

**Titre:** Une extension tridimensionnelle de la méthode de gravité pour l'étude de la fissuration des piliers d'évacuateurs de crues incluant l'effet des sous-pressions  
**Title:**

**Auteur:** Constantin Lucian Stefan  
**Author:**

**Date:** 2007

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Stefan, C. L. (2007). Une extension tridimensionnelle de la méthode de gravité pour l'étude de la fissuration des piliers d'évacuateurs de crues incluant l'effet des sous-pressions [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/7951/>  
**Citation:**

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/7951/>  
**PolyPublie URL:**

**Directeurs de recherche:** Pierre Léger  
**Advisors:**

**Programme:** Non spécifié  
**Program:**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

UNE EXTENSION TRIDIMENSIONNELLE DE LA MÉTHODE DE GRAVITÉ  
POUR L'ÉTUDE DE LA FISSURATION DES PILIERS D'ÉVACUATEURS DE  
CRUES INCLUANT L'EFFET DES SOUS-PRESSIONS

CONSTANTIN LUCIAN STEFAN  
DÉPARTEMENT DES GÉNIES CIVIL, GÉOLOGIQUE ET DES MINES  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE CIVIL)  
AVRIL 2007

© Constantin Lucian Stefan, 2007.



Library and  
Archives Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file    Votre référence*

*ISBN: 978-0-494-29257-0*

*Our file    Notre référence*

*ISBN: 978-0-494-29257-0*

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

  
**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

UNE EXTENSION TRIDIMENSIONNELLE DE LA MÉTHODE DE GRAVITÉ  
POUR L'ÉTUDE DE LA FISSURATION DES PILIERS D'ÉVACUATEURS DE  
CRUES INCLUANT L'EFFET DES SOUS-PRESSIONS

présenté par: STEFAN Constantin Lucian

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. CHARRON Jean-Philippe, Ph.D., président

M. BOUAANANI Najib, Ph.D., membre

M. LÉGER Pierre, Ph.D., membre et directeur de recherche

**DÉDICACE**

*Dragei mele Ileana care m-a învățat că printre noi sunt mai multe vieți decât oameni.*

(Pour ma chère Ileana qui m'a dit que parmi nous il y a plus de vies que des gens.)

## REMERCIEMENTS

Je remercie chaleureusement mon directeur de recherche, le professeur Pierre Léger. Il a trouvé toujours du temps pour bien me conseiller, il a eu une grande patience lors de nos discussions et compréhension pour mes problèmes. M. Léger a su dire “excellent” quand mes résultats étaient assez bons et “ça va” quand ils étaient assez mauvais. *Vă mulțumesc din inimă!* (Je vous remercie de mon cœur.)

Je remercie également les professeurs J.-P. Charron et N. Bouaanani qui ont accepté de siéger au jury d’examen de ce mémoire. Je remercie aussi tous les professeurs de l’École Polytechnique de Montréal pour les excellents cours.

Ce travail a été rendu possible grâce au soutien financier apporté par le Fond Québécois pour la Recherche sur la Nature et la Technologie (FQRNT) ainsi que par le Conseil de la Recherche en Sciences Naturelles et en Génie du Canada (CRSNG).

Je tiens à beaucoup remercier mes professeurs de Roumanie et mes collègues, amis et excellents ingénieurs: prof. dr. C. Bia, prof. dr. E. Pañtel, prof. dr. V. Păcurar, prof. dr. V. Pañtel, Dan Săcui et Cleopatra Kovacs. *Totul ar fi fost mai puțin interesant fără voi.* (Tout était moins intéressant sans vous.)

Rien ne pourrait être fait sans ma très chère femme, mes parents et mes très proches amis. Je vous remercie infiniment. *Cuvintele sunt mereu așa puține ca să spun cât de mult vă datorez; nimic nu aș fi fără voi.* (Je n’ai pas assez de mots pour vous dire combien je vous dois; je serais rien sans vous.)

## RÉSUMÉ

L'évaluation classique de la stabilité structurale des structures hydrauliques en béton, comme les piliers d'évacuateurs de crues, est basée sur les équations d'équilibre d'un corps rigide pour calculer la force et le moment résultant et sur la théorie des poutres qui utilise une distribution linéaire des contraintes. L'analyse considère une structure symétrique chargée dans la direction amont/aval qui conduit à un problème unidimensionnel d'interaction force ( $P$ ) - moment fléchissant ( $M$ ). Toutefois, il y a des charges (glace, séismes) qui, appliquées transversalement, génèrent un problème de flexion biaxiale nonlinéaire ( $P$ - $M_x$ - $M_y$ ) qui peut engendrer de la fissuration de la section. Par ailleurs, il peut avoir aussi de l'eau pressurisée dans ces fissures. Ce mémoire présente une extension tridimensionnelle de la méthode de gravité pour des sections arbitraires, comme celles des piliers d'évacuateurs de crues. On a développé des algorithmes robustes, basés sur la résistance des matériaux, pour déterminer le noyau central ("kernel") de sections arbitraires, pour localiser la position de l'axe neutre (AN) et pour calculer la distribution des contraintes normales tout en considérant un problème d'interaction biaxiale hydromécanique couplée. On présente cinq exemples pour la validation des algorithmes. Ensuite, pour illustrer les caractéristiques de convergence des algorithmes proposés, on développe une étude de cas d'un pilier d'un évacuateur de crue existant. Il est possible d'arriver, dans certaines situations, à une réponse oscillatoire non convergente pour le calcul de la position de l'AN. Dans ce cas une approche heuristique est proposée afin d'obtenir une solution conservatrice définissant les efforts à utiliser dans les calculs de stabilité.

### *Mots-clés:*

Piliers d'évacuateurs de crues, méthode de gravité, analyse tridimensionnelle, flexion biaxiale, fissuration du béton, stabilité.

## ABSTRACT

The classical structural stability evaluation of concrete hydraulic structures, such as spillways, is based on the application of rigid body equilibrium to compute force and moment resultants, and in most instances beam theory assuming linear stress distribution. The computations are done assuming a symmetric structure subjected to load acting in the upstream/downstream direction leading to an unidimensional axial force ( $P$ ) - bending moment ( $M$ ) interaction problem. However, several load conditions (ice floes, earthquakes) are applying transverse force components leading to a nonlinear biaxial flexural problem ( $P$ - $M_x$ - $M_y$ ) considering the potential cracking of the sections, as well as pressurized water penetration in cracks. A three-dimensional extension of the gravity method is presented herein for arbitrary sections such as those of spillway piers. Robust algorithms using strength of material have been developed to compute the kernel of arbitrary sections, to locate the neutral axis (NA), and compute the normal stress distribution considering a coupled biaxial hydro-mechanical interaction problem. Five validations examples are presented. A case study is then performed on an actual spillway to illustrate the convergence of the proposed algorithms. It is possible to obtain, in certain instances, a non converging oscillatory response for the location of the NA. In this case a heuristic approach is proposed to obtain a conservative equilibrium solution.

### *ASCE Database Subject Headings / Keywords:*

Spillway piers, gravity method, three-dimensional analysis, biaxial bending, concrete cracking, stability.



## TABLE DES MATIÈRES

<b>DÉDICACE .....</b>	<b>iv</b>
<b>REMERCIEMENTS .....</b>	<b>v</b>
<b>RÉSUMÉ .....</b>	<b>vi</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>vii</b>
<b>TABLE DE MATIÈRES .....</b>	<b>viii</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX .....</b>	<b>xi</b>
<b>LISTE DES FIGURES .....</b>	<b>xiii</b>
<b>LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS .....</b>	<b>xvi</b>
<b>LISTE DES SYMBOLES .....</b>	<b>xvii</b>
<b>LISTE DES ANNEXES .....</b>	<b>xxi</b>
<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>1</b>
Généralités .....	1
Problématiques .....	2
Objectifs.....	3
<b>CHAPITRE 1: DÉMARCHE DE L'ENSEMBLE DU TRAVAIL DE RECHERCHE ET ORGANISATION DU MÉMOIRE .....</b>	<b>5</b>
1.1 Démarche de l'ensemble du travail de recherche .....	5
1.2 Organisation du mémoire .....	6

<b>CHAPITRE 2: REVUE DE LA LITTÉRATURE .....</b>	<b>8</b>
2.1 Introduction .....	8
2.2 Stabilité structurale des évacuateurs de crues.....	9
2.2.1 Mécanismes de défaillance.....	9
2.2.2 Charges et combinaisons de charges .....	10
2.2.3 Méthode de gravité.....	12
2.2.4 L'effet des sous-pressions 2D .....	14
2.2.5 Critères de performance et de stabilité.....	15
2.3 Comportement tridimensionnels des piliers d'évacuateur de crues non armés .....	17
2.3.1 Propriétés mécaniques pour la flexion composée ( $P-M_x-M_y$ ).....	17
2.3.2 Noyau central ("kernel") .....	19
2.3.3 Fissuration en condition de flexion composée biaxiale ( $P-M_x-M_y$ ) .....	20
2.3.4 Évolution 3D des sous-pressions en condition fissurée .....	22
2.3.5 Facteur de sécurité au glissement.....	23
2.3.6 Solution des systèmes d'équations non linéaires ( $P-M_x-M_y$ ).....	24
2.3.7 Évaluation progressive de la stabilité des évacuateurs de crues.....	26
 <b>CHAPITRE 3: "AN EXTENSION OF THE GRAVITY METHOD FOR 3D CRACKING ANALYSIS OF SPILLWAY PIERS INCLUDING UPLIFT PRESSURES" .....</b>	 <b>28</b>
3.1 Introduction .....	28
3.2 Cracking analysis of piers of arbitrary sections subjected to biaxial bending.....	31
3.2.1 Computation of mechanical properties.....	31
3.2.2 Determination of kernel.....	31
3.2.3 Modeling of uplift pressure .....	33
3.2.4 Biaxial cracking algorithm .....	37
3.3 Validation examples .....	41
3.3.1 Kernel test .....	41
3.3.2 No-tension rectangular section.....	42
3.3.3 Rectangular section with $f_t = 20$ kPa.....	43
3.3.4 Powerhouse section .....	43
3.3.5 Spillway pier section (biaxial interaction and UP validation).....	43

3.4 3D Analysis of a spillway pier.....	43
3.4.1 Section analyzed.....	43
3.4.2 Loading condition 1 - equilibrium convergence .....	44
3.4.3 Loading condition 2 - cyclic response.....	45
3.5 Summary and conclusions.....	46
3.6 Acknowledgements .....	47
3.7 References .....	48
<b>CHAPITRE 4: DISCUSSIONS ET CONSIDÉRATIONS COMPLÉMENTAIRES .....</b>	<b>51</b>
4.1 Méthode de résolution “fixed point” pour les équations nonlinéaires.....	51
4.2 Cas de chargement 3 - problème de convergence “presque constante”.....	55
4.3 Discussion sur l’approche proposée pour la représentation 3D des sous-pressions ...	58
4.4 Considérations sur le choix des critères de convergence.....	60
<b>CHAPITRE 5: CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES .....</b>	<b>63</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>	<b>65</b>
<b>ANNEXES .....</b>	<b>71</b>

## LISTE DES TABLEAUX

<b>Tableau 2.1.</b>	Combinaisons de charges pour les ouvrages hydrauliques de type poids .....	11
<b>Tableau 2.2.</b>	Critère de performance: position de la résultante.....	15
<b>Tableau 2.3.</b>	Critère de performance: contraintes maximales de compression .....	16
<b>Tableau 2.4.</b>	Critère de performance: facteurs de sécurité au glissement .....	16
<b>Tableau C.1.</b>	Rectangle sans résistance en traction: $P = -100 \text{ kN}$ , $e_x = 1.02 \text{ m}$ , $e_y = 2.94 \text{ m}$ , $f_t = 0 \text{ kPa}$ .....	74
<b>Tableau C.2.</b>	Rectangle avec résistance en traction: $P = -100 \text{ kN}$ , $e_x = 1.02 \text{ m}$ , $e_y = 2.94 \text{ m}$ , $f_t = 20 \text{ kPa}$ .....	75
<b>Tableau C.3.</b>	Prise d'eau: $P = -35000 \text{ kN}$ , $e_x = 35 \text{ m}$ , $e_y = 25 \text{ m}$ , $f_t = 0 \text{ kPa}$ .....	76
<b>Tableau C.4.</b>	Pilier Coteau: $R_p = -7959.17 \text{ kN}$ , $R_{ex} = 1.824 \text{ m}$ , $R_{ey} = 11.794 \text{ m}$ , $f_t = 0 \text{ kPa}$ .....	76
<b>Tableau C.5.</b>	Base du pilier Coteau (convergence "normale"): $P = -100000 \text{ kN}$ , $e_x = 3 \text{ m}$ , $e_y = 11.5 \text{ m}$ .....	76
<b>Tableau C.6.</b>	Base du pilier Coteau (convergence "cyclique"): $P = -100000 \text{ kN}$ , $e_x = 3 \text{ m}$ , $e_y = 11.5 \text{ m}$ .....	77
<b>Tableau C.7.</b>	Base du pilier Coteau (convergence "presque constante"): $P = -22000 \text{ kN}$ , $e_x = 0.59382 \text{ m}$ , $e_y = 11.5 \text{ m}$ .....	78
<b>Tableau D.1.</b>	Rectangle sans résistance en traction .....	79
<b>Tableau D.2.</b>	Rectangle avec résistance en traction, $f_t = 20 \text{ kPa}$ .....	80
<b>Tableau D.3.</b>	Prise d'eau .....	80
<b>Tableau D.4.</b>	Pilier Coteau.....	81
<b>Tableau D.5.</b>	Base du pilier Coteau (convergence "normale").....	81
<b>Tableau D.6.</b>	Base du pilier Coteau (convergence "cyclique").....	82
<b>Tableau D.7.</b>	Base du pilier Coteau (convergence "presque constante").....	82
<b>Tableau E.1.</b>	Section "L" - cornière .....	83
<b>Tableau E.2.</b>	Section "U" .....	84

<b>Tableau E.3.</b>	Section “I” .....	85
<b>Tableau E.4.</b>	Section “Z” .....	86
<b>Tableau E.5.</b>	Section $\frac{3}{4}$ d’un cercle .....	87
<b>Tableau E.6.</b>	Section rectangulaire inclinée .....	88
<b>Tableau E.7.</b>	Section avec une trou .....	89
<b>Tableau E.8.</b>	Section d’une ouvrage hydroélectrique (Tracy et Kling 1982) .....	90
<b>Tableau E.9.</b>	Prise d’eau .....	91
<b>Tableau E.10.</b>	Pilier d’évacuateur de crues Coteau .....	92
<b>Tableau E.11.</b>	Base du pilier d’évacuateur de crues Coteau.....	93

## LISTE DES FIGURES

<b>Fig. 2.1.</b>	Piliers d'évacuateurs de crues .....	8
<b>Fig. 2.2.</b>	Érosions sur un pilier.....	8
<b>Fig. 2.3.</b>	Exemples de charges latérales à considérer: (a) poussée de la glace; (b) impact dynamique avec un bloc de glace; (c) séismes .....	10
<b>Fig. 2.4.</b>	La méthode de gravité vs la méthode d'éléments finis: (a) méthode de gravité; (b) méthode d'éléments finis.....	12
<b>Fig. 2.5.</b>	Conditions de sous-pressions à considérer: (a) sans drainage; (b) avec drainage; (c) avec drainage mais $x < 0.05h_1$ ; (d) fissuration et modifications de sous-pressions; (e) section fissurée, avec drainage et $T < x$ ; (f) section fissurée, avec drainage et $T > x$ . (adaptée de USACE 1995) .....	14
<b>Fig. 2.6.</b>	Calcul de l'aire d'un polygone arbitraire: (a) formulation intuitive pour un triangle, (b) formulation mathématique pour un triangle; (c) formulation mathématique pour un polygone arbitraire .....	18
<b>Fig. 2.7.</b>	Fissuration d'une section rectangulaire sollicitée biaxialement ( $P-M_x-M_y$ ): (a) distribution des contraintes normales sur la section analysée; (b) position de la résultante par rapport au tiers médian; (c) position de la résultante par rapport au noyau central. Cette figure est adaptée de (Popov et al. 1976).....	21
<b>Fig. 2.8.</b>	Distribution 3D des sous-pressions actualisées: (a) pilier avec une distribution planaires; (b) base du pilier avec une distribution planaires; (c) base du pilier avec une distribution sous forme de surfaces réglées.....	23
<b>Fig. 2.9.</b>	Méthodes pour trouver la solution d'une équation nonlinéaire: (a) méthode de Newton tangente; (b) méthode "regula falsi"; (c) méthode "fixed point" .....	25

<b>Fig. 2.10.</b>	Approche progressive de l'analyse de stabilité d'une structure hydraulique .....	27
<b>Fig. 3.1.</b>	Stability evaluation of hydraulic structures: (a) 3D extension of the gravity method; (b) 3D structural model of a spillway pier from CADAM-"3D" .....	29
<b>Fig. 3.2.</b>	Three-dimensional loading and structural response of spillway piers: (a) unsymmetrical gate operation; (b) impact of ice floes; (c) earthquakes; (d) cracking of pier section and uplift pressure update .....	30
<b>Fig. 3.3.</b>	Algorithm to compute the kernel of arbitrary sections .....	32
<b>Fig. 3.4.</b>	3D extension of (USACE 1995) for UP updates: (a) plane view of the cracked section; (b) 3D view of initial given UP; (c) 3D view of updated UP .....	33
<b>Fig. 3.5.</b>	Algorithm to update uplift pressures in cracks ( <i>UPCalc</i> ) .....	35
<b>Fig. 3.6.</b>	Biaxial flexure algorithm to compute NA position, normal stresses, and SSF .....	39
<b>Fig. 3.7.</b>	Validation examples: (a) kernel of $\frac{3}{4}$ of a circle; (b) no-tension rectangular section $P = -100$ kN, $e_x = 1.02$ m, $e_y = 2.94$ m; (c) rectangular section with $f_t = 20$ kPa ( $P = -100$ kN, $e_x = 1.02$ m, $e_y = 2.94$ m); (d) power house section ( $P = -35000$ kN, $e_x = 35$ m, $e_y = 25$ m); (e) spillway pier section ( $R_p = -7959.17$ kN, $R_{ex} = 1.824$ m, $R_{ey} = 11.794$ m) .....	42
<b>Fig. 3.8.</b>	Convergence of the algorithm: (a) section analyzed ( $P = -100000$ kN, $e_x = 3.0$ m, $e_y = 11.5$ m); (b) convergence to the equilibrium state; (c) convergence of normal stresses; (d) minimum values of $I_p$ , $I_{Mx}$ and $I_{My}$ vs trial NA angle; (e), (f) evolution of equilibrium state, of UP and of $\sigma_z$ for fixed NA angle vs $x_{\text{trial NA}} (y = 0)$ .....	44
<b>Fig. 3.9.</b>	Cyclic convergence problem: (a) section analyzed ( $P = -100000$ kN, $e_x = 3.0$ m, $e_y = 13.0$ m); (b) convergence to the equilibrium state; (c) convergence of normal stresses; (d) Minimum values of $I_p$ , $I_{Mx}$ and $I_{My}$ vs trial NA angle; (e), (f) evolution of equilibrium state, of UP and of $\sigma_z$ for fixed NA angle vs $x_{\text{trial NA}} (y = 0)$ .....	45
<b>Fig. 4.1.</b>	Section analysée .....	52

<b>Fig. 4.2.</b>	Domaine possible de la solution pour l'équation mécanique (flexion uniaxiale) nonlinéaire (4.2) avec la méthode "fixed point": (a) forme I (4.6); (b) forme II (4.7).....	54
<b>Fig. 4.3.</b>	L'évolution du processus itératif de convergence ( $h = 1$ , $k_{eg} = 0.25$ ) pour la: (a) forme I; (b) forme II.....	54
<b>Fig. 4.4.</b>	Problème "presque constante": (a1), (a2) section analysée heuristiquement et non- heuristiquement ( $P = -22000$ kN, $e_x = 0.59382$ m, $e_y = 11.5$ m); (b1), (b2) convergence heuristique et non-heuristique à l'état de l'équilibre; (c1), (c2) convergence heuristique et non-heuristique des contraintes normales; (d) valeurs min. de $IP$ , $IM_x$ et $IM_y$ vs l'angle de test de l'AN; (e), (f) l'évolution de l'état de l'équilibre, de UP et $\sigma_z$ pour l'angle de l'AN fixé vs $x_{trial\ NA}$ ( $y = 0$ ) .....	57
<b>Fig. 4.5.</b>	Distribution des sous-pression (SP) sous forme de "cône" sur un pilier.....	58
<b>Fig. A.1.</b>	Prise de l'eau analysée dans l'article.....	71
<b>Fig. A.2.</b>	Pilier analysé dans l'article .....	71
<b>Fig. A.3.</b>	Base du pilier analysé dans l'article.....	72
<b>Fig. E1.</b>	Le noyau central pour la section "L".....	83
<b>Fig. E2.</b>	Le noyau central pour la section "U" .....	84
<b>Fig. E3.</b>	Le noyau central pour la section "T" .....	85
<b>Fig. E4.</b>	Le noyau central pour la section "Z" .....	86
<b>Fig. E5.</b>	Le noyau central pour la section $\frac{3}{4}$ d'un cercle.....	87
<b>Fig. E6.</b>	Le noyau central pour la section rectangulaire inclinée .....	88
<b>Fig. E7.</b>	Le noyau central pour une section avec une trou .....	89
<b>Fig. E8.</b>	Le noyau central pour une section non symétrique.....	90
<b>Fig. E9.</b>	Le noyau central pour la prise d'eau .....	91
<b>Fig. E10.</b>	Le noyau central pour le pilier Coteau .....	92
<b>Fig. E11.</b>	Le noyau central pour la base du pilier Coteau .....	93



## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

### a. Sigles

ANCOLD	= Australian National Committee On Large Dams
CDSA	= Canadian Dam Safety Association
CEA	= Canadian Electricity Association
CDA	= Canadian Dam Association
FERC	= Federal Energy Regulatory Commission
ICOLD	= International Commission On Large Dams
JCOLD	= Japan Commission On Large Dams
TVA	= Tennessee Valley Authority
USACE	= United States Army Corps of Engineers
USBR	= United States Bureau of Reclamation
USCOLD	= United States Committee On Large Dams

### b. Abréviations

AN ou NA	= Neutral Axis (axe neutre)
CH ou EC	= Convex Hull (enveloppe convexe)
UP ou SP	= Uplift Pressure (sous-pressions)
FE ou EF	= Finite Element (éléments finis)
FEA	= Finite Element Analysis (analyse aux éléments finis)
SSF	= Sliding safety factor (facteur de sécurité au glissement)

## LISTE DES SYMBOLES

$A$	= aire d'une section
$A_c$	= aire comprimée de la section
$b, h$	= dimensions d'une section rectangulaire (la plus petite et la plus grande)
$c$	= distance entre le centroïde de la section et le point où on calcule la contrainte
$c_x, c_y$	= distance où on calcule la contrainte, selon l'axe $x$ ou $y$ , par rapport au centroïde
$C$	= centroïde de la section initiale
$C_{AN}$	= centroïde de la section comprimée
$e_x, e_y$	= excentricités de la charge $N$ ou $P$ par rapport à un système de référence $Oxy$ selon l'axe $x$ ou $y$
$e_{xc}, e_{yc}$	= excentricités de la charge $P$ par rapport au système de référence centroïdal selon l'axe $x$ ou $y$
$e_{yg}$	= excentricité, selon $Oy$ , de la charge axiale par rapport au centroïde de la section, $C$
$f$	= fonction quelconque nonlinéaire
$f'_c$	= résistance en compression de la section
$f_t$	= résistance en traction de la section
$g$	= fonction quelconque nonlinéaire dans le contexte de la méthode "fixed point"
$G$	= fonction matricielle quelconque nonlinéaire dans le contexte de la méthode "fixed point"
$h_{wi}$	= hauteur de l'eau pour un $y_i$ (sur $Oy$ ) donné
$H$	= somme des forces horizontales
$I$	= moment d'inertie d'une section par rapport à l'axe $Ox$ ou $Oy$ (notation générique)
$I_P, I_{Mx}, I_{My}$	= intégrales d'équilibre pour la flexion biaxiale composée

$I_x, I_y$	= moment d'inertie d'une section par rapport à l'axe $Ox$ ou $Oy$
$I_{xy}$	= produit d'inertie par rapport au plan $Oxy$
$k_{eg}$	= rapport adimensionnel qui exprime l'influence de l'excentricité par rapport à la hauteur de la section, $h$
$LA, LB, LC$	= coefficient de l'équation d'une droite dans la forme $LA \cdot x + LB \cdot y + LC = 0$ qui représente un segment de contour du convex hull
$M$	= moment de flexion par rapport à l'axe $Ox$ ou $Oy$ (notation générique)
$M_x$	= moment de flexion par rapport à l'axe $Ox$
$M_y$	= moment de flexion par rapport à l'axe $Oy$
$n$	= nombre maximale de coins d'un polygone quelconque ou nombre totale de points d'essais dans le processus itératif de trouver une solution pour une équation nonlinéaire
$N$	= charge axiale appliquée sur la section (notation générique)
$O$	= origine d'un système cartésien d'axes $Oxyz$
$Ox, Oy, Oz$	= axe du système cartésien $Oxyz$
$p(x, y)$	= polynôme des variables $x$ et $y$
$p_0, p_1, p_i, p_n$	= valeur intermédiaire (de l'itération "0", "1", "i" ou "n") dans le processus itératif de trouver une solution pour une équation nonlinéaire
$P$	= charge axiale appliquée sur la section
$P_i$	= point quelconque
$P_{sx}, P_x, P_{ex}$ et $P_{sa}, P_a, P_{ea}$	= notation pour des points caractéristiques nécessaire à l'actualisation des sous-pressions (les lettres $s, x, e$ et $a$ de l'indices sont pour spécifier la position du point dans la section: " $s$ " pour <i>start</i> , " $e$ " pour <i>end</i> , " $x$ " pour <i>max</i> , " $a$ " pour <i>min</i> ; par exemple $P_{sx}$ est le point qui se trouve sur la section dans la position <i>start-max</i> , voir la Fig. 3.4)
$R_p$	= force résultante totale appliquée sur la section (incluant les sous-pressions)
$R_{ex}, R_{ey}$	= excentricité de la résultante totale, $R_p$ , sur la section selon l'axe $x$ ou $y$
$R_{Mx}, R_{My}$	= moment résultant total appliqué sur la section (incluant les sous-pressions) selon l'axe $x$ ou $y$
$R_{UP}$	= résultante des sous-pressions
$R_{UPex}, R_{UPey}$	= excentricités de la résultante des sous-pressions par rapport au système de référence centroïdal selon l'axe $x$ ou $y$

$T$	= moment de torsion
$UPCalc$	= appellation de l'algorithme pour l'actualisation de sous-pressions
$UP_i$	= valeur de sous-pression pour un $y_i$ (sur $Oy$ ) donné
$v$	= la distance entre le point d'application de la charge $N$ et de l'AN
$V$	= somme des forces verticales incluant les charges appliquées et la résultante calculée des sous-pressions
$V_i$	= segment " $i$ " d'un polygone quelconque
$V_x$	= effort tranchant par rapport à l'axe $Ox$
$V_y$	= effort tranchant par rapport à l'axe $Oy$
$x, y$	= coordonnée générique " $x$ " ou " $y$ "
$x_0, x_1, x_i, x_n$	= coordonnée $x$ de la valeur intermédiaire (" $p_0$ ", " $p_1$ ", " $p_i$ " ou " $p_n$ ") dans le processus itératif de trouver une solution pour une équation nonlinéaire
$x_{AN P1}, y_{AN P1}$ et $x_{AN P2}, y_{AN P2}$	= coordonnées $x$ ou $y$ des deux points ( $P_1$ et $P_2$ ) qui définissent l'axe neutre; la coordonnée $x$ du premier point $P_1$ est toujours zéro (voir les exemples de validation)
$x_i, y_i, z_i$	= coordonnée générique " $x$ ", " $y$ " ou " $z$ " d'un point quelconque $P_i$
$x_g, y_g$	= coordonnée " $x$ " ou " $y$ " du centroïde
$x_{Pi}, y_{Pi}$	= coordonnée $x$ ou $y$ d'un point quelconque
$x_{trial NA} (y = 0)$	= coordonnée $x$ de l'intersection entre l'axe neutre et l'axe $Ox$
$y_{AN}, y_{1 AN}$	= coordonnée $y$ de l'axe neutre quand elle est parallèle à l'axe $Oy$ (système de référence de la section initiale ou comprimée, avec "1")
$y_{AN max}, y_{AN min}$	= coordonnée possible $y$ maximale ou minimale de l'axe neutre quand elle est parallèle à l'axe $Oy$ (système de référence de la section initiale)
$y_{AN solution}$	= coordonnée $y$ de la solution analytique de l'axe neutre quand elle est parallèle à l'axe $Oy$ (système de référence de la section initiale)
$y_{cmax}$	= coordonnée $y$ du point $P_x$ ou $P_a$ lequel a la valeur de $y$ maximale
$\alpha$	= angle de rotation du système de référence principal par rapport au système de référence centroïdal
$\phi$	= coefficient de friction (angle de friction)
$\gamma_w$	= densité volumique de l'eau
$\theta$	= angle d'essai pour l'axe neutre lors de la validation mathématique de l'algorithme biaxiale

$\sigma_{compression}$	=	contrainte normale négative, autrement dit compression
$\sigma_{tension}$	=	contrainte normale positive, autrement dit compression
$\sigma_{z\ comp}, \sigma_{z\ tens}$	=	contrainte normale pour le point le plus loin de l'AN dans la partie comprimée et, respectivement, tendue
$\sigma_z$	=	contrainte normale orientée vers l'axe $Oz$

## LISTE DES ANNEXES

ANNEXE A	Dimensions des sections analysées .....	71
ANNEXE B	Démonstration de la validité de l'algorithme pour localiser le noyau central.....	73
ANNEXE C	Détails des itérations pour les exemples de validation .....	74
ANNEXE D	Vérifications manuelles pour les exemples de validation .....	79
ANNEXE E	Exemples de validation de l'algorithme pour localiser le noyau central.....	83

## INTRODUCTION

### Généralités

Les ouvrages hydroélectriques en béton ont été souvent construits il y a plusieurs années, avec ou sans armature. On trouve souvent dans ces ouvrages des dommages structuraux importants surtout aux endroits où les discontinuités géométriques sont prononcées. Les dommages peuvent mettre en danger la stabilité de l'ouvrage et sa bonne exploitation. La population, les constructions et les terrains qui sont en aval d'un barrage pourraient être menacés ou détruits par la défaillance d'un élément d'un barrage. Comme les coûts des réparations sont très grands, des méthodes qui permettent une évaluation adéquate de l'état des piliers d'évacuateurs de crues sont fortement demandées. Cela explique l'intérêt actuel de plusieurs chercheurs dans l'analyse de stabilité de ces piliers afin d'évaluer leur résistance résiduelle et de proposer des méthodes de réparations économiques n'altérant pas les passages hydrauliques.

Les concepteurs initiaux ont souvent utilisé des hypothèses simplifiées, sans considérer adéquatement: les charges latérales (séisme, glace), les possibilités de rupture rive gauche/rive droite, l'interaction entre les efforts 3D ( $P-M_x-M_y$ ). De plus, les anciens ouvrages ne sont pas armés ou l'armature est limitée. Ces situations ont demandé des réhabilitations des certains ouvrages (Koltuniuk et Mills-Bria 2003) afin de satisfaire les critères de sécurité présentement en vigueur (CDA 2006, FERC 2002, USBR 1987). Dans ce contexte, une réévaluation de la stabilité de l'ouvrage est nécessaire. La réévaluation de la stabilité est généralement effectuée progressivement en commençant avec la méthode de gravité. La méthode de gravité, basée sur la théorie de poutre et l'équilibre de corps rigide, est couramment utilisée pour vérifier la stabilité et l'intégrité structurale des barrages et des évacuateurs de crues due à sa simplicité d'application. L'avantage de cette méthode est très grande compte tenu de deux facteurs.

Premièrement, elle implique un effort de calcul et d'interprétation raisonnable pour tous les ingénieurs pratiquants. Deuxièmement, les résultats obtenus sont satisfaisants pour l'évaluation globale de la stabilité structurale. Pour une analyse approfondie des contraintes, surtout locale, la méthode des éléments finis est une alternative, mais il faut bien comparer ses avantages et ses inconvénients avant de l'utiliser.

### **Problématique**

Les piliers d'évacuateur de crues, souvent construits il y a plusieurs années, ont des particularités géométriques (sections très longues, présence de coursiers, support de vannes, érosion, souvent avec de l'armature inexistante ou limitée) qui rendent difficile leur calcul et leur réhabilitation. De plus, suite aux hypothèses utilisées lors de leur conception initiale, ils sont plus faibles dans la direction rive gauche/rive droite (à cette époque-là les charges latérales n'ont pas été considérées adéquatement). Afin de décider si les piliers ont besoin ou non de réhabilitation, on demande l'évaluation de la résistance résiduelle des piliers sous sollicitations tridimensionnelles importantes (séismes, poussée thermique, impact dynamique de la glace). Par la suite, on a besoin d'une méthode d'analyse robuste qui peut tenir compte de toutes ces particularités, qui peut aider à l'évaluation de la résistance résiduelle et qui peut fournir des facteurs de sécurité.

Dans le contexte de cadres normatifs bien reconnus (CDA 2006, FERC 2002, USACE 1995, USBR 1987) l'analyse des piliers d'évacuateurs de crues est complexe. Elle conduit, tout d'abord, au concept des éléments de matériau qui ne résiste pratiquement pas à la traction, soumis aux sollicitations tridimensionnelles. Puis, il faut considérer l'interaction entre les efforts tridimensionnels: axial-flexion-cisaillement-torsion et les mécanismes de fissuration, et de glissement qui en découlent.

Une complication supplémentaire lors du calcul des structures hydrauliques sont les sous-pressions (SP). Les normes prescrivent les distributions initiales des SP et des solutions pour la distribution des SP suite à la fissuration. Toutefois, ces distributions sont données seulement pour une fissuration unidirectionnelle amont aval. Par contre, les fissures qui avancent arbitrairement nécessitent une approche plus complexe pour l'évaluation et l'actualisation des



sous-pressions. Cette approche pourrait utiliser une analyse d'écoulement en milieu poreux et fissuré avec des éléments finis (qui serait plus exacte mais avec des complexités inévitables) ou une approche simplifiée (qui est plutôt approximative). Mais, bien qu'on le nomme "simplifiée" faut-il encore la développer (ce qui est proposé au chapitre 3.2.3 de ce mémoire).

Plusieurs techniques de modélisation peuvent être utilisées pour évaluer la stabilité structurale d'un évacuateur de crues allant de la théorie des poutres aux éléments finis 3D. On recherche initialement une approche simple, rationnelle et robuste, afin d'appuyer avec confiance les décisions concernant la sécurité d'un ouvrage. Cette approche est celle qui, après une analyse de stabilité basée sur la méthode de gravité, utilise une méthode d'analyse plus sophistiquée telle que la méthode des éléments finis.

## Objectifs

Ce projet a pour objectif d'élaborer une méthode d'analyse de la fissuration, pour les structures hydrauliques ayant des sections arbitraires avec une résistance en traction limitée, basée sur une extension de la méthode de gravité. Dans la première étape on considère le problème de flexion composée biaxiale:  $P-M_x-M_y$ . La méthode tient compte de l'évolution de sous-pressions suite au processus de fissuration. De plus, on considère l'analyse  $P-M_x-M_y$ , comme une partie d'un projet plus complet qui va aller jusqu'à l'analyse hydromécanique tridimensionnelle,  $P-M_x-M_y-T-V_x-V_y$ , d'une ouvrage hydraulique à l'aide d'éléments finis de béton armé de type fibres (*fiber element*).

Dans ce contexte, les différents objectifs visés sont les suivants:

- (i) Effectuer une revue critique de la littérature sur le comportement structural et les méthodes d'analyse des piliers d'évacuateurs de crues.
- (ii) Développer une méthode pour calculer les propriétés géométriques et mécaniques des sections arbitraires pour la flexion composée biaxiale. Par sections arbitraires on comprend des sections: avec n'importe quelle forme en plan, avec un contour linéaire ou courbe, avec ou sans des trous, composées par une ou plusieurs parties. Pour les propriétés géométriques/mécaniques on considère: la position du centroïde, l'aire, les moments d'inertie (centroïdales, principales ou par un système de référence arbitraire).

- (iii) Concevoir un algorithme efficace pour déterminer le noyau central (“kernel”) pour les sections de forme arbitraire décrites ci-dessus pouvant être attribué à des sections de barrages, d’évacuateurs de crues, prises d’eau.
- (iv) Proposer une extension des prescriptions actuelles pour l’actualisation tridimensionnelle des sous-pressions en fonction d’une ligne piézométrique donnée et de l’initiation et de la propagation de la fissuration.
- (v) Élaborer une méthode robuste pour l’analyse de la fissuration d’un pilier d’évacuateur de crues avec une section arbitraire. La méthode considère une sollicitation couplée  $P-M_x-M_y$  et actualise itérativement les sous-pressions (en fonction de la fissuration) dans un processus de résolution nonlinéaire afin de trouver la solution. Par méthode robuste on comprend une méthode qui: (a) trouve une solution rigoureuse mathématique dans la grande majorité des cas; (b) fournit une solution acceptable, d’un point de vue d’ingénierie, où la solution rigoureuse mathématique est difficilement trouvable; (c) donne des explications pertinentes pour la divergence et propose des solutions quand les précédentes stratégies échouent.
- (vi) Montrer la validité des méthodes proposées avec des exemples et avec des démonstrations mathématiques rigoureuses. Aussi, d’appliquer, dans le contexte d’une étude de cas, la méthodologie proposée afin d’analyser en détail les avantages et les inconvénients en utilisant un pilier d’évacuateur de crues réel.
- (vii) Commenter de manière critique les résultats obtenus et exprimer des recommandations quant aux choix et à la mise en œuvre de méthodes de calcul basée sur la résistance des matériaux pour l’extension 3D de la méthode de gravité.

## **CHAPITRE 1**

### **DÉMARCHE DE L'ENSEMBLE DU TRAVAIL DE RECHERCHE ET ORGANISATION DU MÉMOIRE**

*Cette partie présente d'abord la stratégie adoptée pour atteindre les objectifs du projet de recherche, puis l'organisation générale du mémoire.*

#### **1.1 Démarche de l'ensemble du travail de recherche**

La première étape a été un choix pertinent de cours utiles à la réalisation du projet de recherche: techniques du béton (CIV6505), génie sismique (CIV6510), conception et évaluation des ponts (CIV6511), séminaire sur la mécanique des solides (CIV6904), analyse avancée des structure et éléments finis (CIV6502), analyse dynamique des structures (CIV6508). Un projet porté sur l'effet sismique des vannes sur le comportement général d'un pilier d'évacuateurs de crues a été réalisé dans le cadre du cours de l'analyse dynamique des structures.

Une visite technique des aménagements hydroélectriques guidée par M. André Pednault d'Hydro-Québec avec quelques professeurs et étudiants du GRS a été organisée (Rapides Farmers, Chelsea, et Pagan sur la rivière Gatineau dans l'Outaouais).

Ensuite, les sujets suivants ont été examinés dans la littérature:

- (a) le comportement et le calcul des structures en béton aux sollicitations triaxiales (calcul de l'enveloppe de rupture),
- (b) possibilités d'adaptation de ce calcul aux piliers d'évacuateurs de crues,
- (c) les méthodes pour calculer les propriétés mécaniques des structures (flexion biaxiale composée) et pour calculer son noyau central,

- (d) les charges appliquées sur piliers d'évacuateurs de crues,
- (e) l'évaluation et l'actualisation des sous-pressions, et finalement,
- (f) les méthodes des résolution pour systèmes des équations non linéaires.

Le but final est le développement, la validation et l'application d'un logiciel qui peut analyser une structure hydraulique, de type poids en béton. Les piliers considérés sont soumis à la flexion biaxiale composée. Tout d'abord une recherche pour obtenir des données de validation du logiciel (des résultats publiés dans la littérature, des logiciels commerciaux existants: CADAM-3D, CSICol, Section Builder) a été entreprise.

Trois algorithmes distincts ont été développés: (a) un pour le calcul du noyau central, (b) un pour l'actualisation des sous-pressions et (c) un pour l'analyse nonlinéaire de la fissuration pour des structures ne résistant pas en traction (ou avec une résistance en traction limitée). Par la suite, ces algorithmes ont été intégrés dans un logiciel programmé à l'aide de plusieurs langages: Visual Fortran (la partie principale), AutoLISP (partie visualisation), VBA-Excel et C++ (*noyau central* ou *kernel*). L'auteur exprime sa disponibilité pour des discussions plus amples et pour donner plus des détails sur l'implémentation informatique de ces algorithmes. Plusieurs validations ont été faites par comparaison avec d'autres outils de calculs disponibles (formules analytiques, abaques, autres modèles numériques). La sensibilité de la convergence des algorithmes a été examinée en détail avec une étude d'un cas pertinent.

Les algorithmes proposés (kernel, sous-pressions, flexion biaxiale) ont été appliqués sur cinq exemples et sur une étude de cas avec trois cas de chargements distincts afin de mettre en lumière leurs performance, leurs avantages et leurs limites. Enfin, un article a été écrit et a été soumis pour publication dans la revue ASCE Journal of Structural Engineering (chapitre 3).

## **1.2 Organisation du mémoire**

Après une introduction mettant en lumière les problématiques du sujet, et les objectifs du mémoire, le chapitre 1 résume la démarche du projet de recherche et l'organisation générale de ce document. Le chapitre 2 présente une revue de la littérature. Le chapitre 3 contient le

manuscrit de l'article envoyé à la revue ASCE Journal of Structural Engineering. Ensuite, le chapitre 4 discute plus en détails des méthodes utilisées dans le logiciel et illustre un troisième cas de chargement pour la structure analysée dans l'article (qui n'y a pas été inclus faute d'espace). Finalement, le chapitre 5 montre les conclusions et les futures perspectives du projet. Cinq annexes sont ajoutées à la fin du mémoire. L'annexe A présente les dimensions des sections utilisées et l'annexe B présente une démonstration pour la validité de l'algorithme pour localiser le noyau central. L'annexe C et D présente des validations informatiques, avec une méthode indépendante du logiciel développé, et manuelles sur les exemples analysés dans l'article. L'annexe E détaille des exemples de validation de l'algorithme pour déterminer le noyau central de certaines sections pertinentes.

## CHAPITRE 2

### REVUE DE LA LITTÉRATURE

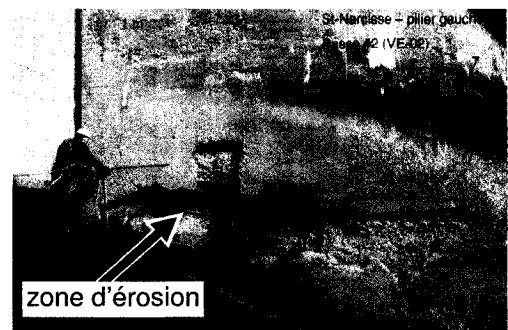
#### 2.1 Introduction

L'évaluation de la stabilité des structures hydrauliques existantes ou nouvelles pose des problèmes uniques, compliqués et spéciaux. Les structures existantes peuvent être difficilement analysées spécialement quand elles ont été conçues depuis plusieurs années avec des principes simplifiés et parfois empiriques. Dans ce contexte on a étudié les méthodes d'analyse des piliers d'évacuateurs de crues qui sont des structures massives en béton parfois non armé ou partiellement armé (Fig. 2.1). Souvent, ces piliers ont des dommages (Fig. 2.2) qui nécessitent des études détaillées afin: (i) de déterminer la résistance résiduelle et (2) de trouver des solutions de réhabilitation techniquement et économiquement viables.

On présente dans ce chapitre une revue de la littérature concernant les aspects les plus importants lors de l'analyse des structures hydrauliques en général et des piliers d'évacuateurs de crues non armé en particulier. La revue de la littérature est divisée en deux parties: (i) la partie *générale* avec les *principes* et les méthodes d'analyse et (ii) la partie plus *particulière* avec des *méthodes d'analyse* vers lesquelles est orienté le présent mémoire.



**Fig. 2.1.** Piliers d'évacuateurs de crues



**Fig. 2.2.** Érosions sur un pilier

## 2.2 Stabilité structurale des évacuateurs de crues

On présente dans ce chapitre des considérations concernant le processus complexe d'évaluation de la stabilité structurale des piliers d'évacuateur de crues. On commence avec les mécanismes de défaillance des structures hydrauliques qui influencent la méthode d'analyse utilisée. Ensuite, on présente: (a) les charges et combinaisons à considérer lors de l'analyse, (b) la méthode d'analyse privilégiée par les normes en vigueur (CDA 2006, FERC 2002, USACE 1995, USBR 1987), i.e. la méthode de gravité, et (c) les indicateurs de performance et d'acceptabilité de cette méthode basée sur l'équilibre des corps rigides et sur la théorie des poutres.

### 2.2.1 Mécanismes de défaillance

Les dommages impliqués par la rupture d'une structure hydraulique peuvent coûter beaucoup en termes d'argent, des biens et des vies humaines. La rupture d'une structure hydraulique de type poids (barrage, pilier d'évacuateurs de crue etc.) est généralement associée aux problèmes de fondation et à la fissuration de la structure (CDA 2006). Les ruptures possibles des structures sont évaluées à l'aide de plusieurs indicateurs: visuels, historiques ou avec des instruments de mesures. On utilise des facteurs de sécurité déterministes (section 2.3.5) contre les mécanismes de défaillance (CDA 2006). Les mécanismes de défaillance sont exhaustivement étudiés. Généralement, les méthodes de calcul sont développées en corrélation avec les mécanismes de rupture retenus (USBR 1987, CDA 2006, Leclerc et Léger 2007). Les principaux modes de défaillance d'un pilier non armé en béton sont:

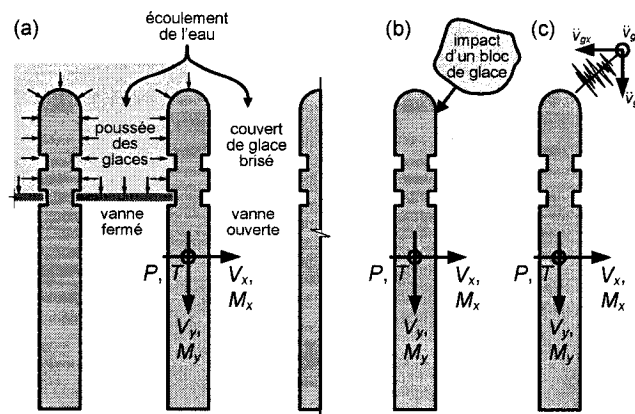
- (i) la rupture suite à la *fissuration* excessive, perpendiculairement aux contraintes principales en tension, et à la propagation de ces fissures (les fissures ont tendances à se propager le long des plans de reprises de bétonnage; on utilise alors,  $\sigma_c$ , la contrainte normale au plan des reprises de bétonnage comme indicateur de fissuration),
- (ii) le *glissement*, soit au niveau de la fondation soit dans le béton, dû au cisaillement,
- (iii) le *renversement* de la structure dû à la position très excentrée de la résultante par rapport au centroïde de la section,
- (iv) le *soulèvement* des ouvrages dû aux sous-pressions et à la fissuration de la structure,
- (v) la rupture en *compression* par l'écrasement des certains endroits de compressions excessives,
- (vi) la rupture par *fatigue* due aux variations de température ou aux charges dynamiques.

Pour assurer la sécurité structurale d'un ouvrage il faut *considérer* avec discernement tous les modes de rupture (Miron 1997).

### 2.2.2 Charges et combinaisons de charges

Les charges et combinaisons de charges détaillés dans ce paragraphe sont généralement applicables aux structures analysées avec la méthode de gravité (section 2.2.3). Il faut toujours bien juger la possibilité d'ajouter, d'enlever, de revoir ou de modifier les charges et combinaisons de charges décrites (CDA 2006, USACE 1995, Miron 1997), comme par exemple l'effet des variations saisonnières des températures.

Les charges à considérer lors d'une analyse de stabilité structurale des évacuateurs de crues sont de types mécaniques et hydrostatiques, thermiques et chimiques (réaction alcalis-granulats). Les chargements mécaniques sont dues: (a) au poids propre de la structure et des équipements permanents, (b) à la pressions des sédiments, à la poussée de glace et à l'impact avec un bloc de glace, (c) aux séismes (Fig. 2.3). Les charges hydrostatiques incluent: la pression hydrostatique et les sous-pressions, SP (section 2.2.4).



**Fig. 2.3.** Exemples de charges latérales à considérer: (a) poussée de la glace; (b) impact dynamique avec un bloc de glace; (c) séismes

Certaines charges produisent des efforts unidirectionnels (amont aval): pressions hydrostatiques, séismes amont aval. Par contre, il y a des charges, qui avec leurs composantes latérales, produisent des sollicitations rive gauche rive droite (selon l'axe faible) qui pourraient être plus critiques (Fig. 2.3). Dans l'analyse de stabilité il faut considérer les combinaisons les plus désavantageuses amont aval et rive gauche rive droite.



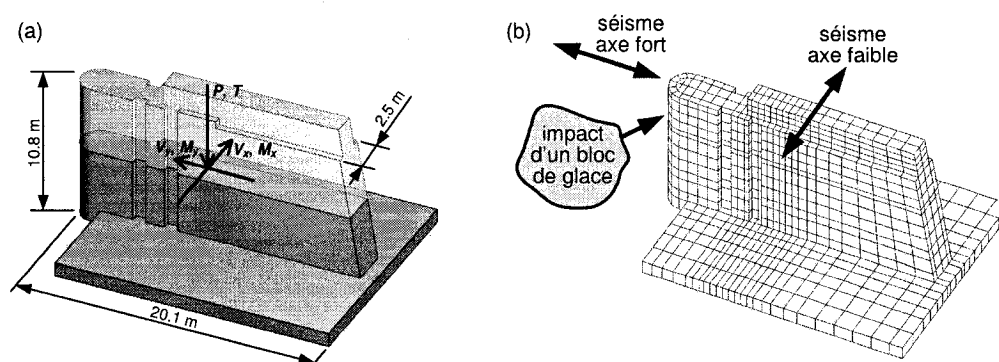
Les combinaisons de charges sont catégorisées en fonction de leur fréquence d'apparition dans le temps. Par la suite, les critères de performance sont spécifiés dans les normes en fonction de la catégorie de la combinaison (section 2.2.5). Les combinaisons de charges qu'il faut étudier lors de l'évaluation de la sécurité structurale sont (CDA 2006, USACE 1995, USBR 1987, Miron 1997, Ducharme 2001): (a) les combinaisons avec les conditions normales d'opérations, (b) les combinaisons avec les conditions exceptionnelles de crues et (c) les combinaisons avec les conditions extrêmes de glace, de température et de séismes. Ces combinaisons sont détaillées dans le Tableau 2.1.

**Tableau 2.1.** Combinaisons de charges: ouvrages hydrauliques de type poids (Miron 1997)

[illegible]

### 2.2.3 Méthode de gravité

Les stratégies généralement utilisées pour l'analyse structurale des ouvrages hydrauliques sont divisées en deux catégories: (i) celles basées sur la méthode de gravité et (ii) celles basées sur la méthode des éléments finis (Fig. 2.4). Les normes favorisent l'utilisation de la méthode de gravité comme approche globale de vérification de l'équilibre pour éviter les complications de modélisation et d'interprétation qui surviennent souvent lors de l'analyse avec des éléments finis (USACE 1995, FERC 2002, CDA 2006). L'analyse par EF devient alors complémentaire à l'analyse par la méthode de gravité. Toutefois quand une analyse locale (champ de contraintes local) est nécessaire, la méthode d'EF devient un outil fort utile.



**Fig. 2.4.** La méthode de gravité vs la méthode d'éléments finis: (a) méthode de gravité; (b) méthode d'éléments finis

Avec la méthode de gravité, l'analyse d'un pilier d'évacuateur de crues contre les mécanismes de défaillance consiste en deux analyses distinctes (Leclerc et al. 2001): (i) une analyse de contrainte pour calculer la distribution de la fissuration et les contraintes de compression et (ii) une analyse de stabilité pour déterminer les critères de performances, notamment le facteur de sécurité au glissement (section 2.2.5). La méthode de gravité est basée sur: (a) l'équilibre du corps rigide pour calculer les forces qui sont appliquées sur des plans possibles de rupture (les joints de bétonnage, l'interface béton rocher) et (b) la théorie de poutre pour calculer la distribution des contraintes sur la section. L'équilibre du corps rigide implique une sommation vectorielle des forces (appliquées et les SP) qui agissent au-dessus d'un plan d'analyse (un plan de rupture possible). Par la suite, dans le contexte de la théorie de poutre pour les matériaux homogènes et élastiques, on évalue les contraintes sur la section avec les vecteurs résultants (forces et moments). Les contraintes sont évaluées avec l'équation ( $P$ - $M$  unidirectionnelle):

$$\sigma_z = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M \cdot c}{I} \quad (2.1)$$

où  $N$  représente la résultante axiale et  $M$  représente le moment résultant sur la section;  $A$  et  $I$  sont l'aire et le moment d'inertie de la section;  $c$  est la distance entre le centroïde de la section et le point où on calcule la contrainte. Pour une sollicitation biaxiale composée ( $P$ - $M_x$ - $M_y$ ) l'équation (2.1) est adaptée (Boresi et Sidebottom 1985) pour tenir compte de deux moments  $M_x$  et  $M_y$ .

$$\sigma_z = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x \cdot c_y}{I_x} \pm \frac{M_y \cdot c_x}{I_y} \quad (2.2)$$

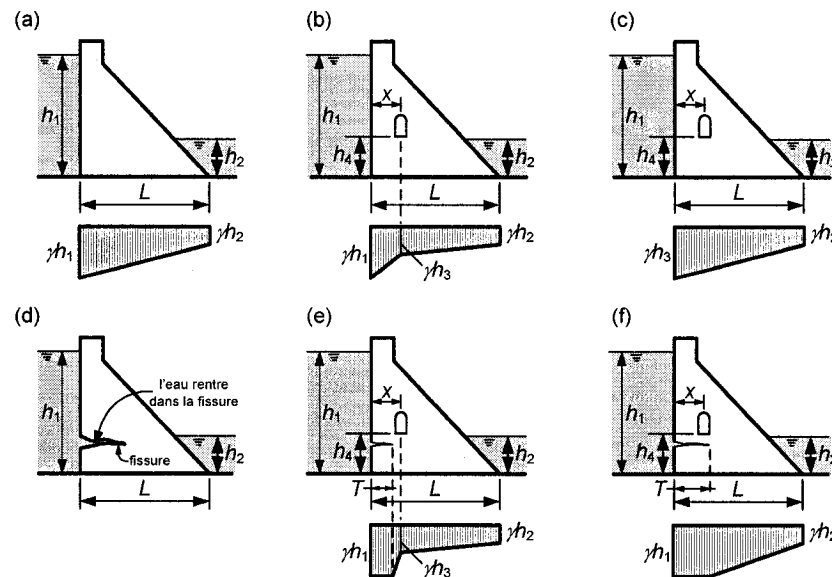
où  $\sigma_z$  est la contrainte normale;  $N$  est la résultante axiale,  $A$  est l'aire de la section considérée;  $M_x$  et  $M_y$ ,  $I_x$  et  $I_y$  sont les moments résultants de flexion et les inerties respectivement par rapport aux axes  $x$  et  $y$ ;  $c_x$  et  $c_y$  sont les distances où on calcule la contrainte, selon les axes  $x$  et  $y$ , par rapport au centroïde.

Quand les contraintes de tension excèdent la résistance en traction de la section on considère que le processus de fissuration commence dans la partie en tension et la section n'est plus en équilibre. Par la suite, une stratégie itérative est utilisée pour localiser l'axe neutre afin d'identifier la position de la fissure et l'aire en compression de la section (FERC 2002, CDA 2006, Leclerc et al. 2001). L'analyse (appelée "analyse de fissuration") basée sur cette stratégie peut être décrite en six étapes (CDA 2006, Leclerc et al. 2001):

- (i) on calcule les résultantes (forces et moments) par une sommation vectorielle en incluant l'effet des sous-pressions,
- (ii) on calcule les contraintes avec l'équation générale (2.1 - cas 2D) ou (2.2 - cas 3D),
- (iii) on vérifie si la fissure débute ou progresse (pour cela on utilise les critères de l'initiation et de la propagation de la fissure),
- (iv) on actualise les charges modifiées suite à la fissuration (les sous-pressions et, en conséquence, les résultantes),
- (v) on répète les étapes i-iv jusqu'à ce que la longueur de fissure ou la position de l'axe neutre (utilisée pour une fissuration oblique) devienne stable,
- (vi) on fait l'analyse de stabilité pour déterminer les critères de performances (facteurs de sécurité au glissement, position finale de la résultante, contraintes maximales de compression, ...).

### 2.2.4 L'effet des sous-pressions 2D

L'eau qui entoure la structure applique des conditions frontières de pression dans toutes les directions. Les composantes horizontales sont considérées comme pression hydrostatique et les composantes verticales à un niveau donné sont appelées les sous-pressions. En réalité, l'effet vertical de ces sous-pressions est due au fait que, avec le temps, l'eau pénètre la structure en produisant une pression interne ascensionnelle dans la structure (principe d'Archimède). La distribution des sous-pressions internes (dans le corps de la structure) est prise, généralement, avec une variation linéaire entre deux niveaux piézométriques adjacents (Fig. 2.5). Si un système de drainage est présent on considère qu'il peut réduire l'intensité des sous-pressions le long de la ligne piézométrique (Figs. 2.5b, c, e, f).



**Fig. 2.5.** Conditions de sous-pressions à considérer: (a) sans drainage; (b) avec drainage; (c) avec drainage mais  $x < 0.05h_1$ ; (d) fissuration et modifications de sous-pressions; (e) section fissurée, avec drainage et  $T < x$ ; (f) section fissurée, avec drainage et  $T > x$  (adaptée de USACE 1995)

Si la structure est fissurée l'eau rentre dans la fissure et modifie la distribution de sous-pressions (Figs. 2.5d-f). Les normes donnent la distribution des sous-pressions dans l'état de la structure non fissurée, ou quand il y a une fissure unidirectionnelle amont aval (USACE 1995, CDA 2006). Si la fissure est arbitraire une distribution 3D des sous-pressions doit être considérée, pour l'actualisation des sous-pressions, selon la propagation et l'orientation de cette fissure. La

description rigoureuse de cette distribution est difficile. Des solutions d'actualisation simplifiées sont proposées (Tracy et Kling 1982). Durant un séisme les sous-pressions développées avant le séisme sont normalement gardées constantes si la fissure se propage (USACE 1995). Si la fissure est le résultat d'une sollicitation sismique et elle se referme après le séisme alors le comportement post-sismique devrait inclure les sous-pressions dans cette fissure.

### 2.2.5 Critères de performance et de stabilité

Les critères de performance et de stabilité sont développés pour la conception et la vérification des structures hydrauliques analysées avec la méthode de gravité. Il s'agit d'assurer la stabilité et l'intégrité structurale en condition d'exploitation normale, exceptionnelle et extrême (FERC 2002, USBR 1987, USACE 1995, CDA 2006). Les principaux critères de performance sont:

- (i) La position de la résultante qui est utilisée comme critère d'évaluation du risque de renversement de la structure et que l'on utilise également pour limiter la fissuration excessive des ouvrages. Les limites de ce critère sont données dans le Tableau 2.2. Il est désirable, pour le cas normal d'exploitation, que la section soit entièrement en compression afin d'éviter la fissuration et la modification des sous-pressions qui surviennent. Pour les cas inhabituels une fissuration limitée est acceptée. Pour les cas extrêmes, la résultante devrait demeurer à l'intérieur de la section en vérifiant les autres indicateurs de performances.

**Tableau 2.2.** Critère de performance: position de la résultante

Combinaison	Position de la résultante
Normales	Pour les nouvelles structures la position de la résultante devrait rester dans le noyau central de la section (tiers médian pour les sections rectangulaires). Pour les anciennes structures ce critère <i>pourrait</i> être relaxé si <i>tous</i> les autres critères de performance <i>respectent</i> les limites exigées.
Inhabituelles et extrêmes	La résultante doit demeurer à l'intérieur de la section et <i>tous</i> les autres critères de performance <i>doivent respecter</i> les limites exigées. On accepte, comme exception, que la résultante soit instantanément à l'extérieur de la section pour le séisme.

- (ii) Les contraintes normales, pour lesquelles on impose des limites en tension et en compression. Si tous les autres critères des performances sont respectés (CDA 2006), on accepte dans le corps de l'ouvrage une *tension* maximale de  $0.1 f'_c$  et pour la résistance à la tension le long des reprises de bétonnage on impose  $0.05 f'_c$  (où  $f'_c$  est la résistance en compression du béton). Les contraintes maximales de *compression* doivent rester sous les valeurs détaillées dans le Tableau 2.3.

**Tableau 2.3.** Critère de performance: contraintes maximales de compression

Combinaison	Contraintes normales de compression
Normales	$< 0.3 \cdot f'_c$
Inhabituelles	$< 0.5 \cdot f'_c$
Extrême - crues	$< 0.5 \cdot f'_c$
Extrême - séisme	$< 0.9 \cdot f'_c$
Post-séisme	$< 0.5 \cdot f'_c$

- (iii) Les facteurs de sécurité au glissement, pour assurer une résistance adéquate au glissement de la structure. Ces facteurs dépendent de la manière de considérer la résistance au glissement: friction ou friction et cohésion. Toutefois, on recommande une attention supplémentaire lors de l'utilisation de la cohésion dans l'évaluation de la résistance compte tenu de l'influence importante de la cohésion sur la résistance en cisaillement (CDA 2006). Les valeurs minimales des facteurs de sécurité au glissement obtenus avec l'analyse basée sur la méthode de gravité sont:

**Tableau 2.4.** Critère de performance: facteurs de sécurité au glissement (eq. 2.7, 2.8)

Combinaison	SSF (eq. 2.7, 2.8)		
	friction	friction et cohésion	
		avec des essais	sans des essais
Normales	$\geq 1.5$	$\geq 2.0$	$\geq 3.0$
Inhabituelles	$\geq 1.3$	$\geq 1.5$	$\geq 2.0$
Extrême - crues	$\geq 1.1$	$\geq 1.1$	$\geq 1.3$
Extrême - séisme	(voir post-séisme)		
Post-séisme	$\geq 1.1$	(à analyser attentivement)	

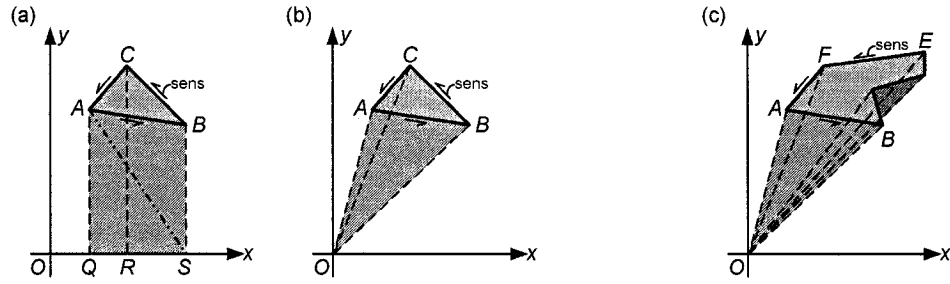
## 2.3 Comportement tridimensionnels des piliers d'évacuateur de crues non armés

On présente dans cette section des considérations sur le comportement 3D des piliers d'évacuateurs de crues non armés: (i) le calcul des propriétés mécaniques des sections du pilier, et (2) les méthodes et stratégies de calcul pour déterminer l'intégrité structurale de ces ouvrages.

### 2.3.1. Propriétés mécaniques pour la flexion composée ( $P$ - $M_x$ - $M_y$ )

La section d'un pilier est généralement arbitraire géométriquement. En effet, on considère que la section est homogène mais arbitraire: (a) concave ou convexe, (b) composée par plusieurs parties, (c) avec plusieurs trous, (d) avec le contour linéaire ou courbe. Afin d'éviter un calcul géométrique complexe, pour la considération des segments courbes, on discrétise linéairement ces segments sans affecter la précision du calcul (Marín 1984, Sizaire 2005). Les propriétés mécaniques utiles pour la flexion composée biaxiale sont: (i) la position du centroïde ( $x_g, y_g$ ), (ii) l'aire ( $A$ ), (iii) les moments d'inertie ( $I_x, I_y, I_{xy}$ ), (iv) l'angle,  $\alpha$ , du système de référence centroïdale principale. Toutes ces propriétés se calculent à l'aide d'intégrales de polynômes sur une aire quelconque.

Intuitivement, l'aire d'une section pourrait être calculée avec l'approche de la Fig. 2.6a. Pour le triangle  $\Delta ABC$  on projette chaque côté sur un axe quelconque (dans ce cas  $Ox$ ) et on calcule l'aire qui se trouve entre la ligne de projection et l'axe (e.g. pour  $AC$  on calcule l'aire  $ACRQ$ ). L'aire finale du triangle est correctement calculée si on élimine la partie  $ABSQ$ . Pour cela, on définit un sens de parcours de la section et on choisit une règle pour avoir une aire positive ou négative: l'aire est négative si les deux points du côté se suivent dans l'ordre gauche, droite. Par exemple, l'aire  $ABSQ$  est négative parce que le point  $B$  est à droite de  $A$  dans le sens de parcours choisi. Si on additionne algébriquement toutes les aires on obtient:  $A_{CAQR} + A_{BCRS} + A_{ABSQ}$  qui est l'aire correcte du  $\Delta ABC$ , parce que  $A_{ABSQ}$  est négative. Ensuite, on observe que l'aire au-dessous la ligne pointillée  $AS$  est inutilement calculée. En l'éliminant on minimise le nombre de pas de calcul. Le point  $S$  peut être arbitrairement choisi. Pour simplifier on le choisit comme l'origine  $O$  (Fig. 2.6b). Tous les polygones arbitraires peuvent être décomposés par des triangles. En suivant la méthode intuitive ci-dessus on peut calculer l'aire totale en additionnant algébriquement l'aire de chaque triangle qui la compose, Fig.2c (Turcotte et Wilson 1998, O'Rourke 1998, Sizaire 2005, Sunday 2006).



**Fig. 2.6.** Calcul de l'aire d'un polygone arbitraire: (a) formulation intuitive pour un triangle, (b) formulation mathématique pour un triangle; (c) formulation mathématique pour un polygone arbitraire

Mathématiquement, la formulation intuitive présentée ci-dessus est plus générale. Elle n'est pas limitée au calcul de l'aire de la section. Elle permet également le calcul de plusieurs propriétés dérivées comme la position du centroïde, les moments d'inertie etc. Marín (1984) a démontré rigoureusement les relations pour l'intégration d'un polynôme,  $p(x, y)$ , sur une aire arbitraire. Ainsi, on obtient, par exemple:

$$A = \int_A 1 \cdot dA = \frac{1}{2} \cdot \sum_i^n w_i \quad (2.3a)$$

$$I_x = \int_A y \cdot dA = \frac{1}{12} \cdot \sum_i^n w_i ((y_i + y_{i+1})^2 - y_i y_{i+1}) \quad (2.3b)$$

$$I_y = \int_A x \cdot dA = \frac{1}{12} \cdot \sum_i^n w_i ((x_i + x_{i+1})^2 - x_i x_{i+1}) \quad (2.3c)$$

où

- $n$  est le nombre des coins du polygone;
- $w_i = x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i$  où  $x_i$  et  $y_i$  sont les coordonnées géométriques de chaque coin de la section, dans un système de référence cartésien arbitraire.

Pour le calcul d'une aire obtenue suite à l'intersection entre deux polygones ou après une coupure d'une section ("clipped section"), plusieurs algorithmes géométriques sont disponibles. Il faut cependant choisir lesquels sont les plus performants (Preparata et Shamos 1985, Goodman et O'Rourke 2004). Un cas particulier de ces calculs sont les polygones dégénérés (e.g. qui sont auto intersectés) et les polygones nuls (l'aire est nulle). Ces polygones ne posent pas de problèmes de calcul des propriétés mécaniques mais, surtout, de discrétisation en éléments



polygonales et pour la détermination du noyau central. Il faut, par la suite, les isoler et les éliminer dans l'algorithme final choisi.

### 2.3.2 Noyau central ("kernel")

Le noyau central de la section ("kernel", "kern" ou "core") est défini (Bia et al. 1983) comme la partie de la section où si une force de compression est appliquée la section reste entièrement comprimée. On trouve dans la littérature plusieurs méthodes pour le déterminer (Fig. 2.7).

Une première approche est une recherche informée. On divise la section dans une matrice  $xy$  de points. Dans chaque point on met la force. On calcule la contrainte maximale sur la section. Si cette contrainte est en traction on élimine le point sinon on le garde dans la solution. Bien que cette méthode soit inefficace du point de vue numérique elle représente une formulation importante, mais plutôt théorique, de la recherche du noyau central (Popov et al. 1976).

Une autre méthode intéressante a été présentée par Tracy et Kling (1982). Ils considèrent la détermination du noyau comme un problème de minimisation. Il essaye de minimiser la distance entre la force et le centroïde pour empêcher toute tension sur la section. La méthode est générale et simple mais utilise un principe trop complexe. Si le problème a une solution calculable exactement pourquoi voudrait-on appeler un processus de minimisation? Comme analogie, on pourrait dire qu'on calcule les solutions d'une équation du 2ème degré avec une méthode mathématique de minimisation, méthode qui est, dans ce cas, inutile.

On pourrait aussi voir le calcul du noyau d'une manière un peu inversé (Turcotte et Wilson 1998). On sait que si on applique une force sur le contour du noyau, l'AN est *tangente* au contour de la section. Par la suite, ils ont observé que, réciproquement, si on applique une force sur le contour de la section, l'AN est tangente au noyau. L'idée est d'obtenir la forme finale du noyau en appliquant la force dans chaque coin de la section et de découper une section initiale très grande avec les AN qui correspondent à chaque application de la force aux coins. Bien que la méthode soit générale et simple, elle est inefficace numériquement pour les sections ayant des coins réentrants (comme les piliers d'évacuateurs de crues). Elle considère l'application de la force même pour les coins réentrants. Mais, théoriquement ceux-ci ne peuvent pas donner un segment du contour du noyau.

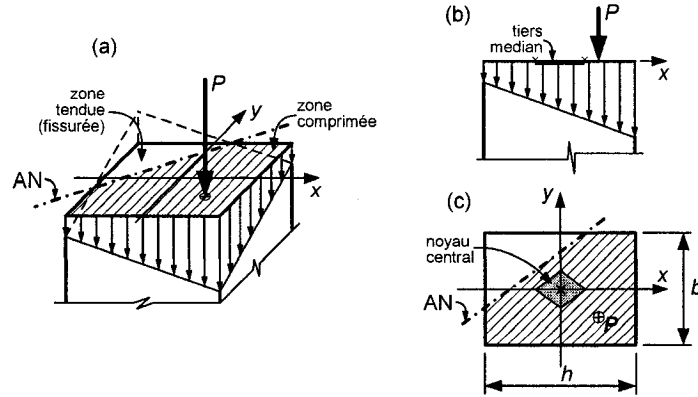
La dernière méthode présentée est plus générale et performante (Mofid et al. 2001, 2001a, Mofid et Yavari 2000). La détermination du noyau central est décrite en deux étapes: (i) calcul du *convex hull* (CH ou EC - *enveloppe convexe*) et (ii) calcul du noyau central. Par “convex hull” on considère le plus petit ensemble convexe qui peut entourer la section donnée. Dès que le CH est connu, on considère chaque segment de son contour comme l’AN et on calcule la position de la force qui donne cette AN (Bia et al. 1983). Cette approche est excellente mais l’algorithme présenté pour calculer le CH (Mofid et al. 2001) n’est pas assez efficace comme les algorithmes puissants qui existent dans le domaine de géométrie computationnelle (O’Rourke 1998).

Le noyau central est très utile dans le calcul de stabilité (fissuration) des structures hydrauliques non armés. Pour la fissuration 1D et en conditions normales d’exploitation les prescriptions (CDA 2006) exigent que la résultante doit rester dans le “tiers médian” de la section analysée (Fig. 2.7b). Pour les combinaisons de charges exceptionnelles et extrêmes (crues, séismes) cette exigence est relaxée. Pour la fissuration oblique, après avoir calculé l’axe neutre, la position de la résultante peut être analysée par rapport au noyau central de la section (Fig. 2.7c).

### 2.3.3 Fissuration en condition de flexion composée biaxiale ( $P$ - $M_x$ - $M_y$ )

Lorsqu’une membrure prismatique est soumise à une charge axiale ( $P$ ) et aux moments bidirectionnel ( $M_x$ - $M_y$ ) les contraintes normales ( $\sigma_z$ ) divisent sa section dans deux parties: une en tension et une en compression. Si la section ne résiste pas à la traction, la partie tendue devient fissurée et son équilibre mécanique n’est plus respecté (Fig. 2.7a). Pour retrouver l’équilibre et localiser l’AN, une solution itérative s’impose (Mattock et al. 1961, Tracy et Kling 1982). Une méthode itérative intéressante, suggérée par Popov (Popov et al. 1976), transforme le calcul mécanique de l’AN dans un problème informatique de “recherche informée”. Cette recherche est définie comme: “pour une section tendue (pour laquelle la charge est à l’extérieure de son noyau central) *cherche* une *sous-section* qui aura la charge *sur* le contour de son noyau”. Cette méthode pourrait être utilisée pour la vérification de la solution finale obtenue par un logiciel. Ainsi, on vérifierait si, dans la solution finale, la charge est sur le contour du noyau central.

La distribution de  $\sigma_z$  est obtenue avec la théorie de poutre (2.2). Pour des sections sans résistance en traction la relation analytique de  $\sigma_z$  est plus complexe ou impossible à être obtenue. Pour ces sections on a besoin de la position finale de l’AN et aussi de l’aire finale comprimée.



**Fig. 2.7.** Fissuration d'une section rectangulaire sollicitée biaxialement ( $P-M_x-M_y$ ): (a) distribution des contraintes normales sur la section analysée; (b) position de la résultante par rapport au tiers médian; (c) position de la résultante par rapport au noyau central. Cette figure est adaptée de (Popov et al. 1976).

Par exemple, pour une section rectangulaire, soumise à la flexion uniaxiale ( $N-M_x$ ), la contrainte maximale a la forme (Bia et al. 1983, Bourgeois 1999 et le chapitre 4.1):

$$\sigma_{z \max} = \frac{4N^2}{3b(hN - 2M_x)} \quad (2.4)$$

où  $b$  et  $h$  sont les dimensions de la section rectangulaire (Fig. 2.7c). Pour une section arbitraire ayant un axe de symétrie, soumise à la flexion uniaxiale, on trouve la contrainte maximale (Bia et al. 1983):

$$\sigma_{z \max} = \frac{Nz_1}{S_0} \quad (2.5)$$

où  $z_1$  est la dimension de la section comprimée obtenue avec la condition  $v = \frac{I_0}{S_0}$ . Cette dimension est mesurée par rapport à un axe perpendiculaire sur le support du vecteur moment qui sollicite la section (Bia et al. 1983). Dans les équations précédents  $I_0$  et  $S_0$  sont le moment d'inertie et statique (obtenus itérativement) de la section comprimée par rapport à l'AN;  $v$  est la distance entre le point d'application de la charge  $N$  et l'AN. Ensuite, pour la section rectangulaire, soumise à la flexion biaxiale, la contrainte maximale est (Goulet et Boutin 1998):

$$\sigma_{z \max} = \frac{3N}{8 \left( \frac{b}{2} - e_x \right) \left( \frac{h}{2} - e_y \right)} \quad (2.6)$$

où  $e_x$  et  $e_y$  sont les coordonnées de la charge  $N$  par rapport aux axes centroïdaux  $Ox$  et  $Oy$ .

Pour les sections de formes arbitraires seulement les méthodes informatiques itératives basées sur la théorie des poutres (Mattock et al. 1961, Tracy et Kling 1982, Leclerc et Léger 2007) ou les analyses avec les éléments finis (Bhattacharjee et Léger 1995) peuvent fournir une solution. Dans le contexte d'une première approche, l'interaction entre les moments dans les deux directions ( $M_x$ - $M_y$ ) est considéré directement par l'algorithme ou encore avec une méthode simplifiée qui utilise des enveloppes de ruptures (Bresler 1960, Furlong et al. 2004).

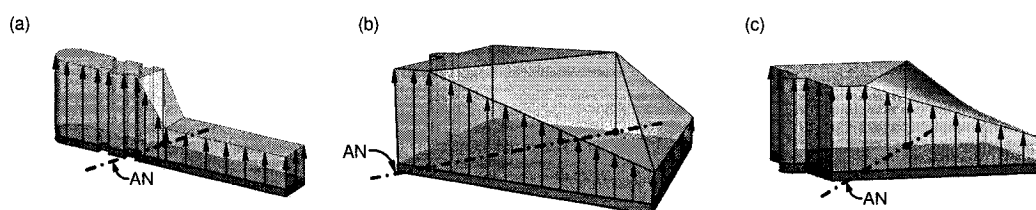
Dans le processus pour trouver la solution, afin de respecter l'équilibre de la section, l'intégration du champ des contraintes normales peut être obtenue avec plusieurs méthodes. Ainsi, pour le champ linéaire et polynomial Marín (1980) et Brøndum-Nielsen (1997) ont publié des méthodes très efficaces et générales. Pour un champ arbitraire de contraintes plusieurs chercheurs ont décrits et ont comparé différentes stratégies d'intégration (Marín 1980, De Vivo et Rosati 1998, Rodriguez et Aristizabal-Ochoa 1999, Fafitis 2001, Sfakianakis 2002, Foster et al. 2003, Bonet et al. 2004, Charalampakis et Koumoussis 2005, Chiorean 2006).

Le contexte de l'actualisation itérative de sous-pressions complice beaucoup une analyse de flexion biaxiale composée pour deux raisons: (i) le processus itératif nonlinéaire pour trouver la solution peut devenir instable sous l'influence de l'évaluation des sous-pressions, (ii) une validation analytique ou manuelle de la solution est très difficile.

#### **2.3.4 Évolution 3D des sous-pressions en condition fissurée**

L'actualisation des sous-pressions (SP) suite à la fissuration est prescrite dans les normes seulement pour une fissuration unidimensionnelle (section 2.2.4, USACE 1995, CDA 2006). Pour une fissure oblique cette actualisation est plus difficile. Il y a deux options: (i) utiliser une distribution approximative, et (ii) utiliser une distribution exacte. La deuxième option nécessite des logiciels qui font une analyse d'écoulement en milieu poreux et fissuré avec des éléments finis (Miron 1997). Cette méthode est sophistiquée et implique un grand effort de calcul.

La plupart des normes et des chercheurs recommandent et utilisent une distribution simplifiée linéaire des sous-pressions (USACE 1995, CDA 2006, Tracy et Kling 1982, Leclerc et Léger 2007). Pour une sollicitation de flexion biaxiale composée, l'actualisation des sous-pressions devrait être tridimensionnelle. Cette solution n'est pas évidente. Généralement, on pourrait utiliser une distribution planaire ou une distribution formée des surfaces décrites par des polynômes ou par des surfaces réglées (Fig. 2.8).



**Fig. 2.8.** Distribution 3D des sous-pressions actualisées: (a) pilier avec une distribution planaires; (b) base du pilier avec une distribution planaires; (c) base du pilier avec une distribution sous forme de surfaces réglées

Tracy et Kling (1982) ont proposée, dans le contexte d'un logiciel (3DSAD), une distribution linéaire sur le contour de la section. La section est après divisée en quelques éléments. Pour chaque élément, la distribution linéaire des sous-pressions est générée par les valeurs des coins des éléments voisins ou par les valeurs du contour. Par la suite, la distribution des sous-pressions s'exprime par la forme des surfaces réglées (Fig. 2.8c). Les auteurs ne discutent pas des problèmes de discontinuité dans l'actualisation automatisée des sous-pressions.

### 2.3.5 Facteur de sécurité au glissement

Une de plus importantes raisons pour laquelle on analyse une structure hydraulique non armée est de déterminer les paramètres et indicateurs (l'aire comprimée, la position de la résultante etc.) qui, par la suite, vont permettre le calcul des facteurs de sécurité contre différents mécanismes de défaillance (section 2.2.1). Les facteurs de sécurité au glissement (Sliding Safety Factor ou SSF) sont considérés comme les plus importants indicateurs de performance d'une structure hydraulique d'élancement conventionnel. La nécessité d'avoir les SSF dans des limites imposées est une demande minimale pour la bonne exploitation et la sécurité de la structure (CDA 2006, Leclerc et Léger 2007). On présente ici les facteurs de sécurité au glissement (SSF). Pour une discussion détaillée concernant ces facteurs de sécurité (et ceux pour d'autres mécanismes de défaillance) voir Leclerc et Léger (2007), Fanelli (Fanelli et al. (1995).

La formule de base pour le facteur de sécurité au glissement (Mohr-Coulomb) sur un plan horizontal (charges statiques) est (CDA 2006):

$$SSF = \frac{c \cdot A_c + V \cdot \tan \phi}{H} \quad (2.7)$$

où

- $c$ : cohésion (apparente ou réelle) qui vient de la capacité en cisaillement de la section;
- $A_c$ : aire horizontale en compression, obtenue avec l'analyse de fissuration;
- $V$ : somme des forces verticales incluant les charges appliquées et la résultante calculée des sous-pressions;
- $\tan \phi$ : coefficient de friction (angle de friction);
- $H$ : somme des forces horizontales.

Pour un plan de glissement incliné la formule générale est (CDA 2006):

$$SSF = \frac{c \cdot A_c + (H \cdot \sin \alpha + V \cdot \cos \alpha) \cdot \tan \phi}{H \cdot \cos \alpha - V \cdot \sin \alpha} \quad (2.8)$$

où

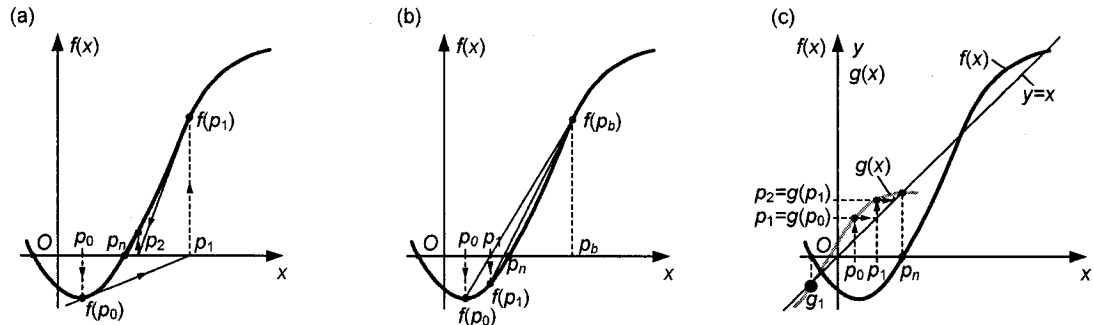
- $\alpha$ : l'angle d'inclinaison du plan d'analyse.

Dans ces relations, pour calculer les facteurs de sécurité, on néglige la torsion. Dès que les valeurs des SSF sont obtenus une vérification avec les critères de performances exigés (section 2.2.5) est effectué. S'ils ne sont pas sous les valeurs acceptables il faut prendre une décision concernant: (a) une analyse plus détaillé, ou (b) une réhabilitation.

### 2.3.6 Solution des systèmes d'équations non linéaires ( $P$ - $M_x$ - $M_y$ )

Dans le contexte de ce mémoire, on utilise des méthodes pour des systèmes d'équations nonlinéaires. Il s'agit de trouver la solution du système d'équations du problème de flexion biaxiale composée ( $P$ - $M_x$ - $M_y$ ). Un système d'équations nonlinéaires peut être perçus comme une extension d'une équation nonlinéaire. Les méthodes de résolution sont conceptuellement presque identiques pour les deux types des problèmes. Pour cette raison on montre ici en détail les méthodes pour les équations nonlinéaires et on les généralise, par la suite, pour les systèmes d'équations nonlinéaires.

Différents méthodes sont détaillées et comparées dans la littérature. Dans cette section on présente trois méthodes qui ont donné de très bons résultats lors de leur application pour des problèmes de mécanique des solides, Fig. 2.9. Les trois méthodes sont: (i) Newton tangente, (ii) “regula falsi” et (3) “fixed point” (Burden et Faires 1989, Bajpai et al. 1977, Press et al. 1992, Chiorean 2006a).



**Fig. 2.9.** Méthodes pour trouver la solution d’une équation nonlinéaire: (a) méthode de Newton tangente; (b) méthode “regula falsi”; (c) méthode “fixed point”

La méthode Newton utilise la tangente de la fonction (la tangente est sa dérivée) pour itérer (Fig. 2.9a). Par exemple, avec le premier choix  $p_0$  on calcule  $f(p_0)$  et après au point  $(p_0, f(p_0))$  on calcule la pente de la courbe. L’intersection entre la pente et l’axe  $Ox$  est  $p_1$  pour lequel on calcule  $f(p_1)$  et après pour le point  $(p_1, f(p_1))$  on calcule la pente .... La deuxième méthode (“regula falsi” ou “fausse position”), Fig. 2.9b, est semblable à la méthode précédente mais au lieu de calculer la pente elle calcule l’intersection entre une corde de la courbe et l’axe  $Ox$ .

La méthode “fixed point” implique une modification de l’équation que l’on veut solutionner de manière à l’exprimer sous la forme  $g(x) = x$ . Par la suite, la solution se trouve à l’intersection entre la courbe et la droite d’équation  $y = x$ . Le processus pour trouver la solution est montrée à la Fig. 2.9c. On commence avec un premier choix  $p_0$  pour lequel on calcule la valeur de la fonction  $g(p_0)$ . On calcule, l’intersection entre une droite au niveau de  $g(p_0)$  et la droite  $y = x$ ; ce point  $p_1$  devient la valeur d’entrée pour l’itération suivante .... Pour cette méthode, le choix de la fonction  $g(x)$  est très important.

En comparant les trois graphiques on constate que la vitesse de convergence pour une valeur initiale arbitraire ( $p_0$ ) est plus grande pour les deux premières méthodes. Par contre, elles

peuvent avoir de problèmes si la tangente ne peut pas être évaluée ou si la corde est superposée sur la fonction (dans le deux cas à cause d'une discontinuité). La dernière méthode n'a pas de problème d'évaluation mais sa convergence peut être lente. De plus, elle est très sensible au choix de la forme de  $g(x)$  pour respecter la formulation requise  $x = g(x)$ . Par exemple, avec la fonction de la Fig. 2.9c on ne peut pas obtenir la solution identifiée par  $g_1$ , peu importe le choix initial  $p_0$ . Toutefois, Burden (Burden et Faires 1989) présente les critères pour avoir une convergence non conditionnelle avec cette méthode.

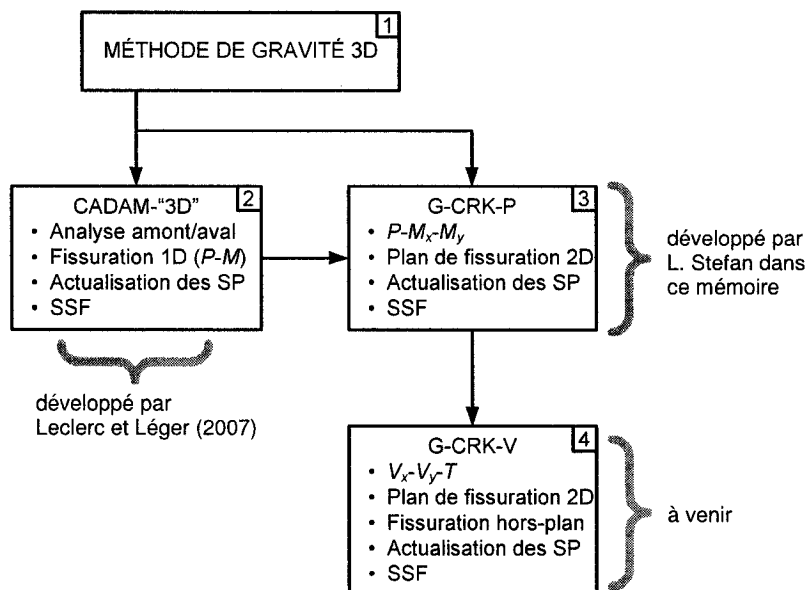
Les méthodes présentées dans cette section, qui trouvent une solution pour une *équation nonlinéaire*, peuvent être étendue pour les *systèmes d'équation nonlinéaire* (Burden et Faires 1989). Conceptuellement, les deux approches sont identiques. Les modifications les plus importants surviennent à deux niveaux: (a) les fonctions sont décrites par des surfaces au lieu d'être décrites par des courbes comme dans le cas des équations nonlinéaires (Fig. 2.9), et (b) les évaluations de critères de convergence utilisent les dérivés *partielles* des fonctions.

### 2.3.7 Évaluation progressive de la stabilité des évacuateurs de crues

L'évaluation progressive de l'intégrité structurale des évacuateurs de crues est toujours adéquate pour plusieurs raisons: techniques, financières, et des ressources impliquées. Par l'évaluation progressive on considère que l'analyse d'une structure est faite premièrement de façon globale et après de plus en plus en détail. Par la suite, on a étudié plusieurs variantes préliminaires afin d'avoir une méthode d'analyse complète  $P-M_x-M_y-T-V_x-V_y$ .

Dans la première étape la méthode de gravité a été programmé dans le logiciel CADAM-“3D”, Fig. 2.10 (Leclerc et Léger 2007). À ce niveau CADAM-“3D” considère la fissuration et l'actualisation unidimensionnelle des sous-pressions, dans l'orientation amont aval seulement. Ce logiciel constitue le point de départ pour l'étape suivante Fig. 2.10 [3] où la flexion biaxiale composée et l'actualisation 3D des sous-pressions sont intégrées. L'actualisation des sous-pressions utilise une distribution planaire, recommandée et habituellement utilisée (CDA 2006, Tracy et Kling 1982). Par la suite, un dernier module Fig. 2.10 [4] va s'ajouter dans le futur. Celui-ci calculera la distribution des contraintes de cisaillement. L'interaction 3D entre l'effort axial, les moments de flexion, la torsion (uniforme et non uniforme) et l'effort tranchant sera prise en compte à cette étape.





**Fig. 2.10.** Approche progressive de l'analyse de stabilité d'une structure hydraulique

On considère qu'une approche progressive pour l'analyse d'une structure compliquée (comme les structures hydrauliques) est *toujours* préférable. Il faut toujours commencer avec une analyse simplifiée peu importe si une analyse plus sophistiquée (EF) est entreprise ou non. Les résultats de l'analyse simplifiée peuvent suggérer la nécessité d'une telle analyse sophistiquée. Elle permet d'obtenir un premier bilan global des efforts externes appliqués et des efforts internes correspondant le long de chaque plan potentiel de rupture ( $P, M_x, M_y, T, V_x, V_y$ ). Par ailleurs, une approche simplifiée fournit un excellent processus de validation pour une analyse par EF.

### CHAPITRE 3

#### **“AN EXTENSION OF THE GRAVITY METHOD FOR 3D CRACKING ANALYSIS OF SPILLWAY PIERS INCLUDING UPLIFT PRESSURES”**

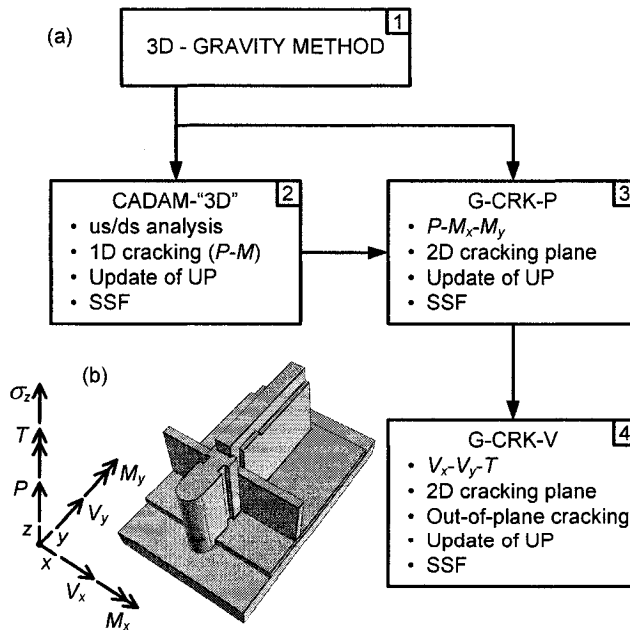
*Auteurs: Lucian Stefan et Pierre Léger*

*Article soumis pour publication dans la revue ASCE Journal of Structural Engineering (Soumis le 3 avril 2007).*

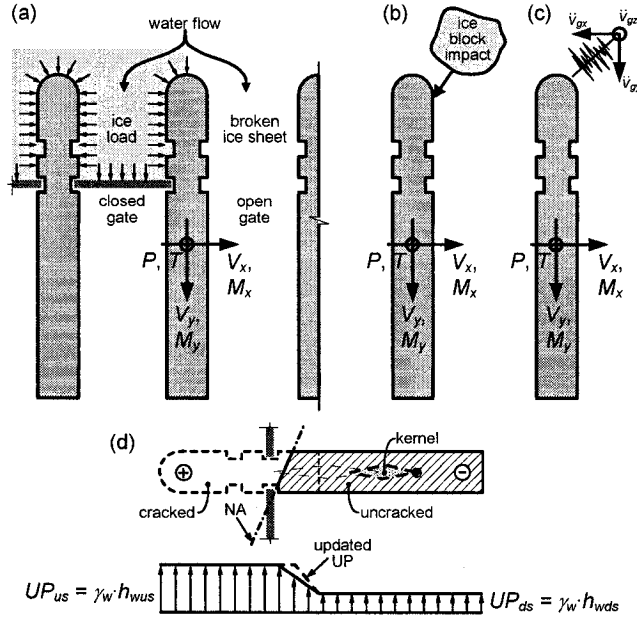
#### **3.1 Introduction**

Concrete spillways are three-dimensional structures subjected to three-dimensional loads (Fig. 3.1). Figs. 3.2a-c illustrates some of the loading conditions leading to a bi-axial bending problem for the piers. The operation of gates, the use of stoplog in the upstream gate guide, impact of ice floes, and seismic excitation may lead to unsymmetrical loading with respect to the upstream-downstream (us/ds) direction (USACE 1995). Seismic loading along the weak axis of the piers in the cross valley direction is particularly critical. Moreover, several existing spillways built several years ago are practically unreinforced mass concrete structures. The classical approach to verify the global stability of spillways is based on the so called “gravity method” (FERC 2002, USACE 1995, Corns et al. 1988). The forces and moments acting at several elevations along the height of the structures are first evaluated using rigid body equilibrium. Beam theory assuming a linear stress distribution is used to perform a stress analysis to evaluate the potential initiation of cracks, and their extension in the dam body along predefined planes of failure. Pressurized water penetrating in cracks is considered through an iterative solution strategy, Fig. 3.2d, (USBR 1987). The position of the force resultant must lie in the kernel, corresponding to the middle third of rectangular sections, to ensure that the concrete remain in

compression under normal operating conditions. This criterion is relaxed for unusual and extreme load combinations. The sliding safety factor (SSF) is evaluated from the ratio of the shear strength that could be mobilized to the driving shear force. Using these assumptions, specific SSF have to be met to evaluate if the structure has an adequate safety margin against extensive cracking (overturning, uplifting), and sliding (CDA 2006, FERC 2002, USACE 1995). The classical application of the gravity method has been applied for gravity dams, spillways, and water intake structures loaded symmetrically in the us/ds direction. A computer program, CADAM, considering 2D gravity dam structures has been developed to facilitate and visualized the application of the gravity method (Leclerc et al. 2003). It is true that the finite element (FE) method can also be used in more refined analysis to evaluate the stability of concrete hydraulic structures (Azmi and Paultre 2002, Osterle et al. 1993). FE analyses, however, require a lot of expertise and resources (especially if hydro-mechanical interactions are considered while cracking take place). FE analyses are more focused on the computation of local stresses. There is always a need in a first instance to study a global tally of applied forces at a series of sections along the height of the structure and resulting equilibrium conditions.



**Fig. 3.1.** Stability evaluation of hydraulic structures: (a) 3D extension of the gravity method; (b) 3D structural model of a spillway pier from CADAM-"3D"



**Fig. 3.2.** Three-dimensional loading and structural response of spillway piers: (a) unsymmetrical gate operation; (b) impact of ice floes; (c) earthquakes; (d) cracking of pier section and uplift pressure update

This paper presents a 3D extension of the gravity method, a robust approach, with clearly defined performance criteria, for stability evaluation of concrete hydraulic structures (Fig. 3.1). In a first step, the computer program CADAM-“3D” was developed Fig. 3.1a [2] (Leclerc and Léger 2007). In this version the structure could be modeled as a 3D solid but all loadings and analyses are performed using the classical gravity method in the us/ds direction. The algorithms to consider arbitrary biaxial bending ( $P$ - $M_x$ - $M_y$ ), and related cracking on a 2D plane with iterative update of uplift pressures (UP), Fig. 3.2d, are developed herein as module G-CRK-P (Fig. 3.1a [3]). Several validations examples are presented. Finally, a case study using different loading scenarios is performed to illustrate the convergence and robustness of the proposed solution algorithm. We are now working on the next module, G-CRK-V, Fig. 3.1a [4] that considers the shear stress distribution over the cross-section including a torque  $T$ , (St-Venant and warping stresses) in combination with the applied shear forces  $V_x$ - $V_y$ .

### 3.2 Cracking analysis of piers of arbitrary sections subjected to biaxial bending

The stability condition of a pier depends on the compressed area of the section. This section is subjected to axial force  $P$ , bending moments  $M_x$ ,  $M_y$ , shear force  $V_x$ ,  $V_y$  and torque  $T$ . A cracking analysis, which determines the position of NA on the section (Fig. 3.2d), identify two areas, and related normal stresses ( $\sigma_z$ ): one in tension, and one in compression. As a generalization, the concept of “compressed area” ( $\sigma_z \leq 0$ ) can be extended to the more comprehensive “uncracked area” where tensile stress, below the tensile strength, may be mobilized ( $\sigma_z \leq f_t$ ).

#### 3.2.1. Computation of mechanical properties

To compute the section mechanical properties,  $x_g$ ,  $y_g$ ,  $A$ ,  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_{xy}$ , an arbitrary shape is considered. It can have one or many parts, with or without holes, and with linear or curved boundary. It is convenient, without any significant loss of accuracy (Marín 1984), to discretise linearly curved segments. Then, the section mechanical properties can easily be calculated with an efficient computational geometric algorithm (Marín 1984).

#### 3.2.2 Determination of kernel

In the case of dams and unreinforced piers, the kernel of the section is very useful in evaluating the stability. The kernel may be defined as the part of the section in which if a force is applied it produces normal stresses less than a specific value,  $f_t$ , the tensile strength. For the usual loading combinations this value is set to zero to avoid any potential tensile cracking of the section.

There are different ways to determine the kernel: an informed search (Popov et al. 1976), a minimization process (Tracy and Kling 1982), a clipping algorithm (Turcotte and Wilson 1998) or a computational geometric problem (Mofid et al. 2001). The last approach has many advantages: it is general and can be used on convex or concave sections, with or without holes, with one or many parts, with linear or curved boundary, it is exact and it is efficient.

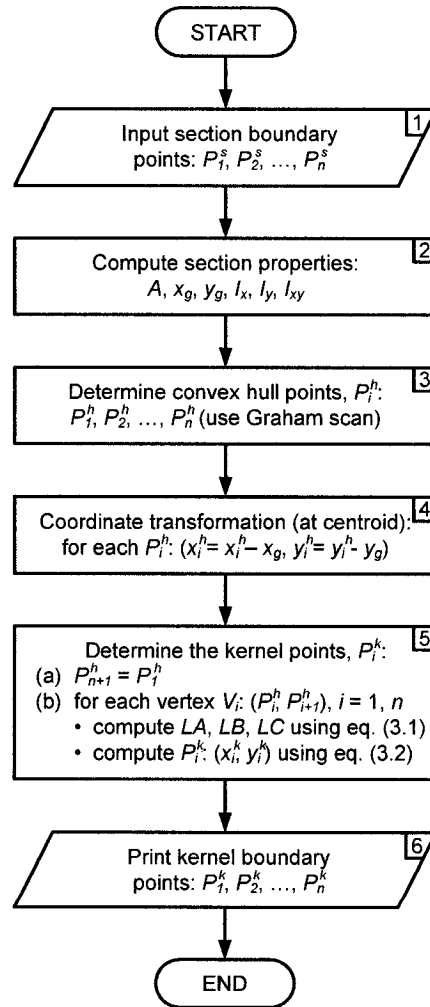
The algorithm for kernel determination (Fig. 3.3) is adapted from (Mofid et al. 2001). It has two main steps: the convex hull (CH) determination, and the kernel computation. The convex hull (the minimum convex polygon which can “envelop” the given section) can be obtained with Graham scan (O’Rourke 1998). Once the CH is known, and each of its vertices,  $V_i$ , is being use

to compute the general form of lines:  $LA \cdot x^h + LB \cdot y^h + LC = 0$  where

$$LA = y_i^h - y_{i+1}^h, \quad LB = x_{i+1}^h - x_i^h, \quad LC = x_i^h y_{i+1}^h - x_{i+1}^h y_i^h \quad (3.1)$$

the determination of the kernel is direct. In (3.1),  $(x_i^h, y_i^h)$  and  $(x_{i+1}^h, y_{i+1}^h)$  are the extreme points of a vertex  $V_i$ ,  $i = 1, n$  (total number of points in CH). Then, the coordinates of kernel boundary are:

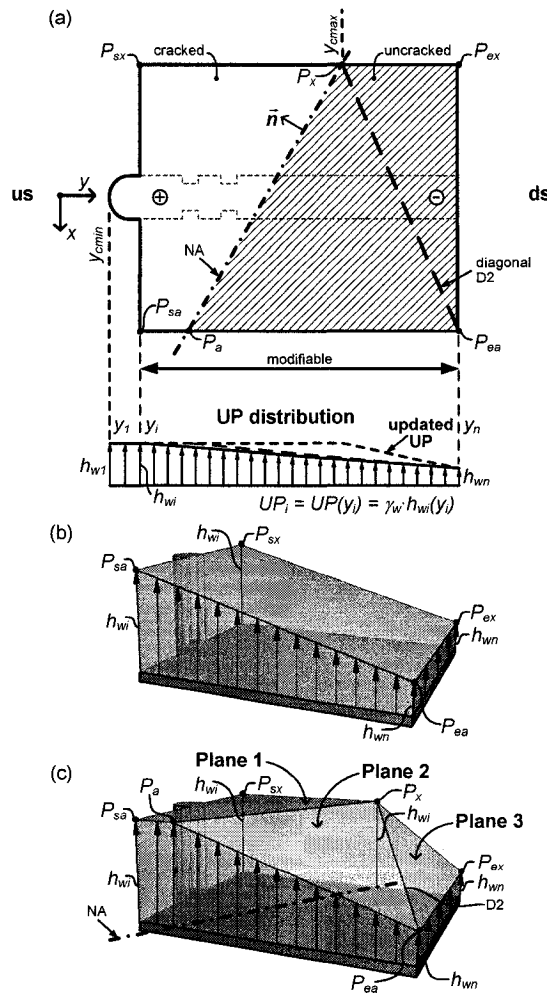
$$x_i^k = x_g + \frac{LA \cdot I_y + LB \cdot I_{xy}}{LC \cdot A}, \quad y_i^k = y_g + \frac{LB \cdot I_x + LA \cdot I_{xy}}{LC \cdot A} \quad (3.2)$$



**Fig. 3.3.** Algorithm to compute the kernel of arbitrary sections

### 3.2.3 Modeling of uplift pressures - UP

For a hydraulic structure there is an additional load that must be considered: the uplift pressure (UP). This pressure, for the completely undrained *uncracked sections*, is taken as the full hydrostatic pressure at the level of the submerged section (USACE 1995) for the us/ds faces and between us/ds faces a linear variation is prescribed. Mathematically, this can be written as:  $UP_i = \gamma_w \cdot h_{wi}$  (Fig. 3.4), where  $\gamma_w$  is the density of the water and  $h_{wi}$  is the height of the water for the specified  $i$  point. For the updated uplift pressure in the *cracked us/ds zone*, the full adjacent uplift pressure is assumed to build up in the crack (USACE 1995) and then there is a linear gradient towards the downstream compressed ligament.



**Fig. 3.4.** 3D extension of (USACE 1995) for UP updates: (a) plane view of the cracked section; (b) 3D view of initial given UP; (c) 3D view of updated UP

A more complicated situation arises for the consideration of an oblique crack. The updated UP distribution in the cracked zone could still be taken as the full adjacent uplift pressure. However, the updated distribution for the uncracked zone is more difficult to describe. A FE seepage analysis could be done at each mechanical iteration but this is not obvious. This is why in practice a linear distribution is preferred without an important loss in the precision of the results (Tracy and Kling 1982).

To extend for an oblique crack the USACE (1995) recommendations for UP updating, an algorithm (*UPCalc*, Fig. 3.5) was developed. It has two main parts: a computational and a heuristic part. The first one computes the UP resultants for the oblique cracked section. The second one tries to find a cyclic repetition in previously calculated UP resultants. When an oscillatory convergence problem is encountered the heuristic part prevents a new appearance of a cycle, as explained later.

An initial UP distribution is introduced as  $h_{wi}(y_i)$ : the water height for each chosen line  $y_i$ , Fig. 3.5 [1]. Then, for each interval  $y_i$ - $y_{i+1}$  the user specifies if the UP could be “*modifiable*” or not by cracking. For example, in Fig. 3.4a, the distribution between  $y_l$  and  $y_i$  cannot be “*modifiable*” (it is constant), but between  $y_i$  and  $y_n$  it is defined as “*modifiable*”. If an UP zone is “*modifiable*”, the algorithm determines if it is necessary to update it: does the cracking status fulfill the conditions to have the full adjacent water pressure (Fig. 3.5 [5])? If yes, in the cracked zone, the adjacent water pressure will be used. In the uncracked zone, an adaptive distribution will be computed. Hence, (Fig. 3.4), in the cracked zone a horizontal plane (plane 1, through the points:  $P_{sa}, P_{sx}, P_x$ ) is used. In the uncracked zone two planes are used (plane 2:  $P_a, P_x, P_{ea}$ , and plane 3:  $P_{ea}, P_x, P_{ex}$ ), so the UP distribution is called “*the three planes UP*”. The possibility of using the diagonal D1 ( $P_a$ - $P_{ex}$ ) was also considered, instead of D2 ( $P_x$ - $P_{ea}$ ), for defining “*the three planes UP*” (Fig. 3.4) but D2 was found to be more appropriate. For D1, if  $P_a$  is fixed and the NA angle is modified only with the displacement of  $P_x$ , then the plane 2 ( $P_a$ - $P_{ex}$ - $P_{ea}$ ) doesn’t change.

Fig. 3.5 [3][6][7] computes, by integration, the UP resultants and their eccentricities in cracked and uncracked zones. As the entire UP distribution is composed only by planes, the general plane equation,  $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$  is considered. It is then transformed into a function:



$$g(x, y) = -\frac{a \cdot x + b \cdot y + d}{c}, \quad c \neq 0 \quad \text{always} \quad (3.3)$$

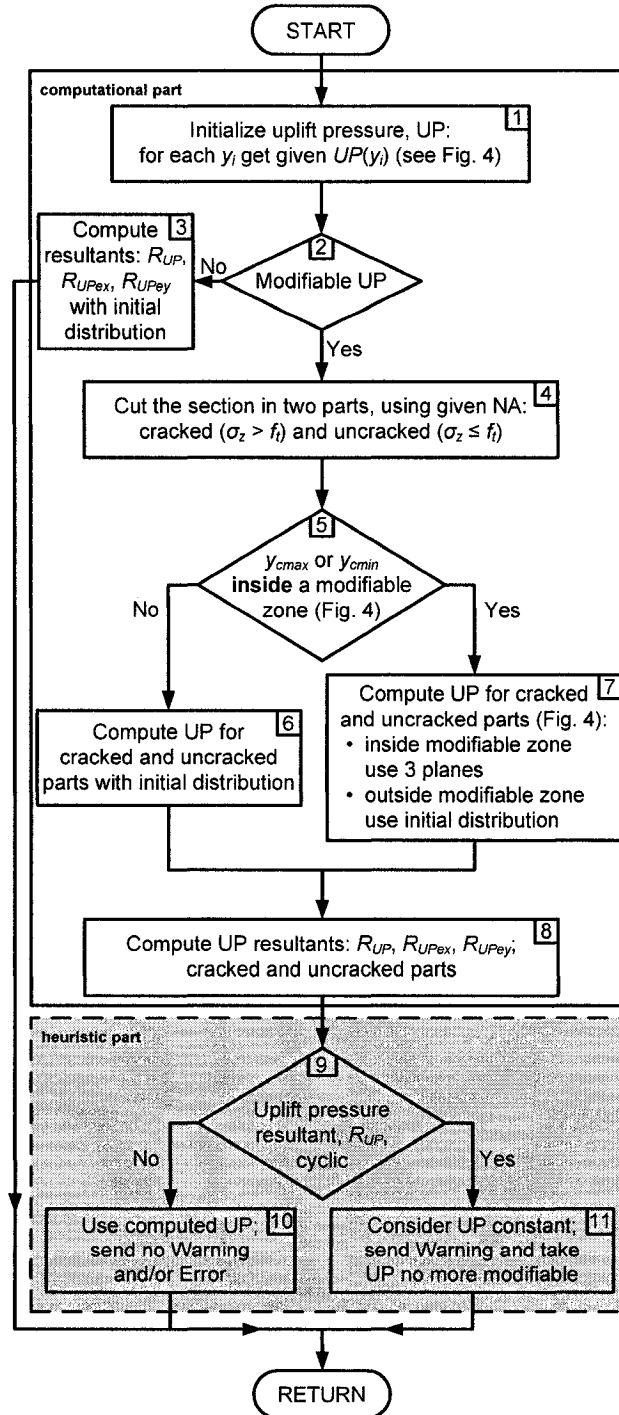


Fig. 3.5. Algorithm to update uplift pressures in cracks (UPCalc)

The coefficient  $c$  can't be zero if the UP resultant or  $z$  is not null. The integrals to compute UP resultant over an arbitrary area,  $A$ , have the form, see also (Marín 1980):

$$R = \int_A g(x, y) dA = -A \cdot \frac{a \cdot x_g + b \cdot y_g + d}{c} \quad (3.4a)$$

$$e_{xR} = \int_A g(x, y) \cdot x dA = -\frac{a \cdot I_y + b \cdot I_{xy} + d \cdot A \cdot x_g}{c \cdot R} \quad (3.4b)$$

$$e_{yR} = \int_A g(x, y) \cdot y dA = -\frac{a \cdot I_{xy} + b \cdot I_x + d \cdot A \cdot y_g}{c \cdot R} \quad (3.4c)$$

where:

- $x_g, y_g$  are the area centroid coordinates in the global axes system;
- $A, I_x, I_y, I_{xy}$  are the centroidal section properties: area, the  $x$  and  $y$  moments of inertia, and the product of inertia.

It is easy to calculate  $a, b, c, d$  with the equations of a plane which passes through three arbitrary points. These three arbitrary points could correspond to the above described points for “the three planes UP” (e.g. plane 1:  $P_{sa}, P_{sx}, P_x$  with  $z_{P_{sa}} = z_{P_{sx}} = z_{P_x} = h_{wi}$ , Figs. 3.4b-c). Once the resultants of cracked and uncracked parts are known the algorithm calculates using static equilibrium equations the UP resultant, and related eccentricities:  $R_{UP}, R_{UPex}$  and  $R_{UPey}$ .

The heuristic part of Fig. 3.5 has the ability to find among the previously computed UP resultants the apparition of a cycle. A cycle, a consequence of an UP discontinuity, could appear when a particular situation occurs in Fig. 3.5 [5]. Hence, for a certain NA position (Fig. 3.4a), when  $y_{cmax}$  is between  $P_{sx}-P_{ex}$ , the following step of Fig. 3.5 [5] is Fig. 3.5 [7]. But, for a different position of NA, when  $y_{cmax}$  is not between  $P_{sx}-P_{ex}$ , the following step will be Fig. 3.5 [6]. The presence of the UP discontinuity is due to the fact that the blocks Fig. 3.5 [7][6] compute different UP resultants. In this particular case, Fig. 3.5 [7] produces the larger UP resultant because the full adjacent uplift pressure enters the cracks (Fig. 3.4a). For a more detailed discussion see (Stefan 2007).

Furthermore, the UP resultant will be used in the biaxial algorithm (Fig. 3.6 [3]). Here, the UP discontinuity will create a cyclic computational behavior. If the UP resultant is calculated when  $y_{cmax}$  is very close to the corner  $P_{ex}$  but between  $P_{sx}-P_{ex}$  (Fig. 3.4a), a large UP value is obtained

(Fig. 3.5 [7]). This large UP value could move the NA in the position where  $y_{cmax}$  will no longer be between  $P_{sx}$ - $P_{ex}$ . Consequently, the UP resultant will have its smallest value. This is because the entire section is cracked in direction y-y and the initial UP distribution is used (Fig. 3.5 [6]). But this small UP resultant will move back the NA, with  $y_{cmax}$  between  $P_{sx}$ - $P_{ex}$ . Then, the *UPCalc* subroutine computes again a large value of UP .... After some iterations this process becomes cyclic. This oscillatory situation is presented in Fig. 3.9 where the NA is nearby  $P_{ex}$ .

To avoid any false cycle identification, the heuristic part of Fig. 3.5 considers two parameters: the number of UP resultants amplitude repetitions, and the difference between consecutive amplitudes. If after a specified number of repetitions the amplitude difference *remains constant*, under an imposed tolerance value, it is concluded that a cycle is present. Then, a mechanical heuristic decision is to be taken: the larger UP amplitude value of the cycle is retained. As a conservative engineering decision, this value is maintained constant for the entire remaining process related to crack propagation to reach an equilibrium position (Fig. 3.5 [11]), (Fig. 3.6 [3]).

Although the UP discontinuity could be interpreted as a problem in the computation of the UP this is not exactly true. Theoretically, all possible three-dimensional *planar* UP distributions will have the same discontinuity when the entire section is cracked in some direction.

### 3.2.4 Biaxial cracking algorithm

The proposed biaxial algorithm is based on the following assumptions:

1. Plane sections before deformation remain plane after deformation.
2. The material remains elastic. The concrete (joint) tensile strength,  $f_t$ , is considered as zero or positive. Compression is negative.
3. The positive signs of  $P$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $T$ ,  $\sigma_z$ , are given in Fig. 3.1b. The centroidal cartesian system is used to compute the section mechanical properties and the planar  $\sigma_z$  distribution (Boresi and Sidebottom 1985):

$$\sigma_z = C + C_x \cdot y - C_y \cdot x \quad (3.5)$$

$$C = \frac{P}{A}, \quad C_x = \frac{M_x I_y + M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}, \quad C_y = \frac{M_y I_x + M_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \quad (3.6)$$

where:

- $P$ : is the axial force,
- $M_x = P \cdot e_{yc}$ ,  $M_y = -P \cdot e_{xc}$ , are the bending moments about  $x$ ,  $y$  axis, with  $e_{xc}$ ,  $e_{yc}$  being the eccentricities of  $P$  with respect to section centroid.

Equation (3.5), for  $\sigma_z$ , is convenient because it can be put in the well-known form of a line ( $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ ) or a plane ( $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$ ,  $c = -1$ ).

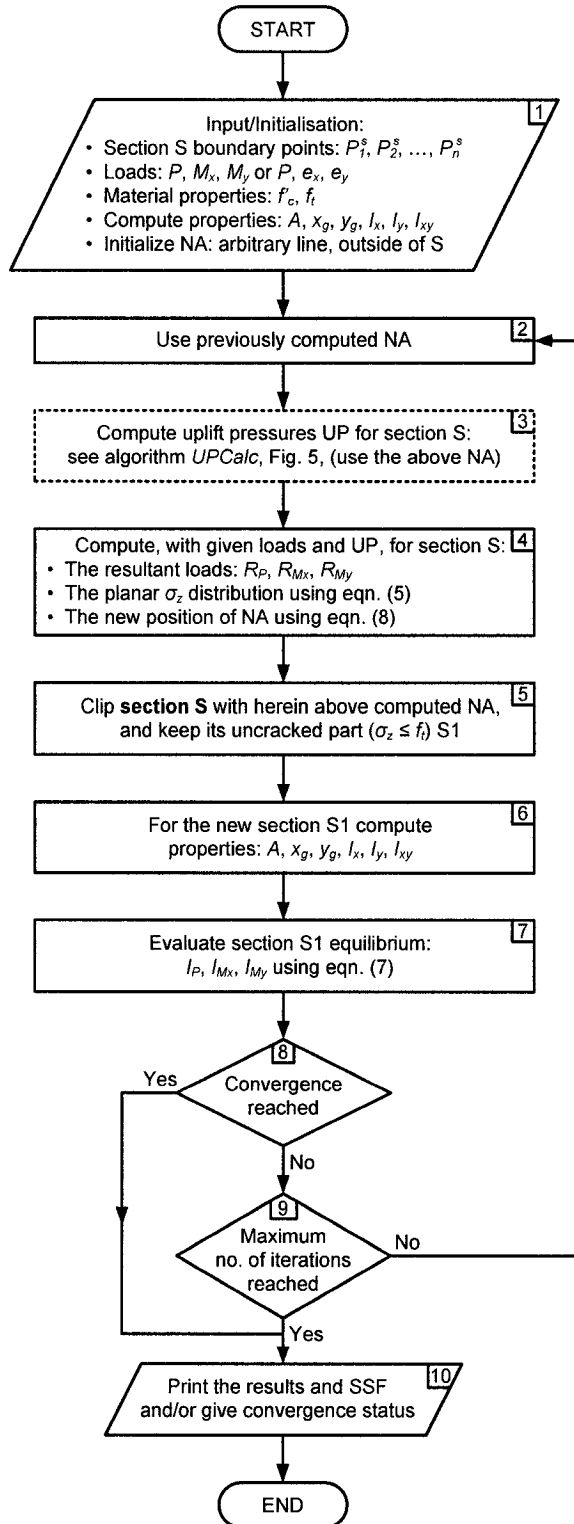
The objective of the cracking analysis is to obtain the NA position when the three equilibrium integrals are simultaneously reaching quasi-null values (e.g.  $10^{-3}$ ), for any given  $P$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ :

$$I_p = \int_A \sigma_z dA - P; \quad I_{Mx} = \int_A \sigma_z \cdot y dA - P \cdot e_y; \quad I_{My} = -\int_A \sigma_z \cdot x dA + P \cdot e_x \quad (3.7)$$

When the NA position is known, it is possible to compute any structural results: uncracked section, failure surface for Rankine criterion, sliding safety factor etc.

The solution of (3.7) is not simple. It leads to a mathematical solution of a nonlinear system of equations. Among the proposed solution strategies some of them are well-known: quasi-Newton tangent method (Yen 1991), quasi-Newton with regula falsi (Yau et al. 1993), and the fixed point method for functions of several variables (Burden and Faires 1989). With the actual electronic computational speed, the execution time is not an important factor to consider. Thus, we were rather concerned with the convergence versatility of the selected method. A general *mathematical* solution method can indicate that there is no solution because of a convergence problem. However, it is difficult to know how far the solution process went, and which parameter might be at the origin of the divergence problem.

Convergence problems in biaxial flexural condition could be due to various factors: irregular sections with arbitrary reinforcements (Yau et al. 1993), structural steel arrangement strongly eccentric for composite sections (Chen et al. 2001), stress redistribution in structure (Bonet et al. 2004). These authors proposed various but not exhaustive solutions. To solve convergence difficulties considering the UP update discontinuity, an adaptive “fixed point” solution method was found appropriate.



**Fig. 3.6.** Biaxial flexure algorithm to compute NA position, normal stresses, and SSF

In general, a fixed point approach, is converging slower than a quasi-Newton method but this is not a disadvantage. It needs more steps but more simpler steps. The real advantage of a fixed point method is that it can explore the convergence status of the iterative process. Despite the fact that it cannot always automatically solve the mathematical problem, it gives enough information to find a mechanical automated heuristic solution. Herein, this method is called “mechanical” and any general Newton method “mathematical”. A fixed point solution algorithm consists in a series of steps in which each previous solution is the entry for the next step until it reaches the convergence criteria. The general mathematical form is  $p = G(p)$  and the convergence characteristics are given by Burden and Faires (1989).

The software implementation of an algorithm (based on the fixed point strategy) to solve the mechanical problem (3.7) is direct, if the NA position is chosen as the main variable. Hence, each previously computed NA generates the next section for which the algorithm computes its NA which, at its turn, generates the new section ... until the convergence criteria are reached.

A detailed presentation of the algorithm is given in Fig. 3.6. It starts with the computation of the mechanical properties of the *current section*, and it initializes the first position of the NA. The algorithm works fine with any arbitrary first selection of NA. However, it is preferable to use a line that cannot intersect the section and whose normal is oriented in the opposite direction of the uncracked section. Thus, that entire section is in compression. The reason for this choice is to avoid some steps, when the applied resultant is inside the kernel. With the UP resultant (Fig. 3.5) and with the initial  $P$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ , the total resultants applied on the section,  $R_P$ ,  $R_{M_x}$  and  $R_{M_y}$ , are computed relative to the centroid of the current section. Using  $R_P$ ,  $R_{M_x}$ ,  $R_{M_y}$  in (3.5), the algorithm determines the distribution of the normal stresses,  $\sigma_z$ , and the equation of the new NA position:

$$-C_y \cdot x + C_x \cdot y + C - f_i = 0 \quad (3.8)$$

The next step is to check if the uncracked part of the current section, obtained by clipping the *user given original section* with the cut line (3.8) can provide equilibrium (3.7). If the equilibrium is fulfilled the process stops. If not, the actual uncracked part becomes the next *current section*, and so on. The *user given original section* must be used in *all* clipping steps no matter the cut line. If, for an iteration, this requirement is not followed and the cut line fall

outside the current section, then the current uncracked section and the clipped section remain the same. Consequently, because the current section doesn't change the process cannot converge.

Equations (3.4) are used to evaluate  $I_P$ ,  $I_{Mx}$ ,  $I_{My}$ , because, similar to the UP computation, a planar distribution,  $\sigma_z$ , over an arbitrary section must be integrated. In this case, the plane equation  $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$ , with  $\sigma_z$  as  $z$  variables, has the form

$$g(x, y) = \sigma_z = -\frac{a \cdot x + b \cdot y + d}{c}, c \neq 0 \quad (3.9)$$

always

The standard equations for a plane which passes through three arbitrary chosen points,  $P_1(0, 0, z_1)$ ,  $P_2(0, 1, z_2)$ ,  $P_3(1, 1, z_3)$ , gives the coefficients:  $a = z_3 - z_2$ ,  $b = z_2 - z_1$ ,  $c = -1$ ,  $d = z_1$ . Equation (3.5), with appropriate applied loads and mechanical properties, is used to compute the  $z_i$  values. Hence,  $z_i = \sigma_z(x_{Pi}, y_{Pi})$ , where  $i = 1, 3$  and  $x_{Pi}$ ,  $y_{Pi}$  are the corresponding coordinates of the above three arbitrary points.

After the process is initialized, it will continue until the maximum permitted number of iterations is attained or until convergence criteria are reached. For convergence, we consider that reaching global equilibrium, as indicated by  $I_P \approx 0$ ,  $I_{Mx} \approx 0$ ,  $I_{My} \approx 0$ , is a good choice. Complementary and more sensitive local convergence criteria are also worth considering: (i)  $\sigma_{compression}$ , (ii) the position of NA, and (iii) the Rankine criteria  $\sigma_{tension} = f_t$ . Fig. 3.6 [3] does all the necessary heuristic steps to ensure the unconditional convergence or to adjust an oscillatory response to obtain an acceptable “convergent” solution, from the engineering point of view. As a useful visual interpretation of the solution, the algorithm also determines and sketches the kernel of the current section, at each step, and the position of the total resultants relative to it.

### 3.3 Validation examples

To validate the results of all above algorithms (kernel, *UPCalc*, biaxial) five examples are presented (Figs. 3.7a-e).

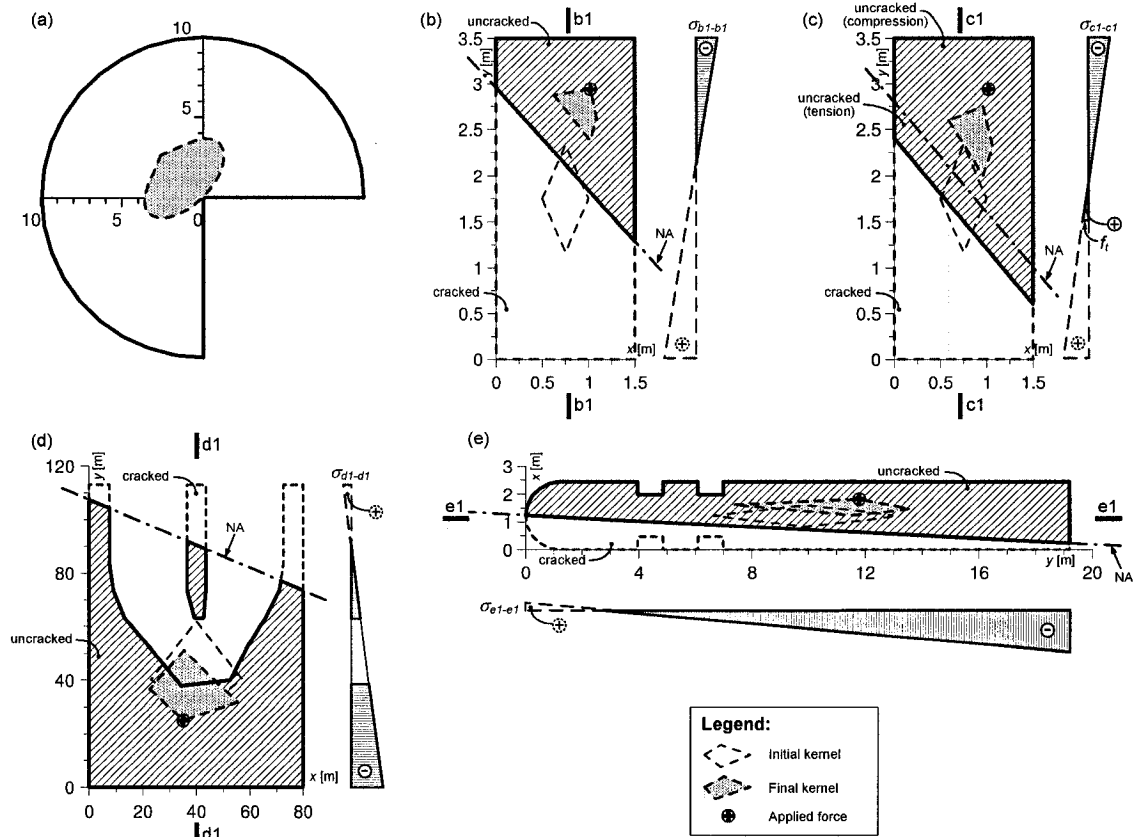
#### 3.3.1 Kernel test

The first example is the kernel for a  $\frac{3}{4}$  of a circle, a section presented qualitatively in many

papers (Turcotte and Wilson 1998, Mofid et al. 2001). The kernel shape shown in Fig. 3.7a proved to be qualitatively identical with the one mentioned in the above references. The boundary points of the kernel were also checked with the computer program presented by Turcotte and Wilson (1998).

### 3.3.2 No-tension rectangular section

The second example is a rectangular section with a no-tension material. The given load is:  $P = -100$  kN,  $e_x = 1.02$  m,  $e_y = 2.94$  m. The results were validated from published tables (Goulet and Boutin 1998). The convergence for  $I_P$ ,  $I_{Mx}$ ,  $I_{My}$  ( $\approx 10^{-3}$ ) was obtained after 6 iterations.



**Fig. 3.7.** Validation examples: (a) kernel of  $\frac{3}{4}$  of a circle; (b) no-tension rectangular section  $P = -100$  kN,  $e_x = 1.02$  m,  $e_y = 2.94$  m; (c) rectangular section with  $f_t = 20$  kPa ( $P = -100$  kN,  $e_x = 1.02$  m,  $e_y = 2.94$  m); (d) power house section ( $P = -35000$  kN,  $e_x = 35$  m,  $e_y = 25$  m); (e) spillway pier section ( $R_P = -7959.17$  kN,  $R_{ex} = 1.824$  m,  $R_{ey} = 11.794$  m)



### 3.3.3 Rectangular section with $f_t = 20\text{kPa}$

The third example is a rectangular section with tensile strength,  $f_t = 20\text{ kPa}$  (this is not a realistic value but it was selected for a better visualization of the NA location in Fig. 3.7c). The given load is:  $P = -100\text{ kN}$ ,  $e_x = 1.02\text{ m}$ ,  $e_y = 2.94\text{ m}$ . The results were validated manually. The convergence was obtained after 25 iterations.

### 3.3.4 Powerhouse section

This example was adapted from a practical case published by Tracy and Kling (1982). The section, composed of two separate parts, was subjected to the following load:  $P = -35000\text{ kN}$ ,  $e_x = 35\text{ m}$ ,  $e_y = 25\text{ m}$  and  $f_t = 0\text{ kPa}$ . The results were validated manually. The convergence was obtained in 4 iterations.

### 3.3.5 Spillway pier section (biaxial interaction and UP validation)

The last example, a real spillway pier from a hydroelectric facility in Québec (Canada), was analyzed for lateral loading. The applied load is:  $R_P = -7959.17\text{ kN}$ ,  $R_{ex} = 1.824\text{ m}$ ,  $R_{ey} = 11.794\text{ m}$ . The above resultant and its eccentricities were obtained with the given force:  $P = -9608.13\text{ kN}$ ,  $e_x = 1.721\text{ m}$ ,  $e_y = 11.116\text{ m}$  and with the uplift pressure:  $R_{UP} = +1648.96\text{ kN}$ ,  $R_{UPex} = 1.220\text{ m}$ ,  $R_{UPey} = 7.865\text{ m}$ . For the UP the following values were given:  $h_w(0) = h_w(6.98) = 5.79\text{ m}$ ,  $h_w(9.42) = h_w(19.2) = 2.44\text{ m}$ ,  $\gamma_w = 9.81\text{ kN/m}^3$ . The results was validated manually, and the convergence was obtained in 5 iterations. The UP resultant was verified manually with the computation of a volume and its centroid.

## 3.4. 3D Analysis of a spillway pier

The last numerical examples are intended to show the convergence characteristics of the proposed biaxial interaction algorithm for hydraulic structures.

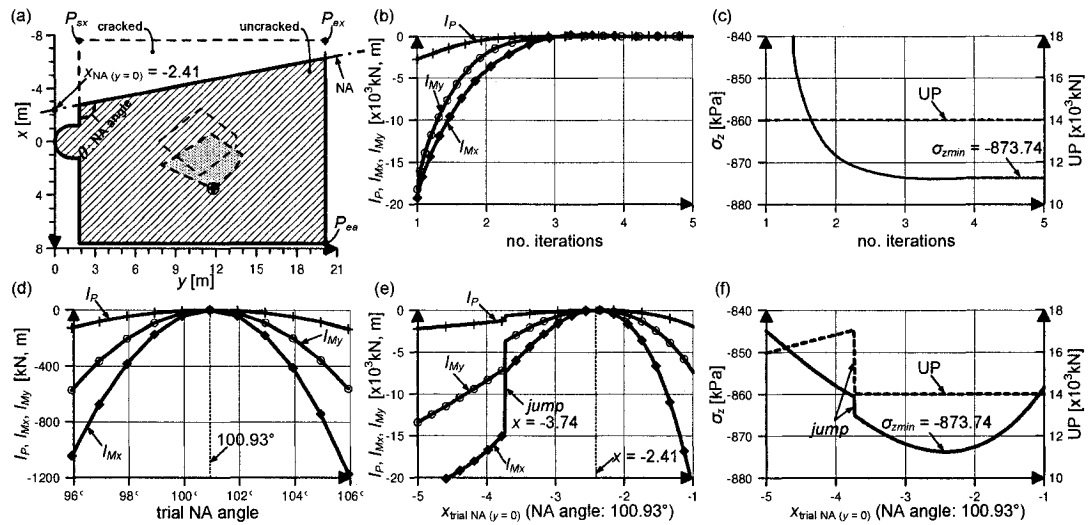
### 3.4.1 Section analyzed

The section (Fig. 3.8a and 3.9a) is the base of the pier (practically unreinforced), analyzed in previous example 3.3.5. (Fig. 3.7e). The dimensions of the rectangular part are  $15.24\text{ m} \times 18.29\text{ m}$ , the pier nose is a semicircle with a radius of  $1.22\text{ m}$ . The overall width of the entire section is  $20.12\text{ m}$ . The initial UP has the following values:  $h_w(0) = h_w(1.83) = 6.7\text{ m}$ ,

$h_w(20.12) = 3.35$  m, the zone between  $y = 1.83$  m and  $y = 20.12$  m is “modifiable” with  $\gamma_w = 9.81$  kN/m<sup>3</sup>.

### 3.4.2 Loading condition 1 - equilibrium convergence

The first loading condition, Fig. 3.8, shows a situation where the convergence criteria and the final results are reached with a mathematical method (and also with the heuristic approach). The applied load is (in addition to the above UP):  $P = -100000$  kN,  $e_x = 3.0$  m,  $e_y = 11.5$  m. The computed UP is  $R_{UP} = +13989.52$  kN,  $R_{UPe_x} = 0.0$  m,  $R_{UPe_y} = 9.80$  m.



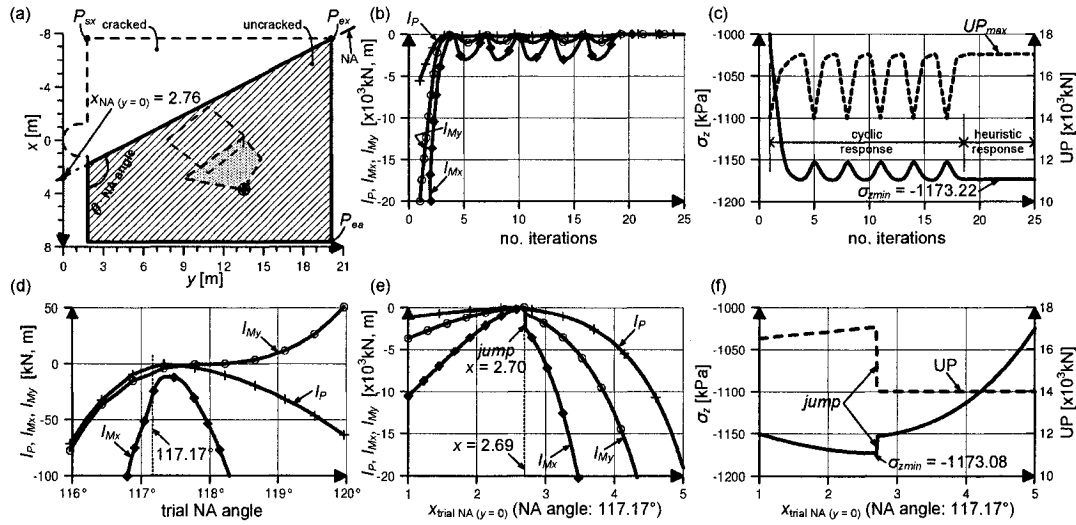
**Fig. 3.8.** Convergence of the algorithm: (a) section analyzed ( $P = -100000$  kN,  $e_x = 3.0$  m,  $e_y = 11.5$  m); (b) convergence to the equilibrium state; (c) convergence of normal stresses; (d) minimum values of  $I_P$ ,  $I_{Mx}$  and  $I_{My}$  vs trial NA angle; (e), (f) evolution of equilibrium state, of UP and of  $\sigma_z$  for fixed NA angle vs  $x_{\text{trial NA}} (y = 0)$

In Figs. 3.8b-c the evolution of equilibrium integrals (3.7), UP resultant, and  $\sigma_z$ , with the proposed algorithm (Fig. 3.6), is presented. The convergence is monotonic with 4 iterations. In Figs. 3.8d-f a mathematical approach is presented to further prove that the solution is valid. A trial angle ( $\theta$  in Fig. 3.8a) and a step (0.01m) between two parallel NA is selected. For each step, the equilibrium integrals (3.7) was computed. Then, the trial angle was incremented ( $\sim 0.2^\circ$ ) and, for the complete section, new calculations of (3.7) were done again. This process was applied systematically to cover all NA possible positions and inclinations. For each iteration, the

minimum of the integrals (3.7) was retained, as shown in Fig. 3.8d. For a NA angle  $\sim 100.93^\circ$  the three integrals are nearly zero and the solution is reached. This angle was selected to show the evolution of different convergence indicators while scanning the section with incrementing parallel NA (step 0.01m). Figs. 3.8e-f present these indicators: integrals (3.7), UP resultant and  $\sigma_z$ . The discontinuity in UP updates (Fig. 3.8f), as explained above, occurs when the NA passes from segment  $P_{sx}-P_{ex}$  to  $P_{ex}-P_{ea}$  (Fig. 3.8a). The position of the discontinuity is far from the converged position (Fig. 3.8e, jump at  $\sim -3.7$ m, and convergence at  $\sim -2.4$ m). This situation changes dramatically in Fig. 3.9. The final, heuristic and mathematical  $\sigma_z$ , is the same  $\sigma_z = -873.74$ kPa (Figs. 3.8c, f).

### 3.4.3 Loading condition 2 - cyclic response

In the second loading condition, Fig. 3.9, a situation is shown where the convergence with a standard mathematical method is not possible. However, with a heuristic approach an engineering solution is found. The applied load is (in addition to the above UP):  $P = -100000$  kN,  $e_x = 3.0$  m,  $e_y = 13.0$  m, and the final computed UP is  $R_{UP} = +17019.53$  kN,  $R_{UPex} = -0.339$  m,  $R_{UPey} = 10.410$  m.



**Fig. 3.9.** Cyclic convergence problem: (a) section analyzed ( $P = -100000$  kN,  $e_x = 3.0$  m,  $e_y = 13.0$  m); (b) convergence to the equilibrium state; (c) convergence of normal stresses; (d) Minimum values of  $I_P$ ,  $I_{Mx}$  and  $I_{My}$  vs trial NA angle; (e), (f) evolution of equilibrium state, of UP and of  $\sigma_z$  for fixed NA angle vs  $x_{trial NA}(y = 0)$

For this case the same analysis were done, as above, with the proposed algorithm as shown in Figs. 3.9b-c. All possible NA positions and inclinations are considered in Figs. 3.9d-f. From Fig. 3.9d, it is clear that the three integrals (3.7) are not simultaneously converging to zero ( $I_p$  has a minimum at  $\theta \approx 117.3^\circ$ ,  $I_{Mx}$  at  $\theta \approx 117.4^\circ$  and  $I_{My}$  at  $\theta \approx 118.2^\circ$ ) so the problem doesn't have a rigorous mathematical solution. Nevertheless, the angle  $\theta = 117.17^\circ$  (the angle for the heuristic NA) was selected to show the evolutions of different convergence indicators, Figs. 3.9e-f. The final heuristic normal stress,  $\sigma_z = -1173.22\text{kPa}$ , is very close to the instable minimum  $\sigma_z = -1173.08\text{kPa}$  (Figs. 3.9c, f).

In this loading condition, the discontinuity in UP update leads to a cyclic computation in (3.7) and (3.5), as shown in Figs. 3.9b-c. To avoid convergence problem, due to this oscillatory behavior, the biaxial algorithm (Fig. 3.6) uses its heuristic abilities (Fig. 3.6 [3]). It *learns*, from the previous steps, the evolution of the uplift pressures. Then it uses some iterations to *identify* a cyclic process. When the cyclicity is found, it *decides* to use the maximum UP resultants in the cycle to reach an acceptable engineering solution. With these heuristic steps (*learn-identify-decide*) the solution was obtained in 21 iterations.

### 3.5 Summary and Conclusions

This paper deals with the implementation of robust algorithms based on strength of materials developed to compute the cracking response of concrete hydraulic structures. It computes the normal stress distribution and identifies the position of the resultants. It also determines the NA for an arbitrary concrete section, with limited or no tensile strength, in the context of a 3D coupled hydro-mechanical problem. A versatile computer program was developed to implement this algorithms thus presenting a powerful tools to practicing engineers for 3D cracking analysis of unreinforced hydraulic structures.

The kernel determination of section with arbitrary shapes was adapted to this non-linear hydro-mechanical problem. It allows to visualize resultants position with respect to the geometric kernel boundary iterative evolution.

A three-dimensional extension of the USACE recommendations (USACE 1995) for iterative update of uplift pressure in arbitrary cracked section was proposed. This extension, which uses three planes, allows to consider various possibilities in a computer program which updates the UP magnitude and distribution in each iteration.

It was rigorously demonstrated that, for some spillway sections, a *mathematical* numerically convergent *solution* is not possible because of an oscillatory behavior due to discontinuities in the functions that describe the equilibrium of the system. It is worth considering that in such cases an *engineering solution* exists but it cannot be reached with a rigorous mathematical solution strategy.

To solve the above convergence problem a robust heuristic “mechanical informed” multi-criteria algorithm was developed, based on the fixed point solution strategy. This strategy is adequate when rigorous mathematical methods (Newton-like) diverge. The advantage of the presented fixed point approach is not its convergence speed but its *controlled convergence* to an acceptable engineering solution. This is a more important issue for stability of systems when discontinuities arise in the solution process.

The proposed analysis method is complementary to sophisticated FE analysis. It is more simple, more robust and more adapted to the problems which consider the hydro-mechanical interaction for global equilibrium assessment of hydraulic structures. If a structural integrity problem is detected more refined local stresses computation, not assuming a linear distribution of normal stress, can be done using FE.

### **3.6 Acknowledgements**

The financial support provided by the Quebec Fund for Research on Nature and Technology (FQRNT), and the Natural Science and Engineering Research Council of Canada (NSERC), and Hydro-Québec, is acknowledged.

### 3.7 References

- Azmi, M., and Paultre, P. (2002). "Three-dimensional analysis of concrete dams including contraction joint non-linearity." *Engineering Structures*, 24(6), 757-771.
- Bonet, J. L., Romero, M. L., Miguel, P. F., and Fernandez, M.A. (2004). "A fast stress integration algorithm for reinforced concrete sections with axial loads and biaxial bending." *Computers & Structures*, 82(3), 213-225.
- Boresi, A. P., and Sidebottom, O. M. (1985). *Advanced mechanics of materials*, 4<sup>th</sup> Ed., Wiley, New-York, 283-290.
- Burden, R. L., and Faires, D. F. (1989). *Numerical analysis*, 4<sup>th</sup> Ed., PWS-KENT Publishing Company, Boston, 38-45 and 527-558.
- CDA (Canadian Dam Association) (2006). *Dam safety guidelines*, Edmonton, Alberta, Canada.
- Chen, S. F., Teng, J. G., and Chan, S. L. (2001). "Design of biaxially loaded short composite columns of arbitrary section." *ASCE Journal of Structural Engineering*, 127(6), 678-685.
- Corns, C. F., Schrader, E. K., and Tarbox, G. S. (1988). *Advanced dam engineering for design, construction and rehabilitation, Ch. 16: Gravity dam design and analysis*, R.B. Jansen Ed., Van Nostran Reinhold, New-York, 466-493.
- FERC (Federal Energy Regulatory Commission) (2002). *Engineering guidelines for the evaluation of hydropower projects*, Department of Energy, Washington, Chapter 3: Gravity Dams, <<http://www.ferc.gov/>> (March 17, 2007).
- Goulet, J., and Boutin, J. P. (1998). *Memento on strength of materials*, 8<sup>th</sup> Ed., Dunod (in French), Paris, 41-43.

Leclerc, M., Léger, P., and Tinawi, R. (2003). "Computer aided stability analysis of gravity dams - CADAM." *Advances in Engineering Software*, 34(7), 403-420.

Leclerc, M., and Léger, P. (2007). *CADAM3D. Version 2 - User's manual*, École Polytechnique de Montréal (in French), Canada.

Marín, J. (1980). "Computing unidimensional normal stress resultants." *ASCE Journal of the Structural Division*, 106(1), 233-245.

Marín, J. (1984). "Computing columns, footings and gates through moments of area." *Computers & Structures*, 18(2), 343-349.

Mofid, M., Alizadegan, R., Ashori, B., and Yavari, A. (2001). "Computing the kern of a general cross-section." *Advances in Engineering Software*, 32(12), 949-955.

O'Rourke, J. (1998). *Computational Geometry in C*, 2<sup>nd</sup> Ed., Cambridge University Press, Cambridge (UK), 74-118.

Osterle, J. P., Bazan, E., Rizzo, P. C., and Weatherford, C. (1993). "Three-Dimensional Stability Analysis of Carpenter Dam." *Proceedings of the Specialty Conference: Geotechnical Practice in Dam Rehabilitation*, ASCE, Raleigh, North Carolina, 86-99.

Popov, E. P., Nagarajan, S., and Lu, Z. A. (1976). *Mechanics of materials*, 2<sup>nd</sup> Ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 208-216.

Stefan, L. (2007). *A three-dimensional extension of the gravity method for cracking analysis of spillway piers including uplift pressures*, M.Sc.A. thesis, École Polytechnique de Montréal (in French), Canada.

Tracy, F. T., and Kling, C. W. (1982). *A three-dimensional stability analysis/design program (3DSAD)*, Report 3 - General analysis module (CGAM), U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station ADP Center, Vicksburg, 31-51.

Turcotte, L. H., and Wilson, H. B. (1998). *Computer applications in mechanics of materials using MATLAB*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J., 143-155.

USACE (US Army Corps of Engineers) (1995). *Engineering and design: Gravity dam design*, Report EM 1110-2-2200, Washington.

USBR (United States Bureau of Reclamation) (1987). *Design of small dams*, 3<sup>rd</sup> Ed., Denver, Colorado.

Yau, C. Y., Chan, S. L., and So, A. K. W. (1993). "Biaxial bending design of arbitrarily shaped reinforced concrete column." *ACI Structural Journal*, 90(3), 269-278.

Yen, J. Y. R. (1991). "Quasi-Newton method for reinforced-concrete column analysis and design." *ASCE Journal of Structural Engineering*, 117(3), 657-666.



## CHAPITRE 4

### DISCUSSIONS ET CONSIDÉRATIONS COMPLÉMENTAIRES

*Cette partie présente des détails supplémentaires sur les méthodes et les analyses faites dans le contexte de l'article (ASCE Journal of structural Engineering) mais qui n'y ont pas été ajoutées à cause de l'espace limité à 10000 mots équivalents.*

#### 4.1 Méthode de résolution “fixed point” pour les équations nonlinéaires

La méthode, “fixed point” (“du point fixe”), utilisée dans l'article est généralement présentée dans la littérature (Burden et Faires 1989) mais, ici, on démontre son application directe pour la résolution d'un problème mécanique.

Comme toutes les méthodes nonlinéaires, cette méthode propose une stratégie de résolution d'une équation,  $f(x) = 0$ , afin de trouver la valeur de  $x$  pour laquelle l'équation est satisfaite. Mais, la méthode “fixed point” s'applique lorsque l'on peut transformer l'équation dans une forme équivalente  $g(x) = x$ . Bien que, généralement, cette transformation soit toujours possible les possibilités pour l'obtenir sont multiples. La question qui se pose est: est-ce qu'une transformation est plus avantageuse que l'autre? La réponse est *OUI* ce que l'on démontre dans ce chapitre.

Burden et Faires (1989) ont prouvé les critères rigoureux mathématiques pour avoir une convergence non conditionnelle de la méthode “fixed point”. On peut énoncer qu'avec un choix initial  $x_0$  arbitraire dans  $[a, b]$ , la méthode converge dans l'intervalle  $[a, b]$ , avec  $g(x) \in [a, b]$  pour tous les  $x \in [a, b]$ , si sa première dérivée respecte:  $|g'(x)| \leq k < 1$  pour tous les  $x \in [a, b]$ . Ensuite, la séquence convergente de calcul est:  $x_n = g(x_{n-1})$  avec  $n \geq 1$ . Il est important de préciser

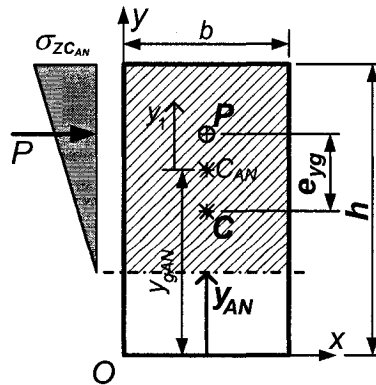
que si le critère ci-dessus est respecté, la méthode converge mais s'il n'est pas respecté on ne peut pas conclure que la méthode converge ou diverge. Par contre, on peut sûrement conclure que la convergence pourrait être difficile.

Comme application à un problème de mécanique nonlinéaire on montre le calcul de la position de l'AN d'une section rectangulaire (Fig. 4.1) sans résistance en traction. Elle est sollicitée dans une seule direction,  $P$ - $M_x$  (l'article présente la même méthode pour des sections *arbitraires* avec ou sans résistance en traction, sollicitées en flexion biaxiale). Avec les notations de la Fig. 4.1 on écrit:

$$\sigma_{zC_{AN}} = \frac{P}{A_c} + \frac{M_{xC_{AN}}}{I_{xC_{AN}}} \cdot y_i \text{ valable si } A_c \neq 0 \text{ et } I_{xC_{AN}} \neq 0 \quad (4.1)$$

où:

- $\sigma_{zC_{AN}}$  : est la contrainte normale calculée par rapport au centroïde de la section comprimée,  $C_{AN}$ ;
- $P$ : est la force appliquée avec une excentricité,  $e_{yg}$ , par rapport au centroïde de la section initiale,  $C$ ;
- $M_{xC_{AN}} = P \cdot \left( e_{yg} - \frac{y_{AN}}{2} \right)$  : est le moment autour de l'axe  $x$  par rapport au  $C_{AN}$ ;
- $A_c = b \cdot (h - y_{AN})$  et  $I_{xC_{AN}} = \frac{b \cdot (h - y_{AN})^3}{12}$  sont les propriétés mécaniques de la section comprimée par rapport à son centroïde (l'aire, le moment de l'inertie).



**Fig. 4.1.** Section analysée

Afin d'identifier la position de l'AN on pose que l'équation de la contrainte normale est nulle:

$$0 = \frac{P}{A_c} + \frac{M_{x_{CAN}}}{I_{x_{CAN}}} \cdot y_{1AN} \Rightarrow y_{1AN} = -\frac{P \cdot I_{x_{CAN}}}{M_{x_{CAN}} \cdot A_c} \text{ valable si } M_{x_{CAN}} \neq 0 \quad (4.2)$$

On utilise la notation,  $y_{1AN}$ , pour  $y_1$  de l'AN. On exprime (Fig. 4.1):

$$y_1 = y - y_{rAN} = y - \frac{h - y_{AN}}{2} \text{ valable si } 0 \leq y_{AN} \leq h \quad (4.3)$$

sinon  $y_1 = y - h/2$ . On développe ici seulement le cas avec  $y_{AN} \geq 0$  (la section a une partie tendue).

Si on écrit (4.3) pour l'AN (avec  $y = y_{AN}$ ) et en la réduisant à une forme plus simple on obtient:

$$y_{1AN} = \frac{y_{AN} - h}{2} \quad (4.4)$$

En remplaçant chaque variable dans (4.2), on obtient:

$$y_{AN} = h - \frac{2 \cdot P \cdot b \cdot (h - y_{AN})^3}{12 \cdot P \cdot \left(e_{yR} - \frac{y_{AN}}{2}\right) \cdot b \cdot (h - y_{AN})} \quad (4.5)$$

Pour avoir la forme no. I du "fixed point",  $y_{AN} = g(y_{AN})$ , on simplifie (4.5):

$$y_{AN} = h - \frac{(h - y_{AN})^2}{6 \cdot \left(e_{yR} - \frac{y_{AN}}{2}\right)} = g_{forme I}(y_{AN}) \quad (4.6)$$

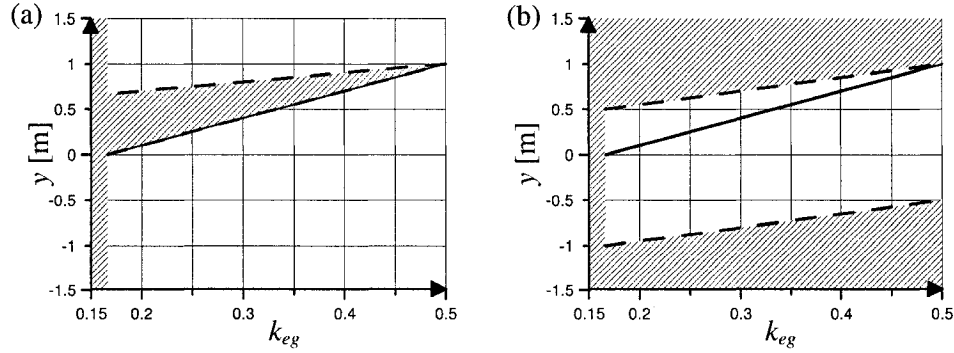
En réarrangeant les termes on obtient la forme "fixed point" no. II:

$$y_{AN} = 2 \cdot e_{yR} - \frac{y_{AN}}{h} \cdot (2 \cdot e_{yR} - y_{AN}) - \frac{(h - y_{AN})^2}{3 \cdot h} = g_{forme II}(y_{AN}) \quad (4.7)$$

On constate que la forme no. I peut avoir des problèmes si le dénominateur est zéro (i.e.  $y_{AN} = 2e_{yR}$ ), donc cette forme n'est pas générale. Par contre, la forme no. II est indéfinie seulement quand  $h = 0$ , ce qui est convenable. L'équation (4.6) ou (4.7) est, en effet, une équation de 2<sup>ème</sup> degré et sa solution est aisément trouvée, avec la méthode analytique classique:

$$y_{AN} = 3 \cdot e_{yR} - \frac{h}{2} \text{ valable si } y_{AN} \geq 0 \Rightarrow e_{yR} \geq \frac{h}{6} \quad (4.8)$$

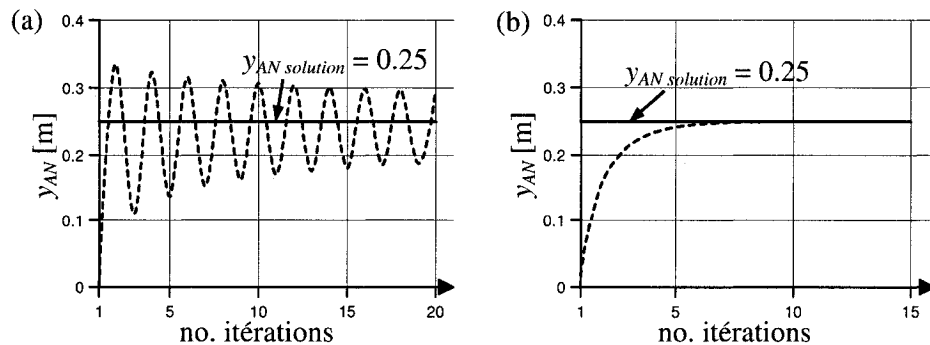
Afin de vérifier le critère de convergence (Burden et Faires 1989) pour chaque forme (I et II) on a calculé les dérivées des fonctions (4.6) et (4.7). On représente à la Fig. 4.2 le domaine possible de la solution, quand  $|g'(y)| < 1$  où  $g'$  est la dérivée du (4.6) ou (4.7). Pour les parties hachurées la solution n'existe pas.



**Fig. 4.2.** Domaine possible de la solution pour l'équation mécanique (flexion uniaxiale) nonlinéaire (4.2) avec la méthode "fixed point": (a) forme I (4.6); (b) forme II (4.7)

À la Fig. 4.2 on a considéré  $h = 1$  et on a noté  $k_{eg} = \frac{e_{yg}}{h}$ . Les lignes pointillés supérieure et inférieure montrent les valeurs de  $y_{AN\ max}$  et  $y_{AN\ min}$  pour avoir  $|y_{AN}'(y)| < 1$ . La ligne continue montre  $y_{AN\ solution}$  de (4.8). Les valeurs possible du  $k_{eg}$  sont entre  $[1/6, 1/2)$ .

Pour la forme I la ligne  $y_{AN\ solution}$  est superposée sur celle pour  $y_{AN\ min}$ . C'est donc possible d'avoir des problèmes de convergence (Fig. 4.3) parce que la solution correcte est *superposée* sur une de ses limites (Fig. 4.2a). Généralement, la forme I convergera après une infinité d'itérations. Pour la forme no. II les problèmes de convergence apparaîtront dans la région où  $k_{eg} \in [0.4, 0.5]$  quand la solution correcte est très proche de  $y_{AN\ max}$  (Fig. 4.2b). Ce comportement est normal parce que si  $k_{eg}$  est entre  $0.4 \div 0.5$  la charge est très proche du contour de la section. À la limite, si  $k_{eg} = 0.5$  la solution est difficile à obtenir ou impossible parce que la charge est sur le contour.



**Fig. 4.3.** L'évolution du processus itératif de convergence ( $h = 1$ ,  $k_{eg} = 0.25$ ) pour la: (a) forme I; (b) forme II

Ces prévisions sont validées par les essais numériques effectués. Par exemple, pour  $h = 1$  et  $k_{eg} = 0.25$ , la solution correcte (4.8) est  $y_{AN} = 0.25$ . Dans la première itération on obtient, pour  $y_{AN\ 0} = 0.0$ , avec la forme I (4.6)  $y_{AN\ 1} = 0.333$  et avec la forme II (4.7)  $y_{AN\ 1} = 0.166$ . Si on continue le processus la forme II converge après 7 itérations mais la forme I ne converge pas (même après 30000 itération). L'évolution du processus est présenté dans la Fig. 4.3.

En effet, la forme I converge rarement et seulement par hasard. Mais, la forme II converge toujours dans un maximum de 20 itérations (même avec  $k_{eg}$  très proche de 0.5). Ces observations sont très importantes pour la méthode, "fixed point", elle-même mais, aussi, pour l'algorithme développé dans l'article. On a montré ici qu'un comportement cyclique peut arriver pour des problèmes mal posés mathématiquement. Mais, la forme du cycle est différente de celle du cycle présenté dans l'article: son amplitude n'est jamais fixe et la moyenne des amplitudes tendent vers la solution exacte (par la suite, l'enveloppe supérieure des cycles n'est *jamais* une ligne).

#### 4.2 Case de chargement 3 - problème de convergence "presque constante"

On a présenté dans l'article plusieurs exemples afin de valider les algorithmes proposés. On a présenté, aussi, deux cas détaillés pour étudier leur convergence. Ensuite, on montre ici un cas intéressant qui peut créer des problèmes de convergence, mais qui est considéré et solutionné correctement par les algorithmes développés dans ce mémoire.

Dans le contexte de l'article on a montré que, parfois, des cycles dans le calcul des sous-pressions peuvent apparaître. Ces cycles provoquent, par la suite, des problèmes de "convergence cyclique", de l'algorithme de flexion biaxiale. Puis, on a montré qu'une étape de la solution est d'*identifier* le cycle. Mais, l'identification n'est pas évidente pour plusieurs raisons: la formulation mal posée mathématiquement (voir le paragraphe précédent), le cycle a trop d'itérations biaxiale, le choix difficile de la différence des amplitudes consécutives et du nombre de cycles à analyser précédemment pour identifier un cycle. Une mauvaise formulation mathématique peut être évitée avec les critères analytiques pour vérifier la convergence. Pour choisir la différence de l'amplitude et le nombre de cycles on pourrait faire des études de cas pertinents. Les difficultés surviennent quand les cycles ont beaucoup d'itérations.

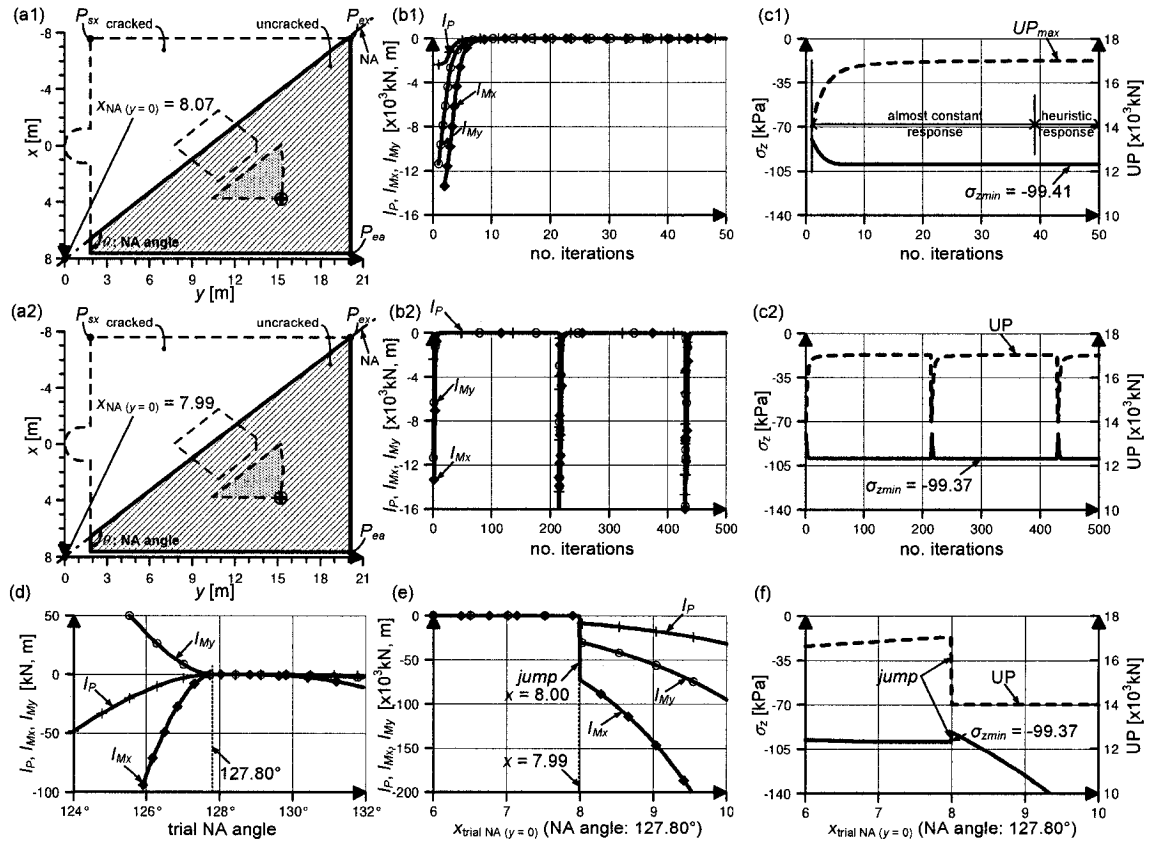
Par exemple, si le cycle apparaît à chaque 200 itérations on doit retenir au minimum 600 itérations (trois cycles) pour identifier un comportement oscillatoire. C'est un grand effort de calcul pour les analyser qui nécessite beaucoup de temps et de mémoire. Par la suite, une solution s'impose. On en a proposé deux: (a) on pourrait retenir justement quelques itérations choisies avec un critère au lieu de les retenir toutes; (b) on pourrait prévoir *heuristiquement* que le cycle va *apparaître* sans nécessairement faire les itérations. Autrement dit, pour l'exemple ci-dessus, on a besoin de 600 itérations pour l'approche (a) mais pour l'approche (b) on aura besoin de seulement 40-50. On considère que l'approche (a) est plus précise mais que l'approche (b) peut donner d'excellents résultats si la partie heuristique est bien faite.

Un cycle très longue (i.e. avec trop d'itérations) est produit par un avancement très lent de la position de l'AN dans l'algorithme de flexion biaxiale. Cette situation existe, généralement, quand l'influence des sous-pressions est très grande sur l'équilibre (i.e. lorsque le rapport  $P/R_{up} \approx 1$ ). Aussi, elle pourrait être produite par un défaut de la formulation mathématique mais dans ce cas un vrai cycle n'existe pas et sa forme particulière peut être identifié (voir le paragraphe précédent). Dans ce dernier cas les possibilités heuristiques de l'algorithme sont cruciales parce qu'il doit faire la différence entre un vrai et un faux cycle, au lieu de, justement, l'identifier. Un cycle est "vrai" s'il apparaît à cause de discontinuités dans le calcul des SP et non à cause d'une mauvaise formulation mathématique au niveau de la programmation. S'il apparaît à cause de la formulation mathématique on l'appelle "un faux cycle". On considère d'ici, toujours, que la formulation mathématique est bonne et que les problèmes de convergence se produisent à cause du rapport entre les charges appliquées et les sous-pressions actualisées.

La Fig. 4.4. montre un cas où il y a la situation ci-dessus évoquée: l'influence des sous-pressions est importante par rapport aux totales charges appliquées. Le rapport entre  $P = 22000\text{kN}$  et les  $SP \approx 16000\text{ kN}$ ) est  $\sim 1.5$ . La section analysée est identique avec celle de l'article, seulement le cas de chargement est différent. Aussi, les graphiques présentés sont dans le même format que ceux du chapitre 3 (Fig. 3.8, 3.9).

Le cas montré dans la Fig. 4.4 est particulier parce que bien qu'il provoque une actualisation cyclique des sous-pressions il peut converger sans l'approche heuristique et avec celui-ci

(Figs. 4.4 a2-c2 et a1-c1). Heuristiquement, la convergence est obtenue après 41 itérations et non heuristiquement elle est obtenue après 214 itérations. La différence pour le calcul de la position de l'AN et de la contrainte normale maximale ou minimale, avec les deux approches, est négligeable ( $< 0.1\%$ ). Le cas est intéressant parce qu'il peut converger avec les deux méthodes, mais à la limite: il converge dans 214 itérations et l'itération 215 provoque une discontinuité dans les SP. Dans ce cas la périodicité est  $\sim 200$  cycles. Si on change un peu l'excentricité (e.g.  $e_x = 0.59383$  m au lieu de  $0.59382$  m) la périodicité devient  $\sim 500$  cycles ou plus mais la forme des SP reste identique. Dans ce cas la solution mathématique existe (Figs. 4.4 d-f) mais elle est obtenue difficilement suite à la forme spéciale de l'évolution des SP (paliers, Figs. 4.4 c1, c2).



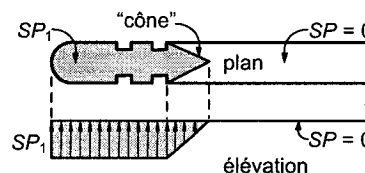
**Fig. 4.4.** Problème “presque constante”: (a1), (a2) section analysée heuristiquement et non-heuristiquement ( $P = -22000$  kN,  $e_x = 0.59382$  m,  $e_y = 11.5$  m); (b1), (b2) convergence heuristique et non-heuristique à l'état de l'équilibre; (c1), (c2) convergence heuristique et non-heuristique des contraintes normales; (d) valeurs min. de  $I_P, I_{Mx}$  et  $I_{My}$  vs l'angle de test de l'AN; (e), (f) l'évolution de l'état de l'équilibre, de UP et  $\sigma_z$  pour l'angle de l'AN fixé vs  $X_{trial NA}(y=0)$

La partie heuristique de l'algorithme essaye de trouver "un palier" dans l'évolution des SP. Dès qu'il le trouve il décide d'utiliser la valeur maximale des SP, calculée sur le palier, comme constant pour l'algorithme de flexion biaxiale. En effet, c'est exactement le même comportement que pour le cycle décrit dans l'article mais la décision est prise avant l'apparition du cycle. On pourrait dire qu'il juge comme cela: "si l'évolution des SP est avec un palier, la possibilité d'apparition d'un cycle est très grande, donc je considère déjà que le cycle existe". On pourrait voir l'avantage de ce jugement dans le nombre d'itération (41 vs 214) quand la différence entre les réponses (e.g. les contraintes normales) est  $< 0.1\%$ .

### 4.3 Discussion sur l'approche proposée pour la représentation 3D des sous-pressions

L'extension 3D pour actualiser les sous-pressions (SP) est présentée dans l'article (chapitre 3). On discute ici certains détails afin de mieux comprendre les limites, les avantages et les inconvénients de la méthode qui a été développée:

- On comprend qu'une zone est "modifiable" si dans cette zone l'algorithme peut modifier la distribution initiale des sous-pressions suite à la progression de la fissuration. On peut introduire une distribution des SP initialement formée de plusieurs zones où la variation est constante ou linéaire. Les zones pour lesquelles la distribution est constante ne peuvent pas être "modifiable". Pour chaque zone on peut spécifier la distribution initiale comme linéaire (i.e. pente constante) ou comme un "cône" (Fig. 4.5). Pour la pente constante on considère la même distribution sur la largeur de la section. Par contre, pour le cône on prend, aussi, une variation *sur* la largeur. Cette option est utile, par exemple, quand en amont il y a une valeur quelconque des sous-pressions mais en aval les deux côtés de la section sont à la pression atmosphérique. Par la suite, l'algorithme adapte la variation afin d'avoir les sous-pressions nulles premièrement sur les côtés et après progressivement vers l'intérieur.



**Fig. 4.5.** Distribution des sous-pression (SP) sous forme de "cône" sur un pilier



- Si la distribution dans une zone est “modifiable”, cela ne veut pas dire qu’elle *sera* automatiquement modifier mais qu’elle *pourra* être modifier. La différence est importante. La modification est faite seulement si dans la figure 3.5 le pas suivant après 3.5 [5] est 3.5 [7]. Si une zone “modifiable” est fissurée complètement dans une direction l’algorithme ne modifie pas la distribution parce que la condition 3.5 [5] n’est pas respectée. Bien que cela ne soit pas rigoureusement exact on considère que c’est une bonne approximation de la situation réelle. Une solution plus exacte devrait prendre une distribution continue qui ne provoque pas le saut causée par la condition stricte “oui/non” 3.5 [5].
- Si la structure est fissurée, l’eau pressurisée entrera dans la fissure et causera une modification des sous-pressions. Pour calculer les sous-pressions on utilise le niveau piézométrique adjacent de l’eau qui rentre dans la fissure. Par exemple, pour une fissure amont aval on utilise le niveau adjacent de l’eau amont. Quand, *dans une direction*, la section est fissurée presque complètement les sous-pressions atteignent une valeur maximale parce que la pression adjacente est approximativement distribuée sur l’entière surface de la section. Cette situation est comparable avec celle d’un tuyau avec un bouchon dans lequel on introduit de l’eau pressurisée. Si une fissure amont se propage jusqu’à aval, dans une partie de la section (e.g. direction y pour le pilier de la Fig. 3.7e) les SP ont tendance à diminuer à cause du chemin de percolation. Autrement dit, on pourrait considérer qu’on a enlevé le bouchon du tuyau précédent.

*Note:* Une discussion supplémentaire s’avère nécessaire ici. La fissuration complète d’une section typique 2D (élévation) d’un ouvrage hydraulique est inacceptable du point de vue de la stabilité sauf dans le cas de sollicitations sismiques. Lorsque l’on effectue des calculs 3D la situation est plus complexe et on peut retrouver des états d’équilibre avec des zones fissurées de l’amont à l’aval. Cependant il reste toujours une zone comprimée pour assurer l’équilibre et vérifier la stabilité à l’aide du SSF.

La diminution causée du chemin de percolation provoque une chute dans l’évaluation des SP et par la suite une discontinuité mathématique. Avec les valeurs diminuées des SP la zone fissurée diminue de surface et les SP peuvent alors augmenter encore une fois. La situation peut devenir cyclique. Cette situation peut exister dans un contexte de résolution mathématique quand la variation des SP est prise en compte. En réalité, la

distribution des SP étant plus complexe la discontinuité des SP est pratiquement inexistante. Mais, cette distribution ne pourrait être évalué que dans une analyse d'écoulement en milieu poreux et fissuré avec des éléments finis. Ce type d'analyse est aussi sujette à plusieurs incertitudes notamment l'estimation de l'ouverture des fissures.

- Au chapitre 3 on mentionne que la fissuration est amont aval. L'algorithme a été développé de façon à considérer aussi une fissuration de l'aval vers l'amont. Lors de l'actualisation des SP on considère comme "pression adjacente" la valeur qui se trouve en aval.

#### 4.4 Considérations sur le choix des critères de convergence

Le choix des critères de convergence peut être très difficile dans le contexte de la résolution de systèmes d'équations ayant des discontinuités. Par exemple, on pourrait avoir un cas où les intégrales  $I_P$ ,  $I_{Mx}$ ,  $I_{My}$  sont déjà au-dessous de la tolérance minimale imposée (e.g. 1/500) pour la convergence. Cependant, un autre indicateur (e.g.  $\sigma_z$ ) peut demeurer plus longtemps au-dessus de cette tolérance (voir l'observation de l'annexe C et le tableau C.7). L'explication pour cette situation se trouve dans le comportement numérique problématique des fonctions au voisinage d'une discontinuité. C'est la raison pour laquelle le choix des critères de convergence peut faire la différence entre un processus *convergent* et *divergent*. Comme indicateurs de convergence, pour les intégrales (3.7) il est préférable d'utiliser leurs valeurs directes et pas la différence entre des itérations successives. Pour les autres critères de convergence la différence entre deux pas d'itération est souhaitable.

On considère donc que:

- Les premiers indicateurs à vérifier sont les intégrales d'équilibre:  $I_P$ ,  $I_{Mx}$ ,  $I_{My}$  (3.7). Il s'agit d'un critère global. Si les intégrales respectent les critères des convergence on pourrait continuer avec un autre critère. Sinon on continue le processus itératif jusqu'au moment quand les intégrales respectent les critères des convergence.
- La position de l'axe neutre est le critère global suivant. Cette position peut être décrite avec plusieurs paramètres mathématiques. Il faut utiliser celui qui implique un

minimum d'opérations en virgule flottante. Par exemple, si on retient l'angle de l'AN il faut éviter un calcul des fonctions trigonométriques: *cos*, *sin*, *tan* etc. Une solution élégante est de retenir les trois coefficients *a*, *b*, *c* de l'AN mise dans la forme d'une droite ( $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ ) par l'équation (3.8).

- Le dernier critère est la contrainte normale,  $\sigma_z$ , soit en compression ou en tension. Il s'agit d'un critère local. Si les intégrales sont déjà sous le critère de convergence mais la contrainte (de compression ou surtout celle de tension) ne converge pas (en valeur absolue ou en variations d'une itération à l'autre) alors il faut utiliser une méthode heuristique pour arrêter le processus. Dans ce cas la méthode heuristique convergera sûrement vers une solution adéquate compte tenu que l'équilibre global indiqué par les intégrales (3.7) est déjà satisfait. Toutefois, avant de présenter les résultats à l'utilisateur il faut vérifier que les intégrales respectent leurs limites et que les contraintes normales respectent les valeurs limites ( $f_b, f'_c$ ).
- La stratégie "fixed point" présentée dans ce mémoire admet, pour converger, seulement deux scénarios d'évolution itérative de la section analysée. Ainsi: (i) la section *change* non cycliquement à chaque itération suite au changement de la position de l'AN quand la section *n'est pas en équilibre*, (ii) la section *ne change pas* (l'AN ne change pas) mais elle *est en équilibre*. Toutes les autres combinaisons produisent une divergence. Par exemple, si après certaines itérations (e.g. 3) la section reste toujours pareille mais elle n'est pas en équilibre le processus peut être considéré divergent. La partie heuristique de l'algorithme de flexion biaxiale devrait avoir la possibilité d'identifier ces situations (qui ne sont pas dans le cas (i) ou (ii) ci-dessus).
- Cette partie heuristique élimine les cycles possibles dans l'évaluation itérative de l'équilibre de la section. Dès qu'elle identifie un cycle, elle prend une décision. Par la suite, l'algorithme a besoin encore de trois ou quatre itérations pour converger. Avec cette approche l'algorithme converge toujours théoriquement.

Il y a, bien sûr, plusieurs autres choix possibles. Il faut bien comparer les avantages, les inconvénients et les pièges possibles de chacun. Par exemple, l'utilisation de la position de la résultante par rapport au noyau central est un mauvais choix dans le contexte de l'actualisation itérative des sous-pressions. L'explication est la suivante: si la résultante est dans le noyau on est

tenté d'arrêter le processus parce que la section est en compression pure. En réalité, avec l'actualisation des sous-pressions, dans le cas de compression pure la, résultante peut sortir du noyau est créer de traction sur la section. C'est la raison pour laquelle une analyse approfondie est nécessaire avant de choisir les critères de convergence.

## CHAPITRE 5

### CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

*Cette partie vise à compléter les conclusions exprimées dans l'article et non à les répéter. On insiste en particulier sur des pistes d'approfondissements possibles. Le lecteur est invité à relire, tout d'abord, la section 3.5.*

Ce mémoire propose une méthode d'analyse de flexion composée biaxiale de fissuration,  $P-M_x-M_y$ , pour les structures poids hydrauliques en béton. On considère des sections arbitraires et l'évolution itérative des sous-pressions. La méthode est utile pour l'analyse de la stabilité de structures non armées comme les piliers d'évacuateurs de crues. La stabilité est évaluée en calculant le facteur de sécurité au glissement avec les résultantes et l'aire comprimée obtenue suite à l'analyse de fissuration 3D. Un logiciel a été développé pour valider les avantages et les limites de la méthode proposée.

Plusieurs points peuvent nécessiter des approfondissements:

- (i) L'extension proposée pour l'actualisation des sous-pressions avec les trois plans a prouvé sa performance, mais elle cause une discontinuité. Une autre méthode qui considère une variation linéaire plus complexe (e.g. plusieurs plans) ou polynomiale avec un ou plusieurs plans serait utile. Une implémentation avec des éléments finis pourrait éliminer ou réduire les situations où une discontinuité dans les SP existe.
- (ii) On a réussi à détecter plusieurs types de cycle avec la partie heuristique de l'algorithme mais une modification s'impose. Cette partie devrait avoir la pleine capacité d'identifier un cycle faux (formulation mathématique) d'un vrai cycle (les SP). Aussi, il devrait analyser le type "d'amortissement" du cycle, i.e. la forme de l'enveloppe de l'amplitude du cycle, afin de pouvoir classer les différents types de divergences.

- (iii) Pour éliminer les possibilités de divergence à cause d'une mauvaise formulation mathématique l'algorithme devrait pouvoir évaluer en temps réel, à priori, les critères des convergence. S'il trouve un problème il doit l'expliquer en détail et proposer des solutions.
- (iv) On n'a pas prouvé *rigoureusement* que, dans le cas de convergence "presque constante" le processus converge *toujours* vers la vraie solution mathématique ou vers une solution d'ingénierie acceptable. Il faut, par la suite, faire plusieurs tests ou modifier la méthode utilisée pour converger.
- (v) Comme souvent dans la pratique l'analyse de la stabilité est faite sur un plan incliné arbitraire (amont-aval et rive gauche-rive droite), il serait très utile d'effectuer une adaptation des algorithmes pour permettre l'analyse sur un tel plan. Aussi, l'actualisation des SP devra être modifiée quand on évalue l'équilibre sur un plan d'analyse incliné.
- (vi) Dans cette étape une interaction  $P-M_x-M_y$  a été explorée. Une étape complémentaire est l'extension du logiciel pour intégrer l'interaction  $T-V_x-V_y$ . L'extension va pouvoir intégrer une actualisation plus complexe des SP avec les éléments finis dans le contexte hydromécanique tridimensionnelle:  $P-M_x-M_y-T-V_x-V_y$ . Aussi, on pourrait tenir compte de la compatibilité des déformations entre les sections et on considérerait que l'hypothèse de Bernoulli n'est plus valide.
- (vii) Une autre extension très utile serait pour l'analyse des sections des piliers d'évacuateurs de crues en béton armé et précontrainte et aussi pour les sections pour lesquelles des réparations sont nécessaires. On devrait développer des éléments fibres (*fiber element*) pour considérer en détails le comportement de chaque matériau.
- (viii) Afin de valider les résultats des algorithmes et d'identifier des possibles problèmes il pourrait être utile de faire des analyses avec d'autres logiciels pour avoir une base de données de comparaison. Il serait aussi très souhaitable d'avoir une confirmation avec des essais de laboratoire, à l'aide de spécimen représentatif de l'état réel.
- (ix) L'interface du logiciel pourrait être améliorée pour permettre l'introduction des données dans des boîtes de dialogue élégantes et pour permettre la visualisation des résultats en temps réel, en suivant l'évolution de l'analyse.

## BIBLIOGRAPHIE

*Cette partie complète les références de l'article. Le lecteur est invité à relire, tout d'abord, la section 3.7. Dans le mémoire on fait références aux articles et livres montrés ici et aussi montrés dans la section 3.7.*

Bajpai, A. C., Calus, I. M., Fairley, J. A. (1977). *Numerical methods for engineers and scientists*, Wiley, N.Y.

Barrett, P. R., et Boggs, H. (1995). "Automated 3-D analysis of gravity dam stability." *Proceedings of the International Conference on hydropower: Waterpower '95*, ASCE, San Francisco, California, 2157-2166.

Barrett, P. R., et Morris, D. I. (1993). "Automating stability analysis for concrete gravity dams." *Hydro Review*, 7(4), 52-57.

Beiu-Paladi, E., Caracostea, A., Ilie, G., Ionescu, C., Mazilu, P., Mihailescu, M., Petcu, V., Sandi, H., Soare, M., et Topa, N. (1977). *Manuel pour le calcul des constructions*, l'Éditeur Tehnica (en roumain), Bucarest, Roumanie.

Bhattacharjee, S. S., et Léger, P. (1995). "Fracture response of gravity dams due to rise of reservoir elevation." *ASCE Journal of Structural Engineering*, 125(9), 1298-1305.

Bia, C., Ilie, V., et Soare, M. V. (1983). *Résistance des matériaux et théorie de l'élasticité*, l'Éditeur Didactica si Pedagogica (en roumain), Bucarest, Roumanie.

Bourgeois, G. (1999). *Analyses statiques et sismiques 3D d'un pilier d'évacuateur de crues*, Rapport de projet de fin d'étude, Chaire Industrielle CRSNG/HYDRO-QUÉBEC/ALCAN, École Polytechnique de Montréal, Canada.

Bresler, B. (1960). "Design criteria for reinforced columns under axial load and biaxial bending." *Journal of the American Concrete Institute*, 57(5), 481-490.

Brøndum-Nielsen, T. (1997). "Serviceability analysis of concrete sections under biaxial bending." *ASCE Journal of Structural Engineering*, 123(1), 117-119.

Charalampakis, A. E., et Koumousis, V. K. (2005). "Ultimate strenght analysis of arbitrary cross sections under biaxial bending and axial load by fiber model and curvilinear polygons." 5<sup>th</sup> GRACM Congress on Computational Mechanics, Limassol, 29 July, 2005

Chiorean, C. G. (2006). "Computerized interaction diagrams for composite cross-sections of arbitrary shape." *Proceedings of International Conference on metal structures 2006: Steel a new and traditional material for building*, AA Balkema Publisher, Poiana Brasov, Romania.

Chiorean, C. G. (2006a). *Applications informatiques pour l'analyse non linéaire des structures en cadres*, U.T. Pres (en roumain), Cluj-Napoca, Roumanie.

Craig Jr., R. R. (2000). *Mechanics of Materials*, 2<sup>nd</sup> Ed., John Wiley & Sons Inc., USA.

CSI (Computers and Structures) (2005). *Section Builder. Version 8.0 - User's manual and technical references*, Berkeley, California.

CSI (Computers and Structures) (2005a). *CSICol. Version 8.0 - User's manual and technical references*, Berkeley, California.



De Vivo, L., et Rosati, L. (1998). "Ultimate strenght analysis of reinforced concrete sections subject to axial and biaxial bending." *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 166(3-4), 261-287.

Ducharme, M. A. (2001). *Résistance structurale 3D des piliers d'évacuateurs de crues*, Rapport no. EPM/CGS-2001-14, Département des génies civil, géologique et des mines, École Polytechnique de Montréal, Canada.

Fafitis, A. (2001). "Interaction surfaces of reinforced-concrete sections in biaxial bending." *ASCE Journal of Structural Engineering*, 127(7), 840-846.

Fanelli, M., Mazzà, G., Ruggeri, G., Palumbo, P. (1995). "Gravity dams: safety evaluation against sliding with a 3-D rigid body formulation." *Proceedings on Research and development in the field of dams*, ICOLD, Crans Montana, Switzerland, 253-264.

Foster, S. J., Marti, P., et Mojsilovic, N. (2003). "Design of reinforced concrete solids using stress analysis." *ACI Structural Journal*, 100(6), 758-764.

Furlong, R. W., Hsu, C. T., et Mirza, S. A. (2004). "Analysis and design of concrete columns for biaxial bending - overview." *ACI Structural Journal*, 101(3), 413-423.

Goodman, J. E., O'Rourke, J. (2004). *Handbook of discrete and computational geometry*, 2<sup>nd</sup> Ed., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, U.S.A.

Gruttmann, F., Sauer, R., Wagner, W. (1999). "Shear stresses in prismatic beams with arbitrary cross-sections." *International journal for numerical methods in engineering*, 45(7), 865-889.

Koltuniuk, R. M., Mills-Bria, B. (2003). "Seismic retrofit of Pineview dam spillway." *Proceedings of the 21<sup>th</sup> International Congress on large dams*, ICOLD, Montréal, Canada, 3, 427-446.

Kollbrunner, C. F., et Basler, K. (1969). *Torsion in Structures; an Engineering Approach*, Springer - Verlag, Berlin, Allemagne.

Leclerc, M., Léger, P., and Tinawi, R. (2001). *CADAM. Version 1.4.3 - User's manual*, École Polytechnique de Montréal, Canada.

Love, A. E. H. (1944). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4<sup>th</sup> Ed., Dover Publications Inc., N.Y.

MacGregor, J. G. (1988). *Reinforced concrete. Mechanics and design*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

Mattock, A. H., Kriz, L. B., et Hognestad, E. (1961). "Rectangular concrete stress distribution in ultimate strength design." *Journal of the American Concrete Institute*, 57(8), 875-928.

Miron, M. S. (1997). *Analyses statiques et sismiques 3D d'un évacuateur de crues par éléments finis*, Rapport no. EPM/GCS-1997-04, Chaire Industrielle CRSNG/HYDRO-QUÉBEC/ALCAN, École Polytechnique de Montréal, Canada.

Mofid, M., et Yavari, A. (2000). "On the kern of a general cross section." *International Journal of Solids and Structures*, 37(17), 2377-2403.

Mofid, M., Shadnam, R. S., McCabe, S. L. (2001a). "On a new approach for finding the kern of a beam section." *Engineering structures*, 23(9), 1080-1084.

Oden, J. T., et Ripperger, E. A. (1980). *Mechanics of Elastic Structures*, 2<sup>nd</sup> Ed., Hemisphere Publishing Corporation, Washington.

Park, R., Paulay, T. (1979). *Reinforced concrete structures*, John Wiley & sons, N.Y.

Popovici, A., Popescu, C. (1992). *Barages pour des accumulations d'eau*, l'Éditeur Tehnica (en roumain), Bucarest, Roumanie.

Preparata, F. P., Shamos, M. I. (1985). *Computational geometry an introduction*, Springer-Verlag, N.Y.

Press, W. H., Teukolsky, A. S., Vetterling, W. T., Flannery, B. P. (1992). *Numerical recipes in FORTRAN: the art of scientific computing*, 2<sup>nd</sup> Ed., Cambridge University Press, Cambridge, England.

Rahal, K. N., et Collins, M. P. (1995). "Analysis of sections subjected to combined shear and torsion – a teoretical model." *ACI Structural Journal*, 92(4), 459-469.

Rahal, K. N., et Collins, M. P. (2003). "Combined torsion and bending in reinforced and prestressed concrete beams." *ACI Structural Journal*, 100(2), 157-165.

Rodriguez, J. A., et Aristizabal-Ochoa, J. D. (1999). "Biaxial interaction diagrams for short RC columns of any cross section." *ASCE Journal of Structural Engineering*, 125(6), 672-683.

Selby, R. G., Vecchio, F. J., et Collins, M. P. (1996). "Analysis of reinforced concrete members subject to shear and axial compression." *ACI Structural Journal*, 93(3), 306-315.

Sfakianakis, M. G. (2002). "Biaxial bending with axial force of reinforced, composite and repaired concrete sections of arbitrary shape by fiber model and computer graphics." *Advances in Engineering Software*, 33(4), 227-242.

Shames, I. H., et Dym, C. L. (1985). *Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics*, Hemishpere Publishing Corporation, USA.

Sizaire, R. (2005). "III.6 Calculation of beam cross sections.", *keyFE2 - User Manual*, <<http://users.skynet.be/keyFE2/keyFE2.html>> (Apr. 10 2007).

Sokolnikoff, I. S. (1956). *Mathematical Theory of Elasticity*, 2<sup>nd</sup> Ed., McGraw-Hill, N.Y.

Sunday, D. (2006). "Area of Triangles and Polygons (2D & 3D).", *Geometry Algorithms*, <[http://softsurfer.com/Archive/algorithm\\_0101/algorithm\\_0101.htm](http://softsurfer.com/Archive/algorithm_0101/algorithm_0101.htm)> (Apr. 10 2007).

Timoshenko, S. P., et Goodier, J. N. (1970). *Theory of Elasticity*, 3<sup>rd</sup> Ed., McGraw-Hill Book Company, USA.

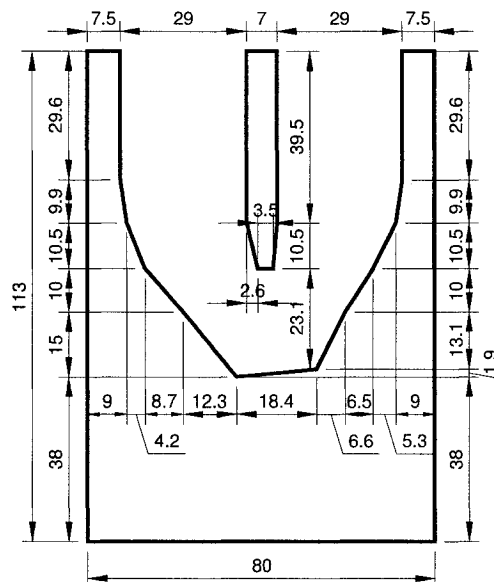
Wilson, H. B., et Turcotte, L. H. (1993). "Determining the kern for a compression member of general cross-section." *Advances in Engineering Software*, 17(2), 113-123.

Weisstein, E. (2007). *Wolfram Mathworld - the web's most extensive mathematics resource*, <<http://mathworld.wolfram.com/>> (Apr. 10 2007).

**ANNEXE A.**  
**DIMENSIONS DES SECTIONS ANALYSÉES**

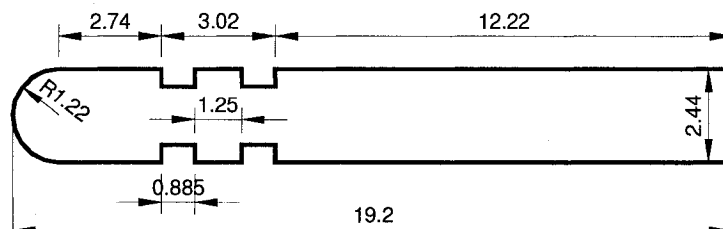
On a utilisé pour la validation des algorithmes plusieurs sections. La section circulaire et rectangulaire sont déjà présentées dans le chapitre 3 (dans l'article), donc on montre en détails ici les trois autres sections: la prise d'eau (Fig. A.1) le pilier d'évacuateur de crues (Fig. A.2) et sa base (Fig. A.3).

**a. Prise d'eau (Tracy et Kling 1982)**



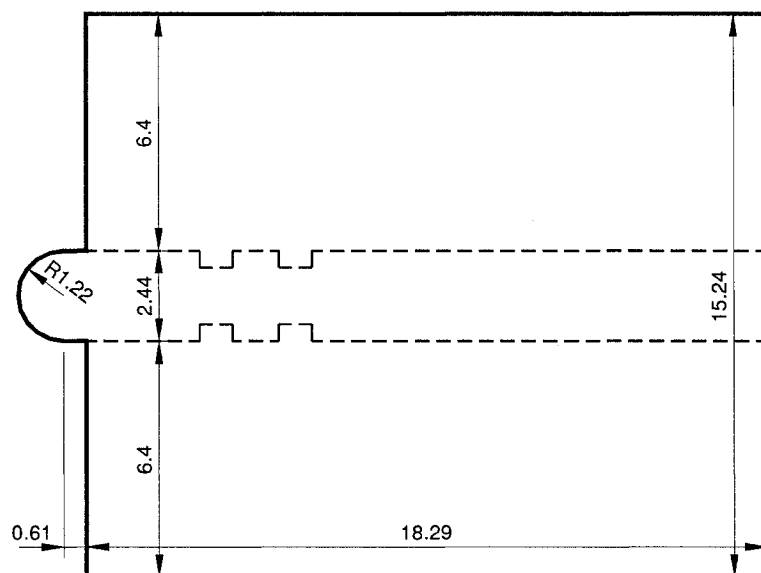
**Fig. A.1.** Prise de l'eau analysée dans l'article (dimensions en [m])

**b. Pilier d'évacuateur de crues (Miron 1997)**



**Fig. A.2.** Pilier analysé dans l'article (dimensions en [m])

**c. Base du pilier d'évacuateurs de crues (Miron 1997)**



**Fig. A.3.** Base du pilier analysé dans l'article (dimension en [m])

**ANNEXE B.**

**DÉMONSTRATION DE LA VALIDITÉ DE L'ALGORITHME**

**POUR LOCALISER LE NOYAU CENTRAL**

Les équations (3.2) et (3.1) (présentées dans l'article)

$$x_i^k = x_g + \frac{LA \cdot I_y + LB \cdot I_{xy}}{LC \cdot A}; \quad y_i^k = y_g + \frac{LB \cdot I_x + LA \cdot I_{xy}}{LC \cdot A} \quad (3.2, \text{répétée})$$

avec

$$LA = y_i^h - y_{i+1}^h; \quad LB = x_{i+1}^h - x_i^h; \quad LC = x_i^h y_{i+1}^h - x_{i+1}^h y_i^h \quad (3.1, \text{répétée})$$

sont valides et générales seulement si le dénominateur:  $LC \cdot A$  est toujours non nul.

On rappelle que  $LA$ ,  $LB$ ,  $LC$  sont les coefficients de la droite,  $LA \cdot x^h + LB \cdot y^h + LC = 0$ , qui fait partie du CH. Les coordonnées du contour  $(x_i^h, y_i^h)$  sont données dans le centroïde de la section pour laquelle on détermine son noyau central. On considère que l'aire de la section n'est pas nulle (sinon le calcul du noyau est inutile). Aussi, les points du contour (CH) sont différents mutuellement, donc on n'a pas des points un par-dessus l'autre (cette hypothèse est vraie, si l'algorithme "convex hull" est correct). Les deux hypothèses précédentes ne réduisent pas la généralité du problème.

Le coefficient  $LC$  d'une droite est nul seulement dans le cas suivants: droite nulle, droite identique avec une des axes  $Ox$  ou  $Oy$ , droite arbitraire qui passe par  $O$  (l'origine, dans notre cas le centroïde). Mais, ces conditions ne sont pas satisfaites. La droite n'est pas nulle parce que l'aire est non nulle et les points ne sont pas superposés. Puis, on sait que le centroïde d'un polygone convexe est toujours "*à l'intérieur de n'importe quelle surface convexe qui contient tous les points du système*" (Beiu-Paladi et al. 1977); donc, il est *à l'intérieur* du polygone convexe appelé "convex hull". La droite est un segment de contour du polygone convexe (CH) qui contient tous les points de la section (parce qu'il entoure la section donnée). Par la suite, la droite ne peut pas être sur  $Ox$ ,  $Oy$  et elle ne passe pas par l'origine,  $O$  (le centroïde) parce que le centroïde est *toujours à l'intérieur, pas sur le contour ni à l'extérieur*. Si, par contre, la droite est sur  $Ox$  ou  $Oy$  on conclue que le centroïde est *sur le contour* ce qui est impossible. Comme  $LC$  et l'aire ne sont pas nuls, leur produit,  $LC \cdot A$ , n'est pas nul et la démonstration est faite (c.q.f.d.).

**ANNEXE C.**

**DÉTAILS DES ITÉRATIONS POUR LES EXEMPLES DE VALIDATION**

On montre dans cette annexe les valeurs numériques des itérations que le logiciel a fait pour trouver la convergence pour chaque cas de validation présenté dans le mémoire. On a considéré comme plus importants les indicateurs suivants:

- $I_P, I_{Mx}, I_{My}$ : les intégrales d'équilibre (3.7);
- $\sigma_{z\ comp}, \sigma_{z\ tens}$ : les contraintes normales maximales de compression et tension; autrement dit, la valeur de  $\sigma_z$  pour le point le plus loin de l'AN dans la partie comprimée et, respectivement, tendue. Si la valeur de  $f_t$  n'est pas spécifiée elle est nulle.
- $UP$ : l'évolution des sous-pressions.

Les dimensions de ces sections sont présentées dans l'article ou dans l'annexe A. Aussi, les commentaires pour chaque cas sont présentées dans l'article ou dans le chapitre 4.2. Le pilier Coteau est présenté dans une étude de cas détaillée dans (Miron 1997).

Il est intéressant d'observer que pour le cas "presque constant" (Tab. C.7) la convergence avec  $I_P, I_{Mx}, I_{My}$  est obtenue après ~40 itérations mais la valeur de  $\sigma_{z\ tens}$ , qui devrait être nulle, est au-dessous de sa valeur limite 1/500 seulement après ~200 itérations. Aussi, après ~10 itérations la valeur de  $\sigma_{z\ comp}$  (-99.55kPa) a sa valeur finale (-99.37kPa, obtenue après 214 itérations). Cela explique la nécessité de considérer et analyser plusieurs critères de convergence en même temps.

**Tableau C.1. (voir aussi Fig. 3.7b)**

Rectangle sans résistance en traction:  $P = -100$  kN,  $e_x = 1.02$  m,  $e_y = 2.94$  m,  $f_t = 0$  kPa

It.	$I_P$ [kN]	$I_{Mx}$ [kNm]	$I_{My}$ [kNm]	$\sigma_{z\ comp}$ [kPa]	$\sigma_{z\ tens}$ [kPa]	$UP$ [kN]
1	-18.019	-8.193	6.632	-78.476	40.381	0.000
2	-12.168	-14.337	8.510	-107.075	26.732	0.000
3	-5.322	-8.237	4.543	-127.014	22.874	0.000
4	-1.169	-2.054	1.095	-136.331	13.144	0.000
5	-0.059	-0.108	0.057	-138.258	3.172	0.000
6	0.000	0.000	0.000	-138.343	0.158	0.000
7	0.000	0.000	0.000	-138.344	0.000	0.000



**Tableau C.2. (voir aussi Fig. 3.7c)**Rectangle avec résistance en traction:  $P = -100$  kN,  $e_x = 1.02$  m,  $e_y = 2.94$  m,  $f_t = 20$  kPa

It.	$I_P$ [kN]	$I_{Mx}$ [kNm]	$I_{My}$ [kNm]	$\sigma_{z\ comp}$ [kPa]	$\sigma_{z\ tens}$ [kPa]	$UP$ [kN]
1	-9.137	-2.618	2.120	-78.476	40.381	0.000
2	-7.785	-4.537	3.234	-87.214	30.423	0.000
3	-6.456	-4.844	3.380	-94.054	27.883	0.000
4	-5.323	-4.564	3.235	-99.617	26.176	0.000
5	-4.414	-4.075	3.008	-104.170	25.069	0.000
6	-3.740	-3.585	2.811	-107.933	24.631	0.000
7	-3.198	-3.202	2.555	-111.118	24.452	0.000
8	-2.687	-2.880	2.190	-113.874	24.179	0.000
9	-2.210	-2.525	1.812	-116.244	23.691	0.000
10	-1.778	-2.142	1.460	-118.239	23.133	0.000
11	-1.401	-1.760	1.151	-119.875	22.576	0.000
12	-1.084	-1.407	0.890	-121.186	22.064	0.000
13	-0.827	-1.100	0.678	-122.212	21.617	0.000
14	-0.623	-0.844	0.510	-123.002	21.243	0.000
15	-0.464	-0.638	0.380	-123.601	20.942	0.000
16	-0.344	-0.477	0.281	-124.050	20.706	0.000
17	-0.253	-0.354	0.207	-124.384	20.524	0.000
18	-0.185	-0.261	0.152	-124.630	20.387	0.000
19	-0.135	-0.191	0.111	-124.811	20.284	0.000
20	-0.099	-0.140	0.081	-124.943	20.208	0.000
21	-0.072	-0.102	0.059	-125.039	20.151	0.000
22	-0.052	-0.074	0.043	-125.109	20.110	0.000
23	-0.038	-0.054	0.031	-125.160	20.080	0.000
24	-0.027	-0.039	0.022	-125.197	20.058	0.000
25	-0.020	-0.028	0.016	-125.224	20.042	0.000

**Tableau C.3. (voir aussi Fig. 3.7d et Fig. A.1)**Prise d'eau:  $P = -35000$  kN,  $e_x = 35$  m,  $e_y = 25$  m,  $f_t = 0$  kPa

It.	$I_P$ [kN]	$I_{Mx}$ [kNm]	$I_{My}$ [kNm]	$\sigma_{z\ comp}$ [kPa]	$\sigma_{z\ tens}$ [kPa]	$UP$ [kN]
1	-498.854	-51763.654	34533.287	-12.979	3.664	0.000
2	-54.817	-5111.369	2453.776	-13.520	0.855	0.000
3	-0.561	-51.844	20.383	-13.561	0.087	0.000
4	0.000	-0.005	0.002	-13.561	0.001	0.000
5	0.000	0.000	0.000	-13.561	0.000	0.000

**Tableau C.4. (voir aussi Fig. 3.7e et Fig. A.2)**Pilier Coteau:  $R_P = -7959.17$  kN,  $R_{ex} = 1.824$  m,  $R_{ey} = 11.794$  m,  $f_t = 0$  kPa

It.	$I_P$ [kN]	$I_{Mx}$ [kNm]	$I_{My}$ [kNm]	$\sigma_{z\ comp}$ [kPa]	$\sigma_{z\ tens}$ [kPa]	$UP$ [kN]
1	-487.282	-2459.058	118.041	-562.485	198.075	1648.959
2	-137.581	-1179.781	79.945	-629.776	73.096	1648.959
3	-9.843	-99.092	6.647	-644.823	18.566	1648.959
4	-0.047	-0.510	0.032	-645.722	1.422	1648.959
5	0.000	0.000	0.000	-645.726	0.007	1648.959
6	0.000	0.000	0.000	-645.726	0.000	1648.959

**Tableau C.5. (voir aussi Fig. 3.8 et Fig. A.3)**Base du pilier Coteau (convergence "normale"):  $P = -100000$  kN,  $e_x = 3$  m,  $e_y = 11.5$  m

It.	$I_P$ [kN]	$I_{Mx}$ [kNm]	$I_{My}$ [kNm]	$\sigma_{z\ comp}$ [kPa]	$\sigma_{z\ tens}$ [kPa]	$UP$ [kN]
1	-2732.357	-19311.072	-18257.343	-819.680	208.181	13989.519
2	-408.268	-4059.450	-2053.304	-868.332	61.221	13989.519
3	-8.050	-89.692	-37.408	-873.654	7.635	13989.519
4	-0.003	-0.034	-0.014	-873.740	0.158	13989.519
5	0.000	0.000	0.000	-873.740	0.000	13989.519

**Tableau C.6. (voir aussi Fig. 3.9 et Fig. A.3)**Base du pilier Coteau (convergence "cyclique"):  $P = -100000$  kN,  $e_x = 3$  m,  $e_y = 11.5$  m

It.	$I_P$ [kN]	$I_{Mx}$ [kNm]	$I_{My}$ [kNm]	$\sigma_{z\ comp}$ [kPa]	$\sigma_{z\ tens}$ [kPa]	$UP$ [kN]
1	-5571.761	-28527.143	-32976.546	-990.634	374.221	13989.519
2	-2184.063	-17475.452	-7341.292	-1125.640	146.138	16196.955
3	-267.131	-2874.022	-876.536	-1169.396	51.003	16798.309
4	-6.785	-92.258	-29.134	-1173.145	10.745	17013.685
5	-233.277	-3036.006	-963.766	-1152.938	-25.439	13989.519
6	-178.422	-2216.680	-724.799	-1171.163	52.036	16800.589
7	-4.458	-64.551	-21.111	-1173.155	9.540	17019.562
8	-234.704	-3056.221	-970.289	-1152.923	-25.465	13989.519
9	-178.602	-2218.898	-725.569	-1171.161	52.064	16800.433
10	-4.466	-64.654	-21.144	-1173.155	9.547	17019.527
11	-234.697	-3056.119	-970.255	-1152.923	-25.465	13989.519
12	-178.601	-2218.887	-725.565	-1171.161	52.064	16800.434
13	-4.466	-64.653	-21.144	-1173.155	9.547	17019.527
14	-234.697	-3056.120	-970.255	-1152.923	-25.465	13989.519
15	-178.601	-2218.887	-725.565	-1171.161	52.064	16800.434
16	-4.466	-64.653	-21.144	-1173.155	9.547	17019.527
17	-234.697	-3056.120	-970.255	-1152.923	-25.465	13989.519
18	-178.601	-2218.887	-725.565	-1171.161	52.064	16800.434
19	-4.466	-64.653	-21.144	-1173.155	9.547	17019.527
20	-0.001	-0.015	-0.005	-1173.216	0.138	17019.527
21	0.000	0.000	0.000	-1173.216	0.000	17019.527

**Tableau C.7. (voir aussi Fig. 4.4 et Fig. A.3)**Base du pilier Coteau (convergence “presque constante”):  $P = -22000$  kN,  $e_x = 0.59382$  m, $e_y = 11.5$  m

lt.	$I_P$ [kN]	$I_{Mx}$ [kNm]	$I_{My}$ [kNm]	$\sigma_{z\ comp}$ [kPa]	$\sigma_{z\ tens}$ [kPa]	$UP$ [kN]
1	-237.976	-743.661	-1135.679	-79.916	22.258	13989.519
2	-221.395	-1338.037	-670.007	-88.110	15.957	15030.618
3	-115.794	-961.613	-276.999	-94.362	12.030	15646.353
4	-44.669	-462.159	-122.719	-97.664	8.288	16056.646
5	-15.008	-184.082	-54.498	-98.965	5.449	16323.633
6	-5.604	-75.905	-23.597	-99.390	3.605	16496.406
7	-2.463	-35.036	-10.876	-99.520	2.471	16610.725
8	-1.221	-17.852	-5.482	-99.555	1.766	16689.399
9	-0.661	-9.852	-2.994	-99.557	1.310	16745.841
10	-0.385	-5.803	-1.748	-99.547	1.003	16787.865
11	-0.237	-3.608	-1.079	-99.535	0.789	16820.154
12	-0.153	-2.346	-0.698	-99.522	0.635	16845.627
13	-0.103	-1.584	-0.469	-99.509	0.521	16866.171
14	-0.071	-1.104	-0.326	-99.499	0.435	16883.055
15	-0.051	-0.792	-0.233	-99.489	0.367	16897.153
16	-0.037	-0.581	-0.170	-99.480	0.314	16909.087
17	-0.028	-0.435	-0.127	-99.472	0.272	16919.311
-	...	...	...	...	...	...
39	-0.001	-0.010	-0.003	-99.407	0.041	16999.369
30	-0.001	-0.009	-0.003	-99.406	0.039	17000.716
41	-0.001	-0.008	-0.002	-99.405	0.037	17001.991
42	0.000	-0.007	-0.002	-99.404	0.035	17003.201
43	0.000	-0.007	-0.002	-99.403	<b>0.033</b>	17004.349
-	...	...	...	...	...	...
212	0.000	0.000	0.000	-99.371	<b>0.002</b>	17042.785
213	0.000	0.000	0.000	-99.371	<b>0.002</b>	17042.851
214	0.000	0.000	0.000	-99.371	<b>0.002</b>	17042.917
215	-8626.862	-72315.633	-29802.887	-91.462	-26.570	13989.519
216	-237.976	-743.661	-1135.679	-79.916	22.258	13989.519

**ANNEXE D.**  
**VÉRIFICATIONS MANUELLES POUR LES EXEMPLES DE VALIDATION**

Les vérifications manuelles sont faites pour les exemples de l'annexe C. Indépendamment du logiciel développé, on a validé, à l'aide du chiffrier Excel, toutes les itérations présentées ci-dessus. Comme la présentation détaillée de toutes ces itérations est assez lourde on utilise une autre stratégie de validation. Pour chaque exemple, on a décidé de prendre l'AN finale du logiciel et de vérifier avec un autre logiciel les propriétés mécaniques, les valeurs des contraintes normales et l'équilibre de la section comprimée. Les intégrales d'équilibre et les sous-pressions sont calculées avec un logiciel qui calcule un volume et la position de son centroïde. Les contraintes normales sont calculées pour le point le plus loin de l'AN dans la partie comprimée et, respectivement, tendue. Si on trouve pour ces indicateurs les mêmes valeurs et en sachant que la solution est unique on conclue que le logiciel développé a trouvé la bonne solution.

Toutes les coordonnées sont données dans le système de référence spécifié pour chaque section. Les propriétés mécaniques et les moments sont par rapport au centroïde. Les excentricités et l'axe neutre sont par rapport au système de référence géométriques des coordonnées. L'axe neutre est donné par deux points:  $P1$ ,  $P2$ . La coordonnée  $x$ , pour le premier point  $P1$ ,  $x_{AN P1}$ , est 0.

**Tableau D.1. (voir aussi Tab. C.1)**

Rectangle sans résistance en traction

$x_g$ [m]	$y_g$ [m]	$A$ [m <sup>2</sup> ]	$I_x$ [m <sup>4</sup> ]	$I_y$ [m <sup>4</sup> ]	$I_{xy}$ [m <sup>4</sup> ]	$y_{AN P1}$ [m]	$x_{AN P2}$ [m]	$y_{AN P2}$ [m]
0.902	2.726	2.069	0.554	0.340	-0.190	2.957	1.5	1.285

appliquées			calculées					
$P$ [kN]	$e_x$ [m]	$e_y$ [m]	$R_{UP}$ [kN]	$R_{UPex}$ [m]	$R_{UPey}$ [m]	$R_P$ [kN]	$R_{Mx}$ [kNm]	$R_{My}$ [kNm]
-100	1.02	2.94	0.0	0.0	0.0	-100.0	-21.4	11.8

valeurs <b>calculées</b> (ligne supérieure) vs <i>logiciel</i> (inférieure)								
$x_{comp}$ [m]	$y_{comp}$ [m]	$\sigma_{z comp}$ [kPa]	$x_{tens}$ [m]	$y_{tens}$ [m]	$\sigma_{z tens}$ [kPa]	$I_P$ [kN]	$I_{Mx}$ [kNm]	$I_{My}$ [kNm]
0.598	0.774	-138.36	0.598	-1.440	0.04	-0.01	0.00	0.01
		-138.34			0.00	0.00	0.00	0.00

Le système de référence géométrique des coordonnées est dans le coin bas gauche de la section.

**Tableau D.2. (voir aussi Tab. C.2)**Rectangle avec résistance en traction,  $f_t = 20\text{kPa}$ 

$x_g$ [m]	$y_g$ [m]	$A$ [m <sup>2</sup> ]	$I_x$ [m <sup>4</sup> ]	$I_y$ [m <sup>4</sup> ]	$I_{xy}$ [m <sup>4</sup> ]	$y_{AN P1}$ [m]	$x_{AN P2}$ [m]	$y_{AN P2}$ [m]
0.863	2.435	2.991	1.380	0.523	-0.313	2.405	1.5	0.607

appliquées			calculées					
$P$ [kN]	$e_x$ [m]	$e_y$ [m]	$R_{UP}$ [kN]	$R_{UPex}$ [m]	$R_{UPey}$ [m]	$R_P$ [kN]	$R_{Mx}$ [kNm]	$R_{My}$ [kNm]
-100	1.02	2.94	0.0	0.0	0.0	-100.0	-50.5	15.7

valeurs <b>calculées</b> (ligne supérieure) vs <i>logiciel</i> (inférieure)								
$x_{comp}$ [m]	$y_{comp}$ [m]	$\sigma_{z comp}$ [kPa]	$x_{tens}$ [m]	$y_{tens}$ [m]	$\sigma_{z tens}$ [kPa]	$I_P$ [kN]	$I_{Mx}$ [kNm]	$I_{My}$ [kNm]
0.637	1.064	<b>-125.13</b>	0.637	-1.828	<b>20.10</b>	<b>0.27</b>	<b>0.11</b>	<b>0.00</b>
		-125.22			20.04	-0.02	-0.03	0.02

Le système de référence géométrique des coordonnées est dans le coin bas gauche de la section.

**Tableau D.3. (voir aussi Tab. C.3)**

Prise d'eau

$x_g$ [m]	$y_g$ [m]	$A$ [m <sup>2</sup> ]	$I_x$ [m <sup>4</sup> ]	$I_y$ [m <sup>4</sup> ]	$I_{xy}$ [m <sup>4</sup> ]	$y_{AN P1}$ [m]	$x_{AN P2}$ [m]	$y_{AN P2}$ [m]
38.178	34.339	4.88E+3	2.79E+6	3.20E+6	-4.77E+5	107.45	80	73.44

appliquées			calculées					
$P$ [kN]	$e_x$ [m]	$e_y$ [m]	$R_{UP}$ [kN]	$R_{UPex}$ [m]	$R_{UPey}$ [m]	$R_P$ [kN]	$R_{Mx}$ [kNm]	$R_{My}$ [kNm]
-35000	35	25	0.0	0.0	0.0	-35000.0	326880	-111239

valeurs <b>calculées</b> (ligne supérieure) vs <i>logiciel</i> (inférieure)								
$x_{comp}$ [m]	$y_{comp}$ [m]	$\sigma_{z comp}$ [kPa]	$x_{tens}$ [m]	$y_{tens}$ [m]	$\sigma_{z tens}$ [kPa]	$I_P$ [kN]	$I_{Mx}$ [kNm]	$I_{My}$ [kNm]
-38.178	-34.339	<b>-13.56</b>	-38.178	73.107	<b>0.00</b>	<b>-0.10</b>	<b>0.89</b>	<b>-0.30</b>
		-13.56			0.00	0.00	0.00	0.00

Le système de référence géométrique des coordonnées est dans le coin bas gauche de la section.

**Tableau D.4. (voir aussi Tab. C.4)**

Pilier Coteau

$x_g$ [m]	$y_g$ [m]	$A$ [m <sup>2</sup> ]	$I_x$ [m <sup>4</sup> ]	$I_y$ [m <sup>4</sup> ]	$I_{xy}$ [m <sup>4</sup> ]	$y_{AN P1}$ [m]	$x_{AN P2}$ [m]	$y_{AN P2}$ [m]
1.544	10.791	31.427	911.914	8.663	-20.613	23.778	1.247	0

appliquées			calculées					
$P$ [kN]	$e_x$ [m]	$e_y$ [m]	$R_{UP}$ [kN]	$R_{UPex}$ [m]	$R_{UPey}$ [m]	$R_P$ [kN]	$R_{Mx}$ [kNm]	$R_{My}$ [kNm]
-9608.13	1.720	11.120	1648.96	1.220	7.865	-7959.2	-7988.76	2225.45

valeurs <b>calculées</b> (ligne supérieure) vs <i>logiciel</i> (inférieure)								
$x_{comp}$ [m]	$y_{comp}$ [m]	$\sigma_{z comp}$ [kPa]	$x_{tens}$ [m]	$y_{tens}$ [m]	$\sigma_{z tens}$ [kPa]	$I_P$ [kN]	$I_{Mx}$ [kNm]	$I_{My}$ [kNm]
0.896	8.409	<b>-645.72</b>	-1.304	8.409	<b>0.04</b>	<b>0.07</b>	<b>0.21</b>	<b>-0.09</b>
		-645.73			0.00	0.00	0.00	0.00

Le système de référence géométrique des coordonnées est dans le coin bas gauche de la section.

**Tableau D.5. (voir aussi Tab. C.5)**

Base du pilier Coteau (convergence "normale")

$x_g$ [m]	$y_g$ [m]	$A$ [m <sup>2</sup> ]	$I_x$ [m <sup>4</sup> ]	$I_y$ [m <sup>4</sup> ]	$I_{xy}$ [m <sup>4</sup> ]	$y_{AN P1}$ [m]	$x_{AN P2}$ [m]	$y_{AN P2}$ [m]
1.475	11.244	226.079	6556.14	2861.32	-536.00	-12.505	-6.299	20.12

appliquées			calculées					
$P$ [kN]	$e_x$ [m]	$e_y$ [m]	$R_{UP}$ [kN]	$R_{UPex}$ [m]	$R_{UPey}$ [m]	$R_P$ [kN]	$R_{Mx}$ [kNm]	$R_{My}$ [kNm]
-100E+3	3.000	11.500	13989.5	0.000	9.800	-86010.5	-45818.9	173111

valeurs <b>calculées</b> (ligne supérieure) vs <i>logiciel</i> (inférieure)								
$x_{comp}$ [m]	$y_{comp}$ [m]	$\sigma_{z comp}$ [kPa]	$x_{tens}$ [m]	$y_{tens}$ [m]	$\sigma_{z tens}$ [kPa]	$I_P$ [kN]	$I_{Mx}$ [kNm]	$I_{My}$ [kNm]
6.145	8.876	<b>-873.74</b>	-7.775	8.876	<b>0.00</b>	<b>0.00</b>	<b>0.26</b>	<b>0.26</b>
		-873.74			0.00	0.00	0.00	0.00

Le système de référence géométrique des coordonnées est au bout du nez de la base du pilier.

**Tableau D.6. (voir aussi Tab. C.6)**

Base du pilier Coteau (convergence “cyclique”)

$x_g$ [m]	$y_g$ [m]	$A$ [m <sup>2</sup> ]	$I_x$ [m <sup>4</sup> ]	$I_y$ [m <sup>4</sup> ]	$I_{xy}$ [m <sup>4</sup> ]	$y_{AN P1}$ [m]	$x_{AN P2}$ [m]	$y_{AN P2}$ [m]
2.023	12.338	191.927	4993.62	2442.23	-1281.34	5.3756	-7.5667	20.12

appliquées			calculées					
$P$ [kN]	$e_x$ [m]	$e_y$ [m]	$R_{UP}$ [kN]	$R_{UPex}$ [m]	$R_{UPey}$ [m]	$R_P$ [kN]	$R_{Mx}$ [kNm]	$R_{My}$ [kNm]
-100E+3	3.000	13.000	17019.5	-0.339	10.410	-82980.5	-98988	137869

valeurs <b>calculées</b> (ligne supérieure) vs <i>logiciel</i> (inférieure)								
$x_{comp}$ [m]	$y_{comp}$ [m]	$\sigma_{z comp}$ [kPa]	$x_{tens}$ [m]	$y_{tens}$ [m]	$\sigma_{z tens}$ [kPa]	$I_P$ [kN]	$I_{Mx}$ [kNm]	$I_{My}$ [kNm]
5.597	7.782	-1173.22	-9.590	7.782	0.00	-0.28	0.23	0.55
		-1173.22			0.00	0.00	0.00	0.00

Le système de référence géométrique des coordonnées est au bout du nez de la base du pilier.

**Tableau D.7. (voir aussi Tab. C.7)**

Base du pilier Coteau (convergence “presque constante”)

$x_g$ [m]	$y_g$ [m]	$A$ [m <sup>2</sup> ]	$I_x$ [m <sup>4</sup> ]	$I_y$ [m <sup>4</sup> ]	$I_{xy}$ [m <sup>4</sup> ]	$y_{AN P1}$ [m]	$x_{AN P2}$ [m]	$y_{AN P2}$ [m]
2.517	13.630	148.990	3103.45	1915.57	-1203.70	10.2969	-7.61995	20.12

appliquées			calculées					
$P$ [kN]	$e_x$ [m]	$e_y$ [m]	$R_{UP}$ [kN]	$R_{UPex}$ [m]	$R_{UPey}$ [m]	$R_P$ [kN]	$R_{Mx}$ [kNm]	$R_{My}$ [kNm]
-22000	0.59382	11.500	17042.9	-0.341	10.420	-4957.1	-7848.65	6401.98

valeurs <b>calculées</b> (ligne supérieure) vs <i>logiciel</i> (inférieure)								
$x_{comp}$ [m]	$y_{comp}$ [m]	$\sigma_{z comp}$ [kPa]	$x_{tens}$ [m]	$y_{tens}$ [m]	$\sigma_{z tens}$ [kPa]	$I_P$ [kN]	$I_{Mx}$ [kNm]	$I_{My}$ [kNm]
5.103	6.490	-99.37	-10.137	6.490	0.00	-0.02	0.07	0.12
		-99.37			0.00	0.00	0.00	0.00

Le système de référence géométrique des coordonnées est au bout du nez de la base du pilier.



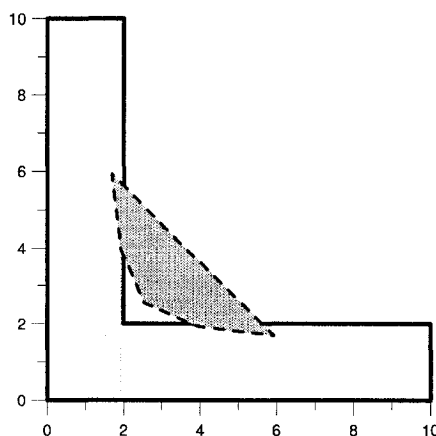
**ANNEXE E.**  
**EXEMPLES DE VALIDATION DE L'ALGORITHME POUR LOCALISER**  
**LE NOYAU CENTRAL**

On présente dans cette annexe des valeurs numériques complètes (les points du contour, les points du noyau, les points du “convex hull” et le dessin) pour le calcul du noyau central des quelques sections bien connues. Les premières sections (Fig. E.1-E.5) sont typiques pour la validation (Mofid et al. 2001, Turcotte et Wilson 1998). Les sections (Fig. E.6-E.7) prouvent deux capacités particulières de l’algorithme: (a) la solution pour des sections données dans un système de référence incliné et (2) la solution pour des sections ayant des trous. Finalement, les dernières exemples (Fig. E.8-E.11) représentent des sections de structures hydroélectriques réelles. Toutes les unités sont en mètres.

**Tableau E.1.**

Section “L” - cornière (les dimensions sont arbitraires: mètres, pieds...)

Section			Noyau central			Convex hull		
Point	x [m]	y [m]	Point	x [m]	y [m]	Point	x [m]	y [m]
1	0	0	1	1.9344	3.9508	1	10	0
2	10	0	2	2.5400	2.5400	2	10	2
3	10	2	3	3.9508	1.9344	3	2	10
4	2	2	4	5.9310	1.6897	4	0	10
5	2	10	5	1.6897	5.9310	5	0	0
6	0	10						



**Fig. E1.** Le noyau central pour la section “L” - validation selon (Mofid et al. 2001)

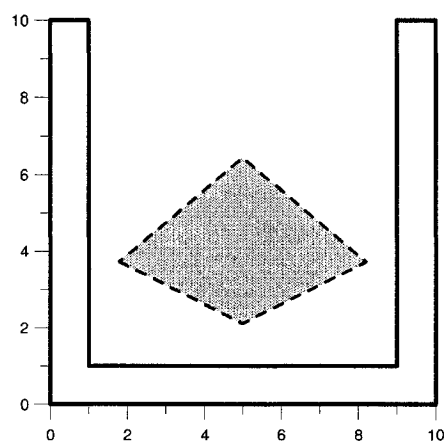
**Tableau E.2.**

Section "U" (les dimensions sont arbitraires: mètres, pieds...)

Section		
Point	x [m]	y [m]
1	0	0
2	10	0
3	10	10
4	9	10
5	9	1
6	1	1
7	1	10
8	0	10

Noyau central		
Point	x [m]	y [m]
1	1.7905	3.7143
2	5.0000	2.1061
3	8.2095	3.7143
4	5.0000	6.4359

Convex hull		
Point	x [m]	y [m]
1	10	0
2	10	10
3	0	10
4	0	0

**Fig. E2.** Le noyau central pour la section "U" - validation selon (Mofid et al. 2001)

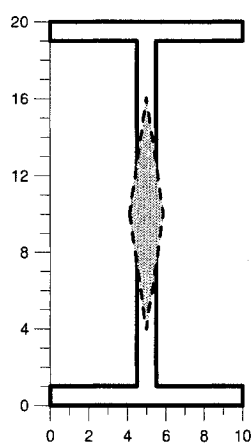
**Tableau E.3.**

Section "I" (les dimensions sont arbitraires: mètres, pieds...)

Section		
Point	x [m]	y [m]
1	0	0
2	10	0
3	10	1
4	5.5	1
5	5.5	19
6	10	19
7	10	20
8	0	20
9	0	19
10	4.5	19
11	4.5	1
12	0	1

Noyau central		
Point	x [m]	y [m]
1	4.1149	10.0000
2	5.0000	3.9667
3	5.8851	10.0000
4	5.0000	16.0333

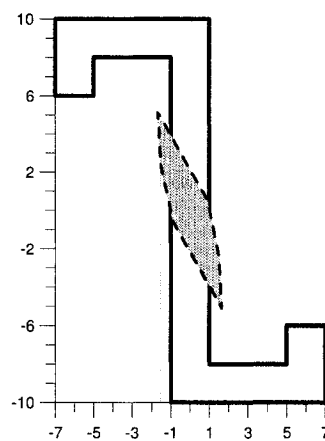
Convex hull		
Point	x [m]	y [m]
1	10	0
2	10	20
3	0	20
4	0	0

**Fig. E3.** Le noyau central pour la section "I" - validation selon (Turcotte et Wilson 1998)

**Tableau E.4.**

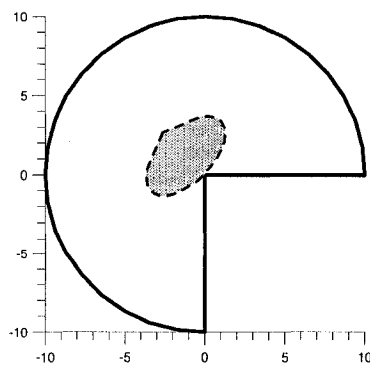
Section "Z" (les dimensions sont arbitraires: mètres, pieds...)

Section			Noyau central			Convex hull		
Point	x [m]	y [m]	Point	x [m]	y [m]	Point	x [m]	y [m]
1	-1	-10	1	-1.5079	2.3810	1	7	-10
2	7	-10	2	-0.9064	-0.5263	2	7	-6
3	7	-6	3	1.6667	-5.1111	3	1	10
4	5	-6	4	1.5079	-2.3810	4	-7	10
5	5	-8	5	0.9064	0.5263	5	-7	6
6	1	-8	6	-1.6667	5.1111	6	-1	-10
7	1	10						
8	-7	10						
9	-7	6						
10	-5	6						
11	-5	8						
12	-1	8						

**Fig. E4.** Le noyau central pour la section "Z" - validation selon (Turcotte et Wilson 1998)

**Tableau E.5.**Section  $\frac{3}{4}$  d'un cercle (les dimensions sont arbitraires: mètres, pieds...)

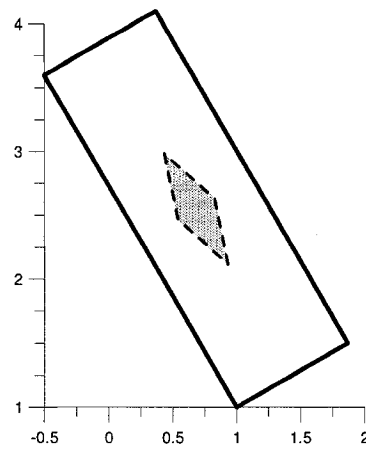
Section			Noyau central			Convex hull		
Point	x [m]	y [m]	Point	x [m]	y [m]	Point	x [m]	y [m]
1	10.0000	0.0000	1	-2.6287	2.6287	1	0.0000	-10.0000
2	9.8481	1.7365	2	-3.4946	0.5897	2	10.0000	0.0000
3	9.3969	3.4202	3	-3.5995	0.2301	3	9.8481	1.7365
4	8.6603	5.0000	4	-3.6480	-0.1163	4	9.3969	3.4202
5	7.6604	6.4279	5	-3.6339	-0.4397	5	8.6603	5.0000
6	6.4279	7.6604	6	-3.5513	-0.7291	6	7.6604	6.4279
7	5.0000	8.6603	7	-3.3954	-0.9719	7	6.4279	7.6604
8	3.4202	9.3969	8	-3.1633	-1.1548	8	5.0000	8.6603
9	1.7365	9.8481	9	-2.8551	-1.2644	9	3.4202	9.3969
10	0.0000	10.0000	10	-2.4753	-1.2883	10	1.7365	9.8481
11	-1.7365	9.8481	11	-2.0334	-1.2168	11	0.0000	10.0000
12	-3.4202	9.3969	12	-1.5446	-1.0448	12	-1.7365	9.8481
13	-5.0000	8.6603	13	-1.0300	-0.7735	13	-3.4202	9.3969
14	-6.4279	7.6604	14	-0.5145	-0.4114	14	-5.0000	8.6603
15	-7.6604	6.4279	15	-0.0253	0.0253	15	-6.4279	7.6604
16	-8.6603	5.0000	16	0.4114	0.5145	16	-7.6604	6.4279
17	-9.3969	3.4202	17	0.7735	1.0300	17	-8.6603	5.0000
18	-9.8481	1.7365	18	1.0448	1.5446	18	-9.3969	3.4202
19	-10.0000	0.0000	19	1.2168	2.0334	19	-9.8481	1.7365
20	-9.8481	-1.7365	20	1.2883	2.4753	20	-10.0000	0.0000
21	-9.3969	-3.4202	21	1.2644	2.8551	21	-9.8481	-1.7365
22	-8.6603	-5.0000	22	1.1548	3.1633	22	-9.3969	-3.4202
23	-7.6604	-6.4279	23	0.9719	3.3954	23	-8.6603	-5.0000
24	-6.4279	-7.6604	24	0.7291	3.5513	24	-7.6604	-6.4279
25	-5.0000	-8.6603	25	0.4397	3.6339	25	-6.4279	-7.6604
26	-3.4202	-9.3969	26	0.1163	3.6480	26	-5.0000	-8.6603
27	-1.7365	-9.8481	27	-0.2301	3.5995	27	-3.4202	-9.3969
28	0.0000	-10.0000	28	-0.5897	3.4946	28	-1.7365	-9.8481
29	0.0000	0.0000						

**Fig. E5.** Le noyau central pour la section  $\frac{3}{4}$  d'un cercle - validation selon (Turcotte et Wilson 1998)

**Tableau E.6.**

Section rectangulaire inclinée (les dimensions sont arbitraires: mètres, pieds...)

Section			Noyau central			Convex hull		
Point	x [m]	y [m]	Point	x [m]	y [m]	Point	x [m]	y [m]
1	1.0000	1.0000	1	0.4330	2.9821	1	1.0000	1.0000
2	1.8660	1.5000	2	0.5387	2.4657	2	1.8660	1.5000
3	0.3660	4.0981	3	0.9330	2.1160	3	0.3660	4.0981
4	-0.5000	3.5981	4	0.8273	2.6324	4	-0.5000	3.5981



**Fig. E6.** Le noyau central pour la section rectangulaire inclinée - validation  
à partir de calcul manuel

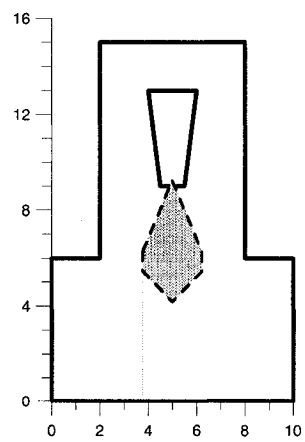
**Tableau E.7.**

Section avec une trou (les dimensions sont arbitraires: mètres, pieds...)

Section		
Point	x [m]	y [m]
1	0	0
2	10	0
3	10	6
4	8	6
5	8	15
6	2	15
7	2	13
8	6	13
9	5.5	9
10	4.5	9
11	4	13
12	2	13
13	2	6
14	0	6

Noyau central		
Point	x [m]	y [m]
1	3.7764	6.2932
2	3.7602	5.4604
3	5.0000	4.1691
4	6.2398	5.4604
5	6.2236	6.2932
6	5.0000	9.2320

Convex hull		
Point	x [m]	y [m]
1	10	0
2	10	6
3	8	15
4	2	15
5	0	6
6	0	0

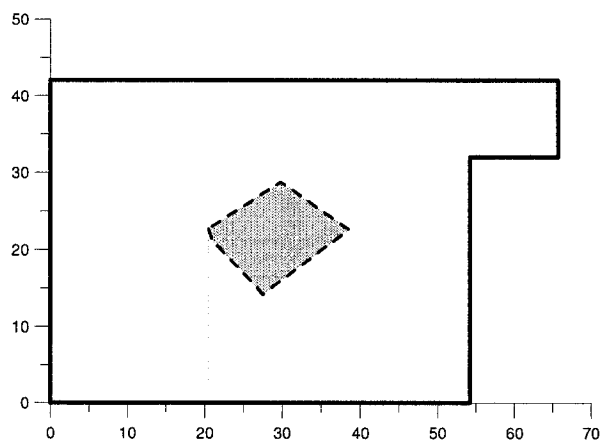


**Fig. E7.** Le noyau central pour une section avec une trou - validation manuelle

**Tableau E.8.**

Section d'une ouvrage hydroélectrique (Tracy et Kling 1982) - les dimensions sont en pieds

Section			Noyau central			Convex hull		
Point	x [pieds]	y [pieds]	Point	x [pieds]	y [pieds]	Point	x [pieds]	y [pieds]
1	0	0	1	20.4569	22.6820	1	54.23	0
2	10	0	2	21.0405	21.1189	2	65.7	32
3	54.23	0	3	27.5042	14.2528	3	65.7	42
4	54.23	32	4	38.5578	22.6033	4	0	42
5	65.7	32	5	29.7922	28.7518	5	0	0
6	65.7	42						
7	0	42						



**Fig. E8.** Le noyau central pour une section non symétrique - validation selon (Tracy et Kling 1982)



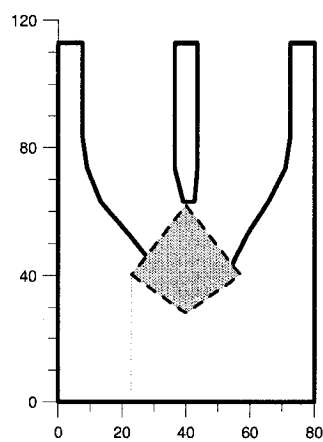
**Tableau E.9.**

Prise d'eau (Fig. A.1) - les dimensions sont arbitraires: mètres, pieds...

Section		
Point	x [pieds]	y [pieds]
1	0	0
2	80	0
3	80	113
4	72.5	113
5	72.5	83.4
6	71	73.5
7	65.7	63
8	59.2	53
9	52.6	39.9
10	34.2	38
11	21.9	53
12	13.2	63
13	9	73.5
14	7.5	83.4
15	7.5	113
16	36.5	113
17	36.5	73.5
18	39.1	63
19	42.6	63
20	43.5	73.5
21	43.5	113
22	0	113

Noyau central		
Point	x [pieds]	y [pieds]
1	22.9312	40.2434
2	39.9274	28.2743
3	56.9927	40.2661
4	39.9450	61.9050

Convex hull		
Point	x [pieds]	y [pieds]
1	80	0
2	80	113
3	0	113
4	0	0

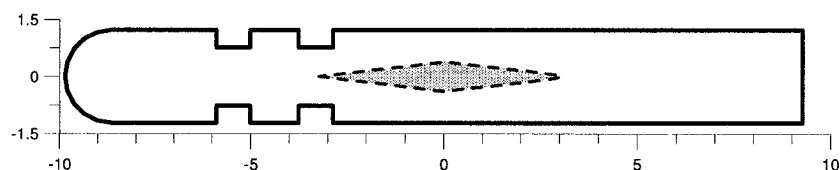


**Fig. E9.** Le noyau central pour la prise d'eau - validation selon (Tracy et Kling 1982)

**Tableau E.10.**

Pilier d'évacuateur de crues Coteau (Fig. A.2) - les dimensions sont en mètres

Section			Noyau central			Convex hull		
Point	x [m]	y [m]	Point	x [m]	y [m]	Point	x [m]	y [m]
1	9.2720	1.2200	1	-3.2351	0.0000	1	9.2720	-1.2200
2	-2.8720	1.2200	2	0.0002	-0.3861	2	9.2720	1.2200
3	-2.8720	0.7650	3	1.8408	-0.1816	3	-8.6320	1.2200
4	-3.7570	0.7650	4	2.6575	-0.0820	4	-9.0090	1.1600
5	-3.7570	1.2200	5	2.9024	-0.0456	5	-9.3490	0.9870
6	-5.0070	1.2200	6	3.0048	-0.0240	6	-9.6190	0.7170
7	-5.0070	0.7650	7	3.0450	-0.0076	7	-9.7920	0.3770
8	-5.8920	0.7650	8	3.0450	0.0076	8	-9.8520	0.0000
9	-5.8920	1.2200	9	3.0048	0.0240	9	-9.7920	-0.3770
10	-8.6320	1.2200	10	2.9024	0.0456	10	-9.6190	-0.7170
11	-9.0090	1.1600	11	2.6575	0.0820	11	-9.3490	-0.9870
12	-9.3490	0.9870	12	1.8408	0.1816	12	-9.0090	-1.1600
13	-9.6190	0.7170	13	0.0002	0.3861	13	-8.6320	-1.2200
14	-9.7920	0.3770						
15	-9.8520	0.0000						
16	-9.7920	-0.3770						
17	-9.6190	-0.7170						
18	-9.3490	-0.9870						
19	-9.0090	-1.1600						
20	-8.6320	-1.2200						
21	-5.8920	-1.2200						
22	-5.8920	-0.7650						
23	-5.0070	-0.7650						
24	-5.0070	-1.2200						
25	-3.7570	-1.2200						
26	-3.7570	-0.7650						
27	-2.8720	-0.7650						
28	-2.8720	-1.2200						
29	9.2720	-1.2200						

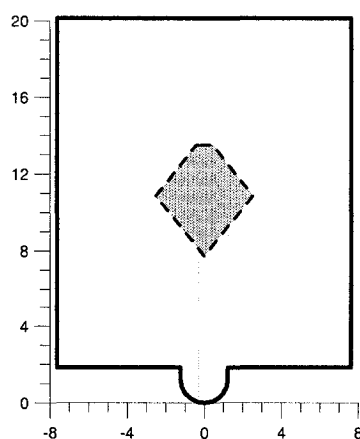


**Fig. E10.** Le noyau central pour le pilier Coteau - validation à partir de calcul manuel

**Tableau E.11.**

Base du pilier d'évacuateur de crues Coteau (Fig. A.3) - les dimensions sont en mètres

Section			Noyau central			Convex hull		
Point	x [m]	y [m]	Point	x [m]	y [m]	Point	x [m]	y [m]
1	1.2200	1.8300	1	-0.2790	13.4995	1	0.0000	0.0000
2	7.6200	1.8300	2	-0.4293	13.4915	2	0.3770	0.0597
3	7.6200	20.1200	3	-2.5067	10.8416	3	7.6200	1.8300
4	-7.6200	20.1200	4	0.0000	7.7360	4	7.6200	20.1200
5	-7.6200	1.8300	5	2.5067	10.8416	5	-7.6200	20.1200
6	-1.2200	1.8300	6	0.4293	13.4915	6	-7.6200	1.8300
7	-1.2200	1.2200	7	0.2790	13.4995	7	-0.3770	0.0597
8	-1.1603	0.8430						
9	-0.9870	0.5029						
10	-0.7171	0.2330						
11	-0.3770	0.0597						
12	0.0000	0.0000						
13	0.3770	0.0597						
14	0.7171	0.2330						
15	0.9870	0.5029						
16	1.1603	0.8430						
17	1.2200	1.2200						



**Fig. E11.** Le noyau central pour la base du pilier Coteau - validation à partir de calcul manuel