

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

STABILITÉ ET COMMANDE DES SYSTÈMES SINGULIERS
STOCHASTIQUES

JAMILA RAOUF
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR
(GÉNIE MÉCANIQUE)
MARS 2007



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 978-0-494-29204-4

Our file Notre référence

ISBN: 978-0-494-29204-4

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.


Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

STABILITÉ ET COMMANDE DES SYSTÈMES SINGULIERS
STOCHASTIQUES

présentée par: RAOUF Jamila

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. PERRIER Michel, Ph.D., président

M. BOUKAS El-Kébir, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. O'SHEA Jules, D.Ing, membre

Mme. HANNAH Michalska, Ph.D., membre externe

À la mémoire de ma mère,

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes remerciements les plus sincères à mon directeur de recherche, le Professeur El-Kébir Boukas, pour m'avoir fait connaître le monde des systèmes stochastiques. Je lui suis reconnaissante pour la confiance qu'il m'a témoignée, pour le temps qu'il a consacré à ce travail de recherche et pour l'aide financière qu'il m'a accordée.

Je remercie également les professeurs Michel Perrier, Jules O'Sea et Michalska Hannah, pour avoir accepté d'évaluer et juger cette thèse.

Je tiens à remercier particulièrement mon mari Rachid Haddouch, pour son soutien inconditionnel et sa patience infailible, je remercie aussi mon fils Hamza et ma fille Nahlah, qui sans leur sacrifice, ce travail n'aurait pas abouti.

RÉSUMÉ

Au cours des dernières décennies, la classe des systèmes singuliers a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs, dans divers domaines tels que la robotique, la chimie, l'économie. Parallèlement, une autre classe de système a aussi connu un essor remarquable depuis les années quatre vingt, il s'agit de la classe des systèmes à sauts, qui se définissent comme des systèmes continus sautant d'un état à un autre selon une chaîne de Markov à états finis. Cette classe de système permet de modéliser des processus soumis à des événements aléatoires et discontinus tels que les pannes et les réparations.

La plupart des travaux de recherche se rapportant aux systèmes singuliers à sauts markoviens, se sont concentrés sur la situation où ceux-ci ne manifestent que des discontinuités intrinsèques sur certaines de leurs variables d'état continues. Cependant pour certaines applications, en plus des discontinuités citées-ci-haut, toute la composante continue du système subit une discontinuité dite forcée, qui prend naissance aux différents instants de sauts. Nous pouvons citer comme exemples de ces applications l'économie d'un pays (modèle de leontief), un robot sauteur.

L'objectif de cette thèse est de développer des outils de l'analyse et de la synthèse pour cette classe de système présentant des discontinuités forcées sur la variable d'état continue. Jusqu'à présent, ce sujet n'a pas été abordé dans la littérature.

Dans ce travail de recherche, nous allons :

- établir une condition suffisante de stabilité stochastique asymptotique en moyenne quadratique pour ce type de système, celle-ci permet entre autre, de vérifier la régularité et l'absence de modes impulsifs.
- développer de nouvelles méthodologies de synthèse des lois de commande, qui garantissent la stabilité stochastique du système en boucle fermée, la régularité et l'absence d'impulsions dans le comportement de celui-ci. En outre, elles

assurent certaines performances aux systèmes considérés, en terme de rejet de perturbations externes à énergie finie et de satisfaction des contraintes imposées sur la commande. Dans ce sens, plusieurs architectures de lois de commande sont considérées, selon que l'information sur les variables d'état est totalement disponible, ou ne l'est pas. Ces lois sont :

- la loi de commande par retour d'état,
 - la loi de commande $\mathcal{H}_\infty$,
 - la loi de commande avec saturation,
 - la loi de commande par retour d'état basé sur un observateur de type Luenberger,
 - la loi de commande par retour de sortie dynamique.
- étudier la robustesse en stabilité de la classe des systèmes étudiés, en présence d'incertitudes structurées bornées en normes, avec et sans perturbations à énergie finie.
 - valider les outils utilisés et les approches proposées à l'aide des exemples de simulation.

Les résultats développés sur l'analyse et la synthèse de cette classe de systèmes et leurs robustesses, sont basés sur la théorie de Lyapunov, les techniques d'optimisation, à savoir les inégalités matricielles linéaires et bilinéaires, et sur la méthode de complémentarité sur le cône.

ABSTRACT

Singular systems are frequently encountered in practice, for exemple, in robotics, chemical processes, power systems and economic systems. It is for this reason that the study of such systems has attracted considerable attention, and a lot of new results, have emerged recently.

In parallel, more attentions have recently been devoted to the study of Markovian jump linear systems, in which the mode process is a continuous discrete state Markov chain, taking values in a finite set. This class of systems has been used to model many practical systems where abrupt changes, random failures and repairs may occur.

Most of the researches on singular systems driven by continuous-time Markovian process, have concentrated on situations in which there are no abrupt changes in the states at the transitions between modes. However, for some processus decribed by this class of systems, when a switch occurs from one mode to another, the state vector exhibits discontinuities at these switched moments. This phenomena often occurs in many singular systems such as economic systems (leontief model where the production state vector jumps when some administration effects are included), robotics (robots that make jumps over obstacles).

The objective of this research is to deal with the analysis and the synthesis of this class of systems with discontinuities on the state. This subject has never been tackled in the literature.

In this thesis, we will:

- establish a sufficient condition for piecewise regularity, absence of impulses and asymptotic stochastic stability in mean square sense,
- developpe new methodologies for synthesising controllers which guarantee the stochastic stability of the closed-loop system, piecewise regularity and impulse-

free. Moreover, they ensure certain performances to the considered systems, such as the rejection of external disturbances and the respect of the imposed constraints.

To this purpose, several types of controllers are considered, according to whether information on the state variable is completely available or not. These control laws are:

- state feedback controller,
 - $\mathcal{H}_\infty$ state feedback controller,
 - observer-based controller,
 - output feedback controller.
- study the robustness of stability for the considered class of systems with norm-bounded uncertainties and disturbances.
 - validate the obtained results with the help of numerical examples and simulations.

The proposed results on analysis and synthesis and their robustnesses, are based on the theory of Lyapunov, linear and bilinear matrix inequality technique and complementarity cone method.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	viii
TABLE DES MATIÈRES	x
LISTE DES FIGURES	xiii
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES	xv
LISTE DES ANNEXES	xvii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Survol de la littérature	1
1.1.1 Systèmes singuliers	1
1.1.2 Systèmes à sauts markoviens	5
1.1.3 Systèmes singuliers déterministes par morceaux	9
1.1.3.1 Systèmes singuliers avec des effets impulsifs	10
1.1.3.2 Systèmes singuliers stochastiques	12
1.1.4 Formulation du problème	14
1.1.5 Moteur à courant continu:	18
1.1.6 Système de production flexible	20
1.1.7 Conclusion sur la recherche bibliographique	23
1.2 Organisation	24

CHAPITRE 2	SYSTÈMES SINGULIERS À SAUTS MARKOVIENS	
	AVEC DISCONTINUITÉS	27
2.1	Équations d'état	27
2.2	Concepts et outils mathématiques	32
2.2.1	Propriétés structurelles	32
2.2.2	Théorie de Lyapunov	37
2.3	Existence et unicité de la solution	39
2.3.1	Sous-système lent	40
2.3.2	Sous-système rapide	43
2.4	Commandabilité stochastique	49
2.5	Observabilité stochastique	51
2.6	Stabilité stochastique	53
2.7	Conclusion	64
CHAPITRE 3	STABILISATION STOCHASTIQUE	65
3.1	Introduction	65
3.2	Commande stochastique par retour d'état	66
3.3	Commande stochastique $\mathcal{H}_\infty$	77
3.3.1	Position du problème	77
3.3.2	Analyse	79
3.3.3	Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ d'un contrôleur par retour d'état	85
3.4	Commande stochastique avec saturation	91
3.4.1	Formulation du problème	91
3.4.2	Préliminaires	93
3.4.2.1	Domaine d'attraction	93
3.4.2.2	Ellipsoïde de Lyapunov	93
3.4.3	Résultat	95
3.5	Exemple numérique	98

3.6 Conclusion	102
CHAPITRE 4 COMMANDE BASÉE SUR UN OBSERVATEUR	104
4.1 Introduction	104
4.2 Retour d'état assuré par un observateur de type Luenberger	105
4.3 Retour de sortie dynamique	116
4.3.1 Première approche	131
4.3.2 Deuxième approche	133
4.4 Conclusion	138
CHAPITRE 5 ÉTUDE DE LA ROBUSTESSE	139
5.1 Introduction	139
5.2 Concept de la robustesse	140
5.3 Stabilité stochastique robuste	141
5.4 Stabilisabilité stochastique robuste	145
5.5 Retour d'état assuré par un observateur stochastique robuste	154
5.6 Retour de sortie dynamique robuste	173
5.7 Commande stochastique robuste $\mathcal{H}_\infty$	188
5.7.1 Stabilité robuste d'un système déterministe par morceaux avec perturbations externes	188
5.7.2 Stabilisation robuste par retour d'état	195
5.8 Conclusion	207
CHAPITRE 6 CONCLUSION GÉNÉRALE	208
RÉFÉRENCES	212
ANNEXES	229

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Évolution du mode et des variables d'état continues d'un SSSM	17
Figure 1.2	Moteur à courant continu	18
Figure 1.3	Système de production flexible	22
Figure 2.1	Systèmes singuliers réguliers et non réguliers	33
Figure 2.2	Évolution des modes et des variables d'état continues d'un SSSMD stable	48
Figure 3.1	Stabilisation par retour d'état d'un SSSMD	75
Figure 3.2	Évolution de la loi de commande par retour d'état d'un SSSMD	76
Figure 3.3	Évolution du mode et des variables d'état d'un SSSMD avec perturbations externes	84
Figure 3.4	Stabilisation par la commande $\mathcal{H}_\infty$ d'un SSSMD avec per- turbations externes: évolution du mode, des variables d'état et de la commande	90
Figure 3.5	Fonction de saturation	92
Figure 3.6	Schéma d'un ellipsoïde de Lyapunov.	94
Figure 3.7	Réponses temporelles du mode et des variables d'état du sys- tème bouclé avec et sans saturation	101
Figure 4.1	Évolution des variables d'état reconstruites via deux obser- vateurs différents:	136
Figure 4.2	Lois de commande obtenues par les deux approches	137
Figure 5.1	Comportement d'un SSSMD incertain stable	144
Figure 5.2	Schéma de principe d'un contrôleur robuste par retour d'état	145
Figure 5.3	Stabilisation robuste par retour d'état d'un SSSMD incer- tain: évolution du mode et des variables d'état	152
Figure 5.4	Évolution de la commande par retour d'état d'un SSSMD incertain	153

Figure 5.5	Évolution du mode et des variables d'état	170
Figure 5.6	Erreur d'estimation du contrôleur assuré par un observateur	171
Figure 5.7	Évolution de la loi de commande par retour assuré par un observateur	172
Figure 5.8	Stabilisation par retour de sortie d'un SSSMD incertain: évolution du mode, des variables d'état	186
Figure 5.9	Évolution de la loi de commande par retour de sortie d'un SSSMD incertain	187
Figure 5.10	Comportement d'un système singulier Markovien incertain, perturbé et stable	194
Figure 5.11	Stabilisation par la commande robuste $\mathcal{H}_\infty$: réponses temporelles du mode et des variables d'état	205
Figure 5.12	Évolution de la loi de commande $\mathcal{H}_\infty$ robuste d'un SSSMD .	206

LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

$\mathbb{N}$	L'ensemble des entiers naturels,
$\mathbb{R}^n$	Corps des nombres réels de dimension n ,
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes,
$\mathbb{C}^+$	Demi plan gauche complexe ouvert,
$\mathbb{C}^-$	Demi plan gauche complexe fermé,
$\mathbb{C}^p$	Ensemble des fonctions p fois continûment différentiables,
$\mathbb{C}_m^p$	Ensemble des fonctions p fois continûment différentiables par morceaux,
n	Dimension du système étudié,
n_2	Dimension du sous-système rapide,
n_1	Dimension du sous-système lent,
$p_i, i \in \mathcal{S}$	Indice de nilpotence de la matrice $\mathcal{J}(i)$ de la forme de Kronecker-Weierstrass,
N	Nombre de modes du système,
$\mathcal{S}$	Ensemble discret des modes,
k	Rang de la matrice $E(i), i \in \mathcal{S}$,
$M > 0 (M \geq 0)$	Matrice carrée symétrique et définie (rep. semi-définie) positive,
$M < 0 (M \leq 0)$	Matrice carrée symétrique et définie (rep. semi-définie) négative,
$M < N$	Matrice $M - N < 0$ carrée symétrique et définie-négative,
$\mathbb{I}$	Matrice identité de dimension appropriée,
$\det(M)$	Déterminant de la matrice carrée M ,
$\text{rang}(M)$	Rang de la matrice M ,
$\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}$	Trace de la matrice carrée M ,
M^{-1}	Inverse de la matrice carrée M ,
$(M)^\dagger$	Inverse de Moore-Penrose de M ,

$M^\top (M^{-\top})$	Transposé de M (inverse de M),
$\lambda_{\min}(M)$	Valeur propre minimale de la matrice M ,
$\lambda_{\max}(M)$	Valeur propre maximale de la matrice M ,
$\Re(\lambda(M))$	Parties réelles des valeurs propres de la matrice M ,
$\rho(M)$	Mesure de la matrice M ,
$\ M\ $	Norme euclidienne de la matrice carrée M ,
$\ x\ $	Norme euclidienne du vecteur x de dimension n , $\ x\ ^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$,
$\ \cdot\ _\infty$	Norme infini,
$\mathbb{E}\{\cdot\}$	Espérance mathématique,
LMI	Linear Matrix Inequality, (Inégalité Matricielle Linéaire),
BMI	Bilinear Matrix Inequality, (Inégalité Matricielle Bilinéaire),
$SSSM$	Système Singulier à Sauts Markoviens,
$SSSMD$	Système Singulier à Sauts Markoviens avec discontinuités sur les composantes continues,
$r(t)$	Mode du système à l'instant t ,
π_{ij}	Taux de transition du mode i au mode j , ($i, j \in \mathcal{S}$),
$P[r_{t+\Delta t} = j r(t) = i]$	Probabilité de passage du système du mode i au mode j ,
$\mathbb{L}$	Générateur infinitésimal,
$V(x(t), r_t)$	Fonction de Lyapunov,
Δt	Intervalle de temps infiniment petit.
$o(\Delta t)$	satisfait la propriété suivante : $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$,

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	TECHNIQUE D'OPTIMISATION	229
I.1	Analyse convexe	229
I.2	Les techniques LMIs	230
I.3	Les techniques BMIs	231
I.4	Problème de complémentarité conique	232
ANNEXE II	SYSTÈME SINGULIER	234
II.1	Modèle d'état	234
II.2	Représentations équivalentes	234
II.2.1	Décomposition en valeurs singulières	235
II.2.2	Kronecker-Weierstrass	236
II.3	Réponse temporelle d'un système singulier	237
II.4	Admissibilité des conditions initiales	237
II.5	Critères de stabilité	238
ANNEXE III	SYSTÈMES À SAUTS MARKOVIENS	240
ANNEXE IV	LA THÉORIE DE LYAPUNOV	243
IV.1	Fonction quadratique commune	243
IV.2	Fonction de Lyapunov stochastique:	244
ANNEXE V	ALGORITHME	246

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

L'objectif de ce chapitre est de faire l'état de l'art des différents travaux, qui ont été publiés sur la classe des systèmes singuliers avec sauts markoviens faisant l'objet de cette thèse. Bien évidemment, le but n'est pas de présenter une étude exhaustive de ces travaux, mais nous allons nous contenter de citer ceux qui sont connexes à notre recherche. Ensuite, nous allons dégager la problématique et présenter les motivations pour le choix des méthodologies adoptées par la suite. L'organisation de cette thèse y sera également exposée.

1.1 Survol de la littérature

1.1.1 Systèmes singuliers

Au cours des dernières décennies, la classe des systèmes singuliers a connu une avancée majeure dans les domaines de l'analyse et de la synthèse des lois de commandes, de différents problèmes pratiques de l'ingénieur, et ceci dans différents domaines tels que la mécanique (Dumont et al., 2001), l'électro-technique (Stykel, 2002), la chimie (Gilles, 1998), la robotique (Tzierakis et Koumboulis, 2003) et l'électronique de puissance (Schein et Denk, 1998), (Winkler, 2001), (Winkler, 2004).

La représentation mathématique de cette classe de système combine des relations dynamiques comme les lois de Kirchoff pour les circuits électriques, les équilibres dynamiques de masse et d'énergie en chimie (Daoutidis, 1995), et des relations

statiques (Newcomb et Dziurla, 1989) comme celles contraignant un robot manipulateur à se déplacer sur un plan (Komanduri, 1993). En chimie, ces relations peuvent être des équations d'équilibre thermo-dynamiques, des hypothèses de stationnarité ou des corrélations.

L'étude de ce type de systèmes a motivé beaucoup de recherche depuis le début des années soixante dix, en particulier depuis les premiers travaux de (Verghese et al., 1981), (Cobb, 1983, 1984) sur la commandabilité et l'observabilité, ceux de (Lewis, 1985, 1986) sur la stabilité et la commande optimale, sans oublier l'ouvrage de référence de (Dai, 1989) qui présente une étude détaillée des différents concepts de bases de cette classe de systèmes. Et depuis ces travaux, plusieurs efforts ont été déployés pour généraliser les résultats connus sur les systèmes standards aux systèmes singuliers. Dans ce cadre, de nombreux travaux d'analyse et de synthèse sont apparus dans la littérature, basés sur la théorie de Lyapunov, dont l'avantage est de permettre de conclure quand à la stabilité d'un système sans la connaissance a priori de sa solution. Parmi ces travaux, nous pouvons citer celui de (Takaba et Katayama, 1995) qui ont proposé une approche de stabilité, basée sur la résolution des égalités algébriques de Lyapunov généralisées dont la lourdeur de mise en oeuvre est connue (Uezato et Ikeda, 1999). En outre, leur résultat est établi en supposant que le système singulier est régulier, or cette propriété qui est nécessaire pour l'existence et l'unicité de la solution pour ce type de système, peut être détruite, comme il sera expliqué dans le chapitre 2 (Fang, 1994, 1997), par un simple retour d'état ou lorsque le modèle de celui-ci est entaché d'erreur. De même, des conditions d'observabilité et de commandabilité du système étudié sont requises. Dans (Chun-Liang, 1999), cette approche a été étendue au cas où le modèle du système est incertain. Ces conditions ne sont pas nécessaires à l'application de l'approche qui a été introduite par Masubuchi, (Masubuchi et al., 1997), et qui consiste à résoudre un problème d'optimisation convexe impliquant des inégalités matricielles linéaires

LMIs (voir annexe I). Il est à noter que depuis le résultat de Boyd, (Boyd et al., 1994) sur le formalisme LMI et celui d'El Ghaoui (El Ghaoui et al., 1997), cette technique est devenue parmi les plus appliquées dans le domaine de l'analyse et de la commande.

Par la suite, une généralisation aux systèmes singuliers avec retards discrets et distribués sur le vecteur d'état, du problème de stabilité et de stabilité robuste, est effectuée dans (Fridman, 2002) en se basant sur la fonction de Lyapunov-Krasovski. Récemment, (Guoping et Ho, 2006) étendent l'approche de la stabilité quadratique d'un système non linéaire, à un système continu singulier soumis à des perturbations non linéaires bornées en norme.

Depuis le début des années soixante dix, la stabilisation par retour d'état s'est développée selon que tout le vecteur d'état est disponible ou non. Dans le premier cas, plusieurs chercheurs ont commencé à s'intéresser à ce problème en se basant sur la théorie de Lyapunov et sur la résolution des LMIs; en l'occurrence, Uezato et Ikeda, (Uezato et Ikeda, 1999) qui ont fourni une condition nécessaire et suffisante de régularité, d'absence d'impulsions et de stabilité du système singulier en boucle fermée, même dans le cas où ce dernier incorpore un comportement impulsif (ce comportement sera détaillé dans le chapitre 2). Une extension de ce résultat au système singulier discret avec retard, avec ou sans incertitudes, est considéré dans (Xu et Lam, 2006).

En présence de perturbations supposées à énergie finie sur le système, plusieurs auteurs ont fait appel à un autre type de commande par retour d'état, appelé $\mathcal{H}_\infty$ qui permet d'un côté, de stabiliser le système en boucle fermée et en même temps, d'atténuer les perturbations agissant sur celui-ci. (Masubuchi et al., 1997) sont parmi les premiers qui ont utilisés les bases de l'utilisation de la technique des LMIs pour la résolution de ce type de problèmes, et ceci dans un cadre plus général,

dans le sens où les systèmes considérés peuvent présenter des modes impulsifs, sans pour autant supposer des contraintes sur les rangs des matrices de ceux-ci, comme c'est le cas dans (Uezato et Ikeda, 1999).

(Xu et al., 2003) se sont intéressés à la commande robuste $\mathcal{H}_\infty$ par retour d'état d'un système singulier avec un retard sur l'état, et soumis à des incertitudes inconnues mais bornées en normes. Ces incertitudes sont présentes dans les matrices de l'état actuel et retardé, ainsi que sur la matrice de la commande. En se basant sur les résultats de stabilité robuste développées dans (Xu et al., 2002), et sur les techniques d'optimisation, les auteurs ont proposé des conditions suffisantes qui assurent que le système en boucle fermée soit régulier, non impulsif et stable.

Le cas où le vecteur d'état n'est pas disponible, a été résolu en utilisant un système dynamique auxiliaire, appelé observateur d'état, développé par (Luenbeger, 1971), et qui est venu à point pour permettre la commande par retour d'état, en estimant les variables d'états non accessibles. Récemment (Ho et Gao, 2001) ont développé une nouvelle technique de construction d'observateurs d'ordre réduit pour un système singulier, basée sur l'identité de Bezout. Dans (Boukas, 2005c), l'auteur présente une approche de commande par retour de sortie statique d'un système singulier, basée sur la théorie de Lyapunov et sur les techniques des LMIs. Cette approche garantit que le système en boucle fermée soit régulier, non impulsif et stable.

Cependant ces résultats restent insuffisants pour vaincre certaines variations des paramètres du système, en particulier, lorsque le système est soumis à des événements aléatoires et discontinus, ce qui limite leur champ d'application.

1.1.2 Systèmes à sauts markoviens

Parallèlement aux systèmes singuliers, une autre classe de système a aussi connu un essor remarquable depuis les années quatre vingt, il s'agit de la classe des systèmes hybrides dont les systèmes à sauts markoviens en sont une famille. Ceux-ci se définissent comme un système continu sautant d'un état à un autre selon une chaîne de Markov. Ainsi une fois dans un mode, le système évolue de la même manière qu'un système déterministe.

L'intérêt porté à ces systèmes a été initié par les travaux de (Krasovskii et Lidskii, 1961), (Kushner, 1967). Ce dernier a développé un critère de stabilité stochastique de ce type de système en introduisant le concept de fonction de Lyapunov stochastique. Cette technique a été utilisée successivement dans (Mariton, 1988) et dans (Ji et Chizeck, 1990), pour aboutir à des conditions suffisantes et/ ou nécessaires sous forme d'un système d'équations algébriques de Lyapunov couplées, mais dans le cas de la commande optimale, ces équations se traduisent par un système d'équations algébriques de Riccati couplées difficile à résoudre.

Plus tard, les travaux de recherche se sont intensifiés à ce sujet pour formuler ce problème en un problème d'optimisation, et plusieurs résultats ont été publiés. Nous citons par exemple les travaux de (De Souza et Fragoso, 1993), (Boukas et Hang, 1997) sur la stabilité exponentielle de ce type de systèmes soumis à un bruit de Wiener, celui de (Costa et Boukas, 1998) sur la stabilité robuste en moyenne quadratique d'un système à paramètre markovien, soumis à des incertitudes bornées en normes, et celui de (Boukas et Liu, 2002) qui ont considéré les retards sur les variables d'état.

Concernant la stabilisation par retour d'état d'un système continu linéaire à sauts markoviens, de nombreux efforts ont été faits pour étendre les résultats sur la com-

mande par retour, des systèmes standards aux systèmes à sauts, en se basant sur la théorie de Lyapunov et les techniques LMIs. Nous pouvons citer comme exemples les travaux développés par Boukas et Liu (Boukas et Liu, 2002) et (Boukas, 2005). Outre, plusieurs méthodes de stabilisation robuste de ce type de systèmes avec retard sur l'état et avec incertitudes, sont présentées dans (Boukas et Liu, 2001) (Boukas et Liu, 2004), et (Xiong et al., 2005). La commande robuste $\mathcal{H}_\infty$ est abordée dans (Cao et al., 2000) et (Magdi et Peng, 2003). La version discrète de ce problème a été abordée par (Shi et al., 1999).

Quant au problème de la commande par retour de sortie d'un système à sauts markoviens, plusieurs résultats ont été publiés, tels que celui développé par (De Farias et al., 2000) où, en se basant sur le formalisme LMI, les auteurs ont élaboré des conditions nécessaires et suffisantes qui assurent que celui-ci soit stable en moyenne quadratique. Par la suite, ce résultat a été étendu à d'autres classes de ces systèmes, tels que les systèmes à sauts markoviens avec retard qui ont été considéré dans (Chen et al., 2004), les systèmes stochastiques non linéaires à sauts markoviens dans (Boukas, 2006b). Le cas où ce système est soumis à des perturbations stochastiques, sans et avec retards sur les variables d'état, a été traité dans le livre de (Boukas, 2005), où l'auteur utilise entre autre, une autre approche de stabilisation et de stabilisation robuste plus générale, s'appuyant sur une loi de commande basée sur un observateur de type Luenberger. Il est à noter que cet ouvrage constitue une référence clé dans le domaine d'étude des systèmes à sauts markoviens, et présente entre autres, la résolution de plusieurs problèmes tels que la stabilité robuste, la stabilisation robuste par retour d'état dont le gain est constant ou dépendant du mode, la stabilisation robuste par retour d'état basé sur un observateur, et la commande robuste $\mathcal{H}_\infty$.

Le cas d'un système incertain à sauts markoviens, dont les vecteurs d'état continus incorporent une discontinuité, a été considéré dans (Pavel et al., 2005). Ces derniers

ont proposé des conditions de stabilisation robuste via une loi de commande par retour de sortie, cependant celle-ci ne pose aucune condition sur la fonction qui décrit les sauts des variables continues, ce qui risque d'engendrer dans certains cas, l'instabilité du système comme il a été montré dans (Shunjin et al., 2004).

En général, le problème de stabilisation par retour d'état à base d'observateur ou par retour de sortie dynamique d'un système à sauts markoviens aboutit à des inégalités matricielles bilinéaires (BMIs) (voir annexe I, section I.3). Certaines de ces inégalités peuvent être transformées moyennant un changement de variables ou l'utilisation de la technique d'élimination des variables, en un problème d'optimisation convexe. D'autres BMIs peuvent être converties en un problème LMIs, équivalent avec une contrainte de rang (El Ghaoui et al., 1997). Ceci est un problème non convexe difficile à résoudre. Cependant, il existe des méthodes heuristiques permettant de trouver des solutions à ce genre de problèmes. Dans ce cadre, nous pouvons citer la technique de complémentarité sur le cône que nous adopterons tout au long de cette thèse, celle-ci a été initialement introduite par (El Ghaoui et al., 1997). L'utilisation de cette technique a permis de résoudre le problème mixte H_2/H_∞ au moyen d'une loi de commande par retour de sortie statique d'un système standard dans (Leibfritz, 2001), Alors que dans (Chen et al., 2004), en se basant sur une transformation du système à sauts markoviens avec retard sous une forme descriptive, les auteurs ont développé une condition de stabilisation qui dépend du retard, et qui s'exprime au moyen des inégalités matricielles. Le contrôleur par retour de sortie proposé est obtenu en utilisant l'algorithme de linéarisation par la technique de complémentarité sur le cône (El Ghaoui et al., 1997).

Quand à la commande $\mathcal{H}_\infty$ des systèmes à sauts markoviens, (De Souza et Fragoso, 1993) sont parmi les premiers à s'intéresser à ce problème. Ils ont étendu à cette classe de système, les résultats applicables aux systèmes déterministes, en pro-

posant une loi de commande par retour d'état qui permet d'une part de stabiliser le système en boucle fermée, et d'autre part de rejeter les perturbations sur un horizon fini et infini. Le problème principal de cette approche réside dans la difficulté de résoudre le système d'équations de Riccati couplées obtenu.

Jusqu'à présent, les lois de commandes citées que se soit pour les systèmes à sauts markoviens ou les systèmes singuliers, et qui sont conçues pour assurer diverses performances, ne considèrent pas à priori les contraintes qui peuvent avoir lieu sur l'amplitude de la commande et / ou des états.

Dans la littérature, il existe plusieurs approches se rapportant à ces problèmes. Parmi eux, on peut identifier deux axes de recherche:

- le premier considère que le comportement non-linéaire du système saturé est pris en compte à partir de l'utilisation d'un modèle polytopique (où les matrices du système appartiennent à des polytopes de matrices), obtenu en modélisant localement les saturations comme des incertitudes polytopiques. Ce type de modélisation proposée initialement dans (Molchanov et Pyatnitskii, 1986) et (Molchanov et Bauer, 1989) dans un contexte plus général de systèmes non-linéaires a été particularisé dans (Burgat et Tarbouriech, 1993) et (Burgat et al., 1996) pour le cas des systèmes linéaires avec saturation sur la commande. Cette approche a été utilisée pour la stabilisation des systèmes variant dans le temps (Cao et al., 2002), des systèmes linéaires invariants dans le temps (Zhiqiang et al., 2004), des systèmes avec retard (Fridman et al., 2003), ainsi que pour les systèmes à sauts markoviens (Liu et al., 2006). Néanmoins, elle est conservative, car l'équivalence entre le système saturé et le système polytopique n'est pas satisfaite, à cause de la dépendance de la matrice d'état en boucle fermée, de la valeur du vecteur d'état à un instant donné, contrairement aux systèmes incertains pour lesquelles cette représen-

tation polytopique est également utilisée, mais la seule différence est que la matrice d'états dans ce cas est fonction d'un vecteur qui représente les variations paramétriques et qui peut prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle donné. Pour surmonter ce conservatisme, il faut remarquer que l'équivalence entre le système non-linéaire et le système polytopique n'est valide qu'à l'intérieur d'un certain domaine où la commande ne dépasse pas une certaine valeur, et qui à son tour doit inclure le domaine de stabilité.

- La deuxième approche consiste à déterminer des régions de saturation où le système saturé est représenté par un système linéaire avec ou sans perturbation additive. Ce type de représentation a été adopté pour étudier la stabilisation d'un système linéaire avec saturation de la commande tels que les suspensions actives d'un véhicule avec des contraintes sur la commande et sur les sorties (Hong, 2005), et le système de production de plusieurs articles mais avec des capacités limitées, traité dans (Boukas, 2006). Elle a aussi été utilisée dans le cadre des systèmes singuliers (Ohse et Matsuda, 2003), et des systèmes singuliers avec retard (Wu-Neng et al., 2004).

1.1.3 Systèmes singuliers déterministes par morceaux

Récemment, la classe de systèmes singuliers déterministes par morceaux, composées de processus singuliers déterministes et de processus à sauts, a commencé à susciter un intérêt considérable des chercheurs de divers domaines. Celle-ci offre un cadre mathématique idéal pour l'étude de systèmes dont la dynamique est perturbée par des sauts.

L'étude d'une telle classe représente un champ de recherche qui est encore à son stade embryonnaire, mais qui constitue une avenue très intéressante à explorer, car le champ applicatif couvert par ces systèmes est très vaste comme nous allons le

voir par la suite.

Dans cette classe de systèmes, on peut distinguer les systèmes singuliers déterministes à sauts, dont la logique de commutation est connue, les systèmes singuliers perturbés par une séquence pré-définie d'impulsions, mais qui retrouvent leur modélisation initiale une fois la séquence terminée (cette sous-classe de systèmes est communément appelée dans la littérature: systèmes singuliers avec effets impulsifs), et finalement, les systèmes singuliers perturbés par un processus à sauts markoviens. Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à ces deux derniers types de systèmes singuliers.

1.1.3.1 Systèmes singuliers avec des effets impulsifs

Bien que faisant l'objet d'un intérêt croissant dans le domaine de la recherche, l'étude de la classe des systèmes singuliers avec des effets impulsifs, ne date que des années quatre vingt dix. Ceci est en fait un champ de recherche relativement récent comparativement à l'étude de la classe des systèmes standards avec des effets impulsifs tels qu'ils ont été définis dans (Bainov et Simeonov, 1989) (c'est-à-dire, translation du vecteur d'état en des instants donnés), et pour laquelle plusieurs travaux de stabilité et de synthèse ont été abordés dans la littérature. Pour plus d'informations sur le sujet, le lecteur peut consulter les travaux suivants: (Bainov et Simeonov, 1989), (Yang, T., 1999), (Yang, T., 2001), (Sun et al., 2003), (Sun et al., 2003a).

En effet, (Hill et Mareels, 1990) se sont intéressés au cas où le système singulier présente un comportement impulsif à l'instant initial, et en se basant sur la théorie de Lyapunov, ils ont développé des conditions qui ont permis de stabiliser un système électronique de puissance. Dans (Guan et al., 1995), (Guan et al., 2001),

(Kablar, 2003), et (Guan et Hill, 2005), les auteurs supposent l'existence d'une séquence prédéfinie d'instantanés où les composantes du vecteur d'état subissent des sauts. Dans, (Guan et al., 1995), le système considéré est un système non linéaire multi-échelle de temps avec retard, incorporant des impulsions à des instantanés donnés. La séquence de ces instantanés est générée par le biais des perturbations externes qui agissent sur le vecteur d'état, mais qui s'annulent en dehors de ces instantanés. L'approche de stabilité exponentielle proposée est basée sur la connaissance explicite de la solution, et elle est obtenue en imposant au système, plusieurs contraintes de rang et de commutativité qui doivent être vérifiées par les matrices du système.

Dans (Guan et Hill, 2005), en employant la forme de Kronecker-Weierstrass qui sépare la dynamique lente des dynamiques rapides du système (voir annexe II, eq. II.4), les auteurs ont établi et montré la relation entre la stabilité exponentielle qui se base sur le calcul du moment de second ordre de $x(t)$ et la stabilité E-exponentielle qui se base sur celui de $Ex(t)$. Ils proposent une méthode de stabilisation par atténuation des perturbations externes bornées en norme, basée sur la théorie de Lyapunov. Les conditions de stabilisation obtenues sont formulées sous forme d'inégalités de Riccati. Ces différents résultats ont été établis en appliquant certaines contraintes sur le système, telles que la propriété de la régularité, la commandabilité, l'observabilité, et les contraintes de rang de certaines matrices du système, qui doivent être respectées. Ainsi, ceux-ci sont très restrictifs pour bien des situations pratiques. (Wei et Yun, 2001) se sont intéressés à l'élaboration d'un observateur standard de Luenberger pour un système singulier non régulier, en considérant les impulsions dues aux conditions initiales et aux entrées de commande. L'existence d'un tel observateur exige la commandabilité du système singulier.

Dans ces différents travaux, l'amplitude de l'impulsion à chaque instant de saut

est calculée par l'intermédiaire d'une matrice, en général diagonale et à coefficients constants.

La section suivante fera l'objet de la revue des principaux travaux de recherche dans le domaine des systèmes singuliers à sauts markoviens (SSSM).

1.1.3.2 Systèmes singuliers stochastiques

Pour la classe des SSSM, seuls quelques chercheurs se sont penchés sur l'étude de celle-ci, bien que divers problèmes de commande de plusieurs applications, peuvent être résolus en adoptant ce type de modélisation. Nous pouvons citer comme exemples, le modèle de Leontief qui a été utilisé pour modéliser la tendance de l'économie d'un pays (Leontief, 1953), où la dynamique continue de celui-ci décrit les différentes phases de croissance et de décroissance, alors que la composante discrète dans ce cas, représente le changement du taux de chômage. Pour plus de détails concernant cette application, voir (Luenbeger, 1977b), (Thomas, 1985), et (Yin et Zhang, 2002) qui ont proposé une approche de réduction d'un système singulier à sauts markoviens moyennant la technique des perturbations singulières, qui permet de séparer les dynamiques lentes des dynamiques rapides de celui-ci. Les réseaux d'énergie électrique, soumis à des événements aléatoires tels qu'un coup de foudre, une panne d'alternateur, ou un court-circuit. Les systèmes électroniques muni d'un interrupteur dont la position change instantanément selon le choix aléatoire d'un opérateur (Boukas, 2005). La commande du niveau d'eau dans deux réservoirs, munis de vannes permettant le passage du liquide d'un réservoir à un autre. L'ouverture et la fermeture de ces vannes sont supposées être instantanées relativement au temps d'opération globale considéré (Chun-Hsiung et al., 1998), (Raouf et Boukas, 2006).

Pour ces différentes applications, il a été démontré que celles-ci sont mieux décrites par un système singulier qu'un système standard. Entre autres, les événements aléatoires auxquels ils sont soumis, peuvent être adéquatement modélisés par une chaîne de Markov. Par conséquent, toute politique de commande de ces différents systèmes doit tenir compte de ces perturbations aléatoires.

Récemment, (Boukas, 2005a) propose une procédure de stabilité robuste d'un système singulier à sauts markoviens. Les conditions établies permettent de vérifier si le système sans ou avec incertitudes est régulier, non impulsif et stochastiquement stable ou stochastiquement stable de façon robuste.

Dans (Boukas et Liu, 2004), ce type de système avec retard a été considéré. Des résultats sur la stabilité stochastique, la stabilisation stochastique par retour d'état et leur robustesse ont été établis. Néanmoins, les résultats sur la stabilisation stochastique et la stabilisation stochastique robuste, développées exigent une certaine contrainte de rang sur la matrice de commande, ce qui rend ces approches conservatives et par conséquent limite leur champ d'application. Et dernièrement, des approches de stabilisation par retour d'état de ce type de système basée sur une majoration de la matrice associée à la fonction de Lyapunov, a été proposée dans (Boukas, 2005) pour un SSSM et dans (Boukas et Xu, 2005d) dans le cas où celui-ci incorpore des retards dans son vecteur d'état.

(Yan-Ming et al, 2006) ont développé une stratégie de commande optimale pour ce type de système en faisant appel à la théorie de Lyapunov et à la résolution des LMIs. Ils ont fourni des conditions suffisantes basées sur la minimisation d'un critère quadratique de performance, celles-ci permettent de préserver la régularité, d'éliminer le comportement impulsif et de stabiliser le système en boucle fermée.

Dernièrement, une monographie des auteurs (Xu et Lam, 2006), vient de voir

le jour. Une brève introduction de la classe des SSSM y est considérée, et des problèmes tels que la stabilité, la commande par retour d'état et leur robustesse ont été abordés dans le cas continu et discret.

Contrairement aux travaux précédents de stabilisation par retour d'état qui requièrent la connaissance de l'état du système, (Raouf et Boukas, 2004b) ont proposé une loi de commande par retour d'état, basée sur un observateur singulier qui a la même structure que le système considéré, celui-ci est élaboré pour reconstruire les états non disponibles du système. Cette approche a été ensuite généralisée à ce type de système avec des perturbations stochastiques matérialisées par un bruit de Wiener dans (Raouf et Boukas, 2006).

Notons qu'aucune étude sur le comportement temporelle de ce type de système n'a été donnée dans la littérature, Or cette classe de système présente certaines particularités qui la différencie des systèmes à sauts markoviens comme nous allons le voir dans la section suivante.

1.1.4 Formulation du problème

En général, un système singulier présente un saut à l'instant initial, si celui-ci présente des valeurs différentes aux instants $t = 0^-$ et $t = 0^+$ (Dai, 1989). Par analogie, dans le cadre d'un SSSM, en dehors de l'état initial, quand le processus de Markov saute d'un mode à un autre, la valeur de la composante continue juste avant le saut est forcément différente de celle après le saut, générant ainsi des sauts de la variable continue aux moments des changements des modes. En effet, il est bien connu que pour tout mode $r(t) = i \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ étant un ensemble dénombrable,

la forme équivalente par décomposition en valeurs singulières du SSSM suivant:

$$\begin{cases} E(r(t))\dot{x}(t) = A(r(t))x(t), \\ x(t_0) = x_0, r(t_0) = r_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

avec $t_0 = 0$ est l'instant initial, $t \geq t_0$ est la variable temps, et r_0 est le mode à l'origine, est décrite par les relations ci-dessous (Dai, 1989), (Boukas et Xu, 2005d):

$$\dot{\xi}_1(t) = A_1(i)\xi_1(t) + A_2(i)\xi_2(t), \quad (1.2)$$

$$0 = A_3(i)\xi_1(t) + A_4(i)\xi_2(t). \quad (1.3)$$

où: $\xi_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\xi_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$, $M(i)$ et N sont deux matrices non singulières telles que:

$$M(i)E(i)N = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, M(i)A(i)N = \begin{bmatrix} A_1(i) & A_2(i) \\ A_3(i) & A_4(i) \end{bmatrix}, Nx(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix}.$$

D'après la représentation équivalente (1.2) et (1.3), le SSSM initial (1.1) se réduit à un système à sauts markoviens (1.2), rassemblant les dynamiques de celui-ci, tandis que la deuxième relation (1.3) traduit ses interconnexions et ses contraintes statiques.

Sans perte de généralité, supposons que la matrice $A_4(i)$ est inversible, et que τ_k , $k = 1, 2, \dots$ désignent les instants auxquels le système (1.1) saute du mode i au mode j . Ainsi, à partir des propriétés du processus à sauts (1.2) et des dynamiques (1.3), il découle:

$$\xi_1(\tau_k^-) = \xi_1(\tau_k^+), \quad (1.4)$$

$$\xi_2(\tau_k^-) = -A_4^{-1}(i)A_3(i)\xi_1(\tau_k^-), \quad (1.5)$$

avec $\tau_k^- = \lim_{\Delta \rightarrow 0}(\tau_k - \Delta)$, et $\tau_k^+ = \lim_{\Delta \rightarrow 0}(\tau_k + \Delta)$.

Au terme de la relation (1.4), on voit bien que $\xi_1(t)$ est maintenue à la valeur qu'elle avait juste avant le changement du mode à l'instant τ_k , préservant ainsi la continuité de la trajectoire de celle-ci. D'un autre côté, on a:

$$\xi_2(\tau_k^+) = -A_4^{-1}(j)A_3(j)\xi_1(\tau_k^+). \quad (1.6)$$

Tenant compte des relations (1.4) et (1.5), l'expression de $\xi_2(t_k^+)$ devient:

$$\xi_2(\tau_k^+) = \left(-A_4^{-1}(j)A_3(j)\right)\left(-A_4^{-1}(i)A_3(i)\right)^\dagger \xi_2(\tau_k^-). \quad (1.7)$$

À partir de la relation (1.7), il s'en suit que $\xi_2(\tau_k^+) \neq \xi_2(\tau_k^-)$, ce qui implique que cette variable d'état va subir des discontinuités d'amplitudes finies, à chaque changement de mode. On parle dans ce cas de discontinuités propres au système, dues à la nature même de celui-ci. L'allure de la trajectoire de l'état du SSSM (1.1) est représentée par la figure (1.1), dans le cas où celui-ci possède deux modes et deux variables d'état continues.

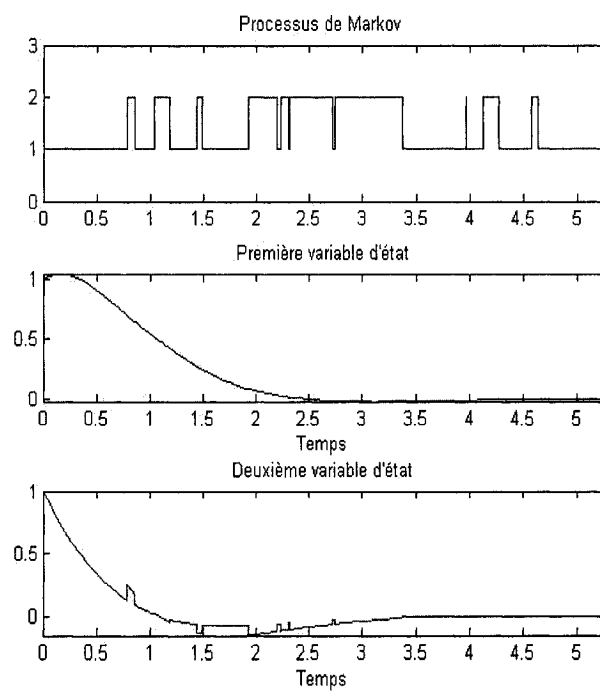


Figure 1.1 Évolution du mode et des variables d'état continues d'un SSSM

1.1.5 Moteur à courant continu:

Un exemple d'application qui peut être adéquatement modélisé par un SSSM et qui manifeste ce type de comportement, est la commande d'un moteur à courant continu (MCC) perturbé par un signal qui le fait tourner dans deux sens opposés, comme l'illustre la figure 1.2.

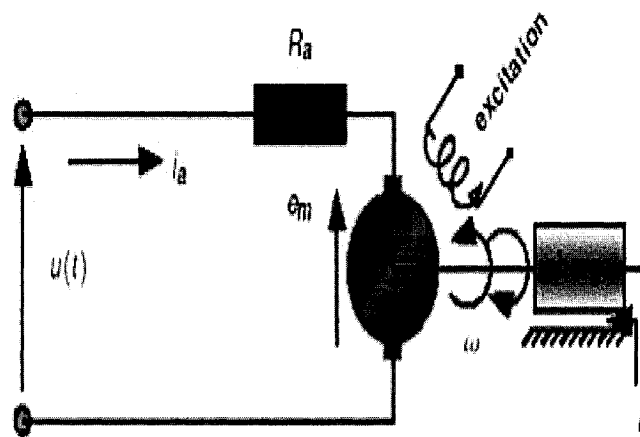


Figure 1.2 Moteur à courant continu

Notez qu'à la figure 1.2, R_a représente la résistance interne du moteur caractérisant la résistance du bobinage de l'induit, $\omega(t)$ est la vitesse de l'arbre du MCC en rad/s, $e_m(t)$ est la force contre-électro-motrice du MCC en Volts, $i_a(t)$ dénote le courant de l'induit en Ampères. $u(t)$ correspond à la chute de tension aux bornes de l'induit en Volts, $J(r(t))$ représente la charge totale du MCC, b est le coefficient de frottement. $r(t) \in \{1, 2\}$ représente le sens de rotation du MCC.

En faisant appel à la loi de Kirchhoff et à la relation fondamentale de la dynamique, que nous appliquons au schéma du circuit de l'induit de la figure 1.2 qui néglige la bobine, les équations électriques et mécaniques régissant le moteur en opération

seront données par (Boukas, 1995):

$$0 = R_a i_a(t) + k_\omega \dot{\theta}(t) - u(t), \quad (1.8)$$

$$J(r(t))\ddot{\theta}(t) = k_t i_a(t) - b\dot{\theta}(t). \quad (1.9)$$

où $\theta(t)$ est la position de l'arbre du MCC, k_ω et k_t représentent respectivement, les constantes de force contre-électromotrice et du couple.

Le modèle illustrant le comportement hybride de cet exemple peut être obtenu en supposant que le signal d'entrée est la tension aux bornes de l'induit $u(t)$ et en prenant comme variable d'état continue $x(t) = [i_a^\top(t), \omega^\top(t)]^T$. D'un autre côté, le sens de rotation du MCC est modélisé par un processus de Markov à deux états. Le modèle mathématique sera alors donné par la représentation singulière suivante: pour tout mode $r(t) = i \in \{1, 2\}$:

$$E(r(t))\dot{x}(t) = A(r(t))x(t) + B(r(t))u(t), \quad (1.10)$$

avec:

$$E(i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A(i) = \begin{bmatrix} R_a & k_\omega \\ \frac{k_t}{J(i)} & -\frac{b}{J(i)} \end{bmatrix}, B(i) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

D'après le modèle (1.10), lorsque le moteur change de sens de rotation, la dynamique de la vitesse de l'arbre du MCC qui est régie par l'équation d'un système standard, change aussi. Ce changement va se traduire par une discontinuité dans le comportement de la trajectoire du courant de l'induit, qui constitue la composante non dynamique du système étudié.

Jusqu'à présent, les quelques travaux de recherche cités ci-haut, traitant l'étude de

l'analyse et la synthèse des lois de commande des SSSM, se sont tous concentrés sur la situation où les discontinuités sur les contraintes sont intrinsèques au système. Cependant, comme nous allons le voir par la suite sur une application de ces systèmes, en plus de ces discontinuités, toute la composante continue du SSSM subit entre autre une discontinuité dite forcée, qui prend aussi naissance aux différents instants de sauts, mais qui peut être générée par une perturbation externe finie agissant sur celle-ci.

Dans le cadre des systèmes à sauts markoviens, seuls quelques chercheurs ont étudié la synthèse de ce type de système avec des discontinuités sur la composante continue. (Sworder et Rogers, 1983) sont parmi les premiers qui ont proposé une commande optimale stochastique fondée sur la théorie du régulateur linéaire quadratique. Dans le modèle qu'ils ont utilisé, les discontinuités dans l'état prennent leur origine de la différence des états d'équilibre désirés dans chaque mode. Plus tard, (Khanbaghi et al., 1997) ont adapté cette approche au problème de la gestion des réservoirs d'eaux blanches et de cassés dans une usine de papier. Pour cela, le modèle de système linéaire proposé, est perturbé par le processus de casses décrit dans ce cas par un processus de Markov.

Ce phénomène se produit aussi dans d'autres applications qui peuvent être adéquatement modélisées par un SSSMD, comme nous allons le voir sur un problème de la planification de la production et de la maintenance d'un système de production.

1.1.6 Système de production flexible

Les systèmes de production flexible (SPF) se distinguent par leur capacité de satisfaire la demande des consommateurs, en tenant compte de la présence des événements aléatoires tels que les pannes et les réparations des machines. L'objectif de

la stratégie de commande de tel système est de maintenir constant un niveau de stock des produits finis, dans le but de continuer à satisfaire la demande durant les états non opérationnels de la machine. Les méthodes proposées dans ce sens sont généralement basées sur la représentation des SPF à l'aide des systèmes perturbés par des processus de sauts. Ces processus sont couramment modélisés par des chaînes de Markov.

Dans (Boukas, 1987), (Boukas et Haurie, 1990) et (Boukas, 1995a), les auteurs ont incorporé l'âge des machines dans la modélisation et la commande d'un système de production flexible. Les états dans ce cas sont: machine opérationnelle, machine en panne et machine en maintenance préventive. Les transitions entre ces états sont décrits par un processus de Markov. Ainsi, chaque fois qu'une machine revient d'une maintenance préventive ou d'une réparation de panne, elle va être considérée comme neuve et par conséquent son âge va être remis à zéro. Ce qui génère des discontinuités de la composante continue du SPF.

Cette classe de systèmes peut être adéquatement représentée par un SSSM avec discontinuités sur la composante continue au lieu d'être modéliséE par un système standard à sauts markoviens avec discontinuités sur la composante continue, comme elle a été décrite dans (Boukas, 1995a). En effet, considérons un modèle de système constitué d'une machine et traitant un seul produit, ce dernier peut être décrit par un état hybride formé d'une partie continue (dynamique des stocks, de la demande et des âges) et d'une partie discrète (modes des machines) comme suit:

$$\begin{aligned} E(r(t))\dot{\tilde{x}}(t) &= A(r(t))\tilde{x}(t) + B(r(t))\tilde{u}(t), t = \tau_k, \\ a(\tau_k^+) &= \varphi(r_{\tau_k^+} = j, r_{\tau_k} = i, a(\tau_k)), \end{aligned}$$

avec:

- $x(t)$: stock.
- $u(t)$: taux de production.
- $d(t)$: taux de la demande.
- $v(t)$: taux de publicité.
- $a(t)$: âge de la machine.
- τ_k : instant de saut.
- φ : fonction de remise à zéro de l'âge de la machine.
- $E(i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; A(i) = \begin{bmatrix} -\alpha & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \alpha > 0$
- $B(i) = \begin{bmatrix} \nu(i) & 0 \\ 0 & \sigma(i) \\ \mu & 0 \end{bmatrix}; \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ d(t) \\ a(t) \end{bmatrix}; \tilde{u}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}.$
- $r(t) = i \in \begin{cases} 0 & \text{si la machine est opérationnelle,} \\ 1 & \text{si la machine est en réparation.} \end{cases}$

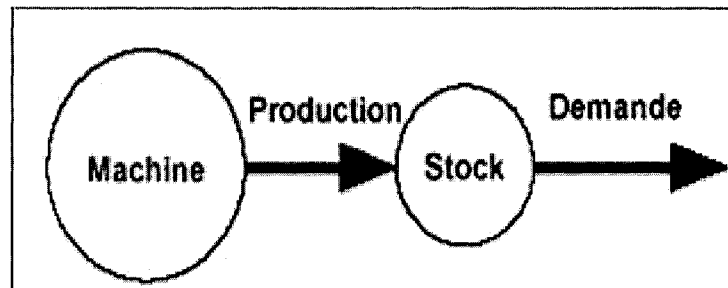


Figure 1.3 Système de production flexible

D'après cet exemple d'application, il est facile de constater que le processus considéré, incorpore à la fois un comportement continue et un autre discret. De plus, entre deux instants aléatoires où se produisent le saut des modes, le système va évoluer de la même manière qu'un système singulier déterministe. En outre toute la composante continue subit une discontinuité aux instants de sauts du mode.

1.1.7 Conclusion sur la recherche bibliographique

D'après les travaux présentés ci-dessus, nous rapportons ce qui suit:

1. Les propriétés de régularité et de la non présence d'impulsions dans le comportement d'un système singulier, doivent être prises en considération dans toute étude d'analyse et de synthèse de ce type de système.
2. Concernant l'étude des problèmes de la stabilité et de la stabilisation d'un système singulier avec effet impulsif, un nombre limité de travaux a été rapporté dans la littérature. Cependant, jusqu'à présent, la plupart de ces travaux considère que les instants où se produisent ces impulsions sont connues.
3. Pour les systèmes avec sauts markoviens et discontinuités sur la composante continue, seulement quelques travaux ont discuté le problème de la stabilité et de la stabilisation stochastique pour ce type de système.
4. Plusieurs travaux d'analyse et de synthèse ont été faits sur les systèmes singuliers et sur les systèmes à sauts, et seuls quelques uns ont considéré la classe des SSSM. Cependant, à notre connaissance, une étude des propriétés structurelles de celle-ci en présence de discontinuités sur la composante continue, n'a pas encore été abordée dans la littérature.
5. la plupart des résultats de stabilisation proposés d'un SSSM sont donnés via

la conception d'une loi de commande par retour d'état, cependant, ce type de stratégie de commande demeure insuffisant dans le cas où les variables d'état ne sont pas disponibles.

6. Jusqu'à présent, à part quelques travaux qui ont été établis sur la commande $\mathcal{H}_\infty$ d'un SSSM, cet aspect de commande n'a pas été suffisamment étudié. En outre, le problème de la commande avec saturation de ce type de système, n'a pas encore été traité dans la littérature.
7. Les travaux proposés sur la stabilité en robustesse des SSSM, sont inapplicables pour un grand nombre d'applications où la composante continue de celui-ci subit des discontinuités aux instants de sauts.

Les travaux présentés dans cette thèse contribueront à combler ces lacunes en proposant de nouvelles méthodologies d'analyse et de synthèse, de la classe des SSSM incorporant des discontinuités sur le vecteur d'état continue, tout en tirant profit des avantages des différentes approches déjà existantes dans la littérature, concernant l'étude des systèmes singuliers, des systèmes à sauts markoviens ainsi que des SSSM. Toutes nos contributions sont essentiellement théoriques.

1.2 Organisation

Cette thèse décomposée en cinq chapitres est organisée de la façon suivante:

Le chapitre 2: Ce chapitre fera l'objet de rappels de la théorie des SSSMD. On y trouve une présentation des notions de base et des définitions de stabilité stochastique au sens de Lyapunov. Dans une deuxième partie, l'étude de l'effet des discontinuités sur le vecteur d'état continu, sur l'existence et l'unicité de la solution et en général sur le comportement temporelle de la dynamique d'un SSSMD sera

effectuée. Entre autres, après avoir défini le concept de la stabilité stochastique asymptotique, en moyenne quadratique, nous proposons des conditions suffisantes permettant de vérifier si le système étudié est régulier, non impulsif et asymptotiquement stochastiquement stable en moyenne quadratique. Pour cela, nous allons nous baser sur une fonction de Lyapunov continue par morceaux et sur les techniques des LMIs.

Le chapitre 3: Le chapitre trois sera intégralement consacré à la synthèse des lois de commande par retour d'état. Dans un premier temps, nous allons élaborer ce type de commande pour assurer que le système étudié en boucle fermée présente les propriétés de régularité, d'immunité d'impulsions par morceaux et de stabilité stochastique en moyenne quadratique. Ensuite, nous allons appliquer cette approche pour concevoir la commande $\mathcal{H}_\infty$ et la commande avec saturation qui satisfassent à des spécifications supplémentaires, à savoir le rejet des perturbations externes à énergie finie et la satisfaction des contraintes sur les entrées de commande. L'élaboration de ces résultats sera tributaire des résultats proposés lors de l'analyse de la stabilité et sera basée sur la formulation des problèmes de synthèse sous forme de LMIs, et BMIs qui sont non convexes et difficiles à résoudre. Pour contourner cette difficulté, nous allons utiliser la technique par complémentarité sur le cône.

Le chapitre 4: La synthèse des lois de commande par retour d'état basées sur des observateurs locaux pour reconstruire les états non mesurables d'un SSSMD, fera l'objet de ce chapitre. Dans ce cadre, un observateur de type Luenberger et un autre connu dans la littérature sous le nom d'observateur dynamique par retour de sortie seront considérés, ces observateurs représentent la même structure que le système étudié.

Le chapitre 5: Ce chapitre mettra l'accent sur le problème de la robustesse en stabilité des SSSMD lorsque les paramètres du système sont incertains. Dans ce cadre, tous les problèmes considérés dans les chapitres deux, trois et quatre, seront réétudiés et résolus sauf celui de la commande avec saturation que nous laisserons pour un travail futur.

Les résultats obtenus dans cette thèse, sont résolus avec le logiciel Matlab et les utilitaires Yalmip et Sedumi (version 2005), et illustrés par des exemples pour lesquels l'évolution dans le temps, des variables d'état continues et des modes composant les SSSMD, ont été simulés avec un simulateur que nous avons développé à l'aide du logiciel Matlab.

Finalement, nous allons clore ce travail avec une conclusion générale. Un aperçu des résultats obtenus et un ensemble de propositions relatives aux perspectives de recherche y sera exposé.

CHAPITRE 2

SYSTÈMES SINGULIERS À SAUTS MARKOVIENS AVEC DISCONTINUITÉS

Dans ce chapitre, nous allons introduire la classe des SSSMD. Nous présentons tout d'abord leur modélisation mathématique, ensuite nous allons donner une brève description des concepts de base: notamment, la régularité, l'immunité d'impulsion, la commandabilité, l'observabilité ainsi que la stabilité stochastique basée sur la connaissance de la solution du système. Quelques outils mathématiques qui nous seront utiles par la suite seront également exposés. Dans une deuxième partie, nous allons étudier le comportement de cette classe de système pour laquelle un critère de stabilité stochastique en moyenne quadratique sera entre autre présenté, celui-ci est basé sur la théorie de Lyapunov et les techniques d'optimisation convexe (voir annexe I).

2.1 Équations d'état

Les systèmes singuliers à sauts markoviens, qui seront utilisés tout au long de cette thèse ont la particularité de présenter des discontinuités forcées chaque fois que le mode change, par l'intermédiaire d'une fonction vectorielle. Mathématiquement,

ceci se traduit par la représentation d'état suivante, pour tout mode $r(t) = i \in \mathcal{S}$:

$$\begin{cases} E(r(t))\dot{x}(t) = A(r(t), t)x(t) + B(r(t), t)sat(u(t)) + B_w(r(t))w(t), \\ y(t) = C_y(r(t), t)x(t) + D_y(r(t), t)u(t) + B_y(r(t))w(t), \\ z(t) = C_z(r(t), t)x(t) + D_z(r(t), t)u(t) + B_z(r(t))w(t), t \neq \tau_k, \\ x(\tau_k^+) = R(r_{\tau_k^+} = j, r_{\tau_k} = i)x(\tau_k), t = \tau_k, x_{t_0} = x_0, r(t_0) = r_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $z(t) \in \mathbb{R}^q$ désignent respectivement le vecteur d'état, le vecteur de commande, le vecteur de sortie mesurée, le vecteur de sortie contrôlée, et $w(t) \in \mathbb{R}^q$ représente la perturbation externe à énergie finie, c'est-à-dire vérifiant la relation suivante :

$$\int_0^\infty w^\top(t)w(t)dt < \infty. \quad (2.2)$$

$\{r(t), t \geq t_0\}$ est un processus de Markov à temps continu et à états finis, prenant ses valeurs dans un ensemble d'entiers, fini $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, N\} \subset \mathbb{N}$ avec la matrice des taux de transitions donnée par :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \dots & \pi_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{N1} & \dots & \pi_{NN} \end{pmatrix}$$

dont les éléments π_{ij} sont définis par les taux de transition de l'état i à l'état j , celles-ci sont décrites par les relations suivantes :

$$P[r_{t+\Delta t} = j | r(t) = i] = \begin{cases} \pi_{ij}\Delta t + o(\Delta t) & i \neq j \\ 1 + \pi_{ii}\Delta t + o(\Delta t) & i = j \end{cases} \quad (2.3)$$

où $\Delta t > 0$, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ et vérifiant $\pi_{ij} \geq 0$, $\forall j \neq i$, et $\pi_i := -\pi_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N \pi_{ij}$.

$E(r(t))$, $A(r(t), t)$, $B(r(t), t)$, $B_w(r(t))$, $C_y(r(t), t)$, $D_y(r(t), t)$, $B_y(r(t))$, $C_z(r(t), t)$, $D_z(r(t), t)$, et $B_z(r(t))$ sont des matrices de dimensions compatibles avec celles de $x(t)$, $u(t)$, $y(t)$ et $z(t)$. Elles sont fonction du processus aléatoire $\{r(t), t \geq t_0\}$ et sont données pour tout $i \in \mathcal{S}$ par :

$$\begin{cases} A(i, t) = A(i) + D_A(i)F_A(i, t)E_A(i), \\ B(i, t) = B(i) + D_B(i)F_B(i, t)E_B(i), \\ C_y(i, t) = C_y(i) + D_{C_y}(i)F_{C_y}(i, t)E_{C_y}(i), \\ D_y(i, t) = D_y(i) + D_{D_y}(i)F_{D_y}(i, t)E_{D_y}(i), \\ C_z(i, t) = C_z(i) + D_{C_z}(i)F_{C_z}(i, t)E_{C_z}(i), \\ D_z(i, t) = D_z(i) + D_{D_z}(i)F_{D_z}(i, t)E_{D_z}(i). \end{cases} \quad (2.4)$$

avec $A(i)$, $B(i)$, $C_y(i)$, $D_y(i)$, $D_A(i)$, $E_A(i)$, $D_B(i)$, $E_B(i)$, $E_{C_y}(i)$, $D_{C_y}(i)$, $E_{C_z}(i)$, $D_{C_z}(i)$, $E_{D_z}(i)$, $D_{D_z}(i)$, $E_{D_y}(i)$ sont des matrices constantes connues, et $F_A(i, t)$, $F_B(i, t)$, $F_{C_y}(i, t)$, $F_{D_y}(i, t)$, $F_{C_z}(i, t)$ et $F_{D_z}(i, t)$ représentent les parties inconnues de l'incertitude. Elles décrivent la structure de l'interconnexion entre le système nominal (pour lequel les incertitudes sont nulles), et les parties incertaines, nous allons supposer qu'elles vérifient les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} F_A^\top(i, t)F_A(i, t) < \mathbb{I}, F_B^\top(i, t)F_B(i, t) < \mathbb{I}, \\ F_{C_y}^\top(i, t)F_{C_y}(i, t) < \mathbb{I}, F_{D_y}^\top(i, t)F_{D_y}(i, t) < \mathbb{I}, \\ F_{C_z}^\top(i, t)F_{C_z}(i, t) < \mathbb{I}, F_{D_z}^\top(i, t)F_{D_z}(i, t) < \mathbb{I}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Les incertitudes qui vérifient (2.5) sont dites admissibles pour tout mode $i \in \mathcal{S}$.

La matrice $R(., .)$ est une constante connue, elle traduit la discontinuité du vecteur d'état continu du système considéré (2.1) aux instants où celui-ci change de mode

(Bainov et Simeonov, 1989). En outre, pour tout mode $i \in \mathcal{S}$, $R(ii) = \mathbb{I}$. Nous supposons également qu'il existe un ensemble de scalaires positifs $0 < h_k \leq 1$, tel que :

$$\max_{1 \leq i, j \leq N} \|R(i, j)\| \leq h_k. \quad (2.6)$$

Pour tout mode i , et tout $s = 1, \dots, m$, $sat(u_{si}(t))$ désigne la fonction de saturation. Elle est définie par :

$$sat(u_{si}(t)) = \begin{cases} \bar{u}_{si} & si \ u_{si}(t) > \bar{u}_{si}, \\ u_{si}(t) & si \ -\bar{u}_{si} \leq u_{si}(t) \leq \bar{u}_{si}, \\ -\bar{u}_{si} & si \ u_{si}(t) < -\bar{u}_{si}, \end{cases} \quad (2.7)$$

où $u_{si}(t)$ représente la s ième composante de la loi de commande $u(t)$ du système (2.1), se trouvant dans le mode i , $\bar{u}_{si}$ désigne les limites d'amplitude sur la s^{ieme} composante du vecteur d'entrées.

L'avantage de cette modélisation est la possibilité de :

- prendre en considération certaines contraintes sur le comportement du système qui ne doivent pas être négligées, chose qui ne peut pas être faite par le biais de la modélisation standard.
- tenir compte de la structure aléatoire et discontinue d'une grande variété de systèmes industriels.
- combiner les propriétés utiles de chaque structure utilisée.

Le modèle adopté ici (2.1) est une représentation très générale dans le sens où il englobe aussi bien les systèmes standards décrits par $\dot{x}(t) = A(r(t), t)x(t) + B(r(t), t)sat(u(t)) + B_w(r(t))w(t)$, $t \neq \tau_k$, pour tout mode $r(t) = i \in \mathcal{S}$, que les

syndèmes singuliers obtenus en posant $R(ij) = \mathbb{I}, i, j \in \mathcal{S}$ dans (2.1). Ainsi, ce modèle peut représenter tous les syndèmes multi-variables à sauts markoviens, sujets à des perturbations externes, avec des contraintes sur la commande et $E(i)$ inversible ou non inversible.

D'un autre côté, le vecteur d'état $x(t)$ est composé de plusieurs variables d'état, dont certaines sont des variables naturelles qui décrivent le système. Par conséquent, les relations (2.1) incluent souvent un nombre d'équations qui sont purement statiques, ceci entraîne que la matrice $E(i), i \in \mathcal{S}$ est souvent singulière, d'où l'appellation SSSMD. Par ailleurs, le comportement de certains des vecteurs d'état $x(t)$ formant ces équations statiques, est non dynamique comme on va le voir par la suite. Ceci va engendrer une insensibilité du comportement du système aux conditions initiales $E(i)x(t_0^-)$ suivant ces directions dans l'espace d'état (Verghese et al., 1981) pour tout mode $i \in \mathcal{S}$. Ainsi, le degré de liberté du système représentant le nombre de valeurs indépendantes que peut prendre les conditions initiales $E(i)x(t_0^-)$, est réduit à $k = \text{rang } E(i) < n$.

Pour tout mode $i \in \mathcal{S}$, si le degré du déterminant du faisceau de matrice est donné par (Dai, 1989) : $\deg |sE(i) - A(i)| = d < k < n$, alors :

- $k = d$, implique que le régime libre du SSSMD manifeste n modes exponentiels dits modes finis et $n - d$ modes non dynamiques infinis appelés contraintes.
- lorsque $k > d$, en plus des d modes exponentiels, le SSSMD possède des modes dynamiques infinis correspondant aux $(n - k)$ contraintes et aux $(k - d)$ modes impulsifs pour lesquels le faisceau de matrice $(sE(i) - A(i))$ est singulier (Verghese et al., 1981), (Rosenbrock, 1974), (Van Der Weiden et Bodgra, 1980).

Pour tout mode $i \in \mathcal{S}$, l'existence de ces trois types de modes rend le caractère

structurel et le comportement de ce type de systèmes très complexes, contrairement aux systèmes standards qui ne possèdent que les modes finis.

Il est à noter que tout au long de ce chapitre, nous allons supposer que le SSSMD considéré n'est pas soumis à des perturbations externes bornées ($w(t) = 0$), et que la commande n'est pas saturée ($\text{sat}(u(t)) = u(t)$), ainsi la modélisation adoptée sera la suivante :

$$\begin{cases} E(r(t))\dot{x}(t) = A(r(t), t)x(t) + B(r(t), t)u(t), t \neq \tau_k, \\ x(\tau_k^+) = R(r_{\tau_k^+} = j, r_{\tau^-} = i)x(\tau_k), t = \tau_k \\ x(t_0) = x_{t_0}, r(t_0) = r_0. \end{cases} \quad (2.8)$$

L'étude de la stabilité et de la stabilisation du SSSMD dans le cas où $w(t) \neq 0$ sera vu en détail dans le chapitre 3.

Commençons d'abord par introduire quelques définitions qui nous seront utiles pour l'étude de l'analyse et la synthèse de cette classe de systèmes.

2.2 Concepts et outils mathématiques

2.2.1 Propriétés structurelles

Régularité et comportement impulsif : les notions de régularité et de présence d'impulsions reviennent très souvent lors de l'analyse et de la synthèse d'un SSSMD en général, et particulièrement en stabilité et lors du calcul de la solution du système, dont l'existence et l'unicité ne sont garanties que si le système étudié est régulier (Dai, 1989) comme le montre la figure 2.1. Pour cela, nous allons donner ces différents concepts pour un SSSMD.

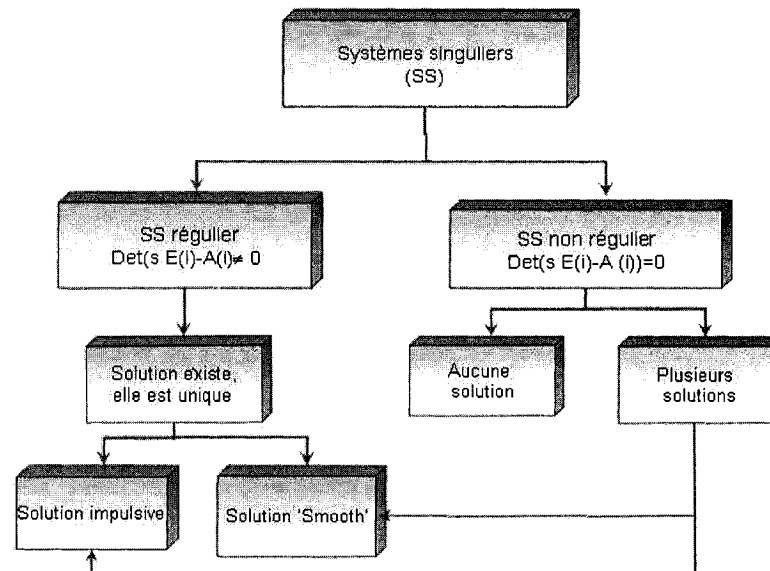


Figure 2.1 Systèmes singuliers réguliers et non réguliers

Définition 2.2.1 Pour tout mode $i \in S$, le système (2.8) avec $u(t) = 0$ est dit :

- régulier si et seulement si (ssi) le déterminant de $(sE(i) - A(i))$ est non identiquement nul.

Cette définition est inspirée de celle donnée par (Dai, 1989) pour les systèmes singuliers.

Remarque 2.2.1 • De part la variation aléatoire de la dynamique d'un SSSMD, la propriété de régularité de celui-ci dépend du mode dans lequel se trouve le système.

- Pour un système standard, la propriété de la régularité est satisfaite automatiquement.
- Il est à noter que le faisceau de matrice du système (2.8) change d'expression si le modèle de celui-ci est soumis à une incertitude $\Delta A(i), i \in \mathcal{S}$, ou si un bouclage par retour d'état de matrice de gain $K(i)$ lui est appliqué. En effet dans le premier cas la matrice d'état devient $A(i) + \Delta A(i)$, alors que dans le deuxième cas, elle devient $A(i) + B(i)K(i)$. En conséquence, la propriété de la régularité peut être détruite dans de telles situations. Ainsi, ceci doit être pris en compte lors de la synthèse de contrôleurs pour ce type de système (Verghese et al., 1981), (Fang et al., 1994), (Xu et al., 2002).

Généralement un comportement impulsif est indésirable car il peut engendrer dans certains cas l'instabilité du système. Comme nous allons le voir, ultérieurement lors du calcul de la réponse temporelle d'un SSSMD; ce comportement impulsif peut prendre son origine soit des conditions initiales, quand t tend vers t_0^+ , soit de la loi de commande. Pour éviter qu'un tel phénomène se produise, il faut que ces dernières aient des spécifications particulières, ceci sera expliqué en détail dans la section suivante. Ainsi, tout au long de cette thèse et moyennant différentes approches de stabilisation stochastique, notre objectif sera de rendre non impulsif par morceaux, n'importe quel SSSMD (2.1) (nominal ou incertain, avec ou sans perturbations externes, avec commande linéaire ou avec contraintes). Mathématiquement, ceci se traduit par :

Définition 2.2.2 (Boukas, 2005) Pour tout mode $i \in \mathcal{S}$, le système (2.8) avec $u(t) = 0$ est dit :

- non impulsif ssi $\deg(\det(sE(i) - A(i))) = \text{rang}(E(i))$.

Remarque 2.2.2 • *D'après les définitions 2.2.1 et 2.2.2, il est facile de voir que lorsque le faisceau de matrice $(E(i), A(i))$ est non impulsif, ceci implique qu'il est régulier.*

- *Pour un système standard, cette propriété est toujours vérifiée.*

Stabilité : une autre notion qui sera souvent évoquée tout au long de ce travail de recherche, est la notion de stabilité. Néanmoins, de part la nature aléatoire du SSSMD (2.8) avec $u(t) = 0$, il n'est pas possible de traiter sa stabilité comme pour un système déterministe. Pour cela, nous allons introduire le concept de stabilité stochastique pour le système nominal, et le concept de stabilité stochastique robuste lorsque le SSSMD considéré est entaché d'erreurs.

Dans la littérature, concernant un système à sauts markoviens en général, plusieurs types de stabilités ont été étudiés, notamment la stabilité exponentielle, la stabilité presque sûre (Mariton, 1988), (Boukas et Hang, 1997), la stabilité stochastique ainsi que la stabilité asymptotique en moyenne quadratique (Boukas, 2005). Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser aux deux derniers concepts de stabilité d'un SSSMD se rapportant au cas nominal et au cas incertain.

Définition 2.2.3 (Boukas, 2005) *Pour tout mode $i \in S$, le système nominal (2.8) avec $u(t) = 0$ est dit :*

- *stochastiquement stable, s'il existe une constante positive $T(x_0, r_0)$ telle que pour toutes conditions initiales x_0 et r_0 , l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt | x_0, r_0 \right] \leq T(r_0, x_0); \quad (2.9)$$

- *asymptotiquement stable en moyenne quadratique : si pour toute condition*

initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$, et pour tout mode initial $r_0 \in \mathcal{S}$, l'égalité suivante est satisfaite :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \|x(t)\|^2 = 0 \quad (2.10)$$

Lorsque le SSSM est incertain, ces définitions deviennent :

Définition 2.2.4 (Boukas, 2005) *Pour tout mode $i \in \mathcal{S}$, le système (2.8) avec $u(t) = 0$, est dit :*

- *stochastiquement stable de façon robuste, s'il existe une constante positive $T(x_0, r_0)$ telle que l'inégalité (2.9) est satisfaite pour toute condition initiale (x_0, r_0) , et toutes incertitudes admissibles.*
- *asymptotiquement stable en moyenne quadratique de façon robuste, si l'égalité (2.10) est vérifiée pour toute condition initiale (x_0, r_0) , et pour toutes incertitudes admissibles.*

Il est à noter que l'étude de la stabilité stochastique du système (2.8) avec $u(t) = 0$, basée sur l'application directe des définitions 2.2.3 et 2.2.4, exige le calcul explicite de la solution du système, ce qui risque d'être extrêmement difficile pour certaines applications. D'où l'intérêt de la deuxième méthode de Lyapunov (voir annexe IV), qui consiste à examiner la variation d'une fonction scalaire pour étudier la stabilité stochastique du système.

2.2.2 Théorie de Lyapunov

Dans le cadre de notre étude, nous optons pour une fonction de Lyapunov stochastique $V(x(t), r_t)$, définie pour tout $r_t = i, i \in \mathcal{S}$ par :

$$V(x(t), r_t = i) = x^\top(t) E^\top(r_t) P(r_t) x(t), \quad (2.11)$$

où $P(r_t)$ est une matrice non singulière.

Dans ce cas, la mesure de la décroissance de celle-ci peut être évaluée moyennant le calcul de sa dérivée généralisée, appelée générateur infinitésimal de la fonction de Lyapunov (2.11), défini par le lemme suivant :

Lemme 2.2.1 (*Arnold, 1974; Kats et Martynyuk, 2002*) *Généralement, le générateur infinitésimal d'un système stochastique $\{x(t), r(t), t \geq t_0\}$ est un opérateur $\mathbb{L}$ défini par :*

$$\begin{aligned} \mathbb{L}V(x(t), r(t), t) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left\{ \mathbb{E} \left[V(x(t + \Delta), r(t + \Delta), t + \Delta) | x(t) = x, r_t = i \right] - V(x, i, t) \right\} \\ &= \dot{x}(t) V_x(x(t), r_t, t) + V_t(x(t), r_t, t) \\ &\quad + \sum_{j=1, j \neq i}^N \pi_{ij} [V(R(ij)x, r_t = j, t) - V(x, r_t = i, t)] \end{aligned} \quad (2.12)$$

où : $V_x = \frac{\partial V}{\partial x}$ et $V_t = \frac{\partial V}{\partial t}$.

La valeur de $\mathbb{L}V(.,.)$ peut être interprétée comme la valeur moyenne de la dérivée de la fonction $V(t, x, i)$ le long de toutes les réalisations du processus de Markov $\{x(t), r(t), t \geq 0\}$ émanant du point (x, i) à l'instant t .

Les lemmes suivants seront entre autres utilisés pour l'élaboration du résultat sur la stabilité stochastique de la classe des systèmes considérés.

Lemme 2.2.2 (*Dai, 1989*) Soit $\mathcal{U}'$ la dérivée au sens des distributions d'une fonction $\mathcal{U}$ continue par morceaux, présentant des sauts d'amplitude finie $\Delta\mathcal{U}_j$ au point τ_j pour $j = 1, \dots, l$ est donnée par :

$$\mathcal{U}'(t) = \mathcal{U}_t + \sum_{j=1}^l \Delta_{\tau_j} \mathcal{U}_j \delta(t - \tau_j)$$

où $\mathcal{U}_t$ est la dérivée usuelle de $\mathcal{U}$ par rapport à la variable t , $\Delta_{\tau_j} \mathcal{U}_j = \mathcal{U}(\tau_j^+) - \mathcal{U}(\tau_j^-)$ et $\delta(t)$ est la fonction de Dirac.

Lemme 2.2.3 (*Vidyasagar, 1978*) Pour toute matrice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et tout scalaire $\varepsilon > 0$, la mesure de la matrice $\rho(Q)$ définie comme $\rho(Q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\|\mathbb{I} + \varepsilon Q\| - 1}{\varepsilon}$, possède les propriétés suivantes :

- $-\|Q\| \leq \Re \lambda(Q) \leq \rho(Q) \leq \|Q\|.$
- $\rho(Q) = \frac{1}{2} \lambda_{\max}(Q + Q^\top),$

Lemme 2.2.4 Soit une fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $\dot{\varphi}$ est bornée sur $[0, \infty)$, c-à-d qu'il existe un scalaire $\beta > 0$ tel que $|\dot{\varphi}| \leq \beta$ pour tout $t \in [0, \infty)$, alors φ est continue uniformément sur $[0, \infty)$.

Lemme 2.2.5 (*Krstić et Deng, 1998*) Soit une fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$. Si φ est continue uniformément et $\int_0^t \varphi(s) ds < \infty$ alors $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$.

Après cette brève définition des différents concepts et outils qui seront utilisés pour l'élaboration de nos résultats sur l'analyse et la synthèse des SSSMD, nous allons étudier le comportement de la réponse temporelle de ce type de système.

2.3 Existence et unicité de la solution

Jusqu'à présent, le problème de l'existence de la solution d'un système singulier à sauts markoviens n'a pas été abordé en détail dans la littérature. Ainsi, dans cette section, nous allons étudier le comportement du SSSMD en se basant sur le calcul de sa solution. Pour atteindre cet objectif, nous allons nous inspirer du travail de (Mariton, 1990) sur la recherche de la solution d'un système à sauts et de celui de (Dai, 1989) qui consiste à décomposer le système singulier sous la forme de Kronecker-Weierstrass pour simplifier la résolution de ce problème (voir annexe II, eq. II.4).

Commençons d'abord par définir cette décomposition pour un SSSMD. Cette forme équivalente utilise le résultat énoncé par le lemme suivant :

Lemme 2.3.1 (*Gantmacher, 1974*) *Pour chaque mode fixe i_k , et $t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$, le système nominal (2.1) est régulier ssi il existe deux matrices non singulières $M_1(i_k)$ et N_1 , $i_k \in \mathcal{S}$, telles que :*

$$M_1(i_k)E(i_k)N_1 = \text{diag}(\mathbb{I}, \mathcal{J}(i_k)), M_1(i_k)A(i_k)N_1 = \text{diag}(\mathcal{A}(i_k), \mathbb{I}) \quad (2.13)$$

Dans ce cas, le système nominal (2.1) est équivalent à :

$$\dot{\xi}_1(t) = \mathcal{A}(i_k)\xi_1(t) + B_1(i_k)u(t), t \neq \tau_{k+1} \quad (2.14)$$

$$\mathcal{J}(i_k)\dot{\xi}_2(t) = \xi_2(t) + B_2(i_k)u(t), t \neq \tau_{k+1} \quad (2.15)$$

$$\xi_l(\tau_{k+1}^+) = R_k \xi_l(\tau_{k+1}), l = 1, 2. \quad (2.16)$$

$$\xi_1(t_0) = \xi_{10}, \xi_2(t_0) = \xi_{20}. \quad (2.17)$$

où : $\xi_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\xi_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, $\mathcal{J}(i)$ est une matrice nilpotente

d'indice de nilpotence p_{i_k} (c-à-d: il existe $p_{i_k} \in \mathbb{N}$, tel que $\mathcal{J}^1(i_k) \neq 0, \mathcal{J}^2(i_k) \neq 0, \dots, \mathcal{J}^{p_{i_k}-1}(i_k) \neq 0$, mais $\mathcal{J}^{p_{i_k}}(i_k) = 0$). Les matrices $B_1(i_k)$, $B_2(i_k)$, R_k et les variables $\xi_1(t)$ et $\xi_2(t)$ sont telles que :

$$\begin{aligned} M_1(i_k)B(i_k) &= \begin{bmatrix} B_1(i_k) \\ B_2(i_k) \end{bmatrix}, \bar{R}_k = N_1^{-1}R(i_k, i_{k-1})N_1 = \begin{bmatrix} R_k & 0 \\ 0 & R_k \end{bmatrix}, \\ N_1^{-1}x(t) &= \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Les deux sous-systèmes obtenus (2.14) et (2.15) sont souvent appelés sous-systèmes lent et rapide respectivement.

2.3.1 Sous-système lent

En se basant sur la décomposition de Kronecker-Weierstrass citée ci-haut, nous constatons que la réponse temporelle du sous-système lent est celle d'un système à sauts markoviens. Ainsi, si on note par $i_o, i_1, \dots, i_k, i_k \in \mathcal{S}, k = 1, 2, \dots$, une séquence des modes visités par le processus $\xi_1(t)$ sur l'intervalle $]0, t]$. Alors, partant d'une condition initiale $\xi_1(t_0), r_{t_0} = i_o$, le sous système lent évolue selon la dynamique décrite par les équations (2.14) jusqu'au saut $r_{\tau_1} = i_1$ qui a lieu au temps τ_1 , généré selon une loi exponentielle de taux $\pi_{i_o i_1}$, dont la loi de distribution $P(\tau_1 > t) = F(t)$ est donnée par :

$$F(t) = \begin{cases} e^{-\lambda_{i_o i_1}(t-t_0)} & \text{pour } t < \tau_1 \\ 0 & \text{pour } t \geq \tau_1, \end{cases}$$

ensuite, le système évolue avec la dynamique associée au mode i_1 jusqu'au saut $r_{\tau_2} = i_2$, et ainsi de suite (Mariton, 1990). Et la solution générale de (2.14) sera alors formée par la concaténation des solutions continues par morceaux $\xi_1(t, \xi_{10}, r_0)$

définies sur les intervalles $(\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k \in \mathcal{S}$. Aux instants de sauts τ_{k+1} , cette solution présentera des discontinuités dont l'intensité est déterminée par les matrices R_k . Ce même raisonnement est valable pour le sous-système rapide. Pour décrire ce comportement pour tout $t \geq 0$, considérons la solution de l'équation (2.14) sur l'intervalle $(\tau_k, \tau_{k+1}]$:

$$\xi_1(t) = e^{\mathcal{A}(i_k)(t-\tau_k)} \xi_1(\tau_k^+) + \int_{\tau_k}^t e^{\mathcal{A}(i_k)(t-s)} B(i_k) u(s) ds \quad (2.18)$$

Prenant en considération l'équation (2.16), (2.18) devient :

$$\xi_1(t) = e^{\mathcal{A}(i_k)(t-\tau_k)} R_k \xi_1(\tau_k) + \int_{\tau_k}^t e^{\mathcal{A}(i_k)(t-s)} B(i_k) u(s) ds \quad (2.19)$$

D'un autre côté, notons que :

$$\xi_1(\tau_k) = e^{\mathcal{A}(i_{k-1})(\tau_k-\tau_{k-1})} \xi_1(\tau_{k-1}^+) + \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} e^{\mathcal{A}(i_{k-1})(t-s)} B(i_{k-1}) u(s) ds, \quad (2.20)$$

Il s'en suit que l'équation (2.19) sera donnée par :

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= e^{\mathcal{A}(i_k)(t-\tau_k)} R_k \left[e^{\mathcal{A}(i_{k-1})(\tau_k-\tau_{k-1})} \xi_1(\tau_{k-1}^+) + \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} e^{\mathcal{A}(i_{k-1})(t-s)} B(i_{k-1}) u(s) ds \right] \\ &+ \int_{\tau_k}^t e^{\mathcal{A}(i_k)(t-s)} B(i_k) u(s) ds \end{aligned}$$

D'une manière semblable à ce qui précède, remplaçons successivement $\xi_1(\tau_{k-1}^+)$ et $\xi_1(\tau_{k-1})$ par leur expression, par conséquent la dernière égalité devient :

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= R_k R_{k-1} e^{\mathcal{A}(i_k)(t-\tau_k)} e^{\mathcal{A}(i_{k-1})(\tau_k-\tau_{k-1})} \\ &\times \left[e^{\mathcal{A}(i_{k-2})(\tau_{k-2}-\tau_{k-1})} \xi_1(\tau_{k-2}^+) + \int_{\tau_{k-2}}^{\tau_{k-1}} e^{\mathcal{A}(i_{k-2})(t-s)} B(i_{k-2}) u(s) ds \right] \\ &+ e^{\mathcal{A}(i_k)(t-\tau_k)} R_k \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} e^{\mathcal{A}(i_{k-1})(t-s)} B(i_{k-1}) u(s) ds + \int_{\tau_k}^t e^{\mathcal{A}(i_k)(t-s)} B(i_k) u(s) ds \end{aligned}$$

Il en découle :

$$\begin{aligned}\xi_1(t) &= R_k R_{k-1} R_{k-2} e^{A(i_k)(t-\tau_k)} e^{A(i_{k-1})(\tau_k-\tau_{k-1})} e^{A(i_{k-2})(\tau_{k-2}-\tau_{k-1})} \xi_1(\tau_{k-2}) \\ &\quad + R_k R_{k-1} e^{A(i_k)(t-\tau_k)} e^{A(i_{k-1})(\tau_k-\tau_{k-1})} \int_{\tau_{k-2}}^{\tau_{k-1}} e^{A(i_{k-2})(t-s)} B(i_{k-2}) u(s) ds \\ &\quad + e^{A(i_k)(t-\tau_k)} R_k \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} e^{A(i_{k-1})(t-s)} B(i_{k-1}) u(s) ds + \int_{\tau_k}^t e^{A(i_k)(t-s)} B(i_k) u(s) ds\end{aligned}$$

Ainsi, par un calcul itératif, l'expression de la composante continue $\xi_1(t)$ va être donnée pour tout $k = 1, 2, \dots$, et $t \geq t_0$ par :

$$\begin{aligned}\xi_1(t) &= \phi_{i_0}(e^{A(i_0)(\tau_1-t_0)} \xi_{i_0} + \int_{t_0}^{\tau_1} e^{A(i_0)(\tau_1-s)} B(i_0) u(s) ds) \\ &\quad + \sum_{l=2}^k (\phi_{i_l} \int_{\tau_{l-1}}^{\tau_l} e^{A(i_l)(\tau_l-s)} B(i_l) u(s) ds) + \int_{\tau_k}^t e^{A(i_k)(t-s)} B(i_k) u(s) ds\end{aligned}\tag{2.21}$$

où :

$$\begin{aligned}\phi_{i_0} &= \prod_{r=1}^k R_r e^{A(i_k)(t-\tau_k)} e^{A(i_{k-1})(\tau_k-\tau_{k-1})} \dots e^{A(i_1)(\tau_2-\tau_1)}, \\ \phi_{i_l} &= R_l e^{A(i_l)(t-\tau_l)}.\end{aligned}$$

et $\phi_0(t, x_{i_0}, r_0) = \phi_{i_0} e^{A(i_0)(\tau_1-t_0)}$ représente la matrice de transition du système lent (2.14) au temps t commençant à t_0 .

Remarque 2.3.1 *Il est à noter que la solution du sous système lent (2.14) est complètement déterminée pour toute condition initiale x_{i_0} et pour toute entrée $u(t)$ connue sur l'intervalle $[0, t]$. Entre autres, nous pouvons constater que si le sous-système lent (2.14) saute d'un mode à un autre avec $R_k = \mathbb{I}, k = 1, 2, \dots$, alors, on retrouve la solution d'un système à sauts markoviens (2.21), développée par (Mariton, 1990) (voir annexe III, eq. III.3). Alors que si on suppose que le système lent (2.14) possède un seul mode $\mathcal{S} = \{1\}$, la solution (2.21) est équivalente à celle d'un système singulier développée par (Dai, 1989) (voir annexe II, eq. II.6).*

Calculons à présent la réponse du sous-système rapide (2.15).

2.3.2 Sous-système rapide

Comme nous l'avons expliqué au chapitre 1, le sous-système rapide (2.15) présentent des sauts d'amplitudes finies aux instants de sauts de celui-ci d'un mode vers un autre. Dans de telles situations, (Verghese et al., 1981) et (Cobb, 1983) ont proposé d'utiliser la théorie des distributions pour trouver sa solution. Pour cela, nous allons faire appel au lemme 2.2.2. En outre nous allons supposer que $\tau_k^- = \tau_k$ (Guan et Hill, 2005). D'après ce lemme, la dérivée au sens des distributions de la composante rapide $\xi_2(t)$ sur tout intervalle $(\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\xi_2'(t) &= \dot{\xi}_2(t) + \Delta_{\tau_{k+1}} \xi_2 \delta(t - \tau_{k+1}) \\ &= \dot{\xi}_2(t) + (\xi_2(\tau_{k+1}^+) - \xi_2(\tau_{k+1}^-)) \delta(t - \tau_{k+1}) \\ &= \dot{\xi}_2(t) + (R_k - \mathbb{I}) \xi_2(\tau_{k+1}) \delta(t - \tau_{k+1})\end{aligned}$$

Ainsi, pour chaque mode $i_k \in \mathcal{S}$ et $t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots$, on a :

$$\mathcal{J}(i_k) \xi_2' = \xi_2(t) + B_2(i) u(t) + \mathcal{J}(i_k) (R_k - \mathbb{I}) \xi_2(\tau_{k+1}) \delta(t - \tau_{k+1}) \quad (2.22)$$

D'un autre côté, dérivons au sens des distributions et multiplions par $\mathcal{J}(i_k)$, $(p_{i_k}-1)$ fois l'équation (2.22), on aboutit aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^2(i_k)\xi_2^2(t) &= \mathcal{J}(i_k)\xi_2'(t) + \mathcal{J}(i_k)B_2(i_k)u'(t) \\
&+ \mathcal{J}^2(i_k)(R_k - \mathbb{I})\xi_2(\tau_{k+1})\delta'(t - \tau_{k+1}) \\
&\vdots \\
\mathcal{J}^j(i_k)\xi_2^j(t) &= \mathcal{J}^{j-1}(i_k)\xi_2^{j-1}(t) + \mathcal{J}^{j-1}(i_k)B_2(i_k)u^{j-1}(t) \\
&+ \mathcal{J}^j(i_k)(R_k - \mathbb{I})\xi_2(t_{k+1})\delta^{j-1}(t - t_{k+1}) \\
&\vdots \\
\mathcal{J}^{p_{i_k}-1}(i_k)\xi_2^{p_{i_k}-1}(t) &= \mathcal{J}^{p_{i_k}-2}(i_k)\xi_2^{p_{i_k}-2}(t) + \mathcal{J}^{p_{i_k}-2}(i_k)B_2(i_k)u^{p_{i_k}-2}(t) \\
&+ \mathcal{J}^{p_{i_k}-1}(i_k)(R_k - \mathbb{I})\xi_2(t_{k+1})\delta^{p_{i_k}-2}(t - t_{k+1}) \\
\mathcal{J}^{p_{i_k}}(i_k)\xi_2^{p_{i_k}}(t) &= \mathcal{J}^{p_{i_k}-1}(i_k)\xi_2^{p_{i_k}-1}(t) + \mathcal{J}^{p_{i_k}-1}(i_k)B_2(i_k)u^{p_{i_k}-1}(t) \\
&+ \mathcal{J}^{p_{i_k}}(i_k)(R_k - \mathbb{I})\xi_2(t_{k+1})\delta^{p_{i_k}-1}(t - t_{k+1})
\end{aligned}$$

En sommant membre à membre ces équations, y compris l'équation (2.22), et en tenant en compte que $\mathcal{J}^{p_{i_k}}(i_k) = 0$, on en déduit alors l'expression de $\xi_2(t)$ qui sera donnée pour tout $i_k \in \mathcal{S}$ et $t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$ par :

$$\xi_2(t) = - \sum_{j=0}^{p_{i_k}-1} \mathcal{J}^j(i_k)B_2(i_k)u^j(t) - \sum_{j=1}^{p_{i_k}-1} \mathcal{J}^j(i_k)(R_k - \mathbb{I})\xi_2(t_{k+1})\delta^{j-1}(t - t_{k+1}) \quad (2.23)$$

où $g^j(t)$ désigne la j^{me} dérivée au sens des distributions de $g(t)$.

Ainsi, en concaténant les expressions de la composante rapide $\xi_2(t)$ (2.23) sur tous les intervalles $(\tau_k, \tau_{k+1}]$, et en ajoutant entre autre l'éventuel saut en $t = t_0$, on

obtient l'expression de celle-ci pour tout $t \geq t_0$, sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \xi_2(t) = & - \sum_{r=0}^k \sum_{j=0}^{p_{i_r}-1} \mathcal{J}^j(i_r) B_2(i_r) u^j(t) - \sum_{j=1}^{p_{i_r}-1} \mathcal{J}^j(i_0) \xi_2(t_0) \delta^{j-1}(t - t_0) \\ & - \sum_{r=1}^l \sum_{j=1}^{p_{i_r}-1} \mathcal{J}^j(i_r) (R_k - \mathbb{I}) \xi_2(t_{r+1}) \delta^{j-1}(t - t_{r+1}). \end{aligned} \quad (2.24)$$

D'après l'expression (2.24), il apparaît que la réponse du sous-système rapide dépend exclusivement de la valeur des dérivées de l'entrée à l'instant t , des impulsions à l'origine et de l'effet des discontinuités forcées matérialisées par la matrice R_k . En particulier, si on suppose qu'il n'y a pas de sauts à l'instant initial et aux instants $t_k, k = 1, 2, \dots$, (c'est-à-dire $R_k = \mathbb{I}$), alors pour tout $t > t_0$, lorsque t tend vers t_0^+ , on obtient :

$$\xi_2(t_0^+) = - \sum_{r=0}^k \sum_{j=0}^{p_{i_r}-1} \mathcal{J}^j(i_r) B_2(i_r) u^j(t_0^+). \quad (2.25)$$

Les conditions initiales vérifiant cette contrainte sont dites admissibles (Lewis, 1986), (Dai, 1989). Il en découle que, dans notre cadre, pour que le sous-système rapide ne présente pas d'impulsions aux instants de changement de modes $t = t_k$, en plus des sauts générés par les matrices $R_k, k = 1, 2, \dots$, il faut que $\xi_2(t = t_k^+)$ soient admissibles. Ainsi, le premier terme de la réponse du sous-système rapide permet de ramener le système à un état admissible.

Entre autres, les relations (2.24) et (2.25) montrent que le sous-système rapide admettra une trajectoire unique, continue et dérivable par morceaux si les conditions initiales sont admissibles, et la loi de commande est continue et dérivable par morceaux.

Remarque 2.3.2 *En régime libre, pour $t > 0$, la réponse du sous-système rapide*

est identiquement nulle par morceaux. D'un autre côté, étant donné que toute matrice nilpotente a toutes ses valeurs propres égales à 0, ainsi l'ensemble des valeurs propres du faisceau $(E(i), A(i))$ est égal au spectre de A , il apparaît donc que la stabilité stochastique du système (2.8) ne dépend que du sous-système lent. Ce qui n'exclue pas que (2.8) peut incorporer des modes impulsifs. Dans ce sens, les chercheurs ont définie une notion supplémentaire appelée admissibilité (Masubuchi et al., 1997), (Uezato et Ikeda, 1999) (pour éviter le paradoxe d'un système stable avec un comportement impulsif).

Le lemme suivant définit ce concept pour un SSSMD.

Définition 2.3.1 (admissibilité stochastique). Pour tout mode $i \in \mathcal{S}$, le système (2.8) est dit stochastiquement admissible ssi $(E(i), A(i))$ est régulier, non impulsif par morceaux et stochastiquement asymptotiquement stable en moyenne quadratique.

Remarque 2.3.3 Si le système initial (2.8) ne possède qu'un seul mode $\mathcal{S} = \{1\}$, sa solution donnée par (2.21) et (2.24) se réduit à celle du système singulier, présenté dans (Guan et Hill, 2005) (lemme 2.1), qui incorpore une séquence prédéfinie des sauts. De même, si $E(i) = \mathbb{I}, i \in \mathcal{S}$, et $R_k = \mathbb{I}, k = 1, 2, \dots$, celle-ci est équivalente à celle d'un système à sauts markoviens (Mariton, 1990). Alors que si $\mathcal{S} = \{1\}$ et $R_k = \mathbb{I}$, on retrouve la solution d'un système singulier (Dai, 1989). Par conséquent, la solution présentée dans cette section est une formulation générale de l'évolution de la trajectoire de la classe des systèmes singuliers.

Exemple 2.3.1 Pour illustrer l'effet de la matrice $R_k = \mathbb{I}, k = 1, 2, \dots$, sur l'évolution de la trajectoire d'un SSSDM, nous allons considérer l'exemple suiv-

ant :

$$\begin{aligned}
 \Lambda &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, E(1) = E(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \\
 A(2) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, A(3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, R(1) = R(2) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \\
 E(3) &= E(1), R(3) = R(1), x_0 = [1; 1; -1], r_0 = 1.
 \end{aligned}$$

L'évolution de la trajectoire de ce système dans ce cas est illustrée par la figure 2.2. Comme on le voit sur cette courbe, l'évolution temporelle des trois composantes continues, présente des discontinuités aux instants de changement des modes, mais le système converge vers l'état d'équilibre.

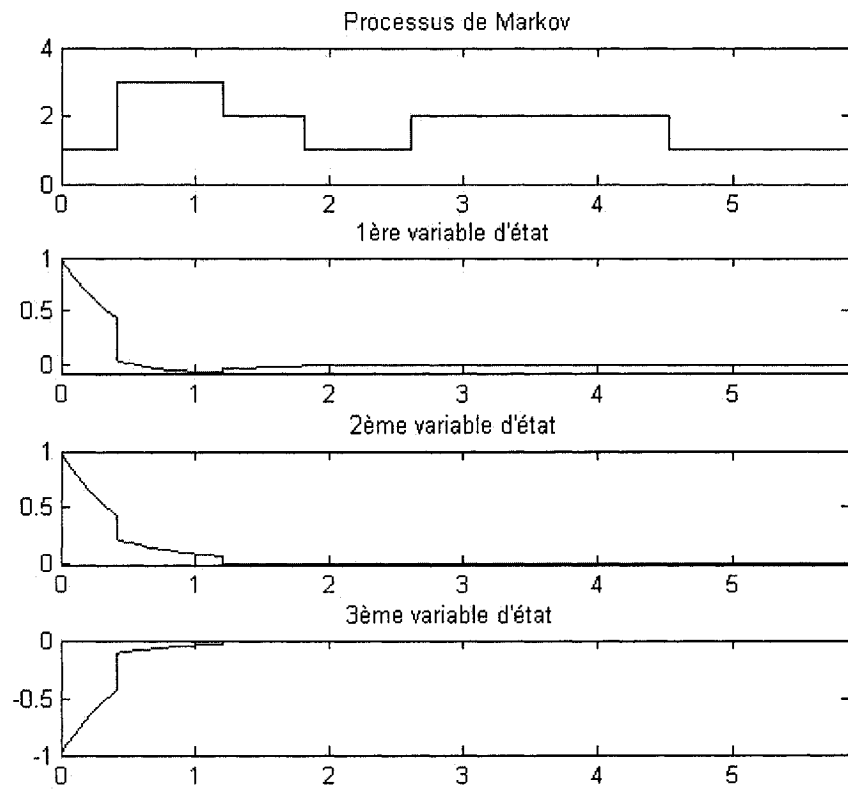


Figure 2.2 Évolution des modes et des variables d'état continues d'un SSSMD stable

2.4 Commandabilité stochastique

La notion de commandabilité des systèmes singuliers est une généralisation de la commandabilité des systèmes standards, en tenant compte de la partie impulsionnelle de la réponse.

Définition 2.4.1 *Pour tout mode $r(t) = i \in \mathcal{S}$, le système (2.8) est dit stochastiquement commandable, si pour toutes conditions initiales $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $r_o \in \mathcal{S}$, pour tout scalaire $\varsigma > 0$ et pour tout $T > t_o > 0$ donné, il existe une loi de commande $u(t)$ continûment dérivable par morceaux, telle que:*

$$\mathbb{E}\{x'(T, x_o, u, t_o, r_o)x(T, x_o, u, t_o, r_o)|x_o, r_o\} < \varsigma.$$

D'après cette définition, la commandabilité stochastique signifie donc la possibilité d'amener, dans un sens quadratique, l'état du système dans un voisinage ς de l'origine en un temps fini T (Ji et Chizeck, 1990).

Le théorème suivant présente des conditions nécessaires et suffisantes pour la commandabilité stochastique du système (2.8) et des parties lente (2.14) et rapide (2.15).

Théorème 2.4.1 *(Dai, 1989; Ji et Chizeck, 1990; Ho et Gao, 2001) Pour tout mode $i \in \mathcal{S}$:*

- *Le sous-système lent (2.14) est stochastiquement commandable ssi :*
- *$\text{rang}[sE(i) - A(i) \ B(i)] = n, \forall s \in \mathbb{C}$, avec s fini.*
- *Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. Le sous-système rapide (2.15) est commandable

2. $\text{rang}[B_2(i) \mathcal{J}(i)B_2(i) \dots \mathcal{J}^{p_i-1}(i)B_2(i)] = n_2$.

3. $\text{rang}[\mathcal{J}(i) B_2(i)] = n_2$.

4. $\text{rang}[E(i) B(i)] = n$.

5. Pour toutes matrices $M(i)$ et N non singulières telles que :

$M(i)E(i)N = \text{diag}(\mathbb{I}_k, 0)$, on pose $M(i)B(i) = [\overline{B}_1^\top \overline{B}_2^\top]^\top$ et $\overline{B}_2^\top \in \mathbb{R}^{(n-k)(n_u)}$ est de plein rang ligne.

• Les propositions suivantes sont équivalentes:

1. Le système (2.8) est commandable.

2. Les sous-systèmes lent (2.14) et rapide (2.15) sont stochastiquement commandables.

3. La matrice $C \in \mathbb{R}^{kn \times (n+m)k}$ est de plein rang ligne:

$$C = \begin{bmatrix} -A(i) & & & B(i) & & \\ E(i) & -A(i) & & B(i) & & \\ & E(i) & \ddots & & B(i) & \\ & & \ddots & -A(i) & & \ddots \\ & & & E(i) & & B(i) \end{bmatrix}$$

4.

$$\begin{cases} \text{rang}[B_1(i) \mathcal{A}(i)B_1(i) \dots \mathcal{A}^{n_1-1}(i)B_1(i)] = n_1, \\ \text{rang}[B_2(i) \mathcal{J}(i)B_2(i) \dots \mathcal{J}^{p_i-1}(i)B_2(i)] = n_2. \end{cases}$$

5. $\text{rang}[sE(i) - A(i) B(i)] = n, \forall s \in \mathbb{C}$ où s est fini et $\text{rang}[E(i) B(i)] = n$.

2.5 Observabilité stochastique

L'observabilité d'un processus est un concept très important en automatique. En effet, pour reconstruire l'état d'un système, il faut savoir à priori, si les variables d'état sont observables ou non.

Ce concept se généralise aux SSSMD de la même manière que celui de la commandabilité stochastique. Ainsi, comme dans le cas des systèmes standards, l'observabilité stochastique d'un SSSMD se définit comme la possibilité de reconstruire l'état initial à partir de la connaissance du système de la commande et de la sortie du système durant un intervalle de temps fini (Ji et Chizeck, 1990).

Définition 2.5.1 *Le système (2.8) est dit stochastiquement observable s'il existe un instant T fini, tel que la connaissance de l'entrée $u(t)$ et de la sortie $y(t)$ du système sur l'intervalle $[t_o, T]$ fini suffisent pour déterminer l'état initial x_o .*

Le théorème suivant présente des conditions nécessaires et suffisantes pour l'observabilité du système (2.8) et des parties lente (2.14) et rapide (2.15).

Théorème 2.5.1 *(Dai, 1989; Ji et Chizeck, 1990; Ho et Gao, 2001) Pour tout mode $i \in \mathcal{S}$:*

- *Le sous-système lent (2.14) est observable ssi :*

$$\text{rang}[sE^\top(i) - A^\top(i) C^\top(i)] = n, \forall s \in \mathbb{C}, \text{ avec } s \text{ fini.}$$
- *Les propositions suivantes sont équivalentes:*
 1. *Le sous-système rapide (2.15) est observable*
 2. $\text{rang}[C_2^\top(i) \mathcal{J}^\top(i) C_2^\top(i) \dots (\mathcal{J}^{p_i-1})^\top(i) C_2^\top(i)] = n_2.$

$$3. \text{rang}[\mathcal{J}^\top(i) \ C_2^\top(i)] = n_2.$$

$$4. \text{rang}[E^\top(i) \ C^\top(i)] = n.$$

5. Pour toutes matrices non singulières $M(i)$ et N telles que :

$$M(i)E(i)N = \text{diag}(\mathbb{I}_k, 0), \text{ on pose } C(i)N(i) = [\bar{C}_1^\top \ \bar{C}_2^\top]^\top \text{ et } \bar{C}_2^\top \in \mathbb{R}^{m \times (n-k)} \text{ est de plein rang colonne.}$$

• Les propositions suivantes sont équivalentes:

1. Le système (2.8) est observable.

2. Les sous-systèmes lent (2.14) et rapide (2.15) sont stochastiquement observables.

3. La matrice $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{n^2 \times (n+m-1)n}$ est de plein rang colonne:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} -A^\top(i) & & & C^\top(i) & & \\ E^\top(i) & -A^\top(i) & & & C^\top(i) & \\ & E^\top(i) & \ddots & & & C^\top(i) \\ & & \ddots & -A^\top(i) & & \ddots \\ & & & E^\top(i) & & & C^\top(i) \end{bmatrix}$$

4.

$$\begin{cases} \text{rang}[C_1^\top(i) \ \mathcal{A}^\top(i)C_1^\top(i) \dots (\mathcal{A}^{n_1-1})^\top(i)C_1^\top(i)] = n_1, \\ \text{rang}[C_2^\top(i) \ \mathcal{J}^\top(i)C_2^\top(i) \dots (\mathcal{J}^{h_i-1}(i))^\top C_2^\top(i)] = n_2. \end{cases}$$

5. $\text{rang}[sE^\top(i) - A^\top(i) \ C^\top(i)] = n, \forall s \in \mathbb{C}$ où s est fini et $\text{rang}[E^\top(i) \ C^\top(i)] = n$.

2.6 Stabilité stochastique

La stabilité est une propriété fondamentale d'un système standard, puisqu'elle garantit que la réponse du système ne diverge pas en réponse à une entrée ou à une condition initiale finie. Pour les SSSMD, l'étude de cette propriété structurelle s'avère plus compliquée que celle des systèmes standards, car non seulement il faut étudier la stabilité interne du système, mais aussi de garantir les propriétés de régularité et d'immunité d'impulsions pour les raisons citées auparavant.

Dans le cadre de la théorie de Lyapunov, il y a deux façons de choisir la fonction de Lyapunov pour les systèmes hybrides en général, la première consiste à prendre une fonction de Lyapunov commune pour tous les modes, la deuxième approche est la fonction de Lyapunov continue par morceaux (voir annexe IV, eq IV.2). Néanmoins, l'utilisation de ce type de fonction de Lyapunov cause des problèmes lors de l'analyse de la stabilité d'un système à sauts, dont la logique de commutation est connue, et ceci est dû essentiellement à la discontinuité de la fonction de Lyapunov qui survient au moment des commutations. En effet, pour que le système considéré soit stable, il faut que la fonction globale de Lyapunov qui lui est associée décroisse continuellement, ce qui peut ne pas être vérifié aux instants des commutations. Pour contourner ce problème, il faut non seulement trouver une fonction de Lyapunov qui décroisse pour les différents modes, mais en plus, il faut s'assurer que la fonction de Lyapunov globale décroisse aux instants des commutations (Pettersson et Lennartson, 1997b), (Pettersson et Lennartson, 1997a). En d'autres termes, si le système saute du mode i au mode j , il faut que la fonction de Lyapunov juste après la commutation soit inférieure ou égale à celle qu'avait le système juste avant le saut. Ceci reste vrai tant que les variables continues du système ne subissent pas de discontinuités après chaque commutation et seul le mode change. Dans le cas contraire, (Pettersson et Lennartson, 1997a) ont proposé une approche basée sur le

principe d'une fonction de Lyapunov continue par morceaux et sur le formalisme LMI. En tenant compte de l'amplitude du saut de l'état continu du système, cette approche permet d'assurer que le système hybride soit stable même en présence de discontinuités sur la composante continue. Pour plus de détail sur le sujet, le lecteur peut consulter (Pettersson et Lennartson, 1997b), (Decarlo et al., 2000). Dans (Shunjin et al., 2004), le cas où les instants de sauts sont aléatoires a été traité pour l'étude de la p-stabilité uniforme d'un système non linéaire stochastique, perturbé par une commutation aléatoire (non markovienne). D'après leur résultat (Théorème 1), la condition qu'il faut ajouter aux conditions que doit vérifier un système non linéaire stochastique sans sauts, pour qu'il soit uniformément p-stable, est que le rapport des espérances de la fonction de Lyapunov juste avant le saut et après le saut doit être inférieur à une certaine fonction définie positive et vérifiant une certaine contrainte de convergence.

Étant donné que ce cas de figure se présente aussi pour les SSSMD lors de l'étude de la stabilité, dans la section suivante, nous allons nous inspirer des travaux cités ci-dessus pour établir un critère d'admissibilité stochastique d'un SSSMD. Pour cela, nous allons utiliser la fonction de Lyapunov stochastique et la technique d'optimisation convexe qui utilise une formulation en termes de LMIs. Toutefois, avant de présenter ce résultat, nous allons introduire ce lemme qui va être utilisé dans l'élaboration de ce dernier.

Lemme 2.6.1 *Considérons la fonction de Lyapunov (2.11) et son générateur infinitésimal associé $\mathbb{L}$, ainsi, pour tout mode $i \in \mathcal{S}$, et tout scalaire positif h_k , tel que $0 \leq h_k \leq 1$, on a :*

- a) $\mathbb{E}[V(x(t), i)] - \mathbb{E}[V(x(\tau_k^+), i_k)] = \mathbb{E}\left[\int_{\tau_k}^t \mathbb{L}V(x(s), i(s))ds | (x(\tau_k), i_k)\right].$
- b) $\mathbb{E}[V(x(\tau_k^+), i(k))] \leq h_k^2 \mathbb{E}[V(x(\tau_k), i(k))].$

- c) $\mathbb{E} \left[\int_{t_0}^T \mathbb{L}V(x(s), i(s)) ds | (x_0, i_0) \right] = \mathbb{E}[V(x(T), i)] - \mathbb{E}[V(x_0, i_0)]$
 $+ \sum_{p=1}^l (1 - h_p^2) \mathbb{E}[V(x(\tau_p), i_p)],$
 où l est le nombre des sauts du système (2.8) avec $u(t) = 0$ sur tout intervalle $[t_0, T]$.

Preuve : a) la première relation du lemme 2.6.1, peut être obtenue par application directe de la formule de Dynkin sur tout intervalle $(\tau_k, t], k = 1, 2, \dots$, cette formule est donnée par le lemme suivant :

Lemme 2.6.2 (Skorohod, 2004) : Soit $\{r(t), t \geq 0\}$ un processus de Markov continu à droite et $V(x(t), r(t))$ une fonction stochastique de Lyapunov définie dans le domaine de $\mathbb{L}$ qui est le générateur infinitésimal, alors pour tous temps d'arrêt aléatoire, t_1, t_2 tels que $0 \leq t_1 \leq t_2 < +\infty$:

$$\mathbb{E} \left[\int_{t_1}^{t_2} \mathbb{L}V(x(s), r_s) ds | (x(t_1), r(t_1)) \right] = \mathbb{E}[V(x(t_2), r(t_2))] - \mathbb{E}[V(x(t_1), r(t_1))]. \quad (2.26)$$

b) Il est à noter que pour tout mode i_k et instant de saut $t = \tau_k$, la fonction de Lyapunov (2.11) est exprimée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V(x(\tau_k^+), i(k))] &= \mathbb{E}[x^\top(\tau_k^+) E^\top(i_k) P(i_k) x(\tau_k^+)] \\ &= \mathbb{E}[x(\tau_k) R^\top(i_k i_{k+}) E^\top(i_k) P(i_k) R(i_{k-1}, i_k) x(\tau_k)] \\ &\leq \mathbb{E}[\|E^\top(i_k) P(i_k) R(i_{k-1}, i_k) x(\tau_k)\|^2] \\ &\leq \mathbb{E}[\|E^\top(i_k) P(i_k)\|^2 \|R(i_{k-1}, i_k)\|^2 \|x(\tau_k)\|^2] \\ &\leq \mathbb{E}[\|E^\top(i_k) P(i_k)\|^2 \max \|R(i_{k-1}, i_k)\|^2 \|x(\tau_k)\|^2]. \end{aligned}$$

En outre, en utilisant la majoration (2.6), on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[V(x(\tau_k^+), i(k))] &\leq h_k^2 \mathbb{E}[\|E^\top(i_k)P(i_k)x(\tau_k)\|^2] \\ &= h_k^2 \mathbb{E}[x^\top(\tau_k)E^\top(i_k)P(i_k)x(\tau_k)].\end{aligned}\quad (2.27)$$

Il est à remarquer que le dernier terme de la relation (2.27) n'est autre que la fonction de Lyapunov du système (2.1) se trouvant au mode i_k à l'instant τ_k , ceci démontre b).

c) Pour tout t appartenant à l'intervalle $[t_0, T]$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_{t_0}^T \mathbb{L}V(x(s), i_s)ds | (x_0, i_0)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{\tau_1} \mathbb{L}V(x(s), i_s)ds | (x_0, i_0)\right] \\ &+ \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathbb{L}V(x(s), i_s)ds | (x_1, i_1)\right] + \dots + \left[\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \mathbb{L}V(x(s), i_s)ds | (x_{\tau_{k-1}}, i_{k-1})\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_{\tau_k}^T \mathbb{L}V(x(s), i_s)ds | (x_{\tau_k}, i_k)\right].\end{aligned}$$

En outre, en utilisant la première relation *a*) du lemme 2.6.1, on aboutit à :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^T \mathbb{L}V(x(s), i_s)ds | (x_0, i_0)\right] &= \mathbb{E}[V(x(\tau_1), i_1)] - \mathbb{E}[V(x_0, i_0)] \\ &+ \mathbb{E}[V(x(\tau_2), i_2)] - \mathbb{E}[V(x(\tau_1^+), i_1)] + \dots + \\ &\mathbb{E}[V(x(\tau_k), i_k)] - \mathbb{E}[V(x(\tau_{k-1}^+), i_{k-1})] + \mathbb{E}[V(x(T), i)] - \mathbb{E}[V(x(\tau_k^+), i_k)]\end{aligned}$$

Au terme de cette égalité, considérons la relation *b*) du lemme 2.6.1, il en découle :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_{t_0}^T \mathbb{L}V(x(s), i_s)ds | (x_0, i_0)\right] &= \mathbb{E}[V(x(\tau_1), i_1)] - \mathbb{E}[V(x_0, i_0)] \\ &+ \mathbb{E}[V(x(\tau_2), i_2)] - h_1^2 \mathbb{E}[V(x(\tau_1), i_1)] + \dots + \\ &\mathbb{E}[V(x(\tau_k), i_k)] - h_{k-1}^2 \mathbb{E}[V(x(\tau_{k-1}), i_{k-1})] + \mathbb{E}[V(x(T), i)] - h_{k-1}^2 \mathbb{E}[V(x(\tau_k), i_k)] \\ &= \sum_{p=1}^l (1 - h_p^2) \mathbb{E}[V(x(\tau_p), i_p)] + \mathbb{E}[V(x(T), i)] - \mathbb{E}[V(x_0, i_0)].\end{aligned}$$

Maintenant, nous sommes en mesure d'énoncer le critère d'admissibilité stochastique d'un SSSMD. Celui-ci est donné par le théorème suivant :

Théorème 2.6.1 *S'il existe un ensemble de matrices non singulières*

$P = (P(1), \dots, P(N))$, *tel que la LMI suivante est vérifiée pour tout mode $i \in \mathcal{S}$:*

$$A^\top(i)P(i) + P^\top(i)A(i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} R^\top(ij) E^\top(j) P(j) R(ij) < 0 \quad (2.28)$$

sous la contrainte :

$$E^\top(i)P(i) = P^\top(i)E(i) \geq 0, \quad (2.29)$$

alors le système nominal (2.8) avec $u(t) = 0$, $t \geq 0$ est stochastiquement asymptotiquement admissible.

Preuve : Supposons qu'il existe un ensemble de matrices non singulières $P(i), i \in \mathcal{S}$, tel que les relations (2.28) et (2.29) sont satisfaites, et commençons par montrer la régularité et l'absence d'impulsions dans le système considéré. Pour cela, nous allons adopter la même approche illustrée dans (Xu et al., 2002), qui consiste à décomposer le système singulier avec retard en valeurs singulières (voir annexe II, eq. II.3). Dans le cadre de l'étude d'un SSSMD, cette forme équivalente est basée

sur l'existence de deux matrices non singulières $M(i)$ et N telles que (Dai, 1989) :

$$\bar{E}(i) = M(i)E(i)N = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

$$\bar{A}(i) = M(i)A(i)N = \begin{bmatrix} A_1(i) & A_2(i) \\ A_3(i) & A_4(i) \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

$$\bar{P}(i) = M^{-\top}(i)P(i)N = \begin{bmatrix} P_1(i) & P_3(i) \\ P_2(i) & P_4(i) \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

$$\bar{R}(i) = N^{-1}R(ij)N = \begin{bmatrix} R_1(ij) & R_3(ij) \\ R_2(ij) & R_4(ij) \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Alors en multipliant à droite et à gauche l'équation (2.29) par $N^\top$ et N , on aura :

$$N^\top E^\top(i)P(i)N = N^\top P^\top(i)E(i)N \geq 0 \quad (2.34)$$

ceci implique que :

$$N^\top E^\top(i)M^\top(i)M^{-\top}(i)P(i)N = N^\top P^\top(i)M^{-1}(i)M(i)E(i)N \geq 0 \quad (2.35)$$

Et en tenant en considération (2.32) et (2.30), on obtient :

$$\bar{E}^\top(i)\bar{P}(i) = \bar{P}^\top(i)\bar{E}(i) \geq 0 \quad (2.36)$$

Il est à noter que d'après (2.36), il faut que $P_3(i) = 0$.

De même, multiplions à droite et à gauche l'inégalité (2.28) par $N^\top$ et N , cette

dernière devient :

$$N^\top P^\top(i)M^{-\top}(i)M(i)A(i)N + N^\top A^\top(i)M^\top(i)M^{-\top}(i)P(i)N \\ + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} N^\top R^\top(ij)N^{-\top} N^\top E^\top(j)M^\top(j)M^{-\top}(j)P(j)NN^{-1}R(ij)N < 0$$

ce qui est équivalent à :

$$\bar{P}^\top(i)\bar{A}(i) + \bar{A}^\top(i)\bar{P}(i) + \sum_{j=1}^N \pi_j \bar{R}^\top(ij)\bar{E}^\top(j)\bar{P}(j)\bar{R}(ij) \\ = \begin{bmatrix} A_1^\top(i) & A_3^\top(i) \\ A_2^\top(i) & A_4^\top(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(i) & 0 \\ P_2(i) & P_4(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1^\top(i) & P_2^\top(i) \\ 0 & P_4^\top(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(i) & A_2(i) \\ A_3(i) & A_4(i) \end{bmatrix} \\ + \sum_{j=1}^N \pi_j \begin{bmatrix} R_1^\top(ij) & R_2^\top(ij) \\ R_3^\top(ij) & R_4^\top(ij) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(j) & 0 \\ P_2(j) & P_4(j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(ij) & R_3(ij) \\ R_2(ij) & R_4(ij) \end{bmatrix} < 0$$

Ainsi, on a :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_1(i) & \mathcal{A}_2(i) \\ \mathcal{A}_3(i) & \mathcal{A}_4(i) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.37)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(i) &= A_1^\top(i)P_1(i) + P_1^\top(i)A_1(i) + A_3^\top(i)P_2(i) + P_2^\top(i)A_3(i) + R_1^\top(i)P_1(i)R_1(i), \\ \mathcal{A}_2(i) &= A_3^\top(i)P_4(i) + P_1^\top(i)A_2(i) + P_2^\top(i)A_4(i) + R_1^\top(i)P_1(i)R_3(i), \\ \mathcal{A}_3(i) &= A_2^\top(i)P_1(i) + A_4^\top(i)P_2(i) + P_4^\top(i)A_3(i) + R_3^\top(i)P_1(i)R_1(i), \\ \mathcal{A}_4(i) &= P_4^\top(i)A_4(i) + A_4^\top(i)P_4(i) + R_3^\top(i)P_1(i)R_3(i). \end{aligned}$$

D'après (2.37) on a :

$$P_4^\top(i)A_4(i) + A_4^\top(i)P_4(i) + R_3^\top(i)P_1(i)R_3(i) < 0. \quad (2.38)$$

et comme $R_3^\top P_1 R_3 \geq 0$, d'après le lemme 2.2.3, il s'ensuit que :

$$\operatorname{Re} \lambda \left(P_4^\top(i) A_4(i) \right) \leq \rho \left(P_4^\top(i) A_4(i) \right) = \frac{1}{2} \lambda_{\max} \left(P_4^\top(i) A_4(i) + A_4^\top(i) P_4(i) \right) < 0,$$

ceci entraîne que $A_4^\top(i) P_4(i)$ est inversible, ce qui implique que les matrices $A_4(i)$ sont non singulières, et par conséquent, d'après le lemme 2.2.3 et la remarque 2.2.2, nous pouvons déduire que le système nominal (2.8) avec $u(t) = 0$ est non impulsif par morceaux et régulier, pour chaque mode fixe $i \in \mathcal{S}$.

Par la suite, nous allons prouver la stabilité stochastique. Pour cela, considérons la fonction stochastique de Lyapunov (2.11), ainsi, le générateur infinitésimal du processus de Markov $\{x(t), r_t, t \geq t_0\}$ (2.12) peut être évalué par :

$$\begin{aligned} \mathbb{L}V(x(t), i) &= \dot{x}^\top(t) E^\top(i) P(i) x(t) + x^\top(t) E^\top(i) P(i) \dot{x}(t) \\ &\quad + \sum_{j=1, j \neq i}^N \pi_{ij} [V(R(ij)x, j) - V(x, i)] \\ &= x^\top(t) \Theta(i) x(t) \end{aligned}$$

avec :

$$\Theta(i) = A^\top(i) P(i) + P^\top(i) A(i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} R^\top(ij) E^\top(j) P(j) R(ij).$$

D'après le Théorème (2.6.1), nous pouvons déduire que pour tout mode $i \in \mathcal{S}$, $\Theta(i) < 0$. Par conséquent, il en résulte que :

$$\mathbb{L}V(x(t), i) \leq -\min_{i \in \mathcal{S}} [\lambda_{\min}(-\Theta(i))] x^\top(t) x(t) \quad (2.39)$$

En intégrant (2.39) sur l'intervalle $[t_0, T]$, on obtient :

$$\int_{t_0}^T \mathbb{L}V(x(t), i) \leq - \int_{t_0}^T \min_{i \in \mathcal{S}} [\lambda_{\min}(-\Theta(i))] x^\top(s) x(s) ds \quad (2.40)$$

En combinant (2.40) avec l'utilisation de la formule de Dynkin (lemme 2.6.2), appliquée sur l'intervalle $[t_0, T]$, on a :

$$\mathbb{E}[V(x(T), i)] - \mathbb{E}[V(x_0, i_0)] \leq -\mathbb{E} \int_{t_0}^T \min_{i \in \mathcal{S}} [\lambda_{\min}(-\Theta(i))] x^\top(s) x(s) ds$$

Prenant en considération le lemme 2.6.1, (relation c), cette dernière inégalité devient :

$$\begin{aligned} \min_{i \in \mathcal{S}} \{\lambda_{\min}(-\Theta(i))\} \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^T x^\top(s) x(s) ds | (x_0, i_0) \right] &\leq \mathbb{E}[V(x_0, i_0)] - \mathbb{E}[V(x(T), i)] \\ &\quad - \sum_{p=1}^l (1 - h_p^2) \mathbb{E}[V(x(\tau_p), i_p)]. \end{aligned}$$

Sachant que pour tout $p = 1, 2..l$, $0 < h_p < 1$, il s'en suit que :

$$\mathbb{E}[V(x(T), i)] + \sum_{p=1}^{\infty} (1 - h_p^2) \mathbb{E}[V(x(\tau_p), i_p)] \geq 0$$

Ainsi, en tendant T vers l'infini, on aboutit à l'inégalité suivante :

$$\mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{\infty} x^\top(s) x(s) ds | (x_0, i_0) \right] \leq T(x_0, i_0), \quad (2.41)$$

avec $T(x_0, i_0) = \frac{\mathbb{E}[V(x_0, i_0)]}{\min_{i \in \mathcal{S}} \{\lambda_{\min}(-\Theta(i))\}}$.

comme $T(x_0, i_0)$ est une constante strictement positive pour tout x_0 non nul, ceci montre que $\mathbb{E}\|x(t)\|^2$ est bornée. D'un autre côté, d'après l'équation dynamique (2.8) du système nominal étudié, il s'en suit que $\|\dot{x}(t)\|$ est bornée. En plus, $\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 = 2\|x(t)\|\|\dot{x}(t)\|$ est aussi bornée. Ainsi, en faisant appel au lemme 2.2.4, on en déduit que $\|x(t)\|^2$ est uniformément continue. En plus, prenant en considération l'inégalité (2.41) et en utilisant le lemme de Barbalat 2.2.5, on peut alors conclure que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}\|x(t)\|^2 = 0$. Ceci démontre le Théorème 2.6.1.

Remarque 2.6.1 *Le Théorème 2.6.1 fournit une condition suffisante d'admissibilité stochastique du SSSDM nominal (2.8) avec $u(t) \equiv 0$. Celle-ci est intéressante par la simplicité du test numérique associé, en outre:*

- *quand $R(ij) = \mathbb{I}, i, j \in \mathcal{S}$, celle-ci se ramène à celle que doit vérifier un système singulier avec sauts markoviens pour être stochastiquement admissible (Raouf et Boukas, 2004b; Boukas, 2005).*
- *lorsque le système (2.8) ne possède qu'un seul mode ($N = 1$) et $R(ij) = \mathbb{I}, i, j \in \mathcal{S}$, on retrouve la condition d'admissibilité d'un système singulier développée par (Masubuchi et al., 1997) (voir annexe III, eq. III.4).*
- *quant $E(i) = \mathbb{I}, i \in \mathcal{S}$, la LMI (2.28) correspond au critère d'admissibilité stochastique d'un système avec sauts markoviens et discontinuités sur la composante continue donné par (Pavel et al., 2005).*
- *Finalement, pour le cas $E(i) = \mathbb{I}$ et $R(ij) = \mathbb{I}, i, j \in \mathcal{S}$, la LMI (2.28) n'est autre que la condition que doit vérifier un système à sauts markoviens pour être stochastiquement stable (Mariton, 1990; Boukas, 2005; De Farias et al., 2000) (voir annexe III, eq.III.4).*

En raison de ceux-ci, le Théorème 2.6.1 peut être considéré comme une extension des résultats existants sur la stabilité stochastique, des systèmes standards à sauts markoviens et discontinuité sur la composante continue, et sur l'admissibilité des systèmes singuliers. $\triangle$

Exemple 2.6.1 *Pour illustrer ce résultat, considérons le même exemple (2.3.1) utilisé précédemment. Les LMIs à résoudre sont celles du Théorème 2.6.1, elles*

sont réalisables et aboutissent aux résultats suivants :

$$\begin{aligned}
 P(1) &= \begin{bmatrix} 0.4359 & -0.0620 & 0.0000 \\ -0.0620 & 0.5404 & 0.0000 \\ 0.4671 & -0.4019 & 0.7337 \end{bmatrix}, P(2) = \begin{bmatrix} 0.5388 & 0.0812 & 0.0000 \\ 0.0812 & 0.5217 & 0.0000 \\ 0.2527 & 0.0499 & 0.3027 \end{bmatrix}, \\
 P(3) &= \begin{bmatrix} 0.3753 & -0.0750 & 0.0000 \\ -0.0750 & 0.3873 & 0.0000 \\ 0.6670 & -0.1349 & 0.3728 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que les matrices $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$ sont non singulières, et par conséquent, d'après le Théorème 2.6.1, on peut conclure que le système étudié est stochastiquement admissible.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons d'abord introduit le modèle d'un SSSMD, nous avons vu que celui-ci peut être considéré comme une généralisation de l'espace des états standards et généralisés. Ensuite nous avons rappelé quelques unes des propriétés structurelles de cette classe de système: l'accent a été mis sur la régularité, l'absence d'impulsions, la commandabilité, l'observabilité ainsi que sur la stabilité stochastique basée sur l'étude du comportement du système. D'un autre côté, nous avons présenté quelques concepts et outils mathématiques qui seront intensivement utilisés tout au long de cette thèse. Parmi ceux-ci on retrouve la fonction stochastique de Lyapunov et le générateur infinitésimal qui lui est associé.

Dans une deuxième partie, l'étude de l'existence d'une trajectoire unique du système étudié est considérée. Dans ce sens, nous avons montré qu'un tel système présente des impulsions dans l'évolution de sa trajectoire, dues soit à des conditions initiales non admissibles, soit à des lois de commande qui ne sont pas continues et dérivables par morceaux.

En outre nous avons constaté que le phénomène des discontinuités aux moments des sauts, des composantes continues de ce type de système, ajoute un niveau de difficulté supplémentaire lors de l'analyse de la stabilité stochastique de ce type de système. Difficulté que nous sommes parvenues à surmonter en supposant que l'amplitude des discontinuités est finie. Ainsi, nous avons proposé une condition suffisante de stabilité stochastique asymptotique en moyenne quadratique, qui permet de vérifier qu'un SSSMD est stochastiquement admissible. Le résultat proposé est exprimé sous forme de LMIs, ainsi il peut être facilement implanté à l'aide d'outils numériques largement répandus sur le marché, notamment Matlab, Scilab, Sédumi et Yalmip. Entre autre, ce résultat sera à la base de la synthèse des différents types de lois de commande qui feront l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE 3

STABILISATION STOCHASTIQUE

3.1 Introduction

La conception d'un système de commande s'applique aux systèmes qui sont par construction instables ou dont les performances ne sont pas acceptables. D'un point de vue pratique, le problème lié à la stabilisation consiste à déterminer la loi de commande qui force la dynamique du système étudié en boucle fermée à être stable et à garantir les performances souhaitées concernant le design.

Différentes architectures de commande peuvent être envisagées, et l'utilisation de chacune de ces architectures dépend principalement de l'accès aux variables d'état continues qui peut être total, ou partiel pour le retour (bouclage) et selon qu'on est intéressé à rejeter les effets des perturbations externes qui peuvent affecter le fonctionnement du système, ou éviter la saturation de la commande.

Ce chapitre traite le problème de stabilisation stochastique d'un SSSMD. Il est composé de trois parties: la première partie est consacrée à l'étude de la stabilisation stochastique et la synthèse d'une loi de commande par retour d'état qui garantit que le SSSMD en boucle fermée est stochastiquement admissible. Cette approche s'appuie sur l'exploitation des conditions d'admissibilité stochastique développées dans le chapitre précédent. Le résultat obtenu est exprimé sous forme de LMIs avec contraintes. Les deuxième et troisième parties seront dédiées aux problèmes de la commande $\mathcal{H}_\infty$, et au problème de la commande avec saturation d'un SSSMD. La synthèse de telles lois de commande assurent non seulement l'admissibilité stochas-

tique de celui-ci, mais en plus, confèrent certains niveaux de performance pour le système en boucle fermée, en termes de rejet des perturbations externes et de non violation des contraintes d'amplitudes sur la commande. Tous les résultats proposés seront exprimés sous forme de LMIs avec contraintes.

Tout d'abord commençons par l'étude de la stabilisation du système étudié par un retour d'état, ceci fera l'objet de la section suivante.

3.2 Commande stochastique par retour d'état

Pour étudier ce problème de commande stochastique pour un SSSMD, nous allons dans un premier temps définir la notion de stabilisabilité stochastique pour ce type de système, comme suit :

Définition 3.2.1 *Le système (2.1) nominal, avec la commande $u(t)$ non saturée et $w(t) = 0$, est stochastiquement stabilisable, si pour toutes conditions initiales x_0 et r_0 , et pour tout mode $r(t) = i$, il existe une loi de commande linéaire :*

$$u(t) = K(r(t))x(t) \quad (3.1)$$

telle que le système bouclé est stochastiquement admissible, avec $K(i)$ est le gain à déterminer.

Ensuite, dans tout ce qui suit, nous allons supposer que:

H1 Le système (2.8) nominal est stochastiquement stabilisable.

H2 Le mode $r(t)$ est mesurable.

H3 Le vecteur d'état $x(t)$ du système est parfaitement mesurable.

En outre, nous allons faire appel au lemme suivant pour majorer les parties inconnues des incertitudes :

Lemme 3.2.1 (*Cao et al., 2000*) Soient E , F et G trois matrices réelles de dimensions appropriées, alors pour tout scalaire $\varepsilon > 0$ et pour toute matrice F vérifiant $F^T F \leq I$, on a l'inégalité suivante : $EFG + G^T F^T E^T \leq \varepsilon E E^T + \varepsilon^{-1} G^T G$.

Notre objectif est de concevoir une loi de commande par retour d'état qui garantie que le système en boucle fermé soit stochastiquement admissible. Le Théorème suivant résume ce résultat :

Théorème 3.2.1 *S'il existe un ensemble de matrices non singulières*

$P = (P(1), \dots, P(N))$, $X = (X(1), \dots, X(N))$, un ensemble de matrices symétriques définies-positives $V_P = (V_P(1), \dots, V_P(N))$ et $Z_P = (Z_P(1), \dots, Z_P(N))$, et un ensemble de scalaires positifs $\varepsilon = (\varepsilon(11), \dots, \varepsilon(1N))$, tel que les inégalités matricielles suivantes :

$$\begin{bmatrix} \Pi(i) & X^T(i) & \mathcal{S}^T(i) \\ X(i) & -Z_P(i) & \mathbf{0} \\ \mathcal{S}(i) & \mathbf{0} & -\mathcal{X}(i) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.2)$$

$$\begin{bmatrix} V_P(i) & W(i) \\ W^T(i) & \mathcal{P}(i) \end{bmatrix} > 0 \quad (3.3)$$

avec :

$$\Pi(i) = X^T(i)A^T(i) + A(i)X(i) + Y^T(i)B^T(i) + B(i)Y(i) + \pi_{ii}X^T(i)E^T(i), \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} W(i) = & [R^T(i1)E^T(1)P(1)R(i1), \dots, R^T(ii-1)E^T(i-1)P(i-1)R(ii-1), \\ & R^T(ii+1)E^T(i+1)P(i+1)R(ii+1), \dots, R^T(iN)E^T(N)P(N)R(iN)], \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\mathcal{P}(i) = \text{diag}[\varepsilon^{-1}(i1)\mathbb{I}, \dots, \varepsilon^{-1}(ii-1)\mathbb{I}, \varepsilon^{-1}(ii+1)\mathbb{I}, \dots, \varepsilon^{-1}(iN)\mathbb{I}] \quad (3.6)$$

$$\mathcal{S}(i) = \frac{1}{2} [\pi_{i1} X^\top(i), \dots, \pi_{ii-1} X^\top(i), \pi_{ii+1} X^\top(i), \dots, \pi_{iN} X^\top(i)], \quad (3.7)$$

$$\mathcal{X}(i) = \text{diag}[\varepsilon(i1)\mathbb{I}, \dots, \varepsilon(ii-1)\mathbb{I}, \varepsilon(ii+1)\mathbb{I}, \dots, \varepsilon(iN)\mathbb{I}]. \quad (3.8)$$

sont vérifiées pour tout mode $i \in \mathcal{S}$, sous les contraintes d'égalité :

$$E^\top(i)P(i) = P^\top(i)E(i) \geq 0, \quad (3.9)$$

$$P(i)X(i) = \mathbb{I}, \quad (3.10)$$

$$V_P(i)Z_P(i) = \mathbb{I}, \quad (3.11)$$

alors le système considéré en boucle fermée est stochastiquement admissible sous la loi de commande (3.1), dont le gain est donné pour tout $i \in \mathcal{S}$, par :

$$K(i) = Y(i)X^{-1}(i). \quad (3.12)$$

Preuve : Pour cela, considérons le système (2.8) bouclé, sans incertitudes. D'après le Théorème 2.6.1, ce système sera stochastiquement admissible si en plus de la contrainte égalité (3.9), celui-ci vérifie l'ensemble des inégalités matricielles suivantes:

$$\begin{aligned} & A^\top(i)P(i) + P^\top(i)A(i) + P^\top(i)B(i)K(i) + K^\top(i)B^\top(i)P(i) \\ & + \sum_{i,j=1}^N \pi_{ij} R^\top(ij)E^\top(j)P(j)R(ij) < 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Remarque 3.2.1 Il est à remarquer que l'inégalité (3.13) est non linéaire, et ceci est dû au produit entre les variables de décision, à savoir la matrice $P(i)$ et la matrice gain $K(i), i \in \mathcal{S}$. Toutefois, pour formuler ce problème en un problème d'optimisation, on peut multiplier à gauche et à droite l'inégalité ci-dessus, par $P^{-T}(i)$ et $P^{-1}(i)$ respectivement, et en posant $X(i) = P^{-T}(i)$ et procédant au changement de variable $Y(i) = K(i)X(i)$, on peut linéariser les différents termes de cette inégalité, sauf le terme sous la sommation qui devient non

linéaire, en plus la singularité du terme $E^\top(j)P(j)$ rend impossible toute tentative de linéarisation par utilisation du complément de Schur (voire annexe I, lemme I.2.1), habituellement utilisé dans de telles situations. Pour résoudre ce dernier problème, (Boukas, 2005) et (Boukas et Xu, 2005d) ont introduit la contrainte suivante $E^\top(j)P(j) \geq \varepsilon(ij)P^\top(j)P(j)$, Cependant, cette contrainte reste très restrictive dans la mesure où elle engendre par multiplication à gauche et à droite, par $P^{-T}(i)$ et $P^{-1}(i)$, l'inégalité $X^\top(j)E^\top(j) \geq \varepsilon(ij)\mathbb{I}$, ce qui peut créer des problèmes numériquement.

Pour éviter cela, transformons tout d'abord le terme $\sum_{j=1}^N \pi_{ij} R^\top(ij)E^\top(j)P(j)R(ij)$ par le biais du lemme suivant :

Lemme 3.2.2 • Il existe un ensemble de scalaires positifs $\{\varepsilon(ij), j = 1, j \neq i, i \in \mathcal{S}\}$ tel que l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1, j \neq i}^N \pi_{ij} R^\top(ij)E^\top(j)P(j)R(ij) &\leq \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{4} \pi_{ij}^2 \varepsilon^{-1}(ij) \mathbb{I} \\ + \sum_{j=1, j \neq i}^N \varepsilon(ij) [R^\top(ij)E^\top(j)P(j)R(ij)]^\top [R^\top(ij)E^\top(j)P(j)R(ij)]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

- Pour tout mode $i \in \mathcal{S}$, supposons qu'il existe un ensemble de matrices symétriques définies-positives $V_P(i)$, tel que :

$$\sum_{j=1, j \neq i}^N \varepsilon_{ij} [R^\top(ij)E^\top(j)P(j)R(ij)]^\top [R^\top(ij)E^\top(j)P(j)R(ij)] < V_P(i) \quad (3.15)$$

alors l'inégalité ci-dessus peut être transformée en la LMI (3.3) du Théorème 3.2.1.

Remarque 3.2.2 Ce lemme sera intensivement utilisé tout au long de cette thèse,

pour transformer le terme sous la sommation, contenant la matrice qui reflète les discontinuités de l'état continu du système.

Preuve : L'inégalité (3.14) peut être obtenue par application directe du Lemme 3.2.1 sur la majoration des incertitudes, alors que la LMI (3.3) peut être déduite de l'inégalité (3.15) en lui appliquant le complément de Schur.

En prenant en considération le lemme cité ci-dessus, l'inégalité (3.13) devient :

$$\begin{aligned} & A^\top(i)P(i) + P^\top(i)A(i) + P^\top(i)B(i)K(i) + K^\top(i)B^\top(i)P(i) + \pi_{ii}E^\top(i)P(i) \\ & + V_P(i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{4}\pi_{ij}^2\varepsilon^{-1}(ij) < 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

D'autre part, en multipliant à droite et à gauche l'inégalité (3.16) par $P^{-T}(i)$ et $P^{-1}(i)$ respectivement, on obtient :

$$\begin{aligned} & P^{-T}(i)A^\top(i) + A(i)P^{-1}(i) + B(i)K(i)P^{-1}(i) + P^{-T}(i)K^\top(i)B^\top(i) \\ & + \pi_{ii}P^{-T}(i)E^\top(i) + P^{-T}(i)V_P(i)P^{-1}(i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{4}\pi_{ij}P^{-T}(i)\varepsilon_{ij}^{-1}P^{-1}(i)\pi_{ij} < 0. \end{aligned}$$

Appliquons maintenant les changements de variables $X(i) = P^{-1}(i)$, et $Y(i) = K(i)X(i)$, l'inégalité précédente devient :

$$\begin{aligned} & X^\top(i)A^\top(i) + A(i)X(i) + Y^\top(i)B^\top(i) + B(i)Y(i) + \pi_{ii}X^\top(i)E^\top(i) \\ & + X^\top(i)V_P(i)X(i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{4}\pi_{ij}X^\top(i)\varepsilon^{-1}(ij)X(i)\pi(ij) < 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Au terme de cet inégalité, si on définit les matrices $\mathcal{S}(i)$ et $\mathcal{X}(i)$ par (3.7) et (3.8), et on pose $Z_P^{-1}(i) = V_P(i)$, $i \in \mathcal{S}$, où $Z(i)$ est une matrice symétrique définie-positive,

on en déduit la LMI suivante :

$$\begin{aligned}
& X^\top(i)A^\top(i) + A(i)X(i) + Y^\top(i)B^\top(i) + B(i)Y(i) + \pi_{ii}X^\top(i)E^\top(i) \\
& + X^\top(i)Z_P^{-1}(i)X(i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathcal{S}^\top(i)\mathcal{X}^{-1}(i)\mathcal{S}(i) < 0
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Et finalement, en appliquant le complément de Schur à (3.18), on obtient la condition (3.2) du Théorème 3.2.1. Ceci complète la démonstration de celui-ci.

Remarque 3.2.3 *Il est évident que les conditions du Théorème 3.2.1 sont toujours non linéaires pour deux raisons :*

1. les relations (3.2) et (3.3) sont deux LMIs couplées (la solution de l'une doit être l'inverse de l'autre pour satisfaire les contraintes bilinéaires (3.10) et (3.11).
2. la présence des termes $\varepsilon^{-1}(ij)\mathbb{I}$, $i, j \in \mathcal{S}$, dans la relation (3.6).

Ainsi, pour transformer le problème initial en un problème d'optimisation convexe, tout d'abord, supposons qu'il existe un ensemble de scalaires positifs $\beta(ij)$ tel que $\beta(ij) = \varepsilon^{-1}(ij)$, il s'ensuit que la contrainte bilinéaire :

$$\varepsilon(ij)\beta(ij)\mathbb{I} = \mathbb{I} \tag{3.19}$$

doit également être prise dans la résolution numérique du problème. Pour cela, faisons recours au lemme suivant :

Lemme 3.2.3 *Les contraintes bilinéaires (3.10), (3.11) et (3.19) peuvent être écrites sous leurs formes équivalentes à l'aide des inégalités suivantes :*

$$Tr(P(i)X(i)) = n, Tr(V_P(i)Z_P(i)) = n, Tr(\beta(ij)\varepsilon(ij)\mathbb{I}) = n, \quad (3.20)$$

$$\begin{bmatrix} P(i) & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & X(i) \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} V_P(i) & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & Z_P(i) \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} \beta(ij)\mathbb{I} & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \varepsilon(ij)\mathbb{I} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.21)$$

Remarque 3.2.4 Conjointement au lemme 3.2.3, le lemme cité ci-dessus, sera utilisé tout au long de cette thèse pour transformer les contraintes bilinéaires (3.10), (3.11) et (3.19) en LMIs.

Preuve : La démonstration de ce lemme est une application directe du complément de Schur, et du formalisme de (El Ghaoui et al., 1997), qui permet d'approcher une contrainte égalité par une LMI avec contrainte (voir annexe I, eq. I.3).

Ainsi, en tenant compte de ceci, le problème initial peut être transformé en un problème de complémentarité sur le cône comme il est énoncé dans ce Théorème :

Théorème 3.2.2 *S'il existe un ensemble de matrices symétriques définies-positives $P = (P(1), \dots, P(N))$, $X = (X(1), \dots, X(N))$, $V_P = (V_P(1), \dots, V_P(N))$ et $Z_P = (Z_P(1), \dots, Z_P(N))$, et un ensemble de scalaires positifs $\varepsilon = (\varepsilon(i1), \dots, \varepsilon(iN))$, et $\beta = (\beta(i1), \dots, \beta(iN))$ qui satisfont au problème suivant :*

$$\min \sum_{i=1}^N Tr[P(i)X(i) + V_P(i)Z_P(i) + \beta(ij)\varepsilon(ij)\mathbb{I}] \quad (3.22)$$

sujet aux LMIs (3.2), (3.21) et :

$$\begin{bmatrix} V_P(i) & W(i) \\ W^\top(i) & \mathcal{G}(i) \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.23)$$

avec : $\mathcal{G}(i) = \text{diag}[\beta_{i1}\mathbb{I}, \dots, \beta_{ii-1}\mathbb{I}, \beta_{ii+1}\mathbb{I}, \dots, \beta_{iN}\mathbb{I}]$, sous la contrainte (3.9), alors le système en boucle fermée est stochastiquement admissible, sous la loi de commande dont le gain est donné par (3.12).

La solution du Théorème 3.2.2 peut être trouvée en utilisant l'algorithme du gradient conditionnel proposé par (Leibfritz, 2001) (voir annexe V).

Celui-ci est basé sur l'approximation linéaire de la fonction objectif (3.22) par :

$$\frac{1}{2N} \sum_i^N \text{Tr} [P^p(i)X(i) + P(i)X^p(i) + V_P^p(i)Z_P(i) + V_P(i)Z_P^p(i) + \beta^p(ij)\varepsilon(ij)\mathbb{I} + \beta(ij)\varepsilon^p(i)\mathbb{I}],$$

où $P^p(i)$, $X^p(i)$, $V_P^p(i)$, $Z_P^p(i)$, $\beta^p(ij)$ et $\varepsilon^p(ij)$ sont des solutions particulières des LMIs (3.2), (3.21) et (3.23) : il s'agit de minimiser cette trace en différents points réalisables, ceci va engendrer une suite décroissante minorée par $2Nn$ si ce minorant est atteint, alors le minimum global est atteint.

Exemple 3.2.1 *Considérons un SSSMD composé de trois modes avec les données numériques suivantes :*

$$\begin{aligned} \Lambda &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, E(1) = E(2) = E(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A(1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, B(1) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R(1) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.5 \\ 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ A(2) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, B(2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R(2) = R(1), \\ A(3) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, B(3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R(3) = R(1). \end{aligned}$$

En résolvant les LMIs avec contraintes du Théorème (3.2.2), on obtient :

$$\begin{aligned}
 P(1) &= \begin{bmatrix} 5.5639 & -0.0156 & 0.0000 \\ -0.0156 & 5.9649 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 11.1132 \end{bmatrix}, P(2) = \begin{bmatrix} 5.5620 & -0.0155 & 0.0000 \\ -0.0155 & 5.9632 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 11.1087 \end{bmatrix}, \\
 P(3) &= \begin{bmatrix} 5.6657 & -0.0221 & 0.0000 \\ -0.0221 & 6.0786 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 11.1243 \end{bmatrix}, X(1) = \begin{bmatrix} 0.1797 & 0.0005 & 0.0000 \\ 0.0005 & 0.1676 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0900 \end{bmatrix}, \\
 X(2) &= \begin{bmatrix} 0.1798 & 0.0005 & 0.0000 \\ 0.0005 & 0.1677 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0900 \end{bmatrix}, X(3) = \begin{bmatrix} 0.1765 & 0.0006 & 0.0000 \\ 0.0006 & 0.1645 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0899 \end{bmatrix}, \\
 Y(1) &= \begin{bmatrix} -0.2679 & 0.0063 & 0.2021 \\ 1.5043 & -0.9288 & 0.4312 \\ 0.3157 & 1.2129 & -0.1309 \end{bmatrix}, Y(2) = \begin{bmatrix} -0.1820 & -0.0290 & 0.0002 \\ 0.0671 & -0.8687 & 0.0068 \\ 0.3247 & 0.24540 & 0.5886 \end{bmatrix}, \\
 Y(3) &= \begin{bmatrix} 0.3021 & 0.0159 & -0.4863 \\ -0.0676 & -0.2573 & -1.4679 \\ 1.3678 & -2.6789 & 0.3205 \end{bmatrix}, \beta(1) = 0.8966, \beta(2) = 0.8306, \beta(3) = 0.8841, \\
 \alpha(1) &= 1.1153, \alpha(2) = 1.204, \alpha(3) = 1.1311.
 \end{aligned}$$

avec les gains suivants :

$$\begin{aligned}
 K(1) &= \begin{bmatrix} -1.4907 & 0.0418 & 2.2460 \\ 8.3843 & -5.5637 & 4.7920 \\ 1.7376 & 7.2299 & -1.4545 \end{bmatrix}, K(2) = \begin{bmatrix} -1.0118 & -0.1701 & 0.0022 \\ 0.3867 & -5.1813 & 0.0755 \\ 1.8022 & 1.4583 & 6.5386 \end{bmatrix}, \\
 K(3) &= \begin{bmatrix} 1.7113 & 0.0900 & -5.4097 \\ -0.3773 & -1.5625 & -16.3294 \\ 7.8087 & -16.3142 & 3.5653 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

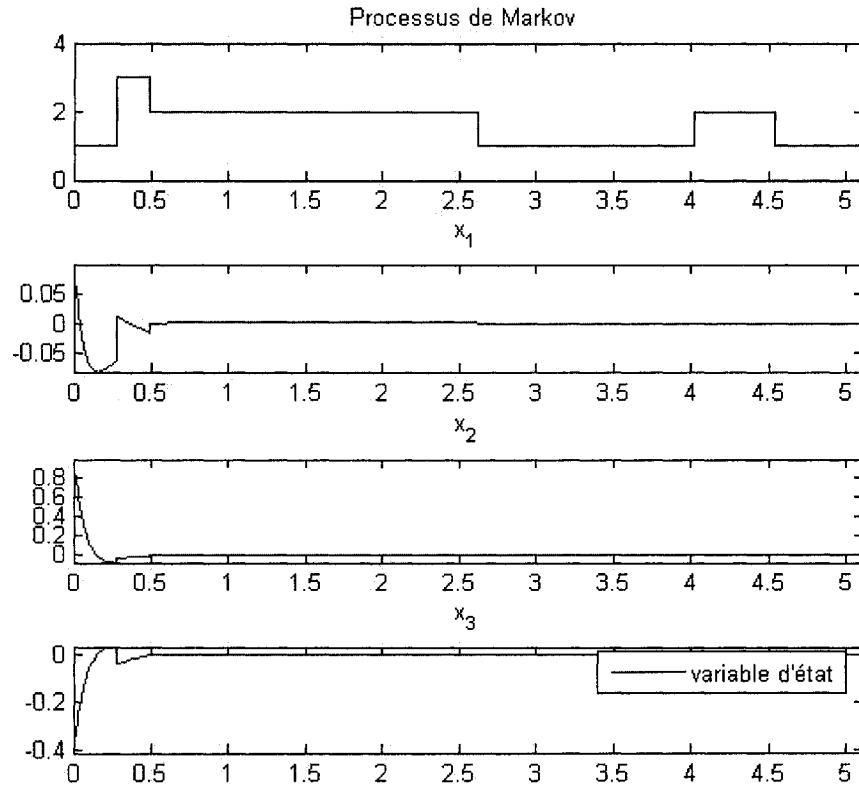


Figure 3.1 Stabilisation par retour d'état d'un SSSMD

Comme il apparaît sur les figures 3.1 et 3.2, qui représentent l'évolution des variables d'état et de la commande, les trajectoires de celles-ci convergent vers zéro quand t tend vers l'infini. Par conséquent, le système en boucle fermée, et stochastiquement admissible.

Il est intéressant de noter que l'approche développée dans cette partie, peut être appliquée à un SSSMD pour synthétiser une loi de commande par retour d'état, assurant au système en boucle fermée, admissibilité stochastique et conjointement, un rejet des perturbations externes. Ceci fera l'objet de la section suivante.

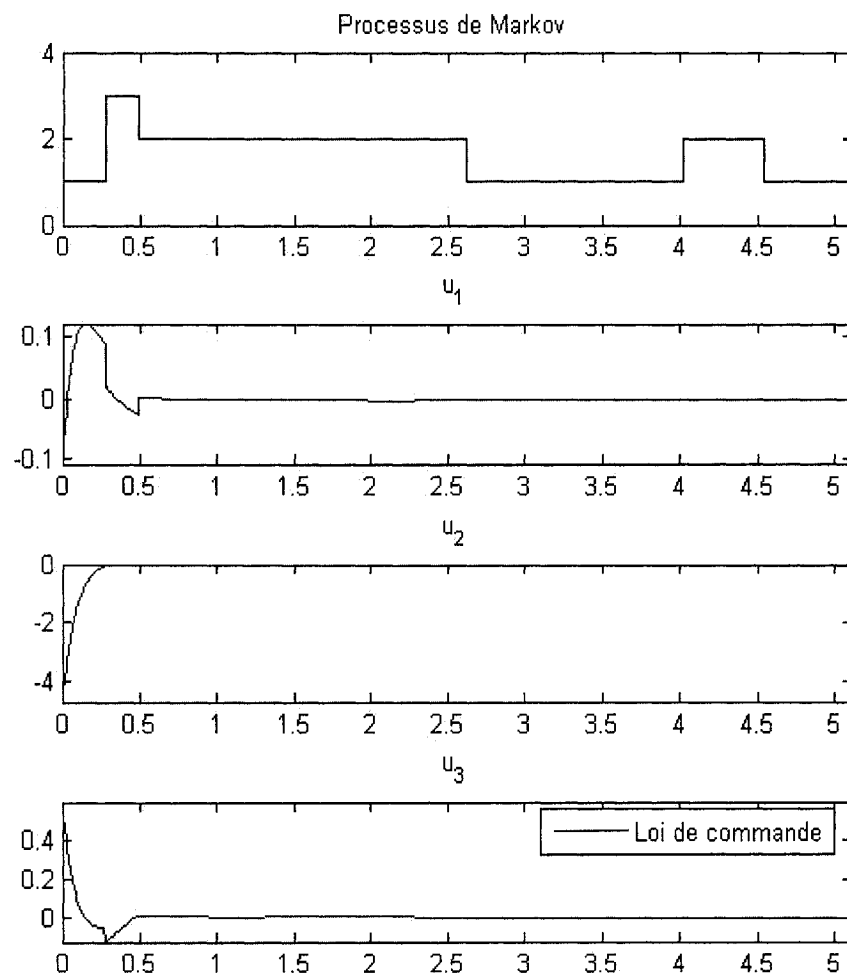


Figure 3.2 Évolution de la loi de commande par retour d'état d'un SSSMD

3.3 Commande stochastique $\mathcal{H}_\infty$

3.3.1 Position du problème

En général, lorsqu'un système est soumis à des perturbations externes $w(t)$, le régulateur linéaire quadratique gaussien (LQG) est un bon candidat pour garantir la stabilité de celui-ci et de rejeter les effets de ces perturbations qui peuvent dégrader ces performances. Cependant, celles-ci doivent être gaussiennes: c'est-à-dire avec une moyenne nulle et une variance constante (Doyle et al., 1978). Toutefois, ces propriétés statistiques sont difficiles à satisfaire en pratique. Une alternative à cette limitation est l'emploi de l'optimisation par la norme $\mathcal{H}_\infty$.

Le problème de la commande $\mathcal{H}_\infty$ est un problème de rejet des perturbations. Il consiste à minimiser le gain maximal de la fonction de transfert en boucle fermée des signaux exogènes $w(t)$ (perturbations, consignes, bruits, etc.) mesurée en norme $\mathcal{L}_2[0, T]$ (vérifiant la relation (2.2)), sur les sorties à commander $z(t)$ (Boukas, 2005), c'est-à-dire :

$$\|G_{zw}\|_\infty = \sup_{\|w(t)\|_2, [0, T] \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2, [0, T]}{\|w(t)\|_2, [0, T]}$$

où G_{zw} est la fonction de transfert entre la sortie $z(t)$ et la perturbation externe $w(t)$. Par gain maximal, on entend, la plus grande amplification des entrées vers les sorties sur l'ensemble des fréquences. La norme $\mathcal{H}_\infty$ revient donc à considérer le pire cas, puisqu'il s'agit d'une recherche du minimum d'un maximum.

Dans le cadre de notre étude, étant donnée la représentation du SSSMD (2.1) sans incertitudes et saturation sur la commande, nous allons rechercher une structure de commande qui assure pour le système bouclé les spécifications suivantes:

- l'admissibilité stochastique,
- un gain $\mathcal{L}_2(\gamma, M(x_0, r_0))$ "faible" entre l'entrée de perturbation et la sortie à commander, c'est-à-dire: pour deux scalaires $M(x_0, r_0)$, avec $M(0, r_0) = 0, \forall r_0 \in \mathcal{S}$ et γ strictement positif donnés et pour tout temps positif T , l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\|z\|_2^2 = \mathbb{E} \left[\int_0^T z^\top(t) z(t) dt | x_0, r_0 \right] \leq \gamma^2 \|w(t)\|_2^2 + M(x_0, r_0). \quad (3.24)$$

Remarque 3.3.1 *Pour alléger la lecture de ce paragraphe, nous allons remplacer l'expression (SSSMD (2.1) sans incertitudes et saturation sur la commande) par (SSSMD (2.1)).*

Pour réaliser l'objectif cité ci-dessus, commençons d'abord par introduire les définitions suivantes qui seront utilisées par la suite, vu leur rôle clé dans l'élaboration de nos résultats :

Définition 3.3.1 *Étant donné un scalaire strictement positif γ . Pour tout $t \geq 0$, le SSSDM (2.1) avec $u(t) \equiv 0$, est dit stochastiquement stable en moyenne quadratique, avec un niveau de rejet des perturbations égal à γ , s'il est stochastiquement stable en moyenne quadratique, et vérifie la relation (3.24).*

Définition 3.3.2 *Étant donné un scalaire strictement positif γ . Pour tout $t \geq 0$, le SSSDM (2.1), sans incertitudes et saturation sur la commande, est dit stochastiquement stabilisable en moyenne quadratique avec un niveau de rejet des perturbations égal à γ , si pour toutes conditions initiales x_0 et r_0 , et pour tout mode $r(t) \in \mathcal{S}$, il existe une loi de commande linéaire par retour d'état donnée par (3.1), telle que le système en boucle fermée est stochastiquement admissible, entre autre,*

il satisfait :

$$J_\infty = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty (z^\top(t)z(t) - \gamma^2 w^\top(t)w(t)) dt \right] < \infty \quad (3.25)$$

Remarque 3.3.2 *Ces définitions restent valables même lorsque les incertitudes du système (2.1) sont non nulles.*

Pour mener à bien notre étude, nous allons supposer que :

H4 les hypothèses H2 et H3 citées à la section 3.2, sont satisfaites,

H5 le système (2.1) est stochastiquement stabilisable avec un niveau de rejet des perturbations γ ,

H6 les perturbations externes $w(t)$ sont à énergie finie.

3.3.2 Analyse

Le théorème suivant donne les conditions à satisfaire pour assurer l'admissibilité stochastique avec un certain niveau de rejet de perturbations $\gamma > 0$, du SSSMD (2.1) avec ($u(t) \equiv 0$).

Théorème 3.3.1 *Étant donné un scalaire strictement positif γ . S'il existe un ensemble de matrices non singulières $P = (P(1), \dots, P(N))$ tel que la LMI suivante est vérifiée pour tout $i \in \mathcal{S}$:*

$$\Theta(i) = \begin{bmatrix} J_o(i) & \begin{bmatrix} C_z^\top(i)B_z(i) \\ +P^\top(i)B_w(i) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B_z^\top(i)C_z(i) \\ +B_w^\top(i)P(i) \end{bmatrix} & B_z^\top(i)B_z(i) - \gamma^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.26)$$

où :

$$J_o(i) = A^\top(i)P(i) + P^\top(i)A(i) + C_z^\top(i)C_z(i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij}R^\top(ij)E^\top(i)P(j)R(ij) \quad (3.27)$$

sous la contrainte :

$$E^\top(i)P(i) = P^\top(i)E(i) \geq 0, \quad (3.28)$$

alors pour tout $t \geq 0$, le système (2.1) avec $u(t) \equiv 0$, est SA, et satisfait l'inégalité (3.24).

Preuve : On remarque d'abord d'après (3.26) que $J_o(i) < 0$, et comme $C_z^\top(i)C_z(i) \geq 0$, cela signifie que l'inégalité suivante reste vérifiée :

$$A^\top(i)P(i) + P^\top(i)A(i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij}R^\top(ij)E^\top(j)P(j)R(ij) < 0 \quad (3.29)$$

ceci implique d'après le Théorème 2.6.1 que le système (2.1) est stochastiquement admissible.

Pour montrer que l'inégalité (3.24) est satisfaite, il faudrait minimiser de façon optimale le critère (3.25). Pour cela, il suffit d'établir que J_∞ vérifie l'inégalité suivante :

$$J_\infty \leq V(x_0, r_0) = x_0^\top E^\top(r_0)P(r_0)x_0 \quad (3.30)$$

En considérant la fonction de Lyapunov (2.11), l'expression du générateur infinitésimal $\mathbb{L}V(x(t), i), i \in \mathcal{S}$, sera donnée dans ce cas par:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}V(x(t), i) &= x^\top(t) \left[A^\top(i)P(i) + P^\top(i)A(i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij}R^\top(ij)E^\top(j)P(j)R(ij) \right] x(t) \\ &\quad + x^\top(t)P^\top(i)B_w(i)w(t) + w^\top(t)B_w^\top(i)P(i)x(t). \end{aligned}$$

Et en faisant appel à la formule de Dynkin donnée par le lemme (2.6.2), pour tout $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \dots$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\mathbb{E}[V(x(t), i)] - \mathbb{E}[V(x(\tau_k), i_k)] = \mathbb{E}\left[\int_{\tau_k}^t \mathbb{L}V(x(s), i(s))ds | (x(\tau_k), i_k)\right]. \quad (3.31)$$

D'un autre côté, remarquons que :

$$\begin{aligned} & z^\top(t)z(t) - \gamma^2 w^\top(t)w(t) \\ &= [C_z(i)x(t) + B_z(i)w(t)]^\top [C_z(i)x(t) + B_z(i)w(t)] - \gamma^2 w^\top(t)w(t) \\ &= x^\top(t)C_z^\top(i)C_z(i)x(t) + x^\top(t)C_z^\top(i)B_z(i)w(t) \\ &+ w^\top(t)B_z^\top(i)C_z(i)x(t) + w^\top(t)B_z^\top(i)B_z(i)w(t) - \gamma^2 w^\top(t)w(t). \end{aligned} \quad (3.32)$$

En combinant ceci avec l'expression de $\mathbb{L}V(x(t), r(t))$, $r(t) \in \mathcal{S}$, on obtient alors :

$$z^\top(t)z(t) - \gamma^2 w^\top(t)w(t) + \mathbb{L}V(x(t), r(t)) = \eta^\top(t)\Theta(r(t))\eta(t) \quad (3.33)$$

avec $\eta^\top(t) = \begin{bmatrix} x^\top(t), w^\top(t) \end{bmatrix}$ et $J_o(i)$ est donnée par (3.27).

Il est à remarquer que si on considère l'expression du critère J_∞ , donnée par (3.25) sur un intervalle $[\tau_k, \tau_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \dots$, et qu'on ajoute et on retranche le terme $\mathbb{E}\left[\int_{\tau_k}^t \mathbb{L}V(x(s), i(s))ds | (x(\tau_k), i_k)\right]$, à l'inégalité (3.32), on aura :

$$\begin{aligned} J_T &= \mathbb{E}\left[\int_{\tau_k}^t (z^\top(t)z(t) - \gamma^2 w^\top(t)w(t) + \mathbb{L}V(x(t), r(t)))dt\right] \\ &- \mathbb{E}\left[\int_{\tau_k}^t \mathbb{L}V(x(t), r(t))dt\right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

Par un raisonnement analogue à celui utilisé pour montrer l'admissibilité stochastique d'un SSSMD dans le chapitre précédent, moyennant le Lemme 2.6.1, on peut

montrer que pour tout $t > 0$, on a l'égalité suivante :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T LV(x(t), r(t)) dt | (x_0, r_0) \right] = \mathbb{E} [V(x(T), r(T))] - V(x_0, r_0) \quad (3.35)$$

Ainsi, en combinant les relations (3.33), (3.34) et (3.35), on obtient :

$$J_T = \mathbb{E} \left[\int_0^T \eta^\top(t) \Theta(r(t)) \eta(t) dt \right] - \mathbb{E} [V(x(T), r(T))] + V(x_0, r_0) \quad (3.36)$$

Puisque $\Theta(i) < 0$ (voir équation 3.26), l'expression (3.36) implique que pour tout $t > 0$, $J_T \leq V(x_0, r_0)$. Par conséquent on aboutit à l'inégalité (3.24). Le Théorème 3.3.1 est ainsi démontré.

Exemple 3.3.1 *Pour illustrer ce résultat, considérons un système SSSMD soumis à des perturbations externes, composé de trois modes instables avec les données numériques suivantes :*

$$\begin{aligned} \Lambda &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, E(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \\ B(1) &= B_z(1) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_w(1) = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_z(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \\ A(2) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, B(2) = B_z(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, B_w(2) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \\ C_z(2) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D_z(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, D_z(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, R(1) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(3) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B(3) = B_z(3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_w(3) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \\
C_z(3) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D_z(3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, R(3) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}, R(2) = R(1).
\end{aligned}$$

Les LMIs à résoudre sont celles du Théorème 3.3.1, elles sont réalisables et aboutissent aux résultats suivants :

$$\begin{aligned}
P(1) &= \begin{bmatrix} 0.5376 & 0.1817 & 0.0000 \\ 0.1817 & 0.5253 & 0.0000 \\ 0.7960 & 0.3731 & 0.6181 \end{bmatrix}, P(2) = \begin{bmatrix} 0.7047 & 0.3824 & 0.0000 \\ 0.3824 & 0.6743 & 0.0000 \\ 0.5100 & 0.3878 & 0.4194 \end{bmatrix}, \\
P(3) &= \begin{bmatrix} 0.5396 & 0.1728 & 0.0000 \\ 0.1728 & 0.4451 & 0.0000 \\ 1.3824 & 0.5071 & 0.6089 \end{bmatrix}, \gamma = 0.3.
\end{aligned}$$

Un exemple de simulation de l'évolution du SSSMD soumis à des perturbations externes est illustré par la figure 3.3 qui montre que celles-ci convergent vers zéro quand t tend vers l'infini. Ainsi, d'après le Théorème 3.3.1, nous pouvons conclure que le système est stochastiquement admissible avec une norme $\mathcal{H}_\infty$ inférieure à $\gamma = 0.3$.

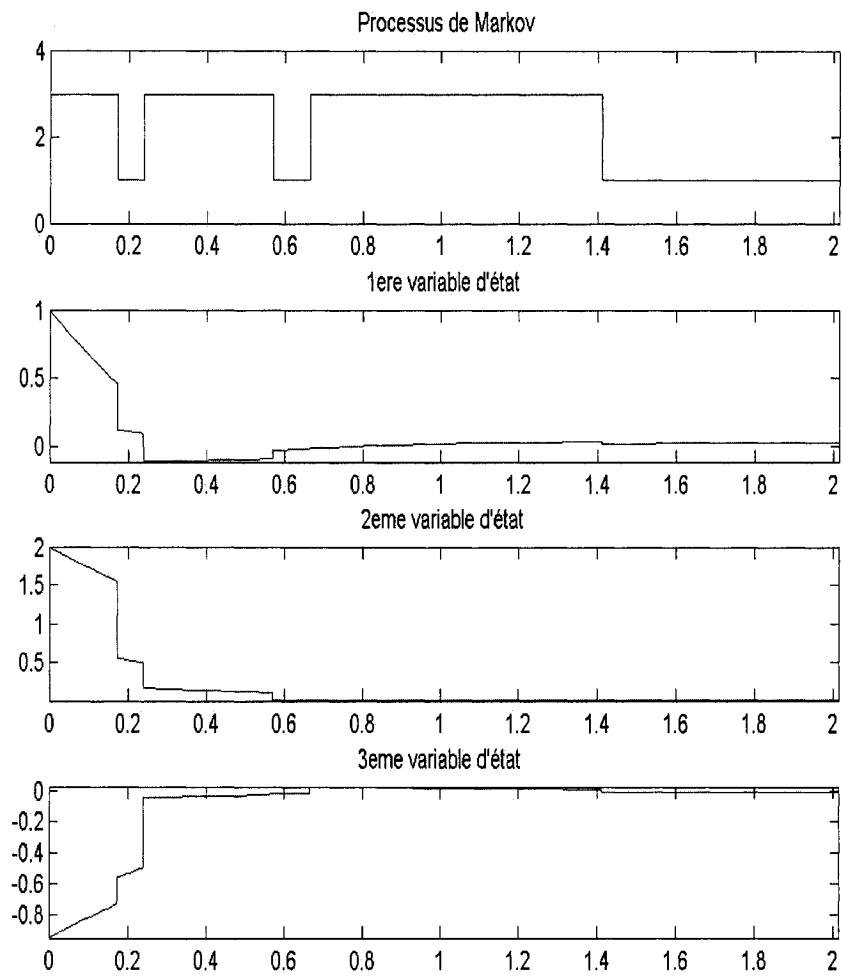


Figure 3.3 Évolution du mode et des variables d'état d'un SSSMD avec perturbations externes

3.3.3 Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ d'un contrôleur par retour d'état

Pour synthétiser la loi de commande qui assure l'admissibilité stochastique du SSSMD (2.1), nous allons remplacer celle-ci par son expression dans (2.1), on obtient alors les relations suivantes :

$$\begin{cases} E(r(t))\dot{x}(t) = \tilde{A}(r(t))x(t) + B_w(r(t))w(t), \\ z(t) = \tilde{C}_z(r(t))x(t) + B_z(r(t))w(t); \\ x(\tau) = R(ij)x(\tau^-), t = \tau, x(0) = x_0, r(0) = r_0. \end{cases} \quad (3.37)$$

avec : $\tilde{A}(i) = A(i) + B(i)K(i)$ et $\tilde{C}_z(i) = C_z(i) + D_z(i)K(i)$ quand $r(t) = i$.

D'après le Théorème 3.3.1, le système en boucle fermée (3.37) est stochastiquement stable avec un rejet des perturbations $\gamma > 0$, s'ils existent un ensemble de matrices non singulières $P = (P(1), \dots, P(N))$, et un ensemble de matrices $K = (K(1), \dots, K(N))$ tel que l'ensemble des inégalités couplées suivant est vérifié pour tout $i \in \mathcal{S}$:

$$\begin{bmatrix} J_o(i) & \tilde{C}_z^\top(i)B_z(i) + P^\top(i)B_w(i) \\ B_z^\top(i)\tilde{C}_z(i) + B_w^\top(i)P(i) & B_z^\top(i)B_z(i) - \gamma^2\mathbb{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.38)$$

avec :

$$J_o(i) = \tilde{A}^\top(i)P(i) + P^\top(i)\tilde{A}(i) + \tilde{C}_z^\top(i)\tilde{C}_z(i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij}R^\top(ij)E^\top(i)P(j)R(ij)$$

sous la contrainte (3.28), en outre, le système (3.37) satisfait l'inégalité (3.24).

Remarquons que l'inégalité (3.38) peut être écrite sous la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} \tilde{J}_o(i) & \widetilde{C}_z^\top(i)B_z(i) + P^\top(i)B_w(i) \\ B_z^\top(i)\widetilde{C}_z(i) + B_w^\top(i)P(i) & B_z^\top(i)B_z(i) - \gamma^2\mathbb{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{J}_1(i) & P^\top(i)B_w(i) \\ B_w^\top(i)P(i) & -\gamma^2\mathbb{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{C}_z^\top(i) \\ B_z^\top(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{C}_z(i), B_z(i) \end{bmatrix},$$

$$\text{où } \tilde{J}_1(i) = \tilde{A}^\top(i)P(i) + P^\top(i)\tilde{A}(i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij}R^\top(ij)E^\top(i)P(j)R(ij).$$

Ainsi, en prenant en considération ceci et en utilisant le complément de Schur, l'inégalité (3.38) devient :

$$\begin{bmatrix} \tilde{J}_1(i) & P^\top(i)B_w(i) & \widetilde{C}_z^\top(i) \\ B_w^\top(i)P(i) & -\gamma^2\mathbb{I} & B_z^\top(i) \\ \widetilde{C}_z(i) & B_z(i) & -\mathbb{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.39)$$

Notons que $\tilde{J}_1(i)$ n'est autre que la condition suffisante (3.13), que doit satisfaire un SSSMD avec $w(t) = 0$ pour être stochastiquement admissible, et que nous avons traité dans la section 3.2. Par conséquent en tenant compte de la série de manipulations faites sur celle-ci, suite à l'application du lemme 3.2.2, puis en gardant les mêmes notations que définies précédemment, l'inégalité (3.39) se ramène aux inégalités (3.3) et :

$$\begin{bmatrix} \tilde{J}_2(i) & P^\top(i)B_w(i) & \widetilde{C}_z^\top(i) \\ B_w^\top(i)P(i) & -\gamma^2\mathbb{I} & B_z^\top(i) \\ \widetilde{C}_z(i) & B_z(i) & -\mathbb{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.40)$$

$$\text{avec : } \tilde{J}_2(i) = \tilde{A}^\top(i)P(i) + P^\top(i)\tilde{A}(i) + \pi_{ii}E^\top(i)P(i) + V_P(i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{4}\pi_{ij}^2\varepsilon^{-1}(j)\mathbb{I}.$$

En exploitant l'égalité (3.9), et en multipliant à droite et à gauche l'inégalité (3.40)

par $\text{diag}(X^\top(i), \mathbb{I}, \mathbb{I})$ et $\text{diag}(X(i), \mathbb{I}, \mathbb{I})$, avec $X(i) = P^{-1}(i)$, l'inégalité (3.40) devient :

$$\begin{bmatrix} \widetilde{J}_X(i) & B_w(i) & X^\top(i)\widetilde{C}_z^\top(i) \\ B_w^\top(i) & -\gamma^2\mathbb{I} & B_z^\top(i) \\ \widetilde{C}_z(i)X(i) & B_z(i) & -\mathbb{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.41)$$

où :

$$\begin{aligned} \widetilde{J}_X(i) &= X^\top(i)\widetilde{A}^\top(i) + \widetilde{A}(i)X(i) + \pi_{ii}X^\top(i)E^\top(i) \\ &+ \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{4}\pi_{ij}X^\top(i)\varepsilon^{-1}(j)X(i)\pi_{ij} + X^\top(i)V_p(i)X(i) \end{aligned}$$

En remplaçant les matrices $\widetilde{A}(i)$ et $\widetilde{C}_z(i)$ par leurs expressions, ensuite, en procédant aux changements de variables, $Y(i) = K(i)X(i)$ et $V_P(i) = Z_P^{-1}(i)$ et en appliquant le complément de Schur à l'inégalité (3.41), celle-ci devient :

$$\begin{bmatrix} \Pi(i) & B_w(i) & \begin{bmatrix} X^\top(i)C_z^\top(i) \\ +Y^\top(i)D_z^\top(i) \end{bmatrix} & X^\top(i) & \mathcal{S}(i) \\ B_w^\top(i) & -\gamma^2\mathbb{I} & B_z^\top(i) & 0 & 0 \\ \begin{bmatrix} C_z(i)X(i) \\ +D_z(i)Y(i) \end{bmatrix} & B_z(i) & -\mathbb{I} & 0 & 0 \\ X(i) & 0 & 0 & -Z(i) & 0 \\ \mathcal{S}^\top(i) & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{X}(i) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.42)$$

où $\Pi(i)$, $\mathcal{S}(i)$ et $\mathcal{X}(i)$ sont données par (3.4), (3.7) et (3.8).

Finalement en utilisant le Lemme 3.2.3 pour linéariser les contraintes bilinéaires non convexes (3.10), (3.11) et (3.19), on aboutit alors au corollaire suivant :

Corollaire 3.3.1 *Soit γ , un scalaire strictement positif. S'il existe un ensem-*

ble de matrices symétriques et définies-positives $P = (P(1), \dots, P(N))$, $X = (X(1), \dots, X(N))$, $Z_P = (Z_P(1), \dots, Z_P(N))$, et $V_P = (V_P(1), \dots, V_P(N))$, une matrice $Y = (Y(1), \dots, Y(N))$ et un ensemble de scalaires positifs $\beta = (\beta(i1), \dots, \beta(iN))$ et $\varepsilon = (\varepsilon(i1), \dots, \varepsilon(iN))$, tels que le problème suivant est satisfait pour tout $i \in \mathcal{S}$:

$$\min \sum_{i=1}^N \text{Tr}[P(i)X(i) + Z_P(i)V_P(i) + \beta(ij)\varepsilon(ij)\mathbb{I}] \quad (3.43)$$

sujet aux LMIs (3.42), (3.23) et (3.21), sous la contrainte égalité (3.28), alors le système (3.37) est SA sous la loi de commande (3.1) dont le gain est donné par (3.12), en outre sa norme $\mathcal{H}_\infty$ est inférieure à $\gamma > 0$.

Exemple 3.3.2 Pour illustrer ce résultat, considérons les données numériques de l'exemple précédent 3.3.1. Dans ce cas, les LMIs à résoudre sont celles du Théorème 3.3.1, elles sont réalisables et aboutissent aux résultats suivants :

$$\begin{aligned} P(1) &= \begin{bmatrix} 0.2186 & -0.1074 & 0.0000 \\ -0.1074 & 0.1525 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0221 \end{bmatrix}, P(2) = \begin{bmatrix} 1.3241 & -0.1571 & 0.0000 \\ -0.1571 & 0.0597 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0040 \end{bmatrix}, \\ P(3) &= \begin{bmatrix} 1.3183 & -0.1736 & -0.0000 \\ -0.1736 & 0.0796 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0096 \end{bmatrix}, X(1) = \begin{bmatrix} 6.9949 & 4.9262 & 0.0000 \\ 4.9262 & 10.0267 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 45.2489 \end{bmatrix}, \\ X(2) &= \begin{bmatrix} 1.0981 & 2.8895 & 0.0000 \\ 2.8895 & 24.3542 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 250 \end{bmatrix}, X(3) = \begin{bmatrix} 1.0642 & 2.3209 & 0.0000 \\ 2.3209 & 17.6244 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 104.1667 \end{bmatrix}, \\ V(1) &= \begin{bmatrix} 1.0106 & 0.0370 & -0.0070 \\ 0.0370 & 1.0653 & -0.0111 \\ -0.0070 & -0.0111 & 0.9559 \end{bmatrix}, V(2) = \begin{bmatrix} 1.0986 & 0.0810 & -0.0408 \\ 0.0810 & 1.0732 & -0.0584 \\ -0.0408 & -0.0584 & 0.9920 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(3) &= \begin{bmatrix} 1.0800 & 0.0342 & -0.0375 \\ 0.0342 & 0.9636 & -0.0374 \\ -0.0375 & -0.0374 & 1.0070 \end{bmatrix}, Z_P(1) = \begin{bmatrix} 0.9908 & -0.0343 & 0.0069 \\ -0.0343 & 0.9400 & 0.0107 \\ 0.0069 & 0.0107 & 1.0463 \end{bmatrix}, \\
Z_P(2) &= \begin{bmatrix} 0.9165 & -0.0673 & 0.0338 \\ -0.0673 & 0.9398 & 0.0526 \\ 0.0338 & 0.0526 & 1.0126 \end{bmatrix}, Z_P(3) = \begin{bmatrix} 0.9281 & -0.0317 & 0.0334 \\ -0.0317 & 1.0403 & 0.0374 \\ 0.0334 & 0.0374 & 0.9957 \end{bmatrix}, \\
\varepsilon(1) &= 0.9296, \varepsilon(2) = 1.0045, \varepsilon(3) = 0.9179, \beta(3) = 1.0894, \beta(2) = 0.9956, \\
\beta(1) &= 1.0758, \gamma = 1.6578.
\end{aligned}$$

Il est important de remarquer que pour tout $i \in \mathcal{S}$, les contraintes (3.10), (3.11) et (3.19) sont vérifiées. Les gains des lois de commandes sont donnés par :

$$\begin{aligned}
K(1) &= \begin{bmatrix} -1.0804 & 0.0379 & -1.2062 \end{bmatrix}, K(2) = \begin{bmatrix} -4.8128 & 0.4118 & -0.1475 \end{bmatrix}, \\
K(3) &= \begin{bmatrix} -7.1479 & 2.2199 & -0.5984 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

L'évolution du mode, des variables d'état, et de la commande du système en boucle fermée avec les gains trouvés, est illustrée par la figure 3.4. D'après celle-ci, on constate que leurs trajectoires convergent vers zéro quand t tend vers l'infini. Ceci montre que la synthèse de la loi de commande moyennant l'approche proposée garantit que le SSSMD soumis à des perturbations externes bornées en norme $\mathcal{L}_2$ est bien stochastiquement admissible avec le rejet des perturbations recherché.

Dans ce qui suit, il sera supposé que le SSSMD (2.1) n'est pas soumis à des perturbations externes ($w(t) = 0$) mais que ses entrées de commandes sont bornées. Dans ce cas, il sera alors déterminé une loi de commande permettant de garantir que le système en boucle fermée soit stochastiquement admissible et que les contraintes sur la commande soient toujours vérifiées. Cela sera traité dans la section suivante.

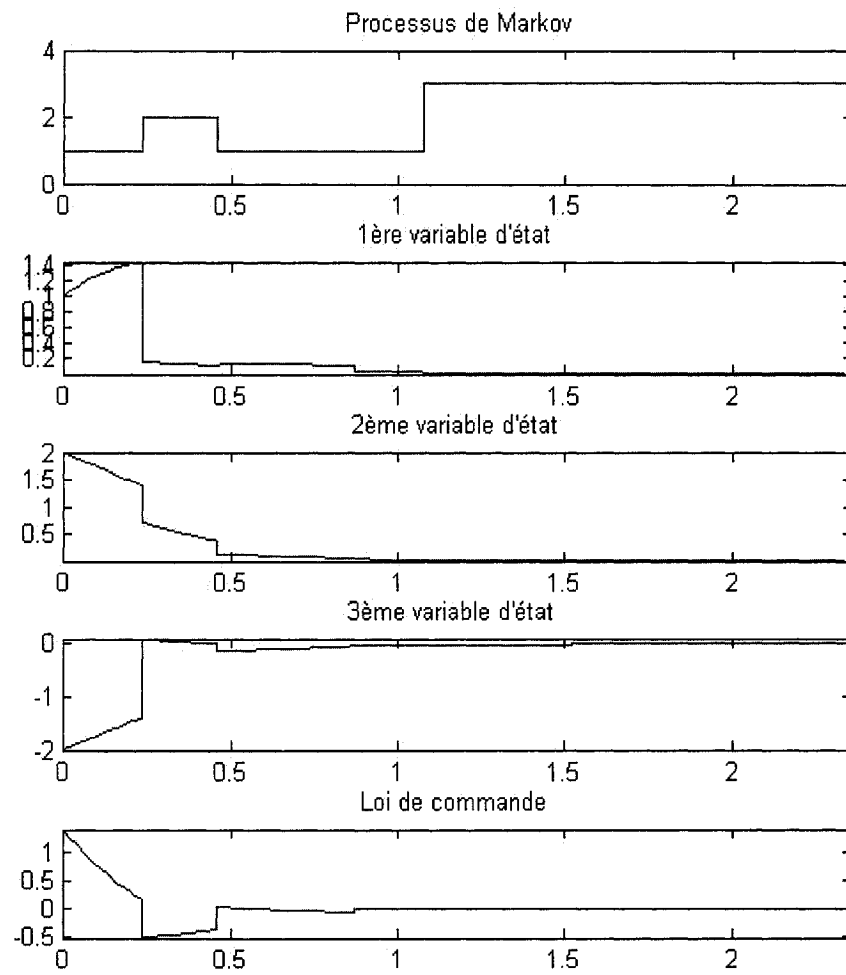


Figure 3.4 Stabilisation par la commande $\mathcal{H}_\infty$ d'un SSSMD avec perturbations externes: évolution du mode, des variables d'état et de la commande

3.4 Commande stochastique avec saturation

3.4.1 Formulation du problème

Le problème de saturation de la commande et des états est un problème omniprésent dans plusieurs systèmes de commande, et la conception et l'application des lois de commande qui ne prennent pas en compte la possibilité de saturation, peuvent être source de dégradation des performances, par ailleurs le système en boucle fermée peut présenter des points d'équilibre parasites et des cycles limites ou même devenir instable à cause de la caractéristique non-linéaire de la saturation (Tarbouriech et Castelan, 1999). Si on suppose que cette saturation n'existe pas, et que la loi de commande est une fonction linéaire de l'état donnée par (3.1) dans ce cas, la stabilité stochastique du SSSMD (2.1) nominal bouclé, avec $w(t) = 0$, est assurée par les conditions du Théorème 3.2.2 qui a fait l'objet du paragraphe 3.2. Supposons maintenant que la loi de commande est soumise à des contraintes d'amplitude données par (2.7), avec $u_{si} = K_s(i)x(t)$, où $K_s(i)$ est la s^{ieme} ligne de la matrice gain $K(i)$ du système du mode i . Une telle loi de commande est appelée dans la littérature retour d'état saturé ou retour saturant (Burgat et Tarbouriech, 1993). Elle est représentée par la courbe 3.5.

Ainsi, le système (2.1) avec $w(t) = 0$, admet un modèle localement linéaire dans la région suivante :

$$\mathcal{L}(K(i), \overline{u}_i) = \{x \in \mathbb{R}^n, i \in \mathcal{S} : \|K_s(i)x(t)\| \leq \overline{u}_{si}, s = 1, \dots, m\}. \quad (3.44)$$

Cette région est appelée région de linéarité, elle possède la propriété suivante : si $x(0) \in \mathcal{L}(K(i), \overline{u}_i)$, alors $x(t)$ peut être déterminée en utilisant les équations dynamiques d'un SSSMD sans incertitudes et saturation, avec $w(t) = 0$. Cependant, le fait d'avoir $x(0) \in \mathcal{L}(K(i), \overline{u}_i)$, n'implique pas nécessairement que

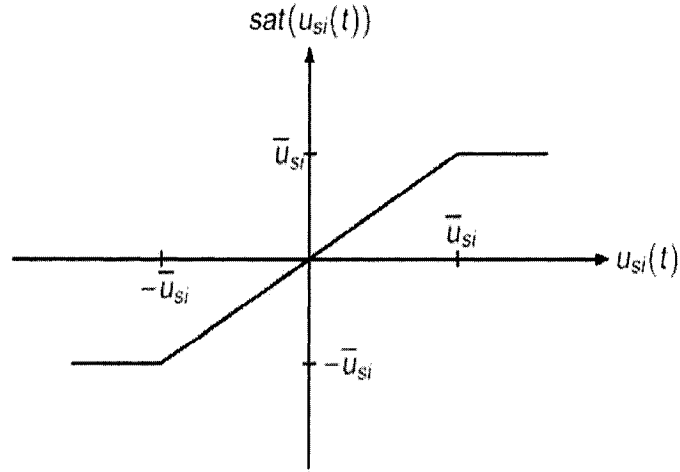


Figure 3.5 Fonction de saturation

$x(t) \in \mathcal{L}(K(i), \bar{u}_i)$ et ceci même si le système en boucle fermée est stable. Notre objectif est donc de trouver une loi stabilisante, telle que la norme de chaque composante du vecteur d'état ne dépasse pas une certaine valeur $\bar{u}_{si}$, qui caractérise la saturation possible de l'actionneur. Autrement dit garantir que pour toutes conditions initiales prises dans l'ensemble $\mathcal{L}(K(i), \bar{u}_i)$, les trajectoires du système étudié restent confinées dans cet ensemble, en outre, il faut assurer que cet ensemble inclut le domaine de stabilité.

Avant d'établir ce résultat, introduisant quelques concepts qui seront utilisés tout au long de cette partie, il s'agit du domaine d'attraction et de l'ellipsoïde de Lyapunov.

3.4.2 Préliminaires

3.4.2.1 Domaine d'attraction

En général, pour les systèmes saturés, la stabilité est intimement liée au choix de la condition initiale, on est alors amené à définir le domaine d'attraction qui donne la région de stabilité exacte du système saturé :

Définition 3.4.1 *L'ensemble $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$ est appelé région d'attraction de l'origine en moyenne quadratique si pour toutes conditions initiales $x_0 \in \mathcal{H}$ et $r_0 \in \mathcal{S}$, la solution $x(t, x_0, r_0)$ du système saturé (2.1) avec $w(t) = 0$, vérifie la condition de stabilité stochastique en moyenne quadratique, donnée par (2.9).*

Cette définition peut être considérée comme une généralisation de celle donnée dans (Liu et al., 2006) (Définition 2.1) pour les systèmes markoviens avec saturation. En outre, d'après cette définition et celle sur la stabilité stochastique d'un SSSMD, que nous avons introduit au chapitre 2 (Définition 2.2.3), nous pouvons dire que si x_0 appartient au domaine d'attraction dans le sens quadratique, alors le système saturé en boucle fermée est stochastiquement stable à l'origine.

3.4.2.2 Ellipsoïde de Lyapunov

Analytiquement, la détermination exacte de la région d'attraction citée ci-dessus est en général difficile, voir impossible (Khalil, 1992), (Suarez et al., 1991). Cependant, on peut déterminer des approximations de ce domaine, c'est-à-dire on peut déterminer des régions de l'espace où la convergence des trajectoires vers l'origine, est garantie.

À la lumière de ceci, un choix naturel de domaine de stabilité dans le cadre de notre étude, est l'ellipsoïde de Lyapunov donné par :

$$\mathcal{F}(X(i), E(i)) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top(t) E^\top(i) X^{-1}(i) x(t) \leq 1\}, \quad (3.45)$$

où $X(i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i \in \mathcal{S}$, est une matrice inversible. Ainsi, si la fonction de Lyapunov $V(x(t), i) = x^\top(t) E^\top(i) X^{-1}(i) x(t)$ pour $r(t) = i \in \mathcal{S}$, vérifie, pour toute trajectoire $x(t, x_0, r_0)$, la condition $\mathbb{L}V(x(t), i) < 0$, alors toute trajectoire initialisée dans $\mathcal{F}(X(i), E(i))$ y reste et converge vers l'origine quand $t \rightarrow \infty$.

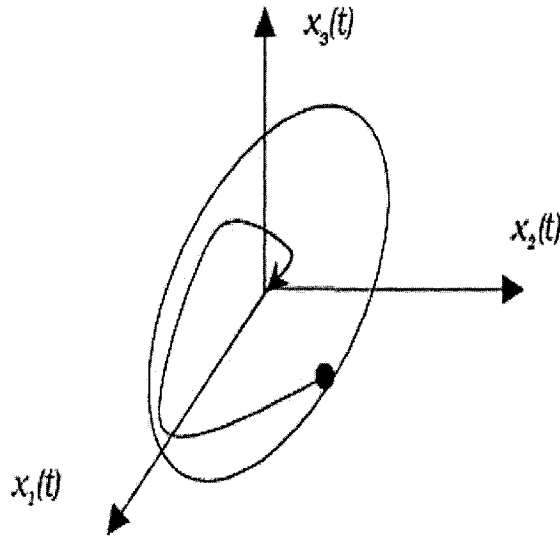


Figure 3.6 Schéma d'un ellipsoïde de Lyapunov.

L'ellipsoïde représente le domaine d'attraction qu'on peut estimer en utilisant la fonction de Lyapunov quadratique (figure 3.6). Pour la maximisation de ce domaine, plusieurs approches ont été abordées dans la littérature, pour plus de détails, voir par exemple (Gutman et Hangander, 1985) et (Boyd et al., 1994).

3.4.3 Résultat

Après l'introduction de ces concepts, nous allons établir notre résultat sur la stabilisation par retour d'état du SSSMD (2.1) avec $w(t) = 0$, en nous inspirant des travaux de (Tarbouriech et Castelan, 1999) et (Liu et al., 2006). Ce résultat va se baser sur l'utilisation :

- de la propriété d'invariance du domaine de stabilité du système étudié (un domaine ζ est dit invariant si x_0 appartient à ce domaine, ceci implique que pour tout $t > 0$, $x(t)$ reste dans ce domaine),
- des conditions du Théorème 3.2.2 qui assurent que l'ellipsoïde $\mathcal{F}(X(i), E(i))$ est invariant, mais ne garantissent pas que la contrainte de saturation (2.7) ne soit pas transgressée.

Ainsi, dans le cadre de la commande des SSSMD en présence de saturation, d'autres conditions doivent être déterminées. En effet, pour vérifier que la condition initiale x_o appartient au domaine d'attraction, il faut ajouter la condition suivante à celles du Théorème 3.2.2 :

$$x_o^\top E^\top(i) X^{-1}(i) x_o \leq 1. \quad (3.46)$$

Il en découle que $x(t)^\top E^\top(i) X^{-1}(i) x(t) \leq 1$ pour tout t . Ainsi, d'une part, toutes les trajectoires initialisées dans le domaine de stabilité de l'ellipsoïde ne s'en échappent pas, d'autre part, cela nous permet de borner l'état du système, et donc aussi la commande, qui n'est qu'une projection linéaire de l'état.

En utilisant le complément de Schur, l'inégalité (3.46) devient :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_o^\top \\ x_o & H(i) \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.47)$$

où $H(i)$ est une matrice symétrique définie-positive telle que :

$$E^\top(i)X^{-1}(i) \leq H^{-1}(i). \quad (3.48)$$

Soit $L(i) = H^{-1}(i)$, une matrice symétrique définie-positive, il en découle :

$$E^\top(i)P(i) \leq L(i). \quad (3.49)$$

D'un autre côté, pour concevoir le contrôleur du système saturé, en plus de ces conditions, il faut démontrer que $\|K_s(i)x(t)\| \leq \bar{u}_{is}, \forall x(t) \in \bigcap_{i=1}^N \mathcal{F}(X(i), E(i))$, (c'est-à-dire : $\bigcap_{i=1}^N \mathcal{F}(X(i), E(i)) \subset \mathcal{L}(K_s(i), \bar{u}_{is})$), cette contrainte sera vérifiée à tout instant si l'inégalité suivante est satisfaite pour tout $x(t) \neq 0$ et $s = 1, \dots, m$ (Cao et al., 2002; Liu et al., 2006) :

$$\frac{1}{\bar{u}_{is}^2} x^\top(t) K_s^\top(i) K_s(i) x(t) \leq x^\top(t) E^\top(i) X^{-1}(i) x(t).$$

Ainsi, en utilisant le complément de Schur, ceci est équivalent à :

$$\begin{bmatrix} E^\top(i)X^{-1}(i) & K_s^\top(i) \\ K_s(i) & \bar{u}_{is}^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (3.50)$$

En pré et post multipliant l'inégalité (3.50) par $\text{diag}(X^\top(i), \mathbb{I})$ et $\text{diag}(X(i), \mathbb{I})$, on obtient :

$$\begin{bmatrix} X^\top(i)E^\top(i) & X^\top(i)K_s^\top(i) \\ K_s(i)X(i) & \bar{u}_{is}^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (3.51)$$

Et finalement, en notant $Y_s(i) = K_s(i)X(i)$ la s^{ieme} ligne de la matrice $Y(i)$, on a :

$$\begin{bmatrix} X^\top(i)E^\top(i) & Y_s^\top(i) \\ Y_s(i) & \bar{u}_{is}^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (3.52)$$

Ce résultat est récapitulé dans le Théorème suivant :

Théorème 3.4.1 (Raouf et Boukas, 2007a) *S'il existe un ensemble de matrices symétriques définies-positives $P = (P(1), \dots, P(N))$, $X = (X(1), \dots, X(N))$, $V_P = (V_P(1), \dots, V_P(N))$, $Z_P = (Z_P(1), \dots, Z_P(N))$, $H = (H(1), \dots, H(N))$ et $L = (L(1), \dots, L(N))$, une matrice $Y = (Y(1), \dots, Y(N))$, et un ensemble de scalaires positifs $\varepsilon = (\varepsilon(1), \dots, \varepsilon(N))$, et $\beta = (\beta(i1), \dots, \beta(iN))$, vérifiant le problème ci-dessous pour tout $i \in \mathcal{S}$:*

$$\mathbf{P}_1 : \min \sum_{i=1}^N \text{Tr} \left(P(i)X(i) + V_P(i)Z_P(i) + H(i)L(i) + \beta(ij)\varepsilon(ij) \right)$$

sujet aux LMIs (3.2), (3.23), (3.21), (3.47), et (3.52), et aux contraintes (3.9) et (3.49), alors l'ensemble $\bigcap_{i=1}^N \mathcal{F}(X(i), E(i))$ est contenu dans le domaine d'attraction du système en boucle fermée, sous la loi de commande (3.12).

Remarque 3.4.1 *Le Théorème 3.4.1 fournit une condition suffisante pour que le système (2.1) avec $w(t) = 0$, bouclée soit stochastiquement admissible. En outre, l'application de la loi de commande saturée garantie la convergence vers l'origine de toute trajectoire initialisée dans le domaine d'attraction, ce qui veut dire que la contrainte sur la commande est toujours satisfaite.*

Il est à remarquer que l'inégalité (3.47) est une LMI en x_0 , ce qui permet de généraliser ce résultat au cas où la condition initiale est inconnue, mais bornée. En effet, considérons un polytope de conditions initiales contenant le point zéros et défini par ses sommets $\mathcal{P} = \text{Co}\{x_0^1, \dots, x_0^r\}$, dans ce cas, la contrainte (3.47) sera donnée par :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_o^{f\top} \\ x_o^f & H(i) \end{bmatrix} \geq 0, f = 1, \dots, r. \quad (3.53)$$

L'algorithme que nous avons utilisé pour la résolution du problème $\mathbf{P}_1$ est l'algorithme

V.0.1 (voir annexe V).

Remarque 3.4.2 *l'approche de stabilisation stochastique par retour d'état, moyennant la technique des LMIs et la méthode de complémentarité sur le cône, développée dans cette partie pour le SSSMD avec saturation sur la commande, peut être appliquée à un vaste choix de classe de systèmes : notamment, les systèmes singuliers markoviens traités dans (Boukas, 2005), les systèmes à sauts Markoviens avec et sans discontinuité sur la composante continue (Kats et Martynyuk, 2002), (Boukas, 2005), ainsi que les systèmes singuliers. Par conséquent, elle peut être considérée comme une généralisation de la théorie de la commande avec saturation pour les différents types de classe de systèmes cités ci-haut. $\triangle$*

L'exemple suivant illustre l'approche proposée dans cette partie.

3.5 Exemple numérique

Considérons un SSSMD composé de deux modes au cours desquels le système est instable, avec les données numériques suivantes :

$$\begin{aligned} \Lambda &= \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, E(1) = E(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1.1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \\ A(2) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, B(1) = B(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.25 \end{bmatrix}, r_o = 1, \\ R(1) &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}, R(2) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 1. \end{aligned}$$

En résolvant le problème $\mathbf{P}_1$, on obtient les matrices suivantes:

$$\begin{aligned}
 P(1) &= \begin{bmatrix} 2.7651 & 0.0266 & 0.0000 \\ 0.0266 & 2.3974 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 4.5130 \end{bmatrix}, P(2) = \begin{bmatrix} 6.4301 & -0.0111 & 0.0000 \\ -0.0111 & 6.1470 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 9.1216 \end{bmatrix}, \\
 X(1) &= \begin{bmatrix} 0.3617 & -0.0040 & 0.0000 \\ -0.0040 & 0.4172 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.2216 \end{bmatrix}, X(2) = \begin{bmatrix} 0.1555 & 0.0003 & 0.0000 \\ 0.0003 & 0.1627 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.1096 \end{bmatrix}, \\
 Z_P(1) &= \begin{bmatrix} 0.2122 & 0.0040 & 0.0000 \\ 0.0040 & 0.2270 & 0.0001 \\ 0.0000 & 0.0001 & 0.2421 \end{bmatrix}, Z_P(2) = \begin{bmatrix} 0.2130 & 0.0003 & 0.0002 \\ 0.0003 & 0.2132 & 0.0001 \\ 0.0002 & 0.0001 & 0.2193 \end{bmatrix}, \\
 L(1) &= \begin{bmatrix} 5.4543 & 0.0183 & 0.0002 \\ 0.0183 & 5.2223 & -0.0006 \\ 0.0002 & -0.0006 & 4.1321 \end{bmatrix}, L(2) = \begin{bmatrix} 5.4722 & -0.0108 & -0.0004 \\ -0.0108 & 5.3908 & -0.0002 \\ -0.0004 & -0.0002 & 4.1316 \end{bmatrix}, \\
 H(1) &= \begin{bmatrix} 4.1123 & -0.0001 & 0.0000 \\ -0.0001 & 4.1153 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 4.1327 \end{bmatrix}, H(2) = \begin{bmatrix} 4.1105 & 0.0002 & 0.0000 \\ 0.0002 & 4.1125 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 4.1315 \end{bmatrix}, \\
 V_P(1) &= \begin{bmatrix} 4.7131 & -0.0820 & -0.0009 \\ -0.0820 & 4.4065 & -0.0013 \\ -0.0009 & -0.0013 & 4.1314 \end{bmatrix}, \varepsilon(1) = 0.4553, \varepsilon(2) = 0.5095, \\
 V_P(2) &= \begin{bmatrix} 4.6958 & -0.0074 & -0.0036 \\ -0.0074 & 4.6899 & -0.0017 \\ -0.0036 & -0.0017 & 4.5601 \end{bmatrix}, \beta(1) = 0.9192, \beta(2) = 1.9626.
 \end{aligned}$$

avec les gains :

$$K(1) = \begin{bmatrix} -1.9193 & 0.2170 & 0.0000 \end{bmatrix}, K(2) = \begin{bmatrix} -1.8007 & 0.0974 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

Un exemple de simulation du SSSMD avec et sans saturation, bouclé avec la loi de commande (3.1) dont les gains sont donnés ci-dessus, est présenté par la figure 3.7. Celle-ci illustre les trajectoires du mode, des variables d'état et de la commande. D'après ces figures, on constate que les variables d'état du système convergent vers zéro quand t tend vers l'infini. On remarque aussi que la loi de commande sature au voisinage de l'origine et que la contrainte sur la saturation est toujours satisfaite. Il est important de noter aussi que le système sans contrainte converge plus rapidement que son homologue avec contrainte, et ceci pour les trois composantes.

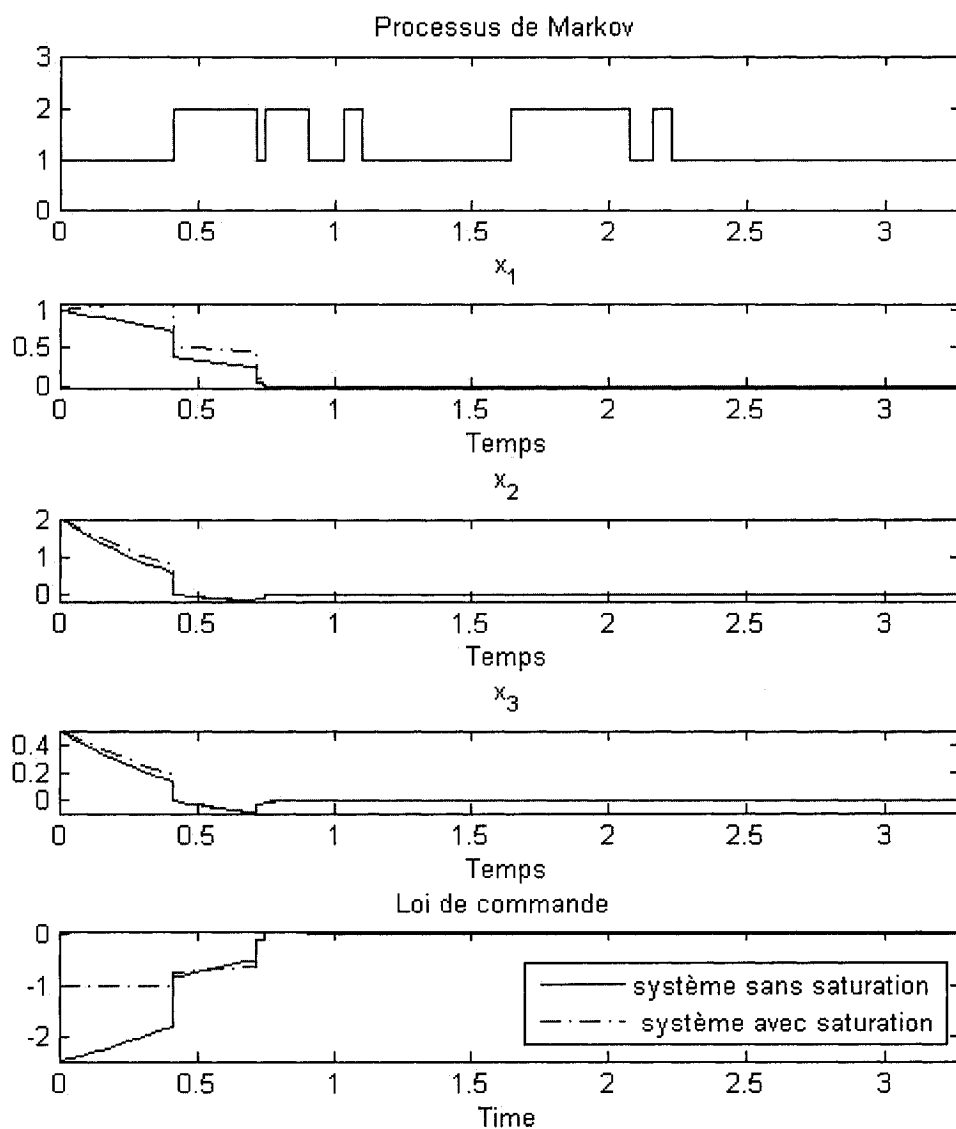


Figure 3.7 Réponses temporelles du mode et des variables d'état du système bouclé avec et sans saturation

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons d'abord proposé des conditions suffisantes de stabilisation par retour d'état d'un SSSMD sans perturbations externes et sans saturation sur la commande. Ces conditions garantissent que le système étudié en boucle fermée est stochastiquement admissible. L'étude a été menée en se basant sur les résultats de la stabilité stochastique développée dans le chapitre précédent. Cependant, la synthèse des lois de commande moyennant l'application directe de ces résultats, a conduit à des contraintes non convexes qui ne peuvent pas être résolues en utilisant les algorithmes d'optimisation convexes. Pour contourner ce problème et le transformer en LMIs avec des contraintes de rang, nous avons utilisé la technique des LMIs et de complémentarité sur le cône, et la résolution de la formulation obtenue a été faite moyennant l'algorithme du gradient conditionnel (V.0.1).

Ensuite, nous avons appliqué cette approche pour concevoir des lois de commandes par retour d'état qui satisfassent des spécifications supplémentaires. Dans le cadre de notre étude, nous nous sommes intéressées au problème de rejet des perturbations externes à énergie finie, et aux contraintes sur les entrées de commande.

Dans le premier cas, nous avons proposé tout d'abord des conditions suffisantes qui permettent de garantir que le système autonome SSSMD soumis à des perturbations externes, est stochastiquement admissible, et d'assurer que le rapport entre l'entrée de perturbation et la sortie à commander reste inférieur à un certain niveau γ . Ensuite, nous avons synthétiser une loi de commande par retour d'état qui permet de conférer au système bouclé les propriétés considérées lors de l'analyse.

Dans le deuxième cas, nous avons mis en oeuvre une méthode qui permet d'une part de déterminer une loi de commande garantissant que le système en boucle fermée

est stochastiquement admissible, d'autre part de trouver un ellipsoïde positivement invariant contenant le domaine d'attraction qui lui-même est contenu dans la région de linéarité du SSSMD, ce qui assure que les contraintes sur la loi de commande sont toujours satisfaites.

Il est important de remarquer que la synthèse d'une loi de commande par retour d'état dans n'importe quel contexte, nécessite que les variables d'état, continues et discrètes du système soient mesurables. Cependant, lorsque les variables d'état ne sont pas accessibles ou ne le sont que partiellement, il est donc nécessaire de reconstruire l'état du système à l'aide d'un observateur, et par la suite, concevoir une loi de commande qui stabilise le système étudié. Deux types de commande associée à un observateur seront traités :

- une commande par retour d'état basée sur un observateur de type Luenberger.
- une commande par retour de sortie dynamique.

Ceci fera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE 4

COMMANDE BASÉE SUR UN OBSERVATEUR

4.1 Introduction

De façon générale, la connaissance de l'état d'un système est une exigence importante qui intervient dans le domaine de la commande par retour d'état des systèmes. Sur le plan pratique, cette exigence s'avère difficile à satisfaire directement dans la plupart des cas (capteurs nécessaires indisponibles ou de précision insuffisante par exemple). Par conséquent, dès qu'une stratégie de commande demande l'utilisation de variables d'état non mesurées, il est indispensable de reconstruire entièrement ou partiellement, le vecteur d'état du système. Ce problème peut être résolu en utilisant un système dynamique auxiliaire, appelé observateur d'état, dont le rôle est de fournir en temps réel une estimation du vecteur d'état du système étudié en fonction des entrées connues, des sorties et du modèle dynamique de celui-ci.

Ce chapitre est dédié à l'étude de la stabilisation d'un SSSMD sans perturbations externes ni saturation sur la commande, moyennant un observateur pour reconstruire les états non mesurables. Deux approches vont être proposées :

- la première approche est la commande par retour d'état basée sur un observateur de type Luenberger, dont l'entrée sera proportionnelle à l'entrée du système et à l'erreur d'estimation sur son état. Sa sortie est l'estimation du vecteur d'état.
- la deuxième approche est la commande par retour de sortie dynamique qui n'est autre qu'un cas particulier de la première approche comme nous allons

le montrer ultérieurement. Elle fait appel à un observateur dont l'entrée est constituée par l'entrée et la sortie du système, et sa sortie est l'estimation de l'état.

Ces deux approches vont exploiter les résultats concernant la stabilité stochastique, et se baser sur la théorie de Lyapunov, les techniques des LMIs et de la complémentarité sur le cône, afin de synthétiser une loi de commande par retour, qui assure que le système en boucle fermée (2.1) est stochastiquement admissible.

4.2 Retour d'état assuré par un observateur de type Luenberger

En général, la loi de commande incorporant un observateur est construite comme suit :

$$\begin{cases} E(r(t))\dot{x}_c(t) = A(r(t))x_c(t) + B(r(t))u(t) + L(r(t)) [y_c(r(t)) - y(t)], \\ y_c(t) = C_y(r(t))x_c(t), x_c(0) = 0, \\ u(t) = K(r(t))x_c(t), \end{cases} \quad (4.1)$$

où :

- $L(i)$ et $K(i)$, $i = 1, \dots, N$ sont les matrices de gains à déterminer.
- $x_c(t)$ et $y_c(t)$ sont les estimations des vecteurs d'état et de la sortie.
- Les matrices $E(r(t))$, $A(r(t))$ et $B(r(t))$ sont définies comme précédemment.

Pour que l'estimation du vecteur d'état soit garantie, il faut que la variable d'état estimée $x_c(t)$ approche asymptotiquement $x(t)$, c'est-à-dire il faut que l'erreur d'estimation d'état donnée par :

$$e(t) = x(t) - x_c(t) \quad (4.2)$$

tende vers zéro asymptotiquement.

En remplaçant la loi de commande $u(t)$ par son expression, définie ci-dessus, les équations décrivant le système (2.8) et l'observateur (4.1) deviennent :

$$E(r(t))\dot{x}(t) = [A(r(t)) + B(r(t))K(r(t))]x(t) - B(r(t))K(i)e(t) \quad (4.3)$$

$$E(r(t))\dot{x}_c(t) = [A(r(t)) + B(r(t))K(r(t))]x_c(t) - L(r(t))C_y(t)e(t) \quad (4.4)$$

Alors que l'équation de la dynamique d'évolution de l'erreur s'écrit :

$$E(r(t))\dot{e}(t) = [A(r(t)) + L(r(t))C_y(r(t))]e(t) \quad (4.5)$$

En combinant les équations de l'observateur (4.1), du système (4.3) et de la dynamique d'évolution de l'erreur (4.5), et en utilisant le vecteur d'état augmenté $\eta(t) = [x^\top(t), e^\top(t)]^\top$, on aboutit au système en boucle fermée suivant :

$$\begin{cases} \tilde{E}(r(t))\eta(t) = \tilde{A}(r(t))\eta(t), t \neq \tau_k, \\ \eta(\tau_k^+) = \tilde{R}(ij)\eta(\tau_k^-), \tilde{R}(ii) = \mathbb{I}, t = \tau_k, \end{cases} \quad (4.6)$$

pour tout $i, j \in \mathcal{S}$, on aura :

$$\begin{aligned} \tilde{E}(i) &= \begin{bmatrix} E(i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E(i) \end{bmatrix}, \tilde{A}(i) = \begin{bmatrix} A(i) + B(i)K(i) & -B(i)K(i) \\ \mathbf{0} & A(i) + L(i)C_y(i) \end{bmatrix}, \\ \tilde{R}(ij) &= \begin{bmatrix} R(ij) & 0 \\ 0 & R(ij) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pour mener à bien notre étude, en plus des hypothèses H1 et H2 précédemment définies, nous allons supposer que les variables d'état du système formant $x(t)$ ne sont pas accessibles.

Approche proposée

Le théorème suivant fournit des conditions suffisantes d'existence d'une loi de commande par retour d'état assuré par un observateur de type Luenberger. Ces conditions vont garantir que le système augmenté en boucle fermée soit stochastiquement admissible.

Théorème 4.2.1 *S'ils existent un ensemble de matrices non singulières*

$P = (P(1), \dots, P(N))$ et $Q = (Q(1), \dots, Q(N))$, un ensemble de matrices $K = (K(1), \dots, K(N))$ et $L = (L(1), \dots, L(N))$ vérifiant les inégalités suivantes pour tout $i \in \mathcal{S}$:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_1(i) & P^\top(i)B(i) \\ B^\top(i)P(i) & -\mathbb{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.7)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_2(i) & K^\top(i) \\ K(i) & -\mathbb{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.8)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1(i) &= A^\top(i)P^\top(i) + P(i)A(i) + K^\top(i)B^\top(i)P(i) + P(i)B(i)K(i) \\ &+ \sum_{j=1}^N \pi_{ij} R^\top(ij) E^\top(j) P(j) R(ij), \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2(i) &= A^\top(i)Q(i) + Q^\top(i)A(i) + Q(i)L(i)C_y(i) + C_y^\top(i)L^\top(i)Q(i) \\ &+ \sum_{j=1}^N \pi_{ij} R^\top(ij) E^\top(j) Q(j) R(ij) \end{aligned} \quad (4.10)$$

sous les contraintes :

$$E^\top(i)P(i) = P^\top(i)E(i) \geq 0 \quad (4.11)$$

$$E^\top(i)Q(i) = Q^\top(i)E(i) \geq 0. \quad (4.12)$$

Alors le système (4.6) est stochastiquement admissible, sous la loi de commande

assurée par l'observateur (4.1).

Preuve : Pour démontrer ce résultat, commençons par considérer la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(x(t), e(t), i) = x^\top(t) E^\top P(i) x(t) + e^\top(t) E^\top Q(i) e(t)$$

avec $P(i)$ et $Q(i)$ sont deux matrices non singulières. En calculant, le générateur infinitésimal $\mathbb{L}$ du processus $\{(x(t), e(t), i), t \geq 0\}$ qui dans ce cas, sera donné par:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}V(x(t), e(t), i) &= \left[[A(i) + B(i)K(i)] x(t) - B(i)K(i)e(t) \right]^\top P(i) x(t) \\ &\quad + x^\top(t) P^\top(i) \left[[A(i) + B(i)K(i)] x(t) - B(i)K(i)e(t) \right] \\ &\quad + \left[[A(i) + L(i)C_y(i)] e(t) \right]^\top Q(i) e(t) \\ &\quad + e^\top(t) Q^\top(i) \left[[A(i) + L(i)C_y(i)] e(t) \right] \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} [x^\top(t) R^\top(ij) E^\top(j) P(j) R(ij) x(t) \\ &\quad + e^\top(t) R^\top(ij) E^\top(j) Q(j) R(ij) e(t)] \\ &= x^\top(t) \left[A^\top(i) P(i) + P^\top(i) A(i) + K^\top(i) B^\top(i) P(i) + P^\top(i) B(i) K(i) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} R^\top(ij) E^\top(j) P(j) R(ij) \right] x(t) - 2x^\top(t) P(i) B(i) K(i) e(t) \\ &\quad + e^\top(t) \left[A^\top(i) Q(i) + Q^\top(i) A(i) + Q^\top(i) L(i) C_y(i) + C_y^\top(i) L^\top(i) Q(i) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} R^\top(ij) E^\top(j) Q(j) R(ij) \right] e(t) \end{aligned}$$

Il est à noter qu'en faisant appel au Lemme 3.2.1, on obtient :

$$-2x^\top(t) P^\top(i) B(i) K(i) e(t) \leq x^\top(t) P^\top(i) B(i) B^\top(i) P(i) x(t) + e^\top(t) K^\top(i) K(i) e(t)$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}V(x(t), e(t), i) &\leq x^\top(t) \left[A^\top(i)P(i) + P^\top(i)A(i) + K^\top(i)B^\top(i)P(i) + P^\top(i)B(i)K(i) \right. \\
&\quad \left. + P^\top(i)B(i)B^\top(i)P(i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij}R^\top(ij)E^\top(j)P(j)R(ij) \right] x(t) \\
&\quad + e^\top(t) \left[A^\top(i)Q(i) + Q^\top(i)A(i) + Q^\top(i)L(i)C_y(i) + C_y^\top(i)L^\top(i)Q(i) \right] \\
&\quad + K^\top(i)K(i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij}R^\top(ij)E^\top(j)Q(j)R(ij) \Big] e(t) \tag{4.13} \\
&\leq \begin{bmatrix} x^\top(t) & e^\top(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{H}_1(i) & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_2(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x^\top(t) & e^\top(t) \end{bmatrix} J(i) \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_1(i) &= A^\top(i)P(i) + P^\top(i)A(i) + K^\top(i)B^\top(i)P(i) + P^\top(i)B(i)K(i) \\
&\quad + P^\top(i)B(i)B^\top(i)P(i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij}R^\top(ij)E^\top(j)P(j)R(ij) \tag{4.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_2(i) &= A^\top(i)Q(i) + Q^\top(i)A(i) + Q^\top(i)L(i)C_y(i) + C_y^\top(i)L^\top(i)Q(i) \\
&\quad + K^\top(i)K(i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij}R^\top(ij)E^\top(j)Q(j)R(ij) \tag{4.15}
\end{aligned}$$

D'après le Théorème 4.2.1, on a $J(i) < 0$ pour tout $i \in \mathcal{S}$, ceci entraîne :

$$\mathbb{L}V(x(t), e(t), i) \leq -\min_{i \in \mathcal{S}} \lambda_{\min}(-J(i)) \begin{bmatrix} x^\top(t) & e^\top(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

En appliquant le Lemme 2.6.1, et en adoptant une procédure analogue à celle utilisée dans le chapitre 2, pour démontrer la stabilité stochastique d'un SSSMD, on peut montrer que pour tout $t > 0$, il existe une constante strictement positive

$T(x_0, i_0)$ tel que l'inégalité suivante est toujours vérifiée :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t \begin{bmatrix} x^\top(s) & e^\top(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ e(s) \end{bmatrix} ds | (x_0, e_0, i_0) \right] \leq T(x_0, e_0, i_0) \quad (4.17)$$

avec $T(x_0, i_0) = \frac{\mathbb{E}[V(x(0), e_0, i_0)]}{\min_{i \in \mathcal{S}} \{\lambda_{\min}(-J(i))\}}$. Ceci complète la démonstration du Théorème 4.2.1.

Remarque 4.2.1 *Le Théorème 4.2.1 fournit des conditions suffisantes pour que le système augmenté en boucle fermée (4.6) soit stochastiquement admissible. Il est à remarquer que quand la matrice $E(i) = \mathbb{I}, i \in \mathcal{S}$ et que le système saute d'un mode vers un autre sans considérer la discontinuité forcée sur la composante continue aux moments des sauts, nous retrouvons le résultat développé dans (Boukas, 2005), relatif à la stabilisation stochastique par retour d'état assuré par un observateur d'un système à sauts markoviens. De même, lorsque le système ne présente qu'un seul mode avec $E = \mathbb{I}$, nous retrouvons les résultats développés pour un système conventionnel. Ainsi, le résultat du Théorème 4.2.1 peut être considéré comme une généralisation des résultats existants dans la littérature.*

Néanmoins, bien que les conditions du Théorème 4.2.1 soient formulées sous forme de deux inégalités matricielles séparées, le résultat reste non linéaire par rapport aux inconnues $P(i), Q(i), K(i)$ et $L(i)$, et par conséquent, celles-ci sont difficiles à utiliser immédiatement pour calculer les gains de la loi de commande et de l'observateur. La section suivante permet de résoudre ce problème en transformant ces inégalités matricielles en un problème de complémentarité sur le cône.

Conception d'une loi de commande assurée par un observateur

Pour synthétiser la loi de commande assurée par l'observateur (4.1) du système étudié, nous allons procéder à la linéarisation des inégalités (4.14) et (4.15).

Pour la première inégalité (4.14), remarquons tout d'abord qu'en utilisant le lemme 3.2.2 sur la majoration du terme sous la sommation dans celle-ci, ensuite en posant $X(i) = P^{-1}(i)$ et en la multipliant à gauche et à droite par $P^{-\top}(i)$, et $P^{-1}(i)$, cette inégalité peut être transformée en :

$$X^\top(i)A^\top(i) + A(i)X(i) + X^\top(i)K^\top(i)B^\top(i) + B(i)K(i)X(i) + \pi_{ii}X^\top(i)E^\top(i) \\ + B(i)B^\top(i) + X^\top(i)V_P(i)X(i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{4}\pi_{ij}X^\top(i)\varepsilon^{-1}(ij)X(i)\pi_{ij} < 0 \quad (4.18)$$

$$\begin{bmatrix} V_P(i) & W(i) \\ W^\top(i) & \mathcal{P}(i) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.19)$$

où $V_P(i)$ est la matrice symétrique et définie-positive, précédemment définie dans le lemme 3.2.2 conjointement aux matrices $W(i)$ et $\mathcal{P}(i)$ qui sont données par :

$$W(i) = [R^\top(i1)E^\top(1)P(1)R(i1), \dots, R^\top(ii-1)E^\top(i-1)P(i-1)R(ii-1), \quad (4.20)$$

$$R^\top(ii+1)E^\top(i+1)P(i+1)R(ii+1), \dots, R^\top(iN)E^\top(N)P(N)R(iN)],$$

$$\mathcal{P}(i) = \text{diag}[\varepsilon^{-1}(i1)\mathbb{I}, \dots, \varepsilon^{-1}(ii-1)\mathbb{I}, \varepsilon^{-1}(ii+1)\mathbb{I}, \dots, \varepsilon^{-1}(iN)\mathbb{I}]. \quad (4.21)$$

Ainsi, en procédant au changement de variables $Y_c(i) = K(i)X(i)$, et en appliquant le complément de Schur à l'inégalité (4.18), on obtient le résultat suivant :

$$\begin{bmatrix} \Pi_P(i) & X^\top(i) & \mathcal{S}_i^\top(i) \\ X(i) & -Z_P(i) & \mathbf{0} \\ \mathcal{S}_i(i) & \mathbf{0} & -\mathcal{X}(i) \end{bmatrix} < 0, \quad (4.22)$$

avec :

$$\begin{aligned}\Pi_P(i) &= X^\top(i)A^\top(i) + A(i)X(i) + Y_c^\top(i)B^\top(i) + B(i)Y_c(i) \\ &\quad + B(i)B^\top(i) + \pi_{ii}X^\top(i)E^\top(i),\end{aligned}\quad (4.23)$$

$$\mathcal{S}(i) = \frac{1}{2}[\pi_{i1}X^\top(i), \dots, \pi_{ii-1}X^\top(i), \pi_{ii+1}X^\top(i), \dots, \pi_{iN}X^\top(i)], \quad (4.24)$$

$$\mathcal{X}(i) = \text{diag}[\varepsilon(i1)\mathbb{I}, \dots, \varepsilon(ii-1)\mathbb{I}, \varepsilon(ii+1)\mathbb{I}, \dots, \varepsilon(iN)\mathbb{I}]. \quad (4.25)$$

Transformons maintenant la condition $\mathcal{H}_2(i) < 0$ sous forme d'une LMI. Pour cela, posons $Y_o(i) = Q^\top(i)L(i)$, ainsi, on aura :

$$\begin{aligned}& A^\top(i)Q(i) + Q^\top(i)A(i) + Y_o(i)C_y(i) + C_y^\top(i)Y_o^\top(i) + K^\top(i)K(i) \\ & + \pi_{ii}E^\top(i)Q(i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \pi_{ij}R^\top(ij)E^\top(j)Q(j)R(ij) < 0\end{aligned}\quad (4.26)$$

En appliquant là aussi le lemme 3.2.2 sur la majoration du terme sous la sommation de (4.26) et le complément de Schur, on peut déduire que pour tout $i, j \in \mathcal{S}$, il existe un ensemble de scalaires positifs $\epsilon(ij)$ et un ensemble de matrices symétriques définies-positives $V_Q(i)$, tel que la vérification de l'inégalité précédente se ramène à celle des deux inégalités ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} \Pi_Q(i) & K^\top(i) \\ K(i) & -\mathbb{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.27)$$

$$\begin{bmatrix} V_Q(i) & W_Q(i) \\ W_Q^\top(i) & \mathcal{Q}(i) \end{bmatrix} > 0, \quad (4.28)$$

avec :

$$\Pi_Q(i) = A^\top(i)Q(i) + Q^\top(i)A(i) + Y_o(i)C_y(i) + C_y^\top(i)Y_o^\top(i) + V_Q(i) \quad (4.29)$$

$$+ \pi_{ii}E^\top(i)Q(i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{4}\pi_{ij}^2\epsilon(ij)\mathbb{I},$$

$$\begin{aligned}W_Q(i) &= [R^\top(i1)E^\top(1)Q(1)R(i1), \dots, R^\top(ii-1)E^\top(i-1)Q(i-1)R(ii-1), \\ &\quad R^\top(ii+1)E^\top(i+1)Q(i+1)R(ii+1), \dots, R^\top(iN)E^\top(N)Q(N)R(iN)],\end{aligned}\quad (4.30)$$

$$\mathcal{Q}(i) = \text{diag}[\epsilon(1)\mathbb{I}, \dots, \epsilon(i-1)\mathbb{I}, \epsilon(i+1)\mathbb{I}, \dots, \epsilon(N)\mathbb{I}]. \quad (4.31)$$

Ce résultat est résumé dans le Théorème suivant :

Théorème 4.2.2 *S'il existe un ensemble de matrices non singulières*

$P = (P(1), \dots, P(N))$, $X = (X(1), \dots, X(N))$, et $Q = (Q(1), \dots, Q(N))$, un ensemble de matrices symétriques et définies-positives $V_P = (V_P(1), \dots, V_P(N))$, $V_Q = (V_Q(1), \dots, V_Q(N))$ et $Z_P = (Z_P(1), \dots, Z_P(N))$, un ensemble de matrices $Y_c = (Y_c(1), \dots, Y_c(N))$ et $Y_o = (Y_o(1), \dots, Y_o(N))$ et un ensemble de scalaires positifs $\varepsilon = (\varepsilon(i1), \dots, \varepsilon(iN))$ et $\epsilon = (\epsilon(i1), \dots, \epsilon(iN))$ vérifiant les LMIs (4.19), (4.22), (4.27), (4.28), avec $W(i)$, $\mathcal{P}(i)$, $\Pi_P(i)$, $\mathcal{S}(i)$, $\mathcal{X}(i)$, $\Pi_Q(i)$, $W_Q(i)$ et $\mathcal{Q}(i)$ sont données par (4.20), (4.21), (4.23), (4.24), (4.25), (4.29), (4.30) et (4.31), sous les contraintes (4.11), (4.12) et :

$$X(i)P(i) = \mathbb{I}, Z_P(i)V_P(i) = \mathbb{I} \quad (4.32)$$

alors le système bouclé (4.6) sera stochastiquement admissible, sous la loi de commande assurée par l'observateur (4.1), dont les matrices gains sont données par:

$$K(i) = Y_c(i)X^{-1}(i), \quad (4.33)$$

$$L(i) = Q^{-1}(i)Y_o(i). \quad (4.34)$$

Les conditions développées jusqu'à présent dans ce théorème, sont non linéaires et non convexes, à cause de la présence de l'inverse du scalaire $\varepsilon(i)$ dans l'expression de la matrice $\mathcal{P}(i)$, et des contraintes bilinéaires (4.32). Pour les linéariser, et les exprimer sous forme de LMIs avec contraintes, nous allons utiliser le lemme 3.2.3. Ainsi, on obtient :

$$\begin{bmatrix} P(i) & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & X(i) \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} V_P(i) & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & Z_P(i) \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} \beta(ij) & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \varepsilon(ij) \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.35)$$

Le corollaire suivant récapitule ce résultat :

Corollaire 4.2.1 *S'il existe une matrice non singulière $Q = (Q(1), \dots, Q(N))$, un ensemble de matrices symétriques et définies-positives $P = (P(1), \dots, P(N))$, $X = (X(1), \dots, X(N))$, $V_P = (V_P(1), \dots, V_P(N))$, $V_Q = (V_Q(1), \dots, V_Q(N))$ et $Z_P = (Z_P(1), \dots, Z_P(N))$, , un ensemble de matrices $Y_c = (Y_c(1), \dots, Y_c(N))$ et $Y_o = (Y_o(1), \dots, Y_o(N))$, et un ensemble de scalaires positifs $\varepsilon = (\varepsilon(i1), \dots, \varepsilon(iN))$, $\beta = (\beta(i1), \dots, \beta(iN))$, et $\epsilon = (\epsilon(i1), \dots, \epsilon(iN))$, qui satisfont au problème suivant, pour tout $i, j \in \mathcal{S}$:*

$$\mathbf{P}_2 : \min \sum_{i=1}^N \text{Tr}(P(i)X(i) + V_P(i)Z_P(i) + \beta(ij)\varepsilon(ij)\mathbb{I})$$

sujet aux LMIs (4.19), (4.22), (4.27), (4.28), (4.35) et :

$$\begin{bmatrix} V_P(i) & W(i) \\ W^\top(i) & \mathcal{G}(i) \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.36)$$

avec $\mathcal{G}(i) = \text{diag}[\beta(i1)\mathbb{I}, \dots, \beta(ii-1)\mathbb{I}, \beta(ii+1)\mathbb{I}, \dots, \beta(iN)\mathbb{I}]$, sous les contraintes (4.11), (4.12), alors le système en boucle fermée (4.6) est stochastiquement admissible, sous la loi de commande assurée par un observateur (4.1), dont les matrices gains sont données par (4.33) et (4.34).

Remarque 4.2.2 *Pour résoudre l'ensemble des inégalités matricielles linéaires de ce Corollaire, on utilise l'algorithme (V.0.1). Pour cela, il faut d'abord résoudre les LMIs (4.36) et (4.22), pour trouver les matrices $P(i)$, $Z_P(i)$, $V_P(i)$, $Y_c(i)$ et $X(i)$, qui seront à la base du calcul de la matrice gain $K(i)$ donnée par la formule (4.33).*

Ce gain est ensuite reporté dans les LMIs (4.27), (4.28) pour trouver les matrices $Q(i), V_Q(i), Y_o(i)$. Et après obtention de ces matrices, nous pouvons déduire la matrice de gain $L(i)$.

Remarque 4.2.3 Notons que:

- lorsque $R(ij) = \mathbb{I}, i, j \in \mathcal{S}$, les conditions énoncées dans le Corollaire 4.2.1, se ramènent à celles que doit vérifier un système singulier avec sauts markoviens pour être stochastiquement admissible au moyen d'un retour d'état assuré par l'observateur qui a été présenté dans (Raouf et Boukas, 2004b).
- quand $E(i) = \mathbb{I}$ et $R(ij) = \mathbb{I}$, ce résultat peut être considéré comme une généralisation de la commande par retour d'état assuré par un observateur, développé par (Boukas, 2005) pour un système avec sauts markoviens.

4.3 Retour de sortie dynamique

Une loi de commande basée sur un retour de sortie est représentée mathématiquement par les équations suivantes :

$$\begin{cases} E(r_t)\dot{\xi}(t) = K_A(r(t))\xi(t) + K_B(r(t))y(t) \\ u(t) = K_C(r(t))\xi(t), \text{ pour tout } r(t) \in \mathcal{S} \end{cases} \quad (4.37)$$

où $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'estimation du vecteur d'état $x(t)$, $K_A(r(t))$, $K_B(r(t))$, et $K_C(r(t))$ sont les matrices de gains à déterminer du contrôleur et de l'observateur. Ces trois matrices de gains doivent être choisies de manière à assurer la convergence asymptotique de l'état estimée vers l'état réel.

Les estimées fournies par l'observateur seront utilisées pour l'élaboration de la loi de commande stabilisante.

Remarque 4.3.1 *Il est à noter que l'observateur (4.37) n'est qu'un cas particulier de l'observateur (4.1) utilisé dans la première approche. En effet, en remplaçant $u(t)$ par son expression dans (4.1), on aboutit à :*

$$E(r_t)\dot{x}_c(t) = [A(r(t)) - L(r(t))C_y(r(t)) + B(r(t))K(r(t))]x_c(t) + L(r(t))y(t),$$

qui n'est autre que la structure de l'observateur par retour de sortie donnée par (4.37).

En remplaçant la loi de commande $u(t)$ par son expression, et en combinant les équations décrivant le système (2.8) et l'observateur (4.37), on obtient le système

en boucle fermée suivant :

$$\begin{cases} \tilde{E}(r(t))\dot{\eta}(t) = \tilde{A}(r(t))\eta(t), t \neq \tau_k \\ \eta(\tau_k^+) = \tilde{R}(r_{\tau_k^+} = j, r_{\tau_k} = i)\eta(\tau_k), t = \tau_k, \end{cases} \quad (4.38)$$

où le vecteur d'état augmenté $\eta(t)$ et les matrices $\tilde{E}(r(t))$, $\tilde{A}(r(t))$, $\tilde{R}(r_{\tau_k^+} = j, r_{\tau_k} = i)$ sont donnés pour tous $i, j \in \mathcal{S}$ par :

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}, \tilde{E}(i) = \begin{bmatrix} E(i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E(i) \end{bmatrix}, \tilde{R}(ij) = \begin{bmatrix} R(ij) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R(ij) \end{bmatrix}, \\ \tilde{A}(i) &= \begin{bmatrix} A(i) & B(i)K_C(i) \\ K_B(i)C_y(i) & K_A(i) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De la même manière que pour la loi de commande par retour d'état assuré par un observateur traité dans la première partie de ce chapitre, nous allons développer des conditions suffisantes qui assurent la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation d'état. Ceci va nous permettre de calculer les matrices gains $K_A(i)$, $K_B(i)$ et $K_C(i)$, qui assurent que le système en boucle fermée (4.38) soit stochastiquement admissible.

Pour cela, en se basant sur le Théorème 2.6.1, le système en boucle fermée (4.38) sera stochastiquement admissible, s'il vérifie les LMIs suivantes pour tout $i \in \mathcal{S}$:

$$J_r(i) = \tilde{A}^\top(i)P(i) + P^\top(i)\tilde{A}(i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} \tilde{R}^\top(ij) \tilde{E}^\top(j)P(j) \tilde{R}(ij) < 0 \quad (4.39)$$

sous la contrainte :

$$\tilde{E}^\top(i)P(i) = P^\top(i)\tilde{E}(i) \geq 0 \quad (4.40)$$

Cet inégalité est non linéaire par rapport aux paramètres de design $K_A(i)$, $K_B(i)$, $K_C(i)$, et $P(i)$ pour tout $i \in \mathcal{S}$. Pour la transformer en LMI, nous allons définir les matrices suivantes :

$$P(i) = \begin{bmatrix} P_1(i) & P_2(i) \\ P_2^\top(i) & P_3(i) \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$W(i) = [P_1(i) - P_2(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)]^{-1} \quad (4.42)$$

$$U(i) = \begin{bmatrix} W(i) & \mathbb{I} \\ W(i) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$V(i) = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -P_3^{-1}(i)P_2^\top(i) \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

où $P_1(i)$ et $P_3(i)$ sont des matrices inversibles et $P_2(i)$ est une matrice symétrique définie-positive.

Ainsi on a :

$$V(i)U(i) = \begin{bmatrix} W(i) & \mathbb{I} \\ -P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

En multipliant à droite et à gauche (4.39) par $U^\top(i)V^\top(i)$ et $U(i)V(i)$ respectivement, on obtient :

$$\begin{aligned} & U^\top(i)V^\top(i)\tilde{A}^\top(i)P(i)V(i)U(i) + U^\top(i)V^\top(i)P^\top(i)\tilde{A}(i)V(i)U(i) \\ & + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} U^\top(i)V^\top(i)\tilde{R}^\top(ij)\tilde{E}^\top(j)P(j)\tilde{R}(ij)V(i)U(i) < 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

En calculant les différents termes de l'inégalité ci-dessus et en procédant à des

manipulations algébriques, on obtient :

$$\begin{aligned}
U^\top(i)V^\top(i)P^\top(i)\tilde{A}(i)V(i)U(i) &= \begin{bmatrix} W^\top(i) & -W^\top(i)P_2(i)P_3^{-T}(i) \\ \mathbb{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P_1^\top(i) & P_2(i) \\ P_2^\top(i) & P_3(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(i) & B(i)K_C(i) \\ K_B(i)C_y(i) & K_A(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(i) & \mathbb{I} \\ -P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} W^\top(i)P_1^\top(i) & & & \\ -W^\top(i)P_2(i)P_3^{-T}(i)P_2(i) & W^\top(i)P_2(i) & & \\ -W^\top(i)P_2(i)P_3^{-T}(i)P_3^\top(i) & & & \\ P_1^\top(i) & & P_2(i) & \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A(i)W(i) - B(i)K_C(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i) & A(i) \\ K_B(i)C_y(i)W(i) - K_A(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i) & K_B(i)C_y(i) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathcal{N}_1(i) & \mathcal{N}_2(i) \\ \mathcal{N}_3(i) & \mathcal{N}_4(i) \end{bmatrix} < 0
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_1(i) &= [W^\top(i)P_1^\top(i) - W^\top(i)P_2(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)][A(i)W(i) \\
&\quad - B(i)K_C(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i)] \\
&\quad + [W^\top(i)P_2(i) - W^\top(i)P_2(i)P_3^{-1}(i)P_3(i)], \\
\mathcal{N}_2(i) &= W^\top(i)[P_1^\top(i) - P_2(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)]A(i) \\
&\quad + [W^\top(i)P_2(i) - W^\top(i)P_2(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)]K_B(i)C_y(i), \\
\mathcal{N}_3(i) &= P_1^\top(i)[A(i)W(i) - B(i)K_C(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i)] + P_2(i)[K_B(i)C_y(i)W(i) \\
&\quad - K_A(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i)], \\
\mathcal{N}_4(i) &= P_1^\top(i)A(i) + P_2(i)K_B(i)C_y(i).
\end{aligned}$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_1(i) &= W^\top(i)P_1^\top(i)A(i)W(i) + W^\top(i)P_2(i)K_B(i)C_y(i)W(i) \\
&\quad - W^\top(i)P_2(i)P_3^{-1}(i)A(i)W(i) - W^\top(i)P_2(i)K_B(i)C_y(i)W(i) \\
&\quad - W^\top(i)P_1^\top(i)B(i)K_C(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i) \\
&\quad - W^\top(i)P_2(i)K_A(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i) \\
&\quad + W^\top(i)P_2(i)P_3^{-1}(i)B(i)K_C(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i) \\
&\quad + W^\top(i)P_2(i)K_A(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i) \\
\mathcal{N}_2(i) &= W^\top(i)P_1^\top(i)A(i) - W^\top(i)P_2(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)A(i) \\
&\quad - W^\top(i)P_2(i)K_B(i)C_y(i) + W^\top(i)P_2(i)K_B(i)C_y(i), \\
\mathcal{N}_3(i) &= P_1^\top(i)A(i)W(i) + P_2(i)K_B(i)C_y(i)W(i) \\
&\quad - P_1^\top(i)B(i)K_C(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i) - P_2(i)K_A(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)R(i)W(i) \\
\mathcal{N}_4(i) &= P_1^\top(i)A(i) + P_2(i)K_B(i)C_y(i)
\end{aligned}$$

Il est à remarquer qu'en utilisant le fait que : $W(i) [P_1^\top(i) - P_2(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)] = \mathbb{I}$, les égalités citées ci-dessus deviennent :

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_1(i) &= W^\top(i) \left[P_1^\top(i) - P_2(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i) \right] A(i)W(i) \\
&\quad + W^\top(i)P_2(i)K_B(i)C_y(i)W(i) - W^\top(i)P_2(i)K_B(i)C_y(i)W(i) \\
&\quad - W^\top(i) \left[P_1^\top(i) - P_2(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i) \right] B(i)K_C(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i) \\
&= A(i)W(i) - B(i)K_C(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i), \\
\mathcal{N}_2(i) &= W^\top(i) \left[P_1^\top(i) - P_2(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i) \right] A(i) \\
&= A(i), \\
\mathcal{N}_3(i) &= P_1^\top(i)A(i)W(i) + P_2(i)K_B(i)C_y(i)W(i) \\
&\quad - P_1^\top(i)B(i)K_C(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i) - P_2(i)K_A(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i), \\
\mathcal{N}_4(i) &= P_1^\top(i)A(i) + P_2(i)K_B(i)C_y(i)
\end{aligned}$$

D'un autre côté, comme le terme $U^\top(i)V^\top(i)\tilde{A}^\top(i)P(i)V(i)U(i)$ est le transposé

de $U^\top(i)V^\top(i)P^\top(i)\tilde{A}(i)V^\top(i)U(i)$, on obtient alors :

$$U^\top(i)V^\top(i)\tilde{A}^\top(i)P(i)V(i)U(i) = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_1^\top(i) & \mathcal{N}_3^\top(i) \\ \mathcal{N}_2^\top(i) & \mathcal{N}_4^\top(i) \end{bmatrix} < 0.$$

Quand au terme $U^\top(i)V^\top(i)\tilde{R}^\top(ij)\tilde{E}^\top(j)P(j)\tilde{R}(ij)V(i)U(i)$, il est donné par :

$$\begin{aligned} U^\top(i)V^\top(i)\tilde{R}^\top(ij)\tilde{E}^\top(j)P(j)\tilde{R}(ij)V(i)U(i) &= \begin{bmatrix} W^\top(i) & \begin{bmatrix} -W^\top(i) \\ \times P_2(i)P_3^{-1}(i) \end{bmatrix} \\ \mathbb{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} R^\top(ij)E^\top(j) \\ \times P_1(j)R(ij) \\ R^\top(ij)E^\top(j) \\ \times P_2^\top(j)R(ij) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} R^\top(ij)E^\top(j) \\ \times P_2(j)R(ij) \\ R^\top(ij)E^\top(j) \\ \times P_3(j)R(ij) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(i) & \mathbb{I} \\ \begin{bmatrix} -P_3^{-1}(i) \\ \times P_2^\top(i)W(i) \end{bmatrix} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} W^\top(i) & -W^\top(i)P_2(i)P_3^{-1}(i) \\ \mathbb{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1(i) & R^\top(ij)E^\top(i)P_1(j)R(ij) \\ \mathcal{L}_2(i) & R^\top(ij)E^\top(j)P_2(j)R(ij) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(i) &= R^\top(ij)E^\top(j)P_1(j)R(ij)W(i) - R^\top(ij)E^\top(j)P_2^\top(j)R(ij)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i), \\ \mathcal{L}_2(i) &= R^\top(ij)E^\top(j)P_2(j)R(ij)W(i) - R^\top(ij)E^\top(i)P_3(j)R(ij)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i). \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$U^\top(i)V^\top(i)\tilde{R}^\top(ij)\tilde{E}^\top(j)P(j)\tilde{R}(ij)V(i)U(i) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_3(i) & \mathcal{L}_4(i) \\ \mathcal{L}_5(i) & \mathcal{L}_6(i) \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3(i) &= W^\top(i)R^\top(ij)E^\top(j) \left[P_1(j)R(ij) - P_2(j)R(ij)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i) \right] W(i) \\ &\quad - W^\top(i)P_2(i)P_3^{-1}(i)R^\top(ij)E^\top(j)P_2^\top(j)R(ij)W(i) \\ &\quad + W^\top(i)P_2(i)P_3^{-1}(i)R^\top(ij)E^\top(j)P_3(j)R(ij)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i), \\ \mathcal{L}_4(i) &= W^\top(i)R^\top(ij)E^\top(j)P_1^\top(j)R(ij) - W^\top(i)P_2^\top(i)P_3^{-1}(i) \\ &\quad \times R^\top(ij)E^\top(j)P_2^\top(j)R(ij), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_5(i) &= R^\top(ij)E^\top(j)P_1(j)R(ij)W(i) - R^\top(ij)E^\top(j)P_2(j)R(ij)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i) \\
\mathcal{L}_6(i) &= R^\top(ij)E^\top(j)P_1(j)R(ij).
\end{aligned}$$

Notons que $\mathcal{L}_3(i)$ peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_3(i) &= W^\top(i)R^\top(ij)E^\top(j) [P_1(j)R(ij) - P_2(j)R(ij)P_3^{-1}(j)P_2^\top(j)] W(i) \\
&\quad - W^\top(i)R^\top(ij)E^\top(j)P_2(j)R(ij)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i) \\
&\quad + W^\top(i)R^\top(ij)E^\top(j)P_2(j)R(ij)P_3^{-1}(j)P_2^\top(j)W(i) \\
&\quad - W^\top(i)P_2(i)P_3^{-1}(i)R^\top(ij)E^\top(j)P_2^\top(j)R(ij)W(i) \\
&\quad + W^\top(i)P_2(i)P_3^{-1}(i)R^\top(ij)E^\top(j)P_3(j)R(ij)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i).
\end{aligned}$$

Et en remarquant que $P_3^\top(j)E(j) = E^\top(j)P_3(j)$, $P_2^\top(j)E(j) = E^\top(j)P_2(j)$, la dernière égalité devient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_3(i) &= W^\top(i)R^\top(ij)E^\top(j) [P_1(j)R(ij) - P_2(j)R(ij)P_3^{-1}(j)P_2^\top(j)] W(i) \\
&\quad - W^\top(i)R^\top(ij)P_2(j)E(j)R(ij)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i) \\
&\quad + W^\top(i)R^\top(ij)P_2(j)E(j)R(ij)P_3^{-1}(j)P_2^\top(j)W(i) \\
&\quad - W^\top(i)P_2(i)P_3^{-1}(i)R^\top(ij)E^\top(j)P_2^\top(j)R(ij)W(i) \\
&\quad + W^\top(i)P_2(i)P_3^{-1}(i)R^\top(ij)P_3(j)E(j)R(ij)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i).
\end{aligned}$$

Après quelques manipulations algébriques sur celle-ci, on aboutit à :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_3(i) &= W^\top(i) [P_2(i)P_3^{-1}(i)R^\top(ij)P_3(j) - R(ij)P_2(j)] E(j)P_3^{-1}(j) \\
&\quad \times [P_2(i)P_3^{-1}(i)R^\top(ij)P_3(j) - R(ij)P_2(j)]^\top W(i) \\
&\quad + W^\top(i)R^\top(ij)P_2(j)E(j)P_3^{-1}(j)P_2(j)[\mathbb{I} - R(ij)]W(i)
\end{aligned}$$

Ainsi, l'égalité (4.47) sera exprimée comme suit :

$$U^\top(i)V^\top(i)\tilde{R}^\top(ij)\tilde{E}^\top(j)P(j)\tilde{R}(ij)V(i)U(i) = \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} W^\top(i)R^\top(ij)E^\top(j)[P_1(j)R(ij) \\ -P_2(j)R(ij)P_3^{-1}(j)P_2^\top(j)]W(i) + \mathcal{L}_3(i) \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} R^\top(ij)E^\top(j)P_1(j)R(ij)W(i) \\ -R^\top(ij)E^\top(j)P_2(j)R(ij)P_3^{-1}(j)P_2^\top(j)W(i) \end{array} \right] \end{array} \right] \begin{array}{c} \star \\ R^\top(ij)E^\top(j)P_1(j)R(ij) \end{array} \right]$$

En prenant en considération toutes ces manipulations, la condition de stabilité pour le système en boucle fermée devient alors :

$$\left[\begin{array}{cc} \widehat{\mathcal{M}}_1(i) & \mathcal{M}_2(i) \\ \star & \mathcal{M}_3(i) \end{array} \right] < 0$$

avec :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{M}}_1(i) &= \mathcal{M}_1(i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} W^\top(i) R^\top(ij) E^\top(j) [P_1(j) R(ij) \\ &\quad - P_2(j) R(ij) P_3^{-1}(j) P_2^\top(j)] W(i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} \mathcal{L}_3(i)(i) \\ \mathcal{M}_1(i) &= W^\top(i) A^\top(i) + A(i) W(i) - W^\top(i) P_2(i) P_3^{-T}(i) K_C^\top(i) B^\top(i) \\ &\quad - B(i) K_C(i) P_3^{-1}(i) P_2(i) W(i) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} W^\top(i) R^\top(ij) E^\top(j) \left[P_1(j) R(ij) - P_2(j) R(ij) P_3^{-1}(j) P_2^\top(j) \right] W(i) \\ \mathcal{M}_2(i) &= A(i) + W^\top(i) A^\top(i) P_1(i) + W^\top(i) C_y^\top(i) K_B^\top(i) P_2^\top(i) \\ &\quad - W^\top(i) P_2(i) P_3^{-1}(i) K_C^\top(i) B^\top(i) P_1(i) - W^\top(i) P_2(i) P_3^{-T}(i) K_A^\top(i) P_2^\top(i) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} W^\top(i) \left[P_1(j) R(ij) - P_2^\top(j) R(ij) P_3^{-1}(i) P_2^\top(i) \right]^\top E(j) R(ij) \\ \mathcal{M}_3(i) &= P_1^\top(i) A(i) + P_2(i) K_B(i) C_y(i) + A^\top(i) P_1(i) + C_y^\top(i) K_B^\top(i) P_2^\top(i) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} R^\top(ij) E^\top(j) P_1(j) R(ij). \end{aligned}$$

Il est à noter que pour $j = i$, $\mathcal{L}_3(i) = 0$. Il en découle que $\sum_{j=1}^N \pi_{ij} \mathcal{L}_3(i) \geq 0$.

Ainsi, la condition de stabilité stochastique devient :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_1(i) & \mathcal{M}_2(i) \\ \star & \mathcal{M}_3(i) \end{bmatrix} < 0 \quad (4.48)$$

Comme choix de la matrice de Lyapunov, nous allons prendre la forme suivante :

$$P(i) = \begin{bmatrix} X(i) & Y^{-1}(i) - X(i) \\ Y^{-1}(i) - X(i) & X(i) - Y^{-1}(i) \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

où $X(i)$ et $Y(i)$ sont deux matrices non singulières pour tout $i \in \mathcal{S}$, c'est-à-dire :

$$P_1(i) = X(i)$$

$$P_2(i) = Y^{-1}(i) - X(i)$$

$$P_3(i) = X(i) - Y^{-1}(i)$$

ceci implique que :

$$W(i) = [P_1(i) - P_2(i)P_3^{-1}(j)P_2^\top(i)]^{-1} = Y(i), P_3^{-1}(i)P_2^\top(i) = -\mathbb{I}$$

Si on définit $\mathcal{K}_B(i)$ et $\mathcal{K}_C(i)$ par :

$$\mathcal{K}_B(i) = P_2(i)K_B(i) = [Y^{-1}(i) - X(i)]K_B(i) \quad (4.50)$$

$$\mathcal{K}_C(i) = -K_C(i)P_3^{-1}(j)P_2^\top(i)W(i) = K_C(i)Y(i) \quad (4.51)$$

on aura alors :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_1(i) & \mathcal{M}_2(i) \\ \mathcal{M}_2^\top(i) & \mathcal{M}_3(i) \end{bmatrix} < 0$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1(i) &= A(i)Y(i) + Y^\top(i)A^\top(i) + B(i)\mathcal{K}_C(i) + \mathcal{K}_C^\top(i)B^\top(i) \\ &+ \sum_{j=1}^N \pi_{ij} Y^\top(i)R^\top(ij)E^\top(j)Y^{-1}(j)R(ij)Y(i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2(i) &= A(i) + Y^\top(i)A^\top(i)X(i) + Y^\top(i)C_y^\top(i)\mathcal{K}_B^\top(i) + \mathcal{K}_C^\top(i)B^\top(i)X(i) \\
&\quad + Y^\top(i)K_A^\top(i)[Y^{-1}(i) - X(i)]^\top + \sum_{j=1}^N \pi_{ij}Y^\top(i)R^\top(ij)Y^{-T}(j)E(j)R(ij) \\
\mathcal{M}_3(i) &= X^\top(i)A(i) + \mathcal{K}_B(i)C_y(i) + A^\top(i)X(i) + C_y^\top(i)\mathcal{K}_B^\top(i) \\
&\quad + \sum_{j=1}^N \pi_{ij}R^\top(ij)E^\top(j)X(j)R(ij)
\end{aligned}$$

En prenant l'expression suivante pour le gain $K_A(i)$, on aura :

$$\begin{aligned}
K_A(i) &= [Y^{-1}(i) - X(i)]^{-1}[A(i) + Y^\top(i)A^\top(i)X(i) + Y^\top(i)C_y^\top(i)\mathcal{K}_B^\top(i) \\
&\quad + \mathcal{K}_C^\top(i)B^\top(i)X(i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij}R(ij)^\top E^\top(j)Y^{-1}(j)R(ij)Y(i)]Y^{-1}(i)
\end{aligned}$$

on aura $\mathcal{M}_2(i) = 0$ ceci implique que :

$$\mathcal{M}_1(i) < 0$$

$$\mathcal{M}_3(i) < 0$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
&A(i)Y(i) + Y^\top(i)A^\top(i) + B(i)\mathcal{K}_C(i) + \mathcal{K}_C^\top(i)B^\top(i) \\
&+ \sum_{j=1}^N \pi_{ij}Y^\top(i)R^\top(ij)E^\top(j)Y^{-1}(j)R(ij)Y(i) < 0
\end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned}
&X^\top(i)A(i) + \mathcal{K}_B(i)C_y(i) + A^\top(i)X(i) + C_y^\top(i)\mathcal{K}_B^\top(i) \\
&\pi_{ii}E^\top(i)X(i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \pi_{ij}R^\top(ij)E^\top(j)X(j)R(ij) < 0
\end{aligned} \tag{4.53}$$

D'un autre côté, supposons qu'il existe deux matrices symétriques définies-positives $Z_Y(j) = Y^{-1}(j)$ et $V_Y(j)$ et un scalaire positif $\alpha(j)$, telles que :

$$E^\top(j)Z_Y(j) + \alpha(j)\mathbb{I} = V_Y^{-1}(j)$$

On aura alors :

$$\begin{aligned}
& A(i)Y(i) + Y^\top(i)A^\top(i) + B(i)\mathcal{K}_C(i) + \mathcal{K}_C^\top(i)B^\top(i) \\
& + \sum_{j=1}^N \pi_{ij}Y^\top(i)R^\top(ij)V_Y^{-1}(j)R(ij)Y(i) < 0
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Remarquons que :

$$\sum_{j=1}^N \pi_{ij}Y^\top(i)R^\top(ij)V_Y^{-1}(j)Y(i)R(ij) = \pi_{ii}Y^\top(i)E^\top(i) + \sum_{j \neq i,=1}^N \mathcal{S}_i^\top(Y)\mathcal{V}_i^{-1}(V_Y)\mathcal{S}_i(Y),$$

avec :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_i(Y) &= [\sqrt{\pi_{i1}}Y^\top(i)R^\top(i1), \dots, \sqrt{\pi_{ii-1}}Y^\top(i)R^\top(ii-1), \\
&\quad \sqrt{\pi_{ii+1}}Y^\top(i)R^\top(ii+1) \dots, \sqrt{\pi_{iN}}Y^\top(i)R^\top(iN)],
\end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\mathcal{V}_i(V_Y) = \text{diag} \left[V_Y(1), \dots, V_Y(i-1), V_Y(i+1) \dots, V_Y(N) \right]. \tag{4.56}$$

Ainsi l'égalité précédente devient :

$$\left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c} A(i)Y(i) + Y^\top(i)A^\top(i) + B(i)\mathcal{K}_C(i) \\ + \mathcal{K}_C^\top(i)B^\top(i) + \pi_{ii}Y^\top(i)E^\top(i) \end{array} \right] & \star \\ \mathcal{S}_i(Y) & -\mathcal{V}_i(V_Y) \end{array} \right] \leq 0$$

Pour l'inégalité $\tilde{E}^\top(i)P(i) = P^\top(i)\tilde{E}(i) \geq 0$, elle implique que :

$$\left[\begin{array}{cc} E^\top(i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E^\top(i) \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} P_1(i) & P_2(i) \\ P_2^\top(i) & P_3(i) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} P_1^\top(i) & P_2(i) \\ P_2^\top(i) & P_3^\top(i) \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} E(i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E(i) \end{array} \right] \geq 0$$

Il s'ensuit que :

$$E^\top(i)X(i) = X^\top(i)E(i) \geq 0, \tag{4.57}$$

$$Y^\top(i)E^\top(i) = E(i)Y(i) \geq 0. \tag{4.58}$$

De même, pour le terme $U^\top(i)V^\top(i)\tilde{R}^\top(ij)\tilde{E}^\top(j)P(j)\tilde{R}(ij)V(i)U(i) \geq 0$, ce dernier

donne :

$$\begin{aligned} & U^\top(i) V^\top(i) \tilde{R}^\top(ij) \tilde{E}^\top(j) P(j) \tilde{R}(ij) V(i) U(i) \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{R}_1(i) & \star \\ \mathcal{R}_2(i) & \mathcal{L}_6(i) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1(i) &= W^\top(i) E^\top(j) [P_1(j) R(ij) - P_2(j) R(ij) P_3^{-1}(j) P_2^\top(j)] W(i) \\ \mathcal{R}_2(i) &= R^\top(ij) E^\top(j) P_1(j) R(ij) W(i) - R^\top(ij) E^\top(i) P_2(j) R(ij) P_3^{-1}(i) P_2^\top(i) W(i) \end{aligned}$$

et pour $j = i$ on obtient :

$$\begin{aligned} & U^\top(i) V^\top(i) \tilde{R}^\top(ii) \tilde{E}^\top(i) P(i) \tilde{R}(ii) V(i) U(i) \\ &= \begin{bmatrix} Y^\top(i) E^\top(i) [X(i) + (Y^{-1}(i) - X(i))] Y(i) & \star \\ E^\top(i) X(i) Y(i) + E^\top(i) (Y^{-1}(i) - X(i)) Y(i) & E^\top(i) X(i) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Y^\top(i) E^\top(i) & \star \\ E^\top(i) & E^\top(i) X(i) \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

En combinant cette dernière inégalité avec les contraintes égalités données par (4.57) et (4.58), il s'ensuit:

$$\begin{bmatrix} E^\top(i) & 0 \\ 0 & E(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(i) & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & Y(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^\top(i) & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & Y^\top(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(i) & 0 \\ 0 & E^\top(i) \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.59)$$

Ces résultats sont résumés dans le théorème suivant :

Théorème 4.3.1 *S'il existe un ensemble de matrices non singulières*

$X = (X(1), \dots, X(N))$, un ensemble de matrices symétriques et définies-positives $Y = (Y(1), \dots, Y(N))$, $V_Y = (V_Y(1), \dots, V_Y(N))$, $Z_P = (Z_P(1), \dots, Z_P(N))$, un ensemble de matrices $\mathcal{K}_B = (\mathcal{K}_B(1), \dots, \mathcal{K}_B(N))$, $\mathcal{K}_C = (\mathcal{K}_C(1), \dots, \mathcal{K}_C(N))$, et un ensemble de scalaires positifs $\epsilon = (\epsilon(1), \dots, \epsilon(N))$ et $\alpha = (\alpha(1), \dots, \alpha(N))$, qui

vérifient le problème suivant pour tout $i \in \mathcal{S}$:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11}(i) & \star \\ \mathcal{S}_i(Y) & -\mathcal{V}_i(V_Y) \end{bmatrix} \leq 0, \quad (4.60)$$

$$\mathcal{M}_{31}(i) \leq 0 \quad (4.61)$$

$$\begin{bmatrix} Y^\top(i)E^\top(i) & E(i) \\ \star & E^\top(i)X(i) \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.62)$$

sous les contraintes (4.59) et :

$$\left(E^\top(i)Z_Y(i) + \alpha(i)\mathbb{I} \right) V_Y(i) = \mathbb{I}, \quad (4.63)$$

$$Z_Y(i)Y(i) = \mathbb{I}. \quad (4.64)$$

où :

$$\mathcal{M}_{11}(i) = A(i)Y(i) + Y^\top(i)A^\top(i) + B(i)\mathcal{K}_C(i) + \mathcal{K}_C^\top(i)B^\top(i) + \pi_{ii}Y^\top(i)E^\top(i),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{31}(i) &= X^\top(i)A(i) + A^\top(i)X(i) + \mathcal{K}_B(i)C_y(i) \\ &\quad + C_y^\top(i)\mathcal{K}_B^\top(i) + \sum_{i,j=1}^N \pi_{ij}R^\top(ij)E^\top(j)X(j)R(ij). \end{aligned}$$

avec $\mathcal{S}_i(Y)$ et $\mathcal{V}_i(V_Y)$ sont données par (4.55) (4.56), alors le système en boucle fermée est stochastiquement admissible, sous la loi de commande basée sur le retour dynamique (4.37), dont les matrices gains sont données par :

$$\begin{cases} K_A(i) = [X(i) - Y^{-1}(i)]^{-1} \left[A^\top(i) + X(i)A(i)Y(i) + X(i)B(i)\mathcal{K}_C(i) \right. \\ \quad \left. + \mathcal{K}_B(i)C_y(i)Y(i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij}R(ij)^\top E^\top(i)Y^{-1}(j)R(ij)Y(i) \right] Y^{-1}(i), \\ K_B(i) = [Y^{-1}(i) - X(i)]^{-1} \mathcal{K}_B(i), \\ K_C(i) = \mathcal{K}_C(i)Y^{-1}(i). \end{cases} \quad (4.65)$$

Jusqu'à présent, les conditions développées dans ce théorème ne sont pas linéaires,

à cause de la présence des égalités (4.63). Ainsi, pour rendre le problème convexe et le transformer sous forme de LMIs, nous allons approcher ces égalités par des inégalités matricielles linéaires semi-définies comme suit (El Ghaoui et al., 1997) :

$$\begin{bmatrix} E^\top(i)Z_Y(i) + \alpha(i)\mathbb{I} & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & V_Y(i) \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.66)$$

$$\begin{bmatrix} Z_Y(i) & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & Y(i) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.67)$$

On aboutit alors à un résultat sous forme de LMIs comme énoncé par le théorème suivant :

Théorème 4.3.2 (*Raouf et Boukas, 2007c*) *S'il existe un ensemble de matrices non singulières $X = (X(1), \dots, X(N))$, un ensemble de matrices symétriques et définies positives $Y = (Y(1), \dots, Y(N))$, $V_X = (V_X(1), \dots, V_X(N))$, $V_Y = (V_Y(1), \dots, V_Y(N))$, $Z_Y = (Z_Y(1), \dots, Z_Y(N))$, et un ensemble de matrices $\mathcal{K}_B = (\mathcal{K}_B(1), \dots, \mathcal{K}_B(N))$, $\mathcal{K}_C = (\mathcal{K}_C(1), \dots, \mathcal{K}_C(N))$, un ensemble de scalaires positifs $\epsilon = (\epsilon(1), \dots, \epsilon(N))$ et $\alpha = (\alpha(1), \dots, \alpha(N))$, qui vérifient le problème suivant pour tout $i \in \mathcal{S}$:*

$$\mathbf{P}_3 : \min \sum_{i=1}^N \text{Tr}(Z_Y(i)Y(i) + (E^\top(i)Z_Y(i) + \alpha(i)\mathbb{I})V_Y(i))$$

sujet aux LMIs suivantes (4.60), (4.61) et (4.66), sous la contrainte égalité (4.59), alors le système en boucle fermée (4.38) est stochastiquement admissible, sous la loi de commande basée sur le retour de sortie (4.37), dont les matrices gains sont données par (4.65).

Remarque 4.3.2 *Le Théorème cité ci-dessus, fournit des conditions suffisantes pour que le système augmenté en boucle fermée (4.38), soit stochastiquement ad-*

missible. Notons que:

- quand $E(i) = \mathbb{I}$ et $R(i) = \mathbb{I}$, ce résultat peut être considéré comme une généralisation de la commande par retour de sortie dynamique, développée par (De Farias et al., 2000) pour un système avec sauts markoviens.
- lorsque le système singulier possède un seul mode, on retrouve le résultat proposé dans ce sens par (Xu et Lam, 2006).
- Dans (Pavel et al., 2005), les auteurs ont élaboré une loi de commande par retour de sortie, pour la stabilisation stochastique d'un système à sauts markoviens avec discontinuités sur la variable d'état continue. Cette méthode consiste à calculer un gain commun pour tous les modes, ce qui est très conservatif, contrairement à celle que nous avons proposé dans cette section, et qui associe à chaque mode un gain donné.
- notre approche ne pose aucune contrainte sur les matrices du système comme c'est le cas du résultat de (Ching-Hu et Chun-Hsiung, 2003) ou la méthode développée fait intervenir des contraintes sur la matrices de sortie du système singulier avec un seul mode entre autre le retour de sortie considéré est statique.

Exemple 4.3.1 Pour illustrer les approches développées dans cette partie, nous allons considérer un système de dimension trois, composé de deux modes, et dont

les données numériques sont données par :

$$\begin{aligned}
 \Lambda &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, E(1) = E(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \\
 A(2) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, A(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, B(1) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 B(2) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B(3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R(1) = R(2) = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \\
 C_y(1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_y(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C_y(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E(3) = E(2).
 \end{aligned}$$

4.3.1 Première approche

En résolvant le problème $\mathbf{P}_2$, on aboutit alors aux résultats suivants :

$$\begin{aligned}
 P(1) &= \begin{bmatrix} 1.7073 & -1.0313 & 0.0000 \\ -1.0313 & 1.7175 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.3673 \end{bmatrix}, P(2) = \begin{bmatrix} 1.6016 & -0.9682 & 0.0000 \\ -0.9682 & 1.6126 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.2830 \end{bmatrix}, \\
 P(3) &= \begin{bmatrix} 2.3993 & -1.2876 & 0.0000 \\ -1.2876 & 1.9507 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0045 \end{bmatrix}, Z_P(1) = \begin{bmatrix} 1.0066 & -0.0045 & 0.1078 \\ -0.0045 & 0.9694 & 0.1180 \\ 0.1078 & 0.1180 & 1.0910 \end{bmatrix}, \\
 Z_P(2) &= \begin{bmatrix} 1.0126 & 0.0001 & 0.1132 \\ 0.0001 & 0.9753 & 0.1235 \\ 0.1132 & 0.1235 & 1.1020 \end{bmatrix}, Z_P(3) = \begin{bmatrix} 0.9870 & -0.0182 & 0.0686 \\ -0.0182 & 0.9568 & 0.0921 \\ 0.0686 & 0.0921 & 1.1009 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_P(1) &= \begin{bmatrix} 1.0043 & 0.0169 & 0.1010 \\ 0.0169 & 1.0456 & 0.1148 \\ -0.1010 & 0.1148 & 0.9389 \end{bmatrix}, V_P(2) = \begin{bmatrix} 0.9992 & 0.0131 & 0.1041 \\ 0.0131 & 1.0403 & 0.1179 \\ 0.1041 & 0.1179 & 0.9314 \end{bmatrix}, \\
V_P(3) &= \begin{bmatrix} 1.0182 & 0.0256 & 0.0656 \\ 0.0256 & 1.0543 & 0.0898 \\ 0.0656 & 0.0898 & 0.9200 \end{bmatrix}, X(1) = \begin{bmatrix} 0.9191 & 0.5519 & 0.0000 \\ 0.5519 & 0.9136 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.7314 \end{bmatrix}, \\
X(2) &= \begin{bmatrix} 0.9801 & 0.5885 & 0.0000 \\ 0.5885 & 0.9734 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.7794 \end{bmatrix}, X(3) = \begin{bmatrix} 0.6454 & 0.4260 & 0.0000 \\ 0.4260 & 0.7938 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.9955 \end{bmatrix}, \\
Y_c(1) &= \begin{bmatrix} -3.0781 & 0.0000 & 0.0000 \\ -1.7299 & -2.2805 & 0.0000 \\ -0.2235 & 0.1413 & 0.8794 \end{bmatrix}, Y_c(2) = \begin{bmatrix} -3.2101 & 0.7878 & 0.0000 \\ -3.5192 & -0.5410 & 0.0000 \\ 0.3492 & -0.0000 & 0.5298 \end{bmatrix}, \\
Y_c(3) &= \begin{bmatrix} -4.2673 & -0.1561 & 0.0000 \\ -3.9550 & -2.3199 & 0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.5997 \end{bmatrix}, Y_o(1) = \begin{bmatrix} 80.3337 & -73.0929 & 0.0000 \\ 10.3719 & -1.2793 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 56.7402 \end{bmatrix}, \\
Q(1) &= \begin{bmatrix} 1.0043 & 0.0169 & -0.1010 \\ 0.0169 & 1.0456 & -0.1148 \\ -0.1010 & -0.1148 & 0.9389 \end{bmatrix}, Q(2) = \begin{bmatrix} 24.5810 & 12.8386 & 0.0000 \\ 12.8386 & 22.4055 & 0.0000 \\ 34.6883 & 34.6883 & 34.6883 \end{bmatrix}, \\
Q(3) &= \begin{bmatrix} 25.4268 & 12.8979 & 0.0000 \\ 12.8979 & 22.1430 & 0.0000 \\ 20.6391 & 34.6883 & 81.3396 \end{bmatrix}, V_Q(1) = \begin{bmatrix} 37.1414 & 7.0208 & 2.2446 \\ 7.0208 & 46.3330 & 3.7252 \\ 2.2446 & 3.7252 & 33.9754 \end{bmatrix}, \\
V_Q(2) &= \begin{bmatrix} 41.9677 & 6.6661 & 2.3820 \\ 6.6661 & 45.7911 & 3.2453 \\ 2.3820 & 3.2453 & 38.2250 \end{bmatrix}, V_Q(3) = \begin{bmatrix} 40.8195 & 7.3364 & 0.5224 \\ 7.3364 & 45.8570 & 3.4777 \\ 0.5224 & -3.4777 & 35.8522 \end{bmatrix}, \\
Y_o(2) &= \begin{bmatrix} 60.6181 & -98.2373 & 11.210 \\ -70.1807 & -64.0935 & -0.0000 \\ 27.5375 & 0.0000 & 90.1587 \end{bmatrix}, \varepsilon(1) = 0.9706; \varepsilon(2) = 1.0300;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_o(3) &= \begin{bmatrix} 15.3494 & -27.6165 & -0.0000 \\ 92.5838 & -21.1047 & 0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & 10.5190 \end{bmatrix}, \beta(1) = 1.0303; \beta(2) = 0.9708; \\
\varepsilon(3) &= 0.9440; \beta(3) = 1.0594.
\end{aligned}$$

Il est important de remarquer que pour tout $i = 1, 2$, les contraintes suivantes $P(i)X(i) = \mathbb{I}$, $V_P(i)Z_P(i) = \mathbb{I}$ et $\beta(i)\varepsilon(i) = 1$ sont toujours vérifiées.

En outre, les matrices gains (4.33) et (4.34) sont données par :

$$\begin{aligned}
K(1) &= \begin{bmatrix} -2.8290 & -1.6987 & 0.0000 \\ -2.8485 & -3.0382 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.6432 \end{bmatrix}, K(2) = \begin{bmatrix} -5.2552 & 3.1744 & 2.1059 \\ -0.6016 & -2.1327 & 0.0000 \\ -0.5273 & 0.0000 & -1.2024 \end{bmatrix}, \\
K(3) &= \begin{bmatrix} -10.0375 & 5.1901 & 0.0000 \\ -6.5021 & 0.5670 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.6024 \end{bmatrix}, L(1) = \begin{bmatrix} -8.8549 & -4.5841 & -0.0000 \\ 9.7089 & 2.6038 & -0.0000 \\ -1.5374 & 0.0576 & 0.5763 \end{bmatrix}, \\
L(2) &= \begin{bmatrix} 5.8541 & -3.5712 & 0.0000 \\ -6.4867 & -0.8143 & 0.0000 \\ 1.4265 & 4.3855 & 2.5991 \end{bmatrix}, L(3) = \begin{bmatrix} -11.5875 & -0.8554 & 0.0000 \\ 10.9307 & -0.4549 & 0.0000 \\ -1.7213 & 0.4110 & 1.2850 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

4.3.2 Deuxième approche

La résolution du problème $\mathbf{P}_3$ donne les résultats suivants :

$$X(1) = \begin{bmatrix} 4.3110 & 0.5285 & 0.0000 \\ 0.5285 & 4.1708 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 12.5908 \end{bmatrix}, X(2) = \begin{bmatrix} 4.4398 & 0.4275 & 0.0000 \\ 0.4275 & 4.1593 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 7.7522 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
X(3) &= \begin{bmatrix} 4.2789 & 0.3708 & 0.0000 \\ 0.3708 & 4.1560 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 5.4005 \end{bmatrix}, Y(1) = \begin{bmatrix} 7.3754 & -0.8294 & 0.0000 \\ -0.8294 & 9.7425 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 6.9758 \end{bmatrix}, \\
Y(2) &= \begin{bmatrix} 8.4423 & -0.6267 & 0.0000 \\ -0.6267 & 10.2298 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 8.1172 \end{bmatrix}, Y(3) = \begin{bmatrix} 6.8192 & -0.9028 & 0.0000 \\ -0.9028 & 9.3575 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 6.3794 \end{bmatrix}, \\
V_P(1) &= \begin{bmatrix} 0.8893 & -0.0095 & 0.0000 \\ -0.0095 & 0.9164 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0125 \end{bmatrix}, V_P(2) = \begin{bmatrix} 0.9063 & -0.0061 & 0.0000 \\ -0.0061 & 0.9237 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0158 \end{bmatrix}, \\
V_P(3) &= \begin{bmatrix} 0.8653 & -0.0111 & 0.0000 \\ -0.0111 & 0.8966 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.9928 \end{bmatrix}, \epsilon(1) = 8.2758, \epsilon(2) = 8.3141, \epsilon(3) = 8.2934, \\
\alpha(1) &= 0.9877, \alpha(2) = 0.9845, \alpha(3) = 1.0073.
\end{aligned}$$

Là aussi, on remarque que pour tout $i = 1, 2$, les contraintes suivantes $Z_Y(i)Y(i) = \mathbb{I}$ et $(E^T(i)Z_Y(i) + \alpha(i)\mathbb{I})V_Y(i) = \mathbb{I}$ sont toujours vérifiées.

Les gains des lois de commandes (4.65) sont donnés par :

$$\begin{aligned}
K_A(1) &= \begin{bmatrix} -7.6238 & -0.8377 & -5.4809 \\ -2.2949 & -1.9186 & 0.0045 \\ -5.5614 & 0.2688 & -3.9564 \end{bmatrix}, K_A(2) = \begin{bmatrix} -6.1222 & -2.7643 & 0.4203 \\ 1.8101 & -1.5623 & 2.0217 \\ -5.1558 & -0.1026 & 1.7493 \end{bmatrix}, \\
K_A(3) &= \begin{bmatrix} -9.6508 & -2.8740 & -3.9772 \\ -0.3111 & -1.8373 & 1.3360 \\ -10.5184 & -2.8202 & -5.5412 \end{bmatrix}, K_B(1) = \begin{bmatrix} 3.1154 & 1.7639 & 0.0000 \\ 2.3637 & 0.8871 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.4386 \end{bmatrix}, \\
K_B(2) &= \begin{bmatrix} 0.7705 & 3.0894 & 0.0000 \\ 1.0305 & -1.3177 & -0.0000 \\ -0.9878 & 0.0000 & 0.9119 \end{bmatrix}, K_B(3) = \begin{bmatrix} 3.2799 & -0.1296 & 0.0000 \\ -0.3408 & 1.1476 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.3750 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_C(1) &= \begin{bmatrix} 0.0291 & 0.0025 & 0.0000 \\ 0.4616 & -0.4024 & 0.0000 \\ -5.9373 & 1.2716 & 3.3389 \end{bmatrix}, K_C(2) = \begin{bmatrix} 1.1303 & -0.7846 & 0.0000 \\ 0.4765 & 0.5232 & -0.0000 \\ -6.2239 & -0.3813 & -0.6662 \end{bmatrix}, \\
K_C(3) &= \begin{bmatrix} 1.7843 & -0.5711 & 0.0000 \\ -0.6385 & 0.4241 & 0.0000 \\ -12.4679 & -1.2030 & 3.7037 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Les figures 4.1 et 4.2 permettent d'illustrer graphiquement les trajectoires des variables d'état et de la commande du système étudié en boucle fermée, obtenues moyennant les deux approches. Il apparaît d'après ces figures, que les trajectoires de celles-ci convergent vers zéro quand t tend vers l'infini. Entre autre, nous pouvons constater qu'en régime permanent, les deux observateurs fournissent une bonne estimation des variables d'état.

Ainsi, nous pouvons conclure que la synthèse des lois de commande assurées par un observateur, qui ont été proposées dans ce chapitre, garantissent que le SSSMD en boucle fermée est stochastiquement admissible.

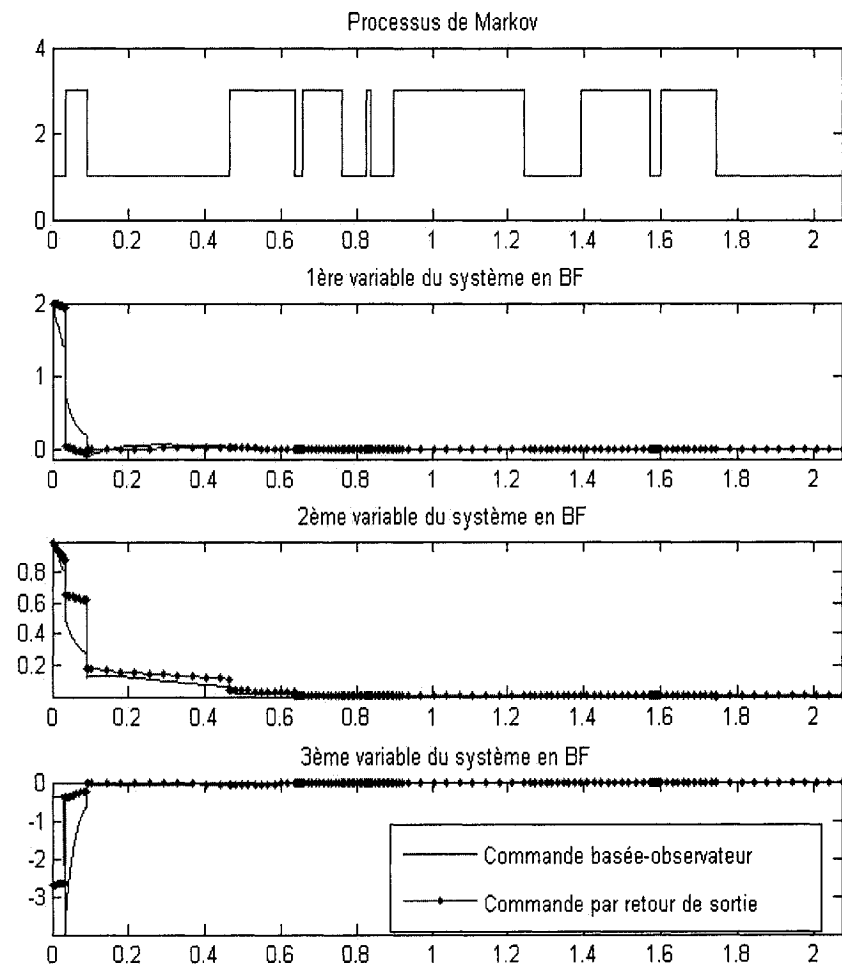


Figure 4.1 Évolution des variables d'état reconstruites via deux observateurs différents:

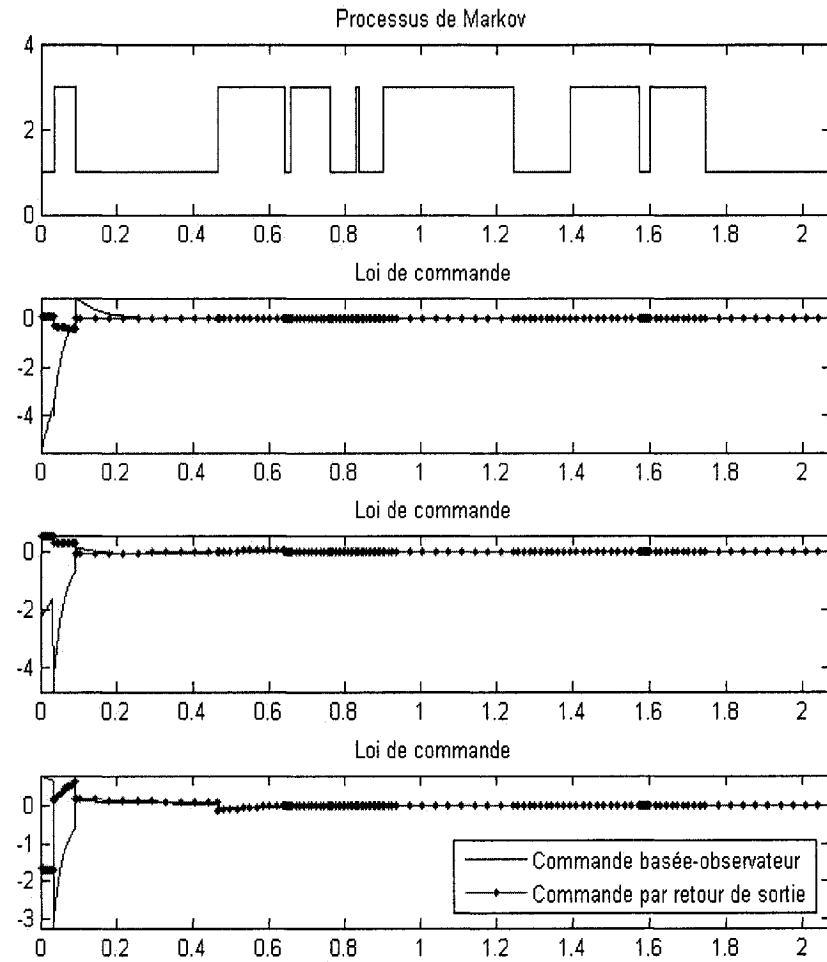


Figure 4.2 Lois de commande obtenues par les deux approches

4.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons proposé des conditions suffisantes permettant la synthèse de lois de commande qui incorporent un observateur, et qui assurent que le SSSMD est stochastiquement admissible. Deux variantes ont été considérées : la première est la loi de commande par retour assuré par un observateur, elle s'appuie sur l'utilisation de la théorie de Lyapunov et sur les techniques LMIs et BMIs. Alors que la deuxième approche dont l'observateur utilisé n'est qu'un cas particulier de celui adopté dans la première approche, s'appuie sur l'exploitation directe des résultats du Théorème (2.6.1).

Pour les deux approches, les conditions de synthèse obtenues par l'application directe de la théorie de Lyapunov ou du Théorème 2.6.1, sont non linéaires et le problème résultant est non convexe. Dans ce sens, plusieurs techniques ont été utilisées pour linéariser les inégalités matricielles telles que la méthode classique de changements de variables, le lemme de majoration, la technique de complémentarité sur le cône, pour finalement transformer le problème initial sous une formulation LMIs par complémentarité sur le cône, dont la résolution a été faite moyennant l'algorithme V.0.1.

Les résultats obtenus dans les deux cas sont assez satisfaisants et peuvent être considérés comme généralisation de plusieurs résultats existants dans la littérature, se rapportant à la stabilisation par retour assuré par un observateur d'une grande variété de systèmes dynamiques tels que les systèmes singuliers, les systèmes à sauts markoviens et les SSSM.

CHAPITRE 5

ÉTUDE DE LA ROBUSTESSE

5.1 Introduction

Au cours des dernières décennies, beaucoup de progrès ont été réalisés dans les domaines de l'analyse de la robustesse et de la synthèse de correcteurs robustes, car pour diverses raisons, les incertitudes subsistent toujours sur le système dont les performances peuvent être dégradées si la loi de commande n'en tient pas compte. Ces incertitudes peuvent provenir d'une simplification voulue d'un modèle plus précis, elles sont parfois inhérentes à la réalité physique d'un système pour lequel l'identification de certains de ses paramètres intervenant dans ses équations différentielles, est impossible, comme elles peuvent aussi refléter des perturbations externes au système, qu'il est difficile de prévoir à l'avance.

Plusieurs techniques ont été établies pour contrer les méfaits de ces incertitudes par la recherche des lois de commande qui permettent de stabiliser le système. Néanmoins, les méthodes développées restent encore insuffisantes, voire inapplicables dans un grand nombre d'applications, où il faut gérer des incertitudes et des événements aléatoires.

Les travaux présentés dans ce chapitre comporteront une phase d'analyse suivie d'une phase de synthèse. La phase d'analyse a pour objectif de développer des conditions suffisantes de stabilité robuste d'un SSSMD incertain sans saturation, avec ou sans perturbations externes. La phase de synthèse sera tributaire des résultats obtenus lors de l'analyse et comportera l'étude de la stabilisation robuste

du système étudié moyennant différentes structures de lois de commande robustes, proposées dans la littérature. Parmi ces lois de commande robuste, nous allons aborder :

- la loi de commande par retour d'état,
- la loi de commande par retour d'état basé sur un observateur robuste de type Luenberger,
- la loi de commande par retour de sortie dynamique robuste,
- la loi de commande $\mathcal{H}_\infty$ robuste.

En outre, plusieurs exemples numériques seront envisagés pour permettre la validation des outils et méthodes proposés dans ce chapitre.

5.2 Concept de la robustesse

La robustesse d'un système nominal reflète sa capacité à garder ses capacités essentielles malgré des incertitudes et/ou des perturbations. Toutefois, pour parler de robustesse, il faut préciser:

- le type de perturbations agissant sur le système étudié. S'agit t'il d'une incertitude haute fréquence, ou paramétrique (certains paramètres du modèle sont inconnues)? structurées, non structurées (certains paramètres du système varient et on ne dispose que d'une information globale sur ces variations), déterministes, stochastiques (une perturbation aléatoire, intervenant sur une large bande de fréquences de la matrice d'état du système)?

- la propriété souhaitée: la robustesse en stabilité, en performance (rapidité de réponse, par exemple), ou les deux à la fois?

Ainsi la notion de robustesse n'est pas unique puisqu'il y'a diverses façons de décrire les incertitudes et diverses performances auxquelles on peut s'intéresser. Dans notre étude, nous allons nous intéresser principalement aux incertitudes paramétriques structurées de type bornées en normes et à la robustesse en stabilité.

5.3 Stabilité stochastique robuste

Pour mener à bien notre étude sur la robustesse en stabilité d'un SSSMD incertain, nous allons considérer le modèle (2.8) sans saturation sur la commande. Ensuite, nous allons supposer que l'incertitude n'affecte pas la matrice $E(i), i \in \mathcal{S}$, cette hypothèse n'est pas restrictive, car il a été démontré que toute incertitude sur la matrice de la dérivée de l'état, peut se ramener à une incertitude sur la matrice de l'état (Fang, 1997), (Chun-Hsiung et al., 1998).

Dans le cadre d'un SSSMD, l'analyse de la stabilité robuste s'avère plus difficile que celle d'un SSSM nominal, car les incertitudes qui affectent le système peuvent détruire la propriété de la régularité qui est directement liée à son faisceau de matrice, qui change dans ce cas. Ainsi, il faut non seulement étudier la stabilité stochastique robuste du système en question, mais aussi de garantir la propriété de régularité et d'absence d'impulsions, quelle que soit la valeur de l'incertitude dans les bornes considérées.

Le théorème suivant fournit ce résultat :

Théorème 5.3.1 *S'il existe un ensemble de matrices non singulières*

$P = (P(1), \dots, P(N))$, *et un ensemble de scalaires positifs* $\varepsilon_A = (\varepsilon_A(1), \dots, \varepsilon_A(N))$

tels que la LMI suivante est vérifiée pour tous $i \in \mathcal{S}$ et incertitude admissible :

$$\begin{bmatrix} J(i) & P^\top(i)D_A(i) \\ D_A^\top(i)P(i) & -\varepsilon_A(i)\mathbb{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.1)$$

avec : $J(i) = A^\top(i)P(i) + P^\top(i)A(i) + \varepsilon_A(i)E_A^\top(i)E_A(i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij}R^\top(ij)E^\top(j)P(j)R(ij)$
sous la contrainte :

$$E^\top(i)P(i) = P^\top(i)E(i) \geq 0, \quad (5.2)$$

alors le système (2.8) avec $u(t) = 0$ est stochastiquement admissible de façon robuste.

Preuve D'après le Théorème 2.6.1, le système (2.8) avec $u(t) \equiv 0$ sera stochastiquement admissible si la LMI suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} & [A(i) + D_A(i)F_A(i, t)E_A(i)]^\top P(i) + P^\top(i)[A(i) + D_A(i)F_A(i, t)E_A(i)] \\ & + \sum_{j=1}^N \pi_{ij}R^\top(ij)E^\top(j)P(j)R(ij) < 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

En appliquant le lemme de majoration des incertitudes 3.2.1, on obtient :

$$\begin{aligned} & P^\top(i)D_A(i)F_A(i, t)E_A(i) + E_A^\top(i)F_A^\top(i, t)D_A^\top(i)P(i) \\ & \leq \varepsilon_A^{-1}(i)P^\top(i)D_A(i)D_A^\top(i)P(i) + \varepsilon_A(i)E_A^\top(i)E_A(i). \end{aligned}$$

Ainsi, en tenant en compte de ceci et en appliquant le complément de Schur à (5.3), on aboutit à (5.1). Ceci complète la preuve du Théorème (5.3.1).

Exemple 5.3.1 Pour illustrer notre résultat sur la stabilité robuste, nous allons considérer un système à trois modes, décrits par (2.8) dont les valeurs numériques sont données par :

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, E(1) = E(2) = E(3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
A(1) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, A(2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, A(3) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \\
R(1) &= R(2) = R(3) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, E_A(1) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \\
E_A(2) &= \begin{bmatrix} 0.03 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, D_A(1) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.12 \end{bmatrix}, D_A(2) = \begin{bmatrix} 0.13 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \\
D_A(3) &= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.12 \\ 0.1 \end{bmatrix}, E_A(3) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

En résolvant la LMI (5.1), on obtient :

$$\begin{aligned}
P(1) &= \begin{bmatrix} 130.3810 & -119.3816 & 0.0000 \\ -119.3816 & 209.9485 & 0.0000 \\ 295.6506 & -288.7304 & 186.7606 \end{bmatrix}, \varepsilon_A(1) = 2, \varepsilon_A(2) = 2, \varepsilon_A(3) = 1.5, \\
P(2) &= \begin{bmatrix} 12.0767 & 11.6724 & 0.0000 \\ 11.6724 & 11.6284 & 0.0000 \\ 5.0188 & -6.2773 & 19.9263 \end{bmatrix}, P(3) = \begin{bmatrix} 4.2812 & -1.2090 & 0.0000 \\ -1.2090 & 4.6689 & 0.0000 \\ 16.0194 & 4.5286 & 26.0779 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$ sont des matrices non singulières, ainsi d'après le Théorème (5.3.1), on peut conclure que le système est stochastiquement admissible de façon robuste comme on peut le constater sur la figure 5.1.

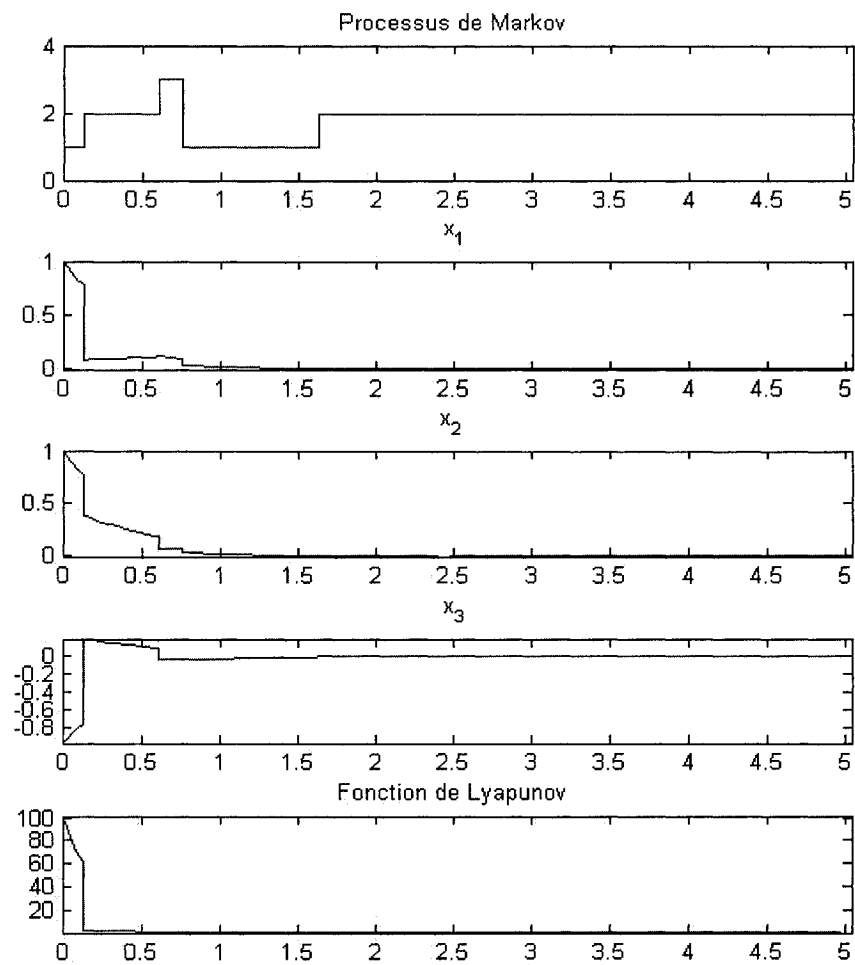


Figure 5.1 Comportement d'un SSSMD incertain stable

Il est à noter que les conditions suffisantes d'admissibilité stochastique robuste, établies dans ce paragraphe, seront à la base de la synthèse des différents types de contrôleurs robustes que nous allons développer par la suite.

5.4 Stabilisabilité stochastique robuste

Pour étudier le problème de commande robuste par retour d'état d'un SSSMD (2.8) (Σ), dont la forme standard est donnée par la structure illustrée par la figure 5.2 : nous allons supposer les hypothèses suivantes :

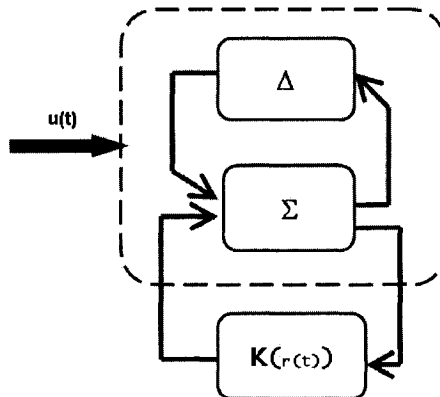


Figure 5.2 Schéma de principe d'un contrôleur robuste par retour d'état

C1 Le système incertain est stochastiquement stabilisable (définition 3.2.1).

C2 Le mode $r(t)$ est mesurable.

C3 Le vecteur d'état $x(t)$ du système est parfaitement mesurable.

Commençons par injecter l'expression du contrôleur (3.1) dans les équations dynamiques (2.8), ceci donne pour $r(t) = i \in \mathcal{S}$:

$$E(r(t))\dot{x}(t) = A_c(r(t), t)x(t) \quad (5.4)$$

avec $A_c(i, t) = A(i) + D_A(i)F_A(i, t)E_A(i) + [B(i) + D_B(i)F_B(i, t)E_B(i)B(i, t)]K(i)$.

Alors, en se basant sur le résultat du Théorème 5.3.1, ce système en boucle fermée est stochastiquement admissible de façon robuste si l'on a :

$$\begin{bmatrix} J(i) & P^\top(i)D_A(i) \\ D_A(i)^\top P(i) & -\varepsilon_A(i)\mathbb{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.5)$$

avec :

$$\begin{aligned} J(i) &= A^\top(i)P(i) + P^\top(i)A(i) + \varepsilon_A(t)E_A(i)^\top E_A(i) + P^\top(i)B(i)K(i) \\ &\quad + K^\top(i)B^\top(i)P(i) + P^\top(i)D_B(i)F_B(i, t)E_B(i)K(i) \\ &\quad + K^\top(i)E_B^\top(i)F_B^\top(i, t)D_B^\top(i)P(i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij}R^\top(ij)E^\top(j)P(j)R(ij). \end{aligned}$$

En se basant sur le lemme 3.2.1, de majoration des incertitudes, on obtient :

$$\begin{aligned} &P^\top(i)D_B(i)F_B(i, t)E_B(i)K(i) + K^\top(i)E_B^\top(i)F_B^\top(i, t)D_B^\top(i)P(i) \\ &\leq \varepsilon_B^{-1}(i)P^\top(i)D_B(i)D_B^\top(i)P(i) + \varepsilon_B(i)K^\top(i)E_B^\top(i)E_B(i)K(i). \end{aligned}$$

Ainsi en tenant compte de ceci, par simple application du Lemme 3.2.2 sur la majoration du terme sous la sommation de l'inégalité (5.5), celle-ci est transformée

en :

$$\begin{bmatrix} V_P(i) & W(i) \\ W^\top(i) & \mathcal{P}(i) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} & A^\top(i)P(i) + P^\top(i)A(i) + P^\top(i)B(i)K(i) + K^\top(i)B^\top(i)P(i) + \varepsilon_A(i)E_A^\top(i)E_A(i) \\ & + \varepsilon_A^{-1}(i)P^\top(i)D_A(i)D_A^\top(i)P(i) + \varepsilon_B^{-1}(i)P^\top(i)D_B(i)D_B^\top(i)P(i) + \pi_{ii}E^\top(i)P(i) \\ & + \varepsilon_B(i)K^\top(i)E_B^\top(i)E_B(i)K(i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{4}\pi_{ij}^2\varepsilon^{-1}(ij)\mathbb{I} + Z_P^{-1}(i) < 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

sous la contrainte bilinéaire :

$$V_P(i)Z_P(i) = \mathbb{I}, \quad (5.8)$$

où $\varepsilon(ij), i, j \in \mathcal{S}$ sont des scalaires positifs, $V_P(i)$ et $Z_P(i)$ sont symétriques et définies-positives, alors que les matrices $W(i)$ et $\mathcal{P}(i)$ sont données par:

$$\begin{aligned} W(i) &= [R^\top(i1)E^\top(1)P(1)R(i1), \dots, R^\top(ii-1)E^\top(i-1)P(i-1)R(ii-1) \\ &\quad R^\top(ii+1)E^\top(i+1)P(i+1)R(ii+1), \dots, R^\top(iN)E^\top(N)P(N)R(iN)], \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\mathcal{P}(i) = \text{diag}[\varepsilon^{-1}(i1)\mathbb{I}, \dots, \varepsilon^{-1}(ii-1)\mathbb{I}, \varepsilon^{-1}(ii+1)\mathbb{I}, \dots, \varepsilon^{-1}(iN)\mathbb{I}]. \quad (5.10)$$

D'autre part, en remarquant que le terme $\varepsilon_B(i)K^\top(i)E_B^\top(i)E_B(i)K(i)$ est positif. Ensuite, en multipliant à gauche et à droite l'inégalité (5.7) par $P^{-T}(i)$ et $P^{-1}(i)$ respectivement, et en procédant aux changements de variables $X(i) = P^{-1}(i)$, et $Y(i) = K(i)X(i)$, l'inégalité précédente devient :

$$\begin{aligned} & X^\top(i)A^\top(i) + A(i)X(i) + Y^\top(i)B^\top(i) + B(i)Y(i) + \varepsilon_A(i)X^\top(i)E_A^\top(i)E_A(i)X(i) \\ & + \varepsilon_A^{-1}(i)D_A(i)D_A^\top(i) + \varepsilon_B^{-1}(i)D_B(i)D_B^\top(i) + X^\top(i)Z_P^{-1}(i)X(i) \\ & + \pi_{ii}X^\top(i)E^\top(i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathcal{S}^\top(i)\mathcal{X}^{-1}(i)\mathcal{S}(i) < 0 \end{aligned}$$

où les matrices $\mathcal{S}(i)$ et $\mathcal{X}(i)$, sont données :

$$\mathcal{S}(i) = \frac{1}{2}[\pi_{i1}X^\top(i), \dots, \pi_{ii-1}X^\top(i), \pi_{ii+1}X^\top(i), \dots, \pi_{iN}X^\top(i)], \quad (5.11)$$

$$\mathcal{X}(i) = \text{diag}[\varepsilon(i1)\mathbb{I}, \dots, \varepsilon(ii-1)\mathbb{I}, \varepsilon(ii+1)\mathbb{I}, \dots, \varepsilon(iN)\mathbb{I}]. \quad (5.12)$$

Par conséquent, en appliquant le complément de Schur à l'inégalité précédente, celle-ci devient :

$$\begin{bmatrix} \Pi_s(i) & X^\top(i)E_A^\top(i) & X^\top(i) & \mathcal{S}^\top(i) \\ E_A(i)X(i) & -v_A(i)\mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ X(i) & \mathbf{0} & -Z_P(i) & \mathbf{0} \\ \mathcal{S}(i) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathcal{X}(i) \end{bmatrix} < 0 \quad (5.13)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Pi_s(i) &= X^\top(i)A^\top(i) + A(i)X(i) + Y^\top(i)B^\top(i) + B(i)Y(i) + \pi_{ii}X^\top(i)E^\top(i) \\ &\quad + v_A(i)D_A(i)D_A^\top(i) + v_B(i)D_B(i)D_B^\top(i), \\ v_A(i) &= \varepsilon_A^{-1}(i), v_B(i) = \varepsilon_B^{-1}(i). \end{aligned}$$

sous la contrainte bilinéaire :

$$X(i)P(i) = \mathbb{I}. \quad (5.14)$$

Pour linéariser les contraintes bilinéaires (5.8), (5.14) et :

$$\beta(ij)\varepsilon^{-1}(ij)\mathbb{I} = \mathbb{I}, \quad (5.15)$$

on utilise le lemme 3.2.3 de linéarisation. Ainsi, on obtient :

$$\begin{bmatrix} P(i) & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & X(i) \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} V_P(i) & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & Z_P(i) \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} \beta(ij) & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \varepsilon(ij) \end{bmatrix} \geq 0. \quad (5.16)$$

Le théorème suivant récapitule ce résultat :

Théorème 5.4.1 *Pour tout ensemble de scalaires positifs $v_A = (v_A(1), \dots, v_A(N))$ et $v_B = (v_B(1), \dots, v_B(N))$, s'il existe un ensemble de matrices symétriques et définies-positives $P = (P(1), \dots, P(N))$, $X = (X(1), \dots, X(N))$, $V_P = (V_P(1), \dots, V_P(N))$ et $Z_P = (Z_P(1), \dots, Z_P(N))$, un ensemble de matrices $Y = (Y(1), \dots, Y(N))$ et un ensemble de scalaires positifs $\varepsilon(ij) = (\varepsilon(i1), \dots, \varepsilon(iN))$ et $\beta(ij) = (\beta(i1), \dots, \beta(iN))$, qui satisfont au problème suivant, pour tout $i \in \mathcal{S}$ et toute incertitude admissible :*

$$\min \sum_{i=1}^N \text{Tr}(P(i)X(i) + V_P(i)Z_P(i) + \beta(ij)\varepsilon(ij)\mathbb{I}) \quad (5.17)$$

sujet aux LMIs (5.13), (5.16) et :

$$\begin{bmatrix} V_P(i) & W(i) \\ W^\top(i) & \mathcal{G}(i) \end{bmatrix} \geq 0, \quad (5.18)$$

avec :

$$\mathcal{G}(i) = \text{diag}[\beta(i1)\mathbb{I}, \dots, \beta(ii-1)\mathbb{I}, \beta(ii+1)\mathbb{I}, \dots, \beta(iN)\mathbb{I}], \quad (5.19)$$

sous la contrainte égalité (5.2), alors le système en boucle fermée (5.4) est stochastiquement admissible de façon robuste, sous le contrôleur (3.1) dont le gain est donné par :

$$K(i) = Y^{-1}(i)X(i). \quad (5.20)$$

La solution du Théorème 5.4.1 peut être trouvée en utilisant l'algorithme V.0.1 (voir annexe V).

Exemple 5.4.1 *Considérons un SSSMD incertain composé de trois modes, avec*

les données numériques de l'exemple 3.2.1, et les incertitudes de l'exemple 5.3.1, en plus des valeurs suivantes :

$$E_B(1) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, D_B(1) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.12 \end{bmatrix}, E_B(2) = \begin{bmatrix} 0.03 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$D_B(2) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, E_B(3) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, D_B(3) = \begin{bmatrix} 0.13 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix},$$

En résolvant les LMIs avec contraintes du Théorème 5.4.1, on obtient :

$$P(1) = \begin{bmatrix} 1.9835 & 0.9970 & 0.0000 \\ 0.9970 & 1.9786 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 2.2875 \end{bmatrix}, P(2) = \begin{bmatrix} 1.9837 & 0.9977 & 0.0000 \\ 0.9977 & 1.9795 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 2.2875 \end{bmatrix},$$

$$P(3) = \begin{bmatrix} 2.0082 & 1.0259 & 0.0000 \\ 1.0259 & 1.0107 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 2.2875 \end{bmatrix}, X(1) = \begin{bmatrix} 0.6752 & -0.3402 & 0.0000 \\ -0.3402 & 0.6768 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.4372 \end{bmatrix},$$

$$X(2) = \begin{bmatrix} 0.6753 & -0.3404 & 0.0000 \\ -0.3404 & 0.6767 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.4372 \end{bmatrix}, X(3) = \begin{bmatrix} 1.0343 & -1.0498 & 0.0000 \\ -1.0498 & 2.0550 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.4372 \end{bmatrix},$$

$$Y(1) = \begin{bmatrix} -0.5228 & -0.5259 & -0.5023 \\ -0.1451 & -0.1520 & -0.0000 \\ -0.8546 & -0.4306 & -0.5502 \end{bmatrix}, Y(2) = \begin{bmatrix} 1.0462 & -1.0670 & 0.0000 \\ 0.9428 & -0.9587 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 2.3016 \end{bmatrix},$$

$$Y(3) = \begin{bmatrix} 0.0389 & -7.6394 & -0.0000 \\ -0.3365 & 6.4756 & -0.0000 \\ 0.0000 & -15.8810 & -4.8752 \end{bmatrix}.$$

D'après (5.4.1), les gains sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 K(1) &= \begin{bmatrix} -1.5613 & -1.5619 & -1.1488 \\ -0.4394 & -0.4455 & -0.0000 \\ -1.2657 & 0.0000 & -1.2585 \end{bmatrix}, K(2) = \begin{bmatrix} -3.1403 & -3.1564 & 0.0000 \\ -2.8271 & -2.8389 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 5.2642 \end{bmatrix}, \\
 K(3) &= \begin{bmatrix} -0.5702 & -3.8660 & 0.0000 \\ -0.1325 & 6.1993 & 0.0000 \\ 0.4316 & -0.3840 & 0.0897 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Comme il apparaît sur les figures 5.3 et 5.4, représentant l'évolution des variables d'état et de la commande, les trajectoires de celles-ci convergent vers zéro quand t tend vers l'infini. Par conséquent, le système en boucle fermée, et stochastiquement admissible de façon robuste pour toute incertitude admissible, sous la loi de commande avec les gains trouvés.

Dans le cas où les variables d'état continue du système ne sont pas mesurables, nous allons concevoir deux types de contrôleurs pour garantir l'admissibilité stochastique du système étudié en boucle fermée, à savoir le contrôleur par retour d'état basé-observateur et le contrôleur par retour de sortie dynamique.

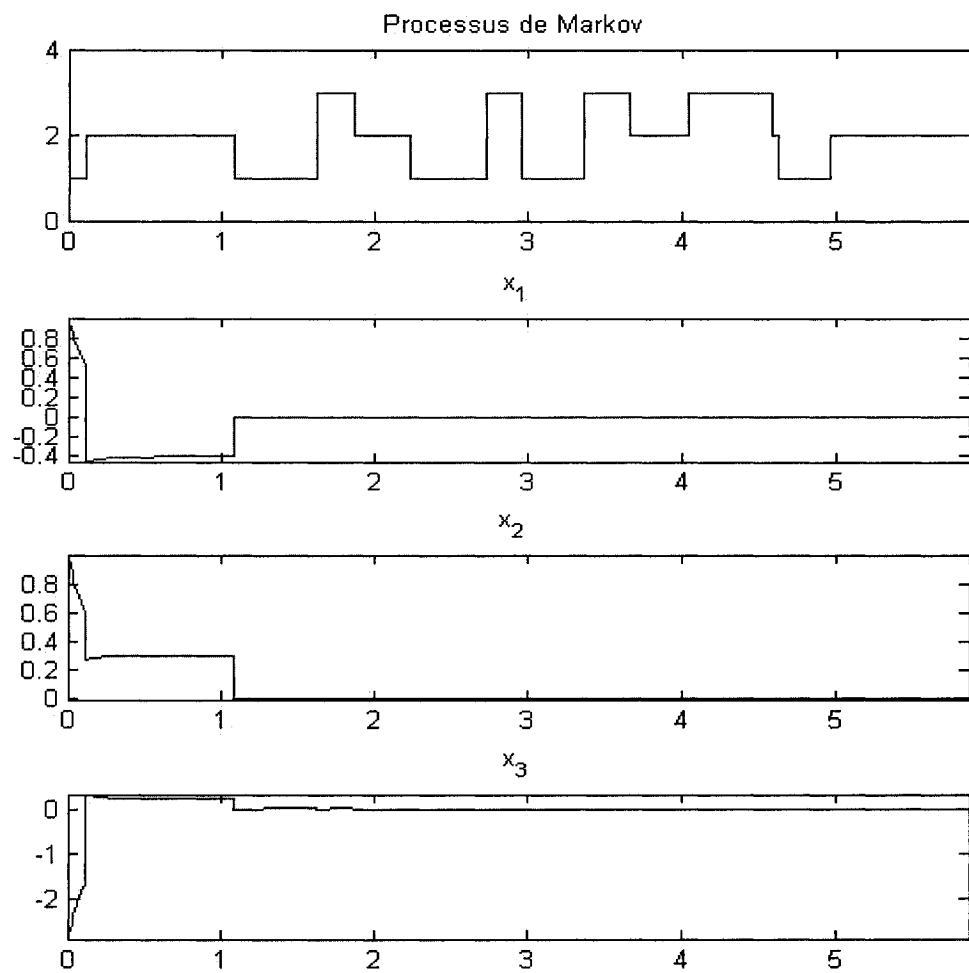


Figure 5.3 Stabilisation robuste par retour d'état d'un SSSMD incertain: évolution du mode et des variables d'état

Figure 5.4 Évolution de la commande par retour d'état d'un SSSMD incertain

5.5 Retour d'état assuré par un observateur stochastique robuste

Pour l'étude du problème de commande par retour incorporant un observateur, tout d'abord, nous allons considérer la représentation du système incertain (2.8), celle du contrôleur donnée par (4.1) et adopter l'expression de l'erreur d'estimation définie dans (4.2). Ensuite, nous allons supposer que les variables d'état du système ne sont pas mesurables.

Ainsi, en remplaçant la loi de contrôle, $u(t)$, par son expression dans les équations dynamiques, les équations décrivant le système (2.8) et l'observateur (4.1) deviennent pour tout $r(t) \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}
 E(r(t))\dot{x}_c(t) &= [A(r(t)) + B(r(t))K(r(t)) + L(r(t))C_y(r(t))] (x(t) - e(t)) \\
 &\quad - L(r(t)) [C_y(r(t)) + \Delta C_y(r(t))] x(t) \\
 &= [A(r(t)) + B(r(t))K(r(t)) - L(r(t))\Delta C_y(r(t), t)] x(t) \\
 &\quad - [A(r(t)) + B(r(t))K(r(t)) + L(r(t))C_y(r(t))] e(t), \tag{5.21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(r(t))\dot{x}(t) &= [A(r(t)) + \Delta A(r(t), t)] x(t) - [B(r(t)) + \Delta B(r(t), t)] K(r(t)) e(t) \\
 &\quad + [B(r(t)) + \Delta B(r(t), t)] K(r(t)) x(t), \tag{5.22}
 \end{aligned}$$

D'un autre côté, l'évolution de l'erreur dynamique sera alors donnée par :

$$\begin{aligned}
 E(r(t))\dot{e}(t) &= [A(r(t)) + \Delta A(r(t), t)] x(t) + [B(r(t)) + \Delta B(r(t), t)] u(t) \\
 &\quad - [A(r(t)) - B(r(t))K(r(t))] x_c(t) - L(r(t)) [C_y(r(t), t)x_c(t)] \\
 &\quad - L(r(t)) [C_y(r(t), t)x(t) - \Delta C_y(r(t), t)x(t)] \tag{5.23} \\
 &= [A(r(t)) + L(r(t))C_y(r(t)) - \Delta B(r(t), t)K(r(t))] e(t) \\
 &\quad + [\Delta A(r(t), t) + \Delta B(r(t), t)K(r(t)) + L(r(t))\Delta C_y(r(t), t)] x(t)
 \end{aligned}$$

En combinant les équations de l'observateur (5.21), du système (5.22) et de la

dynamique d'évolution de l'erreur (5.23), et en utilisant le vecteur d'état augmenté $\eta(t) = [x^\top(t), e^\top(t)]^\top$, on aboutit au système en boucle fermée suivant :

$$\widetilde{E(r(t))}\eta(t) = (\widetilde{A(r(t))} + \Delta\widetilde{A(r(t), t)})\eta(t) \quad (5.24)$$

avec :

$$\begin{aligned} \widetilde{E(i)} &= \begin{bmatrix} E(i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E(i) \end{bmatrix}, \quad \widetilde{A(i)} = \begin{bmatrix} A(i) + B(i)K(i) & -B(i)K(i) \\ \mathbf{0} & A(i) + L(i)C_y(i) \end{bmatrix}, \\ \Delta\widetilde{A(i, t)} &= \begin{bmatrix} \Delta A(i) + \Delta B(i)K(i) & -\Delta B(i)K(i) \\ \Delta A(i) + \Delta B(i)K(i) + L(i)\Delta C_y(i) & -\Delta B(i)K(i) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Rendue à cette étape, la méthode utilisée pour la stabilisation robuste du système étudié par retour d'état basé-observateur, sera analogue à celle utilisée pour le cas nominal. Une première formulation de ce résultat est donnée par le théorème suivant :

Théorème 5.5.1 *Étant donné un ensemble de scalaires positifs*

$\varepsilon_A = (\varepsilon_A(1), \dots, \varepsilon_A(N))$, $\varepsilon_B = (\varepsilon_B(1), \dots, \varepsilon_B(N))$, $\varepsilon_e = (\varepsilon_e(1), \dots, \varepsilon_e(N))$, $\varepsilon_{C_y} = (\varepsilon_{C_y}(1), \dots, \varepsilon_{C_y}(N))$, $\varepsilon_Q = (\varepsilon_Q(1), \dots, \varepsilon_Q(N))$, $\varepsilon_{BQ} = (\varepsilon_{BQ}(1), \dots, \varepsilon_{BQ}(N))$, $\varepsilon_{BK} = (\varepsilon_{BK}(1), \dots, \varepsilon_{BK}(N))$. *Pour un ensemble de matrices données $K = (K(1), \dots, K(N))$ et $L = (L(1), \dots, L(N))$, s'il existe un ensemble de matrices non singulières $P = (P(1), \dots, P(N))$ et $Q = (Q(1), \dots, Q(N))$ qui vérifient l'ensemble d'inégalités couplées suivant, pour tout mode fixe et toute incertitude admissible :*

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_P(i) &= \mathcal{H}_1(i) + \varepsilon_Q^{-1}(i)E_A^\top(i)E_A(i) + \varepsilon_A(i)P^\top(i)D_A(i)D_A^\top(i)P(i) \\ &+ \varepsilon_A^{-1}(i)E_A^\top(i)E_A(i) + \varepsilon_B(i)P(i)D_B(i)D_B^\top(i)P(i) \\ &+ \varepsilon_B^{-1}(i)(i)K^\top(i)E_B^\top(i)E_B(i)K(i) + \varepsilon_e(i)P(i)D_B(i)D_B^\top(i)P(i) \\ &+ \varepsilon_{BQ}^{-1}(i)K^\top(i)E_B^\top(i)E_B(i)K(i) + \varepsilon_{C_y}(i)E_{C_y}^\top(i)E_{C_y}(i) < 0, \quad (5.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_Q(i) &= \mathcal{H}_2(i) + \varepsilon_e^{-1}(i)K^\top(i)E_B^\top(i)E_B(i)K(i) + \varepsilon_Q(i)Q^\top(i)D_A(i)D_A^\top(i)Q(i) \\
&+ \varepsilon_{BQ}(i)Q^\top(i)D_B(i)D^\top B(i)Q(i) + \varepsilon_{BK}(i)Q^\top(i)D_B(i)D_B^\top(i)Q(i) \\
&+ \varepsilon_{C_y}^{-1}(i)Q^\top(i)L(i)D_{C_y}(i)D_{C_y}^\top(i)L^\top(i)Q(i) \\
&+ \varepsilon_{BK}^{-1}(i)K^\top(i)E_B^\top(i)E_B(i)K(i) < 0,
\end{aligned} \tag{5.26}$$

avec $\mathcal{H}_1(i)$ et $\mathcal{H}_2(i)$ sont définies par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_1(i) &= A^\top(i)P^\top(i) + P(i)A(i) + K^\top(i)B^\top(i)P(i) + P(i)B(i)K(i) \\
&+ P^\top(i)B(i)B^\top(i)P(i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij}R^\top(ij)E^\top(j)P(j)R(ij)
\end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_2(i) &= A^\top(i)Q(i) + Q^\top(i)A(i) + Q(i)L(i)C_y(i) + C_y^\top(i)L^\top(i)Q(i) \\
&+ K^\top(i)K(i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij}R^\top(ij)E^\top(j)Q(j)R(ij),
\end{aligned} \tag{5.28}$$

sous les contraintes :

$$E^\top(i)P(i) = P^\top(i)E(i) \geq 0, \tag{5.29}$$

$$E^\top(i)Q(i) = Q^\top(i)E(i) \geq 0, \tag{5.30}$$

alors le système en boucle fermée (5.24) est stochastiquement admissible, sous la loi de commande basée-observateur (4.1).

Pour étudier la stabilité du système en boucle fermée (5.24), nous allons faire appel à la théorie de Lyapunov. Pour cela, pour tout mode fixe $r(t) = i$, on considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(x(t), e(t), i) = x^\top(t)E^\top(i)P(i)x(t) + e^\top(t)E^\top(i)Q(i)e(t)$$

où $P(i)$ et $Q(i)$ sont deux matrices non singulières, qui vérifient les contraintes égalités (5.29) et (5.30).

Dans ce cas, le générateur infinitésimal, $\mathbb{L}$, du processus $\{x(t), e(t), r(t), t \geq 0\}$ pour $r(t) = i$, sera donné par :

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}V(x(t), e(t), i) &= \dot{x}^\top(t)E^\top P(i)x(t) + x^\top(t)E^\top P(i)\dot{x}(t) + \dot{e}^\top(t)E^\top Q(i)e(t) \\
&+ e^\top(t)E^\top Q(i)\dot{e}(t) \\
&= [A(i) + B(i)K(i) + \Delta A(i) + \Delta B(i)K(i)]x(t) \\
&- [B(i)K(i) + \Delta B(i)K(i)]e(t)^\top P x(t) \\
&+ x^\top(t)P^\top [A(i) + B(i)K(i) + \Delta A(i) + \Delta B(i)K(i)]x(t) \\
&- [B(i)K(i) + \Delta B(i)K(i)]e(t) \\
&+ [\Delta A(i) + \Delta B(i)K(i) + L(i)\Delta C_y(i)]x(t) \\
&[A(i) + L(i)C_y(i) - \Delta B(i)K(i)]e(t)^\top Q e(t) \\
&+ e^\top(t)Q [\Delta A(i) + \Delta B(i)K(i) + L(i)\Delta C_y(i)]x(t) \\
&+ [A(i) + L(i)C_y(i) - \Delta B(i)K(i)]e(t) \\
&+ \sum_{j=1}^N \pi_{ij} x^\top(t) R^\top(ij) \tilde{E}^\top(i) P(j) R(ij) x(t) \\
&+ \sum_{j=1}^N \pi_{ij} e^\top(t) R^\top(ij) \tilde{E}^\top(i) Q(j) R(ij) e(t).
\end{aligned}$$

Ceci peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}V(x(t), e(t), i) &= x^\top(t) [A(i) + B(i)K(i)]^\top P(i) + P^\top(i) [A(i) + B(i)K(i)] \\
&+ \sum_{j=1}^N \pi_{ij} R^\top(ij) E^\top(i) P(j) R(ij) x(t) + 2x^\top(t) P(i) \Delta A(i) x(t) \\
&+ 2x^\top(t) P(i) \Delta B(i) K(i) x(t) - 2x^\top(t) P(i) B(i) K(i) e(t) \\
&- 2x^\top(t) P(i) \Delta B(i) K(i) e(t) - 2x^\top(t) P(i) \Delta B(i) K(i) e(t) \\
&+ e^\top(t) [A(i) + L(i)C_y(i)]^\top Q(i) + Q^\top(i) [A(i) + L(i)C_y(i)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} R^\top(ij) E^\top(i) Q(j) R(ij) e(t) \\
& + 2e^\top(t) Q(i) \Delta A(i) x(t) + 2e^\top(t) Q(i) \Delta B(i) K(i) x(t) \\
& + 2e^\top(t) Q(i) L(i) \Delta C_y(i) e(t) - 2e^\top(t) Q(i) \Delta B(i) K(i) e(t)
\end{aligned}$$

D'un autre côté, en utilisant le lemme de majoration (3.2.1) on obtient :

$$\begin{aligned}
2x^\top(t) P(i) \Delta A(i) x(t) &= 2x^\top(t) (t) P^\top(i) D_A(i) F_A(i, t) E_A(i) x(t) \\
&\leq \varepsilon_A(i) x^\top(t) P^\top D_A(i) D_A^\top(i) P(i) x(t) \\
&+ \varepsilon_A^{-1}(i) x^\top(t) E_A^\top(i) E_A(i) x(t), \\
2x^\top(t) P(i) \Delta B(i) K(i) x(t) &= 2x^\top(t) (t) P^\top(i) D_B(i) F_B(i, t) E_B(i) K(i) x(t) \\
&\leq \varepsilon_B(i) x^\top(t) P^\top D_B(i) D_B^\top(i) P(i) x(t) \\
&+ \varepsilon_B^{-1}(i) x^\top(t) K^\top(i) E_B^\top(i) E_B(i) K(i) x(t) \\
-2x^\top(t) P(i) B(i) K(i) e(t) &\leq x^\top(t) P^\top B(i) B^\top(i) P(i) x(t) \\
&+ \varepsilon_K^{-1}(i) e^\top(t) K^\top(i) K(i) e(t), \\
-2x^\top(t) P(i) \Delta B(i) K(i) e(t) &= -2x^\top(t) (t) P^\top(i) D_B(i) F_B(i, t) E_B(i) K(i) e(t) \\
&\leq \varepsilon_e(i) x^\top(t) P^\top D_B(i) D_B^\top(i) P(i) x(t) \\
&+ \varepsilon_e^{-1}(i) x^\top(t) K^\top(i) E_B^\top(i) E_B(i) K(i) e(t), \\
2e^\top(t) Q(i) \Delta A(i) x(t) &= 2e^\top(t) (t) Q^\top(i) D_A(i) F_A(i, t) E_A(i) x(t) \\
&\leq \varepsilon_Q(i) x^\top(t) Q^\top D_A(i) D_A^\top(i) Q(i) x(t) \\
&+ \varepsilon_Q^{-1}(i) x^\top(t) E_A^\top(i) E_A(i) x(t), \\
2e^\top(t) Q^\top(i) \Delta B(i, t) K(i) x(t) &= 2e^\top(t) Q^\top(i) D_B(i) F_B(i, t) E_B(i) K(i) x(t) \\
&\leq \varepsilon_{BQ}^{-1}(i) e^\top(t) Q^\top(i) D_B(i) D_B^\top(i) Q(i) e(t) \\
&+ \varepsilon_{BQ}(i) x^\top(t) K^\top(i) E_B^\top(i) E_B(i) K(i) x(t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2e^\top(t)Q^\top(i)L(i)\Delta C_y(i)x(t) &= 2e^\top(t)Q^\top(i)L(i)D_{C_y}(i)F_{C_y}(i,t)E_{C_y}(i)x(t) \\
&\leq \varepsilon_{C_y}(i)e^\top(t)Q^\top(i)L(i)D_{C_y}(i)D_{C_y}^\top(i)L^\top(i)Q(i)e(t) \\
&\quad + \varepsilon_{C_y}^{-1}(i)x^\top(t)E_{C_y}^\top(i)E_{C_y}(i)x(t), \\
-2e^\top(t)Q^\top(i)\Delta B(i,t)K(i)e(t) &= -2e^\top(t)Q^\top(i)D_B(i)F_B(i,t)E_B(i)K(i)e(t) \\
&\leq \varepsilon_{BK}(i)e^\top(t)Q^\top(i)D_B(i)D_B^\top(i)Q(i)e(t) \\
&\quad + \varepsilon_{BK}^{-1}(i)e^\top(t)K^\top(i)E_B^\top(i)E_B(i)K(i)e(t).
\end{aligned}$$

où $\varepsilon_e(i)$, $\varepsilon_Q^{-1}(i)$, $\varepsilon_{BQ}(i)$, $\varepsilon_{C_y}(i)$ et $\varepsilon_{BK}(i)$ sont des constantes positives.

En tenant compte de ceci, on aura donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}V(x(t), e(t), i) &\leq x^\top(t)[\mathcal{H}_1(i) + \varepsilon^{-1}Q(i)E_A^\top(i)E_A(i) \\
&\quad + \varepsilon_A(i)P^\top(i)D_A(i)D_A^\top(i)P(i) + \varepsilon^{-1}A(i)E_A^\top(i)E_A(i) \\
&\quad + \varepsilon_B(i)P^\top(i)D_B(i)D_B^\top(i)P(i) + \varepsilon_B^{-1}(i)(i)K^\top(i)E_B^\top(i)E_B(i)K(i) \\
&\quad + \varepsilon_e(i)P^\top(i)D_B(i)D_B^\top(i)P(i) \\
&\quad + \varepsilon_{BQ}^{-1}(i)K^\top(i)E_B^\top(i)E_B(i)K(i)\varepsilon_{C_y}(i)E_{C_y}^\top(i)E_{C_y}(i)]x(t) + \\
&\quad + e^\top(t)[\mathcal{H}_2(i) + \varepsilon_e^{-1}(i)K^\top(i)E_B^\top(i)E_B(i)K(i) \\
&\quad + \varepsilon_Q(i)Q^\top(i)D_A(i)D_A^\top(i)Q(i) + \varepsilon_{BQ}(i)Q^\top(i)D_B(i)D_B^\top(i)Q(i) \\
&\quad + \varepsilon_{BK}(i)Q^\top(i)D_B(i)D_B^\top(i)Q(i) + \varepsilon_{BK}^{-1}(i)K^\top(i)E_B^\top(i)E_B(i)K(i) \\
&\quad + \varepsilon_{C_y}^{-1}(i)Q^\top(i)L(i)D_{C_y}(i)D_{C_y}^\top(i)L^\top(i)Q(i)]e(t)
\end{aligned}$$

Sous la forme matricielle, l'inégalité précédente devient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}V(x(t), e(t), i) &\leq \begin{bmatrix} x^\top(t) & e^\top(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J}_P(i) & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_Q(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x^\top(t) & e^\top(t) \end{bmatrix} \Theta(i) \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_P(i) &= \mathcal{H}_1(i) + \varepsilon^{-1} Q(i) E_A^\top(i) E_A(i) + \varepsilon_A(i) P^\top(i) D_A(i) D_A^\top(i) P(i) \\
&+ \varepsilon_B(i) P^\top(i) D_B(i) D_B^\top(i) P(i) + \varepsilon_B^{-1}(i) K^\top(i) E_B^\top(i) E_B(i) K(i) \\
&+ \varepsilon_e(i) P^\top(i) D_B(i) D_B^\top(i) P(i) \\
&+ \varepsilon_A^{-1}(i) E_A^\top(i) E_A(i) + \varepsilon_{BQ}^{-1}(i) K^\top(i) E_B^\top(i) E_B(i) K(i) + \varepsilon_{C_y}(i) E_{C_y}^\top(i) E_{C_y}(i), \\
\mathcal{J}_Q(i) &= \mathcal{H}_2(i) + \varepsilon_e^{-1}(i) K^\top(i) E_B^\top(i) E_B(i) K(i) + \varepsilon_Q(i) Q^\top(i) D_A(i) D_A^\top(i) Q(i) \\
&+ \varepsilon_{BQ}(i) Q^\top(i) D_B(i) D_B^\top(i) Q(i) + \varepsilon_{BK}(i) Q^\top(i) D_B(i) D_B^\top(i) Q(i) \\
&+ \varepsilon_{BK}^{-1}(i) K^\top(i) E_B^\top(i) E_B(i) K(i) + \varepsilon_{C_y}^{-1}(i) Q^\top(i) L(i) D_{C_y}(i) D_{C_y}^\top(i) L^\top(i) Q(i).
\end{aligned}$$

ceci donne :

$$\mathbb{L}V(x(t), e(t), i) \leq -\min_{i \in \mathcal{S}} [\lambda_{\min}(-\Theta(i))] \begin{bmatrix} x^\top(t) & e^\top(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}.$$

le reste de la démonstration est le même que celle faite pour démontrer la stabilité stochastique d'un SSSMD nominal. Ceci termine la démonstration du Théorème (5.5.1).

Les conditions de stabilisation par retour d'état à base d'observateur, données par le Théorème (5.5.1) ne sont pas linéaires en les paramètres de design $P(i)$, $K(i)$ et $L(i)$. D'où l'intérêt de les transformer en LMIs que nous pouvons résoudre efficacement, et par la suite calculer les matrices gains de la commande basée-observateur, qui stabilise le système en boucle fermée (5.24). Ceci fera l'objet du prochain paragraphe.

Conception d'une commande stochastique à base d'observateur de type Luenberger

Pour déterminer les matrices gains $K(i)$ et $L(i)$ de la commande basée-observateur (4.1) du SSSDM incertain considéré, nous n'allons pas tarder sur la transformation

des termes relevant des conditions de stabilisation par retour basé-observateur d'un SSSDM nominal, chose qui a été faite dans le chapitre 4, nous allons plutôt nous concentrer sur la linéarisation des termes incorporant des incertitudes. Pour cela commençons d'abord par multiplier à gauche et à droite, la première inégalité (5.25) du Théorème 5.5.1, par $P^{-T}(i)$ et $P^{-1}(i)$, il s'en suit :

$$\begin{aligned}
& P^{-T}(i)\mathcal{H}_1(i)P^{-1}(i) + \varepsilon_Q^{-1}(i)P^{-T}(i)E_A^\top(i)E_A(i)P^{-1}(i) + \varepsilon_A(i)D_A(i)D_A^\top(i) \\
& + \varepsilon_A^{-1}(i)P^{-T}(i)E_A^\top(i)E_A(i)P^{-1}(i) + \varepsilon_B^{-1}(i)P^{-T}(i)K^\top(i)E_B^\top(i)E_B(i)K(i)P^{-1}(i) \\
& + B(i)B^\top(i) + \varepsilon_e(i)D_B(i)D_B^\top(i) + \varepsilon_{BQ}^{-1}(i)P^{-T}(i)K^\top(i)E_B^\top(i)E_B(i)K(i)P^{-1}(i) \\
& + \varepsilon_{C_y}(i)P^{-T}(i)E_{C_y}^\top(i)E_{C_y}(i)P^{-1}(i) < 0
\end{aligned}$$

Au terme de cette inégalité, en appliquant le lemme 3.2.2 sur la majoration du terme sous la sommation dans $\mathcal{H}_1(i)$ comme il a été fait précédemment, ensuite en procédant aux changements des variables $X(i) = P^{-1}(i)$, et $Y_c(i) = K(i)X(i)$, on arrive à (5.6) et :

$$\begin{aligned}
& \Pi_P(i) + X^\top(i)V_P(i)X(i) + \mathcal{S}^\top(i)\mathcal{X}(i)\mathcal{S}(i) + \varepsilon_A^{-1}(i)X^\top(i)E_A^\top(i)E_A(i)X(i) \\
& + \varepsilon_B(i)D_B(i)D_B^\top(i) + \varepsilon_B^{-1}(i)Y_c^\top(i)E_B^\top(i)E_B(i)Y_c(i) + \varepsilon_A(i)D_A(i)D_A^\top(i) + B(i)B^\top(i) \\
& + \varepsilon_e(i)D_B(i)D_B^\top(i) + \varepsilon_Q^{-1}(i)X^\top(i)E_A^\top(i)E_A(i)X(i) + \varepsilon_{C_y}(i)X^\top(i)E_{C_y}^\top(i)E_{C_y}(i)X(i) \\
& + \varepsilon_{BQ}^{-1}(i)Y_c^\top(i)E_B^\top(i)E_B(i)Y_c(i) < 0
\end{aligned} \tag{5.31}$$

avec $\mathcal{S}(i)$, $\mathcal{X}(i)$ et $\Pi_P(i)$ sont données par (5.11), (5.12) et :

$$\begin{aligned}
\Pi_P(i) &= X^\top(i)A^\top(i) + A(i)X(i) + Y_c^\top(i)B^\top(i) + B(i)Y_c(i) \\
&+ B(i)B^\top(i) + \pi_{ii}X^\top(i)E^\top(i).
\end{aligned} \tag{5.32}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_A^{-1}(i)X^T(i)E_A^\top(i)E_A(i)X(i) + \varepsilon_{C_y}(i)X^T(i)E_{C_y}^\top(i)E_{C_y}(i)X(i) \\
& + \varepsilon_Q^{-1}(i)X^T(i)E_A^\top(i)E_A(i)X(i) \\
& = X^T(i)\mathcal{R}_c^\top(i)\mathcal{C}_c^{-1}(i)\mathcal{R}_c(i)X(i)
\end{aligned}$$

avec :

$$\mathcal{R}_c^\top(i) = [E_A^\top(i) \ E_A^\top(i) \ E_{C_y}^\top(i)], \quad (5.33)$$

$$\mathcal{C}_c(i) = \text{diag}(\varepsilon_A(i)\mathbb{I}, \varepsilon_Q(i)\mathbb{I}, \varepsilon_{C_y}^{-1}(i)\mathbb{I}) \quad (5.34)$$

En considérant ceci, l'inégalité (5.31) devient :

$$\begin{aligned}
& \Omega(i) + X^\top(i)Z_P^{-1}(i)X(i) + \varepsilon_B^{-1}(i)Y_c^T(i)E_B^\top(i)E_B(i)Y_c(i) + S^\top(i)\mathcal{X}(i)S(i) \\
& + \varepsilon_{BQ}^{-1}(i)Y_c^T(i)E_B^\top(i)E_B(i)Y_c(i) + X^T(i)\mathcal{R}_c^\top(i)\mathcal{C}_c^{-1}(i)\mathcal{R}_c(i)X(i) < 0
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\Omega(i) &= \Pi_P(i) + \varepsilon_B(i)D_B(i)D_B^\top(i) + \varepsilon_e(i)D_B(i)D_B^\top(i) \\
&+ \varepsilon_A(i)D_A(i)D_A^\top(i) + \varepsilon_K(i)B(i)B^\top(i)
\end{aligned} \quad (5.35)$$

En posant $\varepsilon_{BBQ}^{-1}(i) = \varepsilon_B^{-1}(i) + \varepsilon_{BQ}^{-1}(i)$ et en appliquant le complément de Schur à l'inégalité ci-dessus, on obtient le résultat suivant :

$$\begin{bmatrix}
\Omega(i) & X^\top(i) & X^\top(i)\mathcal{R}_c^\top(i) & Y_c^\top(i)E_B^\top(i) & S^\top(i) \\
X(i) & -Z_P(i) & 0 & 0 & 0 \\
\mathcal{R}_c(i)X(i) & 0 & -\mathcal{C}_c^{-1}(i) & 0 & 0 \\
E_B(i)Y_c(i) & 0 & 0 & -\varepsilon_{BBQ}^{-1}(i)\mathbb{I} & 0 \\
S(i) & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{X}(i)
\end{bmatrix} < 0 \quad (5.36)$$

De même, en multipliant à gauche et à droite, la contrainte (5.29) par $P^{-T}(i)$ et $P^{-1}(i)$, et en posant $X(i) = P^{-1}(i)$, celle-ci devient :

$$E^T(i)X(i) = X^T(i)E(i) \geq 0 \quad (5.37)$$

Revenant à la deuxième inégalité (5.26) du Théorème 5.5.1 que l'on souhaite transformer en LMIs. Là aussi, appliquons le Lemme 3.2.2 au dernier terme de sa matrice $\mathcal{H}_2(i)$. Dans ce cas, pour tout $i \in \mathcal{S}$, il existe une matrice $V_Q(i)$ symétrique et définie-positve, et un ensemble de scalaires positifs $\epsilon(ij)$, $j \in \mathcal{S}$ tels que :

$$\begin{bmatrix} V_Q(i) & W_Q(i) \\ W_Q^T(i) & \mathcal{Q}(i) \end{bmatrix} > 0, \quad (5.38)$$

avec :

$$\Pi_Q(i) = A^T(i)Q(i) + Q^T(i)A(i) + Y_o(i)C_y(i) + C_y^T(i)Y_o^T(i) + V_Q(i) \quad (5.39)$$

$$+ \pi_{ii}E^T(i)Q(i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{4}\pi_{ij}^2\epsilon(ij)\mathbb{I},$$

$$W_Q(i) = [R^T(i1)E^T(1)Q(1)R(i1), \dots, R^T(ii-1)E^T(i-1)Q(i-1)R(ii-1), \dots, R^T(ii+1)E^T(i+1)Q(i+1)R(ii+1), \dots, R^T(iN)E^T(N)Q(N)R(iN)], \quad (5.40)$$

$$\mathcal{Q}(i) = \text{diag}[\epsilon(1)\mathbb{I}, \dots, \epsilon(i-1)\mathbb{I}, \epsilon(i+1)\mathbb{I}, \dots, \epsilon(N)\mathbb{I}]. \quad (5.41)$$

Tenant compte de ceci, et posons $Y_o = Q(i)L(i)$, dans ce cas l'inégalité (5.26) se transforme en (5.38) et :

$$\begin{aligned} & \Pi_Q(i) + K^T(i)K(i) + \varepsilon_e^{-1}(i)K^T(i)E_B^T(i)E_B(i)K(i) + \varepsilon_Q(i)Q^T(i)D_A(i)D_A^T(i)Q(i) \\ & + \varepsilon_{BQ}(i)Q^T(i)D_B(i)D_B^T(i)Q(i) + \varepsilon_{BK}(i)Q^T(i)D_B(i)D_B^T(i)Q(i) \\ & + \varepsilon_{BK}^{-1}(i)K^T(i)E_B^T(i)E_B(i)K(i) + \varepsilon_{C_y}^{-1}(i)Y_o(i)D_{C_y}(i)D_{C_y}^T(i)Y_o^T(i) < 0 \end{aligned} \quad (5.42)$$

avec :

$$\begin{aligned}
\Pi_Q(i) &= A^\top(i)Q(i) + Q^\top(i)A(i) + Y_o(i)C_y(i) + C_y^\top(i)Y_o^\top(i) + V_Q(i) \\
&+ \pi_{ii}E^\top(i)Q(i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{4}\pi_{ij}^2\epsilon(ij)\mathbb{I}.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Remarquons que le terme suivant de l'inégalité précédente peut être réécrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&K^\top(i)K(i) + \varepsilon_e^{-1}(i)K^\top(i)E_B^\top(i)E_B(i)K(i) + \varepsilon_{BK}^{-1}(i)K^\top(i)E_B^\top(i)E_B(i)K(i) \\
&= K^\top(i)\mathcal{R}_o^\top(i)\mathcal{C}_o^{-1}(i)\mathcal{R}_o(i)K(i) \\
&\varepsilon_Q(i)Q^\top(i)D_A(i)D_A^\top(i)Q(i) + \varepsilon_{BQ}(i)Q^\top(i)D_B(i)D_B^\top(i)Q(i) \\
&+ \varepsilon_{BK}(i)Q^\top(i)D_B(i)D_B^\top(i)Q(i) \\
&= Q^\top(i)\mathcal{J}_o^\top(i)\mathcal{J}_o(i)Q(i)
\end{aligned}$$

avec :

$$\mathcal{R}_o^\top(i) = [\mathbb{I} \quad E_B^\top(i) \quad E_B^\top(i)], \tag{5.44}$$

$$\mathcal{C}_o(i) = \text{diag}(\mathbb{I}, \varepsilon_e(i)\mathbb{I}, \varepsilon_{BK}(i)\mathbb{I}) \tag{5.45}$$

$$\mathcal{J}_o^\top(i) = [\sqrt{\varepsilon_Q}(i)D_A(i) \quad \sqrt{\varepsilon_{BQ}}(i)D_B(i) \quad \sqrt{\varepsilon_{BK}}(i)D_B(i)]. \tag{5.46}$$

Ainsi, l'inégalité (5.42) devient :

$$\begin{aligned}
&\Pi_Q(i) + K^\top(i)\mathcal{R}_o^\top(i)\mathcal{C}_o^{-1}(i)\mathcal{R}_o(i)K(i) + Q^\top(i)\mathcal{J}_o^\top(i)\mathcal{J}_o(i)Q(i) \\
&+ \varepsilon_{C_y}^{-1}(i)Y_o(i)D_{C_y}(i)D_{C_y}^\top(i)Y_o^\top(i) < 0
\end{aligned}$$

En utilisant le complément de Schur, cette inégalité devient :

$$\begin{bmatrix}
\Pi_Q(i) & K^\top(i)\mathcal{R}_o^\top(i) & Q^\top(i)\mathcal{J}_o^\top(i) & Y_o(i)D_{C_y}(i) \\
\mathcal{R}_o(i)K(i) & -\mathcal{C}_o^{-1}(i) & 0 & 0 \\
\mathcal{J}_o(i)Q(i) & 0 & -\mathbb{I} & 0 \\
D_{C_y}^\top(i)Y_o^\top(i) & 0 & 0 & -\varepsilon_{C_y}^{-1}(i)\mathbb{I}
\end{bmatrix} < 0 \tag{5.47}$$

Et finalement en utilisant le lemme 3.2.3 sur la linéarisation des contraintes bilinéaires, pour transformer les contraintes (5.8), (5.14) et (5.15) . Ainsi, on obtient le résultat énoncé par le Théorème suivant :

Théorème 5.5.2 *Étant donné un ensemble de scalaires positifs*

$\varepsilon_A = (\varepsilon_A(1), \dots, \varepsilon_A(N))$, $\varepsilon_B = (\varepsilon_B(1), \dots, \varepsilon_B(N))$, $\varepsilon_e = (\varepsilon_e(1), \dots, \varepsilon_e(N))$, $\varepsilon_{C_y} = (\varepsilon_{C_y}(1), \dots, \varepsilon_{C_y}(N))$, $\varepsilon_Q = (\varepsilon_Q(1), \dots, \varepsilon_Q(N))$, $\varepsilon_{BBQ} = (\varepsilon_{BBQ}(1), \dots, \varepsilon_{BBQ}(N))$, $\varepsilon_{BQ} = (\varepsilon_{BQ}(1), \dots, \varepsilon_{BQ}(N))$, $\varepsilon_{BK} = (\varepsilon_{BK}(1), \dots, \varepsilon_{BK}(N))$. *S'il existe un ensemble matrices non singulières* $Q = (Q(1), \dots, Q(N))$, *un ensemble de matrices* $Y_o = (Y_o(1), \dots, Y_o(N))$ *et* $Y_c = (Y_c(1), \dots, Y_c(N))$, *un ensemble de matrices symétriques et définies-positives* $X = (X(1), \dots, X(N))$, $P = (P(1), \dots, P(N))$, $V_P = (V_P(1), \dots, V_P(N))$, $Z_P = (Z_P(1), \dots, Z_P(N))$, *et* $V_Q = (V_Q(1), \dots, V_Q(N))$, *un ensemble de scalaires positifs* $\varepsilon = (\varepsilon(i1), \dots, \varepsilon(iN))$, $\beta = (\beta(i1), \dots, \beta(iN))$ *et* $\epsilon = (\epsilon(i1), \dots, \epsilon(iN))$ *qui vérifient le problème suivant pour tout* $i \in \mathcal{S}$ *et toute incertitude admissible :*

$$\min \sum_{i=1}^N \text{Tr}(P(i)X(i) + Z_P(i)V_P(i) + \beta_{ij}\varepsilon_{ij}\mathbb{I})$$

sujet aux LMIs (5.16), (5.18), (5.36), (5.38) et (5.47) avec $\Omega(i)$, $\Pi_Q(i)$, $\mathcal{G}(i)$, $W_P(i)$, $W_Q(i)$, $\mathcal{Q}(i)$, $S(i)$, $\mathcal{X}(i)$, $\mathcal{C}_c(i)$, $\mathcal{R}_c(i)$, $\mathcal{T}_o(i)$, $\mathcal{C}_o(i)$, $\mathcal{R}_o(i)$ *sont données par* (5.35) (5.43), (5.19), (5.9), (5.40), (5.41), (5.11), (5.12), (5.34), (5.33), (5.46), (5.45), (5.44), *sous les contraintes* (5.30) *et* (5.37), *alors le système en boucle fermée* (5.24) *est stochastiquement admissible de façon robuste, sous la loi de contrôle* (4.1), *dont les gains sont donnés par :*

$$\begin{cases} K(i) &= Y_o(i)X^{-1}(i), \\ L(i) &= Q^{-1}(i)Y_c(i). \end{cases}$$

Remarque 5.5.1 *Notons que:*

- lorsque $E(i) = \mathbb{I}$ et $R(ij) = \mathbb{I}, i, j \in \mathcal{S}$, les conditions énoncées dans le Théorème 5.5.2, se ramènent à celles que doit vérifier un système à sauts markoviens pour être stochastiquement admissible via un retour basé-observateur qui a été présenté dans (Boukas, 2005).

Exemple 5.5.1 *Considérons l'exemple suivant :*

$$\begin{aligned}
 \Lambda &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, R(1) = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0.02 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}, R(2) = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \\
 E(1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, A(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \\
 A(3) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, B(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B(2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 B(3) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_y(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_y(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
 C_y(3) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E(2) = E(3), R(3) = R(1), \\
 E_A(1) &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, D_A(1) = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.02 \\ 0 \end{bmatrix}, E_A(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \\
 D_A(2) &= \begin{bmatrix} 0.13 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}, E_A(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, D_A(3) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_B(1) &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, D_B(1) = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.02 \\ 0 \end{bmatrix}, E_B(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \\
D_B(2) &= \begin{bmatrix} 0.13 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}, E_B(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, D_B(3) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \\
E_c(1) &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, E_c(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, E_c(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \\
D_{c_y}(1) &= \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.02 \\ 0 \end{bmatrix}, D_{c_y}(2) = \begin{bmatrix} 0.13 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}, D_{c_y}(3) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \\
\varepsilon_A(1) &= 0.1, \varepsilon_A(2) = 0.11, \varepsilon_A(3) = 0.2, \varepsilon_B(1) = 0.2, \varepsilon_B(2) = 0.3, \varepsilon_B(3) = 0.1, \\
\varepsilon_{C_y}(1) &= 0.1, \varepsilon_{C_y}(2) = 0.2, \varepsilon_{C_y}(3) = 0.3, \varepsilon_Q(1) = 0.1, \varepsilon_Q(2) = 0.2, \varepsilon_Q(3) = 0.1, \\
\varepsilon_e(1) &= 0.1, \varepsilon_e(2) = 0.1, \varepsilon_e(3) = 0.2, \varepsilon_{BQ}(3) = 0.2, \epsilon_1(1) = 0.1, \\
\varepsilon_{BK}(1) &= 0.1, \varepsilon_{BK}(2) = 0.3, \varepsilon_{BK}(3) = 0.1, \varepsilon_{BQ}(1) = 0.1, \varepsilon_{BQ}(2) = 0.1, \\
\varepsilon_{BBK}(1) &= 0.0667, \varepsilon_{BBK}(2) = 0.12, \varepsilon_{BBK}(3) = 0.05, \epsilon_1(2) = 0.3, \epsilon_1(3) = 0.1, \\
\epsilon_2(1) &= 0.1, \epsilon_2(2) = 0.3, \epsilon_2(3) = 0.1, \epsilon_3(1) = 0.1, \epsilon_3(2) = 0.3, \epsilon_3(3) = 0.1
\end{aligned}$$

En résolvant les conditions du Théorème 5.5.2, on aboutit alors aux résultats suivants :

$$\begin{aligned}
P(1) &= \begin{bmatrix} 3.0138 & 1.7261 & 0.0000 \\ 1.7261 & 2.6224 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 3.7637 \end{bmatrix}, P(2) = \begin{bmatrix} 3.2212 & 2.0699 & 0.0000 \\ 2.0699 & 3.3808 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 3.7637 \end{bmatrix}, \\
P(3) &= \begin{bmatrix} 3.0688 & 1.7819 & 0.0000 \\ 1.7819 & 2.7096 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 3.7637 \end{bmatrix}, Z_P(1) = \begin{bmatrix} 1.0066 & -0.0045 & 0.1078 \\ -0.0045 & 0.9694 & 0.1180 \\ 0.1078 & 0.1180 & 1.0910 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_P(2) &= \begin{bmatrix} 1.0126 & 0.0001 & 0.1132 \\ 0.0001 & 0.9753 & 0.1235 \\ 0.1132 & 0.1235 & 1.1020 \end{bmatrix}, Z_P(3) = \begin{bmatrix} 0.9870 & -0.0182 & 0.0686 \\ -0.0182 & 0.9568 & 0.0921 \\ 0.0686 & 0.0921 & 1.1009 \end{bmatrix}, \\
V_P(1) &= \begin{bmatrix} 4.6402 & 0.7915 & 0.2844 \\ 0.7915 & 4.9722 & 0.4124 \\ 0.2844 & 0.4124 & 4.2854 \end{bmatrix}, V_P(2) = \begin{bmatrix} 4.4674 & 0.7449 & 0.2242 \\ 0.7449 & 4.9800 & 0.3300 \\ 0.2242 & 0.3300 & 4.0607 \end{bmatrix}, \\
V_P(3) &= \begin{bmatrix} 4.9237 & 1.1479 & 0.3864 \\ 1.1479 & 5.4243 & 0.5672 \\ 0.3864 & 0.5672 & 4.4019 \end{bmatrix}, X(1) = \begin{bmatrix} 0.5326 & -0.3506 & 0.0000 \\ -0.3506 & 0.6121 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.2657 \end{bmatrix}, \\
X(2) &= \begin{bmatrix} 0.5118 & -0.3133 & 0.0000 \\ -0.3133 & 0.4876 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.2657 \end{bmatrix}, X(3) = \begin{bmatrix} 0.5272 & 0.3467 & 0.0000 \\ 0.3467 & 0.5970 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.2657 \end{bmatrix}, \\
Y_c(1) &= \begin{bmatrix} 12.0088 & 6.5690 & 0.0000 \\ 4.5156 & 2.2572 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 5.8894 \end{bmatrix}, Y_c(2) = \begin{bmatrix} 0.0519 & 12.9478 & 0.0000 \\ 2.1317 & 0.4832 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 5.2203 \end{bmatrix}, \\
Y_c(3) &= \begin{bmatrix} 13.3012 & 7.3273 & 0.0000 \\ 0.0951 & 7.7132 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 3.0694 \end{bmatrix}, Y_o(1) = \begin{bmatrix} -0.0889 & -1.2721 & 0.0000 \\ 4.5120 & -2.2576 & 0.0000 \\ 1.8295 & -1.2043 & 0.0000 \end{bmatrix}, \\
Y_o(2) &= \begin{bmatrix} -0.1749 & -0.9288 & 0.0000 \\ 4.3836 & -2.1288 & 0.0000 \\ 1.7581 & -1.0762 & 0.0000 \end{bmatrix}, Y_o(3) = \begin{bmatrix} 4.2958 & 3.3191 & 0.0000 \\ 3.4532 & 6.3157 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 2.1721 \end{bmatrix}, \\
Q(1) &= \begin{bmatrix} 2.8051 & 0.3511 & -0.0000 \\ 0.3511 & 2.4608 & -0.0000 \\ 53.4589 & -15.9864 & 67.0522 \end{bmatrix}, \\
Q(2) &= \begin{bmatrix} 3.0554 & 0.3594 & 0.0000 \\ 0.3594 & 3.2616 & 0.0000 \\ -1.9985 & -1.6883 & 0.5136 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(3) &= \begin{bmatrix} 2.7432 & 0.3509 & 0.0000 \\ 0.3509 & 2.4623 & 0.0000 \\ -1.0392 & -0.3543 & 3.1689 \end{bmatrix}, \varepsilon(1) = 0.9706; \varepsilon(2) = 1.0300 \\
V_Q(1) &= \begin{bmatrix} 6.9880 & -0.1453 & -0.1319 \\ -0.1453 & 7.2278 & -0.0401 \\ -0.1319 & -0.0401 & 6.6170 \end{bmatrix}, \varepsilon(3)0.9440; \beta(1) = 1.0303; \\
V_Q(2) &= \begin{bmatrix} 6.7461 & -0.0798 & -0.0956 \\ -0.0798 & 7.1645 & -0.0368 \\ -0.0956 & -0.0368 & 6.4388 \end{bmatrix}, \beta(2) = 0.9708; \beta(3) = 1.0594, \\
V_Q(3) &= \begin{bmatrix} 6.8268 & -0.1418 & -0.1273 \\ -0.1418 & 7.2296 & -0.0397 \\ -0.1273 & -0.0397 & 6.6023 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Il est important de remarquer que pour tout $i = 1, 2, 3$, les contraintes suivantes $P(i)X(i) = \mathbb{I}$, $V_P(i)Z_P(i) = \mathbb{I}$ et $\beta(i)\varepsilon(i)\mathbb{I} = \mathbb{I}$ sont toujours vérifiées.

En outre, les matrices gains (4.33) et (4.34) sont données par :

$$\begin{aligned}
K(1) &= \begin{bmatrix} -2.4853 & -3.5018 & 0.0000 \\ 9.7130 & 1.8751 & 3.8943 \\ 3.4351 & 0.0000 & 2.2165 \end{bmatrix}, K(2) = \begin{bmatrix} -2.6967 & -4.3881 & 0.0000 \\ -5.8665 & -2.7788 & 0.0000 \\ 1.9543 & 0.0000 & 1.9647 \end{bmatrix}, \\
K(3) &= \begin{bmatrix} -5.3875 & -4.3555 & -1.2613 \\ -1.3452 & -2.0730 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -1.1552 \end{bmatrix}, L(1) = \begin{bmatrix} 0.8636 & 0.3035 & 0.0000 \\ -1.7237 & -1.0901 & 0.0000 \\ -1.0995 & -0.5018 & -0.0370 \end{bmatrix}, \\
L(2) &= \begin{bmatrix} -1.7741 & -0.5442 & 0.0000 \\ -1.0982 & -1.0674 & 0.0000 \\ -10.5129 & -5.6262 & -5.0261 \end{bmatrix}, L(3) = \begin{bmatrix} -1.4123 & -0.8982 & 0.0000 \\ -1.2012 & -2.4370 & 0.0000 \\ -0.5975 & -0.5670 & 0.6855 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

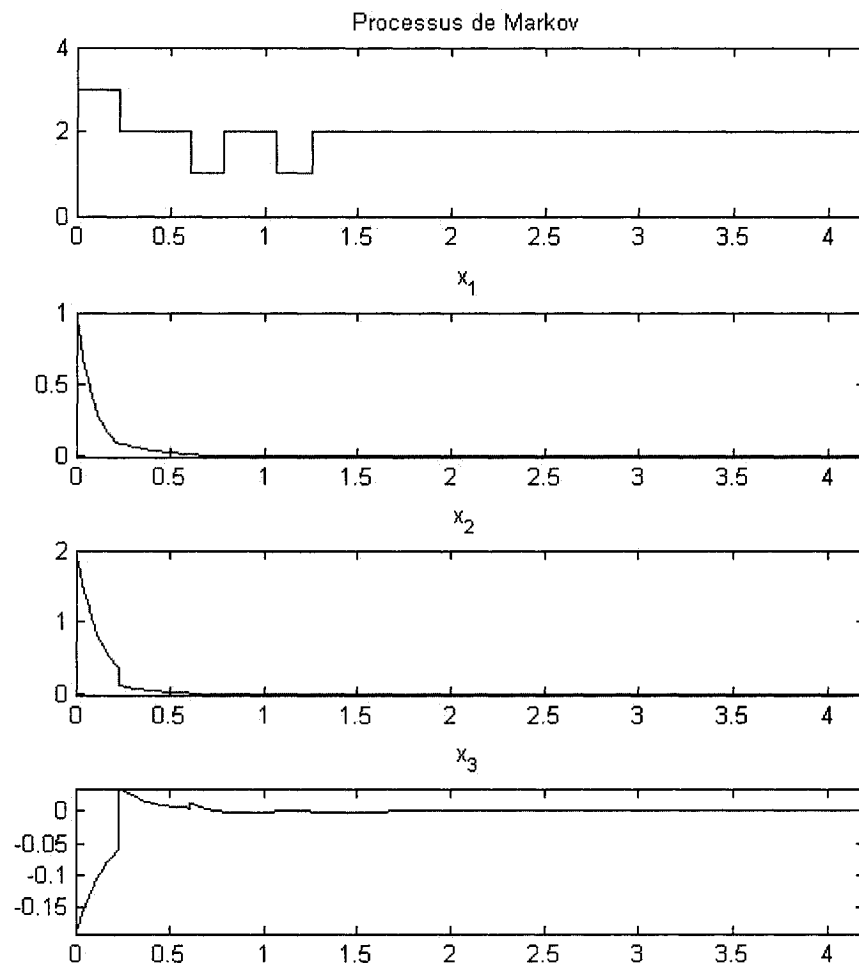


Figure 5.5 Évolution du mode et des variables d'état

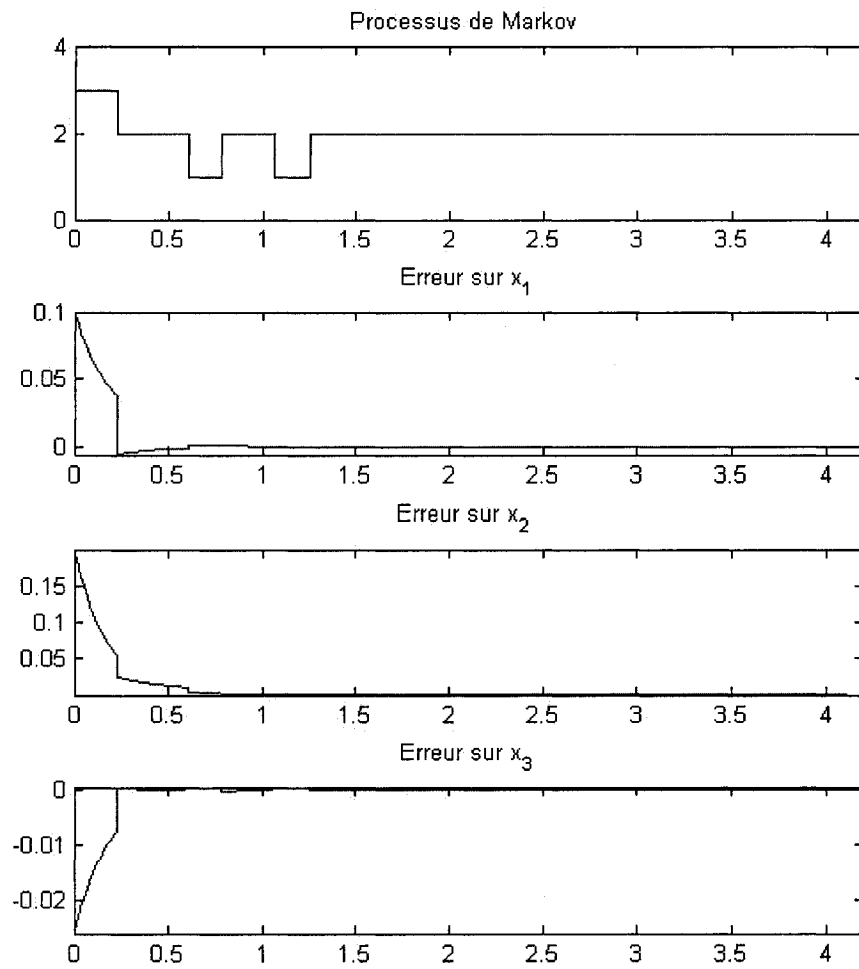


Figure 5.6 Erreur d'estimation du contrôleur assuré par un observateur

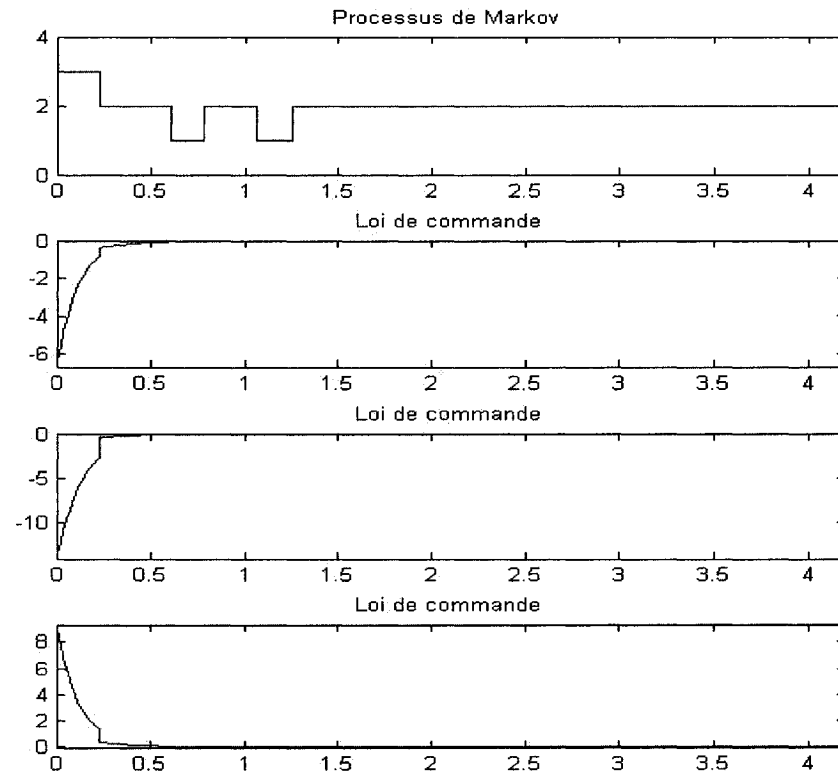


Figure 5.7 Évolution de la loi de commande par retour assuré par un observateur

Comme il apparaît sur les figures 5.5, 5.6 et 5.7, représentant l'évolution des variables d'état de l'erreur d'estimation et de la commande, les trajectoires de celles-ci convergent vers zéro quand t tend vers l'infini. Par conséquent, le système en boucle fermée, et stochastiquement admissible de façon robuste pour toute incertitude admissible, sous la loi de commande avec les gains trouvés.

5.6 Retour de sortie dynamique robuste

Dans cette partie, nous allons développer des conditions suffisantes pour assurer l'admissibilité stochastique de façon robuste du système incertain (2.1) via un contrôleur par retour de sortie dynamique. Pour cela nous allons considérer la représentation du contrôleur par retour de sortie dynamique donné par (4.37). Dans ce cas le système augmenté en boucle fermée sera donné par :

$$\widetilde{E(r(t))}\dot{\eta}(t) = [\widetilde{A(r(t))} + \widetilde{\Delta(A)}(r(t))]\eta(t) \quad (5.48)$$

avec $\eta(t)$, $\widetilde{E(r(t))}$ et $\widetilde{A(r(t))}$ sont donnés pour tout mode $r(t) = i \in \mathcal{S}$ par :

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}, \widetilde{E(i)} = \begin{bmatrix} E(i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E(i) \end{bmatrix}, \\ \widetilde{A(i)} &= \begin{bmatrix} A(i) & B(i)K_C(i) \\ K_B(i)C_y(i) & K_A(i) \end{bmatrix}, \\ \widetilde{\Delta(A)}(i) &= \begin{bmatrix} D_A(i)F_A(i,t)E_A(i) & D_B(i)F_B(i,t)E_B(i)K_C(i) \\ K_B(i)D_{C_y}(i)F_{C_y}(i,t)E_{C_y}(i) & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Il est à remarquer que $\widetilde{\Delta(A)}(i)$ peut s'écrire comme suit :

$$\widetilde{\Delta(A)}(i) = \Delta\widetilde{A}_A(i,t) + \Delta\widetilde{B}_B(i,t) + \Delta\widetilde{C}_{C_y}(i,t)$$

avec :

$$\Delta\widetilde{A}_A(i,t) = \begin{bmatrix} D_A(i)F_A(i,t)E_A(i) & \\ & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \Delta\widetilde{B}_B(i,t) = \begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} D_B(i)F_B(i,t) \\ \times E_B(i)K_C(i) \end{bmatrix} \\ 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\Delta \tilde{C}_{C_y}(i, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_B(i)D_{C_y}(i)F_{C_y}(i, t)E_{C_y}(i) & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

ces incertitudes peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{A}_A(i, t) &= \begin{bmatrix} D_A(i) \\ 0 \end{bmatrix} F_A(i, t) \begin{bmatrix} E_A(i) & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \tilde{D}_A(i) \tilde{F}_A(i, t) \tilde{E}_A(i), \\ \Delta \tilde{B}_B(i, t) &= \begin{bmatrix} D_B(i) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} F_B(i, t) \begin{bmatrix} 0 & E_B(i)K_C(i) \end{bmatrix} = \tilde{D}_B(i) \tilde{F}_B(i, t) \tilde{E}_B(i) \quad (5.49) \\ \Delta \tilde{C}_{C_y}(i, t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ K_B(i)D_{C_y}(i) \end{bmatrix} F_{C_y}(i, t) \begin{bmatrix} E_{C_y}(i) & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \tilde{D}_{C_y}(i) \tilde{F}_{C_y}(i, t) \tilde{E}_{C_y}(i). \end{aligned}$$

La démarche suivie pour la stabilisation robuste du système étudié par retour de sortie dynamique sera analogue à celle utilisée pour le cas nominal. La difficulté va résider dans les non-linéarités rencontrées, pour les contourner nous allons utiliser les différentes techniques précédemment présentées à savoir le lemme du complément de Schur, les lemmes des majorations et des incertitudes, les changements de variables, les techniques d'optimisation convexes impliquant des LMIs et des BMIs, ainsi que l'algorithme de linéarisation basée sur la technique de complémentarité sur le cône.

En se basant sur le résultat du Théorème 2.6.1, ce système en boucle fermée est stochastiquement admissible de façon robuste si la LMI suivante est vérifiée :

$$P^\top(i) \tilde{A}(i, t) + \tilde{A}^\top(i, t) P(i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} R^\top(ij) \tilde{E}^\top(i) P(j) R(ij) < 0 \quad (5.50)$$

où $P^\top(i)$ est donnée par (4.41). En remplaçant $\tilde{A}(i, t)$ par son expression, (5.50)

devient :

$$\begin{aligned} J(i) &= J_r(i) + \Delta \tilde{A}_A^\top(i, t) P(i) + P^\top(i) \Delta \tilde{A}_A(i, t) + \Delta \tilde{B}_B^\top(i, t) P(i) \\ &+ P^\top(i) \Delta \tilde{B}_B(i, t) + \Delta \tilde{C}_{C_y}^\top(i, t) P(i) + P^\top(i) \Delta \tilde{C}_{C_y}(i, t) < 0 \end{aligned} \quad (5.51)$$

$J_r(i)$ correspond à la condition d'admissibilité stochastique d'un SSSDM nominal via une loi de commande par retour de sortie, Celle-ci est définie par (4.39).

En remplaçant $\Delta \tilde{A}_A(i, t)$, $\Delta \tilde{A}_A^\top(i, t)$ et $\Delta \tilde{C}_{C_y}(i, t)$ par leurs expressions (5.49), et en appliquant le lemme 3.2.1 sur les incertitudes, aux termes incertains de (5.51), on obtient :

$$\begin{aligned} P^\top(i) \Delta \tilde{A}_A(i, t) + \Delta \tilde{A}_A^\top(i, t) P(i) &\leq \tilde{\varepsilon}_A^{-1}(i) P^\top(i) \tilde{D}_A(i) \tilde{D}_A^\top(i) P(i) + \tilde{\varepsilon}_A(i) \tilde{E}_A^\top(i) \tilde{E}_A(i), \\ P^\top(i) \Delta \tilde{B}_B(i, t) + \Delta \tilde{B}_B^\top(i, t) P(i) &\leq \tilde{\varepsilon}_B^{-1}(i) P^\top(i) \tilde{D}_B(i) \tilde{D}_B^\top(i) P(i) + \tilde{\varepsilon}_B(i) \tilde{E}_B^\top(i) \tilde{E}_B(i), \\ P^\top(i) \Delta \tilde{C}_{C_y}(i, t) + \Delta \tilde{C}_{C_y}^\top(i, t) P(i) &\leq \tilde{\varepsilon}_{C_y}^{-1}(i) P^\top(i) \tilde{D}_{C_y}(i) \tilde{D}_{C_y}^\top(i) P(i) + \tilde{\varepsilon}_{C_y}(i) \tilde{E}_{C_y}^\top(i) \tilde{E}_{C_y}(i), \end{aligned}$$

Tenant compte de ces majorations, l'utilisation du complément de Schur à l'inégalité (5.51) donne :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_r(i) & P^\top(i) \tilde{D}_A(i) & P^\top(i) \tilde{D}_B(i) & P^\top(i) \tilde{D}_{C_y}(i) \\ \tilde{D}_A^\top(i) P(i) & -\tilde{\varepsilon}_A(i) & 0 & 0 \\ \tilde{D}_B^\top(i) P(i) & 0 & -\tilde{\varepsilon}_B(i) & 0 \\ \tilde{D}_{C_y}^\top(i) P(i) & 0 & 0 & -\tilde{\varepsilon}_{C_y}(i) \end{bmatrix} < 0$$

$$\mathcal{P}_r(i) = J_r(i) + \tilde{\varepsilon}_A(i) \tilde{E}_A^\top(i) \tilde{E}_A(i) + \tilde{\varepsilon}_B(i) \tilde{E}_B^\top(i) \tilde{E}_B(i) + \tilde{\varepsilon}_{C_y}(i) \tilde{E}_{C_y}^\top(i) \tilde{E}_{C_y}(i)$$

En posant :

$$\Omega(i) = \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_A(i)\mathbb{I} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\varepsilon}_B(i)\mathbb{I} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon}_{C_y}(i)\mathbb{I} \end{bmatrix}$$

Et en réutilisant le complément de Schur, l'inégalité précédente devient :

$$\begin{aligned} J_r(i) + P^\top(i) \begin{bmatrix} \tilde{D}_A(i) & \tilde{D}_B(i) & \tilde{D}_{C_y}(i) \end{bmatrix} \Omega^{-1}(i) \begin{bmatrix} \tilde{D}_A^\top(i) \\ \tilde{D}_B^\top(i) \\ \tilde{D}_{C_y}^\top(i) \end{bmatrix} P(i) \\ + \begin{bmatrix} \tilde{E}_A(i) & \tilde{E}_B(i) & \tilde{E}_{C_y}(i) \end{bmatrix} \Omega(i) \begin{bmatrix} \tilde{E}_A^\top(i) \\ \tilde{E}_B^\top(i) \\ \tilde{E}_{C_y}^\top(i) \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (5.52)$$

Cet inégalité matricielle, qui garantit la stabilité stochastique robuste du système, est non linéaire en $P(i)$, $K_A(i)$, $K_B(i)$, et $K_C(i)$. Pour les transformer en LMIs, multiplions à gauche et à droite l'inégalité précédente par $U^\top(i)V^\top(i)$ et $V(i)U(i)$ (voir (4.45)) . Il est à noter que $U^\top(i)V^\top(i)J_r(i)V(i)U(i)$ a déjà été calculé dans le chapitre 4, pour les autres termes, on a :

$$\begin{aligned} U^\top(r_t)V^\top(r_t)P^\top(i) \begin{bmatrix} \tilde{D}_A(i) & \tilde{D}_B(i) & \tilde{D}_{C_y}(i) \end{bmatrix} \Omega^{-1}(i) \begin{bmatrix} \tilde{D}_A^\top(i) \\ \tilde{D}_B^\top(i) \\ \tilde{D}_{C_y}^\top(i) \end{bmatrix} P(i)V(i)U(i) \\ = U^\top(i)V^\top(i) \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_A^{-1}(i)P^\top(i)\tilde{D}_A(i)\tilde{D}_A^\top(i)P(i) \\ \tilde{\varepsilon}_B^{-1}(i)P^\top(i)\tilde{D}_B(i)\tilde{D}_B^\top(i)P(i) \\ \tilde{\varepsilon}_{C_y}^{-1}(i)P^\top(i)\tilde{D}_{C_y}(i)\tilde{D}_{C_y}^\top(i)P(i) \end{bmatrix} V(i)U(i) \end{aligned} \quad (5.53)$$

Commençons par calculer la première ligne de la matrice (5.53)

$$\begin{aligned} & U^\top(i) V^\top(i) \left[P^\top(i) \tilde{D}_A(i) \tilde{D}_A^\top(i) P(i) \right] V(i) U(i) \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1(i) & \mathcal{W}_2(i) \\ \mathcal{W}_3(i) & \mathcal{W}_4(i) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1(i) &= W^\top(i) P_1^\top(i) D_A(i) D_A^\top(i) [P_1(i) - P_2(i) P_3^{-1}(i) P_2^\top(i)] W(i) \\ &\quad - W^\top(i) P_2(i) P_3^{-1}(i) P_2^\top(i) D_A(i) D_A^\top(i) [P_1(i) - P_2(i) P_3^{-1}(i) P_2^\top(i)] W(i), \\ \mathcal{W}_2(i) &= W^\top(i) [P_1(i) - P_2(i) P_3^{-1}(i) P_2^\top(i)] D_A(i) D_A^\top(i) P_1(i) \\ \mathcal{W}_3(i) &= P_1^\top(i) D_A(i) D_A^\top(i) [P_1(i) - P_2(i) P_3^{-1}(i) P_2^\top(i)] W(i) \\ \mathcal{W}_4(i) &= P_1^\top(i) D_A(i) D_A^\top(i) P_1(i) \end{aligned}$$

En utilisant le fait que : $[P_1(i) - P_2(i) P_3^{-1}(i) P_2^\top(i)] W(i) = \mathbb{I}$, le terme précédent devient :

$$\begin{aligned} & U^\top(i) V^\top(i) \left[P^\top(i) \tilde{D}_A(i) \tilde{D}_A^\top(i) P(i) \right] V(i) U(i) \\ &= \begin{bmatrix} D_A(i) D_A^\top(i) & D_A(i) D_A^\top(i) P_1(i) \\ P_1^\top(i) D_A(i) D_A^\top(i) & P_1^\top(i) D_A(i) D_A^\top(i) P_1(i) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pour la deuxième ligne de (5.53) on a :

$$\begin{aligned} & U^\top(i) V^\top(i) \left[P^\top(i) \tilde{D}_B(i) \tilde{D}_B^\top(i) P(i) \right] V(i) U(i) \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{G}_1(i) & \mathcal{G}_2(i) \\ \mathcal{G}_3(i) & \mathcal{G}_4(i) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(i) &= W^\top(i) P_1^\top(i) D_B(i) D_B^\top(i) [P_1(i) - P_2(i) P_3^{-1}(i) P_2^\top(i)] W(i) \\ &\quad - W^\top(i) P_2(i) P_3^{-1}(i) P_2^\top(i) D_B(i) D_B^\top(i) [P_1(i) - P_2(i) P_3^{-1}(i) P_2^\top(i)] W(i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_2(i) &= W^\top(i)[P_1(i) - P_2(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)]D_B(i)D_B^\top(i)P_1(i), \\
\mathcal{G}_3(i) &= P_1^\top(i)D_B(i)D_B^\top(i)[P_1(i) - P_2(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)]W(i), \\
\mathcal{G}_4(i) &= P_1^\top(i)D_B(i)D_B^\top(i)P_1(i).
\end{aligned}$$

Là aussi, en utilisant le fait que : $[P_1(i) - P_2(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)]W(i) = \mathbb{I}$, le terme précédent devient :

$$\begin{aligned}
&U^\top(i)V^\top(i) \left[P^\top(i)\tilde{D}_B(i)\tilde{D}_B^\top(i)P(i) \right] V(i)U(i) \\
&= \begin{bmatrix} D_B(i)D_B^\top(i) & D_B(i)D_B^\top(i)P_1(i) \\ P_1^\top(i)D_B(i)D_B^\top(i) & P_1^\top(i)D_B(i)D_B^\top(i)P_1(i) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Pour la troisième ligne de (5.53) on a :

$$\begin{aligned}
&U^\top(i)V^\top(i) \left[P^\top(i)\tilde{D}_{C_y}(i)\tilde{D}_{C_y}^\top(i)P(i) \right] V(i)U(i) \\
&= U^\top(i)V^\top(i) \left[\begin{bmatrix} P_2^\top(i)K_B(i)D_{C_y}(i) \\ \times D_{C_y}^\top(i)K_B^\top(i)P_2(i) \\ P_3^\top(i)K_B(i)D_{C_y}(i) \\ \times D_{C_y}^\top(i)K_B^\top(i)P_2(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2^\top(i)K_B(i)D_{C_y}(i) \\ \times D_{C_y}^\top(i)K_B^\top(i)P_3(i) \\ P_3^\top(i)K_B(i)D_{C_y}(i) \\ \times D_{C_y}^\top(i)K_B^\top(i)P_3(i) \end{bmatrix} \right] V(i)U(i) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_2^\top(i)K_B(i)D_{C_y}(i)D_{C_y}^\top(i)K_B^\top(i)P_2(i)W(i) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

En tenant en considération ces différentes manipulations, (5.53) devient :

$$U^\top(r_t)V^\top(r_t)P^\top(i) \begin{bmatrix} \tilde{D}_A(i) & \tilde{D}_B(i) & \tilde{D}_{C_y}(i) \end{bmatrix} \Omega^{-1}(i) \begin{bmatrix} \tilde{D}_A^\top(i) \\ \tilde{D}_B^\top(i) \\ \tilde{D}_{C_y}^\top(i) \end{bmatrix} P(i)V(i)U(i)$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{\varepsilon}_A^{-1}(i) \begin{bmatrix} D_A(i)D_A^\top(i) & D_A(i)D_A^\top(i)P_1(i) \\ P_1^\top(i)D_A(i)D_A^\top(i) & P_1^\top(i)D_A(i)D_A^\top(i)P_1(i) \end{bmatrix} \\
&+ \tilde{\varepsilon}_B^{-1}(i) \begin{bmatrix} D_B(i)D_B^\top(i) & D_B(i)D_B^\top(i)P_1(i) \\ P_1^\top(i)D_B(i)D_B^\top(i) & P_1^\top(i)D_B(i)D_B^\top(i)P_1(i) \end{bmatrix} \\
&+ \tilde{\varepsilon}_{C_y}^{-1}(i) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_2^\top(i)K_B(i)D_{C_y}(i)D_{C_y}^\top(i)K_B^\top(i)P_2(i)W(i) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

D'un autre côté, en remplaçant les termes incertains $\tilde{E}_A(i)$, $\tilde{E}_B(i)$ et $\tilde{E}_{C_y}(i)$ par leurs expressions (5.49), le développement du troisième terme de l'inégalité (5.52) donne :

$$\begin{aligned}
&U^\top(i)V^\top(i) \begin{bmatrix} \tilde{E}_A(i) & \tilde{E}_B(i) & \tilde{E}_{C_y}(i) \end{bmatrix} \Omega(i) \begin{bmatrix} \tilde{E}_A^\top(i) \\ \tilde{E}_B^\top(i) \\ \tilde{E}_{C_y}^\top(i) \end{bmatrix} V(i)U(i) \\
&= \tilde{\varepsilon}_A(i) \begin{bmatrix} W^\top(i)E_A^\top(i)E_A(i)W(i) & W^\top(i)E_A^\top(i)E_A(i) \\ E_A^\top(i)E_A(i)W(i) & E_A^\top(i)E_A(i) \end{bmatrix} \\
&+ \tilde{\varepsilon}_B(i) \begin{bmatrix} W^\top(i)P_2(i)P_3^{-1}(i)K_C^\top(i)E_B^\top(i)E_B(i)K_C(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&+ \tilde{\varepsilon}_{C_y}(i) \begin{bmatrix} W^\top(i)E_{C_y}^\top(i)E_{C_y}(i)W(i) & W^\top(i)E_{C_y}^\top(i)E_{C_y}(i) \\ E_{C_y}^\top(i)E_{C_y}(i)W(i) & E_{C_y}^\top(i)E_{C_y}(i) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, en tenant en considération toutes ces transformations, la condition de stabilité stochastique du système augmenté devient :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_1(i) & \mathcal{M}_2(i) \\ \star & \mathcal{M}_3(i) \end{bmatrix} + \tilde{\varepsilon}_A^{-1}(i) \begin{bmatrix} D_A(i)D_A^\top(i) & D_A(i)D_A^\top(i)P_1(i) \\ P_1^\top(i)D_A(i)D_A^\top(i) & P_1^\top(i)D_A(i)D_A^\top(i)P_1(i) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& +\tilde{\varepsilon}_B^{-1}(i) \begin{bmatrix} D_B(i)D_B^\top(i) & D_B(i)D_B^\top(i)P_1(i) \\ P_1^\top(i)D_B(i)D_B^\top(i) & P_1^\top(i)D_B(i)D_B^\top(i)P_1(i) \end{bmatrix} \\
& +\tilde{\varepsilon}_{C_y}^{-1}(i) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_2^\top(i)K_B(i)D_{C_y}(i)D_{C_y}^\top(i)K_B^\top(i)P_2(i)W(i) \end{bmatrix} \\
& +\tilde{\varepsilon}_A(i) \begin{bmatrix} W^\top(i)E_A^\top(i)E_A(i)W(i) & W^\top(i)E_A^\top(i)E_A(i) \\ E_A^\top(i)E_A(i)W(i) & E_A^\top(i)E_A(i) \end{bmatrix} \\
& +\tilde{\varepsilon}_B(i) \begin{bmatrix} W^\top(i)P_2(i)P_3^{-1}(i)K_C^\top(i)E_B^\top(i)E_B(i)K_C(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& +\tilde{\varepsilon}_{C_y}(i) \begin{bmatrix} W^\top(i)E_{C_y}^\top(i)E_{C_y}(i)W(i) & W^\top(i)E_{C_y}^\top(i)E_{C_y}(i) \\ E_{C_y}^\top(i)E_{C_y}(i)W(i) & E_{C_y}^\top(i)E_{C_y}(i) \end{bmatrix} < 0
\end{aligned}$$

où $\mathcal{M}_1(i)$, $\mathcal{M}_2(i)$ et $\mathcal{M}_3(i)$ sont définies comme précédemment dans le cas nominal de la conception d'un contrôleur par retour de sortie.

Ceci peut être écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_1(i) & \mathcal{L}_2(i) \\ \star & \mathcal{L}_3(i) \end{bmatrix} < 0$$

avec :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1(i) &= \mathcal{M}_1(i) + \tilde{\varepsilon}_A^{-1}(i)D_A(i)D_A^\top(i) + \tilde{\varepsilon}_B^{-1}(i)D_B(i)D_B^\top(i) \\
&+ \tilde{\varepsilon}_B(i)W^\top(i)P_2(i)P_3^{-1}(i)K_C^\top(i)E_B^\top(i)E_B(i)K_C(i)P_3^{-1}(i)P_2^\top(i)W(i) \\
&+ \tilde{\varepsilon}_{C_y}(i)W^\top(i)E_{C_y}^\top(i)E_{C_y}(i)W(i) + \tilde{\varepsilon}_A(i)W^\top(i)E_A^\top(i)E_A(i)W(i) \\
\mathcal{L}_2(i) &= \mathcal{M}_2(i) + \tilde{\varepsilon}_A^{-1}(i)D_A(i)D_A^\top(i)P_1(i) + \tilde{\varepsilon}_B^{-1}(i)D_B(i)D_B^\top(i)P_1(i) \\
&+ \tilde{\varepsilon}_A(i)W^\top(i)E_A^\top(i)E_A(i) + \tilde{\varepsilon}_{C_y}(i)W^\top(i)E_{C_y}^\top(i)E_{C_y}(i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_3(i) &= \mathcal{M}_3(i) + \tilde{\varepsilon}_A^{-1}(i)P_1^\top(i)D_A(i)D_A^\top(i)P_1(i) + \tilde{\varepsilon}_B^{-1}(i)P_1^\top(i)D_B(i)D_B^\top(i)P_1(i) \\
&+ \tilde{\varepsilon}_{C_y}^{-1}(i)P_2^\top(i)K_B(i)D_{C_y}(i)D_{C_y}^\top(i)K_B^\top(i)P_2(i)W(i) + \tilde{\varepsilon}_A(i)E_A^\top(i)E_A(i) \\
&+ \tilde{\varepsilon}_{C_y}(i)E_{C_y}^\top(i)E_{C_y}(i)
\end{aligned}$$

De même, en définissant comme dans le chapitre 4, $P(i)$, $\mathcal{K}_B(i)$ et $\mathcal{K}_C(i)$ par (4.49) et (4.50), et en posant $\mathcal{L}_2(i) = 0$, la matrice gain $K_A(i)$ sera donnée par :

$$\begin{aligned}
K_A(i) &= [Y^{-1}(i) - X(i)]^{-1}[A(i) + Y^\top(i)A^\top(i)X(i) + Y^\top(i)C_y^\top(i)\mathcal{K}_B^\top(i) \\
&+ \mathcal{K}_C^\top(i)B^\top(i)X(i) + \tilde{\varepsilon}_A^{-1}(i)D_A(i)D_A^\top(i)X(i) + \tilde{\varepsilon}_B^{-1}(i)D_B(i)D_B^\top(i)X(i) \\
&+ \tilde{\varepsilon}_A(i)Y^\top(i)E_A^\top(i)E_A(i) + \tilde{\varepsilon}_{C_y}(i)Y^\top(i)E_{C_y}^\top(i)E_{C_y}(i) \\
&+ \sum_{j=1}^N \pi_{ij}Y^\top(i)R(ij)^\top Y^{-1}(j)E(j)R(ij)]^\top Y^{-1}(i)
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Dans ce cas, on aura alors :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_1(i) & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_3(i) \end{bmatrix} < 0$$

avec :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1(i) &= \mathcal{M}_1(i) + \tilde{\varepsilon}_A^{-1}(i)D_A(i)D_A^\top(i) + \tilde{\varepsilon}_B^{-1}(i)D_B(i)D_B^\top(i) \\
&+ \tilde{\varepsilon}_B(i)\mathcal{K}_C^\top(i)E_B^\top(i)E_B(i)\mathcal{K}_C(i) + \tilde{\varepsilon}_{C_y}(i)Y^\top(i)E_{C_y}^\top(i)E_{C_y}(i)Y(i) \\
&+ \tilde{\varepsilon}_A(i)Y^\top(i)E_A^\top(i)E_A(i)Y(i), \\
\mathcal{L}_3(i) &= \mathcal{M}_3(i) + \tilde{\varepsilon}_A^{-1}(i)X^\top(i)D_A(i)D_A^\top(i)X(i) + \tilde{\varepsilon}_B^{-1}(i)X^\top(i)D_B(i)D_B^\top(i)X(i) \\
&+ \tilde{\varepsilon}_{C_y}^{-1}(i)\mathcal{K}_B(i)D_{C_y}(i)D_{C_y}^\top(i)\mathcal{K}_B^\top(i) + \tilde{\varepsilon}_A(i)E_A^\top(i)E_A(i) \\
&+ \tilde{\varepsilon}_{C_y}(i)E_{C_y}^\top(i)E_{C_y}(i).
\end{aligned}$$

En appliquant le complément de Schur à l'inégalité précédente et en procédant de

la même façon que précédemment, on aboutit à:

$$\begin{bmatrix} J_{\mathcal{L}_1}(i) & Y^\top(i)E_A^\top(i) & \mathcal{K}_C^\top(i)E_B^\top(i) & Y^\top(i)E_{C_y}^\top(i) & \mathcal{S}_i(Y) \\ E_A(i)Y(i) & -\tilde{\varepsilon}_A^{-1}(i)\mathbb{I} & 0 & 0 & 0 \\ E_B(i)\mathcal{K}_C(i) & 0 & -\tilde{\varepsilon}_B^{-1}(i)\mathbb{I} & 0 & 0 \\ E_{C_y}(i)Y(i) & 0 & 0 & -\tilde{\varepsilon}_{C_y}^{-1}(i)\mathbb{I} & 0 \\ \mathcal{S}_i^\top(Y) & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{V}_i(V_Y) \end{bmatrix} \leq 0$$

$$\begin{bmatrix} J_{\mathcal{L}_3}(i) & X^\top(i)D_A(i) & X^\top(i)D_B(i) & \mathcal{K}_B(i)D_{C_y}(i) \\ D_A^\top(i)X(i) & -\tilde{\varepsilon}_A(i)\mathbb{I} & 0 & 0 \\ D_B^\top(i)X(i) & 0 & -\tilde{\varepsilon}_B(i)\mathbb{I} & 0 \\ D_{C_y}^\top(i)\mathcal{K}_B^\top(i) & 0 & 0 & -\tilde{\varepsilon}_{C_y}(i)\mathbb{I} \end{bmatrix} \leq 0$$

avec :

$$J_{\mathcal{L}_1}(i) = \mathcal{M}_{11}(i) + \tilde{\varepsilon}_A^{-1}(i)D_A(i)D_A^\top(i) + \tilde{\varepsilon}_B^{-1}(i)D_B(i)D_B^\top(i), \quad (5.55)$$

$$J_{\mathcal{L}_3}(i) = \mathcal{M}_{31}(i) + \tilde{\varepsilon}_A(i)E_A^\top(i)E_A(i) + \tilde{\varepsilon}_{C_y}(i)E_{C_y}^\top(i)E_{C_y}(i) \quad (5.56)$$

avec $\mathcal{M}_{11}(i)$, $\mathcal{M}_{31}(i)$, $\mathcal{S}_i(Y)$ et $\mathcal{V}_i(V_Y)$ sont données par (4.65), (4.60), (4.55) et (4.56).

En utilisant la technique de complémentarité sur le cône moyennant le lemme 3.2.3, pour linéariser les différentes contraintes bilinéaires et qui sont dans ce cas, celles obtenues dans le cas nominal, on arrive au résultat suivant :

Théorème 5.6.1 *Pour tout ensemble de scalaires positifs, $\varepsilon_A = (\varepsilon_A(1), \dots, \varepsilon_A(N))$, $\varepsilon_B = (\varepsilon_B(1), \dots, \varepsilon_B(N))$, et $\varepsilon_{C_y} = (\varepsilon_{C_y}(1), \dots, \varepsilon_{C_y}(N))$, s'il existe un ensemble de matrices non singulières $X = (X(1), \dots, X(N))$, un ensemble de matrices symétriques définies-positives $Y = (Y(1), \dots, Y(N))$, $Z_Y = (Z_Y(1), \dots, Z_Y(N))$, $V_Y = (V_Y(1), \dots, V_Y(N))$, un ensemble de matrices $\mathcal{K}_B = (\mathcal{K}_B(1), \dots, \mathcal{K}_B(N))$, $\mathcal{K}_C = (\mathcal{K}_C(1), \dots, \mathcal{K}_C(N))$, un ensemble de scalaires positifs $\alpha = (\alpha(1), \dots, \alpha(N))$,*

$\varepsilon = (\varepsilon(1), \dots, \varepsilon(N))$, qui vérifient le problème suivant pour tout $i \in \mathcal{S}$ et toute incertitude admissible :

$$\min \sum_{i=1}^N \text{Tr}(Z_Y(i)Y(i) + (E^T(i)Z_Y(i) + \alpha(i)\mathbb{I})V_Y(i))$$

sous les LMIs (5.55), (5.56) et :

$$\begin{bmatrix} Z_Y(i) & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & Y(i) \end{bmatrix} \geq 0, \\ \begin{bmatrix} E^T(i)Z_Y(i) + \alpha(i)\mathbb{I} & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & V_Y(i) \end{bmatrix} \geq 0,$$

sous les contraintes :

$$\begin{bmatrix} E^T(i) & 0 \\ 0 & E(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(i) & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & Y(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^T(i) & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & Y^T(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(i) & 0 \\ 0 & E^T(i) \end{bmatrix} \geq 0, \quad (5.57)$$

alors le système en boucle fermée (5.24) sera stochastiquement admissible, de façon robuste, sous le contrôleur (4.37), dont les matrices gains sont données par (5.54) et :

$$\begin{aligned} K_B(i) &= [Y^{-1}(i) - X(i)]^{-1} \mathcal{K}_B(i) \\ K_C(i) &= \mathcal{K}_C(i)Y^{-1}(i) \end{aligned}$$

Exemple 5.6.1 Prenons les valeurs numériques de l'exemple (5.5.1), avec en plus : $\varepsilon_A(1) = \varepsilon_B(3) = 0.1$, $\varepsilon_A(2) = 0.11$, $\varepsilon_A(3) = \varepsilon_B(1) = \varepsilon_{C_y}(1) = \varepsilon_{C_y}(2) = 0.2$, $\varepsilon_B(2) = \varepsilon_{C_y}(3) = 0.3$. Dans ce cas la résolution des conditions du Théorème

5.6.1 fournit les résultats suivants:

$$\begin{aligned}
 X(1) &= \begin{bmatrix} 1.3316 & 0.1446 & 0.0000 \\ 0.1446 & 1.1006 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 5.089 \end{bmatrix}, X(2) = \begin{bmatrix} 1.32948 & 0.14205 & 0.0000 \\ 0.1420 & 1.0555 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.4275 \end{bmatrix}, \\
 X(3) &= \begin{bmatrix} 1.2837 & 0.1371 & 0.0000 \\ 0.1371 & 1.1035 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 2.0718 \end{bmatrix}, Y(1) = \begin{bmatrix} 3.6414 & -0.3080 & 0.0000 \\ -0.3080 & 4.3866 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 4.6568 \end{bmatrix}, \\
 Y(2) &= \begin{bmatrix} 4.1816 & -0.2912 & 0.0000 \\ -0.2912 & 4.6493 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 3.5105 \end{bmatrix}, Y(3) = \begin{bmatrix} 3.4368 & -0.3198 & 0 \\ -0.3198 & 4.0872 & 0 \\ 0 & 0 & 4.3325 \end{bmatrix}, \\
 V_P(1) &= \begin{bmatrix} 0.8215 & -0.0161 & 0.0000 \\ -0.0161 & 0.8542 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0815 \end{bmatrix}, V_P(2) = \begin{bmatrix} 0.8583 & -0.0113 & 0.0000 \\ -0.0113 & 0.8765 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0810 \end{bmatrix}, \\
 V_P(3) &= \begin{bmatrix} 0.8215 & -0.0161 & 0.0000 \\ -0.0161 & 0.8966 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.8542 & 1.0815 \end{bmatrix}, \varepsilon(1) = 0.9604, \varepsilon(2) = 0.9644, \varepsilon(3) = 0.9509, \\
 \alpha(1) &= 0.9192, \alpha(2) = 0.9251, \alpha(3) = 0.9247.
 \end{aligned}$$

Les gains des lois de commandes (4.37) sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 K_A(1) &= \begin{bmatrix} 11.4171 & 1.8207 & 5.2951 \\ 0.9699 & 6.8974 & -5.7040 \\ 0.7667 & -4.3733 & -0.2858 \end{bmatrix}, K_A(2) = \begin{bmatrix} 8.9587 & 1.7361 & -2.8198 \\ 0.2404 & 4.5823 & 1.4904 \\ 2.3252 & -0.4983 & 1.29863 \end{bmatrix}, \\
 K_A(3) &= \begin{bmatrix} 9.1987 & 1.3535 & 3.2294 \\ -1.8292 & 8.5257 & -1.5686 \\ 1.3687 & 1.6119 & 0.9834 \end{bmatrix}, K_B(1) = \begin{bmatrix} 10.5781 & -5.2891 & -16.8489 \\ 5.7377 & -2.8689 & -2.9699 \\ -0.4085 & 0.2043 & -0.7968 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_B(2) &= \begin{bmatrix} -0.0764 & -6.8364 & -0.1649 \\ -0.4919 & -1.2178 & -0.9056 \\ -0.4352 & -1.5537 & 0.4969 \end{bmatrix}, K_B(3) = \begin{bmatrix} -5.3042 & -0.1130 & 0.0000 \\ -0.5947 & -1.9725 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.2886 & -0.0755 \end{bmatrix}, \\
K_C(1) &= \begin{bmatrix} -0.0199 & 0.3129 & -0.3684 \\ -0.5316 & 0.6036 & -0.0000 \\ -0.2016 & -0.5752 & 0.4761 \end{bmatrix}, K_C(2) = \begin{bmatrix} -0.1874 & -0.2057 & -0.6339 \\ 0.5359 & 0.9565 & 0.0000 \\ -0.9406 & -0.1942 & 1.7054 \end{bmatrix}, \\
K_C(3) &= \begin{bmatrix} 0.4208 & -0.3758 & -1.6569 \\ 0.9062 & 1.8319 & 0.0000 \\ -1.9121 & 0.1192 & 3.0234 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Les figures 5.8 et 5.9 représentent les trajectoires, du mode, des variables d'état et de la commande du système en boucle fermée. Il apparaît d'après ces figures, que celles-ci convergent vers zéro quand t tend vers l'infini. Ainsi d'après le Théorème 5.6.1, nous pouvons conclure que la synthèse des lois de commande par retour de sortie, proposée dans ce chapitre, garantissent que le SSSMD en boucle fermée soit stochastiquement admissible de façon robuste.

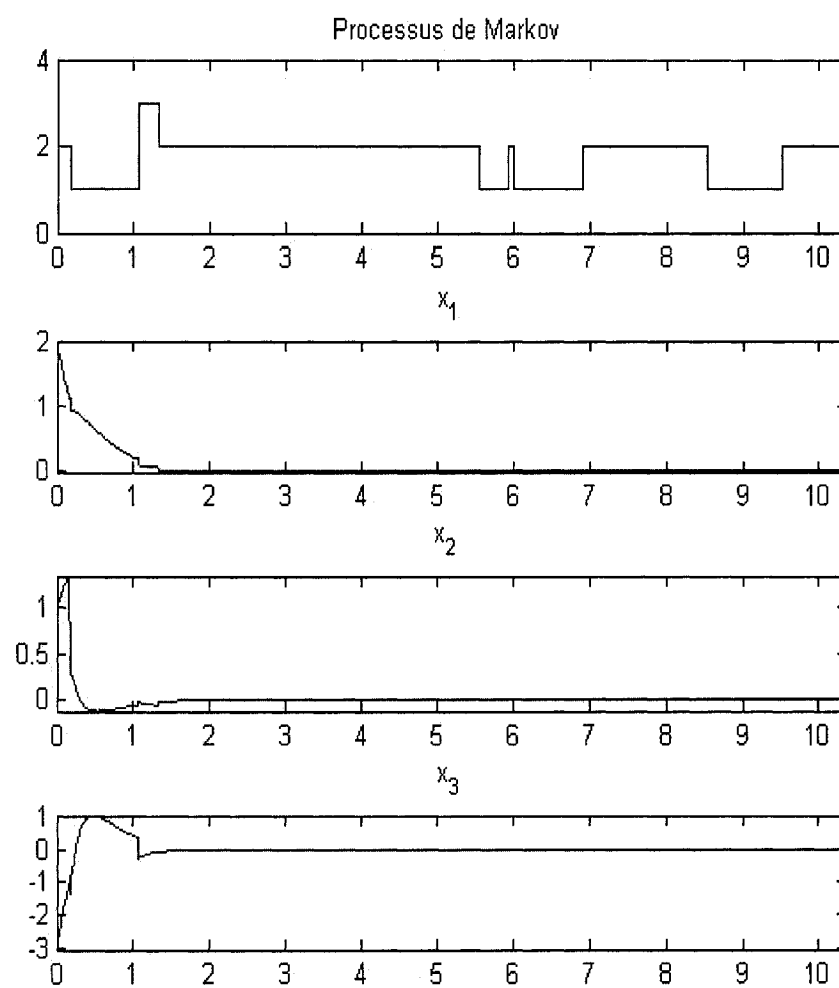


Figure 5.8 Stabilisation par retour de sortie d'un SSSMD incertain: évolution du mode, des variables d'état

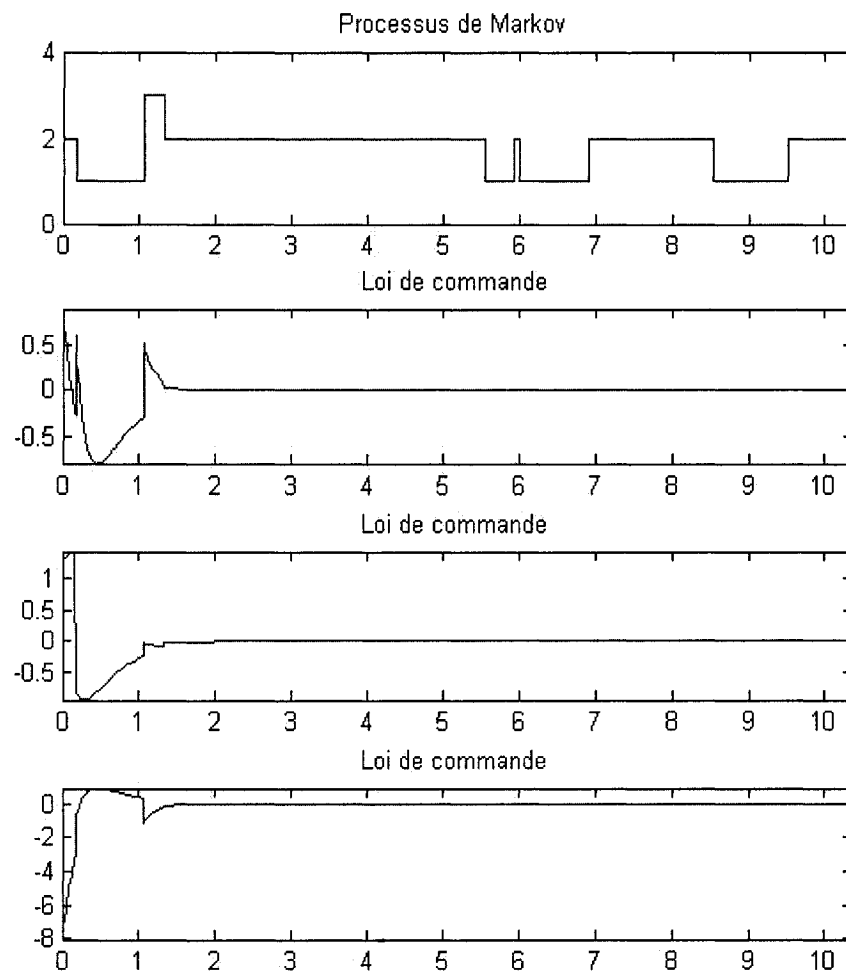


Figure 5.9 Évolution de la loi de commande par retour de sortie d'un SSSMD incertain

5.7 Commande stochastique robuste $\mathcal{H}_\infty$

Dans cette partie, nous allons concevoir un contrôleur robuste qui nous permettra de minimiser l'effet des signaux exogènes $w(t)$ vers les sorties à commander, tout en assurant l'admissibilité stochastique du système incertain autonome, malgré la présence des incertitudes admissibles.

Pour la réalisation de cet objectif, nous allons supposer que:

C4 Le système incertain (2.1) est stochastiquement admissible avec un niveau de rejet des perturbations γ .

C5 Le mode $r(t)$ est mesurable.

C6 Le vecteur d'état $x(t)$ du système est parfaitement mesurable.

C7 Les perturbations externes $w(t)$ sont à énergie finie, c'est-à-dire qu'elles vérifient la relation (2.2).

5.7.1 Stabilité robuste d'un système déterministe par morceaux avec perturbations externes

Théorème 5.7.1 *Soit γ une constante positive donnée. S'il existe un ensemble de matrices non singulières $P = (P(1), \dots, P(N))$ tel que la LMI suivant est vérifiée pour tout $i \in \mathcal{S}$ et toutes incertitudes admissibles :*

$$\begin{bmatrix} J_o(i) & C_z^T(i, t)B_z(i) + P^\top(i)B_w(i) \\ B_z^\top(i)C_z(i, t) + B_w^\top(i)P(i) & B_z^\top(i)B_z(i) - \gamma^2\mathbb{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.58)$$

où :

$$\begin{aligned} J_o(i) &= A^\top(i, t)P(i) + P^\top(i)A(i, t) + C_z^\top(i, t)C_z(i, t) \\ &+ \sum_{j=1}^N \pi_{ij} R^\top(ij) E^\top(i) P(j) R(ij) \end{aligned} \quad (5.59)$$

alors le système (2.1) avec $u(t) \equiv 0$, pour tout $t \geq 0$, est stochastiquement admissible et satisfait ce qui suit :

$$\|z\|_2 \leq \left[\gamma^2 \|w_2\|^2 + x_0^\top E^\top P(r_0) x_0 \right]^{1/2} \quad (5.60)$$

La démonstration de ce théorème est similaire à celle du Théorème 3.3.1.

D'un autre côté, remarquons que :

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} J_1(i) & C_z^\top(i, t)B_z(i) + P^\top(i)B_w(i) \\ B_z^\top(i)C_z(i, t) + B_w^\top(i)P(i) & B_z^\top(i)B_z(i) - \gamma^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} J_0(i) & P^\top(i)B_w(i) \\ B_w^\top(i)P(i) & -\gamma^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_z^\top(i, t) \\ B_z^\top(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_z(i, t), B_z(i) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En tenant compte de ceci, et en utilisant le complément de Schur, on obtient :

$$\begin{bmatrix} J_1(i) & P^\top(i)B_w(i) & C_z^\top(i, t) \\ B_w^\top(i)P(i) & -\gamma^2 \mathbb{I} & B_z^\top(i) \\ C_z(i, t) & B_z(i) & -\mathbb{I} \end{bmatrix} < 0$$

où :

$$J_1(i) = A^\top(i, t)P(i) + P^\top(i)A(i, t) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} R^\top(ij) E^\top(j) P(j) R(ij) \quad (5.61)$$

Remplaçons les matrices $A(i, t)$ et $C_z(i, t)$ par leurs expressions (2.4), on obtient alors :

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} J_1(i) & P^\top(i)B_w(i) & C_z^T(i, t) \\ B_w^\top(i)P(i) & -\gamma^2\mathbb{I} & B_z^\top(i) \\ C_z(i, t) & B_z(i) & -\mathbb{I} \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} E_A^T(i)F_A^T(i, t)D_A^T(i)P(i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P^T(i)D_A(i)F_A(i, t)E_A(i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & E_{C_z}^T(i)F_{C_z}^T(i, t)D_{C_z}^T(i) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ D_{C_z}(i)F_{C_z}(i, t)E_{C_z}(i) & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0
 \end{aligned} \tag{5.62}$$

Il est à noter que :

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} E_A^T(i)F_A^T(i, t)D_A^T(i)P(i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_A^T(i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_A^T(i, t) \begin{bmatrix} D_A^T(i)P(i) & 0 & 0 \end{bmatrix}. \\
 & \begin{bmatrix} P^T(i)D_A(i)F_A(i, t)E_A(i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^T(i)D_A(i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_A(i, t) \begin{bmatrix} E_A(i) & 0 & 0 \end{bmatrix}. \\
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & E_{C_z}^T(i)F_{C_z}^T(i, t)D_{C_z}^T(i) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{C_z}^T(i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_{C_z}^T(i, t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & D_{C_z}^T(i) \end{bmatrix}. \\
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ D_{C_z}(i)F_{C_z}(i, t)E_{C_z}(i) & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_{C_z}(i) \end{bmatrix} F_{C_z}(i, t) \begin{bmatrix} E_{C_z}(i) & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

En utilisant le lemme (3.2.1) sur les majorations des incertitudes, on aura :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} P^\top(i)D_A(i)F_A(i,t)E_A(i) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P^\top(i)D_A(i)F_A(i,t)E_A(i) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \leq \begin{bmatrix} \varepsilon_A^{-1}(i)P^\top(i)D_A(i)D_A^\top(i)P(i) + \varepsilon_A(i)E_A^\top(i)E_A(i) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & E_{C_z}^\top(i)F_{C_z}^\top(i,t)D_{C_z}^\top(i) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ D_{C_z}(i)F_{C_z}(i,t)E_{C_z}(i) & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \leq \begin{bmatrix} \varepsilon_{C_z}^{-1}(i)E_{C_z}^\top(i)E_{C_z}(i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{C_z}(i)D_{C_z}(i)D_{C_z}^\top(i) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Au terme de cette série de manipulations algébriques, (5.62) devient :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} J_h(i) & P^\top(i)B_w(i) & C_z^\top(i) \\ B_w^\top(i)P(i) & -\gamma^2\mathbb{I} & B_z^\top(i) \\ C_z(i) & B_z(i) & -\mathbb{I} \end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} \varepsilon_A^{-1}(i)P^\top(i)D_A(i)D_A^\top(i)P(i) + \varepsilon_A(i)E_A^\top(i)E_A(i) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \varepsilon_{C_z}^{-1}(i)E_{C_z}^\top(i)E_{C_z}(i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{C_z}(i)D_{C_z}(i)D_{C_z}^\top(i) \end{bmatrix} < 0
\end{aligned}$$

avec $J_h(i) = A^\top(i)P(i) + P^\top(i)A(i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij}R^\top(ij)E^\top(i)P(j)R(ij)$

En définissant $\mathcal{J}_c(i)$, $\mathcal{M}_c(i)$ et $\mathcal{L}_c(i)$ comme suit :

$$\mathcal{J}_c(i) = J_h(i) + \varepsilon_A(i)E_A^\top(i)E_A(i), \quad (5.63)$$

$$\mathcal{M}_c(i) = \text{diag}[\varepsilon_A(i)\mathbb{I}, \varepsilon_{C_z}(i)\mathbb{I}], \quad (5.64)$$

$$\mathcal{L}_c(i) = [P^\top(i)D_A(i), E_{C_z}^\top(i)] \quad (5.65)$$

et en utilisant le complément de Schur à l'inégalité précédente, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{J}_c(i) & E^\top(i)P(i)B_w(i) & C_z^\top(i) & \mathcal{L}_c(i) \\ B_w^\top(i)P(i)E(i) & -\gamma^2\mathbb{I} & B_z^\top(i) & 0 \\ C_z(i) & B_z(i) & \mathcal{B}(i) & 0 \\ \mathcal{L}_c^\top(i) & 0 & 0 & -\mathcal{M}_c(i) \end{bmatrix} < 0 \quad (5.66)$$

avec $\mathcal{B}(i) = -\mathbb{I} + \varepsilon_{C_z}(i)D_{C_z}(i)D_{C_z}^\top(i)$.

Le Théorème suivant résume ce résultat :

Théorème 5.7.2 *Soit $\gamma > 0$ une constante positive donnée. S'il existe un ensemble de matrices non singulières $P = (P(1), \dots, P(N))$, un ensemble de scalaires positifs $\varepsilon_A = (\varepsilon_A(1), \dots, \varepsilon_A(N))$ et $\varepsilon_{C_z} = (\varepsilon_{C_z}(1), \dots, \varepsilon_{C_z}(N))$ tels que la LMI (5.66) est vérifiée pour tout $i \in \mathcal{S}$ et pour toutes incertitudes admissibles, avec $\mathcal{J}_c(i)$, $\mathcal{M}_c(i)$ et $\mathcal{L}_c(i)$ sont données par (5.63), (5.64) et (5.65), alors le système (2.1) avec $u(t) \equiv 0$, est stochastiquement admissible de façon robuste, en plus il vérifie la condition de rejet des perturbations avec un niveau γ .*

Exemple 5.7.1 *Pour illustrer ce résultat, nous allons considérer un SSSDM de dimension trois, composé de trois modes, avec les matrices Λ , $E(1)$, $E(2)$, $E(3)$, $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $B_w(1)$, $B_w(2)$ et $B_w(3)$ de l'exemple (2.3.1), et $E_A(1)$, $E_A(2)$, $E_A(3)$, $D_A(1)$, $D_A(2)$ et $D_A(3)$ de l'exemple (5.3.1), le reste des données numériques*

est comme suit :

$$\begin{aligned}
C_z(1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, C_z(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_z(3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \\
E_{C_z}(1) &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, E_{C_z}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, E_{C_z}(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \\
B_z(1) &= 0.1, B_z(2) = 0.15, B_z(3) = 0.2, D_{C_z}(1) = 0.1, D_{C_z}(2) = 0.2, \\
D_{C_z}(3) &= 0.4, \varepsilon_A(1) = \varepsilon_{E_{C_z}}(1) = \varepsilon_{E_{C_z}}(3)0.1, \varepsilon_A(2) = \varepsilon_{E_{C_z}}(2)0.2, \varepsilon_A(3) = 0.3, \\
R(1) &= R(2) = R(3) = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.3 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

Les LMIs à résoudre sont celles du Théorème 5.7.2, elles sont réalisables et aboutissent aux résultats suivants :

$$\begin{aligned}
P(1) &= \begin{bmatrix} 1.1158 & 0.3076 & 0.0000 \\ 0.3076 & 0.9175 & 0.0000 \\ 1.5124 & 0.5480 & 1.03461 \end{bmatrix}, P(2) = \begin{bmatrix} 1.0879 & 0.6243 & 0.0000 \\ 0.6243 & 1.1428 & 0.0000 \\ 1.0824 & 0.6794 & 0.8628 \end{bmatrix}, \\
P(3) &= \begin{bmatrix} 0.8073 & 0.2836 & 0.0000 \\ 0.2836 & 0.6873 & 0.0000 \\ 1.9295 & 0.8163 & 0.9323 \end{bmatrix}, \gamma = 1.
\end{aligned}$$

Un exemple de simulation de l'évolution des variables d'état et de la fonction de Lyapunov du SSSMD considéré, est illustrée par la figure 5.10 qui montre que celles-ci convergent vers zéro quant t tend vers l'infini. Ainsi, d'après le Théorème 5.7.2, nous pouvons conclure que le système est stochastiquement admissible de façon robuste avec une norme $\mathcal{H}_\infty$ inférieure à $\gamma = 1$.

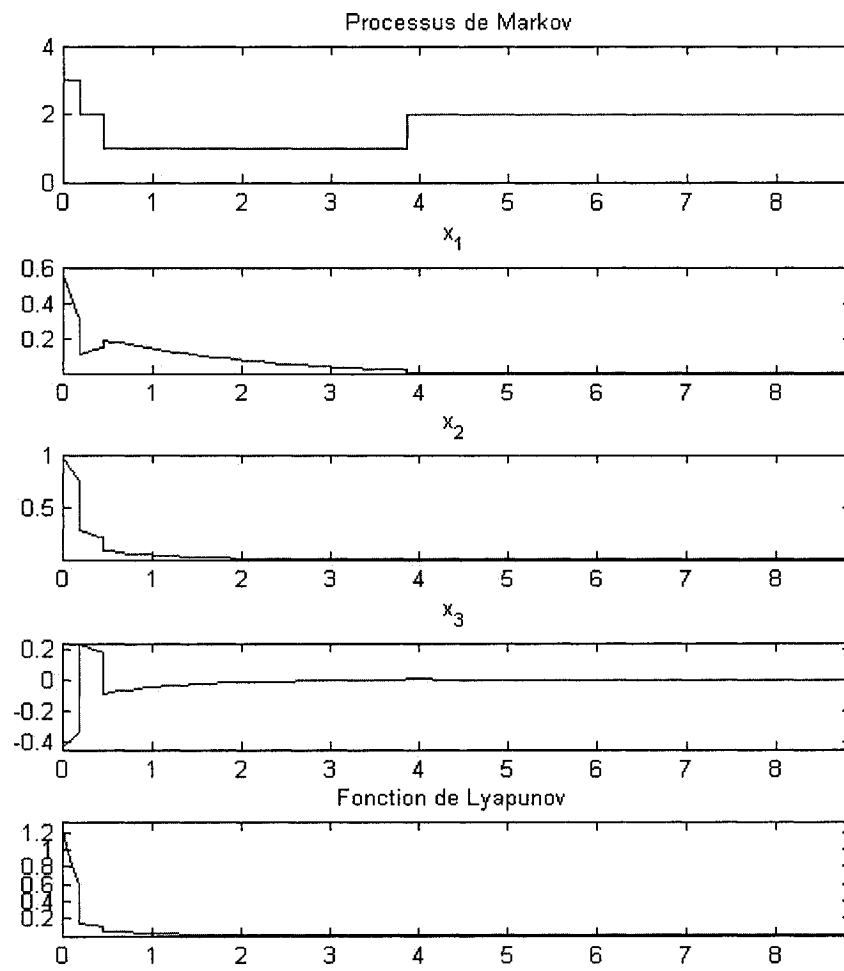


Figure 5.10 Comportement d'un système singulier Markovien incertain, perturbé et stable

5.7.2 Stabilisation robuste par retour d'état

D'après le Théorème 3.3.1, on peut montrer que le système en boucle fermée étudié est stochastiquement stable en moyenne quadratique de façon robuste si l'inégalité suivante est vérifiée (voire section 3.3.2, inégalité (3.40)):

$$\begin{bmatrix} \tilde{J}_o(i) & P^\top(i)B_w(i) & \tilde{C}_z^\top(i, t) \\ B_w^\top(i)P(i) & -\gamma^2\mathbb{I} & B_z^\top(i) \\ \tilde{C}_z(i, t) & B_z(i) & -\mathbb{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (5.67)$$

avec :

$$\begin{aligned} \tilde{J}_o(i) &= \tilde{A}^\top(i, t)P(i) + P^\top(i)\tilde{A}(i, t) + V_p(i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{4} \pi_{ij}^2 \epsilon_{ij}^{-1} \mathbb{I} \\ \tilde{A}(i, t) &= A(i, t) + B(i, t)K(i), \\ \tilde{C}_z(i, t) &= C_z(i, t) + D_z(i, t)K(i). \end{aligned}$$

En remplaçant les matrices $\tilde{A}(i, t)$ et $\tilde{C}_z(i, t)$ par leurs expressions citées ci-dessus, l'inégalité (5.67) devient:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} J_1(i) & P^\top(i)B_w(i) & C_z^\top(i) + K^\top(i)D_z^\top(i) \\ B_w^\top(i)P(i) & -\gamma^2\mathbb{I} & B_z^\top(i) \\ \tilde{C}_z(i) + D_z(i)K(i) & B_z(i) & -\mathbb{I} \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} E_A^\top(i)F_A^\top(i, t)D_A^\top(i)P(i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P^\top(i)D_A(i)F_A(i, t)E_A(i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K^\top(i)E_B^\top(i)F_B^\top(i, t) \\ \times D_B^\top(i)P(i) \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} P^\top(i)D_B(i)F_B(i, t) \\ \times E_B(i)K(i) \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} 0 & 0 & E_{C_z}^T(i)F_{C_z}^T(i,t)D_{C_z}^T(i) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ D_{C_z}(i)F_{C_z}(i,t)E_{C_z}(i) & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \begin{bmatrix} K^T(i)E_{D_z}^T(i) \\ \times F_{D_z}^T(i,t)D_{D_z}^T(i) \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \begin{bmatrix} D_{D_z}(i)F_{D_z}(i,t) \\ \times E_{D_z}(i)K(i) \end{bmatrix} & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0
\end{aligned}$$

avec $J_1(i)$ est donnée par (5.61).

Il est à noter que :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} E_A^T(i)F_A^T(i,t)D_A^T(i)P(i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_A^T(i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_A^T(i,t) \begin{bmatrix} D_A^T(i)P(i) & 0 & 0 \end{bmatrix}. \\
& \begin{bmatrix} P^T(i)D_A(i)F_A(i,t)E_A(i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^T(i)D_A(i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_A(i,t) \begin{bmatrix} E_A(i) & 0 & 0 \end{bmatrix}. \\
& \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K^T(i)E_B^T(i)F_B^T(i,t) \\ \times D_B^T(i)P(i) \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K^T(i) \\ \times E_B^T(i) \end{bmatrix} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_B^T(i,t) \begin{bmatrix} D_B^T(i)P(i) & 0 & 0 \end{bmatrix}. \\
& \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} P^T(i)D_B(i)F_B(i,t) \\ \times E_B(i)K(i) \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} P^T(i) \\ \times D_B(i) \end{bmatrix} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_B(i,t) \begin{bmatrix} E_B(i)K(i) & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & \begin{bmatrix} K^T(i)E_{D_z}^T(i) \\ \times F_{D_z}^T(i,t)D_{D_z}^T(i) \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^T(i)E_{D_z}^T(i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_{D_z}^T(i,t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & D_{D_z}^T(i) \end{bmatrix}. \\
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \begin{bmatrix} D_{D_z}(i)F_{D_z}(i,t) \\ \times E_{D_z}(i)K(i) \end{bmatrix} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_{D_z}(i) \end{bmatrix} F_{D_z}(i,t) \begin{bmatrix} E_{D_z}(i)K(i) & 0 & 0 \end{bmatrix}. \\
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & E_{C_z}^T(i)F_{C_z}^T(i,t)D_{C_z}^T(i) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{C_z}^T(i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_{C_z}^T(i,t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & D_{C_z}^T(i) \end{bmatrix}. \\
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ D_{C_z}(i)F_{C_z}(i,t)E_{C_z}(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{C_z}(i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_{C_z}(i,t) \begin{bmatrix} E_{C_z}(i) & 0 & 0 \end{bmatrix}. \\
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ D_{C_z}(i)F_{C_z}(i,t)E_{C_z}(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{C_z}(i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_{C_z}(i,t) \begin{bmatrix} E_{C_z}(i) & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

et en appliquant le lemme (3.2.1), on aura :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} P^\top(i)D_A(i)F_A(i,t)E_A(i) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_A^\top(i)F_A^\top(i,t)D_A^\top(i)P(i) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \leq \begin{bmatrix} \varepsilon_A(i)P^\top(i)D_A(i)D_A^\top(i)P(i) + \varepsilon_A^{-1}(i)E_A^\top(i)E_A(i) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} P^\top(i)D_B(i)F_B(i,t)E_B(i)K(i) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K^\top(i)E_B^\top(i)F_B^\top(i,t)D_B^\top(i)P(i) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \leq \begin{bmatrix} \varepsilon_B(i)P^\top(i)D_B(i)D_B^\top(i)P(i) + \varepsilon_B^{-1}(i)K^\top(i)E_B^\top(i)E_B(i)K(i) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & K^\top(i)E_{D_z}^\top(i)F_{D_z}^\top(i,t)D_{D_z}^\top(i) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ D_{D_z}(i)F_{D_z}(i,t)E_{D_z}(i)K(i) & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \leq \begin{bmatrix} \varepsilon_{D_z}^{-1}(i)K^\top(i)E_{D_z}^\top(i)E_{D_z}(i)K(i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{D_z}(i)D_{D_z}(i)D_{D_z}^\top(i) \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & E_{C_z}^\top(i)F_{C_z}^\top(i,t)D_{C_z}^\top(i) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ D_{C_z}(i)F_{C_z}(i,t)E_{C_z}(i) & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \leq \begin{bmatrix} \varepsilon_{C_z}^{-1}(i)E_{C_z}^\top(i)E_{C_z}(i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{C_z}(i)D_{C_z}(i)D_{C_z}^\top(i) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

En utilisant ceci on obtient :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} J_1(i) & P^\top(i)B_w(i) & C_z^\top(i) + K^\top(i)D_z^\top(i) \\ B_w^\top(i)P(i) & -\gamma^2\mathbb{I} & B_z^\top(i) \\ \widetilde{C}_z(i) + D_z(i)K(i) & B_z(i) & -\mathbb{I} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \varepsilon_A^{-1}(i)P^\top(i)D_A(i)D_A^\top(i)P(i) + \varepsilon_A(i)E_A^\top(i)E_A(i) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \varepsilon_B(i)P^\top(i)D_B(i)D_B^\top(i)P(i) + \varepsilon_B^{-1}(i)K^\top(i)E_B^\top(i)E_B(i)K(i) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} \varepsilon_{D_z}^{-1}(i)K^\top(i)E_{D_z}^\top(i)E_{D_z}(i)K(i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{D_z}(i)D_{D_z}(i)D_{D_z}^\top(i) \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \varepsilon_{C_z}^{-1}(i)E_{C_z}^\top(i)E_{C_z}(i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{C_z}(i)D_{C_z}(i)D_{C_z}^\top(i) \end{bmatrix} < 0
\end{aligned}$$

En définissant $\mathcal{J}(i)$, $\mathcal{M}(i)$ et $\mathcal{L}(i)$ comme suit :

$$\mathcal{J}(i) = J_1(i) + \varepsilon_A^{-1}(i)E_A^\top(i)E_A(i) + \varepsilon_B^{-1}(i)K^\top(i)E_B^\top(i)E_B(i)K(i), \quad (5.68)$$

$$\mathcal{M}(i) = \text{diag}[\varepsilon_A^{-1}(i)\mathbb{I}, \varepsilon_B^{-1}(i)\mathbb{I}, \varepsilon_{C_z}(i)\mathbb{I}, \varepsilon_{D_z}(i)\mathbb{I}], \quad (5.69)$$

$$\mathcal{L}(i) = [P^\top(i)D_A(i), E_{C_z}^\top(i)], \quad (5.70)$$

$$\mathcal{Q}(i) = \mathbb{I} - \varepsilon_{C_z}(i)D_{C_z}(i)D_{C_z}^\top(i) - \varepsilon_{D_z}(i)D_{D_z}(i)D_{D_z}^\top(i) \quad (5.71)$$

et en utilisant le complément de Schur, on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{J}(i) & P^\top(i)B_w(i) & \begin{bmatrix} C_z^\top(i) \\ +K^\top(i)D_z^\top(i) \end{bmatrix} & \mathcal{L}(i) \\ B_w^\top(i)P(i) & -\gamma^2\mathbb{I} & B_z^\top(i) & 0 \\ \begin{bmatrix} C_z(i) \\ +D_z(i)K(i) \end{bmatrix} & B_z(i) & -\mathcal{Q}(i) & 0 \\ \mathcal{L}^\top(i) & 0 & 0 & -\mathcal{M}(i) \end{bmatrix} < 0 \quad (5.72)$$

l'inégalité précédente est non linéaire en les paramètres $P(i)$ et $K(i)$, pour la transformer en LMIs, tout d'abord, utilisons le fait que :

$$E^\top(i)P(i) = P^\top(i)E(i), \quad (5.73)$$

ensuite posons $X(i) = P^{-1}(i)$, et multiplions l'inégalité précédente à gauche et à

droite par $\text{diag}(X^\top(i), \mathbb{I}, \mathbb{I}, \mathbb{I})$ et $\text{diag}(X(i), \mathbb{I}, \mathbb{I}, \mathbb{I})$ ceci donne :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{J}_X(i) & B_w(i) & \begin{bmatrix} X^\top(i)C_z^\top(i) \\ +X^\top(i)K^\top(i)D_z^\top(i) \end{bmatrix} & X(i)\mathcal{L}(i) \\ B_w^\top(i) & -\gamma^2\mathbb{I} & B_z^\top(i) & 0 \\ \begin{bmatrix} C_z(i)X(i) \\ +D_z(i)K(i)X(i) \end{bmatrix} & B_z(i) & -\mathcal{Q}(i) & 0 \\ \mathcal{L}^\top(i)X(i) & 0 & 0 & -\mathcal{M}(i) \end{bmatrix} < 0$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_X(i) &= X^\top(i)A^\top(i) + A(i)X(i) + \varepsilon_A^{-1}(i)X^\top(i)E_A^\top(i)E_A(i)X(i) \\ &+ \varepsilon_B^{-1}(i)X^\top(i)K^\top(i)E_B^\top(i)E_B(i)K(i)X(i) + X^\top(i)K^\top(i)B^\top(i) \\ &+ B(i)K(i)X(i) + X^\top(i)V_P(i)X(i) \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{4}\pi_{ij}X^\top(i)\varepsilon^{-1}(ij)X(i)\pi_{ij} \end{aligned}$$

Il est à noter que :

$$\begin{aligned} X(i)\mathcal{L}(i) &= [D_A(i), D_B(i), X^\top(i)K^\top(i)E_{C_z}^\top(i), X^\top(i)K^\top(i)E_{D_z}^\top(i)], \\ \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{4}\pi_{ij}X^\top(i)\varepsilon^{-1}(ij)X(i)\pi_{ij} &= \sum_{j=1, j \neq i}^N S(i)\mathcal{X}^{-1}(i)S^\top(i). \end{aligned}$$

avec $S_i(X)$ et $\mathcal{X}_i(X)$ définies comme précédemment.

Ainsi en posant $Y(i) = K(i)X(i)$ et en appliquant le complément de Schur à

l'inégalité ci-dessus, on obtient le résultat suivant :

$$\begin{bmatrix} \Pi(i) & B_w(i) & \begin{bmatrix} X^\top(i)C_z^\top(i) \\ +Y^\top(i)D_z^\top(i) \end{bmatrix} & X^\top(i) & \mathcal{N}(i) & \mathcal{S}(i) \\ B_w^\top(i) & -\gamma^2\mathbb{I} & B_z^\top(i) & 0 & 0 & 0 \\ \begin{bmatrix} C_z(i)X(i) \\ +D_z(i)Y(i) \end{bmatrix} & B_z(i) & -\mathcal{Q}_t(i) & 0 & 0 & 0 \\ X(i) & 0 & 0 & -Z_P(i) & 0 & 0 \\ \mathcal{N}^\top(i) & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{W}_t(i) & 0 \\ \mathcal{S}^\top(i) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{X}_i \end{bmatrix} < 0 \quad (5.74)$$

où :

$$\begin{aligned} \Pi(i) &= X^\top(i)A^\top(i) + A(i)X(i) + Y^\top(i)B^\top(i) + B(i)Y(i) + \pi_{ii}E^\top(i)X(i), \\ \mathcal{W}_t(i) &= \text{diag}[\varepsilon_A(i)\mathbb{I}, \varepsilon_B(i)\mathbb{I}, \varepsilon_{C_z}(i)\mathbb{I}, \varepsilon_{D_z}(i)\mathbb{I}], \\ \mathcal{N}(i) &= [X^\top(i)E_A^\top(i), Y^\top(i)E_B^\top(i), Y^\top(i)E_{C_z}^\top(i), Y^\top(i)E_{D_z}^\top(i)], \\ \mathcal{Q}_t(i) &= \mathbb{I} - \varepsilon_{C_z}(i)D_{C_z}(i)D_{C_z}^\top(i) - \varepsilon_{D_z}(i)D_{D_z}(i)D_{D_z}^\top(i) \end{aligned}$$

En posant $\beta(ij) = \varepsilon^{-1}(ij)$ dans l'expression de $S_i(X)$, et en utilisant le lemme 3.2.3, on aboutit au Théorème suivant :

Théorème 5.7.3 *Soit γ une constante positive donnée. S'il existe un ensemble de matrices symétriques et définies-positives $P = (P(1), \dots, P(N))$, $X = (X(1), \dots, X(N))$, $Z_P = (Z_P(1), \dots, Z_P(N))$, et $V_P = (V_P(1), \dots, V_P(N))$ un ensemble de matrices $Y = (Y(1), \dots, Y(N))$, un ensemble de scalaires positifs $\beta = (\beta(1), \dots, \beta(N))$, $\varepsilon = (\varepsilon(1), \dots, \varepsilon(N))$, $\varepsilon_A = (\varepsilon_A(1), \dots, \varepsilon_A(N))$, $\varepsilon_B = (\varepsilon_B(1), \dots, \varepsilon_B(N))$, $\varepsilon_{C_z} = (\varepsilon_{C_z}(1), \dots, \varepsilon_{C_z}(N))$ et $\varepsilon_{D_z} = (\varepsilon_{D_z}(1), \dots, \varepsilon_{D_z}(N))$ tels*

que le problème suivant est vérifié pour tout $i \in \mathcal{S}$ et toute incertitude admissible :

$$\min \sum_{i=1}^N \text{Tr}(P(i)X(i) + Z_P(i)V_P(i) + \beta(ij)\varepsilon(ij)\mathbb{I})$$

sujet aux LMIs (5.74), (5.18), (5.16), sous la contrainte égalité (5.73), alors le système (2.1) est SA de façon robuste, sous la loi de commande (3.1) dont le gain est donné par (5.20), et qui permet en outre, de rejeter les perturbations avec un niveau $\gamma > 0$.

Exemple 5.7.2 Pour valider ce résultat, considérons les données numériques de l'exemple (3.3.2) du SSSMD nominal, avec en plus les données suivantes :

$$\begin{aligned} D_z(1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_z(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_w(1) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.12 \end{bmatrix}, \\ D_z(3) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_w(2) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}, B_w(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0.12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \\ C_z(1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, C_z(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_z(3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ B_z(1) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_z(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0.2 \\ 1 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}, B_z(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ E_A(1) &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, D_A(1) = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.02 \\ 0 \end{bmatrix}, E_A(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$D_A(2) = \begin{bmatrix} 0.13 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}, E_A(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, D_A(3) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$E_B(1) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, D_B(1) = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.02 \\ 0 \end{bmatrix}, E_B(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$D_B(2) = \begin{bmatrix} 0.13 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}, E_B(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, D_B(3) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$E_C(1) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, E_C(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$E_C(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, D_C(1) = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.02 \\ 0 \end{bmatrix}, D_C(2) = \begin{bmatrix} 0.13 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix},$$

$$D_C(3) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, E_D(1) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, E_D(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$E_D(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, D_D(1) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.1 & 0.0000 \end{bmatrix},$$

$$D_D(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, D_D(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix},$$

Dans ce cas, les LMIs à résoudre sont celles du Théorème 5.7.3, elles sont réalisables et aboutissent aux résultats suivants :

$$P(1) = \begin{bmatrix} 0.2186 & -0.1074 & 0.0000 \\ -0.1074 & 0.1525 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0221 \end{bmatrix}, P(2) = \begin{bmatrix} 1.3241 & -0.1571 & 0.0000 \\ -0.1571 & 0.0597 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0040 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
P(3) &= \begin{bmatrix} 1.3183 & -0.1736 & -0.0000 \\ -0.1736 & 0.0796 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0096 \end{bmatrix}, X(1) = \begin{bmatrix} 6.9949 & 4.9262 & 0.0000 \\ 4.9262 & 10.0267 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 45.2489 \end{bmatrix}, \\
X(2) &= \begin{bmatrix} 1.0981 & 2.8895 & 0.0000 \\ 2.8895 & 24.3542 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 250 \end{bmatrix}, X(3) = \begin{bmatrix} 1.0642 & 2.3209 & 0.0000 \\ 2.3209 & 17.6244 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 104.1667 \end{bmatrix}, \\
V_P(1) &= \begin{bmatrix} 1.0106 & 0.0370 & 0.0070 \\ 0.0370 & 1.0653 & 0.0111 \\ 0.0070 & 0.0111 & 0.9559 \end{bmatrix}, V_P(2) = \begin{bmatrix} 1.0986 & 0.0810 & 0.0408 \\ 0.0810 & 1.0732 & 0.0584 \\ 0.0408 & 0.0584 & 0.9920 \end{bmatrix}, \\
V_P(3) &= \begin{bmatrix} 1.0800 & 0.0342 & 0.0375 \\ 0.0342 & 0.9636 & 0.0374 \\ 0.0375 & 0.0374 & 1.0070 \end{bmatrix}, Z_P(1) = \begin{bmatrix} 0.9908 & -0.0343 & 0.0069 \\ -0.0343 & 0.9400 & 0.0107 \\ 0.0069 & 0.0107 & 1.0463 \end{bmatrix}, \\
Z_P(2) &= \begin{bmatrix} 0.9165 & -0.0673 & 0.0338 \\ -0.0673 & 0.9398 & 0.0526 \\ 0.0338 & 0.0526 & 1.0126 \end{bmatrix}, Z_P(3) = \begin{bmatrix} 0.9281 & -0.0317 & 0.0334 \\ -0.0317 & 1.0403 & 0.0374 \\ 0.0334 & 0.0374 & 0.9957 \end{bmatrix}, \\
\alpha(1) &= 0.9296, \alpha(2) = 1.0045, \alpha(3) = 0.9179, \beta(3) = 1.0894, \beta(2) = 0.9956, \\
\beta(1) &= 1.0758, \gamma = 1.6578.
\end{aligned}$$

Les gains des lois de commandes sont donnés par :

$$\begin{aligned}
K(1) &= \begin{bmatrix} -1.0804 & 0.0379 & -1.2062 \end{bmatrix}, K(2) = \begin{bmatrix} -4.8128 & 0.4118 & -0.1475 \end{bmatrix}, \\
K(3) &= \begin{bmatrix} -7.1479 & 2.2199 & -0.5984 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

L'évolution du mode, des variables d'état, et de la commande du système en boucle fermée avec les gains trouvés, est illustrée par les figures 5.11, 5.12. D'après ces figures, on constate que leurs trajectoires convergent vers zéro quand t tend vers l'infini. Ceci montre que la synthèse de la loi de commande via l'approche proposée garantit que le SSSDM incertain, soumis à des perturbations externes bornées en

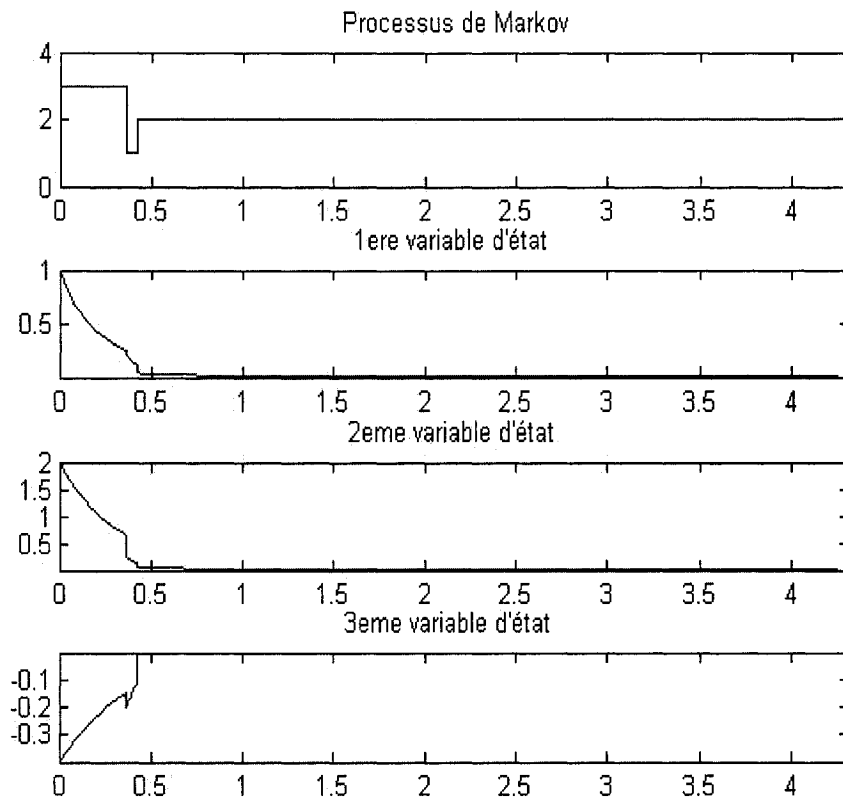


Figure 5.11 Stabilisation par la commande robuste $\mathcal{H}_\infty$: réponses temporelles du mode et des variables d'état

norme $\mathcal{L}_2$ est bien stochastiquement admissible de façon robuste, avec le rejet des perturbations recherché et dans les normes des incertitudes considérées.

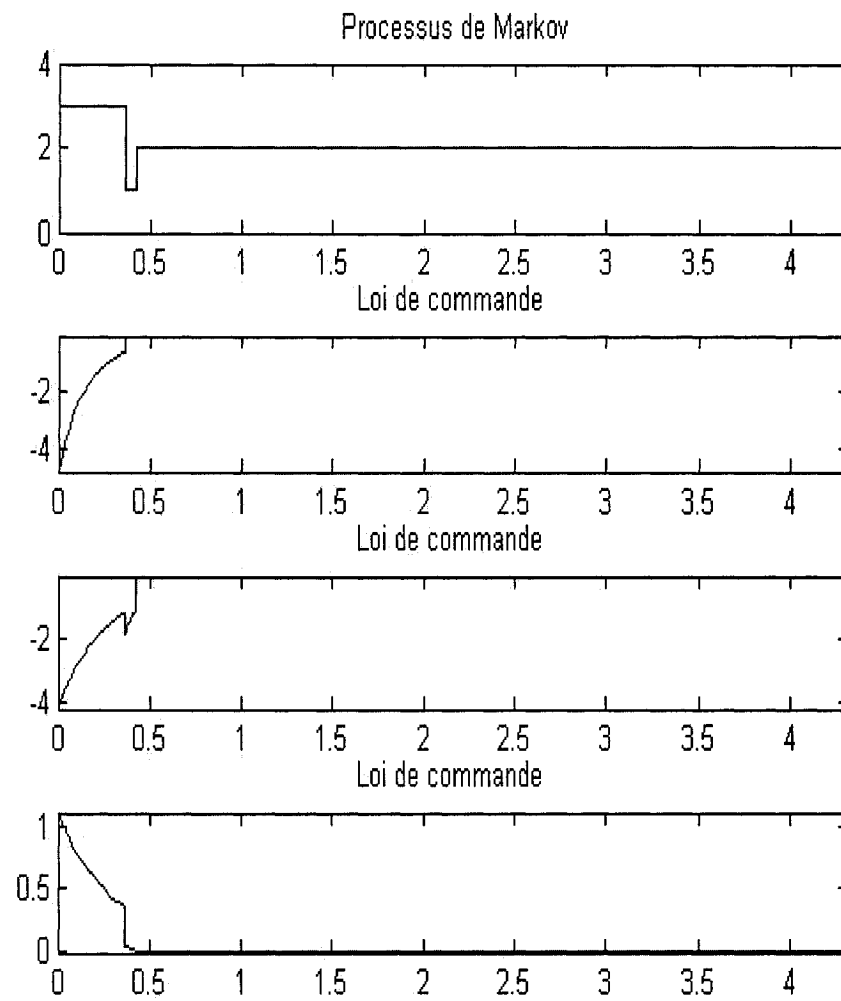


Figure 5.12 Évolution de la loi de commande $\mathcal{H}_\infty$ robuste d'un SSSMD

5.8 Conclusion

À travers ce chapitre, nous avons abordé le problème de la robustesse en stabilité d'un SSSMD incertain. Tout d'abord, nous avons traité la stabilité robuste de ce type de système, pour lequel nous avons proposé des conditions suffisantes d'admissibilité stochastique robuste, en s'appuyant sur le résultat du Théorème 2.6.1 relatif à l'admissibilité stochastique d'un SSSMD nominal et sur la technique LMI. Nous avons vu que le résultat développé est principalement intéressant par sa simplicité de mise en oeuvre numériquement. Ensuite, nous avons élaboré des conditions suffisantes permettant la synthèse de différentes lois de commande robustes, qui garantissent l'admissibilité stochastique du système en boucle fermée, malgré la présence d'incertitudes sur celui-ci. L'accent est mis sur les lois de commande robustes, par retour d'état, par retour d'état basé-observateur de type Luenburger, par retour de sortie dynamique, et la loi de commande robuste $\mathcal{H}_\infty$. Les approches de stabilisation stochastique développées, se sont basées sur la fonction de Lyapunov stochastique, le critère d'admissibilité stochastique robuste établi dans la première partie de ce chapitre, ainsi que sur les techniques LMIs et BMIs.

Pour les différents résultats proposés, nous notons la grande difficulté à formuler le problème de stabilisation stochastique qui est initialement non linéaire et non convexe, en un problème d'optimisation convexe qu'il est possible de résoudre efficacement via les divers logiciels existants sur le marché. Ceci a nécessité l'emploi de différents outils tels que le complément de Schur, les majorations des incertitudes, la technique de linéarisation par changements de variables, ainsi que la technique de complémentarité sur le cône. En outre, tous les résultats développés dans ce chapitre ne supposent aucune contrainte sur les matrices du système, et peuvent être considérés comme une extension de ceux proposés dans la littérature sur les systèmes singuliers, les systèmes à sauts markoviens et les SSSM.

CHAPITRE 6

CONCLUSION GÉNÉRALE

Les travaux proposés dans cette thèse, présentent une contribution à l'étude des méthodes d'analyse et de synthèse des lois de commande pour un SSSMD. Les méthodologies développées pour la réalisation de ces travaux, sont essentiellement théoriques. Leur établissement fait appel exclusivement à la deuxième méthode de Lyapunov, et au problème d'optimisation qui présente un outil très performant dans le domaine de la commande, en particulier la technique LMI qui s'avère un concurrent alternatif de taille, aux équations de Riccati, dont on connaît la lourdeur de mise en oeuvre. Au delà de l'outil mathématique, nous avons constaté que la mise en oeuvre des inégalités matricielles obtenues nécessitent souvent le recours à des algorithmes numériques tels que la linéarisation des BMIs, la minimisation de la trace de matrice, et la prise en compte des contraintes de rang.

Dans l'étude que nous avons menée sur l'analyse, tout d'abord, nous avons étudié l'existence de la solution d'un SSSMD. La formulation trouvée constitue une formulation générale d'évolution de la trajectoire, aussi bien des systèmes singuliers, que des systèmes à sauts markoviens. Cette solution a été simulée avec un simulateur que nous avons développé pour cette classe de système à l'aide du logiciel Matlab. Ensuite nous avons établi des conditions suffisantes d'admissibilité stochastique du système considéré pour n'importe quelle séquence de chaîne de Markov, pour cela il suffit que les perturbations qui agissent sur le vecteur d'état continu, soient d'amplitudes finies. Le résultat proposé est exprimé sous forme de LMIs.

La stabilisation par retour d'état a également été considérée. Dans ce sens, différentes stratégies de commande ont été utilisées selon que l'information sur le

vecteur d'état est disponible ou non.

Dans le premier cas, tout d'abord, en se basant sur le résultat proposé, relatif à l'analyse de ce type de système, nous avons synthétisé une loi de commande qui assure l'admissibilité stochastique d'un SSSMD bouclé, où la saturation sur la commande et les perturbations externes à énergie finie sont supposées non existantes. Ce résultat a été à la base du développement de la loi de commande avec saturation qui garantit en plus de l'admissibilité stochastique, que les contraintes sur la commande soient toujours vérifiées. Entre autre, nous avons proposé une loi de commande $\mathcal{H}_\infty$ qui a permis de garantir que le rapport entre l'entrée de perturbation et la sortie à commander reste inférieur à un certain niveau γ .

Dans le deuxième cas, nous avons utilisé deux types de lois de commande par retour d'état quand toutes les variables ne sont pas accessibles. L'accent a été mis sur la loi de commande basée sur un observateur de type Luenberger et sur la loi de commande par retour de sortie dynamique. Les conditions de stabilisation stochastique obtenues moyennant ces deux types d'observateurs, ont permis de synthétiser séparément les gains du contrôleur et de l'observateur.

Pour les divers types de techniques proposées sur la stabilisation stochastique du SSSMD étudié, les conditions obtenues par application directe de la théorie de Lyapunov, sont exprimées sous forme de BMIs, qui sont difficiles à linéariser par les techniques classiques de changement de variables. Pour contourner cette difficulté, nous avons transformé ces conditions en un problème LMIs avec complémentarité sur le cône, que nous avons résolu moyennant l'algorithme du gradient conditionnel.

Le dernier chapitre a été consacré à l'étude de la robustesse en stabilité d'un SSSMD en présence d'incertitudes bornées en normes, avec ou sans perturbations externes à énergie finie. En effet, en se basant sur la théorie de Lyapunov et sur les techniques

LMIs et BMIs, toutes les approches d'analyse et de synthèse développées dans le cas nominal ont été étendues au cas incertain. Les méthodes proposées ont permis de garantir l'admissibilité stochastique robuste du système étudié pour toute incertitude admissible, entre autres, d'assurer certaines performances de rejet des perturbations dans le cas de la commande robuste $\mathcal{H}_\infty$. Les difficultés majeures rencontrées dans cette étude, résident dans l'élimination des parties inconnues des incertitudes et dans la transformation du problème obtenu, qui est généralement non linéaire et non convexe, surtout dans le cas de la synthèse, en une formulation LMI par complémentarité sur le cône. Pour contourner ces problèmes nous avons fait appel aux différentes techniques de majoration des incertitudes, et aux outils de linéarisation utilisées dans les chapitres précédents.

Les résultats d'analyse et de synthèse proposés dans cette thèse aussi bien pour le cas nominal que le cas incertain sont une extension de ceux obtenus dans la littérature sur les systèmes singuliers, les systèmes à sauts et les SSSM.

Comme extension des approches de commandes proposées dans cette thèse, nous pensons qu'il serait souhaitable :

- de considérer des lois de commande continues vue que celles synthétisées tout au long de ce travail de recherche sont discontinues. Pour cela il suffit de prévoir un terme additif dans l'expression de celles-ci, qui va compenser la discontinuité dans le vecteur d'état continue au moment des sauts.
- d'explorer d'autres classes de fonctions de Lyapunov que la fonction de Lyapunov stochastique, qui a permis de réduire le conservatisme des résultats issus des fonctions quadratiques communes. Dans ce sens, une piste intéressante serait d'utiliser les fonctions quadratiques sous forme de polynômes représentables en sommes de carrés. Ce type de problème peut être formulé sous forme d'un problème d'optimisation impliquant des polynômes, pour

lequel de très récents outils de calcul numérique ont été développés : SOS-TOOLS (Papachristodolou et Prajna, 2005)

- d'étendre ces travaux à la classe des SSSMD avec d'autres types d'incertitudes que celles bornées en normes.

RÉFÉRENCES

- Arnold, L., 1974** “ Stochastic Differential Equations: Theory and Applications“, *John Wiley and Sons*, New-York.
- Apkarian, P. and Tuan, H. D., 2000**, “ Robust Control via concave minimisation: local and global algorithms“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, No. 2, pp. 299-305.
- Bainov, D. D. and Simeonov, P. S., 1989**, “ Stability Theory of Differential Equations With Impulse Effects: Theory and Applications“, *Chichester, U. K: Ellis Horwood*.
- Benjelloun, K., Boukas E. K. and Costa, O., L., V., 2000**, “ $\mathcal{H}_\infty$ Control for linear time-delay systems with Markovian jumping parameters“, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 105, pp.73-95.
- Boukas, E.K., 1987**, “ Commande Optimale Stochastique Appliquée aux systèmes de Production“, *Ph.D thesis, École Polytechnique de Montréal*.
- Boukas, E.K. and Haurie, A., 1990**, “ Manufacturing flow control and preventive maintenance: a stochastic approach“, *IEEE Transaction on automatic Control*, Vol 33(9), pp. 1024-1031.
- Boukas, E.K., 1995**, “ Systèmes Asservis“, *Editions de l' École Polytechnique de Montréal*.
- Boukas, E.K., 1995a**, “ Numerical Methods for HJB Equations of Optimization Problems for Piecewise Deterministic Systems“, *Optimal Control Applications and Methods*, Vol 16, pp. 41-58.

Boukas, E. K. and Hang, H., 1997 “ Exponential Stability of Stochastic Systems with Markovian Jumping Parameters“, *Automatica*, Vol. 35, pp.1437-1441.

Boukas, E. K., and Yang, H., 1997, “ Robust Stabilization by Dynamic Combined State and Output Feedback Compensator for Nonlinear Systems with Jumps“, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 92, No. 1, pp. 63-75.

Boukas, E. K. and Liu, Z. K., 2001, “ Robust Stability and Stabilization of Markov Jump Linear Uncertain Systems with Mode-Dependent Time Delays“, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 209, pp. 587-600.

Boukas, E. K. and Liu, Z. K., 2002, “ Deterministic and Stochastic Systems with Time-Delay“, *Birkhauser*, Boston.

Boukas, E., K. and Liu, Z. K., 2004, “ Delay-Dependent Stabilization of Singularly Perturbed Jump Linear Systems“, *International Journal of Control*, Vol. 77, pp. 310-319.

Boukas, E. K., 2005, “ Stochastic Switching Systems Analysis and Design“, *Birkhauser*, Boston.

Boukas, E. K., 2005a, “ On the Robust Stability of Singular systems with Random Changes“, *Hybrid Systems and Applications*. Vol. 63, No. 3, pp. 301-310.

Boukas, E. K., 2005b, “ Robust $\mathcal{H}_\infty$ constant feedback stabilisation of stochastic systems“, *IMA J. of Mathematical Control and Information*. Vol. 22, pp. 334-349.

Boukas, E. K., 2005c, “ Static Output Feedback Control for Linear Descriptor Systems: LMI Approach“, *Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*. Niagara Falls, Canada, pt. 3, Vol. pp 1230-1234.

Boukas, E. K. and S. Xu, J. Lam, 2005d, “On Stability and Stabilizability of Singular Stochastic Systems with Delays“ *Journal of Optimization Theory and Applications*. New York, Vol. 127, No. 2, pp. 249.

Boukas, E.K., 2006, “ Manufacturing Systems: LMI Approach“, *IEEE, Transactions on Automatic Control*, Vol. 51, No. 6, pp. 1014-1018.

Boukas, E.K., 2006b, “ Output Feedback Stabilization of Stochastic Non-Linear Hybrid Systems“, *IMA J. of Mathematical Control and Information*, Vol. 23, pp. 137-148.

Boyd, S., El Gahoui, L., Feron, E. and Balakrishnan,V., 1994, “ Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. Philadelphia, P.A“ *SIAM*.

Burgat, C. and Tarbouriech, S., 1993, “ Algorithm for Estimating the Stability Domain of Linear Discrete-time Systems with Saturations.“ *In Proc of IEEE Int. Conf, on Systems, Man and Cybernandics, (IEEE-SMC)*, Vol. 1, pp. 319-324. le Touquand, France.

Burgat, C., Tarbouriech, S. and Klai, M., 1996, “ Stability and Control of Linear Systems.“ *In A. J., Fossard, and D. Normand-Cyrot, editors, Non-Linear systems*, Vol. 2, Chap. 4, chapman and Hall.

Cao, Y. Y. and Lam, J., 2000, “ Robust $\mathcal{H}_\infty$ Control Of Uncertain Markovian Jump Systems with Time-Delay“, *IEEE, Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, No. 1.

Cao, Y.Y., Lin, Z. and Shamash, Y., 2002, “ Set Invariance Analysis and Gain-Scheduling Control for LPV Systems Subject to Actuator Saturation“, *Systems and Control Letters*, Vol 46, pp. 137-151.

Chen, W.H., Guan, Z.H. and Lu, X., 2004, “ Delay-dependent Output Feedback Stabilisation of Markovian Jump System with Time-delay“, *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, Vol. 151, pp. 561-566.

Ching-Hu, K. and Chun-Hsiung, F., 2003, “ An LMI Approach to Admissibilization of Uncertain Descriptor Systems via Static Output Feedback“, *Proceedings of the American Control Conference*, Denver, Colorado, pp. 5104-5109.

Chu, D., L. and Ho, D., W., C., 1999, “ Necessary and Sufficient Conditions for Output Feedback Regularization of Descriptor Systems“, *IEEE Transactions on automatic Control*, Vol. 44(2), pp. 405-412.

Chun-Liang, L., 1999, “ On the Stability of Uncertain Linear Descriptor Systems“, *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 36, pp. 549-564.

Chun-Hsiung, F., Chun-Lin, L., Shih-wei, K. and Lin, H., 1998, “ Robustness of Pole-Randention Inside Specified Regions for Interval Descriptor Systems“, *Proceedings of the American Control conference*, Philadelphia, Pennsylvania, pp. 1871-1873.

Cobb, J. D., 1983, “ Descriptor Variable Systems and Optimal State Regulation“, *IEEE Transactions on automatic Control*, Vol. 28, pp. 601-611.

Cobb, J. D., 1984, “ Controllability, Observability and Duality in Singular Systems“, *IEEE Trans.Automat.Contr*, 29, pp. 1076-1082.

Costa, O. L. V. and Boukas, E. K., 1998, “ Necessary and Sufficient Condition for Robust Stability and Stabilizability of Continuous-Time Linear Systems with Markovian jumps“, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 99, N^o. 2, pp. 359-379.

Dai, L., 1989, “ Singular Control Systems“, *Volume 118 of Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag, New-York.

Davis, M.H.A. and Elliott, R.J., 1991, “ Stochastics monographs“. *Applied Stochastic Analysis*, Vol. 5.

Kumar, A. and Daoutidis, P., 1995 “ Feedback Control of Nonlinear Differential-algebraic Equations Systems“, *AIChE J.*, Vol. 41, pp. 619-636,.

Decarlo, A. R., Branicky, M. S., Pettersson, S. and Lennartson, B., 2000, “ Perspectives and Results On the Stability and Stabilizability of Hybrid Systems“, *Proceedings of IEEE*, vol 88, pp. 1069-1082, 2000.

De Farias, D. P., Geromel, J. C., Do Val, J. B. R. and Costa, O. L. V., 2000, “ Output Feedback Control of Jump Linear Systems in Continuous-Time“, *IEEE, Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, No. 5, pp. 944-949.

Doyle, J., C., 1978, “ Guaranteed Margins For LQG Regulators“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 24, No. 4, pp. 756-757.

De Souza, C. E. and Fragoso, M. D., 1993, “ $\mathcal{H}_\infty$ Control for Linear Systems with Markovian Jumping Parameters“, *Control Theory and Advanced Technology*, Vol. 9, pp. 457-466.

Dumont, Y., Goeleven, D. and Rochdi, M., 2001, “ Reduction of Second Order Unilateral Singular Systems: Applications in Mechanics“. *Zamm. Z. Angew. Math. Mech*, Vol. 81, pp. 219-245.

El Ghaoui, L., Nikoukhan R. and Delebecque, F., 1995,“ LMITOOL: a Package for LMI Optimization“, *Proc. of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3096-3101.

Elghaoui, L., Oustry, F. and Rami, M. A., 1997, “ A Cone Complementarity Linearization Algorithm for Static Output-Feedback and Related Problems“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 42, No 8, pp. 1171-1176.

Fang, C. H., Lee, L. and Chang, F. R., 1994, “ Robust Control Analysis and Design for Discrete Time Singular Systems“, *automatica*, Vol. 21, pp. 1714-1751.

Fang, C., H., 1997, “ Robust Stability of Generalized State Space Systems“, *Ph. D Dissertation, National Sun Yat-San University*, Taiwan.

Fridman, E., Pila, A. and Shaked, U., 2003, “ Regional Stabilization and $\mathcal{H}_\infty$ Control of Time-delay Systems with Saturating Actuators“, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, Vol. 13, pp. 885-907.

Fridman, E., 2002, “ Stability of Linear Descriptor Systems with Delays: a Lyapunov-Based Approach“, *J. Math. Anal. Appl*, Vol. 273, pp. 24-44.

Gantmacher, F.R. 1974, “ The Theory of Matrices“, *Chelsea*, New York.

Gao, Z. and Ho, D., W., C., 2004, “ Proportional Multiple-integral Observer Design for Descriptor Systems with Measurement Output Disturbances“, *Control Theory and Applications, IEE Proceedings*, Vol. 151, pp. 279-288.

Gilles, E. D., 1998, “ Network Theory for Chemical Processes“, *Chem. Eng. Technol*, 21(2), pp. 121-132.

Guan, Z. H., Liu, Y. Q. and Wen, X., C., 1995, “ Decentralized Stabilization of Singular and Time-Delay Large Scale Control Systems With Impulsive Solutions“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40, No. 8, pp. 1437-1441.

Guan, Z. H., Chan, C. W., Leng, A. Y. T. and Chen, G., 2001, “ Robust stabilization of Singular-Impulsive-Delayed Systems With Nonlinear Perturbations“, *IEEE Transactions on Circuits and Systems, Part I: Fundamental Theory and Applications*, Vol. 48, No. 8, pp. 1011-1019.

Guan, Z., H. and Hill, D.J., 2005, “ Robust $\mathcal{H}_\infty$ Control of Singular Impulsive Systems with Uncertain Perturbations“, *IEEE Transactions on Circuits and systems*, Vol. 52, No 6, pp. 293-298.

Guoping, L. and Ho, D.W.C., 2006, “ Generalized Quadratic Stability for Continuous-Time Singular Systems with Nonlinear Perturbation.“ *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 51, No. 5, pp. 818-823.

Gutman, P.O. and Hangander, P., 1985, “ A new Design of Constrained Controllers for Linear Systems.“ *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 30, pp. 23-33.

Henrion, D., Tarbouriech, S. and Sebek, M., 1999, “ Rank on LMI Approach to Simultaneous stabilization of Linear Systems“, *Systems and Control Landters*, Vol. 38, No. 2, pp. 79-89.

Hong, C., 2005, “ Constrained $\mathcal{H}_\infty$ Control of Active Suspensions: An LMI Appraoch“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 13, No. 3, pp. 412-421.

Hill, D. J. and Mareels,I. M. Y., 1990, “ Stability Theory for Differential-Algebraic Systems With Application to Power Systems“, *IEEE Trans. Ciruits Syst.*, Vol. 37, No. 11, pp. 1416-1423.

Ho, D., W., C., and Gao, Z., 2001, “ Bezout Identity Related to Reduced-order Observer-based Controllers for Singular Systems“, *Automatica*, Vol 37, pp. 1655-1662.

Ji, Y. and Chizeck, H. J., 1990, “ Controllability, Stability and Continuous-Time Markovian Jump Linear Quadratic Control“ *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-35, No. 7, pp. 777-788.

Johansen, T. A., 2000, “ Computation of Lyapunov function for smooth non-linear systems using convex optimisation“, *Automatica*, No. 36, pp. 1617-1626.

Kablar, A. N., 2003 “Singularly Impulsive or Generalized Impulsive dynamical systems: Lyapunov and Asymptotic Stability“, *Proceeding of the 42th IEEE conference on Decision and Control*, Vol. 150, pp. 173-175.

Karmarkar, N., 1984, “ A New Polynomial Time Algorithm for Linear Programming“, *Combinatorica*, Vol. 4, No.4 , pp. 373-395.

Kats, I. Y., 1998, “ Lyapunov Functions Methods in Stability and Stabilization Problems of Systems with Random Structure“, *Ural Academy of Communication Ways*, Russian, 1998.

Kats, I. Y. and Martynyuk, A. A., 2002, “ Stability and Stabilization of Nonlinear systems with Random Structure“, *Series of Books on The theory of Stability and Control*, Ukraine.

Khalil, H. K., 1992, “ Nonlinear Systems“, *Mac Millan*.

Khanbaghi, M., Malhamé, R. and Perrier, M., 1997, “ A Statistical Model of Paper Breaks in an Integrated TMP-newsprint Mill“, *J, Pulp Paper Sci*, Vol. 23(6), pp. 282-288.

Komanduri, R., 1993, “ Machining and Grinding: A Historical Review of Classical Papers“, *ASME Applied Mechanics Review*, Vol. 46, No. 3, pp. 80-132.

Krasovskii, N. N. and Lidskii, E. A., 1961, “ Analysis Design of Controller in Systems with Random Attributes: Part 1“, *Automation Remote Control*, Vol. 35, pp. 1021-1025.

Kreinder, E. and Jameson, A., 1972, “ Conditions for Nonnegativeness of Partitioned Matrices“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 17, pp. 147-148.

Krstić, M. and Deng, H., 1998, “ Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems“, *London, U.K.*: Springer-Verlag.

Kushner, H.,J., 1967, “ Stochastic Stability and Control“, *Academic press*, New York.

Leibfritz, F., 2001, “ An LMI-based Algorithm for Desinging Suboptimal Static H_2/H_∞ Output Feedback Controllers“, *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 39, No. 6, pp. 1711-1735.

Leontief, W. W., 1953, “ Studies in the Structure of the American Economy“, *Oxford University Press*, London, pp. 35-51.

Lewis, F. L., 1992, “ A Tutorial on The Geometric Analysis of Linear Time-Invariant Implicit Systems“, *Automatica*, Vol. 28(1), pp. 119-137.

Lewis, F. K., 1985, “ Preliminary Notes on Optimal Control for Singular Systems“, *24th IEEE Conference on Decision and Control*, Lauderdale, pp. 266-272.

Lewis, F. K., 1986, “ A Survey of Linear Singular Systems“, *Circuit, Syst, Signal Process*, Vol. 5, pp. 3-36.

Lin, C., Wang, J. and Wang, D., 1997 “ Robustness of Uncertain Desriptor Systems“, *Systems Control Letter*, Vol. 31, pp. 129-138.

Liu, H., Boukas, E. K, Sun, F. and Ho, D. W. C., 2006, “ Controller Design for Markov Jumping Systems Subject to Actuator Saturation“, *automatica*, Vol. 42, pp. 459-465.

Luenbeger, D., G., 1971, “ An introduction to Observers“, *IEEE Transactions on Automatic Control* Vol. 16, No. 6, pp. 596-602,

Luenbeger, D., G., 1977, “Dynamic Equations in Descriptor Form “, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC. 22, pp. 312-321.

Luenbeger, D., G., 1977, “ Singular Dynamic Leontief systems“, *Econometrica*. Vol. 45, pp. 991-995.

Mehta, S. and Chiasson, J., 1998, “ Nonlinear Control of a Series DC Motor: Theory and Experiment“, *IEEE Transactions Ind. Electron*, Vol. 45, pp. 134-141, 1998.

Magdi, S. M. and Peng, S, 2003, “ Robust Stability, Stabilization and $\mathcal{H}_\infty$ Control of Time-Delay Systems with Markovian Jump Paramanders“, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, Vol. 13, pp. 755-784.

Mao, X., Koroleva, N. and Rodkina, A., 1998, “ Robust Stability of Uncertain Stochastic Differential Delay Equations“, *Systems and Control Landters*, Vol. 35, pp. 325-336.

Mariton, M. and Bertrand, P., 1985, “ Output Feedback for A Class of Linear Systems with Stochastic Jump Paramanders“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 30, No. 9, pp. 898-900.

Mariton, M., 1988, “ Almost Sure and Moments Stability of Jump Linear systems“, *System Control Letter*, Vol. 11, pp. 393-397.

Mariton, M., 1990, “ Jump linear Systems in Automatic Control“, *Marcel Dekker*, New-york.

Masubuchi, I., Kamitane, Y., Ohara, A. and Suda, N., 1997 “ $\mathcal{H}_\infty$ Control for Descriptor Systems: A Matrix Inequalities Approach“, *Automatica*, AC-33, pp. 669-673.

Molchanov, A.P. and Pyatnitskii, E.S., 1986, “ Lyapunov Functions that Specify Necessary and Sufficient Conditions of Absolute Stability Of Nonlinear and Non Stationary Control Systems“, (*Part iii*). *Automatika Telemekanika*, Vol. 5, pp. 38-49.

Molchanov, A.P. and Bauer, P.H., 1989, “ Lyapunov Functions for Nonlinear Discrete-time Systems“, *Automatika i Telemekhanika*, Vol. 5, No. 4, pp. 38-49, pp. 53-58.

Nesterov, Y. and Nemirovski, A., 1994, “ Interior Point Polynomial Methods In Convex Programming : Theory and applications“, *SIAM*, Philadelphia, PA, 1994.

Newcomb, R. W. and Dziurla, B., 1989, “ Some Circuits and Systems Applications of Eemistate Theory“, *Circuit Systems Signal*, Vol. 8, No. 3, pp. 236-260.

Ohse, N. and Matsuda, Y., 2003, “ Integrated Design of Structure and Controller for a Class of Descriptor Systems with Input Saturation“, *29th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Sociandy* , Vol.2, pp. 1546-1551.

Pakshin, P.V and Mitrofanov, I. N., 2005, “ Robust stabilization of jump Polytopic Systems via Output Feedback“ , *44rd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2616-2620, Seville, Spain, 12-15 December.

Pettersson, I., R., 1987, “ A Stabilization Algorithm For a Class of Uncertain Linear Systems“, *System and Control letters*, Vol. 8, pp. 351-357.

Pettersson, S. and Lennartson, B., 1997a, “ Exponential Stability Analysis of Nonlinear Systems Using LMIs“, *Proceedings of 36th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego CA, pp. 199-204.

Pettersson, S. and Lennartson, B., 1997b, “ An LMI Approach for Stability Analysis of Nonlinear Systems“ *Proc. of the ECC*, Bruxelle, Belgique.

Papachristodolou, A. and Prajna, S., 2005 “ A Tutorial on Sum of Squares Techniques for Systems Analysis“, *Proc, American Control Conference*, Pasadena, CA, pp. 2686-2700.

Raouf, J. and Boukas, E. K., 2004a “ Robust Stabilization of Markovian Jump Singular Systems with Multiplicative White Noise Disturbance“ *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 3170-3175, Boston.

Raouf, J. and Boukas, E. K., 2004b “ Observer-based Controller Design for Linear Singular Systems with Markovian Switching“, *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 4, pp. 3621-3624, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, 14-17 December.

Raouf, J. and Boukas, E. K., 2005, “ Stabilization of Uncertain Markovian Jump Singular Systems With Wiener Process“, *16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, July 4-8.

Raouf, J. and Boukas, E. K., 2005a, “ Robust State Feedback Controller Design of Stochastic Singular Systems with Markovian Switching“, *Journées de l'Optimisation*, Gérard, HEC, Ecole Polytechniques, Montréal, 9-11 Mai.

Raouf, J. and Boukas, E. K., 2005b, “ Stability and Robust Stability of Stochastic Singular Systems with Markovian Switching“, *Journées de l'Optimisation*, Gérard, HEC, Ecole Polytechniques, Montréal, 9-11 Mai.

Raouf, J. and Boukas, E. K., 2006, “ Observer-based Controller Design of Markovian Jump Bilinear Descriptor Systems with Wiener Process“, *American Control Conference*, Minnesota USA, June 14-16.

Raouf, J. and Boukas, E. K., 2007a, “ Stabilization of Singular Systems with Markovian Switching, impulsive Jump and Saturating Inputs“ , *American Control Conference*, New York City, USA, July 11-13, accepted.

Raouf, J. and Boukas, E. K., 2007b, “ Stabilization of Singular Markovian Jump Systems with Discontinuities and Saturating Inputs“ , *Journal of Optimization Theory and Applications*. New York, submitted.

Raouf, J. and Boukas, E. K., 2007c, “ Stochastic Output Feedback controller of Singular Markovian Jump Systems with discontinuities“ , *European Control Conference*, Kos, Greece, July 2-5, accepted.

Rosenbrock, H., 1974, “ Structural Properties of Linear Dynamic Systems“, *International Journal of Control*, Vol. 20, No. 2, pp. 191-202.

Schein, O. and Denk, G., 1998, “ Numerical Solution of Stochastic Differential-Algebraic Equations with Applications to Transient Noise Simulation of Microelectronic Circuits“, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 100, pp. 77-92.

75-99.

Shi, P., Boukas, E. K. and Agarwal, R., 1999, “ Control of Markovian Jump Discrete-time Systems With Norm Bounded Uncertainty and Unknown Delay“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, No. 11, pp. 2139-2144.

Shunjin, W., Dong, H. and Xianzhang, M., 2004, “ P-Moment stability of Stochastic Differential Equations with Jumps“, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 152, pp. 505-519.

Skorohod, A., V., 2004 “ Asymptotic Methods in the Theory of Stochastic Differential Equations“, *American Mathematical Society*, Providence, RI.

Stykel, T., 2002, “ On criteria for Asymptotic Stability of Differential Algebraic Equations“, *Zamm. Z. Angew. Math. Mech*, 82(3), pp. 147-158.

Suarez, J., Alvarez, R. and Alvarez, J., 1991 “ Linear Systems with Single Saturated Input: Stability and analysis“, *Proceeding of the 30th IEEE conference on Decision and Control*, pp. 223-228, Brighton.

Sun, J. T., Han, D. and Meng, X., Z., 2003 “ Stability analysis of impulsive control systems“, *IEE Proceedings of Control Theory and Applications*, Vol. 150, No. 4, pp. 331-334.

Sun, J. T., Zhang, Y. P. and Wu, Q. D., 2003a “ Less Conservative Condition for Asymptotic Stability of Impulsive Control Systems“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 48, No. 5, pp. 829-831.

Sworder, D. d. and Rogers, R. O., 1983 “ An LQ-Solution to a Control Problem Associated with a Solar Thermal Central Receiver“ *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-28, No. 10, pp. 917-978.

Sworder, D. d., 1972 “Control of Jump Parameter Systems with Discontinuous State Trajectories “ *IEEE Transactions on Automatic Control*, Technical Notes and Correspondence, pp. 740-741.

Takaba, N. M. and Katayama, Y., 1995 “ A Generalized Lyapunov Theorem for Descriptor Systems“, *Systems and Control Letters*, Vol. 24, pp. 149-151.

Tarbouriech, S. and Castelan, E.B., 1999, “ Local stability of Linear Descriptor Systems with Saturating controls, Generalized Riccati and Lyapunov equations approaches“. *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control*, Phoenix, Arizona USA, Vol. pp. 4080-4085, Dec.

Thomas, J., 1985, “ A Continuous Leontief Dynamic Input Output Model“. *Eighth Pacific congress of the Regional Science Association* , Vol. 56, pp. 177-188.

Tzierakis, K.,G. and Koumboulis, F., N.,2003 “ Independent force and position control for cooperating manipulators“, *Journal of the Franklin Institute*, Article in press, pp. 1-26, 2003.

Uezato, E. and Ikeda, M., 1999 “ Stric LMI Conditions for Stability, Robust Stability, and $\mathcal{H}_\infty$ Control of Descriptor Systems“, *Proceeding of the 38th Conference on Decision and Control*, USA, December. pp. 4092-4097.

Van Der Weiden, A. J. J. and Bodgra, O. H., 1980, “ Analyse structurelles des systèmes multi-variables strictement propres and non propre“. *Nederlands*.

Vergheze, G. C. Levy, B.C. and Kailath, T., 1981, “ A Generalized State Space for Singular Systems“, *IEEE Trans.Automat.Contr*, AC-26, pp. 811-831.

Vidyasagar, M., 1978, “ Nonlinear System Analysis“, *Prentice-Hall*, Englewood Cliffs, NJ.

Weiqun, W. and Yun Z., 2001, “ Analysis of Impulsive Modes and Luenberger Observer for Descriptor Systems“, *Systems and Control Letters*, Vol. 44, pp. 347-353, 2001.

Winkler, R., 2001, “ Stochastic Differential Algebraic Equations of Index 1 and Applications in Circuit Simulation“. *Humboldt-University*, Berlin, Institut fur Mathematik.

Winkler, R., 2004, “ Stochastic Differential Algebraic Equations of Index 1 and Applications in Circuit Simulation“. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 163, pp. 435-463.

Wu-Neng, Z., Ren-Quan, L., Hong-Ye, S. and Jian, C., 2004, “ Robust Stabilization for Singular Systems with Time-Delays and Saturating Controls“, *Proceeding of the 2004 American Control Conference*, Boston, Massachusandts, June 30- July 2, pp. 4986-4991.

Xiong, J., Lam, J., Gao, H. and Ho, D.,W.,C., 2005 “ On Robust Satbilization of Markovian Jump Systems with Uncertain Switching Probabilites“, *automatica*, Vol. 41, pp. 897-903.

Xu, S., Van Dooren, P. and Lam, J., 2002, “ Robust Stability and Stabilization for Singular Systems with Delay and Paramater Uncertainty“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 47, pp. 1122-1128.

Xu, S., Lam, J. and Yang, C., 2003, “ Robust $\mathcal{H}_\infty$ Control for Uncertain singular discret Systems with state Delay“, *International journal of Robust and nonlinear Control*, Vol. 13, pp. 1213-1223.

Xu, S. and Lam, J., 2006, “ Robust Control and Filtering of Singular Systems“, *Springer-Verlag* Berlin, Germany. Lecture Notes In Control And Information Sciences.

Yan-Ming Fu., Di W. and Guang-Ren, D., 2006, “ Robust Guaranteed cost For Descriptor Systems with Markov Jumping Parameters and State Delay“, *ANZIAM, J.* Vol. 47, pp. 569-580.

Yang, T., 1999 “ Impulsive Control“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 44, pp. 1081-1083, 1999.

Yang, T., 2001 “ Impulsive Systems and Control: Theory and Applications“, *Huntington, N. Y*, Nova Science Publishers, 2001.

Yin, G. and Zhang, Q., 2002, “ Hybrid Singular Systems of Differential Equations“, *Scientia Sinica*, Vol. 45, pp. 241-258.

Yuewu, D. and Jitao, S., 2002, “ $\mathcal{H}_\infty$ Filtering for a Class of Stochastic Markovian Jump System with Impulsive Effects“, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, pp. 1-6.

Yue, D., Lam, J. and Ho, D.W.C., 2003, “Reliable $\mathcal{H}_\infty$ Control of Uncertain Descriptor Systems with Multiple Time-Delays“, *IEE Proceedings of Control Theory Application*, Vol. 150, No. 6, November, pp. 557-564.

Zhiqiang, Z., Jinzhi, W. and Liu, H., 2004, “ An improved LMI Representation for Enlarging the Domain of Attraction for Linear systems with Actuator Saturation“, *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Intelligent Control*, Taipei, Taiwan, pp. 500-504, September 2-4.

ANNEXE I

TECHNIQUE D'OPTIMISATION

I.1 Analyse convexe

La notion de convexité tient dans cette thèse une place importante étant données les orientations choisies. En effet, les problèmes d'analyse et de synthèse dont il est question sont formulés, lorsque cela est possible, en termes d'optimisation convexe. La convexité d'un problème d'optimisation a un double avantage:

- les temps de calcul sont raisonnables, et il n'existe pas de minimum local de la fonction coût à optimiser,
- le résultat correspondant est un minimum global unique.

La convexité est une notion à la fois ensembliste et fonctionnelle dont voici les définitions:

Définition I.1.1 *Soit un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$, D est un ensemble convexe si et seulement si:*

$$\forall \rho \in [0, 1] \subset \mathbb{R}, \forall (x_1, x_2) \in D^2, \rho x_1 + (1 - \rho)x_2 \in D$$

Définition I.1.2 *Soit une fonction $f: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, avec D est un ensemble convexe, alors f est convexe si et seulement si:*

$$\forall \rho \in [0, 1] \subset \mathbb{R}, \forall (x_1, x_2) \in D^2, f(\rho x_1 + (1 - \rho)x_2) \leq \rho f(x_1) + (1 - \rho)f(x_2)$$

Un problème d'optimisation convexe s'énonce alors comme étant la minimisation d'une fonction convexe sur un ensemble convexe comme suit: $\min_{x \in D} (f(x))$. Dans ce qui suit, nous allons rappeler quelques résultats sur l'optimisation définies par des inégalités matricielles linéaires développés par (Boyd et al., 1994).

I.2 Les techniques LMIs

Définition I.2.1 *Étant donnée une famille de matrices symétriques $P_0, P_i \in \mathbb{R}^{p \times p}, i \in \{1, \dots, N\}$, et un vecteur $x = (x_1, \dots, x_N)^\top \in \mathbb{R}^N$, une LMI stricte (resp. non stricte) en $x_i, i \in \{1, \dots, N\}$ s'écrit sous la forme:*

$$F(x) = P_0 + \sum_{i=1}^N x_i P_i > 0 (\text{resp. } \geq 0)$$

Remarquons que l'ensemble D défini par $D = \{x \in \mathbb{R}^N : F(x) > 0\}$ est convexe, ce qui nous amène à considérer une contrainte LMI comme une contrainte convexe.

Parmi ces problèmes d'optimisation convexes sous forme de LMI, nous pouvons citer :

- **Problème de réalisabilité:** il s'agit de trouver un vecteur x tel que la contrainte convexe $F(x) > 0$ est satisfaite. Ce problème peut être résolu en cherchant la valeur x minimisant le scalaire ϱ tel que:

$$F(x) < \varrho \mathbb{I}$$

Si la valeur de ϱ est négative, le problème est réalisable.

- **Problème de valeurs propres (EVP):** il s'agit de minimiser la plus grande valeur propre d'une matrice symétrique sous une contrainte de type LMI:

$$\begin{array}{l} \text{minimiser } \varrho \\ \text{sous les contraintes} = \left\{ \begin{array}{l} \varrho \mathbb{I} - A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Ces problèmes convexes peuvent alors être résolus par différents types de méthodes, telles que la méthode du simplexe, la méthode des points intérieurs, développée initialement par (Karmakar, 1984) pour la programmation linéaire, et étendue ensuite par (Nesterov et Nemirovski, 1994) au cas de la programmation convexe dans l'espace des matrices définies-positives. Parmi les logiciels qui permettent la résolution de telles inégalités matricielles, on peut citer l'utilitaire de (El Ghaoui et al., 1995), les utilitaires Yalmip et Sédumi.

Parmi les contraintes de type LMI les plus classiques, nous citons le Complément de Schur donné par le lemme suivant :

Lemme I.2.1 (*Boyd et al., 1994*) La matrice : $\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^\top & S_3 \end{pmatrix} > 0$ ssi $S_3 > 0$, $S_1 - S_2 S_3^{-1} S_2^\top > 0$, Cette dernière inégalité est appelée complément de Schur.

I.3 Les techniques BMIs

Un nombre important de problèmes de commande et d'observation s'expriment sous forme d'inégalités matricielles bilinéaires (BMIs) qui sont données par:

$$F(x) = P_0 + \sum_{i=1}^N x_i P_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j P_{ij} > 0 (\text{resp. } \geq 0)$$

où P_i et P_{ij} sont symétriques.

Aujourd'hui, il n'existe pas de méthodes exactes pour résoudre ce genre d'inégalités

qui peuvent être vues comme des généralisations des LMIs. Cependant, certains problèmes BMIs peuvent se ramener facilement à des LMIs par un changement judicieux de variables (Henrion et al., 1999), (Apkarian et Tuan, 2000): cette astuce mathématique est fréquemment utilisée dans le cadre de la commande par retour d'état statique et dynamique, où le produit de deux variables qui apparaît dans les conditions de synthèse est remplacé par une nouvelle variable. D'autres BMIs peuvent être converties en LMIs équivalentes avec une contrainte de rang. La résolution de ce genre de problèmes apparaît fréquemment dans les formalismes d'analyse et de synthèse. Il s'agit d'un problème non convexe difficile, cependant, il existe des méthodes heuristiques permettant de lui trouver des solutions, un exemple de ces heuristiques est donné dans l'annexe V.

I.4 Problème de complémentarité conique

Dans le but de pouvoir résoudre des inégalités matricielles, toutes les conditions doivent être nécessairement convexes (Boyd et al., 1994), (El Ghaoui et al., 1995). La présence de conditions non convexes rend en général le problème très difficile à résoudre.

Considérons le problème non convexe en V , W et Z suivant:

$$F(V, W, Z) \geq 0, \quad (\text{I.1})$$

$$VW = \mathbb{I} \quad (\text{I.2})$$

où $V > 0$, $W > 0$ sont des matrices de même dimension $n \times n$, et $F(\cdot)$ est une fonction matricielle affine symétrique. L'inégalité (I.1) représente la contrainte LMI du problème et la condition (I.2) la contrainte non convexe.

Remarquons que la contrainte (I.2) peut être écrite comme suit: $V = W^{-1} > 0$, et en appliquant le complément de Schur, on aboutit à:

$$\begin{bmatrix} V & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & W \end{bmatrix} \geq 0. \quad (\text{I.3})$$

Le problème de complémentarité sur le cône correspondant au problème initial est le suivant:

$$\mathbf{P}_s: \min \text{Tr}(VW) \text{ sous les contraintes (I.1, I.3).}$$

le lemme suivant garantit l'existence d'une solution au problème précédent si et seulement si le minimum de $\mathbf{P}_s$ est $2n$ (El Ghaoui et al., 1997).

Lemme I.4.1 (*Convergence*) Soient V et W deux matrices telles que (I.3) est vérifiée. Alors (I.2) est satisfaite si et seulement si $\text{Tr}(VW) = 2n$.

ANNEXE II

SYSTÈME SINGULIER

II.1 Modèle d'état

Un système singulier continu linéaire, invariant dans le temps est régi par les équations suivantes:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{II.1}$$

où les matrices E , A , B et C sont réelles, constantes et de dimensions compatibles avec les dimensions de $x(t)$, $u(t)$ et $y(t)$. Sans perte de généralités, la matrice E est supposée être singulière.

II.2 Représentations équivalentes

Pour l'étude de cette classe de systèmes, deux types de représentations équivalentes ont un intérêt particulier dans l'étude de l'analyse ou la commande: il s'agit de la décomposition en valeurs singulières, qui permet de séparer les dynamiques, des interconnexions et des contraintes statiques du système, et de la forme de Kronecker-Weierstrass qui permet de décomposer le système singulier en un sous-système lent et un sous-système rapide (Lewis, 1986), (Dai, 1989).

II.2.1 Décomposition en valeurs singulières

Si la régularité de la paire (E, A) est inconnue, il est possible de trouver deux matrices non singulières M_1 et N_1 telles que (Dai, 1989):

$$\overline{E} = M_1 E N_1 = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \overline{A} = M_1 A N_1 = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}. \quad (\text{II.2})$$

Dans ce cas, le système (II.1) est équivalent à:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t) + B_1 u(t) \\ 0 = A_3 x_1(t) + A_4 x_2(t) + B_2 u(t) \\ y(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Où: $x_1(t) \in \mathbb{R}^n$, $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n-k}$, k étant le rang de la matrice E . Les matrices B_1 , B_2 , C_1 , C_2 , sont telles que:

$$M_1 B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, C N_1 = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, N_1^{-1} x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Cette décomposition est souvent utilisée dans le cadre de l'analyse des systèmes singuliers, principalement pour la vérification des propriétés structurelles telles que la commandabilité, l'observabilité, la régularité, l'immunité d'impulsions (Lewis, 1986), (Dai, 1989), comme le montre le lemme suivant, qui présente une condition équivalente de non impulsivité du faisceau de matrice (E, A) :

Lemme II.2.1 (Dai, 1989):

- Le faisceau de matrice (E, A) est non impulsif ssi A_4 est inversible.

II.2.2 Kronecker-Weierstrass

Cette forme équivalente utilise le résultat énoncé par le lemme suivant:

Lemme II.2.2 (*Gantmacher, 1974*) *Le faisceau de matrice (E, A) est régulier ssi il existe deux matrices non singulières M_2 et N_2 telles que:*

$$M_2 E N_2 = \text{diag}(\mathbb{I}, \mathcal{J}_2), M_2 A N_2 = \text{diag}(\mathcal{A}, \mathbb{I}) \quad (\text{II.4})$$

Dans ce cas, le système (II.1) est équivalent à:

$$\begin{cases} \dot{x}_l = \mathcal{A}x_l(t) + B_1 u(t) \\ \mathcal{J}_2 \dot{x}_r = x_r(t) + B_2 u(t) \\ y(t) = C_1 x_l(t) + C_2 x_r(t) \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

Où: $x_l(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_r(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, $\mathcal{J}_2$ est une matrice nilpotente d'indice de nilpotence p (c-à-d: il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que $\mathcal{J}_2^{p-1} = 0$ et $\mathcal{J}_2^p = 0$), les matrices B_1 , B_2 , C_1 , C_2 et les variables x_l et x_r sont telles que:

$$M_2 B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, C N_2 = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, N_2^{-1} x(t) = \begin{bmatrix} x_l(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix}.$$

Notons que la forme de Kronecker-Weierstrass est aussi un exemple de décomposition par valeurs singulières de E , ce qui est toujours le cas lorsque la matrice $\mathcal{J}_2$ est nulle (Lewis, 1986).

II.3 Réponse temporelle d'un système singulier

La réponse temporelle du sous-système lent est celle d'un système standard (Lewis, 1986), elle est complètement déterminée pour toute condition initiale x_{l0} et pour toute entrée $u(t)$ connue sur l'intervalle $[0, t]$ par :

$$y_l(t) = C_l e^{A_l t} x_{l0} + \int_0^t e^{A_l \tau} B_l u(t - \tau) d\tau$$

Alors que celle du sous-système rapide peut être obtenue en dérivant et en pré-multipliant $(p - 1)$ fois la deuxième équation de (II.5) par $\mathcal{J}$:

$$y_2(t) = \sum_{k=0}^{p-1} C_2 \mathcal{J}_2^k B_2 u^k(t).$$

avec $u(t) \in \mathbb{C}^{p-1}$. Cette réponse dépend exclusivement de la valeur des dérivées de l'entrée à l'instant t .

Ainsi, la solution totale du système, sera donnée par:

$$x(t) = N^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} (e^{A_l t} x_{l0} + \int_0^t e^{A_l \tau} B_l u(t - \tau) d\tau) - N^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbb{I}_{n_2} \end{bmatrix} \sum_{k=0}^{p-1} \mathcal{J}_2^k B_2 u^k(t) \quad (\text{II.6})$$

II.4 Admissibilité des conditions initiales

Considérons le cas particulier: $t > 0$, et t tend vers 0^+ , dans ce cas la réponse totale du système devient:

$$x(0^+) = N^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} x_{l0} - N^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbb{I}_{n_2} \end{bmatrix} \sum_{k=0}^{p-1} J^k B_2 u^k(0^+)$$

lorsque les conditions initiales du système singulier initial vérifient cette contrainte, on dit qu'elles sont admissibles (Lewis, 1986).

La relation (II.6) montre qu'un système singulier admet une trajectoire unique à condition que la condition initiale soit admissible et que la commande $u(t)$ soit $(p-1)$ fois continûment dérivable par morceaux, contrairement à un système standard qui possède une solution unique pour tout $u(t)$ continue par morceaux.

II.5 Critères de stabilité

D'après l'expression de la solution d'un système singulier donnée par (II.6), la réponse libre du sous-système rapide est identiquement nulle pour tout $t > 0$, il apparaît donc que la stabilité d'un système singulier ne dépend que de son sous-système lent. Entre autre, étant donné que toute matrice nilpotente a toutes ses valeurs propres égale à 0, ainsi le spectre généralisé du faisceau (E, A) donné par:

$$sp(E, A) \equiv \max Re(\lambda), \lambda \in \{s | \det(sE - A) = 0\} \quad (\text{II.7})$$

se réduit à l'ensemble des valeurs propres finies du faisceau $sp(\mathbb{I}, \mathcal{A})$. On peut alors caractériser la stabilité d'un système singulier selon le lemme suivant:

Lemme II.5.1 (*Dai, 1989*), (*Lewis, 1986*),

- *Le système singulier (II.1) est dit stable si et seulement si $sp(\mathbb{I}, \mathcal{A}) < 0$.*

Un autre concept qui est important dans l'étude des systèmes singuliers est la notion d'admissibilité. Dans ce sens, les propositions suivantes sont équivalentes:

Lemme II.5.2 (*Dai, 1989*), (*Lewis, 1986*),

- Le système singulier (II.1) est dit admissible, si et seulement si il est régulier, non impulsif et stable.
- Le système singulier (II.1) est dit admissible, si et seulement si $\mathcal{J}_2 = 0$ et $sp(\mathbb{I}, \mathcal{A}) < 0$.

Pour la décomposition en valeurs singulières, cette dernière propriété devient:

Lemme II.5.3 (Dai, 1989), (Lewis, 1986),

- Le système singulier (II.1) est dit admissible, si et seulement si A_4 est inversible et $sp(\mathbb{I}, (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3)) < 0$

Remarque II.5.1 Il est à noter que les lemmes II.5.2 et II.5.3 présentent des conditions équivalentes d'admissibilité d'un système singulier. Néanmoins, ces conditions sont basées sur la décomposition du faisceau de matrice du système original, ceci peut s'avérer difficile surtout lorsque la dimension du système étudiée est importante. Ceci a incité les chercheurs à trouver d'autres approches qui permettent de vérifier l'admissibilité du système (II.1). Dans ce sens, le lemme suivant donne une condition d'admissibilité exprimée sous forme de LMIs qui peut être résolue efficacement à l'aide des outils numériques existants.

Lemme II.5.4 (Masubuchi et al., 1997) la paire (E, A) est admissible si et seulement si il existe une matrice P non singulière telle que:

$$E^\top P = P^\top E \geq 0 \quad (\text{II.8})$$

$$P^\top A + A^\top P < 0 \quad (\text{II.9})$$

ANNEXE III

SYSTÈMES À SAUTS MARKOVIENS

Modèle d'état:

Les systèmes linéaires à sauts markoviens sont des systèmes linéaires pouvant décrire différentes dynamiques. À chaque dynamique est associée un mode, et dans chaque mode, le système peut être considéré comme un système linéaire invariant déterministe. Pour la représentation mathématique de celui-ci, à la variable d'état continue est ajoutée une variable aléatoire discrète (mode). Cette variable décrit les passages (sauts) du système d'une dynamique à l'autre. Mathématiquement, ceci se traduit par la représentation d'état suivante (Mariton, 1990) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(r(t))x(t) + B(r(t))u(t) \\ y(t) = C(r(t))x(t) + D(r(t))u(t), x(0) = x_0, r_{t_0} = r_0 \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et r_0 sont respectivement le vecteur d'état, le vecteur de sortie, le vecteur de commande, le vecteur d'état et le mode initial à l'instant initial t_0 du système; $A(r(t))$, $B(r(t))$, $C(r(t))$, et $D(r(t))$ sont des matrices de dimensions appropriées, et elles sont fonction d'un processus aléatoire $\{r(t), t \geq t_0\}$ correspondant à l'état discret du système. Cet état discret (mode) est généré par un processus de Markov à temps continu et à états finis $r(t)$, prenant ses valeurs dans un ensemble fini $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, N\} \subset \mathbb{N}$ avec la matrice des taux

de transitions suivante:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \dots & \pi_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{N1} & \dots & \pi_{NN} \end{pmatrix}$$

dont les éléments π_{ij} sont définis par les probabilités de transition de l'état i à l'état j et ils sont décrits par les relations suivantes:

$$P[r_{t+\Delta t} = j | r(t) = i] = \begin{cases} \pi_{ij}\Delta t + o(\Delta t) & i \neq j \\ 1 + \pi_{ii}\Delta t + o(\Delta t) & i = j \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

où $\Delta t > 0$, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ et vérifiant:

$$\begin{cases} \pi_{ij} \geq 0 & \forall j \neq i \\ \pi_i := -\pi_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N \pi_{ij} \end{cases}$$

Supposant que $i_0, i_1, \dots, i_k$, $k \in \mathcal{S}$ représentent une séquence de modes visités par le processus $x(t)$ et $\tau_1, \dots, \tau_k$ désignent les instants de sauts correspondant sur l'intervalle $[0, t]$.

La solution générale du système (III.1) est donnée sur l'intervalle $[t_0, t]$ par (Mariton, 1990):

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi_{i0} \left(e^{A(i_0)(\tau_1 - t_0)} \xi_{i0} + \int_{t_0}^{\tau_1} e^{A(i_0)(\tau_1 - s)} B(i_0) u(s) ds \right) \\ &+ \sum_{l=2}^k \left(\phi_{il} \int_{\tau_{l-1}}^{\tau_l} e^{A(i_l)(\tau_l - s)} B(i_l) u(s) ds \right) + \int_{\tau_k}^t e^{A(i_k)(t - s)} B(i_k) u(s) ds \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

où:

$$\phi_{i0} = e^{A(i_k)(t - \tau_k)} e^{A(i_{k-1})(\tau_k - \tau_{k-1})} \dots e^{A(i_1)(\tau_2 - \tau_1)}, \phi_{il} = e^{A(i_l)(t - \tau_l)}.$$

Le théorème suivant donne la condition suffisante qu'un système à sauts markoviens

doit vérifier pour être stochastiquement stable.

Théorème III.0.1 (*Mariton, 1988*) *S'il existe un ensemble de matrices symétriques et définies-positives $P = (P(1), \dots, P(N))$, tel que la LMI suivante est vérifiée pour tout mode $i \in \mathcal{S}$:*

$$A^\top(i)P(i) + P^\top(i)A(i) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij}P(j) < 0 \quad (\text{III.4})$$

alors le système (III.1) avec $u(t) = 0$, $t \geq 0$ est stochastiquement stable.

ANNEXE IV

LA THÉORIE DE LYAPUNOV

En 1892 et dans le cadre de ses travaux de thèse, Lyapunov a proposé une méthode directe appelée deuxième méthode de Lyapunov pour étudier la stabilité d'un système. Cette méthode s'appuie sur une observation physique fondamentale: si l'énergie totale (qui est scalaire) d'un système linéaire ou non linéaire, est continûment dissipée, alors on peut espérer que le système tende vers un point d'équilibre. Ainsi, l'idée de Lyapunov est d'examiner la variation d'une fonction scalaire pour étudier la stabilité d'un système donné. Entre autre, il n'est pas nécessaire de résoudre explicitement les équations du système pour se prononcer sur leur stabilité. Plus tard, dans les années soixante, cette technique a été étendue par (Kushner, 1967) aux systèmes stochastiques, et a été la base de plusieurs études d'analyse et de synthèse de cette classe de système.

Pour les systèmes hybrides en général, deux types de fonctions de Lyapunov sont utilisés: à savoir la fonction de Lyapunov commune et la fonction de Lyapunov stochastique.

IV.1 Fonction quadratique commune

L'idée est d'associer une seule fonction de Lyapunov aux différents modes $r(t) \in \mathcal{S}$ du système à sauts markoviens ou commutation, comme suit:

$$V(x(t), r(t)) = x^\top(t) P x(t), P > 0. \quad (\text{IV.1})$$

L'étude de stabilité à l'aide de ce type de fonction a constitué la base de nombreux travaux jusqu'à maintenant (par exemple (Boyd et al., 1994) et (El Ghaoui et al., 1997)), l'intérêt de cette méthode vient du fait que rechercher une fonction de Lyapunov commune revient à trouver une matrice symétrique définie-positive, ce qui peut être énoncé comme un problème d'optimisation convexe en terme de LMI résolu efficacement. Cependant son défaut majeur réside dans l'obligation de satisfaire N LMIs vis-à-vis de la même matrice P , N étant le nombre des modes du système. En d'autres termes, la fonction de Lyapunov recherchée doit tenir compte de toutes les dynamiques possibles du système, ce qui est extrêmement difficile à réaliser sur un exemple concret. En outre, ces contraintes deviennent encore difficiles à satisfaire si l'on ajoute des contraintes de performances, ce qui rend cette méthode très conservatrice. Pour relaxer ce conservatisme, une autre approche a été utilisée dans la littérature, il s'agit de la fonction de Lyapunov stochastique.

IV.2 Fonction de Lyapunov stochastique:

L'idée de base de cette approche est de partitionner l'espace d'état du système hybride en un nombre de régions et d'associer à chaque région une fonction de Lyapunov. Cette famille de fonctions possède la forme suivante:

$$V_{r_t}(x(t)) = x^\top(t)E^\top(r_t)P(r_t)x(t), P(r_t) > 0, r_t = i \in \mathcal{S}. \quad (\text{IV.2})$$

r_t représente le mode, $\mathcal{S}$ est un ensemble dénombrable et $P(r_t)$ est une matrice symétrique définie-positive.

L'utilisation des fonctions de Lyapunov stochastiques, appelées fonctions de Lyapunov continues par morceaux dans le contexte déterministe (Pettersson et Lennart-

son, 1997a) et (Pettersson et Lennartson, 1997b), est intéressante car elle permet de réduire un problème de stabilité globale d'un modèle non linéaire à l'analyse indépendante de la stabilité locale de modèles linéaires. En effet, ce type de fonction a fait l'objet d'étude dans le cas des systèmes singuliers (Xu et al., 2002) et des systèmes singuliers à sauts markoviens (Boukas, 2005). Elle a permis d'obtenir des conditions suffisantes moins conservatives que celles obtenues en se basant sur une fonction quadratique commune (Yuewu et Jitao, 2002).

ANNEXE V

ALGORITHME

Algorithme V.0.1 1) Trouver un ensemble de solutions réalisables $\{P^o(i), X^o(i), V_P^o(i), Z_P^o(i), \beta^o(ij), \varepsilon^o(ij)\}$, qui vérifie les LMIs (3.2), (3.21) et (3.23). S'il n'existe aucune solution, sortir. Autrement, poser $P(i) = P^o(i), X(i) = X^o(i), V_P(i) = V^o(i), Z_P(i) = Z_P^o(i), \beta(ij) = \beta^o(ij), \varepsilon(ij) = \varepsilon^o(ij)$, initialiser $k, k = 0$ et aller à l'étape (2).

2) Résoudre les problèmes d'optimisation convexe suivants pour les variables $(P, X, Z_P, V_P, \beta, \varepsilon)$ sur leur ensemble réalisable :

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^N \text{Tr}[P(i)X^k(i) + P^k(i)X(i) + V_P(i)Z_P^k(i) + V_P^k(i)Z_P(i)] \\ & + \text{Tr}[\beta^k(ij)\varepsilon(ij)\mathbb{I} + \beta(ij)\varepsilon^k(ij)\mathbb{I}] \end{aligned}$$

sujet aux LMIs (3.2), (3.21) et (3.23).

3) Poser $\mathcal{P}^k(i) = P(i), \mathcal{X}^k(i) = X(i), \mathcal{V}^k(i) = V_P(i), \mathcal{Z}_P^k(i) = Z_P(i), \omega^k(ij) = \beta(ij), \sigma^k(ij) = \varepsilon^k(ij)$,

4) Si le critère suivant est vérifié $|\sum_{i=1}^l \text{Tr}(\mathcal{P}^k(i)X^k(i) + P^k(i)\mathcal{X}^k(i) + \mathcal{V}^k(i)Z^k(i) + V^k(i)\mathcal{Z}^k(i) + \sigma_{ij}^k\beta_{ij}^k + \omega_{ij}^k\varepsilon_{ij}^k - 2\sum_{i=1}^l \text{Tr}(P^k(i)X^k(i) + V^k(i)Z^k(i) + \beta_{ij}^k\varepsilon_{ij}^k))| < \eta$, aller à l'étape (5).

5) Calculer le pas $\alpha \in [0, 1]$ par résolution du problème $\min_{\alpha} h(\alpha)$, où :

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= \sum_{i=1}^N \text{Tr}[(P^k(i) + \alpha(\mathcal{P}^k(i) - P^k(i)))(X^k(i) + \alpha(\mathcal{X}^k(i) - X^k(i))) \\ &+ (V^k(i) + \alpha(\mathcal{V}^k(i) - V^k(i)))(Z^k(i) + \alpha(\mathcal{Z}^k(i) - Z^k(i))) \\ &+ (\varepsilon^k(ij) + \alpha(\sigma^k(ij) - \varepsilon^k(ij)))(\beta^k(ij) + \alpha(\omega^k(ij) - \beta^k(ij)))] \end{aligned}$$

6) Pour tout $i \in \mathcal{S}$, poser $P^{k+1}(i) = (1 - \alpha)P^k(i) + \alpha\mathcal{P}^k(i)$, $X^{k+1}(i) = (1 - \alpha)X^k(i) + \alpha\mathcal{X}^k(i)$, $V^{k+1}(i) = (1 - \alpha)V^k(i) + \alpha\mathcal{V}^k(i)$, $Z^{k+1}(i) = (1 - \alpha)Z^k(i) + \alpha\mathcal{Z}^k(i)$, $\varepsilon^{k+1}(ij) = (1 - \alpha)\varepsilon^k(ij) + \alpha(ij)\sigma^k(ij)$, $\beta_{ij}^{k+1} = (1 - \alpha)\beta_{ij}^k + \alpha\omega^k(ij)$, et $k = k + 1$. Si $k < l$, l , étant le nombre maximal d'itérations, alors aller à l'étape (2), autrement aller à l'étape (7).

7) Si le critère d'arrêt $\sum_{i=1}^N \text{Tr}[P^k(i)X^k(i) + V^k(i)Z^k(i) + \beta^k(ij)\varepsilon^k(ij)] = 2Nn$, est vérifié, alors l'optimum local trouvé est la solution du problème, sinon sortir.

Il est à noter que l'étape 5) consiste à résoudre un problème LMI linéarisé fournissant une solution optimale qui est utilisée pour le calcul du gradient à l'étape suivante (étape 6).

L'algorithme présenté ci-dessous est appelé aussi l'algorithme du gradient conditionnel, (Leibfritz, 2001). Il est particulièrement intéressant numériquement puis qu'on lui trouve le résultat de convergence cité par (El Ghaoui et al., 1997) (voir annexe I, lemme I.4.1.), et a pour avantage sa simplicité de mise en oeuvre. Pour autant, comme toutes les méthodes de linéarisation du premier ordre, la vitesse de convergence s'avère parfois faible au voisinage de l'optimum et il n'est pas rare de ne pas trouver un optimum local dans ce cas il faut faire appel à des méthodes de linéarisation du second ordre (Leibfritz, 2001).