

**Titre:** Effet d'un champ magnétique sur la convection naturelle d'un fluide binaire en milieu poreux confiné  
Title:

**Auteur:** Dina Sandrine Rakoto Ramambason  
Author:

**Date:** 2006

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Rakoto Ramambason, D. S. (2006). Effet d'un champ magnétique sur la convection naturelle d'un fluide binaire en milieu poreux confiné [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
Citation: <https://publications.polymtl.ca/7905/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/7905/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Patrick Vasseur, & Luc Robillard  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

**EFFET D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE SUR LA CONVECTION  
NATURELLE D'UN FLUIDE BINAIRE EN MILIEU POREUX CONFINÉ**

DINA SANDRINE RAKOTO RAMAMBASON  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
AOÛT 2006

© Dina Sandrine Rakoto Ramambason, 2006.



Library and  
Archives Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*  
*ISBN: 978-0-494-19325-9*  
*Our file* *Notre référence*  
*ISBN: 978-0-494-19325-9*

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

  
**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé

**EFFET D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE SUR LA CONVECTION  
NATURELLE D'UN FLUIDE BINAIRE EN MILIEU POREUX CONFINÉ**

présenté par : RAKOTO RAMAMBASON Dina Sandrine

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. PRUD'HOMME Michel, Ph.D., président

M. VASSEUR Patrick, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. ROBILLARD Luc, D.Sc. A., membre et codirecteur de recherche

M. REGGIO Marcelo, Ph.D., membre

## DÉDICACE

À la mémoire de mon père

À ma mère

À mes frères et sœurs

À Nicolas

À mes chers petits neveux et nièces

À ma famille et à mes amis

## REMERCIEMENTS

De prime abord, je remercie l'**Éternel** pour l'accomplissement de mon travail de mémoire de maîtrise car c'est à Lui qu'appartient la connaissance et l'intelligence.

Mes remerciements les plus chaleureux vont en particulier aux professeurs **Patrick Vasseur** et **Luc Robillard**, respectivement mon directeur de recherche et mon co-directeur de recherche pour la réalisation de cette thèse. Leurs conseils et leurs encadrements technique et scientifique m'ont été précieux.

Je tiens à réitérer mes sincères et vifs remerciements à mon professeur **Patrick Vasseur** pour son accueil chaleureux au sein du Groupe de Convection Naturelle, pour toute sa disponibilité durant ma maîtrise, pour tout l'encadrement et la rigueur scientifique qu'il m'a accordé, pour toutes les connaissances que j'ai pu acquérir durant ces deux années d'étude mais aussi pour les conditions matérielles et financières qui m'ont permis de réaliser ma maîtrise.

J'adresse mes vifs remerciements au professeur **Michel Prud'Homme** pour avoir accepté de présider le jury d'examen de ce mémoire. Je remercie également le professeur **Marcelo Reggio** pour sa disponibilité et son intérêt de bien vouloir faire partie du membre de jury d'examen.

Je tiens aussi à remercier les professeurs, les membres et personnels du Département de Génie mécanique et en particulier ceux de la section Aérothermique.

Je tiens à remercier sincèrement tous les membres de notre Groupe de Convection Naturelle ainsi que tous mes collègues de laboratoire, **Ali, Tri, Zineddine, Amine** et **Antoine** pour les chaleureuses discussions, pour leur accueil au sein du groupe

et l'ambiance de travail qu'ils ont su créer ainsi que pour leurs conseils judicieux qu'ils ont pu me donner tout au long de mes études.

Ma plus profonde gratitude va à l'égard de **ma chère mère** qui a toujours cru en moi, en ma capacité de surmonter les problèmes et les défis; son soutien et son encouragement à travers les mots doux et les prières m'ont permis de ne jamais baisser les bras et d'atteindre mon but. Puisse le Bon Dieu lui accorder une longue vie, de la joie et du bonheur.

Je ne pourrais jamais oublier les soutiens moraux de mon cher **Nicolas**, de mes chers frères **Christian**, **Franck** et **Tsilavina** ainsi que toute ma famille qui m'ont toujours accompagné à travers leurs encouragements et leurs prières malgré l'éloignement. Qu'ils veuillent trouver ici mes plus vifs et sincères remerciements.

Mes remerciements vont à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de mes études de maîtrise, à toute ma grande famille ainsi que tous mes amis pour leurs soutiens moraux et matériels, pour leur réconfort et surtout pour leurs prières.

## RÉSUMÉ

Le transfert de chaleur et d'espèce couplé par convection naturelle dans un milieu poreux saturé par du fluide binaire électriquement conducteur en présence d'un champ magnétique a suscité beaucoup d'attention ces dernières années. Cet intérêt est dû aux différentes applications de tels fluides dans l'ingénierie et dans la géophysique. Une investigation analytique et numérique est faite pour étudier l'effet d'un champ magnétique sur la convection naturelle dans une cavité poreuse horizontale contenant un mélange binaire électriquement conducteur. Un flux de chaleur est appliqué aux parois horizontales, les parois verticales étant maintenues adiabatiques. Un champ magnétique uniforme et constant  $\vec{B}'_0$  est appliqué parallèlement à la gravité.

Deux types de problèmes ont été étudiés concernant la convection naturelle de fluides binaires en milieu poreux. Le premier type de problème est la convection doublement diffusive. Dans ce cas, les forces solutales dans le milieu poreux sont induites par l'imposition d'un flux de masse constant  $j'$  ( $a = 0$ ) sur les frontières de la cavité. Le deuxième type de problème est la convection induite par effet de Soret appelée aussi thermodiffusion. Ce cas correspond à la migration d'espèce induite dans le mélange homogène initial soumis à un gradient thermique ( $a = 1$ ).

Les paramètres de contrôle régissant le problème sont le nombre de Rayleigh thermique,  $R_r$ , le nombre de Hartmann,  $Ha$ , le nombre de Lewis,  $Le$ , le rapport de forces de volume,  $\varphi$ , le rapport de forme de la cavité,  $A$ , la porosité normalisée du milieu poreux,  $\varepsilon$ , et la constante  $a$ . Une solution analytique approximée, valide pour une cavité allongée ( $A \gg 1$ ), est dérivée en se basant sur l'approximation de l'écoulement parallèle. Dans la gamme des paramètres de contrôle considérés dans cette



étude, un bon accord est trouvé entre les prédictions analytiques et les résultats numériques obtenus en résolvant les équations de base complètes régissant le problème.

Les effets des paramètres de contrôle sur le transfert de chaleur et de l'espèce sont discutés et il a été trouvé qu'en augmentant l'intensité du champ magnétique, on diminue le nombre de Nusselt et le nombre de Sherwood.

## ABSTRACT

Coupled heat and mass transfer by natural convection in electrically conducting binary fluids saturated porous media, in the presence of a magnetic field, has attracted attention in recent years. This is due to the occurrence of such fluids in various engineering and geophysical applications.

An analytical and numerical investigation is conducted to study the effect of an electromagnetic field on natural convection in a horizontal porous cavity filled with an electrically conducting binary mixture. A uniform heat flux is applied to the horizontal walls of the layer while the vertical walls are adiabatic. A uniform and constant magnetic field  $\vec{B}_0$  is applied parallel to gravity.

Two types of problems, concerning natural convection of binary fluids in porous media, have been investigated. The first type of problem is the so-called double diffusive convection. For this situation, the solutal contribution to the total buoyancy force induced in the fluid mixture, by both the thermal and solutal gradients, results from given solutal boundary conditions applied on the walls of the cavity ( $a = 0$ ). The second type of problem is the Soret effect, also called thermal diffusion or thermodiffusion. This case corresponds to species migration induced in an initial homogeneous mixture submitted to a thermal gradient ( $a = 1$ ).

Governing parameters of the problem under study are the thermal Rayleigh number,  $R_T$ , Hartmann number,  $Ha$ , Lewis number,  $Le$ , buoyancy ratio  $\varphi$ , aspect ratio,  $A$ , normalized porosity of the porous medium,  $\varepsilon$ , and constant  $a$ . An analytical solution, valid for a shallow layer ( $A \gg 1$ ) is derived on the basis of the parallel flow approximation. In the range of the governing parameters considered in this study, a good

agreement is found between the analytical predictions and the numerical results obtained by solving the full governing equations. Numerical confirmation of the stable analytical results is also presented.

The effects of the governing parameters on the heat and mass transfer are discussed and it was found that increasing the strength of the magnetic field decreases the local Nusselt and Sherwood numbers.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>DÉDICACE</b> .....	iv
<b>REMERCIEMENTS</b> .....	v
<b>RÉSUMÉ</b> .....	vii
<b>ABSTRACT</b> .....	ix
<b>TABLES DES MATIÈRES</b> .....	xi
<b>LISTE DES FIGURES</b> .....	xiv
<b>LISTE DES TABLEAUX</b> .....	xvii
<b>NOMENCLATURE</b> .....	xviii
<b>CHAPITRE I : INTRODUCTION</b> .....	1
1.1 Généralités .....	1
1.2 Contenu du mémoire .....	2
1.3 Revue bibliographique .....	3
<b>CHAPITRE II : FORMULATION DU PROBLÈME</b> .....	18
2.1 Problème considéré dans cette étude .....	18
2.2 Hypothèses simplificatrices .....	18
2.2.1 Hypothèse de Boussinesq .....	20
2.3 Équations gouvernantes .....	21
2.3.1 Équation de continuité .....	21
2.3.2 Équation du mouvement .....	21
2.3.3 Équation de conservation d'énergie .....	22
2.3.4 Équation de conservation de l'espèce .....	23
2.3.5 Conditions aux frontières hydrodynamiques .....	24
2.3.6 Conditions aux frontières thermiques et massiques .....	25
2.4 Équations gouvernantes adimensionnelles .....	25

2.4.1	Équations de base adimensionnelles .....	26
2.5	Conditions aux frontières adimensionnalisées .....	27
2.6	Taux de transfert thermique et solutale .....	28
2.6.1	Nombre de Nusselt .....	28
2.6.2	Nombre de Sherwood .....	28
<b>CHAPITRE III : SOLUTION ANALYTIQUE DU PROBLÈME .....</b>		<b>29</b>
3.1	Introduction .....	29
3.2	Concept de l'écoulement parallèle .....	30
3.3	Équations de base simplifiées .....	35
3.4	Solution générale de la fonction de courant et de la vitesse .....	35
3.5	Équations générales du profil de température et de concentration .....	36
3.6	Les gradients de température et de concentration .....	37
3.7	Rayleigh supercritique .....	41
3.8	Rayleigh souscritique .....	42
3.9	Les taux de transfert de chaleur et de masse .....	44
3.8.1	Nombre de Nusselt .....	44
3.8.2	Nombre de Sherwood .....	45
<b>CHAPITRE IV : SOLUTION NUMÉRIQUE .....</b>		<b>47</b>
4.1	Introduction .....	47
4.2	Méthode des différences finies .....	47
4.3	Maillage .....	48
4.4	Algorithme de calcul .....	49
4.5	Critère de convergence .....	49
4.6	Validation du code numérique .....	50
<b>CHAPITRE V : RÉSULTATS ET DISCUSSIONS .....</b>		<b>53</b>
5.1	Influence du rapport de forme de la cavité, $A$ .....	53

5.2 Influence du nombre de Hartmann, $Ha$ .....	61
5.3 Influence du rapport des forces de volume, $\varphi$ .....	64
5.3.1 Cas où les forces de volume sont coopérantes ( $\varphi > 0$ ) .....	64
5.3.2 Cas où les forces de volume sont opposées ( $\varphi < 0$ ) .....	69
5.4 Solution normalisée pour le cas asymptotique $A \gg 1$ .....	73
5.4.1 Cas où les forces de volume sont coopérantes ( $\varphi > 0$ ) .....	74
5.4.2 Cas où les forces de volume sont opposés ( $\varphi < 0$ ) .....	81
<b>CONCLUSION</b> .....	84
<b>BIBLIOGRAPHIE</b> .....	87

## LISTES DES FIGURES

<b>Figure 2.1:</b>	Représentation graphique du modèle physique et du système d'axes	19
<b>Figure 3.1:</b>	Représentation graphique du volume de contrôle dans la cavité poreuse .....	32
<b>Figure 3.2:</b>	Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations obtenues pour $R_T = 100$ , $Le = 2$ , $\varphi = 1$ , $A = 1$ : a) $a = 0$ , $\psi_0 = 3.989$ , $Nu = 3.619$ , $Sh = 5.378$ et b) $a = 1$ , $\psi_0 = 3.285$ , $Nu = 3.129$ , $Sh = 11.099$ .....	33
<b>Figure 3.3:</b>	Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations obtenues pour $R_T = 100$ , $Le = 2$ , $\varphi = 1$ , $A = 8$ : a) $a = 0$ , $\psi_0 = 4.693$ , $Nu = 4.286$ , $Sh = 5.390$ et b) $a = 1$ , $\psi_0 = 3.890$ , $Nu = 3.847$ , $Sh = 7.887$ .....	34
<b>Figure 5.1:</b>	Lignes de courant, de température et de concentration pour $R_T = 200$ , $Le = 2$ , $\varphi = 0.2$ , $Ha = 1$ et $a = 0$ : a) $A = 1$ , $\psi_0 = 3.898$ , $Nu = 3.488$ , $Sh = 5.198$ , b) $A = 2$ , $\psi_0 = 4.012$ , $Nu = 3.849$ , $Sh = 5.224$ , c) $A = 4$ , $\psi_0 = 3.932$ , $Nu = 3.882$ , $Sh = 5.203$ et d) $A = 8$ , $\psi_0 = 3.927$ , $Nu = 3.866$ , $Sh = 5.176$ .....	54
<b>Figure 5.2:</b>	Lignes de courant, de température et de concentration pour $R_T = 200$ , $Le = 2$ , $\varphi = 0.2$ , $Ha = 1$ et $a = 1$ : a) $A = 1$ , $\psi_0 = 3.691$ , $Nu = 3.364$ , $Sh = 10.379$ , b) $A = 2$ , $\psi_0 = 3.814$ , $Nu = 3.733$ ,	

$Sh = 8.299$ , c)  $A = 4$ ,  $\psi_0 = 3.750$ ,  $Nu = 3.766$ ,  $Sh = 8.085$ , d)  
 $A = 8$ ,  $\psi_0 = 3.745$ ,  $Nu = 3.750$ ,  $Sh = 8.022$  ..... 57

**Figure 5.3:** Effet de  $A$  sur la fonction de courant, sur le nombre de Nusselt  $Nu$  et le nombre de Sherwood  $Sh$  pour  $R_T = 200$ ,  $Le = 1$ ,  $\varphi = 0$ ,  $a = 0$  et  $Ha = 0$  et 1 : a)  $\psi_0$  en fonction de  $A$  et b)  $Nu$  et  $Sh$  en fonction de  $A$  ..... 60

**Figure 5.4:** Lignes de courant, de température et de concentration pour  $R_T = 250$ ,  $Le = 10$ ,  $\varphi = 0.5$ ,  $A = 1$ ,  $a = 1$ : a)  $Ha = 0$ ,  $\psi_0 = 5.151$ ,  $Nu = 4.366$ ,  $Sh = 16.703$ ; b)  $Ha = 2$ ,  $\psi_0 = 2.584$ ,  $Nu = 2.597$ ,  $Sh = 12.422$ ; c)  $Ha = 10$ ,  $\psi_0 = 0.381$ ,  $Nu = 1.001$ ,  $Sh = 1.017$  ..... 63

**Figure 5.5:** Effet du nombre de Hartmann sur le diagramme de bifurcation pour le cas  $\varphi = 0.5$ ,  $Le = 10$ ,  $a = 1$  : a)  $\psi_0$  en fonction de  $R_T$ , b)  $Nu$  en fonction de  $R_T$  et c)  $Sh$  en fonction de  $R_T$  ..... 67

**Figure 5.6:** Effet du nombre de Hartmann sur le diagramme de bifurcation pour le cas  $\varphi = -0.5$ ,  $Le = 10$ ,  $a = 1$  : a)  $\psi_0$  en fonction de  $R_T$ , b)  $Nu$  en fonction de  $R_T$  et c)  $Sh$  en fonction de  $R_T$  ..... 72

**Figure 5.7:** Diagramme de bifurcation normalisé en fonction du nombre de Rayleigh modifié  $\bar{R}_T$  pour  $Le = 2$ ,  $\varphi = 0.2$  et  $a = 0$  (convection doublement diffusive),  $\varphi = 0$  et  $a = 0$  (convection thermique pure) : a)  $\psi_0$  en fonction de  $\bar{R}_T$ , b)  $Nu$  en fonction de  $\bar{R}_T$  et c)  $Sh$  en fonction de  $\bar{R}_T$  ..... 77



- Figure 5.8:** Diagramme de bifurcation normalisé en fonction du nombre de Rayleigh modifié  $\bar{R}_T$  pour  $Le=2$ ,  $\varphi=0.2$  et  $a=1$  (convection induite par effet Soret),  $\varphi=0$  et  $a=0$  (convection thermique pure) :a)  $\psi_0$  en fonction de  $\bar{R}_T$ , b)  $Nu$  en fonction de  $\bar{R}_T$  et c)  $Sh$  en fonction de  $\bar{R}_T$  ..... 80
- Figure 5.9:** Diagramme de bifurcation normalisé en terme de  $\psi_0$  en fonction du nombre de Rayleigh modifié  $\bar{R}_T$  pour  $Le=2$ ,  $a=0$ ,  $\varphi=-0.2$  et  $\varphi=0$  ..... 82
- Figure 5.10:** Diagramme de bifurcation en terme de  $\psi_0$  en fonction du nombre de Rayleigh modifié  $\bar{R}_T$  pour  $Le=2$ ,  $a=1$ ,  $\varphi=-0.2$  et  $\varphi=0$  ..... 83

## LISTE DES TABLEAUX

<b>Tableau 4.1 :</b>	Comparaison entre les résultats numériques de Mamou [1998], Kalla [2004] et la présente étude pour $R_T = 100$ , $Le = 10$ , $\varphi = -0.8$ , $Ha = 0$ , $a = 0$ et $A = 8$ .....	50
<b>Tableau 4.2 :</b>	Effet du maillage sur la précision des résultats pour $R_T = 500$ , $Le = 2$ , $\varphi = 0.5$ , $Ha = 1$ , $a = 1$ et $A = 1$ .....	51
<b>Tableau 4.3 :</b>	Comparaison entre les résultats numériques et les résultats analytiques pour $R_T = 200$ , $Le = 2$ , $\varphi = 0.2$ , $Ha = 1$ , $a = 0$ et $A = 4$ .....	52
<b>Tableau 5.1:</b>	Nombre de Rayleigh supercritique en fonction de différents nombres de Hartmann pour le cas $\varphi = 0.5$ , $Le = 10$ et $a = 1$ .....	68
<b>Tableau 5.2 :</b>	Nombre de Rayleigh souscritique en fonction de différentes valeurs de $Ha$ pour le cas $\varphi = -0.5$ , $Le = 10$ , $a = 1$ .....	73

## NOMENCLATURE

$a$	nombre réel
$A$	rapport de forme de la cavité, $L'/H'$
$\bar{B}'_0$	champ magnétique appliqué
$C_s$	gradient de concentration adimensionnel
$C_T$	gradient de température adimensionnel
$D$	diffusivité massique
$D'$	coefficient de l'effet de la diffusion thermique,
$Da$	nombre de Darcy, $K/H'$
$g$	accélération de la pesanteur
$H'$	hauteur de la cavité
$Ha$	nombre de Hartmann, $B'_0 \sqrt{K\gamma/\mu}$
$j'$	flux de masse constant (par unité de surface)
$J'$	densité du courant électrique
$k_p$	conductivité thermique du milieu poreux
$K$	perméabilité du milieu poreux
$L'$	longueur de la cavité
$Le$	nombre de Lewis, $\alpha/D$
$N$	concentration du soluté
$\Delta N$	différence caractéristique de concentration
$Nu$	nombre de Nusselt, $q'/(k_p \Delta T'/H')$
$q'$	flux de chaleur constant (par unité de surface)
$P$	pression hydrodynamique adimensionnelle, $P'(K/\alpha\mu)$

$Re$	nombre de Reynold, $V'\sqrt{K}/\nu$
$R_S$	nombre de Rayleigh solutal, $g\beta_N K\Delta NH'/\nu D$
$R_T$	nombre de Rayleigh thermique, $g\beta'_T K\Delta T'H'/\nu\alpha$
$R_T^*$	nombre de Rayleigh thermique modifié, $R_T/R^{sup}$
$R_{TH}^*$	nombre de Rayleigh thermique modifié, $R_T^*/(1+Ha^2)$
$\bar{R}_T$	nombre de Rayleigh thermique modifié, $R_T/(1+Ha^2)$
$R_{TC}^{sup}$	nombre de Rayleigh thermique supercritique
$\bar{R}_{TC}^{sup}$	nombre de Rayleigh thermique supercritique modifié, $R_{TC}^{sup}/(1+Ha^2)$
$R_{TC}^{sub}$	nombre de Rayleigh souscritique
$\bar{R}_{TC}^{sub}$	nombre de Rayleigh souscritique modifié, $R_{TC}^{sub}/(1+Ha^2)$
$S$	concentration normalisée
$Sh$	nombre de Sherwood, $1/\Delta S$
$\Delta S$	écart de concentration adimensionnel
$t$	temps adimensionnel
$T$	température adimensionnelle
$T'_0$	température de référence à $x = y = 0$
$\Delta T'$	différence caractéristique de température, $q'H'/k_p$
$\Delta T$	écart de température adimensionnel
$u$	composante de vitesse adimensionnelle dans la direction $x$
$v$	composante de vitesse adimensionnelle dans la direction $y$
$V'$	vitesse moyenne des particules de fluide à travers la matrice solide
$(x, y)$	coordonnées cartésiennes adimensionnelles, $(x', y')/H'$

### Symboles grecques

$\alpha$	diffusivité thermique
$\beta_T'$	coefficient d'expansion thermique du fluide
$\beta_N$	coefficient d'expansion solutale du fluide
$\varepsilon$	porosité normalisée du milieu poreux, $\phi/\sigma$
$\varphi$	rapport des forces solutales, $\beta_N \Delta N / \beta_T' \Delta T'$
$\gamma$	conductivité électrique
$\mu$	viscosité dynamique du fluide
$\nu$	viscosité cinématique du fluide
$\theta_s$	champ de concentration adimensionnel
$\theta_T$	champ de température adimensionnel
$\rho$	densité du fluide
$(\rho C)_f$	chaleur spécifique du fluide
$(\rho C)_p$	chaleur spécifique du milieu poreux
$\sigma$	rapport des chaleurs spécifiques, $(\rho C)_p / (\rho C)_f$
$\psi$	fonction de courant adimensionnelle
$\psi_0$	fonction de courant adimensionnelle dans le centre de la cavité
$\phi$	porosité du milieu poreux
$\mathcal{G}'$	potentiel électrique

**Indices**

0            état de référence

**Exposants**

'            variable dimensionnelle

*sub*        sous critique

*sup*        supercritique

# CHAPITRE I

## INTRODUCTION

### 1.1 Généralités

La convection naturelle désigne le processus de transfert thermique résultant du mouvement des particules élémentaires d'un fluide entre des zones ayant des températures différentes. Ce mouvement entraîne un mélange intense des particules fluides, qui échangent de l'énergie et de la quantité de mouvement entre elles.

Contrairement à la convection forcée, dont le mouvement du fluide est dû à un apport externe d'énergie, la convection naturelle a pour origine les variations de la masse volumique au sein même du fluide, liées aux variations de sa température. La structure et l'intensité de la convection naturelle sont en relation directe avec les conditions thermiques qui la déclenchent, la nature du fluide et la géométrie de l'espace où a lieu le processus.

Le phénomène de la convection naturelle en milieu poreux est fréquemment rencontré dans la nature et dans la technologie. En général, on utilise le modèle de Darcy et l'approximation de Boussinesq pour modéliser la convection au sein d'un milieu poreux. La synthèse des travaux de recherche disponibles sur ce mode de transfert de chaleur et de masse est consignée dans le livre de Nield et Bejan [1999].

La convection naturelle doublement diffusive ou thermosolutale est un autre type de phénomène qui a été étudié en premier par Stommel [1956] et Stern [1969]. Dans ce cas, les variations volumiques au sein du fluide sont non seulement induites par des variations de température mais également par des variations de concentration. Les études

théoriques et numériques relatives à la convection thermosolutale en milieu poreux sont peu nombreuses, comparées à celles développées pour un fluide pur. Parmi les premières études effectuées sur ce sujet, nous pouvons citer les travaux de Nield [1968] et Tauton et Lightfoot [1972].

Le transfert de l'espèce par le biais d'un gradient de concentration induit par un gradient thermique, processus connu sous le nom de thermodiffusion ou d'effet Soret est un autre type de phénomène physique important. Ce dernier, relativement peu étudié, peut jouer un rôle important dans certains processus naturels ou configurations industrielles comme le processus de désalinisation et la croissance cristalline. Parmi les études récentes disponibles sur ce phénomène nous pouvons citer entre autres les travaux effectués par Joly et al. [2000] et Boutana et al. [2004].

## **1.2 Contenu du mémoire**

Ce mémoire comprend six chapitres. Dans le premier chapitre, nous introduisons les généralités liées à notre problème physique ; un travail de recherche bibliographique portant sur les effets magnétiques sur la convection naturelle d'un fluide binaire sera ainsi présenté.

Le second chapitre présente les formulations mathématiques du problème, c'est-à-dire, la définition du modèle physique proposé, les équations de base régissant ce modèle physique ainsi que tous les paramètres de contrôle.

L'objet du troisième chapitre est de développer une solution analytique, valide pour une cavité allongée, basée sur l'approximation de l'écoulement parallèle.

Dans le chapitre suivant, nous décrivons le code numérique utilisé dans cette étude, basée sur la méthode des différences finies.

Le cinquième chapitre sera consacré à la confrontation entre les résultats obtenus analytiquement avec ceux obtenus numériquement ainsi qu'à la discussion de ces derniers. Enfin, le dernier chapitre présentera une conclusion générale.



### 1.3 Revue bibliographique

Cette partie est consacrée à la revue de différentes investigations effectuées dans le passé sur l'effet d'un champ magnétique sur le phénomène de la convection naturelle d'un fluide, pur ou binaire, électriquement conducteur.

La première investigation portant sur l'interaction entre un champ magnétique externe et la convection naturelle d'un fluide pur semble avoir été faite par Sparrow et Cess [1961]. L'étude considérait le cas d'un écoulement, en régime de type couche limite laminaire, sur une plaque verticale isotherme. Il a été trouvé que, pour des métaux liquides, le transfert de chaleur par convection naturelle pouvait être notablement affecté par la présence d'un champ magnétique; alors qu'avec d'autres fluides ces effets étaient très petits.

Le même problème a été repris par Emery [1963] afin de déterminer l'effet d'un champ magnétique sur la convection naturelle d'un fluide conducteur (mercure) confiné dans une cavité verticale. La plaque verticale est placée dans un canal rectangulaire vertical et étroit. Les résultats de l'expérimentation ont montré que la réduction du taux de transfert de chaleur à travers le mercure, due à l'application d'un champ magnétique transversal  $B_0'$ , est fonction du paramètre  $B_0'^2 / \sqrt{\Delta T_c}$ , dans lequel  $\Delta T_c$  est la différence de température entre les parois verticales de la cavité.

Chamkha [1997a] a considéré la convection naturelle hydromagnétique sur une plaque verticale bordant un milieu poreux saturé et thermiquement stratifié. Le fluide pur est supposé être électriquement conducteur et générateur de chaleur. Il a constaté que le nombre de Nusselt diminue quand le nombre de Hartmann, le paramètre de stratification ou quand le paramètre d'inertie du milieu augmentent. Les mêmes résultats ont été obtenus par Elbashbeshy [2000] quand il a étudié l'effet d'un champ magnétique sur l'écoulement d'un fluide incompressible, avec une viscosité et une diffusivité

thermique variable avec la température. Ainsi, il a été observé que la vitesse adimensionnelle près de la plaque verticale diminue, à mesure que le champ magnétique augmente, alors que cela fait augmenter la distribution de température.

Pour ce type de configuration géométrique, un certain nombre de publications ont considéré le cas un fluide binaire (par exemple une solution aqueuse salée). Ainsi, Elbashbeshy [1997] a étudié le transfert de chaleur et de masse le long d'une plaque verticale sous l'effet d'une force de flottaison résultant des effets combinés de gradients thermique et solutal, en présence d'un champ magnétique. Les équations de la couche limite sont résolues numériquement et les résultats montrent que la valeur maximale de la vitesse diminue avec l'augmentation du champ magnétique,  $B_0$ . Cependant, elle augmente avec le rapport de forces de volume,  $\varphi$ , et le nombre de Prandtl,  $Pr$ . Il a été démontré que  $Nu$  et  $Sh$  diminuent avec l'augmentation de  $B_0$  et de  $\varphi$ . L'effort de cisaillement local exercé par l'écoulement sur la paroi diminue quand le champ magnétique  $B_0'$  augmente ; tandis que celui-ci augmente quand le rapport de forces de volume  $\varphi$  et le nombre de Prandtl  $Pr$  augmentent.

Une méthode intégrale a été utilisée par Cheng [1999] pour étudier l'effet d'un champ magnétique sur la convection naturelle d'un fluide binaire sur une plaque verticale bordant un milieu poreux saturé d'un fluide électriquement conducteur et soumise à une température et une concentration constante. Il a démontré que l'application d'un champ magnétique transversale, normale à la direction de l'écoulement, diminue les nombres de Nusselt et de Sherwood. De plus, le rapport entre l'épaisseur de la couche limite thermique et celle de la couche limite de concentration est indépendant de l'intensité du champ magnétique.

Hassanien et Obied Allah [2002] ont fait une étude sur l'effet de la variation de la perméabilité sur l'écoulement d'un fluide binaire dans un milieu poreux, en présence

d'un champ magnétique. Le milieu poreux est limité par une surface verticale maintenue à température constante. On suppose que la perméabilité du milieu poreux fluctue dans le temps autour d'une valeur constante moyenne. Les résultats ont montré que la vitesse de l'écoulement augmente avec l'augmentation de la perméabilité du milieu poreux, du nombre de Grashof et de la fréquence de la fluctuation de la perméabilité. Cependant, quand le champ magnétique augmente, la vitesse diminue.

Chand et al. [2002] ont considéré l'effet d'un champ magnétique sur la convection naturelle d'un fluide binaire à travers un milieu poreux limité par une surface verticale infinie soumise à un flux de chaleur constant et une aspiration ou une succion dépendant du temps. Ils ont trouvé que pour une plaque refroidie, la vitesse augmente avec le nombre de Schmidt,  $Sc$ . Par contre, une diminution de la température maximum est observée quand le nombre de Schmidt augmente. Ils ont aussi démontré que l'effet du champ magnétique était d'augmenter la température maximum.

La convection non permanente d'un fluide binaire, au voisinage d'une plaque poreuse verticale infinie se déplaçant avec une vitesse dépendant du temps, a été investiguée par Takhar et al. [2003]. Ils ont considéré les effets combinés de la diffusion massique thermique et du champ magnétique. Il a été trouvé que l'effet de la succion du fluide au voisinage de la plaque est d'augmenter les nombres de Nusselt et de Sherwood. L'effet de l'injection est opposé à celui de la succion.

En considérant l'effet Soret et l'effet Dufour, Postelnicu [2004] a présenté une étude numérique sur la convection naturelle d'un fluide binaire sous l'influence d'un champ magnétique appliqué sur les parois d'une plaque verticale placée dans un milieu poreux. Les équations de type couche limite sont résolues numériquement en utilisant la méthode des différences finies. Il a été trouvé que l'épaisseur des couches limites hydrodynamiques, thermiques et solutales augmentaient avec l'accroissement du champ magnétique.

En tenant compte des effets de chauffage ohmique et de la dissipation visqueuse, Chen [2004] a étudié le problème du transfert de chaleur et de masse de la convection naturelle d'un fluide binaire au voisinage d'une plaque verticale. Il a montré que la présence d'un champ magnétique tend à diminuer, d'une manière efficace, le coefficient de frottement superficiel, le nombre de Nusselt et le nombre de Sherwood. Quand l'effet de dissipation visqueuse est inclus, une réduction considérable du taux de transfert thermique se produit. L'augmentation du rapport de force de volume,  $\varphi$ , conduit à l'augmentation du nombre de Sherwood local pour de petites valeurs de la coordonnée axiale adimensionnelle. L'augmentation du nombre de Schmidt,  $Sc$ , tend à augmenter le nombre de Sherwood, mais ceci tend à diminuer le coefficient de frottement superficiel.

Cheng [2005] a utilisé la méthode intégrale pour étudier le problème de la convection naturelle au voisinage d'une plaque verticale dans un milieu poreux saturé par un fluide binaire électriquement conducteur en présence d'un champ magnétique transversal. Il a été supposé que la température et la concentration le long de la plaque augmente avec une loi en puissance. Dans ses résultats numériques, il a montré qu'en augmentant la loi de la puissance, on augmente aussi les nombres locaux de Nusselt et de Sherwood alors qu'en augmentant le champ magnétique, ces derniers diminuent. Le rapport de l'épaisseur de la couche-limite thermique et de l'épaisseur de la couche-limite solutale augmente avec le nombre de Lewis. Il augmente également avec le rapport de forces de volume tant que le nombre de Lewis est différent de l'unité.

Enfin pour la même configuration, c'est-à-dire pour une plaque verticale, Naroua et al. [2005] ont fait une analyse, par la méthode des différences finies, sur la convection naturelle d'un fluide pur électriquement conducteur à travers un milieu poreux. Les effets d'une porosité variable et d'un transfert thermique radiatif sont pris en considération. Les profils de vitesse ont été examinés pour les deux cas de Grashof,  $Gr > 0$  et  $Gr < 0$ , qui correspondent respectivement au refroidissement et au

réchauffement de la plaque. Pour  $Gr > 0$ , on observe un accroissement de la pente des profils de vitesse en fonction du temps et de l'intensité de la radiation. Par contre, on remarque une évolution négative des profils de vitesse en augmentant le nombre de Prandtl, la perméabilité du milieu poreux et le champ magnétique. Dans le cas où  $Gr < 0$ ; les résultats numériques montrent que la vitesse augmente en augmentant le nombre de Prandtl, et qu'elle diminue quand la radiation, l'intensité du champ magnétique et la perméabilité du milieu poreux augmentent

Raptis et al. [1982] ont étudié la stabilité de l'écoulement d'un fluide en milieu poreux bordé par deux plaques horizontales infinies, en présence d'un champ magnétique constant vertical. Les effets du nombre de Grashof,  $Gr$ , et de la perméabilité ont été observés sur le champ de vitesse. Les résultats montrent que lorsque le nombre de Grashof augmente, la vitesse diminue alors que cette dernière augmente quand la perméabilité augmente.

Henry et al. [2005] ont étudié les effets d'un champ magnétique vertical et de la tension de surface sur la stabilité de la convection thermogravitationnelle dans une couche fluide horizontale infinie sujette à un gradient de température horizontal. La solution analytique est obtenue sur la base de la théorie de la stabilité linéaire. Ils ont montré qu'un champ magnétique et une force de surface de type Marangoni stabilisent fortement l'écoulement en ce qui concerne les modes oscillants bidimensionnels d'origine dynamique. L'évolution de ces modes est caractérisée par de plus longues cellules et des fréquences plus fortes.

Les études discutées ci-dessus concernent le cas d'un milieu infinie bordé soit par une plaque verticale ou soit par deux couches horizontales. Un certain nombre d'études ont également été faite sur le cas d'un milieu poreux confinés dans des cavités rectangulaires. La première étude sur le problème de la stabilité de la convection naturelle, en présence d'un champ magnétique externe, dans une cavité rectangulaire

horizontale chauffée par le bas a été faite par Tabeling [1982]. Il a démontré que lorsque le champ magnétique est appliqué horizontalement, la propriété d'isotropie de l'opérateur régissant l'instabilité est supprimée et qu'une réorientation complète des cellules convectives peut se produire. D'un autre côté dans le cas où le champ magnétique est appliqué verticalement, cette situation peut se réduire, par une transformation d'échelle, à la configuration hydrodynamique (champ magnétique extérieur nul)

Cette géométrie a été aussi étudiée analytiquement par Garandet et al. [1992]. Ils ont démontré que pour un nombre de Hartmann élevé, le gradient de vitesse au cœur de la cavité est toujours constant, en dehors dans les deux couches de Hartmann, à proximité de parois normales au champ magnétique. Il a été montré que la solution obtenue est applicable partout dans la cavité, excepté à proximité du mur froid.

Plus tard, une investigation analytique et numérique a été faite par Alchaar, Vasseur et Bilgen [1995a] sur l'effet d'un champ magnétique transverse sur la convection naturelle d'un fluide pur dans une cavité rectangulaire horizontale. Cette dernière est chauffée par un côté et refroidie par l'autre et les parois horizontales sont considérées adiabatiques. Les résultats analytiques et numériques représentent les profils de vitesse et de température et de transfert de chaleur en termes de nombre de Hartmann. On observe que pour des nombres de Hartmann élevés, le gradient de vitesse dans le cœur de la cavité est constant en dehors des deux couches de Hartmann, à proximité des parois normales au champ magnétique.

Rudraiah et al. [1995] ont aussi fait une étude sur la convection naturelle dans une cavité rectangulaire verticale remplie d'un fluide pur électriquement conducteur en présence d'un champ magnétique. Les deux parois verticales sont chauffées avec des températures constantes tandis que les parois horizontales sont maintenues adiabatiques. Ils ont conclu que l'effet principal de l'imposition d'un champ magnétique est de

diminuer le taux global de transfert thermique entre les parois chaudes et froides. L'augmentation de l'intensité du champ magnétique aplatit la crête de la vitesse près de la paroi, pour un nombre élevé du nombre de Grashof. Le champ magnétique réduit légèrement le nombre de Nusselt.

Alchaar, Vasseur, Bilgen [1995b] ont étudié l'effet d'un champ magnétique incliné sur la convection naturelle dans une cavité aplatie, chauffée par le bas et refroidi par le haut. Pour une convection supercritique, l'augmentation du nombre de Hartmann,  $Ha$ , conduit à l'augmentation du nombre de cellules dans la cavité, quand le champ magnétique est appliqué normalement à cette dernière. L'imposition d'un champ magnétique incliné, provoque de nouveaux modes d'écoulements avec des formes de cellules modifiées par la force de Lorentz induite. Pour un nombre de Hartmann donné, le taux de transfert de chaleur diminue quand le nombre de Prandtl,  $Pr$ , est réduit. Le nombre de Rayleigh critique augmente avec la diminution de  $Pr$ .

Par la suite, Alchaar, Vasseur, Bilgen [1995c] ont étudié la stabilité de l'écoulement sous l'effet d'un champ magnétique en milieu poreux dans une cavité rectangulaire horizontale, en utilisant le modèle de Brinkman. Le système est chauffé et refroidi par des flux de chaleur constant. Il a été démontré qu'un champ magnétique vertical est plus efficace pour retarder la naissance de la convection, par rapport à un champ magnétique horizontal.

Bian et al. [1996a] ont repris cette configuration pour étudier la stabilité de l'écoulement d'un fluide conducteur dans une cavité horizontale soumise à l'influence d'un champ magnétique transversal. Les parois verticales de la cavité sont maintenues isothermes alors que les parois horizontales sont adiabatiques. Il a été démontré qu'en absence du champ magnétique, la structure de l'écoulement est parallèle dans le cœur de la cavité et tourne de  $180^\circ$  dans les bouts. Ils ont montré que lorsque le nombre  $Ha$  est

augmenté, le nombre de Nusselt atteint un maximum pour un rapport de forme près de la situation d'une cavité carré.

En utilisant la méthode de différences finies, Chamkha et Al-Naser [2002] ont résolu numériquement le problème de la convection hydromagnétique doublement diffusive d'un mélange binaire de gaz dans une cavité rectangulaire où les parois supérieure et inférieure sont adiabatiques. Des températures et concentrations constantes sont imposées le long des deux parois verticales. Les forces de poussée thermique et solutale sont opposées l'une de l'autre et la possibilité d'une génération de chaleur interne est prise en considération. Un champ magnétique uniforme est appliqué dans la direction horizontale. Ils ont montré que l'effet du champ magnétique était de réduire l'intensité du transfert thermique et l'intensité de l'écoulement du fluide dans la cavité. En outre, à mesure que le nombre de Lewis augmente, les nombres moyens de Nusselt et de Sherwood augmentent aussi pour la plupart des valeurs du rapport de force de volume considérées dans cette étude.

Hof et al. [2005] ont obtenu des résultats expérimentaux concernant l'effet d'un champ magnétique sur la stabilité de la convection dans un métal liquide. Ils ont utilisé un récipient rectangulaire contenant du gallium soumis à un gradient de température horizontal. Un champ magnétique uniforme est appliqué séparément dans les trois directions. Ils ont montré alors que l'efficacité du champ magnétique dépend fortement de son orientation par rapport au gradient de la température. En effet, les champs magnétiques verticaux et transversaux suppriment fortement les oscillations se produisant au début de la convection.

Par la suite, Alchaar et al. [1995d] ont étudié l'effet d'un champ électromagnétique sur la convection au sein d'une cavité rectangulaire inclinée remplie d'un milieu poreux saturé par un fluide électriquement conducteur. On suppose que les longues parois de la cavité sont chauffées par des flux de chaleur uniforme. Un champ



magnétique uniforme est appliqué normalement à ces parois. Les résultats ont montré que dans le cas d'une cavité verticale, l'augmentation du nombre de Hartmann,  $Ha$ , conduit à un épaissement des couches limites verticales mais amincit, par contre, les couches limites horizontales. Pour une convection de type Rayleigh-Benard où la couche poreuse est horizontale, le début de la convection est stabilisé par l'imposition du champ magnétique. La force électromagnétique de Lorentz diminue l'intensité de la convection dans la couche poreuse et réduit le transfert de chaleur convectif, et ceci pour n'importe quelle orientation de la cavité.

La même configuration a été considérée par Bian et al. [1996b] dans leur étude sur l'effet d'un champ électromagnétique sur la convection naturelle dans une couche poreuse inclinée. Les longues parois sont alors chauffées avec une température constante et les autres parois sont maintenues adiabatiques. Un champ magnétique uniforme est appliqué normalement aux parois chauffées. Les résultats numériques ont démontré que les champs de température et de vitesse subissent une modification importante. Le nombre de Rayleigh critique marquant la naissance de la convection dans une couche horizontale chauffée par le bas a été prédit en utilisant la théorie de la stabilité linéaire. Il a été montré que l'orientation de l'angle de transition entre un écoulement unicellulaire et multicellulaire est considérablement affectée par l'imposition du champ magnétique.

Chamkha [1997b] a fait une étude sur la convection naturelle, en régime de type couche limite, d'un fluide électriquement conducteur au-dessus d'une plaque inclinée isotherme incorporée dans un milieu poreux thermiquement stratifié en présence d'un champ magnétique transversal non-uniforme. Ses résultats numériques, basés sur la méthode des différences finies, ont montré que la présence du champ magnétique cause l'augmentation du coefficient de frottement et du nombre de Nusselt le long de la plaque. Par contre, la prise en compte des effets d'inertie du milieu poreux fait diminuer ces derniers. En outre, l'augmentation de l'intensité du champ magnétique, du paramètre de

stratification, ou de l'angle d'inclinaison fait diminuer le coefficient de frottement superficiel et le nombre de Nusselt.

Récemment, Robillard et al. [2006] ont mené une investigation sur l'effet d'un champ électromagnétique sur la convection naturelle dans une cavité rectangulaire verticale remplie avec un milieu poreux et saturée par un mélange binaire électriquement conducteur. Les parois verticales sont soumises à un flux de chaleur uniforme tandis que les parois horizontales sont maintenues adiabatiques, un champ magnétique constant et uniforme est appliqué normalement sur la paroi verticale. Une solution analytique a été obtenue afin de prédire l'influence du nombre de Hartmann sur l'écoulement.

Ozoe et Okada [1989] ont conduit une investigation sur l'effet de champs magnétiques externes, exercés dans les trois directions, sur la convection naturelle tridimensionnelle dans une cavité cubique. Ils ont observé que le champ magnétique externe perpendiculaire à la couche verticale est le plus efficace pour supprimer la convection. Par contre, celui qui est parallèle aux parois verticales chauffées et refroidies est le moins efficace, bien qu'il soit perpendiculaire à la circulation de l'écoulement principal le long des frontières verticales et horizontales.

Ozoe et al. [1994] ont fait une étude numérique de la convection naturelle, en régime transitoire, d'un métal liquide confiné dans une cavité carrée. En augmentant le nombre de Hartmann de 100 à 500, on observe que la direction de l'écoulement alterne entre la direction de la force de poussée et la direction contraire de la force de poussée pour finalement converger vers une convection faible. Sur une gamme de  $Pr$  entre 1 et  $10^4$ , les résultats ont montré que ni le taux de transfert thermique, ni la structure de la convection n'étaient affectés par ce paramètre

Krakov et Nikiforov [2002] ont considéré l'influence d'un champ magnétique externe sur la convection naturelle dans une cavité carrée remplie d'un fluide

électriquement conducteur. La solution numérique de ce problème a été faite par la méthode des éléments finis. Ils ont montré que la structure de la convection et que l'intensité du flux de chaleur dépendent de l'orientation de l'angle entre les directions du gradient de température et du champ magnétique appliqué. La géométrie de la cavité remplie de fluide a également une influence sur la distribution du champ magnétique dans la cavité. Pour le cas de la convection non gravitationnelle, où le nombre de Grashof,  $Gr$  est nul, le mouvement convectif du fluide est seulement causé par le champ magnétique externe. Par conséquent, le changement de l'orientation d'un champ magnétique peut causer un changement du flux de la chaleur dans la cavité.

Ryskin et Pleiner [2004] ont étudié l'influence d'un champ magnétique sur la convection thermique, avec effet Soret dominant, dans des ferrofluides. Ils ont remarqué que, non seulement un champ magnétique donne naissance à des profils de type couche limite prononcés en ce qui concerne la concentration, mais également que cette couche limite affecte considérablement l'écoulement à l'extérieur de cette dernière.

Des expériences et des simulations numériques ont été faites par Krakov et al. [2004] sur l'influence du champ magnétique uniforme sur la convection naturelle dans une cavité cubique. Expérimentalement, une dépendance entre le flux de chaleur et le champ magnétique a été constatée. En effet, la température dans la région centrale de la cavité croît quand le champ magnétique augmente. La différence de température entre le côté haut et le côté bas de la cavité a été aussi mesurée expérimentalement et on a remarqué une dépendance importante de cette différence de température avec le champ magnétique.

Bednarz et al. [2005] ont fait des études expérimentales et numériques sur l'effet d'un champ magnétique sur la convection naturelle d'un fluide dans une paroi cubique chauffée sur un côté et refroidie sur le côté opposé. Ils ont montré que lorsqu'un champ magnétique est appliqué à l'un des côtés; la force totale agissant sur le fluide devient la

superposition de deux forces qui sont la force de flottabilité gravitationnelle et la force de flottabilité magnétique. Les mouvements de convection et les taux de transfert thermique sont intensifiés avec l'augmentation de l'induction magnétique.

Kaneda et al. [2006] ont étudié expérimentalement et numériquement la convection naturelle d'un métal liquide dans une cavité cubique, sous un champ magnétique uniforme et un courant électrique externe. En appliquant uniquement le champ magnétique, la convection naturelle est amortie par la force de Lorentz qui est l'interaction entre le courant électrique induit et le champ magnétique externe. Par contre, l'écoulement et le taux de transfert thermique de la paroi chaude à la paroi froide sont très affectés, quand le champ magnétique et le courant électrique externe sont appliqués en même temps.

Uda et al. [2000] ont mesuré expérimentalement le transfert de chaleur par convection naturelle d'un métal liquide, le lithium, dans un canal cylindrique sous un champ magnétique. Les résultats ont montré qu'en l'absence du champ magnétique ; le profil de température augmente tout au long de l'écoulement convectif formant ainsi une couche à haute température au sommet et une région froide au fond du canal. Cependant, quand on applique le champ magnétique, la température du fond augmente et le profil de température devient verticalement symétrique par rapport à la région chaude.

Une analyse numérique tridimensionnelle a été effectuée par Filar et al. [2005] sur le problème de la convection de l'air dans une cavité verticale cylindrique sous l'effet d'un champ magnétique. Une bobine électrique a été placée autour de la cavité cylindrique pour générer le champ magnétique. Ils ont montré dans leurs résultats qu'il est possible d'influencer le mode d'écoulement et le transfert thermique avec le champ magnétique. On a remarqué qu'une convection stable presque axisymétrique est obtenue, pour les enroulements de bobine près de la paroi supérieure du cylindre tandis

que la convection forte et oscillante résulte de l'effet de l'enroulement de bobine magnétique situé près de la base du cylindre.

Chamkha et Al-Mudhaf [2004] ont étudié le transfert de chaleur et de masse en convection naturelle dans une sphère perméable en présence d'un champ magnétique externe et d'un rayonnement thermique. La surface de la sphère est soumise à des flux de chaleur et de masse constants et elle est perméable afin de tenir compte de l'aspiration ou de l'injection du fluide sur la paroi. Ils ont trouvé que les nombres de Nusselt et de Sherwood diminuent à cause de l'augmentation du paramètre d'aspiration ou d'injection ou du rapport de forces de volume. Toutefois, ils augmentent quand on augmente le nombre de Hartmann. Par contre, si on augmente le nombre de Prandtl ou l'effet de rayonnement thermique ; le nombre de Nusselt local diminue et le nombre de Sherwood local augmente. Un comportement opposé se produit si on augmente le nombre de Schmidt. En outre, le coefficient de frottement superficiel augmente avec le rapport de forces de volume ou de la position circumférentielle et il diminue si on augmente le nombre de Hartmann ou de Prandtl.

Une analyse de type similarité a été menée par Ece [2005] pour étudier l'écoulement laminaire en régime de couche limite en convection naturelle en présence d'un champ magnétique transversal au-dessus d'un cône vertical. Les résultats numériques montrent que le champ magnétique retarde les profils de vitesse et augmentent les profils de température. Le coefficient de frottement superficiel et le nombre de Nusselt augmentent avec l'augmentation de la force du champ magnétique et diminuent avec le nombre de Prandtl.

Finalement, les mêmes résultats que précédemment ont été obtenus par Ece [2006] en étudiant l'écoulement en convection naturelle sur un cône vertical en rotation soumis à un champ magnétique. Il a montré que la rotation du cône augmente les profils de vitesse en augmentant le frottement superficiel. Par contre, elle comprime les profils

de température vers la surface en augmentant le flux de chaleur extérieur, pour le cas de température de surface linéaire, et diminue la température de surface, pour le cas de flux de la chaleur linéaire.

Nous pouvons constater que la plupart de références citées ci-dessus concernent l'effet d'un champ magnétique sur la convection naturelle en milieu fluide ou en milieu poreux confinés dans une enceinte. Il n'existe que très peu d'études faites sur l'effet d'un champ magnétique sur la convection thermosolutale ainsi que celle induite par effet Soret. Les seuls travaux disponibles sont ceux de Ryskin et al. [1999] et Postelnicu [2004] sur la convection induite par effet Soret ou Dufour ainsi que les travaux de Chamkha et al. [2002] et de Robillard et al. [2006] sur la convection naturelle doublement diffusive. Pourtant, les domaines d'applications de ce phénomène sont nombreux, que ce soit dans la nature ou dans l'industrie. Cela concerne aussi bien la géophysique, la géothermique, l'océanographie que la métallurgie. On peut citer comme exemples d'application de ce phénomène physique: l'utilisation des métaux liquides comme liquides réfrigérants dans les installations de production d'énergie, le processus de solidification des métaux lors des moulages, l'utilisation des gaz faiblement ionisés, l'application des plasmas ou des métaux liquides (mercure, métaux alcalins fondus), les travaux d'étude faits dans les milieux souterrains contenant des éléments radioactifs, les processus de séchage en génie chimique. Les géophysiciens s'intéressent beaucoup à l'interaction du champ géomagnétique avec le magma dans la région géothermique, là où la croûte terrestre sert de milieu poreux. Dans la métallurgie, la structure de solidification peut être améliorée par l'agitation électromagnétique pour générer une structure à grains fins et obtenir ainsi de meilleures propriétés mécaniques finales lors de la coulée. Pour la solidification dendritique des alliages, des dendrites dans la zone détrempée peuvent être considérés comme milieu poreux. Des résultats expérimentaux prouvent clairement que l'application d'un champ magnétique aux écoulements convectifs dans du métal liquide peut être très utile dans l'amélioration du processus matériel car il permet l'amélioration du transfert thermique qui peut accélérer le

processus ou la génération des conditions stationnaires pour obtenir un bon mélange. Néanmoins, l'étude de l'effet magnétique sur la convection naturelle en milieu poreux reste très peu documentée malgré l'intérêt pratique de ce phénomène en ingénierie.

Le but de la présente thèse est d'étudier l'effet d'un champ magnétique uniforme sur deux types de problèmes concernant la convection naturelle en milieux poreux saturés par un fluide binaire électriquement conducteur. Notre modèle physique est une cavité rectangulaire horizontale contenant un milieu poreux saturé par un fluide binaire électriquement conducteur. Les parois horizontales de la cavité sont soumises à des gradients de température et de concentration tandis que les parois verticales sont imperméables et adiabatiques. Le champ magnétique uniforme  $\vec{B}'_0$  est appliqué normalement sur les parois actives de la cavité rectangulaire. Le milieu poreux est modélisé suivant la loi généralisée de Darcy.

Deux méthodes de solution ont été utilisées dans le présent travail, à savoir, la méthode analytique et la méthode numérique. Dans la plupart des cas, la solution n'est possible que par des voies numériques. Cependant, il existe certaines situations où des solutions analytiques sont possibles. La résolution numérique est basée sur la méthode des différences finies pour résoudre les équations de base régissant le système en milieu poreux.

L'investigation porte essentiellement sur les effets des paramètres de contrôle du problème, sur la structure de l'écoulement et sur les transferts de chaleur et de l'espèce au sein du système.

## CHAPITRE II

### FORMULATION DU PROBLÈME

#### 2.1 Problème considéré dans cette étude

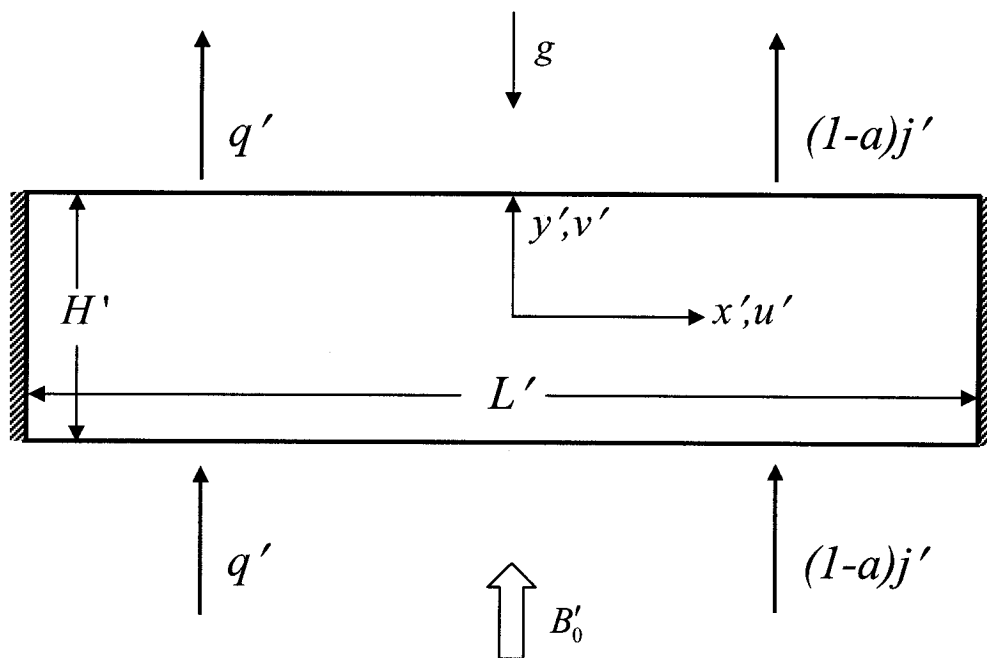
La configuration géométrique bidimensionnelle de notre écoulement est montrée dans la figure 2.1. Nous considérons le cas d'une cavité rectangulaire de hauteur  $H'$  et de longueur  $L'$  contenant un milieu poreux saturé par un fluide binaire. Les axes de coordonnées  $x'$  et  $y'$  sont respectivement orientés suivant les directions horizontale et verticale. Les parois horizontales de la cavité sont soumises à des flux de chaleur  $q'$  et d'espèce uniformes  $j'$  tandis que les parois verticales sont considérées comme adiabatiques et imperméables. Un champ magnétique uniforme et constant  $\vec{B}'_0$  est appliqué parallèlement à la gravité  $g$ .

#### 2.2 Hypothèses simplificatrices

Afin de simplifier la formulation du modèle mathématique, nous allons considérer les approximations suivantes qui sont souvent utilisés dans l'étude de la convection naturelle :

- La matrice poreuse est isotrope, perméable et homogène.
- Le fluide binaire étudié est considéré comme newtonien et incompressible.
- L'écoulement engendré est laminaire.
- Il n'y a pas de source de chaleur, ni de source d'espèce, ni de réaction chimique.





**Figure 2.1:** Représentation graphique du modèle physique et du système d'axes

- Les propriétés thermophysiques du fluide sont constantes et sont évaluées à la température et à la concentration de référence.  $T'_0$  et  $N_0$  représentent respectivement les valeurs moyennes de la température et de la concentration.
- La densité du fluide, quant à elle, suit l'hypothèse de Boussinesq énoncé ci-dessous.

### 2.2.1 Hypothèse de Boussinesq

Cette hypothèse consiste à la simplification de l'équation d'état du fluide. Les variations de la masse volumique au sein du fluide sont faibles. Ainsi, il est possible de considérer le fluide comme quasi incompressible. Les variations de  $\rho$  sont négligées partout, exceptées dans le terme de poussé à l'origine du mouvement.

L'hypothèse de Boussinesq suppose que la densité du fluide dans le terme des forces de volume, varie linéairement avec la température et la concentration, ceci nous amène à la relation suivante:

$$\rho = \rho_0 \left[ 1 - \beta'_T (T' - T'_0) - \beta_N (N - N_0) \right] \quad (2-1)$$

où  $T'$  représente la température de la solution en un point donné du système.  $N$  est la concentration du soluté et  $\rho_0$  est la masse volumique de référence de la solution.

$\beta'_T$  et  $\beta_N$  représentent respectivement les coefficients d'expansion volumique thermique et solutale du fluide étudié et sont données par les équations suivantes :

$$\beta'_T = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T'} \right)_{P', N} \quad \beta_N = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial N} \right)_{P', T'} \quad (2-2)$$

Cette approximation de Boussinesq est valable si la condition  $\Delta\rho/\rho \leq 0.1$  est vérifiée.

### 2.3 Équations gouvernantes

Dans cette section nous allons établir les équations de base régissant notre problème. La résolution d'un problème de convection naturelle consiste en la détermination des champs de vitesse et température et de concentration en chaque point du domaine occupé par le fluide.

#### 2.3.1 Équation de continuité

En considérant le milieu poreux comme un milieu continu, le principe de la conservation de la masse permet d'établir l'équation de continuité suivante pour un fluide incompressible :

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad (2-3)$$

$u'$  et  $v'$  étant les composantes du champ de vitesse  $\vec{V}'(u', v')$  dans la direction  $x'$  et  $y'$  respectivement.

#### 2.3.2 Équation du mouvement

La théorie de l'écoulement de fluides homogènes, soumis à l'effet d'un champ magnétique, est régie par la loi de Darcy généralisée qui, en présence du champ gravitationnel terrestre s'écrit comme ci-dessous, (voir par exemple Meng [1994]).

$$\frac{\mu}{K} \vec{v}' = -\nabla P' + \rho \vec{g} + \vec{J}' \times \vec{B}'_0 \quad (2-4)$$

où  $\nabla P'$  est le gradient de pression,  $\vec{J}'$  la densité du courant électrique et  $\vec{B}'_0$  le champ magnétique appliqué.

Notons que dans le modèle de Darcy, les forces d'inertie et les forces visqueuses sont négligées. Cette approximation est valable quand les conditions suivantes sont réalisées.

$$\left. \begin{array}{l} \phi < 0.8 \\ Da \leq 10^{-6} \\ Re < 1 \end{array} \right\} \quad (2-5)$$

où  $\phi$  est la porosité du milieu poreux,  $Da = K/H'$  est le nombre de Darcy et  $Re = V' \sqrt{K}/\nu$  est le nombre de Reynold.  $K$  est la perméabilité du milieu poreux considéré,  $V'$  la vitesse moyenne de l'écoulement à travers la matrice solide et  $\nu = \mu/\rho$  la viscosité cinématique du fluide.

### 2.3.3 Équation de conservation d'énergie

En négligeant les effets de la dissipation visqueuse, l'équation d'énergie établie à partir du premier principe de la thermodynamique s'écrit comme suit,

$$(\rho C)_p \frac{\partial T'}{\partial t'} + (\rho C)_f \left( u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) = k_p \nabla^2 T' \quad (2-6)$$

où  $(\rho C)_p = \phi(\rho C)_f + (1-\phi)(\rho C)_s$  est la chaleur massique de la matrice poreuse saturée,  $(\rho C)_f$  et  $(\rho C)_s$  définissent respectivement la chaleur massique du fluide, la chaleur massique de la matrice poreuse,  $k_p$  est la conductivité thermique du milieu poreux et  $t'$  est le temps.

### 2.3.4 Équation de conservation de l'espèce

Le principe de la conservation de l'espèce nous mène à l'équation suivante :

$$\phi \frac{\partial N}{\partial t'} + \vec{V}' \cdot \nabla N = D \nabla^2 N + a D' N_0 (1 - N_0) \nabla^2 T' \quad (2-7)$$

où  $a$  est un nombre réel tel que,  $a = 0$  pour une convection doublement diffusive pour lequel les forces solutales dans le milieu poreux sont induites par imposition d'un flux de masse constant  $j'$  et  $a = 1$  pour une convection induite par les effets Soret pour lequel le transfert de matière au sein du mélange binaire est dû à la formation d'un gradient de soluté induit par un gradient thermique.  $D$  et  $D'$  sont respectivement la diffusivité massique de la concentration dans la matrice poreuse saturée et le coefficient de l'effet de la diffusion thermique.

Les équations de transfert de charge électrique sont données par les relations suivantes,

$$\nabla \cdot \vec{J}' = 0 \quad \vec{J}' = \gamma (-\nabla \mathcal{G}' + \vec{V}' \times \vec{B}'_0) \quad (2-8)$$

$\gamma$  étant la conductivité électrique,  $\mathcal{G}'$  et  $-\nabla \mathcal{G}'$  représentent respectivement le potentiel électrique et le champ électrique associé.

D'après Garandet et al. [1992], dans un écoulement bidimensionnelle 2-D en état stationnaire, l'équation (2-8) pour le potentiel électrique se réduit à  $\nabla^2 \mathcal{G}' = 0$ . La solution unique est  $\nabla \mathcal{G}' = 0$  parce qu'il y a toujours quelque part autour de la cavité une isolation électrique pour lequel  $\partial \mathcal{G}' / \partial n' = 0$ , ce qui signifie que le champ électrique disparaît partout.

Nous introduisons la fonction du courant  $\psi'$  relative aux composantes de vitesse comme suit,

$$u' = \frac{\partial \psi'}{\partial y'}, \quad v' = -\frac{\partial \psi'}{\partial x'} \quad (2-9)$$

Les relations (2-9) rendent automatiquement satisfaite l'équation de continuité (2-3).

### **2.3.5 Conditions aux frontières hydrodynamiques**

On impose des conditions d'imperméabilité sur les parois de la cavité. Les conditions aux frontières associées à la fonction de courant sont ainsi exprimées par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} x = \pm \frac{L'}{2}, & \quad \frac{\partial \psi'}{\partial y'} = 0, & \quad \psi' = 0 \\ y = \pm \frac{H'}{2}, & \quad \frac{\partial \psi'}{\partial x'} = 0, & \quad \psi' = 0 \end{aligned} \quad (2-10)$$

### 2.3.6 Conditions aux frontières thermiques et massiques

Les conditions aux frontières thermiques et massiques sur les parois horizontales et verticales sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} x' = \pm \frac{L'}{2}, \quad \frac{\partial T'}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial x'} = 0 \\ y' = \pm \frac{H'}{2}, \quad \frac{\partial T'}{\partial y'} = -\frac{q'}{k_p}, \quad \frac{\partial N}{\partial y'} = \frac{j'(1-a)}{\rho D} - a \frac{D'}{D} N_0 (1-N_0) \frac{\partial T'}{\partial y'} \end{aligned} \quad (2-11)$$

### 2.4 Équations gouvernantes adimensionnelles

L'adimensionnalisation ou normalisation consiste à transformer les variables dépendantes et indépendantes en des variables sans dimensions, c'est-à-dire qu'ils seront normalisés par rapport à certaines dimensions caractéristiques. Cela permet de spécifier les conditions d'écoulement avec un nombre restreint de paramètres et facilite beaucoup les comparaisons entre les résultats numériques, analytiques et expérimentaux.

La dimension  $H'$  entre les deux parois horizontales actives de la cavité a été choisie comme longueur de référence pour adimensionnaliser les équations gouvernantes du problème. La vitesse ainsi que la fonction du courant sont adimensionnalisées par rapport à la diffusivité thermique tandis que la température et la concentration sont adimensionnalisées respectivement par rapport aux différences caractéristiques de température  $\Delta T'$  et de concentration  $\Delta N$  entre les deux parois horizontales.

$$(x, y) = \left( \frac{x'}{H'}, \frac{y'}{H'} \right), \quad (u, v) = (u', v') \frac{H'}{\alpha} \quad (2-12)$$

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{t' \alpha}{H'^2}, & \varepsilon &= \frac{\phi}{\sigma} \\
 T &= \left( \frac{T' - T'_0}{\Delta T'} \right), & \psi &= \frac{\psi'}{\alpha} \\
 S &= \left( \frac{N}{\Delta N} \right), & P &= \frac{K}{\alpha \mu} P'
 \end{aligned}$$

$\alpha$  étant la diffusivité thermique du fluide définie par  $\alpha = k_p / (\rho C)_f$ ,  $\sigma = (\rho C)_p / (\rho C)_f$  est le rapport des chaleurs massiques et  $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide. La différence caractéristique de température est définie par  $\Delta T' = q' H' / k_p$ . Pour une convection doublement diffusive, la différence de concentration caractéristique est donnée par la relation  $\Delta N = -j' / \rho_0 D$  et pour une convection induite par l'effet Soret, elle est définie par  $\Delta N = N_0 (1 - N_0) \Delta T' D' / D$ .

#### 2.4.1 Les équations de base adimensionnelles

Les équations de base deviennent adimensionnelles en introduisant dans les équations précédentes les relations définies par les équations (2-12). Le terme de pression dans l'équation du mouvement (2-4) est éliminé en prenant le rotationnel de cette équation.

Ainsi, nous obtenons les nouvelles équations gouvernantes adimensionnelles ci-dessous :

$$\nabla^2 \psi = - \left( R_T \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{R_S}{Le} \frac{\partial S}{\partial x} \right) - Ha^2 \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2-13)$$

$$\nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2-14)$$



$$\frac{1}{Le}(\nabla^2 S - a\nabla^2 T) = \varepsilon \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} \quad (2-15)$$

Quelques groupements adimensionnels apparaissent dans les équations ci-dessus à savoir, le nombre de Rayleigh thermique,  $R_T$ , le nombre de Rayleigh solutal,  $R_S$ , le nombre de Lewis,  $Le$ , le nombre de Hartmann,  $Ha$  et la porosité normalisée de la matrice poreuse,  $\varepsilon$ . Ces paramètres sont définis respectivement comme suit :

$$\begin{aligned} R_T &= \frac{g\beta'_T \Delta T' K H'}{\alpha \nu}, & R_S &= \frac{g\beta_N \Delta N K H'}{D \nu}, \\ Le &= \frac{\alpha}{D} & Ha &= B'_0 \left( \frac{K \gamma}{\mu} \right)^{1/2}, & \varepsilon &= \frac{\phi}{\sigma} \end{aligned} \quad (2-16)$$

A partir des expressions de  $R_T$  et  $R_S$  précédentes nous obtenons le terme du rapport des forces de volume  $\varphi$  donné par  $\varphi = R_S / R_T Le = \beta_N \Delta N / \beta'_T \Delta T'$ .

## 2.5 Conditions aux frontières adimensionnalisées

En utilisant les variables adimensionnelles dans l'équation (2-12) nous obtenons les conditions aux frontières adimensionnalisées de notre problème :

$$\begin{aligned} x = \pm \frac{A}{2}, & \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, & \quad \psi = 0, & \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, & \quad \frac{\partial S}{\partial x} = 0 & \quad (2-17) \\ y = \pm \frac{1}{2}, & \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, & \quad \psi = 0, & \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -1, & \quad \frac{\partial S}{\partial y} = (a-1) + a \frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned}$$

où  $A$  est le rapport de forme de la cavité et est défini par  $A = L/H'$ .

## 2.6 Taux de transfert thermique et solutale

### 2.6.1 Le nombre de Nusselt

Le taux de transfert de chaleur à travers la couche poreuse est exprimé par le nombre de Nusselt noté  $Nu$ . Dans notre étude, les parois actives sont soumises à des flux de chaleur constants. Pour cette situation, le nombre de Nusselt est défini par la relation suivante,

$$Nu = \frac{q'}{k_p \frac{\Delta T'}{H'}} = \frac{1}{\Delta T} \quad (2-18)$$

où  $\Delta T$  est la différence de température évaluée à  $x=0$  tel que  $\Delta T = T(0, -1/2) - T(0, 1/2)$ .

### 2.6.2 Le nombre de Sherwood

Le taux de transfert de masse dans la cavité, quand les parois actives de celle-ci sont exposées à des flux de masses constants, s'exprime par le nombre de Sherwood  $Sh$  tel que,

$$Sh = \frac{j'}{D \frac{\Delta N}{H'}} = \frac{1}{\Delta S} \quad (2-19)$$

où  $\Delta S$  est la différence de concentration évaluée à  $x=0$  définie par  $\Delta S = S(0, -1/2) - S(0, 1/2)$ .

## CHAPITRE III

### SOLUTION ANALYTIQUE APPROXIMÉE DU PROBLÈME

#### 3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons établi les équations de base qui régissent les phénomènes d'écoulements et de transferts thermiques et solutaux de fluides binaires au sein de milieux poreux saturés, en présence d'un champ magnétique. Ces dernières consistent en un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires et fortement couplées. La résolution d'un tel système, de manière analytique, est extrêmement compliquée voire impossible. Cependant, dans le cas limite d'une cavité horizontale de grande extension,  $A \gg 1$ , des solutions analytiques approximatives sont possibles. Ainsi, dans le présent chapitre, on présente le développement d'une telle solution, basée sur le concept de l'écoulement parallèle. Le modèle résultant donne un aperçu général sur l'écoulement et les champs de température et de concentration ainsi qu'une description quantitative des transferts de chaleur et de masse impliqués.

L'approximation de l'écoulement parallèle a été utilisée dans le passé par Cormack et al. [1974] et par Bejan et Tien [1978a] pour l'étude de la convection naturelle dans une cavité rectangulaire horizontale chauffée par les côtés. Sen et al. [1987], Vasseur et al. [1989], et Mamou et al. [1995] ont aussi utilisé cette méthode pour l'étude de la convection naturelle dans des couches fluides ou poreuses soumises à différentes conditions aux frontières. Nous citons, de plus, des publications récentes effectuées par différents auteurs tels que Ouriemi et al. [2005] qui ont fait une étude sur la convection naturelle d'un mélange binaire confiné dans une cavité longue légèrement inclinée et Lamsaadi et al. [2005] qui ont mené une investigation sur la convection naturelle dans une cavité horizontale chauffée par les côtés et remplies de fluides non-newtoniens. Les études effectuées par Bahloul et al. [2006] sur la convection naturelle

au sein d'un cylindre annulaire vertical saturé par un fluide binaire, ainsi que celle faite par Mahidjiba et al. [2006] sur l'écoulement d'une couche fluide induite par l'action combinée d'une force de cisaillement et de l'effet Soret, utilisent également la méthode de l'approximation de l'écoulement parallèle.

### 3.2 Concept de l'écoulement parallèle

Le concept de l'écoulement parallèle consiste à supposer que dans une cavité de grande extension ( $A \gg 1$ ), l'écoulement engendré peut être décomposé en trois zones. Ces dernières consistent en deux régions à l'extrémité de la cavité dans lesquelles l'écoulement tourne à  $180^\circ$  et la région centrale de la couche dans laquelle l'écoulement est parallèle relativement aux longues parois de la cavité. Ceci permet de négliger la composante de la vitesse perpendiculaire aux parois horizontales, de telle sorte que :

$$u(x, y) \approx u(y) \quad (3-1)$$

$$v(x, y) \approx 0 \quad (3-2)$$

Nous obtenons ainsi une fonction de courant  $\psi$  dépendant uniquement de l'ordonnée  $y$ ,

$$\psi(x, y) \approx \psi(y) \quad (3-3)$$

Les profils de la température et de la concentration sont alors donnés par la somme d'un terme définissant une variation longitudinale linéaire et d'un autre terme donnant la distribution transversale :

$$T(x, y) = C_T x + \theta_T(y) \quad (3-4)$$

$$S(x, y) = C_S x + \theta_S(y) \quad (3-5)$$

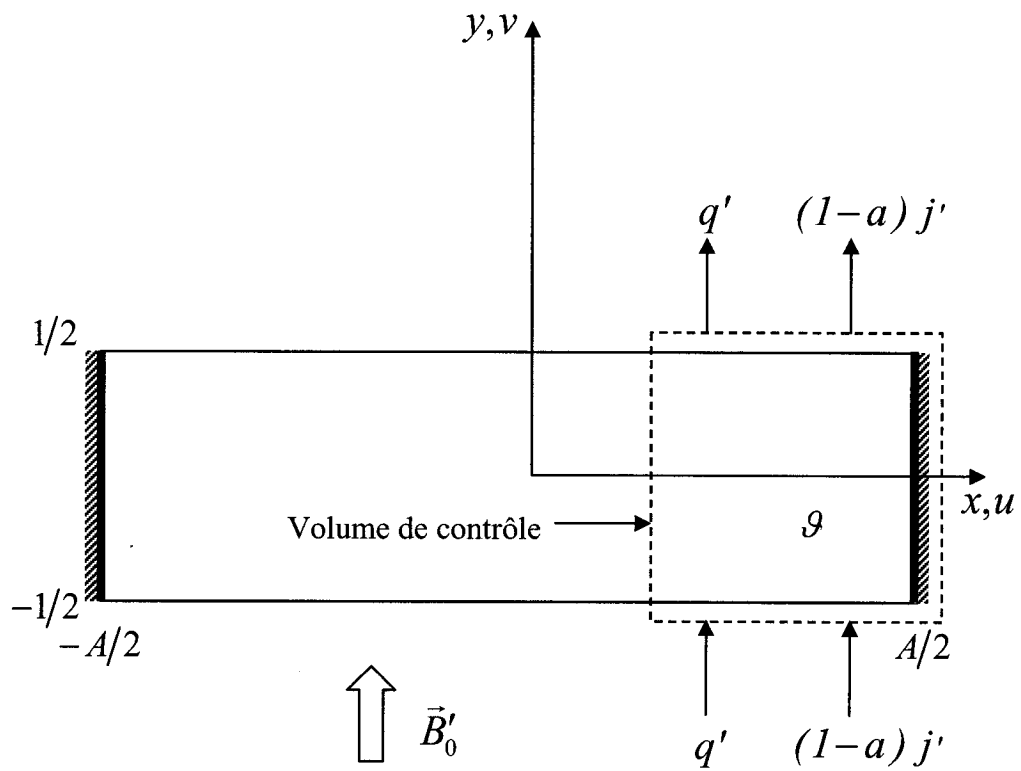
où  $C_T$  et  $C_S$  sont des constantes qui expriment respectivement les gradients de température et de concentration selon la direction  $x$ .

Les équations (3-3), (3-4) et (3-5) sont valides au cœur de la cavité. La détermination des gradients de température  $C_T$  et de concentration  $C_S$  est obtenue en intégrant les équations de conservation de l'énergie et de concentration sur le volume de contrôle ( $\mathcal{V}$ ) montré sur la figure 3.1 tout en tenant compte des conditions aux frontières hydrodynamiques, thermique et massique (2-17).

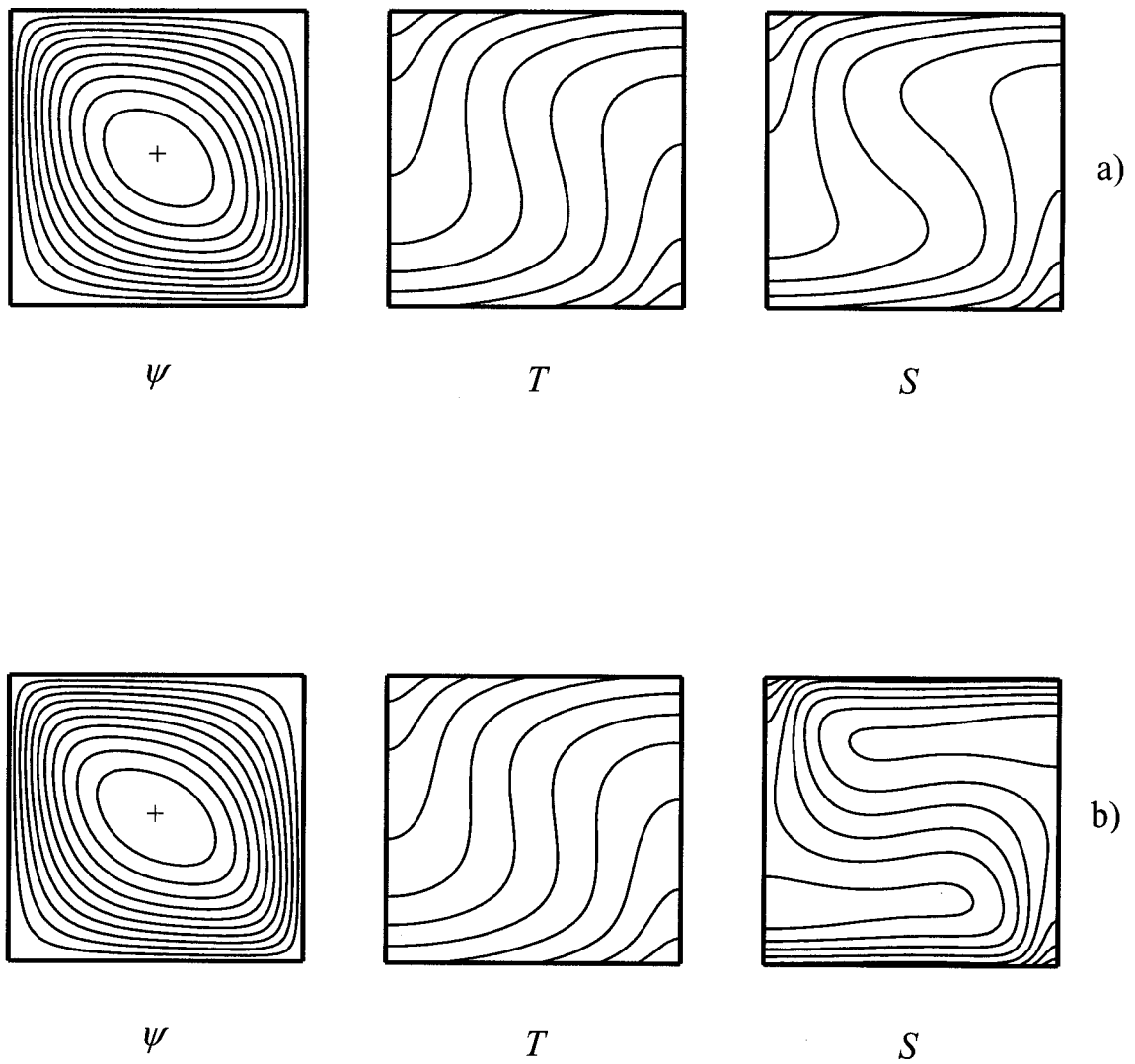
Pour vérifier le bien-fondé de l'approximation basée sur le concept de l'écoulement parallèle, nous présentons des résultats numériques typiques, obtenus en résolvant le système d'équations (2-13)-(2-15) au complet pour  $R_T = 100$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = 1$ , a)  $a = 0$  et b)  $a = 1$  pour  $A = 1$  sur la figure 3.2 et  $A = 8$  pour la figure 3.3. En examinant ces résultats numériques, nous pouvons constater l'effet du rapport de forme de la cavité, pour  $A = 1$  et  $A = 8$ , sur la structure de l'écoulement et sur les profils de température et de concentration pour les deux cas de convection naturelle étudiés i.e. la double-diffusion ( $a = 0$ ) et l'effet Soret ( $a = 1$ ).

Sur la figure 3.2, on observe que pour un rapport de forme  $A = 1$ , la structure de l'écoulement est bidimensionnelle. Par contre, avec un rapport de forme  $A = 8$ , figure 3.3, la structure de l'écoulement et des profils de température et de concentration illustrent clairement le parallélisme des lignes de courant dans la partie centrale de la cavité et la stratification linéaire de la température et de la concentration dans la

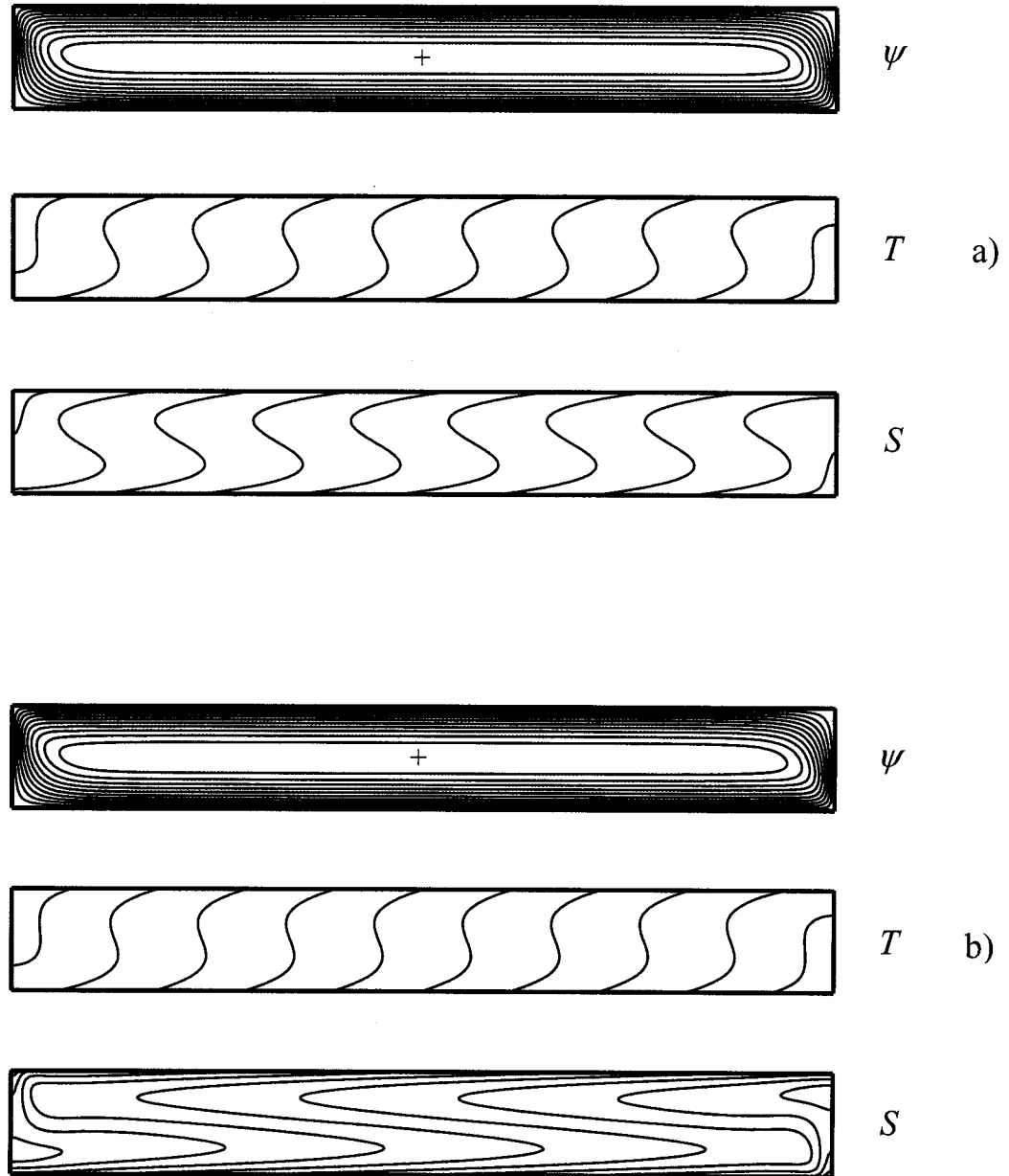
direction horizontale. Ces prédictions numériques sont la base du concept de l'écoulement parallèle utilisée dans cette section.



**Figure 3.1:** Représentation graphique du volume de contrôle dans la cavité poreuse



**Figure 3.2:** Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations obtenues pour  $R_t = 100$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = 1$ ,  $A = 1$  : a)  $a = 0$ ,  $\psi_0 = 3.989$ ,  $Nu = 3.619$ ,  $Sh = 5.378$  et b)  $a = 1$ ,  $\psi_0 = 3.285$ ,  $Nu = 3.129$ ,  $Sh = 11.099$ .



**Figure 3.3:** Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations obtenues pour  $R_T = 100$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = 1$ ,  $A = 8$  : a)  $a = 0$ ,  $\psi_0 = 4.693$ ,  $Nu = 4.286$ ,  $Sh = 5.390$  et b)  $a = 1$ ,  $\psi_0 = 3.890$ ,  $Nu = 3.847$ ,  $Sh = 7.887$ .



### 3.3 Équations de base simplifiées

En substituant les équations de l'approximation de la fonction de courant (3-3), et des profils de température et de concentration (3-4) et (3-5) dans les équations de base (2-13), (2-14) et (2-15), nous obtenons le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = -R_T (C_T + \varphi C_S) - Ha^2 \frac{d^2\psi}{dy^2} \quad (3-6)$$

$$\frac{d^2\theta_T}{dy^2} = C_T \frac{d\psi}{dy} \quad (3-7)$$

$$\frac{1}{Le} \left( \frac{d^2\theta_S}{dy^2} - a \frac{d^2\theta_T}{dy^2} \right) = C_S \frac{d\psi}{dy} \quad (3-8)$$

### 3.4 Solution générale de la fonction de courant et de la vitesse

Après intégration de l'équation (3-6) et en satisfaisant les conditions aux frontières (2-18), la solution générale de l'équation du mouvement (3-6) donne le résultat suivant pour  $\psi$  :

$$\psi(y) = \psi_0 (1 - 4y^2) \quad (3-9)$$

dans lequel la fonction de courant au centre de la cavité  $\psi_0$ , qui caractérise l'intensité de l'écoulement, s'écrit :

$$\psi_0 = \frac{3}{2} \frac{R_T^*}{(1 + Ha^2)} (C_T + \varphi C_S) \quad (3-10)$$

avec  $R_r^* = R_r / R^{sup}$  et  $R^{sup} = 12$ .

Nous pouvons déduire de l'équation (3-9) l'expression de la distribution de la vitesse suivant  $y$ ,

$$u = -8\psi_0 y \quad (3-11)$$

### 3.5 Équations générales du profil de température et de concentration

Pour obtenir la forme générale de la distribution de température  $\theta_r$  en fonction de  $y$ , nous substituons d'abord l'expression de la distribution de vitesse (3-11) dans l'équation de base (3-7), ce qui nous donne :

$$\frac{d^2 \theta_r}{dy^2} = -8\psi_0 y C_T \quad (3-12)$$

En intégrant cette équation et en appliquant les conditions aux frontières thermique, équation (2-19), nous obtenons :

$$\theta_r = \frac{C_T \psi_0}{3} (3y - 4y^3) - y \quad (3-13)$$

Nous procédons de la même manière pour obtenir la distribution de concentration  $\theta_s$ . Cette fois-ci, en intégrant l'équation de base (3-8) et après substitution de l'équation (3-11) dans celle-ci, nous obtenons l'équation suivante

$$\frac{1}{Le} \left( \frac{d^2 \theta_s}{dy^2} - a \frac{d^2 \theta_T}{dy^2} \right) = -8\psi_0 y \frac{d\theta_s}{dx} \quad (3-14)$$

En utilisant les conditions aux frontières (2-19), l'intégration de l'équation ci-dessus donne :

$$\theta_s(y) = \frac{\psi_0 (aC_T + LeC_s)}{3} (3y - 4y^3) - y \quad (3-15)$$

Nous obtenons les équations générales du profil de température et de concentration en substituant respectivement dans les équations (3-4) et (3-5) les équations de la distribution de la température et de la concentration (3-13) et (3-15) :

$$T(x, y) = C_T x + \frac{1}{3} C_T \psi_0 (3y - 4y^3) - y \quad (3-16)$$

et

$$S(x, y) = C_s x + \frac{1}{3} \psi_0 [(aC_T + LeC_s)(3y - 4y^3)] - y \quad (3-17)$$

### 3.6 Les gradients horizontaux de température et de concentration

Nous considérons le volume de contrôle ( $\mathcal{V}$ ) montré sur la figure 3.1 pour la détermination des gradients thermique et solutal  $C_T$  et  $C_s$ . La méthode utilisée consiste à intégrer les équations du bilan d'énergie et de l'espèce sur ce volume de contrôle en tenant compte des conditions aux frontières hydrodynamiques, thermiques et massiques (2-17). Dans le cas de la conservation de l'énergie (2-14), on obtient :

$$\iiint_{\mathcal{G}} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} T) d\mathcal{G} = \iiint_{\mathcal{G}} \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} T) d\mathcal{G} \quad (3-18)$$

En utilisant le théorème de Gauss, l'intégrale de volume (3-18) peut être transformée en une intégrale équivalente sur la surface ( $d\vec{A}$ ) de la cavité :

$$\iint_{\vec{A}} \vec{\nabla} T \cdot d\vec{A} = \iint_{\vec{A}} \vec{V} T \cdot d\vec{A} \quad (3-19)$$

L'intégrale (3-19), appliquée sur chacune des faces du volume de contrôle, en tenant compte des conditions aux frontières mentionnées précédemment, nous donne l'équation suivante :

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_x dy = \int_{-1/2}^{1/2} T \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_x dy \quad (3-20)$$

Cette relation est similaire à la relation du bilan d'énergie donnée par Trévisan et Bejan [1986] pour la détermination du gradient thermique.

Le terme du gradient thermique  $C_T$  est obtenu en substituant dans l'équation du bilan d'énergie (3-20), l'équation générale du profil de température (3-16). Après intégration et réarrangement des termes, nous obtenons l'expression suivante pour  $C_T$  :

$$C_T = \frac{4b\psi_0}{3(2b + \psi_0^2)} \quad (3-21)$$

dans lequel  $b = 15/16$ .

En suivant la démarche précédente, nous obtenons le terme du gradient solutal  $C_s$ , cette fois-ci, en utilisant l'équation de base de la conservation de la masse (2-15) :

$$\iiint_{\mathcal{G}} \bar{\nabla} \cdot (\bar{V}S) d\mathcal{G} = \frac{1}{Le} \iiint_{\mathcal{G}} [\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla}S) - a\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla}T)] d\mathcal{G} \quad (3-22)$$

En appliquant toujours le théorème de Gauss, on obtient :

$$\iint_{\bar{A}} \bar{V}S \cdot d\bar{A} = \frac{1}{Le} \iint_{\bar{A}} (\bar{\nabla}S - a\bar{\nabla}T) \cdot d\bar{A} \quad (3-23)$$

La relation précédente (3-23), appliquée sur chacune des faces de la cavité, nous donne la relation du bilan de la matière suivante, en considérant les conditions aux frontières (2-17) :

$$\int_{-1/2}^{1/2} Su|_x dy = \frac{1}{Le} \left[ \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_x dy - a \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_x dy \right] \quad (3-24)$$

Comme précédemment, nous substituons l'approximation (3-3), les équations générales du profil de température (3-16) et de concentration (3-17), dans l'équation (3-24), et après intégration, nous obtenons l'expression suivante pour  $C_s$  :

$$C_s = \frac{-3aC_T (Le\psi_0^2 - 2b) + 4bLe\psi_0}{3(2b + \psi_0^2 Le^2)} \quad (3-25)$$

En combinant l'équation de la fonction de courant au centre de la gravité (3-10) avec les termes des gradients de température et de concentration  $C_T$  et  $C_S$  en (3-21) et (3-25), nous obtenons l'équation ci-dessous :

$$\psi_0 = \frac{3}{2} R_{TH}^* \left[ \frac{4b\psi_0}{3(2b + \psi_0^2)} + \varphi \left( \frac{-3aC_T (Le\psi_0^2 - 2b) + 4bLe\psi_0}{3(2b + \psi_0^2 Le^2)} \right) \right] \quad (3-26)$$

dans lequel  $R_{TH}^* = R_T^* / (1 + Ha^2)$ . (3-27)

Après arrangement, nous obtenons alors une équation de cinquième ordre en terme de la fonction du courant  $\psi_0$  tel que :

$$\psi_0 [Le^4 \psi_0^4 - 2bLe^2 \psi_0^2 d_1 - b^2 d_2] = 0 \quad (3-28)$$

où

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= R_{TH}^* Le [Le + \varphi(1-a)] - (Le^2 + 1) \\ \text{et} \\ d_2 &= 4R_{TH}^* Le^2 [1 + \varphi(Le + a)] - 4Le^2 \end{aligned} \right\} \quad (3-29)$$

L'équation (3-28) montre qu'on a cinq solutions possibles dont l'une est nulle et correspond à l'état du fluide au repos :

$$\psi_0 = 0 \quad (3-30)$$

Les quatre autres solutions sont les solutions convectives données par :

$$\psi_0 = \pm \frac{\sqrt{b}}{Le} \left[ d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + d_2} \right]^{1/2} \quad (3-31)$$

Les signes  $(\pm)$  à l'extérieur du crochet indiquent le sens trigonométrique ou horaire de l'écoulement convectif tandis que les signes  $(\pm)$  à l'intérieur du crochet indiquent les deux solutions convectives possibles de notre écoulement. Tel que montré par Mamou [1998] le signe  $(+)$  dans notre solution indique que l'écoulement est stable et que le signe  $(-)$  correspond à une solution instable.

Selon les valeurs des groupements  $d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + d_2}$  et  $d_1^2 + d_2$  dans l'équation (3-31) la naissance de la convection se fait selon deux types de bifurcation. Le premier type est une bifurcation supercritique dont le seuil de convection se produit avec une amplitude nulle,  $\psi = 0$ , et est donné par le nombre de Rayleigh supercritique,  $R_{TC}^{sup}$ . Le second type de bifurcation est une bifurcation souscritique pour laquelle le seuil de convection se produit avec une amplitude finie,  $\psi \neq 0$ , et est donné par le nombre de Rayleigh souscritique,  $R_{TC}^{sub}$ .

### 3.7 Rayleigh supercritique

Le seuil de convection, exprimés en terme du nombre de Rayleigh supercritique est obtenu pour les conditions suivantes :

$$d_1 < 0 \text{ et } d_2 = 0 \quad (3-32)$$

A partir des équations (3-29) et (3-32), on obtient le nombre de Rayleigh supercritique suivant:

$$R_{TC}^{sup} = \frac{R^{sup} (1 + Ha^2)}{[1 + \varphi(Le + a)]} \quad (3-33)$$

En terme de  $R_s$ , on peut réécrire l'équation ci-dessus sous la forme :

$$R_{TC}^{sup} = R^{sup} (1 + Ha^2) - R_s \left( 1 + \frac{a}{Le} \right) \quad (3-34)$$

Dans le cas où les forces de volume sont coopérantes,  $\varphi > 0$ , nous avons uniquement de la convection supercritique. Ceci est dû au fait que les forces de volume agissent dans le même sens et qu'elles tendent tous deux à déstabiliser le système. Les forces de convection sont dites coopérantes. Dans le cas contraire, i.e.  $\varphi < 0$ , les forces de convection sont opposées et la convection peut être sous critique. Ce cas est discuté dans la section suivante.

### 3.8 Rayleigh souscritique

Les seuils critiques, exprimés en terme du nombre de Rayleigh souscritique, sont obtenus en satisfaisant les conditions suivantes :

$$d_1 > 0 \quad (3-35)$$

et

$$d_1^2 + d_2 = 0$$

Le nombre de Rayleigh souscritique qui marque le seuil de la convection est déterminé à partir des équations (3-29) et des conditions (3-35), en terme de  $\varphi$ ,



$$R_{TC}^{sub} = \frac{R^{sup} (1 + Ha^2) (Le + 1) [(Le - \varphi)(Le - 1) - a\varphi(Le + 1)] \pm 2\sqrt{\varphi Le (Le + a - 1)(a\varphi - Le + 1)}}{Le [Le + \varphi(1 - a)]^2} \quad (3-36)$$

L'amplitude de la fonction de courant au point de bifurcation est donnée par,

$$\psi_0 = \pm \frac{\sqrt{bd_1}}{Le} \quad (3-37)$$

En général, la convection souscritique n'existe que lorsque les forces de volume thermique et solutale sont opposées ( $\varphi < 0$ ). Un examen des solutions (3-28) et (3-29) montre que l'existence de la convection souscritique est non seulement liée à  $R_{TH}^*$  mais aussi au nombre de Lewis  $Le$ .

En suivant la procédure présentée par Mamou et Vasseur [1999], on peut montrer que les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de la convection souscritique sont données par :

$$\varphi < -\frac{1}{Le(1-a) + (Le+a)(Le^2+1)} \quad (3-38)$$

et

$$Le > \sqrt{(1-a) - \frac{R^{sup}}{R_s}}$$

Notons que la valeur de Lewis donné par  $Le_t = \sqrt{(1-a) - R^{sup}/R_s}$  marque la transition de la bifurcation souscritique vers la bifurcation supercritique. C'est-à-dire que pour  $Le \leq Le_t$ , la convection est supercritique et que pour  $Le > Le_t$  elle est souscritique.

Les résultats numériques montrant ces deux types de bifurcations ainsi que les effets du rapport de force de volume du nombre de Lewis sur l'intensité de l'écoulement et les nombres de Nusselt et de Sherwood sont présentés et discutés dans le chapitre suivant.

### 3.9 Les taux de transferts de chaleur et de masse

Les transferts thermique et massique sont exprimés respectivement en terme de nombre de Nusselt et de Sherwood.

#### 3.9.1 Nombre de Nusselt

Dans l'équation (2-18), nous avons défini que lorsque les parois horizontales sont exposées à de flux de chaleur constant  $q'$ , le nombre de Nusselt est donné par  $Nu = 1/\Delta T$  où la variation de température  $\Delta T = T(0, -1/2) - T(0, 1/2)$  est définie à  $x = 0$ ,

$$Nu = \frac{1}{T_{(0,-1/2)} - T_{(0,1/2)}} \quad (3-39)$$

En substituant l'équation du profil de température (3-16) dans l'équation (3-39), on obtient pour le nombre de Nusselt, l'expression suivante:

$$Nu = \frac{1}{1 - \frac{2}{3} C_T \psi_0} \quad (3-40)$$

Nous obtenons l'expression du nombre de Nusselt en fonction de la fonction de courant  $\psi_0$  et du paramètre  $b$  en substituant le terme du gradient thermique (3-21) dans l'équation (3-38),

$$Nu = \frac{6(\psi_0^2 + 2b)}{\psi_0^2 + 12b} \quad (3-41)$$

### 3.9.2 Nombre de Sherwood

Nous procédons de la même manière que précédemment pour déterminer le nombre de Sherwood, quand les parois actives sont soumises à des flux de masse  $j'$ . On a vu dans la relation (2-21) que  $Sh = 1/\Delta S$  et que la variation de la concentration  $\Delta S = S(0, -1/2) - S(0, 1/2)$  est définie à  $x = 0$ ,

$$Sh = \frac{1}{S_{(0, -1/2)} - S_{(0, 1/2)}} \quad (3-42)$$

Après substitution de l'équation du profil de concentration (3-17) dans l'équation ci-dessus, nous obtenons l'expression du nombre de Sherwood suivante :

$$Sh = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}(LeC_s + aC_T)\psi_0} \quad (3-43)$$

En substituant les termes du gradient thermique et solutal (3-21) et (3-25) dans l'équation précédente, nous obtenons le nombre de Sherwood en fonction du nombre réel  $a$ .

Pour le cas d'une convection à double-diffusion, c'est à dire pour  $a = 0$ , nous avons l'expression du nombre de Sherwood  $Sh_0$  tel que,

$$Sh_0 = \frac{6(\psi_0^2 Le^2 + 2b)}{\psi_0^2 Le^2 + 12b} \quad (3-44)$$

Pour  $a = 1$ , où on est dans le cas d'une convection à effet Soret, notre expression devient comme suit,

$$Sh = \frac{Sh_0}{1 + Sh_0 (Nu - 1) / Nu} \quad (3-45)$$

## CHAPITRE IV

### SOLUTION NUMÉRIQUE

#### 4.1 Introduction

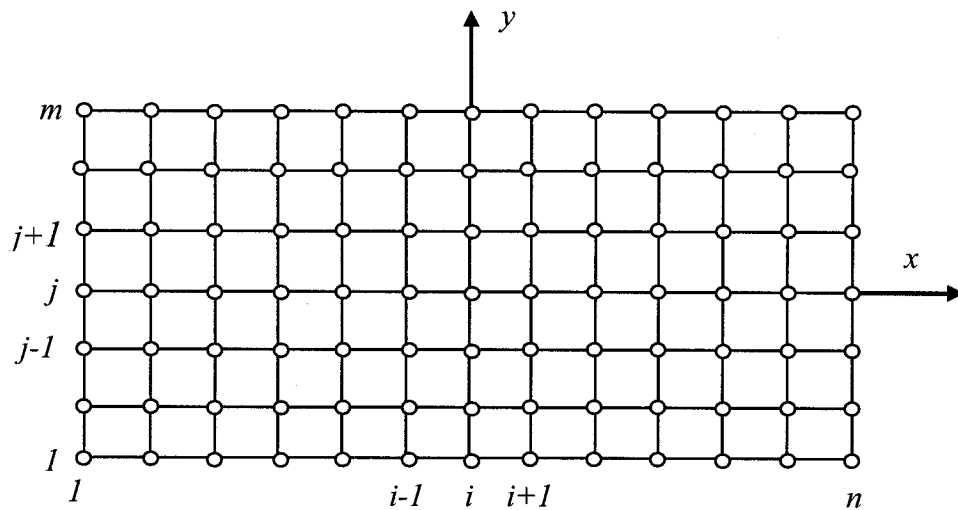
Dans le présent chapitre nous allons nous intéresser à la méthode numérique utilisée dans cette étude pour résoudre numériquement le système d'équations (2-13) – (2-15). Le code numérique utilisé a été développé dans le passé par le Groupe de Convection Naturelle pour résoudre certains problèmes concernant la convection naturelle en milieu poreux.

Les équations gouvernantes du problème (2-13) - (2-15) ont été discrétisées avec la méthode de différences finies et résolues numériquement par la méthode implicite aux directions alternées (A.D.I.) modifiée par Peaceman et Rachford en 1955.

#### 4.2 Méthode des différences finies

La méthode des différences finies est l'une des méthodes numériques la plus utilisée pour résoudre les problèmes de convection naturelle en milieu poreux ou en milieu fluide. La modélisation par différences finies procède avant tout de la décomposition et de l'idéalisation des systèmes d'équations en éléments lignes reliés entre eux et mis en continuité en un nombre finis de points ou nœuds. Ces derniers sont disposés à l'intérieur et sur le pourtour du système physique. La fonction de courant, la température et la concentration aux nœuds sont les inconnues du problème ; quant à la vitesse, elle est déduite de la fonction de courant. La méthode numérique utilisée a été décrite en détails par plusieurs auteurs (Mamou [1998], Boutana [2003], ...). Pour cette raison seulement les points saillants de ce code sont discutés ci-dessus.

### 4.3 Maillage



**Figure 4.1:** Représentation du maillage de notre modèle physique

Dans un repère cartésien, chaque nœud est identifié par un couple d'indice  $(i, j)$  désignant les lignes d'intersection du maillage. Le domaine de calcul est ainsi discrétisé avec un maillage uniforme suivant les deux directions de l'espace (voir figure 4.1).

La précision des résultats numériques est fonction de la taille du maillage. Le choix de ce dernier dépend à son tour des valeurs des paramètres de contrôle. Plusieurs tests numériques ont été réalisés pour choisir le bon maillage. Ainsi, pour des rapports de forme proches de l'unité, un maillage de  $80 \times 80$  a été adopté. Cependant, pour de grands rapports de forme de la cavité,  $A \geq 8$ , la taille du maillage pouvait atteindre  $80 \times 220$ . Les tests effectués pour arriver à ces résultats sont illustrés dans cette section.

#### 4.4 Algorithme de calcul

La méthode d'initialisation du code de calcul, à partir de solutions proches de celles recherchées, est utilisée pour minimiser le temps de calcul. L'algorithme de calcul utilisé est le suivant :

1. Lire les données et initialiser des variables du programme
2. Estimer les champs de température et de concentration,  $T$  et  $N$
3. Résoudre l'équation de la fonction de courant,  $\psi$
4. Calculer les vitesses,  $u_{i,j}$  et  $v_{i,j}$
5. Résoudre l'équation de l'énergie et de la concentration avec la méthode A.D.I.
6. Retourner à l'étape 2 et répéter les opérations 2-4 jusqu'à la convergence
7. Passer à l'étape de temps suivante  $t + \Delta t$  et retourner à l'étape 2.
8. Répéter les calculs jusqu'à l'obtention de la solution permanente ou de la solution transitoire établie.

#### 4.5 Critère de convergence

A chaque étape de temps, la mise à jour des nouvelles variables physiques est

faite jusqu'à ce que le critère de convergence  $\sum_{i=1}^m (b_i^k - b_i^{k-1}) / \sum_{i=1}^m b_i^k \leq 10^{-9}$  soit satisfait.

Le paramètre  $b$  remplace  $\psi$ ,  $T$  et  $S$ .

#### 4.6 Validation du code numérique

De manière à vérifier l'exactitude des résultats numériques obtenus dans le présent travail, une validation du code numérique a été faite en comparant les résultats de cette étude avec ceux de Mamou et al. [1998] et de Kalla [2003] pour une cavité poreuse rectangulaire horizontale.

	Mamou [1998]	Kalla [2004]	Présente étude
$\psi_0$	3.689	3.675	3.688
$Nu$	3.635	3.649	3.657
$Sh$	6.739	6.742	6.751

**Tableau 4.1** : Comparaison entre les résultats numériques de Mamou [1998], Kalla [2004] et la présente étude pour  $R_T = 100$ ,  $Le = 10$ ,  $\varphi = -0.8$ ,  $Ha = 0$ ,  $a = 0$  et  $A = 8$

Une comparaison entre les résultats prédits par le présent code et ceux obtenus dans le passé par Mamou [1998] et Kalla [2004] est présenté dans le tableau 4.1 pour le cas  $R_T = 100$ ,  $Le = 10$ ,  $\varphi = -0.8$ ,  $Ha = 0$ ,  $a = 0$  et  $A = 8$ . La concordance est satisfaisante, les différences observées étant inférieures à environ 1.5%.

L'effet du maillage sur la précision du code numérique utilisé est illustré dans le tableau 4.2 pour le cas d'une cavité carrée ( $A = 1$ ) et pour les conditions  $R_T = 500$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = 0.5$ ,  $Ha = 1$ ,  $a = 1$  et  $A = 1$ . Les résultats indiquent que pour un maillage d'ordre  $80 \times 80$  la solution a convergé vers des résultats à peu près constants. Augmenter



le maillage jusqu'à  $100 \times 100$  ne change pratiquement pas les résultats obtenus pour  $\psi_0$ ,  $Nu$  et  $Sh$  mais, par contre augmente considérablement le temps de calcul.

	$m \times n = 10 \times 10$	$m \times n = 50 \times 50$	$m \times n = 80 \times 80$	$m \times n = 100 \times 100$
$\psi_0$	5.674	5.807	5.843	5.869
$Nu$	4.031	4.342	4.481	4.495
$Sh$	9.790	9.484	8.586	8.564

**Tableau 4.2 :** Effet du maillage sur la précision des résultats pour  $R_T = 500$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = 0.5$ ,  $Ha = 1$ ,  $a = 1$  et  $A = 1$ .

Finalement le tableau 4.3 illustre les résultats typiques obtenus pour une couche de grande extension ( $A = 4$ ) pour les conditions  $R_T = 200$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = 0.2$ ,  $Ha = 1$  et  $a = 0$ . Un maillage de  $80 \times 220$  est à peu près suffisant pour obtenir une indépendance de la solution avec le maillage. La solution analytique correspondant à cette situation est également présentée dans le tableau 4.2. On peut voir une bonne concordance entre les deux types de solution. Cependant, tel que discuté dans le Chapitre V, un rapport de forme d'environ  $A = 10$  est nécessaire en général pour avoir une indépendance de la solution avec le rapport de forme.

	Solution numérique			Solution analytique
	$m \times n = 40 \times 120$	$m \times n = 60 \times 180$	$m \times n = 80 \times 220$	
$\psi_0$	3.945	3.934	3.932	3.931
$Nu$	3.857	3.889	3.890	3.893
$Sh$	5.186	5.204	5.218	5.230

**Tableau 4.3 :** Comparaison entre les résultats numériques et les résultats analytiques pour  $R_T = 200$ ,  $Le = 2$ ,  $\phi = 0.2$ ,  $Ha = 1$ ,  $a = 0$  et  $A = 4$ .

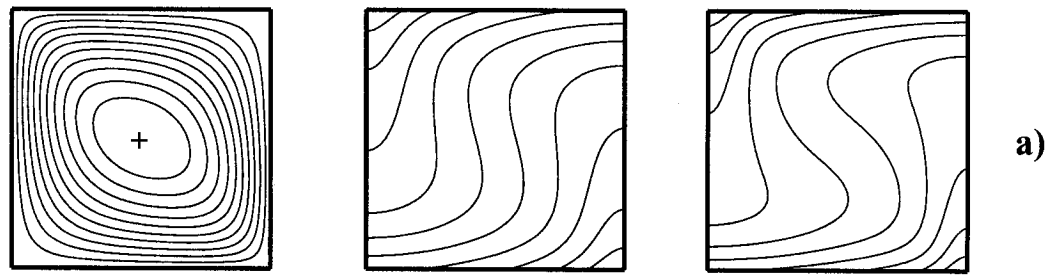
## CHAPITRE V

### RESULTATS ET DISCUSSION

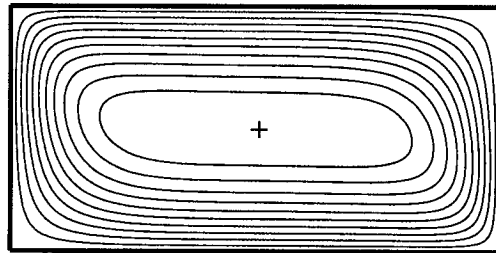
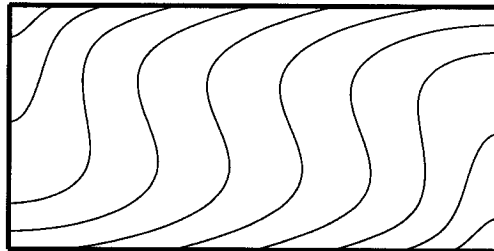
Ce chapitre est consacré à l'analyse des résultats obtenus analytiquement et numériquement, sur l'influence d'un champ magnétique sur la convection naturelle d'un fluide binaire, électriquement conducteur, saturant un milieu poreux confiné dans une cavité. Les effets des paramètres de contrôle du problème, à savoir le nombre de Rayleigh thermique  $R_T$ , le rapport de forme de la cavité  $A$ , le nombre de Hartmann  $Ha$ , le rapport de forces de volume  $\varphi$  et le nombre de Lewis  $Le$  sur la structure de l'écoulement seront discutés.

#### 5.1 Influence du rapport de forme de la cavité, $A$

La figure 5.1a illustre des résultats numériques typiques obtenus pour le cas  $R_T = 200$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = 0.2$ ,  $Ha = 1$  et  $a = 0$  (convection doublement diffusive) pour différentes valeurs du rapport de forme  $A$ . Dans le cas d'une cavité carré ( $A = 1$ ), la figure 5.1a, montre que l'écoulement résultant consiste en une cellule convective pouvant tourner indifféremment dans le sens horaire ou anti-horaire. La convection est relativement intense ( $\psi_0 = 3.898$ ), donnant lieu à une déformation importante des isothermes et des lignes de concentration ( $Nu = 3.488$  et  $Sh = 5.198$ ). En augmentant le rapport de forme à  $A = 2$ , la figure 5.2b indique que l'intensité de la convection est intensifiée ( $\psi_0 = 4.012$ ), résultant en un transfert de chaleur et de masse plus important ( $Nu = 3.849$  et  $Sh = 5.224$ ). Cette tendance est conforme aux résultats obtenus dans le passé par différents auteurs dans l'étude de la convection naturelle confinée dans une enceinte, en l'absence d'un champ magnétique (Nield et B ejan [1999]).

 $\psi$  $T$  $S$ 

a)

 $\psi$  $T$ 

b)

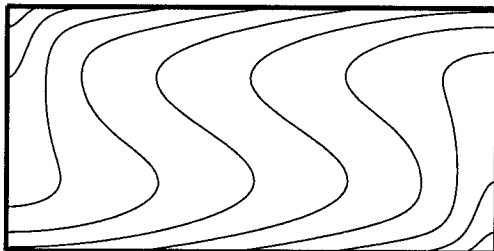
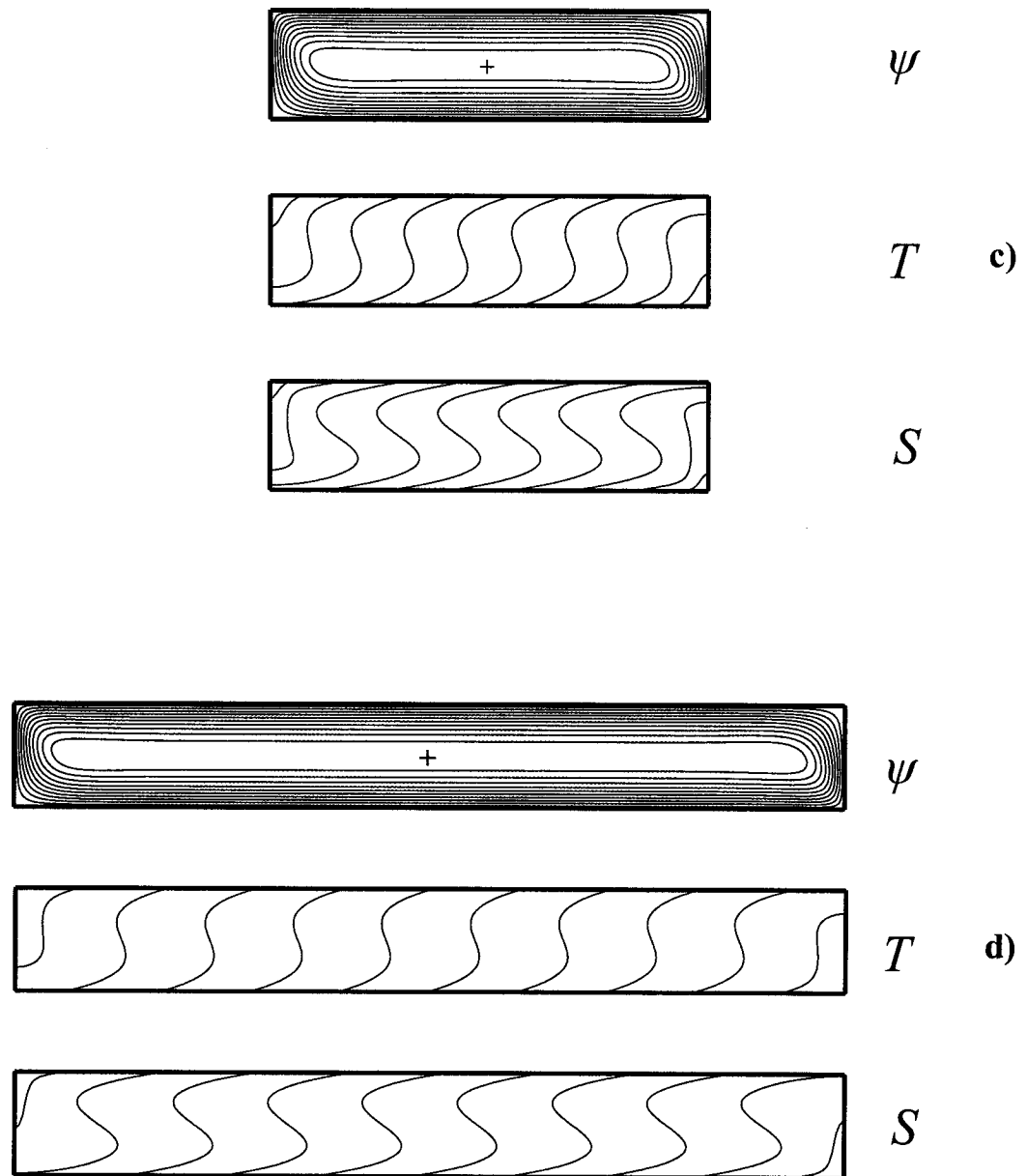
 $S$ 

Figure 5.1



**Figure 5.1:** Lignes de courant, de température et de concentration pour  $R_T = 200$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = 0.2$ ,  $Ha = 1$  et  $a = 0$ : a)  $A = 1$ ,  $\psi_0 = 3.898$ ,  $Nu = 3.488$ ,  $Sh = 5.198$ , b)  $A = 2$ ,  $\psi_0 = 4.012$ ,  $Nu = 3.849$ ,  $Sh = 5.224$ , c)  $A = 4$ ,  $\psi_0 = 3.932$ ,  $Nu = 3.882$ ,  $Sh = 5.203$  et d)  $A = 8$ ,  $\psi_0 = 3.927$ ,  $Nu = 3.866$ ,  $Sh = 5.176$ .

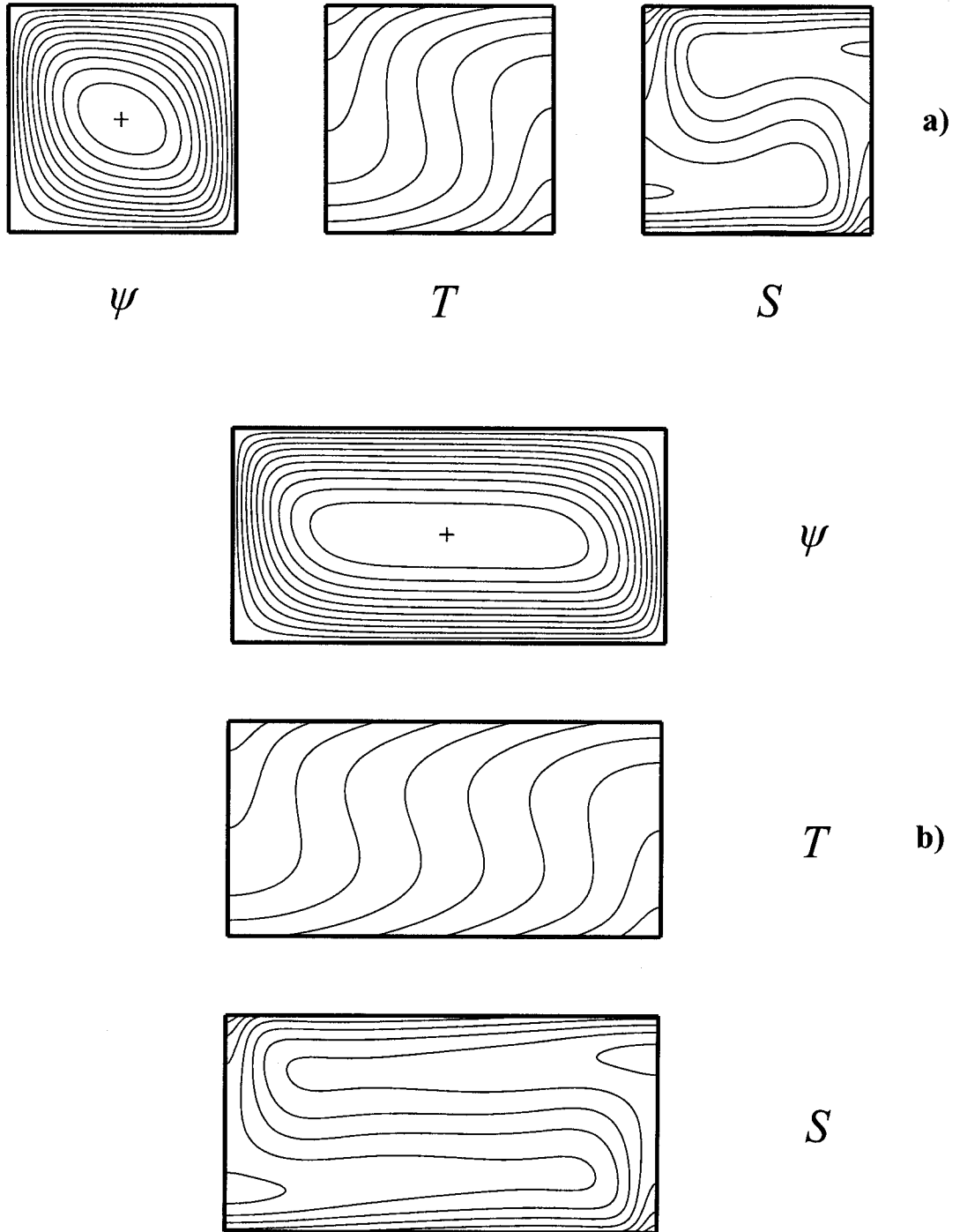
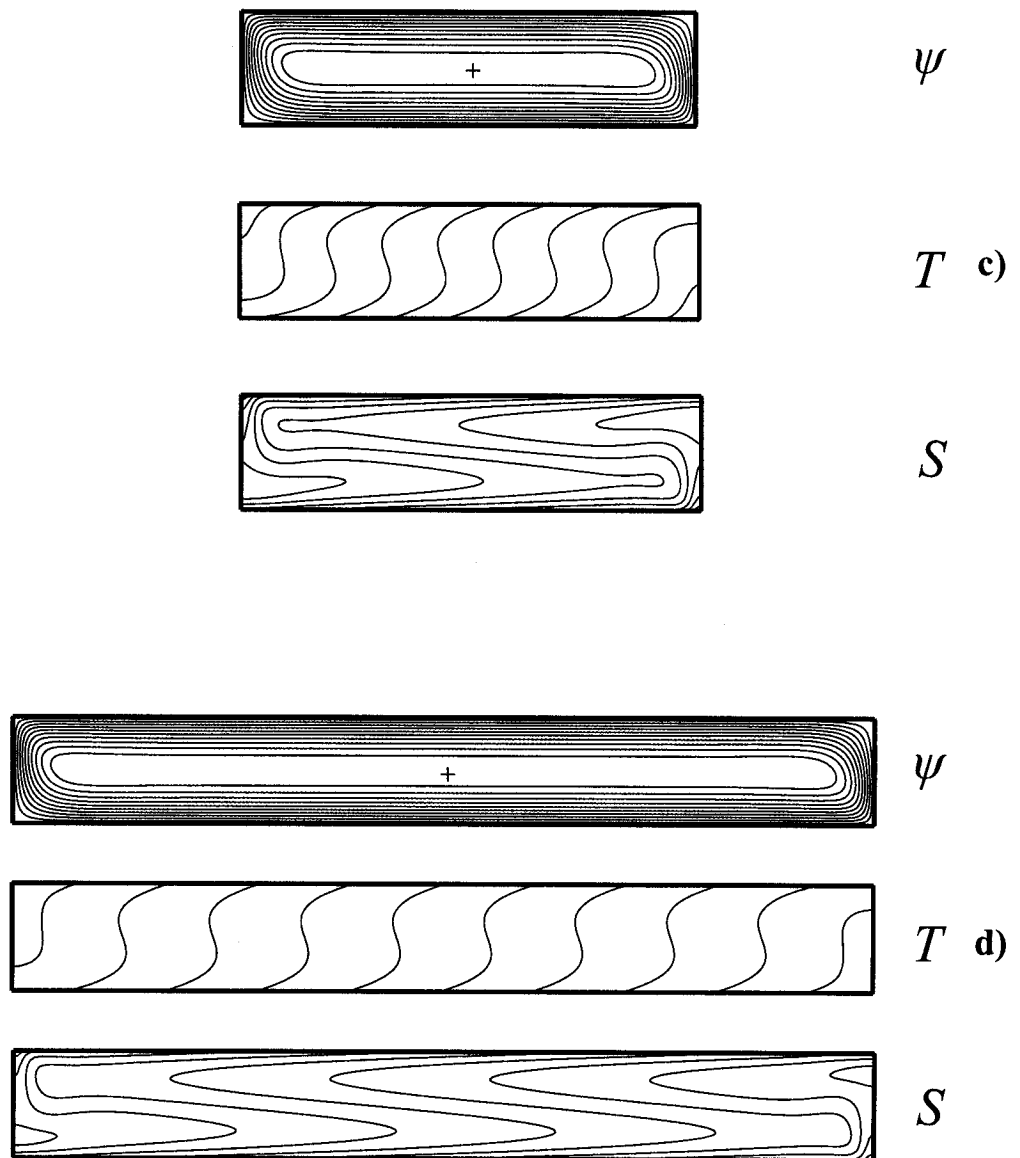


Figure 5.2



**Figure 5.2:** Lignes de courant, de température et de concentration pour  $R_T = 200$ ,  $Le = 2$ ,  $\varphi = 0.2$ ,  $Ha = 1$  et  $a = 1$  : a)  $A = 1$ ,  $\psi_0 = 3.691$ ,  $Nu = 3.364$ ,  $Sh = 10.379$ , b)  $A = 2$ ,  $\psi_0 = 3.814$ ,  $Nu = 3.733$ ,  $Sh = 8.299$ , c)  $A = 4$ ,  $\psi_0 = 3.750$ ,  $Nu = 3.766$ ,  $Sh = 8.085$ , d)  $A = 8$ ,  $\psi_0 = 3.745$ ,  $Nu = 3.750$ ,  $Sh = 8.022$ .

Cependant, au fur et à mesure que l'on augmente le rapport de forme  $A$ , les figures 5.1c et 5.1d indiquent que l'écoulement devient progressivement parallèle dans le cœur de la cavité. Il en résulte que l'intensité de la convection  $\psi_0$  et les transferts de température et de concentration, convergent asymptotiquement vers la solution prédite par la théorie de l'écoulement parallèle (Chapitre III) pour lequel la solution est indépendante du rapport de forme de la cavité. La figure 5.2 illustre les résultats numériques obtenus pour les mêmes conditions que celles de la figure 5.1 mais pour  $a=1$ , i.e. dans le cas d'un mouvement convectif induit par l'effet Soret. Qualitativement, les résultats sont similaires pour ces deux modes de convection.

De façon à estimer le rapport de forme  $A$  minimum, nécessaire pour simuler le cas d'un écoulement parallèle dans une couche horizontale, des tests numériques ont été effectués. Des résultats typiques sont rapportés dans la figure 5.3. Dans cette dernière, les résultats numériques sont indiqués par des symboles en noir. La solution analytique approximée, valide dans la limite d'une couche horizontale infinie ( $A \gg 1$ ), est indiquée par des lignes en pointillés. A partir de ce graphique, on peut estimer la valeur minimum du rapport de forme  $A$  au-dessus de laquelle l'écoulement peut être considéré comme étant parallèle. On observe donc que, en augmentant le rapport de forme de  $A=1$  à  $A=10$ , les résultats indiquent que la fonction de courant  $\psi_0$ , figure 5.3a, le nombre de Nusselt  $Nu$  et le nombre de Sherwood  $Sh$ , figure 5.3b, atteignent la limite d'un écoulement parallèle pour environ  $A \geq 4$ . Le fait d'augmenter le rapport de forme  $A$ , pour un nombre de Rayleigh donné, conduit donc à une situation asymptotique pour laquelle les solutions deviennent indépendantes de  $A$ . Ceci est en parfait accord avec la prédiction de la théorie de l'écoulement parallèle.



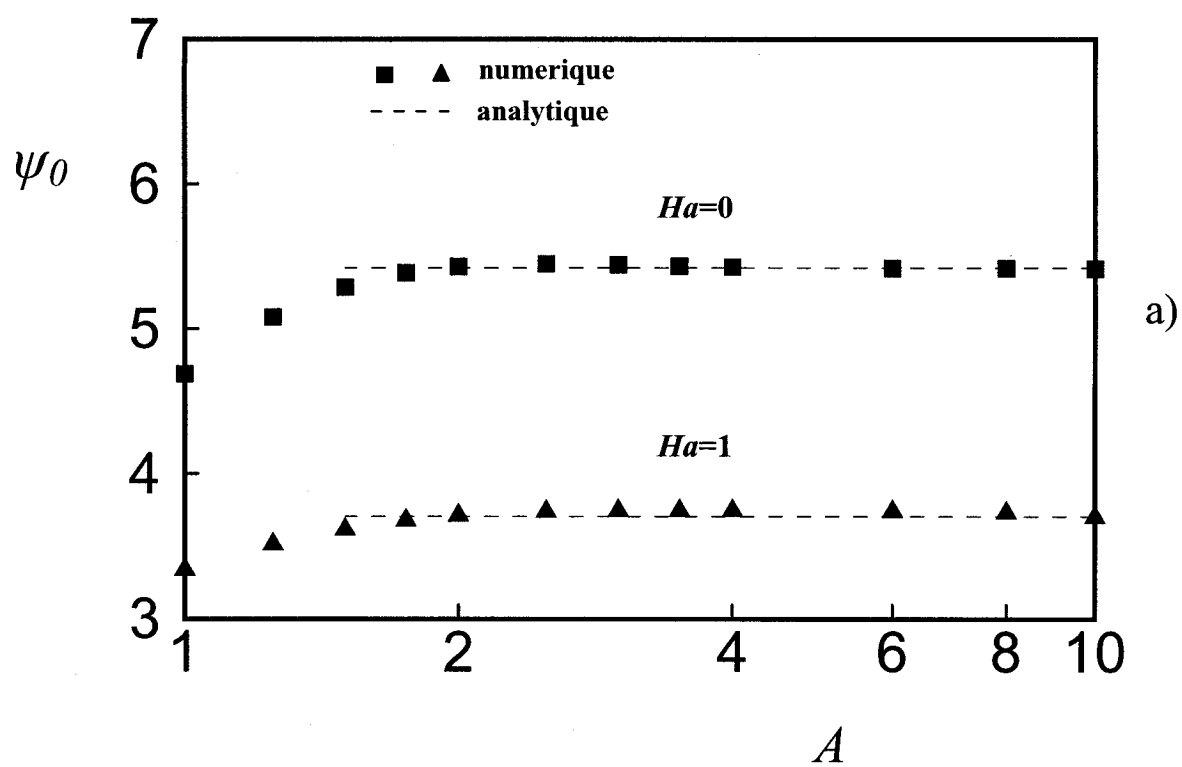
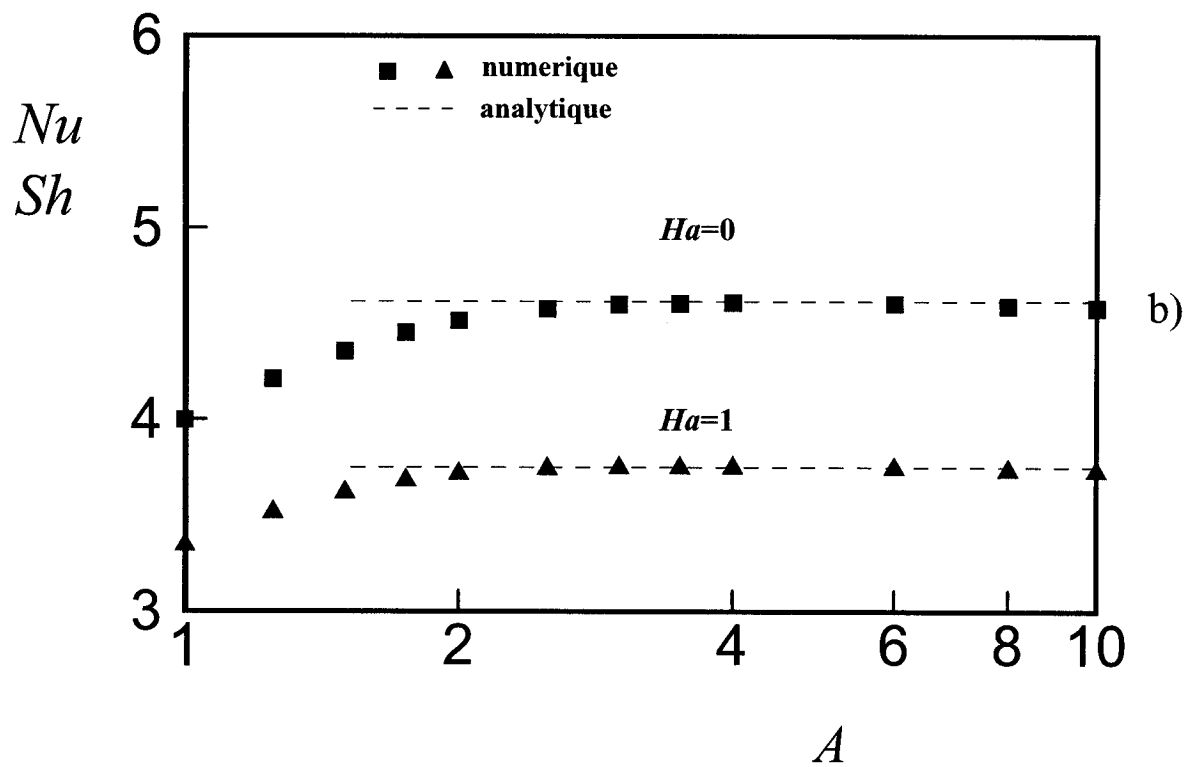


Figure 5.3



**Figure 5.3:** Effet de  $A$  sur la fonction de courant, sur le nombre de Nusselt  $Nu$  et le nombre de Sherwood  $Sh$  pour  $R_T = 200$ ,  $Le = 1$ ,  $\varphi = 0$ ,  $a = 0$  et  $Ha = 0$  et  $1$  : a)  $\psi_0$  en fonction de  $A$  et b)  $Nu$  et  $Sh$  en fonction de  $A$

A la suite de nombreux tests, nous avons conclu que les résultats numériques peuvent être considéré indépendant du rapport de forme pour  $A \gg 8$ . pour cette raison, la plupart des résultats rapportés dans ce présent travail sont obtenus pour un rapport de forme de  $A=10$ . Tel que montré par Mamou [1998], pour une convection thermosolutale en l'absence d'un champ magnétique, la valeur du rapport de forme minimum,  $A$ , est fonction du nombre de Rayleigh thermique,  $R_T$ , du rapport de force de volume,  $\varphi$ , et du nombre de Lewis,  $Le$ . Dans le présent problème, ces paramètres ont également une influence sur le rapport de forme minimum pour obtenir un écoulement parallèle. Cependant, comme l'indique la figure 5.3, le nombre de Hartmann  $Ha$  joue, un rôle important sur ce phénomène.

## 5.2 Influence du nombre de Hartmann, $Ha$

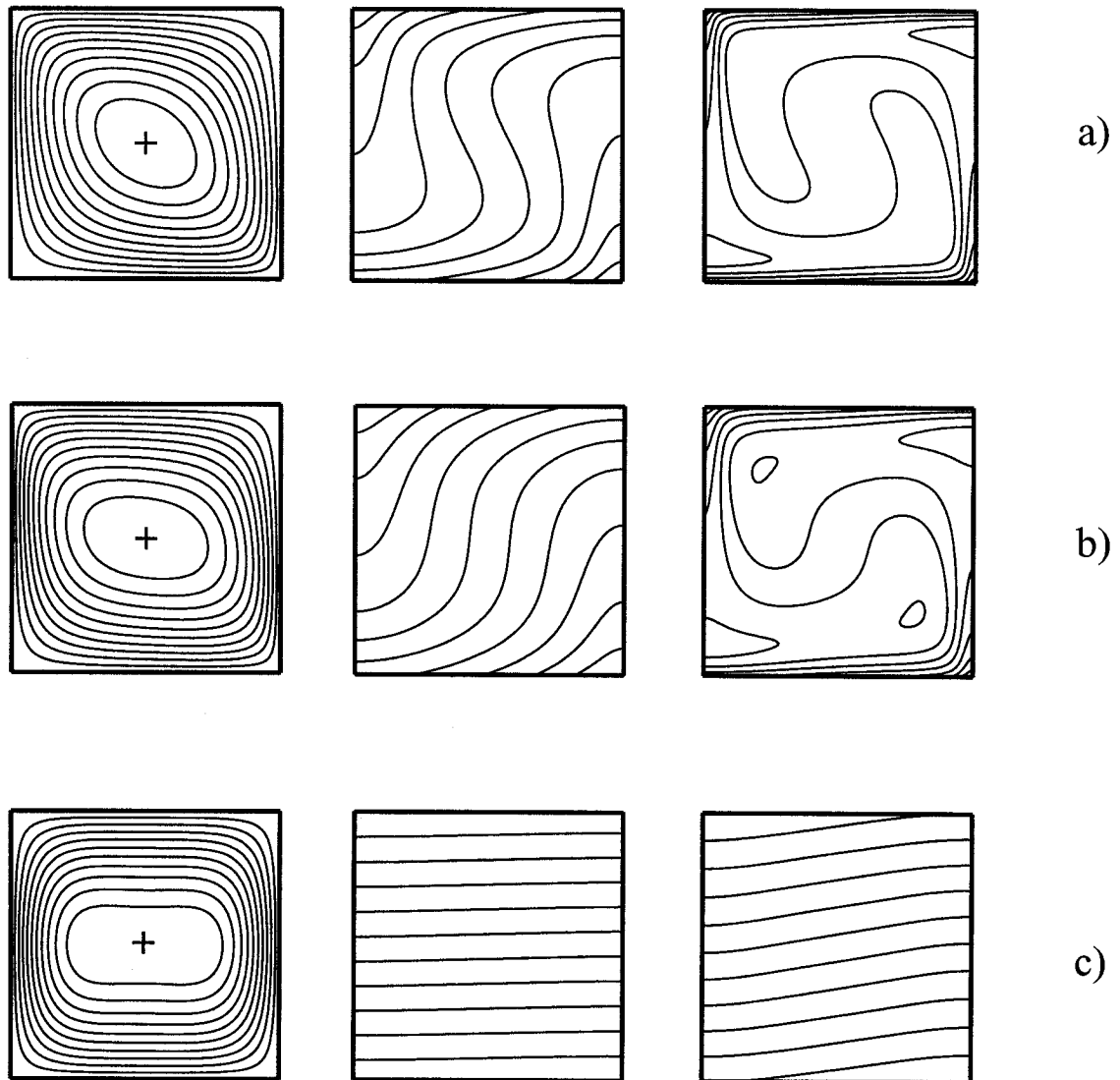
Dans cette section l'influence du champ magnétique sur la structure de l'écoulement et sur les champs de température et de concentration, est discutée pour le cas particulier d'une cavité carrée ( $A=1$ ).

La figure 5.4 présente des résultats typiques obtenus pour les conditions :  $R_T = 250$ ,  $Le = 10$ ,  $\varphi = 0.5$  et  $a = 1$ . Les résultats sont montrés en termes de lignes de courant sur la gauche, d'isothermes au centre et d'isoconcentrations sur la droite pour différentes valeurs du nombre de Hartmann. Les intervalles entre les lignes de courant, les isothermes et les isoconcentrations sont déterminés par la condition,  $\Delta\phi = (\phi_{\max} - \phi_{\min})/11$  où  $\phi$  remplace  $\psi$ ,  $T$  et  $S$ .

La figure 5.4a correspond au cas  $Ha = 0$ , c'est-à-dire en l'absence d'un champ magnétique. Cette situation est similaire au problème classique de Bénard pour lequel le

nombre de Rayleigh supercritique  $R_{TC}^{sup}$ , marquant la naissance de la convection, est donné par  $R_{TC}^{sup} = 22.95/[1 + \varphi(Le + a)]$ , tel que prédit Mamou et Vasseur [1999] sur la base de la théorie de la stabilité linéaire. Le nombre de Rayleigh supercritique  $R_{TC}^{sup}$  pour les conditions  $Le=10$ ,  $\varphi=0.5$  et  $a=1$  est donc  $R_{TC}^{sup} = 3.53$ . Lorsque le nombre de Rayleigh  $R_T$  est inférieur ou égal à cette valeur critique, le fluide est au repos ( $\psi_0 = 0$ ,  $Nu = Sh = 1$ ). Tel qu'indiqué par la figure 5.4a, pour un nombre de Rayleigh  $R_T = 250$ , beaucoup plus grand que le nombre de Rayleigh supercritique, la convection résultante, caractérisée par une seule cellule de convection, est importante ( $\psi_0 = 5.151$ ). Ceci se traduit par une grande distorsion des champs de température et de concentration ( $Nu = 4.366$  et  $Sh = 16.703$ ).

Les effets du champ magnétique sur l'écoulement sont illustrés sur les figures 5.4b et 5.4c, correspondant à  $Ha = 2$  et  $Ha = 10$ , respectivement. Les résultats montrent que pour les valeurs de  $R_T$ ,  $A$ ,  $Le$  et  $\varphi$  données, plus on augmente la valeur du nombre de Hartmann  $Ha$ , plus la circulation convective est progressivement inhibée. Ainsi, pour  $Ha = 2$ , figure 5.4b, l'intensité de l'écoulement du fluide est réduite à  $\psi_0 = 2.584$  en comparaison avec la valeur  $\psi_0 = 5.151$  de la figure 5.4a. En augmentant le nombre de Hartmann à  $Ha = 10$ , la figure 5.4c indique que le mouvement convectif dans la cavité est presque arrêté par la traînée magnétique ( $\psi_0 = 0.381$ ). Par conséquent, les transferts de chaleur et de l'espèce,  $Nu = 1.001$  et  $Sh = 1.017$  respectivement, sont presque purement conductifs et les lignes isothermes et les isoconcentrations sont pratiquement horizontales.



**Figure 5.4 :** Lignes de courant, de température et de concentration pour  $R_T = 250$ ,  $Le = 10$ ,  $\varphi = 0.5$ ,  $A = 1$ ,  $a = 1$ : a)  $Ha = 0$ ,  $\psi_0 = 5.151$ ,  $Nu = 4.366$ ,  $Sh = 16.703$ ; b)  $Ha = 2$ ,  $\psi_0 = 2.584$ ,  $Nu = 2.597$ ,  $Sh = 12.422$ ; c)  $Ha = 10$ ,  $\psi_0 = 0.381$ ,  $Nu = 1.001$ ,  $Sh = 1.017$ .

Il est à remarquer que dans le cas d'une cavité, dont le rapport de forme est de l'ordre de l'unité, la solution à ce problème ne peut être que numérique. En effet, les champs d'écoulement, de température et de concentration sont alors bidimensionnels et une solution analytique n'est pas alors envisageable.

### 5.3 Influence du rapport des forces de volume, $\varphi$

Avec les conditions thermiques et solutales considérées dans cette étude le gradient thermique imposé sur la couche poreuse est déstabilisant, alors que le gradient de concentration est déstabilisant si  $\varphi > 0$  et stabilisant si  $\varphi < 0$ . Le nombre de Rayleigh critique marquant la naissance de la convection, l'intensité de l'écoulement ainsi que les transferts de chaleur et de l'espèce résultants, dépendent donc fortement du rapport des forces thermique et solutale  $\varphi$ . L'influence de ce paramètre, sur les diagrammes de bifurcation de l'état de repos du fluide vers l'état convectif, va être discutée dans cette section.

#### 5.3.1 Cas où les forces de volume sont coopérantes ( $\varphi > 0$ )

L'effet du nombre de Hartmann sur le diagramme de bifurcation pour le cas  $\varphi = 0.5$ ,  $Le = 10$  et  $a = 1$  est illustré sur la figure 5.5. En absence d'un champ magnétique ( $Ha = 0$ ) il a été montré par de nombreux auteurs (voir Bahloul et al. [2000] par exemple) que lorsque les forces thermiques et solutales sont coopérantes, l'écoulement convectif est possible seulement au dessus d'un nombre de Rayleigh supercritique (bifurcation fourche). Ce seuil critique est donné par  $R_{TC}^{sup} = 12 / [1 + \varphi(Le + a)]$  i.e. par  $R_{TC}^{sup} = 1.85$  pour les conditions considérées dans cette figure. Donc, quand  $R_T \leq 1.85$  le fluide est au repos ( $\psi_0 = 0$ ) et les transferts de chaleur

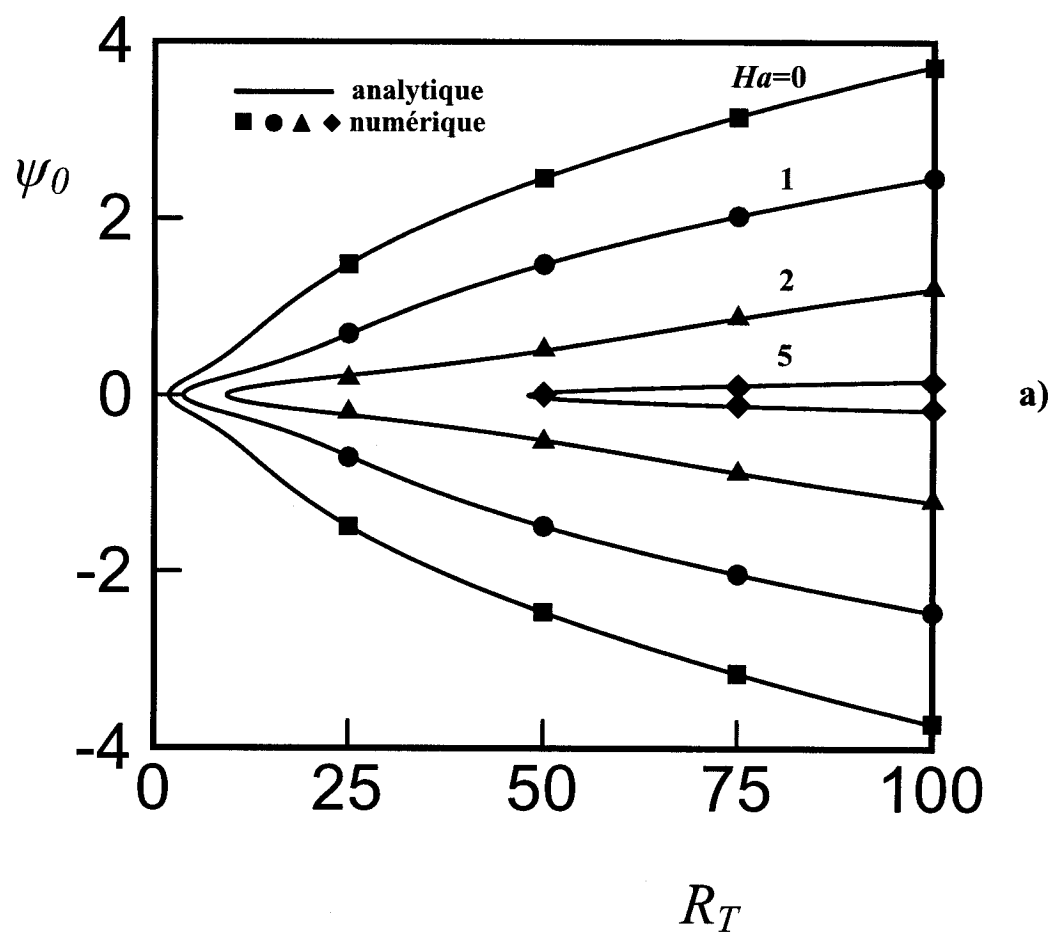


Figure 5.5

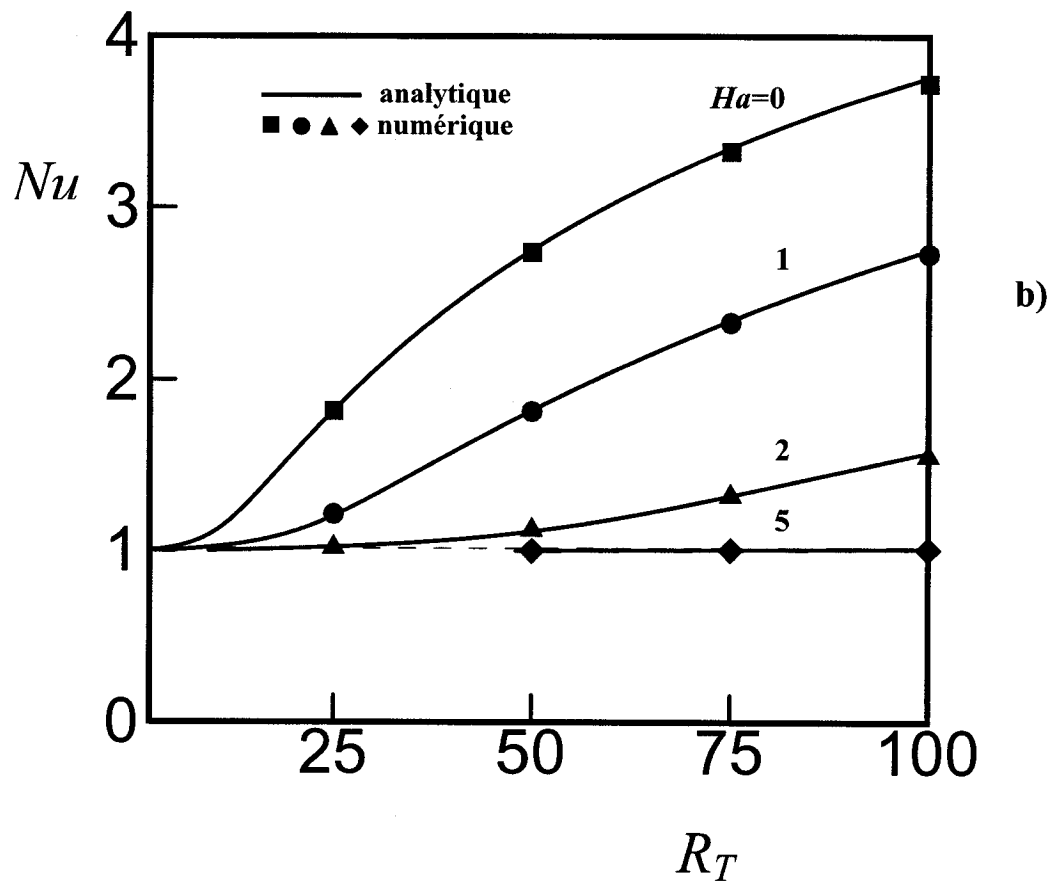
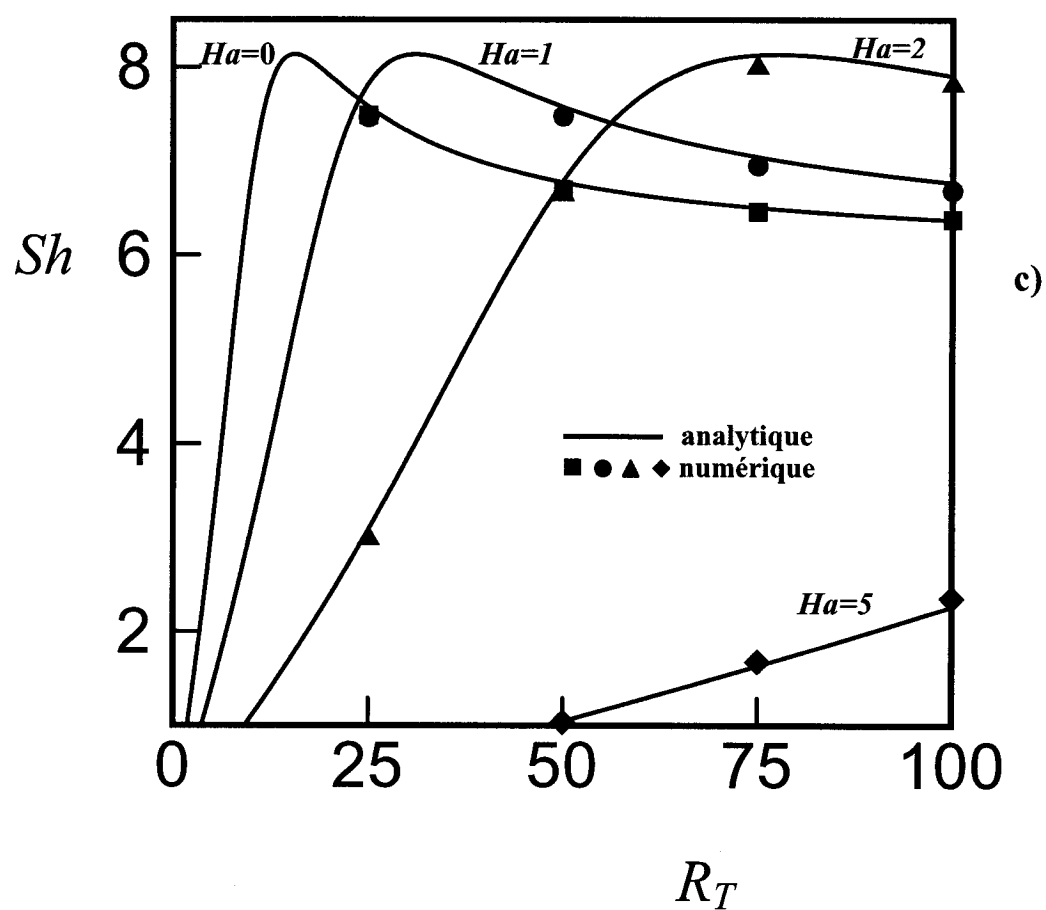


Figure 5.5





**Figure 5.5 :** Effet du nombre de Hartmann sur le diagramme de bifurcation pour le cas  $\varphi=0.5$ ,  $Le=10$ ,  $\alpha=1$  : a)  $\psi_0$  en fonction de  $R_T$ , b)  $Nu$  en fonction de  $R_T$  et c)  $Sh$  en fonction de  $R_T$

et de masse sont conductifs ( $Nu = Sh = 1$ ). Au-dessus de cette valeur critique, au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh est augmenté, l'intensité de la convection devient de plus en plus important, figure 5.5a, induisant ainsi des transferts de chaleur et de masse plus grands, figures 5.5b et 5.5c, respectivement.

La solution analytique, prédite par la théorie de l'écoulement parallèle est indiquée sur les figures 5.5a-5.5c par une ligne en trait plein alors que les résultats numériques sont représentés par des symboles. Un parfait accord entre ces deux résultats est observé. En augmentant le nombre de Hartmann de 0 à 5, nous constatons que le début du mouvement convectif est initié à une plus grande valeur du nombre de Rayleigh supercritique  $R_{TC}^{sup}$ . Ce dernier est donné par l'équation (3.33) comme étant  $R_{TC}^{sup} = R^{sup} (1 + Ha^2) / [1 + \varphi(Le + a)]$ . Pour le cas considéré dans la figure 5.5 les valeurs du nombre de Rayleigh supercritique, en fonction du nombre de Hartmann, sont indiquées dans le tableau ci-dessous :

$Ha$	$R_{TC}^{sup}$
0	1.846
1	3.692
2	9.231
5	48

**Tableau 5.1:** Nombre de Rayleigh supercritique en fonction de différents nombres de Hartmann pour le cas  $\varphi = 0.5$ ,  $Le = 10$  et  $a = 1$ .

### 5.3.2 Cas où les forces de volume sont opposées ( $\varphi < 0$ )

La figure 5.6 montre le diagramme de bifurcation dans le cas où les forces thermique et solutale s'opposent, c'est-à-dire que  $\varphi < 0$ . Les résultats sont présentés pour  $\varphi = -0.5$ ,  $Le = 10$ ,  $a = 1$  et pour différentes valeurs de  $Ha$  ( $0 \leq Ha \leq 5$ ). Il est bien connu, (voir Mamou et Vasseur [1999] par exemple), que dans le cas où  $R_T > 0$  et  $R_S = R_T \varphi Le < 0$ , la convection survient selon une bifurcation souscritique. La naissance du mouvement est alors caractérisée par une convection à amplitude finie de grandeur  $\psi_0 = \pm \sqrt{bd_1/Le}$ , tel que prédit par l'équation (3-37). Le nombre de Rayleigh souscritique  $R_{TC}^{sub}$ , correspondant au début de la convection, est donné par l'équation (3-36). Avant ce seuil, ( $R_T < R_{TC}^{sub}$ ), le transfert de chaleur et de l'espèce se fait par conduction pure ( $\psi_0 = 0$ ,  $Nu = 1$  et  $Sh = 1$ ). Au-delà de ce seuil ( $R_T \geq R_{TC}^{sub}$ ), deux solutions à amplitude finie bifurquent de l'état de repos, une des solutions étant stable (traits pleins) et l'autre instable (traits discontinus).

La figure 5.6a montre l'intensité de l'écoulement,  $\psi_0$ , en fonction du nombre de Rayleigh thermique,  $R_T$ . La solution comporte deux branches, la branche en ligne discontinue correspondant à la solution instable. Cette dernière existe seulement pour  $R_{TC}^{sub} \leq R_T \leq R_{TC}^{sup}$ . La branche en ligne pleine correspondant à la solution stable. Nous remarquons que l'amplitude de la solution stable,  $\psi_0$ , augmente monotoniquement avec le nombre de Rayleigh thermique alors que celle de la solution instable, qui est maximal au point de bifurcation, diminue progressivement avec l'augmentation de  $R_T$  et tend à s'annuler à la valeur du Rayleigh supercritique,  $R_{TC}^{sup}$ .

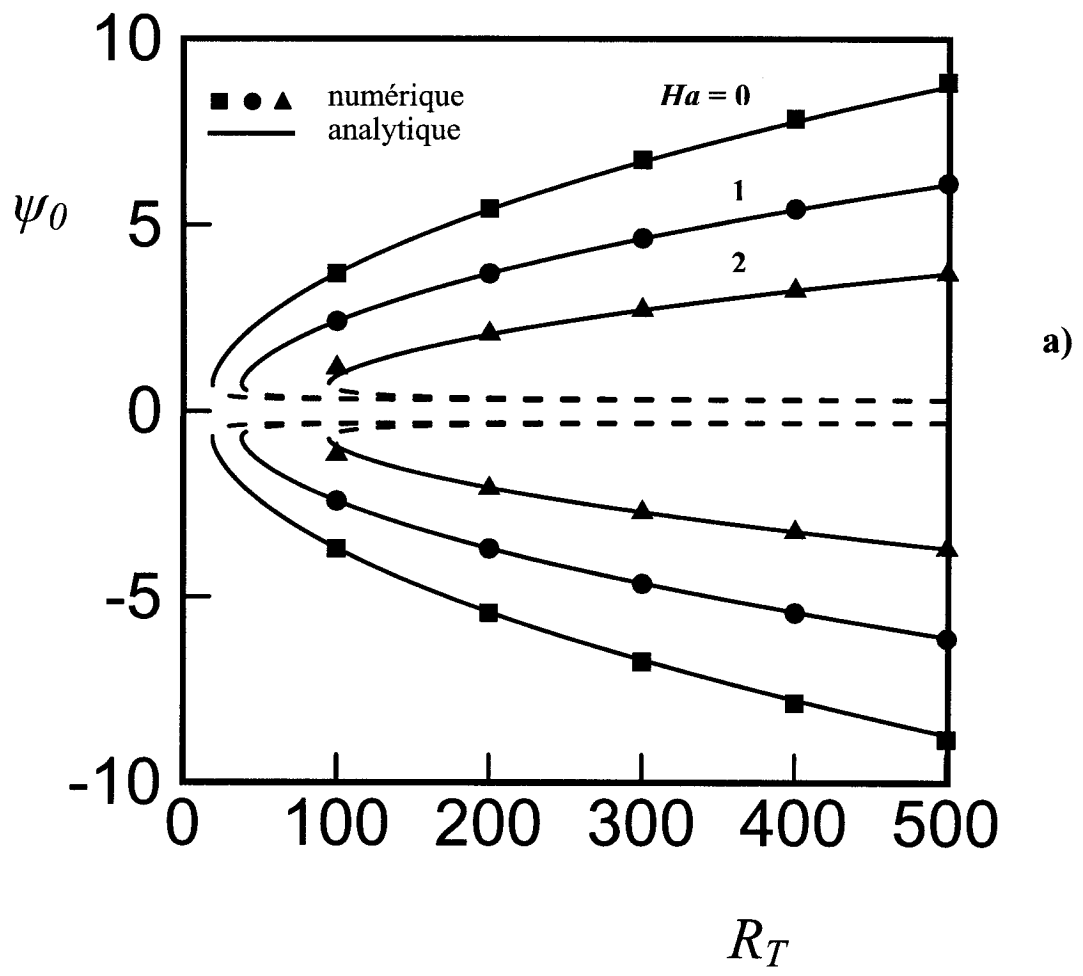


Figure 5.6

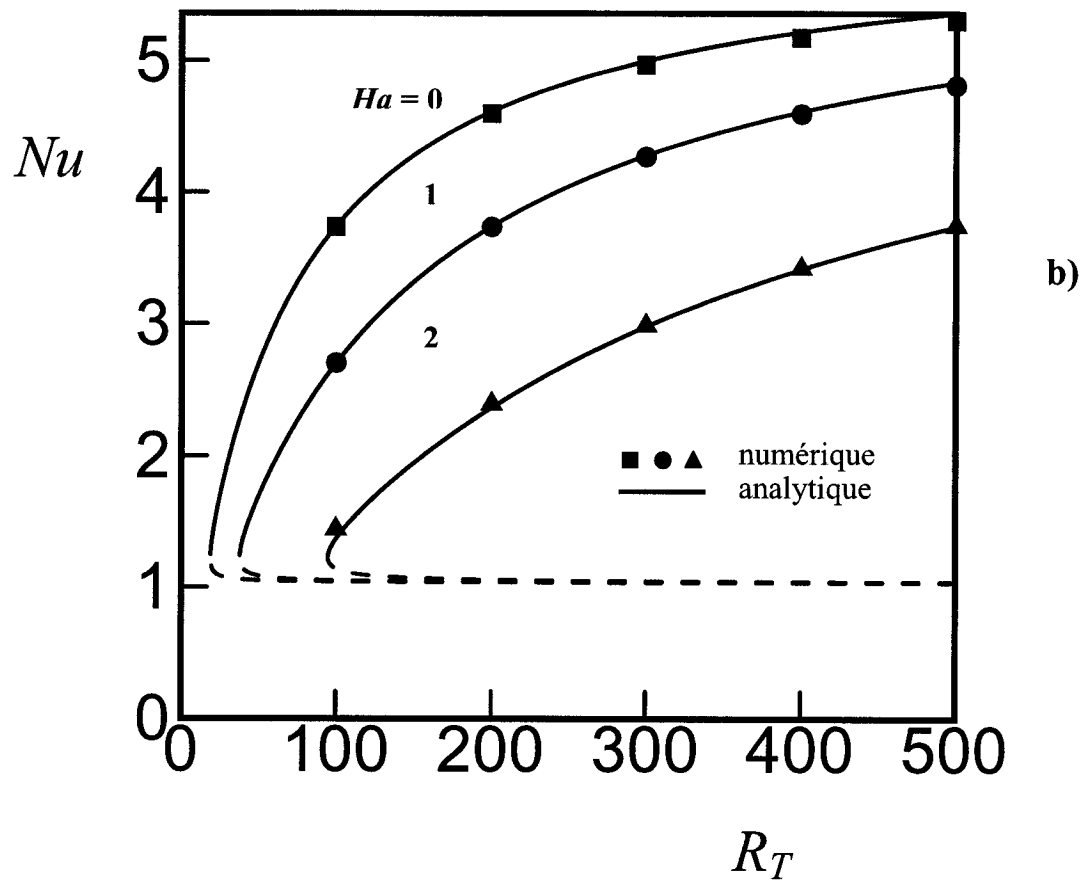
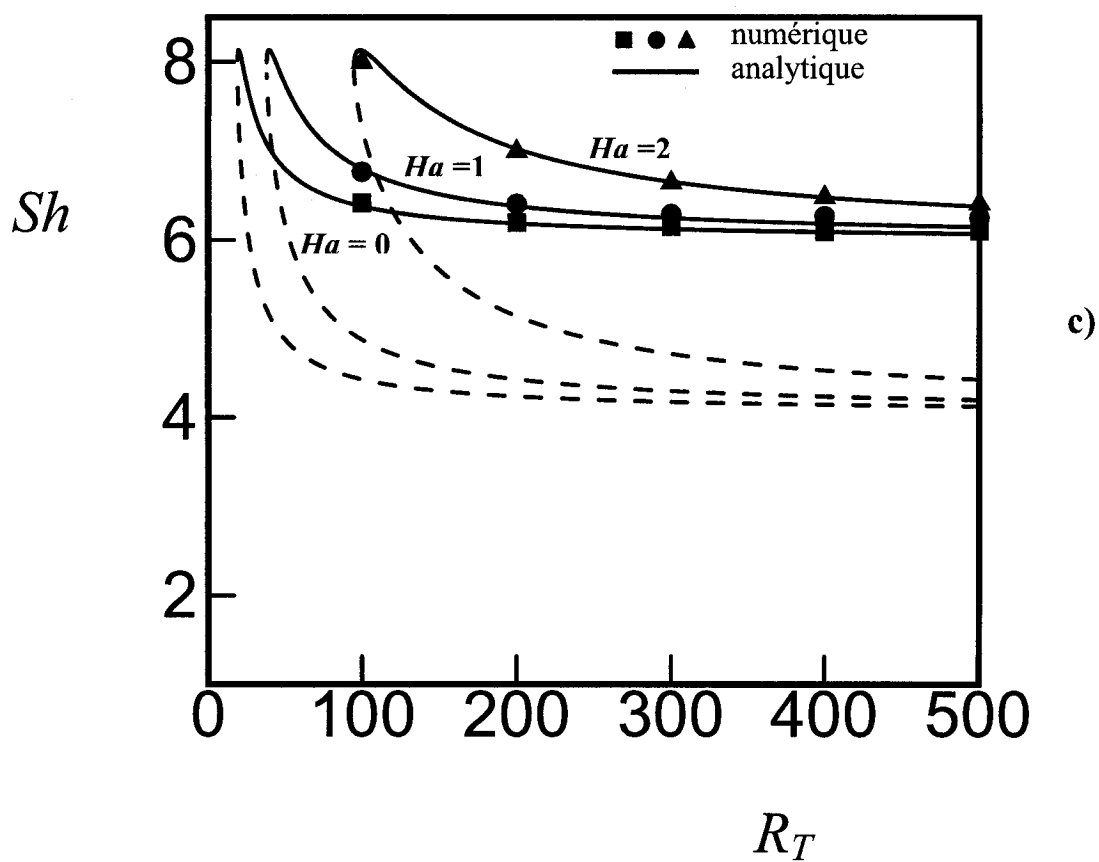


Figure 5.6:



**Figure 5.6** : Effet du nombre de Hartmann sur le diagramme de bifurcation pour le cas  $\varphi = -0.5$ ,  $Le = 10$ ,  $a = 1$  : a)  $\psi_0$  en fonction de  $R_T$ , b)  $Nu$  en fonction de  $R_T$  et c)  $Sh$  en fonction de  $R_T$

Nous donnons ci-dessous les différentes valeurs de  $R_{TC}^{sub}$  en fonction du nombre de Hartmann, tel que calculées à partir de l'équation (3-36) pour les conditions du graphique 5.6.

$Ha$	$R_{TC}^{sub}$
0	18.9
1	37.9
2	94.8

**Tableau 5.2 :** Nombre de Rayleigh souscritique en fonction de différentes valeurs de  $Ha$  pour le cas  $\varphi = -0.5$ ,  $Le = 10$ ,  $a = 1$ .

Nous constatons alors que plus on augmente l'intensité du champ magnétique plus le nombre de Rayleigh souscritique  $R_{TC}^{sub}$  est grand. Cela montre encore le fait que l'effet du champ magnétique est de retarder, voire empêcher, le mouvement convectif à l'intérieur de la cavité.

#### 5.4 Solution normalisée pour le cas asymptotique $A \gg 1$

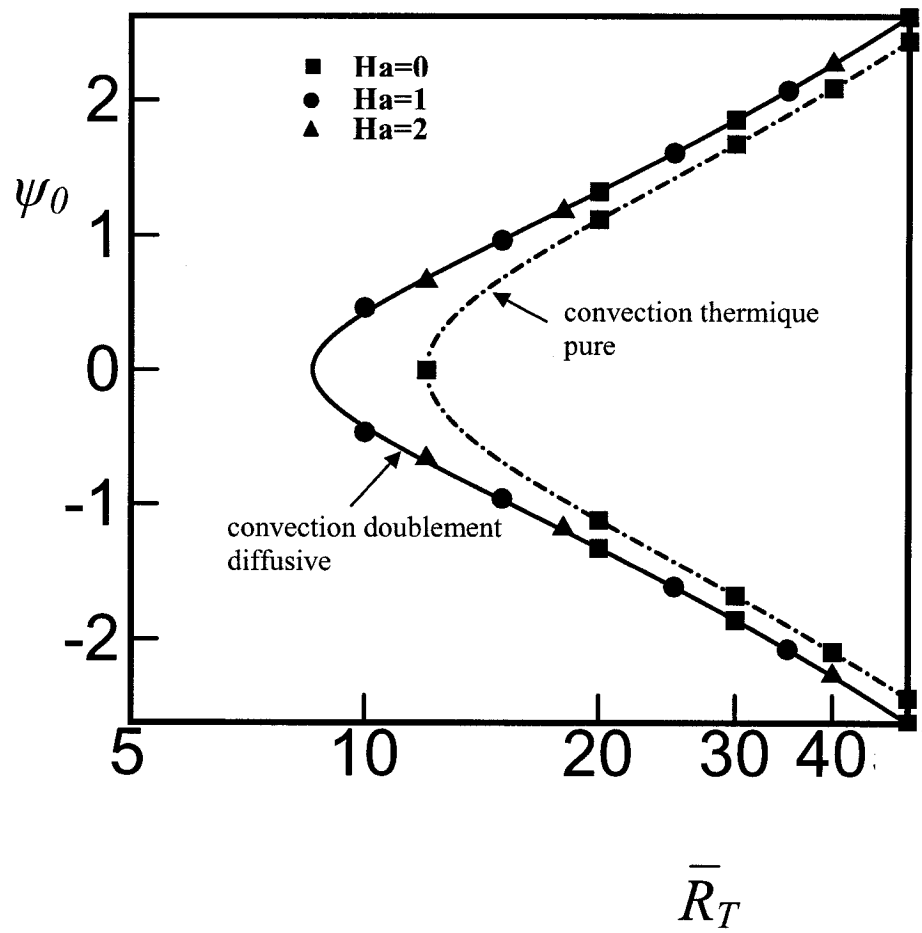
L'effet du nombre de Hartmann,  $Ha$ , sur la convection naturelle au sein d'une cavité carrée ( $A = 1$ ) a été discuté dans la section 5.2. Pour cette situation, à savoir un écoulement bi-dimensionnel, chacun des paramètres gouvernants ( $\varphi$ ,  $Le$ ,  $a$ ,  $R_T$ ,  $Ha$ ) joue un rôle d'une façon indépendante. Cependant, dans le cas d'une couche horizontale de grande extension ( $A \gg 1$ ) la solution analytique montre qu'il est possible d'introduire

un nombre de Rayleigh thermique modifié  $\bar{R}_T = R_T / (1 + Ha^2)$  et le problème peut être alors exprimé en fonction de ce groupement de termes. Ce point va être illustré dans cette section.

#### 5.4.1 Cas où les forces de volume sont coopérantes ( $\varphi > 0$ )

Cette situation est illustrée dans la figure 5.7 dans laquelle les courbes de bifurcation de  $\psi_0$ ,  $Nu$  et  $Sh$  sont présentées en fonction du nombre de Rayleigh thermique normalisée  $\bar{R}_T$ , pour le cas  $Le = 2$ ,  $\varphi = 0.2$  et  $a = 0$ . Deux courbes sont présentées dans ces graphiques. La première courbe correspond au cas classique de Bénard ( $\varphi = 0$ ) pour lequel la convection est induite par les effets thermiques purs. Pour cette situation Nield [1968], sur la base de la théorie de la stabilité linéaire, a montré que le nombre de Rayleigh critique marquant le début de la convection, en l'absence d'un champ magnétique, est donné par  $\bar{R}_{TC}^{sup} = R_{TC}^{sup} = 12$ . La seconde courbe correspond au cas  $\varphi = 0.2$ , pour lequel les forces solutales coopèrent avec les forces thermiques, pour déstabiliser le système. Dans ce cas, tel que prédit par la solution analytique présentée dans cette thèse, équation (3-33),  $\bar{R}_{TC}^{sup} = 8.57$ . La solution analytique, présentée par des lignes en traits pleins ou en pointillés, est en excellent accord avec les résultats numériques indiqués par des symboles. Les résultats numériques confirment la





a)

Figure 5.7

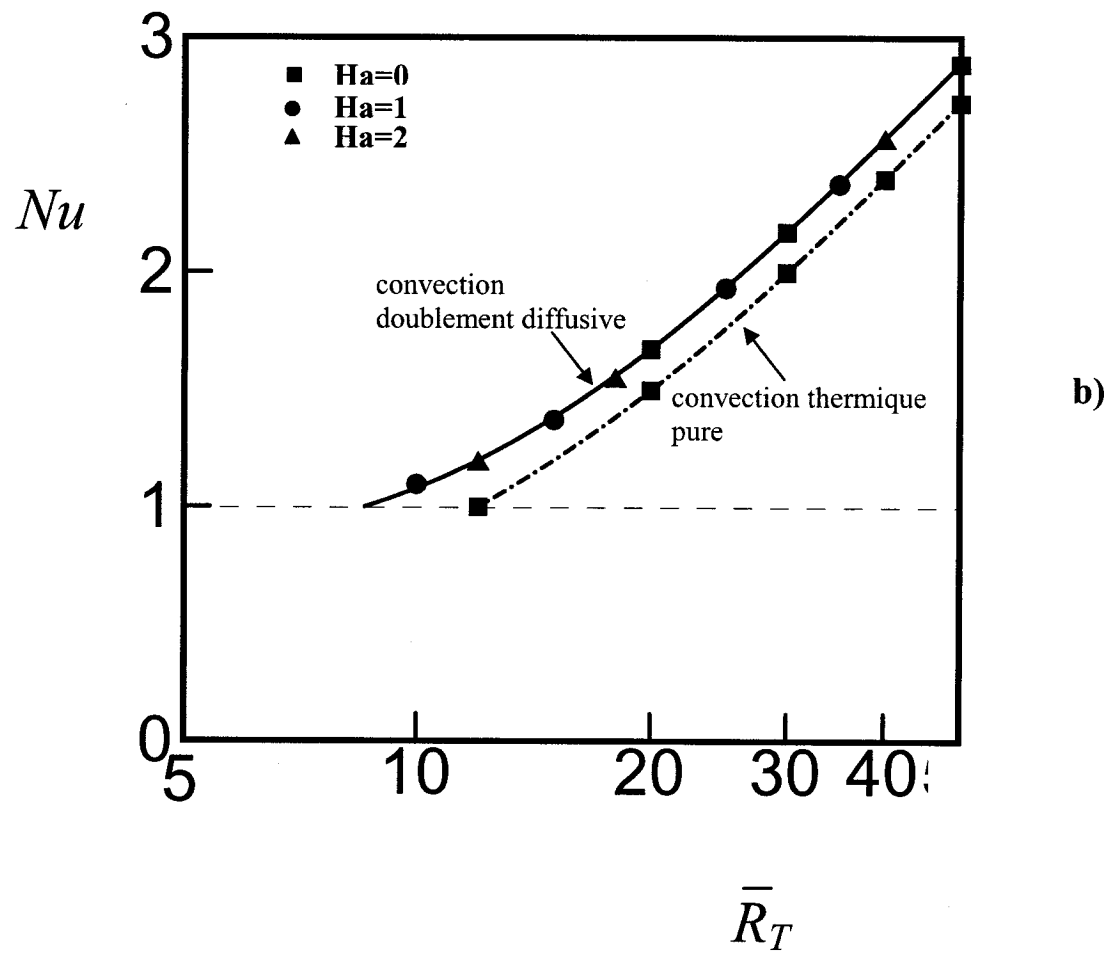
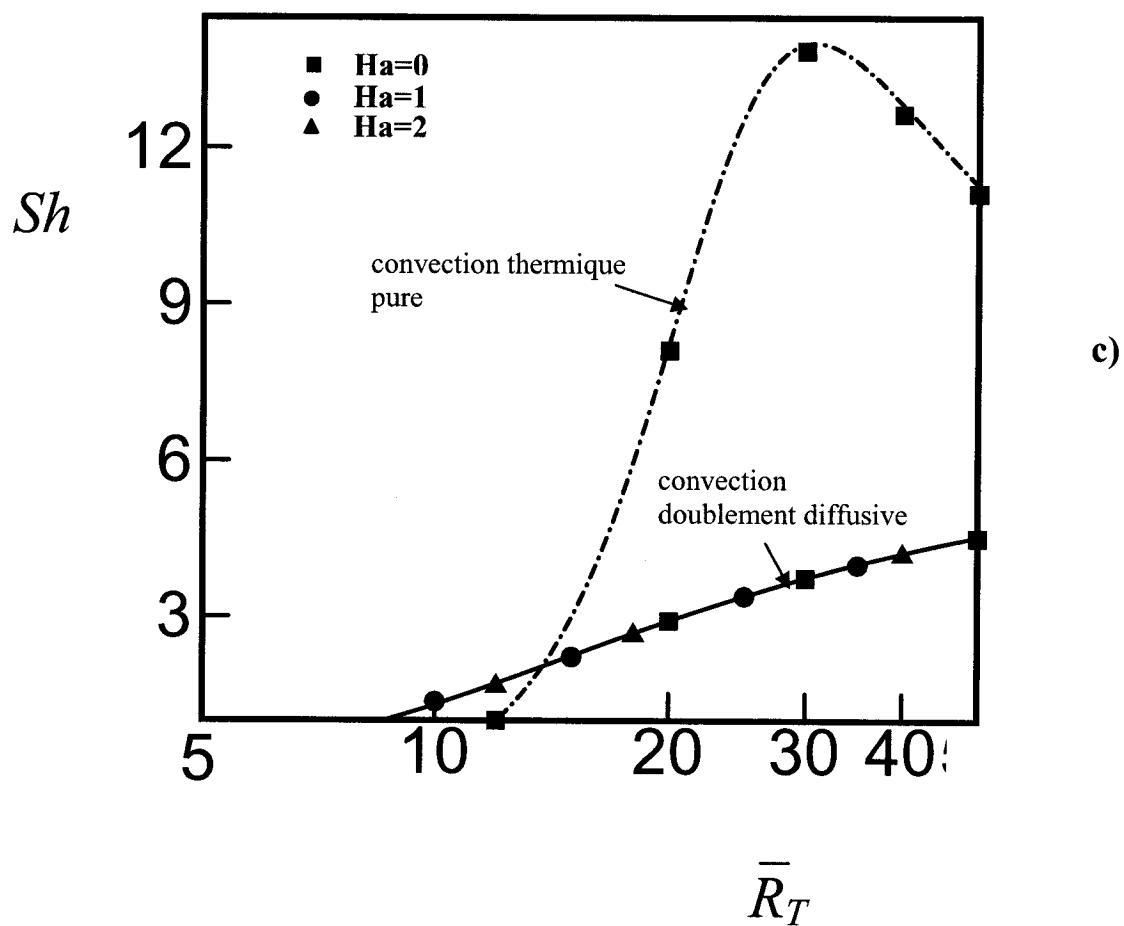
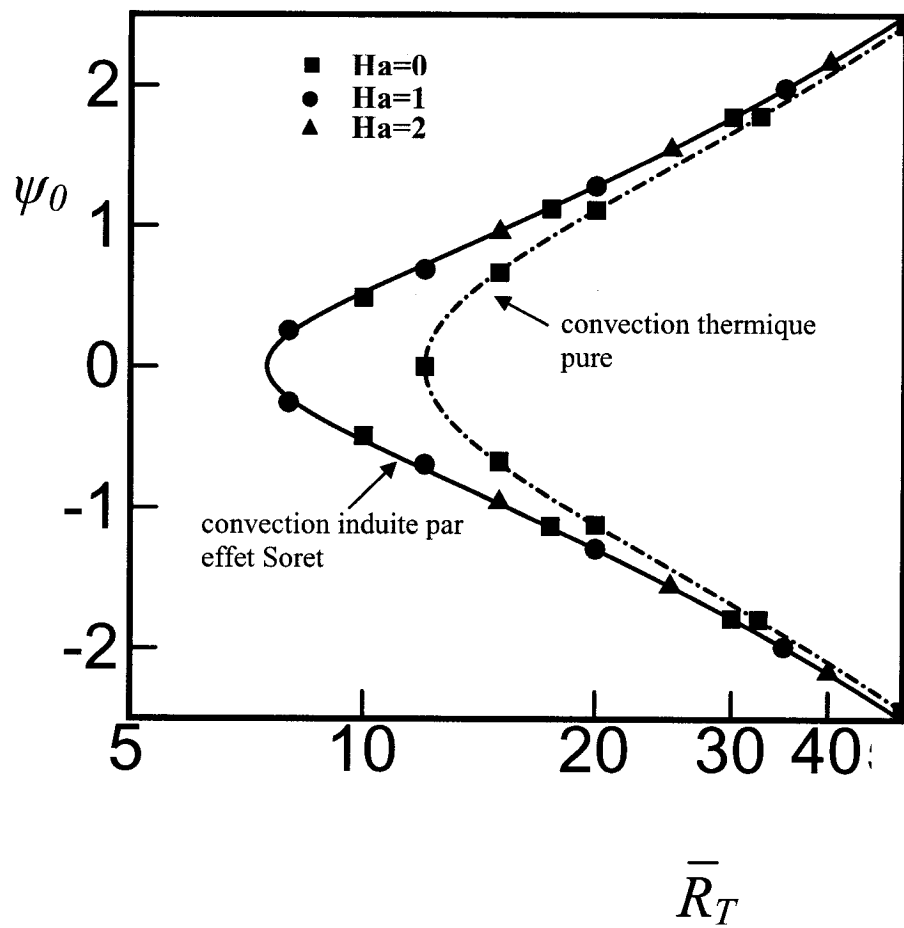


Figure 5.7



**Figure 5.7:** Diagramme de bifurcation normalisé en fonction du nombre de Rayleigh modifié  $\bar{R}_T$  pour  $Le=2$ ,  $\varphi=0.2$  et  $a=0$  (convection doublement diffusive),  $\varphi=0$  et  $a=0$  (convection thermique pure) : a)  $\psi_0$  en fonction de  $\bar{R}_T$ , b)  $Nu$  en fonction de  $\bar{R}_T$  et c)  $Sh$  en fonction de  $\bar{R}_T$



a)

Figure 5.8

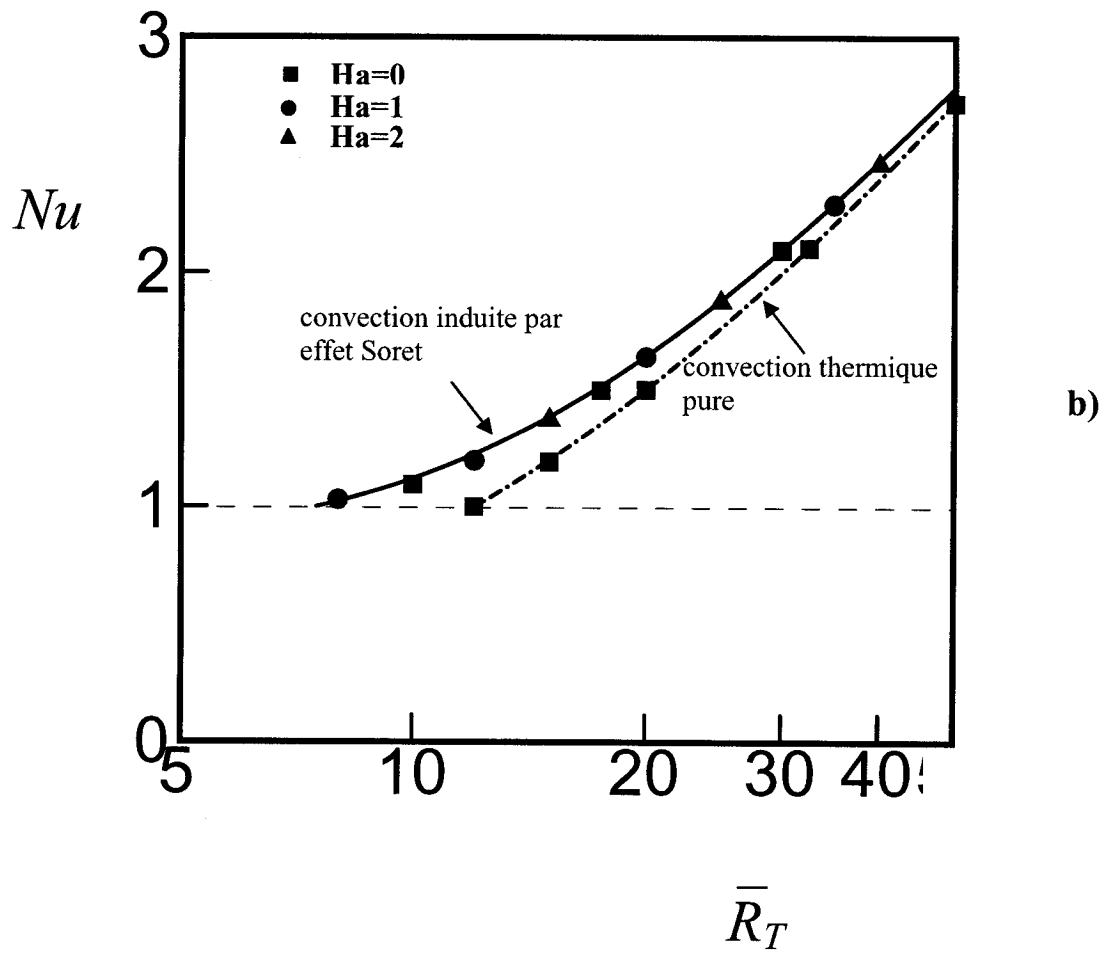
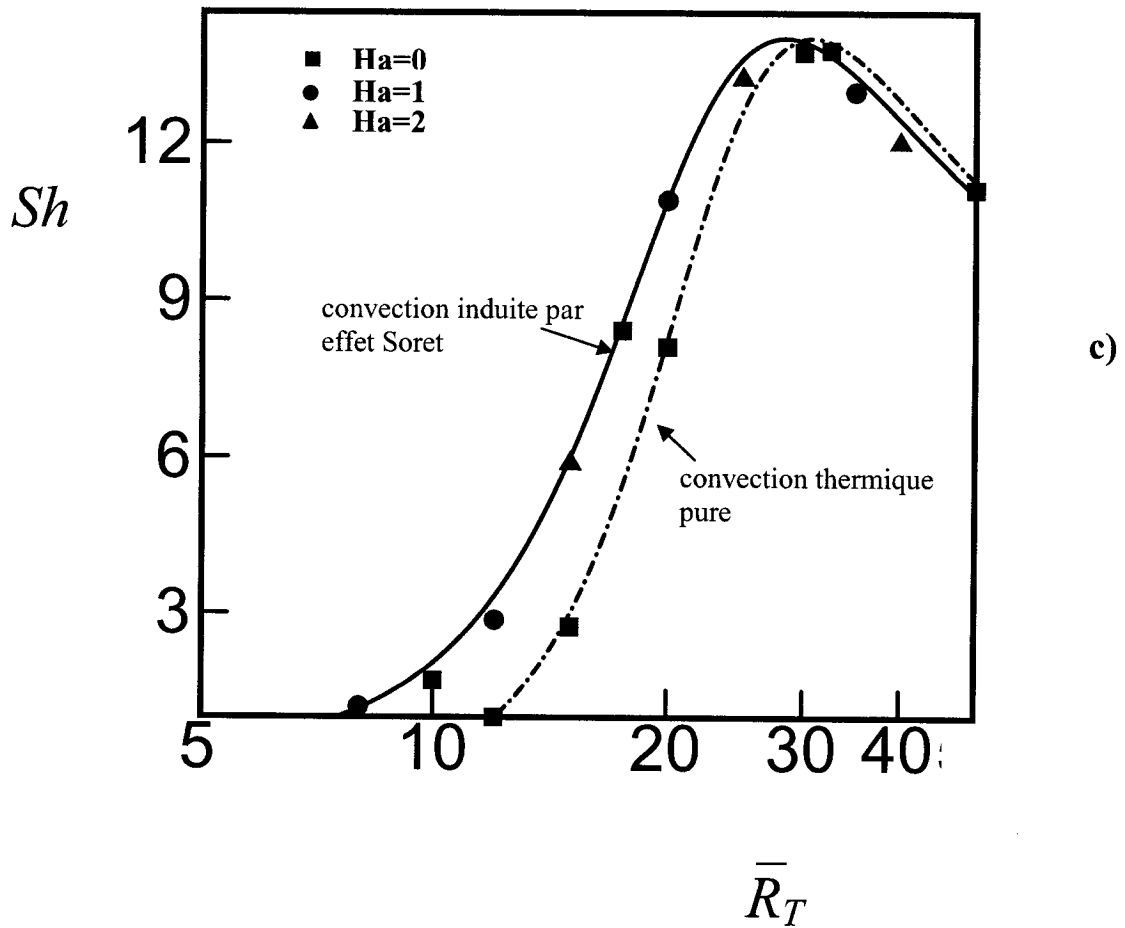


Figure 5.8



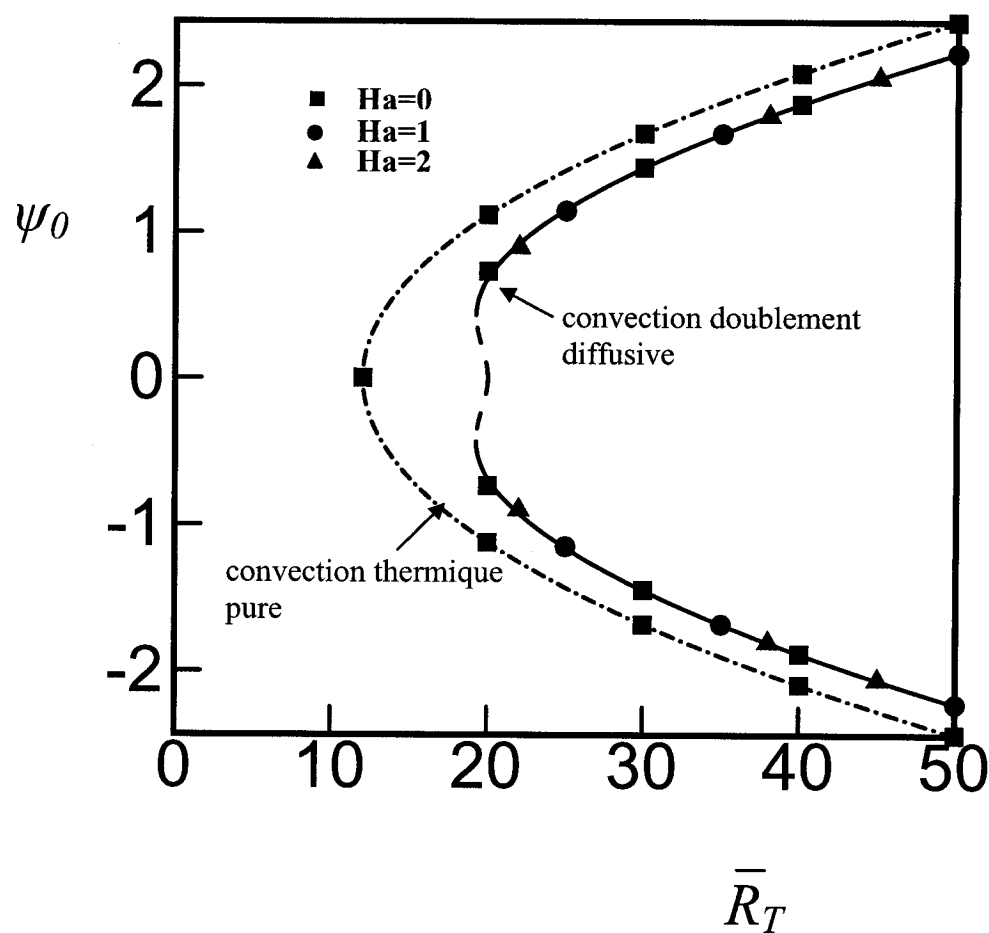
**Figure 5.8:** Diagramme de bifurcation normalisé en fonction du nombre de Rayleigh modifié  $\bar{R}_T$  pour  $Le=2$ ,  $\varphi=0.2$  et  $a=1$  (convection induite par effet Soret),  $\varphi=0$  et  $a=0$  (convection thermique pure) : a)  $\psi_0$  en fonction de  $\bar{R}_T$ , b)  $Nu$  en fonction de  $\bar{R}_T$  et c)  $Sh$  en fonction de  $\bar{R}_T$

validité du modèle analytique, à savoir l'indépendance de la solution avec le nombre de Hartmann dans le cas où l'on utilise un nombre de Rayleigh modifié.

La figure 5.8 montre les résultats obtenus pour  $Le = 2$ ,  $\varphi = 0.2$ , i.e. les mêmes paramètres que le cas précédent, mais pour  $a=1$  i.e. pour une convection thermosolutale induite par les effets Soret. Pour cette situation, selon l'équation (3-33), le nombre de Rayleigh supercritique est alors donné par  $\bar{R}_{TC}^{sup} = 7.50$ , donc inférieur au seuil de stabilité de la convection doublement diffusive. Le bon accord entre les résultats analytiques et numériques est observé une fois de plus.

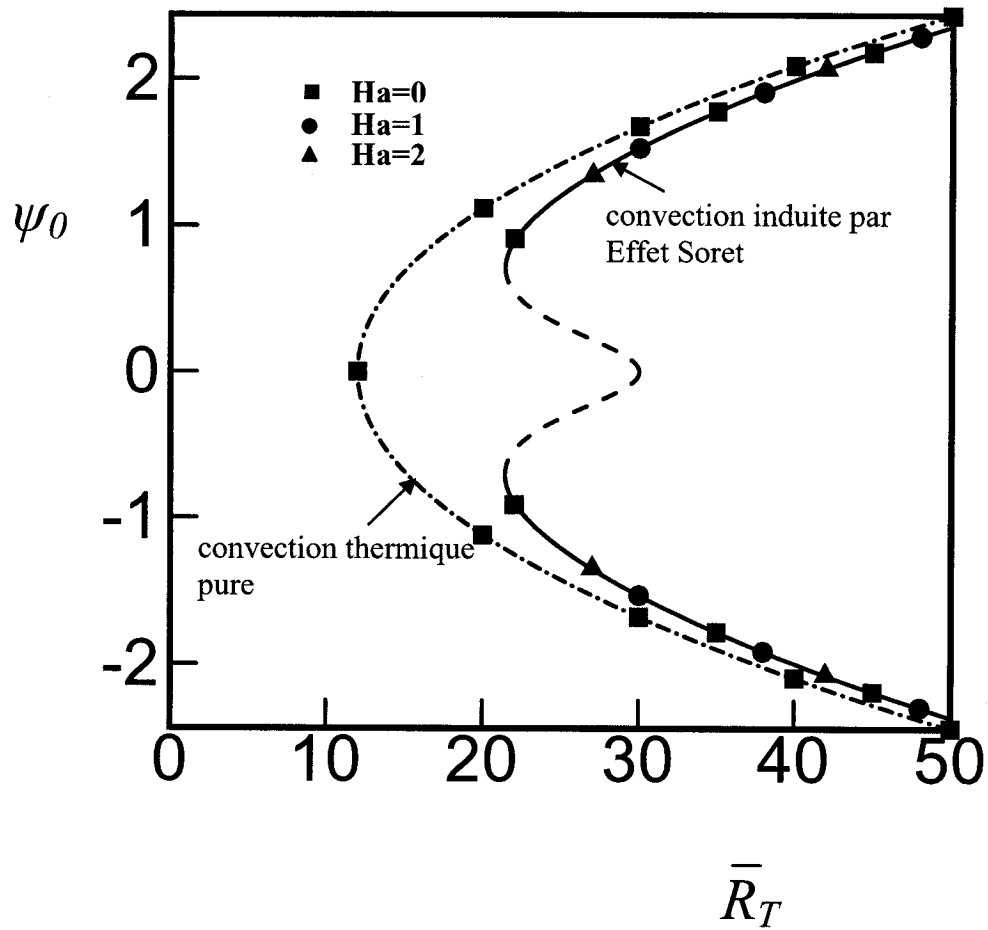
#### 5.4.2 Cas où les forces de volume sont opposés ( $\varphi < 0$ )

Le diagramme de bifurcation normalisée, en terme de  $\psi_0$  en fonction de  $R_{TH}^*$ , est présenté sur la figure 5.9 pour le cas  $Le = 2$ ,  $\varphi = -0.2$  et  $a = 0$ . Lorsque les forces de poussée solutales sont opposées aux forces thermiques, tel que déjà discuté, la bifurcation résultante est souscritique. Avec les paramètres considérés ici,  $\bar{R}_{TC}^{sub} = R_{TC}^{sub} / (1 + Ha^2) = 19.25$ , selon l'équation (3-36) et  $\bar{R}_{TC}^{sup} = R_{TC}^{sup} / (1 + Ha^2) = 20$ , selon l'équation (3-33). La courbe en pointillée reliant le point tournant souscritique,  $\bar{R}_{TC}^{sub}$  et le point marquant l'état de repos,  $\bar{R}_{TC}^{sup}$  est une solution instable correspondant au régime de convection solutale. La courbe en trait plein correspond à la convection induite par les effets thermiques. L'indépendance de la solution normalisée avec le nombre de Hartmann modifié est également confirmée pour cette situation. Le cas correspondant à la convection induite par les effets Soret est présenté sur la figure 5.10. Pour ce cas,  $\bar{R}_{TC}^{sub} = 21.42$  et  $\bar{R}_{TC}^{sup} = 30$ .



**Figure 5.9:** Diagramme de bifurcation normalisé en terme de  $\psi_0$  en fonction du nombre de Rayleigh modifié  $\bar{R}_T$  pour  $Le=2$ ,  $a=0$ ,  $\varphi=-0.2$  et  $\varphi=0$





**Figure 5.10:** Diagramme de bifurcation en terme de  $\psi_0$  en fonction du nombre de Rayleigh modifié  $\bar{R}_T$  pour  $Le=2$ ,  $a=1$ ,  $\varphi=-0.2$  et  $\varphi=0$

## CONCLUSION

Dans cette thèse nous avons fait l'étude de l'effet d'un champ magnétique sur la convection naturelle d'un fluide binaire électriquement conducteur confiné dans une cavité poreuse rectangulaire. Deux phénomènes physiques ont été étudiés, à savoir le cas de la convection doublement diffusive ( $a = 0$ ) et celui de la convection induite par effet Soret ( $a = 1$ ). On a utilisé le modèle de Darcy et l'approximation de Boussinesq pour modéliser l'écoulement au sein du milieu poreux.

Les équations gouvernantes régissant le phénomène sont résolues numériquement avec un code de calcul basé sur la méthode des différences finies. Les transferts de chaleur et d'espèce, caractérisés respectivement par le nombre de Nusselt,  $Nu$ , et le nombre de Sherwood,  $Sh$ , sont exprimés en terme des paramètres de contrôle du problème tels que le nombre de Rayleigh thermique,  $R_T$ , le rapport des forces de volume,  $\varphi$ , le nombre de Lewis,  $Le$ , le nombre de Hartmann,  $Ha$ , le rapport de forme de la cavité,  $A$ , et le paramètre,  $a$ , caractérisant le type de la convection considéré. Les résultats numériques ont démontrés, entre autre, l'importance du rôle du rapport de forme de la cavité ( $A$ ) sur la fonction du courant et sur les transferts de chaleur et de masse. Ainsi, pour un rapport de forme proche de l'unité, l'écoulement est à deux dimensions. Cependant, pour un grand rapport de forme ( $A \geq 8$ ), on observe un parallélisme de la structure de l'écoulement au cœur de la cavité et les profils de température et de concentration sont linéairement stratifiés dans la direction horizontale. L'écoulement résultant est alors unidimensionnel. Pour une telle situation, il est possible de développer un modèle analytique basé sur la théorie des écoulements parallèles. On obtient alors des expressions explicites pour les champs de vitesses, de température et de concentration en termes des paramètres du problème. Cette théorie permet aussi de prédire les nombres de Rayleigh critiques et souscritiques marquant la naissance de la convection. Elle a de plus l'avantage de servir de guide pour l'étude

numérique, très couteuse en temps, compte tenue des nombreux paramètres de base impliqués dans ce problème.

Les résultats analytiques et numériques peuvent être résumés de la façon suivante :

1° Dans le cas d'une couche horizontale de grande extension, l'écoulement est essentiellement parallèle dans le cœur de la cavité. Cette structure d'écoulement n'est pas affectée par l'imposition d'un champ magnétique. Cependant, bien entendu, l'intensité de l'écoulement ainsi que les transferts de chaleur et de masse, dépendent considérablement du nombre de Hartmann. L'effet essentiel du champ magnétique est d'exercer une force qui s'oppose au mouvement du fluide, i.e. de retarder l'intensité de la convection.

2° L'effet du rapport de forces de volume sur le présent problème est considérable. Ainsi, la naissance de la convection sur ce problème de type Bénard dépend du signe de ce paramètre. Donc pour  $\varphi > 0$  la courbe de bifurcation est du type fourche et la convection est possible seulement au-dessus d'un nombre de Rayleigh supercritique. Pour  $\varphi < 0$ , la situation est plus complexe. La courbe de bifurcation est sous critique et la convection est initiée avec une intensité donnée ( $\varphi \neq 0$  et  $Nu$  et  $Sh > 1$ ). L'effet du champ magnétique sur les courbes de bifurcation est important et des expressions analytiques ont été développées pour prévoir les seuils de la convection.

3° Le modèle analytique a permis de démontrer qu'un nombre de Rayleigh modifié  $\bar{R}_T = R_T / (1 + Ha^2)$  pouvait être utilisé afin d'obtenir des courbes universelles pour  $\psi_0$ ,  $Nu$  et  $Sh$ , indépendantes de l'effet du champ magnétique. Ce point a été confirmé par la solution numérique.

4° Les résultats obtenus dans cette études ont été obtenus pour deux types de convection à savoir la convection doublement diffusive ( $a = 0$ ) et la convection induite par les effets Soret.

Parmi les extensions possibles de cette étude, on peut mentionner le fait que le modèle poreux considéré est basé sur les équations de Darcy. D'autres modèles, plus sophistiqués peuvent être utilisés pour tenir compte des effets visqueux (Brinkman) et d'inertie (Forchheimer). D'autres géométries avec des conditions frontières plus complexes, devraient être aussi étudiées.

## BIBLIOGRAPHIE

Alchaar S., Vasseur P., Bilgen E. (1995). The effect of a magnetic field on natural convection in a shallow cavity heated from below, *Chem. Eng. Comm.*, 134, 195-209.

Alchaar S., Vasseur P., Bilgen E. (1995). Effects of a magnetic field on the onset of convection in a porous medium, *Heat Mass Transfer*, 30, 259-267.

Alchaar S., Vasseur P., Bilgen E. (1995). Natural convection heat transfer in a rectangular enclosure with a transverse magnetic field, *J. Heat Transfer*, 117, 668-673.

Alchaar S., Vasseur P., Bilgen E. (1995). Hydromagnetic natural convection in a titled rectangular porous enclosure, *Num. Heat Transfer, Part A*, 27, 107-127.

Bahloul A., Yahiaoui M.A., Vasseur P., Bennacer R., Beji H. (2006). Natural convection of a two-component fluid in porous media bounded by tall concentric vertical cylinders, *J. Applied Mech.*, 73, 26-33.

Bahloul A., Boutana N., Vasseur P. (2006). Double-diffusive and Soret-induced convection in a shallow horizontal porous layer, *J. Fluid Mech.*, 491, 325-352.

Bednarz T., Fornalik E., Tagawa T., Ozoe H., Szmyd J. S. (2005). Experimental and numerical analyses of magnetic convection of paramagnetic fluid in a cube heated and cooled from opposing verticals walls, *Int. J. Thermal Sc.*, 44, 933-943.

Bejan A., Tien C.L. (1978). Fully developed natural counterflow in a long horizontal pipe with different end temperatures, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 21, 6, 701-708.

Bian W., Vasseur P., Bilgen E. (1996). Effect of an external magnetic field on buoyancy-driven flow in a shallow porous cavity, *Num. Heat Transfer, Part A*, 29, 625-638.

Bian W., Vasseur P., Bilgen E., Meng F. (1996). Effect of an electromagnetic field on natural convection in an inclined porous layer, *Int. J. Heat Fluid Flow*, 17, 36-44.

Boutana N., Bahloul A., Vasseur P., Joly F. (2004). Soret and double diffusive convection in a porous cavity, *J. Porous Media*, 7, 41-57.

Boutana M. N. (2002). Convection naturelle dans un milieu poreux soumis à l'effet Soret, *Mémoire de maîtrise*, École polytechnique de Montréal.

Burr U., Barleon L., Jochmann P., Tsinober A. (2003). Magnetohydrodynamic convection in a vertical slot with horizontal magnetic field, *J. Fluid Mech.*, 475, 21-40.

Chamkha A.J. (1997). Hydromagnetic flow and heat transfer of heat-generating fluid over a surface embedded in a porous medium, *Int. Comm. Heat Mass Transfer* 24, 815-825.

Chamkha A.J. (1997). Hydromagnetic natural convection from an isothermal inclined surface adjacent to a thermally stratified porous medium, *Int. J. Eng. Sci.* 35, 975-986.

Chamkha A.J., Al-Naser H. (2002). Hydromagnetic double-diffusive convection in a rectangular enclosure with uniform side heat and mass fluxes and opposing temperature and concentration gradients, *Int. J. Thermal Sc.* 41, 936-948.

Chamkha A.J. (2002). Effect of magnetic field and heat generation/absorption on natural convection from an isothermal surface in a stratified environment, *Int. J. Fluid Mech. Research*, 29, 669-681.

Chamkha A.J., Al-Mudhaf A. (2004). Simultaneous heat and mass transfer from a permeable sphere at uniform heat and mass fluxes with magnetic field and radiation effects, *Num. Heat Transfer*, 46, 181-198.

Chand B., Kumar A., Kaushik V.P. (2003). Magnetic field effects on the free convection and mass transfer flow through porous medium with time dependent suction and constant heat flux, *Bull. Cal. Math. Soc.*, 95, 3, 259-272.

Chen C.-H. (2004). Combined heat and mass transfer in MHD free convection from a vertical surface with Ohmic heating and viscous dissipation, *Int. J. Eng. Sci.*, 42, 699-713.

Cheng C.-Y. (1999). Effect of a magnetic field on heat and mass transfer by natural convection from vertical surfaces in porous media - an integral approach, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 26, 935-943.

Cheng C.-Y. (2005). An integral approach for hydromagnetic natural convection heat and mass transfer from vertical surfaces with power-law variation in wall temperature and concentration in porous media, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 32, 204-213.

Cormack D.E., Leal L.G., Imberger J. (1974). Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls, Part 1: Asymptotic theory, *J. Fluid Mechanics*, 65, 209-230.

Ece M.C., (2005). Free convection flow about a cone under mixed thermal boundary conditions and a magnetic field, *Applied Mathematical Modelling*, 29, 1121–1134

Ece M.C., (2006). Free convection flow about a vertical spinning cone under a magnetic field, *Applied Mathematics and Computation*.

Elbashbeshy E.M.A. (1997). Heat and mass transfer along a vertical plate with variable surface tension and concentration in the presence of a magnetic field, *Int. J. Eng. Sci.*, 34, 515-522.

Elbashbeshy E.M.A. (2000). Free convection flow with variable viscosity and thermal diffusivity along a vertical plate in the presence of the magnetic field, *Int. J. Eng. Sci.*, 38, 207-213.

Emery A.F. (1963). The effect of a magnetic field upon the free convection of a conducting fluid, *J. Heat Transfer*, 119-124.

Filar P., Fornalik E., Kaneda M., Tagawa T., Ozoe H., Szmyd J.S. (2005). Three-dimensional numerical computation for magnetic convection of air inside a cylinder heated and cooled isothermally from a side wall, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 48, 1858-1867.

Garandet J.P., Alboussiere T., Moreau R. (1992). Buoyancy driven convection in a rectangular enclosure with a transverse magnetic field, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 35, 741-748.

Hassanien I.A., Obied Allah M.H. (2002). Oscillatory hydromagnetic flow through a porous medium with variable permeability in the presence of free convection and mass transfer flow, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 29, 567-575.



Henri D., Kaddesche S., BenHadid H. (2005). Stabilization of thermogravitational flows by magnetic field and surface tension, *Physics of Fluids* 17, 054106.

Hof B., Juel A., Mullin T. (2005). Magneto-hydrodynamic damping of oscillations in low-Prandtl-number convection, *J. Fluid Mech.*, 545, 193-201.

Joly F., Vasseur, P., Labrosse G. (2000). Soret-Driven thermosolutal convection in a vertical enclosure, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 27, 755-764.

Kalla L. (2004). Convection thermosolutale au sein d'une cavité poreuse saturée par un fluide binaire, *Thèse de Doctorat*, École Polytechnique de Montréal, Canada.

Kaneda M., Tagawa T., Ozoe H. (2006). Natural convection of liquid metal under a uniform magnetic field with an electric current supplied from outside, *Exp. Thermal Fluid Sc.*, 30, 243-252.

Krakov M.S., Nikiforov I.V. (2002). To the influence of uniform magnetic field on thermomagnetic convection in square cavity, *J. Magn. Magn. Mater.*, 252, 209-211.

Krakov M.S., Nikiforov I.V., Reks A.G. (2005). Influence of the uniform magnetic field on natural convection in cubic enclosure: experiment and numerical simulation, *J. Magn. Magn. Mater.*, 289, 272-274.

Lamsaadi M., Naïmi M., Hasnaoui M. (2005). Natural convection heat transfer in shallow horizontal rectangular enclosures uniformly heated from the side and filled with non-Newtonian power law fluids, *Energy Conversion and Management*, 47, 15-16.

Mahidjiba A. (2001). Convection naturelle en milieu poreux anisotrope – Effet de maximum de densité, *Thèse de doctorat*, École Polytechnique de Montréal, Canada.

Mamou M. (1998). Convection thermosolutale dans des milieux poreux et fluides confinés, *Thèse de Doctorat*, École Polytechnique de Montréal, Canada

Mamou M., Vasseur P. (1999). Thermosolutal bifurcation phenomena in porous enclosures subject to vertical temperature and concentration gradients, *J. Fluid Mech.* 395, 61-85.

Meng Fanming (1994). Effect of an electromagnetic field on natural convection in an inclined porous layer, *Mémoire de maîtrise*, École Polytechnique de Montréal, Canada

Naroua H., Takhar H.S., Ram P.C. (2005). Finite difference analysis of radiative hydromagnetic free convection flow past a vertical plate through a porous medium, *Heat and Technology*, 23, 2, 75-80.

Nield D.A. (1968). Onset of thermohaline convection in porous medium, *Water resources research* , 4, 553-560.

Nield D.A., Bejan A. (1999). Convection in porous media, Second edition, *Springer-Verlag*.

Ouriemi M., Vasseur P., Bahloul A., Robillard L. (2006). Natural convection in a horizontal layer of a binary mixture, *Int. J. Therm. Sc.*, 45, (8), 752-759.

Ouriemi M., Vasseur P., Bahloul A. (2005). Natural convection of a binary mixture confined in a slightly inclined tall enclosure, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 32, 770-778.

Ozoe H., Okada K. (1989). The effect of the direction of the external magnetic field on the three-dimensional natural convection in a cubical enclosure, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 32, 1939-1954.

Ozoe H., Maruo E., Matsuo H. (1994). Numerical analysis of transient natural convection in a liquid metal after a step change in an external lateral magnetic, *Int. Chem. Eng.*, 34, 3, 384-392.

Peaceman D.W., Rachford H.A.. (1955). The numerical solution of parabolic and elliptic difference equations, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 3, 28-43.

Postelnicu A. (2004). Influence of a magnetic field on heat and mass transfer by natural convection from vertical surfaces in porous media considering Soret and Dufour effects, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 47, 1467-1472.

Raptis A., Massalas C., Tzivanidis G. (1982). Hydromagnetic free convection through a porous medium between two parallel plates, *Physics letters*, 90A, 288-289.

Robillard L., Bahloul A., Vasseur P. (2006). Hydromagnetic natural convection of a binary fluid in a vertical porous enclosure, *Chem. Eng. Comm.*, under press.

Rudraiah N., Barron R.M., Ventachalappa M., Subbaraya C.K. (1995). Effect of a magnetic field on free convection in a rectangular enclosure, *Int. J. Eng. Sci.*, 33, 1075-1084.

Ryskin A., Pleiner H. (2004). Influence of a magnetic field on the Soret-effect-dominated thermal convection in ferrofluids, *Physical Review E*, 69, 046301.

Sen M., Vasseur P., Robillard L. (1987). Multiple steady states for unicellular natural convection in an inclined porous layer, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 3, 587-598.

Singh A.K.(2003). Hydromagnetic free convection and mass transfer flow past a porous plate with temperature gradient dependent heat source, *Indian J. Pure & Appl. Phys.*, 41, 509-514.

Sparrow E.M., Cess R.D. (1961). The effect of magnetic field on free convection heat and mass transfer, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 3, 4, 267-274.

Stern M.E. (1969). Collective Instability of Salt Fingers. *Journal of Fluid Mechanics*, 35, 2, 209-218.

Stommel H., Arons A.B., Blanchard D. (1956). An Oceanographic Curiosity: the Perpetual Salt Fountain. *Deep-Sea Research*, 3, 152-153.

Tabeling P. (1982). Convective flow patterns in rectangular boxes of finite extent under an external magnetic field, *J. Physique*, 43, 1295-1303.

Tagawa T., Ujihara A., Ozoe H. (2003). Numerical computation for Rayleigh-Benard convection of water in a magnetic field, *Int. J. Heat Mass Transfer* 46, 4097-4104.

Takhar H.S., Roy S., Nath G. (2003). Unsteady free convection flow over an infinite vertical porous plate due to the combined effects of thermal and mass diffusion, magnetic field and Hall currents, *Heat and Mass Transfer*, 39, 825-834.

Tauton J.W., Lightfoot E.N. (1972). Thermohaline instability and salt fingers in a porous medium, *Phys. fluids*, 15, 748-753.

Trevisan O.V., Bejan A. (1985). Natural convection with combined heat and mass transfer buoyancy effects in a porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 28, 1597-1611.

Trevisan O.V., Bejan A. (1986). Mass and heat transfer by natural convection in a vertical slot filled with porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 29, 403-415.

Uda N., Hayase M., Chikaoka T., Inoue S., Horiike H., Miyazaki K. (2000). Natural convective heat transfer of lithium under magnetic field, *Fusion Eng. Design*, 51-52, 893-898.

Vasseur P., Hasnaoui M., Bilgen E., Robillard L. (1995). Natural convection in an inclined fluid layer with a transverse magnetic field: Analogy with a porous medium, *J. Heat Transfer*, 117, 121-129.

Weiss N.O. (1981). Convection in an imposed magnetic field. Part 1. The development of nonlinear convection, *J. Fluid Mech.*, 108, 247-272.

Yang M., Ma N. (2005). A computational study of natural convection in a liquid-encapsulated molten semiconductor with horizontal magnetic field, *Int. J. Heat Fluid Flow*, 26, 810-816.