

**Titre:** Gestion de la congestion d'un centre-ville par péages  
Title:

**Auteur:** Alain Poirier  
Author:

**Date:** 2007

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Poirier, A. (2007). Gestion de la congestion d'un centre-ville par péages [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
Citation: <https://publications.polymtl.ca/7943/>

## Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/7943/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Gilles Savard  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

GESTION DE LA CONGESTION D'UN CENTRE-VILLE  
PAR PÉAGES

ALAIN POIRIER

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)

AVRIL 2007



Library and  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*  
ISBN: 978-0-494-29251-8

*Our file* *Notre référence*  
ISBN: 978-0-494-29251-8

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

\*\*  
**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

GESTION DE LA CONGESTION D'UN CENTRE-VILLE  
PAR PÉAGES

présenté par : POIRIER Alain

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. ROUSSEAU Louis-Martin, Ph.D, président

M. SAVARD Gilles, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. MARCOTTE Patrice, Ph.D., membre

## REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier mon directeur, Gilles Savard, pour m'avoir attribué un sujet qui m'a beaucoup intéressé et surtout pour son aide et ses conseils tout au long de ce travail d'une certaine ampleur.

Merci à Patrice Marcotte pour son aide sur une question technique et le partage de connaissances diverses. Merci à monsieur Rousseau et aux autres membres du jury pour leur correction attentive ainsi que leurs commentaires, questions et suggestions constructives.

Un gros merci à mes amis connus dans le cadre de ces études pour avoir rendu ces dernières plus agréables et enrichissantes, en particulier Aimé, Benoit, Hicham, Marie-Claude et Miladin.

Enfin, merci au personnel du GERAD, de Polytechnique et des bibliothèques pour leurs différents services appréciables.

## RÉSUMÉ

La congestion automobile s'avère importante dans bien des grandes villes. On présente plusieurs politiques possibles destinées à gérer la circulation automobile, puis on retient le péage autour d'un centre-ville. On utilise la programmation biniveau pour modéliser cette tarification (de type *second-best pricing*), puisqu'on y trouve bien deux acteurs : le premier niveau d'optimisation représente l'autorité qui vise à minimiser la congestion totale sur le réseau et le second niveau, celui des usagers qui empruntent le plus court chemin en termes de coûts perçus. On suppose qu'il existe un certain nombre de classes d'usagers, chacune étant caractérisée par la valeur que ses usagers accordent au temps. C'est cette dernière valeur qui détermine l'évaluation des coûts perçus, constitués du délai, d'un certain coût fixe et possiblement d'un péage. On considère une demande fixe et on donne le choix aux usagers entre l'automobile et le transport en commun, qui est bien sûr exempt de péage. Pour des raisons pratiques (surtout les coûts reliés aux installations), on permet aux autorités de fixer un nombre maximal de points de péage. L'autorité peut aussi désirer imposer un tarif identique à tous les points. Ainsi, la solution de notre modèle fournit la localisation des points de péage ainsi que le(s) tarif(s).

Le problème du second niveau se modélise à l'aide d'une inéquation variationnelle et on obtient alors un programme mathématique avec contraintes d'équilibre (MPEC). Ensuite, la congestion est discrétisée et les contraintes sont linéarisées et on obtient un modèle avec contraintes linéaires et variables réelles et entières (MIP). On peut résoudre ce type de problème de façon exacte à l'aide d'un logiciel comme CPLEX par exemple. Les contraintes du modèle de type MIP sont définies aussi serrées que possible en calculant des bornes sur les valeurs de constantes  $M$ , afin d'optimiser le temps de résolution. Par la suite, on développe un algorithme permettant d'adapter la discrétisation de la congestion d'une solution à l'autre. Ainsi, on résout le modèle avec une première discrétisation arbitraire, puis on adapte cette dernière à la solution obtenue pour une nouvelle résolution et ainsi de suite, jusqu'à l'atteinte de certains critères d'arrêt. On utilise enfin l'algorithme de Frank-Wolfe pour connaître l'affectation exacte du trafic qu'entraînent les solutions de notre modèle. On peut ainsi évaluer la qualité (congestion totale) d'une solution.

## ABSTRACT

Traffic jam is an important problem in many cities around the world. After a study of existing traffic management policies, we choose toll pricing around a downtown perimeter. Bilevel programming is used to model this second-best pricing because two actors exist ; at the first level, the authority wants to minimize the total congestion on the network and at the second, the users choose the shortest path in terms of perceived costs. The users are separated in a finite number of classes, each of which is characterized by a value of time. This value determines the perceived costs made up of delay, fixed cost and possibly a toll. A fixed demand exists and the user has the choice between using his car or the public transit, which of course is free of toll. For practical reasons (mainly costly installations), the authority can fix the maximum number of toll points. Also, the same toll, at every point, can be desirable for the authority. So, our model's solution gives the toll points' locations and their amount(s).

A variational inequality is used to model the second level problem and we obtain a mathematical program with equilibrium constraints (MPEC). Then, we discretize the congestion and linearize all constraints in order to obtain a mixed integer program (MIP). This program can be solved with a solver like CPLEX for example. The constraints of the MIP are defined as tightly as possible by evaluating valid bounds on some  $M$  constants, so the solution time is optimized. To solve the MIP, we develop an algorithm that adopts the range of flow that is discretized in regard of the last solution obtained. For the first MIP, the congestion is discretized arbitrarily. Then, a new discretization is constructed while considering the last solution, this new MIP is solved, and so on until some stopping criteria are attained. The Frank-Wolfe algorithm is used to calculate the traffic assignment corresponding to our model's solution, and so we can evaluate the quality of a solution.

## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS .....	iv
RÉSUMÉ.....	v
ABSTRACT .....	vi
TABLE DES MATIÈRES .....	vii
LISTE DES TABLEAUX.....	x
LISTE DES FIGURES.....	xi
LISTE DES ANNEXES.....	xii
CHAPITRE 1 : INTRODUCTION .....	1
1.1    Politiques existantes de gestion de la congestion.....	3
1.2    Contributions du présent mémoire.....	7
CHAPITRE 2 : NOTIONS DE BASE .....	8
2.1    Graphes et réseaux .....	8
2.1.1    Types de cordon .....	10
2.2    Notions d'équilibres en transport.....	11
2.2.1    Équilibres de Wardrop.....	12
2.2.2    Paradoxe de Braess.....	14
2.2.3    Coût marginal .....	14
2.3    First-best pricing vs second-best pricing .....	16
2.4    Programmation mathématique à deux niveaux et tarification.....	17
2.4.1    Modélisation biniveau .....	17
2.4.2    Modèle de tarification dans les réseaux de transport.....	18
2.4.3    Algorithme de Zhang et Yang .....	19
2.5    Programmes mathématiques avec contraintes d'équilibre (MPEC) .....	22
2.5.1    Inéquations variationnelles .....	22
2.5.2    MPEC pour second-best pricing.....	23

CHAPITRE 3 : MODÈLE ET AFFECTATION DU TRAFIC.....	26
3.1     Formulation du modèle .....	26
3.1.1    Première fonction objectif .....	27
3.1.2    Transport en commun.....	28
3.1.3    Demande inélastique et segmentée.....	28
3.1.4    Congestion et coûts perçus .....	29
3.1.5    Points de péage .....	30
3.2     Modèle 1 : MPEC pour péages différents permis .....	31
3.3     Modèle 2 : MPEC pour péages identiques.....	32
3.4     Affectation du trafic, algorithme de Frank-Wolfe .....	34
CHAPITRE 4 : DISCRÉTISATION DU PROBLÈME ET ALGORITHME .....	36
4.1     Discrétisation de la fonction de congestion .....	36
4.2     Programme de second niveau .....	39
4.2.1    Linéarisation de la contrainte de complémentarité .....	39
4.2.2    Transport en commun .....	40
4.3     Modèles discrétisés (MIP) pour péages différents permis .....	40
4.4     Modèles discrétisés (MIP) pour péages identiques.....	42
4.5     Bornes valides pour certaines constantes $M$ .....	43
4.5.1    Contrainte de complémentarité.....	43
4.5.2    Écarts entre les coûts des chemins.....	45
4.6     Adaptation de la congestion pour le modèle discrétisé .....	46
4.6.1    Exemple 1, solution exacte.....	47
4.6.2    Exemple 1 avec discrétisation initiale .....	48
4.6.3    Position de la discrétisation .....	49
4.6.4    Longueur des plateaux de congestion, exemple 1 .....	50
4.6.5    Discrétisation adaptative, algorithme .....	51

CHAPITRE 5 : RÉSULTATS NUMÉRIQUES .....	54
5.1    Plan d'expérience.....	54
5.2    Meilleur modèle selon le type de péage.....	55
5.2.1    Péages différents.....	56
5.2.2    Péages identiques.....	57
5.3    Sensibilité des modèles PDIFM et PIDM .....	59
5.3.1    Nombre de classes d'usagers et de plateaux de congestion.....	59
5.4    Discrétisation adaptative.....	61
5.4.1    Exemple 1 .....	61
5.4.2    Deux discrétisations différentes.....	63
5.4.3    Qualité des solutions.....	65
CONCLUSION .....	69
BIBLIOGRAPHIE .....	71
ANNEXES.....	74

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1 Notation pour le problème de tarification dans les réseaux de transport.....	18
Tableau 2.2 Notation l'algorithme de Zhang et Yang .....	19
Tableau 3.1 Notation pour le problème de péage.....	31
Tableau 4.1 Notation pour le problème de péage.....	41
Tableau 4.2 Solution exacte de l'exemple 1.....	48
Tableau 4.3 Solution de l'exemple 1 avec la discréétisation initiale .....	48
Tableau 4.4 Notation pour la discréétisation adaptative (Dadapt) .....	52
Tableau 5.1 Temps de résolution selon les valeurs des grands $M$ , pour PDIFT et PDIFM .....	57
Tableau 5.2 Comparaison des temps de résolution selon les grands $M$ , pour PDIFT et PDIFM .	57
Tableau 5.3 Comparaison des temps de résolution selon les grands $M$ , pour PIDT et PIDM .....	58
Tableau 5.4 Temps de résolution selon les valeurs des grands $M$ , pour PIDT et PIDM.....	58
Tableau 5.5 Congestion selon le type de péage.....	59
Tableau 5.6 Influence de $n$ et $L$ sur le temps de résolution pour PDIFM.....	60
Tableau 5.7 Influence de $n$ et $L$ sur le temps de résolution pour PIDM.....	61
Tableau 5.8 Influence combinée de $n$ et $L$ sur le temps de résolution pour PDIFM et PIDM .....	61
Tableau 5.9 Discréétisation initiale 1, exemple 1 .....	62
Tableau 5.10 Discréétisation initiale 2, exemple 1 .....	62
Tableau 5.11 Deux discréétisations différentes ( $L$ ), $\varphi^{\max} = 0,03$ et $\delta T^{\max} = 0,01$ .....	64
Tableau 5.12 Deux discréétisations différentes ( $L$ ), $\varphi^{\max} = 0,005$ et $\delta T^{\max} = 0,01$ .....	64
Tableau 5.13 Problème $g$ résolu avec Dadapt ( $L = 3$ , un péage permis, $\varphi^{\max} = 0,03$ ) .....	65
Tableau 5.14 Objectifs, $\varphi^{\max} = 0,03$ , un péage permis .....	66
Tableau 5.15 Objectifs, $\varphi^{\max} = 0,005$ , un péage permis .....	66

## LISTE DES FIGURES

Figure 2.1 Séparateur et composantes (Zhang et Yang 2004).....	9
Figure 2.2 Cordons simples et boucle non fermée (Zhang et Yang 2004).....	11
Figure 2.3 Réseau du paradoxe de Braess.....	14
Figure 2.4 Tarification au coût marginal avec congestion (Yang et Huang 1998) .....	15
Figure 2.5 Réseau pour cordon simple.....	21
Figure 4.1 Discrétisation de la fonction de congestion .....	37
Figure 4.2 Taxes admissibles, taxe maximale .....	44
Figure 4.3 Plus d'un chemin sans péage .....	45
Figure 4.4 Discrétisation initiale pour l'exemple 1 .....	49
Figure 4.5 Congestion avant ajustement .....	50
Figure 4.6 Congestion après ajustement.....	50
Figure 5.1 Réseau 1 (Zhang et Yang 2004).....	55
Figure 5.2 Frank-Wolfe, problème a, $\varphi^{\max} = 0,005$ .....	67
Figure 5.3 Frank-Wolfe, problème b, $\varphi^{\max} = 0,005$ .....	67
Figure 5.4 Frank-Wolfe, problème c, $\varphi^{\max} = 0,005$ .....	67
Figure 5.5 Frank-Wolfe, problème d, $\varphi^{\max} = 0,005$ .....	67
Figure 5.6 Frank-Wolfe, problème e, $\varphi^{\max} = 0,005$ .....	67
Figure 5.7 Frank-Wolfe, problème f, $\varphi^{\max} = 0,005$ .....	67
Figure 5.8 Frank-Wolfe, problème g, $\varphi^{\max} = 0,005$ .....	68
Figure 5.9 Frank-Wolfe, problème h, $\varphi^{\max} = 0,005$ .....	68
Figure 5.10 Frank-Wolfe, problème i, $\varphi^{\max} = 0,005$ .....	68
Figure 5.11 Frank-Wolfe, problème j, $\varphi^{\max} = 0,005$ .....	68

## **LISTE DES ANNEXES**

ANNEXE I : PARAMÈTRES DES DIX PROBLÈMES RÉSOLUS.....	74
ANNEXE II : DONNÉES DU RÉSEAU 1 .....	75

## CHAPITRE 1

### INTRODUCTION

La congestion routière fait partie de la vie quotidienne de bien des travailleurs et alimente une chronique récurrente des émissions du matin à la radio. On constate que le réseau routier montréalais n'offre pas une performance très satisfaisante, et c'est le cas pour beaucoup de grandes villes dans le monde. Quelles sont donc les sources de ce problème de transport ? Que peut-on faire pour améliorer la situation ?

Évidemment, la principale cause du problème est la présence simultanée d'un trop grand nombre d'automobiles sur le réseau routier. Selon une étude de la Banque Mondiale (Estache et al. 2000), le nombre de véhicules motorisés croît de 3 % par an et le nombre de véhicule-km augmente encore plus rapidement. Ce taux de croissance est supérieur dans plusieurs pays en développement. Dans un rapport de l'Agence métropolitaine de transport (2003), on peut lire que pour la région de Montréal,

« Alors que la population n'augmentait que de 10 % entre 1987 et 1998, le parc automobile a crû de 24 % durant la même période, ce qui représente un ajout net de 27 000 automobiles par année. C'est l'équivalent d'une file de 162 km qui s'ajoute, année après année, à un réseau routier déjà saturé. »

Selon l'importance qu'on attribue au temps, le budget dont on dispose et bien d'autres facteurs, on choisit alors le mode de transport qui nous apparaît optimal. Par exemple, pour un col blanc du centre-ville disposant d'un revenu élevé et qui désire minimiser son temps de déplacement peu importe le montant d'un péage pour accéder au centre-ville, le choix demeurera l'automobile. À l'opposé, un étudiant concédera sûrement à passer plus de temps en transport en commun (ou collectif) parce qu'il veut minimiser son coût en argent sonnant. Tenant compte de ces considérations, plusieurs personnes choisissent aussi de se déplacer en voiture parce que, malheureusement, pour beaucoup de trajets, le transport collectif s'avère significativement moins rapide que l'automobile. Par exemple, dans un rapport de la Direction du transport de la Ville de Montréal (2005), on note que :

« (...) les temps de déplacement en transport en commun sont compétitifs à destination du centre-ville et du centre-ville périphérique (ratios de temps TC/temps auto variant entre 1,32 et 1,60). À l'opposé, la compétition offerte par les services de transport en commun dans les secteurs situés aux extrémités de l'île est faible (ratios de temps TC/temps auto variant entre 3,15 et 3,87). Les secteurs où la compétitivité des temps TC/temps auto est bonne jouissent généralement de services rapides par métro ou par autobus, entre autres de services express bénéficiant de voies réservées ou d'autres mesures préférentielles. »

On constate que beaucoup d'automobilistes, surtout durant les heures de pointe, perdent du temps et de l'argent et polluent plus que s'il n'y avait pas de congestion parce qu'ils n'ont pas de motivation directe et suffisante pour voyager à d'autres moments ou par d'autres moyens. Ainsi, d'importantes ressources sont gaspillées inutilement. De plus, il n'est sans doute pas souhaitable de laisser croître encore beaucoup le réseau routier et l'utilisation de l'automobile pour des raisons sanitaires et environnementales mises en lumière régulièrement par diverses études (Agence de la santé et des services sociaux de Montréal 2006). Et si on prenait l'équivalent des fonds gaspillés pour aménager un réseau de transport plus performant pour tous ? On responsabiliserait aussi les usagers en leur faisant payer des frais représentatifs des coûts qu'ils engendrent à la société par leurs choix de transport. Et on verrait peut-être moins d'histoires d'horreur comme ce brocoli qu'on transporte par camion des environs de Chicoutimi jusqu'à un centre de distribution de Boucherville ( $\approx 500$  km)... Pour terminer son périple sur les tablettes d'une épicerie de Chicoutimi !

Ainsi, on en arrive à vouloir influencer le comportement des usagers du réseau de transport. Comme tout système a une offre de service limitée, on doit voir à ce que les usagers ne veuillent pas tous être servis en même temps. Par exemple, il existe des forfaits d'abonnement au téléphone cellulaire offrant des appels illimités pendant certaines périodes, il en coûte plus cher pour skier les fins de semaine, etc. Le réseau routier est l'un des rares que l'on puisse utiliser quand on veut et toujours au même prix peu importe la demande, c'est-à-dire gratuitement. Comme les gens adoptent souvent un comportement égoïste et à courte vue ou n'ont pas l'information nécessaire pour agir autrement, il semble souhaitable que le législateur s'implique plus activement dans la gestion du transport. Dans ce travail, on s'intéresse à la congestion dans une zone donnée, un centre-ville par exemple. Puisque la situation est problématique dans bien des villes de par le monde, plusieurs solutions ont été envisagées et testées.

## 1.1 Politiques existantes de gestion de la congestion

Voici quelques stratégies existantes dont le but est de réduire le nombre d'automobiles sur le réseau routier, autant autoroutier que celui d'un centre-ville, et/ou de modifier le moment des déplacements pour étendre en quelque sorte les heures de pointe :

- **Permis de zone**

On doit détenir un permis pour entrer dans la zone à accès restreint. Cela a déjà été instauré dans le centre-ville historique de Rome par exemple.

Avantage. Peu coûteux à faire fonctionner.

Désavantages. Ne réduit pas le nombre de déplacements ni le moment de ceux-ci ; on peut avoir un permis pour une journée par exemple et on peut donc circuler autant qu'on le souhaite (Europrice 2000).

- **Stationnements payants**

On paye pour un espace de stationnement pour un certain temps.

Avantages. Relativement peu coûteux à faire fonctionner, peut être combiné à d'autres mesures. On peut appliquer des tarifs variant selon le moment.

Désavantages. Aucun effet sur les automobilistes qui passent par le centre-ville sans s'y arrêter. L'usager ne sait pas à l'avance s'il aura de la facilité à trouver un stationnement près de sa destination. Il y a longtemps que ça existe et ça n'a pas permis d'éviter la situation problématique actuelle (Kendzia et Korver 2003). Dans la plupart des systèmes existants, l'usager doit aller à un point de paiement et réaliser la transaction pour acquérir le droit de stationner et cela prend un certain temps. Certains systèmes ne permettent pas d'appliquer des tarifs variables.

- **Distance parcourue**

Utilisé sur des autoroutes puisque la distance y est facile à évaluer (entre 2 entrées/sorties ou points de péage). En Angleterre, on a proposé que les frais d'enregistrement des véhicules et la taxe sur l'essence soient remplacés par une tarification en fonction de la distance parcourue, ce qui reflète plus adéquatement les coûts réels engendrés par chacun des véhicules (Commission for Integrated Transport 2002).

Avantages. La tarification pourrait être fonction du niveau de congestion, du type de véhicule, etc. On peut s'approcher beaucoup de la tarification au coût marginal, ce qui responsabilise chaque usager. Des systèmes avancés permettent de ne pas avoir à arrêter à des points de péage.

Désavantages. Nécessite une technologie complexe et chère (type GPS pour évaluer la position du véhicule au temps  $t$ ) pour être implanté dans une ville et c'est pourquoi cela ne l'a pas encore été à notre connaissance (PROGRESS 2004).

- **Cordon**

Toute entrée à l'intérieur de la zone limitée par un cordon est facturée. Aux utilisateurs fréquents, on peut distribuer des émetteurs à ondes courtes dédiées. Lorsqu'ils passent les points d'entrée du cordon, on ajoute un montant à leur facture périodique tenant compte du moment et possiblement d'autres critères de tarification. Des systèmes de reconnaissance automatique des numéros de plaque par caméra sont aussi installés pour les utilisateurs ne disposant pas d'émetteur radio ; s'il n'y a pas de signal radio, on photographie la plaque, on traite l'image afin d'identifier le numéro, puis on recherche le dossier du véhicule dans les banques de données et on note les frais. Dans pratiquement tous les cas rencontrés, le montant de péage est le même à tous les points d'entrée du cordon, mais il serait possible de fixer des péages différents selon la demande. L'important est que les utilisateurs soient bien informés et puissent ainsi prendre une décision éclairée quant au mode de transport et au trajet.

Avantages. Grâce aux technologies disponibles et testées, on peut adopter une facturation tenant compte du moment du déplacement et du type de véhicule par exemple. De plus, aucun arrêt n'est nécessaire.

Désavantages. Risques d'effets négatifs (stationnement ou congestion) en bordure de la zone taxée ; cependant, de nombreux exemples (PROGRESS 2004) montrent qu'il est

facile d'apporter des correctifs (stationnements gratuits pour accéder au transport en commun par exemple). Les commerçants à l'intérieur de la zone taxée craignent une diminution de leurs chiffres d'affaires. Or, à Londres, on n'a remarqué aucun effet à ce sujet après plus d'un an de fonctionnement (Transport for London 2005).

- **Cordon multi-couches ou multi-centres**

On utilise la même technologie que pour un cordon ordinaire, mais il peut y avoir plusieurs zones concentriques ou avec différents centres (voir la section 2.1.1).

Avantage. Offre plus de souplesse dans la politique de gestion du transport.

Désavantages. Plus difficile à comprendre pour les automobilistes et plus cher à implanter et à entretenir qu'un seul cordon puisqu'on a besoin d'un plus grand nombre d'installations (PROGRESS 2004).

De toutes les expériences de tarification, on conclut qu'il est essentiel, pour le soutien populaire et ainsi le succès du projet, que les revenus générés servent à améliorer l'efficacité du système de transport (Europice 2000). Ceci peut se faire de différentes façons :

- Construire et/ou améliorer des routes.
- Investir dans le transport en commun : ajouter des parcours, augmenter la fréquence des passages, améliorer la fiabilité, etc.
- Développer les infrastructures pour cyclistes et piétons.
- Ajuster et raffiner les méthodes de tarification : fractionner davantage les plages horaires de tarification, adopter un ajustement dynamique de la tarification, ajouter des voies pour véhicules occupés par au moins deux passagers, etc.

Il existe un cordon depuis 1975 autour de l'île-État Singapour et on a instauré un système de tarification fonctionnant par ondes courtes dédiées en 1998, afin d'éviter les arrêts aux points de péage. Cet exemple démontre clairement les bienfaits de ce type de système après de nombreuses années d'exploitation (Victoria Transport Policy Institute 2006). Depuis, un autre exemple, dans une ville présentant une densité de population comparable (de l'ordre de 5000 habitants/km<sup>2</sup>, (Wikipedia 2006)), a attiré l'attention. À Londres, un cordon autour du centre-ville est en place depuis 2003 et a eu pour effet d'améliorer pratiquement tous les aspects du transport collectif (Transport for London 2005). En vertu de la loi qui a instauré le système, tous les

surplus générés par celui-ci sont consacrés à des mesures fidèles à la stratégie de transport (*Mayor's Transport Strategy*), en accord avec le ministre des transports (Transport for London 2005). Voici ce qui se passe, idéalement, avec un système de cordon (Small 2005):

- Un péage augmente de façon sensible les frais de déplacement, ce qui pousse certains à délaisser la voiture.
- Une diminution du nombre d'automobiles contribue à augmenter la vitesse de tous les véhicules, dont les autobus, ce qui convainc de nouvelles personnes à utiliser ce dernier service.
- Des deux points précédents découle une diminution des frais d'exploitation puisqu'il faut moins de temps et moins d'essence pour rendre un service donné.
- Ceci permet d'ajouter des services sous forme de nouvelles routes, de fréquences plus élevées, ou les deux. Des frais inférieurs d'exploitation et un plus grand nombre d'utilisateurs peuvent même permettre des baisses de tarif.
- À mesure que ces changements prennent place, d'autres automobilistes sont convaincus d'utiliser un transport en commun efficace, et ainsi tourne ce « cercle vertueux ».

Après plus d'un an de fonctionnement, c'est ce qu'on a observé à Londres et la congestion a diminué d'environ 30 %, la vitesse moyenne au centre-ville a augmenté alors que les accidents et la pollution ont diminué (Transport for London 2005). Le nombre d'utilisateurs du transport collectif a augmenté de 16 % et les frais d'utilisation ont diminué de 11 % (Small 2005). Avec ce type de progrès, on pourrait améliorer un centre-ville troué avec des installations plus bénéfiques pour la collectivité que de simples stationnements... Le grand succès rencontré à Londres incite d'autres villes à adopter une tarification de type cordon autour du centre-ville. On s'est inquiété de savoir si cette forme de taxation pouvait s'avérer régressive, c.-à-d., imposer un fardeau total plus grand sur les gens à revenus moyens et faibles que sur les gens à revenus élevés. Il a été montré que la tarification s'avère assez souvent progressive (Santos et Rohey 2004). Si ce n'est pas le cas, il est facile d'aménager des correctifs comme des exemptions, des remboursements, etc.

## 1.2 Contributions du présent mémoire

On étudie, en termes de modélisation biniveau, une tarification de type cordon visant à minimiser la congestion. Le premier niveau représente l'autorité qui vise à minimiser la congestion totale sur le réseau en définissant un schéma de péage (tarif (péage ou taxe) et localisation) et le second niveau, celui des usagers qui empruntent le plus court chemin en termes de coûts perçus. Le modèle retenu, de type MPEC, considère une demande fixe segmentée et donne le choix aux usagers entre l'automobile et le transport en commun. La première contribution de ce mémoire est d'élaborer un modèle permettant aux autorités de fixer un nombre maximal d'arcs taxables. Afin d'obtenir un programme linéaire avec variables réelles et entières (MIP), on discrétise la congestion. On peut alors le résoudre de façon exacte à l'aide d'un logiciel comme CPLEX par exemple. Les contraintes du modèle sont définies aussi serrées que possible (bornes sur des valeurs de constantes  $M$ ) afin d'optimiser le temps de résolution. La seconde contribution de ce mémoire est de proposer un algorithme permettant d'adapter la discrétisation de la congestion d'une solution à l'autre. Ainsi, on résout le modèle avec une première discrétisation arbitraire, puis on adapte cette dernière à la solution obtenue pour une nouvelle résolution et ainsi de suite, jusqu'à l'atteinte de certains critères d'arrêt.

Le document est structuré comme suit : le chapitre 2 présente des notions utilisées dans la modélisation des stratégies de gestion de la congestion et en particulier des notions d'équilibre en transport comme les équilibres de Wardrop. Ensuite, on présente un premier modèle biniveau de tarification général, puisque c'est la façon naturelle de modéliser la situation, et aussi une approche originale et intéressante de résolution existante pour un problème très proche du nôtre. On s'intéresse ensuite aux programmes mathématiques avec contraintes d'équilibre (MPEC) puisque c'est cette forme qu'on utilisera. Dans le chapitre 3, on explique les hypothèses de départ de notre modélisation, puis on développe deux modèles MPEC. Au chapitre 4, on réécrit les MPEC précédents sous forme discrétisée (MIP) et on propose un algorithme de résolution avec une discrétisation adaptative (congestion discrétisée). Le chapitre 5 présente des résultats numériques permettant d'évaluer les performances de notre algorithme et la qualité des solutions obtenues.

## CHAPITRE 2

### NOTIONS DE BASE

Dans notre modèle, qu'on développera dans le prochain chapitre, l'autorité désire minimiser la congestion sur un réseau routier en instaurant des péages autour d'un centre-ville. Les usagers choisissent toujours le plus court chemin en termes de coûts perçus. En vue de développer une modélisation de cette tarification, on présente ici plusieurs notions utilisées concrètement dans la suite du présent travail ou pertinentes pour quiconque s'intéresse à la modélisation de la tarification sur un réseau routier. On présente d'abord quelques notions de base pour la représentation mathématique de réseaux et de cordons de péage (section 2.1). On expose ensuite des notions relatives aux équilibres en transport, telles que les équilibres de Wardrop (section 2.2.1), le paradoxe de Braess (section 2.2.2) et enfin la notion de coût marginal proposée par les économistes (section 2.2.3). Dans la section 2.3, on fait la différence entre les tarifications de type *first-best pricing* et de type *second-best pricing* qu'on adoptera. À la section 2.4, on présente la modélisation biniveau, tout à fait naturelle pour notre situation, ainsi qu'un algorithme original et intéressant pour accomplir la même tâche qu'on désire remplir avec notre modèle (section 2.4.3). On présente enfin en détail les programmes mathématiques avec contraintes d'équilibre (MPEC), puisqu'on optera pour ce type de modèle (section 2.5).

#### 2.1 Graphes et réseaux

On désire instaurer un cordon autour d'une zone où la congestion est problématique et ainsi obliger les automobilistes désirant y accéder à payer un certain montant. En termes de graphes et réseaux, ceci consiste à diviser les nœuds du réseau en deux ensembles : l'ensemble des nœuds à l'intérieur du cordon (centre-ville par exemple) et l'ensemble des nœuds à l'extérieur de celui-ci.

Un graphe  $G = (V, E)$  est constitué d'un ensemble de nœuds  $V$  ( $V$  pour *vertex*) et d'un ensemble d'arêtes  $E$  ( $E$  pour *edge*) reliant certains nœuds entre eux. Dans le cas des réseaux routiers, on construit des graphes orientés où le sens des arcs représente la direction de la circulation des véhicules. Les nœuds représentent des intersections ou des extrémités de route et on aura deux arcs orientés en sens inverse entre deux nœuds si le tronçon est à double sens. On aura besoin de la notion de *séparateur* pour définir un cordon de péage dans un graphe.

**Définition 1.** « Deux nœuds font partie d'une même composante connexe d'un graphe  $G$  si et seulement si il existe une chaîne dans  $G$  qui les relie », (Hertz 2005).

**Définition 2.** Une chaîne est une suite d'arêtes connectées l'une à la suite de l'autre.

**Définition 3.** Soit deux ensembles de nœuds  $V_1$  et  $V_2$ , on appelle cocycle l'ensemble des arêtes ayant une extrémité dans  $V_1$  et l'autre dans  $V_2$ .

**Définition 4.** Un séparateur est un cocycle tel que si on retire les arcs qui le constituent, le nombre de composantes connexes augmente d'une unité.

Par exemple, dans le réseau de la figure 2.1, on trouve  $V_1 = \{n_5, n_6, n_7, n_8, n_9\}$  et  $V_2 = \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$  et le séparateur est l'ensemble des arcs  $W = \{e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$  puisque si on retire les arcs de  $W$ , le réseau compte deux composantes (on parlera toujours de composantes connexes) au lieu d'une seule au départ. On peut identifier rapidement le séparateur  $W$  en observant qu'il s'agit de tous les arcs croisant la boucle (tirets) qui sépare  $V_1$  de  $V_2$ .

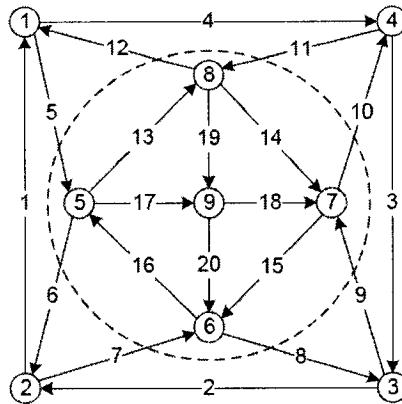


Figure 2.1 Séparateur et composantes (Zhang et Yang 2004)

La matrice d'incidence nœuds-arcs  $\mathbf{A}$  est fréquemment utilisée et est définie comme suit pour un graphe dans lequel on ne trouve aucun arc partant et terminant sur un même nœud :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'arc } j \text{ provient du noeud } i \\ 0 & \text{si l'arc } j \text{ n'est pas connecté au noeud } i \\ -1 & \text{si l'arc } j \text{ est dirigé vers le noeud } i. \end{cases}$$

Pour le réseau de la figure 2.1, la matrice d'incidence nœuds-arcs  $\mathbf{A}$  est la suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} & e_{17} & e_{18} & e_{19} & e_{20} \\ n_1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_4 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ n_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ n_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ n_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le rang de la matrice  $\mathbf{A}$  étant l'ordre maximal d'une sous-matrice carrée de  $\mathbf{A}$  de déterminant non nul, il est ici facile de vérifier que le rang de  $\mathbf{A}$  est bien 8. Chaque ligne de la matrice correspond à un nœud et chaque colonne correspond à un arc. Par simplicité, le *rang* de la matrice est aussi appelé rang du graphe. Le rang d'un graphe est donné par la différence entre le nombre de nœuds et le nombre de composantes,  $\gamma = \alpha - \beta$ , où  $\gamma$  est le rang,  $\alpha$  le nombre de nœuds et  $\beta$  le nombre de composantes connexes. Dans le réseau illustré, on ne compte qu'une seule composante et le rang  $\gamma = 9 - 1 = 8$ , ce qui correspond bien au rang de la matrice  $\mathbf{A}$ .

### 2.1.1 Types de cordon

On a déjà présenté des politiques de tarification par cordon à la section 1.1, et ici, comme on le fait dans l'article de Zhang et Yang (2004), on les définira en utilisant les notions de graphes et réseaux qu'on vient de voir. On parlera en détail de cet article à la section 2.4.3.

Il faut d'abord distinguer les termes *cordon* et *boucle*. On nommera boucle toute ligne imaginaire croisant des arcs et telle que ces derniers forment un séparateur (définition 4, section 2.1). Un cordon désigne plutôt un schéma de péage, un aménagement (nombre de boucles, etc). Sur la figure 2.2,  $C_1$  et  $C_2$  sont des boucles fermées alors que  $S$  est une boucle non fermée. Dans tous les cas, on parlera simplement de boucle puisqu'elles remplissent toutes la même fonction, c.-à-d. séparer le réseau en deux parties.

**Cordon simple.** C'est le cas le plus répandu de schéma de péage. On délimite la zone problématique, habituellement le centre-ville ou centre d'affaires (*Central Business District*), à l'aide d'une seule boucle. Ainsi, lorsqu'on retire les arcs croisant cette boucle, le réseau est divisé en deux parties. Dans la terminologie présentée juste avant, ceci correspond à séparer le réseau en deux composantes et donc, le rang du graphe représentant le réseau diminuera de un, passant de  $\alpha - 1$  à  $\alpha - 2$ .

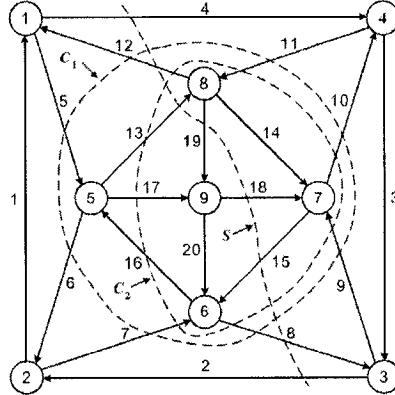


Figure 2.2 Cordons simples et boucle non fermée (Zhang et Yang 2004)

**Cordon multi-couches.** En présence d'un centre-ville de grande taille, on peut instaurer plusieurs boucles l'une autour de l'autre, sans qu'un seul arc ne soit croisé par plus d'une boucle. Un automobiliste doit payer à chaque fois qu'il traverse l'une d'elles en direction du centre. Si notre schéma compte  $m$  boucles ( $m$  couches) et qu'on retire les arcs qui le constituent, on obtient  $m + 1$  composantes et le rang du graphe représentant le réseau diminuera de  $m$ , passant de  $\alpha - 1$  à  $\alpha - m - 1$ .

**Cordon multi-centres.** Si la ville étudiée compte plus d'un centre d'affaires, il pourrait s'avérer efficace d'instaurer une boucle de péage autour de chacun d'eux. Si aucun arc n'est croisé par plus d'une boucle, enlevant tous les arcs constituant les  $m$  boucles on obtient ici aussi  $m + 1$  composantes, soit les  $m$  centres d'affaires et le reste du réseau.

On peut imaginer une combinaison de ces formes de péage et on pourra en étudier les propriétés avec la même approche.

## 2.2 Notions d'équilibres en transport

Plusieurs chercheurs s'intéressent à la dynamique de la circulation et désirent modéliser une gestion de celle-ci en temps réel. Dans le livre de Sheffi (1985), on trouve plusieurs modèles de base dans la modélisation du transport (dynamique et statique) à l'aide de la programmation mathématique. Le livre de Marcotte et Nguyen (1998) traite entre autres d'équilibres, de péage et de modélisation biniveau. On peut aussi se référer à Friesz et al. (1993) où on présente une formulation d'un équilibre-usager dynamique avec choix de route et de l'heure de départ (demande élastique) par inéquation variationnelle. Le désavantage principal d'une tarification en temps réel consiste dans le fait qu'on ne peut pas donner le coût exact d'un déplacement avant le

départ de l'usager afin d'influencer le choix de ce dernier. Avec la tarification par péages, les coûts peuvent dépendre des heures de déplacement mais sont fixés à l'avance. On sait que si on circule à tel endroit à telle heure, on doit payer tel montant. Pour modéliser cette tarification, on n'a pas à connaître nécessairement l'évolution exacte de la circulation, mais plutôt les états d'équilibre de celle-ci et c'est pourquoi on formulera notre modèle comme un MPEC (section 2.5).

### 2.2.1 Équilibres de Wardrop

John Glen Wardrop a développé deux principes fondamentaux (Wardrop 1952) en théorie des transports et qui sont reliés à l'idée d'équilibre de Nash dans la théorie des jeux. Or, dans un réseau routier, le nombre de joueurs est très grand, ce qui rend l'analyse assez difficile. On présente d'abord le second principe de Wardrop qui définit un équilibre-système (*system optimum*), puis le premier principe qui définit un équilibre-usager (*user optimum*).

#### Second principe de Wardrop

Le second principe de Wardrop énonce que : à l'équilibre, le temps moyen de déplacement est minimal. Ceci implique que les usagers agissent en coopération afin que le système soit utilisé aussi efficacement que possible. On atteint alors l'optimalité du point de vue du système et on parlera donc d'équilibre-système (*system optimum*). Les économistes ont montré qu'on peut atteindre un tel équilibre avec une tarification au coût marginal, qu'on verra à la section 2.2.3.

#### Premier principe de Wardrop

Ici, Wardrop fait l'hypothèse que chaque utilisateur choisira le chemin le plus court possible, sans tenir compte de l'effet de son choix sur les autres. C'est ce qui se passe sur les réseaux routiers où il n'y a aucune incitation pour modifier le comportement naturel des automobilistes. Le premier principe de Wardrop s'énonce comme suit : pour chaque paire d'origine-destination, les chemins utilisés sont égaux et meilleurs que n'importe quel autre non utilisé. En d'autres termes, tous les usagers visent à minimiser leurs coûts de transport et on atteint alors un équilibre du point de vue de l'usager et on parlera donc d'équilibre-usager (*user optimum*). Il est important de comprendre qu'un équilibre-usager est généralement différent d'un équilibre-système, ce vers quoi on veut tendre en imposant un péage autour d'une zone donnée.

Pour illustrer cet équilibre, considérons un réseau sur lequel on s'intéresse à une commodité, avec  $m$  chemins différents (mais pouvant emprunter des arcs communs) reliant l'origine  $O$  à la destination  $D$  et une demande  $d$  en nombre d'utilisateurs. On notera  $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$  un état du réseau, tel que  $v_j$  représente le nombre d'utilisateurs empruntant le chemin  $j$ . On supposera que le temps de parcours associé au chemin  $j$  est fonction de l'état du réseau et est donné par la fonction de délai  $D_j(v)$ . Un équilibre-usager de trafic est atteint lorsque les temps de parcours sur les chemins utilisés sont tous égaux et inférieurs aux temps de parcours sur les chemins non utilisés. Ceci s'exprime aussi comme suit :

$$D_j(v^*) = u^* \quad \forall j : v_j^* > 0 \quad (2.1)$$

$$D_j(v^*) \geq u^* \quad \forall j \quad (2.2)$$

$$\sum_{j=1}^m v_j^* = d \quad (2.3)$$

$$v_j^* \geq 0. \quad (2.4)$$

L'équation (2.1) garantit que les chemins utilisés ont tous le même délai  $u^*$ , tandis que (2.2) impose que le délai de tous les chemins soit supérieur ou égal au minimum, soit  $u^*$ . En (2.3), on s'assure que la demande est satisfaite et (2.4) impose que le nombre d'usagers soit positif ou nul.

On peut passer à une formulation par arcs. En supposant que le réseau de transport est composé de  $n$  arcs, on notera  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  le nombre d'usagers empruntant l'arc  $i$  et  $Z$  la matrice d'incidence arcs-chemins. De plus, la fonction de délai est donnée pour chaque arc et est notée  $D_i(x)$ . Soit  $A$  la matrice d'incidence origine-destination/chemin et  $d$  le vecteur de demande par paire origine-destination. L'ensemble des flots admissibles devra satisfaire :

$$\begin{aligned} x &= Zv \\ Ax &= d \\ v &\geq 0. \end{aligned}$$

À partir de ceci, on peut définir les ensembles suivants :

Ensemble réalisable arcs/chemins  $F = \{(x, v) \mid x = Zv, Ax = d, v \geq 0\}$

Ensemble réalisable arcs  $X = \{x \mid \text{il existe } v \text{ t.q. } (x, v) \in F\}$ .

Bref, un flot  $x^*$  est à l'équilibre selon le premier principe de Wardrop si et seulement si il est solution de l'inéquation variationnelle  $IV(D, X)$  (voir section 2.5.1), c'est-à-dire

$$\langle D(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X.$$

## 2.2.2 Paradoxe de Braess

Une solution souvent avancée au problème de congestion est d'augmenter la capacité du réseau. Or, comme on le verra ici, il est possible que cela empire la situation. Illustrons ceci, ainsi que les deux équilibres de Wardrop, sur le réseau de la figure 2.3, où  $x$  représente le nombre d'usagers sur l'arc considéré :

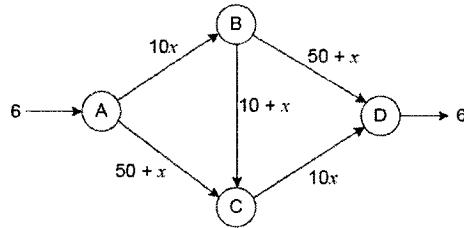


Figure 2.3 Réseau du paradoxe de Braess

Soit une demande de 6 unités entre l'origine A et la destination D. Les trois chemins suivants sont possibles : ABD, ACD et ABCD. L'équilibre-usager (Wardrop, section 2.2.1) est atteint en affectant 2 unités à chaque chemin, ce qui résulte en un délai de 92 par chemin et en un délai total pour le système de  $6 \times 92 = 552$ . Or, les deux arcs où le délai augmente le plus rapidement sont AB et CD et il serait avantageux d'y faire voyager un flot inférieur à celui obtenu avec la solution précédente, soit 4 unités. On pourrait affecter 3 unités aux chemins ABD et ACD, résultant en un délai de 83 par chemin et en un délai total de  $6 \times 83 = 498$ . On peut vérifier qu'il s'agit d'un équilibre-système tel que défini par Wardrop. Cependant, cette solution est instable parce que, dans cet état, le délai du chemin ABCD est alors de 70, ce qui s'avère très attrayant. L'optimalité du système ne peut être atteinte que par une collaboration des usagers ou grâce à une autorité qui interdirait l'accès à l'arc BC. Le réseau illustré à la figure 2.3 offre une meilleure performance si l'arc BC n'existe pas, d'où le paradoxe dit de Braess (1968).

## 2.2.3 Coût marginal

En termes économiques, le coût marginal est le coût additionnel encouru par le fabricant pour produire une nouvelle unité, à un état donné. Dans notre contexte, on peut le voir comme le coût supplémentaire, induit par la décision d'un automobiliste d'emprunter un chemin donné, et qui influence l'état du réseau en général.

Au cours des dernières années, la tarification routière au coût marginal a été de nouveau étudiée par des économistes et des chercheurs en transport. Ici, on présentera l'explication de ce

principe provenant d'un article de Yang et Huang (1998). Brièvement, la tarification au coût marginal affirme que pour maximiser le bénéfice social net, on doit imposer un péage correspondant à la différence entre le coût marginal social et le coût marginal privé.

Considérons un réseau routier sur lequel passe un trafic constant et où le seul obstacle au mouvement est la capacité qui est constante. Sur la figure 2.4, la courbe *AC* représente le coût moyen (*Average Cost*), ou coût marginal privé, subi et perçu par un usager alors que la courbe *MC* représente le coût marginal social, c'est-à-dire le coût additionnel induit à l'ensemble des automobilistes et dû à la présence d'un véhicule supplémentaire. Un usager entrant dans le réseau sera ignorant ou ne voudra pas considérer les coûts qu'il cause aux autres et percevra seulement le coût *AC*.

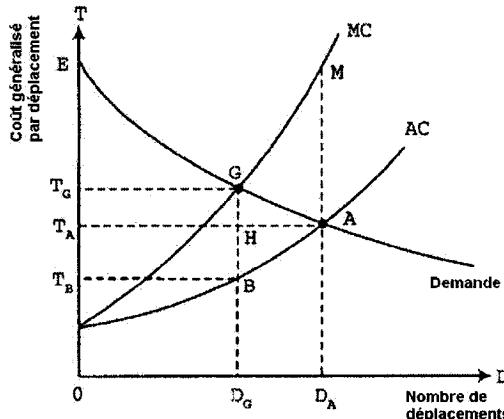


Figure 2.4 Tarification au coût marginal avec congestion (Yang et Huang 1998)

La situation optimale correspond à l'intersection du coût marginal social (*MC*) et de la demande (flot =  $D_G$ ) alors que s'il n'y a pas de péage, on se retrouve à l'intersection du coût marginal privé (*AC*) et de la demande avec un flot  $D_A$ . On voit alors que les usagers ne tiennent compte que du coût privé (point *A*). Alors, la demande  $D_A$  est excessive d'un point de vue social puisque le  $D_A$ -ième usager bénéficie d'un service correspondant à  $\overline{D_A A}$ , mais impose des coûts de  $\overline{D_A M}$  à la société. Le trafic au-delà de  $D_G$  génère des coûts sociaux correspondant à l'aire sous *MC* ( $D_A M G D_G$ ) mais ne bénéficie que de l'équivalent de l'aire  $D_A A G D_G$ , ce qui provoque des pertes correspondant à la superficie de *AMG*. Ainsi, pour s'assurer que la demande se stabilise à  $D_G$ , il faut faire en sorte que le coût perçu (*AC*), qui détermine la décision des usagers, croise la demande vis-à-vis  $D_G$ , soit au point *G*. Pour ce faire, il suffit d'imposer un péage de  $(T_G - T_B)$ , ce qui correspondra à une translation du coût perçu (*AC*) le long du vecteur  $\overline{BG}$ .

## 2.3 First-best pricing vs second-best pricing

Dans le présent travail, on désire déterminer un schéma de péage permettant de minimiser la congestion sur un réseau routier, ce qui veut dire s'approcher autant que possible d'un équilibre-système comme défini à la section 2.2.1 (Wardrop). On sait qu'on peut atteindre un tel équilibre par la tarification au coût social marginal (section 2.2.3), mais ce n'est qu'une approche pour la tarification dite *first-best pricing*. D'autres approches pour calculer les péages sont proposées comme par exemple celles de Dial (2000) ou Hearn et Ramana (1998). Bergendorff et al. (1996) montrent que si, pour un problème donné on obtient une solution unique pour l'équilibre-usager et une autre solution unique pour l'équilibre-système, alors le vecteur de taxation au coût social marginal n'est qu'un élément d'un ensemble de vecteurs de taxation valides qui permettraient tous d'obtenir ces équilibres. On y donne l'exemple d'un réseau pour lequel on réussit à atteindre l'équilibre-système avec 5 points de péage au lieu de 14 et en imposant 59,4 % des péages nécessaires pour une tarification au coût marginal et en considérant que tous les arcs peuvent être taxés. La tarification du type *first-best pricing* permet de tarifer tous les arcs du réseau, ce qui est irréaliste (surtout financièrement) avec les technologies accessibles aujourd'hui. Donc, pour des raisons pratiques, on se limite à tarifer un sous-ensemble des arcs du réseau, ce qu'on appelle du *second-best pricing*. Plusieurs chercheurs se sont intéressés au *second-best pricing*, dont Verhoef (2002) et Hearn et Lawphongpanich (2004).

On utilisera maintenant une formulation de ce dernier article pour illustrer le lien entre les objectifs obtenus selon l'équilibre atteint. Soit  $s(v)$  le vecteur de coût qui est fonction du flot  $v$ ,  $\beta$  le vecteur des taxes et  $Y$  l'ensemble des arcs non taxables, on peut écrire le problème de *second-best pricing* comme suit :

$$\begin{aligned} \text{FD-VI:} \quad & \min_{(v, \beta)} s(v)^T v \\ & \text{s. à } v \in V \\ & \beta_a \geq 0, \quad \forall a \notin Y \\ & \beta_a = 0, \quad \forall a \in Y \\ & (s(v) + \beta)^T (u - v) \geq 0, \quad \forall u \in V \end{aligned}$$

On sait que l'équilibre-système (ÉQ-S) et l'équilibre-usager (ÉQ-U) s'énoncent comme suit :

$$\text{ÉQ-S : } v^S = \arg \min_v \{s(v)^T v : v \in V\}$$

$$\text{ÉQ-U : } s(v^U)^T (u - v^U) \geq 0, \forall u \in V.$$

Soit  $(v^*, \beta^*)$  un optimum global de FD-VI, on a la relation suivante entre les différentes valeurs des solutions :  $s(v^U)^T v^U \geq s(v^*)^T v^* \geq s(v^S)^T v^S$ . Soit  $d(v)$  le vecteur de délai en fonction du flot  $v$ , et disons qu'on remplace  $s(v)$  par  $d(v)$  partout dans FD-VI. Alors, à la solution, sous une tarification du type *second-best* le flot sera  $v^{SB}$ , sous une tarification du type *first-best* le flot sera  $v^{FB}$  alors que sans tarification on obtiendra  $v^*$ . On a alors la relation suivante entre les valeurs des différentes solutions :  $d(v^*)^T v^* \geq d(v^{SB})^T v^{SB} \geq d(v^{FB})^T v^{FB}$ . On voit bien que le *second-best pricing* permet un compromis entre la situation sans tarification et la situation idéale où on peut imposer un péage sur tous les arcs (*first-best pricing*) pour arriver au meilleur équilibre-système possible.

## 2.4 Programmation mathématique à deux niveaux et tarification

Lorsqu'on veut modéliser une situation dans laquelle deux agents aux intérêts divergents interagissent, il s'avère naturel d'élaborer un programme mathématique comptant deux fonctions objectif. On illustrera ceci dans la présente section. La programmation biniveau permet de modéliser et d'optimiser plusieurs aspects d'un réseau de transport. Comme rapporté dans une édition spéciale de *Transportation Research* (Yang et Bell 2001), voici quelques exemples : synchronisation optimale des feux de circulation, amélioration optimale de la capacité des routes, estimation de la matrice origine-destination à partir du comptage du trafic et enfin, optimisation des péages.

### 2.4.1 Modélisation biniveau

Présentons ici un modèle de tarification général (Labbé et al. 1998) qui consiste en un problème biniveau bilinéaire-bilinéaire :

$$\begin{aligned} & \max_{x_1, x_2} T x_1 \\ & \min (c_1 + T)x_1 + c_2 x_2 \\ & \text{s. à } A_1 x_1 + A_2 x_2 = b \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

où  $T$  représente le vecteur de taxes et  $x_1$  et  $x_2$  les vecteurs des niveaux d'activités pour les produits taxables et non taxables respectivement. Dans la première fonction, au premier niveau, un meneur ou décideur fixe les tarifs afin de maximiser ses revenus. Au second niveau, un suiveur ou utilisateur désire minimiser ses coûts tout en satisfaisant ses besoins ( $b$ ). Une fonction

bilinéaire est un cas particulier de fonction quadratique de la forme  $x^T Qy + by + cx$ , c'est-à-dire une fonction linéaire en  $x$  pour  $y$  fixé et vice versa. Ici, dans les deux fonctions objectifs, on trouve le terme quadratique  $Tx_1$ . Lorsque  $T$  est fixé par le meneur, la seconde fonction objectif devient linéaire en  $x_1$ . De la même façon, lorsque le suiveur a choisi  $x_1$ , la première fonction objectif est linéaire en  $T$  et c'est pourquoi on parle d'un modèle biniveau (deux niveaux d'optimisation) bilinéaire-bilinéaire.

#### 2.4.2 Modèle de tarification dans les réseaux de transport

Les mêmes auteurs ont ensuite proposé une adaptation du précédent modèle à la tarification d'un ensemble de tronçons de route sur un réseau de transport, avec la notation du tableau 2.1.

Tableau 2.1 Notation pour le problème de tarification dans les réseaux de transport

$N$	Nœuds du réseau
$\Omega$	Ensemble des nœuds origines du réseau
$\Delta$	Ensemble des nœuds destinations du réseau
$A$	Ensemble des arcs du réseau
$a = (i,j)$	Élément de $A$
$A_1$	Ensemble des arcs taxables
$A_2$	Ensemble des arcs non taxables
$i^-$	Ensemble des nœuds précédant $i$
$i^+$	Ensemble des nœuds suivant $i$
$c_a$	Coût fixe de transport sur l'arc $a$
$T_a$	Taxe ou péage sur l'arc $a \in A_1$
$l_a$	Borne inférieure sur $T_a$
$d^{kl}$	Demande de flot entre l'origine $k$ et la destination $l$
$x_a$	Flot total sur l'arc $a$
$x_a^{kl}$	Flot de l'origine $k$ à la destination $l$ passant par $a$

On retrouve les fonctions objectifs bilinéaires en (2.5) et (2.6) alors que les contraintes (2.7) et (2.9) sont des contraintes classiques de conservation de flots positifs. La contrainte (2.8) assure la satisfaction de la demande alors que (2.10) impose une borne inférieure sur les taxes. Les usagers choisissent toujours le chemin le plus court en terme de coûts, de leur origine à leur destination, et la congestion n'est pas prise en compte.

$$\max_{T,x} \sum_{a \in A_1} T_a x_a, \quad (2.5)$$

$$\min_x \sum_{a \in A_1} (c_a + T_a) x_a + \sum_{a \in A_2} c_a x_a, \quad (2.6)$$

$$\sum_{a \in i^+} x_a^{kl} - \sum_{a \in i^-} x_a^{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k, \\ -1 & \text{si } i = l, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \forall i, k, l \in N \times \Omega \times \Delta \quad (2.7)$$

$$x_a = \sum_{k,l} d^{kl} x_a^{kl}, \quad \forall a \in A \quad (2.8)$$

$$x_a^{kl} \geq 0, \quad \forall a, k, l \in A \times \Omega \times \Delta \quad (2.9)$$

$$T_a \geq l_a, \quad \forall a \in A_1 \quad (2.10)$$

Dans le même article (Labbé et al. 1998), on démontre que le problème (2.5)-(2.10) est fortement NP-complet. Sous certaines hypothèses, dont le fait qu'il existe un chemin exempt de taxe pour toute paire origine-destination, on montre qu'il est possible de transformer ce programme biniveau bilinéaire-bilinéaire en un programme linéaire en nombres entiers. On peut alors utiliser des algorithmes performants connus pour ce type de problème et résoudre dans un temps raisonnable des problèmes de taille moyenne.

### 2.4.3 Algorithme de Zhang et Yang

On décrit ici l'article de Zhang et Yang (2004) où on propose une approche originale et intéressante pour déterminer à la fois le péage et la localisation des points de péage. La première partie de l'article présente les notions de la section 2.1. Avec ces dernières, on peut aisément déterminer à quel type de cordon correspond un ensemble d'arcs sélectionnés.

On formule le modèle avec la notation du tableau 2.2. La première fonction objectif du modèle biniveau cherche à maximiser le bénéfice social (SW) en appliquant un péage  $x$  et la seconde impose un équilibre-usager, en considérant une demande élastique.

Dans le cas d'un cordon simple, on aura un seul tarif alors qu'avec un cordon multi-couches ou un cordon multi-centres, on aura  $K$  tarifs si  $K$  correspond au nombre de boucles (section 2.1.1) du cordon, notés  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ , avec  $x = (x_1, \dots, x_K)$ . On note que  $c_a(v_a, x) = t_a(v_a) + x_k/\beta$  si  $a \in A_k$ , où  $\beta$  désigne la valeur du temps de l'usager alors que  $c_a(v_a, x) = t_a(v_a)$  si  $a \in A$ ,  $a \notin A_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ ; le temps de parcours de l'arc  $t_a(v_a)$  est une fonction strictement croissante et continue du flot  $v_a$ ; la demande  $D_w(\mu_w)$  entre la paire O-D est une fonction strictement croissante et continue du temps de parcours  $\mu_w$ ,  $w \in W$ .

Tableau 2.2 Notation pour l'algorithme de Zhang et Yang

$A$	Ensemble des arcs du réseau
$A_k$	Ensemble d'arcs du cordon avec un niveau de péage $x_k$ , $k = 1, \dots, K$
$W$	Ensemble des paires O-D (origine-destination)
$R_w$	Ensemble des routes (ou chemins) entre la paire O-D $w \in W$
$f_w$	Flot sur la route $r \in R_w$ , $w \in W$
$v_a$	Flot sur l'arc $a \in A$
$V$	Vecteur des flots de tous les arcs ( $v_a$ , $a \in A$ )
$t_a(v_a)$	Temps de parcours de l'arc $a$ qui est fonction du flot sur ce arc ( $v_a$ )
$d_w$	Demande entre la paire O-D $w \in W$
$c_a(v_a, x)$	Cout total de transport sur l'arc $a$ , incluant le péage $x$
$D_w(\mu_w)$	Demande entre la paire O-D $w \in W$ en fonction du cout $\mu_w$ pour cette même paire O-D $w \in W$
$D_w^{-1}(\cdot)$	Inverse de la fonction demande
$\delta_{ar}^w$	1 si la route $r$ pour la paire O-D $w \in W$ utilise l'arc $a$ , et 0 sinon

$$\max_x \text{SW} = \sum_{w \in W} \int_0^{f_w(x)} D_w^{-1}(\omega) d\omega - \sum_{a \in A} t_a(v_a(x)) v_a(x) \quad (2.11)$$

$$\min_{d, v} \sum_{a \in A} \int_0^{v_a} c_a(\omega, x) d\omega - \sum_{w \in W} \int_0^{f_w} D_w^{-1}(\omega) d\omega \quad (2.12)$$

$$\text{s. à } \sum_{r \in R_w} f_r^w = d_w, \quad w \in W \quad (2.13)$$

$$v_a = \sum_{w \in W} \sum_{r \in R_w} f_r^w \delta_{ar}^w, \quad a \in A \quad (2.14)$$

$$f_r^w \geq 0, \quad r \in R_w, \quad w \in W \quad (2.15)$$

Le programme biniveau (2.11)-(2.15) est non convexe. On peut faire appel à des heuristiques telles que le recuit simulé ou les algorithmes génétiques pour atteindre un optimum local. En considérant les conditions nécessaires pour qu'un ensemble d'arcs constitue un cordon et le problème biniveau, il s'avère difficile de formuler et de résoudre le problème de localisation par des méthodes d'optimisation discrète traditionnelle.

On s'intéressera ici seulement au cas du cordon simple, mais on trouve certains détails à propos des cas des cordons multi-couches et multi-boucles dans l'article de Zhang et Yang (2004). On décide d'abord du type de cordon souhaité, en fonction des caractéristiques de la ville. Ensuite, on détermine la zone taxable potentielle par l'ensemble des nœuds, qu'on dira candidats, qui y sont inclus. Par exemple, on pourrait choisir l'ensemble des nœuds à l'intérieur de la boucle  $C_1$  de la figure 2.5. Il faut faire attention à ce que la zone choisie soit suffisamment grande car autrement, on pourrait ne pas obtenir le cordon optimal.

On choisit aléatoirement certains nœuds parmi les nœuds candidats. Avec les notions présentées à la section 2.1, on détermine si on obtient un cordon valide. Pour chaque cordon valide, on résout le programme biniveau (2.11)-(2.15) et on obtient ainsi le bénéfice social maximal réalisable et le péage uniforme à appliquer sur le cordon. On représente le gène comme l'état de chaque nœud candidat,  $n \in N$ , où  $N$  est l'ensemble des nœuds candidats :  $g_n = 1$  si le candidat  $n$  est sélectionné, 0 sinon. Les candidats  $n$  dont  $g_n = 1$  forment l'ensemble des nœuds de la zone de péage,  $N^*$ .

**Exemple.** On désire installer un cordon simple autour de la zone centrale du réseau de la figure 2.5. Toutes les arêtes représentent des routes à deux sens.

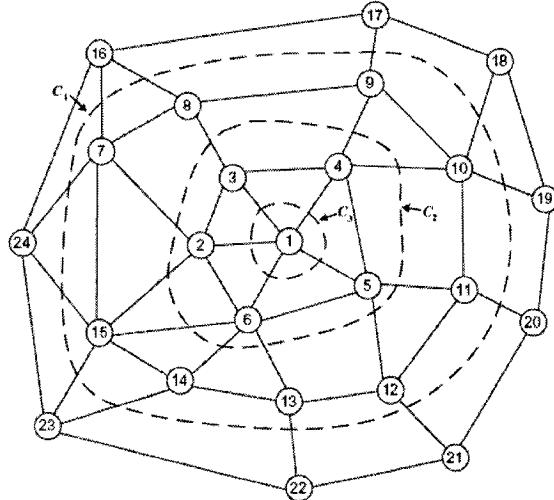


Figure 2.5 Réseau pour cordon simple

(a)	1   2   3   4   5   6   7   8   9   10   11   12   13   14   15
(b)	1   1   1   1   1   1   0   0   0   0   0   0   0   0   0
(c)	0   1   1   1   1   1   0   0   0   0   0   0   0   0   0

Les 15 nœuds à l'intérieur de la boucle  $C_1$  de la figure 2.5 sont candidats et sont numérotés sur la rangée (a). La rangée (b) représente un chromosome de longueur  $l = 15$  et l'ensemble des nœuds de la zone de péage représentée par ce chromosome est  $N^* = \{1,2,3,4,5,6\}$ , ce qui correspond aussi aux nœuds à l'intérieur de la boucle  $C_2$ . Les arêtes coupant cette boucle forment un séparateur et donc, on a un cordon réalisable. À la rangée (c) correspond  $N^* = \{2,3,4,5,6\}$ , c.-à-d. les nœuds entre  $C_2$  et  $C_3$  à la figure 2.5. L'union des arêtes coupant les 2 boucles ne constitue pas un séparateur et donc, on n'a pas un cordon simple réalisable.

### ALGORITHME de Zhang et Yang

- Étape 1 : Population initiale. Générer aléatoirement une population initiale de cordons simples réalisables avec la méthode présentée précédemment.
- Étape 2 : Évaluation. Appliquer le programme biniveau pour connaître le bénéfice social maximal pour chaque cordon.
- Étape 3 : Sélection naturelle. Sélectionner les cordons avec le bénéfice social le plus élevé et éliminer les autres.
- Étape 4 : Croisement (*crossover*). Faire des couples entre des candidats survivants et faire des échanges entre les paires.
- Étape 5 : Mutation. Modifier aléatoirement les paramètres de certains nœuds.
- Étape 6 : Prochaine génération. Pour chaque ensemble de nœuds, vérifier si on a bien un cordon réalisable. Éliminer les ensembles qui n'en sont pas et générer de nouveaux cordons pour obtenir une population suffisante.
- Étape 7 : Vérifier le critère d'arrêt. Si le critère d'arrêt n'est pas atteint, aller à l'étape 2; sinon, ARRÊT.

En bref, la méthode proposée dans cet article permet de déterminer avec une grande souplesse la localisation optimale des points de péage. Cependant, on ne peut pas fermer des arcs et ainsi fixer un nombre maximal de points de péage comme nous le ferons dans le présent travail. De plus, il n'y a qu'un tarif par boucle.

## 2.5 Programmes mathématiques avec contraintes d'équilibre (MPEC)

Un MPEC est un problème d'optimisation hiérarchique incluant au second niveau une inéquation variationnelle ou des contraintes de complémentarité paramétrées par les variables de décision du premier niveau.

### 2.5.1 Inéquations variationnelles

Soit  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction et  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un ensemble convexe. Un vecteur  $x^*$  est dit solution de l'inéquation variationnelle  $IV(F, X)$  s'il satisfait :

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X, \tag{2.16}$$

où  $\langle ., . \rangle$  représente le produit scalaire usuel. Pour notre modèle, on utilisera une inéquation variationnelle afin d'énoncer la fonction objectif du second niveau. Les notes de cours de Marcotte (1997) peuvent constituer une bonne introduction aux inéquations variationnelles.

### 2.5.2 MPEC pour second-best pricing

Quand on considère notre réseau comme passant d'un état d'équilibre à un autre, comme on le fera, il est naturel d'utiliser un programme mathématique avec contraintes d'équilibre pour le modéliser. Soit le MPEC suivant (notations de Hearn et Lawphongpanich (2004)) :

$$\text{P-VI:} \quad \min_{(p, \pi)} f(p) \quad (2.17)$$

$$\text{s. à} \quad p \in P \quad (2.18)$$

$$\pi \in \Pi \quad (2.19)$$

$$(g(p) + \pi)^T (q - p) \geq 0, \quad \forall q \in P \quad (2.20)$$

où  $f(p)$  peut être la congestion totale sur le réseau, qu'on désire minimiser à l'aide de taxes  $\pi$ . La fonction  $g(p)$  doit alors représenter le coût total du flot  $p$  avant les taxes  $\pi$ . On voit que (2.20) est une inéquation variationnelle qui assure que  $p$  correspond au flot à l'équilibre-usager. On présente maintenant quatre définitions pour ensuite formuler (2.20) en fonction des points extrêmes de l'ensemble  $P$ .

**Définition 5.** Un polyèdre est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  défini par un ensemble fini d'inégalités linéaires. Par exemple,  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  est un polyèdre.

**Définition 6.** Un ensemble  $X$  est borné s'il existe un  $n > 0$  tel que  $\|x\| \leq n$ , pour tout  $x \in X$ .

**Définition 7.** Un ensemble  $X$  est fermé si pour toute suite convergente  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  de  $X$ , la limite appartient à  $X$ .

**Définition 8.** Un ensemble est compact dans  $\mathbb{R}^n$  s'il est fermé et borné.

Puisque l'ensemble  $P$  est un polyèdre borné, il est naturel de le représenter comme une combinaison convexe de ses points extrêmes, dont il existe un nombre fini. Soit  $q^i$  le  $i^{ème}$  point extrême de  $P$ , alors, pour tout  $p \in P$ , il existe un vecteur  $\lambda_i \in [0, 1]$  tel que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  et

$p = \sum_{i=1}^n \lambda_i q^i$  où  $n$  est le nombre de points extrêmes de  $P$ . Donc, on peut récrire l'IV (2.20) et obtenir le programme suivant, équivalent à P-VI :

$$\begin{aligned} \text{P-EX:} \quad & \min_{(p, \pi)} f(p) \\ & \text{s. à } p \in P \\ & \pi \in \Pi \\ & (g(p) + \pi)^T (q^i - p) \geq 0, \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Maintenant, on reprend la modélisation de Hearn et Ramana (1998) pour arriver à un certain MPEC, puis à des ensembles de vecteurs de péage valides pour un objectif donné. Soit  $s(v)$  le coût total subi par l'ensemble des usagers, alors  $s(v)^T v$  correspond à la somme des coûts sur le réseau. On voudrait atteindre une utilisation optimale du réseau, sachant que les usagers tendront naturellement vers un équilibre-usager. On va donc appliquer des taxes représentées par le vecteur  $\beta$  et on obtient le MPEC suivant :

$$\begin{aligned} \text{MP1:} \quad & \min s(v)^T v \\ & \text{s. à } v \in V \\ & (s(v) + \beta)^T (u - v) \geq 0, \forall u \in V, \end{aligned} \quad (2.22)$$

où  $V = \{v \mid \text{il existe } x \text{ t.q. } (v, x) \in F\}$  et  $F = \{(v, x) \mid v = Zx, Ax = d, x \geq 0\}$ , tel que défini à la section 2.2.1. Tout dépendant des propriétés de la fonction de coût  $s(v)$ , MP1 peut s'avérer très difficile à résoudre. On utilisera aussi par la suite le programme qui correspond à l'équilibre-système (voir section 2.2.1) :

$$\begin{aligned} \text{SOPT :} \quad & \min s(v)^T v \\ & \text{s. à } v = Zx \\ & Ax = d \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Voici maintenant un lemme utile pour définir les vecteurs de taxes valides pour atteindre un tel équilibre-système.

**Lemme 1.** (Bergendorff et al. (1996)) Soit  $v^* \in V$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1.  $v^*$  est un équilibre-usager, c.-à-d.,  $s(v^*)^T (v - v^*) \geq 0, \forall v \in V$ .
2.  $v^* \in \arg \min \{s(v)^T v \mid v \in V\}$ , c.-à-d.,  $\min \{s(v)^T v \mid v \in V\} = s(v^*)^T v^*$ .
3. Il existe  $\rho$  tel que :  $Z^T s(v^*) \geq A^T \rho$  et  $s(v^*)^T v^* = d^T \rho$ .

Si  $s$  est strictement monotone et  $s(v)^T v$  est strictement convexe, SOPT possède une unique solution,  $v^*$ . Alors, l'ensemble des péages valides, qu'on notera  $W(v^*)$  est tel que les deux équations de l'affirmation 3 sont respectées. En considérant les coûts comprenant les péages, on a alors  $W(v^*) = \{\rho : Z^T(s(v^*) + \beta) \geq A^T \rho, (v^*)^T(s(v^*) + \beta) = d^T \rho\}$ . Avec  $s$  et  $s(v)^T v$  présentant certaines autres caractéristiques,  $W(v^*)$  est défini dans l'article de Hearn et Ramana (1998). Toujours dans cet article, on décrit l'approche suivante pour optimiser diverses fonctions objectif, tout en s'assurant que les péages permettront d'atteindre un équilibre-système.

- Étape 1. Résoudre SOPT pour obtenir  $v^*$ , la répartition optimale des usagers sur le réseau.
- Étape 2. Définir l'ensemble des péages valides  $W(v^*)$ .
- Étape 3. Optimiser une fonction objectif sur  $W(v^*)$ .

Par exemple, à l'étape 3, si notre objectif est de minimiser le total des péages récoltés, on résout le programme suivant :

$$\begin{aligned} \text{MINSYS : } \quad & \min_{\beta, \rho} \beta^T v^* \\ & \text{s. à } (\beta, \rho) \in W(v^*) \\ & \beta \geq 0. \end{aligned}$$

On trouve quatre autres objectifs dans l'article de Hearn et Ramana (1998).

### Conclusion

Au cours de ce chapitre, on a déterminé qu'on va modéliser le trafic de façon statique, et que le modèle sera un MPEC. Les usagers choisissent le chemin le plus court, en termes de coûts perçus, ce qui conduit à un équilibre-usager. Afin de tendre vers une utilisation optimale du réseau routier, on appliquera une tarification de type *second-best pricing* pour modifier les coûts perçus et ainsi influencer le comportement des usagers. On a vu un modèle biniveau de base pour la tarification sur un réseau de transport, duquel découlera notre modélisation. Pour illustrer la difficulté de modélisation, on a présenté en détail un algorithme (biniveau et génétique) qui résout le problème qui nous intéresse. On a finalement présenté quelques formulations différentes de MPEC où le comportement des usagers est décrit par une inéquation variationnelle, puisque c'est l'approche qu'on utilisera dans la définition de notre modèle, au prochain chapitre.

## CHAPITRE 3

### MODÈLE ET AFFECTATION DU TRAFIC

Dans ce chapitre, on formule notre modèle de tarification biniveau, dont l'objectif est la réduction de la congestion sur l'ensemble d'un réseau routier à l'aide de péages autour d'une zone à accès restreint, comme un MPEC. En effet, le problème de second niveau (comportement des usagers) est représenté par une inéquation variationnelle (section 2.5.1). La section 3.1 précise la façon dont on modélise le transport en commun, le type de demande, la congestion et les points de péage. On obtient un premier modèle MPEC pour des péages différents permis à chaque point de péage (section 3.2), puis un second modèle MPEC si on désire des péages identiques à tous les points (section 3.3). Avec une solution de notre modèle, tous les paramètres du réseau sont connus (taxes, arcs fermés s'il y a lieu) et il n'y a plus que la congestion qui fluctue selon le flot. Dans la dernière section (3.4), on présente l'algorithme de Frank-Wolfe utilisé pour calculer la répartition du trafic sur le réseau dont tous les paramètres sont définis et on pourra ainsi évaluer la qualité (congestion totale) des solutions (résultats numériques à la section 5.4.3).

#### **3.1 Formulation du modèle**

Au premier niveau du modèle biniveau, les autorités désirent réduire la congestion sur l'ensemble d'un réseau routier, en imposant une taxe pour tous les véhicules entrant dans une zone délimitée par un cordon. Il se peut qu'on soit obligé de fermer des arcs taxables du réseau si l'équilibre-système obtenu en résolvant le programme biniveau va dans ce sens. La fonction objectif est non linéaire puisque le délai sur un arc dépend du flot qui y circule et que l'objectif s'énonce comme la somme du délai multiplié par le flot pour chaque arc du réseau. Au second niveau du programme, les utilisateurs du réseau cherchent à minimiser leurs coûts en supposant qu'ils agissent de façon rationnelle. Ils seront caractérisés par une valeur qu'ils accordent au temps qui suit une loi de densité discrète dans la population. Cette fonction est bilinéaire puisque le coût des chemins est fonction de la taxe à déterminer (si le chemin passe par un arc taxable) et qu'on a un flot à déterminer multiplié par le coût des chemins. On se retrouve donc avec un problème d'optimisation biniveau non-linéaire.

Le réseau est formé d'arcs dirigés et caractérisés par un coût fixe représentant les coûts d'utilisation d'une voiture (achat, assurances, essence, entretien, etc.) et qui sera proportionnel à la longueur du tronçon routier. On suppose également qu'on connaît les demandes de déplacement entre certaines paires d'origine-destination. Les autorités déterminent la zone à taxer et pour ce faire, un ensemble d'arcs formant un cordon valide (section 2.1). Tout automobiliste désirant passer de l'extérieur de la zone taxée à l'intérieur de celle-ci doit obligatoirement payer une taxe.

On a un réseau de transport  $G=(N, A, K)$  formé d'un ensemble de sommets  $N$ , d'un ensemble d'arcs  $A$  et d'un ensemble de paires d'origine-destination  $K \subseteq N \times N$ . L'ensemble  $A$  contient tous les tronçons routiers  $A_r$  et l'ensemble des arcs de transport en commun qu'on définira dans la prochaine section. L'ensemble des arcs taxables est  $A_1 \subseteq A_r$ . Une commodité  $k$  correspond à une paire origine-destination, autrement dit, un utilisateur désire un service correspondant à voyager d'une origine  $O$  à une destination  $D$ . On note  $d_k$  la demande associée à la paire O-D  $k \in K$ ,  $P_k$  l'ensemble des chemins reliant cette paire O-D et  $P = \bigcup_{k \in K} P_k$  l'ensemble de tous les chemins. On notera  $A(p)$  l'ensemble des arêtes constituant le chemin  $p$ . On associe à chaque arc  $a \in A$  le nombre total d'usagers voyageant sur cet arc, noté  $x_a$ , un délai qui sera fonction du flot sur l'arc,  $D_a(x_a)$ , et un coût fixe,  $C_a$ . On considérera les fonctions  $D_a$  comme croissantes. On associe une taxe  $T_a$  à chaque arc  $a \in A_1$  et on définit le vecteur de taxes  $T = \{T_a\}_{a \in A_1}$ .

### 3.1.1 Première fonction objectif

Puisque notre objectif est de minimiser le délai total sur l'ensemble du réseau, la fonction objectif sera :  $\min \sum_{a \in A} D_a(x_a) x_a$ . Comme le montrent Bergendorff et al. (1996), pour certains problèmes, il existe plus d'un vecteur de péages correspondant à une même valeur optimale pour un équilibre-système. Notre objectif n'étant pas de récolter le plus de fonds et sachant que les péages seront mieux acceptés s'ils sont plutôt faibles et permettent une même amélioration, on pourrait ajouter un terme imposant de choisir le vecteur dont la somme des taxes est la plus faible. Or, ceci compliquerait la fonction objectif puisque le revenu total est le produit des taxes et des flots sur les arcs taxables, qui sont tous les deux des variables. Si jamais on veut opter pour cette approche, on peut consulter Labbé et al. (1998).

Si la situation est bien modélisée (caractéristiques du réseau et des usagers), et qu'on s'intéresse à une zone où la congestion est problématique, les arcs taxables devraient tous

présenter une utilisation comparable, et alors, des vecteurs menant à une même valeur de l'objectif ne peuvent pas être très éloignés l'un de l'autre.

### **3.1.2 Transport en commun**

Le transport en commun constitue l'une des options données aux usagers dans notre modèle ; il doit choisir entre ce dernier et plusieurs chemins possibles en automobile. Pour chaque commodité, on modélise le transport en commun en ajoutant au réseau routier régulier ( $A_r$ ) un arc reliant directement l'origine à la destination, avec un coût inférieur à celui du chemin le moins cher existant pour cette commodité (de l'ordre de 5 fois) et un délai supérieur au meilleur délai disponible (de l'ordre de 3 fois). On ajoute ces arcs après avoir déterminé les chemins les plus intéressants pour l'ensemble des commodités et ainsi, il n'existe pas de chemin combinant l'automobile et le transport collectif. Le délai sur les arcs de transport en commun est indépendant du nombre d'usagers. De plus, comme ce mode de transport est représenté par des arcs extérieurs au réseau routier réel, son flot ne contribue pas à augmenter les délais pour les automobilistes ; il contribue plutôt à les maintenir plus bas, comme dans la réalité. L'ensemble des arcs de transport en commun sera  $A \setminus A_r$ , c'est-à-dire l'ensemble de tous les arcs du réseau incluant le transport collectif moins l'ensemble des arcs du réseau routier régulier et il est bien sûr exempt de taxes.

### **3.1.3 Demande inélastique et segmentée**

Dans l'ensemble du présent travail, la demande est inélastique (ou fixe). À l'intérieur d'une modélisation plus complète, la demande peut être élastique, c'est-à-dire variable en fonction de la taxe. Par exemple, un usager peut vouloir se procurer un article dans un certain magasin à l'intérieur de la zone à accès restreint, mais si le péage est trop élevé, il se rendra plutôt dans un magasin à l'extérieur de cette zone. Plusieurs études considèrent une demande élastique, dont Zhang et Yang (2004) et Hearn et Yildirim (2002).

Comme Bergendorff et al. (1996), Dial (2000) et Marcotte et Savard (2000), on considère que les usagers veulent absolument se rendre à leur destination (lieu de travail par exemple). On leur propose de choisir entre l'automobile et le transport en commun (exempt de péage) qu'on a défini à la section précédente. On peut consulter Hearn et Lawphongpanich (2004) où on s'inté-

resse aux deux types de demandes et on modélise par l'approche de la programmation mathématique avec contraintes d'équilibre (section 2.5). On adopte aussi cette approche.

La valeur du temps sera la même pour tous les usagers d'une classe donnée et on divisera la population en  $n$  classes. À chaque classe  $i$  correspond une valeur  $\alpha_i$  et un poids  $h^i$ . Ici,  $h$  est une densité discrète, c.-à-d. un vecteur de nombres positifs et de somme égale à 1 et  $\alpha_i$  (en min/\$) est l'inverse de la valeur du temps. Si 25 % de la population se trouve dans la classe 2,  $h^2 = 0,25$ . Par souci de simplicité, chaque classe aura le même poids,  $1/n$ , et aussi, les vecteurs  $\alpha$  et  $h$  seront identiques pour toutes les O-D. Une affectation d'équilibre est obtenue lorsque pour chaque commodité, chaque classe d'usager utilise les chemins qu'elle perçoit d'un coût égal ou inférieur à ceux des chemins non utilisés. Ceci est un équilibre-usager comme défini à la section 2.2.1 (Wardrop).

Soit  $v_p^i$  le flot d'usagers de classe  $i$  sur le chemin  $p$  et  $v^i = \{v_p^i\}_{p \in P}$  le vecteur flot par chemin associé à cette classe. L'ensemble des vecteurs flot réalisable se définit comme :

$$Y^i = \left\{ v^i \geq 0 : \sum_{p \in P} v_p^i = h^i d_k, \forall k \in K \right\} = h^i \bar{Y}, \quad (3.1)$$

avec  $\bar{Y} = \left\{ \bar{v} \geq 0 : \sum_{p \in P_k} \bar{v}_p = d_k, \forall k \in K \right\}$ , un polyèdre compact (section 2.5.2). On peut se référer à Fortin (2004) pour le cas où la distribution du paramètre  $\alpha$  est continue.

### 3.1.4 Congestion et coûts perçus

Il est évident que le délai nécessaire pour parcourir un arc dépend du flot qui y circule. On notera ce délai  $D_a(x_a)$ . Aux yeux d'un usager donné, caractérisé par une valeur  $\alpha$ , le coût total perçu (en unités de temps) d'un chemin  $p$  peut s'écrire ainsi :

$$\pi_p(\alpha, x, T) = \sum_{a \in A(p)} D_a(x_a) + \alpha \left( \sum_{a \in A(p)} C_a + \sum_{a \in A_1(p)} T_a \right). \quad (3.2)$$

On peut passer d'une formulation par arcs à une formulation par chemins et vice versa aisément pour les délais et pour les coûts fixes :

$$D_p(x) = \sum_{a \in A(p)} D_a(x_a) \quad \text{et} \quad C_p = \sum_{a \in A(p)} C_a.$$

On peut ainsi alléger l'écriture de (3.2) en représentant le coût total perçu (en unités de temps) sur le chemin  $p$  par un consommateur de paramètre  $\alpha$  (min/\$) comme suit :

$$\pi_p(\alpha, x, T) = D_p(x) + \alpha(C_p + \sum_{a \in A_1(p)} T_a). \quad (3.3)$$

On note  $\pi = (\pi_p)_p$  le vecteur de coûts perçus sur chaque chemin.

La fonction de congestion peut prendre différentes formes, du moment qu'elle représente assez adéquatement la réalité observée. Une fonction souvent employée est celle exponentielle,

$$D_a(x_a) = D_a \cdot e^{\lambda x_a}, \quad (3.4)$$

où  $D_a$  représente le délai en l'absence de flot et  $\lambda$ , un facteur de congestion. Par souci de simplicité, on attribuera un même facteur de congestion à tous les arcs alors qu'en réalité, il faudrait idéalement évaluer ce facteur pour chaque arc du réseau. Il est important de noter que la capacité des arcs est en théorie illimitée, mais que dans les faits, elle se trouve limitée par les fonctions de délai qui sont elles-mêmes fonction du flot sur chaque arc.

### 3.1.5 Points de péage

Comme on l'a déjà mentionné, notre modèle doit déterminer, parmi un ensemble d'arcs taxables, quels arcs seront effectivement taxés et quels arcs seront éventuellement fermés. Il s'avère donc naturel d'attribuer une variable binaire à cette tâche, qu'on définira comme suit :

$$\gamma_a = 1 \text{ si l'arc est ouvert, } 0 \text{ sinon, } \forall a \in A_1.$$

Vu les coûts importants liés aux infrastructures nécessaires pour chaque point de péage, il faut donner l'opportunité aux autorités de fixer un nombre maximal de points ouverts, qu'on notera  $n_{\max}$  :

$$\sum_{a \in A_1} \gamma_a \leq n_{\max}. \quad (3.5)$$

En utilisant une constante  $M$  appropriée, on contraint le flot à zéro si  $\gamma_a = 0$  :

$$x_a \leq M \gamma_a, \quad \forall a \in A_1. \quad (3.6)$$

Même si on peut imaginer et calculer des schémas avec certains péages négatifs (Hearn et Ramana 1998), pour diverses raisons politiques ou pratiques quant au message que cela peut véhiculer, on se contraint presque toujours à des péages positifs. Nous adoptons ici cette res-

triction ; en présence de congestion, les tronçons les moins problématiques seront simplement moins taxés que les autres.

Puisqu'on détermine l'ensemble des arcs taxables, on peut modéliser un cordon de différentes natures (simple, multi-couches, multi-centres, section 2.1.1).

### 3.2 Modèle 1 : MPEC pour péages différents permis

Commençons par la situation où on peut imposer un tarif particulier pour chaque point de péage. Alors, en adoptant la notation du tableau 3.1, le modèle décrit dans les sections précédentes peut être formulé comme un MPEC (éq. (3.7)-(3.14)).

Tableau 3.1 Notation pour le problème de péage

$A$	Ensemble des arcs du réseau incluant le transport en commun
$A_r$	Ensemble des arcs du réseau routier régulier (excluant le tr. en commun)
$A_1$	Ensemble des arcs taxables
$A(p)$	Ensemble des arcs constituant le chemin $p$
$A_1(p)$	Ensemble des arcs taxables faisant partie du chemin $p$
$T_a$	Taxe (ou péage) sur l'arc $a \in A_1$
$K$	Ensemble des commodités (origine-destination)
$P_k$	Ensemble des chemins $p$ disponibles pour la commodité $k$
$d_k$	Demande pour la commodité $k$
$C_a$	Coût fixe de transport sur l'arc $a$
$x_a$	Flot total sur l'arc $a$
$D_a$	Délai sur l'arc $a$
$v_{p,i}$	Flot d'usagers $i$ sur le chemin $p$
$\gamma_a$	Vaut 1 si l'arc est ouvert et 0 si l'arc est fermé, avec $a \in A_1$
$n_{max}$	Nombre maximal d'arcs taxés

$$\min_{T, \gamma} \sum_{a \in A} D_a(x_a) x_a \quad (3.7)$$

$$T_a \geq 0 \quad \forall a \in A_1 \quad (3.8)$$

$$\sum_{a \in A_1} \gamma_a \leq n_{max} \quad (3.9)$$

$$\gamma_a \in \{0,1\} \quad \forall a \in A_1 \quad (3.10)$$

$$\langle \pi(\alpha^i, x, T), y^i - v^i \rangle \geq 0, \quad \forall y^i \in Y^i, v^i \in Y^i \quad (3.11)$$

$$x_a = \sum_{p: a \in A(p)} \sum_{i=1}^n v_p^i \quad \forall a \in A \quad (3.12)$$

$$x_a \leq M \gamma_a \quad \forall a \in A_1 \quad (3.13)$$

$$v^i \in Y^i = \{v^i \geq 0 : \sum_{p \in P_k} v_p^i = h^i d_k, \forall k \in K\} \quad (3.14)$$

où  $\pi = (\pi_p)_p$ ,  $\pi_p(\alpha_i, x, T) = \sum_{a \in A(p)} D_a(x_a) + \alpha_i (\sum_{a \in A(p)} C_a + \sum_{a \in A_1(p)} T_a)$ , (section 3.1.4). La fonction objectif (3.7) décrit le mandat du responsable de la tarification qui doit déterminer un vecteur de péage  $T$  et des points de péage ( $\gamma$ ) afin de minimiser la somme de tous les délais encourus sur le réseau. En (3.9), on impose un nombre maximal de points de péage (section 3.1.5). L'*IV* (3.11) décrit l'équilibre-usager de Wardrop (section 2.2.1) où chaque usager choisit le chemin de moindres coûts perçus (section 3.1.4). En (3.12), on définit le flot sur chaque arc,  $x_a$ , comme étant la somme des flots de tous les types d'usagers ( $i$ ) pour chaque chemin passant par l'arc  $a$ . La contrainte (3.13) permet d'interdire un flot sur les arcs du cordon où on ne veut pas installer de point de péage ; ainsi, le flot sur l'arc  $a \in A_1$  sera fixé à 0 si  $\gamma_a = 0$  et sera inférieur à une grande valeur  $M$  si  $\gamma_a = 1$ . La contrainte (3.14) définit les flots réalisables pour les usagers d'un type  $i$  donné comme étant non négatifs et répondant exactement à la demande  $d$  pour chaque commodité  $k$ .

### 3.3 Modèle 2 : MPEC pour péages identiques

Pour des raisons pratiques ou politiques, on peut désirer un même montant de péage à tous les points d'entrée dans la zone à accès restreint. Par contre, il faut faire en sorte que  $T$  ne soit pas artificiellement élevé. En effet, jusqu'à maintenant (éq. (3.11)), les contraintes d'équilibre ne pouvant être satisfaites qu'en faisant varier  $T$ , si on doit fermer un certain arc  $a$ , alors  $T_a$  fera en sorte que les coûts des chemins dont  $a$  fait partie soient supérieurs au coût des chemins utilisés pour un  $k$  donné. Or, ce  $T_a$  pourrait bien faire grimper indûment le péage qu'on devra imposer à tous les points. Pour pallier à cette incohérence, on peut soit ajouter une taxe imaginaire  $T'_a$  ou un grand  $M$ , dans les contraintes de complémentarité, dont la fonction est précisément de rendre intéressants tous les chemins dont  $a$  fait partie, si on ferme  $a$ . On peut remplacer  $T_a$  par une unique variable  $T$ , mais on doit garder les taxes imaginaires  $T'_a$  pour qu'elles remplissent leur fonction pour le ou les chemins qu'on devra fermer. Autrement dit, les taxes réelles,  $T$ , ont pour objectif d'influencer le choix des usagers alors que les taxes imaginaires,  $T'_a$ , ou un grand  $M$ , servent à assurer le respect des contraintes d'équilibre lorsqu'on ferme des arcs taxables. Avec des péages identiques, le coût associé au péage, sur un chemin donné, vaut  $|A_1(p)| \cdot T$ . On obtient donc, pour un chemin  $p$ , aux yeux d'un usager  $i$ , un coût de

$$\pi_p(\alpha_i, x, T) = \sum_{a \in A(p)} D_a(x_a) + \alpha_i (\sum_{a \in A(p)} C_a + |A_1(p)| \cdot T + \sum_{a \in A_1(p)} T_a). \quad (3.15)$$

Mais il faut surtout s'assurer que la taxe imaginaire  $T_a'$  soit nulle si  $a$  est ouvert :

$$T_a' \leq M_3(1 - \gamma_a) \quad \forall a \in A_1, \quad (3.16)$$

où  $M_3$  est une certaine constante. Des bornes sont calculées pour  $M_3$  dans la section 4.5.

Comme les résultats de la section 5.2 le confirment, même pour des péages différents permis, il s'avère avantageux, en termes de temps de calcul, d'utiliser un grand  $M$  pour remplir la même tâche que la taxe imaginaire  $T_a'$  :

$$\pi_p(\alpha_i, x, T) = \sum_{a \in A(p)} D_a(x_a) + \alpha_i \left( \sum_{a \in A(p)} C_a + |A_1(p)| \cdot T \right) + \sum_{a \in A_1(p)} M_2(1 - \gamma_a). \quad (3.17)$$

Le dernier terme permet de faire en sorte qu'un équilibre-usager est atteint, c.-à-d. que les coûts des chemins non utilisés doivent obligatoirement être supérieurs à celui des chemins utilisés. Ainsi, le coût d'un chemin qu'on ferme devient élevé grâce au grand  $M_2$ .

On calcule une borne pour  $M_2$  dans la section 4.5. On résoudra les deux approches (taxes imaginaires et grand  $M$ ) dans nos tests (chapitre 5) afin de s'assurer qu'on obtient bien les mêmes solutions et de comparer les temps de résolution. Avec cette dernière approche ( $\pi_p$  en (3.17)), et sachant que  $\pi = (\pi_p)_p$ , pour des péages identiques, on obtient le MPEC suivant :

$$\min_{T, y} \sum_{a \in A} D_a(x_a) x_a \quad (3.18)$$

$$T \geq 0 \quad \forall a \in A_1 \quad (3.19)$$

$$\sum_{a \in A_1} \gamma_a \leq n_{\max} \quad (3.20)$$

$$\gamma_a \in \{0, 1\} \quad \forall a \in A_1 \quad (3.21)$$

$$\langle \pi(\alpha^i, x, T), y^i - v^i \rangle \geq 0, \quad \forall y^i \in Y^i, v^i \in Y^i \quad (3.22)$$

$$x_a = \sum_{p: a \in A(p)} \sum_{i=1}^n v_p^i \quad \forall a \in A \quad (3.23)$$

$$x_a \leq M \gamma_a \quad \forall a \in A_1 \quad (3.24)$$

$$v^i \in Y^i = \{v^i \geq 0 : \sum_{p \in P_k} v_p^i = h^i d_k, \forall k \in K\} \quad (3.25)$$

### 3.4 Affectation du trafic, algorithme de Frank-Wolfe

Dans le chapitre suivant, on reformulera nos modèles en les linéarisant et en discréétisant la congestion. On obtient alors une solution approximative, mais on veut utiliser l'algorithme de Frank-Wolfe pour connaître plus précisément (développement de Taylor d'ordre 1) la véritable répartition du flot, à partir d'une solution donnée  $(T, \gamma)$ . On pourra ainsi évaluer la qualité des solutions obtenues avec notre modèle, puisque celles-ci  $(T, \gamma)$  fixent la configuration du réseau. Pour chaque type d'usager, on veut trouver le flot  $v^i \in Y^i$  tel que :

$$\langle \pi(\alpha^i, x, T), y^i - v^i \rangle \geq 0, \quad \forall y^i \in Y^i.$$

Par une solution des modèles 1 ou 2 (les deux sections précédentes) discréétisés (prochain chapitre), on connaît le total des coûts fixes sur le chemin  $p$ ,  $C_p$ , et le total des taxes sur  $p$ ,  $T_p$ , et on peut formuler le problème d'optimisation qui se pose à chaque type d'usager ( $i$ ) comme suit :

$$\begin{aligned} \min_{v^i} F(v^i) &= \sum_{p \in P} \left[ \sum_{a \in A(p)} \int_0^{x_a} D_a(x) dx + \alpha_i (C_p + T_p) \right] \cdot v_p^i && (3.26) \\ \text{s. à} \quad x_a &= \sum_{p: a \in A(p)} \sum_{i=1}^n v_p^i && \forall a \in A \\ v^i \in Y^i &= \{v^i \geq 0 : \sum_{p \in P_k} v_p^i = h^i d_k, \forall k \in K\}. \end{aligned}$$

Ce programme modélise bien qu'un usager, unilatéralement, choisit un chemin afin que le total de ses coûts perçus soit minimal. La fonction  $F(v^i)$  n'est pas linéaire, mais on peut faire appel à l'algorithme de Frank-Wolfe pour résoudre ce problème d'affectation du trafic (*Traffic Assignment Problem*).

On note toujours  $v_i = \{v_{p,i}\}_{p \in P}$  le vecteur des flots des usagers de type  $i$  sur tout le réseau et donc,  $v = \{v_i\}_{i \in [1,n]}$  le vecteur des flots totaux. Voici l'algorithme de Frank-Wolfe tel que présenté par Patriksson (1994), avec une notation adaptée à la demande segmentée (section 3.1.3).

### ALGORITHME de Frank-Wolfe

Étape 0 (Initialisation) Soit  $v^0$  une solution réalisable, poser  $LBD = 0$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $k = 0$  (attention, ici  $v^k = \{v_i\}_{i \in [1, n]}$  pour l'itération  $k$  de l'algorithme).

Étape 1 (Génération d'une direction de recherche) Soit

$$\underline{F}(v) = F(v^k) + \nabla F(v^k)^T (v - v^k). \quad (\text{voir l'éq. (3.26), avec } F(v) = \sum_{i \in [1, n]} F(v^i))$$

Résoudre le programme linéaire suivant, pour chaque type d'usager  $i$ ,

$$\min \underline{F}(v)$$

$$\begin{aligned} \text{s. à} \quad x_a &= \sum_{p: a \in A(p)} \sum_{i=1}^n v_p^i \quad \forall a \in A \\ v^i \in Y^i &= \{v^i \geq 0 : \sum_{p \in P_k} v_p^i = h^i d_k, \forall k \in K\}. \end{aligned}$$

Soit  $y^k$  sa solution ( $y = \{y_i\}_{i \in [1, n]}$ ), et  $p^k = y^k - v^k$  la direction de recherche résultante.

Étape 2 (Vérification de convergence) Soit  $LBD := \max\{LBD, \underline{F}(y^k)\}$ . Si

$$\frac{\underline{F}(v^k) - LBD}{LBD} < \varepsilon,$$

alors ARRÊT, avec  $v^k$  comme solution. Sinon, continuer.

Étape 3 (Recherche linéaire) Trouver un pas,  $l_k$ , qui résout le problème à une seule dimension,

$$\min \{ F(v^k + l p^k) : 0 \leq l \leq 1 \}.$$

Étape 4 (Mise à jour) Fixer  $v^{k+1} = v^k + l_k p^k$ .

Étape 5 (Vérification de convergence) Si

$$\frac{F(v^{k+1}) - LBD}{LBD} < \varepsilon,$$

alors ARRÊT, avec  $v^{k+1}$  comme solution. Sinon,  $k := k + 1$  et aller à l'étape 1.

On rappelle que cet algorithme de Frank-Wolfe (présenté ici vu l'importance des IV formulées dans le présent chapitre) servira à évaluer les solutions qu'on obtiendra à partir des modèles discrétisés du prochain chapitre. Les résultats se trouvent à la section 5.4.3.

## CHAPITRE 4

# DISCRÉTISATION DU PROBLÈME ET ALGORITHME

On formule ici nos modèles (MPEC, sections 3.2 et 3.3) sous forme de programmes mathématiques linéaires avec variables réelles et entières (MIP). Pour ce faire, on discrétise d'abord la fonction de congestion (section 4.1). Ensuite, on rend linéaires toutes les contraintes du second niveau du modèle (section 4.2). Avec ces adaptations, on arrive à une formulation MIP complète à la section 4.3, pour des péages différents permis, et à un autre MIP pour des péages identiques à tout les points, à la section 4.4. On s'applique ensuite à définir de façon plus serrée certaines contraintes importantes à la section 4.5. Enfin, on développe un algorithme où on résout le MIP approprié avec une discrétisation adaptative (section 4.6), en utilisant un logiciel comme CPLEX par exemple.

### 4.1 Discrétisation de la fonction de congestion

Dans les *IV* de nos modèles MPEC définis à la section précédente, la congestion, qui est fonction du flot, est multipliée par un vecteur de flot, ce qui donne une formulation non linéaire. Pour linéariser, on discrétise la congestion par plateau. Soit  $x_a$  le nombre d'usagers empruntant l'arc  $a$ , la fonction de congestion  $D_a(x_a)$  sera définie sur  $L$  plateaux de la façon suivante :

$$D_a(x_a) = \begin{cases} D_a^1 & \text{si } s^0 \leq x_a \leq s^1 \\ D_a^2 & \text{si } s^1 \leq x_a \leq s^2 \\ \vdots & \\ D_a^L & \text{si } s^{L-1} \leq x_a \leq s^L \end{cases} \quad (4.1)$$

avec  $0 = s^0 < s^1 < \dots < s^{L-1} < s^L = x^{\max}$ .

Si le flot  $x_a$  se situe entre  $s^l$  et  $s^{l+1}$ , alors le délai pour cet arc prendra la valeur  $D_a^l$ . Dans le présent travail on définit toujours les valeurs  $D_a^l, \forall l \in [1, L]$ , selon la valeur moyenne du flot sur chaque plateau  $l$ , comme par exemple, pour une fonction de congestion exponentielle :

$$D_a^l = D_a \cdot e^{\lambda \frac{(s^{l-1} + s^l)}{2}} \quad \forall l \in [1, L]. \quad (4.2)$$

En considérant la fonction de congestion continue  $D_a(x_a) = D_a \cdot e^{\lambda x_a}$ , on illustre ici deux types de discréétisation possibles. La première consiste à séparer l'espace des flots par des pas de longueur constante. Soit  $\Delta$  la longueur de pas, on posera donc

$$s^0 = 0, \quad s^1 = \Delta, \quad s^2 = 2\Delta, \dots, \quad s^{L-1} = (L-1)\Delta, \quad s^L = L\Delta.$$

Dans le deuxième type de discréétisation, on désire que l'écart entre les différents délais  $D'_a$  soit constant. Soit  $x_a^{\max}$  le flot maximal sur l'arc  $a$ , les plateaux  $D'_a$  sont répartis de 0 à  $x_a^{\max}$  et la hauteur de saut est alors égale à  $D_a(\exp(\lambda x_a^{\max}) - 1)/L$ . La discréétisation est la suivante :

$$\begin{aligned} s^0 &= 0, \\ s^1 &= \frac{1}{\lambda} \ln \left( 1 + \frac{\exp(\lambda x_a^{\max}) - 1}{L} \right), \\ s^2 &= \frac{1}{\lambda} \ln \left( 1 + \frac{2(\exp(\lambda x_a^{\max}) - 1)}{L} \right), \\ &\vdots \\ s^{L-1} &= \frac{1}{\lambda} \ln \left( 1 + \frac{(L-1)(\exp(\lambda x_a^{\max}) - 1)}{L} \right), \\ s^L &= \frac{1}{\lambda} \ln \left( 1 + \frac{L(\exp(\lambda x_a^{\max}) - 1)}{L} \right) = x_a^{\max}. \end{aligned}$$

Sur la figure 4.1, on représente l'allure des deux discréétisations qu'on vient de définir, pour  $L = 3$ , où les seuils sont ceux pour la discréétisation avec pas constant. Pour une même fonction de congestion donnée ( $\lambda$  donné), elles conduiront fort probablement à deux solutions différentes.

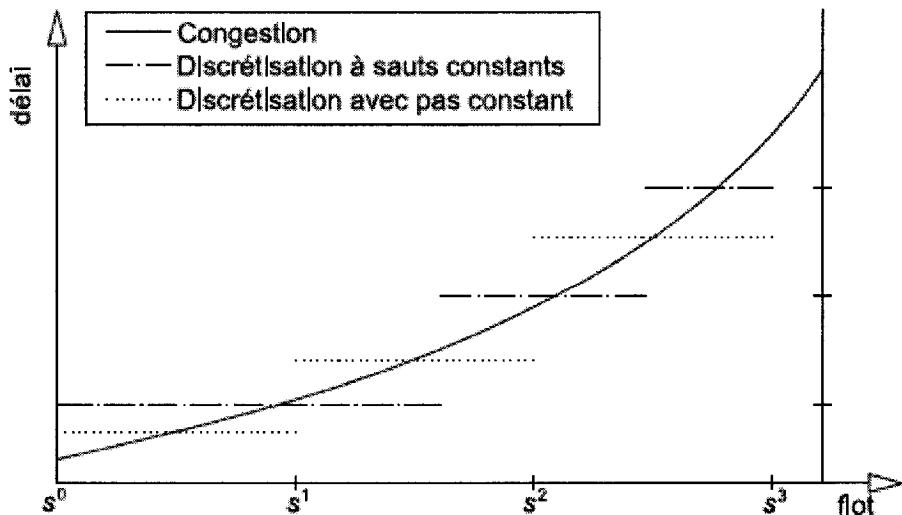


Figure 4.1 Discréétisation de la fonction de congestion

Maintenant qu'on connaît le délai sur chaque plateau, il faut introduire des variables binaires indiquant sur quel plateau  $l$  se trouve le flot de l'arc  $a$ . On définit ainsi les variables binaires  $z_{a,l}$ ,  $a \in A$ ,  $l \in [1,L]$  telles que

$$z_{a,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } s^{l-1} \leq x_a \leq s^l \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.3)$$

En utilisant un grand  $M$  pour contraindre le flot  $x_a$  seulement lorsque  $z_{a,l} = 1$  et en s'assurant qu'il n'y a qu'une seule variable  $z_{a,l}$  égale à un par arc, on peut écrire

$$x_a \geq s^{l-1} - M(1 - z_{a,l}) \quad \forall a \in A_r, \forall l \in [1, L] \quad (4.4)$$

$$x_a \leq s^l + M(1 - z_{a,l}) \quad \forall a \in A_r, \forall l \in [1, L] \quad (4.5)$$

$$\sum_{l=1}^L z_{a,l} = 1 \quad \forall a \in A_r \quad (4.6)$$

$$z_{a,l} \in \{0, 1\} \quad \forall a \in A_r, \forall l \in [1, L]. \quad (4.7)$$

L'équation (4.6) assure qu'un seul  $z_{a,l}$  vaut un pour chaque arc, puisque le flot ne peut se trouver que sur un plateau de congestion.

Alors, les fonctions  $D_a(x_a)$  s'écrivent simplement  $D_a(x_a) = \sum_{l=1}^L D'_a z_{a,l}$ . On ne peut toutefois pas remplacer le terme  $D_a(x_a)$  de notre première fonction objectif ( $\min \sum_{a \in A} D_a(x_a) x_a$ ) parce qu'elle demeurerait non linéaire. Puisqu'on attribue un délai fixe pour chaque plateau de congestion, il suffit d'ajouter un indice  $l$  aux variables de flot  $x_a$  de façon à ce que

$$x_{a,l} = \begin{cases} x_a & \text{si } z_{a,l} = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.8)$$

Pour y arriver, on devra donc remplacer  $x_a$  par  $\sum_{l=1}^L x_{a,l}$  dans la fonction objectif et dans toutes les contraintes précédentes et ajouter une contrainte imposant un flot nul lorsque  $z_{a,l} = 0$ . On pourrait simplement utiliser un grand  $M$  et écrire

$$x_{a,l} \leq Mz_{a,l} \quad \forall a \in A_r, \forall l \in [1, L].$$

Cependant, comme on voit en (4.5), pour un  $a$  et un  $l$  donnés, le flot  $x_a$  sera inférieur ou égal à  $s^l$ . Ainsi, on peut remplacer le  $M$  de l'équation précédente par la valeur  $s^l$ , qui est plus contraignante que  $M$ , et on obtient l'équation suivante qu'on ajoutera à notre modèle :

$$x_{a,l} \leq s^l z_{a,l} \quad \forall a \in A_r, \forall l \in [1, L]. \quad (4.9)$$

De la même façon, on remplacera donc aussi le  $M$  de l'équation (3.6) et on obtient alors :

$$x_{a,l} \leq s^l \gamma_a \quad \forall a \in A_l, \forall l \in [1, L]. \quad (4.10)$$

## 4.2 Programme de second niveau

Au second niveau de notre modèle, on considère que les usagers choisissent le plus court chemin en termes de coûts totaux et on atteindra ainsi un équilibre-usager (section 2.2.1). On a vu à la section 3.2 qu'on peut formuler cet équilibre comme une inéquation variationnelle (éq. (3.11)). On peut remplacer cette dernière par les deux équations suivantes :

$$\pi_p(\alpha_i, x, T) \geq \zeta_{i,k}, \quad \forall k \in K, \forall p \in P_k, \forall i \in [1, n] \quad (4.11)$$

$$\langle \pi_p(\alpha_i, x, T) - \zeta_{i,k}, v_{p,i} \rangle_k = 0, \quad \forall k \in K, \forall i \in [1, n] \quad (4.12)$$

où  $\pi_p(\alpha_i, x, T)$  est le coût total du chemin  $p$  (éq. (3.2)). On constate que (4.12) n'est pas convexe à cause du terme bilinéaire  $T \cdot v_{p,i}$ . Par (4.11), tout chemin répondant à la commodité  $k$  et évalué par un usager de classe  $i$ , aura toujours un coût supérieur ou égal à  $\zeta_{i,k}$ . Si un chemin a un coût plus élevé que  $\zeta_{i,k}$ , il ne sera pas utilisé ( $v_{p,i} = 0$ ) par les usagers de type  $i$  : on a  $\pi_p(\alpha_i, x, T) > \zeta_{i,k} \Rightarrow \pi_p(\alpha_i, x, T) - \zeta_{i,k} > 0$  ; puisque  $\langle \cdot, v_{p,i} \rangle = 0$ ,  $v_{p,i} = 0$ . Si un chemin a un coût  $\zeta_{i,k}$ , alors il peut être utilisé par les usagers de type  $i$  : on a  $\pi_p(\alpha_i, x, T) = \zeta_{i,k} \Rightarrow \pi_p(\alpha_i, x, T) - \zeta_{i,k} = 0$  ; puisque  $\langle \cdot, v_{p,i} \rangle = 0$ , et qu'un flot ne peut pas prendre une valeur négative,  $v_{p,i} \geq 0$ .

Bref, tout choix de chemin  $p$  se fait par un usager de type  $i$ , pour une commodité  $k$  et le résultat s'énonce ainsi : un chemin de coût supérieur à  $\zeta_{i,k}$  ne sera pas utilisé et inversement, un chemin utilisé a forcément un coût égal à  $\zeta_{i,k}$ . Voilà qui correspond bien à un équilibre-usager.

### 4.2.1 Linéarisation de la contrainte de complémentarité

On veut reformuler les contraintes (4.11) et (4.12) pour obtenir une formulation linéaire. On introduit d'abord des variables  $\mu_{p,i} \geq 0$  telles que la contrainte (4.11) devient

$$\pi_p(\alpha_i, x, T) - \zeta_{i,k} = \mu_{p,i} \quad \forall k \in K, \forall p \in P_k, \forall i \in [1, n] \quad (4.13)$$

$$\mu_{p,i} \geq 0 \quad \forall p \in P, \forall i \in [1, n]. \quad (4.14)$$

Avec ceci, pour que la contrainte (4.12) soit respectée, il faut que :

$$\begin{aligned}\mu_{p,i} > 0 \Rightarrow v_{p,i} = 0 \text{ et} \\ v_{p,i} > 0 \Rightarrow \mu_{p,i} = 0.\end{aligned}$$

Pour ce faire, on utilisera une variable binaire  $y_{p,i} \in \{0,1\}$  et une grande constante  $M$  pour réécrire la contrainte de complémentarité (4.12) de la façon suivante :

$$\mu_{p,i} \leq M y_{p,i} \quad \forall p \in P, \forall i \in [1, n], \quad (4.15)$$

$$v_{p,i} \leq M(1 - y_{p,i}) \quad \forall p \in P, \forall i \in [1, n], \quad (4.16)$$

$$y_{p,i} \in \{0,1\} \quad \forall p \in P, \forall i \in [1, n]. \quad (4.17)$$

Dans la première équation, on voit la relation directe entre les variables  $y_{p,i}$  et  $\mu_{p,i}$ . La seconde impose bien que pour obtenir un flot  $v_{p,i} > 0$ , il faut que  $y_{p,i} = 0 \Rightarrow \mu_{p,i} = 0$ . Toujours dans (4.15),  $M$  doit prendre une valeur suffisamment grande pour permettre des écarts importants entre le coût du meilleur chemin ( $\zeta_{i,k}$ , voir section précédente) et le coût du chemin  $p$ . On calculera une borne sur la valeur de ce grand  $M$  à la section 4.5.2.

#### 4.2.2 Transport en commun

Puisqu'on considère que la congestion n'affecte pas le transport en commun, le délai pour un arc  $a \in A \setminus A_r$  est une constante et on n'est pas obligé de recourir à des variables binaires  $z_{a,l}$  comme dans la section précédente. Pour une commodité  $k$  et un type d'usager  $i$ , le coût perçu est alors  $D_a + \alpha_a C_a, \forall a \in A \setminus A_r$ . Chaque arc de transport collectif correspond directement à une seule commodité  $k$  et on a donc  $a \in A(p) \cap A \setminus A_r, p \in P_k$ . Afin de conserver la formulation de la contrainte de complémentarité obtenue à la section 4.2.1,

$$\sum_{a \in A(p)} \sum_{l=1}^L D_a z_{a,l} + \alpha_i \left( \sum_{a \in A(p)} C_a + \sum_{a \in A_1(p)} T_a \right) - \zeta_{i,k} = \mu_{p,i}, \quad \forall k \in K, \forall p \in P_k, \forall i \in [1, n],$$

on peut fixer  $z_{a,1} = 1$  et  $L = 1 \quad \forall a \in A \setminus A_r$ . On voit qu'on obtient bien un coût perçu de  $D_a + \alpha_a C_a, \forall a \in A \setminus A_r$ .

### 4.3 Modèles discrétilisés (MIP) pour péages différents permis

Avec la notation du tableau 4.1, on obtient une formulation MIP (éq. (4.18)-(4.36)) pour le cas où on permet des péages différents d'un point à l'autre.

Tableau 4.1 Notation pour le problème de péage

$A$	Ensemble des arcs du réseau incluant le transport en commun
$A_r$	Ensemble des arcs du réseau routier régulier (excluant le tr. en commun)
$A_1$	Ensemble des arcs taxables
$A(p)$	Ensemble des arcs constituant le chemin $p$
$A_1(p)$	Ensemble des arcs taxables faisant partie du chemin $p$
$T_a$	Taxe (ou péage) sur l'arc $a \in A_1$
$K$	Ensemble des commodités (origine-destination)
$P_k$	Ensemble des chemins $p$ disponibles pour la commodité $k$
$d_k$	Demande pour la commodité $k$
$C_a$	Coût fixe de transport sur l'arc $a$
$x_a$	Flot total sur l'arc $a$
$D_a$	Délai sur l'arc $a$
$v_{p,i}$	Flot d'usagers $i$ sur le chemin $p$
$\gamma_a$	Vaut 1 si l'arc est ouvert et 0 si l'arc est fermé, avec $a \in A_1$
$n_{max}$	Nombre maximal d'arcs taxés

$$\text{PDIFM :} \quad \min_{T, \gamma} \sum_{a \in A} \sum_{l=1}^L D_a^l x_{a,l} \quad (4.18)$$

$$T_a \geq 0 \quad \forall a \in A_1 \quad (4.19)$$

$$\sum_{a \in A_1} \gamma_a \leq n_{\max} \quad (4.20)$$

$$\gamma_a \in \{0,1\} \quad \forall a \in A_1 \quad (4.21)$$

$$\sum_{a \in A(p)} \sum_{l=1}^L D_a^l z_{a,l} + \alpha_i \left( \sum_{a \in A(p)} C_a + \sum_{a \in A_1(p)} T_a \right) + \sum_{a \in A_1(p)} M_2 (1 - \gamma_a) - \zeta_{i,k} = \mu_{p,i}, \quad (4.22)$$

$$\forall k \in K, \forall p \in P_k, \forall i \in [1, n]$$

$$\sum_{p \in P_k} v_{p,i} = d_k h_i \quad \forall k \in K, \forall i \in [1, n] \quad (4.23)$$

$$v_{p,i} \geq 0 \quad \forall p \in P, \forall i \in [1, n] \quad (4.24)$$

$$\sum_{l=1}^L x_{a,l} = \sum_{p: a \in A(p)} \sum_{i=1}^n v_{p,i} \quad \forall a \in A \quad (4.25)$$

$$\mu_{p,i} \geq 0 \quad \forall p \in P, \forall i \in [1, n] \quad (4.26)$$

$$\mu_{p,i} \leq M_1 y_{p,i} \quad \forall p \in P, \forall i \in [1, n] \quad (4.27)$$

$$v_{p,i} \leq M(1 - y_{p,i}) \quad \forall p \in P, \forall i \in [1, n] \quad (4.28)$$

$$y_{p,i} \in \{0,1\} \quad \forall p \in P, \forall i \in [1, n] \quad (4.29)$$

$$\sum_{l=1}^L x_{a,l} \geq s^{i-1} - M(1 - z_{a,l}) \quad \forall a \in A_r, \forall l \in [1, L] \quad (4.30)$$

$$\sum_{l=1}^L x_{a,l} \leq s^i + M(1 - z_{a,l}) \quad \forall a \in A_r, \forall l \in [1, L] \quad (4.31)$$

$$\sum_{l=1}^L z_{a,l} = 1 \quad \forall a \in A_r \quad (4.32)$$

$$z_{a,1} = 1 \quad \forall a \in A \setminus A_r \quad (4.33)$$

$$z_{a,l} \in \{0,1\} \quad \forall a \in A_r, \forall l \in [1, L] \quad (4.34)$$

$$x_{a,l} \leq s^i \gamma_a \quad \forall a \in A_1, \forall l \in [1, L] \quad (4.35)$$

$$x_{a,l} \leq s^i z_{a,l} \quad \forall a \in A_r, \forall l \in [1, L] \quad (4.36)$$

Si on veut utiliser l'approche avec taxes imaginaires  $T_a'$ , on obtient le MIP suivant :

$$\text{PDIFT : } \min_{T, \gamma} \sum_{a \in A} \sum_{l=1}^L D_a^l x_{a,l} \quad (4.37)$$

$$T_a' \geq 0 \quad \forall a \in A_l \quad (4.38)$$

$$T_a' \leq M_3(1 - \gamma_a) \quad \forall a \in A_l \quad (4.39)$$

$$T_a' \leq M_3 \gamma_a \quad \forall a \in A_l \quad (4.40)$$

$$(4.19) - (4.21)$$

$$\sum_{a \in A(p)} \sum_{l=1}^L D_a^l z_{a,l} + \alpha_i \left( \sum_{a \in A(p)} C_a + \sum_{a \in A_l(p)} T_a + T_a' \right) - \zeta_{i,k} = \mu_{p,i}, \quad \forall k \in K, \forall p \in P_k, \forall i \in [1, n] \quad (4.41)$$

$$(4.23) - (4.36).$$

L'équation (4.39) assure que les taxes imaginaires seront nulles sur les arcs taxables ouverts ( $\gamma_a = 1$ ) et inversement, (4.40) assure que les taxes sont nulles sur les arcs taxables fermés.

#### 4.4 Modèles discrétisés (MIP) pour péages identiques

Si on impose qu'on veut un péage identique partout (MPEC à la section 3.3), on obtient le MIP suivant :

$$\text{PIDM : } \min_{T, \gamma} \sum_{a \in A} \sum_{l=1}^L D_a^l x_{a,l} \quad (4.42)$$

$$T \geq 0 \quad (4.43)$$

$$(4.20) - (4.21)$$

$$\sum_{a \in A(p)} \sum_{l=1}^L D_a^l z_{a,l} + \alpha_i \left( \sum_{a \in A(p)} C_a + |A_l(p)| \cdot T \right) + \sum_{a \in A_l(p)} M_2(1 - \gamma_a) - \zeta_{i,k} = \mu_{p,i}, \quad \forall k \in K, \forall p \in P_k, \forall i \in [1, n] \quad (4.44)$$

$$(4.23) - (4.36).$$

Si on veut utiliser l'approche avec taxes imaginaires  $T_a'$ , on obtient le MIP suivant :

$$\text{PIDT : } \min_{T, \gamma} \sum_{a \in A} \sum_{l=1}^L D_a^l x_{a,l} \quad (4.45)$$

$$T \geq 0 \quad (4.46)$$

$$T_a' \geq 0 \quad \forall a \in A_l \quad (4.47)$$

$$T_a' \leq M_3(1 - \gamma_a) \quad \forall a \in A_l \quad (4.48)$$

$$(4.20) - (4.21)$$

$$\sum_{a \in A(p)} \sum_{l=1}^L D_a^l z_{a,l} + \alpha_i \left( \sum_{a \in A(p)} C_a + |A_l(p)| \cdot T + \sum_{a \in A_l(p)} T_a' \right) - \zeta_{i,k} = \mu_{p,i}, \quad \forall k \in K, \forall p \in P_k, \forall i \in [1, n] \quad (4.49)$$

$$(4.23) - (4.36).$$

## 4.5 Bornes valides pour certaines constantes $M$

Lorsqu'on résout un MIP, il s'avère toujours avantageux de restreindre le domaine solution autant que possible et donc de définir nos contraintes aussi serrées que possible. On va d'abord s'intéresser à la contrainte de complémentarité où on utilise un grand  $M$  pour augmenter le coût des chemins fermés (éq. (4.22)), puis à la contrainte limitant l'écart entre les coûts des différents chemins d'une commodité donnée :  $\mu_{p,i} \leq M_1 y_{p,i}, \forall p \in P, \forall i \in [1, n]$ , éq. (4.27).

### 4.5.1 Contrainte de complémentarité

On cherche ici à définir les valeurs minimales pour  $M_2$ , mais telles que toutes les contraintes de complémentarités,

$$\sum_{a \in A(p)} \sum_{l=1}^L D'_a z_{a,l} + \alpha_i \left( \sum_{a \in A(p)} C_a + \sum_{a \in A_1(p)} T_a \right) + \sum_{a \in A_1(p)} M_2 (1 - \gamma_a) - \zeta_{i,k} = \mu_{p,i}, \forall k \in K, \forall p \in P_k, \forall i \in [1, n],$$

soient respectées, peu importe le problème résolu. Dans la pire situation, si on impose de fermer beaucoup d'arcs taxables ou si la configuration de la circulation le commande, on devra augmenter le coût perçu des chemins fermés. Par exemple, si on doit fermer le chemin 2 de la figure 4.2, on doit rendre son coût égal ou supérieur au coût du chemin le plus cher qu'on puisse emprunter, pour s'assurer que les contraintes de complémentarité soient respectées. On voit bien dans ce cas qu'on n'aura jamais besoin d'une taxe supérieure à  $T_2^{\max}$ .

Pour la suite, nous allons étudier le cas où on n'a qu'une commodité constituée de chemins qui n'ont aucun arc en commun. Cette dernière hypothèse simplificatrice permet d'obtenir des fonctions de délai à une seule variable (flot sur le chemin) au lieu de  $|A(p)|$  variables dans un réseau quelconque, ce qui s'avère plus commode à analyser et à illustrer. On illustre aussi la congestion sous forme continue par simplicité, mais en gardant à l'esprit la discrétisation.

Sur la figure 4.2, soit  $x = \{x_1, x_2, x_3\}$  un vecteur de flot correspondant à un équilibre-système. Puisque le chemin 1 est exempt de taxe, le coût des chemins utilisés sera égal au coût du chemin 1 avec un flot  $x_1$  et il est noté  $\zeta_{i,k}$ . Comme on le voit sur la figure 4.2, pour que les coûts des chemins 2 et 3 soient égaux (avec  $x_2$  et  $x_3$  respectivement) à  $\zeta_{i,k}$  et respectent ainsi les contraintes de complémentarité, il faut leur appliquer des taxes. On a aussi illustré le fait que les flots sur  $x_2$  et  $x_3$  ne peuvent pas dépasser la valeur pour laquelle le coût de leur chemin respectif vaut  $\zeta_{i,k}$ . Autrement dit, on peut atteindre différents équilibres avec ce coût  $\zeta_{i,k}$  (donc avec un  $x_1$  donné

ici), en faisant varier  $T_2$  et  $T_3$ . Dans notre cas, avec comme objectif de réduire autant que possible la somme des délais sur l'ensemble du réseau, les taxes font en sorte qu'on atteigne un équilibre-système. Il est évident sur la figure 4.2, que si  $T_2 = T_2^{\max}$ , alors le chemin 2 a assurément un coût supérieur ou égal à  $\zeta_{i,k}$ , ce qui fait qu'il peut être utilisé ou pas ; il peut avoir un coût égal à  $\zeta_{i,k}$  si on considère la congestion discrétisée puisqu'on peut avoir un flot positif ( $\leq s^1$ ) correspondant au coût minimal de ce chemin. Aussi, si jamais on ferme un arc taxable du chemin 2, alors son coût respecte la contrainte de complémentarité et la contrainte (4.35) impose qu'aucun flot n'y circule. Donc, dans ce cas-ci, on pourrait fixer  $M_2 = T_2^{\max}$ , pour le  $i$  correspondant à la situation de la figure 4.2.

Si tous les chemins, pour une commodité donnée, sont taxables, alors on ne peut pas déterminer le coût maximal  $\zeta_{i,k}^{\max}$ , mais comme dans notre cas, il existe un arc de transport en commun pour chaque commodité, on ne rencontre pas cet ennui. On ajoute les indices  $p$  et  $i$  sur  $M_2$  puisque cette dernière valeur dépend directement du chemin et du type d'usager. Si on se trouve dans la situation où il existe plus d'un chemin non taxable ( $p:|A_1(p)|=0$ ), alors  $\zeta_{i,k}^{\max}$  vaudra le plus petit des coûts maximaux de ces chemins ; le coût des chemins utilisés,  $\zeta_{i,k}$ , ne peut pas être supérieur au coût du meilleur chemin sans taxe (figure 4.3).

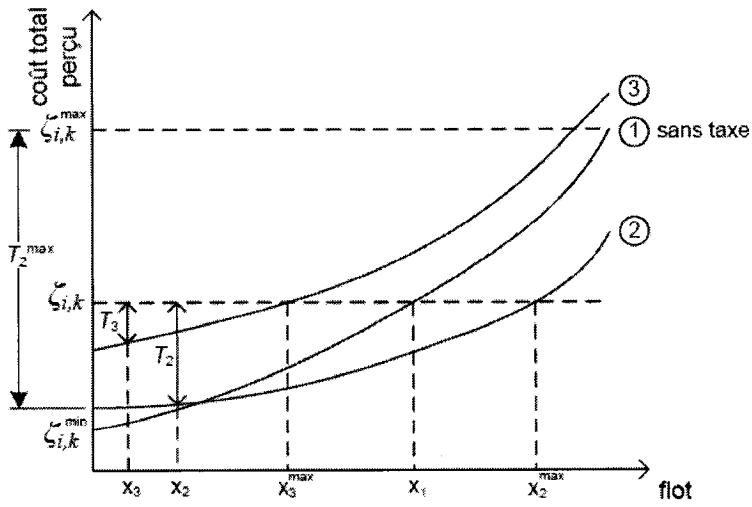


Figure 4.2 Taxes admissibles, taxe maximale

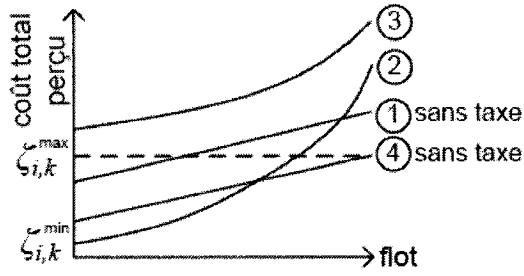


Figure 4.3 Plus d'un chemin sans péage

En tenant compte de toutes les considérations énoncées précédemment, on a maintenant une formulation pour  $\zeta_{i,k}^{\min}$  et  $\zeta_{i,k}^{\max}$  :

$$\zeta_{i,k}^{\max} = \min_{p: p \in P_k \cap A_1(p)=0} \left\{ \sum_{a \in A(p)} D_a^L + C_{p,i} \right\}, \quad \forall k \in K, \forall i \in [1, n], \quad (4.50)$$

$$\zeta_{i,k}^{\min} = \min_p \left\{ \sum_{a \in A(p)} D_a^l + C_{p,i} \right\}, \quad \forall k \in K, \forall p \in P_k, \forall i \in [1, n], \quad (4.51)$$

où  $C_{p,i} = \alpha_i \sum_{a \in A(p)} C_a$ . En (4.50),  $\zeta_{i,k}^{\max}$  vaut le plus faible des coûts maximaux ( $D_a^L$ ) des chemins sans taxe. En (4.51),  $\zeta_{i,k}^{\min}$  équivaut tout simplement au coût du chemin le moins cher.

De plus, afin que  $M_2^{p,i}$  ne soit pas négatif (voir le chemin 3 sur la figure 4.3 par exemple), on peut formuler que

$$M_2^{p,i} = \max \left\{ \zeta_{i,k}^{\max} - \left( \sum_{a \in A(p)} D_a^l + C_{p,i} \right), 0 \right\}, \quad \forall k \in K, \forall p \in P_k, \forall i \in [1, n]. \quad (4.52)$$

En réalité, la définition de  $\zeta_{i,k}^{\min}$  devrait être la solution d'un problème de plus court chemin, en termes de coûts perçus, pour la commodité  $k$  et le type d'usagers  $i$ ; parce qu'il est possible que la demande soit supérieure à la limite du premier plateau de congestion ( $s^l$ ) d'au moins un arc de tous les chemins par exemple. Cependant, nous avons maintenant une valeur de  $M_2^{p,i}$  aussi petite que possible et appropriée pour n'importe quel problème et nous nous en tiendrons donc ici à la définition de  $\zeta_{i,k}^{\min}$  énoncée en (4.51).

#### 4.5.2 Écarts entre les coûts des chemins

On veut maintenant définir la constante  $M_1$  de l'équation  $\mu_{p,i} \leq M_1 y_{p,i}, \forall p \in P, \forall i \in [1, n]$ , éq. (4.27). Rappelons que  $\mu_{p,i}$  représente l'écart entre le coût d'un chemin  $p$  tel que perçu par un usager de type  $i$  et le coût d'un chemin utilisé par ce même usager ( $\zeta_{i,k}$ ), le tout pour une commo-

dité donnée (éq. (4.22)). On aura besoin de la valeur de la taxe maximale pour chaque chemin  $p$ , qu'on notera  $M_4^p$ , et puisque la taxe s'applique à tous les types d'usagers  $i$ ,

$$M_4^p = \max_i \left\{ \frac{1}{\alpha_i} M_2^{p,i} \right\} \quad \forall p \in P. \quad (4.53)$$

Imaginons qu'on veut déterminer  $M_1^{p,i}$  pour un  $p$  et un  $i$  donnés et que le chemin  $p$  passe par les arcs taxables 6 et 8. À la solution, l'arc 8 est fermé et le coût du chemin  $p$  sera donc augmenté de  $M_2^{p,i}$ , mais l'arc 6 est ouvert. Or, il s'avère possible que  $T_6 > M_4^p \geq M_2^{p,i}$ , si l'arc 6 fait partie de plus d'un chemin. Ainsi, plutôt que d'additionner  $M_2^{p,i}$ , il faut ajouter la plus grande taxe possible sur l'arc. On définira ainsi les valeurs  $M_3^a$  :

$$M_3^a = \max_{p: a \in A(p)} M_4^p \quad \forall a \in A_1. \quad (4.54)$$

Pour un type d'usager donné, la plus grande taxe possible se trouve multipliée par  $\alpha_i$  et on obtient donc :

$$M_1^{p,i} = \sum_{a \in A_1(p)} M_3^a \cdot \alpha_i + \sum_{a \in A(p)} D_a^1 + C_{p,i} - \zeta_{i,k}^{\min} \quad \forall k \in K, \forall p \in P_k, \forall i \in [1, n]. \quad (4.55)$$

Ainsi,  $M_1^{p,i}$  correspond à la différence entre le coût maximal d'un chemin non utilisé et le coût minimal d'un chemin utilisé pour la commodité dont le chemin non utilisé fait partie. L'équation (4.27) devient  $\mu_{p,i} \leq M_1^{p,i} y_{p,i}, \forall p \in P, \forall i \in [1, n]$  et on voit bien que ces contraintes sont mieux définies ainsi qu'avec une seule valeur  $M_1$  appliquée à toutes. On quantifie l'avantage d'utiliser  $M_1^{p,i}$  et  $M_2^{p,i}$  tels que définis ici, en termes de temps de calcul, à la section 5.2.

## 4.6 Adaptation de la congestion pour le modèle discrétilisé

On présente ici une méthode afin d'améliorer la discrétilisation de la congestion, et ce pour tous les modèles MIP formulés précédemment (PDIFM, PDIFT, PIDM et PIDT). Ainsi, on résout le modèle avec une première discrétilisation arbitraire, puis on adapte cette dernière à la solution obtenue pour une nouvelle résolution et ainsi de suite, jusqu'à l'atteinte de certains critères d'arrêt.

### 4.6.1 Exemple 1, solution exacte

On résout d'abord de façon exacte le plus petit exemple possible pour pouvoir illustrer ensuite notre approche. Soit un réseau constitué d'un seul arc régulier, taxable, menant du nœud 1 au nœud 2, on a alors deux chemins possibles, le premier étant celui en automobile et le second en transport en commun (arc virtuel, comme expliqué à la section 3.1.2). Voici la fonction de congestion linéaire,  $D_p(x_p) = D_{p,0} + 4x_p$ . Il existe une demande de dix unités entre les nœuds 1 et 2, deux types d'usagers,  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 8$  et les données suivantes pour le réseau :

$$\begin{array}{lll} p = 1 : \text{automobile} & D_{1,0} = 10 & C_1 = 5 \\ p = 2 : \text{transport en commun} & D_{2,0} = 30 & C_2 = 1. \end{array}$$

En utilisant les contraintes de complémentarité (éq. (4.22)), mais en gardant la fonction de congestion continue, on obtient ceci :

$p,i$	délai		coût fixe		taxe	$\zeta_{i,k}$	$\mu_{p,i}$
1,1 :	$10 + 4x_1$	+	10	+	$2T_1$	$-\zeta_{1,1} = \mu_{1,1}$	
1,2 :	$10 + 4x_1$	+	40	+	$8T_1$	$-\zeta_{2,1} = \mu_{1,2}$	
2,1 :	30	+	2			$-\zeta_{1,1} = \mu_{2,1}$	
2,2 :	30	+	8			$-\zeta_{2,1} = \mu_{2,2}$	

Pour les usagers de type  $i = 2$ ,  $\zeta_{2,1} = 38$  (coût du meilleur chemin évalué par les usagers de type 2) puisque le coût fixe pour (1,2) est  $40 = \alpha_2 \cdot C_1$ , comparé à 38 comme coût total pour le chemin 2. À l'état d'équilibre, aucun usager du type 2 ne passera sur le chemin 1 et on aura donc les flots  $v_{p,i}$  suivants :  $v_{1,2} = 0$  et  $v_{2,2} = 5$ . Pour  $i = 1$ , puisque le flot de 5 unités ne peut pas passer par le chemin 1 pour un coût inférieur à 32, qui correspond au coût du transport en commun, (2,1), on a  $\zeta_{1,1} = 32$ . Donc, pour  $i = 1$ , il faut trouver les flots  $v_{1,1}$  et  $v_{2,1}$  tels que la somme des délais est minimale (fonction objectif) :

$$\begin{aligned} \min_v g &= (10 + 4v_{1,1})v_{1,1} + 30v_{2,1} = 4(v_{1,1})^2 + 10v_{1,1} + 30(5 - v_{1,1}) = 4(v_{1,1})^2 - 20v_{1,1} + 150 \\ \text{s. à } &10 + 4v_{1,1} + 10 + 2T_1 = 32 \\ &v_{1,1} + v_{2,1} = 5 \end{aligned}$$

On trouve le point stationnaire de  $g$  là où la dérivée est nulle :  $dg/dv_{1,1} = 8v_{1,1} - 20 = 0 \Rightarrow v_{1,1} = 2,5$ . Le point est bien un minimum puisque la dérivée seconde en  $v_{1,1}$  est positive. De la deuxième contrainte du programme précédent,  $v_{2,1} = 5 - v_{1,1} = 2,5$ , et de la première,  $T_1 = 1$ . La valeur de l'objectif est alors,  $\sum_{a \in A} D_a x_a = (10 + 4 \times 2,5) \times 2,5 + 30 \times (2,5 + 5) = 275$ . La solution exacte de l'exemple 1 se retrouve dans le tableau 4.2.

Tableau 4.2 Solution exacte de l'exemple 1

Objectif	$T_1$	$\gamma_1$	$v_{1,1}$	$v_{1,2}$	$x_1$	$v_{2,1}$	$v_{2,2}$	$x_2$
275	1,0	1	2,5	0	2,5	2,5	5	7,5

### 4.6.2 Exemple 1 avec discréétisation initiale

On résout ici l'exemple 1 (voir les données à la section précédente) avec une discréétisation initiale donnée. Pour simplifier la présentation, puisque l'exemple 1 ne compte qu'un arc sujet à congestion, on notera les seuils de congestion  $s^l$  alors que pour l'approche de résolution qu'on présentera formellement à la section 4.6.5, il existe une discréétisation de la congestion propre à chaque arc et on notera alors les seuils de congestion  $s_a^l, \forall a \in A_r, \forall l \in [1, L]$ . Disons qu'on choisit trois paliers de congestion ( $L = 3$ ), que la fonction de congestion est  $D_p^l = D_p + 4(s^{l-1} + s^l)/2$  et qu'on fixe les seuils de la fonction de congestion  $s^0 = 0, s^1 = 3, s^2 = 6$  et  $s^3 = 9$ , on a alors :

$p, i$	délai		coût fixe		taxe	$\zeta_{i,k}$	$\mu_{p,i}$
1,1 :	$16z_{1,1} + 28z_{1,2} + 40z_{1,3}$	+	10	+	$2T_1$	$-\zeta_{1,1} = \mu_{1,1}$	
1,2 :	$16z_{1,1} + 28z_{1,2} + 40z_{1,3}$	+	40	+	$8T_1$	$-\zeta_{2,1} = \mu_{1,2}$	
2,1 :	30	+	2			$-\zeta_{1,1} = \mu_{2,1}$	
2,2 :	30	+	8			$-\zeta_{2,1} = \mu_{2,2}$	

Pour  $i = 2$ ,  $\zeta_{2,1} = 38$  (même explication qu'à la section précédente) :  $v_{2,2} = 5$ , et  $v_{1,2} = 0$ . Pour  $i = 1$ , on ne peut pas faire passer les 5 usagers de type 1 par le chemin 1 parce que cela correspondrait à un délai de 28 (2<sup>e</sup> plateau de congestion) et à un coût total de  $38 + 2T_1$ , supérieur au coût du transport en commun (32). Donc,  $\zeta_{1,1} = 32, z_{1,1} = 1 \Rightarrow$  délai = 16 (coût total  $26 + 2T_1 = 32$ , ok, c'est réalisable avec  $T_1 = 3$ )  $\Rightarrow$  on fera passer autant d'usagers de type 1 qu'on peut pour un délai de 16  $\Rightarrow v_{1,1} = s^1 = 3$ . Puisque  $v_{1,1} + v_{2,1} = 5, v_{2,1} = 2$ . La valeur de l'objectif est alors,  $\sum_{a \in A} D_a x_a = 16 \times 3 + 30 \times (2 + 5) = 258$ . La solution à l'exemple 1 tel que discréétisé ici se trouve dans le tableau 4.3.

Tableau 4.3 Solution de l'exemple 1 avec la discréétisation initiale

Objectif	$T_1$	$\gamma_1$	$v_{1,1}$	$v_{1,2}$	$x_1$	$v_{2,1}$	$v_{2,2}$	$x_2$
258	3,0	1	3	0	3	2	5	7

On obtient une solution de valeur inférieure à celle de la solution exacte ( $275 - 258 = 17$ ). Ceci est dû au fait qu'on sous-estime le délai subi par les 3 usagers de type 1 qui empruntent le chemin 1: à 3 unités, on lie un délai correspondant au flot moyen sur le plateau 1, soit 1,5 unités.

On adapte maintenant la discrétisation de la fonction de congestion d'une façon qu'on précise dans la prochaine section et qu'on appliquera ensuite sur l'exemple 1 (section 5.4.1).

### 4.6.3 Position de la discrétisation

Notre approche se définit par deux paramètres principaux :

- la position de la discrétisation de la congestion,
- la longueur des plateaux de congestion.

Comme à la section 4.1 où on explique la discrétisation de la fonction de congestion, on note  $\Delta$  la longueur des plateaux. De plus, comme dans l'ensemble du présent travail, on considère toujours que la fonction de congestion utilise la valeur moyenne de flot sur le plateau pour évaluer le délai, comme par exemple pour une fonction de congestion linéaire,  $D_a^l = D_a + (s^{l-1} + s^l)/2$ . De ce dernier point on tire que pour toute solution, c'est le flot moyen du plateau correspondant à la solution (et son délai associé) qui fait en sorte qu'on atteint un équilibre. On centrera donc une nouvelle discrétisation autour de ce flot moyen qu'on notera  $\bar{x}_a$ .

Revenons à la solution de la section précédente où un flot de 3 unités sur l'arc 1 correspond à la situation d'équilibre. Lorsqu'on compte un nombre impair de plateaux de congestion, on fera en sorte que le centre du plateau du centre de la discrétisation à déterminer soit égal à  $\bar{x}_a$ . On trouve la discrétisation initiale de l'exemple 1 sur la figure 4.4, ainsi que  $\bar{x}$  où \* signifie qu'on trouve la solution sur ce plateau.

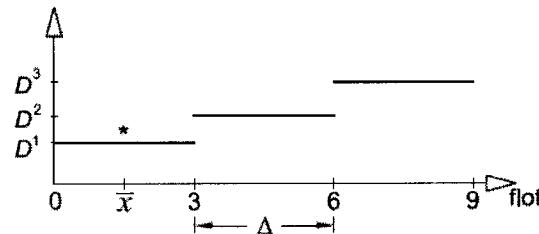


Figure 4.4 Discrétisation initiale pour l'exemple 1

Considérant qu'on compte 3 plateaux, on fixera alors le centre du deuxième plateau à  $\bar{x}_a = 1,5$  et donc,  $s^1 = \bar{x}_a - \Delta/2 = 1,5 - \Delta/2$  et  $s^2 = \bar{x}_a + \Delta/2 = 1,5 + \Delta/2$ . Il reste alors à définir  $s^0$  et  $s^3$  ou plutôt seulement  $\Delta$ , le deuxième paramètre définissant notre approche. Si on compte un nombre pair de plateaux de congestion, on s'arrange alors pour que le seuil central de la discrétisation soit égal à  $\bar{x}_a$ . Par exemple, si on avait 2 plateaux à définir à partir de la solution précé-

dente de l'exemple 1, on fixerait  $s^1 = \bar{x}_a$ . Cependant, comme on le verra à la section suivante, on déplacera la discréétisation si on obtient des seuils négatifs avec l'approche présentée ici.

#### 4.6.4 Longueur des plateaux de congestion, exemple 1

D'abord, on a une longueur de plateau (ou *pas*) initiale qui découle de la première discréétisation, notée  $\Delta_1$ . On notera le pas de chaque discréétisation  $j$ ,  $\Delta_j$ . On veut donc ici calculer  $\Delta_{j+1} = \Delta_j \cdot f$ , avec un certain facteur  $f$  inférieur à un. Comme dans nos modèles MIP,  $L$  désigne le nombre de plateaux de congestion. Il est évident que plus  $L$  est grand, plus on couvre une grande plage de flots, pour un  $\Delta$  donné. L'idée est d'explorer le plateau où se trouve la solution obtenue précédemment, pour chaque arc. Il faut donc diminuer le pas par un facteur de  $1/L$  ou supérieur à  $1/L$  à chaque discréétisation et ainsi on « couvre » au moins l'étendue du plateau en question ; il ne faut pas se tromper, on permet un flot compris entre  $s^0$  et  $s^L$  et l'étendue  $[s^0, s^L]$  couvre bien au moins le plateau d'intérêt, mais en réalité, on n'évalue la congestion qu'en  $L$  points. Illustrons notre approche de discréétisation adaptative pour un  $f$  supérieur à  $1/L$ , sur l'exemple 1, disons  $f = 0,4 > 1/3$ .

De la discréétisation initiale (section 4.6.2 et figure 4.4),  $s^0 = 0$ ,  $s^1 = 3$ ,  $s^2 = 6$  et  $s^3 = 9$  et  $\Delta_1 = 3$ . Dans cette même section 4.6.2, on obtient une solution avec un flot de 3 unités sur l'arc 1. On voit que le flot  $x_1$  se trouve sur le plateau 1 de la discréétisation initiale. Pour la résolution suivante, on veut couvrir au moins l'étendue du premier plateau qui va de  $s^0 = 0$  à  $s^1 = 3$ . On centre donc la nouvelle discréétisation autour du flot moyen  $\bar{x}_1 = (s^0 + s^1)/2 = 1,5$ , et on applique ensuite le nouveau pas  $\Delta_2 = \Delta_1 \cdot f = 3 \cdot 0,4 = 1,2$ . On obtient la discréétisation illustrée à la figure 4.5. Or, comme un flot négatif est impossible ( $s^0 = -0,3$ ) et qu'on désire un même pas sur tous les arcs, on déplacera la discréétisation vers la droite jusqu'à  $s^0 = 0$ , en conservant  $\Delta_2 = 1,2$ . On a alors la discréétisation de la figure 4.6, et on couvre un plus grand intervalle que celui du premier plateau initial  $[0,3]$ .

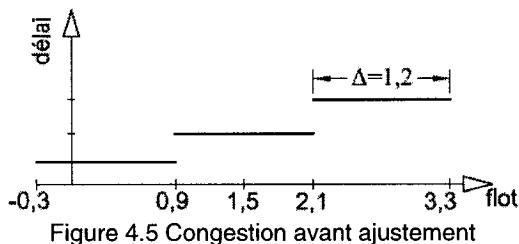


Figure 4.5 Congestion avant ajustement

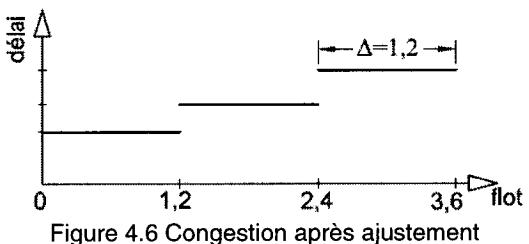


Figure 4.6 Congestion après ajustement

Comme on ne sait pas à l'avance où se trouve le flot à l'équilibre, on ne peut pas localiser la discrétisation initiale avec assurance. Pour l'exemple 1, si on choisit  $s^3 = 1$ , qu'on garde  $f = 0,4$  et qu'on diminue le pas à chaque discrétisation, on n'arrivera pas à couvrir le flot de 2,5 puisque les plateaux deviendront trop petits trop vite. Pour éviter ceci, on définira la discrétisation adaptative pour  $L \geq 3$  seulement et on gardera le pas presque constant ( $\Delta_{j+1} = \Delta_j \cdot f_2$ , avec  $1 > f_2 > f$ ,  $f_2 = 0,95$  par exemple) si on se trouve dans l'une des deux situations suivantes :

- 1) Sur au moins un arc, le flot à l'équilibre se situe dans le plateau  $L : z_{a,L} = 1$ , pour au moins un  $a \in A_r$ .
- 2) Sur au moins un arc, le flot à l'équilibre se situe dans le plateau 1 et le premier plateau ne contient pas le flot nul : il existe au moins un  $a \in A_r$  tel que  $z_{a,1} = 1$  et  $s_a^0 \neq 0$ .

Le facteur  $f_2$  ne sert qu'à éviter de cybler, c.-à-d. de passer d'une solution  $a$  à une solution  $b$  et inversement, indéfiniment, ce qui pourrait se produire avec  $f_2 = 1$ . Si on ne se trouve pas dans au moins l'une des deux situations précédentes, alors  $\Delta_{j+1} = \Delta_j \cdot f$ . On diminue significativement le pas seulement si, sur tous les arcs, le flot à l'équilibre ne se situe pas dans les plateaux aux extrémités de la discrétisation (1 (sauf si, voir la situation 2 précédente) et  $L$ ). On veut donc, en quelque sorte, que la solution soit équilibrée avant de raffiner davantage la discrétisation. Pour pouvoir évaluer si une solution est équilibrée on définit la méthode pour  $L \geq 3$ .

#### 4.6.5 Discrétisation adaptative, algorithme

On complète ici l'approche de discrétisation adaptative et on propose un algorithme de résolution. On veut évaluer, d'une étape à l'autre, de combien la solution varie. Ainsi on définit  $\delta T_a = (T_{a,j} - T_{a,j-1}) / T_{a,j-1}$ ,  $\forall a \in A_1$ , qui se trouve à être l'écart relatif de taxe sur l'arc  $a$ , entre les discrétisations  $j$  et  $j - 1$ .

Le deuxième critère qui nous intéresse est l'approximation sur les coûts perçus des chemins et donc sur la congestion. Si on a une fonction de congestion exponentielle, l'erreur maximale qu'on peut faire sur le coût d'un arc est celle sur le plateau où le flot est le plus grand, puisqu'on a un pas identique pour tous les plateaux, et vaut  $D_a \cdot (e^{\lambda s_a^L} - e^{\lambda(s_a^L - \Delta/2)})$ . La sous-estimation du délai relative à la valeur considérée dans le modèle (le flot moyen sur chaque plateau), notée  $\varphi_a$ , vaut

$$\varphi_a = \frac{D_a(s_a^L) - D_a(s_a^L - \Delta/2)}{D_a(s_a^L - \Delta/2)} = \frac{D_a \cdot e^{\lambda s_a^L} - D_a \cdot e^{\lambda(s_a^L - \Delta/2)}}{D_a \cdot e^{\lambda(s_a^L - \Delta/2)}} = \frac{e^{\lambda s_a^L} - e^{\lambda(s_a^L - \Delta/2)}}{e^{\lambda(s_a^L - \Delta/2)}}, \quad \forall a \in A_r. \quad (4.56)$$

Pour une congestion exponentielle avec une longueur de pas constante telle qu'utilisée ici (section 4.1),  $\varphi_a$  prend la même valeur peu importe le plateau considéré. Par exemple, si on remplace  $s_a^L$  par  $s_a^1$  dans l'équation précédente, on obtient un  $\varphi_a$  identique. On remarque que  $\varphi_a$  n'est pas défini pour le transport en commun puisque ce dernier n'est pas sujet à congestion (section 3.1.2).

Si la fonction de congestion est linéaire, alors c'est la sous-estimation en termes réels qui s'avère identique d'un plateau à l'autre et donc, l'erreur relative est maximale sur le premier plateau de congestion. On choisira alors,

$$\varphi_a = \frac{D_a(s_a^1) - D_a(s_a^1 - \Delta/2)}{D_a(s_a^1 - \Delta/2)}, \quad \forall a \in A_r. \quad (4.57)$$

On rappelle, au tableau 4.4, les éléments importants pour l'algorithme d'adaptation de la discréétisation de la congestion, qu'on énonce juste après.

Tableau 4.4 Notation pour la discréétisation adaptative (Dadapt)

$\Delta_j$	Longueur des plateaux de congestion pour la discréétisation $j$
$A_r$	Ensemble des arcs du réseau routier régulier (excluant le tr. en commun)
$f$	Facteur de diminution de la longueur des plateaux : $\Delta_{j+1} = \Delta_j \cdot f$ , si solution équilibrée
$f_2$	Si solution non équilibrée, $\Delta_{j+1} = \Delta_j \cdot f_2$
$z_{a,l}$	1 si $s^{l-1} \leq x_a \leq s^l$ , 0 sinon
$L$	Nombre de plateaux de congestion, $L \geq 3$
$\bar{x}_a$	Flot moyen sur le plateau $l$ où se trouve le flot $x_a$ , $\forall a \in A$
$\varphi_a$	Erreur relative dans l'évaluation du délai sur l'arc $a$ . Voir éq. (4.56) ou (4.57).
$\delta T_a$	$(T_{a,j} - T_{a,j-1}) / T_{a,j-1}$ : écart relatif de taxe sur l'arc $a$ , entre les discréétisations $j$ et $j-1$

### ALGORITHME Dadapt

Initialisation : fixer les critères d'arrêt  $\delta T^{\max}$  et  $\varphi^{\max}$ , choisir une première discréétisation avec  $L \geq 3$ , choisir  $f$  (par exemple  $1/L < f < 1$ ),  $f_2 (1 > f_2 > f, f_2 = 0,95$  par exemple), poser  $j = 1$ ;

Étape 1 : résoudre le MIP via CPLEX ou un autre logiciel de ce genre;

Étape 2 : pour  $j > 1$ , si  $\varphi = \max_a \varphi_a \leq \varphi^{\max}$  et  $\delta T = \max_a \delta T_a \leq \delta T^{\max}$  alors ARRÊT;

Étape 3 : si  $z_{a,L} = 1$ , pour au moins un  $a \in A_r$  ou  
 s'il existe au moins un  $a \in A_r$  tel que  $z_{a,1} = 1$  et  $s_a^0 \neq 0$ , alors  $\Delta_{j+1} = \Delta_j \cdot f_2$  ;  
 sinon,  $\Delta_{j+1} = \Delta_j \cdot f$ ;

Étape 4 : si  $L$  impair,  $s_a^{\lfloor L/2 \rfloor} = \bar{x}_a - \Delta_{j+1}/2$  et  $s_a^{\lfloor L/2 \rfloor + 1} = \bar{x}_a + \Delta_{j+1}/2$ ,  $\forall a \in A_r$  ;  
 si  $L$  pair,  $s_a^{\lfloor L/2 \rfloor} = \bar{x}_a, \forall a \in A_r$  ;  
 pour tout  $a \in A_r$ , calculer les seuils non encore définis tels que  
 $s_a^l = s_a^{l-1} + \Delta_{j+1}, \forall l \in [1, L]$  ;  
 pour tout  $a \in A_r$ , s'il existe au moins un  $l$  tel que  $s_a^l < 0$ , poser  $s_a^0 = 0$  puis  
 $s_a^l = s_a^{l-1} + \Delta_{j+1}, \forall l \in [1, L]$  ;

Étape 5 : remplacer  $j$  par  $j+1$  et retourner à l'étape 1.

Dans l'initialisation, on réitère que la méthode est définie pour  $L \geq 3$  (section 4.6.4). On propose aussi de choisir un  $f$  tel que  $1/L < f < 1$  puisqu'il est probablement préférable de ne pas diminuer le pas trop vite pour ne pas converger trop rapidement vers un optimum local qui pourrait bien ne pas être l'optimum global. On dit probablement puisqu'on n'apporte ici aucune preuve de convergence vers un optimum global. Les MIP sont définis aux sections 4.3 et 4.4. À l'étape 2, on vérifie les critères d'arrêt dès qu'on a résolu au moins deux discréétisations. À l'étape suivante, on détermine le pas pour la prochaine discréétisation qu'on va résoudre, comme dans la section précédente. À l'étape 4, on fixe la position des seuils de congestion de façon à ce qu'aucun seuil ne soit négatif. Finalement, on met à jour la numérotation des discréétisations,  $j$ , et on retourne à l'étape 1 où on résout le MIP avec la discréétisation qu'on vient de définir.

# CHAPITRE 5

## RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Nous présentons dans ce chapitre des résultats numériques permettant d'évaluer de façon quantitative plusieurs aspects des modèles et de l'algorithme qu'on propose. On présente d'abord le plan d'expérience ainsi que les dix problèmes ayant servi aux tests (section 5.1). À la section 5.2, on conclut que les modèles PDIFM et PIDM sont les plus rapides à solutionner. Connaissant les meilleurs modèles, à la section 5.3, on évalue l'influence de certains paramètres sur leurs temps de résolution. Dans la section 5.4, on observe les performances de l'algorithme Dadapt et on évalue la qualité des solutions obtenues avec ce dernier.

### 5.1 Plan d'expérience

Pour réaliser les diverses évaluations désirées, on a généré dix problèmes ( $a$  à  $j$ ), sur le réseau 1 déjà présenté au chapitre 2 et illustré sur la figure 5.1. Ces dix problèmes comptent cinq commodités dont toutes les origines sont à l'extérieur du cordon de péage et toutes les destinations sont à l'intérieur du cordon ; pour chaque problème, on a choisi aléatoirement cinq commodités parmi celles présentant ces caractéristiques. La densité du paramètre  $\alpha$  est triangulaire sur l'intervalle de 0 à 10 et discrétisée (section 3.1.3). Selon les problèmes, on compte entre 3 et 5 classes d'usagers et la congestion est définie sur 4 à 9 plateaux (section 3.1.4). Les paramètres des problèmes ont été réglés de façon à ce qu'on n'obtienne pas d'arcs taxables ouverts et gratuits, avec la discréttisation initiale. On peut consulter l'annexe I pour connaître en détail les données des dix problèmes.

Le réseau 1 (figure 5.1) compte quatre arcs taxables (2, 4, 6, 8). Lorsqu'on résout les dix problèmes pour trois péages permis ou moins, on force la fermeture d'au moins un arc taxable et l'utilisation des variables  $y_a$  qui constituent une particularité de notre modélisation. On a utilisé le logiciel CPLEX 10.0 sur un ordinateur Sun muni d'un processeur AMD Opteron 285 cadencé à 2,6 GHz. Dans CPLEX, on a gardé les paramètres par défaut, soit  $MIP gap = 1e-4$  et  $integrality tolerance = 1e-5$ .

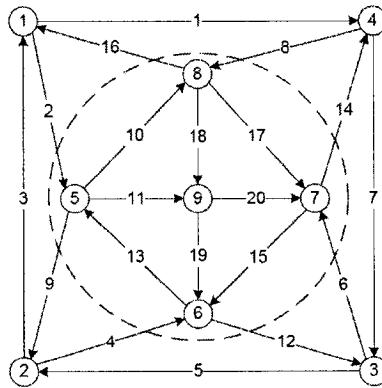


Figure 5.1 Réseau 1 (Zhang et Yang 2004)

Dans la prochaine section, on détermine lesquels des quatre modèles MIP sont les plus rapides à résoudre, pour chacun des deux types de péage. Pour ce faire, on résout avec les valeurs des constantes  $M$  calculées à la section 4.5. Dans un deuxième temps, on quantifie l'avantage d'utiliser ces valeurs calculées en comparant avec les performances avec des valeurs beaucoup plus grandes

À la section 5.3, on évalue l'influence du nombre de classes d'usagers ( $n$ ) et du nombre de plateaux de congestion ( $L$ ) sur les temps de résolution. Pour les sections 5.2 et 5.3, on utilise les problèmes tels que définis dans la présente section, c.-à-d. avec une discréétisation initiale donnée.

Dans la dernière section, on s'intéresse surtout à la qualité des solutions obtenues à l'aide de l'algorithme Dadapt. On résout d'abord l'exemple 1 (section 4.6) avec deux discréétisations initiales différentes. On résout ensuite nos dix problèmes avec deux discréétisations différentes,  $L = 3$  et  $L = 13$ . On analyse ensuite la qualité de ces solutions, entre autres en utilisant l'algorithme classique de Frank-Wolfe (section 3.4).

## 5.2 Meilleur modèle selon le type de péage

On veut déterminer, pour chaque type de péage, quel modèle (avec taxes imaginaires  $T'_1$ , PDIFT et PIDT, ou avec  $M_1^{p,i}$ , PDIFM et PIDM) se résout le plus rapidement. Comme on veut aussi vérifier les gains réalisés avec les valeurs calculées de  $M_1^{p,i}$  et  $M_2^{p,i}$ , on a résolu en utilisant les valeurs correspondant aux bornes calculées à la section 4.5, puis avec des valeurs arbitraires

et élevées, qu'on aurait très bien pu choisir à l'œil, en étant quand même assez audacieux. Notons

$$M_1^{\max} = \max_p \{ \max_i M_1^{p,i} \} \text{ et } M_2^{\max} = \max_p \{ \max_i M_2^{p,i} \}, \text{ on fixe alors}$$

$$M_1^{p,i} = 10M_1^{\max}, \forall p \in P, \forall i \in [1, n] \text{ et } M_2^{p,i} = 10M_2^{\max}, \forall p \in P, \forall i \in [1, n], \quad (5.1)$$

comme valeurs arbitraires.

### 5.2.1 Péages différents

On a résolu les dix problèmes avec les deux modèles pour péages différents permis et on a noté les temps de résolution (en secondes) dans le tableau 5.1. On a calculé l'écart entre la somme des temps de résolution des modèles PDIFT (noté  $T_a$  dans les tableaux) et PDIFM (noté  $M_2$  dans les tableaux) par rapport au temps pour ce dernier modèle. Dans le tableau 5.2, on compare les deux choix de grands  $M$ . Au tableau 5.1 d'abord, on constate qu'il existe une assez grande dispersion dans les temps de résolution, pour un même nombre de péages permis. C'est dû au fait qu'on a généré les problèmes de façon à ce que la congestion existe et qu'on obtienne des taxes non nulles sur les arcs taxables ouverts. Ainsi, lorsqu'on a atteint ce but, on a accepté le problème tel quel car il est difficile de générer des problèmes où la congestion est problématique et dont le temps de résolution est très proche l'un de l'autre. Néanmoins, si on compare la somme des temps de résolution pour les dix problèmes, alors c'est significatif. On constate que le temps de résolution diminue beaucoup suivant le nombre de péage. Avec des  $M$  petits, pour un à trois péages permis, le modèle avec  $M_2^{p,i}$  (PDIFM) est bien meilleur (entre 19 % et 35 %) que celui avec des taxes imaginaires (PDIFT), et ce pour dix-neuf des trente résolutions. Ce n'est pas le cas (- 28 %) si on permet d'ouvrir tous les arcs taxables, mais ceci ne correspond pas à l'une des fonctions importantes de nos modèles, soit de permettre de limiter le nombre d'arcs taxables ouverts. Sur les quarante résolutions avec des  $M$  petits, vingt-trois sont obtenues plus rapidement avec PDIFM qu'avec PDIFT. Donc, en général, et particulièrement dans un contexte réaliste (où  $n_{\max} < |A_1|$ ), et en utilisant les petits  $M$ , PDIFM se résout plus rapidement que PDIFT.

Toujours au tableau 5.1, on constate qu'en utilisant des valeurs arbitraires pour  $M_2^{p,i}$ , le modèle PDIFM perd quelque peu de son avance sur PDIFT. Le tableau 5.2 sert à la comparaison.

Tableau 5.1 Temps de résolution selon les valeurs des grands  $M$ , pour PDIFT et PDIFM

Problème	M petits								Marbitraires							
	4 péages permis		3 péages permis		2 péages permis		1 péage permis		4 péages permis		3 péages permis		2 péages permis		1 péage permis	
	$T_a'$	$M_2$	$T_a'$	$M_2$	$T_a'$	$M_2$	$T_a'$	$M_2$	$T_a'$	$M_2$	$T_a'$	$M_2$	$T_a'$	$M_2$	$T_a'$	$M_2$
a	139,34	88,57	21,56	11,28	1,93	1,36	0,75	0,54	490,55	330,87	23,62	25,96	4,77	3,89	0,96	0,87
b	33,37	48,35	17,39	12,83	10,43	7,13	0,68	0,35	141,20	41,08	120,82	50,46	27,45	13,26	0,52	0,54
c	957,97	307,57	19,49	11,27	1,38	1,89	0,30	0,36	8310,6	4019,0	50,62	38,97	1,40	2,21	0,30	0,36
d	68,10	59,42	24,31	17,76	0,61	0,68	0,64	0,51	484,25	714,47	163,10	77,26	0,79	1,31	0,43	0,49
e	14,73	11,17	16,88	7,69	0,95	1,18	0,34	0,19	65,57	52,68	69,48	27,94	0,95	0,90	0,20	0,41
f	658,15	3849,9	18,75	7,70	2,82	1,14	0,49	0,46	4545,9	4642,9	20,66	45,00	1,55	2,08	0,51	0,78
g	225,69	277,78	53,86	59,99	2,47	2,53	1,50	1,03	896,74	3110,5	508,64	590,83	4,88	4,89	1,31	1,31
h	27,28	40,79	5,44	4,30	2,63	2,88	1,04	0,52	38,32	86,23	5,82	8,51	3,11	2,83	0,38	0,56
i	37,48	64,24	5,21	6,63	0,89	1,47	0,50	0,46	134,36	23,69	32,26	8,41	0,87	1,76	0,43	0,55
j	2730,3	2014,5	7,65	20,87	3,87	1,88	0,46	0,53	6415,5	9521,5	20,25	32,70	2,99	6,42	0,45	0,41
min	14,73	11,17	5,21	4,3	0,61	0,68	0,30	0,19	38,32	23,69	5,82	8,41	0,79	0,90	0,20	0,36
max	2730,3	3849,9	53,86	59,99	10,43	7,13	1,50	1,03	8310,6	9521,5	508,64	590,83	27,45	13,26	1,31	1,31
somme	4892,4	6762,3	190,5	160,3	28,0	22,1	6,7	5,0	21523	22543	1015,3	906,0	48,8	39,6	5,5	6,3
moyenne	489,24	676,23	19,05	16,03	2,80	2,21	0,67	0,50	2152,3	2254,3	101,53	90,60	4,88	3,96	0,55	0,63
écart-type	849,20	1269,2	13,98	16,26	2,87	1,85	0,36	0,22	3089,2	3124,4	151,55	176,92	8,08	3,69	0,33	0,29
Écarts:	-28 %	---	19 %	---	26 %	---	35 %	---	-5 %	---	12 %	---	23 %	---	-13 %	---

Tableau 5.2 Comparaison des temps de résolution selon les grands  $M$ , pour PDIFT et PDIFM

	4 péages permis	3 péages permis	2 péages permis	1 péage permis		
$T_a'$	$M_2$	$T_a'$	$M_2$	$T_a'$	$M_2$	
M petits	4892,4	6762,3	190,5	160,3	28,0	22,1
Marbitraires	21523	22543	1015,3	906,0	48,8	39,6
Marb./ M petits	4,40	3,33	5,33	5,65	1,74	1,79
					0,82	1,27

Au tableau 5.2, on reprend la somme des temps de résolution pour les deux choix de grands  $M$  présentés précédemment. Plus il y a de péages permis, plus il s'avère avantageux d'utiliser les valeurs optimales calculées pour  $M_1^{p,i}$  et  $M_2^{p,i}$  (section 4.5). Bref, pour des péages différents, le meilleur modèle est PDIFM avec les constantes  $M$  telles que calculées à la section 4.5.

Notons qu'il est possible de diminuer le temps de résolution significativement en modifiant les paramètres *MIP gap* et *integrality tolerance*. Sur les dix problèmes, avec quatre péages permis et le petits  $M$ , avec diverses combinaisons (*int. tol.* = [1e-2, 1e-5] et *MIP gap* = [1e-1, 1e-2]), les temps de résolution sont diminués de 29,7 % à 91,7 %. Pour plusieurs problèmes, on obtient sensiblement le même temps de résolution avec divers *MIP gap* pour un même *int. tol.*.

## 5.2.2 Péages identiques

Maintenant, on reprend le même exercice de comparaison, mais pour les modèles PIDT et PIDM (section 4.4) et on présente les résultats dans les tableaux 5.3 et 5.4.

D'abord, pour le problème *f* avec des valeurs arbitraires pour les constantes  $M$  (PIDM) et 4 péages permis, après plus de 16000 secondes, il existait toujours un écart de plus de 32 % entre

les bornes inférieure et supérieure (CPLEX) et l'arbre de « branch & cut » faisait plus de 900 Mo. C'est pourquoi on a inscrit « inf » dans le tableau 5.3 et on n'a pas tenu compte des résultats, pour quatre péages permis, pour le problème  $f$ (ni  $M$  petits ni  $M$  arbitraires). Pour des péages identiques à tous les points, il s'avère plus difficile de déterminer le meilleur modèle ; au tableau 5.3, avec des  $M$  petits, on constate que PIDT performe mieux pour deux péages permis alors que PIDM est le meilleur pour trois et un péage(s) permis. Toujours dans ce cas, PIDM et PIDT performent aussi bien l'un que l'autre pour quatre péages permis, et sont chacun le meilleur pour vingt résolutions sur quarante.

Tableau 5.3 Temps de résolution selon les valeurs des grands  $M$ , pour PIDT et PIDM

Problème	M petits								M arbitraires							
	4 péages permis		3 péages permis		2 péages permis		1 péage permis		4 péages permis		3 péages permis		2 péages permis		1 péage permis	
	$T_a'$	$M_2$	$T_a'$	$M_2$	$T_a'$	$M_2$	$T_a'$	$M_2$	$T_a'$	$M_2$	$T_a'$	$M_2$	$T_a'$	$M_2$	$T_a'$	$M_2$
A	58,65	35,19	21,21	22,65	2,56	2,53	0,59	0,55	302,84	88,60	60,09	26,25	5,83	4,76	0,45	0,55
B	282,06	124,79	46,54	85,46	11,74	13,39	0,57	0,53	292,83	106,04	84,44	49,17	18,45	20,34	0,51	0,59
C	132,01	193,14	22,43	20,96	2,40	2,39	0,28	0,26	798,82	810,06	45,05	68,35	3,26	2,52	0,24	0,29
D	72,80	76,42	37,21	27,13	1,51	1,50	0,42	0,46	569,82	504,26	62,19	71,78	1,20	1,37	0,52	0,41
E	146,89	276,68	24,45	34,96	1,12	1,01	0,24	0,34	97,60	488,80	19,94	70,65	1,42	2,15	0,21	0,32
F	2753,3	2823,4	198,47	62,74	3,89	14,04	0,75	0,71	inf	inf	121,54	355,52	4,78	10,07	0,56	0,71
G	45,93	48,30	60,66	43,42	7,51	7,78	0,96	0,70	65,58	127,8	117,73	105,02	16,16	8,45	0,73	0,67
H	236,03	127,65	81,30	35,39	4,79	10,16	0,54	0,42	88,93	212,23	80,99	147,85	5,65	6,91	0,49	0,40
I	115,06	123,54	6,84	7,00	7,15	2,90	0,42	0,49	100,03	105,00	60,38	20,56	5,51	9,15	0,37	0,45
J	215,83	298,84	35,32	42,53	4,47	4,84	0,46	0,45	2136,8	276,81	51,68	37,27	2,82	3,76	0,38	0,39
Min	45,93	35,19	6,84	7,00	1,12	1,01	0,24	0,26	65,58	88,6	19,94	20,56	1,20	1,37	0,21	0,29
Max	282,06	298,84	198,47	85,46	11,74	14,04	0,96	0,71	2136,8	810,06	121,54	355,52	18,45	20,34	0,73	0,71
Somme*	1305,3	1304,6	534,4	382,2	47,1	60,5	5,2	4,9	4453,3	2719,6	704,0	952,4	65,1	69,5	4,5	4,8
moyenne	145,03	144,95	53,44	38,22	4,71	6,05	0,52	0,49	494,8	302,2	70,40	95,24	6,51	6,95	0,45	0,48
écart-type	83,40	93,95	55,29	22,45	3,28	4,95	0,21	0,14	664,7	248,9	31,58	99,05	5,96	5,63	0,15	0,14
Écarts:	0 %	---	40 %	---	-22 %	---	7 %	---	64 %	---	-26 %	---	-6 %	---	-7 %	---

Tableau 5.4 Comparaison des temps de résolution selon les grands  $M$ , pour PIDT et PIDM

	4 péages permis	3 péages permis	2 péages permis	1 péage permis		
$T_a'$	$M_2$	$T_a'$	$M_2$	$T_a'$	$M_2$	
$M$ petits	1305,3	1304,6	534,4	382,2	47,1	60,5
Marbitraires	4453,3	2719,6	704,0	952,4	65,1	69,5
$M$ arb./ $M$ petits	3,41	2,08	1,32	2,49	1,38	1,15
					0,85	0,97

Au tableau 5.4, on voit que l'avantage d'utiliser les valeurs optimales pour les grands  $M$  est moindre que pour des péages différents (tableau 5.2), mais tout de même non négligeable. Les temps de résolution sont faibles si on ne permet qu'un seul péage puisque ça implique qu'une majorité de chemins sont fermés, selon l'arc taxable qu'on ouvre. Or, fermer un chemin entraîne la fixation de la valeur de plusieurs variables binaires : 1)  $y_a$  pour tous les arcs taxables, 2)  $z_{a,l}$  pour tous les arcs faisant partie de chemins fermés, 3)  $y_{p,i} = 1$  pour tous les chemins fermés.

Puisque les deux modèles présentent sensiblement les mêmes performances, on optera pour PIDM, soit l'utilisation des  $M$  petits, comme pour le cas avec péages différents permis.

On a déterminé les meilleurs modèles pour chaque type de péage et on apporte ici une observation quant à la différence de congestion selon le type de péage. Sans surprise, le fait d'exiger un tarif identique à tous les points de péage (PIDM, section 4.4) ajoute une contrainte qui, comme on le constate au tableau 5.5, mène à une congestion supérieure à celle obtenue en permettant des péages différents (PDIFM, section 4.3).

Tableau 5.5 Congestion selon le type de péage

Problème	3 péages permis		2 péages permis		1 péage permis	
	PDIFM	PIDM	PDIFM	PIDM	PDIFM	PIDM
a	1011,37	1041,08	1078,21	1094,50	1165,59	1165,59
b	775,00	876,35	916,35	963,66	1089,86	1089,86
c	1135,67	1198,20	1236,79	1271,25	1361,80	1361,80
d	837,02	924,93	939,87	959,16	1140,17	1140,17
e	606,39	627,97	642,15	648,31	720,02	720,02
f	686,29	719,30	766,00	783,89	897,88	897,88
g	1204,01	1263,32	1303,85	1370,71	1469,98	1469,98
h	579,62	604,57	623,59	634,09	697,35	697,35
i	530,24	543,50	589,45	619,53	776,66	776,66
j	653,98	719,89	748,04	789,20	966,15	966,15
min	530,24	543,50	589,45	619,53	697,35	697,35
max	1204,0	1263,3	1303,9	1370,7	1470,0	1470,0
somme	8019,6	8519,1	8844,3	9134,3	10285,5	10285,5
moyenne	801,96	851,91	884,43	913,43	1028,55	1028,55
écart-type	239,35	252,18	255,62	266,97	264,62	264,62
Écarts:	---	6,2 %	---	3,3 %	---	0,0 %

## 5.3 Sensibilité des modèles PDIFM et PIDM

On veut ici évaluer l'influence de deux paramètres sur les temps de résolution des modèles retenus comme les meilleurs pour chacun des deux types de péage.

### 5.3.1 Nombre de classes d'usagers et de plateaux de congestion

Dans cette section, on juge de l'influence du nombre de classes d'usagers ( $n$ ) et du nombre de plateaux de congestion ( $L$ ) sur les temps de résolution des dix problèmes. Pour  $L$ , on reprend les temps de résolution des problèmes originaux ( $L$  orig.) avec les petites valeurs pour les diverses constantes  $M$  (section 4.5), pour trois, deux et un péage(s) permis, et on compare au temps nécessaire pour  $L + 1$ . On s'y prend de la même façon pour  $n$ . Les résultats pour des péages différents permis (modèle PDIFM) se trouvent au tableau 5.6. On effectue la même évaluation pour des péages identiques (PIDM) et on présente les résultats au tableau 5.7. On n'a

pas effectué les calculs pour quatre péages permis puisque pour trois, les temps de calcul explosent déjà et donnent une bonne idée de la grande complexité du problème.

Pour le modèle PDIFM (tableau 5.6), on remarque une hausse fulgurante des temps de résolution avec l'augmentation d'une seule unité de la valeur originale de  $L$ . Pour une même modification apportée à  $n$ , la hausse est inférieure, mais néanmoins élevée. On rappelle que pour les dix problèmes originaux,  $n$  varie de 3 à 5 alors que  $L$  varie de 4 à 9 (annexe I), ce qui implique que l'écart relatif sur  $n$  et  $L$  n'est pas le même pour tous les problèmes.

Tableau 5.6 Influence de  $n$  et  $L$  sur le temps de résolution pour PDIFM

Problème	Nombre de plateaux de congestion ( $L$ )				Nombre de classes d'usagers ( $n$ )			
	3 péages permis $L$ orig. $L + 1$	2 péages permis $L$ orig. $L + 1$	1 péage permis $L$ orig. $L + 1$	3 péages permis $n$ orig. $n + 1$	2 péages permis $n$ orig. $n + 1$	1 péage permis $n$ orig. $n + 1$		
a	21,56	31,91	1,93	12,24	0,75	1,25	21,56	48,61
b	17,39	7,17	10,43	5,66	0,68	0,98	17,39	69,11
c	19,49	13,10	1,38	1,70	0,30	0,33	19,49	79,66
d	24,31	241,03	0,61	1,42	0,64	0,51	24,31	67,02
e	16,88	24,00	0,95	0,69	0,34	0,29	16,88	18,98
f	18,75	3,75	2,82	1,23	0,49	0,74	18,75	78,84
g	53,86	1476,26	2,47	13,32	1,50	1,97	53,86	189,14
h	5,44	3,21	2,63	0,75	1,04	0,50	5,44	17,93
i	5,21	7,47	0,89	1,23	0,50	1,02	5,21	123,07
j	7,65	128,14	3,87	9,57	0,46	0,72	7,65	15,27
min	5,21	3,21	0,61	0,69	0,30	0,29	5,21	15,27
max	53,86	1476,26	10,43	13,32	1,50	1,97	53,86	189,14
somme	190,5	1936,0	28,0	47,8	6,7	8,3	190,5	707,6
moyenne	19,05	193,60	2,80	4,78	0,67	0,83	19,05	70,76
écart-type	13,98	457,16	2,87	5,07	0,36	0,51	13,98	53,70
Écarts:	---	916 %	---	71 %	---	24 %	---	271 %
							---	34 %
							---	24 %

Maintenant, si on augmente simultanément d'une unité le nombre de plateaux de congestion et le nombre de classes d'usagers, on obtient les temps de résolution du tableau 5.8. On compare ces temps (modif.) aux temps de résolutions des problèmes originaux (orig.).

On remarque des écarts plus importants en augmentant  $n$  et  $L$  d'une unité chacun (tableau 5.8) qu'en n'augmentant qu'un seul des deux paramètres à la fois (tableaux 5.6 et 5.7).

Tableau 5.7 Influence de  $n$  et  $L$  sur le temps de résolution pour PIDM

Problème	Nombre de plateaux de congestion ( $L$ )					Nombre de classes d'usagers ( $n$ )				
	3 péages permis $L_{\text{orig.}}$	2 péages permis $L_{\text{orig.}}$	1 péage permis $L_{\text{orig.}}$	3 péages permis $n_{\text{orig.}}$	2 péages permis $n_{\text{orig.}}$	1 péage permis $n_{\text{orig.}}$	3 péages permis $n+1$	2 péages permis $n+1$	1 péage permis $n+1$	
a	22,65	92,08	2,53	7,32	0,55	1,12	22,65	64,52	2,53	2,95
b	85,46	35,99	13,39	46,03	0,53	1,47	85,46	19,99	13,39	19,77
c	20,96	163,47	2,39	4,41	0,26	0,31	20,96	68,49	2,39	12,79
d	27,13	121,26	1,50	2,50	0,46	0,60	27,13	31,74	1,50	3,72
e	34,96	9,51	1,01	0,70	0,34	0,22	34,96	195,98	1,01	0,94
f	62,74	4,68	14,04	3,77	0,71	0,63	62,74	108,10	14,04	14,98
g	43,42	423,15	7,78	19,16	0,70	1,73	43,42	87,85	7,78	7,04
h	35,39	96,10	10,16	1,64	0,42	0,44	35,39	251,76	10,16	3,64
i	7,00	362,55	2,90	2,33	0,49	0,69	7,00	65,50	2,90	9,03
j	42,53	87,21	4,84	21,03	0,45	0,67	42,53	42,26	4,84	2,98
min	7,00	4,68	1,01	0,70	0,26	0,22	7,00	19,99	1,01	0,94
max	85,46	423,15	14,04	46,03	0,71	1,73	85,46	251,76	14,04	19,77
somme	382,2	1396,0	60,5	108,9	4,9	7,9	382,2	936,2	60,5	77,8
moyenne	38,22	139,60	6,05	10,89	0,49	0,79	38,22	93,62	6,05	7,78
écart-type	22,45	142,89	4,95	14,32	0,14	0,50	22,45	74,45	4,95	6,23
Écart:	---	265 %	---	80 %	---	60 %	---	145 %	---	29 %
	---		---		---		---		---	57 %

Tableau 5.8 Influence combinée de  $n$  et  $L$  sur le temps de résolution pour PDIFM et PIDM

## 5.4 Discréétisation adaptative

On va maintenant évaluer la méthode de résolution par discréétisation adaptative (algorithme Dadapt) sur l'exemple 1, puis sur les dix problèmes, et enfin en utilisant l'algorithme de Frank-Wolfe à partir des solutions provenant de l'algorithme Dadapt.

### 5.4.1 Exemple 1

On applique ici l'algorithme Dadapt (section 4.6.5) sur l'exemple 1, résolu de façon exacte à la section 4.6.1, avec la discréttisation initiale utilisée à la section 4.6.2. On trouve les résultats pour douze discréttisations au tableau 5.9. Comme la demande totale est de dix unités, le choix de

poser  $s_1^L = 9$  pour la première discréétisation semble raisonnable. Dans un deuxième temps, on lance l'algorithme Dadapt sur l'exemple 1 avec une discréétisation initiale douteuse, soit  $s_1^L = 1$ , ce qui suppose qu'on s'attend à un flot maximal d'une seule unité sur l'arc 1 ( $x_1$ ) et à un flot de neuf unités sur le chemin de transport en commun ( $x_2$ ). On peut lire les résultats obtenus pour douze discréétisations au tableau 5.10. Dans les deux cas,  $f = 0,4$  et  $f_2 = 1$  (ce qui n'est pas conseillé mais fonctionne quand même ici, voir la section 4.6.4).

Au tableau 5.9, si on s'arrête avec les critères  $\varphi^{\max} = 0,03$  et  $\delta T^{\max} = 0,01$ , ça correspond à la 6<sup>e</sup> discréétisation. On y lit une solution ( $T_1 = 1,056$ , objectif = 274,032,  $x_1 = 2,568$ ) très proche de la solution exacte ( $T_1 = 1$ , objectif = 275,  $x_1 = 2,5$ ). Après 12 itérations, on observe un pas très petit et la solution correspond clairement à la solution exacte. On constate que le pas ne demeure jamais constant ( $f_2 = 1$ ) pendant plus de deux itérations.

Tableau 5.9 Discréétisation initiale 1, exemple 1

#Disc.	pas	$\varphi$	$\delta T$	objectif	$T_1$	$x_1$	$x_2$	$s^0$	$s^1$	$s^2$	$s^3$
1	3,0000	Inf	Inf	258,000	3,0000	3,0000	7,0000	<b>0,0000</b>	<b>3,0000</b>	<b>6,0000</b>	<b>9,0000</b>
2	1,2000	0,19355	0,20000	258,000	2,4000	2,4000	7,6000	0,0000	1,2000	2,4000	3,6000
3	0,4800	0,06283	0,40000	269,280	1,4400	2,5200	7,4800	1,0800	1,5600	2,0400	2,5200
4	0,4800	0,05581	0,00000	272,582	1,4400	2,5200	7,4800	1,5600	2,0400	2,5200	3,0000
5	0,1920	0,02092	0,26667	272,582	1,0560	2,5680	7,4320	1,9920	2,1840	2,3760	2,5680
6	0,1920	0,02008	0,00000	274,032	1,0560	2,5680	7,4320	2,1840	2,3760	2,5680	2,7600
7	0,0768	0,00784	0,00000	274,032	1,0560	2,5104	7,4896	2,3568	2,4336	2,5104	2,5872
8	0,0308	0,00311	0,05819	274,615	0,9946	2,5181	7,4819	2,4259	2,4566	2,4874	2,5181
9	0,0307	0,00309	0,00005	274,846	0,9945	2,5181	7,4819	2,4567	2,4874	2,5181	2,5488
10	0,0123	0,00123	0,00000	274,847	0,9945	2,5089	7,4911	2,4843	2,4966	2,5089	2,5212
11	0,0049	0,00049	0,00990	274,939	1,0044	2,5003	7,4997	2,4954	2,5003	2,5052	2,5101
12	0,0049	0,00049	0,00005	274,975	1,0043	2,5003	7,4997	2,4905	2,4954	2,5003	2,5052

Tableau 5.10 Discréétisation initiale 2, exemple 1

#Disc.	pas	$\varphi$	$\delta T$	objectif	$T_1$	$x_1$	$x_2$	$s^0$	$s^1$	$s^2$	$s^3$
1	0,3333	Inf	Inf	283,333	4,3334	1,0000	9,0000	<b>0,0000</b>	<b>0,3333</b>	<b>0,6667</b>	<b>1,0000</b>
2	0,3333	0,05555	0,15384	283,333	3,6667	1,3333	8,6667	0,3334	0,6667	1,0000	1,3333
3	0,3333	0,04999	0,18180	279,556	3,0001	1,6666	8,3334	0,6667	1,0000	1,3333	1,6666
4	0,3333	0,04545	0,22219	276,667	2,3335	1,9999	8,0001	1,0000	1,3333	1,6666	1,9999
5	0,3333	0,04166	0,28567	274,667	1,6669	2,332	7,6668	1,3333	1,6666	1,9999	2,3332
6	0,3333	0,03846	0,39990	273,556	1,0003	2,6665	7,3335	1,6666	1,9999	2,3332	2,6665
7	0,3333	0,03571	0,00000	273,333	1,0003	2,6665	7,3335	1,9999	2,3332	2,6665	2,9998
8	0,1333	0,01370	0,00000	273,333	1,0003	2,5665	7,4335	2,2999	2,4332	2,5665	2,6998
9	0,0533	0,00539	0,00000	274,333	1,0003	2,5265	7,4735	2,4199	2,4732	2,5265	2,5798
10	0,0213	0,00214	0,00000	274,733	1,0003	2,5105	7,4895	2,4679	2,4892	2,5105	2,5318
11	0,0085	0,00085	0,01704	274,893	1,0174	2,4956	7,5044	2,4871	2,4956	2,5041	2,5126
12	0,0085	0,00085	0,01676	274,957	1,0003	2,5041	7,4959	2,4786	2,4871	2,4956	2,5041

Avec la discréétisation initiale 2 (tableau 5.10), puisque celle-ci se trouve loin du flot de 2,5 unités qui correspond à la solution exacte, on obtient  $x_1$  sur le plateau  $L$  pour  $j = 1$  à 6 et, vu les conditions de l'étape 4 de l'algorithme Dadapt, le pas demeure constant ( $f_2 = 1$ ) jusqu'à  $j = 7$ .

Alors,  $x_1$  se retrouve sur le plateau 2 et on diminue le pas. Ici aussi, malgré une discréétisation initiale douteuse, on converge vers la solution exacte.

### 5.4.2 Deux discréétisations différentes

Une autre façon de vérifier si l'algorithme Dadapt (section 4.6.5) donne des résultats satisfaisants est de comparer les solutions obtenues avec une discréétisation comptant trois plateaux de congestion et les solutions obtenues avec une discréétisation plus fine (plus de plateaux), sur les dix problèmes. On a choisi treize plateaux pour la discréétisation initiale fine afin de vérifier l'influence possible de ce paramètre, et des facteurs de diminution du pas,  $f = 0,7$  et  $f_2 = 0,95$ . Au tableau 5.11, on présente les résultats pour les critères d'arrêt de l'algorithme  $\varphi^{\max} = 0,03$  et  $\delta T^{\max} = 0,01$  alors qu'au tableau 5.12 se trouvent les résultats pour  $\varphi^{\max} = 0,005$  et  $\delta T^{\max} = 0,01$ . Il n'y a qu'un péage permis et on n'identifie pas l'arc sur lequel on obtient une taxe positive puisque ça n'a aucune importance pour l'analyse. Le terme  $j$  représente le nombre de discréétisations effectuées dans l'algorithme Dadapt et  $L$ , le nombre de plateaux de congestion. Les trois dernières colonnes des tableaux 5.11 et 5.12 sont réservées aux résultats obtenus en utilisant l'algorithme de Frank-Wolfe et on en fera l'analyse dans la section suivante.

On s'intéresse d'abord aux résultats du tableau 5.11. Pour la majorité des problèmes, il existe un écart considérable entre les temps de résolution pour les deux discréétisations ( $L$ ). On observe un écart de taxe important (au moins 0,10) pour cinq problèmes sur dix. De plus, l'écart sur l'objectif est aussi important pour plusieurs problèmes, ce qui indique une certaine différence entre les flots à l'équilibre pour les deux discréétisations ( $L$ ). Il semble donc que  $\varphi^{\max} = 0,03$  (erreur d'estimation de la congestion, section 4.6.5) est trop grand pour espérer une solution de qualité. Pour le problème  $g$ , on obtient un écart de taxes important (0,26), mais les flots à l'équilibre sont presque identiques pour les deux discréétisations initiales ; sur onze arcs utilisés, les flots de huit arcs sont identiques alors qu'on observe une différence de 0,02 unités sur les trois autres. De toute évidence, on tend vers les mêmes flots d'équilibre dans les deux cas (voir aussi l'objectif), mais il existe encore un grand écart de taxe. On trouve l'évolution des flots (arrondis pour la présentation) au tableau 5.13. Si on poursuit l'algorithme jusqu'à des discréétisations plus fines ( $\varphi^{\max} = 0,05$ , au tableau 5.12), on obtient alors deux solutions pratiquement identiques et une taxe beaucoup plus grande que celle obtenue au tableau 5.11.

Tableau 5.11 Deux discrétisations différentes ( $L$ ),  $\varphi^{\max} = 0,03$  et  $\delta T^{\max} = 0,01$ 

Pb.	$j$	$L$	$\varphi$	$\delta T$	Objectif	Écart obj.	$T$	Écart $T$	Temps (s)	Obj. init. F.-W.	Obj. F.-W.	Temps (s)
a	15 3	3 13	0,0212 0,0212	0,0000 0,0073	1176,1 1175,1	0,09 %	2,5784 2,5858	-0,01	1,11 89,50	1178,1 1178,0	1178,1 1178,0	0,87 0,29
b	14 7	3 13	0,0214 0,0051	0,0000 0,0093	1114,0 1115,1	-0,10 %	2,0032 1,7264	0,28	0,73 47,85	1116,3 1116,0	1116,3 1116,0	0,73 0,15
c	12 8	3 13	0,0250 0,0042	0,0000 0,0077	1392,9 1395,3	-0,18 %	2,9073 2,4719	0,44	0,65 14,65	1396,7 1396,7	1396,7 1396,7	0,69 0,13
d	10 6	3 13	0,0194 0,0032	0,0000 0,0087	1157,9 1160,5	-0,22 %	2,5958 2,5888	0,01	0,28 13,57	1161,5 1161,4	1161,5 1161,4	0,88 0,26
e	9 4	3 13	0,0262 0,0183	0,0002 0,0000	734,1 734,2	-0,01 %	0,2511 0,2350	0,02	0,44 1,93	739,20 739,16	739,20 739,16	0,78 0,10
f	10 4	3 13	0,0258 0,0180	0,0064 0,0000	904,0 905,9	-0,21 %	0,9683 0,9240	0,04	0,41 1,86	911,02 911,15	911,02 911,15	0,74 0,15
g	13 4	3 13	0,0278 0,0194	0,0000 0,0000	1477,5 1477,2	0,02 %	3,8974 4,1595	-0,26	1,33 48,39	1481,4 1481,3	1481,4 1481,3	0,80 0,21
h	12 10	3 13	0,0190 0,0016	0,0000 0,0005	698,2 697,8	0,05 %	0,1038 0,0000	0,10	0,26 8,14	698,36 697,84	698,37 697,84	0,93 0,14
i	12 5	3 13	0,0236 0,0115	0,0000 0,0000	782,0 788,0	-0,76 %	0,5696 0,0000	0,57	0,19 2,74	788,49 787,84	788,49 787,84	0,57 0,11
j	15 5	3 13	0,0238 0,0116	0,0000 0,0000	985,7 984,9	0,07 %	0,9347 0,9744	-0,04	0,27 2,86	988,47 988,24	988,47 988,24	0,94 0,20

Tableau 5.12 Deux discrétisations différentes ( $L$ ),  $\varphi^{\max} = 0,005$  et  $\delta T^{\max} = 0,01$ 

Pb.	$j$	$L$	$\varphi$	$\delta T$	Objectif	Écart obj.	$T$	Écart $T$	Temps (s)	Obj. init. F.-W.	Obj. F.-W.	Temps (s)
a	25 12	3 13	0,0035 0,0009	0,0000 0,0044	1176,3 1176,4	-0,01 %	2,9690 2,9833	-0,01	2,17 203,15	1176,5 1176,5	1176,5 1176,5	0,98 0,36
b	39 8	3 13	0,0025 0,0036	0,0002 0,0064	1115,8 1115,6	0,02 %	1,9744 1,7374	0,24	2,09 50,13	1116,3 1116,0	1116,3 1116,0	0,70 0,13
c	18 8	3 13	0,0035 0,0042	0,0001 0,0077	1395,9 1395,3	0,04 %	2,8485 2,4719	0,38	1,56 14,65	1396,7 1396,7	1396,7 1396,7	0,70 0,13
d	15 7	3 13	0,0029 0,0046	0,0045 0,0098	1160,5 1160,0	0,04 %	2,5876 2,5666	0,02	1,02 14,04	1161,4 1161,4	1161,4 1161,4	0,84 0,25
e	13 8	3 13	0,0041 0,0044	0,0003 0,0094	738,3 738,0	0,04 %	0,2216 0,2384	-0,02	0,96 3,84	739,11 739,10	739,11 739,10	0,75 0,11
f	17 8	3 13	0,0035 0,0043	0,0001 0,0010	909,9 909,5	0,04 %	0,9903 1,0067	-0,02	0,88 2,56	910,66 910,65	910,66 910,65	0,69 0,13
g	20 9	3 13	0,0037 0,0032	0,0005 0,0032	1480,3 1480,2	0,01 %	4,4580 4,4705	-0,01	1,85 64,38	1480,4 1480,4	1480,4 1480,4	0,84 0,22
h	23 10	3 13	0,0012 0,0016	0,0038 0,0005	697,7 697,8	0,01 %	0,0069 0,0000	0,01	0,65 8,14	697,85 697,84	697,92 697,84	0,97 0,16
i	18 10	3 13	0,0033 0,0019	0,0074 0,0000	786,6 787,4	0,10 %	0,4798 0,4684	0,01	0,35 3,96	788,05 787,91	788,05 787,91	0,69 0,09
j	22 11	3 13	0,0032 0,0014	0,0001 0,0003	987,6 987,6	0,00 %	1,0047 0,9978	0,01	0,44 4,06	988,11 988,12	988,11 988,12	0,75 0,11

Au tableau 5.12, on observe toujours des écarts considérables de temps de résolution selon  $L$ .

Les écarts de taxe sont encore importants seulement pour *b* et *c*, mais pour ces deux problèmes, les écarts entre les valeurs des objectifs ont été réduits par rapport à  $\varphi^{\max} = 0,03$  (tableau 5.11). On verra dans la section suivante que toutes les solutions obtenues avec  $\varphi^{\max} = 0,005$  sont bonnes et correspondent souvent (8/10) à l'optimalité globale, pour les deux discrétisations ( $L$ ).

Tableau 5.13 Problème g résolu avec Dadapt ( $L = 3$ , un péage permis,  $\varphi^{\max} = 0,03$ )

$j$	Pas	$\varphi$	$\delta T$	objectif	$T_4$	$x_4$	$x_5$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{13}$	$x_{20}$	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	$x_{24}$	$x_{25}$
1	4,6667	Inf	Inf	1462,357	6,1342	9,333	4,083	2,50	2,75	7,50	0,75	2,25	7,50	6,00	6,75	7,167
2	3,2667	0,1774	1,0052	1462,357	2,8710	11,900	3,400	5,00	3,50	10,75	1,50	1,50	5,00	6,00	6,75	7,850
3	3,2667	0,1774	0,0000	1458,810	2,8710	11,900	3,400	5,00	3,50	10,75	1,50	1,50	5,00	6,00	6,75	7,850
4	2,2867	0,1211	0,4864	1458,809	4,2677	9,757	3,757	2,50	3,50	8,25	1,50	1,50	7,50	6,00	6,75	7,493
5	2,2867	0,1211	0,1534	1479,407	3,6131	11,373	4,500	3,37	3,50	9,12	1,50	1,50	6,63	6,00	6,75	6,750
6	1,6007	0,0833	0,3053	1454,749	4,7162	9,466	3,466	2,50	3,50	8,25	1,50	1,50	7,50	6,00	6,75	7,784
7	1,6007	0,0833	0,0464	1470,404	4,7162	9,466	3,466	2,50	3,50	8,25	1,50	1,50	7,50	6,00	6,75	7,784
8	1,1205	0,0576	0,1319	1470,987	4,0939	9,990	3,990	2,50	3,50	8,25	1,50	1,50	7,50	6,00	6,75	7,260
9	1,1205	0,0576	0,0000	1475,668	4,0939	9,990	3,990	2,50	3,50	8,25	1,50	1,50	7,50	6,00	6,75	7,260
10	0,7843	0,0400	0,1081	1475,668	4,5367	9,394	3,394	2,50	3,50	8,25	1,50	1,50	7,50	6,00	6,75	7,856
11	0,7844	0,0400	0,0000	1475,225	4,5367	9,394	3,394	2,50	3,50	8,25	1,50	1,50	7,50	6,00	6,75	7,856
12	0,5492	0,0278	0,1409	1475,225	3,8974	9,826	3,826	2,50	3,50	8,25	1,50	1,50	7,50	6,00	6,75	7,424
13	0,5493	0,0278	0,0000	1477,457	3,8974	9,826	3,826	2,50	3,50	8,25	1,50	1,50	7,50	6,00	6,75	7,424

### 5.4.3 Qualité des solutions

Comme expliqué à la section 3.4, après avoir obtenu une solution approximative (congestion discréétisée) via l'algorithme Dadapt par exemple, on peut utiliser l'algorithme de Frank-Wolfe pour connaître plus précisément (développement de Taylor d'ordre 1, section 3.4) la véritable répartition du flot sur le réseau. L'algorithme Frank-Wolfe a été codé avec Matlab 7.2 sur un PC muni d'un processeur AMD Sempron 2600+ cadencé à 1,6 GHz. Au tableau 5.14, les quatre premières lignes de résultats correspondent à la chronologie des résolutions. On note d'abord la valeur de l'objectif (congestion totale) lorsqu'on résout le MIP, pour un péage permis, avec CPLEX par exemple ; on a donc la discréétisation initiale arbitraire décrite à l'annexe I pour les dix problèmes. La deuxième ligne de résultats du tableau 5.14 contient la valeur de l'objectif en utilisant l'algorithme Dadapt avec 3 plateaux de congestion ( $L = 3$ ) et elle se trouve aussi au tableau 5.11. Lorsqu'on prend cette solution réalisable pour lancer l'algorithme de Frank-Wolfe, on peut connaître la congestion qui lui est associée (obj. init. F.-W. au tableau 5.14). La ligne suivante (obj. F.-W.) correspond à la congestion réelle obtenue via Frank-Wolfe, avec comme solution initiale, celle provenant de Dadapt ( $L = 3$ ). À la dernière ligne, on a la congestion réelle si les taxes sont nulles (obj. F.-W. et  $T = 0$ ), pour illustrer les gains, si c'est le cas, qu'on réalise par l'imposition de péages, et qu'on note par la variation de la congestion totale entre obj. F.-W. et obj. F.-W. et  $T = 0$ .

Au tableau 5.14, l'erreur d'estimation de la congestion totale (Dadapt vs init. F.-W.) n'atteint pas 1 % alors que  $\varphi^{\max} = 0,03$  et que  $\varphi$  va de 0,01900 à 0,02784 (tableau 5.11). Cette même erreur est bien sûr encore plus faible lorsque  $\varphi^{\max} = 0,005$  (tableau 5.15). Aux tableaux 5.14 et 5.15, on a noté en gras la plus faible congestion obtenue, pour chaque problème, en utilisant l'algorithme de Frank-Wolfe (init. F.-W. ou F.-W. ou F.-W. et  $T = 0$ ).

Tableau 5.14 Objectifs,  $\varphi^{\max} = 0,03$ , un péage permis

Problème	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
obj. CPLEX	1172,8	1128,5	1407,3	1140,2	752,5	933,2	1514,2	697,4	792,9	966,2
obj. Dadapt ( $L=3$ )	1176,1	1114,0	1392,9	1157,9	734,1	904,0	1477,5	698,2	782,0	985,7
obj. init. F.-W.	<b>1178,1</b>	<b>1116,3</b>	<b>1396,7</b>	<b>1161,5</b>	<b>739,2</b>	<b>911,0</b>	<b>1481,4</b>	698,4	788,5	<b>988,5</b>
obj. F.-W.	<b>1178,1</b>	<b>1116,3</b>	<b>1396,7</b>	<b>1161,5</b>	<b>739,2</b>	<b>911,0</b>	<b>1481,4</b>	698,4	788,5	<b>988,5</b>
obj. F.-W. et $T=0$	1187,7	1157,8	1436,7	1210,0	739,4	915,9	1532,6	<b>697,9</b>	<b>788,0</b>	1007,1
$T$ avec Dadapt ( $L=3$ )	2,5784	2,0032	2,9073	2,5958	0,2511	0,9683	3,8974	0,1038	0,5696	0,9347
var. obj. p/r à $T=0$	-0,81 %	-3,58 %	-2,78 %	-4,01 %	-0,03 %	-0,53 %	-3,34 %	0,07 %	0,06 %	-1,85 %

Tableau 5.15 Objectifs,  $\varphi^{\max} = 0,005$ , un péage permis

Problème	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
obj. CPLEX	1172,8	1128,5	1407,3	1140,2	752,5	933,2	1514,2	697,4	792,9	966,2
Obj. Dadapt ( $L=3$ )	1176,3	1115,8	1395,9	1160,5	738,3	909,9	1480,3	697,7	786,6	987,6
obj. init. F.-W.	<b>1176,5</b>	<b>1116,3</b>	<b>1396,7</b>	<b>1161,4</b>	<b>739,1</b>	<b>910,7</b>	<b>1480,4</b>	<b>697,9</b>	788,05	<b>988,1</b>
obj. F.-W.	<b>1176,5</b>	<b>1116,3</b>	<b>1396,7</b>	<b>1161,4</b>	<b>739,1</b>	<b>910,7</b>	<b>1480,4</b>	<b>697,9</b>	788,05	<b>988,1</b>
obj. F.-W. et $T=0$	1187,7	1157,8	1436,7	1210,0	739,4	915,9	1532,6	<b>697,9</b>	<b>788,0</b>	1007,1
$T$ avec Dadapt ( $L=3$ )	2,9690	1,9744	2,8485	2,5876	0,2216	0,9903	4,4580	0,0069	0,4798	1,0047
Var. obj. p/r à $T=0$	-0,94 %	-3,58 %	-2,78 %	-4,02 %	-0,04 %	-0,57 %	-3,41 %	0,00 %	0,01 %	-1,89 %

Pour les deux valeurs différentes de  $\varphi^{\max}$ , on observe que la congestion est sous-évaluée dans le cadre de la résolution par l'algorithme Dadapt. Pour huit problèmes sur dix, la congestion diminue (entre 0,03 % et 4,02 %), alors que pour les deux autres ( $h$  et  $i$ ), il n'existe pas de taxe permettant une congestion inférieure à celle existant en l'absence d'un cordon de péage. On observera mieux la qualité des solutions sur les prochaines figures dont on explique l'origine dans le paragraphe suivant.

Puisqu'il n'existe plus qu'une variable pour le décideur (la taxe sur un arc taxable défini), on peut lancer l'algorithme Frank-Wolfe à partir de la solution provenant de Dadapt (soit la taxe  $T_{\text{init}}$ ) et explorer différentes solutions en augmentant la taxe par tranches de 0,1 jusqu'à  $T_{\text{init}} + 3$ . Ensuite, on repart de la solution de Dadapt, mais on tend vers une taxe nulle avec les plus petits sauts entre 0,1 ou vingt bonds identiques ( $T_{\text{init}} / 20$ ). En d'autres termes, on connaît déjà une solution au problème du premier niveau (décideur), et puisque l'algorithme de Frank-Wolfe permet de calculer la répartition du trafic, étant donné un certain réseau, on peut explorer diverses taxes sur le seul arc taxable ouvert. On observe les résultats aux figures 5.2 à 5.11. Des dix figures, on constate rapidement que Dadapt avec  $L = 13$  n'amène pas d'avantage notable, et ce pour un temps de résolution beaucoup plus grand qu'avec  $L = 3$  (tableaux 5.11 et 5.12).

Pour les problèmes  $e$  et  $g$ , il existe un minimum global différent de la solution obtenue avec Dadapt ( $\varphi^{\max} = 0,005$ ) mais la différence de congestion est minime. Pour  $g$ , elle est de 0,36 %, mais le gain réalisé par rapport à l'absence de taxe est de 3,4 % et, comme pour tous les autres problèmes, les deux solutions de Dadapt se trouvent à un minimum local (figure 5.8).

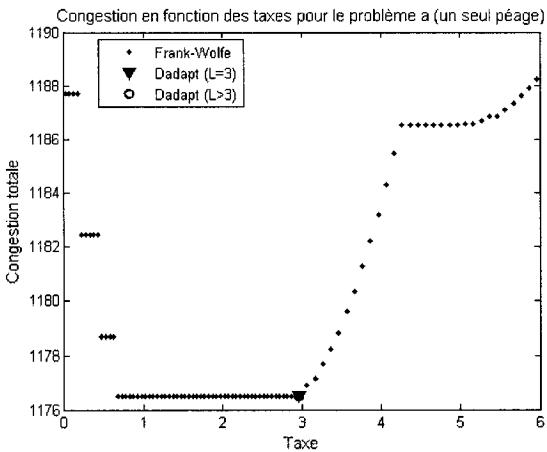


Figure 5.2 Frank-Wolfe, problème a,  $\varphi^{\max} = 0,005$

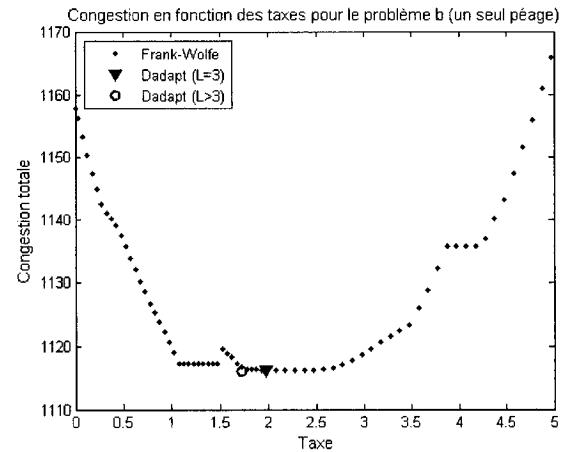


Figure 5.3 Frank-Wolfe, problème b,  $\varphi^{\max} = 0,005$

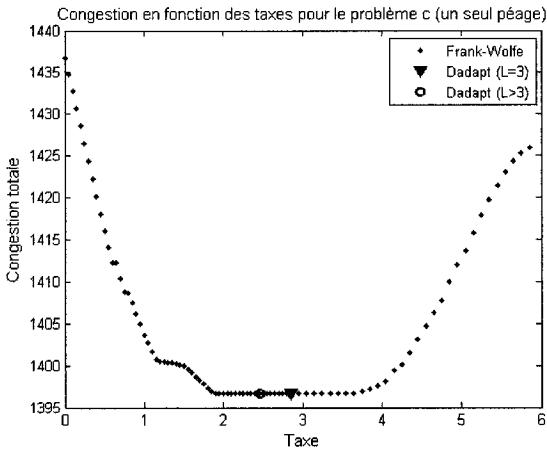


Figure 5.4 Frank-Wolfe, problème c,  $\varphi^{\max} = 0,005$

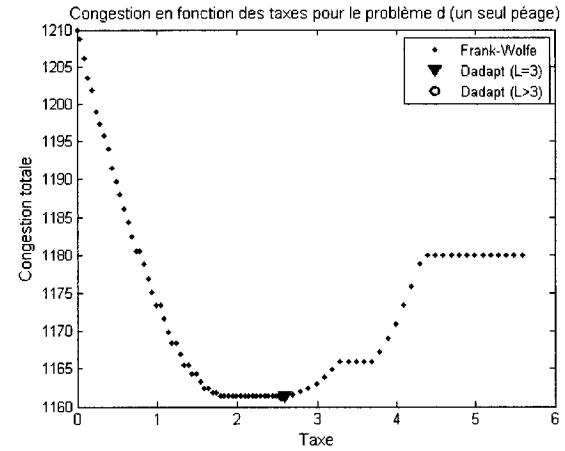


Figure 5.5 Frank-Wolfe, problème d,  $\varphi^{\max} = 0,005$

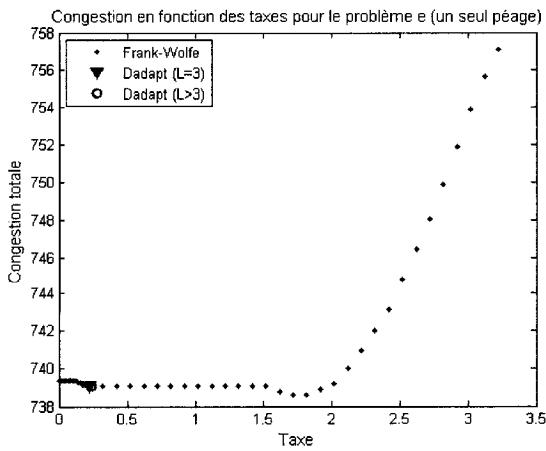


Figure 5.6 Frank-Wolfe, problème e,  $\varphi^{\max} = 0,005$

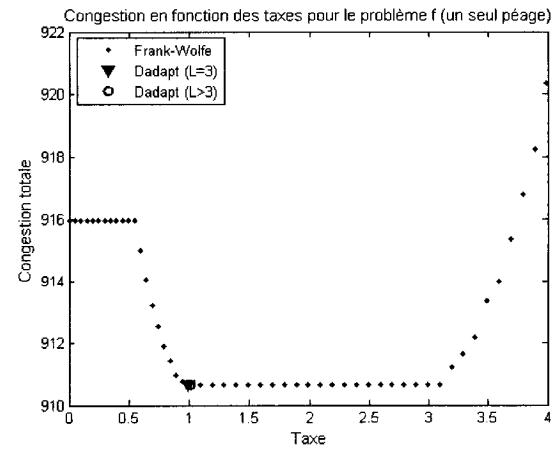


Figure 5.7 Frank-Wolfe, problème f,  $\varphi^{\max} = 0,005$

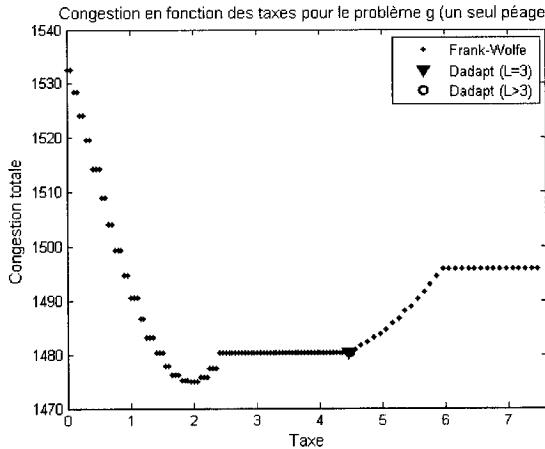


Figure 5.8 Frank-Wolfe, problème g,  $\varphi^{\max} = 0,005$

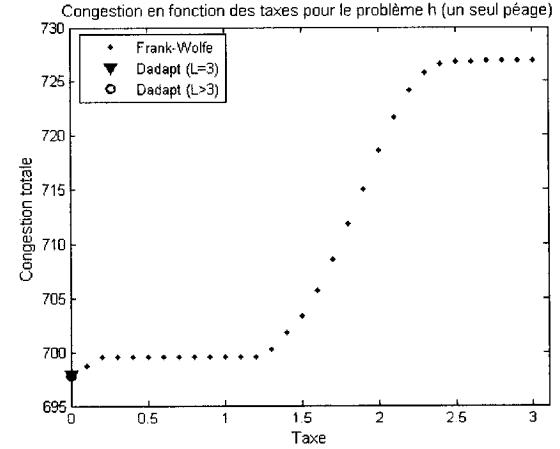


Figure 5.9 Frank-Wolfe, problème h,  $\varphi^{\max} = 0,005$

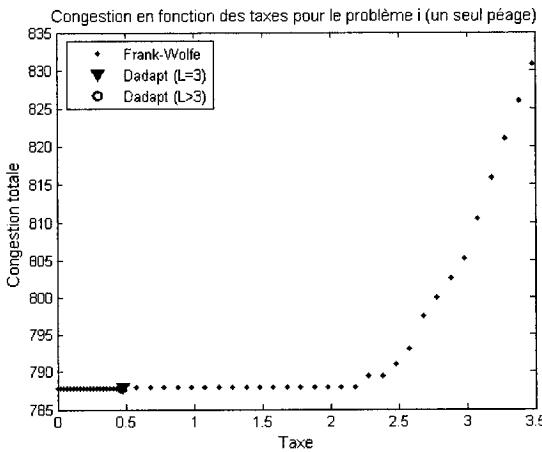


Figure 5.10 Frank-Wolfe, problème i,  $\varphi^{\max} = 0,005$

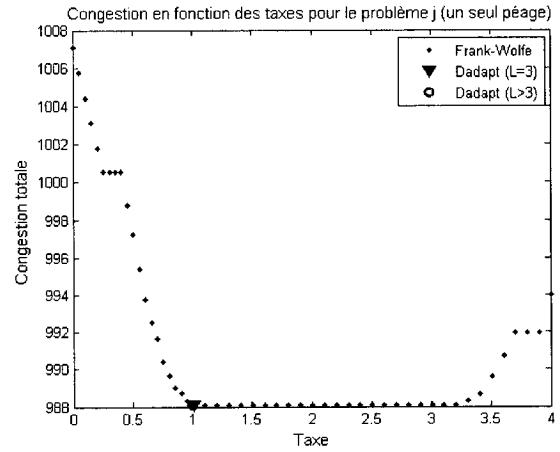


Figure 5.11 Frank-Wolfe, problème j,  $\varphi^{\max} = 0,005$

Pour la majorité des problèmes, la congestion correspond bien au minimum global, mais on n'a pas forcément obtenu la taxe la plus faible pour réaliser cet équilibre-système. C'est naturel puisque ça ne fait pas partie de notre modèle (voir section 3.1.1 pour la justification). L'algorithme Dadapt se comporte comme un algorithme de descente. Si on se retrouve dans la situation où la congestion demeure stable pour une certaine plage de  $T$ , il n'existe alors pas de direction de descente ; on ne peut pas varier légèrement ( $s^L - s^0$ ) les flots et réaliser une diminution de la congestion totale. Ça explique pourquoi on n'atteint pas nécessairement l'optimum global. Cette réalité s'observe bien sur la figure 5.2 avec une congestion stable pour  $T$  entre 0,7 et 3,0 environ.

Il serait possible d'améliorer la performance de l'algorithme Dadapt en retirant du modèle les arcs inutilisés (il y a au moins les arcs taxables fermés), en cours de résolution, ou encore en fixant  $z_{a,l} = 1$  et en réduisant le nombre de plateau de congestion à un, pour ces mêmes arcs.

## CONCLUSION

Dans ce travail, on a présenté un modèle de tarification de type *second-best pricing* qui permet de gérer la congestion sur un réseau en instaurant un cordon de péage autour d'une zone comme un centre-ville par exemple. On suppose qu'il existe un nombre fini de classes d'usagers, chacune étant caractérisée par la valeur que ces derniers accordent au temps. Une des particularités du modèle réside dans le fait que l'autorité, qui désire minimiser la congestion sur l'ensemble du réseau, peut déterminer un nombre maximal de points de péage. Elle peut aussi contraindre le tarif à une valeur identique à tous ces points. On linéarise le premier modèle de type MPEC en discrétilisant la congestion et en ajoutant des variables entières, pour obtenir un MIP qu'on résout en utilisant le logiciel CPLEX. Nos résultats numériques montrent que les modèles où on utilise une grande constante  $M$  dans les équations de complémentarité performent mieux que ceux où on utilise une taxe imaginaire pour accomplir la même tâche.

La seconde contribution, après le modèle lui-même, est l'algorithme qui permet d'adapter la discrétilisation de la congestion en fonction des solutions qu'on obtient. Ainsi, on résout le modèle MIP avec une première discrétilisation arbitraire, puis on adapte cette dernière à la solution obtenue pour une nouvelle résolution et ainsi de suite, jusqu'à l'atteinte de certains critères d'arrêt.

Sur un petit exemple, cette méthode converge bien vers la solution exacte, mais ce n'est pas le cas pour tous les problèmes solutionnés, où elle converge au moins vers un optimum local. On explique pourquoi à la section précédente. Aussi, l'algorithme Dadapt peut servir à réaliser la première étape de la méthode de résolution proposée par Fortin et al. (2004), soit de trouver une bonne solution initiale à un modèle légèrement différent de celui développé ici pour ensuite pouvoir effectuer une recherche locale avec un sous-gradient. Inversement, on pourrait tenter d'adapter ce sous-gradient à notre problème et il faudrait déterminer la meilleure combinaison entre les deux méthodes, c.-à-d., utiliser Dadapt jusqu'à quelles valeurs d'arrêt avant d'entreprendre la phase de sous-gradient. Cependant, on ne pourra pas passer d'un optimum local à un autre avec cette approche.

Pour augmenter les chances d'atteindre une meilleure solution, on pourrait utiliser Dadapt et Frank-Wolfe en alternance dans une heuristique dont voici les idées principales. On utilise Dadapt pour obtenir une première solution, puis Frank-Wolfe pour évaluer plus justement la congestion réelle. Ensuite, on modifie, d'une façon à définir, le vecteur des taxes. À partir de ces nouvelles taxes, on calcule l'affectation du trafic avec Frank-Wolfe. À partir de là, on calcule une nouvelle discréétisation et on lance Dadapt. On procède ainsi jusqu'à un certain critère d'arrêt qui pourrait bien être le temps.

L'amélioration la plus intéressante aux modèles proposés consisterait à donner plus de souplesse, à l'intérieur du MIP, quant à la sélection des arcs taxables (voir l'algorithme de Zhang et Yang, section 2.4.3).

## BIBLIOGRAPHIE

- AGENCE DE LA SANTÉ PUBLIQUE ET DES SERVICES SOCIAUX DE MONTRÉAL. (2006). *Le transport urbain une question de santé. Rapport annuel 2006 sur la santé de la population montréalaise.* Montréal. <http://www.santepub-mtl.qc.ca/Publication/rapportannuel/2006/rapportannuel2006.pdf> (Page consultée le 28 juillet 2006).
- AGENCE MÉTROPOLITAINE DE TRANSPORT. (2003). *Plan stratégique de développement du transport métropolitain.* Montréal. [http://amt.qc.ca/corpo/documents/planstrategique/fichierpdf/Pl\\_strat\\_dec2003.pdf](http://amt.qc.ca/corpo/documents/planstrategique/fichierpdf/Pl_strat_dec2003.pdf) (Page consultée le 26 juillet 2006).
- BERGENDORFF, P., HEARN, D. W., RAMANA, M. V. (1996). Congestion Toll Pricing of Traffic Networks. In D. W. Hearn & W. W. Hager (Eds.), *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* (Vol. 450, pp. 51-71): Springer-Verlag.
- BRAESS, D. (1968). Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung. *Unternehmensforschung*, 12, 258-268.
- COMMISSION FOR INTEGRATED TRANSPORT. (2002). Paying for Road Use. <http://www.cfit.gov.uk/docs/2002/pfpu/pfpu/index.htm> (Page consultée le 2 juillet 2006).
- DIAL, R. B. (2000). Minimal-revenue congestion pricing. Part II: An efficient algorithm for the general case. *Transportation Research Part B: Methodological*, 34(8), 645-665.
- ESTACHE, A., ROMERO, M., STRONG, J. (2000). *The Long and Winding Path to Private Financing and Regulation of Toll Roads.* Banque Mondiale. <http://rru.worldbank.org/Documents/Toolkits/Highways/pdf/31.pdf> (Page consultée le 17 mai 2006).
- EUROPRICE. (2000). *Document technique 2 : Rapport sur les questions de politique prioritaires.* [www.europrice-network.org/pdfs/tp2-fr.pdf](http://www.europrice-network.org/pdfs/tp2-fr.pdf) (Page consultée le 15 mai 2006).
- FORTIN, M. (2004). *Tarification avec segmentation de la demande et congestion.* École Polytechnique de Montréal.
- FORTIN, M., MARCOTTE, P., SAVARD, G. (2004). *Pricing a segmented market subject to congestion.* TRISTAN V (Triennal Symposium on Transportation Analysis), Le Gosier, Guadeloupe, 13-18 juin 2004.
- FRIESZ, T., BERNSTEIN, D., SMITH, T., TOBIN, R., WIE, B. (1993). A variational inequality formulation of the dynamic network user equilibrium problem. *Operations Research*, 41(1), 179-191.

- HEARN, D. W., LAWPHONGPANICH, S. (2004). An MPEC approach to second-best toll pricing. *Mathematical Programming*, 101(1), 33-55.
- HEARN, D. W., RAMANA, M. V. (1998). Solving Congestion Toll Pricing Models. In P. Marcotte et S. Nguyen (Eds.), *Equilibrium and Advanced Transportation Modeling* (pp. 109-124): Kluwer Academic Publishers.
- HEARN, D. W., YILDIRIM, B. M. (2002). A Toll Pricing Framework for Traffic Assignment Problems with Elastic Demand. In M. Gendreau & P. Marcotte (Eds.), *Current Trends in Transportation and Network Analysis: Papers in honor of Michael Florian* (pp. 135-145): Kluwer Academic Publishers.
- HERTZ, A. (2005). Théorie des graphes et réseaux : Définitions (notes de cours): École Polytechnique de Montréal.
- KENDZIA, D., KORVER, W. (2003). *IMPRINT-EUROPE Deliverable 3: Effective Use of Research on Pricing in Europe*: Funded by the EU 5th Framework Programme. University of Leeds.
- LABBÉ, M., MARCOTTE, P., SAVARD, G. (1998). A Bilevel Model of Taxation and Its Application to Optimal Highway Pricing. *Management Science*, 44(12), Part 1 of 2.
- MARCOTTE, P. (1998). *Inéquations variationnelles : motivation, algorithmes de résolution et quelques applications*. Cours donné à Zinal, Suisse, 4-8 mars.
- MARCOTTE, P., NGUYEN, S. (1998). *Equilibrium and Advanced Transportation Modelling*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- MARCOTTE, P., SAVARD, G. (2000). A bilevel programming approach to optimal price setting. *Les Cahiers du GERAD*, G-2000-66.
- PATRIKSSON, M. (1994). *The Traffic Assignment Problem--Models and Methods*: Topics in Transportation, VSP.
- PROGRESS. (2004). Main Project Report. <http://www.progress-project.org/Progress/pdf/Main%20Project%20Report.pdf> (Page consultée le 15 mai 2006).
- SANTOS, G., ROHEY, L. (2004). Distributional impacts of road pricing : The truth behing the myth. *Transportation*, 31, 21-42.
- SHEFFI, Y. (1985). *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.
- SMALL, K. A. (2005). Road Pricing and Public Transit: Unnoticed Lessons from London. *Access*, 26(spring 2005), 10-15.

- TRANSPORT FOR LONDON. (2005). *Congestion Charging Impacts Monitoring: Third Annual Report*. London. <http://www.tfl.gov.uk/tfl/cclondon/pdfs/ThirdAnnualReportFinal.pdf> (Page consultée le 14 mai 2006).
- VERHOEF, E. T. (2002). Second-best congestion pricing in general networks. Heuristic algorithms for finding second-best optimal toll levels and toll points. *Transportation Research Part B: Methodological*, 36(8), 707-729.
- VICTORIA TRANSPORT POLICY INSTITUTE. (2006). *Reevaluation The Role Of Highway Expansion For Improving Urban Transportation*. [http://www.vtpi.org/cong\\_relief.pdf](http://www.vtpi.org/cong_relief.pdf) (Page consultée le 18 janvier 2007).
- VILLE DE MONTRÉAL - DIRECTION DU TRANSPORT. (2005). *Plan de transport de Montréal - Choisir de nouvelles voies*. Montréal. [http://ville.montreal.qc.ca/pls/portal/docs/page/transport\\_fr/media/documents/chapitre4.pdf](http://ville.montreal.qc.ca/pls/portal/docs/page/transport_fr/media/documents/chapitre4.pdf) (Page consultée le 2 juillet 2006).
- WARDROP, J. G. (1952). Some theoretical aspects of road traffic research. *Proceedings of the Institute of Civil Engineers, Part II*, 325-378.
- WIKIPEDIA. (2006). *List of selected cities by population density*. [http://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_selected\\_cities\\_by\\_population\\_density](http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_selected_cities_by_population_density). (Page consultée le 27 juin 2006).
- YANG, H., BELL, M. G. H. (2001). Transport bilevel programming problems: recent methodological advances. *Transportation Research Part B: Methodological*, 35B(1), 1-4.
- YANG, H., HUANG, H.-J. (1998). Principle of marginal-cost pricing: How does it work in a general road network ? *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 32(1), 45-54.
- ZHANG, X., YANG, H. (2004). The optimal cordon-based network congestion pricing problem. *Transportation Research Part B: Methodological*, 38(6), 517-537.

## ANNEXE I : PARAMÈTRES DES DIX PROBLÈMES RÉSOLUS

Les dix problèmes ont été générés sur le réseau 1. Voir l'annexe II pour connaître les données du réseau 1. Ils comptent cinq commodités et sont définis par les paramètres suivants :

Pb.	(origine,destination,demande)	<i>Smax</i>	<i>L</i>	$\lambda$	<i>n</i>	<i>fdelai</i>
A	(1,8,10)(3,5,8)(4,5,4)(4,7,9)(4,9,8)	10	5	0,17	4	4
B	(1,6,7)(1,8,4)(1,9,6)(2,5,9)(4,7,10)	15	5	0,11	4	5
C	(1,9,7)(2,9,9)(3,9,10)(4,9,8)(3,6,3)	15	4	0,12	4	5
d	(1,9,3)(3,5,5)(3,6,9)(3,8,8)(4,5,6)	14	4	0,10	4	4,5
e	(1,9,3)(2,5,8)(2,8,4)(3,5,6)(3,9,3)	11	6	0,12	4	4
f	(2,5,9)(3,5,4)(3,8,3)(3,9,2)(4,9,9)	10	9	0,13	4	5
g	(2,7,3)(2,8,10)(2,9,8)(3,5,9)(3,6,9)	14	4	0,10	4	4,5
h	(1,9,8)(2,9,6)(3,6,2)(4,7,9)(4,9,6)	8	9	0,12	5	3,5
i	(1,9,3)(3,9,9)(4,5,4)(4,7,6)(4,9,6)	17	8	0,07	3	4
j	(2,5,7)(3,5,8)(3,9,2)(4,6,3)(4,7,9)	12	5	0,10	4	5

Première discréétisation :  $s_a^L = Smax, \forall a \in A_r$ .

*L* : nombre de plateaux de congestion.

$\Delta$  : longueur des plateaux de congestion :  $\Delta = Smax / L$ .

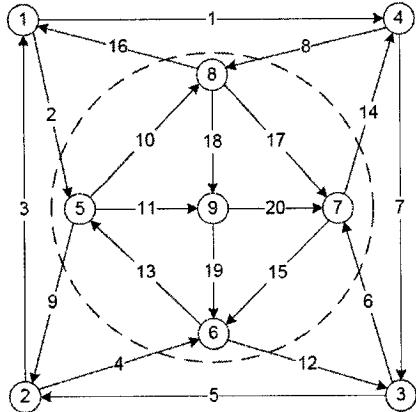
$\lambda$  : facteur de congestion :  $D_a(x_a) = D_a \cdot e^{\lambda x_a}$ .

*n* : nombre de classes d'usagers. La densité du paramètre  $\alpha$  est triangulaire sur l'intervalle [0,10].

Délai pour transport en commun :  $D_{|P|+k} = \min_{p,p \in P_k} \{D_p\} \cdot fdelai, \forall k \in K$ , où  $|P|$  est le nombre de chemins sur le réseau routier régulier.

## ANNEXE II : DONNÉES DU RÉSEAU 1

Le réseau 1 provient de l'article de Zhang et Yang (2004). On a attribué les valeurs de délais et de coûts proportionnellement à la longueur des arcs.



arc	délai	arc	délai	arc	délai
1	7,4	8	3,9	15	3,3
2	3,9	9	3,9	16	3,9
3	7,4	10	3,3	17	3,3
4	3,9	11	2,3	18	2,3
5	7,4	12	3,9	19	2,3
6	3,9	13	3,3	20	2,3
7	7,4	14	3,9		

Coût des arcs :  $C_a = D_a \cdot f_{cout}$ ,  $\forall a \in A_r$ , où  $f_{cout}$  est un facteur choisi. Pour les dix problèmes présentés à l'annexe I et résolus pour les tests,  $f_{cout} = 0,25$ .

Coût du transport en commun :  $C_{|P|+k} = \min_{p:p \in P_k} \{C_p\} / f_{tc}$ ,  $\forall k \in K$ , où  $|P|$  est le nombre de chemins sur le réseau routier régulier et  $f_{tc}$  est un facteur donné. Pour les dix problèmes présentés à l'annexe I et résolus pour les tests,  $f_{tc} = 5$ .

Arcs taxables :  $A_1 = \{2, 4, 6, 8\}$ .