

**Titre:** Analyse de sensibilité de forme pour le modèle de turbulence k-e  
Title:

**Auteur:** Richard Di Caro  
Author:

**Date:** 2007

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Di Caro, R. (2007). Analyse de sensibilité de forme pour le modèle de turbulence k-e [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
Citation: <https://publications.polymtl.ca/7971/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/7971/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** Dominique Pelletier  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ANALYSE DE SENSIBILITÉ DE FORME POUR LE MODÈLE DE  
TURBULENCE  $\kappa - \epsilon$

RICHARD DI CARO

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLOME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
AVRIL 2007



Library and  
Archives Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*  
*ISBN: 978-0-494-29227-3*  
*Our file* *Notre référence*  
*ISBN: 978-0-494-29227-3*

**NOTICE:**

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

**AVIS:**

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

  
**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

ANALYSE DE SENSIBILITÉ DE FORME POUR LE MODÈLE DE  
TURBULENCE  $\kappa - \epsilon$

présenté par: DI CARO Richard

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées  
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. CAMARERO Ricardo, Ph.D., président

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. GARON André, Ph.D., membre

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon directeur de recherche, Dominique Pelletier, pour son soutien, ses nombreux conseils ainsi que pour la gentillesse dont il a fait preuve au cours de ces deux années.

Je remercie également mon co-directeur, Stéphane Étienne, pour son aide précieuse, sa disponibilité et sa contribution à la bonne ambiance dans le laboratoire.

J'adresse des remerciements tout particulier à Alexander Hay, pour l'aide qu'il m'a apporté pour réaliser ce mémoire, ses conseils, son incroyable disponibilité et sa bonne humeur.

Je voudrais également remercier l'ensemble des étudiants du laboratoire : Ali Erfani, Jean-François Cori, Romain Watteaux, Jean-Serge Giguère, Lise Charlot, Farshad Navah et Éric Gammacurta pour leur contribution à la très bonne ambiance dans le labo.

## RÉSUMÉ

Ce mémoire présente une Méthode des Équations de Sensibilités (M.E.S) avec paramètres de forme appliquée au modèle de turbulence standard  $k-\epsilon$ . Les sensibilités traduisent la réponse de la solution à une perturbation d'un paramètre. Ce projet se concentre sur les paramètres de forme dont la variation induit un mouvement de la frontière.

La M.E.S s'applique à l'ensemble des équations modélisant l'écoulement, c'est à dire, aux équations moyennes de Reynolds, aux équations de transport du modèle de turbulence  $k-\epsilon$  ainsi qu'aux conditions aux frontières du domaine. Le point essentiel du projet porte sur la différentiation des lois de parois du modèle de turbulence et à son implantation dans un code d'éléments finis existant. Ce mémoire donne avec détails la théorie relative à l'application de la M.E.S aux conditions limites pour les parois solides que constituent les lois de parois dans le cas d'un paramètre de forme.

Les équations moyennes de Reynolds ainsi que la forme logarithmique des équations de turbulence sont résolues par la méthode des éléments finis stabilisée. Les équations non-linéaires issues de la discrétisation sont linéarisées par la méthode de Newton. Afin de produire une solution plus précise, nous utilisons un algorithme de remaillage adaptatif.

On vérifie la technique proposée en utilisant la Méthode des Solutions Manufacturées qui consiste à traiter un problème dont la solution est connue. Elle permet ainsi de vérifier l'implantation de la méthode dans le code en s'appuyant sur les évolutions des normes d'erreurs vraies et estimées. La technique utilisée montre de bons résultats pour la résolution des équations de sensibilités avec paramètres de forme. Les calculs de sensibilités de forces totales et de solutions voisines abondent dans ce sens.

L'application numérique modélise un écoulement d'air en régime turbulent sur un

obstacle à section carrée à proximité du sol. La garde au sol constitue le paramètre de forme étudié. On utilise les sensibilités pour effectuer une analyse d'incertitude et une évaluation rapide de solutions voisines.

## ABSTRACT

This thesis presents a Continuous Sensitivity Equation Method (CSEM) for shape parameters applied to the standard  $k - \epsilon$  turbulence model. Sensitivities express the response of flow variables to perturbations of one parameter. This project focuses on the case of shape parameters whose variation induce a boundary displacement. The CSEM is applied to all the equations modeling the flow : the RANS equations, the  $k - \epsilon$  turbulence transport equations and also to the boundary conditions. The essential point of this project is the differentiation of the turbulence model wall functions and its implementation in a finite-element code. This thesis provides detailed developments and applications of the CSEM to parameter dependent boundary segments subjected to wall functions.

The RANS equations and the logarithmic form of turbulence equations are solved with a stabilized finite-element method. The non-linear algebraic equations are linearized with Newton's method. Accurate solutions and cost effective computations are obtained by using an adaptive remeshing algorithm.

Code verification is done using the Method of Manufactured Solutions which consists in solving a problem which has an exact solution. This allows to verify the implementation of the method in the code. In our case, the exact solution mimics a turbulent boundary layer on a flat plate. Results show that our strategy yields to accurate solution for shape sensitivities. This is confirmed by sensitivity of integrated forces and by fast evaluation of solution on nearby geometries.

The numerical application focuses on a turbulent flow of air on a rounded square obstacle located in proximity to the ground. We focus on a sensitivity analysis with respect to ground to obstacle gap. Sensitivities are then employed for uncertainty analysis and fast evaluation of flows on nearby geometries.

## TABLE DES MATIÈRES

|  |        |
|--|--------|
| REMERCIEMENTS . . . . .  | iv     |
| RÉSUMÉ . . . . .   | v      |
| ABSTRACT . . . . .   | vii    |
| TABLE DES MATIÈRES . . . . .   | viii   |
| LISTE DES FIGURES . . . . .  | xiii   |
| LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES . . . . .                                    | xvi    |
| LISTE DES TABLEAUX . . . . .   | xxii   |
| LISTE DES ANNEXES . . . . .  | .xxiii |
| INTRODUCTION . . . . .   | 1      |
| CHAPITRE 1 PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE DES ÉQUATIONS<br>DE SENSIBILITÉS . . . . . | 4      |
| 1.1 Introduction . . . . .   | 4      |
| 1.2 Méthode des Sensibilités . . . . .   | 6      |
| 1.2.1 Définition de la sensibilité . . . . .                                     | 6      |
| 1.2.2 Calculs des sensibilités . . . . .   | 7      |
| 1.2.2.1 Différences finies . . . . .   | 7      |
| 1.2.2.2 Sensibilités discrètes . . . . .   | 8      |
| 1.2.2.3 Sensibilités continues . . . . .   | 9      |
| 1.2.3 Comparaisons . . . . .   | 11     |
| 1.2.4 La méthode des variables adjointes . . . . .                               | 12     |

|            |  |    |
|------------|--|----|
| 1.2.4.1    | Définition . . . . .   | 12 |
| 1.2.4.2    | Comparaison entre Sensibilités et Variables Adjointes                                      | 14 |
| 1.3        | Paramètres de forme et de valeur . . . . .   | 15 |
| 1.3.1      | Les paramètres de valeur . . . . .   | 15 |
| 1.3.2      | Les paramètres de forme . . . . .  | 16 |
| 1.4        | Travaux antérieurs et applications de la M.E.S . . . . .                                   | 19 |
| 1.4.1      | Travaux antérieurs . . . . .   | 19 |
| 1.4.2      | Les applications . . . . .   | 20 |
| 1.5        | Les objectifs . . . . .  | 20 |
|            |  |    |
| CHAPITRE 2 | MÉTHODE DES ÉQUATIONS DE SENSIBILITÉS POUR<br>LES ÉQUATIONS MOYENNES DE REYNOLDS . . . . . | 22 |
| 2.1        | Équations de Navier-Stokes . . . . .   | 22 |
| 2.1.1      | L'approche de Reynolds . . . . .   | 22 |
| 2.1.2      | Les équations moyennes de Reynolds . . . . .   | 23 |
| 2.1.3      | Les conditions limites . . . . .   | 25 |
| 2.2        | Équations des sensibilités pour les équations de Navier-Stokes . . . . .                   | 26 |
| 2.3        | Conditions limites pour les sensibilités de forme . . . . .                                | 28 |
|            |  |    |
| CHAPITRE 3 | MÉTHODE DES ÉQUATIONS DE SENSIBILITÉS POUR<br>LE MODÈLE $\kappa - \epsilon$ . . . . .      | 31 |
| 3.1        | Équations du modèle de turbulence $k-\epsilon$ . . . . .                                   | 31 |
| 3.2        | Utilisation des variables logarithmiques . . . . .   | 33 |
| 3.3        | Les conditions aux frontières . . . . .  | 34 |
| 3.3.1      | Les conditions aux frontières classiques . . . . .   | 34 |
| 3.3.2      | Présentation de la loi de paroi à deux échelles de vitesse . . . . .                       | 35 |
| 3.3.2.1    | Introduction . . . . .   | 35 |
| 3.3.2.2    | La Loi de Paroi . . . . .  | 35 |
| 3.4        | Équations des sensibilités pour le modèle $k - \epsilon$ . . . . .                         | 38 |

|   |  |    |
|---|--|----|
| 3.5                                       | Conditions aux frontières classiques pour les sensibilités . . . . .                           | 40 |
| 3.6                                       | Lois de paroi pour les sensibilités avec paramètres de forme . . . . .                         | 41 |
| 3.7                                       | Algorithme de résolution . . . . .   | 42 |
| 3.7.1                                     | Résolution des variables de l'écoulement : $\mathbf{u}, p, \mathcal{K}, \mathcal{E}$ . . . . . | 42 |
| 3.7.2                                     | Résolution des variables de la loi de paroi . . . . .  | 44 |
| CHAPITRE 4 MÉTHODE DE RÉOLUTION . . . . . |  | 45 |
| 4.1                                       | Forme faible des équations de Navier-Stokes et du modèle k- $\epsilon$ . . . . .               | 45 |
| 4.2                                       | Forme faible des équations de sensibilités . . . . .   | 47 |
| 4.3                                       | Discrétisation éléments finis . . . . .  | 47 |
| 4.3.1                                     | Interpollants . . . . .  | 47 |
| 4.3.2                                     | Équations des résidus . . . . .  | 49 |
| 4.3.3                                     | Jacobien numérique . . . . .   | 50 |
| 4.3.4                                     | Méthodes de stabilisation . . . . .  | 51 |
| 4.4                                       | Maillage adaptatif . . . . .   | 52 |
| 4.4.1                                     | Estimation d'erreur . . . . .  | 52 |
| 4.4.2                                     | Norme d'erreur . . . . .   | 56 |
| 4.4.3                                     | Calcul de la taille optimale d'un élément . . . . .  | 57 |
| 4.5                                       | Méthode de reconstruction des gradients à la frontière . . . . .                               | 59 |
| 4.5.1                                     | Introduction . . . . .   | 59 |
| 4.5.2                                     | La méthode . . . . .   | 59 |
| CHAPITRE 5 VÉRIFICATION . . . . .         |  | 63 |
| 5.1                                       | Solution manufacturée pour l'écoulement . . . . .  | 63 |
| 5.1.1                                     | Le domaine de calcul . . . . .   | 64 |
| 5.1.2                                     | Solutions analytiques des variables dépendantes . . . . .                                      | 64 |
| 5.1.3                                     | Les conditions aux frontières pour l'écoulement . . . . .                                      | 66 |
| 5.2                                       | Solution manufacturée pour les sensibilités . . . . .  | 71 |
| 5.2.1                                     | Solutions analytiques pour les sensibilités . . . . .  | 71 |

|                                  |   |     |
|----------------------------------|---|-----|
| 5.2.2                            | $y_0$ comme paramètre de valeur . . . . .   | 73  |
| 5.2.3                            | $y_0$ comme paramètre de forme . . . . .  | 75  |
| 5.2.3.1                          | Conditions aux limites classiques de Dirichlet . . . . .  | 75  |
| 5.2.3.2                          | Conditions aux limites classiques de Neumann . . . . .  | 76  |
| 5.2.3.3                          | Lois de parois pour les sensibilités . . . . .  | 78  |
| 5.3                              | Les résultats . . . . .   | 81  |
| 5.3.1                            | Analyse de convergence . . . . .  | 82  |
| 5.3.1.1                          | $y_0$ en tant que paramètre de valeur . . . . .   | 82  |
| 5.3.1.2                          | $y_0$ en tant que paramètre de forme . . . . .  | 86  |
| 5.3.2                            | Etude du coefficient de traînée . . . . .   | 90  |
| 5.3.3                            | Calcul de solutions voisines . . . . .  | 92  |
| CHAPITRE 6 APPLICATION . . . . . |   | 95  |
| 6.1                              | Définition du problème . . . . .  | 95  |
| 6.1.1                            | Dispositif expérimental . . . . .   | 95  |
| 6.1.2                            | Le domaine de calcul . . . . .  | 96  |
| 6.1.3                            | Le paramètre de sensibilité : S . . . . .   | 97  |
| 6.2                              | Résultats . . . . .   | 98  |
| 6.2.1                            | Maillage et résultats préliminaires . . . . .   | 98  |
| 6.2.2                            | Étude de la distance adimensionnelle à la paroi $y^+$ . . . . .   | 106 |
| 6.2.3                            | Étude du coefficient de friction Cf . . . . .   | 109 |
| 6.2.4                            | Étude de la sensibilité Eulerienne du coefficient de friction . . . . .                                     | 110 |
| 6.3                              | Analyse d'incertitude . . . . .   | 112 |
| 6.3.1                            | Analyse d'incertitude sur le coefficient de friction . . . . .  | 112 |
| 6.3.2                            | Analyse d'incertitude sur $C_D$ et $C_L$ . . . . .  | 114 |
| 6.3.3                            | Analyse d'incertitude sur les composantes de vitesse et des<br>composantes du tenseur de Reynolds . . . . . | 116 |
| 6.4                              | Calculs de solutions voisines . . . . .   | 119 |

|                      |   |     |
|----------------------|---|-----|
| 6.4.1                | Calcul de solutions voisines pour $C_f$ . . . . .   | 121 |
| 6.4.2                | Calcul de solutions voisines pour les composantes de vitesse<br>et du tenseur de Reynolds . . . . . | 122 |
| 6.4.3                | Calcul de solutions voisines pour $C_D$ et $C_L$ . . . . .  | 124 |
| CONCLUSION . . . . . |   | 128 |
| RÉFÉRENCES . . . . . |   | 131 |
| ANNEXES . . . . .    |   | 136 |

## LISTE DES FIGURES

|           |   |    |
|-----------|---|----|
| FIG. 1.1  | Conduction thermique dans une barre . . . . .   | 7  |
| FIG. 1.2  | Dépendance des frontières aux paramètres de forme . . . . .   | 16 |
| FIG. 4.1  | Élément fini de type Taylor-Hood . . . . .  | 49 |
| FIG. 4.2  | Sous-domaine $\Omega_P$ utilisé dans les projections locales . . . . .  | 53 |
| FIG. 4.3  | Échelles pour la base de projection locale . . . . .  | 55 |
| FIG. 5.1  | Domaine de calcul . . . . .   | 64 |
| FIG. 5.2  | Domaine de calcul et conditions frontières . . . . .  | 67 |
| FIG. 5.3  | Convention pour la loi de paroi . . . . .   | 69 |
| FIG. 5.4  | Maillage final avec $y_0$ en tant que paramètre de valeur . . . . .   | 82 |
| FIG. 5.5  | Couche limite turbulente : Courbes d'erreurs pour les variables $\mathbf{u}$ , $p$ , et $\mu_t$ avec $y_0$ pris comme paramètre de valeur . . . . . | 83 |
| FIG. 5.6  | Couche limite turbulente : Courbes d'erreurs pour les variables $k$ , $\epsilon$ avec $y_0$ pris comme paramètre de valeur . . . . .                | 84 |
| FIG. 5.7  | Maillage final avec $y_0$ en tant que paramètre de forme . . . . .  | 87 |
| FIG. 5.8  | Couche limite turbulente : Courbes d'erreurs pour les variables de l'écoulement avec $y_0$ pris comme paramètre de forme . . . . .                  | 88 |
| FIG. 5.9  | Couche limite turbulente : Courbes d'erreurs pour les sensibilités avec $y_0$ pris comme paramètre de forme . . . . .                               | 88 |
| FIG. 5.10 | Courbes de convergence de l'erreur exacte du coefficient de traînée et de ses sensibilités . . . . .  | 92 |
| FIG. 5.11 | Solution initiale, extrapolée et recalculée des isolignes de $u$ . . . . .  | 93 |
| FIG. 5.12 | Solution initiale, extrapolée et recalculée des isolignes de $p$ . . . . .  | 93 |
| FIG. 6.1  | Dispositif expérimental . . . . .   | 96 |
| FIG. 6.2  | Domaine de calcul et conditions limites . . . . .   | 96 |
| FIG. 6.3  | Maillage du cycle 06 . . . . .  | 98 |
| FIG. 6.4  | Zoom sur le maillage final . . . . .  | 99 |

|           |  |     |
|-----------|--|-----|
| FIG. 6.5  | Isolignes de $u$ et $v$ . . . . .  | 100 |
| FIG. 6.6  | Isolignes de $s_u$ . . . . .   | 100 |
| FIG. 6.7  | Isolignes de $s_v$ , arrondi supérieur amont . . . . .   | 101 |
| FIG. 6.8  | Isolignes de $s_v$ , arrondi inférieur amont . . . . .   | 101 |
| FIG. 6.9  | Isolignes de $s_p$ , arrondi supérieur amont . . . . .   | 102 |
| FIG. 6.10 | Isolignes de $s_p$ , arrondi inférieur amont . . . . .   | 102 |
| FIG. 6.11 | Profils des composantes de la vitesse en $x/D = \{1; 4\}$ . . . . .  | 103 |
| FIG. 6.12 | Composante $-\overline{\rho u' u'}/U_0^2$ du tenseur de Reynolds . . . . .   | 105 |
| FIG. 6.13 | Composante $-\overline{\rho v' v'}/U_0^2$ du tenseur de Reynolds . . . . .   | 105 |
| FIG. 6.14 | Composante $-\overline{\rho u' v'}/U_0^2$ du tenseur de Reynolds . . . . .   | 106 |
| FIG. 6.15 | $y^+$ sur la plaque . . . . .  | 107 |
| FIG. 6.16 | Courbes de convergence des valeurs de la distance adimensionnelle à la paroi $y^+$ pour les blocs amont et aval . . . . .              | 108 |
| FIG. 6.17 | Courbes de convergence des valeurs de la distance adimensionnelle à la paroi $y^+$ pour les blocs aval et bas . . . . .                | 108 |
| FIG. 6.18 | Évolution du coefficient de friction sur la plaque au cours des cycles d'adaptation de maillage . . . . .                              | 109 |
| FIG. 6.19 | Évolution de la sensibilité Eulerienne du coefficient de friction sur la plaque au cours des cycles d'adaptation de maillage . . . . . | 111 |
| FIG. 6.20 | Incertitude sur $Cf$ pour des perturbations de $S/D$ de 1, 3, 5 et 7% . . . . .  | 113 |
| FIG. 6.21 | Incertitude sur les profils vitesse $u$ en $x/D = 1$ . . . . .   | 116 |
| FIG. 6.22 | Incertitude sur les profils vitesse $v$ en $x/D = 1$ . . . . .   | 117 |
| FIG. 6.23 | Incertitude sur les profils des composantes du tenseur de Reynolds en $x/D = 1$ . . . . .  | 118 |
| FIG. 6.24 | Incertitude sur les profils des composantes du tenseur de Reynolds en $x/D = 1$ . . . . .  | 118 |

|           |   |     |
|-----------|---|-----|
| FIG. 6.25 | Incertitude sur les profils des composantes du tenseur de Reynolds en $x/D = 1$ . . . . .                                 | 119 |
| FIG. 6.26 | Isolignes de $u$ représentant les solutions initiale et extrapolée  | 120 |
| FIG. 6.27 | Extrapolation de $Cf$ pour des perturbations de $S/D$ de 5 et 10% . . . . .   | 122 |
| FIG. 6.28 | Extrapolation de la vitesse horizontale $u$ en $x/D = 4$ . . . . .  | 123 |
| FIG. 6.29 | Extrapolation de la vitesse verticale $v$ en $x/D = 4$ . . . . .  | 123 |
| FIG. 6.30 | Extrapolation sur le profil de la composante $-\overline{\rho u' u'}/U_0^2$ du tenseur de Reynolds en $x/D = 4$ . . . . . | 124 |
| FIG. 6.31 | Extrapolation sur le profil de la composante $-\overline{\rho v' v'}/U_0^2$ du tenseur de Reynolds en $x/D = 4$ . . . . . | 125 |
| FIG. 6.32 | Extrapolation sur le profil de la composante $-\overline{\rho u' v'}/U_0^2$ du tenseur de Reynolds en $x/D = 4$ . . . . . | 126 |

## LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

## Caractères usuels

|   |  |
|---|--|
| $a$                                     | paramètre de sensibilité   |
| $\mathbf{a}$                            | vecteur de paramètres de sensibilité   |
| $\mathbf{b}$                            | vecteur des coefficients de la base polynomiale<br>pour la projection locale |
| $B$                                     | base polynomiale   |
| $C_D, C_L$                              | coefficient de trainée et de portance  |
| $C_f$                                   | coefficient de friction  |
| $C_\mu, C_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}$ | constantes de fermeture du modèle $k - \epsilon$                             |
| $d$                                     | distance à la paroi imposée  |
| $e$                                     | erreur   |
| $e_{cible}$                             | erreur cible   |
| $e_{courante}$                          | erreur courante  |
| $e_{exa}$                               | erreur exacte  |
| $E$                                     | paramètre de rugosité  |
| $\bar{f}'_\mathcal{E}$                  | condition de Neumann sur $s_\mathcal{E}$                                     |
| $\bar{f}'_\mathcal{K}$                  | condition de Neumann sur $s_\mathcal{K}$                                     |
| $\mathbf{f}$                            | terme source pour l'équation de mouvement                                    |
| $\mathbf{f}'$                           | terme source pour l'équation de mouvement en sensibilités                    |
| $F$                                     | fonction objectif  |
| $\mathbf{G}$                            | vecteur des contraintes  |
| $h$                                     | taille élémentaire courante,   |

|                                    |   |
|------------------------------------|---|
|                                    | quantité obtenue par la méthode des éléments finis  |
| $k$                                | énergie cinétique de la turbulence  |
| $K$                                | élément courant   |
| $l$                                | multiplicateur de Lagrange  |
| $L$                                | longueur de référence,<br>lagrangien  |
| $\hat{\mathbf{n}}(n_x, n_y)$       | vecteur unitaire normal extérieur à la surface  |
| $n$                                | nombre d'éléments   |
| $N_u, N_{\mathcal{K}}, \dots$      | nombre de noeuds par éléments (pour $u, \mathcal{K}, \dots$ )   |
| $N_i^u, N_i^{\mathcal{K}}, \dots$  | fonctions d'interpolations (pour $u, \mathcal{K}, \dots$ )  |
| $p$                                | pression  |
| $P$                                | production de turbulence  |
| $q_k, q_\epsilon$                  | termes sources pour les équations de transport du modèle de turbulence                                      |
| $q_{\mathcal{K}}, q_{\mathcal{E}}$ | termes sources pour les équations de transport<br>du modèle de turbulence en variables logarithmiques       |
| $q_{s_k}, q_{s_\epsilon}$          | termes sources pour les équations de transport<br>du modèle de turbulence n sensibilités                    |
| $\mathbf{R}$                       | tenseur de Reynolds   |
| $R_i$                              | résidu de la $i^{\text{ème}}$ équation algébrique   |
| $R_u, R_{\mathcal{K}}, \dots$      | résidu (pour $\mathbf{u}, \mathcal{K}, \dots$ )   |
| Re                                 | nombre de Reynolds  |
| $Src\tau_w$                        | terme source pour la condition dans la direction<br>tangentielle dans la loi de paroi pour l'écoulement     |
| $Src\tau_{w\text{sens}}$           | terme source pour la condition dans la direction<br>tangentielle dans la loi de paroi pour les sensibilités |

|                              |   |
|------------------------------|---|
| $Src\mathcal{E}$             | terme source pour la condition sur $\mathcal{E}$<br>dans la loi de paroi pour l'écoulement      |
| $Src\mathcal{E}_{sens}$      | terme source pour la condition sur $\mathcal{E}$<br>dans la loi de paroi pour les sensibilités  |
| $S_{\mathbf{u}}^a$           | sensibilité de la variable $\mathbf{u}$ par rapport à $a$                                       |
| $s_{\mathbf{u}}$             | sensibilité de $\mathbf{u}$   |
| $s_{u_i}$                    | valeur nodale de $s_{\mathbf{u}}$   |
| $\bar{\mathbf{t}}$           | traction sur les frontières   |
| $\bar{\mathbf{t}}'$          | traction des sensibilités   |
| $\hat{\mathbf{t}}(t_x, t_y)$ | vecteur unitaire tangent  |
| $u, v, w$                    | projections du champ de vitesse selon les axes $Ox$ , $Oy$ et $Oz$                              |
| $u_k$                        | vitesse de turbulence du modèle à deux échelle de vitesse                                       |
| $u_t$                        | vitesse tangentielle  |
| $u_{**}$                     | vitesse de frottement du modèle à deux échelles de vitesse                                      |
| $\mathbf{u}$                 | champ de vitesse  |
| $U_1$                        | vitesse de référence pour la solution analytique  |
| $\phi$                       | lettre désignant une variable quelconque  |
| $x, y$                       | abscisse, ordonnée  |
| $\mathbf{X}$                 | vecteur des états ou variables dépendantes  |
| $y^+$                        | distance adimensionnelle à paroi physique   |
| $y_c^+$                      | limite entre les deux zones de la loi de paroi  |
| $\mathbf{y}_\phi$            | vecteur d'une variable et de ses dérivées<br>pour la reconstruction de gradients à la frontière |

**Lettres calligraphiques**

|               |   |
|---------------|---|
| $\mathcal{E}$ | logarithme népérien de $\epsilon$                       |
| $\mathcal{F}$ | fonction objectif (fonction de $\mathbf{a}$ uniquement) |
| $\mathcal{J}$ | forme quadratique                                       |
| $\mathcal{K}$ | logarithme népérien de $k$                              |
| $\mathcal{P}$ | Patch d'éléments autour d'un point P                    |

**Lettres grecques**

|                             |   |
|-----------------------------|---|
| $\alpha$                    | propriété physique quelconque,<br>taux de convergence de l'élément fini |
| $\Gamma$                    | frontière du domaine de calcul $\Omega$                                 |
| $\delta$                    | petite perturbation,<br>incertitude                                     |
| $\delta_K$                  | taille élémentaire cible  |
| $\delta_p, \delta_u, \dots$ | fonctions test (pour la pression, la vitesse,...)                       |
| $\Delta$                    | variation   |
| $\epsilon$                  | taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence             |
| $\eta$                      | variable de similitude pour la couche limite<br>analytique turbulente   |
| $\Theta$                    | indice d'efficacité   |
| $\dot{\gamma}$              | tenseur du taux de déformation  |
| $\kappa$                    | constante de Kármán   |
| $\lambda^*$                 | variable adjointe (multiplicateur de Lagrange)                          |
| $\mu$                       | viscosité dynamique   |
| $\mu_t$                     | viscosité turbulente  |

|                             |  |
|-----------------------------|--|
| $\nu$                       | viscosité cinématique                                    |
| $\Omega$                    | domaine de calcul  |
| $\Omega_P$                  | sous-domaine de calcul                                   |
| $\rho$                      | masse volumique  |
| $\sigma$                    | tenseur des contraintes                                  |
| $\sigma_k, \sigma_\epsilon$ | constantes de fermeture du modèle $k - \epsilon$         |
| $\tau$                      | tenseur des contraintes visqueuses                       |
| $\xi$                       | facteur de réduction de l'erreur,<br>abscisse curviligne |

### Indices et exposants

|                  |   |
|------------------|---|
| $D$              | condition de Dirichlet traitée<br>pour la reconstruction des gradients aux frontières |
| $exa$            | solution exacte   |
| $f$              | à la frontière  |
| $h$              | solution éléments finis   |
| $i$              | composante  |
| $i, 1, 2, \dots$ | valeur nodale en $i, 1, 2, \dots$   |
| $K$              | élémentaire   |
| $N$              | condition de Neumann traitée<br>pour la reconstruction des gradients aux frontières   |
| $SM$             | quantité obtenu à l'aide de la solution analytique                                    |
| $w$              | à la paroi  |
| $n$              | solution obtenue à la $n^{\text{ième}}$ itération                                     |
| $T$              | transposée  |

|   |   |
|---|---|
| + | valeur adimensionnelle du modèle de loi de paroi  |
| * | projection de la solution éléments finis  |
| ' | dérivée matérielle des propriétés physiques,<br>valeur fluctuante                               |
| ^ | condition de Dirichlet imposée  |
| - | valeur moyenne,<br>condition de Neumann imposée   |
| ~ | récupération de la projection de la solution éléments finis<br>estimation de la solution exacte |

### Symboles

|                                   |                                   |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| $erf$                             | fonction erreur                   |
| $\nabla$                          | opérateur gradient                |
| $\nabla \cdot$                    | opérateur divergence              |
| $\partial \cdot / \partial \cdot$ | dérivée partielle (Eulerienne)    |
| $D \cdot / D \cdot$               | dérivée matérielle (Lagrangienne) |
| $\  \cdot \ $                     | norme                             |

## LISTE DES TABLEAUX

|          |  |     |
|----------|--|-----|
| TAB. 3.1 | Constantes du modèle de turbulence $k-\epsilon$ . . . . .  | 33  |
| TAB. 5.1 | Indice d'efficacité pour les variables de l'écoulement . . . . .   | 84  |
| TAB. 5.2 | Indice d'efficacité pour les sensibilités . . . . .  | 85  |
| TAB. 5.3 | Taux de convergence des variables de l'écoulement et de leurs sensibilités avec $y_0$ pris comme paramètre de valeur . . . . . | 85  |
| TAB. 5.4 | Indices d'efficacité pour les variables de l'écoulement pour le maillage final . . . . .                                       | 87  |
| TAB. 5.5 | Indice d'efficacité pour les sensibilités pour le maillage final   | 89  |
| TAB. 5.6 | Taux de convergence des variables de l'écoulement et de leurs sensibilités avec $y_0$ pris comme paramètre de forme . . . . .  | 89  |
| TAB. 5.7 | Valeur du coefficient de traînée et ses sensibilités . . . . .   | 91  |
| TAB. 6.1 | Valeur de $d$ sur la plaque et les courbes décrivant le cylindre   | 106 |
| TAB. 6.2 | Valeurs de $C_D$ et $C_L$ et de leurs sensibilités . . . . .   | 115 |
| TAB. 6.3 | Incertitudes sur $C_D$ et $C_L$ . . . . .  | 115 |
| TAB. 6.4 | Extrapolation à partir de la solution initiale de $C_D$ et $C_L$ . .   | 125 |

## LISTE DES ANNEXES

|           |  |     |
|-----------|--|-----|
| ANNEXE I  | SOLUTION MANUFACTURÉE . . . . .  | 136 |
| I.1       | Écoulement : . . . . .   | 136 |
| I.1.1     | Solution analytique des champs de l'écoulement . . . . .                           | 136 |
| I.1.2     | Les dérivées premières et secondes des variables de l'écoulement                   | 137 |
| I.2       | Sensibilités des variables de l'écoulement par rapport au paramètre                |     |
| $y_0$ :   | . . . . .  | 139 |
| I.3       | Termes sources . . . . .   | 141 |
| I.3.1     | Écoulement . . . . .   | 141 |
| I.3.2     | Sensibilités . . . . .   | 141 |
| I.3.3     | Variables logarithmiques . . . . .   | 142 |
| I.3.3.1   | Écoulement . . . . .   | 142 |
| I.3.3.2   | Sensibilités . . . . .   | 142 |
| ANNEXE II | FORMES FAIBLES . . . . .   | 144 |
| II.1      | Forme faible de l'équation de transport en $\mathcal{K}$ pour les sensibilités : . | 144 |
| II.2      | Forme faible de l'équation de transport en $\mathcal{E}$ pour les sensibilités : . | 145 |

## INTRODUCTION

Au cours des dernières décennies, la mécanique des fluides assistée par ordinateur n'a cessé de se développer pour devenir un outil incontournable dans de nombreux secteurs de l'industrie. Dans les domaines tels que le génie aéronautique ou le génie civil, la résolution numérique d'écoulements turbulents est un problème récurant. Ce mémoire s'attarde à généraliser aux paramètres de forme une méthode d'éléments finis adaptative développée par Pelletier *et al* pour le modèle de turbulence  $k - \epsilon$ .

Les travaux effectués par Turgeon constituent une base essentielle pour l'analyse de sensibilités des écoulements turbulents. Le caractère original de ce mémoire réside dans deux points précis. D'une part l'application de la Méthode des Équations de Sensibilités (M.E.S) aux lois de parois de modèle de turbulence standard  $k - \epsilon$ , puis d'autre part, l'utilisation de paramètres de forme.

Les sensibilités traduisent l'influence d'un paramètre sur les différents champs caractérisant l'écoulement *i.e*  $u, v, p, k, \epsilon$  et  $\mu_t$ . L'analyse de sensibilité s'effectue autour de deux catégories distinctes de paramètres. La première est constituée des paramètres de valeur qui sont pour la plupart des propriétés physiques de l'écoulement, des constantes de fermeture, ou des conditions limites. La deuxième catégorie est constituée par les paramètres de forme qui rendent beaucoup plus complexe l'analyse de sensibilité. En effet, il faut alors exprimer les dépendances de la géométrie du domaine par rapport à un tel paramètre. Dans ce mémoire, nous traiterons donc des paramètres de forme dont la variation induit un changement dans la géométrie de la frontière. L'étude de ce type de paramètre constitue un avantage certain dans de nombreux domaines de l'ingénierie.

Afin de mener à bien ce projet, ce mémoire présente les étapes du processus scientifique allant de la présentation de la théorie, en passant par la validation de la méthode puis à son application. Ces étapes sont données comme suit. Dans un premier temps, on donne les premiers éléments de théorie définissant la sensibilité et la Méthode des Équations de Sensibilités (M.E.S). On y présente les différents types de paramètres et notamment les paramètres de forme qui nous serviront par la suite. Nous nous attarderons aussi sur une brève revue des travaux antérieurs dans ce domaine. Dans un second temps, nous établirons les équations moyennes de Reynolds introduisant la notion de turbulence ainsi que les équations de sensibilités qui leur sont associées. On y trouvera aussi les conditions aux frontières pour les sensibilités en accord avec l'utilisation de paramètres de forme. Le chapitre 3 nous amène au coeur du sujet. On y présente les équations du modèle de turbulence standard  $k - \epsilon$ , les conditions aux limites classiques et les équations de sensibilités qui leur sont associées. Les lois de parois, qui constituent les conditions aux limites pour les parois solides, y sont également traitées. Une attention toute particulière leur sera accordée quant à l'application de la M.E.S avec paramètre de forme. Ce volet constitue le point essentiel du mémoire. Le chapitre suivant familiarise le lecteur avec la méthode des éléments finis employée pour résoudre les équations. Nous y présenterons aussi l'outil essentiel à l'adaptation de maillage qu'est le calcul de normes d'erreur. Puis, nous utiliserons la Méthode des Solutions Manufacturées pour valider l'implémentation de la méthode dans un code d'éléments finis avec maillage adaptatif. Le principe utilisé est simple, il consiste à étudier un problème dont la solution est connue. Dans notre cas, il s'agira d'une couche limite turbulente sur une plaque plane. Cette technique permet de vérifier que la solution éléments finis converge à un taux en accord avec la théorie. Le dernier chapitre développera une application mettant en valeur l'utilisation des sensibilités avec paramètre de forme, et plus précisément, dans le calcul des solutions voisines et l'analyse d'incertitude. Pour clore ce projet, nous terminerons par une conclusion qui ouvrira la

voie sur diverses améliorations futures.

## CHAPITRE 1

### PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE DES ÉQUATIONS DE SENSIBILITÉS

La mécanique des fluides assistée par ordinateur se destinait, à ses début, à des problèmes d'analyse. D'énormes progrès ont été réalisés depuis, et on s'attarde, à présent, sur des problèmes de design qui sont traités avec des techniques d'optimisation basées sur les gradients. Il existe, principalement deux techniques rivales : la méthode des variables adjointes et la méthode des équations de sensibilités. Ce chapitre vise, dans un premier temps, à familiariser le lecteur avec la notion de problème d'optimisation. C'est dans ce contexte, que nous aborderons la notion de sensibilité ainsi que la méthode des sensibilités. Nous la confronterons avec sa principale concurrente, puis, comparerons ses variantes afin de justifier le choix de l'utilisation de la méthode des équations de sensibilités (M.E.S) que nous appliquerons, par la suite, aux équations du modèle de turbulence  $k-\epsilon$ . Nous évoquerons, ensuite, les deux types de paramètres qui interviennent dans l'analyse de sensibilités. Un récapitulatif des travaux antérieurs et de diverses applications sera effectué avant de fixer les objectifs qui donnent un caractère original à ce mémoire.

#### 1.1 Introduction

Afin de comprendre dans quel contexte se situe le problème du calcul des sensibilités, évoquons le problème d'optimisation. Pour cela, nous définissons le problème

classique de design optimal suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{a} \text{ qui minimise } F(\mathbf{X}; \mathbf{a}) \\ & \text{sujet à } G(\mathbf{X}; \mathbf{a}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{X}$  est le vecteur des variables dépendantes,  $\mathbf{a}$  est le vecteur des paramètres de design,  $F$  est une fonction objectif (ou fonctionnelle) à minimiser, comme par exemple la traînée,  $\mathbf{G}$  représente les contraintes, c'est à dire les équations de Navier-Stokes. Pour chaque paramètres de design, les états  $\mathbf{X}$  sont donnés par la résolution des contraintes  $\mathbf{G}$ . On note la dépendance de ces états par rapport aux paramètres de design de la manière suivante :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{a}) \quad (1.2)$$

On note ainsi la dépendance de la fonctionnelle  $F$  par rapport aux paramètres de design de la manière suivante :

$$\mathcal{F}(\mathbf{a}) = F(\mathbf{X}(\mathbf{a}); \mathbf{a}) \quad (1.3)$$

À présent, le but est de calculer le gradient de cette fonctionnelle sujet à la contrainte  $G(\mathbf{X}; \mathbf{a}) = \mathbf{0}$ . Ce gradient s'obtient en différentiant la fonction objectif en utilisant le théorème des fonctions implicites :

$$\nabla \mathcal{F} = \frac{d\mathcal{F}}{d\mathbf{a}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{d\mathbf{a}} \quad (1.4)$$

Les termes  $\partial F/\partial \mathbf{a}$  et  $\partial F/\partial \mathbf{X}$  ne sont pas difficiles à obtenir puisque la fonction  $F$  est exprimée en fonction de  $\mathbf{X}$  et de  $\mathbf{a}$ . Le terme inconnu est  $d\mathbf{X}/d\mathbf{a}$ . Il se nomme *sensibilité*. Il exprime comment les états  $\mathbf{X}$  varient face à une perturbation des paramètres de design  $\mathbf{a}$  autour de leurs valeurs nominales. Ce problème d'optimisation

nous introduit au coeur du problème du calcul de sensibilité. Avant d'aller plus loin, définissons plus en détail la notion de sensibilité.

## 1.2 Méthode des Sensibilités

### 1.2.1 Définition de la sensibilité

Comme nous l'avons précisé dans la section ci-dessus, la sensibilité peut être définie comme le taux de variation d'une variable dépendante  $\phi(x, y; a)$  par rapport à un paramètre arbitraire  $a$ , c'est à dire :

$$s_{\phi}^a = \frac{\partial \phi}{\partial a}(x, y; a) \quad (1.5)$$

Pour alléger la notation et lorsqu'il n'y a pas de confusion sur le paramètre traité, on notera la sensibilité de  $\phi$ ,  $s_{\phi}$ .

À titre d'exemple, considérons un problème très simple de conduction de chaleur dans une tige composée de deux matériaux de conductivité  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ . Il est naturel de percevoir la température comme une fonction de la variable d'espace  $x$  seulement. D'un point de vue conception, elle dépend aussi de plusieurs paramètres tel que :

- $T_1$  et  $T_2$ , les conditions limites en  $x_1$  et  $x_2$  ;
- $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ , les conductivités des deux matériaux ;
- $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_i$ , la géométrie de la tige ;

Dès lors, la sensibilité de la température  $T(x; a)$  par rapport au paramètre  $a \in \{T_1, T_2, \kappa_1, \kappa_2, x_1, x_i, x_2\}$  est définie par :

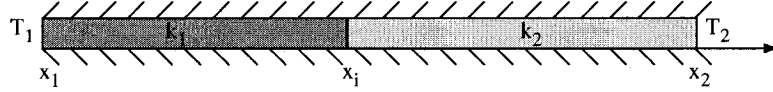


FIG. 1.1 Conduction thermique dans une barre

$$s_T = \frac{\partial T}{\partial a}(x; a)$$

En d'autre terme,  $s_T$  traduit la réponse du champ de température à des perturbations unitaires des paramètres  $\mathbf{a}$ .

## 1.2.2 Calculs des sensibilités

Il existe trois approches différentes pour calculer les sensibilités. La première méthode utilise les différences finies, les deux autres approches diffèrent par l'ordre d'application des opérations de différentiation et de discrétisation : soit la méthode des sensibilités discrètes (discrétisation puis différentiation), soit la Méthodes des Équations de Sensibilités (différentiation puis discrétisation).

### 1.2.2.1 Différences finies

Soit  $\phi(x, a)$  une variable dépendante dont on souhaite calculer les sensibilités. En utilisant les différences finies, cette sensibilité s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial a} = \frac{\phi(x, a + \delta a) - \phi(x, a - \delta a)}{2\delta a} \quad (1.6)$$

Il faut alors trois calculs d'écoulements pour obtenir  $\phi(x, a)$ ,  $\phi(x, a + \delta a)$  et  $\phi(x, a - \delta a)$  pour cette différence finie centrée, deux seulement dans le cas d'une différence finie décentrée. L'utilisation de cette méthode est donc très couteuse en terme de

temps de calcul.

### 1.2.2.2 Sensibilités discrètes

Lors d'un calcul de sensibilité discrète, l'approche consiste, dans un premier temps, à discrétiser l'équation aux dérivées partielles pour obtenir un système d'équations algébriques que l'on résout. La seconde étape consiste à obtenir le système d'équations pour les sensibilités en différentiant le système par rapport au paramètre d'intérêt  $a$ . Cette approche donne les sensibilités exactes du problème discret, c'est à dire le taux de variation de la solution discrète par rapport à un paramètre. En utilisant les notations données en introduction, cela consiste à différentier les équations d'états discrètes  $G_h(\mathbf{X}_h; \mathbf{a}) = \mathbf{0}$  puis d'obtenir le système d'équations linéaires des sensibilités en les différentiant par rapport au paramètre  $a$  étudié. Soit en utilisant les notations au début ce chapitre :

$$\frac{DG_h(\mathbf{X}_h; \mathbf{a})}{D\mathbf{a}} = \frac{D}{D\mathbf{a}}(0) \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial G_h}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial G_h}{\partial \mathbf{X}_h} \frac{d\mathbf{X}_h}{da} = 0 \quad (1.8)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial G_h}{\partial \mathbf{X}_h} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d\mathbf{X}_h}{da} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial G_h}{\partial \mathbf{a}} \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

Après inversion de la matrice  $\partial G/\partial \mathbf{X}$ , qui est non singulière, creuse et non symétrique, on obtient les sensibilités des états  $\mathbf{X}$ .

Lors de l'utilisation des sensibilités discrètes, il faut redifférentier le code à chaque fois que celui-ci change. Cette tâche est très pénible à effectuer à la main, et une différentiation automatique montre une performance décevante. Cela demande alors une intervention humaine pour atteindre de bonnes performances.

De plus, l'utilisation des sensibilités discrètes avec paramètres de forme nécessite une opération ardue à réaliser qui est la différentiation du maillage. En effet, si on considère la fonction objectif à minimiser  $F(\mathbf{U}(x(a), y(a)); a)$  alors :

$$\frac{DF}{Da} = \frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} \quad (1.10)$$

Les termes  $\partial x/\partial a$  et  $\partial y/\partial a$  sont les sensibilités de maille (ou sensibilités de la géométrie) et elles n'ont pas de sens lors d'un remaillage adaptatif puisque la topologie du maillage change.

### 1.2.2.3 Sensibilités continues

Pour les sensibilités continues, la méthode consiste à différentier l'équation aux dérivées partielles, par rapport au paramètre  $a$ , pour obtenir l'équation différentielle de la sensibilité. La forme obtenue peut ensuite être discrétisée. Cette méthode nous procure une approximation des sensibilités exactes. Son principal inconvénient est que les sensibilités calculées ne sont pas exactes car les opérateurs de différentiation et de discrétisation ne commutent pas. En effet, le mieux que nous puissions espérer, c'est la consistance asymptotique :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\partial u}{\partial a} \right)_h = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial u_h}{\partial a} \quad (1.11)$$

où  $h$  désigne une quantité obtenue par une méthode numérique (éléments finis dans notre cas).

Cette méthode est appelée la Méthode des Équations de Sensibilités (M.E.S). Nous aurons autant de systèmes à résoudre pour les sensibilités qu'il y a de paramètres et l'utilisation de paramètres de forme entraînera le calcul des gradients des solutions de l'écoulement aux frontières. En revanche, nous ne devons pas calculer de

sensibilités de maille.

À titre d'exemple, considérons le problème de conduction suivant :

$$\frac{d}{dx} \left( \kappa \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (1.12)$$

Les dépendances de la conductivité  $\kappa$  et de la température  $T$  aux variables d'espace et du paramètre  $a$  d'intérêt s'écrivent de la manière suivante :

$$\kappa = \kappa(x; a) \quad (1.13)$$

$$T = T(x; a) \quad (1.14)$$

Ainsi, en appliquant la M.E.S à (1.12), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{d\kappa}{dx} \frac{dT}{dx} + \kappa \frac{d^2T}{dx^2} \right) = 0 \quad (1.15)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \kappa}{\partial a} \right) \frac{dT}{dx} + \frac{d\kappa}{dx} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial T}{\partial a} \right) + \frac{\partial \kappa}{\partial a} \frac{d^2T}{dx^2} + \kappa \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial T}{\partial a} \right) = 0 \quad (1.16)$$

$$\frac{ds_\kappa}{dx} \frac{dT}{dx} + \frac{d\kappa}{dx} \frac{ds_T}{dx} + s_\kappa \frac{d^2T}{dx^2} + \kappa \frac{d^2s_T}{dx^2} = 0 \quad (1.17)$$

On obtient finalement :

$$\frac{d}{dx} \left( s_\kappa \frac{dT}{dx} \right) + \frac{d}{dx} \left( \kappa \frac{ds_T}{dx} \right) = 0 \quad (1.18)$$

On peut ensuite discrétiser cette équation différentielle afin d'obtenir les solutions discrètes.

### 1.2.3 Comparaisons

De ces trois approches, seule la dernière sera utilisée dans le projet et ceci pour quatre raisons :

- L'utilisation de différences finies est très coûteuse en terme de temps de calcul car il faut calculer deux voire trois écoulements dépendamment du choix de la différence finie ;
- Dans le cas de la Méthode des Équations de Sensibilités (M.E.S), il suffit de différentier à la main l'équation d'état ce qui rend la tâche beaucoup moins ardue. Ce n'est pas le cas des sensibilités discrètes. En effet, lors de l'utilisation d'un paramètre de forme, le maillage varie avec ce dernier. Il faut alors expliciter les termes qui reflètent cette dépendance, puis les différentier ce qui rend l'utilisation des sensibilités discrètes très complexe. Par exemple, lors de l'adaptation de maillage, la sensibilité de la géométrie ou sensibilité de maille  $\partial\tilde{\mathbf{X}}/\partial a$  peut ne pas exister si l'on ajoute des noeuds ou si l'on remaille ;
- D'autre part, l'utilisation de techniques de stabilisation avec *upwinding* rend la différentiation des équations discrètes très delicate. En effet, il faut alors différentier les termes de stabilisation qui sont discontinus ;
- Dans le cas de la M.E.S, le calcul des variables de l'écoulement et celui des sensibilités sont totalement découplés. Chacun possède son propre processus de résolution numérique et d'adaptation de maillage, ce qui n'est pas le cas pour les sensibilités discrètes puisque leur calcul dépend directement de la résolution des variables d'écoulement engendrant une perte de précision ;

Les sensibilités seront calculées au moyen d'un code d'éléments finis adaptatif développé par Pelletier [33, 32]. Les sensibilités contribuent à l'adaptation du maillage. Cette application est plutôt rare, on la retrouve chez Borggaard [3],[2] et Stewart [35].

#### 1.2.4 La méthode des variables adjointes

La méthode des variables adjointes est la principale concurrente de la méthode des sensibilités pour la résolution des problèmes d'optimisation. Cette section s'appuiera sur la thèse d'Eric Turgeon [40] dans laquelle le lecteur intéressé pourra trouver une définition plus approfondie.

##### 1.2.4.1 Définition

La méthode des variables adjointes est une approche utilisant les multiplicateurs de Lagrange et s'applique aux problèmes d'optimisation avec contraintes. On introduit la variable adjointe (multiplicateurs de Lagrange)  $\lambda^*$  puis on définit le lagrangien :

$$L(\mathbf{X}; \mathbf{a}; \lambda^*) = \mathbf{F}(\mathbf{X}; \mathbf{a}) - \langle \lambda^*, \mathbf{G}(\mathbf{X}; \mathbf{a}) \rangle \quad (1.19)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  représente un produit scalaire. De manière à alléger la notation, nous noterons le lagrangien de la manière suivante :

$$L = F - \lambda^* \mathbf{G} \quad (1.20)$$

Pour résoudre notre problème d'optimisation, il faut trouver les états  $\mathbf{X}$ , les paramètres de contrôle ou design  $\mathbf{a}$  et les variables adjointes  $\lambda^*$  qui donnent les

extrema de  $L$  que l'on trouve en annulant la dérivée première de  $L$  par rapport à  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{a}$  et  $\lambda^*$  ce qui revient à poser les trois équations suivantes :

– Dérivée par rapport à  $\mathbf{X}$  (équations adjointes)

$$\lambda^* \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} \quad (1.21)$$

– Dérivée par rapport à  $\mathbf{a}$  (équations d'optimalité)

$$\lambda^* \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} \quad (1.22)$$

– Dérivée par rapport à  $\lambda^*$  (équations d'état)

$$\mathbf{G} = 0 \quad (1.23)$$

Pour résoudre ce système d'équations, on utilise un algorithme d'optimisation efficace. Le lecteur intéressé trouvera une description complète d'un tel algorithme dans les travaux de Gunzburger <sup>[20]</sup>.

À présent, l'étape consiste à calculer le gradient de la fonctionnelle définie dans la section d'introduction :

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\mathbf{a}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{d\mathbf{a}} \quad (1.24)$$

En combinant (1.21) et cette équation, nous obtenons :

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\mathbf{a}} = \lambda^* \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{d\mathbf{a}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} \quad (1.25)$$

Puis en se servant des équations d'état (1.23), il vient :

$$\frac{d\mathcal{F}}{da} = -\lambda^* \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{a}} \quad (1.26)$$

Nous avons ainsi défini la méthode des variables adjointes, et précisé comment le gradient d'une fonctionnelle objectif est obtenu. Nous sommes maintenant à même de pouvoir comparer la méthode des sensibilités et la méthode des variables adjointes.

#### 1.2.4.2 Comparaison entre Sensibilités et Variables Adjointes

Chacune de ces méthodes présentent un intérêt. Le choix de leur utilisation dépend du problème que l'on souhaite résoudre. La comparaison s'effectuera sur trois points :

- Dans le cas des variables adjointes, on constate qu'il n'y a qu'un problème adjoint à résoudre peu importe le nombre de paramètres de contrôle alors que pour la méthode des sensibilités, il y a autant de systèmes d'équations de sensibilités à résoudre qu'il y a de paramètres étudiés. Ce problème peut être en partie évité lors de la résolution du système matriciel (1.9) :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} \\ \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{a}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\mathbf{X} \\ da \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{a}} \end{Bmatrix} \quad (1.27)$$

En effet, la matrice  $\partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{X}$ , représentant un système d'équations linéaires, reste la même peu importe le paramètre  $a$  d'intérêt, son inversion n'est alors effectué qu'une seule fois. Seul le membre de droite  $-\partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{a}$  diffère. De plus, lors de l'étude de sensibilité ou du gradient de plusieurs fonctionnelles, il n'y a qu'un seul problème de sensibilités à résoudre par paramètre avec la méthode des sensibilités

tandis qu'il y a un problème adjoint à résoudre par fonctionnelle étudiée.

- Le deuxième point de comparaison concerne les domaines d'applications des deux méthodes. Contrairement à la méthode des variables adjointes, la méthode des sensibilités est applicable en dehors de problèmes d'optimisation et de calculs de gradients. Ceci est dû au fait que la sensibilité a une signification physique qui lui est propre, et qu'elle existe sans avoir à définir une fonctionnelle.
- Pour finir, il est important de préciser que la méthode des sensibilités est très simple à utiliser. Elle consiste en une différentiation que l'on peut effectuer à la main.

Ce chapitre a démontré l'important atout que constitue l'utilisation de la méthode des sensibilités. Nous avons vu, plus haut, que la voie des sensibilités continues sera empruntée, nous utiliserons donc la M.E.S pour notre analyse de sensibilité. Il s'agit à présent d'étudier les différentes natures des paramètres de contrôle  $\mathbf{a}$ .

### **1.3 Paramètres de forme et de valeur**

L'intérêt des sensibilités est, entre autre, d'analyser comment une variable réagit à une perturbation d'un paramètre  $a$  autour de sa valeur nominale. Cette section vise à présenter les deux types de paramètres existants.

#### **1.3.1 Les paramètres de valeur**

Les paramètres de valeur sont en général des propriétés physiques, des constantes dans des lois de comportement, et plus globalement, il s'agit de paramètres dont la variation n'affecte pas la géométrie du domaine. Ainsi, pour un état ou variable

dépendante  $\phi(x, y; a)$ , on peut écrire :

$$\frac{D\phi}{Da}(x, y; a) = \frac{\partial\phi}{\partial a}(x, y; a) \quad (1.28)$$

Dans le cas d'un paramètre de valeur, la dérivée totale d'une variable par rapport  $a$  est exactement sa sensibilité.

Les sensibilités de valeur nous renseignent donc sur la dépendance de l'écoulement face à des variations de paramètre tels que, par exemple, des propriétés physiques, des conditions limites ou des constantes dans des lois de comportement. Il devient donc légitime de se demander de quelle manière un changement de géométrie peut affecter un écoulement. La réponse à cette question réside dans l'analyse de sensibilité avec paramètres de forme.

### 1.3.2 Les paramètres de forme

Contrairement aux paramètres de valeur, la perturbation d'un paramètre de forme induit un mouvement de la frontière comme le montre la figure ci-dessous :

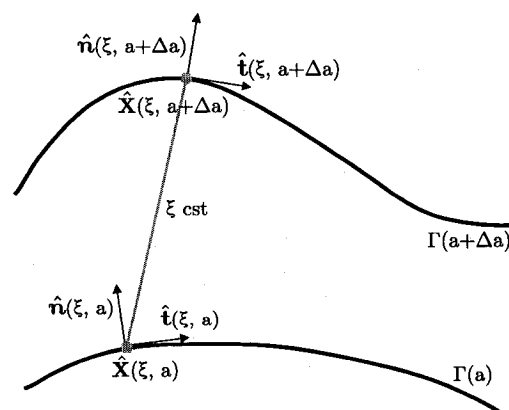


FIG. 1.2 Dépendance des frontières aux paramètres de forme

Les points de la frontière du domaine de calcul sont dépendants du paramètre  $a$

considéré. Chaque point est repéré par son abscisse curviligne  $\xi$  sur la courbe  $\Gamma$  tandis que le paramètre  $a$  détermine la forme de  $\Gamma$ . Ainsi, chaque point  $\hat{\mathbf{X}}$  de  $\Gamma$  dépend de  $a$  et  $\xi$  :

$$\Gamma(a) = \{ \hat{\mathbf{X}}(\xi, a) \mid \xi \in [\xi_0, \xi_1] \} \quad (1.29)$$

Pour définir la sensibilité de forme, considérons une variable dépendante  $\phi(\hat{\mathbf{X}}(\xi, a), a)$  évaluée sur la frontière. En utilisant le théorème des fonctions implicites, on peut exprimer sa dérivée totale en fonction de sa sensibilité et d'un terme de transpiration qui tient compte du mouvement de la frontière :

$$\frac{D\phi}{Da}(\hat{\mathbf{X}}(\xi, a), a) = \frac{\partial\phi}{\partial a} + \nabla\phi \cdot \frac{\partial\hat{\mathbf{X}}}{\partial a} \quad (1.30)$$

où  $D/Da$  représente la dérivée totale par rapport à  $a$  et  $\nabla\phi \cdot \partial\hat{\mathbf{X}}/\partial a$  désigne le terme de transpiration.

La sensibilité de  $\phi(\hat{\mathbf{X}}(\xi, a), a)$  s'écrit donc :

$$\frac{\partial\phi}{\partial a} = \frac{D\phi}{Da} - \nabla\phi \cdot \frac{\partial\hat{\mathbf{X}}}{\partial a} \quad (1.31)$$

Les vecteurs unitaires normal,  $\hat{\mathbf{n}}(\xi, a)$ , et tangent,  $\hat{\mathbf{t}}(\xi, a)$ , représentés sur la figure 1.2 peuvent être exprimés par les dérivées de  $\hat{\mathbf{X}} = [x_f; y_f]^T$  par rapport à  $\xi$  de la manière suivante :

$$\hat{\mathbf{t}}(\xi, a) = \left\| \frac{\partial\hat{\mathbf{X}}}{\partial\xi} \right\|^{-1} \left[ \frac{\partial x_f}{\partial\xi}, \frac{\partial y_f}{\partial\xi} \right]^T \quad (1.32)$$

$$\hat{\mathbf{n}}(\xi, a) = \left\| \frac{\partial\hat{\mathbf{X}}}{\partial\xi} \right\|^{-1} \left[ -\frac{\partial y_f}{\partial\xi}, \frac{\partial x_f}{\partial\xi} \right]^T \quad (1.33)$$

Pour un point donné sur la courbe, lorsque  $a$  subit une perturbation  $\Delta a$ , engendrant

ainsi un mouvement de la frontière,  $\xi$  reste constant. Ceci permet d'annuler le terme de transpiration :

$$\frac{D\hat{\mathbf{X}}}{Da}(\xi, a) = \frac{\partial\hat{\mathbf{X}}}{\partial a}(\xi, a) + \frac{\partial\hat{\mathbf{X}}}{\partial\xi} \cdot \underbrace{\frac{\partial\xi}{\partial a}}_{=0} \quad (1.34)$$

$$\frac{D\hat{\mathbf{X}}}{Da}(\xi, a) = \frac{\partial\hat{\mathbf{X}}}{\partial a}(\xi, a) \quad (1.35)$$

Il en va de même pour les sensibilités des vecteurs normal et tangent :

$$\frac{D\hat{\mathbf{n}}}{Da}(\xi, a) = \frac{\partial\hat{\mathbf{n}}}{\partial a}(\xi, a) \quad (1.36)$$

$$\frac{D\hat{\mathbf{t}}}{Da}(\xi, a) = \frac{\partial\hat{\mathbf{t}}}{\partial a}(\xi, a) \quad (1.37)$$

La différence entre les sensibilités de valeur et de forme réside donc dans le terme de transpiration. Ce dernier s'exprime comme le produit scalaire du gradient de la variable  $\phi$ ,  $[\partial\phi/\partial x; \partial\phi/\partial y]^T$ , et des sensibilités de la géométrie  $\partial\hat{\mathbf{X}}/\partial a$  que l'on note aussi  $\Pi_a$ . Ce terme est simple à évaluer lorsque la géométrie n'est pas complexe. En revanche, le gradient de  $\phi$  à la frontière est difficile à obtenir avec précision.

Leur évaluation constitue donc la principale difficulté de la M.E.S avec paramètres de forme. Pour l'évaluation du gradient sur la frontière du domaine, on fait appel à la technique développée par Duvigneau et Pelletier <sup>[12]</sup> qui consiste, pour chaque noeud, à reconstruire les dérivées par série de Taylor d'ordre élevé, en s'appuyant sur les données d'un grand nombre de noeuds au voisinage. Le système est résolu au sens des moindres-carrés et est dit contraint puisqu'il tient compte des conditions limites.

## 1.4 Travaux antérieurs et applications de la M.E.S

### 1.4.1 Travaux antérieurs

Les Méthodes de Sensibilité ainsi que la méthode des variables adjointes sont apparues dans les années 70. Elles ont fait l'objet de nombreuses recherches aussi bien dans le cadre de la mécanique des solides, et plus précisément en structures [21], qu'en mécanique des fluides. Des travaux ont été effectués dans des problèmes de conduction de chaleur transitoire [11, 9], en design aérodynamique [1], [30], pour les éléments finis stochastiques [18], en calcul d'incertitude et de fiabilité [41], en interaction fluide-structure [17], etc. Quelques exemples de calcul de sensibilité pour des problèmes spécifiques se trouvent dans Turgeon [40].

Les modèles de turbulence ont aussi fait l'objet d'analyse de sensibilité [36, 38, 37]. Des travaux ont été effectués sur l'optimisation des coefficients de fermeture du modèle de turbulence  $k - \epsilon$  [7], sur le contrôle d'instabilités d'un écoulement laminaire pour retarder la transition turbulente [27].

De nombreuses études ont permis de démontrer l'utilité des paramètres de forme dans des problèmes d'optimisation de forme, notamment en aérodynamique [26] [31], en hydrodynamique [22], en convection mixte [14] et conduction de chaleur [9, 10].

Au fil des années, les calculs des sensibilités ont été utilisées dans des domaines nombreux et variés. La complexité des problèmes à résoudre va croissante et il reste des voies à explorer, des techniques à développer. C'est en ce sens que ce projet s'intéresse à développer les équations de sensibilités du modèle  $k - \epsilon$  pour des paramètres de forme. Nous verrons dans ce projet que la réelle complexité se trouve au niveau de l'analyse de sensibilité des lois de parois qui constituent les conditions aux frontières du modèle  $k - \epsilon$ .

### 1.4.2 Les applications

Bien que les sensibilités soient souvent utilisées pour des problèmes d'optimisation, elles offrent plusieurs autres applications tout aussi intéressantes :

- Analyse de sensibilité de système<sup>[16]</sup> ;
- Identification de paramètres dominants et des zones dans lesquelles ils exercent leurs influences<sup>[16]</sup> ;
- Analyse d'incertitude <sup>[39]</sup> ;
- Calcul rapide de solutions voisines <sup>[16]</sup>

Cette liste n'est pas exhaustive, mais elle met en évidence le vaste domaine d'application des sensibilités. Contrairement aux variables adjointes, qui ne s'appliquent que dans le cas de minimisation de fonctionnelles, les sensibilités ont une existence et une signification qui leur sont propres.

### 1.5 Les objectifs

Le but de ce travail est de développer une M.E.S pour calculer les sensibilités de forme d'un écoulement turbulent décrit par le modèle standard  $k - \epsilon$  avec lois de parois. Pour atteindre ce but, nous avons identifié les quatre objectifs suivants :

- Développer les équations de sensibilités du modèle de turbulence  $k - \epsilon$  pour des paramètres de forme ;
- Implanter ces équations de sensibilités de lois de parois dans un code éléments finis existant ;
- Vérifier l'implantation en effectuant des études de raffinement de maillage adaptatif pour des cas possédant une solution analytique (Méthode des Solutions Manufacturées) ;
- Appliquer la M.E.S à des écoulements turbulents pour lesquels on possède des

mesures expérimentales ;

## CHAPITRE 2

### MÉTHODE DES ÉQUATIONS DE SENSIBILITÉS POUR LES ÉQUATIONS MOYENNES DE REYNOLDS

Ce chapitre présente la méthode des équations de sensibilités appliquée aux équations de Navier-Stokes en régime turbulent ainsi qu'aux conditions limites qui leur sont associées. Dans un premier temps, nous développerons les équations moyennes de Reynolds. En deuxième partie, nous leur appliquerons la méthode des équations de sensibilités. Pour clore ce chapitre, nous traiterons des conditions aux frontières pour les sensibilités.

#### 2.1 Équations de Navier-Stokes

##### 2.1.1 L'approche de Reynolds

Nous considérerons un écoulement stationnaire, en régime turbulent, pour des fluides incompressibles. Tout d'abord, il convient de savoir ce que signifie la turbulence. On dit qu'un écoulement est turbulent lorsque ses diverses propriétés fluctuent de manière aléatoire. On utilise alors une approche statistique. De cette définition découle l'hypothèse introduite par Reynolds (1895) selon laquelle chaque quantité caractérisant un écoulement peut être décomposée comme la somme d'une partie moyennée et d'une partie fluctuante. Nous avons ainsi pour les variables dépendantes  $\mathbf{u}$  et  $P$  :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad (2.1)$$

$$P = \bar{P} + P' \quad (2.2)$$

où la barre désigne une valeur moyenne et le prime représente une valeur fluctuante.

On peut alors former les équations de continuité et de Navier-Stokes moyennées. Dans le cas d'un écoulement turbulent stationnaire, on choisit de moyenner ces équations sur une période de temps, c'est à dire que l'écoulement ne varie pas sur cette période. Pour une variable donnée  $f(t)$ , sa valeur moyenne dans le temps s'écrit :

$$F_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t) dt \quad (2.3)$$

Après cette brève introduction, voyons comment cette approche s'applique aux équations de Navier-Stokes.

### 2.1.2 Les équations moyennes de Reynolds

Les équations classiques de continuité et de Navier-Stokes sont données comme suit :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.4)$$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \tau(\mathbf{u}) + \mathbf{f} \quad (2.5)$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique,  $\mathbf{u}$  le vecteur vitesse de composantes  $(u, v)$ ,  $\mathbf{f}$  les forces volumiques et  $\tau(\mathbf{u})$  le tenseur des contraintes visqueuses noté :

$$\tau(\mathbf{u}) = \mu [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (2.6)$$

Il s'agit, à présent, de moyenner ces équations comme nous l'avons stipulé précédemment. L'opérateur de moyenne étant linéaire, nous nous préoccupons seulement du terme de convection  $\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ . Il vient alors :

$$\overline{\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}} = \rho \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \mathbf{R} \quad (2.7)$$

Le lecteur intéressé pourra trouver plus de détails dans l'ouvrage de Wilcox <sup>[42]</sup>. On note  $\mathbf{R}$  le tenseur des contraintes de Reynolds :

$$R_{ij} = -\overline{\rho u'_i u'_j} \quad (2.8)$$

Nous tiendrons compte de l'approximation de Boussinesq qui stipule que le tenseur de Reynolds peut être écrit en terme de viscosité turbulente  $\mu_t$  :

$$R_{ij} = \mu_t (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (2.9)$$

Le terme  $\frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$  est une contrainte normale, il sera donc inclut dans le terme de pression. On peut alors écrire les équations moyennes de Reynolds suivantes :

– Equation de continuité :

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.10)$$

– Equation de Navier-Stokes :

$$\rho \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} = -\nabla \bar{P} + \nabla \cdot [(\mu + \mu_t) (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] + \mathbf{f} \quad (2.11)$$

Ces équations ne suffisent pas à fermer le modèle mathématique, il nous manque des équations pour évaluer les nouvelles inconnues introduites par le tenseur de Reynolds qui rend compte de l'aspect turbulent de l'écoulement. En effet, la variable

$\mu_t$ , qui dépend des variables de turbulence  $k$  et  $\epsilon$ , établit le lien entre les équations de Navier-Stokes et les équations du modèle  $k - \epsilon$  nécessaires pour modéliser notre écoulement. Ces nouvelles équations et variables seront présentées au chapitre 3. Notons que la viscosité turbulente n'est donc pas une propriété physique du fluide au même titre que la viscosité dynamique, mais plutôt une variable dépendante que l'on devra évaluer au cours du processus de résolution numérique.

Dorénavant, nous n'utiliserons plus les barres sur les variables dépendantes qui indiquent des valeurs moyennes. De plus, nous noterons le tenseur des contraintes visqueuses pour un écoulement turbulent de la manière suivante :

$$\tau(\mathbf{u}) = (\mu + \mu_t) [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (2.12)$$

### 2.1.3 Les conditions limites

Les équations de Navier-Stokes sont résolues dans le domaine de calcul  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ . Les conditions frontières de Dirichlet et Neumann sont imposées respectivement sur des parties  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$  de  $\Gamma$  :

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad (\Gamma_D) \quad (2.13)$$

$$[-p\mathbf{I} + \tau] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{t}} \quad (\Gamma_N) \quad (2.14)$$

Les équations qui régissent l'écoulement ainsi que les conditions qui leur sont associées étant données, nous pouvons désormais appliquer la Méthode des Equations de Sensibilités (M.E.S).

## 2.2 Équations des sensibilités pour les équations de Navier-Stokes

Les sensibilités permettent d'analyser le comportement de l'écoulement par rapport aux paramètres qui le définissent. Les variables de l'écoulement dépendent non seulement des variables d'espace  $(x, y)$  mais aussi d'un paramètre  $a$ . On notera leur sensibilité par rapport à ce paramètre de la manière suivante :

$$s_{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} \quad (2.15)$$

$$s_p = \frac{\partial p}{\partial a} \quad (2.16)$$

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, les sensibilités de  $s_{\mathbf{u}}$  et  $s_p$  représentent respectivement les taux de variation des composantes du vecteur vitesse et de la pression par rapport au paramètre de contrôle étudié. Pour chaque paramètre  $a$ , on aura à résoudre un système d'équation.

Il s'agit à présent d'appliquer la méthode des équations de sensibilité aux équations de Navier-Stokes, en les différentiant par rapport à un paramètre arbitraire  $a$ . Les équations de sensibilités sont les suivantes :

$$\nabla \cdot \mathbf{s}_{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.17)$$

$$\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho (\mathbf{s}_{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_{\mathbf{u}}) = -\nabla s_p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{s}_{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot s_{\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})} + \mathbf{f}' \quad (2.18)$$

Les dérivées totales des propriétés physiques sont notées avec un prime '. Ainsi pour une propriété physique  $\alpha$ , on note sa sensibilité totale :

$$\alpha' = \begin{cases} 1 & \text{si } a = \alpha \\ 0 & \text{si } a \neq \alpha \end{cases}$$

Dans le cas d'un écoulement dont les propriétés physiques sont variables, leurs sensibilités deviennent, par conséquent, variables elles aussi. Par exemple, considérons le modèle de viscosité dont la dépendance aux autres variables s'écrit comme suit :

$$\mu = \mu(x, y, \mathbf{u}(a); a) \quad (2.19)$$

On écrit alors sa sensibilité de la manière suivante :

$$\mu' = \frac{\partial \mu}{\partial a} + \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} \quad (2.20)$$

$$\mu' = \frac{\partial \mu}{\partial a} + s_{\mathbf{u}} \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{u}} \quad (2.21)$$

Les sensibilités des variables dépendantes sont notées avec un  $s$ ,  $\mathbf{f}'$  est la sensibilité des forces volumiques. De plus, les termes résultant de la sensibilité du tenseur des contraintes visqueuses sont écrits de la manière suivante :

$$\begin{aligned} s_{\tau(\mathbf{u})} &= (\mu' + \mu'_t) [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \\ \tau(\mathbf{s}_{\mathbf{u}}) &= (\mu + \mu_t) [\nabla \mathbf{s}_{\mathbf{u}} + (\nabla \mathbf{s}_{\mathbf{u}})^T] \end{aligned}$$

De même que pour les équations de continuité et de Navier-Stokes, il faut appliquer la M.E.S aux conditions limites qui leur sont associées. Cette tâche est l'objet de la section suivante.

### 2.3 Conditions limites pour les sensibilités de forme

On impose des conditions classiques de Dirichlet et Neumann (on les appelle aussi respectivement les conditions aux limites essentielles et naturelles) sur les frontières de  $\Omega$  autre que les parois. Les parties de  $\Gamma$  où sont imposées les conditions de Dirichlet et Neumann sont notées respectivement  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$ .

Il s'agit, à présent d'appliquer la méthode des équations de sensibilité pour les conditions aux frontières. Pour des paramètres de forme, on a vu, au chapitre précédent, que lors de la différentiation d'une variable, un terme de transpiration apparaît. Ce terme est composé du produit scalaire du gradient de la variable étudiée et de la sensibilité de la géométrie. Le terme de transpiration résulte de la dépendance de la géométrie au paramètre considéré et traduit le transport de la condition limite à la position de la nouvelle frontière  $\Gamma = \Gamma(a + \Delta a)$ . En effet, la frontière  $\Gamma$  se déplace lorsque le paramètre  $a$  varie :

$$\Gamma(a) = \{ \hat{\mathbf{X}}(\xi, a) \mid \xi \in [\xi_0, \xi_1] \} \quad (2.22)$$

où  $\hat{\mathbf{X}} = [x_f; y_f]^T$ ,  $x_f$  et  $y_f$  étant les coordonnées des points appartenant à la courbe  $\Gamma$  paramétrisée par  $\xi$ .

Ainsi, pour une variable  $\phi(x_f(a), y_f(a); a)$ , on écrit sa sensibilité :

$$\frac{\partial \phi}{\partial a} = \frac{D\phi}{Da} - \nabla \phi \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial a} \quad (2.23)$$

#### Conditions de Dirichlet :

Appliquons, à présent, cette méthode à l'équation (2.13) qui consiste à la différentier, au sens de la dérivée matérielle, par rapport à un paramètre de forme

$a$  :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Da} = \frac{D\hat{\mathbf{u}}}{Da} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} = \frac{D\hat{\mathbf{u}}}{Da} \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} = \frac{D\hat{\mathbf{u}}}{Da} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \quad (2.26)$$

Cette condition limite pour les sensibilités s'écrit alors :

$$s_{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} = \frac{D\hat{\mathbf{u}}}{Da} - \nabla \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial a} \quad (2.27)$$

Conditions de Neumann :

Pour la condition de Neumann, nous appliquons la dérivée totale à l'équation (2.14) :

$$\frac{D}{Da} [ [-p\mathbf{I} + \tau(\mathbf{u})] \cdot \hat{\mathbf{n}} ] = \frac{D\bar{t}}{Da} \quad (2.28)$$

$$\frac{D}{Da} [ [-p\mathbf{I} + \tau(\mathbf{u})] \cdot \hat{\mathbf{n}} ] + [ [-p\mathbf{I} + \tau(\mathbf{u})] \cdot \frac{D\hat{\mathbf{n}}}{Da} ] = \frac{D\bar{t}}{Da} \quad (2.29)$$

avec

$$\frac{D}{Da} [ [-p\mathbf{I} + \tau(\mathbf{u})] ] = \frac{\partial}{\partial a} [ [-p\mathbf{I} + \tau(\mathbf{u})] ] + \nabla [ [-p\mathbf{I} + \tau(\mathbf{u})] ] \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial a} \quad (2.30)$$

$$\text{et } \frac{D\hat{\mathbf{n}}}{Da} = \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial a} \quad (2.31)$$

On en déduit finalement la condition de Neumann pour les sensibilités :

$$\begin{aligned} [-s_p \mathbf{I} + s_{\tau(\mathbf{u})} + \tau(\mathbf{s}_u)] \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \frac{D\bar{\mathbf{t}}}{Da} - \left[ \nabla [-p\mathbf{I} + \tau(\mathbf{u})] \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial a} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ &\quad - [-p\mathbf{I} + \tau(\mathbf{u})] \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial a} \end{aligned} \quad (2.32)$$

où  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité d'ordre 2,  $\hat{\mathbf{n}}$  et  $\hat{\mathbf{t}}$  sont respectivement les vecteurs unitaires normal et tangent, et  $\bar{\mathbf{t}}$  est la traction imposée à la frontière.

Le gradient du tenseur des contraintes  $\sigma$  noté  $\nabla [-p\mathbf{I} + \tau(\mathbf{u})]$  est un tenseur d'ordre 3. Sa contraction avec le vecteur des sensibilités de la géométrie se note de la manière suivante :

$$\nabla \sigma \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial a} = \sigma_{ij,k} \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}_k}{\partial a} e_i \otimes e_j \quad (2.33)$$

Ce chapitre nous a présenté les équations moyennes de Reynolds ainsi que les conditions limites qui leur sont associées. Nous leur avons, par la suite, appliqué la M.E.S permettant de développer les équations de sensibilité des équations de continuité et de Navier-Stokes et les conditions limites pour les sensibilités. Les équations moyennes de Reynolds ont fait apparaître de nouvelles inconnues par le biais de la viscosité turbulente. Ces nouvelles inconnues sont les variables de turbulence  $k$  et  $\epsilon$ . Les équations qui leur sont associées permettront de fermer le modèle mathématique. L'étude de ces équations est l'objet du chapitre suivant.

## CHAPITRE 3

### MÉTHODE DES ÉQUATIONS DE SENSIBILITÉS POUR LE MODÈLE $\kappa - \epsilon$

Ce chapitre présente les équations du modèle  $k-\epsilon$  avec une loi de paroi à deux échelles de vitesse ainsi que les équations de sensibilité qui leur sont associées. Ce chapitre nous amène au coeur de l'intérêt du projet, c'est à dire l'analyse de sensibilités de forme pour les lois de parois. Nous verrons en première partie le modèle de turbulence  $k-\epsilon$  avec lois de parois ainsi que la formulation en variables logarithmiques. Puis nous développerons les équations de sensibilités associées aux équations du modèle  $k-\epsilon$ . Par la suite, nous effectuerons l'analyse de sensibilité des conditions aux frontières classiques et des lois de parois. Puis, pour terminer ce chapitre, nous exposerons les algorithmes de résolution tenant compte du calcul des nouvelles variables  $k$  et  $\epsilon$  et des variables de la loi de paroi.

#### 3.1 Équations du modèle de turbulence $k-\epsilon$

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, les variables de l'écoulement possèdent une composante moyennée dans le temps et une composante fluctuante. À la différence d'un écoulement laminaire, nous avons vu l'apparition du terme de viscosité turbulente  $\mu_t$  pour modéliser le tenseur de Reynolds, dans l'équation de mouvement. Il traduit l'effet des fluctuations sur l'écoulement moyen. Ce terme n'est pas une propriété physique contrairement à la viscosité dynamique  $\mu$  mais une variable dépendante. Elle dépend, en effet, de l'énergie cinétique de turbulence

$k$  et de son taux de dissipation  $\epsilon$ . On la définit de la manière suivante :

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (3.1)$$

où  $C_\mu$  désigne une constante de fermeture du modèle  $k - \epsilon$ . De plus, on définit  $k$  et  $\epsilon$  tels que :

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'} \quad (3.2)$$

$$\epsilon = \frac{\mu}{\rho} \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} \quad (3.3)$$

où la barre supérieure désigne une valeur moyenne sur une période de temps et le prime ' indique la composante fluctuante. Pour compléter le modèle mathématique et modéliser comme il se doit le régime turbulent, on ajoute aux équations de continuité et de mouvement, les équations du modèle de turbulence  $k - \epsilon$  standard de Launder et Spalding [29]. Ces équations sont les suivantes :

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla k = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + \mu_t P - \rho^2 C_\mu \frac{k^2}{\mu_t} + q_k \quad (3.4)$$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right] + \rho C_{\epsilon 1} C_\mu k P - C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^2}{k} + q_\epsilon \quad (3.5)$$

$P$  désigne la production de turbulence. Elle s'écrit de la manière suivante :

$$P = \nabla \mathbf{u} : (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (3.6)$$

$C_{\epsilon 1}$ ,  $C_{\epsilon 2}$ ,  $C_\mu$ ,  $\sigma_k$  et  $\sigma_\epsilon$  sont les constantes de fermetures du modèle de turbulence  $k - \epsilon$ . Les valeurs recommandées par Launder et Spalding [29] sont données dans le tableau 3.1. Finalement,  $q_k$  et  $q_\epsilon$  désignent les termes sources à utiliser dans une Méthode des Solutions Manufacturées (M.S.M) afin d'assurer l'équilibre de ces

deux équations.

TAB. 3.1 Constantes du modèle de turbulence k- $\epsilon$

| $\sigma_k$ | $\sigma_\epsilon$ | $C_{\epsilon 1}$ | $C_{\epsilon 2}$ | $C_\mu$ |
|------------|-------------------|------------------|------------------|---------|
| 1.0        | 1.3               | 1.44             | 1.92             | 0.09    |

### 3.2 Utilisation des variables logarithmiques

Par définition, les variables de turbulence  $k$ ,  $\epsilon$  et  $\mu_t$  sont positives. Cependant, lors de la résolution numérique, il arrive que ces variables prennent des valeurs négatives ce qui constitue un non sens physique. Pour éviter ce problème, nous résolvons les équations (3.4-3.5) en variables logarithmiques. Ceci consiste à utiliser le changement de variables suivant :

$$\mathcal{K} = \ln(k) \quad ; \quad \mathcal{E} = \ln(\epsilon) \quad (3.7)$$

Les équations de turbulence prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \right] + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} \\ + \mu_t e^{-\mathcal{K}} P - \rho^2 C_\mu \frac{e^{\mathcal{K}}}{\mu_t} + q_{\mathcal{K}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \right] + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} \\ + \rho C_{\epsilon 1} C_\mu e^{\mathcal{K} - \mathcal{E}} P - C_{\epsilon 2} \rho e^{\mathcal{E} - \mathcal{K}} + q_{\mathcal{E}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

La viscosité turbulente devient alors :

$$\mu_t = \rho C_\mu e^{2\mathcal{K} - \mathcal{E}} \quad (3.10)$$

Notons que les équations (3.8-3.9) sont équivalentes aux équations originales du modèle de turbulence  $k - \epsilon$ , seules les variables de calcul sont différentes. Ainsi le modèle de turbulence reste donc inchangé. Pour évaluer  $k$  et  $\epsilon$ , il suffit de prendre les exponentielles de  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$  ce qui assure leur positivité. De plus, grâce à la propriété du logarithme, ce changement de variables dépendantes permet de lisser les solutions numériques  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$ . Il en résulte que les solutions numériques sont plus précises, même pour des maillages grossiers. Cependant, il est important de préciser que l'apparition des termes de produit de gradient de  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$  peut entraîner de la diffusivité. Il faut alors surveiller ce phénomène.

### 3.3 Les conditions aux frontières

#### 3.3.1 Les conditions aux frontières classiques

Les frontières de  $\Omega$  qui ne sont pas des parois solides sont modélisées en utilisant des conditions classiques de Dirichlet ou de Neumann respectivement sur les segments de frontière  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$  :

– Conditions de Dirichlet :

$$\mathcal{K} = \ln(\beta_k) \quad ; \quad \mathcal{E} = \ln(\beta_\epsilon) \quad (3.11)$$

– Conditions de Neumann :

$$\left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad ; \quad \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (3.12)$$

où  $\hat{\mathbf{n}}$  désigne le vecteur unitaire normale dirigé vers l'extérieur du domaine,  $\beta_k$  et  $\beta_\epsilon$  sont les valeurs de  $k$  et  $\epsilon$  sur ces frontières. En régime turbulent, les conditions

aux frontières pour les parois solides doivent faire l'objet d'une attention toute particulière. La sous-section suivante s'attarde sur ce sujet.

### 3.3.2 Présentation de la loi de paroi à deux échelles de vitesse

#### 3.3.2.1 Introduction

Le modèle de turbulence standard  $k - \epsilon$  n'est pas valide pour des bas nombres de Reynolds comme c'est le cas près d'une paroi solide. En effet, la turbulence y est amortie et la viscosité moléculaire y est dominante. On ne peut donc pas utiliser des conditions d'adhérence classiques, c'est à dire  $u = v = k = \epsilon = 0$ . Ce modèle n'est donc pas valable jusqu'à la paroi. Pour résoudre ce problème, nous utiliserons une loi de paroi pour décrire la solution dans ces régions. Il s'agit de restreindre le domaine de calcul là où le modèle  $k - \epsilon$  est toujours valide, et d'imposer des conditions aux frontières réalistes à une certaine distance de la paroi.

#### 3.3.2.2 La Loi de Paroi

Comme nous l'avons indiqué en introduction, la frontière du domaine de calcul est située à une distance  $d$  de la paroi solide réelle. Dans la région qui se situe entre la frontière du domaine de calcul et la paroi solide, l'écoulement est représenté par la loi de paroi au lieu d'être réellement calculé. Les variables évaluées à la frontière du domaine de calcul seront repérées par l'indice  $w$ . Nous utiliserons la loi de paroi à deux échelles de vitesse, décrite par Chabard <sup>[5]</sup> et Ignat *et al* <sup>[25]</sup> et les conditions limites qui en découlent pour représenter de manière adéquate le profil de vitesse dans une couche limite turbulente.

La loi de paroi décrit le profil de vitesse adimensionnelle  $u^+$  parallèle à la paroi

solide, comme une fonction de  $y^+$ , la distance adimensionnelle à la paroi physique :

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & \text{pour } y^+ < y_c^+ \\ \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) & \text{pour } y^+ \geq y_c^+ \end{cases}$$

où  $\kappa$  désigne la constante de Karman,  $E$  est le paramètre de rugosité. Pour une paroi lisse,  $\kappa = 0.42$  et  $E = 9.0$ . Comme la définition de  $u^+$  le montre, cette loi de paroi considère deux zones distinctes : la sous-couche laminaire où  $y^+ < y_c^+$  et la zone logarithmique où  $y^+ \geq y_c^+$ . Les variables  $u^+$  et  $y^+$  sont définies comme suit :

$$y^+ = \frac{\rho d u_k}{\mu} \quad (3.13)$$

$$u^+ = \frac{u_t}{u_{**}} \quad (3.14)$$

où  $u_t = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}}$  désigne la vitesse tangentielle,  $d$  la distance à la paroi et  $u_{**} = \sqrt{\tau_w / \rho}$  la vitesse de frottement. La distance  $d$  est choisie de telle sorte que  $30 \leq y^+ \leq 300$  [34] ce qui permet de respecter la validité du modèle de loi de paroi et du modèle  $k - \epsilon$ . De plus, on calcule une vitesse caractéristique basée sur l'énergie cinétique de turbulence [5] :

$$u_k = C_\mu^{1/4} k_w^{1/2} \quad (3.15)$$

Soit en utilisant les variables logarithmiques :

$$u_k = C_\mu^{1/4} \exp(\mathcal{K}_w/2) \quad (3.16)$$

Près d'un point de stagnation, les fluctuations turbulentes sont responsables du transfert de chaleur. L'utilisation de l'échelle de vitesse  $u_k$  permet de prédire des comportements réalistes de ce transfert de chaleur à proximité du point de stagnation.

Les conditions aux frontières sont alors définies de la manière suivante :

– Condition dans la direction tangentielle :

La contrainte qu'applique l'écoulement sur la paroi dans la direction tangentielle est une fonction de la vitesse tangentielle  $u_t$ . Il s'agit d'une condition mixte ou de Robin. En combinant les équations (3.13-3.14) et en utilisant la définition de  $u^+$ , on obtient la relation linéaire entre  $\tau_w$  et  $u_t$  suivante :

$$\left[ (\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{t}} \right]_{wall} = \tau_w = \rho u_k u_{**} = \frac{\rho u_k}{\frac{1}{\kappa} \ln\left(E \frac{\rho d u_k}{\mu}\right)} u_t \quad (3.17)$$

– Condition dans la direction normale :

La vitesse dans la direction normale est nulle.

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (3.18)$$

– Condition sur  $\mathcal{K}$

Cette condition impose un flux nul sur la frontière et permet la résolution de l'équation de transport sur  $\mathcal{K}$ . Elle est la conséquence du fait que le cisaillement à la paroi est constant dans les régions où l'on utilise la loi de paroi. De plus, elle permet de calculer la distribution du profil de vitesse  $u_k$  à la paroi.

$$\left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (3.19)$$

– Condition sur  $\mathcal{E}$

Nous sommes en présence d'une condition de Dirichlet classique qui donne la valeur de  $\mathcal{E}$  à la paroi. Elle est fonction de la vitesse basée sur l'énergie cinétique  $u_k$ .

$$\mathcal{E} = \ln \left( \frac{u_k^3}{\kappa d} \right) \quad (3.20)$$

A présent que les équations du modèle  $k - \epsilon$  ont été données ainsi que les conditions aux frontières qui leur sont associées, et notamment la loi de paroi, nous pouvons leur appliquer la M.E.S.

### 3.4 Équations des sensibilités pour le modèle $k - \epsilon$

Il s'agit, à présent, d'appliquer la méthode des équations de sensibilités aux équations du modèle  $k - \epsilon$ . Rappelons que cette méthode utilise des sensibilités continues comme nous l'avons vu au chapitre 1, et qu'elle consiste à différentier les équations de notre modèle par rapport à un paramètre arbitraire  $a$ . Remarquons que les variables dépendantes sont des fonctions des variables d'espace et du paramètre  $a$  considéré. Les sensibilités de  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$  s'écrivent de la manière suivante :

$$s_{\mathcal{K}} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial a} \quad ; \quad s_{\mathcal{E}} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a} \quad (3.21)$$

Après l'application de la M.E.S aux équations (3.8)-(3.9), nous obtenons les équations de sensibilités suivantes :

Équation de transport en  $\mathcal{K}$  pour les sensibilités :

$$\begin{aligned} \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho (\mathbf{s}_{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathcal{K} + \mathbf{u} \cdot \nabla s_{\mathcal{K}}) &= \nabla \cdot \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla s_{\mathcal{K}} \right] \\ &+ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} \\ &+ 2 \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla s_{\mathcal{K}} \\ &+ e^{-\mathcal{K}} (\mu'_t P + \mu_t P' - \mu_t P s_{\mathcal{K}}) \end{aligned}$$

$$- \rho e^{\mathcal{E}-\kappa} \left( 2\frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_\mu}{C_\mu} + s_\kappa - \frac{\mu'_t}{\mu_t} \right) \quad (3.22)$$

Équation de transport en  $\mathcal{E}$  pour les sensibilités :

$$\begin{aligned} \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho (\mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathcal{E} + \mathbf{u} \cdot \nabla s_\mathcal{E}) &= \nabla \cdot \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_\epsilon} - \frac{\mu_t \sigma'_\epsilon}{\sigma_\epsilon^2} \right) \nabla \mathcal{E} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla s_\mathcal{E} \right] \\ &+ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_\epsilon} - \frac{\mu_t \sigma'_\epsilon}{\sigma_\epsilon^2} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} \\ &+ 2 \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla s_\mathcal{E} \\ &+ \rho C_{\epsilon 1} C_\mu e^{\kappa-\mathcal{E}} P \left( \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_{\epsilon 1}}{C_{\epsilon 1}} + \frac{C'_\mu}{C_\mu} + s_\kappa - s_\mathcal{E} + \frac{P'}{P} \right) \\ &- C_{\epsilon 2} \rho e^{\mathcal{E}-\kappa} \left( \frac{C'_{\epsilon 2}}{C_{\epsilon 2}} + \frac{\rho'}{\rho} + s_\mathcal{E} - s_\kappa \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

On note les dérivées totales des propriétés physiques avec un prime (') ainsi que la sensibilité du terme de production de turbulence comme suit :

$$P' = 2 \nabla \mathbf{s}_u : [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]$$

avec la sensibilité de la viscosité turbulente donnée par :

$$\mu'_t = \mu_t \left( \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_\mu}{C_\mu} + 2s_\kappa - s_\mathcal{E} \right) \quad (3.24)$$

Les sensibilités des variables de turbulence et celles de leurs logarithmes sont reliées

de la manière suivante :

$$s_{\mathcal{K}} = \frac{s_k}{k} \quad ; \quad s_{\mathcal{E}} = \frac{s_{\epsilon}}{\epsilon} \quad (3.25)$$

### 3.5 Conditions aux frontières classiques pour les sensibilités

Nous présentons dans ce paragraphe les sensibilités avec paramètres de forme des conditions classiques de Dirichlet et de Neumann (3.11-3.12). L'application de la M.E.S nous donne les relations suivantes :

Conditions classiques de Dirichlet pour les sensibilités :

$$\begin{aligned} s_{\mathcal{K}} &= \frac{\beta'_k}{\beta_k} - \nabla \mathcal{K} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial a} \\ s_{\mathcal{E}} &= \frac{\beta'_\epsilon}{\beta_\epsilon} - \nabla \mathcal{E} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial a} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Conditions classiques de Neumann pour les sensibilités :

$$\begin{aligned} \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla s_{\mathcal{K}} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} &= - \left[ \nabla \mu \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial a} + \frac{\nabla \mu_t \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial a}}{\sigma_k} \right] \nabla \mathcal{K} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ &\quad - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \left[ \nabla \mathcal{K} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial a} + \nabla (\nabla \mathcal{K}) \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial a} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_\epsilon} - \frac{\mu_t \sigma'_\epsilon}{\sigma_\epsilon^2} \right) \nabla \mathcal{E} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla s_{\mathcal{E}} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} &= - \left[ \nabla \mu \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial a} + \frac{\nabla \mu_t \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial a}}{\sigma_\epsilon} \right] \nabla \mathcal{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ &\quad - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \left[ \nabla \mathcal{E} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial a} + \nabla (\nabla \mathcal{E}) \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial a} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

La difficulté se situe au niveau de l'obtention des gradients de  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$  puisque la sensibilité de la frontière est, en général, facile à calculer lorsque la géométrie n'est pas complexe. Les équations de sensibilités pour les conditions aux frontières de

type Neumann font apparaître des dérivées secondes. Ces termes posent de réelles difficultés lors de la résolution numérique. Nous utilisons une technique développée par Duvigneau et Pelletier <sup>[13]</sup> qui consiste à reconstruire les dérivées sur la frontière avec des développements en série de Taylor d'ordre élevé. Le problème sera résolu au sens des moindres-carrés. Plus de détails seront données au chapitre 4.

### 3.6 Lois de paroi pour les sensibilités avec paramètres de forme

Nous appliquons la même méthode pour les conditions issues de la loi de paroi. Nous obtenons les équations de sensibilités suivantes :

– Condition aux frontières dans la direction tangentielle pour les sensibilités :

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{\partial \tau}{\partial a} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right) \cdot \hat{\mathbf{t}} \right]_{wall} &= \left( \rho' + \nabla \rho \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial a} \right) u_k u_{**} \\ &+ \rho u_k \frac{Du_{**}}{Da} + \rho u_{**} \frac{Du_k}{Da} - \tau \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial a} \cdot \hat{\mathbf{t}} \\ &- \tau \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}}{\partial a} - \left[ \left( \nabla \tau \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial a} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \right] \cdot \hat{\mathbf{t}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

avec les sensibilités de  $u_k$  et  $u_{**}$  suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{Du_k}{Da} &= u_k \left[ \frac{C'_\mu}{4C_\mu} + \frac{1}{2k_w} \left( s_k + \nabla k \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial a} \right) \right] \\ &= u_k \left[ \frac{C'_\mu}{4C_\mu} + \frac{1}{2} \left( s_{\mathcal{K}} + \nabla \mathcal{K} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial a} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\frac{Du_{**}}{Da} = \frac{\kappa}{\ln\left(\frac{E\rho Du_k}{\mu}\right)} \left\{ \frac{\kappa' u_t}{\kappa} + \left( \mathbf{s}_u + \nabla \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial a} \right) \cdot \hat{\mathbf{t}} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}}{\partial a} \right\} \quad (3.31)$$

$$- \frac{u_t}{\ln\left(\frac{E\rho du_k}{\mu}\right)} \left[ \frac{E'}{E} + \frac{d'}{d} + \frac{1}{u_k} \frac{Du_k}{Da} + \frac{(\rho' + \nabla\rho \cdot \frac{\partial\hat{\mathbf{X}}}{\partial a})}{\rho} - \frac{(\mu' + \nabla\mu \cdot \frac{\partial\hat{\mathbf{X}}}{\partial a})}{\mu} \right] \Bigg\}$$

Notons que la condition sur  $\left[\left(\frac{\partial\tau}{\partial a} \cdot \hat{\mathbf{n}}\right) \cdot \hat{\mathbf{t}}\right]_{wall}$  est bien une condition mixte puisqu'elle est reliée à  $s_{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{t}}$  par  $Du_{**}/Da$ .

– Condition aux frontières dans la direction normale pour les sensibilités :

$$s_{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = - \left( \nabla\mathbf{u} \cdot \frac{\partial\hat{\mathbf{X}}}{\partial a} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{u} \cdot \frac{\partial\hat{\mathbf{n}}}{\partial a} \quad (3.32)$$

– Condition aux frontières sur  $\mathcal{K}$  pour les sensibilités :

$$\begin{aligned} \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla\mathcal{K} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla s_{\mathcal{K}} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} = & - \left[ \nabla\mu \cdot \frac{\partial\hat{\mathbf{X}}}{\partial a} + \frac{\nabla\mu_t \cdot \frac{\partial\hat{\mathbf{X}}}{\partial a}}{\sigma_k} \right] \nabla\mathcal{K} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ & - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \left[ \nabla\mathcal{K} \cdot \frac{\partial\hat{\mathbf{n}}}{\partial a} + \nabla(\nabla\mathcal{K}) \cdot \frac{\partial\hat{\mathbf{X}}}{\partial a} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right] \end{aligned} \quad (3.33)$$

– Condition aux frontières sur  $\mathcal{E}$  pour les sensibilités :

$$s_{\mathcal{E}} = \frac{3}{u_k} \frac{Du_k}{Da} - \frac{\kappa'}{\kappa} - \frac{d'}{d} - \nabla\mathcal{E} \cdot \frac{\partial\hat{\mathbf{X}}}{\partial a} \quad (3.34)$$

### 3.7 Algorithme de résolution

#### 3.7.1 Résolution des variables de l'écoulement : $\mathbf{u}, p, \mathcal{K}, \mathcal{E}$

Les équations de continuité et de mouvement sont résolues de manière couplée alors que les équations du modèle de turbulence  $k - \epsilon$  sont résolues de manière découplées. Au début de chaque itération, une solution initiale est calculée. Cette solution provient soit d'un calcul précédent dans le cas d'une résolution avec

maillage adaptatif, ce qui laisse supposer qu'au moins un cycle d'adaptation a déjà été effectué, soit en mettant la solution initiale à zéro. Cependant, dans le cadre de l'utilisation de la méthode des solutions manufacturées, la solution exacte peut servir de solution initiale afin de favoriser la convergence du solveur. Ensuite, on procède par itérations de la manière suivante :

- 1 Calculer  $\mu_t$  à partir des solutions initiales
- 2 Résoudre les équations de continuité et de mouvement avec le champ de  $\mu_t$
- 3 Résoudre les équations de  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$ 
  - 3.1 Résoudre  $\mathcal{K}$
  - 3.2 Résoudre  $\mathcal{E}$
  - 3.3 Calculer  $\mu_t$  avec les nouveaux champs de  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$
  - 3.4 Selon que le critère de convergence est satisfait, retourner à l'étape 3 ou aller à l'étape 4
- 4 Selon que le critère de convergence globale est satisfait, retourner à l'étape 2 ou arrêter

Le critère de convergence globale, basé sur le quotient de la norme de la correction par la norme de la solution, est, en général, fixé à  $10^{-6}$ , alors que pour la convergence locale, c'est à dire pour les sous-itérations (étape 3), on exige un critère plus faible fixé à  $10^{-4}$ . On linéarise les équations de continuité et de mouvement par la méthode de substitution ou celle de Newton-Rhapon. En ce qui concerne les équations de  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$ , un maximum de 5 sous-itérations est effectué à l'étape 3.

On utilise la même approche pour le calcul de sensibilités. Cependant, les équations de sensibilités étant linéaires, on effectue, en général qu'une seule sous-itération pour la résolution des équations de continuité/mouvement et les équations du modèle de turbulence.

### 3.7.2 Résolution des variables de la loi de paroi

Le but est de calculer le cisaillement à la paroi car il intervient dans le calcul du résidu des équations de la loi de paroi. Son évaluation se fait de la manière suivante :

- 1. Calculer  $u_k$  avec (3.16)
- 2. Calculer  $y^+$  à la paroi avec (3.13)
- 3. Calculer  $u^+$  avec la définition donnée dans la section 3.3.2
- 4. Calculer  $u_{**}$  avec (3.14)
- 5. Calculer  $\tau_w$  avec (3.17)

L'algorithme est exactement le même pour les sensibilités, mais on utilise les sensibilités des variables ci-dessus.

## CHAPITRE 4

### MÉTHODE DE RÉOLUTION

Au cours des chapitres précédents, nous nous sommes attachés à exposer les équations modélisant un écoulement turbulent ainsi que leurs équations de sensibilités. Ce chapitre présente la méthodologie éléments finis utilisée pour les résoudre. En première partie, nous expliquerons en quoi consiste la méthode des éléments finis en établissant, notamment, les formulations variationnelles des équations de l'écoulement ainsi que des sensibilités. Puis nous traiterons du processus de maillage adaptatif en approfondissant la notion d'estimation d'erreur. Finalement, nous exposerons la méthode utilisée pour l'obtention des gradients sur une frontière.

#### 4.1 Forme faible des équations de Navier-Stokes et du modèle $k-\epsilon$

La formulation variationnelle consiste à multiplier respectivement les équations (2.4),(2.5),(3.8) et (3.9) par les fonctions test  $\delta_p$ ,  $\delta_{\mathbf{u}}$ ,  $\delta_{\mathcal{K}}$  et  $\delta_{\epsilon}$ , puis, à les intégrer par parties sur le domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ .

– Équation de continuité :

$$\int_{\Omega} \delta p \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = 0 \quad (4.1)$$

– Équation de mouvement :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} 2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{u}) d\Omega \\ - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.2)$$

où

$$\dot{\gamma}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (4.3)$$

$$\bar{\mathbf{t}} = [-p\mathbf{I} + 2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u})] \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (4.4)$$

$\dot{\gamma}(\mathbf{u})$  représente le tenseur du taux de déformation,  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité d'ordre deux et  $\bar{\mathbf{t}}$  désigne les tractions à la frontière.

– Équation de  $\mathcal{K}$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \rho \mathbf{u} \nabla \mathcal{K} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} - \mu_t e^{-\mathcal{K}} \mathcal{K} \mathbf{P}(\mathbf{u}) + \rho^2 \mathbf{C}_{\mu} \frac{e^{\mathcal{K}}}{\mu_t} \right] \delta \mathcal{K} d\Omega \\ + \int_{\Omega} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \delta \mathcal{K} d\Omega = \int_{\Gamma} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial n} \delta \mathcal{K} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.5)$$

– Équation de  $\mathcal{E}$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \rho \mathbf{u} \nabla \mathcal{E} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_e} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} - \rho C_{e1} C_{\mu} e^{\mathcal{K}-\mathcal{E}} P(\mathbf{u}) + \rho C_{e2} e^{\mathcal{E}-\mathcal{K}} \right] \delta \mathcal{E} d\Omega \\ + \int_{\Omega} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_e} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \delta \mathcal{E} d\Omega = \int_{\Gamma} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_e} \right) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n} \delta \mathcal{E} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dans chacune des forme faibles (4.2), (4.5) et (4.6), apparaît un terme que l'on intègre, non plus sur le domaine  $\Omega$ , mais sur sa frontière  $\Gamma$ . Celui-ci résulte de l'application du théorème de la divergence. Ces termes représentent les conditions aux limites naturelles couramment appelées conditions de Neumann.

## 4.2 Forme faible des équations de sensibilités

Dans ce paragraphe, nous développerons seulement la forme faible des équations de sensibilités pour les équations de Navier-Stokes. La forme faibles des equations de sensibilités pour les équations du modèle k- $\epsilon$  sont données en annexe II. La méthode est identique à celle employée dans la sous-section précédente.

– Équation de continuité :

$$\int_{\Omega} \delta s_p \nabla \cdot \mathbf{s}_u d\Omega = 0 \quad (4.7)$$

– Équation de mouvement :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u) \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\ & + \int_{\Omega} [2(\mu' + \mu'_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) + 2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{s}_u)] : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{s}_u) d\Omega - \int_{\Omega} s_p \nabla \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{f}' \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}}' \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Gamma \end{aligned} \quad (4.8)$$

L'intégrale sur la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  représente, cette fois ci, les conditions de Neumann pour les sensibilités.

## 4.3 Discrétisation éléments finis

### 4.3.1 Interpollants

L'étape suivante concerne la discrétisation des formes faibles. Nous utilisons la méthode de Galerkin qui consiste à considérer les fonctions test comme étant les fonctions d'interpolation de la solution :

On établit ainsi les égalités suivantes :

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_u} N_i^u u_i, \quad v_h = \sum_{i=1}^{N_v} N_i^v v_i, \quad p_h = \sum_{i=1}^{N_p} N_i^p p_i, \quad (4.9)$$

$$\mathcal{K}_h = \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{K}}} N_i^{\mathcal{K}} \mathcal{K}_i, \quad \mathcal{E}_h = \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{E}}} N_i^{\mathcal{E}} \mathcal{E}_i, \quad (4.10)$$

$$s_{u_h} = \sum_{i=1}^{N_{s_u}} N_i^{s_u} s_{u_i}, \quad s_{v_h} = \sum_{i=1}^{N_{s_v}} N_i^{s_v} s_{v_i}, \quad s_{p_h} = \sum_{i=1}^{N_{s_p}} N_i^{s_p} s_{p_i} \quad (4.11)$$

$$s_{\mathcal{K}_h} = \sum_{i=1}^{N_{s_{\mathcal{K}}}} N_i^{s_{\mathcal{K}}} s_{\mathcal{K}_i}, \quad s_{\mathcal{E}_h} = \sum_{i=1}^{N_{s_{\mathcal{E}}}} N_i^{s_{\mathcal{E}}} s_{\mathcal{E}_i} \quad (4.12)$$

$$\delta u_i = N_i^u, \quad \delta v_i = N_i^v, \quad \delta p_i = N_i^p, \quad (4.13)$$

$$\delta \mathcal{K}_i = N_i^{\mathcal{K}}, \quad \delta \mathcal{E}_i = N_i^{\mathcal{E}}, \quad (4.14)$$

$$\delta s_{u_i} = N_i^{s_u}, \quad \delta s_{v_i} = N_i^{s_v}, \quad \delta s_{p_i} = N_i^{s_p}, \quad (4.15)$$

$$\delta s_{\mathcal{K}_i} = N_i^{s_{\mathcal{K}}}, \quad \delta s_{\mathcal{E}_i} = N_i^{s_{\mathcal{E}}} \quad (4.16)$$

où, par exemple,  $u_h$  désigne la solution éléments finis,  $N_u$  correspond au nombre de fonctions d'interpolation (ou au nombre de noeuds par éléments),  $N_i^u$  sont les fonctions d'interpolation,  $u_i$  sont les valeurs nodales et  $\delta u_i$  sont les fonctions tests. Les fonctions d'interpolation sont choisies de telles sortes qu'elles prennent chacune une valeur égale 1 sur un des noeuds de l'élément de référence et la valeur 0 sur tous les autres. De plus amples détails sont données dans Fortin <sup>[19]</sup>.

L'élément utilisé est de type Taylor-Hood ( $P_2 - P_1$ ) qui présente 6 degré de liberté en vitesse, 6 degré de liberté en  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$  et 3 en pression. Cet élément est quadratique en vitesse, quadratique en  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$  et linéaire continue par morceaux en pression.

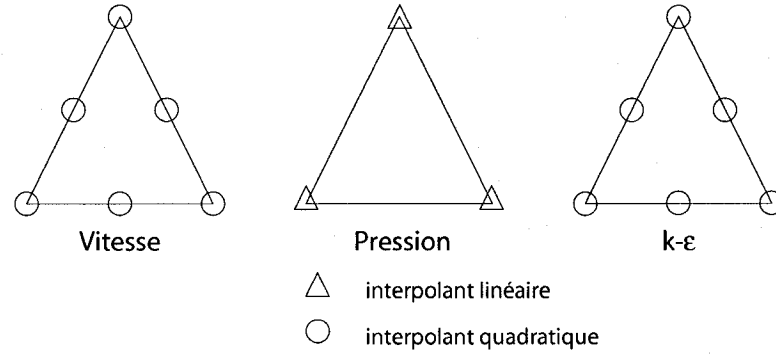


FIG. 4.1 Élément fini de type Taylor-Hood

### 4.3.2 Équations des résidus

Afin de résoudre les équations algébriques décrites précédemment, nous procédons à un réarrangement des formulations variationnelles en équations des résidus, en faisant passer, pour chacune d'elles, tous les termes du même côté du signe =.

On obtient alors pour les équations de continuité et de mouvement :

$$R_p = \int_{\Omega} \delta p \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned}
 R_{\mathbf{u}} = & \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{2} (\mu + \mu_t) \gamma(\mathbf{u}) : \gamma(\delta \mathbf{u}) d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma
 \end{aligned} \quad (4.18)$$

De même pour les équations de  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$  :

$$\begin{aligned}
 R_{\mathcal{K}} = & \int_{\Omega} \left[ \rho \mathbf{u} \nabla \mathcal{K} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} - \mu_t e^{-\mathcal{K}} \mathcal{K} \mathbf{P}(\mathbf{u}) \right. \\
 & \left. + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^{\mathcal{K}}}{\mu_t} \right] \delta \mathcal{K} d\Omega + \int_{\Omega} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \delta \mathcal{K} d\Omega - \int_{\Gamma} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial n} \delta \mathcal{K} d\Gamma
 \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned}
R_{\mathcal{E}} = & \int_{\Omega} \left[ \rho \mathbf{u} \nabla \mathcal{E} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_e} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} - \rho C_{\epsilon 1} C_{\mu} e^{\kappa - \mathcal{E}} P(\mathbf{u}) \right. \\
& \left. + \rho C_{\epsilon 2} e^{\mathcal{E} - \kappa} \right] \delta \mathcal{E} d\Omega + \int_{\Omega} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_e} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \delta \mathcal{E} d\Omega - \int_{\Gamma} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_e} \right) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n} \delta \mathcal{E} d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.20}$$

On obtient alors un système matriciel dont les inconnues sont les valeurs nodales des éléments composant le domaine  $\Omega$ . Le calcul de la solution éléments finis se fait de manière itérative, et le but est de rechercher la solution qui fera tendre l'ensemble des résidus vers zéro. La sous-section suivante explique comment réaliser cette tâche.

### 4.3.3 Jacobien numérique

Comme nous l'avons dit précédemment, l'étape consiste, désormais, à faire tendre vers zéro les équations des résidus par un processus itératif. On fixe ici les grandes lignes permettant d'atteindre cet objectif.

Considérons la  $i^{\text{ème}}$  équation des résidus dont le vecteur d'inconnues est, par exemple, celui de la vitesse  $\mathbf{u}^n$ . Idéalement, nous devons obtenir la relation suivante :

$$R_i(\mathbf{u}^n) = 0 \tag{4.21}$$

Cependant, le vecteur d'inconnues  $\mathbf{u}^n$ , qui est composé des valeurs nodales de la variable  $\mathbf{u}$  ne satisfait pas la relation (4.21). Il faut alors chercher le vecteur d'inconnues  $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \delta \mathbf{u}$  tel qu'il satisfasse la relation précédente. On utilise alors une série de Taylor d'ordre un :

$$R_i(\mathbf{u}^n + \delta \mathbf{u}) = R_i(\mathbf{u}^n) + \sum_i \frac{\partial R_i}{\partial u_j}(\mathbf{u}^n) \delta u_j = 0 \quad (4.22)$$

Le système matriciel à résoudre est le suivant :

$$\left[ \frac{\partial R_i}{\partial u_j} \right] \{ \delta u_j \} = \{ -R_i \} \quad (4.23)$$

où  $R_i$  sont les équations algébriques des résidus,  $u_j$  représente les valeurs nodales et  $\delta u_j$  désigne les corrections.

On reconnaît ici la méthode de Newton. Le vecteur solution est alors composé des incréments ou corrections et non de la solution elle-même. Pour une solution quelconque  $\mathbf{X}^n$ , la matrice  $[\partial R_i / \partial X_j]$  est formée par différence finie. En effet, on utilise une différence finie centrée en perturbant, l'une après l'autre, chaque valeur nodale d'une petite quantité  $\delta$ .

En ce qui concerne, les équations de sensibilités, et étant donné leur linéarité, on emploie la même méthode, cependant, la différence finie est décentrée.

#### 4.3.4 Méthodes de stabilisation

La méthode de Galerkin présente parfois des problèmes de convergence qui se manifestent lorsque le maillage devient plus fin. En effet, il se produit des oscillations numériques. Ce phénomène est très courant dans la résolution numérique des écoulements turbulents. Pour palier à ce problème, nous utilisons des méthodes de stabilisation qui consistent à introduire des termes de diffusion artificielle dans les équations de Navier-Stokes et du modèle  $k - \epsilon$  permettant ainsi de compenser les

termes de convection qui deviennent parfois trop importants. Le code offre plusieurs de ces techniques : les méthode SU (*Streamline Upwind*)<sup>[23]</sup>, SUPG (*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*)<sup>[4]</sup>, et GLS (*Galerkin Least-Squares*)<sup>[24]</sup>. Au cours du projet, nous avons utilisé uniquement la méthode SUPG pour l'écoulement et pour les sensibilités. Le lecteur intéressé trouvera de plus amples détails sur ces méthodes de stabilisation dans Turgeon<sup>[40]</sup>.

## 4.4 Maillage adaptatif

### 4.4.1 Estimation d'erreur

Soit  $\phi$  la solution exacte d'un problème quelconque, et  $\phi_h$ , la solution éléments finis de ce problème. On note alors l'erreur exacte  $e_{exa}^\phi$  engendrée par la résolution numérique de la manière suivante :

$$e_{exa}^\phi = \phi_h - \phi \quad (4.24)$$

Cependant, nous sommes dans l'incapacité de connaître l'erreur exacte puisque nous ne connaissons pas la solution exacte  $\phi$ . Un remède à ce problème consiste à reconstruire une solution  $\tilde{\phi}$  qui sera la plus proche possible de la solution exacte. Ainsi, nous serons en mesure de calculer une estimation de l'erreur exacte. Pour l'estimation d'erreur, nous utilisons la méthode de projection locale établie par Zhu et Zienkiewicz<sup>[44]</sup>.

L'utilisation de cette méthode vient de la nécessité d'obtenir une approximation plus précise des gradients qui nous permettront de définir les normes d'erreur. En effet, si la solution éléments finis d'une variable quelconque est quadratique, alors sa dérivée devient linéaire par morceaux. Pour obtenir un gradient enrichi,

c'est à dire, représenté par une fonction quadratique, on se sert de données locales récupérées autour d'un noeud P sur un patch d'éléments  $\mathcal{P}$ . Typiquement, le patch  $\mathcal{P}$  constitue une couche d'éléments situés autour du noeud P. Celui-ci est représenté par le sous-domaine  $\Omega_P$  comme le montre la figure ci-dessous :

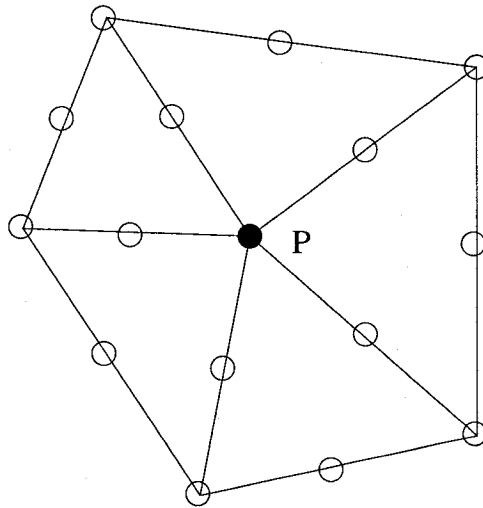


FIG. 4.2 Sous-domaine  $\Omega_P$  utilisé dans les projections locales

Soit une solution exacte  $\phi$  quelconque et  $\phi_h$ , la solution numérique obtenue par la méthode des éléments finis. La solution enrichie  $\phi_P^*$  que l'on souhaite calculer par la méthode de projection locale est représentée de la manière suivante :

$$\phi_P^* = \mathbf{B}\mathbf{b} \quad (4.25)$$

où

$$\phi_P^* = \phi^*(x_p; y_p) \quad (4.26)$$

$$\mathbf{B} = \{1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta, \eta^2\} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}^T \quad (4.28)$$

Pour déterminer  $\mathbf{b}$ , on résout un problème discret au sens des moindres-carrés en

minimisant la forme quadratique  $\mathcal{J}(\mathbf{b})$  sur le sous-domaine  $\Omega_P$  représenté par le patch d'éléments  $\mathcal{P}$  :

$$\text{Min} \left[ \mathcal{J}(\mathbf{b}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_P} (\mathbf{B}\mathbf{b} - \phi_h)^2 d\Omega \right] \quad (4.29)$$

Finalement, cela revient à annuler la première dérivée de  $\mathcal{J}(\mathbf{b})$ , et à résoudre le système suivant :

$$\left[ \int_{\Omega_P} \mathbf{B}^T \mathbf{B} d\Omega \right] \{\mathbf{b}\} = \left\{ \int_{\Omega_P} \mathbf{B}^T \phi_h d\Omega \right\} \quad (4.30)$$

Une factorisation LU permet d'inverser la matrice, et par conséquent, d'obtenir les coefficients  $b_i$  permettant de former le polynôme de degré 2 représentant la solution enrichie  $\phi_P^*$  sur le sous-domaine  $\Omega_P$ .

Pour améliorer le conditionnement de la matrice  $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$ , au lieu de se placer dans un repère  $(x, y)$ , on modifie la base polynomiale  $\mathbf{B}$  pour se ramener à un repère local  $(\xi, \eta)$  de telle sorte que  $\xi$  et  $\eta$  soient compris dans l'intervalle  $[-1, 1]$  sur le sous-domaine  $\Omega_P$ . Nous utilisons alors :

$$\xi = \frac{x - x_p}{x_s} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{y - y_p}{y_s} \quad (4.31)$$

Le point  $P$  est l'origine du repère  $(\xi, \eta)$ . Les échelles  $x_s$  et  $y_s$  sont calculées de la manière suivante : pour chaque élément du sous-domaine, on calcule les tailles  $\Delta x$  et  $\Delta y$  qui sont les projections sur les axes  $x$  et  $y$  des longueurs des arêtes des éléments, et on retient les plus grandes pour chacune des projections comme le montre la figure 4.3. Les échelles seront alors différentes sur chaque sous-domaine  $\Omega_P$ .

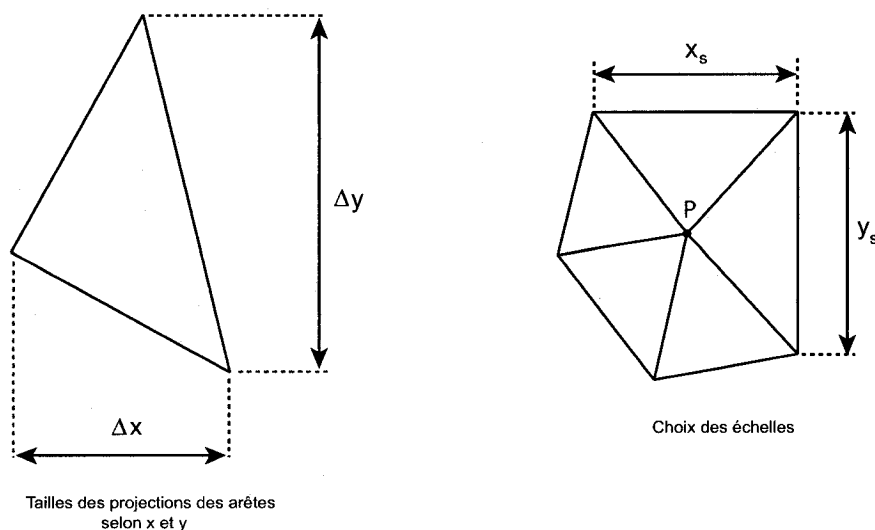


FIG. 4.3 Échelles pour la base de projection locale

Pour l'instant, nous n'avons obtenu qu'une seule solution enrichie basée sur la solution éléments finis d'un seul noeud. L'idée est d'obtenir une solution enrichie  $\phi^*$  pour chacun des sommets des éléments du maillage. Par conséquent, comme les sous-domaines associés à ces sommets se chevauchent, il en est de même pour les solutions enrichies  $\phi^*$ .

La méthode consiste alors à construire un champ global unique  $\tilde{\phi}$  en utilisant la base d'interpolation du maillage. Pour les noeuds des sommets, on prend la valeur nodale des solutions enrichies  $\phi^*$  noté  $\tilde{\phi}_i$ . En revanche, pour les noeuds situés au milieu des faces des éléments, on prendra la moyenne des solutions enrichies des sommets. Puis, on forme  $\tilde{\phi}$  en interpolant les valeurs nodales obtenues comme suit :

$$\tilde{\phi} = \sum_i^n N_i \tilde{\phi}_i \quad (4.32)$$

où  $N_i$  représentent les fonctions d'interpolation. Grâce à l'obtention de ce champ  $\tilde{\phi}$ , nous pouvons désormais calculer une estimation de l'erreur exacte qui constitue une donnée essentielle dans le processus d'adaptation de maillage.

#### 4.4.2 Norme d'erreur

À présent, nous sommes à même de calculer une estimation d'erreur. Plutôt que de calculer celle-ci en chaque noeud, nous calculerons les erreurs sur chaque élément dont la somme constitue l'erreur globale sur le domaine  $\Omega$ . Ceci nécessite la définition de normes d'erreur. Dans ce projet, cinq normes sont utilisées, et calculées à partir des variables suivantes :  $\mathbf{u}$ ,  $p$ ,  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{E}$  et  $\mu_t$ .

Pour le vecteur vitesse  $\mathbf{u}$ , nous utilisons la norme énergie qui est basée sur la double contraction du tenseur des contraintes visqueuses. La norme de l'erreur estimée pour le vecteur vitesse est définie de la manière suivante :

$$\|\mathbf{e}^u\|^2 = \int_{\Omega} (\tau_h - \tilde{\tau}) : (\tau_h - \tilde{\tau}) d\Omega \quad (4.33)$$

Pour les sensibilités, leur norme d'erreur se calcul en remplaçant  $\tau$  par  $\mathbf{s}_{\tau}$  :

$$\|\mathbf{e}^{s_u}\|^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{s}_{\tau_h} - \widetilde{\mathbf{s}}_{\tau}) : (\mathbf{s}_{\tau_h} - \widetilde{\mathbf{s}}_{\tau}) d\Omega \quad (4.34)$$

Pour les variables  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{E}$  et  $\mu_t$ , on utilise la semi-norme  $H^1(\Omega)$ . Ce choix est guidé par le fait que nous désirons obtenir une erreur basée uniquement sur les gradients qui sont des quantités sensibles et souvent entachées d'erreur.

$$\|\mathbf{e}^{\mathcal{K}}\|^2 = \int_{\Omega} (\nabla \mathcal{K}_h - \widetilde{\nabla \mathcal{K}}) \cdot (\nabla \mathcal{K}_h - \widetilde{\nabla \mathcal{K}}) d\Omega \quad (4.35)$$

$$\|\mathbf{e}^{\mathcal{E}}\|^2 = \int_{\Omega} (\nabla \mathcal{E}_h - \widetilde{\nabla \mathcal{E}}) \cdot (\nabla \mathcal{E}_h - \widetilde{\nabla \mathcal{E}}) d\Omega \quad (4.36)$$

$$\|\mathbf{e}^{\mu t}\|^2 = \int_{\Omega} (\nabla \mu_{th} - \widetilde{\nabla} \mu_t) \cdot (\nabla \mu_{th} - \widetilde{\nabla} \mu_t) d\Omega \quad (4.37)$$

En ce qui concerne la pression, nous utilisons la norme  $H^1(\Omega)$  :

$$\|\mathbf{e}^p\|^2 = \int_{\Omega} (\nabla p_h - \widetilde{\nabla} p) \cdot (\nabla p_h - \widetilde{\nabla} p) d\Omega \quad (4.38)$$

#### 4.4.3 Calcul de la taille optimale d'un élément

Le calcul des normes d'erreur constitue une information déterminante pour le remaillage adaptatif. En effet, elles interviennent dans le calcul d'une taille optimale pour chaque élément. A la fin d'un cycle adaptatif, et ce, après avoir calculé les différents champs de solution, le code détermine alors les normes d'erreur estimée décrites à la sous-section précédente. Puis il calcule les tailles optimales des éléments qui constitueront le maillage au cycle suivant afin de réduire les erreurs dans les régions du domaine qui le nécessite.

Comme nous l'avons expliqué précédemment, la norme d'erreur sur l'ensemble du domaine est égale à la somme des normes d'erreur élémentaires :

$$\|e\|_{\Omega}^2 = \sum_{K=1}^N \|e\|_K^2 \quad (4.39)$$

où  $K$  désigne l'élément courant et  $N$  désigne le nombre d'éléments dans le domaine.

Dans la partie du code qui correspond à l'adaptation de maillage, l'utilisateur indique de quelle manière il souhaite voir l'erreur se réduire. En d'autres termes, il fixe une norme d'erreur cible, i.e la norme d'erreur sur le prochain maillage, en fonction de

la norme d'erreur du maillage courant par le biais d'un coefficient  $\xi$  compris entre 0 et 1. Cette relation s'écrit de la manière suivante :

$$\|e_{cible}\| = \xi \|e_{courante}\|_{\Omega} \quad (4.40)$$

Dans ce projet, les valeurs de  $\xi$  utilisées pour les calculs sont comprises entre 0.5 et 0.6, ce qui a permis de doubler approximativement le nombre de noeuds entre chaque cycle.

Nous n'irons pas dans les détails dans ce mémoire, le lecteur intéressé pourra trouver de plus amples informations dans la thèse de Turgeon <sup>[40]</sup> en ce qui concerne le cheminement pour arriver à la relation permettant de calculer la taille optimale  $\delta_K$  d'un élément. Ainsi, nous pouvons établir la relation suivante :

$$\delta_K = \left( \frac{\xi \|e\|_{\Omega}}{\|e\|_K \sqrt{N}} \right)^{1/\alpha} h_K \quad (4.41)$$

où  $\alpha$  désigne la taux de convergence et  $h_K$  représente la taille de l'élément courant.

Cette taille optimale est calculée pour chaque élément constituant le maillage et pour toutes les normes d'erreur présentées à la sous-section précédente, que ce soit pour l'écoulement et les sensibilités. La distribution de l'erreur sur le domaine diffère selon la norme d'erreur calculé. Par exemple, les zones entachées d'erreur pour la pression ne seront pas forcément les mêmes que pour la vitesse ou les variables du modèle  $k-\epsilon$ . Ainsi, pour chaque élément, le principe consiste à prendre la plus petite des tailles optimales calculées selon les différentes normes d'erreur :

$$\delta_K = \min \{ \delta_K^u, \delta_K^p, \delta_K^{\mathcal{K}}, \delta_K^{\mathcal{E}}, \delta_K^{\mu}, \delta_K^{su}, \dots \} \quad (4.42)$$

## 4.5 Méthode de reconstruction des gradients à la frontière

### 4.5.1 Introduction

Nous avons vu au début de ce chapitre la méthode par projection locale de Zhu et Zienkiewicz <sup>[44]</sup> permettant la reconstruction de gradients enrichis. Cette méthode est un outil intéressant pour obtenir des dérivées premières modélisées par une fonction quadratique. Cependant, lorsqu'on considère un paramètre de forme  $a$ , on voit apparaître les dérivées premières de l'écoulement dans l'expression des conditions de Dirichlet et les dérivées secondes dans les conditions de Neumann. Par exemple, le terme du gradient du tenseur des contraintes visqueuses dans la loi de paroi pour les sensibilités fait apparaître des dérivées secondes qui nécessitent un traitement tout particulier. Pour évaluer ses quantités à la frontière, nous utilisons la méthode développée par Duvigneau et Pelletier <sup>[12]</sup>, qui améliore la précision des dérivées à la frontière en calculant des dérivées consistantes avec la valeur de la fonction au bord.

### 4.5.2 La méthode

Soit une solution  $\phi$  de l'écoulement, son développement en série de Taylor d'ordre  $k$  autour d'un point  $P(x_p, y_p)$  situé sur la frontière s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \phi(x_p, y_p) + (x - x_p)\phi_x + (y - y_p)\phi_y \\ &+ \frac{1}{2}(x - x_p)^2\phi_{xx} + (x - x_p)(y - y_p)\phi_{xy} + \frac{1}{2}(y - y_p)^2\phi_{yy} + \dots\end{aligned}\quad (4.43)$$

$\phi$  et ses dérivées sont les inconnues. On les détermine en faisant coïncider le développement en série de Taylor aux valeurs nodales de l'écoulement en des points  $N(x_n, y_n)$  situés dans un patch d'éléments  $\mathcal{P}$  autour du noeud  $P$ . Ce problème est résolu au sens des moindres-carrés et revient à résoudre le système d'équations suivant :

$$\phi_N = \mathbf{B}^T \mathbf{y}_\phi \quad (4.44)$$

où

$$\phi_N = \phi(x_n, y_n) \quad (4.45)$$

$$\mathbf{B}^T = \left\{ 1 \quad x_n - x_p \quad y_n - y_p \quad \frac{1}{2}(x_n - x_p)^2 \quad (x_n - x_p)(y_n - y_p) \quad \frac{1}{2}(y_n - y_p)^2 \dots \right\} \quad (4.46)$$

$$\mathbf{y}_\phi^T = \{ \phi \quad \phi_x \quad \phi_y \quad \phi_{xx} \quad \phi_{xy} \quad \phi_{yy} \dots \}_P \quad (4.47)$$

Pour déterminer  $\mathbf{y}_\phi$ , dont les composantes sont  $\phi$  et ses dérivées partielles au bord, nous résolvons un problème discret au sens des moindres-carrés obtenu en minimisant la forme quadratique  $\mathcal{J}(\mathbf{y}_\phi)$  :

$$\text{Min} \left[ \mathcal{J}(\mathbf{y}_\phi) = \frac{1}{2} \sum_{N \in \mathcal{P}} (\mathbf{B}^T \mathbf{y}_\phi - \phi_N)^2 \right] \quad (4.48)$$

Pour un point  $P$  situé sur la frontière, la condition aux frontières peut être de type

Dirichlet  $\phi = \hat{\phi}_P$  ou Neumann  $\nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{n}} = \overline{q}_\phi$ . On dit que le problème est contraint puisqu'il sera résolu en tenant compte des conditions aux frontières, permettant ainsi de faire coïncider la série de Taylor évaluée au point  $P$  avec les conditions limites.

Pour une condition de Dirichlet, nous minimiseront la forme quadratique  $\mathcal{J}_D(\mathbf{y}_\phi)$  sujet à  $\mathbf{y}_\phi(1) = \hat{\phi}_P$ . La contrainte est imposée par le biais de multiplicateurs de Lagrange  $l_\phi$ . Nous résolvons alors le problème suivant :

$$\text{Min} \left[ \mathcal{J}_D(\mathbf{y}_\phi) = \frac{1}{2} \sum_{N \in \mathcal{P}} (\mathbf{B}^T \mathbf{y}_\phi - \phi_N)^2 + l_\phi (\mathbf{D}_\phi^T - \hat{\phi}_P) \right] \quad (4.49)$$

où  $\mathbf{D}_\phi^T = \{1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0\}$ . Pour minimiser  $\mathcal{J}_D(\mathbf{y}_\phi)$ . Ce qui revient à satisfaire :

$$\begin{bmatrix} \sum_{N \in \mathcal{P}} \mathbf{B}^T \mathbf{B} & \mathbf{D}_\phi \\ \mathbf{D}_\phi^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_\phi \\ l_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{N \in \mathcal{P}} \mathbf{B} \phi_N \\ \hat{\phi}_P \end{bmatrix}$$

Pour une condition de Neumann, nous minimiseront la forme quadratique  $\mathcal{J}_N(\mathbf{y}_\phi)$  sujet à  $\overline{q}_{P_\phi}$  :

$$\text{Min} \left[ \mathcal{J}_N(\mathbf{y}_\phi) = \frac{1}{2} \sum_{N \in \mathcal{P}} (\mathbf{B}^T \mathbf{y}_\phi - \phi_N)^2 + l_\phi (\mathbf{N}_\phi^T - \overline{q}_{P_\phi}) \right] \quad (4.50)$$

où  $\mathbf{N}_\phi^T = \{0 \ \hat{n}_x \ \hat{n}_y \ 0 \ \dots \ 0\}$ . En annulant ses premières dérivées, le système à résoudre devient :

$$\begin{bmatrix} \sum_{N \in \mathcal{P}} \mathbf{B}^T \mathbf{B} & \mathbf{N}_\phi \\ \mathbf{N}_\phi^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_\phi \\ l_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{N \in \mathcal{P}} \mathbf{B} \phi_N \\ \overline{q_{P_\phi}} \end{pmatrix}$$

Cette méthode nous permet donc de déterminer les valeurs de  $\phi$  et ses dérivées premières et secondes consistantes avec la condition limite imposée. Ceci nous garantit une plus grande précision pour ces quantités dont nous avons besoin dans les conditions limites, dans le cadre de l'analyse de sensibilité avec paramètres de forme.

## CHAPITRE 5

### VÉRIFICATION

Au cours des chapitres précédents, nous avons exposé les équations modélisant un écoulement turbulent grâce aux équations moyennes de Reynolds et aux équations du modèle de turbulence  $k - \epsilon$ , puis nous leur avons appliqués la Méthode des Equations de Sensibilité. Par la suite, nous nous sommes attardés sur la manière de les résoudre par la méthode des éléments finis. Une méthode numérique donne, par définition, une solution approchée de la solution exacte. Il faut maintenant s'assurer que la méthode que l'on utilise donne des résultats réalistes. Pour vérifier l'implantation de la M.E.S avec paramètres de forme pour le modèle  $k - \epsilon$  avec lois de parois, nous allons présenté dans ce chapitre, une solution manufacturée qui modélise une couche limite turbulente sur une plaque plane. Il s'agit alors de vérifier que la solution éléments finis possède le taux de convergence théorique, et qu'elle tend bien vers la solution analytique. L'étude des normes d'erreur vue au chapitre précédent va prendre, ainsi, tout son sens.

#### 5.1 Solution manufacturée pour l'écoulement

Tout d'abord, rappelons le principe de la solution manufacturée. La méthode consiste à ajouter le terme source artificiel requis pour équilibrer les équations de Navier-Stokes et les équations de transport du modèle  $k - \epsilon$  de telle sorte qu'elles possèdent une solution analytique.

### 5.1.1 Le domaine de calcul

Nous utilisons la solution manufacturée développée par Eça *et al* <sup>[15]</sup>. Elle modélise une couche limite turbulente sur une plaque plane, dans un domaine de calcul carré de côté  $0.5L$  avec  $0.5L \leq X \leq L$  et  $0 \leq Y - Y_0 \leq 0.5L$ . Le nombre de Reynolds est défini de la manière suivante :

$$Re = \frac{U_1 L}{\nu} \quad (5.1)$$

où  $U_1 = 1$  est la vitesse de référence,  $L = 1$  est la longueur de référence, et  $\nu = \mu/\rho$  la viscosité cinématique.

Pour des variables adimensionnelles  $(x, y)$ , le domaine de calcul est donné par  $0.5 \leq x \leq 1$  et  $0 \leq y - y_0 \leq 0.5$  et le nombre de Reynolds est fixé à  $Re = 10^6$ .

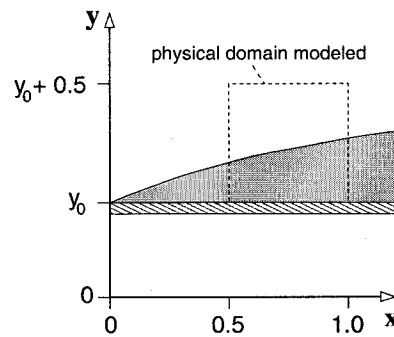


FIG. 5.1 Domaine de calcul

### 5.1.2 Solutions analytiques des variables dépendantes

Les variables de l'écoulement seront des fonctions des variables dépendantes suivantes :

$$\eta = \frac{\sigma(y - y_0)}{x} \quad ; \quad \eta_\nu = \frac{\sigma_\nu(y - y_0)}{x} \quad (5.2)$$

où  $\sigma = 4$  et  $\sigma_\nu = 2.5\sigma$ .

Les expressions analytiques des variables  $u, v, p, k, \epsilon$  s'écrivent de la manière suivante :

$$u = \operatorname{erf}(\eta) \quad (5.3)$$

$$v = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} (1 - e^{-\eta^2}) \quad (5.4)$$

$$p = 0.5\ln(2x - x^2 + 0.25)\ln(4(y - y_0)^3 - 3(y - y_0)^2 + 1.25) \quad (5.5)$$

$$k = k_{max}\eta_\nu^2 e^{-\eta_\nu^2} + \alpha_k \quad (5.6)$$

$$\epsilon = 0.36 \frac{k_{max}^2}{\nu_{max}} e^{-\eta_\nu^2} + \alpha_\epsilon \quad (5.7)$$

où

$$\nu_{max} = 10^{-3}\nu \quad (5.8)$$

$$k_{max} = 0.01 \quad (5.9)$$

On définit la viscosité turbulente d'après le modèle de turbulence  $k - \epsilon$  :

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (5.10)$$

Nous avons ajouté les constantes  $\alpha_k$  et  $\alpha_\epsilon$  dans les expressions analytiques des variables  $k$  et  $\epsilon$  afin d'éviter les logarithmes de quantités très proches de zéro.

Leurs valeurs sont les suivantes :

$$\alpha_k = 10^{-5} \quad ; \quad \alpha_\epsilon = 10^{-3} \quad (5.11)$$

Les équations utilisées pour modéliser l'écoulement sont les formes adimensionnelles des équations (2.4)-(2.5) pour les équations moyennes de Reynolds et les formes adimensionnelles des équations (3.8)-(3.9) pour le modèle de turbulence.

Les expressions analytiques ci-dessus satisfont l'équation de continuité (2.4). Cependant pour qu'elles satisfassent les équations de mouvement (2.5) et de transport du modèle  $k - \epsilon$  (3.8)-(3.9), il est nécessaire d'ajouter des termes sources artificiels  $f$ ,  $q_k$  et  $q_\epsilon$  de sorte qu'ils équilibrent chacune de ces équations. Leur expression est donnée en annexe I.

Les valeurs des propriétés physiques de l'écoulement ainsi que les constantes qui le caractérisent sont les suivantes :

$$U_1 = 1.0 \quad L = 1.0 \quad \rho = 1.0 \quad \nu = 10^{-6} \quad \mu = \rho\nu = 10^{-6} \quad (5.12)$$

$$C_\mu = 0.09 \quad C_{\epsilon 1} = 1.44 \quad C_{\epsilon 2} = 1.92 \quad (5.13)$$

$$\sigma_k = 1.0 \quad \sigma_\epsilon = 1.3 \quad (5.14)$$

### 5.1.3 Les conditions aux frontières pour l'écoulement

Comme nous l'avons dit plus haut, le domaine de calcul est un carré dont les côtés ont pour longueur adimensionnelle 0.5. Les frontières sont désignées par quatre courbes : *entrée*, *plaque*, *sortie*, *haut* comme le montre la figure 5.2. Le paramètre  $y_0$  désigne la position verticale de la plaque et fera l'objet d'une analyse de sensibilité. On impose sur ces courbes des conditions de type Dirichlet ou de Neumann pour les variables  $u$ ,  $v$ ,  $k$  et  $\epsilon$  en utilisant les expressions analytiques issues de la solution manufacturée. Les notations  $DU$  et  $DK$ , sur la figure 5.2, indiquent que des conditions de Neumann sur  $u$  et  $k$  ont été imposées. Dans notre cas, c'est à l'utilisateur de préciser la valeur de ces conditions comme c'est le cas pour les courbes *entrée*, *sortie* et *haut*.

La véritable difficulté se situe au niveau du traitement des conditions aux frontières issues de la loi de paroi du modèle  $k - \epsilon$ . Le principe de la solution manufacturée

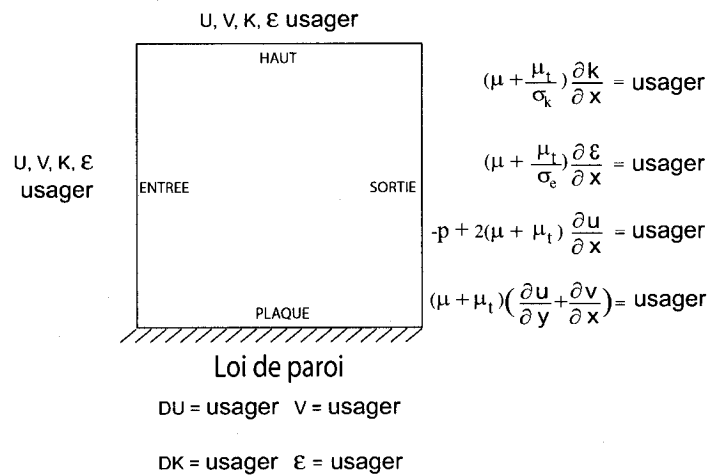


FIG. 5.2 Domaine de calcul et conditions frontières

consiste, ici aussi, à introduire des termes sources artificiels dans les lois de paroi de la manière suivante :

– Condition dans la direction tangentielle :

Nous avons vu au chapitre 3 que la contrainte qu'exerce l'écoulement sur la paroi dans la direction tangentielle est modélisée par la condition mixte suivante :

$$\tau_w = \rho u_k u_{**} \quad (5.15)$$

Cette définition, modélisant l'effort pariétal, est issue des lois de paroi du modèle  $k - \epsilon$  et elle suppose que le vecteur normal soit dirigé vers l'intérieur du domaine. Par conséquent, dans le code, la convention de la loi de paroi impose que l'on

utilise un vecteur normal  $\hat{\mathbf{n}}_{int} = [0, 1]^T$ . Notons, cependant, que dans le reste du code, la convention utilise des vecteurs normaux dirigés vers l'extérieur.

Comme nous l'avons dit plus haut, cette convention implique alors le calcul de la contrainte qu'exerce le fluide sur la plaque. Or nous voulons calculer l'effort de la plaque sur le fluide, il faut alors calculer l'opposé de la valeur de la condition 5.15, c'est à dire :

$$\tau_w = -\rho u_k u_{**} = - \left[ (\tau \cdot \hat{\mathbf{n}}_{int}) \cdot \hat{\mathbf{t}} \right]_w \quad (5.16)$$

De plus, l'effort pariétal exprimant l'effort qu'exerce la paroi sur la plaque est quant à lui défini de la manière suivante

$$\left[ (\tau \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ext}) \cdot \hat{\mathbf{t}} \right]_w = - (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (5.17)$$

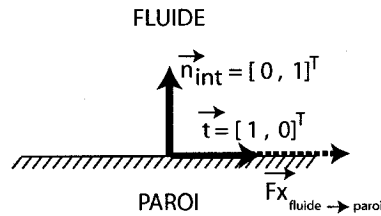
où  $\hat{\mathbf{n}}_{ext} = [0, -1]^T$  et  $\hat{\mathbf{t}} = [1, 0]^T$  sur la courbe étiquetée *plaque* (voir la figure 5.2). La figure 5.3 ci-dessous récapitule les conventions prises pour traiter cette condition.

Pour que la solution manufacturée satisfasse cette condition au frontière, nous ajoutons à la condition (5.16) ci-dessus, un terme source donné par l'utilisateur. Celui-ci prend la forme suivante :

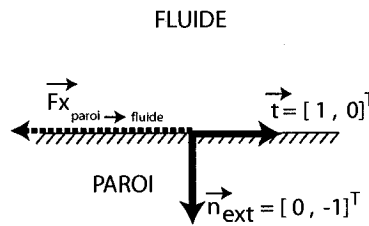
$$\text{Src}\tau_w = - \{ \rho u_k u_{**} \}_{SM} - \left[ (\tau \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ext}) \cdot \hat{\mathbf{t}} \right]_{SM} \quad (5.18)$$

Ce qui revient à écrire :

$$\text{Src}\tau_w = - \{ \rho u_k u_{**} \}_{SM} - \left\{ - (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\}_{SM} \quad (5.19)$$



(a) Normale intérieure : Effort du fluide sur la paroi



(b) Normale extérieure : Effort de la paroi sur le fluide

FIG. 5.3 Convention pour la loi de paroi

Ainsi, nous implantons dans le code éléments finis, la relation suivante pour le calcul de la condition limite dans la direction tangentielle :

$$\begin{aligned} \tau_w &= \{-\rho u_k u_{**}\}_h - \text{Src} \tau_w \\ &= \underbrace{\{-\rho u_k u_{**}\}_h}_1 + \underbrace{\{\rho u_k u_{**}\}_{SM}}_2 + \underbrace{\left\{ -(\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\}_{SM}}_3 \end{aligned} \quad (5.20)$$

où  $h$  désigne un terme calculé par la méthode des éléments finis et  $SM$  désigne un terme calculé au moyen de la solution analytique.

Ainsi, les termes 1 et 2 tendent à s'annuler avec le raffinement du maillage. Par conséquent, la valeur de la condition aux frontières est celle imposée par le terme 3, c'est à dire la contrainte de cisaillement à la paroi.

– Condition dans la direction normale :

La vitesse dans la direction normale à la frontière est nulle.

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{int} = 0 \quad (5.21)$$

En réalité, comme nous nous plaçons à une distance  $d$  de la paroi, nous écrivons plutôt :

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{int} = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{int}|_{d_{SM}} \quad (5.22)$$

avec  $\hat{\mathbf{n}}_{int} = [0, 1]^T$ , nous obtenons la condition aux frontières de type Dirichlet suivante :

$$v = v|_{d_{SM}} \quad (5.23)$$

– Condition sur  $\mathcal{K}$  :

La condition imposée sur  $k$  est de type Neumann. Soit en variables logarithmiques :

$$\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right) \nabla \mathcal{K} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{int} = \left\{ \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right) \nabla \mathcal{K} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{int} \right\}_{SM} \quad (5.24)$$

avec  $\hat{\mathbf{n}} = [0, 1]^T$ , nous obtenons la condition aux frontières de type Neumann suivante évaluée à la paroi :

$$\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} = \left\{ \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} \right\}_{SM} \quad (5.25)$$

– Condition sur  $\mathcal{E}$  :

La condition aux frontières imposée sur  $\epsilon$  est de type Dirichlet. Soit en variables

logarithmiques :

$$\mathcal{E} = \ln \left( \frac{u_k^3}{\kappa d} \right) \quad (5.26)$$

On définit alors le terme source suivant :

$$\text{Src}\mathcal{E} = - \left\{ \ln \left( \frac{u_k^3}{\kappa d} \right) \right\}_{SM} + \{\mathcal{E}\}_{SM} \quad (5.27)$$

La condition limite sur la courbe *plaque* est implantée de la manière suivante :

$$\mathcal{E} = \left\{ \ln \left( \frac{u_k^3}{\kappa d} \right) \right\}_h - \left\{ \ln \left( \frac{u_k^3}{\kappa d} \right) \right\}_{SM} + \{\mathcal{E}\}_{SM} \quad (5.28)$$

Nous avons ainsi détaillé comment sont imposées les conditions aux frontières classiques ainsi que les conditions issues des lois de parois pour l'écoulement. La sous-section suivante s'attarde à développer la solution manufacturée pour les sensibilités.

## 5.2 Solution manufacturée pour les sensibilités

### 5.2.1 Solutions analytiques pour les sensibilités

Notre objectif est d'étudier la sensibilité des variables de l'écoulement par rapport au paramètre  $a = y_0$  qui représente la position verticale de la paroi solide. Notons que dans la configuration nominale,  $y_0 = 0$ .

On différencie les équations (5.3) à (5.7) pour obtenir la solution manufacturée des

sensibilités :

$$s_u = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma}{x} e^{-\eta^2} \quad (5.29)$$

$$s_v = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\eta}{x} e^{-\eta^2} \quad (5.30)$$

$$s_p = \frac{3(y-y_0)(1-2(y-y_0))}{4(y-y_0)^3 - 3(y-y_0)^2 + 1.25} \ln(2x - x^2 + 0.25) \quad (5.31)$$

$$s_k = 2k_{max} \frac{\sigma_\nu}{x} \eta_\nu e^{(1-\eta_\nu^2)} (\eta_\nu^2 - 1) \quad (5.32)$$

$$s_\epsilon = 0.72 \frac{k_{max}^2}{\nu_{max}} \frac{\sigma_\nu}{x} \eta_\nu e^{(-\eta_\nu^2)} \quad (5.33)$$

La sensibilité de la viscosité turbulente est définie comme suit :

$$\mu_t' = \mu_t \left( \frac{2s_k}{k} - \frac{s_\epsilon}{\epsilon} \right) \quad (5.34)$$

Tout comme les équations modélisant l'écoulement, ces expressions analytiques satisfont les équations des sensibilités (2.18), (3.22) et (3.23) pourvu qu'on leur ajoute des termes sources  $f'$ ,  $q_{s_k}$  et  $q_{s_\epsilon}$  dont on trouve les expressions dans l'annexe I.

Le paramètre  $y_0$  est un paramètre de forme puisqu'une variation de sa valeur induit un mouvement de la frontière. Cependant, comme nous connaissons la solution exacte, il est possible de calculer les dérivées partielles de l'écoulement et d'obtenir des expressions analytiques des conditions limites des sensibilités, ce qui revient à traiter  $y_0$  comme un paramètre de valeur dont le traitement numérique est beaucoup plus aisé. Le paramètre sera donc étudié successivement comme un paramètre de valeur (servant de référence) puis comme un paramètre de forme.

### 5.2.2 $y_0$ comme paramètre de valeur

Dans cette sous-section, on traite le paramètre  $y_0$  comme un paramètre de valeur. Il s'agit à présent d'expliciter les conditions aux frontières du problème pour les sensibilités.

– Les conditions aux limites classiques de Dirichlet :

Pour la composante de vitesse  $u$ , nous avons la relation suivante :

$$s_u = \frac{\partial \hat{u}}{\partial y_0} \quad (5.35)$$

où  $\hat{u}$  est la valeur de la condition aux limites essentielles ou de Dirichlet.

Il en va de même pour les variables  $v$ ,  $k$  et  $\epsilon$  :

$$s_v = \frac{\partial \hat{v}}{\partial y_0} \quad (5.36)$$

$$s_k = \frac{\partial \hat{k}}{\partial y_0} \quad (5.37)$$

$$s_\epsilon = \frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial y_0} \quad (5.38)$$

On impose alors les conditions exactes de Dirichlet pour les sensibilités :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial y_0} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma}{x} e^{-\eta^2} \quad (5.39)$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial y_0} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\eta}{x} e^{-\eta^2} \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial \hat{k}}{\partial y_0} = 2k_{max} \frac{\sigma_\nu}{x} \eta_\nu e^{(1-\eta_\nu^2)} (\eta_\nu^2 - 1) \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial y_0} = 0.72 \frac{k_{max}^2}{\nu_{max}} \frac{\sigma_\nu}{x} \eta_\nu e^{(-\eta_\nu^2)} \quad (5.42)$$

Les coefficients ci-dessus représentent les variations des valeurs des conditions aux frontières.

– Les conditions aux limites classiques de Neumann :

D'après l'équation (2.32) vue au chapitre 2 et en vertu du fait que les sensibilités de la géométrie sont nulles, nous pouvons écrire :

$$s_\sigma \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{t}}}{\partial y_0} \quad (5.43)$$

où  $\sigma = -p\mathbf{I} + \tau(\mathbf{u})$  est le tenseur des contraintes,  $\tau$  est le tenseur des contraintes visqueuses et  $\bar{\mathbf{t}}$  sont les tractions à la frontière. Cette condition est imposée sur la courbe *sortie* où  $\hat{\mathbf{n}} = [1, 0]^T$ . Nous pouvons ainsi écrire :

$$\frac{\partial \bar{t}_x}{\partial y_0} = \left\{ -s_p + 2(\mu' + \mu'_t) \frac{\partial u}{\partial x} + 2(\mu + \mu_t) \frac{\partial s_u}{\partial x} \right\}_{SM} \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial \bar{t}_y}{\partial y_0} = \left\{ (\mu' + \mu'_t) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial s_u}{\partial y} + \frac{\partial s_v}{\partial x} \right) \right\}_{SM} \quad (5.45)$$

Pour un paramètre de valeur, les conditions de Neumann vues au chapitre 3 (3.27-3.28) pour les variables de turbulence  $k$  et  $\epsilon$  deviennent sur la courbe *sortie* :

$$\left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla s_{\mathcal{K}} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \left\{ \frac{\mu'_t}{\sigma_k} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial s_{\mathcal{K}}}{\partial x} \right\}_{SM} \quad (5.46)$$

$$\left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_\epsilon} - \frac{\mu_t \sigma'_\epsilon}{\sigma_\epsilon^2} \right) \nabla \mathcal{E} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla s_{\mathcal{E}} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \left\{ \frac{\mu'_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial s_{\mathcal{E}}}{\partial x} \right\}_{SM} \quad (5.47)$$

Les conditions de Neumann classiques en sortie sont imposées par l'utilisateur pour l'ensemble des variables  $u$ ,  $v$ ,  $k$  et  $\epsilon$  comme c'est le cas pour l'écoulement.

Pour les conditions aux limites issues des lois de parois, nous développerons la méthode qui consiste à utiliser des termes sources uniquement dans le cadre des paramètres de forme puisque celle-ci est similaire pour le cas des paramètres de valeur.

### 5.2.3 $y_0$ comme paramètre de forme

#### 5.2.3.1 Conditions aux limites classiques de Dirichlet

Considérons à présent le paramètre  $y_0$  comme un paramètre de forme. Ainsi nous pouvons écrire, pour la composante de vitesse  $u$  évaluée à la frontière, la relation suivante :

$$s_u = \frac{D\hat{u}}{Dy_0} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial y_0} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial y_0} \quad (5.48)$$

Dans notre cas, la variation de la condition aux limites de Dirichlet ainsi que les sensibilités de la géométrie s'écrivent de la manière suivante :

$$\frac{D\hat{u}}{Dy_0} = 0 \quad (5.49)$$

$$\frac{\partial x_f}{\partial y_0} = 0 \quad (5.50)$$

$$\frac{\partial y_f}{\partial y_0} = 1 \quad (5.51)$$

La condition de Dirichlet sur  $s_u$  se résume donc à :

$$s_u = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.52)$$

Il en est de même pour les variations des conditions aux limites des variables  $v$ ,  $k$  et  $\epsilon$  :

$$\frac{D\hat{v}}{Dy_0} = 0 \quad (5.53)$$

$$\frac{D\hat{k}}{Dy_0} = 0 \quad (5.54)$$

$$\frac{D\hat{\epsilon}}{Dy_0} = 0 \quad (5.55)$$

Nous pouvons donc écrire les conditions aux limites pour les sensibilités suivantes :

$$s_v = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad (5.56)$$

$$s_k = -\frac{\partial k}{\partial y} \quad (5.57)$$

$$s_\epsilon = -\frac{\partial \epsilon}{\partial y} \quad (5.58)$$

### 5.2.3.2 Conditions aux limites classiques de Neumann

Pour le cas des conditions aux limites classiques de Neumann, selon les mêmes considérations vues précédemment, à l'aide des équations (2.32),(3.27) et (3.28) et en observant que :

$$\hat{\mathbf{n}} = [1, 0]^T \text{ sur la courbe } \textit{sortie} \quad (5.59)$$

$$\hat{\mathbf{X}} = [x_f, y_f]^T \quad (5.60)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial y_0} = [0, 1]^T \quad (5.61)$$

$$\nabla \mu = [0, 0]^T \quad (5.62)$$

$$\frac{D\bar{\mathbf{t}}}{Dy_0} = [0, 0]^T \quad (5.63)$$

$$\frac{\partial n_x}{\partial y_0} = 0 \quad (5.64)$$

$$\frac{\partial n_y}{\partial y_0} = 0 \quad (5.65)$$

$$\sigma'_k = 0 \quad (5.66)$$

Les conditions aux limites classiques de Neumann pour les sensibilités sont imposées par l'usager en utilisant les expressions analytiques de la solution manufacturée. Elles prennent la forme suivante :

– Sur la composante de vitesse horizontale :

$$\left[ -s_p \mathbf{I} + s_{\tau(\mathbf{u})} + \tau(\mathbf{s}_{\mathbf{u}}) \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \left\{ \frac{\partial p}{\partial y} - 2 \frac{\partial \mu_t}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - 2(\mu + \mu_t) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right\}_{SM} \quad (5.67)$$

– Sur la composante de vitesse verticale :

$$\left[ -s_p \mathbf{I} + s_{\tau(\mathbf{u})} + \tau(\mathbf{s}_{\mathbf{u}}) \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \left\{ -\frac{\partial \mu_t}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) \right\}_{SM} \quad (5.68)$$

– Sur  $\mathcal{K}$  :

$$\left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla s_{\mathcal{K}} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \left\{ -\frac{1}{\sigma_k} \frac{\partial \mu_t}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial y \partial x} \right\}_{SM} \quad (5.69)$$

– Sur  $\mathcal{E}$  :

$$\left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla s_{\mathcal{E}} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \left\{ -\frac{1}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \mu_t}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial y \partial x} \right\}_{SM} \quad (5.70)$$

On remarquera que dans le cas des paramètres de forme, les conditions aux limites classiques de Dirichlet et de Neumann font intervenir les dérivées premières et secondes des solutions de l'écoulement. Il en résulte une difficulté supplémentaire due à la nécessité d'obtenir des gradients précis aux frontières, là où les dérivées de la solution sont justement les moins précises.

### 5.2.3.3 Lois de parois pour les sensibilités

Comme nous l'avons mentionné pour l'écoulement, la méthode consiste à introduire des termes sources dans les lois de parois pour les sensibilités. Nous avons procédé de la manière suivante :

– Condition dans la direction tangentielle pour les sensibilités :

De la même manière que pour l'écoulement, nous considérons, ici aussi, une contrainte dans la direction tangentielle résultant de l'effort que la paroi applique sur le fluide. Cette condition est donc implémentée dans le code de la manière suivante :

$$\begin{aligned} s_{\tau_w} = & - \left( \rho' + \nabla \rho \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial y_0} \right) u_k u_{**} \\ & - \rho u_k \frac{D u_{**}}{D y_0} - \rho u_{**} \frac{D u_k}{D y_0} + \tau \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}_{int}}{\partial y_0} \cdot \hat{\mathbf{t}} \\ & + \tau \cdot \hat{\mathbf{n}}_{int} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}}{\partial y_0} + \left[ \left( \nabla \tau \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial y_0} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{int} \right] \cdot \hat{\mathbf{t}} \end{aligned} \quad (5.71)$$

Dans notre cas,  $\rho'$ ,  $\nabla\rho$ ,  $Du_k/Dy_0$  et  $Du_{**}/Dy_0$  sont nuls. Nous obtenons alors :

$$s_{\tau_w} = \underbrace{+ \left[ \left( \nabla\tau \cdot \frac{\partial\hat{\mathbf{X}}}{\partial y_0} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{int} \right] \cdot \hat{\mathbf{t}}}_{\text{terme de transpiration}} \quad (5.72)$$

D'autre part, la sensibilité de la contrainte visqueuse ou effort pariétal de la plaque sur l'écoulement se note de la manière suivante :

$$\left[ \left( \frac{\partial\tau}{\partial y_0} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ext} \right) \cdot \hat{\mathbf{t}} \right]_{wall} = -(\mu' + \mu'_t) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial s_u}{\partial y} + \frac{\partial s_v}{\partial x} \right) \quad (5.73)$$

Pour que la solution manufacturée satisfasse cette condition aux frontières, nous ajoutons à la condition (5.72) ci-dessus, le terme source suivant :

$$\text{Src}\tau_{wsens} = + \left\{ \left[ \left( \nabla\tau \cdot \frac{\partial\hat{\mathbf{X}}}{\partial y_0} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{int} \right] \cdot \hat{\mathbf{t}} \right\}_{SM} - \left\{ \left[ \left( \frac{\partial\tau}{\partial y_0} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ext} \right) \cdot \hat{\mathbf{t}} \right]_{wall} \right\}_{SM} \quad (5.74)$$

Ainsi, nous implantons dans le code éléments finis la relation suivante pour le calcul de la condition limite dans la direction tangentielle :

$$s_{\tau_w} = \left\{ + \left[ \left( \nabla\tau \cdot \frac{\partial\hat{\mathbf{X}}}{\partial y_0} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{int} \right] \cdot \hat{\mathbf{t}} \right\}_h - \text{Src}\tau_{wsens} \quad (5.75)$$

Soit en explicitant les termes :

$$s_{\tau_w} = \underbrace{\left\{ \left[ \left( \nabla\tau \cdot \frac{\partial\hat{\mathbf{X}}}{\partial y_0} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{int} \right] \cdot \hat{\mathbf{t}} \right\}_h}_1 - \underbrace{\left\{ \left[ \left( \nabla\tau \cdot \frac{\partial\hat{\mathbf{X}}}{\partial y_0} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{int} \right] \cdot \hat{\mathbf{t}} \right\}_{SM}}_2$$

$$+ \underbrace{\left\{ -(\mu' + \mu'_t) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial s_u}{\partial y} + \frac{\partial s_v}{\partial x} \right) \right\}}_3 \Big|_{SM} \quad (5.76)$$

Comme cela a été dit précédemment, les termes 1 et 2 tendent à s'annuler avec le raffinement du maillage. La valeur de la contrainte tangentielle pour les sensibilités tend donc vers le terme 3, qui n'est autre que la sensibilité de l'effort pariétal sur la plaque.

– Condition dans la direction normale :

$$s_{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{int} = - \left[ \nabla \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial y_0} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}}_{int} - \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}_{int}}{\partial y_0} \quad (5.77)$$

avec  $\hat{\mathbf{n}}_{int} = [0, 1]^T$ , nous obtenons la condition aux frontières pour les sensibilités de type Dirichlet suivante :

$$s_v = - \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5.78)$$

– Condition sur  $\mathcal{K}$  :

Comme nous l'avons vu au chapitre 3, à l'équation (3.33), la condition aux frontières issue de la loi de paroi imposée sur  $\mathcal{K}$  est la suivante :

$$\begin{aligned} \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla s_{\mathcal{K}} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}}_{int} = & - \left[ \nabla \mu \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial a} + \frac{\nabla \mu_t \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial a}}{\sigma_k} \right] \nabla \mathcal{K} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{int} \\ & - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \left[ \nabla \mathcal{K} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}_{int}}{\partial a} + \nabla (\nabla \mathcal{K}) \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{int} \right] \end{aligned}$$

La condition limite issue de la loi de paroi sur  $\mathcal{K}$  étant une condition de Neumann homogène, nous n'utilisons pas de terme source. Nous avons alors sur la paroi

solide :

$$\left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla s_{\mathcal{K}} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}}_{int} = - \frac{1}{\sigma_k} \frac{\partial \mu_t}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} \quad (5.79)$$

$$- \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial y^2}$$

– Condition sur  $\mathcal{E}$  :

La condition aux frontières pour les sensibilités imposée sur  $\mathcal{E}$  est de type Dirichlet.

$$s_{\mathcal{E}} = \frac{3}{u_k} \frac{Du_k}{Dy_0} - \frac{\kappa'}{\kappa} - \frac{d'}{d} - \nabla \mathcal{E} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial y_0} \quad (5.80)$$

Cette condition, après les simplification déjà vues précédemment et sachant que les sensibilités de  $\kappa$  et  $d$  sont nulles, devient alors :

$$s_{\mathcal{E}} = - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} \quad (5.81)$$

On crée alors le terme source suivant :

$$\text{Src} \mathcal{E}_{sens} = - \left\{ - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} \right\}_{SM} + \{s_{\mathcal{E}}\}_{SM} \quad (5.82)$$

La condition limite sur la courbe *plaque* est implantée de la manière suivante :

$$s_{\mathcal{E}} = \left\{ - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} \right\}_h - \left\{ - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} \right\}_{SM} + \{s_{\mathcal{E}}\}_{SM} \quad (5.83)$$

### 5.3 Les résultats

Les équations moyennes de Reynolds ainsi que les équations de transport du modèle  $k - \epsilon$  ont été résolues au moyen d'un code d'éléments finis adaptatif utilisant

un élément de Taylor-Hood ( $P_2 - P_1$ ), quadratique en vitesse et les variables de turbulence, et linéaire continue par morceaux pour la pression. Des techniques de stabilisation numérique de type Streamline Upwind / Petrov-Galerkin (SUPG) [4] ont été employées pour palier aux problèmes d'oscillations et de convergence.

### 5.3.1 Analyse de convergence

#### 5.3.1.1 $y_0$ en tant que paramètre de valeur

Nous traiterons, ici,  $y_0$  en tant que paramètre de valeur. Les résultats présentés dans cette section ont été obtenus après six cycles d'adaptation de maillage. Le maillage final, représenté par la figure 5.4 ci-dessous, contient 184,618 noeuds et 91,739 éléments.

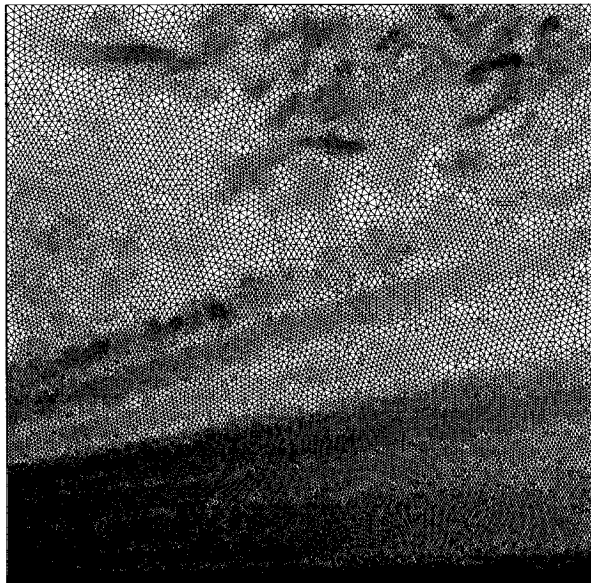


FIG. 5.4 Maillage final avec  $y_0$  en tant que paramètre de valeur

Le raffinement de maillage s'effectue surtout au niveau de la plaque, et au niveau

de la couche limite turbulente comme le montre la figure 5.4. Toutes les variables ainsi que leur sensibilités, via le calcul de leurs normes d'erreurs, contribuent à l'adaptation de maillage comme il l'a été mentionné au chapitre précédent.

Les figures 5.5 et 5.6 représentent les évolutions des normes d'erreurs vraies ainsi que les normes d'erreurs estimées en fonction du nombre de noeuds de chaque cycle d'adaptation. Ces normes sont calculées à partir des variables  $\mathbf{u}$ ,  $p$ ,  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{E}$  et  $\mu_t$  ainsi que leur sensibilités respectives  $s_{\mathbf{u}}$ ,  $s_p$ ,  $s_{\mathcal{K}}$ ,  $s_{\mathcal{E}}$  et  $\mu_t'$  comme le stipule le chapitre 4.

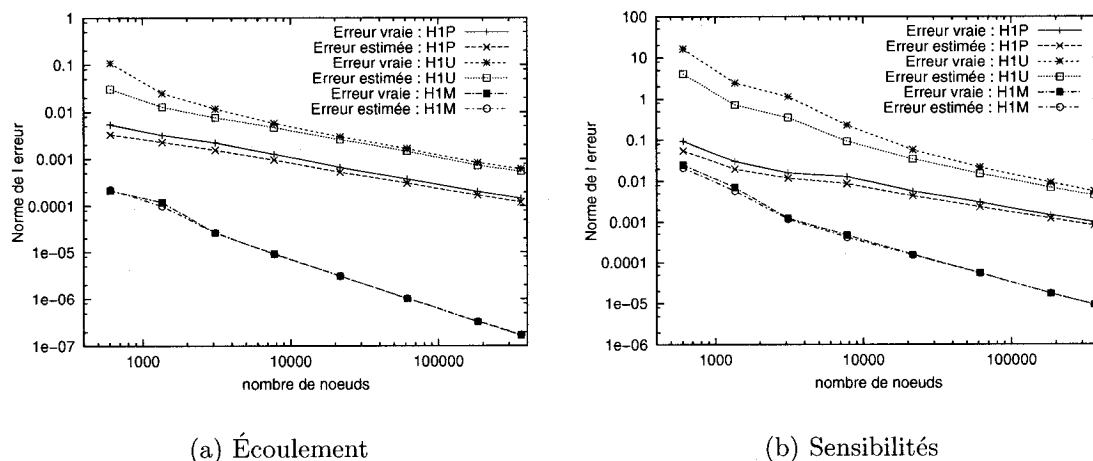


FIG. 5.5 Couche limite turbulente : Courbes d'erreurs pour les variables  $\mathbf{u}$ ,  $p$ , et  $\mu_t$  avec  $y_0$  pris comme paramètre de valeur

On remarque aisément que le raffinement du maillage engendre une décroissance régulière de la norme d'erreur que ce soit pour l'écoulement ou les sensibilités, et ce, pour l'ensemble des variables étudiées. Lors des deux derniers cycles d'adaptation, l'estimation d'erreur est quasiment égale à l'erreur vraie pour l'ensemble des quantités analysées, indiquant que la solution numérique converge vers la solution exacte.

En effet, comme le montre les tableaux 5.1 et 5.2, cette hypothèse est confirmée par les indices d'efficacité de l'ensemble des variables pris au dernier cycle, dont les valeurs sont supérieures à 76% tant pour l'écoulement que pour les sensibilités.

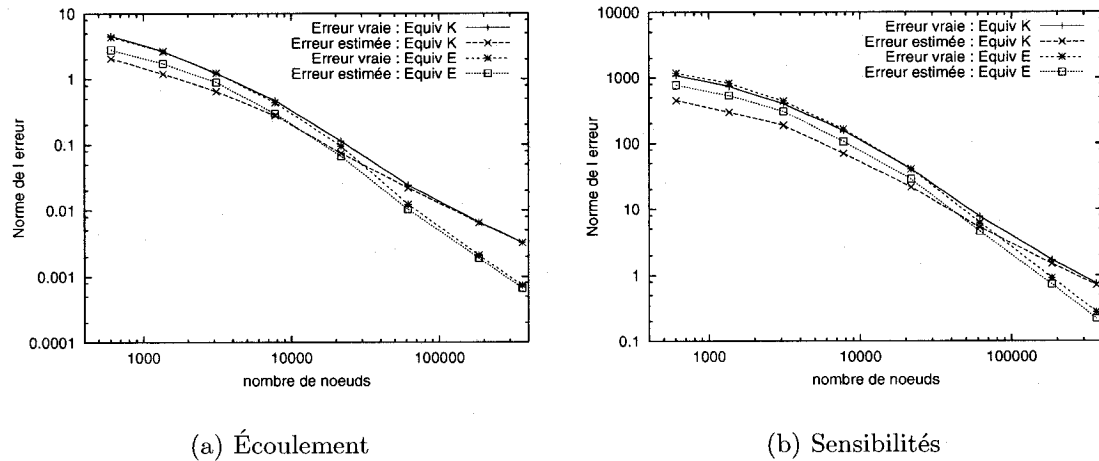


FIG. 5.6 Couche limite turbulente : Courbes d'erreurs pour les variables  $k$ ,  $\epsilon$  avec  $y_0$  pris comme paramètre de valeur

| $\Theta_u$ | $\Theta_p$ | $\Theta_K$ | $\Theta_\epsilon$ | $\Theta_{\mu_t}$ |
|------------|------------|------------|-------------------|------------------|
| 0.8766     | 0.8321     | 0.9805     | 0.9034            | 1.018            |

TAB. 5.1 Indice d'efficacité pour les variables de l'écoulement

où

$$\Theta_\phi = \frac{\|e^\phi\|_{\text{estimée}}}{\|e^\phi\|_{\text{vraie}}} \quad (5.84)$$

et  $\phi$  est une variable quelconque.

Dans la zone asymptotique du schéma Éléments Finis, le taux de convergence théorique d'un élément est donné par :

$$\|e\| = ch^\alpha \quad (5.85)$$

où  $c$  est une constante,  $h$  est la taille de l'élément et  $\alpha$  est le taux de convergence. De plus, le nombre de noeuds est inversement proportionnel au carré de la taille

| $\Theta_{s_u}$ | $\Theta_{s_p}$ | $\Theta_{s_K}$ | $\Theta_{s_\mathcal{E}}$ | $\Theta_{\mu_t'}$ |
|----------------|----------------|----------------|--------------------------|-------------------|
| 0.7614         | 0.8271         | 0.8739         | 0.7966                   | 1.002             |

TAB. 5.2 Indice d'efficacité pour les sensibilités

de l'élément, il en résulte alors :

$$\|e\| = \left( \frac{c}{\sqrt{N}} \right)^\alpha \quad (5.86)$$

où  $N$  est le nombre de noeuds. Pour un élément de type Taylor-Hood,  $\alpha = 2$  pour la norme énergie de  $\mathbf{u}$  et la norme  $L^2$  de  $p$ , il en résulte que la norme d'erreur est inversement proportionnelle au nombre de noeuds. On devrait alors observer sur les graphiques des normes d'erreur, des pentes de  $-1$  dans la zone asymptotique. Pour la pression, celle-ci étant linéaire,  $\alpha = 1$ , et l'on aura à s'assurer que la pente est de  $-1/2$  pour sa semi-norme  $H^1$ . De la théorie à la pratique, on constate que ce phénomène est partiellement observé dans notre cas. En effet, pour les variables  $p$ ,  $k$  et  $\mu_t$  ainsi que leur sensibilité, l'analyse des pentes entre les deux derniers cycles montrent des résultats très satisfaisants. En revanche, pour  $\mathbf{u}$  et  $\epsilon$ , les taux de convergence ne sont pas tout à fait en accord avec la théorie, et la raison qui expliquerait ces résultats est encore inconnue. Cependant, les valeurs des taux obtenues demeurent raisonnables. Ces taux de convergence sont donnés dans le tableau 5.3.

| $\mathbf{u}$ | $p$  | $\mathcal{K}$ | $\mathcal{E}$ | $\mu_t$ | $s_u$ | $s_p$ | $s_K$ | $s_\mathcal{E}$ | $\mu_t'$ |
|--------------|------|---------------|---------------|---------|-------|-------|-------|-----------------|----------|
| 1.28         | 1.07 | 2.21          | 3.09          | 2.03    | 1.41  | 1.21  | 2.30  | 3.36            | 2.04     |

TAB. 5.3 Taux de convergence des variables de l'écoulement et de leurs sensibilités avec  $y_0$  pris comme paramètre de valeur

Évidemment, cette théorie est nettement plus appropriée dans le cadre de maillages

structurés, où la taille des éléments est unique.

On peut ainsi dire que l'implantation des lois de parois pour les sensibilités de valeur est validée puisque le taux de convergence du solveur est en accord avec la théorie et les estimations d'erreurs tendent vers les erreurs vraies, indiquant que la solution éléments finis tend vers la solution analytique.

### 5.3.1.2 $y_0$ en tant que paramètre de forme

Dans le cadre d'un paramètre de forme, on utilise une technique de reconstruction des gradients à la frontière utilisant des développements de Taylor d'ordre 6, et s'appuyant sur les informations nodales de 8 couches d'éléments. Pour évaluer les dérivées de la solution apparaissant dans les conditions limites classiques et les lois de paroi, on utilise la technique de moindres-carrés contrainte de Duvinéau et Pelletier <sup>[12]</sup>. Elle consiste à résoudre un problème de moindres-carrés tels que les champs reconstruits satisfassent les conditions limites de sorte que la variable dépendante et ses dérivées soient compatibles. Cette méthode se révèle indispensable pour obtenir des gradients très précis aux frontières permettant ainsi de satisfaire les conditions limites.

La figure 5.7 désigne le maillage final obtenu après six cycles d'adaptation. Il contient 208,332 noeuds et 103,333 éléments.

Les évolutions des courbes des normes d'erreur pour l'écoulement, observées à la figure 5.8, sont très similaires à celles vues pour le cas du paramètre de valeur. De même, on constate que les normes d'erreurs estimées décroissent avec l'adaptation de maillage, pour tendre vers les erreurs vraies sur les derniers maillages. De plus, on constate que les indices d'efficacité du tableau 5.4 sont supérieurs à 80%. Ainsi, la solution numérique converge bien vers la solution analytique.

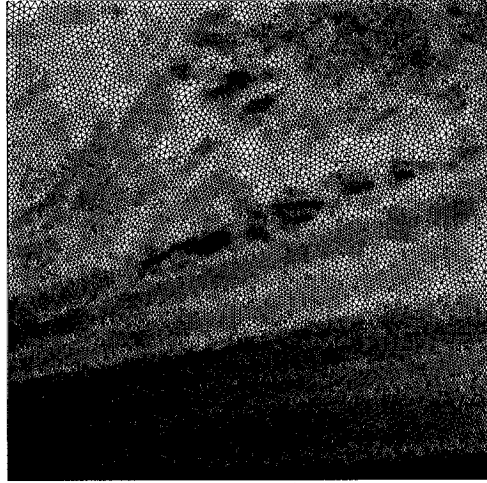


FIG. 5.7 Maillage final avec  $y_0$  en tant que paramètre de forme

| $\Theta_{\mathbf{u}}$ | $\Theta_p$ | $\Theta_{\mathcal{K}}$ | $\Theta_{\varepsilon}$ | $\Theta_{\mu_t}$ |
|-----------------------|------------|------------------------|------------------------|------------------|
| 0.8693                | 0.8083     | 0.9995                 | 0.9140                 | 1.018            |

TAB. 5.4 Indices d'efficacité pour les variables de l'écoulement pour le maillage final

Pour les sensibilités, on remarque, à la figure 5.9 que la convergence est un peu plus lente que pour le cas d'un paramètre de valeur, et notamment, pour les variables  $u$ ,  $k$  et  $\varepsilon$ . Les évolutions des normes d'erreur restent, tout de même, très satisfaisantes.

Les indices d'efficacité des variables  $s_{\mathbf{u}}$ ,  $s_p$ ,  $s_{\mathcal{K}}$ ,  $s_{\varepsilon}$  et  $\mu_t'$  données au tableau 5.5 sont eux aussi moins bons mais demeurent tout de même très raisonnables, étant donné la difficulté d'obtenir des gradients précis et l'utilisation des lois de parois. En effet, il est nécessaire de rappeler que les termes de transpiration, apparaissant dans les conditions aux frontières et notamment dans les lois de parois, font apparaître des

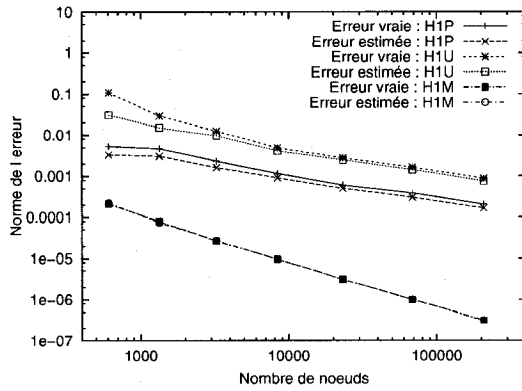
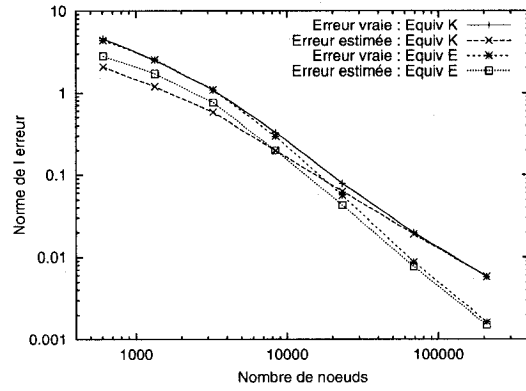
(a)  $u, p, \mu_t$ (b)  $k, \epsilon$ 

FIG. 5.8 Couche limite turbulente : Courbes d'erreurs pour les variables de l'écoulement avec  $y_0$  pris comme paramètre de forme

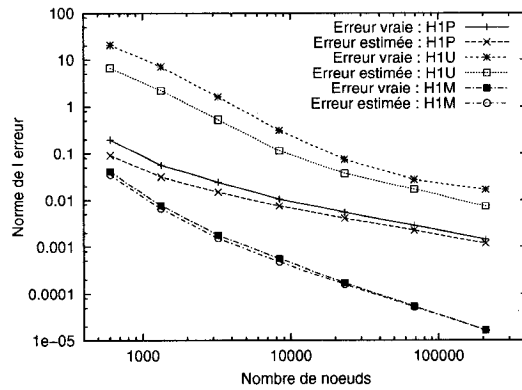
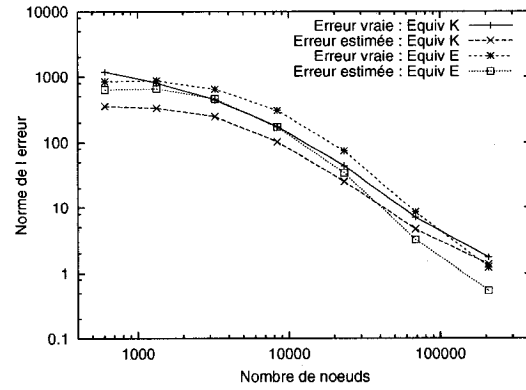
(a)  $u, p, \mu_t$ (b)  $k, \epsilon$ 

FIG. 5.9 Couche limite turbulente : Courbes d'erreurs pour les sensibilités avec  $y_0$  pris comme paramètre de forme

dérivées secondes. Leur obtention n'est pas aisée et leur précision moindre que celles des dérivées premières. Elles entraînent une perte de précision dans le calcul des conditions limites contrairement au cas du paramètre de valeur où les conditions limites pour les sensibilités sont exactes. Ces raisons expliquent en grande partie pourquoi la convergence est plus lente pour  $\mathbf{u}$ ,  $k$  et  $\epsilon$ , sur lesquelles on impose des conditions frontières à la paroi solide.

Pour les taux de convergence de l'ensemble des variables donnés au tableau 5.6, nous pouvons faire exactement les mêmes remarques que pour le paramètre de valeur. Néanmoins, il faut préciser que les taux obtenus en utilisant des dérivées premières et secondes exactes montrent des résultats presque parfaits. Ces valeurs sont issues des pentes calculées entre les deux derniers cycles d'adaptation de maillage.

| $\Theta_{s_{\mathbf{u}}}$ | $\Theta_{s_p}$ | $\Theta_{s_{\mathcal{K}}}$ | $\Theta_{s_{\mathcal{E}}}$ | $\Theta_{\mu_t'}$ |
|---------------------------|----------------|----------------------------|----------------------------|-------------------|
| 0.4288                    | 0.8117         | 0.7782                     | 0.4433                     | 0.9942            |

TAB. 5.5 Indice d'efficacité pour les sensibilités pour le maillage final

| $\mathbf{u}$ | $p$  | $\mathcal{K}$ | $\mathcal{E}$ | $\mu_t$ | $s_{\mathbf{u}}$ | $s_p$ | $s_{\mathcal{K}}$ | $s_{\mathcal{E}}$ | $\mu_t'$ |
|--------------|------|---------------|---------------|---------|------------------|-------|-------------------|-------------------|----------|
| 1.15         | 1.08 | 2.15          | 2.95          | 2.08    | 1.56             | 1.16  | 2.23              | 3.11              | 2.10     |

TAB. 5.6 Taux de convergence des variables de l'écoulement et de leurs sensibilités avec  $y_0$  pris comme paramètre de forme

Nous avons constaté que les courbes des normes d'erreur estimée décroissent pour atteindre des valeurs très faibles, et tendent vers les normes d'erreur vraie avec un taux de convergence relativement proche de la théorie. En ce sens, nous pouvons affirmer que ce cas test vérifie la méthode employée pour implanter les sensibilités avec paramètre de forme dans les lois de paroi du modèle  $k - \epsilon$ .

### 5.3.2 Etude du coefficient de traînée

Dans cette sous-section, on calcule le coefficient de traînée sur la plaque ainsi que sa sensibilité. En prenant  $\rho U_{ref}^2 L_{ref}$  comme force de référence, le coefficient de traînée s'écrit :

$$C_D = \frac{1}{\rho U_{ref}^2 L_{ref}} \int_{\Gamma_w(y_0)} \sigma \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{t}} d\Gamma = \int_{\Gamma_w(y_0)} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] d\Gamma \quad (5.87)$$

avec  $\hat{\mathbf{n}} = [0, 1]^T$  et  $\hat{\mathbf{t}} = [1, 0]^T$  sur la plaque.

À présent, nous désirons calculer sa sensibilité en prenant la dérivée matérielle de l'expression (5.87). Pour ce faire, nous passons sur une courbe de référence  $\Gamma_{ref}$  sur laquelle  $d\Gamma = J d\Gamma_0$  :

$$\frac{DC_D}{Dy_0} = \frac{1}{\rho U_{ref}^2 L_{ref}} \int_{\Gamma_{ref}} \sigma \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{t}} J d\Gamma_0 \quad (5.88)$$

$$= \frac{1}{\rho U_{ref}^2 L_{ref}} \int_{\Gamma_{ref}} \left[ \frac{D\sigma}{Dy_0} \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{t}} J + \sigma \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial y_0} \cdot \hat{\mathbf{t}} J + \sigma \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}}{\partial y_0} J + \sigma \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{t}} \frac{\partial J}{\partial y_0} \right] d\Gamma_0 \quad (5.89)$$

$$= \frac{1}{\rho U_{ref}^2 L_{ref}} \int_{\Gamma_w(y_0)} \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial y_0} + \nabla \sigma \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial y_0} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{t}} + \sigma \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial y_0} \cdot \hat{\mathbf{t}} + \sigma \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}}{\partial y_0} + \frac{1}{J} \sigma \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{t}} \frac{\partial J}{\partial y_0} \right] d\Gamma \quad (5.90)$$

De plus, dans notre cas particulier, les sensibilités des quantités géométriques s'écrivent de la manière suivante :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial y_0} = \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}}{\partial y_0} = [0, 0]^T \quad ; \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial y_0} = [0, 1]^T \quad ; \quad \frac{\partial J}{\partial y_0} = 0 \quad (5.91)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{DC_D}{Dy_0} &= \underbrace{\frac{1}{\rho U_{ref}^2 L_{ref}} \int_{\Gamma_w(y_0)} \frac{\partial \sigma}{\partial y_0} \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{t}} d\Gamma}_{= \frac{\partial C_D}{\partial y_0} : \text{ sensibilité Eulerienne}} \quad (5.92) \\ &+ \underbrace{\frac{1}{\rho U_{ref}^2 L_{ref}} \int_{\Gamma_w(y_0)} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial \mu_t}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] d\Gamma}_{\text{terme de transpiration}} \end{aligned}$$

La sensibilité Eulerienne du coefficient de traînée s'écrit alors :

$$\frac{\partial C_D}{\partial y_0} = \frac{1}{\rho U_{ref}^2 L_{ref}} \int_{\Gamma_w(y_0)} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial s_u}{\partial y} + \frac{\partial s_v}{\partial x} \right) + \mu_t' \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] d\Gamma \quad (5.93)$$

Notons que la dérivée matérielle du coefficient de traînée  $DC_D/Dy_0$  est aussi appelée sensibilité Lagrangienne et qu'elle est la somme de la sensibilité Eulerienne et du terme de transpiration. Dans le cas présent, la condition limite à la paroi solide ne dépend pas du paramètre  $y_0$ , sa sensibilité Lagrangienne doit donc être nulle. On peut d'ailleurs facilement démontrer que la sensibilité Eulerienne s'annule avec le terme de transpiration. Le tableau 5.7 récapitule les valeurs du coefficient de traînée ainsi que celles de ses sensibilités.

| coefficient de traînée          | sensibilité Eulerienne   | sensibilité Lagrangienne |
|---------------------------------|--|--------------------------|
| exact                           | exacte   | exacte                   |
| $C_D = 0.354686 \times 10^{-5}$ | $\frac{\partial C_D}{\partial y_0} = -0.267451 \times 10^{-3}$ | $\frac{DC_D}{Dy_0} = 0$  |

TAB. 5.7 Valeur du coefficient de traînée et ses sensibilités

La figure 5.10 représente les évolutions de l'erreur exacte du coefficient de traînée ainsi que celle de ses sensibilités Eulerienne et Lagrangienne.

Comme nous pouvons le constater, les erreurs diminuent avec le raffinement du

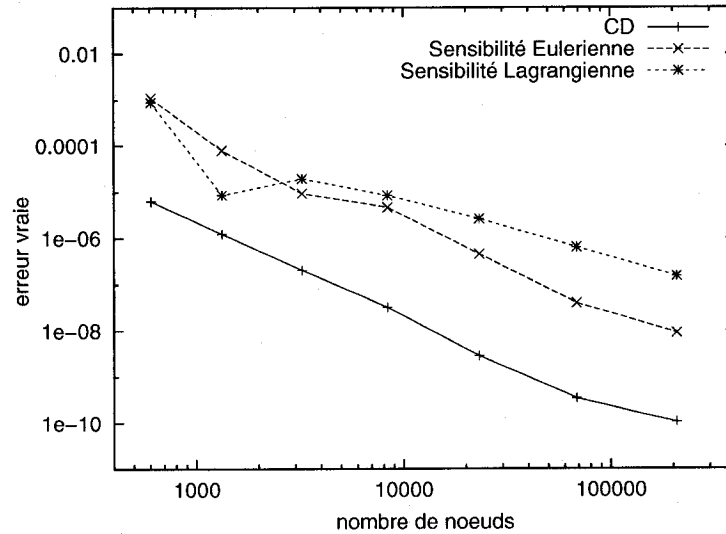


FIG. 5.10 Courbes de convergence de l'erreur exacte du coefficient de traînée et de ses sensibilités

maillage pour atteindre de très faibles valeurs. En effet, la précision sur  $C_D$  et sur sa sensibilité Eulerienne sont respectivement de l'ordre de  $10^{-10}$  et  $10^{-8}$ . La méthode développée pour calculer la sensibilité des forces totales est ainsi vérifiée.

### 5.3.3 Calcul de solutions voisines

Un des grands atouts des sensibilités est de pouvoir calculer des solutions voisines sans avoir à effectuer un nouveau calcul. Pour ce faire, nous utilisons un développement de Taylor d'ordre 1 comme suit :

$$\phi(x, y; a + \Delta a) = \phi(x, y) + \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial a}}_{s_\phi^a} \Delta a \quad \text{où } \phi \text{ est une variable quelconque} \quad (5.94)$$

À droite de l'égalité de l'équation (5.94), tous les termes sont connus, il est donc aisé de connaître la solution prise en  $a + \Delta a$ .

Appliquons cette méthode en considérant une variation de la position de la plaque  $\Delta y_0 = 0.02$  de sa valeur initiale  $y_0 = 0.00$ . Nous allons donc comparer la solution initiale, la solution extrapolée de  $y_0 = 0.00$  à  $y_0 = 0.02$ , et la solution recalculée à  $y_0 = 0.02$ .

Les figures 5.11 et 5.12 représentent les extrapolations à  $y_0 = 0.02$  à partir d'une solution initiale où  $y_0 = 0.00$ .

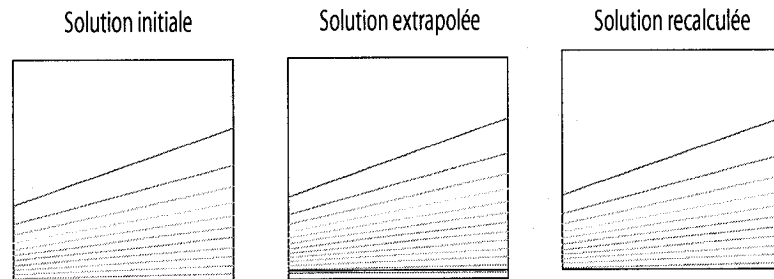


FIG. 5.11 Solution initiale, extrapolée et recalculée des isolignes de  $u$

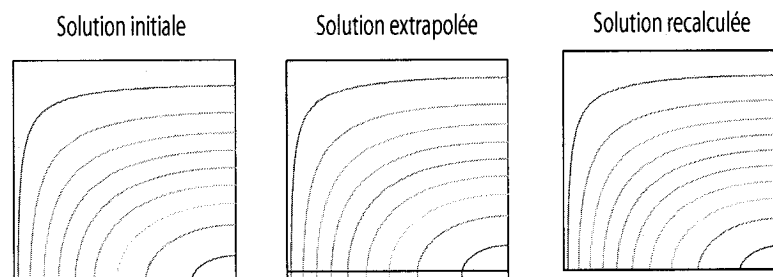


FIG. 5.12 Solution initiale, extrapolée et recalculée des isolignes de  $p$

Nous pouvons ainsi constater que la solution extrapolée coïncide parfaitement avec la solution recalculée à  $y_0 = 0.02$ , ce qui nous permet d'affirmer que les sensibilités ont été calculées avec une très bonne précision d'une part, et que la variation de  $y_0$  est suffisamment petite pour que le développement de Taylor d'ordre 1 dans l'espace des paramètres donne une approximation raisonnable, d'autre part.

Ainsi, au cours de ce chapitre, nous avons démontré que l'implantation de la M.E.S dans les lois de parois avec aussi bien des paramètres de valeur que de forme est

vérifiée. Les normes d'erreurs estimées pour l'ensemble des grandeurs étudiées, décroissent, et convergent vers les normes d'erreurs vraies avec un taux de convergence proche de la théorie. L'étude du coefficient de traînée et de ses sensibilités confirme la précision obtenue dans le calcul des sensibilités, et nous a permis de calculer les sensibilités de forces intégrales avec une très grande fiabilité. Enfin, le calcul de solution voisine, nous a permis encore une fois de vérifier, d'une part, la justesse des sensibilités, et que l'expansion linéaire de Taylor dans l'espace des paramètres est fidèle pour des petites variations autour de la valeur nominale du paramètre étudié.

## CHAPITRE 6

### APPLICATION

À présent que la méthode est vérifiée, nous l'appliquons à l'utilité des sensibilités par une application en régime turbulent. Nous analyserons un problème d'écoulement d'air autour d'un cylindre à section carrée à proximité d'une plaque plane. L'expérience originale a été réalisée par Wu et Martinuzzi <sup>[43]</sup>.

Ce chapitre montre que la méthode s'applique à un cas plus concret et démontre l'utilisation des sensibilités pour le calcul de solutions de problèmes voisins et l'analyse d'incertitude.

#### 6.1 Définition du problème

##### 6.1.1 Dispositif expérimental

Nous considérons un écoulement d'air autour d'un cylindre à section carrée dont les coins sont arrondis. L'obstacle se trouve à proximité d'une plaque plane située dans une section d'essais de  $0.45m \times 0.45m$  d'une soufflerie telle que le montre la figure 6.1.

L'arête du carré est de longueur  $D$  et l'ensemble des grandeurs caractéristiques du dispositif est adimensionnalisé à l'aide de cette longueur de référence. La distance séparant le cylindre de la plaque est notée  $S$  et est le paramètre de forme qui nous intéresse.

Le nombre de Reynolds  $Re = \rho U_0 D / \mu$  est de 22,000. Il est calculé avec le diamètre  $D$  du cylindre et la vitesse d'entrée  $U_0$ .

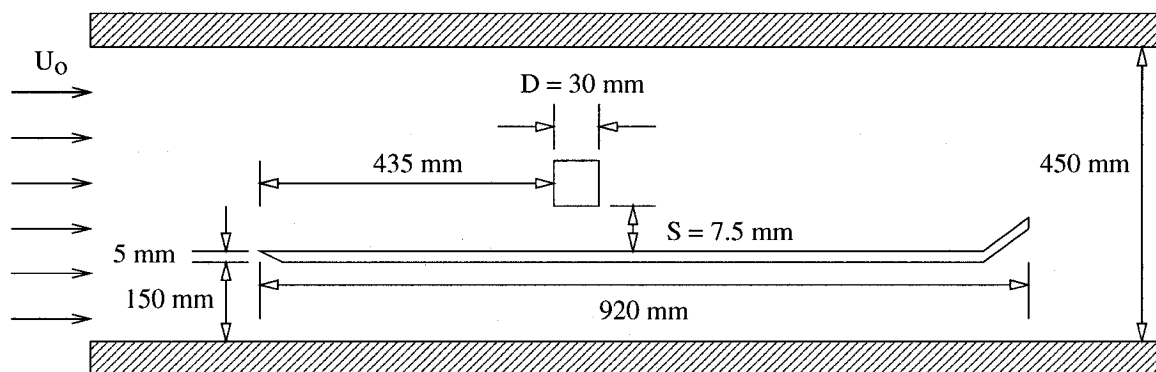


FIG. 6.1 Dispositif expérimental

### 6.1.2 Le domaine de calcul

Le domaine de calcul est représenté par la figure 6.2. Nous avons choisi un domaine ne représentant que la partie supérieure de la plaque, en supposant que l'écoulement inférieur à la plaque n'influence pas la partie supérieure. C'est ce que Wu et Martinuzzi [43] ont réalisé grâce au volet du bord de fuite dont l'angle est ajusté pour maintenir un écoulement parallèle au-dessous de la plaque.

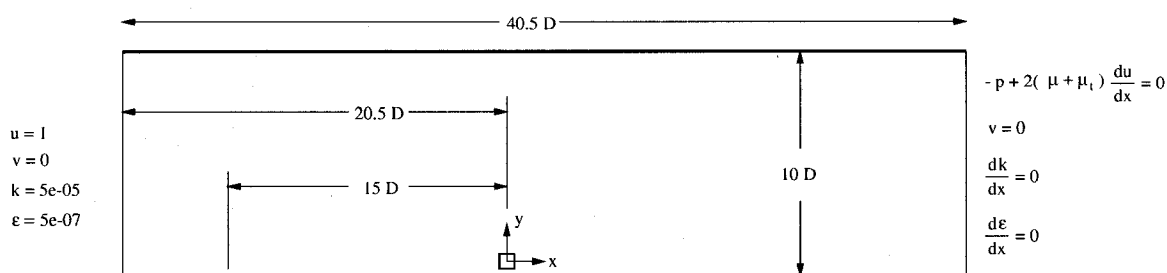


FIG. 6.2 Domaine de calcul et conditions limites

Les conditions aux frontières sont également représentées sur la figure 6.2. On y impose des conditions de Dirichlet en entrée et de Neumann en sortie. Les lois de parois sont imposées sur les parois solides du domaine, c'est à dire le bord d'attaque

de la plaque, la plaque, le cylindre et la paroi supérieure de la soufflerie. Le bord d'attaque de la plaque ainsi que les coins du cylindre sont arrondis afin d'éviter des problèmes de singularité dans les lois de parois. La valeur de  $k$  à l'entrée est choisie de manière à imposer un écoulement avec une intensité de turbulence de 1%. D'après les travaux effectués par Lacasse *et al* <sup>[28]</sup>, la valeur de  $\epsilon$  est choisie de telle sorte que la viscosité turbulente en entrée soit dix fois supérieure à la viscosité dynamique.

### 6.1.3 Le paramètre de sensibilité : $S$

Comme nous l'avons mentionné plus haut, la distance entre le cylindre et la plaque, notée  $S$ , sera le paramètre de forme étudié. Dans la configuration nominale, la distance adimensionnelle  $S/D$  est fixée à 0.25. Pour éviter des écoulements instables et instationnaires, nous étudierons des cas où l'on rapproche le cylindre de la plaque plutôt que de l'en éloigner. En effet, des travaux antérieurs ont montré que pour certain ratio de  $S/D$ , l'écoulement devient instationnaire. Ainsi, nous n'étudierons que des variations négatives de  $S$ . Cette distance caractéristique est par définition un paramètre de forme puisqu'une variation de sa valeur entraîne un mouvement de la frontière.

Nous donnons les sensibilités géométriques au paramètre  $S$  sur le cylindre :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial S} = [0, 0]^T \quad ; \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}}{\partial S} = [0, 0]^T \quad ; \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S} = [0, -1]^T \quad (6.1)$$

## 6.2 Résultats

### 6.2.1 Maillage et résultats préliminaires

Les résultats sont obtenus avec 8 cycles d'adaptation de maillage. Le maillage final présente 556,567 noeuds et 275,701 elements. La figure 6.3, ci-dessous, présente le maillage du sixième cycle de raffinement.

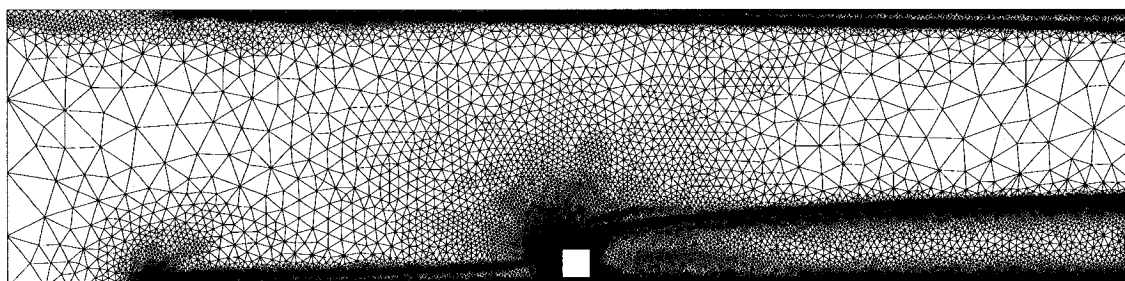


FIG. 6.3 Maillage du cycle 06

La figure 6.3 permet de vérifier que le raffinement du maillage s'effectue bien dans les zones pressenties. En effet, on remarque que les concentrations de mailles se situent dans les zones où les gradients sont les plus forts, c'est à dire près des parois solides, autour du cylindre et au niveau de la couche cisailée située en aval de l'obstacle. Ainsi, nous pouvons vérifier que l'estimateur d'erreur fonctionne de manière appropriée.

La figure ci-dessous 6.4 présente un zoom autour de l'obstacle qui met en évidence un raffinement de maillage très ciblé autour du cylindre et notamment au niveau du coin supérieur amont et de la région située entre la plaque et l'obstacle. De plus, on distingue très nettement la couche cisailée en aval de l'obstacle, ainsi que la

couche limite en amont.

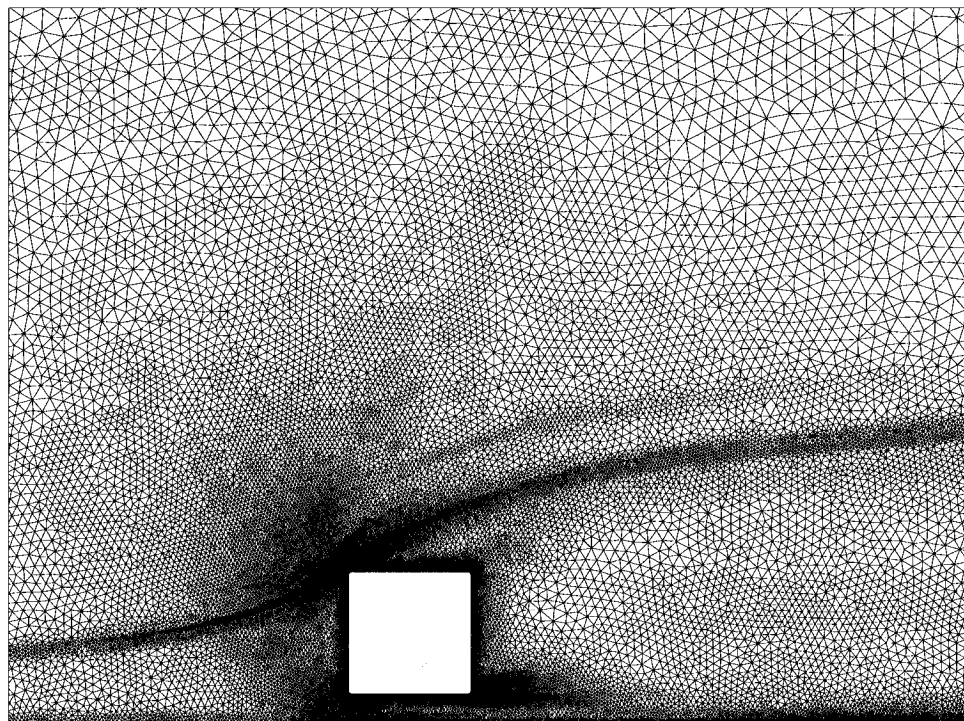
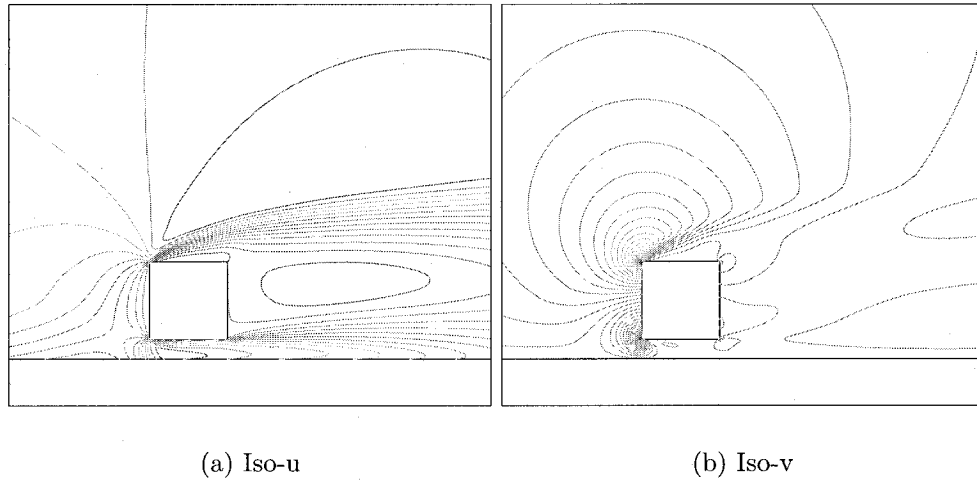


FIG. 6.4 Zoom sur le maillage final

La figure 6.5 représente les isolignes des composantes de la vitesse.

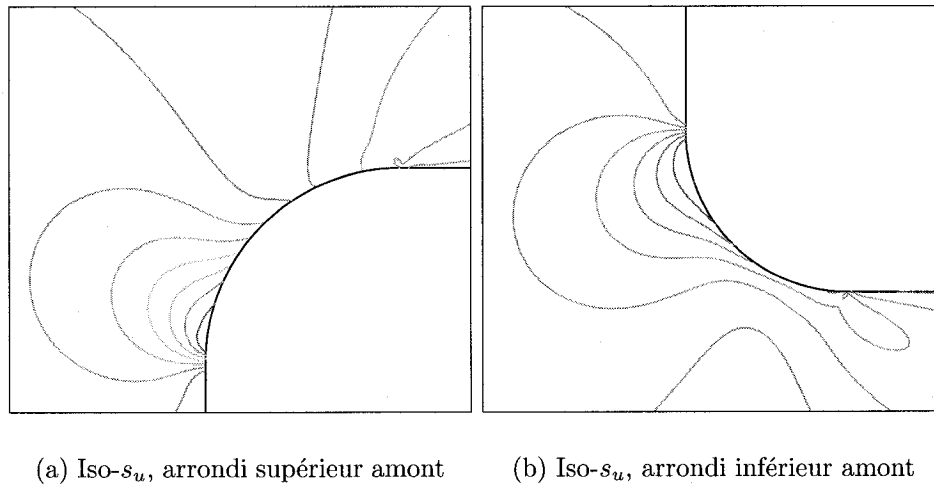
On remarque que le fluide est accéléré au-dessus du cylindre ainsi que dans la région située entre la plaque et l'obstacle. Nous observons aussi de forts gradients pour la vitesse verticale au niveau des arrondis du carré faisant face à l'écoulement ainsi que la présence d'une zone de recirculation juste en aval de l'obstacle.

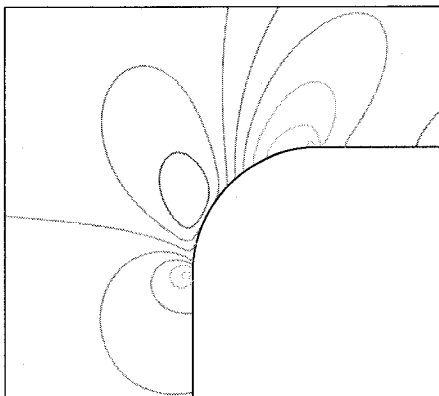
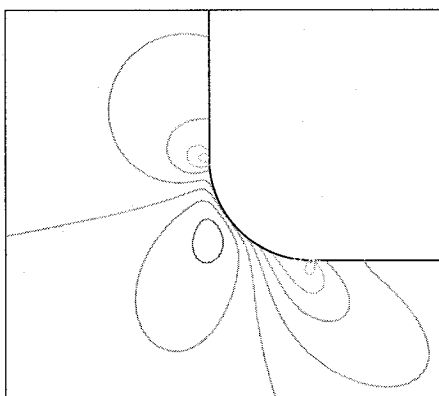
La figure 6.6 représente les isolignes de  $s_u$  au niveau des arrondis de la face amont du cylindre. Comme nous pouvons le constater,  $s_u$  atteint son maximum au niveau de l'arrondi supérieur et son minimum sur l'arrondi inférieur. Ceci est dû au fait que lorsque le cylindre a tendance à se rapprocher de la plaque, la composante de vitesse  $u$  va augmenter au niveau de l'arrondi supérieur tandis qu'on observera exactement le phénomène inverse sur l'arrondi inférieur. En effet, le fluide arrivant

FIG. 6.5 Isolignes de  $u$  et  $v$ 

sur le coin supérieur ne rencontrerait plus d'obstacle, alors que ce serait le contraire au niveau du coin inférieur.

Les figures 6.7, 6.8, 6.9 et 6.10 représentent les isolignes de  $s_v$  et  $s_p$  au niveau des arrondis de la face amont du cylindre.

FIG. 6.6 Isolignes de  $s_u$

FIG. 6.7 Isolignes de  $s_v$ , arrondi supérieur amontFIG. 6.8 Isolignes de  $s_v$ , arrondi inférieur amont

Pour  $s_v$ , on observe au niveau de l'arrondi supérieur une sensibilité négative dû à une diminution de la vitesse verticale étant donné que le cylindre se déplace vers le bas. Pour l'arrondi inférieur, on remarque que la vitesse verticale augmente (en valeur absolue) à cause de l'abaissement du cylindre. La sensibilité  $s_v$  est négative puisque  $v$  est elle-même négative. Les pics observés au niveau des jonctions des arrondis et des blocs sont des erreurs numériques causées par les valeurs de  $d$  différentes sur chaque courbe.

Pour  $s_p$ , on remarque bien des phénomènes opposés sur les deux arrondis. Pour l'arrondi supérieur, lorsque le cylindre baisse, on remarque bien une sensibilité négative due à une baisse de pression. Ceci est causé par l'accélération du fluide. Puis l'écoulement ralenti sur la partie haute de l'arrondi causant une augmentation de la pression et par conséquent de sa sensibilité. Le phénomène est inversé sur l'arrondi inférieur. On constate, ici aussi, les pics au niveau des jonctions entre les arrondis et les blocs.

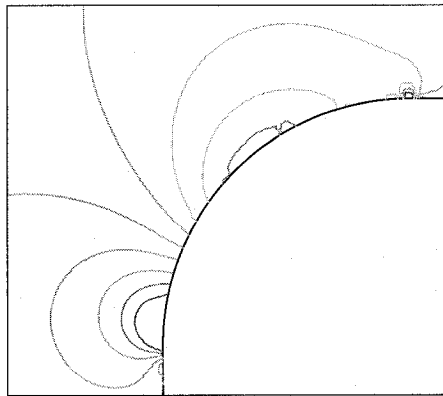


FIG. 6.9 Isolignes de  $s_p$ , arrondi supérieur amont

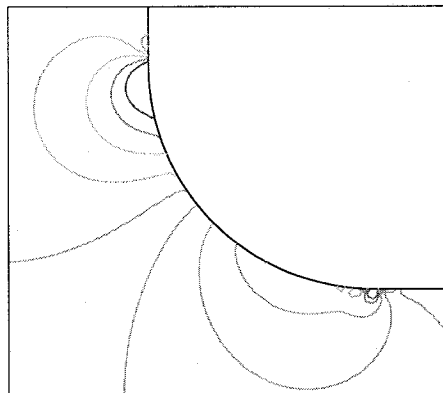
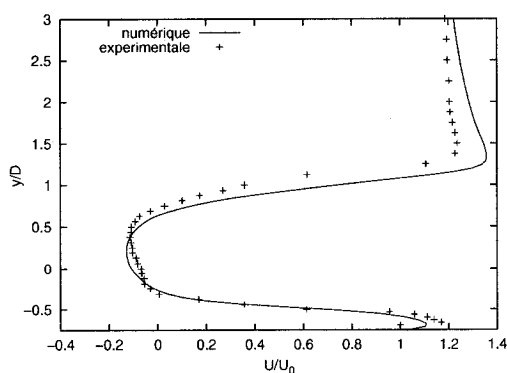
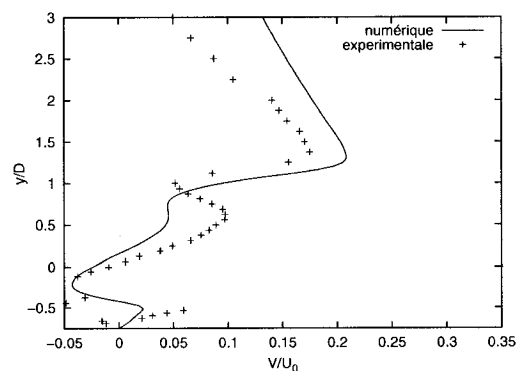


FIG. 6.10 Isolignes de  $s_p$ , arrondi inférieur amont

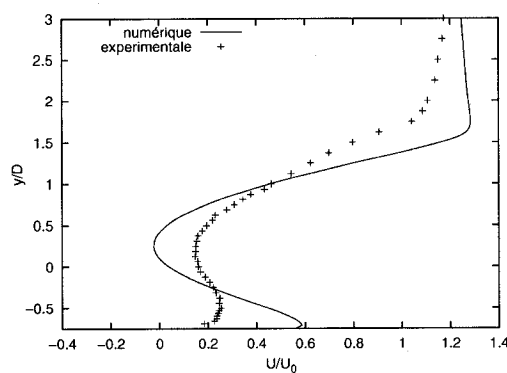
La figure 6.11 représente les profils des solutions numériques et expérimentales [43] des vitesses  $u$  et  $v$  en  $x/D = \{1, 4\}$ .



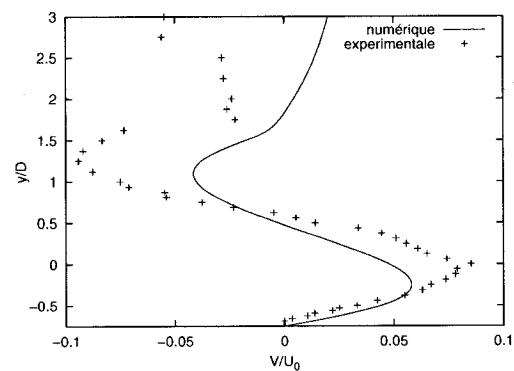
(a)  $u/U_0$  en  $x/D = 1$



(b)  $v/U_0$  en  $x/D = 1$



(c)  $u/U_0$  en  $x/D = 4$



(d)  $v/U_0$  en  $x/D = 4$

FIG. 6.11 Profils des composantes de la vitesse en  $x/D = \{1; 4\}$

Pour la composante de vitesse  $u$  en  $x/D = 1$ , les mesures expérimentales et la solution numérique coïncident très bien. On remarque, cependant, que la solution numérique sous-estime l'intensité de l'écoulement causé par le fossé entre le cylindre et la plaque.

En  $x/D = 4$ , le modèle de turbulence sur-estime la longueur de la zone de recirculation et affiche des valeurs négatives pour  $u$  ce qui n'est pas le cas pour les mesures expérimentales. On remarque que la vitesse  $u$  à proximité de la paroi est trop élevée.

Pour la composante de vitesse verticale en  $x/D = 1$ , on constate que le profil de la solution numérique a relativement la même allure que celui des mesures expérimentales. En  $x/D = 4$ , on remarque que le profil de la solution numérique donne de bons résultats dans la zone proche paroi contrairement à la vitesse horizontale  $u$ .

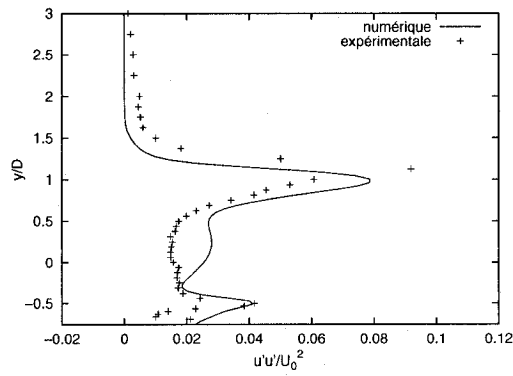
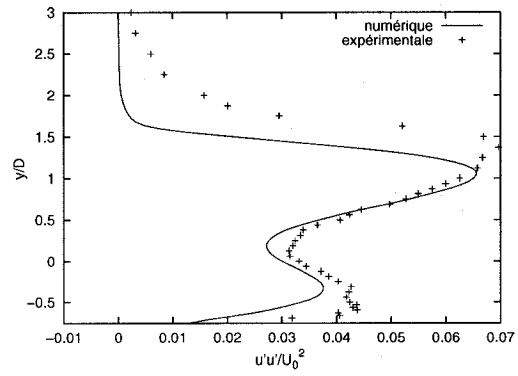
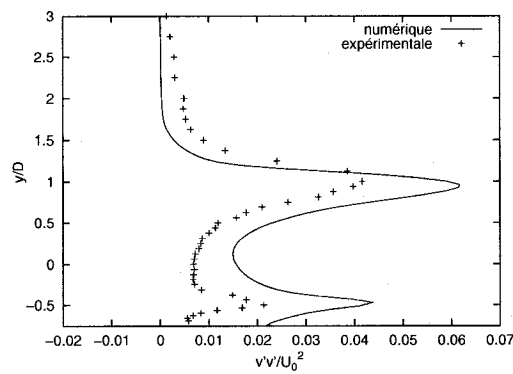
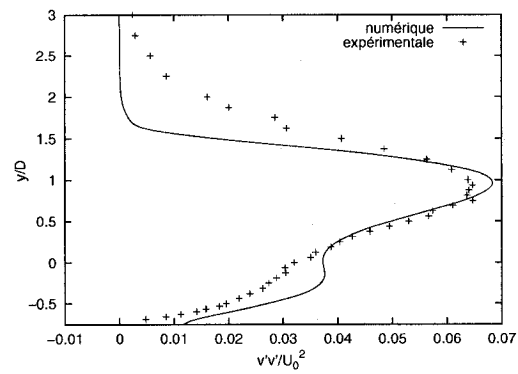
Les figures 6.12, 6.13 et 6.14 représentent les profils des composantes du tenseur des contraintes de Reynolds  $-\overline{\rho u'u'}$ ,  $-\overline{\rho v'v'}$  et  $-\overline{\rho u'v'}$  définies comme suit :

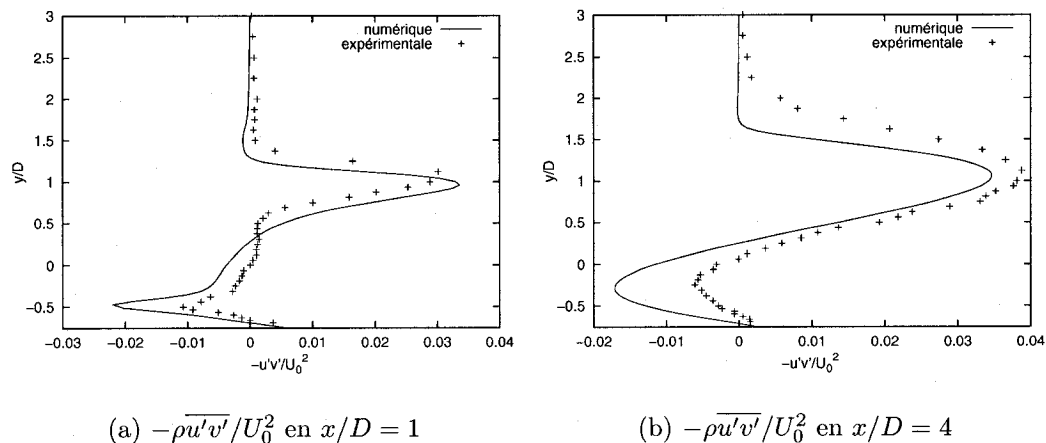
$$-\overline{\rho u'u'} = 2\mu_t \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\rho k \quad (6.2)$$

$$-\overline{\rho u'v'} = \mu_t \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (6.3)$$

$$-\overline{\rho v'v'} = 2\mu_t \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\rho k \quad (6.4)$$

On peut constater que la concordance entre les profils issus des solutions numériques et expérimentales est très bonne bien que ces quantités soient beaucoup plus difficiles à prédire que les composantes de vitesse. On remarque tout de même que la composante  $-\overline{\rho u'v'}$  est sous-estimée et spécialement près de la paroi. Le phénomène est accru en  $x/D = 4$ .

(a)  $-\rho \overline{u'w'}/U_0^2$  en  $x/D = 1$ (b)  $-\rho \overline{u'w'}/U_0^2$  en  $x/D = 4$ FIG. 6.12 Composante  $-\rho \overline{u'w'}/U_0^2$  du tenseur de Reynolds(a)  $-\rho \overline{v'v'}/U_0^2$  en  $x/D = 1$ (b)  $-\rho \overline{v'v'}/U_0^2$  en  $x/D = 4$ FIG. 6.13 Composante  $-\rho \overline{v'v'}/U_0^2$  du tenseur de Reynolds

FIG. 6.14 Composante  $-\rho \overline{u'v'}/U_0^2$  du tenseur de Reynolds

### 6.2.2 Étude de la distance adimensionnelle à la paroi $y^+$

La loi de paroi et le modèle de turbulence  $k - \epsilon$  ne sont valides que dans une zone où la distance adimensionnelle à la paroi  $y^+ = \rho d u_k / \mu$  vérifie :

$$30 \leq y^+ \leq 300 \quad (6.5)$$

Le défi consiste donc à choisir une valeur judicieuse de la distance  $d$  sur chacune des courbes représentant les parois solides telle que la relation (6.5) soit satisfaite sur les maillages les plus fins. Le tableau 6.1 récapitule l'ensemble des valeurs de  $d$  choisies pour la courbe *plaque*, et les courbes décrivant le cylindre.

| plaque      | bloc amont | bloc haut  | bloc aval   | bloc bas    |
|-------------|------------|------------|-------------|-------------|
| $d = 0.045$ | $d = 0.02$ | $d = 0.02$ | $d = 0.035$ | $d = 0.015$ |

TAB. 6.1 Valeur de  $d$  sur la plaque et les courbes décrivant le cylindre

La première étape de l'analyse des résultats consiste à vérifier que les valeurs de  $y^+$  convergent et qu'elles se trouvent dans la plage commune de validité de la loi

de paroi et du modèle de turbulence  $k - \epsilon$ . Les figures 6.15, 6.16 et 6.17 présentent l'évolution et la convergence des valeurs de  $y^+$  au cours des cycles d'adaptation de maillage pour les courbes citées précédemment.

Pour la plaque, on remarque, en premier lieu, que les valeurs de  $y^+$  convergent au cours du processus d'adaptation de maillage. De plus, on constate aisément, et ce, même pour les valeurs les plus élevées, que la relation 6.5 est vérifiée. On remarque également que les valeurs sont les plus élevées au niveau du bord d'attaque de la plaque, mais aussi au niveau du cylindre.

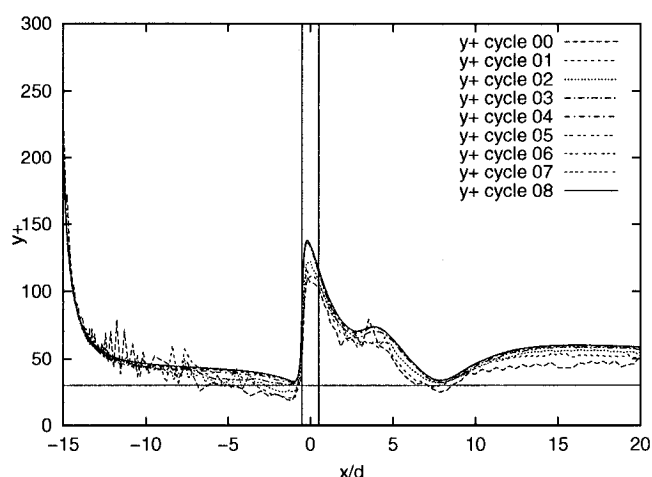


FIG. 6.15  $y^+$  sur la plaque

La vitesse étant plus forte dans ces régions, l'énergie cinétique de turbulence augmente, entraînant un accroissement des valeurs de  $y^+$ .

Pour l'ensemble des quatre côtés du cylindre, les constats sont exactement les mêmes, les valeurs de  $y^+$  sont comprises dans la plage de validité. De même que pour la plaque, les régions où les valeurs sont les plus élevées se situent là où le fluide s'écoule plus rapidement, c'est à dire au niveau des coins arrondis du cylindre à section carrée.

L'expérience antérieure montre que les valeurs de  $y^+$  proche de la borne inférieure

de la plage de validité donnent de meilleurs résultats. Cela est généralement le cas pour notre modèle. En ce sens, nous pouvons affirmer que les conditions de validité du modèle de loi de paroi et du modèle  $k - \epsilon$  sont respectées.

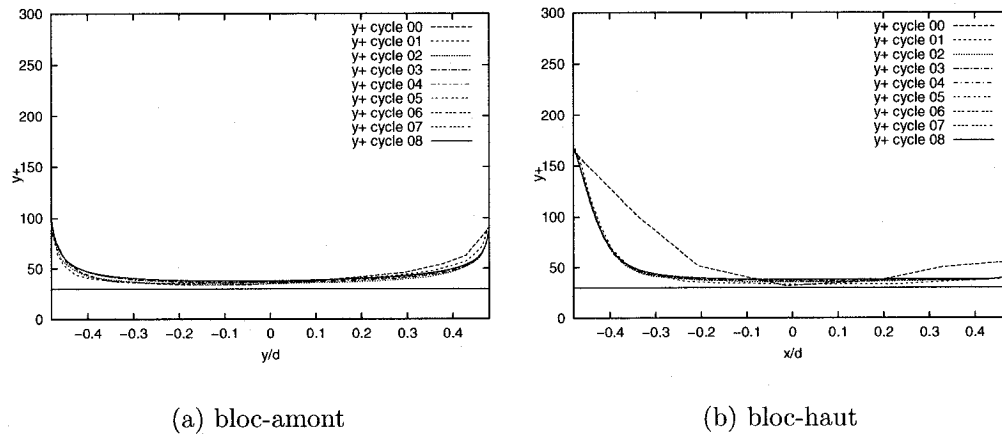


FIG. 6.16 Courbes de convergence des valeurs de la distance adimensionnelle à la paroi  $y^+$  pour les blocs amont et aval

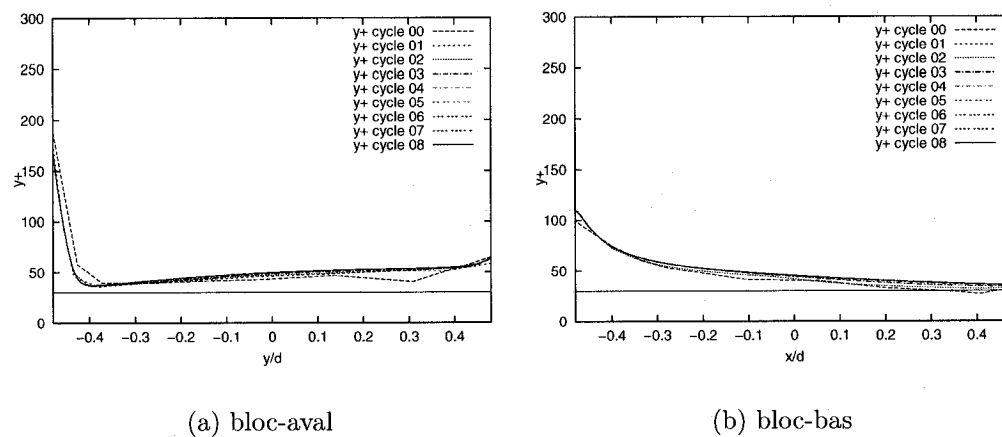


FIG. 6.17 Courbes de convergence des valeurs de la distance adimensionnelle à la paroi  $y^+$  pour les blocs aval et bas

### 6.2.3 Étude du coefficient de friction $C_f$

Dans cette sous-section, nous nous attardons à étudier le coefficient de friction sur la plaque. Celui-ci est donné par la relation suivante :

$$\{[\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{n}}] \cdot \hat{\mathbf{t}}\}_w = (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (6.6)$$

où  $\hat{\mathbf{n}} = [0, 1]^T$ ,  $\hat{\mathbf{t}} = [1, 0]^T$  sont respectivement les vecteurs unitaires normal et tangent à la plaque et  $w$  désigne une quantité évaluée à la paroi.

Les figures 6.18(a) et 6.18(b) présentent respectivement les distributions du coefficient de friction le long de la plaque au cours des cycles d'adaptation de maillage et du coefficient de friction pour le dernier cycle d'adaptation. On peut observer ainsi la convergence de la distribution de  $C_f$ .

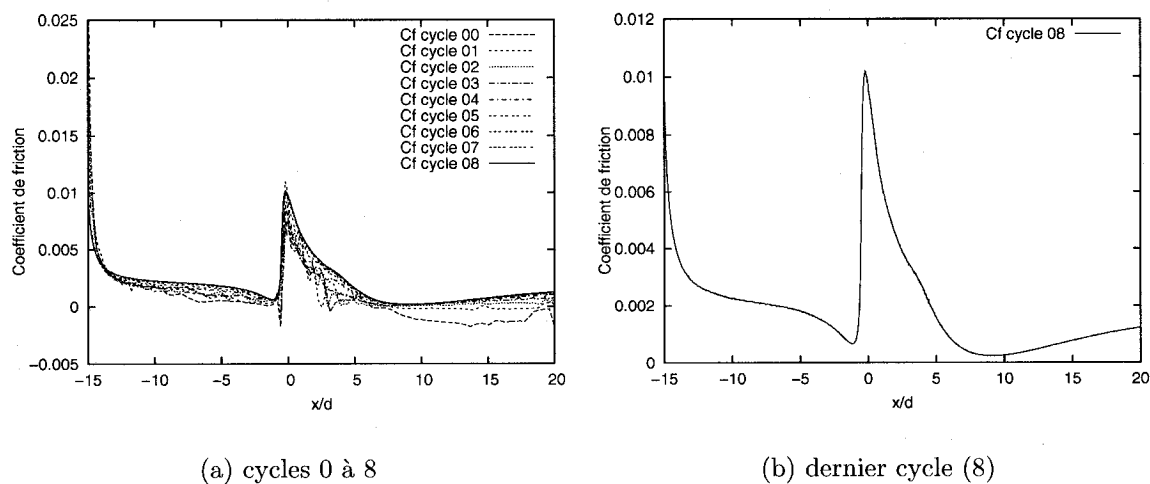


FIG. 6.18 Évolution du coefficient de friction sur la plaque au cours des cycles d'adaptation de maillage

De plus, on constate que le coefficient de friction prend ses valeurs maximales au bord d'attaque de la plaque et dans la région qui se trouve entre la plaque et le cylindre. En effet, ce phénomène s'explique par le fait que le fluide étant

accélération dans ces zones, les dérivées de la vitesse et l'énergie cinétique de turbulence augmentent entraînant un accroissement du coefficient de friction.

#### 6.2.4 Étude de la sensibilité Eulerienne du coefficient de friction

Dans ce paragraphe, nous étudions la sensibilité Eulerienne du coefficient de friction notée  $\partial Cf/\partial S$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial Cf}{\partial S} &= \frac{\partial}{\partial S} ([\tau \cdot \hat{\mathbf{n}}] \cdot \hat{\mathbf{t}}) = \frac{\partial \tau}{\partial S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{t}} + \tau \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial S} \cdot \hat{\mathbf{t}} + \tau \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}}{\partial S} \\ &= \frac{\partial \tau}{\partial S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{t}} \end{aligned} \quad (6.7)$$

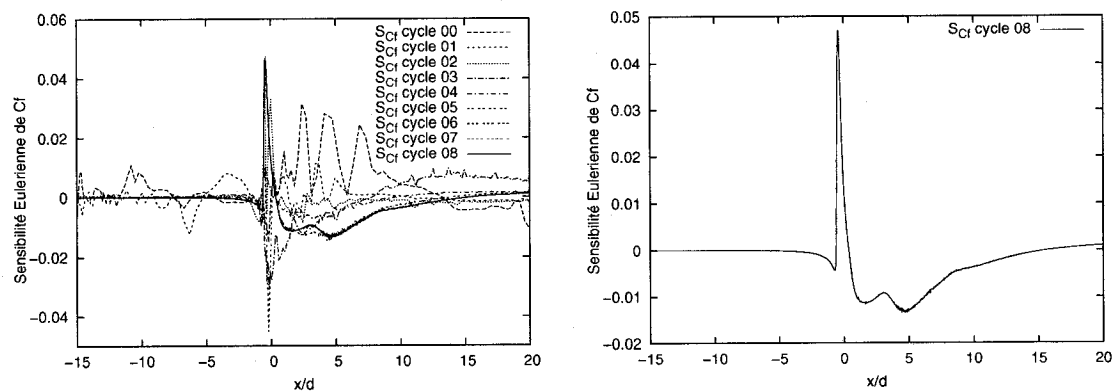
Les sensibilités des quantités géométriques  $\partial \hat{\mathbf{n}}/\partial S$  et  $\partial \hat{\mathbf{t}}/\partial S$  sont nulles.

La figure 6.19 représente l'évolution de la sensibilité Eulerienne de  $Cf$  le long de la plaque au cours du processus de raffinement de maillage.

Comme nous pouvons le constater, les valeurs de  $\partial Cf/\partial S$  convergent au cours des cycles d'adaptation. Pour les premiers cycles, nous observons de fortes oscillations numériques qui sont dues au manque de précision des gradients apparaissant dans les conditions limites des sensibilités à la paroi. Pour des maillages grossiers, la technique de reconstruction des dérivées à la paroi utilise une série de Taylor d'ordre 6 sur 8 couches d'éléments. Sur des maillages initiaux, les séries de Taylor ne sont pas localisées ce qui entraîne de fortes oscillations et un manque de précision. Sur des maillages très fins, les éléments sont si petits que le support de 8 couches d'éléments est très petit et conduit à un bon comportement des séries de Taylor. Seules de petites oscillations sont observées en aval du cylindre pour  $1 \leq x/D \leq 6$ .

L'analyse physique de l'évolution de  $\partial Cf/\partial S$  le long de la plaque est très pertinente. En effet, nous remarquons que la sensibilité de  $Cf$  subit de forte variation

à proximité de l'obstacle tant en amont qu'en aval, là où l'écoulement présente les plus forts gradients et où la variation du paramètre de forme  $S$  possède l'impact le plus important. En dehors de ces zones, c'est à dire pour  $-15 \leq x/D \leq -4$ , on remarque que la sensibilité de  $Cf$  est, à toutes fins utiles, nulle. En effet, l'abaissement du cylindre n'a quasiment pas d'effet sur le comportement de l'écoulement dans cette région.



(a) cycles 0 à 8

(b) dernier cycle (8)

FIG. 6.19 Évolution de la sensibilité Eulerienne du coefficient de friction sur la plaque au cours des cycles d'adaptation de maillage

Le comportement de la sensibilité du coefficient de friction sur la plaque permet de vérifier, dans un premier temps, le bon fonctionnement du solveur quant à la véracité des résultats pour le calcul de sensibilités sur des géométries plus complexes. Cette étape étant complétée, nous pouvons utiliser les sensibilités à des fins pratiques. La section suivante développe l'utilisation des sensibilités dans le calcul d'incertitude.

### 6.3 Analyse d'incertitude

Dans tout processus expérimental, l'interprétation de données nous amène à nous demander quel est le degré de justesse de l'information. Ceci nous conduit à parler d'analyse d'incertitude qui permettra d'estimer le degré d'erreur expérimentale due, par exemple, à la manipulation humaine, au degré de précision des appareils de mesures etc... L'analyse d'incertitude est un outil puissant notamment dans le design de dispositifs expérimentaux. Dans notre cas, nous allons étudier de quelle manière une incertitude sur la distance séparant le cylindre de la plaque peut affecter le coefficient de friction le long de la plaque, les coefficients de traînées et de portance ainsi que les composantes de la vitesse et celles du tenseur des contraintes de Reynolds.

#### 6.3.1 Analyse d'incertitude sur le coefficient de friction

Dans un premier temps, nous considérons l'incertitude sur le coefficient de friction  $C_f$  résultant d'une incertitude de 1, 3, 5 et 7% sur la valeur nominale de la distance  $S/D$ .

D'après Coleman et Steele <sup>[6]</sup>, l'incertitude sur  $C_f$  se note  $\delta C_f$  et s'exprime de la manière suivante :

$$\delta C_f = \frac{\partial C_f}{\partial A} \delta A \quad (6.8)$$

où  $\partial C_f / \partial A$  est appelé coefficient de sensibilité absolue et  $A$  sont les paramètres affectés d'une incertitude. Dans notre cas  $A = S$  et le coefficient de sensibilité absolue sera la sensibilité Eulerienne de  $C_f$ .

L'incertitude sur la distance  $S/D$  est fonction de sa valeur nominale. Ainsi nous

prendrons successivement comme incertitude sur  $S/D$  les valeurs suivantes :

$$\delta S = 0.01S_0/D \quad ; \quad \delta S = 0.03S_0/D \quad ; \quad \delta S = 0.05S_0/D \quad ; \quad \delta S = 0.07S_0/D \quad (6.9)$$

où  $S_0/D = 0.25$ .

La figure 6.20 représente le coefficient de friction (courbe pleine) ainsi que les incertitudes sur  $Cf$  (courbe en pointillés) engendrées par des incertitudes de 1, 3, 5 et 7% sur la valeur nominale de  $S/D$ . L'incertitude sur  $Cf$  est la zone délimitée par les courbes  $Cf \pm \delta Cf$ .

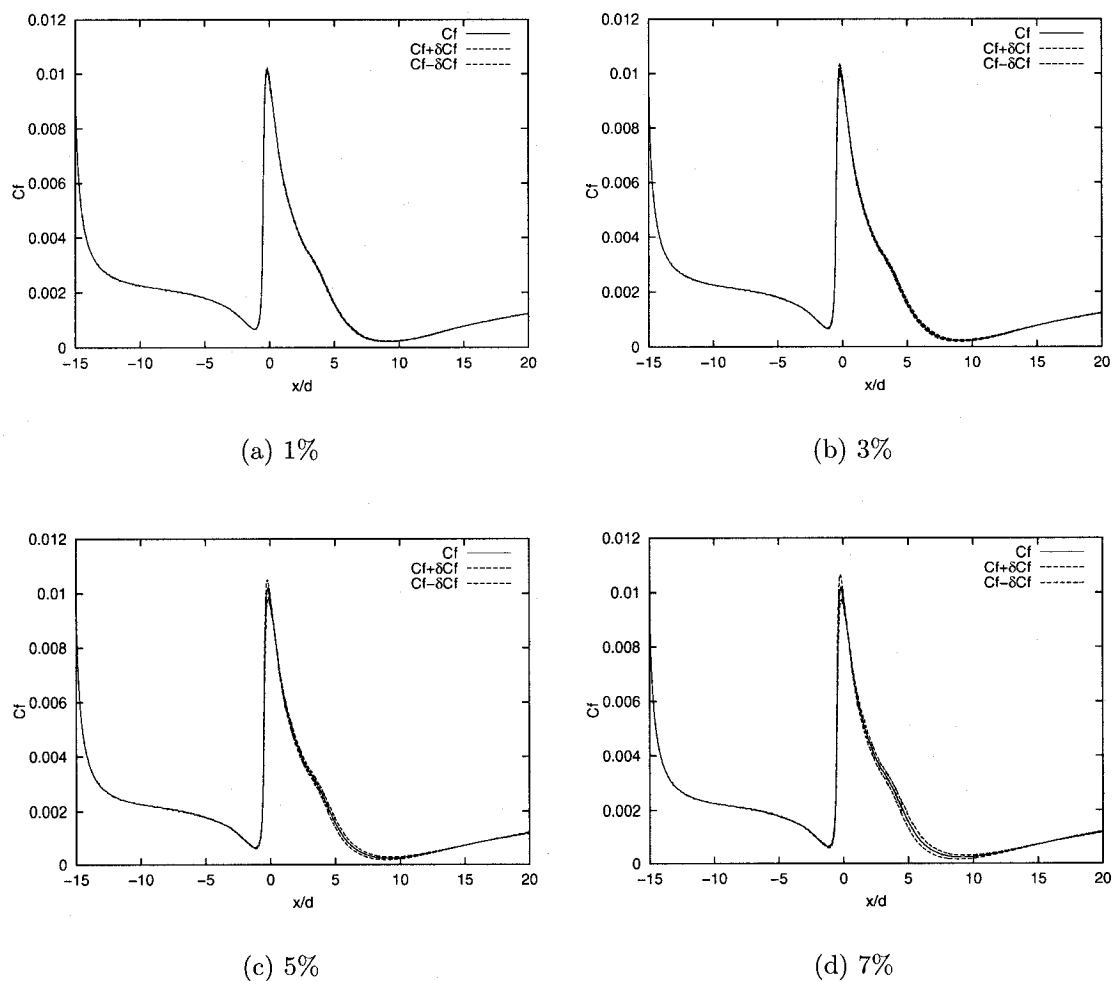


FIG. 6.20 Incertitude sur  $Cf$  pour des perturbations de  $S/D$  de 1, 3, 5 et 7%

Comme le montre la figure 6.20, on constate que l'incertitude est maximale au niveau du côté du cylindre faisant face à l'écoulement ainsi que dans la région directement en aval de l'obstacle. Ces résultats étaient fortement prévisibles au vue de l'analyse de sensibilité du coefficient de friction. En effet, à la section précédente, nous avons constaté que  $s_{Cf}$  atteignait son maximum en  $x = -0.4099$ . L'incertitude étant une fonction explicite de la sensibilité, les résultats sont tout à fait logiques.

À des fins expérimentales, on peut conclure que l'incertitude sur  $Cf$  est quasiment négligeable pour une incertitude de 1% sur  $S/D$  et qu'elle devient notable à partir d'une incertitude de 3%. Au-dessus de 7%, l'incertitude devient très importante. En effet, la valeur de l'incertitude maximale sur  $Cf$  atteint 10% de la valeur de  $Cf$  elle-même, ce qui implique que la plage totale d'incertitude est de 20% de la valeur maximale du coefficient de friction sur cette partie de la plaque.

### 6.3.2 Analyse d'incertitude sur $C_D$ et $C_L$

Nous considérons maintenant l'incertitude sur les coefficients de traînée et de portance du cylindre, respectivement  $C_D$  et  $C_L$ , résultant d'une incertitude sur la distance  $S/D$  de 1, 3, 5 et 7%. Contrairement à la plaque, la position du cylindre dépend du paramètre de forme  $S$ , il faut alors utiliser la sensibilité Lagrangienne dans le calcul d'incertitude. En effet, la sensibilité Lagrangienne reflète la dérivée par rapport au paramètre en suivant la position de la frontière. Les sensibilités de  $C_D$  et  $C_L$  s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{D}{DS} \begin{Bmatrix} C_D \\ C_L \end{Bmatrix} &= \frac{1}{\rho U_0^2 L} \int_{\Gamma_w} \frac{D}{DS} (\sigma \cdot \hat{\mathbf{n}}) d\Gamma \\ &= \frac{1}{\rho U_0^2 L} \int_{\Gamma_w} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial S} + \nabla \sigma \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\rho U_0^2 L} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial \sigma}{\partial S} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma}_{\text{Sensibilités Euleriennes}} + \underbrace{\frac{1}{\rho U_0^2 L} \int_{\Gamma_w} \nabla \sigma \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial S} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma}_{\text{Terme de transpiration}} \quad (6.10)$$

Les incertitudes sur  $C_D$  et  $C_L$  sont notées de la manière suivante :

$$\delta C_D = \frac{DC_D}{DS} \delta S \quad ; \quad \delta C_L = \frac{DC_L}{DS} \delta S \quad (6.11)$$

Les incertitudes sur la distance  $S/D$  s'expriment de la même manière que celles vues au paragraphe précédent.

Le tableau 6.2 ci-dessous récapitulent les valeurs de  $C_D$  et  $C_L$  ainsi que leurs sensibilités Lagrangiennes pour le cylindre avec  $S/D = S_0/D = 0.25$  :

| $C_D$                    | $C_L$                    | $s_{C_D}$                 | $s_{C_L}$                |
|--------------------------|--------------------------|---------------------------|--------------------------|
| $7.68151 \times 10^{-1}$ | $3.01662 \times 10^{-2}$ | $-9.06854 \times 10^{-1}$ | $9.00771 \times 10^{-1}$ |

TAB. 6.2 Valeurs de  $C_D$  et  $C_L$  et de leurs sensibilités

Le tableau 6.3 présente les diverses valeurs des incertitudes sur les coefficients de traînée et de portance résultants de différentes incertitudes sur le paramètre  $S$ .

| $\delta S$   | $\delta C_D$               | $\frac{ \delta C_D }{C_D}$ | $\delta C_L$               | $\frac{ \delta C_L }{C_L}$ |
|--------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $0.01 S_0/D$ | $-2.267135 \times 10^{-3}$ | 0.295%                     | $2.2519275 \times 10^{-3}$ | 7.465%                     |
| $0.03 S_0/D$ | $-6.801405 \times 10^{-3}$ | 0.885%                     | $6.7557825 \times 10^{-3}$ | 22.395%                    |
| $0.05 S_0/D$ | $-1.133568 \times 10^{-2}$ | 1.476%                     | $1.1259637 \times 10^{-2}$ | 37.325%                    |
| $0.07 S_0/D$ | $-1.586995 \times 10^{-2}$ | 2.065%                     | $1.5763492 \times 10^{-2}$ | 52.255%                    |

TAB. 6.3 Incertitudes sur  $C_D$  et  $C_L$

Pour le coefficient de traînée, nous pouvons constaté qu'une incertitude de 1%

n'entraîne qu'une très faible incertitude sur  $C_D$ . On remarque également que pour une incertitude de 7%, les conséquences sont relativement faibles (2.065% de la valeur de  $C_D$ ). En revanche, pour le coefficient de portance, les résultats sont radicalement différents. On remarque qu'une incertitude de 7% sur  $S/D$  engendre une incertitude de plus de 52% sur la valeur totale du coefficient de portance, ce qui est considérable. Ce résultat était prévisible puisque  $C_D/C_L = 25$ , tout en observant des sensibilités de valeurs absolues équivalentes. On peut alors en déduire qu'une incertitude sur la position du cylindre aura beaucoup plus d'impact sur la portance que sur la traînée.

### 6.3.3 Analyse d'incertitude sur les composantes de vitesse et des composantes du tenseur de Reynolds

Dans cette sous-section, nous effectuons une analyse d'incertitude sur les profils des composantes de vitesse et des composantes du tenseur des contraintes de Reynolds. Les figures 6.21 et 6.22 présentent les incertitudes sur  $u$  et  $v$  en  $x/D = 1$  pour des incertitudes sur la valeur nominale  $S_0/D$  de 5 et 10%.

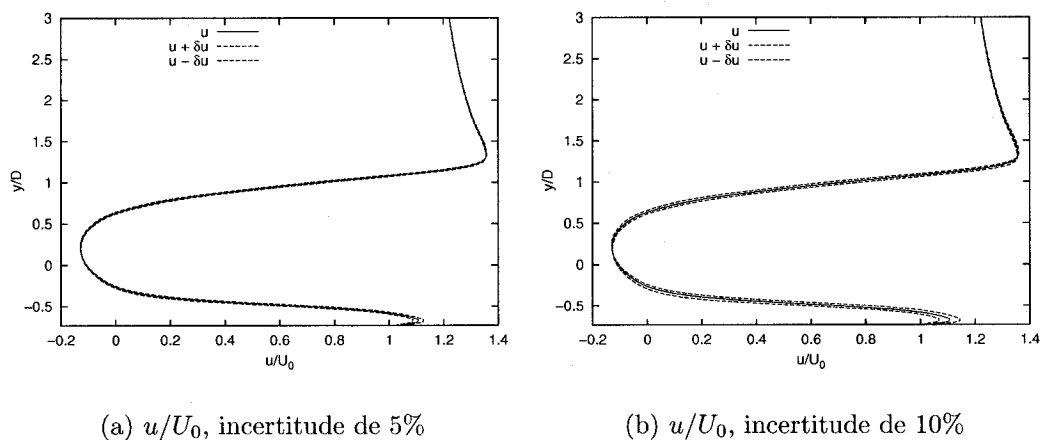


FIG. 6.21 Incertitude sur les profils vitesse  $u$  en  $x/D = 1$

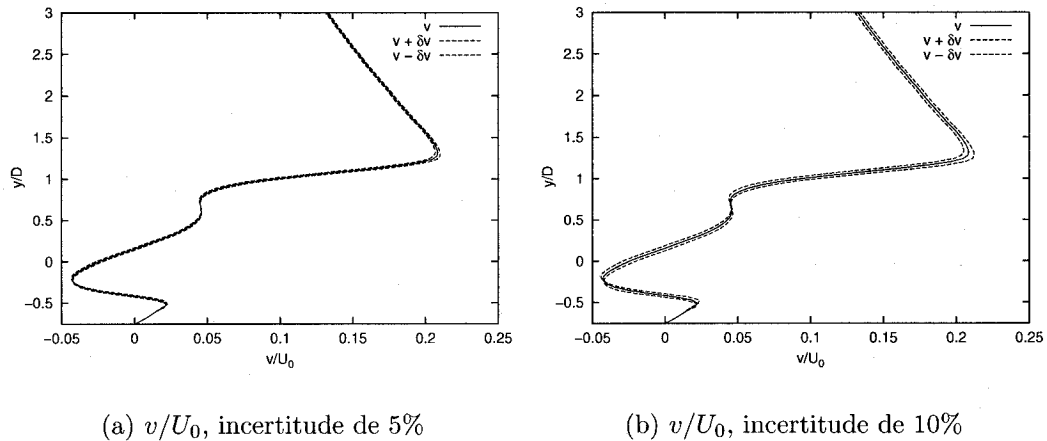


FIG. 6.22 Incertitude sur les profils vitesse  $v$  en  $x/D = 1$

Les résultats montrent qu'une incertitude de 5% sur  $S_0/D$  n'a pas beaucoup de répercussion sur la composante horizontale de la vitesse excepté dans la région proche paroi où l'incertitude est maximale. Ceci est dû à la force du jet issu du fossé entre le cylindre et la plaque. Cette zone présente de forts gradients de vitesse. Pour une incertitude 10%, la zone d'incertitude s'amplifie pour l'ensemble des valeurs avec un maximum atteint près de la paroi. Pour la composante de vitesse verticale, on remarque également qu'une incertitude de 5% sur  $S_0/D$  entraîne une faible incertitude sur  $v$ . En revanche, contrairement à la composante  $u$ , le maximum d'incertitude n'est pas atteint à la paroi, mais au niveau de la couche cisailée. L'incertitude est, en effet, minimale au niveau de la paroi. Pour une incertitude de 10%, le phénomène s'accroît.

Les figures 6.23, 6.24 et 6.25 représentent les incertitudes sur les composantes du tenseur des contraintes de Reynolds résultant d'une incertitude de 5 et 10% sur  $S_0/D$ .

Nous remarquons qu'une incertitude de 5% a peu d'effet sur les composantes du tenseur de Reynolds et plus spécialement pour la composante  $-\overline{\rho u'v'}$ . La zone

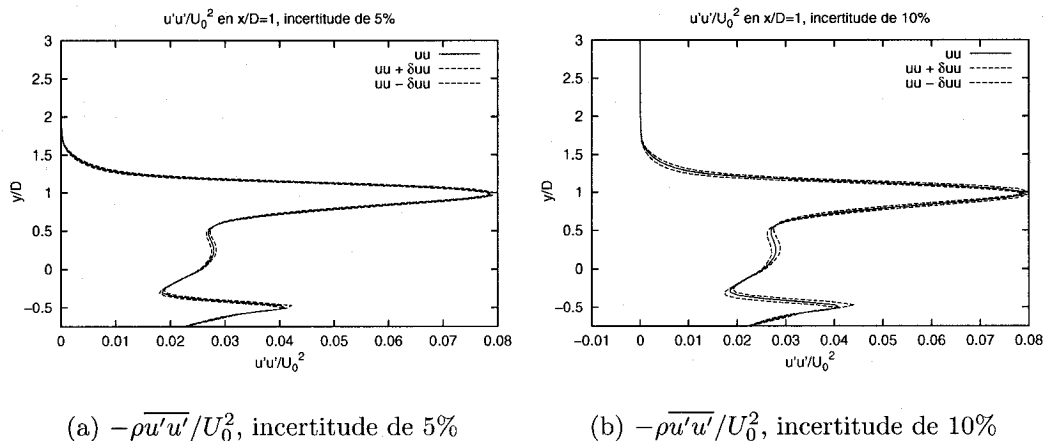


FIG. 6.23 Incertitude sur les profils des composantes du tenseur de Reynolds en  $x/D = 1$

où l'on observe une incertitude maximale correspond à la région où se situe le cylindre. En  $x/D = 1$ , cette région correspond à la zone de recirculation. Cette tendance se confirme pour une incertitude de 10%. Pour des valeurs de  $y/D$  telles que  $-0.5 \leq y/D \leq 0.5$ , l'incertitude est maximale.

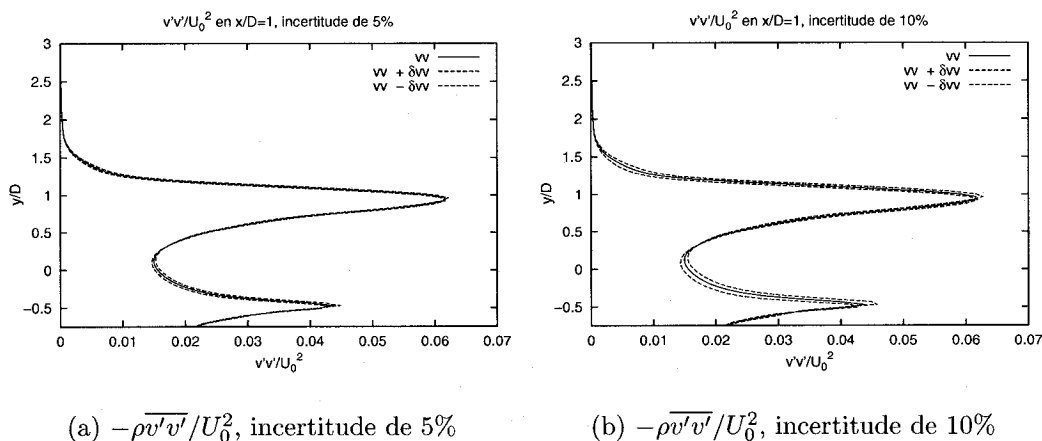


FIG. 6.24 Incertitude sur les profils des composantes du tenseur de Reynolds en  $x/D = 1$

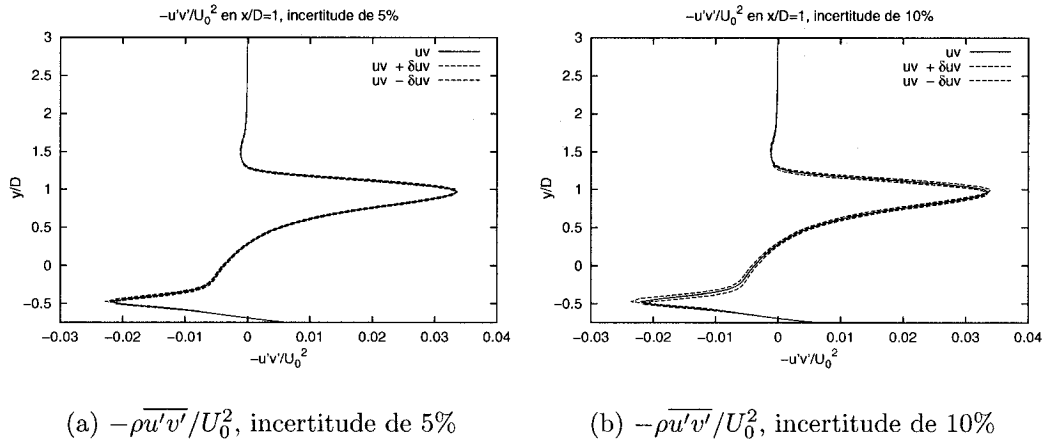


FIG. 6.25 Incertitude sur les profils des composantes du tenseur de Reynolds en  $x/D = 1$

#### 6.4 Calculs de solutions voisines

Le calcul rapides de solutions voisines constitue également un des grands atouts de l'utilisation des sensibilités. En effet, à l'aide d'un développement de Taylor d'ordre 1, il est possible d'estimer la solution de l'écoulement pour une petite perturbation du paramètre de sensibilité. Le développement de Taylor d'ordre 1 dans l'espace du paramètre  $S$  s'écrit de la manière suivante :

$$\phi(x, y; S + \Delta S) = \phi(x, y) + \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial S}}_{s_\phi^S} \Delta S \quad \text{où } \phi \text{ est une variable quelconque} \quad (6.12)$$

Pour illustrer ces propos, la figure 6.26 représente les isolignes de la composante de vitesse horizontale à proximité du cylindre pour des extrapolation de 5 et 10%. La relation (6.12) devient alors :

$$u(x, y; S + \Delta S) = u(x, y; S) + \frac{\partial u}{\partial S} \Delta S \quad (6.13)$$

où  $\Delta S$  prend successivement les valeurs suivantes :

$$\Delta S = 0.05S/D; \quad 0.1S/D \quad (6.14)$$

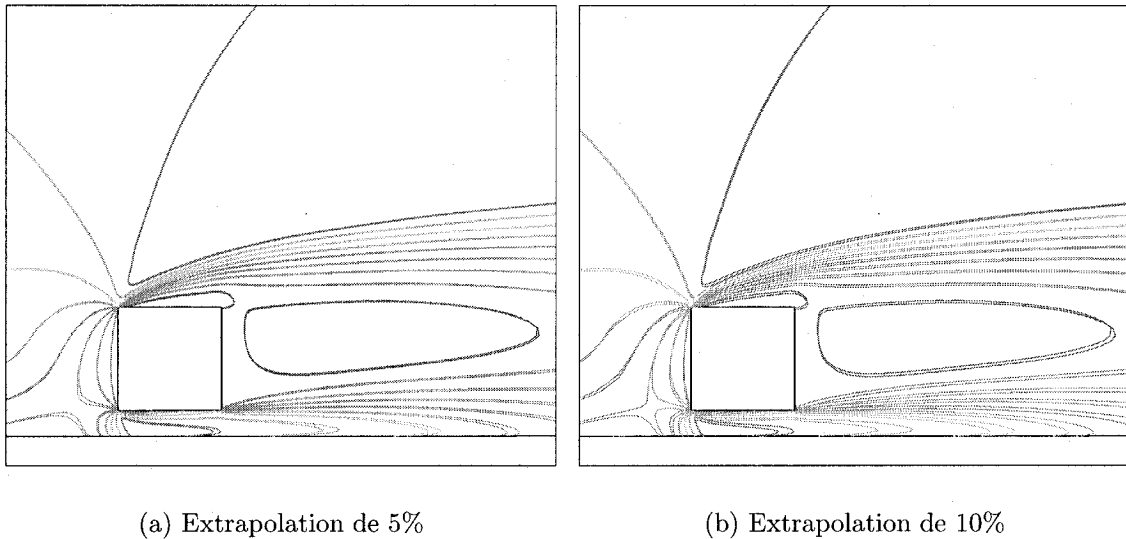


FIG. 6.26 Isolignes de  $u$  représentant les solutions initiale et extrapolée

La figure 6.26 représente la superposition des isolignes de  $u$  pour les solutions initiale et extrapolée. On remarque ainsi, dans les deux cas, un décalage des isolignes de la solution nominale et de la solution extrapolée; décalage qui augmente avec l'ampleur de la variation de  $S/D$ . Cette première étape de vérification montre que l'extrapolation a du sens, et que les isolignes se déplacent bien avec le mouvement du cylindre permettant de vérifier ainsi que les sensibilités sont calculées avec précision.

Les prochaines illustrations du calcul d'écoulements voisins concernent le coefficient de friction évalué sur la plaque, les coefficients de traînée et de portance du cylindre ainsi que les composantes de la vitesse et celles du tenseur des contraintes de Reynolds.

### 6.4.1 Calcul de solutions voisines pour $Cf$

Comme nous l'avons précisé plus haut, cette sous-section propose d'évaluer le coefficient de friction sur la plaque en effectuant des extrapolations de 5 et 10% dans l'espace du paramètre  $S$  selon le développement en série de Taylor d'ordre 1 suivant :

$$Cf(x; S + \Delta S) = Cf(x) + \frac{\partial Cf}{\partial S} \Delta S \quad (6.15)$$

L'utilisation d'une dérivée partielle ou Eulerienne dans le développement en série de Taylor est due au fait que nous considérons une quantité évaluée sur une frontière dont la géométrie est indépendante de  $S$ . En revanche, pour le cylindre, nous utiliserons une dérivée matérielle ou Lagrangienne.

La figure 6.27 représente la solution initiale à  $S/D = 0.25$ , les solutions extrapolées à 5 et 10% à partir de la solution initiale ainsi que les solutions recalculées correspondant à des diminutions de la distance entre l'obstacle et la plaque de 5 et 10%. Comme nous pouvons le constater, les solutions extrapolées et recalculées sont parfaitement superposées ce qui nous amène aux constats suivants : D'une part, l'évaluation numérique des sensibilités est très fidèle et permet de calculer avec justesse des écoulements voisins. D'autre part, la variation de la distance à la plaque  $\Delta S$  est suffisamment petite pour assurer que le développement en série de Taylor dans l'espace du paramètre reste approprié pour exprimer la dépendance des variables de l'écoulement au paramètre  $S$ .

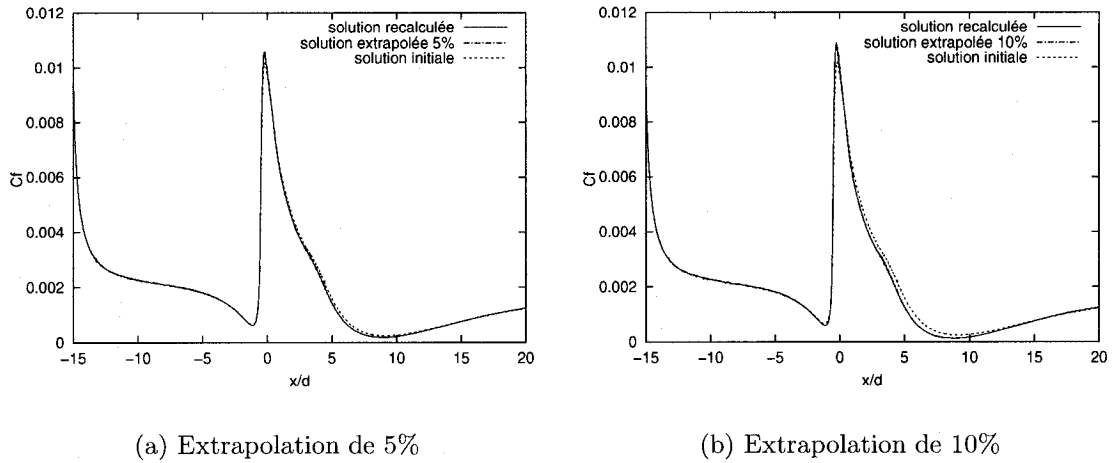


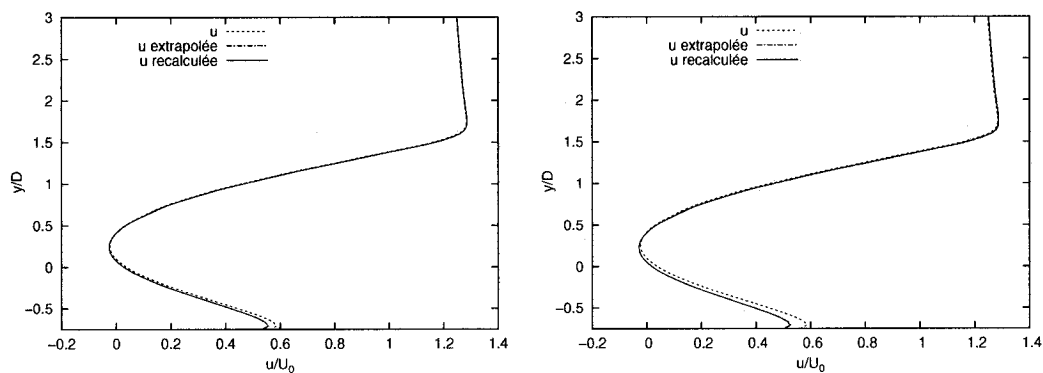
FIG. 6.27 Extrapolation de  $Cf$  pour des perturbations de  $S/D$  de 5 et 10%

#### 6.4.2 Calcul de solutions voisines pour les composantes de vitesse et du tenseur de Reynolds

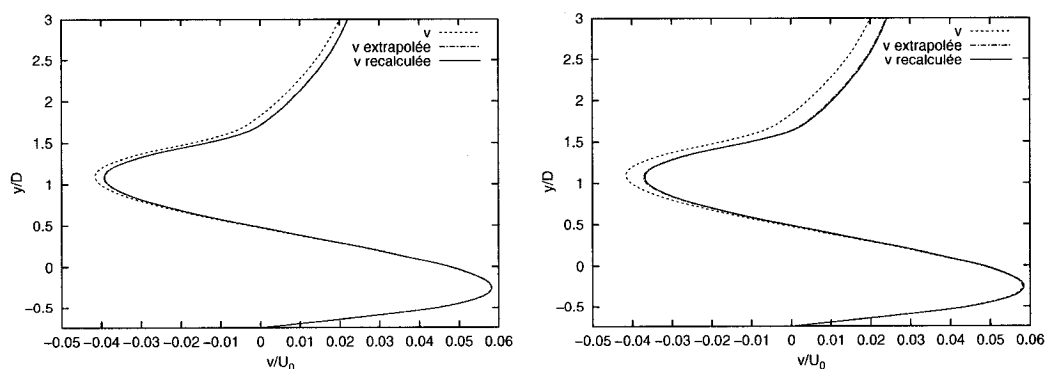
Dans ce paragraphe, nous traitons le calcul de solutions voisines pour les composantes de vitesse horizontale et verticale, ainsi que pour les composantes du tenseur de contraintes de Reynolds en  $x/D = 4$ .

Les figures 6.28 et 6.29 présentent les solutions extrapolées à 5 et 10% à partir des solutions nominales, les solutions nominales et les solutions recalculées des composantes de la vitesse en  $x/D = 4$ .

Nous pouvons faire deux remarques à propos des résultats obtenus. La première est que les extrapolations de 5 et 10% à partir des solutions initiales donnent de très bons résultats. En effet, les profils des solutions extrapolées et recalculées sont parfaitement superposées pour les deux composantes de vitesse. Le développement en série de Taylor à l'ordre 1 se comporte donc très bien même dans le cas d'une variation relativement forte de  $S/D$ . Ces résultats démontrent ainsi que le calcul des sensibilités est efficace.

(a)  $u/U_0$ , extrapolation de 5%(b)  $u/U_0$ , extrapolation de 10%FIG. 6.28 Extrapolation de la vitesse horizontale  $u$  en  $x/D = 4$ 

La seconde remarque est que le fait de réduire la distance entre le cylindre et la plaque n'affecte pas les deux composantes de la vitesse dans les mêmes régions du domaine. Pour la vitesse  $u$ , on remarque qu'une diminution de  $S/D$  a un impact dans la région située à proximité de la paroi. On constate une diminution de  $u$  près de la plaque. Plus l'on s'éloigne de la plaque, plus l'effet est minime. En revanche, nous observons le contraire pour la vitesse verticale  $v$ . En effet, nous observons une différence entre les profils initial et extrapolé pour  $y/D \geq 1$ .

(a)  $v/U_0$ , extrapolation de 5%(b)  $v/U_0$ , extrapolation de 10%FIG. 6.29 Extrapolation de la vitesse verticale  $v$  en  $x/D = 4$

Les figures 6.30, 6.31 et 6.32 présentent les solutions extrapolées à 5 et 10% à partir des solutions nominales, les solutions nominales et les solutions recalculées des composantes du tenseur des contraintes de Reynolds en  $x/D = 4$ .

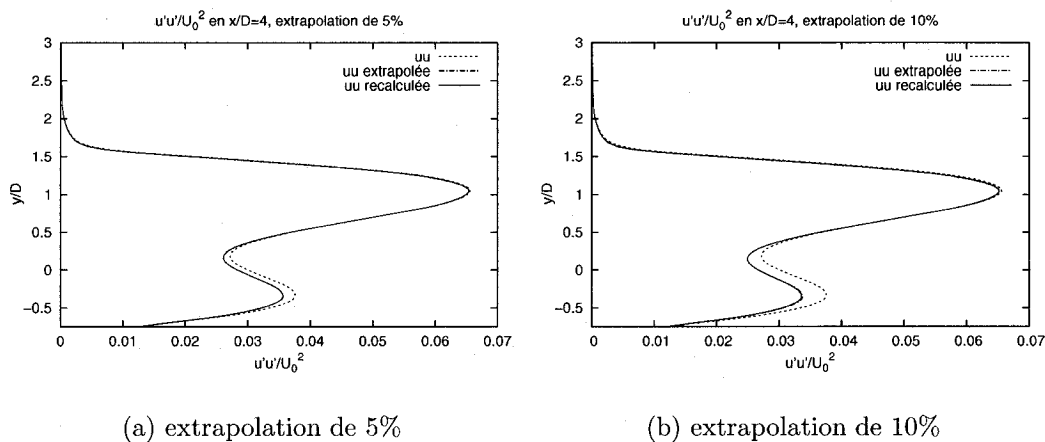


FIG. 6.30 Extrapolation sur le profil de la composante  $-\overline{\rho u'u'}/U_0^2$  du tenseur de Reynolds en  $x/D = 4$

On constate que pour l'ensemble des composantes du tenseur de Reynolds, les résultats sont également très bons pour les deux extrapolations considérées. De plus, nous remarquons aisément que la zone où la variation de  $S/D$  affecte le plus l'écoulement se trouve en  $-0.5 \leq y/D \leq 0.5$ , c'est à dire exactement au niveau de l'obstacle. Les composantes  $-\overline{\rho u'u'}$  et  $-\overline{\rho v'v'}$  ont tendance à devenir plus faible dans cette région tandis que nous constatons l'inverse pour la composante  $-\overline{\rho u'v'}$ . Dans le reste du domaine, la variation de  $S/D$  ne perturbe quasiment pas l'écoulement.

#### 6.4.3 Calcul de solutions voisines pour $C_D$ et $C_L$

À présent, nous proposons de calculer des solutions voisines pour les coefficients  $C_D$  et  $C_L$  en réalisant des extrapolations de 2, 5 et 10% à partir de la solution initiale (configuration nominale). Les résultats sont donnés dans le tableau 6.4. Comme

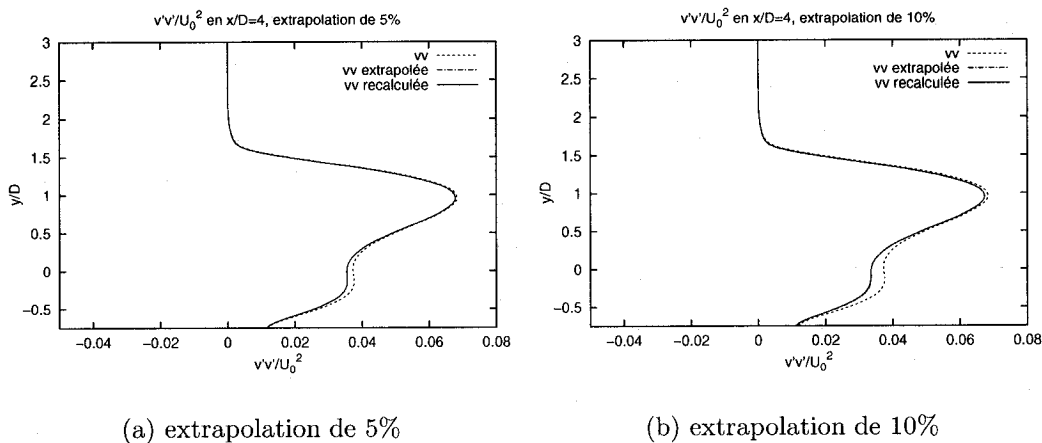


FIG. 6.31 Extrapolation sur le profil de la composante  $-\overline{\rho v'v'}/U_0^2$  du tenseur de Reynolds en  $x/D = 4$

nous l'avons précisé dans la sous-section précédente, nous utilisons dans le cas présent des sensibilités Lagrangiennes pour l'extrapolation étant donné que nous évaluons des quantités sur des frontières dépendantes d'une variation du paramètre  $S$ .

| Configuration                           | Coeff. | Initiale                    | Extrapolée                |
|---|--------|-----------------------------|---------------------------|
|   |        | (% variation sol. initiale) | (% Diff. sol. recalculée) |
| $(S/D = 0.25)$                          | $C_D$  | 0.768151                    |                           |
|   | $C_L$  | 0.0301662                   |                           |
| Perturb. 2%<br>$(\Delta S/D = -0.005)$  | $C_D$  | 0.767047 (0.14%)            | 0.763662 (0.44%)          |
|   | $C_L$  | 0.0320236 (6.1%)            | 0.0346700 (8.2%)          |
| Perturb. 5%<br>$(\Delta S/D = -0.0125)$ | $C_D$  | 0.765321 (0.37%)            | 0.756815 (1.1%)           |
|   | $C_L$  | 0.0348361 (15.4%)           | 0.0414258 (18.9%)         |
| Perturb. 10%<br>$(\Delta S/D = -0.025)$ | $C_D$  | 0.762281 (0.76%)            | 0.745480 (2.2%)           |
|   | $C_L$  | 0.0395665 (31.2%)           | 0.0526855 (33.1%)         |

TAB. 6.4 Extrapolation à partir de la solution initiale de  $C_D$  et  $C_L$

En premier lieu, analysons les résultats relatifs au coefficient de traînée  $C_D$ . En comparant les solutions recalculées pour des variations de 2, 5 et 10% de  $S_0/D$  par rapport à la solution initiale, nous constatons que l'impact des perturbations sur  $C_D$  est assez faible. En effet, une perturbation de 10% de  $S/D$  n'entraîne qu'une

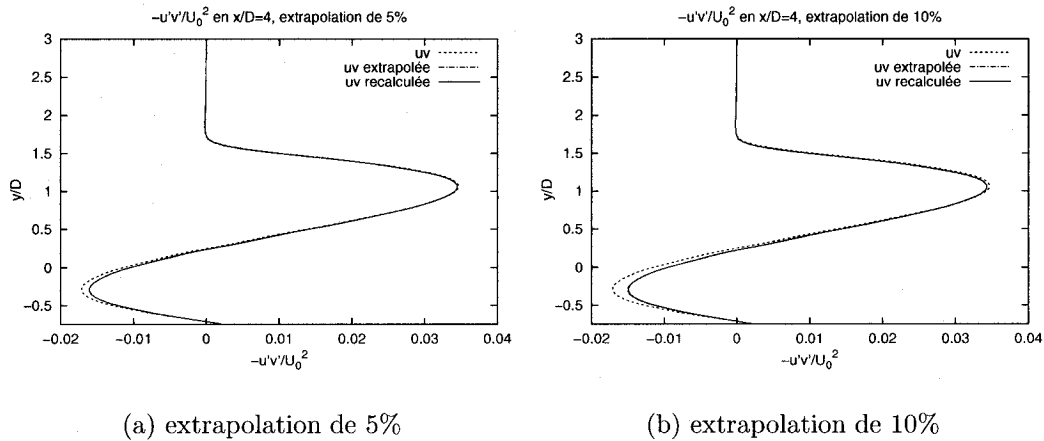


FIG. 6.32 Extrapolation sur le profil de la composante  $-\overline{\rho u'v'}/U_0^2$  du tenseur de Reynolds en  $x/D = 4$

variation de 0.76% sur le coefficient de traînée. Pour les solutions extrapolées, on peut constater que le coefficient de traînée est sous-évalué dans l'ensemble mais que les différences avec les solutions recalculées restent raisonnables (2.2% pour une perturbation de 10% de  $S/D$ ).

Pour le coefficient de portance, l'impact des perturbations sur la distance entre la plaque et le cylindre est beaucoup plus important puisqu'une perturbation de 10% de  $S/D$  entraîne une différence de 31.2% par rapport à la configuration initiale. Ceci explique, en partie, les résultats des extrapolations sur  $C_D$ . En effet, pour une perturbation de 2%, la différence avec la solution recalculée est déjà élevée (8.2%). Dans le cas où  $\Delta S/D = -0.025$ , les résultats ne sont vraiment plus exploitables.

Les principales raisons quant à la faible qualité des résultats pour le coefficient de portance sont les suivantes :

- La dépendance de  $C_L$  sur  $S$  est non-linéaire de sorte que l'extrapolation de Taylor à l'ordre 1 n'est valable que pour de faibles variations de  $S$ . Un remède à ce problème serait d'utiliser des sensibilités d'ordre deux.

- La deuxième raison porte sur la précision des gradients évalués à la frontière. En effet, la sensibilité Lagrangienne utilisée pour l'extrapolation fait apparaître un terme de transpiration contenant les dérivées premières et secondes de l'écoulement. Or, la précision sur ces gradients semble insuffisante pour pouvoir garantir de bons résultats lors de l'extrapolation.

Nous pouvons donc conclure que le calcul de solutions voisines par le biais d'une extrapolation linéaire donne de bons résultats lors de l'utilisation de sensibilités Euleriennes comme c'est le cas pour l'étude du coefficient de friction sur la plaque. Dans le cas, du coefficient de traînée, les résultats sont bons mais sont limités par la valeur de la perturbation choisie. Le calcul de solution voisine demeure alors exploitable dans la zone de linéarité de la réponse de l'écoulement face à une variation du paramètre de forme. Pour le coefficient de portance, et ce pour les raisons données ci-dessus, nous ne pouvons exploiter la méthode car nous sommes au-delà de la zone de linéarité. La difficulté d'obtenir des gradients suffisamment précis contribue aussi, et ce, de manière significative, à la pauvreté des résultats en ce qui concerne le coefficient de portance.

## CONCLUSION

Le but de ce projet était d'implanter dans un code d'éléments finis existant une Méthode des Équations de Sensibilité avec paramètre de forme pour le modèle de turbulence standard  $k - \epsilon$ . Nous avons, dans un premier temps, présenté les équations moyennes de Reynolds ainsi que les équations de transport du modèle de turbulence  $k - \epsilon$  permettant de modéliser un écoulement en régime turbulent. Les écoulements turbulents à proximité de parois solides présentent une difficulté particulière de modélisation étant donné la présence de forts gradients à la paroi. Pour palier à ce problème, nous avons utilisé le modèle de loi de paroi à deux échelles de vitesse.

Nous avons, par la suite, développé les équations de sensibilités de l'ensemble des équations modélisant l'écoulement ainsi que les conditions aux frontières pour les sensibilités. Le caractère original de ce projet réside dans l'application de la M.E.S avec paramètres de forme aux conditions aux frontières issues des lois de parois. L'utilisation de ce type de paramètre pose des difficultés supplémentaire. En effet, leur variation implique un mouvement de la frontière. La dépendance des variables de l'écoulement face au paramètre de forme s'exprime alors par l'apparition d'un terme de transpiration faisant apparaître les dérivées premières et secondes des variables de l'écoulement évaluées aux frontières. De la précision de ces gradients dépend l'évaluation précise des sensibilités.

L'étape suivante consista à vérifier l'implantation de la méthode dans un code d'éléments finis adaptatif. Pour cela, nous avons utilisé la Méthode des Solutions Manufacturées. Nous avons ainsi étudié la solution analytique d'une couche limite turbulente sur une plaque plane. Cette vérification nous a permis de démontrer la bonne implantation de la méthode dans le code, ainsi que le bon fonctionnement

du solveur et de l'estimateur d'erreur.

Par la suite, nous nous sommes penchés sur une application avec une géométrie plus complexe permettant de mettre en valeur les atouts de l'utilisation des sensibilités avec paramètres de forme. Le cas étudié simulait un écoulement d'air en régime turbulent sur un obstacle à proximité d'une plaque plane. La distance entre l'obstacle et la plaque constituait le paramètre étudié. Nous avons alors choisi d'étudier la réponse des variables de l'écoulement face à la variation négative de cette distance. Le calcul des sensibilités nous a permis d'effectuer une analyse d'incertitude sur le coefficient de friction de la plaque, les coefficients de traînée et de portance ainsi que les composantes horizontales et verticales de la vitesse et les composantes du tenseur des contraintes de Reynolds. Nous avons pu observer la justesse des résultats obtenus. La seconde utilisation des sensibilités mettait en valeur le calcul rapide de solutions voisines. Le but était de calculer des écoulements voisins pour différentes perturbations de la distance entre la plaque et le cylindre. Les résultats observés étaient de très bonne qualité. Cependant, nous avons pu constater les limites de cette application quant à l'utilisation d'une extrapolation linéaire et à la précision des gradients pour un écoulement aussi complexe. En effet, nous avons constaté que pour le coefficient de portance, le développement en série de Taylor à l'ordre 1 n'était pas adapté car on ne peut pas supposer que la réponse de  $C_D$  à la perturbation du paramètre  $S$  est linéaire. De plus, il est tout à fait probable qu'une précision insuffisante sur les dérivées premières et secondes des solutions de l'écoulement influent de manière importante sur la qualité des résultats étant donné que la sensibilité Lagrangienne, utilisée dans le calcul d'écoulement voisin pour  $C_D$ , est dépendante de ces gradients.

On pourrait imaginer plusieurs travaux et améliorations possibles dans la lignée de ce projet, notamment par l'application de la M.E.S à des écoulements turbulents instationnaires et l'utilisation de sensibilités d'ordre deux qui seraient bénéfiques

pour le calcul d'écoulement voisins. Il serait également intéressant d'étudier le rayon de courbure des arrondis de l'obstacle en tant que paramètre de forme. L'amélioration de la qualité des gradients obtenus sur les frontières permettrait d'augmenter considérablement le calcul des termes de transpiration qui constitue la principale difficulté de l'utilisation des paramètres de forme.

## RÉFÉRENCES

- [1] Borggaard, J. et Burns, J. (1997). A pde sensitivity equation method for optimal aerodynamic design. *J. Comput. Phys.*, **136**, 366–384.
- [2] Borggaard, J. et Pelletier, D. (1998). Observation in adaptive refinement strategies for optimal design. In Borggaard, J., Burns, J., Cliff, E., and Schreck, S., editors, *Computational Methods for Optimal Design and Control*, pages 59–76. Birkhäuser.
- [3] Borggaard, J. et Pelletier, D. (1998). Optimal shape design in forced convection using adaptive finite elements. In *36th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 98-0908.
- [4] A. N. Brooks et T. J. R. Hughes . (1982). Streamline upwind/ Petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **32**, 199–259.
- [5] Chabard, J. P. (1991). *Projet N3S de mécanique des fluides - Manuel théorique de la version 3*. Technical Report EDF HE-41/91.30B, Électricité de France.
- [6] H. W. Coleman et W. G. Steele . (1989). *Experimentation and Uncertainty Analysis for Engineers*. Wiley Interscience.
- [7] K. J. Craig et P. J. Venter . (1999). Optimization of the  $k - \epsilon$  coefficients for separation on a high-lift airfoil. In *37th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 99-0151.
- [8] Crouzeix, M. et Raviart, P. (1993). Conforming and nonconforming finite element methods for solving stationary Stokes equations. *R.A.I.R.O.*, **7(R-3)**, 33–76.

- [9] Dems, K. (1986). Sensitivity analysis in thermal problems-i : Variation of material parameters within a fixed domain. *Journal of Therm. Stresses*, **9**, 303–324.
- [10] Dems, K. (1987). Sensitivity analysis in thermal problems-ii : Structural shape variation. *J. Therm. Stresses*, **10**, 1–16.
- [11] Dowding, K. J. et Blackwell, B. F. (2001). Sensitivity analysis for nonlinear heat conduction. *Journal of Heat Transfer*, **123**.
- [12] R.Duvigneau et Pelletier, D. (2006). On accurate boundary conditions for a shape sensitivity equation method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **50**, 147–164.
- [13] Duvigneau, R. et Pelletier, D. (2004). On the accuracy of shape parameter boundary conditions in the sensitivity equation method. In *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 2005-0127.
- [14] Duvigneau, R., Pelletier, D., et Borggaard, J. (2006). An improved continuous sensitivity equation method for optimal shape design in mixed convection. *Numerical Heat Transfer part B : Fundamentals*, **50**(1), 1–24.
- [15] L. Eça., M. Hoekstra., A. H. et Pelletier, D. (2006). A manufactured solution for a two-dimensional steady wall-bounded incompressible turbulent flow. In *7th World Congress on Computational Mechanics, Accomplishments and Challenges in Verification and Validation*, Los Angeles, CA.
- [16] Edmond, P., Pelletier, D., Etienne, S., Hay, A., et Borggaard, J. (2006). Application of a sensitivity equation method to compressible subsonic impinging jets. In *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 2006-0909.
- [17] Etienne, S. et Pelletier, D. (2003). Adaptive solution of some steady state fluid-structures interaction problems. In *11th Annual Conference of the CFD Society of Canada*, Vancouver , BC.

- [18] Fadale, T. (1993). *Uncertainty Analysis usind Stochastic Finite Elements*. PhD thesis, University of Washington.
- [19] Fortin, A. et Garon, A. (2000). *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*. Ecole Polytechnique de Montréal, Montréal, QC.
- [20] Gunzburger, M. D. (1999). Sensitivities, adjoints and flow optimization. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **31**, 53–78.
- [21] Haug, E., Choi, K., et Komkov, V. (1986). *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. Academic Press.
- [22] Hino, T. (1999). Shape optimization of practical ship hull forms using Navier-Stokes analysis. In Piquet, J., editor, *Proceedings of the 7th International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics*. Ecole Centrale de Nantes.
- [23] Hughes, T. J. R. et Brooks, A. (1979). A multi-dimensional upwind scheme with no crosswind diffusion. *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, **73**, 19–35.
- [24] Hughes, T. J. R., Franca, L. P., et Hulbert, G. M. (1989). A new finite element formulation for computational fluid dynamics : VIII. the galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **73**, 173–189.
- [25] Ignat, L., Pelletier, D., et Ilinca, F. (1998). Adaptive computation of turbulent forced convection. *Numerical Heat Transfer, Part A*, **34**, 847–871.
- [26] Jameson, A., Martinelli, L., et Pierce, N. A. (1998). Optimum aerodynamic design using the Navier-Stokes equation. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, **10**, 213–237.
- [27] Joslin, R. D., Gunzburger, M. D., Erlebacher, R. A. N. G., et Hussaini, M. Y. (1997). Self-contained automated methodology for optimal flow control. *AIAA Journal*, **35**(5), 816–824.

- [28] Lacasse, D., Turgeon, É. et Pelletier, D. (2001). On the Judicious Use of the  $k - \epsilon$  Model, Wall Functions and Adaptivity. In *39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 2001-0882.
- [29] Launder, B. E. et Spalding, J. (1974). The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pages 269–289.
- [30] Newman, J., Taylor, A., Barnwell, R., Newman, P., et Hou, G.-W. (1999). Overview of sensitivity analysis and shape optimization for complex aerodynamic configuration. *J. Aicr.*, **36(1)**, 87–96.
- [31] Nielsen, E. J. et Anderson, W. K. (2002). Recent improvements in aerodynamic design optimization on unstructured meshes. *AIAA Journal*, **40(6)**, 1155–1163.
- [32] Pelletier, D. (1999). Adaptive finite element computations of complex flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **31**, 189–202.
- [33] Pelletier, D. et Ilinca, F. (1997). Adaptive remeshing for the  $k - \epsilon$  model of turbulence. *AIAA Journal*, **35(4)**, 640–646.
- [34] Schetz, J. (1993). *Boundary Layer Analysis*. Prentice Hall.
- [35] Stewart, D. (1998). *Numerical Methods for Accurate Computation of Design Sensitivities*. PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA.
- [36] Turgeon, É., Pelletier, D., et Borggaard, J. (2001). Application of a sensitivity equation method to the  $k - \epsilon$  model of turbulence. In *15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, Anaheim, CA. AIAA Paper 2001-2534.
- [37] Turgeon, É., Pelletier, D., et Borggaard, J. (2001). Computation of airfoil flow derivatives using a continuous sensitivity equation method. In *8th CASI Aerodynamics Symposium*, Toronto, Canada.
- [38] Turgeon, É., Pelletier, D., et Borggaard, J. (2001). A general continuous sensitivity equation formulation for the  $k - \epsilon$  model of turbulence. In *31st AIAA*

- Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, Anaheim, CA. AIAA Paper 2001-3000.
- [39] Turgeon, É., Pelletier, D., et Borggaard, J. (2001). Sensitivity and uncertainty analysis for variable property flows. In *39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 2001-0139.
- [40] Turgeon, É. (2001). *Méthode d'éléments finis adaptative pour la résolution des sensibilités d'écoulements*. PhD thesis, École Polytechnique de Montréal.
- [41] Turgeon, É., Pelletier, D., et Étienne, S. (2002). Sensitivity and uncertainty analysis for turbulent flows. In *40th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 2002-0985.
- [42] Wilcox, D. C. (1993). *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, La Canãda, CA.
- [43] Wu, K. et Martinuzzi, R. (1997). Experimental study of the turbulent wake flow behind a square cylinder near a wall. In *ASME Fluids and Engineering Division*, Vancouver, BC. No. FEDSM97-3151.
- [44] Zienkiewicz, O. C. et Zhu, J. Z. (1992). The superconvergent patch recovery and *a posteriori* error estimates. Part 1 : The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **33**, 1331–1364.

## ANNEXE I

## SOLUTION MANUFACTURÉE

I.1 Ecoulement :

I.1.1 Solution analytique des champs de l'écoulement

$$\begin{aligned}
 u &= \operatorname{erf}(\eta) \\
 v &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} (1 - e^{-\eta^2}) \\
 p &= 0.5\ln(2x - x^2 + 0.25)\ln(4y^3 - 3y^2 + 1.25) \\
 k &= k_{max}\eta_\nu^2 e^{-\eta_\nu^2} \\
 \epsilon &= 0.36 \frac{k_{max}^2}{\nu_{max}} e^{-\eta_\nu^2} \\
 \mu_t &= \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 \operatorname{erf}(\eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_\eta^\infty e^{-x^2/2} dx \\
 \eta &= \frac{\sigma y}{x} \\
 \eta_\nu &= \frac{\sigma_\nu y}{x}
 \end{aligned}$$

avec les constantes suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma &= 4.0 & \rho &= 1.0 & \nu &= 10^{-6} & \mu &= 10^{-6} \\ \sigma_\nu &= 10.0 & C_\mu &= 0.09 & k_{max} &= 0.01 & \nu_{max} &= 10^3 \nu\end{aligned}$$

### I.1.2 Les dérivées premières et secondes des variables de l'écoulement

$$\begin{aligned}u_{,x} &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma y}{x^2} e^{-\eta^2} \\ u_{,y} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma}{x} e^{-\eta^2} \\ u_{,xx} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\eta}{x^2} e^{-\eta^2} (1 - \eta^2) \\ u_{,yy} &= -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sigma}{x}\right)^2 \eta e^{-\eta^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_{,x} &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma y^2}{x^3} e^{-\eta^2} \\ v_{,y} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma y}{x^2} e^{-\eta^2} \\ v_{,xx} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma y^2}{x^4} e^{-\eta^2} (3 - 2\eta^2) \\ v_{,yy} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma}{x^2} e^{-\eta^2} (1 - 2\eta^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_{,x} &= \frac{(1-x)}{2x-x^2+0.25} \ln(4y^3-3y^2+1.25) \\ p_{,y} &= \frac{3y(2y-1)}{4y^3-3y^2+1.25} \ln(2x-x^2+0.25)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{,x} &= 2cst_k \frac{\eta_\nu^2}{x} e^{-\eta_\nu^2} (\eta_\nu^2 - 1) \\
k_{,y} &= -2cst_k \frac{\sigma_\nu}{x} \eta_\nu e^{-\eta_\nu^2} (\eta_\nu^2 - 1) \\
k_{,xx} &= 2cst_k \frac{\eta_\nu^2}{x^2} e^{-\eta_\nu^2} (2\eta_\nu^4 - 7\eta_\nu^2 + 3) \\
k_{,yy} &= 2cst_k \frac{\sigma_\nu^2}{x^2} e^{-\eta_\nu^2} (2\eta_\nu^4 - 5\eta_\nu^2 + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{,x} &= 2cst_\epsilon \frac{\eta_\nu^2}{x} e^{-\eta_\nu^2} \\
\epsilon_{,y} &= -2cst_\epsilon \frac{\sigma_\nu}{x} \eta_\nu e^{-\eta_\nu^2} \\
\epsilon_{,xx} &= 2cst_\epsilon \frac{\eta_\nu^2}{x^2} e^{-\eta_\nu^2} (2\eta_\nu^2 - 3) \\
\epsilon_{,yy} &= 2cst_\epsilon \frac{\sigma_\nu^2}{x^2} e^{-\eta_\nu^2} (2\eta_\nu^2 - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{t,x} &= \mu_t \left( \frac{2k_{,x}}{k} - \frac{\epsilon_{,x}}{\epsilon} \right) \\
\mu_{t,y} &= \mu_t \left( \frac{2k_{,y}}{k} - \frac{\epsilon_{,y}}{\epsilon} \right)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
cst_k &= k_{max} e^1 \\
cst_\epsilon &= 0.36 \frac{k_{max}^2}{\nu_{max}}
\end{aligned}$$

I.2 Sensibilités des variables de l'écoulement par rapport au paramètre  $y_0$  :

$$\begin{aligned}
 s_u &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma}{x} e^{-\eta^2} \\
 s_{u,x} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma}{x^2} e^{-\eta^2} (1 - 2\eta^2) \\
 s_{u,y} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma^2}{x^2} \eta e^{-\eta^2} \\
 s_{u,xx} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma}{x^3} e^{-\eta^2} (-2\eta^4 + 5\eta^2 - 1) \\
 s_{u,yy} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma^3}{x^3} e^{-\eta^2} (1 - 2\eta^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_v &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\eta}{x} e^{-\eta^2} \\
 s_{v,x} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\eta}{x^2} e^{-\eta^2} (1 - \eta^2) \\
 s_{v,y} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma}{x^2} e^{-\eta^2} (2\eta^2 - 1) \\
 s_{v,xx} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\eta}{x^3} e^{-\eta^2} (-2\eta^4 + 7\eta^2 - 3) \\
 s_{v,yy} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma^2}{x^3} \eta e^{-\eta^2} (3 - 2\eta^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_p &= \frac{3(y - y_0)(1 - 2(y - y_0))}{4(y - y_0)^3 - 3(y - y_0)^2 + 1.25} \ln(2x - x^2 + 0.25) \\
 s_{p,x} &= \frac{(1 - x)}{2x - x^2 + 0.25} \frac{6(y - y_0)(1 - 2(y - y_0))}{4(y - y_0)^3 - 3(y - y_0)^2 + 1.25} \\
 s_{p,y} &= \left[ \frac{24(y - y_0)^4 - 24(y - y_0)^3 + 9(y - y_0)^2 - 15(y - y_0) + 3.75}{(4(y - y_0)^3 - 3(y - y_0)^2 + 1.25)^2} \right] \\
 &\times \ln(2x - x^2 + 0.25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_k &= 2k_{max} \frac{\sigma_\nu}{x} \eta_\nu e^{(1-\eta_\nu^2)} (\eta_\nu^2 - 1) \\
s_{k,x} &= 4cst_k \frac{\sigma_\nu}{x^2} \eta_\nu e^{-\eta_\nu^2} (\eta_\nu^4 - 3\eta_\nu^2 + 1) \\
s_{k,y} &= 2cst_k \frac{\sigma_\nu^2}{x^2} e^{-\eta_\nu^2} (-2\eta_\nu^4 + 5\eta_\nu^2 - 1) \\
s_{k,xx} &= 2cst_k \frac{\sigma_\nu}{x^3} \eta_\nu e^{-\eta_\nu^2} (4\eta_\nu^6 - 26\eta_\nu^4 + 34\eta_\nu^2 - 6) \\
s_{k,yy} &= 2cst_k \frac{\sigma_\nu^3}{x^3} \eta_\nu e^{-\eta_\nu^2} (4\eta_\nu^4 - 18\eta_\nu^2 + 12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_\epsilon &= 0.72 \frac{k_{max}^2}{\nu_{max} x} \sigma_\nu \eta_\nu e^{(-\eta_\nu^2)} \\
s_{\epsilon,x} &= 4cst_\epsilon \frac{\sigma_\nu}{x^2} \eta_\nu e^{-\eta_\nu^2} (\eta_\nu^2 - 1) \\
s_{\epsilon,y} &= 2cst_\epsilon \frac{\sigma_\nu^2}{x^2} e^{-\eta_\nu^2} (1 - 2\eta_\nu^2) \\
s_{\epsilon,xx} &= 4cst_\epsilon \frac{\sigma_\nu}{x^3} \eta_\nu e^{-\eta_\nu^2} (2\eta_\nu^4 - 7\eta_\nu^2 + 3) \\
s_{\epsilon,yy} &= 4cst_\epsilon \frac{\sigma_\nu^3}{x^3} \eta_\nu e^{-\eta_\nu^2} (2\eta_\nu^2 - 3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{\mu t} &= \mu_t \left( \frac{2s_k}{k} - \frac{s_\epsilon}{\epsilon} \right) \\
s_{\mu t,x} &= \mu_{t,x} \left( \frac{2s_k}{k} - \frac{s_\epsilon}{\epsilon} \right) + \mu_t \left[ \frac{2}{k^2} (s_{k,x} k - s_k k_{,x}) - \frac{1}{\epsilon^2} (s_{\epsilon,x} \epsilon - s_\epsilon \epsilon_{,x}) \right] \\
s_{\mu t,y} &= \mu_{t,y} \left( \frac{2s_k}{k} - \frac{s_\epsilon}{\epsilon} \right) + \mu_t \left[ \frac{2}{k^2} (s_{k,y} k - s_k k_{,y}) - \frac{1}{\epsilon^2} (s_{\epsilon,y} \epsilon - s_\epsilon \epsilon_{,y}) \right]
\end{aligned}$$

### I.3 Termes sources

#### I.3.1 Écoulement

$$\begin{aligned}
f_x &= p_{,x} + \rho(uu_{,x} + vv_{,y}) - (\mu + \mu_t)(u_{,xx} + u_{,yy}) - 2\mu_{t,x}u_{,x} - \mu_{t,y}(u_{,y} + v_{,x}) \\
f_y &= p_{,y} + \rho(uv_{,x} + vv_{,y}) - (\mu + \mu_t)(v_{,xx} + v_{,yy}) - 2\mu_{t,y}v_{,y} - \mu_{t,x}(u_{,y} + v_{,x}) \\
q_k &= \rho(uk_{,x} + vk_{,y}) - \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)(k_{,xx} + k_{,yy}) - \frac{1}{\sigma_k}(\mu_{t,x}k_{,x} + \mu_{t,y}k_{,y}) + \rho\epsilon \\
&\quad - \mu_t[(u_{,y} + v_{,x})^2 + 2(u_{,x}^2 + v_{,y}^2)] \\
q_\epsilon &= \rho(u\epsilon_{,x} + v\epsilon_{,y}) - \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}\right)(\epsilon_{,xx} + \epsilon_{,yy}) - \frac{1}{\sigma_\epsilon}(\mu_{t,x}\epsilon_{,x} + \mu_{t,y}\epsilon_{,y}) + \frac{\rho C_{\epsilon 2}\epsilon^2}{k} \\
&\quad - \rho C_{\epsilon 1} C_\mu k [(u_{,y} + v_{,x})^2 + 2(u_{,x}^2 + v_{,y}^2)]
\end{aligned}$$

#### I.3.2 Sensibilités

$$\begin{aligned}
f_x' &= s_{p,x}\rho(u_x s_u + u s_{u,x} + u_y s_v + v s_{u,y}) - (\mu' + \mu_t')(u_{,xx} + u_{,yy}) \\
&\quad - (\mu + \mu_t)(s_{u,xx} + s_{u,yy}) - 2\mu_{t,x}'u_{,x} - 2\mu_{t,x}s_{u,x} - \mu_{t,y}'(u_{,y} + v_{,x}) - \mu_{t,y}(s_{u,y} + s_{v,x}) \\
f_y' &= s_{p,y}\rho(v_x s_u + u s_{v,x} + v_y s_v + v s_{v,y}) - (\mu' + \mu_t')(v_{,xx} + v_{,yy}) \\
&\quad - (\mu + \mu_t)(s_{v,xx} + s_{v,yy}) - 2\mu_{t,y}'v_{,y} - 2\mu_{t,y}s_{v,y} - \mu_{t,x}'(u_{,y} + v_{,x}) - \mu_{t,y}(s_{u,y} + s_{v,x}) \\
q_k' &= \rho(k_{,x}s_u + u s_{k,x} + k_{,y}s_v + v s_{k,y}) - \frac{\mu_t'}{\sigma_k}(k_{,xx} + k_{,yy}) \\
&\quad - \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)(s_{k,xx} + s_{k,yy}) - \frac{1}{\sigma_k}(\mu_{t,x}'k_{,x} + \mu_{t,x}s_{k,x} + \mu_{t,y}'k_{,y} + \mu_{t,y}s_{k,y}) \\
&\quad + \rho s_\epsilon - \mu_t'[(u_{,y} + v_{,x})^2 + 2(u_{,x}^2 + v_{,y}^2)] \\
&\quad - \mu_t[2(u_{,y} + v_{,x})(s_{u,y} + s_{v,x}) + 4(u_{,x}s_{u,x}v_{,y}s_{v,y})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q'_\epsilon &= \rho(\epsilon_x s_u + u s_{\epsilon_x} + \epsilon_y s_v + v s_{\epsilon_y}) - \frac{\mu'_t}{\sigma_\epsilon}(\epsilon_{,xx} + \epsilon_{,yy}) \\
&- \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}\right)(s_{\epsilon_{,xx}} + s_{\epsilon_{,yy}}) - \frac{1}{\sigma_\epsilon}(\mu'_{t,x}\epsilon_{,x} + \mu_{t,x}s_{\epsilon_{,x}} + \mu'_{t,y}\epsilon_{,y} + \mu_{t,y}s_{\epsilon_{,y}}) \\
&+ \rho C_{\epsilon 2} \left(\frac{2\epsilon s_\epsilon}{k} - \frac{\epsilon^2 s_k}{k^2}\right) - C_{\epsilon 1} \left(\frac{s_\epsilon \mu_t}{k} + \frac{\epsilon \mu'_t}{k} - \frac{\epsilon \mu_t s_k}{k^2}\right) [(u_{,y} + v_{,x})^2 + 2(u_{,x}^2 + v_{,y}^2)] \\
&- \mu'_t [(u_{,y} + v_{,x})^2 - \frac{C_{\epsilon 1} \epsilon \mu_t}{k} [2(u_{,y} + v_{,x})(s_{u,y} + s_{v,x}) + 4(u_{,x} s_{u,x} v_{,y} s_{v,y})]]
\end{aligned}$$

### I.3.3 Variables logarithmiques

#### I.3.3.1 Écoulement

$$\mathcal{K} = \ln(k)$$

$$\mathcal{K}_{,x} = \frac{k_{,x}}{k}$$

$$\mathcal{K}_{,y} = \frac{k_{,y}}{k}$$

$$\mathcal{E} = \ln(\epsilon)$$

$$\mathcal{E}_{,x} = \frac{\epsilon_{,x}}{\epsilon}$$

$$\mathcal{E}_{,y} = \frac{\epsilon_{,y}}{\epsilon}$$

#### I.3.3.2 Sensibilités

$$s_{\mathcal{K}} = \frac{s_k}{k}$$

$$s_{\mathcal{K},x} = \frac{s_{k,x}}{k} - \frac{s_k k_x}{k^2}$$
$$s_{\mathcal{K},y} = \frac{s_{k,y}}{k} - \frac{s_k k_y}{k^2}$$

$$s_{\mathcal{E}} = \frac{s_{\epsilon}}{\epsilon}$$
$$s_{\mathcal{E},x} = \frac{s_{\epsilon\epsilon,x}}{\epsilon} - \frac{s_{\epsilon}\epsilon_x}{\epsilon^2}$$
$$s_{\mathcal{E},y} = \frac{s_{\epsilon\epsilon,y}}{\epsilon} - \frac{s_{\epsilon}\epsilon_y}{\epsilon^2}$$

## ANNEXE II

## FORMES FAIBLES

II.1 Forme faible de l'équation de transport en  $\mathcal{K}$  pour les sensibilités :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho s_{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho \mathbf{u} \nabla s_{\mathcal{K}}) \delta s_{\mathcal{K}} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla s_{\mathcal{K}} \right] \cdot \nabla \delta s_{\mathcal{K}} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} + 2 \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla s_{\mathcal{K}} \right] \delta s_{\mathcal{K}} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} e^{-\mathcal{K}} (\mu'_t P + \mu_t P' - \mu_t P s_{\mathcal{K}}) \delta s_{\mathcal{K}} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \rho e^{\varepsilon - \mathcal{K}} \left( 2 \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_{\mu}}{C_{\mu}} + s_{\mathcal{K}} - \frac{\mu'_t}{\mu_t} \right) \delta s_{\mathcal{K}} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} q_{s_{\mathcal{K}}} \delta s_{\mathcal{K}} d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{f}_{\mathcal{K}} \delta s_{\mathcal{K}} d\Gamma = 0
\end{aligned}$$

$\bar{f}_{\mathcal{K}}$  sont les conditions de Neumann sur  $\mathcal{K}$  qui s'applique sur la frontière  $\Gamma$ . Leur expression est la suivante :

$$\bar{f}_{\mathcal{K}} = \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla s_{\mathcal{K}} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

II.2 Forme faible de l'équation de transport en  $\mathcal{E}$  pour les sensibilités :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho s_{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho \mathbf{u} \nabla s_{\mathcal{E}}) \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_{\epsilon}} - \frac{\mu'_t \sigma'_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}^2} \right) \nabla \mathcal{E} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla s_{\mathcal{E}} \right] \cdot \nabla \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_{\epsilon}} - \frac{\mu'_t \sigma'_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}^2} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} + 2 \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla s_{\mathcal{K}} \right] \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ \rho C_{\epsilon 1} C_{\mu} e^{\mathcal{K} - \mathcal{E}} P \left( \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_{\epsilon 1}}{C_{\epsilon 1}} + \frac{C'_{\mu}}{C_{\mu}} + s_{\mathcal{K}} - s_{\mathcal{E}} + \frac{P'}{P} \right) \right] \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[ \rho C_{\epsilon 2} e^{\mathcal{E} - \mathcal{K}} \left( \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_{\epsilon 2}}{C_{\epsilon 2}} + \frac{C'_{\mu}}{C_{\mu}} + s_{\mathcal{E}} - s_{\mathcal{K}} \right) \right] \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} q_{s_{\mathcal{E}}} \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega + \int_{\Gamma_{f_{\mathcal{E}}}} \bar{f}'_{\mathcal{E}} \delta s_{\mathcal{E}} d\Gamma = 0
\end{aligned}$$

$\bar{f}'_{\mathcal{E}}$  sont les conditions de Neumann sur  $\mathcal{E}$  qui s'applique sur la frontière  $\Gamma$ . Leur expression est la suivante :

$$\bar{f}'_{\mathcal{E}} = \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_{\epsilon}} - \frac{\mu'_t \sigma'_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}^2} \right) \nabla \mathcal{E} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla s_{\mathcal{E}} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}}$$