

Titre: Contribution à l'analyse et au design optimal de phénomènes
d'interactions fluides-structures

Auteur: Jean-François Cori

Date: 2007

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Cori, J.-F. (2007). Contribution à l'analyse et au design optimal de phénomènes
d'interactions fluides-structures [Master's thesis, École Polytechnique de
Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/7964/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/7964/>

Directeurs de recherche: Dominique Pelletier, & Jean-Yves Trépanier

Programme: Unspecified

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CONTRIBUTION À L'ANALYSE ET AU DESIGN OPTIMAL DE
PHÉNOMÈNES D'INTERACTIONS FLUIDES-STRUCTURES

JEAN-FRANÇOIS CORI
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLOME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)
AVRIL 2007

© Jean-François Cori, 2007.



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file *Votre référence*
ISBN: 978-0-494-29221-1
Our file *Notre référence*
ISBN: 978-0-494-29221-1

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.


Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

CONTRIBUTION À L'ANALYSE ET AU DESIGN OPTIMAL DE
PHÉNOMÈNES D'INTERACTIONS FLUIDES-STRUCTURES

présenté par: CORI Jean-François

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. LAKIS Aouni A., Ph.D., président

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. TRÉPANIÉRIE Jean-Yves, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. REGGIO Marcelo, Ph.D., membre

À ma mère, mon père et ma petite soeur

REMERCIEMENTS

J'aimerais tout d'abord exprimer ma profonde gratitude à mes directeurs de recherche, messieurs Dominique Pelletier et Jean-Yves Trepanier, pour la qualité de leur encadrement, leur disponibilité et la confiance qu'ils m'ont témoignée. Leurs conseils, leurs qualités scientifiques et humaines ainsi que leur aide financière m'ont permis de travailler dans les meilleures conditions pour réaliser cette maîtrise.

Je veux également remercier Stéphane Etienne pour sa bonne humeur omniprésente, ses conseils judicieux et l'énorme patience dont il a fait preuve devant mes nombreuses questions. Sans lui, j'aurais pu laisser décanter longtemps mes idées sans trouver de réponses et mon mémoire en aurait été fortement affecté.

Merci aussi à Alexander Hay et Christophe Tribes pour leurs nombreux conseils et leur disponibilité lorsque j'avais besoin de leur culture scientifique.

Je tiens à souligner le support de mon école d'origine, SUPAERO, dans mon processus de double-diplômation avec l'Ecole Polytechnique de Montréal.

Je tiens également à remercier toutes les personnes que j'ai côtoyées durant mon passage au labo C-306. Je pense à Richard avec qui j'ai suivi le long chemin vers l'obtention de la maîtrise depuis plus de 2 ans. Je pense à Dom, maintenant diplômé, ainsi qu'à Fernando et Thomas qui me tenaient compagnie durant les dernières fins de semaine passées au labo. Je pense enfin aux petits nouveaux Lise, Farshad, Eric, Romain et Jean-Serge qui prennent peu à peu le flambeau aussi bien au labo qu'autour d'un bon plat d'Aramarck.

Enfin, je tiens à remercier mes parents et ma petite soeur pour leur support inconditionnel depuis le vieux continent et ma tendre Magdalena pour sa présence à mes côtés, ses encouragements et sa patience qui m'ont finalement permis de finir ce mémoire.

RÉSUMÉ

Ce mémoire présente une formulation monolithique générale pour l'analyse de sensibilités de problèmes d'interactions fluides-structures afin de l'insérer dans une procédure de design optimal. On considère l'interaction entre un écoulement visqueux, incompressible, stationnaire et une structure élastique subissant de grands déplacements et/ou de grandes déformations. Le problème complet est résolu de manière implicite par une méthode éléments finis adaptative de Newton-Raphson. Une formulation pseudo-solide permet de gérer les déformations du domaine fluide dues aux déplacements solides. Les inconnues du problème sont donc la vitesse fluide, la pression et les déplacements pseudo-solides dans le domaine fluide et les déplacements de la structure dans le domaine solide. En outre, on présente en détail les conditions d'équilibre à l'interface fluide-solide, notamment pour le problème des sensibilités. Pour l'optimisation, on opte pour un algorithme à gradients utilisant la Méthode de l'Equation des Sensibilités pour des paramètres de forme et on présente la méthodologie pour traiter les frontières dépendant d'un paramètre de design. On choisit la paramétrisation NURBS pour représenter les géométries afin de réduire le nombre de variables de design nécessaires à une représentation géométrique précise ainsi que pour limiter la formation de bosses sur les profils lors d'une optimisation aérodynamique. On vérifie l'implémentation de la formulation générale à l'aide d'une solution manufacturée et la vérification de la procédure de design optimal se fait grâce à un exercice de *flow matching*. Par la suite, on présente deux applications. La première porte sur un profil flexible subissant de grands déplacements. La deuxième application est une optimisation de finesse d'un profil rigide à faible nombre de Reynolds.

ABSTRACT

This master's thesis presents a general monolithic formulation for sensitivity analysis of fluid-structure interactions problem in order to be incorporated into an optimal design procedure. This study considers the interaction between a viscous incompressible steady flow and an elastic structure undergoing large displacements and/or large strains. The problem is solved in an implicit manner with a Newton-Raphson adaptative finite element method. A pseudo-solid formulation enables us to manage the deformation of the fluid domain induced by solid displacements. Thus, the unknowns of the problem are fluid velocity, pressure and pseudo-solid displacements in the flow domain and structural displacements in the solid domain. Moreover, this work presents in detail the equilibrium conditions at the fluid-solid interface, particularly for the sensitivity problem. The optimization rests upon a gradient-based algorithm using the Method of Sensitivities Equation for shape parameters. In this context, the methodology for dealing with parameter dependent boundaries is presented. The NURBS parametrization is used to represent geometries which allow the reduction of the number of design variables needed for an accurate geometrical representation while ensuring sufficient smoothness properties during the aerodynamic optimization. The implementation of the general formulation is verified with a closed-form solution and the verification of the optimal design procedure is done through a flow matching exercise. Two applications are then presented. The first one concerns a flexible profile undergoing large displacements. The second application is an optimization of the lift-to-drag ratio of a non-flexible profile with a very low Reynolds number.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	viii
LISTE DES FIGURES	xii
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES	xv
LISTE DES ANNEXES	xxii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE	4
1.1 Optimisation aérodynamique	4
1.1.1 Techniques d'optimisation	5
1.1.2 Méthode de l'équation des sensibilités (MES)	6
1.1.3 Paramétrisation NURBS	9
1.2 Optimisation de phénomènes d'interactions fluides-structures	10
1.2.1 L'interaction fluide-structure	11
1.2.2 Structures hyperélastiques	12
1.2.3 Optimisation de structures souples	13
1.3 But et objectifs	14

CHAPITRE 2	MODÉLISATION DU PROBLÈME FLUIDE-SOLIDE . . .	15
2.1	Équations pour le fluide	15
2.2	Équations pour le solide	17
2.2.1	Notations	19
2.2.2	Lois de comportement	21
2.2.3	Modèles d'hyperélasticité finie	25
2.2.3.1	Modèles incompressibles	26
2.2.3.1.1	Modèle de Varga	26
2.2.3.1.2	Modèle de Mooney-Rivlin à 2 paramètres	27
2.2.3.1.3	Modèle Neo-Hookien	27
2.2.3.2	Modèles compressibles	28
2.2.3.2.1	Modèle de Varga	28
2.2.3.2.2	Modèle de Mooney-Rivlin à 2 paramètres	28
2.2.3.2.3	Modèle Neo-Hookien	29
2.2.3.2.4	Modèle de Saint-Venant Kirchhoff	29
2.3	Conditions d'équilibre à l'interface fluide-solide	31
CHAPITRE 3	MÉTHODE DE RÉOLUTION	32
3.1	Approches et formulations pour les interactions fluides-structures	32
3.1.1	Notation et formulations	32
3.1.2	Méthode du Lagrangien Actualisé	34
3.1.3	Approche pseudo-solide	35
3.2	Méthode de l'équation des sensibilités (MES)	36
3.2.1	Equations pour le fluide	37
3.2.2	Equations pour le solide et le pseudo-solide	38
3.2.3	Conditions à l'interface pour les sensibilités	40
3.3	Méthode des éléments finis	41
3.3.1	Formulation faible des équations	42

3.3.1.1	Formulation faible des équations du fluide	42
3.3.1.2	Formulation faible des équations du solide et du pseudo-solide	43
3.3.1.3	Couplage entre le fluide, le solide et le pseudo-solide	43
3.3.2	Discrétisation	44
3.3.3	Stratégie de résolution	46
3.3.3.1	Système global à résoudre	46
3.3.3.2	Méthode de Newton-Raphson	49
3.3.3.3	Factorisation conditionnelle	50
CHAPITRE 4	PARAMÉTRISATION NURBS	52
4.1	Avantages de la paramétrisation NURBS	52
4.2	Définition des NURBS	53
4.2.1	Les fonctions de base des B-splines	53
4.2.2	Représentation B-spline	54
4.2.3	Paramétrisation NURBS	55
4.3	Sensibilités des NURBS	56
CHAPITRE 5	PROCÉDURE DE DESIGN OPTIMAL	57
5.1	Boucle d'optimisation	57
5.2	Algorithme d'optimisation	58
5.3	Evaluation du gradient de la fonction objectif	59
CHAPITRE 6	VÉRIFICATIONS	62
6.1	Solution manufacturée	62
6.1.1	Description du problème général	63
6.1.1.1	Géométrie	63
6.1.1.2	Représentation de l'interface par une NURBS	64
6.1.1.3	Solution exacte	66

6.1.1.4	Termes sources	70
6.1.2	Présentation des deux cas traités	73
6.1.2.1	Cas du fluide seul	73
6.1.2.2	Cas de l'interaction fluide-structure	74
6.1.3	Analyse de convergence	76
6.1.3.1	Pour le fluide seul	76
6.1.3.2	Pour le problème d'interaction fluide-structure	78
6.2	<i>Flow matching</i> ou appariement d'écoulements	81
6.2.1	Description du problème	81
6.2.2	Analyse de convergence pour le profil initial	84
6.2.3	Appariement des coefficients de traînée et de portance	87
6.3	Conclusion	92
CHAPITRE 7 APPLICATIONS		93
7.1	Analyse d'un profil flexible Eppler 817	93
7.1.1	Description du problème	94
7.1.2	Grands déplacements	95
7.1.3	Résultats	96
7.1.4	Conclusion	99
7.2	Optimisation de la finesse	101
7.2.1	Description du problème	101
7.2.2	Choix des paramètres de design	102
7.2.3	Résultats de l'optimisation	109
7.2.4	Conclusion	112
CONCLUSION		114
RÉFÉRENCES		117
ANNEXES		123

LISTE DES FIGURES

FIG. 2.1	Notation du problème fluide-solide.	17
FIG. 3.1	Notation du problème fluide-solide selon la configuration. . .	33
FIG. 3.2	Notation pour la méthode du lagrangien actualisé.	34
FIG. 3.3	Éléments de Taylor-Hood et d'interface.	45
FIG. 3.4	Couplage implicite à l'interface fluide-structure.	47
FIG. 3.5	Matrice globale du problème d'interactions fluides-structures.	48
FIG. 3.6	Illustration de la factorisation conditionnelle.	50
FIG. 4.1	Profil NACA0012 représenté par une NURBS à 10 points de contrôle.	53
FIG. 6.1	Géométrie pour la solution manufacturée.	64
FIG. 6.2	Configurations du problème d'interaction fluide-structure. . .	67
FIG. 6.3	Distribution de la viscosité selon l'abscisse adimensionnelle x/l	70
FIG. 6.4	Conditions frontières pour le cas du fluide seul.	74
FIG. 6.5	Configuration initiale et conditions frontières.	75
FIG. 6.6	Evolution des erreurs estimée et exacte en norme énergie avec le maillage.	77
FIG. 6.7	Evolution de l'efficacité avec le maillage.	78
FIG. 6.8	Evolution des sensibilités des coefficients aérodynamiques avec le maillage.	79
FIG. 6.9	Maillage adapté à la 6 ^e itération pour l'interaction fluide- structure.	80
FIG. 6.10	Evolution des erreurs en norme énergie avec le maillage. . .	81
FIG. 6.11	Evolution de l'efficacité avec le maillage.	82
FIG. 6.12	Géométrie et conditions frontières pour un écoulement au- tour d'un profil.	83

FIG. 6.13	Profil NACA0012 représenté par une NURBS à 10 points de contrôle.	83
FIG. 6.14	Maillage adapté autour du profil NACA 0012 ($Re = 1000$ et $\alpha = 0^\circ$).	85
FIG. 6.15	Evolution des sensibilités des coefficients aérodynamiques avec le maillage.	86
FIG. 6.16	Profils initial et optimisé.	89
FIG. 6.17	Historique de l'optimisation de la fonction objectif.	90
FIG. 6.18	Evolution des paramètres de design durant l'optimisation.	91
FIG. 6.19	Distributions de pression pour l'exercice de <i>flow-matching</i>	92
FIG. 7.1	Eppler 817 : Géométrie et conditions frontières.	94
FIG. 7.2	Eppler 817 : Profils initial et déformé.	95
FIG. 7.3	Eppler 817 : Maillage adapté autour du profil déformé.	96
FIG. 7.4	Eppler 817 : Evolutions des erreurs estimées avec le maillage.	97
FIG. 7.5	Eppler 817 : champs de pressions p et des déplacements verticaux η	98
FIG. 7.6	Eppler 817 : champs des sensibilités de p et η	99
FIG. 7.7	Profil NACA 4512 représenté par une NURBS à 12 points de contrôle.	102
FIG. 7.8	Evolution de S_{C_D} et S_{C_L} par rapport aux abscisses avec le maillage.	104
FIG. 7.9	Evolution de S_{C_D} et S_{C_L} par rapport aux ordonnées avec le maillage.	105
FIG. 7.10	Evolution de S_{C_D} et S_{C_L} par rapport aux poids avec le maillage.	106
FIG. 7.11	Diagramme de Pareto des influences des paramètres sur la fonction coût.	107
FIG. 7.12	Historique de l'optimisation de la finesse.	109
FIG. 7.13	Profils initial et optimisé lors de l'optimisation de la finesse.	110

FIG. 7.14	Evolution des paramètres de design durant l'optimisation. . .	111
FIG. 7.15	Distributions de pression pour l'optimisation de la finesse. . .	112
FIG. I.1	Notation pour une frontière dépend d'un paramètre a	125

LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

BFGS	Broyden, Fletcher, Godfard et Shanno
CFD	Computational Fluid Dynamics
IFS	Interaction Fluide-Structure
NACA	National Advisory Committee for Aeronautics
NURBS	Non-Uniform Rationnal Beta-Spline
MEF	Méthode des Eléments Finis
MES	Méthode de l'Equation des Sensibilités
MSM	Méthode des Solutions Manufacturées

Caractères usuels

a	paramètre de design, borne inférieure de l'abscisse curviligne
\mathbf{a}	vecteur des paramètres de design
b	borne supérieure de l'abscisse curviligne
$\bar{\mathbf{b}}$	tenseur de déformation de Cauchy-Green à gauche
$\bar{\mathbf{b}}$	tenseur de Cauchy-Green à gauche modifié
c	corde d'un profil
$\mathbf{C}(t)$	courbe NURBS
$\bar{\bar{\mathbf{C}}}$	tenseur de déformation de Cauchy-Green à droite
$\bar{\mathbf{C}}$	tenseur de Cauchy-Green à droite modifié
C_D	coefficient de traînée
C_L	coefficient de portance
D	traînée
\mathbf{e}_x	vecteur unitaire dans la direction x

\mathbf{e}_y	vecteur unitaire dans la direction y
E	module de Young
$\overline{\overline{\mathbf{E}}}$	tenseur de déformation de Green-Lagrange
$\mathbf{f} = (f_x, f_y)$	vecteur des forces volumiques
$f(x)$	équation quelconque de l'interface
F	fonction coût
$\overline{\overline{\mathbf{F}}}$	tenseur gradient de la transformation θ
$\overline{\mathbf{F}}$	tenseur gradient de la transformation θ modifié
h_e	taille d'un élément du maillage
$\overline{\overline{\mathbf{h}}}$	tenseur gradient des déplacements
$\overline{\overline{\mathbf{H}}}$	matrice hessienne
I_1, I_2, I_3	invariants matriciels
$\overline{I}_1, \overline{I}_2, \overline{I}_3$	invariants matriciels modifiés
$\overline{\overline{\mathbf{I}}}$	tenseur de la matrice identité
J	jacobien du tenseur de passage $\overline{\overline{\mathbf{F}}}$
$\overline{\overline{\mathbf{J}}}$	matrice jacobienne du tenseur $\overline{\overline{\mathbf{F}}}$,
	jacobien numérique
k	multiplicité d'un noeuds (NURBS)
l	dimension horizontale
L	dimension verticale,
	portance
\mathbf{L}_i	vecteur des limites inférieures des paramètres
\mathbf{L}_s	vecteur des limites supérieures des paramètres
m	nombre d'éléments du vecteur nodal (NURBS)
m_1, m_2	variables de pondération de la fonction coût
$\mathbf{n} = (n_x, n_y)$	vecteur unitaire normal

n	nombre de points de contrôle (NURBS), étape d'adaptation courante
$n - 1$	étape d'adaptation précédente
N_d	nombre de noeuds du maillage
$N_{i,p}(t)$	i^e fonction de base B-Spline de degré p
$\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$	vecteurs principaux d'une matrice
p	pression, degré des fonctions polynômiales, multiplicateur de Lagrange
$\mathbf{P}_i = (x_i, y_i)$	point de contrôle (NURBS)
\mathbf{R}	équation d'état (contraintes de l'optimisation), résidu des équations éléments finis
Re	nombre de Reynolds
R_i	résidu de la i^e équation algébrique
$R_{i,p}$	fonction de base rationnelle NURBS de degré p
\mathbf{r}^{int}	réactions à l'interface
s_x ou S_x	sensibilité de la variable scalaire x
\mathbf{s}_x	sensibilité de la variable vectorielle \mathbf{x}
t	abscisse curviligne
tr	trace d'un tenseur
t_i	élément du vecteur nodal (NURBS)
$\mathbf{t}=(t_x, t_y)$	vecteur unitaire tangent
$\mathbf{u} = (u, v)$	vecteur vitesse
\mathbf{U}	vecteur des variables d'état (inconnues)
w_i	poids associé à un point de contrôle (NURBS)
(x, y)	coordonnées cartésiennes

x_i	abscisse d'un point de contrôle (NURBS)
\mathbf{x}	géométrie du domaine non-déformé
$\hat{\mathbf{x}} = (x_0, y_0)$	géométrie de la frontière non-déformée
\mathbf{X}	géométrie du domaine déformé
$\hat{\mathbf{X}} = (x_f, y_f)$	géométrie de la surface déformée
y_i	ordonnée d'un point de contrôle (NURBS)

Lettres calligraphiques

A, B, C	variables de l'écoulement pour la MSM
\mathcal{F}	fonction coût
\mathcal{Q}_x	contraintes de Cauchy dans la direction x
\mathcal{Q}_y	contraintes de Cauchy dans la direction y
\mathcal{T}	vecteur nodal (NURBS)

Lettres grecques

α	angle d'incidence
β	constante (solution manufacturée), coefficient empirique pour les modèles structuraux compressibles
γ	coefficient de Lamé
Γ	frontière du domaine
Γ_D	frontière du domaine où on impose des conditions de Dirichlet
Γ_I	frontière associée à l'interface fluide-solide

Γ_N	frontière du domaine où on impose des conditions de Neumann
$\delta\Gamma$	partie infinitésimale de la frontière
δp	fonction test pour la pression
$\delta \mathbf{r}$	fonction test pour les déplacements
$\delta \mathbf{u}$	fonction test pour la vitesse
$\delta \mathbf{U}$	vecteur de correction
δs_p	fonction test pour la sensibilité de la pression
$\delta \mathbf{s}_r$	fonction test pour la sensibilité des déplacements
$\delta \mathbf{s}_u$	fonction test pour la sensibilité de la vitesse
ϵ	allongement relatif
θ	transformation
κ	module d'extension
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	dilatations linéiques principales
$\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3$	dilatations linéiques principales modifiées
μ	module de cisaillement (coefficient de Lamé)
μ_f	viscosité dynamique du fluide
ν	coefficient de Poisson
ρ	masse volumique
$\bar{\bar{\sigma}}$	tenseur des contraintes fluides
$\bar{\bar{\sigma}}_c$	tenseur des contraintes de Cauchy
$\bar{\bar{\sigma}}_k$	tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff
$\bar{\bar{\sigma}}_l$	tenseur des contraintes de Piola-Lagrange
$\bar{\bar{\tau}}$	tenseur des contraintes visqueuses
$\chi = (\xi, \eta)$	vecteur des déplacements
Ψ	fonction d'énergie libre de Helmholtz

Ω	domaine de calcul
$\partial\Omega$	frontière du domaine de calcul
$d\Omega$	partie infinitésimale du domaine

Indices et exposants

*	associé à une valeur cible
∞	associé à une valeur à l'infini (de référence)
'	sensibilité (dérivée)
-	valeur imposée par les conditions aux frontières, partie isochorique d'un tenseur
=	tenseur d'ordre 2
$_0$ et 0	associés à la configuration initiale ou non déformée
$_1$ et 1	associés à la configuration déformée
-1	inverse
e	solution exacte (ou manufacturée)
ex	solution exacte (ou manufacturée)
$_f$ et f	associés au fluide
h	solution éléments finis
i	composante d'un vecteur, valeur nodale, valeur inférieure
ij	composante d'un tenseur d'ordre 2
ini	associé à la configuration initiale
int	associé à l'interface
iso	composante isochorique

k	étape d'optimisation
n	itération n
$n+1$	itération $n + 1$
opt	associé à une valeur optimisée
p	degré du polynôme
s	valeur supérieure
s et s^s	associés au solide
ps et ps^s	associés au pseudo-solide
T	transposée
vol	composante volumétrique

Symboles

∇	opérateur gradient
$\nabla \cdot$	opérateur divergence
$\frac{\partial \cdot}{\partial \cdot}$	dérivée partielle (ou eulérienne)
$\frac{D \cdot}{D \cdot}$	dérivée totale (ou lagrangienne)
$\ \cdot \ $	norme

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	OUTILS MATHÉMATIQUES	123
I.1	Dérivations d'une fonction composée	123
I.2	Invariants d'une matrice	124
I.3	Produit tensoriel	124
I.4	Dérivée matérielle	124
ANNEXE II	QUELQUES DÉMONSTRATIONS	126
II.1	Relations entre $\overline{\mathbf{F}}_{ps}$ et $\overline{\mathbf{F}}_s$ à l'interface	126
II.2	Equilibre des forces à l'interface pour les sensibilités	128
ANNEXE III	MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS	132
III.1	Décomposition polaire	132
ANNEXE IV	LOIS DE COMPORTEMENT	134
IV.1	En termes de fonction d'énergie libre	134
IV.2	En termes d'invariants	134
IV.3	En termes de dilatations linéiques principales	135
IV.4	Pour les matériaux hyperélastiques incompressibles	135
IV.5	Pour les matériaux hyperélastiques compressibles	136
ANNEXE V	QUELQUES MODÈLES HYPERÉLASTIQUES	137
V.1	Modèles incompressibles	137
V.1.1	Modèle d'Ogden	137
V.1.2	Cas particuliers du modèle d'Ogden	138
V.1.2.1	Modèle de Mooney-Rivlin	138
V.1.2.2	Modèle Neo-Hookien	139
V.1.2.3	Modèle de Varga	139

V.1.3	Forme polynomiale	140
V.1.4	Cas particuliers de la forme polynomiale	140
V.1.4.1	Modèles de Mooney-Rivlin	140
V.1.4.2	Modèle Neo-Hookien	141
V.1.5	Modèles pour les élastomères renforcés	142
V.2	Modèles compressibles	142
V.2.1	Modèle d'Ogden	142
V.2.2	Cas particuliers du modèle d'Ogden	144
V.2.2.1	Modèle de Mooney-Rivlin	144
V.2.2.2	Modèle Neo-Hookien	145
V.2.2.3	Modèle de Varga	146
V.2.3	Forme polynomiale	147
V.2.4	Cas particuliers de la forme polynomiale	147
V.2.4.1	Modèles de Mooney-Rivlin	147
V.2.4.2	Modèle Neo-Hookien	148
V.2.5	Modèle de Blatz et Ko	148
ANNEXE VI	MÉTHODE DU LAGRANGIEN ACTUALISÉ	150
VI.1	Cas général	151
VI.2	Cas d'une loi de comportement linéaire	152
ANNEXE VII	DESCRIPTION DES NURBS	153
VII.1	Splines et fonctions de base B-splines	153
VII.1.1	Quelques propriétés des fonctions de base B-splines	154
VII.1.2	Formules de différentiation	155
VII.2	Représentation B-spline	155
VII.2.1	Quelques propriétés des B-splines	156
VII.2.2	Formules de différentiation	157
VII.3	Paramétrisation NURBS	157

VII.3.1 Propriétés de la représentation NURBS	158
VII.3.2 Formules de différentiation	159
VII.3.3 Sensibilités des NURBS	160
VII.3.4 Sensibilités et différentiation	160

INTRODUCTION

Une cuillère remuant du café dans une tasse, un drapeau flottant au vent, un ventilateur soufflant un air frais ou encore un avion volant dans le ciel, voilà des exemples quotidiens de phénomènes d'interactions fluides-structure (IFS). Plus généralement, on parle d'interaction fluide-structure lorsqu'un solide est en présence d'un fluide ou du moins lorsque les mouvements de l'un influencent les déplacements de l'autre. Les domaines d'application concernés sont donc extrêmement variés, du monde des transports à celui du génie nucléaire, de l'aéronautique au génie civil et de la biomécanique à la microélectronique. C'est pourquoi les problèmes d'interactions fluides-structures suscitent depuis des années un intérêt croissant en ingénierie et deviennent de plus en plus incontournables. On pense notamment au domaine grandissant de la biomécanique avec la modélisation des écoulements internes au corps humain tel que le système sanguin. On pense aussi aux ouvrages d'art du génie civil de plus en plus imposants comme la viaduc de Millau en France, pont à haubans de 2460 m surplombant la vallée à près de 270 m de hauteur, dont le dimensionnement a dû fortement tenir compte des vents environnants. On pense enfin à la construction d'un géant du ciel, l'Airbus A380, pour lequel les phénomènes aéroélastiques sur des ailes de plus de 40 mètres de long provoquent un débattement vertical de 5.5 mètres en bout d'aile.

Ainsi, les phénomènes d'interactions fluides-structures sont de plus en plus des facteurs dimensionnant en ingénierie et notamment en aéronautique. L'optimisation des géométries, comme un profil d'aile d'avion, doit désormais tenir compte des effets couplés de l'écoulement fluide sur la structure et inversement. En effet, les performances de l'aile déformée seront bien différentes de celles du profil initial. Il faut donc trouver la forme à usiner qui donnera la performance optimale une fois déformée par les charges aérodynamiques. Voilà un des grands défis

de l'analyse multidisciplinaire : le design optimal de phénomènes d'interactions fluides-structures. Les comportements non-linéaires des fluides et des solides complexes soumis à de grands déplacements ainsi que la déformation des interfaces induisent en effet de nombreuses difficultés à surmonter. De même, une approche classique et efficace d'optimisation nécessite le calcul de la fonction à optimiser et de son gradient par rapport aux paramètres de design. Dans ce contexte, il est clair que la résolution analytique de tels problèmes est quasiment impossible et l'utilisation des simulations numériques par ordinateur devient indispensable. Avec la puissance actuelle des ordinateurs modernes, le calcul de design optimal en interactions fluides-structures devient même envisageable.

On considère plus précisément dans ce mémoire l'optimisation de profils d'ailes flexibles, subissant de grands déplacements, soumis à l'écoulement d'un fluide visqueux et incompressible. L'analyse des phénomènes d'interactions fluides-structures qu'on retrouve dans ce problème s'appuie donc sur la mécanique des fluides assistée par ordinateur ou CFD (*Computational Fluid Dynamics*) qui a atteint un niveau de maturité considérable. De même la modélisation éléments finis des structures donne depuis bien longtemps d'excellents résultats. Par contre, le couplage entre ces deux disciplines est quelque chose de beaucoup plus récent et ouvre la porte à de nombreuses améliorations avec en point de mire le design optimal de phénomènes d'interactions fluides-structures.

Le projet présenté ici se trouve donc dans la continuité de ce qui se fait en IFS et propose d'apporter une contribution nouvelle à l'analyse de phénomènes d'interactions fluides-structures dans la perspective de l'optimisation. On s'appuiera ainsi sur l'approche monolithique adaptative d'Etienne^[14, 13] pour traiter les phénomènes d'interactions fluides-structures stationnaires. Pour l'optimisation, on tentera d'étendre les travaux de Turgeon^[48] sur les *sensibilités* aux phénomènes d'IFS afin d'obtenir les gradients de la fonction à optimiser.

Ce mémoire comporte 7 chapitres. Pour commencer, au chapitre 1, une revue bibliographique permet de replacer dans le contexte actuel des recherches le présent travail. On y introduit alors le concept d'optimisation aérodynamique et les phénomènes d'interactions fluides-structures, les réalisations antérieures et les diverses voies envisageables. Cela permet de fixer le but et les objectifs de cette étude. Le chapitre 2 présente la modélisation mathématique du problème fluide-solide constituée des équations pour le fluide, pour le solide et pour le couplage fluide-solide. La méthode de résolution de ce problème d'interactions fluides-structures avec ses sensibilités est détaillée dans le chapitre 3. Au chapitre 4, on choisit la paramétrisation NURBS pour représenter les géométries aérodynamiques et définir les paramètres de design utilisés par la procédure d'optimisation présentée dans le chapitre 5. Deux vérifications du code sont présentées au chapitre 6 : une solution manufacturée en interaction fluides-structures et un exercice d'optimisation de profils aérodynamiques avec des valeurs cibles. Le code vérifié, on expose les applications du présent travail au chapitre 7. On termine naturellement ce mémoire en exposant des conclusions et des voies possibles pour des travaux futurs sur l'analyse et le design optimal de phénomènes d'interactions fluides-structures.

CHAPITRE 1

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Ce chapitre présente une revue bibliographique situant notre travail dans le contexte actuel des recherches. Pour ce faire, il s'avère essentiel de débiter par une brève revue bibliographique. Ce chapitre traite donc principalement des travaux antérieurs et des recherches actuelles sur les différents volets de notre étude. On commence par un bref aperçu de l'état des connaissances en optimisation aérodynamique. Ce qui amène à choisir la méthode de l'équation des sensibilités (MES) pour effectuer le design optimal et la paramétrisation NURBS pour modéliser les profils. Ensuite, on passera en revue le cas particulier de l'optimisation de phénomènes d'interactions fluide-structure. On présentera un survol de travaux en modélisation d'interactions fluides-structures (IFS), l'utilisation de modèles structuraux hyperélastiques et le design optimal de structures souples. Finalement, ce travail amène naturellement à énoncer le but du mémoire et les objectifs qu'on a fixés pour l'atteindre.

1.1 Optimisation aérodynamique

Le problème d'optimisation aérodynamique est simplement un problème de design optimal de profils d'aile avec un nombre réduit de paramètres sur lesquels on peut agir. Grâce à une notation appropriée, la description d'un problème de design

optimal reste somme-toute assez simple :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \mathbf{a} \text{ qui minimise/maximise} & \quad F(\mathbf{U}; \mathbf{a}) \\ \text{sujet à} & \quad \mathbf{R}(\mathbf{U}; \mathbf{a}) = 0 \\ & \quad \mathbf{L}_i \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{L}_s \end{aligned} \quad (1.1)$$

où \mathbf{U} est le vecteur des variables dépendantes (ou variables d'état ou simplement états), \mathbf{a} est le vecteur des paramètres de design dont le domaine de variation est limité par \mathbf{L}_i et \mathbf{L}_s , F est une fonction objectif (ou fonction coût ou fonctionnelle) à optimiser et \mathbf{R} représente les contraintes (ou équation d'état). Ces dernières sont souvent aussi nombreuses que les variables de sorte que, pour des paramètres de design donnés, leur résolution donne les états \mathbf{U} .

1.1.1 Techniques d'optimisation

On peut alors formuler un problème d'optimisation de deux manières. La première dite *tout couplé* (*one-shot* ou *all-at-once* dans la littérature anglaise) considère le problème d'optimisation dans son ensemble en résolvant simultanément les variables dépendantes \mathbf{U} et les paramètres de design \mathbf{a} . La seconde formulation de type *boîte noire* résoud dans un premier temps l'équations des contraintes $\mathbf{R}(\mathbf{U}; \mathbf{a}) = 0$ pour déterminer la dépendance implicite de \mathbf{U} par rapport à \mathbf{a} . Le problème d'optimisation porte ensuite seulement sur le vecteur $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{a})$ puisque les contraintes sont déjà vérifiées. Comme on dispose déjà d'un code d'analyse performant, on utilisera donc cette dernière approche où optimisation et analyse sont découplées.

On distingue diverses techniques d'optimisation (voir l'ouvrage de Vanderplaats^[52] pour une liste plus exhaustive) selon le type d'informations utilisées afin de converger vers un optimum. On trouve d'abord les techniques d'ordre zéro qui ne

nécessitent que l'évaluation de la fonction coût. Très simples à implémenter, elles requièrent toutefois un grand nombre d'évaluations des états (*i.e.* de résolutions des contraintes comme les équations de Navier-Stokes). L'évaluation du gradient de la fonction coût, certes complexe, en plus de la fonction elle-même permet aux techniques du premier ordre d'être plus efficaces et moins coûteuses en terme de temps de calcul. Enfin, on peut aller plus loin en utilisant les dérivées secondes. On parle alors de techniques d'ordre deux, dont la plus connue est celle de Newton. Le fait de calculer le gradient de la fonction à optimiser est donc un minimum pour disposer d'algorithmes d'optimisation efficaces sans tomber dans la complexité des techniques d'ordre supérieur. On choisit donc d'utiliser une technique à gradients.

L'estimation du gradient de F est ainsi un élément clé et central dans le processus d'optimisation et requiert des méthodes robustes et efficaces de calculs. Les trois principales sont : différences finies, méthode des variables adjointes et méthode des sensibilités. Plusieurs descriptions et comparaisons de ces méthodes existent et on invite le lecteur intéressé à s'y référer^[19, 20, 48]. En s'appuyant en particulier sur les travaux de Turgeon, on a retenu pour cette étude la Méthode de l'Equation des Sensibilités (MES) qui présente de nombreux avantages, notamment concernant ses applications potentielles autres que l'optimisation (comme l'analyse d'incertitude, l'identification de paramètres dominants ou le calcul rapide de solutions voisines).

1.1.2 Méthode de l'équation des sensibilités (MES)

La méthode de l'équation des sensibilités permet donc d'évaluer les dérivées premières d'une fonction objectif F par rapport aux paramètres de design, par-

fois appelées gradient de F ou sensibilités de F :

$$\mathcal{F}(\mathbf{a}) = F(\mathbf{U}(\mathbf{a}); \mathbf{a}) \quad (1.2)$$

On considère la formulation de type boîte noire qu'on a retenue. Sans perte de généralité, on considère un système discret et un seul paramètre a . Le théorème des fonctions implicites mène à l'expression suivante du gradient de la fonction objectif :

$$\nabla \mathcal{F} = \frac{d\mathcal{F}}{da} = \frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{U}} \frac{D\mathbf{U}}{Da} \quad (1.3)$$

Pour introduire simplement la notion de sensibilités, on utilise ici une notation plutôt symbolique (on trouvera une notation plus rigoureuse dans l'annexe I.1). Si l'on connaît l'expression de F en fonction de \mathbf{U} et de a , les dérivées explicites $\partial F/\partial a$ et $\partial F/\partial \mathbf{U}$ peuvent en général être calculées sans trop de difficultés (l'usage de coefficients aérodynamiques conduit toutefois à des expressions complexes). Notons que le terme $D\mathbf{U}/Da$ est inconnu pour l'instant. On l'appelle *sensibilité* de l'état \mathbf{U} : dérivée première des états par rapport au paramètre. Elle traduit en somme la variation de la solution (états) lorsque le paramètre de design est légèrement perturbé autour d'une valeur courante. L'extension de cette définition se fait alors aisément pour plusieurs paramètres de design. L'estimation du gradient de la fonction objectif (1.3) se ramène donc à un calcul de sensibilités.

Pour mener ce calcul, il faut donc générer et résoudre des équations de sensibilités qu'on obtient simplement en différentiant les équations d'états $\mathbf{R}(\mathbf{U}; \mathbf{a}) = 0$ par rapport au paramètre considéré a . Toutefois, les équations régissant les phénomènes aérodynamiques ne sont pas discrètes mais continues (i.e. : ce sont des équations différentielles où la dimension des états \mathbf{U} est infinie). Il est habituellement impossible de trouver des solutions analytiques pour les états et pour leurs sensibilités. Il est donc nécessaire de faire appel à des méthodes numériques qui introduisent une

discrétisation et donc une certaine approximation. Deux options existent alors :

- *discrétiser* les équations aux dérivées partielles puis les *différentier*
- *différentier* les équations aux dérivées partielles puis les *discrétiser*

C'est cette deuxième option qu'on nomme *méthode de l'équation des sensibilités*. A titre d'exemple, considérons les équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible, stationnaire, isotherme et laminaire :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.4)$$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} \quad (1.5)$$

Les variables de l'écoulement (états) sont le vecteur vitesse \mathbf{u} et la pression p . La masse volumique est notée ρ , $\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}$ est le tenseur des contraintes visqueuses et \mathbf{f} représente les forces volumiques.

Pour un paramètre a , on introduit les notations suivantes pour exprimer les sensibilités des variables de l'écoulement :

$$\text{Pour } \mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, a) \quad \mathbf{s}_{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} \quad (1.6)$$

$$\text{Pour } p = p(x, y, a) \quad s_p = \frac{\partial p}{\partial a} \quad (1.7)$$

L'équation différentielle des sensibilités s'obtient alors en différentiant (1.4) et (1.5) par rapport au paramètre :

$$\nabla \cdot \mathbf{s}_{\mathbf{u}} = 0 \quad (1.8)$$

$$\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho (\mathbf{s}_{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_{\mathbf{u}}) = -\nabla s_p + \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}(\mathbf{s}_{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}'(\mathbf{u}) + \mathbf{f}' \quad (1.9)$$

Les dérivées des propriétés de l'écoulement sont dénotées par un (') et \mathbf{f}' représente la sensibilité des forces volumiques. Il s'agit ici de dérivées totales par rapport à a .

Il est à noter le rôle important des conditions aux limites sur les sensibilités qui viennent compléter ces équations (1.8) et (1.9). Toutefois, on n'a pas pour but ici de faire une présentation exhaustive de la MES. On signalera seulement que les paramètres de forme (dont la variation change la géométrie du domaine de calcul) demandent une attention particulière lorsqu'on traite les conditions aux limites^[51, 43] puisque l'on utilise une formulation eulérienne dans le fluide.

Pour finir, on cite quelques exemples d'applications de la MES dans différents domaines. Bien qu'ayant favorisé l'approche discrète, la mécanique des solides a ouvert la voie à l'analyse de sensibilités et à la MES^[17, 21]. Depuis, le champ d'utilisation de la MES s'est élargi. On note ainsi son application aux calculs de solutions voisines^[22] et d'incertitudes^[50], aux problèmes thermodynamiques^[12, 49] ou encore aux écoulements instationnaires^[24]. Enfin, ce qui est plus particulièrement intéressant dans cette étude, c'est l'utilisation de la MES en design aérodynamique^[4] et plus récemment en interaction fluides-structures^[13].

La voie est donc ouverte pour l'application de la méthode de l'équation des sensibilités au design optimal de phénomènes d'interaction fluides-structures.

1.1.3 Paramétrisation NURBS

L'efficacité d'une optimisation aérodynamique d'une aile dépend fortement de la manière dont on représente son profil. En effet, la représentation géométrique aura un impact direct sur le nombre de paramètres. En outre, l'obtention de profils lisses ne sera pas toujours possible car certaines représentations engendrent des profils bosselés ou bruités. Suivant les travaux de Lépine *et al*^[30], on a ici choisi

de représenter et de paramétrer les profils avec des NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline). Cette paramétrisation présente certains avantages. Dans l'étude de Painchaud-Ouellet *et al*^[36], des profils aérodynamiques représentés grâce à des NURBS sont optimisés en régime transsonique. Ils montrent alors que la paramétrisation garantit l'obtention de profils lisses. Ainsi, en l'associant avec une formule d'optimisation multipoint, les profils résultant de l'optimisation conservent de bonnes performances sur une plage de Mach. Notons que dans leurs travaux l'évaluation du gradient de la fonction objectif se fait par différence-finie, ce qui est très coûteux en terme de temps de calcul. L'utilisation de la méthode de l'équation des sensibilités pour déterminer ce gradient par rapport aux paramètres d'une NURBS devrait permettre des économies substantielles de calculs.

A ce stade, on a opté pour une méthode d'optimisation du premier ordre, la méthode de l'équation des sensibilités pour le calcul du gradient de la fonction objectif et pour une paramétrisation NURBS des profils aérodynamiques.

1.2 Optimisation de phénomènes d'interactions fluides-structures

Avant de faire le point sur l'état actuel des recherches dans le domaine de l'optimisation de structures souples déformées par un écoulement, on présente notre choix pour modéliser les phénomènes d'interactions fluides-structures. On portera une attention particulière aux méthodes retenues pour traiter des structures hyperélastiques subissant de grands déplacements et de grandes déformations.

1.2.1 L'interaction fluide-structure

L'interaction entre un solide et un écoulement fluide est un sujet prisé chez les ingénieurs depuis plusieurs années. Les exemples d'applications ne manquent pas tout comme les moyens de modéliser un tel phénomène. On se restreint donc à la formulation retenue pour traiter les interactions entre un fluide incompressible et une structure subissant de grands déplacements et de grandes déformations. Le lecteur intéressé se référera à l'ouvrage de Dowell *et al*^[11] pour une revue plus exhaustive de l'état des connaissances en interaction fluide-structure.

Deux approches sont possibles pour coupler fluide et structure. D'une part, les méthodes *faiblement couplées*^[42, 28, 16] utilisent des algorithmes de résolution séparés pour le fluide et la structure. Ce sont les méthodes les plus populaires, notamment parce que les ingénieurs se servent souvent de codes spécialisés déjà existants (soit dans le traitement d'écoulements soit dans la résolution de problèmes structuraux) mais aussi parce que cette approche minimise les ressources informatiques nécessaires ainsi que la complexité du couplage entre les équations fluides et structurelles. D'autre part, on trouve les formulations *fortement couplées* ou *monolithiques*^[34, 18, 14] qui garantissent l'équilibre à l'interface fluide-structure. Elles sont plus stables que les méthodes faiblement couplées lorsqu'elles sont bien implémentées. On a donc opté pour une approche monolithique directe, ou entièrement couplée, dans notre étude.

Pour lier simultanément et de manière implicite les déformations du solide aux charges subies par le fluide, on utilise une approche dite *pseudo-solide* continue présentée par Sackinger *et al*^[41]. Ce choix rend alors possible une résolution couplée de la structure, du fluide et du pseudo-solide par une méthode de Newton-Raphson. Cette approche pseudo-solide permet également de traiter les déformations des frontières et de gérer la déformation du maillage dans la partie fluide. Elle introduit

en effet des équations structurelles afin de gérer la déformation de la géométrie du domaine fluide de façon continue comme si cette géométrie se comportait comme un solide. Enfin, cette approche générale est compatible avec les procédures utilisées pour l'estimation d'erreur et l'adaptation de maillage pour les équations du pseudo-solide, du fluide et du solide.

1.2.2 Structures hyperélastiques

Lorsqu'on traite des phénomènes d'interactions fluides-structures, l'écoulement exerce en général des forces sur le solide qui, s'il est considéré comme souple (i.e. : déformable), subit des déplacements (variations de sa forme) et des déformations (variations de son volume) importants. On se retrouve alors dans une des quatre situations suivantes :

1. petites déformations - petits déplacements
2. petites déformations - grands déplacements
3. grandes déformations - petits déplacements
4. grandes déformations - grands déplacements

Dans le premier cas, le modèle d'élasticité linéaire classique suffit. Toutefois, dès que l'on traite des grands déplacements (cas 2. et 4.), les modèles structuraux deviennent non-linéaires et on parle alors d'hyperélasticité. Le plus utilisé de ces modèles dans le cadre de l'interaction fluide-structure est sans aucun doute celui de Saint-Venant Kirchhoff^[25, 14, 34]. C'est le modèle le plus souple qui permet de considérer des déplacements structuraux importants. Toutefois, Bazilevs^[1] note que son utilisation peut mener à des instabilités lors de fortes compressions. En effet, on tombe alors dans le régime des grandes déformations, ou déformations finies (cas 3. et 4.), et on doit se tourner vers de nouveaux modèles d'hyperélasticité finie. On utilisera donc des lois de comportement adaptées comme celle de Saint-Venant Kirchhoff modifiée, celle d'Ogden ou celle utilisant une forme polynomiale.

On dispose donc de lois de comportement adéquates pour modéliser des grandes déformations et des grands déplacements structuraux. Toutefois, pour les mettre en application, il faut arriver à mailler convenablement un domaine fluide qui subit de grandes déformations, notamment près des interfaces. Pour cela, on peut utiliser deux stratégies. La première^[34] améliore notre approche pseudo-solide dont on a précédemment discuté. Elle consiste simplement à adapter les propriétés élastiques du pseudo-solide selon la distance à laquelle se trouve la plus proche interface ce qui évite d'avoir des éléments trop déformés dans la partie maillage proche des interfaces. La deuxième stratégie s'appuie sur les travaux d'Étienne^[15] qui utilise une formulation de *lagrangien actualisé*. Le principe de cette dernière est d'utiliser le maillage déformé de l'étape d'adaptation $n - 1$ pour générer le nouveau maillage de l'étape n directement sur la configuration déformée.

Ces deux dernières approches donnent de très bons résultats en terme de maillage. Couplées avec les lois de comportement d'hyperélasticité finie, elles devraient être très efficaces dans l'analyse et l'optimisation de structures souples.

1.2.3 Optimisation de structures souples

Comme on vient de le voir d'importants progrès ont été accomplis ces dernières années dans le traitement des phénomènes d'interactions fluides-structures. Parallèlement, la vitesse des ordinateurs n'a cessé de croître. Aujourd'hui il est donc possible de relever l'un des défis de l'optimisation multidisciplinaire^[47] à savoir les problèmes d'interactions fluides-structures qui sont fortement non-linéaires. Toutefois, il n'existe que peu d'exemples de ce type de problèmes. Citons les travaux d'optimisation d'une membrane flexible de Levin *et al*^[27], ceux de Maute^[33] portant sur des profils tridimensionnels et la méthode variables adjointes et enfin ceux de Lund *et al*^[31]. Ces derniers utilisent une approche très fortement couplée (quasi-

monolithique) et considèrent des grands déplacements.

L'optimisation de phénomènes d'interactions fluides-structures n'en est qu'à ses débuts. Il y a donc de la place pour des améliorations et des nouvelles méthodes. Notamment, la méthode de l'équation des sensibilités déjà utilisée dans l'analyse d'interactions fluides-structures^[13] pourra bientôt s'appliquer au design optimal.

1.3 But et objectifs

Les sections précédentes ont permis de mieux exposer le contexte dans lequel se pose le projet. Le but général est de contribuer au développement de l'analyse et du design optimal de phénomènes d'interactions fluides-structures.

Pour atteindre ce but, on s'est fixé plusieurs objectifs spécifiques :

- recenser des modèles phénoménologiques pour les structures subissant de grands déplacements en vue de les implémenter dans un code d'éléments finis
- développer la paramétrisation NURBS et l'implémenter dans un code d'éléments finis existant
- développer la méthode de l'équation des sensibilités pour les modèles structuraux et pour la paramétrisation NURBS
- intégrer la paramétrisation NURBS ainsi que les simulations d'interactions fluide-structure au processus d'optimisation
- vérifier la procédure d'optimisation ainsi que la modélisation d'interactions fluides-structures
- appliquer les développements à la simulation et à l'optimisation de profils aérodynamiques
- appliquer les développements à des phénomènes d'interactions fluides-structures avec de grands déplacements

CHAPITRE 2

MODÉLISATION DU PROBLÈME FLUIDE-SOLIDE

Dans ce deuxième chapitre, on expose la modélisation mathématique des phénomènes d'interactions fluides-structures via trois volets distincts. Le premier volet, le fluide, est décrit par les équations de Navier-Stokes. Le second est la structure régie par l'équation d'équilibre de Cauchy et par les lois de comportement issues de la théorie de l'hyperélasticité finie¹. Enfin, l'interface fluide-solide constitue le troisième volet avec deux équations d'équilibre participant de notre approche monolithique.

2.1 Équations pour le fluide

On utilise les équations de Navier-Stokes pour modéliser le comportement du fluide. On considère seulement les équations des écoulements stationnaires et incompressibles. Ainsi, toutes les dérivées par rapport au temps sont nulles et on traite la masse volumique ρ_f comme une constante. Les équations de *continuité* et de *mouvement* s'écrivent alors respectivement sous la forme suivante dans le domaine fluide Ω_f :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_f = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \quad (2.1)$$

$$\rho_f \mathbf{u}_f \cdot \nabla \mathbf{u}_f = \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}_f \quad \text{dans } \Omega_f \quad (2.2)$$

où \mathbf{u}_f est la vitesse du fluide, ρ_f sa masse volumique, \mathbf{f}_f un champ de forces

¹ou par des équations de théories simplifiées comme l'élasticité

volumiques et $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ le tenseur des contraintes fluides. Pour un fluide newtonien, ce tenseur s'écrit :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mu_f \left[\nabla \mathbf{u}_f + (\nabla \mathbf{u}_f)^T \right] - p_f \bar{\mathbf{I}} \quad (2.3)$$

avec μ_f la viscosité dynamique et p_f la pression dans le fluide.

On doit fermer mathématiquement ce système d'équations en spécifiant des conditions frontières sur Γ^f . La formulation variationnelle exposée dans le chapitre 3 fait apparaître naturellement deux types de conditions frontières : de *Dirichlet* et de *Neumann* imposées respectivement sur les frontières Γ_D^f et Γ_N^f :

$$\mathbf{u}_f = \bar{\mathbf{u}}_f \quad \text{sur } \Gamma_D^f \quad (2.4)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}_f = \bar{\mathbf{t}}_f \quad \text{sur } \Gamma_N^f \quad (2.5)$$

où \mathbf{n}_f est la normale unitaire sortante à la frontière fluide, $\bar{\mathbf{u}}_f$ une vitesse imposée sur Γ_D^f et $\bar{\mathbf{t}}_f$ une force imposée sur Γ_N^f .

Dans un repère cartésien 2-D, on note u_f et v_f les deux composantes du vecteur vitesse \mathbf{u}_f et f_x^f et f_y^f celles de \mathbf{f}_f dans les directions \vec{x} et \vec{y} . Les équations (2.1) et (2.2) s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_f}{\partial x} + \frac{\partial v_f}{\partial y} &= 0 \quad (2.6) \\ \rho_f \left(u_f \frac{\partial u_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial u_f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu_f \frac{\partial u_f}{\partial x} - p_f \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_f \left(\frac{\partial u_f}{\partial y} + \frac{\partial v_f}{\partial x} \right) \right] + f_x^f \\ \rho_f \left(u_f \frac{\partial v_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial v_f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_f \left(\frac{\partial u_f}{\partial y} + \frac{\partial v_f}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu_f \frac{\partial v_f}{\partial y} - p_f \right] + f_y^f \end{aligned}$$

Les équations pour le fluide sont donc posées dans Ω_f ainsi que leurs conditions frontières sur Γ_D^f et Γ_N^f telles qu'illustrées sur la figure (2.1).

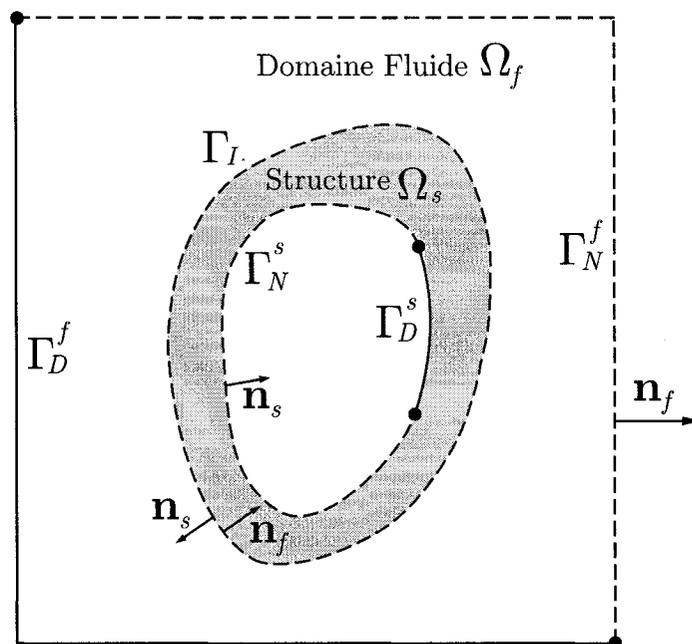


FIG. 2.1 Notation du problème fluide-solide.

2.2 Équations pour le solide

Dans la partie solide et en régime stationnaire, on utilise l'équation d'équilibre de Cauchy :

$$\nabla \cdot \bar{\bar{\sigma}}_{l_{21}} + \mathbf{f}_s = 0 \quad \text{dans } \Omega_s \quad (2.7)$$

où $\bar{\bar{\sigma}}_{l_{21}}$ est le tenseur des contraintes de Piola-Lagrange et \mathbf{f}_s est le champ de forces volumiques dans le solide.

A cette équation s'ajoutent des conditions frontières de Dirichlet et de Neumann :

$$\chi_s = \bar{\chi}_s \quad \text{sur } \Gamma_D^s \quad (2.8)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{l_{21}} \cdot \mathbf{n}_s = \bar{\mathbf{t}}_s \quad \text{sur } \Gamma_N^s \quad (2.9)$$

où \mathbf{n}_s est la normale unitaire sortante à la frontière solide, $\bar{\chi}_s$ un déplacement imposé sur Γ_D^s et $\bar{\mathbf{t}}_s$ une force imposée sur Γ_N^s .

On utilise deux formulations dans la partie solide : celle du *lagrangien total* et celle du *lagrangien actualisé*. Elles diffèrent essentiellement par ce que représente $\bar{\bar{\sigma}}_{l_{21}}$. En effet, le tenseur de Piola-Lagrange (ou premier tenseur de Piola-Kirchhoff) correspond aux contraintes sur la configuration déformée, dénotée par 2, en fonction d'une précédente configuration dénotée par 1. Dans une approche de lagrangien actualisé, la configuration 1 correspond à une configuration déformée antérieure alors que dans la formulation de lagrangien total elle correspond à la configuration initiale non-déformée. L'équation (2.7) s'applique donc aux deux formulations et on notera pour plus de commodité : $\bar{\bar{\sigma}}_{l_{21}} = \bar{\bar{\sigma}}_l$.

Pour exprimer $\bar{\bar{\sigma}}_l$ en fonction des déplacements, il faut invoquer des équations supplémentaires : les *lois de comportement* (ou *constitutive equations* en anglais). La mécanique des solides diffère d'ailleurs de celle des fluides seulement par rapport à ces équations. Avant de présenter ces lois de comportement et différents modèles associés dans les cas incompressible puis compressible, on présente quelques notations importantes sans s'attarder sur les démonstrations.

Il est à noter qu'on traitera ici seulement les phénomènes purement mécaniques (i.e. : les variables thermodynamiques seront ignorées). De même les phénomènes plastiques ne seront pas traités. Enfin, les matériaux seront considérés comme homogènes. Le lecteur trouvera les détails dans la référence^[23].

2.2.1 Notations

Gradient de la transformation

Soit θ la transformation (ou *deformation* en anglais!) subie par un corps continu telle que :

$$\theta : \mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{x} + \boldsymbol{\chi} \quad (2.10)$$

où $\boldsymbol{\chi} = \xi \mathbf{e}_x + \eta \mathbf{e}_y$ est le déplacement.

On définit alors $\overline{\overline{\mathbf{F}}}$, le gradient de la transformation par :

$$\overline{\overline{\mathbf{F}}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \overline{\overline{\mathbf{I}}} + \overline{\overline{\mathbf{h}}} \quad (2.11)$$

où $\overline{\overline{\mathbf{h}}} = \nabla \boldsymbol{\chi}$ représente le tenseur du gradient des déplacements exprimé dans la configuration initiale.

Lors des changements de base, on aura besoin du déterminant de $\overline{\overline{\mathbf{F}}}$ ou *Jacobien* de $\overline{\overline{\mathbf{F}}}$ (ou *volume ratio* en anglais) :

$$J = \det \left(\overline{\overline{\mathbf{F}}} \right) \quad (2.12)$$

Notons que J traduit le changement de volume du solide du à la transformation. Ainsi, si $J = 1$ la transformation est dite isochorique puisqu'elle conserve le volume du corps d'origine.

Tenseurs de déformation

On définit trois tenseurs de déformation très utiles :

- Le tenseur de déformation de Cauchy-Green à droite (ou de Green) :

$$\overline{\overline{\mathbf{C}}} = \overline{\overline{\mathbf{F}}}^T \overline{\overline{\mathbf{F}}} \quad (2.13)$$

- Le tenseur de déformation de Cauchy-Green à gauche (ou de Finger) :

$$\overline{\overline{\mathbf{b}}} = \overline{\overline{\mathbf{F}}} \overline{\overline{\mathbf{F}}}^T \quad (2.14)$$

- Le tenseur de déformation de Green-Lagrange :

$$\overline{\overline{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\mathbf{F}}}^T \overline{\overline{\mathbf{F}}} - \overline{\overline{\mathbf{I}}} \right) = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\mathbf{h}}} + \overline{\overline{\mathbf{h}}}^T + \overline{\overline{\mathbf{h}}}^T \overline{\overline{\mathbf{h}}} \right) \quad (2.15)$$

Tenseurs des contraintes

Finalement, trois tenseurs des contraintes apparaîtront dans les méthodes de résolution retenues. Premièrement, le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff (ou deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff), $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_k$, représente les contraintes sur la configuration non-déformée en fonction de la surface non-déformée. Le second tenseur est celui de Piola-Lagrange (ou premier tenseur de Piola-Kirchhoff), $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_l$ et correspond aux contraintes sur la configuration déformée en fonction de la surface non-déformée. Enfin, le tenseur des contraintes de Cauchy, $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_c$, exprime les contraintes sur la configuration déformée en fonction de la surface déformée.

Ces tenseurs sont reliés entre eux grâce à $\overline{\overline{\mathbf{F}}}$ par les relations suivantes^[23] :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_l = \overline{\overline{\mathbf{F}}} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_k \quad (2.16)$$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_c = \frac{\overline{\overline{\mathbf{F}}} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_k \overline{\overline{\mathbf{F}}}^T}{J} \quad (2.17)$$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_l = J \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_c \overline{\overline{\mathbf{F}}}^{-T} \quad (2.18)$$

Les caractéristiques physiques du solide vont alors apparaître dans l'expression de $\overline{\overline{\sigma}}_k$ via les lois de comportement.

2.2.2 Lois de comportement

En 1678, Hooke énonce la première loi de comportement pour des matériaux élastiques et linéaires par la simple phrase : *ut tensio sic vis*, ce qui signifie que "l'allongement est proportionnel à la force". Mathématiquement, elle s'exprime sous la forme : $\sigma_k = E \cdot \epsilon$ où E est le module d'Young et ϵ l'allongement relatif (ou tenseur de déformation en 2D).

Toutefois, cette loi n'est valable que dans le cas des petits déplacements et des petites déformations linéarisables, autrement appelé Hypothèse des Petites Perturbations (HPP). Pour traiter de grands déplacement et/ou de grandes déformations on doit plutôt faire appel à des lois de comportement issues de la théorie de l'hyperélasticité. On présente ici les formes les plus générales pour écrire $\overline{\overline{\sigma}}_k$. On trouvera les expressions équivalentes pour $\overline{\overline{\sigma}}_l$ et $\overline{\overline{\sigma}}_c$ grâce aux relations (2.16) et (2.17). Un lecteur intéressé trouvera ces expressions dans l'annexe IV.

En termes de fonction d'énergie libre

Lorsqu'on considère un matériau comme hyperélastique (ou de Green), on postule l'existence d'une *fonction d'énergie libre de Helmholtz*, Ψ , définie par unité de volume. Pour des matériaux homogènes, Ψ ne dépend que du gradient de transformation $\overline{\overline{\mathbf{F}}}$ et se nomme *fonction d'énergie de déformation*. On peut alors écrire la loi de comportement suivante :

$$\overline{\overline{\sigma}}_k = 2 \frac{\partial \Psi(\overline{\overline{\mathbf{C}}})}{\partial \overline{\overline{\mathbf{C}}}} = \frac{\partial \Psi(\overline{\overline{\mathbf{E}}})}{\partial \overline{\overline{\mathbf{E}}}} \quad (2.19)$$

En rappelant que J reflète la variation du volume suite à une transformation, on note que pour traiter les déformations finies (ou grandes déformations), il faut que ψ vérifie :

$$J \rightarrow +\infty \Rightarrow \Psi(\overline{\mathbf{F}}) \rightarrow +\infty \quad (2.20)$$

$$J \rightarrow 0^+ \Rightarrow \Psi(\overline{\mathbf{F}}) \rightarrow +\infty \quad (2.21)$$

Autrement dit, il faut une énergie infinie pour dilater un solide jusqu'à l'infini ou pour le compresser jusqu'à un volume nul.

En termes d'invariants

En reprenant les notations de l'annexe I.2, on pose pour $i \in [1, 3]$:

$$I_i = I_i(\overline{\mathbf{C}}) = I_i(\overline{\mathbf{b}})$$

pour écrire $\Psi = \Psi(I_1, I_2, I_3)$ où I_i sont les invariants. Par différentiation par rapport à $\overline{\mathbf{C}}$, on obtient la forme la plus générale pour le tenseur de Piola-Kirchhoff :

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}_k = 2 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \overline{\mathbf{I}} - \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \overline{\mathbf{C}} + I_3 \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \overline{\mathbf{C}}^{-1} \right] \quad (2.22)$$

En termes de dilatations linéiques principales

Grâce à une *décomposition polaire* de $\overline{\mathbf{F}}$ (voir annexe III.1), on obtient les dilatations linéiques principales $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ associées à la base principale $\{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3\}$. On peut alors écrire Ψ sous une nouvelle forme : $\Psi = \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. On obtient également la relation suivante :

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}_k = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_i} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad (2.23)$$

où \otimes exprime le produit tensoriel défini dans l'annexe I.3.

Pour les matériaux hyperélastiques incompressibles

De nombreux polymères sont capables de subir d'importantes contraintes sans changer notablement de volume. On parle alors de matériaux incompressibles dont les seules transformations sont isochoriques ($J = 1$). On peut alors postuler la fonction d'énergie de déformation suivante :

$$\Psi = \Psi(\bar{\mathbf{F}}) - p(J - 1) \quad (2.24)$$

où p est un multiplicateur de Lagrange assurant l'incompressibilité. Il peut être identifié à la pression hydrostatique.

On peut alors écrire la loi de comportement pour des matériaux hyperélastiques incompressibles subissant des déformations finies sous sa forme la plus générale :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_k = -p\bar{\mathbf{C}}^{-1} + 2\frac{\partial\Psi(\bar{\mathbf{C}})}{\partial\bar{\mathbf{C}}} \quad (2.25)$$

Dans la cas isotrope $I_3 = J = 1$, on peut aussi écrire :

$$\Psi = \Psi(I_1, I_2) - \frac{1}{2}p(I_3 - 1) \quad (2.26)$$

$$= \Psi(\lambda_1, \lambda_2) - p(J - 1) \quad (2.27)$$

Et on obtient alors :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_k = -p\bar{\mathbf{C}}^{-1} + 2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial\Psi}{\partial I_2}\right)\bar{\mathbf{I}} - 2\frac{\partial\Psi}{\partial I_2}\bar{\mathbf{C}} \quad (2.28)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \left[-\frac{1}{\lambda_i^2}p + \frac{1}{\lambda_i}\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_i} \right] \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad (2.29)$$

Pour les matériaux hyperélastiques compressibles

Les lois de comportement pour les matériaux compressibles doivent tenir compte des déformations dues au cisaillement et de celles dues aux changements de volume. Deux approches existent : l'une couplée et l'autre découplée. On va ici présenter seulement l'approche découplée qui présente un intérêt analytique et considère une décomposition locale des déformations en une *partie volumétrique* (dilatation avec changement de volume) et en une *partie isochorique* (distortion à volume constant). Cette décomposition possède l'avantage d'éviter des complications numériques lorsqu'on applique la méthode des éléments finis à des matériaux peu compressibles.

On peut alors appliquer une décomposition multiplicative des tenseurs de contraintes comme ceci :

$$\overline{\mathbf{F}} = \left(J^{\frac{1}{3}} \overline{\mathbf{I}} \right) \mathbf{F}, \quad \overline{\mathbf{C}} = \left(J^{\frac{2}{3}} \overline{\mathbf{I}} \right) \mathbf{C}, \quad \overline{\mathbf{b}} = \left(J^{\frac{2}{3}} \overline{\mathbf{I}} \right) \mathbf{b} \quad (2.30)$$

où $\overline{\mathbf{A}}$ dénote la partie isochorique d'un tenseur $\overline{\mathbf{A}}$.

Par définition de J , pour une transformation isochorique on a :

$$\overline{J} = \det(\overline{\mathbf{F}}) = 1 \quad \text{et} \quad \det(\overline{\mathbf{C}}) = \det(\overline{\mathbf{b}}) = 1 \quad (\text{car } \dim(\overline{\mathbf{F}}) = 3 \times 3)$$

On nomme alors $\overline{\mathbf{F}}$ le gradient de la transformation modifié, $\overline{\mathbf{C}}$ le tenseur de Cauchy-Green à droite modifié et $\overline{\mathbf{b}}$ le tenseur de Cauchy-Green à gauche modifié. Par ailleurs, on introduit aussi les dilatations linéiques principales modifiées ainsi que les invariants modifiés :

$$\overline{\lambda}_i = J^{-\frac{1}{3}} \lambda_i \quad \text{et} \quad \overline{I}_1 = \text{tr} \overline{\mathbf{C}}, \quad \overline{I}_2 = \text{tr} \overline{\mathbf{C}}^{-1} \det \overline{\mathbf{C}}, \quad \overline{I}_3 = \det \overline{\mathbf{C}} \quad (2.31)$$

On peut alors écrire la fonction d'énergie de déformation Ψ de manière découplée grâce à la décomposition 2.30 :

$$\Psi(\bar{\mathbf{C}}) = \Psi_{vol}(J) + \Psi_{iso}(\bar{\mathbf{C}}) \quad (2.32)$$

De même on obtient la décomposition suivante pour le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_k = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{k_{vol}} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{k_{iso}} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{k_{vol}} &= Jp \bar{\mathbf{C}}^{-1} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{k_{iso}} &= 2 \frac{\partial \Psi_{iso}(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

On appelle alors p la pression hydrostatique qui est explicitée par une loi de comportement (contrairement au cas incompressible) :

$$p = \frac{D\Psi_{vol}(J)}{DJ} \quad (2.34)$$

Finalement, on connaît les formes les plus générales des lois de comportement pour des matériaux compressibles et incompressibles. Leur mise en application nécessite donc des modèles pratiques qui explicitent la fonction d'énergie libre Ψ pour chaque cas.

2.2.3 Modèles d'hyperélasticité finie

Il existe de nombreux modèles décrivant le comportement des matériaux hyperélastiques. On a bien sûr le modèle de Saint-Venant Kirchhoff pour les matériaux compressibles ainsi que sa version modifiée pour les déformations finies. Deux autres modèles très généraux existent : le *modèle d'Ogden* et la *forme polynomiale*. Il

en existe des variantes compressible et incompressible mais ne sont pas directement applicables. On va donc préférer des cas particuliers donnant naissance à des lois de comportement utilisables en pratique : *le modèle de Varga*, *le modèle de Mooney-Rivlin* et *le modèle Neo-Hookien*. On trouvera dans l'annexe V le détail des développements pour obtenir les équations constituant ces modèles. On note que μ représente ici le module de cisaillement et κ le module d'extension.

2.2.3.1 Modèles incompressibles

Les modèles incompressibles ont un intérêt particulier puisque le modèle le plus répandu, à savoir celui de Saint-Venant Kirchhoff, n'en est pas réellement un et ils ouvrent la porte à la modélisation des matériaux du vivant constitués essentiellement d'eau et donc quasi-incompressibles.

2.2.3.1.1 Modèle de Varga C'est l'un des plus simples modèles hyperélastiques. Il considère la fonction d'énergie libre suivante :

$$\Psi = \mu_1 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3) \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{\mu_1}{2} \quad (2.35)$$

On obtient alors la loi de comportement suivante :

$$\bar{\bar{\sigma}}_k = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i^2} (-p + \mu_1 \lambda_i) \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad (2.36)$$

Le cas pratique d'un carré en compression montre que sa simplicité nuit à la stabilité du modèle.

2.2.3.1.2 Modèle de Mooney-Rivlin à 2 paramètres Il existe en fait plusieurs modèles de Mooney-Rivlin mais on se restreint ici à celui à 2 paramètres μ_1 et μ_2 tels que $\mu = \mu_1 - \mu_2$. On écrit alors :

$$\Psi = \frac{\mu_1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) - \frac{\mu_2}{2} (\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2} - 3) \quad (2.37)$$

$$= \frac{\mu_1}{2} (I_1 - 3) - \frac{\mu_2}{2} (I_2 - 3) \quad (2.38)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_k = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i^2} (-p + \mu_1 \lambda_i^2 + \mu_2 \lambda_i^{-2}) \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad (2.39)$$

$$= -p \bar{\bar{\mathbf{C}}}^{-1} + (\mu_1 - \mu_2 I_1) \bar{\bar{\mathbf{I}}} + \mu_2 \bar{\bar{\mathbf{C}}} \quad (2.40)$$

Ce modèle donne de bons résultats lors des simulations mais on choisit μ_1 et μ_2 de manière arbitraire à défaut d'avoir des données précises sur les matériaux utilisés.

2.2.3.1.3 Modèle Neo-Hookien Le modèle Neo-Hookien est un bon compromis entre les deux précédents, sans être trop simple, il ne fait appel qu'à un seul paramètre $\mu_1 = \mu$. On a :

$$\Psi = \frac{\mu_1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (2.41)$$

$$= \frac{\mu_1}{2} (I_1 - 3) \quad (2.42)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_k = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i^2} (-p + \mu_1 \lambda_i^2) \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad (2.43)$$

$$= -p \bar{\bar{\mathbf{C}}}^{-1} + \mu_1 \bar{\bar{\mathbf{I}}} \quad (2.44)$$

C'est un modèle très intéressant car il donne de bons résultats sans avoir à déterminer de constantes de matériaux supplémentaires.

2.2.3.2 Modèles compressibles

On peut présenter ces modèles sous deux formes, couplée ou découplée. Cette dernière s'appuie notamment sur les modèles incompressibles qu'on vient d'étudier et on pose :

$$p = \kappa \frac{1}{\beta J} \left(1 - \frac{1}{J^\beta} \right) \quad (2.45)$$

avec β un coefficient empirique.

2.2.3.2.1 Modèle de Varga Pour des matériaux compressibles, le modèle de Varga s'écrit de la façon suivante :

$$\Psi = \kappa \beta^{-2} (\beta \ln J + J^{-\beta} - 1) + \mu_1 (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3 - 3) \quad (2.46)$$

$$\bar{\sigma}_k = J p \bar{\mathbf{C}}^{-1} + \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_1}{\lambda_i^2} \left(\bar{\lambda}_i - \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \bar{\lambda}_j \right) \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad (2.47)$$

2.2.3.2.2 Modèle de Mooney-Rivlin à 2 paramètres Sous sa forme découplée, le modèle de Mooney-Rivlin compressible s'écrit comme suit :

$$\Psi = \kappa \beta^{-2} (\beta \ln J + J^{-\beta} - 1) + \frac{\mu_1}{2} (\bar{I}_1 - 3) - \frac{\mu_2}{2} (\bar{I}_2 - 3) \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_k = & J p \bar{\mathbf{C}}^{-1} \\ & + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i^2} \left[\left(\mu_1 \bar{\lambda}_i^2 + \mu_2 \bar{\lambda}_i^{-2} \right) - \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \left(\mu_1 \bar{\lambda}_j^2 + \mu_2 \bar{\lambda}_j^{-2} \right) \right] \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \end{aligned} \quad (2.49)$$

Toutefois, il est de coutume de présenter les modèles sous forme couplée. On peut

alors écrire la forme couplée du modèle de Mooney-Rivlin ainsi :

$$\Psi = c(J-1)^2 - d \ln J + \frac{\mu_1}{2}(I_1 - 3) - \frac{\mu_2}{2}(I_2 - 3) \quad (2.50)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_k = 2 \left[\left(\frac{\mu_1}{2} - \frac{\mu_2}{2} I_1 \right) \bar{\bar{\mathbf{I}}} + \frac{\mu_2}{2} \bar{\bar{\mathbf{C}}} + \left(cJ(J-1) - \frac{d}{2} \right) \bar{\bar{\mathbf{I}}}^{-1} \right] \quad (2.51)$$

où c est une constante du matériau et $d = 2 \left(\frac{\mu_1}{2} - \mu_2 \right)$.

2.2.3.2.3 Modèle Neo-Hookien Enfin, la forme découplée du modèle Neo-Hookien se présente de la façon suivante :

$$\Psi = \kappa \beta^{-2} (\beta \ln J + J^{-\beta} - 1) + \frac{\mu_1}{2} (\bar{I}_1 - 3) \quad (2.52)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_k = J p \bar{\bar{\mathbf{C}}}^{-1} + \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_1}{\lambda_i^2} \left(\bar{\lambda}_i^2 - \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \bar{\lambda}_j^2 \right) \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad (2.53)$$

La forme couplée de ce modèle s'écrit :

$$\Psi = \frac{\mu}{2\beta} (J^{-2\beta} - 1) + \frac{\mu}{2} (I_1 - 3) \quad (2.54)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_k = \mu \left[\bar{\bar{\mathbf{I}}} - J^{-2\beta} \bar{\bar{\mathbf{C}}}^{-1} \right] \quad (2.55)$$

où $\beta = \frac{\nu}{1-2\nu}$ avec ν le coefficient de Poisson.

2.2.3.2.4 Modèle de Saint-Venant Kirchhoff On présente ici le modèle classique ainsi que sa forme modifiée pour les déformations finies.

Modèle classique

Le modèle classique de Saint-Venant Kirchhoff est caractérisé par les équations suivantes :

$$\Psi(\overline{\mathbf{E}}) = \frac{\gamma}{2}(\text{tr}\overline{\mathbf{E}})^2 + \mu \text{tr}(\overline{\mathbf{E}}^2) \quad (2.56)$$

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}_k = \gamma(\text{tr}\overline{\mathbf{E}})\overline{\mathbf{I}} + 2\mu\overline{\mathbf{E}} \quad (2.57)$$

où γ et μ sont les deux coefficients de Lamé.

Toutefois, ce modèle n'est pas recommandable pour les fortes déformations en compression. En effet, selon l'expression (2.56) de Ψ , il suffit d'une énergie finie (Ψ ne tend pas vers l'infini) pour engendrer une déformation infinie. Plus exactement :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{E}} \rightarrow -\frac{1}{2}\overline{\mathbf{I}} &\Rightarrow \det(\overline{\mathbf{F}}) = \sqrt{\det(\overline{\mathbf{I}} + 2\overline{\mathbf{E}})} \rightarrow 0^+ && \text{(déformation infinie)} \\ \text{mais } \Psi(\overline{\mathbf{E}}) &\rightarrow \frac{3}{4}(3\gamma - \mu) \neq \infty && \text{(énergie finie)} \end{aligned}$$

Ce comportement va à l'encontre des propriétés (2.21) découlant de la définition de la fonction d'énergie libre. Des modifications s'imposent alors pour traiter correctement les grandes déformations.

Modèle modifié pour les déformations finies

On propose donc un modèle de Saint-Venant Kirchhoff modifié :

$$\Psi(\overline{\mathbf{E}}) = \frac{\kappa}{2}(\ln J)^2 + \mu \text{tr}(\overline{\mathbf{E}}^2) \quad (2.58)$$

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}_k = \kappa(\ln J)\overline{\mathbf{C}}^{-1} + \mu(\overline{\mathbf{C}} - \overline{\mathbf{I}}) \quad (2.59)$$

On vérifie alors bien que si $\det(\overline{\mathbf{F}}) = J \rightarrow 0^+$ ou $+\infty$ alors $\Psi \rightarrow \infty$.

2.3 Conditions d'équilibre à l'interface fluide-solide

Le couplage entre le fluide et le solide s'exprime par une condition cinématique et une condition d'équilibre à l'interface déformée Γ_{I_1} entre ces deux milieux. La première condition est celle de *non-glissement* qui impose la continuité des vitesses à l'interface. La seconde traduit l'équilibre des contraintes de part et d'autre de l'interface. Ces conditions s'écrivent :

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_s = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{I_1} \quad (2.60)$$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_c \cdot \mathbf{n}_s + \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{n}_f = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{I_1} \quad (2.61)$$

où \mathbf{n}_s est la normale unitaire sortante du domaine solide à l'interface dans la configuration déformée, $\mathbf{n}_f = -\mathbf{n}_s$ et \mathbf{u}_s est la vitesse du solide. Puisqu'on considère des problèmes stationnaires, la vitesse à l'interface est nulle dans (2.60). Dans la deuxième équation (2.61), on retrouve les tenseurs de Cauchy $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_c$ et $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$ qui expriment les contraintes solide et fluide sur la configuration déformée en fonction de la surface déformée. Ils traduisent l'utilisation de deux formulations différentes de part et d'autre de l'interface : une formulation Eulérienne pour la résolution du fluide et une approche Lagrangienne pour exprimer les déplacements dans le solide.

CHAPITRE 3

MÉTHODE DE RÉOLUTION

Ce chapitre présente la méthode retenue pour résoudre le problème d'interactions fluides-structures qu'on vient de décrire. Tout d'abord, on introduit les formulations utilisées dans le fluide et dans le solide qui sont rendues compatibles par l'approche pseudo-solide. On décrit ensuite la *Méthode de l'Equation des Sensibilités* (MES). Enfin, on s'appuie sur la *Méthode des Eléments Finis* (MEF) pour résoudre numériquement le problème.

3.1 Approches et formulations pour les interactions fluides-structures

Pour traiter les interactions fluides-structures, on introduit deux types de formulations différentes : *eulérienne* et *lagrangienne*. Il est donc important de préciser les notations utilisées. En outre, dans le cas de grands déplacements, il est intéressant d'introduire une méthode de *Lagrangien Actualisé* dans la partie solide. Enfin, on utilise une approche *pseudo-solide* pour rendre compatible les formulations dans le fluide et dans le solide.

3.1.1 Notation et formulations

On utilise deux formulations distinctes dans la partie fluide et dans la partie solide. D'une part, une *formulation eulérienne* dans la partie fluide qui considère un volume de contrôle fixe. On observe alors le mouvement d'une particule matérielle qui passe à travers ce volume qu'on associe au domaine fluide réel, c'est-à-dire déformé.

On traite donc le problème fluide dans une configuration déformée. D'autre part, une *formulation lagrangienne* dans la partie solide qui suit une masse de contrôle toujours composée des mêmes particules. Le solide est donc considéré dans un repère non-déformé puisqu'il fait référence à la masse de contrôle d'origine. Les configurations ainsi que la notation qui leur est associée sont illustrées sur la figure 3.1. Ainsi, la formulation eulérienne sera associée à la configuration déformée dénotée par l'indice 1. La configuration non-déformée est dénotée par l'indice 0. Pour une formulation de *Lagrangien Total*, c'est cette configuration initiale que l'on va considérer pour traiter le problème solide. Il est en effet plus facile de mener les calculs sur une configuration non-déformée.

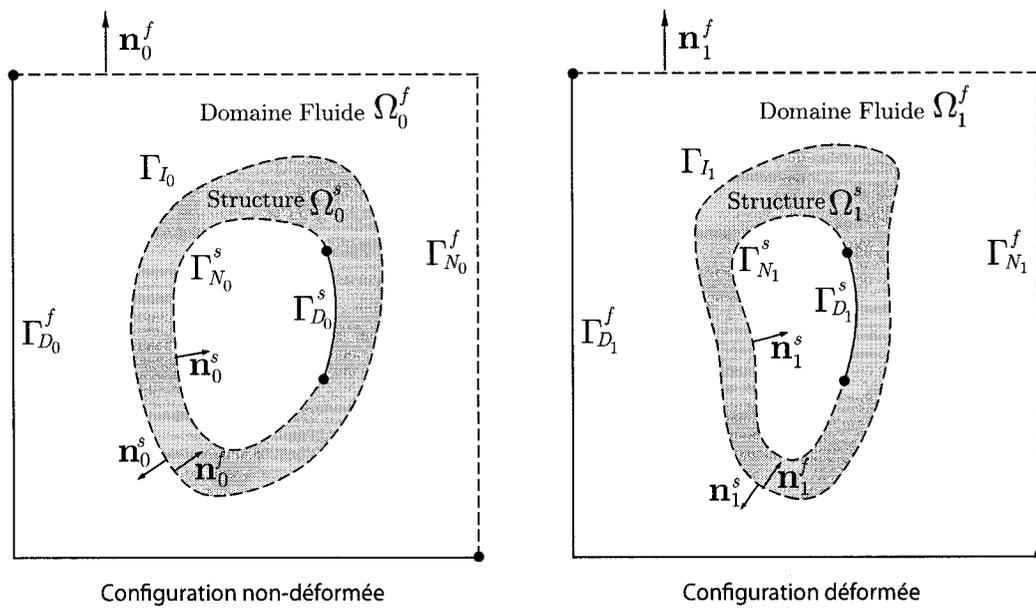


FIG. 3.1 Notation du problème fluide-solide selon la configuration.

3.1.2 Méthode du Lagrangien Actualisé

Toutefois, pour de très grands déplacements, une méthode de *lagrangien actualisé* permet plus de flexibilité dans la gestion de mouvements complexes de la structure. Il est en effet plus facile d'atteindre la configuration finale de manière itérative en utilisant des étapes intermédiaires, i.e. : des configurations déformées intermédiaires. On adapte alors la notation précédente pour cette formulation particulière dans la figure 3.2. Comme on l'a vu, la méthode du Lagrangien Actualisé reprend l'équation d'équilibre de Cauchy pour des contraintes de la configuration déformée (dénotée dans ce cas par 2) en fonction d'une surface correspondant à une précédente configuration déformée (dénotée par 1) :

$$\nabla \cdot \bar{\sigma}_{l_{21}} + f_s = 0 \quad \text{dans } \Omega_s \quad (3.1)$$

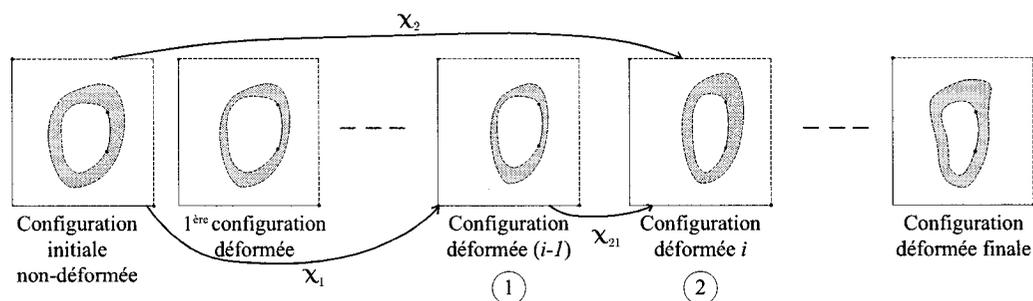


FIG. 3.2 Notation pour la méthode du lagrangien actualisé.

Ceci permet de mailler dans la configuration déformée 2 le domaine fluide et la structure en même temps à partir d'une précédente configuration 1, moins déformée. On introduit les déplacements : χ_1 qui permet de passer de l'état initial à la configuration 1, χ_2 qui permet de passer de l'état initial à la configuration 2 et χ_{21} qui permet de passer de la configuration 1 à la configuration 2. Cette décomposition des déplacements facilite la linéarisation des étapes successives de substitution lors de la résolution, en particulier lorsque la loi de comportement du

solide est linéaire par rapport aux tenseurs de Green-Lagrange (modèle de Saint-Venant Kirchhoff par exemple). Le lecteur trouvera des détails dans l'annexe VI.

3.1.3 Approche pseudo-solide

Lorsqu'on étudie des interactions fluides-structures, on se rend compte que les deux formulations présentées sont incompatibles. En effet, lors de la résolution, les déformations du solide nécessitent des déplacements du maillage fluide au cours des itérations. Or, dans une approche eulérienne ceci est impossible car le volume de contrôle est fixe. On va donc déformer la partie fluide pour rendre les deux formulations compatibles à l'aide d'une approche pseudo-solide.

La géométrie du domaine fluide repose donc sur un pseudo-solide auquel on associe une forme linéaire du tenseur de Green-Lagrange et une loi de comportement de Saint-Venant Kirchhoff. On obtient les équations d'élasticité linéaire suivantes :

$$\overline{\overline{\mathbf{E}}}^{ps} = \frac{1}{2} \left[\overline{\overline{\mathbf{h}}}^{ps} + \left(\overline{\overline{\mathbf{h}}}^{ps} \right)^T \right] \quad (3.2)$$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_k^{ps} = \gamma_{ps} \text{tr} \left(\overline{\overline{\mathbf{E}}}^{ps} \right) \overline{\overline{\mathbf{I}}} + 2\mu_{ps} \overline{\overline{\mathbf{E}}}^{ps} \quad (3.3)$$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_l^{ps} = \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_k^{ps} \quad (3.4)$$

$$\nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_l^{ps} = 0 \quad \text{dans } \Omega_0^f \quad (3.5)$$

où γ_{ps} et μ_{ps} sont les coefficients de Lamé. L'équation d'équilibre de Cauchy pour le pseudo-solide est complétée par les conditions aux frontières suivantes :

$$\chi_{ps} = \overline{\overline{\chi}}_{ps} \quad \text{sur } \Gamma_{D_0}^{ps} - \Gamma_{I_0} \quad (3.6)$$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_{l_{21}}^{ps} \cdot \mathbf{n}_f = \overline{\overline{\mathbf{t}}}_{ps} \quad \text{sur } \Gamma_{N_0}^{ps} - \Gamma_{I_0} \quad (3.7)$$

$$\chi_{ps} = \chi_s \quad \text{sur } \Gamma_{I_0} \quad (3.8)$$

où $\bar{\chi}_{ps}$ et $\bar{\mathbf{t}}_{ps}$ sont respectivement les déplacements et les forces imposés au pseudo-solide et χ_s sont les déplacements de la structure.

Les conditions frontières diffèrent quelque peu de celles du solide. En effet, à l'interface, on impose l'égalité des déplacements entre le pseudo-solide et le solide. On n'impose donc pas la continuité des contraintes à l'interface entre le solide et le pseudo-solide. Ceci permet au pseudo-solide de se déformer librement tout en offrant aucune résistance au déplacement du solide. Il ne s'agit en fait que d'un artifice de calcul qui ne doit pas influencer la physique du problème. En outre, cela permet un libre choix de lois de comportement du pseudo-solide (on pourrait considérer une loi non-linéaire) et ne nécessite pas l'utilisation de la méthode du lagrangien actualisé dans le pseudo-solide.

En outre, on démontre dans l'annexe II.1 les deux relations suivantes valables seulement sur l'interface Γ_I :

$$\bar{\bar{\mathbf{F}}}_{ps} \cdot \mathbf{t}_s = \bar{\bar{\mathbf{F}}}_s \cdot \mathbf{t}_s \quad \text{sur } \Gamma_I \quad (3.9)$$

$$J_{ps} \bar{\bar{\mathbf{F}}}_{ps}^{-T} \cdot \mathbf{n}_s = J_s \bar{\bar{\mathbf{F}}}_s^{-T} \cdot \mathbf{n}_s \quad \text{sur } \Gamma_I \quad (3.10)$$

Le rôle du pseudo-solide se résume donc à déformer le domaine fluide de manière consistante avec les déplacements de la structure. Les équations du pseudo-solide sont résolues dans le fluide de manière couplée avec les équations de Navier-Stokes.

3.2 Méthode de l'équation des sensibilités (MES)

On présente ici la méthode de l'équation des sensibilités qu'on utilise pour calculer le gradient de la fonction coût à optimiser. Les équations de sensibilités s'obtiennent formellement par différentiation des équations aux dérivées partielles du fluide, du

pseudo-solide et de la structure par rapport à un paramètre a . Ce dernier peut être un paramètre géométrique, une propriété physique, une condition frontière ou un coefficient de lois de comportement. Pour un problème d'interactions fluides-structures, on considère les variables (\mathbf{u}, p, χ) comme fonctions de l'espace et du paramètre a . On note alors :

$$\text{Pour } \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, a) \quad \mathbf{s}_{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} \quad (3.11)$$

$$\text{Pour } p = p(\mathbf{x}, a) \quad s_p = \frac{\partial p}{\partial a} \quad (3.12)$$

$$\text{Pour } \chi = \chi(\mathbf{x}, a) \quad \mathbf{s}_{\chi} = \frac{\partial \chi}{\partial a} \quad (3.13)$$

Les dérivées des autres coefficients seront dénotées par un ($'$). On étudie d'abord les équations des sensibilités dans les domaines fluide, solide et pseudo-solide. On traite ensuite les conditions à l'interface fluide-solide.

On note que dans les applications de cette étude, les paramètres de forme ne sont imposés que sur l'interface fluide-solide. Pour alléger le texte, on va ainsi considérer que a est un paramètre de valeur sur toutes les frontières du problème exceptée l'interface Γ_I dont la forme pourra dépendre de a .

3.2.1 Equations pour le fluide

On obtient les équations de sensibilités pour le fluide dans Ω_1^f en différentiant les équations (2.1) et (2.2) :

$$\nabla \cdot \mathbf{s}_{\mathbf{u}_f} = 0 \quad (3.14)$$

$$\rho_f' \mathbf{u}_f \cdot \nabla \mathbf{u}_f + \rho_f (\mathbf{s}_{\mathbf{u}_f} \cdot \nabla \mathbf{u}_f + \mathbf{u}_f \cdot \nabla \mathbf{s}_{\mathbf{u}_f}) = \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}' + \mathbf{f}'_f \quad (3.15)$$

$$\text{avec } \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}' = -s_{p_f} \overline{\overline{\mathbf{I}}} + \mu_f' \left(\nabla \mathbf{u}_f + (\nabla \mathbf{u}_f)^T \right) + \mu_f \left(\nabla \mathbf{s}_{\mathbf{u}_f} + (\nabla \mathbf{s}_{\mathbf{u}_f})^T \right) \quad (3.16)$$

On ferme mathématiquement ces équations en différentiant les conditions aux frontières (2.4) et (2.5) :

$$\mathbf{s}_{\mathbf{u}_f} = \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_f}{\partial a} \quad \text{sur } \Gamma_{D_1}^f - \Gamma_{I_1} \quad (3.17)$$

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^{\prime} \cdot \mathbf{n}_f = \frac{\partial \bar{\mathbf{t}}_f}{\partial a} \quad \text{sur } \Gamma_{N_1}^f - \Gamma_{I_1} \quad (3.18)$$

3.2.2 Equations pour le solide et le pseudo-solide

De même pour le solide et le pseudo-solide, on obtient les équations de sensibilités en différentiant les équations (2.7) et (3.5) :

$$\nabla \cdot \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}'_l + \mathbf{f}'_s = 0 \quad \text{dans } \Omega_0^s \quad (3.19)$$

$$\nabla \cdot \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}'_l{}^{ps'} = 0 \quad \text{dans } \Omega_0^f \quad (3.20)$$

Plus précisément, on peut développer les tenseurs de Piola-Lagrange comme suit :

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}'_l = \bar{\bar{\mathbf{F}}}' \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}'_k + \bar{\bar{\mathbf{F}}}' \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}'_k \quad (3.21)$$

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}'_l{}^{ps'} = \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}'_k{}^{ps'} \quad (3.22)$$

où $\bar{\bar{\mathbf{F}}}' = \bar{\bar{\mathbf{h}}}'$ par différentiation de (2.11). On a alors besoin des sensibilités des lois de comportement.

Dans le cas du modèle linéaire de Saint-Venant Kirchhoff, en différentiant les équations (2.57) et (3.3) on obtient :

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}'_k = \gamma' \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{E}}}) \bar{\bar{\mathbf{I}}} + \gamma \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{E}}}') \bar{\bar{\mathbf{I}}} + 2\mu' \bar{\bar{\mathbf{E}}} + 2\mu \bar{\bar{\mathbf{E}}}' \quad (3.23)$$

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}'_k{}^{ps'} = \gamma'_{ps} \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{E}}}^{ps}) \bar{\bar{\mathbf{I}}} + \gamma_{ps} \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{E}}}'^{ps'}) \bar{\bar{\mathbf{I}}} + 2\mu'_{ps} \bar{\bar{\mathbf{E}}}^{ps} + 2\mu_{ps} \bar{\bar{\mathbf{E}}}'^{ps'} \quad (3.24)$$

En outre, en différentiant les équations (2.15) et (3.2) on peut aussi écrire :

$$\overline{\mathbf{E}}' = \frac{1}{2} \left[\overline{\mathbf{h}}' + \left(\overline{\mathbf{h}}' \right)^T + \left(\overline{\mathbf{h}}' \right)^T \overline{\mathbf{h}} + \overline{\mathbf{h}}^T \overline{\mathbf{h}}' \right] \quad (3.25)$$

$$\overline{\mathbf{E}}^{ps'} = \frac{1}{2} \left[\overline{\mathbf{h}}^{ps'} + \left(\overline{\mathbf{h}}^{ps'} \right)^T \right] \quad (3.26)$$

avec $\overline{\mathbf{h}}' = \nabla_{\mathbf{s}_{\chi_s}}$ et $\overline{\mathbf{h}}^{ps'} = \nabla_{\mathbf{s}_{\chi_{ps}}}$

Pour les lois de comportement plus complexes utilisées dans le cadre de l'hyperélasticité finie, on procède de la même manière. Par exemple, pour le modèles de Saint-Venant Kirchhoff modifié, on différentie l'équation (2.59) pour obtenir :

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}_k' = \kappa'(\ln J)\mathbf{C}^{-1} + \kappa \frac{J'}{J}\mathbf{C}^{-1} + \kappa(\ln J)(\mathbf{C}^{-1})' + \mu'(\overline{\mathbf{C}} - \overline{\mathbf{I}}) + \mu \overline{\mathbf{C}}' \quad (3.27)$$

Enfin, en différentiant (2.8) et (2.9) on obtient les conditions frontières pour le solide :

$$\mathbf{s}_{\chi_s} = \frac{\partial \overline{\boldsymbol{\chi}}_s}{\partial a} \quad \text{sur } \Gamma_{D_0}^s - \Gamma_{I_0} \quad (3.28)$$

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}_l' \cdot \mathbf{n}_s = \frac{\partial \overline{\mathbf{t}}_s}{\partial a} \quad \text{sur } \Gamma_{N_0}^s - \Gamma_{I_0} \quad (3.29)$$

De même pour le pseudo-solide grâce aux conditions (3.6) et (3.7), on écrit :

$$\mathbf{s}_{\chi_{ps}} = \frac{\partial \overline{\boldsymbol{\chi}}_{ps}}{\partial a} \quad \text{sur } \Gamma_{D_0}^{ps} - \Gamma_{I_0} \quad (3.30)$$

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}_l'^{ps'} \cdot \mathbf{n}_f = \frac{\partial \overline{\mathbf{t}}_{ps}}{\partial a} \quad \text{sur } \Gamma_{N_0}^{ps} - \Gamma_{I_0} \quad (3.31)$$

3.2.3 Conditions à l'interface pour les sensibilités

Pour finir, on traite les conditions à l'interface pour les sensibilités avec une attention particulière. On considère ici que a est un paramètre de forme, i.e. : une variation de a engendre une déformation de l'interface Γ_I . On va ainsi noter :

$$\Gamma_{I_0}(a) = \{\hat{\mathbf{x}}(t, a) | t \in [t_0, t_1]\} \quad \text{avec :} \quad \hat{\mathbf{x}} = [x_0, y_0]^T \quad (3.32)$$

$$\Gamma_{I_1}(a) = \{\hat{\mathbf{X}}(t, a) | t \in [t_0, t_1]\} \quad \text{avec :} \quad \hat{\mathbf{X}} = [x_f, y_f]^T \quad (3.33)$$

où t est l'abscisse curviligne qui paramètre Γ et donne la position d'un point sur cette courbe. On différentie donc les conditions à l'interface fluide-solide (2.60), (2.61) et (3.8) en régime stationnaire grâce à des dérivées matérielles (voir annexe I.4) :

$$\frac{D\mathbf{u}_f}{Da} = \frac{D\mathbf{u}_s}{Da} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{I_1} \quad (3.34)$$

$$\frac{D}{Da} [\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_c \cdot \mathbf{n}_1^s + \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_f \cdot \mathbf{n}_1^f] = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{I_1} \quad (3.35)$$

$$\frac{D\chi_{ps}}{Da} = \frac{D\chi_s}{Da} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{I_0} \quad (3.36)$$

En développant la condition de continuité (3.34), on obtient :

$$\mathbf{s}_{\mathbf{u}_f} = -\nabla \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{s}_{\hat{\mathbf{X}}} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{I_1} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{s}_{\mathbf{u}_s} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{I_1} \quad (3.38)$$

La deuxième relation traduit simplement le fait que la vitesse du solide \mathbf{u}_s est toujours nulle en régime stationnaire. L'équation (3.37) concernant la vitesse du fluide à l'interface se développe grâce à la relation suivante :

$$\hat{\mathbf{X}}(\hat{\mathbf{x}}(a)) = \{\mathbf{Id} + \boldsymbol{\chi}\}(\hat{\mathbf{x}}(a)) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{s}_{\hat{\mathbf{X}}} = \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps} \cdot \mathbf{s}_{\hat{\mathbf{x}}} \quad (3.39)$$

Pour la condition (3.35), on développe les calculs assez longs dans l'annexe II.2. On considère une surface infinitésimale $\delta\Gamma_1$ sur laquelle les quantités exprimées dans l'équations (2.61) restent constantes. On utilise la formule de Nanson^[23] pour exprimer ces quantités sur l'interface non-déformée Γ_{I_0} :

$$\begin{aligned} & \left[\left(\overline{\overline{\sigma}}' + \nabla \overline{\overline{\sigma}} \cdot \mathbf{s}_{\hat{\mathbf{x}}} \right) \cdot J_{ps} \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps}^{-T} + \overline{\overline{\sigma}} \cdot \left(J_{ps} \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps}^{-T} \right)' \right] \cdot \mathbf{n}_0^f \delta\Gamma_{I_0} + \\ & \left[\overline{\overline{\sigma}} \cdot J_{ps} \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0^{f'} \right] \delta\Gamma_{I_0} + \left[\left(\overline{\overline{\sigma}}'_l + \nabla \overline{\overline{\sigma}}_l \cdot \mathbf{s}_{\hat{\mathbf{x}}} \right) \cdot \mathbf{n}_0^s + \overline{\overline{\sigma}}_l \cdot \mathbf{n}_0^{s'} \right] \delta\Gamma_{I_0} = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Comme on utilise une formulation eulérienne pour le fluide, on calcule les sensibilités du fluide sur l'interface déformée Γ_{I_1} grâce à la formule de Nanson :

$$\begin{aligned} & \left[\left(\overline{\overline{\sigma}}' + \nabla \overline{\overline{\sigma}} \cdot \mathbf{s}_{\hat{\mathbf{x}}} \right) + \overline{\overline{\sigma}} \cdot \left(J_{ps} \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps}^{-T} \right)' J_{ps}^{-1} \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps}^T \right] \cdot \mathbf{n}_1^f \delta\Gamma_{I_1} + \\ & \left[\overline{\overline{\sigma}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0^{f'} \left(\mathbf{n}_0^f \cdot \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps}^T \mathbf{n}_1^f \right) \right] \delta\Gamma_{I_1} + \left[\left(\overline{\overline{\sigma}}'_l + \nabla \overline{\overline{\sigma}}_l \cdot \mathbf{s}_{\hat{\mathbf{x}}} \right) \cdot \mathbf{n}_0^s + \overline{\overline{\sigma}}_l \cdot \mathbf{n}_0^{s'} \right] \delta\Gamma_{I_0} = 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Cette équation exprime donc l'égalité des sensibilités des forces fluides sur la géométrie déformée avec celles des forces solides sur la configuration non-déformée.

3.3 Méthode des éléments finis

La résolution des systèmes d'équations aux dérivées partielles présentées précédemment s'effectue à l'aide d'une méthode d'élément finis. Elle se décompose en plusieurs étapes. Tout d'abord, on doit développer une forme faible pour toutes les équations. Puis, on les discrétise et on les assemble pour obtenir deux grands systèmes : l'un non-linéaire pour le problème fluide-solide, l'autre linéaire pour ses sensibilités. Enfin, on résout ces systèmes par la méthode de Newton-Raphson.

On note que cette méthode s'intègre dans un processus itératif d'adaptation de maillage grâce à une estimation d'erreur à la fin de chaque calcul^[48]. On n'entrera pas dans les détails.

3.3.1 Formulation faible des équations

La formulation variationnelle (forme faible) d'une équation s'obtient en la multipliant par une fonction test et en intégrant sur le domaine de calcul Ω . On intègre ensuite par parties (théorème de Gauss) les termes du second ordre pour faire naturellement apparaître les conditions aux frontières de Neumann. On applique donc cette procédure au problème fluide-solide et au problème de sensibilités associé.

3.3.1.1 Formulation faible des équations du fluide

Avec les fonctions test δp , $\delta \mathbf{u}$, δs_p , et $\delta \mathbf{s}_u$, les formes faibles des équations de continuité et de mouvement ainsi que leurs sensibilités sont dans l'ordre :

$$\int_{\Omega_1^f} \delta p \nabla \cdot \mathbf{u}_f d\Omega = 0 \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1^f} (\delta \mathbf{u} \cdot \rho_f \mathbf{u}_f \cdot \nabla \mathbf{u}_f + \nabla \delta \mathbf{u} : \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_f) d\Omega = \\ & \int_{\Gamma_{N_1}^f \cup \Gamma_{I_1}} \delta \mathbf{u} \cdot (\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_f \cdot \mathbf{n}_1^f) \delta \Gamma + \int_{\Omega_1^f} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_f d\Omega \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\int_{\Omega_1^f} \delta s_p \nabla \cdot \mathbf{s}_{u_f} d\Omega = 0 \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1^f} \delta \mathbf{s}_u [\rho_f' \mathbf{u}_f \cdot \nabla \mathbf{u}_f + \rho_f (\mathbf{s}_{u_f} \cdot \nabla \mathbf{u}_f + \mathbf{u}_f \cdot \nabla \mathbf{s}_{u_f})] d\Omega + \\ & \int_{\Omega_1^f} \nabla \delta \mathbf{s}_u : \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}'_f d\Omega = \int_{\Gamma_{N_1}^f \cup \Gamma_{I_1}} \delta \mathbf{s}_u \cdot (\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}'_f \cdot \mathbf{n}_1^f) \delta \Gamma + \int_{\Omega_1^f} \delta \mathbf{s}_u \mathbf{f}'_f d\Omega \end{aligned} \quad (3.45)$$

3.3.1.2 Formulation faible des équations du solide et du pseudo-solide

Les formes faibles des équations du solide et du pseudo-solide s'obtiennent grâce au principe du travail virtuel^[3]. Puis par intégration par parties on voit l'équivalence avec l'approche fluide. On considère les fonctions test $\delta \mathbf{r}$ et $\delta \mathbf{s}_r$ pour obtenir :

$$\int_{\Omega_0^s} (\nabla \delta \mathbf{r} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}_l - \delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{f}_s) d\Omega = \int_{\Gamma_{N_0}^s \cup \Gamma_{I_0}} \delta \mathbf{r} \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_l \cdot \mathbf{n}_0^s) \delta \Gamma \quad (3.46)$$

$$\int_{\Omega_0^f} (\nabla \delta \mathbf{r} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}_l^{ps}) d\Omega = \int_{\Gamma_{N_0}^f \cup \Gamma_{I_0}} \delta \mathbf{r} \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_l^{ps} \cdot \mathbf{n}_0^f) \delta \Gamma \quad (3.47)$$

$$\int_{\Omega_0^s} (\nabla \delta \mathbf{s}_r : \bar{\boldsymbol{\sigma}}_l' - \delta \mathbf{s}_r \cdot \mathbf{f}'_s) d\Omega = \int_{\Gamma_{N_0}^s \cup \Gamma_{I_0}} \delta \mathbf{s}_r \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_l' \cdot \mathbf{n}_0^s) \delta \Gamma \quad (3.48)$$

$$\int_{\Omega_0^f} (\nabla \delta \mathbf{s}_r : \bar{\boldsymbol{\sigma}}_l'^{ps'}) d\Omega = \int_{\Gamma_{N_0}^f \cup \Gamma_{I_0}} \delta \mathbf{s}_r \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_l'^{ps'} \cdot \mathbf{n}_0^f) \delta \Gamma \quad (3.49)$$

3.3.1.3 Couplage entre le fluide, le solide et le pseudo-solide

Dans le cadre d'une approche monolithique, on couple le solide, le pseudo-solide et le fluide grâce à un traitement implicite de la forme faible des conditions d'équilibre à l'interface. Il faut alors introduire un nouveau type d'éléments d'épaisseur nulle pour discrétiser l'interface fluide-solide (voir section 3.3.2).

Pour le problème simple d'interactions (sans les sensibilités), on forme ainsi un seul système global contenant toutes les équations y compris celles correspondant aux conditions d'équilibre. On utilise la formulation faible de la condition (2.61) sur l'interface déformée Γ_{I_1} :

$$\int_{\Gamma_{I_1}} \delta \mathbf{u} \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_c \cdot \mathbf{n}_1^s + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f \cdot \mathbf{n}_1^f) \delta \Gamma = 0 \quad (3.50)$$

Par un changement de variable approprié^[44], on peut transformer avantageusement

cette équation sous la forme suivante :

$$\int_{\Gamma_{I_0}} \delta \mathbf{r} \cdot (\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_l \cdot \mathbf{n}_0^s) \delta \Gamma + \int_{\Gamma_{I_1}} \delta \mathbf{u} \cdot (\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_f \cdot \mathbf{n}_1^f) \delta \Gamma = 0 \quad (3.51)$$

où chaque intégrale est évaluée sur la géométrie qui lui est naturelle : l'interface non-déformée Γ_{I_0} pour le solide et l'interface déformée Γ_{I_1} pour le fluide. Pour les conditions (2.60) et (3.8), elles sont imposées implicitement au sens fort le long de l'interface. On retrouve donc :

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_s = 0 \quad \text{sur } \Gamma_I \quad (3.52)$$

$$\boldsymbol{\chi}_{ps} = \boldsymbol{\chi}_s \quad \text{sur } \Gamma_{I_0} \quad (3.53)$$

Pour les sensibilités, on forme un deuxième système global qui est alors linéaire. On impose directement et implicitement les conditions à l'interface (3.36), (3.37) et (3.38) sous leur forme forte. Pour la condition d'équilibre (3.41) qui complète ces équations, on considère toutefois sa forme faible :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{I_0}} \left[(\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}'_l + \nabla \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_l \cdot \mathbf{s}_{\hat{x}}) \cdot \mathbf{n}_0^s + \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_l \cdot \mathbf{n}_0^{s'} \right] \delta \Gamma_{I_0} + \\ & \int_{\Gamma_{I_1}} \left[\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}' \cdot \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0^{f'} \left(\mathbf{n}_0^f \cdot \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps}^T \mathbf{n}_1^f \right) \right] \delta \Gamma_{I_1} + \\ & \int_{\Gamma_{I_1}} \left[(\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}' + \nabla \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}' \cdot \mathbf{s}_{\hat{x}}) + \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}' \cdot \left(J_{ps} \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps}^{-T} \right)' J_{ps}^{-1} \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps}^T \right] \cdot \mathbf{n}_1^f \delta \Gamma_{I_1} = 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

3.3.2 Discrétisation

La méthode de Galerkin consiste à discrétiser la forme faible et à prendre comme fonctions test les fonctions d'interpolation de la solution. Pour alléger les notations, on exprime ces fonctions seulement pour la composante horizontale de

l'écoulement u_f et sa sensibilité s_{u_f} :

$$u_f^h = \sum_{i=1}^{n_{u_f}} u_f^i N_i^{u_f} \quad \text{et} \quad \delta_{u_f}^i = N_i^{u_f} \quad (3.55)$$

$$s_{u_f}^h = \sum_{i=1}^{n_{s_{u_f}}} s_{u_f}^i N_i^{s_{u_f}} \quad \text{et} \quad \delta_{s_{u_f}}^i = N_i^{s_{u_f}} \quad (3.56)$$

où u_f^h et $s_{u_f}^h$ sont les solutions éléments finis, n_{u_f} et $n_{s_{u_f}}$ sont les nombres de noeuds de calcul (ou de fonctions d'interpolation), u_f^i et $s_{u_f}^i$ sont les valeurs nodales et $\delta_{u_f}^i$ et $\delta_{s_{u_f}}^i$ sont les fonctions test associées au noeud i .

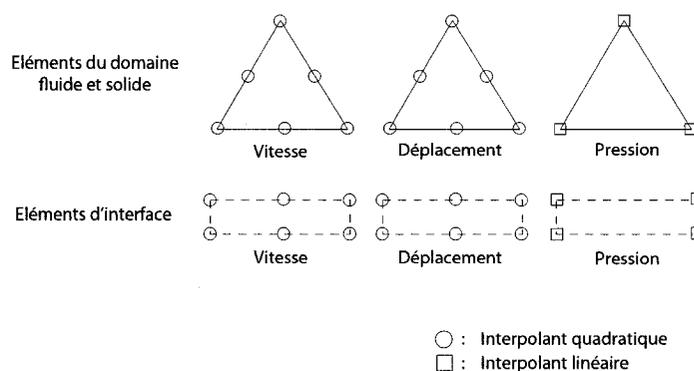


FIG. 3.3 Eléments de Taylor-Hood et d'interface.

On utilise un maillage non-structuré avec des éléments de type Taylor-Hood (P_2 - P_1). Cet élément est linéaire en pression et quadratique en vitesse et en déplacement comme illustré sur la figure 3.3. Il est à noter que la pression est continue. En outre, l'interface nécessite une discrétisation spéciale à l'aide d'éléments unidimensionnels appelés *éléments d'interface* présentés sur la figure 3.3. Ils ont pour fonction de communiquer les forces fluides au solide et d'imposer les déplacements du solide au pseudo-solide comme on le verra dans la section qui suit. Ils sont linéaires en pression et quadratiques en vitesse et en déplacement. Enfin, on discrétise les sensibilités à l'aide de ces mêmes éléments et du même maillage. Ceci simplifie la programmation sans être une exigence de la méthode de l'équation des sensibilités.

3.3.3 Stratégie de résolution

Le problème des sensibilités est traité de manière similaire à celui de l'interaction fluides-structures avec une discrétisation identique dans les deux cas. Ainsi, les deux systèmes à résoudre partagent la même structure de données. De ce fait, on expose la stratégie de résolution seulement pour le problème basique d'interaction fluides-structures. Les différentes étapes ainsi que les observations qui sont présentées dans ce chapitre s'appliquent donc aussi au problème des sensibilités.

La stratégie de résolution monolithique couple tous les degrés de liberté associés à la vitesse, à la pression et aux déplacements solides et pseudo-solides. Cette approche nécessite un traitement implicite de toutes les conditions frontières y compris celles à l'interface. Ces dernières assurent un couplage le plus intime possible entre le fluide et le solide comme c'est illustré sur la figure 3.4. L'élément d'interface à gauche impose la relation $\chi_{ps} = \chi_s$. Autrement dit, il transmet le déplacement du solide χ_s au domaine fluide via la déformation du pseudo-solide χ_{ps} . L'élément de droite garantit l'équilibre des forces de part et d'autre de l'interface. Ainsi, il transfère les forces induites par l'écoulement du fluide au solide qui va subir des déformations. Cette boucle illustre très bien le couplage implicite à l'interface.

3.3.3.1 Système global à résoudre

Avant d'assembler le système global, on introduit une variante implicite de la *méthode des réactions*^[10]. On reformule les formes faibles des équations (3.43) et (3.46) pour faire apparaître deux nouvelles inconnues soient les réactions du fluide \mathbf{r}_f^{int} et de la structure \mathbf{r}_s^{int} . Pour alléger les notations, on suppose $\mathbf{f}_f = \mathbf{f}_s = 0$

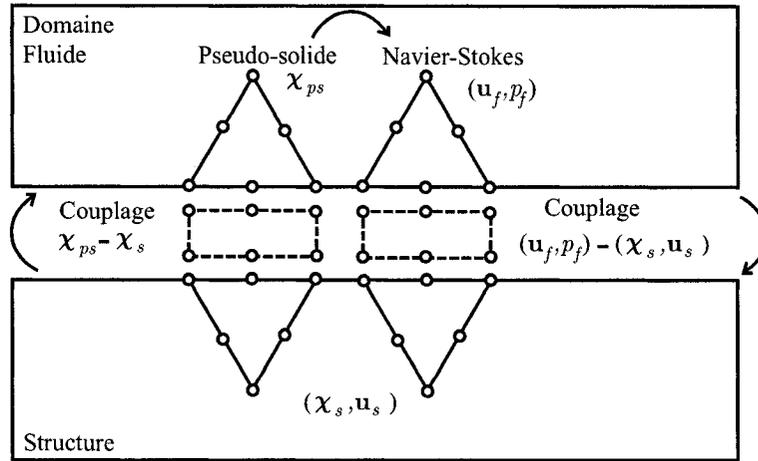


FIG. 3.4 Couplage implicite à l'interface fluide-structure.

et on écrit :

$$\int_{\Omega_1^f} (\delta \mathbf{u} \cdot \rho_f \mathbf{u}_f \cdot \nabla \mathbf{u}_f + \nabla \delta \mathbf{u} : \bar{\bar{\sigma}}_f) d\Omega - \underbrace{\int_{\Gamma_{I_1}} \delta \mathbf{u} \cdot (\bar{\bar{\sigma}}_f \cdot \mathbf{n}_1^f) \delta \Gamma}_{\mathbf{r}_f^{int}} = \underbrace{\int_{\Gamma_{N_1}^f} \delta \mathbf{u} \cdot (\bar{\bar{\sigma}}_f \cdot \mathbf{n}_1^f) \delta \Gamma}_{\text{condition de Neumann}} \quad (3.57)$$

$$\int_{\Omega_0^s} (\nabla \delta \mathbf{r} : \bar{\bar{\sigma}}_l) d\Omega - \underbrace{\int_{\Gamma_{I_0}} \delta \mathbf{r} \cdot (\bar{\bar{\sigma}}_l \cdot \mathbf{n}_0^s) \delta \Gamma}_{\mathbf{r}_s^{int}} = \underbrace{\int_{\Gamma_{N_0}^s} \delta \mathbf{r} \cdot (\bar{\bar{\sigma}}_l \cdot \mathbf{n}_0^s) \delta \Gamma}_{\text{condition de Neumann}} \quad (3.58)$$

En fait, \mathbf{r}_f^{int} et \mathbf{r}_s^{int} permettent d'appliquer les forces fluides sur la structure de manière implicite sans alourdir ni ralentir la phase de résolution et indépendamment du type d'élément retenu.

On considère donc pour ce problème 11 inconnues formant le vecteur d'état suivant :

$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_f, p_f, \mathbf{u}_f^{int}, \mathbf{r}_f^{int}, \chi_{ps}, \chi_{ps}^{int}, \chi_s^{int}, \mathbf{r}_s^{int}, \mathbf{u}_s^{int}, \chi_s, \mathbf{u}_s]^T$, où (*int*) dénote une valeur sur l'interface. Pour calculer ces variables, on dispose des équations présentées

3.3.3.2 Méthode de Newton-Raphson

Pour résoudre ce système $\mathbf{R}(\mathbf{U}) = 0$, on initialise toutes les variables à zéro puis on applique 2 à 3 cycles successifs de substitution. On dispose alors d'une bonne estimation initiale de la solution pour assurer la convergence de la méthode de Newton-Raphson. Cette dernière nécessite l'évaluation de la *matrice jacobienne* $\overline{\mathbf{J}}$ qui décrit la sensibilité des équations par rapport à chacune des inconnues pour déterminer les vecteurs de correction successifs $\delta\mathbf{U}$:

$$\overline{\mathbf{J}}(\mathbf{U}^n) \delta\mathbf{U}^n = -\mathbf{R}(\mathbf{U}^n) \quad (3.59)$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \delta\mathbf{U}^n \quad (3.60)$$

$$\text{où } J_{ij} = \frac{\partial R_i(\mathbf{U}^n)}{\partial U_j}$$

On utilise l'approche du *jacobien numérique* qui approxime les dérivées par différences finies en perturbant la solution d'une petite quantité δ :

$$J_{ij} = \frac{\partial R_i(\mathbf{U}^n)}{\partial U_j} = \frac{R_i(U_1^n, U_2^n, \dots, U_j^n + \delta, \dots, U_N^n) - R_i(\mathbf{U}^n)}{\delta} \quad (3.61)$$

La stratégie monolithique adoptée ici permet d'atteindre une convergence quadratique de la méthode de Newton-Raphson. Ceci se fait aux dépens du nombre de variables et de la taille du système qui augmentent par rapport à une approche découplée. Toutefois, cet inconvénient est largement compensé par la réduction significative du nombre d'itérations de Newton, i.e. : du temps de calcul. Comme précédemment mentionné, tout ceci s'applique aussi au problème des sensibilités sauf que, le système étant linéaire, une seule itération de résolution est alors nécessaire.

3.3.3.3 Factorisation conditionnelle

Pour finir, on introduit brièvement le concept de *factorisation conditionnelle* qui permet un gain notable de temps de calcul. Pour calculer le vecteur de correction selon l'équation (3.59), on inverse $\bar{\bar{J}}$ grâce à une factorisation LU . Or, cette factorisation est très coûteuse en temps de calcul. L'idée est donc d'éviter cette factorisation lorsque cela est possible. Lorsque $\delta \mathbf{U}^n$ devient petit, on approxime $\bar{\bar{J}}(\mathbf{U}^n)$ par $\bar{\bar{J}}(\mathbf{U}^{n-1})$ de manière à éviter une nouvelle factorisation. Concrètement, pour un problème unidimensionnel, on conserve la même pente $J(u_0)$ pour les tangentes successives à la courbe $R(u)$. Le calcul converge alors bien vers la solution α mais en un nombre plus important d'itérations par rapport à la méthode classique comme l'illustre la figure 3.6. Pour des maillages fins ($\bar{\bar{J}}$ est de grande taille), le temps

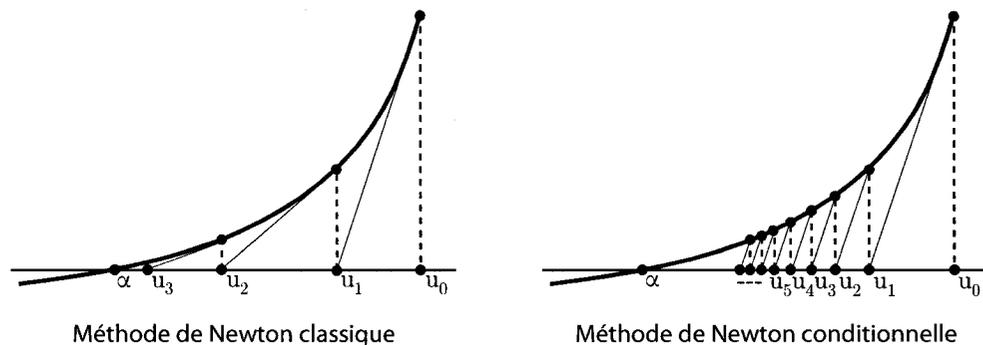


FIG. 3.6 Illustration de la factorisation conditionnelle.

gagné en ne factorisant pas la matrice jacobienne est bien supérieur à celui qui est imputable à un plus grand nombre d'itérations. Cette méthode est donc très efficace.

Concernant les sensibilités, on observe qu'une formulation de type Galerkin

sans stabilisation mène à une matrice jacobienne indépendante du paramètre a considéré^[19]. De ce fait, même si le membre de droite de l'équation (3.59) dépend du paramètre, on peut travailler avec la même matrice jacobienne $\overline{\overline{\mathbf{J}}}$, factorisée seulement une fois, pour tous les paramètres.

Comparées à la MES, les méthodes adjointes offrent habituellement un avantage indéniable lorsqu'on traite plusieurs paramètres. En effet, il suffit de résoudre un seul problème d'analyse, peu importe le nombre de paramètres mis en jeu. La MES nécessite quant à elle une résolution du système des sensibilités pour chaque paramètre. En factorisant seulement une fois $\overline{\overline{\mathbf{J}}}$, on contourne cet inconvénient. **La factorisation conditionnelle permet donc de gommer l'un des plus grands inconvénients de la MES par rapport aux méthodes adjointes.**

CHAPITRE 4

PARAMÉTRISATION NURBS

Ce chapitre permet d'introduire la paramétrisation NURBS (Non-Uniform Rational B-spline) retenue pour définir les géométries aérodynamiques. Dans un processus de design optimal de profils, la représentation géométrique ainsi que la paramétrisation des courbes est un aspect crucial. Tout d'abord, il est souhaitable de réduire le nombre de paramètres de design pour accélérer l'optimisation tout en gardant assez de liberté et de flexibilité pour représenter une large gamme de profils^[30]. En outre, la représentation géométrique doit assurer l'obtention de surfaces lisses lors d'un processus d'optimisation afin de converger vers des profils réalistes. Dans un premier temps, on expose donc en quoi les avantages de la paramétrisation NURBS répondent à ces contraintes. Ensuite, on donne la définition mathématique des NURBS. Enfin, on présente les équations de sensibilités pour les NURBS dans le cadre d'un processus d'optimisation.

4.1 Avantages de la paramétrisation NURBS

Dans le domaine de l'optimisation aérodynamique, il existe de nombreuses méthodes de représentation possédant toutes leurs avantages et leurs inconvénients^[32, 2, 35]. Toutefois, les *B-splines* se sont imposées ces dernières années comme la méthode d'interpolation de référence et ont donné naissance aux NURBS, leurs formes fractionnaires. Ainsi, les NURBS offrent tous les avantages des *B-splines* en plus d'une grande flexibilité appropriée à l'optimisation. En premier lieu, la paramétrisation NURBS minimise le nombre de paramètres de design. Une

NURBS peut représenter avec précision une large gamme de profils d'ailes avec 13 points ou moins^[46]. Par exemple, 10 points de contrôle suffisent pour représenter un profil NACA0012 comme illustré sur la figure 4.1. Ensuite, les NURBS représentent des profils naturellement lisses. Ainsi, le risque de bruit dans la géométrie est minimisé et l'optimisation est facilitée. Enfin, tout comme pour les B-splines, les paramètres d'une NURBS ont une influence locale sur la géométrie : le déplacement d'un point de contrôle provoque seulement une modification locale de la courbe. L'efficacité des NURBS pour représenter des formes d'ailes est discutée en détails dans les références^[29, 30, 46].

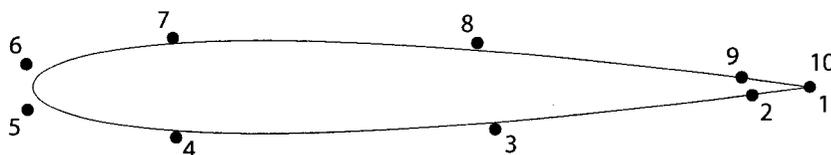


FIG. 4.1 Profil NACA0012 représenté par une NURBS à 10 points de contrôle.

4.2 Définition des NURBS

Une NURBS étant une extension des B-splines, on va d'abord définir les fonctions de base des B-splines, les B-splines elles-mêmes et enfin les NURBS. Plus de détails sont présentés dans l'annexe VII.

4.2.1 Les fonctions de base des B-splines

Les B-splines se construisent sur une base formée de fonctions *splines* particulières que l'on nomme *fonctions de base*. On peut trouver des définitions très théoriques de ces fonctions^[38], d'autres plus originales comme celles de Reggio et Godin^[39]

et enfin celle proposée par C. de Boor^[7], M. Cox et L. Mansfeld. C'est la plus utilisée car elle conduit à une implémentation très élégante grâce à sa formule de récurrence. Les fonctions de base reposent sur un *vecteur nodal* $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_m\}$. C'est une suite croissante de m nombres réels t_i (généralement dans $[0, 1]$) appelés *noeuds*. Il existe $n = m - p - 1$ fonctions de base de degré p . La i^{eme} fonction de base B-spline de degré p (d'ordre $p+1$), notée $N_{i,p}$, est alors définie par récurrence comme suit :

$$N_{i,p}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1} - t}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t) \quad (4.1)$$

$$\text{avec } N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.2)$$

où t est l'abscisse curviligne.

4.2.2 Représentation B-spline

On définit une B-spline \mathbf{C} de degré p comme une composition linéaire des fonctions de base que l'on vient de définir :

$$\mathbf{C}(t) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(t) \mathbf{P}_i \quad t_0 = a \leq t \leq t_m = b \quad (4.3)$$

où $\mathbf{P}_i = [x_i, y_i]^T$ sont les n points de contrôle de la courbe et les fonctions $N_{i,p}$ sont les fonctions de base B-splines de degré p définies sur un vecteur nodal à $m = n + p + 1$ noeuds :

$$\mathcal{T} = \{\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, t_{p+2}, \dots, t_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1}\}$$

4.2.3 Paramétrisation NURBS

Les Non-Uniform Rationnal Beta-Splines, ou NURBS, sont des courbes rationnelles de B-splines. On définit alors une NURBS \mathbf{C} de degré p (i.e. d'ordre $p + 1$) comme suit :

$$\mathbf{C}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i N_{i,p}(t) \mathbf{P}_i}{\sum_{i=1}^n w_i N_{i,p}(t)} \quad a \leq t \leq b \quad (4.4)$$

avec les éléments suivants :

- \mathbf{P}_i les points de contrôle
- w_i les *poinds* associés à chaque point de contrôle
- $N_{i,p}$ les B-spline de base de degré p définies sur le vecteur nodal \mathcal{T}
- $\mathcal{T} = \{\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, t_{p+2}, \dots, t_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1}\}$

On introduit les fonctions de base rationnelles de degré p , $R_{i,p}$ pour obtenir une écriture semblable à celles des B-splines :

$$\mathbf{C}(t) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(t) \mathbf{P}_i \quad (4.5)$$

$$\text{avec} \quad R_{i,p}(t) = \frac{w_i N_{i,p}(t)}{\sum_{i=1}^n w_i N_{i,p}(t)} \quad (4.6)$$

Pour plus de détails à propos de NURBS, leurs propriétés, la manière de les calculer et de les différentier, le lecteur intéressé peut se référer aux ouvrages de De Boor^[7], DeVore *et al.*^[9] et Piegl *et al.*^[37].

4.3 Sensibilités des NURBS

Lors du processus d'optimisation, on utilise la méthode de l'équation des sensibilités (MES) pour évaluer le gradient de la fonction coût. On doit donc obtenir les sensibilités des NURBS. Les paramètres de design de la forme d'un profil sont les coordonnées et les poids des points de contrôle (x_i, y_i, w_i) . La dérivée d'un point $\hat{\mathbf{X}}(t, \mathbf{a})$ sur la NURBS \mathbf{C} par rapport au vecteur des variables de design $\mathbf{a} = [x_1; \dots; x_n; y_1; \dots; y_n; w_1; \dots; w_n]^T$, appelée sensibilité de la géométrie, doit être déterminée afin d'imposer les conditions frontières du problème des sensibilités et d'évaluer les sensibilités de la fonction objectif. Comme on peut le voir dans la formule de récurrence (4.1), une fonction de base des B-splines dépend de \mathcal{T} , le vecteur nodal, et de t , l'abscisse curviligne. Par conséquent, elle est indépendante des points de contrôle. Ainsi, les sensibilités de $\hat{\mathbf{X}}$ par rapport aux paramètres de design se déduisent facilement et s'écrivent :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x_j} = \frac{w_j N_{j,p}(t)}{\sum_{i=1}^n w_i N_{i,p}(t)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial y_j} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial y_j} = \frac{w_j N_{j,p}(t)}{\sum_{i=1}^n w_i N_{i,p}(t)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial w_j} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial w_j} &= \frac{N_{j,p}(t)}{\sum_{i=1}^n w_i N_{i,p}(t)} \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \end{bmatrix} \\ &- N_{j,p}(t) \sum_{k=1}^n \frac{w_k N_{k,p}(t)}{(\sum_{i=1}^n w_i N_{i,p}(t))^2} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.9)$$

CHAPITRE 5

PROCÉDURE DE DESIGN OPTIMAL

Ce dernier chapitre théorique décrit la procédure de design optimal utilisée dans cette étude. Comme on l'a vu, on souhaite optimiser une fonction objectif F qui dépend du vecteur des paramètres de design \mathbf{a} et des variables du problème d'interaction fluides-structures $\mathbf{U}(\mathbf{a}, \mathbf{X}(\mathbf{a}))$ où \mathbf{X} représente le domaine physique global. On présente donc ici la boucle d'optimisation mise en place pour optimiser F . Ensuite, on décrit plus en détails l'algorithme d'optimisation retenu. Enfin, on explique comment on évalue le gradient de la fonction objectif.

5.1 Boucle d'optimisation

Défini au chapitre 3, le système global du problème d'interaction fluides-structures $\mathbf{R}(\mathbf{a}, \mathbf{U}(\mathbf{a}, \mathbf{X}(\mathbf{a}))) = 0$ représente les contraintes qui doivent être satisfaites à chaque étape du processus d'optimisation. En outre, on doit imposer des bornes de variations sur les paramètres de design afin d'obtenir une solution réaliste. Ainsi, le domaine de design est généralement un ensemble fermé. Mathématiquement, tout cela se traduit dans l'expression suivante du problème d'optimisation :

$$\begin{aligned}
 &\text{Optimiser} && \mathcal{F}(\mathbf{a}) = F(\mathbf{a}, \mathbf{U}(\mathbf{a}, \mathbf{X}(\mathbf{a}))) \\
 &\text{Sujet à} && \mathbf{R}(\mathbf{a}, \mathbf{U}(\mathbf{a}, \mathbf{X}(\mathbf{a}))) = 0 \\
 &&& \mathbf{L}_i \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{L}_s
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Pour résoudre ce problème d'optimisation, on considère la géométrie initiale \mathbf{X}_0

associée aux paramètres \mathbf{a}_0 et on procède de manière itérative jusqu'à la convergence des paramètres de design. On utilise donc une boucle d'optimisation qui se décrit comme suit :

- (0) Initialisation des paramètres de design \mathbf{a}_0
- (1) Etape k
- (2) Génération de la géométrie \mathbf{X}_k (voir chapitre 4)
- (3) Calcul adaptatif de \mathbf{U}_k et de ses sensibilités (voir chapitre 3)
- (4) Evaluation de la fonction objectif \mathcal{F} et de son gradient (voir section 5.3)
- (5) Détermination de \mathbf{a}_{k+1} par l'algorithme d'optimisation (voir section 5.2)
- (6) Retour à l'étape (1) tant qu'il n'y a pas convergence

5.2 Algorithme d'optimisation

On a choisi une méthode d'optimisation à gradients pour trouver les valeurs optimales des paramètres. A cause de la lourdeur du calcul de l'analyse des problèmes d'interactions fluides-structures, on doit se servir d'un algorithme ne requérant qu'un petit nombre d'évaluations de la fonction objectif et de son gradient. C'est pourquoi, on utilise un algorithme de quasi-Newton dans cette présente étude. Dans le cas où l'on veut maximiser une fonction objectif $\mathcal{F}(\mathbf{a})$, la matrice hessienne approximée est initialisée avec $\overline{\overline{\mathbf{H}}}_0 = \mathcal{F}(\mathbf{a}_0)\overline{\overline{\mathbf{I}}}$ et actualisée ensuite grâce à la méthode sécante BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfard et Shanno). Au point de design \mathbf{a}_k , on détermine les prochaines valeurs des paramètres en résolvant un sous-problème d'*intervalle de confiance*^[8] :

$$\max_{\|\mathbf{s}_k\| \leq \delta_k} \mathcal{F}(\mathbf{a}_k) + \nabla \mathcal{F}(\mathbf{a}_k)^T \mathbf{s}_k + \frac{1}{2} \mathbf{s}_k^T \overline{\overline{\mathbf{H}}}_k \mathbf{s}_k \quad (5.2)$$

où $\mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{a}_k + \mathbf{s}_k$.

Cette stratégie de globalisation permet la convergence de l'algorithme pour des valeurs initiales des paramètres plus éloignées de la solution. Toutefois, cet algorithme nécessite l'évaluation de la fonction objectif \mathcal{F} et de son gradient $\nabla\mathcal{F} = D\mathcal{F}/D\mathbf{a}$. Ce gradient est calculé à partir des sensibilités des variables du problème d'interaction fluides-structures et des sensibilités de la géométrie comme détaillé dans la section suivante.

Pour de plus amples informations sur les algorithmes d'optimisation, on réfère le lecteur à l'ouvrage très complet de Vanderplats^[52] ainsi qu'aux travaux de Dennis et Schnabel^[8].

5.3 Evaluation du gradient de la fonction objectif

La fonction objectif est une mesure de la performance du système mécanique étudié. Dans le cadre du design optimal de profils, cette fonction est souvent exprimée en termes de forces aérodynamiques exercées par le fluide sur la structure de l'aile. Plus précisément, on utilise des forces totales comme la portance et la traînée ou les coefficients qui leur sont associés. On est donc amené à intégrer les forces locales sur la surface de l'aile Γ lors du calcul de la fonction objectif. Or, la forme de cette surface dépend des paramètres de design \mathbf{a} . Donc, le calcul de la fonction objectif implique des intégrales de quantités aérodynamiques sur une surface dépendante d'un paramètre de forme a . Soit $\overline{\Phi}$ un tenseur d'ordre 2, on peut écrire ces intégrales sous la forme générale suivante :

$$\int_{\Gamma(a)} \overline{\Phi} \cdot \mathbf{n} \delta\Gamma \quad (5.3)$$

Un algorithme d'optimisation à gradients nécessite le calcul de la dérivée de

l'équation ci-dessus par rapport au paramètre de design a . Sachant que la surface d'intégration dépend du paramètre a , on utilise la formule suivante :

$$\frac{D}{Da} \int_{\Gamma(a)} \overline{\Phi} \cdot \mathbf{n} \delta\Gamma = \int_{\Gamma(a)} \left(\frac{D\overline{\Phi}}{Da} \cdot \mathbf{n} + \overline{\Phi} \cdot \frac{D\mathbf{n}}{Da} + \frac{1}{L} \frac{DL}{Da} \overline{\Phi} \cdot \mathbf{n} \right) \delta\Gamma \quad (5.4)$$

où L est le Jacobien de la paramétrisation de l'interface Γ . Avec les notations introduites au chapitre 3, ce Jacobien est donné selon la configuration par les expressions suivantes :

$$L_0 = \left\| \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial t} \right\| \quad L_1 = \left\| \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial t} \right\| \quad (5.5)$$

La dérivée du Jacobien est alors obtenue par les formules :

$$\frac{DL_0}{Da} = \frac{1}{L_0} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{x}}}{\partial t \partial a} \right) \quad \frac{DL_1}{Da} = \frac{1}{L_1} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{X}}}{\partial t \partial a} \right) \quad (5.6)$$

Finalement, $\frac{D\overline{\Phi}}{Da}$ se calcule grâce aux sensibilités des variables de l'écoulement et la définition d'une dérivée totale :

$$\text{Sur l'interface initiale :} \quad \frac{D\overline{\Phi}}{Da} = \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial a} + \nabla \overline{\Phi} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial a} \quad (5.7)$$

$$\text{Sur l'interface déformée :} \quad \frac{D\overline{\Phi}}{Da} = \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial a} + \nabla \overline{\Phi} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial a} \quad (5.8)$$

Le lecteur intéressé se référera à l'annexe VII pour les calculs concernant la géométrie de l'interface (dénnotée par $\hat{\mathbf{x}}$ ou $\hat{\mathbf{X}}$) représentée par une NURBS.

Dans la présente étude, on s'intéresse généralement aux résultantes des forces aérodynamiques sur l'aile déformée par l'écoulement. Les intégrales à calculer ont

donc la forme suivante :

$$\frac{D}{Da} \int_{\Gamma_{I_1}(a)} \bar{\sigma} \cdot \mathbf{n}_1^f \delta\Gamma_{I_1} \quad (5.9)$$

Il est parfois plus facile de mener ce calcul sur une configuration non-déformée. Or, en appliquant la condition (2.61) et la formule de Nanson, on montre qu'on peut calculer la même intégrale en configuration non-déformée grâce aux contraintes solides $\bar{\sigma}_l$:

$$\frac{D}{Da} \int_{\Gamma_{I_1}(a)} \bar{\sigma} \cdot \mathbf{n}_1^f \delta\Gamma_{I_1} = \frac{D}{Da} \int_{\Gamma_{I_0}(a)} \bar{\sigma}_l \cdot \mathbf{n}_0^s \delta\Gamma_{I_0} \quad (5.10)$$

Ce chapitre termine donc de présenter les développements théoriques nécessaires pour l'analyse et le design optimal de phénomènes d'interactions fluides-structures. Les deux chapitres suivants traitent de la mise en pratique de ces développements dans le cadre de simulations aérodynamiques assistées par ordinateur. Tout d'abord, on expose des cas de vérifications des différents volets composant cette étude. Ensuite, on applique notre approche à des cas pratiques faisant intervenir tout ou partie des concepts théoriques développés jusque là.

CHAPITRE 6

VÉRIFICATIONS

Dans ce chapitre on expose certains cas intéressants permettant de vérifier le code de calcul. Dans le cas des phénomènes d'interactions fluides-structures, on utilise une solution manufacturée afin de tester les parties du code traitant le problème fluide-solide et ses sensibilités. Pour l'optimisation aérodynamique, on procède à un exercice de *flow matching* sur un profil d'aile comme moyen de vérification de la procédure de design optimal.

Il est en effet nécessaire de vérifier l'implémentation des équations, la performance du résolveur ainsi que la procédure d'optimisation avant d'aborder les problèmes d'application qui feront l'objet de conclusions importantes. Contrairement à la *validation* qui compare les modèles mathématiques avec le phénomène naturel qu'il tente de décrire, la *vérification* se réfère à la comparaison d'une solution connue (exacte) tirée des équations qui nous intéressent avec la solution numérique obtenue par le code de calcul en résolvant ces mêmes équations. Cette solution exacte doit être suffisamment complexe pour activer tous les termes des équations et pour s'assurer qu'ils sont bien traités par le code. Une analyse de convergence sur un problème dont la solution est connue permet alors d'évaluer la performance du solveur ainsi que celle de l'estimateur d'erreur (par projection).

6.1 Solution manufacturée

La Méthode des Solutions Manufacturées (MSM) propose une démarche générale pour générer des solutions exactes analytiques à un problème. Elle se résume en

deux étapes. Tout d'abord, on choisit de façon arbitraire une solution manufacturée qui ne satisfait pas en général les équations que l'on cherche à vérifier. Ensuite, on ajoute à ces équations des termes sources appropriés ainsi que les conditions aux limites correspondantes en s'appuyant sur la solution manufacturée. Comme nous considérons des phénomènes d'interactions fluides-structures avec un écoulement à divergence nulle, on s'appuie sur la méthodologie présentée par Tremblay *et al.*^[45] pour construire la solution manufacturée présentée ici.

On utilise une solution manufacturée dans un but triple. En premier lieu, on souhaite vérifier les performances du solveur pour les phénomènes d'interactions fluides-structures et le calcul de leurs sensibilités. En second lieu, on doit vérifier la bonne implémentation de la paramétrisation NURBS. Enfin, on vérifie l'exactitude de la méthodologie proposée pour calculer le gradient d'une intégrale sur une surface dépendant des paramètres.

Pour atteindre ces trois buts, on procède en deux étapes en traitant d'abord le problème fluide seul puis le problème fluide-solide. Le problème d'interaction nécessitant un traitement complexe du couplage à l'interface entre le fluide et la structure, on vérifie d'abord le problème fluide seul avant de le coupler à la structure. La description du problème fluide seul est incluse dans celle du problème d'interaction.

6.1.1 Description du problème général

6.1.1.1 Géométrie

La géométrie du problème est représentée sur la figure 6.1. Les dimensions verticales sont L et L_s pour le fluide et le solide respectivement. La dimension horizontale

est $l = 1$ de sorte que l'abscisse varie entre 0 et 1. L'interface Γ_I entre la structure et le fluide est représentée par la fonction $f_{ini}(x)$ dans la configuration initiale et par $f(x)$ dans la configuration déformée.

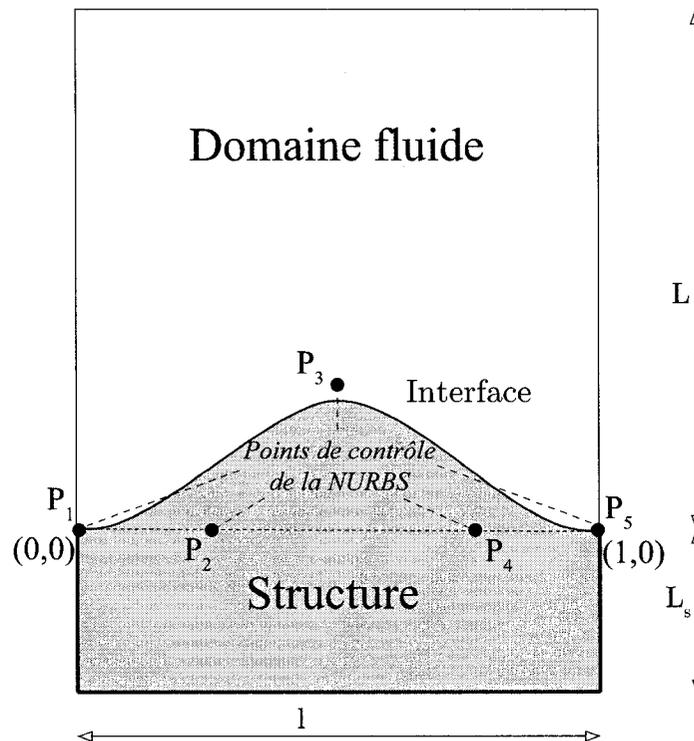


FIG. 6.1 Géométrie pour la solution manufacturée.

6.1.1.2 Représentation de l'interface par une NURBS

Grâce à un choix ingénieux du vecteur nodal, on représente l'interface par une NURBS dont la composante selon y se formule comme un polynôme en x et où x est aussi le paramètre ou l'abscisse curviligne de la courbe. Les paramètres de forme sont alors les ordonnées y_i des points de contrôle. On considère d'abord une

NUBRS d'ordre 3 (de degré 2) à 3 points de contrôle, définie comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_3(x) &: \begin{cases} x \\ f_3(x) = y_1(1-x)^2 + 2y_2x(1-x) + y_3x^2 \end{cases} & (6.1) \\ \text{avec } \mathcal{T} &= \{0, 0, 0, 1, 1, 1\} \\ \mathbf{P}_1 &= [0, y_1]^T, \quad \mathbf{P}_2 = [0.5, y_2]^T, \quad \mathbf{P}_3 = [1, y_3]^T \end{aligned}$$

Pour le cas courant, on fixe $y_1 = y_3 = 0$ pour avoir les ordonnées nulles aux extrémités et y_2 donne la hauteur ($h = y_2/2$) de la parabole qui représente l'interface déformée.

Toutefois, lorsqu'on vient coupler la structure avec la partie fluide, le fait d'avoir des pentes non-nulles aux extrémités de l'interface peut poser des problèmes numériques. On construit donc une NURBS d'ordre 5 à 5 points de contrôle avec des pentes nulles aux extrémités (en $x = 0$ et $x = 1$) comme illustré sur la figure 6.1. L'interface est alors définie comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_5(x) &: \begin{cases} x \\ f_5(x) = y_1(1-x)^4 + 4y_2x(1-x)^3 + 6y_3x^2(1-x)^2 \\ \quad + 4y_4x^3(1-x) + y_5x^4 \end{cases} & (6.2) \\ \text{avec } \mathcal{T} &= \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1\} \\ \mathbf{P}_1 &= [0.00, y_1]^T, \quad \mathbf{P}_2 = [0.25, y_2]^T, \quad \mathbf{P}_3 = [0.50, y_3]^T, & (6.3) \\ \mathbf{P}_4 &= [0.75, y_2]^T, \quad \mathbf{P}_5 = [1.00, y_5]^T \end{aligned}$$

On fixe $y_1 = y_2 = y_4 = y_5 = 0$ pour le cas courant. Les valeurs de y_3 déterminent la hauteur maximale de la frontière et la déformation de la structure. On considère la valeur y_{3ini} pour la configuration initiale et $y_3 = \beta y_{3ini}$ pour l'interface déformée. Dans le cas présent, on choisit $\beta = 1.1$.

6.1.1.3 Solution exacte

Sur cette géométrie, illustrée dans ses 2 configurations sur la figure 6.2, on développe une solution manufacturée à divergence nulle suivant la méthodologie présentée par Tremblay *et al.*^[45] et on traite de même le problème des sensibilités par rapport à un paramètre de forme a . On procède en trois étapes. Dans un premier temps, on traite le domaine fluide dans la configuration déformée, i.e. : avec l'interface Γ_{I_1} décrite par $f(x)$, avec une viscosité et une pression arbitraires. Ensuite, on choisit un champ de déplacements dans le solide de manière à obtenir la bonne déformation de l'interface pour passer de Γ_{I_0} à Γ_{I_1} . Enfin, on calcule la pression et la viscosité du fluide nécessaires pour satisfaire les conditions à l'interface entre le fluide et le solide. Si la distribution de la viscosité obtenue prend des valeurs négatives, il faut alors considérer un nouveau champ de déplacements et calculer à nouveau la pression et la viscosité. On boucle alors jusqu'à obtenir satisfaction.

Pour le fluide seul, la solution manufacturée s'écrit alors sur la configuration déformée comme suit :

$$\mathbf{u}_{f_{ex}}(x, y) = \begin{bmatrix} (L - 2y)(f - y) + \frac{1}{2}(f^2 - y^2) \\ (L - y)(f - y) \frac{\partial f}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

$$\mathbf{s}_{\mathbf{u}_{f_{ex}}}(x, y) = \begin{bmatrix} (f + L - 2y) \frac{\partial f}{\partial a} \\ (L - y) \left((f - y) \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial x} + \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

On considère alors dans la partie fluide $\rho_f = 1$. Puis on fixe de manière arbitraire $p_{f_{ex}} = 0$ et $\mu_{f_{ex}} = 0.1$, seulement dans le cas du fluide seul.

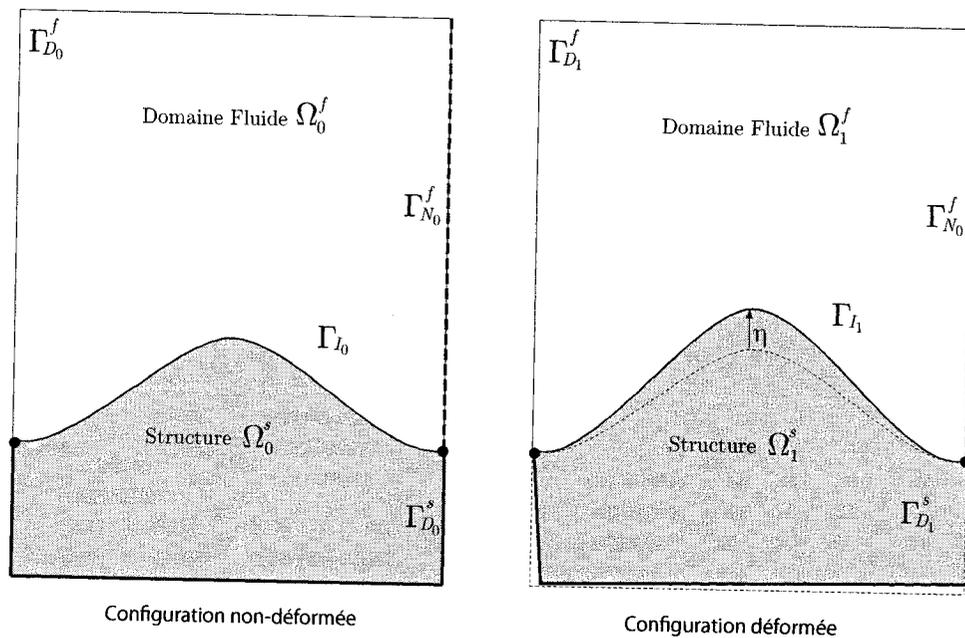


FIG. 6.2 Configurations du problème d'interaction fluide-structure.

Dans le solide, on doit choisir un champ de déplacements de façon à ce que la frontière $\Gamma_{I_1}^s$ correspondant à l'interface fluide-solide déformée ait la même forme que celle du fluide $\Gamma_{I_1}^f$. On assure ainsi la continuité des déplacements à l'interface prescrite par l'équation (3.8). La configuration déformée du solide est alors obtenue par application du champ de déplacement suivant :

$$\chi_{s_{ex}}(x, y) = \begin{bmatrix} 0.1 (f_{ini} - y) \\ f - f_{ini} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

$$s_{\chi_{s_{ex}}}(x, y) = \begin{bmatrix} 0.1 \frac{\partial f_{ini}}{\partial a} \\ \frac{\partial f}{\partial a} - \frac{\partial f_{ini}}{\partial a} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Pour mener les calculs dans la partie solide, on considère la loi de comportement

de Saint-Venant Kirchhoff (2.57) et les propriétés physiques suivantes :

$$\begin{aligned} E &= 2.5 & \Rightarrow & \gamma_s = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 1 \\ \nu &= 0.25 & & \mu_s = \frac{E}{2(1+\nu)} = 1 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Le problème d'interaction fluide-structure requiert également la continuité des forces fluides et solides sur l'interface déformée (voir l'équation (2.61)). En notant qu'à l'interface $\mathbf{n}_1^f = -\mathbf{n}_1^s = \mathbf{n}_1$, on décompose cette équation suivant x et y pour trouver le système suivant :

$$\begin{cases} \sigma_{c_{xx}} n_{1_x} + \sigma_{c_{xy}} n_{1_y} = \sigma_{xx} n_{1_x} + \sigma_{xy} n_{1_y} \\ \sigma_{c_{yx}} n_{1_x} + \sigma_{c_{yy}} n_{1_y} = \sigma_{yx} n_{1_x} + \sigma_{yy} n_{1_y} \end{cases} \quad (6.9)$$

Dans le solide, on évalue le tenseur exact des contraintes de Cauchy $\overline{\overline{\sigma}}_c^e$ en configuration initiale ($y = f_{ini}(x)$) et on pose alors :

$$\mathcal{Q}_x(x) = \left\{ \sigma_{c_{xx}}^e n_{1_x} + \sigma_{c_{xy}}^e n_{1_y} \right\} (x, f_{ini}(x)) \quad (6.10)$$

$$\mathcal{Q}_y(x) = \left\{ \sigma_{c_{yx}}^e n_{1_x} + \sigma_{c_{yy}}^e n_{1_y} \right\} (x, f_{ini}(x)) \quad (6.11)$$

Dans le fluide, on exprime le tenseur exact $\overline{\overline{\sigma}}^e$ sur l'interface déformée ($y = f(x)$) et on pose :

$$\mathcal{A}(x) = 2 \frac{\partial u_{f_{ex}}}{\partial x} (x, f(x)) \quad (6.12)$$

$$\mathcal{B}(x) = \left\{ \frac{\partial u_{f_{ex}}}{\partial y} + \frac{\partial v_{f_{ex}}}{\partial x} \right\} (x, f(x)) \quad (6.13)$$

$$\mathcal{C}(x) = 2 \frac{\partial v_{f_{ex}}}{\partial y} (x, f(x)) \quad (6.14)$$

La solution manufacturée doit donc vérifier le système (6.9) qui se réécrit avec les nouvelles variables $Q_x(x)$, $Q_y(x)$, $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$. C'est pourquoi, on choisit judicieusement des distributions de pression et de viscosité qui assurent la continuité des forces à l'interface. En effet, pour vérifier le système, on prend :

$$\mu_{f_{ex}}(x) = \frac{Q_x n_y - Q_y n_x}{-B n_x^2 + (A - C) n_x n_y + B n_y^2} \quad (6.15)$$

$$p_{f_{ex}}(x) = \frac{B Q_x n_x + C Q_x n_y - A Q_y n_x - B Q_y n_y}{-B n_x^2 + (A - C) n_x n_y + B n_y^2} \quad (6.16)$$

Comme cette condition de continuité doit être satisfaite seulement à l'interface, on considère que $\mu_{f_{ex}}$ et $p_{f_{ex}}$ sont uniquement fonctions de x dans tout le domaine fluide : $\mu_{f_{ex}}(x, y) = \mu_{f_{ex}}(x)$ et $p_{f_{ex}}(x, y) = p_{f_{ex}}(x)$. En outre, pour obtenir les sensibilités $\mu'_{f_{ex}}$ et $s_{p_{f_{ex}}}$, il suffit de calculer la dérivée totale des équations (6.15) et (6.16) par rapport à a car la forme de l'interface Γ_I dépend de a . Ces relations donnant la viscosité et la pression sont générales et applicables à tout champ de vitesse et de déplacements. Il suffit alors de calculer chacun des termes correctement en les projetant et en les évaluant dans la bonne configuration. Il en va de même pour les sensibilités.

On vérifie alors la positivité de la distribution de la viscosité sur l'interface. La figure (6.3) montre la distribution de viscosité selon l'abscisse adimensionnelle x/l pour une interface représentée par $f_3(x)$ avec $y_{3_{ini}} = 2/30$.

Le problème est à présent complètement défini. On connaît les valeurs exactes des champs de vitesse, du champ de déplacements, de la distribution de viscosité et de la distribution de pression. La prochaine étape consiste à calculer les termes sources des systèmes d'équations fluides et solides.

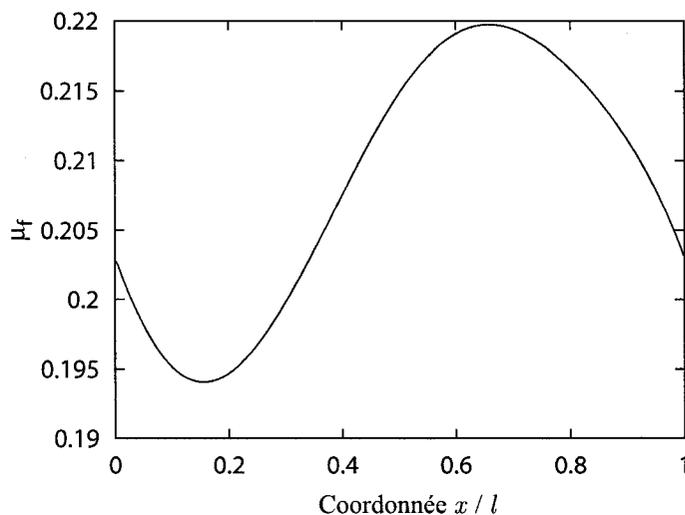


FIG. 6.3 Distribution de la viscosité selon l'abscisse adimensionnelle x/l .

6.1.1.4 Termes sources

On utilise des termes sources pour que les expressions de la solution manufacturée satisfassent les équations du problème d'interaction fluide-structure. On introduit généralement ces termes sources sous leur *forme forte*; $\mathbf{f}_f = [f_x^f, f_y^f]^T$ et sa sensibilité $\mathbf{f}'_f = [f'_{f_x}, f'_{f_y}]^T$ dans les équations fluides (2.2) et (3.15) et $\mathbf{f}_s = [f_x^s, f_y^s]^T$ et sa sensibilité $\mathbf{f}'_s = [f'_{s_x}, f'_{s_y}]^T$ dans les équations solides (2.7) et (3.19). Ainsi, pour

le fluide, les termes sources des équations de mouvement sont les suivants :

$$f_x^f = \rho_f \left(u_{f_{ex}} \frac{\partial u_{f_{ex}}}{\partial x} + v_{f_{ex}} \frac{\partial u_{f_{ex}}}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \sigma_{xx}^e}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^e}{\partial y} \right) \quad (6.17)$$

$$f_y^f = \rho_f \left(u_{f_{ex}} \frac{\partial v_{f_{ex}}}{\partial x} + v_{f_{ex}} \frac{\partial v_{f_{ex}}}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \sigma_{yx}^e}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^e}{\partial y} \right) \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} f'_{f_x} &= \rho'_f \left(u_{f_{ex}} \frac{\partial u_{f_{ex}}}{\partial x} + v_{f_{ex}} \frac{\partial u_{f_{ex}}}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial y} \right) \\ &+ \rho_f \left(s_{u_{f_{ex}}} \frac{\partial u_{f_{ex}}}{\partial x} + u_{f_{ex}} \frac{\partial s_{u_{f_{ex}}}}{\partial x} + s_{v_{f_{ex}}} \frac{\partial u_{f_{ex}}}{\partial y} + v_{f_{ex}} \frac{\partial s_{u_{f_{ex}}}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} f'_{f_y} &= \rho'_f \left(u_{f_{ex}} \frac{\partial v_{f_{ex}}}{\partial x} + v_{f_{ex}} \frac{\partial v_{f_{ex}}}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \sigma'_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y} \right) \\ &+ \rho_f \left(s_{u_{f_{ex}}} \frac{\partial v_{f_{ex}}}{\partial x} + u_{f_{ex}} \frac{\partial s_{v_{f_{ex}}}}{\partial x} + s_{v_{f_{ex}}} \frac{\partial v_{f_{ex}}}{\partial y} + v_{f_{ex}} \frac{\partial s_{v_{f_{ex}}}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (6.20)$$

Quant aux termes sources pour le solide, on les écrit de la manière suivante :

$$f_x^s = - \left(\frac{\partial \sigma_{Lxx}^e}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{Lxy}^e}{\partial y} \right) \quad (6.21)$$

$$f_y^s = - \left(\frac{\partial \sigma_{Lyx}^e}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{Lyy}^e}{\partial y} \right) \quad (6.22)$$

$$f'_{s_x} = - \left(\frac{\partial \sigma'_{Lxx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{Lxy}}{\partial y} \right) \quad (6.23)$$

$$f'_{s_y} = - \left(\frac{\partial \sigma'_{Lyx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{Lyy}}{\partial y} \right) \quad (6.24)$$

En outre, la méthode de résolution présentée au chapitre 3 utilise la formulation faible des équations. Ceci permet d'introduire les termes sources de la solution manufacturée également sous *forme faible*. Cette approche est très avantageuse puisqu'elle abaisse l'ordre des dérivées à calculer grâce aux intégrations par parties. Par exemple, pour le fluide, on peut décomposer le terme source associé comme

suit :

$$\mathbf{f}_f = \mathbf{F}_f + \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_{\mathbf{F}_f} \quad (6.25)$$

avec les termes suivants :

$$\mathbf{F}_f = \left[\begin{array}{l} \rho_f \left(u_{f_{ex}} \frac{\partial u_{f_{ex}}}{\partial x} + v_{f_{ex}} \frac{\partial u_{f_{ex}}}{\partial y} \right) \\ \rho_f \left(u_{f_{ex}} \frac{\partial v_{f_{ex}}}{\partial x} + v_{f_{ex}} \frac{\partial v_{f_{ex}}}{\partial y} \right) \end{array} \right] \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_{\mathbf{F}_f} = -\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^e \quad (6.26)$$

Ainsi, on réécrit le dernier terme de l'équation (3.43) grâce à la décomposition (6.25) du terme source et à une intégration par partie :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1^f} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_f d\Omega &= \int_{\Omega_1^f} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{F}_f - \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^e) d\Omega \\ &= \int_{\Omega_1^f} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}_f d\Omega + \int_{\Omega_1^f} \nabla \delta \mathbf{u} : \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^e d\Omega \\ &\quad - \underbrace{\int_{\Gamma_{N_1}^f \cup \Gamma_{I_1}} \delta \mathbf{u} \cdot (\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^e \cdot \mathbf{n}_1^f) \delta \Gamma}_{3} \end{aligned} \quad (6.27)$$

On observe alors qu'il n'est plus nécessaire de calculer le gradient de $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^e$. En outre, la partie de l'intégrale 3 concernant la frontière de Neumann $\Gamma_{N_1}^f$ compense le terme des conditions de Neumann dans l'équations (3.43). En prenant la forme faible des termes sources, il n'est donc plus nécessaire d'imposer des conditions de Neumann au problème fluide. Cependant ceci a pour conséquence que l'imposition des conditions de Neumann n'est pas vérifiée au sens de Roache.

Les termes sources d'une solution manufacturée peuvent donc être introduits avantageusement sous leurs formes faibles. On procède de même pour le solide et le

problème des sensibilités. Finalement, on obtient :

$$\mathbf{f}_f = \mathbf{F}_f + \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^e \quad (6.28)$$

$$\mathbf{f}'_f = \mathbf{F}'_f + \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^{e'} \quad (6.29)$$

$$\mathbf{f}_s = \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_L^e \quad (6.30)$$

$$\mathbf{f}'_s = \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_L^{e'} \quad (6.31)$$

6.1.2 Présentation des deux cas traités

6.1.2.1 Cas du fluide seul

Avant de considérer le problème d'interaction fluide-structure en entier, on s'intéresse au problème fluide seul sur lequel on va pouvoir vérifier les performances du solveur pour un problème fluide et ses sensibilités, la bonne implémentation de la paramétrisation NURBS et l'exactitude de la méthodologie proposée pour calculer le gradient d'une intégrale sur une surface dépendant d'un paramètre.

On considère une interface représentée par une NURBS à trois points $f_3(x)$ avec y_2 comme paramètre de forme et $L = 1$. Dans le cas courant, on prend $y_2 = 0.5$ ($h = 0.25$). On applique les termes sources fluides sous leur forme forte. Finalement, on applique les conditions aux frontières illustrées sur la figure 6.4 qui restent valables pour le problème des sensibilités en remplaçant les variables u_f et v_f par leurs sensibilités. La configuration initiale pour le cas du problème fluide seul présentée sur cette figure correspond en fait à la configuration du domaine fluide déformée par le solide lorsqu'on considère les phénomènes d'interaction fluide-structure. C'est pourquoi, on dénote cette configuration par 1. Les valeurs *usager* sont évaluées à partir des expressions de la solution exacte.

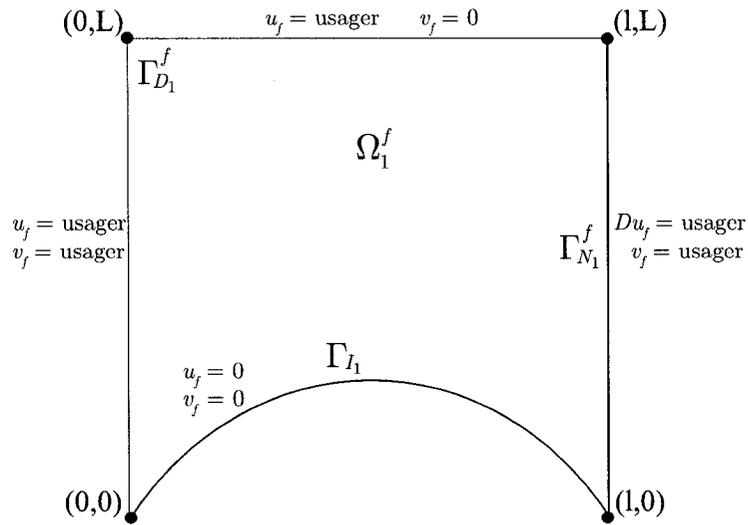


FIG. 6.4 Conditions frontières pour le cas du fluide seul.

6.1.2.2 Cas de l'interaction fluide-structure

Pour traiter le cas de l'interaction fluide-structure, on opte pour une représentation de l'interface par une NURBS à 5 points $f_5(x)$ afin d'éviter des problèmes de convergence dans la structure. On réduit également la hauteur maximale de l'interface $h_{ini} = 0.025$ avec $y_{3_{ini}} = 2/30$. Le problème des sensibilités est résolu avec $y_{3_{ini}}$ comme paramètre de valeur et on applique les termes sources fluides et solides sous leur forme faible. Enfin, la figure 6.5 présente la configuration initiale avec $L = 0.5$ et $L_s = 0.1$ et les conditions aux frontières appliquées. Les valeurs *usager* sont évaluées à partir des expressions de la solution exacte et la condition *cont* traduit la continuité des déplacements et des forces fluides et solides à l'interface modélisées par les équations (2.60) et (2.61). En pratique ces conditions sont imposées impli-

citement par les éléments d'interface et l'utilisateur doit donc uniquement spécifier les propriétés de l'interface (forme et sensibilités par rapport au paramètre). Ce traitement implicite reste valide pour le problème des sensibilités qui est régi par des conditions aux frontières obtenues en différentiant les conditions aux limites du problème d'IFS. Sur l'interface, on tient alors compte du fait que la forme de la frontière dépend du paramètre $y_{3,ini}$ et on utilise une dérivée matérielle suivant le mouvement causé par le changement de paramètre.

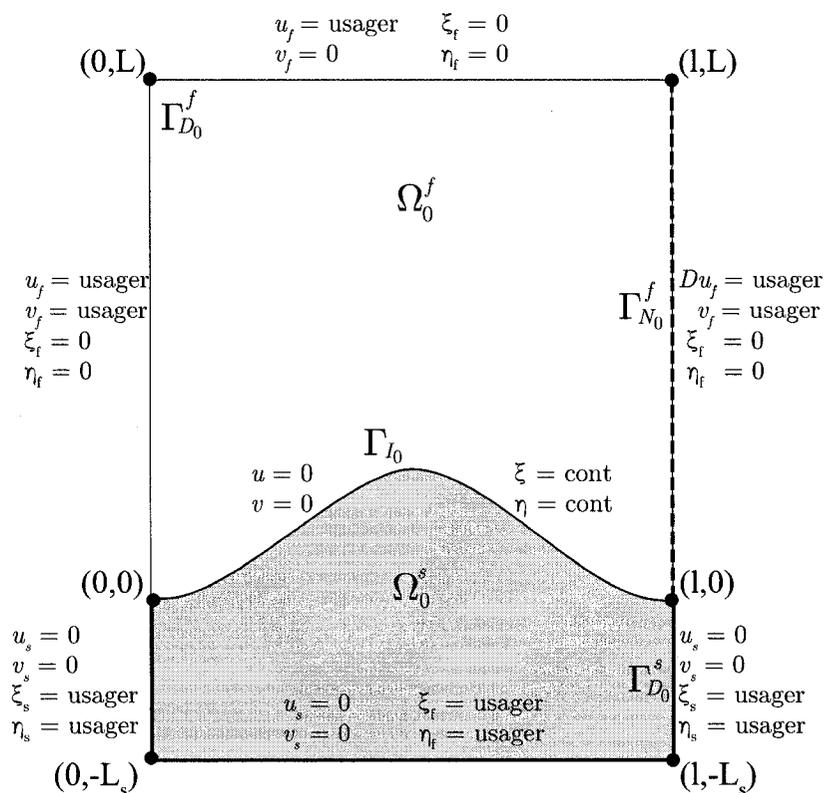


FIG. 6.5 Configuration initiale et conditions frontières.

6.1.3 Analyse de convergence

6.1.3.1 Pour le fluide seul

Après 6 cycles d'adaptation, le maillage final contient 19064 noeuds. La figure 6.6 présente l'évolution de l'erreur exacte et de l'erreur estimée en norme énergie en fonction du raffinement du maillage (i.e. : du nombre de noeuds). On remarque que les erreurs diminuent d'un cycle d'adaptation à l'autre tant pour l'écoulement que pour ses sensibilités par rapport à y_2 . Les courbes des estimateurs d'erreurs convergent vers celles des erreurs exactes. On observe cela plus clairement sur la figure 6.7 qui présente un rapport de l'erreur estimée sur l'erreur exacte, autrement appelé *efficacité*, proche de 100%. Cette propriété asymptotique indique que les estimateurs deviennent plus précis et plus fiables avec le raffinement du maillage. Enfin, le taux de convergence des erreurs est optimal puisqu'il est en accord avec sa valeur théorique à la fois pour l'écoulement (1.99) et pour les sensibilités (1.99). En effet, si on note h_e la taille des éléments, la décroissance de l'erreur est d'ordre $O(h_e^2)$ en norme énergie pour les éléments quadratiques utilisés. Or, le nombre de noeuds N_d est approximativement proportionnel à $1/h_e^2$. On prévoit donc une erreur inversement proportionnelle au nombre de noeuds, tel qu'observé. Le solveur est donc vérifié au sens de Roache^[40] de même que l'implémentation de la paramétrisation NURBS et de ses sensibilités puisqu'on considère un paramètre de forme pour l'interface.

On porte maintenant notre attention sur l'évolution des erreurs exactes pour les sensibilités des coefficients de portance C_L et de traînée C_D au cours des cycles

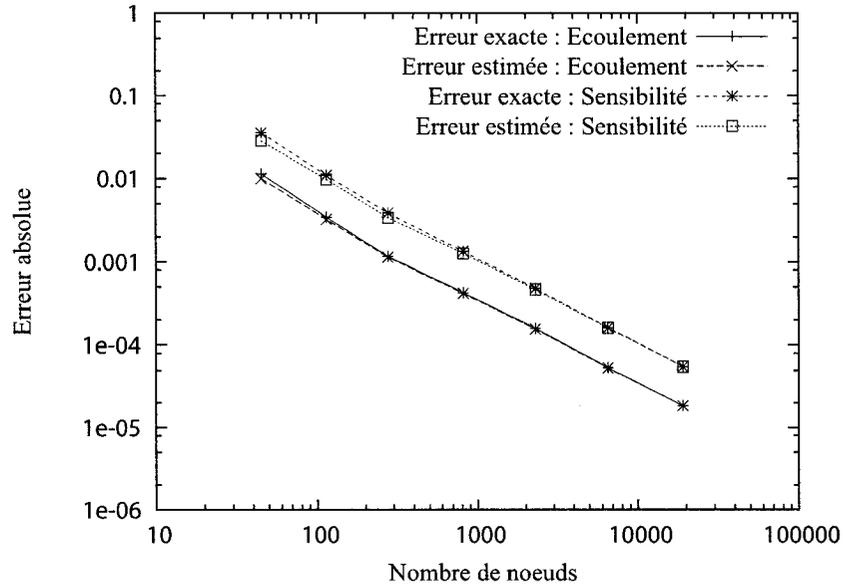


FIG. 6.6 Evolution des erreurs estimée et exacte en norme énergie avec le maillage.

d'adaptation. Les coefficients aérodynamiques sont calculés selon :

$$C_D = 2 \frac{D}{\rho_f l U_\infty^2} \quad \text{avec} \quad D = \int_{\Gamma_{I_1(a)}} \left(\overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}_1^f \right) \cdot \mathbf{e}_x \delta\Gamma \quad (6.32)$$

$$C_L = 2 \frac{L}{\rho_f l U_\infty^2} \quad \text{avec} \quad L = \int_{\Gamma_{I_1(a)}} \left(\overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}_1^f \right) \cdot \mathbf{e}_y \delta\Gamma \quad (6.33)$$

où D est la traînée, L est la portance, $\rho_f = 1$ la masse volumique du fluide, $l = 1$ la surface de référence (corde du profil) et U_∞ la norme de la vitesse du fluide à l'infini. Leurs sensibilités par rapport à $a = y_2 = 0.5$ sont obtenues grâce à l'équation (5.4) et comparées avec les valeurs exactes suivantes :

$$\begin{aligned} C_D &= \frac{4}{75}a^3 - \frac{4}{15}a^2 + \frac{1}{15}a - \frac{1}{5} = -\frac{17}{75} & C_L &= 0 \\ \frac{DC_D}{Da} &= \frac{12}{75}a^2 - \frac{8}{15}a + \frac{1}{15} = -\frac{4}{25} & \frac{DC_L}{Da} &= 0 \end{aligned} \quad (6.34)$$

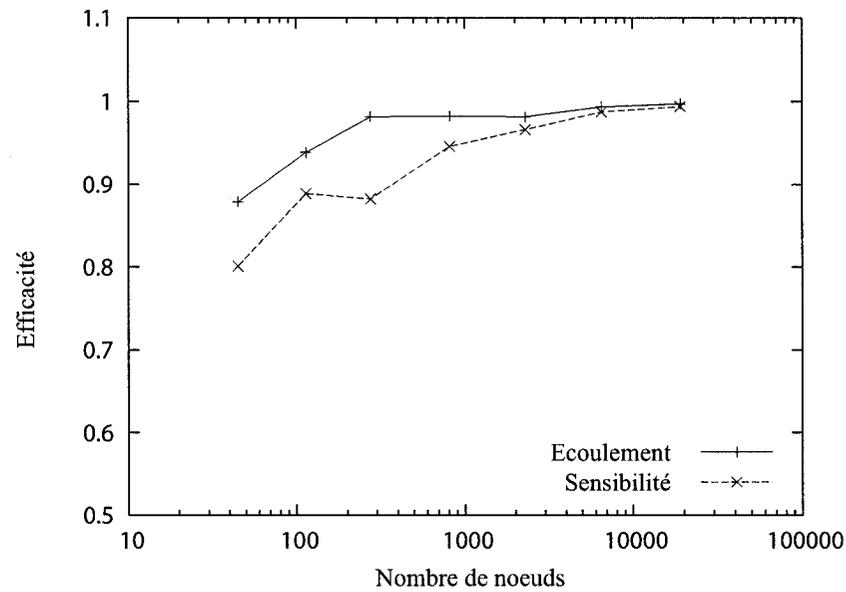


FIG. 6.7 Evolution de l'efficacité avec le maillage.

La figure 6.8 montre l'évolution des erreurs exactes des sensibilités de C_D et C_L en fonction du nombre de noeuds. On note que ces erreurs diminuent au fur et à mesure et peuvent ainsi être réduites autant que désiré grâce au processus de cycles adaptatifs. La méthodologie proposée pour calculer le gradient des forces aérodynamiques est ainsi vérifiée.

6.1.3.2 Pour le problème d'interaction fluide-structure

Grâce à une méthode de résolution des systèmes linéaires très performante utilisant UMFPACK^[6] (solveur de systèmes creux linéaires et non-symétriques s'appuyant sur une méthode multifrontale), on a pu réaliser 11 cycles d'adaptation menant à un maillage final de 176836 noeuds pour résoudre le problème d'interaction fluides-structures. La figure 6.9 montre le maillage déformé à la 6^e itération d'adaptation.

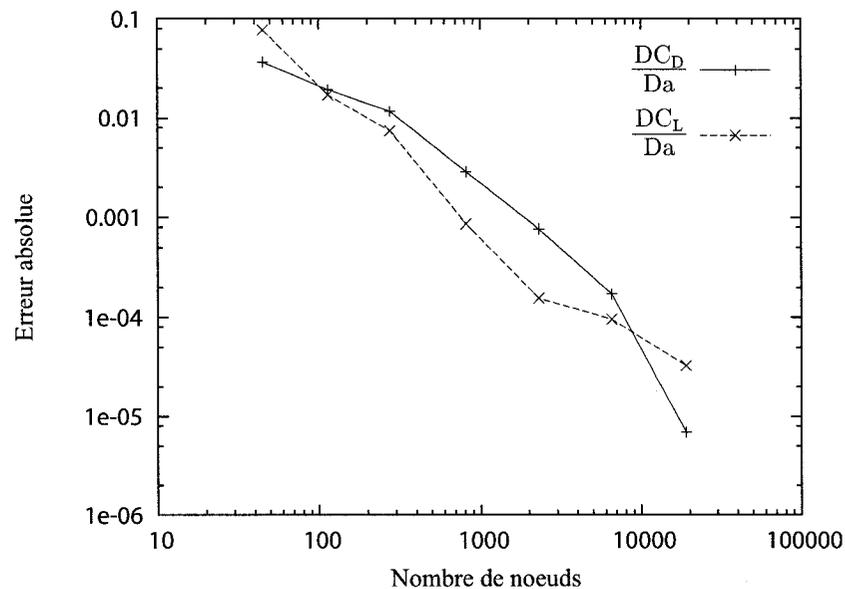


FIG. 6.8 Evolution des sensibilités des coefficients aérodynamiques avec le maillage.

L'évolution des erreurs exactes et estimées en norme énergie est présentée sur la figure 6.10 à la fois pour le problème d'interaction fluide-structure et pour le problème des sensibilités par rapport à $y_{3,mi}$. Cette évolution en fonction du nombre de noeuds montre clairement une diminution de toutes les erreurs de façon quadratique (2.04 pour l'interaction et pour les sensibilités). Le taux de convergence théorique est donc atteint et l'erreur estimée converge vers l'erreur exacte lors du raffinement du maillage. La figure 6.11 confirme ce dernier point notamment avec une efficacité très proche de 1 pour les sensibilités.

Pour les phénomènes d'interactions fluides-structures et leurs sensibilités par rapport à un paramètre de valeur, le solveur est donc vérifié au sens de Roache excepté pour les conditions de Neumann. Pour vérifier les performances du solveur pour

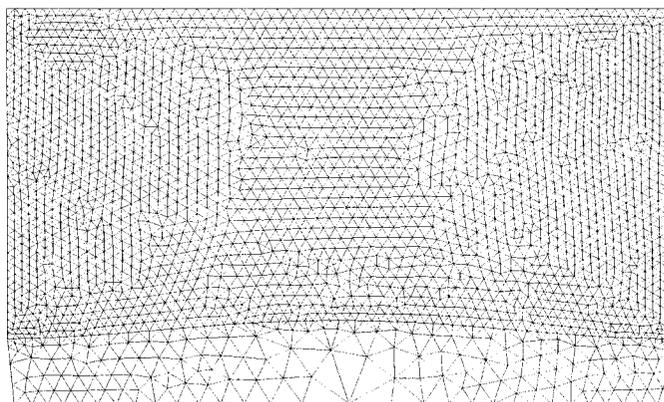


FIG. 6.9 Maillage adapté à la 6^e itération pour l'interaction fluide-structure.

des sensibilités par rapport à des paramètres de forme pour l'interface initiale, on doit encore s'assurer de la bonne implémentation des conditions d'équilibre à l'interface 3.37 et 3.41. De même, on doit contrôler l'exactitude de la forme forte des termes sources pour les sensibilités. Il reste donc des vérifications à effectuer avant de pouvoir passer à des applications mettant en oeuvre des sensibilités par rapport à des paramètres de forme pour des phénomènes d'interactions fluides-structures.

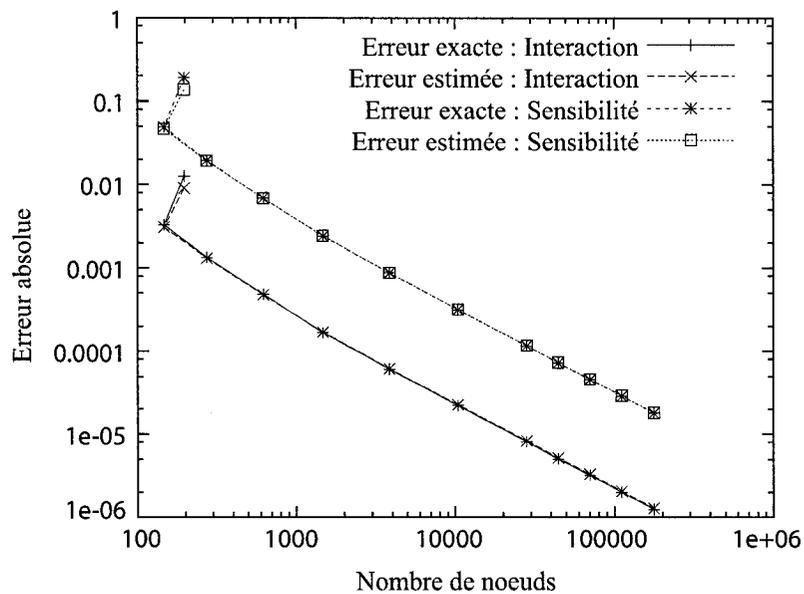


FIG. 6.10 Evolution des erreurs en norme énergie avec le maillage.

6.2 *Flow matching* ou appariement d'écoulements

On vérifie maintenant la procédure de design optimal proposée dans cette étude grâce à un exercice de *flow matching*. Ce dernier consiste à retrouver un écoulement connu à partir d'un écoulement initial, lié à une géométrie initiale, grâce à une procédure itérative d'optimisation. Si la procédure converge vers l'écoulement connu alors elle est vérifiée.

6.2.1 Description du problème

On mène l'exercice de *flow-matching* pour un écoulement fluide autour d'un profil rigide (i.e. : non flexible) avec un nombre de Reynolds de 1000. La géométrie du problème ainsi que les conditions frontières sont décrites sur la figure 6.12.

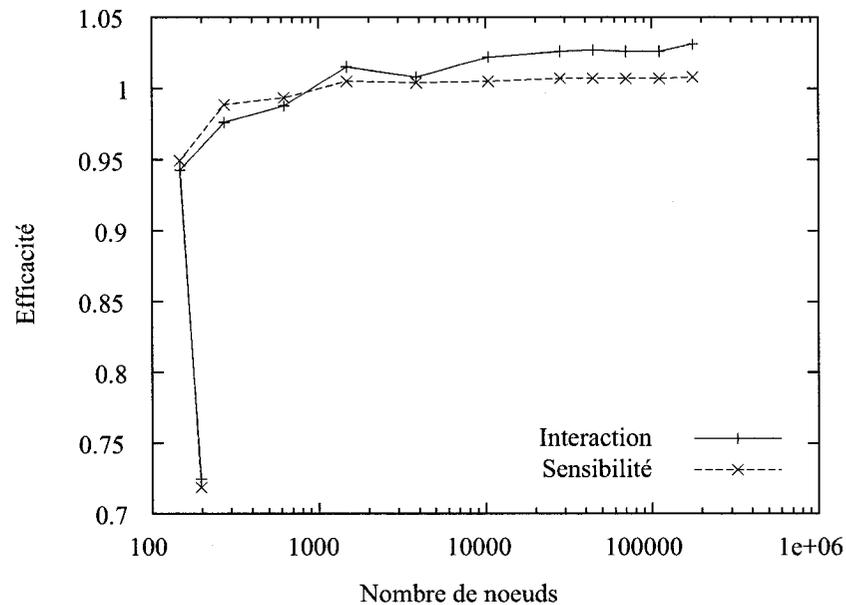


FIG. 6.11 Evolution de l'efficacité avec le maillage.

Des conditions de Dirichlet sont imposées sur la surface du profil pour modéliser la condition de *non-glissement*. On impose également des conditions de Dirichlet en entrée pour prescrire l'angle d'incidence α du profil via l'angle de l'écoulement amont. Enfin, on utilise des conditions de Neumann homogènes pour représenter un écoulement complètement développé sur les frontières restantes.

La configuration initiale est celle d'un écoulement autour d'un profil NACA 0012 à incidence nulle. Suivant l'étude de Trépanier *et al.*^[46], le profil aérodynamique est représenté par une NURBS à 10 points de contrôle. Cela permet une description précise de la géométrie de l'aile et mène à un riche espace de design. La figure 6.13 présente la position des 10 points de contrôle sur le profil initial. Le premier et le dernier points de contrôle décrivent le bord de fuite et sont géométriquement identiques afin d'assurer la fermeture de la courbe. De même, les points 5 et 6

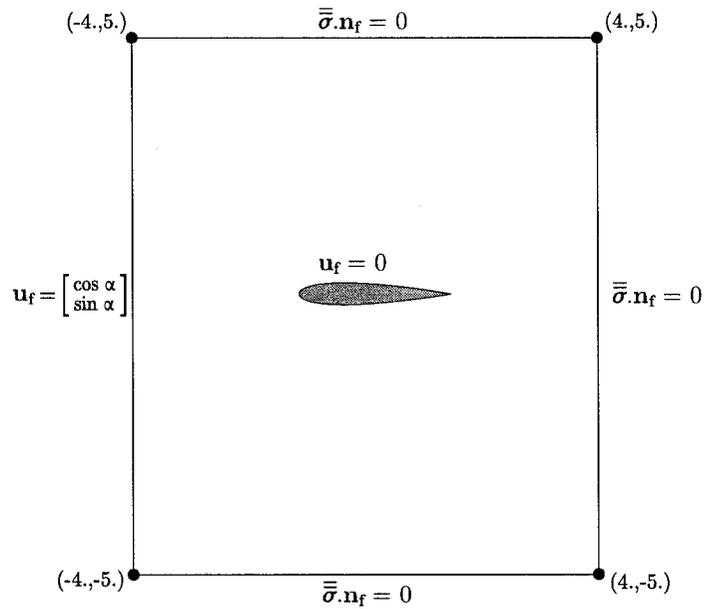


FIG. 6.12 Géométrie et conditions frontières pour un écoulement autour d'un profil.

déterminent la position du bord d'attaque du profil. Puisque le présent exercice de design est mené avec une corde constante et pour des raisons évidentes de faisabilité, ces 4 points sont fixés dans ce qui suit et ne participent pas de l'espace de design.

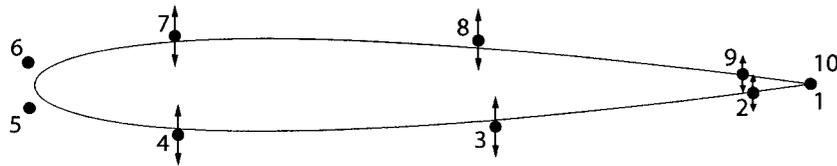


FIG. 6.13 Profil NACA0012 représenté par une NURBS à 10 points de contrôle.

Ainsi, l'espace de design est basé sur 6 points de contrôle, donc 18 paramètres de forme (deux coordonnées et un poids pour chaque point), plus l'angle d'incidence traité comme un paramètre de valeur. On a donc un maximum de 19 paramètres. On se concentre ici sur 6 paramètres, à savoir les ordonnées des points de contrôle

$\{y_2, y_3, y_4, y_7, y_8, y_9\}$. Ce choix s'est fait à partir de l'étude de Painchaud-Ouellet^[35] qui montrait que ces paramètres définissent un espace de design assez riche.

6.2.2 Analyse de convergence pour le profil initial

Comme clairement établi dans la littérature, la précision du calcul de la fonction objectif et de son gradient est d'une grande importance dans le cadre d'un processus d'optimisation. Puisque la méthodologie a déjà été vérifiée grâce à une solution manufacturée, la précision numérique des calculs dépend de la taille locale des éléments du maillage. La procédure adaptative de résolution est alors un puissant outil pour contrôler la précision des prédictions numériques. Toutefois, nous n'avons *a priori* aucune information sur la taille nécessaire des éléments du maillage adapté pour assurer une précision suffisante dans le cadre d'un processus de design optimal. Cette partie est donc consacrée à ce sujet. Bien sûr, on ne peut pas tester toutes les configurations permises par le domaine de design. Ainsi, on considère le cas initial et on suppose que les observations faites resteront valides pour toutes les configurations.

Dans le contexte de l'optimisation aérodynamique, la fonction objectif dépend souvent des forces aérodynamiques. Ainsi, pour déterminer si les gradients calculés de la fonction objectif sont convergés en terme de maillage, on contrôle les sensibilités des forces aérodynamiques via les sensibilités (gradients) des coefficients de traînée C_D et de portance C_L . On remarque dans tous les cas que la convergence en maillage est obtenue avec un maillage bien moins fin pour C_D et C_L que pour leurs gradients respectifs.

Pour le cas initial et ses sensibilités, 8 cycles d'adaptation ont été effectués. Les trois derniers maillages comportaient 38834, 58130 et 76574 noeuds respectivement. La

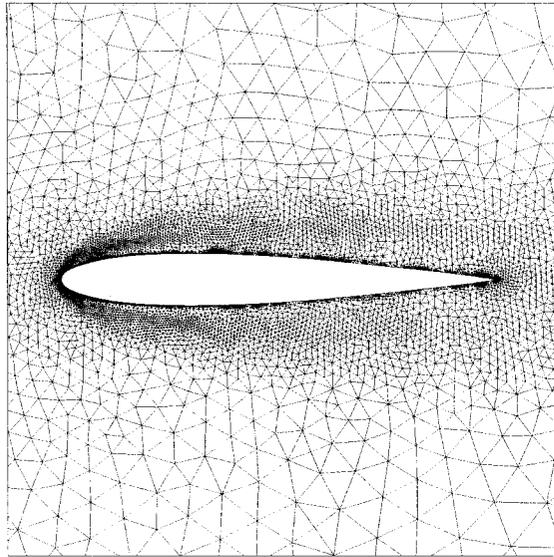


FIG. 6.14 Maillage adapté autour du profil NACA 0012 ($Re = 1000$ et $\alpha = 0^\circ$).

figure 6.14 montre le dernier maillage autour du profil NACA 0012. Les évolutions des sensibilités des coefficients de traînée S_{C_D} et de portance S_{C_L} (calculées grâce à l'équation (5.4)) sont illustrées sur la figure 6.15 en fonction du raffinement du maillage et pour les six paramètres de forme. Comme on peut le voir, la procédure adaptative permet une convergence en maillage de toutes les sensibilités. En outre, un niveau acceptable de convergence est déjà atteint avec 50000 noeuds (soit après six à sept cycles adaptatifs). C'est pourquoi, pour les calculs présentés dans cette étude, on arrête la procédure adaptative une fois que maillage comprend entre 50000 et 70000 noeuds.

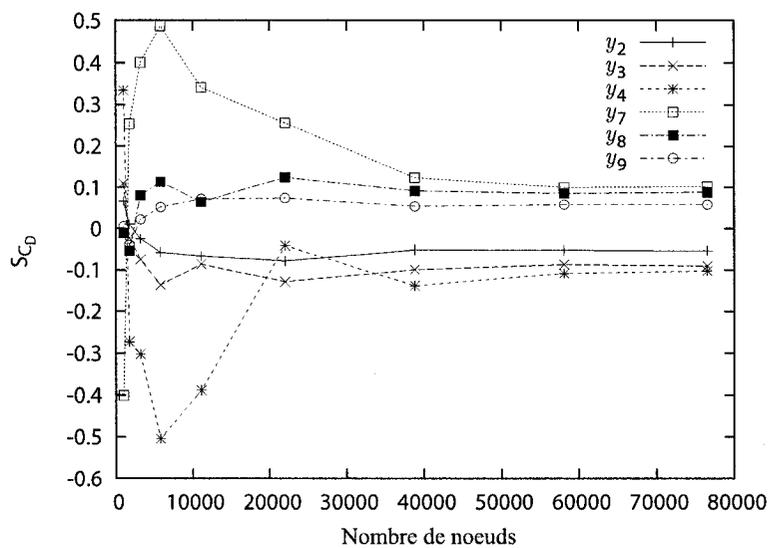
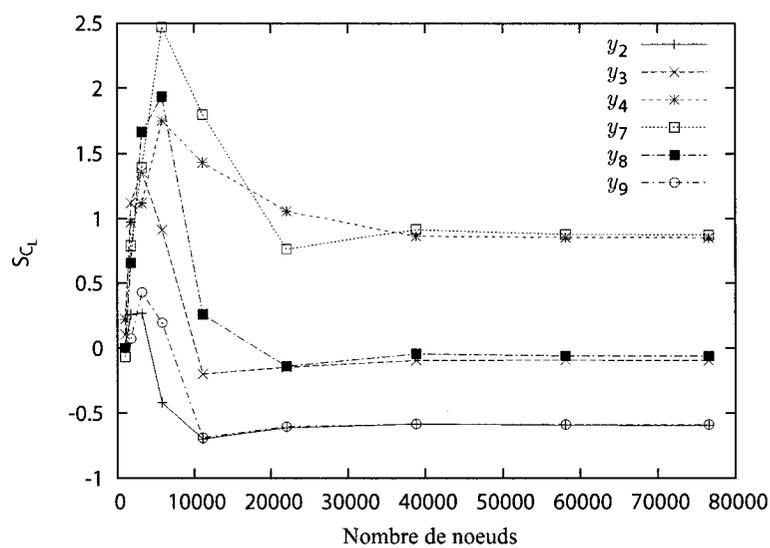
a) Sensibilités du coefficient de traînée S_{C_D} b) Sensibilités du coefficient de portance S_{C_L}

FIG. 6.15 Evolution des sensibilités des coefficients aérodynamiques avec le maillage.

6.2.3 Appariement des coefficients de traînée et de portance

En partant du profil initial, on demande à la procédure de design optimal de trouver un profil optimisé qui vient épouser les coefficients cibles de traînée C_D^* et de portance C_L^* . C'est un problème couramment utilisé en optimisation aérodynamique : on doit trouver un profil d'aile générant suffisamment de portance pour maintenir l'avion en vol tout en limitant la traînée afin de tenir compte de la poussée délivrée par les moteurs. Le problème de *flow-matching* est ainsi défini par une fonction objectif mesurant la différence entre les caractéristiques (C_D, C_L) du profil courant et les valeurs cibles :

$$\mathcal{F} = \frac{m_1}{2}(C_D - C_D^*)^2 + \frac{m_2}{2}(C_L - C_L^*)^2 \quad (6.35)$$

où les coefficients étoilés sont les coefficients cibles pour la traînée et pour la portance. Les poids m_1 et m_2 sont utilisés pour maintenir une influence équilibrée entre la traînée et la portance indépendamment de leurs magnitudes :

$$m_1 = 1 \quad ; \quad m_2 = \left(\frac{C_D^*}{C_L^*}\right)^2 \quad (6.36)$$

Finalement, on sait que le minimum de la fonction objectif \mathcal{F} à atteindre est zéro. On peut ainsi vérifier la procédure de design optimal parce qu'elle devrait trouver un minimum global connu de \mathcal{F} .

Le choix des bornes sur les paramètres de forme s'avère assez délicat. En effet, il faut éviter les repliements du profil sur lui-même, notamment au bord de fuite où l'intrados pourrait venir croiser l'extrados. Pourtant, il faut également garder un espace de design suffisamment grand pour que la fonction coût atteigne son optimum. Dans cet exercice, on connaît les paramètres d'un profil qui possède les caractéristiques aérodynamiques cibles ce qui donne une idée de la taille nécessaire

de l'espace de design. On impose alors les bornes inférieures L_i et supérieures L_s suivantes sur les 6 paramètres de forme :

Paramètres	L_i	Valeurs initiales	L_s
y_2	-0.020	-0.01061	0.005
y_3	-0.060	-0.05393	-0.020
y_4	-0.070	-0.06426	-0.020
y_7	0.050	0.06280	0.100
y_8	0.040	0.05670	0.090
y_9	0.005	0.01238	0.030

Toutefois, il est bon de noter que la solution optimale n'est pas nécessairement unique dans l'espace de design puisque plusieurs profils aérodynamiques peuvent avoir les mêmes traînée et portance (ainsi la fonction objectif peut avoir plusieurs minima globaux). Ceci souligne bien le fait que la solution optimale dépend du choix du profil initial et de l'intervalle de confiance initial. Toutefois, ce n'est pas un problème parce qu'on utilise la procédure de design optimal pour trouver une solution optimale (pour une configuration initiale donnée) et non toutes les solutions. Pour terminer, on note qu'avec un algorithme d'optimisation à gradients on peut tomber dans un minimum local^[52]. Or, dans le présent problème, on connaît le minimum global et on peut alors vérifier s'il est atteint ou non par l'optimiseur. Si le minimum global n'est pas atteint, l'exercice de design optimal peut toujours être repris avec une configuration initiale différente.

Les valeurs cibles des coefficients de traînée et de portance sont les suivantes :

$$C_D^* = 0.121580 \quad ; \quad C_L^* = 0.033677 \quad (6.37)$$

Comme on l'a déjà exposé, les valeurs initiales des coefficients aérodynamiques sont ceux d'un profil NACA 0012 à incidence nulle :

$$C_D^0 = 0.119540 \quad ; \quad C_L^0 = -0.000031 \quad (6.38)$$

Ainsi, la procédure de design optimal doit augmenter la portance tout en maintenant une traînée presque constante. L'optimisation s'arrête lorsque la fonction coût atteint des valeurs inférieures à 2.10^{-8} . Cet objectif a été atteint en seulement 16 itérations d'optimisation. Les coefficients de traînée et de portance du profil optimum sont alors :

$$C_D^{opt} = 0.121449 \quad ; \quad C_L^{opt} = 0.033709 \quad (6.39)$$

La figure 6.16 montre les profils initial et optimisé. A la fois la cambrure et la finesse du profil initial ont été modifiées pour atteindre les valeurs cibles pour la portance et pour la traînée.

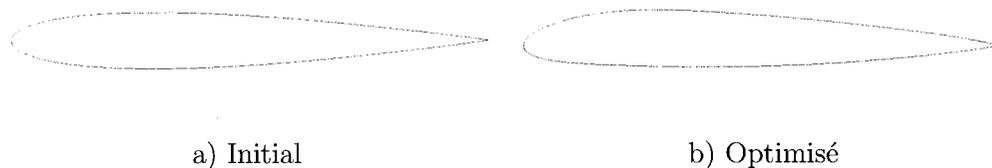


FIG. 6.16 Profils initial et optimisé.

La figure 6.17 présente l'historique de l'optimisation de la fonction objectif \mathcal{F} ainsi que de ses deux termes contributifs mesurant respectivement la performance en terme d'appariement de traînée et de portance. On observe que l'optimiseur réduit tout d'abord l'écart en terme de portance alors qu'il n'y a que peu d'amélioration concernant la traînée durant les 8 premières itérations. A partir de là, l'optimiseur travaille sur les deux composantes pour atteindre le minimum final. L'évolution des paramètres de design durant l'optimisation est présentée sur le figure 6.18. Les changements pour les différents paramètres sont similaires ce qui tend à indiquer que tous les paramètres ont contribué à la réduction de la fonction objectif.

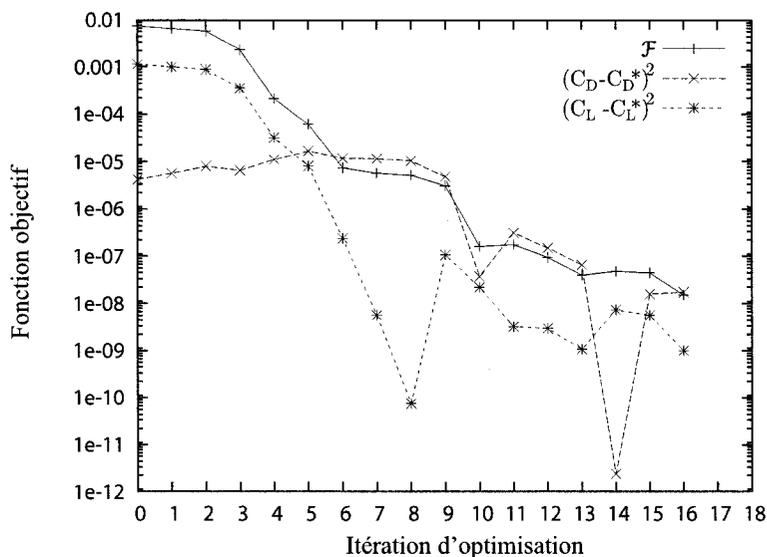


FIG. 6.17 Historique de l'optimisation de la fonction objectif.

La principale tâche de l'optimiseur pour atteindre l'optimum de la fonction coût consistait en une augmentation de la portance tout en maintenant la valeur de la traînée. Pour ce faire, l'optimiseur a amélioré la forme du profil pour créer une distribution de pression convenable à la surface. La figure 7.15 présente les mêmes contours de pression pour les profils initial et optimisé. On voit alors que

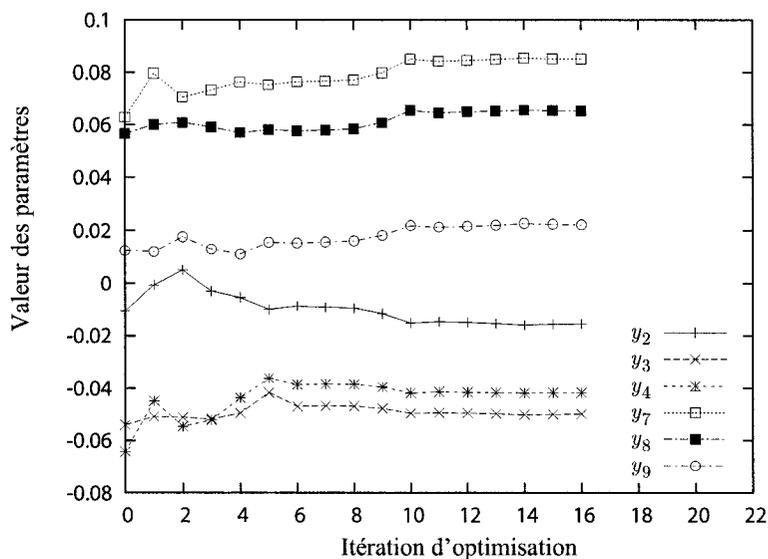


FIG. 6.18 Evolution des paramètres de design durant l'optimisation.

la modification de la cambrure crée une dépression plus importante sur l'extrados du profil menant à une plus forte aspiration et à une portance plus grande. Sur l'intrados, la zone de basses pressions occupant la première moitié du profil initial s'est déplacée vers une plus petite zone près du bord d'attaque. Cela participe aussi de l'augmentation de la portance.

La procédure de design optimal a donc convergé vers l'écoulement cible en un nombre restreint d'itérations. Elle a trouvé les valeurs optimales des paramètres de design afin de modifier convenablement la forme du profil initial et obtenir ainsi un profil optimisé dont les caractéristiques aérodynamiques correspondent aux valeurs cibles. Cet exercice de *flow matching* a donc permis de vérifier la convergence du processus d'optimisation mis en oeuvre dans cette étude.

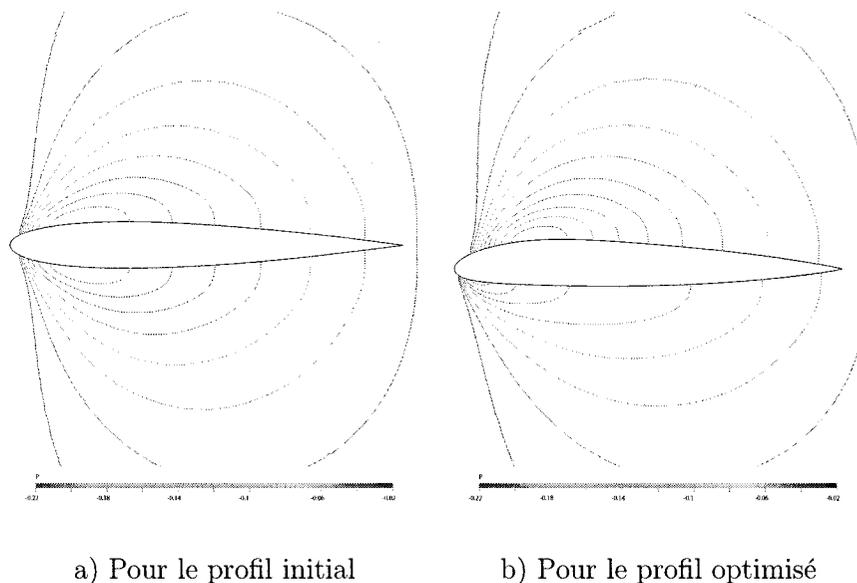


FIG. 6.19 Distributions de pression pour l'exercice de *flow-matching*.

6.3 Conclusion

Ce chapitre a présenté deux problèmes de vérifications de l'implémentation des concepts théoriques développés dans ce mémoire. Tout d'abord, grâce à une solution manufacturée, on a vérifié la performance du solveur pour un écoulement et ses sensibilités par rapport à des paramètres de forme. Ceci nous a en outre permis de tester avec succès la méthodologie proposée pour calculer le gradient des forces aérodynamiques. Enfin, toujours avec la solution manufacturée, on a observé les bonnes performances du solveur pour des phénomènes d'interactions fluides-structures et leurs sensibilités par rapport à des paramètres de valeur. Ensuite, la procédure de design optimal présentée au chapitre 5 a été vérifiée grâce à un exercice de *flow-matching*.

CHAPITRE 7

APPLICATIONS

Dans ce chapitre on présente deux applications numériques des développements théoriques abordés dans ce mémoire. La première concerne l'analyse des phénomènes d'interactions fluides-structures sur un profil subissant de grands déplacements. La deuxième porte sur l'optimisation de la finesse d'un profil représenté par une NURBS. En effet, on a vérifié dans le chapitre précédent tous les outils utilisés par ces applications. L'intégration totale de la modélisation des phénomènes d'interactions fluides-structure au processus d'optimisation n'étant pas tout à fait terminée, elle n'a pas été vérifiée. On ne peut donc pas encore présenter une application regroupant interactions fluides-structures et optimisation car les conclusions seraient contestables. Toutefois, les deux applications traitées dans ce chapitre sont deux contributions importantes qui mèneront très bientôt au design optimal de phénomènes d'interactions fluides-structures. En effet, d'une part on montre l'analyse d'un écoulement et de ses sensibilités autour d'un profil subissant de grands déplacements, d'autre part, on expose le design optimal d'un profil en optimisant sa forme grâce aux paramètres de la NURBS qui le représente.

7.1 Analyse d'un profil flexible Eppler 817

Cette première application sert à mettre en pratique la théorie et le code développés pour l'analyse de phénomènes d'interactions fluides-structures. On étudie ainsi un profil Eppler 817 subissant de grands déplacements dus à l'écoulement visqueux autour de lui.

7.1.1 Description du problème

Le fluide est caractérisé par une densité $\rho_f = 1$ et une viscosité $\mu_f = 0.001$. Le nombre de Reynolds de cet écoulement est donc de 1000 avec une corde c unitaire et une vitesse à l'infini $U_\infty = 1$. La structure, composée de trois solides, possède un module d'Young $E = 600$ et un coefficient de Poisson $\nu_s = 0.25$. Le domaine de calcul est représenté sur la figure 7.1 avec les conditions aux limites associées.

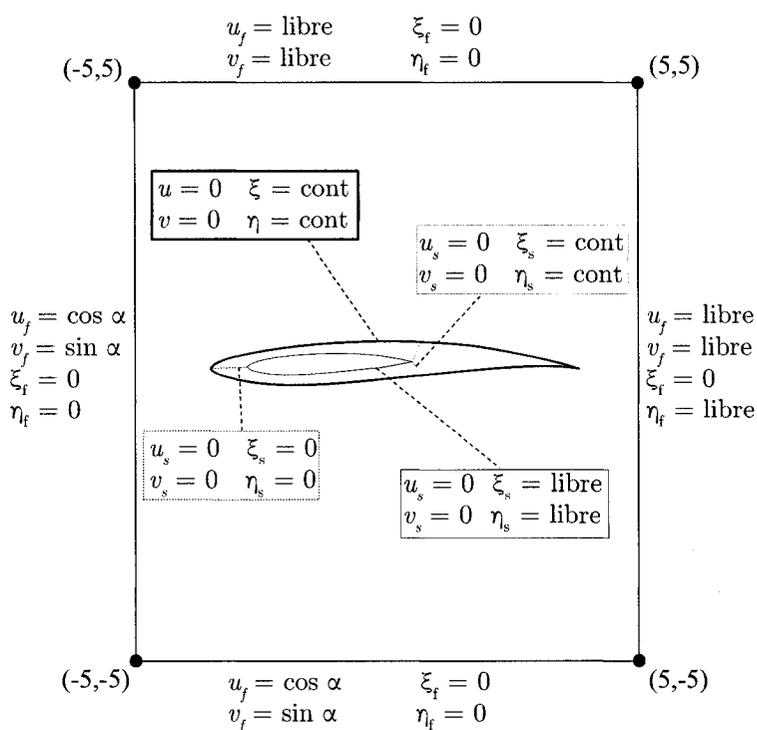


FIG. 7.1 Eppler 817 : Géométrie et conditions frontières.

Ainsi, l'écoulement arrive par la gauche avec un angle d'incidence $\alpha = 6^\circ$ pour accentuer les déplacements de la structure. Les frontières de gauche et du bas sont donc des entrées pour le fluide et on y définit des conditions de Dirichlet. En sortie, pour les frontières de droite et du haut, on considère un écoulement développé

avec des conditions de Neumann homogènes. Pour le pseudo-solide, des conditions homogènes de Dirichlet sont fixées sur toutes les frontières du domaine de calcul sauf en sortie où une condition homogène de Neumann sur η_f permet un glissement du maillage le long de cette paroi pour faire face aux grands déplacements verticaux. A l'interface fluide-solide, les conditions d'équilibre *cont* sont traitées de manière implicites par le code. A l'intérieur du solide, les conditions *cont* des deux interfaces situées près du bord de fuite sont également implicites alors que l'interface située au bord d'attaque constitue le point d'ancrage du profil avec des déplacements spécifiés nuls. Des conditions de Neumann sur les déplacements sont imposés sur la frontière libre du solide. Enfin, on considère le problème de sensibilité par rapport à la viscosité du fluide μ_f afin de voir son influence sur les déformations de la structure.

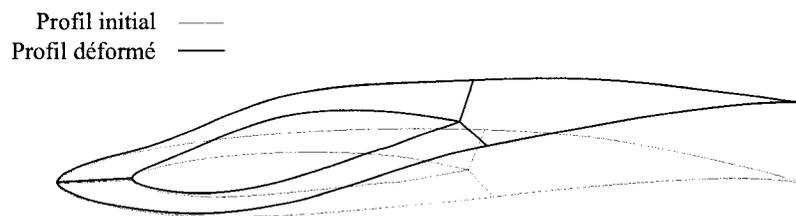


FIG. 7.2 Eppler 817 : Profils initial et déformé.

7.1.2 Grands déplacements

L'important angle d'incidence, le faible module d'Young ainsi que la géométrie du profil engendrent de grands déplacements de la structure comme le montre la comparaison des profils initial et déformé sur la figure 7.2. On utilise un modèle de Saint-Venant Kirchhoff pour modéliser la structure et une formulation de Lagrangien actualisé pour faciliter la convergence et rendre possible le maillage de

la structure déformée. En outre, comme souligné précédemment, on permet au pseudo-solide de glisser verticalement sur la paroi de droite. Sur la configuration déformée, on obtient le maillage présenté à la figure 7.3 constitué de 36486 noeuds. On note ici la régularité du maillage aussi bien dans la partie fluide que dans la partie solide malgré l'important déplacement vertical du bord de fuite.

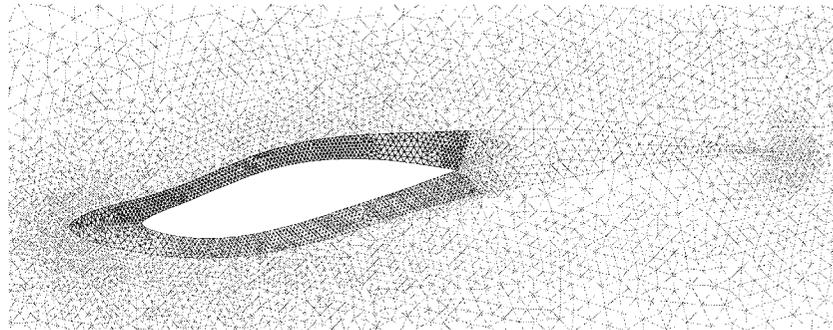


FIG. 7.3 Eppler 817 : Maillage adapté autour du profil déformé.

7.1.3 Résultats

Après 5 cycles d'adaptation utilisant la formulation du lagrangien actualisé, le maillage final possède 36486 noeuds. Les évolutions des erreurs estimées avec le maillage pour le problème d'interaction et pour les sensibilités en normes L2P et énergie sont présentées sur la figure 7.4. On observe globalement une diminution des erreurs estimées au cours des cycles adaptatifs. Toutefois, les erreurs en norme énergie tendent à stagner notamment à cause de la singularité du bord de fuite. En outre, la diminution des erreurs reste relativement faible avec un maillage comportant moins de 40000 noeuds. Malheureusement, on arrive à la limite de mémoire vive des calculateurs avec un stockage des matrices en ligne de ciel. En effet, pour un problème d'interaction fluides-structures le nombre important de variables grossit significativement la taille du système à résoudre. L'obtention de maillages plus

fins passe donc par un stockage plus performant (à défaut de calculateurs plus puissants) comme avec le solveur UMFPACK dont l'intégration semble poser quelques difficultés au moment d'écrire ces lignes. Ainsi, la précision des calculs pour les phénomènes d'interactions fluides-structures, notamment pour les sensibilités, doit être améliorée avant de pouvoir effectuer une optimisation sur des profils flexibles.

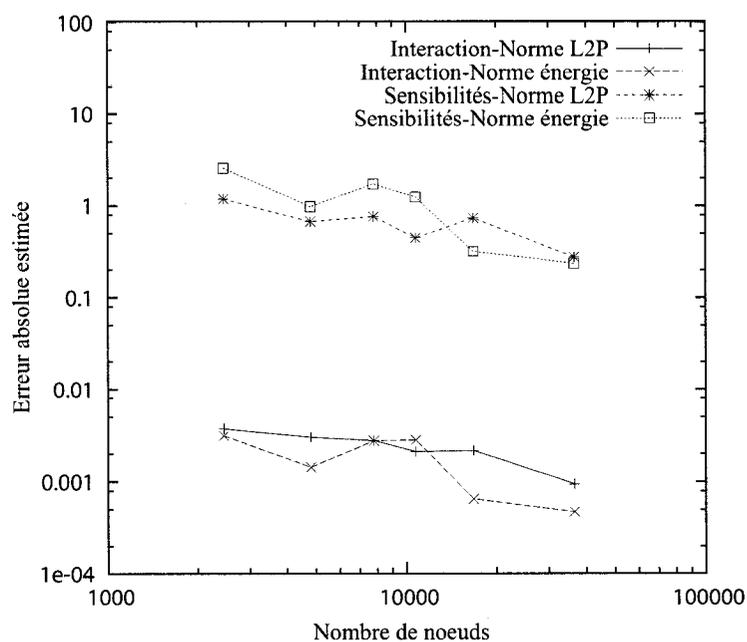


FIG. 7.4 Eppler 817 : Evolutions des erreurs estimées avec le maillage.

Toutefois, la précision actuelle des calculs permet de tirer quelques conclusions qualitatives. Tout d'abord, une dépression dans l'écoulement provoque la concavité sur l'extrados du profil observée sur la figure 7.2. En effet, la distribution de pressions présentée sur la figure 7.5(a) confirme cette observation et explique le fort déplacement vertical qu'on retrouve au bord de fuite. On note également l'existence d'une dépression, sur l'intrados près du bord d'attaque, qui limite le déplacement vertical de l'avant de l'aile. On peut voir plus clairement cela avec les

champs des déplacements verticaux η pour le solide et le pseudo-solide présentés sur la figure 7.5(b). Ensuite, on constate que l'aérodynamique du profil est notablement modifiée par sa déformation. Ainsi, en configuration déformée le profil semble moins performant que dans sa configuration initiale notamment au niveau de la traînée. Enfin, le profil semble plus ou moins s'aligner avec l'écoulement fluide ($\alpha = 6^\circ$) grâce au déplacement de son bord de fuite. Concernant les sensibilités

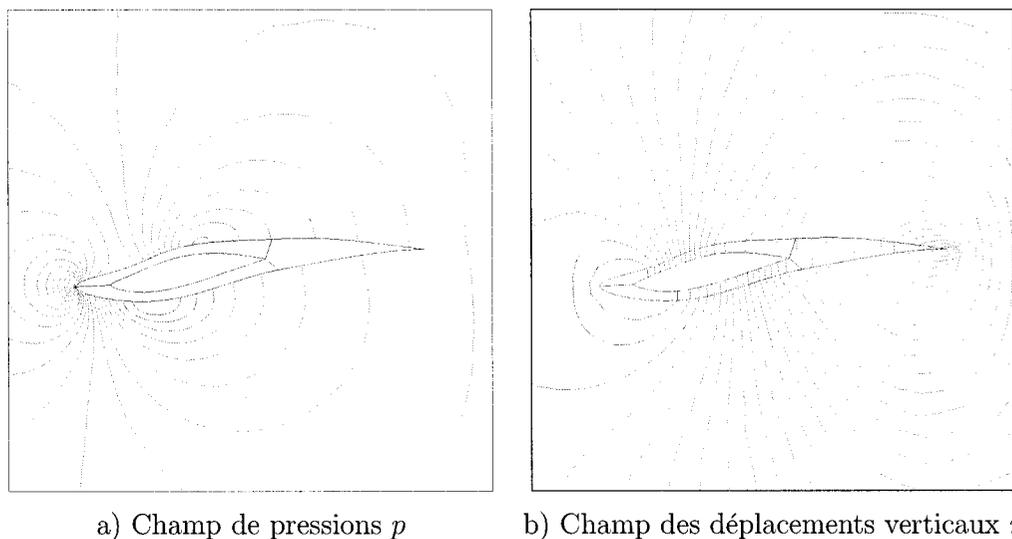


FIG. 7.5 Eppler 817 : champs de pressions p et des déplacements verticaux η .

par rapport à la viscosité (inversément proportionnelle au nombre de Reynolds), on peut tirer quelques conclusions de la figure 7.6. On remarque que la pression diminue avec la viscosité sur l'extrados au niveau du bord de fuite. Au contraire au niveau de la concavité ainsi que sur le bord d'attaque et sur l'intrados proche de l'avant de l'aile, la pression a tendance à augmenter avec la viscosité. On peut voir les conséquences des sensibilités de la pression sur les sensibilités des déplacements de la structure. En effet, les déplacements verticaux augmentent très fortement avec la viscosité au bord de fuite alors qu'ils restent presque constants à l'avant de l'aile.

Enfin, le bord d'attaque étant fixé, la sensibilité des déplacements structuraux à cet endroit reste très faible. Physiquement, une augmentation de la viscosité, correspondant à une diminution du nombre de Reynolds, force encore plus le profil à s'aligner sur l'écoulement avec un déplacement du bord de fuite vers le haut et un aplatissement des concavités du profil présentes à l'avant.

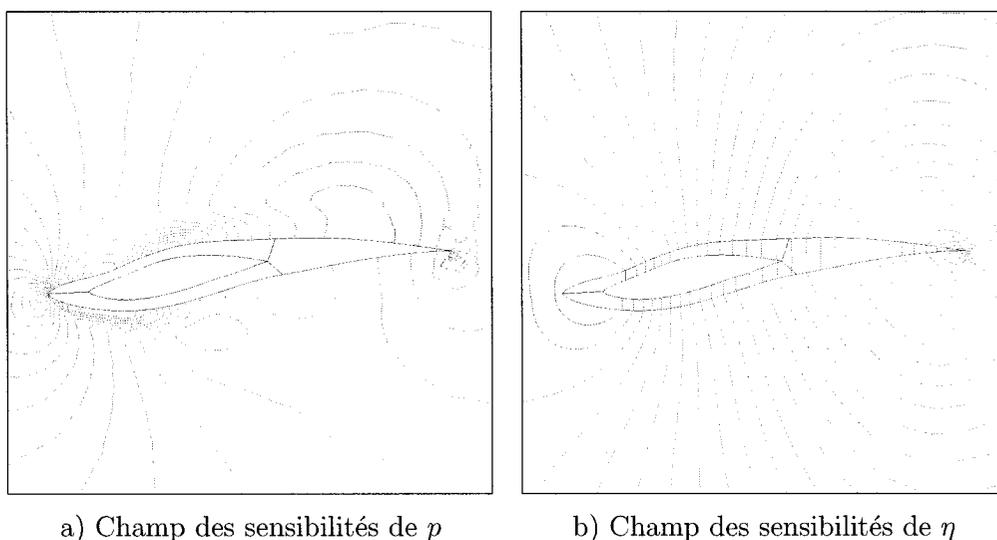


FIG. 7.6 Eppler 817 : champs des sensibilités de p et η .

7.1.4 Conclusion

Pour ce problème d'interaction fluides-structure la précision des calculs reste assez faible, surtout pour les sensibilités. L'utilisation d'un solveur plus performant comme UMFPAK devient nécessaire pour obtenir des maillages plus fins et une précision nécessaire au design optimal de phénomènes d'interactions fluides-structures. Toutefois, on a observé les bénéfices de l'utilisation du pseudo-solide et de l'approche du lagrangien actualisé pour faire face aux grands déplacements de

la structure. Grâce à un maillage régulier même en configuration déformée, on peut tirer des conclusions qualitatives. On remarque que le profil déformé a tendance à s'aligner avec l'écoulement fluide d'autant plus que le nombre de Reynolds diminue. Ses performances aérodynamiques sont donc grandement modifiées par rapport à celles de sa configuration initiale. **Ceci souligne l'importance de prendre en considération les phénomènes d'interactions fluides-structures pour l'analyse et le design optimal de profils flexibles.**

7.2 Optimisation de la finesse

Dans cette partie, on s'intéresse à l'optimisation de la finesse d'un profil rigide soumis à un écoulement visqueux. On cherche à maximiser le quotient de la portance sur la traînée en changeant la forme du profil lors des itérations de design optimal.

7.2.1 Description du problème

L'écoulement fluide autour du profil rigide a un nombre de Reynolds de 1000, une densité $\rho_f = 1$ et la géométrie du problème ainsi que les conditions aux limites sont identiques à celles utilisées lors de l'exercice de *flow matching* de la section 6.2. Par contre, le but de l'optimisation n'est plus le même et on demande alors à la procédure de design optimal de maximiser la finesse représentée par la fonction objectif suivante :

$$\mathcal{F} = \frac{C_L}{C_D} \quad (7.1)$$

La configuration initiale est un profil NACA 4512 à incidence nulle avec les propriétés aérodynamiques suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} C_D^0 = 0.123356 \\ C_L^0 = 0.019005 \end{array} \right\} \mathcal{F}^0 = 0.154066 \quad (7.2)$$

Ce profil est représenté grâce à une NURBS d'ordre 4 à 12 points de contrôle illustrée sur la figure 7.7. L'espace de design potentiel est donc extrêmement riche puisqu'il s'appuie sur 36 paramètres de forme pour la NURBS et sur l'angle d'incidence. Afin de mener à bien le processus d'optimisation dans un temps raisonnable, on doit alors réduire cet espace de design.

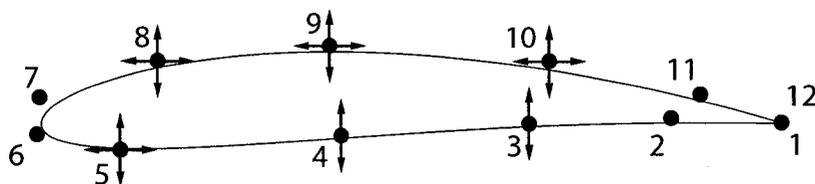


FIG. 7.7 Profil NACA 4512 représenté par une NURBS à 12 points de contrôle.

7.2.2 Choix des paramètres de design

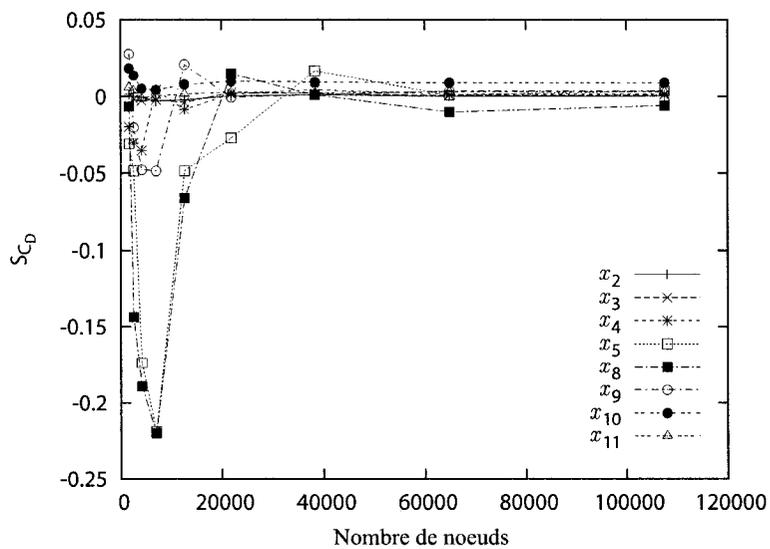
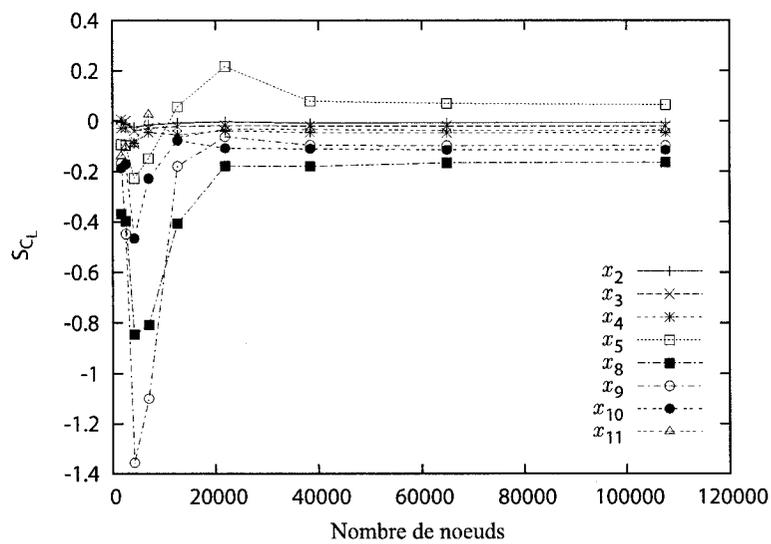
Tout d'abord, on ne considère pas l'angle d'incidence comme un paramètre de design puisqu'il n'influe pas sur la forme du profil mais seulement sur l'écoulement. Ensuite, on fixe les points de contrôle 1 et 12 au bord de fuite et 6 et 7 au bord d'attaque afin de garantir une corde constante unitaire. Il reste alors 24 paramètres constitués des abscisses, des ordonnées et des poids des 8 points de contrôle restants. Pour réduire encore ce nombre on doit analyser l'influence de chacun des paramètres pour ne garder que les plus influents. Un *design d'expérience* peut être mené comme l'a fait de Painchaud-Ouellet^[35]. Toutefois, cette approche nécessite un nombre important d'essais (plusieurs dizaines de simulations adaptatives) très coûteux en temps de calcul. On préfère donc s'appuyer sur la méthode de l'équation des sensibilités pour les 24 paramètres et observer leurs influences sur la fonction objectif \mathcal{F} .

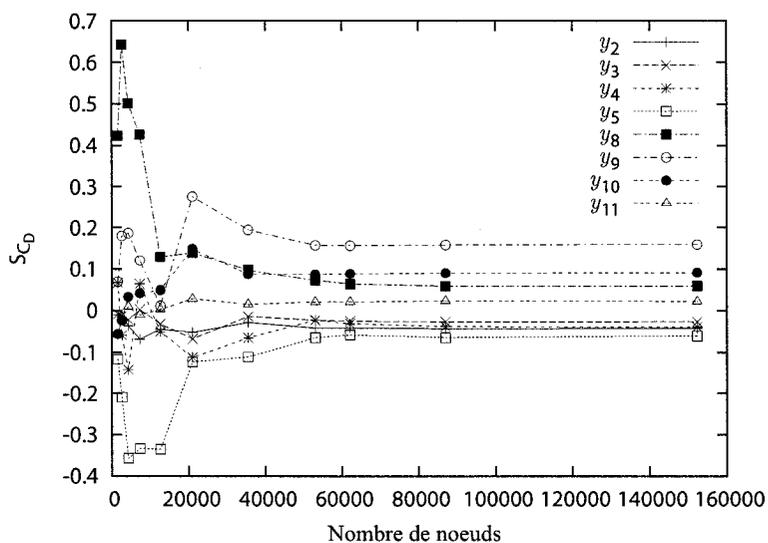
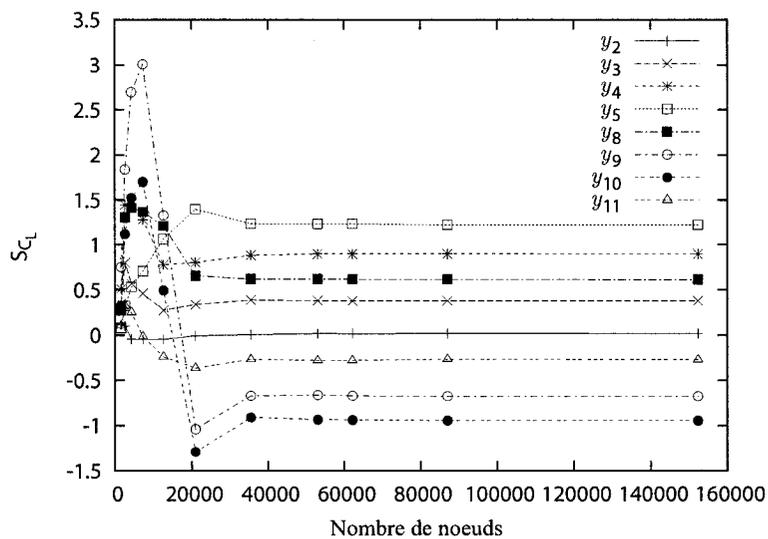
En effet, il suffit d'une simulation pour déterminer les paramètres les plus influents. Lors de cet essai, on calcule l'écoulement ainsi que ses sensibilités par rapport à tous les paramètres. L'utilisation de la factorisation conditionnelle présentée à la section 3.3.3.3 exploitant la linéarité des équations des sensibilités réduit très fortement le temps de calcul de toutes les sensibilités. En outre, l'utilisation du solveur UMF-PACK améliore de façon impressionnante le temps de calcul pour l'écoulement et pour la seule factorisation nécessaire pour les sensibilités.

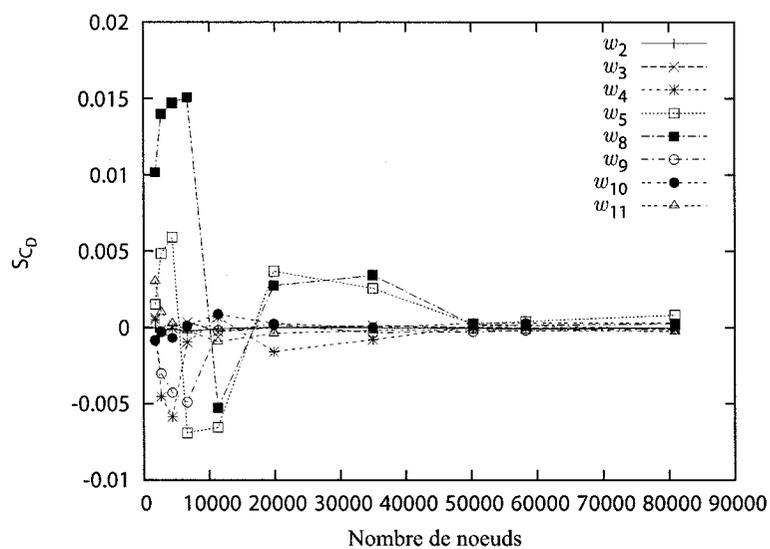
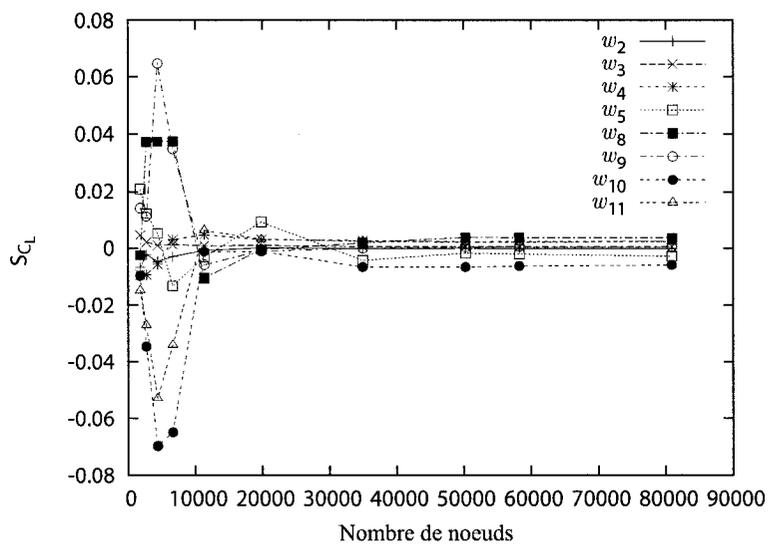
En pratique, on réalise trois essais distincts afin que l'adaptation de maillage par rapport aux sensibilités puisse se faire correctement. En effet, avec 24 paramètres de natures différentes en plus de l'écoulement, le maillage se raffine très rapidement et l'adaptation de maillage devient difficilement contrôlable. Ainsi, chacun des trois essais porte sur les paramètres de même nature : les abscisses, les ordonnées puis les poids des points de contrôle.

On tire plusieurs conclusions de ces simulations. Tout d'abord, on constate que le temps de calcul pour chaque simulation est d'environ une heure alors qu'il était de l'ordre de 3 jours avant l'utilisation de UMFPACK et de l'adaptation conditionnelle. Ainsi, le calcul est environ 70 fois plus rapide. De plus, l'utilisation de la mémoire étant plus efficace, le nombre de noeuds du maillage final est substantiellement plus important et peut facilement être doublé (152306 noeuds pour l'essai avec les ordonnées comme paramètres de sensibilités).

Ensuite, on peut observer les évolutions des sensibilités des coefficients de traînée S_{C_D} et S_{C_L} en fonction du raffinement du maillage par rapport aux abscisses sur la figure 7.8, par rapport aux ordonnées sur la figure 7.9 et par rapport aux poids sur la figure 7.10. On observe alors une convergence en maillage de toutes les sensibilités avec un niveau acceptable atteint avec 60000 noeuds. Lors de l'optimisation, on arrête donc la procédure d'adaptation lorsque le maillage comprend entre 60000 et 95000 noeuds pour obtenir un calcul convergé.

a) Sensibilités du coefficient de traînée S_{CD} .b) Sensibilités du coefficient de portance S_{CL} .FIG. 7.8 Evolution de S_{CD} et S_{CL} par rapport aux abscisses avec le maillage.

a) Sensibilités du coefficient de traînée S_{CD} .b) Sensibilités du coefficient de portance S_{CL} .FIG. 7.9 Evolution de S_{CD} et S_{CL} par rapport aux ordonnées avec le maillage.

a) Sensibilités du coefficient de traînée S_{C_D} .b) Sensibilités du coefficient de portance S_{C_L} .FIG. 7.10 Evolution de S_{C_D} et S_{C_L} par rapport aux poids avec le maillage.

Enfin, on compare l'influence des différents paramètres sur la fonction coût \mathcal{F} grâce aux sensibilités normalisées. La différence de nature entre les paramètres nécessite une normalisation des sensibilités grâce aux données de référence suivantes :

Paramètres	Valeurs de référence p_0	Amplitudes de variation Δp	Valeurs maximales p_{max}
x	1.00	0.400	1.200
y	0.12	0.048	0.144
w	1.00	2.000	2.000

où $p_{max} = p_0 + \Delta p/2$. On multiplie les sensibilités calculées $S_{\mathcal{F}}$ avec les valeurs maximales des paramètres p_{max} pour obtenir leurs valeurs normalisées : $\tilde{S}_{\mathcal{F}} = S_{\mathcal{F}} \times p_{max}$. Les résultats sont alors analysés sous la forme d'un diagramme de Pareto présenté à la figure 7.11.

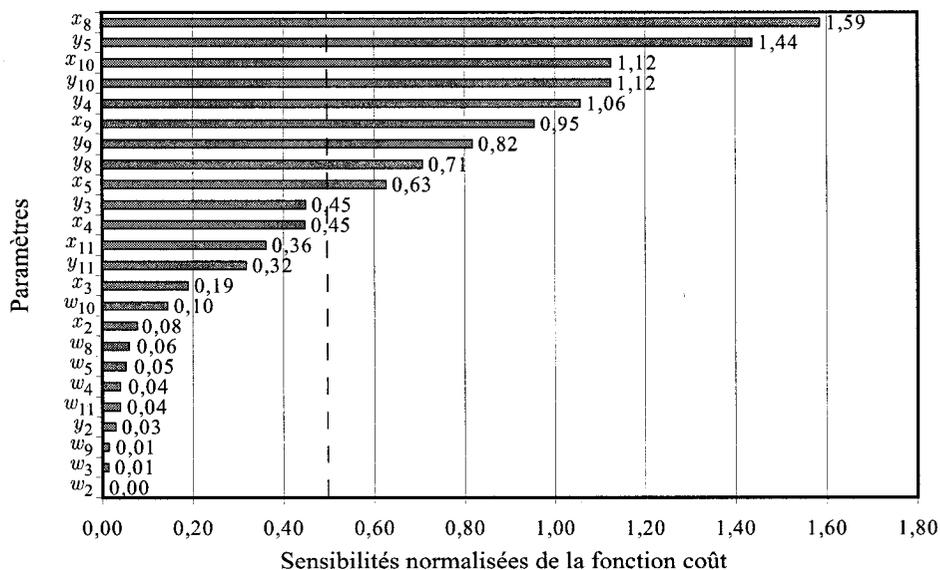


FIG. 7.11 Diagramme de Pareto des influences des paramètres sur la fonction coût.

En pointillé, on a tracé la ligne verticale correspondant à une sensibilité normalisée de 0.5. On observe alors que 9 paramètres influencent la fonction coût au delà de cette ligne : $\{x_5, x_8, x_9, x_{10}, y_4, y_5, y_8, y_9, y_{10}\}$. En outre, le 10^e paramètre le plus influent est l'ordonnée y_3 du point \mathbf{P}_3 . On a décidé de le considérer aussi comme un paramètre de design puisqu'il influence la partie du bord de fuite du côté de l'intrados contrairement aux 9 premiers paramètres qui ont seulement un effet sur l'extrados au niveau du bord de fuite. On doit en effet souligner que le calcul des sensibilités s'effectue sur le profil initial et que les résultats obtenus ne sont plus forcément valables lorsqu'on s'éloigne de ce profil. Par expérience, on sait que y_3 est un paramètre qui peut avoir une grande influence sur l'aérodynamique ce qui renforce notre choix. Les paramètres de design retenus sont donc $\{x_5, x_8, x_9, x_{10}, y_3, y_4, y_5, y_8, y_9, y_{10}\}$ et leurs bornes sont définies comme suit :

Paramètres	L_i	Valeurs initiales	L_s	Paramètres	L_i	Valeurs initiales	L_s
x_5	0.10	0.11357	0.30	y_4	-0.03	-0.01844	0.03
x_8	0.05	0.16147	0.20	y_5	-0.08	-0.04005	0.0
x_9	0.25	0.38967	0.45	y_8	0.08	0.08622	0.12
x_{10}	0.50	0.68698	0.75	y_9	0.08	0.10080	0.15
y_3	-0.01	-0.00175	0.02	y_{10}	0.05	0.08152	0.10

Comme on l'a vu dans l'exercice de *flow matching*, le choix des bornes sur les paramètres de forme est délicat. On a ici essentiellement tenu compte d'une contrainte sur l'épaisseur du profil supérieure à 5%, du repliement du profil qu'il faut absolument éviter et de l'étude de sensibilités qu'on vient de réaliser. **L'utilisation des sensibilités pour le choix des paramètres de design permet un gain de temps important même si la pertinence de l'information obtenue diminue lorsque la forme du profil s'éloigne de la forme initiale.**

7.2.3 Résultats de l'optimisation

Comme on peut le voir sur la figure 7.12, 18 itérations ont été nécessaires pour atteindre l'optimum, le critère d'arrêt étant la valeur minimale du pas de l'optimiseur fixée à 10^{-7} . Les valeurs optimisées sont alors les suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} C_D^{opt} = 0.119023 \\ C_L^{opt} = 0.195965 \end{array} \right\} \mathcal{F}^{opt} = 1.646452 \quad (7.3)$$

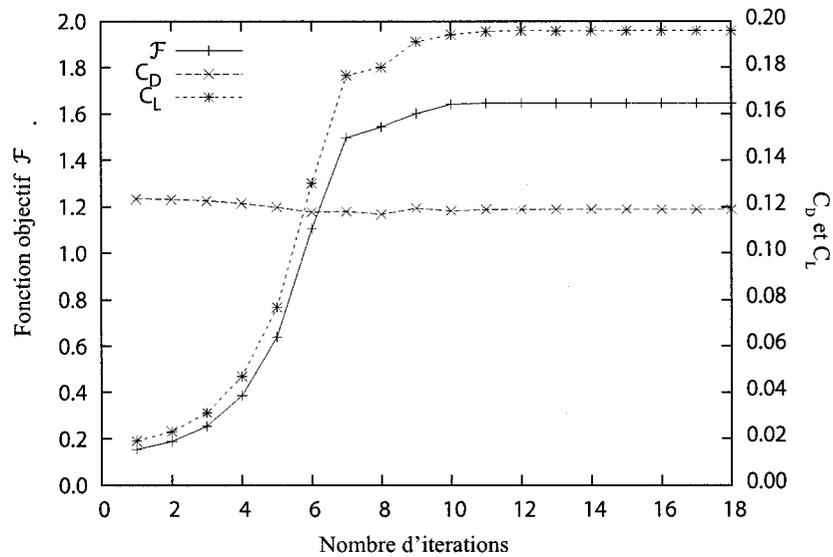


FIG. 7.12 Historique de l'optimisation de la finesse.

La fonction objectif a finalement augmenté d'un facteur proche de 11. Toutefois, la plus grande partie de ce gain est atteinte après seulement 10 itérations comme le montre la figure 7.12 qui présente l'évolution de la fonction objectif, des coefficients de traînée et de portance. Les dernières itérations n'apportent ainsi qu'une petite

amélioration de la finesse. Aussi, on note que l'essentiel du gain de la fonction objectif provient d'une importante amélioration du coefficient de portance durant l'optimisation. En effet, entre la configuration initiale et la configuration optimisée, la portance a été multipliée par 10 alors que la traînée n'a diminué que de 3%. Le profil optimal peut d'ailleurs être comparé avec la forme initiale sur la figure 7.13.



FIG. 7.13 Profils initial et optimisé lors de l'optimisation de la finesse.

On observe que l'épaisseur moyenne du profil a clairement diminué alors que sa cambrure maximum a fortement augmenté (passant de 0.040 à 0.055) et sa position s'est déplacée vers le bord d'attaque de l'aile (passant de 50% à 20% de la corde). Le bord d'attaque s'est ainsi beaucoup modifié et se compare désormais à un bec. Plus précisément, la forme du profil optimisé s'appuie sur les nouvelles valeurs des paramètres présentées ici :

Paramètres	L_i	Valeurs optimisées	L_s	Paramètres	L_i	Valeurs optimisées	L_s
x_5	0.10	0.24247	0.30	y_4	-0.03	0.03000	0.03
x_8	0.05	0.05000	0.20	y_5	-0.08	0.03000	0.03
x_9	0.25	0.27127	0.45	y_8	0.08	0.11862	0.12
x_{10}	0.50	0.50000	0.75	y_9	0.08	0.08000	0.15
y_3	-0.01	0.02000	0.02	y_{10}	0.05	0.05000	0.10

On note que sur 10 paramètres de design, 7 ont atteint les bornes qu'on leur avait fixées. En effet, les paramètres $\{y_3, y_4, y_5, y_9, y_{10}\}$ évoluent de manière à minimiser

l'épaisseur de l'aile. Leurs variations sont donc limitées par l'épaisseur minimale fixée à 5%. Les abscisses $\{x_8, x_{10}\}$ diminuent jusqu'à atteindre leur borne inférieure ce qui provoque le déplacement de la cambrure maximum vers le bord d'attaque. L'évolution des paramètres durant l'optimisation est présentée sur la figure 7.14. Tout d'abord, l'optimiseur diminue l'épaisseur du profil en jouant dans un premier temps sur les ordonnées $\{y_3, y_4, y_5\}$ déterminant la forme de l'intrados puis sur les paramètres $\{y_9, y_{10}\}$ situés sur l'extrados. Cette diminution de l'épaisseur engendre à la fois un gain de portance et une diminution de la traînée. Ensuite, la variation du paramètre y_8 provoque une augmentation de la cambrure qui se déplace vers le bord d'attaque suite à la diminution de x_8 . On observe alors une nette augmentation de la portance ainsi qu'un léger accroissement de la pression. Enfin, l'optimisation se termine en ajustant les abscisses $\{x_5, x_9, x_{10}\}$ afin d'améliorer encore un peu la finesse du profil.

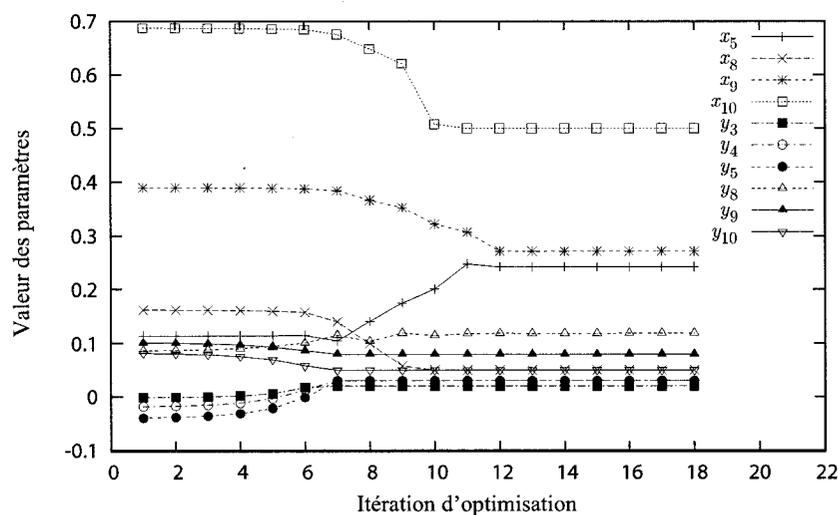
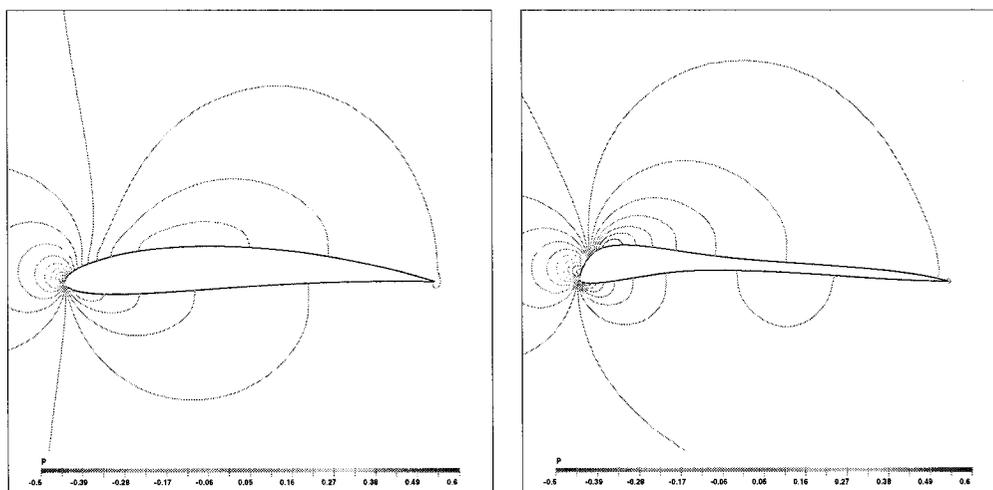


FIG. 7.14 Evolution des paramètres de design durant l'optimisation.

L'influence aérodynamique des variations des paramètres de design est présentée

sur la figure 7.15 sous la forme de contours de pression pour les profils initial et optimisé. On observe alors une dépression plus importante sur l'extrados qui s'est déplacée vers le bord d'attaque. Ceci conduit à une plus forte aspiration induisant plus de portance. De même, sur l'intrados la zone de basse pressions s'est concentrée vers l'avant et participe de l'augmentation de la portance.



a) Pour le profil initial

b) Pour le profil optimisé

FIG. 7.15 Distributions de pression pour l'optimisation de la finesse.

7.2.4 Conclusion

En conclusion, on doit souligner les énormes avantages de l'utilisation de la factorisation conditionnelle et du solveur UMFPACK qui permet désormais de réaliser une optimisation de profil en une nuit au lieu de plusieurs semaines auparavant ! Du côté de l'optimisation elle-même, la forte augmentation de la cambrure permet une amélioration importante de la portance mais aussi un accroissement de la traînée

qui est en partie due à la portance. Toutefois, la forte diminution de l'épaisseur permet de réduire légèrement la traînée en fin d'optimisation tout en participant de l'augmentation de la portance. La fonction objectif est donc fortement bonifiée grâce à des performances aérodynamiques améliorées par la nouvelle forme du profil. Il est alors intéressant de noter que cette optimisation s'est déroulée avec un nombre de Reynolds très faible ce qui limite les comparaisons avec des ailes d'avions ou les interprétations physiques. Toutefois, Kunz et Kroo^[26] ont mené un travail d'optimisation similaire avec des nombres de Reynolds variant entre 2000 et 6000. Ils notent les mêmes effets de la cambrure et de l'épaisseur sur la finesse et obtiennent des profils optimisés très fins (2% d'épaisseur maximum) et avec de fortes cambrures supérieures à 0.06. Contrairement à nos résultats, la cambrure maximale est située proche du bord de fuite. Les travaux futurs pourront donc explorer avec bénéfice les profils fins en utilisant plus de paramètres de design sur le bord fuite.

CONCLUSION

Le but de ce mémoire était d'apporter une contribution à l'analyse et au design optimal de phénomènes d'interactions fluides-structures. On a tout d'abord implémenté les modèles hyperélastiques pour les structures subissant de grands déplacements et/ou de grandes déformations causés par un écoulement fluide. Ensuite, on a développé un code permettant de gérer la paramétrisation NURBS et on l'a implémenté dans un code d'éléments finis. Dans l'optique d'un processus d'optimisation, on a choisi d'utiliser la méthode de l'équation des sensibilités. Il a donc fallu développer les équations des sensibilités pour les modèles structuraux ainsi que pour la paramétrisation NURBS. On a également revu les équations d'équilibre à l'interface fluide-solide pour les rendre compatibles avec un paramètre de forme pour l'interface initiale. De plus, on a intégré la paramétrisation NURBS et ses sensibilités à la procédure de design optimal. Enfin, on a appliqué la factorisation conditionnelle aux sensibilités afin de gommer l'un des plus grands inconvénients de la MES par rapport aux méthodes adjointes.

L'implémentation des équations ainsi que la procédure de design optimal ont été vérifiées à l'aide de deux problèmes aux solutions connues. En premier lieu, on a développé une solution manufacturée pour un cas d'interaction fluide-structure. On a ainsi vérifié la performance du solveur pour un écoulement et ses sensibilités par rapport à des paramètres de forme grâce à l'étude de la convergence des erreurs avec le raffinement du maillage. Ceci a en outre permis de tester avec succès la méthodologie proposée pour calculer le gradient des forces aérodynamiques nécessaire au processus de design optimal. Enfin, toujours avec la solution manufacturée, on a observé les bonnes performances du solveur pour des phénomènes d'interactions fluides-structures et leurs sensibilités par rapport à des paramètres de valeur. Dans un deuxième temps, la procédure de design optimal retenue a

été vérifiée grâce à un exercice de *flow-matching* utilisant avec succès une paramétrisation NURBS pour le profil et la MES pour le calcul des gradients de la fonction coût. La convergence rapide de l'optimiseur vers les valeurs cibles a confirmé la bonne implémentation des équations et a validé les choix des éléments de la procédure d'optimisation comme le calcul des gradients par les sensibilités. Avec ces vérifications, on a pu aborder en toute confiance les divers cas d'application.

La première application portait sur profil flexible subissant de grands déplacements dus à l'écoulement fluide. Elle a montré les limites de précision des calculs pour les problèmes d'interactions fluides-structures et notamment pour leurs sensibilités. Toutefois, on a pu observer les bénéfices de l'utilisation du pseudo-solide et de l'approche du lagrangien actualisé pour faire face aux grands déplacements de la structure. Grâce à un maillage régulier même en configuration déformée, il a été possible de tirer quelques conclusions qualitatives quant à l'influence de l'écoulement et de sa viscosité sur la forme de la structure. On a notamment remarqué que le profil a tendance à s'aligner avec l'écoulement fluide en se déformant fortement et que par conséquent ses performances aérodynamiques sont grandement modifiées par rapport à celles de sa configuration initiale. Ceci souligne l'importance de considérer les phénomènes d'interactions fluides-structure pour les profils flexibles.

Dans la deuxième application, on a mené une optimisation de la finesse d'un profil rigide représenté par une NURBS. Cette optimisation a été menée à son terme en grande partie grâce à l'utilisation de la factorisation conditionnelle et du solveur UMFPACK. On peut désormais réaliser une optimisation de profil presque 100 fois plus rapidement ! Les résultats obtenus vont dans la même direction que les travaux les plus avancés pour les écoulements à faible nombre de Reynolds. Une augmentation de cambrure permet une amélioration de la portance et un léger accroissement de la traînée. Toutefois, une diminution de l'épaisseur permet de

réduire légèrement la traînée tout en participant de l'augmentation de la portance. La finesse se trouve donc améliorée par les effets parallèles d'une augmentation de la cambrure et une diminution de l'épaisseur.

Les contributions apportées par ce travail laissent entrevoir la possibilité prochaine de mener avec succès un design optimal de phénomènes d'interactions fluides-structures. Toutefois, certaines améliorations et certains développements sont encore nécessaires avant d'atteindre ce but. Tout d'abord, l'utilisation d'un solveur plus performant comme UMFPACK est nécessaire pour obtenir une analyse précise des phénomènes d'interactions fluides-structures et de leurs sensibilités. L'implémentation robuste et fiable de UMFPACK est donc une étape incontournable sur la voie de l'optimisation de profils flexibles. Ensuite, la vérification du solveur reste encore à faire pour un problème d'IFS avec des sensibilités de forme. En effet, lorsque la forme de l'interface fluide-solide non-déformée dépend d'un paramètre de sensibilité, les équations d'équilibre sont plus délicates et leur implémentation doit être vérifiée grâce à une solution manufacturée complète. Enfin, une optimisation multidisciplinaire basée sur une approche découplée pour le fluide et la structure permettrait de comparer les performances avec l'approche monolithique.

Finalement, la méthodologie et les outils développés dans ce mémoire peuvent facilement être utilisés dans des domaines autres que l'aéronautique, permettant l'accès à de nouvelles applications. Par exemple, le développement de modèles structuraux incompressibles pourrait être appliqué en bio-mécanique afin de modéliser les tissus sanguins. De même, les modèles hyperélastiques peuvent servir pour simuler des applications industrielles de mise en forme de matériaux. Enfin, le processus d'optimisation peut s'appliquer sur une géométrie quelconque représentée par une NURBS : trompette d'admission d'air, ailerons de formule 1 ou encore structures du génie civil.

RÉFÉRENCES

- [1] Bazilevs, Y., Calo, V., Zhang, Y., and Hughes, T. (2006). Isogeometric fluid-structure interaction analysis with applications to arterial blood flow. *Computational Mechanics*, **38**(4-5), 310 – 322.
- [2] Bentamy, A. (2003). *Modélisation géométrique par NURBS pour le design aérodynamique des ailes d'avion*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal.
- [3] Bonet, J. and Wood, R. (1997). *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press, The Edimburgh Building, Cambridge CB2 2RU, UK.
- [4] Borggaard, J. and Burns, J. (1997). A PDE sensitivity equation method for optimal aerodynamic design. *Journal of Computational Physics*, **136**(2), 366–384.
- [5] Burden, R. L. and Faires, J. D. (1997). *Numerical analysis*. Brooks/Cole Publishing Company.
- [6] Davis, T. A. (2004). Algorithm 832 : Umfpack v4.3—an unsymmetric-pattern multifrontal method. *ACM Trans. Math. Softw.*, **30**(2), 196–199.
- [7] de Boor, C. (1978). *A practical guide to splines*. Springer-Verlag.
- [8] Dennis Jr., J. and Schnabel, R. (1983). *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Prentice-Hall.
- [9] DeVore, R. A. and Lortentz, G. G. (1991). *Constructive approximation*. Springer-Verlag.
- [10] Dhatt, G. and G.Touzot (1981). *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Les Presses de l'Université Laval, Québec, Canada.

- [11] Dowell, E. and Hall, K. (2001). Modeling of fluid-structure interaction. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **33**, 445 – 490.
- [12] Duvigneau, R., Pelletier, D., and Borggaard, J. (2006). An improved continuous sensitivity equation method for optimal shape design in mixed convection. *Numerical Heat Transfer part B : Fundamentals*, **50**(1), 1–24.
- [13] Etienne, S., Hay, A., Garon, A., and Pelletier, D. (2006). Shape sensitivity analysis of fluid-structure interaction problems. *Collection of Technical Papers - 36th AIAA Fluid Dynamics Conference*, **2**, 867 – 881.
- [14] Etienne, S. and Pelletier, D. (2004). A monolithic formulation for steady-state fluid-structure interaction problems. In *34th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, Portland, Oregon. AIAA Paper 2004-2239.
- [15] Etienne, S., Pelletier, D., and Garon, A. (2005). An updated lagrangian monolithic formulation for steady-state fluid-structure interaction problems. *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit - Meeting Papers*, pages 239 – 253.
- [16] Farhat, C., Lesoinne, M., and LeTallec, P. (1998). Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces : momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **157**(1-2), 95 – 114.
- [17] Gallagher, R. H. and Zienkiewicz, O. C. (1973). *Optimum structural design : theory and applications*. John Wiley & Sons.
- [18] Ghattas, O. and Li, X. (1995). A variational finite element method for stationary nonlinear fluid-solid interaction. *Journal of Computational Physics*, **121**, 347–356.
- [19] Gunzburger, M. D. (1999). Sensitivities, adjoints and flow optimization. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **31**(1), 53 – 78.

- [20] Gunzburger, M. D. (2000). Adjoint equation-based methods for control problems in incompressible, viscous flows. *Flow, Turbulence and Combustion*, **65**(3-4), 249 – 272.
- [21] Haug, E. J., Choi, K., and Komkov, V. (1986). *Design sensitivity analysis of structural systems*, volume 177 of *Mathematics in science and engineering*. Academic Press, Orlando.
- [22] Hay, A., Etienne, S., Duvigneau, R., and Pelletier, D. (2006). Evaluation of flows on nearby geometries by a shape sensitivity equation method. In *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 2006-1296.
- [23] Holzapfel, G. A. (2000). *Nonlinear solid mechanics, A continuum approach for engineering*. John Wiley and Sons Ltd., Baffins Lane, Chichester, West Sussex PO19 1UD, UK.
- [24] Hristova, H., Etienne, S., Pelletier, D., and Borggaard, J. (2006). A continuous sensitivity equation method for time-dependent incompressible laminar flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **50**(7), 817 – 844.
- [25] Hubner, B., Walhorn, E., and Dinkler, D. (2004). A monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **193**(23-26), 2087 – 2104.
- [26] Kunz, P. J. and Kroo, I. Analysis and design of airfoils for use at ultra-low reynolds numbers. In *Introduction to the design of fixed-wing micro air vehicles including three case studies*, volume chapitre 3, pages 35–60. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc.
- [27] Levin, O. and Shyy, W. (2001). Optimization of a low reynolds number airfoil with flexible membrane. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, **2**(4), 523 – 36.

- [28] Lohner, R., Cebal, J., Yang, C., Baum, J. D., Mestreau, E., Charman, C., and Pelessone, D. (2004). Large-scale fluid-structure interaction simulations. *Computing in Science and Engineering*, **6**(3), 27 – 37.
- [29] Lépine, J. (1999). Optimisation de la représentation de profils d'ailes pour application au design aérodynamique. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal.
- [30] Lépine, J., Guibault, J., Trépanier, J.-Y., and Pépin, F. (2001). Optimized nonuniform rational b-spline geometrical representation for aerodynamic design of wings. *AIAA Journal*, **39**(11), 2033–2041.
- [31] Lund, E., Moller, H., and Jakobsen, L. (2001). Shape design optimization of steady fluid-structure interaction problems with large displacements. *Collection of Technical Papers - AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, **5**, 3241 – 3251.
- [32] Marier, S. (2005). Modélisation géométrique d'ailes d'avion pour l'optimisation multidisciplinaire. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal.
- [33] Maute, K., Nikbay, M., and Farhat, C. (2003). Sensitivity analysis and design optimization of three-dimensional non-linear aeroelastic systems by the adjoint method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **56**(6), 911 – 933.
- [34] Moller, H. and Lund, E. (2000). Shape sensitivity analysis of strongly coupled fluid-structure interaction problems. In *8th AIAA/NASA/USAF/ISSMO symposium on multidisciplinary analysis and optimization*, Long Beach, California. AIAA Paper 2000-4823.
- [35] Painchaud-Ouellet, S. (2003). Optimisation aérodynamique de profils d'aile 2d. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal.

- [36] Painchaud-Ouellet, S., Tribes, C., Trépanier, J.-Y., and Pelletier, D. (2006). Airfoil shape optimization using a nonuniform rational b-splines parameterization under thickness constraint. *AIAA Journal*, **44**(10), 2170–2188.
- [37] Piegl, L. and Tiller, W. (1995). *The NURBS book*. Springer-Verlag.
- [38] Prautzsch, H., W. B. and Paluszny, M. (2002). *Bézier and B-spline techniques*. Springer (Mathematics and visualisation).
- [39] Reggio, M. and Godin, D. (2000). Generalized taylor splines. *Intern. J. Computer Math.*, **78**, 551–568.
- [40] Roache, P. J. (1998). *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*. Hermosa publishers, Albuquerque, NM.
- [41] Sackinger, P. A., Schunk, P. R., and Rao, R. R. (1996). A newton-raphson pseudo-solid domain mapping technique for free and moving boundary problems : A finite element implementation. *Journal of Computational Physics*, **125**, 83–103.
- [42] Teixeira, P. and Awruch, A. (2005). Numerical simulation of fluid-structure interaction using the finite element method. *Computers and Fluids*, **34**(2), 249 – 273.
- [43] Tortorelli, D. A. and Wang, Z. (1993). Systematic approach to shape sensitivity analysis. *International Journal of Solids and Structures*, **30**(9), 1181 – 1212.
- [44] Tremblay, D. (2005). Application d’une méthode d’Éléments finis adaptative à des problèmes d’interactions fluide-structure en axisymétrique.
- [45] Tremblay, D., Etienne, S., and Pelletier, D. (2006). Code verification and the method of manufactured solutions for fluid-structure interaction problems. *Collection of Technical Papers - 36th AIAA Fluid Dynamics Conference*, **2**, 882 – 892.

- [46] Trepanier, J.-Y., Lepine, J., and Pepin, F. (2000). Optimized geometric representation for wing profiles using nurbs. *Canadian Aeronautics and Space Journal*, **46**(1), 12 – 19.
- [47] Tribes, C., Dube, J.-F., and Trepanier, J.-Y. (2004). Decomposition of multidisciplinary optimization problem : Formulations and application to a simplified wing design. *Collection of Technical Papers - 10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, **4**, 2679 – 2699.
- [48] Turgeon, E. (2001). *Méthode d'Éléments Finis Adaptative pour la Résolution des Sensibilités d'écoulements*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Montréal, QC.
- [49] Turgeon, É., Pelletier, D., and Borggaard, J. (1999). A continuous sensitivity equation approach to optimal design in mixed convection. In *33rd AIAA Thermophysics Conference*, Norfolk, VA. AIAA Paper 99-3625.
- [50] Turgeon, É., Pelletier, D., and Borggaard, J. (2001). Sensitivity and uncertainty analysis for variable property flows. In *39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 2001-0139.
- [51] Turgeon, É., Pelletier, D., and Borggaard, J. (2000). A general purpose sensitivity equation formulation for complex flows. In *Proceedings of the 8th Annual Conference of the Computational Fluid Dynamics Society of Canada*, volume 2, pages 697–704.
- [52] Vanderplaats, G. N. (1999). *Numerical optimization techniques for engineering design*. Vanderplaats Research and Development, Colorado Springs, CO, third edition.

ANNEXE I

OUTILS MATHÉMATIQUES

I.1 Dérivations d'une fonction composée

Théorème : Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^M et soit Ω' un ouvert de \mathbb{R}^P . On note $x = (x_1, \dots, x_M)$ la variable dans Ω et $y = (y_1, \dots, y_P)$ la variable dans Ω' .

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \Omega \longrightarrow \Omega' \\ x \longrightarrow y = f(x) \end{cases}$$

une application dont les P composantes f^1, \dots, f^P sont de classe \mathcal{C}^1 ,

$$\text{et soit } g : \begin{cases} \Omega' \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longrightarrow g(y) \end{cases}$$

une application de classe \mathcal{C}^1 . Alors $\Gamma = g \circ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 , et pour tout $i \in \{1, \dots, M\}$ et tout $x \in \Omega$ on a :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^P \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \quad (\text{I.1})$$

En appliquant à nouveau cette formule, on peut obtenir pour une dérivée d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_k \partial x_i}(x) = & \sum_{j=1}^P \left[\sum_{q=1}^P \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y_q \partial y_j}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_q}{\partial x_k}(x) \right) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \right. \\ & \left. + \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) \cdot \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial x_i}(x) \right] \quad (\text{I.2}) \end{aligned}$$

I.2 Invariants d'une matrice

Les invariants d'une matrice $\overline{\mathbf{A}}$ sont les coefficients I_i de son polynôme caractéristique $P(\lambda)$. On a en effet :

$$\begin{aligned}
 P(\lambda) &= \det(\overline{\mathbf{A}} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 \\
 \text{où } I_1 &= \text{tr} \overline{\mathbf{A}} \\
 I_2 &= \text{tr} \left(\overline{\mathbf{A}}^{-1} \right) \det \overline{\mathbf{A}} \\
 I_3 &= \det \overline{\mathbf{A}}
 \end{aligned}$$

I.3 Produit tensoriel

Soient deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} , leur produit tensoriel donne un tenseur $\overline{\mathbf{a}}$ d'ordre 2 tel que :

$$\begin{aligned}
 \overline{\mathbf{a}} &= \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \\
 \text{avec : } a_{ij} &= ((\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}))_{ij} = u_i v_j
 \end{aligned}$$

I.4 Dérivée matérielle

Soit une variable $T(x, y)$ définie dans un domaine Ω . On note Γ la frontière de ce domaine définie par les équations paramétrées suivantes :

$$\left. \begin{aligned}
 x_f &= \hat{\mathbf{X}}_x(t, a) \\
 y_f &= \hat{\mathbf{X}}_y(t, a)
 \end{aligned} \right\} \mathbf{x}_f = \hat{\mathbf{X}}(t, a) \quad (\text{I.3})$$

où t est l'abscisse curviligne de la courbe et a est un paramètre de forme.

Sur Γ on a alors $T = T(\hat{\mathbf{X}}(t, a), a)$.

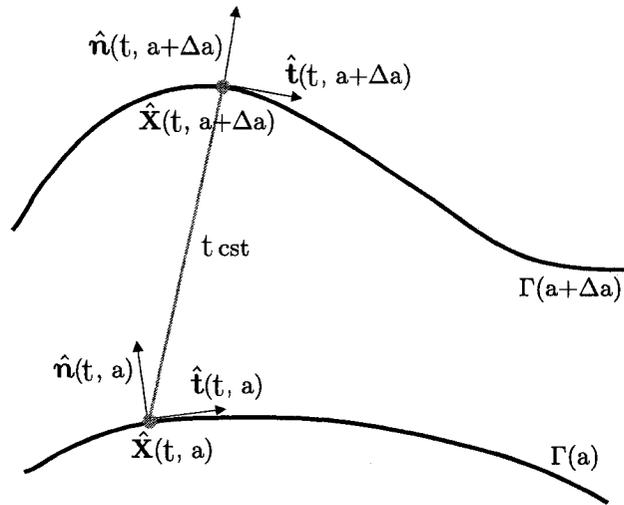


FIG. I.1 Notation pour une frontière dépend d'un paramètre a .

La dérivée matérielle (ou totale ou lagrangienne) de T sur la frontière $\Gamma(a)$ suit un point d'identité fixé, soit t constant (voir figure I.1). On la note DT/Da et elle s'exprime par :

$$\frac{DT}{Da} = \frac{\partial T}{\partial a} + \nabla T \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial a} = \frac{\partial T}{\partial a} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \quad (\text{I.4})$$

où $\partial T/\partial a$ est la dérivée eulérienne (ou locale) de T .

ANNEXE II

QUELQUES DÉMONSTRATIONS

II.1 Relations entre $\overline{\mathbf{F}}_{ps}$ et $\overline{\mathbf{F}}_s$ à l'interface

Pour démontrer les équations (3.9) et (3.10), on se place sur l'interface Γ_I définie par l'équation paramétrée suivante :

$$\Gamma_I(t) = \left\{ \hat{\mathbf{X}}(t) \mid t \in [t_0, t_1] \right\} \quad \text{avec : } \hat{\mathbf{X}} = [x_f(t), y_f(t)]^T \quad (\text{II.1})$$

où t est l'abscisse curviligne de la courbe.

D'après l'équation (3.8), on a $\forall t \in [t_0, t_1], \chi_{ps}(t) = \chi_s(t)$ alors :

$$\frac{D\chi_{ps}}{Dt} = \frac{D\chi_s}{Dt} \quad (\text{II.2})$$

$$\frac{\partial \chi_{ps}}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial t} + \frac{\partial \chi_{ps}}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial t} = \frac{\partial \chi_s}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial t} + \frac{\partial \chi_s}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial t} \quad (\text{II.3})$$

Cette dernière relation vectorielle peut se décomposer selon les deux directions (x, y) et donne le système suivant :

$$\frac{\partial \xi_{ps}}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial t} + \frac{\partial \xi_{ps}}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial t} = \frac{\partial \xi_s}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial t} + \frac{\partial \xi_s}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial t} \quad (\text{II.4})$$

$$\frac{\partial \eta_{ps}}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial t} + \frac{\partial \eta_{ps}}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial t} = \frac{\partial \eta_s}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial t} + \frac{\partial \eta_s}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial t} \quad (\text{II.5})$$

En outre, on peut introduire la tangente \mathbf{t}_s et la normale \mathbf{n}_s à l'interface Γ_I qui

s'expriment :

$$\mathbf{t}_s = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_f}{\partial t} \\ \frac{\partial y_f}{\partial t} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_s = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -\frac{\partial y_f}{\partial t} \\ \frac{\partial x_f}{\partial t} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad L = \left\| \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial t} \right\| \quad (\text{II.6})$$

Enfin, on a :

$$\overline{\overline{\mathbf{F}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} + 1 & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} + 1 \end{bmatrix} \quad \overline{\overline{\mathbf{F}}}^{-T} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial y} + 1 & -\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ -\frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial x} + 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

Ainsi, d'après les relations (II.4) et (II.5), on obtient :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps} \cdot \mathbf{t}_s &= \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_{ps}}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial t} + \frac{\partial \xi_{ps}}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial t} \\ \frac{\partial \eta_{ps}}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial t} + \frac{\partial \eta_{ps}}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial t} \end{bmatrix} + \mathbf{t}_s \\ &= \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_s}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial t} + \frac{\partial \xi_s}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial t} \\ \frac{\partial \eta_s}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial t} + \frac{\partial \eta_s}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial t} \end{bmatrix} + \mathbf{t}_s = \overline{\overline{\mathbf{F}}}_s \cdot \mathbf{t}_s \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

$$\begin{aligned} J_{ps} \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps}^{-T} \cdot \mathbf{n}_s &= \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -\frac{\partial \eta_{ps}}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial t} - \frac{\partial \eta_{ps}}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial t} \\ \frac{\partial \xi_{ps}}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial t} + \frac{\partial \xi_{ps}}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial t} \end{bmatrix} + \mathbf{n}_s \\ &= \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -\frac{\partial \eta_s}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial t} - \frac{\partial \eta_s}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial t} \\ \frac{\partial \xi_s}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial t} + \frac{\partial \xi_s}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial t} \end{bmatrix} + \mathbf{n}_s = J_s \overline{\overline{\mathbf{F}}}_s^{-T} \cdot \mathbf{n}_s \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Finalement, on obtient les deux relations suivantes valables seulement sur l'interface Γ_I :

$$\overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps} \cdot \mathbf{t}_s = \overline{\overline{\mathbf{F}}}_s \cdot \mathbf{t}_s \quad (\text{II.10})$$

$$J_{ps} \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps}^{-T} \cdot \mathbf{n}_s = J_s \overline{\overline{\mathbf{F}}}_s^{-T} \cdot \mathbf{n}_s \quad (\text{II.11})$$

II.2 Equilibre des forces à l'interface pour les sensibilités

On démontre ici comment trouver les équations (3.40) et (3.41) grâce à la formule de Nanson^[23]. Elle relie l'interface déformée Γ_{I_1} à l'interface initiale Γ_{I_0} en considérant $\overline{\overline{\mathbf{F}}}$ le gradient de la transformation. On utilise alors des surfaces infinitésimales quelconques $\delta\Gamma_1$ et $\delta\Gamma_0$ pour lesquelles la formule de Nanson s'écrit :

$$\mathbf{n}_1 \delta\Gamma_{I_1} = J \overline{\overline{\mathbf{F}}}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 \delta\Gamma_{I_0} \quad (\text{II.12})$$

La transformation qui nous intéresse étant celle du solide, on a $\overline{\overline{\mathbf{F}}} = \overline{\overline{\mathbf{F}}}_s$. En outre, sur l'interface on a la relation (II.11) pour le pseudo-solide. On peut alors écrire :

$$\mathbf{n}_1^s \delta\Gamma_{I_1} = J_s \overline{\overline{\mathbf{F}}}_s^{-T} \cdot \mathbf{n}_0^s \delta\Gamma_{I_0} \quad (\text{II.13})$$

$$= J_{ps} \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0^s \delta\Gamma_{I_0} \quad (\text{II.14})$$

On peut alors reformuler l'équation (2.61) sur l'interface initiale Γ_{I_0} . On se place sur une surface infinitésimale quelconque $\delta\Gamma_{I_1}$ de manière à garder les quantités de cette équation constantes. Par la suite, on applique les formules (II.13) et (II.14).

En rappelant que $\mathbf{n}^f = -\mathbf{n}^s$, on obtient alors les deux équations suivantes :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_c \cdot \mathbf{n}_1^s \delta\Gamma_{I_1} + \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{n}_1^f \delta\Gamma_{I_1} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{I_1} \quad (\text{II.15})$$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_c \cdot J_s \overline{\overline{\mathbf{F}}}_s^{-T} \cdot \mathbf{n}_0^s \delta\Gamma_{I_0} + \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot J_{ps} \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0^f \delta\Gamma_{I_0} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{I_0} \quad (\text{II.16})$$

En se servant de l'équation (2.18), on peut finalement écrire quelque soit $\delta\Gamma_{I_0}$:

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_l \cdot \mathbf{n}_0^s \delta\Gamma_{I_0} + \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot J_{ps} \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0^f \delta\Gamma_{I_0} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{I_0} \quad (\text{II.17})$$

Ainsi, l'équilibre des forces à l'interface pour les sensibilités formulée par l'équation (3.35), peut aussi s'exprimer de manière équivalente en différentiant l'équation précédente (II.17). On obtient alors le développement suivant :

$$\frac{D}{Da} \left[\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_l \cdot \mathbf{n}_0^s \delta\Gamma_{I_0} + \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot J_{ps} \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0^f \delta\Gamma_{I_0} \right] = 0 \quad (\text{II.18})$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Da} \left[\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_l \cdot \mathbf{n}_0^s \delta + \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot J_{ps} \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0^f \right] \delta\Gamma_{I_0} \\ + \underbrace{\left[\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_l \cdot \mathbf{n}_0^s + \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot J_{ps} \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0^f \right]}_{= 0 \text{ d'après (II.17)}} \frac{D\delta\Gamma_{I_0}}{Da} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

On continue donc avec l'équation :

$$\frac{D}{Da} \left[\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_l \cdot \mathbf{n}_0^s + \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot J_{ps} \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0^f \right] \delta\Gamma_{I_0} = 0 \quad (\text{II.20})$$

$$\frac{D}{Da} [\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_l \cdot \mathbf{n}_0^s] \delta\Gamma_{I_0} + \frac{D}{Da} \left[\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot J_{ps} \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0^f \right] \delta\Gamma_{I_0} = 0 \quad (\text{II.21})$$

On va développer séparément les deux parties de l'équation. La première concernant la structure est traitée en fonction de la surface non-déformée Γ_{I_0} puisqu'on travaille

avec le tenseur de Piola-Lagrange :

$$\frac{D}{Da} [\bar{\boldsymbol{\sigma}}_l \cdot \mathbf{n}_0^s] = \left[\left(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_l' + \nabla \bar{\boldsymbol{\sigma}}_l \cdot \mathbf{s}_{\hat{\mathbf{x}}} \right) \cdot \mathbf{n}_0^s + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_l \cdot \mathbf{n}_0^{s'} \right] \quad (\text{II.22})$$

où $\mathbf{s}_{\hat{\mathbf{x}}}$ représente la sensibilité de l'interface non-déformée.

La deuxième équation concernant le fluide est développée de façon différente. En effet, l'approche eulérienne utilisée veut qu'on travaille en configuration déformée et qu'on garde $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{X})$ sans le condenser avec $J_{ps} \bar{\mathbf{F}}_{ps}^{-T}$. Bien qu'on soit sur la configuration non-déformée, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ s'exprime toujours sur la surface déformée et on écrit :

$$\begin{aligned} \frac{D}{Da} \left[\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot J_{ps} \bar{\mathbf{F}}_{ps}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0^f \right] &= \left[\left(\bar{\boldsymbol{\sigma}}' + \nabla \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{s}_{\hat{\mathbf{x}}} \right) \cdot J_{ps} \bar{\mathbf{F}}_{ps}^{-T} \right] \cdot \mathbf{n}_0^f \\ &+ \left[\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \left(J_{ps} \bar{\mathbf{F}}_{ps}^{-T} \right)' \right] \cdot \mathbf{n}_0^f \\ &+ \left[\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot J_{ps} \bar{\mathbf{F}}_{ps}^{-T} \right] \cdot \mathbf{n}_0^{f'} \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

où $\mathbf{s}_{\hat{\mathbf{x}}}$ représente la sensibilité de l'interface déformée.

En injectant ces relations dans l'équation (II.21), on obtient l'équation (3.40) :

$$\begin{aligned} &\left[\left(\bar{\boldsymbol{\sigma}}' + \nabla \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{s}_{\hat{\mathbf{x}}} \right) \cdot J_{ps} \bar{\mathbf{F}}_{ps}^{-T} + \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \left(J_{ps} \bar{\mathbf{F}}_{ps}^{-T} \right)' \right] \cdot \mathbf{n}_0^f \delta \Gamma_{I_0} + \\ &\left[\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot J_{ps} \bar{\mathbf{F}}_{ps}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0^{f'} \right] \delta \Gamma_{I_0} + \left[\left(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_l' + \nabla \bar{\boldsymbol{\sigma}}_l \cdot \mathbf{s}_{\hat{\mathbf{x}}} \right) \cdot \mathbf{n}_0^s + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_l \cdot \mathbf{n}_0^{s'} \right] \delta \Gamma_{I_0} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

Toutefois, comme on l'a souligné, on calcule les sensibilités du fluide sur l'interface déformée Γ_{I_1} . Il faut alors rappeler qu'on travaille avec des normales unitaires, i.e. $\mathbf{n}_0^s \cdot \mathbf{n}_0^s = 1$. En projetant la formule de Nanson (II.14) sur \mathbf{n}_0^s , on obtient alors :

$$\mathbf{n}_0^s \cdot \bar{\mathbf{F}}_{ps}^T \mathbf{n}_1^s \delta \Gamma_{I_1} = J_{ps} \delta \Gamma_{I_0} \quad (\text{II.25})$$

En utilisant cette formule de Nanson dans (II.24), on arrive à (3.41) :

$$\begin{aligned} & \left[\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} + \nabla \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{s}_{\hat{\mathbf{x}}} \right) + \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \left(J_{ps} \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps}^{-T} \right)' J_{ps}^{-1} \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps}^T \right] \cdot \mathbf{n}_1^f \delta \Gamma_{I_1} + \\ & \left[\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0^{f'} \left(\mathbf{n}_0^f \cdot \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{ps}^T \mathbf{n}_1^f \right) \right] \delta \Gamma_{I_1} + \left[\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}' + \nabla \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}' \cdot \mathbf{s}_{\hat{\mathbf{x}}} \right) \cdot \mathbf{n}_0^s + \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}' \cdot \mathbf{n}_0^{s'} \right] \delta \Gamma_{I_0} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

Ainsi dans cette expression, tous les termes concernant le solide font bien référence à une configuration non-déformée alors que ceux du fluide font référence à la configuration déformée.

ANNEXE III

MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

III.1 Décomposition polaire

En Mécanique des Milieux Continus (MMC), on peut toujours décomposer une transformation en une rotation pure et en un allongement pur. On parle de *décomposition polaire*. En chaque point \mathbf{X} du milieu continu, cette décomposition est unique et s'applique sur le gradient de la transformation $\overline{\mathbf{F}}$:

$$\overline{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{R}}\overline{\mathbf{U}} = \overline{\mathbf{v}}\overline{\mathbf{R}} \quad (\text{III.1})$$

$$\text{où } \overline{\mathbf{R}}^T \overline{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{I}}, \quad \overline{\mathbf{U}} = \overline{\mathbf{U}}^T \quad \text{et} \quad \overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}}^T \quad (\text{III.2})$$

Dans III.1, $\overline{\mathbf{U}}$ et $\overline{\mathbf{v}}$ définissent respectivement *le tenseur d'allongement à droite* (ou *matériel*) et *le tenseur d'allongement à gauche* (ou *spatial*). Ces tenseurs sont uniques, définis positifs et symétriques. $\overline{\mathbf{U}}$ est défini par rapport à la configuration de référence alors que $\overline{\mathbf{v}}$ agit sur la configuration courante. Enfin, on note les deux relations suivantes :

$$\overline{\mathbf{U}}^2 = \overline{\mathbf{C}} \quad \text{et} \quad \overline{\mathbf{v}}^2 = \overline{\mathbf{b}} \quad (\text{III.3})$$

Le tenseur orthogonal $\overline{\mathbf{R}}$ représente donc une rotation avant ou après l'allongement.

Les tenseurs $\overline{\mathbf{U}}$ et $\overline{\mathbf{v}}$ étant symétriques définis positifs, ils possèdent respectivement trois vecteurs propres unitaires orthogonaux $\{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3\}$ et $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$.

Ces vecteurs forment deux bases orthonormales ou principales et sont associées à des valeurs propres réelles positives communes $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$. En effet, si λ_i est une valeur propre de $\overline{\overline{U}}$, on a :

$$\begin{aligned}\overline{\overline{U}} \mathbf{N}_i &= \lambda_i \mathbf{N}_i \\ \overline{\overline{R}} \overline{\overline{U}} \mathbf{N}_i &= \lambda_i \overline{\overline{R}} \mathbf{N}_i \\ \overline{\overline{v}} \overline{\overline{R}} \mathbf{N}_i &= \lambda_i \overline{\overline{R}} \mathbf{N}_i \quad \text{d'après (III.1)} \\ \overline{\overline{v}} \mathbf{n}_i &= \lambda_i \mathbf{n}_i\end{aligned}$$

λ_i est alors aussi une valeur propre de $\overline{\overline{v}}$ associée au vecteur propre $\mathbf{n}_i = \overline{\overline{R}} \mathbf{N}_i$.

On nomme alors $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ les dilatations linéiques principales. En outre, $\{\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2\}$ sont les valeurs propres de $\overline{\overline{C}}$ et $\overline{\overline{b}}$ associées respectivement aux bases principales $\{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3\}$ et $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$.

ANNEXE IV

LOIS DE COMPORTEMENT

IV.1 En termes de fonction d'énergie libre

$$\bar{\bar{\sigma}}_l = \frac{\partial \Psi(\bar{\bar{\mathbf{F}}})}{\partial \bar{\bar{\mathbf{F}}}} = 2 \bar{\bar{\mathbf{F}}} \frac{\partial \Psi(\bar{\bar{\mathbf{C}}})}{\partial \bar{\bar{\mathbf{C}}}} \quad (\text{IV.1})$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_c = J^{-1} \bar{\bar{\mathbf{F}}} \frac{\partial \Psi(\bar{\bar{\mathbf{F}}})}{\partial \bar{\bar{\mathbf{F}}}} \bar{\bar{\mathbf{F}}}^T \quad (\text{IV.2})$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_k = 2 \frac{\partial \Psi(\bar{\bar{\mathbf{C}}})}{\partial \bar{\bar{\mathbf{C}}}} = \frac{\partial \Psi(\bar{\bar{\mathbf{E}}})}{\partial \bar{\bar{\mathbf{E}}}} \quad (\text{IV.3})$$

IV.2 En termes d'invariants

$$\bar{\bar{\sigma}}_l = 2 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \bar{\bar{\mathbf{F}}} - \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \bar{\bar{\mathbf{F}}} \bar{\bar{\mathbf{C}}} + I_3 \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \bar{\bar{\mathbf{F}}}^{-T} \right] \quad (\text{IV.4})$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_c = 2J^{-1} \left[\left(I_2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} + I_3 \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \right) \bar{\bar{\mathbf{I}}} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \bar{\bar{\mathbf{b}}} - I_3 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \bar{\bar{\mathbf{b}}}^{-1} \right] \quad (\text{IV.5})$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_k = 2 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \bar{\bar{\mathbf{I}}} - \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \bar{\bar{\mathbf{C}}} + I_3 \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \bar{\bar{\mathbf{C}}}^{-1} \right] \quad (\text{IV.6})$$

IV.3 En termes de dilatations linéiques principales

$$\bar{\bar{\sigma}}_l = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_i} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad (\text{IV.7})$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_c = \sum_{i=1}^3 J^{-1} \lambda_i \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_i} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (\text{IV.8})$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_k = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_i} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad (\text{IV.9})$$

où $\mathbf{n}_i = \bar{\bar{R}}\mathbf{N}_i$ et \otimes exprime le produit tensoriel défini dans l'annexe I.3.

IV.4 Pour les matériaux hyperélastiques incompressibles

$$\bar{\bar{\sigma}}_l = -p \bar{\bar{\mathbf{F}}}^T + \frac{\partial \Psi(\bar{\bar{\mathbf{F}}})}{\partial \bar{\bar{\mathbf{F}}}} \quad (\text{IV.10})$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_c = -p \bar{\bar{\mathbf{I}}} + \frac{\partial \Psi(\bar{\bar{\mathbf{F}}})}{\partial \bar{\bar{\mathbf{F}}}} \bar{\bar{\mathbf{F}}}^T \quad (\text{IV.11})$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_k = -p \bar{\bar{\mathbf{C}}}^{-1} + 2 \frac{\partial \Psi(\bar{\bar{\mathbf{C}}})}{\partial \bar{\bar{\mathbf{C}}}} \quad (\text{IV.12})$$

Dans la cas isotrope :

$$\bar{\bar{\sigma}}_l = -p\bar{\bar{\mathbf{F}}}^{-T} + 2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial\Psi}{\partial I_2}\right)\bar{\bar{\mathbf{F}}} - 2\frac{\partial\Psi}{\partial I_2}\bar{\bar{\mathbf{F}}}\bar{\bar{\mathbf{C}}} \quad (\text{IV.13})$$

$$= \sum_{i=1}^3 \left[-\frac{1}{\lambda_i}p + \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_i} \right] \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad (\text{IV.14})$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_c = -p\bar{\bar{\mathbf{I}}} + 2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial\Psi}{\partial I_2}\right)\bar{\bar{\mathbf{b}}} - 2\frac{\partial\Psi}{\partial I_2}\bar{\bar{\mathbf{b}}}^2 \quad (\text{IV.15})$$

$$= \sum_{i=1}^3 \left[-p + \lambda_i\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_i} \right] \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (\text{IV.16})$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_k = -p\bar{\bar{\mathbf{C}}}^{-1} + 2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial\Psi}{\partial I_2}\right)\bar{\bar{\mathbf{I}}} - 2\frac{\partial\Psi}{\partial I_2}\bar{\bar{\mathbf{C}}} \quad (\text{IV.17})$$

$$= \sum_{i=1}^3 \left[-\frac{1}{\lambda_i^2}p + \frac{1}{\lambda_i}\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_i} \right] \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad (\text{IV.18})$$

IV.5 Pour les matériaux hyperélastiques compressibles

Dans le cas particulier des matériaux isotropes, on obtient :

$$\Psi(\bar{\mathbf{b}}) = \Psi_{vol}(J) + \Psi_{iso}(\bar{\mathbf{b}}) \quad (\text{IV.19})$$

$$\text{et } \bar{\bar{\sigma}}_c = \bar{\bar{\sigma}}_{c_{vol}} + \bar{\bar{\sigma}}_{c_{iso}} = p\bar{\bar{\mathbf{I}}} + dev(\bar{\sigma}_c)$$

$$\text{avec } \bar{\sigma}_c = 2J^{-1}\bar{\mathbf{b}}\frac{\partial\Psi_{iso}(\bar{\mathbf{b}})}{\partial\bar{\mathbf{b}}} \quad (\text{IV.20})$$

Remarque : on aurait pu partir de cette décomposition des contraintes en une composante de pression et en une composante déviatorique pour retrouver l'équation (2.33)¹.

¹Voir à ce sujet [3] p.112-113 et p126-129

ANNEXE V

QUELQUES MODÈLES HYPERÉLASTIQUES

V.1 Modèles incompressibles

V.1.1 Modèle d'Ogden

Les caoutchoucs sont souvent considérés comme incompressibles, on doit donc avoir : $J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$.

On doit à Ogden un développement très sophistiqué pour traiter les matériaux incompressibles. Il décrit les changements des dilatations linéiques principales λ_a depuis la configuration de référence jusqu'à la configuration déformée. La fonction d'énergie libre qu'Ogden propose prend alors la forme suivante :

$$\Psi = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3) \quad (\text{V.1})$$

où $2\mu = \sum_{p=1}^N \mu_p \alpha_p$ avec $\mu_p \alpha_p \geq 0$

avec μ : le module de cisaillement

μ_p : des modules (constants) de cisaillement

α_p : des constantes adimensionnelles

On obtient alors de IV.9 l'expression suivante pour le second tenseur de Piola-

Kirchhoff :

$$\bar{\bar{\sigma}}_k = \sum_{a=1}^3 \frac{1}{\lambda_a^2} \left(-p + \sum_{p=1}^N \mu_p \lambda_a^{\alpha_p} \right) \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a \quad (\text{V.2})$$

L'expérience montre que prendre $N=3$ donne déjà de très bons résultats cohérents avec les données expérimentales.

V.1.2 Cas particuliers du modèle d'Ogden

A partir du modèle d'Ogden (voir équation V.1), on peut obtenir trois cas particuliers ; les modèles de Mooney-Rivlin, Neo-Hookien et de Varga.

V.1.2.1 Modèle de Mooney-Rivlin

On considère dans ce cas particulier : $N = 2$, $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = -2$.

On obtient alors avec l'hypothèse d'incompressibilité $I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1$:

$$\Psi = \frac{\mu_1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) - \frac{\mu_2}{2} (\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2} - 3) \quad (\text{V.3})$$

$$= \frac{\mu_1}{2} (I_1 - 3) - \frac{\mu_2}{2} (I_2 - 3) \quad (\text{V.4})$$

avec le module de cisaillement : $\mu = \mu_1 - \mu_2$.

Et d'après les expressions du second tenseur de Piola-Kirchhoff IV.17 et V.2 :

$$\bar{\bar{\sigma}}_k = \sum_{a=1}^3 \frac{1}{\lambda_a^2} (-p + \mu_1 \lambda_a^2 + \mu_2 \lambda_a^{-2}) \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a \quad (\text{V.5})$$

$$= -p \bar{\bar{\mathbf{C}}}^{-1} + (\mu_1 - \mu_2 I_1) \mathbf{I} + \mu_2 \bar{\bar{\mathbf{C}}} \quad (\text{V.6})$$

V.1.2.2 Modèle Neo-Hookien

Ce modèle est encore plus simple : $N = 1$ et $\alpha_1 = 2$. On obtient alors simplement :

$$\Psi = \frac{\mu_1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (\text{V.7})$$

$$= \frac{\mu_1}{2} (I_1 - 3) \quad (\text{V.8})$$

avec le module de cisaillement : $\mu = \mu_1$.

Et :

$$\bar{\bar{\sigma}}_k = \sum_{a=1}^3 \frac{1}{\lambda_a^2} (-p + \mu_1 \lambda_a^2) N_a \otimes N_a \quad (\text{V.9})$$

$$= -p \bar{\bar{C}}^{-1} + \mu_1 \bar{\bar{I}} \quad (\text{V.10})$$

V.1.2.3 Modèle de Varga

Enfin, le modèle de Varga considère : $N = 1$ et $\alpha_1 = 1$:

$$\Psi = \mu_1 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3) \quad (\text{V.11})$$

avec le module de cisaillement : $\mu = \frac{\mu_1}{2}$.

Et :

$$\bar{\bar{\sigma}}_k = \sum_{a=1}^3 \frac{1}{\lambda_a^2} (-p + \mu_1 \lambda_a) N_a \otimes N_a \quad (\text{V.12})$$

V.1.3 Forme polynomiale

Alors que le modèle d'Ogden utilise les valeurs propres de $\overline{\overline{U}}$, la forme polynomiale nécessite seulement ses invariants I_1 et I_2 :

$$\Psi = \sum_{i+j=n}^N c_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (\text{V.13})$$

avec le module de cisaillement initial : $\mu = 2(c_{10} + c_{01})$

V.1.4 Cas particuliers de la forme polynomiale

Tout comme pour le modèle d'Ogden, on utilise le plus souvent des cas particuliers de la forme polynomiale et on obtient sous la forme polynomiale des variantes des modèles de Mooney-Rivlin et Neo-Hookien. Cependant, comme cette forme ne fait pas appel aux valeurs propres de $\overline{\overline{U}}$ on ne retrouve pas l'équation de Varga.

V.1.4.1 Modèles de Mooney-Rivlin

Il existe en fait plusieurs modèles de Mooney-Rivlin et pas uniquement celui à deux paramètres précédemment présenté. Ils découlent tous plus naturellement de la forme polynomiale que de celle d'Ogden. On présente trois cas particuliers de la forme polynomiale :

- $N = 3$: modèle de Mooney-Rivlin à 9 paramètres

$$\begin{aligned}
 \Psi &= c_{10}(I_1 - 3) + c_{01}(I_2 - 3) \\
 &+ c_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + c_{20}(I_1 - 3)^2 + c_{02}(I_2 - 3)^2 \\
 &+ c_{21}(I_1 - 3)^2(I_2 - 3) + c_{12}(I_1 - 3)(I_2 - 3)^2 \\
 &+ c_{30}(I_1 - 3)^3 + c_{03}(I_2 - 3)^3
 \end{aligned} \tag{V.14}$$

- $N = 2$: modèle de Mooney-Rivlin à 5 paramètres

$$\begin{aligned}
 \Psi &= c_{10}(I_1 - 3) + c_{01}(I_2 - 3) \\
 &+ c_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + c_{20}(I_1 - 3)^2 + c_{02}(I_2 - 3)^2
 \end{aligned} \tag{V.15}$$

- $N = 1$: modèle de Mooney-Rivlin à 2 paramètres

$$\Psi = c_{10}(I_1 - 3) + c_{01}(I_2 - 3) \tag{V.16}$$

V.1.4.2 Modèle Neo-Hookien

On retrouve ici aussi le modèle Neo-Hookien comme un cas particulier avec $N = 1$ et $c_{01} = 0$:

$$\Psi = c_{10}(I_1 - 3) \tag{V.17}$$

V.1.5 Modèles pour les élastomères renforcés

Bien que ce ne soit pas un point clé dans cette étude¹, il paraît important de mentionner qu'il existe des modèles spécifiques aux élastomères renforcés par des fibres de carbone ou de silice. En effet, ces matériaux ont un comportement très non-linéaire notamment vis-à-vis de leur module de cisaillement μ qui varie au cours de la déformation. On peut ici citer les modèles de Yeoh et d'Arruda et Boyce.

V.2 Modèles compressibles

Les matériaux de type caoutchouc sont toujours légèrement compressibles avec une petite dilatation. On peut alors considérer une approche découplée et voir la compressibilité des matériaux dans leur partie volumétrique : Ψ_{vol} . Toutefois, les matériaux plus moux ne peuvent pas être assimilés à des matériaux incompressibles. De ce fait, une approche couplée basée sur des résultats expérimentaux sera nécessaire.

V.2.1 Modèle d'Ogden

Le modèle d'Ogden pour les matériaux compressibles est une extension du modèle incompressible en appliquant une méthode découplée. En effet, on considère la représentation de la fonction d'énergie de déformation suivante :

$$\Psi = \Psi_{vol}(J) + \Psi_{iso}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3)$$

Ogden propose alors la fonction volumétrique suivante en terme du rapport de

¹pour plus de renseignements, consulter ^[23] p242-244

volume J :

$$\Psi_{vol}(J) = \kappa \beta^{-2} (\beta \ln J + J^{-\beta} - 1) \quad (\text{V.18})$$

avec κ le module d'extension et β un coefficient empirique.

Ce modèle donne de très bons résultats notamment pour la pression hydrostatique avec $\beta = 9$. Simo et Miehe proposent un modèle où $\beta = -2$ et ainsi :

$$\Psi_{vol}(J) = \kappa \frac{1}{4} (J^2 - 1 - 2 \ln J)$$

Quant à la partie isochorique, on utilise l'expression V.1 du modèle d'Ogden incompressible :

$$\Psi_{iso} = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\bar{\lambda}_1^{\alpha_p} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_p} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_p} - 3)$$

Le second tenseur de Piola-Kirchhoff pour ce modèle s'écrit alors² :

$$\bar{\sigma}_k = \bar{\sigma}_{k_{iso}} + \bar{\sigma}_{k_{vol}} = \bar{\sigma}_{k_{iso}} + J p \bar{\mathbf{C}}^{-1} \quad (\text{V.19})$$

avec $p = \kappa \frac{1}{\beta J} (1 - \frac{1}{J^\beta})$

²voir démonstration [23] p245-246 en se rappelant que $J = \lambda_a \lambda_b \lambda_c$

et :

$$\bar{\bar{\sigma}}_{kiso} = \sum_{a=1}^3 \bar{\bar{\sigma}}_{kisoa} \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a \quad (\text{V.20})$$

$$\text{où } \bar{\bar{\sigma}}_{kisoa} = \frac{1}{\lambda_a^2} \left(\lambda_a \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \lambda_a} - \frac{1}{3} \sum_{b=1}^3 \lambda_b \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \lambda_b} \right) \quad (\text{V.21})$$

$$\text{et } \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \lambda_a} = \sum_{p=1}^N \mu_p \lambda_a^{-\alpha_p - 1} \quad (\text{V.22})$$

V.2.2 Cas particuliers du modèle d'Ogden

Comme pour le cas incompressible, il existe des modèles découlant directement du modèle général d'Ogden. La partie isochorique de Ψ demeure identique à celle définie dans le cas compressible (voir équations V.3, V.4, V.7, V.8 et V.11) et on lui rajoute la partie volumétrique, par exemple la même que celle définie pour le modèle d'Ogden (voir équations (V.18)).

V.2.2.1 Modèle de Mooney-Rivlin

Dans ce cas la fonction d'énergie de déformation pour le modèle de Mooney-Rivlin devient :

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_{vol} + \Psi_{iso} \\ &= \kappa \beta^{-2} (\beta \ln J + J^{-\beta} - 1) + \frac{\mu_1}{2} (\bar{I}_1 - 3) - \frac{\mu_2}{2} (\bar{I}_2 - 3) \end{aligned} \quad (\text{V.23})$$

On trouve alors à l'aide de l'équation (V.19) le second tenseur de Piola-Kirchhoff

pour ce cas particulier où il suffit simplement de remplacer la dérivée de Ψ_{iso} par :

$$\frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \lambda_a} = \frac{1}{\lambda_a} \left(\mu_1 \lambda_a^{-2} + \mu_2 \lambda_a^{-2} \right)$$

Toutefois, il est de coutume de présenter les modèles sous forme couplée. On peut alors écrire la forme couplée du modèle de Mooney-Rivlin ainsi :

$$\Psi = c(J - 1)^2 - d \ln J + \frac{\mu_1}{2}(I_1 - 3) - \frac{\mu_2}{2}(I_2 - 3) \quad (\text{V.24})$$

avec c une constante du matériau et $d = 2(\frac{\mu_1}{2} - \mu_2)$.

L'équation (2.22), nous fournit l'écriture suivante du second tenseur de Piola-Kirchhoff (en notant que $I_3 = J^2$) :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}}_k &= 2 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \bar{\bar{I}} - \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \bar{\bar{C}} + I_3 \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \bar{\bar{C}}^{-1} \right] \\ &= 2 \left[\left(\frac{\mu_1}{2} - \frac{\mu_2}{2} I_1 \right) \bar{\bar{I}} + \frac{\mu_2}{2} \bar{\bar{C}} + \left(cJ(J - 1) - \frac{d}{2} \right) \bar{\bar{C}}^{-1} \right] \end{aligned} \quad (\text{V.25})$$

V.2.2.2 Modèle Neo-Hookien

On procède de même pour trouver la fonction Ψ du modèle Neo-Hookien :

$$\Psi = \kappa \beta^{-2} (\beta \ln J + J^{-\beta} - 1) + \frac{\mu_1}{2} (\bar{I}_1 - 3) \quad (\text{V.26})$$

Grâce à l'équation (V.19), on trouve le second tenseur de Piola-Kirchhoff en rem-

plaçant la dérivée de Ψ_{iso} par l'expression suivante :

$$\frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \lambda_a} = \mu_1 \bar{\lambda}_a$$

Dans ces conditions la forme couplée de ce modèle s'écrit :

$$\Psi = \frac{\mu}{2\beta} (J^{-2\beta} - 1) + \frac{\mu}{2} (I_1 - 3) \quad (\text{V.27})$$

où $\beta = \frac{\nu}{1 - 2\nu}$ avec ν le coefficient de Poisson et grâce à l'équation 2.22, on peut encore écrire :

$$\bar{\sigma}_k = \mu \left[\bar{\mathbf{I}} - J^{-2\beta} \bar{\mathbf{C}}^{-1} \right] \quad (\text{V.28})$$

V.2.2.3 Modèle de Varga

Finalement, le modèle de Varga va donner :

$$\Psi = \kappa \beta^{-2} (\beta \ln J + J^{-\beta} - 1) + \mu_1 (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3 - 3) \quad (\text{V.29})$$

Grâce à l'équation (V.19), on trouve le second tenseur de Piola-Kirchhoff en remplaçant la dérivée de Ψ_{iso} par l'expression suivante :

$$\frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \lambda_a} = \mu_1$$

V.2.3 Forme polynomiale

Tout comme pour les matériaux incompressibles, il existe une forme polynomiale pour les matériaux compressibles qui fait apparaître le troisième invariant J . Elle s'exprime alors ainsi :

$$\Psi = \sum_{i+j=n}^N c_{ij} (\bar{I}_1 - 3)^i (\bar{I}_2 - 3)^j + \sum_k^N \frac{1}{d_k} (J - 1)^{2k} \quad (\text{V.30})$$

avec le module de cisaillement initial : $\mu = 2(c_{10} + c_{01})$ et le module d'extension : $\kappa = \frac{2}{d_1}$

V.2.4 Cas particuliers de la forme polynomiale

On retombe alors sur les mêmes cas particuliers mais cette fois-ci en compressible.

V.2.4.1 Modèles de Mooney-Rivlin

- $N = 3$: modèle de Mooney-Rivlin à 9 paramètres

$$\begin{aligned} \Psi &= c_{10}(\bar{I}_1 - 3) + c_{01}(\bar{I}_2 - 3) + \frac{1}{d_1}(J - 1)^2 \\ &+ c_{11}(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3) + c_{20}(\bar{I}_1 - 3)^2 + c_{02}(\bar{I}_2 - 3)^2 \\ &+ c_{21}(\bar{I}_1 - 3)^2(\bar{I}_2 - 3) + c_{12}(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3)^2 \\ &+ c_{30}(\bar{I}_1 - 3)^3 + c_{03}(\bar{I}_2 - 3)^3 \end{aligned} \quad (\text{V.31})$$

- $N = 2$: modèle de Mooney-Rivlin à 5 paramètres

$$\begin{aligned}\Psi &= c_{10}(\overline{I}_1 - 3) + c_{01}(\overline{I}_2 - 3) + \frac{1}{d_1}(J - 1)^2 \\ &+ c_{11}(\overline{I}_1 - 3)(\overline{I}_2 - 3) + c_{20}(\overline{I}_1 - 3)^2 + c_{02}(\overline{I}_2 - 3)^2\end{aligned}\quad (\text{V.32})$$

- $N = 1$: modèle de Mooney-Rivlin à 2 paramètres

$$\Psi = c_{10}(\overline{I}_1 - 3) + c_{01}(\overline{I}_2 - 3) + \frac{1}{d_1}(J - 1)^2 \quad (\text{V.33})$$

V.2.4.2 Modèle Neo-Hookien

$N = 1$ et $C_{01} = 0$: modèle Neo-Hookien

$$\Psi = c_{10}(\overline{I}_1 - 3) + \frac{1}{d_1}(J - 1)^2 \quad (\text{V.34})$$

V.2.5 Modèle de Blatz et Ko

Pour les élastomères qui ne peuvent pas être considérés comme incompressibles, Blatz et Ko proposent un modèle combinant des développements théoriques et des données expérimentales. Ce modèle est basé sur la fonction couplée suivante :

$$\Psi = f \frac{\mu}{2} \left[(I_1 - 3) + \frac{1}{\beta} (I_3^{-\beta} - 1) \right] + (1 - f) \frac{\mu}{2} \left[\left(\frac{I_2}{I_3} - 3 \right) + \frac{1}{\beta} (I_3^\beta - 1) \right] \quad (\text{V.35})$$

avec μ le module de cisaillement, $\beta = \frac{\nu}{1 - 2\nu}$ avec ν le coefficient de Poisson et $f \in [0, 1]$ un paramètre d'interpolation.

Grâce à l'équation 2.22, on trouve le second tenseur de Piola-Kirchhoff :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}}_k &= \mu \left(f + (1-f) \frac{I_1}{I_3} \right) \bar{\bar{I}} - \mu \frac{1-f}{I_3} \bar{\bar{C}} \\ &- \mu \left(f I_3^{-\beta} + (1-f) \frac{I_2 - I_3^{\beta+1}}{I_3} \right) \bar{\bar{C}}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{V.36})$$

ANNEXE VI

MÉTHODE DU LAGRANGIEN ACTUALISÉ

Pour de très grands déplacements, on utilise une méthode de *Lagrangien Actualisé* qui permet d'atteindre plus facilement la configuration finale de manière itérative en utilisant des étapes intermédiaires, i.e. : des configurations déformées intermédiaires. L'équation d'équilibre de Cauchy pour des contraintes s'écrit alors dans la configuration déformée (dénnotée dans ce cas par 2) en fonction d'une surface correspondant à une précédente configuration déformée (dénnotée par 1) :

$$\nabla \cdot \bar{\sigma}_{l_{21}} + \mathbf{f}_s = 0 \quad \text{dans } \Omega_s \quad (\text{VI.1})$$

On introduit les déplacements : χ_1 qui permet de passer de l'état initial à la configuration 1, χ_2 qui permet de passer de l'état initial à la configuration 2 et χ_{21} qui permet de passer de la configuration 1 à la configuration 2. On a alors les gradients des déplacements suivants :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\bar{h}}_1 = \nabla \chi_1 \\ \bar{\bar{h}}_2 = \nabla \chi_2 \end{array} \right\} \quad \bar{\bar{h}}_{21} = \nabla \chi_{21} = \nabla \chi_2 - \nabla \chi_1 = \bar{\bar{h}}_2 - \bar{\bar{h}}_1 \quad (\text{VI.2})$$

où χ_{21} correspond au tenseur du déplacement relatif entre les 2 configurations. On calcule donc ces tenseurs en considérant $\bar{\bar{h}}_1$ comme connu puisqu'il fait référence à une configuration précédente. Cette décomposition des déplacements facilite ainsi la linéarisation des étapes successives de substitution lors de la résolution, en particulier lorsque la loi de comportement du solide est linéaire par rapport aux tenseurs de Green-Lagrange (modèle de Saint-Venant Kirchhoff par exemple).

VI.1 Cas général

Dans un cas général, l'introduction des trois gradients des déplacements χ_1 , χ_2 et χ_{21} va permettre d'écrire les gradients des transformations comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \overline{\overline{\mathbf{F}}}_1 &= \overline{\overline{\mathbf{h}}}_1 + \overline{\overline{\mathbf{I}}} \\ \overline{\overline{\mathbf{F}}}_2 &= \overline{\overline{\mathbf{h}}}_2 + \overline{\overline{\mathbf{I}}} \\ \overline{\overline{\mathbf{h}}}_{21} &= \overline{\overline{\mathbf{h}}}_2 - \overline{\overline{\mathbf{h}}}_1 \end{aligned} \right\} \quad \overline{\overline{\mathbf{F}}}_2 = \overline{\overline{\mathbf{h}}}_{21} + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_1 \quad (\text{VI.3})$$

Les tenseurs des déformations se reformulent aussi ainsi :

$$\left. \begin{aligned} \overline{\overline{\mathbf{E}}}_1 &= \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\mathbf{h}}}_1 + \overline{\overline{\mathbf{h}}}_1^T + \overline{\overline{\mathbf{h}}}_1^T \overline{\overline{\mathbf{h}}}_1 \right) \\ \overline{\overline{\mathbf{E}}}_2 &= \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\mathbf{h}}}_2 + \overline{\overline{\mathbf{h}}}_2^T + \overline{\overline{\mathbf{h}}}_2^T \overline{\overline{\mathbf{h}}}_2 \right) \end{aligned} \right\} \quad \overline{\overline{\mathbf{E}}}_{21} = \overline{\overline{\mathbf{E}}}_2 - \overline{\overline{\mathbf{E}}}_1 \quad (\text{VI.4})$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\overline{\mathbf{E}}}_{21} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\mathbf{h}}}_{21} + \overline{\overline{\mathbf{h}}}_{21}^T + \overline{\overline{\mathbf{h}}}_{21}^T \overline{\overline{\mathbf{h}}}_{21} + \overline{\overline{\mathbf{h}}}_1^T \overline{\overline{\mathbf{h}}}_{21} + \overline{\overline{\mathbf{h}}}_{21}^T \overline{\overline{\mathbf{h}}}_1 \right) \quad (\text{VI.5})$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{\overline{\mathbf{C}}}_1 &= 2\overline{\overline{\mathbf{E}}}_1 + \overline{\overline{\mathbf{I}}} \\ \overline{\overline{\mathbf{C}}}_2 &= 2\overline{\overline{\mathbf{E}}}_2 + \overline{\overline{\mathbf{I}}} \\ \overline{\overline{\mathbf{E}}}_{21} &= \overline{\overline{\mathbf{E}}}_2 - \overline{\overline{\mathbf{E}}}_1 \end{aligned} \right\} \quad \overline{\overline{\mathbf{C}}}_2 = 2\overline{\overline{\mathbf{E}}}_{21} + \overline{\overline{\mathbf{C}}}_1 \quad (\text{VI.6})$$

Des termes supplémentaires apparaissent dans $\overline{\overline{\mathbf{E}}}_{21}$ à cause de la non-linéarité du tenseur de Green-Lagrange. En général, les lois de comportement ne sont pas linéaires (modèles d'hyperélasticité finie par exemple) et on ne peut pas pousser plus loin nos investigations. Toutefois, on remarque que chacun des différents tenseurs $\overline{\overline{\mathbf{h}}}_2$, $\overline{\overline{\mathbf{F}}}_2$, $\overline{\overline{\mathbf{E}}}_2$ et $\overline{\overline{\mathbf{C}}}_2$ se décompose en une partie inconnue dénotée par 21 et une partie connue correspondant à la configuration 1. Ceci permet une linéarisation plus efficace en tenant compte de cette partie connue.

VI.2 Cas d'une loi de comportement linéaire

Dans le cas où la loi de comportement du solide est linéaire par rapport aux tenseurs de Green-Lagrange (modèle de Saint-Venant Kirchhoff par exemple), on voit plus concrètement cet avantage. On peut en effet écrire :

$$\bar{\bar{\sigma}}_{k_2} = \bar{\bar{\sigma}}_{k_1} + \bar{\bar{\sigma}}_{k_{21}} \quad (\text{VI.7})$$

A ce stade, le tenseur de Piola-Lagrange des contraintes de la configuration déformée par rapport à la configuration initiale non-déformée s'écrit comme suit :

$$\bar{\bar{\sigma}}_{l_2} = \bar{\bar{F}}_2 (\bar{\bar{\sigma}}_{k_1} + \bar{\bar{\sigma}}_{k_{21}}) \quad (\text{VI.8})$$

Enfin, le tenseur de Piola-Lagrange des contraintes de la configuration déformée 2 par rapport à la précédente configuration déformée 1 s'obtient par la formule suivante :

$$\bar{\bar{\sigma}}_{l_{21}} = \underbrace{\bar{\bar{F}}_2 \bar{\bar{\sigma}}_{k_1} \frac{\bar{\bar{F}}_1}{J_1}}_{\text{linéaire}} + \underbrace{\bar{\bar{F}}_2 \bar{\bar{\sigma}}_{k_{21}} \frac{\bar{\bar{F}}_1}{J_1}}_{\text{non-linéaire}} \quad (\text{VI.9})$$

On observe que le premier terme de l'équation (VI.9) est linéaire par rapport aux déplacements puisque J_1 , $\bar{\bar{F}}_1$ et $\bar{\bar{\sigma}}_{k_1}$ sont des termes connus de la précédente déformation. La non-linéarité apparaît donc dans le deuxième terme seulement. Cette méthode va donc permettre une linéarisation plus facile des itérations de substitution successives précédent souvent les itérations de Newton.

ANNEXE VII

DESCRIPTION DES NURBS

Les NURBS sont des fractions rationnelles de B-splines. Afin de comprendre comment elles sont construites, comment on les différentie et comment on trouve leurs sensibilités, il faut d'abord introduire les concepts de *splines* et de *B-splines*. Les splines constituent la première méthode d'interpolation à s'être imposée en CAO. Toutefois, elles nécessitent trop de points d'interpolation pour les utiliser en optimisation. On leur préfère désormais les courbes B-splines qui permettent une interaction plus simple avec la courbe grâce à des points de contrôle. La construction de ces B-splines s'appuie sur des splines particulières : *les fonctions de base B-splines*. On décrit donc ici les splines et les fonctions de base B-splines, les B-splines elles-mêmes et enfin les NURBS.

VII.1 Splines et fonctions de base B-splines

On trouve une définition générale des splines dans ^[38] :

Soient les noeuds $\{a_1, \dots, a_m\}$ tels que : $\forall i \in [1, m], a_i \leq a_{i+1}$ et $a_i < a_{i+p+1}$

Une courbe $s(u)$ est alors une spline de degré p (ou d'ordre $p + 1$) si :

- elle est $p - k$ différentiable en tout noeud k -multiple¹
- c'est un polynôme de degré $\leq p$ sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$

¹Un noeud a_{i+1} est k -multiple (*k-fold*) si $a_i < a_{i+1} = \dots = a_{i+k} < a_{i+k+1}$

Cette définition reste très théorique et n'indique pas comment construire les splines. On s'intéresse donc à des splines particulières que l'on nomme *fonctions de base* et à leur définition proposée par C. de Boor^[7], M. Cox et L. Mansfeld. C'est la plus utilisée car elle conduit à une implémentation très élégante grâce à sa formule de récurrence. Les fonctions de base reposent sur un *vecteur nodal* $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_m\}$. C'est une suite croissante de m nombre réels t_i (généralement dans $[0, 1]$) appelés *noeuds*. Il existe $n = m - p - 1$ fonctions de base de degré p . La i^{eme} fonction de base B-spline de degré p (d'ordre $p+1$), notée $N_{i,p}$, est alors définie par récurrence comme suit :

$$N_{i,p}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1} - t}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t) \quad (\text{VII.1})$$

$$\text{avec} \quad N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{VII.2})$$

où t est l'abscisse curviligne.

Notons que s'il existe deux nombres i et p qui annulent un des dénominateurs des fractions dans l'équation (VII.1), la fraction correspondante sera considérée comme nulle :

$$\text{Par exemple si } t_i = t_{i+p} \text{ alors on pose : } N_{i,p-1} = \frac{N_{i,p-1}}{t_{i+p} - t_i} = 0$$

VII.1.1 Quelques propriétés des fonctions de base B-splines

Plusieurs propriétés^[37] des fonctions de base B-splines découlent de cette définition récurrente. Notamment, une propriété d'influence locale :

$$N_{i,p}(t) = 0 \quad \text{si } t \notin [t_i, t_{i+p+1})$$

On note également que toutes les dérivées des B-splines de base $N_{i,p}$ existent entre deux noeuds consécutifs. Aux noeuds, les fonctions $N_{i,p}$ sont $p-k$ fois continuellement différentiables, où k est la multiplicité du noeud. Ainsi, la continuité s'améliore avec le degré p mais se détériore avec la multiplicité k .

VII.1.2 Formules de différentiation

Les dérivées des fonctions de base B-splines sont elles aussi définies par récurrence de la manière suivante :

$$N_{i,p}^{(j)}(t) = p \left(\frac{N_{i,p-1}^{j-1}}{t_{i+p} - t_i} - \frac{N_{i+1,p-1}^{j-1}}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} \right) \quad (\text{VII.3})$$

où j est l'ordre de la dérivée.

On remarque ici que si $j > p$ alors $N_{i,p}^j \equiv 0$. En outre, comme précédemment, si le dénominateur s'annule, on considère aussi le quotient comme nul.

VII.2 Représentation B-spline

On définit les B-splines par composition linéaire de fonctions de base B-splines grâce à l'introduction de points de contrôle. Ainsi, une B-spline de degré p s'écrit :

$$\mathbf{C}(t) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(t) \mathbf{P}_i \quad t_0 = a \leq t \leq t_m = b \quad (\text{VII.4})$$

où $\mathbf{P}_i = [x_i, y_i]^T$ sont les n points de contrôle de la courbe et les fonctions $N_{i,p}$ sont les fonctions de base B-splines de degré p définies sur un vecteur nodal à

$m = n + p + 1$ noeuds :

$$\mathcal{T} = \{\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, t_{p+2}, \dots, t_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1}\}$$

VII.2.1 Quelques propriétés des B-splines

On note que dans le cas particulier où $n = p$ et $\mathcal{T} = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$, la B-spline \mathbf{C} devient une courbe de Bézier.

En outre, les splines étant des fonctions à support compact, les points de contrôle n'ont qu'une influence locale sur la géométrie. Plus précisément, un déplacement du point \mathbf{P}_i changera la courbe $\mathbf{C}(t)$ uniquement dans l'intervalle $[t_i, t_{i+p+1})$. Le reste de la courbe demeurera inchangé ce qui est une propriété intéressante pour l'optimisation de profils. En effet, si on désire optimiser un profil en n'en modifiant qu'une partie (par exemple au voisinage du bord de fuite), il suffit de retenir seulement les \mathbf{P}_i affectant la région d'intérêt comme paramètres d'optimisation, les autres n'ayant aucune influence sur la partie géométrique concernée.

En outre, il est intéressant de souligner que l'on a : $C(0) = \mathbf{P}_1$ et $C(1) = \mathbf{P}_n$.

Enfin, les B-splines possèdent de nombreuses propriétés découlant par linéarité de celles des splines comme leur différentiabilité.

VII.2.2 Formules de différentiation

La dérivée j^{eme} d'une B-spline s'exprime simplement en fonction des dérivées des fonctions de base B-splines :

$$\mathbf{C}^{(j)}(t) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}^{(j)}(t) \mathbf{P}_i \quad (\text{VII.5})$$

VII.3 Paramétrisation NURBS

Afin d'aller plus loin que de simples combinaisons linéaires de fonctions de base, on introduit des courbes rationnelles. Ces dernières permettent en effet de représenter des géométries plus complexes que celles obtenues avec les B-splines comme des cercles ou des coniques. Ce sont les **Non Uniform Rational Beta-Spline** (NURBS).

Une NURBS \mathbf{C} de degré p (i.e. d'ordre $p + 1$) se définit comme suit :

$$\mathbf{C}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i N_{i,p}(t) \mathbf{P}_i}{\sum_{i=1}^n w_i N_{i,p}(t)} \quad a \leq t \leq b \quad (\text{VII.6})$$

avec les éléments suivants :

- \mathbf{P}_i les points de contrôle
- w_i les *poids* associés à chaque point de contrôle
- $N_{i,p}$ les B-spline de base de degré p définies sur le vecteur nodal \mathcal{T}
- $\mathcal{T} = \{\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, t_{p+2}, \dots, t_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1}\}$

On introduit les fonctions de base rationnelles de degré p , $R_{i,p}$ pour obtenir une

écriture semblable à celles des B-splines :

$$\mathbf{C}(t) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(t) \mathbf{P}_i \quad (\text{VII.7})$$

$$\text{avec} \quad R_{i,p}(t) = \frac{w_i N_{i,p}(t)}{\sum_{i=1}^n w_i N_{i,p}(t)} \quad (\text{VII.8})$$

VII.3.1 Propriétés de la représentation NURBS

De part leur formulation rationnelle, les NURBS possèdent des propriétés découlant de celles de B-splines ainsi que des propriétés spécifiques qui leur confèrent des avantages particuliers. On retrouve alors les propriétés de différentiation et d'influence locale déjà évoquées pour les B-Splines. On note ensuite que les B-splines ainsi que les courbes rationnelles et non-rationnelles de Bézier sont des cas particuliers de NURBS. Enfin, les NURBS peuvent représenter de manière précise une grande variété de courbes (les cercles et les coniques le sont de manière exacte) grâce à une formulation mathématique commune et flexible.

Il existe toutefois certaines limites à la représentation NURBS :

- La représentation des géométries non-bornées, comme une droite infinie, est presque impossible.
- Déterminer si un point appartient ou pas à une courbe ou surface paramétrée nécessite des processus itératifs onéreux.
- il peut apparaître des anomalies causées par la paramétrisation (par exemple les pôles d'une sphère sont des points critiques bien que géométriquement identiques à tous les autres).
- on a parfois besoin de stocker de l'information supplémentaire pour certains cas simples comme celui d'un cercle comparativement à des représentations par des équations implicites.

VII.3.2 Formules de différentiation

La différentiation des NURBS est délicate puisque ce sont des fonctions rationnelles. Nous devons donc introduire quelques nouvelles notations afin de faciliter le travail :

$$\mathbf{C}(t) = \frac{w(t)\mathbf{C}(t)}{w(t)} = \frac{\mathbf{A}(t)}{w(t)}$$

avec :

$$\mathbf{A}(t) = \sum_{i=1}^n w_i N_{i,p}(t) \mathbf{P}_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{(j)}(t) = \sum_{i=1}^n w_i N_{i,p}^{(j)}(t) \mathbf{P}_i \quad (\text{VII.9})$$

$$w(t) = \sum_{i=1}^n w_i N_{i,p}(t) \quad \Rightarrow \quad w^{(j)}(t) = \sum_{i=1}^n w_i N_{i,p}^{(j)}(t) \quad (\text{VII.10})$$

En utilisant la règle de Leibnitz pour la j^{eme} dérivée de \mathbf{A} on obtient :

$$\mathbf{A}^{(j)} = [w\mathbf{C}]^{(j)} = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} w^{(i)} \mathbf{C}^{(j-i)} \quad (\text{VII.11})$$

$$\Rightarrow \mathbf{C}^{(j)} = \frac{1}{w} \left(\mathbf{A}^{(j)} - \sum_{i=1}^j \binom{j}{i} w^{(i)} \mathbf{C}^{(j-i)} \right) \quad (\text{VII.12})$$

La dérivée j^{eme} de \mathbf{C} se calcule donc par récurrence.

VII.3.3 Sensibilités des NURBS

Afin de connaître l'influence de la variation d'un paramètre de ($\mathbf{P}_j = [x_j, y_j]$ ou w_j) sur la forme de la NURBS, il suffit de calculer les sensibilités de la NURBS par rapport aux paramètres x_j , y_j et w_j pour $j \in [1, n]$. Comme on peut le voir dans la formule de récurrence (VII.1), une fonction de base des B-splines dépend de \mathcal{T} , le vecteur nodal, et de t , l'abscisse curviligne. Par conséquent, elle est indépendante des points de contrôle. Ainsi, les sensibilités de $\hat{\mathbf{X}}$ par rapport aux paramètres de design se déduisent facilement et s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathbf{C}(t)}{\partial x_j} = \frac{w_j N_{j,p}(t)}{\sum_{i=1}^n w_i N_{i,p}(t)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{VII.13})$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}(t)}{\partial y_j} = \frac{w_j N_{j,p}(t)}{\sum_{i=1}^n w_i N_{i,p}(t)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{VII.14})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{C}(t)}{\partial w_j} &= \frac{N_{j,p}(t)}{\sum_{i=1}^n w_i N_{i,p}(t)} \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \end{bmatrix} \\ &- N_{j,p}(t) \sum_{k=1}^n \frac{w_k N_{k,p}(t)}{(\sum_{i=1}^n w_i N_{i,p}(t))^2} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{VII.15})$$

VII.3.4 Sensibilités et différentiation

Lors du calcul du gradient de la fonction objectif, on doit calculer des termes de la forme $\frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial t \partial a}$. Autrement dit, il faut exprimer la dérivée de la sensibilité d'une NURBS. La difficulté réside dans le fait que les équations (VII.13-VII.15) obtenues pour les sensibilités ne représentent pas, en général, une NURBS. Différencier ces expressions requiert donc quelques étapes, basées sur celles utilisées lors de la différentiation de NURBS. Tout d'abord, nous devons introduire quelques notations

afin de rendre notre développement plus clair :

$$\begin{aligned} A_k(t) &= w_k N_{k,p}(t) \\ w(t) &= \sum_{j=1}^n w_j N_{j,p}(t) \end{aligned}$$

On peut alors réécrire les formules (VII.13-VII.15) pour les sensibilités de la façon suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{C}(t)}{\partial x_k} = \frac{A_k(\xi)}{w(t)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{VII.16})$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}(t)}{\partial y_k} = \frac{A_k(\xi)}{w(t)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{VII.17})$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}(t)}{\partial w_k} = \frac{N_{k,p}(t)}{w(t)} [\mathbf{P}_k - \mathbf{C}(t)] \quad (\text{VII.18})$$

En utilisant la formule de dérivation pour une fraction on obtient alors :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{C}(t)}{\partial t \partial x_k} = \frac{A'_k(t)w(t) - A_k(t)w'(t)}{(w(t))^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{VII.19})$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{C}(t)}{\partial t \partial y_k} = \frac{A'_k(t)w(t) - A_k(t)w'(t)}{(w(t))^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{VII.20})$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{C}(t)}{\partial t \partial w_k} = \frac{N'_{k,p}(t)w(t) - N_{k,p}(t)w'(t)}{(w(t))^2} [\mathbf{P}_k - \mathbf{C}(t)] - \frac{N_{k,p}(t)}{w(t)} \mathbf{C}'(t) \quad (\text{VII.21})$$

Ces expressions permettent de calculer les expressions du type $\frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial t \partial a}$ grâce aux formules de différentiations pour les B-splines et les NURBS.