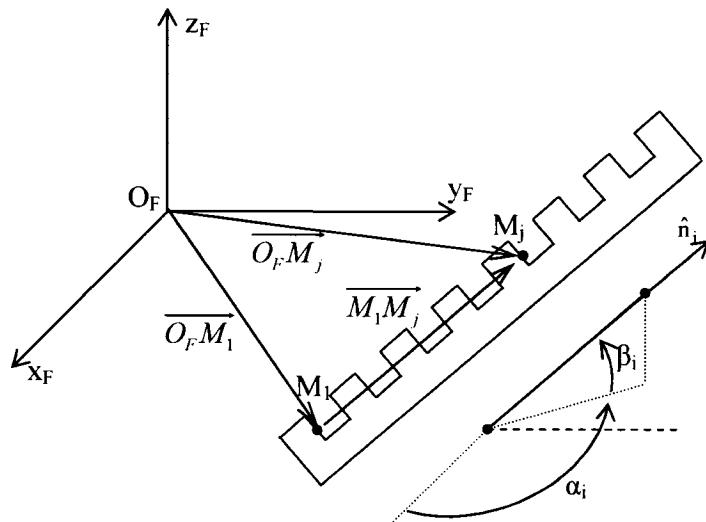


Figure 3-17 : Illustration du calibre étagé placé dans le volume de mesure de la machine

Étant donné les coordonnées du point initial M_1 : $x_{t1,i}$, $y_{t1,i}$ et $z_{t1,i}$ et la distance nominale à mesurer sur le calibre étagé “ M_1M_j ”, nous pouvons connaître les coordonnées nominales du point touche M_j sur le calibre étagé, et ce, pour les positions de mesure.

La décomposition du vecteur n_i dans le repère $\{F\}$ est :

$$\vec{n}_i = \begin{pmatrix} \cos(\beta_i) \cdot \cos(\alpha_i) \\ \cos(\beta_i) \cdot \sin(\alpha_i) \\ \sin(\beta_i) \end{pmatrix}$$

Le point touche M_j sur le calibre est déterminé par l'expression vectorielle

L'expression vectorielle qui définit la position du point M_j du calibre étagé en fonction de la position du point initial M_1 et la direction n_i du calibre étagé est :

$$\overrightarrow{O_F M_j} = \overrightarrow{O_F M_1} + \overrightarrow{M_1 M_j} \quad (3-74)$$

Après décomposition des vecteurs $\overrightarrow{O_F M_1}$ et $\overrightarrow{M_1 M_j}$ nous avons

$$\overrightarrow{O_F M_j} = \begin{pmatrix} x_{i1,i} \\ y_{i1,i} \\ z_{i1,i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_1 M_j \cdot \cos(\beta_i) \cdot \cos(\alpha_i) \\ M_1 M_j \cdot \cos(\beta_i) \cdot \sin(\alpha_i) \\ M_1 M_j \cdot \sin(\beta_i) \end{pmatrix} \quad (3-75)$$

$$\text{où } M_1 M_j = \left\| \overrightarrow{M_1 M_j} \right\|$$

3.2.5.2 Modélisation des erreurs mesurées sur le calibre étagé

L'erreur volumétrique en un point M_j , quand le calibre étagé est positionné suivant la direction n_i dans le volume de la machine de topologie WFXYZT, est :

$$\vec{e}_{M_{j,i}} = \begin{pmatrix} \delta_x(X_{j,i}) + \delta_x(Y_{j,i}) + \delta_x(Z_{j,i}) + z_{y,i} \epsilon_y(X_{j,i}) - y_{y,i} \epsilon_z(X_{j,i}) + z_{y,i} \epsilon_y(Y_{j,i}) - t_y \epsilon_z(Y_{j,i}) + t_z \epsilon_y(Z_{j,i}) - t_y \epsilon_z(Z_{j,i}) \\ \delta_y(X_{j,i}) + \delta_y(Y_{j,i}) + \delta_y(Z_{j,i}) + t_x \epsilon_z(X_{j,i}) - z_{y,i} \epsilon_x(X_{j,i}) + t_x \epsilon_z(Y_{j,i}) - z_{y,i} \epsilon_x(Y_{j,i}) + t_x \epsilon_z(Z_{j,i}) - t_z \epsilon_x(Z_{j,i}) \\ \delta_z(X_{j,i}) + \delta_z(Y_{j,i}) + \delta_z(Z_{j,i}) + y_{y,i} \epsilon_x(X_{j,i}) - t_x \epsilon_y(X_{j,i}) + t_y \epsilon_x(Y_{j,i}) - t_x \epsilon_y(Y_{j,i}) + t_y \epsilon_x(Z_{j,i}) - t_x \epsilon_y(Z_{j,i}) \end{pmatrix} \quad (3-76)$$

Expression matricielle de l'erreur volumétrique $\vec{e}_{M_{j,i}}$ est donc

$$\begin{aligned}
\vec{e}_{M_{j,i}} = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{y,j} & -y_{y,j} & 1 & 0 & 0 & 0 & z_{y,j} & -t_y & 1 & 0 & 0 & 0 & t_z & -t_y \\ 0 & 1 & 0 & -z_{y,j} & 0 & t_x & 0 & 1 & 0 & -z_{y,j} & 0 & t_x & 0 & 1 & 0 & -t_z & 0 & t_x \\ 0 & 0 & 1 & y_{y,j} & -t_x & 0 & 0 & 0 & 1 & t_y & -t_x & 0 & 0 & 0 & 1 & t_y & -t_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x(X_{j,i}) \\ \delta_y(X_{j,i}) \\ \delta_z(X_{j,i}) \\ \varepsilon_x(X_{j,i}) \\ \varepsilon_y(X_{j,i}) \\ \varepsilon_z(X_{j,i}) \\ \delta_x(Y_{j,i}) \\ \delta_y(Y_{j,i}) \\ \delta_z(Y_{j,i}) \\ \varepsilon_x(Y_{j,i}) \\ \varepsilon_y(Y_{j,i}) \\ \varepsilon_z(Y_{j,i}) \\ \delta_x(Z_{j,i}) \\ \delta_y(Z_{j,i}) \\ \delta_z(Z_{j,i}) \\ \varepsilon_x(Z_{j,i}) \\ \varepsilon_y(Z_{j,i}) \\ \varepsilon_z(Z_{j,i}) \end{bmatrix} \\
& (3-77)
\end{aligned}$$

On peut écrire d'après l'expression (3-77)

$$\vec{e}_{M_{j,i}} = J_{j,i} \cdot \delta V_{j,i} \quad (3-78)$$

où

$$J_{j,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{y,j} & -y_{y,j} & 1 & 0 & 0 & 0 & z_{y,j} & -t_y & 1 & 0 & 0 & 0 & t_z & -t_y \\ 0 & 1 & 0 & -z_{y,j} & 0 & t_x & 0 & 1 & 0 & -z_{y,j} & 0 & t_x & 0 & 1 & 0 & -t_z & 0 & t_x \\ 0 & 0 & 1 & y_{y,j} & -t_x & 0 & 0 & 0 & 1 & t_y & -t_x & 0 & 0 & 0 & 1 & t_y & -t_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3-79)$$

$\delta V_{j,i}$: Vecteur composé des écarts cinématiques de la machine

D'après l'équation (3-91), l'erreur volumétrique au point initial M_1 est :

$$\vec{e}_{M_{1,i}} = J_{1,i} \cdot \delta V_{1,i} \quad (3-80)$$

L'expression générale (3-48) de l'erreur mesurée entre le point M_1 et le point M_j du calibre étagé qui a été développée dans la section 3.1.8 de ce chapitre est valable aussi pour la topologie WFXYZT.

Pour généraliser, cette expression sera valable pour toutes les topologies des MMTs, il faut juste déterminer la matrice $J_{j,i}$ qui est différente d'une topologie à une autre

3.2.6 Écarts de perpendicularité et gains d'échelles

Pour une machine de topologie WFXYZT, si on ne prend en considération que les écarts de perpendicularité et les gains d'échelles alors l'erreur volumétrique approximative en un point M_j du calibre étagé, quand ce dernier est positionné dans la direction n_i sera

$$\vec{e}_{M_{j,i}} = \begin{pmatrix} \delta_x(X_{j,i}) + z_{y,i} \cdot \varepsilon_y(X_{j,i}) - y_{y,i} \cdot \varepsilon_z(X_{j,i}) \\ \delta_y(Y_{j,i}) + t_x \cdot \varepsilon_z(X_{j,i}) - z_{y,i} \cdot \varepsilon_x(Y_{j,i}) \\ \delta_z(Z_{j,i}) - t_x \cdot \varepsilon_y(X_{j,i}) + t_y \cdot \varepsilon_x(Y_{j,i}) \end{pmatrix} \quad (3-81)$$

On décompose l'expression (3-81) en une expression matricielle

$$\vec{e}_{M_{j,i}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{y,i} & -y_{y,i} \\ 0 & 1 & 0 & -z_{y,i} & 0 & t_x \\ 0 & 0 & 1 & t_y & -t_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x(X_{j,i}) \\ \delta_y(Y_{j,i}) \\ \delta_z(Z_{j,i}) \\ \varepsilon_x(Y_{j,i}) \\ \varepsilon_y(X_{j,i}) \\ \varepsilon_z(X_{j,i}) \end{bmatrix} \quad (3-82)$$

On écrit alors écrire

$$\vec{e}_{M_{j,i}} = J_{j,i} \cdot \delta \nu_{j,i} \quad (3-83)$$

Notons que les écarts de perpendicularités sont modélisés par les offsets des écarts angulaires $\varepsilon_z(X)$, $\varepsilon_y(X)$ et $\varepsilon_x(Y)$ et les écarts d'échelle sont modélisés par les termes linéaires des polynômes de degré 1 qui modélisent les écarts $\delta_x(X)$, $\delta_y(Y)$ et $\delta_z(Z)$

Le vecteur $\delta \nu_{j,i}$ d'écarts calculés au point M_j est

$$\delta \nu_{j,i} = \begin{bmatrix} \delta_x(X_{j,i}) \\ \delta_y(Y_{j,i}) \\ \delta_z(Z_{j,i}) \\ \varepsilon_x(Y_{j,i}) \\ \varepsilon_y(X_{j,i}) \\ \varepsilon_z(X_{j,i}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{x,X,1} \cdot X_{j,i} \\ \delta_{y,Y,1} \cdot Y_{j,i} \\ \delta_{z,Z,1} \cdot Z_{j,i} \\ \varepsilon_{x,Y,0} \\ \varepsilon_{y,X,0} \\ \varepsilon_{z,X,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{j,i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{j,i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{j,i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x,X,1} \\ \delta_{y,Y,1} \\ \delta_{z,Z,1} \\ \varepsilon_{x,Y,0} \\ \varepsilon_{y,X,0} \\ \varepsilon_{z,X,0} \end{bmatrix} \quad (3-84)$$

L'expression décomposée de l'erreur volumétrique en un point M_j est donc

$$\vec{e}_{M_{j,i}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{y,i} & -y_{y,i} \\ 0 & 1 & 0 & -z_{y,i} & 0 & t_x \\ 0 & 0 & 1 & t_y & -t_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{j,i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{j,i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{j,i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x,X,1} \\ \delta_{y,Y,1} \\ \delta_{z,Z,1} \\ \epsilon_{x,Y,0} \\ \epsilon_{y,X,0} \\ \epsilon_{z,X,0} \end{bmatrix} \quad (3-85)$$

On écrit

$$\vec{e}_{Mj,i} = J_{j,i} \cdot MVDM_j \cdot \delta\nu \quad (3-86)$$

On applique la formule générale (3-48) de l'erreur mesurée

$$E_{1j,i} = \left[\left(J_{j,i}^T \cdot \vec{n}_i \right)^T \cdot MVDM_j - \left(J_{1,i}^T \cdot \vec{n}_i \right)^T \cdot MVDM_1 \right] \cdot \delta\nu \quad (3-87)$$

où

$$J_{j,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{y,i} & -y_{y,i} \\ 0 & 1 & 0 & -z_{y,i} & 0 & t_x \\ 0 & 0 & 1 & t_y & -t_x & 0 \end{bmatrix}, \quad MVDM_j = \begin{bmatrix} X_{j,i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{j,i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{j,i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \vec{n}_i = \begin{bmatrix} cc_i \\ cs_i \\ s_i \end{bmatrix}$$

On remplace les termes de l'expression (3-87) par leurs expressions, on trouve

$$\begin{aligned}
E_{1j,i} = & \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{y,j} & -y_{y,j} \\ 0 & 1 & 0 & -z_{y,j} & 0 & t_x \\ 0 & 0 & 1 & t_y & -t_x & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} cc_i \\ cs_i \\ s_i \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} X_{j,i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{j,i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{j,i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& - \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{n1,i} & -y_{n1,i} \\ 0 & 1 & 0 & -z_{n1,i} & 0 & t_x \\ 0 & 0 & 1 & t_y & -t_x & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} cc_i \\ cs_i \\ s_i \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} X_{1,i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{1,i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{1,i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x,X,1} \\ \delta_{y,Y,1} \\ \delta_{z,Z,1} \\ \epsilon_{x,Y,0} \\ \epsilon_{y,X,0} \\ \epsilon_{z,X,0} \end{bmatrix} \quad (3-88)
\end{aligned}$$

On obtient après calcul, l'expression de l'erreur mesurée entre le point M_1 et le point M_j du calibre étagé quand ce dernier est positionnée dans la direction n_i

$$\begin{aligned}
E_{1j,i} = & [(X_{j,i} - X_{1,i})cc_i & (Y_{j,i} - Y_{1,i})cs_i & (Z_{j,i} - Z_{1,i})s_i \\
& (z_{n1,i} - z_{y,j})cs_i & (z_{y,j} - z_{n1,i})cc_i & (y_{n1,i} - y_{y,j})cc_i] \\
& \left[\begin{array}{c} \delta_{x,X,1} \\ \delta_{y,Y,1} \\ \delta_{z,Z,1} \\ \epsilon_{x,Y,0} \\ \epsilon_{y,X,0} \\ \epsilon_{z,X,0} \end{array} \right] \quad (3-89)
\end{aligned}$$

On change l'ordre des variables dans le vecteur d'écarts dans l'équation (3-89)

$$\begin{aligned}
E_{1j,i} = & [(y_{n1,i} - y_{y,j})cc_i & (z_{y,j} - z_{n1,i})cc_i & (z_{n1,i} - z_{y,j})cs_i \\
& (X_{j,i} - X_{1,i})cc_i & (Y_{j,i} - Y_{1,i})cs_i & (Z_{j,i} - Z_{1,i})s_i] \\
& \left[\begin{array}{c} \epsilon_{z,X,0} \\ \epsilon_{y,X,0} \\ \epsilon_{x,Y,0} \\ \delta_{x,X,1} \\ \delta_{y,Y,1} \\ \delta_{z,Z,1} \end{array} \right] \quad (3-90)
\end{aligned}$$

où

$\epsilon_{z,X,0}$: Ecart de perpendicularité entre les deux axes X et Y

$\epsilon_{y,X,0}$: Ecart de perpendicularité entre les deux axes X et Z

$\epsilon_{x,y,0}$: Ecart de perpendicularité entre les deux axes Y et Z

$\delta_{x,X,0}$: Gain d'échelle suivant l'axe X

$\delta_{y,Y,0}$: Gain d'échelle suivant l'axe Y

$\delta_{z,Z,0}$: Gain d'échelle suivant l'axe Z

Suivant l'approche de mesures de P&WC, on mesure le calibre étagé suivant 6 configurations,

$i = 1, 6$. Dans chaque configuration, on mesure N_i distances sur le calibre étagé, $j = 1, N_i$

La forme générale du système d'équations permettant de déterminer les écarts de perpendicularité et les gains d'échelle, dans le cas d'une machine de topologie WFXYZT est présentée dans l'annexe C de ce mémoire.

3.3 Direction de pires erreurs

Cette section présente d'abord la théorie pertinente pour estimer l'erreur de mesure sur une cale étalon modélisée par un segment M_iM_j en fonction des deux variables α_i et β_i qui définissent l'orientation du segment M_iM_j dans le volume de mesure de la machine. Puis la procédure pour déterminer la direction estimée de pires erreurs dans le volume de mesure de la machine sera présentée.

3.3.1 Erreur de mesures du calibre dans une direction quelconque

Machine de topologie WFYXZT

L'erreur de distance mesurée entre le point M_i et le point M_j du calibre étagé, quand ce dernier est orienté dans la direction \vec{n} , est.

$$E_{1j,i} = [(x_{ij,i} - x_{t1,i}) \cdot cs_i - (z_{ij,i} - z_{t1,i}) \cdot cc_i - (z_{t1,i} - z_{ij,i}) \cdot cs_i, (X_{j,i} - X_{1,i}) \cdot cc_i - (Y_{j,i} - Y_{1,i}) \cdot cs_i - (Z_{j,i} - Z_{1,i}) \cdot s_i] \begin{bmatrix} \varepsilon_{z,Y,0} \\ \varepsilon_{y,X,0} \\ \varepsilon_{x,X,0} \\ \delta_{x,X,1} \\ \delta_{y,Y,1} \\ \delta_{z,Z,1} \end{bmatrix} \quad (3-91)$$

Le développement de l'expression (3-91) est

$$E_{1j,i} = (x_{ij,i} - x_{t1,i}) \cdot cs_i \cdot \varepsilon_{z,Y,0} + (z_{ij,i} - z_{t1,i}) \cdot cc_i \cdot \varepsilon_{y,X,0} + (z_{t1,i} - z_{ij,i}) \cdot cs_i \cdot \varepsilon_{x,X,0} + (X_{j,i} - X_{1,i}) \cdot cc_i \cdot \delta_{x,X,1} + (Y_{j,i} - Y_{1,i}) \cdot cs_i \cdot \delta_{y,Y,1} + (Z_{j,i} - Z_{1,i}) \cdot s_i \cdot \delta_{z,Z,1} \quad (3-92)$$

où

$$cc_i = \cos(\beta_i) \cdot \cos(\alpha_i)$$

$$cs_i = \cos(\beta_i) \cdot \sin(\alpha_i)$$

$$s_i = \sin(\beta_i)$$

Le développement mathématique (de l'équation (3-93) jusqu'à l'équation (3-99)) a pour but de réécrire l'expression (3-92) en fonction des variables α_i , β_i , la longueur du segment M_1M_j et les écarts cinématiques.

Lors de la touche du point cible par la touche du stylet, les coordonnées de ces deux points coïncident, alors d'après l'expression (3-30), on a les coordonnées du point de touche cible M_j sur le calibre

$$\begin{pmatrix} x_{ij,i} \\ y_{ij,i} \\ z_{ij,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{t1,i} \\ y_{t1,i} \\ z_{t1,i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_1M_j \cdot \cos(\beta_i) \cdot \cos(\alpha_i) \\ M_1M_j \cdot \cos(\beta_i) \cdot \sin(\alpha_i) \\ M_1M_j \cdot \sin(\beta_i) \end{pmatrix} \quad (3-93)$$

On peut écrire

$$\begin{pmatrix} x_{ij,i} - x_{t1,i} \\ y_{ij,i} - y_{t1,i} \\ z_{ij,i} - z_{t1,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1M_j \cdot cc_i \\ M_1M_j \cdot cs_i \\ M_1M_j \cdot s_i \end{pmatrix} \quad (3-94)$$

D'après l'expression (3-5), on a

$$\begin{bmatrix} x_{ij,i} \\ y_{ij,i} \\ z_{ij,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{j,i} + L_s \cdot \cos(A - \frac{\pi}{2}) \cdot \cos(B - \frac{\pi}{2}) \\ Y_{j,i} + L_s \cdot \cos(A - \frac{\pi}{2}) \cdot \sin(B - \frac{\pi}{2}) \\ Z_{j,i} + L_s \cdot \sin(A - \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \quad (3-95)$$

Dans notre étude le système de palpation articulé reste vertical, les angles de la tête de palpateur orientable sont alors

$$A = 0^\circ \quad \text{et} \quad B = 0^\circ$$

L'expression (3-95) devient

$$\begin{bmatrix} x_{ij,i} \\ y_{ij,i} \\ z_{ij,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{j,i} \\ Y_{j,i} \\ Z_{j,i} - L_s \end{bmatrix} \quad (3-96)$$

On écrit aussi

$$\begin{bmatrix} X_{j,i} \\ Y_{j,i} \\ Z_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{ij,i} \\ y_{ij,i} \\ z_{ij,i} + L_s \end{bmatrix} \quad (3-97)$$

D'après l'expression (3-93)

$$\begin{bmatrix} X_{j,i} \\ Y_{j,i} \\ Z_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i1,i} + M_1 M_j \cdot cc_i \\ y_{i1,i} + M_1 M_j \cdot cs_i \\ z_{i1,i} + M_1 M_j \cdot si + L_s \end{bmatrix} \quad (3-98)$$

Cette expression donne

$$\begin{bmatrix} X_{j,i} - X_{i1,i} \\ Y_{j,i} - Y_{i1,i} \\ Z_{j,i} - Z_{i1,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 M_j \cdot cc_i \\ M_1 M_j \cdot cs_i \\ M_1 M_j \cdot si \end{bmatrix} \quad (3-99)$$

Finalement, d'après les expressions (3-94) et (3-99), l'expression (3-92) de l'erreur de distance mesurée entre le point M_1 et le point M_j du calibre étagé, quand ce dernier est orienté selon la direction n_i devient

$$E_{1j,i} = M_1 M_j .cc_i .cs_i .\epsilon_{z,Y,0} + M_1 M_j .s_i .cc_i .\epsilon_{y,X,0} - M_1 M_j .s_i .cs_i .\epsilon_{x,X,0} + M_1 M_j .cc_i .cc_i .\delta_{x,X,1} + M_1 M_j .cs_i .cs_i .\delta_{y,Y,1} + M_1 M_j .s_i .s_i .\delta_{z,Z,1} \quad (3-100)$$

Avec

$\epsilon_{z,Y,0}$: Ecart de perpendicularité entre les deux axes X et Y

$\epsilon_{y,X,0}$: Ecart de perpendicularité entre les deux axes X et Z

$\epsilon_{x,X,0}$: Ecart de perpendicularité entre les deux axes Y et Z

$\delta_{x,X,0}$: Gain d'échelle suivant l'axe X

$\delta_{y,Y,0}$: Gain d'échelle suivant l'axe Y

$\delta_{z,Z,0}$: Gain d'échelle suivant l'axe Z

$M_1 M_j$: distance conventionnellement vraie du segment $M_1 M_j$

Machine de topologie WXYZT

L'erreur mesurée entre le point M_1 et le point M_j du calibre étagé, quand ce dernier est positionné dans la direction n_i .

$$E_{1j,i} = [(y_{t1,i} - y_{j,i}) .cc_i - (z_{j,i} - z_{t1,i}) .cc_i - (z_{t1,i} - z_{j,i}) .cs_i - (X_{j,i} - X_{1,i}) .cc_i - (Y_{j,i} - Y_{1,i}) .cs_i - (Z_{j,i} - Z_{1,i}) .s_i] \begin{bmatrix} \epsilon_{z,X,0} \\ \epsilon_{y,X,0} \\ \epsilon_{x,Y,0} \\ \delta_{x,X,1} \\ \delta_{y,Y,1} \\ \delta_{z,Z,1} \end{bmatrix} \quad (3-101)$$

Le développement de l'expression (3-101) donne

$$\begin{aligned}
E_{1j,i} = & (y_{t1,i} - y_{tj,i}) \cdot cc_i \cdot \varepsilon_{z,X,0} + (z_{tj,i} - z_{t1,i}) \cdot cc_i \cdot \varepsilon_{y,X,0} + (z_{t1,i} - z_{tj,i}) \cdot cs_i \cdot \varepsilon_{x,Y,0} \\
& + (X_{j,i} - X_{1,i}) \cdot cc_i \cdot \delta_{x,X,1} + (Y_{j,i} - Y_{1,i}) \cdot cs_i \cdot \delta_{y,Y,1} + (Z_{j,i} - Z_{1,i}) \cdot si \cdot \delta_{z,Z,1}
\end{aligned} \tag{3-102}$$

On remplace les termes des expressions (3-94) et (3-99) dans l'expression (3-102), on trouve l'expression analytique de l'erreur mesurée, entre le point M_1 et le point M_j du segment M_1M_j , en fonction des deux variables α_i et β_i qui définissent la position du segment M_1M_j dans le volume de mesure de la MMT

$$\begin{aligned}
E_{1j,i} = & -M_1M_j \cdot cs_i \cdot cc_i \cdot \varepsilon_{z,X,0} + M_1M_j \cdot si \cdot cc_i \cdot \varepsilon_{y,X,0} - M_1M_j \cdot si \cdot cs_i \cdot \varepsilon_{x,Y,0} \\
& + M_1M_j \cdot cc_i \cdot cc_i \cdot \delta_{x,X,1} + M_1M_j \cdot cs_i \cdot cs_i \cdot \delta_{y,Y,1} + M_1M_j \cdot si \cdot si \cdot \delta_{z,Z,1}
\end{aligned} \tag{3-103}$$

Avec

$\varepsilon_{z,X,0}$: Ecart de perpendicularité entre les deux axes X et Y

$\varepsilon_{y,X,0}$: Ecart de perpendicularité entre les deux axes X et Z

$\varepsilon_{x,Y,0}$: Ecart de perpendicularité entre les deux axes Y et Z

3.3.2 Procédure de calcul de la direction de pires erreurs

Pour déterminer la direction de pires erreurs dans le volume inspecté de la machine, on calcule l'erreur de mesure¹ $E_{1j,i}$, sur un segment M_1M_j , dans toutes les directions dans le volume inspecté et on identifie la direction qui donne la plus grande erreur calculée. Les directions de mesures sont définies par les angles α_i et β_i . L'angle β_i , varie de 0° à 90° . Pour chaque angle β_i , on varie l'angle α_i de 0° à 360° . La recherche de la direction de pires erreurs se fait toujours dans le même sous-volume du volume de mesure de la machine que celui qui a été inspectée expérimentalement.

¹ L'expression analytique de l'erreur mesurée entre le point M_1 et le point M_j du segment M_1M_j , quand ce segment est orienté selon les angles α_i et β_i dans le volume de la MMT, est développée dans la section 3.3.1 de ce chapitre

Pratiquement, le volume inspecté de la machine est défini par les 6 positions prédefinies par le protocole P&WC, Figure 3-18 – (a).

Pour une angle β_i donnée, on varie l'angle α_i de 0° à 360° , quand l'angle α_i atteint 90° , on translate le segment M_iM_j suivant X dans le sens positif, quand l'angle α_i atteint 180° , on translate le segment M_iM_j suivant Y dans le sens positif, quand l'angle α_i atteint 270° , on translate le segment M_iM_j suivant X dans le sens négatif et quand l'angle α_i atteint 360° , on translate le segment M_iM_j suivant Y négatif pour le ramener à sa position initiale, puis on varie l'angle β_i d'un incrément et on refait les mêmes variations de l'angle α_i comme précédemment jusqu'à ce qu'on calcule l'erreur $E_{i,j,i}$ dans toutes les directions du volume inspecté. Ces translations sont faites pour que le segment M_iM_j soit toujours mesuré dans le volume inspecté.

Les valeurs des translations que subit le segment M_iM_j correspondent aux dimensions de la base du volume inspecté de la MMT, de telle sorte que le point initial M_i coïncide toujours avec l'un des sommets de la base du volume inspecté, Figure 3-18 – (b, c, d, e).

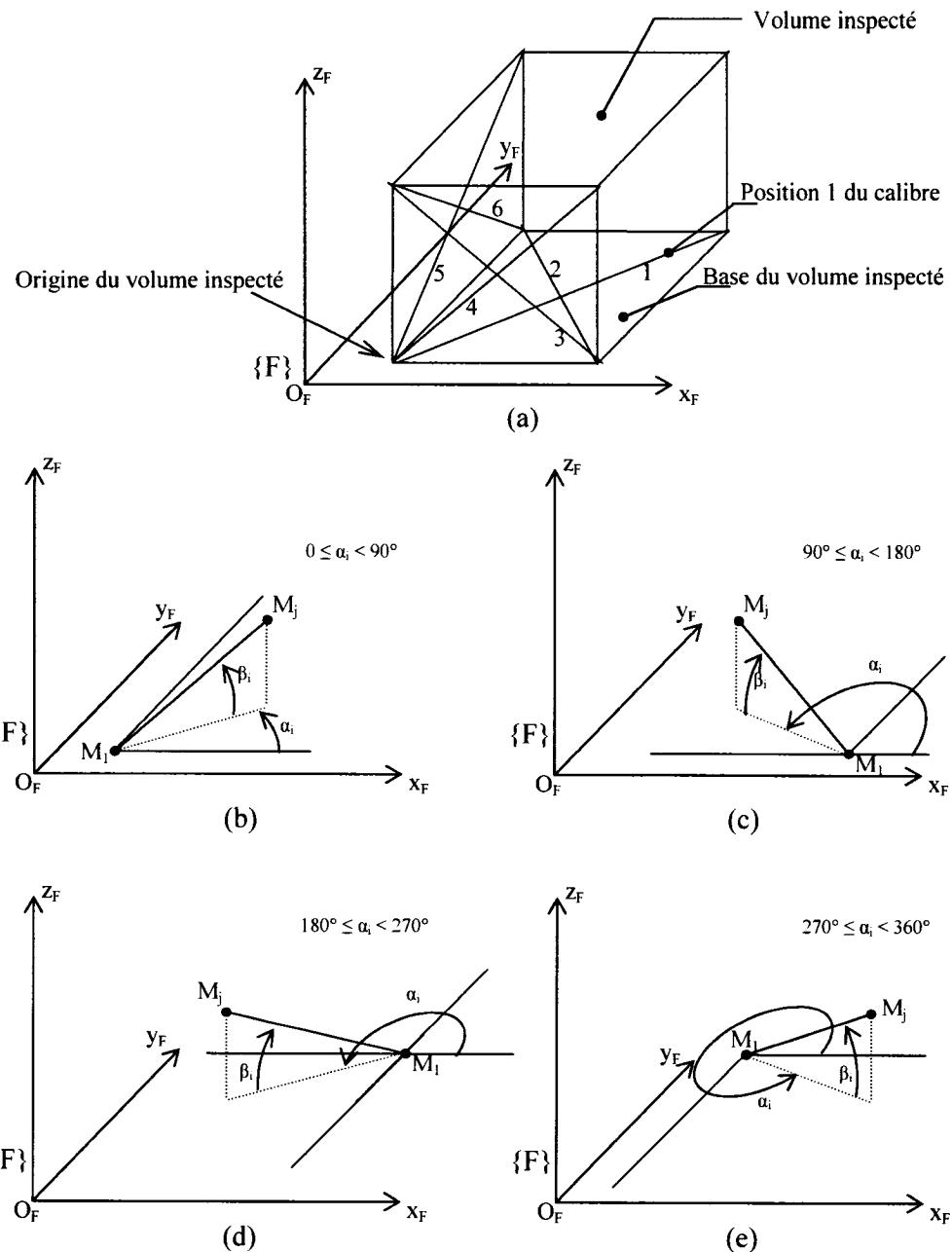


Figure 3-18 : Mode de mesures d'un segment dans toutes les directions du volume inspecté de la MMT

3.4 Erreurs de mesures dans un volume restreint

En pratique, l'erreur de mesure augmente en augmentant la longueur mesurée et par conséquent les erreurs estimées dans un volume restreint inclus dans le volume de mesure de la MMT seront moins importantes que les erreurs estimées dans le volume de mesure global de la MMT. Dans cette section, on présente une méthode pour estimer la plus grande erreur dans un volume restreint, dont la taille est déterminée par le petit parallélépipède rectangle qui contient la pièce à mesurer. La Figure 3-19 illustre un volume restreint inclus dans le volume inspecté de la MMT. Le volume inspecté et le volume restreint sont des parallélépipèdes rectangles définis, par rapport au repère fondation $\{F\}$ par leurs origines et leurs trois dimensions. Les trois dimensions du volume inspecté sont L_x , L_y et L_z , et les trois dimensions du volume restreint sont l_x , l_y et l_z .

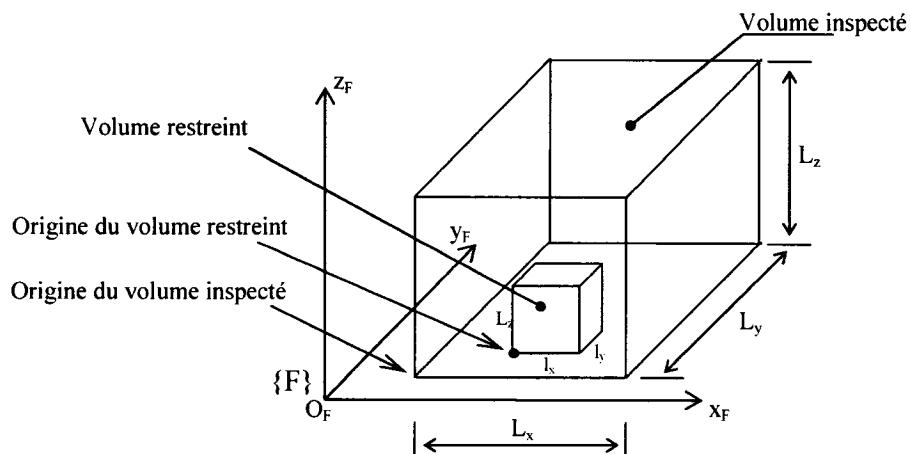


Figure 3-19 : Volume restreint dans le volume inspecté de la MMT

Les écarts associés aux articulations de la machine créent un champ d'erreurs dans le volume de la machine et donc dans le volume inspecté de la machine. L'expression analytique du vecteur d'erreur dépend de la topologie de la machine. Pour les deux topologie WFYZXT et WFXYZT étudiées, l'expression du vecteur d'erreur a été développée dans la section 3.2.4 et 3.1.6 de ce chapitre.

3.4.1 Procédure de calcul de la plus grande erreur dans le volume restreint

On divise le volume restreint en un certain nombre de sous volumes dont les sommets sont appelés des nœuds, Figure 3-20. On calcule ensuite les erreurs volumétriques de la machine à chaque nœud. La plus grande erreur estimée dans le volume restreint est la grande diagonale du plus petit cube contenant tous les vecteurs erreurs calculés aux nœuds dans le volume restreint. Autrement dit, la plus grande erreur estimée dans le volume restreint est la plus grande erreur possible mesurée entre deux nœuds quelconques du volume restreint. Si tous les vecteurs d'erreurs sont égaux alors la plus grande erreur estimée dans le volume restreint est nul.

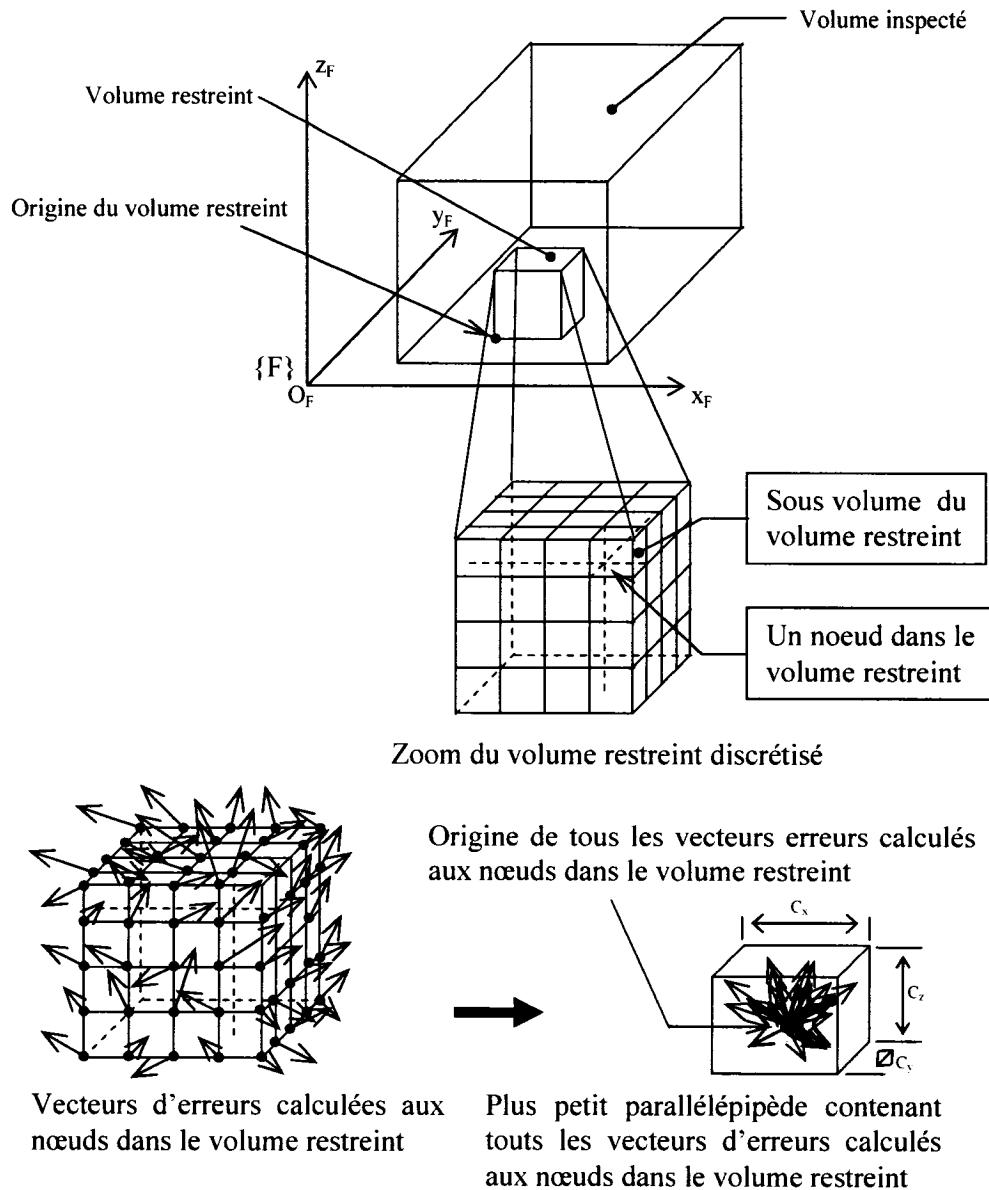


Figure 3-20 : Discrétrisation du volume restreint et calcul des erreurs volumétriques aux nœuds dans le volume restreint

Les dimensions du parallélépipède contenant tous les vecteurs d'erreurs calculés aux nœuds dans le volume restreint sont : C_x , C_y et C_z .

La plus grande erreur estimée dans le volume restreint est alors estimée comme suit :

$$E_{\max} = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2} \quad (3-104)$$

3.4.2 Procédure de détermination de la position du volume restreint ayant la plus grande erreur estimée

On divise le volume inspecté de la machine en un certain nombre de sous volumes dont les sommets sont appelés des nœuds, la position du volume restreint est contrôlée par les coordonnées de son origine qui coïncide à chaque incrément de calcul avec un nœud, Figure 3-21. On balaye le volume inspecté par le volume restreint en calculant la plus grande erreur dans le volume restreint (voir procédure dans la section 3.4.1) à chaque incrément de calcul, le volume restreint reste toujours à l'intérieur du volume inspecté .

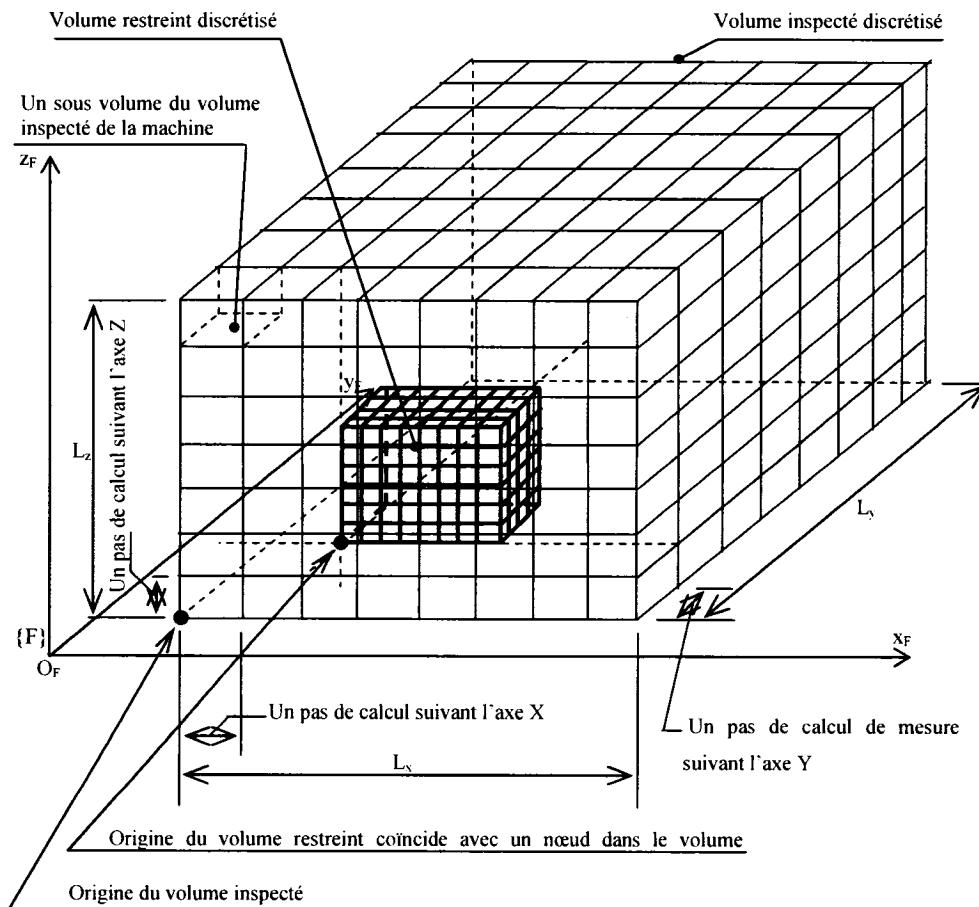


Figure 3-21 : Discréétisation du volume inspecté et détermination du volume restreint ayant la plus grande erreur estimée

Au début du calcul, l'origine du volume restreint et l'origine du volume inspecté de la MMT sont superposés, on calcule la plus grande erreur estimée dans le volume restreint, puis on fait une secession de pas de calcul suivant l'axe X jusqu'au dernier pas, puis on fait une secession de pas de calcul suivant l'axe Y pour balayer tout le plan XY et à chaque pas de calcul suivant l'axe Y, on fait une secession de pas de calcul suivant l'axe X, puis on fait une secession de pas de calcul suivant l'axe Z et à chaque pas de calcul suivant l'axe Z, on refait un balayage du plan XY, jusqu'à ce qu'on balaye tout le volume inspecté de la MMT par le volume restreint. À chaque incrément de calcul, l'origine du volume restreint coïncide avec un noeud dans le volume inspecté. La Figure 3-22 montre le mode de balayage du volume inspecté de la MMT par le volume restreint. Le volume restreint retenu, après calcul, est celui qui représente la plus grande erreur estimée parmi les grandes erreurs calculées sur tous les volumes restreints traités.

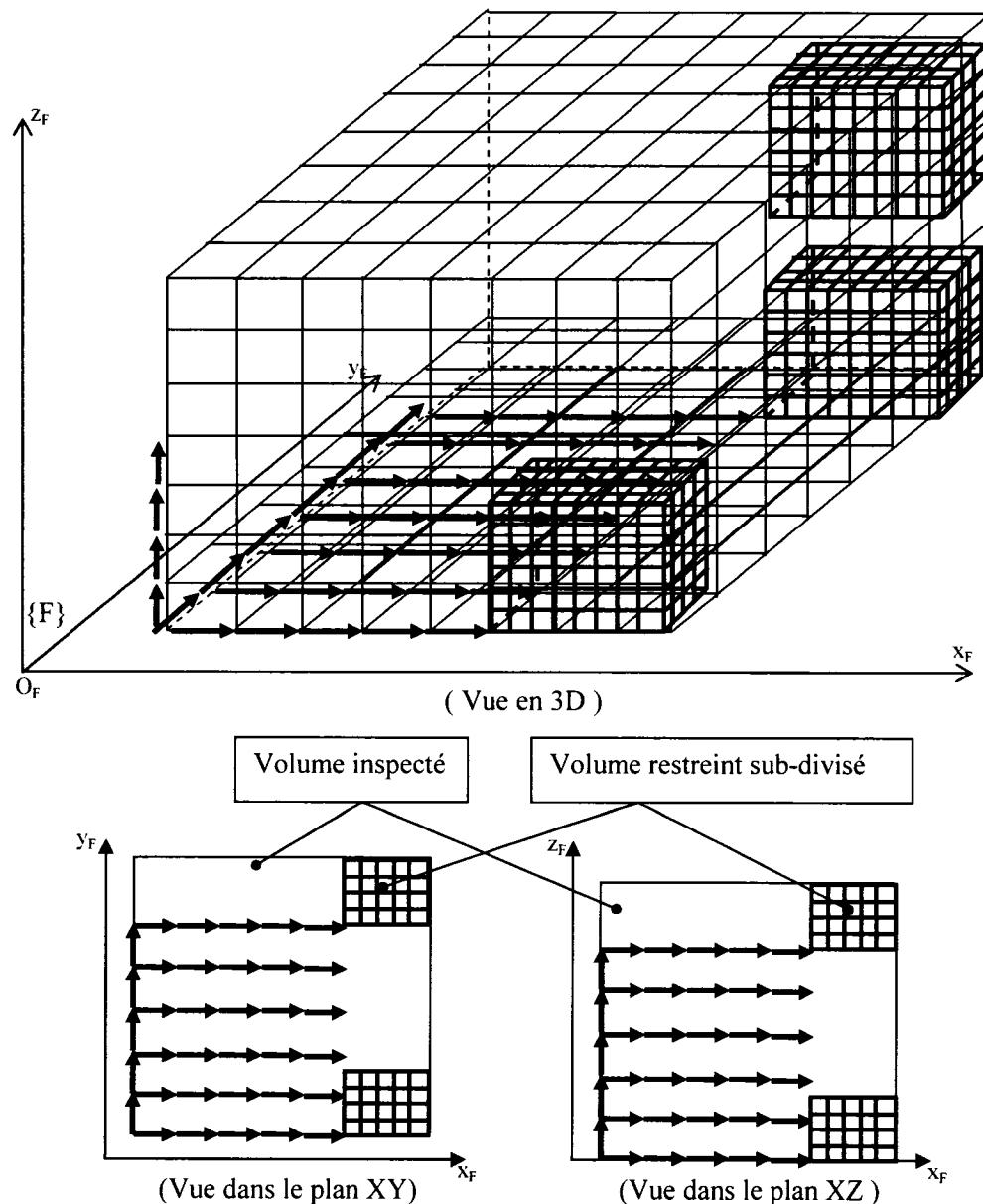


Figure 3-22 : Mode de balayage du volume inspecté par le volume restreint

4 PRESENTATION DU LOGICIEL ET RESULTATS DE CALCUL

Ce chapitre présente le logiciel développé dans le cadre de ce travail. Il traite aussi un exemple de calcul effectué à l'aide de ce logiciel et validé par des mesures expérimentales. Pour enrichir la validation des résultats de calcul, un simulateur de mesure a été créé et présenté à la fin de ce chapitre.

4.1.1 Introduction

Le logiciel développé sous Matlab traite les données de mesures du calibre étagé suivant les 6 configurations prédéfinies par le protocole de mesure P&WC. Il calcule les indices donne en sortie les indices de performance de la MMT ainsi que les écarts de perpendicularité et les gains d'échelles en inversant la matrice d'identification développée dans la section 3.1.9 et 3.2.6 du chapitre 3. Les écarts identifiés sont ensuite utilisés pour déterminer la direction de pires erreurs dans le volume inspecté de la MMT et la plus grande erreur estimée dans un volume restreint en utilisant les expressions analytique développées dans les sections 3.2.4 ; 3.1.6 et 3.3.1 du chapitre 3.

4.1.2 Organigramme du programme

La Figure 4-1 présente un organigramme résumant le fonctionnement du logiciel POLYCMM.

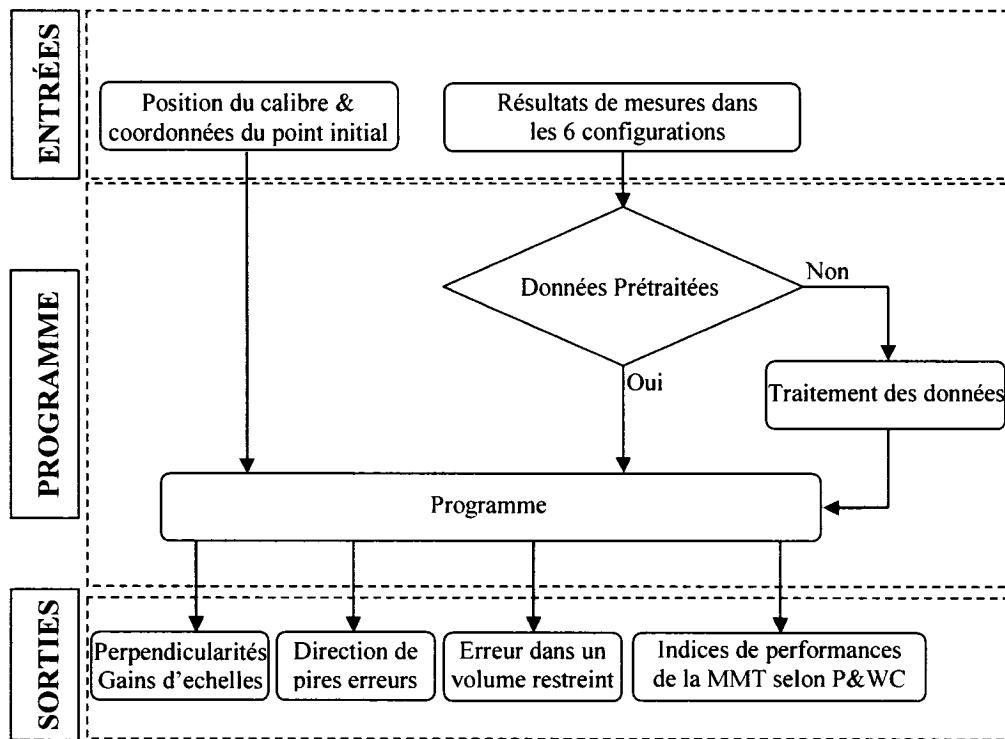


Figure 4-1 : Organigramme du logiciel POLYCMM

Les entrées du logiciel sont :

- Les mesures du calibre étagé suivant les 6 positions prédefinies par le protocole de mesure P&WC. Ces mesures sont stockées dans un fichier texte.
- La position du calibre par rapport au repère de la machine (coordonnées cartésiennes du vecteur unitaire définissant l'orientation du calibre) et les coordonnées des points initiaux du calibre (coordonnées des premiers points palpés sur calibre pour les 6 positions)
- Le nombre de points touchés sur le calibre.

Les sorties du logiciel sont :

- Les indices de la performance de la MMT selon P&WC.
- Les trois écarts de perpendicularités et les trois gains d'échelles.
- La direction de pires erreurs mesurées dans le volume de la machine.
- Les erreurs maximales estimées dans un volume restreint inclus dans le volume total de la machine.

4.1.3 Mesures expérimentales suivant les six configurations prédéfinies

Cette section présente les mesures suivant les 6 positions prédéfinies par le protocole de mesure P&WC, ces mesures ont été effectuées sur la machine LK du laboratoire de métrologie de l'École Polytechnique de Montréal, cette machine est de topologie WFXYZT, Figure 4-2

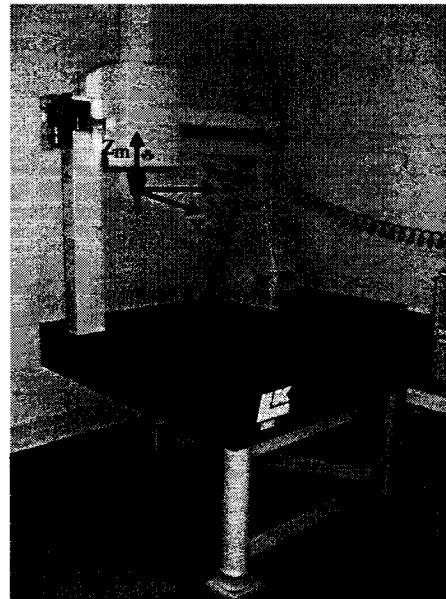


Figure 4-2 : Machine LK du laboratoire de mesures dimensionnelles de l'École Polytechnique de Montréal

4.1.3.1 Calibre utilisé

Le calibre utilisé dans cette étude est un calibre étagé cylindrique de longueur totale égale à 17 pouces. Il contient 17 anneaux cylindriques. Les surfaces à palper sont les surfaces latérales des anneaux cylindriques, la calibration de ce calibre étagé a été réalisée sur la machine LEGEX9106 du Mitutoyo au laboratoire de métrologie à l'École Polytechnique de Montréal.

La Figure 4-3 montre le calibre étagé cylindrique monté sur son support et positionné sur le marbre de la MMT

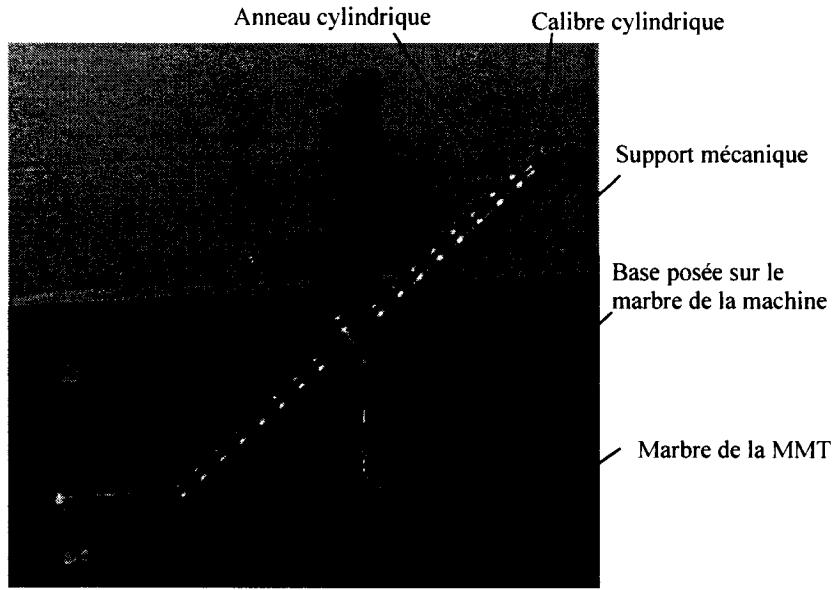


Figure 4-3 : Calibre cylindrique monté sur son support et posé sur le marbre de la MMT

4.1.3.2 Résultats de mesures suivant les six positions prédéfinies

La position du calibre dans le volume de la machine est définie par le premier point touché du calibre et les deux angles α et β par rapport aux axes du repère fondation $\{F\}$, Figure 4-4.

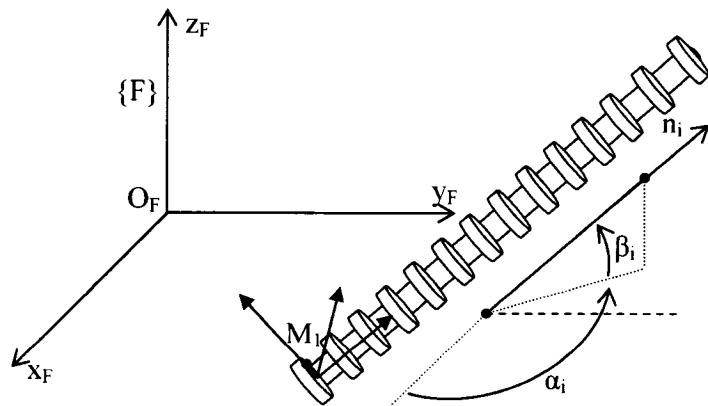
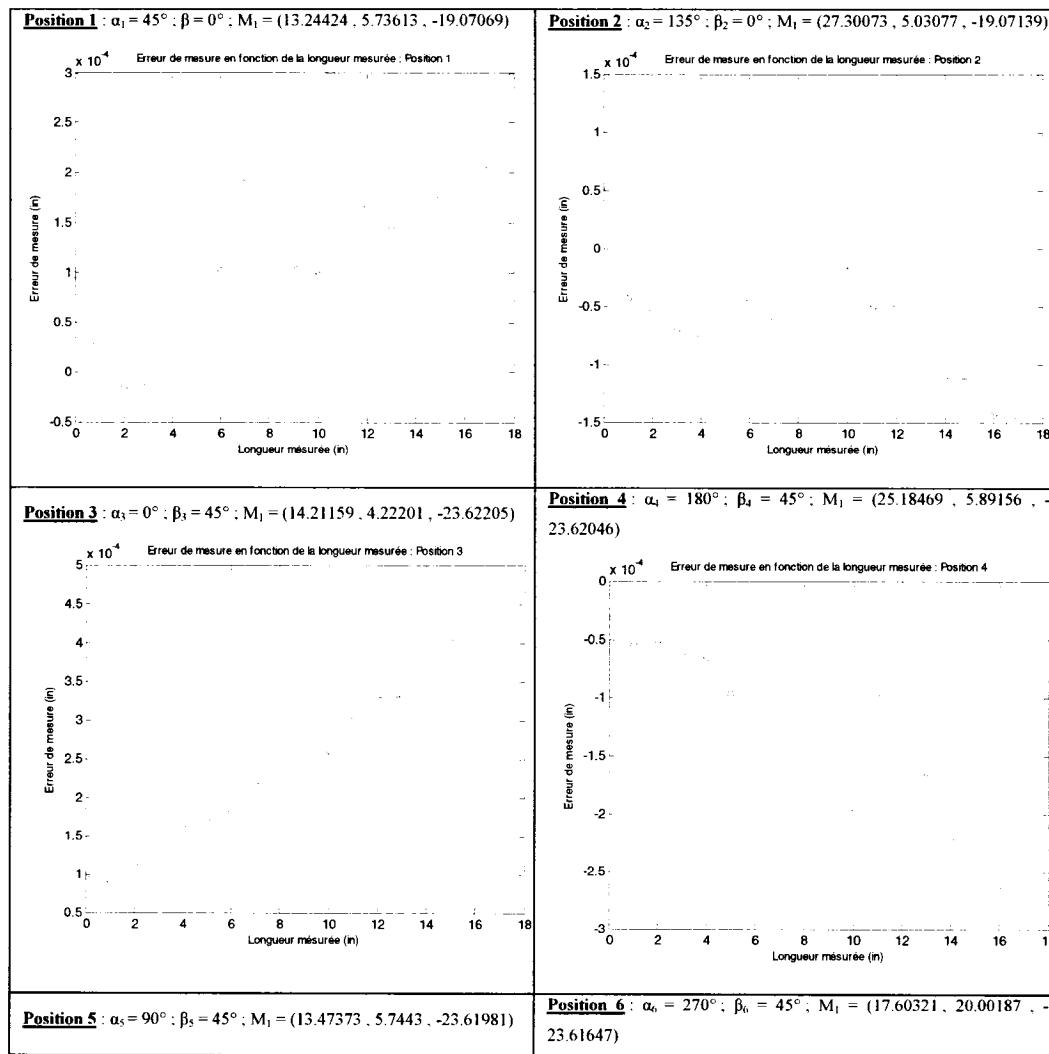


Figure 4-4 : Position du calibre étagé dans le volume de la machine

Résultats de mesures

La Figure 4-5 montre les résultats de mesures sur le calibre étagé cylindrique suivant les 6 configurations prédéfinies par le protocole de mesure P&WC.

Chaque courbe représente la moyenne de 5 répétitions de mesures dans la même configuration.



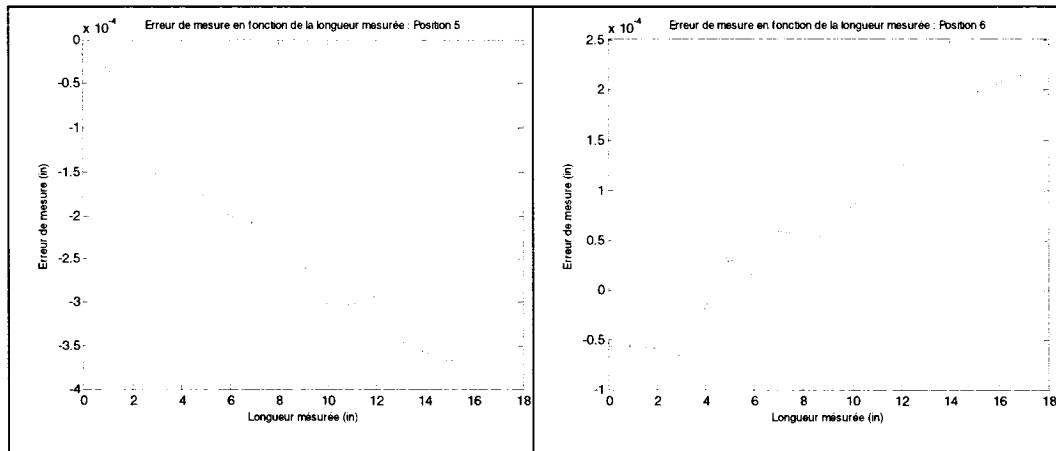


Figure 4-5 : Résultats de mesures du calibre étagé cylindrique suivant les six configurations prédéfinies

Les courbes présentées à la Figure 4-5 indiquent les erreurs de mesures² en fonction des longueurs mesurées. Les erreurs de mesures augmentent avec la longueur mesurée. Ces mesures sont utilisées pour nourrir le logiciel.

4.1.4 Résultats de calcul par le logiciel

Les résultats de mesures expérimentales suivant les 6 configurations définies par l'approche P&WC sont présentées dans l'interface graphique du logiciel et sont accompagnés par des courbes d'erreurs prédites par le modèle après identifications des écarts de perpendicularités et des écarts d'échelles. Les résultats de calculs, basés sur ces mesures expérimentales, sont présentées dans la zone "Rapport" de l'interface graphique, Figure 4-6.

² Pour rappel, l'erreur de mesure est la différence entre la longueur mesurée et la longueur conventionnellement vraie

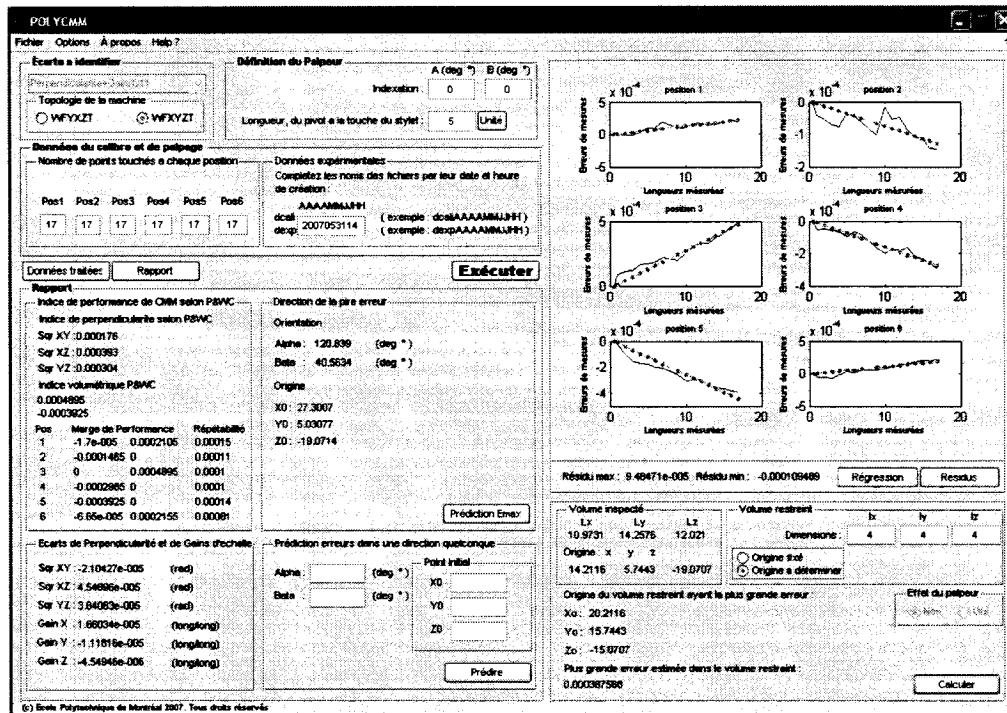


Figure 4-6 : Interface graphique du logiciel

Le rapport sur le calcul du logiciel est donné dans un fichier de sortie et présenté de la façon suivante :

 Machine : LK
 Inspecteur : NAFI Abdelhak
 Date : 31 Mai 2007

 Nombre de points touchés sur le calibre, dans chaque position :
 pos1 :17 ; pos2 :17 ; pos3 :17 ; pos4 :17 ; pos5 :17 ; pos6 :17

 Indices de la performance de la MMT selon P&WC
 Indices de perpendicularité :

SqrXY : 0.000176

SqrXZ : 0.000393

SqrYZ : 0.000304

Indices volumétriques :

Erreur max : 0.00049

Erreur min : -0.00039

Pos	Marge de Performance	Répétabilité
1	-0.00002	0.00021
2	-0.00015	0.00000
3	0.00000	0.00049
4	-0.00030	0.00000
5	-0.00039	0.00000
6	-0.00007	0.00022

Identification des écarts de perpendicularité et d'échelle par la méthode de moindres carrées

SqrXY : -0.000021 (rad)

SqrXZ : 0.000045 (rad)

SqrYZ : 0.000038 (rad)

Gain d'échelle X : 0.000017 (long/long)

Gain d'échelle Y : -0.000011 (long/long)

Gain d'échelle Z : -0.000005 (long/long)

Residus max : 0.00009

Residus min : -0.00011

Direction de la grande erreur

Azimuth (alpha) : 120.83916 (deg °) [angle par rapport à l'axe X et dans le plan XY]

Elevation (beta) : 40.56338 (deg °) [angle par rapport au plan XY]

origine : X0 Y0 Z0

27.30 5.03 -19.07

Volume restreint

Le volume restreint ayant la plus grande erreur

Taille : Lx Ly Lz

4.00 4.00 4.00

Origine : X0 Y0 Z0

20.21 15.74 -15.07

Erreur estimée dans ce volume restreint est : 0.00039

Fin du rapport

Les résultats de ce calcul ont été validés en effectuant des mesures expérimentales dans la direction de pires erreurs et dans d'autres directions dans le volume inspecté de la machine.

4.1.5 Résultat de mesure dans la direction de pires erreurs et validation expérimentale

Cette section présente les résultats de calcul suivant la direction de pires erreurs et une comparaison avec des mesures expérimentales. La direction de pires erreur est définie par les deux angles α et β et les coordonnées du point initial M_1 par rapport au repère machine. Dans notre cas, nous avons :

$\alpha = 120.83916$ (deg °) ; $\beta = 40.56338$ (deg °) ; $M_1 = (27.30, 5.03, -19.07)$

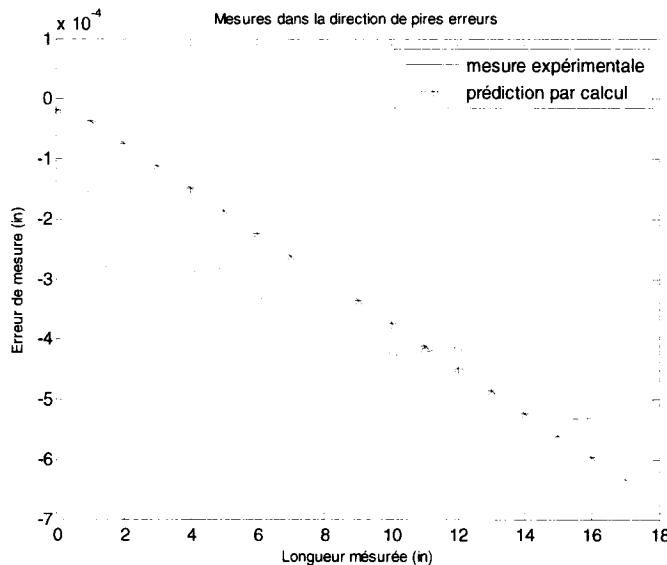


Figure 4-7 : Résultats de mesures et de calculs dans la direction de pires erreurs

La Figure 4-7 montre les résultats de calcul et les résultats de mesures expérimentales dans la direction de pires erreurs. D'après cette figure, on constate que les erreurs mesurées expérimentalement sont bien représentées par le calcul, on peut dire, alors, que les calculs fournis par le logiciel donnent une bonne prédition des erreurs mesurées dans la direction de pires erreurs. On constate aussi que ces erreurs sont plus importantes par rapport à toutes les erreurs mesurées dans les 6 configurations prédefinies, pour confirmer ce résultats nous avons fait, d'abord quelques mesures dans différentes directions dans le volume inspecté de la machine, puis nous avons créé un simulateur pour générer des machines virtuelles afin de faire une validation par simulation.

4.1.6 Mesures expérimentales dans quelques directions dans le volume inspecté de la machine

Nous avons effectué quelques mesures du calibre étagé dans différentes positions dans le volume inspecté de la machine, autres que les 6 premières positions effectuées initialement selon le protocole P&WC afin de faire une comparaison par rapport aux erreurs mesurées dans la direction de pires erreurs, les résultats de

mesures sont présentés à la Figure 4-9 et 4-9. Chaque position est définie par les deux angles α et β et les coordonnées du point initial M_1 par rapport au repère machine.

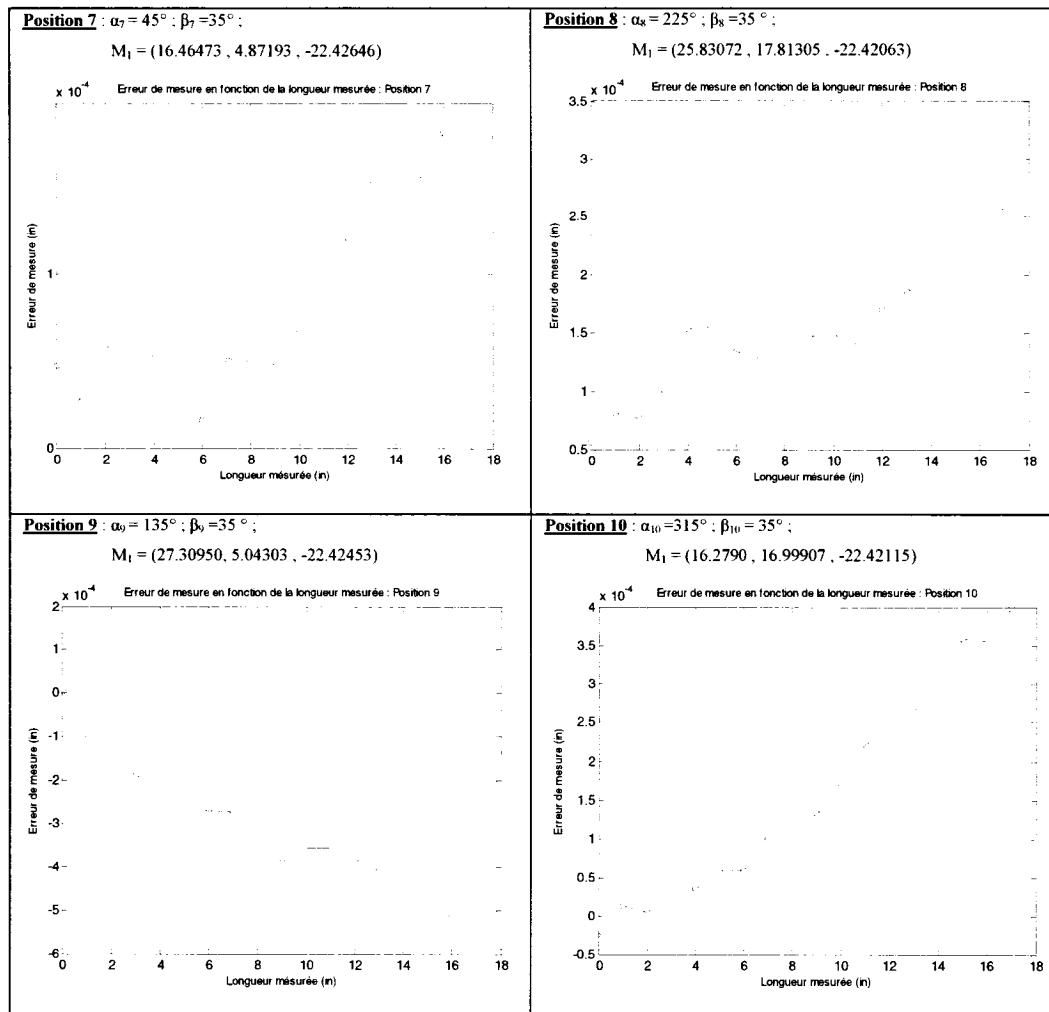


Figure 4-8 : Erreurs de mesures dans quelques directions dans le volume inspecté

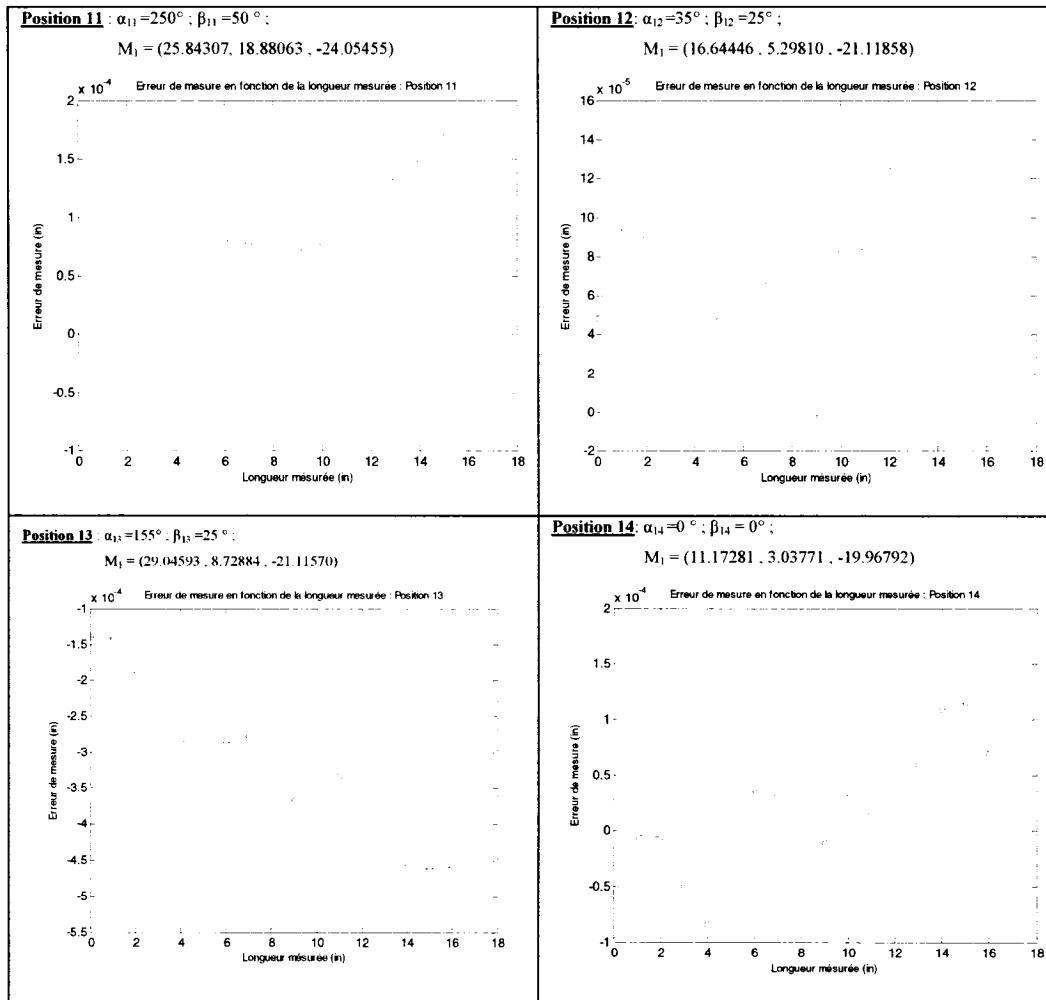


Figure 4-9 : Erreurs de mesures dans quelques directions dans le volume inspecté

Afin de faciliter la comparaison des résultats de mesures effectués dans les 14 positions, nous avons regroupé tous les résultats dans un seul graphique à la Figure 4-10. La courbe qui représente les mesures dans la direction de pires erreurs est identifiée par la légende "Pos opt". On constate que les erreurs mesurées dans des directions autres que la direction de pires erreurs sont de 25 à 70% inférieures que les erreurs mesurées dans la direction de pires erreurs données par le logiciel. Les erreurs mesurées dans la position 9 et 13 se rapprochent des erreurs mesurées dans la direction de pires erreurs parce que ces positions sont proches de la direction de pires erreurs.

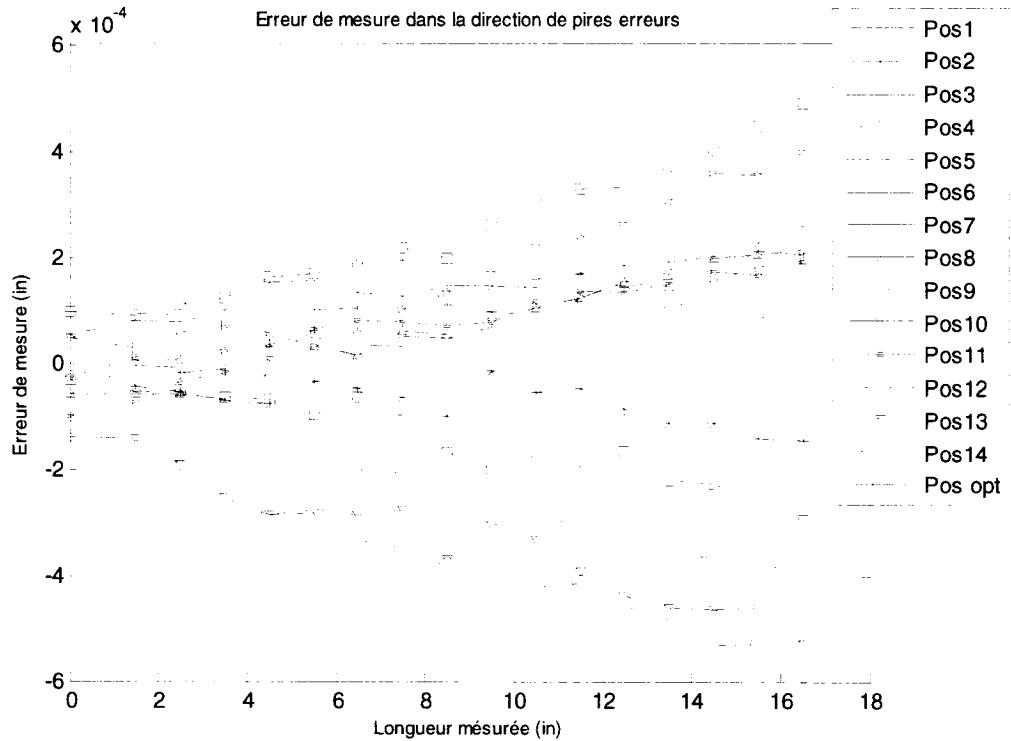


Figure 4-10 : Mesure du calibre étagé dans différentes directions du volume inspecté de la MMT

4.1.7 Présentation du simulateur de mesures

Le simulateur de mesures utilisé dans ce projet est une application développée sous Matlab qui génère des machines virtuelles aléatoires de topologie WFYXZT. Chaque machine est caractérisée par les écarts cinématiques associées à ses axes. Chaque écart est modélisé par un polynôme de degré 3 et représenté par 4 coefficients. La machine peut être aussi caractérisée que par les écarts de perpendicularité et les gains d'échelles, le mode opératoire du simulateur de mesures est présenté dans l'annexe F de ce mémoire.

4.1.8 Résultats de simulation

Le calibre choisis pour cette simulation est caractérisé par 17 points touchés. La distance entre deux points successifs du calibre est 1. Ce calibre a été mesuré, à

l'aide de la machine virtuelle, suivant les 6 positions prédefinies par le protocole de mesures P&WC

4.1.8.1 Machine virtuelle caractérisée par tous les écarts

Cette section présente un exemple de calcul en utilisant le simulateur de mesure. Chaque écart est représenté par 4 coefficients d'un polynôme de degré 3, Tableau 4-1.

	Coef 0	Coef 1	Coef 2	Coef 3
$\delta_x(X)$	3.662e-006	-2.928e-007	1.071e-008	1.298e-009
$\delta_y(X)$	-1.295e-006	7.514e-008	-4.857e-009	-4.561e-009
$\delta_z(X)$	-4.728e-006	-1.8731e-007	-4.871e-008	-1.160e-009
$\varepsilon_x(X)$	1.831e-009	-4.071e-010	-4.646e-011	1.123e-012
$\varepsilon_y(X)$	1.085e-009	-4.842e-010	-4.836e-011	-3.099e-012
$\varepsilon_z(X)$	8.691e-006	-4.424e-010	-1.324e-011	1.314e-012
$\delta_x(Y)$	2.176e-006	1.926e-007	-4.159e-008	-4.564e-010
$\delta_y(Y)$	-5.817e-007	-1.467e-006	-3.464e-008	1.756e-009
$\delta_z(Y)$	1.992e-006	2.275e-007	-2.161e-009	5.484e-010
$\varepsilon_x(Y)$	-3.789e-009	-4.924e-011	2.158e-011	3.928e-012
$\varepsilon_y(Y)$	-2.268e-009	-2.452e-010	3.656e-011	-2.676e-012
$\varepsilon_z(Y)$	3.048e-009	4.083e-010	-2.681e-011	-2.606e-006
$\delta_x(Z)$	-4.502e-006	-4.216e-007	1.408e-008	-3.091e-009
$\delta_y(Z)$	3.438e-006	-3.261e-007	-3.292e-008	4.942e-009
$\delta_z(Z)$	-6.020e-007	-1.599e-007	-1.857e-008	-1.349e-009
$\varepsilon_x(Z)$	-1.067e-009	9.152e-011	-3.802e-011	-4.618e-012
$\varepsilon_y(Z)$	-4.140e-010	3.698e-010	4.342e-011	-2.355e-012
$\varepsilon_z(Z)$	-3.397e-009	3.728e-010	-2.621e-011	1.458e-012

Tableau 4-1 : Machine aléatoire générée par le simulateur de mesure -1-

Les erreurs mesurées prédites sont présentées au Tableau 4-2

Actuel	Nominal	Erreur
0.5000000	0.5000000	0.0000000
1.4999982	1.5000000	-0.0000018
2.4999970	2.5000000	-0.0000030
3.4999956	3.5000000	-0.0000044
4.4999941	4.5000000	-0.0000059
5.4999925	5.5000000	-0.0000075
6.4999907	6.5000000	-0.0000093
7.4999889	7.5000000	-0.0000111
8.4999870	8.5000000	-0.0000130
9.4999849	9.5000000	-0.0000151
10.4999827	10.5000000	-0.0000173
11.4999804	11.5000000	-0.0000196
12.4999779	12.5000000	-0.0000221
13.4999753	13.5000000	-0.0000247
14.4999726	14.5000000	-0.0000274
15.4999697	15.5000000	-0.0000303
16.4999667	16.5000000	-0.0000333
0.5000000	0.5000000	0.0000000
1.5000215	1.5000000	0.0000215
2.5000353	2.5000000	0.0000353
3.5000486	3.5000000	0.0000486
4.5000616	4.5000000	0.0000616
5.5000741	5.5000000	0.0000741
6.5000862	6.5000000	0.0000862
7.5000980	7.5000000	0.0000980
8.5001094	8.5000000	0.0001094
9.5001204	9.5000000	0.0001204
10.5001311	10.5000000	0.0001311
11.5001415	11.5000000	0.0001415
12.5001515	12.5000000	0.0001515
13.5001613	13.5000000	0.0001613
14.5001707	14.5000000	0.0001707
15.5001799	15.5000000	0.0001799
16.5001888	16.5000000	0.0001888
0.5000000	0.5000000	0.0000000
1.4999974	1.5000000	-0.0000026
2.4999956	2.5000000	-0.0000044
3.4999935	3.5000000	-0.0000065
4.4999914	4.5000000	-0.0000086
5.4999891	5.5000000	-0.0000109
6.4999866	6.5000000	-0.0000134
7.4999840	7.5000000	-0.0000160
8.4999811	8.5000000	-0.0000189
9.4999781	9.5000000	-0.0000219
10.4999750	10.5000000	-0.0000250
11.4999716	11.5000000	-0.0000284
12.4999680	12.5000000	-0.0000320
13.4999642	13.5000000	-0.0000358
14.4999602	14.5000000	-0.0000398
15.4999560	15.5000000	-0.0000440
16.4999515	16.5000000	-0.0000485
0.5000000	0.5000000	0.0000000
1.5000123	1.5000000	0.0000123
2.5000202	2.5000000	0.0000202
3.5000279	3.5000000	0.0000279
4.5000353	4.5000000	0.0000353
5.5000426	5.5000000	0.0000426
6.5000496	6.5000000	0.0000496
7.5000564	7.5000000	0.0000564
8.5000630	8.5000000	0.0000630
9.5000695	9.5000000	0.0000695
10.5000757	10.5000000	0.0000757
11.5000818	11.5000000	0.0000818
12.5000877	12.5000000	0.0000877
13.5000934	13.5000000	0.0000934
14.5000990	14.5000000	0.0000990
15.5001044	15.5000000	0.0001044

16.5001097	16.5000000	0.0001097
0.5000000	0.5000000	0.0000000
1.4999998	1.5000000	-0.0000002
2.4999997	2.5000000	-0.0000003
3.4999997	3.5000000	-0.0000003
4.4999998	4.5000000	-0.0000002
5.5000000	5.5000000	-0.0000000
6.5000003	6.5000000	0.0000003
7.5000007	7.5000000	0.0000007
8.5000013	8.5000000	0.0000013
9.5000019	9.5000000	0.0000019
10.5000027	10.5000000	0.0000027
11.5000037	11.5000000	0.0000037
12.5000048	12.5000000	0.0000048
13.5000061	13.5000000	0.0000061
14.5000076	14.5000000	0.0000076
15.5000092	15.5000000	0.0000092
16.5000111	16.5000000	0.0000111
0.5000000	0.5000000	0.0000000
1.5000008	1.5000000	0.0000008
2.5000010	2.5000000	0.0000010
3.5000010	3.5000000	0.0000010
4.5000008	4.5000000	0.0000008
5.5000003	5.5000000	0.0000003
6.4999996	6.5000000	-0.0000004
7.4999986	7.5000000	-0.0000014
8.4999973	8.5000000	-0.0000027
9.4999958	9.5000000	-0.0000042
10.4999940	10.5000000	-0.0000060
11.4999919	11.5000000	-0.0000081
12.4999896	12.5000000	-0.0000104
13.4999869	13.5000000	-0.0000131
14.4999839	14.5000000	-0.0000161
15.4999806	15.5000000	-0.0000194
16.4999770	16.5000000	-0.0000230

Tableau 4-2 : Résultats de mesure sur la machine virtuelle créée

Calcul de la direction de pire erreur à l'aide du logiciel

La direction de pires erreurs dans le volume inspecté de la machine virtuelle a été déterminée en utilisant comme entrées pour le logiciel, les fichiers de sorties du simulateur de mesures. La Figure 4-11 présente les résultats affichés sur l'interface graphique du logiciel après le calcul. La direction de pires erreurs est définie par les paramètres suivants :

$$\alpha = 146.014^\circ ; \beta = 13.9437^\circ ; \text{ le point initial } M_1 = (40, 10, 5)$$

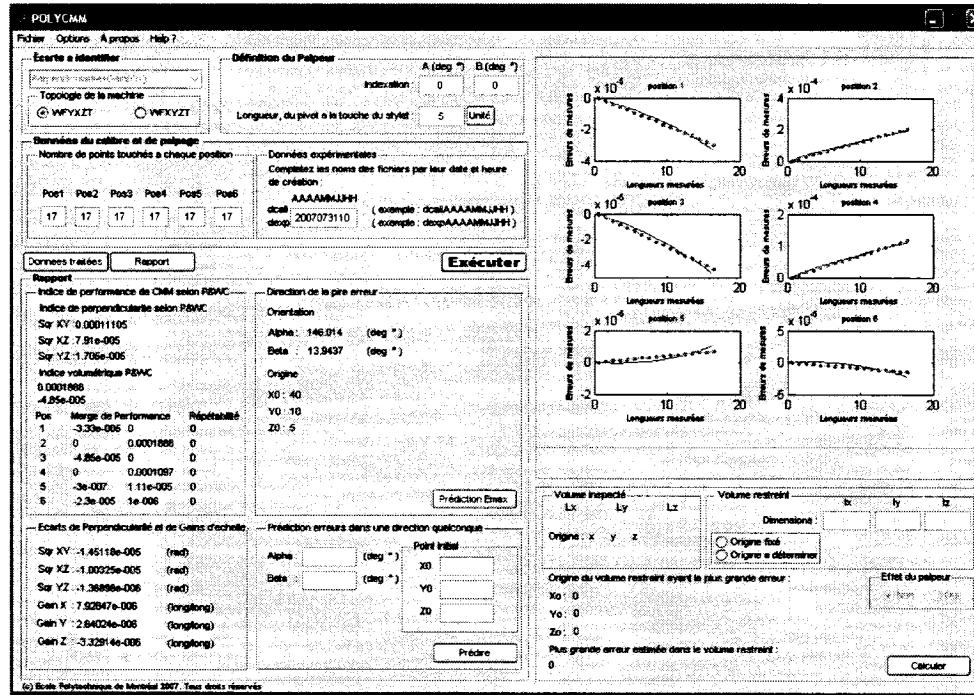


Figure 4-11 : Résultats de calcul pour des données simulées

Validation du calcul par la machine simulée

On reprend les paramètres, qui définissent la direction de pires erreurs (α , β et le point initial M_1) et on les utilise dans le simulateur de mesure, pour effectuer des mesures par la machine virtuelle dans la direction de pires erreurs prédefinies. La Figure 4-12 présente les résultats de mesures effectués par la machine simulée et ceux donnés par la machine virtuelle identifiée par le logiciel. D'après cette figure, on constate que les erreurs mesurées par la machine simulée sont bien prédites par le calcul effectué par le logiciel. La courbe prédictive par le calcul est déterminée par les 3 écarts de perpendicularité et les 3 gains d'échelles. Pour confirmer ce résultat, plusieurs simulations ont été effectuées et présentées dans l'Annexe D.

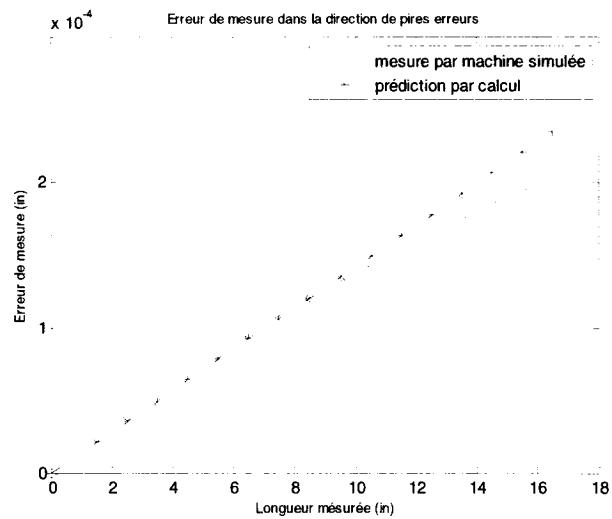


Figure 4-12 : Résultat de mesures par simulation

4.1.8.2 Machine virtuelle caractérisée par les 3 perpendicularités et les 3 gains d'échelles

Cette section présente un exemple de calcul en utilisant le simulateur de mesure. La machine est caractérisée par les 3 écarts de perpendicularité et les 3 gains d'échelles.

	Coef 0	Coef 1	Coef 2	Coef 3
$\delta_x(X)$	0	5.793e-006	0	0
$\delta_y(X)$	0	0	0	0
$\delta_z(X)$	0	0	0	0
$\varepsilon_x(X)$	4.497e-005	0	0	0
$\varepsilon_y(X)$	2.594e-005	0	0	0
$\varepsilon_z(X)$	0	0	0	0
$\delta_x(Y)$	0	0	0	0
$\delta_y(Y)$	0	-4.857e-005	0	0
$\delta_z(Y)$	0	0	0	0
$\varepsilon_x(Y)$	0	0	0	0
$\varepsilon_y(Y)$	0	0	0	0
$\varepsilon_z(Y)$	3.518e-005	0	0	0

$\delta_x(Z)$	0	0	0	0
$\delta_y(Z)$	0	0	0	0
$\delta_z(Z)$	0	9.617e-006	0	0
$\varepsilon_x(Z)$	0	0	0	0
$\varepsilon_y(Z)$	0	0	0	0
$\varepsilon_z(Z)$	0	0	0	0

Tableau 4-3 : Machine aléatoire générée par le simulateur de mesure - 2 -

Identification des écarts par le logiciel

La Figure 4-13 présente une partie de l'interface graphique qui présente les écarts de perpendicularité et les gains d'échelles identifiés.

Ecart de Perpendicularité et de Gains d'échelle	
Sqr XY : 3.67824e-005	(rad)
Sqr XZ : 2.71275e-005	(rad)
Sqr YZ : 4.70205e-005	(rad)
Gain X : 6.05789e-006	(long/long)
Gain Y : -5.07857e-005	(long/long)
Gain Z : 1.00541e-005	(long/long)

Figure 4-13 : Gains d'échelles et écarts de perpendicularité identifiés

Sqr XY représente l'écart de perpendicularité dans la plan XY, il est modélisé par le coefficient $\varepsilon_{z,Y,0}$ de l'écart $\varepsilon_z(Y)$

Sqr XZ représente l'écart de perpendicularité dans la plan XZ, il est modélisé par le coefficient $\varepsilon_{y,X,0}$ de l'écart $\varepsilon_y(X)$

Sqr YZ représente l'écart de perpendicularité dans la plan XZ, il est modélisé par le coefficient $\varepsilon_{x,X,0}$ de l'écart $\varepsilon_x(X)$

Gain X représente le gain d'échelle de l'axe X, il est modélisé par le coefficient $\delta_{x,X,1}$ de l'écart $\delta_x(X)$

Gain Y représente le gain d'échelle de l'axe Y, il est modélisé par le coefficient $\delta_{y,Y,1}$ de l'écart $\delta_y(Y)$

Gain Z représente le gain d'échelle de l'axe Z, il est modélisé par le coefficient $\delta_{z,Z,1}$ de l'écart $\delta_z(Z)$

	Écarts modélisants la machine simulée	Écarts identifiés
Sqr XY	3.518e-005	3.67824e-005
Sqr XZ	2.594e-005	2.71275e-005
Sqr YZ	4.497e-005	4.70205e-005
Gain X	5.793e-006	6.05789e-006
Gain Y	-4.857e-005	-5.0785e-005
Gain Z	9.617e-006	1.0054e-005

Tableau 4-4 : Tableau récapitulatif des résultats

D'après le Tableau 4-4 on constate que les valeurs d'écarts identifiés et les valeurs d'écarts caractérisants la machine virtuelle sont proches avec un erreur relative de 4.5%.

5 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Ce mémoire traite de la performance des machines à mesurer tridimensionnelles en utilisant un calibre étagé. Deux machines ont été traitées, la première est de topologie WFYXZT et la deuxième est de topologie WFXYZT. L'étude vise à développer un outil qui aide à fournir les indices de la performance des MMTs selon le protocole de P&WC et à proposer une extension vers la norme ISO 10360.

Dans un premier temps, les deux approches de mesures, selon P&WC et selon la norme ISO, ont fait l'objet d'une étude comparative afin de faire ressortir les avantages les désavantages, similarités, différences et limitations des deux approches dans le but de faire une extension du protocole de mesure P&WC vers la norme ISO en se basant sur les essais actuels de P&WC.

Dans un deuxième temps, notre étude a été basée sur la modélisation des deux machines de topologie WFYXZT et WFXYZT en simulant les erreurs mesurées sur un calibre étagé selon l'approche P&WC. La formule générale, qui explique les erreurs mesurées sur un calibre étagé en fonction des écarts cinématiques articulaires de la machine, a été développée en se basant sur une modélisation approximative directe pour petits écarts. Chaque erreur de mesure sur le calibre représente une équation reliant les paramètres de positions du calibre, de la touche du stylet et les écarts de la machine, l'ensemble des erreurs mesurées sur le calibre suivant les 6 positions prédefinies par le protocole P&WC donnent ainsi un système d'équations dont la résolution donne les écarts de la machine qui expliquent les erreurs de mesures. Selon la richesse des données expérimentales fournis par l'approche de mesures P&WC, nous avons pu identifier les 3 écarts de perpendicularités et les 3 gains d'échelles d'une façon découpée et avec un bon conditionnement (de l'ordre de 2,6).

Suite aux modèles traités, nous avons développé un logiciel qui prend en entrée les résultats de mesures du calibre étagé suivant l'approche P&WC et donne en sortie les indices de la performance de la MMT. Ce logiciel donne aussi les 3 écarts de perpendicularités et les 3 gains d'échelles de la MMT. Ces écarts sont ensuite utilisés pour fournir la direction de pires erreurs dans le volume de la machine et aussi pour déterminer la plus grande erreur estimée dans un volume restreint inclus dans le

volume mesuré de la machine. La direction de pires erreurs donnée par le logiciel permettra par la suite de donner une extension vers la norme ISO 10360, car cette dernière exige 7 positions de mesure de libre choix. Le point fort de notre approche est d'être capable de vérifier la performance de la MMT selon la norme ISO en mesurant le calibre étagé suivant 7 positions bons choix soit les 6 positions prédefinies par l'approche P&WC plus la 7^{ème} position qui est la direction de pires erreurs estimées.

La direction de pires erreurs estimées a fait l'objet d'une validation par des mesures expérimentales sur la machine LK du laboratoire de contrôle dimensionnellement à l'École Polytechnique de Montréal. Ces mesures ont été effectués selon l'approche P&WC, en utilisant un calibre étagé. Les mesures expérimentales dans la direction de pires erreurs ont été comparées avec les erreurs prédites par le logiciel. Le résultat de comparaison montre qu'il y a une bonne adéquation entre les deux courbes. Puis nous avons fait plusieurs mesures dans différentes direction dans le volume mesuré de la machine, l'ensembles des erreurs mesurées sont inférieures aux erreurs mesurées dans la direction de pires erreurs.

Pour tenter de vérifier la généralité de l'approche, un simulateur de mesure a été créé qui permet de générer des machines aléatoires virtuelles caractérisées par leurs écarts cinématiques. Pour chaque machine aléatoire virtuelles, on mesure le calibre étagé suivant le protocole de mesure P&WC, puis on traite les résultats pour déterminer la direction de pires erreurs. Les erreurs prédites, par le logiciel, dans la direction de pires erreurs sont comparées avec les erreurs mesurées par la machine virtuelle. Les résultats de comparaison montrent une bonne adéquation entre les erreurs prédites et les erreurs mesurées.

Perspectives :

A l'issue de la recherche exposée dans ce mémoire, différentes perspectives apparaissent comme pertinentes et méritant attention :

- L'élagage des variables pour déterminer l'ensemble des variables visibles, autres que les 3 écarts de perpendicularité et 3 gains d'échelles

- Étudier à quel point les 3 écarts de perpendicularité et les 3 gains d'echelles sont dominants dans la détermination de la direction de pires erreurs dans le volume de mesures de la MMT
- Étudier l'effet du palpeur, pour avoir une information plus complète sur la performance de la MMT

RÉFÉRENCES

[1] : BOSCH, John A. , *Coordinate measuring machines and systems* , édition : marcel dekker, 1995

[2] : BOURDET, P. , *Métrologie tridimensionnelle et géométrique des pièces mécaniques, Cours de licence de Technologie Mécanique*, Département de Génie Mécanique de l'École Normale Supérieure de Cachan, 1998/1999

[3] : ZHANG, G., OUYANG, R., LU, B. , *A Displacement method for machine geometry calibration*, Annals of the CIRP Vol. 37/1/1988.

[4] : KRUFH, J.P., VANHERCK, P., JONGE, L. De. , *Self-calibration method and software error correction for three-dimensional measuring machines using artefact measurements*, Measurement 14 (1994) 157-167

[5] : PHILLIPS, S.D., SAWYER, D., BORCHARDT, B., WARD, D., BEUTEL, D.E. , *A novel artefact for testing large coordinate measuring machines*, 25 (2001) 29-34

[6] : SAMMARTINI. M. P, CHIFFRE. L. De , *Development and validation of a new reference cylindrical gear for pitch measurement*, 24 (2000) 302-309

[7] : KRUGER, O. A. , *An investigation into measuring of the length spacing of step gauges*, Proceedings of SPIE, Vol.4401 (2001) p 70-82

[8] : BALSAMO, A., FRANKE, M., TRAPET, E., WALDEDE, F., JONGE, L. De, VANHERCK, P. , *Results of the CIRP-Euromet intercomparison of ball plate-based techniques for determining CMM parametric errors*, CIRP Annals - Manufacturing Technology, v 46, n 1, 1997, p 463-466

[9] : ISO 10360-2, Spécification géométrique des produits (GPS)- Essais de réception et de vérification périodique des machines à mesurer tridimensionnelles (MMT), Partie 2 : *MMT utilisées pour les mesures de tailles*, Edition 2001

[10] : CHIFFRE, L. De, HANSEN, H. N., MORACE, R. E. , *Comparison of Coordinate Measuring Machines using an Optomechanical Hole Plate*, CIRP Annals - Manufacturing Technology, Volume 54, Issue 1, 2005, P 479-482

[11] : Curran, E., Phelan, P. , *Quick check error verification of coordinate measuring machines*, Journal of Materials Processing Technology 155–156 (2004) 1207–1213

[12] : ISO 10360-1, Spécification géométrique des produits (GPS)- Essais de réception et de vérification périodique des machines à mesurer tridimensionnelles (MMT), Partie 1 : *Vocabulaire*, Edition 2000.

[13] : Société EUROTEK, *Métrologie : Machine à mesurer tridimensionnelle*
Site web : <http://www.eurotek-france.com>

[14] : BOURDET, P. , *Qualité des produits dans les entreprises : Tolérancement et métrologie dimensionnelle*, Centre Techniques des industries Mécaniques (CETIM), 1998

[15] : MATHIEN, J-P. , *Contrôle des machines à mesurer*, Techniques de l'Ingénieur, traité Mesures et Contrôle, R 1 318.

[16] : MAYER, R. , *Modélisation des machines en fabrication mécanique, Notes de cours MEC 6513*, Département de génie mécanique, École Polytechnique de Montréal, Canada, 2005

[17] : CLOUTIER, G. , *Modélisation des machines en fabrication mécanique, Notes de cours MEC 6513*, Département de génie mécanique, École Polytechnique de Montréal, Canada, 1999

[18] : PRATT & WHITNEY CANADA , *Guide technique pour la vérification périodique des MMTs*, Pratt & Whitney Canada, Canada, 2003

[19] : BOURDET, P. , *Logiciels des machine à mesurer tridimensionnelles*, Techniques de l'Ingénieur, traité Mesures et Contrôle, R 1 316.

ANNEXES

ANNEXE A : Calcul de la matrice jacobienne en utilisant les matrices de transports

Ce développement a été fait pour valider le calcul de la matrice jacobienne, pour une machine de topologie WFYXZT, que nous avons calculé dans le chapitre 3 de ce mémoire. Pour plus de détails sur les matrices de transport, veuillez consulter la référence [17]

Illustration :

Soit A et B deux points dans l'espace liés par un corps rigide, le point A est associé à un repère $\{A\}$, le point B est associé à un repère $\{B\}$, Figure A-1.

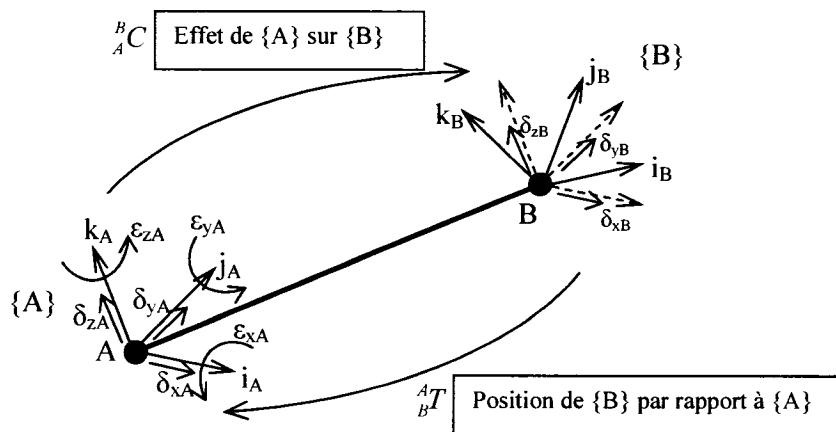


Figure A-1 : Propagation des écarts cinématiques dans un corps rigide

La position de $\{B\}$ par rapport à $\{A\}$ est exprimée par la matrice de transformation homogène ${}^A_B T$.

L'effet des écarts en $\{A\}$ sur $\{B\}$ est exprimé par la matrice de transport A_C .

Le repère $\{A\}$ subit trois écarts linéaires (trois translations) : δ_{xA} , δ_{yA} et δ_{zA} et une rotation $\varepsilon_A = [\varepsilon_{xA}, \varepsilon_{yA}, \varepsilon_{zA}]^T$, ces écarts causent en $\{B\}$ trois écarts linéaires : δ_{xB} , δ_{yB} et δ_{zB} et une rotation $\varepsilon_B = [\varepsilon_{xB}, \varepsilon_{yB}, \varepsilon_{zB}]^T$. L'ensembles des écarts en $\{A\}$ et en $\{B\}$ sont décomposés dans $\{A\}$.

Les écarts liniers en $\{A\}$ causent les mêmes écarts liniers en $\{B\}$:

$$\begin{bmatrix} \delta'_{xB} \\ \delta'_{yB} \\ \delta'_{zB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{xA} \\ \delta_{yA} \\ \delta_{zA} \end{bmatrix} \quad (\text{A-1})$$

Les écarts liniers en {A} ne causent aucun écart angulaire en {B} :

$$\begin{bmatrix} \epsilon'_{xB} \\ \epsilon'_{yB} \\ \epsilon'_{zB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{xA} \\ \delta_{yA} \\ \delta_{zA} \end{bmatrix} \quad (\text{A-2})$$

Les écarts angulaires en {A} causent des écarts liniers en {B}, ces écarts sont calculés par l'effet de bras de levier :

$$\begin{bmatrix} \delta''_{xB} \\ \delta''_{yB} \\ \delta''_{zB} \end{bmatrix} = \overrightarrow{\epsilon_A} \wedge \overrightarrow{AB} \quad (\text{A-3})$$

Soit $[P_x, P_y, P_z]^T$ la décomposition du vecteur \overrightarrow{AB} dans {A}

$$\begin{bmatrix} \delta''_{xB} \\ \delta''_{yB} \\ \delta''_{zB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xA} \\ \epsilon_{yA} \\ \epsilon_{zA} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad (\text{A-4})$$

$$\begin{bmatrix} \delta''_{xB} \\ \delta''_{yB} \\ \delta''_{zB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_z \cdot \epsilon_{yA} - P_y \cdot \epsilon_{zA} \\ P_x \cdot \epsilon_{zA} - P_z \cdot \epsilon_{xA} \\ P_y \cdot \epsilon_{xA} - P_x \cdot \epsilon_{yA} \end{bmatrix} \quad (\text{A-5})$$

$$\begin{bmatrix} \delta''_{xB} \\ \delta''_{yB} \\ \delta''_{zB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & P_z & -P_y \\ -P_z & 0 & P_x \\ P_y & -P_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xA} \\ \epsilon_{yA} \\ \epsilon_{zA} \end{bmatrix} \quad (\text{A-6})$$

Les écarts angulaires en {A} causent les mêmes écarts angulaires en {B} :

$$\begin{bmatrix} \epsilon''_{xB} \\ \epsilon''_{yB} \\ \epsilon''_{zB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xA} \\ \epsilon_{yA} \\ \epsilon_{zA} \end{bmatrix} \quad (\text{A-7})$$

Conclusion :

Les écarts résultants en {B} peuvent être exprimés en fonction des écarts en {A}

$$\begin{array}{c} \{A\} \begin{bmatrix} \delta_{xB} \\ \delta_{yB} \\ \delta_{zB} \\ \varepsilon_{xB} \\ \varepsilon_{yB} \\ \varepsilon_{zB} \end{bmatrix}_{(6x1)} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & P_z & -P_y \\ 0 & 1 & 0 & -P_z & 0 & P_x \\ 0 & 0 & 1 & P_y & -P_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(6x6)} \\ \cdot \begin{array}{c} \{A\} \begin{bmatrix} \delta_{xA} \\ \delta_{yA} \\ \delta_{zA} \\ \varepsilon_{xA} \\ \varepsilon_{yA} \\ \varepsilon_{zA} \end{bmatrix}_{(6x1)} \end{array} \end{array} \quad (A-8)$$

Pour simplifier les expressions, on pose

$$[P_{\wedge}]^T = \begin{bmatrix} 0 & P_z & -P_y \\ -P_z & 0 & P_x \\ P_y & -P_x & 0 \end{bmatrix} \quad (A-9)$$

On a alors :

$$\begin{array}{c} \{A\} \begin{bmatrix} \delta_B \\ \varepsilon_B \end{bmatrix}_{(6x1)} \\ = \begin{bmatrix} I & [P_{\wedge}]^T \\ 0 & I \end{bmatrix}_{(6x6)} \cdot \begin{array}{c} \{A\} \begin{bmatrix} \delta_A \\ \varepsilon_A \end{bmatrix}_{(6x1)} \end{array} \end{array} \quad (A-10)$$

On exprime ces écarts dans $\{B\}$

$$\begin{array}{c} \{B\} \begin{bmatrix} \delta_B \\ \varepsilon_B \end{bmatrix} \\ = {}_B^A R \cdot \begin{array}{c} \{A\} \begin{bmatrix} \delta_B \\ \varepsilon_B \end{bmatrix} \end{array} \end{array} \quad (A-11)$$

Puisqu'on connaît la rotation ${}_B^A R$ de $\{B\}$ par rapport à $\{A\}$, on a alors :

$$\begin{array}{c} \{B\} \begin{bmatrix} \delta_B \\ \varepsilon_B \end{bmatrix} \\ = {}_B^A R^T \cdot \begin{array}{c} \{A\} \begin{bmatrix} \delta_B \\ \varepsilon_B \end{bmatrix} \end{array} \end{array} \quad (A-12)$$

On remplace le vecteur des écarts en $\{B\}$ par son expression en fonction des écarts en $\{A\}$

$$\begin{array}{c} \{B\} \begin{bmatrix} \delta_B \\ \varepsilon_B \end{bmatrix} \\ = {}_B^A R^T \cdot \begin{bmatrix} I & [P_{\wedge}]^T \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} \{A\} \begin{bmatrix} \delta_A \\ \varepsilon_A \end{bmatrix} \end{array} \end{array} \quad (A-13)$$

On assemble les deux matrices on a

$$\begin{array}{c} \{B\} \begin{bmatrix} \delta_B \\ \varepsilon_B \end{bmatrix}_{(6x1)} \\ = \begin{bmatrix} {}_B^A R^T & {}_B^A R^T \cdot [P_{\wedge}]^T \\ 0 & {}_B^A R^T \end{bmatrix}_{(6x6)} \cdot \begin{array}{c} \{A\} \begin{bmatrix} \delta_A \\ \varepsilon_A \end{bmatrix}_{(6x1)} \end{array} \end{array} \quad (A-14)$$

La matrice de transport qui exprime l'effet de $\{A\}$ sur $\{B\}$ est :

$${}^B_C = \begin{bmatrix} {}^A_R^T & {}^A_R^T [P_{\wedge}]^T \\ 0 & {}^A_R^T \end{bmatrix}_{(6 \times 6)} \quad (A-15)$$

Où

$${}^A_R^T = \begin{bmatrix} {}^A_i_B & {}^A j_B & {}^A k_B \end{bmatrix}^T \quad \text{et} \quad [P_{\wedge}]^T = \begin{bmatrix} 0 & P_z & -P_y \\ -P_z & 0 & P_x \\ P_y & -P_x & 0 \end{bmatrix}$$

Avec $[P_x, P_y, P_z]^T$ la décomposition du vecteur \overrightarrow{AB} dans $\{A\}$ et représente la translation du repère $\{B\}$ par rapport à $\{A\}$.

${}^A i_B$: Projection du vecteur i_B dans le repère $\{A\}$

${}^A j_B$: Projection du vecteur j_B dans le repère $\{A\}$

${}^A k_B$: Projection du vecteur k_B dans le repère $\{A\}$

Application pour une machine MMT de topologie WFYXZT :

La Figure A-2 représente le schéma cinématique d'une Machine MMT de topologie WFYXZT

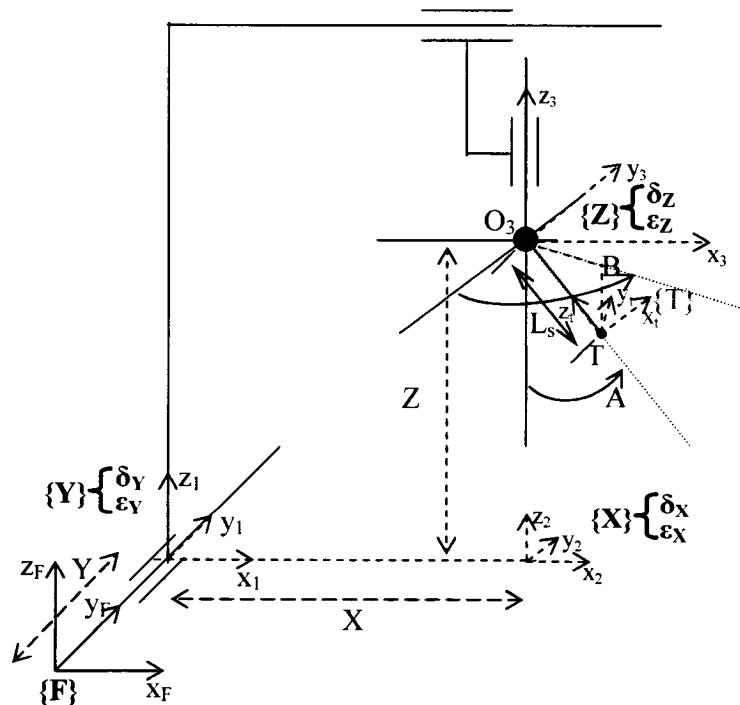
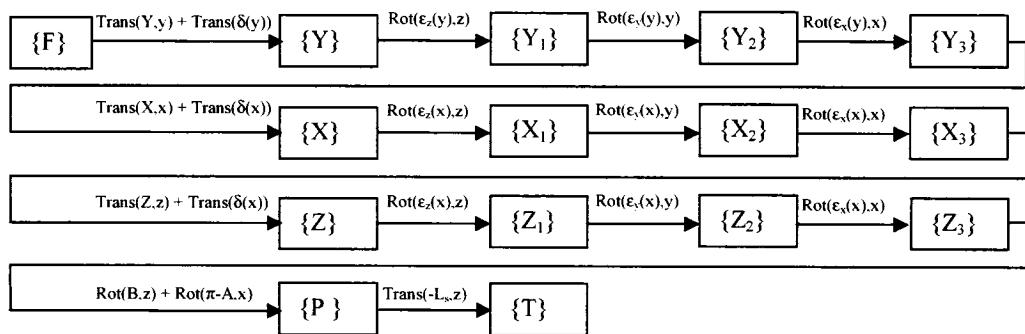


Figure A-2 : Schéma cinématique d'une MMT de topologie WFYXZT

Cette section servira à montrer comment calculer la matrice jacobienne en utilisant les matrices de transports, ce calcul sera utilisé pour valider le développement que nous avons fait en utilisant l'hypothèse des petits écarts.

$\{T\}$ est un repère local lié à la touche du stylet, le repère $\{T\}$ est obtenu par deux rotations A et B successivement par rapport à l'axe x_3 et z_3 puis une translation $-L_s$ suivant l'axe z_3 (cas de repère mobile) du repère $\{Z\}$.

Les écarts en $\{Y\}$, en $\{X\}$ et en $\{Z\}$ causent un effet en $\{T\}$. Pour repérer les 18 écarts et sélectionner les colonnes correspondants qui forment la matrice jacobienne, on va introduire une succession des repères, chaque repère est provient soit d'un mouvement articulaire nominal soit d'un écart linier ou angulaire.



$${}^P_T T \rightarrow {}^P C$$

$${}^{Z_1}_T T = {}^{Z_1}_P T \cdot {}^P_T T \rightarrow {}^{Z_1}_T C$$

$${}^{Z_1}_T T = {}^{Z_1}_{Z_2} T \cdot {}^{Z_2}_T T \rightarrow {}^{Z_1}_T C$$

$${}^{Z_1}_T T = {}^{Z_1}_{Z_2} T \cdot {}^{Z_2}_T T \rightarrow {}^{Z_1}_T C$$

$${}^Z_T T = {}^Z_{Z_1} T \cdot {}^{Z_1}_T T \rightarrow {}^Z_{Z_1} C$$

$${}^{X_1}_T T = {}^{X_1}_Z T \cdot {}^Z_T T \rightarrow {}^{X_1}_{Z_1} C$$

$${}^{X_1}_T T = {}^{X_1}_{X_2} T \cdot {}^{X_2}_Z T \rightarrow {}^{X_1}_{X_2} C$$

$${}^{X_1}_T T = {}^{X_1}_{X_2} T \cdot {}^{X_2}_Z T \rightarrow {}^{X_1}_{X_2} C$$

$${}^X_T T = {}^X_{X_1} T \cdot {}^{X_1}_Z T \rightarrow {}^X_{X_1} C$$

$${}^Y_T T = {}^Y_X T \cdot {}^X_Z T \rightarrow {}^Y_X C$$

$${}^T_2 T = {}^Y_2 T \cdot {}^Y_T T \rightarrow {}^T_2 C$$

$${}^T_1 T = {}^Y_1 T \cdot {}^Y_T T \rightarrow {}^T_1 C$$

$${}^Y_T T = {}^Y_1 T \cdot {}^Y_1 T \rightarrow {}^Y_T C$$

$${}^F_T T = {}^F_Y T \cdot {}^Y_T T \rightarrow {}^F_T C$$

Tout les écarts sont calculés par rapport au repère $\{T\}$, pour retrouver la matrice jacobienne par rapport au repère $\{F\}$, on multiplie le résultat par la matrice de rotation ${}^F_T R$ du repère T par rapport à $\{F\}$

Le calcul de la matrice Jacobienne a été réalisé en utilisant la fonction matlab suivante :

```
function J=ModelVariationnel(dv, params,Ls,A,B)

param(1)=params(1)-Ls*cos(A-pi/2)*cos(B-pi/2);
param(2)=params(2)-Ls*cos(A-pi/2)*sin(B-pi/2);
param(3)=params(3)-Ls*sin(A-pi/2);

% La fonction P=ModelVariationnel(dv, params,Ls,A,B) calcule la
% matrice jacobienne J à partir des variables de commandes
%(params: coordonnées de point touche) et le vecteur de perturbations
dv, en % utilisant les matrices de transport obtenues à partir des
transformations
% homogènes, chacune déduite à partir de chaque ligne du tableau
% descriptif tD. Dans ce calcul dv est pris égal au vecteur nul,
% les composantes de dv qui se trouvent dans le tableau descriptif
% indiquent l'ordre des variables.
% Ls : Longueur du centre du pivot jusqu'au centre du stylet
% params : variables de commande coordonnées du point de touche
%           params =[ x , y , z]
% A : Rotation du stylet suivant l'axe x, par rapport au repère
% fixe.
% B : Rotation du stylet suivant l'axe z, par rapport au repère
% fixe.
% dv : vecteur des perturbations, dans ce cas égal au vecteur nul,
% dv=zeros(18,1), on l'introduit dans %les calculs pour connaître
l'ordre
% des colonnes correspondant aux écarts cinématique dans la matrice
% jacobienne, l'ordre des variables est le suivant :
% dv=[delta_x(y); delta_y(y); delta_z(y); epsilon_x(y); epsilon_y(y); epsilon_z(y); delta_x(x); delta_y(x); delta_z(x); epsilon_x(x); epsilon_y(x); epsilon_z(x); delta_x(z); delta_y(z); delta_z(z); epsilon_x(z); epsilon_y(z); epsilon_z(z)];
% param : vecteur cordonnées articulaures
%
%
%
% J : matrice jacobienne
%
% [dx;dy;dz]=J.dv
%
```

```

%          Tx          Ty          Tz          Rx          Ry          Rz
tD = [ dv(1)  param(2)+dv(2)  dv(3)  0          0          0
        0          0          0          0          0          dv(4)
        0          0          0          0          dv(5)  0
        0          0          0          dv(6)  0          0
        param(1)+dv(7)  dv(8)  dv(9)  0          0          0
        0          0          0          0          0          dv(10)
        0          0          0          0          dv(11) 0
        0          0          0          dv(12) 0          0
        dv(13)  dv(14)  param(3)+dv(15)  0          0          0
        0          0          0          0          0          dv(16)
        0          0          0          0          dv(17) 0
        0          0          0          dv(18) 0          0
        0          0          0          pi-A  0          B  %
        0          0          Ls          0          0          0

%Position de la touche par rapport au probe

T=eye(4);
J=[];

for i=size(tD,1):-1:1
    T =
    ccg2th([tD(i,1);tD(i,2);tD(i,3);tD(i,4);tD(i,5);tD(i,6)])*T;
    C = t2c(T);

    if (i==14 | i==13)
        J = [[],J];
    elseif ( (i~=14 | i~=13) & rem(i,4)== 0)
        J = [C(:,4),J];
    elseif ((i~=14 | i~=13) & rem(i,4)== 1)
        J = [C(:,1),C(:,2),C(:,3),J];
    elseif ((i~=14 | i~=13) & rem(i,4)== 2)
        J = [C(:,6),J];
    elseif ((i~=14 | i~=13) & rem(i,4)==3)
        J = [C(:,5),J];
    end

    end

    for k=1:3
        J(4,:)=[];
    end

    %rotz(A)*rotx(pi-B): Rotation du repère {T} lié à la touche du
    %stylet par rapport au repère fondation {F}

    J=rotz(B)*rotx(pi-A)*J;

    %fin de la fonction

```

Les deux fonction Matlab : ccg2th et t2c que j'ai utilisé se trouve dans le Polybox du cours Mec6513 du professeur Guy Clautier et Richard Gourdeau;

Le principe de ces deux fonction est le suivant :

Fonction `ccg2th` : Cette fonction prend en argument les trois translation T_x , T_y , T_z et les trois rotations R_x , R_y , R_z qui ramène un repère i à un repère j , et donne en sortie la matrice de transformation homogène jT .

Fonction `t2c` : Cette fonction prend en argument la matrice de transformation homogène jT et donne en sortie la matrice de transport jC .

ANNEXE B : Calcul de la matrice d'identification en utilisant les petits écarts

Cette annexe décrit la méthode de calcul de la matrice jacobienne en utilisant les petits écarts, ce développement est un détail supplémentaire au développement présenté dans la section (3.1.7) du chapitre 3.

Au point M_j du calibre

L'erreur volumétrique en un point M_j du calibre étagé, quand le calibre est positionné suivant la direction n_i est :

$$\vec{e}_{M_j} = \begin{pmatrix} \delta_x(X_{j,i}) + \delta_x(Y_{j,i}) + \delta_x(Z_{j,i}) + \varepsilon_x(Y_{j,i})z_{y,i} - \varepsilon_z(Y_{j,i})t_y + \varepsilon_x(X_{j,i})z_{y,i} - \varepsilon_z(X_{j,i})t_y + \varepsilon_y(Z_{j,i})t_z - \varepsilon_z(Z_{j,i})t_v \\ \delta_y(X_{j,i}) + \delta_y(Y_{j,i}) + \delta_y(Z_{j,i}) + \varepsilon_z(Y_{j,i})x_{y,i} - \varepsilon_x(Y_{j,i})z_{y,i} + t_x\varepsilon_z(X_{j,i}) - \varepsilon_x(X_{j,i})z_{y,i} + \varepsilon_z(Z_{j,i})t_x - \varepsilon_x(Z_{j,i})t_z \\ \delta_z(X_{j,i}) + \delta_z(Y_{j,i}) + \delta_z(Z_{j,i}) + \varepsilon_x(Y_{j,i})t_v - \varepsilon_y(Y_{j,i})x_{y,i} + \varepsilon_x(X_{j,i})t_y - \varepsilon_y(X_{j,i})t_x + \varepsilon_x(Z_{j,i})t_v - \varepsilon_y(Z_{j,i})t_x \end{pmatrix} \quad (B-1)$$

L'erreur $E_{mj,i}$ de la position de la touche du stylet au point M_j quand le calibre étagé est positionné suivant la direction n_i est la projection de l'erreur volumétrique \vec{e}_{M_j} dans la direction normale à la facette palpée n_i , donc,

$$E_{mj,i} = \vec{e}_{M_j} \cdot \vec{n}_i. \quad (B-2)$$

L'expression de l'erreur $E_{mj,i}$ est

$$E_{mj,i} = \begin{pmatrix} \delta_x(X_{j,i})cc_i + \delta_x(Y_{j,i})cc_i + \delta_x(Z_{j,i})cc_i + \varepsilon_x(Y_{j,i})z_{y,i}cc_i - \varepsilon_z(Y_{j,i})t_ycc_i + \varepsilon_x(X_{j,i})z_{y,i}cc_i - \varepsilon_z(X_{j,i})t_ycc_i + \varepsilon_y(Z_{j,i})t_zcc_i - \varepsilon_z(Z_{j,i})t_vcc_i + \\ \delta_y(X_{j,i})cc_i + \delta_y(Y_{j,i})cc_i + \delta_y(Z_{j,i})cc_i + \varepsilon_z(Y_{j,i})x_{y,i}cc_i - \varepsilon_x(Y_{j,i})z_{y,i}cc_i + t_x\varepsilon_z(X_{j,i})cc_i - \varepsilon_x(X_{j,i})z_{y,i}cc_i + \varepsilon_z(Z_{j,i})t_xcc_i - \varepsilon_x(Z_{j,i})t_zcc_i + \\ \delta_z(X_{j,i})cc_i + \delta_z(Y_{j,i})cc_i + \delta_z(Z_{j,i})cc_i + \varepsilon_x(Y_{j,i})t_vcc_i - \varepsilon_y(Y_{j,i})x_{y,i}cc_i + \varepsilon_x(X_{j,i})t_ycc_i - \varepsilon_z(X_{j,i})t_xcc_i - \varepsilon_y(Z_{j,i})t_zcc_i \end{pmatrix} \quad (B-3)$$

En réarrangeant les expressions nous obtenons,

$$E_{mj,i} = \begin{pmatrix} \delta_x(X_{j,i})cc_i + \delta_x(X_{j,i})cs_i + \delta_z(X_{j,i})s_i + (t_y.s_i - z_{y,i}.cs_i).\varepsilon_x(X_{j,i}) + (z_{y,i}.cc_i - t_x.s_i).\varepsilon_z(X_{j,i}) + (t_x.cs_i - t_y.cc_i).\varepsilon_z(X_{j,i}) + \\ \delta_y(Y_{j,i})cc_i + \delta_y(Y_{j,i})cs_i + \delta_z(Y_{j,i})s_i + (t_y.s_i - z_{y,i}.cs_i).\varepsilon_x(Y_{j,i}) + (z_{y,i}.cc_i - x_{y,i}.s_i).\varepsilon_y(Y_{j,i}) + (x_{y,i}.cs_i - t_y.cc_i).\varepsilon_z(Y_{j,i}) + \\ \delta_z(Z_{j,i})cc_i + \delta_z(Z_{j,i})cs_i + \delta_x(Z_{j,i})s_i + (t_y.s_i - t_z.cs_i).\varepsilon_x(Z_{j,i}) + (t_z.cc_i - t_y.s_i).\varepsilon_y(Z_{j,i}) + (t_x.cs_i - t_y.cc_i).\varepsilon_z(Z_{j,i}) \end{pmatrix} \quad (B-4)$$

Au point initial M_1 du calibre

D'après l'expression (B-4), l'erreur $E_{ml,i}$ de la position de la touche du stylet au point initial M_1 quand le calibre étagé est positionné suivant la direction n_i est la projection de l'erreur volumétrique $\vec{e}_{M_1,i}$ dans la direction n_i du calibre, on a alors:

$$E_{ml,i} = \begin{pmatrix} \delta_x(X_{1,i}).cc_i + \delta_y(X_{1,i}).cs_i + \delta_z(X_{1,i}).s_i + (t_x.s_i - z_{t_{1,i}}.cs_i).\mathcal{E}_x(X_{1,i}) + (z_{t_{1,i}}.cc_i - t_x.s_i).\mathcal{E}_y(X_{1,i}) + (t_x.cs_i - t_y.cc_i).\mathcal{E}_z(X_{1,i}) + \\ \delta_x(Y_{1,i}).cc_i + \delta_y(Y_{1,i}).cs_i + \delta_z(Y_{1,i}).s_i + (t_y.s_i - z_{t_{1,i}}.cs_i).\mathcal{E}_x(Y_{1,i}) + (z_{t_{1,i}}.cc_i - x_{t_{1,i}}.s_i).\mathcal{E}_y(Y_{1,i}) + (x_{t_{1,i}}.cs_i - t_y.cc_i).\mathcal{E}_z(Y_{1,i}) + \\ \delta_x(Z_{1,i}).cc_i + \delta_y(Z_{1,i}).cs_i + \delta_z(Z_{1,i}).s_i + (t_z.s_i - t_x.cs_i).\mathcal{E}_x(Z_{1,i}) + (t_x.cc_i - t_z.s_i).\mathcal{E}_y(Z_{1,i}) + (t_x.cs_i - t_y.cc_i).\mathcal{E}_z(Z_{1,i}) \end{pmatrix} \quad (B-5)$$

Pour simplifier les expressions, on pose

$$A1 = cc_i ; A2 = cs_i ; A3 = s_i ; A4 = t_y.s_i - z_{y,i}.cs_i ; A5 = z_{y,i}.cc_i - t_x.s_i ; A6 = t_x.cs_i - t_y.cc_i$$

$$A7 = cc_i ; A8 = cs_i ; A9 = s_i ; A10 = t_y.s_i - z_{y,i}.cs_i ; A11 = z_{y,i}.cc_i - x_{y,i}.s_i ; A12 = x_{y,i}.cs_i - t_y.cc_i$$

$$A13 = cc_i ; A14 = cs_i ; A15 = s_i ; A16 = t_y.s_i - t_z.cs_i ; A17 = t_z.cc_i - t_x.s_i ; A18 = t_x.cs_i - t_y.cc_i$$

$$A41 = (t_y.s_i - z_{t_{1,i}}.cs_i) ; A51 = (z_{t_{1,i}}.cc_i - t_x.s_i) ; A61 = (t_x.cs_i - t_y.cc_i)$$

$$A101 = (t_y.s_i - z_{t_{1,i}}.cs_i) ; A111 = (z_{t_{1,i}}.cc_i - x_{t_{1,i}}.s_i) ; A121 = (x_{t_{1,i}}.cs_i - t_y.cc_i)$$

Au point M_j du calibre

L'expression (B-4) de l'erreur de position de la touche du stylet, au point M_j , suivant la direction n_i du calibre devient

$$E_{mj,i} = \begin{pmatrix} \delta_x(X_{j,i}).A1 + \delta_y(X_{j,i}).A2 + \delta_z(X_{j,i}).A3 + A4.\mathcal{E}_x(X_{j,i}) + A5.\mathcal{E}_y(X_{j,i}) + A6.\mathcal{E}_z(X_{j,i}) + \\ \delta_x(Y_{j,i}).A7 + \delta_y(Y_{j,i}).A8 + \delta_z(Y_{j,i}).A9 + A10.\mathcal{E}_x(Y_{j,i}) + A11.\mathcal{E}_y(Y_{j,i}) + A12.\mathcal{E}_z(Y_{j,i}) + \\ \delta_x(Z_{j,i}).A13 + \delta_y(Z_{j,i}).A14 + \delta_z(Z_{j,i}).A15 + A16.\mathcal{E}_x(Z_{j,i}) + A17.\mathcal{E}_y(Z_{j,i}) + A18.\mathcal{E}_z(Z_{j,i}) \end{pmatrix} \quad (B-6)$$

La forme matricielle suivante de l'expression (B-6) met en évidence les écarts cinématiques et les sensibilités de l'erreur de touche

$$E_{mj,i} = [A1 \ A2 \ A3 \ A4 \ A5 \ A6 \ A7 \ A8 \ A9 \ A10 \ A11 \ A12 \ A13 \ A14 \ A15 \ A16 \ A17 \ A18] \begin{bmatrix} \delta_x(X_{ji}) \\ \delta_y(X_{ji}) \\ \delta_z(X_{ji}) \\ \epsilon_x(X_{ji}) \\ \epsilon_y(X_{ji}) \\ \epsilon_z(X_{ji}) \\ \epsilon_x(Y_{ji}) \\ \delta_x(Y_{ji}) \\ \delta_y(Y_{ji}) \\ \delta_z(Y_{ji}) \\ \epsilon_x(Y_{ji}) \\ \epsilon_y(Y_{ji}) \\ \epsilon_z(Y_{ji}) \\ \delta_x(Z_{ji}) \\ \delta_y(Z_{ji}) \\ \delta_z(Z_{ji}) \\ \epsilon_x(Z_{ji}) \\ \epsilon_y(Z_{ji}) \\ \epsilon_z(Z_{ji}) \end{bmatrix}$$

(B-7)

On note

$$E_{mj,i} = A_j \cdot \delta v_{j,i} \quad (B-8)$$

où

A_j : Vecteur ligne composé des 18 coefficients calculés en fonction des coordonnées du point M_j

$\delta v_{j,i}$: Vecteur colonne composé des 18 écarts cinématiques de la machine, calculés en fonction des coordonnées articulaires de la machine lorsque la touche du stylet est au point M_j et la direction du calibre est n_i

Au point initial M_1 du calibre étagé

L'expression de l'erreur de position de la touche du stylet, au point M_1 , suivant la direction n_i du calibre est

$$E_{m1,i} = \begin{pmatrix} \delta_x(X_{1,i}) \cdot A1 + \delta_y(X_{1,i}) \cdot A2 + \delta_z(X_{1,i}) \cdot A3 + A41 \cdot \epsilon_x(X_{1,i}) + A51 \cdot \epsilon_y(X_{1,i}) + A61 \cdot \epsilon_z(X_{1,i}) + \\ \delta_x(Y_{1,i}) \cdot A7 + \delta_y(Y_{1,i}) \cdot A8 + \delta_z(Y_{1,i}) \cdot A9 + A101 \cdot \epsilon_x(Y_{1,i}) + A111 \cdot \epsilon_y(Y_{1,i}) + A121 \cdot \epsilon_z(Y_{1,i}) + \\ \delta_x(Z_{1,i}) \cdot A13 + \delta_y(Z_{1,i}) \cdot A14 + \delta_z(Z_{1,i}) \cdot A15 + A16 \cdot \epsilon_x(Z_{1,i}) + A17 \cdot \epsilon_y(Z_{1,i}) + A18 \cdot \epsilon_z(Z_{1,i}) \end{pmatrix}$$

(B-9)

La forme matricielle suivante de l'expression (B-9) met en évidence les écarts cinématiques et les sensibilités de l'erreur de touche

$$E_{m1,i} = [A1 \ A2 \ A3 \ A41 \ A51 \ A61 \ A7 \ A8 \ A9 \ A101 \ A111 \ A121 \ A13 \ A14 \ A15 \ A16 \ A17 \ A18] \begin{bmatrix} \delta_x(X_{1,i}) \\ \delta_y(X_{1,i}) \\ \delta_z(X_{1,i}) \\ \epsilon_x(X_{1,i}) \\ \epsilon_y(X_{1,i}) \\ \epsilon_z(X_{1,i}) \\ \delta_x(Y_{1,i}) \\ \delta_y(Y_{1,i}) \\ \delta_z(Y_{1,i}) \\ \epsilon_x(Y_{1,i}) \\ \epsilon_y(Y_{1,i}) \\ \epsilon_z(Y_{1,i}) \\ \delta_x(Z_{1,i}) \\ \delta_y(Z_{1,i}) \\ \delta_z(Z_{1,i}) \\ \epsilon_x(Z_{1,i}) \\ \epsilon_y(Z_{1,i}) \\ \epsilon_z(Z_{1,i}) \end{bmatrix}$$

(B-10)

On note

$$E_{m1,i} = A_i \cdot \delta v_{1,i} \quad (B-11)$$

Où

A_i : Vecteur ligne composé des 18 coefficient calculés en fonction des coordonnées du point M_i

$\delta v_{1,i}$: Vecteur colonne composé des 18 écarts cinématiques de la machine, calculés en fonction des coordonnées articulaires de la machine lorsque la touche du stylet est au point M_i et la direction du calibre est n_i

Erreur mesurée sur la calibre étagé

L'erreur mesurée sur le calibre étagé, entre le point M_i et le point M_j , quand le calibre étagé est orienté dans la direction n_i , notée $E_{1j,i}$, est calculée par la différence entre l'erreur de position de la touche de stylet au point M_j et l'erreur de position de la touche du stylet au point initial M_i :

$$E_{1j,i} = E_{mj,i} - E_{m1,i} \quad (B-12)$$

On remplace le vecteur $\delta v_{1,i}$ par son expression en fonction de la matrice de vandermonde :

$$E_{mj,i} = A_j \cdot MVDM_{j,i} \cdot \delta v \quad (B-13)$$

L'erreur de position de la touche du stylet, au point M_1 , quand le calibre est positionné suivant la direction n_i est :

$$E_{m1,i} = A_i \cdot MVDM_{1,i} \cdot \delta v \quad (B-14)$$

L'erreur mesurée sur le calibre étagé, entre le point M_1 et le point M_j , suivant la direction n_i , du calibre, est $E_{1j,i}$:

$$E_{1j,i} = E_{mj,i} - E_{m1,i} \quad (B-15)$$

On remplace les expressions (B-13) et (B-14) dans l'expression (B-15), on trouve l'expression matricielle de l'erreur mesurée entre le point initial M_1 et le point M_j du calibre étagé, quand ce dernier est positionné suivant la direction n_i

$$E_{1j,i} = (A_j \cdot MVDM_{j,i} - A_i \cdot MVDM_{1,i}) \delta v \quad (B-16)$$

ANNEXE C : Matrice d'identification donnant les écarts de perpendicularité et le gains d'échelles

Cette annexe présente le système d'équations permettant d'identifier les écarts de perpendicularité et les gains d'échelles pour les deux topologie de machine WFYXZT et WFXYZT.

Pour la MMT de topologie WFYXZT

Ce système est le résultat d'empilement d'équation (3-61) développé dans la section 3.1.9 du chapitre 3.

$$\begin{bmatrix}
 E_{11,1} \\
 E_{12,1} \\
 \vdots \\
 E_{1N_1,1} \\
 E_{11,2} \\
 E_{12,2} \\
 \vdots \\
 E_{1N_2,2} \\
 E_{11,3} \\
 E_{12,3} \\
 \vdots \\
 E_{1N_3,3} \\
 \vdots \\
 E_{1N_6,6}
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 (x_{t,1} - x_{t,1}).cc_1 & (z_{t,1} - z_{t,1}).cc_1 & (z_{t,1} - z_{t,1}).cs_1 & (X_{1,1} - X_{1,1}).cc_1 & (Y_{1,1} - Y_{1,1}).cs_1 & (Z_{1,1} - Z_{1,1}).s_1 \\
 (x_{t,2,1} - x_{t,1}).cc_1 & (z_{t,2,1} - z_{t,1}).cc_1 & (z_{t,2,1} - z_{t,1}).cs_1 & (X_{2,1} - X_{1,1}).cc_1 & (Y_{2,1} - Y_{1,1}).cs_1 & (Z_{2,1} - Z_{1,1}).s_1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 (x_{t,N_1,1} - x_{t,1}).cc_1 & (z_{t,N_1,1} - z_{t,1}).cc_1 & (z_{t,N_1,1} - z_{t,1}).cs_1 & (X_{N_1,1} - X_{1,1}).cc_1 & (Y_{N_1,1} - Y_{1,1}).cs_1 & (Z_{N_1,1} - Z_{1,1}).s_1 \\
 (x_{t,1,2} - x_{t,2}).cc_2 & (z_{t,1,2} - z_{t,2}).cc_2 & (z_{t,1,2} - z_{t,2}).cs_2 & (X_{1,2} - X_{1,2}).cc_2 & (Y_{1,2} - Y_{1,2}).cs_2 & (Z_{1,2} - Z_{1,2}).s_2 \\
 (x_{t,2,2} - x_{t,1,2}).cc_2 & (z_{t,2,2} - z_{t,1,2}).cc_2 & (z_{t,2,2} - z_{t,1,2}).cs_2 & (X_{2,2} - X_{1,2}).cc_2 & (Y_{2,2} - Y_{1,2}).cs_2 & (Z_{2,2} - Z_{1,2}).s_2 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 (x_{t,N_2,2} - x_{t,1,2}).cc_2 & (z_{t,N_2,2} - z_{t,1,2}).cc_2 & (z_{t,N_2,2} - z_{t,1,2}).cs_2 & (X_{N_2,2} - X_{1,2}).cc_2 & (Y_{N_2,2} - Y_{1,2}).cs_2 & (Z_{N_2,2} - Z_{1,2}).s_2 \\
 (x_{t,1,3} - x_{t,1,2}).cc_3 & (z_{t,1,3} - z_{t,1,2}).cc_3 & (z_{t,1,3} - z_{t,1,2}).cs_3 & (X_{1,3} - X_{1,3}).cc_3 & (Y_{1,3} - Y_{1,3}).cs_3 & (Z_{1,3} - Z_{1,3}).s_3 \\
 (x_{t,2,3} - x_{t,1,3}).cc_3 & (z_{t,2,3} - z_{t,1,3}).cc_3 & (z_{t,2,3} - z_{t,1,3}).cs_3 & (X_{2,3} - X_{1,3}).cc_3 & (Y_{2,3} - Y_{1,3}).cs_3 & (Z_{2,3} - Z_{1,3}).s_3 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 (x_{t,N_3,3} - x_{t,1,3}).cc_3 & (z_{t,N_3,3} - z_{t,1,3}).cc_3 & (z_{t,N_3,3} - z_{t,1,3}).cs_3 & (X_{N_3,3} - X_{1,3}).cc_3 & (Y_{N_3,3} - Y_{1,3}).cs_3 & (Z_{N_3,3} - Z_{1,3}).s_3 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 (x_{t,N_6,3} - x_{t,1,3}).cc_6 & (z_{t,N_6,3} - z_{t,1,3}).cc_6 & (z_{t,N_6,3} - z_{t,1,3}).cs_6 & (X_{N_6,3} - X_{1,3}).cc_6 & (Y_{N_6,3} - Y_{1,3}).cs_6 & (Z_{N_6,3} - Z_{1,3}).s_6
 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_{z,y,0} \\ \boldsymbol{\epsilon}_{y,x,0} \\ \boldsymbol{\epsilon}_{x,x,0} \\ \boldsymbol{\delta}_{x,x,1} \\ \boldsymbol{\delta}_{y,y,1} \\ \boldsymbol{\delta}_{z,z,1} \end{pmatrix}$$

Ce système d'équation est écrit

$$E = J \cdot \delta v$$

E : Vecteur contient toutes les erreurs mesurées sur le calibre suivant les 6 configurations de mesures

J : Matrice d'identification

δv : Vecteur contenant les 3 écarts de perpendicularité et les 3 gains d'échelle

L'inversion de la matrice d'identification permet de déterminer les trois perpendicularités et les trois gains d'échelle qui expliquent les erreurs mesurées sur le calibre.

Pour la MMT de topologie WFXYZT

Ce système est le résultat d'empilement d'équation (3-90) développé dans la section 3.2.6 du chapitre 3.

$$\begin{bmatrix} E_{11,1} \\ E_{12,1} \\ \vdots \\ E_{1N_1,1} \\ E_{11,2} \\ E_{12,2} \\ \vdots \\ E_{1N_2,2} \\ E_{11,3} \\ E_{12,3} \\ \vdots \\ E_{1N_3,3} \\ \vdots \\ E_{1N_6,6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_{t1,1} - y_{t1,1})cc_1 & (z_{t1,1} - z_{t1,1})cc_1 & (z_{t1,1} - z_{t1,1})cs_1 & (X_{1,1} - X_{1,1})cc_1 & (Y_{1,1} - Y_{1,1})cs_1 & (Z_{1,1} - Z_{1,1})s_1 \\ (y_{t2,1} - y_{t2,1})cc_1 & (z_{t2,1} - z_{t2,1})cc_1 & (z_{t2,1} - z_{t2,1})cs_1 & (X_{2,1} - X_{1,1})cc_1 & (Y_{2,1} - Y_{1,1})cs_1 & (Z_{2,1} - Z_{1,1})s_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (y_{tN_1,1} - y_{tN_1,1})cc_1 & (z_{tN_1,1} - z_{tN_1,1})cc_1 & (z_{tN_1,1} - z_{tN_1,1})cs_1 & (X_{N_1,1} - X_{1,1})cc_1 & (Y_{N_1,1} - Y_{1,1})cs_1 & (Z_{N_1,1} - Z_{1,1})s_1 \\ (y_{t1,2} - y_{t1,2})cc_2 & (z_{t1,2} - z_{t1,2})cc_2 & (z_{t1,2} - z_{t1,2})cs_2 & (X_{1,2} - X_{1,2})cc_2 & (Y_{1,2} - Y_{1,2})cs_2 & (Z_{1,2} - Z_{1,2})s_2 \\ (y_{t2,2} - y_{t2,2})cc_2 & (z_{t2,2} - z_{t2,2})cc_2 & (z_{t2,2} - z_{t2,2})cs_2 & (X_{2,2} - X_{1,2})cc_2 & (Y_{2,2} - Y_{1,2})cs_2 & (Z_{2,2} - Z_{1,2})s_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (y_{tN_2,2} - y_{tN_2,2})cc_2 & (z_{tN_2,2} - z_{tN_2,2})cc_2 & (z_{tN_2,2} - z_{tN_2,2})cs_2 & (X_{N_2,2} - X_{1,2})cc_2 & (Y_{N_2,2} - Y_{1,2})cs_2 & (Z_{N_2,2} - Z_{1,2})s_2 \\ (y_{t1,3} - y_{t1,3})cc_3 & (z_{t1,3} - z_{t1,3})cc_3 & (z_{t1,3} - z_{t1,3})cs_3 & (X_{1,3} - X_{1,3})cc_3 & (Y_{1,3} - Y_{1,3})cs_3 & (Z_{1,3} - Z_{1,3})s_3 \\ (y_{t2,3} - y_{t2,3})cc_3 & (z_{t2,3} - z_{t2,3})cc_3 & (z_{t2,3} - z_{t2,3})cs_3 & (X_{2,3} - X_{1,3})cc_3 & (Y_{2,3} - Y_{1,3})cs_3 & (Z_{2,3} - Z_{1,3})s_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (y_{tN_3,3} - y_{tN_3,3})cc_3 & (z_{tN_3,3} - z_{tN_3,3})cc_3 & (z_{tN_3,3} - z_{tN_3,3})cs_3 & (X_{N_3,3} - X_{1,3})cc_3 & (Y_{N_3,3} - Y_{1,3})cs_3 & (Z_{N_3,3} - Z_{1,3})s_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (y_{t1,6} - y_{t1,6})cc_6 & (z_{t1,6} - z_{t1,6})cc_6 & (z_{t1,6} - z_{t1,6})cs_6 & (X_{1,6} - X_{1,6})cc_6 & (Y_{1,6} - Y_{1,6})cs_6 & (Z_{1,6} - Z_{1,6})s_6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_{z,X,0} \\ \boldsymbol{\epsilon}_{y,X,0} \\ \boldsymbol{\epsilon}_{x,Y,0} \\ \boldsymbol{\delta}_{x,X,1} \\ \boldsymbol{\delta}_{y,X,1} \\ \boldsymbol{\delta}_{z,Z,1} \end{pmatrix}$$

Ce système d'équation est écrit

$$E = J \cdot \delta v$$

E : Vecteur contient toutes les erreurs mesurées sur le calibre suivant les 6 configurations de mesures

J : Matrice d'identification

δv : Vecteur contenant les 3 écarts de perpendicularité et les 3 gains d'échelle

L'inversion de la matrice d'identification permet de déterminer les trois perpendicularités et les trois gains d'échelle qui expliquent les erreurs mesurées sur le calibre.

ANNEXE D : Résultats de simulation

Dans cette annexe, on présente quelques résultats de simulation. Les machines virtuelles ont été créées à l'aide du simulateur de mesures CMM_Simulee, les données de simulation sont traitées ensuite à l'aide du logiciel POLYCMM afin de déterminer la direction de pires erreurs, les résultats de calculs ont été validés par les mesures effectuées sur les machines virtuelles.

Machine simulée 1

La figure D-1 présente les écarts aléatoires générés par le simulateur de mesures

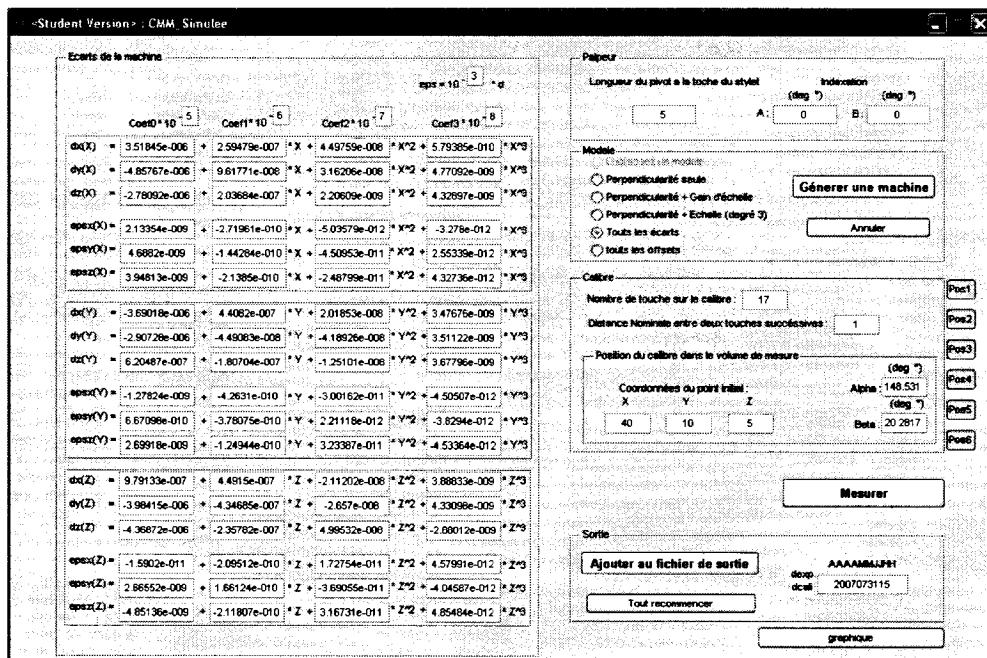


Figure D-1 : Machine Simulée 1

Calcul par le logiciel POLYCMM

La figure D-2 présente les résultats de calculs effectués à l'aide du logiciel POLYCMM, en prenant en entré les résultats de la simulation donnés par la machine simulée 1.

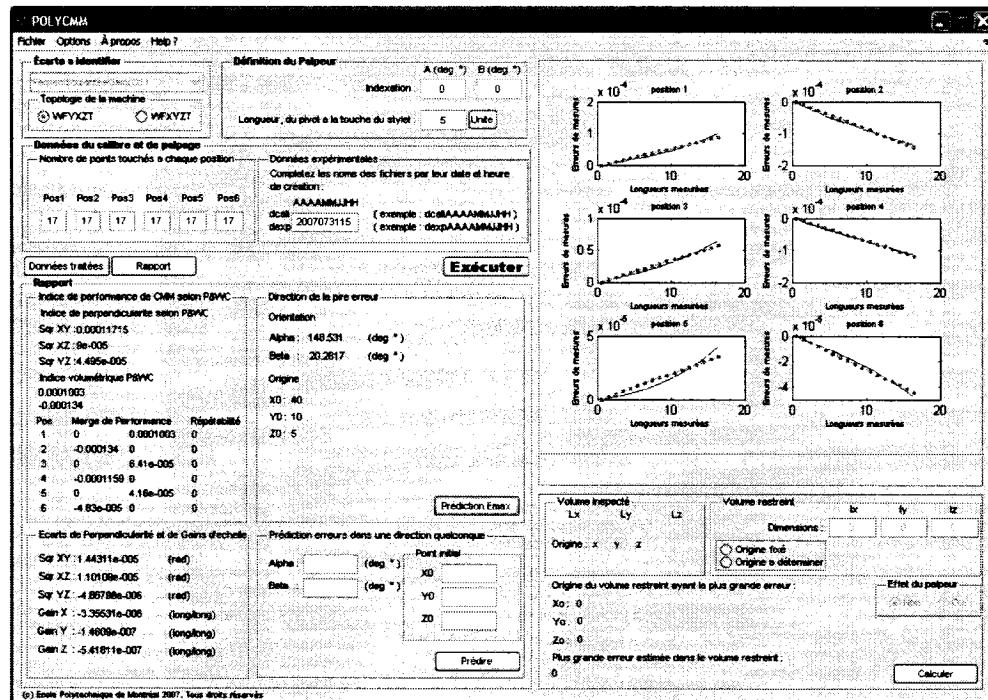


Figure D-2 : Résultats de calcul 1

Résultats 1

La figure D-3 présente les erreurs mesurées dans la direction de pires erreurs prédictes par le logiciel POLYCMM et celles mesurées par la machine simulée dans la direction de pires erreurs indiquée par le logiciel POLYCMM.

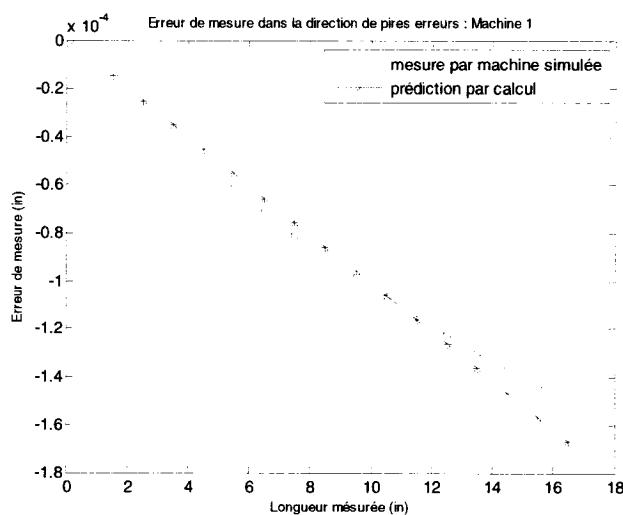


Figure D-3 : Erreurs de mesures dans la direction de pires erreurs - Machine 1 -

Machine simulée 2

La figure D-4 présente les écarts aléatoires générés par le simulateur de mesures

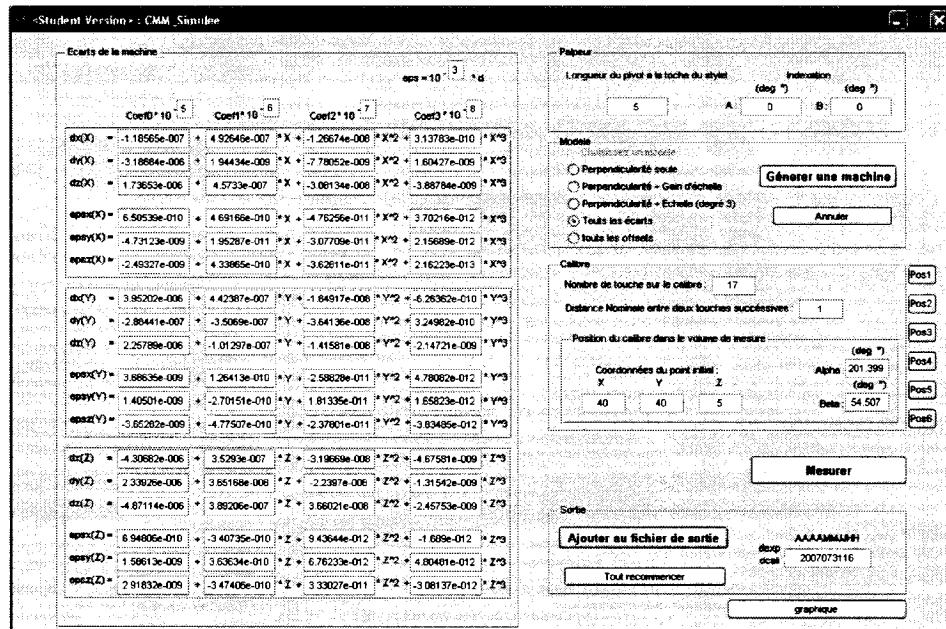


Figure D-4 : Machine Simulée 2

Calcul par le logiciel POLYCMM

La figure D-5 présente les résultats de calculs effectués à l'aide du logiciel POLYCMM, en prenant en entré les résultats de la simulation donnés par la machine simulée 2.

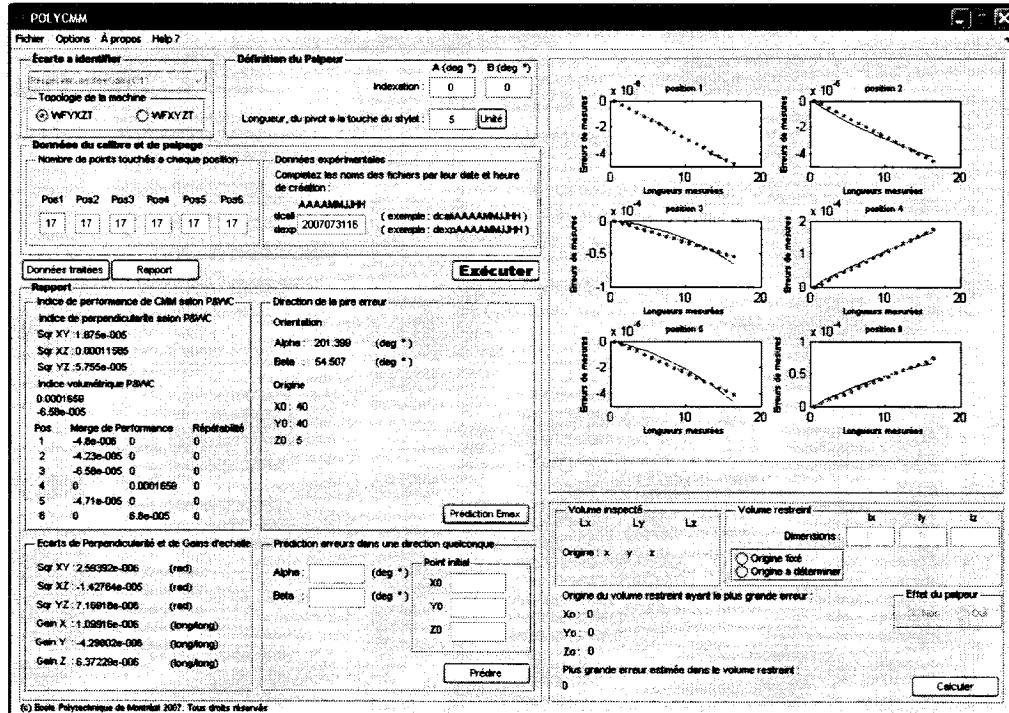


Figure D-5 : Résultats de calcul 2

Résultats

La figure D-6 présente les erreurs mesurées dans la direction de pires erreurs prédictes par le logiciel POLYCMM et celles mesurées par la machine simulée dans la direction de pires erreurs indiquée par le logiciel POLYCMM.

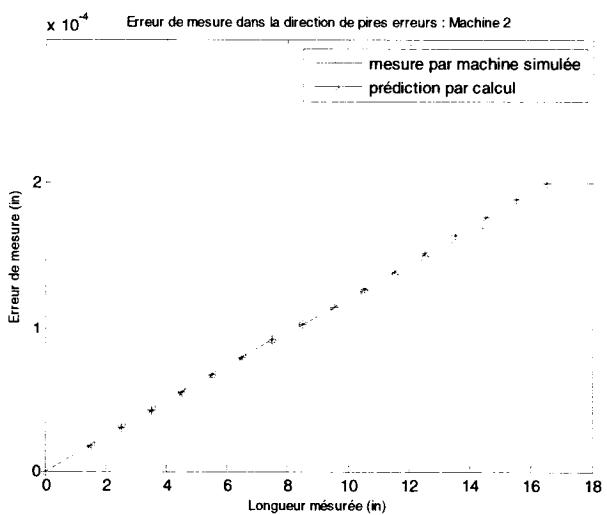


Figure D-6: Erreurs de mesures dans la direction de pires erreurs - Machine 2 -

Machine simulée 3

La figure D-7 présente les écarts aléatoires générés par le simulateur de mesures

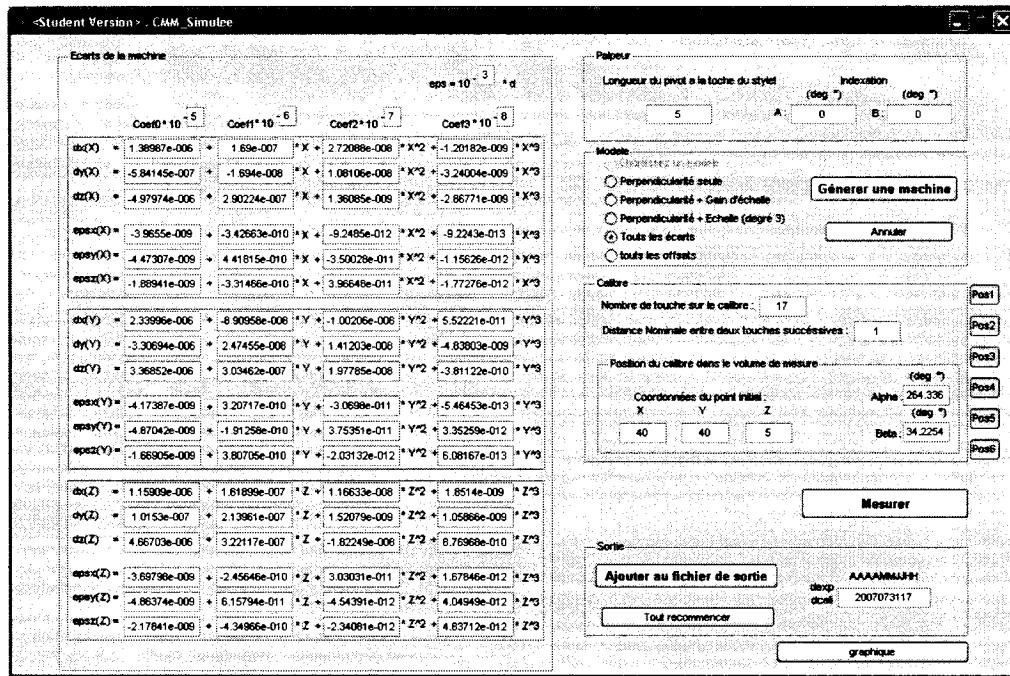


Figure D-7: Machine Simulée 3

Calcul par le logiciel POLYCMM

La figure D-8 présente les résultats de calculs effectués à l'aide du logiciel POLYCMM, en prenant en entré les résultats de la simulation donnés par la machine simulée 3.

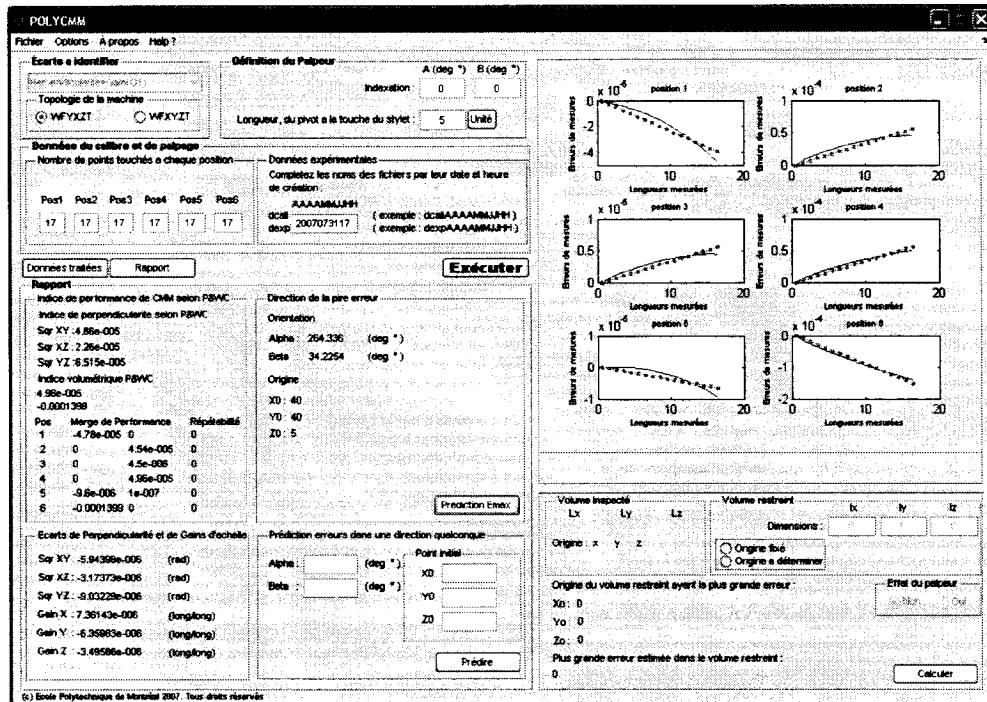


Figure D-8 : Résultats de calcul 3

Résultats

La figure D-9 présente les erreurs mesurées dans la direction de pires erreurs prédictes par le logiciel POLYCMM et celles mesurées par la machine simulée dans la direction de pires erreurs indiquée par le logiciel POLYCMM.

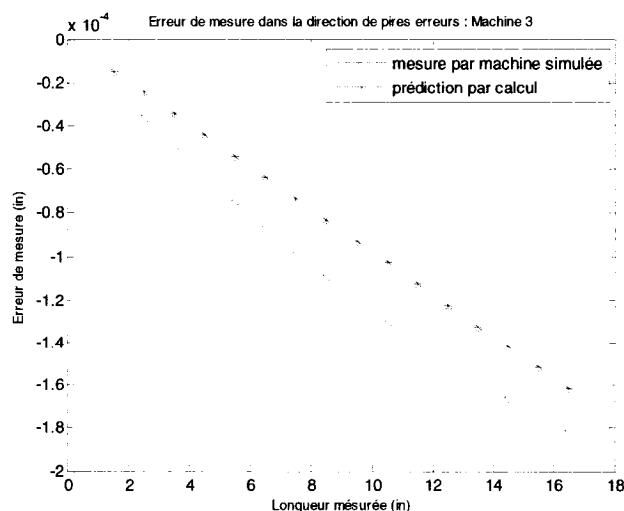


Figure D-9 : Erreurs de mesures dans la direction de pires erreurs - Machine 3 -

Machine simulée 4

La figure D-10 présente les écarts aléatoires générés par le simulateur de mesures

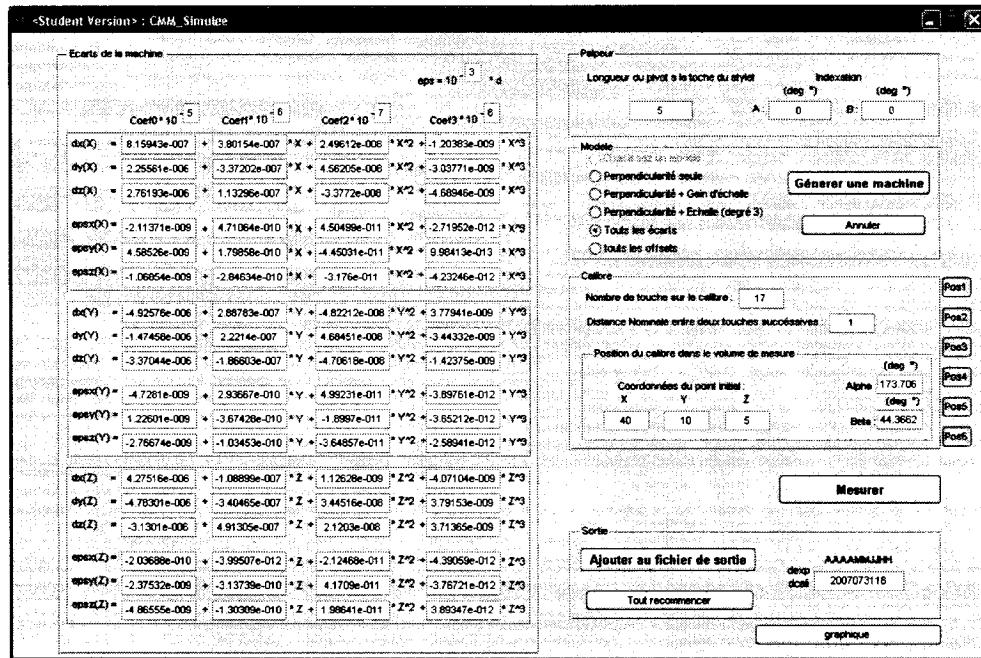


Figure D-10 : Machine Simulée 4

Calcul par le logiciel POLYCMM

La figure D-11 présente les résultats de calculs effectués à l'aide du logiciel POLYCMM, en prenant en entré les résultats de la simulation donnés par la machine simulée 4.

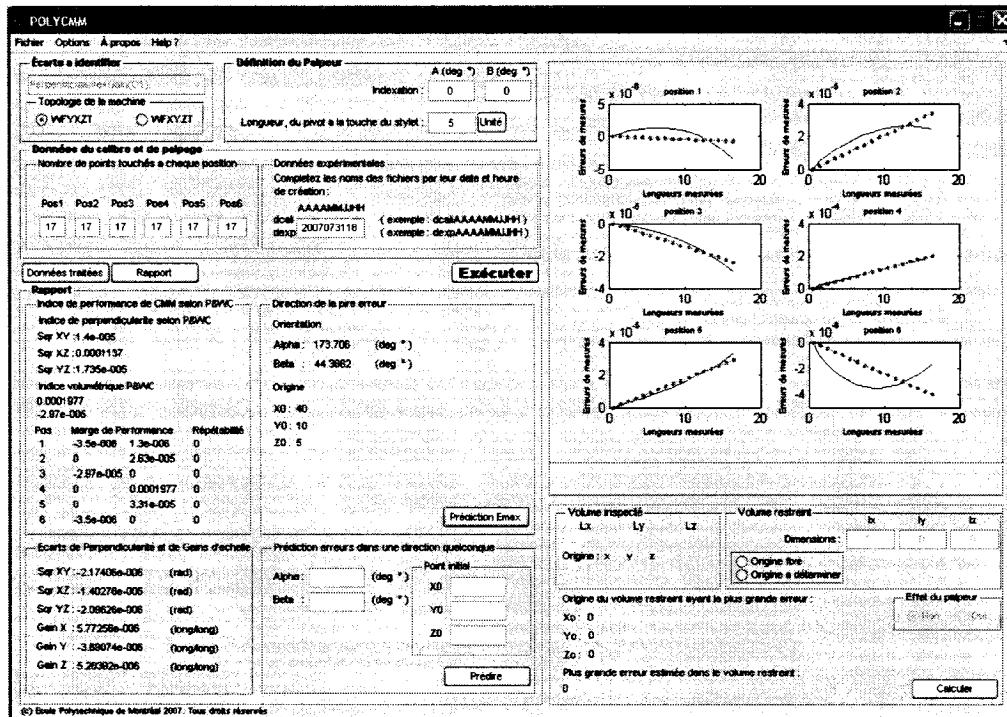


Figure D-11 : Résultats de calcul 4

Résultats

La figure D-12 présente les erreurs mesurées dans la direction de pires erreurs prédites par le logiciel POLYCMM et celles mesurées par la machine simulée dans la direction de pires erreurs indiquée par le logiciel POLYCMM.

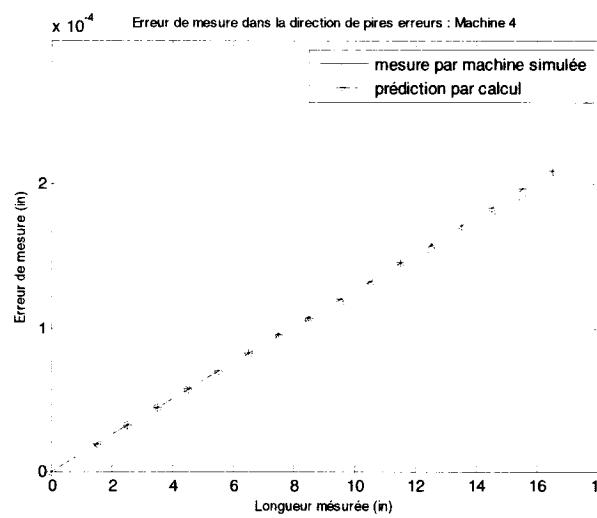


Figure D-12: Erreurs de mesures dans la direction de pires erreurs - Machine 4 -

ANNEXE E : Outils mathématiques

Matrice de transformation homogène

La matrice de la transformation homogène ${}^F_w T$ est une matrice (4 x 4), qui décrit la position du repère pièce {W} par rapport au repère fondation {F}, cette position est déterminée par une rotation ${}^F_w R$ et une translation ${}^F_w Trans$ du repère {W} par rapport à {F}, l'expression générale de cette matrice est :

$${}^F_w T = \begin{bmatrix} {}^F_w R & {}^F_w Trans \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

${}^F_w Trans$: est un vecteur de 3 lignes, composé des coordonnées de l'origine O_w du repère {W} par rapport au repère {F}.

${}^F_w R$: Matrice de rotation du repère {W} par rapport au repère {F}, elle est composée des projections des vecteurs unitaires i_w , j_w et k_w du repère {W} dans le repère fondation {F}

$${}^F_w T = \begin{bmatrix} {}^F_w i_{w,x} & {}^F_w j_{w,x} & {}^F_w k_{w,x} & {}^F_w O_{w,x} \\ {}^F_w i_{w,y} & {}^F_w j_{w,y} & {}^F_w k_{w,y} & {}^F_w O_{w,y} \\ {}^F_w i_{w,z} & {}^F_w j_{w,z} & {}^F_w k_{w,z} & {}^F_w O_{w,z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ANNEXE F : Simulateur de mesures

Le simulateur de mesures utilisé dans ce projet est une application développée sous Matlab qui génère des machines virtuelles aléatoires de topologie WFYXZT, chaque machine est caractérisée par les écarts cinématiques associées à ces axes. Cette application prend en entrée les écarts cinématiques de la machine générés aléatoirement, la position du calibre et le nombre de points touchés sur le calibre et donne en sortie un fichier composé de quatre colonnes (Distances actuelles ; Distances Nominales ; Erreur de mesures ; Répétabilité) et un fichier contient les données sur la position du calibre.

La figure F-1 montre l'interface graphique du simulateur de mesures. Cette interface est composé de 5 zones qui sont : "Ecarts de la machine", "Palpeur", "Modèle", "Calibre" et "Sortie". Chaque écart est modélisé par un polynôme de degré 3 et représenté par 4 coefficients dans la zone "Ecarts de la machine". Pour générer une machine virtuelle il suffit de sélectionner un modèle (ex. Tous les écarts) dans la zone "Modèle" et cliquer sur le bouton "Générer une machine", les zones de textes dans la zone "Ecarts de la machine" prendront des valeurs aléatoires. Une fois la machine est générée et le modèle est choisi, on commence les mesures sur le calibre suivant les 6 positions ; pour chaque position on clique sur le bouton correspondant (ex. pour la position 1, on clique sur le bouton "Pos1" on définit le calibre dans la zone "Calibre" en remplissant les zones de texte, on clique ensuite sur le bouton "Mesurer" pour faire les mesures et puis sur le bouton "Ajouter au fichier de sortie" pour stocker les données dans un fichier de sortie qui sera créé et enregistré dans un dossier spécifique. Une fois les 6 mesures sont effectuées, on récupère le fichier de sortie pour faire des calculs à l'aide du logiciel POLYCMM.

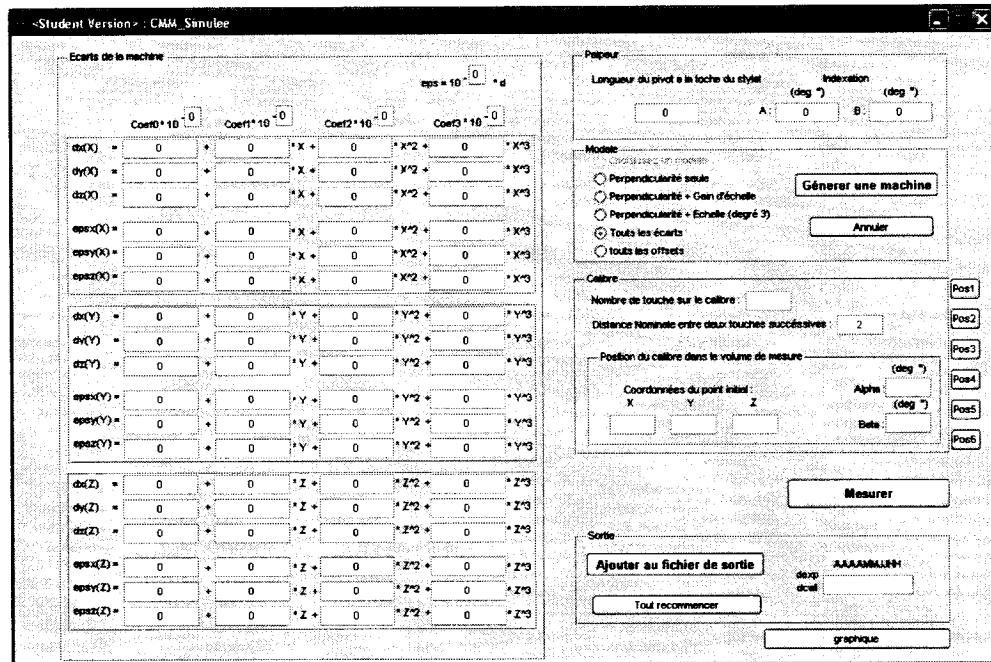


Figure F-1 : Interface graphique du simulateur de mesures