

**Titre:** Modélisations analytique et numérique du comportement statique et dynamique des câbles sains et endommagés  
Title: et dynamique des câbles sains et endommagés

**Auteur:** Valérien Houdard  
Author:

**Date:** 2007

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Houdard, V. (2007). Modélisations analytique et numérique du comportement statique et dynamique des câbles sains et endommagés [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
Citation: <https://publications.polymtl.ca/7984/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/7984/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Najib Bouaanani  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÉLISATIONS ANALYTIQUE ET NUMÉRIQUE DU COMPORTEMENT  
STATIQUE ET DYNAMIQUE DES CÂBLES SAINS ET ENDOMMAGÉS

VALÉRIAN HOUDARD

DÉPARTEMENT DES GÉNIES CIVIL, GÉOLOGIQUE ET DES MINES  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE CIVIL)  
AVRIL 2007



Library and  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*  
ISBN: 978-0-494-29237-2

*Our file* *Notre référence*  
ISBN: 978-0-494-29237-2

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

\*\*  
**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

MODÉLISATIONS ANALYTIQUE ET NUMÉRIQUE DU COMPORTEMENT  
STATIQUE ET DYNAMIQUE DES CÂBLES SAINS ET ENDOMMAGÉS

présenté par: HOUDARD Valérian

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées  
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. LÉGER Pierre, Ph.D., président

M. BOUAANANI Najib, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. LÉGERON Frédéric, Ph.D., membre

## **REMERCIEMENTS**

Je voudrais adresser des remerciements à toutes les personnes qui ont pu m'aider pour mener à bien ce travail de recherche et la rédaction de ce mémoire. Sans ordre particulier, je voudrais remercier : Monsieur Najib Bouaanani, professeur au département des génie civil, géologique et des mines, pour m'avoir proposé ce sujet de recherche, pour son encadrement et pour m'avoir incité à me concentrer sur mon projet, mes amis pour m'en avoir distrait, mes parents pour leur soutien inconditionnel même à distance et Karine pour tout ceci et le reste.

Je tiens également à souligner le support financier du Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG).

## RÉSUMÉ

L'objectif principal de ce mémoire est de valider l'utilisation de la méthode des différences finies dans la modélisation des câbles suspendus à faible fléchissement, notamment les câbles endommagés par une altération locale de la section. De nombreuses études ont été menées sur le comportement dynamique des câbles ayant des propriétés constantes le long de la portée. Cette hypothèse est valide à l'étape du dimensionnement, les câbles fabriqués industriellement étant généralement réguliers. Néanmoins, le besoin de suivre la santé des ouvrages existants, et de connaître leurs propriétés altérées se fait de plus en plus sentir à cause du vieillissement globale des infrastructures.

Si plusieurs recherches traitent déjà du sujet pour des structures de poutres ou de treillis, les câbles semblent avoir été mis de côté, probablement à cause de leur comportement complexe, ou leur usage relativement plus restreint. Ce mémoire propose des formulations analytiques et numériques originales adaptées à l'étude des comportements statique et dynamique des câbles suspendus sains et endommagés. La validité des résultats de ces méthodes est évaluée en les comparant à des résultats obtenus par un logiciel commercial. La méthode analytique proposée donne des résultats très concluants pour les câbles à rigidité flexionnelle négligeable. La méthode des différences finies développée donne une très bonne précision, tout en conservant une facilité de calcul appréciable. On montre que pour les câbles à rigidité flexionnelle négligeable, la corrélation avec les résultats obtenus d'une manière analytique est très bonne. Une étude paramétrique visant à montrer l'influence des paramètres d'endommagement sur le comportement statique et dynamique de câbles de différents types est effectuée et plusieurs tendances dans le comportement sont observées. On démontre ainsi, entre autres, que la proportion d'endommagement et son étendue ont plus d'influence que la position de la section endommagée. Il est également montré que les différents types de câbles étudiés ne réagissent pas de la même façon.

Par ailleurs, l'utilisation d'une instrumentation sophistiquée telle que les vibromètres à laser pour évaluer le comportement dynamique des structures est de plus en plus cou-

rante. La plupart de ces techniques sont basées sur la corrélation entre les fréquences et les modes propres de la structure d'une part et son état d'endommagement structural d'autre part. Le recours à ces techniques nécessite l'utilisation de méthodes numériques de détection d'endommagement robustes. Au mieux de la connaissance de l'auteur, tous les algorithmes proposés dans la littérature utilisent une formulation basée sur la méthode des éléments finis. Dans le présent travail, un algorithme basé sur une formulation par différences finies est développé pour détecter un endommagement éventuel dans les câbles suspendus. La performance de cet algorithme est testée numériquement en l'appliquant à plusieurs types de câbles. Plusieurs hypothèses simplificatrices sont cependant adoptées et ce travail constitue une première étape exploratoire dans le domaine de la détection de l'endommagement des câbles. En tenant compte de ces hypothèses, il ressort que l'algorithme de détection proposé donne des résultats satisfaisants pour des endommagements singuliers ou multiples. Néanmoins, même avec les instruments les plus récents existant, il apparaît difficile d'obtenir suffisamment de mesures pour permettre une bonne performance de l'algorithme.

## ABSTRACT

The main objective of this report is to validate the use of finite difference schemes to analyse the structural behaviour of small-sag suspended cables, either healthy or damaged by a local loss of rigidity. A large number of studies deal with the dynamic behaviour of cables assuming constant properties along the cable span. This assumption is accurate at the design stage, since manufactured cables have generally regular properties. Nevertheless, there is a growing need to monitor the structural behaviour of existing structures and assessing their potential for damage.

If significant research work has investigated damaged beam and truss structures, the cables attracted less attention because of their complex structural response, and more or less common usage. This work proposes original theoretical and numerical formulations adapted to studying static and dynamic behaviours of suspended healthy and damaged cables. The results obtained are validated by comparing them to those of a commercial software. The analytical method proposed yield concluding results for cables with negligible flexural rigidity. The finite difference scheme built is accurate, as well as easy to implement. It is shown that for cables with negligible flexural rigidity, the correlation with the results obtained analytically is excellent. A parametric study to assess the influence of damage parameters on the static and dynamic behaviours of different types of cables is conducted and several trends are identified. The study shows, for example, that the depth and the length of the damaged zone of the cable have more influence than damage position. It is also concluded that the different cables behave differently.

On the other hand, the use of sophisticated instrumentation such as laser vibrometers to evaluate the dynamic response of structures is more and more common. Most of these techniques make use of the correlation between frequencies and mode shapes on the one hand, and the damaged structural state on the other. Recourse to these techniques requires the use of robust damage detection numerical methods. To the best of author's knowledge, the algorithms described in the literature are based on a finite element formulation. In

the present work, an algorithm based on a finite difference scheme is developed to detect a potential damage in suspended cables. The performance of this algorithm is tested numerically by applying it to different types of cables. Many simplifying assumptions were however adopted and this part of the thesis is a first exploratory step in the field of damage detection of suspended cables. Taking into account these assumptions, it is concluded that the algorithm gives satisfactory results for one or multiple damage locations. Nevertheless, even with the most precise instruments available, it seems quite difficult to obtain enough information in situ to allow a satisfactory performance of the algorithm.

## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	ix
LISTE DES FIGURES . . . . .	xii
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xv
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES . . . . .	xvi
 CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	 1
1.1 Contexte du projet de recherche . . . . .	1
1.2 Problématique . . . . .	2
1.3 Objectifs . . . . .	3
1.4 Méthodologie . . . . .	3
1.5 Organisation du mémoire . . . . .	4
 CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE . . . . .	 5
2.1 Introduction . . . . .	5
2.2 Bref historique de l'étude du comportement des câbles . . . . .	5
2.3 Mise en équation du comportement structural des câbles suspendus . . . . .	6
2.3.1 Comportement statique . . . . .	6
2.3.2 Comportement dynamique . . . . .	9
2.3.2.1 Comportement dynamique hors plan . . . . .	13
2.3.2.2 Comportement dynamique dans le plan . . . . .	14
2.3.2.2.1 Modes antisymétriques : . . . . .	14
2.3.2.2.2 Modes symétriques : . . . . .	15

2.4	Modélisation numérique par différences finies . . . . .	20
2.5	Modélisation par éléments finis . . . . .	27
2.6	Techniques expérimentales . . . . .	30
	 CHAPITRE 3 COMPORTEMENT STATIQUE . . . . .	33
3.1	Introduction . . . . .	33
3.2	Formulation analytique . . . . .	36
3.2.1	Analyse du câble sain . . . . .	36
3.2.2	Analyse du câble endommagé . . . . .	38
3.3	Modélisation numérique par différences finies . . . . .	42
3.3.1	Formulation simplifiée . . . . .	43
3.3.2	Formulation avec rectification du terme de masse . . . . .	43
3.3.3	Formulation avec correction du terme de rigidité . . . . .	46
3.3.4	Comparaison des 3 formulations . . . . .	47
3.3.5	Analyse du câbles incliné . . . . .	47
3.3.5.1	Formulation simplifiée . . . . .	49
3.3.5.2	Formulation généralisée . . . . .	50
3.4	Conclusion . . . . .	54
	 CHAPITRE 4 COMPORTEMENT DYNAMIQUE . . . . .	56
4.1	Introduction . . . . .	56
4.2	Formulation analytique . . . . .	56
4.2.1	Câble sain . . . . .	57
4.2.2	Câble endommagé . . . . .	58
4.2.3	Discussion . . . . .	62
4.3	Modélisation numérique par différences finies . . . . .	66
4.3.1	Formulation simplifiée . . . . .	68
4.3.2	Formulation avec rectification du terme de masse . . . . .	69
4.3.3	Formulation avec rectification du terme de rigidité . . . . .	71
4.3.4	Comparaison . . . . .	72
4.3.5	Câbles inclinés . . . . .	73

4.3.6	Câbles endommagés . . . . .	74
4.3.6.1	Modes en plan . . . . .	79
4.3.6.2	Modes hors plan . . . . .	83
4.4	Conclusion . . . . .	84
 CHAPITRE 5 PROBLÈME INVERSE : DÉTECTION DE L'ENDOMMAGEMENT . . . . .		89
5.1	Introduction . . . . .	89
5.2	Formulation du problème inverse . . . . .	90
5.3	Résolution par différences finies . . . . .	93
5.4	Exemple de résolution . . . . .	98
5.4.1	Etude du nombre de modes à prendre en compte . . . . .	98
5.4.2	Scenario d'endommagement multiple . . . . .	101
5.5	Conclusion . . . . .	102
 CHAPITRE 6 CONCLUSIONS . . . . .		108
6.1	Rappel des objectifs . . . . .	108
6.2	Comparaison de 3 méthodes de calcul . . . . .	108
6.3	Influence de l'endommagement . . . . .	109
6.4	Position de l'endommagement . . . . .	109
6.5	Détection de l'endommagement . . . . .	110
 RÉFÉRENCES . . . . .		112

## LISTE DES FIGURES

FIG. 2.1	Géométrie d'un câble suspendu et équilibre statique d'un tronçon élémentaire (Bouaanani, 2005).	8
FIG. 2.2	Géométrie d'un câble suspendu et forces dynamiques sur un tronçon élémentaire (Bouaanani, 2005).	12
FIG. 2.3	Modes hors plan $n = 1$ (---), $n = 2$ (..) et $n = 3$ (-·), câble au repos (-).	14
FIG. 2.4	Composante verticale pour les 3 premiers modes antisymétriques en plan.	16
FIG. 2.5	Composante longitudinale pour les 3 premiers modes antisymétriques en plan.	17
FIG. 2.6	Résolution graphique pour les premières fréquences propres.	18
FIG. 2.7	Composante verticale du premier mode en fonction de $\lambda^2$ .	19
FIG. 2.8	Représentation des éléments et noeuds du câble discretisé.	22
FIG. 2.9	Vibromètre laser en place, photo extraite de CTL (2003).	25
FIG. 2.10	Modification du profil du câbles par la pluie, figure tirée de Lemaitre (2006).	26
FIG. 2.11	Pont de Cochrane, photo issue du site de MCEER.	27
FIG. 2.12	Elément de câble à 2 noeuds dans sont repère local.	27
FIG. 3.1	Sections typiques de câbles : (a) câble mono-toron à 7 fils ; (b) câble mono-toron à 19 fils ; (c) câble mono-toron à 37 fils ; (d) câble à 7 torons à 7 fils ; (e) câble à 6 torons à 19 fils ; (f) câble à 7 torons à 19 fils.	34
FIG. 3.2	Équilibre statique d'un tronçon élémentaire du câble en incluant l'effet de la rigidité flexionnelle (Bouaanani, 2005).	36
FIG. 3.3	Réduction de la section du câble.	38
FIG. 3.4	Profil statique du câble 1.	42
FIG. 3.5	Différences relatives (en %) de fléchissement entre les différentes méthodes en différences finies pour des câbles sains.	48

FIG. 3.6	Eléments et noeuds du câble incliné. . . . .	49
FIG. 3.7	Profil du câble 1 par rapport à la tangente à différentes inclinaisons (en °), calculé en différences finies. . . . .	53
FIG. 3.8	Profil du câble 10 par rapport à la tangente à différentes inclinaisons (en °), calculé en différences finies. . . . .	55
FIG. 4.1	Réduction de la section du câble. . . . .	58
FIG. 4.2	$g(X_d)$ pour $C = 1$ courbe (-), $C = 0.8$ courbe (- -), $C = 0.6$ courbe (..) et $C = 0.4$ courbe (- ·). . . . .	62
FIG. 4.3	$\Delta f(X_d)/f$ pour le câble 1. . . . .	63
FIG. 4.4	Variation de $\Delta f/f$ en fonction du paramètre $\alpha$ pour le câble 1. . .	64
FIG. 4.5	$\Delta f(a/L)/f$ pour le câble 1. . . . .	65
FIG. 4.6	Équilibre dynamique d'un tronçon élémentaire du câble en incluant l'effet de la rigidité flexionnelle (Bouaanani, 2005). . . . .	67
FIG. 4.7	Premiers modes des câbles 1 à 12 calculés en différences finies. . .	70
FIG. 4.8	Noeuds au niveau des interfaces du câble endommagé. . . . .	75
FIG. 4.9	Différence relative entre les câbles sains et endommagés calculés en différences finies. . . . .	81
FIG. 4.10	Différence relative entre les câbles sains et endommagés calculés en différences finies, courbes (--) et en éléments finis, courbes (- -). .	85
FIG. 4.11	Convergence de la première fréquence propre du câble 1 sain en différences finies. . . . .	86
FIG. 4.12	$\Delta f/f$ en fonction de la position de l'endommagement pour plusieurs résolutions. . . . .	86
FIG. 4.13	$\Delta f$ en fonction de la proportion de l'endommagement . . . . .	87
FIG. 4.14	Différence relative entre les câbles sains et endommagés calculés en différences finies, hors plan. . . . .	88
FIG. 5.1	Valeurs calculées de $\zeta$ avec le premier mode. . . . .	99
FIG. 5.2	Valeurs calculées de $\zeta$ avec les 2 premiers modes. . . . .	100
FIG. 5.3	Valeurs calculées de $\zeta$ avec les 4 premiers modes. . . . .	101
FIG. 5.4	Valeurs calculées de $\zeta$ avec les 8, 16 et 32 premiers modes. . . . .	103

FIG. 5.5	Valeurs calculées de $\zeta$ avec les 48 et 64 premiers modes. . . . .	104
FIG. 5.6	Détection avec les modes 5 à 10. . . . .	105
FIG. 5.7	Détection avec les modes 5 à 10, endommagement faible. . . . .	105
FIG. 5.8	Détection de 3 endommagements avec les modes 5 à 10 et 1 à 48. .	106
FIG. 5.9	Détection de plusieurs endommagements avec les modes 5 à 10 et 1 à 48. . . . .	107

## LISTE DES TABLEAUX

TAB. 3.1	Propriétés des câbles étudiés. . . . .	35
TAB. 3.2	Tensions en fonction de la position de l'endommagement. . . . .	40
TAB. 3.3	Position de la flèche maximale en fonction de l'endommagement. . . . .	41
TAB. 3.4	Coordonnée de l'élément de flèche maximale. . . . .	54
TAB. 4.1	Propriétés des câbles. . . . .	57
TAB. 4.2	Fréquence des premiers modes antisymétriques. . . . .	57
TAB. 4.3	Fréquence des premiers modes symétriques. . . . .	58
TAB. 4.4	Répartition des fréquences propres . . . . .	58
TAB. 4.5	$\Delta f/f(\%)$ pour différents scénarios d'endommagement. . . . .	66
TAB. 4.6	Fréquences propres des premiers modes calculées par différences finies. . . . .	69
TAB. 4.7	Fréquence du premier mode avec les 2 méthodes. . . . .	72
TAB. 5.1	Position des matrices élémentaires. . . . .	98

## LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

$T_s$ :	Tension statique
$H_s$ :	Projection horizontale de la tension statique
$V_s$ :	Projection verticale de la tension statique
$T_d$ :	Tension dynamique
$H_d$ :	Projection horizontale de la tension dynamique
$V_d$ :	Projection verticale de la tension dynamique
$h, r$ :	Projections horizontale et verticale de la force linéaire s'appliquant au câble
$(x, y, z)$ :	Coordonnées Cartésiennes de l'équilibre statique
$(u, w, v)$ :	Déplacement dynamique
$L$ :	Portée horizontale du câble
$d$ :	Dénivellation des appuis du câble
$\tilde{m}, \bar{m}, m$ :	Masse linéique du câble dans les configurations déchargée, statique et dynamique.
$\tilde{s}, \bar{s}, s$ :	Coordonnée curviligne du câble dans les configurations déchargée, statique et dynamique.
$\tilde{S}$ :	Longueur à vide du câble
$\mathbf{K}_s, \mathbf{K}_d, \mathbf{K}_w$ :	Matrices de rigidité statique, dynamique en plan et hors plan.
$\mathbf{M}$ :	Matrice de masse
$E$ :	Module d'Young
$A$ :	Aire de la section
$I$ :	Moment d'inertie
$\omega$ :	Pulsation propre
$f$ :	Fréquence propre
$\lambda$ :	Paramètre adimensionnel d'extensibilité-fléchissement

## CHAPITRE 1

### INTRODUCTION

#### 1.1 Contexte du projet de recherche

Coïncidant avec l'apparition des premiers ordinateurs, le développement des méthodes numériques a marqué un tournant dans le domaine de la construction avec l'apparition d'ouvrages de grande ampleur, notamment à base de structures câblées. Du pont de singe au Viaduc de Millau, la différence paraît immense. Si l'usage de telles structures est courant, la complexité de leur comportement n'en demeure pas moins importante. Nombreux sont les exemples où la découverte d'un phénomène non prévu a conduit dans le meilleur des cas à la fermeture et à la rectification de l'ouvrage, et dans le pire des cas à la ruine. On citera simplement en exemple le Millenium Bridge à Londres ou le toit du Stade Olympique de Montréal, dont les conceptions initiales ont dû être revues pour un meilleur fonctionnement. Plus récemment, l'apparition sur les haubans de ponts d'un phénomène appelé excitation par couplage pluie-vent, montre qu'il semble y avoir encore beaucoup de chemin à accomplir pour parfaire notre connaissance du comportement des câbles.

Outre les phénomènes non prévus lors de la conception, se pose également aujourd'hui pour de nombreux ouvrages câbles le problème autrement plus complexe de la surveillance de leur santé structurale. Car il faut bien l'admettre, ceux qui faisait il y a encore 20 ans la fierté d'une ville, contribuaient à l'attrait touristique d'une région ou constituaient la vitrine technologique d'un pays, vieillissent et requièrent maintenant de coûteuses réparations pour les maintenir en état de fonctionnement sécuritaire. Comment alors s'assurer de la bonne santé des ouvrages, comment vérifier que les éléments essentiels ne sont pas endommagés par l'usure, une utilisation excessive, la corrosion ou autre, provoquant ainsi des pertes de rigidité et de résistance, quand procéder à des remplacements et en quelles proportions, sont autant de question auxquelles les ingénieurs ont aujourd'hui

à répondre. Certaines constructions modernes comprennent des instruments installés *in situ* permettant de vérifier leur santé structurale en temps réelle. La plupart des ouvrages nécessitent cependant des interventions d'auscultation ponctuelles à espaces réguliers. Plusieurs techniques d'Auscultation Non Destructive (AND) peuvent être utilisées pour évaluer localement l'endommagement dans une structures. Elles utilisent généralement les ultrasons, la radiographie, les champs magnétiques ou thermiques. Ces techniques supposent néanmoins la connaissance préalable plus ou moins précise de la position de la zone endommagée. De surcroît, elles ne sont efficaces que lorsque la zone endommagée est accessible et peu profonde. Par conséquent, des techniques plutôt basées sur l'étude des vibrations de la structure peuvent s'avérer utiles afin de mieux renseigner sur l'état global du système structural. Même si de telles méthodes ont prouvé leur performance dans certains cas, leur fiabilité ne fait toujours pas état d'un consensus général. Ces techniques sont généralement couplées avec des modèles numériques recalés d'après les résultats expérimentaux. À cet égard, il est important de disposer de formulations suffisamment sensibles pour pouvoir rendre compte adéquatement des modifications souvent faibles des propriétés mécaniques, causées par un endommagement des éléments calculés.

## 1.2 Problématique

Ce mémoire a pour objectif principal d'étudier le comportement statique et dynamique de câbles suspendus endommagés localement. En premier lieu nous nous poserons la question de savoir quelles sont les influences des simplifications souvent effectuées dans le calcul du profil statique des câbles. Quelle est par exemple l'importance de la prise en compte de termes supplémentaires dans la formulation ou de la présence d'un endommagement ? En deuxième lieu, nous nous interrogerons sur la pertinence d'améliorer la précision des formulations de calcul dynamique des câbles, ainsi que l'influence d'un endommagement. Est-il nécessaire par exemple de prendre en compte la rigidité flexionnelle dans les calculs statiques ou numériques, ou peut-on simplement assimiler un câble à un assemblage de barres ? Enfin nous nous demanderons s'il est possible, moyennant une formulation suffisamment précise de détecter à partir de la réponse dynamique d'un

câble un éventuel défaut dans le câble, représenté par un changement de ses propriétés mécaniques.

### 1.3 Objectifs

L'objectif de l'étude est de comparer différentes méthodes de calcul du comportement dynamique des câbles. Cependant, comme les vibrations que nous allons considérer se font autour d'une position d'équilibre, il nous faudra d'abord déterminer cet équilibre statique. Nous commencerons donc par étudier plusieurs formulations statiques et tenterons de les améliorer pour qu'elles prennent en compte les effets que nous souhaitons étudier. A partir de là, nous pourrons reprendre la même démarche, mais avec l'étude des formulations dynamiques. Enfin, nous tenterons d'appliquer les formulations que nous aurons développé pour résoudre le problème inverse, à savoir la caractérisation de l'état d'un câble à partir de ses données dynamiques.

### 1.4 Méthodologie

Nous commencerons par effectuer une revue de la littérature publiée sur les câbles. Nous chercherons en particulier des méthodes de résolutions analytiques et numériques, que nous reporterons dans ce mémoire dans le but de les comparer et les améliorer. Nous chercherons également dans quelles mesures les méthodes sus-décrivées sont utilisées en pratique. Nous comparerons ensuite les méthodes, que nous aurons relevé dans la littérature afin de mettre en évidence leurs avantages et leurs défauts, puis nous tenterons de les améliorer en proposant des formulations les généralisant, ou des formulations nouvelles, d'abord dans le cas statique, puis par la suite dans le cas de l'étude du comportement dynamique. Nous confrontrons également les méthodes que nous aurons développé afin de mettre en évidence l'amélioration apportée par notre travail. Afin de favoriser la comparaison, nous utiliserons dans ce mémoire un nombre limité de câbles échantillons censés couvrir un large éventail d'applications. Enfin dans la dernière partie qui constituera la formulation du problème inverse, nous tenterons d'adapter un algorithme de détection existant à l'une des méthodes de calcul que nous aurons développé, puis nous en testerons

les capacités avec des exemples numériques.

### **1.5 Organisation du mémoire**

Ce mémoire est organisé en 3 parties distinctes. La première consiste en une étude statique, selon plusieurs modèles et hypothèses des câbles sains et endommagés. La deuxième partie reprend les modèles de l'étude statique et les étend au calcul dynamique. La troisième partie, propose enfin un algorithme de détection de l'endommagement dans les câbles.

## CHAPITRE 2

### REVUE DE LITTÉRATURE

#### **2.1 Introduction**

Ce chapitre a pour objectif de présenter une revue de littérature sur les nombreux travaux effectués sur l'étude des câbles. Étant donné l'ampleur des publications sur le sujet, il nous est difficile d'en faire une revue exhaustive. Nous avons choisi de ne citer que certains auteurs dont le travail nous a paru proche de l'objectif recherché dans ce mémoire. La première partie de cette revue cite quelques unes des études théoriques et numériques traitant du comportement dynamique des câbles. La deuxième partie décrit certaines applications expérimentale des résultats théoriques à des fins d'évaluation de la santé d'ouvrages existants.

#### **2.2 Bref historique de l'étude du comportement des câbles**

De nombreuses publications ont traité de la dynamique des câbles de manière analytique. Les premiers auteurs à s'être penché sur le sujet sont d'Alembert, Euler, Bernoulli et Lagrange. Ils ont essayé de comprendre les vibrations des câbles tout en contribuant au développement du calcul différentiel. Au 19<sup>e</sup> siècle, les équations dynamiques d'un élément de câble furent dérivées par Poisson, puis utilisées par Rohrs (1851) et Routh (1868) pour obtenir respectivement des solutions approchées et exactes des modes propres pour des petites oscillations dans des câbles inextensibles avec masse uniforme. D'autres études ont été menées à partir du milieu du 20<sup>e</sup> et l'effondrement du Pont de Tacoma. Des auteurs comme Pugsley (1949) ou Saxon et Cahn (1953), ont cherché des solutions, mais sans parvenir à reproduire le spectre de la corde tendue à la limite d'un fléchissement évanescent. Le modèle développé par Simpson (1966) et Soler (1970) par la suite était capable de faire la transition entre la corde tendu et le câble fléchi, mais ce problème, ainsi que celui de la dégénérescence des modes en plan, ne fut réellement résolu que par

Irvine et Caughey (1974), en introduisant l'effet de l'élasticité du câble. En fait, la grande diversité des applications des câbles a amené à l'élaboration de deux théories, l'une pour les câbles tendus (paraboliques) et l'autre pour les câbles lâches (grand fléchissement). Pour les premiers, des solutions analytiques au problème dynamique existent, la résolution étant simplifiée par l'approximation parabolique. Pour les autres, une formulation discrète et des méthodes numériques sont utilisées pour la résolution. Parmi les analyses non linéaires sur les câbles, on citera Leonard et Recker (1972), West et al. (1975), Henghold et al. (1977), Gambhir et Batchelor (1978), Rosenthal (1981), Fried, (1982) et Zui et al. (1996).

Plus récemment, et coïncidant avec le développement des méthodes numériques, les différences finies et éléments finis ont été utilisés pour l'étude de différents aspects non linéaires du comportement dynamique. On citera notamment les travaux de Ni et al. (2000) et Wu et al. (2003) concernant les différences finies et ceux de Ni et al. (2002) et Desai et al., (1995) pour les éléments finis.

### **2.3 Mise en équation du comportement structural des câbles suspendus**

La littérature abonde de formulations traitant du comportement statique et dynamique des câbles, comme nous l'avons vu plus haut. L'objectif de ce paragraphe est de présenter les ingrédients de base régissant le comportement statique et dynamique des câbles. La formulation présentée ici s'inspire fortement de celle proposée par Irvine (1981) pour décrire le comportement des câbles ayant une rigidité flexionnelle négligeable.

#### **2.3.1 Comportement statique**

En première approche, le profil statique d'un câble peut être déterminé en supposant que sa rigidité flexionnelle est négligeable et que sa masse linéique est constante en fonction de sa longueur. Nous supposerons que la section du câble n'est pas nécessairement constante,

et que le câble n'est pas soumis à d'autre chargement que son poids propre. La portée du câble est délimitée par deux appuis A et B de coordonnées respectives  $(x_A, y_A, z_A)$  et  $(x_B, y_B, z_B)$  dans un système d'axes Cartésiens  $(x, y, z)$ . Notons  $\tilde{S}$  la longueur curviligne totale du câble non chargé et  $\tilde{m}g$  son poids propre par unité de longueur curviligne dans cette configuration géométrique. La coordonnée Lagrangienne d'un point du câble dans sa configuration non chargée est notée  $\tilde{s}$ . La configuration statique chargée est obtenue lorsque le câble est soumis à son poids propre. Notons  $\bar{m}g$  le poids propre du câble chargé statiquement par unité de longueur curviligne. La coordonnée Lagrangienne d'un point du câble dans cette configuration est désignée par  $\bar{s}$ .

Considérons un tronçon élémentaire d'un câble suspendu dans sa configuration statique chargée tel qu'illustré sur la figure 2.1. L'équilibre des forces implique

$$dH_s = 0 \quad (2.1)$$

$$dV_s = -\bar{m}gd\bar{s} = -\tilde{m}gd\tilde{s} \quad (2.2)$$

$$H_s \frac{dz}{dx} = V_s \quad (2.3)$$

où  $H_s$  et  $V_s$  sont les projections horizontale et verticale de la force de traction dans le câble. L'équation (2.1) montre que la projection horizontale de la force de traction dans le câble est constante le long du câble, d'où  $H_s = H_A$  où  $H_A$  est la projection horizontale de la force de traction à l'appui A. Dans la suite du texte, nous noterons invariablement  $H_s$  ou  $H_A$  la projection horizontale de la force de traction dans le câble.

Nous avons également

$$T \frac{dx}{ds} = H_s = H_A \quad (2.4)$$

$$T \frac{dz}{ds} = V_s = V_A - \bar{m}g\bar{s} = V_A - \tilde{m}g\tilde{s} \quad (2.5)$$

où  $T$  est la force de traction dans le câble et où  $V_A$  est la projection verticale de la force

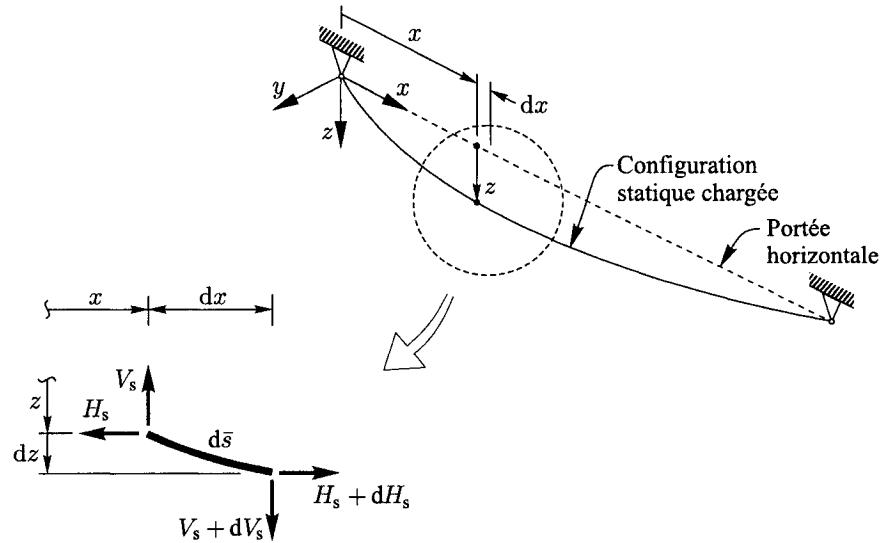


FIG. 2.1 Géométrie d'un câble suspendu et équilibre statique d'un tronçon élémentaire (Bouaanani, 2005).

de traction à l'appui A. La compatibilité géométrique impose

$$\left(\frac{dx}{d\bar{s}}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\bar{s}}\right)^2 = 1 \quad (2.6)$$

d'où, en utilisant les équations (2.4) et (2.5)

$$T = \sqrt{H_A^2 + (V_A - \tilde{m}g\tilde{s})^2} \quad (2.7)$$

Par ailleurs, la loi de Hooke se traduit par

$$\frac{d\bar{s} - d\tilde{s}}{d\tilde{s}} = \frac{T}{EA} \quad (2.8)$$

où  $E$  et  $A$  sont respectivement le module d'Young et la section du câble, soit

$$d\bar{s} = \left(1 + \frac{T}{EA}\right) d\tilde{s} \quad (2.9)$$

En utilisant les équations (2.4), (2.5), (2.7) et (2.9), on démontre aisément que

$$\frac{dx}{d\tilde{s}} = \frac{H_A}{\sqrt{H_A^2 + (V_A - \tilde{m}g\tilde{s})^2}} + \frac{H_A}{EA(\tilde{s})} \quad (2.10)$$

$$\frac{dz}{d\tilde{s}} = \frac{V_A - \tilde{m}g\tilde{s}}{EA(\tilde{s})} + \frac{V_A - \tilde{m}g\tilde{s}}{\sqrt{H_A^2 + (V_A - \tilde{m}g\tilde{s})^2}} \quad (2.11)$$

On peut résoudre pour les coordonnées

$$x(\tilde{s}) = \frac{H_A}{\tilde{m}g} \left[ \sinh^{-1} \left( \frac{V_A}{H_A} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{V_A - \tilde{m}g\tilde{s}}{H_A} \right) \right] + \int_0^{\tilde{s}} \frac{H_A}{EA(\tilde{s})} d\tilde{s} \quad (2.12)$$

$$z(\tilde{s}) = \int_0^{\tilde{s}} \frac{\tilde{m}g}{EA(\tilde{s})} \left( \frac{V_A}{\tilde{m}g} - \tilde{s} \right) d\tilde{s} + \frac{H_A}{\tilde{m}g} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{V_A}{H_A} \right)^2} - \sqrt{1 + \left( \frac{V_A - \tilde{m}g\tilde{s}}{H_A} \right)^2} \right] \quad (2.13)$$

Les conditions aux limites dans le cas d'appuis fixes imposent

$$L = \int_0^{\tilde{S}} \frac{H_A}{EA(\tilde{s})} d\tilde{s} + \frac{H_A}{\tilde{m}g} \left[ \sinh^{-1} \left( \frac{V_A}{H_A} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{V_A - \tilde{m}gL_0}{H_A} \right) \right] \quad (2.14)$$

$$d = \int_0^{\tilde{S}} \frac{\tilde{m}g}{EA(\tilde{s})} \left( \frac{V_A}{\tilde{m}g} - \tilde{s} \right) d\tilde{s} + \frac{H_A}{\tilde{m}g} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{V_A}{H_A} \right)^2} - \sqrt{1 + \left( \frac{V_A - \tilde{m}gL_0}{H_A} \right)^2} \right] \quad (2.15)$$

En général, les coordonnées  $d$  et  $L$  des supports sont connues ainsi que le poids propre  $\tilde{m}g$ .

On peut soit imposer la longueur  $\tilde{S}$ , auquel cas les inconnues sont  $H_A$  et  $V_A$ , soit imposer la tension horizontale  $H_A$  auquel cas les inconnues sont  $\tilde{S}$  et  $V_A$ .

### 2.3.2 Comportement dynamique

L'équilibre statique étant réalisé, on perturbe un élément de câble en appliquant un déplacement par rapport à sa position d'équilibre  $(u, w, v)$ . Les équations de la dynamique pour les trois directions de l'espace s'écrivent alors en l'absence d'amortissement (Irvine,

1981)

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left[ (T_s + T_d) \left( \frac{dx}{d\bar{s}} + \frac{\partial u}{\partial \bar{s}} \right) \right] = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left[ (T_s + T_d) \left( \frac{dz}{d\bar{s}} + \frac{\partial v}{\partial \bar{s}} \right) \right] = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - mg \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left[ (T_s + T_d) \frac{\partial w}{\partial \bar{s}} \right] = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.18)$$

où  $T_s$  est la tension statique dans le câble et peut s'exprimer en fonction des forces décrites plus haut :  $T_s = \sqrt{H_s^2 + V_s^2}$  et  $T_d$  est la tension supplémentaire générée, fonction du temps et de la position. La présence des coordonnées statiques dans les équations dynamiques traduit la présence d'une rigidité géométrique dans le problème. La masse  $m$  est la masse linéique du câble dans la configuration déformée dynamique. Dans les équations précédentes, on va introduire les équations de l'équilibre statique 2.4 et 2.5, on va négliger les termes du second ordre ainsi que le déplacement longitudinal  $u$  du câble. Les équations 2.17 et 2.18 peuvent alors être réduites à

$$H_s \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + H_d \frac{d^2 z}{dx^2} = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

$$H_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.20)$$

où  $H_d$  est la tension horizontale additionnelle créée, fonction du temps, dont nous cherchons maintenant l'expression. Soient  $d\bar{s}$  et  $ds$  les longueurs d'un élément infinitésimal de câble dans les configurations respectivement statique et dynamique. Leurs expressions sont données par

$$d\bar{s}^2 = dx^2 + dz^2 \quad (2.21)$$

$$ds = (dx + du)^2 + (dz + dv)^2 \quad (2.22)$$

La différence relative de longueur entre les deux configurations vaut au second ordre

$$\frac{ds - d\bar{s}}{d\bar{s}} = \frac{du}{ds_b} \frac{dx}{d\bar{s}} + \frac{dv}{ds_b} \frac{dz}{d\bar{s}} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{d\bar{s}} \right)^2 \quad (2.23)$$

or la loi de Hooke stipule que

$$\frac{T_d}{EA} = \frac{ds - d\bar{s}}{d\bar{s}} \quad (2.24)$$

où  $T_d$  est la tension supplémentaire créée dans la configuration dynamique. La projection horizontale de celle-ci nous donne

$$H_d = T_d \frac{dx}{d\bar{s}} \quad (2.25)$$

ce qui après substitution dans l'équation 2.24 permet d'obtenir au premier ordre

$$\frac{H_d}{EA} \left( \frac{d\bar{s}}{dx} \right)^3 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dz}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.26)$$

On intègre maintenant cette équation sur  $x$  entre 0 et  $L$ , comme  $u(0) = u(L) = 0$ , le premier terme du second membre disparaît. On effectue alors une intégration par partie du deuxième terme du second membre et on obtient alors

$$\frac{H_d L_e}{EA} = \frac{mg}{H_s} \int_0^L v \, dx \quad (2.27)$$

où

$$L_e = \int_0^L \left( \frac{d\bar{s}}{dx} \right)^3 \, dx \quad (2.28)$$

Les équations dynamiques peuvent également être obtenues à partir des notations de la figure 2.2. En effet, on commence par écrire les conditions d'équilibre statique de l'élément de câbles (équations 2.1 à 2.3), puis à partir de l'équilibre statique, on envisage un petit déplacement dynamique vertical de l'élément de câble, générant des forces dynamiques additionnelles  $H_d$  et  $V_d$  respectivement horizontales et verticales dans le câble. L'équilibre

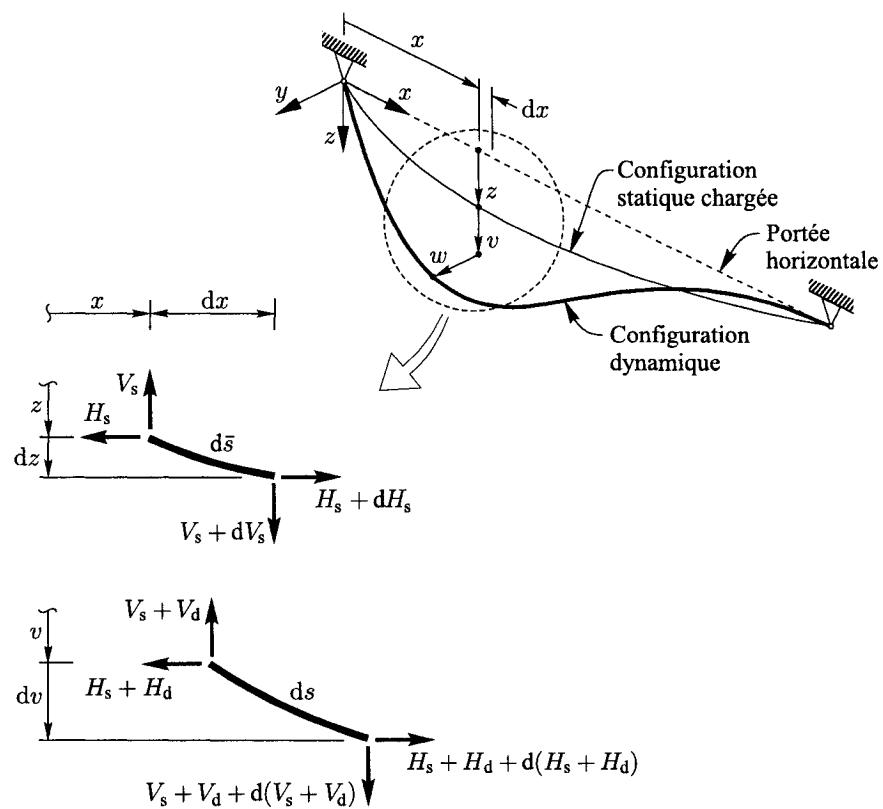


FIG. 2.2 Géométrie d'un câble suspendu et forces dynamiques sur un tronçon élémentaire (Bouaanani, 2005).

des forces s'écrit alors :

$$d(H_s + H_d) = 0 \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial V_d}{\partial x} = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.30)$$

$$(H_s + H_d) \left( \frac{dz}{dx} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - V_s - V_d = 0 \quad (2.31)$$

En introduisant 2.3, l'équation 2.31 devient :

$$H_s \frac{dz}{dx} + V_d - (H_s + H_d) \left( \frac{dz}{dx} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.32)$$

soit en introduisant 2.29 et 2.30

$$H_d \frac{d^2 z}{dx^2} + (H_s + H_d) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.33)$$

ce qui en ne retenant que les termes d'ordre 1 donne l'équation 2.19.

La résolution des équations 2.19 et 2.20 se fait en fonction du type de vibrations que l'on recherche.

### 2.3.2.1 Comportement dynamique hors plan

On va considérer l'équation dynamique 2.20. On suppose que

$$w(x, t) = \hat{w}(x)e^{i\omega t} \quad (2.34)$$

$\hat{w}$  représente alors la forme du mode, indépendante du temps. Les conditions aux frontières imposent  $\hat{w}(0) = \hat{w}(L) = 0$ . L'équation dynamique se réduit alors à

$$H_s \frac{d^2 \hat{w}}{dx^2} + m\omega^2 \hat{w} = 0 \quad (2.35)$$

On trouve aisément les fréquences propres et les modes propres associés

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{H_s}{m}} \quad (2.36)$$

$$\hat{w}_n = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.37)$$

On peut représenter la forme des 3 premiers modes, par rapport au câble au repos (Figure 2.3).

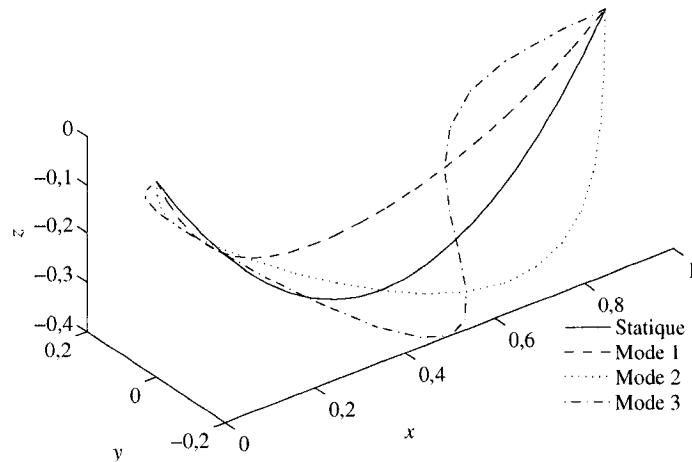


FIG. 2.3 Modes hors plan  $n = 1$  (- -),  $n = 2$  (· ·) et  $n = 3$  (- ·), câble au repos (-).

### 2.3.2.2 Comportement dynamique dans le plan

**2.3.2.2.1 Modes antisymétriques :** Les modes antisymétriques correspondent aux modes introduisant une tension additionnelle  $H_d = 0$ . Dans ces modes, la composante

verticale est antisymétrique, alors que la composante horizontale est symétrique. En introduisant cette nouvelle hypothèse on peut simplifier l'équation du mouvement 2.19 comme suit

$$H_s \frac{d^2\hat{v}}{dx^2} + m\omega^2 \hat{v} = 0 \quad (2.38)$$

où on a effectué la substitution  $v(x, t) = \hat{v}(x)e^{i\omega t}$ . L'équation de compatibilité géométrique donne

$$\frac{d\hat{u}}{dx} + \frac{dz}{dx} \frac{d\hat{v}}{dx} = 0 \quad (2.39)$$

où on a aussi effectué la substitution  $u(x, t) = \hat{u}(x)e^{i\omega t}$ . Les conditions aux frontières imposent  $\hat{v}(0) = \hat{v}(L/2) = 0$ , ce qui donne finalement pour les fréquences propres :

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{L} \sqrt{\frac{H_s}{m}} \quad (2.40)$$

La composante verticale s'écrit ainsi

$$\hat{v}_n = A_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \quad (2.41)$$

et la composante horizontale

$$\hat{u}_n = -\frac{A_n}{2} \left( \frac{mgL}{H_s} \right) \left[ \left( 1 - \frac{2x}{L} \right) \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + \frac{1 - \cos(2n\pi x/L)}{n\pi} \right] \quad (2.42)$$

Les résultats pour les modes  $n = 1$ , courbe (- -),  $n = 2$ , courbe (· ·) et  $n = 3$ , courbe (− ·) sont représentés sur les figures 2.4 et 2.5.

**2.3.2.2 Modes symétriques :** Les modes symétriques correspondent à une composante verticale symétrique et une composante longitudinale antisymétrique, ainsi qu'à une tension additionnelle non nulle. Lorsque l'on effectue la séparation des variables d'espace et de temps comme vu précédemment, l'équation 2.19 devient alors

$$H_s \frac{d^2\hat{v}}{dx^2} + m\omega^2 \hat{v} = \frac{mg}{H_s} \widehat{H_d} \quad (2.43)$$

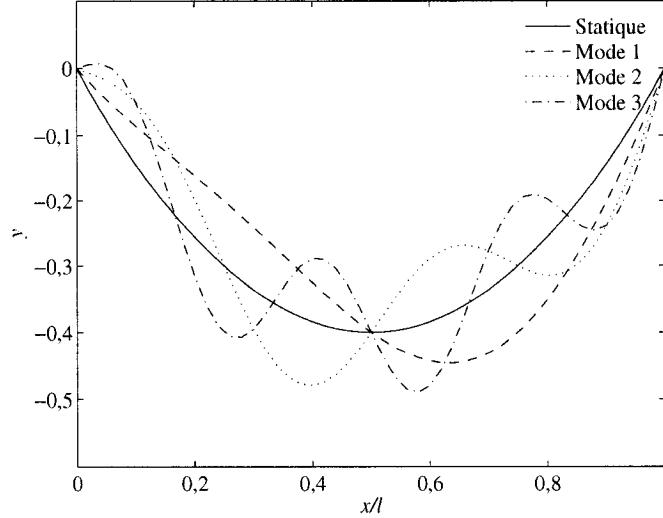


FIG. 2.4 Composante verticale pour les 3 premiers modes antisymétriques en plan.

où comme pour les variables précédentes  $\widehat{H}_d$  est la variable  $H_d$  affranchie de  $t$ . Les solutions doivent satisfaire aux conditions au frontières, soit un déplacement nul aux appuis. En adimensionnant les variables par

$$W = \frac{\widehat{v} H_s}{mg L^2} \quad (2.44)$$

$$X = \frac{x}{L} \quad (2.45)$$

$$H = \frac{\widehat{H}_d}{H_s} \quad (2.46)$$

$$\Omega = \frac{\omega L}{\sqrt{H_s/m}} \quad (2.47)$$

l'équation 2.43 devient, après remaniement

$$W = \frac{H}{\Omega^2} \left[ 1 - \tan \frac{\Omega}{2} \sin(\Omega X) - \cos(\Omega X) \right] \quad (2.48)$$

En reprenant l'expression de  $H$  calculée en 2.46, on trouve alors

$$\tan \frac{\Omega}{2} = \frac{\Omega}{2} - \frac{4}{\lambda^2} \left( \frac{\Omega}{2} \right)^3 \quad (2.49)$$

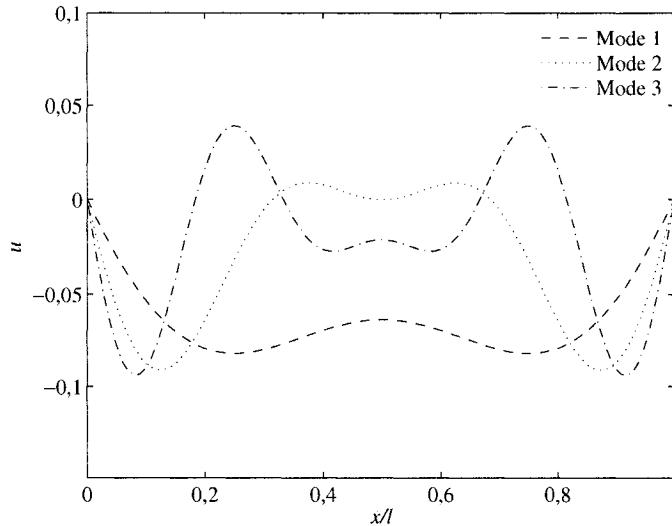


FIG. 2.5 Composante longitudinale pour les 3 premiers modes antisymétriques en plan.

où

$$\lambda^2 = \frac{\left(\frac{mgL}{H_s}\right)^2 L}{\left(\frac{H_s L_e}{EA}\right)} \quad (2.50)$$

Le paramètre  $\lambda$ , dit paramètre d'Irvine (Irvine, 1981), est très important puisque c'est uniquement de lui que dépendent les fréquences propres correspondant aux modes symétriques. L'équation 2.49 est une équation transcendentale, que l'on résout graphiquement ou numériquement pour différentes valeurs de  $\lambda^2$ . La figure 2.6 illustre les graphiques de la fonction  $y = \tan(\Omega/2)$  [courbe continue ( $-$ )], et de la fonction  $y = \Omega/2 - 4/\lambda^2(\Omega/2)^3$  pour  $\lambda^2 < 4\pi^2$  [courbe ( $--$ )], pour  $\lambda^2 = 4\pi^2$  [courbe ( $\cdot\cdot$ )], pour  $\lambda^2 > 4\pi^2$  [courbe ( $-\cdot$ )], et pour  $\lambda^2 \rightarrow \infty$  [courbe ( $+-$ )].

Les types de comportement suivant peuvent être dégagés :

- Si  $\lambda^2 < 4\pi^2$ , la fréquence du premier mode symétrique est plus faible que la fréquence du premier mode antisymétrique, la composante verticale du premier mode n'a pas de noeud.
- Si  $\lambda^2 = 4\pi^2$ , les fréquences des premiers modes symétriques et antisymétriques sont égales, ce qui produit une superposition modale.

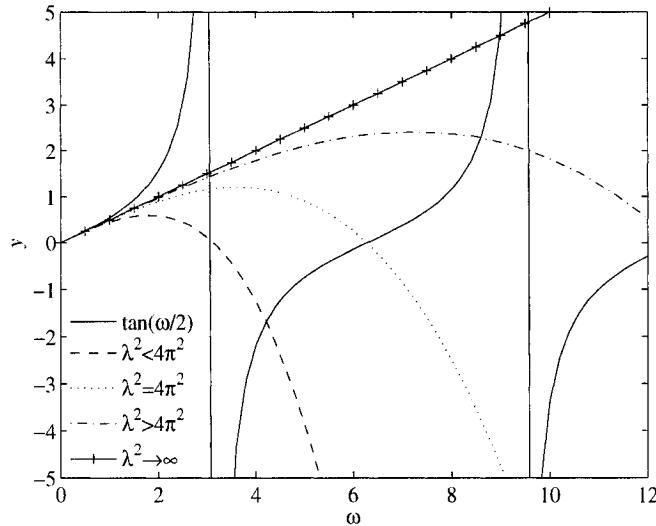


FIG. 2.6 Résolution graphique pour les premières fréquences propres.

- Si  $\lambda^2 > 4\pi^2$ , la fréquence du premier mode symétrique est plus élevée et 2 noeuds apparaissent.

On trace la forme de la composante longitudinale pour le premier mode symétrique (Figure 2.7), pour  $\lambda^2 < 4\pi^2$  courbe (- -),  $\lambda^2 = 4\pi^2$  courbe (..) et  $\lambda^2 > 4\pi^2$  courbe (- ·).

La formulation précédente a été reprise et développée par de nombreux auteurs. On citera par exemple Zui et al. (1996) qui effectuent une résolution analytique et obtiennent à partir de l'équation dynamique des câbles des formules permettant d'obtenir la tension du câble en fonction des fréquences mesurées. Ainsi, en notant

$$\Gamma = \sqrt{\frac{mgL}{128EA\delta^3 \cos^5 \theta} \left( \frac{0.31\xi + 0.5}{0.31\xi - 0.5} \right)} \quad (2.51)$$

les auteurs proposent les formules suivantes

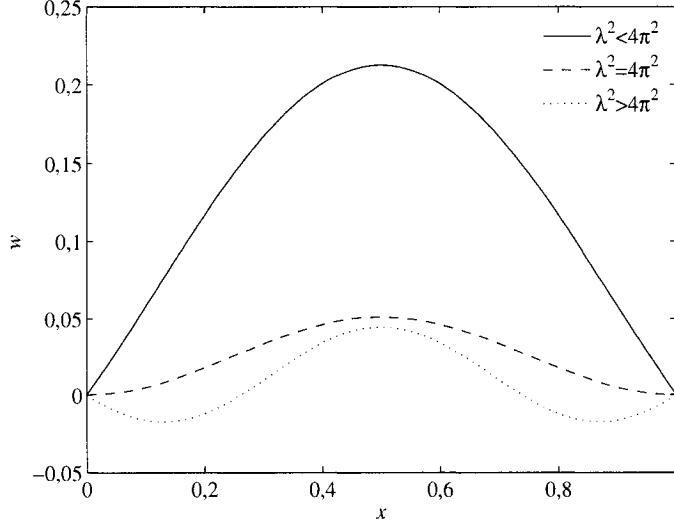


FIG. 2.7 Composante verticale du premier mode en fonction de  $\lambda^2$ .

Pour les câbles dont le 1<sup>er</sup> mode est symétrique ( $3 \leq \Gamma$ ) :

$$T = 4m(f_1L)^2 \left[ 1 - 2.20 \frac{C}{f_1} - 0.550 \left( \frac{C}{f_1} \right)^2 \right] \quad \text{pour } (17 \leq \xi) \quad (2.52)$$

$$T = 4m(f_1L)^2 \left[ 0.865 - 11.6 \left( \frac{C}{f_1} \right)^2 \right] \quad \text{pour } (6 \leq \xi \leq 17) \quad (2.53)$$

$$T = 4m(f_1L)^2 \left[ 0.828 - 10.5 \left( \frac{C}{f_1} \right)^2 \right] \quad \text{pour } (0 \leq \xi \leq 6) \quad (2.54)$$

Pour les câbles dont le 1<sup>er</sup> mode est antisymétrique ( $\Gamma \leq 3$ ) :

$$T = m(f_2L)^2 \left[ 1 - 4.40 \frac{C}{f_2} - 1.10 \left( \frac{C}{f_2} \right)^2 \right] \quad \text{pour } (60 \leq \xi) \quad (2.55)$$

$$T = m(f_2L)^2 \left[ 1.03 - 6.33 \frac{C}{f_2} - 1.58 \left( \frac{C}{f_2} \right)^2 \right] \quad \text{pour } (17 \leq \xi \leq 60) \quad (2.56)$$

$$T = m(f_2L)^2 \left[ 0.882 - 85.0 \left( \frac{C}{f_2} \right)^2 \right] \quad \text{pour } (0 \leq \xi \leq 17) \quad (2.57)$$

Pour les modes supérieurs ( $2 \leq n$ ) :

$$T = \frac{4m}{n^2} (f_n L)^2 \left( 1 - 2.20 \frac{nC}{f_n} \right) \quad \text{pour } (200 \leq \xi) \quad (2.58)$$

où  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_n$  sont les fréquences mesurées et

$$C = \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (2.59)$$

$\delta$  étant le rapport fléchissement-longueur du câble et  $\theta$  son inclinaison. Cette formulation bien que pratique, fait face à quelques restriction, comme l'obligation d'avoir un faible fléchissement, ou des caractéristiques constantes. Enfin, cette formulation ne s'applique pas aux modes hors plan.

## 2.4 Modélisation numérique par différences finies

De nombreux auteurs ont proposé des formulation ou effectué des calculs dynamiques de câbles en supposant qu'ils ne peuvent recevoir que des efforts axiaux. Si dans le cas des câbles de lignes de transmissions, dont la portée et le fléchissement sont élevés, et dont le diamètre est faible, cette hypothèse est réaliste, il n'en est pas nécessairement de même dans le cas de haubans ou de câbles principaux de ponts suspendus, dont les moments d'inertie plus élevés pourraient avoir un effet non négligeable. Le problème souvent rencontré dans la prise en compte du moment d'inertie des câbles dans les calculs est qu'il devient alors très difficile de compléter la résolution analytique. Il faut alors passer par des méthodes numériques telles que celle des différences finies. Une de ces résolution numérique est donnée par Mehrabi et al. (1998). Les auteurs considèrent alors un câble horizontal, en petites vibrations autour de sa position d'équilibre statique, dont l'équation dynamique est

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - H_s \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - H_d \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + k' v + c' \frac{\partial v}{\partial t} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (2.60)$$

où  $v$  est le déplacement vertical par rapport à la position d'équilibre  $y$ ,  $H_s$  est la tension horizontale dans le câble,  $H_d$  la tension additionnelle générée par les vibrations,  $k'$  la force

de rappel par unité de longueur,  $c'$  l'amortissement visqueux par unité de longueur,  $m$  la masse linéique et  $I$  le moment d'inertie du câbles. Lorsque ce dernier tend vers 0, on retrouve l'équations 2.19 vue précédemment pour le câble sans rigidité flexionnelle. En séparant les variables

$$v(x, t) = \hat{v}(x)q(t) \quad (2.61)$$

La fonction dépendante du temps peut s'écrire

$$q(t) = e^{pt} \quad (2.62)$$

où  $p$  est complexe pour tenir compte de l'amortissement. L'équation 2.60 devient alors

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2\hat{v}}{dx^2} \right) q - H_s \frac{d^2\hat{v}}{dx^2} q - H_d \frac{d^2z}{dx^2} + k' \hat{v}q + c' p \hat{v}q + mp^2 \hat{v}q = 0 \quad (2.63)$$

Afin de pouvoir factoriser l'équation précédente par la fonction  $q$ , on doit calculer l'expression de  $H_d$ . Pour cela, on utilise la condition de compatibilité géométrique, qui se traduit par

$$\int_0^L \frac{H_d}{EA} \left( \frac{ds}{dx} \right)^3 dx = \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^L \frac{dz}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (2.64)$$

où  $u$  est le déplacement longitudinal dû à la vibration et  $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2}$  est la longueur d'un élément infinitésimal de câble. Les conditions aux limites permettent d'obtenir

$$H_d = \frac{\int_0^L \frac{dz}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} dx}{\int_0^L \frac{1}{EA} \left( \frac{ds}{dx} \right)^3 dx} = \frac{\int_0^L \frac{dz}{dx} \frac{d\hat{v}}{dx} dx}{\int_0^L \frac{1}{EA} \left( \frac{ds}{dx} \right)^3 dx} q = \widehat{H}_d q \quad (2.65)$$

où  $\widehat{H}_d$  est une constante. En remplaçant dans 2.63, et en factorisant par  $q$ , on obtient :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2\hat{v}}{dx^2} \right) q - H_s \frac{d^2\hat{v}}{dx^2} q - \widehat{H}_d \frac{d^2z}{dx^2} + k' \hat{v}q + c' p \hat{v}q + mp^2 \hat{v}q = 0 \quad (2.66)$$

En développant le premier terme, on obtient

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2\hat{v}}{dx^2} \right) = \frac{d^2(EI)}{dx^2} \frac{d^2\hat{v}}{dx^2} + 2 \frac{dEI}{dx} \frac{d^3\hat{v}}{dx^3} + EI \frac{d^4\hat{v}}{dx^4} \quad (2.67)$$

En remplaçant  $ds$  dans l'expression de  $\widehat{H}_d$  et en intégrant par partie, on trouve

$$\widehat{H}_d = \frac{- \int_0^L \frac{d^2 z}{dx^2} \hat{v} dx}{\int_0^L \frac{1}{EA} \left[ \left( \frac{dz}{dx} \right)^2 + 1 \right]^{3/2} dx} \quad (2.68)$$

Ce qui donne finalement l'équation

$$\begin{aligned} & \frac{d^2(EI)}{dx^2} \frac{d^2 \hat{v}}{dx^2} + 2 \frac{dEI}{dx} \frac{d^3 \hat{v}}{dx^3} + EI \frac{d^4}{dx^4} - H_s \frac{d^2 \hat{v}}{dx^2} \\ & - \frac{- \int_0^L \frac{d^2 z}{dx^2} \hat{v} dx}{\int_0^L \frac{1}{EA} \left[ \left( \frac{dz}{dx} \right)^2 + 1 \right]^{3/2} dx} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + k' \hat{v} q + c' p \hat{v} q + mp^2 \hat{v} q = 0 \end{aligned} \quad (2.69)$$

La résolution de cette équation est obtenue à partir d'une discréétisation spatiale du problème comme montré sur la figure .

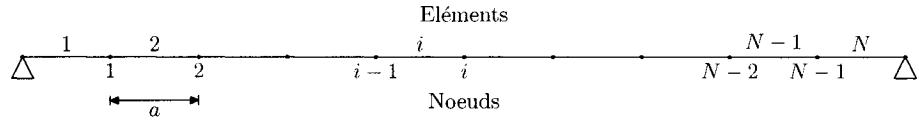


FIG. 2.8 Représentation des éléments et noeuds du câble discréétisé.

Le câble est divisé en  $N$  éléments et  $N - 1$  noeuds. Les expressions dérivées sont approximées par des taux d'accroissement centraux. On trouve alors une équation pour chaque noeud du câbles, ce qui nous ramène à un système de  $N - 1$  équations, que l'on peut alors écrire sous forme matricielle

$$\mathbf{K}_d \mathbf{v} + \mathbf{C} p \mathbf{v} + \mathbf{M} p^2 \mathbf{v} = 0 \quad (2.70)$$

où  $\mathbf{K}_d$  est la matrice de rigidité dynamique des éléments finis du câble,  $\mathbf{C}$  la matrice d'amortissement visqueux et  $\mathbf{M}$  la matrice de masse concentrées. Le vecteur  $\mathbf{v}$  regroupe

quant à lui les déplacements des noeuds. La matrice  $\mathbf{K}$  peut se décomposer

$$\mathbf{K}_d = \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_v \quad (2.71)$$

le terme  $\mathbf{K}_s$  est la matrice de rigidité statique, indépendante de  $z$ , alors que le terme  $\mathbf{K}_v$  en dépend. Les matrices  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{M}$  sont des matrices diagonales. Afin de pouvoir calculer le terme  $\mathbf{K}_v$ , il faut d'abord résoudre l'équation statique

$$\mathbf{K}_s \mathbf{z} = \mathbf{m}g \quad (2.72)$$

où  $\mathbf{m}$  est le vecteur de masse nodale. L'expression de  $\mathbf{K}_s$  est donnée ci dessous

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} [\alpha_1 + (-1)^p \beta_1] & \kappa_1 & \gamma_1 & 0 & \dots & & 0 \\ \eta_2 & \alpha_2 & \kappa_2 & \gamma_2 & 0 & \dots & 0 \\ -\beta_3 & \eta_3 & \alpha_3 & \kappa_3 & \gamma_3 & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & -\beta_{n-2} & \eta_{n-2} & \alpha_{n-2} & \kappa_{n-2} & \gamma_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & -\beta_{n-1} & \eta_{n-1} & \alpha_{n-1} & \kappa_{n-1} \\ 0 & \dots & & 0 & -\beta_n & \eta_n & [\alpha_n + (-1)^{p+1} \gamma_n] \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

où les termes précédents ont les expressions suivantes

$$\begin{aligned} \alpha_i &= -\frac{2}{a^4}(EI_{i+1} - 5EI_i + EI_{i-1}) + \frac{2H_s}{a^2} + k'_i \\ \beta_i &= \frac{1}{2a^4}(EI_{i+1} - 2EI_i - EI_{i-1}) \\ \gamma_i &= \frac{1}{2a^4}(EI_{i+1} + 2EI_i - EI_{i-1}) \\ \kappa_i &= -\frac{2}{a^4}(3EI_i - EI_{i-1}) - \frac{H_s}{a^2} \\ \eta_i &= \frac{2}{a^4}(EI_{i+1} - 3EI_i) - \frac{H_s}{a^2} \end{aligned} \quad (2.74)$$

avec  $k'_i = k_i/a$ . L'expression de  $\mathbf{K}_v$  est donnée par

$$\mathbf{K}_v = \mathbf{r}\mathbf{s}^T \quad (2.75)$$

où :

$$\mathbf{r}^T = [r_1, r_2, \dots, r_i, \dots, r_n] \quad (2.76)$$

$$\mathbf{s}^T = [s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_n] \quad (2.77)$$

$$r_i = \frac{\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{a^2}}{\sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2a} \right)^2 + 1 \right]^{3/2}} \quad (2.78)$$

$$s_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{a^2} \quad (2.79)$$

La résolution permet de déterminer la fréquence de vibration des modes en fonction des caractéristiques du câble. Etant donné que l'amortissement dans les câbles est généralement faible, et pour des raisons pratiques, les auteurs ont choisi de donner une fonction approximative permettant d'obtenir directement les fréquences propres du câble non amorti

$$\frac{\omega_n}{\omega_{ns}} = \alpha\beta - 0.24\frac{\mu}{\xi} \quad (2.80)$$

$$\alpha = 1 + 0.039\mu \quad (2.81)$$

$$\beta = 1 + \frac{2}{\xi} + \frac{\left( 4 + \frac{n^2\pi^2}{2} \right)}{\xi^2} \quad (2.82)$$

où  $\omega_n$  est la pulsation du mode  $n$ ,  $\omega_{ns}$  la pulsation du mode  $n$  de la corde équivalente,  $\xi$  un paramètre adimensionnel de rigidité-flexion,  $\mu$  le second paramètre de flèche-extensibilité. Cette méthode, maintenant reconnue, est mise en application depuis 1998 pour la détermination de la tension des câbles. Le processus consiste à placer un vibromètre laser sur

le tablier du pont ou à proximité et de le pointer sur le centre du câble dont on cherche à connaître les caractéristiques, voir figure 2.9. L'appareil donne alors une valeur très

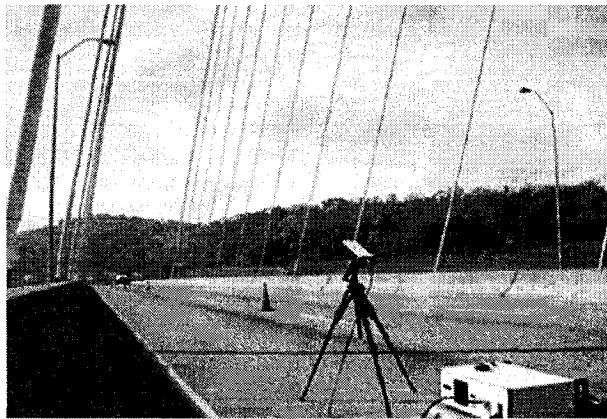


FIG. 2.9 Vibromètre laser en place, photo extraite de CTL (2003).

précise de la fréquence de vibration du câble. L'intérêt de le placer au centre est évident, car cela constitue un ventre de vibration pour le premier mode, ce qui permet une plus grande précision et élimine l'effet des vibrations parasites comme celles provoquées par le passage des véhicules. Connaissant les caractéristiques physiques du câble, on peut alors déterminer sa tension et la comparer avec la valeur de design ou avec des relevés précédents et ainsi détecter une éventuelle faiblesse dans le câble. Les premiers essais ont été menés par les chercheurs Tabatabai et Mehrabi, du laboratoire des Construction Technology Laboratories, Inc. de Skokie dans l'Illinois, dans CTL (2003), sur les 52 câbles du Veterans Memorial Bridge entre Weirton, Virginie occidentale et Steubenville, Ohio. Les mesures montrent une grande précision et révèlent des anomalies non graves de constructions. L'utilisation des formules 2.82 ont permis de déterminer que 4 câbles présentaient des tensions inférieures à celles designées, alors que 2 autres montraient une tension accrue. Le système s'est immédiatement rendu utile pour résoudre un problème de plus grande ampleur. En effet, nombre de ponts haubannés récents ont été sujets à des vibrations de grande amplitude sous l'effet combiné du vent et d'une pluie fine. L'hypothèse généralement retenue est que la pluie modifie le profil aérodynamique du câble, le rendant plus sensible aux effets du vent, voir figure 2.10. On citera notamment le Clark Bridge (Illinois), le Burlington Bridge (Iowa), le Houston Ship Channel Bridge (Texas), le

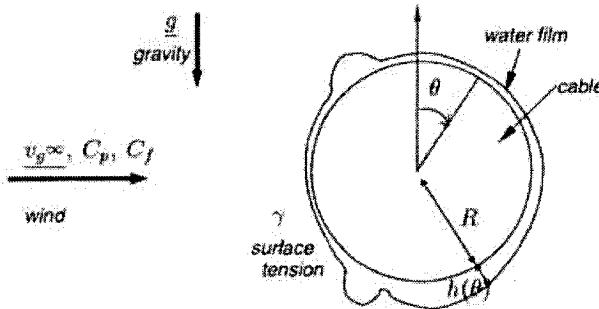


FIG. 2.10 Modification du profil du câbles par la pluie, figure tirée de Lemaitre (2006).

Weirton-Steubenville Bridge (Virginie Occidentale), le East Huntington Bridge (Virginie Occidentale) ou le Erasmus Bridge à Rotterdam aux Pays-bas, comme décrit dans Ciolko (1999). Le phénomène, bien que connu depuis 1990, reste encore aujourd’hui mal compris, et il n’existe, d’après Lemaitre (2006), aucun outil fiable capable de prédire son apparition, et les modifications structurales, comme la pose d’amortisseurs, sont souvent effectuées après la construction de l’ouvrage. Pour déterminer le bon rapport d’ammortissement à utiliser afin d’éliminer le phénomène gênant des vibrations de grande amplitude, il est important de connaître précisément la fréquence du mode incriminé, ainsi que l’amortissement déjà présent, ce que permet la mesure grâce au vibromètre laser. Mais outre sa grande précision, c’est sa rapidité qui fait de cette méthode une alternative économique au traditionnel tiré-laché utilisé précédemment pour effectuer les mêmes mesures. En effet, toujours selon Ciolko (1999), deux hommes peuvent effectuer la mesure de 20 à 50 câbles par jour. Le Cochrane Bridge sur la Route 90 aux Etats-Unis (voir figure 2.11), a fait l’objet d’une telle étude. Une dizaine de ses haubans a été jugée vulnérable au phénomène et des amortisseurs visqueux ont été ajoutés pour régler le problème. Bien que cela soit hors contexte, nous rappellerons que ce pont a été heurté par une plateforme pétrolière lors de l’ouragan Katrina de 2005 et que seuls des domages mineurs ont été reportés à ce jour. La méthode que nous venons de voir offre une résolution relativement aisée du problème énoncé. Néanmoins, celle-ci doit se limiter aux structures relativement simples, et la formulation devient rapidement complexe pour les câbles inclinés ou ayant des connections.

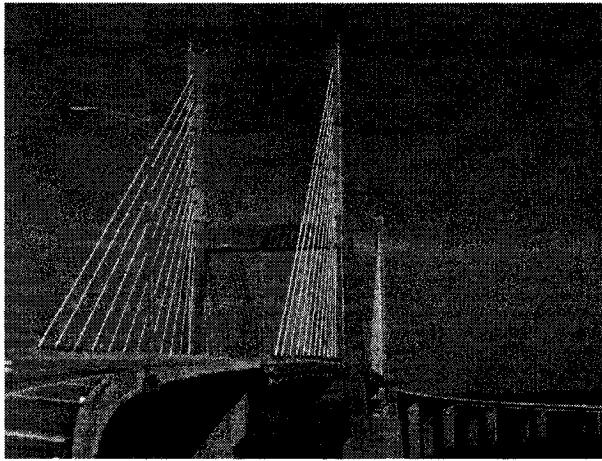


FIG. 2.11 Pont de Cochrane, photo issue du site de MCEER.

## 2.5 Modélisation par éléments finis

Pour des structures complexes, la méthode la plus généralement utilisée demeure celle des éléments finis. Le manuel du logiciel ADINA, ADINA R & D (1986-2006) et le livre de Bathe (1996) expliquent les détails de la méthode. Les éléments de câbles sont des éléments de barre possédant 2, 3 ou 4 noeuds. Ces deux derniers étant plutôt destinés à modéliser les câbles et aciers d'armature dans les structures en béton armé, on utilisera des éléments de barres à 2 noeuds, soit 2 degrés de liberté, voir figure 2.12.

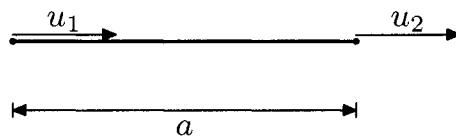


FIG. 2.12 Elément de câble à 2 noeuds dans son repère local.

Etant donné que la force ne varie pas à l'intérieur de chaque élément, un seul point d'intégration de Gauss suffit pour avoir l'évaluation exacte de la matrice de rigidité. Cette matrice de rigidité vaut pour un élément dans son système de coordonnées locales

$$K_i = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

A cette matrice de rigidité élastique vient s'ajouter la matrice de rigidité géométrique qui prend en compte la tension initiale dans l'élément ainsi que sa position. A partir d'un modèle composé de plusieurs éléments de câbles, on assemble la matrice de rigidité globale qui est la somme des matrices individuelles dans le repère global, ainsi que la matrice de masse consistante. Avant d'effectuer une analyse modale du modèle ainsi créé, il faut calculer le profil statique du câble. Pour cela on effectue avec le logiciel une analyse statique non linéaire en grands déplacements. L'analyse peut être faite avec plusieurs méthodes dont l'application progressive de la charge, la méthode de Newton modifiée, la méthode Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno, ou encore la méthode de Newton complète tel que d'écrit dans Bathe (1996). Une fois cette analyse effectuée, le profil statique obtenu va constituer la configuration initiale du problème dynamique. On effectue alors une analyse spectrale du problème, qui consiste à calculer les fréquences propres du système

$$\mathbf{K}\Phi_i = \omega_i^2 \mathbf{M}\Phi_i \quad (2.84)$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse globale du système, et  $\Phi_i$  est le vecteur propre correspondant au mode  $i$ . Les modes calculés sont normalisés avec la matrice de masse

$$\Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_i = 1 \quad (2.85)$$

Bon nombre de logiciels commerciaux sont capables d'effectuer ces calculs de manière satisfaisante. La méthode est intéressante dans le sens où il n'y a aucune restriction sur la géométrie ou les caractéristiques du câble. En effet, comme nous assemblons plusieurs éléments du même type, ceux-ci n'ont pas nécessairement besoin d'avoir les mêmes propriétés. Néanmoins, les éléments dont nous avons parlé ne peuvent là encore transmettre que des efforts axiaux. Pour palier à cela, plusieurs auteurs ont développé leurs propres éléments de câble, pour tenir compte de propriétés particulières du problème qui leur était posé.

Constatant le manque de précision dans la résolution du problème dynamique des câbles peu tendus avec une modélisation basée sur des éléments de poutre par éléments finis,

Zhu et Meguid (2006) ont développé un nouvel élément de poutre courbe. Il s'agit d'un élément non linéaire de poutre à 3 noeuds. La formulation est obtenue en appliquant le principe des puissances virtuelles à une description Lagrangienne du problème. Les équations dynamiques sont ensuite résolues en utilisant une méthode numérique de Newmark. Les résultats obtenus numériquement sont ensuite comparés à ceux obtenus expérimentalement avec un câble dont les déformations sont enregistrées. Les résultats obtenus montrent une très bonne cohérence avec les observations enregistrées. Néanmoins, les auteurs se sont limités à tester leur nouvel élément aux câbles peu tendus, ce qui exclut une utilisation en génie civil où on cherche en général à charger le câble au maximum de sa capacité. Ni et al. (2002) ont utilisé une méthode plus générale car elle concerne également les câbles à profil statique peu profond. Le calcul est effectué par une méthode d'éléments finis, avec un élément combinant un comportement de câble pur comme celui que nous avons décrit précédemment et d'une poutre fictive, afin de tenir compte de la rigidité flexionnelle des câbles de grand diamètre. La matrice de rigidité de l'élément proposé par Ni et al. (2002) est en fait la somme des matrices de rigidité de deux éléments distincts, le premier étant un élément de câble et le second un élément de poutre. La formulation pour la partie câble est obtenue en considérant un élément courbe de câble à 3 noeuds. En dérivant le principe des puissances virtuelles, les auteurs parviennent à trouver une équation d'équilibre faisant intervenir outre les traditionnelles matrices de masse et d'amortissement, trois matrices de rigidité, l'une linéaire par rapport aux déplacements, une deuxième quadratique et enfin une troisième cubique. Devant la difficulté mathématique posée par de tels termes non linéaires, seule la matrice linéaire est conservée dans la suite. A ce stade, on notera alors que cette formulation linéarisée correspond exactement à celle d'un élément de barre à 3 noeuds comme décrit dans Bathe (1996). L'autre composante du nouvel élément de câble est un élément de poutre à 6 degrés de liberté par noeuds. Après avoir agrandi la matrice de rigidité de l'élément de câble à 3 noeuds pour y inclure les degrés de liberté supplémentaires apportés par l'élément de poutre, et après avoir effectué le changement de coordonnées pour passer dans le repère global, on peut assembler la matrice de rigidité globale et effectuer les calculs. Les auteurs ont notamment comparé les résultats obtenus avec leur nouvel élément aux résultats ob-

tenus avec une méthode de différence finies. La cohérence entre les deux méthodes a été jugée très bonne.

Dans le cadre de ce travail, nous utiliserons un logiciel d'éléments finis à des fins de comparaison avec les résultats que nous obtiendrons avec les méthodes que nous allons développer. Notre choix de logiciel s'est porté sur ADINA pour plusieurs raisons. D'abord celui-ci est disponible en version étudiante gratuite, ensuite il disposait des éléments et méthodes de résolutions numériques dont nous avions besoin et enfin, contrairement à beaucoup d'autres logiciels commerciaux, il est extrêmement bien documenté.

## 2.6 Techniques expérimentales

Ces méthodes numériques sont couramment utilisées pour le design de structures câblées, comme nous le montrent Paultre et al. (1995) et Paultre et al. (2000) dont l'instrumentation du pont de Beauharnois réhabilité, les essais menés *in situ*, et le développement en parallèle d'un modèle d'éléments finis permettent de vérifier et de calibrer de tels modèles. Les auteurs mesurent en effet la réponse dynamique de l'ouvrage au passage de camions dont la masse est connue, et en déduisent un facteur d'amplification dynamique, correspondant au rapport de la réponse mesurée sur la réponse statique calculée par un modèle d'éléments finis.

Un autre intérêt d'avoir une modélisation efficace des structures câblées réside dans l'évaluation de la santé des structures existantes. Bien que ce mémoire ne traite pas directement des techniques expérimentales, un de nos objectifs est de développer des modèles et algorithmes potentiellement utilisables dans la surveillance de constructions existantes. Nous effectuons donc une revue des quelques techniques actuellement utilisées. Afin de mesurer et prévoir le vieillissement des ouvrages d'art, et notamment les structures câblées, plusieurs auteurs ont proposé des approches intéressantes. On citera pour commencer une approche probabiliste de la détérioration d'éléments de câbles et du calcul de la résistance résiduelle Cremona (2002). L'auteur utilise un algorithme de Monte-Carlo pour introduire une distribution aléatoire de défauts et calculer la résistance probable du Pont de Tancarville (France). Avec une probabilité moyenne de rupture des fils du câble prin-

cipal de 1.6%, et dans la pire condition d'utilisation probable, l'auteur obtient un facteur de sécurité minimal de 2.51. D'autres auteurs ont décrit des méthodes de surveillance destinées à détecter un éventuel endommagement dans les câbles. Dans Robert et al. (1998), une surveillance acoustique est installée afin de détecter la rupture des fils du câble principal du pont de Tancarville. Bien que fiable, le procédé présente l'inconvénient de ne pas donner la moindre indication sur la santé de la structure au moment de la pose du système. Les auteurs ont cependant pu mesurer la rupture d'une soixantaine de fils sur une période de 2 ans et obtenir une tendance du vieillissement de la structure. La méthode précédente ne donne cependant pas une idée de la santé du câble post endommagé. Il serait intéressant d'avoir une détection plus précoce afin de mieux prévoir le remplacement des éléments. On citera par exemple DeMerchant et al., (2000) qui utilisent un capteur constitué d'une fibre optique utilisant l'éparpillement de Brillouin afin d'effectuer une mesure de la déformation le long d'une structure. Dans leur mise en oeuvre expérimentale, les auteurs obtiennent un précision de  $11 \mu\epsilon$ , avec une résolution spatiale d' $1 m$ . Les auteurs proposent d'instrumenter les structures afin d'en vérifier la santé ; en effet une déformation excessive locale traduit un affaiblissement de la structure. On citera encore les méthodes dynamiques, fondée sur la mesure de la fréquence fondamentale de vibration des ouvrages ou d'éléments de leur structure pour en déterminer les caractéristiques mécaniques. Plusieurs auteurs ont utilisé des vibromètres laser afin de mesurer avec précision la fréquence de vibration des éléments étudiés. Ces appareils utilisant l'effet Doppler pour mesurer la vitesse de déplacement d'un objet distant, peuvent offrir une précision de l'ordre de  $1 \mu m/s$ , à une distance d'une cinquantaine de mètres. Nassif et al. (2005) appliquent cette technique à un pont poutre et comparent les résultats à ceux obtenus avec un capteur mécanique. Le groupe CTL, organisme américain spécialisé dans l'expertise de grand projets, utilise une technique similaire pour évaluer la santé des hau-bans des ponts CTL (2003). La mesure de la fréquence de vibration des câbles permet de déterminer via une formule la force de tension, et ainsi, en comparant avec la force de design de détecter un éventuel affaiblissement du câble. La formule utilisée par CTL est la formule 2.73 et provient de Mehrabi et al. (1998) et est obtenue à partir d'une résolution par différences finies de l'équation dynamique des câbles. Cette formulation est d'ailleurs

reprise par Bouaanani (2006), avec pour objectif de connaître la sensibilité des modes à un endommagement. L'auteur étudie la variation de fréquence du premier mode en plan et hors plan en fonction de la position de l'endommagement dans plusieurs câbles aux caractéristiques différentes. Une autre piste intéressante dans le domaine de la détection de l'endommagement est explorée par Hasan (1995). L'auteur établit une formulation analytique d'une poutre dont l'endommagement local est modélisé par la présence d'un ressort. A partir des conditions aux frontières des différents morceaux de la poutre, il obtient une série d'équations qui sont résolues numériquement pour obtenir l'influence de la position de l'endommagement sur les fréquences propres de la poutre. Une résolution graphique permet ensuite de détecter la position et la profondeur d'un endommagement. Le problème est cependant limité aux poutres et à un seul endommagement.

## CHAPITRE 3

### COMPORTEMENT STATIQUE

#### 3.1 Introduction

L'équilibre statique constitue la configuration initiale de tout système dynamique et il est donc important de s'y attarder. L'objectif de ce chapitre est de mettre en équation le comportement statique des câbles suspendus en incluant les effets de la rigidité flexionnelle et d'un endommagement localisé sur une faible portion du câble. L'endommagement est introduit artificiellement en réduisant localement la section du câble et son inertie tel que décrit un peu plus bas. On notera également que le scénario d'endommagement envisagé n'inclut pas une diminution de la tension initiale. Un câble initialement non endommagé est désigné dans ce texte par câble sain.

D'une manière générale, le comportement des câbles suspendus varie en fonction du type d'application. Ainsi le comportement du câble principal d'un pont suspendu n'est pas identique à celui d'un hauban, ou d'un conducteur de ligne de transmission. À cet égard, deux paramètres importants peuvent servir à identifier globalement le type de comportement escompté d'un câble suspendu (Irvine, 1981 ; Johnson et al., 2003). Le premier, introduit au chapitre précédent, est le paramètre d'Irvine dont on rappelle l'expression

$$\lambda^2 = \frac{\left(\frac{mgL}{H_s}\right)^2 L}{\left(\frac{H_s L_e}{EA}\right)}$$

Ce paramètre caractérise en grande partie la réponse dynamique des câbles. Par exemple, pour les haubans, il est généralement compris entre 0 et 4, pour des lignes de transmissions, il vaut environ 90 et pour les câbles principaux de ponts suspendus, il varie entre 140 et 350. Tel que décrit au chapitre 2, le paramètre d'Irvine détermine la forme du mode fondamental.

Le second paramètre, noté  $\xi$ , est relié à la rigidité flexionnelle du câble. Il a pour expression

$$\xi = \sqrt{\frac{H_s}{EI}} \quad (3.1)$$

Ce paramètre donne une idée du comportement prédominant du câble : de type chaînette, ou de type poutre (Irvine, 1981). Si  $\xi$  est élevé, alors c'est le comportement câble qui prédomine, et la rigidité flexionnelle peut être négligée. Une valeur relativement faible de  $\xi$  indique au contraire une grande rigidité flexionnelle et un comportement proche de celui d'une poutre.

Les câbles utilisés en génie civil, et que l'on peut retrouver dans le catalogue de fabricants comme Conex Cable LLC, Ac-Lev, Hubei Machinery, Steel Wire Rope Ltd ou Mittal, sont composés de plusieurs fils, formant un toron. Certains câbles sont également composés de plusieurs torons. La limite élastique des aciers utilisés se situent généralement entre 1000 MPa et 1400 MPa. On peut voir plusieurs sections de câble sur la figure 3.1.

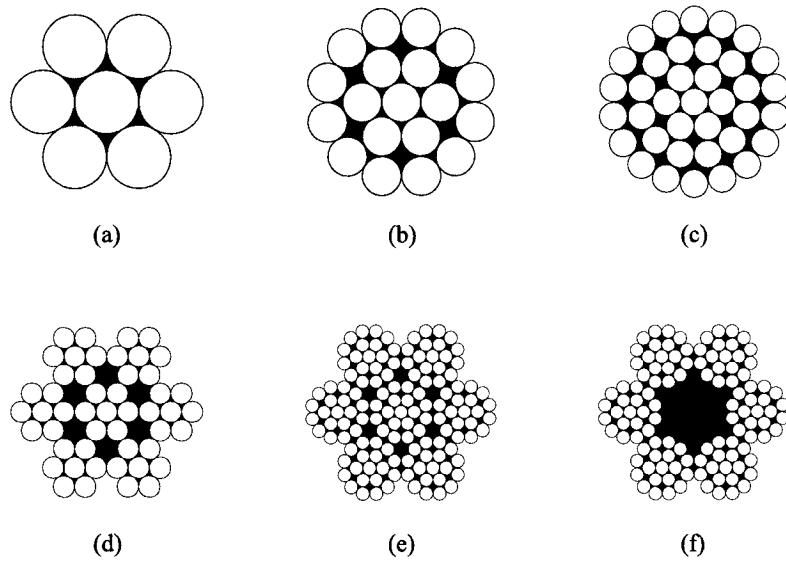


FIG. 3.1 Sections typiques de câbles : (a) câble mono-toron à 7 fils ; (b) câble mono-toron à 19 fils ; (c) câble mono-toron à 37 fils ; (d) câble à 7 torons à 7 fils ; (e) câble à 6 torons à 19 fils ; (f) câble à 7 torons à 19 fils.

En général, plus la section d'un câble est élevée, plus sa résistance à la traction est élevée. A section égale, plus un câble comporte de fils, plus son moment d'inertie est faible. En effet, un plus grand nombre de fils permet un plus grand glissement entre les fils du câble en flexion, ce qui le rend plus souple. Par contre, la surface extérieure plus importante implique un plus grand risque de corrosion. En ce qui concerne les matériaux utilisés, les câbles structuraux sont d'acier, galvanisé ou inoxydable, alors que les câbles de lignes de transmissions électriques sont généralement en acier plaqué d'aluminium, pour une meilleure résistance à la corrosion et une meilleure conductivité. Afin de couvrir une large gamme de types de câbles, ce mémoire se propose d'en étudier 12, caractérisés par des paramètres  $\lambda^2$  et  $\xi$  différents (Bouaanani, 2006). Les propriétés géométriques et mécaniques des câbles sont ajustées de manière à obtenir la liste des câbles du tableau 3.1. Les caractéristiques des câbles utilisés ici n'ont pas forcément de correspondance avec des câbles réels. Comme nous le montreront dans la suite de cette étude, ce sont les paramètres  $\lambda^2$  et  $\xi$  qui déterminent le comportement des câbles. Nous avons donc choisi des échantillons dans une large gamme de ces deux paramètres afin de couvrir la plus grande variété de comportement possible.

TAB. 3.1 Propriétés des câbles étudiés.

Câble	$m(\text{kg/m})$	$E(\text{MPa})$	$A(\text{m}^2)$	$I(\text{m}^4)$	$H_s(\text{N})$	$\lambda^2$	$\xi$
1	350	$1,6 \times 10^4$	$7,85 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-6}$	$2,9 \times 10^6$	0,60	602,68
2	350	$1,6 \times 10^4$	$7,85 \times 10^{-3}$	$1,5 \times 10^{-5}$	$2,9 \times 10^6$	0,60	347,96
3	350	$1,6 \times 10^4$	$7,85 \times 10^{-3}$	$3 \times 10^{-4}$	$2,9 \times 10^6$	0,60	77,81
4	400	$2 \times 10^5$	$2,85 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-7}$	$3 \times 10^6$	3,24	547,72
5	400	$2 \times 10^5$	$2,85 \times 10^{-3}$	$1,5 \times 10^{-6}$	$3 \times 10^6$	3,24	316,23
6	400	$2 \times 10^5$	$2,85 \times 10^{-3}$	$3 \times 10^{-5}$	$3 \times 10^6$	3,24	70,71
7	4	$6,45 \times 10^4$	$6 \times 10^{-4}$	$7 \times 10^{-9}$	$1,92 \times 10^4$	83,75	652,11
8	4	$6,45 \times 10^4$	$6 \times 10^{-4}$	$2,1 \times 10^{-8}$	$1,92 \times 10^4$	83,75	376,50
9	4	$6,45 \times 10^4$	$6 \times 10^{-4}$	$4,2 \times 10^{-7}$	$1,92 \times 10^4$	83,75	84,19
10	380	$2 \times 10^5$	$7,85 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^6$	214,47	500,00
11	380	$2 \times 10^5$	$7,85 \times 10^{-3}$	$6 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^6$	214,47	288,68
12	380	$2 \times 10^5$	$7,85 \times 10^{-3}$	$1,2 \times 10^{-5}$	$1 \times 10^6$	214,47	64,55

### 3.2 Formulation analytique

#### 3.2.1 Analyse du câble sain

La formulation classique du comportement statique des câbles décrite dans le chapitre précédent ne tient pas compte de la rigidité flexionnelle. Bien que cette formulation demeure suffisamment précise dans de nombreux cas, nous cherchons à établir une formulation plus générale du problème en incluant la rigidité flexionnelle du câble.

Considérons un tronçon élémentaire de câble illustré sur la figure 3.2. En plus des projections horizontales et verticales de la tension dans le câble, le tronçon élémentaire est également soumis à un moment de flexion  $M_s$ . Le tronçon a donc un comportement mixte combinant un effet de câble sans rigidité flexionnelle, et un effet de poutre. Avec la notation définie au chapitre 2, l'équilibre des forces donne dans ce cas

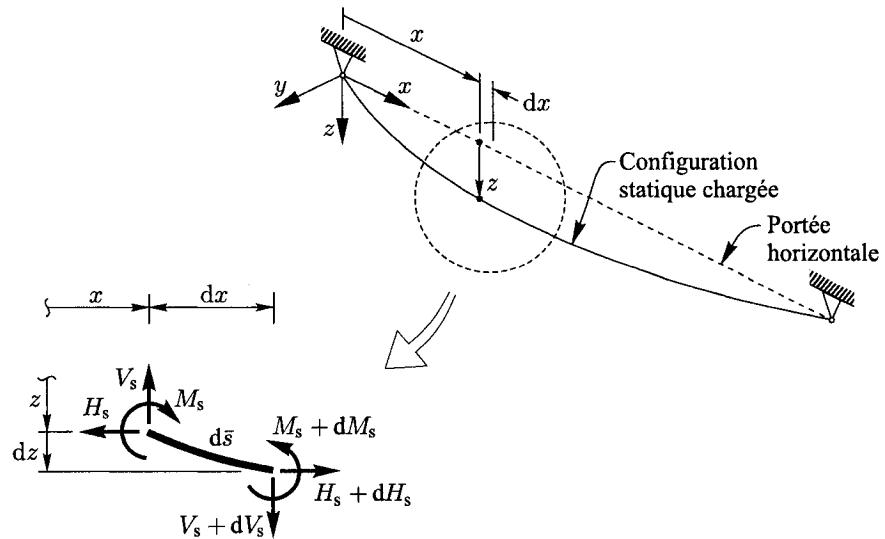


FIG. 3.2 Équilibre statique d'un tronçon élémentaire du câble en incluant l'effet de la rigidité flexionnelle (Bouaanani, 2005).

$$dH_s = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{dV_s}{dx} = -\bar{m}g \frac{d\bar{s}}{dx} = -\bar{m}g \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \quad (3.3)$$

$$\frac{dM_s}{dx} + H_s \frac{dz}{dx} - V_s = 0 \quad (3.4)$$

Selon la théorie des poutres, le moment  $M_s$  peut être exprimé en fonction de la rigidité flexionnelle  $EI$  et la flèche  $z$  en écrivant

$$M_s = -\frac{EI}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \frac{d^2z}{dx^2} \quad (3.5)$$

En introduisant l'expression précédente dans l'équation (3.4) et en dérivant, on obtient l'équation d'équilibre statique incluant l'effet de la rigidité flexionnelle

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{EI}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \frac{d^2z}{dx^2} \right) - H_s \frac{d^2z}{dx^2} - \bar{m}g \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = 0 \quad (3.6)$$

Cette formulation présente l'avantage de tenir compte de la rigidité flexionnelle des câbles. Elle ne pose également aucune restriction sur la géométrie, la corde du câble peut en effet être inclinée par rapport à l'horizontale. La complexité des termes non linéaires de cette formulation empêche cependant d'exprimer de manière explicite les coordonnées  $x$  et  $z$  comme précédemment au chapitre 2. Dans la suite, nous ferons donc appel à des méthodes de résolution numériques pour appliquer cette formulation.

### 3.2.2 Analyse du câble endommagé

La littérature abonde d'articles traitant des comportements statiques et/ou dynamiques des poutres à section variable ou constantes par morceaux (Biondi et Caddemi, 2005 ; Koplowa et al., 2006). Cependant, le comportement des câbles à section variable a attiré beaucoup moins d'attention. L'objectif de ce paragraphe est de développer une formulation permettant d'étudier le comportement statique des câbles endommagés localement.

Considérons maintenant un câble endommagé localement sur une distance  $a$  centrée sur la coordonnée  $x = x_d$ , tel qu'illustré sur la figure 3.3.

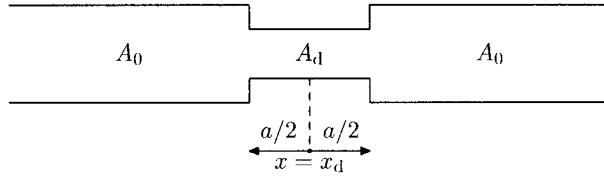


FIG. 3.3 Réduction de la section du câble.

L'endommagement est modélisé par une réduction de la section et du moment d'inertie du câble à l'endroit en question. Notons  $A_d$  la section endommagée. On introduit le coefficient  $\alpha = A_d/A_0$  où  $A_0$  est la section initiale saine du câble.

$$A(s) = A_0 [1 - (1 - \alpha)\zeta_a(x - x_d)] \quad (3.7)$$

où  $\zeta_a$  est une fonction de la coordonnée  $x$  définie par

$$\zeta_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in [-a/2, a/2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.8)$$

L'idée ici est de reprendre les équations de la formulation analytique proposée par Irvine

(1981) et de se servir des équations (2.12) et (2.13) que l'on rappelle ici

$$\begin{aligned} x(\tilde{s}) &= \frac{H_A}{\tilde{m}g} \left[ \sinh^{-1} \left( \frac{V_A}{H_A} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{V_A - \tilde{m}g\tilde{s}}{H_A} \right) \right] + \int_0^{\tilde{s}} \frac{H_A}{EA(\tilde{s})} d\tilde{s} \\ z(\tilde{s}) &= \int_0^{\tilde{s}} \frac{\tilde{m}g}{EA(\tilde{s})} \left( \frac{V_A}{\tilde{m}g} - \tilde{s} \right) d\tilde{s} + \frac{H_A}{\tilde{m}g} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{V_A}{H_A} \right)^2} - \sqrt{1 + \left( \frac{V_A - \tilde{m}g\tilde{s}}{H_A} \right)^2} \right] \end{aligned}$$

Ces équations sont adaptées dans ce travail au cas du câble endommagé en introduisant de nouvelles intégrales obtenues à partir de l'expression de la section décrite par l'équation (3.7). Ces intégrales sont

$$\int_0^{\tilde{s}} \frac{H_s}{EA(\tilde{s})} d\tilde{s} = \begin{cases} \frac{H_s \tilde{s}}{EA_0} & \text{pour } \tilde{s} \leq x_d - \frac{a}{2} \\ \frac{H_s}{EA_0} \left[ \frac{\tilde{s} - (1-\alpha) \left( x_d - \frac{a}{2} \right)}{\alpha} \right] & \text{pour } x_d - \frac{a}{2} < \tilde{s} \leq x_d + \frac{a}{2} \\ \frac{H_s}{EA_0} \left[ \tilde{s} + \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) a \right] & \text{pour } \tilde{s} > x_d + \frac{a}{2} \end{cases} \quad (3.9)$$

et

$$\int_0^{\tilde{s}} \frac{\tilde{m}g}{EA(\tilde{s})} \left( \frac{V_A}{\tilde{m}g} - \tilde{s} \right) d\tilde{s} = \begin{cases} \frac{\tilde{m}gs}{EA_0} \left( \frac{V_A}{\tilde{m}g} - \frac{\tilde{s}}{2} \right) & \text{pour } \tilde{s} \leq x_d - \frac{a}{2} \\ \frac{\tilde{m}g}{\alpha EA_0} \left[ (\alpha-1) \left[ \frac{V_A}{\tilde{m}g} - \frac{x_d - \frac{a}{2}}{2} \right] \left( x_d - \frac{a}{2} \right) + \left[ \frac{V_A}{\tilde{m}g} - \frac{\tilde{s}}{2} \right] \tilde{s} \right] & \text{pour } x_d - \frac{a}{2} < \tilde{s} \leq x_d + \frac{a}{2} \\ \frac{\tilde{m}g}{\alpha EA_0} \left[ (1-\alpha)a \left[ \frac{V_A}{\tilde{m}g} - x_d \right] + \alpha \left[ \frac{V_A}{\tilde{m}g} - \frac{\tilde{s}}{2} \right] \tilde{s} \right] & \text{pour } \tilde{s} > x_d + \frac{a}{2} \end{cases} \quad (3.10)$$

En utilisant les équations (2.12) et (2.13) introduites au chapitre 2, ces expressions permettent de calculer les coordonnées paramétriques  $x(\tilde{s})$  et  $z(\tilde{s})$  du câble dans sa configu-

ration statique. A titre d'exemple, considérons un câble tendu d'une portée  $L = 100$  m, ancré entre deux supports situés à la même hauteur. Les propriétés du câble sont

$$A_0 = 3,75 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$E = 1,6 \times 10^4 \text{ MPa}$$

$$H_A = 2,9 \times 10^6 \text{ N}$$

$$a = 1 \text{ m}$$

$$A_d = 1,875 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \quad \text{donc} \quad \alpha = 0,5$$

Supposons que la position de l'endommagement du câble peut varier selon la portée. La tension horizontale  $H_A$  étant connue, on peut donc déterminer la longueur curviligne à vide  $\tilde{S}$  et la tension verticale  $V_A$  à partir des équations (2.14) et (2.15). On trouve alors que la longueur à vide  $\tilde{S}$  des câbles endommagés est constante quelle que soit la position de l'endommagement. Elle vaut dans ce cas

$$\tilde{S} = 97,77390309 \text{ m}$$

En revanche, les résultats pour les tensions  $T_A$  et  $V_A$ , respectivement la tension et la réaction verticale à l'appui A, dépendent de la position de l'endommagement tel qu'indiqué dans le tableau 3.2.2.

TAB. 3.2 Tensions en fonction de la position de l'endommagement.

$x_d$ (m)	$V_A$ (N)	$T_A$ (N)	$\Delta V_A/V_A$ (%)
10	167822,4863	2904851,87	-0,415
20	167830,4226	2904852,33	-0,368
30	167838,3589	2904852,79	-0,320
40	167846,2952	2904853,25	-0,273
50	167854,2315	2904853,70	-0,226
60	167862,1678	2904854,16	-0,179
70	167870,1041	2904854,62	-0,131
80	167878,0404	2904855,08	-0,084
90	167885,9767	2904855,54	-0,037

On peut comparer ces valeurs à celles obtenues pour le câble sain

$$\tilde{S} = 97,79650810 \text{ m} \quad V_A = 167892,1553 \text{ N}$$

On peut également examiner pour chaque cas d'endommagement où se situe la flèche maximale, les résultats sont présentés dans le tableau 3.2.2.

TAB. 3.3 Position de la flèche maximale en fonction de l'endommagement.

$x_d(\text{m})$	$s_{\max}(\text{m})$	$x_{\max}(\text{m})$	$z_{\max}(\text{m})$
10	48,877963	50,002363	1,446814
20	48,880275	50,004725	1,446678
30	48,882586	50,007086	1,446542
40	48,884897	50,009446	1,446405
50	48,887209	49,988718	1,446298
60	48,889520	49,991079	1,446435
70	48,891832	49,993440	1,446571
80	48,894143	49,995801	1,446709
90	48,896455	49,998162	1,446845

Ces résultats sont à comparer avec les valeurs pour le câble non endommagé

$$x_{\max} = 50,0000 \text{ m} \quad z_{\max} = 1,446952 \text{ m}$$

On remarque d'abord que la longueur initiale du câble endommagé est inférieure à celle du câble sain. Cela s'explique par le fait que le câble endommagé à une rigidité longitudinale plus faible que le câble sain, ce qui nécessite de l'étirer plus pour obtenir la même tension horizontale. La valeur de la force  $V$  est dans tous les cas proches de la moitié du poids du câble, ce qui signifie que pour notre configuration horizontale, le poids se répartit équitablement entre les deux supports. On note cependant une petite variation en fonction de la position de l'endommagement. En effet, ce dernier provoque une légère modification du profil statique du câble et donc un changement de répartition du poids. D'une manière générale, le poids supporté est plus important sur le support le plus éloigné de la section endommagée, et ceci alors que la masse linéique est constante.

La figure 3.4 illustre ces résultats. On remarque que la flèche maximale du câble sain est plus grande que celle des câbles endommagés. Ceci s'explique par le fait que les câbles endommagés sont à l'origine plus courts que le câble sain dont le poids est alors plus important. Pour les câbles endommagés, on voit que la flèche augmente lorsque l'endommagement se rapproche des bords. En effet, la tension dans le câble étant plus élevé près des appuis, lorsqu'on introduit une faiblesse dans cette zone, cela provoque un allongement plus important du câble. On note que nos résultats ont une allure symétrique. Ils ne sont cependant pas parfaitement symétriques car la position de l'endommagement  $x_d$  est relative à la coordonnée paramétrique  $\tilde{s}$ , soit la position sur le câble à vide.

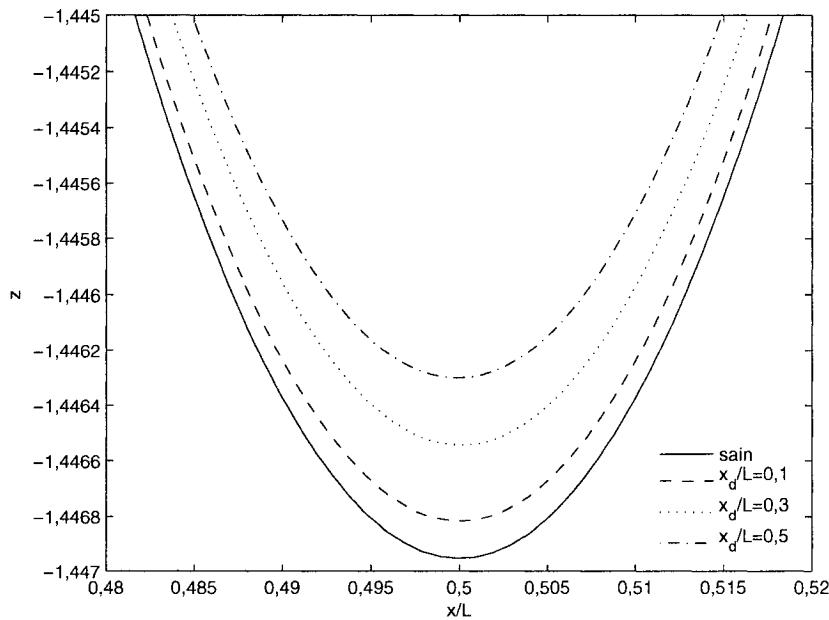


FIG. 3.4 Profil statique du câble 1.

### 3.3 Modélisation numérique par différences finies

La formulation analytique décrite au paragraphe 3.2.2, ne tient pas compte de certaines propriétés du câble comme la rigidité flexionnelle. Une alternative possible est l'utilisation d'une formulation numérique en différences finies.

### 3.3.1 Formulation simplifiée

Une formulation simplifiée du problème en différences finies est donnée par Mehrabi et al. (1998). L'équation d'équilibre est

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) - H_s \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - mg = 0 \quad (3.11)$$

L'équation précédente est en fait une formulation simplifiée de celle que nous avons énoncée par l'équation (3.6). En introduisant l'hypothèse d'un profil statique de faible profondeur pour le câble, qui se traduit par une faible inclinaison des éléments  $dz/dx \ll 1$ , on retrouve l'équation (3.11). Après discrétisation en différences finies, le problème revient à résoudre le système d'équations linéaires suivant

$$\mathbf{K}_s \mathbf{z} = \mathbf{m}g \quad (3.12)$$

où  $\mathbf{K}_s$  est donné par l'équation (2.73). Comme on peut le remarquer, cette formulation ne prend pas en compte les déplacements longitudinaux du câble, et donc suppose que le câbles est inextensible dans le calcul du profil statique. Cette hypothèse restrictive est valide seulement pour des câbles dont le profil statique est très plat. Son application est moins rigoureuse dans le cas de câbles ayant un profil statique de profondeur modérée à importante.

### 3.3.2 Formulation avec rectification du terme de masse

Un des objectifs de ce projet étant de proposer des méthodes plus générales garantissant une meilleure précision dans l'identification du comportement, nous proposons une amélioration de la formulation décrite au paragraphe précédent. L'objectif de ce paragraphe est donc de prendre en compte l'effet de la variation de longueur de l'élément de câble dans le terme de masse de cet élément. Lorsque l'inclinaison des éléments du câble augmente, la longueur d'élément que l'on doit comptabiliser pour le terme de masse doit tenir

compte de la flèche locale, et n'est donc pas égale à  $dx$  sur toute la longueur du câble. La longueur de l'élément considéré est en fait donnée par

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx \quad (3.13)$$

Ce qui donne finalement l'équation d'équilibre

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - H_s \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - mg \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = 0 \quad (3.14)$$

Lorsqu'on subdivise le câble par différences finies, on obtient le système d'équations

$$\begin{aligned} q_1 &= (\alpha_1 + (-1)^p \beta_1) z_1 + \kappa_1 z_2 + \gamma_1 z_3 - mg \sqrt{1 + \left(\frac{z_2}{2a}\right)^2} = 0 \\ q_2 &= \eta_2 z_1 + \alpha_2 z_2 + \kappa_2 z_3 + \gamma_2 z_4 - mg \sqrt{1 + \left(\frac{z_3 - z_1}{2a}\right)^2} = 0 \\ &\vdots \\ q_i &= -\beta_i z_{i-2} + \eta_i z_{i-1} + \alpha_i z_i + \kappa_i z_{i+1} + \gamma_i z_{i+2} - mg \sqrt{1 + \left(\frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{2a}\right)^2} = 0 \\ &\vdots \\ q_{n-1} &= -\beta_{n-1} z_{n-3} + \eta_{n-1} z_{n-2} + \alpha_{n-1} z_{n-1} + \kappa_{n-1} z_n - mg \sqrt{1 + \left(\frac{z_n - z_{n-2}}{2a}\right)^2} = 0 \\ q_n &= -\beta_n z_{n-2} + \eta_n z_{n-1} + (\alpha_n + (-1)^{p+1} \gamma_n) z_n - mg \sqrt{1 + \left(\frac{z_{n-1}}{2a}\right)^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

où  $p = 1$  pour des ancrages encastrés et  $p = 2$  pour des ancrages rotulés. Les coefficients  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $\kappa_i$  et  $\eta_i$  sont donnés par l'équation (2.74) avec  $k'_i = 0$ , soit

$$\begin{aligned}\alpha_i &= -\frac{2}{a^4}(EI_{i+1} - 5EI_i + EI_{i-1}) + \frac{2H_s}{a^2} \\ \beta_i &= \frac{1}{2a^4}(EI_{i+1} - 2EI_i - EI_{i-1}) \\ \gamma_i &= \frac{1}{2a^4}(EI_{i+1} + 2EI_i - EI_{i-1}) \\ \kappa_i &= -\frac{2}{a^4}(3EI_i - EI_{i-1}) - \frac{H_s}{a^2} \\ \eta_i &= \frac{2}{a^4}(EI_{i+1} - 3EI_i) - \frac{H_s}{a^2}\end{aligned}\tag{3.16}$$

Ce système non linéaire peut être résolu par une méthode numérique telle que la méthode de Gauss-Newton comme décrit par Chen et Li (2005) et Ortega et Rheinboldt (1970). Cette méthode est utilisée ici pour résoudre le problème des moindres carrés suivant : Les fonctions  $q_1, \dots, q_n$  étant données, on cherche le vecteur  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$  qui minimise la somme suivante

$$S(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n [q_i(\mathbf{z})]^2\tag{3.17}$$

La méthode de Gauss-Newton consiste à calculer une suite de vecteurs  $\mathbf{z}^{(k)}$  qui minimise  $S(\mathbf{z})$ , la formule de récurrence est donnée par

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k)} - \left[ \mathbf{J}_q(\mathbf{z}^{(k)})^T \mathbf{J}_q(\mathbf{z}^{(k)}) \right]^{-1} \mathbf{J}_q(\mathbf{z}^{(k)})^T \mathbf{q}(\mathbf{z}^{(k)})\tag{3.18}$$

où  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$  et où  $\mathbf{J}_q$  est la matrice Jacobienne de  $\mathbf{q}$ . Les fonctions  $q_i$  sont celles décrites par les équations (3.15). La procédure étant itérative, il faut donner un vecteur initial  $\mathbf{z}^{(0)}$ . On prend pour cela le vecteur calculé grâce à l'équation linéaire (3.12). Cette procédure a été entièrement programmée sous MATLAB dans le cadre de ce travail. Les résultats obtenus seront analysés par la suite sous le paragraphe 3.3.4.

### 3.3.3 Formulation avec correction du terme de rigidité

Toujours dans le but de généraliser la méthode de résolution par différences finies et de raffiner le modèle numérique, nous cherchons dans ce paragraphe à tenir compte de la variation de la rigidité flexionnelle de l'élément due à son allongement. On reprend pour commencer l'expression de l'équation (3.6)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{EI}{\left[ 1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}} \frac{d^2z}{dx^2} \right) - H_s \frac{d^2z}{dx^2} - mg \sqrt{1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2} = 0$$

Si l'on développe le premier terme de l'équation précédente et que l'on garde seulement les termes d'ordre 2, on obtient

$$-6 \frac{d^2z}{dx^2} \frac{dEI}{dx} \frac{dz}{dx} + \frac{d^4z}{dx^4} EI + 2 \frac{d^3z}{dx^3} \frac{dEI}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2} \frac{d^2EI}{dx^2} - H_s \frac{d^2z}{dx^2} - mg \sqrt{1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2} = 0 \quad (3.19)$$

On effectue maintenant la même discrétisation spatiale que précédemment pour obtenir le système d'équations

$$\begin{aligned} q_1 - \frac{3(EI_2 - EI_0)}{2h^4} z_2(z_2 - 2z_1) &= 0 \\ q_2 - \frac{3(EI_3 - EI_1)}{2h^4} (z_3 - z_1)(z_3 - 2z_2 + z_1) &= 0 \\ &\vdots \\ q_i - \frac{3(EI_{i+1} - EI_{i-1})}{2h^4} (z_{i+1} - z_{i-1})(z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}) &= 0 \\ &\vdots \\ q_{n-1} - \frac{3(EI_n - EI_{n-2})}{2h^4} (z_n - z_{n-2})(z_n - 2z_{n-1} + z_{n-2}) &= 0 \\ q_n - \frac{3(EI_{n-1} - EI_{n+1})}{2h^4} z_{n-1}(z_{n-1} - 2z_n) &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

où les  $q_i$  sont les fonctions similaires à celles définies par les équations (3.15). Notons que pour assurer la continuité de la formulation, il est requis d'introduire les rigidités

flexionnelles fictives  $EI_0$  et  $EI_{n+1}$ . Ceux-ci ont pour raison d'être d'empêcher l'apparition de singularité au niveau des appuis et doivent traduire la continuité du moment d'inertie dans le câble au niveau des appuis. Dans la pratique, on prendra des valeurs égales à celles des éléments proches. Le système (3.20) est également résolu en utilisant le programme à base de l'algorithme de Gauss-Newton réalisé dans le cadre de ce projet. Les résultats obtenus sont examinés dans le paragraphe suivant.

### 3.3.4 Comparaison des 3 formulations

Afin d'évaluer l'influence des termes de masse et de rigidité sur le profil des 12 câbles considérés, la figure 3.3.4 montre la différence relative (en %) des profils statiques entre, d'une part, les résultats de la méthode simplifiée décrite au paragraphe 3.3.1, et d'autre part, ceux des méthodes corrigées pour la masse et pour la rigidité flexionnelle, décrite dans les paragraphes 3.3.2 et 3.3.3, respectivement.

Sur les graphiques précédents, les courbes se confondent. En effet, le terme  $EI_{i+1} - EI_{i-1}$  qui est en facteur du terme de modification de la rigidité est nul car nous avons pris un  $EI$  constant. On observe donc juste une différence entre la méthode simplifiée et les deux autres méthodes. Si l'on examine maintenant la tendance générale, on remarque que le  $\Delta z$  est toujours positif et maximum sur les bords, ce qui montre, comme on s'y attendait que plus l'élément considéré est incliné, plus l'effet est important. Par ailleurs plus le paramètre d'Irvine  $\lambda^2$  du câble considéré est élevé, plus la différence entre la formulation simplifiée et les autres est grande. A une valeur de  $\lambda^2$  donnée, il semble qu'il y ait peu de différences entre les câbles, car leur profil statique est proche.

### 3.3.5 Analyse du câbles incliné

Les formulations présentées jusqu'à ce stade du mémoire ne sont valables que pour des câbles de portée horizontale. À la connaissance de l'auteur, la méthode des différences finis discutée précédemment n'a pas encore été généralisée aux cas de câbles inclinés. Des

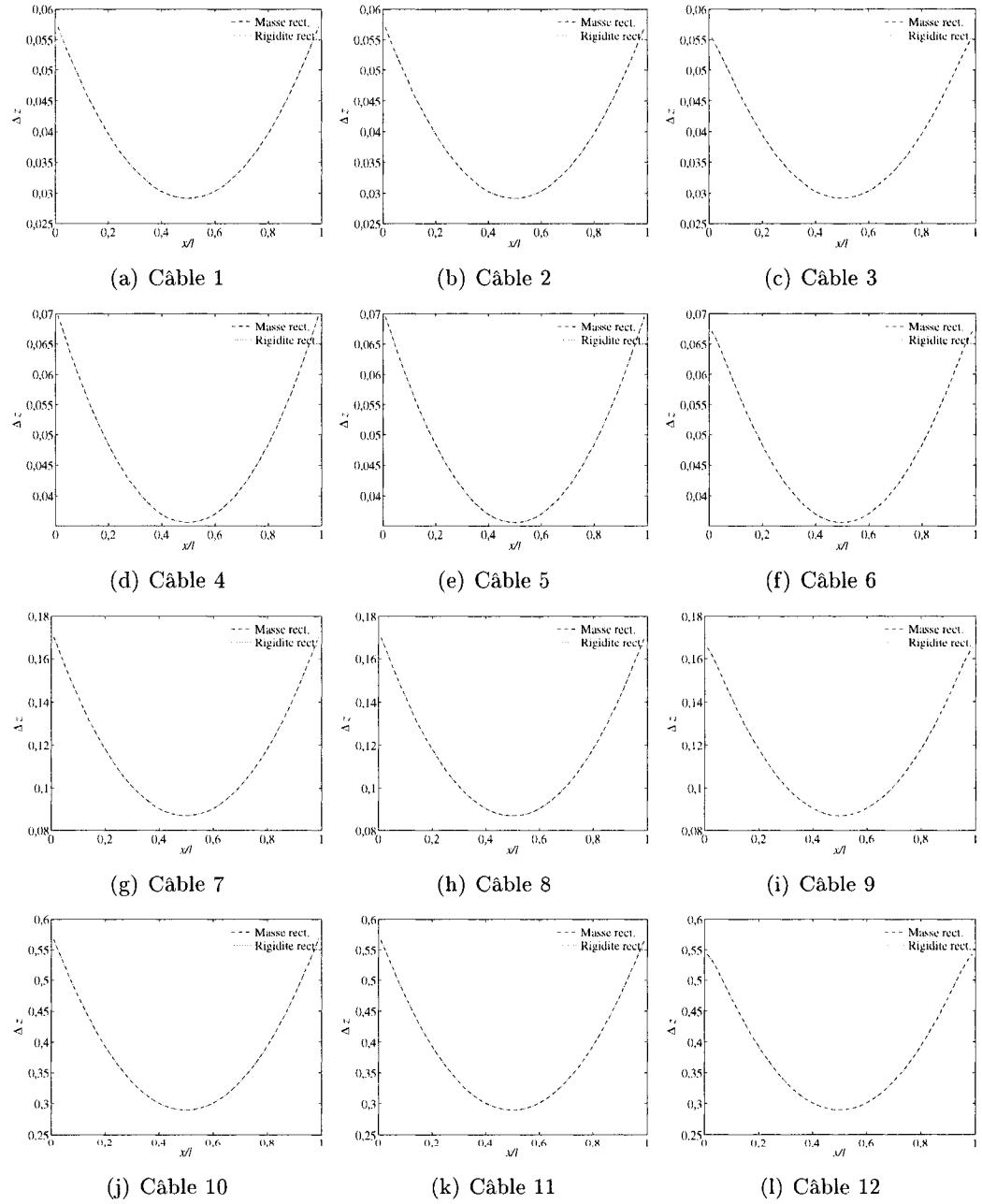


FIG. 3.5 Différences relatives (en %) de fléchissement entre les différentes méthodes en différences finies pour des câbles sains.

formulations répondant à cet objectif sont proposées dans ce paragraphe.

### 3.3.5.1 Formulation simplifiée

Reprendons la formulation simplifiée, mais en ajoutant un dénivellé entre les appuis du câbles. Les conditions aux limites changent, et deviennent dans ce cas

$$\begin{aligned} z(0) &= 0 \\ z(-1) &= -z(1) \\ z(N) &= d \\ z(N+1) &= -z(N-1) + 2d \end{aligned} \tag{3.21}$$

où  $d$  est la denivellation du deuxième appui (voir figure 3.6).

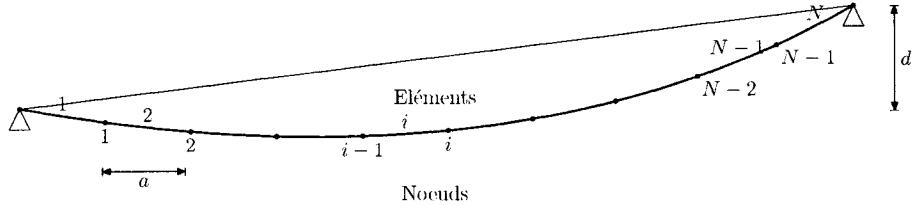


FIG. 3.6 Eléments et noeuds du câble incliné.

On obtient alors le nouveau système d'équations

$$\begin{aligned} (\gamma_1 - \eta_1)z_1 + \beta_1 z_2 + \alpha_1 z_3 - mg &= 0 \\ \kappa_2 z_1 + \gamma_2 z_2 + \beta_2 z_3 + \alpha_2 z_4 - mg &= 0 \\ &\vdots \\ \eta_i z_{i-2} + \kappa_i z_{i-1} + \gamma_i z_i + \beta_i z_{i+1} + \alpha_i z_{i+2} - mg &= 0 \\ &\vdots \\ \eta_{N-2} z_{N-4} + \kappa_{N-2} z_{N-3} + \gamma_{N-2} z_{N-2} + \beta_{N-2} z_{N-1} + \alpha_{N-2} d - mg &= 0 \\ \eta_{N-1} z_{N-3} + \kappa_{N-1} z_{N-2} + (\gamma_{N-1} - \alpha_{N-1}) z_{N-1} + \beta_{N-1} d + 2\alpha_{N-1} d - mg &= 0 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Étant données les simplifications liées à la formulation linéaire, et notamment l'hypothèse

de la faible inclinaison des éléments de câble  $dz/dx \ll 1$ , ces dernières équations ne sont rigoureusement valables que pour des valeurs  $d \ll L$ , où  $L$  est la portée horizontale du câble.

### 3.3.5.2 Formulation généralisée

Afin d'éliminer les limitations de la formulation précédente, envisageons un câble de corde inclinée, soumis à une tension initiale et à son propre poids. On effectue un changement d'axes de façon à ce que l'axe  $x$  soit parallèle à la corde du câble. La configuration initiale correspond au câble horizontal tendu avec une force horizontale  $H_i$ . Le câble est repéré par sa coordonnée curviligne  $\tilde{s}$ . Dans la configuration déformée, on note  $x(\tilde{s})$ , et  $z(\tilde{s})$  la position du câble. Celui-ci est soumis à des forces linéaires horizontales et verticales notées respectivement  $h$  et  $r$ . On considère un élément de longueur  $d\tilde{s}$  dans la configuration initiale. Celui-ci a la longueur  $d\bar{s}$  dans la configuration déformée.

$$d\bar{s} = \sqrt{[x(\tilde{s} + d\tilde{s}) - x(\tilde{s})]^2 + [z(\tilde{s} + d\tilde{s}) - z(\tilde{s})]^2} = \sqrt{dx^2 + dz^2} \quad (3.23)$$

L'équilibre des forces appliquées sur l'élément de câble donne

$$dH_s = H_s(\tilde{s} + d\tilde{s}) - H_s(\tilde{s}) = -hd\tilde{s} \quad (3.24)$$

$$dV_s = V_s(\tilde{s} + d\tilde{s}) - V_s(\tilde{s}) = -rd\tilde{s} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} M_s(\tilde{s} + d\tilde{s}) - M_s(\tilde{s}) + H_s(\tilde{s})[z(\tilde{s} + d\tilde{s}) - z(\tilde{s})] \\ - V_s(\tilde{s})[x(\tilde{s} + d\tilde{s}) - x(\tilde{s})] = dM_s + H_s(\tilde{s})dz - V_s(\tilde{s})dx = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Or, en reprenant l'expression de l'équation (3.5)

$$M_s(s) = -\frac{EI}{\left[1 + \left(\frac{dz}{d\tilde{s}}\right)^2\right]^{3/2}} \frac{d^2z}{d\tilde{s}^2}$$

et en dérivant l'équation d'équilibre (3.26), on obtient

$$\frac{d^2 M_s}{d\tilde{s}^2} + \frac{dH_s(\tilde{s})}{d\tilde{s}} \frac{dz}{d\tilde{s}} + H_s(s) \frac{d^2 z}{d^2 \tilde{s}} - \frac{dV_s(\tilde{s})}{d\tilde{s}} \frac{dx}{d\tilde{s}} - V_s(\tilde{s}) \frac{d^2 x}{d\tilde{s}^2} = 0 \quad (3.27)$$

Qui après substitutions donne

$$\frac{d^2}{d\tilde{s}^2} \left( \frac{EI}{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{d\tilde{s}} \right)^2 \right]^{3/2}} \frac{d^2 y}{d\tilde{s}^2} \right) - h \frac{dz}{d\tilde{s}} + H_s(\tilde{s}) \frac{d^2 z}{d^2 \tilde{s}} + r \frac{dx}{d\tilde{s}} - V_s(\tilde{s}) \frac{d^2 x}{d\tilde{s}^2} = 0 \quad (3.28)$$

On trouve ainsi une première équation, mais qui n'est pas suffisante pour résoudre le problème, à savoir déterminer les coordonnées du câble à l'équilibre statique. Une seconde relation est obtenue grâce à la loi de Hooke. Soit  $T_s(\tilde{s})$  la force totale qui s'applique sur la section du câble

$$T_s(s) = \sqrt{H_s(\tilde{s})^2 + V_s(\tilde{s})^2} \quad (3.29)$$

La loi de Hooke stipule que

$$\frac{T_s(\tilde{s}) - H_i}{EA} = \frac{d\bar{s} - d\tilde{s}}{d\tilde{s}} \quad (3.30)$$

Ce qui donne finalement

$$\sqrt{H_s(\tilde{s})^2 + V_s(\tilde{s})^2} - H_i = EA \left[ \sqrt{\left( \frac{dx}{d\tilde{s}} \right)^2 + \left( \frac{dz}{d\tilde{s}} \right)^2} - 1 \right] \quad (3.31)$$

Les équations (3.28) et (3.31) représentent deux relations à deux inconnues. On discrétise le problème afin d'effectuer une résolution par différences finies. L'équation (3.28) discrétisée entraîne

$$\frac{d^2 EI}{d\tilde{s}^2} \frac{d^2 z}{d\tilde{s}^2} + 2 \frac{dEI}{d\tilde{s}} \frac{d^3 z}{d\tilde{s}^3} + EI \frac{d^4 z}{ds^4} - h \frac{dz}{d\tilde{s}} + H_s(\tilde{s}) \frac{d^2 z}{d\tilde{s}^2} + r \frac{dx}{d\tilde{s}} - V_s(\tilde{s}) \frac{d^2 x}{d\tilde{s}^2} = 0 \quad (3.32)$$

soit

$$\gamma_i z(i+2) + \kappa_i z(i+1) + \alpha_i z(i) + \eta_i z(i-1) - \beta_i z(i-2) + \delta_i x(i+1) + \mu_i x(i) + \nu_i x(i-1) = 0 \quad (3.33)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_i &= -\frac{2}{a^4}(EI_{i+1} - 5EI_i + EI_{i-1}) + \frac{2H_s(\tilde{s})}{a^2} \\ \beta_i &= \frac{1}{2a^4}(EI_{i+1} - 2EI_i - EI_{i-1}) \\ \gamma_i &= \frac{1}{2a^4}(EI_{i+1} + 2EI_i - EI_{i-1}) \\ \kappa_i &= -\frac{2}{a^4}(3EI_i - EI_{i-1}) - \frac{H_s(\tilde{s})}{a^2} \\ \eta_i &= \frac{2}{a^4}(EI_{i+1} - 3EI_i) - \frac{H_s(\tilde{s})}{a^2} \\ \delta_i &= \frac{r}{2a} - \frac{V_s(\tilde{s})}{a^2} \\ \mu_i &= \frac{2V_s(\tilde{s})}{a^2} \\ \nu_i &= \frac{-r}{2a} - \frac{V_s(\tilde{s})}{a^2} \end{aligned} \quad (3.34)$$

L'équation (3.31) donne après discréétisation

$$\sqrt{H_s(\tilde{s})^2 + V_s(\tilde{s})^2} - H_i = EA \left[ \sqrt{\left[ \frac{x(i+1) - x(i-1)}{2a} \right]^2 + \left[ \frac{z(i+1) - z(i-1)}{2a} \right]^2} - 1 \right] \quad (3.35)$$

Les conditions aux frontières sont dans le cas d'appuis rotulés

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ z(0) &= 0 \\ M(0) = 0 &\Rightarrow z(1) = -z(-1) \\ x(L) &= L \\ z(L) &= 0 \\ M(L) = 0 &\Rightarrow z(L+1) = -z(L-1) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Ce système non-linéaire de  $2N - 2$  inconnues et équations est résolu numériquement à l'aide de l'implémentation de l'algorithme de Gauss-Newton décrit précédemment. A titre d'exemple, la figure (3.7) illustre les résultats de la flèche locale  $z$  obtenues pour le câble 1, suivant des inclinaisons variant de 0 à 80 degrés par pas de 10 degrés.

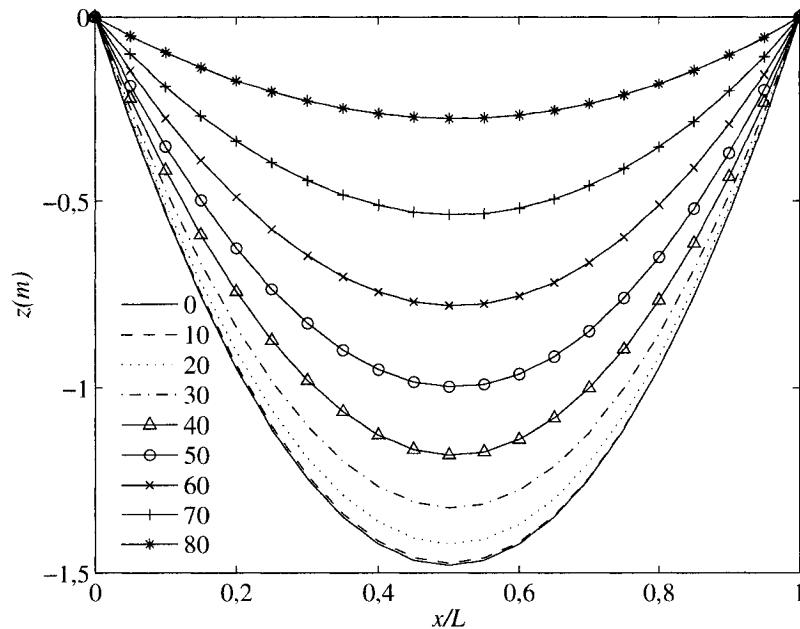


FIG. 3.7 Profil du câble 1 par rapport à la tangente à différentes inclinaisons (en °), calculé en différences finies.

Notons que bien que le câbles soit étudié pour plusieurs inclinaisons, celles ci n'apparaissent pas dans les appuis, en effet il faut rappeler que nous nous sommes placés dans un système d'axes incliné dont l'axe  $x$  est aligné avec la corde du câble. Le profil réel peut alors être aisément obtenu par un changement de repère inverse. Lorsque l'on regarde de près les valeurs, on constate que le point de flèche maximale se décale du centre lorsque l'on incline le câble pour se déplacer vers l'appui bas, comme le montre le tableau 3.3.5.2. Il est important de noter que du fait de la discréétisation spatiale, il n'est pas possible d'obtenir précisément le point de flèche maximal, celui ci se trouvant généralement entre deux noeuds. Les coordonnées répertoriées dans le tableau sont celles du noeud le plus

TAB. 3.4 Coordonnée de l'élément de flèche maximale.

Inclinaison	$x_{\max}$ (m)	$z_{\max}$ (m)
0°	49,995986	1,479870
10°	50,001954	1,472553
20°	50,007983	1,419474
30°	51,003948	1,320937
40°	51,003881	1,128991
50°	51,010625	0,997082
60°	51,009624	0,780598
70°	51,003952	0,536522
80°	51,033513	0,273189

proche de ce point. Par conséquence, on ne peut pas vraiment dégager un déplacement net du point de flèche maximale, mais seulement une tendance. Par ailleurs, comme le câble considéré est très tendu, le décalage du profil statique vers l'appui bas est moins marqué. La figure 3.8 montre d'ailleurs que ce décalage est légèrement plus visible pour le câble 10, dont le profil statique est plus profond.

### 3.4 Conclusion

Ce chapitre a d'abord permis d'introduire une formulation numérique simplifiée en différences finies pour étudier le comportement statique des câbles suspendus. Constatant certaines limitations de cette technique, nous avons développé trois nouvelles formulations numériques qui prennent en compte des effets supplémentaires, améliorent la précision et élargissent le champ d'applications possibles. Nous avons aussi établi de manière analytique le calcul des coordonnées d'un câble sans rigidité flexionnelle, mais comportant une modification locale de la section. Les différentes formulations présentées permettent le calcul d'un grand éventail de cas. La méthode analytique permet une résolution exacte, mais ne tient pas compte de la rigidité flexionnelle des câbles qui peut être importante dans certains cas. Une méthode numérique s'avère alors nécessaire. Notons que seule la méthode que nous avons désignée comme simplifiée permet une résolution linéaire. Finalement, le profil statique étant déterminé, le comportement dynamique du câble peut être examiné, ce qui constitue le thème du chapitre suivant.

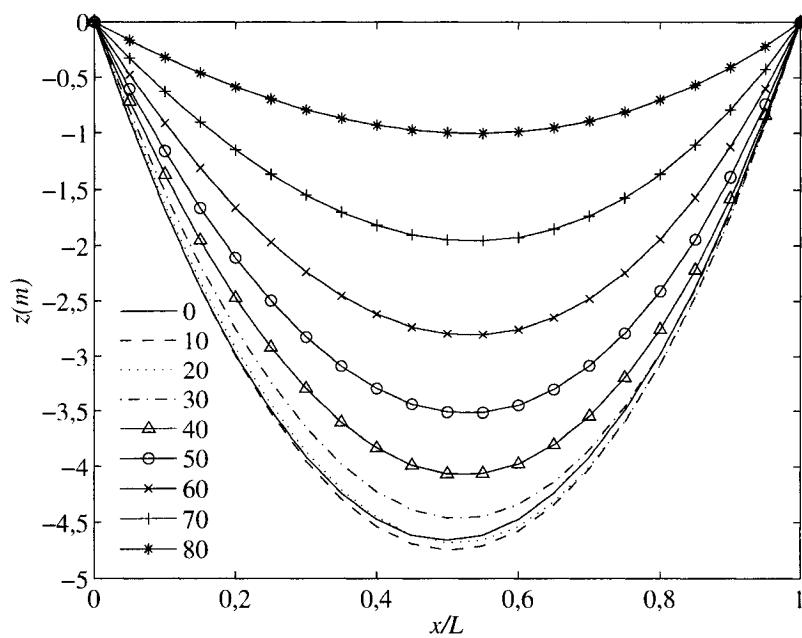


FIG. 3.8 Profil du câble 10 par rapport à la tangente à différentes inclinaisons (en °), calculé en différences finies.

## CHAPITRE 4

### COMPORTEMENT DYNAMIQUE

#### 4.1 Introduction

L'objectif principal de ce chapitre est de généraliser les formulations du comportement statique développées au chapitre précédent au cas dynamique. Les comportements dynamiques des câbles sains et endommagés sont déterminés et comparés afin de mettre en évidence des tendances de comportement. Les profils statiques calculés au chapitre précédent constituent la configuration initiale des problèmes considérés dans ce chapitre. Dans un but de concision, nous nous limiterons à la présentation des calculs relatifs au premier mode de vibration des câbles étudiés. Les autres modes de vibration peuvent être déterminés en utilisant la même formulation.

#### 4.2 Formulation analytique

Considérons un câble de section uniforme ancré entre 2 appuis situés au même niveau. Rappelons les équations (2.19) et (2.20) proposées par Irvine (1981) pour décrire le comportement dynamique du câble non amorti

$$\begin{aligned} H_s \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + H_d \frac{d^2 z}{dx^2} &= m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ H_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned}$$

La formulation analytique recherchée vise à modéliser le comportement dynamique d'un câble et tenant compte d'un endommagement simulé par une modification locale de la section. Cette formulation permettra de cerner l'influence d'un tel endommagement sur le comportement dynamique du câble.

### 4.2.1 Câble sain

On commence donc par étudier les câbles dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau 3.1, ceux-ci constituant à notre sens un échantillon assez large des câbles utilisés en génie civil. On remarque qu'à l'exception du moment d'inertie, les câbles ont des propriétés identiques 3 à 3. Étant donné que la formulation analytique ne tient pas compte de la rigidité flexionnelle, les câbles sont réunis en 4 sous-groupes dont les caractéristiques sont données dans le tableau 4.1.

TAB. 4.1 Propriétés des câbles.

Groupe	Câbles	$m(\text{kg/m})$	$H_s(\text{N})$	$\lambda^2$
1	1 à 3	350	$2,9 \times 10^6$	0,60
2	4 à 6	400	$3 \times 10^6$	3,24
3	7 à 9	4	$1,92 \times 10^4$	83,75
4	10 à 12	380	$1 \times 10^6$	214,47

La résolution analytique des modes symétriques du câble sain a été décrite au chapitre 2. Rappelons que les fréquences sont déterminées par l'unique paramètre  $\lambda^2$ , selon l'équation déjà énoncée

$$\tan \frac{\Omega}{2} = \frac{\Omega}{2} - \frac{4}{\lambda^2} \left( \frac{\Omega}{2} \right)^3$$

Les modes antisymétriques sont en revanche obtenus directement par l'équation (2.40). À l'aide de ces équations, nous allons maintenant calculer les fréquences propres des modes dans le plan des câbles considérés.

On obtient les résultats présentés dans les tableaux 4.2 et 4.3, pour les modes respectivement antisymétriques et symétriques.

TAB. 4.2 Fréquence des premiers modes antisymétriques.

Groupe	$f_{\text{anti}_1}(\text{Hz})$	$f_{\text{anti}_2}(\text{Hz})$	$f_{\text{anti}_3}(\text{Hz})$	$f_{\text{anti}_4}(\text{Hz})$
1	0,910259	1,820518	2,730777	3,641036
2	0,866025	1,732051	2,598076	3,464102
3	0,692820	1,385641	2,078461	2,771281
4	0,512989	1,025978	1,538968	2,051957

TAB. 4.3 Fréquence des premiers modes symétriques.

Groupe	$f_{\text{sym}_1}$ (Hz)	$f_{\text{sym}_2}$ (Hz)	$f_{\text{sym}_3}$ (Hz)	$f_{\text{sym}_4}$ (Hz)
1	0,466199	1,365806	2,275737	3,185939
2	0,487002	1,301241	2,165530	3,031258
3	0,868383	1,158318	1,746003	2,429047
4	0,713719	1,129967	1,350122	1,806937

Pour reconnaître le type de mode, i.e sysmétrie vs. antisymétrique, les fréquences obtenues sont classées dans l'ordre croissant et présentées dans le tableau 4.4.

TAB. 4.4 Répartition des fréquences propres

Groupe	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
1	$f_{\text{sym}_1}$	$f_{\text{anti}_1}$	$f_{\text{sym}_2}$	$f_{\text{anti}_2}$	$f_{\text{sym}_3}$
2	$f_{\text{sym}_1}$	$f_{\text{anti}_1}$	$f_{\text{sym}_2}$	$f_{\text{anti}_2}$	$f_{\text{sym}_3}$
3	$f_{\text{anti}_1}$	$f_{\text{sym}_1}$	$f_{\text{sym}_2}$	$f_{\text{anti}_2}$	$f_{\text{sym}_3}$
4	$f_{\text{anti}_1}$	$f_{\text{sym}_1}$	$f_{\text{anti}_2}$	$f_{\text{sym}_2}$	$f_{\text{sym}_3}$

On remarque d'emblée l'inversion du premier mode qui intervient pour les câbles des groupes 3 et 4. En effet, dans le cas de ces câbles,  $\lambda^2 > 4\pi^2$ , donc le premier mode est antisymétrique. Pour les câbles du groupe 4, le troisième mode est également inversé, car  $\lambda^2 > 16\pi^2$ , comme discuté par Rega (2004).

#### 4.2.2 Câble endommagé

Considérons maintenant un endommagement modélisé par une diminution locale de la section du câble en  $x = x_d$  sur une longueur  $a$ . La masse linéique reste néanmoins constante. À cet endroit, la section endommagée est notée  $A_d$ . On introduit le coefficient  $\alpha = A_d/A_0$  (figure 4.1).

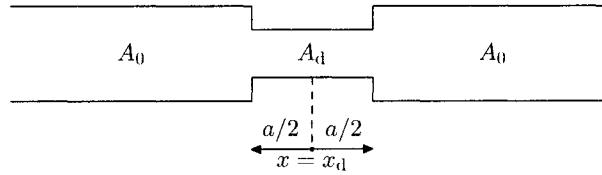


FIG. 4.1 Réduction de la section du câble.

$$A(x) = A_0 [1 - (1 - \alpha)\zeta_a(x - x_d)]$$

avec

$$\zeta_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -a/2 \leq x \leq a/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On ne va s'intéresser ici qu'aux modes symétriques. En effet, ce sont les seuls qui introduisent dans le câble une tension supplémentaire  $H_d$  dont le calcul tient compte de la section du câble. On garde ici l'appellation de "symétrique" pour les modes qui introduisent une tension dynamique, même si la composante verticale de ces modes n'est plus rigoureusement symétrique lorsque le câble est endommagé. Dans le calcul des autres modes, l'élasticité du câble n'intervient pas et ils ne seront alors pas affectés par le scénario d'endommagement que nous envisageons. La tension horizontale dynamique est calculée à partir de l'équation (2.26)

$$\frac{H_d}{EA} \left( \frac{d\bar{s}}{dx} \right)^3 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dz}{dx} \frac{\partial v}{\partial x}$$

or, comme la section n'est plus constante, celle-ci ne s'intègre plus dela même manière. Il faut écrire

$$\int_0^L \frac{H_d}{EA} \left( \frac{d\bar{s}}{dx} \right)^3 dx = \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^L \frac{dz}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (4.1)$$

Les conditions aux limites imposent  $u(0) = u(L) = 0$ , soit

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0 \quad (4.2)$$

Une intégration par parties donne par ailleurs

$$\int_0^L \frac{dz}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} dx = \frac{mg}{H_s} \int_0^L v dx \quad (4.3)$$

Enfin avec les notations introduites par l'équation (3.7) pour l'endommagement, il vient

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{H_d}{EA} \left( \frac{d\bar{s}}{dx} \right)^3 dx &= \int_0^{x_d-a/2} \frac{H_d}{EA_0} \left( \frac{d\bar{s}}{dx} \right)^3 dx + \int_{x_d-a/2}^{x_d+a/2} \frac{H_d}{\alpha EA_0} \left( \frac{d\bar{s}}{dx} \right)^3 dx \\ &\quad + \int_{x_d+a/2}^L \frac{H_d}{EA_0} \left( \frac{d\bar{s}}{dx} \right)^3 dx \\ &= \frac{H_d}{EA_0} \left[ L_e - \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) \int_{x_d-a/2}^{x_d+a/2} \left( \frac{d\bar{s}}{dx} \right)^3 dx \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Avec, tel que défini par l'équation (2.28)

$$L_e = \int_0^L \left( \frac{ds}{dx} \right)^3 dx$$

Notons

$$L_a(x_d) = L_e - \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) \int_{x_d-a/2}^{x_d+a/2} \left( \frac{ds}{dx} \right)^3 dx \quad (4.5)$$

Le but du calcul précédent était de déterminer l'expression de  $H_d$  qui maintenant dépend des caractéristiques de l'endommagement,  $a$ ,  $\alpha$  et  $x_d$ . On reprend maintenant l'équation (2.43)

$$H_s \frac{d^2 \hat{v}}{dx^2} + m\omega^2 \hat{v} = \frac{mg}{H_s} \widehat{H_d}$$

avec les notations définies par les équations (2.44) à (2.47), une solution s'écrit

$$W = \frac{H}{\Omega^2} \left[ 1 - \tan \frac{\Omega}{2} \sin(\Omega X) - \cos(\Omega X) \right] \quad (4.6)$$

En remplaçant les dernières variables adimensionnées par un unique paramètre, il reste

$$\tan \frac{\Omega}{2} = \frac{\Omega}{2} - \frac{4}{\lambda_a(x_d)^2} \left( \frac{\Omega}{2} \right)^3 \quad (4.7)$$

où

$$[\lambda_a(x_d)]^2 = \frac{\left( \frac{mgL}{H_s} \right)^2 L}{\left( \frac{H_s L_a(x_d)}{EA_0} \right)} \quad (4.8)$$

Cherchons à évaluer  $L_a(x_d)$ . Dans un premier temps, nous allons considérer le profil statique du câble non extensible pour effectuer les calculs. L'expression de la coordonnée paramétrique du câble est selon Irvine (1981)

$$\bar{s} = \frac{H_s}{mg} \left[ \sinh \left( \frac{mgL}{2H_s} \right) - \sinh \left[ \frac{mg}{H_s} \left( \frac{L}{2} - x \right) \right] \right] \quad (4.9)$$

Ce qui permet de calculer la valeur de l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_{x_d-a/2}^{x_d+a/2} \left( \frac{ds}{dx} \right)^3 dx &= \frac{H_s}{3mg} \left[ \sinh \left[ \frac{mg}{H_s} \left( \frac{L}{2} - x_d + \frac{a}{2} \right) \right] \cosh \left[ \frac{mg}{H_s} \left( \frac{L}{2} - x_d + \frac{a}{2} \right) \right]^2 \right. \\ &\quad + 2 \sinh \left[ \frac{mg}{H_s} \left( \frac{L}{2} - x_d + \frac{a}{2} \right) \right] - 2 \sinh \left[ \frac{mg}{H_s} \left( \frac{L}{2} - x_d - \frac{a}{2} \right) \right] \\ &\quad \left. - \sinh \left[ \frac{mg}{H_s} \left( \frac{L}{2} - x_d - \frac{a}{2} \right) \right] \cosh \left[ \frac{mg}{H_s} \left( \frac{L}{2} - x_d - \frac{a}{2} \right) \right]^2 \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

Pour représenter l'intégrale précédente, on utilise les variables adimensionnées suivantes

$$\begin{aligned} X_d &= x_d/L \\ C &= mgL/H_s \end{aligned} \quad (4.11)$$

et la fonction

$$\begin{aligned} g(X_d) &= \frac{1}{C} \left[ \sinh \left[ C \left( \frac{1}{2} - X_d + \frac{a}{2L} \right) \right] \cosh \left[ C \left( \frac{1}{2} - X_d + \frac{a}{2L} \right) \right]^2 + 2 \sinh \left[ C \left( \frac{1}{2} - X_d + \frac{a}{2L} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \sinh \left[ C \left( \frac{1}{2} - X_d - \frac{a}{2L} \right) \right] \cosh \left[ C \left( \frac{1}{2} - X_d - \frac{a}{2L} \right) \right]^2 + 2 \sinh \left[ C \left( \frac{1}{2} - X_d - \frac{a}{2L} \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

La figure 4.2 montre la fonction (4.12) pour plusieurs valeurs de  $C$  et  $a/L = 1/100$ .

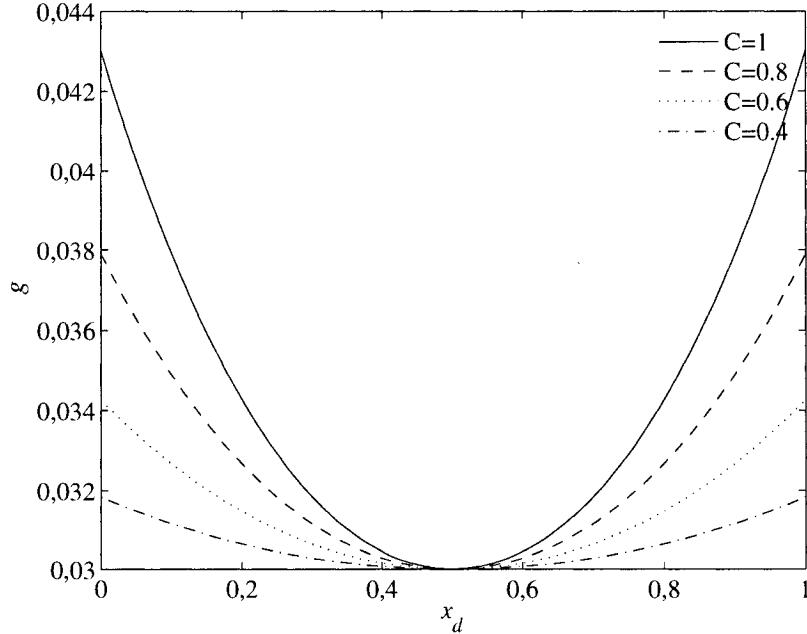


FIG. 4.2  $g(X_d)$  pour  $C = 1$  courbe (-),  $C = 0.8$  courbe (- -),  $C = 0.6$  courbe (..) et  $C = 0.4$  courbe (-·).

#### 4.2.3 Discussion

Etant donné que  $\alpha < 1$ , on a systématiquement  $L_a(X_d) > L_e$ . On remarque également sur la figure 4.2 que  $L_a(X_d)$  augmente lorsque l'endommagement est situé sur les bords et a ses valeurs maximales pour  $X_d = 0$  ou  $X_d = 1$ . Si l'on examine maintenant le paramètre  $\lambda_a(X_d)^2$ , sa variation est inverse de celle de  $L_a(X_d)$  : il est maximal lorsque l'endommagement est situé au centre du câble. On peut alors déterminer la tendance de variation de la fréquence du premier mode propre symétrique dans le plan en fonction de la position de l'endommagement. En effet, plus  $\lambda^2$  est élevé, plus  $\Omega$  sera élevé. On en déduit donc que la fréquence du premier mode symétrique dans le plan est plus élevée lorsque l'endommagement est situé au centre plutôt que sur les bords du câble. On continue l'analyse pour le câble 1 [Tab. 3.1]. On envisage un scénario d'endommagement correspondant à  $\alpha = 0.5$  et  $a/L = 0.01$ , et on calcule le rapport de la différence de fréquence pour le premier mode entre les câbles sains et endommagés. La figure 4.3 montre la variation de la fréquence

fondamentale en fonction de la position de l'endommagement. La variable représentée est

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f_{\text{sain}} - f_{\text{endommage}}}{f_{\text{sain}}} \quad (4.13)$$

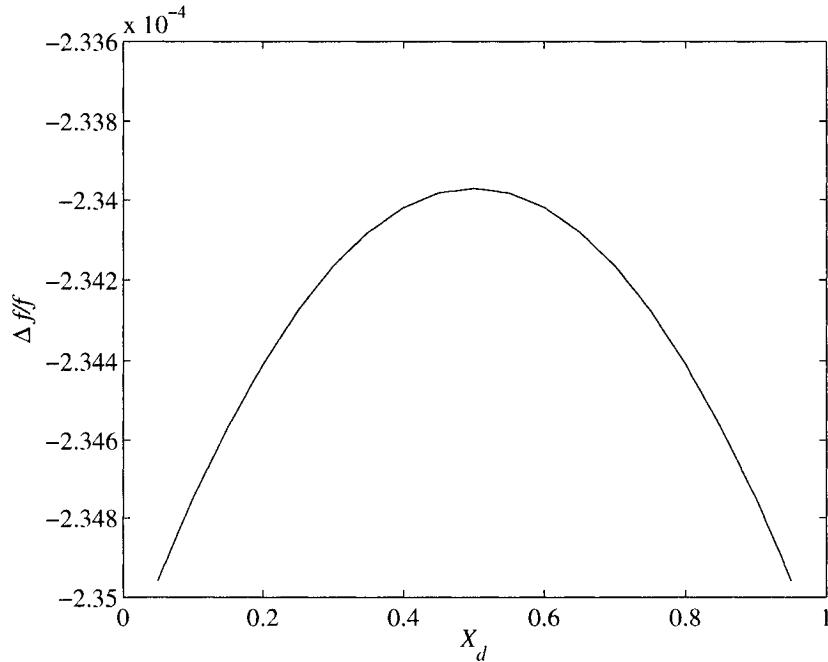


FIG. 4.3  $\Delta f(X_d)/f$  pour le câble 1.

Comme on l'avait remarqué précédemment, un endommagement situé sur les bords affecte plus la fréquence du câble qu'un endommagement situé au centre. Cela correspond à l'intuition que l'on avait, à savoir que l'influence de l'endommagement serait plus importante aux endroits où la tension du câble est maximale, près des appuis. Il est important de noter que cette tendance n'est valable que pour le premier mode symétrique. En effet, dans le cas des câbles dont le premier mode est asymétrique, celui-ci n'implique aucune tension dynamique dans le câble. On en déduit que sous les hypothèses formulées, il n'y a pas de modification de la fréquence dans le câble endommagé. On s'intéresse également à l'effet de  $\alpha$ , soit la proportion d'endommagement, sur la variation de la fréquence. Pour cela on choisit un endommagement à  $X_d = 0.25$  et on fait varier  $\alpha$ . On obtient la courbe

représentée sur la figure 4.4. Comme on pouvait s'y attendre, lorsque le câble est sectionné

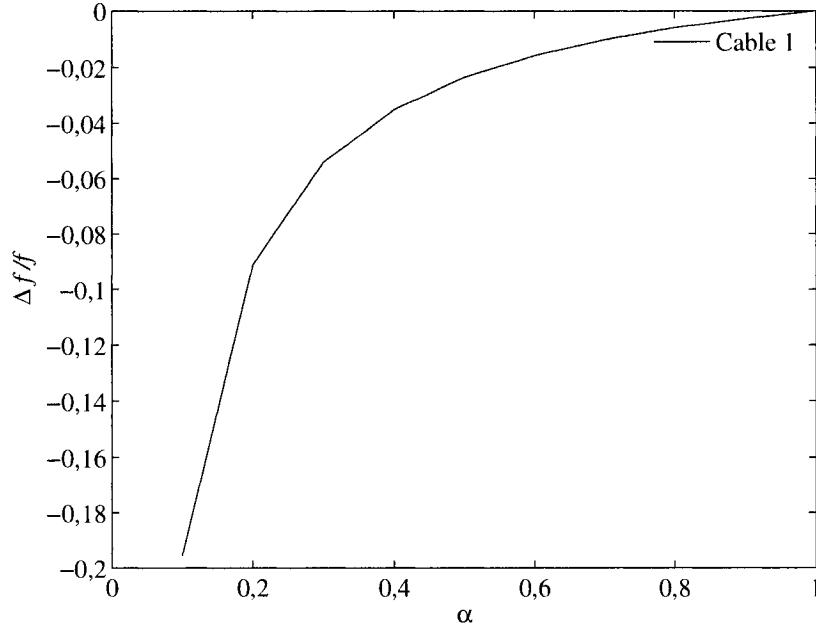


FIG. 4.4 Variation de  $\Delta f/f$  en fonction du paramètre  $\alpha$  pour le câble 1.

$(\alpha \rightarrow 0)$ ,  $\Delta f/f$  tend vers  $-\infty$ , alors que quand le câble est sain ( $\alpha = 1$ ),  $\Delta f/f = 0$ . Entre ces deux limites, la variation n'est pas linéaire, et plus le câble est endommagé, plus la variation de fréquence sera élevée, ce qui permettra une détection plus aisée.

Il est également important de vérifier l'influence du paramètre  $a$ , définissant la longueur de la portion endommagée, sur la variation de la fréquence fondamentale. Choisissons pour cela un endommagement placé à  $X_d = 0.25$  et prenons  $\alpha = 0.5$ . La figure 4.5 illustre la variation de  $\Delta f/f$  en fonction des différentes valeurs de  $a$ . On remarque que cette fois, la variation est linéaire. Comme on s'y attendait, plus la portion endommagée est grande, plus la fréquence est abaissée. Si l'on compare maintenant l'influence relative des différents paramètres sur la variation de la fréquence, on peut envisager les scénarios indiqués dans le tableau 4.2.3. On peut alors conclure sur l'influence relative des différents paramètres sur la variation de fréquence. Il apparaît que la position de l'endommagement a une influence très faible par rapport à la proportion et la portion de câble endommagé.

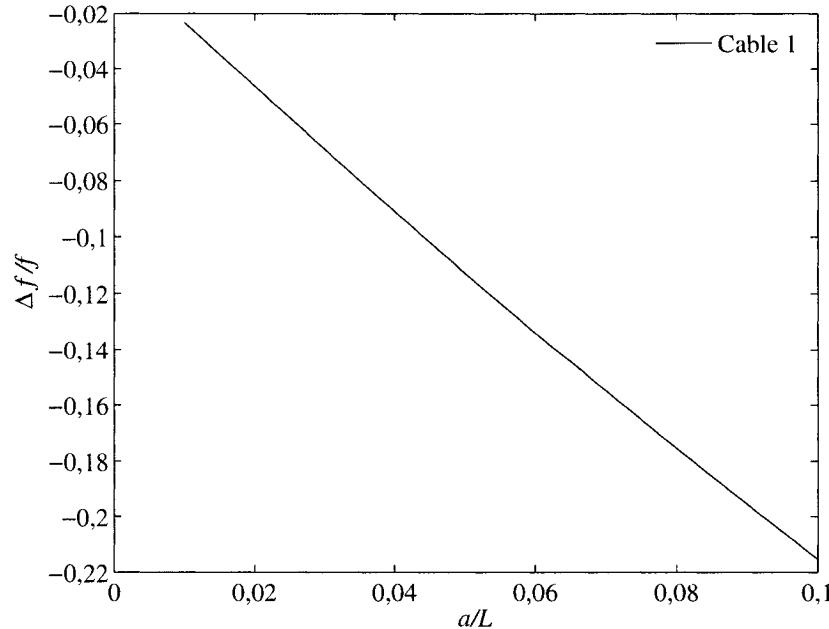


FIG. 4.5  $\Delta f(a/L)/f$  pour le câble 1.

De même, un doublement de la portion endommagée influence moins la fréquence qu'un doublement de  $\alpha$  sur une portion constante. En conclusion, on peut écrire le classement

$$\Delta f(\alpha) > \Delta f(a/L) > \Delta f(X_d) \quad (4.14)$$

La formulation analytique que nous venons de développer permet de prendre en compte la présence d'un changement de section local dans un câble lors d'un calcul dynamique, et de conclure sur l'importance relative des différents paramètres sur le comportement dynamique d'un tel câble. Cette formulation originale peut également être utilisée pour valider la sensibilité des modèles numériques. Notons cependant qu'elle ne tient pas compte de la rigidité flexionnelle du câble. L'importance de ce paramètre est examinée numériquement dans la section suivante en utilisant une formulation par différences finies.

TAB. 4.5  $\Delta f/f(\%)$  pour différents scénarios d'endommagement.

$X_d$	$\alpha$	$a/L$	$\Delta f/f(\%)$
0.25	0.8	0.01	-0.063344
0.25	0.8	0.02	-0.123433
0.25	0.6	0.01	-0.161791
0.25	0.6	0.02	-0.303142
0.5	0.8	0.01	-0.063263
0.5	0.8	0.02	-0.123280
0.5	0.6	0.01	-0.161593
0.5	0.6	0.02	-0.302794

### 4.3 Modélisation numérique par différences finies

Constatant les limitations de la méthode analytique, nous nous proposons d'inclure des efforts autres que les efforts axiaux dans les équations dynamiques des câbles. Bien entendu, ceci a pour but de tenir compte de la rigidité flexionnelle du câble. Le bilan des forces dynamiques s'exerçant sur un tronçon élémentaire du câble est illustré sur la figure 4.6. L'indice inférieur  $<_d>$  indique une force dynamique.

L'équilibre des forces appliquées sur le tronçon élémentaire donne

$$d(H_s + H_d) = 0 \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial V_d}{\partial x} = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \sqrt{1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2} \quad (4.16)$$

$$V_s + V_d - \frac{dM_s}{dx} - \frac{\partial M_d}{\partial x} - (H_s + H_d) \left( \frac{dz}{dx} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.17)$$

où  $m$  est la masse du câble chargé dynamiquement par unité de longueur curviligne.

En introduisant l'équilibre statique de l'équation (3.4), l'équation (4.17) devient

$$H_s \frac{dz}{dx} + V_d - \frac{\partial M_d}{\partial x} - (H_s + H_d) \left( \frac{dz}{dx} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.18)$$

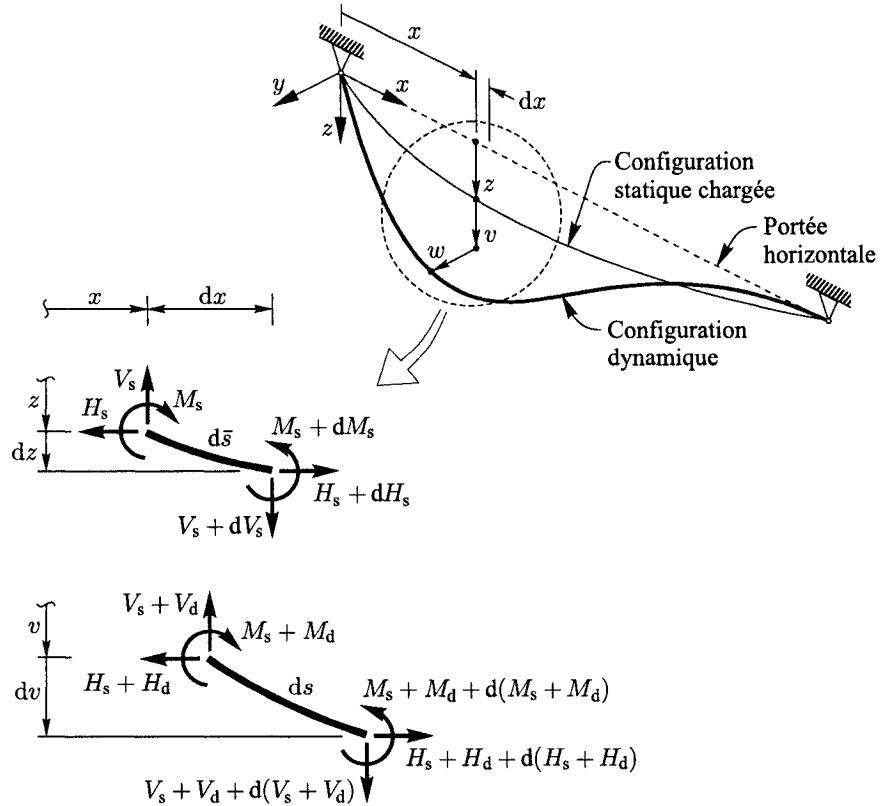


FIG. 4.6 Équilibre dynamique d'un tronçon élémentaire du câble en incluant l'effet de la rigidité flexionnelle (Bouaanani, 2005).

soit

$$V_d - \frac{\partial M_d}{\partial x} - (H_s + H_d) \frac{\partial v}{\partial x} - H_d \frac{dz}{dx} = 0 \quad (4.19)$$

En généralisant l'expression du moment donnée par l'équation (3.5) au cas dynamique, l'équation (4.19) donne après dérivation

$$\frac{\partial V_d}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{EI}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) - (H_s + H_d) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - H_d \frac{d^2 z}{dx^2} = 0 \quad (4.20)$$

d'où, d'après l'équation (4.16)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{EI}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) - (H_s + H_d) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - H_d \frac{d^2 z}{dx^2} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \sqrt{1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2} = 0 \quad (4.21)$$

Cette équation est générale. On vérifie qu'en faisant tendre  $I \rightarrow 0$  et en gardant uniquement les termes d'ordre 1, on retrouve l'équation simplifiée (2.43). La complexité d'une telle équation et la présence de dérivées d'ordre 4 rend difficile la résolution analytique. On choisit donc d'effectuer une résolution numérique par différences finies.

#### 4.3.1 Formulation simplifiée

Une formulation simple est donnée par Mehrabi et al. (1998) et est revue au chapitre 2. Dans cette formulation, l'équation (4.21) est simplifiée par l'hypothèse de faible inclinaison des éléments de câble, qui se traduit par  $dz/dx \ll 1$ . Afin de vérifier la méthode, nous reprenons les équations (2.70) à (2.79) et les programmons dans un code MATLAB pour effectuer la résolution du calcul spectral des 12 câbles de référence dont les propriétés sont données dans le tableau 3.1. Chaque câble a une portée de 100 m et est fixé par des rotules à ses extrémités.

On se limite au calcul des 5 premières fréquences. En effet, dans les applications de câbles qui nous intéressent, on peut montrer que ce sont les premiers modes qui contrôlent la réponse dynamique de la structure, les modes supérieures ayant des amplitudes largement moindres. Les fréquences propres obtenues sont résumées dans le tableau 4.3.1. D'emblée, nous pouvons comparer les valeurs trouvées avec celles obtenues précédemment par le calcul analytique. Les deux méthodes montrent une excellente concordance. Les fréquences calculées par différences finies semblent également montrer l'inversion des modes pour les câbles 7 à 12, mais seule la représentation graphique des modes pourra nous confirmer ce résultat. Les figures 4.3.1 montrent donc la forme des premiers modes calculés par

TAB. 4.6 Fréquences propres des premiers modes calculées par différences finies.

Câble	$f_1(Hz)$	$f_2(Hz)$	$f_3(Hz)$	$f_4(Hz)$	$f_5(Hz)$
1	0,466384	0,910159	1,365475	1,819716	2,274172
2	0,466395	0,910258	1,365808	1,820507	2,275715
3	0,466704	0,913077	1,375282	1,842915	2,319262
4	0,487449	0,865940	1,300969	1,731366	2,164194
5	0,487454	0,866054	1,301349	1,732276	2,165966
6	0,487632	0,869294	1,312154	1,758000	2,215878
7	0,692739	0,869966	1,159845	1,384986	1,744831
8	0,692803	0,870105	1,159922	1,385499	1,745776
9	0,694632	0,873611	1,162325	1,400052	1,772752
10	0,512945	0,713929	1,025627	1,132465	1,350876
11	0,513026	0,714235	1,026273	1,133032	1,351594
12	0,515328	0,722451	1,044529	1,145456	1,373417

différences finies.

Les figures 4.3.1, montrent effectivement que pour les câbles 7 à 12, le premier mode est antisymétrique et que pour les câbles 10 à 12, le troisième mode l'est également ce qui correspond exactement à ce que nous avons calculé avec la méthode analytique. On peut aller encore plus loin dans l'analyse et remarquer que pour les modes symétriques des câbles 7 à 12, il y a des noeuds de vibration, comme décrit dans Irvine (1981). Cette résolution semble donc donner la même précision que le calcul analytique, mais donne également des informations supplémentaires. En effet, la méthode analytique ne tenait pas compte de la rigidité flexionnelle, qui si on regarde les résultats semble avoir une influence sur les valeurs des fréquences propres. En effet, plus le moment d'inertie est élevé, plus les fréquences propres le sont. Les modes élevés sont plus influencés que les premiers. En effet, la multiplication des noeuds dans la forme de ces modes a pour conséquence d'accroître la courbure et donc l'influence de la rigidité flexionnelle.

#### 4.3.2 Formulation avec rectification du terme de masse

Bien que constituant une amélioration par rapport à la formulation analytique, la résolution précédente doit encore faire face à plusieurs limitations. Comme on l'a vu au

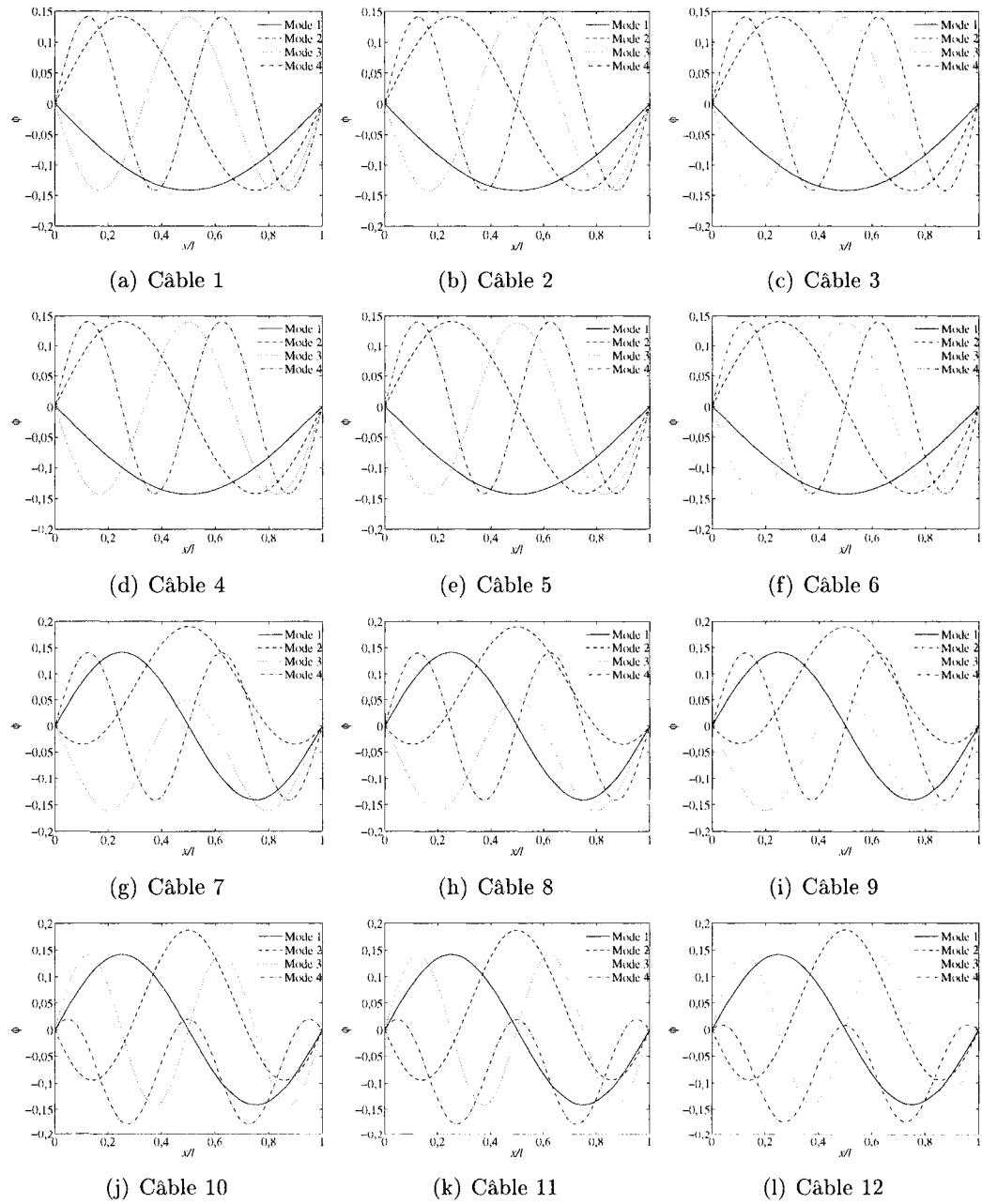


FIG. 4.7 Premiers modes des câbles 1 à 12 calculés en différences finies.

chapitre 3, on peut obtenir une formulation plus précise si l'on sacrifie la linéarité des équations, en modifiant le terme de masse dans l'équation dynamique (2.63) pour y inclure l'effet de l'allongement de l'élément de câble, comme vu dans l'équation (3.14). L'équation dynamique devient alors

$$\begin{aligned} \frac{d^2(EI)}{dx^2} \frac{d^2v}{dx^2} + 2 \frac{dEI}{dx} \frac{d^3v}{dx^3} + EI \frac{d^4}{dx^4} - H_s \frac{d^2v}{dx^2} - H_d \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ + mp^2 vq \sqrt{1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

En effectuant une discréétisation spatiale du problème, on arrive à l'équation matricielle suivante

$$(\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_v)\mathbf{v} + \mathbf{M}' p^2 \mathbf{v} = 0 \quad (4.23)$$

où  $\mathbf{K}_s$  est donné par (2.73), et  $\mathbf{K}_v$  par (2.75). La matrice  $\mathbf{M}'$  est une matrice diagonale dont les termes valent

$$M_{i,i} = m \sqrt{1 + \left[ \frac{z(i+1) - z(i-1)}{2h} \right]^2} \quad (4.24)$$

La résolution du problème de fréquences propres est effectuée en calculant les valeurs propres généralisées de la matrice  $\mathbf{K}$  par la matrice  $\mathbf{M}'$ . Les résultats obtenus seront discutés plus tard dans le paragraphe 4.3.4.

### 4.3.3 Formulation avec rectification du terme de rigidité

L'objectif de ce paragraphe est de résoudre le problème dynamique avec une formulation qui tiendrait compte d'une modification du terme de rigidité. Cette généralisation, appliquée dans le chapitre 3 au cas statique, permettrait de prendre en compte l'allongement de l'élément de câble, et par conséquent de s'affranchir de l'hypothèse d'un profil aplati.

Pour développer une telle formulation, il faut reprendre l'équation (4.21). Lorsque l'on discrétise le problème comme précédemment pour le résoudre en différences finies, il reste

des termes quadratiques qui empêchent la résolution par valeurs propres. Si l'on suppose que les déplacements dynamiques sont petits et que les termes quadratiques sont négligeables, on retrouve la formulation avec rectification du terme de la masse. Il semble donc difficile de garder la linéarité permettant le calcul spectral si l'on souhaite supprimer l'hypothèse de profil aplati du câble, et généraliser le calcul pour des câbles ayant un profil statique profond.

#### 4.3.4 Comparaison

Étant donnée la difficulté d'obtenir une formulation appropriée avec un terme de rigidité rectifié, on se contente ici de comparer les deux formulations : simplifiée et avec rectification de terme de la masse. On effectue donc le calcul de la première fréquence propre pour chacun des câbles et on rassemble les résultats dans le tableau 4.7. Les différences entre

TAB. 4.7 Fréquence du premier mode avec les 2 méthodes.

Câble	$f_{\text{simpl}}(\text{Hz})$	$f_{\text{recti}}(\text{Hz})$	$\Delta f / f (\%)$
1	0,4663611	0,4664069	0,0098140
2	0,466372	0,4664178	0,0098143
3	0,4666825	0,4667283	0,0098227
4	0,4875286	0,4875541	0,0052363
5	0,4875351	0,487560	0,0052375
6	0,4877195	0,4877453	0,0052774
7	0,6922276	0,6927385	0,0738075
8	0,6922918	0,6928028	0,0738074
9	0,69412	0,6946323	0,073801
10	0,5116882	0,5129453	0,2456621
11	0,511769	0,5130262	0,2456620
12	0,5140655	0,5153281	0,2456108

les deux méthodes restent faibles, mais on peut quand même faire quelques commentaires. Les différences au sein d'une même catégorie de câbles sont extrêmement proches. Ce sont les câbles 10 à 12 qui montrent la plus grande différence, ce sont également ceux qui ont le plus grand fléchissement. Comme on s'y attendait, il n'est intéressant de prendre en compte l'effet de la rectification de la masse que lorsque le fléchissement devient important.

#### 4.3.5 Câbles inclinés

Nous avons vu dans le chapitre 3 que la formulation qui faisait le moins d'hypothèses sur le profil câble tenait compte des déplacements longitudinaux des noeuds et incluait une force linéique pas forcément verticale. En reprenant la formulation généralisée décrite au chapitre 3.3.5.2 et en incluant cette fois les forces dynamiques, on peut écrire les équations dynamiques dans le plan

$$\begin{aligned} d(H_s + H_d) &= -hds + mds \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{dH_d}{ds} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ d(V_s + V_d) &= -rds + mds \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{dV_d}{ds} = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ (V_s + V_d) \left( \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial s} \right) - \frac{dM_s}{ds} - \frac{\partial M_d}{\partial s} - (H_s + H_d) \left( \frac{dz}{ds} + \frac{\partial v}{\partial s} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

On rappelle que  $h$  et  $r$  sont respectivement les forces linéiques horizontale et verticale qui s'appliquent sur les éléments de câble. En combinant l'équation précédente avec les équations d'équilibre statique (3.24) à (3.26), on obtient

$$(V_s + V_d) \frac{\partial u}{\partial s} + V_d \frac{dx}{ds} - \frac{\partial M_d}{\partial s} - (H_s + H_d) \frac{\partial v}{\partial s} - H_d \frac{dz}{ds} = 0 \quad (4.26)$$

On peut exprimer  $M_d$  de la manière suivante

$$M_d = \frac{-EI}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 \right]^{3/2}} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \quad (4.27)$$

Après dérivation et substitution, on obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[ \frac{EI}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 \right]^{3/2}} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right] + \frac{\partial}{\partial s} (V_s + V_d) \frac{\partial u}{\partial s} + (V_s + V_d) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial V_d}{\partial s} \frac{dx}{ds} + V_d \frac{d^2 x}{ds^2} \\ - \frac{\partial}{\partial s} (H_s + H_d) \frac{\partial v}{\partial s} - (H_s + H_d) \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \frac{\partial H_d}{\partial s} \frac{dz}{ds} - H_d \frac{d^2 z}{ds^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[ \frac{EI}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 \right]^{3/2}} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right] + \left( m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - r \right) \frac{\partial u}{\partial s} + (V_s + V_d) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \frac{dx}{ds} + V_d \frac{d^2 x}{ds^2} \\ - \left( m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - h \right) \frac{\partial v}{\partial s} - (H_s + H_d) \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{dz}{ds} - H_d \frac{d^2 z}{ds^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

La formulation que nous avons établie et qui prend en compte le déplacement longitudinal des noeuds, de par son absence de limitations pourrait également servir au calcul de câbles à grand fléchissements. Néanmoins, comme nous l'avons vu avec la formulation avec rectification de la rigidité, elle se heurte au problème de la non linéarité des équations qui rend impossible le calcul par valeurs propres, à moins d'une linéarisation qui lui ferait alors perdre son originalité.

#### 4.3.6 Câbles endommagés

Dans les paragraphes qui précèdent, nous avons cherché à améliorer la formulation par différences finies des câbles en essayant de supprimer les hypothèses relatives au profil. Nous allons maintenant nous intéresser à la résolution numérique des câbles endommagés.

Nous avons vu précédemment une formulation analytique qui nous a donné un certain nombre de résultats intéressants que nous allons maintenant tenter de retrouver à l'aide d'une résolution par différences finies. La formulation qui nous vient immédiatement à l'esprit est celle proposée par Mehrabi et al. (1998) et reprise par Bouaanani (2006). Neanmoins, son apparence simplicité ne doit pas faire oublier l'hypothèse implicite faite par l'auteur pour arriver à son résultat, à savoir que  $EI(x) \in C_2([0, 100])$ , soit  $EI(x)$  doit être deux fois différentiable. Si on considère que l'endommagement est représenté par une réduction de la section d'un élément du câble, on ne peut simplement changer les propriétés d'un élément dans la formulation de Mehrabi, car la fonction  $EI(x)$  alors considérée ne vérifierait pas l'hypothèse précédente. Pour résoudre ce problème il faut donc séparer le câble en 3 parties sur lesquelles  $EI$  est constant et écrire les conditions aux frontières. Pour chaque partie du câble, l'équation du mouvement (2.63) reste valable, avec dans notre cas  $c'$ ,  $k'$  nuls et  $EI$  constant, ce qui donne pour le cas statique

$$EI \frac{d^4 z}{dx^4} - H_s \frac{d^2 z}{dx^2} = mg \quad (4.30)$$

Considérons l'interface où le câble change de section. On va noter avec un indice 1 la partie gauche et 2 la partie droite, voir figure 4.8.

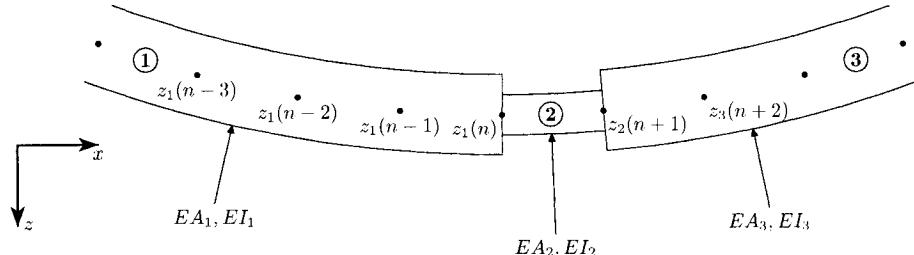


FIG. 4.8 Noeuds au niveau des interfaces du câble endommagé.

Dans chaque partie du câble, on a donc d'après l'équation (4.30)

$$EI_1 \frac{d^4 z_1}{dx^4} - H_s \frac{d^2 z_1}{dx^2} = mg \quad (4.31)$$

$$EI_2 \frac{d^4 z_2}{dx^4} - H_s \frac{d^2 z_2}{dx^2} = mg \quad (4.32)$$

On note  $x_d$  la position de l'endommagement. Les conditions à l'interface imposent

$$z_1(x_d) = z_2(x_d) \quad (4.33)$$

$$\frac{dz_1}{dx}(x_d) = \frac{dz_2}{dx}(x_d) \quad (4.34)$$

$$M_{s1}(x_d) = M_{s2}(x_d) \quad (4.35)$$

$$V_{s1}(x_d) = V_{s2}(x_d) \quad (4.36)$$

où  $M_s$  et  $V_s$  sont respectivement le moment et l'effort tranchant dans le câble. Ce qui donne finalement

$$z_1(x_d) = z_2(x_d) \quad (4.37)$$

$$\frac{dz_1}{dx}(x_d) = \frac{dz_2}{dx}(x_d) \quad (4.38)$$

$$EI_1 \frac{d^2 z_1}{dx^2}(x_d) = EI_2 \frac{d^2 z_2}{dx^2}(x_d) \quad (4.39)$$

$$EI_1 \frac{d^3 z_1}{dx^3}(x_d) = EI_2 \frac{d^3 z_2}{dx^3}(x_d) \quad (4.40)$$

Pour résoudre ces équations, on va utiliser la méthode des différences finies, qui consiste donc à remplacer les différentes dérivées par des taux d'accroissement

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z(x+a) - z(x-a)}{2a} \quad (4.41)$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{z(x+a) - 2z(x) + z(x-a)}{a^2} \quad (4.42)$$

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = \frac{z(x+2a) - 2z(x+a) + 2z(x-a) - z(x+2a)}{2a^3} \quad (4.43)$$

$$\frac{d^4 z}{dx^4} = \frac{z(x+2a) - 4z(x+a) + 6z(x) - 4z(x-a) + z(x+2a)}{a^4} \quad (4.44)$$

On divise le câble en éléments de longueur  $a = 1$  m, indexés par  $i$ ,  $0 \leq i \leq N$ . On suppose que l'interface est situé au noeud  $i = n$ . Les points  $z_1(n+1)$ ,  $z_1(n+2)$ ,  $z_2(n-1)$  et  $z_2(n-2)$  sont alors fictifs et sont des artifices destinés à remplacer les inconnues  $M_{s1}$ ,

$M_{s2}$ ,  $V_{s1}$  et  $V_{s2}$ . Toutes les équations nécessaires à la résolution sont maintenant posées, et il va falloir les arranger afin d'en éliminer les variables en trop que constituent les noeuds fictifs. A partir des équations (4.37), (4.38) et (4.39), on peut exprimer

$$z_1(n+1) = (1 - \varepsilon)z_2(n+1) + 2\varepsilon z_1(n) - \varepsilon z_1(n-1) \quad (4.45)$$

$$z_2(n-1) = (1 + \varepsilon)z_1(n-1) - 2\varepsilon z_1(n) + \varepsilon z_2(n+1) \quad (4.46)$$

avec

$$\varepsilon = \frac{EI_1 - EI_2}{EI_1 + EI_2} \quad (4.47)$$

À partir des équations (4.31) et (4.32), on obtient

$$\begin{aligned} EI_1 z_1(n+2) &= (4EI_1 + H_s a^2)z_1(n+1) + (-6EI_1 - 2H_s a^2)z_1(n) \\ &\quad + (4EI_1 + H_s a^2)z_1(n-1) - EI_1 z_1(n-2) + mg a^4 \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} EI_2 z_2(n-2) &= (4EI_2 + H_s a^2)z_2(n+1) + (-6EI_2 - 2H_s a^2)z_2(n) \\ &\quad + (4EI_2 + H_s a^2)z_2(n-1) - EI_2 z_2(n+2) + mg a^4 \end{aligned} \quad (4.49)$$

En introduisant les équations (4.48) et (4.49) dans l'équation (4.40), on trouve

$$\begin{aligned} &(2EI_1 + H_s a^2)z_1(n+1) + (-6EI_1 - 2H_s a^2)z_1(n) + (6EI_1 + H_s a^2)z_1(n-1) \\ &- 2EI_1 z_1(n-2) + mg a^4 = \\ &2EI_2 z_2(n+2) - (6EI_2 + H_s a^2)z_2(n+1) - (-6EI_2 - 2H_s a^2)z_2(n) \\ &- (2EI_2 + H_s a^2)z_2(n-1) - mg a^4 \end{aligned} \quad (4.50)$$

On introduit enfin les expressions (4.45) et (4.46) dans (4.50), ce qui donne après simplifi-

fication

$$\begin{aligned}
 & (1 - \varepsilon)(2EI_1 + H_s a^2)z_2(n+1) + [(4\varepsilon - 6)EI_1 + (2\varepsilon - 2)H_s a^2]z_1(n-1) \\
 & - 2EI_1 z_1(n-2) + 2mga^4 = \\
 & 2EI_2 z_2(n+2) + [-(6 + 2\varepsilon)EI_2 - (1 + \varepsilon)H_s a^2]z_2(n+1) \\
 & + [(4\varepsilon + 6)EI_2 + (2\varepsilon + 2)H_s a^2]z_2(n) - (\varepsilon + 1)(2EI_2 + H_s a^2)z_1(n-1)
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Soit au final

$$\begin{aligned}
 & z_2(n+2)EI_2 + \\
 & z_2(n+1)[(\varepsilon - 1)EI_1 - (3 + \varepsilon)EI_2 - H_s a^2] + \\
 & z_1(n)[(3 - 2\varepsilon)EI_1 + (2\varepsilon + 3)EI_2 + 2H_s a^2] + \\
 & z_1(n-1)[(\varepsilon - 3)EI_1 - (\varepsilon + 1)EI_2 - H_s a^2] + \\
 & z_1(n-2)EI_1 = mga^4
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

On a alors l'équation correspondant au noeud  $i = n$ . Si maintenant on envisage le cas d'un endommagement sur un seul élément, on a une deuxième interface en  $i = n + 1$ . On obtient alors pour la 2e interface l'équation suivante

$$\begin{aligned}
 & z_3(n+3)EI_3 + \\
 & z_3(n+2)[(\theta - 1)EI_2 - (3 + \theta)EI_3 - H_s a^2] + \\
 & z_2(n+1)[(3 - 2\theta)EI_2 + (2\theta + 3)EI_3 + 2H_s a^2] + \\
 & z_2(n)[(\theta - 3)EI_2 - (\theta + 1)EI_3 - H_s a^2] + \\
 & z_2(n-1)EI_2 = mga^4
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

où

$$\theta = \frac{EI_2 - EI_3}{EI_2 + EI_3} \tag{4.54}$$

Dans les équations (4.52) et (4.53), les points  $z_2(n+2)$  et  $z_2(n-1)$  sont fictifs, il convient donc de les remplacer par leurs expressions respectives, tout comme il convient de remplacer  $z_1(n+1)$  et  $z_3(n)$  dans les équation d'équilibre des points  $z_1(n-1)$  et  $z_3(n+2)$ .

Au final, les équations d'équilibre autour de l'élément endommagé sont

$$\begin{aligned} & \beta z_1(n-3) + \eta z_1(n-2) + (\alpha - \varepsilon\gamma)z_1(n-1) \\ & + (\kappa + 2\varepsilon\gamma)z_1(n) + (1-\varepsilon)\gamma z_2(n+1) = mga^4 \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} & EI_1 z_1(n-2) + [(\varepsilon-3)EI_1 - (\varepsilon+1)EI_2 - H_s a^2]z_1(n-1) + \\ & [(3-2\varepsilon)EI_1 + (3-2\varepsilon+\theta)EI_2 + 2H_s a^2]z_1(n) + \\ & [(\varepsilon-1)EI_1 - (3+\varepsilon-2\theta)EI_2 - H_s a^2]z_2(n+1) + (1-\theta)EI_2 z_3(n+2) = mga^4 \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} & (\varepsilon+1)EI_2 z_1(n-1) + [(\theta-3-2\varepsilon)EI_2 - (\theta+1)EI_3 - H_s a^2]z_1(n) + \\ & [(3-2\theta+\varepsilon)EI_2 + (3+2\theta)EI_3 + 2H_s a^2]z_2(n+1) + \\ & [(\theta-1)EI_2 - (3+\theta)EI_3 - H_s a^2]z_3(n+2) + EI_3 z_3(n+3) = mga^4 \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} & (\theta+1)\beta z_1(n) + (\eta+2\theta\beta)z_2(n+1) + (\alpha-\theta\beta)z_3(n+2) \\ & + \kappa z_3(n+3) + \gamma z_3(n+4) = mga^4 \end{aligned} \quad (4.58)$$

On peut alors écrire les équations d'équilibre des points du câble sous forme matricielle en reprenant pour les noeuds éloignés de l'interface les équations de la formulation simplifiée, ce qui donne

$$\mathbf{K}_s \mathbf{z} = \mathbf{m}\mathbf{g} \quad (4.59)$$

où  $\mathbf{K}_s$  est la matrice donnée par l'expression (2.73), mais dont on a remplacé les termes proches de l'interface par ceux que nous venons de calculer.

#### 4.3.6.1 Modes en plan

Une fois le problème statique résolu, on peut formuler le problème dynamique. L'équation du mouvement dans le plan, obtenue à partir de l'équation (2.63), s'écrit

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} - H_s \frac{d^2 v}{dx^2} - H_d \frac{d^2 z}{dx^2} + mp^2 v = 0 \quad (4.60)$$

que l'on résout de la même manière qu'énoncé dans le chapitre 2 pour obtenir

$$\mathbf{K}_d \mathbf{v} + \mathbf{M} p^2 \mathbf{v} = 0 \quad (4.61)$$

avec

$$\mathbf{K}_d = \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_v \quad (4.62)$$

où le calcul de  $\mathbf{K}_v$  est donnée par (2.75). Cette formulation permet le calcul direct des fréquences et modes propres dans le plan d'un câble endommagé. Reprenant les exemples des 12 câbles décrits dans le tableau 3.1, nous pouvons maintenant calculer l'influence de la position de l'endommagement envisagé, soit une réduction de la section du câble tout en conservant la masse, sur la fréquence du premier mode du câble. Les résultats sont obtenus grâce à un code en MATLAB que nous avons développé. Ils sont illustrés sur les figures 4.3.6.1. Les cas des câbles 1, 4 et 5 montrent des résultats qui nous sont familiers puisqu'ils correspondent aux tendances obtenues par le calcul analytique. Les câbles 2, 3 et 6 montrent au contraire un effet qui n'était pas pris en compte par la formulation analytique. En effet le fait qu'un endommagement situé au centre abaisse davantage la fréquence propre du câbles qu'un endommagement situé sur les bords démontre un comportement de poutre comme celui décrit par Hasan (1995). Pour les câbles 7 à 12, comme le premier mode est antisymétrique, il n'y a pas de tension horizontale dynamique, ce qui fait que ce mode est similaire au deuxième mode de vibration des poutres. On retrouve donc naturellement la même tendance que celle décrite par Hasan (1995), avec un noeud au centre du câble. Le même calcul a été réalisé avec le logiciel ADINA, dans lequel nous avons crée des modèles de câble à partir d'éléments de poutre ou de barre, et que nous avons fait résoudre d'abord pour déterminer le profil statique, puis pour obtenir les fréquences et modes propres. Nous pouvons donc tenter de comparer les résultats obtenus avec les deux méthodes numériques (voir figure 4.3.6.1).

L'examen des résultats permet de dégager les remarques suivantes :

- Pour les 6 premiers câbles, les résultats sont proches (signe, tendance) de ceux calculés

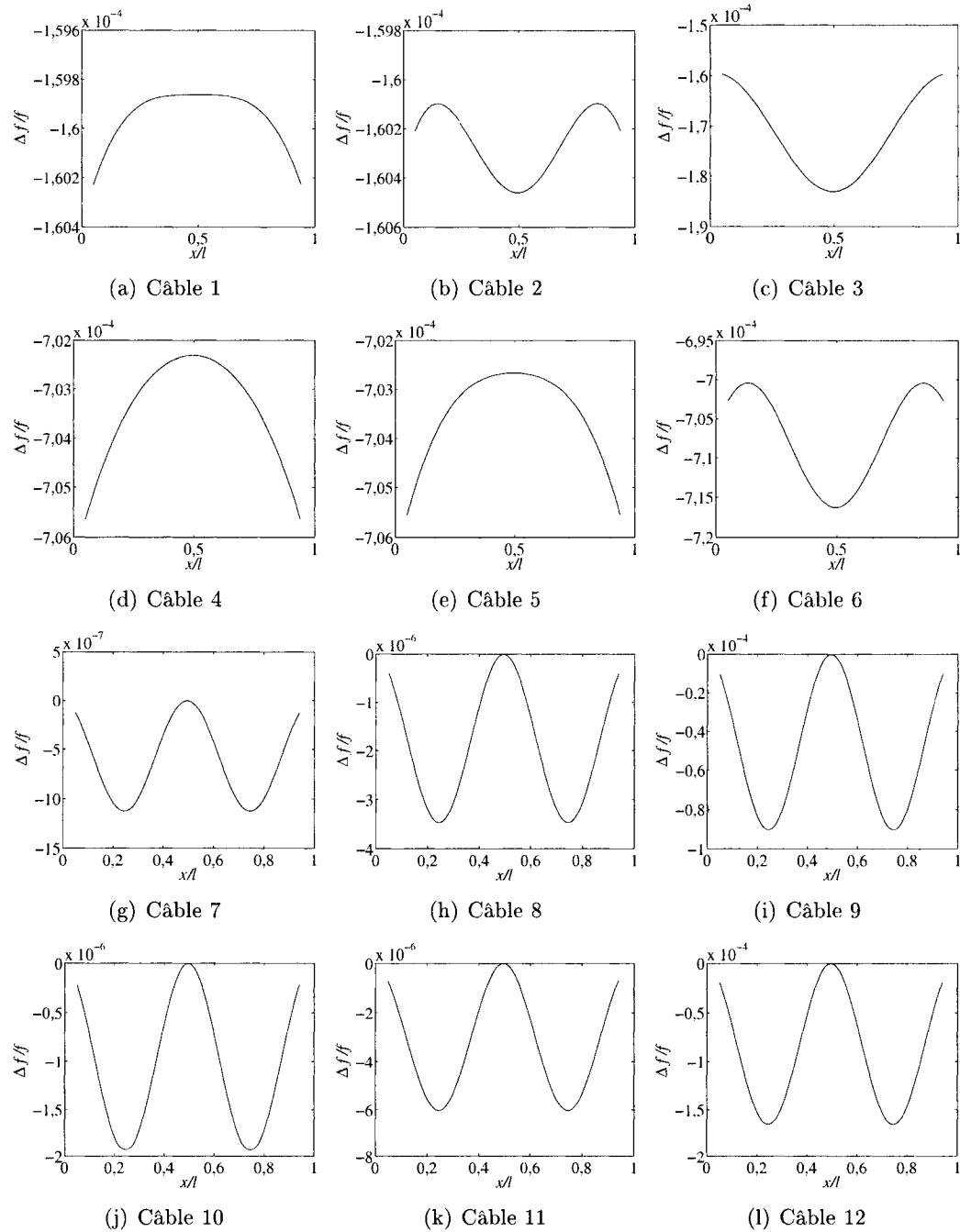


FIG. 4.9 Différence relative entre les câbles sains et endommagés calculés en différences finies.

avec ADINA.

- Pour ces câbles, la différence de valeurs provient du fait qu'ADINA tient compte du déplacement longitudinal, mais qu'en revanche le calcul statique dans ADINA change la valeur de la tension horizontale.
- Pour le câble 2, qui est à la limite entre le comportement d'un câble (comme le câble 1) et d'une poutre (comme le câble 3), la sensibilité aux paramètres est très grande. Un changement de quelques pourcents dans la valeur de la tension par exemple change la tendance.
- Pour les câbles 7 à 12, ADINA n'offre pas une bonne résolution. En effet, on a choisi pour ces câbles un  $\lambda^2$  tel que le premier mode doit être antisymétrique et présenter un noeud en son centre. Lors du calcul statique avec ADINA, la tension se trouve grandement modifiée et le calcul dynamique ne présente pas les modes appropriés. Les différences finies montrent en revanche cette inversion de modes.

Bien que les résultats obtenus par différences finies nous paraissent bons, nous allons tenter d'améliorer la précision de la méthode et étudier l'effet de l'augmentation du nombre d'éléments du modèle sur les valeurs trouvées. Pour commencer nous prenons donc le câble 1 sain et augmentons le nombre d'éléments. On calcule la première fréquence propre du câble, sachant que le calcul analytique donne

$$f_1 = 0.466199 \text{ Hz} \quad (4.63)$$

Le calcul par différences finies pour différentes résolutions est indiqué sur la figure 4.11. On constate que la valeur de convergence est très proche de la valeur calculée analytiquement. On va donc maintenant refaire le calcul pour le câble 1 endommagé mais en utilisant différentes résolutions afin de voir si l'on obtient également une convergence vers la courbe obtenue par la méthode analytique. Les résultats sont représentés sur la figure 4.12. Comme précédemment, on remarque que lorsque l'on augmente la résolution spatiale du modèle, les résultats se rapprochent du calcul analytique. En revanche, ceux ci restent éloignés des résultats obtenus avec ADINA. A ce stade de l'étude, on considère que les résultats donnés par ADINA sont erronés, notamment à cause du fait que la tension

horizontale du câble se voit modifiée dans le calcul statique effectué par le programme. Afin de pousser plus en avant la comparaison avec la résolution analytique, on étudie l'influence de la proportion d'endommagement sur la variation de fréquence. Pour cela on décide d'effectuer le calcul pour le câble 1, endommagé à  $x_d = 25$  m, et dont  $EA_2/EA_1$  varie entre 0,1 et 1. On considère que le câble est cylindrique et qu'une variation de sa section affecte son moment d'inertie d'une variation quadratique

$$\frac{EA_2}{EA_1} = \sqrt{\frac{EI_2}{EI_1}} \quad (4.64)$$

Les résultats obtenus sont illustrés sur la figure 4.13. La concordance avec les résultats analytiques montrés sur la figure 4.4 est excellente, et on peut faire les mêmes remarques, à savoir que l'influence de la proportion de l'endommagement est bien plus grande que sa position dans le câble.

#### 4.3.6.2 Modes hors plan

Pour compléter l'étude des modes propres des câbles endommagés, on va maintenant s'intéresser aux modes hors plan des câbles considérés. La tension dynamique  $H_d$  disparaît alors de l'équation dynamique qui devient

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} - H_s \frac{d^2 w}{dx^2} + mp^2 w = 0 \quad (4.65)$$

que l'on résout de la même manière que précédemment pour obtenir

$$\mathbf{K}_w \mathbf{w} + \mathbf{M} p^2 \mathbf{w} = 0 \quad (4.66)$$

où  $\mathbf{K}_w = \mathbf{K}_s$  est la même que donné précédemment. L'absence de tension horizontale lors des vibrations hors plan, ramène le problème à celui d'une poutre. Les résultats obtenus sont illustrés sur les figures 4.3.6.2 pour  $EI_2/EI_1 = 0.25$ . On reconnaît le comportement décrit dans Hasan (1995) pour les poutres. En effet, l'influence de l'endommagement est plus important aux endroits dont le moment est maximal (ou le rayon de courbure

minimal). Dans la résolution hors plan, c'est la variation du paramètre  $EI$  qui contrôle le comportement du câble endommagé, il est donc normal que l'on retrouve la même tendance qu'avec les poutres.

#### 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons été amené à établir plusieurs formulations afin de rendre compte de la diversité dans le comportement dynamique des câbles. Nous avons d'abord développé une formulation analytique capable de prendre en compte une variation de section locale dans un câble, et l'avons utilisée pour effectuer une étude paramétrique. Par la suite, nous nous sommes intéressés aux méthodes de résolution numériques et avons généralisé la formulation simplifiée établie par Mehrabi et al. (1998), en y incluant les effets de rectification de la masse et de la rigidité flexionnelle. Enfin nous avons montré comment prendre en compte un endommagement ponctuel dans une méthode de résolution par différences finies. Le choix des méthodes est ici plus restreint que dans le chapitre précédent. En effet, la nécessité d'avoir des équations linéaires pour effectuer une résolution spectrale du problème nous contraint à nous limiter à l'hypothèse de faible fléchissement. En ce qui concerne le cas qui nous intéresse, à savoir le cas des câbles endommagés, la méthode proposée montre une très bonne fiabilité tout en conservant une simplicité de calcul appréciable. Elle révèle notamment le comportement de type poutre des câbles qui est très difficile à modéliser rigoureusement de manière analytique.

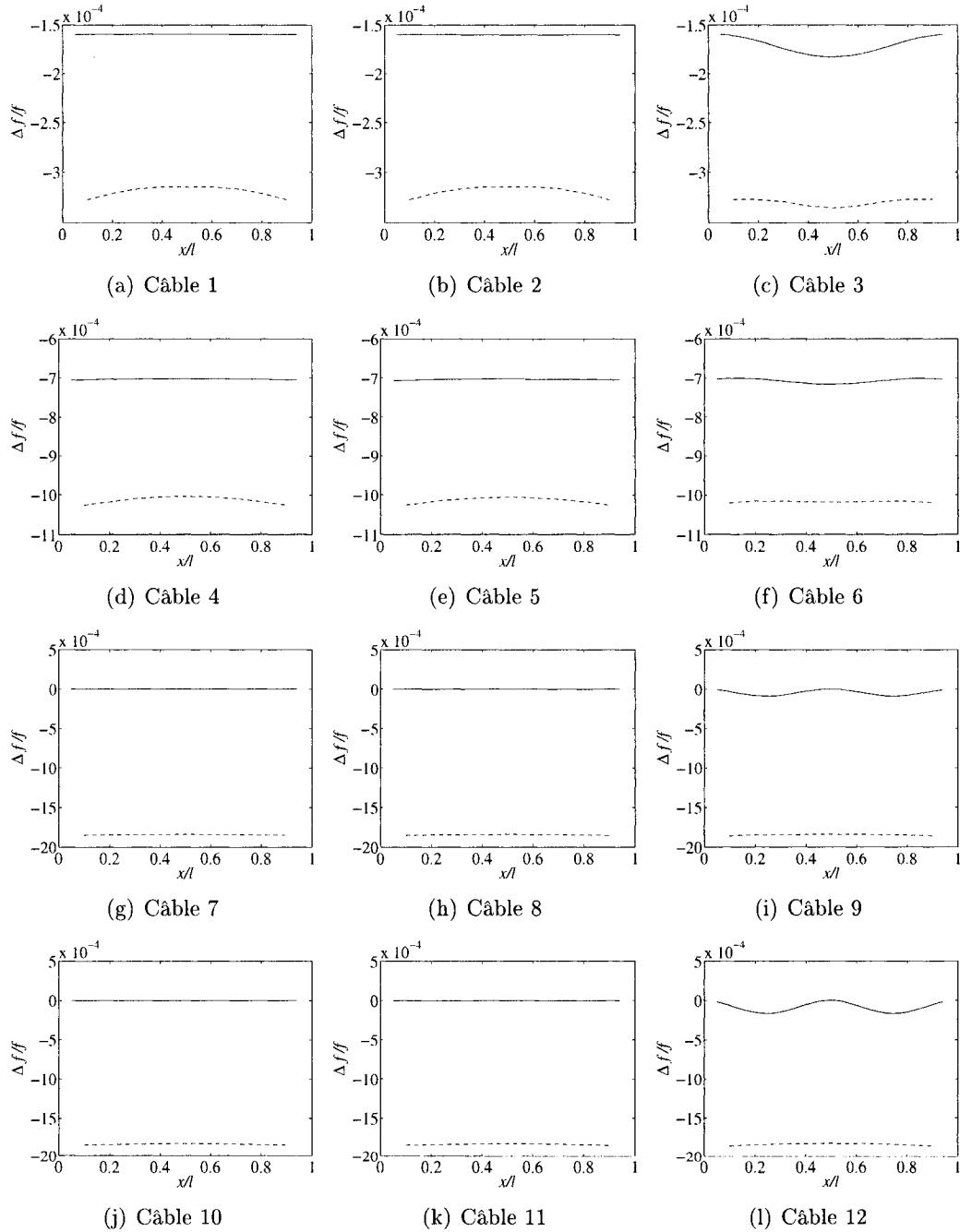


FIG. 4.10 Différence relative entre les câbles sains et endommagés calculés en différences finies, courbes (—) et en éléments finis, courbes (---).

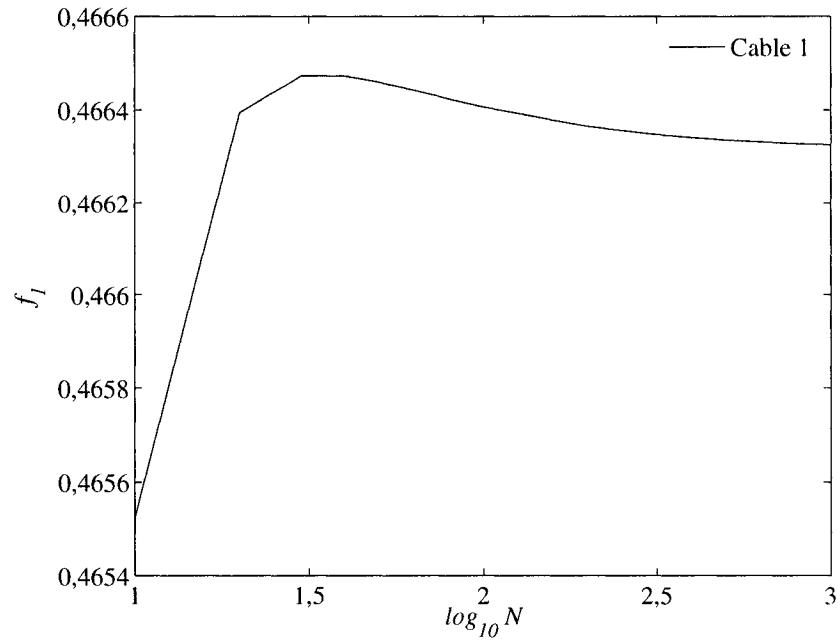


FIG. 4.11 Convergence de la première fréquence propre du câble 1 sain en différences finies.

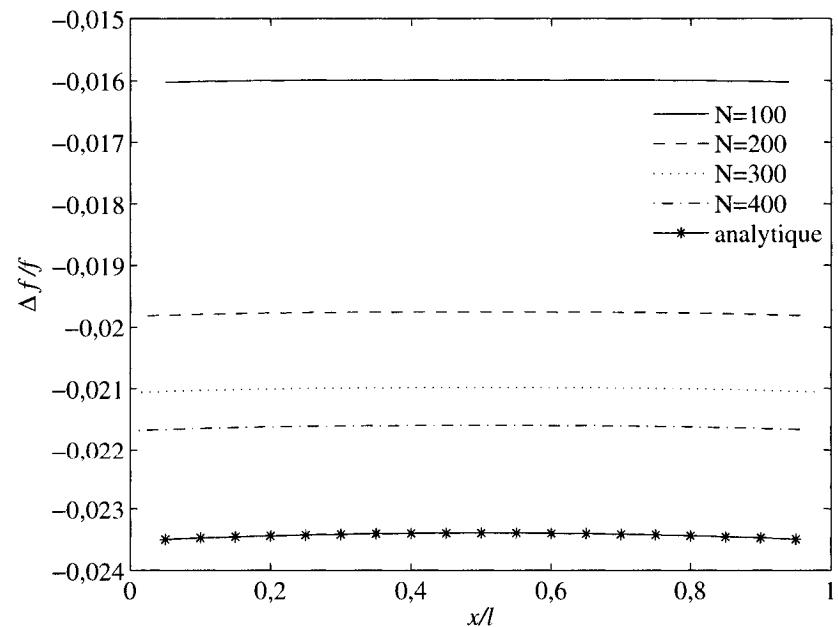


FIG. 4.12  $\Delta f/f$  en fonction de la position de l'endommagement pour plusieurs résolutions.

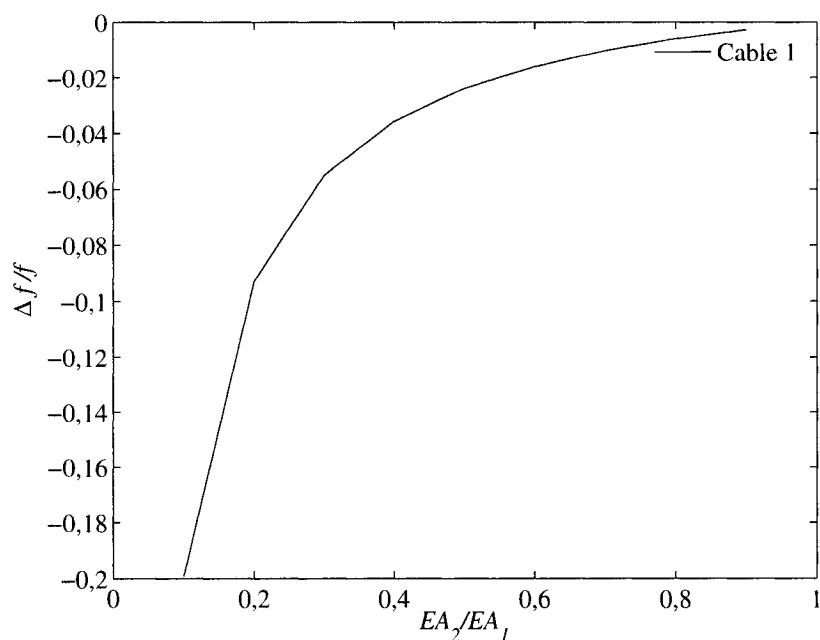


FIG. 4.13  $\Delta f$  en fonction de la proportion de l'endommagement

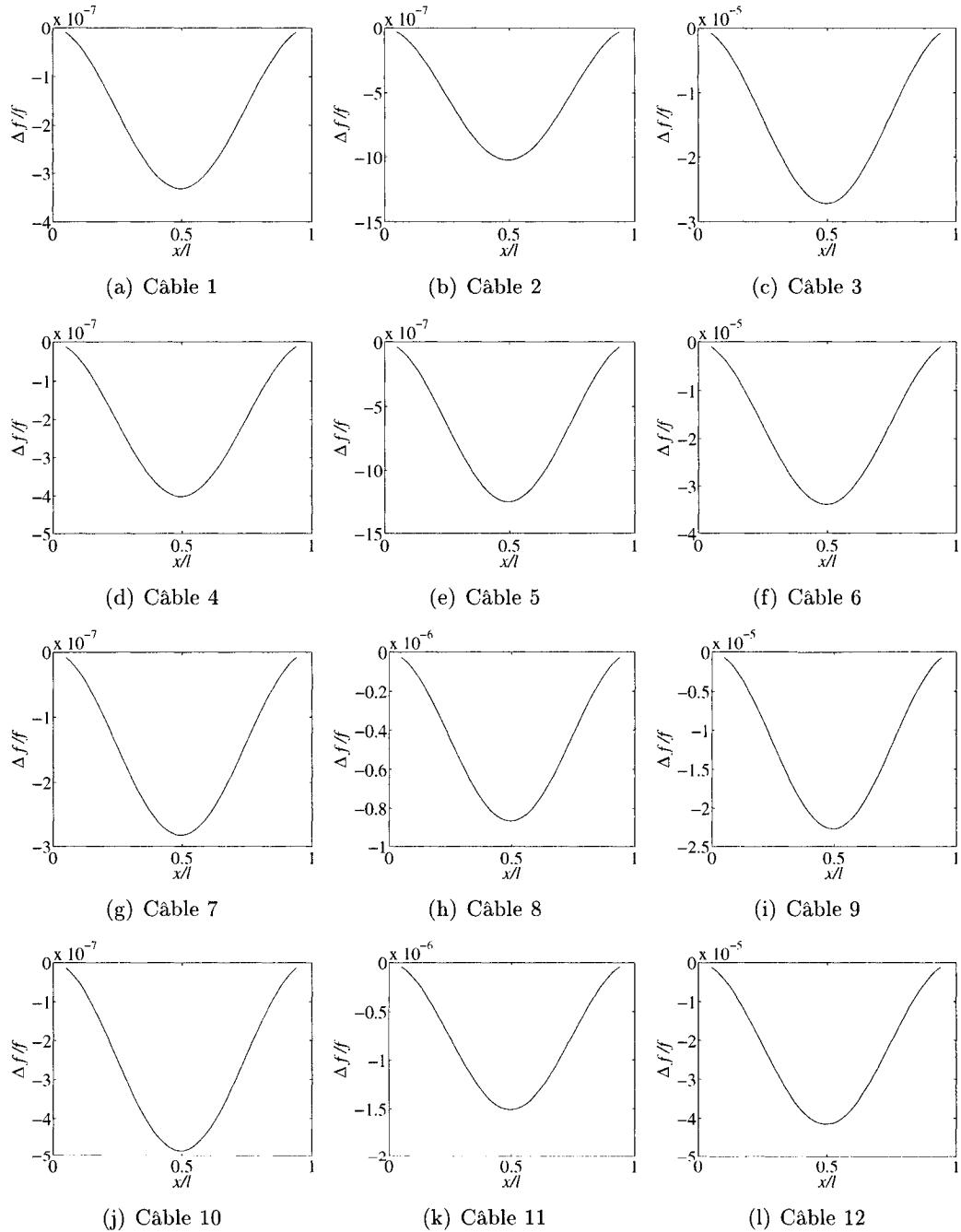


FIG. 4.14 Différence relative entre les câbles sains et endommagés calculés en différences finies, hors plan.

## CHAPITRE 5

### PROBLÈME INVERSE : DÉTECTION DE L'ENDOMMAGEMENT

#### 5.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons établi plusieurs modèles destinés à approcher le comportement structural des câbles, et à évaluer leur sensibilité à un scénario d'endommagement. Dans ce chapitre, nous nous proposons de résoudre le problème inverse, à savoir déterminer si un câble est endommagé et à quel endroit à partir de ses propriétés dynamiques. L'algorithme proposé pour résoudre ce problème devrait rendre compte de la faible sensibilité du câble à la variation de la position de l'endommagement tel que démontré au chapitre 4.

Plusieurs chercheurs ont proposés des algorithmes de détection de l'endommagement adaptée aux structures de génie civil. Ces méthodes doivent être alimentées de données expérimentales généralement sous forme de fréquences et de modes de vibration. Une description de ces techniques est présentée par Doebling et al. (1996). Leur performance dépend non seulement de la qualité des mesures obtenues sur site, mais aussi de la robustesse des algorithmes numériques utilisées pour localiser un endommagement potentiel, et éventuellement le quantifier. Au mieux de la connaissance de l'auteur, tous les algorithmes proposés dans la littérature pour résoudre le problème inverse utilisent une formulation basée sur la méthode des éléments finis (Biswas et al., 1990 ; Yao et al., 1992 ; Farrar et Jauregui, 1996 ; Araujo dos Santos et al., 1998 ; Farrar et Jauregui, 1998 ; Ren et al., 2002 ; Maeck et al., 2002 ; Jaishia et Ren, 2005). Dans le présent travail, un algorithme basé sur une formulation par différences finies est développé pour détecter un endommagement éventuel dans les câbles suspendus. La performance de cet algorithme est testée numériquement en l'appliquant aux cas des câbles endommagés décrits aux deux chapitres précédents.

## 5.2 Formulation du problème inverse

La méthode proposée ici s'inspire de celle décrite par Ren et al. (2002). L'idée de base consiste à relier le comportement dynamique d'une structure à des paramètres de son modèle par éléments finis, afin de décrire l'endommagement localement au niveau de chaque élément du modèle. Un tel paramètre, dit indice d'endommagement, est généralement relié à la variation de la matrice de rigidité élémentaire. Le recalage et le traitement numérique des modèles sains et endommagés permet alors la détection de l'endommagement.

La formulation nécessite d'écrire l'équation modale du câble sain

$$\mathbf{K}\Phi_i = \omega_i^2 \mathbf{M}\Phi_i \quad (5.1)$$

Dans le cas où la structure est endommagée, celle ci voit ses propriétés changer et son équation modale devient

$$\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\Phi}_i = \tilde{\omega}_i^2 \tilde{\mathbf{M}}\tilde{\Phi}_i \quad (5.2)$$

Dans le présent chapitre, on notera avec un  $\sim$  les variables relatives au câble endommagé. En multipliant par  $\tilde{\Phi}_j$ , le vecteur propre correspondant au  $j^{\text{e}}$  mode de la structure endommagée, à gauche dans l'équation 5.2, on obtient

$$\tilde{\Phi}_j^T \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\Phi}_i^T = \tilde{\omega}_i^2 \tilde{\Phi}_j^T \tilde{\mathbf{M}} \tilde{\Phi}_i^T \quad (5.3)$$

Dans une modélisation par éléments finis, les matrices de rigidité  $\mathbf{K}$  et  $\tilde{\mathbf{K}}$  sont obtenues en concaténant les matrices de rigidité de chaque élément notées  $\mathbf{k}_e$  dans le cas sain,  $\tilde{\mathbf{k}}_e$  dans le cas endommagé. On introduit alors un paramètre d'endommagement pour rendre compte de la variation relative de la rigidité de chaque élément

$$\tilde{\mathbf{k}}_e = \mathbf{k}_e(1 - \zeta_e) \quad (5.4)$$

Dans le cas d'éléments de barres par exemple, la matrice  $\mathbf{k}_e$  vaut

$$\mathbf{k}_e = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

le paramètre d'endommagement vaut alors

$$\zeta_e = 1 - \frac{(\tilde{E}\tilde{A})_e}{(EA)_e} \quad (5.6)$$

Dans le cas d'un élément de poutre en flexion, on a

$$\mathbf{k}_e = -\frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

et pour le paramètre d'endommagement

$$\zeta_e = 1 - \frac{(\tilde{E}\tilde{I})_e}{(EI)_e} \quad (5.8)$$

On peut écrire la matrice de rigidité endommagée comme une modification de la matrice de rigidité du câble sain

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \sum_{e=1}^N \mathbf{k}_e \zeta_e \quad (5.9)$$

ce qui permet d'inclure dans les expressions les variables d'endommagement. On peut également écrire les vecteurs propres comme la somme des déplacements de chaque noeud :

$$\Phi_i = \sum_{e=1}^N \Phi_{ie} \quad \tilde{\Phi}_i = \sum_{e=1}^N \tilde{\Phi}_{ie} \quad (5.10)$$

Ce qui permet d'écrire

$$\tilde{\Phi}_j^T \mathbf{K} \tilde{\Phi}_i - \sum_{e=1}^N \tilde{\Phi}_{je} \mathbf{k}_e \tilde{\Phi}_{ie} \zeta_e = \tilde{\omega}_i^2 \tilde{\Phi}_j^T \tilde{\mathbf{M}} \tilde{\Phi}_i \quad (5.11)$$

soit

$$\sum_{e=1}^N \tilde{\Phi}_{je} \mathbf{k}_e \tilde{\Phi}_{ie} \zeta_e = \tilde{\Phi}_j^T \mathbf{K} \tilde{\Phi}_i - \tilde{\omega}_i^2 \delta_{ij} \quad (5.12)$$

Ce qui peut se réécrire sous forme matricielle

$$\mathbf{S}\zeta = \Delta \mathbf{R} \quad (5.13)$$

avec

$$\mathbf{S}_{ij,e} = \tilde{\Phi}_{ie}^T \mathbf{k}_e \tilde{\Phi}_{je} \quad (5.14)$$

et

$$\Delta \mathbf{R}_{ij} = \tilde{\Phi}_i^T \mathbf{K} \tilde{\Phi}_j - \tilde{\omega}_j^2 \delta_{ij} \quad (5.15)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker. La matrice  $\mathbf{S}$  est de dimension  $n^2 \times N$  où  $n$  est le nombre de modes utilisés dans le calcul, et n'est donc généralement pas carrée. L'équation 5.13 peut donc être selon les cas déterminée, sous-déterminée ou sur-déterminée. Il faut donc la plupart du temps avoir recours à des méthodes d'optimisation, pour résoudre l'équation. Une première solution peut être obtenue en utilisant une méthode des moindres carrés, ce qui consiste à minimiser la norme suivante

$$\|\mathbf{S}\zeta - \mathbf{R}\| \quad (5.16)$$

en effectuant un calcul itératif. Malheureusement, cette méthode n'est pas toujours convergente. On adoptera donc une autre méthode qui consiste à calculer le pseudo-inverse de Moore-Penrose de la matrice  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{S}^+$ . Ce dernier est obtenu en effectuant la décomposition en valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{S}$ , soit

$$\mathbf{S}_{M \times N} = \mathbf{U}_{M \times M} \Sigma_{M \times N} \mathbf{V}_{N \times N}^T \quad (5.17)$$

où

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 = 0 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

avec

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}^T = \mathbf{I} \quad (5.19)$$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{V}^T = \mathbf{I} \quad (5.20)$$

et

$$\boldsymbol{\Sigma}_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r) \quad (5.21)$$

où

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 \quad (5.22)$$

Les  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ , ainsi que les  $\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_N$  constituent la décomposition en valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{S}$ , dont le rang est donné par le nombre de valeurs non nulles  $r$ . Le pseudo-inverse est obtenu ainsi

$$\mathbf{S}^+ = \mathbf{V} \boldsymbol{\Sigma}_1^{-1} \mathbf{U}^T = \mathbf{V} \text{diag}(\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_r^{-1}) \mathbf{U}^T \quad (5.23)$$

On peut alors obtenir directement le vecteur des variables d'endommagement :

$$\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{S}^+ \mathbf{R} \quad (5.24)$$

Bien que le calcul du pseudo-inverse se fasse directement, ce qui élimine le problème de convergence cité pour la méthode des moindres carrés, il faut signaler que la précision du calcul reste dépendante du nombre de modes considérés. Par ailleurs, dans le cas d'un maillage très dense, les colonnes du problème peuvent être linéairement dépendantes, ce qui conduit à un mauvais conditionnement du problème et des résultats imprécis.

### 5.3 Résolution par différences finies

Une étape importante de la méthode proposée précédemment consiste à calculer les matrices élémentaires qui composent la matrice de rigidité globale. Si dans le résolution par éléments finies, l'expression de ces matrices est évidente, il n'en est pas de même pour la

Résolution par différences finies, où la matrice de rigidité globale est obtenue directement. Tel que décrit aux deux chapitres précédents, la méthode des différences finies repose sur l'écriture des équations d'équilibre de chaque noeud, tenant ainsi compte implicitement de la rigidité des éléments qui l'entourent.

Par conséquent, afin d'utiliser la formulation par différences finies dans un algorithme de détection de l'endommagement, il faut d'abord déterminer une décomposition appropriée de la matrice de rigidité globale. Pour se faire, nous commençons par la généralisation de l'équation (4.62) qui n'est valable que lorsque la position de l'endommagement est connue d'avance. La formulation générale recherchée doit être valable sur toute la longueur du câble, tout en tenant compte de la possibilité de changement soudain des caractéristiques géométriques de la section du câble. Ceci est réalisé en reprenant la formulation décrite au chapitre précédent pour les câbles endommagés, en supposant que tous les éléments ont des propriétés différentes, et en écrivant les équations de continuité à chaque interface entre deux éléments. Notons  $N$  le nombre total des éléments du modèle par différences finies. Chaque élément est référencé par un indice  $i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , et relie les noeuds  $z_i(i-1)$  et  $z_i(i)$ . En réécrivant l'équation (4.52) au noeud  $n$  avec les nouveaux indices, on obtient

$$\begin{aligned}
& EI_{n+1} z_{n+1}(n+2) \\
& + \left[ -EI_{n+1} \left( 3 + \frac{3EI_n - EI_{n+1}}{EI_n + EI_{n+1}} \right) - H_s a^2 \right] z_{n+1}(n+1) \\
& + \left[ 3EI_n + 3EI_{n+1} - 2 \frac{(EI_{n+1} - EI_n)^2}{EI_n + EI_{n+1}} + 2H_s a^2 \right] z_n(n) \\
& + \left[ -EI_n \left( 3 + \frac{3EI_{n+1} - EI_n}{EI_n + EI_{n+1}} \right) - H_s a^2 \right] z_n(n-1) \\
& + EI_n z_n(n-2) = mg a^4
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Les noeuds  $z_n(n-2)$  et  $z_{n+1}(n+2)$  sont virtuels et peuvent être exprimés à partir des équations des noeuds à gauche et à droite du noeud  $n$  (voir chapitre 4). On obtient alors

l'équation suivante

$$\begin{aligned}
& 2EI_{n+1} \frac{EI_{n+2}}{EI_{n+1} + EI_{n+2}} z_{n+2}(n+2) \\
& + \left[ -EI_{n+1} \left( 3 + \frac{3EI_n - EI_{n+1}}{EI_n + EI_{n+1}} - 2 \frac{EI_{n+1} - EI_{n+2}}{EI_{n+1} + EI_{n+2}} \right) - H_s a^2 \right] z_{n+1}(n+1) \\
& + \left[ 3EI_n + 3EI_{n+1} - 2 \frac{(EI_{n+1} - EI_n)^2}{EI_n + EI_{n+1}} + EI_{n+1} \frac{EI_{n+2} - EI_{n+1}}{EI_{n+1} + EI_{n+2}} \right. \\
& \quad \left. + EI_n \frac{EI_{n-1} - EI_n}{EI_n + EI_{n-1}} + 2H_s a^2 \right] z_n(n) \\
& + \left[ -EI_n \left( 3 + \frac{3EI_{n+1} - EI_n}{EI_n + EI_{n+1}} - 2 \frac{EI_n - EI_{n-1}}{EI_n + EI_{n-1}} \right) - H_s a^2 \right] z_n(n-1) \\
& + 2EI_n \frac{EI_{n-1}}{EI_{n-1} + EI_n} z_{n-1}(n-2) = mga^4
\end{aligned} \tag{5.26}$$

ce qui peut se réécrire ainsi

$$\beta_n z_{n+2}(n+2) + \eta_n z_{n+1} + \alpha_n z_n(n) + \kappa_n z_n(n-1) + \gamma_n z_{n-1}(n-2) = mga^4 \tag{5.27}$$

avec

$$\begin{aligned}
\beta_n &= 2EI_{n+1} \frac{EI_{n+2}}{EI_{n+1} + EI_{n+2}} \\
\eta_n &= \left[ -EI_{n+1} \left( 3 + \frac{3EI_n - EI_{n+1}}{EI_n + EI_{n+1}} - 2 \frac{EI_{n+1} - EI_{n+2}}{EI_{n+1} + EI_{n+2}} \right) - H_s a^2 \right] \\
\alpha_n &= \left[ 3EI_n + 3EI_{n+1} - 2 \frac{(EI_{n+1} - EI_n)^2}{EI_n + EI_{n+1}} + EI_{n+1} \frac{EI_{n+2} - EI_{n+1}}{EI_{n+1} + EI_{n+2}} \right. \\
& \quad \left. + EI_n \frac{EI_{n-1} - EI_n}{EI_n + EI_{n-1}} + 2H_s a^2 \right] \\
\kappa_n &= \left[ -EI_n \left( 3 + \frac{3EI_{n+1} - EI_n}{EI_n + EI_{n+1}} - 2 \frac{EI_n - EI_{n-1}}{EI_n + EI_{n-1}} \right) - H_s a^2 \right] \\
\gamma_n &= 2EI_n \frac{EI_{n-1}}{EI_{n-1} + EI_n}
\end{aligned} \tag{5.28}$$

La matrice de rigidité globale  $\mathbf{K}_s$  du câble peut donc s'écrire sous la forme

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} \alpha_1 - \beta_1 & \kappa_1 & \gamma_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \eta_2 & \alpha_2 & \kappa_2 & \gamma_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & \beta_i & \eta_i & \alpha_i & \kappa_i & \gamma_i & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{N-1} & \eta_{N-1} & \alpha_{N-1} & \kappa_{N-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_N & \eta_N & \alpha_N - \gamma_N & 0 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

L'expression de la matrice globale  $\mathbf{K}_v$  tenant compte des termes  $EA$ , reste en revanche inchangée.

Notons que cette formulation est une généralisation de celle présentée au chapitre précédent pour un câble sain. De surcroît, elle s'affranchit de la condition de double dérivabilité implicite discutée dans le même chapitre. Puisque l'on dispose maintenant d'une formulation constante sur tout le câble, même au niveau de l'endommagement, on va tenter de l'appliquer à la détection de l'endommagement.

Comme nous l'avons déjà mentionné, il reste à calculer les matrices  $\mathbf{k}_e$ , qui sont les contributions de chaque élément de câble à la matrice de rigidité globale. Chaque élément introduit normalement dans la matrice globale de rigidité des termes correspondant à sa rigidité axiale  $EA$  et des termes correspondant à sa rigidité flexionnelle  $EI$ . Ce calcul est rendu difficile par le fait que les équations d'équilibre des noeuds ne sont pas linéaires ni par rapport aux  $EI$  ni par rapport aux  $EA$  des éléments. On fait le choix d'introduire une variable d'endommagement relative au  $EI$  de chaque élément. En effet, cette hypothèse simplificatrice nous permet d'obtenir des matrices  $\mathbf{k}_e$  plus compactes, et montre également une variation plus importante lorsque le câble est endommagé que le terme  $EA$ . On choisit donc d'effectuer un développement limité de ces équations par rapport à chaque  $EI_i$ . En réalité, on note

$$\widetilde{EI}_i = EI_i(1 - \zeta_i) \quad (5.30)$$

Le développement limité donne alors

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \sum_{e=1}^N \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \zeta_e} \zeta_e \quad (5.31)$$

$$= \mathbf{K} - \sum_{e=1}^N \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial EI_e} \frac{dEI_e}{d\zeta_e} \zeta_e \quad (5.32)$$

On trouve alors

$$\mathbf{k}_e = -EI_e \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial EI_e} \quad (5.33)$$

que l'on calcule pour chaque élément

$$\mathbf{k}_1 = -EI_1 \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

$$\mathbf{k}_2 = -EI_2 \begin{bmatrix} -5/2 & 2 & -1/2 \\ 2 & -5/2 & 1 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

$$\mathbf{k}_i = -EI_i \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & -5/2 & 2 & -1/2 \\ -1/2 & 2 & -5/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

pour  $3 \leq i \leq N-2$

$$\mathbf{k}_{N-1} = -EI_{N-1} \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1 & -5/2 & 2 \\ -1/2 & 2 & -5/2 \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

$$\mathbf{k}_N = -EI_N \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Afin de concaténer correctement les matrices précédentes, il est important de connaître leur position dans la matrice globale. Le tableau suivant donne la position du premier terme de chaque matrice élémentaires dans la matrice globale. Ce calcul étant réalisé, nous

Elément	1	2	3	i	N-1	N
Ligne	1	1	1	i-2	N-3	N-2
Colonne	1	1	1	i-2	N-3	N-2

pouvons maintenant appliquer la méthode décrite par Ren et al. (2002) à un problème formulé en différences finies, tout en sachant que les éléments de câbles que l'on considère introduisent dans la matrice de rigidité globale des termes  $EA$  et  $EI$ . Malheureusement, du fait de la non linéarité des équations par rapport à ces termes, il ne nous est pas possible de prendre en compte dans l'algorithme de l'influence d'une modification de ces deux termes. Nous choisissons d'effectuer une détection sur le seul terme  $EI$  dans l'application qui est donnée dans la suite.

## 5.4 Exemple de résolution

Pour tester l'algorithme de détection proposé, nous avons programmé un code sous MATLAB qui effectue les calculs précédemment décrits. Nous l'avons ensuite appliquer à l'analyse de nos câbles de référence. Les hypothèses d'endommagement que l'on considère imposent  $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}$ , car on a considéré que la masse ne changeait pas.

### 5.4.1 Etude du nombre de modes à prendre en compte

Prenons le cas du câble no.1. On envisage pour commencer un scénario d'endommagement où une section d'une longueur d'1 m est réduite de moitié, soit  $\alpha = 0.5$  et  $EI_2/EI_1 = 0.25$ ,

à l'abscisse  $x = 50$  m. Le calcul dans MATLAB peut se faire sans aucune limitation sur le nombre de mode. Par contre on s'attend à avoir une précision plus importante avec un nombre de modes élevé. Nous effectuons des calculs en prenant en compte plusieurs nombres de modes afin de déterminer le nombre de modes qu'il convient de prendre pour avoir une détection efficace. On envisage les cas suivants :

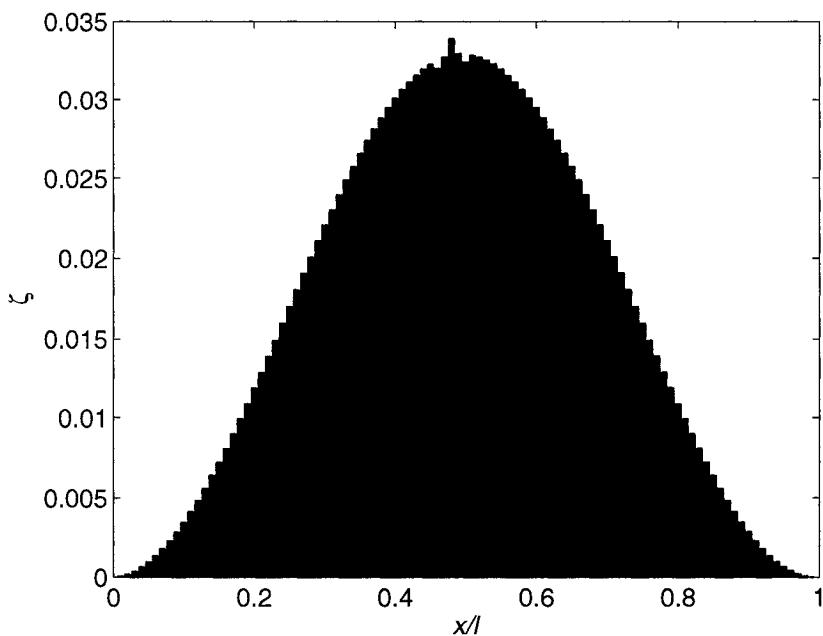


FIG. 5.1 Valeurs calculées de  $\zeta$  avec le premier mode.

**Mode 1 :** On remarque sur la figure 5.1 juste une petite irrégularité sur la courbe au niveau du défaut. Les valeurs ne sont pas celles espérées ( $\zeta = 0.75$  à  $x = 50$  m) et on ne peut pas conclure sur la présence d'un endommagement.

**Modes 1 et 2 :** On ne remarque sur la figure 5.2 aucun pic à l'endroit où on s'attend à en voir ( $x/L = 0.5$ ). Les valeurs semblent peu crédibles sachant que l'on cherche un  $\zeta$  compris entre 0 et 1.

**Modes 1 à 4 :** Là encore, sur la figure 5.3 les pics ne se trouvent pas aux endroits espérés et les valeurs ne correspondent pas à ce que l'on souhaiterait voir.

**Modes 1 à 8, 1 à 16 et 1 à 32 :** Les valeurs représentées sur les figures 5.4 sont de plus en plus grandes, sans pour autant correspondre à ce à quoi on s'attend. La

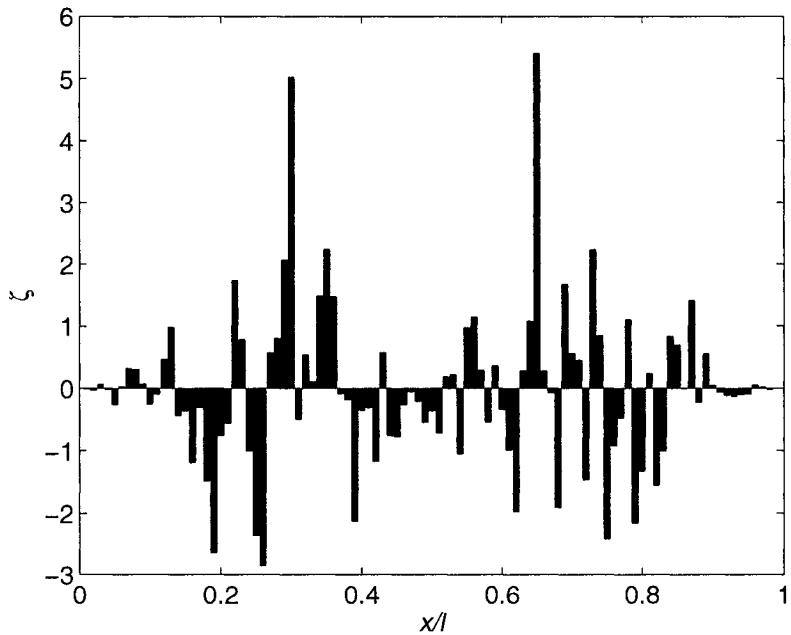


FIG. 5.2 Valeurs calculées de  $\zeta$  avec les 2 premiers modes.

méthode reste imprécise avec un tel nombre de modes.

**Modes 1 à 48 et 1 à 64 :** Le pic représenté sur les figures 5.5 est extrèmenent marqué et l'ordre de grandeur des valeurs trouvées correspond à ce que l'on s'attendait à avoir. On rappellera que si nous ne trouvons pas exactement la valeur de  $\zeta$  que nous cherchons, c'est en grande partie dû au fait que nous avons dû linéariser les équations et faire l'hypothèse que  $\zeta \ll 1$  ce qui n'est pas exactement le cas ici, puisqu'on a pris une valeur de  $\zeta = 0.75$

Il faut donc près de 50 modes pour obtenir des résultats fiables. Ceci est en partie dû au fait que nous n'avons pu prendre en compte dans le calcul l'influence de  $\mathbf{K}_v$  et donc d'une réduction des EA. Si par exemple nous considérons les modes hors plan plutôt que les modes en plan pour la détection, le nombre de modes nécessaires est réduit à environ 30. Mais nous avons un moyen de diminuer le nombre de modes nécessaires à la détection, même en ne considérant que les modes en plan. En effet, nous pouvons choisir de n'utiliser que certains modes. Si par exemple nous ne considérons que les modes 5 à 10, nous obtenons des résultats tout à fait exploitables, représentés sur la figure 5.6. Il semble

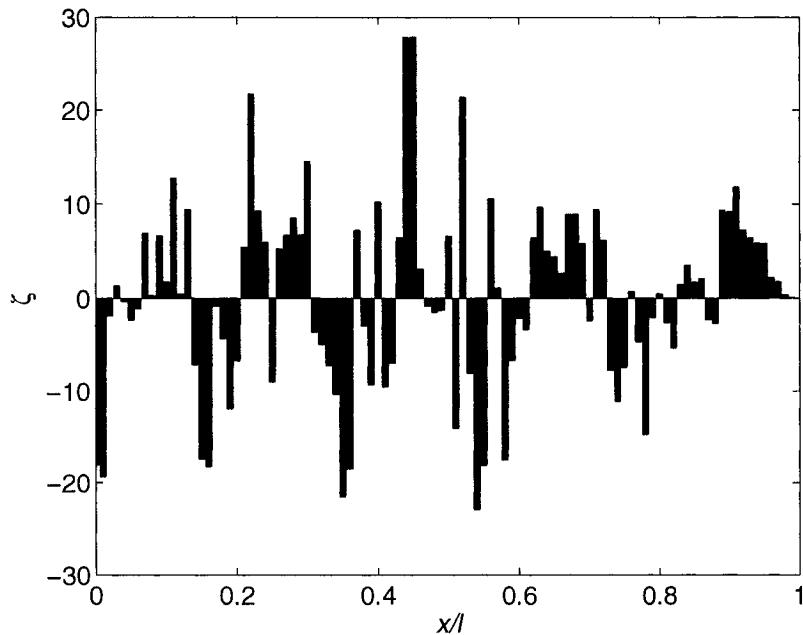


FIG. 5.3 Valeurs calculées de  $\zeta$  avec les 4 premiers modes.

que la présence de certains modes dans le calcul déstabilise le calcul du pseudo-inverse effectué par MATLAB, ce qui provoque des résultats erronés. En choisissant les modes que l'on souhaite utiliser, la méthode se révèle efficace. D'autres simulations montrent que la méthode reste fiable même lorsque l'endommagement est moindre. Par exemple pour un endommagement de seulement 10%, la détection reste efficace.

#### 5.4.2 Scenario d'endommagement multiple

On va maintenant envisager plusieurs endommagements différents et vérifier si la méthode en fait une détection efficace.

**Endommagement de 20% à  $x = 20$  m, 50% à  $x = 50$  m et 30% à  $x = 70$  m :** On voit que la détection est correctement effectuée et que les valeurs sont également bonnes. On rappellera que les valeurs trouvées correspondent à la proportion de  $EI$  endommagée, qui est le carré de la proportion de  $EA$  endommagée selon les hypothèses que nous avons retenues.

**Endommagement de 10% tous les  $x = 10$  m :** dans ce cas extrême, le calcul montre quand même des pics assez marqués aux endroits endommagés, et bien que les valeurs ne soient plus aussi précises pour les modes 5 à 10, la détection est effectuée de manière satisfaisante. Quand on utilise 48 modes, la détection est très précise.

## 5.5 Conclusion

Bien qu'elle fasse face à quelques imprécisions et limites, la méthode de détection que nous avons formulée se montre suffisamment efficace pour pouvoir mettre en évidence la présence de défauts, même légers ou nombreux dans le câble considéré. Comme nous l'avons dit précédemment, certains modes déstabilisent le calcul, notamment les modes symétriques car l'influence de l'endommagement du paramètre  $EA$  se fait sentir, et celui-ci n'est pas pris en compte dans le calcul. Pour plus de rapidité dans le calcul, il est préférable de bien choisir les modes que l'on inclut plutôt que d'en prendre un plus grand nombre. Même si dans notre cas l'utilisation des modes 5 à 10 s'est révélée très efficace, nous ne pouvons affirmer que c'est une règle générale et nous préférerons effectuer plusieurs calculs prenant en compte des modes différents pour choisir celui qui semble donner les valeurs les plus crédibles. Notons enfin que l'utilisation de cette méthode dans un contexte de données expérimentales nécessite cependant des études supplémentaires pour tester sa robustesse.

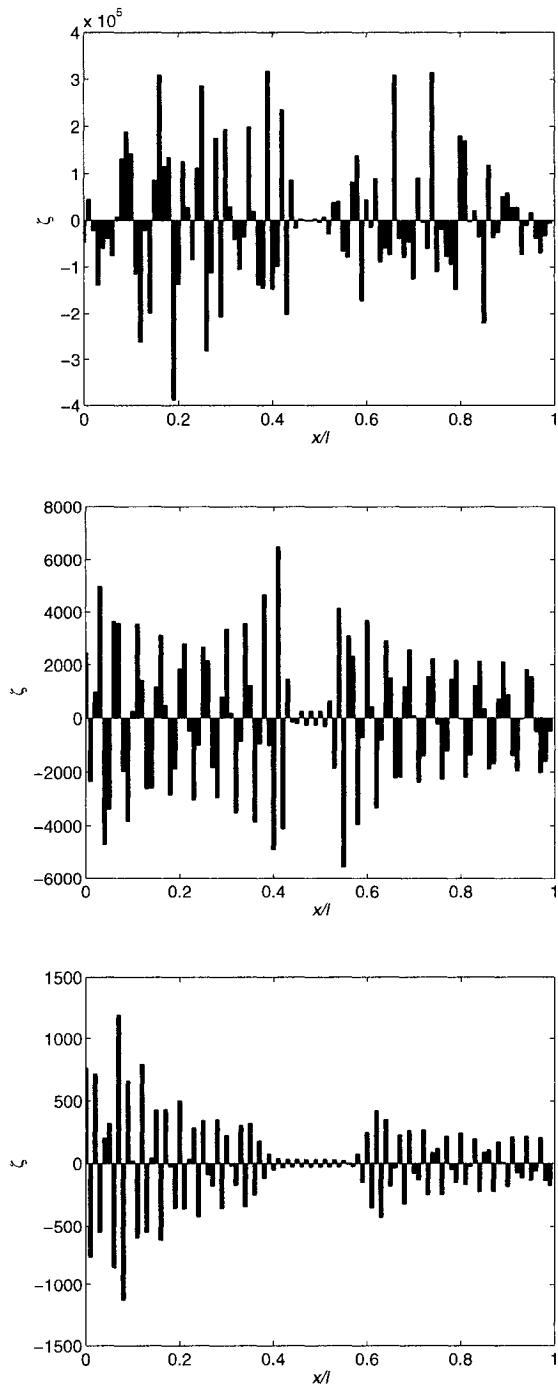


FIG. 5.4 Valeurs calculées de  $\zeta$  avec les 8, 16 et 32 premiers modes.

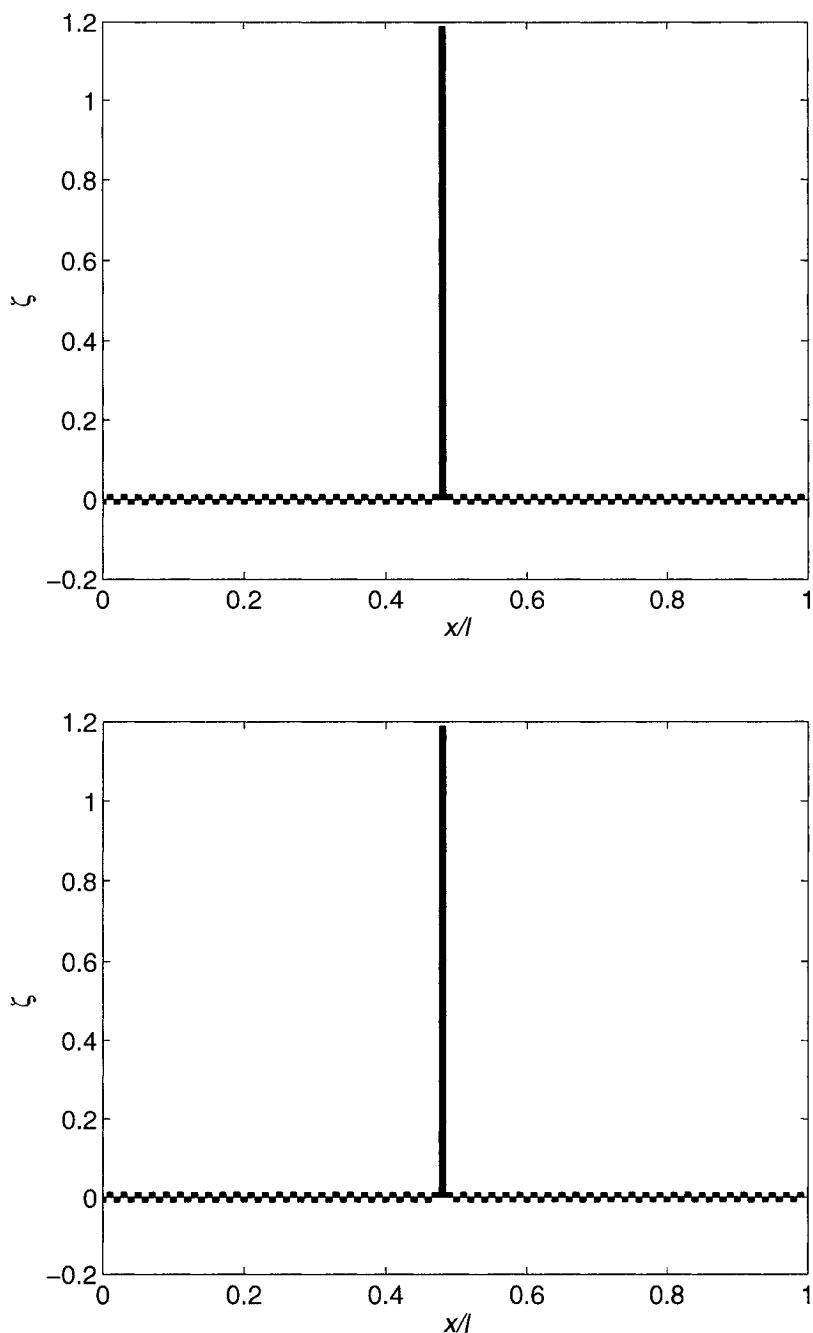


FIG. 5.5 Valeurs calculées de  $\zeta$  avec les 48 et 64 premiers modes.

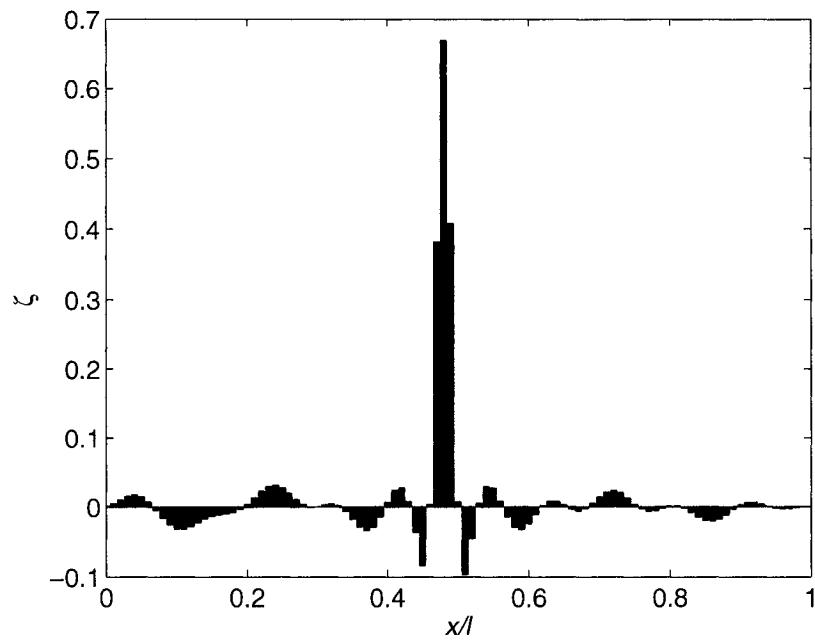


FIG. 5.6 Détection avec les modes 5 à 10.

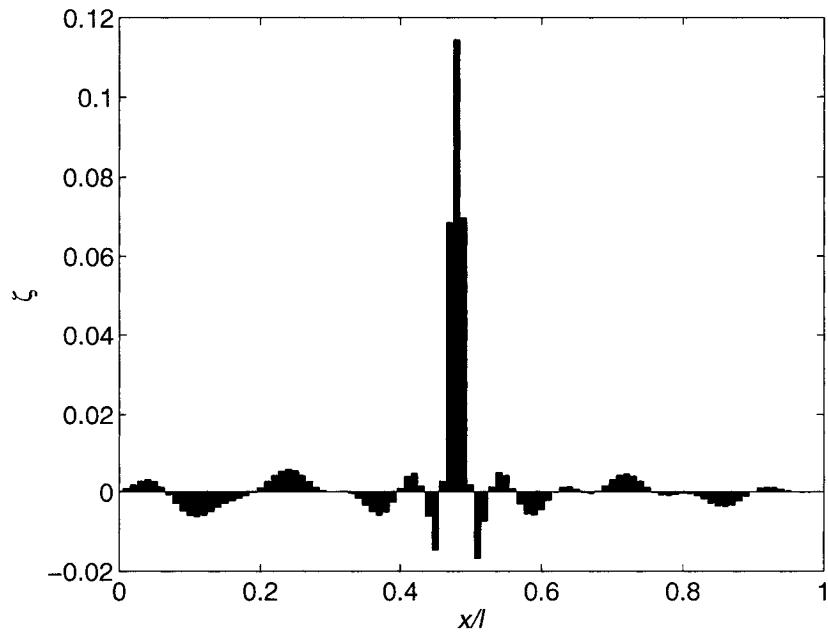


FIG. 5.7 Détection avec les modes 5 à 10, endommagement faible.

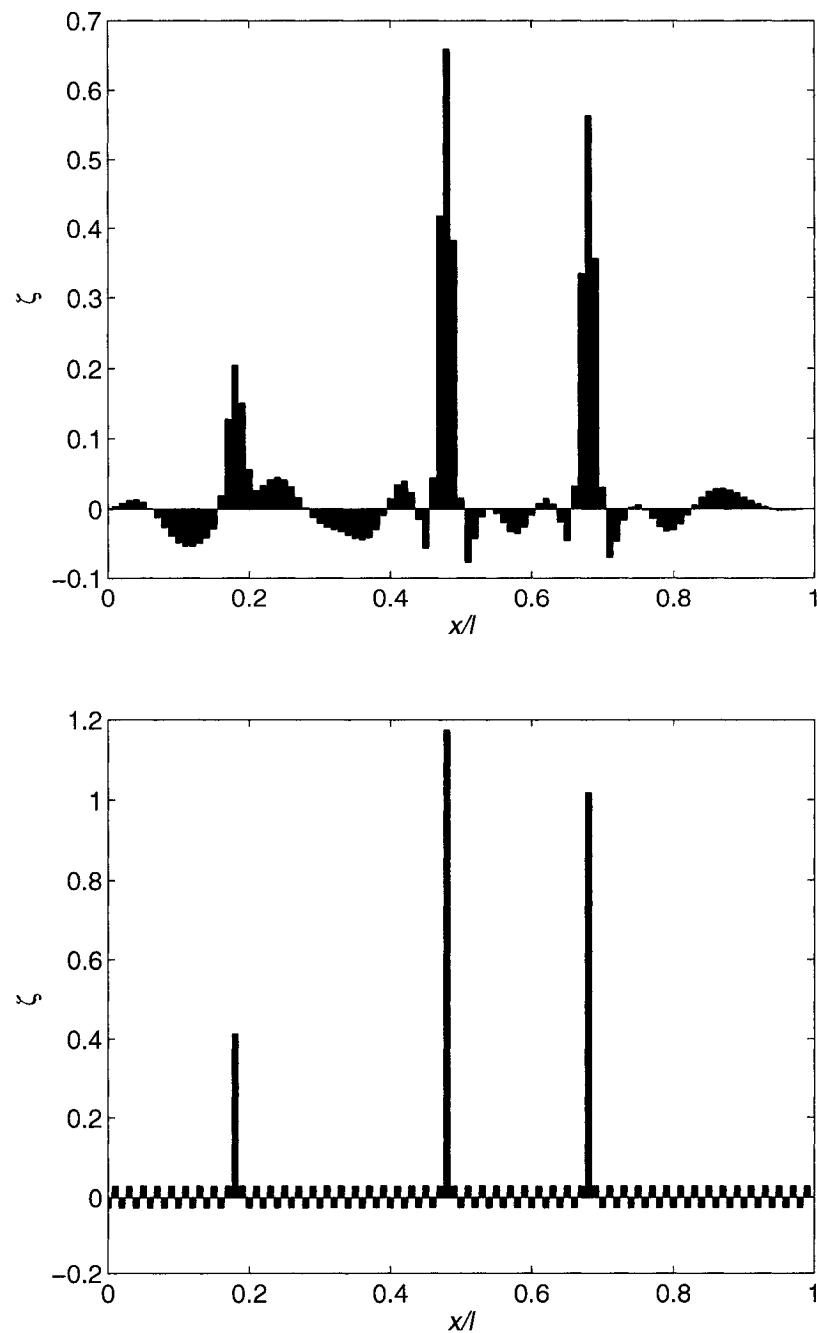


FIG. 5.8 Détection de 3 endommagements avec les modes 5 à 10 et 1 à 48.

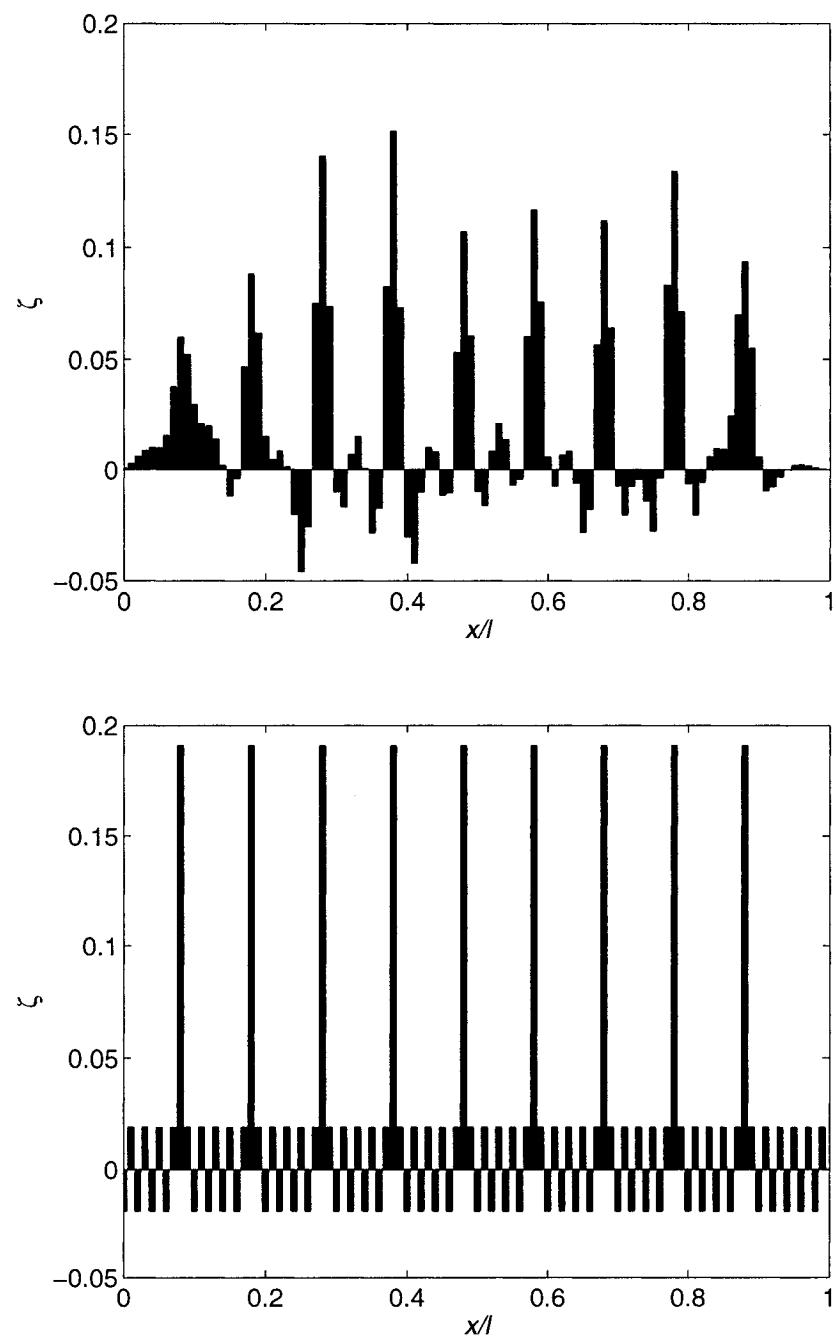


FIG. 5.9 Détection de plusieurs endommagements avec les modes 5 à 10 et 1 à 48.

## CHAPITRE 6

### CONCLUSIONS

#### **6.1 Rappel des objectifs**

Ce mémoire avait plusieurs objectifs. Le premier, était d'étudier l'influence de la prise en compte de termes supplémentaires de masse et de rigidité dans les formulations du comportement statique et dynamique des câbles. Un deuxième objectif était de développer des formulations analytiques et des méthodes de résolution numériques capables de prendre en compte la modification locale des propriétés d'un câble sous l'effet d'un endommagement. Enfin, à partir les formulations améliorées proposées, il était question d'explorer des algorithmes de détection de l'endommagement adaptés aux câbles.

#### **6.2 Comparaison de 3 méthodes de calcul**

Les études menées ont mis en évidence l'intérêt de prendre en compte la modification de la masse et de la rigidité flexionnelle des éléments de câble avec des profils statiques relativement importants. L'influence d'une dénivellation des appuis sur le profil statique a également été examinée. Les calculs que nous avons effectués permettent de mettre en évidence un certain nombre de caractéristiques inhérentes à chacune des méthodes utilisées. Toutes les méthodes utilisées ont révélé des résultats similaires dans les tendances et des différences au final très faibles dans les valeurs. La méthode analytique offre l'avantage d'être théoriquement la plus précise. En revanche, le modèle employé ne tient pas compte de la rigidité flexionnelle du câble, et nous avons démontré, comme dans le cas du câble 3, que celle ci pouvait être de grande importance et changer le comportement du câble. Dans le cas des câbles ayant un  $\xi$  plus important, cette méthode donne de très bon résultats, vers lesquels les autres méthodes convergent. Les éléments finis apparaissent comme la plus générale des méthodes numériques, car c'est celle qui prend en compte le plus de degrés de liberté. Néanmoins, la non-linéarité des équations impose un calcul

incrémental complexe et long. Par ailleurs, la modélisation par éléments finis peut devenir moins précise dans certains cas, tel que décrit dans le mémoire. Enfin, la méthode des différences finies nous paraît être un bon compromis. La précision de la méthode est bonne et les équations linéaires offrent un avantage indéniable sur les autres quant à la résolution. Comme nous l'avons montré, il est néanmoins important de connaître les hypothèses et les limites de la méthode. Les nombreux calculs que nous avons effectué avec cette méthode nous permettent de certifier de sa grande robustesse et de sa rapidité d'exécution.

### **6.3 Influence de l'endommagement**

Le scénario d'endommagement simplifié que nous avons envisagé ne représente pas tous les cas observés sur les structures. La raison de ce choix trouve son origine dans la volonté que nous avions d'étudier spécifiquement l'influence d'un changement de géométrie locale du câble sur son comportement dynamique, sans l'influence par exemple d'un changement de tension. Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, l'importance de l'endommagement, sa longueur et sa position influencent le comportement dynamique à des degrés divers. Dans tous les cas, comme on s'y attendait, un endommagement diminue la rigidité et donc les fréquences propres, mais on a montré que l'importance de l'endommagement avait un impact plus grand sur le câble que sa longueur, et que sa position. La réponse modale est d'ailleurs dans les cas testés, avec un endommagement de 50% sur 1% du câble peu affectée puisque les fréquences varient de moins d'un %, dans tous les câbles testés.

### **6.4 Position de l'endommagement**

En fonction des câbles utilisés, on a observé plusieurs comportements distincts par rapport à la position de l'endommagement. Pour les câbles dont le moment d'inertie est faible et le premier mode symétrique, l'influence de l'endommagement est plus grande lorsque celui ci est situé près des appuis du câble. En effet, l'affaiblissement de la section aux endroits où le câble est le plus tendu affecte d'avantage la tension dynamique créée par

les oscillations. Pour les câbles ayant un plus grand moment d'inertie, on voit apparaître un comportement de poutre, où l'influence est plus importante à l'endroit où la courbure est la plus importante, soit au centre du câble. Pour les câbles dont le premier mode est antisymétrique, comme il n'y a pas de tension dynamique générée, c'est le comportement de poutre qui contrôle le comportement. On retrouve alors la même tendance que pour le 2<sup>e</sup> mode des poutres, avec un noeud au centre. Cependant, le premier mode symétrique n'ayant pas disparu, on retrouvera le comportement décrit précédemment pour le 2<sup>e</sup> mode du câble, qui est symétrique. Pour les modes hors plan, on remarque que comme il n'y a pas non plus de tension dynamique, c'est encore le comportement poutre qui contrôle, on a donc une plus grande influence lorsque l'endommagement est situé au niveau des ventres des modes.

## 6.5 Détection de l'endommagement

Comme on l'a vu, la faible différence entre les modes sains et endommagés, ainsi que la faiblesse relative de l'influence de la position de l'endommagement, rend difficile la détection. Par ailleurs, l'algorithme présenté prend en compte la modification du moment d'inertie, mais pas de la section, ce qui provoque une imprécision supplémentaire sur la détection. On peut éliminer cette imprécision en utilisant les modes hors plan ou uniquement les modes symétriques pour la détection. En utilisant un nombre suffisant de modes, on a montré que la détection, dans des conditions idéales était quand même possible. Sur le terrain, il semble que l'impossibilité de connaître avec une précision suffisante la tension initiale du câble, de séparer et mesurer tous les modes nécessaires, de mesurer avec précision les fréquences propres, même avec les outils les plus modernes comme les vibromètres laser, rendent l'opération difficilement réalisable. On notera cependant qu'une technique de détection d'endommagement dans les câbles, à l'aide de la mesure de fréquence par un vibromètre laser, est déjà utilisée, mais celle-ci ne permet en fait qu'une évaluation de la tension résiduelle des câbles et ne donne aucune indication sur la localisation de l'endommagement.

Au final, l'étude que nous avons menée a permis de mettre en évidence certains comporte-

ments des câbles, et la modification de leur réponse dynamique face à un endommagement. Nous avons également montré l'efficacité et apporté certaines améliorations à la méthode de calcul par différences finies des câbles en la confrontant à d'autres méthodes. Il faut cependant noter que nous sommes restés dans une hypothèse de faible fléchissement, et il conviendrait de développer le modèle avec déplacement longitudinaux présentés précédemment pour obtenir une résolution plus générale.

## RÉFÉRENCES

- ADINA R & D, Inc. (1986-2006). *Theory and Modeling Guide*.
- Araujo dos Santos, J. V., Mota Soares, C. M., Mota Soares, and C. A., and Pina, H. L. G. (1998). Development of a numerical model for the damage identification on composite plate structures. *Proc. 2nd Int. Conf. on Composite Science and Technology*, Durban, South Africa, 476–483.
- Bathe, K.-J. (1996). *Finite Elements Procedures*.
- Biswas, M., Pandey, A. K., Samman, M. M. (1990.) Diagnostic experimental spectral/modal analysis of a highway bridge. *Int. Journal of Analytical and Modal Analysis*, Vol. 5, 33–42.
- Jaishia, B., Ren, W.X. (2005). Damage detection by finite element model updating using modal flexibility residual. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 292, 1015–1030.
- Biondi, B, Caddemi, S. (2005). Closed form solutions of Euler–Bernoulli beams with singularities. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, 3027–3044.
- Bouaanani, N. (2005). Comportement et résistance des constructions. *Notes de cours*. École Polytechnique de Montréal.
- Bouaanani, N. (2006). Numerical investigation of the modal sensitivity of suspended cables with localized damage. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 292, 1015–1030.
- Chen, J., Li, W. (2005). Convergence of Gauss-Newton's method and uniqueness of the solution. *Applied Mathematics ans Computation*, Vol. 170, 686–705
- Ciolko, A. T. (1999). An immediate payoff from FWHA's NDE initiative - nondestructive evaluation of damage sustained by the Cochrane Bridge in Mobile, AL.
- Cremona, C. (2003.) Probabilistic approach for cable residual strength assessment. *Engineering Structures*, Vol. 25, No. 3, 377–384.
- Construction Technology Laboratories, Inc. (2003). A laser-based technique for evaluating structural cables.

- Doebling, S.W., Farrar, C.R., Prime, M.B., Shevitz, D.W. (1996). Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics : a literature review, Research Report, LA-13070-MS, ESA-EA, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, N.M.
- DeMerchant, M., Brown, A., Smith, J., Bao, X., Bremner, T. (2000). Distributed strain sensing for structural monitoring applications. *Canadian Journal of Civil Engineering*, Vol. 27, No. 5, 873–879.
- Desai, Y. M., Yu, P., Popplewell, N. et Shah, A. H., (1995). Finite Element Modelling of Transmission Line Galloping. *Computers and Structures*, Vol. 57, No. 3, 407–420.
- Farrar, C. R. and Jauregui, D. (1996). Damage detection algorithms applied to experimental and numerical modal data from the I-40 bridge. Los Alamos Nat. Lab. Report LA-13074-MS.
- Farrar, C., Jauregui, D. (1998). Comparative study of damage identification algorithms applied to a bridge : I. Experiment. *Smart Materials and Structures*, Vol. 7, no. 5, 704–719.
- Flamand, O. (1995). Rain-wind induced vibration of cables. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 57, 353-362.
- Fried, I., (1982), Large Deformation Static and Dynamic Finite Element Analysis of Extensible Cables. *Comput. Struct.*, Vol. 15, 315–319.
- Gambhir, M. L., Batchelor, B. de V., (1978), Parametric Study of Free Vibration of Sagged Cable. *Comput. Struct.*, Vol. 8, 641–648.
- Hasan, W. M. (1995). Crack Detection from the Variation of the Eigenfrequencies of a Beam on Elastic Foundation. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 52, No. 3, 409-421.
- Henghold, W. M., Russel, J. J., Morgan, J. D., (1977), Free Vibrations of Cable in Three Dimensions. *J. Struct. Div.*, Vol. 103, 1127–1136.
- Irvine, M. (1981). *Cable structures*.
- Irvine, H. M., Caughey, T. K., (1974), The Linear Theory of Free Vibrations of a Suspended Cable. *Proceedings of the Royal Society of London*, Vol. 341, 299–315.

- Johnson, E.A., Christenson, R.E., Spencer Jr., B.F. (2003). Semiactive damping of cables with sag, *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, Vol. 18, no. 2, 132–146.
- Lemaitre, O. (2006). *Vibrations dues au couplage vent-pluie*. Mémoire de thèse, laboratoire d'hydrodynamique de l'Ecole Polytechnique (LadHyX), Paris, France.
- Leonard, J. W., Recker, W. W. (1972). Nonlinear Dynamics of Cables with Low Initial Tension. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 98, 293–309.
- Koplawa, M.A., Bhattacharyya, A., Mann, B. P. (2006). Closed form solutions for the dynamic response of Euler-Bernoulli beams with step changes in cross section. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 295, no. 1-2, 214–25.
- Mehrabi, A. B., Tabatabai, H. (1998). Unified finite differences formulation for free vibration of cables. *Journal of structural engineering*, Vol. 124, No. 11, 1313–1322.  
<http://www.bridgeweb.com/magazine/FeatureDetails.cfm?ArticleID=826>
- Maeck, J., Feltrin, G., De Roeck, G. (2002). Vibration-based damage identification on a concrete highway bridge. *1st European Workshop on Structural Health Monitoring* (SHM2002).
- Nassif, H., Ginby, M., Davis, J. (2005). Comparison of laser Doppler vibrometer with contact sensors for monitoring bridge deflection and vibration. *NDT&E International*, Vol. 38, No. 3, 213–218.
- Ni, Y. Q., Lou, W. J. et Ko, J. M., (2000). A Hybrid Pseudo-force/Laplace Transform Method for Non-linear Transient Response of a Suspended Cable. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 238, No. 2, 189–214.
- Ni, Y. Q., Ko, J. M. et Zheng, G., (2002). Dynamic analysis of large-diameter sagged cables taking into account flexural rigidity. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 257, No. 2, 301–319.
- Oh, J., (2004). Dynamic Characteristics of Inclined Cable.
- Ortega, J. M., Rheinboldt, W. C. (1970). *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York.
- Paultre, P., Proulx, J. et Talbot, M., (1995). Dynamic Testing Procedures for Highway Bridges Using Traffic Loads. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 121, No. 2, 362–376.

- Paultre, P., Proulx, J. et Bégin, T., (2000). Dynamic Investigation of a Hybrid Suspension and Cable-stayed Bridge. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 29, No. 5, 731–739.
- Pugsley, A. G., (1949), On the Natural Frequencies of Suspension Chains. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 2, 412–418.
- Rega, G. (2004). Nonlinear Vibrations of Suspended Cables - Part I : Modeling and analysis. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 57, No. 1, 443–478.
- Ren, W.-X, De Roeck, G., (2002). Structural Damage Identification using Modal Data. I : Silumation Verification. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 128, No. 1, 87–95.
- Robert, J.-L., Bruhat, D., Gervais, J.-P. (1998). Surveillance acoustique du pont de Tancarville. *Ouvrages d'Art*, No.29, 23–26.
- Rohrs, J. H., (1851), On the Oscillations of a Suspended Cable. *Trans. Cambridge Philos, Soc.* 9, 379–398.
- Rosenthal, F., (1981), Vibrations of Slack Cables with Discrete Masses. *Journal of Sound and Vibrations*. Vol. 78, 573–583.
- Routh, E. J., (1868), The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies.
- Saxon, D. S., Cahn, AS., (1953), Modes of Vibration of a Suspended Chain. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 4, No. 3, 273–285.
- Simpson, A., (1966), Determination of the In-plane Natural Frequencies of Multispan Transmission Lines by a Transfert Matrix Method. *Proc. Inst. Electr. Eng.*, Vol. 113, 870–878.
- Soler, A. I., (1970), Dynamic Response of a Single Cables with Initial Sag. *J. Franklin Inst.*, Vol. 290, 377-387.
- West, H. H., Geshwindner, L. F., Suhoski, J. E., (1975), Natural Vibrations of Suspension Cables. *J. Struct. Div.*, Vol. 101, 2277–2291.
- Wu, Q., Takahashi, K. et Nakamura, S., (2003). Non-linear Vibrations of Cables Considering Loosening. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 261, No. 3, 385–402.

- Yao, G.C., Chang, K.C. and Lee, G.C. (1992). Damage diagnosis of steel frames using vibrational signature analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 118, no 9, 1949–1961.
- Zhu, Z. H., Meguid, S. A., (2006). Elastodynamic analysis of low tension cables using a new curved beam element. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, No. 6, 1490–1504.
- Zui, H., Shinke, T., Namita, Y., (1996). Practical Formulas for Estimation of Cable Tension by Vibration Method. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 122, No. 6, 651–656.