



Titre: Conception, analyse et caractérisation des propriétés mécaniques de ressorts composites à renfort tressé
Title:

Auteur: Oussama Zebdi
Author:

Date: 2007

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Zebdi, O. (2007). Conception, analyse et caractérisation des propriétés mécaniques de ressorts composites à renfort tressé [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/8007/>
Citation:

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/8007/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: François Trochu, & Rachid Boukhili
Advisors:

Programme: Non spécifié
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CONCEPTION, ANALYSE ET CARACTÉRISATION DES PROPRIÉTÉS
MÉCANIQUES DE RESSORTS COMPOSITES À RENFORT TRESSÉ

OUSSAMA ZEBDI
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR
(GÉNIE MÉCANIQUE)
NOVEMBRE 2007



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 978-0-494-37137-4

Our file Notre référence

ISBN: 978-0-494-37137-4

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

CONCEPTION, ANALYSE ET CARACTÉRISATION DES PROPRIÉTÉS
MÉCANIQUES DE RESSORTS COMPOSITES À RENFORT TRESSÉ

présentée par : ZEBDI, Oussama

en vue de l'obtention du diplôme du : Philosophiae Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. RUIZ, Eduardo-Antonio-Julian, Ph.D., Président

M. TROCHU, François, Ph.D., Membre et directeur de recherche

M. BOUKHILI, Rachid, Ph.D., Membre et codirecteur de recherche

M. VADEAN, Aurelian, Doct., Membre

M. ROBITAILLE, François, Ph.D., Membre

DÉDICACE

Je dédie ce travail à :

- *Mes premiers enseignants: mes chers parents*
- *Mon associée dans cette vie : ma chère femme*
- *Mon lionceau qui me réveillait la nuit pour étudier : mon fils Anas*
- *Mes frères et sœurs et beaux frères et belles sœurs*

REMERCIEMENTS

La réalisation de ce projet n'aurait pas été possible sans l'aide et les conseils de nombreuses personnes. Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de recherche, M. François Trochu, pour m'avoir guidé et fait partager ses connaissances. J'exprime aussi ma reconnaissance à M. Rachid Boukhili, mon codirecteur pour ses conseils et son suivi de l'aspect expérimental et technique de ce projet.

Je remercie également M. Christian Charles Martel, technicien au CREPEC, pour son aide et sa patience lors de la fabrication des composites ainsi que pour avoir assuré les meilleures conditions possibles aux laboratoires. J'exprime aussi ma gratitude à M. Nour Aimene de la section de mécanique appliquée pour avoir accepté d'installer les jauges de déformation et faire des initiatives pour résoudre plusieurs problèmes d'installation.

Je voudrais aussi remercier M. Maurice Guitton et M. Claude Baril de la compagnie Composites Atlantic Ltd, pour avoir fourni les matériaux nécessaires du projet. J'exprime aussi mes remerciements pour la contribution financière du conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG) et le support de la chaire sur les composites à haute performance (CCHP) et du centre de recherche en plasturgie et composites (CREPEC).

Je souhaite aussi à remercier les professeurs Eduardo Ruiz, François Robitaille et Aurelian Vadean d'avoir accepté pour juger cette thèse.

Finalement, je remercie les étudiants et membres du personnel qui m'ont aidé lors les années passées au sein du CREPEC et en particulier Djebbar Messaoud, Vincent Achim Sofiane Soukane et Benoît Lecarpentier.

RÉSUMÉ

Les composites à haute performance fabriqués à partir des renforts tissés ou tressés ont des applications dans plusieurs domaines, principalement dans les industries aérospatiale, automobile et marine. Ce projet s'inscrit dans le cadre des travaux de recherche effectués à l'École Polytechnique de Montréal en collaboration avec la compagnie Composites Atlantic Ltd.

Les ressorts composites constituent une alternative intéressante, étant donné la réduction de poids qu'ils permettent d'obtenir à performance égale comparé aux ressorts métalliques. Leur bonne tenue en fatigue et leur résistance à la corrosion constituent aussi des atouts importants dans beaucoup d'applications. De plus, l'utilisation des composites assure une sécurité accrue en évitant les risques de rupture brutale en raison de la faible vitesse de propagation de fissures dans ce type de matériau. Enfin, dans les machines électrotechniques, l'utilisation de ressorts composites présente un autre avantage important en raison de leurs propriétés d'isolation électrique.

Peu de travaux traitent des ressorts composites dans la littérature technique. La première partie de cette thèse a porté sur les problèmes reliés à la conception et à la caractérisation mécanique des ressorts composites. Les résultats sont prometteurs, puisqu'ils confirment la possibilité d'obtenir des ressorts composites présentant la même performance mécanique en terme de raideur que les ressorts métalliques. Deux solutions ont été trouvées pour remplacer un ressort métallique de suspension d'un véhicule à quatre roues motrices : un premier ressort en carbone/époxy et un deuxième en verre/époxy.

Dans la deuxième partie, un logiciel a été développé afin d'élaborer une nouvelle approche pour prédire les propriétés mécaniques de composites tissés ou tressés. Cette démarche est fondée sur une méthode inverse à partir de la théorie des stratifiés qui

permet de créer, à partir de résultats expérimentaux sur des composites tressés, un pli de base virtuel incorporant l'effet de l'architecture des fibres (ondulation et angle de tressage). À partir de ce modèle, les propriétés du composite peuvent être prédites pour un autre angle de tressage. La comparaison avec les résultats expérimentaux a montré une bonne corrélation avec les prédictions numériques.

En troisième partie, des travaux de caractérisation expérimentale ont porté sur l'étude du fluage de plaques composites fabriquées à partir des mêmes matériaux de renfort que les ressorts composites. Des essais de fluage en flexion trois points ont été réalisés avec une machine DMA Q800. Les résultats ont montré que le comportement en fluage est gouverné essentiellement par la matrice polymère, mais la rigidité, en revanche, dépend du mélange fibres/matrice. L'angle de tressage de 35° correspond à un seuil caractéristique pour les composites tressés, puisque qu'au delà de cette valeur la rigidité chute dans un essai de fluage à des températures supérieures à T_g . Il représente aussi un angle critique dans un essai de traction ou de flexion, à partir duquel le mode de rupture du composite passe du mode fragile (rupture des fibres) à un mode mixte, dans lequel la matrice polymère commence à jouer un rôle au même titre que les fibres. Une bonne stabilité a été remarquée pour les composites tressés avec un angle de tressage inférieur à $\pm 35^\circ$ ou supérieur à $\pm 60^\circ$. Des essais à long terme ont été réalisés pour deux composites tressés $\pm 45^\circ$ et $\pm 55^\circ$, afin de vérifier le modèle prédictif utilisé par la DMA. Les facteurs de translation obtenus pour le court et le long termes sont approximativement égaux.

En résumé, les travaux de cette thèse fournissent un point de départ en vue du développement d'applications industrielles des ressorts composites. Le logiciel de conception permet d'évaluer l'efficacité des ressorts composites hélicoïdaux pour une application amortissante. Le logiciel développé pour la prédiction des propriétés élastiques des composites tressés accélère la mise en données des résultats de caractérisation nécessaires pour la conception. Cet outil numérique pourrait être

généralisé à d'autres architectures de fibres. Il s'agit d'un outil pratique qui peut être utile pour des recherches ultérieures de nature scientifique ou industrielle. Enfin, l'étude de fluage réalisée, bien que préliminaire, fournit une première estimation sur la durée de vie de ressorts composites en verre/époxy. Il serait intéressant de passer maintenant au développement d'une première application industrielle.

ABSTRACT

High performance composites reinforced by woven or braided fabrics have several different applications in various fields such as in the aerospace, automobile and marine industry. This research project was carried out at the École Polytechnique de Montréal in collaboration with an industrial sponsor, the company Composites Atlantic Ltd.

Composite springs often represent an interesting alternative, given the reduction in weight that they allow with equal mechanical performance compared to metallic springs. Their good resistance to fatigue and corrosion bring additional benefits in several industrial applications. Moreover, the use of the composites increases safety by avoiding the risks of brutal rupture because of the low propagation velocity of cracks in this type of material. Lastly, in electrotechnics, another significant advantage comes into play because of the electrical insulation capability of composite springs.

Few research results can be found on composite springs in the scientific literature. The first part of this thesis studies the problems connected with the design of composite springs. The results are promising, because it was confirmed that composite springs can be devised with the same mechanical performance in term of stiffness as metallic ones. Two solutions were found to replace the metallic springs of the suspension of a four wheel drive: the first spring was in carbon-epoxy, and the second one in glass-epoxy.

In the second part, software was developed in order to devise a new approach to predict the mechanical properties of woven or braided composites. This work shows how an inverse method based on plate laminate theory allows creating, from experimental results on braided composites, a virtual basic ply that includes the effect of fiber architecture (undulation and braiding angle). Using this model, the properties of the composite can be predicted for any braid angle. The comparison with the experimental results shows a good correlation with numerical predictions.

In third part, an experimental study on creep was conducted on composite plates manufactured with the same constitutive materials as the composite springs. Creep tests in three point bending were carried out with Q800 DMA machine. The results showed that creep behavior depends primarily on the polymer matrix. However, rigidity is a function of the fiber-matrix mixture. The braiding angle of 35° corresponds to a characteristic threshold for braided composites: beyond this value, rigidity falls in a creep test at a temperature higher than T_g . It represents also a critical angle in bending or in tensile tests. Above 35° , the failure mode of the composite goes from fragile (rupture of fibers) to a mixed mode, in which the polymer matrix comes also into play with fibers. A good stability was observed for the composites with a braiding angle lower than $\pm 35^\circ$ or higher than $\pm 60^\circ$. Long-term tests were also carried out for two braided composites at $\pm 45^\circ$ and $\pm 55^\circ$ in order to check the predictive model of the DMA. The shift factors obtained from the short and long term tests are roughly equal.

This thesis has set the ground for the future development on industrial applications of composite springs. The design software predicts the mechanical effectiveness of helical composite springs. The software developed to predict the elastic properties of braided composites accelerates the preparation of characterization results for the design stage. This numerical tool could be generalized for other fiber architectures. It represents a practical tool for further investigations. Finally, the study on creep, although preliminary, provides a first evaluation of the life cycle of composite springs. It would be interesting to proceed now to the design of a first industrial application.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	IV
REMERCIEMENTS	V
RÉSUMÉ	VI
ABSTRACT	IX
TABLE DES MATIÈRES	XI
LISTE DES ANNEXES	XV
LISTE DES FIGURES	XVI
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	XXI
LISTE DES TABLEAUX	XXIV
INTRODUCTION	1
Position du problème	2
Objectifs	3
Objectifs spécifiques	3
Organisation de la thèse	3
Chapitre 1 - Revue de la littérature	6
1.1 Composites à renforts tressés	6
1.1.1 Procédé de tressage	8
1.1.2 Propriétés des tresses	9
1.2 Conception des ressorts hélicoïdaux composites	13
1.2.1 Ressort hélicoïdal tubulaire	14
1.2.2 Optimisation multicritères	16
1.2.3 Applications	17
1.3 Fabrication des ressorts composites hélicoïdaux	19
1.4 Comportement mécanique des composites tressés	23
1.4.1 Effet de l'angle de tressage	23
1.4.2 Effet du taux de fibres	25
1.4.3 Prédiction des propriétés mécaniques des composites tissés et tressés	26

1.5 Comportement des composites en fluage	29
1.5.1 Principe de superposition temps-température (PSTT)	31
1.5.2 Effet de l'orientation des fibres.....	35
Chapitre 2 – Description de la démarche de recherche	37
2.1 Article 1	37
2.2 Article 2	39
2.3 Article 3	40
Chapitre 3 - Article 1: <i>Optimum Design of a Composite Helical Spring by Multi-Criteria Optimization</i>	42
3.1 Abstract	42
3.2 Nomenclature	43
3.3 Introduction	45
3.4 Tubular helical springs	47
3.5 Methodology	48
3.5.1 Implementation of genetic algorithms with multi-criteria optimization	49
3.5.2 Validation of the optimization methodology	50
3.6 Metallic spring optimization	51
3.6.1 Implementation of the algorithm.....	51
3.6.2 Effect of the initial generation.....	53
3.6.3 Comparison of optimization results	56
3.7 Composite spring optimization	57
3.7.1 Braided composite modeling	57
3.7.2 Tubular composite helical springs	59
3.7.3 Composite helical spring optimization	60
3.7.4 Implementation of the algorithm.....	62
3.7.5 Optimization without constraints	63
3.8 Composite spring design	65
3.8.1 First design	65
3.8.2 Second design	69

3.9 Discussion	70
3.10 Conclusion	72
3.11 Acknowledgments	73
3.12 References	73
Chapitre 4 - Article 2: <i>An Inverse Approach Based on Laminate Theory to Calculate the Mechanical Properties of Braided Composites</i>	76
4.1 Abstract	76
4.2 Introduction	77
4.3 Methodology	79
4.3.1 Inverse calculation	80
4.3.2 Molding of the test sample	84
4.3.3 Mechanical tests	85
4.4 Results and discussions	90
4.4.1 Physical properties	90
4.4.2 Mechanical properties	91
4.4.3 Effect of fiber architecture	93
4.4.4 Prediction of braided composite elastic properties	94
4.4.5 Prediction of woven composite elastic properties	98
4.4.6 Effect of the ratio E_{11}/E_{22}	99
4.5 Conclusion	101
4.6 Acknowledgments	102
4.7 References	103
4.8 Appendix - Summary on Plate Laminate Theory	105
4.8.1 UD ply properties (law of mixture)	105
4.8.2 Properties of a UD ply oriented with an angle θ	106
4.8.3 Properties of angle-ply laminate (laminate theory)	106
4.8.4 Engineering constants of a balanced symmetric laminate	107
4.8.5 Elastic properties of an angle-ply laminate at a $\pm\theta$ angle	108

Chapitre 5 - Article 3: <i>Creep Behaviour of Composite Woven and Braided Materials</i>	109
5.1 Abstract	109
5.2 Introduction	110
5.3 Methodology	113
5.3.1 Materials and equipment	113
5.3.2 Experimental procedure	117
5.3.3 Exploitation of the Time–Temperature Superposition Principle (TTSP)	117
5.4 Results and discussion	121
5.4.1 Failure strength	121
5.4.2 Results of dynamic mechanical analysis	122
5.4.3 Creep tests results	124
5.5 Conclusion	131
5.6 Acknowledgments	131
5.7 References	132
Chapitre 6 - Discussion générale et conclusion	134
BIBLIOGRAPHIE	138
ANNEXES	145

LISTE DES ANNEXES

Annexe A : Propriétés des tresses	145
Annexe B : Modes de rupture des tubes tressés	147
Annexe C : Ressorts hélicoïdaux	151

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 - Types de tresses 2D : (a) tresse biaxiale , (b) tresse triaxiale.....	7
Figure 1.2 - Patrons de tressage : (a) diamant, (b) régulier, (c) Hercule.....	7
Figure 1.3 - Équipement pour la fabrication des renforts tressés tubulaires.....	9
Figure 1.4 - Architecture d'une tresse biaxiale	10
Figure 1.5 - Tube composite à renfort tressé	11
Figure 1.6 - Mode d'endommagement du ressort composite	13
Figure 1.7 - Zones les plus sollicitées dans un ressort.	13
Figure 1.8 - Paramètres géométriques d'un ressort à fil creux.	15
Figure 1.9 - Comparaison de la masse en fonction de la raideur du ressort par rapport à un ressort de référence en acier de masse m_0 et de raideur k_0 pour 3 matériaux.....	18
Figure 1.10 - Ressort composite fabriqué par imprégnation manuelle.	20
Figure 1.11 - Ressort composite fabriqué par RTM.	21
Figure 1.12 - Pièces du moule (RTM) pour le ressort composite.	21
Figure 1.13 - Ressorts composites fabriqués.	22
Figure 1.14 - Bulles d'air.	22
Figure 1.15 - Accumulation locale de résine.	23
Figure 1.16 - Variation des modules d'un composite tresse 2D avec l'angle de tressage	24
Figure 1.17 - Système d'axes d'une tresse 2D.....	24
Figure 1.18 - Variation des coefficients de Poisson selon les différentes directions croisées d'un composite tressé 2D avec l'angle de tressage.....	25

Figure 1.19 - Variation du module longitudinal en fonction de l'angle de tressage et du taux de fibres.	26
Figure 1.20 - Variation du coefficient de Poisson ν_{yz} en fonction de l'angle de tressage et du taux de fibres.	26
Figure 1.21 - Cellule unitaire d'un composite tissé.	28
Figure 1.22 – Principe de superposition temps-température.....	32
Figure 1.23– Comportement en fluage en temps réel.	33
Figure 1.24 – Construction de la courbe maîtresse.	34
Figure 1.25 – Courbe finale donnant la valeur du facteur de translation en fonction de la température.....	35
Figure 1.26 – Effet de l'orientation des fibres sur l'amortissement.....	36
Figure 3.1 - Geometric parameters of a spring made out of a hollow wire.	47
Figure 3.2 - First and final generations for three metallic spring optimizations.....	55
Figure 3.3 - Effect of the parameter space on metallic spring design.....	57
Figure 3.4 - Relation between the braiding angle and the in-plane shear modulus.	58
Figure 3.5 - Relation between the braiding angle and the in-plane shear strength.	59
Figure 3.6 - Pareto fronts obtained for the carbon-epoxy spring for the two descriptions of braided composites considered (OBA and MBA).	64
Figure 3.7 - Pareto fronts obtained by NSGA-II algorithm for one braiding angle (OBA) optimization (first design).	66
Figure 3.8 - Pareto fronts obtained by NSGA-II algorithm for multiple braiding angles (MBA) optimization (first design).	66

Figure 3.9 - Pareto fronts obtained by NSGA-II algorithm for multiple braiding angles (MBA) optimization (second design).....	70
Figure 4.1 - Schematic presentation of the new approach based on inverse laminate theory to predict the mechanical properties of braided composites.....	80
Figure 4.2 - Device used to shear engineering fabrics at various angles.	84
Figure 4.3 - Experimental set-up used to fabricate samples by RTM assisted by resin infusion.....	85
Figure 4.4 - Dimensions in millimeters for a composite sample in tensile test.	86
Figure 4.5 - Example of tensile stress-strain and strain (T)-strain (L) curves.	88
Figure 4.6 - Dimensions in millimeters for a composite sample in shear.....	89
Figure 4.7 - Measurement of the shear modulus.....	90
Figure 4.8 - Elastic properties of braided composites.....	92
Figure 4.9 - Effect of the strands undulation and shear on Poisson's ratio: comparison between braided composites (experimental results) and unidirectional laminates without undulation (prediction by plate laminate theory).....	94
Figure 4.10 - Comparison of predicted longitudinal elastic moduli with experimental values for the different braided composites considered.....	96
Figure 4.11 - Comparison of predicted Poisson's ratios with the experimental values for the different braided composites considered.	97
Figure 4.12 - Comparison of predicted shear moduli with experimental properties for the different braided composites considered.	98

Figure 4.13 - Influence of the ratio E_{11}/E_{22} on the longitudinal modulus predicted for the $\pm 45^\circ$ braided composite.....	100
Figure 4.14 - Influence of the ratio E_{11}/E_{22} on the Poisson's ratio predicted for the $\pm 45^\circ$ braided composite.....	101
Figure 5.1 - Time-temperature superposition principle (TTSP).	112
Figure 5.2 - Device to shear fabrics of fibrous reinforcement.	114
Figure 5.3 - Assembly of infusion with low pressure.	115
Figure 5.4 - Equipment for the creep tests.	116
Figure 5.5 - Assembly of three point bending fixture for a long-term test.	117
Figure 5.6 - Creep compliance in time plotted for each test temperature.	118
Figure 5.7 - Creep compliances in time calculated by <i>TTS Data Analysis</i> software for each interval of 20 minutes for the successive test temperatures from -20°C to 210°C	119
Figure 5.8 - Final curve of the shift factor as function of temperature.	120
Figure 5.9 - Master curve giving the creep compliance in time on a double logarithmic scale for the various temperatures from -20°C to 210°C calculated previously.....	121
Figure 5.10 - Resistance of woven and braided composites in three point bending as function of braiding angle.	122
Figure 5.11 - a) Variation of elastic modulus as function of temperature. b) Variation of material damping ($\tan \delta$) as function of temperature.	124
Figure 5.12 - Compliance in time in the actual test (min).	125

Figure 5.13 - Shift factor for the various tested composites as function of temperature.	
.....	126
Figure 5.14 - Master curves for various temperatures of the braided composite $\pm 30^\circ$.	127
Figure 5.15 - Master curves for composite samples with various braiding angles and the woven composite (0/90°).	128
Figure 5.16 - Long term experimental creep curves of braided composites $\pm 45^\circ$ and $\pm 55^\circ$.	130

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

β	angle d'ondulation maximal d'une mèche
δ	déflexion
ΔE	énergie d'activation
τ	contrainte de cisaillement
α	angle d'hélice
ρ	densité du matériau
ρ_i	densité à la température T_i
ρ_f	masse volumique des fibres
δ_{cr}	déflexion critique
θ	angle de tressage
θ_0	angle de tressage du pli intérieur
θ_i	angle de tressage du $i^{\text{ème}}$ pli
$(\pm\theta)^B$	angle de tressage du stratifié de base
ν_{ij}	coefficient de Poisson dans le plan ij
ν_{12}^v	coefficient de Poisson du pli de base unidirectionnel virtuel
σ	contrainte normale
σ_{Lt}	contrainte normale longitudinale en traction
σ_{Tt}	contrainte normale transversale en traction
a_T	facteur de translation horizontal des courbes de fluage
b_T	facteur de translation vertical des courbes de fluage
C	indice du ressort
c	coefficient de sécurité
c_i	constantes de l'équation WLF
D	diamètre d'enroulement du ressort
d	diamètre du fil (fil plein)
d_0	diamètre intérieur du fil (fil creux)
d_{ext}	diamètre extérieur du fil (fil creux)
d_i	diamètre intérieur du $i^{\text{ème}}$ pli (fil creux)
D_t	diamètre de la tresse

E	module de Young
E_{11}^v	module de Young longitudinal du pli de base unidirectionnel virtuel
E_{22}^v	module de Young transversal du pli de base unidirectionnel virtuel
E_{ii}	module de Young dans la direction i
e	épaisseur du stratifié ou épaisseur du fil creux
e_{ply}	épaisseur du pli
F	force
G	module de cisaillement
G_{xy}	module de cisaillement (plan xy)
G_{12}^v	module de cisaillement du pli de base unidirectionnel virtuel
K	rigidité (constante du ressort)
k	facteur de concentration de contrainte de Wahl
l_0	hauteur libre du ressort
J	souplesse en fluage
m	masse de ressort
M_f	masse par unité de longueur des mèches
N	nombre des spires actives
n	dimension de l'espace
N_i	nombre des spires inactives
n_p	nombre des plis
P	charge
p	pas d'hélice
$\bar{Q}_{ij}$	constante élastique d'un pli unidirectionnel orienté
Q_{ij}	constante élastique d'un pli unidirectionnel
R	constante des gaz
S_{ij}	constante de souplesse d'un pli unidirectionnel
S_t	distance transversale entre les mèches
T_i	température
T_g	température de la transition vitreuse
$T_{réf}$	température de référence
T_v	vitesse de tressage

V_f taux de fibres
 V_v taux de vide

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1 - Metallic spring characteristics	51
Tableau 3.2 - Ranges of design parameters for metallic spring optimization.....	52
Tableau 3.3 - Comparison between three metallic spring optimizations carried out from three different initial generations of individuals (see Fig. 3.2)	55
Tableau 3.4 - Range of parameters for the composite optimum design problem	61
Tableau 3.5 - Unidirectional composite ply properties.....	63
Tableau 3.6 - Comparison between metallic and optimal composite spring parameters (first design)	68
Tableau 3.7 - Parameters of the optimal composite springs selected and of the metallic spring.....	71
Tableau 4.1 - Physical properties of the samples.....	91
Tableau 4.2 - Average mechanical properties of the composites tested	92
Tableau 4.3 - Prediction results for the woven composite	99
Tableau 5.1 - Comparison between the shift factors of the short and long-term tests...	130

INTRODUCTION

Les ressorts hélicoïdaux sont des pièces essentielles dans plusieurs structures amortissantes en raison de leur capacité d'absorption d'énergie pour un encombrement relativement restreint en volume. Compte tenu des exigences croissantes dans les secteurs aéronautique et automobile en matière de fiabilité, performance et réduction de poids, l'utilisation des composites devient intéressante pour différents types de ressorts et, en particulier, pour les ressorts hélicoïdaux.

Les ressorts composites peuvent apporter une contribution technologique et économique intéressante, car ils présentent des avantages comme la réduction de masse, une bonne tenue en fatigue et la résistance à la corrosion. De plus, l'utilisation des ressorts composites assure une sécurité accrue pour prévenir une rupture brutale, en raison de la faible vitesse de propagation des fissures par comparaison aux métaux. Enfin, dans les machines électrotechniques, l'utilisation de ressorts composites est avantageuse en raison de leurs bonnes propriétés d'isolation électrique.

Ce projet s'inscrit dans la continuité des travaux de recherche effectués à l'École Polytechnique de Montréal en collaboration avec la compagnie *Composites Atlantic Ltd.* Les études numériques et expérimentales réalisées pour fabriquer des ressorts composites hélicoïdaux ont conduit à mesurer la perméabilité des tresses et à évaluer la qualité des ressorts fabriqués par injection d'une résine polymère époxy dans un moule fermé contenant les renforts tressés [1-3]. Des simulations sur la fabrication des ressorts composites ont aidé à mettre au point une méthode d'injection, ainsi qu'un logiciel pour optimiser la conception des ressorts [4]. Plus récemment, des tentatives pour fabriquer et caractériser des tubes et des ressorts composites ont permis d'identifier une série de problèmes reliés à la fabrication de ces ressorts [5]. Les travaux numériques et expérimentaux de ces dernières études [3-5] ont préparé le terrain avant le démarrage de cette thèse.

Position du problème

La conception et la fabrication d'un ressort hélicoïdal composite à matrice polymère thermodurcissable présentent des difficultés en raison de l'anisotropie du matériau et la complexité de sa structure. Plusieurs problèmes se posent au niveau de la conception et de la caractérisation mécanique des ressorts composites, qu'on peut énumérer comme suit :

- Le premier problème porte sur la conception des ressorts composites. On vise une performance en terme de raideur au moins équivalente à celle d'un ressort métallique. La performance d'un ressort composite dépend de plusieurs facteurs : les caractéristiques géométriques du ressort, le taux, l'orientation et la nature des fibres, le nombre de plis et les propriétés de la résine. Le choix de combinaisons optimales de ces paramètres n'est pas une opération simple.
- La seconde difficulté est reliée au manque de données sur les propriétés mécaniques des composites tressés. Pour améliorer la précision de la démarche de conception et varier le choix de solutions optimales, il faut enrichir la base des données expérimentales disponibles. La variation des angles d'orientation des plis tressés avec le diamètre du fil du ressort implique un changement des propriétés mécaniques, qui doivent ainsi être identifiées pour chaque pli. Il est donc souhaitable de développer une base de données expérimentales sur les matériaux composites unidirectionnels et leurs propriétés mécaniques en fonction de l'orientation des fibres.
- Le troisième problème concerne les conditions d'utilisation des ressorts composites, qui sont soumis en général à une charge permanente et à des sollicitations cycliques. Dans une application industrielle, il est nécessaire d'évaluer la durée de vie du ressort en fonction des charges imposées et des conditions de service.

Objectifs

L'objectif du projet consiste à étudier les problèmes mentionnés en vue d'une application amortissante des ressorts composites hélicoïdaux pour un véhicule à quatre roues motrices.

Objectifs spécifiques

Les objectifs spécifiques sont les suivants :

- Adapter et raffiner un logiciel développé à l'École Polytechnique pour la conception des ressorts composites.
- Développer un logiciel de prédiction des propriétés mécaniques des composites renforcés par des tissus ou des tresses. Ce logiciel est fondé sur une nouvelle approche consistant à évaluer les propriétés mécaniques d'un composite tressé à partir de celles d'un composite unidirectionnel virtuel équivalent. Cet outil permettra d'enrichir la base de données sur les matériaux composites à renforts tressés.
- Fabriquer des plaques composites à base de renforts tissés et tressés pour mesurer les propriétés mécaniques selon différentes directions afin de valider le logiciel de prédiction des propriétés mécaniques.
- Caractériser en fluage le comportement des matériaux composites utilisés dans les ressorts et étudier l'influence de l'angle de tressage sur l'évolution temporelle des propriétés mécaniques.

Organisation de la thèse

Cette thèse comprend trois articles. Le premier chapitre est consacré à la recherche bibliographique sur les ressorts composites hélicoïdaux. Il contient un rappel sur les composites tressés et les travaux antérieurs réalisés sur la conception et la fabrication de ressorts composites, leur caractérisation mécanique et en fluage.

Le deuxième chapitre résume la méthodologie suivie dans ce travail. Il décrit les trois étapes nécessaires afin d'atteindre les objectifs visés : (1) en premier lieu, la conception d'un ressort hélicoïdal composites à rendort tressé est effectuée pour une application amortissante ; (2) une nouvelle approche est développée pour prédire des propriétés mécaniques des composites tressés ; et enfin (3) une étude du comportement en fluage des matériaux composites est réalisée afin d'évaluer le comportement à long terme des ressorts hélicoïdaux composites.

Dans le troisième chapitre, un article intitulé « *Optimum Design of a Composite Helical Spring by Multi-Criteria Optimization* » porte sur la conception des ressorts composites. Ce travail illustre la possibilité de remplacer un ressort métallique destiné à une application amortissante pour un véhicule sport par un ressort composite. L'optimisation d'un ressort métallique a été réalisée afin de valider et de vérifier les limites du logiciel de conception.

Le quatrième chapitre fait l'objet d'un deuxième article intitulé « *An Inverse Approach Based on Laminate Theory to Calculate the Mechanical Properties of Braided Composites* », qui a pour but d'augmenter les choix possibles de matériaux composites pour la conception des ressorts. Les composites utilisés pour la conception des ressorts ont des renforts tressés dont l'angle de tressage varie en fonction du diamètre du fil du ressort. Il est important de connaître les propriétés mécaniques des composites pour n'importe quel angle de tressage afin d'augmenter le nombre de solutions possibles pour la conception optimale des ressorts.

Le cinquième chapitre présente le troisième article intitulé « *Creep Behaviour of Composite Woven and Braided Materials* », qui traite du comportement en fluage de plaques composites renforcées par des tissus ou tresses. Cet article étudie l'influence de l'angle de tressage sur le comportement à long terme de ces matériaux sous charge (poids du véhicule par exemple).

Pour terminer, une discussion et une conclusion générale sont présentées sur l'ensemble des résultats obtenus. Les perspectives futures de cette recherche sont également esquissées. Enfin, une description des principales caractéristiques de composites tressés et des méthodes de calcul des ressorts hélicoïdaux est présentée en annexe.

CHAPITRE 1 - REVUE DE LA LITTÉRATURE

Cette étude bibliographique fait le point sur la conception et la fabrication des ressorts composites, ainsi que sur le comportement mécanique des composites renforcés par des tresses. Comme les ressorts étudiés sont généralement fabriqués à partir des renforts tressés, la première partie est consacrée à ce type de composite. La deuxième partie porte sur la conception des ressorts composites et la méthode d'optimisation multicritères utilisée ici pour optimiser les caractéristiques des ressorts. La troisième partie est consacrée à la fabrication des ressorts composites. Peu de travaux ont porté jusqu'à maintenant sur les ressorts composites. Un certain nombre a été réalisé depuis 2003 à l'École Polytechnique de Montréal en collaboration avec la compagnie *Composites Atlantic Ltd.* Les deux dernières parties de ce chapitre portent sur le comportement et la prédiction des propriétés mécaniques des matériaux composites à renfort tressé ainsi que leur comportement en fluage.

1.1 Composites à renforts tressés

Les tresses comprennent deux séries ou plus de mèches entrecroisées avec des orientations à $\pm \theta$ par rapport à l'axe de la tresse (Figure 1.1a). Les fibres de ces deux mèches décrivent donc deux trajectoires hélicoïdales opposées. On appelle ce type de tresse, *tresse biaxiale*. Ce type de renfort offre une meilleure résistance à la torsion, au cisaillement et à l'impact qu'un tissu $0/90^\circ$ comparable [6]. Il existe aussi des *tresses triaxiales* dans lesquelles on incorpore des mèches axiales afin d'améliorer les propriétés mécaniques en tension selon la direction longitudinale (Figure 1.1b) [7]. Leurs propriétés en compression demeurent tout de même relativement faibles.

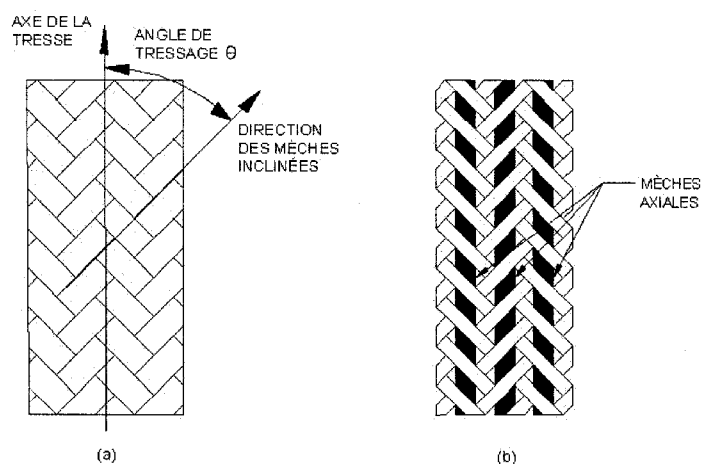


Figure 1.1 - Types de tresses 2D : (a) tresse biaxiale , (b) tresse triaxiale [6].

Tel qu'illustré à la Figure 1.2, il existe trois patrons principaux : diamant (1×1), régulier (2×2) et Hercule (3×3). Dans le patron diamant, une mèche à $+\theta$ passe par dessus une mèche à $-\theta$ avant d'aller sous la suivante et ainsi de suite. Pour les tressages réguliers et Hercule, on entrelace respectivement une mèche entre des blocs de deux ou trois mèches de la direction opposée. La tresse à patron régulier est de loin la plus répandue [7].

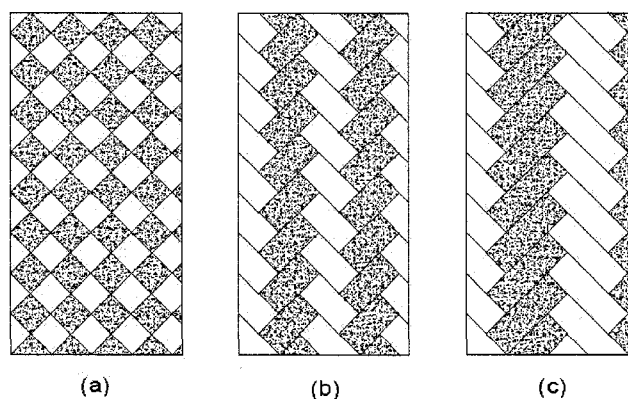


Figure 1.2 - Patrons de tressage : (a) diamant, (b) régulier, (c) Hercule [6].

Il existe un nouveau type de tresse connu sous le nom de *tresse tridimensionnelle*, qui consiste à ajouter des mèches selon l'épaisseur. Ces tresses sont fabriquées dans le but

d'améliorer les propriétés mécaniques dans les trois dimensions. Noter que l'architecture de la tresse a un effet important sur les propriétés mécaniques. Par exemple, une tresse diamant possède une ondulation plus élevée que les deux autres. Noter cependant que la tresse Hercules présente une faible stabilité dimensionnelle à cause du moins grand nombre d'entrecroisements [6].

1.1.1 Procédé de tressage

Le procédé de fabrication des renforts tressés est différent du tissage ou du tricotage, mais plus similaire à l'enroulement filamentaire. Deux séries de bobines se déplacent en directions opposées selon une trajectoire sinusoïdale pour produire une séquence de croisements de manière à former une tresse continue (Figure 1.3). La différence de structure entre les tresses (diamant, régulière ou Hercule) dépend de la fréquence de l'espace d'entrelacement (espace entre deux points de croisement). Cet espace est contrôlé par la trajectoire des bobines. Pour la fabrication des tresses triaxiales, on ajoute une autre série de bobines pour incorporer des mèches axiales. La tension sur les mèches est réglée grâce à l'anneau de tension. Celle-ci doit être à la fois suffisamment forte pour bien tendre la tresse sur le mandrin et assez faible pour ne pas briser les filaments des mèches [8-10].

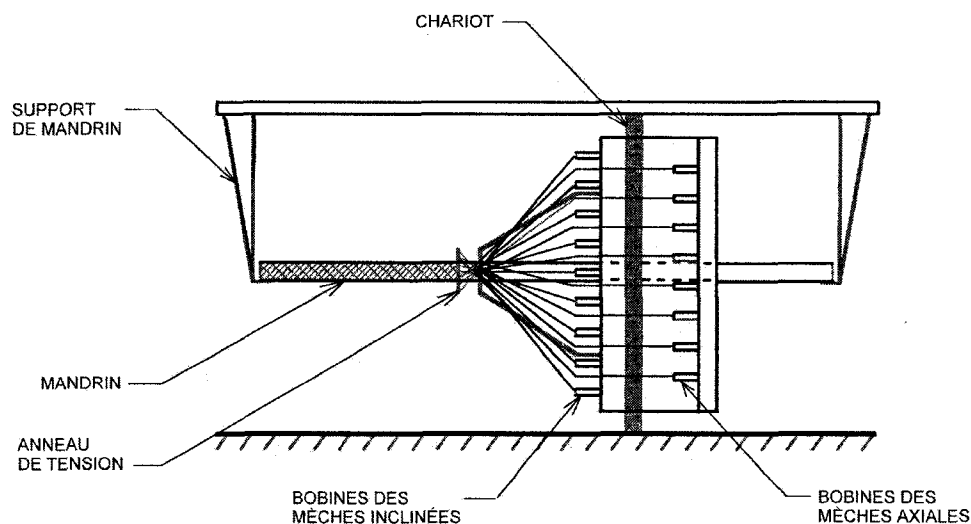


Figure 1.3 - Équipement pour la fabrication des renforts tressés tubulaires [5].

Les caractéristiques géométriques principales des tresses sont données par le diamètre du mandrin et l'angle de tressage. L'angle de tressage résulte de la vitesse de déplacement des bobines sur le chariot. À titre indicatif, les bobines peuvent tourner jusqu'à 70 RPM et le déplacement longitudinal du mandrin peut atteindre 1220 mm/min maximum. Quant au diamètre de la tresse, il correspond au diamètre du mandrin de la machine de tressage, qui peut varier de 12.7 mm à 914 mm.

1.1.2 Propriétés des tresses

Les propriétés mécaniques des tresses dépendent de plusieurs paramètres : le type de tresse et l'ondulation des mèches, l'orientation des fibres déterminée par l'angle de tressage, les propriétés et la fraction volumique des fibres et la séquence d'empilement (Figure 1.4).

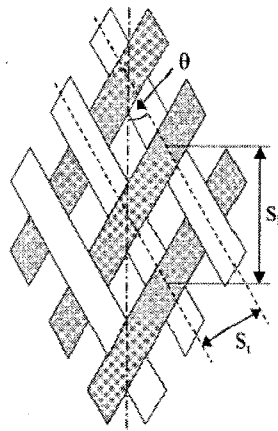


Figure 1.4 - Architecture d'une tresse biaxiale [11].

L'annexe A présente quelques relations simples permettant d'estimer certains paramètres importants comme l'angle de tressage, l'espacement entre les mèches, la géométrie d'ondulation et le taux volumique des fibres [11-14].

1.1.2.1 Tubes composites

Les tubes sont caractérisés par leur longueur et leurs diamètres extérieur et intérieur. Pour étudier un tube composite, il faut faire une différence entre un tube à paroi mince et à paroi épaisse. Le rapport entre l'épaisseur e (la demi-différence entre les deux diamètres) et le diamètre moyen $2r$ (la demi-somme des deux diamètres) définit le type de tube. Si le rapport est inférieur à un dixième, on considère que le tube est mince, sinon on dit qu'il est épais (Figure 1.5). Cette différence est importante pour étudier le comportement du tube dans la troisième direction (selon l'épaisseur).

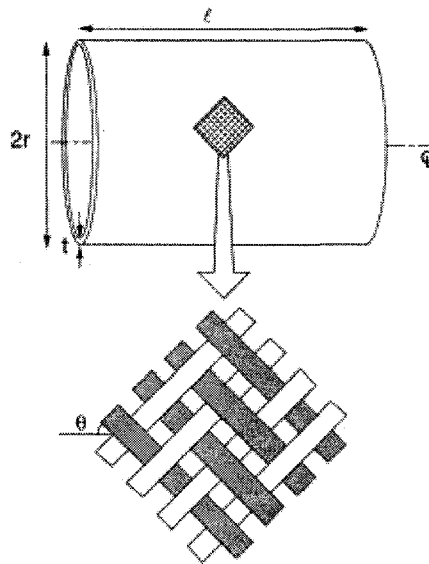


Figure 1.5 - Tube composite à renfort tressé [15].

Dans une tresse tubulaire, le diamètre des plis augmente de l'intérieur vers l'extérieur. Ceci modifie l'angle de tressage de chaque pli selon la relation suivante pour les plis 1 et 2 par exemple :

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \quad (1.1)$$

Généralement, les chercheurs qui travaillent sur les tubes composites fabriqués à partir d'une tresse tubulaire spécifient l'angle de tressage du pli intérieur et l'épaisseur du tube [4, 5, 15-17]. Connaissant le diamètre intérieur, on peut en déduire les autres angles à l'aide de l'équation (1.1).

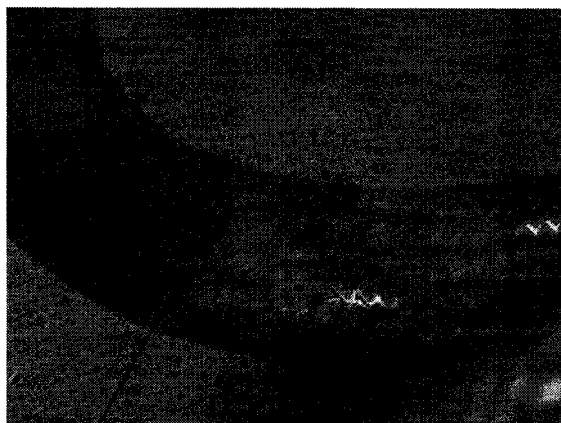
Le mode de rupture et la contrainte limite des tubes composites renforcés par des tresses tubulaires dépendent de l'architecture de la tresse, de la matrice utilisée et de la direction de la charge appliquée. Harte [16] a testé des tubes tressés minces en verre/époxy pour des angles initiaux (intérieurs) différents en traction, compression, torsion et pour des charges combinées. L'annexe B résume les modes de ruptures pour chaque type de

charge et chaque intervalle d'angle observés dans les travaux de Harte [15-17] et Quek et al. [18].

1.1.2.2 Ressorts hélicoïdaux composites

Cette section résume brièvement les principaux travaux sur les ressorts composites hélicoïdaux. Les ressorts en matériaux composites ont été utilisés d'abord pour remplacer les ressorts métalliques à lame des suspensions automobiles [19], puis pour les ressorts cylindriques. L'idée d'utiliser les matériaux composites pour des ressorts hélicoïdaux est venue après la réussite des applications précédentes. Plusieurs compagnies ont essayé de fabriquer ce type de ressorts pour des applications industrielles, mais les procédés de fabrication de la plupart d'entre elles sont restés confidentiels.

Différents travaux ont été menés sur la conception et la caractérisation des propriétés mécaniques des ressorts composites. Gobbi et Mastinu [20] ont appliqué la méthode d'optimisation multicritères pour la conception de ressorts hélicoïdaux composites minces. Un modèle mathématique a été développé et validé par des résultats expérimentaux. La méthode d'optimisation multicritères a aussi été appliquée à la conception optimale de ressorts hélicoïdaux en composite par Lecarpentier [4] et Ratle et al. [21]. Récemment, Zebdi [5] a fabriqué et caractérisé expérimentalement des tubes et ressorts composites épais fabriqués par la méthode originale développée par la compagnie *Composite Atlantic Ltd.* Il a observé que ce type de ressort peut être endommagé par cisaillement interlaminaire et, comme le montre la Figure 1.6, la zone la plus sollicitée est la zone intérieure. Ces observations ont été prévues numériquement par Zebdi (Figure 1.7).



Blanchissement (début de rupture)

Figure 1.6 - Mode d'endommagement du ressort composite [5].

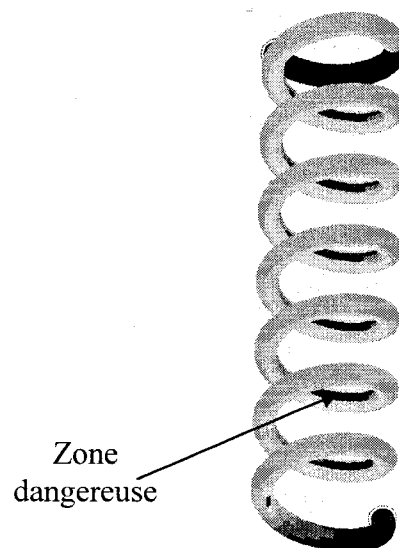


Figure 1.7 - Zones les plus sollicitées dans un ressort [5].

1.2 Conception des ressorts hélicoïdaux composites

Les ressorts hélicoïdaux sont en général fabriqués avec un fil métallique de section circulaire pleine. L'adoption d'un fil à section circulaire creuse en matériau composite peut réduire le poids du ressort d'une façon significative sans affecter sa performance mécanique. La conception d'un ressort hélicoïdal tubulaire en matériau composite fait intervenir deux familles de paramètres : paramètres géométriques comme le diamètre du fil, son épaisseur, le diamètre d'enroulement et le nombre de spires; paramètres du matériau reliés à l'architecture des fibres (tressage, ondulation) et à la matrice polymère. L'objectif est ici d'utiliser les matériaux composites pour les ressorts hélicoïdaux afin de minimiser le poids et maximiser la raideur du ressort.

Le concepteur doit préciser les paramètres suivants : diamètre d'enroulement D , diamètre intérieur du fil du ressort d_{int} , nombre de spires actives N , nombre de plis n_p du stratifié constituant le tube creux, épaisseur e du tube et orientation des fibres afin de parvenir au meilleur compromis possible entre les deux objectifs conflictuels que constituent le poids et la raideur. Une méthode par essais et erreurs s'avère peu efficace

et coûteuse, sachant que la fabrication des ressorts composites est onéreuse et que le nombre de paramètres à fixer est grand. C'est pourquoi une technique de conception, appelée méthode d'optimisation multicritères («*Multi-Objective Programming*» - MOP), sera mise en œuvre afin d'harmoniser des critères de conception conflictuels comme la masse et la raideur pour arriver à une solution optimale.

Les sections suivantes présentent les paramètres géométriques et les propriétés mécaniques d'un ressort hélicoïdal à section circulaire creuse, ainsi que le principe de la méthode d'optimisation multicritères adoptée dans la démarche de conception.

1.2.1 Ressort hélicoïdal tubulaire

Certaines applications exigent, comme dans le domaine électrique par exemple, d'utiliser des ressorts de section circulaire creuse. Ainsi, pour les ressorts hélicoïdaux en composite, le type de composite utilisé est souvent une structure tressée tubulaire. En suivant la même approche que dans l'annexe C pour un ressort à fil plein, les paramètres géométriques et mécaniques d'un ressort hélicoïdal à section circulaire creuse décrits à la Figure 1.8 sont donnés par les relations suivantes :

$$\text{épaisseur de la section creuse [mm]} : \quad e = (d_{ext} - d_0)/2 \quad (1.2)$$

$$\text{indice du ressort} : \quad C = D/d_{ext} \quad (1.3)$$

$$\text{raideur [N/mm]} : \quad K = \frac{G(d_{ext}^4 - d_0^4)}{8ND^3} \quad (1.4)$$

$$\text{charge [N]} : \quad P = K \delta \quad (1.5)$$

$$\text{facteur de concentration de contrainte de Wahl} : \quad k = \frac{4C-1}{4C-4} + \frac{0.615}{C} \quad (1.6)$$

$$\text{contrainte de cisaillement [MPa]} : \quad \tau = k \frac{8PD}{\pi(d_{ext}^3 - d_0^3)} \quad (1.7)$$

$$\text{pas d'hélice [mm]} : \quad p = (l_0 - 2d_{ext})/N \quad (1.8)$$

$$\text{angle d'hélice [rad]} : \quad \alpha = \arctan\left(\frac{p}{2D}\right) \quad (1.9)$$

masse du ressort [g] :

$$m = \rho \pi D \left(\frac{N}{\cos \alpha} + N_i \right) \pi \frac{(d_{ext}^2 - d_0^2)}{4} \quad (1.10)$$

Les relations (1.2) à (1.10) font intervenir les notations suivantes :

D [mm] : diamètre d'enroulement moyen du ressort

d_{ext} [mm] : diamètre extérieur du fil

d_0 [mm] : diamètre inférieur du fil

G [MPa] : module de cisaillement du matériau

l_0 [mm] : hauteur libre

N : nombre de spires actives

N_i : nombre de spires inactives

δ [mm] : déflexion totale du ressort

ρ [g/mm³] : densité du matériau

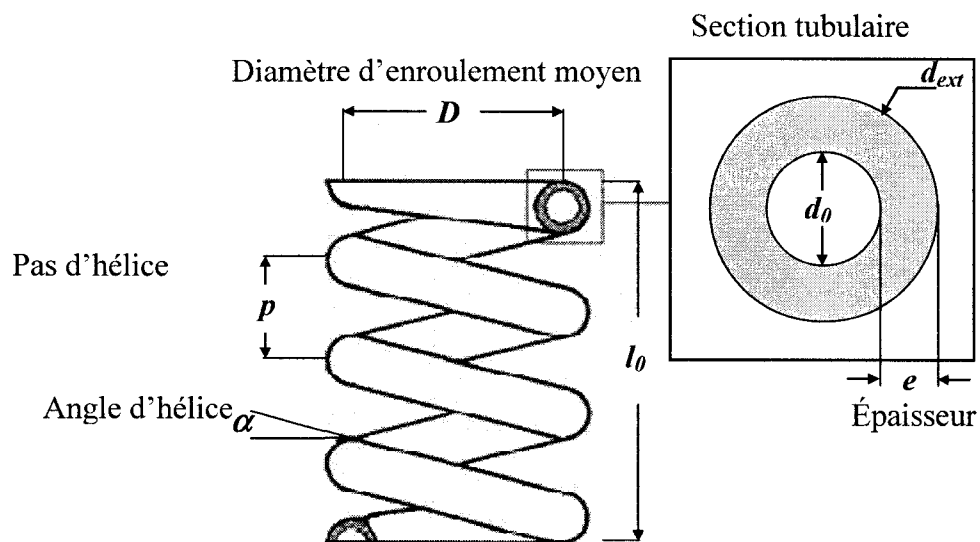


Figure 1.8 - Paramètres géométriques d'un ressort à fil creux.

1.2.2 Optimisation multicritères

Généralement, le concepteur est confronté à plusieurs problèmes. Il doit considérer des contraintes sur différents paramètres pour améliorer des objectifs souvent contradictoires. C'est ce que l'on appelle un problème d'optimisation multicritères. Sur le plan mathématique, ce type de problème (exemple de minimisation) se formule comme suit [20] :

$$\begin{cases} \text{minimiser } f(x) \text{ avec } x \in R^n \text{ sous les conditions suivantes :} \\ g_i(x) = 0, & i = 1, \dots, m_e, \\ g_{i(x)} \leq 0, & i = m_e + 1, \dots, m, \\ x \in X, \end{cases}$$

avec

- $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)]$ vecteur des k fonctions-objectives
- $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ vecteur des n paramètres
- $g_i(x)$ inégalité des m fonctions-contraintes
- X gamme de valeurs des paramètres

Pour un ressort hélicoïdal, x est le vecteur des éléments caractéristiques du ressort, qui comprend le diamètre d'enroulement D , le diamètre intérieur d_{int} , l'épaisseur du stratifié e , le nombre de spires N , nombre de pli du composite n_p et l'angle de tressage θ .

La méthode d'optimisation multicritères employée ici fait appel aux algorithmes génétiques qui peuvent résoudre ce type de problème. Dans un algorithme génétique, on considère chaque solution du problème comme un individu d'une population. À partir d'une population initiale, l'aptitude de chaque élément à satisfaire le problème est évaluée à l'aide d'une fonction dite d'adaptation. Par des opérations de croisement et mutation [22], une nouvelle génération (fils) est créée à partir des solutions existantes (parents). La solution optimale d'un problème multicritères est généralement définie par un ensemble d'individus, qui est appelé l'ensemble de Pareto.

1.2.2.1 Ensemble de Pareto

L'ensemble optimal des points du Pareto est considéré comme une solution mathématique d'un problème d'optimisation multicritères. Les points optimaux de Pareto sont également appelés points *efficaces* ou *non dominés*. Ceci représente une manière de ranger les individus parmi une certaine génération. Soit x et y deux individus : l'individu x est dit *dominant* au sens de *Pareto* par rapport à y si x n'est pas plus mauvais que y par rapport à tous les objectifs, mais strictement meilleur que y pour au moins un objectif. Cette manière de comparer les individus permet à l'algorithme de sélectionner les meilleures solutions de compromis en considérant simultanément tous les critères [20, 21].

1.2.2.2 Algorithme NSGA-II

Il existe de nombreux algorithmes d'optimisation multicritères. Deb et al. [23] ont proposé un algorithme appelé NSGA-II («*Non-dominated Sorting Genetic Algorithm*»), dans lequel un nouveau choix de solutions est obtenu par tournoi stochastique à l'intérieur de l'ensemble. Cette approche rend l'algorithme très sélectif. Les auteurs ont prouvé que la convergence était alors plus rapide que pour d'autres stratégies d'évolution fondées sur la non-domination des individus. Ceci assure une meilleure distribution des solutions sur le front de Pareto. Plusieurs chercheurs ont employé cet algorithme avec succès pour trouver une solution optimale multicritères à différents problèmes [24, 25].

1.2.3 Applications

Gobbi et Mastinu [20] ont appliqué la méthode d'optimisation multicritères pour optimiser le comportement dynamique des véhicules routiers à suspension passive. À cette fin, ils ont étudié le comportement d'un ressort soumis à une compression axiale. À cause des limitations du procédé de fabrication, les ressorts composites fabriqués dans cette étude avaient des épaisseurs très faibles. L'analyse a porté toutefois sur un stratifié

dont la séquence d'empilement est fondée sur des couches tressées avec un même angle de tressage, ce qui simplifie l'expression de la matrice de rigidité.

Différents matériaux ont été examinés : acier, carbone/époxy et verre/époxy. On cherche à minimiser la masse tout en maximisant la raideur du ressort. Les paramètres géométriques sont les suivants : la longueur libre du ressort l_0 , le diamètre d'enroulement D , l'angle de l'hélice α , le diamètre tubulaire d (ou diamètre intérieur du fil), l'épaisseur du fil e , le nombre de plis n_p et l'angle de tressage des fibres θ . Les contraintes à respecter dans la conception sont les suivantes : les conditions de stabilité globale et locale pour éviter le phénomène de flambage, la valeur limite des fréquences de résonance et enfin le critère de rupture du matériau (le critère quadratique de Tsai-Hill sera utilisé ici). Par ailleurs, on impose une déflexion du ressort d'au moins 200 mm et une longueur libre inférieure à 300 mm. On peut noter sur la Figure 1.9 le gain apporté par les ressorts tubulaires en verre/époxy et carbone/époxy par rapport aux ressorts en acier à tube plein.

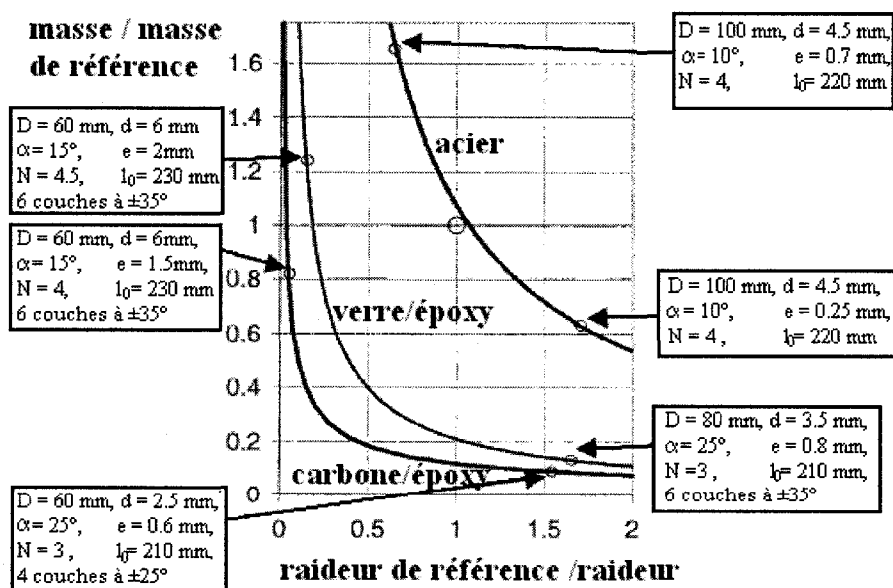


Figure 1.9 - Comparaison de la masse en fonction de la raideur du ressort par rapport à un ressort de référence en acier de masse m_0 et de raideur k_0 pour 3 matériaux [20].

Les ressorts composites optimaux ont généralement des angles de tressage entre 25 et 35° avec 4 à 6 couches de renfort. L'angle d'hélice α optimal est de l'ordre de 15°, plus grand que pour l'acier, car les matériaux composites utilisés sont moins rigides (leur module de cisaillement G_{xy} est plus faible). Toutefois, cette étude ne traite qu'une gamme limitée de matériaux composites à cause des faibles épaisseurs obtenues lors de la fabrication. Dans le cas des ressorts composites épais, les angles de tressage varient d'une couche à l'autre du stratifié. Ceci permet d'ajouter des degrés de liberté dans la recherche du ressort optimal. Noter que le modèle de Gobbi et Mastinu ne peut être appliqué pour des ressorts avec des angles de tressage variables.

D'autres chercheurs comme Kim et al. [26] ont conçu des ressorts composites d'une façon simple au moyen d'un calcul analytique des propriétés élastiques de la tresse utilisée. Ce modèle est fondé sur la théorie des stratifiés et sur les propriétés d'une cellule de tresse unitaire. La raideur prédite est déterminée en calculant le module de cisaillement équivalent du matériau composite. Une bonne corrélation a été observée entre les raideurs prédites et expérimentales. Cette méthode analytique de conception est efficace pour des ressorts de faibles épaisseurs, mais dans le cas de ressorts plus épais avec des angles de tressage variables, le modèle devient plus compliqué et difficile à résoudre.

1.3 Fabrication des ressorts composites hélicoïdaux

Plusieurs tentatives de fabrication de ressorts composites ont été décrites dans la littérature. Trois méthodes de fabrication ont été principalement utilisées. Le premier procédé est manuel : les tresses sont imprégnées à la main ou par immersion d'une tresse enroulée sur un moule hélicoïdal directement dans la résine. Gobbi et Mastinu [20] ont imprégné manuellement des renforts tressés avec une résine époxy après avoir inséré un tube mince de silicone dans l'élément tubulaire. Ce tube de silicone est rempli avec du sable pour conserver une forme circulaire à la section du fil de ressort. La polymérisation a lieu sur un tambour cannelé, usiné pour enrouler le ressort hélicoïdal.

Le tube de silicone ne peut pas être enlevé après la fabrication. Toutefois, sa faible rigidité n'a pas d'influence sur les caractéristiques mécaniques du ressort. La Figure 1.10 montre un ressort composite fabriqué selon cette procédure.



Figure 1.10 - Ressort composite fabriqué par imprégnation manuelle [20].

La deuxième approche est le procédé RTM («*Resin Transfer Molding*»), qui consiste à injecter la résine sur le renfort contenu dans un moule fermé. Kim et al. [26] ont utilisé cette méthode pour fabriquer des petits ressorts d'une hauteur de 120 mm avec un diamètre de fil plein de 5 mm (Figure 1.11). Le moule est composé de cinq pièces intérieures et extérieures (Figure 1.12). Le fil du ressort est constitué d'une tresse 2D tubulaire, qui enveloppe des fibres axiales disposées à l'intérieur.

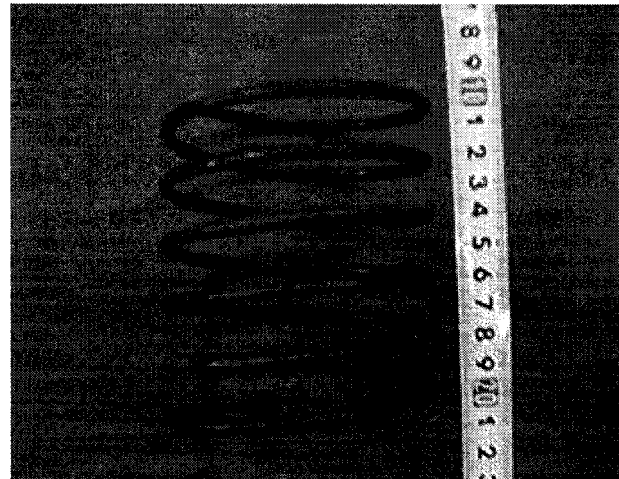
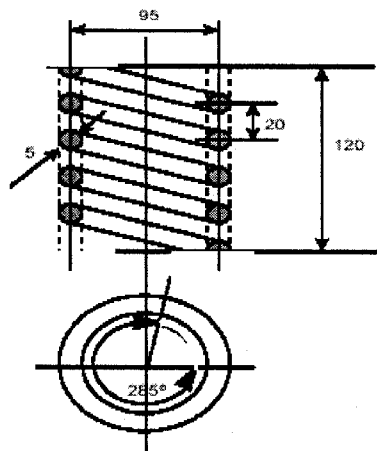
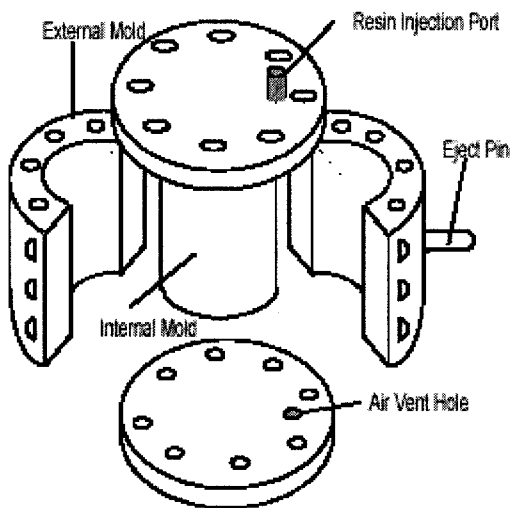
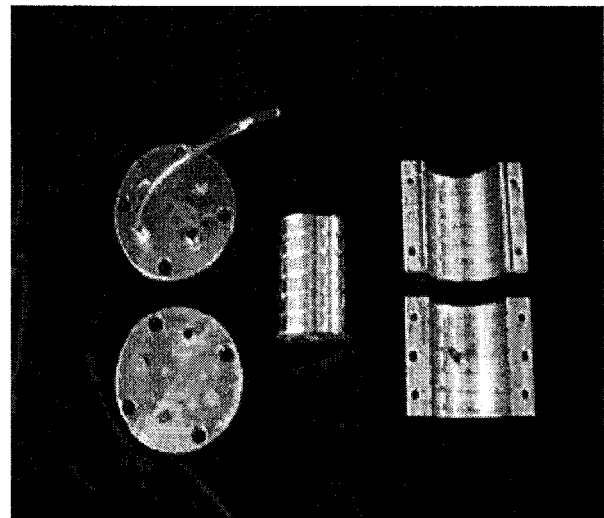


Figure 1.11 - Ressort composite fabriqué par RTM [26].



a)



b)

Figure 1.12 - Pièces du moule (RTM) pour le ressort composite [26].

Ces deux méthodes de fabrication restent limitées à des ressorts à paroi mince et de faible rigidité, car l'imprégnation manuelle ne permet pas de bien imprégner plusieurs couches de tresses superposées. Dans le cas de Kim [26], si on agrandit le diamètre du fil du ressort, il devient très difficile, voire impossible, de démouler une pièce, qui est

devenue très rigide en raison de son épaisseur plus grande. Zebdi [5] a fabriqué des ressorts épais et plus rigides selon la méthode développée par la compagnie *Composite Atlantic Ltd* utilisant une variante du procédé RTM. Ces ressorts fabriqués en fibres de verre tressées avec une matrice époxy ont une raideur moyenne de 36.2 N/mm avec une variabilité acceptable, qui illustre la reproductibilité de la méthode de fabrication utilisée (Figure 1.13).

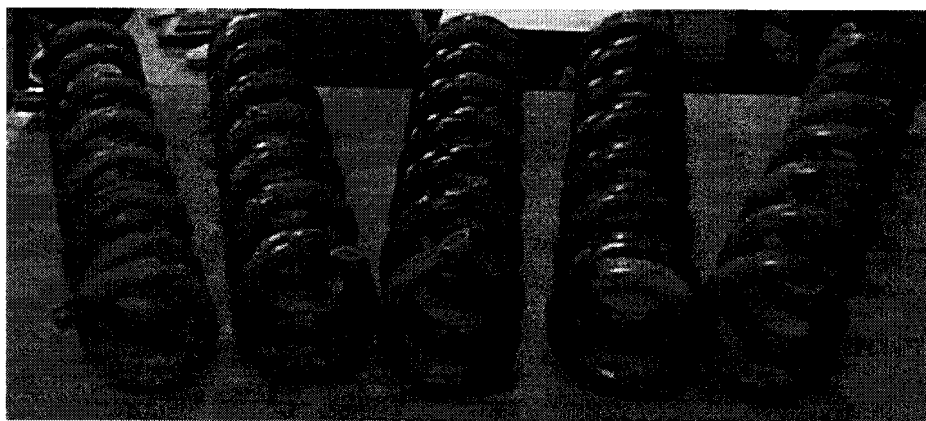


Figure 1.13 - Ressorts composites fabriqués [5].

Si les paramètres de fabrication ne sont pas correctement choisis, ces ressorts peuvent présenter certains défauts géométriques, comme des bulles d'air et des accumulations de résine sur des portions des faces inférieures. Ces problèmes sont illustrés aux Figures 1.14 et 1.15 et peuvent être dus au manque d'étanchéité des différentes pièces du moule ou à une mauvaise compaction des fibres.



Figure 1.14 - Bulles d'air [5].



Figure 1.15 - Accumulation locale de résine [5].

Afin de comprendre le comportement des ressorts composites tressés tubulaires, on présente dans les sections suivantes un résumé sur les propriétés des composites tressés, ainsi que les principaux paramètres qui gouvernent leur comportement mécanique.

1.4 Comportement mécanique des composites tressés

Les composites à base de renforts tressés existent sous forme de plaques, mais le plus souvent c'est sous forme tubulaire dans des tubes ou des ressorts hélicoïdaux qu'on les rencontre. Leur comportement mécanique est influencé par l'architecture de base de la tresse. Dans ce qui suit, on présente l'influence de quelques paramètres importants sur le comportement mécanique des composites tressés.

1.4.1 Effet de l'angle de tressage

L'angle de tressage a une grande influence sur les propriétés mécaniques des composites à renforts tressés. Plus l'angle de tressage est faible, plus la direction des fibres s'approche de l'axe longitudinal de la tresse x et plus le module longitudinal de traction est élevé (Figures 1.16 et 1.17). On constate que la variation avec l'angle du module longitudinal est plus importante pour les angles de tressage plus faibles que pour les angles proches de 90° , et inversement pour le module transversal. Dans la Figure 1.16, on remarque que l'angle de 45° est une valeur caractéristique des tresses 2D pour une

raison évidente de symétrie. À cet angle, le module longitudinal est égal au module transversal.

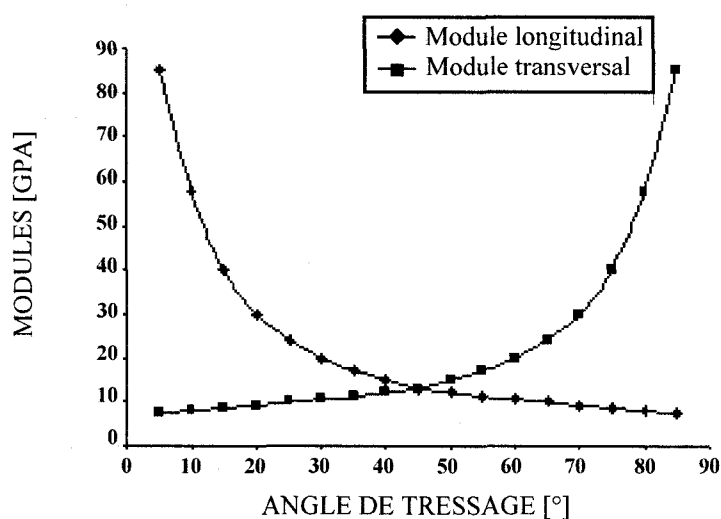


Figure 1.16 - Variation des modules d'un composite tresse 2D avec l'angle de tressage [27].

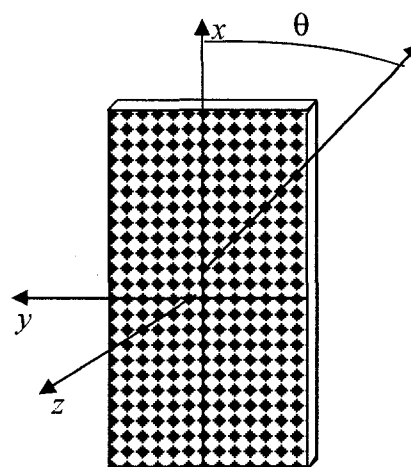


Figure 1.17 - Système d'axes d'une tresse 2D.

Huang [28] a développé un modèle pour prédire les propriétés mécaniques des composites renforcés par des tissus et des tresses. Quelques figures résument l'effet de l'angle de tressage sur les propriétés des composites. Des comparaisons sont faites avec d'autres travaux. Par exemple, la Figure 1.18 montre l'influence de l'angle de tressage sur les coefficients de Poisson. Dans le plan x - y , l'influence est significative en raison des interactions entre les fibres. Par contre, cette influence est moins importante dans un plan perpendiculaire.

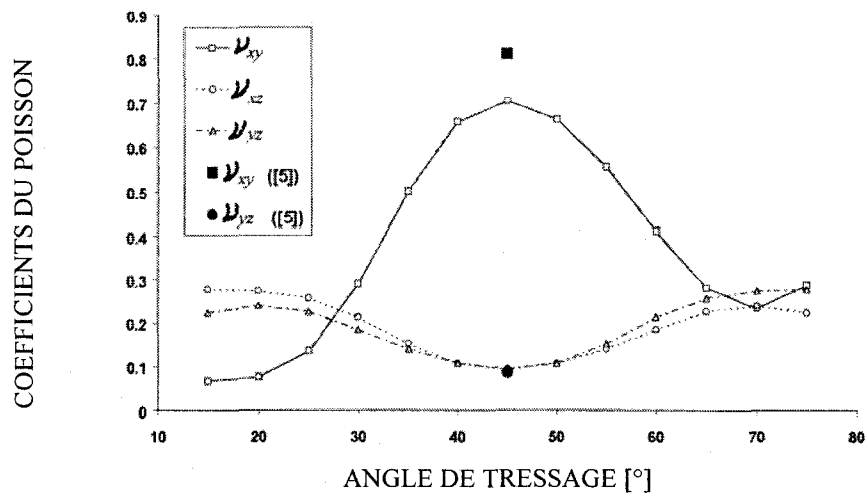


Figure 1.18 - Variation des coefficients de Poisson selon les différentes directions croisées d'un composite tressé 2D avec l'angle de tressage [28].

1.4.2 Effet du taux de fibres

Le taux de fibres est l'un des paramètres les plus importants dans les structures composites. Les modules augmentent avec le taux de fibres; par contre, les coefficients de Poisson diminuent. Zuorong et al. [29] ont étudié les propriétés élastiques d'une tresse tridimensionnelle et ont confirmé cette remarque tel qu'illustré par les Figures 1.19 et 1.20. Dans la Figure 1.19, on voit que pour de faibles angles de tressage, l'effet de l'angle est dominant sur E_x . Quand l'angle de tressage augmente, le taux de fibres et son effet sur E_x deviennent plus importants. La Figure 1.20 montre que l'influence du taux de fibres est même plus visible sur le coefficient de Poisson ν_{yz} .

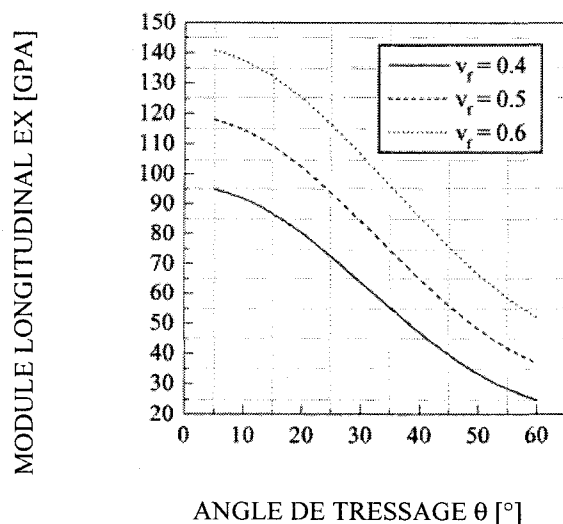


Figure 1.19 - Variation du module longitudinal en fonction de l'angle de tressage et du taux de fibres [29].

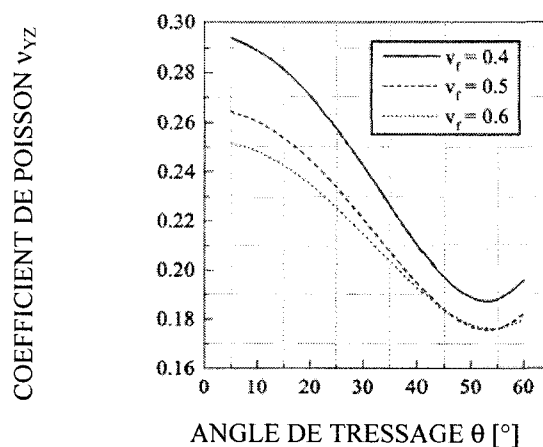


Figure 1.20 - Variation du coefficient de Poisson ν_{yz} en fonction de l'angle de tressage et du taux de fibres [29].

1.4.3 Prédiction des propriétés mécaniques des composites tissés et tressés

Il n'existe pas de théorie pour le calcul des composites tissés ou tressés. Généralement, on simplifie un composite tressé en le représentant un composite unidirectionnel équivalent. Ceci revient à négliger l'effet de l'ondulation et de cisaillement des fibres [3, 5]. Par contre, plusieurs chercheurs ont développé des méthodes analytiques en considérant la géométrie de l'ondulation comme sinusoïdale ou circulaire et en

négligeant l'effet de cisaillement des mèches [28, 30-33]. Ces études ont montré une bonne corrélation entre les propriétés thermoélastiques prédites et les résultats expérimentaux, mais elles restent loin de la réalité du comportement des composites tissés ou tressés. Le modèle développé par Naik et al. [30] a été utilisé pour prédire le comportement de 12 composites tissés. Les auteurs ont conclu que le rapport de l'épaisseur de la mèche des fibres sur sa largeur a une influence significative sur les propriétés thermoélastiques. Naik [31] a développé un logiciel appelé *Textile Composite Analysis for Design* «TEXCAD» pour prédire les propriétés mécaniques des composites tissés et des composites tressés triaxiaux. Sur la base des résultats des composites tissés, les auteurs ont remarqué que pour la même taille de mèches et le même espacement, une augmentation de 3.3 % du taux de fibres n'a pas changé la résistance en cisaillement, mais les résistances en tension et compression ont chuté. Cette diminution de résistance est attribuable à l'architecture du renfort, car l'augmentation du taux de fibres entraîne une augmentation de l'angle d'ondulation qui a causé une rupture en cisaillement longitudinal dans les mèches. Ces résultats sur les composites tressés ont indiqué que la résistance en tension reste inchangée avec l'espacement entre les fibres axiales et augmente avec la fraction volumique de fibres.

D'autres chercheurs ont appliqué des méthodes numériques en considérant deux plis ondulés pour prédire les propriétés élastiques des composites tissés. Les résultats ont montré une bonne corrélation avec l'expérience [34-37]. Ces modèles numériques impliquent l'utilisation de la méthode des éléments finis tridimensionnels pour analyser le comportement élastique et déterminer les propriétés mécaniques des composites tissés. En général, cette approche suppose le développement d'un modèle tridimensionnel détaillé de l'architecture du composite tissé. Normalement, ces modèles demandent plusieurs milliers d'éléments juste pour modéliser une cellule unitaire [34]. En général, en raison de la symétrie géométrique d'architecture du composite, l'analyse par éléments finis est effectuée sur un quart de la cellule unitaire du renfort (Figure 1.21).

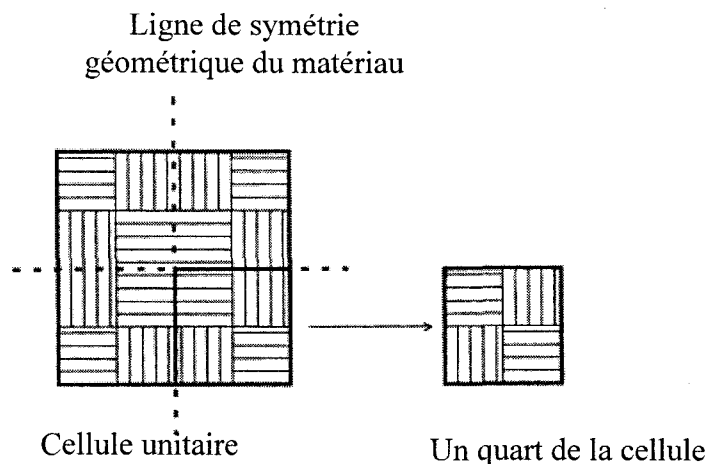


Figure 1.21 - Cellule unitaire d'un composite tissé [35].

Srirengan et al. [36] ont développé une approche fondée sur l'analyse modale qui facilite l'analyse des contraintes tridimensionnelles des structures composites. Lee et al. [37] ont proposé une approche numérique pour l'analyse tridimensionnelle des matériaux composites tissés au moyen d'un modèle d'éléments finis. Une bonne concordance a été observée entre les propriétés calculées et l'expérience. Les constantes élastiques qui ne peuvent pas être obtenues expérimentalement sont également déterminées avec le modèle. Cette caractérisation virtuelle des composites tissés permet de prédire les propriétés mécaniques de structures composites avec des conditions de charge complexes. La différence entre la forme sinusoïdale des mèches modélisées et la réalité a une influence sur les résultats. Pour minimiser cet écart, il faut augmenter la précision des calculs.

En pratique, l'effet de l'architecture des fibres dans les matériaux composites est complexe. Dans les travaux de Charlebois et al. [3], les valeurs expérimentales des modules des composites tressés sont plus élevées que celles prédites pour les stratifiés équivalents. Sachant que l'ondulation des mèches a pour effet de diminuer le module

[38], ceci n'est donc pas la cause de l'augmentation du module pour un composite à renfort tressé. L'entrecroisement des mèches peut probablement expliquer ce résultat en limitant le déplacement des mèches les unes par rapport aux autres lors d'une sollicitation. La déformation est donc moins importante à cause de l'architecture du tissu, ce qui tend à augmenter le module [39].

Quelques travaux expérimentaux aident également à mieux comprendre l'influence de l'architecture des composites tissés et tressés sur les propriétés mécaniques du composite. Chun et al. [38] ont fabriqué des plaques unidirectionnelles à ondulations contrôlées de carbone/époxy afin de vérifier expérimentalement l'influence de l'ondulation sur les propriétés élastiques en traction et compression pour différents rapports de l'amplitude d'ondulation sur la période des fibres. Plus le rapport est élevé, plus l'ondulation est sévère. Lorsque le rapport d'ondulation augmente, les modules chutent de façon marquée. Lorsque l'échantillon est soumis à un chargement en traction, la sévérité de l'ondulation diminue au fur et à mesure que la charge augmente, ce qui a pour effet d'augmenter graduellement sa rigidité. Par contre, plus on augmente la charge en compression, le rapport d'ondulation augmente et le module devient plus faible. Falzon et Herszberg [40] ont réalisé des essais en traction, compression et cisaillement sur des composites à renforts tressés triaxiaux et des stratifiés fabriqués à partir de plis unidirectionnels. Les chercheurs ont constaté que les composites tressés ont des rigidités comparables en traction et en compression, mais une réduction considérable des résistances a été enregistrée. Les auteurs ont aussi déduit que le coefficient de Poisson dépend légèrement de l'ondulation et de l'endommagement des fibres engendré par le procédé de tressage. On note aussi que les coefficients de Poisson mesurés en traction sont plus élevés que ceux qui sont observés en compression.

1.5 Comportement des composites en fluage

À cause du comportement viscoélastique des polymères, les composites à matrice polymère sont très influencés par la température, la fréquence, l'humidité et le

vieillissement. Le comportement en fluage des matériaux composites a suscité un grand intérêt chez de nombreux chercheurs. Plusieurs méthodes sont utilisées pour étudier le fluage : le principe de superposition temps-température (PSTT), la méthode de Schapery, la méthode de Findley et la théorie thermique de l'énergie d'activation [41]. Il y a deux façons possibles d'étudier l'influence de la température sur le comportement mécanique des matériaux : l'essai à long terme pour mesurer la réponse du matériau d'une façon directe [42] et les essais à court terme qui permettent de prédire le comportement à long terme en appliquant le concept PSTT [43-45].

Findley [42] a publié des résultats de tests de fluage sur deux thermoplastiques pendant une durée de 230 000 heures (26 ans). Une loi de puissance a été élaborée pour prédire le comportement en fluage de ces matériaux. Le chercheur a noté que le vieillissement pour environ 130 000 heures a légèrement réduit le taux de fluage, mais que le taux de recouvrance reste inchangé. Parallèlement à Findley, d'autres chercheurs ont orienté leurs efforts sur la procédure d'accélération du phénomène de fluage en faisant un balayage en température. Cette procédure de prédiction du comportement en fluage à long terme est le fondement du PSTT. Ce principe a été appliqué avec succès sur un grand nombre de polymères [46]. Le PSTT a été développé dans les années 50 pour les plastiques non renforcés [43]. Par la suite, d'autres chercheurs comme Morris et al. [44] par exemple ont appliqué ce principe pour étudier le comportement viscoélastique des matériaux composites unidirectionnels graphite/époxy. Leurs travaux ont montré que le facteur de translation est indépendant de l'orientation des fibres. Katouzian et al. [47] ont utilisé avec succès la méthode non linéaire de Schapery sur deux composites, un à matrice thermodurcissable et l'autre à matrice thermoplastique. Ces chercheurs ont pu montrer que la réponse instantanée est linéaire et indépendante de la température pour les niveaux de contraintes appliquées. Ils ont aussi conclu que la réponse de transition en fluage pour les deux composites sous une contrainte de cisaillement interlaminaire montre une sensibilité à la température plus élevée comparativement à la contrainte normale transversale. Récemment, Goertzen et Kessler [45] ont montré que le facteur de

translation des courbes de fluage peut être prédit à l'aide de l'énergie d'activation sans réaliser plusieurs tests de fluage. Cependant, leur prédiction reste valable uniquement à des températures inférieures à T_g . Enfin, Hu [48] a élaboré une approche pour obtenir un facteur de superposition des courbes maîtresses pour des composites unidirectionnels (UD) orientés. Avec ce facteur, il est possible, à partir d'un seul test sur un composite UD pour une orientation donnée, de construire la courbe maîtresse pour n'importe quelle autre orientation.

1.5.1 Principe de superposition temps-température (PSTT)

Dans un essai de fluage, la déformation de l'échantillon est mesurée par l'application d'une contrainte constante. Le rapport de la déformation sur la contrainte est appelé souplesse en fluage, notée par J . Le test d'analyse mécanique dynamique (DMA) est un moyen simple et efficace pour réaliser des essais en fluage et permet d'appliquer différentes températures pour le même niveau de contrainte. En appliquant le PSTT, le comportement du matériau à une température T_0 à l'instant t_0 est le même à la température T mais à l'instant $t = t_0 / a_T$. Les souplesses de fluage obtenues pour les deux températures T_0 et T peuvent alors être reliées par la relation suivante :

$$J(t_0, T_0) = b_T J\left(\frac{t_0}{a_T}, T\right) \quad (1.11)$$

où a_T représente le facteur de translation horizontale. Le rapport t_0/a_T est appelé le temps réduit sur une échelle logarithmique, la valeur de $\log(a_T)$ correspond aux translations horizontales des courbes de fluage. Le paramètre $b_T = \rho_0 T_0 / \rho T$ représente, toujours sur échelle logarithmique, la translation verticale, où ρ_0 et ρ sont respectivement les densités du matériau aux températures T_0 et T . Pour la plupart des solides, la variation des densités est négligeable et la valeur de $\log(b_T)$ tend vers 0 [49, 50] (Figure 1.22).

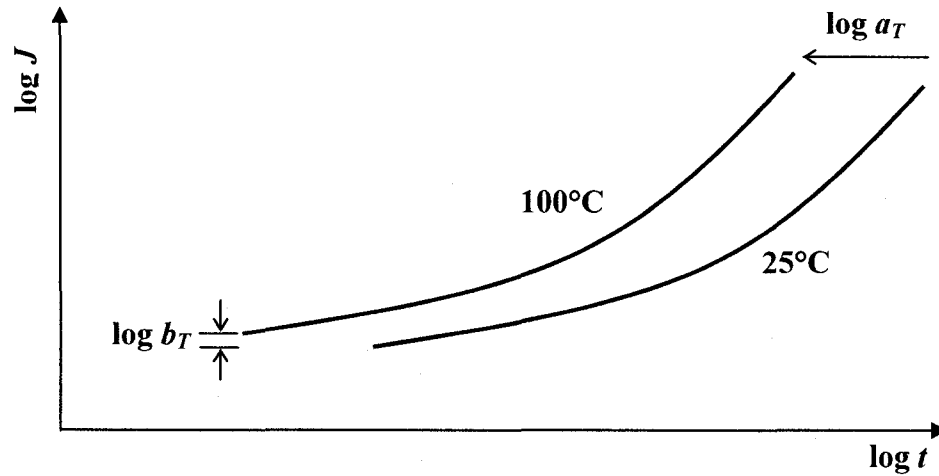


Figure 1.22 – Principe de superposition temps-température.

La première expression du facteur de translation horizontale a été développée par Williams, Landel et Ferry [43] ; la formule est connue sous le vocable de l'équation WLF. L'expression du facteur de translation horizontale dans le domaine $[T_g, T_g + 100^\circ\text{C}]$ est donnée par la relation suivante :

$$\log(a_T) = \frac{-c_1(T - T_g)}{c_2 + T - T_g} \quad (1.12)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes dépendantes du polymère. Noter que la température de référence peut être différente de la température de transition vitreuse ; il suffit alors juste de modifier les valeurs des constantes c_1 et c_2 . Au-dessous de la température de transition vitreuse, l'expression du facteur de translation est décrite par la relation du type Arrhenius [45, 51] :

$$\log(a_T) = \frac{-\Delta E}{2.303 \times R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{ref}} \right) \quad (1.13)$$

avec : ΔE = énergie d'activation [kJ/mole],
 R = constante des gaz parfaits,
 T = température [°K],
 T_{ref} = température de référence [°K].

L'utilisation de la technique de translation des courbes pour une variable comme la température permet de créer une nouvelle courbe maîtresse pour une température de référence T_{ref} . Cette courbe maîtresse peut décrire le comportement du matériau pendant des centaines d'années.

Le concept du PSTT est fondé sur la superposition des courbes de fluage pour chaque température où un effet peut être observé sur le comportement et le temps de réponse du matériau. Pour une température de référence T_{ref} pour laquelle la courbe du comportement du matériau est tracée, l'effet des températures supérieures est équivalent à un rétrécissement du temps réel d'essai à la température T_{ref} et à un étirement à des températures inférieures [41]. Ce principe permet de prédire le comportement des matériaux en fluage à long terme et évite de nombreux essais coûteux et non pratiques. Au début, on réalise les essais en fluage pour plusieurs isothermes. La Figure 1.23 montre des courbes expérimentales de la souplesse en temps réel, c'est-à-dire de l'inverse de la raideur d'un échantillon. Ces courbes sont tirées du troisième article de cette thèse.

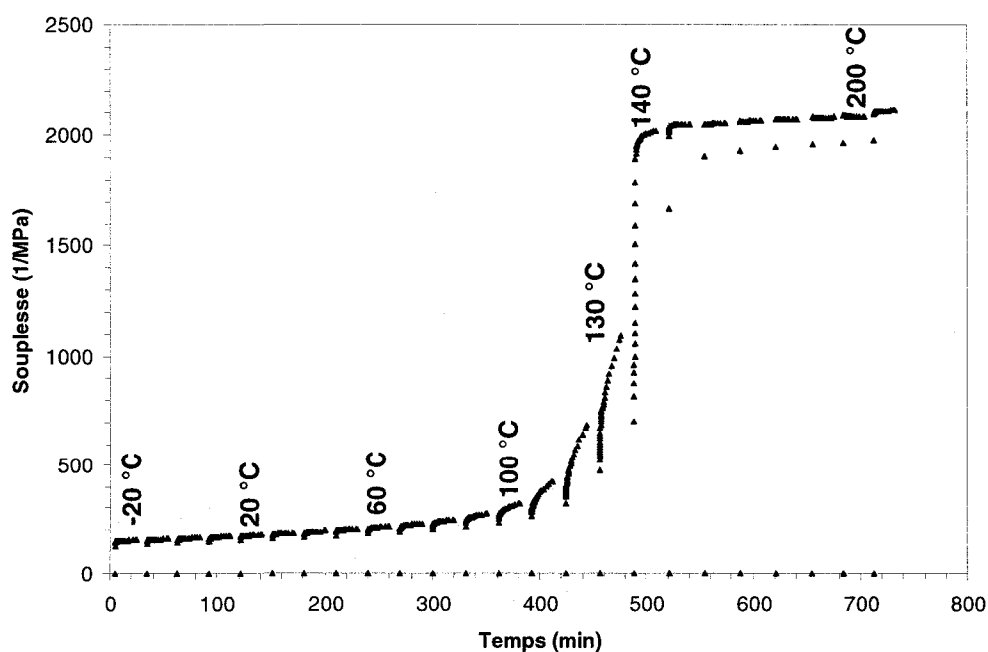


Figure 1.23– Comportement en fluage en temps réel.

L'étape suivante consiste à construire la courbe maîtresse, qui est obtenue par superposition des courbes pour chaque isotherme. La Figure 1.24 montre des courbes expérimentales de fluage pour plusieurs isothermes enregistrées pendant un même essai. La courbe maîtresse sera tracée pour une température de référence T_{ref} . Dans ce cas, la courbe qui correspond à T_{ref} ne bouge pas et on déplace les courbes correspondantes aux températures supérieures à droite et les courbes correspondantes aux températures inférieures à gauche. Chaque déplacement d'une courbe par rapport à la courbe de T_{ref} correspond à un facteur de translation sur une échelle logarithmique ($\log a_T$). Les valeurs de a_T obtenues pour chaque température à la fin de la construction de la courbe maîtresse permettent de construire une courbe caractéristique à la température de référence T_{ref} pour le matériau étudié (Figure 1.25). L'énergie d'activation peut être déduite de l'équation (1.13) avec les valeurs du facteur de translation. Noter qu'il est possible d'estimer la valeur de cette énergie sans construire la courbe maîtresse à travers un essai multifréquences avec augmentation de la température [45, 51].

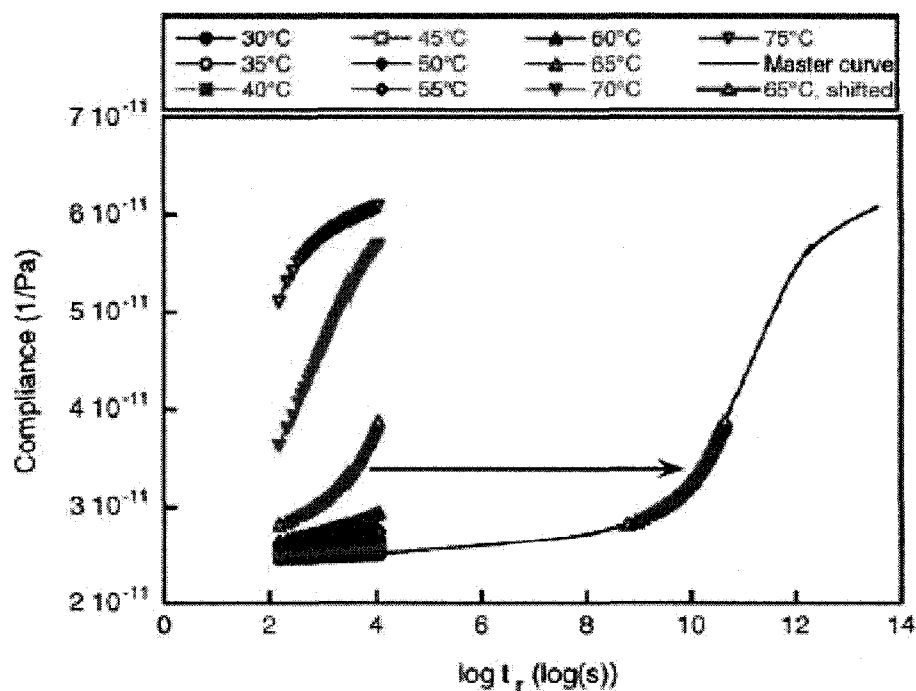


Figure 1.24 – Construction de la courbe maîtresse [45].

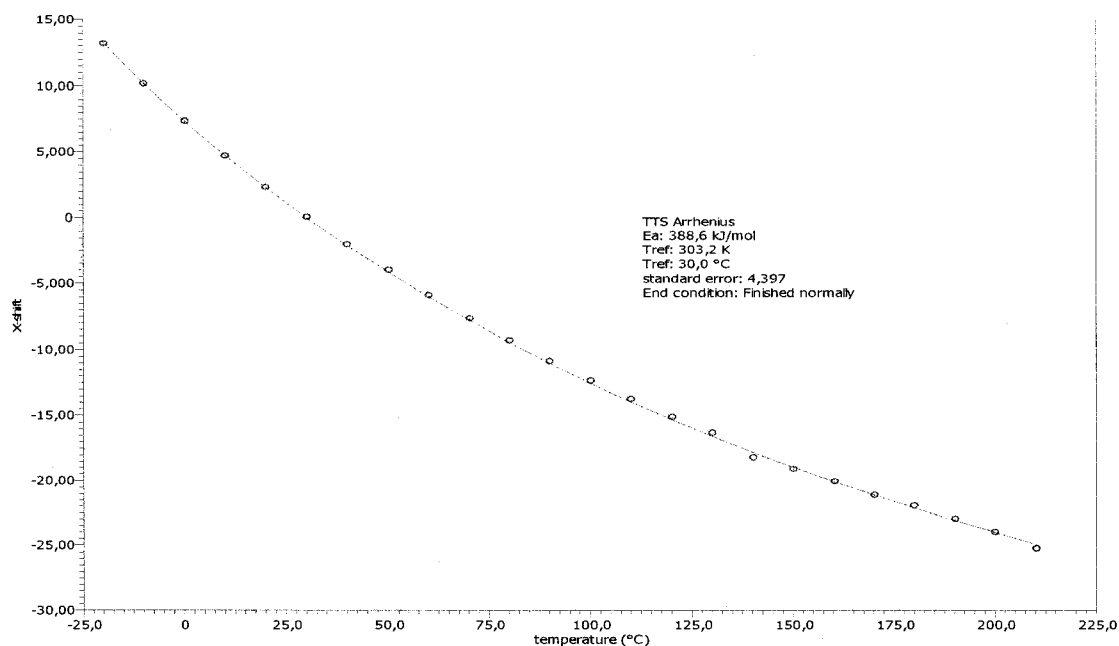


Figure 1.25 – Courbe finale donnant la valeur du facteur de translation en fonction de la température.

1.5.2 Effet de l'orientation des fibres

Kontou et al. [52] ont analysé expérimentalement en traction des composites unidirectionnels renforcés par des fibres de verre pour trois différents taux de déformations et trois orientations de fibres. Les essais dynamiques ont montré que l'orientation des fibres n'influence pas la température de transition vitreuse, mais a un effet considérable sur l'amortissement du composite. Les fibres possèdent une capacité d'amortissement beaucoup plus faible que la matrice. Avec l'augmentation du cisaillement des fibres, celles-ci perdent petit à petit le contrôle de la charge et la matrice commence à manifester son comportement amortissant (Figure 1.26).

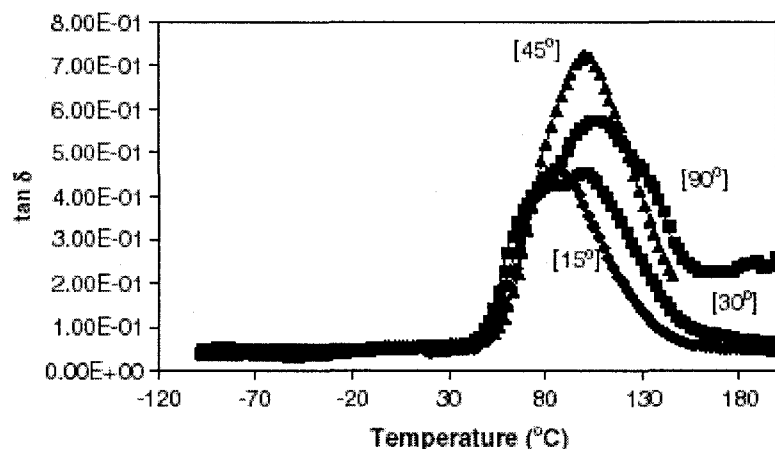


Figure 1.26 – Effet de l'orientation des fibres sur l'amortissement [52].

Raghavan et al. [53] ont incorporé un modèle fondé sur la théorie de l'énergie d'activation pour prédire le comportement en fluage des composites unidirectionnels en carbone/époxy. Ces chercheurs ont conclu que l'orientation des fibres n'a pas d'effet sur les mécanismes de fluage comme l'énergie d'activation et le facteur de translation, mais par contre qu'il existe une influence sur l'amplitude du fluage de la matrice. En revanche, le facteur de translation est indépendant de l'orientation des fibres [44]. Ceci s'explique par le comportement des fibres en fluage. Selon Mallick [49], à l'exception des fibres de kevlar, les fibres commerciales comme les fibres de verre, carbone et de bore ne se déforment pas en fluage. On peut en conclure que les paramètres physiques qui gouvernent le comportement en fluage (T_g et a_T) du composite dépendent essentiellement de la matrice. En revanche, les fibres ont une influence prépondérante sur les propriétés élastiques de la structure, comme la rigidité par exemple. Le facteur de translation représente ici le paramètre fondamental dans le principe de superposition temps-température : chaque courbe est translatée horizontalement par le facteur $\log a_T$ sur une échelle logarithmique par rapport à la courbe maîtresse obtenue pour une température de référence $T_{réf.}$

CHAPITRE 2 – DESCRIPTION DE LA DEMARCHE DE RECHERCHE

Cette partie présente la méthodologie suivie dans cette thèse, qui vise à concevoir un ressort composite pour l'amortissement d'un véhicule sport à quatre roues motrices. À cette fin, le matériau du ressort sera caractérisé selon une démarche en trois étapes : (1) le ressort hélicoïdal en composites tressés est conçu par une méthode d'optimisation multicritères; (2) une nouvelle approche est développée pour prédire des propriétés mécaniques des composites tressés ; et enfin, (3) le comportement en fluage des matériaux composites utilisés pour la fabrication des ressorts hélicoïdaux est étudié.

Cette thèse est présentée sous la forme de trois articles :

Article 1 : « *Optimum Design of a Composite Helical Spring by Multi-Criteria Optimization* »

Article 2 : « *An Inverse Approach Based on Laminate Theory to Calculate the Mechanical Properties of Braided Composites* »

Article 3 : « *Creep Behaviour of Composite Woven and Braided Materials* ».

2.1 Article 1

L'étape de conception est très importante, parce qu'elle démontre la possibilité de fabriquer des ressorts composites avec la même performance mécanique en terme de raideur que les ressorts métalliques. Trois matériaux composites ont été choisis pour la conception du ressort : carbone/époxy, kevlar/époxy et verre/époxy. La conception se fait en trois étapes :

1- En premier lieu, il faut définir les caractéristiques du ressort (diamètre d'enroulement D , diamètre intérieur d_0 et longueur libre du ressort l_0), les propriétés du matériau (nature des fibres, matrice, propriétés du composite en fonction de l'angle de tressage θ), les conditions de service du ressort, la rigidité requise et la charge à supporter. Nous avons

vu dans le premier chapitre que l'angle de tressage varie avec le diamètre de la section tubulaire de la tresse. Il est donc nécessaire de connaître les propriétés mécaniques des plis du composite en fonction du diamètre du fil du ressort. Dans cette étape, les données sur les matériaux sont obtenues par interpolation des propriétés mécaniques de matériaux composites connus dans la littérature.

2- En deuxième lieu, l'algorithme d'optimisation multicritères sera utilisé afin d'optimiser le ressort composite en minimisant sa masse et maximisant sa rigidité. Dans cet algorithme, une population initiale de ressorts est choisie aléatoirement pour une gamme de caractéristiques sélectionnées selon le cahier des charges. Un ressort est défini par ses caractéristiques géométriques (diamètre d'enroulement D , diamètre du fil d_0 , épaisseur e , pas P , nombre de spires N) et par son matériau incluant l'angle de tressage θ et le nombre de plis n_p . L'algorithme vérifie si ces ressorts respectent les conditions du cahier des charges et à partir des solutions acceptées, une nouvelle population est générée et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'un ensemble de solutions optimales soient obtenues.

3- En dernier lieu, les caractéristiques des ressorts obtenus sont enregistrées dans un fichier, et les courbes optimales de rigidité sont tracées en fonction de la masse pour chaque matériau considéré. Ceci permet de choisir une solution optimale pour la fabrication des ressorts composites. Dans notre cas, la solution doit respecter la rigidité de 126 N/mm, qui est celle du ressort métallique à remplacer.

Dans un premier temps, l'optimisation d'un ressort métallique a été effectuée afin de valider et de vérifier les limites du logiciel de conception, puis l'optimisation des ressorts composites a été réalisée dans deux cas : (1) on suppose que le ressort composite est construit avec des plis à angle de tressage constant. (2) on suppose que le ressort est construit avec des plis dont les angles de tressage sont variables. Le deuxième cas représente la situation réelle ; le premier est une simplification, qui permet d'accélérer

les calculs de conception. Pour simplifier la modélisation des composites tressés, chaque couche tressée $\pm\theta$ d'épaisseur e_p est considérée comme la superposition de deux composites unidirectionnels orientés avec des angles opposés $+\theta$ et $-\theta$ d'épaisseur $e_p/2$. Dans cette simplification, on néglige l'effet d'ondulation et le cisaillement des fibres. Les fonctions d'interpolation des modules et de la résistance en cisaillement pour les différentes couches tressées $\pm\theta$ ont été obtenues à l'aide de la théorie des stratifiés à partir des propriétés de base des fibres et de la matrice.

2.2 Article 2

Afin d'optimiser la conception du ressort composite, il est important d'élargir notre base de données sur les propriétés mécaniques des matériaux composites tressés. À cette fin, la deuxième étape de ce projet de recherche a été consacrée à l'étude des propriétés mécaniques de plaques composites renforcées par des tissus ou des tresses en fonction de l'angle d'orientation des fibres. Une approche inverse sera utilisée à partir de la théorie des stratifiés pour évaluer les propriétés mécaniques du composite. Le logiciel mis au point prédit les propriétés mécaniques de composites unidirectionnels équivalents à une tresse pour n'importe quel angle d'orientation des fibres. Par conséquent, pour un matériau composite donné, connaissant l'orientation des fibres et les propriétés mécaniques dans une direction, on pourra aussi calculer les propriétés pour toute autre orientation des fibres. Afin de valider cette approche, des plaques composites à base de renforts tissés et tressés ont été fabriquées et caractérisées expérimentalement pour mesurer les propriétés mécaniques selon différentes directions de fibres afin comparer les résultats expérimentaux avec les prédictions du logiciel.

À partir des propriétés élastiques d'un pli unidirectionnel orthotrope, i.e., E_{11} , E_{22} , G_{12} et ν_{12} la théorie des stratifiés permet de calculer les propriétés élastiques d'un stratifié ($\pm\theta$), i.e., E_{xx} , E_{yy} , G_{xy} et ν_{xy} . A priori, si on connaît E_{xx} , E_{yy} , G_{xy} et ν_{xy} pour un stratifié ($\pm\theta$), on peut remonter aux propriétés du pli de base E_{11} , E_{22} , G_{12} et ν_{12} en faisant un calcul inverse. Il s'agit de transposer ce raisonnement au cas d'un composite stratifié fabriqué à

partir de plis tressés $(\pm\theta)^B$. Supposons qu'on détermine expérimentalement les propriétés élastiques E_{xx} , E_{yy} , G_{xy} et ν_{xy} d'un $(\pm 30^\circ)^B$. Supposons maintenant qu'on utilise l'algorithme de calcul inverse de la théorie des stratifiés pour remonter aux propriétés élastiques d'un pli orthotrope virtuel E_{11}^v , E_{22}^v , G_{12}^v et ν_{12}^v . La question est la suivante : est-ce que les propriétés E_{11}^v , E_{22}^v , G_{12}^v et ν_{12}^v permettent de prévoir les propriétés élastiques d'un stratifié $(\pm\theta^*)^B$ quelconque ? Afin de vérifier la validité de cette hypothèse, il faut construire d'autres stratifiés $(\pm\theta^*)^B$, par exemple $\pm 45^\circ$, $\pm 55^\circ$, etc., et comparer les résultats expérimentaux au calcul inverse. Des essais expérimentaux en traction longitudinale et transversale et en cisaillement effectués suivant les normes ASTM D3039 [54] et ASTM D5379-98 [55] ont permis de vérifier cette hypothèse.

2.3 Article 3

Dans l'application qui nous intéresse, les ressorts composites sont montés sur des véhicules et supportent des charges permanentes. Pour cette raison, il est important de caractériser en fluage les ressorts composites à long terme. Le troisième article porte donc sur la caractérisation en fluage de composites. Ces plaques sont fabriquées pour différents angles de tressage. Les cycles de fluage sont réalisés à des températures isothermes comprises entre -20°C et 210°C avec un incrément de 10°C et pour une durée de 20 minutes sans période de recouvrance. Pour chaque isotherme, une contrainte de 20 MPa est appliquée, c'est-à-dire que la sollicitation varie avec l'épaisseur de l'échantillon. Chaque échantillon destiné à un essai de fluage subit un premier balayage en température à 1 Hz entre 30°C et 210°C avec une vitesse de $3^\circ\text{C}/\text{min}$ pour déterminer sa température de transition vitreuse T_g . Un essai de fluage à long terme est aussi réalisé, dans le cas d'un composite tressé à $\pm 45^\circ$ et $\pm 55^\circ$, pour deux températures, à l'ambiante et à 50°C . Les valeurs des déformations sont directement lues d'une façon périodique. Ce test permet de valider les facteurs de translation obtenus par le logiciel *TTS Data Analysis* lors des essais de fluage à court terme sur la machine DMA Q800. Le principe de superposition temps – température (PSTT) sera utilisé ici

pour prédire le comportement en fluage des matériaux composites testés. Ce principe permet de superposer les courbes de fluage pour chaque température qui a un effet sur le comportement et le temps de réponse du matériau. Pour une température de référence $T_{réf}$ pour laquelle la courbe de comportement du matériau est tracée, l'effet des températures supérieures est équivalent au rétrécissement du temps réel d'essai pour $T_{réf}$ et à un étirement pour les températures inférieures. Des essais de flexion jusqu'à la rupture seront aussi réalisés pour connaître la résistance en flexion de ces composites, ainsi que le pourcentage de la contrainte qui sera appliquée par rapport à la contrainte ultime pendant les essais de fluage. Tous ces essais seront réalisés conformément à la norme ASTM D790 [56].

**CHAPITRE 3 - ARTICLE 1: *OPTIMUM DESIGN OF A COMPOSITE HELICAL
SPRING BY MULTI-CRITERIA OPTIMIZATION***

OUSSAMA ZEBDI, RACHID BOUKHILI AND FRANÇOIS TROCHU

Centre de recherches en plasturgie et composites (CREPEC)

Mechanical Engineering Department

École Polytechnique de Montréal, Québec, Canada

3.1 Abstract

A new methodology for the optimum design of composite helical springs with braided fibrous reinforcement is presented in this paper. A multi-objective evolutionary algorithm is implemented to optimize two conflicting goals: minimize mass and maximize stiffness. Several design variables that have an influence on the mechanical properties of the spring must be considered: the braiding angle, number of plies and the standard design parameters of a helical spring. Design goals are set such as for standard metallic springs: equivalent mechanical performance, mass reduction and comparable cost. Three different braided reinforcements in carbon, kevlar and glass were analyzed with the same epoxy matrix. In helical springs, shear plays the most important role on spring performance. Taking into account the shear properties of braided composites and a series of technological constraints, a range of composite springs was devised, among which an optimal spring was selected for an automotive application, namely to replace the metallic spring of the suspension of a sport utility vehicle.

KEY WORDS: composites materials, helical spring, design, multi-objective optimization.

3.2 Nomenclature

δ	deflection
δ_{cr}	critical deflection
τ	shear stress
α	helix angle
ρ	material density
θ	braiding angle
θ_i	braiding angle of the i^{th} ply
θ_0	braiding angle of the inner ply
C	spring index
c	safety coefficient
D	mean coil diameter
d	wire diameter (full wire)
d_0	inner wire diameter (hollow wire)
d_{ext}	external wire diameter (hollow wire)
d_i	inner diameter of the i^{th} ply (hollow wire)
E	Young's modulus
e	laminate thickness (hollow wire thickness)
e_p	ply thickness
G	shear modulus
G_{xy}	shear modulus (xy plane)
K	stiffness (spring constant)
k	Wahl's stress concentration factor
l_0	axial free length
m	mass
N	number of active coils
n	number of design parameters

N_i	number of inactive coils
n_p	number of plies
P	axial load
p	helix pitch

3.3 Introduction

Increasing requirements in the automotive industry in terms of reliability, weight reduction, performance and resistance to corrosion open up the possibility of substituting metals by composites for different types of spring components. In addition to weight saving, durability and resistance to corrosion, composite springs provide increased safety, because of the lower propagation velocity of cracks in these materials compared to metals. In electrotechnical applications, the electrical insulation property of some composite materials can also bring another benefit.

Several investigations have been conducted to design composite helical springs and characterize their mechanical properties. Gobbi and Mastinu [1] applied multi-objective programming to the design of helical springs, in particular to composite springs with a hollow circular core. Given the technical specifications in term of stiffness, maximum deflection, etc., the method allows defining the spring geometrical and mechanical parameters so as to obtain the best compromise between conflicting goals (such as minimum mass and maximum strength for example). Constraints can be added on local and global stability, resonance frequency, etc. A mathematical model was developed and validated. Yokota et al. [2] formulated an optimal weight design problem for helical metallic springs with constraints on the allowable shearing stress, number of active coils and coil mean diameter. Formulated as an integer programming problem with nonlinear constraints, it was solved by a genetic algorithm. Multi-objective optimization was also applied to the optimal design of composite helical springs by Lecarpentier [3] and Ratle et al. [4]. In an experimental investigation by Charlebois et al. [5] the mechanical properties of braided composites were measured for several braiding angles. Note that Harte and Fleck [6, 7] characterized the mechanical properties of tubular braided composites in tension, compression and shear. Zebdi [8] characterized experimentally tubular and helical composite springs. Recently, Ruiz and Trochu [9] are proposed a comprehensive curing optimization algorithm implementing an evolutionary strategy based on genetic algorithms to reduce internal stresses during composite processing and

different optimization schemes with thermo-elastic and viscoelastic models of the composite mechanical properties are studied. All these investigations have provided valuable information on the design of composite helical springs, which is the purpose of this investigation.

In this paper, the design of composite helical springs is optimized by minimizing mass and maximizing stiffness. Since the optimization algorithm must take into account these two opposite goals, a multi-criteria optimization technique was implemented. In our case, the two conflicting objectives, mass and stiffness, depend on several factors:

- geometrical characteristics of the spring,
- fiber volume fraction,
- fiber orientations,
- type of fiber (glass, carbon, etc ...),
- properties of the resin,
- number of plies.

It is important to set the above parameters in order to optimize the design of the composite helical spring and meet the specifications of a given application, namely here, the suspension of a sport utility vehicle. In this paper, multi-objective optimization is coupled with genetic algorithms to find the best hollow helical composite spring, i.e., with minimal mass and maximum stiffness.

To achieve this goal, a short reminder on tubular helical spring parameters is necessary before describing the design procedure for this type of composite structure. The most important equations will first be presented, followed by the design methodology. Note that a simplification is considered here to facilitate the calculations in the case of a braided reinforcement. After presenting a summary on multi-criteria optimization, the algorithm is implemented to design the composite spring. Results are discussed for two different laminates, carbon-epoxy and glass-epoxy. Finally, a composite helical spring is chosen for the application considered.

3.4 Tubular helical springs

A tubular helical spring is made out of a cylindrical tube rolled into a spiral and usually subjected to an axial force. A helical spring is capable of storing a large quantity of elastic energy for a relatively small material volume. The design of metal or composite tubular helical springs is based on material properties such as the shear modulus and maximum shear stress of the material, and a series of design parameters: mean coil spring diameter D , inner diameter (for hollow wire) d_0 , wire thickness e , number of active coils N , helix pitch p and angle α , spring index C and axial free length l_0 . Figure 3.1 illustrates graphically some of these design parameters.

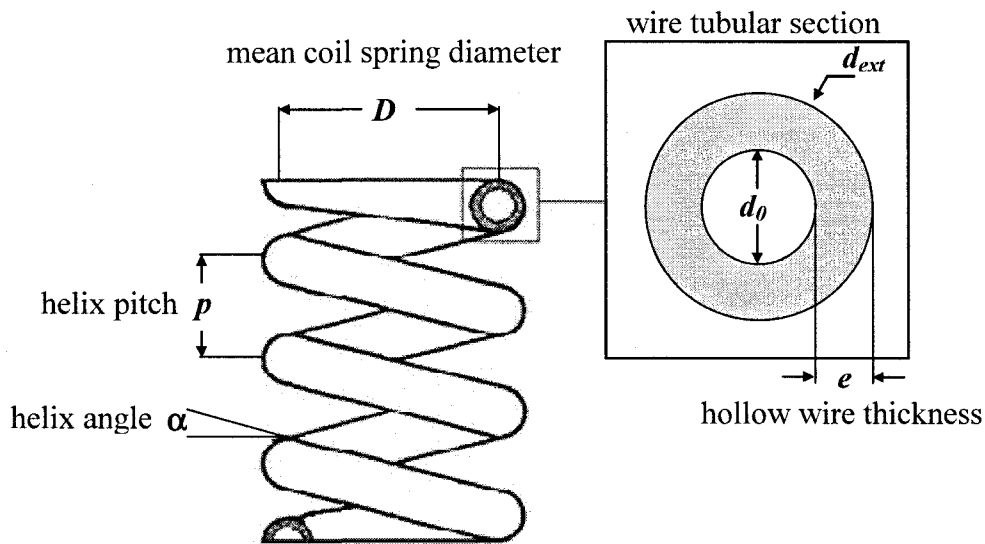


Figure 3.1 - Geometric parameters of a spring made out of a hollow wire.

The main design equations of a helical spring made out of a hollow cylindrical wire are given below [10]:

Hollow wire thickness [mm]:
$$e = (d_{ext} - d_0)/2 \quad (3.1)$$

Spring index:
$$C = D/d_{ext} \quad (3.2)$$

$$\text{Stiffness (spring constant) [N/mm]: } K = \frac{G(d_{ext}^4 - d_0^4)}{8ND^3} \quad (3.3)$$

$$\text{Load [N]: } P = K \delta \quad (3.4)$$

$$\text{Wahl's stress concentration factor: } k = \frac{4C-1}{4C-4} + \frac{0.615}{C} \quad (3.5)$$

$$\text{Shear stress [MPa]: } \tau = k \frac{8PD}{\pi(d_{ext}^3 - d_0^3)} \quad (3.6)$$

$$\text{Helix pitch [mm]: } p = (l_0 - 2d_{ext})/N \quad (3.7)$$

$$\text{Helix angle [rad]: } \alpha = \arctan\left(\frac{p}{2D}\right) \quad (3.8)$$

$$\text{Spring mass [g]: } m = \rho \pi D \left(\frac{N}{\cos \alpha} + N_i \right) \pi \frac{(d_{ext}^2 - d_0^2)}{4} \quad (3.9)$$

$$\text{Axial free length [mm] for active coils: } l_0 = p \cdot N + d_{ext} \quad (3.10)$$

3.5 Methodology

In this paper, a software module based on multi-criteria optimization is developed to design composite helical springs. Three stages are necessary to achieve this goal. The first stage consists of identifying the range of design parameters, namely the spring geometrical parameters (mean diameter, inner wire diameter, etc.) and material characteristics (fiber, polymer matrix and composite material properties as a function of ply angle θ). The constraints of the application must also be specified, i.e., the maximum overall dimensions, nominal stiffness, maximum load, etc. Three composite materials will be considered in this investigation sequel: an epoxy matrix reinforced by carbon, kevlar and glass fibers. In the second stage, the multi-criteria algorithm is implemented to minimize mass and maximize stiffness. Finally, the results are discussed and the best material selected.

In the first part of this paper, in order to assess the design software capability and limitations, the methodology is implemented to design a helical metallic spring. Secondly, based of the metallic spring design, two series of calculations are carried out to design an equivalent composite spring. In the first one, only the nominal stiffness is optimized inside a larger range of overall spring dimensions. The idea here is to make sure that an optimal solution can be found for a given material inside the range of design parameters considered. As a matter of fact, if there are too many constraints and limiting conditions, it is possible that no optimal solution be found. In this case, a second calculation may be carried out after relaxing the overall limiting conditions. If no optimal solution is still found, a different composite material may then be selected.

3.5.1 Implementation of genetic algorithms with multi-criteria optimization

Several genetic algorithms may be implemented to solve multi-criteria optimization problems. Genetic algorithms are based by analogy on the principles of heredity: from an initial given population, the aptitude of each individual to satisfy the requirements of the optimization problem is evaluated by a cost function. By cross-breeding and mutation operations on the characteristics of the solutions sought, a new generation is generated [2], among which the most promising individuals are selected.

3.5.1.1 Definition of Pareto set

The solution of multi-criteria optimization problems is generally described by a group of elements, which is called the Pareto set. The points of the Pareto set are called *efficient*, *non-dominated* or *non-inferior* points. This represents a way of ranking the individuals of a given generation. Let x and y be two individuals of a generation. In the optimization problem, individual x is said to be *Pareto-dominant* over y , if x is not worse than y with respect to all objectives and strictly better than y for at least one objective. This way of comparing individuals enables the algorithm to pick the best compromise solutions by considering all optimization criteria at once [1, 4].

3.5.1.2 Description of NSGA-II algorithm

Deb et al. [11] proposed an algorithm called NSGA-II (*Non-dominated Sorting Genetic Algorithm*), in which the selection is carried out by stochastic tournament, inside the set {parents + sons}. This approach makes the algorithm very selective. The authors showed that faster convergence was obtained than with other evolutionary strategies based only on the non-domination of individuals. This ensures a better distribution of solutions on the optimal curve known as the Pareto front. Several researchers have used this algorithm successfully to find the solutions for different multi-objective optimization problems [12, 13].

The NSGA-II algorithm is built on the software library Evolving Objects [14], which contains customized genetic operators. In all the numerical experiments carried out in this investigation, the population size is set to 200 in the iterations of the algorithm. The stopping criterion is the maximum number of generations, which is here 200. The normal mutation rate is set to $1/n$, where n is the space dimension of the design space, i.e., the number of design parameters as specified in the next section.

3.5.2 Validation of the optimization methodology

In the present study, we would like to replace, for the same operating conditions, a steel spring shock absorber of a vehicle by a composite spring. From the characteristics of the metallic spring, we can set the following constraints: the desired helical spring must have a free length l_0 lower than 400 mm and a nominal stiffness of at least 126 N/mm. The goal will be to find an equivalent composite spring with the best stiffness and lowest possible mass. In order to find a feasible solution, it is necessary also to verify the buckling behavior when coils come in contact.

The design problem being now formulated, it is time to select the range of design parameters in order to implement the optimization algorithm. The first tests will be carried out to optimize the design of a metallic spring. This will not only allow

validating the algorithm, but also provide important information on its limitations. In particular, it will be interesting to test the robustness of the genetic algorithm with respect to initial generation selected and evaluate its sensitivity for the space of design parameters considered. Once this preliminary investigation on metallic spring optimization will be completed, the methodology will be implemented to composite spring optimization.

3.6 Metallic spring optimization

3.6.1 Implementation of the algorithm

Before starting this investigation, it is important to test the algorithm and understand its limitations. Starting out from a given metallic spring, namely here a spring used as damper for a vehicle, the first stage consists of applying our design methodology to verify if this spring can be found by the optimization algorithm. The characteristics of the metallic spring that we seek to optimize are given in Table 3.1. The calculation is based on the analytical equations (3.1-3.9). The design parameters are set in Table 3.2 for a full wire spring, i.e., a spring without a hollow core. In this case, $d_{ext} = d$ and $d_0 = 0$.

Tableau 3.1 - Metallic spring characteristics

Design parameters				Spring properties	
Mean coil diameter D (mm)	Wire diameter d (mm)	Pitch p (mm)	Number of active coils N	Mass m (g)	Stiffness K (N/mm)
124	21	43	8	8525	126

As specified in Table 3.2, two tests were carried out to optimize the metallic spring for two different ranges of design parameters. The optimization was carried out here with the four following constraints, including buckling as mentioned earlier:

- maximum overall dimensions limited at 400 mm in height and 145 mm in diameter,
- minimal height limited at 250 mm,
- nominal stiffness of 126 N/mm with 50% tolerance, i.e., $K_n - (50\% \text{ of } K_n) \leq K \leq K_n + (50\% \text{ of } K_n)$,
- maximum load before buckling.

Tableau 3.2 - Ranges of design parameters for metallic spring optimization

		1	2	3	4
	Parameter	Mean coil diameter D (mm)	Wire diameter d (mm)	Pitch p (mm)	Number of active coils N
	Limits				
Test 1	minimum	90	15	40	6
	maximum	134	21	60	10
Test 2	minimum	124	20	43	8
	maximum	134	21	60	10

Note that buckling is considered here only for full wire helical metallic springs, because to our knowledge no theory is available for hollow springs, a fortiori for a composite one. Following analytical studies conducted for metallic helical springs, i.e., a full wire spring made out of an isotropic material [10], the parameters that govern buckling are the following:

- fraction of free length / mean diameter l_0 / D ;
- fraction of shear modulus / Young's modulus G / E ;
- nature of top and base connections of the spring.

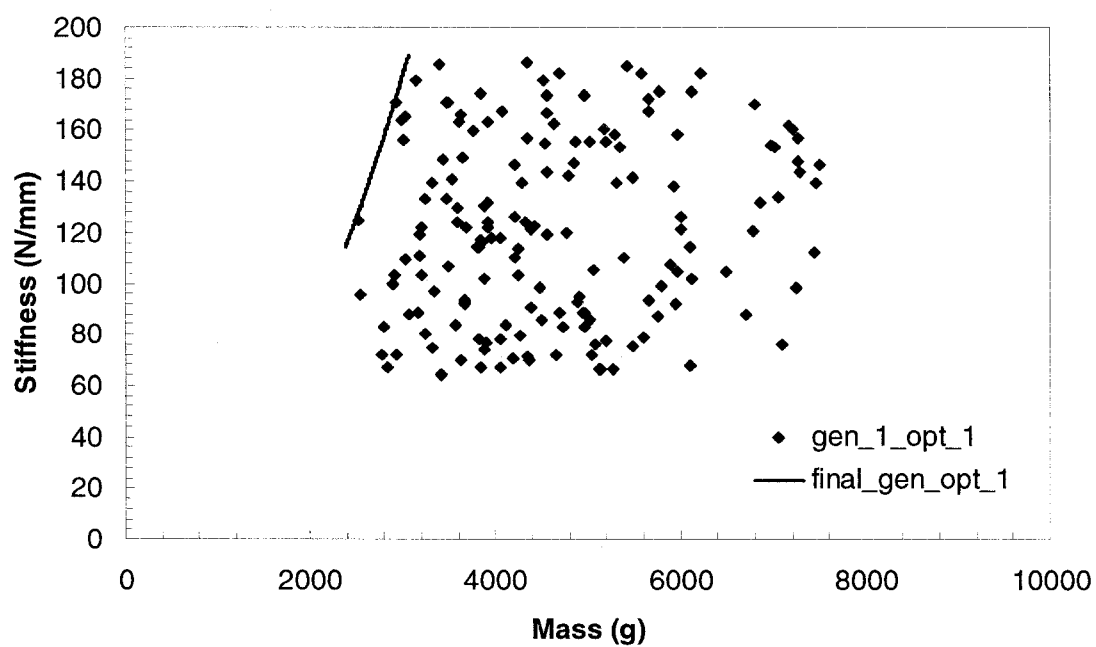
In our case, the springs have fixed ends. For metallic springs, buckling occurs when the ratio of deflection δ over the spring length l_0 exceeds the following critical value:

$$\frac{\delta}{l_0} \geq \frac{\delta_{cr}}{l_0} = \frac{1}{2\left(1 - \frac{E}{G}\right)} \left[1 - \sqrt{\frac{E - G}{E/2 - G} \left(\frac{\pi D}{l_0}\right)^2} \right] \quad (3.11)$$

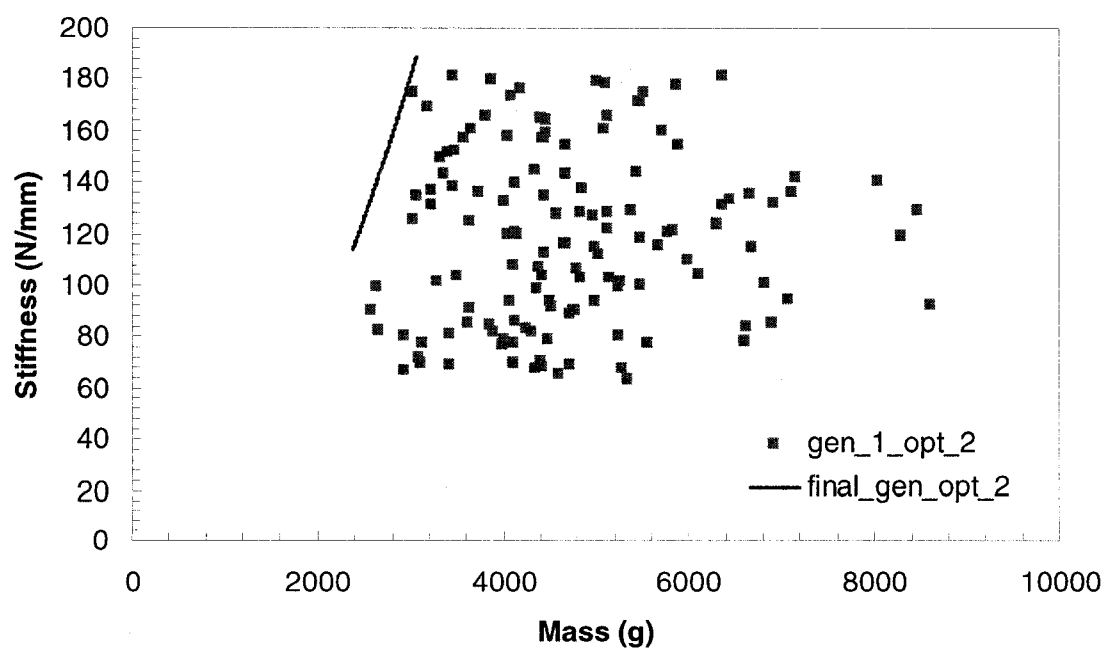
Before implementing the algorithm for the two ranges of design parameters given in Table 3.2, the effect of the initial population on the final Pareto set is investigated for the parameter range of test 1.

3.6.2 Effect of the initial generation

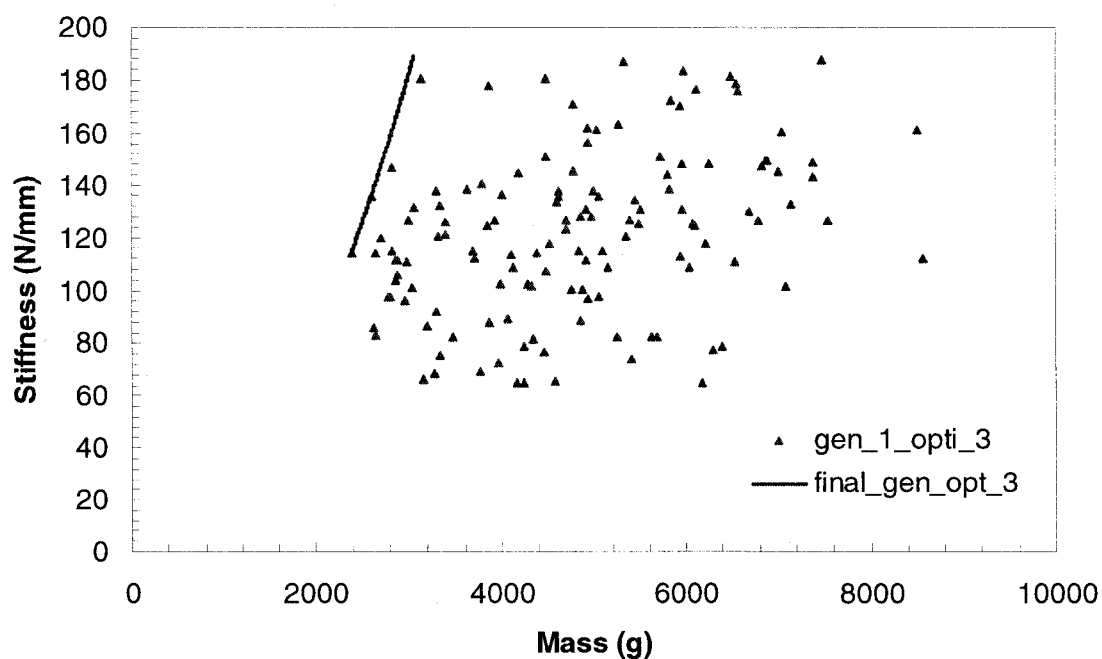
In this design, only the parameter range of test 1 in Table 3.2 is considered. Figure 3.2 plots on a two-dimensional graph the mass and stiffness of the individuals of the first and final generations when the algorithm is implemented from three different initial populations. Note that different individuals may have similar mass and stiffness. The algorithm selects arbitrarily the first generation, which is represented by points in the stiffness-mass space of Figure 3.2. Then the multi-criteria algorithm selects the set of individuals that verify the constraints. From this set of solution, the genetic algorithm creates a new generation, which is tested again by the multi-criteria algorithm and so on, until the final population is created after 200 generations. The final population, i.e., the Pareto set, is represented by the continuous curve obtained by the superposition of individuals selected by the algorithm. The solutions of the Pareto set meet the range of design parameters of test 1 in Table 3.2, as well as the constraints. The three optimizations show that the Pareto curve of the final generation is the same line for the three different initial generations. However, this does not mean that exactly the same solutions were obtained. Table 3.3 shows the final solutions obtained for the desired stiffness (126 N/mm) from the three different Pareto optimal sets. The error between the three solutions is relatively small, for example the largest relative error is 0.6% between the first and third tests. This demonstrates the robustness of the approach based on genetic algorithms: the optimal solution is independent from the initial generation.



(a) first initial generation



(b) Second initial generation



(c) Third initial generation

Figure 3.2 - First and final generations for three metallic spring optimizations.

Tableau 3.3 - Comparison between three metallic spring optimizations carried out from three different initial generations of individuals (see Fig. 3.2)

Test	Individuals	Parameters				Spring properties	
		D (mm)	d (mm)	pitch (mm)	Nb. of coils	m (g)	K (N/mm)
1	36	90	15.37	40	6	2501.66	126.13
2	36	90	15.38	40	6	2504.65	126.43
3	36	90	15.40	40	6	2509.48	126.92
Original spring	-	124	21	43	8	8525	126.40

3.6.3 Comparison of optimization results

As specified in Table 3.2, two optimizations were carried out for the two different ranges of design parameters (test 1 and test 2). The idea here was to study the effect of a change in the range of design parameters on the optimization results. Figure 3.3 shows the optimal Pareto sets for the two tests carried out to optimize full wire metallic helical springs.

- In the first test, the software proposed an optimal solution of minimal mass and maximum stiffness, namely the Pareto set obtained for the range of design parameters of test 1 in Table 3.2. The optimal solution was found to have the lowest possible mass to prevent buckling. As illustrated in Figure 3.3, the target stiffness of 126 N/mm was reached in this test for mass of 2500 g, which is much lower than the mass of 8525 g of the given spring. This means that the geometry of this optimal solution for the same nominal stiffness is different from that of the original helical metallic spring. For the large space of design parameters considered in test 1, the optimized solution does not converge to the given metallic spring. The optimization software proposed a new solution for the metallic spring with a new geometry, the same stiffness, but with a lower mass than the original metallic spring. This shows that this spring taken out of an existing vehicle is not, in fact, optimal in terms of mass. In order to study the behavior of the algorithm, a second optimization was performed for the new space of design parameters listed for test 2 in Table 3.2.
- In the second test, the parametric space was restrained to target more precisely the geometry of the existing metallic spring. The optimization was carried out with the same overall set of constraints. As shown in Figure 3.2 for test 2, the desired stiffness was reached, but at the upper limit of the optimal Pareto set. The mass is no longer in the lower range of test 1, but close to that of the target metallic spring. In conclusion, if there are particular design constraints to respect, the space of design parameters can be changed to account for these constraints, but it could be possible that no solution exists with the desired stiffness. Having become acquainted with the application of

multi-criteria optimization algorithms to optimize metallic spring design, let us now apply this methodology to composite springs.

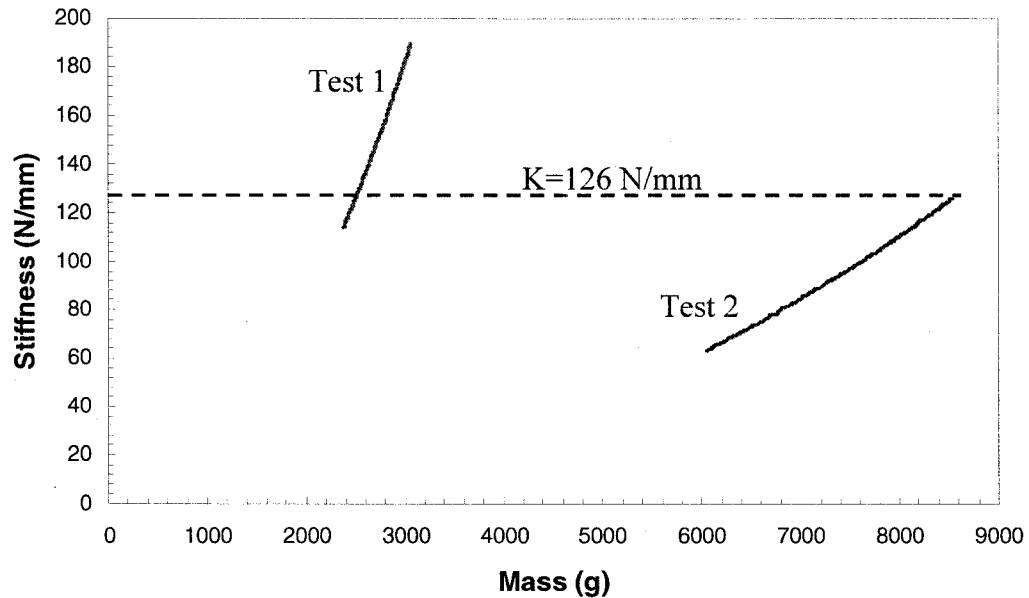


Figure 3.3 - Effect of the parameter space on metallic spring design.

3.7 Composite spring optimization

3.7.1 Braided composite modeling

To simplify the computer model of the braided reinforcement, each braided ply of fiber orientation $\pm\theta$ and thickness e_p is considered as the superposition of two plies with opposite orientations $+\theta$ and $-\theta$, and of half thickness $e_p/2$. This simplification neglects the effect of fiber undulation. A software module based on Plate Laminate Theory (PLT) [14] was used to find the in-plane shear modulus and shear strength as a function of the ply angle. The unidirectional (UD) composite ply properties for each selected material are given as input data, together with the stacking sequence of the laminate, and then the

software calculates the stiffness matrix $[Q_j]$ as a function of the UD mechanical properties and ply angle θ for each reinforcing layer of the laminate. Finally, the global stiffness of the laminate can be determined.

The elastic properties are evaluated by the Plate Laminate Theory and the stress-strain relationship is derived. The first ply failure is based on Tsai-Wu failure theory under plane stress conditions. Therefore, for each ply of angle $[\pm\theta]_s$ of the laminate (here i is the number of the ply of angle $\pm\theta$; s means that the stacking sequence is symmetrical with respect to the mid-plane), the elastic properties and the failure stress are calculated. Figures 3.4 and 3.5 plot the shear modulus and shear strength respectively, of a carbon-epoxy laminate as a function of the braiding angle. Approximate functions of the in-plane shear modulus and shear strength are obtained by this approach for each braided ply as a function of the braiding angle. As expected these functions are symmetrical from 0 to 90° with respect to a braiding angle of 45°, which corresponds to the maximum levels of shear modulus and shear strength. These functions are implemented in the optimization algorithm.

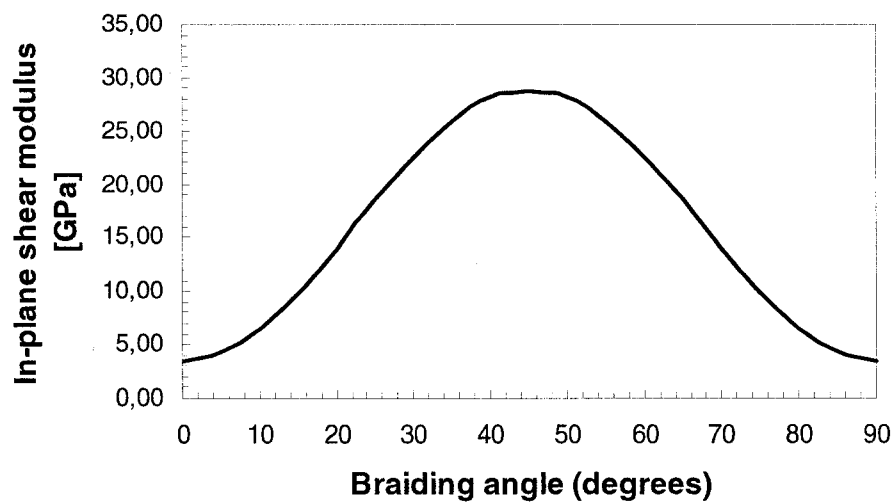


Figure 3.4 - Relation between the braiding angle and the in-plane shear modulus.

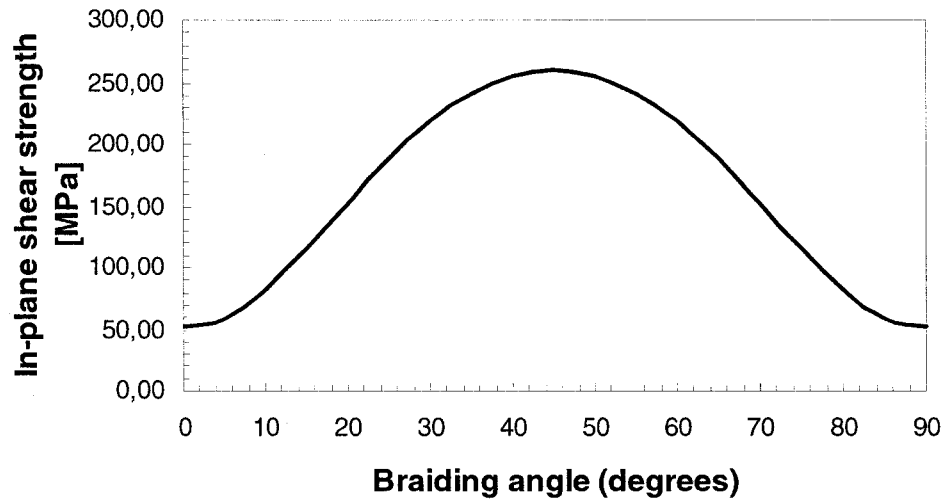


Figure 3.5 - Relation between the braiding angle and the in-plane shear strength.

3.7.2 Tubular composite helical springs

The following geometrical parameters are needed to design a tubular helical composite spring:

- D mean coil diameter spring [mm],
- d_0 inner diameter wire [mm],
- e laminate thickness [mm],
- p pitch [mm],
- N number of active coils.

Two cases can be considered to derive the mechanical properties of an axisymmetric laminate reinforced by a series of braided plies:

- a) All the plies have the same braiding angle $\pm\theta$. This is an approximation, because the layers of a tubular braided laminate have in fact different braiding angles.

- b) In order to consider a different braiding angle for each ply, the following formula may be used to deduce the braiding angle $\pm\theta_i$ for each ply from an initial braiding angle θ_0 [4]:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_0} = \frac{d_i}{d_0} \quad (3.12)$$

where:

- θ_0 braiding angle of the inner ply,
- d_0 inner diameter of the inner ply,
- θ_i braiding angle of the i^{th} ply,
- d_i inner diameter of the i^{th} ply.

Thus only one parameter, the initial braiding angle θ_0 of the inner ply, is required here, together with the thickness e_p of each ply, to deduce the braiding angles of the other plies. As specified in Table 3.4, the last design parameter needed is the number of plies n_p . Note that in the implementation of the genetic optimization algorithm for braided composites, each individual spring is described by seven design parameters: the mean coil diameter spring D , the inner diameter wire d_0 , the laminate thickness e , the pitch p , the number of active coils N , the initial braiding angle θ_0 (or θ) and the number of plies n_p .

3.7.3 Composite helical spring optimization

The main purpose of this study is to develop a methodology to optimize the composite spring by minimizing its mass, while reaching the maximum possible stiffness (above the nominal stiffness, i.e., the desired stiffness of the application). Table 3.4 specifies the space of design parameters that will be considered in the evolutionary algorithm. Two descriptions of the composite structure can be considered in the optimization according to the type of stacking sequence selected: in the first case, the composite spring is

optimized for the same ply angle (OBA: one braiding angle); in the second case, it is optimized with a variable braiding angle from the inner to the external ply (MBA: multiple braiding angles).

Tableau 3.4 - Range of parameters for the composite optimum design problem

	1	2	3	4	5	6	7	7
Parameter	D (mm)	d_0 (mm)	e (mm)	p (mm)	N	n_p	θ (°) (MBA)	θ_0 (°) (OBA)
Limits								
Min	100	8	2	40	2	2	20	20
Max	134	15	6	60	8	7	70	35

The procedure proposed to solve the multi-criteria optimization problem and design composite helical springs is described in the sequel. The software is based on an algorithm developed to minimize mass and maximize stiffness, while respecting the constraints coming from the technical specifications of the application (for example, maximum overall dimensions of the spring and its nominal stiffness). Other constraints can also be considered depending on the customer requirements such as the maximum deflection or maximum load. Tsai-Wu failure criterion is implemented assuming that the helical spring is subjected to torsion only. (Bending, shear and compression caused by the axial load can be neglected here, because of the low value of the spring helix angle [1]).

3.7.3.1 Description of the algorithm

The algorithm includes four stages:

Step 1: Create the design space

Set limits on stiffness, mass, braided angle, number of coils, etc., as specified in Table 3.4 for example.

Step 2: Set the optimization parameters

The size of the population, probability of mutation and number of generations are also set by the user. The same values as in the previous metallic spring optimization are selected here. Additionally, evaluation functions are added such as the ones giving the shear modulus and the shear strength by Plate Laminate Theory (PLT) as a function of the ply angle.

Step 3: Execution of NSGA II Algorithm

Start from the first individual consisting of a series of set values for parameters d_0 , e , D , p , N , n_p , θ_0 (OBA case) or θ (MBA case) within the limits specified in step 1 and iterate.

Step 4: Writing the final population

After execution of the precedent step, the final population file will be created, which contains the best Pareto set D , d_0 , e , p , N , n_p , and θ_0 (OBA case) or θ (MBA case). Each solution, i.e., a given composite spring, from the optimal Pareto set corresponds to a point (stiffness, mass) in a two-dimensional space. The stiffness and mass are calculated by equations (3.3) and (3.9) respectively. As shown in Figure 3.2, the optimal stiffness-mass curves in the sense of Pareto can be plotted in a two-dimensional graph: for each type of composite material, mass is represented along the x axis, and stiffness along the y axis.

3.7.4 Implementation of the algorithm

Table 3.5 [16] gives the material properties of the three composites considered: glass, carbon or kevlar fibers with epoxy matrix. These material properties were used as input data in the optimization algorithm for a 50% fiber volume fraction.

Tableau 3.5 - Unidirectional composite ply properties

	carbon- epoxy	kevlar- epoxy	glass- epoxy
Specific mass (kg/m^3)	1275	1125	1890
Longitudinal tensile strength (MPa)	1058	1175	880
Transverse tensile strength (MPa)	941.7	233.3	725
Longitudinal compressive strength (MPa)	35	23.3	14.2
Transverse compressive strength (MPa)	117.5	117.5	117.5
In-plane shear strength (MPa)	52.5	37.5	34.5
Longitudinal elastic modulus (MPa)	111667	70833	37633
Transverse elastic modulus (MPa)	5833	4667	7085
Shear modulus (MPa)	3500	1750	2000
Poisson ratio	0.21	0.28	0.32

Depending on the description of the stacking sequence of the braided laminate, two types of calculations can be carried out to derive the mechanical properties of the composite helical springs in the optimization algorithm: OBA with *one braiding angle* for each ply, and MBA with *multiple braiding angles* given by equation (3.12) from an initial braiding angle.

Like before for the metallic springs the optimization can be carried out with or without the four constraints on the maximum overall dimensions, minimum length, nominal stiffness and maximum load. The first tests were conducted without constraints. The goal was to compare the results obtained with OBA and MBA. In a second series of optimizations, constraints were included for the three composite materials considered.

3.7.5 Optimization without constraints

Figure 3.6 shows the stiffness-mass curves obtained with the optimization algorithm for the two options (OBA and MBA), but without the constraints considered for the metallic spring optimization. The two Pareto optimal sets are well superposed, i.e., the simplification of considering only one braiding angle does not make much of a difference on the Pareto solutions. However, the range of possible values is not the

same. Therefore it is worth performing also the MBA calculations. The best approach consists probably of considering the OBA case at the beginning of the design process, to be replaced later by MBA, which takes a significantly longer computer time, in order to further refine the range of optimal solutions.

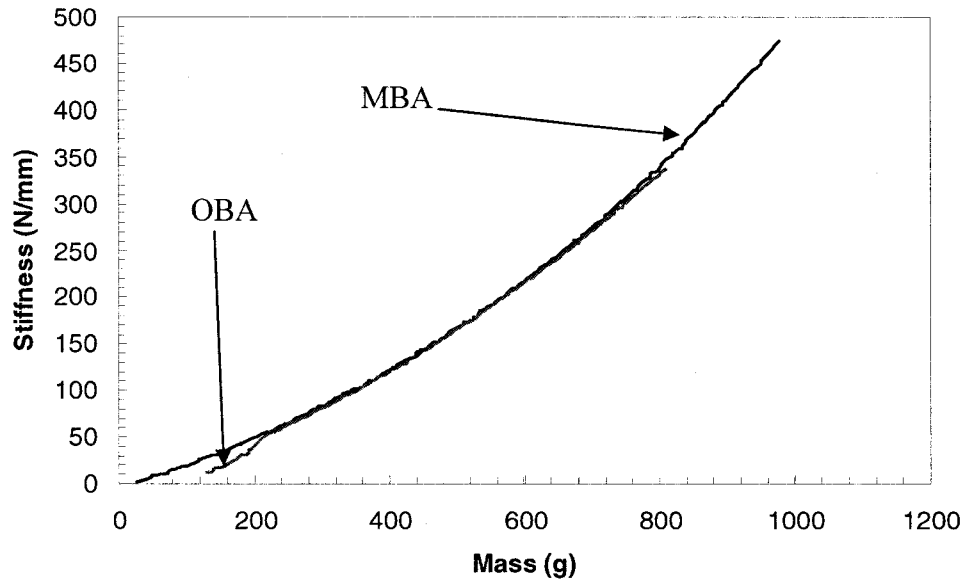


Figure 3.6 - Pareto fronts obtained for the carbon-epoxy spring for the two descriptions of braided composites considered (OBA and MBA).

Having defined the methodology to be followed for composite spring optimization with constraints, a series of calculations will now be conducted to design a composite spring with the three different materials considered, namely the epoxy matrix with the kevlar, carbon and glass fibers. The goal remains the same, i.e., to replace the metallic spring studied earlier by a lighter one in composite. A conflicting, but nevertheless important additional objective, is to ensure that the new composite spring will have the same mechanical performance as the metallic one, while respecting the other overall constraints already mentioned in metallic spring optimization.

3.8 Composite spring design

A first optimization was conducted in the space of design parameters of Table 3.4. The optimized parameters turned out to give the lowest value of the mean coil diameter. From the stiffness point of view, the target values of the metallic spring could be attained, but with overall geometrical dimensions much smaller than for the metallic spring. Therefore, a second design was carried out to show that it would be possible, if needed for some reason, to respect more closely the geometry of the metallic helical spring. In this second design, a lower limit of 124 mm is imposed to the mean coil diameter.

3.8.1 First design

The composite helical spring is optimized for the range of parameter values of Table 3.4. The optimization results are shown in Figures 3.7 and 3.8. In this case, the optimization was carried out with nearly the same four overall constraints as in the metallic spring optimization (the only difference lies in the maximum height which was 400 mm for the metallic spring):

- maximum overall dimensions limited at 350 mm in height and 145 mm in diameter,
 - minimal height limited at 250 mm,
 - nominal stiffness of 126 N/mm with 50% tolerance (i.e., $K_n - (50\% \text{ of } K_n) \leq K \leq K_n + (50\% \text{ of } K_n)$),
 - respect of Tsai-Wu criterion for the maximum load.
- In the first case (OBA), Figure 3.7 shows that, for the same weight, the glass-epoxy composite gives the lowest stiffness compared to the carbon-epoxy material, closely followed by the kevlar-epoxy in terms of mechanical performance. This result is logical, because the cross-section of an axially loaded helical spring works in torsion. Consequently, the material with the best torsion behavior, namely the carbon-epoxy composite will provide the best spring characteristics. (Please refer to Table 3.5 to compare the mechanical properties of the three composite materials considered.) Note

that the glass-epoxy spring with one ply angle does not reach the target stiffness of 126 N/mm.

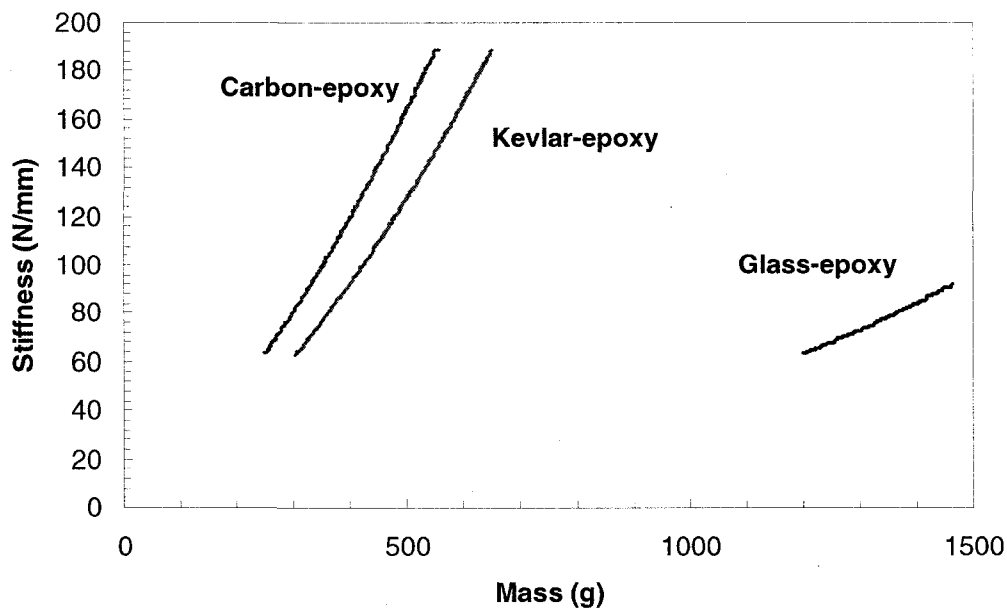


Figure 3.7 - Pareto fronts obtained by NSGA-II algorithm for one braiding angle (OBA) optimization (first design).

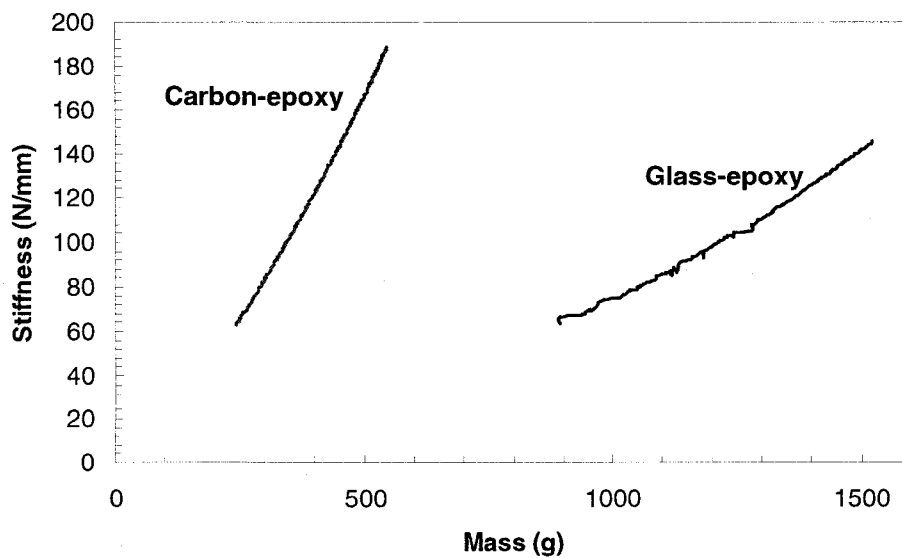


Figure 3.8 - Pareto fronts obtained by NSGA-II algorithm for multiple braiding angles (MBA) optimization (first design).

- In the second case (MBA), the kevlar-epoxy solution could not be retained, because it did not respect Tsai-Wu criterion. Figure 3.8 shows only the carbon-epoxy and glass-epoxy solutions. The carbon-epoxy solution for the MBA optimization is quite similar to the OBA solution, much like in the preliminary tests of Figure 3.6. However, note that glass-epoxy solution for the MBA optimization gives a larger optimal set than for OBA optimization. This is also consistent with the observations of Figure 3.6. The carbon-epoxy and glass-epoxy solutions weigh 411 g and 1406 g respectively for the same stiffness as the metallic spring, i.e., 126 N/mm. Note that the mechanically equivalent metallic spring has a total weight of 8525 g, which makes quite remarkable the potential gain in weight attainable with composite springs.

Table 3.6 gives the range of parameters of the optimal composite helical springs obtained by the optimization algorithm compared to the metallic spring. The optimal sets of Figure 3.7 and 3.8 give the composite spring solutions of Table 3.6. All these solutions have a nominal stiffness of 126 N/mm as the metallic spring with a wire of diameter more or less smaller than 20 mm in majority cases compared to 21 mm for the metallic wire. The mean core diameter is also smaller of 124 mm for the metallic spring. The number of active coils is also smaller, between 5 and 6, instead of 8 for the metallic spring. The total free length of active coils lies 228 and 246 mm compared to 365 for the metallic spring. Hence the optimal composite springs obtained by the optimization algorithm have smaller overall dimensions than the “mechanically equivalent” metallic spring. In fact, it turned out that the mean coil diameter converged in the optimization algorithm to the lower limit in the parameter range and is therefore smaller than the mean core diameter of the metallic spring. If one would like to respect more closely the geometrical features of an “equivalent” metallic spring, it is possible to carry out a second optimization with a new range of design parameters.

Tableau 3.6 - Comparison between metallic and optimal composite spring parameters
(first design)

	carbon-epoxy		kevlar-epoxy		glass-epoxy		metallic
	<i>OBA</i> *	<i>MBA</i> **	<i>OBA</i>	<i>MBA</i>	<i>OBA</i>	<i>MBA</i>	
D [mm]	100	100	100	-	103-105	103-105	124
d_0 [mm]	15	15	15	-	15	15	21
e [mm] or (e_p [mm]-MBA) ply number (MBA)	2.2-4.4 -	0.3-0.9 3-7	3-5.8 -	-	5-6 -	0.8-1 5-7	-
p [mm]	45-52	47-55	45-54	-	40	47	43
N	5	5	5	-	6	5	8
θ [°](OBA) or θ_0 [°] (MBA)	41-45	31-35	41-45	-	44-47	24-31	-
l_0 [mm]	230-232	236-278	228-277		245-246	239-242	365
K [N/mm]	126	126	126	-	92	126	126
m [g]	415	411	496	-	1463	1406	8525

* OBA: one braiding angle

** MBA: multiple braiding angles

In multi-criteria algorithms, several conflicting constraints can be considered at the same time. For this reason, it is sometimes difficult to find optimal solutions. There is always a risk that calculations give irrelevant solutions or worst, simply diverge like in the MBA case for the kevlar-epoxy material. For this reason, in the calculations performed up to now, the initial range of parameters was set as large as reasonably possible to give more freedom to the algorithm in its search for the optimal set (Pareto front).

3.8.2 Second design

A second optimization was carried out with the same overall constraints as in the first design, but for a new range of design parameters. The results of the OBA optimization diverged, i.e., only irrelevant solutions were obtained. However, the MBA optimization yielded a result for the carbon-epoxy and glass-epoxy composites. The stiffness-mass curves of the carbon-epoxy and glass-epoxy Pareto sets are plotted in Figure 3.9. The carbon-epoxy solution remains the best choice in term of stiffness over mass ratio. The glass-epoxy solution does not achieve the required nominal spring stiffness. This can be explained by the material properties. As a matter of fact, the spring stiffness depends on several parameters, among which the shear modulus of the material. From equation (3.3), the stiffness of a helical spring is proportional to the shear modulus. In order to keep the stiffness of the glass-epoxy spring (which has the lowest shear modulus) in line with that of the carbon-epoxy spring, one must necessarily increase the spring mass. However, in the second design, the volume of the spring is restricted by the geometrical constraints set on the design parameters. Therefore, the stiffness of the spring is limited and it is not possible to reach the target stiffness for the glass-epoxy spring.

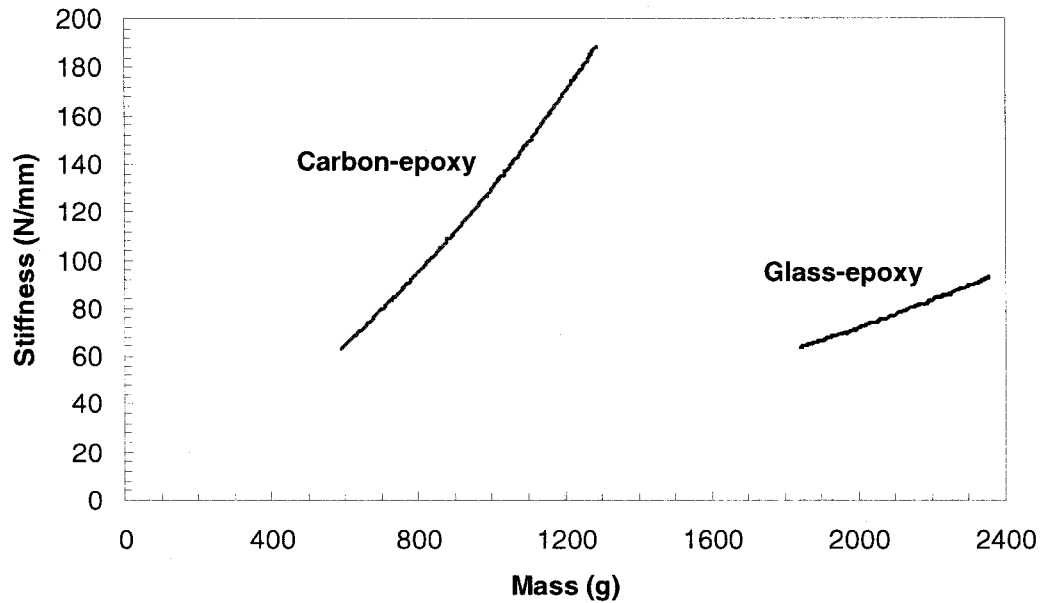


Figure 3.9 - Pareto fronts obtained by NSGA-II algorithm for multiple braiding angles (MBA) optimization (second design).

3.9 Discussion

In scope of the precedent results, springs suitable to replace the metallic helical spring could be chosen in the optimal set of the first design if one sets the minimization of mass as a primary goal. Now the optimal set obtained in the second design shows that an “equivalent composite spring” in terms of overall geometrical dimensions can still be obtained, but only with a carbon-epoxy spring. The different optimal springs obtained give us several design choices. A spring with more coils has a smaller helix angle, which in turn gives more stability to the structure. In our case, the selection is easy, because the range of optimal spring parameters obtained by the design software is relatively narrow. A summary of the geometrical and mechanical characteristics of these optimal springs compared to the initial metallic spring is given in Table 3.7. In the second design, the carbon-epoxy solution is acceptable and provides an important mass saving. Comparison

between the first and second designs shows that one more active coil is needed to compensate for the difference between the mean coil diameters. The external wire diameter in the second solution is also larger than in the first one. The ply angles θ_0 remain nearly identical for the same materials in the two designs.

Tableau 3.7 - Parameters of the optimal composite springs selected and of the metallic spring

	First design		Second design		
	carbon-epoxy	glass-epoxy	carbon-epoxy	glass-epoxy	metallic
D [mm]	100	105	124	124	124
d_0 [mm]	15	15	17	17	-
d_{ext} [mm]	21.96	28.2	26.5	31	21
n_p	6	7	5	7	-
p [mm]	47.56	46.72	54.6	54.4	43
N	5	5	6	6	8
θ_0 [°]	34	25	33	26	-
K [N/mm]	126	126	126	93	126
m [g] (active coils only)	409	1966	977	2354	8525

Composite springs can bring an important potential mass saving compared to metallic ones. For example, carbon-epoxy composite helical springs bring a reduction of more than 88 % in mass for the same stiffness and overall dimensions compared to an equivalent metallic helical spring. Note that the choice of an optimal spring must also take into account the manufacturing process, as it is necessary to manufacture a spring without defects (such as resin rich areas or dry spots when made by resin injection). It is important also to be able to release the spring without major difficulty from the mold

after cure. Finally, one must keep in mind that the cost of composite springs always depends on the manufacturing process.

3.10 Conclusion

A software tool based on multi-criteria optimization was devised to design composite helical springs. The goal is to replace metallic helical springs in automotive applications. A genetic algorithm is implemented to devise an evolutionary strategy based on Pareto dominance to optimize composite springs and find an optimal solution set (also called the Pareto front). The algorithm must find integer variables such as the number of plies and number of active coils, while respecting constraints such as Tsai-Wu criterion, maximum overall dimensions and nominal stiffness for example. Designers must also take into account the limitations that arise from the manufacturing process selected. Therefore it might be necessary to add new constraints in the optimization in order to find “equivalent” solutions.

In order to test the algorithm, the first optimization tests were carried out to optimize the design of a metallic spring. It was shown that the optimal solution is independent from the initial generations selected and that changes in the range of design parameters have an effect on the optimal sets obtained. After these preliminary tests, the design methodology was implemented to optimize the design of composite springs. A series of preliminary calculations were conducted with three different composite materials: epoxy matrix with kevlar, carbon and glass fibers. The first composite optimization tests were performed without constraints. The optimal sets obtained were nearly the same with one braiding angle for each ply (OBA) and multiple braiding angles (MBA). A second series of optimization tests were carried out with design constraints for the three composite materials considered above. The carbon-epoxy solution turned out to be the best choice in terms of stiffness over mass ratio for all optimizations. The kevlar-epoxy solution could not be retained, because it did not respect Tsai-Wu criterion in the second design

(MBA). The target stiffness could be attained with the glass-epoxy solution, but for a larger mass than the for the carbon-epoxy spring.

This investigation highlights the soundness of using genetic algorithms and multi-criteria optimization to design composite helical springs. It also underlines the potential gains brought by composites compared to steel, in particular for applications where a compromise between stiffness and lightness is a primary design goal. It is hoped that this work will provide a valuable methodology to assist application engineers in composite spring design. Using lighter, but “equivalent” materials in terms of mechanical performance should have a positive impact in several industrial applications, especially in the transportation sector.

3.11 Acknowledgments

Authors would like to thank especially Composite Atlantic Ltd for its financial support, and its President, Mr. Maurice Guitton, who provided the methods and materials to fabricate the composite springs. Authors are grateful to Christian-Charles Martel, technical assistant at École Polytechnique, for his constant and efficient help. The financial contributions of the Natural Sciences and Engineering Research Council (NSERC) and the support of the laboratory by the « *Chaire sur les Composites à Haute Performance* » (CCHP) and « *Centre de recherche en plasturgie et composites* » (CREPEC) of the « *Fonds Québécois pour la Recherche sur la Nature et la Technologie* » (FQRNT) are also gratefully acknowledged.

3.12 References

1. Gobbi, M. and Mastinu, G. (2002). On the Optimal Design of Composite Material Tubular Helical Springs. *Meccanica*; **36**(5): 525-553.
2. Yokota, T., Taguchi, T., Gen, M. (1997). A Solution Method for Optimal Weight Design Problem of Helical Spring using Genetic Algorithms. *Computers & Industrial Engineering*. **33** (1): 71-76.

3. Lecarpentier, B. (2004). Optimisation multicritères de la conception d'un ressort hélicoïdal tubulaire en matériau composite. Master's Thesis, Department of Mechanical Engineering, École Polytechnique de Montréal.
4. Ratle, F., Lecarpentier, B., Labib, R., Trochu, F. (2004). Multi-objective Optimization of a Composite Material Spring Design using an Evolutionary Algorithm. In: Yao et al., editors. Proceedings of the Eighth International Conference on Parallel Problem Solving from Nature, PPSN 2004. Berlin-Heidelberg: *Springer*.
5. Charlebois, K. M. Boukhili, R. Trochu, F. Zebdi O. and Gasmi A. (2005). Evaluation of the Physical and Mechanical Properties of Braided Fabrics and their Composites, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, **24**:1539-1554.
6. Harte, A. M. and Fleck, N. A. 2000., Deformation and Failure Mechanisms of Braided Composite Tubes in Compression and Torsion. *Acta Materialia*. **48**(6): 1259-1271.
7. Harte, A. M. and Fleck, N. A. (2000). On the Mechanics of Braided Composites in Tension. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, **19**(2): 259-275.
8. Zebdi, O. (2004). Caractérisation mécanique des composites à renfort tressé et application aux ressorts hélicoïdaux. Master's Thesis, Department of Mechanical Engineering, École Polytechnique de Montréal.
9. Ruiz, E. and Trochu, F. (2005) Comprehensive Thermal Optimization of Liquid Composite Molding to Reduce Cycle Time and Processing Stresses, *Polymer Composites*, **26**(2): 209-230.
10. Duchemin, M., « Ressorts : Force coaxiale », Techniques de l'ingénieur, B5 435. 1-31.

11. Deb, K., Agrawal, S., Pratap, A., and Meyarivan, T. (2000). A fast Elitist Non-dominated Sorting Genetic Algorithm for Multi-objective Optimization: NSGA-II. In: M. Schoenauer et al., editors. Proceedings of the Sixth International Conference on Parallel Problem Solving from Nature, PPSN 2000. Berlin-Heidelberg: *Springer*.
12. Hamda, H., Roudenko, O., Schoenauer, M. (2002). Application of a Multi-objective Evolutionary Algorithm to Topological Optimum Design. In: I. Parmee, editor. Proceedings of the Fifth International Conference on Adaptive Computing in Design and Manufacture, ACDM 2002. Berlin-Heidelberg: *Springer*
13. Wu, J.-L., Agogino, A.M. (2004). Automating Keyphrase Extraction with Multi-objective Genetic Algorithms. Proceedings of the 37th Hawaii International Conference on Systems Sciences, HICSS 2004. New York: *IEEE Computer Society*.
14. Merelo, J.J.; Keijzer, M., Schoenauer, M. (2004). Evolving Objects. [Web page] <http://eodev.sourceforge.net/>.
15. Mallick, P.K., Fiber-Reinforced Composites: Materials, Manufacturing and Design. (1993). 2nd edition. New York, Ed: Marcel Dekker, Inc. 565p.
16. Gay, D., Composite Materials: Design and Applications, Edition: Boca Raton, FL: CRC Press, c2003. 1942, 531 p.

**CHAPITRE 4 - ARTICLE 2: AN INVERSE APPROACH BASED ON LAMINATE
THEORY TO CALCULATE THE MECHANICAL PROPERTIES OF BRAIDED
COMPOSITES**

OUSSAMA ZEBDI, RACHID BOUKHILI AND FRANÇOIS TROCHU

Centre de recherches en plasturgie et composites (CREPEC)

Mechanical Engineering Department

École Polytechnique de Montréal, Québec, Canada

4.1 Abstract

A new approach based on plate laminate theory is developed to calculate the mechanical properties of woven and braided composites. It supposes that, for each woven or braided composite oriented at $\pm\theta$, there is an equivalent $\pm\theta$ angle ply laminate made out of two unidirectional plies. An inverse algorithm based on plate laminate theory was developed to calculate, from the known mechanical characteristics of a composite reinforced by engineering fabrics, the properties of the mechanically equivalent angle-ply. The virtual angle-ply and cross-ply laminates obtained by inverse calculation include the effects of undulation and strand shear. The difference in properties between experience and theory is clear especially for Poisson's ratio. Comparisons performed between numerical predictions and experimental tests have shown a good correlation.

KEY WORDS: woven and braided composite, undulation, mechanical properties, laminate theory.

4.2 Introduction

High performance composites manufactured with woven or braided reinforcements (for axisymmetric parts) are found in several applications in the aerospace and automobile industry, because of their good mechanical properties and light weight. This type of composite possesses an undulated architecture due to interlaced strands during weaving or braiding. Various configurations of woven or braided composites exist depending on the weaving process [1, 2]. The strength and stiffness of this type of composite depend on the fiber volume fraction, weaving parameters (size, spacing and undulation of the strands), strength and stiffness of the fibers and matrix.

There is no general theory to calculate the properties of woven or braided composites. Generally, a woven or braided composite is assimilated in laminate theory to an equivalent material made of a stack of angle-ply, in which the undulation and strand shear effects are neglected [3, 4]. On the other hand, several researchers have developed analytical methods to take into account the undulation geometry as a sinusoidal or circular strand so as to predict mechanical properties [5-9]. Although the strand shear effect is generally neglected, these studies have shown a good correlation of predicted thermoelastic properties with experimental results. Other researchers applied the finite element method by describing in a detailed manner the two undulated plies to predict the elastic properties of woven composites. The results also showed a good correlation with experiments [10-12].

Chun and al. [13] manufactured carbon-epoxy unidirectional plates with controlled undulations in order to study experimentally the influence of undulation on the elastic properties in tensile and compression for various amplitude ratios of the undulation with respect to the fibers period. The higher the ratio, the more severe is the undulation. When the undulation ratio increases, the moduli fall markedly. When the sample with

undulated fibers is subjected to a tensile load, the amplitude of the undulation decreases as the load increases, which results in increasing the stiffness gradually. On the other hand, for larger compression loads, the undulation ratio increases and the modulus becomes weaker. Falzon and Herszberg [14] performed tensile, compression and shearing tests on composites with triaxial braided reinforcements and equivalent laminates made of angle-ply without undulations. They noted that braided composites have comparable tensile and compression stiffness, but considerably reduced tension and compression strengths. This was attributed to fiber damage and tow waviness. The authors observed also that the Poisson's ratio depends slightly on the undulation and on the damage incurred by the fibers during the braiding process. The Poisson's ratios measured in tensile are also higher than in compression. However, the shear test results remained inconclusive because of the inaccuracy of the testing method used. Plate laminate theory (PLT) is usually possible to predict composite materials properties with some corrections. Ruiz et al. [15-17] are used PLT with success to compute composite internal stresses resulting from these thermo-rheological conditions in thin and thick composites.

The objective of this article is to propose an inverse approach based on plate laminate theory to take into account the effect of undulation and strand shear on the mechanical properties of woven and braided composites. This approach is based on a simple idea: one supposes that for each woven or braided composite with an angle $\pm\theta$, an equivalent virtual composite exists made of two angle-ply oriented with the same angle $\pm\theta$, the elastic characteristics of which reflect the undulation and the strand shear effects. Starting from the experimental results obtained by mechanical tests carried out on braided composites with various strand orientations, one calculates by an inverse method based on plate laminate theory the elastic properties of the virtual unidirectional constitutive 0° ply (UD) of a mechanically equivalent laminate (i.e., made of two unidirectional plies at angle $\pm\theta$). Hence, from the braided composite properties at angle $\pm\theta$, one can predict by plate laminate theory the elastic properties of another braided composite at a different angle $\pm\theta^*$.

4.3 Methodology

Plate laminate theory allows calculating the laminate elastic properties of $(\pm\theta)$ symmetric angle-ply, E_{xx} , E_{yy} , G_{xy} and ν_{xy} , from the elastic properties of an orthotropic unidirectional ply E_{11} , E_{22} , G_{12} and ν_{12} . Therefore, if E_{xx} , E_{yy} , G_{xy} and ν_{xy} are known for a $(\pm\theta)$ symmetric laminate; it is possible to find by inverse calculation the properties of the base ply E_{11} , E_{22} , G_{12} and ν_{12} . Transposing this approach to the case of a composite manufactured from $(\pm\theta)^B$ braided plies, Therefore, if E_{xx} , E_{yy} , G_{xy} and ν_{xy} are known for a $(\pm\theta)^B$ laminate; it is possible to find by inverse calculation the properties of a virtual base ply; E_{11}^v , E_{22}^v , G_{12}^v and ν_{12}^v .

As shown in Figure 4.1, let suppose that E_{xx} , E_{yy} , G_{xy} and ν_{xy} of a $(\pm 30^\circ)^B$ braided composite are determined experimentally. The inverse calculation algorithm based on plate laminate theory described in the next section allows the identification of the elastic properties of a virtual orthotropic ply E_{11}^v , E_{22}^v , G_{12}^v and ν_{12}^v . Once this virtual unidirectional ply is known, it became possible to predict the elastic properties on any braiding orientation $(\pm\theta^*)^B$. In order to check the validity of this approach, the predictions should be compared to test results for as many braiding angles as possible. Figure 4.1 represents schematically this approach for two braided composites at $\pm 30^\circ$ and $\pm 45^\circ$.

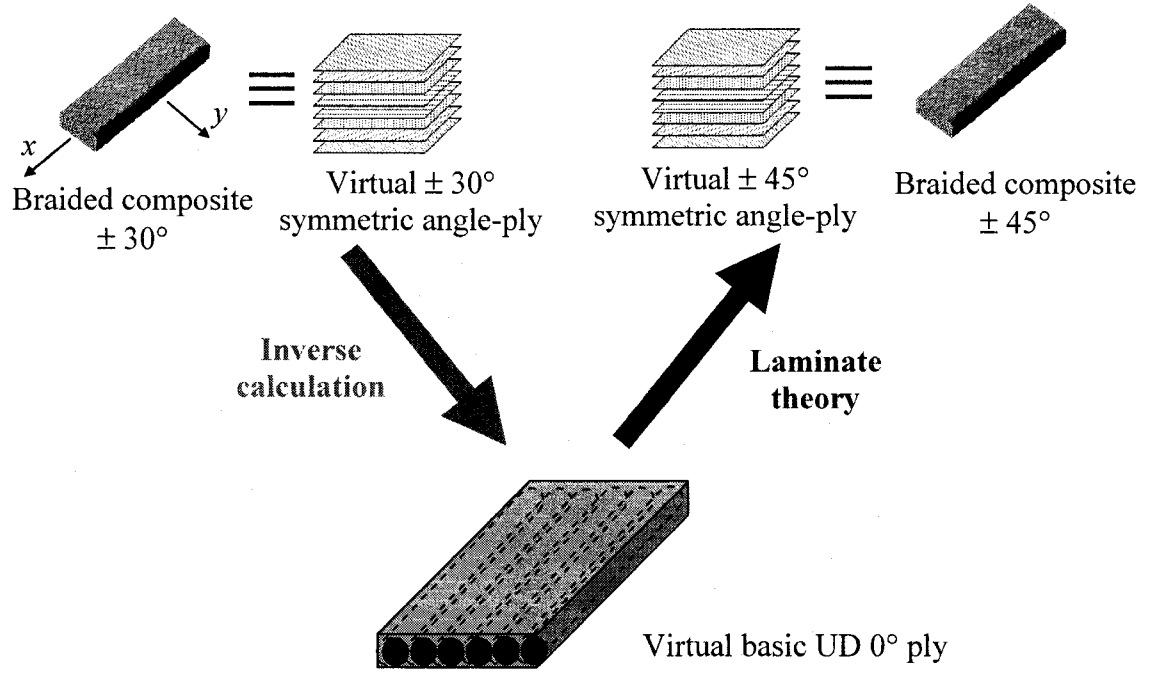


Figure 4.1 - Schematic presentation of the new approach based on inverse laminate theory to predict the mechanical properties of braided composites.

4.3.1 Inverse calculation

The engineering constants E_{xx} , E_{yy} , G_{xy} and ν_{xy} of a laminated composite as determined experimentally, can be written as function the elastic constants derived from the plate laminate theory [18]. The elastic constants of a laminate are given by the extensional stiffness matrix elements A_{ij} :

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

where:

$$A_{mn} = \sum_{j=1}^{n_p} (\bar{Q}_{mn})_j (h_j - h_{j-1}) \quad (4.2)$$

n_p total number of laminate plies;

$(\bar{Q}_{mn})_j$ elements of the stiffness matrix of the j^{th} ply;

h_{j-1} distance from the median plane of the laminate to the higher side of the j^{th} ply ;

h_j distance from the median plane of the laminate to the lower side of the j^{th} ply.

Accordingly, the different steps of the inverse algorithm are presented in the following and a summary on plate laminate theory with more details in the appendix.

Step 1

The test results on composites give the engineering constants E_{xx} , E_{yy} , G_{xy} and ν_{xy} . Then, the elastic constants of $(\pm\theta)$ symmetric angle-ply laminate can be obtained after simplifications by the following relations:

$$\bar{Q}_{11} = \frac{E_{xx}}{1 - \nu_{xy}^2 (E_{yy}/E_{xx})} \quad (4.3)$$

$$\bar{Q}_{22} = \frac{E_{yy}}{1 - \nu_{xy}^2 (E_{yy}/E_{xx})} \quad (4.4)$$

$$\bar{Q}_{12} = \frac{\nu_{xy} E_{yy}}{1 - \nu_{xy}^2 (E_{yy}/E_{xx})} \quad (4.5)$$

$$\bar{Q}_{66} = G_{xy} \quad (4.6)$$

Note that in the case of symmetric angle-ply laminates, $A_{16} = A_{26} = 0$. Consequently, the engineering constants E_{xx} , E_{yy} , G_{xy} and ν_{xy} are independent of $\bar{Q}_{16}$ and $\bar{Q}_{26}$.

Step 2

The elastic constants of the stiffness matrix of an off-axis (θ) ply are given by:

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \quad (4.7)$$

$$\bar{Q}_{12} = Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (4.8)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \quad (4.9)$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \quad (4.10)$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \quad (4.11)$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \quad (4.12)$$

With Q_{11} , Q_{22} , Q_{12} , and Q_{66} being the elastic properties of the O^0 ply.

So, knowing the elastic constants $\bar{Q}_{11}$, $\bar{Q}_{22}$, $\bar{Q}_{12}$, and $\bar{Q}_{66}$ obtained from the step 1, the elastic constants Q_{ij} of UD ply at 0° are given by solving the following system of linear equations:

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{66} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^4 & n^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ n^4 & m^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & m^4 + n^4 & -4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & -2m^2n^2 & (m^2 - n^2)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

where $m = \cos \theta$ and $n = \sin \theta$.

As a particular case, the prediction for the woven composite ($0/90^\circ$), the elastic constants of a symmetric cross-ply can be derived immediately as follows:

$$Q_{11} + Q_{22} = \frac{2E_{xx}}{1 - 2\nu_{xy}^2} = \frac{2E_{yy}}{1 - 2\nu_{xy}^2} \quad (4.14)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{xy} E_{xx}}{1 - 2\nu_{xy}^2} = \frac{\nu_{xy} E_{yy}}{1 - 2\nu_{xy}^2} \quad (4.15)$$

$$Q_{66} = G_{xy} \quad (4.16)$$

Step 3

The engineering constants are calculated from the elastic constants of the stiffness matrix of the UD ply by the following equations:

$$E_{11} = Q_{11} - \frac{Q_{12}^2}{Q_{22}} \quad (4.17)$$

$$E_{22} = Q_{22} - \frac{Q_{12}^2}{Q_{11}} \quad (4.18)$$

$$\nu_{12} = \frac{Q_{12}}{Q_{22}} \quad (4.19)$$

$$G_{12} = Q_{66} \quad (4.20)$$

In the case of a $\pm 45^\circ$ laminate, the longitudinal modulus E_{xx} is equal to the transverse modulus E_{yy} , and $\bar{Q}_{11} = \bar{Q}_{22}$ (see equations 4.3 and 4.4). The first two equations of system (4.13) are thus identical, which leads to an infinity of solutions for the couple (Q_{11}, Q_{22}) , and thus an infinity of solutions for the couple (E_{11}, E_{22}) . The same problem exists for the woven composite $(0/90^\circ)$ for an equilibrated fabric. We get three equations with four unknowns (equations 4.14 to 4.16). From the mathematical standpoint, this means that several UD plies can give the desired elastic properties for this type of laminate. On the other hand, from a physical point of view, the set of feasible solutions is limited by the materials available (fibers/matrix). In order to solve this problem, the addition of a new equation is necessary. If one seeks a solution among usual composite materials, one can easily evaluate the ratio E_{11}/E_{22} (or Q_{11}/Q_{22}) for a given material (fiber/matrix), this gives a fourth equation between the same four unknowns, Q_{11} , Q_{22} , Q_{12} , Q_{66} .

4.3.2 Molding of the test sample

Composite plates were manufactured by RTM assisted by infusion with glass fiber fabrics and epoxy resin. The dimensions of the rectangular samples are $406 \times 163.5 \times 1.7$ mm. Four layers of woven or braided fibers are prepared using a wood fixture to cut out samples with the same internal dimensions as the frame inserted between the two plates of a flat mold. This approach allows fabricating plates of constant thickness, so that the fiber volume content of the samples is controlled.

Sheared layers of reinforcement are obtained with the device of Figure 4.2, a rectangular frame made out of aluminium and articulated at its four corners. The reinforcement is set in the frame and clamped along its edges, and then the frame is deformed so as to confer a constant shear to the fiber strands.

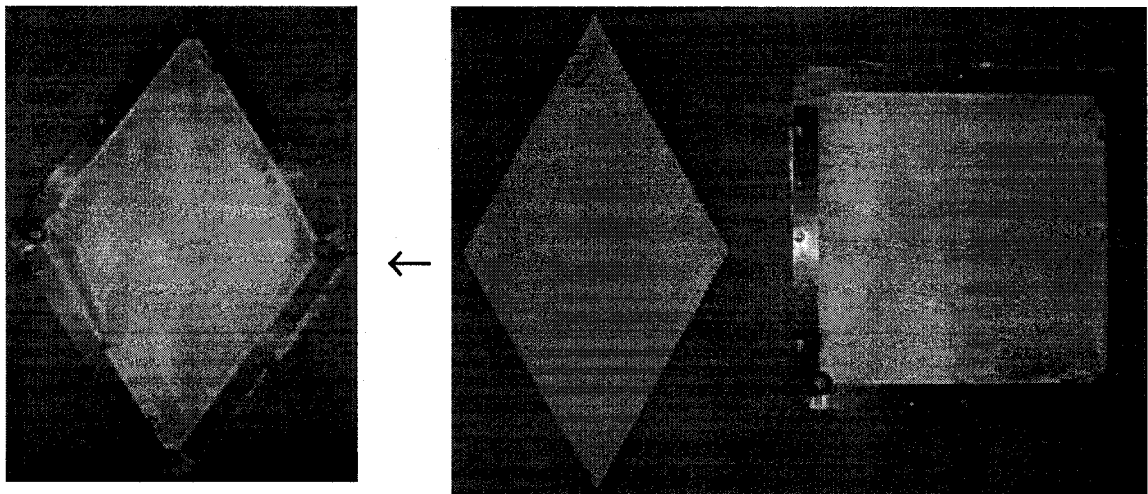


Figure 4.2 - Device used to shear engineering fabrics at various angles.

Four plies (woven or braided) are prepared and stacked in the mold, which is closed and tightened using screw clamps to ensure good sealing of the cavity. The mold is placed in the furnace at 65°C during one hour to lower the viscosity of the infused resin and

decrease the fabrication time. After infusion of the resin, the specimen is placed in a thermostatic bath at 60°C during one hour. A resin trap (vacuum pot) connected to a vacuum pump is used to recover the excess resin (Figure 4.3). The plates undergo one hour of cure at 100°C, followed by a post-curing during three hours at 170°C. After demolding, samples are cut out of the plates.

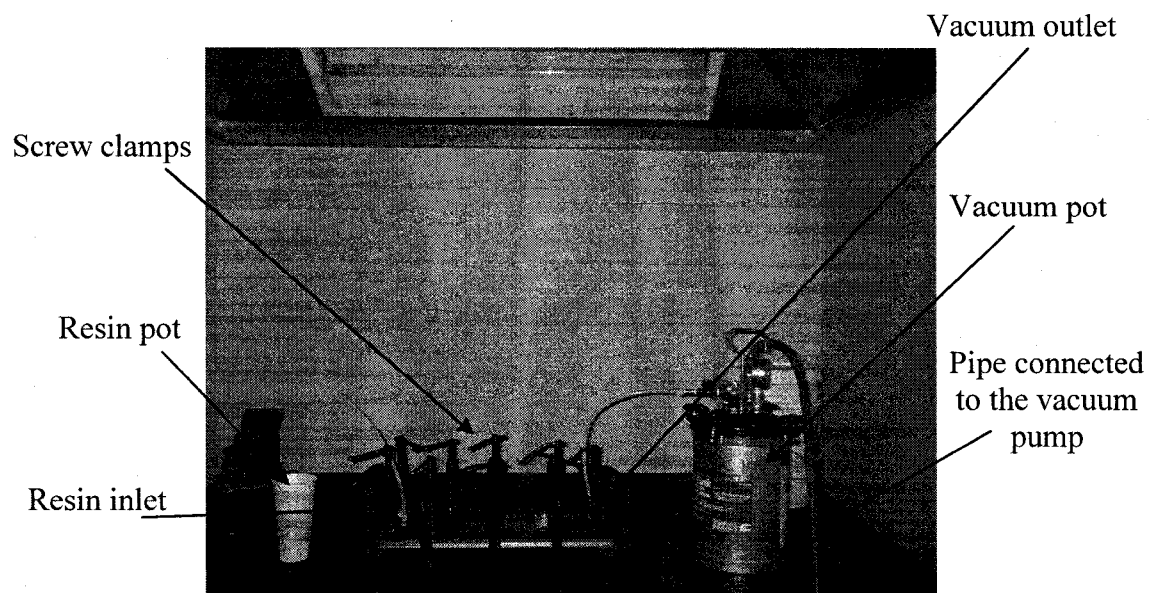


Figure 4.3 - Experimental set-up used to fabricate samples by RTM assisted by resin infusion.

4.3.3 Mechanical tests

The mechanical properties to be measured are the longitudinal and transverse Young's moduli, the shear modulus and Poisson's ratio.

4.3.3.1 Tensile tests

This type of tests is mainly used to characterize in tension a composite material in the longitudinal and transverse directions. The applied load is oriented along the braid axis in longitudinal tension and a perpendicular direction in transverse tension. The strength (σ_{LT}), the longitudinal Young's modulus (E_{LT}) and Poisson's ratio (ν_{LT}) are measured by these static tests. In the transverse direction, only the transverse strength (σ_{TT}) and Young's modulus (E_{TT}) were measured. Three samples at least were tested in tension for each composite plate manufactured with the woven and braided reinforcements.

Figure 4.4 shows the geometry of the tensile samples used, the direction X being the braid axis. Two composites tabs of rectangular section $38.1 \times 19.0 \text{ mm}^2$ were laid out on both sides to prevent any slip of the sample and decrease edge effects during the tests. The tabs were glued on the samples with an instantaneous structural adhesive (Loctite 401).

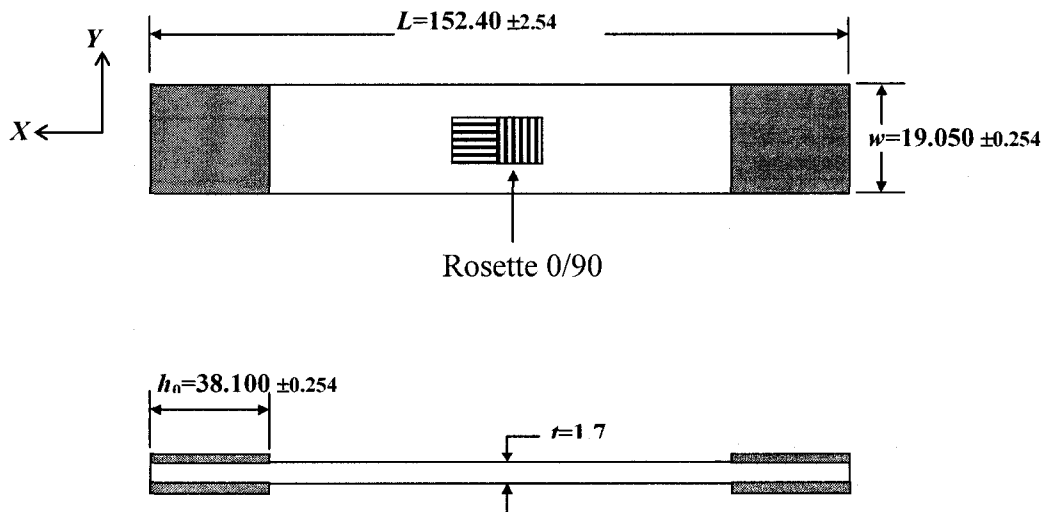


Figure 4.4 - Dimensions in millimeters for a composite sample in tensile test.

The tests follow ASTM standard D3039 [19]. They were carried out on a fatigue servo-hydraulic machine, model 810, manufactured by MTS. The tensile test consists of loading the sample by imposing a displacement at constant loading rate (1.3 mm/min) until failure. The elongation and force in time are recorded instantaneously by a data acquisition system. The load-displacement, stress-strain and strain(X)-strain(Y) curves give the information required to characterize the mechanical behavior of the material from the following relationship:

$$\sigma_{LT} \text{ and/or } \sigma_{TT} = \frac{F_{\max}}{wt} \quad (4.21)$$

where $F_{\max}$ is the maximum tensile force acting on the sample, w and t being respectively the width and thickness of the samples.

The modulus E_{xx} and Poisson's ratio ν_{xy} are deduced from the signals given by strain gauges of Rosette type 0/90° (model CEA-06-12UT-350 of *TA instruments*) in the zone ranging between 1000 and 3000 ($\mu\text{m/m}$) of the straight part of the stress-strain (Figure 4.5a) and longitudinal strain-transverse strain (Figure 4.5b) curves according to two following expressions:

$$E_{xx} [GPa] = \frac{ABS(F_2) - ABS(F_1)}{0.002 \times w \times t \times 10^{-6}} \times 10^{-9} \quad (4.22)$$

$$\nu_{xy} = \frac{ABS(\epsilon_{y2}) - ABS(\epsilon_{y1})}{ABS(\epsilon_{x2}) - ABS(\epsilon_{x1})} \quad (4.23)$$

where F_1 and F_2 are the loads in [N] corresponding to the strains ϵ_{i1} and ϵ_{i2} , for $i = x$ or y .

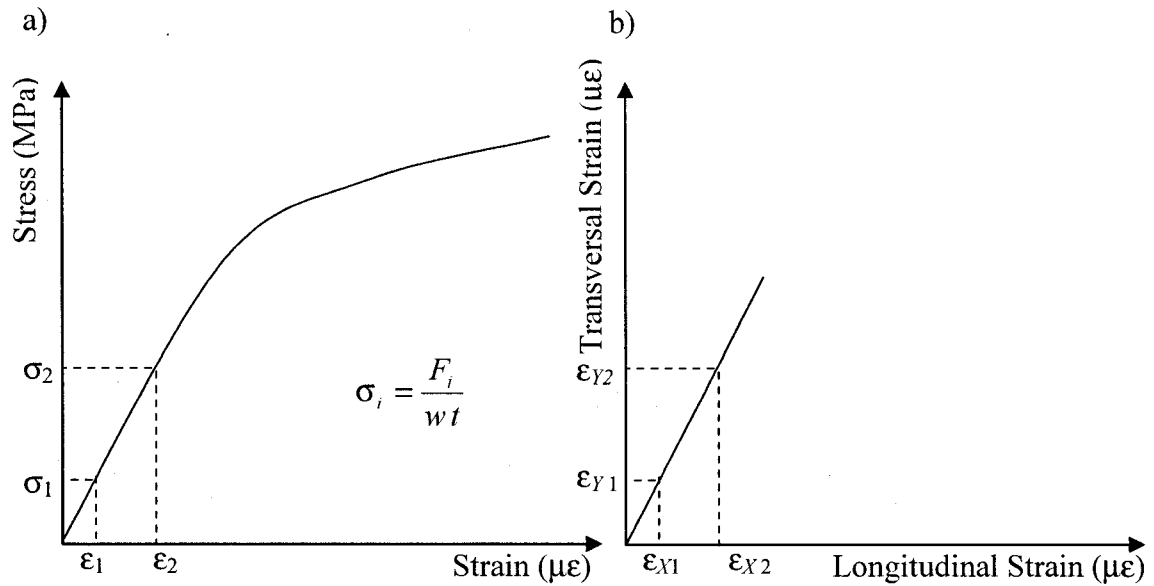


Figure 4.5 - Example of tensile stress-strain and strain (T)-strain (L) curves.

4.3.3.2 Shear testing

Figure 4.6 shows a sample for a plane shear test following ASTM standard D5379-98 [20]. For this test the samples have the shape of a parallelepiped with symmetrical V-notches located in the middle of the specimen. Two 90° notches are machined on both sides in the medium length of the specimen to ensure that failure will take place at this position. A strain gauge of Rosette type $\pm 45^\circ$ (model CEA-06-187UV-350 of *TA instruments*) was installed between the two notches in order to measure strain (see Figure 4.6).

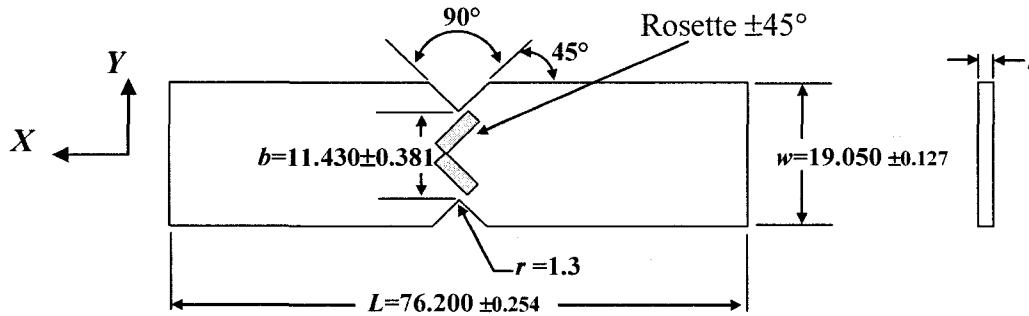


Figure 4.6 - Dimensions in millimeters for a composite sample in shear.

The determination of the shear modulus and shear strength was carried out at a constant elongation speed of 2 mm/min according to ASTM standard D5379-98 (Iosipescu type). As shown in Figure 4.7, the shear modulus is measured in the section of the curve ranging between 2000 and 6000 ($\mu\text{m/m}$).

The shear stress τ_{xy} for an applied load F is defined by:

$$\tau_{xy} = \frac{F}{bt} \quad (4.24)$$

The shear strain is given by:

$$\gamma_{xy} = |\epsilon_{+45}| + |\epsilon_{-45}| \quad (4.25)$$

where:

ϵ_{+45} = $+45^\circ$ normal strain in $\mu\epsilon$

ϵ_{-45} = -45° normal strain in $\mu\epsilon$

The shear modulus is calculated by the expression:

$$G_{xy} = \Delta\tau_{xy} / \Delta\gamma_{xy} \quad (4.26)$$

where :

$\Delta\tau_{xy}$ difference in applied shear stress between the two strain points [MPa],

$\Delta\gamma_{xy}$ difference between the two strain points (nominally 0.004).

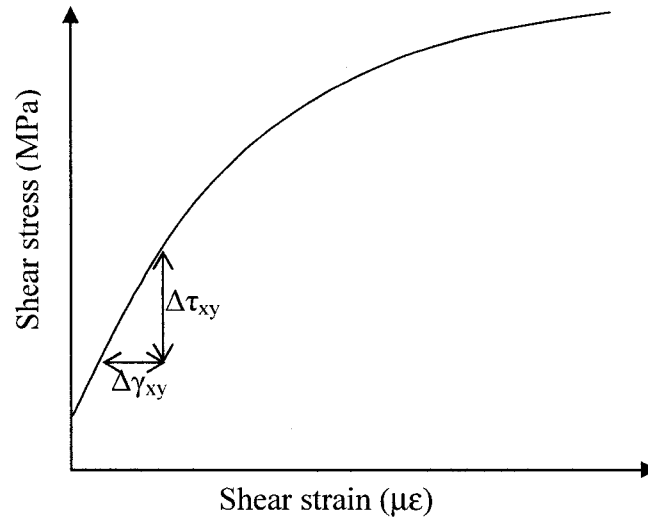


Figure 4.7 - Measurement of the shear modulus.

4.4 Results and discussions

This section presents the physical and mechanical properties of the composite samples. Theoretical and experimental results are compared in order to validate the approach developed in this article.

4.4.1 Physical properties

Table 4.1 presents the results of the physical test carried out on the composite samples made by infusion. The small void fractions obtained show that the quality of the manufactured samples is good. This is a necessary condition in order to carry out reliable mechanical tests. The void fraction was calculated by the formula [21]:

$$V_v(\%) = 100 - \rho \left(\frac{w_f}{\rho_f} + \frac{w_m}{\rho_m} \right) \quad (4.26)$$

where:

- ρ sample density (g/cm³)
- ρ_f fiber density (2.55 g/cm³)
- ρ_m matrix density (1.2 g/cm³)
- w_f fiber weight fraction
- w_m matrix weight fraction

Tableau 4.1 - Physical properties of the samples

Plate	Density (kg/m ³)	Fiber volume fraction $V_f(\%)$	Void fraction $V_v(\%)$
Epoxy	1206.32	-	-
+/-30°	1640,95	32.50	0.12
+/-35°	1608,28	30.71	0.61
+/-45°	1575,40	28.18	0.61
0/90°	1598,20	29.73	0.54

4.4.2 Mechanical properties

The elastic properties and failure behavior are summarized in Table 4.2. The transverse properties of $\pm(90^\circ-\theta)$ braided composites are deduced from the longitudinal properties $\pm\theta$ braided composites. For the shear tests we take into account the symmetry of the properties beyond $\pm 45^\circ$. Note that the shear strength of the braided composites could not be measured in shear tests of Iosipescu type. Their strength is so high that failure does not occur between the notches of the samples, but at the contact points with the loading fixture.

Tableau 4.2 - Average mechanical properties of the composites tested

Plate	E_{xx} (GPa)	E_{yy} (GPa)	G_{xy} (GPa)	ν_{xy}	σ_{Tlu} (MPa)	σ_{Ttu} (MPa)	τ_{max} (MPa)
0/90°	17,35	17,35	3,06	0,187	318,02	318,02	83,34
+/-30°	14,61	6,83	7,37	0,619	282,03	60,37	91,98
+/-35°	13,26	7,21	7,67	0,623	239,37	67,65	86,38
+/-45°	8,65	8,65	7,99	0,575	127,72	127,72	86,40
+/-55°	7,21	13,26	7,67	0,339	67,65	239,37	86,38
+/-60°	6,83	14,61	7,37	0,289	60,37	282,03	91,98

Figure 4.8 shows a comparison between the experimental and predicted moduli for equivalent angle-ply laminates as a function of the braiding angle. Here, the predicted moduli are obtained by plate laminate theory (PLT) from glass fiber and epoxy matrix properties with $V_f = 30\%$. The experimental curves follow the same trend as the theoretical predictions, and confirm other published results [5-9]. The longitudinal modulus E_{xx} decreases with fiber orientation and reaches its lowest value at 90°. The transverse modulus E_{yy} changes in a symmetrical way compared to the longitudinal modulus E_{xx} .

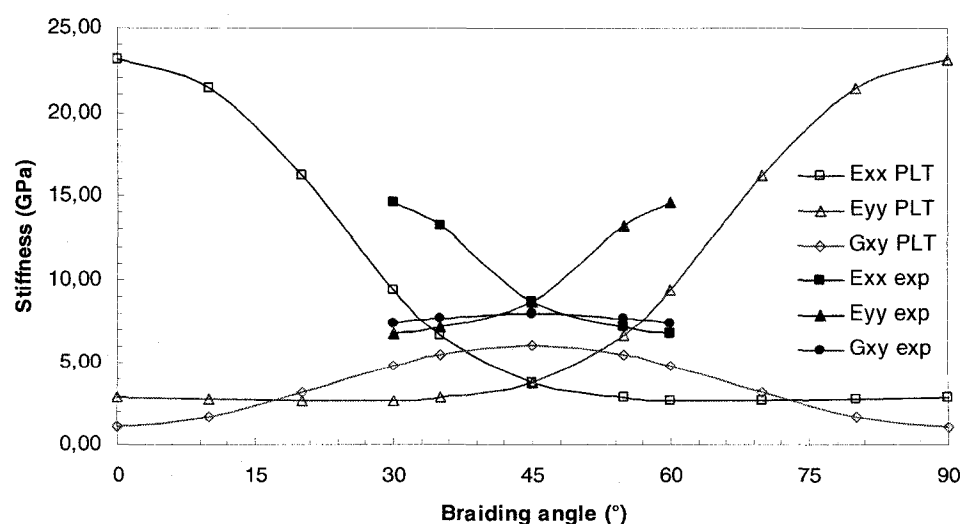


Figure 4.8 - Elastic properties of braided composites.

Concerning the shear modulus, a high dispersion in the results for $\pm 45^\circ$ braided composite is observed. According to [4] and [14], the shear in Iosipescu tests does not seem to allow an adequate study of the shear behavior for braided composites. Falzon and Herszberg [14] noted that their Iosipescu samples seemed to be loaded by a combination of bending and shearing because of the great shear rigidity and low bending rigidity of braided composites. Taking into account the intensity of the measured modulus, it is probable that this phenomenon, as observed by these authors, is the cause of this inconsistency in material behavior.

For all the braiding angles considered, the experimental moduli of the braided composites are systematically higher than the ones predicted for equivalent laminates. This behavior contradicts the results obtained in [13] for which the modulus decreases because of the strand undulation. However, according to [22] the strand interlacing is probably the cause, because it limits the displacement of the strands with respect to each other during loading. Thus, for the same load, the strain is smaller for interlaced strands, which explains the increase in the elastic moduli [22].

4.4.3 Effect of fiber architecture

The virtual angle-ply and cross-ply laminates obtained by inverse calculation include the effects of undulation and strand shear. These equivalent virtual laminates are made of basic unidirectional plies oriented at the same angles as the braided composite. The elastic properties of these plies are not necessarily equal to that of an ordinary ply composed of the same fibers and matrix. The difference in properties is clear especially for Poisson's ratio, as illustrated in Figure 4.9. Poisson's ratio in a longitudinal tensile test is the ratio of the transverse over the longitudinal strain. For the same longitudinal strain, a braided composite and the equivalent laminate without undulation and interlacing do not behave in the same way. The interlaced strands of the braided

composite limit its relative displacement during loading. This explains the weaker transverse strain measured, which results in a lower Poisson's ratio (see Figure 4.9).

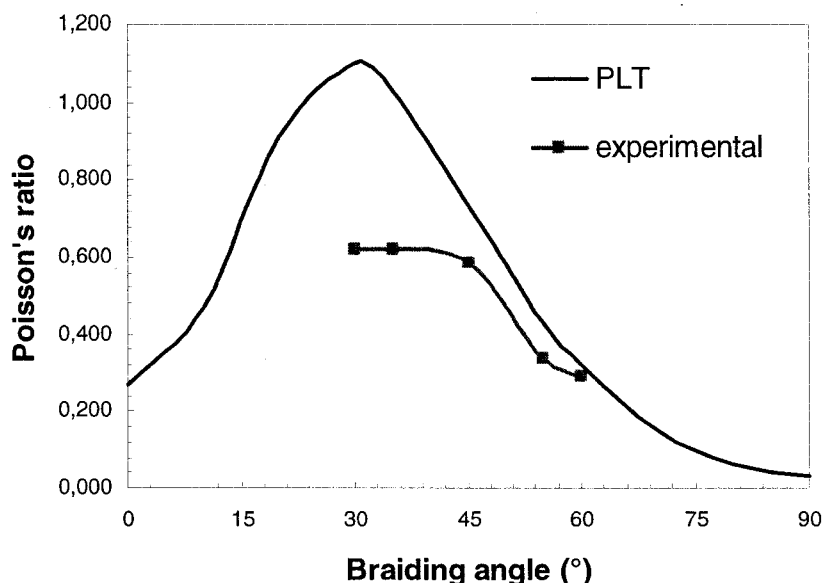


Figure 4.9 - Effect of the strands undulation and shear on Poisson's ratio: comparison between braided composites (experimental results) and unidirectional laminates without undulation (prediction by plate laminate theory).

When the fiber orientation is close to 0° , which is the loading axis, the fibers control the strain in tension and have a significant influence on the structural behavior. On the other hand, if the fiber orientation differs from this angle, the matrix bears gradually a larger part of the load. Thus the influence of the undulations and strand shear decreases and the properties of the braids approach those of a laminate without undulation. This appears clearly in Figure 4.9 for braiding angles superior to $\pm 45^\circ$.

4.4.4 Prediction of braided composite elastic properties

Figures 4.10 to 4.12 show comparison of the prediction algorithm for the braided composites with experimental values and PLT predictions. The mechanical tests gave

the elastic properties E_{xx} , E_{yy} , G_{xy} and ν_{xy} of the laminates for each braiding angle considered. From these experimental values, the elastic properties E_{11} , E_{22} , G_{12} and ν_{12} of the virtual basic ply (oriented at 0°) were calculated by the inverse algorithm based on plate laminate theory. From these results, the elastic properties of braided composites were computed for different braiding angle. The curves obtained for each prediction all cross the experimental curve at a point. This shows the consistency of the algorithm as one finds again the initial experimental value from which the predictions are made. From the following figures, the predictions of the elastic properties with the inverse method show a good correlation with experiments. However, it is clear that the PLT predicted values show larger gaps with experimental results.

In the case of the $0/90^\circ$ woven composite or the $\pm 45^\circ$ braided composite, the inverse method requires the introduction of the ratio E_{11}/E_{22} in order to get a unique solution as discussed in step 3 of the algorithm. The values available in the literature for E_{11} and E_{22} are the elastic moduli of an ordinary unidirectional ply without fiber architecture effect as in the virtual ply. For this reason, after having carried out calculations for the $\pm 30^\circ$ and $\pm 35^\circ$ braided composites, an average ratio of 3.5 was selected for E_{11}/E_{22} . For information, this ratio is equal to 8 for an ordinary glass-epoxy composite obtained by micromechanical equations with $E_f = 72.4$ GPa, $E_m = 2$ GPa and $V_f = 30\%$ [18]. Afterwards, this ratio was introduced into calculation for the $0/90^\circ$ and $\pm 45^\circ$ cases. The influence of the ratio E_{11}/E_{22} will be discussed in more detail in the sequel.

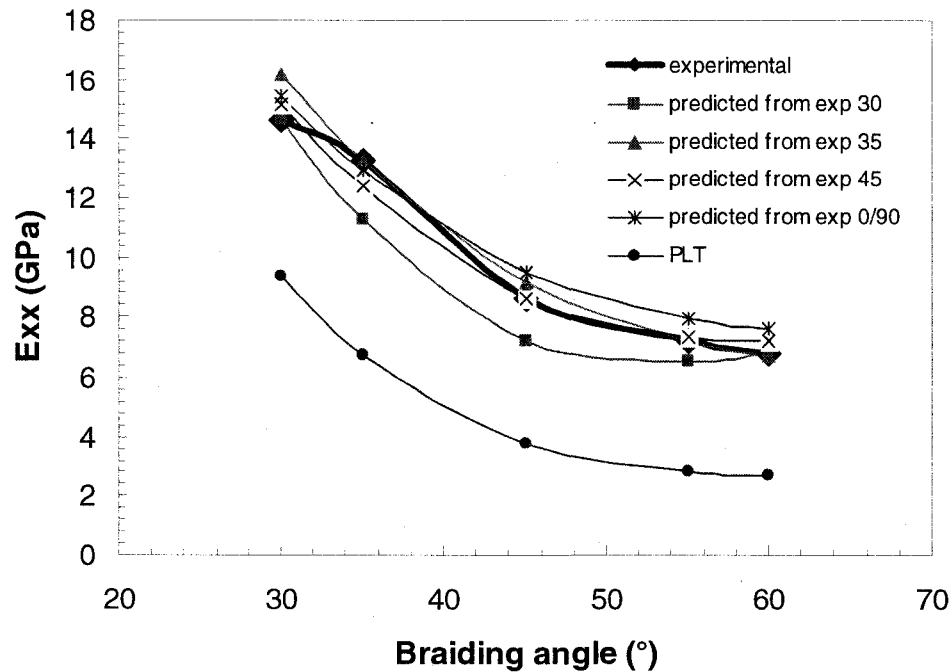


Figure 4.10 - Comparison of predicted longitudinal elastic moduli with experimental values for the different braided composites considered.

Figure 4.10 shows a comparison of the tensile results. A good correlation is observed with experiments for the $\pm 35^\circ$ and $\pm 45^\circ$ composites with a relative error lower than 5%. This error increases for the $\pm 30^\circ$ braided composite, but remains lower than 18%. This difference in accuracy can be explained by the two failure modes observed in this zone for braided composites. This may explain why the angle of 35° is found to be critical:

- 1) between 0° and approximately 30° , failure occurs in the fibers in a tensile test;
- 2) on the other hand, between 30° and 60° , failure occurs in a mixed mode between fiber tensile and matrix shearing.

The undulation and strand shear effects are also different in these two zones. This explains also the larger value of 18 % obtained in tensile for the $\pm 35^\circ$ braided composite. In this case, a small deviation of the braiding angle for a sample can change significantly the failure mode and the experimental results.

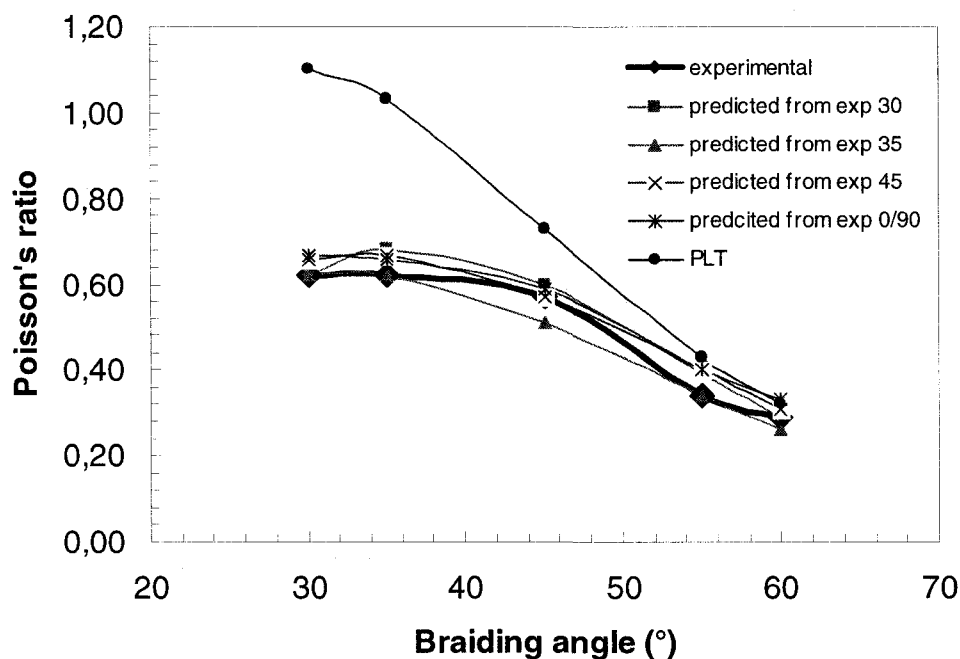


Figure 4.11 - Comparison of predicted Poisson's ratios with the experimental values for the different braided composites considered.

The comparison of the results for the Poisson's ratio is presented in Figure 4.11. The relative error is generally lower than 15 %. The accuracy can be considered as good, given the usual experimental sensitivity of this parameter. Figure 4.12 shows the comparison of shearing results. In this figure, the difference is clear between the prediction from the woven composite (0/90°), which is significantly lower, and the predictions made from the braided composites, which show a good correlation with experimental results (the relative error is less than 6%).

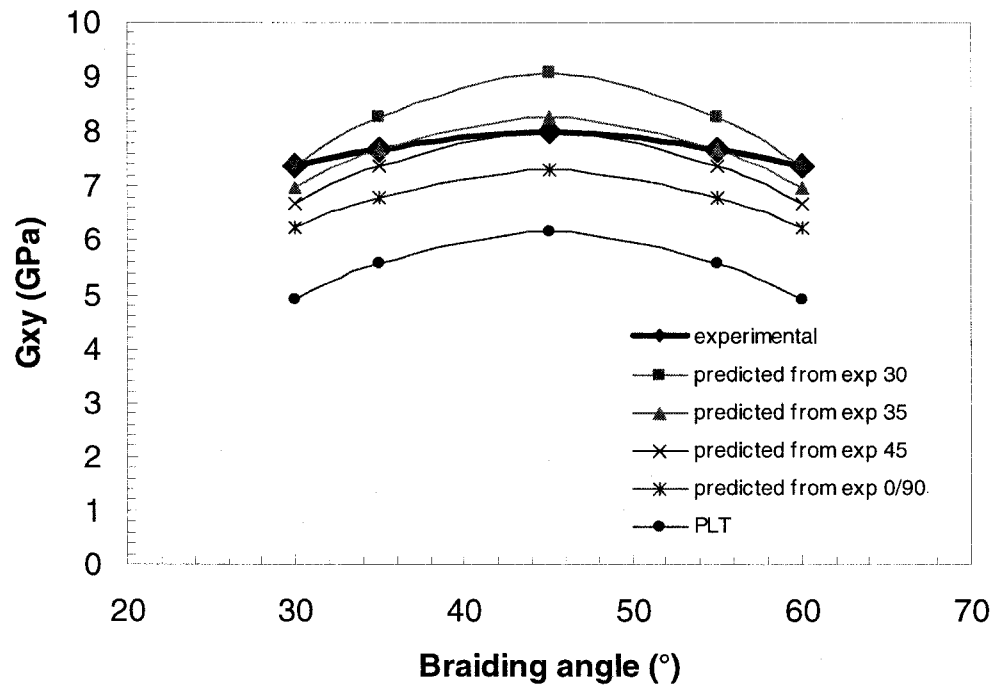


Figure 4.12 - Comparison of predicted shear moduli with experimental properties for the different braided composites considered.

4.4.5 Prediction of woven composite elastic properties

Table 4.3 summarizes the prediction results for the woven composite. The predictions from the experimental properties of braided composites showed a good correlation for the tensile modulus with a relative error less than 5%. For the shear modulus, the relative error is less than 10% for the predictions from the $\pm 35^\circ$, $\pm 45^\circ$ and $\pm 55^\circ$ braided composites and reached 27% for the ± 30 and $\pm 60^\circ$ ones. However, the error is larger on the predictions of Poisson's coefficient.

Tableau 4.3 - Prediction results for the woven composite

Prediction from exp.	Woven composite predicted properties			
	$E_{xx}(\text{GPa})$	$E_{yy}(\text{GPa})$	$G_{xy}(\text{GPa})$	ν_{xy}
0/90°	17,35	17,35	3,06	0,187
+/-30°	18.19	18.19	2.24	0.002
+/-35°	17.52	17.52	3.03	0.057
+/-45°	17.81	17.81	2.75	0.115
+/-55°	17.58	17.58	3.02	0.061
+/-60°	18.19	18.19	2.24	0.002

4.4.6 Effect of the ratio E_{11}/E_{22}

To predict the elastic properties of braided composites from experimental values at $\pm 45^\circ$, it is necessary to introduce the ratio E_{11}/E_{22} in the algorithm in order to ensure unicity of the solution. The value of the ratio E_{11}/E_{22} is unknown for the virtual basic ply. For this reason, it is important to examine how the influence of the value of this ratio on the numerical predictions and if the use of an ordinary UD ply ratio gives an acceptable solution to the problem. In this case, the materials used for the composites are glass-epoxy, for which the ratio is about 8 [18]. By using the inverse algorithm, the ratio obtained for the virtual ply is about 3.5 for the same glass-epoxy material. A series of predictions of elastic properties were carried out by varying the ratio E_{11}/E_{22} from 2 to 9. Note that the shear modulus is not influenced by changes in this ratio, because it is independent of E_{11}/E_{22} .

Figure 4.13 shows the influence of the ratio E_{11}/E_{22} on the longitudinal modulus for different braiding angles. The relative error between the prediction using a ratio of 3.5 (virtual ply) and of 8 (ordinary ply) is about 5% for small braiding angles, but this relative error becomes significant at 27 % for larger angles. On the other hand, the

influence of this ratio on Poisson's ratio is strictly the inverse. The significant relative error for small braiding angles (30 %) decreases to 10 % for higher braiding angles. These values give an idea of the relative error for a prediction from the experimental elastic properties of a $\pm 45^\circ$ braided composite.

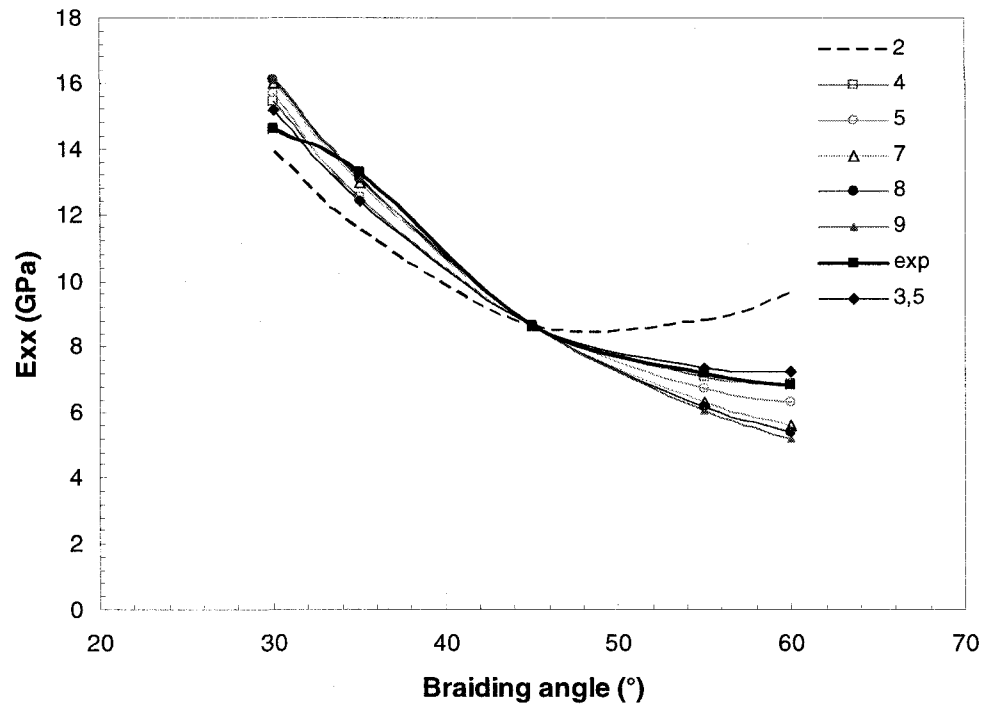


Figure 4.13 - Influence of the ratio E_{11}/E_{22} on the longitudinal modulus predicted for the $\pm 45^\circ$ braided composite.

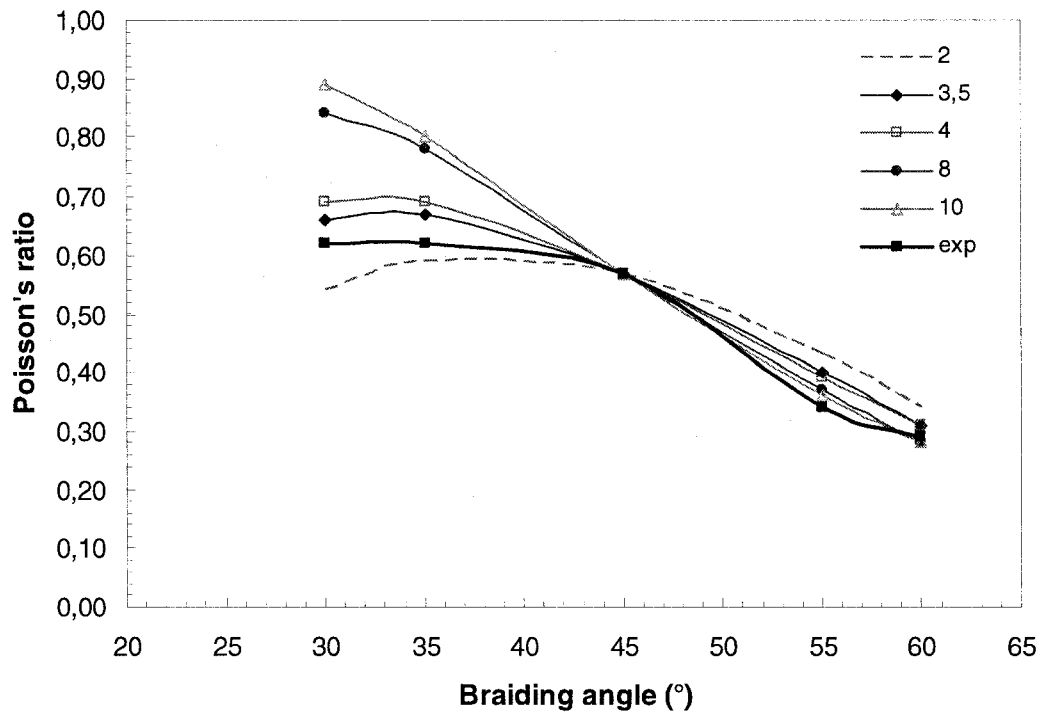


Figure 4.14 - Influence of the ratio E_{11}/E_{22} on the Poisson's ratio predicted for the $\pm 45^\circ$ braided composite.

4.5 Conclusion

An inverse method based on plate laminate theory was developed to predict the elastic properties of woven and braided composites. This approach takes into account the effects of undulation and strand shear in the calculation of elastic properties. Starting from the experimental results for a $\pm\theta$ braided composite, the elastic properties E_{11}^v , E_{22}^v , G_{12}^v and ν_{12}^v of a mechanically equivalent virtual unidirectional ply oriented at 0° are calculated by using an inverse algorithm based on plate laminate theory. This virtual UD ply includes the effects of fiber architecture and allows predicting the elastic properties of other braided or woven composites. The comparison between experimental

results and numerical predictions shows a good correlation when the elastic properties are predicted from the braided composites.

The inverse algorithm does not give a unique solution when initiated from a $\pm 45^\circ$ braided composite or a (0/90°) woven composite. For this reason, the ratio E_{11}/E_{22} of UD elastic moduli is introduced for the UD virtual ply to add one equation to the inverse system. The effect of this ratio was investigated in order to evaluate its influence on the predictions of the longitudinal modulus and Poisson's ratio. The value of shear modulus remains independent of this ratio. Given the good correlation obtained between experimental results and numerical predictions, this inverse method can be applied to several kinds of woven or braided composites with different fiber architectures and made out of various materials (fibers, matrix).

4.6 Acknowledgments

Authors thank Composite Atlantic Ltd for its financial support, and its President, Mr. Maurice Guitton, who provided the methods and materials to fabricate the composite springs. Authors are grateful to Christian-Charles Martel, technical assistant at École Polytechnique, for his constant and efficient help in manufacturing and to Sebastian Boutier, from Chomar, who provided the woven reinforcements. The financial contributions of the Natural Sciences and Engineering Research Council (NSERC) and the support of the laboratory by the «Chaire sur les Composites à Haute Performance» (CCHP) and «Centre de Recherche en Plasturgie et Composites» (CREPEC) of the «Fonds Québécois pour la Recherche sur la Nature et la Technologie» (FQRNT) are also gratefully acknowledged.

4.7 References

- [1] Peters, S.T. (1998). *Handbook of Composites*, **2nd edn**, Springer – Verlag.
- [2] Cox, B. N. and Flanagan G. (1997). *Handbook of Analytical Methods for Textile Composites*, (NASA CR 4750). Hampton, Virginia 23681-0001, Washington, DC: National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center.
- [3] Zebdi, O. (2004). Caractérisation mécanique des composites à renfort tressé et application aux ressorts hélicoïdaux. Master's Thesis, École Polytechnique de Montréal, Montréal, Qc, Canada.
- [4] Charlebois, K.M., Boukhili, R., Trochu, F, Zebdi, O. and Gasmi. A. (2005). Evaluation of the Physical and Mechanical Properties of Braided Fabrics and their Composites. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. **24** (14): 1539-1554.
- [5] Naik, R.A. (1995). Failure Analysis of Woven and Braided Fabric Reinforced Composites, *Journal of Composite Materials*, **29**: 2334-2363.
- [6] Naik, N.K and Ganesh, V.K. (1995). An Analytical Method for Plain Weave Fabric Composites, *Composites*, **26**: 281-289.
- [7] Huang, Z.M. (2000). The Mechanical Properties of Composites Reinforced with Woven and Braided Fabrics, *Composites Science and Technology*, **60**: 479-498.
- [8] Carey, J., Munro, M. and Fahim, A. (2003). Longitudinal Elastic Modulus Prediction of 2-D Braided Fiber Composite, *Journal of reinforced Plastics and Composites*, **22**: 813-831.
- [9] Carey J, Munro M, Fahim A, (2005). Regression-based Model for Elastic Constants of 2D Braided/Woven Open Mesh Angle-ply Composites. *Polymer Composites* **26** (2): 152-164.
- [10] Ng, S.P., Tse, P.C. and Lau, K.J. (1998). Numerical and experimental determination of in-plane elastic properties of 2/2 twill weave fabric composites. *Composites Part B*. **29B**: 735–744.
- [11] Tabiei, A. and Yi, W. (2002). Comparative Study of Predictive Methods for Woven Fabric Composite Elastic Properties, *Composite Structures*, **58**: 149-164.

- [12] Lee, C.S. Chung, S.W. Shin, H. and Kim, S.J. (2005). Virtual Material Characterization of 3D Orthogonal Woven Composite Materials by Large-scale Computing, *Journal of Composite Materials*, **39**: 851-863.
- [13] Chun, H.J., Shin, J.Y. et al. (2001). Effects of Material and Geometric Nonlinearities on the Tensile and Compressive Behavior of Composite Materials with Fiber Waviness, *Composites Science and Technology*, **61**: 125-134.
- [14] Falzon, P.J. et Herszberg, I. (1998). Mechanical Performance of 2-D Braided Carbon/Epoxy Composites, *Composites Science and Technology*, **58**: 253-265.
- [15] RUIZ, E., TROCHU, F., GAUVIN, R. (2004). Internal Stresses And Warpage In Thin Composite Parts Manufactured By RTM, *Advanced Composite Letters*, 13(1): 49-57.
- [16] RUIZ, E., TROCHU, F. 2005. Numerical Analysis Of Cure Temperature And Internal Stresses In Thin And Thick Rtm Parts, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* , 36(6): 806-826.
- [17] RUIZ, E. and TROCHU, F. (2005) Thermo-Mechanical Properties During Cure Of Glass-Polyester Rtm Composites: Elastic And Viscoelastic Modeling”, *Journal of Composite Materials*, 39(10): 881-916.
- [18] Mallick, P.K. (1993). Fiber-Reinforced Composites: Materials, Manufacturing and Design, **2nd edn**, New York, Ed: Marcel Dekker, Inc..
- [19] ASTM D 3039/D 3039M-00 – « Standard Test Method for Tensile Properties of Polymer Matrix Composite Materials ». Annual Book of Standards, vol. **15.03**, (2003).
- [20] ASTM D 5379/D 5379M-98 – « Standard Test Method for Shear Properties of Composite Materials by the V-Notched Beam Method ». Annual Book of Standards, vol. **15.03**, (2003).
- [21] ASTM D 2734-94 – « Standard Test Methods for Void Content of Reinforced Plastics ». Annual Book of ASTM Standards, vol. **08.02**, (2003).
- [22] Neumeister, J. Jansson, S. and Leckie, F. (1996). The Effect of Fiber Architecture on the Mechanical Properties of Carbon/Carbon Fiber Composites, *Acta Mater.* **44** (2): 573-585.

4.8 Appendix - Summary on Plate Laminate Theory

The laminate theory allows calculating the elastic constants of a laminate formed by a stack of oriented unidirectional (UD) plies from the basic mechanical properties of the fibers and matrix. The principal equations are summarized in the sequel.

4.8.1 UD ply properties (law of mixture)

The properties of a UD ply depend on the properties of the resin, fibers and on the fiber volume fraction V_f . The law of mixture gives the properties of a UD ply as follow:

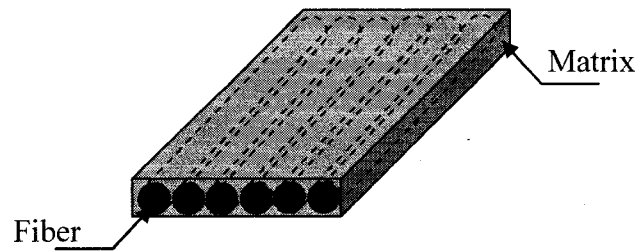


Figure A-1 – Typical unidirectional ply.

$$\text{Longitudinal modulus:} \quad E_{11} = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad (\text{A-1})$$

$$\text{Transverse modulus:} \quad E_{22} = \frac{E_f E_m}{E_f (1 - V_f) + E_m V_f} \quad (\text{A-2})$$

$$\text{Shear modulus:} \quad G_{12} = \frac{G_f G_m}{G_f (1 - V_f) + G_m V_f} \quad (\text{A-3})$$

$$\text{Major Poisson's ratio:} \quad \nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) \quad (\text{A-4})$$

$$\text{Minor Poisson's ratio:} \quad \nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_{22}}{E_{11}} \quad (\text{A-5})$$

The stiffness matrix $[Q]$ takes the following form:

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{A-6})$$

with

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},$$

$$Q_{66} = G_{12}.$$

4.8.2 Properties of a UD ply oriented with an angle θ

The elastic constants of the stiffness matrix of a UD ply oriented with an angle θ are obtained from the elastic constants at 0° by a rotation of angle θ as follows:

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \quad (\text{A-7})$$

$$\bar{Q}_{12} = Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (\text{A-8})$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \quad (\text{A-9})$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \quad (\text{A-10})$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \quad (\text{A-11})$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \quad (\text{A-12})$$

4.8.3 Properties of angle-ply laminate (laminate theory)

The elastic constants of the stiffness matrix of a laminate made of n_p angle-ply-layers are given in the following form:

$$\begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix}$$

$$A_{mn} = \sum_{j=1}^{n_p} (\bar{Q}_{mn})_j (h_j - h_{j-1}) \quad (\text{A-13})$$

$$B_{mn} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_p} (\bar{Q}_{mn})_j (h_j^2 - h_{j-1}^2) \quad (\text{A-14})$$

$$D_{mn} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{n_p} (\bar{Q}_{mn})_j (h_j^3 - h_{j-1}^3) \quad (\text{A-15})$$

where :

n_p total number of laminate plies;

$(\bar{Q}_{mn})_j$ elements of the stiffness matrix of the j^{th} ply;

h_{j-1} distance from the median plane of the laminate to the higher side of the j^{th} ply ;

h_j distance from the median plane of the laminate to the lower side of the j^{th} ply.

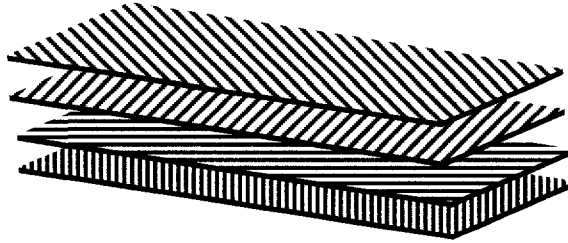


Figure A-2 – Laminate.

4.8.4 Engineering constants of a balanced symmetric laminate

For a balanced symmetric laminate, the extensional matrix element $A_{16} = A_{26} = 0$ and the matrix $[A]$ take the following form:

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{A-16})$$

Then, the engineering constants are deduced from the inverse matrix of $[A]$ and are expressed by:

$$E_{xx} = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{hA_{22}} \quad (\text{A-17})$$

$$E_{yy} = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{hA_{11}} \quad (\text{A-18})$$

$$\nu_{xy} = \frac{A_{12}}{A_{22}} \quad (\text{A-19})$$

$$G_{xy} = \frac{A_{66}}{h} \quad (\text{A-20})$$

where h is the total thickness of laminate.

4.8.5 Elastic properties of an angle-ply laminate at a $\pm\theta$ angle

In the case of a balanced symmetric angle-ply laminate at a $\pm\theta$ angle, the elastic constants of the laminate are given by the following simplified expressions:

$$E_{xx} = \frac{\bar{Q}_{11}\bar{Q}_{22} - \bar{Q}_{12}^2}{\bar{Q}_{22}} \quad (\text{A-21})$$

$$E_{yy} = \frac{\bar{Q}_{11}\bar{Q}_{22} - \bar{Q}_{12}^2}{\bar{Q}_{11}} \quad (\text{A-22})$$

$$\nu_{xy} = \frac{\bar{Q}_{12}}{\bar{Q}_{22}} \quad (\text{A-23})$$

$$\nu_{yx} = \nu_{xy} \frac{E_{yy}}{E_{xx}} \quad (\text{A-24})$$

$$G_{xy} = \bar{Q}_{66} \quad (\text{A-25})$$

**CHAPITRE 5 - ARTICLE 3: CREEP BEHAVIOUR OF COMPOSITE WOVEN
AND BRAIDED MATERIALS**

OUSSAMA ZEBDI, RACHID BOUKHILI AND FRANÇOIS TROCHU

Centre de recherches en plasturgie et composites (CREPEC)

Mechanical Engineering Department

École Polytechnique de Montréal, Québec, Canada

5.1 Abstract

An experimental study on creep based on bending tests is presented for woven and braided glass fiber reinforced epoxy. The objective is to characterize and predict the long term behavior of these composite materials and study the influence of the braiding angle on creep. This material is shaped as a helical spring included as structural element in the suspension of a sport utility vehicle. The braiding angle has no influence on the shift factor for master creep curves, but remains an important parameter for compliance. Composites with a braiding angle of $\pm 35^\circ$ show a good resilience under imposed load.

KEY WORDS: woven and braided composites, creep behavior, shift factor, braiding angle effect.

5.2 Introduction

The use of polymeric composites becomes increasingly frequent in several industrial applications because of weight savings and good corrosion resistance. On the other hand, because of the viscoelastic nature of the polymeric matrix, the properties of these composites are influenced by temperature, intensity and frequency of applied loads, moisture and ageing.

The creep behavior of composite materials has always aroused a great interest in the scientific community. Creep is the deformation phenomenon observed over time on material samples submitted to a constant load. Among the various factors that effect long term material behavior, temperature always plays a key role. Several methods have been used to characterize creep: the time-temperature superposition principle (TTSP), Schapery method, Findley method and the thermal theory of activation energy [1]. There are two possible ways to study the influence of the temperature on material behavior: (1) direct long-term measurements of the material response in time for various applied load [2]; (2) short-term tests to predict the long-term behavior by applying the TTSP [3-7].

Findley [2] published creep results on two thermoplastics after 230 000 hours (26 years). A power law was used to predict creep behavior. It was noted that ageing slightly reduced the creep rate after approximately 130 000 hours, but the recovery rate remained unchanged. Parallel to Findley, other researchers oriented their efforts to accelerate the characterization procedure by carrying out a sweep in temperature. This approach to study long-term creep behavior is based on TTSP. This principle was applied successfully for a large number of polymers [6]. Ruiz and Trochu [7] are proposed viscoelastic model using TTSP to describe the stress relaxation behavior for any degree of polymerization reached by the resin. TTSP was originally developed from 1950 for un-reinforced plastics [3]. Thereafter, other researchers like Morris et al. [4] for example applied this principle to study the viscoelastic behavior of unidirectional graphite-epoxy

composites. Their work showed that the shift factor is independent of fiber orientation. Katouzian and al. [8] used successfully the nonlinear method of Schapery on two composites one with thermoset and the other with thermoplastic matrix. They showed that the instantaneous response of the material is linear and independent of temperature for the applied stress levels. They concluded that the transient creep response of both composite materials under an interlaminar shear stress shows higher sensitivity to temperature than under transverse normal stress. Recently, Goertzen and Kessler [5] showed that the shift factor of the creep curves can be predicted from the activation energy without carrying out several creep tests. However, their conclusion remains valid only for temperatures lower than T_g . Hu [9] worked out an approach based on the concept of the potential plastic to derive a superposition factor of the master curves for unidirectional (UD) composites. With this factor, it is possible from only one test on a UD composite at a given orientation to build the master curve for any other fiber direction.

In a creep test, the strain of the sample is measured during the application of a constant stress. The ratio of the measured strain on the applied stress showed equation (5.1) is called creep compliance and it is noted by J .

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma} \quad (5.1)$$

Dynamic mechanical analysis (DMA) is a simple and effective way to carry out creep tests. It consists of applying a temperature ramp while the sample is maintained at the same stress level. TTSP assumes, as showed in Figure 5.1, that the material behavior at temperature T_0 at time t_0 is the same at temperature T , on shifted time scale $t = t_0/a_T$. The creep compliances between two different temperatures T_0 and T are then connected by the following relation:

$$J(t_0, T_0) = b_T J\left(\frac{t_0}{a_T}, T\right) \quad (5.2)$$

The term a_T represents the horizontal shift factor. The ratio t_0/a_T is called the reduced time. On a logarithmic scale, the value of $\log(a_T)$ corresponds to the horizontal shift of the creep curve and parameter $b_T = \rho_l T_l / \rho_0 T_0$, where ρ_0 and ρ_l are respectively the material densities at temperatures T_0 and T_l , is the vertical shift factor. For the majority of solids, the variations of density are negligible and the value of $\log(b_T)$ tends towards 0 [10, 11].

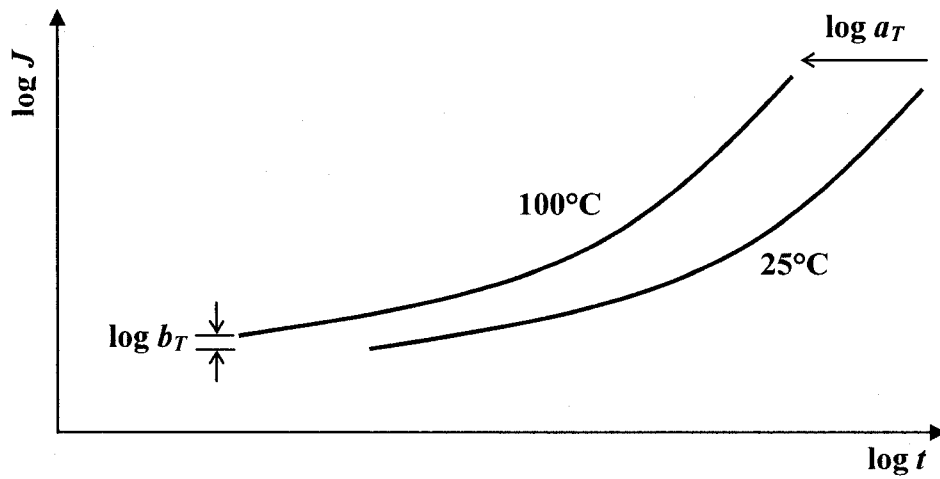


Figure 5.1 - Time-temperature superposition principle (TTSP).

The first expression of the horizontal shift factor as developed by Williams, Landel and Ferry, is known under the equation label WLF [3]. The expression of the horizontal shift factor valid in the field $[T_g, T_g + 100^\circ\text{C}]$ is given by the following expression:

$$\log(a_T) = \frac{-c_1(T - T_g)}{c_2 + T - T_g} \quad (5.3)$$

where c_1 and c_2 are constants which depend on the polymer matrix. Note that in equation (5.3) the reference temperature can be different from the glass transition temperature T_g . It is enough for that to modify the values of constant c_1 and c_2 . With the lower part of the glass transition temperature, the shift factor expression is described by the relation of Arrhenius type [5, 12]:

$$\log(a_T) = \frac{-\Delta E}{2.303 \times R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{ref}} \right) \quad (5.4)$$

with the following notations:

- ΔE activation energy [kJ/mole],
- R perfect gas constant,
- T temperature [°K],
- T_{ref} reference temperature [°K].

The use of curve translations for a variable like temperature, makes it possible to create a master curve for a reference temperature T_{ref} , which describes the creep behavior of the material during hundreds of years.

This article is devoted to the study of the glass-epoxy composite creep behavior of a glass-epoxy composite with a woven or braided reinforcement as function of temperature. The objective is to study the composite material which will be used to manufacture the helical springs and study the creep behavior of the material.

5.3 Methodology

5.3.1 Materials and equipment

Materials

Composite plates are manufactured by infusion with glass fiber fabrics and epoxy resin. The dimensions of all the rectangular samples are $406 \times 163.5 \times 1.7$ mm. Four layers of woven or braided fibers are prepared using a cutting template made out of wood to cut samples of the same internal dimensions. This approach allows controlling the fiber volume content of the samples.

The braided layers of reinforcement are obtained using the device shown in Figure 5.2, which allows to shear fabrics at various angles. This rectangular frame made out of aluminum is articulated at its four corners. The reinforcement is set in the frame and clamped along its four edges, and then the frame is deformed so as to confer a constant shear to the reinforcement strands.

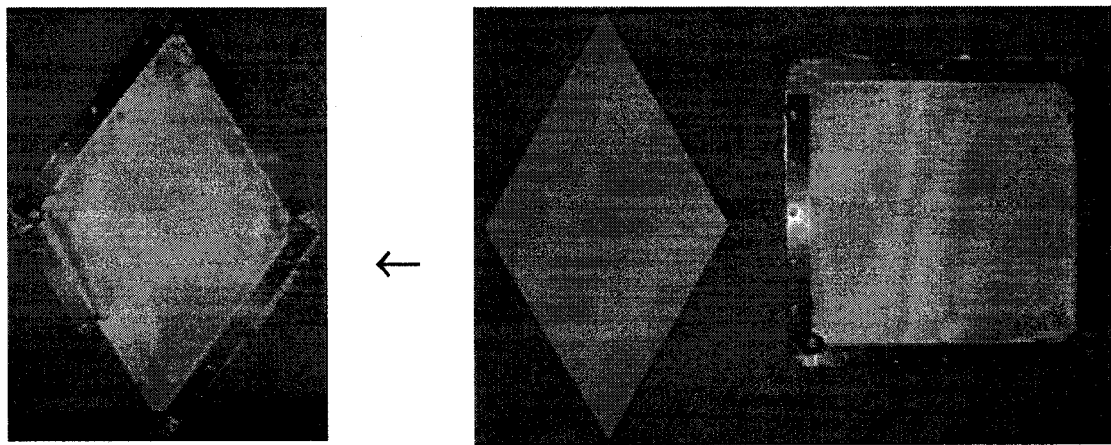


Figure 5.2 - Device to shear fabrics of fibrous reinforcement.

Four plies (woven or braided) are prepared and stashed in the mold, which is closed and tightened using screw clamps to ensure a good sealing of the cavity. The mold is placed in the furnace at 65°C during one hour to lower the viscosity of the infused resin and hence decrease the infusion time. After preparation of the resin, it is placed in a thermostatic bath at 60°C during one hour. A resin trap (vacuum pot) connected to the vacuum pump is used to recover the excess resin (Figure 5.3).

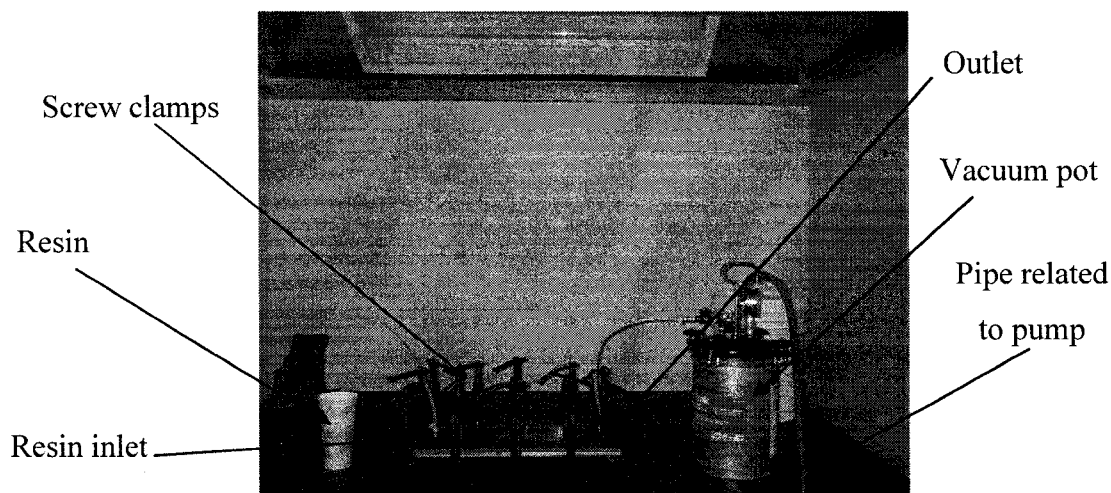


Figure 5.3 - Assembly of infusion with low pressure.

The plates undergo one hour of cure at 100°C, followed by a post-curing during three hours at 170°C. After demolding, the plates are cut up to obtain the desired samples. The average dimensions of the samples for the three point bending tests are $60 \times 12.7 \times e$ mm, where e represents the sample thickness. The latter is measured for each sample because it has been noted that the braiding angle had a slight influence on thickness. Three composite plates are prepared for each case; with the woven (0/90°) and braided composites ($\pm 30^\circ$, $\pm 35^\circ$, $\pm 45^\circ$, $\pm 55^\circ$ and $\pm 60^\circ$). One sample from each case is selected for DMA creep tests and others are used for verification.

Equipment

Three types of three point bending tests are presented, short term tests, static tests and long term tests. Creep short term tests were carried out with a *Dynamic Mechanical Analysis* machine, DMA Q800, manufactured by TA Instruments (Figure 5.4). This machine controls temperature between -145 °C up to + 600 °C, with a precision of $\pm 0.1^\circ\text{C}$ above 50°C and $\pm 1^\circ\text{C}$ under 50°C. The equipment and data acquisition is controlled by a computer with *TA Analysis* software. The maximum force applied by the

machine is 18 N. The distance between the supports of the assembly in the three point bending tests is 50 mm.

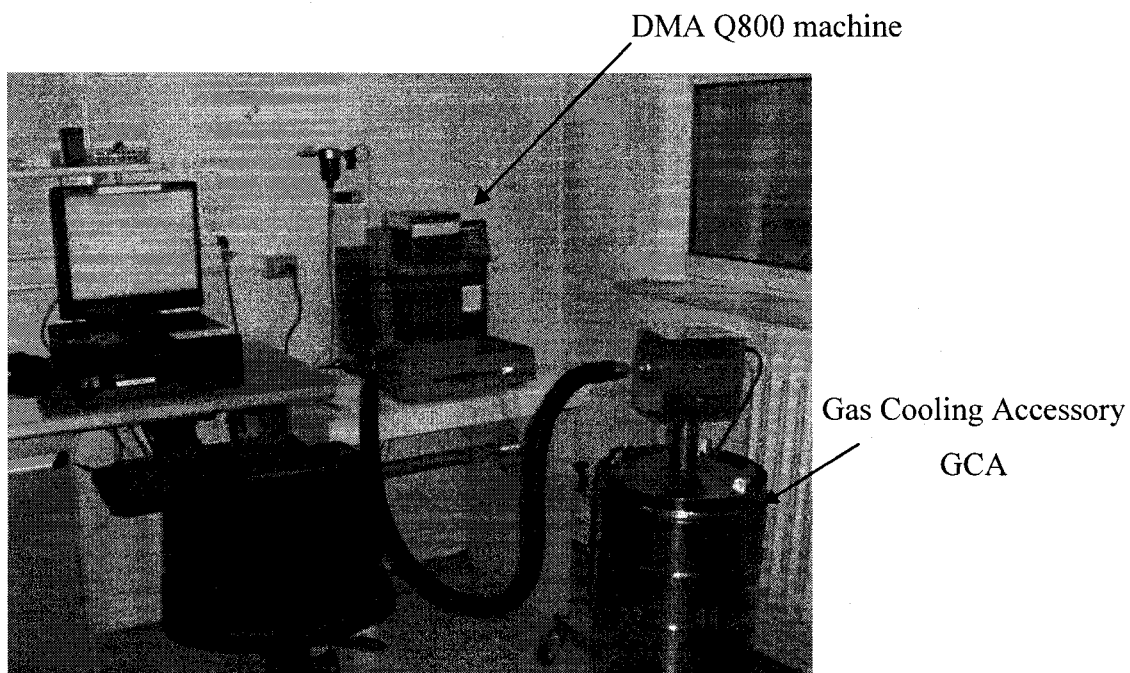


Figure 5.4 - Equipment for the creep tests.

The three point bending tests are carried out until failure on a MTS 800 machine. The long-term creep tests were carried out with the simple aluminium assembly of Figure 5.5, on which two samples can be set. Strain unidirectional gauges of type CEA-06-125ÜN-350 were installed on the samples. The strain values were read directly on a strain indicator P3500 of *Measurements Group Vischay*.

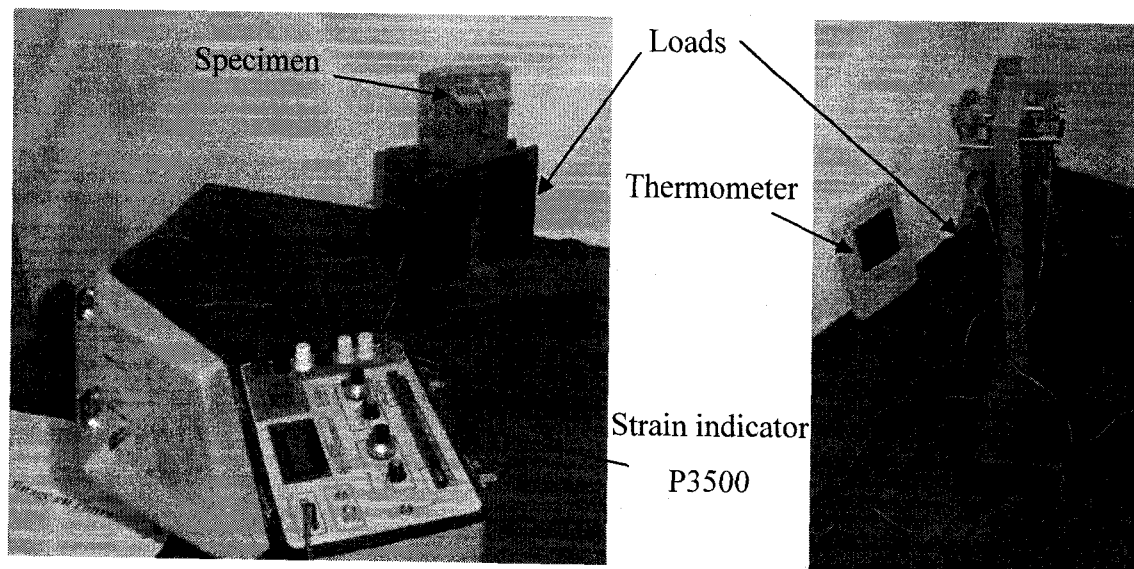


Figure 5.5 - Assembly of three point bending fixture for a long-term test.

5.3.2 Experimental procedure

The creep cycles were carried out during 20 minutes at constant temperature in a range between $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ and $210\text{ }^{\circ}\text{C}$ with an increment of $10\text{ }^{\circ}\text{C}$. There was no recovery period between the successive isothermal tests. At each temperature a stress of 20 MPa was applied whereas the force applied varies with the sample thickness. Each sample evaluated in creep underwent a test to determine its glass transition temperature, T_g , at 1 Hz between $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ and $210\text{ }^{\circ}\text{C}$ with heating rate of $3\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{min}$. Long-term tests were carried out for the $\pm 45^{\circ}$ and $\pm 55^{\circ}$ braided composite at ambient temperature and at $50\text{ }^{\circ}\text{C}$. The strain values are read periodically on a strain indicator model P3500. The long-term tests aim to validate the shift factors a_T obtained during the short-term creep tests conducted with the DMA Q800 machine.

5.3.3 Exploitation of the Time–Temperature Superposition Principle (TTSP)

The TTSP concept is based on the superposition of the creep curves obtained at different test temperatures. The material creep behavior curve is plotted at a given reference

temperature. The effect of a higher temperature is equivalent to contracting the time scale while a lower temperature stretches it [1]. Hence this principle allows predicting the long-term creep material behavior without having to carry out expensive and unpractical tests. Creep tests, can be performed with a DMA machine for several isotherms. Initially, creep curves in terms of strain or compliance as function of time are plotted for several isotherms with the software *TA Universals Analysis* as shown in Figure 5.6. The results are exported in text format to *TTS Data Analysis* software, which represents in Figure 5.7 creep curves for isotherm. In our case, the duration of each isotherm is 20 minutes.

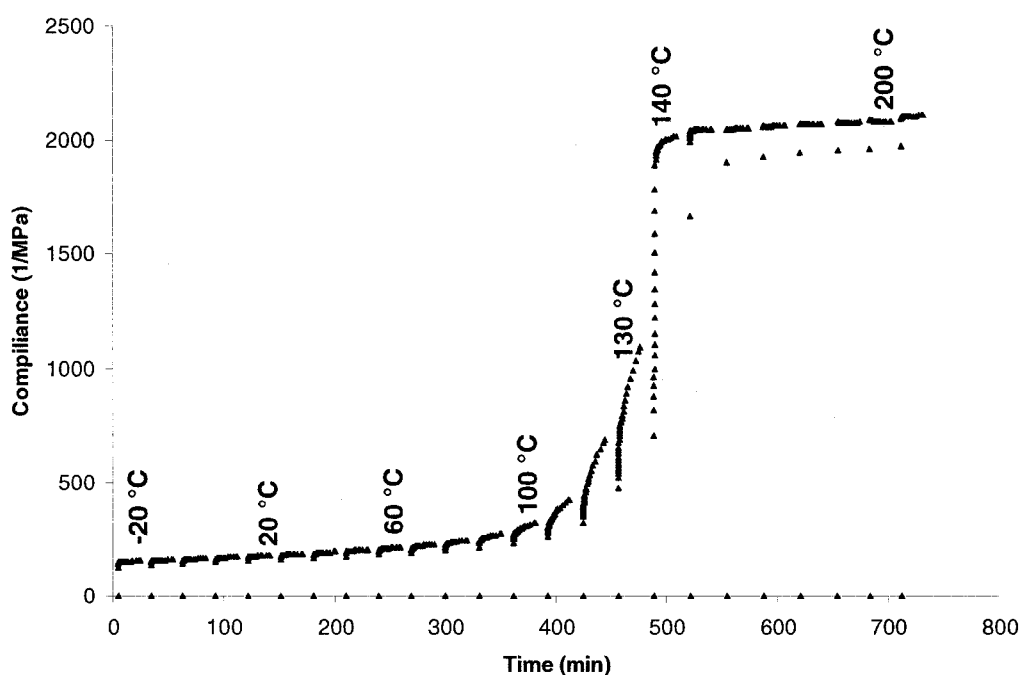


Figure 5.6 - Creep compliance in time plotted for each test temperature.

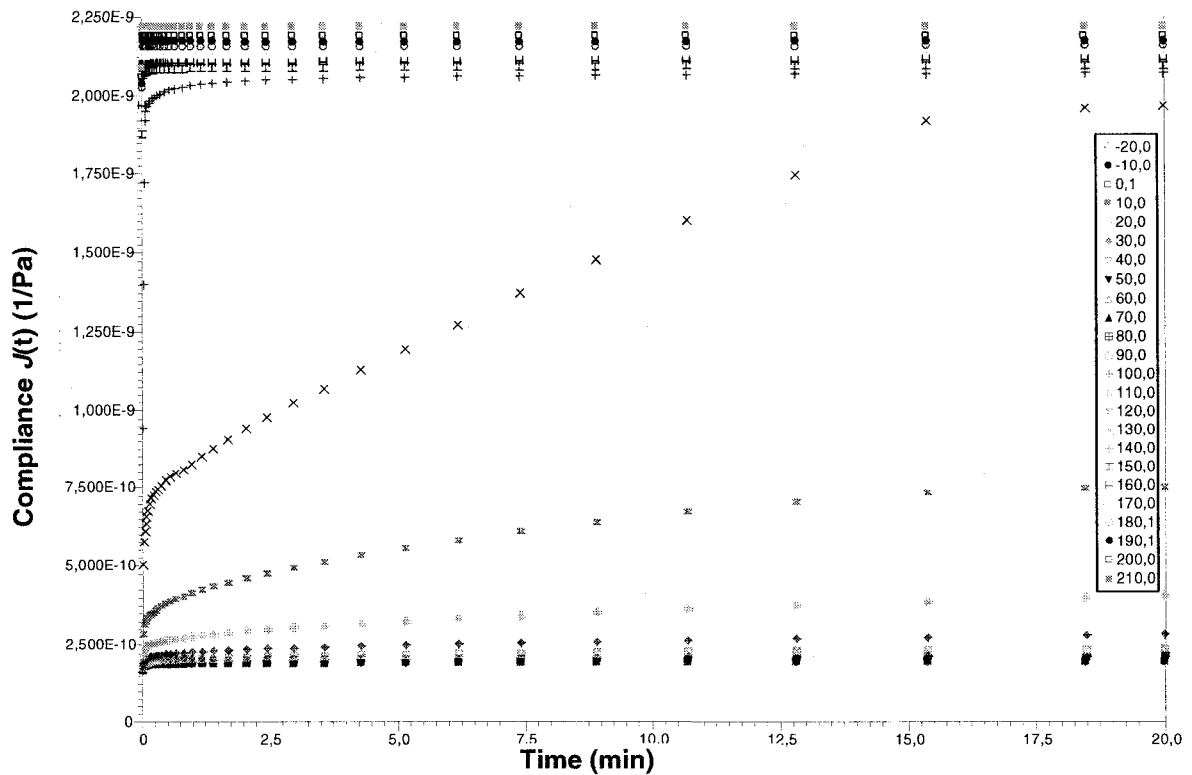


Figure 5.7 - Creep compliances in time calculated by *TTS Data Analysis* software for each interval of 20 minutes for the successive test temperatures from -20 °C to 210 °C.

The second stage consists of building the master curve, which is obtained by superposition of the creep curves for each isotherm. For this purpose, it is necessary to select a reference temperature T_{ref} . The curve corresponding to T_{ref} does not move. The curves corresponding to higher temperatures are translated to the right, and the curves corresponding to lower temperatures to the left. These displacements induce changes in the shift factor curve, which is initially a horizontal straight line which passes by the zero. The shift factor curve represents, on a logarithmic scale, the translation relating the creep curve at a given temperature to the curve at the reference temperature T_{ref} .

At the time of the displacement of an isotherm compliance (or strain) curve, the corresponding point of the shift factor curve moves downward if the temperature is

higher than T_{ref} and upward in the opposite case until the master curve is continuous and regular. However, the creep curve at the reference temperature remains in place (Figures 5.8 and 5.9). Note that the software also allows using the WLF or Arrhenius prediction models.

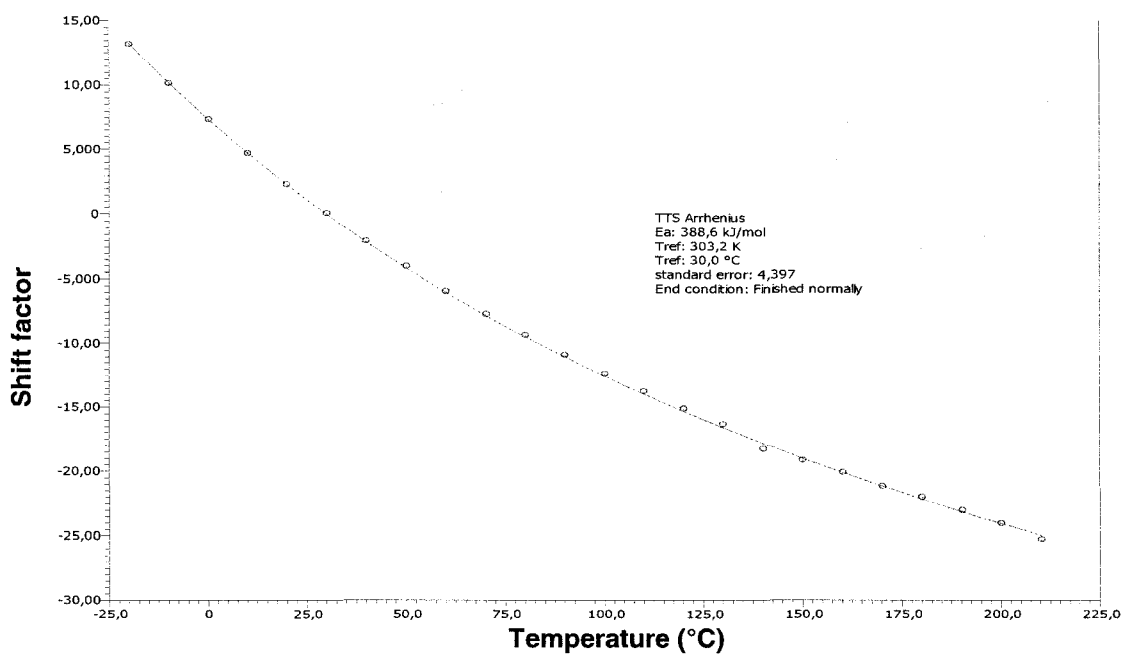


Figure 5.8 - Final curve of the shift factor as function of temperature.

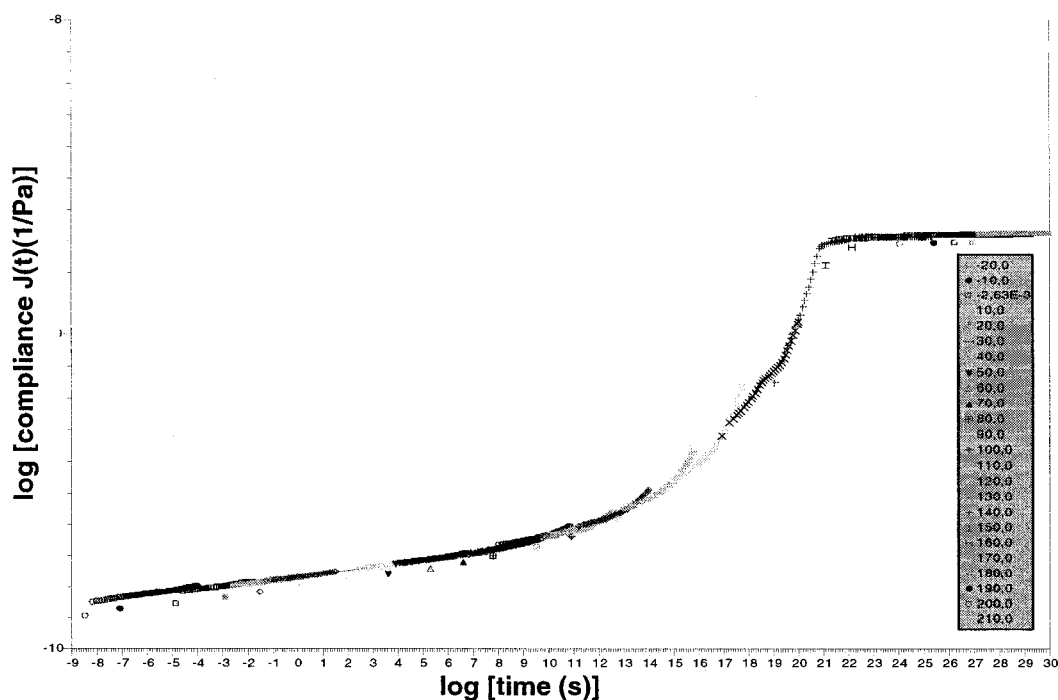


Figure 5.9 - Master curve giving the creep compliance in time on a double logarithmic scale for the various temperatures from -20 °C to 210 °C calculated previously.

5.4 Results and discussion

5.4.1 Failure strength

Three point bending static tests were carried out following the standard ASTM D790 [13] in order to know the level of stress applied in the creep tests. Figure 5.10 shows the evolution of failure strength in bending of the composite specimens. As expected, the bending resistance decreases with the braiding angle. The highest resistance value (445 MPa) was recorded for the woven composite (0/90°). Only in that case was a brittle fracture observed.

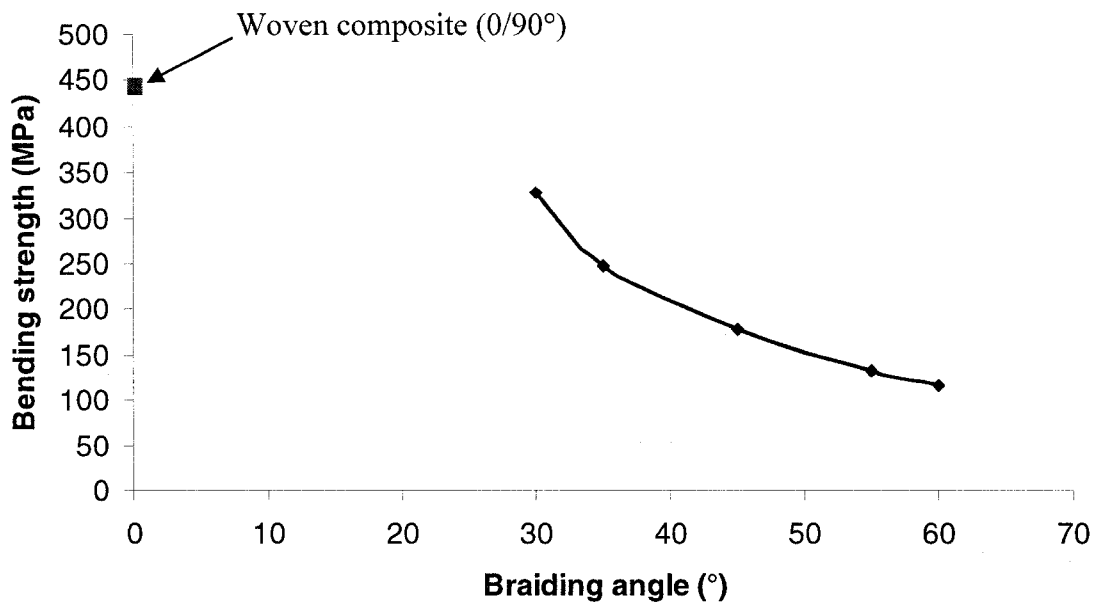
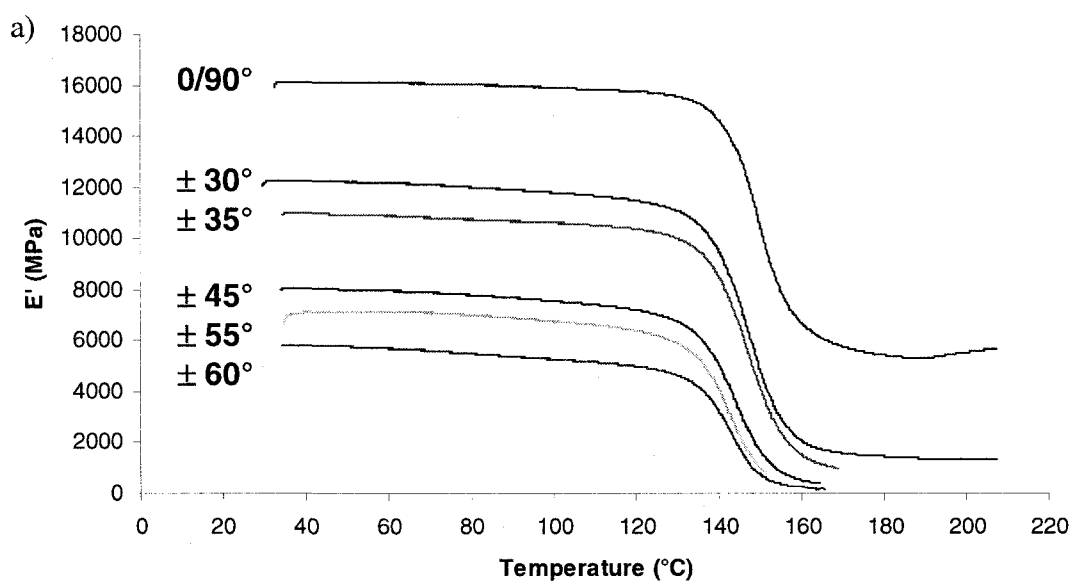


Figure 5.10 - Resistance of woven and braided composites in three point bending as function of braiding angle.

5.4.2 Results of dynamic mechanical analysis

The DMA results are shown in Figure 5.11. The glass transition zone of the epoxy is between 130 and 160 °C as shown in storage modulus curves (Figure 5.11a) and the glass transition temperature varies between 132°C and 140°C for different composites. These temperatures from damping curves plotted in Figure 11b, which plots $\tan \delta$ as function of temperature. Damping peaks around 152 °C for the samples tested, although for larger braiding angles the peak temperature decreases a little. The glass transition temperature does not vary much with braided angle because this parameter depends more of the polymer matrix. This was also noted by of Raghavan and al. [14]. Note that the samples oriented with a braiding angle higher or equal than 35° have a nil elastic modulus. This zone in Figure 5.11a is called the rubbery domain. In this case, at a temperature higher than the glass transition temperature, the samples creep and there

was no contact between with the mobile device of the bending machine. The elastic modulus recorded is then equal to zero. This phenomenon was also observed by of Kontou et al. [15]. On the opposite, the damping measured with the parameter « $\tan \delta$ » varies considerably with the braiding angle. With the increase of the braiding angle, the fibers gradually lose control of the load and the matrix begins to express its damping behavior. Figure 5.11b illustrates well this phenomenon by showing how « $\tan \delta$ » varies with the temperature for each sample. Starting from a minimal value for the woven composite ($0/90^\circ$), damping increases regularly with the braiding angle.



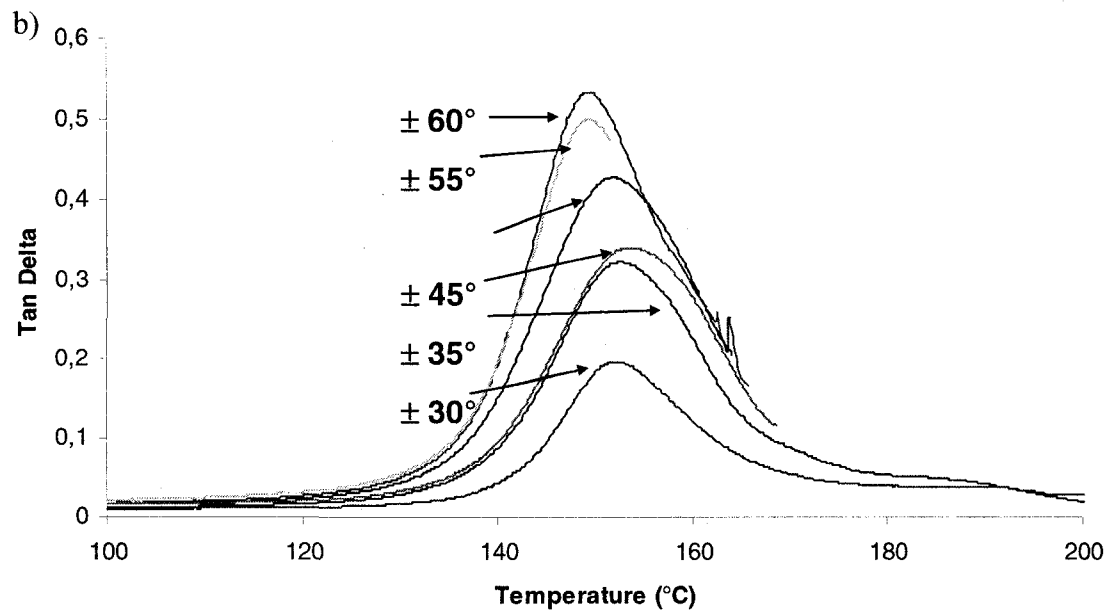


Figure 5.11 - a) Variation of elastic modulus as function of temperature. b) Variation of material damping ($\tan \delta$) as function of temperature.

5.4.3 Creep tests results

Short-term tests

Figure 5.12 shows the variation of compliance in time in the creep tests for various composite samples. Each test was carried out on a temperature range between -20°C and 210°C with an increment of 10°C . At each test temperature, a stress of 20 MPa was applied. After each experiment at a given temperature, the stress is relieved until the furnace of the DMA machine reaches the next test temperature, and then the stress is applied again. This explains the discontinuity of the curves. In the glass zone, the general behavior of the various composites is stable and the compliance does not vary much for the various temperatures tested. On the other hand, in the glass transition zone, the variation of compliance is considerable, especially for the braided composites with the angles higher than 35° . This variation starts from 90°C , and then it develops between

130 °C and 140 °C, which represents the glass beginning of the transition zone observed on the elastic modulus curve of Figure 5.11a. After this stage, one enters in the rubbery zone, where a new stability of creep occurs, but this time with larger difference between the various composites tested. It is also noticed that for a braiding angle of 35°, rigidity makes a significant jump as observed in the dynamic test of Figure 5.11a.

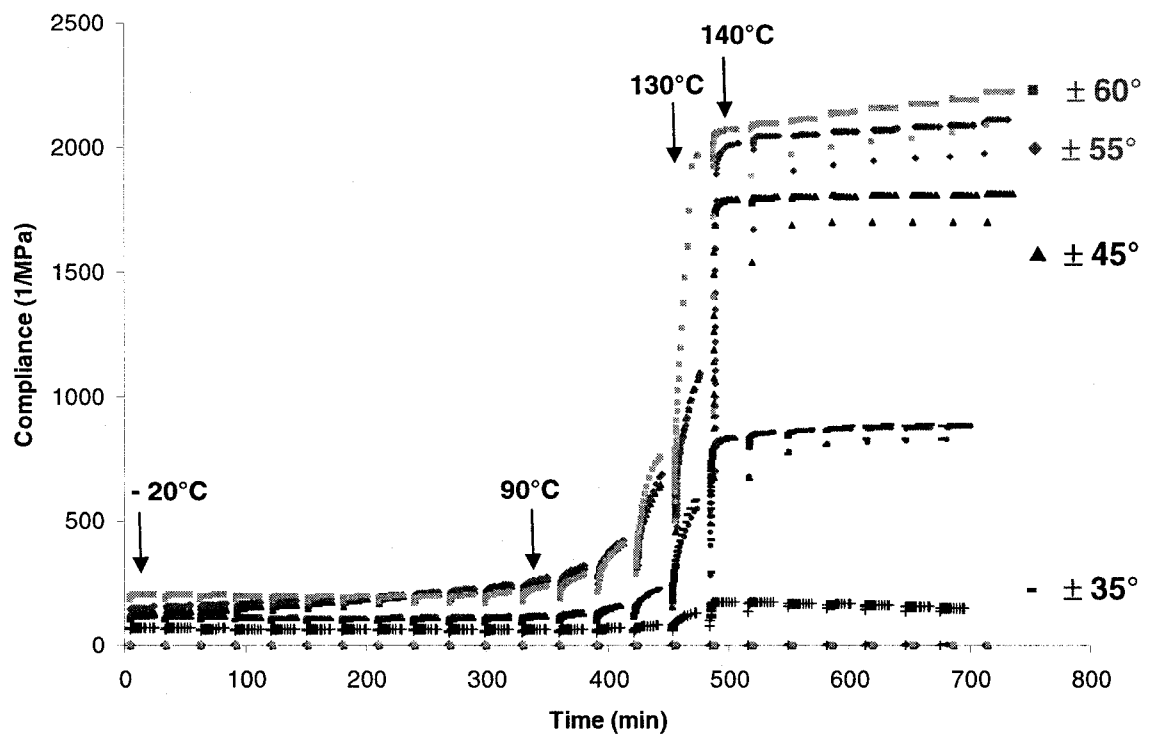


Figure 5.12 - Compliance in time in the actual test (min).

The composite materials evaluated are intended to be used in the composite springs for a damping application in four wheel drive vehicle. Hence the service temperature lies here is between -40 °C and +50 °C. In this case, the long-term prediction of Arrhenius model is better compared to WLF model, which is more applicable for service temperatures higher than T_g . Note that the shift factor obtained by WLF model is not very different from that of Arrhenius model. Figure 5.13 shows the shift factors as function of

temperature obtained for the various composites by using equation (5.4) for a reference temperature of 30 °C. In this figure, one sees that the horizontal shift factor a_T is independent of fiber orientation, especially for the temperatures lower than T_g . This was also noticed by Morris et al. [4] and may be explained by the creep behavior of the fibers. According to Mallick [10], except for kevlar, all commercial fibers like glass, carbon and boron fibers do not creep; hence the parameters related to creep (T_g and a_T) depend more to the matrix, although the fibers have an influence on the elastic parameters of the structure such as rigidity, compliance and strain. The shift factor represents a fundamental parameter in the time-temperature superposition principle, each curve being relocated horizontally by an adimensional shift factor $\log a_T$ on a logarithmic scale compared to the master curve obtained at a reference temperature T_{ref} .

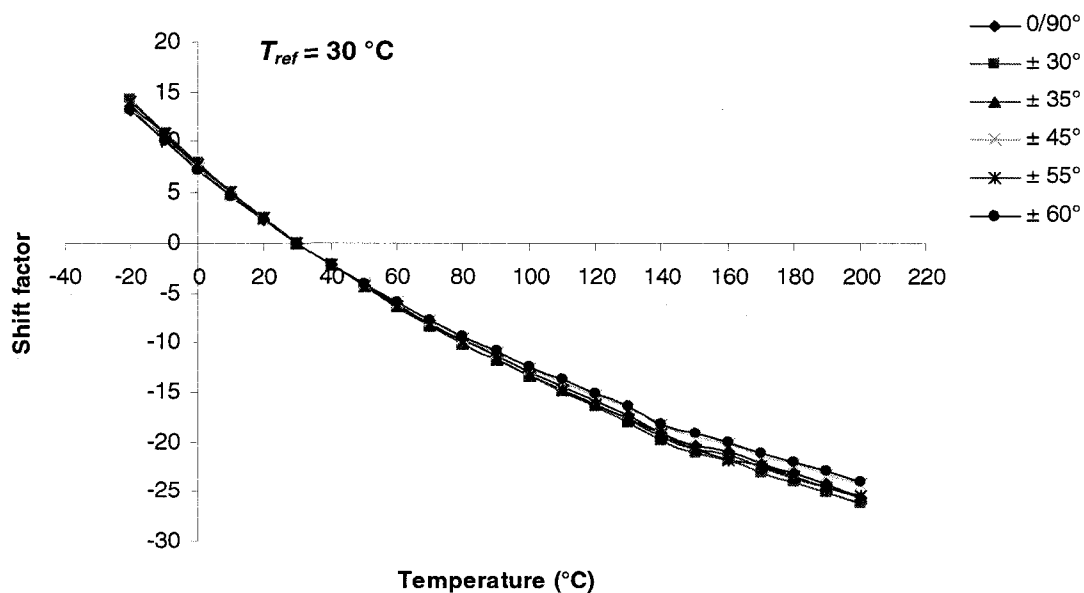


Figure 5.13 - Shift factor for the various tested composites as function of temperature.

The activation energy can be calculated for the various test temperatures with equation (5.4) after evaluating of the shift factor. The activation energy, ΔE , represents the energy barrier which must be overcome for the molecular movements causing the glass transition to appear. It is possible to estimate the activation energy without

building the master curve by conducting multi-frequencies tests for the temperature ramp [5, 12]. The activation energy depends then on T_g and a_T , which are independent of fiber orientation. In our case, an average value of the activation energy of 407 kJ/mol was recorded with a standard deviation of 13 kJ/mol.

As shown in Figures 5.13 and 5.14, the factor $\log a_T$ is negative for temperatures higher than T_{ref} , the curves will thus be relocated to the right. The shift factor is positive for temperatures lower than T_{ref} , the curves will thus be relocated to the left in this case. Time is thus widened or reduced on the master curve on both sides of the reference temperature T_{ref} (Figure 5.14). This new time is called the reduced time, defined by the following logarithmic relationship:

$$\log t_r = \log t - \log a_T \quad (5.5)$$

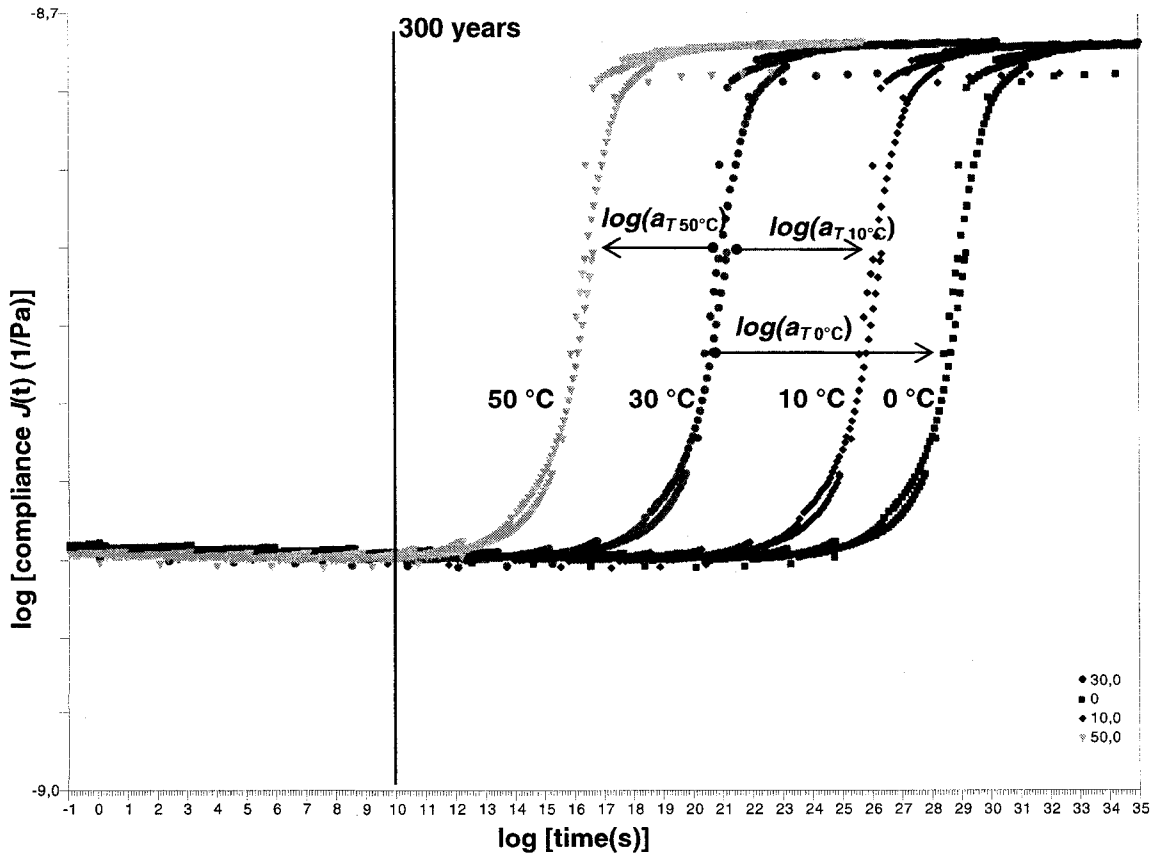


Figure 5.14 - Master curves for various temperatures of the braided composite $\pm 30^\circ$.

The behavior of the braided composite $\pm 30^\circ$, $\pm 35^\circ$, $\pm 60^\circ$ and of the woven composite is stable in long-term bending (300 years minimum) for a reference temperature of 30°C . The increase in compliance for the braided composites $\pm 30^\circ$ and $\pm 35^\circ$ is about 12 % for 30 years under the solicitation (20 MPa). For the braided composite $\pm 60^\circ$, it is 16 % and for the woven composite (0/90), it falls to 6 %. On the other hand, the increase in compliance of the braided composites $\pm 45^\circ$ and $\pm 55^\circ$ is considerable (respectively 36 and 34 %). This may be explained by the control of the applied load. For a braiding angle lower than 35° , the fibers control the applied load in bending. For the braided composites with angles equal to/or higher than, the matrix dominates, so the compliance curve is stable. In the braided composites with angles located between the two precedent cases (45° and 55°), the control of the load is mixed and distributed between the fibers and the matrix. As is illustrated in Figure 5.15, this induces a slight variation of compliance for the interest period before 30 years.

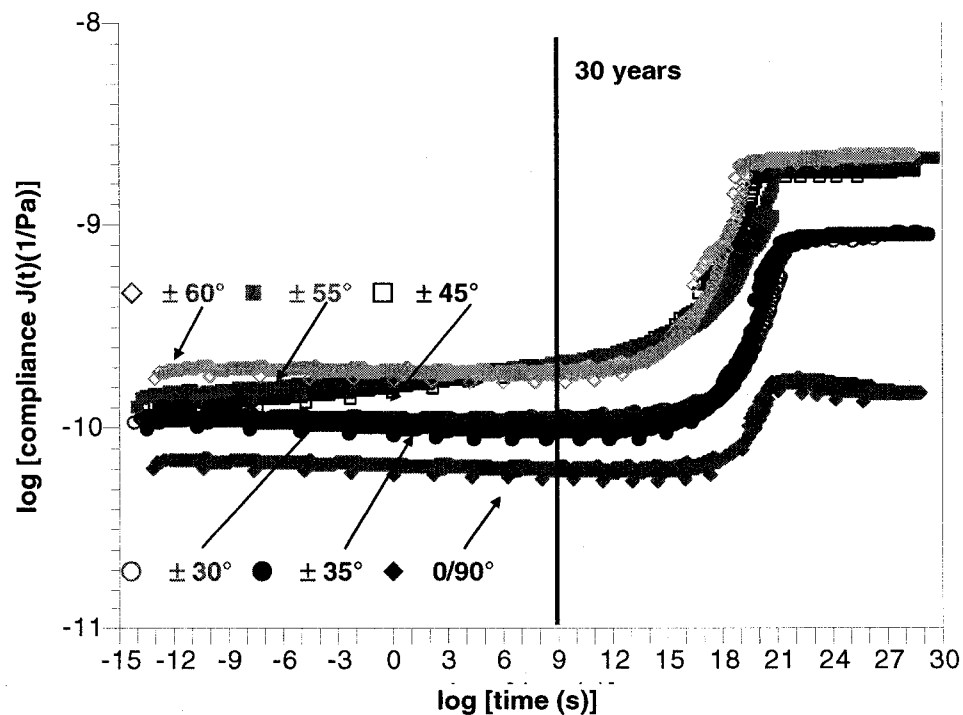


Figure 5.15 - Master curves for composite samples with various braiding angles and the woven composite (0/90°).

The master curve of a braided composite varies with fiber orientation in a vertical way with a light horizontal shift. Vertical displacement depends directly on the variation of rigidity, which is connected to the braiding angle. The creep behavior of braided composites with angles lower than 35° shows promising mechanical properties for the applied pressure level (20 MPa) in the usual range of service temperatures. The elastic properties in traction, compression and also in shearing will remain on a long term basis because all these solicitations are present in a three point bending tests carried out. On the other hand, the shear stress level estimated for our industrial application is higher than what could be implemented in these tests. Since DMA machine is limited in force, a test with several levels of stress would be necessary to evaluate the behavior for higher stress levels.

Long-term tests

Long-term creep tests results for braided composites $\pm 45^\circ$ and $\pm 55^\circ$ are presented in Figure 5.16. The test at 50°C was carried out during 4240 min, and another one at ambient temperature (RT) during 34730 min. The strain indicator P3500 allows reading the material response in micro-strain. Table 5.1 presents a comparison between the shift factor values obtained by DMA for the short-term tests and those obtained in the long-term experiments. The relative errors obtained are reasonable and give confidence in the prediction software of the DMA, although in the case of the composite $\pm 45^\circ$ there is a significant difference. This can be due to vibrations close to the test location, which caused some disturbance for the two samples at ambient temperature (between 3.5 and 4 in X -coordinate in Figure 5.16). The curve then became convex with respect to the X axis instead of being concave and the difference between the shift factors obtained for the two braided composites $\pm 45^\circ$ and $\pm 55^\circ$ should be weaker. A larger variation can also be explained by defects in the internal structure of samples, which can have a significant effect on the long-term creep behavior.

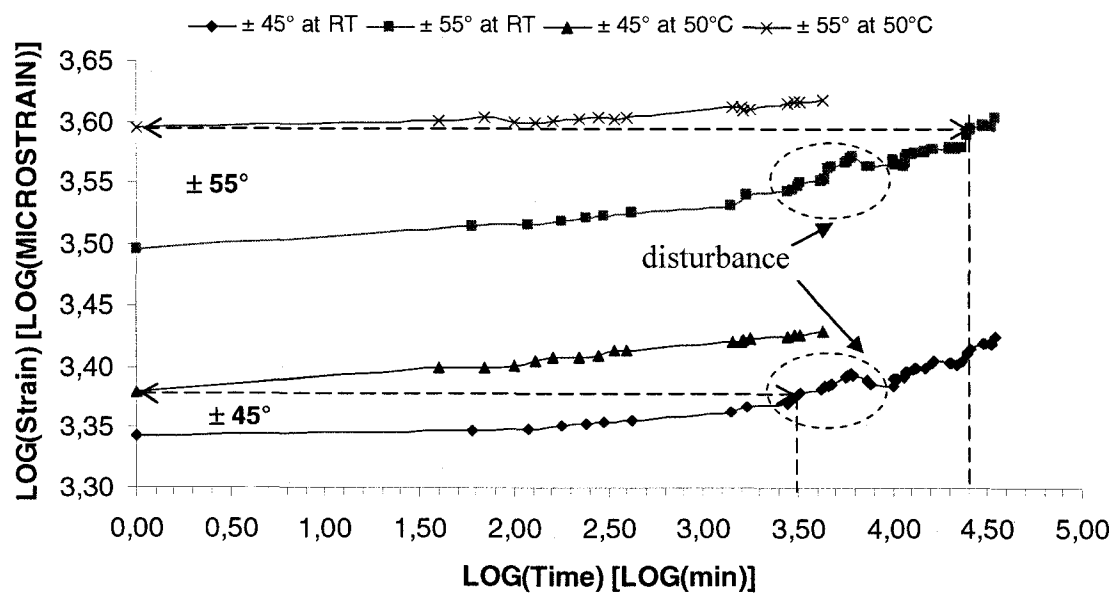


Figure 5.16 - Long term experimental creep curves of braided composites $\pm 45^\circ$ and $\pm 55^\circ$.

Tableau 5.1 - Comparison between the shift factors of the short and long-term tests

Composite	$\log(a_T)$ experimental	$\log(a_T)$ prediction	Error (%)
$\pm 45^\circ$	-3.5	-4.19	16.5
$\pm 55^\circ$	-4.4	-4.42	0.45

5.5 Conclusion

Creep Behavior of woven and braided composites was studied by three point bending tests. The short-term tests were carried out with a DMA Q800 machine, and the master curves built by applying the time-temperature superposition principle. These tests have shown that the fiber orientation does not have an influence on the shift factor. Creep behavior depends on the matrix, but rigidity depends on the fiber-matrix mixture. The braiding angle $\pm 35^\circ$ represents a characteristic value for braided composites, as a significant jump in rigidity can be observed in the results of the creep tests at a temperature higher than T_g . This angle corresponds to the transfer of the load control in a bending or tensile test from the fibers to the matrix. A good stability was noticed for the compliance curve of braided composites with a braiding angle at $\pm 30^\circ$, $\pm 35^\circ$ and $\pm 60^\circ$ and the woven composite $0/90^\circ$. Long-term tests were carried out for two braided composites $\pm 45^\circ$ and $\pm 55^\circ$ in order to check the prediction model inferred the software analysis. The shift factors obtained from the short and long term tests are roughly equal.

5.6 Acknowledgments

Authors thank Composite Atlantic Ltd for its financial support, and its President, Mr. Maurice Guitton, who provided the methods and materials to fabricate the composite springs. Authors are grateful to Christian-Charles Martel, technical assistant at École Polytechnique, for his constant and efficient help in manufacturing and to Sebastian Boutier, from Chomarat, who provided the woven reinforcements. The financial contributions of the Natural Sciences and Engineering Research Council (NSERC) and the support of the laboratory by the «Chaire sur les Composites à Haute Performance» (CCHP) and «Centre de Recherche en Plasturgie et Composites» (CREPEC) of the «Fonds Québécois pour la Recherche sur la Nature et la Technologie» (FQRNT) are also gratefully acknowledged.

5.7 References

- [1] Scott, D.W., Lai, J.S. and Zureick, A. (1995). Creep Behavior of Fiber-Reinforced Polymeric Composites: A Review of the Technical Literature, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, **14**: 588-617.
- [2] Findley, W.N. (1987). 26-Year Creep and Recovery of Poly(Vinyl Chloride) and Polyethylene, *Polymer Engineering and Sciences*, **27** (8): 582-585.
- [3] Williams, M.L., Landel, R., F. Ferry, J. D. (1955). The Temperature Dependence of Relaxation Mechanism in Amorphous Polymers and Other Glass-Liquids, *Journal of the American Chemical Society*, **77**: 370.
- [4] Morris, D.H., Brinson, H.F. and Yeow, Y.T. (1980). The Viscoelastic Behavior of the Principal Compliance Matrix of a Unidirectional Graphite/Epoxy Composite, *Polymer Composites*, **1** (1): 32-36.
- [5] Goertzen, W.K. and Kessler M.R. (2006). Creep Behavior of Carbon Fiber/Epoxy Matrix Composites, *Materials Sciences Engineering A*, **421**: 217-225.
- [6] Nielson, L.E. and Landel, R.F. (1994). Mechanical Properties of Polymers and Composites, Marcel Dekker, Inc. **2nd edn**, New York.
- [7] RUIZ, E. and TROCHU, F. (2005). Thermo-Mechanical Properties During Cure of Glass-Polyester RTM Composites: Elastic and Viscoelastic Modeling, *Journal of Composite Materials*, **39** (10): 881-916.
- [8] Katouzian, M. Brüller, O. S. and Horoschenkoff, A. (1995). On the Effect of Temperature on the Creep Behavior of Neat and Carbon Fiber Reinforced PEEK and Epoxy Resin, *Journal of Composite Materials*, **29** (3): 372-387.
- [9] Hu, H-W. (2006). Master Curve of Creep in Polymeric Off-Axis Composite Laminates. *Journal of Mechanics*. **22** (3): 229-234.

- [10] Mallick, P.K. (1993). Fiber-Reinforced Composites: Materials, Manufacturing and Design, **2nd edn**, New York, Ed: Marcel Dekker, Inc..
- [11] Ferry, J.D., (1961). Viscoelastic Properties of Polymers, **2nd edn**, John Wiley et Sons Inc, New York.
- [12] LaPlante, G. and Lee-Sullivan P. (2005). Moisture Effects on FM300 Structural Film Adhesive: Stress Relaxation, Fracture Toughness, and Dynamic Mechanical Analysis, *Journal of Applied Polymer Science*, **95**: 1285-1294.
- [13] ASTM D 790 – 02. « Standard Test Methods for Flexural Properties of Unreinforced and Reinforced Plastics and Electrical Insulating Materials ». Annual Book of Standards, vol. **8.01**, (2003).
- [14] Raghavan, J. and Meshii J. (1997). Creep of Polymer Composites, *Composites Science and Technology*, **57**: 1673-1688.
- [15] Kontou, E. and Kallimanis, A. (2006). Thermo-visco-plastic behaviour of fibre-reinforced polymer composites, *Composites Sciences and Technology*, **66**: 1588-1596.

CHAPITRE 6 - DISCUSSION GÉNÉRALE ET CONCLUSION

L'objectif de cette thèse était de concevoir et de caractériser en fluage des ressorts hélicoïdaux composites constitués d'une résine thermdurcissable et d'un renfort tressé. Parmi les multiples applications possibles, on s'est intéressé ici à remplacer des ressorts métalliques utilisés dans la suspension d'un véhicule. Relativement peu de travaux ont été effectués dans ce domaine et la recherche de solutions pratiques et efficaces reste un problème ouvert. Dans la conception de ce type de ressorts, plusieurs paramètres et contraintes particulières entrent en jeu : essentiellement liés à la géométrie du ressort, au matériau et aux conditions de service. Un logiciel fondé sur une technique d'optimisation multicritères a été développé. Afin d'améliorer la démarche de conception, une base de données des propriétés mécaniques pour chaque angle de tressage était nécessaire. En l'absence de ces données, une interpolation à partir des informations de la littérature a permis de démarrer la conception des ressorts composites.

Après consultation avec le partenaire industriel, la démarche de conception a été appliquée pour concevoir un ressort hélicoïdal composite pour une application amortissante. Ceci a permis de démontrer les avantages des ressorts composites en terme de réduction de poids. Gobbi et Mastinu [20], qui ont aussi utilisé la technique d'optimisation multicritères, furent limités par le procédé de fabrication utilisé : les ressorts conçus étaient de faible épaisseur. Le modèle analytique de Kim et al. [26] permet aussi de concevoir des ressorts hélicoïdaux en composite tressé de faible épaisseur pour un seul angle de tressage. Cette méthode analytique de conception est efficace dans des cas simples, mais le modèle devient plus complexe et difficile à résoudre pour des ressorts avec des angles de tressage variables. La méthode de conception développée dans cette thèse pour les angles de tressage variables est à la fois nouvelle et générale.

Le deuxième objectif a consisté de trouver un moyen rapide et pratique pour prédire les propriétés mécaniques des composites tressés. Les méthodes analytiques et numériques existantes sont utiles pour la recherche scientifique, mais ne peuvent pas être utilisées d'une façon pratique pour des fins industrielles. La nouvelle approche proposée permet, à partir des résultats expérimentaux de quelques essais mécaniques, de prédire avec la théorie des stratifiés les propriétés élastiques de composites à renfort tressé ou tissé pour différents angles de tressage. Ainsi il est possible, à partir des résultats expérimentaux d'un composite tressé $\pm\theta$, de créer un stratifié constitué de plis unidirectionnels virtuels, dont les propriétés mécaniques reflètent l'effet de l'architecture des fibres. La comparaison des résultats expérimentaux montre une bonne corrélation avec les prédictions réalisées à partir d'un composite tressé. En revanche, l'utilisation des propriétés élastiques expérimentales du composite tissé $0/90^\circ$ ne permet pas de prédire avec précision les propriétés élastiques des composites tressés, en particulier le module de cisaillement. Ceci est dû aux différences de configuration du composite tissé par rapport aux composites tressés. Il y aurait lieu d'étudier d'autres architectures des fibres pour généraliser cette approche et établir un coefficient de correction différent selon le mode de tissage ou de tressage.

Enfin, le dernier objectif portait sur l'étude du comportement en fluage des composites tissés et tressés. Les échantillons pour les différents matériaux testés ont été soumis à des essais de fluage en flexion trois points sur la machine DMA Q800. Le principe de superposition temps-température a été utilisé pour prédire le comportement des matériaux à long terme. Ces essais ont montré que l'orientation des fibres n'a pas d'influence sur le facteur de translation. Le comportement en fluage dépend de la matrice ; cependant, la rigidité dépend du mélange fibres/matrice.

Dans les composites tressés, l'angle de tressage de 35° représente une valeur caractéristique, au delà duquel un saut important de rigidité se produit dans un essai de fluage à des températures supérieures à T_g . Tel que discuté au chapitre 5, la variation des

propriétés élastiques des composites tressés est la même que pour les stratifiés unidirectionnels orientés. Les fibres influencent la rigidité, mais pas le comportement général en fluage.

Comparé aux ressorts métalliques, les ressorts composites peuvent apporter une contribution technologique et économique importante, étant donné leurs caractéristiques remarquables comme la réduction de poids à performance égale, leur bonne tenue en fatigue et une excellente résistance à la corrosion. De plus, l'utilisation des ressorts composites assure une sécurité accrue en évitant les risques de rupture brutale en raison de la faible vitesse de propagation des fissures dans les composites. Enfin, dans les machines électrotechniques, l'utilisation de ressorts composites présente un autre avantage important en raison de leurs bonnes propriétés d'isolation électrique.

Relativement peu de travaux ont été réalisés sur les ressorts composites. La méthodologie développée dans cette étude comprend trois volets : (1) la conception des ressorts composites a été réalisée à l'aide d'algorithmes génétiques et d'une méthode d'optimisation multicritères; (2) une nouvelle approche de prédiction des propriétés mécaniques des matériaux composites tressés ou tissés fondée sur la théorie des stratifiés a été développée ; et enfin, (3) les matériaux composites qui entrent dans la fabrication des ressorts hélicoïdaux ont été caractérisés en fluage.

Dans ce travail, nous avons donc essayé de résoudre quelques problèmes reliés à la conception et à la caractérisation des ressorts composites. Le premier point, qui fait l'objet d'un article, a porté sur la conception des ressorts composites. Les résultats de conception sont prometteurs. Deux solutions ont été sélectionnées : un premier ressort en carbone/époxy et un deuxième en verre/époxy. La démarche de conception a montré qu'il est possible d'obtenir un ressort composite avec la même performance mécanique en terme de raideur qu'un ressort métallique. Les travaux du deuxième article ont permis de développer une nouvelle approche pour prédire les propriétés mécaniques des

composites tissés ou tressés. Cette méthode repose sur un algorithme inverse fondé sur la théorie des stratifiés, qui permet de prédire les propriétés élastiques d'un composite renforcé par une tresse avec un angle quelconque à partir des résultats expérimentaux sur un composite tressé pour un angle donné. Un pli de base virtuel reflétant l'effet de l'architecture des fibres est créé, à partir duquel les propriétés du composite peuvent être prédites pour n'importe quel angle de tressage. La comparaison entre les résultats expérimentaux et les prédictions numériques a montré une bonne corrélation.

Enfin, le troisième article traite du comportement en fluage des matériaux composites à fibres tressées. Dans ces structures, le comportement en fluage dépend principalement de la matrice. Cependant la rigidité du composite dépend du mélange fibres/matrice. L'angle de tressage de 35° représente une valeur caractéristique pour les composites tressés. Au-delà de cette valeur, la rigidité dans un essai de fluage présente un saut important aux températures supérieures à T_g . Ceci correspond au passage du contrôle de la charge des fibres vers la matrice dans un essai de traction ou de flexion. Une bonne stabilité du comportement mécanique a été remarquée pour les composites tressés à un angle inférieur à $\pm 35^\circ$ et supérieur à $\pm 60^\circ$, dans lesquels la charge est supportée essentiellement par les fibres. Des essais à long terme ont été réalisés pour deux composites tressés $\pm 45^\circ$ et $\pm 55^\circ$ afin de vérifier le modèle de prédiction. Les facteurs de translation obtenus pour le court et le long terme sont approximativement égaux.

En plus de démontrer leur efficacité pour une application amortissante, les travaux de cette thèse permettent de garantir une durée de vie aux ressorts composites. Une étude expérimentale sur la fatigue des ressorts composites serait intéressante pour compléter ces travaux. Le logiciel développé pour la prédiction des propriétés élastiques des composites tressés pourrait également être utilisé pour d'autres configurations de fibres. C'est un outil pratique qui peut servir dans plusieurs applications industrielles. Tous ces travaux ont bien préparé le terrain en vue du développement d'une première application industrielle.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. GRAVIER, "Analyse de la précision des simulations numériques des procédés d'injection sur renforts (RTM)" *Département de génie mécanique*, Mémoire de maîtrise. École Polytechnique de Montréal, Montréal, Septembre 2003.
- [2] L. JOUBAUD, "Simulation numérique de l'infusion et de l'injection de résine sous paroi flexible" *Département de génie mécanique*, Mémoire de maîtrise. École Polytechnique de Montréal, Juillet 2003, pp. 105.
- [3] K. M. CHARLEBOIS, R. BOUKHILI, F. TROCHU, O. ZEBDI and A. GASMI. "Evaluation of the Physical and Mechanical Properties of Braided Fabrics and their Composites" *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 24, pp. 1539-1554, 2005.
- [4] B. LECARPENTIER, "Optimisation multicritères de la conception d'un ressort hélicoïdal tubulaire en matériaux composites" *Département de génie mécanique*, Mémoire de maîtrise. École Polytechnique de Montréal, Novembre 2004, pp. 127.
- [5] O. ZEBDI, "Caractérisation des matériaux composites et application aux ressorts hélicoïdaux" *Département de génie mécanique*, Mémoire de maîtrise. École Polytechnique de Montréal, Novembre 2004, pp. 122.
- [6] A. R. HORROCKS, S.C. ANAND , *Handbook of Technical Textiles*. Cambridge Woodhead Publishing, 2000.
- [7] P.K. MALLICK, *Composites Engineering Handbook*. New York Marcel Dekker, 1997.

- [8] M.M. GAUTHIER, "Braiding" in *Engineered Materials Handbook*. Ohio: ASM International, 1995, pp. 565-569.
- [9] H. HAMADA, A. NAKAI and MASUI, M. , "Mechanical Properties for Self-Reinforced Braided Composite Tubes" *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, vol. 12, pp. 164-176, 1999.
- [10] P. POTLURI, A. RAWAL, M. RIVALDI and I. PORAT, "Geometrical Modelling and Control of a Triaxial Braiding Machine for Producing 3D Performs" *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol. 34, pp. 481-492, 2003.
- [11] A.C. LONG, "Process Modelling for Liquid Moulding of Braided Preforms" *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol. 32, pp. 941-953, 2001.
- [12] D.O. ADAMS, M.W. HYER, "Effects of Layer Waviness on the Compression Strength of Thermoplastic Composite Laminates" *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 12, pp. 414-429, 1993.
- [13] M.S. DADKHAH, J.G. FLINTOFF, T. KNIVETON and B.N. COXT, "Simple Models for Triaxially Braided Composites" *Composites*, vol. 26, pp. 561-577, 1995.
- [14] J.H. BYUN, "The Analytical Characterization of 2-D Braided Textile Composites" *Composites Science and Technology*, vol. 60, pp. 705-716, 2000.
- [15] A.M. HARTE, N.A. FLECK, "Deformation and Failure Mechanisms of Braided Composite Tubes in Compression and Torsion" *Acta Materialia*, vol. 48, pp. 1259-1271, 2000.
- [16] A.M. HARTE, "Mechanics of Braided Composites" *Département de génie mécanique*, Thèse de doctorat. Cambridge: Université de Cambridge, 1997.

- [17] A.M. HARTE, N.A. FLECK, "On the Mechanics of Braided Composites in Tension" *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 19, pp. 259-275, 2000.
- [18] S.C. QUEK, A. WAAS, K.W. SHAHWAN and V. AGARAM, "Compressive Response and Failure of Braided Textile Composites: Part 2 - Computations" *International Journal of Non-Linear Mechanics*, In Press, Corrected Proof.
- [19] H.A. AL-QURESHI, "Automobile Leaf Springs from Composite Materials" *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 118, pp. 58-61, 2001.
- [20] M. GOBBI, G. MASTINU, "On the Optimal Design of Composite Material Tubular Helical Springs" *Meccanica*, vol. 36, pp. 525-553, 2002.
- [21] F. RATLE, B. LECARPENTIER, R. LABIB, F. TROCHU, "Multi-objective optimization of a composite material spring design using an evolutionary algorithm" *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 3242, pp. 803-811, 2004.
- [22] T. YOKOTA, T. TAGUCHI, M. GEN. "A Solution Method for Optimal Weight Design Problem of Helical Spring using Genetic Algorithms" *Computers & Industrial Engineering*, vol. 33, pp. 71-76, 1997.
- [23] K. DEB, S. AGRAWAL, A. PRATAP and T. MEYARIVAN, "A Fast Elitist Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm for Multi-Objective Optimization: NSGA-II" presented at Proceedings of the Sixth International Conference on Parallel Problem Solving from Nature, PPSN 2000, Berlin-Heidelberg, 2000.
- [24] H. HAMDA, O. ROUDENKO, M. SCHOENAUER, "Application of a Multi-objective Evolutionary Algorithm to Topological Optimum Design" presented at

Proceedings of the Fifth International Conference on Adaptive Computing in Design and Manufacture, ACDM 2002, Berlin-Heidelberg, 2002.

[25] J-L. WU, A.M. AGOGINO, "Automating Keyphrase Extraction with Multi-objective Genetic Algorithms" presented at Proceedings of the 37th Hawaii International Conference on Systems Sciences, HICSS 2004, New York, 2004.

[26] B.S. KIM, J.H. BYUN and B.H. KIM, "Structure-Property Relationships of Composite Coil Springs Processed by RTM" presented at ICCM-12, Jul. 5, 1999.

[27] A. AGGARWAL, S. RAMAKRISHNA et al. , "Predicting the In-Plane Elastic Constants of Diamond Braided Composites" *Journal of Composite Materials*, vol. 35, pp. 665-688, 2001.

[28] Z.M. HUANG, "The Mechanical Properties of Composites Reinforced with Woven and Braided Fabrics" *Composites Science and Technology*, vol. 60, pp. 479-498, 2000.

[29] C. ZUORONG, Z. DECHAO, M. LU and L. YE, "Evaluation of Elastic Properties of 3-D (4-step) Regular Braided Composites by a Homogenization Method" *Composites Structures*, vol. 47, pp. 477-482, 1999.

[30] N.K. NAIK, V.K. GANESH, "An Analytical Method for Plain Weave Fabric Composites" *Composites*, vol. 26, pp. 281-289, 1995.

[31] R.A. NAIK, "Failure Analysis of Woven and Braided Fabric Reinforced Composites" *Journal of Composite Materials*, vol. 29, pp. 2334-2363, 1995.

[32] J. CAREY, M. MUNRO and A. FAHIM, "Longitudinal Elastic Modulus Prediction of 2-D Braided Fiber Composite" *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 22, pp. 813-831, 2003.

- [33] M. CAREY, M. MUNRO and A. FAHIM, "Regression-based Model for Elastic Constants of 2D Braided/Woven Open Mesh Angle-ply Composites" *Polymer Composites* vol. 26, pp. 152-164, 2005.
- [34] A. TABIEI, W. YI, "Comparative Study of Predictive Methods for Woven Fabric Composite Elastic Properties" *Composite Structures*, vol. 58, pp. 149-164, 2002.
- [35] S.P. NG, P.C. TSE and K.J. LAU, "Numerical and experimental determination of in-plane elastic properties of 2/2 twill weave fabric composites" *Composites Part B*, vol. 29 B, pp. 735-744, 1998.
- [36] K. SRIRENGAN, J. WHITCOMB, C. CHAPMAN, "Modal technique for three-dimensional global/local stress analysis of plain weave composites" *Composite Structures* vol. 39, pp. 145-156, 1997.
- [37] C. S. LEE, S.W. CHUNG, H. SHIN and S.J. KIM, "Virtual Material Characterization of 3D Orthogonal Woven Composite Materials by Large-scale Computing" *Journal of Composite Materials*, vol. 39, pp. 851-863, 2005.
- [38] H.J. CHUN., J.Y. SHIN et al., "Effects of Material and Geometric Nonlinearities on the Tensile and Compressive Behavior of Composite Materials with Fiber Waviness" *Composites Science and Technology*, vol. 61, pp. 125-134, 2001.
- [39] J. NEUMEISTER, S. JANSSON and F. LECKIE, "The Effect of Fiber Architecture on the Mechanical Properties of Carbon/Carbon Fiber Composites" *Acta Mater*, vol. 44, pp. 573-585, 1996.

- [40] P. J. FALZON, I. HERSZBERG, "Mechanical Performance of 2-D Braided Carbon/Epoxy Composites" *Composites Science and Technology*, vol. 58, pp. 253-265, 1998.
- [41] D.W. SCOTT, J.S. LAI and A. ZUREICK, "Creep Behavior of Fiber-Reinforced Polymeric Composites: A Review of the Technical Literature" *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 14, pp. 588-617, 1995.
- [42] W.N. FINDELY, "26-Year Creep and Recovery of Poly(Vinyl Chloride) and Polyethylene" *Polymer Engineering and Sciences*, vol. 27, pp. 582-585, 1987.
- [43] M.L. WILLIAMS, R.F. LANDEL, J.D. FERRY, "The Temperature Dependence of Relaxation Mechanism in Amorphous Polymers and Other Glass-Liquids" *Journal of the American Chemical Society*, vol. 77, pp. 370, 1955.
- [44] D.H. MORRIS, H.F. BRINSON and Y.T. YEOW, "The Viscoelastic Behavior of the Principal Compliance Matrix of a Unidirectional Graphite/Epoxy Composite" *Polymer Composites*, vol. 1, pp. 32-36, 1980.
- [45] W.K. GOERTZEN, M.R. KESSLER, "Creep Behavior of Carbon Fiber/Epoxy Matrix Composites" *Materials Sciences Engineering A*, vol. 421, pp. 217-225, 2006.
- [46] L.E. NIELSON, R.F. LANDEL, *Mechanical Properties of Polymers and Composites*, 2nd edition ed. New York: Marcel Dekker, Inc., 1994.
- [47] M. KATOUZIAN, O.S. BRÜLLER and A. HOROSCHENKOFF, "On the Effect of Temperature on the Creep Behavior of Neat and Carbon Fiber Reinforced PEEK and Epoxy Resin" *Journal of Composite Materials*, vol. 29, pp. 372-387, 1995.

- [48] H.W. HU, "Master Curve of Creep in Polymeric Off-Axis Composite Laminates. Journal of Mechanics" *Journal of Mechanics*, vol. 22, pp. 229-234, 2006.
- [49] P.K. MALLICK, *Reinforced Composites: Materials, Manufacturing and Design*, 2nd edition ed. New York: Marcel Dekker, Inc., 1993.
- [50] J.D. FERRY, *Viscoelastic Properties of Polymers*, 2nd ed. New York John Wiley et Sons Inc, 1961.
- [51] G. LAPLANTE and P. LEE-SULLIVAN, "Moisture Effects on FM300 Structural Film Adhesive: Stress Relaxation, Fracture Toughness, and Dynamic Mechanical Analysis" *Journal of Applied Polymer Science*, vol. 95, pp. 1285-1294, 2005.
- [52] E. KONTOU, A. KALLIMANIS, "Thermo-visco-plastic behaviour of fibre-reinforced polymer composites" *Composites Sciences and Technology*, vol. 66, pp. 1588-1596, 2006.
- [53] J. RAGHAVAN and M. MESHII, "Creep of Polymer Composites" *Composites Science and Technology*, vol. 57, pp. 1673-1688, 1997.
- [54] ASTM D3039/D3039M-00, "Standard Test Method for Tensile Properties of Polymer Matrix Composite Materials" *Annual Book of Standards*, vol. 15.03, 2002.
- [55] ASTM D 5379/D 5379M-98, "Standard Test Method for Shear Properties of Composite Materials by the V-Notched Beam Method," *Annual Book of Standards*, vol. 15.03, 2002.
- [56] ASTM D790-02 , "Standard Test Methods for Flexural Properties of Unreinforced and Reinforced Plastics and Electrical Insulating Materials" *Annual Book of Standards*, vol. 8.01, 2003.

ANNEXE A – PROPRIÉTÉS DES TRESSSES

Angle de tressage

L'angle de tressage θ (radians) est l'angle entre l'axe de la tresse et l'axe principal des mèches. Cet angle est relié à la vitesse d'avance de la machine de tressage par la relation suivante [11] :

$$\tan \theta = \frac{\pi D_t}{T_v} \quad (\text{A.1})$$

où :

D_t = diamètre de la tresse (m),

T_v = vitesse de tressage (m/tour) (longueur de mandrin couverte par tour).

Espacement entre les mèches

Dans un procédé de tressage, l'espacement entre les mèches existe nécessairement tel qu'illustré à la Figure A.1. Cet espacement a une influence négative sur le taux volumique des fibres et donc sur les propriétés mécaniques. Les relations suivantes permettent d'estimer les distances transversale S_t et longitudinale S_l :

$$S_t = \frac{2\pi D_t}{N_m} \cos \theta \quad (\text{A.2})$$

$$S_l = \frac{2T_v}{N_m} \quad (\text{A.3})$$

où N_m est le nombre de mèches dans la tresse.

Géométrie de l'ondulation

Le plus important des paramètres de la tresse après l'angle de tressage est l'ondulation des mèches. L'angle d'ondulation d'une mèche dans une tresse est variable selon le type

de tresse diamant (1x1), régulier (2x2) et Hercules (3x3). L'exemple suivant illustre la géométrie d'une ondulation d'une façon simple.

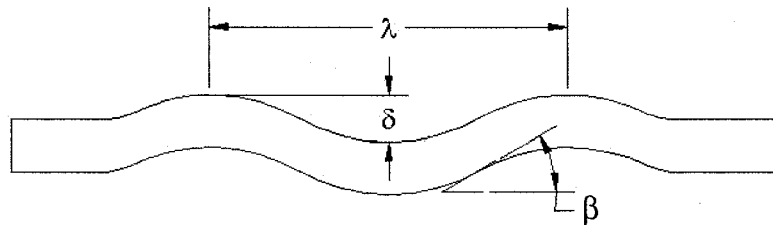


Figure A.1 - Définition des paramètres d'ondulation d'une mèche [12].

La relation suivante existe entre : la période λ , l'amplitude δ et l'angle d'ondulation maximal β [19] :

$$\beta = \tan^{-1} \left(\pi \frac{\delta}{\lambda} \right) \quad (\text{A.4})$$

Estimation du taux de fibres

Le taux de fibres est un des paramètres les plus importants dans le domaine des composites à cause de son influence sur les propriétés des matériaux. Dans un renfort tressé, le taux de fibre peut être estimé par la relation suivante [11] :

$$V_f = \frac{2M_f}{S_t \rho_f e} \quad (\text{A.5})$$

où :

- M_f = masse par unité de longueur des mèches (kg/m),
- ρ_f = masse volumique des fibres (kg/m³),
- e = épaisseur de la tresse (m),
- S_t = distance transversale entre les mèches (m).

Le lecteur peut se référer aux articles [13] et [14] pour déterminer le taux volumique de fibres d'une tresse biaxiale ou d'une tresse triaxiale en tenant compte de son ondulation.

ANNEXE B – MODES DE RUPTURE DES TUBES TRESSÉS

Cette partie résume les principaux résultats expérimentaux sur les modes de rupture de tubes composites renforcés par des tresses tubulaires en fonction de l'architecture de la tresse et de la charge appliquée.

1) En traction, deux phénomènes peuvent se produire : la propagation du cou pour les angles initiaux supérieurs à 45° et la fracture des fibres pour les angles inférieurs à 45° . Selon Harte, la transition entre les deux mécanismes de rupture se produit pour un angle de 45° , qui correspond à l'état de déformation en cisaillement pur de la matrice. La Figure B.1 montre la courbe contrainte-déformation pour quatre angles initiaux θ_0 et le phénomène de la propagation du cou d'une tresse tubulaire soumise à une charge de traction.

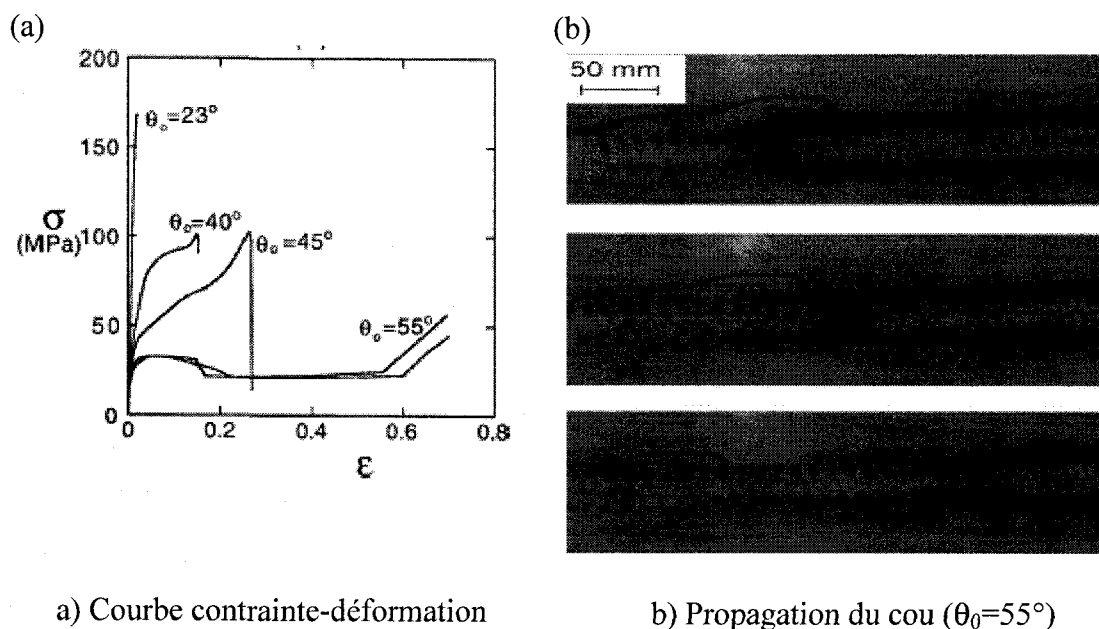


Figure B.1 - Essai de traction sur des tubes tressés [17].

2) En compression, il existe quatre modes de rupture selon la géométrie du tube :

- a) micro-flambage;
- b) pliage plat ou en boucle en forme de diamant;

- c) flambage en accordéon;
- d) flambage du tube.

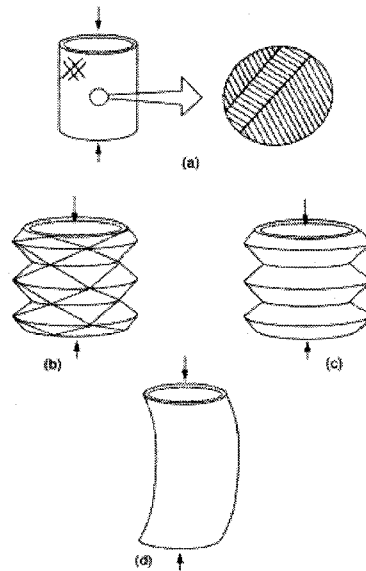
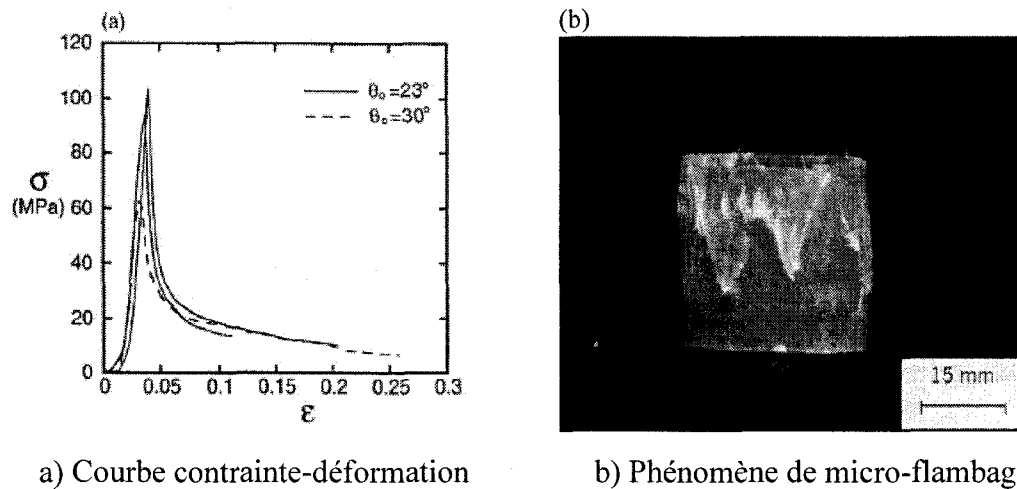


Figure B.2 - Modes de rupture des tubes tressés en compression [15].

- a) Les micro-flambages sont observés pour des tubes tressés à angles de tressages initiaux de moins de 35° (Figure B.2a). La courbe contrainte-déformation est caractérisée par un pic une longue décroissance (Figure B.3a). Quek et al. [18] ont simulé la compression des tubes avec différents modèles et ils ont obtenu la même allure que dans les essais expérimentaux. Le phénomène de micro-flambage consiste en la création de bandes étroites de fibres connectées entre elles par des points (Figure B.3b).



a) Courbe contrainte-déformation

b) Phénomène de micro-flambage

Figure B.3 - Essai de compression sur des tubes tressés avec des angles initiaux de 23° et 30° [16].

b) Les pliages plats sont liés aux tubes avec des angles de tressage initiaux supérieurs à 35° (Figure B.1b). La Figure B.3a montre la courbe contrainte-déformation. Dans ce cas, cette courbe est aussi caractérisée par un pic qui indique l'initiation des boucles, les pliages se propageant le long du tube de haut vers le bas. Les prochaines contraintes maximales après le pic initial dans la courbe contrainte-déformation correspondent à la formation des bandes de pliages dans le tube. Après la formation complète de chaque pli, la courbe contrainte-déformation retourne vers le haut jusqu'à ce que la charge soit suffisante pour la formation du pli suivant. La Figure B.3b illustre ce phénomène sur un spécimen après un essai de compression.

c) Les flambages en accordéon de la Figure B.1c apparaissent pour les mêmes angles de tressage initiaux, mais dépendent de l'épaisseur de la tresse tubulaire.

d) Le flambage du tube ou macro-flambage d'Euler de la Figure B.1d se produisent dans les tubes longs. Généralement, on évite ce phénomène par la fabrication de spécimens courts.

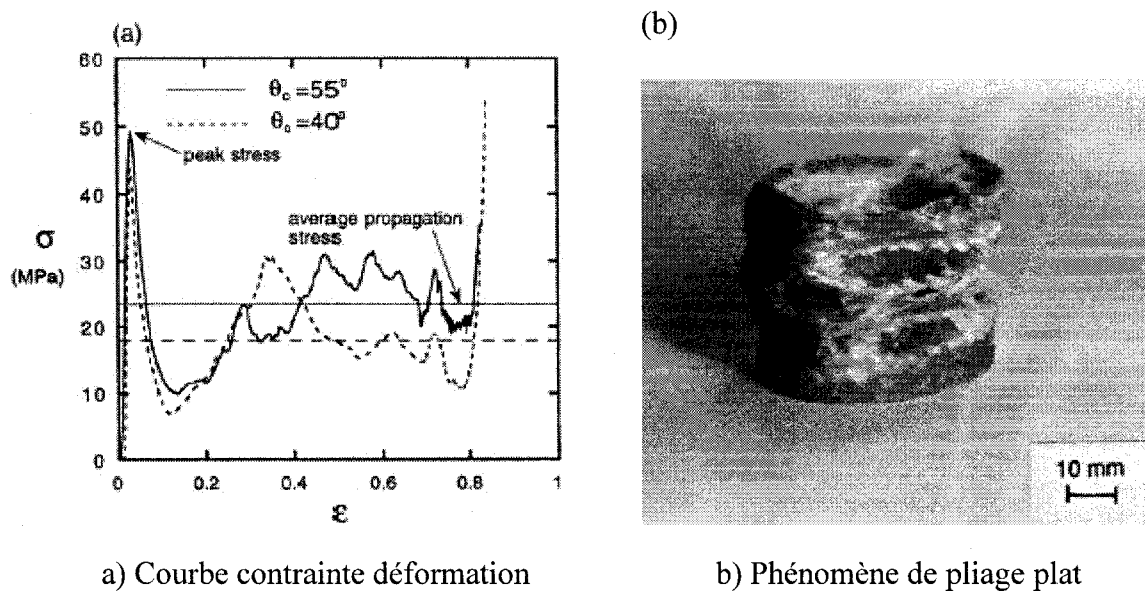


Figure B.4 - Essai de compression sur des tubes tressés avec des angles de tressage initiaux de 40° et 55° [15].

3) En torsion, le micro-flambage apparaît même pour des angles initiaux de tressage supérieurs à 35° . La courbe contrainte-déformation de la Figure B.5 montre que pour des angles de tressage initiaux proches de 45° , la contrainte de torsion est élevée.

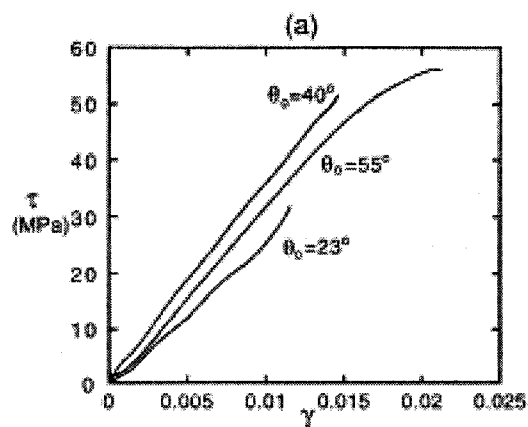


Figure B.5 - Courbes contrainte-déformation d'un test de torsion [15].

ANNEXE C- RESSORTS HÉLICOÏDAUX

Un ressort hélicoïdal est fabriqué à partir d'un fil de section généralement circulaire. Il est soumis en général à une force axiale ou bien il est conçu pour produire une force dans le but de reproduire, modifier un mouvement ou maintenir un système de forces en équilibre. Le ressort hélicoïdal permet d'emmagasinier une grande quantité d'énergie dans un espace restreint. L'utilisation des ressorts composites ouvre des perspectives intéressantes, en termes de durée de vie, gain de poids et résistance accrue à la corrosion. Dans ce qui suit, on présente la méthode suivie pour calculer les contraintes dans un ressort hélicoïdal à fil de section circulaire pleine soumis à une force de compression axiale.

Contraintes dans un ressort hélicoïdal

Considérons un ressort soumis à une force P appliquée dans la direction de l'axe de l'hélice de ce ressort. Tel qu'illustré à la Figure C.1, cette force se décompose en deux composantes par projection sur le plan de la section droite S du fil plein du ressort :

$$\text{- dans le plan de la section} \quad P_1 = P \cos \alpha \quad (\text{C-1})$$

$$\text{- selon la normale au plan de la section} \quad P_2 = P \sin \alpha \quad (\text{C-2})$$

Ces deux forces permettent respectivement de calculer les deux moments :

$$\text{torsion : } M_t = P_1 \frac{D}{2}, \quad \text{flexion : } M_f = P_2 \frac{D}{2}$$

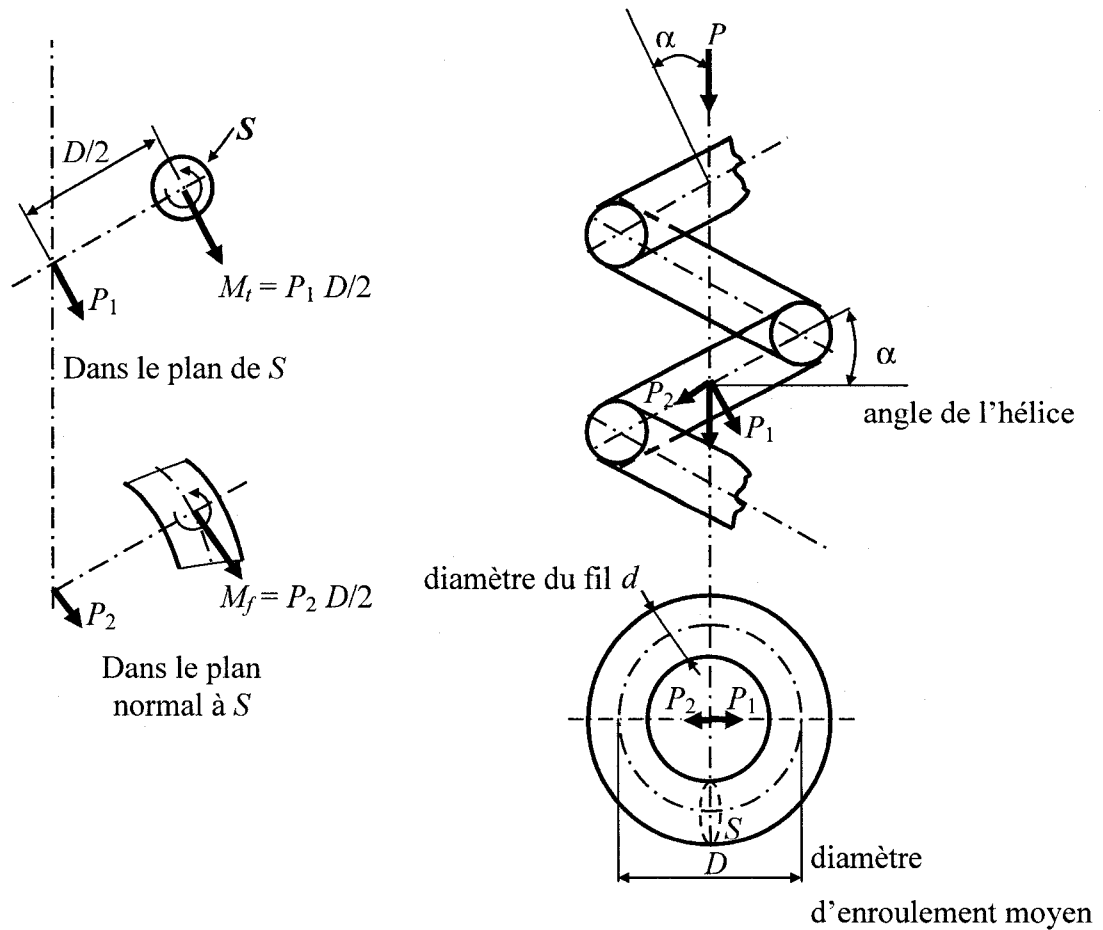


Figure C.1 – Répartition des efforts dans un ressort.

La contrainte engendrée dans le fil du ressort hélicoïdal soumis à une force axiale est due à trois effets principaux : la torsion du fil, le cisaillement et sa courbure.

La contrainte due à la torsion τ_t est donnée par :

$$\tau_t = \frac{M_t d}{2 \cdot I_0} = \frac{8 P_1 D}{\pi d^3} \quad (\text{C-3})$$

où $I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$ est le moment d'inertie.

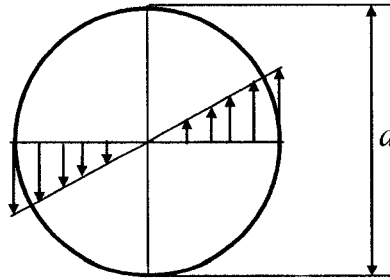


Figure C.2 - Contrainte de torsion dans la section.

La contrainte due au cisaillement est liée à la force appliquée à la section S :

$$\tau_c = \frac{P_1}{S} = \frac{4P_1}{\pi d^2} \quad (\text{C-4})$$

avec $S = \frac{\pi d^2}{4}$.

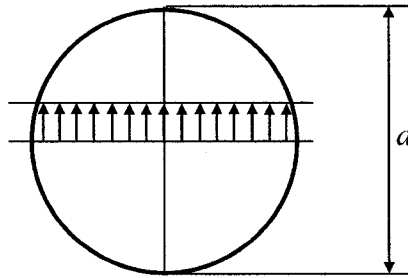


Figure C.3 - Contrainte de cisaillement dans la section.

La contrainte maximale dans le ressort est la somme de la contrainte de torsion et du cisaillement:

$$\tau_{\max} = \frac{8P_1 D}{\pi d^3} + \frac{4P_1}{\pi d^2} \quad (\text{C-5})$$

L'angle d'hélice α est généralement faible ($\alpha \leq 10^\circ$), alors on peut considérer que $\cos\alpha \rightarrow 1$ et $\sin\alpha \rightarrow 0$ et alors $P = P_1$ et la relation (C-5) devient après simplification :

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left[1 + \frac{0.5}{C} \right] \quad (\text{C-6})$$

où $C = \frac{D}{d}$ appelé indice de ressort. Le coefficient $k_s = 1 + \frac{0.5}{C}$ est le facteur de correction sur charge statique. Enfin, la contrainte maximale dans le ressort n'est donc que la contrainte de la torsion multipliée par un coefficient k_s . On gardera cette forme de contrainte après l'introduction de l'influence de la courbure du fil, mais cette fois en multipliant par un autre coefficient k .

Dans ce qui précède, on a négligé l'effet de courbure du fil. Prenant un petit élément de spire compris entre deux plans passant par l'axe du ressort, les fibres de l'hélice les plus proches de l'axe du ressort sont plus courtes que la fibre neutre et les fibres plus éloignées sont plus longues. Toutes ces fibres superficielles sont cependant déformées selon le même angle de torsion quand le ressort est chargé. En conséquence, les fibres les plus proches de l'axe sont soumises aux contraintes de torsion les plus élevées. Ces contraintes s'ajoutent à la contrainte de cisaillement et de la torsion pour donner des contraintes combinées maximales (Figure C.4).

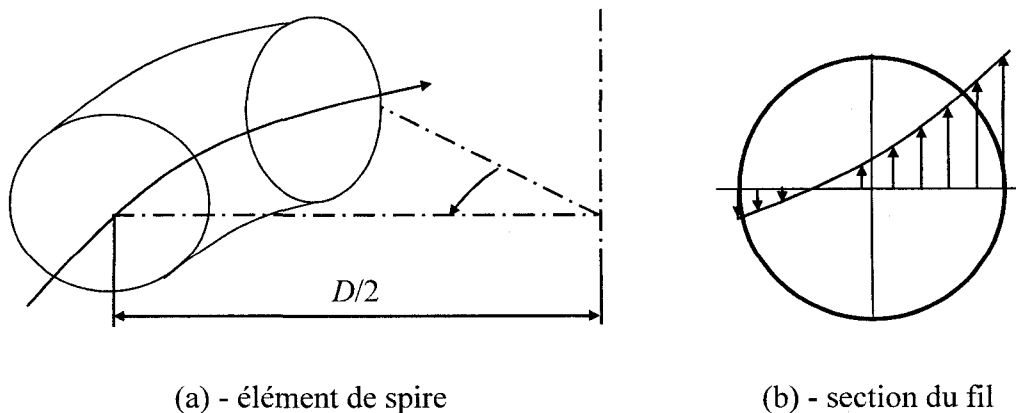


Figure C.4 - Influence de la courbure du fil.

Plusieurs chercheurs ont donné des coefficients globaux pour introduire l'effet de courbure dans l'expression de la contrainte maximale dans le ressort. Wahl a donné l'expression du coefficient k sous la forme suivante :

$$k = \frac{4C-1}{4C-4} + \frac{0.615}{C} \quad (\text{C-7})$$

Constante de raideur

La raideur d'un ressort hélicoïdal cylindrique est le rapport de la force appliquée sur le déplacement total du ressort. Le déplacement total du ressort est donné par la relation suivante:

$$\delta = \frac{8PND^3}{Gd^4} \quad (\text{C-8})$$

Alors :

$$K = \frac{P}{\delta} = \frac{Gd}{8C^3N} \quad (\text{C-9})$$

où : N = nombre de spire actives

$C = D/d$ = indice de ressort

G = module de cisaillement