PolyPublie
Polytechnique Montréal

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Titre: Title:	Méthode prédictive de densités de palpage en métrologie
Auteur: Author:	Ziad Ben Amor
Date:	2006
Type:	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis
Référence: Citation:	Ben Amor, Z. (2006). Méthode prédictive de densités de palpage en métrologie [Master's thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/7801/

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: PolyPublie URL:	https://publications.polymtl.ca/7801/
Directeurs de recherche: Advisors:	Guy Cloutier, & Clément Fortin
Programme: Program:	Unspecified

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal

https://publications.polymtl.ca

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MÉTHODE PRÉDICTIVE DE DENSITÉS DE PALPAGE EN MÉTROLOGIE

ZIAD BEN AMOR
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)
OCTOBRE 2006

© Ziad Ben Amor, 2006.

Library and Archives Canada

Published Heritage Branch

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque et Archives Canada

Direction du Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence
ISBN: 978-0-494-25528-5
Our file Notre référence
ISBN: 978-0-494-25528-5

NOTICE:
The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:
L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

MÉTHODE PRÉDICTIVE DE DENSITÉS DE PALPAGE EN MÉTROLOGIE

présenté par: BEN AMOR Ziad

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. MAYER René, Ph.D., président

M. CLOUTIER Guy, Doct., membre et directeur de recherche

M. FORTIN Clément, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. DAOUD Ahmed, M.Sc.A., membre

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont permis de réaliser ce travail. Plus particulièrement, je désire insister sur les conseils et le soutien de mon directeur de recherche, M. Guy Cloutier sans lesquels ce travail n'aurait jamais pu voir le jour. Qu'il me soit permis de souligner la confiance et l'appui tangible de mon codirecteur Clément Fortin. Ont aussi toute ma gratitude les membres de mon comité d'évaluation et tous les collègues et amis qui m'ont encouragé et aidé dans cet ouvrage.

RÉSUMÉ

Dans un contexte de contrôle dimensionnel et géométrique des pièces mécaniques, il est souvent nécessaire d'effectuer une inspection sur une machine à mesurer tridimensionnelle (MMT). Cette inspection est réalisée en palpant les surfaces à contrôler en un nombre fini de points et en leur associant une géométrie de forme idéale selon un critère donné (moindres carrés, mini-max...) et obtenir ainsi leurs paramètres intrinsèques (axe du cylindre, rayon...). Enfin, à l'aide de ces paramètres et en se basant sur la norme convenue, la pièce est déclarée conforme (ou pas).

Cependant, la planification d'une procédure de palpage reste qualitative et repose essentiellement sur le jugement et l'expérience du programmeur notamment en ce qui concerne la prédiction des densités de palpage. En effet, ce dernier estime les densités de palpage qu'il juge appropriées selon deux critères : les capabilités de fabrication et les tolérances du bureau d'études.

Dans ce travail, nous proposons une méthode numérique originale qui permet d'estimer les densités de points palpages en tenant compte de ces deux critères.

Cette méthode consiste à engendrer numériquement un nombre fini de points palpés sur une surface imparfaite en les écartant aléatoirement et dans la direction des normales locales d'une surface sans défauts de forme, qu'on appelle surface génératrice, simulant ainsi des écarts de fabrications dus aux vibrations, à l'élasticité de l'outil....

La surface génératrice est définie par ses paramètres intrinsèques obtenus en variant légèrement et aléatoirement ceux de la surface nominale simulant ainsi des dispersions de fabrication telles que la répétabilité de la position de l'outil ou de la mise en référence...

À partir des points ainsi obtenus, nous associons une surface de forme parfaite selon le critère des moindres carrés, étant donné que ce critère est le plus répandu sur les MMT. Cette surface est appelée surface associée. Ensuite, nous vérifions la conformité (ou non) de la surface ainsi associée aux tolérances du bureau d'étude selon la norme convenue.

En parallèle, nous vérifions la conformité de la surface génératrice aux tolérances du bureau d'étude selon la même norme. Ce dernier diagnostic représente celui que nous aurions émis avec une surface associée à partir d'une infinité de points car selon le critère des moindres carrés, la surface associée est confondue avec la surface génératrice lorsque le nombre de points tend vers l'infini.

Si les deux diagnostics sont identiques, alors le nombre de points est jugé suffisant. Afin de nous en assurer, nous effectuons la procédure plusieurs fois (simulations de Monte-Carlo) et nous comptons le nombre de fois où les deux diagnostics sont identiques et nous en déduisons le ***Taux de Bons Diagnostics*** (*TBD*) par rapport à la totalité des pièces contrôlées et nous pouvons ainsi quantifier la qualité du diagnostic.

Il ne reste plus qu'à fixer un TBD_{seuil} et d'augmenter la densité de palpage à chaque simulation de Monte-Carlo jusqu'à l'atteindre et nous obtenons ainsi la densité idéale.

Par ailleurs, vu le degré de complexité de la méthode et de l'importance de l'étape d'association de surfaces selon le critère des moindres carrés, nous avons pris un soins particulier à l'implanter informatiquement selon deux approches différentes : mécaniste de Bourdet et mathématique de Forbes, à les comparer en terme de précision et de vitesse de convergence et à les tester dans des conditions variées afin de nous assurer de leur fiabilité.

Ensuite, à travers l'application de la méthode prédictive des densités de palpage à des exemples simples, nous avons développé des stratégies spécifiques de recherche de solutions pour le cas du palpage de surfaces de références ainsi que du palpage des géométries surfaciques (autres que linéiques). Dans les deux cas, il s'agissait de stratégies de recherche directe car nous n'avons pas assez d'éléments mathématiques qui nous permettent d'utiliser des stratégies de recherche optimisées.

Enfin, nous avons appliqué la méthode à deux exemples complets (deux cylindres concentriques, plan incliné) afin d'apprécier sa faisabilité.

En conclusion, la méthode présente l'avantage d'apporter une réponse simple au problème de prédiction du nombre de points de palpage mais nécessite, pour chaque cas, des simulations numériques qui lui sont spécifiques et qui peuvent être laborieuses.

ABSTRACT

In the geometric dimensioning and tolerancing (GD&T) field, the use of coordinate measuring machine (CMM) became widely common. It consists in probing the surfaces in a finaite number of points and to fit a perfect geometric form according to chosen criteria (least squares, mini-max...). Then, the design tolerances validation test is performed using the tolerancing interpretation standards.

However, the probing procedure still depends mainly on the programmer's experience and knowledge. He actually estimates the ideal probing densities considering two criteria: the manufacturing process capabilities and the design tolerances

In this present work, we propose an original numerical method that allows estimating the probing point densities taking into account these two criteria.

This method consists in generating numerically a finite number of point measured on an imperfect feature randomly deviating them in the local normal vector direction of a perfectly shaped generating feature, in order to simulate manufacturing deviation such as vibrations, tool elasticity...

The generating feature is derived from a random deviation of the nominal feature, simulating tool/fixture position variation...

Then, we fit the perfectly shaped substitute feature to these points using the least squares criteria since it's the most commonly used by CMMs. A design tolerances validation test is performed on this feature using the tolerancing interpretation standards.

Concurrently, we perform the same test on the generating feature. This last diagnostic is the one that we would have had if the substitute feature was derived from in infinite number of points since the least-square substitute feature tends to the generating feature when the number of points tends toward infinity.

If both diagnostics are identical, the number of points is judged sufficient. In order to consolidate the result, we perform the same procedure several times (Monte-Carlo simulations) and we count how many times the two diagnostics are identical and we

derive the ***Good Diagnostic Rate*** (*GDR*) relatively to the total number of inspected pieces.

The final step is to set a $GDR_{threshold}$ and to increase the probing densities in each Monte-Carlo simulation till we reach it and thus we get the ideal probing density.

Moreover, the complexity of the method and the importance of the least-square feature substitution step, we took a particular car to implement it using two different approaches: Bourdet's geometrical approach and the Forbes mathematical approach, to compare their performances in terms of precision and convergence speed and to test them in various conditions to confirm their reliability.

Through the probing densities prediction method application to simple examples, we developed custom strategies to find solutions in specific cases: datum probing and surface features (other than lines and circles), then we applied it to more complete examples: concentric cylinders and plan orientation tolerance.

To end, the proposed method offer a simple solution to the probing densities prediction issue, but requires a numerical simulation for each case that might be demanding in terms of calculations.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements iv
Résumé v
Abstract vii
Table des matières ix
Liste des tableaux xi
Liste des figures xii
Liste des sigles et abréviations xv
1 Introduction 1
2 Problématique 4
3 Algorithmes d'association de surfaces selon le critère des moindres carrés 6
3.1 Introduction 6
3.2 Définitions et vocabulaire 8
3.3 Approche Bourdet 9
3.4 Approche mathématique Alistair Forbes 13
3.5 Description de la librairie 14
3.6 Validation et comparaison 16
3.6.1 Cercle 2D 16
3.6.2 Sphère 17
3.6.3 Plan 21
3.6.4 Cylindre 28
3.6.5 Cercle 3D 30
3.6.6 Cône 31
3.7 Conclusion 33
4 Méthode numérique de prédiction de configuration de palpage 34
4.1 Introduction 34
4.2 Présentation de la méthode 34
4.2.1 Présentation générale d'une procédure de fabrication et d'inspection 35

4.2.2 Présentation de la procédure simulée de fabrication et d'inspection 37
4.2.3 Hypothèses et cadre théorique 38
4.2.4 Simulation de prédiction du nombre de points de palpage 40
4.3 Exemples 42
4.3.1 Exemple d'introduction: trou sur une plaque mince 42
4.3.2 Problématique du palpage de surfaces de références 45
4.3.3 Problématique des densités de surfaces 54
4.3.4 Cas de tolérance de positionnement de deux cylindres coaxiaux 62
4.3.5 Cas de tolérance d'orientation de plans 72
4.4 Conclusion 82
5 Bilan 83
6 Conclusion 87
Références 88
Annexes 89

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3-1: Éléments géométriques, liaisons, et vecteurs d'écarts D et R [1, 4]. 9
Tableau 3-2: Critères d'ajustement au mieux 11
Tableau 3-3: Liste des fonctions et scripts de la librairie.....14
Tableau 3-4: Résultats du test pour le cercle 2D.....17
Tableau 3-5: Résultats du test pour la sphère.....18
Tableau 3-6: Résultats du test pour le plan 22
Tableau 3-7: Résultats du test pour le cylindre.....28
Tableau 3-8: Résultats du test pour le cercle 3D.....30
Tableau 3-9: Résultats du test pour le cône 32

LISTE DES FIGURES

Figure 2-1: Trou sur une plaque mince 4
Figure 3-1: Distances mesurées selon (a) la normale locale à la surface et (b) selon une direction relative au référentiel 6
Figure 3-2: Comparaison de l'approche IMC et FMC pour la sphère 19
Figure 3-3: Analyse de convergence lorsque $\|D\| > r_o$ 20
Figure 3-4: Angles d'Euler α et β, x-y-z repère mobile dans cet ordre 21
Figure 3-5: Plan : varier w 23
Figure 3-6: Plan : varier α 24
Figure: 3-7: Plan : varier β 25
Figure 3-8: Plan : varier α et β 26
Figure 3-9: Plan : nombre d'itérations pour l'approche Bourdet 27
Figure 3-10 : Nuage de points autour d'un cône croisé (a), cône associé par les algorithmes des moindres carrés (b) 31
Figure 4-1: Schéma d'une procédure de fabrication et d'inspection sur MMT 35
Figure 4-2: Schéma d'une procédure simulée de fabrication et d'inspection 37
Figure 4-3: Simulation de prédiction du nombre de points de palpage 40
Figure 4-4: Simulationsde Monte-Carlo pour la prédiction du nombre de points de palpage 41
Figure 4-5: Trou sur une plaque mince avec contrainte de positionnement 42
Figure 4-6: Résultats de l'exemple 4.3.1 44
Figure 4-7: Pièce avec deux plans ayant une contrainte de parallélisme 45
Figure 4-8: Stratégie de palpage des deux plans 46
Figure 4-9: Évolution du *TBD* en fonction de NPP_A et NPP_1 47
Figure 4-10: Organigramme de la stratégie de prédiction des *NPP* 49
Figure 4-11: Étape 1 de la stratégie de prédiction des *NPP* 50
Figure 4-12: Étape 2 de la stratégie de prédiction des *NPP* 51
Figure 4-13:Étape 3 de la stratégie de prédiction des *NPP* 52

Figure 4-14: Illustration de la courbe 'iso-*TBD*' 53
Figure 4-15: Stratégie de palpage d'une surface cylindrique 54
Figure 4-16: Évolution du *TBD* en fonction de *m* et *n* 55
Figure 4-17: Organigramme de la stratégie de prédiction des densités de palpage 57
Figure 4-18: Étape 1 de la stratégie de prédiction des densités de palpage 58
Figure 4-19: Étape 2 de la stratégie de prédiction des densités de palpage 59
Figure 4-20: Étape 3 de la stratégie de prédiction des densités de palpage (cas 1) 60
Figure 4-21: Étape 3 de la stratégie de prédiction des densités de palpage (cas 2) 61
Figure 4-22: Pièce de deux cylindres coaxiaux 62
Figure 4-23: Croquis de la gamme d'usinage des deux cylindres 63
Figure 4-24: Augmentation simultanée des deux paramètres de densité de palpage de la surface 1 67
Figure 4-25: Augmentation simultanée des deux paramètres de densité de palpage de la surface *A* 68
Figure 4-26: Réduction du nombre de cercles équidistants de palpage de la surface *A* ..69
Figure 4-27: Augmentation simultanée des quatre paramètres de densité de palpage des deux surfaces *A* et 1 70
Figure 4-28: Contrainte d'orientation par rapport à deux plans de référence 72
Figure 4-29: Croquis de la gamme d'usinage des trois plans 73
Figure 4-30: Inspection de la pièce avec un comparateur [6] 75
Figure 4-31: Augmentation simultanée des deux paramétres de densité de palpage sur la surface 1 76
Figure 4-32: Augmentation simultanée des deux paramètres de densité de palpage de la surface *A* 77
Figure 4-33:Augmentation simultanée des deux paramètres de densité de palpage sur la surface *B* 78
Figure 4-34: Réduction du *NPP* selon *x* de la surface *B* 79
Figure 4-35: Augmentation simultanée de tous les paramètres de densité de palpage de toutes les surfaces 80

Figure 5-1: Cartographie des *TBD* en fonction du *NPP* et de l'amplitude du bruit radial à une erreur de centrage constante et une tolérance de positionnement constante 85
Figure 5-2: Cartographie des *TBD* en fonction du *NPP* et de l'erreur de centrage à une amplitude du bruit radial constante et une tolérance de positionnement constante .85

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

$\boldsymbol{D}$	Torseur de la micro translation
df	Ordre de grandeur du bruit normal à la surface
FAO	Fabrication Assistée par Ordinateur
FMC	Critère d'association de surfaces des moindres carrés, approche mathématique de Forbes
IMC	Critère d'association de surfaces des moindres carrés, approche mécaniste de Bourdet
m	Nombre de cercles équidistants découpant un cylindre (voir *n*)
MC	Moindre Carrés
MMC	Maximum Material Condition
MMT	Machine à Mesurer Tridimensionnelle
n	Nombre de points de palpage sur chacun des cercles découpant un cylindre (voir *m*)
NPP	Nombre de Points de Palpage
P	Liaison prismatique
R	Liaison de rotation
$\boldsymbol{R}$	Torseur de la micro rotation
r	Rayon (cercle 2D, sphère, cylindre et cercle 3D)
RFS	Regardless of Feature Size (tolérance sans égard à la cote)
SVD	Singular Value Decomposition
t	Distance minimale entre la surface du cône et l'origine *O*
TBD	Taux de Bons Diagnostics
u	Micro déplacement selon l'axe *x*
v	Micro déplacement selon l'axe *y*
VMD	Vecteur des Micros Déplacements
w	Micro déplacement selon l'axe *z*
α	Angle α d'Euler X-Y-Z repère mobile
β	Angle β d'Euler X-Y-Z repère mobile
γ	Angle γ d'Euler X-Y-Z repère mobile
φ	Angle d'apex d'un cône

1 INTRODUCTION

Dans le domaine de la fabrication, il est primordial de s'assurer de la conformité des pièces fabriquées au dessin de définition afin de garantir une bonne fonctionnalité des produits assemblés. Pour cela, il est nécessaire d'établir un langage qui serait idéalement universel clair et sans ambiguïté exprimant les limites à l'intérieur desquelles les variations dimensionnelles et géométriques sont acceptables, la fabrication de dimensions ou de formes parfaites étant impossible. Le langage, le plus répandu et admis par les normes est celui du tolérancement géométrique. Ce langage est en perpétuelle évolution car les contraintes de fonctionnalité, d'interchangeabilité et de maîtrise des coûts des produits sont sans cesse plus exigeantes. Cependant, il existe plusieurs façons d'interpréter le tolérancement géométrique. En effet, il est possible d'interpréter le tolérancement géométrique comme l'enveloppe limite d'une géométrie donnée ou bien comme les limites des paramètres intrinsèques de cette géométrie (axe d'un cylindre, normale à un plan...) qu'on appelle tolérancement paramétrique.

De plus, plusieurs technologies permettent de contrôler la conformité des pièces par rapport au tolérancement. Afin de contrôler la conformité d'un produit selon l'interprétation de l'enveloppe limite, les calibres entre-n'entre pas (go-no go) sont largement utilisés, ils sont particulièrement adaptés pour le contrôle des tolérances dimensionnelles et sont une solution versatile et peu onéreuse. Les gabarits de contrôle sont utilisés pour contrôler le tolérancement géométrique de position. C'est un moyen efficace mais dont la conception et la réalisation est coûteuse. De plus, il est rarement utilisable pour plus d'un produit.

Pour l'interprétation paramétrique, la mesure par des instruments (pied à coulisse, micromètre,...) est la méthode la plus ancienne et nécessite souvent des montages pouvant être laborieux selon la complexité de la pièce à contrôler. La table sinus, permet le contrôle des plans inclinés à l'aide d'un comparateur.

L'utilisation de machines à mesurer tridimensionnelle (MMT) est privilégiée pour les géométries complexes ayant des tolérances serrées. De plus, elle permet le contrôle selon les deux interprétations, enveloppe limite ou bien paramétrique selon l'effectif de l'échantillon. En effet, un palpage en un nombre élevé de points, se prête mieux à une interprétation enveloppe limite alors que un nombre limité de points de palpage est plus approprié pour une interprétation paramétrique. L'utilisation des MMT dans ce dernier cas, consiste à palper la géométrie en un nombre restreint de points et à l'aide d'un critère d'association de surfaces, une géométrie de forme idéale est associée à ce nuage de points. Ainsi, les paramètres dimensionnels et de positionnement définissant les géométries associées aux surfaces matérielles sont déterminés. En utilisant ces géométries associées, et en se basant sur les normes d'interprétation des tolérances, nous pouvons juger de la conformité (ou non) de la pièce contrôlée. Cette méthode a l'avantage de s'appliquer à une grande variété de produits, elle se prête à l'automatisation et, grâce au fait qu'elle permette le traitement logiciel des mesures, elle simplifie souvent les montages matériels.

Par ailleurs, dans un processus de conception/fabrication intégrée, une étape de planification est nécessaire avant la réalisation matérielle de la pièce. Cette étape consiste par exemple, à élaborer la gamme de fabrication et à optimiser les parcours d'outils à l'aide d'un logiciel de FAO (éviter les accélérations infinies des axes de la machines en favorisant des trajectoires lisses plutôt qu'anguleuses, calculer les distances entre les passes pour maintenir la hauteur des crêtes en-deça d'un seuil donné...).

Cependant, pour la planification des tâches relatives au contrôle de la conformité de la pièce, en particulier, pour le contrôle par palpage sur MMT, peu ou pas d'outils ne sont disponibles au programmeur. En effet, la configuration de palpage est souvent élaborée selon le jugement et l'expérience de ce dernier.

Nous proposons dans ce travail une méthode numérique qui permet d'estimer le nombre de points de palpage en fonction des tolérances du bureau d'études et des capabilités des centres de fabrication.

Nous exposerons d'abord un exemple simple pour illustrer la problématique. Puis, nous développerons le critère d'association de surfaces des moindres carrés : le principe sur lequel il repose, les différentes façons de l'implémenter en utilisant Matlab (l'approche mécaniste de Pierre Bourdet et les algorithmes d'Alistair Forbes) et les performances de ces algorithmes en termes de robustesse et de vitesse de convergence.

Ensuite, nous élaborerons la méthode numérique d'estimation du nombre de points de palpage et nous l'appliquerons à des exemples concrets. Enfin, nous mettrons en évidence la portée et les limites de la méthode.

2 PROBLÉMATIQUE

Soit la pièce dessinée ci-dessous :

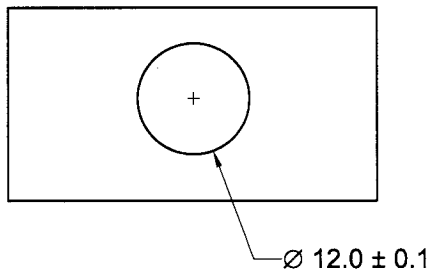


Figure 2-1: Trou sur une plaque mince

Il s'agit d'une plaque mince avec un trou dont le positionnement n'est pas pertinent. Nous nous proposons de contrôler la conformité (ou non) du trou à la tolérance spécifiée à l'aide d'une MMT.

Supposons que cette pièce ait été fabriquée sur une perceuse ordinaire et correctement réglée.

En la présentant au programmeur chargé de planifier son contrôle, il affirmerait par exemple que, dans ces conditions, le palpage du trou en dix (10) points uniformément répartis sur sa circonférence est suffisant pour émettre un bon diagnostic.

Ensuite, en précisant que cette même pièce a été fabriquée sur une perceuse plus performante et en meilleur état que la première, le programmeur suggèrerait d'effectuer le palpage sur seulement quatre (4) points compte tenu de ces nouvelles conditions.

Enfin, en présentant au programmeur la même pièce avec une tolérance plus serrée et fabriquée sur la perceuse ordinaire, il suggèrerait un palpage en quinze (15) points dans ce cas.

Ce petit exemple met en évidence les paramètres qui entrent en jeux lors de la prise de décision du nombre de points de palpage :

- L'appréciation de la sévérité des tolérances exigées : plus les tolérances sont serrées plus on aura tendance à augmenter le nombre de points de palpage, et
- Les capabilités des centres de fabrication impliqués : plus ces centres sont précis et performants, plus le défaut de forme des surfaces engendrées est petit et plus on aura tendance à diminuer le nombre de points de palpage

Évidemment, plus le nombre de points palpés est élevé, moins l'association est affectée par un défaut local ou un défaut de forme, plus complète est la connaissance de la matière palpée et meilleur est donc le diagnostic.
Ce que nous proposons dans ce travail, est de lier numériquement les capabilités des centres de fabrication et les tolérances demandées d'une part, et le nombre de points de palpage d'autre part, via le concept de '***Taux de Bons Diagnostics***' (*TBD*).

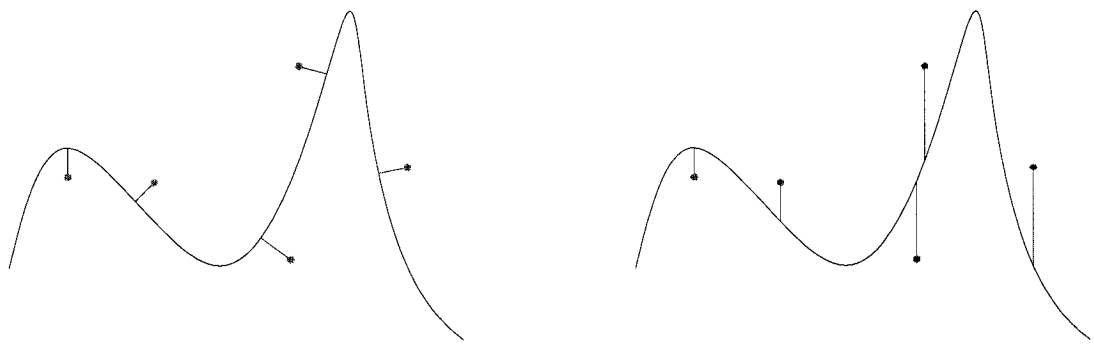
3 ALGORITHMES D'ASSOCIATION DE SURFACES SELON LE CRITÈRE DES MOINDRES CARRÉS

3.1 Introduction

Dans la méthode que nous proposerons, l'étape d'association d'une surface sans défaut de forme à un nuage de points censé lui appartenir est critique. En effet, en raison de la nature itérative de la méthode de prédiction, une erreur lors de l'étape d'association de surfaces affectera grandement la justesse des prédictions.

Pour cela, nous présenterons dans ce chapitre le critère d'association de surfaces des moindres carrés que nous utiliserons dans la méthode prédictive, et nous nous assurerons de la fiabilité de ses résultats dans différentes conditions.

Selon ce critère, les paramètres intrinsèques de la surface associée sont choisis de façon à minimiser la somme des carrés des distances de chacun des points du nuage jusqu'à la surface selon les normales locales à la surface. La surface ainsi associée au nuage de points est celle qui s'en rapproche le mieux physiquement (ceci n'est pas le cas lorsque les distances sont mesurées selon une direction relative au référentiel du nuage de points, figure **3-1**)



(a) **(b)**

Figure 3-1: Distances mesurées selon (a) la normale locale à la surface et (b) selon une direction relative au référentiel

Nous disposons de deux façons pour y parvenir : approche mécaniste de Pierre Bourdet [1] et l'approche mathématique de Alistair Forbes [2].

Dans ce chapitre, nous présenterons d'abord le vocabulaire et les définitions utilisés dans ce chapitre, ainsi que le chapitre suivant. Ensuite, nous présenterons les deux approches mécaniste et mathématique, exposerons les fonctions Matlab qui les mettent en application et comparerons les résultats qui en sont issus.

3.2 Définitions et vocabulaire

Afin de pouvoir exposer notre procédure il est d'abord nécessaire de définir les termes qui seront utilisés dans les sections qui suivent. (inspiré de l'ouvrage de Pierre Bourdet [3])

- **Élément géométrique nominal** : Élément géométrique idéal spécifié dans le dessin de définition.
- **Élément géométrique réel** : Élément imparfait réputé proche de l'élément géométrique nominal qui lui correspond.
- **Élément géométrique extrait** : nombre fini de points appartenant à l'élément géométrique réel.
- **Élément géométrique associé** : Élément géométrique sans défaut de forme obtenu à partir de l'élément géométrique extrait selon un critère d'optimisation (moindre carré…).
- **Élément géométrique simulé** : Élément virtuel imparfait dont l'expression mathématique est connue qui représente l'élément géométrique réel à partir d'un modèle d'écarts du centre de fabrication.
- **Élément géométrique générateur :** Élément géométrique sans défauts de forme dont les paramètres intrinsèques sont volontairement écartés de ceux de l'élément géométrique nominal correspondant
- **Élément géométrique extrait simulé** : nombre fini de points volontairement écartés de l'élément géométrique générateur selon la normale à sa surface et de façon aléatoire.
- **Élément géométrique associé simulé**: Élément géométrique idéal obtenu à partir de l'élément géométrique extrait selon un critère d'optimisation (moindre carré…).

- **Paramètres intrinsèques** : Paramètres numériques qui déterminent la position et la dimension d'un élément géométrique idéal et non-tronqué. Par exemple, un cylindre est défini par un vecteur directeur de son axe, un point par lequel il passe et son rayon.

Dans ce qui suit le terme *'surface'*, peut se substituer au terme *'élément géométrique'*. De plus, l'expression *'paramètres intrinsèques associés simulés'* par exemple, veut dire *'paramètres intrinsèques de l'élément géométrique associé simulé'*

3.3 Approche Bourdet

Décrite dans sa généralité

Dans le tableau 3-1, Le couple d'un *élément géométrique*, de forme parfaite par définition et souvent de dimension infinie, et d'un élément géométrique réel, par définition imparfait et souvent limité dans l'espace, s'assimile à une liaison mécanique simple :

Tableau 3-1: Éléments géométriques, liaisons, et vecteurs d'écarts D et R [1, 4].

Géométrie	Nom de la liaison	Mobilités	Liaisons	Convention	*D*	*R*
	Ponctuelle	2P 3R	1P			
Cercle	Linéaire annulaire	1P 3R	2P	Dans le plan *XY*, centré sur *O*.	$[u\ v\ 0]^T$	$[0\ 0\ 0]^T$
	Linéaire rectiligne	2P 2R	1P 1R	Selon *X*, passant par *O*, plan *XY*.	$[0\ 0\ w]^T$	$[0\ \beta\ 0]^T$
Sphère	Rotule	3R	3P	Centrée sur *O*.	$[u\ v\ w]^T$	$[0\ 0\ 0]^T$
Plan	Appui plan	2P 1R	1P 2R	Normale sur *Z*.	$[0\ 0\ w]^T$	$[\alpha\ \beta\ 0]^T$
Cylindre	Pivot glissant	1P 1R	2P 2R	Axe selon *Z*, passant par *O*.	$[u\ v\ 0]^T$	$[\alpha\ \beta\ 0]^T$
	Glissière hélicoïdale					
(Rainure)	Glissière	1P	2P 3R	Mobilité en *Z*.	$[u\ v\ 0]^T$	$[\alpha\ \beta\ \gamma]^T$
Cône	Pivot	1R	3P 2R	Axe selon *Z*, passant par *O*.	$[u\ v\ w]^T$	$[\alpha\ \beta\ 0]^T$
(Surface gauche)	Encastrement		3P 3R	Quelconque	$[u\ v\ w]^T$	$[\alpha\ \beta\ \gamma]^T$

Comme les vecteurs d'écart $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{R}$ sont jumelés aux degrés de liaison, l'exercice d'une variation selon leurs éléments matriciels déplace et relocalise l'élément géométrique de façon observable.

Le déplacement réciproque de l'élément matériel (imparfait) produirait des écarts résiduels différents; donc des conclusions autres quant à sa définition (paramètres de localisation dans le repère global d'association, défaut de forme, conformité à une tolérance de position et de parallélisme, etc.)

Plutôt que de physiquement rebalancer la matière pour recommencer un palpage onéreux, une stratégie économique de mesure consiste à calculer les conséquences qu'aurait eu ce balancement, si on l'avait effectué (un déplacement selon les degrés de liberté ne produit aucune possibilité d'observation).

L'élément géométrique reste invariant sur certains déplacements ; ces degrés de liberté sont pris en compte dans la composition de $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{R}$. Au voisinage du point M_i, seule compte la projection du déplacement selon $\boldsymbol{n}_{i,\ th}$, normale locale en M_i, direction de sensibilité du palpage, or cette normale locale réelle n'est pas connue et il n'y a pas moyen de la connaître car elle dépend de la forme matérielle de l'élément géométrique réel au voisinage de M_i, nous la substituons donc par la normale locale de l'élément géométrique associé de forme parfaite.

Pour la translation $\boldsymbol{D}$, la modification perceptible du palpage est le produit scalaire $\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n}_i$. Pour la rotation variationnelle $\boldsymbol{R}$, la modification observable instantanée est le produit mixte $(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{OM}_i) \cdot \boldsymbol{n}_i = (\boldsymbol{OM}_i \times \boldsymbol{n}_i) \cdot \boldsymbol{R}$. Un écart de palpage ξ_i est donc modifié à une valeur plus petite ou plus grande $e_i = \xi_i - (\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{D} + (\boldsymbol{OM}_i \times \boldsymbol{n}_i) \cdot \boldsymbol{R})$. En écriture matricielle,

$$e_i = \xi_i - \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_i \\ \boldsymbol{OM}_i \times \boldsymbol{n}_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{R} \end{bmatrix} \tag{3-1}$$

où la matrice colonne $[\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ se nomme ***torseur d'écart*** (l'empilement des deux vecteurs ne pouvant plus engendrer un espace vectoriel) et la matrice colonne $[\boldsymbol{n}_i^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{OM}_i \times \boldsymbol{n}_i^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ s'appelle ***coordonnées pluklériennes*** du point M_i.

Si le défaut de forme de l'élément palpé est nul et que la métrologie est exacte, il existe un torseur d'écart $[\boldsymbol{D}^T\ \boldsymbol{R}^T]^T$ capable de parfaitement ajuster l'élément géométrique à l'élément palpé. Après réalisation de cet ajustement parfait, $e_i = 0, \forall\ i$.
Condition idéale irréalisable, $e_i \neq 0\ \forall\ i$. Mais il existe un torseur $[\boldsymbol{D}^T\ \boldsymbol{R}^T]^T$ qui *optimise* les e_i selon un critère à choisir. L'optimisation *ajuste* l'élément géométrique à l'élément palpé :

Tableau 3-2: Critères d'ajustement au mieux

Fonction, Contraintes	**Optimisation**	**Usage**
$W = \Sigma(e_i)^2$	Moindres carrés	Approximations usuelles, état initial d'une autre optimisation,...

L'algorithme d'optimisation permet de quantifier les éléments du torseur $[\boldsymbol{D}^T\ \boldsymbol{R}^T]^T$ et éventuellement le paramètre de taille d'un cercle, d'une sphère, d'un cylindre,...

La connaissance de $[\boldsymbol{D}^T\ \boldsymbol{R}^T]^T$ permet d'exprimer la localisation du *meilleur* élément géométrique maintenant ***associé*** à l'élément matériel palpé. Le plus souvent, cet élément géométrique est construit autour d'éléments générateurs (point pour la sphère, droite et rayon pour le cylindre,...) et les calculs subséquents en sont simplifiés d'autant (ex. : angle entre deux droites – axes de cylindres associés – pour évaluer l'angle entre deux alésages matériels).

La métrologie se poursuit par l'entremise des éléments générateurs des éléments géométriques associés, pour atteindre le niveau d'abstraction requis par l'analyse mathématique.

Procédure générale :

Toutes les formes géométriques sont résolues selon un même canevas séquentiel et une même hiérarchie de fonctions Matlab [4].

Les coordonnées initiales – données par rapport au repère universel – sont d'abord recalées dans $\{G_0\}$ – le repère nominal à l'élément géométrique – produisant les coordonnées recalées $\boldsymbol{OM}_i = [x_i \ y_i \ z_i]^T$ au point palpé M_i. C'est un macrodéplacement. Il ne réussit pas à parfaitement ajuster les données à la forme géométrique générale. On l'effectue par une transformation homogène.

Sans déplacer l'élément matériel, on calcule l'effet qu'auraient les microdéplacements de $[\boldsymbol{D}^T \ \boldsymbol{R}^T]^T = [u \ v \ w \ \alpha \ \beta \ \gamma]^T$. On inclut l'ajustement de paramètres intrinsèques de taille comme le rayon δr du cercle, du cylindre ou de la sphère. Pour de tels microajustements et en écriture matricielle, l'approximation du premier ordre est ($[\boldsymbol{OM}_i \times]$: matrice de préproduit vectoriel)

$$e_i = \xi_i - \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{n}_i^T & ([\boldsymbol{OM}_i \times]\boldsymbol{n}_i)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r \\ \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{R} \end{bmatrix} \tag{3-2}$$

Première option de traitement des micro-déplacements :

Fonctions **XXX_MC.M** (`CER_MC.M`, `PLN_MC.M`, `SPH_MC.M`, `CYL_MC.M` et `CONE_MC.M`) : La pénalité $W = \Sigma(e_i)^2$ est minimisée, suite à la construction d'un système matriciel classique par la méthode de Gauss (construction d'un système d'équations par les dérivées partielles $\partial W/\partial u = \partial W/\partial v = \partial W/\partial w = \ldots = 0$). Approximation linéaire sans itération, la solution ne vaut que si les écarts sont petits.

Deuxième option de traitement des micro-déplacements :

Fonctions **XXXIMC.M** (`CERIMC.M`, `PLNIMC.M`, `SPHIMC.M`, `CYLIMC.M` et `CONIMC.M`) : La pénalité $W = \Sigma(e_i)^2$ est minimisée. Mais il n'y a pas eu construction d'un système matriciel inversible au sens classique. Les N équations des e_i sont reformulées, en forçant $e_i = 0$ et en isolant les ξ_i. L'inverse généralisé de Moore-Penrose de cette matrice jacobienne fournit la solution des moindres carrés du système surdéterminé. La réponse sert à recaler les coordonnées palpées, à la manière de Gauss-Newton. L'algorithme boucle jusqu'à convergence numérique. Approximation linéaire avec itération, la solution est exacte et vaut même pour des écarts initiaux importants (ex. : position faussée de la moitié d'un rayon, orientations faussées de 30^o ou 40^o).

3.4 Approche mathématique Alistair Forbes

Procédure générale :

Les algorithmes de résolution se résument principalement en ces étapes [2] :

1. Identifier la nature de l'élément géométrique (cercle 2D, cône, plan...).

2. Trouver l'équation associée à cet élément géométrique : $\boldsymbol{f}(x,y,z) = 0$, et trouver les paramètres intrinsèques qui le définissent (par exemple pour un cercle, ces paramètres intrinsèques sont les coordonnées du centre x_0 et y_0, et le rayon).

3. En déduire l'expression de la distance entre un point donné de l'espace et l'élément géométrique considéré : $d_i = \boldsymbol{g}(x_i, y_i, z_i)$. Généralement, la fonction $\boldsymbol{g}$ dépend des mêmes paramètres de ceux dont dépend la fonction $\boldsymbol{f}$.

4. Fonctions **XXXFMC.M** (`CERFMC.M`, `PLNFMC.M`, `SPHFMC.M`, `CYLFMC.M` et `CONFMC.M`) : L'objectif de l'optimisation est de trouver les nouveaux paramètres intrinsèques associés à l'élément géométrique considéré, qui minimisent la somme des

carrés de cette distance $E = \Sigma(d_i^2)_{i=1...n}$ pour un ensemble de n points sensés lui appartenir.

Pour cela, si l'expression de d_i est **linéaire** en fonction des **paramètres**, la résolution est effectuée par décomposition en valeurs singulières, SVD (Singular Value Decomposition), sinon, (si l'expression de d_i est **non** linéaire en fonction des paramètres), c'est l'algorithme itératif de Gauss-Newton qui est utilisé.

3.5 Description de la librairie

La librairie[1] des fonctions d'association des surfaces selon le critère des moindres carrés est réalisée sur Matlab. Dans cette section, nous présenterons la convention de la nomenclature des fonctions et scripts existants ainsi que leur description générale. Pour des informations plus spécifiques, nous vous suggérons d'utiliser la fonction 'help' dans la fenêtre de commandes Matlab suivi du nom de la fonction ou script que vous désirez explorer.

Tableau 3-3: Liste des fonctions et scripts de la librairie

	Cercle 2D	Sphère	Plan	Cylindre	Cercle 3D	Cône
Fonctions	cer_mc cerimc cerfmc[2] cer_parf[2]	sph_mc sphimc sphfmc[2] sph_parf[2]	pln_mc plnimc plnfmc[2] pln_parf[2]	cyl_mc cylimc cylfmc cyl_parf[2]	cer_mc3d cerimc3d cerfmc3d[2] cer3d_parf[2]	cone_mc[2] conimc[2] confmc[2] cone_parf[2]
Scripts	tst_cer[2]	tst_sph[2] grf_sph[2] tau_vois_rayon[2]	tst_pln[2] pln_w[2] pln_a[2] pln_b[2] pln_ab[2]	tst_cyl[2]	tst_cer3d[2]	tst_cone[2]
	demo_gen[2] (**recommandé**)					

[1] Développée dans le cadre de la subvention CRSNG OGP0138478 par Guy Cloutier, 1999

[2] Développé par Ziad Ben Amor dans le cadre d'un travail rémunéré, 2001.

XXXimc et **XXXfmc** sont les fonctions qui permettent d'identifier les paramètres intrinsèques des géométries des moindres carrées respectivement par l'algorithme de Bourdet et par l'algorithme de Alistair Forbes à partir des points palpés ainsi qu'à partir de l'estimation approximative des paramètres intrinsèques où **XXX** designe la géométrie en question : **CER** pour le cercle en 2D, **SPH** pour la sphère, **PLN** pour le plan, **CYL** pour le cylindre, **CER3D** pour le cercle dans l'espace et **CON** pour le cône (Les fonction **XXX_mc** sont la version non-itérative des fonctions **XXXimc**).
XXX_parf est une fonction qui génère des points uniformément répartis qui appartiennent à une partie de la géométrie **XXX** déplacée de sa position nominale et ayant un défaut de forme aléatoire sur sa surface.

tst_XXX est un script qui permet d'effectuer la résolution selon de points générés par **XXX_parf** selon les deux algorithmes en utilisant **XXXimc** et **XXXfmc** et affiche le résultat numériquement et graphiquement.

D'autres scripts de validations spécifiques à certaines géométries sont disponibles également :

grf_sph est un script qui permet de montrer et de comparer graphiquement les performances des deux algorithmes pour différents niveaux de bruit et différentes valeurs de $\boldsymbol{D}$ (voir section 3.6.2).

tau_vois_rayon est un script qui permet de montrer le pourcentage de divergence de **sphimc** sur une série de simulations, chacune à différents niveaux de bruit et pour des valeurs où $\|\boldsymbol{D}\|>r_o$ (voir section 3.6.2).

pln_w, **pln_a** et **pln_b** sont des scripts qui permettent de montrer et de comparer graphiquement les performances des deux algorithmes pour différentes valeurs de w, α et β respectivement (voir section 3.6.3).

pln_ab est un script qui permet de montrer et de comparer graphiquement les performances des deux algorithmes pour différentes valeurs de α et β (voir section 3.6.3).

Enfin, le script **demo_gen** permet d'explorer toutes les fonctions et tous les scripts décrits précédemment de façon interactive.

3.6 Validation et comparaison

Dans cette section, développée par Ziad Ben Amor dans le cadre d'un travail rémunéré en 2001, nous allons présenter, graphiquement ou sous formes de tableaux, les résultats des deux approches pour chacune des géométries considérées, et nous allons les comparer et les analyser en terme de précision et de vitesse de convergence.

3.6.1 Cercle 2D

cerfmc est l'algorithme de Forbes appliqué au cercle en 2D, l'expression de d_i est non linéaire, c'est donc l'algorithme itératif de Gauss-Newton qui est utilisé.
Pour ce cas, il n'y a que très peu de différences entre les deux approches, l'approche Bourdet (**cerimc**), cherche à identifier les **écarts** de position du centre u et v et l'écart de rayon δr d'un cercle nominalement centré en x_0 et y_0 et de rayon nominal r, en revanche, l'approche Forbes, cherche à identifier la vraie position du centre $x_{0(v)}$ et $y_{0(v)}$ et le vrai rayon $r_{(v)}$. Ceci revient à un décalage de variables à une constante près, le cœur de l'algorithme restant le même.
Ceci est confirmé par les tests effectués (**tst_cer**). En effet, pour une même série de données, les deux algorithmes donnent des résultats identiques en un même nombre d'itérations (tableau 3-4). La précision des résultats n'est affectée que par le niveau de bruit : plus le niveau de bruit est élevé moins bonne est la précision.

Tableau 3-4: Résultats du test pour le cercle 2D

	Nominal	IMC	FMC
Nombre de points	36		
Rayon nominal	100		
Niveau du bruit radial	5		
Décalage du centre en x (u)	34.3595	32.4501	32.4501
Décalage du centre en y (v)	16.4469	14.8497	14.8497
Écart de rayon	0	-0.879372	-0.879372
Nombre d'itérations		7	7

Signalons que les deux algorithmes divergent dans le cas ou le centre supposé de l'élément se trouve à l'extérieur des points de mesure ($\|\boldsymbol{D}\| > r$, voir section 3.6.2). Cette dernière constatation vaut pour tous les éléments géométriques ayant une circonférence fermée (sphère, cylindre, cercle 3D et cône).

3.6.2 Sphère

sphfmc est l'algorithme de Forbes appliqué à une sphère dans l'espace. Pour cet élément géométrique, les paramétrisations ainsi que les résolutions des deux algorithmes sont très similaires au cercle dans le plan, il suffit de rajouter la composante en z des coordonnées du centre.

Les tests effectués (**tst_sph**) montrent que les deux algorithmes donnent les mêmes résultats pour différents cas en un même nombre d'itérations (tableau 3-5).

Tableau 3-5: Résultats du test pour la sphère

	Nominal	IMC	FMC
Nombre de points	422		
Rayon nominal	90		
Niveau du bruit radial	10		
Décalage du centre en x (u)	4.17176	3.91087	3.91087
Décalage du centre en y (v)	-2.3125	-3.18129	-3.18129
Décalage du centre en z (w)	19.1627	18.79	18.79
Écart de rayon	0	0.100922	0.100922
Nombre d'itérations		8	8

De plus, des résultats sont affichés graphiquement (**grf_sph**) en faisant varier simultanément le niveau de bruit ainsi que la norme du décalage du centre dans la direction $[1\ 1\ 1]^T$. Ces résultats (figure **3**-2), montrent clairement que les deux algorithmes se comportent de façon identique à tous les niveaux (précision et nombre d'itérations) confirmant qu'ils ont la même base (voir cercle 2D).

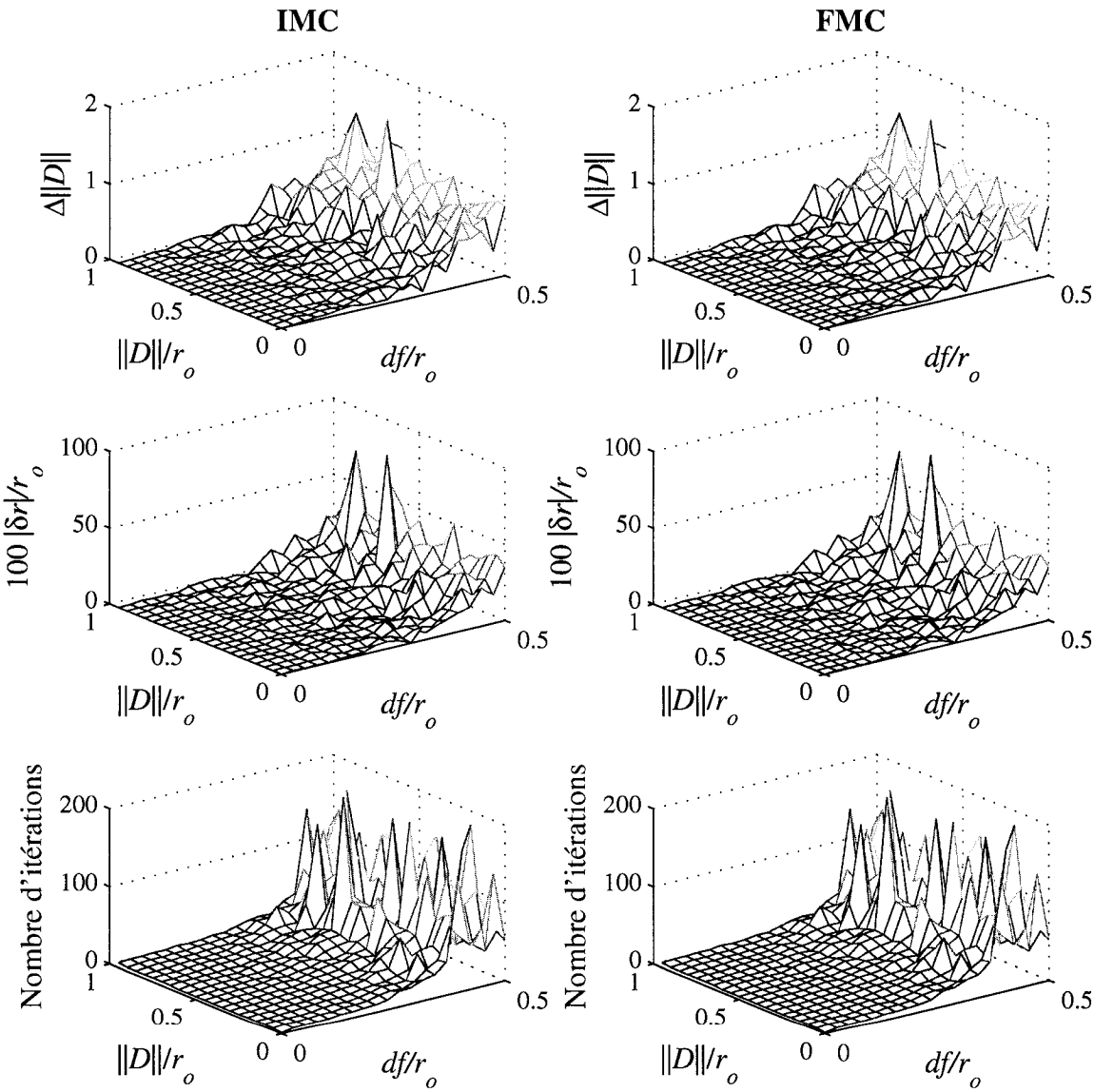


Figure 3-2: Comparaison de l'approche IMC et FMC pour la sphère

Concernant la divergence des algorithmes lorsque le centre se trouve à l'extérieur des points de mesure (voir cercle 2D), des simulations sont effectuées en variant le niveau de bruit ainsi que le décalage du centre de façon à ce qu'il se trouve à l'extérieur des points ($\|\boldsymbol{D}\| > r_o$) et pour chaque niveau de bruit et décalage du centre un nombre d'essais est réalisé (seulement avec l'approche Bourdet) et afficher le nombre d'essais divergents (**tau_vois_rayon**). Les résultats (figure **3-3**) montrent que sans bruit, l'algorithme diverge toujours, et en augmentant le niveau de bruit le taux de divergence baisse. Ceci peut paraître paradoxal mais s'expliquerait par le fait que le bruit augmenterait la probabilité que le centre soit à l'intérieur des points.

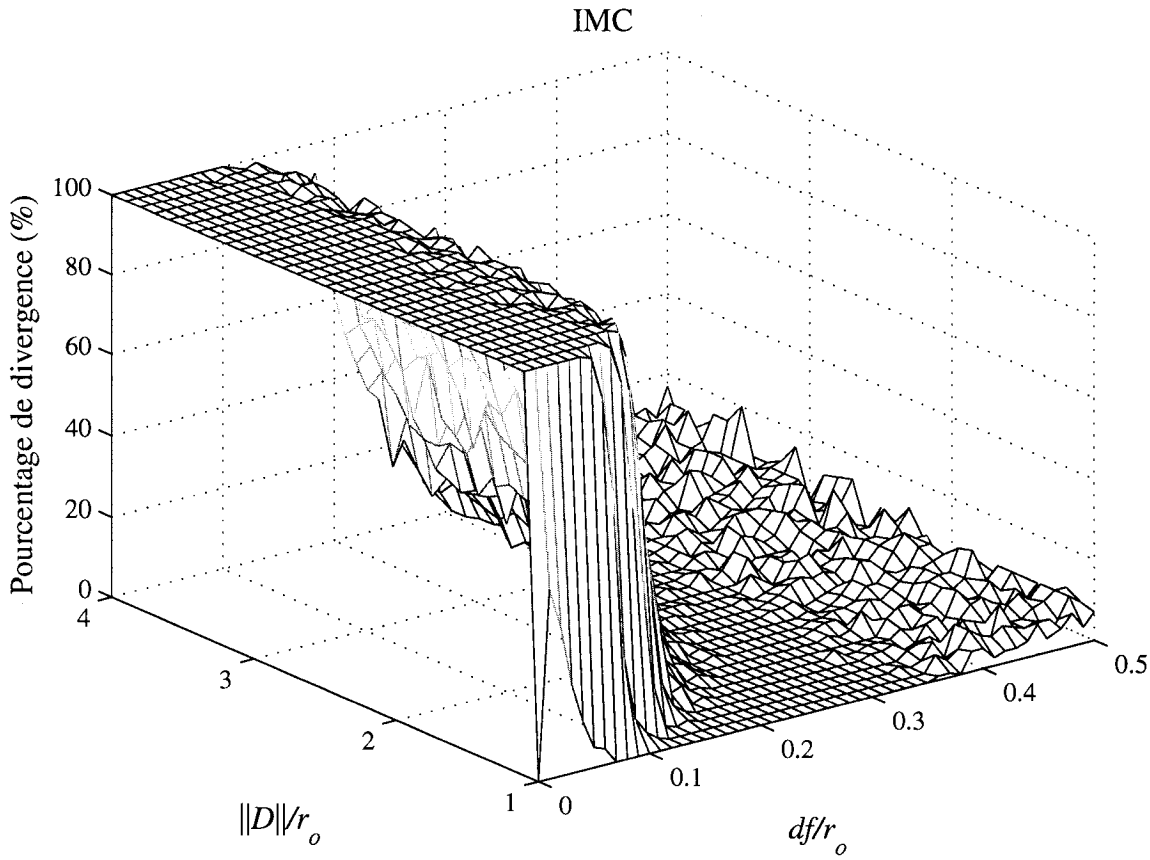


Figure 3-3: Analyse de convergence lorsque $\|\boldsymbol{D}\| > r_o$

3.6.3 Plan

plnfmc est l'algorithme de Forbes appliqué à un plan dans l'espace, ayant un vecteur normal $\boldsymbol{n}$ et passant par un point $[x_0\ y_0\ z_0]^T$. L'expression de d_i est non linéaire, mais sachant que le plan des moindres carrés passe par le centroïde des données, l'expression peut devenir linéaire, et la direction de la normale peut alors s'obtenir par décomposition SVD.

Dans le cas du plan, les différences avec l'approche IMC sont plus explicites.

D'abord dans la paramétrisation : l'approche IMC définit le plan par les deux angles d'Euler α et β dans le repère mobile et dans cet ordre entre sa normale et l'axe z (figure 3-4) ainsi que la coordonnée en z du point d'intersection du plan avec l'axe z, en revanche l'approche FMC définit le plan par son vecteur normal unitaire $\boldsymbol{n}$ et un point $[x_0\ y_0\ z_0]^T$ lui appartenant. Pour pouvoir comparer les résultats des approches IMC et FMC, les réponses FMC (exprimés par une normale et point) sont converties par simple transformation géométrique en leur équivalent en angles d'Euler α et β, et w, coordonnée en z du point d'intersection du plan avec l'axe z. Signalons que la décomposition SVD permet de déterminer la normale au plan sans pouvoir en prédire le sens, afin d'éviter les confusions que cela pourrait entraîner, il est nécessaire de s'assurer que la normale est dans le sens des z positifs.

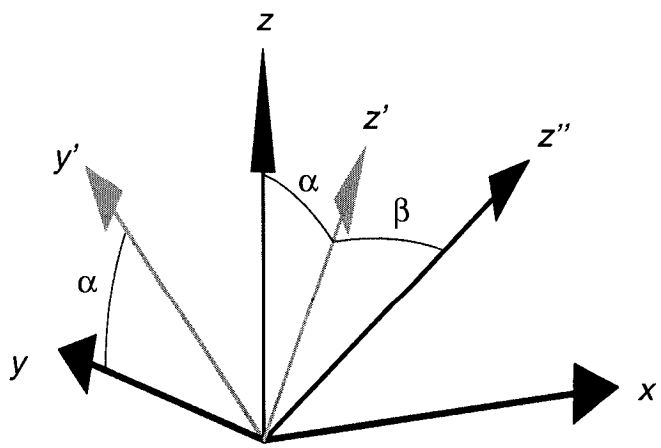


Figure 3-4: Angles d'Euler α et β, x-y-z repère mobile dans cet ordre

De plus, la décomposition SVD n'est pas utilisée dans l'approche FMC et il n'est donc pas possible de comparer les performances des deux approches par le nombre d'itérations.

Les tests effectués, (**tst_pln**), montrent que les deux approches donnent des résultats très satisfaisants (tableau 3-6), avec une meilleure robustesse de FMC dans les cas extrêmes lorsque les angles α et β sont au voisinage de $\pm \pi/2$.

Tableau 3-6: Résultats du test pour le plan

	Nominal	IMC	FMC
Plage de palpage en x	[-50,+50]		
Plage de palpage en y	[-50,+50]		
Nombre de points en x	10		
Nombre de points en y	10		
Niveau du bruit normal à la surface	10		
Décalage en z (w)	94.2691	95.6877	95.6877
Angle de la normale α (rad)	0.243784	0.242037	0.242037
Angle de la normale β (rad)	-0.76212	-0.753207	-0.753207
Nombre d'itérations		20	Non-itératif

En outre, les résultats de tests sans bruit aléatoire sont rapportés graphiquement en faisant varier un ou deux paramètres intrinsèques simultanément.

À la figure 3-5 (**pln_w**) nous faisons varier *w* et nous observons l'écart des paramètres intrinsèques associés par rapport aux paramètres intrinsèques générateurs, ainsi que le nombre d'itérations (pour IMC seulement car FMC n'est pas itératif).

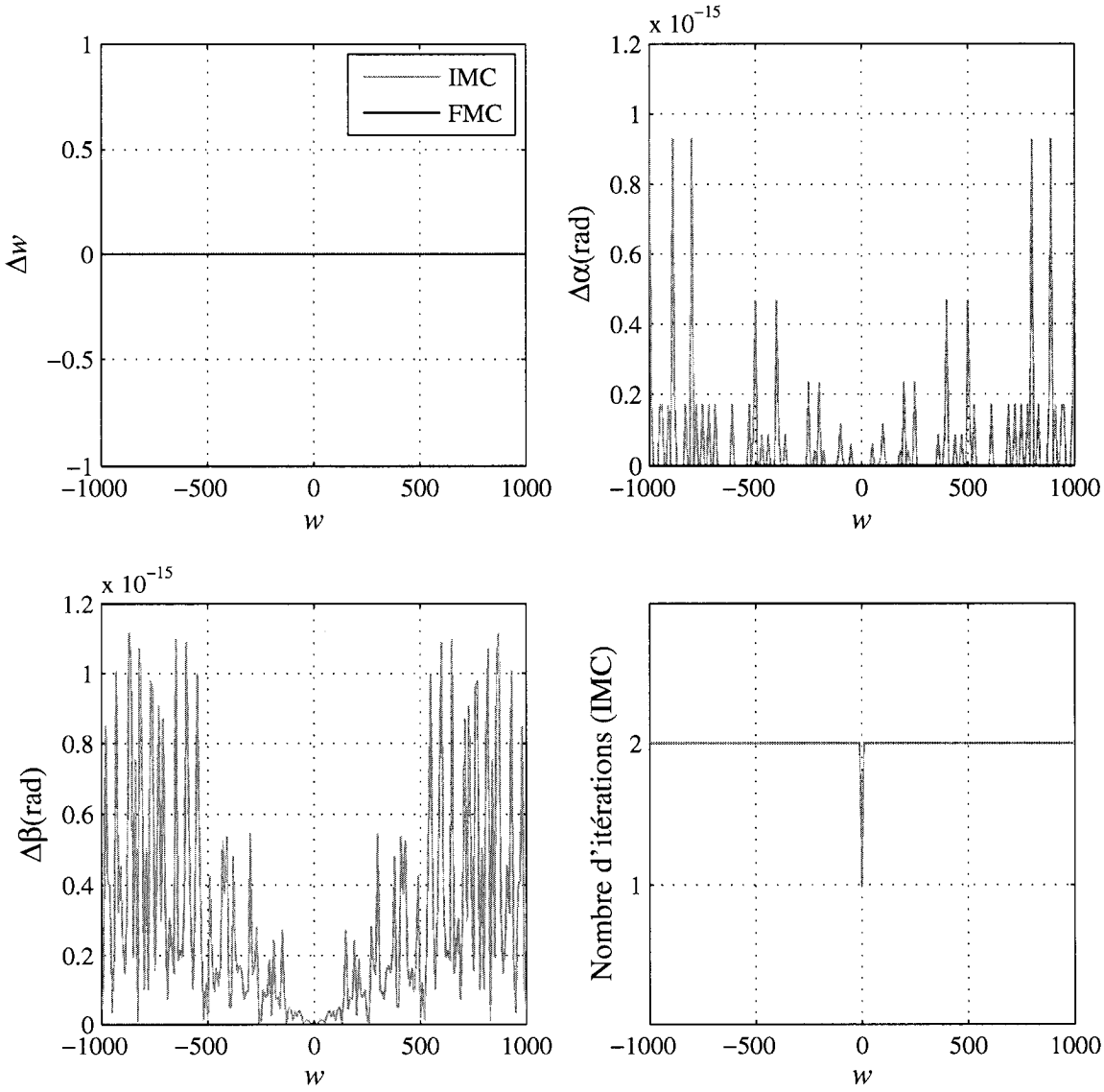


Figure 3-5: Plan : varier *w*

De façon similaire, à la figure 3-6 (**pln_a**), nous faisons varier l'angle α et nous observons l'écart des paramètres intrinsèques associés par rapport aux paramètres intrinsèques générateurs, ainsi que le nombre d'itérations (pour IMC seulement).

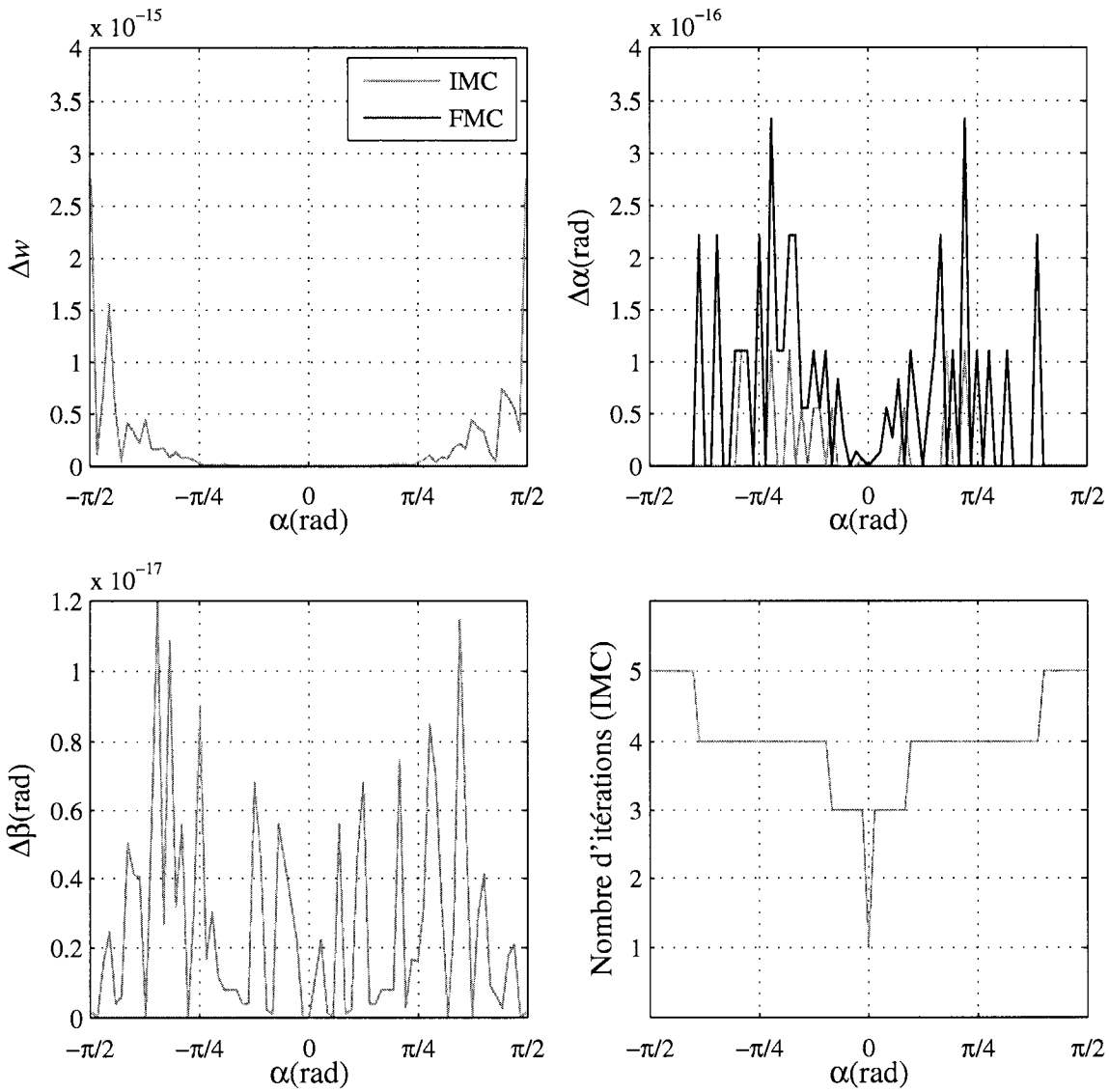


Figure 3-6: Plan : varier α

À la figure 3-7 (**pln_b**), nous faisons varier l'angle β et nous observons l'écart des paramètres intrinsèques associés par rapport aux paramètres intrinsèques générateurs, ainsi que le nombre d'itérations (pour IMC seulement).

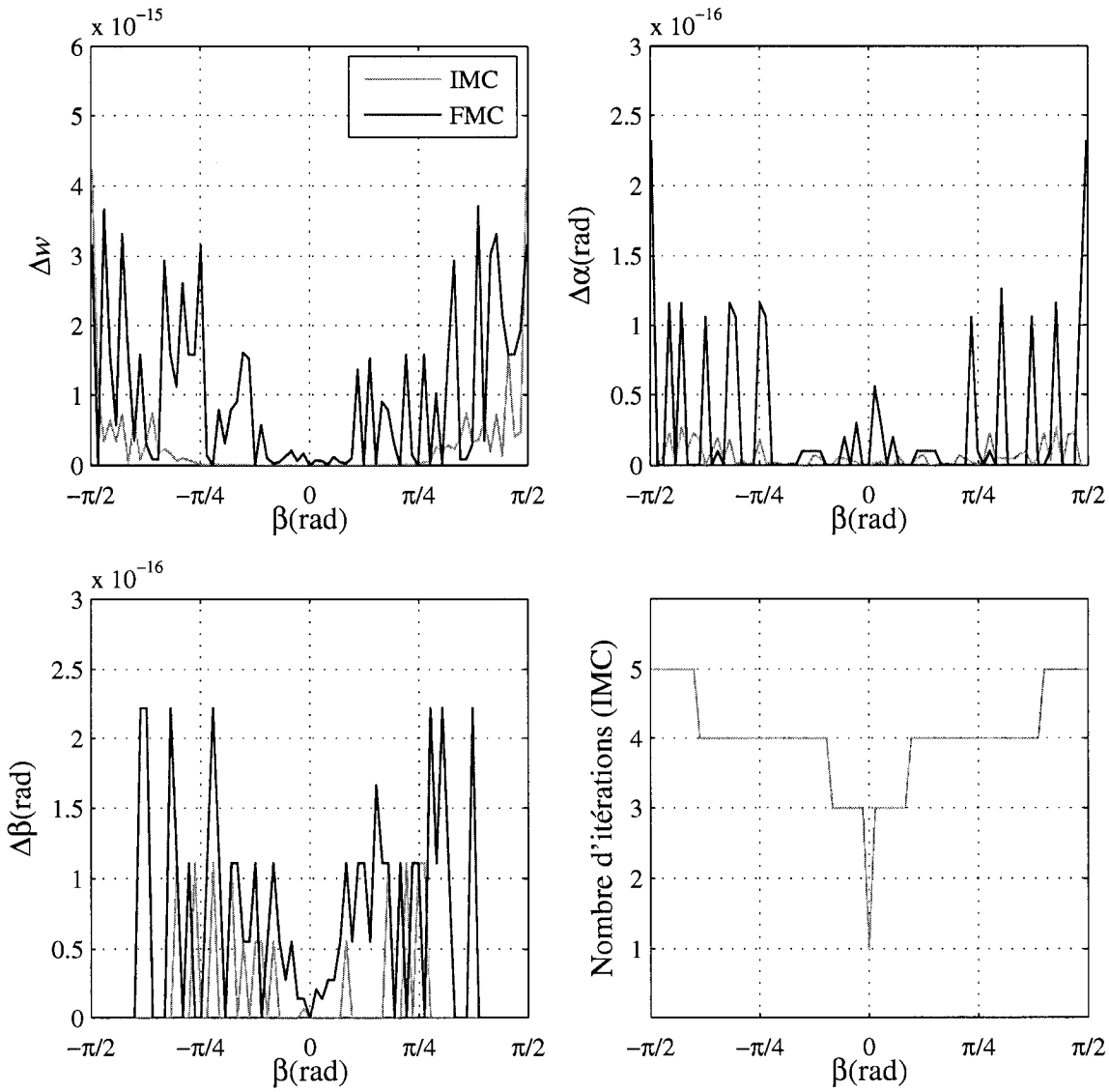


Figure: 3-7: Plan : varier β

Par ailleurs, à la figure 3-8 (**pln_ab**), nous faisons varier simultanément, les angles α et β et nous observons l'écart des paramètres intrinsèques associés par rapport aux paramètres intrinsèques générateurs.

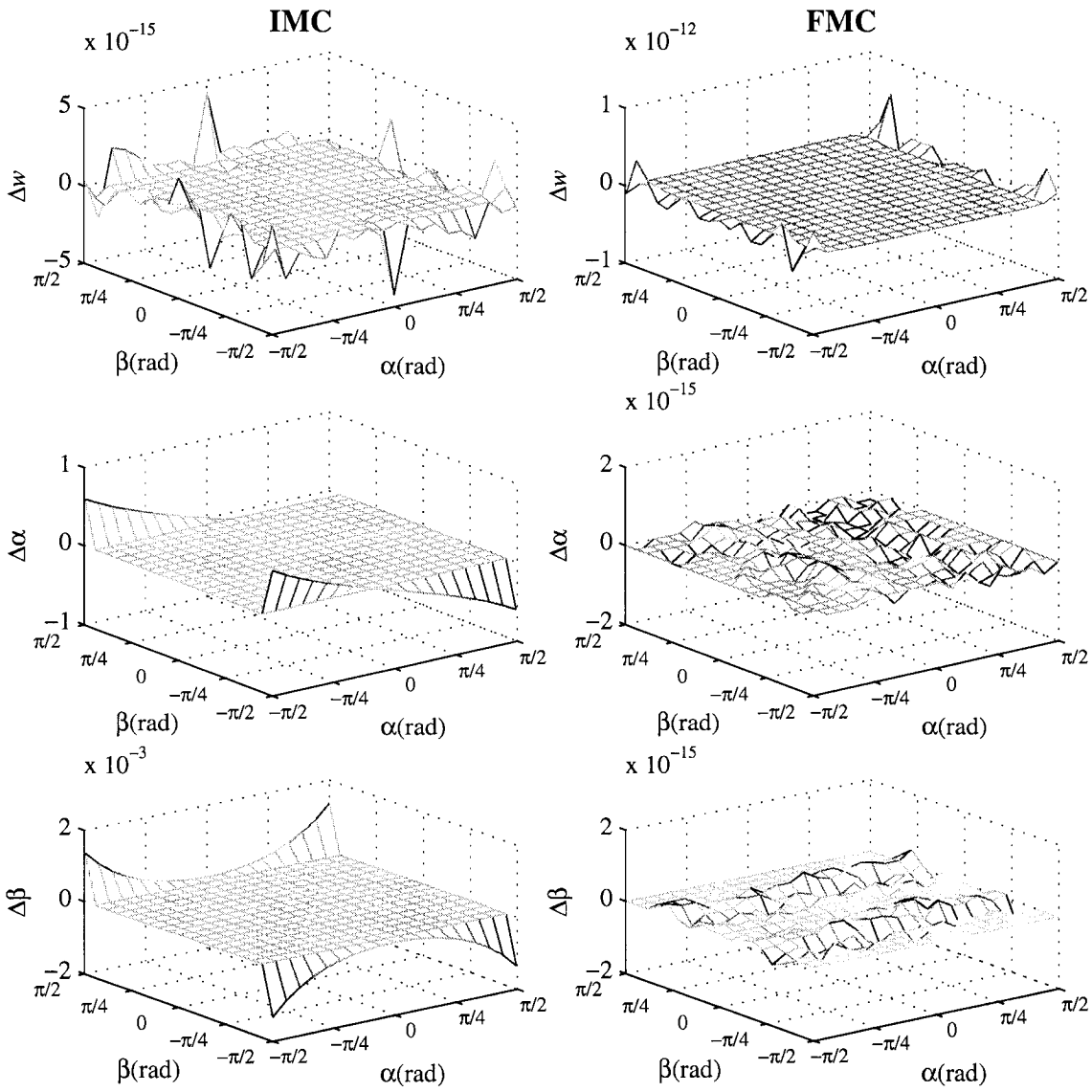


Figure 3-8: Plan : varier α et β

Enfin, à la figure 3-9 (**pln_ab**), nous faisons varier simultanément, les angles α et β et nous observons le nombre d'itérations avant convergence.

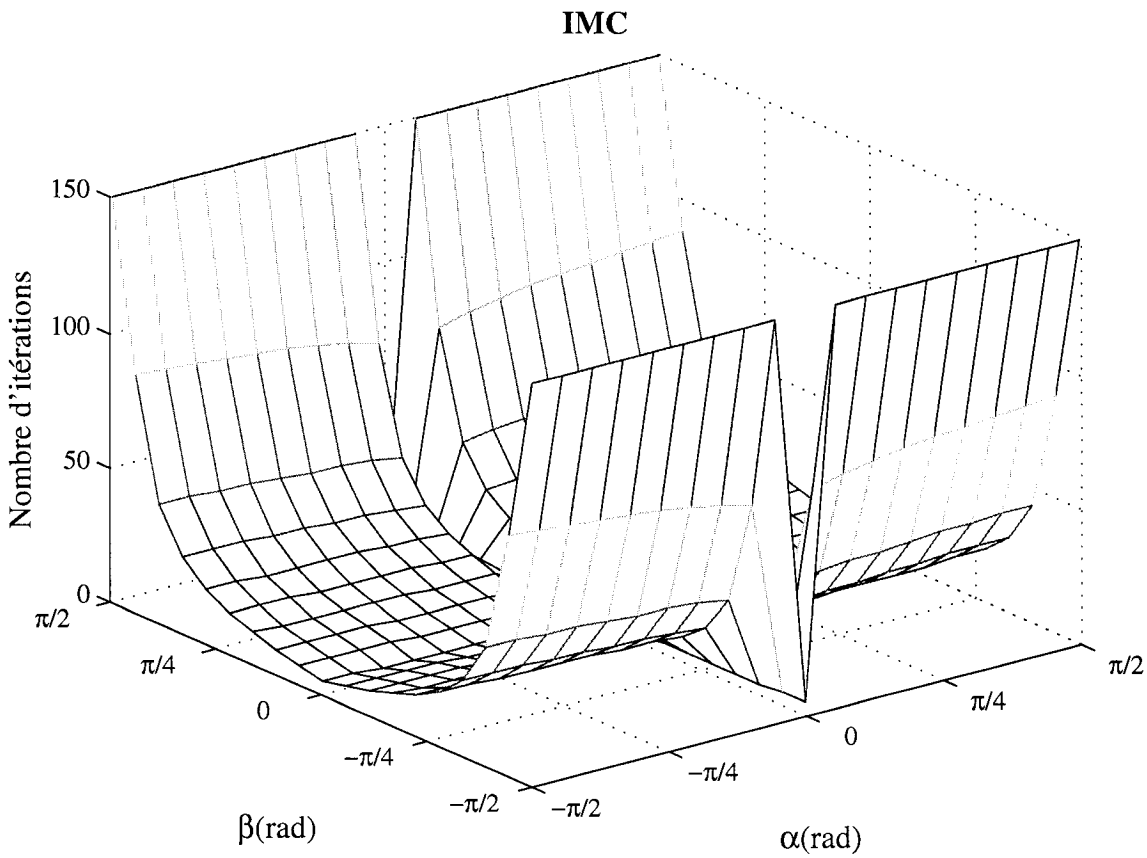


Figure 3-9: Plan : nombre d'itérations pour l'approche Bourdet

Ces graphiques (figures **3-5, 3-6, 3-7, 3-8** et **3-9**) montrent que les deux approches donnent des résultats satisfaisant et qu'effectivement, l'approche FMC est plus robuste lorsque α et β sont au voisinage de $\pm \pi/2$.

3.6.4 Cylindre

cylfmc est l'algorithme de Forbes appliqué à un cylindre dans l'espace, ayant un axe colinéaire au vecteur $\boldsymbol{n} = [a\ b\ 1]^T$, passant par un point $[x_0\ y_0\ z_0]^T$ et de rayon r. C'est donc (comme dans le cas du plan) une paramétrisation sensiblement différente de l'algorithme IMC : 2 angles d'Euler α et β (x-y-z repère mobile dans cet ordre) de l'axe, décalage u et v l'intersection de l'axe avec le plan xy, ainsi que le rayon r. En revanche, les deux approches utilisent des algorithmes itératifs (l'expression de d_i est non linéaire la décomposition SVD n'est pas possible).

Les tests effectués (**vali_cyl**) pour différents points de mesures montrent que les deux approches donnent des résultats satisfaisants, mais l'approche Forbes converge plus rapidement (tableau 3-7).

Tableau 3-7: Résultats du test pour le cylindre

	Nominal	IMC	FMC
h_1	-20		
h_2	+40		
Rayon nominal	10		
Niveau du bruit normal à la surface	0.5		
Nombre de cercles équidistants de palpage	10		
Nombre de points de palpage par chacun des cercles	10		
Décalage en x (u)	3.68266	3.5706	3.5706
Décalage en y (v)	-1.67898	-1.58893	-1.58893
Angle de la normale α (rad)	-0.502719	-0.494954	-0.494954
Angle de la normale β (rad)	-0.759949	-0.758776	-0.758776
Écart de rayon	0	0.0367664	0.0367664
Nombre d'itérations		19	8

Ceci n'est pas nécessairement que dû au fait que la paramétrisation de l'approche Forbes est numériquement supérieure, mais aussi au fait que le critère d'arrêt de la boucle *Tant que* (*While*) des deux approches, est que la norme du vecteur formé par les micro variations des paramètres intrinsèques passe en deçà d'un certain seuil, (le même pour IMC et FMC) or, l'orientation du cylindre est exprimée de façon différente : IMC cherche les micro déplacements des deux angles d'Euler du vecteur directeur de l'axe, en revanche, FMC cherche les micro déplacements des composantes a, b et c de ce vecteur directeur. Donc, si le seuil de convergence est atteint, même s'il est numériquement le même pour les deux approches, cela n'implique pas la même précision des résultats, d'où un nombre d'itérations différent.

Par conséquent, afin de déterminer l'effet de la différence des expressions des vecteurs des micro déplacements (VMD) des deux approches sur le nombre d'itérations, nous avons remplacé la représentation des VMD de l'approche de Forbes à chaque itération par leur représentation équivalente telle que exprimée dans l'approche IMC, et le critère d'arrêt de la boucle *Tant que (While)* est fonctions de ces nouveaux VMD modifiés. De cette façon, un seuil de convergence unique exprime la même précision pour les deux approches.

Les résultats obtenus montrent qu'il n'y a aucune différence entre l'approche Forbes et l'approche Forbes modifiée, ceci pour deux raisons :

1. la différence numériques en valeurs absolues pour des petits déplacement entre a, b et α, β n'est pas significative (effectivement $\alpha \approx -b$ et $\beta \approx a$ pour les petits angles).
2. En observant les VMD, c'est souvent les composantes en translation qui sont numériquement plus grandes, et donc critiques, et ces composantes ne sont pas affectées par l'une ou l'autre des représentations des VMD.

En conclusion, l'approche Forbes est plus performante en terme de nombre d'itérations que l'approche IMC.

Ceci vaut aussi pour le cercle 3D ainsi que pour le cône.

3.6.5 Cercle 3D

cerfmc3d est l'algorithme de Forbes appliqué à un cercle dans l'espace, ayant un centre $[x_0\ y_0\ z_0]^T$ et contenu dans un plan ayant $\boldsymbol{n} = [a\ b\ 1]^T$ pour vecteur normal et de rayon r. C'est donc (comme dans le cas du plan et du cylindre) une paramétrisation sensiblement différente de l'algorithme IMC : 2 angles d'Euler α et β (x-y-z repère mobile dans cet ordre) de l'axe, décalage en u, v et w du centre ainsi que le rayon r. En revanche, les deux approches utilisent des algorithmes itératifs (l'expression de d_i est non linéaire, la décomposition SVD n'est pas possible).

Les tests effectués (**tst_cer3d**) pour différents points de mesures montrent que les deux approches donnent des résultats satisfaisants (tableau 3-8), mais l'approche Forbes converge nettement plus rapidement (voir cylindre).

Tableau 3-8: Résultats du test pour le cercle 3D

	Nominal	IMC	FMC
Nombre de points	50		
Rayon nominal	100		
Niveau du bruit radial	10		
Niveau de bruit normal	10		
Décalage en x (u)	-1.83806	-3.30819	-3.30819
Décalage en y (v)	1.48742	1.16908	1.16908
Décalage en z (w)	-1.79467	0.100016	0.100016
Angle de la normale α (rad)	0.236345	0.226128	0.226128
Angle de la normale β (rad)	0.756491	0.75806	0.75806
Écart de rayon	0	-0.855894	-0.855894
Nombre d'itérations		76	8

3.6.6 Cône

confmc est l'algorithme de Forbes appliqué à un cône dans l'espace, ayant un axe colinéaire au vecteur $\boldsymbol{n} = [a\ b\ 1]^T$ et passant par un point $[x_0\ y_0\ z_0]^T$ se trouvant à une distance t de la surface du cône et d'angle φ. C'est donc (comme dans le cas du plan et du cylindre et le cercle 3D) une paramétrisation sensiblement différente de l'algorithme IMC. En revanche, les deux approches utilisent des algorithmes itératifs (l'expression de d_i est non linéaire la décomposition SVD n'est pas possible).

Signalons qu'il est nécessaire, pour les deux approches, que l'axe z soit dans le sens des rayons décroissants, si tel n'est pas le cas, l'algorithme pourrait diverger fréquemment ($\varphi \approx \pi/2$). De plus, il faut éviter les points proches de l'apex, car ceci entraîne une division par zéro dans la matrice jacobienne. Enfin, les mesures doivent se trouver du même côté de l'apex, sinon (figure 3-10 (a)), l'algorithme converge vers le cône non-croisé (figure 3-10 (b)).

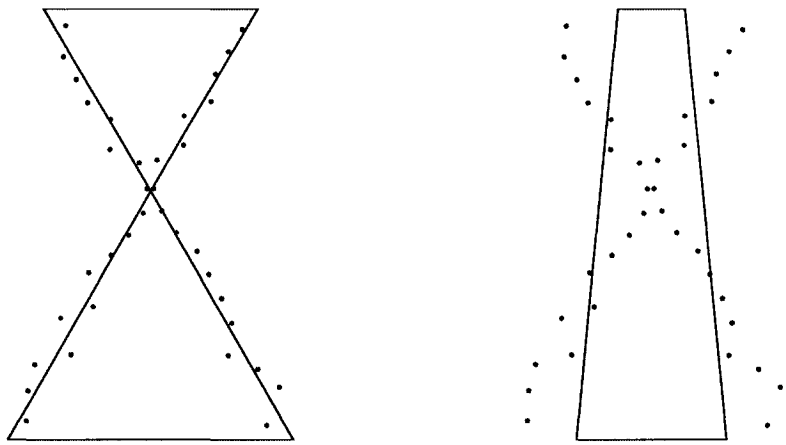


Figure 3-10 : Nuage de points autour d'un cône croisé (a), cône associé par les algorithmes des moindres carrés (b)

Les tests effectués (**tst_cone**) pour différents points de mesures montrent que les deux approches donnent des résultats satisfaisants (tableau 3-9), mais l'approche Forbes converge un peu plus rapidement (voir cylindre).

Tableau 3-9: Résultats du test pour le cône

	Nominal	IMC	FMC
Apex nominal φ (rad)	0.717364		
t nominal	46.24633		
h_1	100		
h_2	100		
Ordre de grandeur du bruit normal à la surface	5		
Nombre de cercles équidistants de palpage	5		
Nombre de points de palpage par chacun des cercles	5		
Décalage en x (u)	5.29852	3.88653	3.88653
Décalage en y (v)	16.3851	19.7399	19.7399
Décalage en z (w)	0.207721	0.15973	0.15973
Angle de la normale α (rad)	-0.510213	-0.472589	-0.472589
Écart de l'angle d'apex	0	0.00957414	0.00957414
Écart en t	0	0.720235	0.720235
Nombre d'itérations		30	28

3.7 Conclusion

En conclusion, nous pouvons constater que les deux approches, mécanique de Bourdet et mathématique de Alistair Forbes, donnent des résultats satisfaisants pour obtenir les micro-variations des paramètres intrinsèques d'un élément géométrique associé par rapport aux paramètres intrinsèques nominaux. De plus, nous avons montré que les deux approches permettent même de produire les macro variations jusqu'à une certaine limite.

En ce qui concerne le cercle 2D et la sphère, les différences entre les deux approches sont quasi nulles tant sur la précision des résultats que sur le nombre d'itérations avant convergence. Quant au cylindre, au cercle 3D et au cône, les deux approches donnent des résultats équivalents en terme de précision mais elles se distinguent par la façon de paramétrer la direction de l'axe : 2 angles d'Euler α et β pour l'approche Bourdet, et les trois composantes a, b et c de son vecteur directeur pour l'approche Forbes ce qui procure à cette dernière une légère supériorité au niveau du nombre d'itérations avant convergence. Par ailleurs, les deux approches se distinguent de la même façon concernant la paramétrisation de la normale au plan, et de plus, l'approche Bourdet utilise l'algorithme itératif de Gauss-Newton, l'approche Forbes utilise la décomposition en valeurs singulières ce qui lui procure une légère supériorité en terme de précision, et quant au nombre d'itérations, il n'est pas possible de comparer la performance des deux algorithmes car la fonction SVD est une fonction intégrée et compilée (built-in) dans Matlab.

Pour tous les éléments géométriques à circonférence (cercle 2D, sphère, cylindre, cercle 3D et cône), les deux approches divergent lorsque l'origine se trouve à l'extérieur des points.

Pour conclure, les deux approches sont suffisamment fiables pour pouvoir être utilisées sans risques dans la méthode prédictive des densité de palpage puisque les conditions et les limites à l'intérieur desquelles elles ont été testées dépassent largement les conditions simulées par la méthode.

4 MÉTHODE NUMÉRIQUE DE PRÉDICTION DE CONFIGURATION DE PALPAGE

4.1 Introduction

Dans cette section, nous allons présenter une méthode numérique qui permette de prédire une configuration de palpage sur MMT en déterminant les différentes densités de palpage des éléments géométriques impliqués dans les tolérances géométriques. Cette configuration de palpage assure un taux de bons diagnostics minimum en tenant compte des capabilités des centres de fabrication utilisés d'un côté et des tolérances du bureau d'études de l'autre.

Nous commencerons d'abord par décrire la méthode dans sa généralité; ensuite, nous montrerons quelques exemples pratiques auxquels nous appliquerons notre méthode.

4.2 Présentation de la méthode

Dans les sections qui suivront, nous suggérerons une méthode qui permette de déterminer le nombre de points de palpage convenable afin d'émettre un bon diagnostic. Il est évident, à partir de l'exemple illustré dans le chapitre 2, que le nombre de points recherché dépend principalement des capabilités de la machine d'un côté et des tolérances exigées de l'autre.

Pour cela nous introduisons le concept de « Taux de bons diagnostics» (*TBD*) qui est la proportion des bonnes pièces acceptées et des pièces hors-tolérances rejetées par rapport à la totalité des pièces contrôlées. Ensuite, connaissant les capabilités de la machine et les tolérances exigées, nous déterminons le nombre de points de palpage minimum qui permette d'atteindre le TBD_{seuil} souhaité (90% par exemple).

4.2.1 Présentation générale d'une procédure de fabrication et d'inspection

En général, il existe plusieurs façons d'inspecter une pièce fabriquée afin de pouvoir juger de sa conformité ou non par rapport aux tolérances exigées (gabarits, pieds à coulisse...) par le bureau d'études. Nous nous intéressons au cas d'inspection par une MMT.

Le diagramme qui suit (figure 4-1) illustre une procédure de fabrication et d'inspection sur MMT.

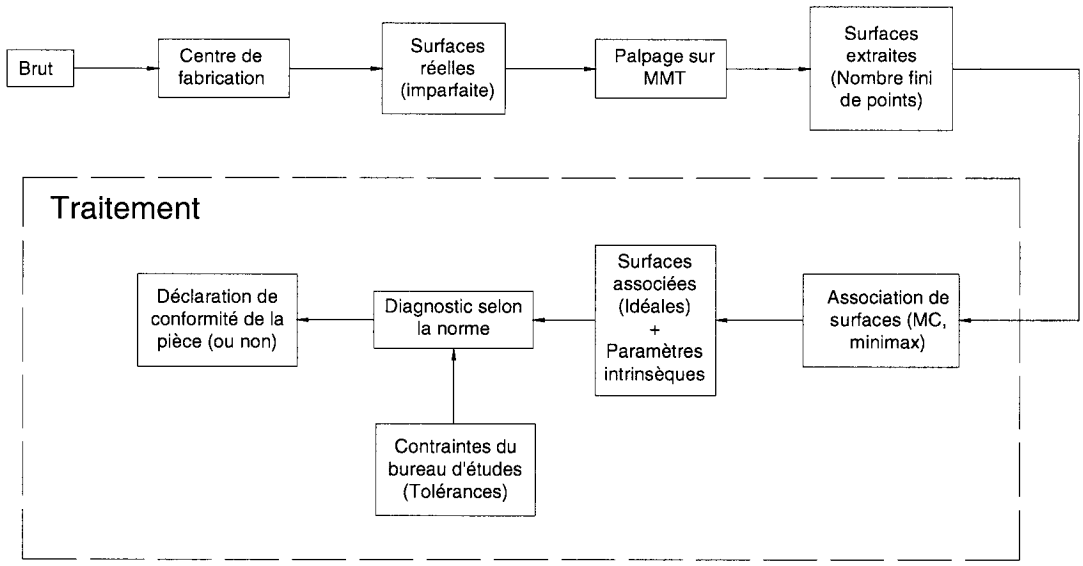


Figure 4-1: Schéma d'une procédure de fabrication et d'inspection sur MMT

Brut :

À cette étape, la géométrie finale de la pièce n'est pas existante, seules les surfaces d'appui pour les premières opérations sont disponibles.

Centre de fabrication et surfaces réelles

C'est à cette étape que les géométries réelles de la pièce sont créées. Il peut s'agir d'une ou de plusieurs machines ayant des capabilités différentes.

Palpage sur MMT et extraction de surfaces

À chaque surface de la pièce est associé un nombre fini de points palpés sur la MMT : c'est la surface extraite.

Association de surfaces

Nous procédons ici à une association de surfaces pour chacune des surfaces extraites selon un critère établi (MC, mini-maxi,...).

Diagnostic

À partir des paramètres intrinsèques des surfaces associées et de toutes les tolérances exigées, nous émettons le diagnostic correspondant à la pièce inspectée, selon la norme : conforme ou non-conforme.

4.2.2 Présentation de la procédure simulée de fabrication et d'inspection

L'idée de la méthode est de simuler virtuellement la procédure d'inspection citée ci-haut. La figure 4-2 qui suit l'illustre.

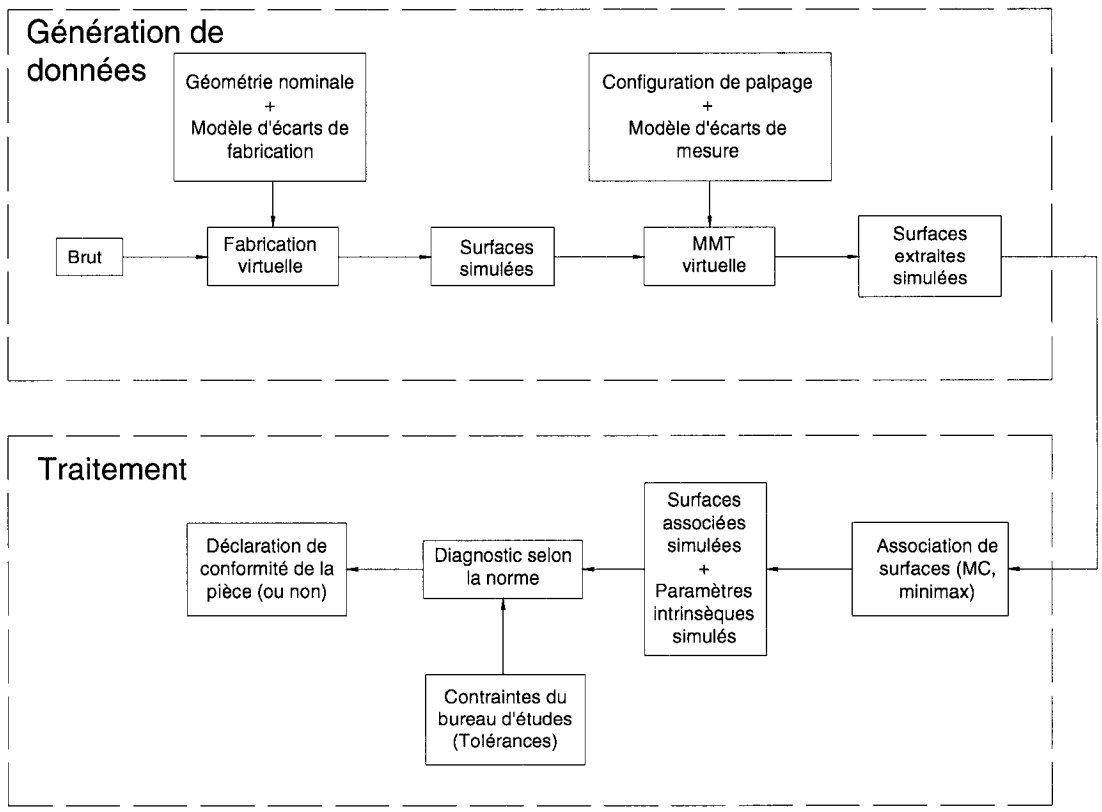


Figure 4-2: Schéma d'une procédure simulée de fabrication et d'inspection

Brut

Pour la simulation virtuelle, cette étape n'est utile que lorsqu'on désire inspecter les surfaces d'appui.

Centre de fabrication virtuelle

En s'appuyant sur un modèle d'écarts pour chacune des machines impliquées dans la fabrication, nous engendrons les surfaces simulées.

Palpage virtuel :

Pour chaque surface simulée, la surface extraite est obtenue en calculant les intersections de la surface simulée avec les droites représentant les directions de palpage en compensant selon un modèle d'écart de mesure de la MMT.

Les étapes subséquentes sont identiques au cas réel, puisqu'elles ne sont que des étapes de traitement de données.

4.2.3 Hypothèses et cadre théorique

Afin de concrétiser notre méthode, il est nécessaire d'énoncer les conditions à l'intérieur desquelles elle s'applique.

4.2.3.1 Écarts de mesures

Nous considérons que les erreurs de mesures sur MMT sont négligeables par rapport à celles générées par le centre de fabrication d'un côté, et par rapport aux tolérances exigées de l'autre. En d'autres termes, nous considérons que la mesure sur MMT est idéale.

4.2.3.2 Écarts de fabrication

Nous considérons que les centres d'usinage produisent des surfaces ayant des paramètres intrinsèques générateurs qui s'écartent des paramètres intrinsèques nominaux de façon aléatoire et indépendante selon une distribution uniforme, (ceci reflète les écarts de mise en position, erreurs cinématiques des centres d'usinages...) et dont les points où le palpage est effectué (surface extraite simulée) s'écartent par rapport aux normales locales à cette surface de façon aléatoire et indépendante reflétant ainsi les effets de vibrations d'élasticité de l'outil...

4.2.3.3 Critères d'association

Étant donné que le critère d'association de surfaces le plus répandu est celui des moindres carrés, et qu'en plus, c'est ce critère qui est encore le plus implémenté sur les MMT [3], nous l'utiliserons dans tous les exemples qui suivent. De plus, vu la charge numérique de la méthode, nous appliquerons une seule des deux approches décrites précédemment (mécaniste de Bourdet et mathématique de Forbes) puisque, par ailleurs, la fiabilité de chacune de ces deux approches est équivalente. Toutefois, l'approche mathématique de Forbes semble être plus performante en termes de vitesse de convergence, elle sera celle appliquée dans les exemples qui suivent.

4.2.3.4 Configuration de palpage

Nous traitons des configurations de palpage telle que les points de palpage sont uniformément répartis sur la surface de l'élément considéré et dont nous cherchons à déterminer la densité.

4.2.4 Simulation de prédiction du nombre de points de palpage

À la lumière des conditions énoncées précédemment, il est possible de fusionner les étapes de fabrication et palpage, voici le schéma de simulation d'inspection qui en découle.

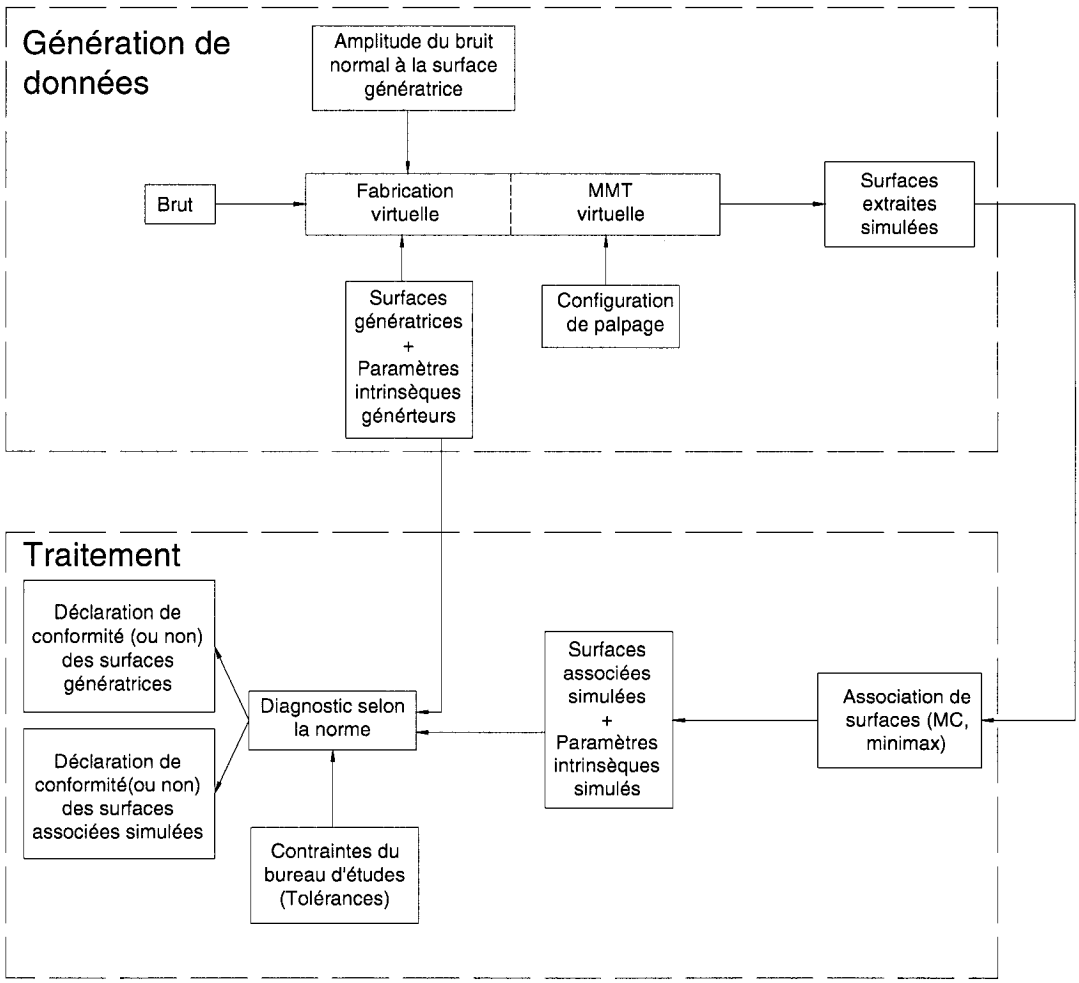


Figure 4-3: Simulation de prédiction du nombre de points de palpage

Tel qu'illustré dans le diagramme de la figure 4-3, le diagnostic est fait d'une part sur les surfaces génératrices et sur les surfaces simulées associées de l'autre. Le diagnostic effectué sur les surfaces génératrices est équivalent au diagnostic effectué sur les

surfaces simulées associées avec une densité de palpage infinie, et c'est donc le diagnostic idéal. En confrontant les deux diagnostics, il nous est possible de juger de la qualité du diagnostic des surfaces simulées associées : s'il est le même que le diagnostic des surfaces génératrices, il est considéré bon, sinon il ne l'est pas.

En insérant cette procédure dans une simulation de Monte-Carlo (figure 4-4), il est possible d'obtenir les taux de bons diagnostics correspondant à un processus fabrication/palpage donné.

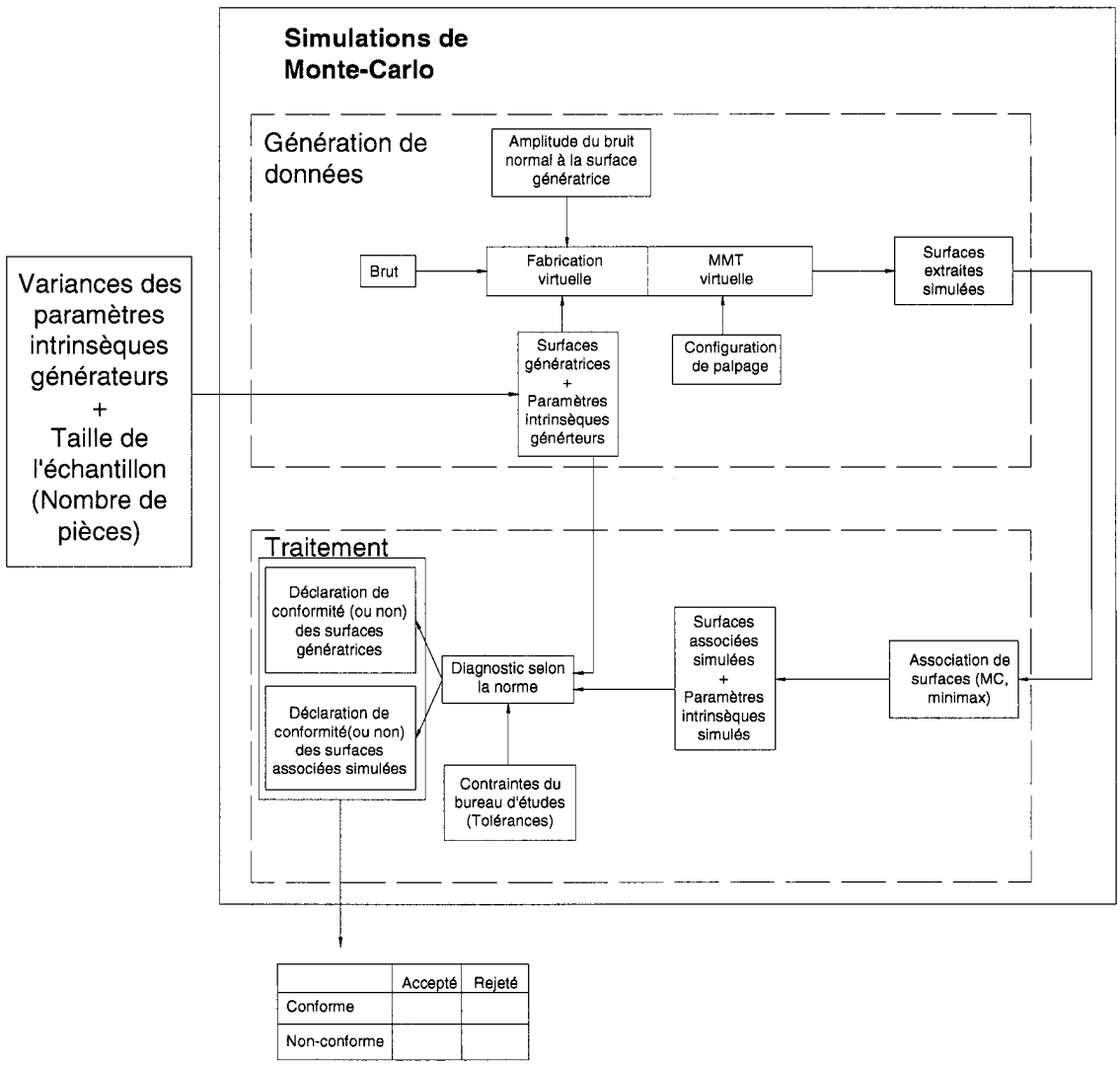


Figure 4-4: Simulationsde Monte-Carlo pour la prédiction du nombre de points de palpage

Si le taux de bons diagnostics *TBD* est en-deça d'un seuil fixé TBD_{seuil} (90% par exemple), nous augmentons progressivement la densité de palpage jusqu'à l'atteindre.

4.3 Exemples

4.3.1 Exemple d'introduction: trou sur une plaque mince

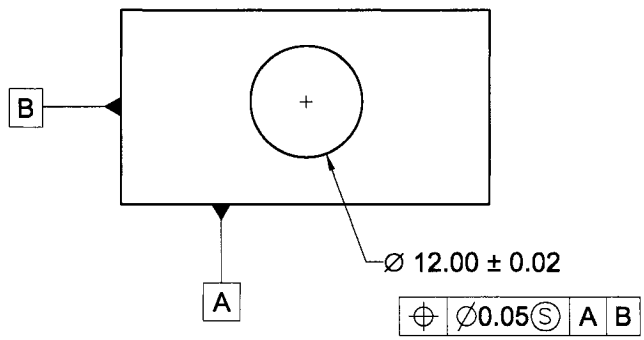


Figure 4-5: Trou sur une plaque mince avec contrainte de positionnement

Soit un cercle ayant une tolérance de positionnement de type RFS (sans égard à la cote) par rapport à deux plans de référence perpendiculaires *A* et *B* (qu'on suppose de forme parfaite et parfaitement perpendiculaires) connus dans le référentiel MMT.

Nous désirons contrôler la conformité d'une série de pièces à la tolérance indiquée à l'aide d'une MMT en utilisant le critère des moindres-carrés.

Question : Quel est le **N**ombre de **P**oints de **P**alpage (*NPP*) minimum uniformément répartis sur la circonférence du cercle pour que le succès du diagnostic *TBD* soit supérieur à 99%?
Rappelons qu'un diagnostic réussi consiste à accepter une pièce conforme à la tolérance **ou bien** à rejeter une pièce hors tolérance.

Procédure : (Monte-Carlo)
Début
    $NPP \leftarrow$ 4 nombre de points initial uniformément répartis sur le cercle
    $N \leftarrow$ 1000 nombre de cas à simuler
    $TBD_{seuil} \leftarrow$ 0.99 seuil de réussite
    Condition $\leftarrow$ *Faux* Vrai si le seuil de réussite est atteint
    estimer les valeurs de df et $\|\boldsymbol{D}\|$
    Tant que *Condition* = *Faux*
        générer N cas avec NPP, df et $\|\boldsymbol{D}\|$
        Résoudre selon le critère des moindres-carrées (ou autre) les N cas
        $N_{BD} \leftarrow$ le nombre de *'bons diagnostics'*
        $TBD \leftarrow N_{BD}/N$ taux de réussite
        Si $TBD < TBD_{seuil}$
         $NPP \leftarrow NPP + 1$
        Sinon
         Condition = *Vrai*
        Fin
    Fin
Fin

Où $\|\boldsymbol{D}\|$ représente le décalage radial au centre et df l'ordre de grandeur du bruit radial. Après convergence, l'algorithme précédent retourne le NPP à palper afin d'avoir un contrôle efficace à 99%

Cette procédure a été appliquée dans le cas du cercle en 2D pour produire un NPP suggéré uniformément répartis sur toute la circonférence afin de satisfaire une tolérance de positionnement diamétrale du centre du type RFS (sans égard à la cote) et un TBD_{seuil} de 90%

Voici les résultats obtenus tels que retournés par Matlab :

```
Rayon Nominal                                                          10
Tolerance Diametrale(RFS)                                            0.05
Ordre de grandeur du decalage radial au centre de la machine        0.026
Ordre de grandeur du bruit radial de la machine                      0.01
Taux de reussite souhaite                                             0.9

Nombre de cas simules                                              100000
Nombre de points initial                                                3

Résultats:

Nombre de points recommande                                            12
Nombre de pieces non-conforme acceptees                              1675
Nombre de pieces conformes rejetees                                  8282
Nombre de pieces conformes acceptees                                87800
Nombre de pieces non-conformes rejetees                              2243
```

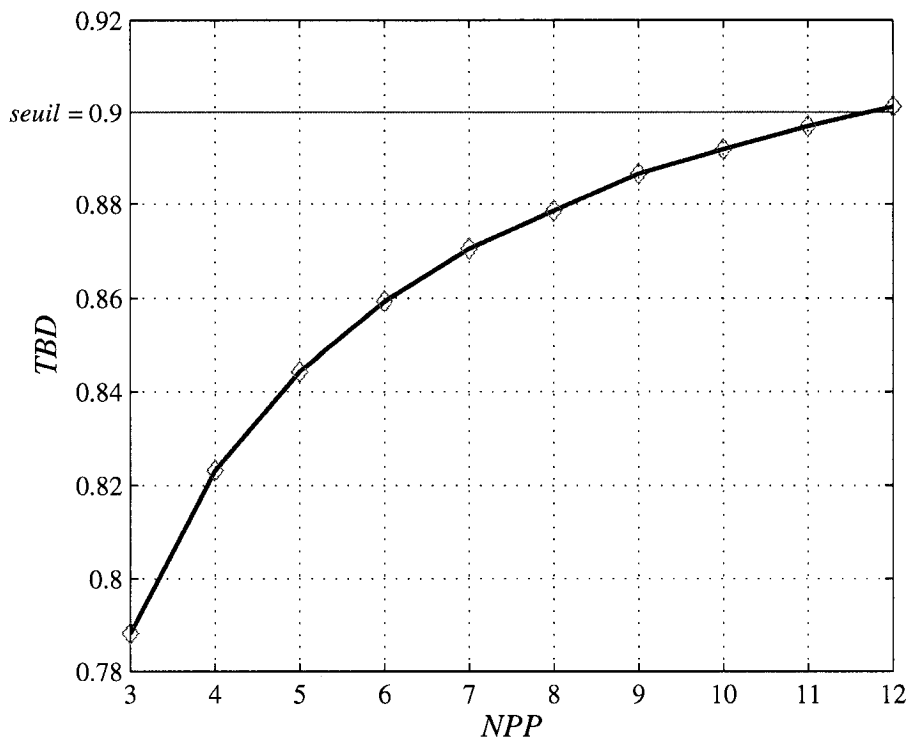


Figure 4-6: Résultats de l'exemple 4.3.1

Les résultats montrent que dans ce cas, palper le cercle sur 12 points uniformément répartis sur sa circonférence nous assure un *TBD* de 90%. Il est important de surveiller le taux de rejets global (10.4%) ainsi que la proportion de pièces non conforme par rapport à la totalité des pièces acceptées (1.9%).

Dans cet exemple, nous avons supposé les surfaces de références parfaites et connues dans le référentiel MMT. Dans l'exemple qui suit, nous montrerons comment traiter le problème de palpage de surfaces de références.

4.3.2 Problématique du palpage de surfaces de références

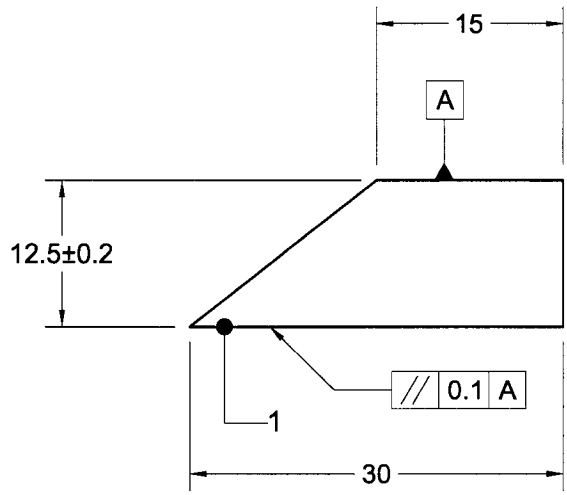


Figure 4-7: Pièce avec deux plans ayant une contrainte de parallélisme

Dans cet exemple, nous mettrons en évidence la façon d'aborder les cas où il est nécessaire de considérer une ou plusieurs surfaces de références (datum). Ces cas sont les plus fréquents. Jusqu'ici, nous n'avons étudié que des cas où les tolérances n'impliquent pas de surfaces de référence (tolérance dimensionnelle d'une circonférence) ou bien nous avons considéré que les paramètres intrinsèques générateurs de ces dernières sont parfaitement connus dans le repère de la MMT.

La pièce représentée à la figure 4-7, est une pièce trapézoïdale qui illustre une tolérance de parallélisme de la surface 1 par rapport à la surface de référence *A*. La pièce est considérée comme une plaque mince, par conséquent, les plans sont traités comme des droites 2D.

Nous nous proposons de déterminer, NPP_A et NPP_1, soient les nombres de points de palpage (*NPP*) uniformément répartis sur la surface de référence *A* et sur la surface 1 respectivement, tel qu'illustré à la figure 4-8.

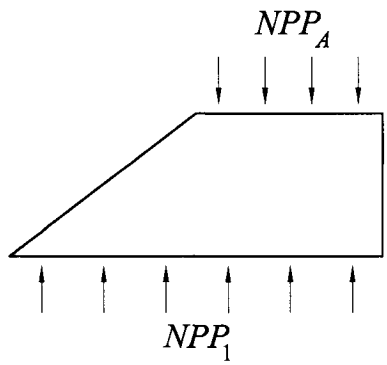


Figure 4-8: Stratégie de palpage des deux plans

Dans la figure qui suit, nous montrons l'évolution du *TBD* pour quelques valeurs de NPP_A et NPP_1, soit $TBD = f(NPP_A, NPP_1)$.

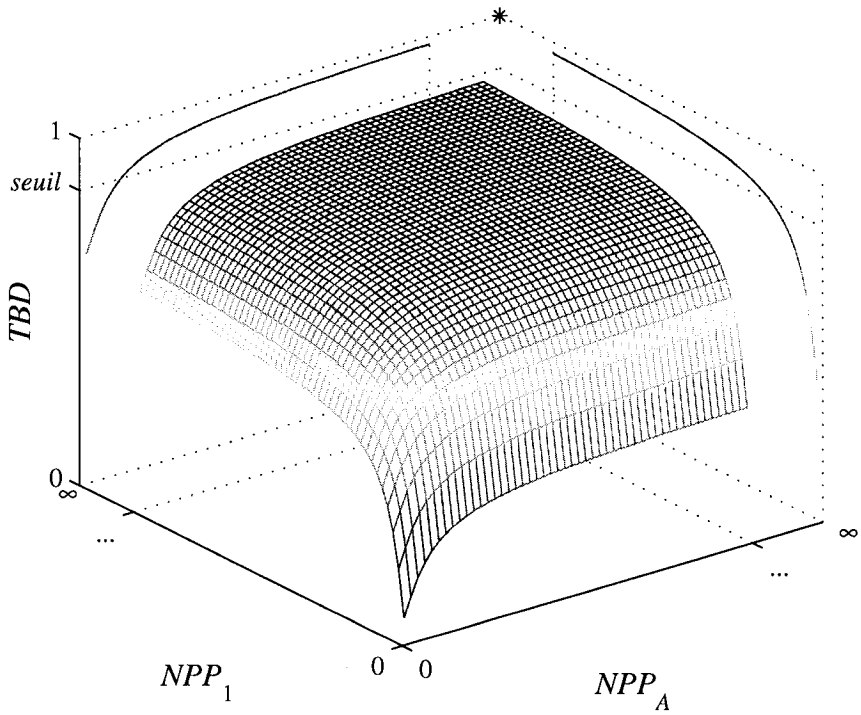


Figure 4-9: Évolution du *TBD* en fonction de NPP_A et NPP_1

L'examen de la figure 4-9, ainsi que l'analyse qualitative de la procédure de calcul des *TBD* en terme de monotonie de croissance, nous permet de constater ces quatre propriétés :

- En augmentant simultanément le NPP_A et le NPP_1, le *TBD* ne peut qu'augmenter ou demeurer constant (il ne peut baisser), d'où l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned} &\text{Si } NPP_{A,f} > NPP_{A,i} \text{ et } NPP_{1,f} > NPP_{1,i} \\ &\text{Alors } TBD(NPP_{A,f}, NPP_{1,f}) \geq TBD(NPP_{A,i}, NPP_{1,i}) \end{aligned} \tag{4-1}$$

- En augmentant le NPP_1 à un NPP_A constant, le *TBD* ne peut qu'augmenter ou demeurer constant (il ne peut baisser), d'où l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned} &\text{Si } NPP_{A,f} = NPP_{A,i} \text{ et } NPP_{1,f} > NPP_{1,i} \\ &\text{Alors } TBD(NPP_{A,f}, NPP_{1,f}) \geq TBD(NPP_{A,i}, NPP_{1,i}) \end{aligned} \tag{4-2}$$

- En augmentant le NPP_A à un NPP_1 constant, le *TBD* ne peut qu'augmenter ou demeurer constant (il ne peut baisser), d'où l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned} &\text{Si } NPP_{A,f} > NPP_{A,i} \text{ et } NPP_{1,f} = NPP_{1,i} \\ &\text{Alors } TBD(NPP_{A,f}, NPP_{1,f}) \geq TBD(NPP_{A,i}, NPP_{1,i}) \end{aligned} \tag{4-3}$$

- En augmentant le NPP_A et en baissant le NPP_1 ou inversement, il n'est pas possible de prédire la variation résultante du *TBD*.

(4-4)

À la lumière de ces constatations, nous élaborons notre stratégie pour déterminer les NPP_A et NPP_1 , en tenant compte de deux critères principaux :

- $TBD(NPP_A , NPP_1) \geq TBD_{seuil}$
- Le *NPP* total est minimal, ce qui équivaut à rechercher la somme minimale de NPP_A et NPP_1, autrement dit :

$$(NPP_A + NPP_1)_{minimale}$$

Outre ces deux critères et vue que la fonction mathématique explicite du *TBD* en fonction du NPP_A et du NPP_1 est inconnue de même que sa jacobienne, nous optons pour une stratégie de recherche de solutions heuristique du type direct qui assure un nombre d'itérations raisonnable dans la majorité des cas.

L'organigramme de la figure 4-10 illustre la stratégie adoptée, suivi de sa description en trois étapes.

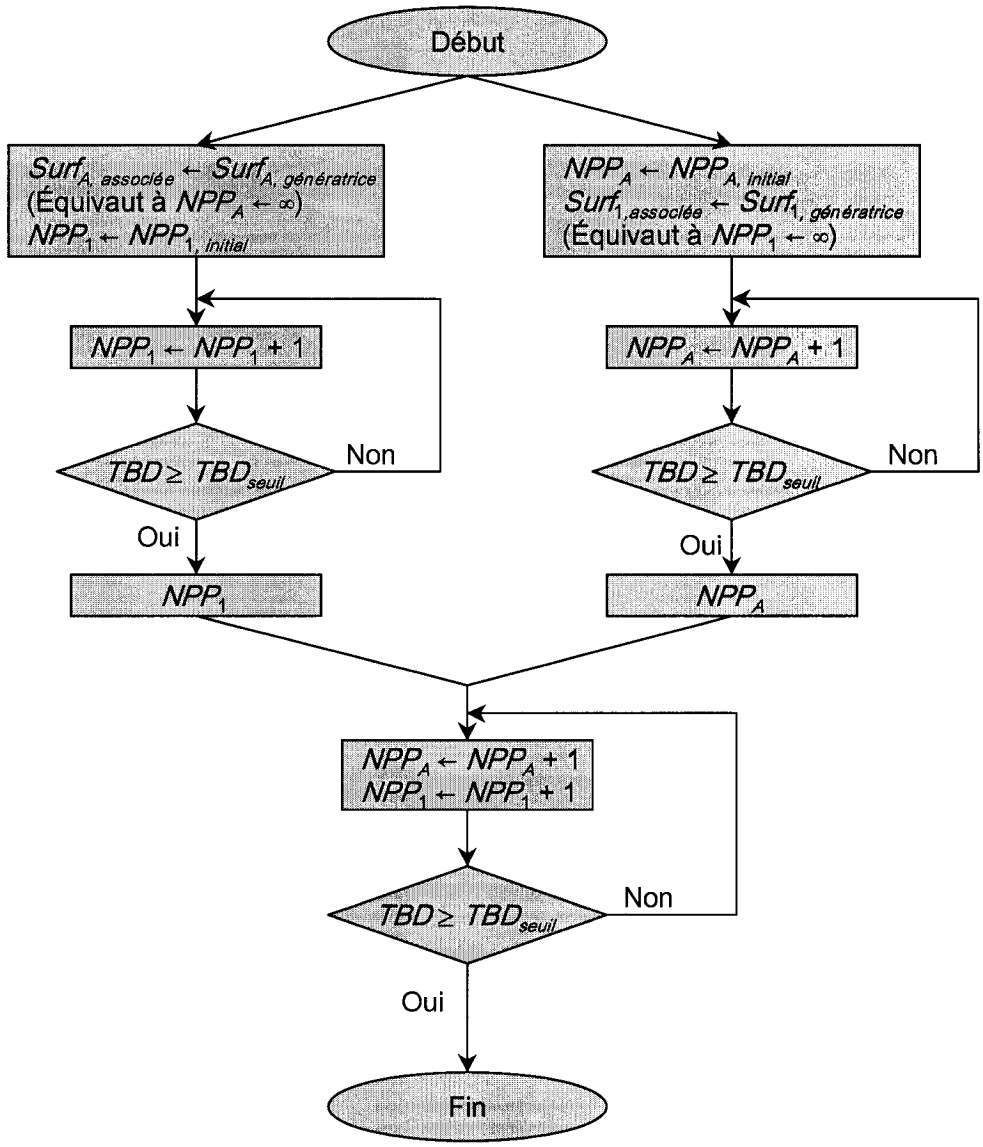


Figure 4-10: Organigramme de la stratégie de prédiction des *NPP*

Étape 1

Nous commençons, par substituer la surface *A* associée ($Surf_{A,\ associée}$) par la surface *A* génératrice ($Surf_{A,génératrice}$) lors du diagnostic, ce qui équivaut à un palpage de cette surface sur une infinité de points ($NPP_A = \infty$), et augmenter le NPP_1 progressivement. Selon l'inéquation 4-2, le *TBD* augmentera jusqu'à atteindre le TBD_{seuil}, nous obtenons ainsi un $NPP_{1,initial}$. L'avantage de procéder ainsi, c'est qu'en substituant ($Surf_{A,\ associée}$) par ($Surf_{A,génératrice}$) dans la procédure de diagnostic, nous éliminons la procédure de génération de points ainsi que l'association de surface pour *A* et par conséquent, nous allégeons les calculs ce qui nous permet d'atteindre plus rapidement le $NPP_{1,\ initial}$ désiré (figure 4-11).

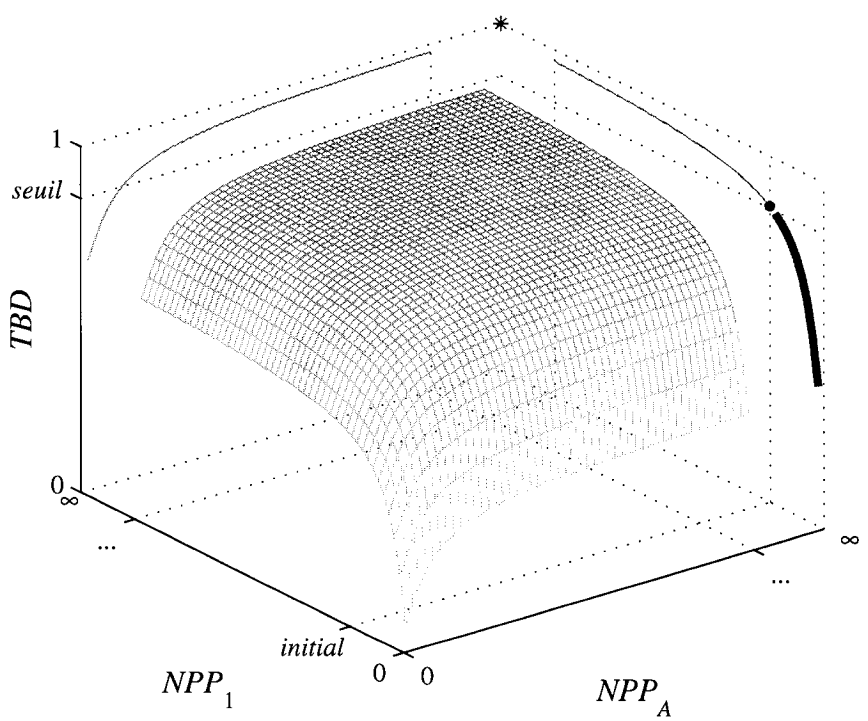


Figure 4-11: Étape 1 de la stratégie de prédiction des *NPP*

De plus, selon l'inéquation 4-3, nous pouvons déduire que pour un NPP_A quelconque et pour tout $NPP_1 < NPP_{1,\ initial}$, le *TBD* correspondant sera en-deça de du TBD_{seuil}.

Étape 2

De façon similaire à celle de l'étape précédente, nous substituons la surface 1 associée ($Surf_{1,associée}$) par la surface 1 génératrice ($Surf_{1,génératrice}$) lors du diagnostic, ce qui équivaut à un palpage de cette surface sur une infinité de points ($NPP_1 = \infty$), et augmenter le NPP_A progressivement. Selon l'inéquation 4-3, le *TBD* augmentera jusqu'à atteindre le TBD_{seuil}, nous obtenons ainsi un $NPP_{A,initial}$. Comme pour l'étape précédente, l'avantage de procéder ainsi, c'est qu'en substituant ($Surf_{1,associée}$) par ($Surf_{1,génératrice}$) dans la procédure de diagnostic, nous éliminons la procédure de génération de points ainsi que l'association de surface pour la surface 1 et par conséquent, nous allégeons les calculs ce qui nous permet d'atteindre plus rapidement le $NPP_{A,\ initial}$ désiré.

De plus, selon l'inéquation 4-2, nous pouvons déduire que pour un NPP_1 quelconque et pour tout $NPP_A < NPP_{A,\ initial}$, le *TBD* correspondant sera en-deça du TBD_{seuil}.

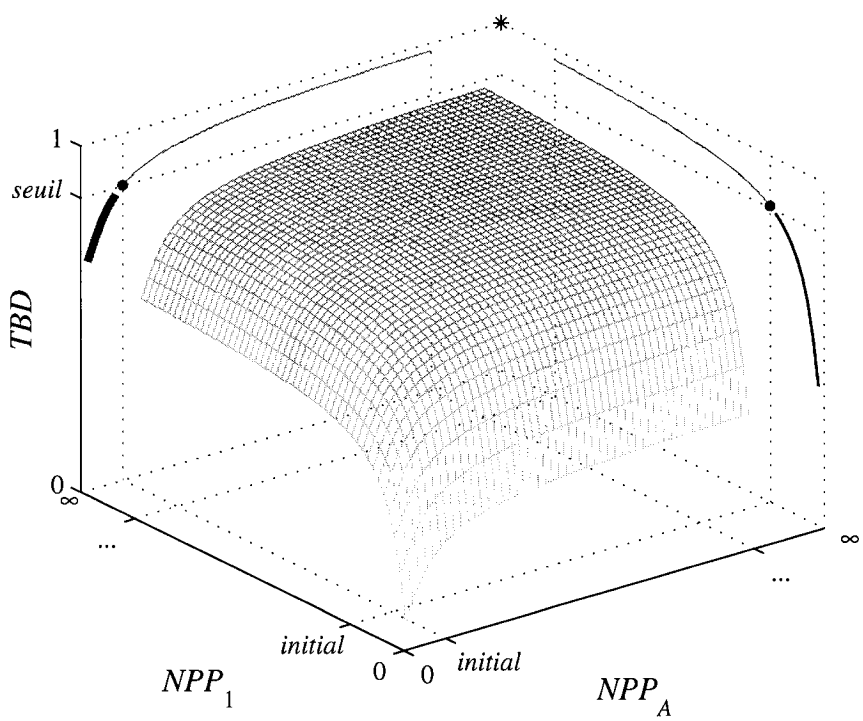


Figure 4-12: Étape 2 de la stratégie de prédiction des *NPP*

N.B : les étapes 1 et 2 sont indépendantes, elles peuvent être réalisées dans l'ordre inverse.

Étape 3

D'après les inéquations 4-2 et 4-3, le *TBD* correspondant à $NPP_{A,\ initial}$ et $NPP_{1,\ initial}$ est inférieur au TBD_{seuil} , mais il devrait en être proche. Nous augmentons donc le NPP_A et le NPP_1 simultanément jusqu'à ce que le *TBD* atteigne le TBD_{seuil}. Et nous obtenons ainsi une solution $NPP_{A,f}$ et $NPP_{1,f}$.

De plus, selon l'inéquation 4-3, nous pouvons déduire que le *TBD* correspondant à tout $NPP_A < NPP_{A,f}$ et tout $NPP_1 < NPP_{1,f}$ est inférieur au TBD_{seuil} (figure 4-13).

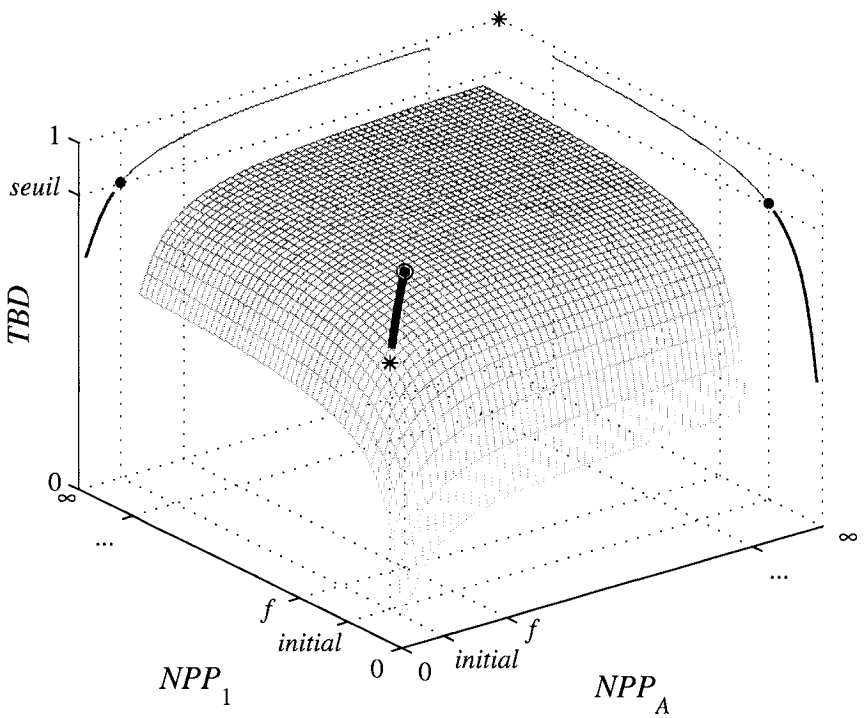


Figure 4-13:Étape 3 de la stratégie de prédiction des *NPP*

Par ailleurs, tel qu'annoncé précédemment, nous cherchons à minimiser la somme NPP_A et NPP_1, ce qui implique que tout NPP_A et NPP_1 tels que $NPP_A + NPP_1 \geq NPP_{A,f} + NPP_{1,f}$ ne constituent pas des solutions à retenir peu importe leurs *TBD*.

Selon la propriété 4-4, il reste quelques aires où il existerait des solutions potentielles et où, il n'est pas possible de prédire le *TBD*. Il est possible de les explorer pour un raffinement de la solution. Cependant, selon la courbe 'iso-*TBD*' correspondant à $NPP_{A,f}$ et $NPP_{1,f}$, il serait très peu probable d'y trouver d'autres solutions valides (c'est-à-dire dont la somme est inférieure à celle de $NPP_{A,f}$ et $NPP_{1,f}$). De plus, il est nécessaire dans ce cas d'avoir un échantillon de très grande taille afin de minimiser les variations dues aux effets statistiques. Nous gardons donc $NPP_{A,f}$ et $NPP_{1,f}$ comme solution finale (figure 4-14).

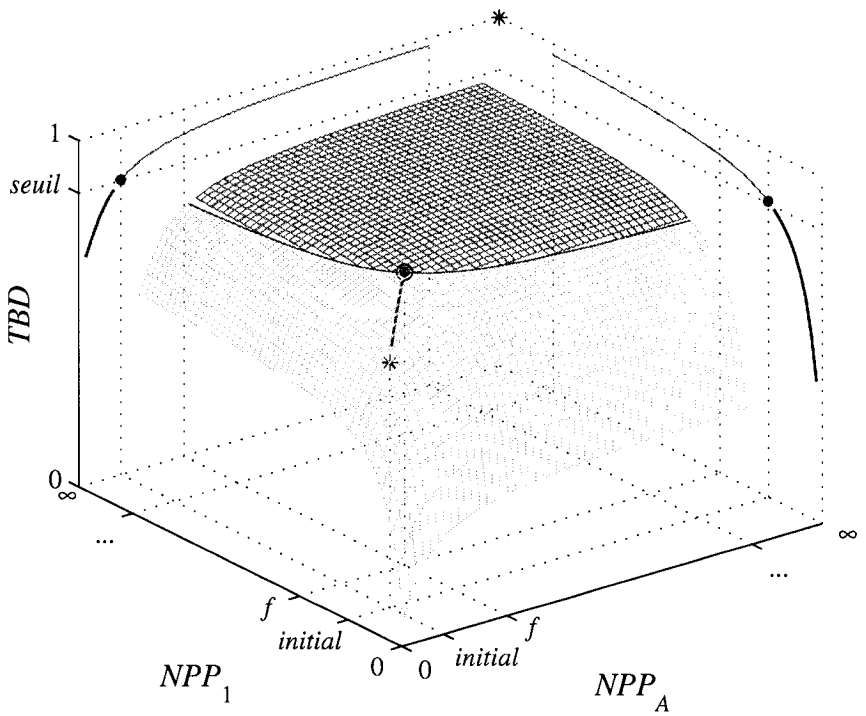


Figure 4-14: Illustration de la courbe 'iso-*TBD*'

Dans cet exemple, ainsi que dans l'exemple qui le précède, nous n'avons traité que des géométries linéiques (cercle 2D, droite) ce qui nous permet de définir une densité de points de palpage uniformément répartis par un seul paramètre (*NPP*). Dans l'exemple qui suit, nous montrerons comment traiter le problème des densités de points de palpage des éléments surfaciques.

4.3.3 Problématique des densités de surfaces

Contrairement aux géométries linéiques (cercle, droite...), la densité de points uniformément répartis ne peut être définie par un seul paramètre. Nous considérerons dans cet exemple un cylindre ayant une simple tolérance dimensionnelle sur son diamètre. Dans ce cas, il est possible de définir la densité des points de palpage en découpant la surface du cylindre en m cercles équidistants et en palpant chacun de ces cercles en n points uniformément répartis sur sa circonférence, tel qu'illustré dans la figure 4-15. Les points de palpage ainsi obtenu sont uniformément répartis sur la surface du cylindre, leur nombre total est $NPP_{total} = m \times n$.

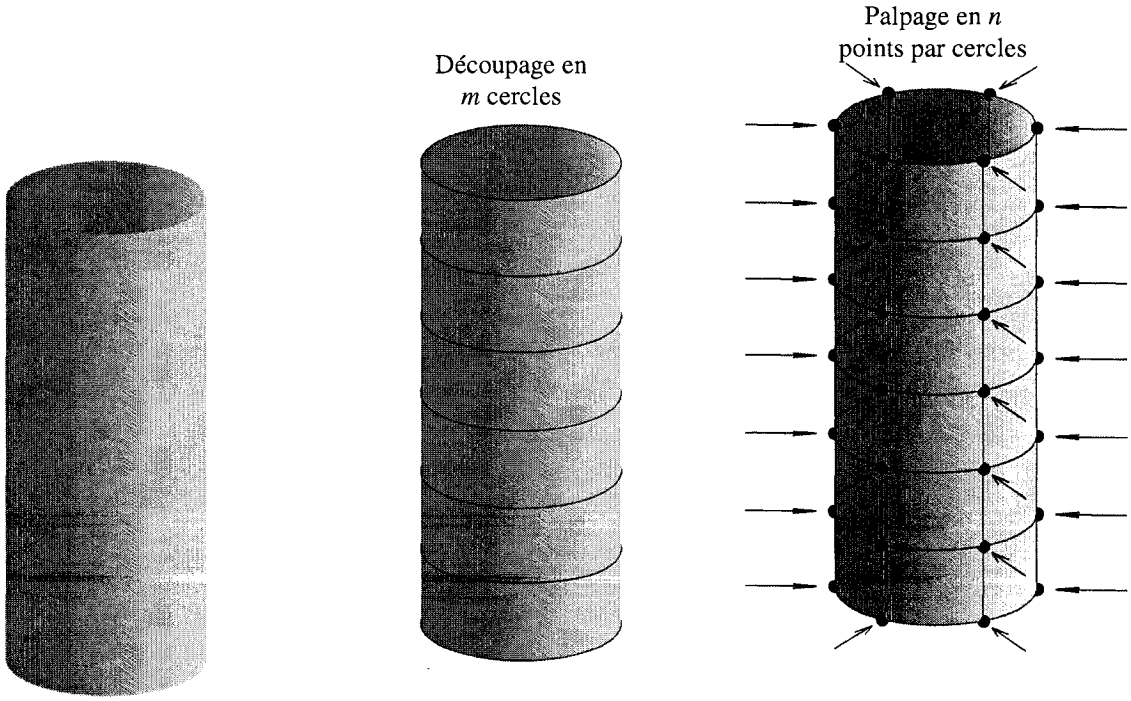


Figure 4-15: Stratégie de palpage d'une surface cylindrique

Dans la figure qui suit, nous montrons l'évolution du *TBD* pour quelques valeurs de *m* et *n*, soit $TBD = f(m, n)$ (figure 4-16).

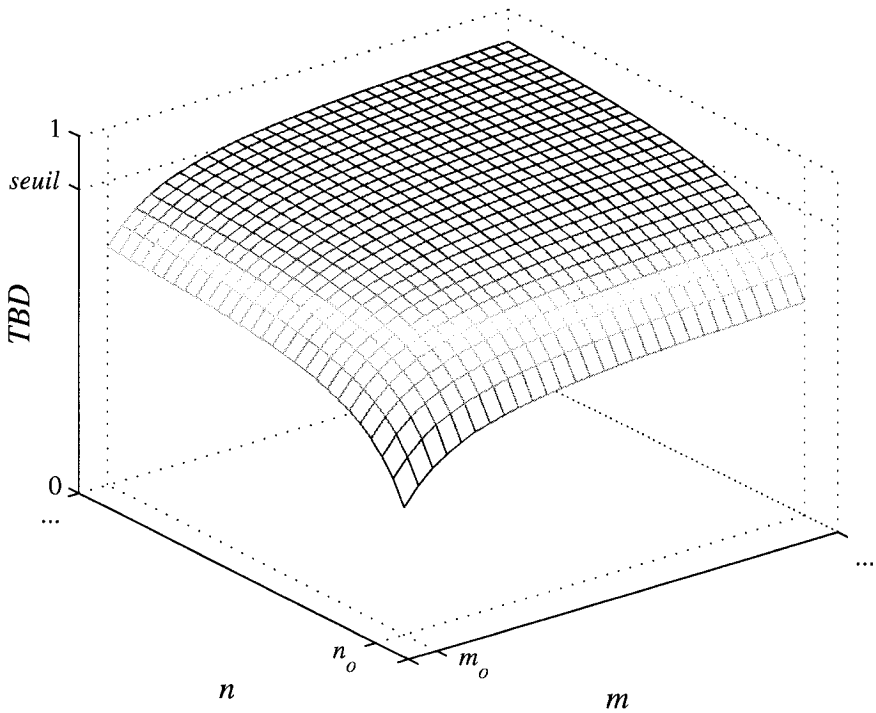


Figure 4-16: Évolution du *TBD* en fonction de *m* et *n*

L'examen de la figure 4-16, ainsi que l'analyse qualitative de la procédure de calcul des *TBD* en terme de monotonie de croissance, nous permet de constater ces quatre propriétés :

- En augmentant simultanément *m* et *n*, le *TBD* ne peut qu'augmenter ou demeurer constant (il ne peut baisser), d'où l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned} &\text{Si } m_f > m_i \text{ et } n_f > n_i \\ &\text{Alors } \; TBD(m_f, n_f) \geq TBD(m_i, n_i) \end{aligned} \tag{4-5}$$

- En augmentant n à m constant, le *TBD* ne peut qu'augmenter ou demeurer constant (il ne peut baisser), d'où l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned} &\text{Si } m_f = m_i \text{ et } n_f > n_i \\ &\text{Alors } \ TBD(m_f, n_f) \geq TBD(m_i, n_i) \end{aligned} \tag{4-6}$$

- En augmentant n à m constant, le *TBD* ne peut qu'augmenter ou demeurer constant (il ne peut baisser), d'où l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned} &\text{Si } m_f > m_i \text{ et } n_f = n_i \\ &\text{Alors } \ TBD(m_f, n_f) \geq TBD(m_i, n_i) \end{aligned} \tag{4-7}$$

- En augmentant n et en baissant m ou inversement, il n'est pas possible de prédire la variation résultante du *TBD*.

(4-8)

À la lumière de ces constatations, nous élaborons notre stratégie pour déterminer m et n, en tenant compte de deux critères principaux :

- $TBD(m\ ,\ n) \geq TBD_{seuil}$
- Le *NPP* total est minimal, ce qui équivaut à rechercher le produit minimal de m et n, autrement dit :

$$(m \times n)_{minimal}$$

Outre ces deux critères et vue que la fonction mathématique explicite du *TBD* en fonction de m et de n est inconnue de même que sa jacobienne, nous optons pour une stratégie de recherche de solutions heuristique du type direct similaire à celle utilisée dans l'exemple précédent et qui assure un nombre d'itérations raisonnable dans la majorité des cas.

L'organigramme de la figure 4-17 illustre la stratégie adoptée, suivi de sa description en trois étapes.

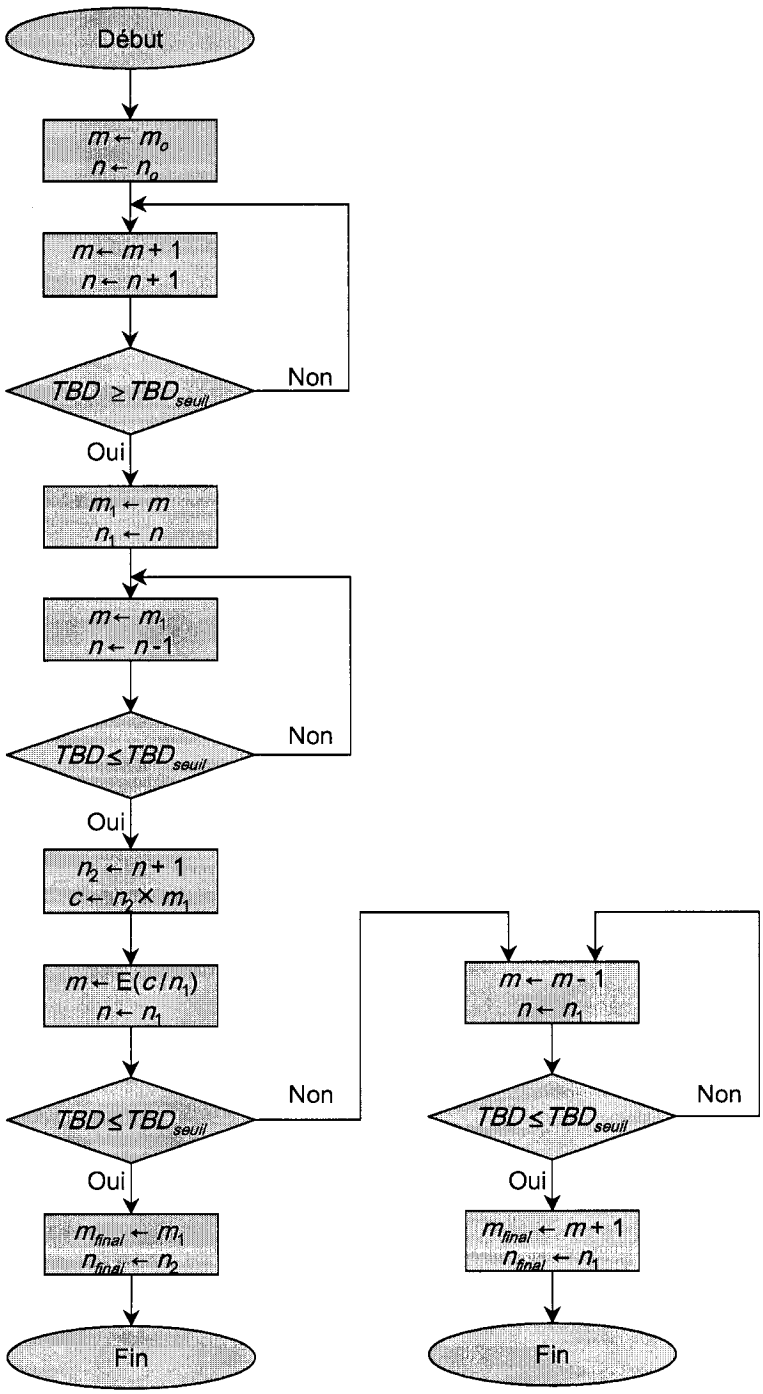


Figure 4-17: Organigramme de la stratégie de prédiction des densités de palpage

Étape 1

Nous commençons par déterminer un point de départ pour notre démarche, pour un cylindre, nous pouvons fixer $m_o = 2$ et $n_o = 3$.

Il est difficile de prédire dans quelle direction se trouve la solution, pour cela, nous augmentons simultanément m et n jusqu'à l'atteinte du TBD_{seuil} et nous obtenons m_1 et n_1 comme première solution. Selon l'inéquation 4-5, pour tout $m < m_1$ et $n < n_1$, le TBD est inférieur au TBD_{seuil} (Figure 4-18).

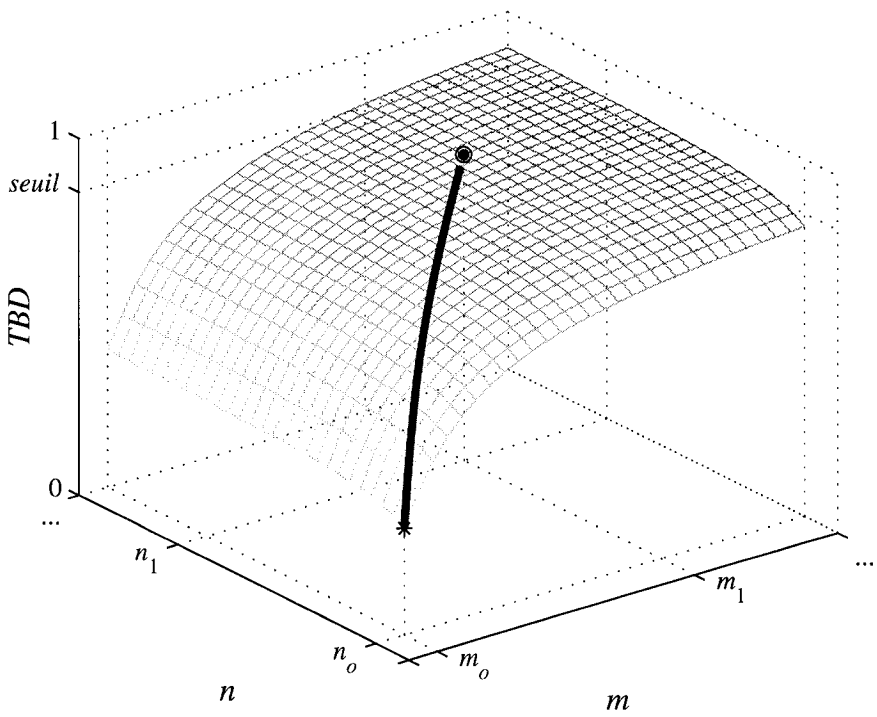


Figure 4-18: Étape 1 de la stratégie de prédiction des densités de palpage

Dans les étapes qui viennent, nous rechercherons d'autres solutions afin de rectifier le fait que la solution (m_1 , n_1) a été obtenue en faisant le choix arbitraire d'augmenter m et n simultanément.

Étape 2

À partir de (m_1 , n_1), nous baissons n à m constant (ou le contraire), selon l'inéquation 4-6 le *TBD* baissera, mais il est possible qu'il ne passe en-deça du TBD_{seuil} qu'après quelques cycles, nous obtenons alors la solution (m_1 , n_2). De plus, toujours selon l'inéquation 4-6, pour $m = m_1$ et pour tout $n < n_2$ le *TBD* est inférieur au TBD_{seuil}.

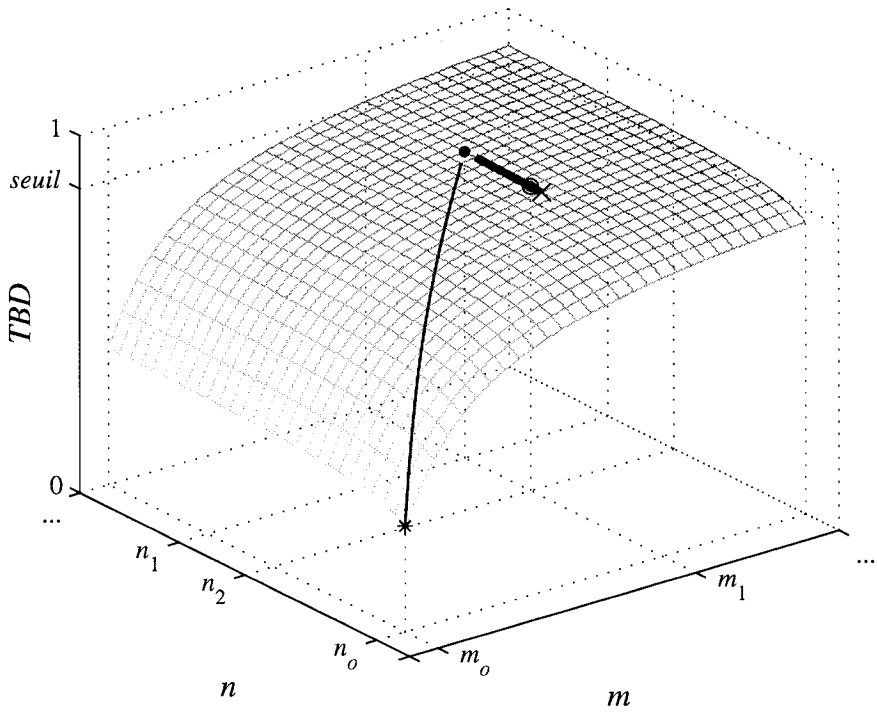


Figure 4-19: Étape 2 de la stratégie de prédiction des densités de palpage

Par ailleurs, tel qu'annoncé précédemment, nous cherchons à minimiser le produit de m et n, ce qui implique que toute solution (m , n) telle que ($m \times n$) $\geq$ ($m_1 \times n_2$) ne constitue pas de solution à retenir peu importe son *TBD*.

Étape 3

Dans cette étape, nous appliquons le même principe que dans l'étape 2 en inversant m et n, c'est-à-dire, en baissant m à n constant. Le point de départ pour cette étape est $n = n_1$. Pour m, puisque seules les solutions telles que $(m \times n) \leq (m_1 \times n_2)$ sont à retenir, le point de départ est $m_2 = \mathrm{E}\,(m_1 \times n_2 / n_1)$.

Si le $TBD(m_2 , n_1) \leq TBD_{seuil}$, nous gardons (m_1 , n_2) comme solution (cas de la figure 4-20).

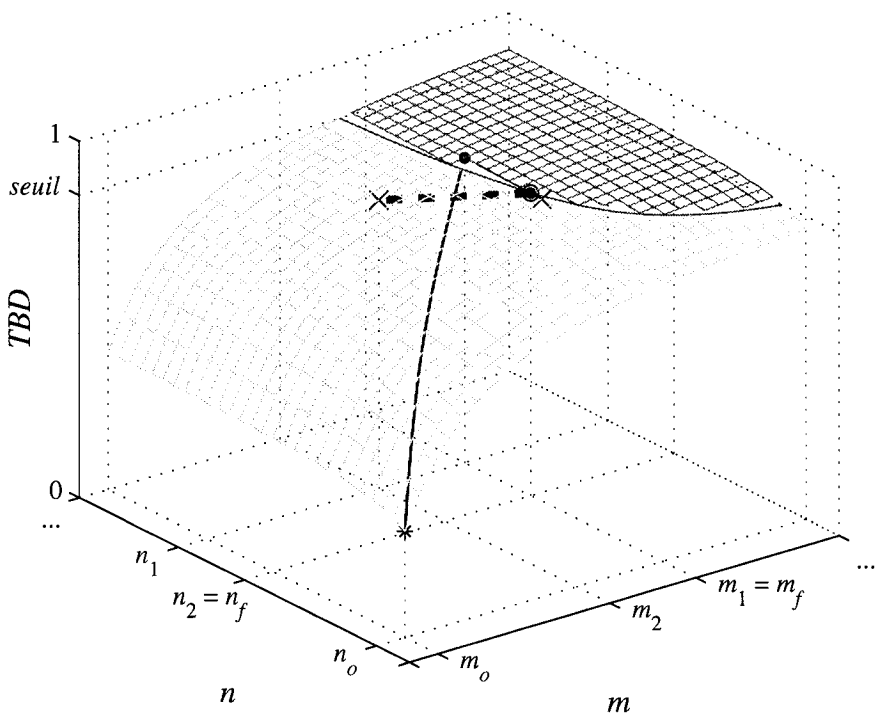


Figure 4-20: Étape 3 de la stratégie de prédiction des densités de palpage (cas 1)

Sinon, à partir de (m_2 , n_1), nous baissons m à n constant, selon l'inéquation 4-7 le *TBD* baissera, mais il est possible qu'il ne passe en-deça du TBD_{seuil} qu'après quelques cycles, nous obtenons alors la solution (m_3 , n_1). De plus, toujours selon l'inéquation 4-7, pour $n = n_1$ et pour tout $m < m_3$ le *TBD* est inférieur au TBD_{seuil} (figure 4-21).

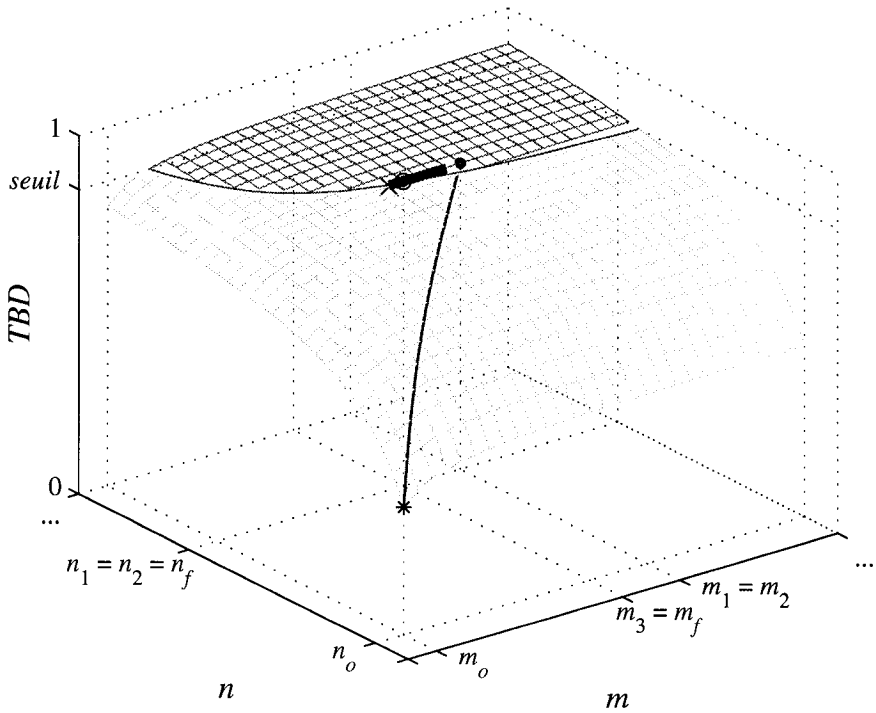


Figure 4-21: Étape 3 de la stratégie de prédiction des densités de palpage (cas 2)

Selon la propriété 4-8, il reste quelques aires où il existerait des solutions potentielles et où, il n'est pas possible de prédire le *TBD*. Il est possible de les explorer pour un raffinement de la solution. Cependant, selon la courbe 'iso-*TBD*' correspondant à m_f et n_f, il serait très peu probable d'y trouver d'autres solutions valides (c'est-à-dire dont le produit est inférieur à celui de m_f et n_f). De plus, il est nécessaire dans ce cas d'avoir un échantillon de très grande taille afin de minimiser les variations dues aux effets statistiques. Nous gardons donc m_f et n_f comme solutions finales.

4.3.4 Cas de tolérance de positionnement de deux cylindres coaxiaux

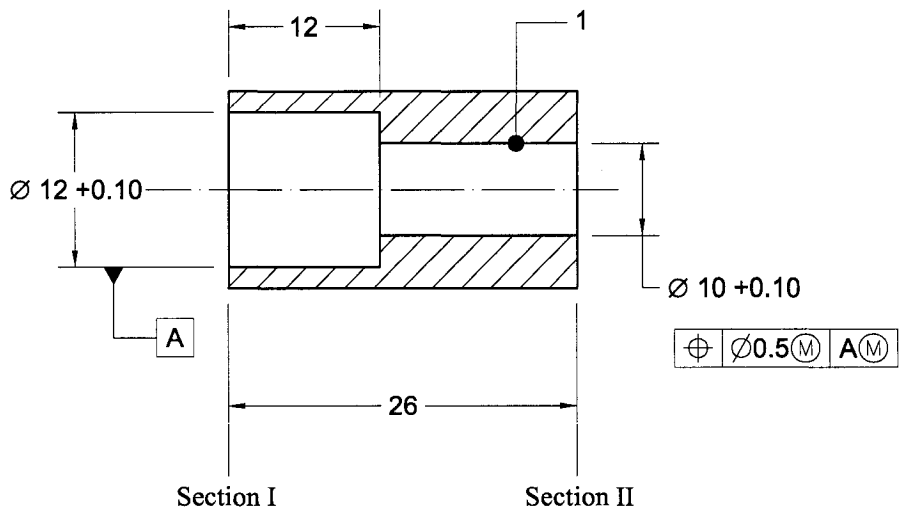


Figure 4-22: Pièce de deux cylindres coaxiaux

Nous nous proposons dans ce qui suit de déterminer la meilleure configuration de palpage qui permette de juger de la conformité de la pièce illustrée à la figure 4-22 [6] par rapport aux tolérances spécifiées avec un taux de succès du diagnostic (*TBD*) à 95% par exemple.

1. Conditions de fabrication :

a) Gamme d'usinage[3] :

Nous supposons que la pièce considérée est fabriquée sur une perceuse à partir d'un brut constitué de l'enveloppe cylindrique extérieure.

Phase 10 :

Appui sur la surface extérieure et perçage/alésage du cylindre *A*.

Phase 20 :

Appui sur *A* et perçage/alésage du cylindre 1.

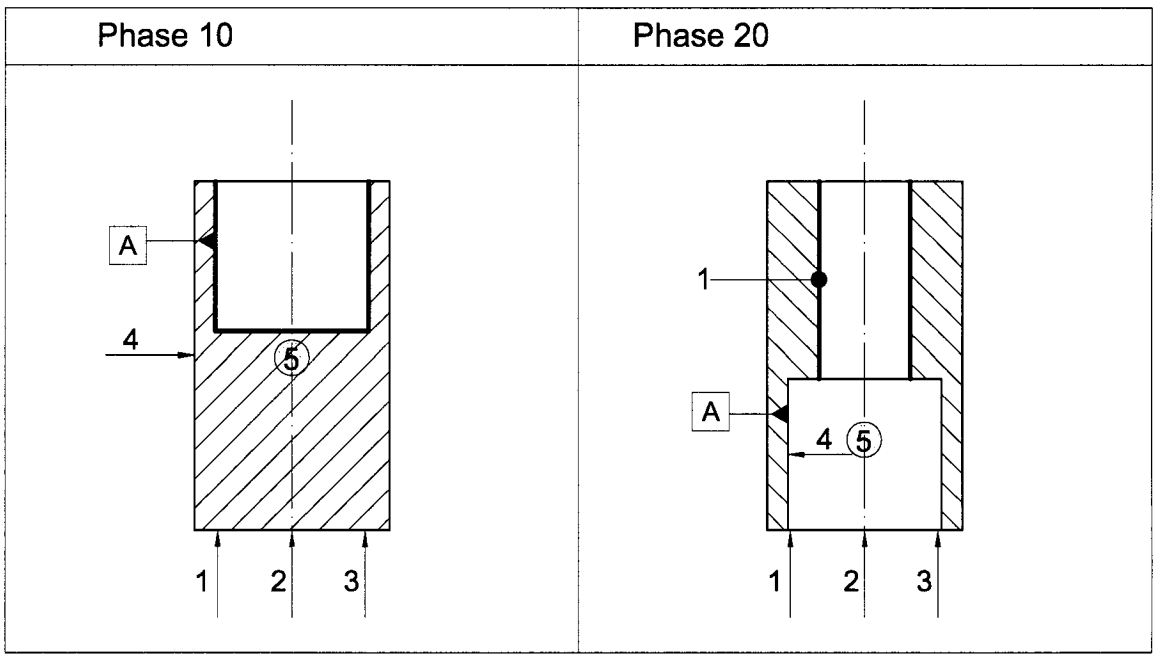


Figure 4-23: Croquis de la gamme d'usinage des deux cylindres

[3] La gamme proposée n'est pas la meilleure gamme possible, elle a été choisie dans le but de montrer l'application de la méthode prédictive des densités de palpge.

b) Machine/fixture/outil [4]:

L'ensemble machine/fixture/outil est en conditions normales, il engendre :

- une variation aléatoire par rapport aux diamètres médians de distribution uniforme d'une amplitude de 0.05 mm;
- un décalage radial aléatoire de distribution uniforme de positionnement des axes des deux cylindres d'une amplitude de 0.2 mm. Ce décalage est mesuré au niveau des sections I et II (Figure 4-22);
- un décalage angulaire aléatoire de distribution uniforme par rapport aux axes nominaux des deux cylindres d'une amplitude de 0.2°, et,
- Une déviation aléatoire de distribution uniforme des points de la surface extraite simulée par rapport à la surface génératrice d'une amplitude de 0.1 mm.

Nous supposons que ces variables aléatoires sont indépendantes.

2. Conditions de palpage :

Nous supposons que le palpage est effectué sur une MMT où les erreurs de mesures sont négligeables par rapports aux défauts de la pièce ainsi que par rapport aux tolérances exigées.

De plus, le palpage s'effectue sur des points uniformément répartis sur les surfaces de chacun des deux cylindres tels que dans l'exemple 4.3.3 afin d'éviter les problèmes suscités par les défauts locaux.

[4] Les dispersions d'usinage ont été choisies afin d'obtenir des résultats qui mettent en évidence l'évolution du *TBD* tout en ayant un ordre de grandeur réaliste.

Nous désignons par m_A le nombre de cercles équidistants selon lequel la surface A a été découpée et par n_A le nombre de points de palpage uniformément répartis sur chacun de ces cercles (figure 4-15). De la même façon, nous désignons par m_{S1} le nombre de cercles équidistants selon lequel la surface 1 a été découpée et par n_{S1} le nombre de points de palpage uniformément répartis sur chacun de ces cercles.

3. Interprétation des tolérances :

a) Tolérances dimensionnelles :

Les plus simples à analyser : si et seulement si le diamètre de la surface A est compris entre 12.0 et 12.1, A est conforme aux exigences dimensionnelles. Il en est de même pour la surface 1, les limites diamétrales sont 10.0 et 10.1.

b) Tolérances de positionnement :

Les tolérances de positionnement sont plus complexes à interpréter que les tolérances dimensionnelles. Dans cet exemple, il s'agit de contrôler le positionnement de la surface 1 par rapport à la surface de référence A. Ce type de tolérancement indique que le segment de l'axe de la surface 1 (donc ses deux extrémités [3, 5]) doit se situer à l'intérieur d'un cylindre virtuel coaxial avec A et appelé zone de tolérance (ZT). Le diamètre minimal de la ZT est de 0.5. Le premier modificateur **M** indique qu'une bonification $B1$ du diamètre de la ZT est accordée lorsque la surface 1 n'est pas au maximum de matière (MMC) qui correspond au diamètre minimum toléré dans le cas d'un trou d'où :

$$B1 = \text{Ø}1_{\text{réel}} - \text{Ø}1_{\text{mmc}} = \text{Ø}1_{\text{réel}} - \text{Ø}1_{\text{min}}.$$

Le deuxième modificateur **M** indique qu'une zone de mobilité (ZM), cylindrique et de diamètre *B2*, de la ZT est accordée lorsque la surface *A* n'est pas au MMC où :

$$B2 = \text{Ø}A_{\text{réel}} - \text{Ø}A_{\text{mmc}} = \text{Ø}A_{\text{réel}} - \text{Ø}A_{\text{min}}.$$

Signalons que pour une pièce conforme du point de vue dimensionnel que :

$$\text{Ø}ZT_{\text{min}} = 0.5 + (\text{Ø}1_{\text{min}} - \text{Ø}1_{\text{min}})$$
$$= 0.5$$
$$\text{Ø}ZT_{\text{max}} = 0.5 + (\text{Ø}1_{\text{max}} - \text{Ø}1_{\text{min}})$$
$$= 0.5 + (10.1 - 10.0) = 0.5 + 0.1$$
$$= 0.6$$

et que

$$\text{Ø}ZM_{\text{min}} = \text{Ø}A_{\text{min}} - \text{Ø}A_{\text{min}}$$
$$= 0$$
$$\text{Ø}ZM_{\text{max}} = \text{Ø}A_{\text{max}} - \text{Ø}A_{\text{min}} =$$
$$= 12.1 - 12.0$$
$$= 0.1$$

4. Traitement :

   Dans cette section, nous simulerons numériquement la fabrication d'un grand nombre *N* (= 100,000) de pièces selon les conditions de fabrication décrites dans la section 1 et nous stockerons tous les paramètres intrinsèques générateurs des deux surfaces *A* et 1.

   En procédant tel que décrit dans les deux exemples précédents (problème de densités de surfaces, palpage de surfaces de référence), nous obtenons une configuration de palpage globale, avec deux densités de palpage sur les surfaces *A* et 1 qui engendre un *TBD* global égal au TBD_{seuil} souhaité.

5. Résultats :

   La première simulation consiste donc à utiliser les surfaces génératrices pour la référence *A* et d'évaluer les *TBD* en augmentant la densité de palpage de la surface 1 progressivement, (en augmentant m_{S1} et n_{S1} simultanément à chaque itération commençant par $m_{S1,o} = n_{S1,o} = 5$).

   Voilà les résultats obtenus :

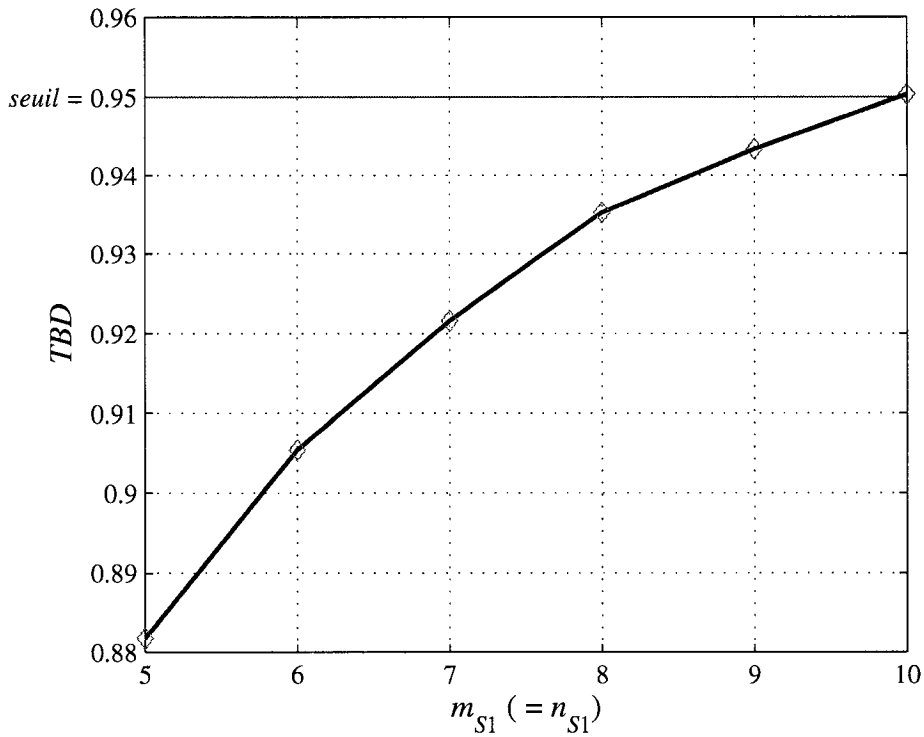


Figure 4-24: Augmentation simultanée des deux paramètres de densité de palpage de la surface 1

Cette figure montre que le *TBD* souhaité est atteint si la surface 1 est palpée sur 100 points uniformément répartis (10 cercles équidistants et 10 points uniformément répartis sur chacun de ces cercles).

Les étapes suivantes consistent à baisser m_{S1} tout en gardant n_{S1} et vice versa comme décrit dans l'exemple 4-3.3. Cependant, aucune autre meilleure solution n'a été trouvée.

Ensuite, nous utiliserons les surfaces génératrices pour la surface 1 et nous évaluerons les *TBD* en augmentant la densité de palpage de la surface *A* progressivement, (en augmentant m_A et n_A simultanément à chaque itération commençant par $m_{A,o} = n_{A,o} = 5$).

Voilà les résultats obtenus :

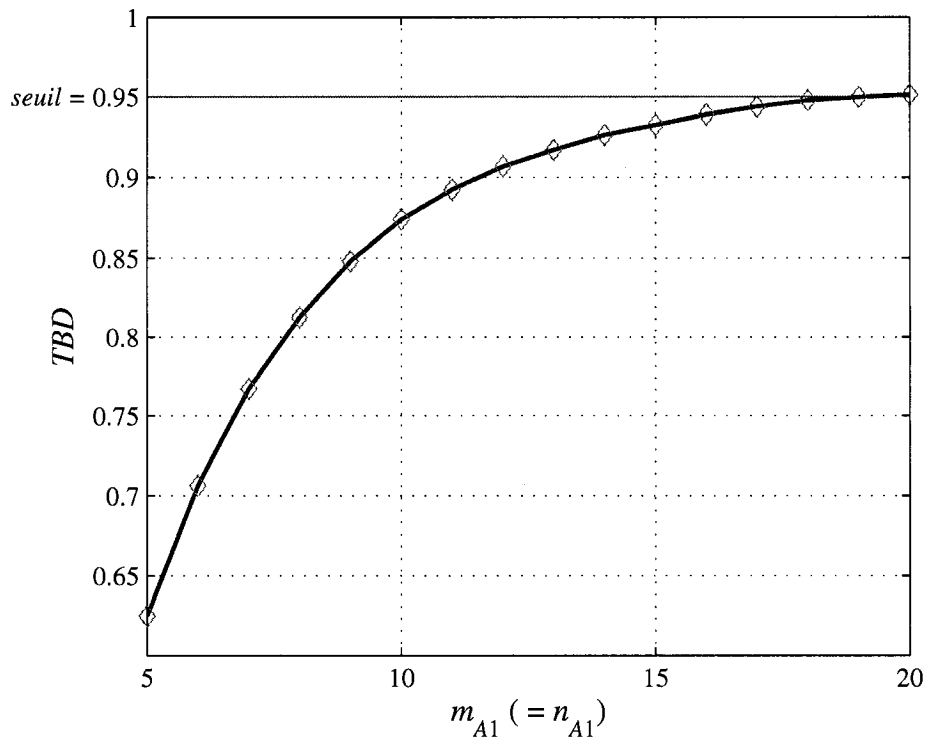


Figure 4-25: Augmentation simultanée des deux paramètres de densité de palpage de la surface *A*

Nous avons appliqué la méthode décrite dans l'exemple 4.3.3 pour chercher une meilleure solution. En baissant m_A, tout en gardant n_A constant (= 20), le *TBD* était encore supérieur au seuil jusqu'à m_A = 18 (figure 4-26).

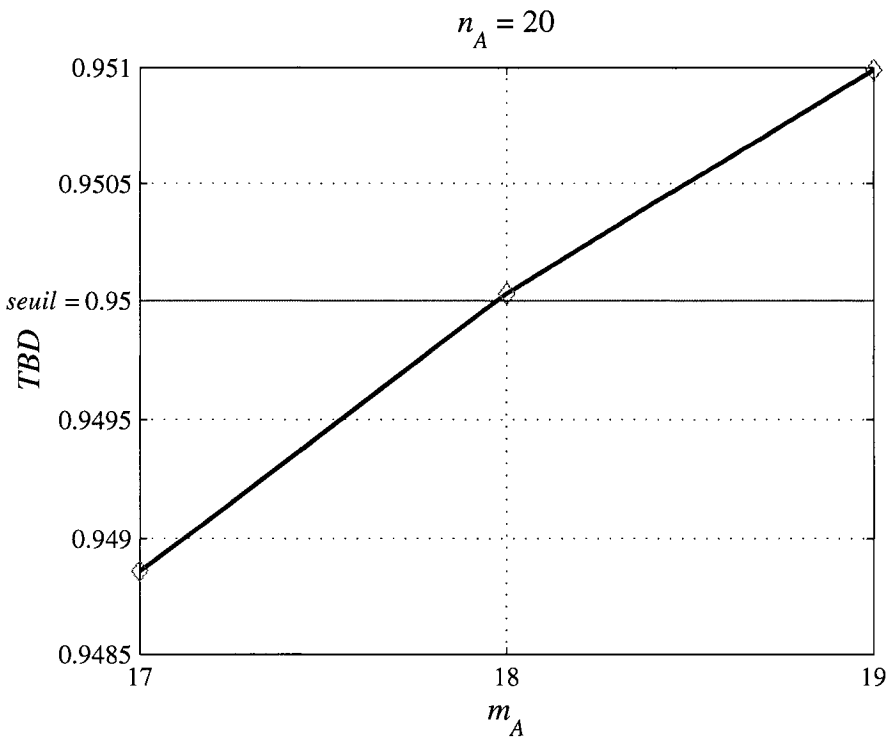


Figure 4-26: Réduction du nombre de cercles équidistants de palpage de la surface *A*

En récapitulant, à ce stade, nous estimons qu'en palpant :

- La surface 1 en 10 cercles équidistants et 10 points par cercle,
- la surface de référence A en 18 cercles équidistants et 20 points par cercle,

le *TBD* est supérieur au seuil si on ne considère pas le palpage simultané des deux surfaces. Pour cela, nous utiliserons ces valeurs comme points de départ afin de réaliser une simulation globale qui tienne compte du palpage simultané des deux surfaces comme indiqué dans l'exemple 4.3.2. Le *TBD* sera alors légèrement inférieur au seuil. En augmentant les 4 variables de palpage (m_{S1}, n_{S1}, m_A et n_A) simultanément à chaque itération, le *TBD* atteindra le seuil souhaité.

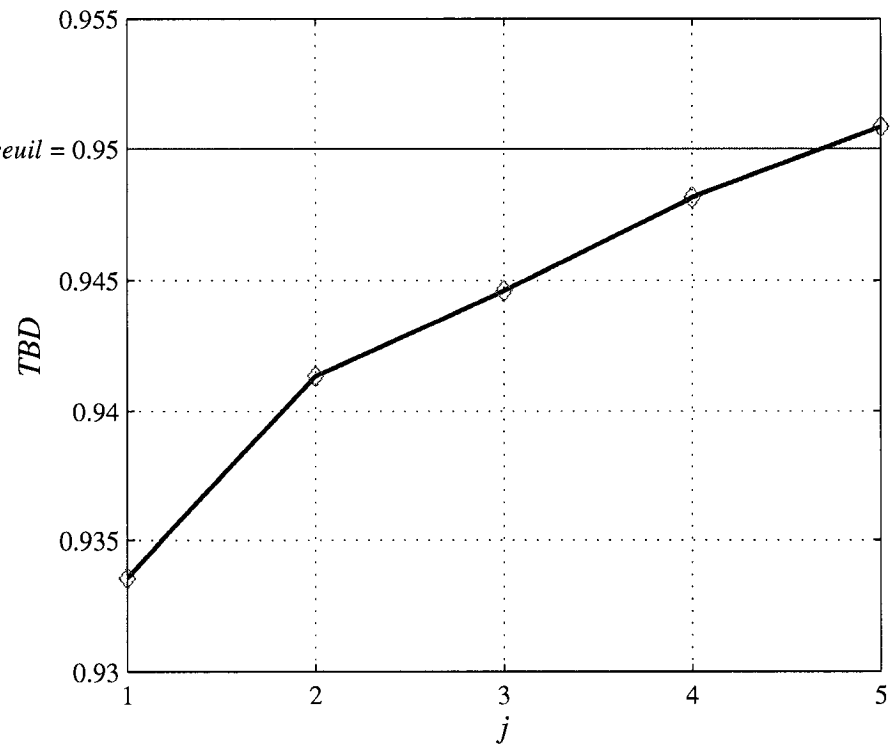


Figure 4-27: Augmentation simultanée des quatre paramètres de densité de palpage des deux surfaces A et 1

à $j = 1$: $n_{S1} = 10$, $m_{S1} = 10$, $n_A = 20$, $m_A = 18$ et,

à $j = 5$: $n_{S1,fin} = 14$, $m_{S1,fin} = 14$, $n_{A,fin} = 24$, $m_{A,fin} = 12$.

Dans ce qui suit les résultats finaux tels que retournés par Matlab :

```
Rayon Nominal                                                    5.025
h1                                                                 -14
h2                                                                   0

Rayon Nominal Cyl Reference                                      6.025
h1_ref                                                             -26
h2_ref                                                             -14

Tolerance de positionnement Diametrale(RFS)                        0.5
Tolerance angulaire                                                Inf

Ordre de grandeur du decalage radial au centre de la machine       0.2
Ordre de grandeur du decalage angulaire          0.002617993877991494
Ordre de grandeur du bruit radial de la machine                    0.1

Taux de reussite souhaite                                         0.95
Nombre de cas simules                                           100000

initial circonferenciel S1                                         10
initial longitudinal S1                                            10
initial circonferenciel A                                          20
initial longitudinal A                                             18

recommande circonferenciel S1                                      14
recommande longitudinal  S1                                        14
recommande circonferenciel A                                      24
recommande longitudinal A                                          22

Nombre de pieces non-conforme acceptees                          3130
Nombre de pieces conformes rejetees                              1786
Nombre de pieces conformes acceptees                            94622
Nombre de pieces non-conformes rejetees                           462
```

Notons que le taux de rejet global est de 1.9% et que la proportion de pièces non conformes acceptées par rapport à la totalité des pièces acceptées est de 3.0%

4.3.5 Cas de tolérance d'orientation de plans

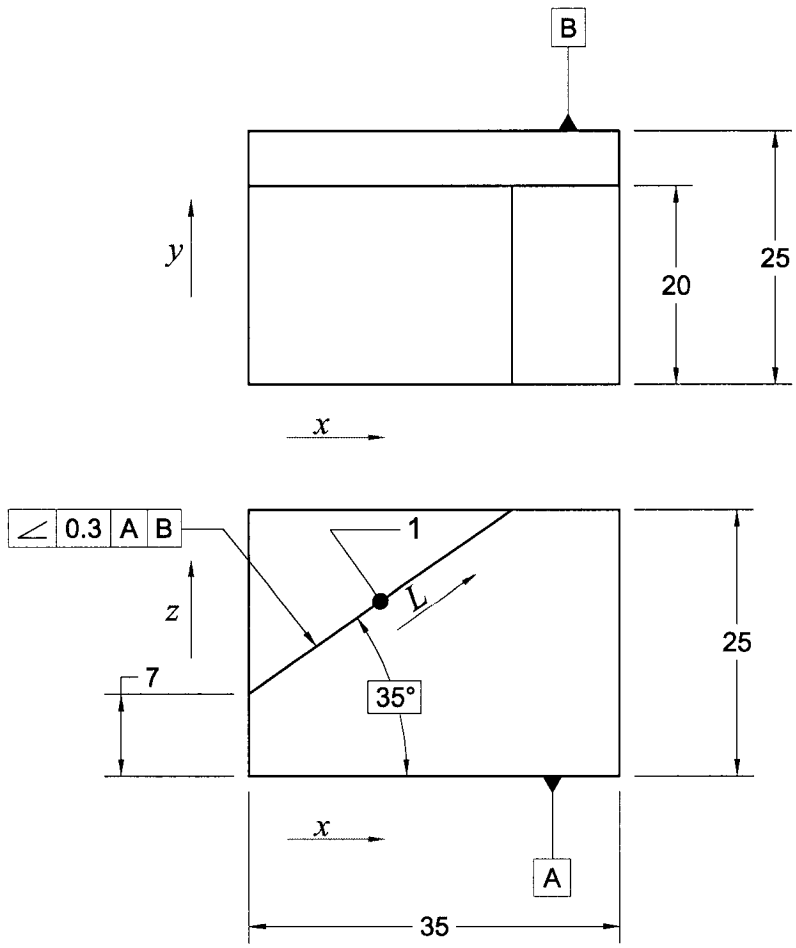


Figure 4-28: Contrainte d'orientation par rapport à deux plans de référence

Nous nous proposons dans ce qui suit de déterminer la meilleure configuration de palpage qui permette de juger de la conformité de la pièce par rapport aux tolérances spécifiées avec un taux de succès du diagnostic (*TBD*) à 90% par exemple.

1. Conditions de fabrication :

a) Gamme d'usinage :

Nous supposons que la pièce considérée est fabriquée sur une fraiseuse à partir d'un brut constitué d'un parallélépipède.

Phase 10 :

Surfaçage des surfaces de références *A* et *B*.

Phase 20 :

Appui sur *A* et *B* et surfaçage de la surface 1.

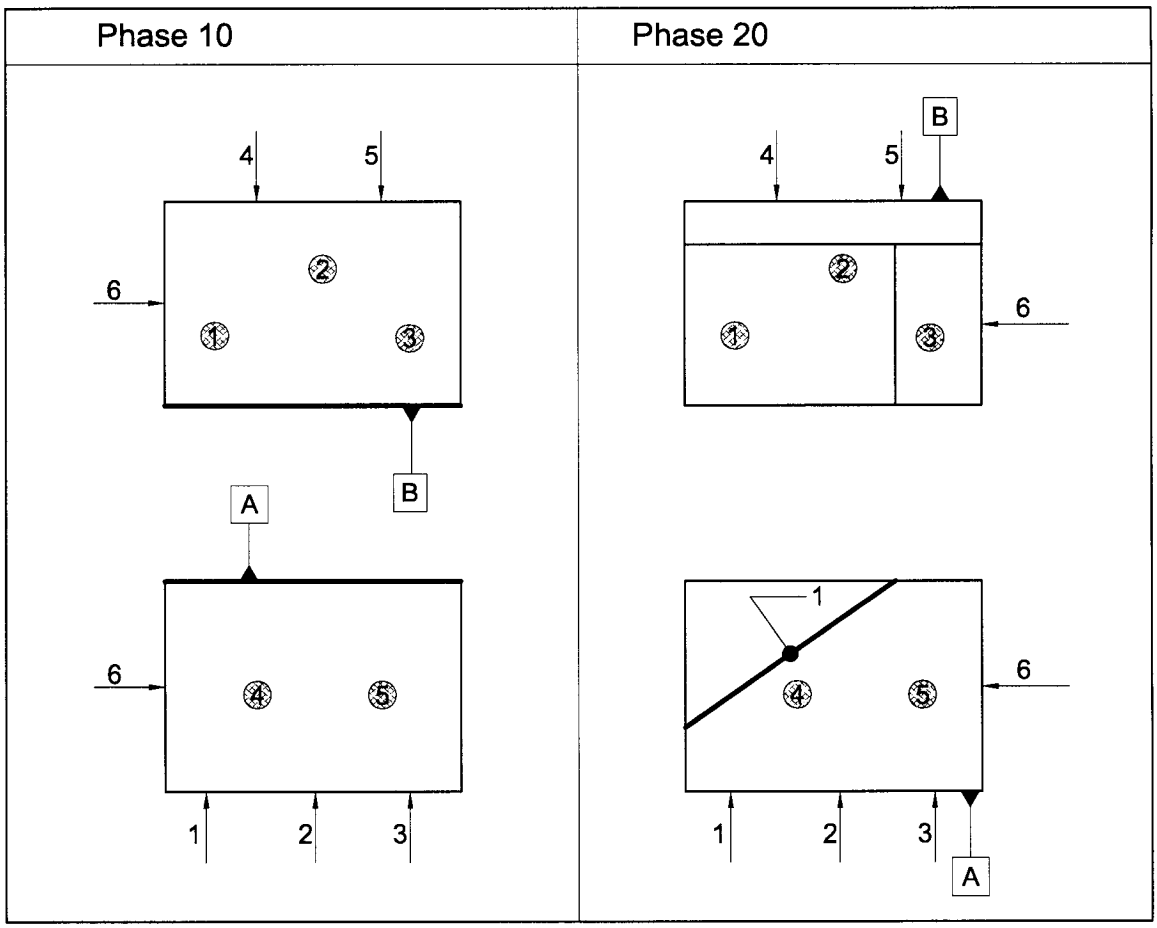


Figure 4-29: Croquis de la gamme d'usinage des trois plans

b) Machine/fixture/outil :

L'ensemble machine/fixture/outil est en conditions normales, il engendre :

- une variation de translation aléatoire par rapport aux plans médians et dans la direction de leurs normales de distribution uniforme d'une amplitude de 0 mm (valeur non pertinente car seule une tolérance d'orientation est demandée), et,
- une déviation angulaire aléatoire de la normale des plans usinés de distribution uniforme d'une amplitude de 0.45°. Cette déviation se produit dans une direction aléatoire entre 0 et 360°.

Nous supposons que ces variables aléatoires sont indépendantes.

2. Conditions de palpage :

Nous supposons que le palpage est effectué sur une MMT où les erreurs de mesures sont négligeables par rapports aux défauts de la pièce ainsi que par rapport aux tolérances exigées.
De plus, le palpage s'effectue sur des points uniformément répartis selon la largeur et la longueur des plans afin d'éviter les problèmes suscités par les défauts locaux.

3. Interprétation des tolérances :

Dans cet exemple, il n'y a qu'une tolérance d'orientation de la surface 1 par rapport aux surfaces de références *A* et *B*.

Cette tolérance indique que la surface réelle 1 doit se situer à l'intérieur de deux plans parallèles v_1 et v_2 distancés de 0.3 à 35° par rapport au système de références défini par *A* et *B* [6] (figure 4-30).

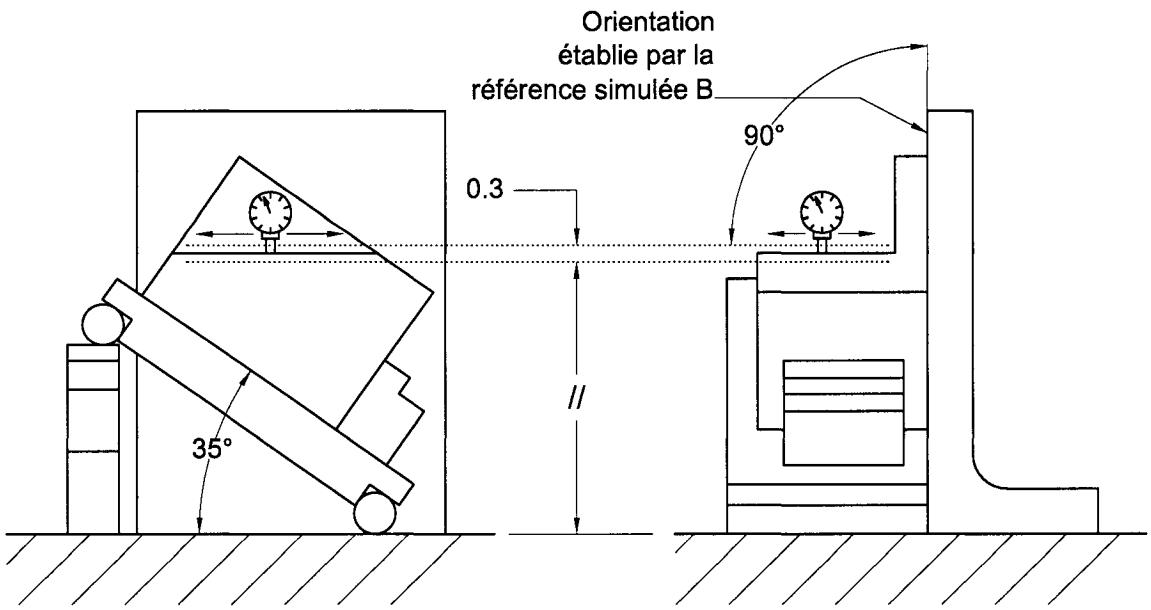


Figure 4-30: Inspection de la pièce avec un comparateur [6]

Afin de recréer un système de référence virtuel équivalent au montage de la figure 4-30, l'axe *z* est défini de façon à ce qu'il soit confondu avec la normale au plan *A*, l'axe *y* est la projection orthogonale de la normale au plan *B* sur le plan *A*, car *B* est la surface de référence secondaire. Ensuite, dans ce référentiel, nous nous assurons que la surface 1 associée est contenue entre les plans v_1 et v_2, cela revient à vérifier que les quatre coins de la surface 1 se trouvent entre les plans v_1 et v_2 [7].

4. Traitement :

Dans cette section, nous simulerons numériquement la fabrication d'un grand nombre *N* (=100,000) de pièces selon les conditions de fabrication décrites dans

la section 1 et nous stockerons tous les paramètres intrinsèques générateurs (dans ce cas, les normales au plan) des surfaces *A*, *B* et 1.

Ensuite, en procédant tel que décrit dans les exemples 2 et 3, nous obtenons la meilleure configuration de palpage qui assure le *TBD* souhaité

5. Résultats :

Nous commençons d'abord par palper la surface 1 en considérant les surfaces génératrices de *A* et *B*. en augmentant simultanément les $NPP_{1,y}$ et $NPP_{1,L}$ à chaque itération (figure 4-31).

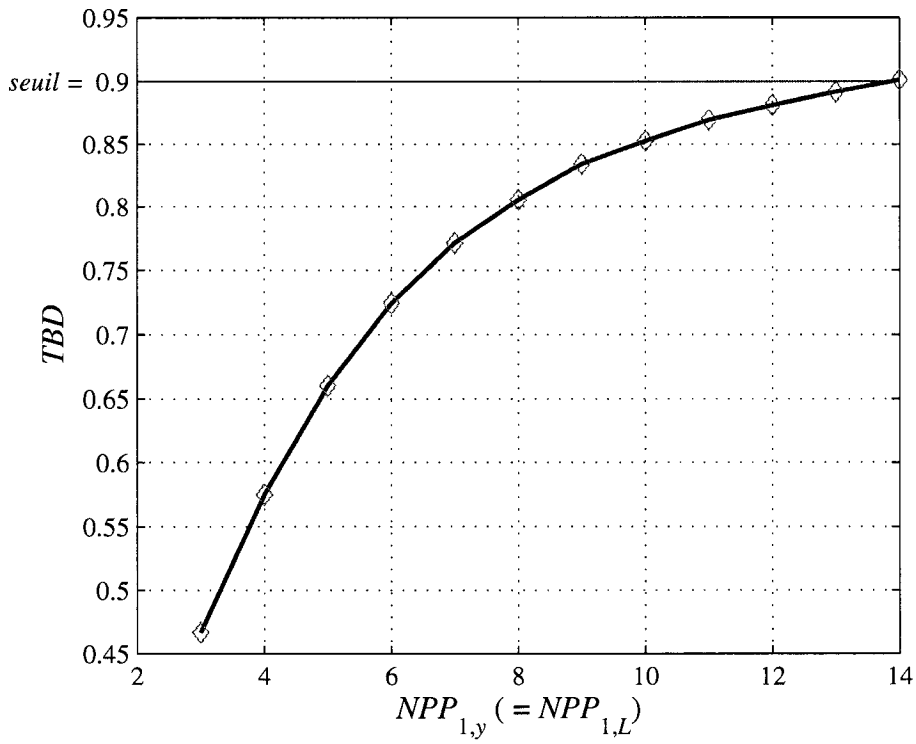


Figure 4-31: Augmentation simultanée des deux paramétres de densité de palpage sur la surface 1

Aucune meilleure solution n'a pu être trouvée en baissant le $NPP_{1,y}$ et garder le $NPP_{1,L}$ constant et inversement.

Ensuite, nous effectuerons le palpage de la référence *A* en considérant les surfaces génératrices de 1 et de *B* en augmentant simultanément les $NPP_{A,\,x}$ et $NPP_{A,\,y}$ à chaque itération (figure 4-32).

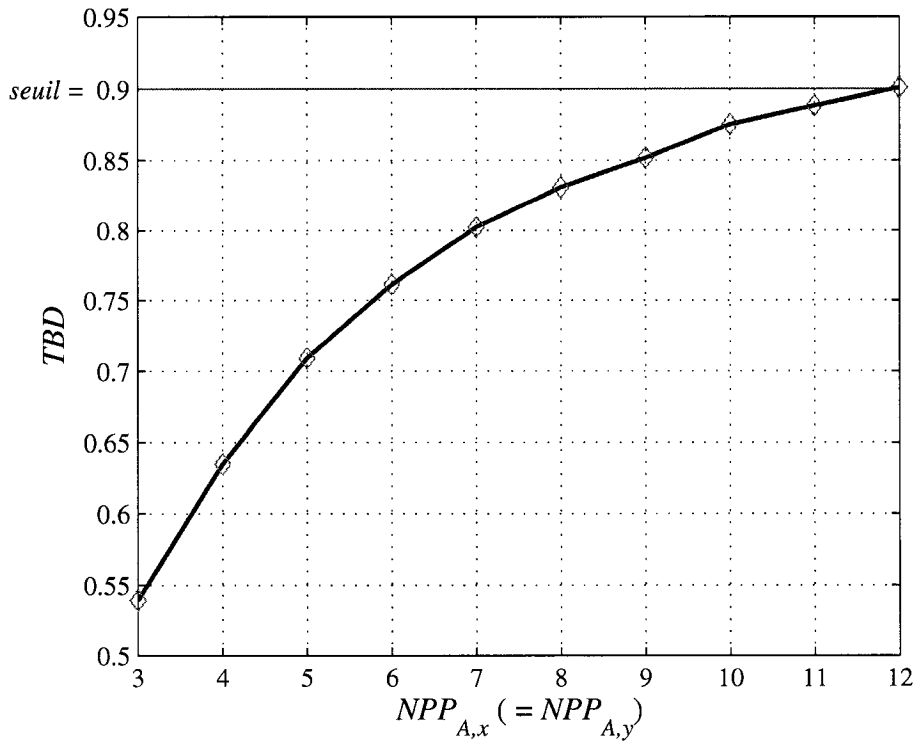


Figure 4-32: Augmentation simultanée des deux paramètres de densité de palpage de la surface *A*

Aucune meilleure solution n'a pu être trouvée en baissant le $NPP_{A,\,x}$ et garder le $NPP_{A,\,y}$ constant et inversement.

Ensuite, la même procédure est appliquée à la surface *B* en utilisant les surfaces génératrices des surface *A* et 1 et en augmentant simultanément $NPP_{B,x}$ et $NPP_{B,z}$ (figure 4-33).

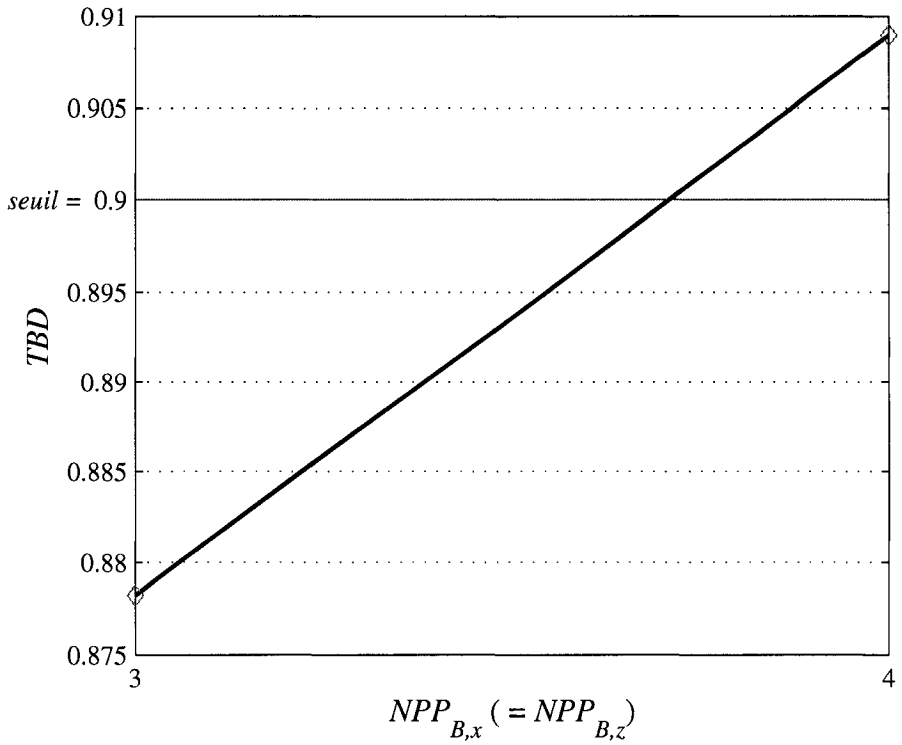


Figure 4-33:Augmentation simultanée des deux paramètres de densité de palpage sur la surface *B*

Signalons que les *NPP* trouvés pour la surface *B* sont nettement inférieurs à ceux des deux autres surfaces même si leurs surfaces sont de tailles similaires et que le TBD_{seuil} est le même (90%).

Ceci s'explique par le fait que la surface *B* est la référence secondaire, sa normale est projetée sur le plan *A*, seuls les écarts qui restent après cette projection sont pertinents, d'où les faibles *NPP*.

En revanche pour la surface B, une meilleure solution a été trouvée en baissant le $NPP_{B,x}$ et garder le $NPP_{B,z}$ constant (figure 4-34).

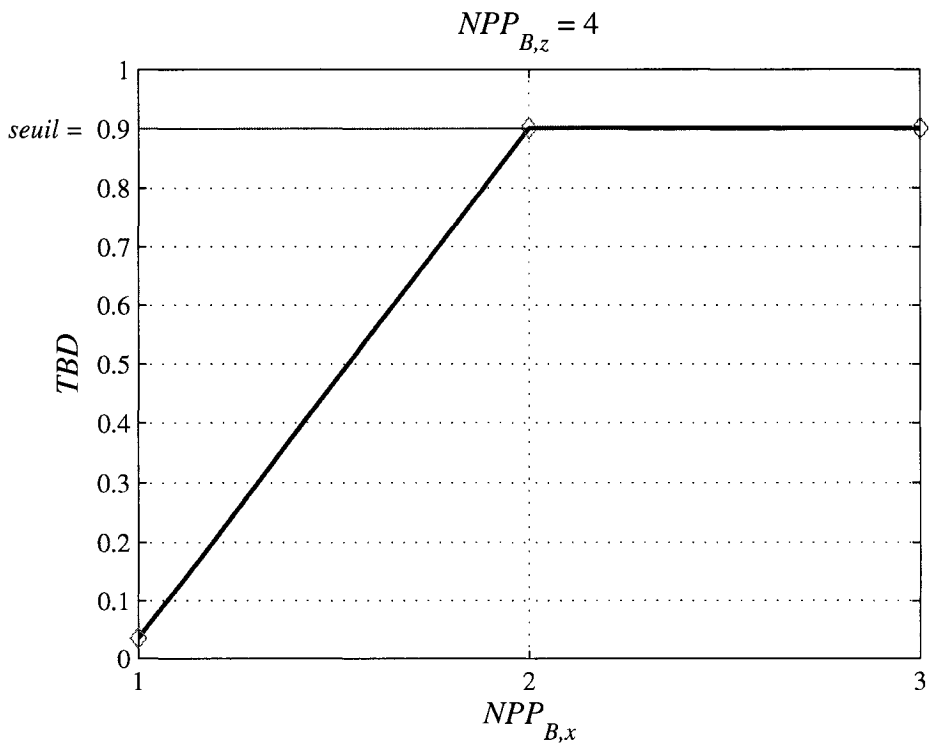


Figure 4-34: Réduction du *NPP* selon *x* de la surface *B*

Enfin, nous réalisons la simulation globale qui tient compte du palpage de toutes les surfaces en commençant par les *NPP* des six variables ($NPP_{1,x}$, $NPP_{1,L}$, $NPP_{A,x}$, $NPP_{A,y}$, $NPP_{B,x}$ et $NPP_{B,z}$) trouvés précédemment en les augmentant simultanément jusqu'à atteindre le *TBD* souhaité (figure 5-35).

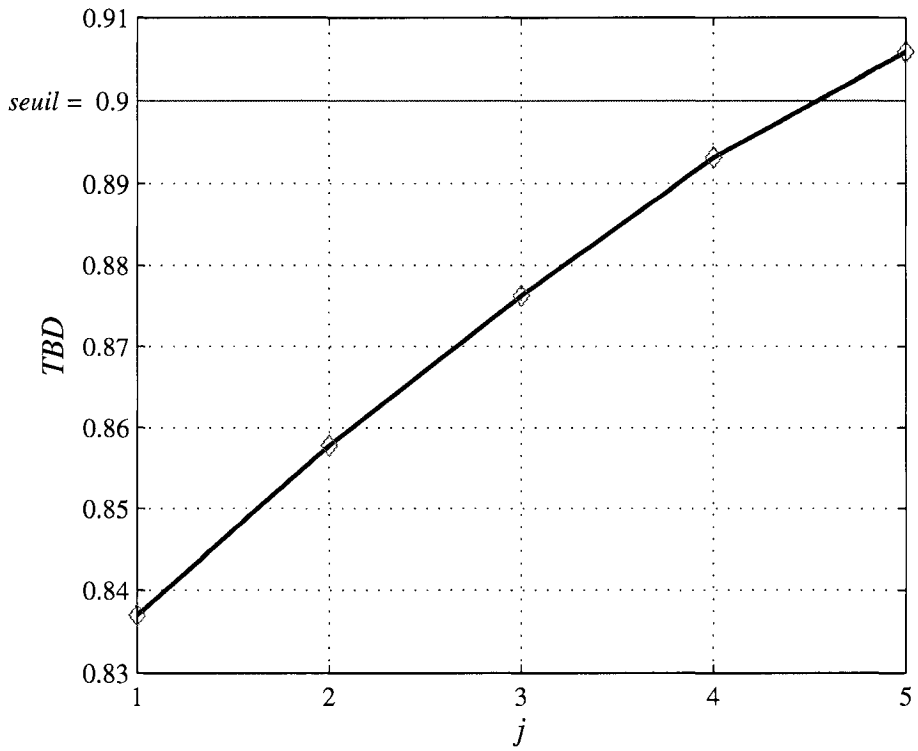


Figure 4-35: Augmentation simultanée de tous les paramètres de densité de palpage de toutes les surfaces

à $j = 1$: $NPP_{1,y} = 14$, $NPP_{1,L} = 14$, $NPP_{A,x} = 12$, $NPP_{A,y} = 12$, $NPP_{B,x} = 2$, $NPP_{B,z} = 4$ et,
à $j = 5$: $NPP_{1,y} = 18$, $NPP_{1,L} = 18$, $NPP_{A,x} = 16$, $NPP_{A,y} = 16$, $NPP_{B,x} = 6$, $NPP_{B,z} = 8$.

Dans ce qui suit les résultats finaux tels que retournés par Matlab :

```
x_A                                          35
y_A                                          25
x_B                                          35
z_B                                          25
y_S1                                         25
y_A                                          25
z_S1_low                                      7
z_S1_high                                    25
Alpha                                0.6108652382

n_x_A_lim_o                                  12
n_y_A_lim_o                                  12
n_x_B_lim_o                                   2
n_z_B_lim_o                                   4
n_x_S1_lim_o                                 14
n_L_S1_lim_o                                 14

N                                        100000
p                                           0.9
Precis_angulaire                 0.007853981634
Xi                                          0.2
Tol_orientation                             0.3

recommande A x                               16
recommande A y                               16
recommande B y                                6
recommande B z                                8
recommande S1 y                              18
recommande S1 L                              18
Nombre de pieces non-conforme acceptees    1136
Nombre de pieces conformes rejetees        8282
Nombre de pieces conformes acceptees      88289
Nombre de pieces non-conformes rejetees    2293
```

Notons que le taux de rejet global est de 10.6 % et que la proportion de pièces non conformes acceptées par rapport à la totalité des pièces acceptées est de 1.3%

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons décrit la méthode numérique que nous proposons afin de pouvoir prédire une configuration de palpage sur MMT en déterminant les différentes densités de palpage des éléments géométriques impliqués dans les tolérances géométriques. Cette configuration de palpage assure un *TBD* minimum en tenant compte des capabilités des centres de fabrication utilisée d'un côté, et, des tolérances du bureau d'études de l'autre.

De plus, nous avons montré comment appliquer cette méthode à des cas pratiques simulés illustrant ainsi l'utilité de la méthode ainsi que des problèmes spécifiques que nous avons rencontrés lors de sa mise en oeuvre de ces simulations (problème de palpage des références et de densité des géométries surfaciques).

Rappelons que les modèles utilisés pour estimer les capabilités des centres de fabrication se résument à une variation aléatoire des paramètres intrinsèques générateurs autour de paramètres intrinsèques nominaux ainsi qu'un écart aléatoire des points de l'élément extrait simulé selon la normale locale à la surface génératrice. Cependant, il est possible d'intégrer des modèles plus élaborés à condition que ces derniers incluent des composantes aléatoires car elles sont nécessaires pour les simulations de Monte-Carlo utilisée dans notre méthode. De plus il est possible d'intégrer un modèle d'écarts de palpage sur MMT, dans ce travail, nous nous sommes limités à un palpage considéré parfait (sans écarts).

De plus, le critère d'association de surface utilisé dans tous les exemple est celui des moindres carrés étant donné que c'est l'algorithme le plus répandu est utilisé et surtout c'est celui qui est le plus implémenté sur les MMT. Toutefois, il existe d'autres critères d'associations plus adaptés pour certains cas (mini-max mieux adapté pour assurer un assemblage conforme...) et qui peuvent être intégrés à la méthode que nous proposons.

Par ailleurs, afin de nous assurer de la fiabilité des résultats, nous devons réaliser des simulations où la taille de l'échantillon est suffisamment importante pour éviter tout résultat erroné dû à un effet statistique.

5 BILAN

Dans cette section, nous analyserons la méthode proposée d'estimation de densités de palpage sur une machine à mesurer tridimensionnelle (MMT) afin de mettre en évidence sa portée ainsi que ses limites.

Dans ce qui précède, nous avons exposé la méthode et nous l'avons appliquée à des exemples concrets. La méthode, de part sa nature, a montré sa capacité à offrir une solution simple et pragmatique aux problèmes de planification de palpage que rencontrerait le programmeur. En effet, les densités de palpage sont exprimées d'une façon claire et compréhensible. De plus, le lien entre les paramètres dont dépendent les résultats, (capabilités de fabrication, tolérances et *TBD*) est intuitivement facile à établir.

Par ailleurs, la méthode présentée, ne nécessite pas de connaissance très approfondie des différents éléments de la chaîne fabrication/mesure pour qu'elle fonctionne. En effet, une connaissance rudimentaire des capabilités des centres de fabrication suffit, ce qui rend la méthode accessible et facile à implanter. Évidemment, un modèle d'écarts plus élaboré des centres de fabrication améliore la qualité et la fiabilité des résultats obtenus. De plus, il serait intéressant d'effectuer une validation expérimentale s'il existe une possibilité de fabriquer et de contrôler une grande série de pièces.

En outre, la méthode se prête bien à une multitude d'améliorations qui l'enrichiront et la perfectionneront. Il est par exemple possible d'incorporer un modèle d'écarts de mesure de la MMT en plus du modèle d'écarts des centres de fabrication à la condition qu'ils contiennent au moins une composante aléatoire, indispensable aux simulations de Monte-Carlo. De plus, dans les exemples traités, seul le critère d'association de surfaces des moindres carrés a été considéré, il serait possible d'en explorer d'autres, comme le critère mini-maxi...

Il en est de même concernant les distributions des variables aléatoires, seule la distribution uniforme a été utilisée dans les différents exemples, mais d'autres distributions peuvent être appliquées (gaussienne...).

D'autre part, la méthode peut s'insérer dans une procédure d'optimisation de coûts de plus grande envergure en associant par exemple un coût à chacune des étapes de fabrication et de mesure, un coût par pièce rejetée et un coût par pièce hors tolérances acceptée. En procédant ainsi, il est possible d'optimiser la fabrication et le contrôle sur MMT simultanément afin de minimiser les coûts.

Cependant, la méthode nécessite une compréhension et une analyse profonde du tolérancement des pièces à contrôler, ce qui varie grandement au cas par cas et qui implique donc l'intervention humaine experte afin d'assurer l'application adéquate de la méthode et par conséquent, l'obtention de résultats fiables.

De plus, nous n'avons traité que des cas où les contours limitant les éléments géométriques, sont simples (plan rectangulaire, cylindre limité par deux plan parallèles et perpendiculaires à son axe), or, les pièces comportent souvent des géométries aux contours plus complexes ce qui rend les densités de palpage plus difficiles à définir.

Par ailleurs, dans notre méthode, nous n'avons pas considéré les difficultés liées à l'accessibilité des surfaces au palpage, qui peuvent être souvent rencontrées dans les pièces complexes ou de petite dimension.

En revanche, puisque la méthode s'appuie sur un modèle purement numérique, les simulations peuvent être longues et nécessiteraient des échantillons de taille importante pour apporter des solutions satisfaisantes aux cas plus complexes. Il serait donc utile de faire évoluer la méthode de numérique à empirique au moins dans les cas les plus usuels de façon à pouvoir prédire les densités de palpage sans devoir passer par des simulations numériques parfois longues. Une étape a été en effet initiée dans cette direction.

E effet, nous avons repris l'exemple 4.4.1, et nous avons représenté une cartographie des *TBD* en fonction des paramètres pertinents (figures 5-1 et 5-2). Avec de tels graphiques, il est possible d'estimer le nombre de points de palpage sans de nouvelles simulations numériques (cas du cercle 2D en supposant les surfaces de référence parfaitement connues).

Signalons tout de même que cela représente quelques heures de calculs et plus de 80Mo de données stockées.

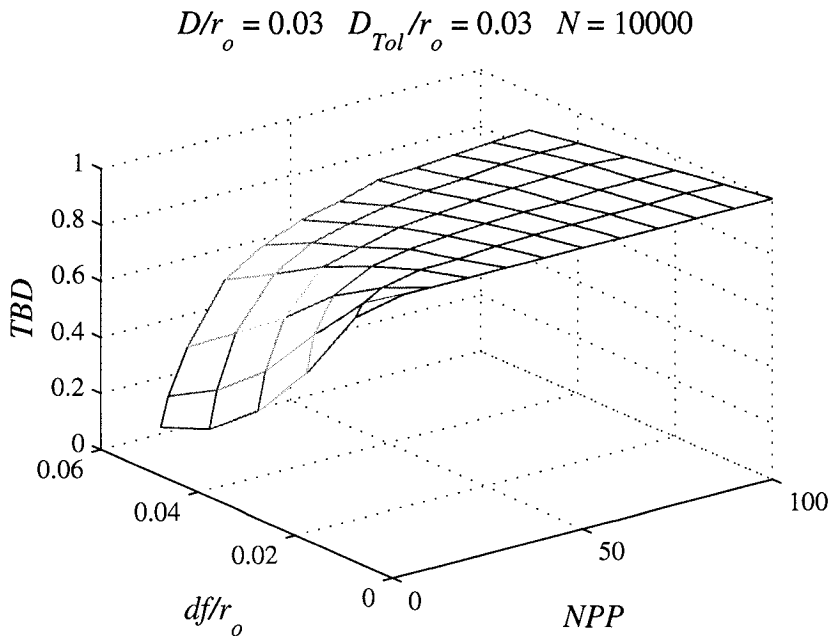


Figure 5-1: Cartographie des *TBD* en fonction du *NPP* et de l'amplitude du bruit radial à une erreur de centrage constante et une tolérance de positionnement constante

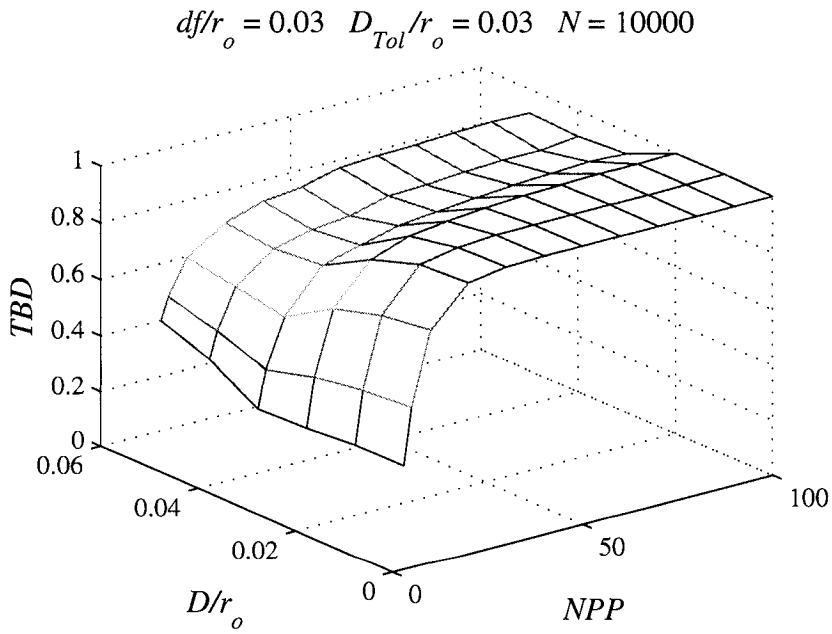


Figure 5-2: Cartographie des *TBD* en fonction du *NPP* et de l'erreur de centrage à une amplitude du bruit radial constante et une tolérance de positionnement constante

Ces graphiques sont efficaces et simples à utiliser, mais vue l'immense variétés des géométries, des cas de tolérances et des paramètres impliqués, leur usage resterait très limité.

Pour finir, il est possible de dériver des variantes de la méthode proposée en changeant le taux de réussite considéré : nous avons choisi le *TBD* comme indice de performance de l'inspection, mais nous pourrions mesurer le taux de pièces hors-tolérances acceptées et fixer un seuil à atteindre et en déduire la densité de palpage idéale selon ce nouveau critère.

6 CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons proposé une méthode numérique d'estimation du nombre de points de palpage dans un contexte de contrôle dimensionnel et géométrique sur machine à mesurer tridimensionnelle en utilisant le critère d'association de surfaces des moindres carrés.

Vu l'importance de l'étape d'association de surfaces dans notre méthode, nous avons d'abord exposé et validé ce critère d'association de surfaces en mesurant la fiabilité des résultats dans les conditions les plus variées.

Puis, nous avons confirmé la relation entre les densités de points de palpage, la capabilté des centres de fabrication et les tolérances du bureau d'études. L'introduction du concept original du taux de bons diagnostics (*TBD*) permet de lier ces paramètres.

Ensuite, nous avons appliqué numériquement la méthode à des exemples concrets et nous avons analysé les résultats obtenus.

Cette méthode a pour avantage d'apporter une réponse simple aux problèmes de planification de palpage et de créer un lien intuitif entre les différents paramètres pertinents à la prédiction des densités de palpage. De plus, son application ne requiert pas de modèle de fabrication virtuelle détaillé.

En revanche, elle nécessite une compréhension approfondie du tolérancement dimensionnel et géométrique, son application se limite aux surfaces canoniques ayant des contours simples et elle ne prend pas en compte les problèmes d'accessibilité de palpage. Par ailleurs, en raison de la grande diversité des géométries, des cas de tolérances et celle des paramètres impliqués, il est difficile de construire des bases de connaissances généralisées.

Certaines améliorations peuvent être apportées à la méthode proposée dans le cadre de travaux futurs : une validation expérimentale, l'intégration de simulateurs de fabrication et de palpage plus élaborés, l'introduction d'autres critères d'association de surfaces que les moindres carrés et son incorporation dans une procédure générale d'optimisation de coûts.

RÉFÉRENCES

[1] BOURDET, P.; *Logiciels des machines à mesurer tridimensionnelles, Techniques de l'ingénieur, dossier R1316, Mesures mécaniques et dimensionnelles,* mars 1999.

[2] FORBES, A.; *Least-Squares Best-Fit Geometric Elements, NPL Report DITC 140/89 – Revised edition,* February 1991.

[3] BOURDET, P. et MATHIEU, L; *qualité des produits dans les entreprises Tolérancement et métrologie dimensionnelle, CETIM* , 1998.

[4] CLOUTIER, G.; *Artefacts et métrologie*, 1999.

[5] ASME Y14.5; *Mathematical Defenition of Dimensioning and Tolerancing Principles, ASME* , 1994.

[6] GOOLDY, G.; *Dimensioning, tolerancing, and gaging applied, Prentice Hall*, 1999.

[7] WANG H., PRAMANIK N.,ROY U.,SUDARSAN R.,SRIRAM R.,LYONS K.; *A scheme for mapping tolerance specifications to generalized deviation space for use in tolerance synthesis and analysis, IEEE Transactions on automation science and engineering, vol 3, no. 1*, January 2006.

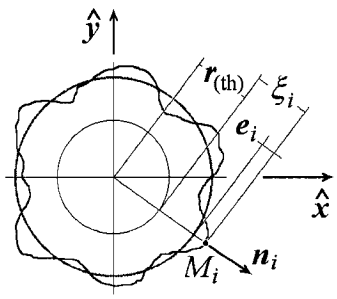
ANNEXES

A. APPROCHE BOURDET

Dans ce qui suit [4], nous présentons, avec la permission de l'auteur Guy Cloutier, le développement des équations d'association des moindres carrés selon l'approche Bourdet.

A.1. Cercle géométrique associé à un élément présumé circulaire, espace 2D

(Programmes Matlab `CER_PARF.M, CER_MC.M, CERIMC.M`)



Dans le repère nominal $\{G_o\}$ de l'élément géométrique, le plan du cercle est de normale Z. L'origine O de $\{G_o\}$ est dictée par le contexte spécifique au problème. Les coordonnées palpées sont initialement données par rapport au repère de palpage $\{P\}$. L'inverse de la transformation homogène qui exprime $\{G_o\}$ dans $\{P\}$ est la transformation qui recalera dans $\{G_o\}$ des coordonnées connues dans $\{P\}$. ${}^{P}_{G_o}\boldsymbol{T}$, la transformation homogène qui exprime $\{G_o\}$ dans $\{P\}$, s'obtient en deux temps, le cercle étant un cas particulier, car bidimensionnel. Dans un premier temps, il faut déterminer dans quel plan se situe le cercle (ex. : plan des moindres carrés établi sur quelques points). Par après, recalage des points dans ce plan pour résoudre le cercle lui-même. On peut aussi procéder par analyse du dessin de définition et du montage de la pièce.

Dans le repère nominal $(c_i = \cos\theta_i,\ s_i = \sin\theta_i)$, $\boldsymbol{D} = [u\ \ v\ \ 0]^T$; $\boldsymbol{R} = [0\ \ 0\ \ 0]^T$; $r_i = [x_i + y_i]^{1/2}$; $\boldsymbol{n}_i = [c_i\ \ s_i\ \ 0]^T = [x_i/r_i\ \ y_i/r_i\ \ 0]^T$; $\boldsymbol{OM}_i = [r_i c_i\ \ r_i s_i\ \ 0]^T = [x_i\ \ y_i\ \ 0]^T$. Toutes coordonnées en Z nulles par définition du problème.

Lors de la phase de palpage, la i^e trajectoire d'approche du palpeur était programmée selon la direction de et dans le sens opposé à la normale locale nominale $\boldsymbol{n}_i$. Il devrait accoster la matière à la coordonnée $\boldsymbol{OM}_{i(th)} = [r_{(th)} c_i\ \ r_{(th)} c_i\ \ 0]^T$ (à un rayon de palpeur près). Il en découle l'écart résultant

$$\xi_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} - r_{(th)} \tag{A-1}$$

Cet écart est dû au fait que le cercle associé

- ◊ a un rayon vrai $r_{(v)}$ différent du rayon théorique $r_{(th)}$;
- ◊ a un axe qui ne passe pas vraiment par l'origine du repère de calcul, il en est décalé par une translation u le long de l'axe X et une translation v selon Y.

Avec un rayon vrai $r_{(v)} = r_{(th)} + \delta r$ connu et des écarts de localisation $\boldsymbol{D} = [u \;\; v \;\; 0]^T$ ($\boldsymbol{R}$ ne compte pas), les valeurs palpées auraient été telles que $\boldsymbol{OM'}_i = [x'_i \;\; y'_i \;\; 0]^T$. Des écarts plus petits, qui ne proviennent que des déformations de l'élément palpé, auraient été calculés par

$$e_i = \sqrt{x_i'^2 + y_i'^2} - r_{(v)} \tag{A-2}$$

(**CER_MC.M**) L'optimisation, interne à la fonction, consiste à minimiser la somme des carrés des écarts corrigés $W = \Sigma(e_i)^2$ une solution linéaire s'obtient par la méthode de Gauss : Appliquée au cercle, et sans considérer le paramètre de taille qu'est le rayon, l'équation générale annulant l'effet de petits écarts de localisation devient

$$e_i = \xi_i - c_i u - s_i v \tag{A-3}$$

La pénalité W s'écrit

$$W = \sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (\xi_i - c_i u - s_i v)^2 \tag{A-4}$$

Les dérivées partielles, à annuler pour minimiser W, sont

$$\begin{aligned} \partial W/\partial u &= 2\sum_{i=1}^{N} (\xi_i - c_i u - s_i v)(-c_i) \\ \partial W/\partial v &= 2\sum_{i=1}^{N} (\xi_i - c_i u - s_i v)(-s_i) \end{aligned} \tag{A-5}$$

et le système linéaire inversible serait 2×2. Avec le paramètre de taille, les dérivées partielles, à annuler pour minimiser W, sont

$$\begin{aligned} \partial W/\partial \delta r &= 2\sum_{i=1}^{N} (\xi_i - \delta r - c_i u - s_i v)(-1) \\ \partial W/\partial u &= 2\sum_{i=1}^{N} (\xi_i - \delta r - c_i u - s_i v)(-c_i) \\ \partial W/\partial v &= 2\sum_{i=1}^{N} (\xi_i - \delta r - c_i u - s_i v)(-s_i) \end{aligned} \tag{A-6}$$

D'ou le système linéaire inversible 3×3

$$\begin{bmatrix} N & \Sigma c_i & \Sigma s_i \\ \Sigma c_i & \Sigma c_i^2 & \Sigma s_i c_i \\ \Sigma s_i & \Sigma s_i c_i & \Sigma s_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma \xi_i \\ \Sigma c_i \xi_i \\ \Sigma s_i \xi_i \end{bmatrix} \tag{A-7}$$

Dans lequel est contenu le système 2×2 précédent.

Alternativement, de l'écriture matricielle des N relations,

$$\begin{bmatrix} 1 & c_1 & s_1 \\ 1 & c_2 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & c_N & s_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix} \tag{A-8}$$

$$\underset{(N\times 3)}{\boldsymbol{J}} \quad \underset{(3\times 1)}{\boldsymbol{\tau}} \quad = \quad \underset{(N\times 1)}{\boldsymbol{\xi}} \tag{A-9}$$

que solutionne

$$\boldsymbol{\tau} = \left[(\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J})^{-1}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\right]\boldsymbol{\xi} \tag{A-10}$$

(**CERIMC.M**) Même critère d'optimisation interne, mais l'ajustement s'avère trop important pour que l'approximation linéaire produise un résultat acceptable. L'approximation est insérée dans une boucle Gauss-Newton. Au j^{e} calcul, la solution linéaire de la matrice colonne des inconnues $\boldsymbol{\tau}_j = [\delta r_j \;\; u_j \;\; v_j]^{\mathrm{T}}$ s'ajoute au cumulatif des calculs précédents,

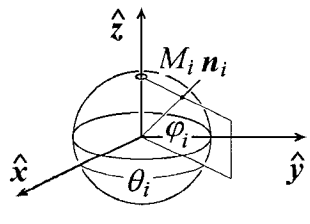
$$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{cum},k} = \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{\tau}_j \tag{A-11}$$

Un nouvel ensemble de coordonnées est produit à partir de l'inverse de la transformation homogène représentative de $\boldsymbol{\vartheta}_{\mathrm{cum},k}$. Le processus s'arrête lorsque la nouvelle contribution $\boldsymbol{\tau}_j$ devient négligeable.

A.2. Sphère géométrique associée à un élément présumé sphérique

(Programmes Matlab `SPH_PARF.M, SPH_MC.M, SPHIMC.M`)

Dans le repère nominal $\{G_o\}$ de l'élément géométrique, l'origine O de $\{G_o\}$ est dictée par le contexte spécifique au problème. Les coordonnées palpées sont initialement données par rapport au repère de palpage $\{P\}$. L'inverse de la transformation homogène qui exprime $\{G_o\}$ dans $\{P\}$ est la transformation qui recalera dans $\{G_o\}$ des coordonnées connues dans $\{P\}$. ${}^{P}_{G_o}\boldsymbol{T}$, la transformation homogène qui exprime $\{G_o\}$ dans $\{P\}$, s'obtient par mesures simples, par analyse, ou même par appréciation visuelle puisque seule compte la position : mesures à la règle de distances à des plans de référence, palpage de trois points sur un méridien, analyse du dessin de définition et du montage de la pièce.



Dans le repère nominal de la sphère, $\boldsymbol{D} = [u \;\; v \;\; w]^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{R} = [0 \;\; 0 \;\; 0]^{\mathrm{T}}$; $r_i = [x_i + y_i + z_i]^{½}$; $\boldsymbol{n}_i = [c\varphi_i c_i \;\; c\varphi_i s_i \;\; s\varphi_i]^{\mathrm{T}} = [x_i/r_i \;\; y_i/r_i \;\; z_i/r_i]^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{OM}_i = [r_i c\varphi_i c_i \;\; r_i c\varphi_i s_i \;\; r_i s\varphi_i]^{\mathrm{T}} = [x_i \;\; y_i \;\; z_i]^{\mathrm{T}}$.

Lors de la phase de palpage, la i^{e} trajectoire d'approche du palpeur était programmée selon la direction de et dans le sens opposé à la normale locale nominale $\boldsymbol{n}_i$. Il devrait accoster la matière à la coordonnée $\boldsymbol{OM}_{i(\mathrm{th})} = [r_{(\mathrm{th})} c\varphi_i c_i \;\; r_{(\mathrm{th})} c\varphi_i s_i \;\; r_{(\mathrm{th})} s\varphi_i]^{\mathrm{T}}$ (à un rayon de palpeur près). Il en découle l'écart résultant

$$\xi_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} - r_{(\mathrm{th})} \tag{A-12}$$

Cet écart est dû au fait que la sphère associée

- ◊ a un rayon vrai $r_{(\mathrm{v})}$ différent du rayon théorique $r_{(\mathrm{th})}$;
- ◊ a un centre qui ne passe pas vraiment par l'origine du repère de calcul, il en est décalé par les translations u selon l'axe X, v selon Y et w selon Z.

Avec un rayon vrai $r_{(\mathrm{v})} = r_{(\mathrm{th})} + \delta r$ connu et des écarts de localisation $\boldsymbol{D} = [u \;\; v \;\; w]^{\mathrm{T}}$ nulles, les valeurs palpées auraient été $\boldsymbol{OM'}_i = [x'_i \;\; y'_i \;\; z'_i]^{\mathrm{T}}$. Des écarts plus petits, qui ne proviennent que des déformations de l'élément palpé, auraient été calculés par

$$e_i = \sqrt{x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2} - r_{(\mathrm{v})} \tag{A-13}$$

(`SPH_MC.M`) L'optimisation, interne à la fonction, consiste à minimiser la somme des carrés des écarts corrigés $W = \Sigma(e_i)^2$ une solution linéaire s'obtient par la méthode de Gauss ;

$$\begin{bmatrix} N & \Sigma c\varphi_i c_i & \Sigma c\varphi_i s_i & \Sigma s\varphi_i \\ \Sigma c\varphi_i c_i & \Sigma c^2\varphi_i c_i^2 & \Sigma c^2\varphi_i s_i c_i & \Sigma s\varphi_i c\varphi_i c_i \\ \Sigma c\varphi_i s_i & \Sigma c^2\varphi_i s_i c_i & \Sigma c^2\varphi_i s_i^2 & \Sigma s\varphi_i c\varphi_i s_i \\ \Sigma s\varphi_i & \Sigma s\varphi_i c\varphi_i c_i & \Sigma s\varphi_i c\varphi_i s_i & \Sigma s^2\varphi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma\xi_i \\ \Sigma c\varphi_i c_i \xi_i \\ \Sigma c\varphi_i s_i \xi_i \\ \Sigma s\varphi_i \xi_i \end{bmatrix} \tag{A-14}$$

Alternativement, de l'écriture matricielle des N relations,

$$\begin{bmatrix} 1 & c\varphi_1 c_1 & c\varphi_1 s_1 & s\varphi_1 \\ 1 & c\varphi_2 c_2 & c\varphi_2 s_2 & s\varphi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & c\varphi_N c_N & c\varphi_N s_N & s\varphi_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix} \tag{A-15}$$

$$\underset{(N\times 4)}{\boldsymbol{J}} \quad \underset{(4\times 1)}{\boldsymbol{\tau}} \quad = \quad \underset{(N\times 1)}{\boldsymbol{\xi}} \tag{A-16}$$

que solutionne

$$\boldsymbol{\tau} = \left[(\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J})^{-1}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\right]\boldsymbol{\xi} \tag{A-17}$$

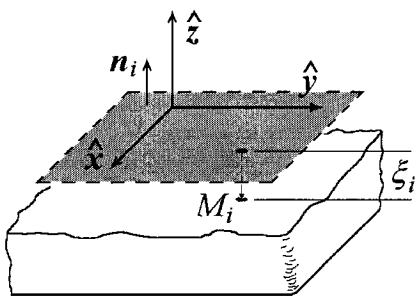
(SPHIMC.M) Même critère d'optimisation interne, mais l'ajustement s'avère trop important pour que l'approximation linéaire produise un résultat acceptable. L'approximation est insérée dans une boucle Gauss-Newton. Au j^{e} calcul, la solution linéaire de la matrice colonne des inconnues $\boldsymbol{\tau}_j = [\delta r_j \;\; u_j \;\; v_j \;\; w_j]^{\mathrm{T}}$ s'ajoute au cumulatif des calculs précédents,

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{cum},k} = \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{\tau}_j \tag{A-18}$$

Un nouvel ensemble de coordonnées est produit à partir de l'inverse de la transformation homogène représentative de $\boldsymbol{\vartheta}_{\mathrm{cum},k}$. Le processus s'arrête lorsque la nouvelle contribution $\boldsymbol{\tau}_j$ devient négligeable.

A.3. Plan géométrique associé à un élément présumé planaire

(Programmes Matlab `PLN_PARF.M, PLN_MC.M, PLNIMC.M`)



Dans le repère nominal $\{G_o\}$ de l'élément géométrique de normale Z, l'origine O de $\{G_o\}$ est dictée par le contexte spécifique au problème. Les coordonnées palpées sont initialement données par rapport au repère de palpage $\{P\}$. L'inverse de la transformation homogène qui exprime $\{G_o\}$ dans $\{P\}$ est la transformation qui recalera dans $\{G_o\}$ des coordonnées connues dans $\{P\}$. ${}^{P}_{G_o}\boldsymbol{T}$, la transformation homogène qui exprime $\{G_o\}$ dans $\{P\}$, s'obtient par palpage de trois points non colinéaires ou par analyse, mais doit prendre d'autres éléments en considération de façon à limiter à une portion acceptable le plan géométrique (théoriquement infini) : exprimer les limites du plan, déterminer son centroide pour y loger l'origine du repère, analyser le dessin de définition.

Dans le repère nominal de la sphère, $\boldsymbol{D} = [0 \;\; 0 \;\; w]^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{R} = [\alpha \;\; \beta \;\; 0]^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{n}_i = [0 \;\; 0 \;\; 1]^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{OM}_i = [x_i \;\; y_i \;\; z_i]^{\mathrm{T}}$.

Lors de la phase de palpage, la i^{e} trajectoire d'approche du palpeur était programmée selon la direction de et dans le sens opposé à la normale locale nominale $\boldsymbol{n}_i$.

$$\xi_i = z_i \tag{A-19}$$

Cet écart est dû au fait que le plan associé

- ◊ est à une hauteur vraie $z_{(v)} = w$ non nulle ;
- ◊ a une inclinaison, sa normale n'est pas vraiment selon l'axe Z ; seules comptent les rotations α selon l'axe X et β selon Y.

Avec des écarts de localisation $\boldsymbol{D} = [0\ 0\ w]^T$ et $\boldsymbol{R} = [\alpha\ \beta\ 0]^T$ nulles, les valeurs palpées auraient été $\boldsymbol{OM'}_i = [x'_i\ \ y'_i\ \ 0]^T$. Des écarts plus petits, qui ne proviennent que des déformations de l'élément palpé, auraient été calculés par

$$e_i = z'_i \tag{A-20}$$

(**PLN_MC.M**) L'optimisation, interne à la fonction, consiste à minimiser la somme des carrés des écarts corrigés $W = \Sigma(e_i)^2$, une solution linéaire s'obtient par la méthode de Gauss : Appliquée au plan, l'équation générale annulant l'effet de petits écarts de localisation devient

$$e_i = \xi_i - w - y_i\alpha + x_i\beta \tag{A-21}$$

La pénalité W s'écrit

$$W = \sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (\xi_i - w - y_i\alpha + x_i\beta)^2 \tag{A-22}$$

Les dérivées partielles, à annuler pour minimiser W, sont

$$\begin{aligned} \partial W/\partial w &= 2\sum_{i=1}^{N} (\xi_i - w - y_i\alpha + x_i\beta)(-1) \\ \partial W/\partial \alpha &= 2\sum_{i=1}^{N} (\xi_i - w - y_i\alpha + x_i\beta)(-y_i) \\ \partial W/\partial \beta &= 2\sum_{i=1}^{N} (\xi_i - w - y_i\alpha + x_i\beta)(x_i) \end{aligned} \tag{A-23}$$

D'ou le système linéaire inversible

$$\begin{bmatrix} N & \Sigma y_i & -\Sigma x_i \\ \Sigma y_i & \Sigma y_i^2 & -\Sigma x_i y_i \\ -\Sigma x_i & -\Sigma x_i y_i & \Sigma x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma \xi_i \\ \Sigma y_i \xi_i \\ -\Sigma x_i \xi_i \end{bmatrix} \tag{A-24}$$

Le plan n'a pas de paramètres de taille.

Alternativement, de l'écriture matricielle des N relations,

$$\begin{bmatrix} 1 & y_1 & -x_1 \\ 1 & y_2 & -x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_N & -x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix} \tag{A-25}$$

$$\underset{(N\times 3)}{\boldsymbol{J}} \quad \underset{(3\times 1)}{\boldsymbol{\tau}} \quad = \quad \underset{(N\times 1)}{\boldsymbol{\xi}} \tag{A-26}$$

que solutionne

$$\boldsymbol{\tau} = \left[(\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J})^{-1}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\right]\boldsymbol{\xi} \tag{A-27}$$

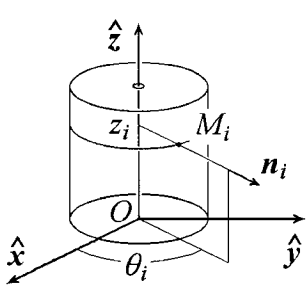
(PLNIMC.M) Même critère d'optimisation interne, mais l'ajustement s'avère trop important pour que l'approximation linéaire produise un résultat acceptable. L'approximation est insérée dans une boucle Gauss-Newton. Au j^{e} calcul, la solution linéaire de la matrice colonne des inconnues $\boldsymbol{\tau}_j = [w_j \;\; \alpha_j \;\; \beta_j]^{\mathrm{T}}$ s'ajoute au cumulatif des calculs précédents, avec un amortissement ρ_j calculé sur la partie rotation : Plus les rotations sont grandes, moins elles sont commutatives. La norme de $[\beta_j \;\; -\alpha_j \;\; 1]^{\mathrm{T}}$ est près de l'unité tant que les rotations demeurent petites. Elle « mesure » l'ampleur excessive des rotations et en atténue les répercussions par $\rho_j = (\beta_j^2 + \alpha_j^2 + 1)^{-½}$,

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{cum},k} = \sum_{j=1}^{k} \rho_j \boldsymbol{\tau}_j \tag{A-28}$$

Un nouvel ensemble de coordonnées est produit à partir de l'inverse de la transformation homogène représentative de $\boldsymbol{\vartheta}_{\mathrm{cum},k}$. Le processus s'arrête lorsque la nouvelle contribution $\boldsymbol{\tau}_j$ devient négligeable.

A.4. Cylindre géométrique associé à un élément cylindrique

(Programmes Matlab `CYL_PARF.M`, `CYL_MC.M`, `CYLIMC.M`)



Dans le repère nominal $\{G_o\}$ de l'élément géométrique, l'axe du cylindre est confondu à l'axe Z du repère. L'origine O de $\{G_o\}$ est dictée par le contexte spécifique au problème. Les coordonnées palpées sont initialement données par rapport au repère de palpage $\{P\}$. L'inverse de la transformation homogène qui exprime $\{G_o\}$ dans $\{P\}$ est la transformation qui recalera dans $\{G_o\}$ des coordonnées

connues dans $\{P\}$. ${}^{P}_{G_o}\boldsymbol{T}$, la transformation homogène qui exprime $\{G_o\}$ dans $\{P\}$, s'obtient par palpage et analyse : palpage des plans extrêmes qui limitent la profondeur d'un alésage en trois points, palpage de trois points à une hauteur approximativement constante sur le cylindre, analyse du dessin de définition et du montage de la pièce.

Dans le repère nominal, $\boldsymbol{D} = [u \;\; v \;\; 0]^T$; $\boldsymbol{R} = [\alpha \;\; \beta \;\; 0]^T$; $\boldsymbol{n}_i = [c_i \;\; s_i \;\; 0]^T = [x_i/r_i \;\; y_i/r_i \;\; 0]^T$; $r_i = [x_i + y_i]^{1/2}$; $\boldsymbol{OM}_i = [r_i c_i \;\; r_i s_i \;\; z_i]^T = [x_i \;\; y_i \;\; z_i]^T$.

Lors de la phase de palpage, la i^e trajectoire d'approche du palpeur était programmée selon la direction de et dans le sens opposé à la normale locale nominale $\boldsymbol{n}_i$. Il devrait accoster la matière à la coordonnée $\boldsymbol{OM}_{i(\text{th})} = [r_{(\text{th})} c_i \;\; r_{(\text{th})} c_i \;\; z_i]^T$ (à un rayon de palpeur près). Il en découle l'écart résultant

$$\xi_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} - r_{(\text{th})} \tag{A-29}$$

Cet écart est dû au fait que le cylindre associé

- ◊ a un rayon vrai $r_{(\text{v})}$ différent du rayon théorique $r_{(\text{th})}$;
- ◊ a un axe qui ne passe pas vraiment par l'origine du repère de calcul, il en est décalé par une translation u le long de l'axe X et une translation v selon Y ;
- ◊ a un axe qui n'est pas vraiment parallèle à l'axe Z du repère de calcul, il en est décalé par une rotation α autour de l'axe X et une rotation β selon Y.

Avec un rayon vrai $r_{(\text{v})} = r_{(\text{th})} + \delta r$ connu et des écarts de localisation $\boldsymbol{D} = [u \;\; v \;\; 0]^T$ et $\boldsymbol{R} = [\alpha \;\; \beta \;\; 0]^T$ nulles, les valeurs palpées auraient été telles que $\boldsymbol{OM'}_i = [x'_i \;\; y'_i \;\; z_i]^T$. Des écarts plus petits, ne provenant que des déformations de l'élément, auraient été calculés par

$$e_i = \sqrt{x_i'^2 + y_i'^2} - r_{(\text{v})} \tag{A-30}$$

(**CYL_MC.M**) L'optimisation, interne à la fonction, consiste à minimiser la somme des carrés des écarts corrigés $W = \Sigma(e_i)^2$ une solution linéaire s'obtient par la méthode de Gauss ;

$$\begin{bmatrix} N & \Sigma c_i & \Sigma s_i & -\Sigma s_i z_i & \Sigma c_i z_i \\ \Sigma c_i & \Sigma c_i^2 & \Sigma s_i c_i & -\Sigma s_i c_i z_i & \Sigma c_i^2 z_i \\ \Sigma s_i & \Sigma s_i c_i & \Sigma s_i^2 & -\Sigma s_i^2 z_i & \Sigma s_i c_i z_i \\ -\Sigma s_i z_i & -\Sigma s_i c_i z_i & -\Sigma s_i^2 z_i & \Sigma s_i^2 z_i^2 & -\Sigma s_i c_i z_i^2 \\ \Sigma c_i z_i & \Sigma c_i^2 z_i & \Sigma s_i c_i z_i & -\Sigma s_i c_i z_i^2 & \Sigma c_i^2 z_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r \\ u \\ v \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma \xi_i \\ \Sigma c_i \xi_i \\ \Sigma s_i \xi_i \\ -\Sigma s_i z_i \xi_i \\ \Sigma c_i z_i \xi_i \end{bmatrix} \tag{A-31}$$

Alternativement, de l'écriture matricielle des N relations,

$$\begin{bmatrix} 1 & c_1 & s_1 & -s_1 z_1 & c_1 z_1 \\ 1 & c_2 & s_2 & -s_2 z_2 & c_2 z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & c_N & s_N & -s_N z_N & c_N z_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r \\ u \\ v \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix} \tag{A-32}$$

$$\underset{(N\times 5)}{\boldsymbol{J}} \quad \underset{(5\times 1)}{\boldsymbol{\tau}} \quad = \quad \underset{(N\times 1)}{\boldsymbol{\xi}} \tag{A-33}$$

que solutionne

$$\boldsymbol{\tau} = \left[(\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J})^{-1} \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \right] \boldsymbol{\xi} \tag{A-34}$$

(CYLIMC.M) Même critère d'optimisation interne, mais l'ajustement s'avère trop important pour que l'approximation linéaire produise un résultat acceptable. L'approximation est insérée dans une boucle Gauss-Newton. Au j^{e} calcul, la solution linéaire de la matrice colonne des inconnues $\boldsymbol{\tau}_j = [\delta r_j \;\; u_j \;\; v_j \;\; \alpha_j \;\; \beta_j]^{\mathrm{T}}$ s'ajoute au cumulatif des calculs précédents, avec un amortissement ρ_j calculé sur la partie rotation : Plus les rotations sont grandes, moins elles sont commutatives. La norme de $[\beta_j \;\; -\alpha_j \;\; 1]^{\mathrm{T}}$ est près de l'unité tant que les rotations demeurent petites. Elle « mesure » l'ampleur excessive des rotations et en atténue les répercussions par $\rho_j = (\beta_j^2 + \alpha_j^2 + 1)^{-1/2}$,

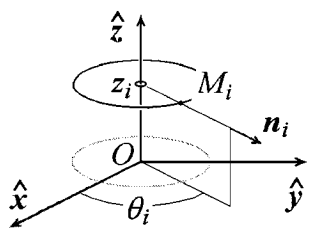
$$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{cum},k} = \sum_{j=1}^{k} \rho_j \boldsymbol{\tau}_j \tag{A-35}$$

Un nouvel ensemble de coordonnées est produit à partir de l'inverse de la transformation homogène représentative de $\boldsymbol{\vartheta}_{\mathrm{cum},k}$. Le processus s'arrête lorsque la nouvelle contribution $\boldsymbol{\tau}_j$ devient négligeable.

L'algorithme s'avère robuste face au mauvais recalage initial de l'élément : Sur des situation *fortement* erronées (écart linéaire voisin du rayon **et** écarts angulaires de $\pi/3$), la fonction ajuste bien l'élément (1e-7 mm en moins de 20 itérations). Pour un écart en translation qui excède le rayon ou des écarts angulaire au-delà de $\pi/3$, l'algorithme peut ne plus converger.

A.5. Cercle géométrique associé à un élément présumé circulaire, espace 3D

(Programmes Matlab `CER3D_PARF.M, CER_MC3D.M, CERIMC3D.M`)



Dans le repère nominal $\{G_o\}$ de l'élément géométrique, le plan du cercle a sa normale confondue à l'axe Z du repère. L'origine O de $\{G_o\}$ est dictée par le contexte spécifique au problème. Les coordonnées palpées sont initialement données par rapport au repère de palpage $\{P\}$. L'inverse de la transformation homogène qui exprime $\{G_o\}$ dans $\{P\}$ est la transformation qui recalera dans $\{G_o\}$ des coordonnées connues dans $\{P\}$. ${}^{P}_{G_o}\boldsymbol{T}$, la transformation homogène qui exprime $\{G_o\}$ dans $\{P\}$, s'obtient par palpage et analyse : palpage d'un plan extrême en trois points non colinéaires, palpage de trois points à une hauteur approximativement constante sur le cercle, analyse du dessin de définition et du montage de la pièce.

Dans le repère nominal, pour le cercle, $\boldsymbol{D}_c = [u \;\; v \;\; 0]^T$; $\boldsymbol{R}_c = [\alpha \;\; \beta \;\; 0]^T$; $r_i = [x_i + y_i]^{1/2}$; $\boldsymbol{n}_{ci} = [c_i \;\; s_i \;\; 0]^T = [x_i/r_i \;\; y_i/r_i \;\; 0]^T$. Pour le plan dans lequel s'inscrit le cercle, $\boldsymbol{D}_p = [0 \;\; 0 \;\; w]^T$; $\boldsymbol{R}_p = [\alpha \;\; \beta \;\; 0]^T$; $\boldsymbol{n}_{pi} = [0 \;\; 0 \;\; 1]^T$. Pour l'ensemble, $\boldsymbol{OM}_i = [r_i c_i \;\; r_i s_i \;\; z_i]^T = [x_i \;\; y_i \;\; z_i]^T$.

Lors de la phase de palpage, la i^e trajectoire d'approche du palpeur était programmée selon la direction de et dans le sens opposé à la normale locale nominale $\boldsymbol{n}_{ci}$. Il devrait accoster la matière à la coordonnée $\boldsymbol{OM}_{i(th)} = [r_{(th)} c_i \;\; r_{(th)} c_i \;\; z_i]^T$ (à un rayon de palpeur près). Il en découle l'écart résultant

$$\xi_{ci} = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} - r_{(th)} \tag{A-36}$$

pour le cercle, et

$$\xi_{pi} = z_i \tag{A-37}$$

pour le plan du cercle.

Ces écarts sont dûs au fait que le cercle associé

- ◊ a un rayon vrai $r_{(v)}$ différent du rayon théorique $r_{(th)}$;
- ◊ a un centre qui, projeté dans le plan XY, non confondu à l'origine du repère de calcul, il en est décalé par une translation u le long de l'axe X et une translation v selon Y ;
- ◊ est dans un plan qui n'est pas à une coordonnée Z nulle, mais bien à une hauteur w ;

◊ est dans un plan dont la normale n'est pas parallèle à l'axe Z du repère de calcul, elle en est décalée par une rotation α autour de l'axe X et une rotation β selon Y.

Par recoupement des équations propres au cercle, au plan et au cylindre, l'écart résiduel du cercle devient

$$e_{ci} = \xi_{ci} - \delta r - c_i u - s_i v + s_i z_i \alpha - c_i z_i \beta \tag{A-38}$$

alors que l'écart résiduel du plan demeure

$$e_{pi} = \xi_{pi} - w - y_i \alpha + x_i \beta \tag{A-39}$$

(**CYL_MC.M**) L'optimisation, interne à la fonction, consiste à minimiser la somme des carrés des écarts corrigés $W = \Sigma(e_{ci}^2 + e_{pi}^2)$, étant donné l'orthogonalité de e_{ci} et de e_{pi}. Une solution linéaire s'obtient par la méthode de Gauss. On reconnaît dans ce système les partitions qui correspondent à la résolution du cercle 2D, à la résolution du plan, à la prise en compte du couplage qu'introduisent les angles α et β :

$$\begin{bmatrix} 1 & c_1 & s_1 & 0 & -s_1 z_1 & c_1 z_1 \\ 1 & c_2 & s_2 & 0 & -s_2 z_2 & c_2 z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & c_N & s_N & 0 & -s_N z_N & c_N z_N \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_1 & -x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_2 & -x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_N & -x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r \\ u \\ v \\ w \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{c1} \\ \xi_{c2} \\ \vdots \\ \xi_{cN} \\ \xi_{p1} \\ \xi_{p2} \\ \vdots \\ \xi_{pN} \end{bmatrix} \tag{A-40}$$

$$\underset{(N\times 5)}{\boldsymbol{J}} \quad \underset{(5\times 1)}{\boldsymbol{\tau}} \quad = \quad \underset{(N\times 1)}{\boldsymbol{\xi}} \tag{A-41}$$

que solutionne

$$\boldsymbol{\tau} = \left[(\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J})^{-1} \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \right] \boldsymbol{\xi} \tag{A-42}$$

d'où, par produit de la matrice symbolique transposée avec elle-même,

$$\begin{bmatrix} N & \Sigma c_i & \Sigma s_i & 0 & -\Sigma s_i z_i & \Sigma c_i z_i \\ \Sigma c_i & \Sigma c_i^2 & \Sigma s_i c_i & 0 & -\Sigma s_i c_i z_i & \Sigma c_i^2 z_i \\ \Sigma s_i & \Sigma s_i c_i & \Sigma s_i^2 & 0 & -\Sigma s_i^2 z_i & \Sigma s_i c_i z_i \\ 0 & 0 & 0 & N & \Sigma y_i & -\Sigma x_i \\ -\Sigma s_i z_i & -\Sigma s_i c_i z_i & -\Sigma s_i^2 z_i & \Sigma y_i & \Sigma(s_i^2 z_i^2 + y_i^2) & -\Sigma(s_i c_i z_i^2 + x_i y_i) \\ \Sigma c_i z_i & \Sigma c_i^2 z_i & \Sigma s_i c_i z_i & -\Sigma x_i & -\Sigma(s_i c_i z_i^2 + x_i y_i) & \Sigma(c_i^2 z_i^2 + x_i^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r \\ u \\ v \\ w \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma \xi_{ci} \\ \Sigma c_i \xi_{ci} \\ \Sigma s_i \xi_{ci} \\ \Sigma \xi_{pi} \\ -\Sigma(s_i z_i \xi_{ci} - y_i \xi_{pi}) \\ \Sigma(c_i z_i \xi_{ci} - x_i \xi_{pi}) \end{bmatrix}$$

(A-43)

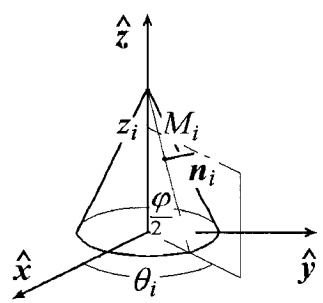
(**CERIMC3D.M**) Même critère d'optimisation interne, mais l'ajustement s'avère trop important pour que l'approximation linéaire produise un résultat acceptable. L'approximation est insérée dans une boucle Gauss-Newton. Au j^e calcul, la solution linéaire de la matrice colonne des inconnues $\boldsymbol{\tau}_j = [\delta r_j \;\; u_j \;\; v_j \;\; w_j \;\; \alpha_j \;\; \beta_j]^T$ s'ajoute au cumulatif des calculs précédents, avec un amortissement ρ_j calculé sur la partie rotation : Plus les rotations sont grandes, moins elles sont commutatives. La norme de $[\beta_j \;\; -\alpha_j \;\; 1]^T$ est près de l'unité tant que les rotations demeurent petites. Elle « mesure » l'ampleur excessive des rotations et en atténue les répercussions par $\rho_j = (\beta_j^2 + \alpha_j^2 + 1)^{-½}$,

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{cum},k} = \sum_{j=1}^{k} \rho_j \boldsymbol{\tau}_j \qquad \text{(A-44)}$$

Un nouvel ensemble de coordonnées est produit à partir de l'inverse de la transformation homogène représentative de $\boldsymbol{\vartheta}_{\text{cum},k}$. Le processus s'arrête lorsque la nouvelle contribution $\boldsymbol{\tau}_j$ devient négligeable.

A.6. Cône géométrique associé à un élément présumé conique*

(Programmes Matlab `CONE_PARF.M, CONE_MC.M, CONIMC.M`)



Dans le repère nominal $\{G_o\}$ de l'élément géométrique, l'axe du cône est confondu à l'axe Z du repère. L'origine O de $\{G_o\}$ est dictée par le contexte spécifique au problème. Les coordonnées palpées sont initialement données par rapport au repère de palpage $\{P\}$. L'inverse de la transformation homogène qui exprime $\{G_o\}$ dans $\{P\}$ est la transformation qui recalera dans $\{G_o\}$ des coordonnées connues dans $\{P\}$. ${}^{P}_{G_o}\boldsymbol{T}$, la transformation

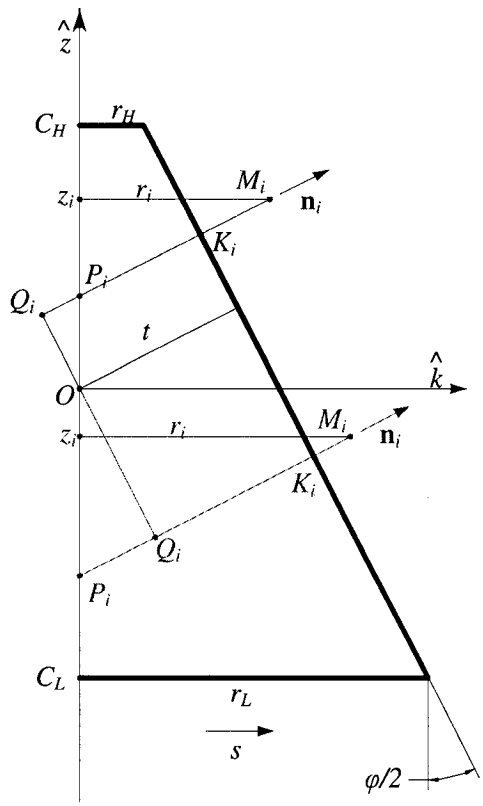
* Développé par Ziad Ben Amor dans le cadre d'un travail rémunéré, 2001.

homogène qui exprime $\{G_o\}$ dans $\{P\}$, s'obtient par palpage et analyse : palpage des plans extrêmes qui limitent la hauteur du cône en trois points, palpage d'un cercle à la hauteur approximative d'un plan de jauge, analyse du dessin de définition et du montage de la pièce.

Dans le repère nominal, $\boldsymbol{D} = [u \;\; v \;\; w]^T$; $\boldsymbol{R} = [\alpha \;\; \beta \;\; 0]^T$;

Plutôt que déterminer le cône par $\boldsymbol{D} = [u \;\; v \;\; w]^T$, le cône sera déterminé par $\boldsymbol{D} = [u \;\; v \;\; 0]^T$ et t où u et v sont respectivement les déplacements selon les axes X et Y de l'intersection de l'axe du cône avec le plan XY par rapport à l'origine et t la distance minimale entre la surface du cône et l'origine O (Voir figure A-1).

Figure A-1 : Coupe axiale du cône



$\boldsymbol{OM}_i = [r_i c_i \;\; r_i s_i \;\; z_i]^T = [x_i \;\; y_i \;\; z_i]^T$;

$r_i = (x_i^2 + y_i^2)^{½}$; $\boldsymbol{n}_i = [c_{\varphi/2} c_i \;\; c_{\varphi/2} s_i \;\; s_{\varphi/2}]^T = [c_{\varphi/2} x_i/r_i \;\; c_{\varphi/2} y_i/r_i \;\; s_{\varphi/2}]^T$.

$\varphi/2 = \text{atan}((r_L - r_H) / H)$

$t = r_L c_{\varphi/2} - C_L s_{\varphi/2}$

$$\boldsymbol{OP}_i = z_i - r_i \tan_{\varphi/2} \qquad \text{(A-45)}$$

En projetant sur $\boldsymbol{n_i}$ on a :

$$\boldsymbol{P_iM_i} = r_i / c_{\varphi/2} \tag{A-46}$$

$$\boldsymbol{P_iQ_i} = -\boldsymbol{OP_i}\, s_{\varphi/2} = -(z_i - r_i \tan_{\varphi/2})\, s_{\varphi/2} \tag{A-47}$$

$$\boldsymbol{Q_iK_i} = t \tag{A-48}$$

Donc:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K_iM_i} &= \boldsymbol{K_iQ_i} + \boldsymbol{Q_iP_i} + \boldsymbol{P_iM_i} \\ &= \boldsymbol{P_iM_i} - \boldsymbol{P_iQ_i} - \boldsymbol{Q_iK_i} \\ &= r_i / c_{\varphi/2} + (z_i - r_i \tan_{\varphi/2})\, s_{\varphi/2} - t \\ &= r_i\, c_{\varphi/2} + z_i\, s_{\varphi/2} - t \end{aligned} \tag{A-49}$$

d'où

$$\xi_i = r_i\, c_{\varphi/2} + z_i\, s_{\varphi/2} - t \tag{A-50}$$

Cet écart est dû au fait que le cône associé

- ◊ a une distance vraie $t_{(v)}$ différente de la distance théorique $t_{(th)}$;
- ◊ a un axe qui ne passe pas vraiment par l'origine du repère de calcul, il en est décalé par une translation u le long de l'axe X et une translation v selon Y ;
- ◊ a un axe qui n'est pas vraiment parallèle à l'axe Z du repère de calcul, il en est décalé par une rotation α autour de l'axe X et une rotation β selon Y.

comme un déplacement s du cône affecte $\boldsymbol{K_iM_i}$ de $s\, c_{\varphi/2}$:

$$\boldsymbol{K_iM_i} = r_i\, c_{\varphi/2} + z_i\, s_{\varphi/2} - t - u\, c_i\, c_{\varphi/2} - v\, s_i\, c_{\varphi/2} \tag{A-51}$$

$$[\boldsymbol{OM}_i\times][\boldsymbol{n}_i]\bullet\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}0 & -z_i & y_i\\ z_i & 0 & -x_i\\ -y_i & x_i & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{x_i}{r_i}c_{\varphi/2}\\ \frac{y_i}{r_i}c_{\varphi/2}\\ s_{\varphi/2}\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{-y_iz_i}{r_i}c_{\varphi/2}+y_is_{\varphi/2}\\ \frac{x_iz_i}{r_i}c_{\varphi/2}-x_is_{\varphi/2}\\ 0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ 0\end{bmatrix} \qquad \text{(A-52)}$$

$$=\alpha\left(\frac{-y_iz_i}{r_i}c_{\varphi/2}+y_is_{\varphi/2}\right)+\beta\left(\frac{x_iz_i}{r_i}c_{\varphi/2}-x_is_{\varphi/2}\right)$$

Sur une petite variation de $\varphi' = \varphi + \delta\varphi$

$$\cos((\varphi+\delta\varphi)/2) = c_{\varphi/2}\ c_{\delta\varphi/2} - s_{\varphi/2}\ s_{\delta\varphi/2} \approx c_{\varphi/2} - \delta\varphi\ s_{\varphi/2} \qquad \text{(A-53)}$$

$$\sin((\varphi+\delta\varphi)/2) = s_{\varphi/2}\ c_{\delta\varphi/2} + c_{\varphi/2}\ s_{\delta\varphi/2} \approx s_{\varphi/2} - \delta\varphi\ c_{\varphi/2} \qquad \text{(A-54)}$$

$$e_i \approx \xi_i - \frac{x_i}{r_i}c_{\varphi/2}u - \frac{y_i}{r_i}c_{\varphi/2}v - [\boldsymbol{OM}_i\times][\boldsymbol{n}_i]\bullet\boldsymbol{R} - \frac{1}{2}(r_is_{\varphi/2} - z_ic_{\varphi/2})\delta\varphi - \delta t$$

$$\approx \xi_i - \frac{x_i}{r_i}c_{\varphi/2}u - \frac{y_i}{r_i}c_{\varphi/2}v - \alpha\left(-\frac{y_iz_i}{r_i}c_{\varphi/2}+y_is_{\varphi/2}\right) - \beta\left(\frac{x_iz_i}{r_i}c_{\varphi/2}-x_is_{\varphi/2}\right) \qquad \text{(A-55)}$$

$$-\frac{1}{2}(r_is_{\varphi/2} - z_ic_{\varphi/2})\delta\varphi - \delta t$$

(**CON_MC.M**) L'optimisation, interne à la fonction, consiste à minimiser la somme des carrés des écarts corrigés $W = \Sigma(e_i)^2$ une solution linéaire s'obtient par la méthode de Gauss ;

$$
\begin{aligned}
Ju_i &= \frac{x_i}{r_i} c_{\varphi/2} \\
Jv_i &= \frac{y_i}{r_i} c_{\varphi/2} \\
J\alpha_i &= -\frac{y_i z_i}{r_i} c_{\varphi/2} + y_i s_{\varphi/2} \\
J\beta_i &= \frac{x_i z_i}{r_i} c_{\varphi/2} - x_i s_{\varphi/2} \\
J\varphi_i &= \frac{1}{2}\left(r_i s_{\varphi/2} - z_i c_{\varphi/2}\right) \\
Jt_i &= +1
\end{aligned}
\tag{A-56}
$$

Rappelons que :

$$\xi_i = r_i\, c_{\varphi/2} + z_i\, s_{\varphi/2} - t \tag{A-57}$$

$$r_i = (x_i^2 + y_i^2)^{1/2} \tag{A-58}$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & J\varphi_1 & Ju_1 & Jv_1 & J\alpha_1 & J\beta_1 \\
1 & J\varphi_2 & Ju_2 & Jv_2 & J\alpha_2 & J\beta_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & J\varphi_N & Ju_N & Jv_N & J\alpha_N & J\beta_N
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\delta t \\ \delta\varphi \\ u \\ v \\ \alpha \\ \beta
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_N
\end{bmatrix}
\tag{A-59}
$$

$$
\underset{(N\times 6)}{\mathbf{J}} \quad \underset{(6\times 1)}{\boldsymbol{\tau}} \quad = \quad \underset{(N\times 1)}{\boldsymbol{\xi}}
\tag{A-60}
$$

que solutionne

$$\boldsymbol{\tau} = \left[(\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J})^{-1}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\right]\boldsymbol{\xi} \tag{A-61}$$

(**CONIMC.M**) Même critère d'optimisation interne, mais l'ajustement s'avère trop important pour que l'approximation linéaire produise un résultat acceptable.

L'approximation est insérée dans une boucle Gauss-Newton. Au j^e calcul, la solution linéaire de la matrice colonne des inconnues $\tau_j = [\delta t_j \ \delta\varphi_j \ \ u_j \ \ v_j \ \ \alpha_j \ \ \beta_j]^T$ s'ajoute au cumulatif des calculs précédents.

$$\tau_{\text{cum},k} = \sum_{j=1}^{k} \tau_j \tag{A-62}$$

Un nouvel ensemble de coordonnées est produit à partir de l'inverse de la transformation homogène représentative de $\vartheta_{\text{cum},k}$. Le processus s'arrête lorsque la nouvelle contribution τ_j devient négligeable.