



Titre: L'utilisation des schémas de Riemann pour la solution des équations
Title: de Saint-Venant

Auteur: Georges Williams Tchamen
Author:

Date: 2006

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Williams Tchamen, G. (2006). L'utilisation des schémas de Riemann pour la
Citation: solution des équations de Saint-Venant [Thèse de doctorat, École Polytechnique
de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/7744/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/7744/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:** René Kahawita
Advisors:

Programme: Non spécifié
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

L'UTILISATION DES SCHÉMAS DE RIEMANN POUR LA SOLUTION
DES
ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT

GEORGES WILLIAMS TCHAMEN
DÉPARTEMENT DES GÉNIES CIVIL,
GÉOLOGIQUE ET DES MINES
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)
(GÉNIE CIVIL)
MARS 2006



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 978-0-494-17984-0

Our file Notre référence

ISBN: 978-0-494-17984-0

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.


Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

L'UTILISATION DES SCHÉMAS DE RIEMANN POUR LA
SOLUTION DES
ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT

Présentée par: TCHAMEN Georges Williams

En vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiae Doctor

A été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. ROBILLARD, Luc Ph.D., président

M. KAHAWITA René, Ph.D, membre et directeur de recherche

M. LECLERC Guy, Ph.D., membre

M. SOULAÏMANI Azzeddine, Ph.D., membre

DÉDICACE

À

Noémie Wandji,

Cédric Tcham,

Nana,

Ma'a Wandji,

Papa Tanji

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma gratitude à mon employeur, Hydro-Québec, et particulièrement mon chef d'unité Phuong H. Nguyen qui a accepté de soutenir financièrement mon projet et qui n'a pas ménagé ses encouragements.

Mon chef d'équipe Tung T. Quach aura beaucoup contribué à me motiver et à me convaincre de la pertinence de mener à terme un tel projet. Finalement, comme pour mon travail de maîtrise, la contribution de Monsieur Quach aura été multiple, financière en facilitant le soutien d'Hydro-Québec, scientifique par de nombreuses discussions et suggestions très essentielles, et personnelle par des encouragements qui ont été prodigués aussi bien dans le cadre professionnel que privé.

Le professeur René Kahawita qui a dirigé cette thèse est devenu au fil des années une figure paternelle et un mentor dans mon parcours scientifique. Si quelque qualité est jamais reconnue au présent travail, une partie considérable du mérite lui en reviendrait. Au contact de son érudition scientifique, ma culture s'est beaucoup enrichie. Nos relations ont depuis dépassé le cadre universitaire pour s'inscrire également dans la sphère privée et c'est pour moi un honneur. Je lui resterai à jamais redevable de quelque accomplissement universitaire et même personnel.

Ma famille à la naissance, Maman Wandji, mon frère Bruno, mes sœurs Brigitte et Albertine, Maman Rose, m'ont beaucoup encouragé à mener à terme ce projet. Mon ami de toujours, et frère par adoption Hugues par son intérêt toujours renouvelé à l'évolution du projet m'a rappelé qu'il fallait le terminer.

Finalement, mon épouse Nana aura su être la partenaire qui m'a apporté la sérénité et la détermination pour franchir les derniers milles qui, comme souvent dans une épreuve de longue haleine, sont les plus éprouvants. Cédric et Noémie ont constitué, probablement sans le savoir, la motivation essentielle à aller jusqu'au bout.

RÉSUMÉ

Le but de la présente recherche est d'évaluer l'adéquation des schémas de la famille des schémas de Riemann à la modélisation des écoulements à surface libre dans les cas complexes où le domaine comporte des zones d'inondation ou d'assèchement (d'exondation) potentielles ainsi que des zones où le régime d'écoulement est torrentiel. Ce type d'écoulement peut apparaître dans les vallées d'inondation d'une rupture de barrage ou lors de la propagation d'un tsunami dans les zones côtières.

La modélisation des écoulements à surface libre dans les domaines comportant des zones sèches qui se recouvrent, ou des étendues mouillées qui s'assèchent, durant la simulation constitue un défi de taille. Lorsque ces domaines comportent également une topographie complexe ainsi que des zones où l'écoulement se situe en régime torrentiel, plusieurs modèles existants deviennent instables ou peu fiables.

Les schémas de Riemann constituent une classe de schémas numériques particulièrement bien adaptés aux systèmes de nature hyperbolique. Ces schémas ont été appliqués avec beaucoup de succès aux équations de Navier Stokes en dynamique de gaz depuis le début des années 80. L'application de cette classe de schémas aux équations de Saint-Venant date du début des années 90. Les schémas de Riemann sont robustes et leur schématisation est suffisamment simple et ancrée dans la physique des phénomènes représentés pour faciliter l'analyse des cas complexes.

Ces schémas utilisent la stratégie de différentiation décentrée vers l'amont pour chacune des ondes élémentaires. Cette stratégie dote ces schémas de beaucoup de robustesse notamment lors du changement du régime d'écoulement. Ces schémas qui utilisent les caractéristiques des ondes élémentaires permettent une modélisation très cohérente avec la nature hyperbolique des équations de base, et offre un cadre très intelligible pour l'analyse des difficultés numériques (instabilité, non-convergence) qui peuvent subvenir. La non-linéarité des équations est également prise en compte dans ces schémas en sorte d'assurer une bonne résolution des ressauts hydrauliques.

Mais, les techniques de base pour ces schémas ont été développées pour un problème de Riemann homogène avec les termes différentiels sous forme divergente. Les équations de Saint-Venant ne respectent pas la forme divergente stricte, notamment en ce qui concerne le terme qui englobe les forces de gravité. Plusieurs auteurs ont choisi de décomposer ce terme en une composante de pression, de forme divergente, et une composante de variation de la géométrie du cours d'eau, de forme non divergente, et qui constitue un terme source. Cette décomposition produit une forme qui se prête bien à l'utilisation de schémas classiques de la classe de Riemann. Il reste néanmoins à intégrer les termes source de géométrie et de friction de manière cohérente avec le schéma utilisé pour les termes différentiels sous forme divergente. Les propositions recensées jusqu'ici produisent des résultats satisfaisants juste pour une catégorie limitée d'écoulements dans des canaux aux formes régulières, ou des écoulements à variation très lentes dans des cours d'eau naturels. Pour des écoulements du type rupture de barrage dans une vallée naturelle avec des pentes escarpées, les modèles numériques existants éprouvent soit des problèmes de stabilité, soit nécessitent l'utilisation de maillage si dense que le temps de calcul devient prohibitif pour une utilisation pratique.

Il est proposé dans la présente étude de réexaminer chaque terme, notamment les termes de gravité et de friction pour s'assurer que la méthode d'intégration qui y est proposée conserve les propriétés de stabilité du schéma homogène tout en restant fidèle à la physique des phénomènes en jeu.

Le terme de friction représente la dissipation d'énergie ou de quantité de mouvement par frottement sur le lit et les berges de la rivière et peut également englober les pertes par turbulence. Ces effets sont de nature réactive dans le sens qu'ils ne peuvent initier un mouvement, mais n'existent que pour atténuer la vitesse et l'énergie d'un écoulement en cours. Il sera prouvé que l'intégration de ce terme selon un schéma implicite en temps respecte bien son caractère réactif, et élimine certaines instabilités qui pourraient se manifester en cas d'utilisation d'un schéma explicite.

Concernant le terme de gravité, l'originalité de la présente étude repose sur la proposition de le traiter sans avoir recours à la décomposition usuelle en terme de pression et terme de pente du lit. Bien que le terme ne soit pas sous forme de conservation, une proposition est faite qui l'intègre de manière cohérente avec les autres termes de forme divergente du schéma de Riemann. Mais la clé ultime de la cohérence d'ensemble du schéma proposé réside dans le choix des variables utilisées comme valeurs moyennes, sur chaque cellule élémentaire du maillage, ou comme états initiaux des problèmes de Riemann aux frontières des cellules.

Les tests de validation proposés par le groupe d'étude CADAM, ainsi que par plusieurs autres auteurs, ont été utilisés pour vérifier la viabilité de nos propositions. Le cas test d'un lac au repos avec bathymétrie irrégulière permet de vérifier que le(s) terme(s) de gravité et les moyennes utilisées sont traités de manière cohérente avec la physique et que le schéma ne génère pas d'écoulement artificiel. Le choix judicieux des moyennes de Riemann permet de respecter la physique de ce cas sans recourir à des traitements ad hoc de termes pour annuler des écoulements malencontreusement provoqués par les termes homogènes des équations. Deux autres tests ont été effectués avec un canal comportant un seuil dans son lit. Le premier en régime fluvial a permis de vérifier en plus de la conservation de masse, quantité de mouvement et énergie, la symétrie du schéma proposé. Le second test en régime transcritique permet la position et la hauteur du ressaut avec la conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Ce test illustre une des situations où les principes de conservation d'énergie d'une part, et de quantité de mouvement d'autre part, ne conduisent pas à la même solution. L'utilisation du principe de la conservation de quantité de mouvement qui est recommandée dans les textes fondamentaux produit des schémas moins robustes que ceux qui utilisent la conservation d'énergie. Le schéma proposé utilise le schéma avec un traitement de ressaut qui conserve la quantité de mouvement introduite dans un système qui globalement conserve l'énergie. Cette combinaison s'est avérée être une dont les solutions approximent parfaitement la solution de conservation de mouvement.

En ce qui concerne la modélisation des bancs couvrants/découvrants, il est proposé que les schémas utilisés vérifient la propriété dite de profondeur positive. De tels

schémas prédisent automatiquement des profondeurs d'eau non négatives tant que le pas de temps utilisé se situe à l'intérieur du domaine de stabilité. Nous proposons une adaptation à l'hydraulique d'un schéma initialement proposée par van Leer pour la dynamique des gaz. L'application de ce schéma à des cas d'écoulements de rupture de barrage sur des topographies complexes a montré qu'il n'est pas nécessaire de mettre en place une procédure spéciale pour le traitement des bancs courants/découvrants si le schéma utilisé est à profondeur positive.

Les tests effectués avec les schémas de Riemann à profondeur positive ont montré, dans les zones d'inondation avec topographie complexe, que le pas de temps est rapidement réduit à des valeurs trop basses pour être d'utilité pratique. L'analyse effectuée suggère que le choix des variables de la forme divergente, profondeur et débit, explique en grande partie cette anomalie. Une sélection adéquate des variables, notamment profondeur et vitesse, permet de maintenir le pas de temps à des valeurs suffisantes pour effectuer des simulations pratiques dans des durées raisonnables.

Il ressort de l'analyse effectuée que les schémas proposés sont robustes et présentent des pas de temps suffisamment élevés, même dans leur version explicite, pour être très utiles en pratique.

ABSTRACT

Climatologists have warned that the significant increase in global warming will result in strong variability and extremes in precipitation patterns, a prediction that is being borne out at the present time. This implies that reservoirs equipped with spillways designed on the basis of maximum expected flood return periods ("maximum expected flood") evaluated from an analysis of historical hydrological data could prove to be dangerously inadequate to safely route extreme inflows. This combined with the advancing age of retention structures will result in an increased frequency of dam failures.

The simulation of surge wave propagation following a dam-break in a complex valley environment has become an indispensable tool in dam safety and risk assessment studies. A reliable numerical model will allow the engineer to estimate the downstream zone that will be flooded, the time of arrival of the primary surge as well as the maximum water levels and discharge that may be expected. Ultimately, early warning systems and emergency evacuation procedures may be designed based on the model results.

The objectives of the present research is to investigate the adequacy of Riemann solvers for the simulation of such free surface flows, i.e. rapidly varying flows with moving boundaries in a geometrically complex domain. These flows occur in valleys located downstream of a dam break or in coastal areas that may be exposed to a tsunami wave.

Modeling free surface flows over domains with moving boundaries including wetting and drying areas is a challenging task. When these domains include torrential flows over complex topography the task is more difficult to handle and many existing numerical models fail to maintain numerical stability and precision.

Riemann solvers are a class of schemes suitable for modeling hyperbolic systems and have been used in gas dynamics applications for the last twenty five years. Application to the St. Venant shallow water wave equations is rather more recent and progress appears to have been made within the last fifteen years or so. These schemes are robust (an essential requirement for transcritical flows) with their expressions being physically-based and simple enough to facilitate the analyses of complex cases. They are therefore ideal candidates for high speed hydraulic free-surface flows.

Riemann solvers recognize the wave structure and signal propagation properties of the hyperbolic system formed by the Saint-Venant equations. For each wave family, proper upwinding is applied to assure stability. The non-linear character of each family is also taken into account for proper resolution of shock waves (hydraulic jumps). However, Riemann solver based schemes in their initial form were designed to solve the homogeneous Riemann problem for hyperbolic systems written in conservation form. The complete Saint-Venant equation system is non-homogeneous. The incorporation of source terms due to friction and bed slope (an added non-trivial complication) should be done in accordance with the scheme used for the homogeneous part.

The one dimensional form of the Saint-Venant Equation does not correspond to a conservative formulation due particularly to the expression of the gravity force. By splitting this term between a pressure difference term, which is amenable to a conservative formulation, and a bed slope source term, it is possible to apply various numerical schemes belonging to the class of Riemann solvers. The treatment of the source term due to geometric variation however, is not an easy task particularly for the case of complex topography. The present analysis will show that many propositions advanced to treat these terms, found in the literature fail for particular cases.

For the simulation of areas subjected to alternate wetting and drying, we propose a positive depth property under the form of a modified Courant stability condition which ensures that the scheme will not generate a non-physical negative depth (area, volume or mass) as long as the time-step respects the stability bound. A scheme verifying the positive depth property is proposed. This scheme is an adaptation of the van Leer scheme

used in gas dynamics applied to the Saint-Venant Equation. The application of this scheme to the simulation of surge wave propagation following a dam break indicates that the development of special code to handle wetting and drying is unnecessary.

Tests performed with depth positive Riemann solvers show that over complex topography, time steps are sometimes reduced to values that are too small to be of any practical interest. An analysis of this problem reveals that a proper choice of state variables for the system of conservation laws can cure this difficulty.

The present research shows that the proposed depth positive Riemann solver is robust and though explicit, allows time steps large enough to suit the practical modeling of flood waves over complex topography.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ.....	vi
ABSTRACT	x
TABLE DES MATIÈRES	xiii
LISTE DES FIGURES	xvii
LISTE DES TABLEAUX.....	xxii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION.....	1
1.1 Les équations de Saint-Venant.....	1
1.2 Les schémas de Riemann	2
1.3 La technique des volumes finis.....	2
1.4 Schémas de Riemann en hydraulique : revue de littérature	4
1.4.1 Traitement décentré des termes sources.....	5
1.4.2 Traitement centré des termes sources.....	6
1.5 Contributions de la présente thèse	6
1.6 Organisation du document	7
CHAPITRE 2 ÉQUATIONS DE BASE EN UNE DIMENSION	10
2.1 Les équations de base.....	10
2.2 Quantité de mouvement versus énergie	11
2.3 Propriétés caractéristiques des équations de Saint-Venant	14
2.4 Forme divergente des équations de base.....	16
CHAPITRE 3 LE PROBLÈME DE RIEMANN EN HYDRAULIQUE	19
3.1 Introduction.....	19
3.2 Le problème de rupture de barrage théorique	19

3.2.1	Rupture de barrage avec lame d'eau à l'aval	20
3.2.2	Rupture de barrage avec lit aval sec	23
3.3	Étude analytique des caractéristiques de la forme homogène du système de Saint-Venant 25	
3.3.1	Onde de détente.....	27
3.3.2	Onde de choc.....	28
3.4	Solution au problème de rupture de barrage théorique généralisé.....	29
3.4.1	Onde de détente suivie d'une onde de choc	31
3.4.2	Onde de choc suivie d'une onde de détente	31
3.4.3	Deux ondes de choc	31
3.4.4	Deux ondes de détente	31
3.4.5	Procédure itérative de solution.....	32
3.5	Solution du problème de rupture de barrage théorique dans un canal en pente.....	32
3.6	Conclusion	34
CHAPITRE 4 MODÉLISATION NUMÉRIQUE UNIDIMENSIONNELLE.....		36
4.1	Introduction.....	36
4.2	Technique des volumes finis.....	36
4.3	Solution du problème de Riemann dans la formule de volumes finis.....	41
4.3.1	Propriété de cohérence	41
4.3.2	Propriété de conservation.....	42
4.4	Schéma de débit SRD11	43
4.5	Schéma de vitesse SRD12 à conservation de charge.....	45
4.6	Schéma de débit SRD13	46
4.7	Schéma de débit/vitesse SRD14	48
4.8	Intégration du terme source de frottement	49
4.9	Détermination des conditions aux limites.....	51
4.9.1	Les caractéristiques pour la détermination du nombre de conditions à imposer....	51
4.9.2	Écoulement fluvial	51
4.9.3	Écoulement torrentiel.....	52
4.10	Traitement numérique des conditions aux limites	52
4.10.1	Cellule fictive.....	52
4.10.2	Imposition directe du flux	53

CHAPITRE 5 RÉSULTATS DE LA MODÉLISATION

UNIDIMENSIONNELLE 54

5.1	Introduction.....	54
5.2	Plan d'eau au repos	55
5.3	Écoulement fluvial dans un canal rectangulaire comportant un seuil parabolique en son lit	58
5.4	Ressaut hydraulique dans un canal rectangulaire comportant un seuil parabolique en son lit	62
5.5	Rupture de barrage dans un canal rectangulaire sans friction avec fond horizontal et lit aval sec	64
5.6	Rupture de barrage dans un canal rectangulaire avec fond horizontal sans friction et lit mouillé.....	66
5.7	Remplissage de la galerie d'amenée de Manic 5 P.A.	68
5.8	Propagation d'onde de crue ou de rupture dans les vallées de rivières du Québec.....	75
5.8.1	Rupture de la digue droite du barrage Bourque par temps de crues extrêmes	75
5.8.2	Rupture du barrage SM3 en conditions normales	84
5.9	Rupture du barrage de Malpasset.....	90
5.10	Conclusions	98

CHAPITRE 6 ÉQUATIONS DE BASE EN DEUX DIMENSIONS..... 100

6.1	Système de Saint-Venant	100
6.1.1	Equations de base	100
6.1.2	Forme divergente	102
6.1.3	Forme non divergente	102
6.2	Caractéristiques du système de Saint-Venant	103
6.2.1	Onde de détente.....	105
6.2.2	Onde de choc.....	105
6.2.3	Discontinuité de contact.....	106
6.3	Le problème de Riemann en deux dimensions	106

CHAPITRE 7 MODÉLISATION NUMÉRIQUE BIDIMENSIONNELLE 108

7.1	Technique des volumes finis.....	108
7.1.1	Maillage triangulaire non structuré	109
7.1.2	Algorithme général des schémas de Riemann en deux dimensions	110
7.2	Schéma SRD21 (Profondeur positive).....	114

7.3	Schéma SRD22	115
7.3.1	Transformation de débit spécifique à vitesse	118
7.3.2	Problème du front sec.....	119
7.3.3	Problème du plan d'eau au repos de niveau constant.....	120
7.4	Traitement des conditions aux limites	121
7.4.1	L'aide de la théorie des caractéristiques.....	121
7.4.2	Extrapolation de variables conservatives	123
7.4.3	Imposition directe des flux.....	124

CHAPITRE 8 RÉSULTATS DE LA MODÉLISATION NUMÉRIQUE BIDIMENSIONNELLE 127

8.1	Introduction.....	127
8.2	Plan d'eau au repos constant.....	127
8.3	Rupture de barrage dans un canal horizontal avec friction	131
8.4	Rupture de barrage dans un canal en pente.....	134
8.5	Écoulement fluvial dans un canal avec un seuil parabolique.....	138
8.6	Ressaut dans un canal avec un seuil parabolique.....	138
8.7	Mouvement oscillatoire d'une vague sur plage en pente	142
8.8	Modèle expérimental de la vallée de Toce.....	145
8.9	Rupture du barrage principal de LG-4	151

CHAPITRE 9 CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS..... 156

9.1	Conclusions.....	156
9.2	Recommandations.....	159

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES..... 161

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	Définition des variables sur le schéma d'un tronçon de rivière.	13
Figure 3.1	Rupture de barrage théorique sur un lit horizontal avec tronçon aval mouillé. État initial et solution.	22
Figure 3.2	Rupture de barrage théorique sur un lit horizontal avec tronçon aval sec. État initial et solution.	24
Figure 4.1	Partition du domaine d'étude en vue de la modélisation par volumes finis.	40
Figure 5.1a	Plan d'eau immobile sur bathymétrie complexe. Bathymétrie.	56
Figure 5.1b	Plan d'eau immobile sur bathymétrie complexe. Profil longitudinal de largeur.	56
Figure 5.1c	Plan d'eau immobile sur bathymétrie complexe. Niveau après 1000 secondes simulées.	57
Figure 5.1d	Plan d'eau immobile sur bathymétrie complexe. Débit après 1000 secondes simulées.	57
Figure 5.2a	Écoulement fluvial sur un seuil parabolique. Profils du fond et de la surface libre.	60
Figure 5.2b	Écoulement fluvial sur un seuil parabolique. Profil de la surface libre. Agrandissement.	60
Figure 5.2c	Écoulement fluvial sur un seuil parabolique. Profil du débit.	61
Figure 5.2d	Écoulement fluvial sur un seuil parabolique. Profil de la vitesse. Agrandissement.	61
Figure 5.3a	Ressaut dans un canal avec seuil parabolique. Profil de la surface libre.	63
Figure 5.3b	Ressaut dans un canal avec seuil parabolique. Profil de la vitesse.	63
Figure 5.4a	Rupture de barrage dans un canal horizontal avec fond aval sec. Profil de la surface libre à $t=20$ secondes.	65

Figure 5.4b	Rupture de barrage dans un canal horizontal avec fond aval sec. Profil de la vitesse à $t=20$ secondes	65
Figure 5.5a	Rupture de barrage dans un canal horizontal avec fond aval mouillé. Profil de la surface libre à $t=20$ secondes.	67
Figure 5.5b	Rupture de barrage dans un canal horizontal avec fond aval mouillé. Profil de la vitesse à $t=20$ secondes.	67
Figure 5.6a	Aménagement Manic 5 PA. Plan de localisation.	70
Figure 5.6b	Aménagement Manic 5 PA. Profil longitudinal et coupe transversale de la galerie d'amenée.	71
Figure 5.6c	Procédure recommandée de remplissage de la galerie de Manic 5 PA. Profil longitudinal du niveau.	72
Figure 5.6d	Procédure recommandée de remplissage de la galerie de Manic 5 PA. Profil longitudinal de la vitesse.	72
Figure 5.6e	Manœuvre accidentelle de remplissage de la galerie de Manic 5 PA. Profil longitudinal du niveau.	73
Figure 5.6f	Manœuvre accidentelle de remplissage de la galerie de Manic 5 PA. Profil longitudinal de la vitesse.	73
Figure 5.6g	Vitesse d'entraînement des galets.	74
Figure 5.7a	Rupture du barrage Bourque. Localisation du domaine d'étude.	77
Figure 5.7b	Rupture du barrage Bourque. Profil de la largeur au miroir.	78
Figure 5.7c	Rupture du barrage Bourque. Hydrogramme de rupture lors de la crue maximale probable.	79
Figure 5.7d	Rupture du barrage Bourque. Profils logitudinaux du niveau maximal.	80
Figure 5.7e	Rupture du barrage Bourque. Temps d'obtention du niveau maximal.	81
Figure 5.7f	Rupture du barrage Bourque. Hydrogrammes dans la rivière Outaouais au Pk50.4 en aval du barrage.	82
Figure 5.7g	Rupture du barrage Bourque. Limnigrammes dans la rivière Outaouais au Pk50.4 en aval du barrage.	83

Figure 5.8a	Rupture du barrage SM3. Localisation de la zone d'étude.	86
Figure 5.8b	Hydrogramme de rupture du barrage SM3 en conditions d'exploitation normale.	87
Figure 5.8c	Rupture du barrage SM3. Profils du niveau maximal.	88
Figure 5.8d	Rupture du barrage SM3. Temps du niveau maximal.	89
Figure 5.9a	Localisation du barrage de Malpasset, de la vallée de la rivière Reyran et de la localité de Fréjus.	93
Figure 5.9b	Barrage de Malpasset. En haut à gauche : avant rupture. En haut à droite : après rupture. En bas : brèche vue depuis l'aval.	94
Figure 5.9c	Barrage de Malpasset. Domaine à l'étude et localisation des points de mesure.	95
Figure 5.9d	Barrage de Malpasset. Comparaison du niveau maximal.	96
Figure 5.9e	Barrage de Malpasset. Comparaison du temps de propagation d'onde.	97
Figure 6.1	Schéma d'un plan d'eau. Définition des variables de modélisation bidimensionnelle.	101
Figure 7.1	Exemple d'un maillage triangulaire non structuré.	111
Figure 7.2	Schématisation de volume de contrôle associé aux nœuds du maillage triangulaire.	112
Figure 7.3	Schématisation du problème de Riemann à l'interface de deux volumes de contrôle adjacents.	113
Figure 8.1a	Plan d'eau immobile. Maillage et bathymétrie du domaine.	129
Figure 8.1b	Plan d'eau immobile. Profil de la surface libre après 1000 secondes.	130
Figure 8.1c	Plan d'eau immobile. Profil de vitesse après 1000 secondes.	130
Figure 8.2a	Rupture de barrage sur fond sec dans un canal horizontal avec friction (Chezy=40). Maillage du domaine.	132
Figure 8.2b	Rupture de barrage sur fond sec dans un canal horizontal avec friction (Chezy=40). Surface libre 20 secondes après la rupture.	133

Figure 8.2c	Rupture de barrage sur fond sec dans un canal horizontal avec friction (Chezy=40). Vitesse longitudinale 20 secondes après la rupture.	133
Figure 8.2d	Rupture de barrage sur fond sec dans un canal horizontal avec friction (Chezy=40). Débit 20 secondes après la rupture.	134
Figure 8.3a	Rupture de barrage sur fond sec dans un canal en pente sans friction. État initial de la surface libre.	136
Figure 8.3b	Rupture de barrage sur fond sec dans un canal en pente sans friction. Surface libre 20 secondes après la rupture.	136
Figure 8.3c	Rupture de barrage sur fond sec dans un canal en pente sans friction. Vitesse longitudinale 20 secondes après la rupture.	137
Figure 8.3d	Rupture de barrage sur fond sec dans un canal en pente sans friction. Débit 20 secondes après la rupture.	137
Figure 8.4a	Écoulement fluvial sur un seuil parabolique. Maillage et bathymétrie du domaine.	139
Figure 8.4b	Écoulement fluvial sur un seuil parabolique. Profil de la surface libre.	140
Figure 8.4c	Écoulement fluvial sur un seuil parabolique. Profil de la vitesse.	140
Figure 8.5a	Ressaut dans un canal avec un seuil parabolique. Profil de la surface libre.	141
Figure 8.5b	Ressaut dans un canal avec un seuil parabolique. Profil de la vitesse longitudinale.	141
Figure 8.6a	Mouvement oscillatoire de vague sur un talus de plage. Profil du fond du et surface libre à l'état initial.	143
Figure 8.6b	Mouvement oscillatoire de vague sur un talus de plage. Évolution du profil de la surface libre.	144
Figure 8.6c	Mouvement oscillatoire de vague sur un talus de plage. Évolution du profil de la surface libre. Agrandissement.	144
Figure 8.7a	Inondation de la vallée de Toce. Photographie du modèle physique.	146

Figure 8.7b	Inondation de la vallée de Toce. Photographie d'un des deux ponts intégrés au modèle.	146
Figure 8.7c	Inondation de la vallée de Toce. Bâtiments intégrés au modèle.	147
Figure 8.7d	Inondation de la vallée de Toce. Localisation des sondes de niveau.	147
Figure 8.7e	Inondation de la vallée de Toce. Hydrogramme et limnigrammes à l'amont du modèle.	148
Figure 8.7f	Inondation de la vallée de Toce. Maillage triangulaire du domaine.	148
Figure 8.7g	Inondation de la vallée de Toce. Limnigrammes simulés des sondes P1, P4, S6S, S6D et S8D.	149
Figure 8.7h	Inondation de la vallée de Toce. Limnigrammes simulés des sondes P9, P12, P18, P21 et P26.	149
Figure 8.8a	Rupture du barrage de LG-4. Maillage et topographie du domaine.	153
Figure 8.8b	Rupture du barrage de LG-4. Profil de la brèche dans le barrage principal.	154
Figure 8.8c	Rupture du barrage de LG-4. Hydrogrammes à la brèche.	154
Figure 8.8d	Rupture du barrage de LG-4. Limites d'inondation à l'aval du barrage.	155

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1	Conservation et variation de quantité à travers les ressauts pour les équations de Saint-Venant.	12
Tableau 2.2	Caractéristiques de la formulation à conservation de quantité de mouvement du système de Saint-Venant	15
Tableau 2.3	Caractéristiques de la formulation à conservation de charge du système de Saint-Venant	15
Tableau 3.1	Caractéristiques du système à conservation de quantité de mouvement dans un canal prismatique	27
Tableau 4.1	Principaux termes de la formule de Roe dans le schéma SRD11	44
Tableau 4.2	Principaux termes de la formule de Roe dans le schéma SRD12	46
Tableau 4.3	Principaux termes de la formule de Roe dans le schéma SRD13	48
Tableau 5.1	Écoulement fluvial au dessus d'un seuil parabolique. Comparaison de la valeur exacte aux valeurs simulées.	58
Tableau 5.2	Rupture de Malpasset. Comparaison du niveau maximal.	92
Tableau 5.3	Rupture de Malpasset. Comparaison du temps de propagation de l'onde.	92
Tableau 6.1	Caractéristiques du système bidimensionnel de Saint-Venant à conservation de quantité de mouvement	105
Tableau 7.1	Principaux termes de la formule de Roe dans le schéma SRD22	118
Tableau 8.1	Inondation de la vallée de Toce. Comparaisons du niveau maximal et du temps d'arrivée de l'onde.	150

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Plusieurs voix s'accordent pour constater que les changements climatiques sont une réalité à l'échelle de la planète entière et que le rythme de ces changements tend à s'accélérer ces dernières années. Ces changements vont de pair avec une multiplication d'événements naturels catastrophiques, tel que des pluies extrêmes (Saguenay 1996 au Québec, Canada, par exemple), tempêtes et ouragans (Tsunami en 2004, Ouragan Katrina en 2005).

Ces événements, dont la nature n'est pas nouvelle d'un point de vue historique, tendent à survenir avec une fréquence et une force qui surprennent et surpassent les mesures et infrastructures de protection et d'urgence des régions touchées.

Les inondations consécutives aux ruptures de barrages, aux Tsunamis ou aux pluies exceptionnelles peuvent être modélisés en utilisant le système d'équations d'eau de surface dites équations de Saint-Venant.

1.1 Les équations de Saint-Venant

Les équations de Saint-Venant sont utilisées pour représenter une large gamme d'écoulements de surface. Les écoulements en rivière, en canal, en zone estuarienne, autant que les phénomènes d'inondation sont dans la gamme représentée par le système de Saint-Venant. Ces équations sont donc appropriées pour effectuer la simulation de l'hydrodynamique d'événements catastrophiques du type inondations du Saguenay ou Tsunamis. De fait, ces équations dérivent du système le plus général pour les écoulements de fluides qui soit, les équations Navier-Stokes, auquel est adjoint l'hypothèse de distribution hydrostatique de la pression. Le domaine de la simulation numérique des équations de Navier-Stokes pour les gaz compressibles est très riche en propositions de schémas numériques. Ces équations ont en commun avec celles de Saint-Venant qu'elles sont de caractère hyperbolique ou du moins que le caractère hyperbolique est dominant par rapport aux autres. En réalité, il existe une similitude de forme entre les équations de Navier-Stokes compressibles et les

équations de Saint-Venant après avoir établi une identification entre la densité d'une part et la profondeur d'écoulement d'autre part.

1.2 Les schémas de Riemann

L'idée à la base des schémas de Riemann a été mise de l'avant par Godunov (1959 & 1979). Cette idée a été reprise dans les années 70 et a connu deux décennies de grande popularité durant les années 80 à 2000. Cette idée consiste à utiliser une solution exacte ou approximative d'un problème de Riemann local entre deux cellules élémentaires voisines du domaine de calcul pour représenter l'évolution dans le temps de la solution sur tout le domaine de calcul. Le problème de Riemann est un problème hyperbolique à valeurs initiales dans un domaine comportant une discontinuité entre deux états initialement constants. La solution à ce problème dépend des différentes familles d'ondes élémentaires constitutives du système ainsi que des états initiaux. Les équations de Saint-Venant tout comme celles de Navier-Stokes comportent des familles d'ondes linéaires et non linéaires. Ces dernières sont celles qui sont responsables de l'apparition de ressauts hydrauliques qui sont représentés comme des discontinuités mathématiques et constituent un véritable défi de représentation pour plusieurs familles de schémas. Les schémas de Riemann n'utilisent pas toute la solution des problèmes de Riemann locaux qui sont posés sur tout le domaine. En fait, seule la solution à l'interface entre deux cellules voisines est utilisée. Elle est incorporée sous forme de flux aux frontières dans une équation intégrale d'évolution de la solution sur un volume de contrôle élémentaire.

1.3 La technique des volumes finis

La technique des volumes finis repose sur l'utilisation d'une formulation intégrale des équations différentielles. Cette formulation intégrale peut s'écrire sur tout maillage, en fait toute partition, du domaine modélisé. La discrétisation du système différentiel s'effectue sur la base d'un tel maillage en exprimant la formulation intégrale du système sur chaque volume élémentaire. Selon cette représentation, la moyenne intégrale de chaque variable dépendante sur un volume élémentaire représente la valeur discrète

associée à ce volume.

Cette stratégie d'intégration de système différentiel est désignée technique des volumes finis par opposition à celles dites des différences finies ou celles des éléments finis. La distinction entre ces trois techniques n'est pas toujours facile à établir, surtout en une dimension spatiale. Toutefois, sur la base de ce qui a été mentionné plus tôt concernant les volumes finis, la technique des différences finies est caractérisée par une stratégie de discrétisation qui utilise les développements en série de Taylor autour de nœuds régulièrement espacés sur un maillage dont la forme de base est généralement rectangulaire (Roache 1972). De ce fait, l'adaptation de la discrétisation, surtout de son maillage de base, par différences finies pour un domaine de géométrie irrégulière n'est pas triviale et nécessite généralement de complexes transformations conformes.

La distinction entre volumes finis et éléments finis est plus ténue, surtout après les années 90 pendant lesquelles les idées et stratégie d'une technique ont été transférées à l'autre et vice versa. Il est facile de convenir que la technique des volumes finis se distingue des éléments finis dits de Galerkin (Zienkiewicz et Taylor 1989) par le fait d'utiliser la différenciation décentrée en fonction du signe de la vitesse de convection. La technique dite des éléments finis de Petrov-Galerkin (Hugues, Franca & Mallet 1986) utilise des fonctions tests non symétriques pour prendre en compte le sens et la direction de propagation des ondes élémentaires. Ainsi, certains schémas de la catégorie Petrov-Galerkin utilisent des adaptations de flux approximatifs de Riemann dans leurs fonctions tests. Dans la présente étude, il a été décidé de s'en tenir à une technique de volumes finis explicite en temps et dont la stratégie d'intégration en temps est plus simple qu'elle ne le serait en éléments finis de Petrov-Galerkin. Cela a permis de simplifier l'analyse des cas difficiles.

L'ouvrage de Hirsch (1988, 1990) en deux volumes constitue une excellente référence pour la technique des volumes finis.

1.4 Schémas de Riemann en hydraulique : revue de littérature

Les schémas de Riemann présentent beaucoup d'atouts les rendant intéressants pour produire un code dont le but est de simuler efficacement les phénomènes cités d'entrée dans cette thèse (écoulement rapides et tumultueux de rupture de barrage et de tsunami). Les schémas de Riemann résolvent à la base et sans difficulté les discontinuités de variables. En fait, le schéma de Riemann représente l'écoulement sur le domaine comme une série de cellules avec état constant et associe un problème de Riemann à chaque interface entre cellules voisines. Le problème de Riemann pour l'hydraulique correspond au problème classique de rupture de barrage théorique (Henderson 1966, Stoker 1959). La solution connue, qui est complexe et dépend surtout d'états initiaux, peut donc être incorporée dans la formule d'évolution du schéma. Des propriétés essentielles telle que la conservation globale de la masse sont facilement vérifiables avec cette classe de schémas, la détection et la représentation des ressauts hydrauliques fixes ou mobiles est automatique sans disposition particulière dans les cellules où ils surviennent ou transitent.

Les premières applications des schémas de Riemann aux équations de Saint-Venant sont apparues dans la littérature à la fin des années 80 (Vila 1986, Glaister 1988). Jusqu'à la première moitié des années 90, les applications à l'hydraulique ont consisté au transfert des plus populaires des schémas de Riemann d'alors (schéma de Roe 1981 pour Alcrudo, Garcia-Navarro & Saviron 1991 et Paquier 1995, schéma de Osher 1982 pour Tchamen 1992), ou à la proposition de nouveaux schémas de Riemann adaptés à l'hydraulique (Toro 1992, Toro 2001). Ces applications étaient limitées soit à la partie homogène des équations de Saint-Venant, soit intégraient les termes sources de façon triviale sans attention particulière à un traitement en cohérence avec le schéma de Riemann utilisé. À notre connaissance, les applications de ces schémas ont été limitées aux cas académiques de canaux rectangulaires avec solution analytique ou mesures expérimentales en laboratoire.

TASE, un logiciel basé sur les équations de Saint-Venant en deux dimensions intégré

avec un schéma de Roe (Zhang et al. 1992) , constitue une exception en ce qu'il était prêt pour des études de type industriel sur des rivières naturelles. TASE était munie d'une interface graphique de prétraitement des données et de post-traitement des résultats. À notre connaissance, le traitement utilisé pour l'intégration des termes sources dans ce code n'a pas été publié dans la littérature.

En 1994 le groupe de recherche CADAM – Concerted action on dam break modeling - de l'AIHR (Association Internationale de Recherches Hydrauliques) a été mis sur pied pour évaluer les codes capables de simuler adéquatement les phénomènes de ruptures de barrage (Petitjean 1998). CADAM a obtenu la reconnaissance de l'union Européenne (EU) et maintient un site internet, contenant les comptes-rendus des rencontres semestrielles tenues entre les années 1998 et 2000, à l'adresse <http://www.hrwallingford.co.uk/projects/CADAM>. La majorité des codes analysés durant cet exercice, qui regroupait une dizaine d'organismes de recherche ou d'universités, appartenait à la classe des schémas de Riemann (Toro et al. 1998). Les tests qui furent élaborés pour cet exercice ont été largement utilisés au cours de la présente recherche. Dans plusieurs de ces tests, l'accent était mis sur les formes complexes de géométrie du canal ou du lit. La reconnaissance commençait à être faite que le traitement des termes sources de la géométrie était aussi important que l'application d'un schéma classique de Riemann à la partie homogène.

1.4.1 Traitement décentré des termes sources

Bermudez & Vasquez (1994) et, plus tard, Vasquez-Cendon (1999) ont proposé un traitement des termes sources qui utilise une décomposition du terme source sur la base du système d'ondes élémentaires du système. Chacune des composantes élémentaires du terme source est intégrée de manière décentré en fonction du sens de propagation (signe de la valeur propre) de l'onde élémentaire correspondante.

Cette proposition a été reprise par Burguete & Garcia-Navarro (2001), de même que par Goutal & Maurel (1997b, 2002) dans le code Mascaret. Ce code basé sur les équations unidimensionnelles de Saint-Venant utilise le schéma de Roe. Mascaret est

actuellement distribué sur une base commerciale.

1.4.2 Traitement centré des termes sources

Une stratégie d'intégration des termes sources qui n'est pas basée sur le décentrage, mais sur un ensemble d'hypothèses, sur les profils des variables géométriques et des variables de l'écoulement, valables autant pour les flux que pour les termes sources est proposée par Tchamen, Kahawita & Tessier (1994) et Tchamen & Kahawita (1998).

Cette stratégie a été reprise, de manière indépendante mais avec les mêmes hypothèses sur les profils de la bathymétrie et de la surface libre, par Audusse & Bristeau (2005).

1.5 Contributions de la présente thèse

Concernant l'intégration du terme source de géométrie, il a déjà été mentionné dans la section précédente qu'une proposition de traitement centré de ce terme et basée sur un choix judicieux de profils de variables (Tchamen & Kahawita 1998) géométriques et de variables de l'écoulement s'est avérée très performante quant à la simulation d'écoulements sur des topographies irrégulières. Les détails de cette proposition sont rappelés au chapitre 7 du présent document.

En ce qui concerne le terme source de friction, une stratégie d'intégration implicite a été proposée par Tchamen, Kahawita & Tessier (1994). Il est démontré par Tchamen & Kahawita (1998) que cette stratégie évite d'éventuelles instabilités numériques qui peuvent être associées à des fronts d'inondation de faible profondeur avançant sur des lits rugueux.

Concernant les bancs couvrants et découvrants pour lesquels plusieurs schémas éprouvent des difficultés de stabilité, avec l'apparition de profondeurs négatives, ou de conservation de masse. Tchamen & Kahawita (1998) ont proposé une adaptation inédite à l'hydraulique d'un schéma de van Leer qui a la propriété de prévenir

l'apparition de profondeurs négatives. Toutefois, ce schéma qui a fait preuve de remarquables qualités de robustesse, s'est révélé sur certains cas pratiques peu performants au regard du pas de temps réduit à des valeurs très basses générant ainsi des temps de calcul prohibitifs.

La solution à ce problème de performance présentée dans les chapitres 4 et 7 repose sur l'utilisation de la variable de vitesse plutôt que celle du débit dans l'équation de quantité de mouvement ou de l'énergie. En fait, les deux équations seront utilisées, celle de quantité de mouvement pour la prédiction des ressauts, et celle d'énergie pour sa stabilité dans la prédiction des vitesses.

Le schéma proposé présente des similitudes, dans son application en une dimension, avec un schéma proposé par Stelling, Kernkamp & Laguzzi (1998) et Stelling & Duinmeijer (2003). Toutefois, la solution actuelle utilise les schémas de Riemann plutôt que les maillages décalés, et s'étend aisément au cas bidimensionnel sur un maillage irrégulier.

1.6 Organisation du document

Les équations unidimensionnelles de Saint-Venant sont présentées au chapitre 2. Une section est consacrée à la différence entre la formulation liée à la conservation de quantité de mouvement, et celle liée à la conservation de charge. Les propriétés caractéristiques de deux familles d'onde associées aux équations de Saint-Venant sont rappelées.

Le chapitre 3 est consacré à la présentation de la solution du problème de rupture de barrage théorique. Cette présentation permet de mettre en relief les caractéristiques des différentes familles d'onde. La solution analytique à ce problème sera utilisée aux chapitres 5 et 8 dans le cadre de la validation des schémas numériques proposées.

Au chapitre 4, quatre schémas de Riemann pour résoudre les équations unidimensionnelles de Saint-Venant sont présentés. Le premier schéma utilise la

formulation classique avec la conservation de quantité de mouvement et des termes sources de la géométrie de la rivière. Le second schéma utilise la formulation à conservation de charge. Une formulation nouvelle avec conservation de quantité de mouvement mais sans terme source de géométrie de la rivière est à la base du troisième schéma. Le quatrième schéma qui constitue une des principales propositions de cette thèse. Elle utilise conjointement les formulations de conservation de quantité de mouvement et de charge.

Le cinquième chapitre est consacré à la validation des schémas présentés au chapitre quatre. Cinq cas théoriques possédant chacun une solution analytique sont analysés. Ensuite, le cas historique de rupture du barrage Malpasset, pour lequel il existe des relevés sur le site ainsi que des mesures effectuées sur un modèle bâti à l'échelle 1/400, a été simulé. Deux cas de rupture hypothétiques de barrages existants sur des rivières du Québec sont également simulés, et les résultats proposés sont comparés à ceux de codes commerciaux. Enfin, le remplissage de la galerie d'amenée de la centrale Manic 5 P.A., qui comporte un tronçon incliné de 60 degrés sur l'horizontale, est simulé, démontrant la grande robustesse du schéma proposé.

Les équations bidimensionnelles de Saint-Venant sont présentées au Chapitre 6. Les caractéristiques liées aux trois familles d'ondes élémentaires associées à ces équations sont rappelées.

Au chapitre 7, deux schémas de Riemann sont proposés pour l'intégration des équations bidimensionnelles de Saint-Venant sur un maillage irrégulier du type triangulaire. Le premier schéma a été proposé par Tchamen & Kahawita (1998) et présente la particularité d'assurer une profondeur non négative, caractéristique très intéressante surtout lorsque les zones couvertes par la simulation comportent des portions qui sont assèchent ou recouvertes d'eau durant le cours de la simulation. Le second schéma constitue l'extension au cas bidimensionnel du quatrième schéma du chapitre 4.

Plusieurs cas de validation des schémas proposés sont examinés au chapitre 8. Il s'agit

de quatre cas théoriques possédant une solution analytique, ainsi que le cas du modèle physique de la vallée de Toce pour lequel il existe des mesures publiées dans la littérature. Le cas de rupture hypothétique du barrage de principal de l'aménagement LG4 situé dans le nord Québécois est également simulé.

Les conclusions tirées de cette étude et les principales recommandations pour travaux complémentaires sont présentées au chapitre 9.

Les références bibliographiques citées dans le cadre de la thèse sont regroupées dans la dernière section de l'ouvrage.

CHAPITRE 2 ÉQUATIONS DE BASE EN UNE DIMENSION

2.1 Les équations de base

Les équations à la base du système unidimensionnel sont des expressions des lois de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. Le lecteur intéressé aux détails de leur développement est référé aux ouvrages fondamentaux tels (Abbott 1979) ou (Cunge et al., 1980).

Conservation de la masse

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.1a)$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(VQ)}{\partial x} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + gA S_f = 0 \quad (2.1b)$$

La figure 2.1 présente schématiquement les principales variables du précédent système d'équations (2.1).

- t désigne la variable de temps;
- x désigne la variable de position mesurée selon l'axe de la rivière;
- $A = A(x,t)$ désigne l'aire mouillée;
- $Q = Q(x,t)$ désigne le débit à travers la section mouillée;
- $V = V(x,t)$ désigne la vitesse moyenne; $V=Q/A$;
- $H = H(x,t)$ désigne l'élévation de la surface libre par rapport à un niveau de référence;
- S_f désigne la pente d'énergie représentant les pertes par friction. L'équation la

plus couramment employée pour représenter la pente d'énergie est l'équation de Manning;

- $S_f = \frac{N^2 |V|}{R^{4/3}} \bullet V$
- $R = A/P$ désigne le rayon hydraulique où P est le périmètre mouillé;
- N = désigne le coefficient de rugosité de Manning.

2.2 Quantité de mouvement versus énergie

Une autre paire d'équations est également utilisée pour modéliser les mêmes écoulements (Abbott 1979). Cette paire est constituée de l'équation de conservation de la masse et l'équation de conservation de la charge .

Conservation de masse

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.2a)$$

Conservation de charge

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{V^2}{2} \right)}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + g S_f = 0 \quad (2.2b)$$

Les paires d'équations (2.1) et (2.2) sont équivalentes lorsque les variables dépendantes sont différentiables. L'équation (2.2b) peut être dérivée à partir des équations (2.1a) et (2.1b) .

Les trois équations ne sont donc pas indépendantes. L'une des paires (2.1) ou (2.2) est suffisante pour définir le système. Mais lorsque les variables dépendantes ne sont pas différentiables (présence d'une discontinuité) les deux formes ne sont pas tout à fait équivalentes. L'ouvrage de Hervouet (2003) présente une discussion détaillée de la différence des solutions prédites par chacun des systèmes. En bref, les solutions des deux systèmes diffèrent lorsque l'écoulement comporte une discontinuité du type ressaut

hydraulique. Dans ce cas, le principe de conservation de quantité de mouvement est celui qui prédit correctement la position et la dimension du ressaut. Le principe de conservation d'énergie (ou de charge) prédit dans ce cas une solution erronée parce qu'au passage d'un ressaut, l'énergie n'est pas conservée mais une fraction de cette quantité est dissipée par le ressaut. Le tableau 2.1 suivant est reproduit de l'ouvrage de Hervouet (2003).

Tableau 2.1 : Conservation et variation de quantité à travers les ressauts pour les équations de Saint-Venant

Principe	Charge	Quantité de mouvement	Énergie totale
Quantité de mouvement	$\frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1h_2}$	0	$\frac{g(h_1^2 - h_2^2)}{4}$
Énergie	0	$\frac{g(h_1 - h_2)^3}{2(h_1 + h_2)}$	$\frac{g(h_1 - h_2)(h_1^2 + h_2^2)}{2(h_1 + h_2)}$

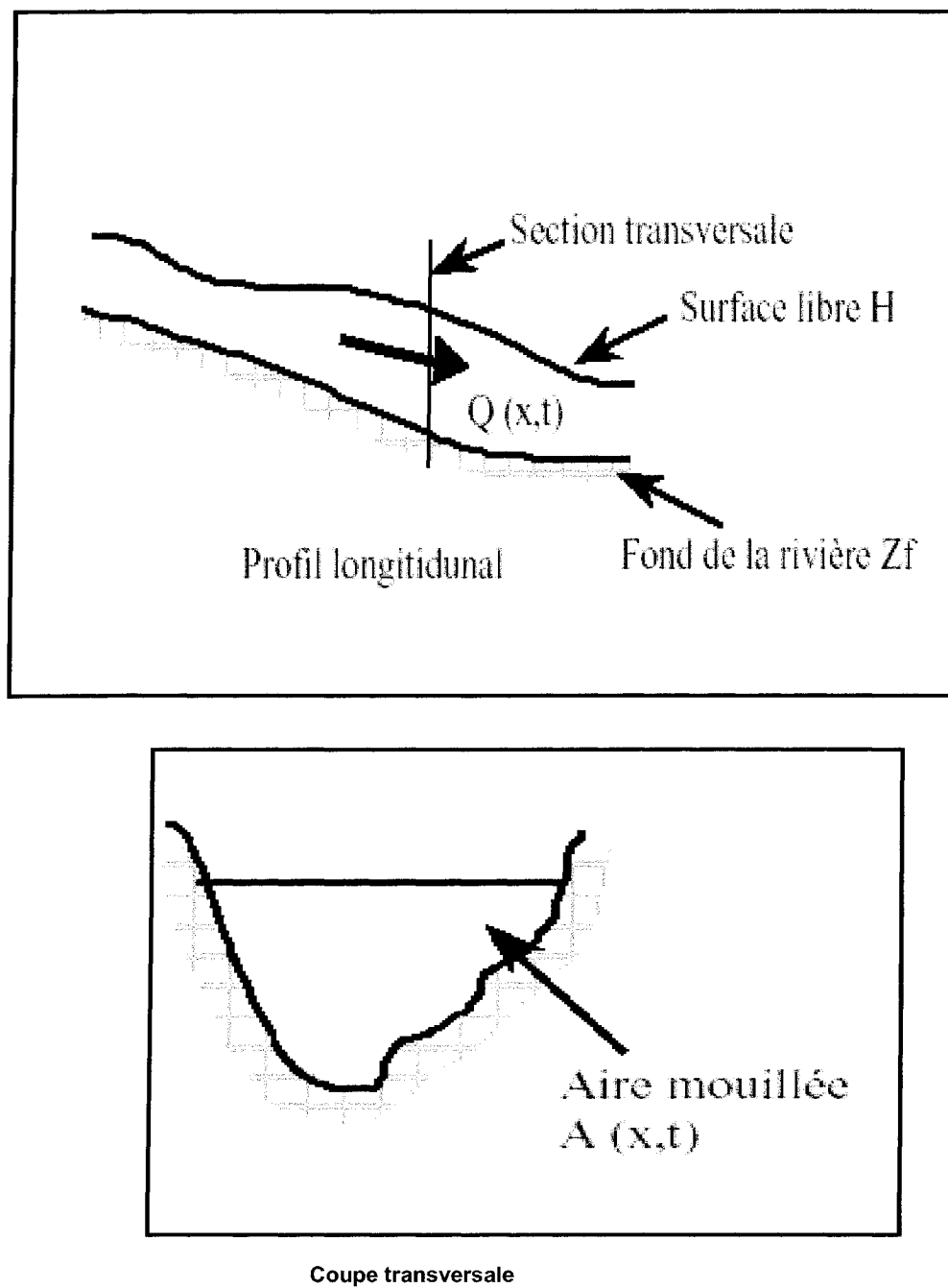


Figure 2.1 Définition des variables sur le schéma d'un tronçon de rivière.

2.3 Propriétés caractéristiques des équations de Saint-Venant

Les propriétés caractéristiques des deux paires d'équations seront étudiées en utilisant la version homogène de chacune de ces paires.

En omettant le terme de frottement, le système (2.1a), (2.1b) s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(VQ)}{\partial x} + gA \frac{\partial H}{\partial x} &= 0\end{aligned}\tag{2.3}$$

En utilisant les relations

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial A}; \quad V = \frac{Q}{A}\tag{2.4}$$

Il est possible d'écrire le système (2.3) sous forme matricielle.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + J \cdot \frac{\partial U}{\partial x} = 0\tag{2.5}$$

Où :

$$U = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}; \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \left(\frac{gA}{B} - V^2\right) & 2V \end{bmatrix}\tag{2.6}$$

U est le vecteur des variables dépendantes, alors que J est la matrice jacobienne du système. Les caractéristiques de la matrice jacobienne sont données au tableau 2.2 suivant.

Si le couple (2.2) est utilisé, le système pourrait également être écrit sous la forme (2.4) avec :

$$U = \begin{bmatrix} A \\ V \end{bmatrix}; \quad J = \begin{bmatrix} V & A \\ \frac{g}{B} & V \end{bmatrix}\tag{2.7}$$

Les valeurs caractéristiques de ce système sont données au tableau 2.3.

Tableau 2.2 : Caractéristiques de la formulation à conservation de quantité de mouvement du système de Saint-Venant

Valeurs propres	$\lambda_1 = \frac{Q}{A} - \sqrt{g \frac{A}{B}}$	$\lambda_2 = \frac{Q}{A} + \sqrt{g \frac{A}{B}}$
Vecteurs propres	$E_1 = \left[I, \frac{Q}{A} - \sqrt{g \frac{A}{B}} \right]^t$	$E_2 = \left[I, \frac{Q}{A} + \sqrt{g \frac{A}{B}} \right]^t$
Invariants de Riemann	$R_1 = \frac{Q}{A} + \int_{z_f}^H \sqrt{g \frac{B(y)}{A(y)}} dy$	$R_2 = \frac{Q}{A} - \int_{z_f}^H \sqrt{g \frac{B(y)}{A(y)}} dy$

Tableau 2.3 : Caractéristiques de la formulation à conservation de charge du système de Saint-Venant

Valeurs propres	$\lambda_1 = V - \sqrt{g \frac{A}{B}}$	$\lambda_2 = V + \sqrt{g \frac{A}{B}}$
Vecteurs propres	$E_1 = \left[-\sqrt{\frac{AB}{g}}, I \right]^t$	$E_2 = \left[\sqrt{\frac{AB}{g}}, I \right]^t$
Invariants de Riemann	$R_1 = V + \int_{z_f}^H \sqrt{g \frac{B(y)}{A(y)}} dy$	$R_2 = V - \int_{z_f}^H \sqrt{g \frac{B(y)}{A(y)}} dy$

Les valeurs propres représentent la vitesse des ondes élémentaires du système, tandis que les vecteurs propres désignent les directions de ces ondes. Les invariants de

Riemann constituent les variables qui sont conservées selon chacune de ces directions. Un système de la forme (2.3) est de type hyperbolique lorsque les valeurs propres sont réelles et distinctes l'une de l'autre.

Le lecteur intéressé à un exposé mathématique de la théorie des caractéristiques et des systèmes hyperboliques est référé aux ouvrages classiques tel que Smoller (1983).

2.4 Forme divergente des équations de base

De manière générale, l'utilisation de schémas de Riemann nécessite que les équations de base soient écrites sous forme dite divergente, c'est-à-dire sous la forme:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (2.8)$$

Cette forme est propice à l'utilisation de la technique des volumes finis sur les maillages les plus généraux, et permet de passer des intégrales de domaines à des intégrales de bord où l'utilisation de la solution de problème de Riemann est alors décisive pour l'évolution de la solution du système général.

La forme du système de base (2.1), ni sa formulation homogène, ne correspond strictement à la forme divergente de lois de conservation (2.8). Aussi, pour l'utilisation des schémas de Riemann, il est courant d'utiliser la formulation suivante du système (2.1):

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(VQ)}{\partial x} + \frac{\partial I_1}{\partial x} = Ag(S_0 - S_f) + I_2$$

Où:

$$S_0 = -\frac{\partial Z_f}{\partial x} \quad (2.10)$$

Où Z_f désigne le thalweg et S_0 est la pente du lit. Rappelons que S_f représente la pente de friction et que son expression a été donnée à la section 2.1.

$$S_f = \frac{N^2 |V|}{R^{4/3}} \bullet V \quad (2.10)$$

I_1 représente la force de pression qui s'exerce sur une section transversale au sens de l'écoulement (face amont et aval du volume de contrôle).

$$I_1 = g \int_{Z_f}^H A(x, \xi) d\xi \quad (2.11)$$

I_2 représente la projection, sur l'axe de l'écoulement, de la pression latérale qui s'exerce sur les parois du volume de contrôle.

$$I_2 = g \int_{Z_f}^H \frac{\partial A(x, \xi)}{\partial x} d\xi \quad (2.12)$$

En fait, les systèmes (2.1) et (2.8) sont équivalents. Seule une décomposition du terme de gravité a été effectuée selon la forme:

$$g \cdot A \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial I_1}{\partial x} - I_2 - g \cdot A \cdot S_0 \quad (2.13)$$

Cette décomposition permet, en isolant le terme de gradient de pression dans le membre de gauche, et en disposant les autres termes dans le terme source de droite, d'obtenir une équation homogène dont la forme est divergente.

Dans un canal de fond horizontal, ou de pente faible, et dont la section est prismatique, ou les variations de largeurs sont très faibles, les formulations (2.1) et (2.8) sont équivalentes. Il sera démontré au long de la présente étude que pour une rivière naturelle avec des sections très irrégulières, l'application des schémas, où l'application du flux approximatif de Riemann se limite à la forme homogène de (2.8), éprouve beaucoup de difficultés de stabilité du fait que le traitement du terme source n'est

toujours pas en cohérence avec le traitement du système homogène.

CHAPITRE 3 LE PROBLÈME DE RIEMANN EN HYDRAULIQUE

3.1 Introduction

Le présent chapitre vise à rappeler les caractéristiques de la solution du problème classique de rupture de barrage théorique. L'intérêt de présenter ici la solution à ce problème classique réside dans le fait que cette solution est un ingrédient essentiel des schémas de Riemann lorsqu'ils sont appliqués aux équations de Saint-Venant.

En effet, les schémas de Riemann sont ici appliqués dans le cadre de la technique des volumes finis qui sera présentée au chapitre 4. Dans cette application, il est primordial de pouvoir bien évaluer les flux de quantités conservées qui transitent aux interfaces entre cellules adjacentes. La solution au problème de rupture de barrage théorique - qui correspond au problème de Riemann pour les équations de Saint-Venant - ou tout au moins ses caractéristiques, permet d'évaluer ces flux.

Le rappel de cette solution est également l'occasion de faire ressortir le caractère hyperbolique et non linéaire des ondes associées aux équations de Saint-Venant.

La solution de la rupture de barrage théorique présentée ici sera utilisée dans les chapitres 5 et 8 dans le cadre de la vérification des schémas proposés.

3.2 Le problème de rupture de barrage théorique

La majorité d'ouvrages classiques d'hydraulique d'écoulements de surface traite du problème de rupture de barrage théorique. Il correspond à un canal rectangulaire prismatique de lit horizontal sans friction de longueur infinie avec un barrage séparant deux plans d'eau immobiles à l'état initial. Le barrage est supposé s'effacer à l'instant initial mettant les deux plans d'eau directement en contact. L'intérêt premier de l'analyse de ce cas théorique réside dans le fait qu'il permet de mettre en relief les

différentes familles d'ondes non linéaires qui peuvent naître de cette rencontre entre masses d'eau de caractéristiques différentes. Il faut noter que le problème de rupture de barrage théorique bien qu'il possède un lien avec le problème réel ou d'ingénierie de rupture de barrage ou de digue, ne traite pas de tous les aspects du phénomène réel. Dans le cas d'un ouvrage de retenue réel, plusieurs éléments sont importants dans l'analyse d'une rupture potentielle, notamment le mode de rupture, rupture par submersion ou phénomène de renard, le type de rupture, partielle ou totale, le temps de rupture, le matériau de construction de l'ouvrage, la forme de la vallée, la dimension de la retenue sont autant d'éléments qui peuvent être déterminants pour déterminer l'onde de rupture. L'analyse du problème théorique ne les considère pas.

3.2.1 Rupture de barrage avec lame d'eau à l'aval

L'état initial de ce problème de rupture de barrage théorique est schématisé à la figure 3.1a. Le niveau initial à gauche du barrage est plus élevé que le niveau à la droite du barrage. Les figures 3.1b et 3.1c illustrent les caractéristiques de l'écoulement après l'effacement du barrage.

La solution est caractérisée par quatre zones dont les limites évoluent avec le temps: la zone située à l'amont du point B, où l'état correspond à l'état initial à l'amont du barrage. C'est la zone encore non affectée par la vidange du réservoir;

$$\text{Pour } \frac{X}{t} \leq \lambda_1(U_L) = -c_L = -\sqrt{gh_L}, \quad W = W_L = \begin{bmatrix} h_L \\ u_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_L \\ 0 \end{bmatrix}$$

la zone située entre les points B et A caractérisée par un arc de parabole qui correspond à l'onde de raréfaction qui remonte le réservoir;

$$\text{Pour } X_B(t) \leq x \leq X_A(t), \quad \begin{cases} h = \frac{h_L}{9} \left(2 - \frac{x}{c_L \cdot t} \right)^2 \\ u = \frac{2c_L}{3} \left(1 + \frac{x}{c_L \cdot t} \right) \end{cases}$$

la zone située entre le point A et le point F. C'est une zone de profondeur et vitesse constante. Le point F est le front de l'onde de choc (discontinuité) qui se déplace vers l'aval;

$$\begin{array}{l} \text{Pour} \quad X_A(t) \leq x \leq X_F(t), \\ \text{avec} \quad \begin{cases} h = h_u \\ q = u \cdot h = q_u \end{cases}, \quad \begin{cases} u_w + 2\sqrt{gh_w} = 2\sqrt{gh_L} \\ s \cdot (h_R - h_w) = (q_R - q_w) \\ s \cdot (q_R - q_w) = \left(\frac{q_R^2}{h_R} + g \frac{h_R^2}{2} \right) - \left(\frac{q_w^2}{h_w} + g \frac{h_w^2}{2} \right) \end{cases} \end{array}$$

la zone située à l'aval du point F est la zone où le front d'onde de choc n'est pas encore parvenu. L'état y est égal à l'état initial en aval du barrage.

$$\text{Pour } \frac{x}{t} \geq s(U_P, U_R), \quad W = W_R = \begin{bmatrix} h_R \\ 0 \end{bmatrix}$$

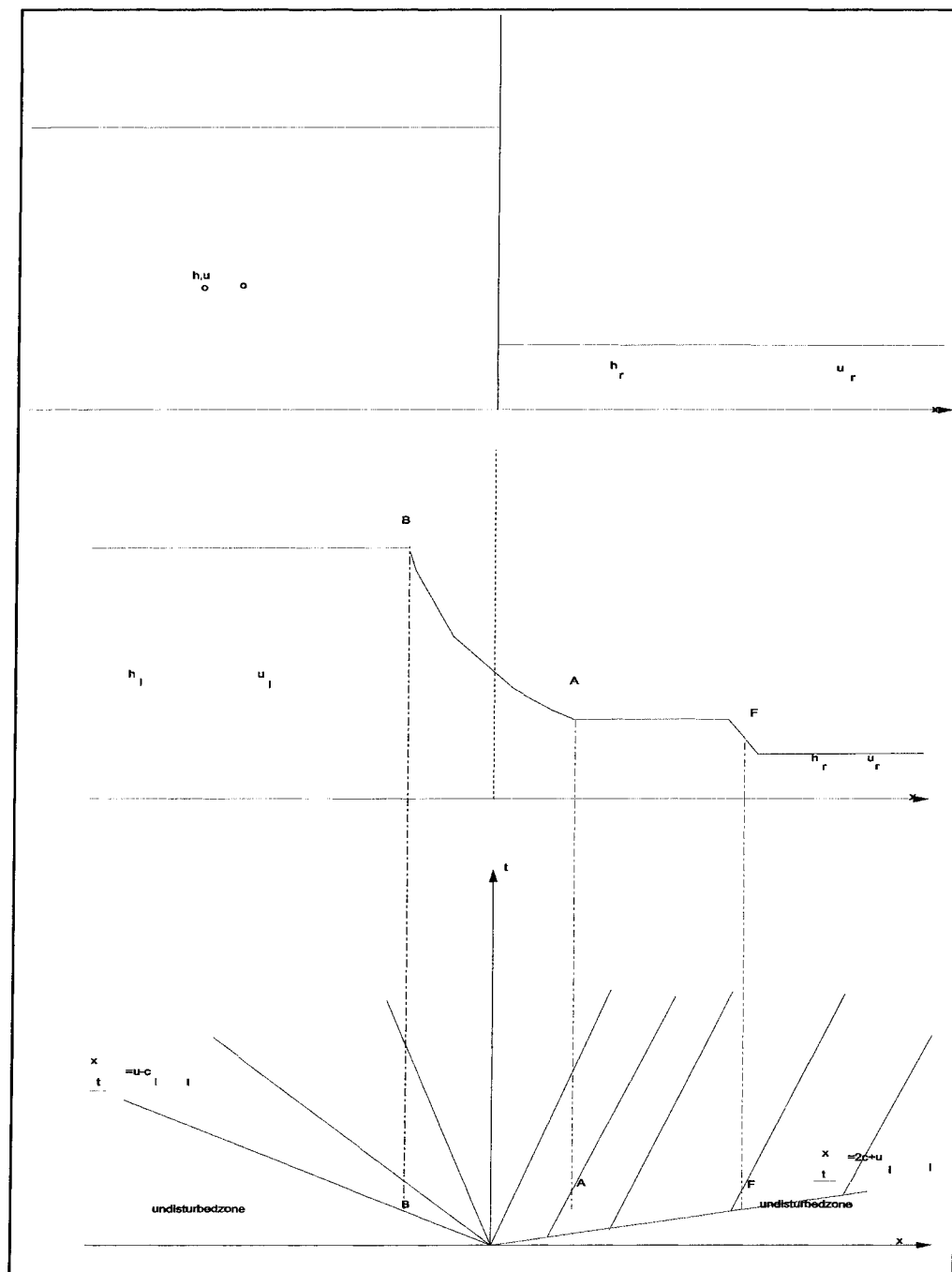


Figure 3.1 Rupture de barrage théorique sur un lit horizontal avec tronçon aval mouillé. État initial et solution.

3.2.2 Rupture de barrage avec lit aval sec

Les figures 3.2a, 3.2b et 3.2c illustrent l'état initial et la solution après l'effacement du barrage dans le cas où la portion du lit à l'aval du barrage est sèche. Les caractéristiques de la solution diffèrent ici du cas précédent avec une lame d'eau en aval du barrage. La solution comporte trois zones distinctes :

la zone située à l'amont du point B, où l'état correspond à l'état initial à l'amont du barrage. C'est la zone encore non affectée par la vidange du réservoir;

$$\text{Pour } \frac{x}{t} \leq \lambda_1(U_L) = -c_L = -\sqrt{gh_L}, \quad W = W_L = \begin{bmatrix} h_L \\ 0 \end{bmatrix}$$

la zone située entre les points B et A caractérisée par un arc de parabole qui correspond à l'onde de raréfaction qui remonte le réservoir;

$$\text{Pour } -c_L \leq \frac{x}{t} \leq 2c_L, \quad \begin{cases} h = \frac{h_L}{9} \left(2 - \frac{x}{c_L \cdot t} \right)^2 \\ u = \frac{2c_L}{3} \left(1 + \frac{x}{c_L \cdot t} \right) \end{cases}$$

la zone située à l'aval du point B est la zone où le front de l'onde de détente n'est pas encore parvenu. Le lit y est encore sec.

$$\text{Pour } \frac{x}{t} \geq 2c_L, \quad W = W_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

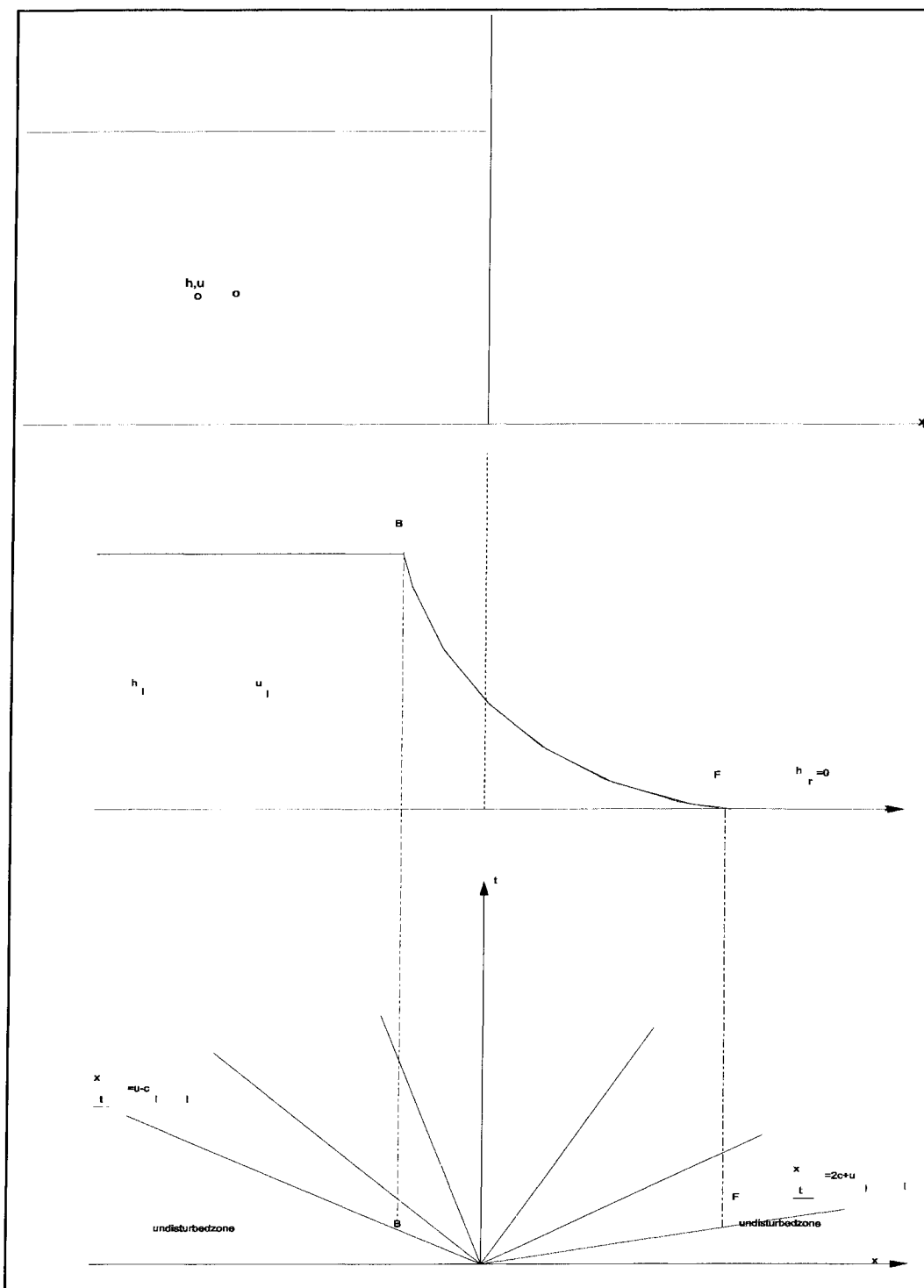


Figure 3.2 Rupture de barrage théorique sur un lit horizontal avec tronçon aval sec. État initial et solution.

3.3 Étude analytique des caractéristiques de la forme homogène du système de Saint-Venant

Dans le cas d'un canal rectangulaire prismatique avec un lit horizontal sans friction, les équations de Saint-Venant (2.1) peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2 h)}{\partial x} + g \frac{\partial(h^2/2)}{\partial x} = 0$$

Où :

- **h** est la profondeur d'écoulement;
- **u** est la vitesse moyenne;
- **uh** est le débit spécifique ou encore débit par unité de largeur du canal.

Le système (3.1) a la même forme que les équations des gaz compressibles isentropiques. Pour ce type d'écoulement de fluide il existe également un problème analogue au problème de rupture de barrage théorique. Il s'agit du problème dit du tube à piston ('shock-tube problem'). Un tube contenant une membrane (ou un piston) qui sépare deux poches de gaz avec des caractéristiques (densité et vitesse) différentes. Les deux masses de gaz entrent en contact dès l'instant où la membrane est rompue (piston retiré). L'analogie au niveau physique se fait entre le canal et le tube, d'une part, le barrage et la membrane, d'autre part, et l'eau et le fluide gazeux enfin. Au niveau des équations, l'analogie s'effectue entre la profondeur d'eau h et la densité du gaz ρ .

Les systèmes (3.1) et (3.2) sont tous des systèmes de type hyperbolique. Pour des systèmes de ce type, la catégorie de problèmes à valeurs initiales constante a été très finement étudiée. Ces problèmes à valeurs initiales pour des systèmes hyperboliques sont désignés problèmes de Riemann. C'est à l'aide des notions propres à la classe des problèmes de Riemann que nous allons analyser le problème de rupture de barrage théorique.

Le système (3.1) peut s'écrire sous la forme conservative :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0 \quad (3.3)$$

Avec :

$$U = \begin{bmatrix} h \\ uh \end{bmatrix}; \quad F(U) = \begin{bmatrix} uh \\ u^2 h + g \frac{h^2}{2} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Pour trouver les caractéristiques du système (3.1), il faut étudier sa matrice Jacobienne

$$J = \frac{\partial F(U)}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gh - u^2 & 2u \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Le tableau 3.1 suivant présente les caractéristiques du système (3.1) déduites de la matrice Jacobienne J.

Tableau 3.1 : Caractéristiques du système à conservation de quantité de mouvement dans un canal prismatique

Valeurs propres	$\lambda_1 = u - c$ où $c = \sqrt{gh}$	$\lambda_2 = u + c$
Vecteurs propres	$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - c \end{bmatrix}$	$E_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + c \end{bmatrix}$
Invariants de Riemann	$R_1 = u + 2c$	$R_2 = u - 2c$

Rappelons que les caractéristiques de la matrice J sont définies de la manière

suivante :

Valeurs propres λ :

$$\text{Det}(J - \lambda I) = |(J - \lambda I)| = 0 \quad (3.6)$$

Vecteurs propres E_i :

$$[J - \lambda_i I] \bullet E_i = 0 \quad (3.7)$$

Invariants de Riemann R_i :

$$(\nabla_U R_i) \bullet E_i = 0 \quad (3.8)$$

Ces caractéristiques sont celles des ondes élémentaires constitutives du système d'équations de Saint-Venant. Ainsi, il existe deux familles d'ondes, une première liée à (λ_1, E_1, R_1) et la seconde liée à l'autre triplet de caractéristiques (λ_2, E_2, R_2) . Pour chacune de ces familles, la valeur propre λ_i représente la vitesse (en module) à laquelle voyagent les ondes. Le vecteur propre E_i désigne la direction de déplacement dans le plan, tandis que l'invariant de Riemann lié à une famille représente la quantité qui est transportée inchangée le long de cette direction.

Il est facile de vérifier la propriété suivante pour les deux familles d'ondes des équations de Saint-Venant :

$$(\nabla_U \lambda_i) \bullet E_i \neq 0 \quad (3.9)$$

La propriété précédente signifie que les deux familles d'ondes sont non linéaires. Il existe deux catégories d'ondes non linéaires.

3.3.1 Onde de détente

La famille d'ondes liée à la valeur propre est une onde de raréfaction, ou encore onde de détente, lorsque qu'il n'existe pas de discontinuité pour cette famille d'onde entre les deux états :

$$\lambda(U_L) \leq \lambda(U_R) \quad (3.10)$$

Dans ce cas, pour la même famille d'onde, l'onde de droite se déplace plus vite que l'onde de gauche. Cela correspond aux ondes couramment désignées 'onde négative' en hydraulique, notamment celle qui remonte un réservoir lors de sa vidange.

Onde de détente de la première famille (λ_1)

Lorsqu'une onde de détente de la première famille (λ_1) relie l'état U_L à un état U^* , la relation suivante est vérifiée :

$$u^* = u_L + 2(1 - \sqrt{z}) c_l = u_L + f_1^R(z) \quad \text{Où: } z = \frac{h^*}{h_L} \leq 1 \quad (3.11)$$

(3.11) est une autre manière de traduire que l'invariant de Riemann $R_1 = u + 2c$ est constant sur cette courbe.

Onde de détente de la seconde famille (λ_2)

Lorsqu'une onde de détente de la seconde famille (λ_2) relie l'état U_L à un état U^* , la relation suivante est vérifiée :

$$u^* = u_L + 2(\sqrt{z} - 1) c_l = u_L + f_2^R(z) \quad \text{Où: } z = \frac{h^*}{h_L} \geq 1 \quad (3.12)$$

(3.12) est une autre manière de traduire que l'invariant de Riemann $R_2 = u - 2c$ est constant sur cette courbe.

3.3.2 Onde de choc

L'onde de choc correspond au cas où la courbe qui relie l'état de gauche et l'état de droite comporte une discontinuité. Une telle discontinuité survient lorsque

$$\lambda(U_L) \geq \lambda(U_R) \quad (3.13)$$

Dans ce cas, pour cette famille d'onde, la vitesse de déplacement $\lambda(U)$ est plus grande à gauche qu'à droite. La discontinuité est située au point de rencontre entre les ondes, de la même famille, issues de l'état de gauche d'une part, et de l'état de droite d'autre part. La relation qui définit une telle discontinuité est désignée relation de Rankine-Hugoniot :

$$F(U_R) - F(U_L) = s \cdot [U_R - U_L] \quad (3.14)$$

Dans la relation (3.14), s désigne la vitesse de déplacement du choc. Mais (3.14) définit une famille de chocs dont certains sont non physiques, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent survenir en nature. La relation qui permet de sélectionner seuls les chocs physiques est dite relation d'entropie et se traduit par la contrainte :

$$\lambda(U_L) \geq s \geq \lambda(U_R) \quad (3.15)$$

Onde de choc de la première famille (λ_1)

Pour le vecteur des variables dépendantes U et la fonction de flux $F(U)$ définis par (3.4), il est possible de dériver la relation suivante pour une onde de choc de la famille d'ondes associée à λ_1 :

$$u^* = u_L + (1-z) \sqrt{\frac{z+1}{2z}} c_l = u_L + f_1^s(z) \quad \text{Où: } z = \frac{h^*}{h_L} \geq 1 \quad (3.16)$$

Onde de choc de la seconde famille (λ_2)

De manière analogue, si l'on suppose que l'état U_L est lié à U^* par une onde de choc de la seconde famille λ_2 , il est possible de dériver la relation suivante :

$$u^* = u_L + (z-1) \sqrt{\frac{z+1}{2z}} c_l = u_L + f_2^s(z) \quad \text{Où: } z = \frac{h^*}{h_L} \leq 1 \quad (3.17)$$

3.4 Solution au problème de rupture de barrage théorique généralisé

On entend par problème de rupture de barrage théorique généralisé un problème de rupture de barrage théorique pour lequel les vitesses initiales ne sont pas nécessairement nulles. Il s'agit donc de résoudre :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0 \quad (3.18)$$

Avec U et $F(U)$ donnés par (3.4), et les conditions initiales suivantes :

$$\text{Pour } x < 0, \quad \begin{cases} h = h_L \\ u = u_L \end{cases} ; \text{ et pour } x > 0, \quad \begin{cases} h = h_R \\ u = u_R \end{cases} \quad (3.19)$$

La procédure de solution consiste à déterminer l'état (ou les états) intermédiaire qui relie les états amont et aval (correspondant aux états initiaux) où aucune perturbation n'est encore parvenue. C'est dans cette optique que les expressions (3.11), (3.12), (3.16) et (3.17) sont utilisées pour mettre au point les fonctions vectorielles F_{z1} et G_{z2} tel que :

$$U_R = G_{z2} \circ F_{z1}(U_L) = G_{z2}[F_{z1}(U_L)] = G_{z2}(U^*) \quad (3.20)$$

où U^* est l'état intermédiaire entre U_L et U_R . F_{z1} est la fonction qui relie U_L et U^* selon la première famille d'onde, tandis que G_{z2} relie U^* et U_R .

$$U = F_z(U_L) = \begin{bmatrix} h = z h_L \\ u = u_L + 2(1 - \sqrt{z}) c_l ; z \leq 1 \\ u = u_L + (1 - z) \sqrt{\frac{z+1}{2z}} c_l ; z \geq 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$U = G_z(U_L) = \begin{bmatrix} h = z h_L \\ u = u_L + 2(\sqrt{z} - 1) c_l ; z \geq 1 \\ u = u_L + (z - 1) \sqrt{\frac{z+1}{2z}} c_l ; z \leq 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Rappelons que la solution au problème de rupture théorique généralisé consiste à résoudre l'équation (3.20) pour la variable U^* avec les paramètres $z1$ et $z2$. La première composante de la relation (3.20) permet d'établir un lien entre $z1$ et $z2$.

$$h_R = z1 \cdot z2 \cdot h_L, \text{ c'est à dire : } z2 = \frac{h_R}{z1 \cdot h_L} = \frac{T}{z1} \text{ où : } T = \frac{h_R}{h_L} \quad (3.23)$$

En injectant la relation (3.23) dans la seconde composante de (3.20), on obtient une équation pour une seule inconnue $z1$. Mais cette équation dépend du type d'onde en jeu de part et d'autre de U^* .

3.4.1 Onde de détente suivie d'une onde de choc

Une onde de détente relie U_L à U^* , et une onde de choc relie U^* à U_R . La fonction à résoudre pour z_1 s'écrit :

$$f_1(z_1) = (u_L - u_R + 2c_L) \cdot \sqrt{z_1} + (T - z_1) \cdot c_L \cdot \sqrt{\frac{z_1 + T}{2T}} \quad (3.24)$$

3.4.2 Onde de choc suivie d'une onde de détente

Une onde de choc relie U_L à U^* , et une onde de détente relie U^* à U_R . La fonction à résoudre pour z_1 s'écrit :

$$f_2(z_1) = (u_L - u_R + 2c_L) \cdot \sqrt{z_1} - 2c_L \cdot \sqrt{z_1} + (1 - z_1) \cdot c_L \cdot \sqrt{\frac{z_1 + 1}{2}} \quad (3.25)$$

3.4.3 Deux ondes de choc

Une onde de choc relie U_L à U^* , et une onde de choc relie U^* à U_R . La fonction à résoudre pour z_1 s'écrit :

$$f_3(z_1) = (u_L - u_R) \cdot \sqrt{z_1} + (1 - z_1) \cdot c_L \cdot \sqrt{\frac{z_1 + 1}{2}} + (T - z_1) \cdot c_L \cdot \sqrt{\frac{z_1 + T}{2T}} \quad (3.26)$$

3.4.4 Deux ondes de détente

Une onde de détente relie U_L à U^* , et une onde de détente relie U^* à U_R . La fonction à résoudre pour z_1 s'écrit :

$$f_4(z_1) = 4c_L \cdot \sqrt{z_1} - [u_L - u_R + 2(c_L + c_R)] \quad (3.27)$$

Il est remarquable que l'équation $f_4(z_1) = 0$ n'a de solution z_1 (non négative) que

lorsque :

$$u_R - u_L \leq 2(c_L + c_R) \quad (3.28)$$

La relation (3.28) est violée lorsque la vitesse à droite de l'interface est assez grande, en comparaison de la vitesse à gauche, pour créer une séparation, une perte de continuité, de l'écoulement à l'interface.

3.4.5 Procédure itérative de solution

Trois des quatre fonctions précédentes pour la détermination de $z1$ nécessite une procédure itérative pour la solution. La procédure itérative recommandée en est une qui utilise toutes les fonctions précitées :

- utiliser la relation (3.) pour déterminer une valeur initiale de $z1$.
- calculer $z2$ à l'aide de la relation (3.23)
- avec les valeurs de $z1$ et $z2$, déterminer dans laquelle des quatre configurations possibles on se trouve :
- si $z1 < 1$ et $z2 > 1$, cas de deux ondes de détentes, la relation (3.) est utilisée pour déterminer $z1$ et l'algorithme itératif s'arrête;
- si $z1, z2$ se trouvent dans l'une ou l'autre des trois configurations, alors on utilise la fonction correspondante pour effectuer une étape d'algorithme de

$$\text{Newton-Raphson : } z1^{new} = z1 - \frac{f(z1)}{f'(z1)}. \text{ Si } |z1^{new} - z1| \leq TOL \text{ alors l'algorithme}$$

itératif est terminé. Sinon, $z1 = z1^{new}$ et l'algorithme repart à l'étape 1.

3.5 Solution du problème de rupture de barrage théorique dans un canal en pente

Dans le cas d'un canal avec une pente constante, Dressler (1958) propose une série de changements de variables qui permet, à partir des équations de Saint-Venant avec un terme source de pente, et de les transformer en système de Saint-Venant homogène pour les variables transformées. Ce processus permet de développer une solution analytique pour le problème de la rupture de barrage théorique sur un canal en

penne. Cette solution à un problème de complexité supérieure au problème équivalent dans un canal à lit horizontal constitue une excellente base pour un cas de validation des schémas numériques développés (voir chapitre 8).

Le lecteur intéressé aux détails du développement de cette solution est référé à l'article de Dressler (1958).

Le point de départ de cette transformation est le système de Saint-Venant avec terme source de pente suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h)}{\partial x} + g \frac{\partial(h^2/2)}{\partial x} &= S_0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Où :

$$S_0 = -\frac{\partial Z_f}{\partial x} \quad (3.30)$$

S_0 Est la pente du canal.

Les changements de variables proposés sont les suivants :

- $X = S_0 \cdot \frac{x}{h_L}$
- $H = \frac{h}{h_L}$
- $T = S_0 \cdot \sqrt{\frac{g}{h_L}}$
- $V = \frac{u}{\sqrt{gh_L}}$

Puis:

- $y = X - \frac{T^2}{2}$
- $v = U - T$

En utilisant ces changements de variables il est possible de transformer le système (3.3.) pour produire celui qui suit et qui possède la même forme que le système de Saint-Venant homogène.

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial(vH)}{\partial X} = 0 \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial v}{\partial T} + \frac{\partial v^2}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

La solution de ce système pour la rupture de barrage théorique peut utiliser tous les éléments de la solution présentée à la section 3.1.

3.6 Conclusion

Le problème de rupture de barrage théorique a été étudié en détails tout au long de ce chapitre. L'intérêt de ce problème réside dans le fait qu'il correspond au problème de Riemann pour les équations de Saint-Venant, et qu'à ce titre il constitue un élément essentiel des schémas numériques de Riemann appliqués aux mêmes équations.

La solution analytique donnée dans le cas de rupture de barrage avec plans d'eau initialement immobiles est régulièrement utilisée comme cas de validation des codes numériques, surtout dans l'optique de les utiliser pour la simulation des phénomènes d'inondation.

La solution du problème de rupture de barrage théorique généralisé bien que itérative, et à priori coûteuse au plan informatique, peut être programmée puis utilisée pour valider, ou mesurer la performance, des schémas de Riemann qui généralement ne font qu'approximer l'état ou le flux à l'interface.

La relation (3.28) constitue la condition d'existence de la solution du problème de Riemann. La violation de cette condition peut expliquer le développement d'instabilité dans un code numérique basé sur les schémas de Riemann.

CHAPITRE 4 MODÉLISATION NUMÉRIQUE UNIDIMENSIONNELLE

4.1 Introduction

La technique des volumes finis est celle qui est retenue pour la modélisation numérique dans la présente étude. Cette technique d'intégration numérique des équations différentielles se distingue notamment de la technique des différences finies par le fait qu'elle utilise la forme intégrale des équations plutôt que sa forme différentielle originale. En une dimension, les formulations volumes finis ou différences finies conduisent à des résultats identiques. La différence entre les deux techniques est plus marquée en deux dimensions. La technique des volumes finis s'adapte plus facilement aux maillages non structurés.

Les schémas de Riemann tel qu'appliqués, dans la littérature existante, à la forme divergente des équations seront rappelés afin de rendre compte des travaux effectués dans cette direction et de marquer la différence avec l'approche mise de l'avant dans la présente étude et qui favorise la forme (3.1) des équations de base.

4.2 Technique des volumes finis

Dans le cadre de la présente étude, la technique des volumes finis est appliquée à un système d'équations qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = S \quad (4.1)$$

Le domaine à modéliser est partitionné en un nombre fini N de volumes élémentaires dits volumes de contrôle (Voir figure 4.1). Le système (4.1) est intégré sur chacun des volumes de contrôles dans lesquels la variable dépendante est supposée avoir un profil suffisamment simple pour pouvoir y être intégrée aisément.

L'intégration de l'équation (4.1) sur le volume de contrôle et sur un intervalle de temps $[X_{I-1/2}, X_{I+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$ s'écrit :

$$\iint_{[X_{I-1/2}, X_{I+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]} \left[\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} \right] \cdot dx \cdot dt = \iint_{[X_{I-1/2}, X_{I+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]} S \cdot dx \cdot dt \quad (4.2)$$

En définissant:

$$\Delta L^I = \Delta X^I = X_{I+1/2} - X_{I-1/2} \quad (4.3)$$

est la taille du volume de contrôle I, encore appelée pas d'espace pour le schéma.

$$\Delta t = t^{n+1} - t^n \quad (4.4)$$

est le pas de temps.

$$U_I^n = \frac{1}{\Delta X^I} \int_{X_{I-1/2}}^{X_{I+1/2}} U(x, t^n) \cdot dx \quad (4.5)$$

U_I est la valeur moyenne de la variable dépendante sur le volume de contrôle I.

Le théorème de Green appliqué à l'intégrale de flux produit :

$$\int_{[X_{I-1/2}, X_{I+1/2}]} \frac{\partial F(U)}{\partial x} \cdot dx = F(U(X_{I+1/2}, t)) - F(U(X_{I-1/2}, t)) \quad (4.6)$$

En définissant

$$F_{I+1/2}^n = F[U(X_{I+1/2}, t^n)]$$

On obtient :

$$\Delta_x F^n = F_{I+1/2}^n - F_{I-1/2}^n = \int_{[X_{I-1/2}, X_{I+1/2}]} \frac{\partial F(U(x, t^n))}{\partial x} \cdot dx \quad (4.7)$$

Tandis que

$$\Delta_t U_I^{n+1} = U_I^{n+1} - U_I^n \quad (4.8)$$

Une approximation du type Newton d'ordre 1 est utilisée pour l'intégration sur l'intervalle de temps.

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} f \cdot dt = \Delta t \cdot [\phi \cdot f(t^{n+1}) + (1-\phi) \cdot f(t^n)] \quad (4.9)$$

En utilisant les expressions précédentes, (4.3 à (4.9) dans l'équation (4.2), dans la relation (4.2), il apparaît :

$$\Delta X^I \cdot \Delta_t U^{n+1} + \Delta t \cdot \phi \cdot \Delta_x F^{n+1} + \Delta t (1-\phi) \cdot \Delta_x F^n = \Delta X^I \cdot \Delta t [\phi \cdot S^{n+1} + (1-\phi) \cdot S^n] \quad (4.10)$$

La présente étude est limitée aux schémas explicites en temps, cela correspond à $\phi=0$ dans la relation (4.10) précédente. Cela correspond à :

$$\Delta X^I \cdot \Delta_t U^{n+1} + \Delta t \cdot \Delta_x F^n = \Delta X^I \cdot \Delta t \cdot S^n \quad (4.11)$$

La relation (4.11) est celle qui sera à la base des schémas numériques unidimensionnels présentés durant l'étude en cours.

Démarche à quatre étapes pour l'utilisation des schémas de Riemann

La démarche qui suit a été proposée par Godunov (1959) dans le cadre de la technique des volumes finis qui utilise les schémas de Riemann comme ingrédient de base pour faire évoluer la solution sur le domaine de calcul.

- Étape 1 : projection. À cette étape, la distribution originale $U(x,t)$ est remplacée par une distribution constante par morceau (constante dans chaque volume de contrôle). La valeur constante est la moyenne intégrale donnée par la formule (4.5)

$$U_I^n = \frac{1}{\Delta X^I} \int_{X_{I-1/2}}^{X_{I+1/2}} U(x, t^n) \cdot dx.$$

- Étape 2 : reconstruction. Les valeurs aux interfaces entre volumes de contrôle sont reconstruites en préparation du problème de Riemann à résoudre. Pour un schéma d'approximation d'ordre 1, la variable à l'interface est égale à la variable moyenne sur le volume de contrôle. Pour un schéma d'ordre 2, le profil de la variable à l'intérieur du volume de contrôle est linéaire. L'opération de reconstruction utilise alors la valeur moyenne et une estimation de la pente (dérivée spatiale) pour construire la valeur à l'interface selon un profil linéaire.
- Étape 3 : solution du problème de Riemann aux interfaces entre volumes de contrôle. En fait, à cette étape, c'est surtout une estimation du flux à l'interface qui est réalisée :

- $F_{I+1/2}^n = F[U(X_{I+1/2}, t^n)].$

- Étape 4 : évolution de la solution. Application de la formule (4.11).

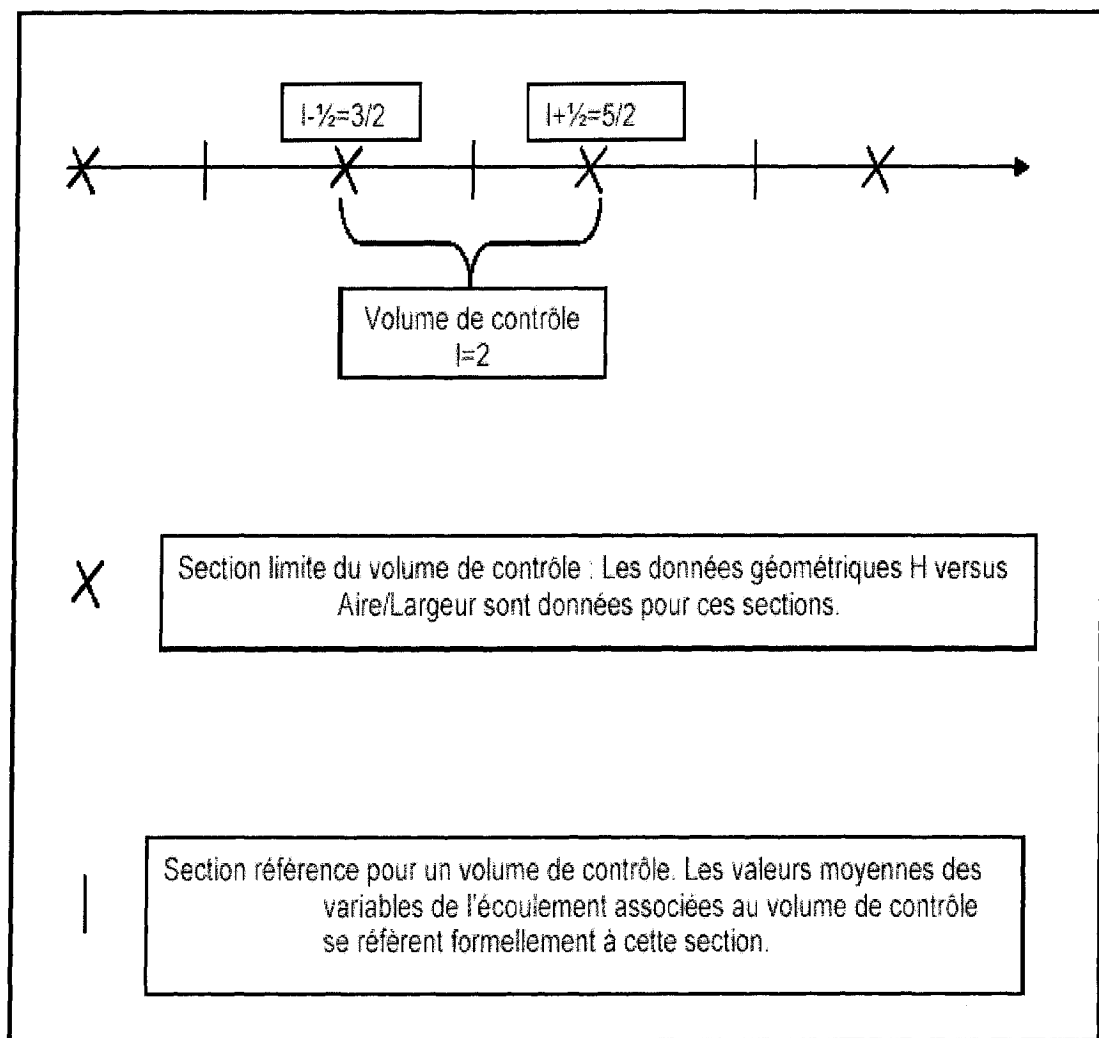


Figure 4.1 Partition du domaine d'étude en vue de la modélisation par volumes finis.

4.3 Solution du problème de Riemann dans la formule de volumes finis

L'apport de la théorie du problème de Riemann s'effectue par le truchement des termes de flux d'interfaces $F_{I+1/2}$ et $F_{I-1/2}$. Ces flux sont localisés aux interfaces entre le volume de contrôle courant et ces deux volumes de contrôle voisins.

Le flux $F_{I+1/2}$ représente le flux entre les volumes de contrôle d'indices I et $I+1$.

$$F_{I+1/2}^n = F[U(X_{I+1/2}, t^n)] \quad (4.12)$$

L'idée principale des schémas de Riemann est de remplacer le flux (de la solution) en (4.12) par le flux d'une approximation de la solution, ou par une approximation du flux de la solution, du problème de Riemann entre les états U_I et U_{I+1} . Cette stratégie offre plusieurs avantages dont les principaux sont :

- pour le système de Saint-Venant, l'injection dans le schéma numérique d'intégration des caractéristiques connues de la solution du problème de rupture de barrage théorique (traitement des régimes d'écoulement mixte, traitement des zones d'inondation, etc.);
- la solution du problème de Riemann, fonction des états initiaux, étant valable dans l'intervalle de l'état initial au temps où l'onde la plus rapide a atteint une interface voisine, contient une part d'évolution, et dans ce sens n'est pas strictement explicite même si elle ne dépend que des états initiaux. Cette propriété explique également que les schémas de Riemann soient capables de produire des solutions avec vitesse non nulle à partir d'états initiaux au repos (vitesse nulle). Avant l'apparition des schémas de Riemann seuls les schémas à maillages décalés présentaient cette capacité.

4.3.1 Propriété de cohérence

La propriété de cohérence du schéma de Riemann est importante pour que le schéma

global (4.11) produise des solutions qui convergent vers la solution exacte. La cohérence se traduit par la relation :

Si $U_I^n = U_{I+1}^n = U$, alors (4.13)

$$F_{I+1/2}^n = F[U_I(t^n); U_{I+1}(t^n)] = F[U(t^n); U(t^n)] = F[U(t^n)]$$

En bref, cette propriété exige que les approximations du flux proposées le schéma de Riemann soient cohérentes avec la fonction de flux originale présente dans l'équation de base.

4.3.2 Propriété de conservation

La forme (4.11) des équations de base garantit que le schéma d'intégration est du type conservatif. Cela résulte du fait que la forme du terme différentiel d'espace ayant permis le passage d'une intégrale de domaine à une intégrale de bord (4.6), le flux F qui est impliqué dans la relation d'évolution (4.11) de U_I avec un signe négatif, est également présent dans la relation d'évolution du point voisin U_{I+1} . mais cette fois avec un signe positif.

$$U_I^{n+1} = U_I^n + \frac{\Delta t}{\Delta X_I} [F_{I-1/2}^n - F_{I+1/2}^n] + \Delta t \cdot S_I^n \quad (4.14)$$

$$U_{I+1}^{n+1} = U_{I+1}^n + \frac{\Delta t}{\Delta X_I} [F_{I+1/2}^n - F_{I+3/2}^n] + \Delta t \cdot S_{I+1}^n \quad (4.15)$$

Ainsi, il apparaît qu'en effectuant la somme des relations d'évolution écrites pour tous les volumes de contrôle : 1, 2, 3, ..., N dans un système homogène ($S=0$) avec un maillage régulier (ΔX constant), on démontre que la variation de quantité globale dans le domaine est due aux flux net de quantité par les frontières :

$$\frac{\Delta X}{\Delta t} \left[\sum_{I=1}^N U_I^{n+1} - \sum_{I=1}^N U_I^n \right] = F_{1/2}^n - F_{N+1/2}^n \quad (4.16)$$

4.4 Schéma de débit SRD11

La majorité des publications traitant des schémas de Riemann appliqués aux équations de Saint-Venant utilisent la formulation (2.9) des équations de Saint-Venant (Vila 1986, Alcrudo & Garcia-Navarro 1991, Paquier 1995). La raison de cette tendance se trouve probablement dans le fait que la forme homogène (sans terme source) est du type divergent propice à une utilisation des schémas de Riemann pour l'approximation des flux aux frontières des volumes de contrôle.

Le schéma présenté dans la présente section appartient à ce courant et utilise le système (2.9) qui a la forme suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = S \quad (4.17)$$

Où :

$$U = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} Q \\ \left(\frac{Q^2}{A} \right) + g \cdot I_1 \end{bmatrix}, \quad S(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ g \cdot A \cdot (S_0 - S_f) + I_2 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

La définition des termes S_0 , S_f , I_1 et I_2 est donnée par les relations (2.9) à (2.12). La technique des volumes finis proposée par (4.11) constitue le cadre à l'intérieur duquel les schémas de Riemann présentés dans la section courante et les trois sections suivantes s'inscrivent.

La formule d'approximation de flux de Roe s'écrit :

$$F_{I+1/2}^n = F_{I+1/2}(U_I^n, U_{I+1}^n) = \frac{1}{2} [F_I(U_I^n) + F_{I+1}(U_{I+1}^n) - |J_{I+1/2}| \cdot \Delta U] \quad (4.20)$$

$$F_{I+1/2}^n = \frac{1}{2} [F(U_I^n) + F(U_{I+1}^n) - (\alpha_1 \cdot |\lambda_1|) \cdot E1 - (\alpha_2 \cdot |\lambda_2|) \cdot E2] \quad (4.21)$$

Pour ce schéma, les approximations suivantes ont été utilisées:

Tableau 4.1 : Principaux termes de la formule de Roe dans le schéma SRD11.

Valeur propre	Vecteur propre	Amplitude
$\lambda 1 = V_{I+1/2}^n - C_{I+1/2}^n$	$E1 = \begin{bmatrix} 1 \\ V_{I+1/2}^n - C_{I+1/2}^n \end{bmatrix}$	$\alpha 1 = \frac{[\Delta_{I+1/2} Q - (V_{I+1/2} - C_{I+1/2}) \cdot \Delta_{I+1/2} A]}{2C_{I+1/2}}$
$\lambda 2 = V_{I+1/2}^n + C_{I+1/2}^n$	$E2 = \begin{bmatrix} 1 \\ V_{I+1/2}^n + C_{I+1/2}^n \end{bmatrix}$	$\alpha 2 = \frac{[(V_{I+1/2} + C_{I+1/2}) \cdot \Delta_{I+1/2} A - \Delta_{I+1/2} Q]}{2C_{I+1/2}}$

Où :

$$\Delta_{I+1/2} Q = Q_{I+1} - Q_I \quad (4.22a)$$

$$\Delta_{I+1/2} A = A_{I+1} - A_I \quad (4.22b)$$

$$C_{I+1/2} = \sqrt{g \cdot \frac{A_I + A_{I+1}}{B_I + B_{I+1}}} \quad (4.22c)$$

$$V_{I+1/2} = \frac{\sqrt{A_I} \cdot V_I + \sqrt{A_{I+1}} \cdot V_{I+1}}{\sqrt{A_I} + \sqrt{A_{I+1}}} \quad (4.22d)$$

Intégration des termes source de gravité

Par termes source de gravité on désigne le terme de pente du lit $-(g \cdot A) \cdot \frac{\partial Z_f}{\partial x}$ et le

terme de pression latérale $I_2 = g \int_{Z_f}^H \frac{\partial A(x, \xi)}{\partial x} d\xi$. Des deux termes, le second, I_2 est le

plus difficile à intégrer. La stratégie retenue dans le cadre du schéma SRD11 consiste à utiliser la relation (2.13) pour dériver :

$$I_2 = \frac{\partial I_1}{\partial x} - (g \cdot A) \cdot S_0 - (g \cdot A) \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \quad (4.23)$$

Pour un schéma de Riemann d'ordre 1, comme l'est SRD11, le couple de variables qui sont considérées localement constantes est (H,Q). Pour H constant (4.23) se réduit à :

$$I_2 = \frac{\partial I_1}{\partial x} - (g \cdot A) \cdot S_0 \quad (4.24)$$

La relation (4.23) pourrait également être aisément utilisée dans le cas d'une approximation linéaire par morceau de H.

4.5 Schéma de vitesse SRD12 à conservation de charge

Cette section présente une application du schéma de Roe au système à conservation de charge (2.2) qui s'écrit sous la forme divergente :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = S$$

Avec :

$$U = \begin{bmatrix} A \\ V \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} A \cdot V \\ \frac{V^2}{2} + g \cdot H \end{bmatrix}, \quad S(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \cdot S_f \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

La technique des volumes finis proposée s'applique parfaitement à cette formulation.

L'application de la formule d'approximation de flux de Roe à cette forme produit :

$$F_{I+1/2}^n = F_{I+1/2}(U_I^n, U_{I+1}^n) = \frac{1}{2} [F_I(U_I^n) + F_{I+1}(U_{I+1}^n) - |J_{I+1/2}| \cdot \Delta U]$$

$$F_{I+1/2}^n = \frac{1}{2} [F(U_I^n) + F(U_{I+1}^n) - (\alpha_1 \cdot |\lambda_1|) \cdot E1 - (\alpha_2 \cdot |\lambda_2|) \cdot E2]$$

Les principaux termes de la formule précédente sont présentés au tableau 4.2 suivant avec :

$$\Delta_{I+1/2} V = V_{I+1} - V_I \quad (4.26a)$$

$$\Delta_{I+1/2} A = A_{I+1} - A_I \quad (4.26b)$$

$$C_{I+1/2} = \sqrt{g \cdot \frac{A_I + A_{I+1}}{B_I + B_{I+1}}} \quad (4.26c)$$

$$V_{I+1/2} = \frac{V_I + V_{I+1}}{2} \quad (4.26d)$$

Tableau 4.2 : Principaux termes de la formule de Roe dans le schéma SRD12

Valeur propre	Vecteur propre	Amplitude
$\lambda 1 = V_{I+1/2}^n - C_{I+1/2}^n$	$E1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{(A_{I+1/2} \cdot B_{I+1/2})}{g}} \\ 1 \end{bmatrix}$	$\alpha 1 = \frac{1}{2} \left[\Delta_{I+1/2} V - \frac{\Delta_{I+1/2} A}{\sqrt{\frac{(A_{I+1/2} \cdot B_{I+1/2})}{g}}} \right]$
$\lambda 2 = V_{I+1/2}^n + C_{I+1/2}^n$	$E1 = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{(A_{I+1/2} \cdot B_{I+1/2})}{g}} \\ 1 \end{bmatrix}$	$\alpha 1 = \frac{1}{2} \left[\Delta_{I+1/2} V + \frac{\Delta_{I+1/2} A}{\sqrt{\frac{(A_{I+1/2} \cdot B_{I+1/2})}{g}}} \right]$

Le terme source, de ce schéma, qui est essentiellement réduit au terme de frottement est traitée par linéarisation et implication pour des besoins de stabilité. Ce traitement est présenté en détail à la section 4.7.

4.6 Schéma de débit SRD13

Ce schéma utilise la formulation originale (2.1) des équations de base. Cette formulation n'ayant pas la forme divergente stricte notamment en raison de la forme du terme de gravité $g \cdot A \cdot \frac{\partial H}{\partial x}$. Une opération de gel ou linéarisation locale est proposée

pour le terme A (l'aire moyenne qui intégrée sur la longueur donne le volume d'eau contenue dans le volume de contrôle. Cette linéarisation consiste donc à l'approximation du terme de gravité par le terme :

$$g \cdot A \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \approx g \cdot A_p \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \quad (4.27)$$

Le but recherché par cette opération de linéarisation est d'écrire sous une forme

divergente la formulation originale des équations de base sans décomposer le terme de gravité en des termes source de géométrie que nous avons identifiés comme cause d'instabilité.

Le système de base (2.1) peut donc être écrit localement (sur le volume de contrôle I) sous la forme divergente suivante moyennant une linéarisation de la forme (4.27) :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = S$$

Avec :

$$U = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}, \quad F(U) = F_I(U) = \begin{bmatrix} Q \\ \left(\frac{Q^2}{A} \right) + A_I \cdot g \cdot H \end{bmatrix}, \quad S(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ g \cdot A \cdot S_f \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

L'application de la formule d'approximation de flux de Roe au flux de (4.28) produit une expression de la forme suivante :

$$F_{I,I+1/2}^n = F_{I+1/2}(U_I^n, U_{I+1}^n) = \frac{1}{2} [F_I(U_I^n) + F_{I+1}(U_{I+1}^n) - |J_{I+1/2}| \cdot \Delta U]$$

$$F_{I+1/2}^n = \frac{1}{2} [F(U_I^n) + F(U_{I+1}^n) - (\alpha 1 \cdot |\lambda 1|) \cdot E1 - (\alpha 2 \cdot |\lambda 2|) \cdot E2] \quad (4.29)$$

Avec:

$$F_I(U_I^n) = \begin{bmatrix} Q_I^n \\ \left(\frac{Q_I^n}{A_I^n} \right)^2 + A_I^n \cdot g \cdot H_I^n \end{bmatrix}, \quad F_{I+1}(U_{I+1}^n) = \begin{bmatrix} Q_{I+1}^n \\ \left(\frac{Q_{I+1}^n}{A_{I+1}^n} \right)^2 + A_{I+1}^n \cdot g \cdot H_{I+1}^n \end{bmatrix}$$

Les composantes caractéristiques de (4.29) sont fournies au tableau 4.3 suivant avec :

$$\Delta_{I+1/2} Q = Q_{I+1} - Q_I \quad (4.31a)$$

$$\Delta_{I+1/2} A = A_{I+1} - A_I \quad (4.31b)$$

$$C_{I+1/2} = \sqrt{g \cdot \frac{A_I + A_{I+1}}{B_I + B_{I+1}}} \quad (4.31c)$$

$$V_{I+1/2} = \frac{\sqrt{A_I} \cdot V_I + \sqrt{A_{I+1}} \cdot V_{I+1}}{\sqrt{A_I} + \sqrt{A_{I+1}}} \quad (4.31d)$$

Tableau 4.3 : Principaux termes de la formule de Roe dans le schéma SRD13

Valeur propre	Vecteur propre	Amplitude
$\lambda 1 = V_{I+1/2}^n - C_{I+1/2}^n$	$E1 = \begin{bmatrix} 1 \\ V_{I+1/2}^n - C_{I+1/2}^n \end{bmatrix}$	$\alpha 1 = \frac{[\Delta_{I+1/2} Q - (V_{I+1/2} - C_{I+1/2}) \cdot \Delta_{I+1/2} A]}{2C_{I+1/2}}$
$\lambda 2 = V_{I+1/2}^n + C_{I+1/2}^n$	$E2 = \begin{bmatrix} 1 \\ V_{I+1/2}^n + C_{I+1/2}^n \end{bmatrix}$	$\alpha 2 = \frac{[(V_{I+1/2} + C_{I+1/2}) \cdot \Delta_{I+1/2} A - \Delta_{I+1/2} Q]}{2C_{I+1/2}}$

4.7 Schéma de débit/vitesse SRD14

Ce schéma constitue la forme la plus achevée, des schémas présentés dans cette thèse, au regard de ses performances devant les cas aussi bien théoriques que pratiques. La seule différence du schéma SRD13 avec le schéma SRD14 est que ce dernier utilise une étape de plus, que le schéma de la section précédente, pour la transformation du débit en vitesse.

Dans le paragraphe qui suit, les relations utilisées pour cette transformation seront présentées. Désignons U et W les couples de variables suivants :

$$U = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} A \\ V \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Il est possible d'établir les relations suivantes entre les variations de U et W :

$$\partial U = \begin{bmatrix} \partial A \\ \partial Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ V & A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial A \\ \partial V \end{bmatrix} = M \cdot \partial W \quad (4.26)$$

$$\partial W = \begin{bmatrix} \partial A \\ \partial V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V/A & 1/A \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \partial A \\ \partial Q \end{bmatrix} = M^{-1} \bullet \partial U \quad (4.27)$$

C'est la relation (4.27) qui est utilisée pour effectuer la transformation de débit en vitesse (précisément de variation de débit en variation de vitesse).

Rappelons que la dernière étape (étape 4) de l'algorithme de volume finis, après calcul des flux approximatifs et du terme source, consiste à évaluer la variation dans le temps des variables dépendantes :

$$\Delta_t U^{n+1} = (U_I^{n+1} - U_I^n) = \Delta t \cdot \left[S_I^n - \frac{\Delta_x F^n}{\Delta X^I} \right] \quad (4.28)$$

La transformation (4.27) s'applique donc à la relation (4.28) pour produire :

$$\Delta_t W^{n+1} = M^{-1} \bullet \Delta_t U^{n+1} = \Delta t \cdot M^{-1} \bullet \left[S_I^n - \frac{\Delta_x F^n}{\Delta X^I} \right] \quad (4.29)$$

4.8 Intégration du terme source de frottement

L'intégration du terme de gravité présent dans le terme source a été couverte dans la section 4.5.

Les termes source dans les formulations (2.1) et (2.2) se réduisent au terme de friction. Il est démontré dans la publication (Tchamen & Kahawita 1998) qu'un traitement explicite, en temps, de ce terme n'est pas stable, et notamment pour des écoulements à grande vitesse il est capable d'inverser le sens de l'écoulement, comportement qui n'est pas cohérent avec la nature des forces de friction qu'il représente. Aussi, la démarche recommandée dans cette publication, et que nous présentons ici, est d'effectuer une linéarisation de ce terme, qui est non linéaire à la base, suivie d'une intégration implicite.

Pour examiner l'intégration temporelle du terme de friction dans les systèmes (2.1) et

(2.2), on choisit la forme réduite suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = S(U) \quad (4.30)$$

Avec, pour le système (2.1) :

$$U = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}, \text{ et } S(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \cdot A \cdot S_f \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Et pour le système (2.2) :

$$U = \begin{bmatrix} A \\ V \end{bmatrix}, \text{ et } S(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \cdot S_f \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

De fait, la forme (4.30) peut faire partie d'une stratégie d'intégration des systèmes (2.1) et (2.2) qui utiliserait la démarche des pas fractionnaires pour les différents phénomènes ou termes constitutifs du système.

Rappelons que le terme de frottement est défini comme :

$$S_f = \frac{N^2}{R^{4/3}} |V| \cdot V = C_f \cdot V, \text{ où } C_f = \frac{N^2}{R^{4/3}} |V| \quad (4.33)$$

La linéarisation de (4.30) s'effectue alors autour de C_f . Le système (4.30) peut alors s'écrire sous forme quasi-linéaire :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \cdot C_f \end{bmatrix} \bullet U = -K \bullet U \quad (4.34)$$

Ainsi, la formule d'intégration proposée s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_t U^{n+1}}{\Delta t} &= \frac{(U^{n+1} - U^n)}{\Delta t} = -(1 - \phi) \cdot K^n \bullet U^n - \phi \cdot K^n \bullet U^{n+1} \\ \frac{\Delta_t U^{n+1}}{\Delta t} &= -K^n \bullet U^n - \phi \cdot K^n \bullet \Delta_t U^{n+1} \\ [I + \phi \cdot \Delta t \cdot K^n] \bullet \Delta_t U^{n+1} &= -K^n \bullet U^n \end{aligned} \quad (4.35)$$

Où I est la matrice identité de dimension 2, et ϕ le facteur d'implication.

4.9 Détermination des conditions aux limites

4.9.1 Les caractéristiques pour la détermination du nombre de conditions à imposer

La théorie des caractéristiques offre une aide précieuse pour déterminer le nombre de conditions à imposer selon le régime d'écoulement. L'étude des caractéristiques du système de base, présentée à la section 2.3, a montré qu'il existe deux familles de caractéristiques liées chacune à l'une ou l'autre des valeurs propres :

$$\lambda_1 = V - C \text{ et } \lambda_2 = V + C \quad (4.17)$$

Chacune de ces valeurs propres représente la pente des courbes caractéristiques qui sont des droites transportant les quantités constantes appelées invariants de Riemann. Pour chacune des frontières, le nombre des conditions à imposer correspond au nombre des valeurs propres négatives (valeurs propres projetées dans la direction normale extérieure à la frontière).

4.9.2 Écoulement fluvial

Suivant la règle énoncée au paragraphe précédent, en cas d'écoulement fluvial ($V < C$) les deux valeurs propres, λ_1 et λ_2 , sont toutes deux de signes distincts. Il en ressort qu'à chacune des frontières il faut imposer une condition.

En pratique, à une frontière d'entrée, le débit (hydrogramme) est imposé, et à une frontière de sortie, le niveau (limnigramme) est la variable imposée.

4.9.3 Écoulement torrentiel

Dans le cas d'un écoulement torrentiel ($V > C$), les deux valeurs propres sont du même signe.

À une frontière d'entrée, deux conditions doivent être imposées simultanément. En pratique, c'est le niveau et le débit qui le sont généralement.

À une frontière de sortie, les deux valeurs propres sont positives, et il n'est donc pas nécessaire d'imposer de condition. Les valeurs des variables à la frontière seront déterminées à partir de celles à l'intérieur du domaine à l'aide schéma numérique utilisé.

4.10 Traitement numérique des conditions aux limites

Deux stratégies de traitement numérique des conditions aux limites ont été utilisées pendant la présente étude.

4.10.1 Cellule fictive

Le principe de traitement de conditions aux limites par l'utilisation de cellule fictive est assez simple à mettre en pratique. À chacune des frontières, une cellule fictive est mise en dehors du domaine et construite en miroir de la cellule du domaine adjacente à cette frontière. Le schéma numérique utilisé dans le domaine est alors appliqué entre la cellule fictive et sa cellule image située à l'intérieur du domaine pour évaluer le flux à la frontière.

Si une condition est imposée à cette frontière, alors la valeur à imposer est inscrite dans la cellule fictive. Par exemple, si le débit est imposé, la valeur est littéralement transcrite dans la cellule fictive. Par contre, si c'est le niveau qui est imposé, il sera utilisé avec le profil de section pour déterminer la valeur de l'aire moyenne à imposer dans la cellule fictive.

Dans la cellule fictive, la variable qui n'est pas imposée est tout simplement extrapolée du domaine, c'est-à-dire recopiée à partir de la cellule image situé dans le domaine de l'autre côté de la frontière.

4.10.2 Imposition directe du flux

L'autre technique qui a été employée pour l'imposition des conditions aux limites, a été celle de l'imposition directe par le flux à la frontière traitée. La valeur imposée est directement introduite dans l'expression du flux. La variable complémentaire est extrapolée à partir de l'intérieur du domaine.

CHAPITRE 5 RÉSULTATS DE LA MODÉLISATION UNIDIMENSIONNELLE

5.1 Introduction

Le présent chapitre présentera les résultats de plusieurs tests de validation. Cinq des huit tests présentés sont des tests théoriques possédant une solution analytique. Quatre des cinq tests théoriques ont été recommandés par le groupe Cadam (Toro, Sleigh & Morris 1998). Il s'agit de :

- test d'un plan d'eau au repos sur une géométrie et une bathymétrie irrégulières;
- un écoulement fluvial dans un canal rectangulaire présentant un seuil parabolique dans son lit;
- un second écoulement avec ressaut dans le même canal que le test précédent;
- la rupture de barrage théorique dans un canal rectangulaire prismatique à lit horizontal;
- le cinquième test théorique est celui de la rupture de barrage théorique dans un canal en pente.

En plus de tests théoriques, les résultats de simulations d'écoulements d'inondation effectuées sur des rivières du Québec seront comparés à ceux obtenus au moyen de codes commerciaux. Enfin, les résultats d'une simulation d'écoulement de remplissage de la galerie d'amenée de la centrale Manic 5 P.A. au Québec, seront également présentés.

L'analyse de ces résultats concerne principalement le schéma SRD14 de la section 4.7. Pour illustrer ses performances, ses résultats seront présentés en comparaison avec ceux des schémas SRD11, SRD12 et SRD13 lorsque ceux-ci sont disponibles.

5.2 Plan d'eau au repos

Ce test a pour but de vérifier que le traitement du terme de gravité est effectué de manière à ce que la solution soit en cohérence avec la réalité simple d'un plan d'eau à cote constante sans vitesse initiale, et qui devrait demeurer au repos en tout temps.

La figure 5.1a montre le profil de la bathymétrie du bassin utilisé, tandis que la figure 5.1b présente le profil de la largeur du même bassin.

La simulation est initiée avec le plan d'eau au repos à la cote 12,0 m. La figure 5.1c présente la côte du plan d'eau après 1000 pas de temps simulés. Le plan d'eau est resté immobile, aucune vitesse n'a été générée, et ce, pour tous les quatre schémas analysés tel que l'atteste le graphique de la figure 5.1d.

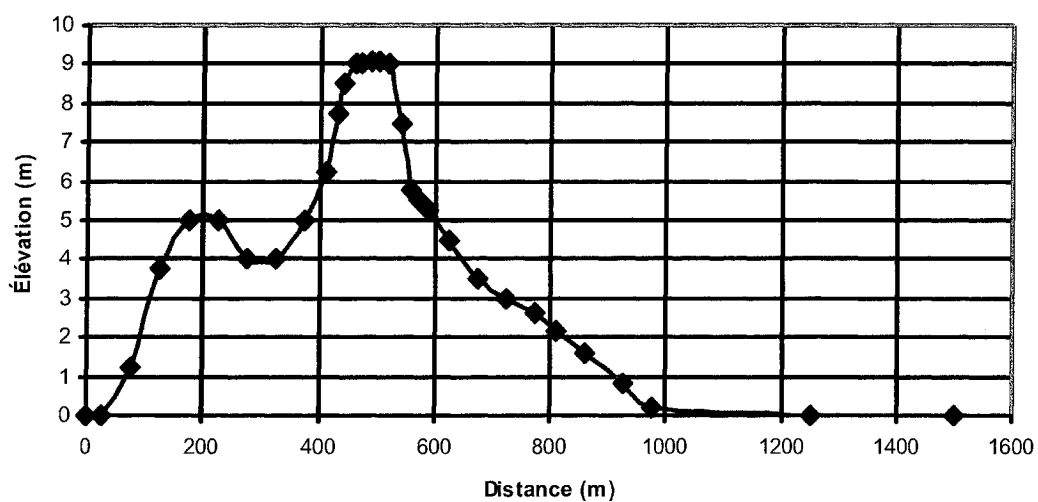


Figure 5.1a Plan d'eau immobile sur bathymétrie complexe.
Bathymétrie.

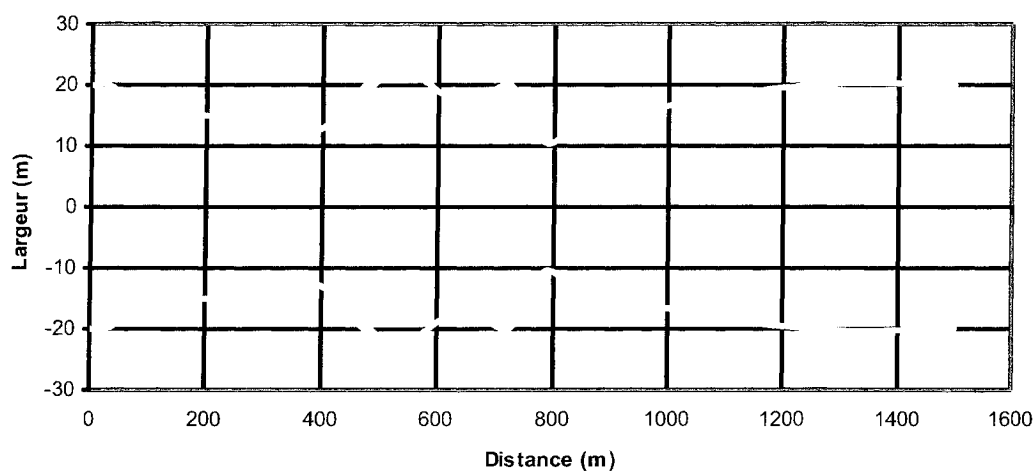
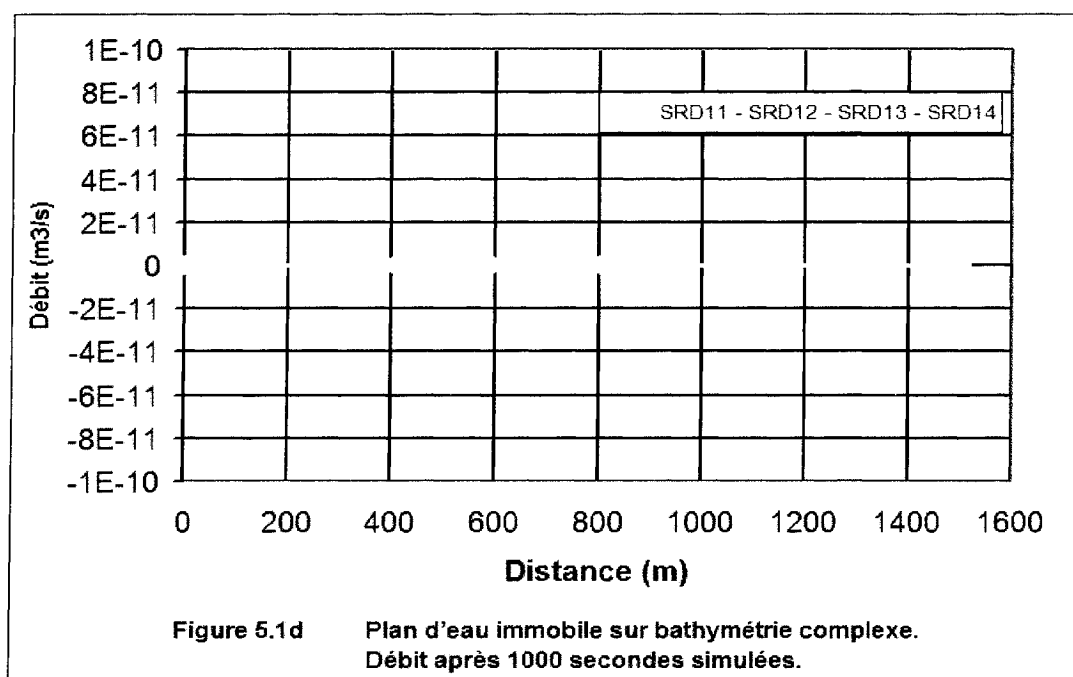
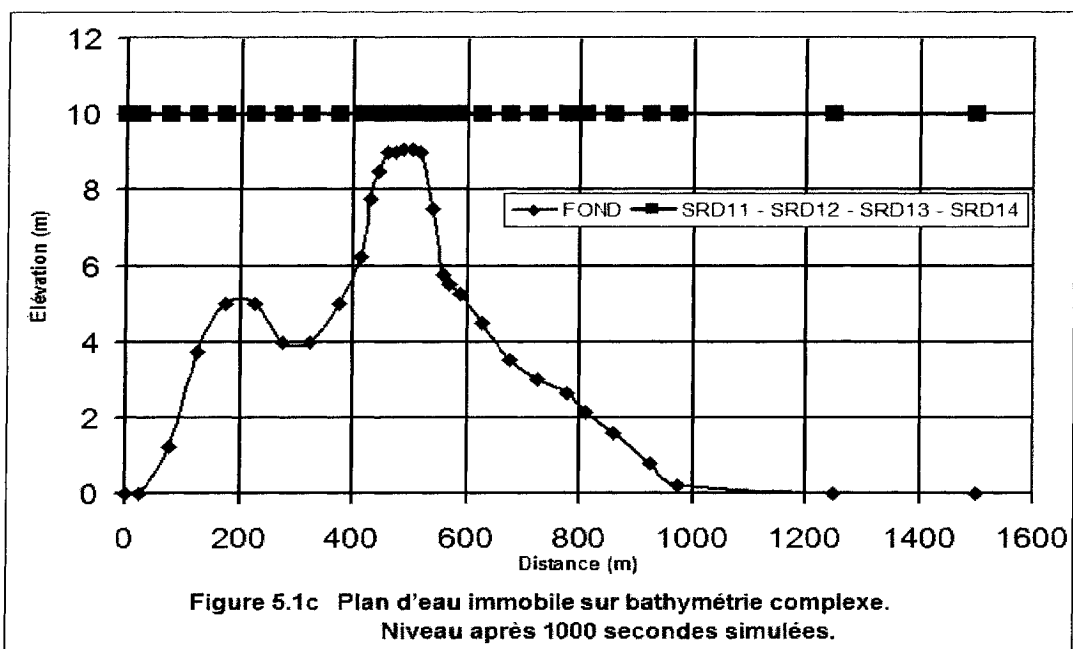


Figure 5.1b Plan d'eau immobile sur bathymétrie complexe.
Profil longitudinal de largeur.



5.3 Écoulement fluvial dans un canal rectangulaire comportant un seuil parabolique en son lit

Le but de ce test est de vérifier que la pente du lit est intégrée correctement dans le schéma et qu'il est par conséquent capable de reproduire la symétrie des profils de surface et de vitesse.

Le domaine de calcul est un canal long de 25,0 m et de largeur $B=1,0$ m. Le profil en long du fond est donnée par :

- pour $0 < X < 8\text{m}$ et $12\text{m} < X < 25\text{m}$, $Z_B = 0$;
- pour $8\text{m} < X < 12\text{m}$, $Z_B = 0.2 - 0.05(X-10.0)^2$.

Les conditions imposées aux limites du domaine sont :

- Un débit à l'amont de $Q=4,42\text{ m}^3/\text{s}$;
- La cote à l'aval est fixée à 2,0 m.

Les figures 5.2a et 5.2b présentent les profils de la surface libre pour les quatre schémas analysés. Sur la figure 5.2b, qui est un agrandissement de la figure 5.2a, il apparaît que lorsque le profil de la surface résultant du schéma SRD14 s'approche d'autant du profil de la solution analytique que le maillage utilisé est fin.

La figure 5.2c montre le profil du débit le long du canal. À l'état permanent, le débit est constant long du canal. Seul les profils des schémas SRD11 et SRD14 (schéma de débit) montrent de faibles déviations par rapport à la solution exacte, de part et d'autre du seuil.

La figure 5.2d est un agrandissement autour du seuil des profils de la vitesse. La qualité de l'approximation réalisée par les schémas est similaire à celle des profils de niveau (figure 5.2b).

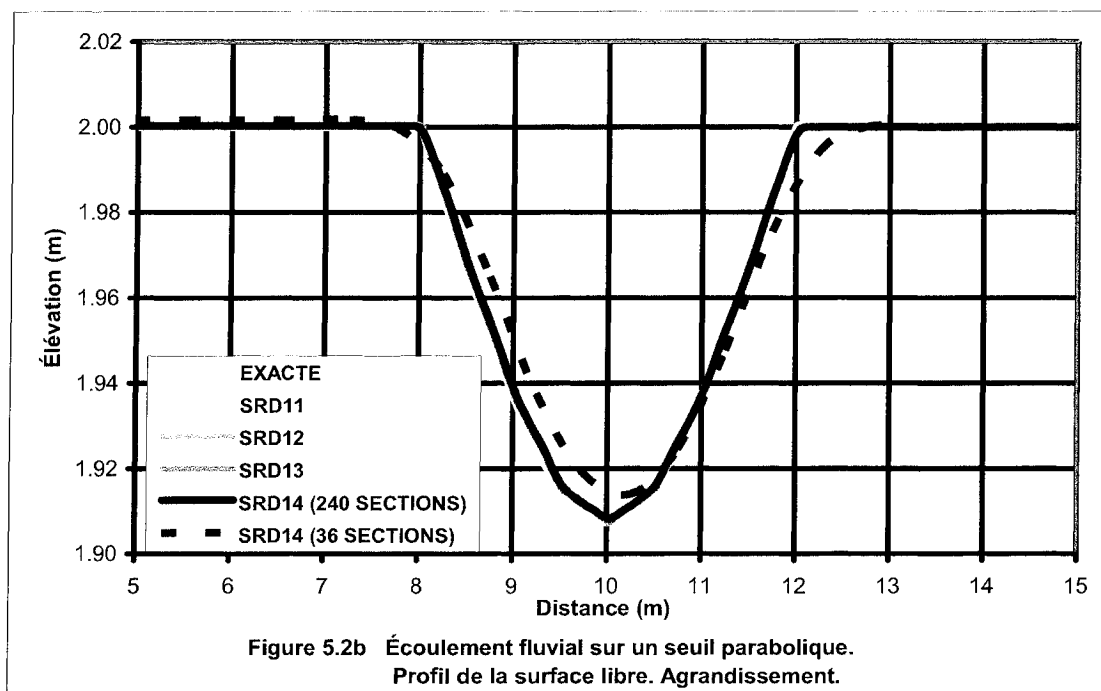
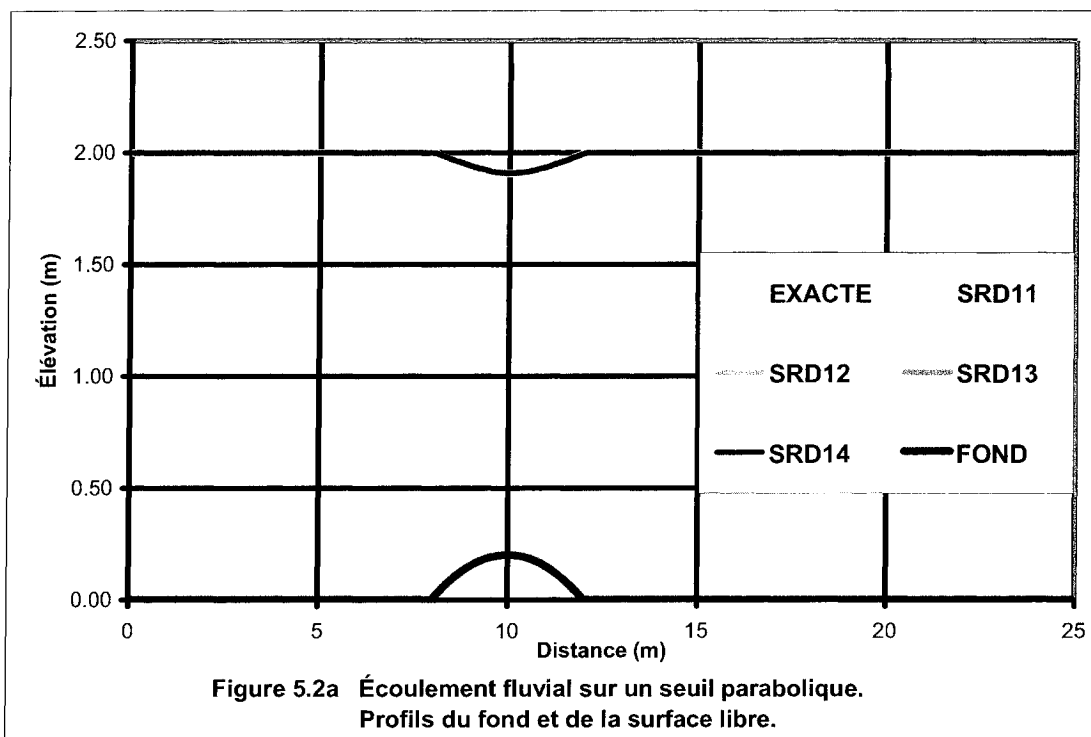
Le tableau 5.1 présente les valeurs des grandeurs niveau, débit et vitesse au dessus

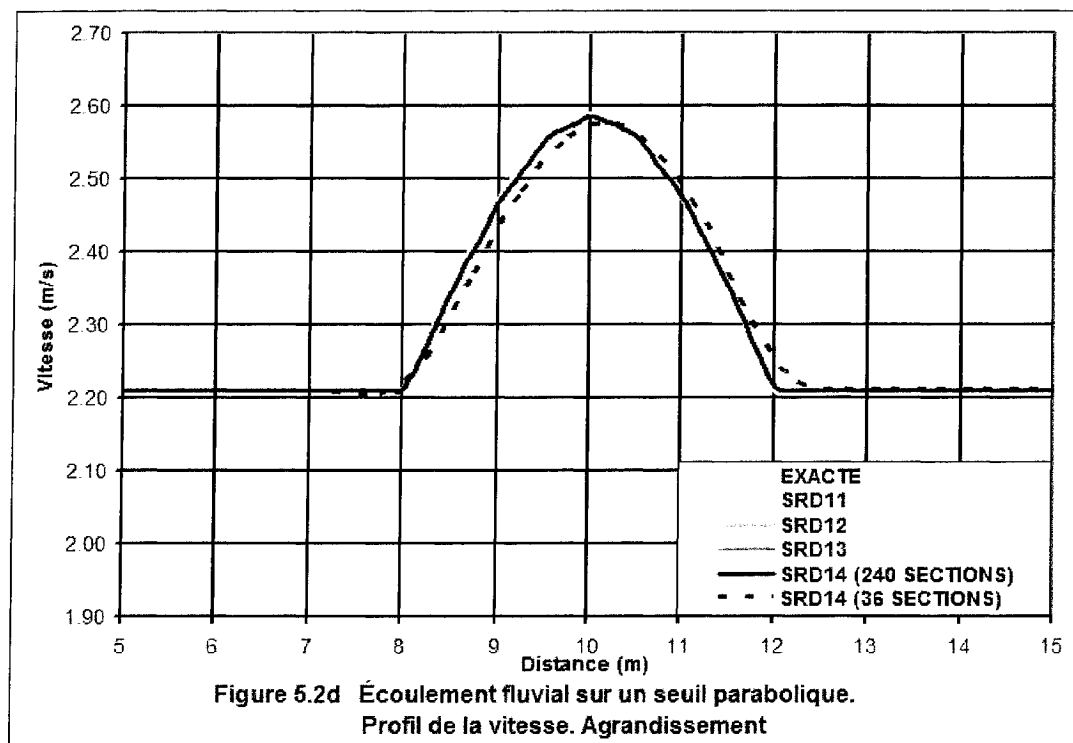
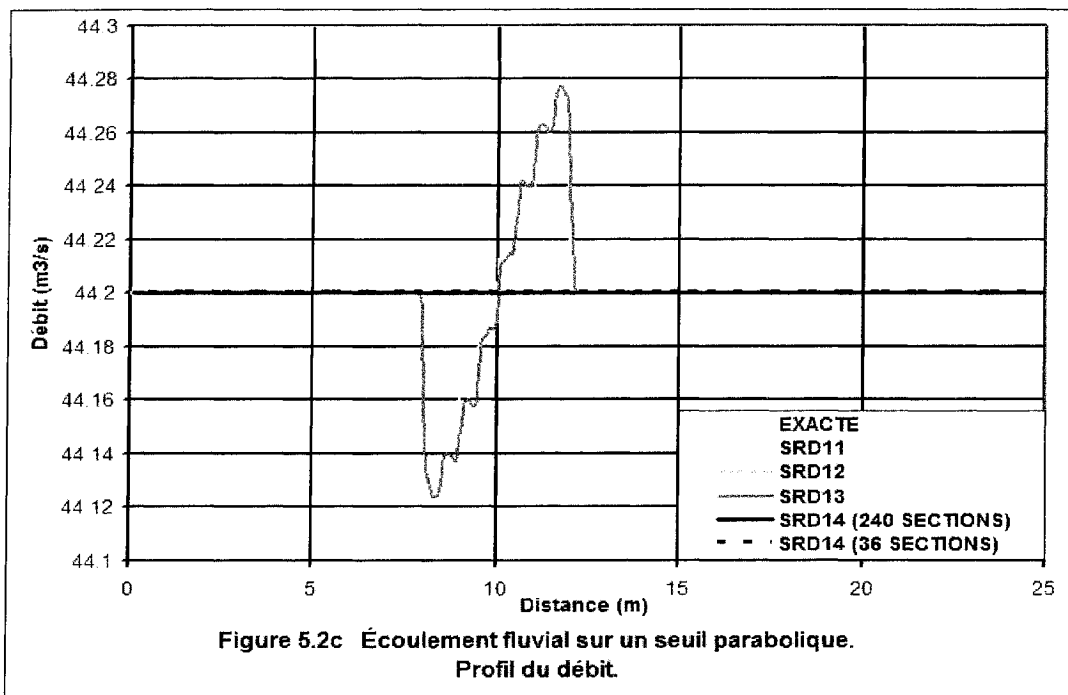
du seuil en comparaison avec la valeur exacte.

Tableau 5.1: Écoulement fluvial au dessus d'un seuil parabolique. Comparaison de la valeur exacte aux valeurs simulées.

Solution ou schéma	Position par rapport à l'amont (m)	Niveau (m)	Débit (m^3/s)	Vitesse (m/s)
Solution Exacte	X=10	1.91	44.2	2.59
SRD14 (36 sections)	9.750	1.919	44.2	2.556
	10.250	1.914	44.2	2.575
SRD14 (240 sections)	9.965	1.909	44.20	2.585
	10.035	1.908	44.20	2.586
SRD13 (240 sections)	9.965	1.909	44.189	2.584
	10.035	1.908	44.201	2.586
SRD12 (240 sections)	9.965	1.908	44.178	2.585
	10.035	1.907	44.208	2.588
SRD11 (240 sections)	9.965	1.909	44.188	2.585
	10.035	1.908	44.213	2.587

Pour le cas simulé, il apparaît que la solution prédite par chacun des quatre schémas approxime bien la solution analytique.





5.4 Ressaut hydraulique dans un canal rectangulaire comportant un seuil parabolique en son lit

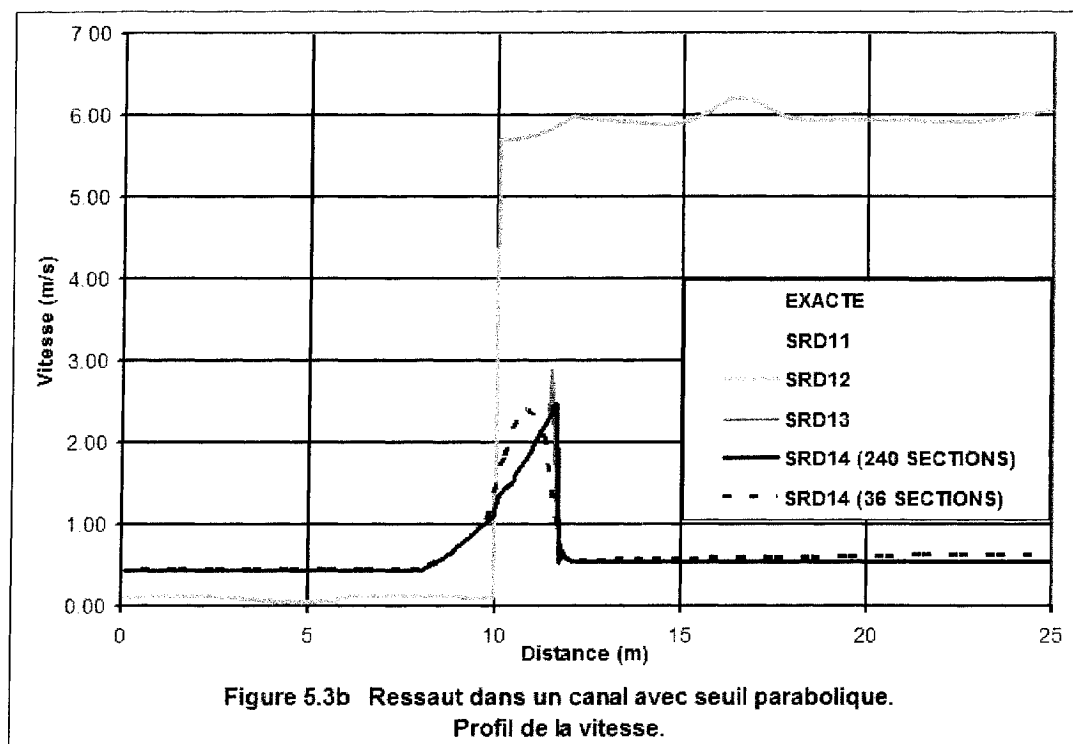
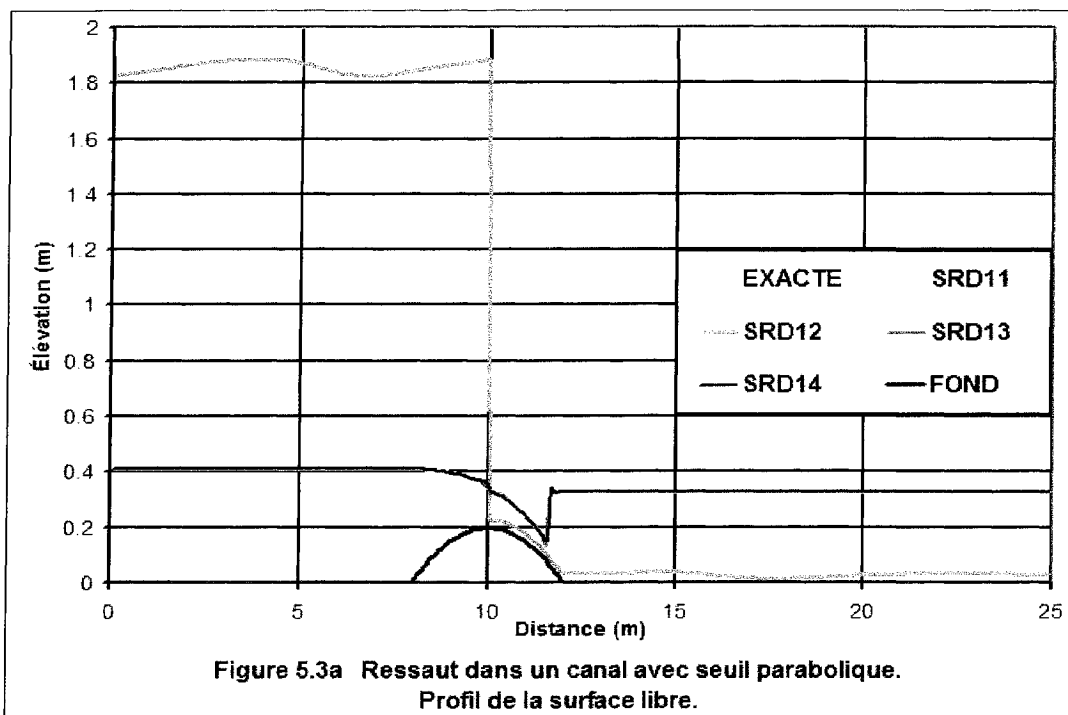
Le présent test utilise le même canal que le test précédent. Seules les conditions aux limites du domaine sont différentes :

- un débit à l'amont de $Q=0,18 \text{ m}^3/\text{s}$;
- la cote à l'aval est fixée à 0,33 m.

La combinaison des conditions aux limites imposées et la taille du seuil présent dans le provoquent l'apparition d'une zone d'écoulement torrentielle au dessus du seuil, et d'un ressaut hydraulique qui permet de recoller sur la cote imposée à la limite aval du domaine.

La figure 5.3a présente les profils de surface simulés par les quatre schémas analysés, en même temps que le profil de la solution analytique. Il apparaît clairement que le profil calculé par le schéma SRD12 ne reproduit pas le ressaut hydraulique présent dans la solution analytique. La même observation peut être faite sur la figure 5.3b qui présentent les profils de vitesse pour le même cas.

Ce cas test illustre parfaitement la différence, mentionné à la section 2.2, entre le système à conservation de charge (2.2) qui est à la base du schéma SRD12, et le système à conservation de mouvement (2.1) sur lequel sont basés les trois autres schémas.



5.5 Rupture de barrage dans un canal rectangulaire sans friction avec fond horizontal et lit aval sec

Ce test correspond au cas de rupture de barrage théorique décrit au chapitre 3. Ce test permet d'analyser la capacité des schémas présentés à simuler la propagation d'une onde générée uniquement par le gradient du niveau initial sur une zone préalablement sèche.

Le domaine utilisé pour la simulation est un canal rectangulaire prismatique de longueur 2000 mètres, de largeur 10 mètres, avec un pas d'espace $DX = 10$ mètres.

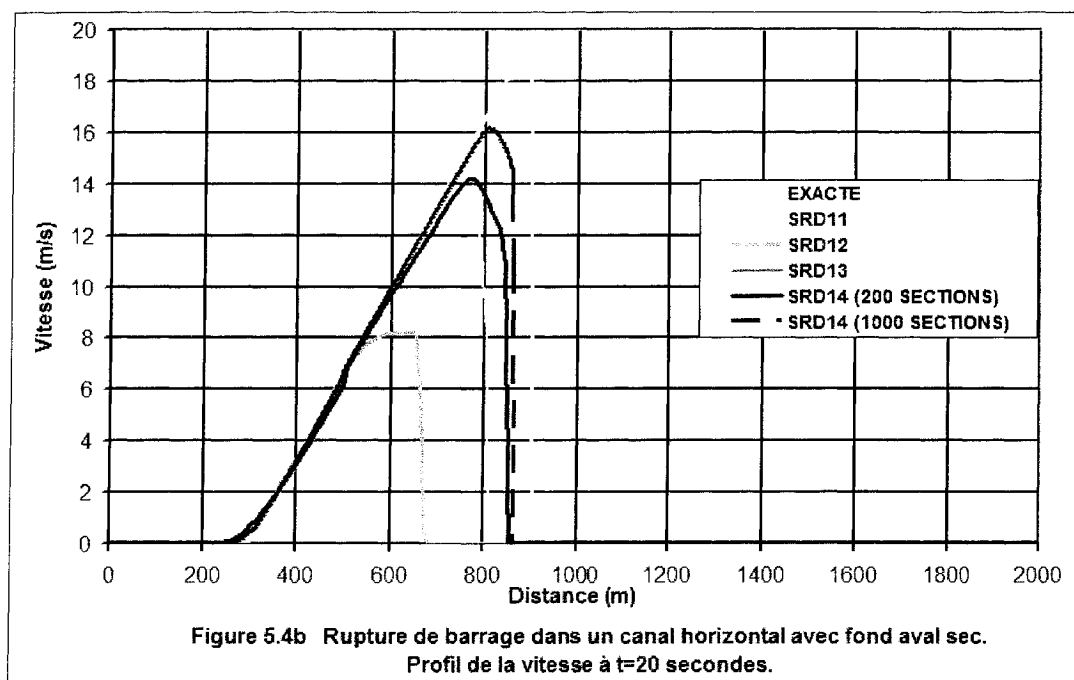
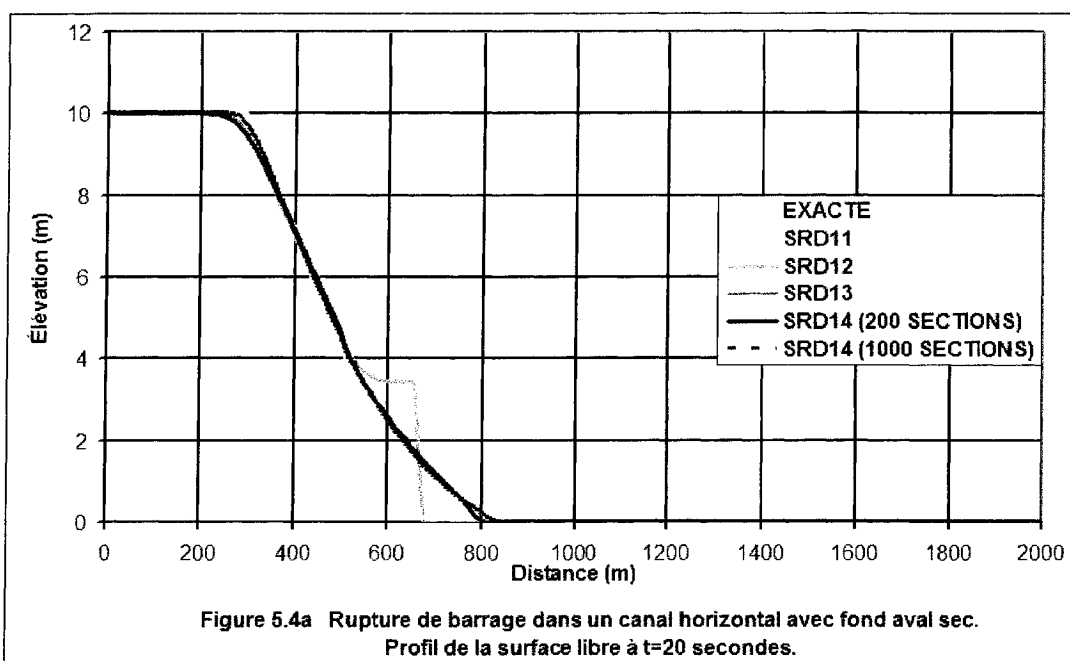
À l'instant initial, le plan d'eau à l'amont du barrage est à la cote 10,0 m. Le barrage est situé à l'abscisse 500,0 m. Le lit à l'aval du barrage est initialement sec.

Les figures 5.5a et 5.5b présentent respectivement les profils de la surface libre et de la vitesse 20 secondes après l'effacement du barrage. Il apparaît que :

Les quatre schémas sont capables de simuler l'inondation rapide d'une zone initialement sèche.

Seul le schéma SRD12 éprouve de la difficulté à reproduire le segment aval du front de l'onde. Un comportement similaire a été rapporté par Stelling et Duinmeijer (2003).

Pour la vitesse, tous les schémas analysés reproduisent au mieux 70% de la vitesse maximale du front de l'onde avec le maillage de $DX=10,0$ m. En raffinant le maillage, $DX=2$ m, il a été possible d'atteindre près de 80% de la vitesse du front. Un comportement similaire a été rapporté ailleurs dans la littérature (Paquier 1995, Stelling et Duinmeijer 2003).



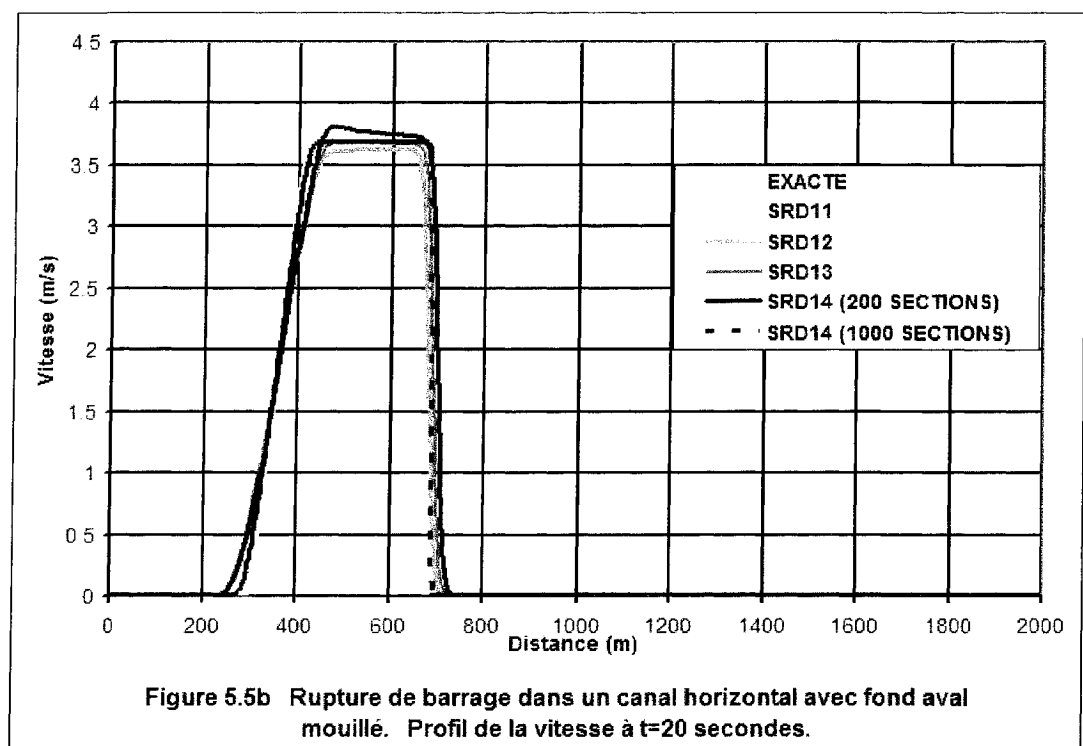
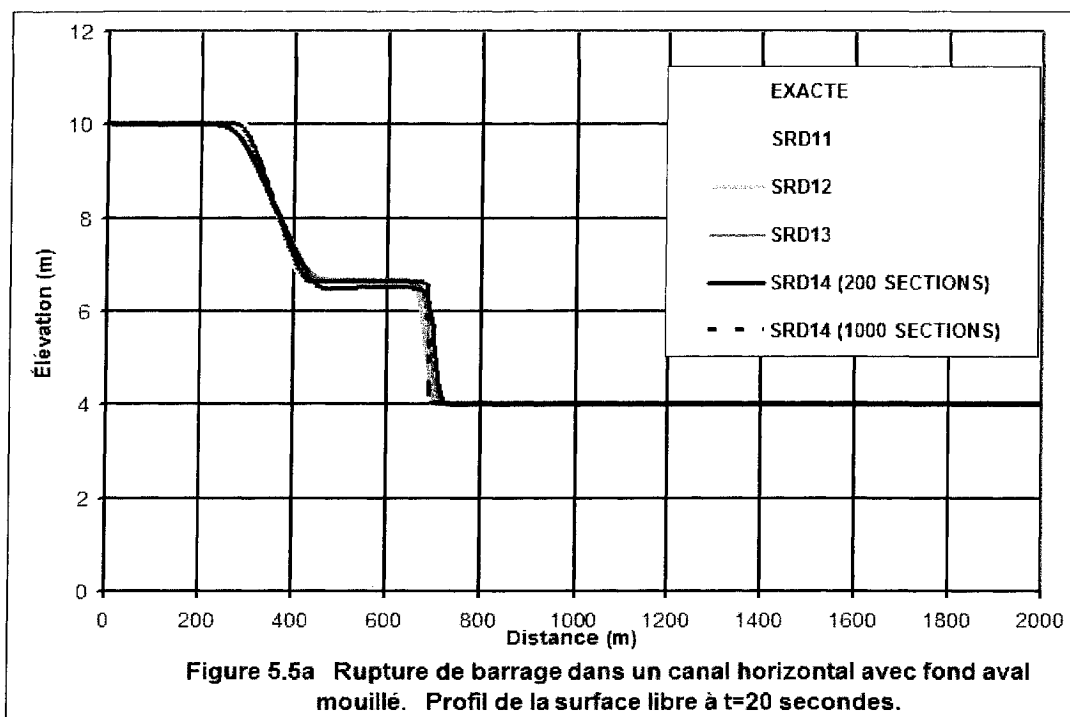
5.6 Rupture de barrage dans un canal rectangulaire avec fond horizontal sans friction et lit mouillé

Ce test correspond au cas de rupture de barrage théorique avec présence d'une lame d'eau au repos en aval du barrage. Ce test permet d'analyser la capacité des schémas présentés à identifier les différentes catégories d'onde. Le cas test précédent ne contenait qu'une onde de raréfaction. Le présent test contient en plus une onde choc qui est une discontinuité mobile, et qui a toujours constitué un défi véritable pour les schémas numériques d'écoulement de surface.

Le canal utilisé pour le test précédent est réutilisé ici. La position du barrage a été également été maintenue à l'abscisse 500,0 m.

À l'instant initial, le plan d'eau est à la cote 10,0 m à l'amont du barrage, et de 4,0 m à l'aval.

Les figures 5.6a et 5.6b présentent le profil de la surface libre et de la vitesse 20 secondes après l'effacement du barrage.



5.7 Remplissage de la galerie d'amenée de Manic 5 P.A.

Ce test correspond à la simulation du remplissage de la galerie d'amenée de la centrale Manic 5 P.A., au Québec, Canada. Ce test démontre la robustesse des schémas SD1-2 et SD1-3, notamment par leur capacité de simuler de manière stable le passage du débit de remplissage sur la portion de la galerie inclinée qui présente un angle de 60 degrés avec le plan horizontal.

La centrale Manic 5 P.A. est alimentée par le réservoir du barrage Daniel Johnson situé à l'amont du complexe Manicouagan de la rivière du même nom. La galerie d'amenée s'étend depuis la prise d'eau jusqu'au site des quatre groupes turbine alternateurs. Cette galerie est longue de 1800 m et comporte trois sections dont la galerie haute qui débute juste à la sortie de la prise d'eau, la galerie inclinée qui fait une chute de près de 90 m avec un angle de 60 degrés avec l'horizontal, et en dernier la galerie basse qui abrite une fosse à débris.

La figure 5.6a présente la localisation de la centrale avec une coupe longitudinale de la galerie. La section transversale de la galerie de forme en D est présentée à la figure 5.6b.

Lors d'arrêt planifié de la centrale, la galerie est vidée de son eau. Avant de remettre la centrale en fonctionnement, les passages de groupe turbine alternateur sont fermés au moment du remplissage qui s'effectue en opérant une ouverture contrôlée de la vanne de prise d'eau. La procédure qui encadre l'opération de remplissage recommande une ouverture de 0,20 m. Il a été évalué que cela correspond à un débit quasi stationnaire de 20 m³/s. Les figures 5.6c et 5.6d présentent les résultats de passage de ce débit dans la galerie.

Lors du dernier remplissage de la galerie en Juin 2005, un dysfonctionnement dans la procédure d'ouverture de vanne de la prise d'eau a provoqué l'arrivée d'un débit beaucoup plus important que le débit recommandé pendant une période de l'ordre d'une dizaine de minutes. Il a été reconstitué que la vanne de prise a été

accidentellement ouverte sur près de 1,7 m, provoquant l'écoulement d'un débit de près de 210 m³/s dans la galerie.

Les résultats du passage de ce débit dans la galerie sont présentés par les figures 5.6e et 5.6f. Ces résultats ont permis d'établir les valeurs maximales pour la vitesse et la profondeur dans les différents tronçons de la galerie qui sont présentées au tableau 5.1. Ces valeurs maximales ont permis d'estimer en utilisant la courbe de la figure 5.6g, la taille maximale des galets ou roches qui pouvaient être transportés au-delà de la galerie basse. La simulation du dernier scénario d'ouverture accidentelle de la vanne de la prise d'eau à près de 1,7 m a permis d'expliquer l'apparition de roche de plus de 0,50 m dans les directrices de groupe turbine alternateur.

La simulation de ces scénarios a prouvé la grande robustesse des schémas SRD12 et SRD14, notamment leur capacité à effectuer des calculs de d'hydraulique de surface sur une pente de 60 degrés. Il est évident que l'on peut s'interroger sur la validité des équations de Saint-Venant sur une telle pente. Mais si il est jugé que le modèle reste applicable, notamment pour la partie de la galerie basse, les deux schémas ont prouvé une capacité inédite à produire des résultats stables et cohérents là où plusieurs modèles commerciaux existants ont éprouvé des difficultés à fournir des résultats stables.

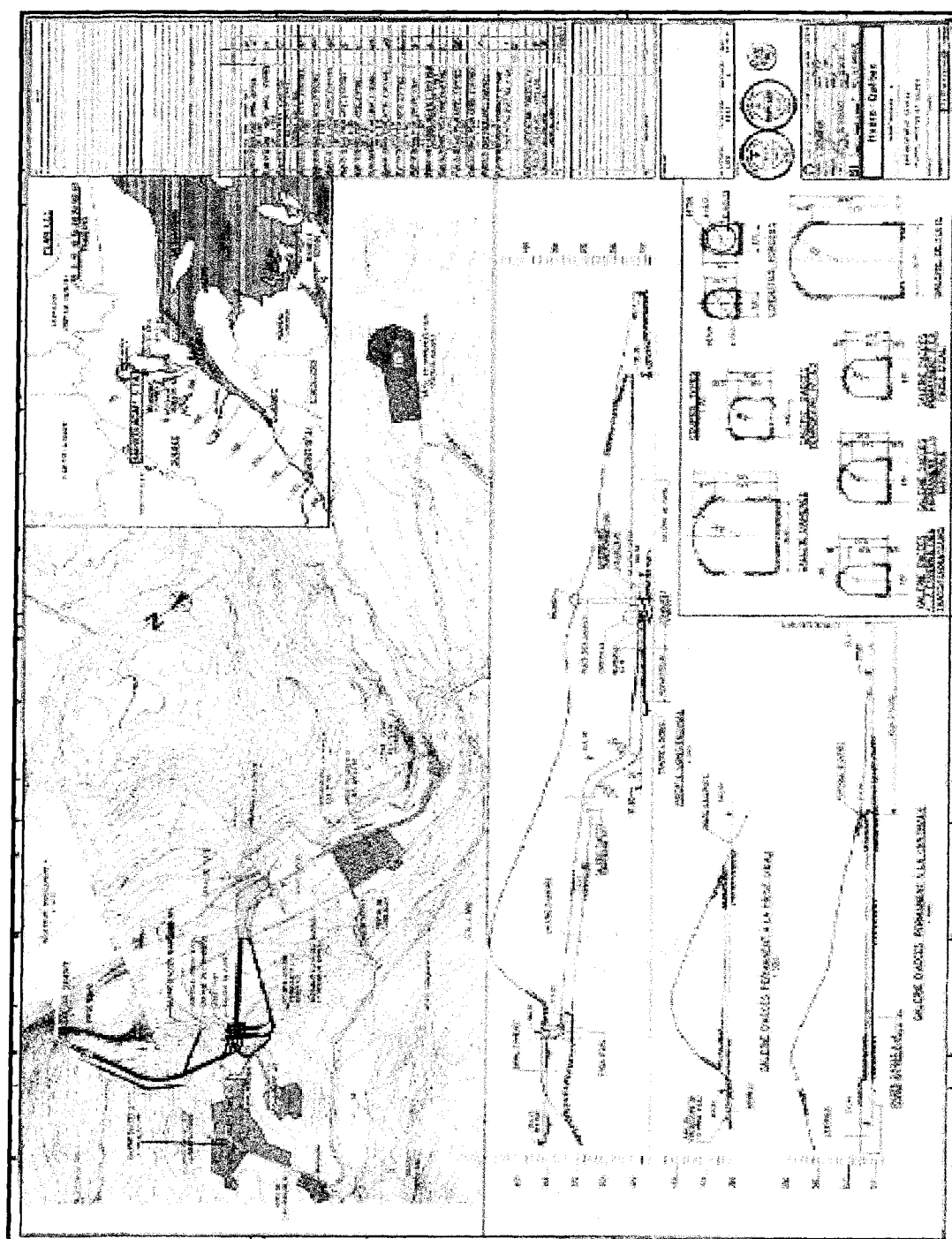
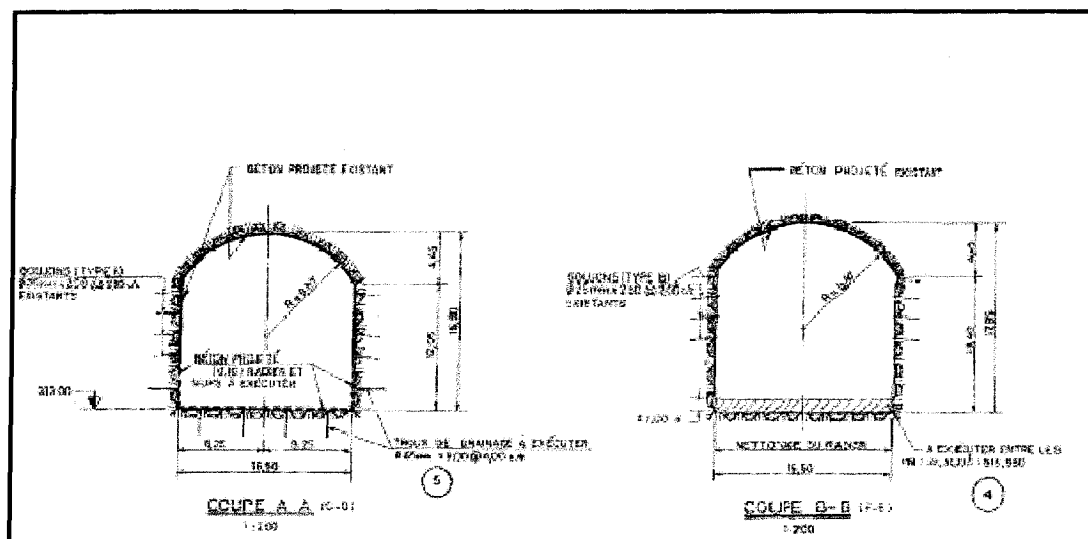
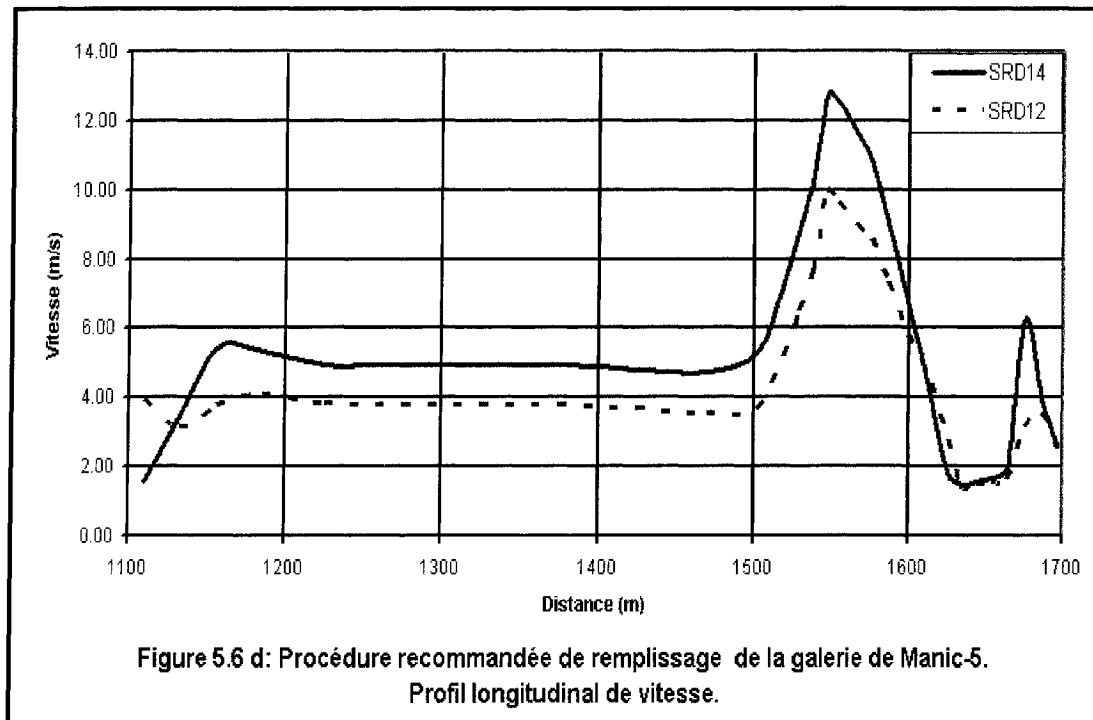
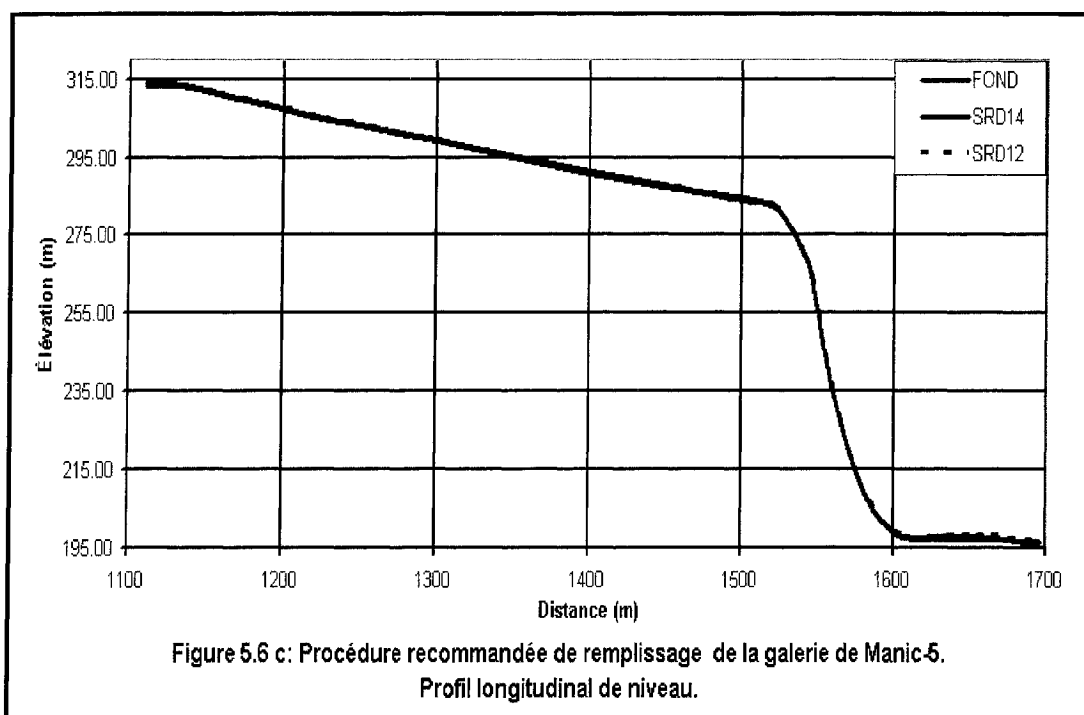
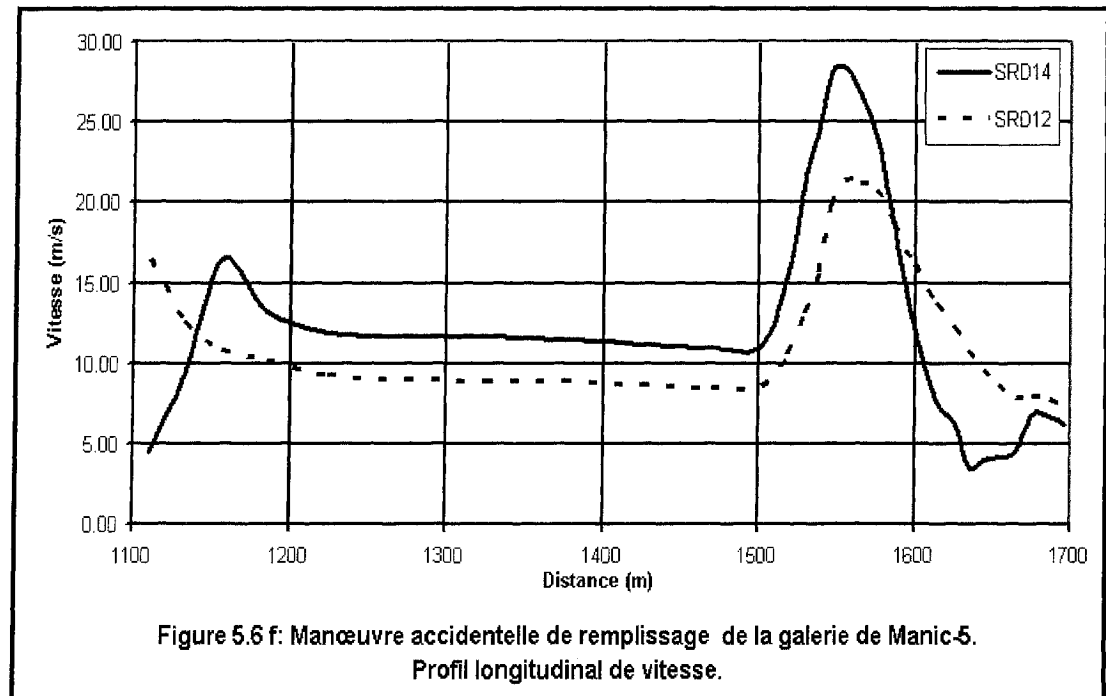
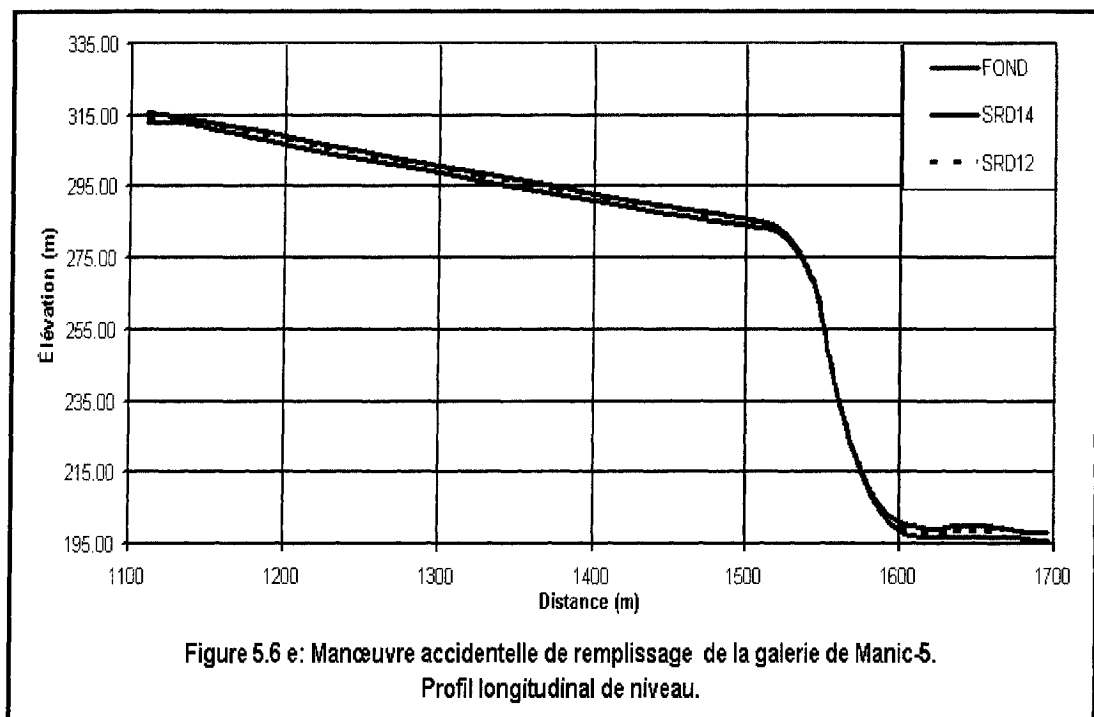


Figure 5.6a : Aménagement Manic 5 PA. Plan de localisation.







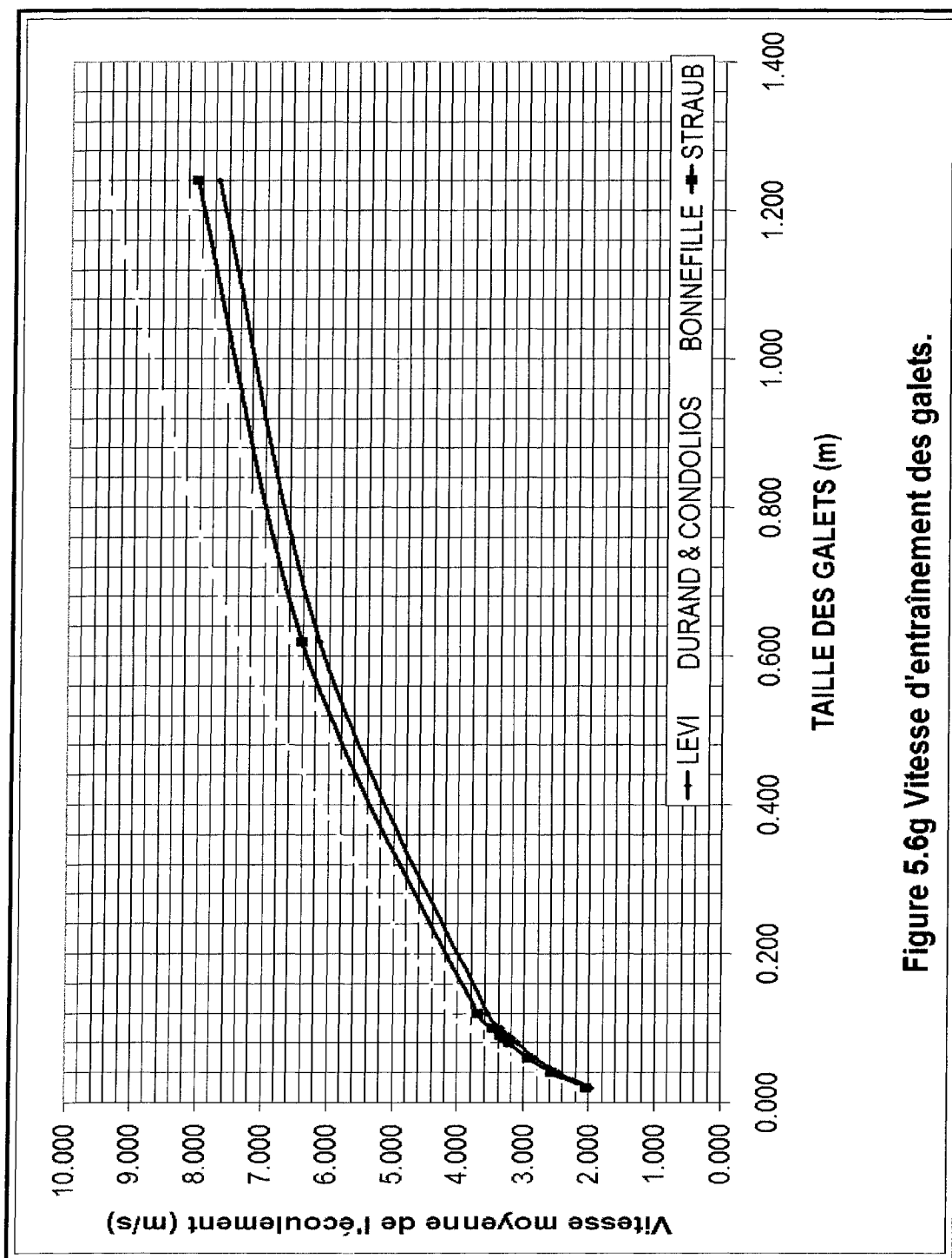


Figure 5.6g Vitesse d'entraînement des galets.

5.8 Propagation d'onde de crue ou de rupture dans les vallées de rivières du Québec

Les résultats de deux cas d'application, sur des rivières au Québec, obtenus à l'aide des schémas SRD12 et SRD14 seront présentés dans la présente section. Seuls ces deux schémas, parmi les quatre présentés au chapitre précédent, ont démontré la robustesse nécessaire pour opérer les simulations jusqu'au bout en des durées raisonnables dans le cas de géométrie, souvent très irrégulière, de rivières naturelle.

Les données et résultats présentés dans les lignes qui suivent n'ont aucun caractère officiel. Les données ont été gracieusement mises à notre disposition par Hydro-Québec pour aider à l'exercice de validation des schémas proposés. Il faut également noter que les résultats obtenus à l'aide des schémas SRD12 et SRD14 qui sont présentés conjointement avec ceux d'autres modèles ne sont pas fournis dans un objectif de comparaison avec les modèles cités. Ces superpositions de courbes de résultats sont présentées dans le cadre d'un exercice de validation, en l'absence de mesures de terrain, des caractéristiques schémas proposés : robustesse, rapidité et fiabilité.

5.8.1 Rupture de la digue droite du barrage Bourque par temps de crues extrêmes

Le réservoir Dozois est situé à la tête du tronçon supérieur de la rivière Outaouais. Le bief de près de 100 km qui sépare le réservoir Dozois du Grand Lac Victoria a été simulé lors du passage de l'onde de rupture, en temps de crue maximale probable [CMP], de la digue droite du barrage Bourque qui est situé à l'exutoire du réservoir Dozois. La figure 5.7a présente une vue de ce tronçon et des réservoirs.

Ce tronçon comporte des rapides et une géométrie de variation très irrégulière comme l'illustre le profil de la largeur au miroir présenté à la figure 5.7b.

L'hydrogramme de rupture, en temps de CMP, de la digue droite du barrage Bourque est présenté à la figure 5.7c Cet hydrogramme s'étend sur une période 83 jours, et est

typique d'hydrogramme de crues extrêmes sur les bassins versants des rivières du Québec.

L'extrémité aval du tronçon à l'étude correspond au Grand Lac Grand Victoria. La condition simulée à cette limite est celle d'un niveau constant à 325,82 m.

Le but de cette application est de démontrer la capacité des schémas proposés à effectuer de telles simulations et d'évaluer le temps d'ordinateur qui y est consacré.

Pour l'application du schéma SRD14 à ce domaine, le tronçon de près de 100 kilomètres a été représenté par 160 sections, soit une distance moyenne de près de 625 mètres entre sections consécutives. Deux autres maillages plus fins, avec respectivement 560 et 1000 sections, ont été générés à partir du premier.

Le schéma SRD14 a simulé le passage de cet hydrogramme de 83 jours pendant moins d'une demi-heure sur un ordinateur Pentium 4 pour le plus fin de ces maillages (1000 sections). La figure 5.7c présente les profils longitudinaux de niveau maximal obtenus à l'aide des schémas SRD14, FLDWAV (Fread & Lewis 1998) et Mascaret (Goutal & Maurel 1997b). Les résultats présentés à cette figure montrent que :

- les résultats du schéma SRD14 sont comparables à ceux de schémas dont l'utilisation est admise en ingénierie hydraulique (FLDWAV, Mascaret). Ces résultats confirment une tendance à la surestimation des niveaux par FLDWAV. Cette tendance a déjà été constatée lorsque les résultats de FLDWAV sont comparés à ceux produits par Mascaret;
- le schéma SRD14 a montré sa capacité à simuler le passage d'une onde de rupture sur un tronçon de rivière accidenté sans avoir recours à un maillage trop fin. Dans le cas d'une crue de plusieurs jours, ici près de trois mois, cette caractéristique devient cruciale quant à son impact sur le temps consacré aux simulations des différents scénarios.

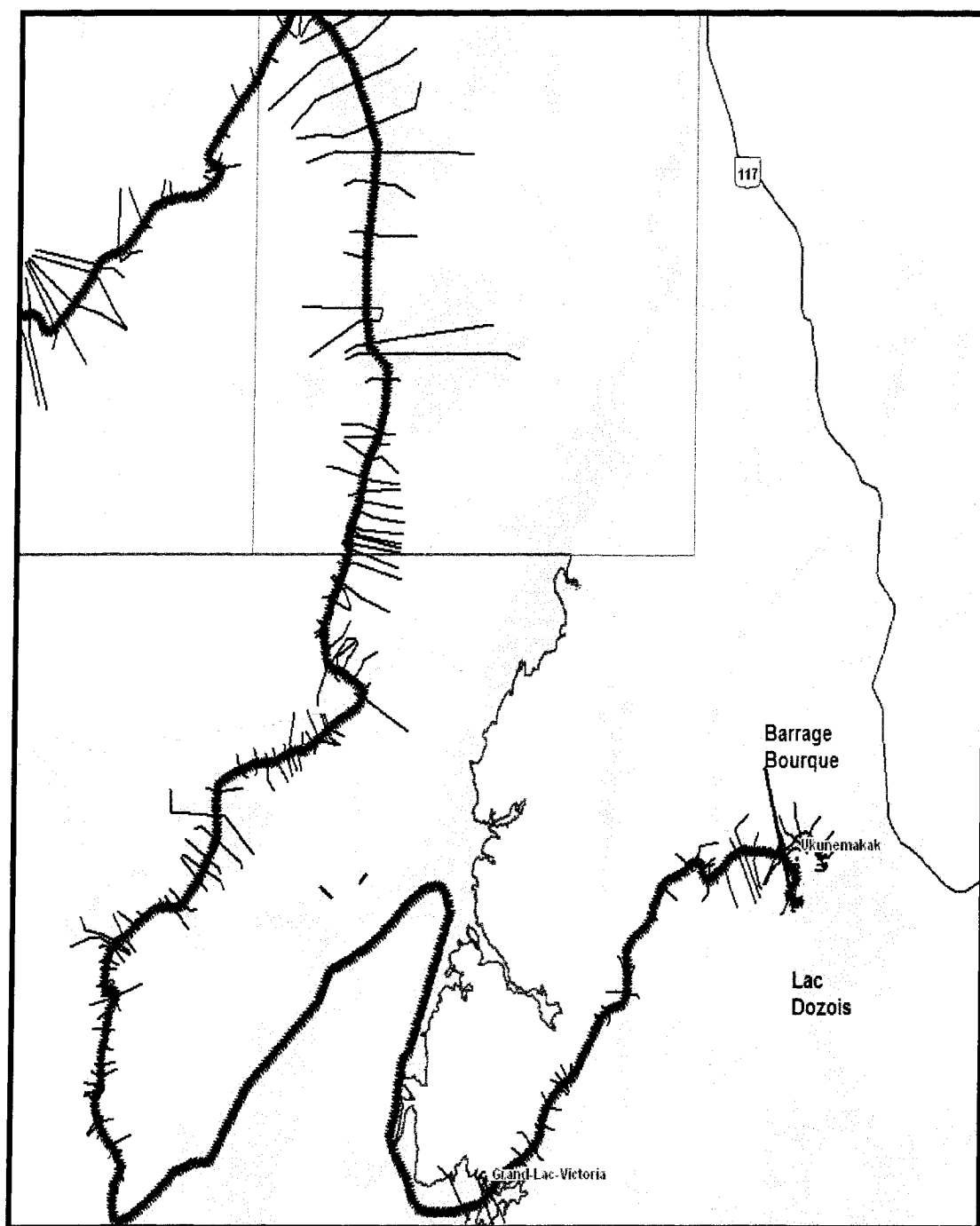


Figure 5.7a : Rupture du barrage Bourque. Localisation du domaine à l'étude.

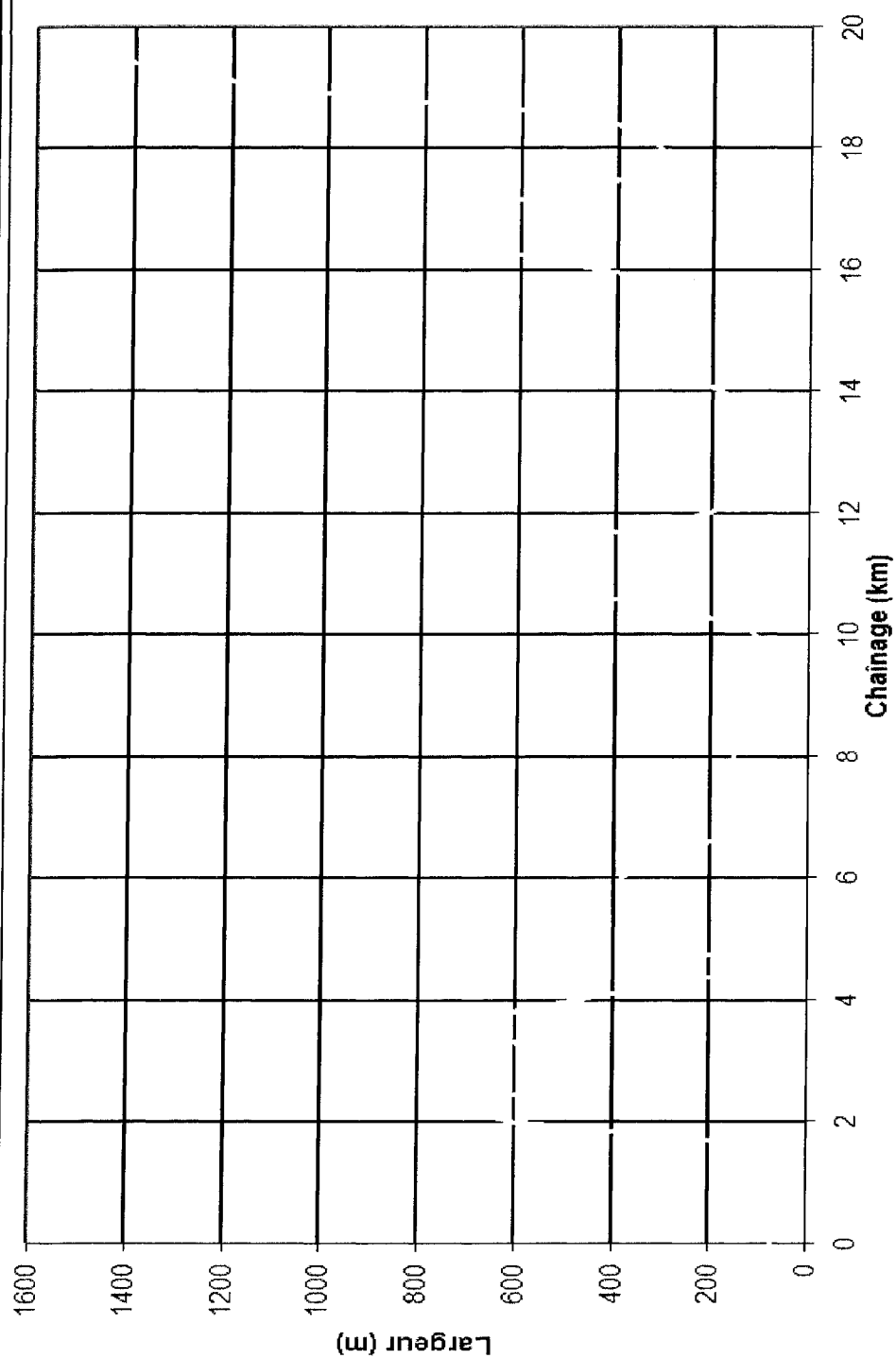


Figure 5.7b: Rupture du barrage Bourque. Profil de la largeur au miroir

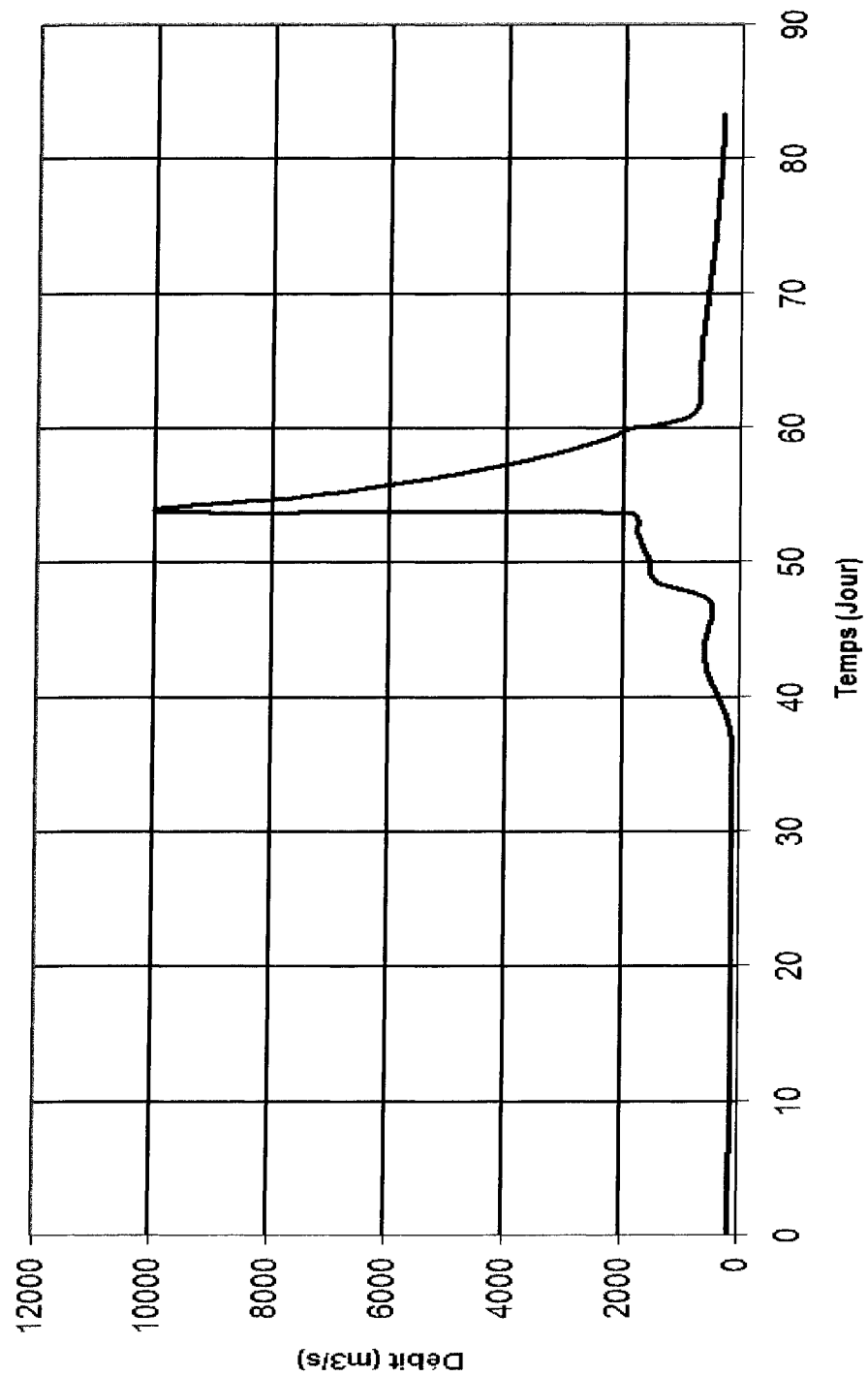


Figure 5.7c: Rupture du barrage Bourque. Hydrogramme de rupture lors de la crue maximale probable.

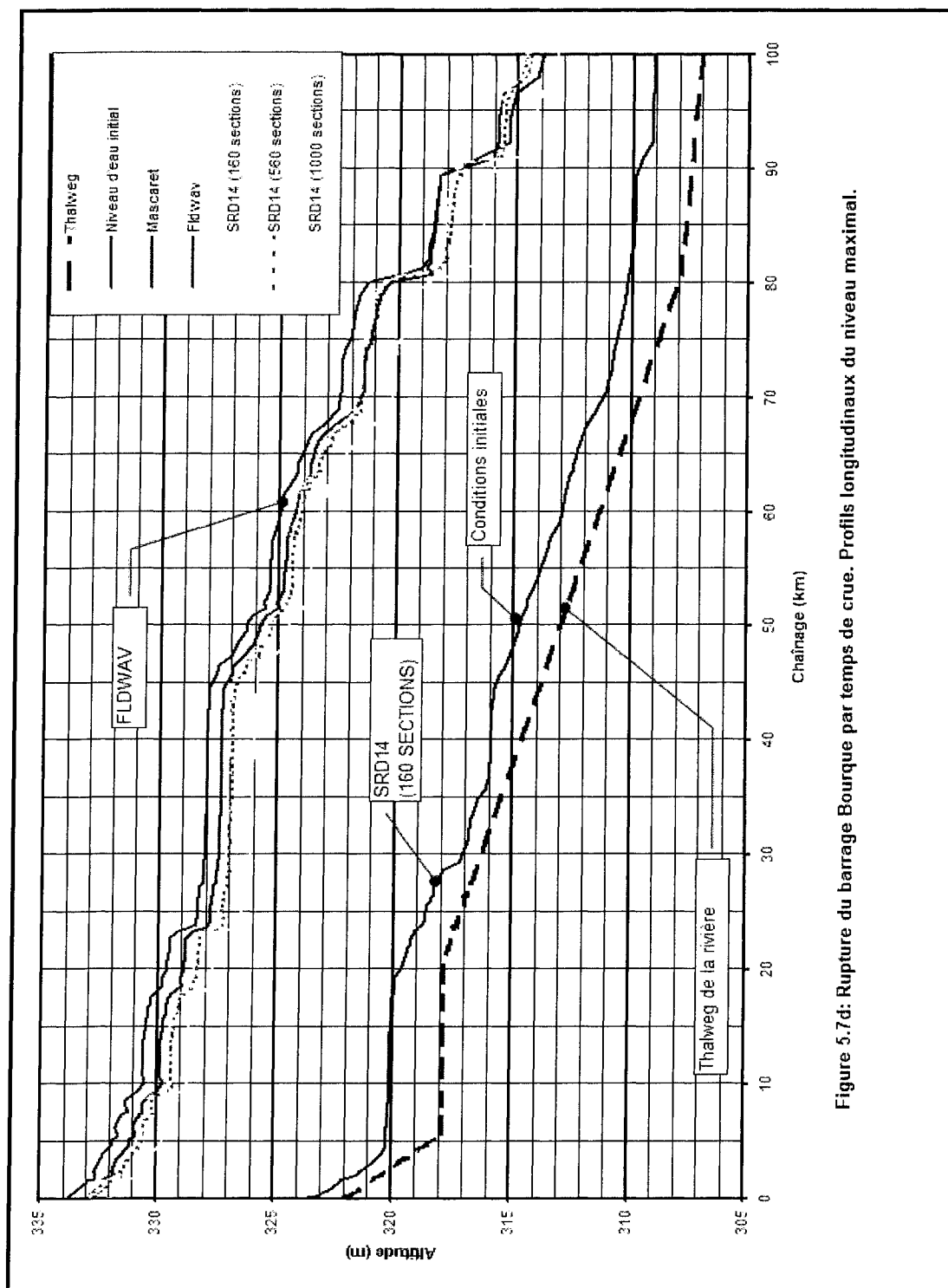


Figure 5.7d: Rupture du barrage Bourque par temps de crue. Profils longitudinaux du niveau maximal.

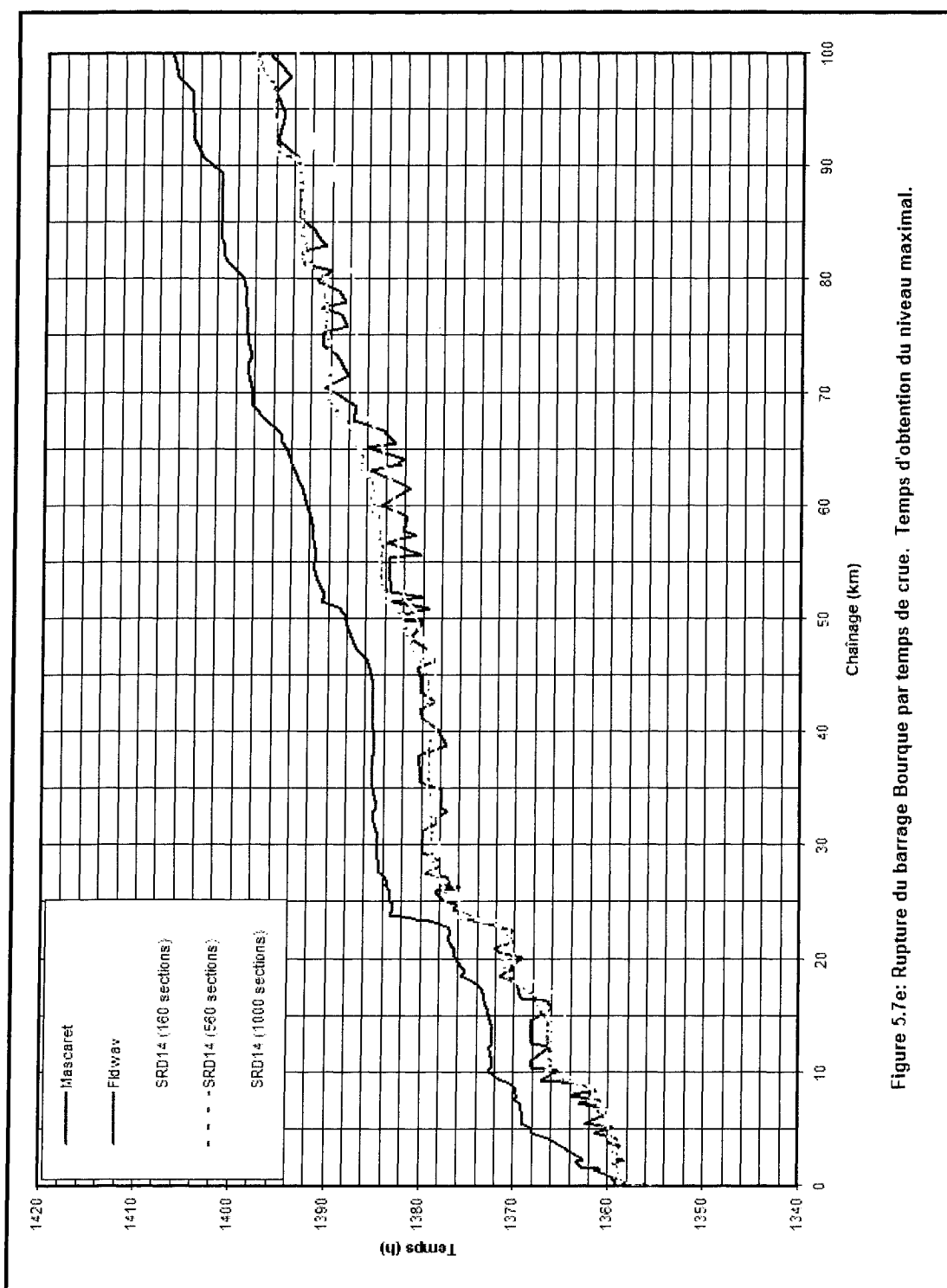


Figure 5.7e: Rupture du barrage Bourque par temps de crue. Temps d'obtention du niveau maximal.

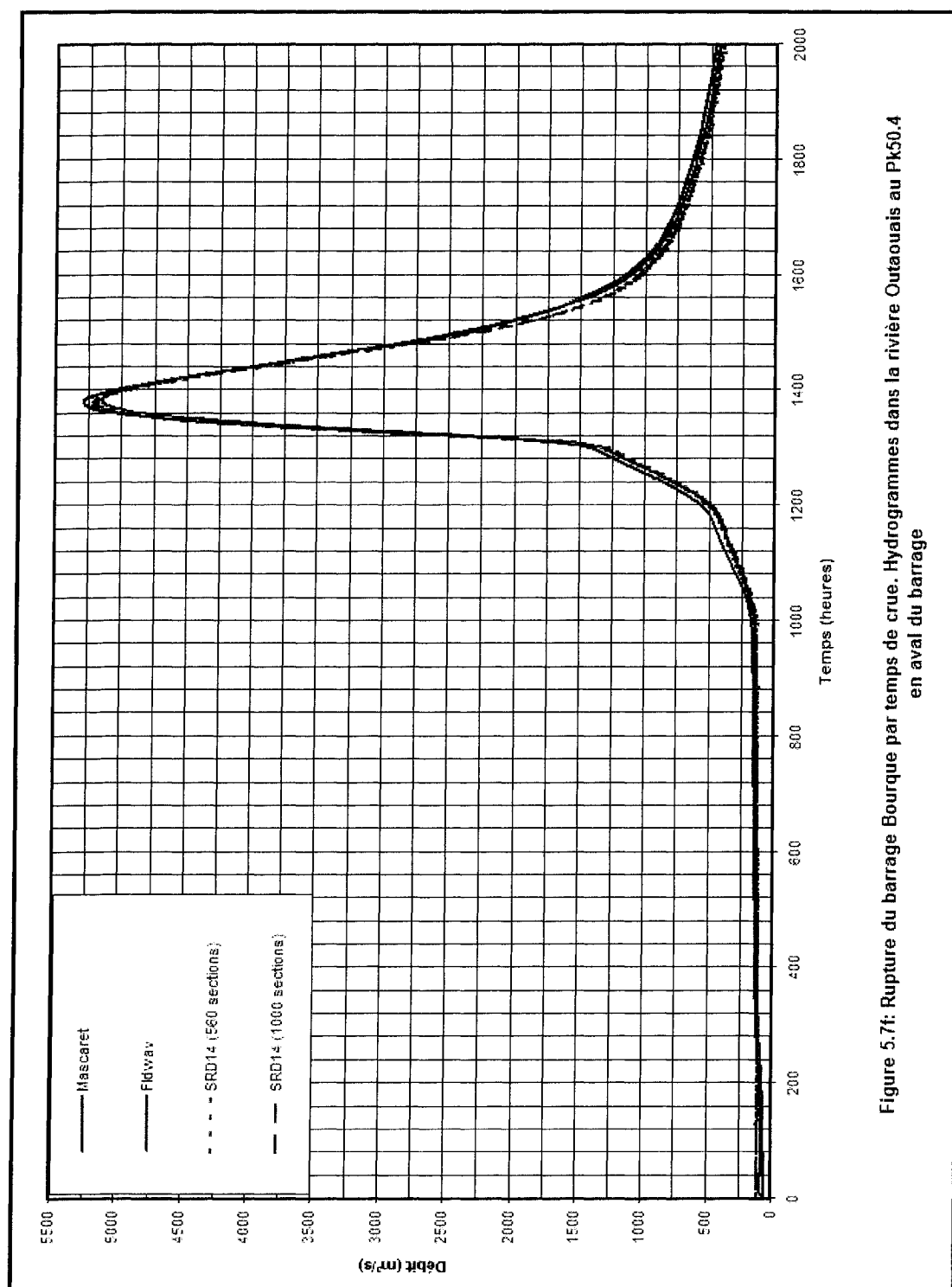
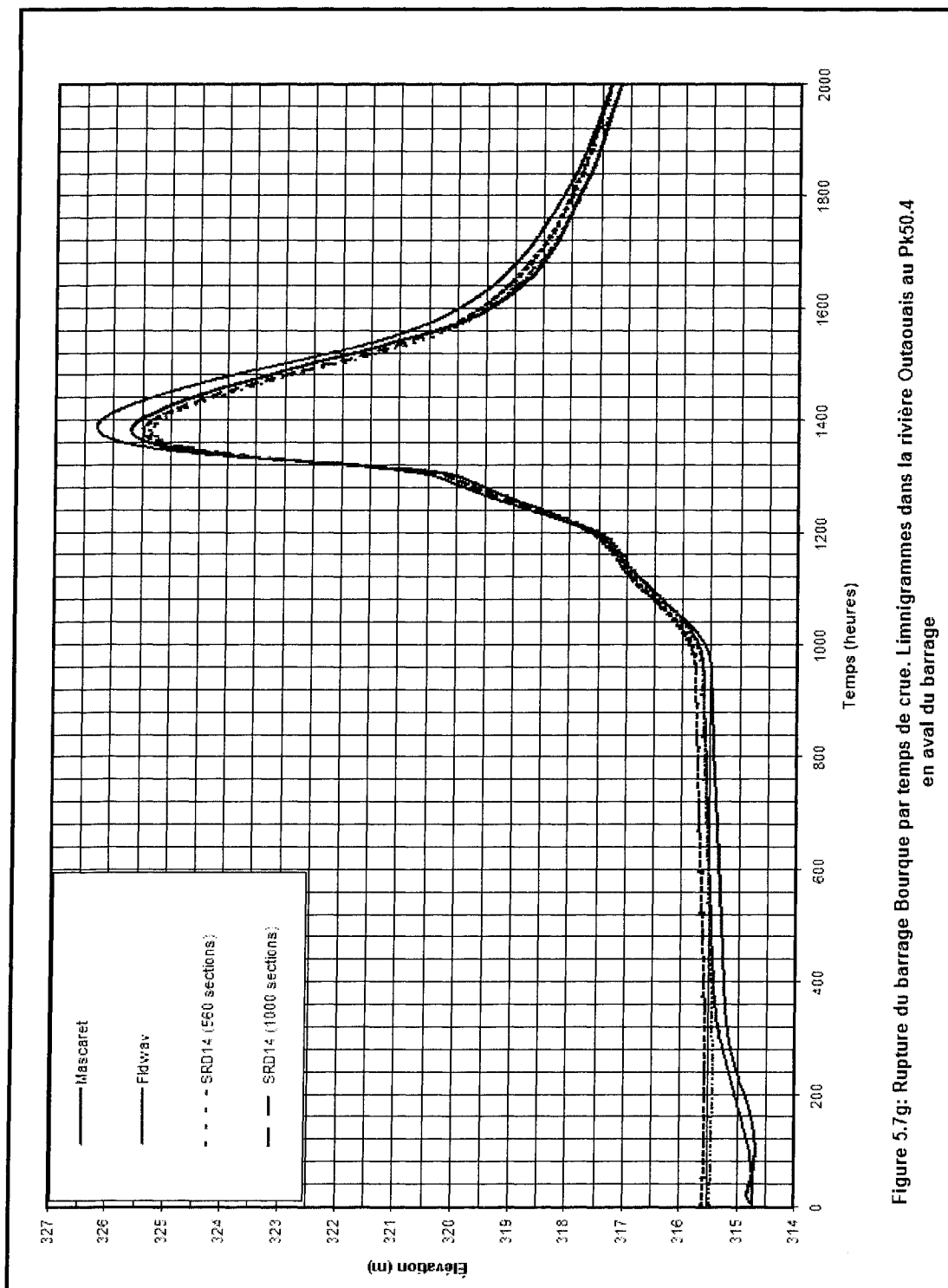


Figure 5.7f: Rupture du barrage Bourque par temps de crue. Hydrogrammes dans la rivière Outaouais au Pk50.4 en aval du barrage



5.8.2 Rupture du barrage SM3 en conditions normales

Le barrage Denis Perron (SM3) constitue l'aménagement de tête sur la rivière Sainte-Marguerite qui en compte deux autres sur son cours aval (voir plan de localisation à la figure 5.8a). C'est également l'aménagement le plus imposant du fait de sa taille avec 171 m de hauteur et un emmagasinement de près de 12 600 hm³.

L'hydrogramme de rupture hypothétique en conditions normales d'exploitation du barrage SM3 est présenté à la figure 5.8b. Cet hydrogramme est introduit en amont de la rivière, au pied de SM3, et la simulation est effectuée avec les schémas SRD12 et SRD14. Le but de cet exercice était de mettre à l'épreuve la capacité des schémas en question à traiter le passage d'un hydrogramme dont la pointe culmine à plus 400 000 m³/s sur un tronçon de rivière, à la géométrie très irrégulière et, long de près d'une centaine de kilomètres.

Les calculs présentés ont été effectués avec les 97 sections tirées du rapport d'Hydro-Québec (Aubin, Tchamen et Fortin 2003). Les schémas SRD12 et SRD14 ont pu simuler le passage de l'hydrogramme de rupture en utilisant uniquement ces sections originales sans besoin de raffiner le maillage dans quelque bief.

La figure 5.8c montre les profils longitudinaux du niveau maximal (NMAX) atteint le long du tronçon à l'étude pour les schémas SRD12 et SRD14 ainsi que pour le modèle Mascaret. Pour les schémas SRD12 et SRD14, en plus du maillage constitué des 97 sections originales avec des sections distantes du kilomètre en moyenne, un second maillage plus fin de 626 sections a été utilisé pour examiner la sensibilité des résultats à la densité du maillage. La figure 5.8d présente le profil du temps d'occurrence du niveau maximal (TNM) le long de la vallée. Ces deux variables, NMAX et TNM, sont utiles pour l'établissement d'un plan de mesure d'urgence en cas de rupture du barrage.

De ce résultat, il ressort que :

- les schémas SRD12 et SRD14 sont capables de simuler la propagation d'ondes rapides de rupture de barrage dans une vallée de géométrie irrégulière de rivière naturelle longue de plusieurs dizaines de kilomètres dans un temps de l'ordre de quelques minutes sur un ordinateur du type Pentium 4;
- le profil de niveau maximal prédit par les schémas Mascaret, SRD12 et SRD14 ne diffèrent considérablement que sur les premiers quinze kilomètres là où le lit de la rivière subi la plus forte dénivellation. Les profils de SRD12 et SRD14 indiquent des ressauts sur ce bief qui ne semblent pas apparaître aussi clairement sur le profil de Mascaret. Mais il faut se souvenir qu'il s'agit ici de profil de niveau maximal sur la durée de la simulation et non de profil instantané. Donc, il est possible que des ressauts transitoires soient apparus durant la simulation de Mascaret, mais sans être détectable sur le profil de niveau maximal;
- les ressauts des schémas SRD12 et SRD14 sont d'amplitude différente. Cela est conforme à la théorie des équations mathématiques à la base des deux schémas (section 2.2) et aux résultats du test 5.3. Cette théorie recommande de retenir dans ce cas les résultats du schéma SRD14 qui utilise les équations du conservation de la quantité du mouvement pour déterminer les caractéristiques du ressaut hydraulique lorsqu'il a lieu;
- pour les schémas SRD12 et SRD14, les résultats du profil du niveau maximal obtenus sur le maillage grossier (97 sections) sont presque identiques à ceux du maillage plus fin (626 sections) en dehors du bief des quinze premiers kilomètres où sont concentrés les variations géométriques les plus fortes. Ailleurs, l'utilisation d'un pas de l'ordre du kilomètre entre les sections ne semble pas avoir d'impact négatif sur la qualité des résultats.



Figure 5.8a Rupture du barrage SM3. Localisation de la zone d'étude.

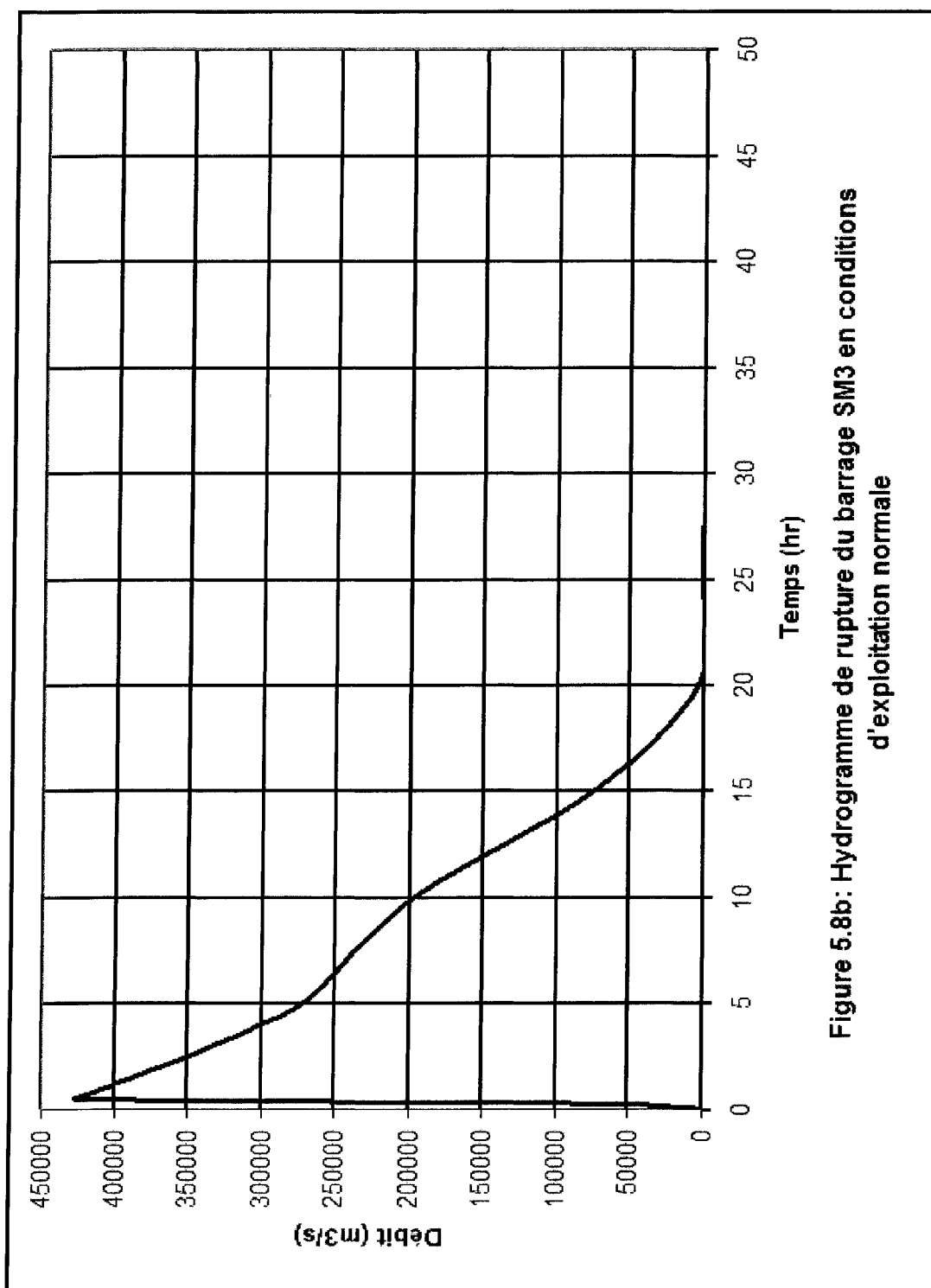


Figure 5.8b: Hydrogramme de rupture du barrage SM3 en conditions d'exploitation normale

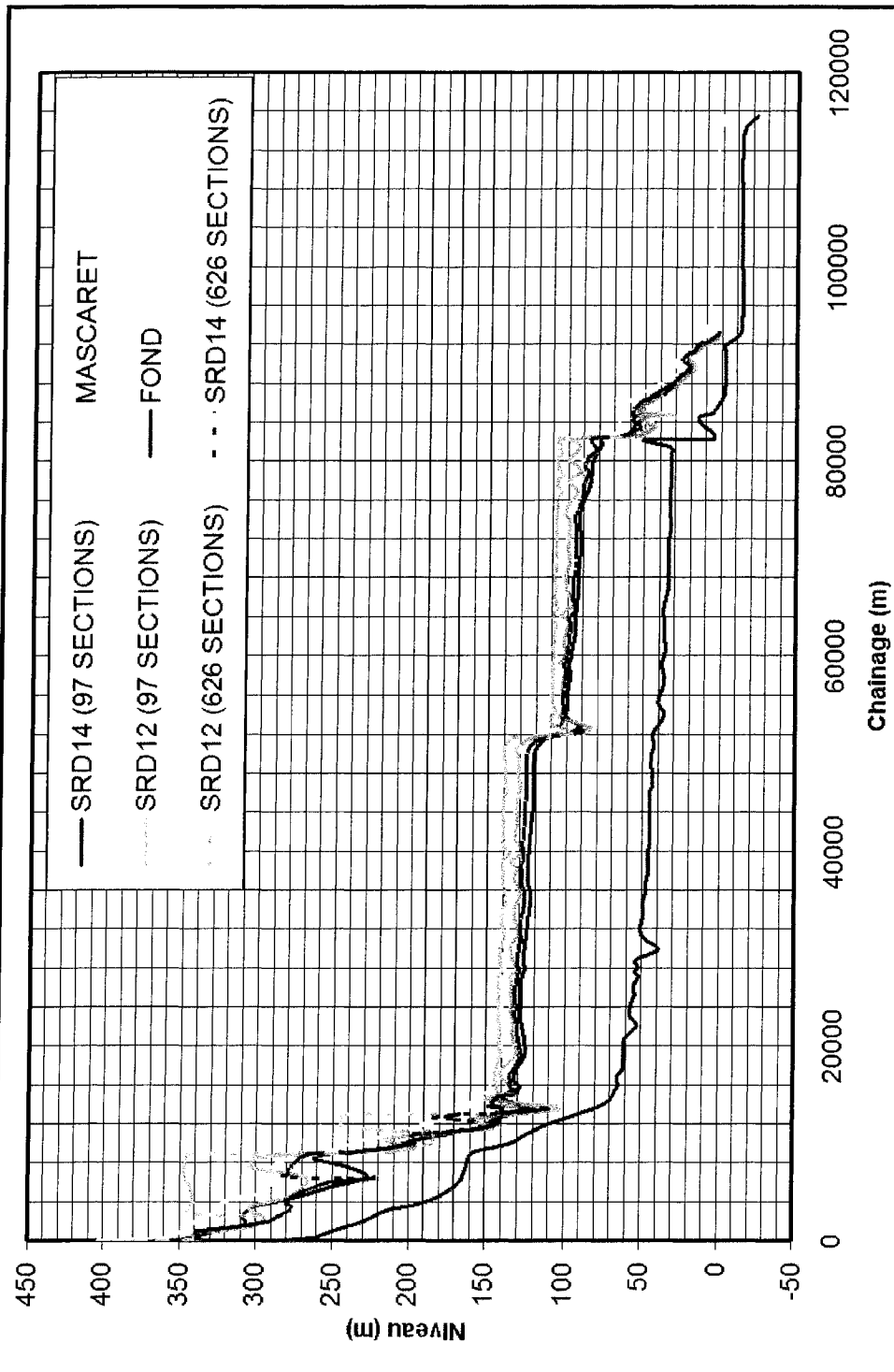


Figure 5.8c: Rupture du barrage SM3. Profil de niveau maximal.

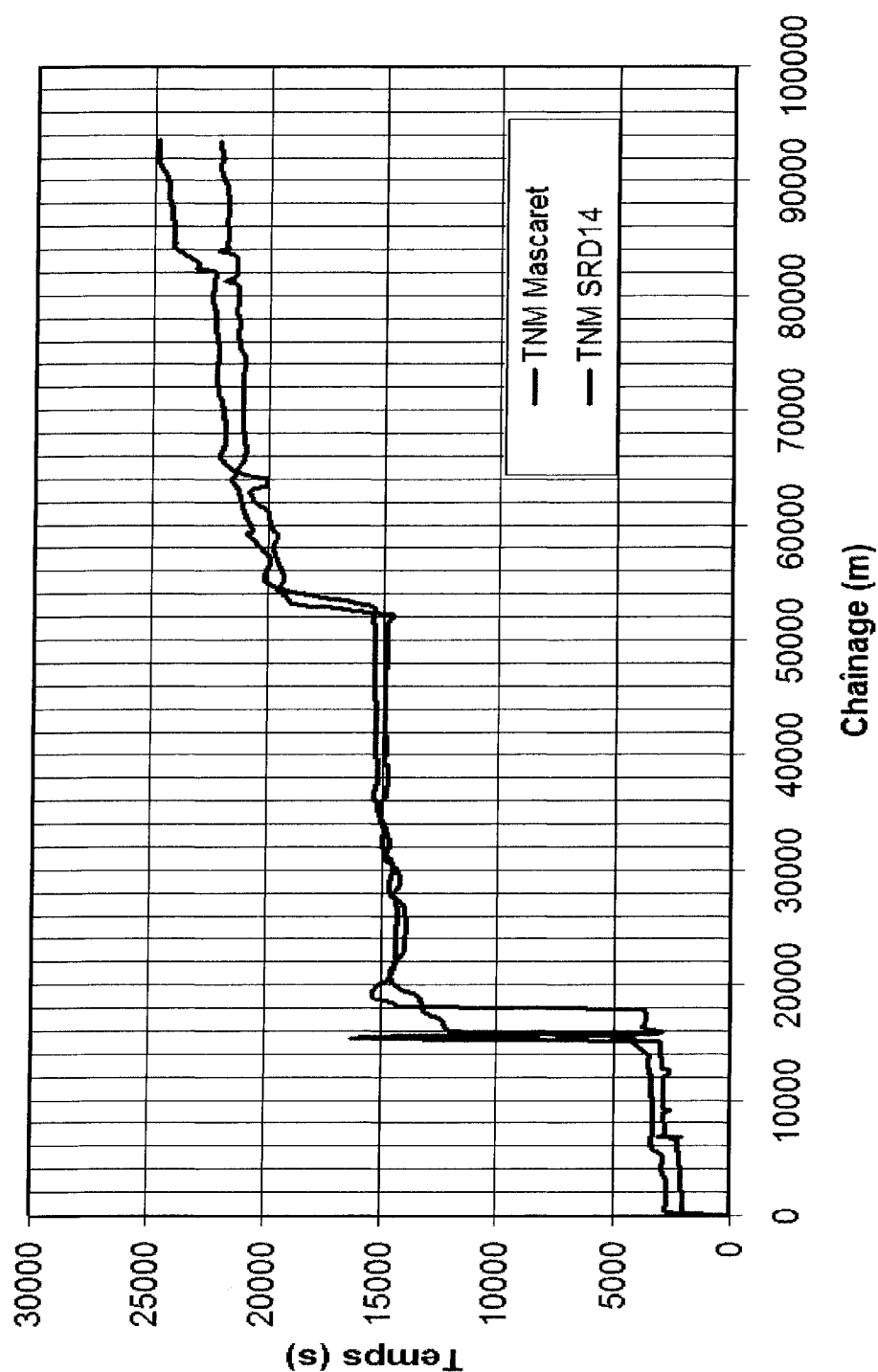


Figure 5.8d: Rupture de Malpasset. Temps du niveau maximal (TNM).

5.9 Rupture du barrage de Malpasset

Le barrage de Malpasset était construit à 12 km en amont de la localité de Fréjus située sur la côte méditerranéenne française (Voir figure 5.9a). Ce barrage était un barrage voûte d'environ 66 mètres de hauteur et de près de 55 000 m³ de contenance.

Dans la nuit du 02 Décembre 1959, la voûte est rompue presque instantanément libérant tout le volume du réservoir (Voir photos de la figure 5.9b). La vague a dévalé rapidement la vallée de la rivière Reyran avant de submerger la localité de Fréjus. Le nombre de victimes répertoriées s'est élevé à 423 personnes. L'heure de la rupture a été reconstituée à 21h14. Les moments de rupture d'alimentation de trois postes électriques situés entre le site du barrage et la localité de Fréjus ont permis d'évaluer les temps de propagation de l'onde de rupture. Les laisses de crue relevées après le passage constituent des valeurs indicatives du niveau maximal atteint lors du passage de l'onde (Goutal 1999a).

Un modèle physique à l'échelle 1/400 du barrage et de la région (réservoir et vallée à l'aval) a été réalisé en 1964 par le LNH/EDF (Laboratoire National d'Hydraulique d'Électricité de France). Quatorze sondes installées dans ce modèle, dont cinq à l'intérieur du réservoir, ont permis d'évaluer des valeurs pour le niveau maximal atteint le long de la vallée aval, ainsi que pour le temps de propagation du front d'onde. Le modèle physique a également permis d'étalonner un coefficient de Strickler évalué entre 30 et 40. La figure 5.9c présente une vue du barrage, du réservoir à l'amont, de la vallée à l'aval, ainsi que de la localisation des points de mesure du modèle physique ainsi que des relevés sur le site.

Les données et mesures en nature et sur modèle physique de ce cas ont été mis à la disposition des participants du groupe CADAM. Soixante sections transversales ont été fournies qui couvrent la région allant du réservoir jusqu'à la baie dans la Méditerranée.

Le schéma SRD14 a été utilisé pour réaliser une simulation utilisant près de 400 sections interpolées à partir de 60 sections originales.

Les résultats de niveau maximal sont présentés, en comparaison avec les mesures du modèle physique et les estimations de laisse de crue, au tableau 5.2 et à la figure 5.9d. Il apparaît que l'écart moyen, entre les niveaux simulés et ceux du modèle ou ceux du site, se situe autour de 5 mètre. Mais cette moyenne est augmentée par l'erreur observée à la première station située à l'aval du barrage (plus de 15 m). On remarque sur la figure 5.9c que cette station est située dans le premier coude à l'aval du barrage. Il est donc possible que l'inadéquation d'un modèle unidimensionnel à représenter un effet de coude dans une zone à forte vitesse, juste après la rupture, explique cette mauvaise performance. En réalité, si l'on exclue cette station, ainsi que celle de la limite aval proche de l'estuaire où l'étalement de l'onde rend inappropriée l'utilisation d'un modèle unidimensionnel, l'écart moyen de niveau se situe autour de 2,5 m. Il apparaît sur la figure 5.9d que la moyenne de la hauteur maximale se situe autour de 20,0 mètres, cela signifie une erreur moyenne de l'ordre de 12,5%.

Le tableau 5.3 et la figure 5.9e présentent une comparaison entre les résultats de la simulation numérique, les mesures du modèle et les estimations en nature pour le temps de propagation de l'onde. Il apparaît que l'écart moyen entre les valeurs simulée et mesurée sur le modèle physique pour le temps d'arrivée du front d'onde est de près de 2 minutes, soit près de 10% du temps observée pour que l'onde de rupture atteigne la localité de Fréjus. Il apparaît également que le temps d'interruption des trois transformateurs électriques se situe entre les valeurs simulées du temps d'arrivée du front d'onde et du temps du niveau maximal.

Les écarts observés entre les résultats de simulation du schéma SRD14 et les mesures sur modèle ou les estimations sur le site, 2,5 m pour le niveau et 2 min pour le temps de propagation, sont du même ordre que ceux publiés par plusieurs participants à CADAM (Paquier 1999, Goutal 1999 b).

Tableau 5.2: Rupture de Malpasset. Comparaison du niveau maximal

	Nature Laisses de crue		Modèle physique		Modèle numérique SRD14
Distance du barrage (m)	Relevé	Niveau max. (m)	Sonde	Niveau max. (m)	Niveau max. (m)
0		100		100	100
336	(P1+P2)/2	83.18	S6	84.2	67.80
1320	(P3+P4)/2	59.80	S7	49.1	57.15
2160	(P5+P6)/2	47.43	S8	54	57.21
3420	(P7+P8)/2	41.48	S9	40.2	43.00
4840	(P9+P10)/2	36.33	S10	34.9	34.58
6000	(P11+P12)/2	24.53	S11	27.4	28.33
7220	(P13+P14)/2	18.98	S12	21.5	25.93
7980	(P15+P16)/2	17.93	S13	16.1	21.73
8960	P17	14.00	S14	12.9	19.39

Tableau 5.3 : Rupture de Malpasset. Comparaison du temps de propagation de l'onde

	Modèle physique		Modèle numérique SRD14		Nature Transformateurs électriques
Distance du barrage (m)	Sonde	Temps d'arrivée du front d'onde (s)	Temps d'arrivée du front d'onde (s)	Temps du niveau maximal (s)	Temps d'interruption (s)
0		0	-	0	-
336	S6	10.2	10	93	-
1320	S7	102	50	560	100
2160	S8	182	110	380	-
3420	S9	263	170	470	-
4840	S10	404	290	880	-
6000	S11	600	390	1040	-
7220	S12	845	590	1400	-
7980	S13	972	720	1440	1240
8960	S14	1139	920	1660	1420

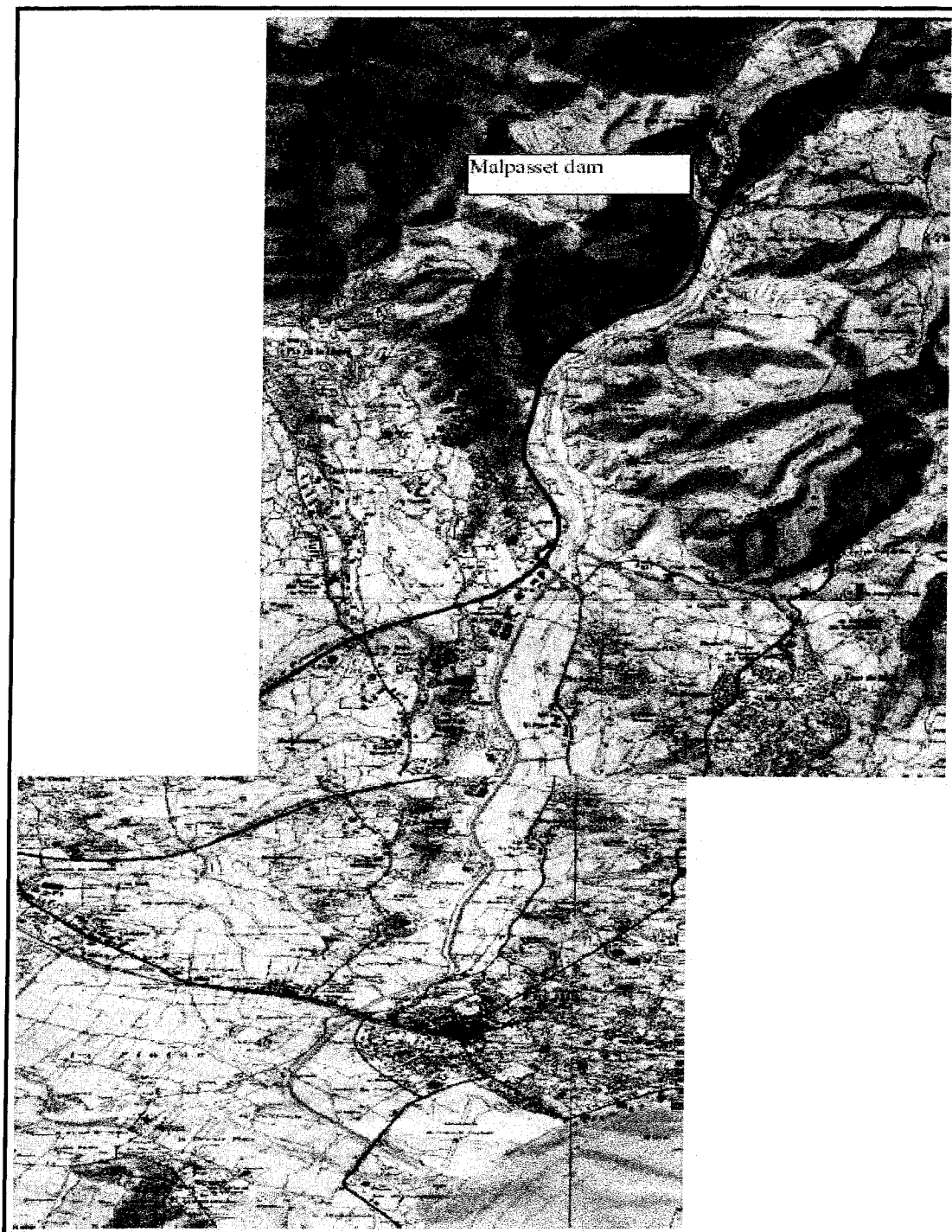


Figure 5.9a : Localisation du barrage de Malpasset, de la vallée de la rivière Reyran et de la localité de Fréjus.

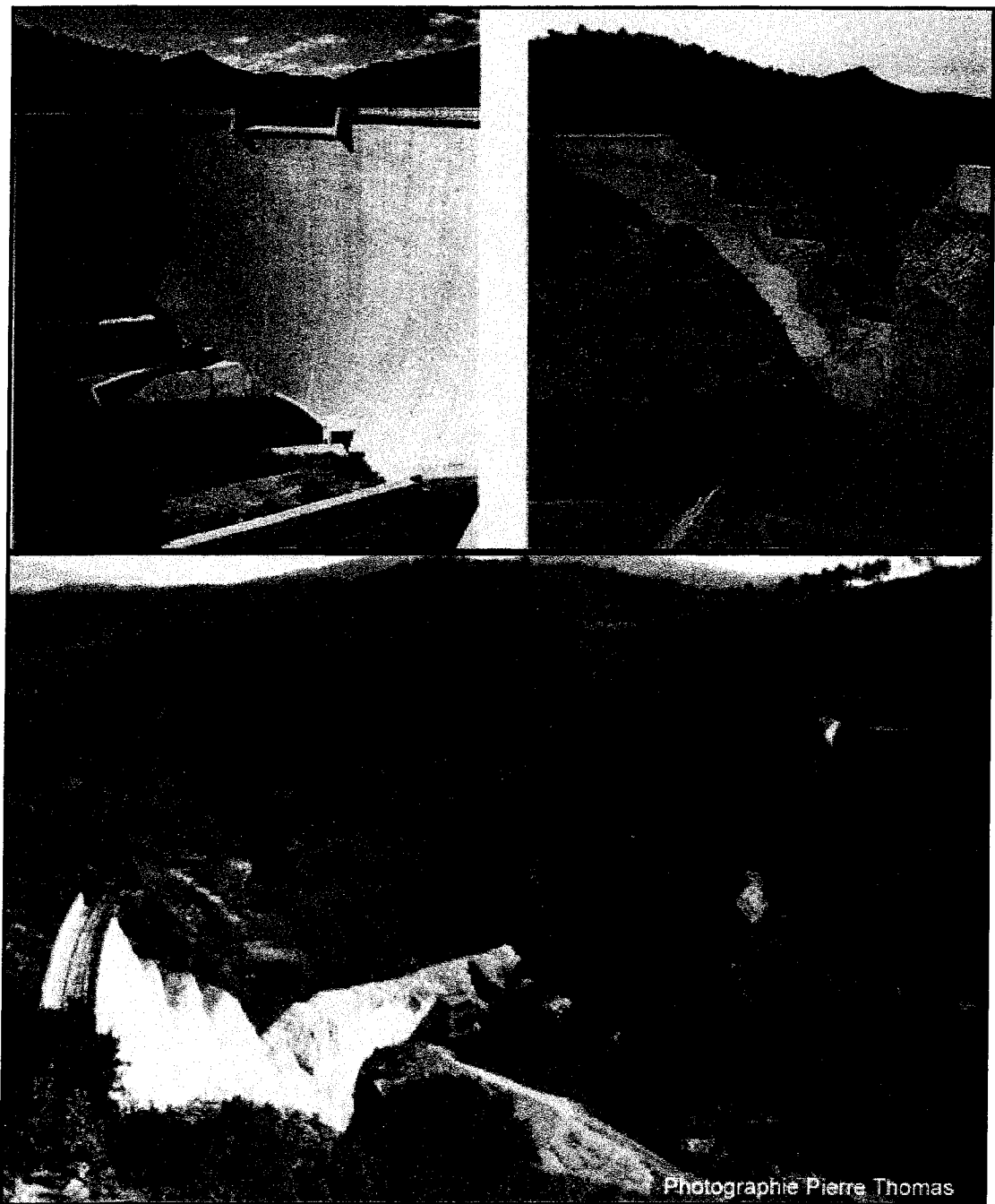


Figure 5.9b : Barrage de Malpasset. En haut à gauche : avant rupture. En haut à droite : après rupture. En bas : brèche vue depuis l'aval.

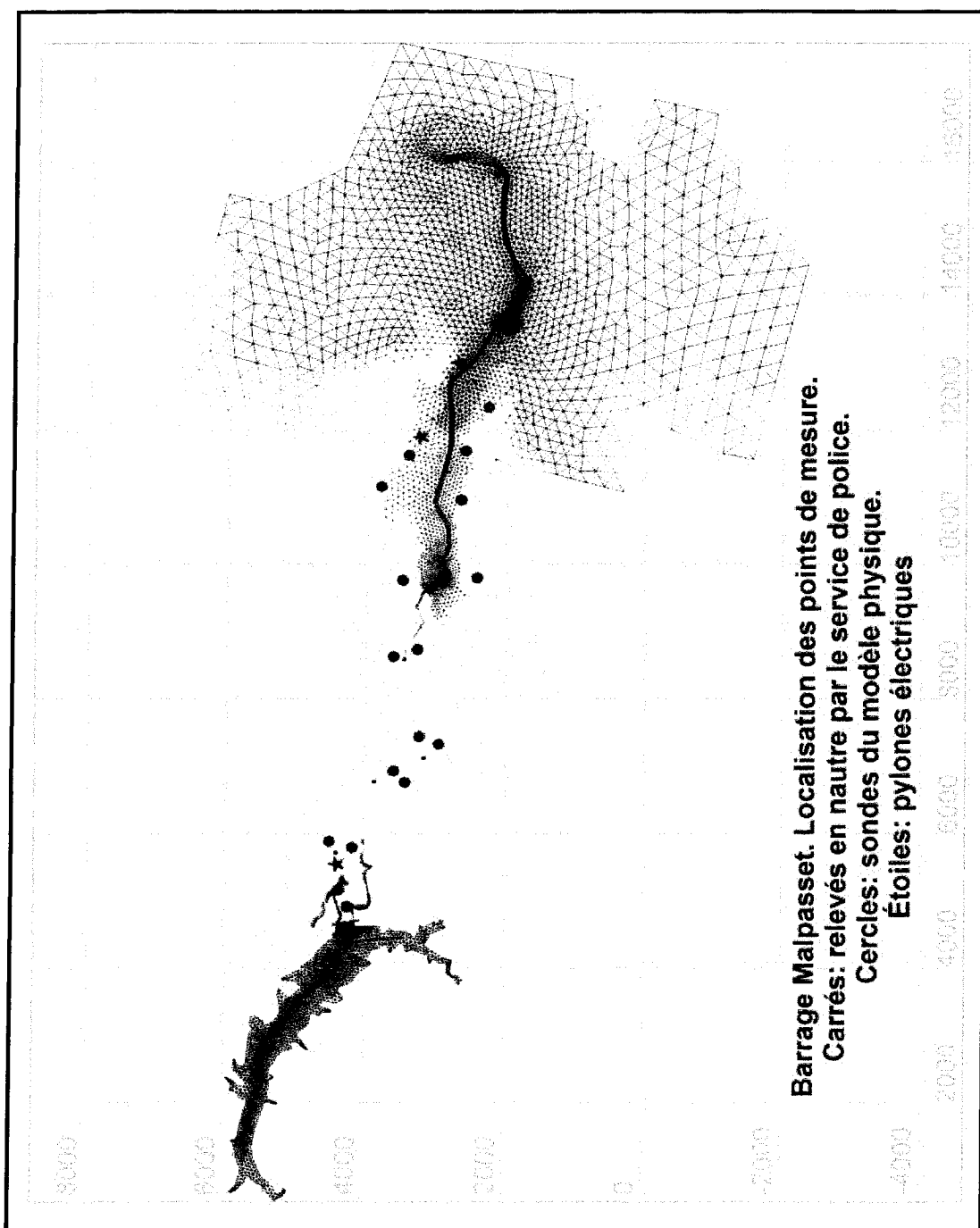


Figure 5.9c : Barrage Malpasset. Domaine à l'étude et localisation des points de mesure.

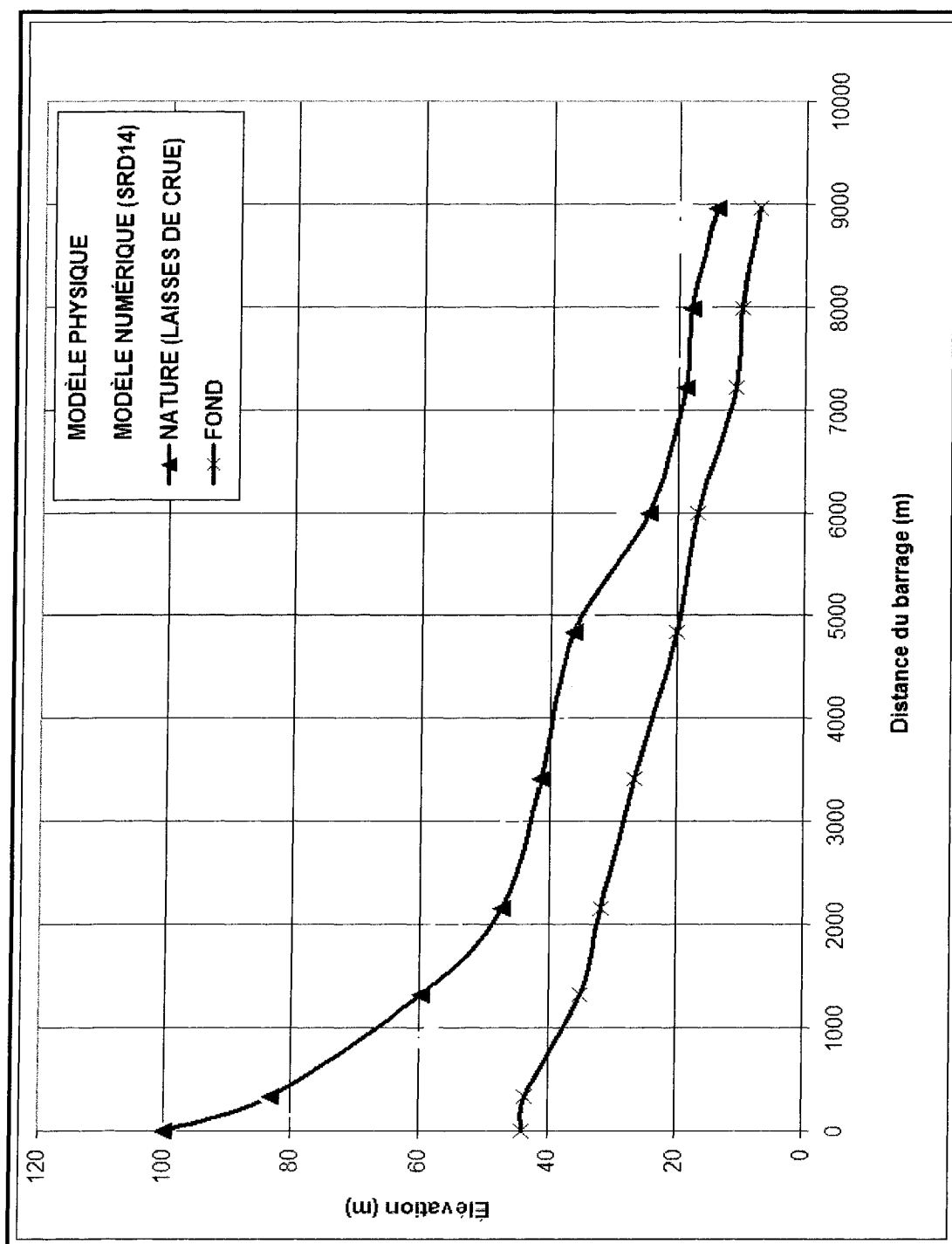


Figure 5.9d : Rupture du barrage de Malpasset. Comparaison du niveau maximal.

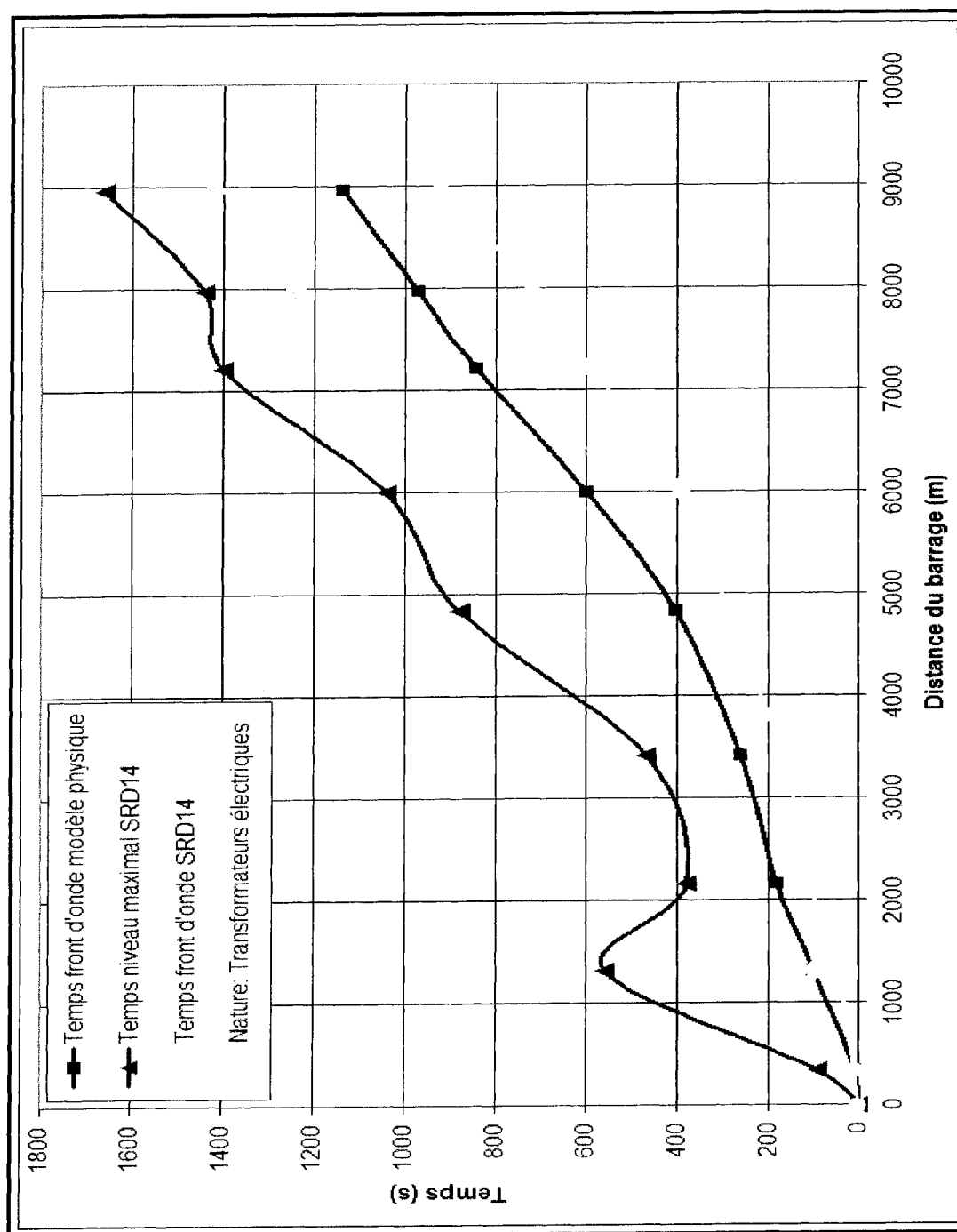


Figure 5.9e : Rupture du barrage de Malpasset. Comparaison du temps de propagation de l'onde.

5.10 Conclusions

Les résultats des cas tests présentés ont permis de tirer les enseignements suivants à propos des schémas analysés :

- les schémas SRD11, SRD12, SRD13 et SRD14 ont des performances quasiment équivalentes pour les écoulements fluviaux dans des canaux à géométrie régulière;
- les schémas SRD11 et SRD13 éprouvent des difficultés lorsque qu'appliqués à des tronçons de rivière réelle avec géométrie irrégulière. En fait, l'expérience a prouvé que sur de tels tronçons, il fallait limiter le pas d'espace à moins de 10 m en général, et parfois moins près d'un changement de géométrie trop brusque. Le schéma SRD11 présente des caractéristiques très proches de celles de plusieurs applications classiques des schémas de Riemann aux équations de Saint-Venant;
- les schémas SRD12 et SRD14 se sont avérés les plus robustes des quatre à l'examen. Il faut rappeler que les résultats de ces deux modèles ne diffèrent que lors du passage d'une discontinuité de l'écoulement du type ressaut hydraulique. Ce comportement est en accord avec la théorie et les propriétés mathématiques des équations de base utilisées pour chacun de ces schémas;
- le schéma SRD14 est celui qui utilise les équations de conservation de la quantité de mouvement qui est nécessaire pour la bonne résolution des ressauts. Ses performances en termes de robustesse et rapidité sont équivalente à celles du schéma SRD12. La théorie mathématique des équations de Saint-Venant (Stelling & Duinmeijer 2003) indique que l'équation d'énergie peut être préférée à celle de mouvement lorsque la bathymétrie présente une discontinuité. La stratégie de modélisation adoptée exclut les discontinuités dans la géométrie. Toutes les variations géométriques (thalweg, largeur) sont supposées être linéaires, même s'il peut exister de forts gradients. En conséquence, dans le cadre retenu, le schéma SRD14 est celui qui est conseillé en tous temps.

Il faut rappeler que le schéma SRD14 qui ressort comme le candidat sélectionné à l'issue des tests a été bâti pour palier aux insuffisances des autres schémas :

- il utilise la variable de vitesse à la place du débit dont l'équation s'avère peu robuste au passage des géométries irrégulières;
- il utilise néanmoins l'équation de mouvement pour la solution des problèmes de Riemann internes, ce qui assure la bonne résolution des ressauts hydrauliques.

CHAPITRE 6 ÉQUATIONS DE BASE EN DEUX DIMENSIONS

6.1 Système de Saint-Venant

6.1.1 Equations de base

Les lois de conservation de masse et de mouvement des fluides incompressibles à surface libre constituent les principes de dérivation des équations de Saint-Venant.

Continuité :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} = 0 \quad (6.1a)$$

Quantité de mouvement dans la direction x:

$$\frac{\partial uh}{\partial t} + \frac{\partial (u^2 h)}{\partial x} + h \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial uvh}{\partial y} = g \cdot h \cdot S_{fx} \quad (6.1b)$$

Quantité de mouvement dans la direction y:

$$\frac{\partial vh}{\partial t} + \frac{\partial uvh}{\partial x} + \frac{\partial (v^2 h)}{\partial y} + h \cdot \frac{\partial H}{\partial y} = g \cdot h \cdot S_{fy} \quad (6.1c)$$

Où:

- t désigne le temps;
- x et y sont les coordonnées spatiales horizontales, u et v sont les composantes de la vitesse moyenne sur la verticale dans les directions x et y ;
- $H=H(x,y)$ représente la cote de la surface libre, mesurée par rapport à une référence;
- $h=h(x,y)$ représente la profondeur d'écoulement; $h=H(x,y)-Z_f(x,y)$ où $Z_f(x,y)$ est la cote de la bathymétrie par rapport à la même référence utilisée pour la surface libre;
- S_{fx} et S_{fy} sont les pentes de frottement dans les direction x et y respectivement.

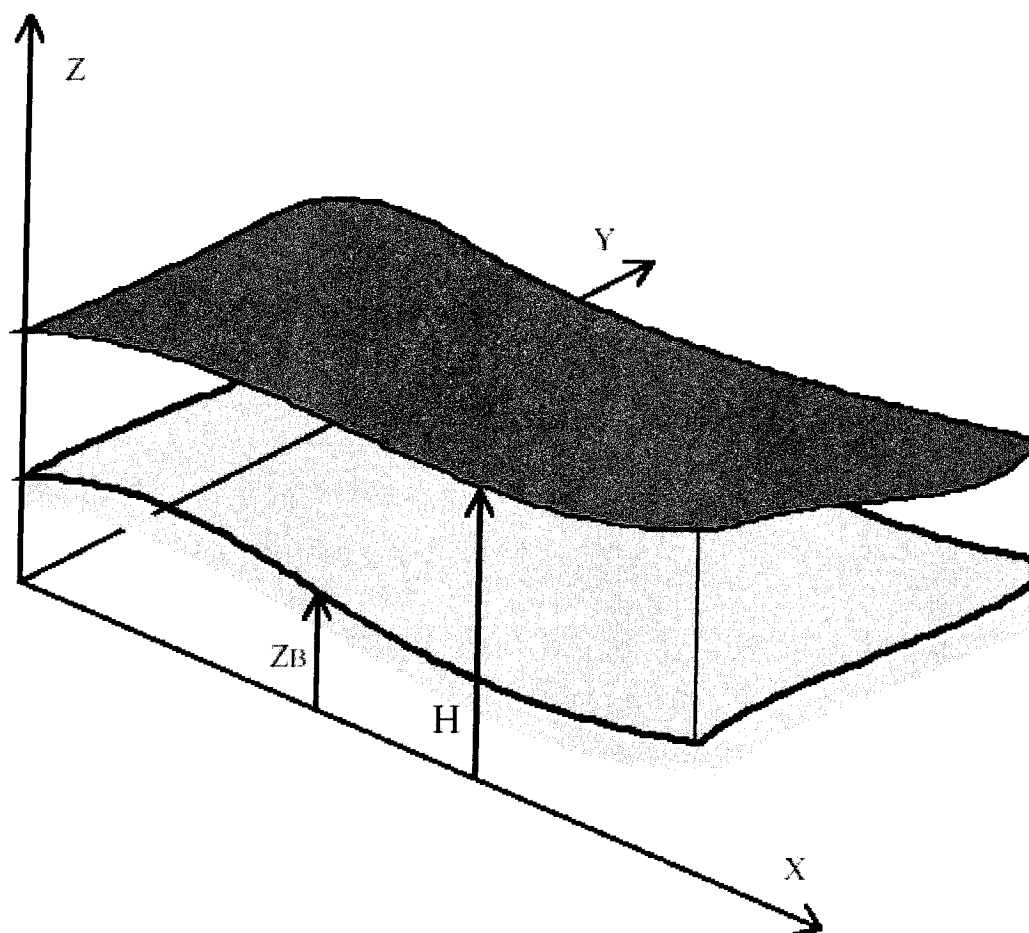


Figure 6.1 Schéma d'un plan d'eau. Définition des variables de modélisation bidimensionnelle

6.1.2 Forme divergente

Le système (6.1) peut s'écrire sous la forme quasi-divergente après la transformation suivante :

$$h \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = h \cdot \frac{\partial(h + Z_f)}{\partial x} = \frac{\partial(h^2/2)}{\partial x} + h \cdot \frac{\partial Z_f}{\partial x} = \frac{\partial(h^2/2)}{\partial x} - h \cdot S_{0x}$$

$$h \cdot \frac{\partial H}{\partial y} = h \cdot \frac{\partial(h + Z_f)}{\partial y} = \frac{\partial(h^2/2)}{\partial y} + h \cdot \frac{\partial Z_f}{\partial y} = \frac{\partial(h^2/2)}{\partial y} - h \cdot S_{0y}$$

La forme quasi-divergente du système (6.1) correspond donc à :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = S \quad (6.2)$$

Avec :

$$U = \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix}, \quad S(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ gh \cdot (S_{0x} - S_{fx}) \\ gh \cdot (S_{0y} - S_{fy}) \end{bmatrix},$$

$$F(U) = \begin{bmatrix} uh \\ (u^2 h) + \left(g \frac{h^2}{2}\right) \\ uvh \end{bmatrix}, \quad G(U) = \begin{bmatrix} uh \\ uvh \\ (v^2 h) + \left(g \frac{h^2}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

6.1.3 Forme non divergente

La forme non conservative peut être dérivée en développant les équations de quantités de mouvement en combinaison avec l'équation de continuité :

$$(6.1a) : \quad \frac{\partial H}{\partial t} + h \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + u \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + h \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + v \cdot \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (6.3a)$$

$$[(6.2b)-(6.1a)xu]/h : \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + g \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \cdot (S_{0x} - S_{fx}) \quad (6.3b)$$

$$[(6.3c)-(6.1a)xv]/h : \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} = g \cdot (S_{0y} - S_{fy}) \quad (6.3c)$$

Le triplet des équations (6.3a), (6.3b) et (6.3c) ne peut pas être écrit sous forme divergente. Par contre, il peut être écrit sous une forme matricielle dite quasi linéaire :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H \bullet \frac{\partial W}{\partial x} + K \bullet \frac{\partial W}{\partial y} = S \quad (6.4)$$

W est le vecteur des variables dépendantes, H et K sont les matrices du système :

$$W = \begin{bmatrix} h \\ u \\ v \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} u & h & 0 \\ g & u & 0 \\ 0 & 0 & v \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} v & 0 & h \\ 0 & 0 & u \\ g & 0 & v \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

6.2 Caractéristiques du système de Saint-Venant

L'ouvrage de Toro (2001) constitue une bonne référence pour une présentation détaillée des caractéristiques du système de Saint-Venant. L'ouvrage de Smoller (1983) est une excellente référence pour l'essentiel des aspects mathématiques des systèmes hyperboliques. Même si les équations de Saint-Venant n'y sont presque pas abordées, la couverture qui y est présentée du problème de Riemann peut éclairer sur les caractéristiques du système de Saint-Venant. La présente section se limitera à présenter les propriétés essentielles des caractéristiques du système (6.2), (6.3) qui peut être re-écrit :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + A \bullet \frac{\partial U}{\partial x} + B \bullet \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (6.6)$$

Avec :

$$U = \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (gh - u^2) & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ (gh - v^2) & 0 & 2v \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Où A et B sont les matrices Jacobiennes.

Les caractéristiques du système (6.6) sont déterminées en effectuant l'étude de la matrice $C = n_x A + n_y B$, pour n_x et n_y quelconques. Dans le contexte où n_x et n_y sont les composantes cartésiennes d'un vecteur de direction $\vec{N} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j}$, la généralité n'est pas restreinte en supposant le vecteur \vec{N} de norme 1 ($1 = \sqrt{(n_x)^2 + (n_y)^2}$).

Les principales caractéristiques de la matrice Jacobienne C, qui sont présentées au tableau 6.1 ci dessous, ont les propriétés suivantes :

$$(\nabla_U \lambda_1) \bullet E_1 = -1.5 \cdot \frac{c}{h} \quad (6.8)$$

$$(\nabla_U \lambda_2) \bullet E_2 = 0 \quad (6.9)$$

$$(\nabla_U \lambda_3) \bullet E_3 = -1.5 \cdot \frac{c}{h} \quad (6.10)$$

Les trois relations précédentes indiquent que:

- les familles d'ondes (1 et 3) liées aux valeurs propres λ_1 et λ_3 sont non linéaires : cela correspond à des ondes de raréfaction ou des ondes de chocs ;
- la famille d'onde liée à la valeur propre est dite linéaire dégénérée : c'est une discontinuité de contact.

Tableau 6.1 : Caractéristiques du système bidimensionnel de Saint-Venant à conservation de quantité de mouvement

λ (valeur propre)	$\lambda_1 = V_n - c$	$\lambda_2 = V_n$	$\lambda_3 = V_n + c$
E (vecteur propre)	$E_1 = [1, u - cn_x, v - cn_y]^t$	$E_2 = [0, n_y, -n_x]^t$	$E_3 = [1, u + cn_x, v + cn_y]^t$
R (invariant de Riemann)	$R_{11} = u + 2cn_x$ $R_{12} = v + 2cn_y$	$R_{21} = h$ $R_{22} = V_n$	$R_{31} = u - 2cn_x$ $R_{32} = v - 2cn_y$

6.2.1 Onde de détente

Une onde de la famille liée à la valeur propre λ_1 ou λ_3 est une onde de détente, également nommée onde de raréfaction, si :

$$\lambda_1(U_L) \leq \lambda_1(U_R)$$

Ou

$$\lambda_3(U_L) \leq \lambda_3(U_R)$$

Dans ce cas, les invariants de Riemann restent constants, c'est-à-dire :

$$\text{Si } \lambda_1(U_L) \leq \lambda_1(U_R), \text{ alors } \begin{cases} R_{11} = (u + 2c \cdot n_x)_L = (u + 2c \cdot n_x)_R \\ R_{12} = (v + 2c \cdot n_y)_L = (v + 2c \cdot n_y)_R \end{cases}$$

Ou

$$\text{Si } \lambda_3(U_L) \leq \lambda_3(U_R), \text{ alors } \begin{cases} R_{31} = (u - 2c \cdot n_x)_L = (u - 2c \cdot n_x)_R \\ R_{32} = (v - 2c \cdot n_y)_L = (v - 2c \cdot n_y)_R \end{cases}$$

6.2.2 Onde de choc

Une onde de la famille liée à la valeur propre λ_1 ou λ_3 est une onde de raréfaction si :

$$\lambda_1(U_L) \geq \lambda_1(U_R)$$

Ou

$$\lambda_3(U_L) \geq \lambda_3(U_R)$$

Dans ce cas, les relations de Rankine-Hugoniot à travers le choc s'écrivent :

$$E_N(U_R) - E_N(U_L) = s \cdot (U_R - U_L)$$

Où E_N est le flux dans la direction N :

$$E_N(U_R) = n_x \cdot F(U) + n_y \cdot G(U)$$

Et s est le saut ou la vitesse de déplacement de l'onde de choc.

6.2.3 Discontinuité de contact

La famille d'onde associée à la valeur propre λ_2 est une discontinuité de contact, également nommée onde de cisaillement. La relation qui est vérifiée par les variables de l'écoulement le long de sa trajectoire est la constance des invariants de Riemann :

$$\begin{cases} R21 = h_L = h_R \\ R22 = (u \cdot n_x + v \cdot n_y)_L = (u \cdot n_x + v \cdot n_y)_R \end{cases}$$

Ainsi la discontinuité entre les deux états se situe sur la composante transversale de la vitesse :

$$V_t = -u \cdot n_y + v \cdot n_x$$

6.3 Le problème de Riemann en deux dimensions

La solution au problème de Riemann en deux dimensions s'avère infiniment plus complexe qu'en une dimension. En projetant les équations bidimensionnelles sur une dimension, il est possible de réduire le système en une forme quasi unidimensionnelle dont la solution est simple. Mais la grande complexité tient au fait qu'en deux dimensions, il existe une infinité de directions possible de propagation pour les ondes. Quelques études analytiques ont été consacrées au sujet (Guckenheimer 1975, Wagner 1983, Lindquist 1986). Il en ressort qu'il est possible de déterminer les caractéristiques de la solution du problème en deux dimensions, juste pour quelques configurations particulières des données initiales. La solution au cas générale reste difficile voire impossible à exprimer sous forme compacte.

Toutefois, quelques propositions d'intégration du caractère bidimensionnelle à des schémas de Riemann en deux dimensions ont été avancées (Rumsey 1991, Michalek 1992, pour Roe & Sildikover 1992). Dans toutes ces propositions, la démarche proposée consiste à retenir un nombre restreint de directions (2 pour Rumsey 1991, 3 pour Roe & Sildikover 1992) selon lesquelles l'analyse de la structure d'onde est effectuée. Les ondes identifiées sur ces directions sont supposées être les plus déterminantes pour la solution à l'interface traitée. Les directions retenues pour l'analyse d'ondes ne sont pas fixes dans le schéma proposé par Roe & Sildikover (1992), et ne dépendent pas du maillage, mais plutôt des différents états adjacents de la solution initiale. Les cas tests de validation présentés dans cette publication suggèrent que le schéma proposé réduit l'erreur présente dans le schéma classique qui est une extension du cas unidimensionnel avec un biais certain lié au maillage.

La modélisation numérique bidimensionnelle présentée au chapitre suivant utilisera toutefois la démarche classique qui intègre la solution unidimensionnelle du problème de Riemann selon la normale aux différents segments d'un volume de contrôle. Les gains en précision réalisée par l'approche bidimensionnelle ne semblent pas suffisamment importants, du point de vue des écoulements analysés en ingénierie hydraulique, pour justifier la complexité accrue des algorithmes proposés.

CHAPITRE 7 MODÉLISATION NUMÉRIQUE BIDIMENSIONNELLE

7.1 Technique des volumes finis

La technique des volumes finis s'étend au cas multidimensionnel spatial de façon très naturelle et présente une excellente capacité d'adaptation aux maillages les plus irréguliers. La formulation intégrale des équations de base possède la capacité de s'adapter aux géométries les plus générales.

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\int_{\Omega_p} [U_t(x, y, t) + \nabla \cdot [F(U), G(U)] - S(U)] \cdot ds \right) \cdot dt = 0 \quad (7.1)$$

Dans l'expression (7.1), Ω_p désigne le volume de contrôle autour du point P (référence à la figure 7.2). Dans la suite de la section, $\partial\Omega_p$ désignera la frontière de ce volume de contrôle constituée de k segments de longueur l_i ($i=1, k$).

Le premier terme sous l'intégrale (7.1) représente l'évolution des variables dépendantes et la technique des volumes finis employée approxime le vecteur des variables dépendantes au point P par la moyenne intégrale sur le volume de contrôle :

$$\begin{aligned} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\int_{\Omega_p} U_t(x, y, t) \cdot ds \right) \cdot dt &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} |\Omega_p| \cdot \bar{U}(t) \cdot dt = |\Omega_p| \cdot [\bar{U}(t^{n+1}) - \bar{U}(t^n)] \\ \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\int_{\Omega_p} U(x, y, t) \cdot ds \right) \cdot dt &= |\Omega_p| \cdot \Delta_t U^{n+1} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Le second terme sous l'intégrale représente ce qui est communément appelé les flux. L'application du théorème de divergence (ou théorème de Green) permet de passer d'une intégrale de domaine à une intégrale de frontières :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\int_{\Omega_p} \nabla \cdot [F(U), G(U)] \cdot ds \right) \cdot dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\oint_{\partial\Omega_p} ([F(U), G(U)] \cdot \vec{N}) \cdot dl \right) \cdot dt \quad (7.3a)$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\oint_{\partial\Omega_p} ([F(U), G(U)] \cdot \vec{N}) \cdot dl \right) \cdot dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\oint_{\partial\Omega_p} (n_x \cdot F + n_y \cdot G) \cdot dl \right) \cdot dt \quad (7.3b)$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\oint_{\partial\Omega_p} (n_x \cdot F + n_y \cdot G) \cdot dl \right) \cdot dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\oint_{\partial\Omega_p} E_N \cdot dl \right) \cdot dt \quad (7.3c)$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\oint_{\partial\Omega_p} E_N \cdot dl \right) \cdot dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\sum_{i=1}^{i=p} (l_i \cdot E_N(t)) \right) \cdot dt \quad (7.3d)$$

D'où :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\int_{\Omega_p} \nabla \cdot [F(U), G(U)] \cdot ds \right) \cdot dt = \sum_{i=1}^{i=k} \left(l_i \cdot \int E_N(t) \cdot dt \right) \quad (7.3e)$$

Dans les expressions (7.3c), (7.3d) et (7.3e), $E_N = n_x \cdot F + n_y \cdot G$ désigne le flux dans la direction normale.

Le troisième terme sous l'intégrale représente simplement le terme source :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\int_{\Omega_p} S(U(x, y, t)) \cdot ds \right) \cdot dt = \Delta t \cdot |\Omega_p| \cdot [\phi \cdot S^{n+1} + (1 - \phi) \cdot S^n] \quad (7.4)$$

7.1.1 Maillage triangulaire non structuré

L'équation intégrale (7.1) est valide pour un maillage quelconque. Toutefois, en pratique cette relation sera appliquée sur un maillage triangulaire non structuré. Ce type de maillage présente l'avantage de pouvoir s'adapter aux géométries les plus complexes. Il est également possible de faire varier la taille des triangles pour concentrer les éléments les plus petits dans les zones où une précision accrue est nécessaire, et les triangles les plus grands dans les zones où les variations des variables d'écoulement sont moins importantes ou la précision des résultats est moins

critique (Voir figure 7.2).

Les figures 7.3a et 7.3b schématisent la construction d'un volume de contrôle polygonal autour de chaque nœud de la triangulation. Les figures 7.4a et 7.4b montrent les vecteurs normaux aux segments frontières du volume de contrôle.

7.1.2 Algorithme général des schémas de Riemann en deux dimensions

La démarche appliquée en deux dimensions est formellement la même, en quatre étapes, que celle utilisée en une dimension.

- Étape 1 : projection.
- Étape 2 : reconstruction.
- Étape 3 : solution du problème de Riemann aux interfaces de volumes de contrôle.
- Étape 4 : évolution de la solution.

La différence fondamentale dans cette démarche entre les cas bidimensionnel et unidimensionnel se situe essentiellement dans la formulation des équations, mais surtout dans l'application de la solution au problème de Riemann aux interfaces de volume de contrôle. Comme il a été mentionné au chapitre précédent, un choix délibéré a été effectué de retenir une approche où la normale à la frontière du volume de contrôle constitue la direction selon laquelle le problème de Riemann est résolu. Ce choix a été dicté par les considérations de simplicité par rapport aux autres approches utilisant plusieurs directions dans la solution du problème de Riemann.

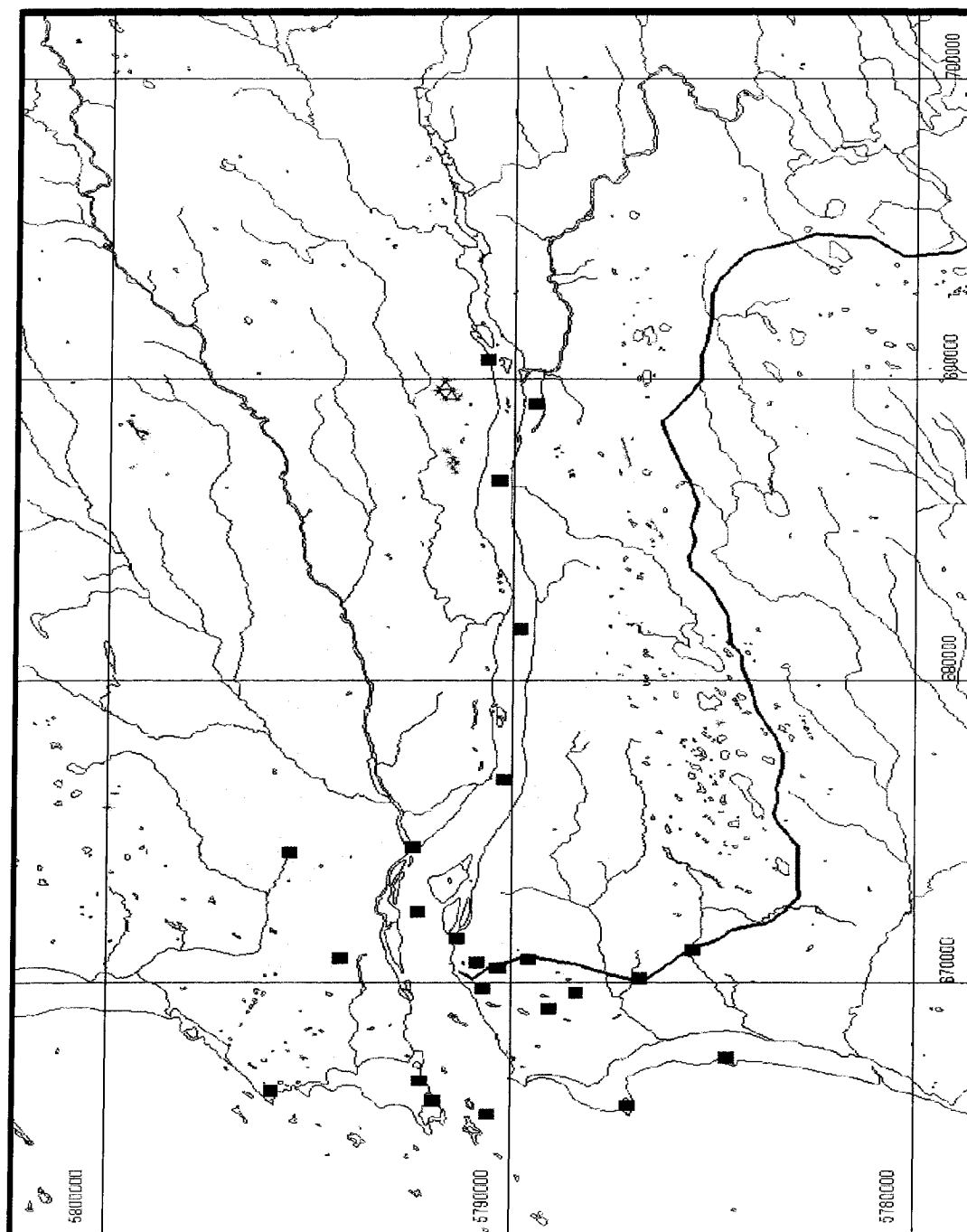
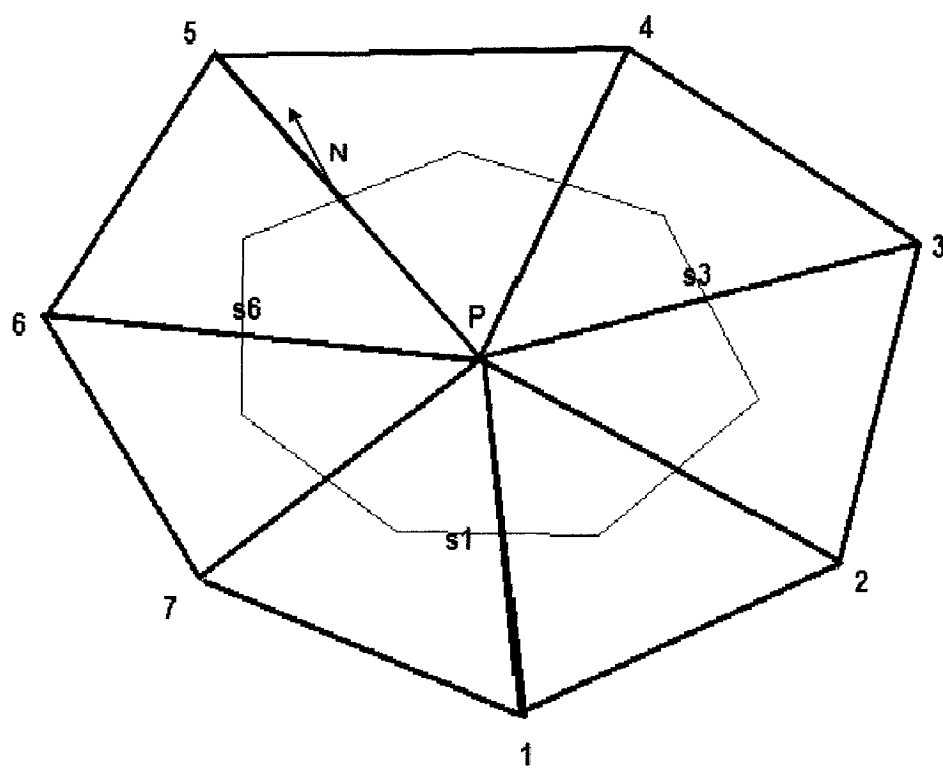
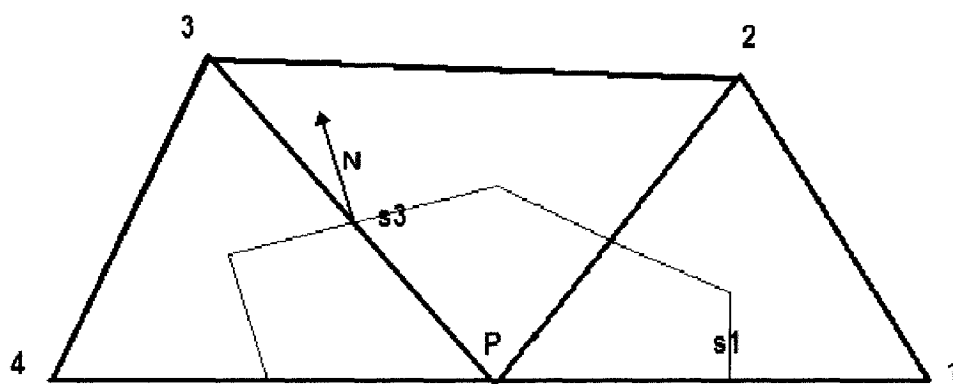


Figure 7.1 Exemple d'un maillage triangulaire non structuré.



(a) Noeud interne



(b) Noeud frontière

Figure 7.2 Schématisation de volume de contrôle associé aux nœuds du maillage triangulaire.

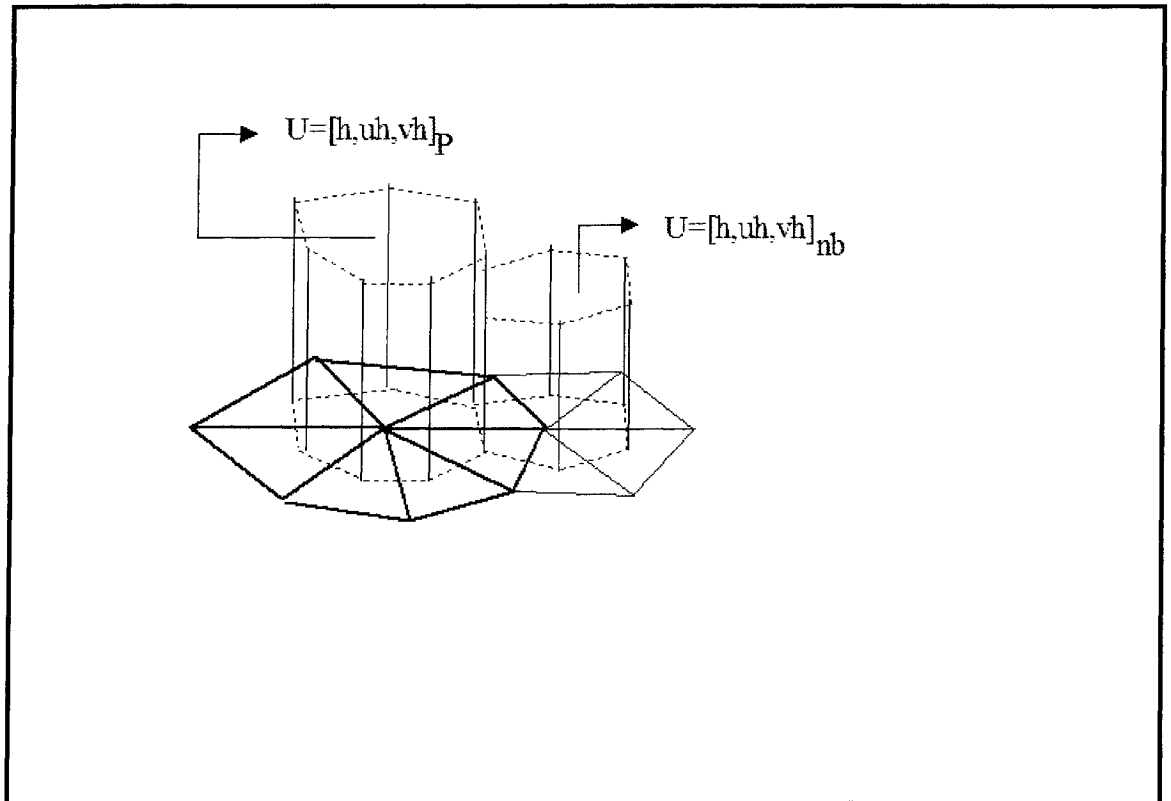


Figure 7.3 Schématisation du problème de Riemann à l'interface de deux volumes de contrôle adjacents.

7.2 Schéma SRD21 (Profondeur positive)

Ce schéma est l'objet de la publication (Tchamen & Kahawita 1998). Le schéma proposé utilise la formulation (6.2), (6.3). Le schéma d'approximation du flux à l'interface est une adaptation d'un schéma proposé par van Leer (1982).

$$E_N^{VL}(U_L, U_R) = E_N^+(U_L) + E_N^-(U_R) \quad (7.5)$$

Où :

$$E_N^+ = \begin{bmatrix} E_N^+(1) \\ E_N^+(2) \\ E_N^+(3) \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} E_N(U) = \begin{bmatrix} V_N \cdot h \\ u \cdot (V_N \cdot h) + g \frac{h^2}{2} \cdot n_x \\ v \cdot (V_N \cdot h) + g \frac{h^2}{2} \cdot n_y \end{bmatrix} \end{bmatrix} & fr \geq 1 \\ \begin{bmatrix} E_N^+(1) = \frac{(1+fr)^2}{4} \cdot c \cdot h \\ E_N^+(2) = E_N^+(1) \cdot \begin{bmatrix} u - \frac{(V_N - 2c)}{2} \cdot n_x \\ E_N^+(3) = E_N^+(1) \cdot \begin{bmatrix} v - \frac{(V_N - 2c)}{2} \cdot n_y \end{bmatrix} \end{bmatrix} & -1 \leq fr \leq 1 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & fr \leq -1 \end{cases} \quad (7.6)$$

$$E_N^- = \begin{bmatrix} E_N^-(1) \\ E_N^-(2) \\ E_N^-(3) \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} E_N(U) = \begin{bmatrix} V_N \cdot h \\ u \cdot (V_N \cdot h) + g \frac{h^2}{2} \cdot n_x \\ v \cdot (V_N \cdot h) + g \frac{h^2}{2} \cdot n_y \end{bmatrix} \end{bmatrix} & fr \leq -1 \\ \begin{bmatrix} E_N^-(1) = -\frac{(1-fr)^2}{4} \cdot c \cdot h \\ E_N^-(2) = E_N^-(1) \cdot \begin{bmatrix} u - \frac{(V_N + 2c)}{2} \cdot n_x \\ v - \frac{(V_N + 2c)}{2} \cdot n_y \end{bmatrix} \\ E_N^-(3) = E_N^-(1) \cdot \begin{bmatrix} u - \frac{(V_N + 2c)}{2} \cdot n_x \\ v - \frac{(V_N + 2c)}{2} \cdot n_y \end{bmatrix} \end{bmatrix} & -1 \leq fr \leq 1 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & fr \geq 1 \end{cases} \quad (7.7)$$

7.3 Schéma SRD22

Ce schéma est la version bidimensionnelle du schéma unidimensionnel SRD13. Il utilise la forme (6.1) des équations de base. Le terme de gravité dans les deux équations de mouvement n'ont pas la forme divergente ou dite de conservation. L'approximation locale suivante sera utilisée sur chaque volume de contrôle pour obtenir une forme quasi divergente :

$$\int_{\Omega_p} \left(h \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \right) \cdot ds = h_p \cdot \int_{\Omega_p} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) \cdot ds$$

$$\int_{\Omega_p} \left(h \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \right) \cdot ds = h_p \cdot \int_{\Omega_p} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) \cdot ds$$

Ainsi, pour un nœud de maillage P, le système à intégrer s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = S \quad (7.8)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 U &= \begin{bmatrix} H \\ uh \\ vh \end{bmatrix}, & S(U) &= \begin{bmatrix} 0 \\ gh \cdot S_{fx} \\ gh \cdot S_{fy} \end{bmatrix}, \\
 F^P(U) &= \begin{bmatrix} uh \\ (u^2 h) + (g \cdot h_p \cdot H) \\ uvh \end{bmatrix}, & G^P(U) &= \begin{bmatrix} uh \\ uvh \\ (v^2 h) + (g \cdot h_p \cdot H) \end{bmatrix} \quad (7.9)
 \end{aligned}$$

En appliquant la formule (7.3) aux flux de (7.9), il apparaît qu'il faille résoudre le problème de Riemann aux frontières de chaque volume de contrôle avec le flux normal suivant :

$$E_N^P(U) = n_x \cdot F^P(U) + n_y \cdot G^P(U) = \begin{bmatrix} V_N \cdot h \\ u \cdot (V_N \cdot h) + g \cdot (h_p \cdot H) \cdot n_x \\ v \cdot (V_N \cdot h) + g \cdot (h_p \cdot H) \cdot n_y \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

Définissant $J_N^P(U)$ comme la matrice Jacobienne associée au flux normal $E_N^P(U)$:

$$J_N^P(U) = \frac{\partial E_N^P(U)}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & n_x & n_y \\ [(g \cdot h_p) - (u \cdot V_N)] & (V_N + u \cdot n_x) & u \cdot n_y \\ [(g \cdot h_p) - (v \cdot V_N)] & v \cdot n_x & (V_N + v \cdot n_y) \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

Le flux approximatif selon Roe 1981 correspondant à $E_N^P(U)$ serait :

$$E_N^{Roe}(U_L, U_R) = \frac{1}{2} [E_N^P(U_L) + E_N^P(U_R) - |J_N^P(U_L, U_R)| (U_R - U_L)] \quad (7.12)$$

Il est proposé dans la présente étude, une modification qui permet l'adaptation du flux approximatif à des situations particulières :

$$E_N^{RM}(U_L, U_R) = \frac{1}{2} [E_N^p(U_L) + E_N^p(U_R) - |J_N(U_L, U_R)|(U_R - U_L)] \quad (7.13)$$

La différence entre les expressions (7.12) et (7.13) se situe au niveau des matrices Jacobiennes $J_N^p(U_L, U_R)$ et $J_N(U_L, U_R)$.

$$J_N^p(U_L, U_R) = \frac{\partial E_N(U)}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & n_x & n_y \\ [(g \cdot h_p) - (u \cdot V_N)_{LR}] & (V_N + u \cdot n_x)_{LR} & u_{LR} \cdot n_y \\ [(g \cdot h_p) - (v \cdot V_N)_{LR}] & v_{LR} \cdot n_x & (V_N + v \cdot n_y)_{LR} \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

$$J_N(U_L, U_R) = \frac{\partial E_N(U)}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & n_x & n_y \\ [(g \cdot h_{LR}) - (u \cdot V_N)_{LR}] & (V_N + u \cdot n_x)_{LR} & u_{LR} \cdot n_y \\ [(g \cdot h_{LR}) - (v \cdot V_N)_{LR}] & v_{LR} \cdot n_x & (V_N + v \cdot n_y)_{LR} \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

Avec :

$$\begin{aligned} h_{LR} &= \frac{h_L + h_R}{2} & (V_N)_{LR} &= n_x \cdot u_{LR} + n_y \cdot v_{LR} \\ u_{LR} &= \frac{\sqrt{h_L} \cdot u_L + \sqrt{h_R} \cdot u_R}{\sqrt{h_L} + \sqrt{h_R}} & v_{LR} &= \frac{\sqrt{h_L} \cdot v_L + \sqrt{h_R} \cdot v_R}{\sqrt{h_L} + \sqrt{h_R}} \end{aligned} \quad (7.16)$$

Il est remarquable de constater que la différence entre les expressions (7.14) et (7.15) se situe sur les termes des 2 et 3 de la première colonne, c'est-à-dire entre h_p d'une part et h_{LR} d'autre part.

Pour compléter la définition de l'expression (7.13), il faut détailler la multiplication matricielle :

$$|J_N(U_L, U_R)|(U_R - U_L) = \alpha 1 \cdot |\lambda 1| \cdot E1 + \alpha 2 \cdot |\lambda 2| \cdot E2 + \alpha 3 \cdot |\lambda 3| \cdot E3 \quad (7.14)$$

Tous les termes de la décomposition (7.17) sont présentés dans le tableau 7.1 :

Tableau 7.1 : Principaux termes de la formule de Roe dans le schéma SRD22

Valeur propre	Vecteur propre	Amplitude
$\lambda 1_{LR} = (V_N - c)_{LR}$	$E1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u_{LR} - c_{LR} \cdot n_x \\ v_{LR} - c_{LR} \cdot n_y \end{bmatrix}$	$\alpha 1 = \frac{\begin{bmatrix} c_{LR} \cdot \Delta_{LR} H - \\ (\Delta_{LR}(uh) - u_{LR} \cdot \Delta H)_{LR} \cdot n_x - \\ (\Delta_{LR}(vh) - v_{LR} \cdot \Delta_{LR} H) \cdot n_x \end{bmatrix}}{2c_{LR}}$
$\lambda 2_{LR} = (V_N)_{LR}$	$E2 = \begin{bmatrix} 0 \\ n_y \\ -n_x \end{bmatrix}$	$\alpha 2 = \begin{bmatrix} (\Delta_{LR}(uh) - u_{LR} \cdot \Delta H)_{LR} \cdot n_y - \\ (\Delta_{LR}(vh) - v_{LR} \cdot \Delta_{LR} H) \cdot n_x \end{bmatrix}$
$\lambda 3_{LR} = (V_N + c)_{LR}$	$E3 = \begin{bmatrix} 1 \\ u_{LR} + c_{LR} \cdot n_x \\ v_{LR} + c_{LR} \cdot n_y \end{bmatrix}$	$\alpha 3 = \frac{\begin{bmatrix} c_{LR} \cdot \Delta_{LR} H + \\ (\Delta_{LR}(uh) - u_{LR} \cdot \Delta H)_{LR} \cdot n_x + \\ (\Delta_{LR}(vh) - v_{LR} \cdot \Delta_{LR} H) \cdot n_x \end{bmatrix}}{2c_{LR}}$

Où : $c_{LR} = \sqrt{g \cdot h_{LR}}$.

7.3.1 Transformation de débit spécifique à vitesse

De manière analogue au cas unidimensionnel, une opération matricielle est proposée qui effectue la essentiellement la transformation du vecteur de débit spécifique en vecteur vitesse. Cette matrice est dérivée d'opérations algébriques et différentielles simples qui sont les suivantes.

Soient :

$$U = \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix}, \text{ et } W = \begin{bmatrix} h \\ u \\ v \end{bmatrix}$$

Les variations de ces vecteurs sont liées par :

$$\partial U = \begin{bmatrix} \partial h \\ \partial(uh) \\ \partial(vh) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & h & 0 \\ v & 0 & h \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \partial h \\ \partial u \\ \partial v \end{bmatrix} = M \bullet \partial W \quad (7.18)$$

Et :

$$\partial W = \begin{bmatrix} \partial h \\ \partial u \\ \partial v \end{bmatrix} = M^{-1} \bullet \partial U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -u/h & 1/h & 0 \\ -v/h & 0 & 1/h \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \partial h \\ \partial(uh) \\ \partial(vh) \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

La matrice M^{-1} est peut être vue comme la matrice de transformation du système (6.1) au système (6.3).

Dans la démarche du schéma SRD22, la transformation (7.19) est appliquée après l'étape 4 de l'algorithme de volumes finis (section 7.1.2) qui correspond à l'assemblage des flux et du terme source de frottement :

$$\begin{aligned} \partial W^{n+1} = \begin{bmatrix} \partial h^{n+1} \\ \partial u^{n+1} \\ \partial v^{n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} h^{n+1} - h^n \\ u^{n+1} - u^n \\ v^{n+1} - v^n \end{bmatrix} = M^{-1} \bullet \partial U^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -u^n/h^n & 1/h^n & 0 \\ -v^n/h^n & 0 & 1/h^n \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} h^{n+1} - h^n \\ (uh)^{n+1} - (uh)^n \\ (vh)^{n+1} - (vh)^n \end{bmatrix} \\ \partial W^{n+1} = M^{-1} \bullet \partial U^{n+1} &= M^{-1} \bullet \Delta t \cdot \left[\phi \cdot S^{n+1} + (1-\phi) \cdot S^n \right] - \frac{\sum_{K=1}^{K=M(p)} [l_K \cdot E_N^{RM}(U_P, U_K)]}{|\Omega_P|} \end{aligned} \quad (7.20)$$

L'expression (7.20) représente l'étape finale du schéma SRD22.

7.3.2 Problème du front sec

La formule proposée pour h_{LR} dans l'expression permet au schéma de traiter adéquatement les interfaces entre domaine mouillé et zone sèche.

Il faut remarquer dans le cas d'une frontière entre une cellule avec un plan d'eau au

repos et une cellule sèche,

$$U_L = \begin{bmatrix} H_L = 0 \\ (uh)_L = 0 \\ (vh)_L = 0 \end{bmatrix}, \text{ et } U_R = \begin{bmatrix} H_R > 0 \\ (uh)_R = 0 \\ (vh)_R = 0 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, et supposons que le point P autour duquel les approximations locales sont réalisées est celui qui se situe à la gauche de la normale, c'est-à-dire $P=L$:

$$E_N^{Roe}(U_L, U_R) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tandis que :

$$E_N^{RM}(U_L, U_R) = \begin{bmatrix} c_{LR} \cdot \Delta_{LR} H \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Clairement, la modification effectuée (h_{LR} pour h_P) permet au front mouillant d'avancer sur un front sec.

7.3.3 Problème du plan d'eau au repos de niveau constant

La simulation d'un plan d'eau au repos sur une bathymétrie quelconque est aussi facile en deux dimensions qu'elle l'est en une dimension. Cette facilité trouve son secret dans les éléments suivants :

la forme des équations de base utilisée ne possède pas de terme source de pente du terrain, contrairement à la forme (6.3) la plus couramment utilisée dans le cadre des schémas de Riemann ;

le choix du vecteur des variables pour le problème de Riemann. En choisissant le niveau de la surface H à la place de la profondeur cela produit :

$$\text{Si } U_L = \begin{bmatrix} H_L = H_{REPOS} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = U_R = \begin{bmatrix} H_R = H_{REPOS} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{Alors } E_N^{RM}(U_L, U_R) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{g \cdot h_p \cdot (H_L + H_R) \cdot n_x}{2} \\ \frac{g \cdot h_p \cdot (H_L + H_R) \cdot n_y}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g \cdot h_p \cdot H_{REPOS} \cdot n_x \\ g \cdot h_p \cdot H_{REPOS} \cdot n_y \end{bmatrix}$$

Le flux tel exprimé dans la relation précédente montre qu'il n'y a pas de flux de masse entre deux volumes de contrôle adjacents, et cela est cohérent avec l'hypothèse de départ de plan d'eau au repos de niveau constant.

les flux de quantités de mouvements s'annulent lorsque la sommation est effectuée sur tous les segments du volume de contrôle en vertu du théorème de divergence

$$\sum_{K=1}^{K=M(P)} \left(l_K \cdot \int E_N(t) \cdot dt \right) = \sum_{K=1}^{K=M(P)} [l_K \cdot E_N^{RM}(U_P, U_K)] = (g \cdot h_p \cdot H_{REPOS}) \cdot \sum_{K=1}^{K=M(P)} \left(l_K \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \end{bmatrix} \right)$$

$$\sum_{K=1}^{K=M(P)} \left(l_K \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \end{bmatrix} \right) = \sum_{K=1}^{K=M(P)} \left(l_K \cdot \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \cdot \vec{N} \right) = \int_{\Omega_P} \left(\nabla \cdot \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \right) \cdot ds = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7.4 Traitement des conditions aux limites

7.4.1 L'aide de la théorie des caractéristiques

La théorie des caractéristiques peut servir à déterminer le nombre de conditions à imposer à une limite donnée du domaine de simulation. Rappelons que les caractéristiques sont les trajectoires selon lesquelles des quantités appelées invariants de Riemann voyagent inchangées. Les pentes de ces trajectoires sont données par les valeurs propres, du système de base, qui constituent les vitesses de déplacement de ces ondes élémentaires.

À la frontière du domaine, le signe de chacune des valeurs propres indique si l'onde correspondante est une onde incidente (entrante) ou divergente (sortante). Étant donné

que les limites du domaine ou des volumes de contrôle sont orientées de sorte à avoir la normale dirigée vers l'extérieur.

Frontière d'entrée de débit

Pour une frontière de débit entrant, les deux premières familles de caractéristiques ont des pentes négatives ($\lambda_1 = V_N - c \leq \lambda_2 = V_N \leq 0$), ce qui exige au moins deux paramètres à imposer.

Le signe de la troisième valeur propre ($\lambda_3 = V_N + c$) est alors fonction du régime d'écoulement :

- si l'écoulement est fluvial ($\lambda_3 = V_N + c \leq 0$), alors seule l'imposition de deux paramètres s'impose ;
- si le régime d'écoulement est torrentiel ($\lambda_3 = V_N + c \geq 0$), alors trois variables (les trois variables de l'écoulement ou trois combinaisons indépendantes) doivent être imposées.

Frontière de sortie de débit

À une frontière de sortie de débit, les deux dernières familles de caractéristiques ont des pentes positives. Le nombre de variables à imposer dépend alors complètement du signe de la première caractéristique :

- si le régime d'écoulement est fluvial à la frontière ($\lambda_3 = V_N + c \leq 0$), l'imposition d'une variable sera nécessaire à cette frontière. En pratique, ce type de frontière est généralement une frontière de niveau imposé ;
- si le régime d'écoulement à la frontière est torrentiel ($\lambda_3 = V_N + c \geq 0$), alors aucune variable ne devra être imposée à la frontière. Les variables à la frontière seront complètement déterminées à l'aide des variables de l'écoulement à l'intérieur du domaine.

Frontière solide

On entend par frontière solide, frontière imperméable à tout débit. A ce type de

frontière, le débit normal à la frontière est nul, cela revient à :

- la troisième famille de caractéristiques a toujours une pente positive ($\lambda_3 = V_N + c = c \geq 0$) ;
- la deuxième famille de caractéristiques à une pente nulle ;
- la première famille de caractéristiques a toujours une pente négative ($\lambda_1 = V_N - c = -c \leq 0$). Cela exige l'imposition d'une condition à la limite, qui est précisément $V_N = 0$.

7.4.2 Extrapolation de variables conservatives

Cette démarche est l'une des plus simples à implanter et qui s'adaptent aisément à une multitude de schémas numériques. À chaque segment frontière, une cellule adjacente fictive (parfois désignée miroir ou fantôme) est ajoutée en dehors de la frontière. L'état des variables dans la cellule fictive est construit en fonction de la condition à imposer à la dite frontière.

Frontière d'entrée de débit

Pour une frontière d'entrée de débit, la valeur du débit à imposer doit être repartie entre les segments qui composent cette frontière selon une distribution appropriée. Soit la répartition spatiale est connue et donc reproduite parmi les différents segments, soit elle est simplifiée et le débit est équitablement repartie aux différents segments en fonction de leur longueur pondérée, soit encore, en fonction d'une loi de répartition hydraulique qui tient en compte la profondeur et la valeur locale de la résistance à l'écoulement par frottement. Une fois cette répartition effectuée, le débit total à la frontière est transformé en débit spécifique normal pour chaque segment de cette frontière. Pour la cellule fictive :

- la valeur du débit spécifique normal, plus une hypothèse sur la direction de ce débit (parallèle au vecteur vitesse dans la cellule, ou totalement normal à la frontière) permettent de projeter les valeurs des deux débits spécifiques dans le repère cartésien ;
- si le régime de l'écoulement est fluvial à la frontière traitée, alors le niveau dans

cellule fictive est extrapolé soit directement du niveau de la cellule interne, soit des invariants de Riemann R11 et R12 ;

- si le régime de l'écoulement est torrentiel à la frontière traitée, alors le niveau dans cellule interne est égal à la valeur imposée à la frontière.

Frontière de sortie de débit

Le traitement d'une frontière de sortie de débit est en général assez simple. Lorsqu'une condition y est imposée, c'est généralement une condition de niveau. Sinon, aucune condition n'est nécessaire, les variables sont alors recopiées de la cellule interne à la cellule fictive :

- pour une frontière de niveau imposé, le niveau à imposer à la frontière est le même que celui assigné à la cellule fictive ;
- le reste des variables, débits spécifiques, est calculé, en extrapolant de la cellule interne adjacente au segment frontière, soit les débits spécifiques, soit les invariants de Riemann R21, R22, R31 et R33.

Frontière solide

Pour une frontière solide, la façon d'établir l'imperméabilité avec la cellule fictive consiste à y imposer une vitesse qui est l'opposée dans la direction normale et égale dans la direction tangentielle à la celle de la cellule interne adjacente à la frontière. Le niveau est, soit simplement recopié de la cellule interne adjacente à la frontière, soit calculé extrapolant les invariants de Riemann R31 et R33.

7.4.3 Imposition directe des flux

La méthode d'imposition directe des flux présente elle aussi quelques attraits :

- elle est simple à mettre en œuvre ;
- elle correspond bien à l'esprit des conditions qui s'applique bel et bien sur des frontières et non sur des points ou des cellules ;
- elle s'avère très adéquate pour imposer exactement des débits qui constituent la variable d'imposition la plus forte et la plus courante en hydraulique de surface.

Le principal désavantage de cette méthode est qu'elle s'adapte difficilement avec les frontières qui changent de régime en cours de simulation.

Rappelons que le flux normal s'écrit :

$$E_N^P(U) = \begin{bmatrix} V_N \cdot h \\ u \cdot (V_N \cdot h) + g \cdot (h_p \cdot H) \cdot n_x \\ v \cdot (V_N \cdot h) + g \cdot (h_p \cdot H) \cdot n_y \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

Frontière d'entrée de débit

Une fois que le débit imposé est reparti en débit spécifique dans la direction normale, le terme $(V_N \cdot h)$ est connu. Les composantes u et v de la vitesse peuvent alors être déterminées selon :

- la vitesse transversale est supposée nulle à l'interface;
- la vitesse à l'interface est supposée parallèle à la vitesse dans la cellule adjacente à l'interface.

Le terme de niveau est imposé ou extrapolé selon le régime d'écoulement à l'interface :

- pour une frontière en régime fluvial, soit H est extrapolé du centre de la cellule du domaine $H = H_p$, soit UH est déterminé en extrapolant les invariants de Riemann $R11_p$ et $R12_p$;
- pour une frontière en régime torrentiel, H est égal à la valeur imposée $H = H_{\text{imposé}}$.

Frontière de sortie

À une frontière de sortie de débit, la valeur du niveau est généralement imposée, et celle du débit est traitée en fonction du régime de l'écoulement :

- pour une frontière en régime fluvial, le niveau est imposé $H = H_{\text{imposé}}$, et le débit est calculé par extrapolation, depuis le centre de la cellule du domaine $H = H_p$, soit des débits spécifiques, soit des invariants de Riemann $R21_p$, $R22_p$, $R31_p$ et $R32_p$;

- pour une frontière en régime torrentiel, le niveau et les débits sont imposés à la frontière $[H=H_{\text{imposé}}, (uh)=(uh)_{\text{imposé}}, (vh)=(vh)_{\text{imposé}}]$.

Frontière solide

Dans le cas d'une frontière solide, la condition d'imperméabilité ($V_N h=0$) réduit l'indétermination du flux normal à celle sur le niveau H . Le niveau à la frontière H est déterminée, soit simplement en extrapolant depuis le niveau au centre de la cellule du domaine $H=H_P$, soit en extrapolant les invariant de Riemann $R31_P$ et $R32_P$.

CHAPITRE 8 RÉSULTATS DE LA MODÉLISATION NUMÉRIQUE BIDIMENSIONNELLE

8.1 Introduction

Plusieurs cas test seront présentés dans le présent chapitre dans le but de valider le schéma proposé et de mesurer sa performance en comparant les résultats avec les solutions analytiques ou des mesures lorsqu'elles sont disponibles, ainsi les résultats d'autres modèles numériques lorsqu'il y a lieu.

Cinq cas test dits académiques seront réalisés. Ils correspondent, à quelques détails près, aux cas théoriques qui ont été présentés pour le modèle unidimensionnel. Il s'agit du cas du plan d'eau au repos avec une bathymétrie irrégulière, de la rupture de barrage théorique dans un canal à fond horizontal, avec friction cette fois, puis dans un canal en pente sans friction, et finalement d'écoulements fluvial régulier, puis torrentiel avec ressaut dans un canal avec un seuil parabolique.

Deux autres cas correspondant à des sites réels, dont le premier correspond à une inondation survenue dans la vallée de la rivière Toce en Italie. Un modèle physique à l'échelle 1/100 de cet événement a été réalisé et les données et mesures mises à disposition des participants du groupe CADAM (Frazao et Testa 1999). Le second cas représente la rupture hypothétique du barrage principal de l'aménagement LG-4 qui est situé à l'amont du complexe La Grande dans le Nord Québécois.

8.2 Plan d'eau au repos constant

Pour simplifier la présentation et la lecture, le cas de validation utilisé dans le cas unidimensionnel a été réutilisé ici. Seule la bathymétrie du plan d'eau a été légèrement modifiée en sorte que les variations de cette variable soient irrégulières dans toutes les

directions.

La figure 8.1a présente un aperçu du maillage et de la bathymétrie du plan d'eau utilisés. Les figures 8.1b et 8.1c présentent la surface libre et les vitesses à l'intérieur de ce plan d'eau après 1000 secondes simulées. Il apparaît clairement, et sans surprise vu les démonstrations de la section 7.3.3, que les schémas utilisés préservent immobilité du plan d'eau.

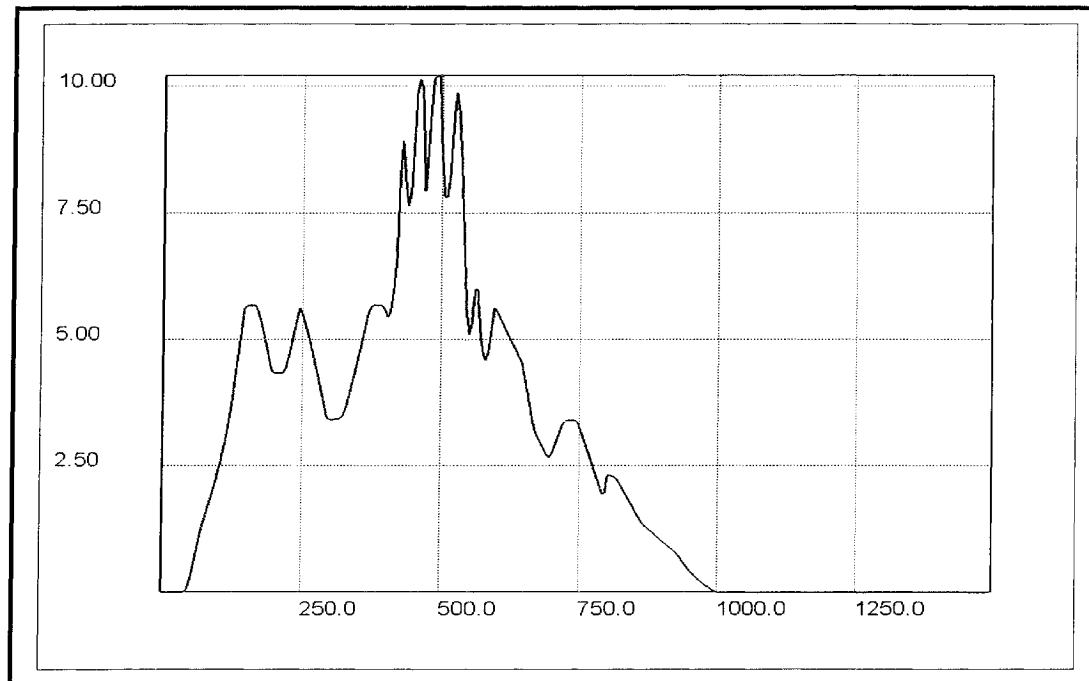
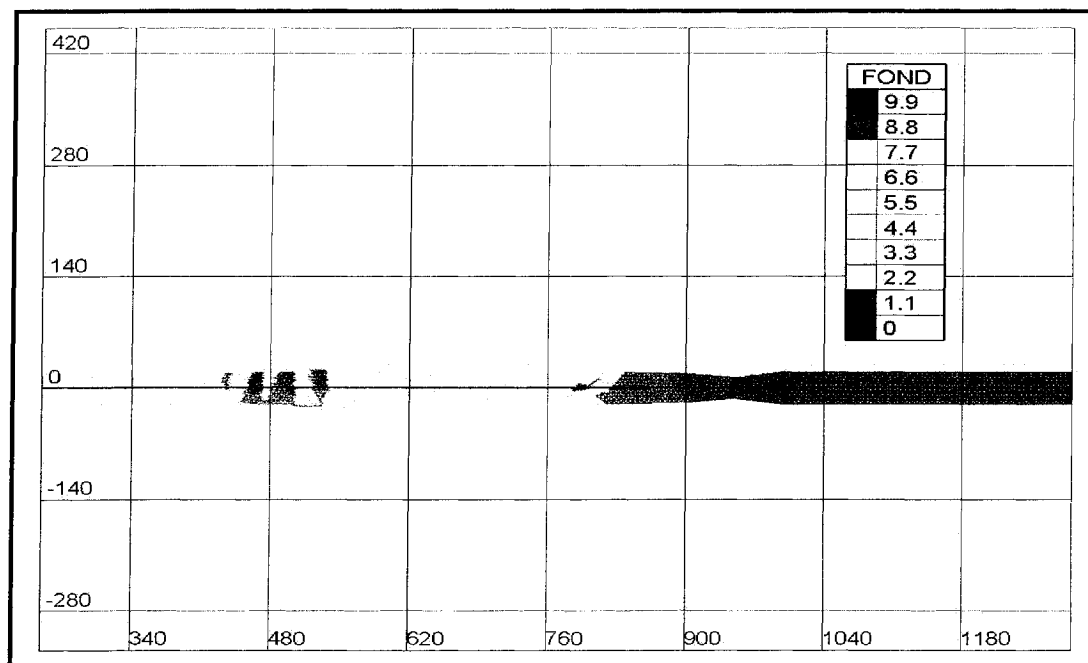


Figure 8.1a Plan d'eau immobile. Maillage et bathymétrie du domaine.

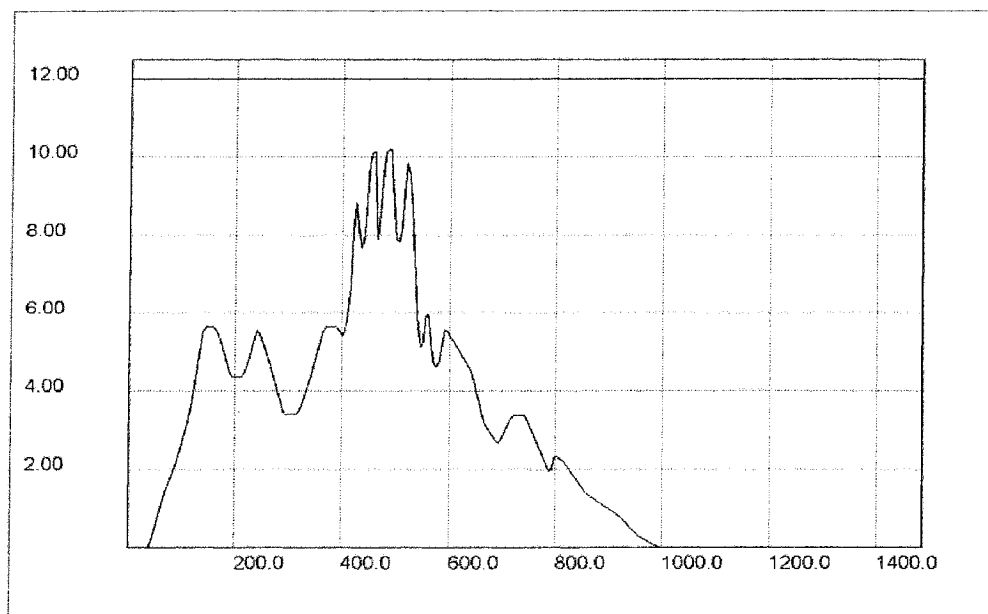


Figure 8.1b Plan d'eau immobile. Profil de la surface libre après 1000 secondes.

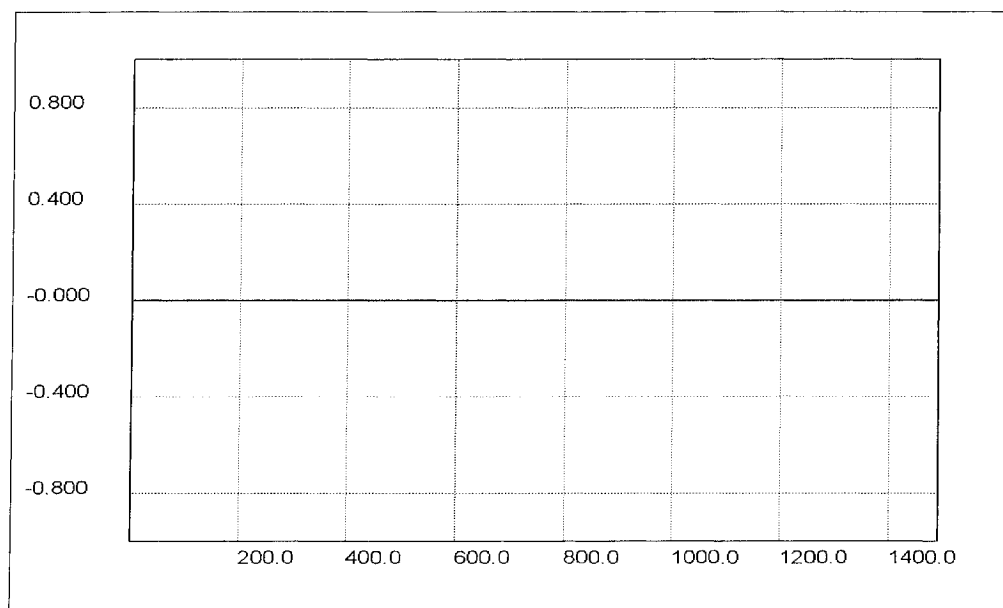


Figure 8.1c Plan d'eau immobile. Profil de vitesse après 1000 secondes.

8.3 Rupture de barrage dans un canal horizontal avec friction

Le présent cas de validation correspond au quatrième cas test unidimensionnel (section 5.5), qui représente le problème de rupture de barrage théorique utilisé au long de la présente thèse pour étudier le problème de Riemann (section 3.1.2). La différence essentielle du présent cas réside dans le fait qu'une résistance par friction correspondant à un coefficient de Chezy $C=40$ est considérée pour le lit du canal.

Pour la simulation bidimensionnelle, un canal de dimensions $2000 \times 20 \text{ m}^2$ a été représenté avec un maillage régulier de 1204 triangles et est présenté à la figure 8.2a. Les figures 8.2b et 8.2c présentent les résultats sous forme de profils de niveau et de vitesse tirés au centre du canal, 20 secondes après l'effacement du barrage. La figure 8.2d montre le profile du débit au même moment. Sur toutes les trois dernières figures de résultats (8.2b, 8.2c et 8.2d), les résultats numériques obtenus à l'aide des schémas SRD21 et SRD22 sont superposés avec la solution théorique proposée par Dressler (1952).

La solution de Dressler est une solution approximative obtenue par la méthode des perturbations et est valide sur tout le profil en dehors de la zone du front d'onde. Cette solution s'écrit :

$$c = \frac{c_1}{3} \left(2 - \frac{x}{c_1 t} \right) + k \cdot g \cdot \alpha_1 \cdot t$$

$$u = \frac{2c_1}{3} \left(1 + \frac{x}{c_1 t} \right) + k \cdot g \cdot \alpha_2 \cdot t$$

Où :

$$c = \sqrt{gh}, \quad c_1 = \sqrt{gh_1}, \quad \text{et} \quad k = \frac{g}{C^2}. \quad C \text{ est le coefficient friction de}$$

Chezy.

$$\alpha_1 = \frac{6}{5\left(2 - \frac{x}{c_1 t}\right)} - \frac{2}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{135}\left(2 - \frac{x}{c_1 t}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\alpha_2 = \frac{12}{\left(2 - \frac{x}{c_1 t}\right)} - \frac{8}{3} + \frac{8\sqrt{3}}{189}\left(2 - \frac{x}{c_1 t}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{108}{7\left(2 - \frac{x}{c_1 t}\right)^2}$$

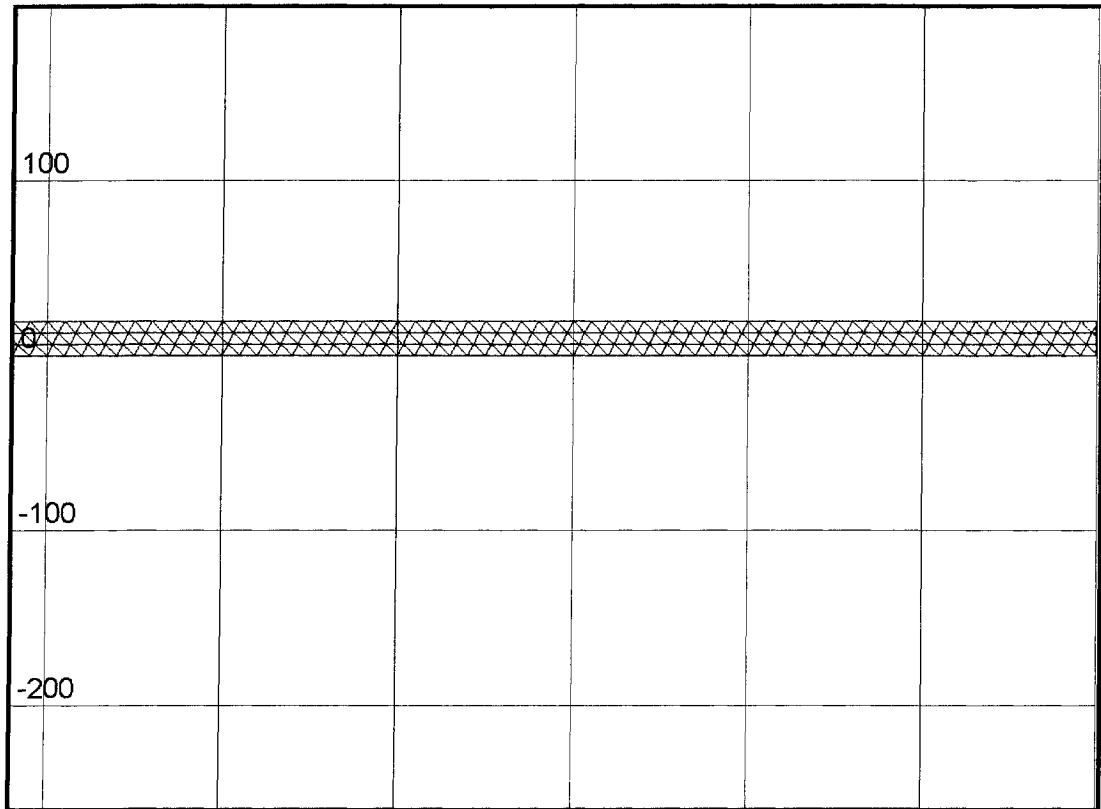


Figure 8.2a Rupture de barrage sur fond sec dans un canal horizontal avec friction (Chezy=40). Maillage du domaine.

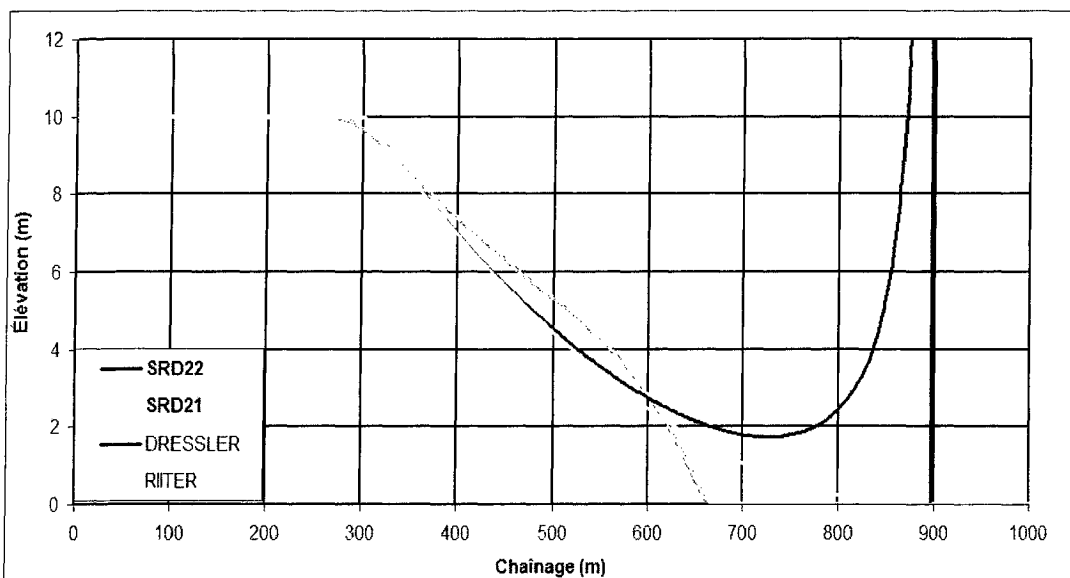


Figure 8.2b: Rupture de barrage sur fond sec dans un canal horizontal avec friction (Chezy $C=40$). Surface libre 20 secondes après la rupture.

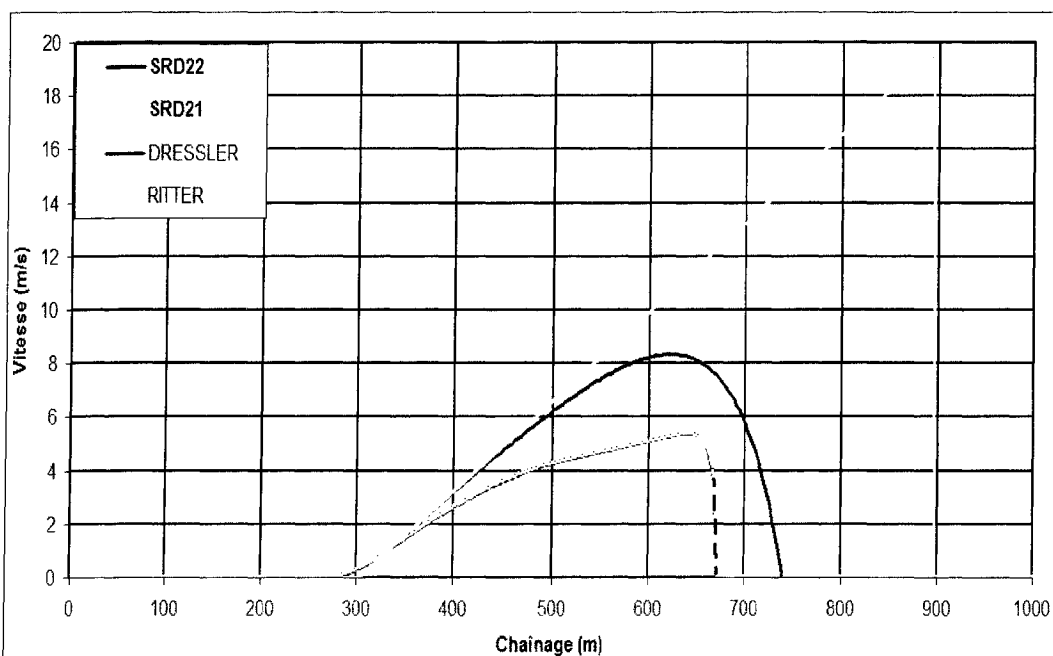
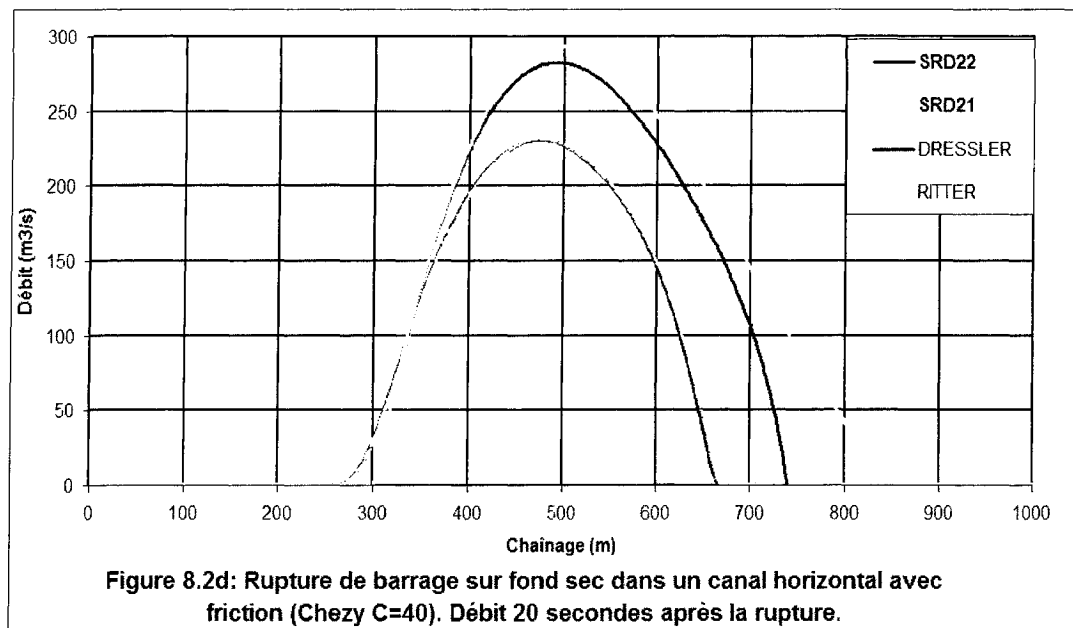


Figure 8.2c: Rupture de barrage sur fond sec dans un canal horizontal avec friction (Chezy $C=40$). Vitesse longitudinale 20 secondes après la rupture.



8.4 Rupture de barrage dans un canal en pente

Le présent cas de validation correspond à la rupture de barrage dans un canal en pente. En pratique, le maillage du cas précédent est ici réutilisé. La seule modification qui lui a été apportée concerne la pente du lit qui a été fixée à 2% (pente constante).

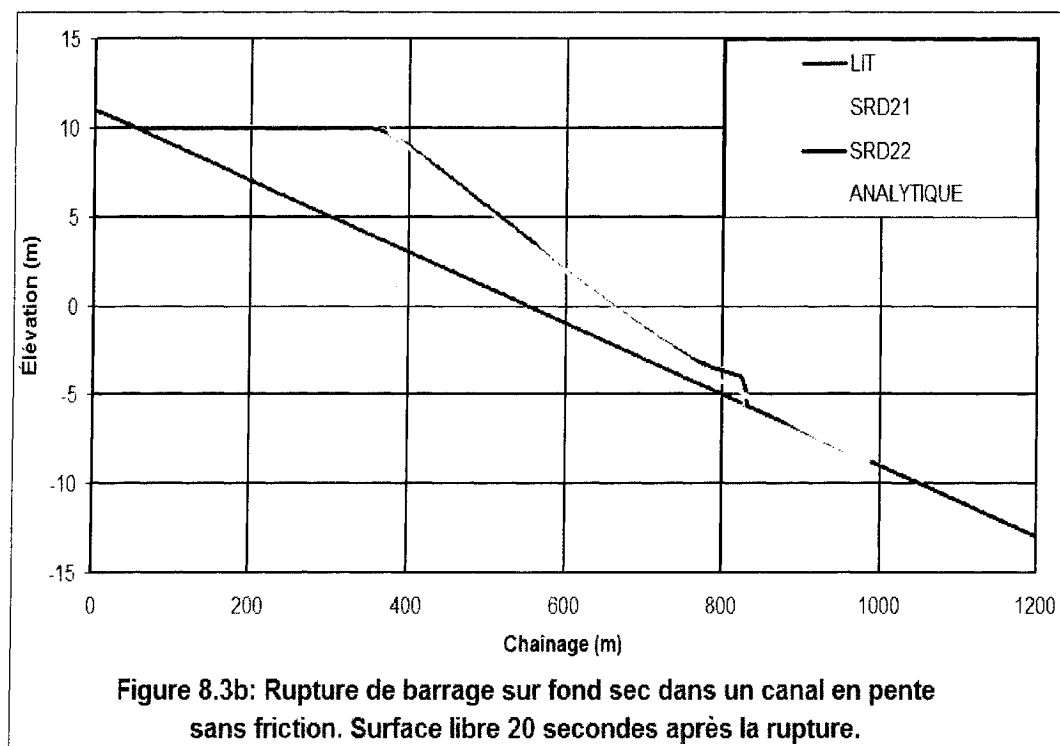
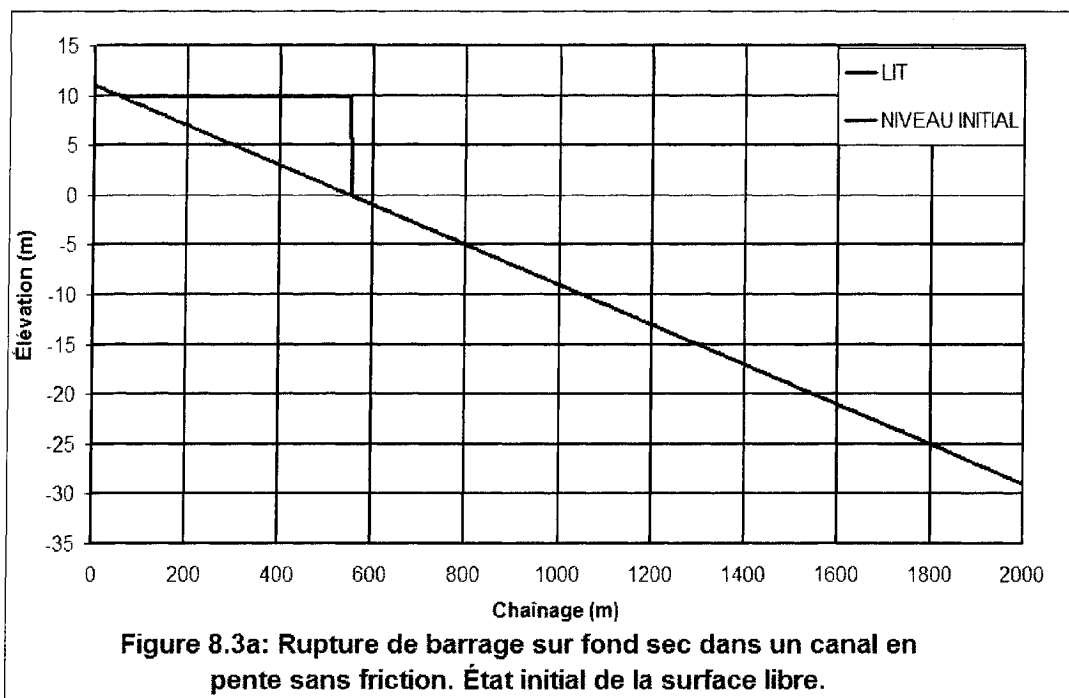
La figure 8.3a présente le profil initial de la surface libre superposé au profil longitudinal du lit. Les figures 8.3b et 8.3c présentent respectivement les profils, de la surface et de la vitesse longitudinale 20 secondes après la rupture, obtenus à l'aide des schémas SRD21 et SRD22. Les profils de débit obtenus au même moment sont présentés à la figure 8.3d.

Dressler (19858) a proposé une solution au présent problème en utilisant les changements de variables présentées à la section 3.4 en combinaison avec des transformations de type holographique qui permettent de passer d'un système d'équations non linéaires en profondeur et vitesse à un système d'équation linéaires en x et t (distance et temps). Les profils analytiques présentés sur les figures 8.3b, 8.3c et

8.3d ont été construits à partir des formules tirées de cette référence.

Il apparaît, sur les figures 8.3b et 8.3c, que l'approximation de la solution analytique par les schémas SRD21 et SRD22 comporte un écart notable dans la région du front d'onde. Cet écart est dû au fait que pour simuler les cellules de front, la vitesse est mise à zéro pour toutes les cellules qui ne sont pas pleines d'eau.

Dans la publication de Tchamen et Kahawita (1998), il est démontré qu'il est possible d'obtenir une meilleure résolution du front d'onde en laissant les équations de quantité de mouvement déterminer la vitesse dans les cellules de front. Toutefois, cette stratégie s'avère peu robuste lors de la simulation sur des topographies complexes.



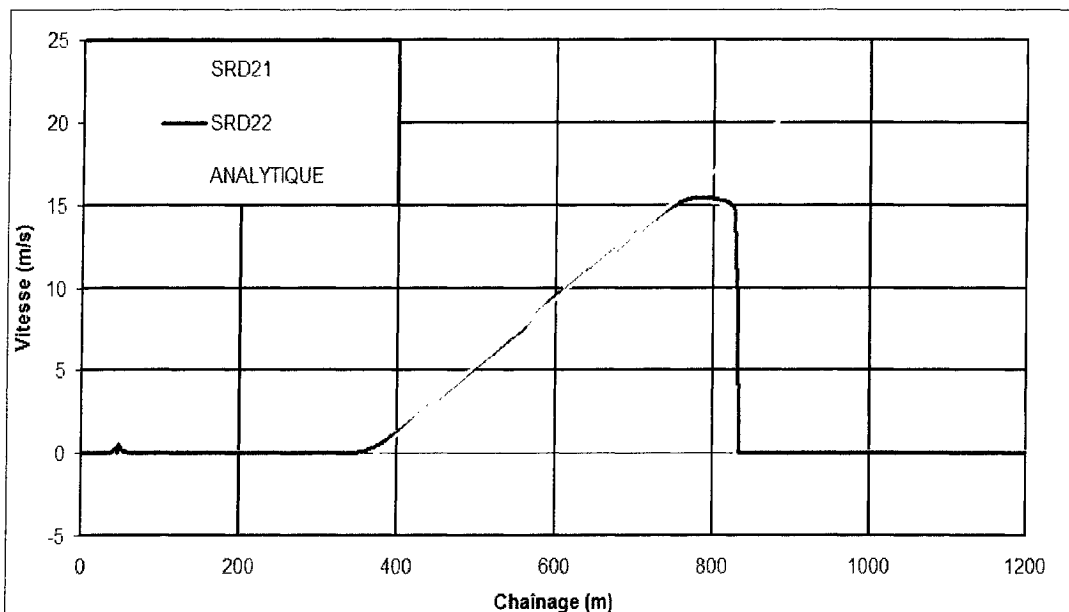


Figure 8.3c: Rupture de barrage sur fond sec dans un canal en pente sans friction. Vitesse longitudinale 20 secondes après la rupture.

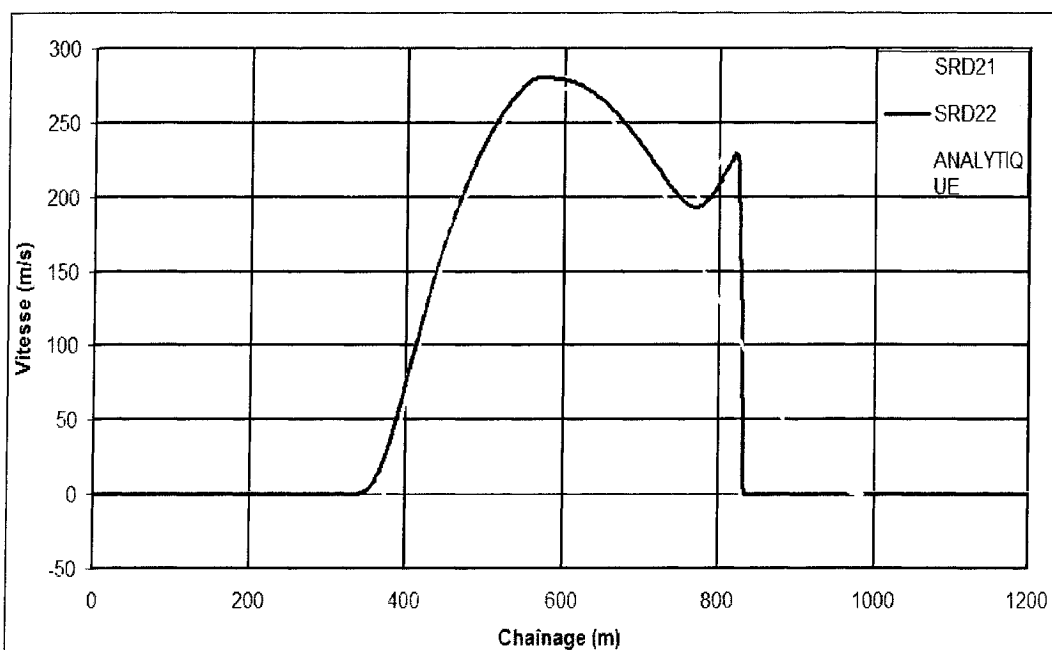


Figure 8.3d: Rupture de barrage sur fond sec dans un canal en pente sans friction. Débit 20 secondes après la rupture.

8.5 Écoulement fluvial dans un canal avec un seuil parabolique

Le cas test de la section 5.3 est reproduit ici. Il avait déjà présenté dans une publication antérieure (Tchamen, Kahawita & Tessier 1994). Il correspond à un cas validation recommandé par le groupe d'études CADAM (Toro et al 1998).

Ici, le canal utilisé a les dimensions $25 \times 5 \text{ m}^2$ a été représenté avec un maillage de 4610 triangles présenté à la figure 8.4a. Les figures 8.4b et 8.4c montrent, respectivement, les profils de niveau et de vitesse extrait au centre du canal, et superposés avec les profils correspondant à la simulation unidimensionnelle.

Les performances des deux schémas bidimensionnels, sur ce cas test, sont comparables à celle du schéma unidimensionnel SRD11.

8.6 Ressaut dans un canal avec un seuil parabolique

Ce cas de validation correspond au cas de validation unidimensionnel présenté à la section 5.4. Il utilise le même canal que le cas de validation précédent. Seules les conditions de l'écoulement sont différentes. Ici, un débit de $1,8 \text{ m}^3/\text{s}$ imposé à l'amont en combinaison avec un niveau de 0,33 m à la sortie aval conduisent à un écoulement transcritique au dessus du seuil parabolique, suivi d'un ressaut pur recoller au niveau imposée à la sortie.

Les figures 8.5a et 8.5b présentent les profils de niveau et de vitesse extraits au centre du canal. Encore une fois, les performances des deux schémas bidimensionnels, SRD21 et SRD22, sont du même niveau que ceux des schémas unidimensionnels présenté au chapitre 5.

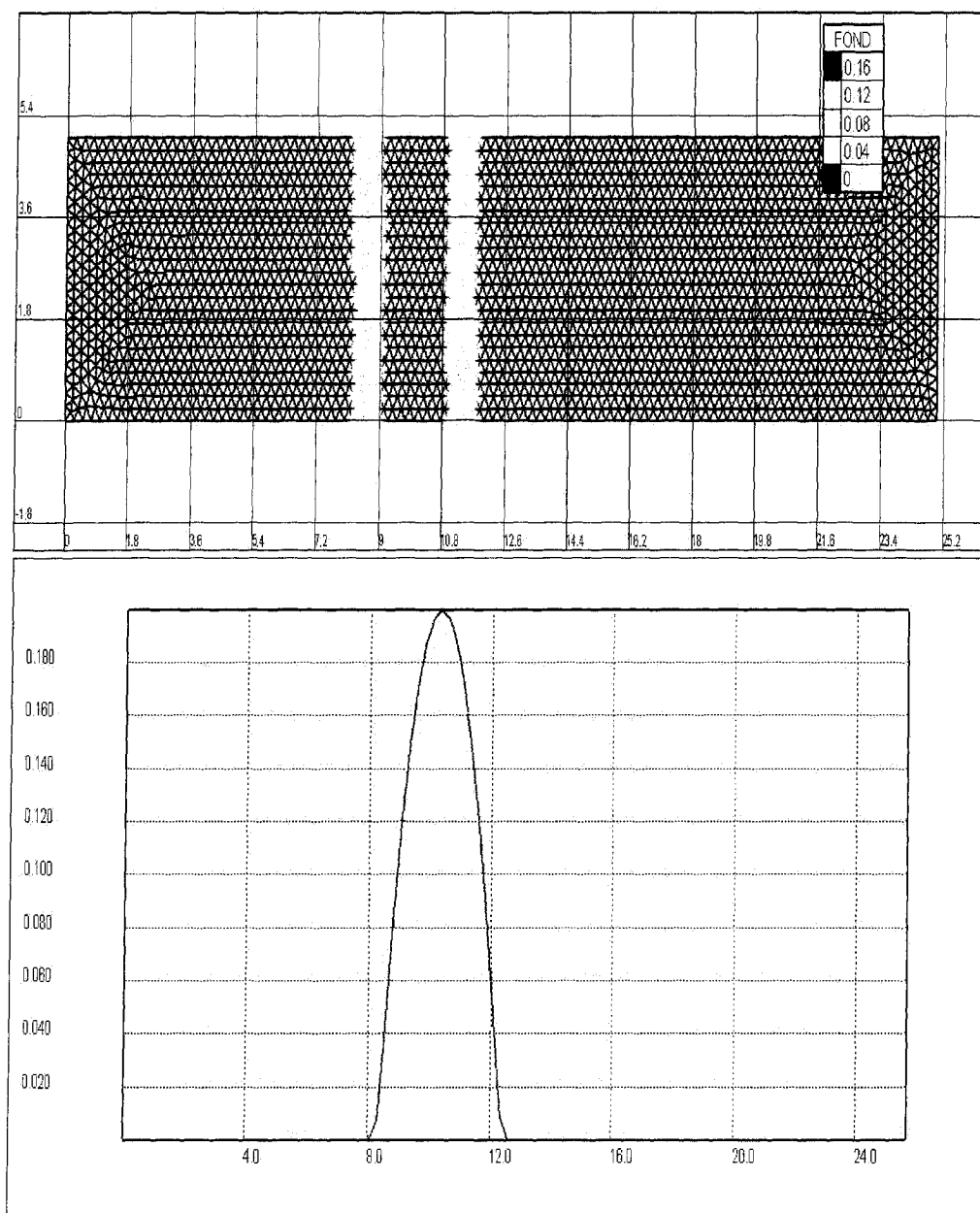
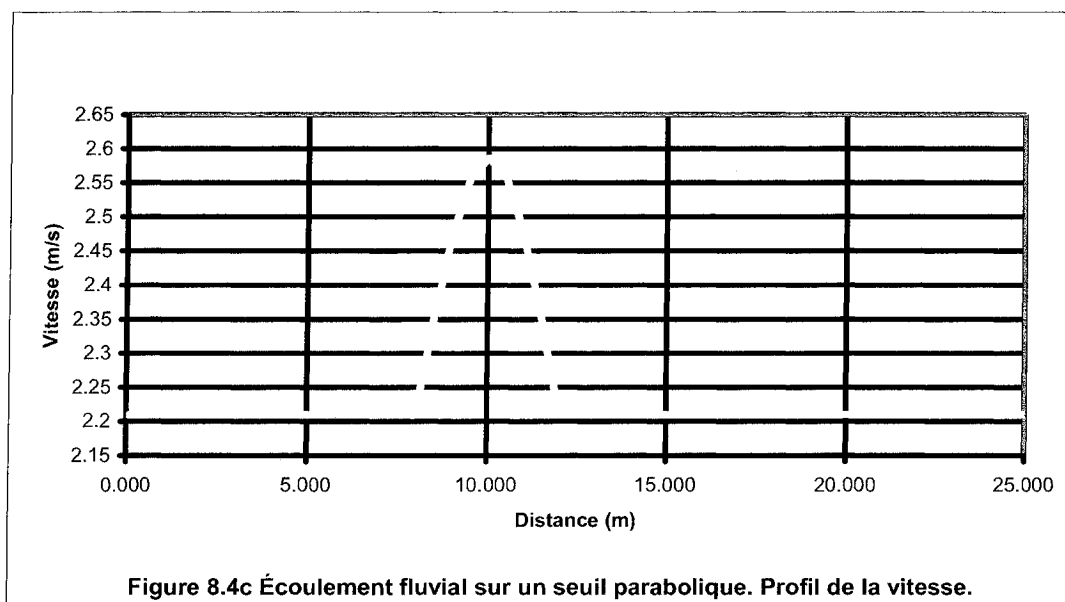
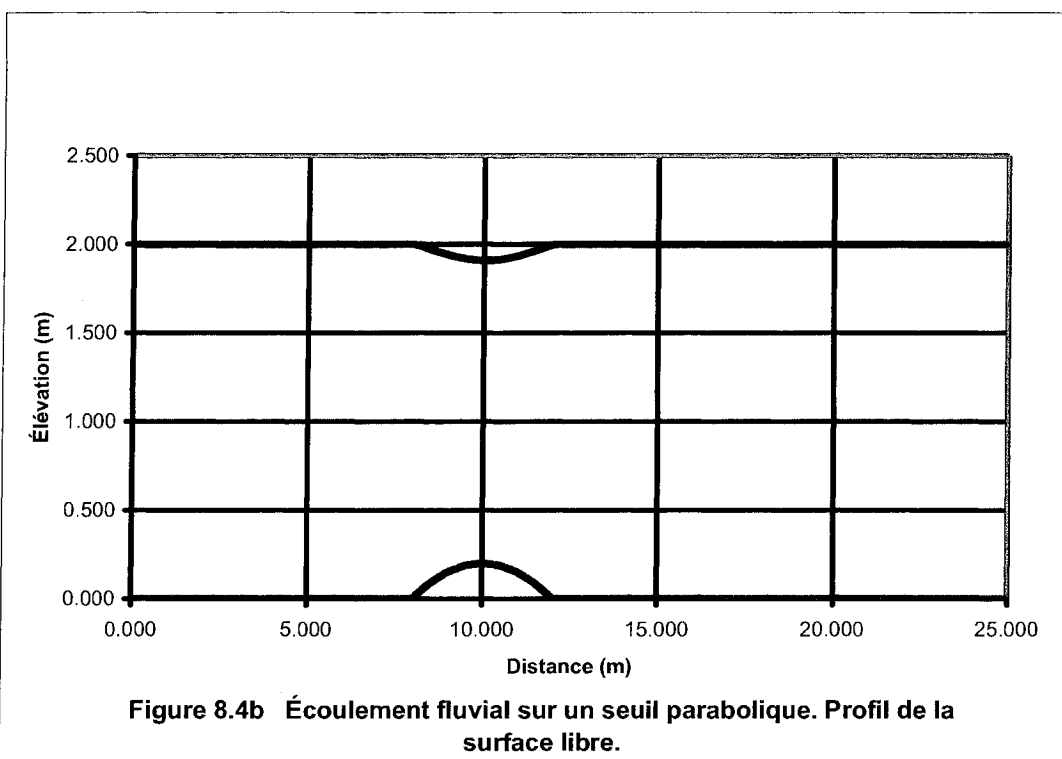


Figure 8.4a Écoulement fluvial sur un seuil parabolique. Maillage et bathymétrie du domaine.



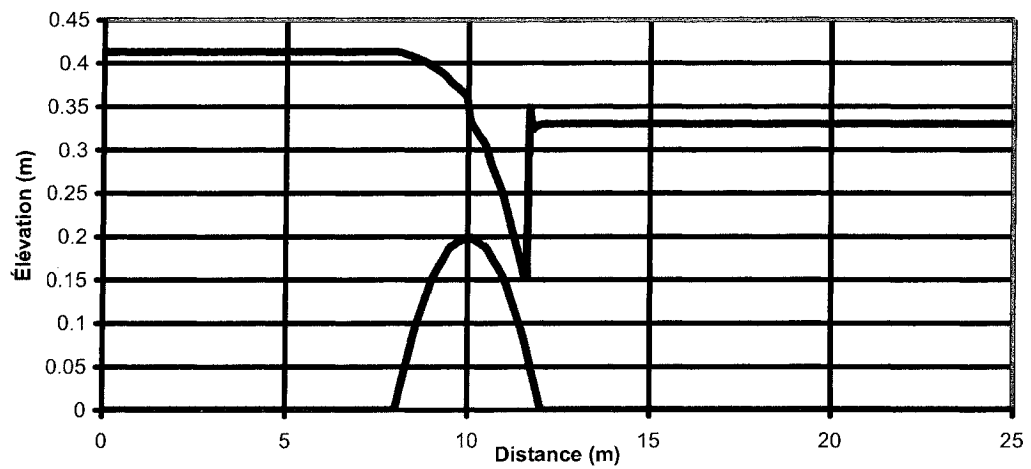


Figure 8.5a Ressaut dans un canal avec seuil parabolique.
Profil de la surface libre.

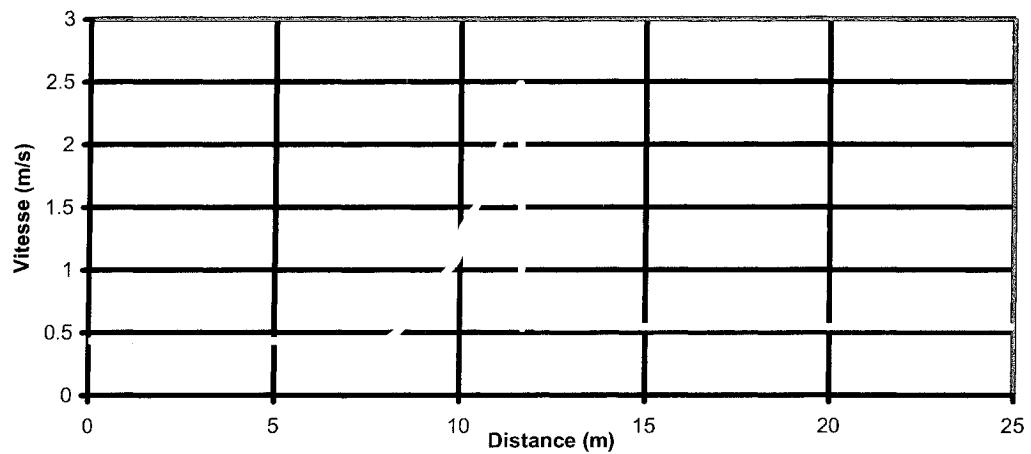


Figure 8.5b Ressaut dans un canal avec seuil parabolique.
Profil de la vitesse moyenne.

8.7 Mouvement oscillatoire d'une vague sur plage en pente

Ce cas correspond au mouvement d'approche d'une plage ou d'un talus de pente négative par une vague. Le profil de surface libre de la vague d'approche est idéalisé par une formule analytique qui a permis à Carrier et Greenspan (1958) de proposer une solution analytique. Pour un état initial avec vitesse nulle et surface libre non horizontale, la vague aborde une plage de pente adverse constante sans friction puis, effectue un mouvement oscillatoire puis se stabilise au niveau de la mer.

Pour simuler ce cas dont la description peut être réduite à un phénomène unidimensionnel dans la direction de propagation de la vague, un canal long de 7000 m et large de 10 m a été utilisé pour la représentation. Le maillage utilisé compte 3000 nœuds. Le schéma SRD22 a été utilisé pour effectuer cette simulation.

La figure 6.a montre l'état initial de la surface libre. Les figures 8.6b à 8.6c présentent Le profil de la surface libre à différents instants et permet de visualiser le mouvement oscillatoire de la vague sur le talus.

Par cet exemple, le schéma SRD22 démontre qu'il peut simuler adéquatement les actions de mouillage et séchage qui se produisent dans les zones de plages ou de berges.

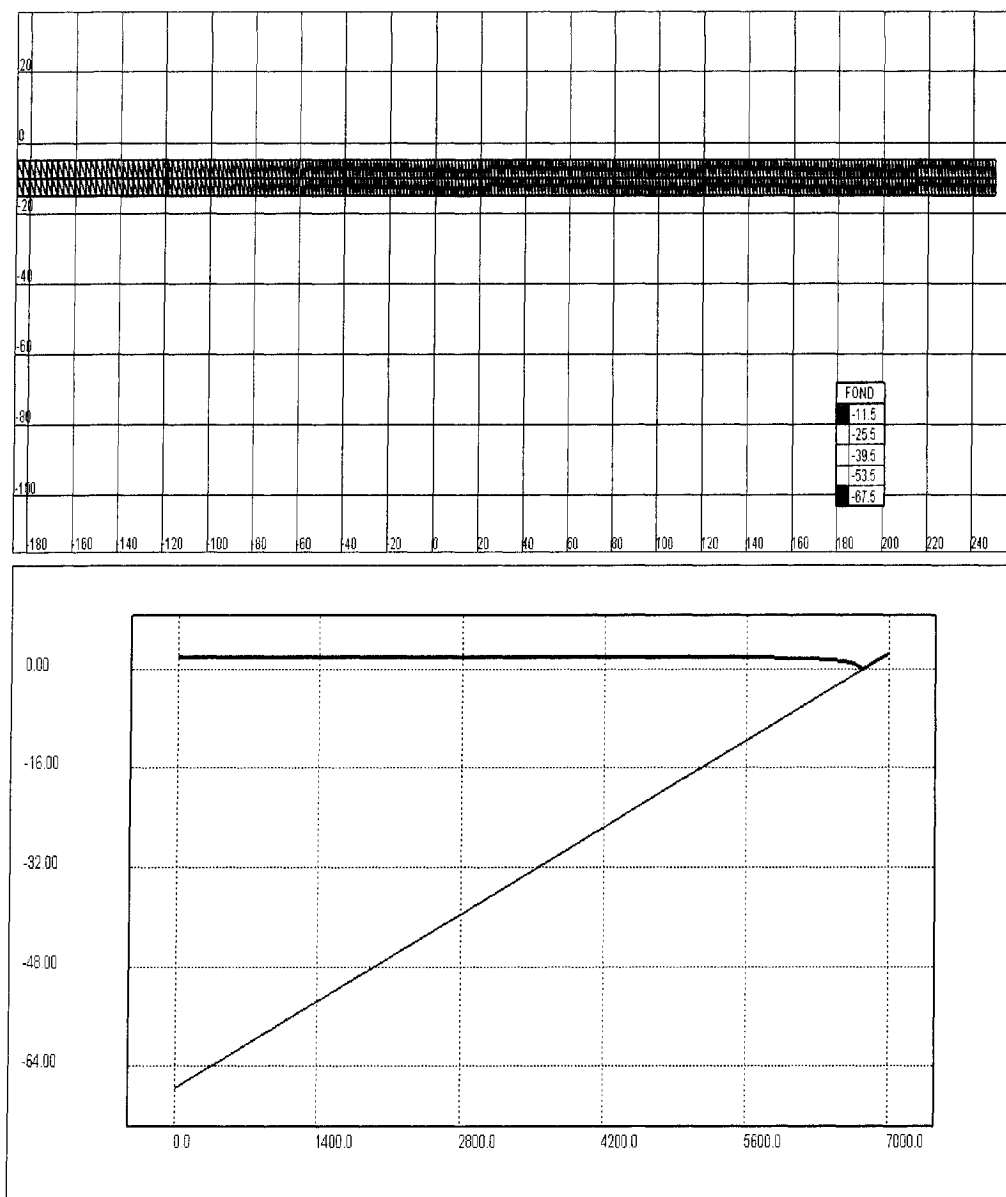


Figure 8.6a Mouvement oscillatoire de vague sur un talus de plage. Profil du fond du et surface libre à l'état initial.

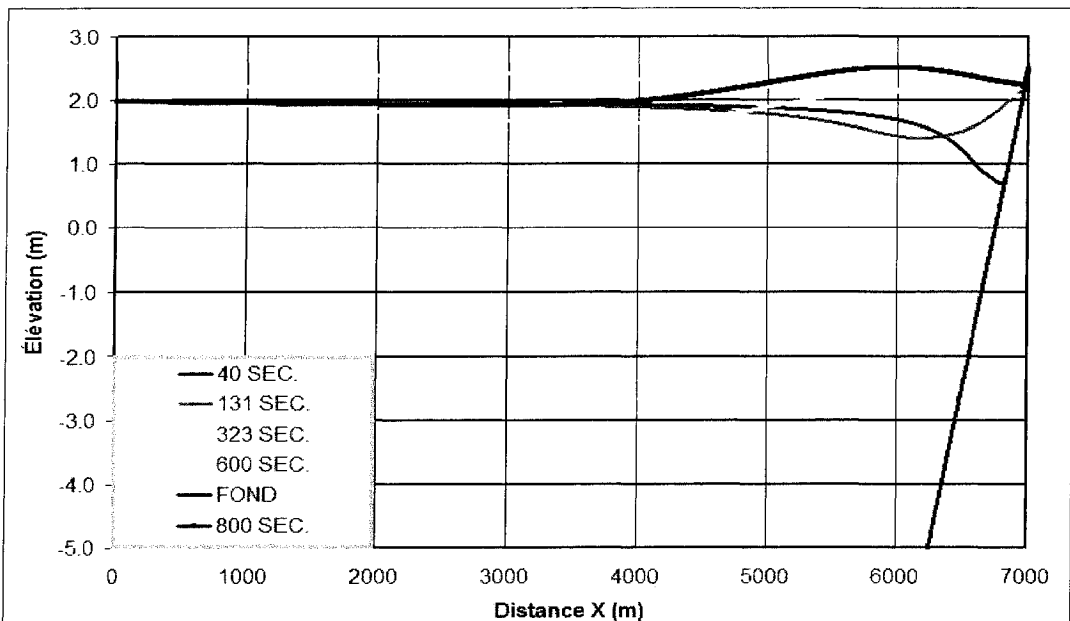


Figure 8.6b: Mouvement oscillatoire de vague sur un talus de plage. Évolution du profil de la surface libre.

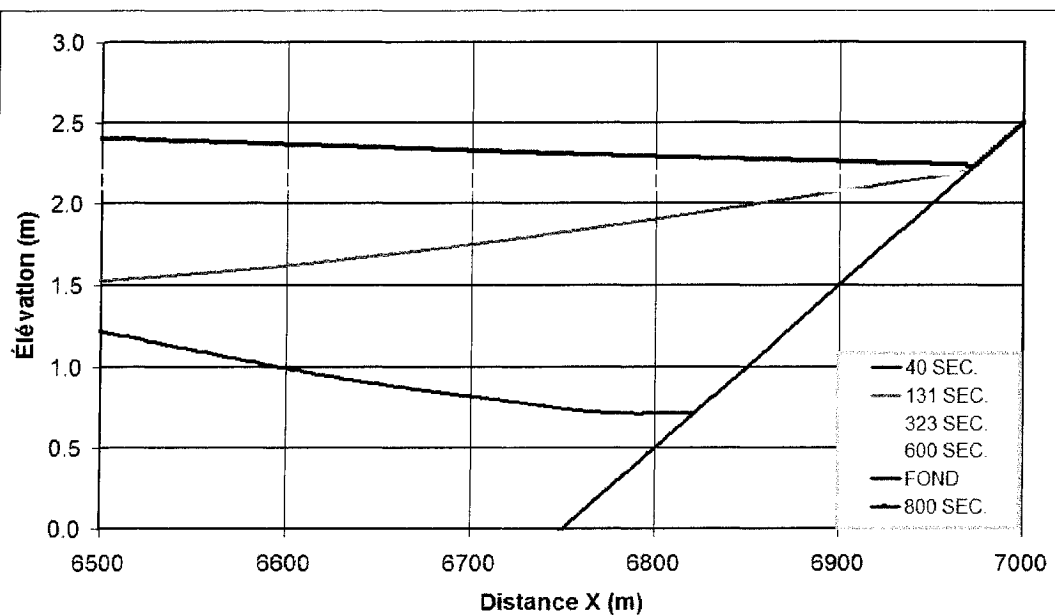


Figure 8.6c: Mouvement oscillatoire de vague sur un talus de plage. Évolution du profil de la surface libre. Agrandissement.

8.8 Modèle expérimental de la vallée de Toce

Ce cas constitue un des cas tests proposé dans le cadre du groupe d'études CADAM (Frazao & Testa 1999). Une inondation est reproduite sur un modèle à l'échelle 1/100 de la vallée alpine de Toce en Italie. Un réservoir amont simulant l'apport de crue a servi à alimenter la vallée qui comporte, en plus du lit de la rivière, un barrage et deux ponts. Quelques bâtiments représentant des habitations ont été également représentés. La figure 8.7a montre une photographie du modèle. Un des deux ponts intégrés au modèle est présenté sur la photographie de la figure 8.7b. La photographie de la figure 8.7c présente les bâtiments intégrés au modèle.

Trente-deux sondes de niveau ont été installées à divers endroits sur le modèle. Les sondes P1, P4, S6S, S6D, S8D, P9, P12, P18, P21 et P26, dont la localisation est indiquée sur la figure 8.7d, ont été retenus pour la comparaison avec les résultats de simulation bidimensionnelle.

La figure 8.7e présente l'hydrogramme et les limnigrammes à l'entrée du modèle. Le maillage triangulaire utilisé pour la représentation du domaine et présenté à la figure 8.7f comporte 7010 nœuds et 13 457 triangles.

Le schéma SRD22 a été utilisé pour simuler ce cas de l'inondation de vallée de Toce avec un domaine initialement sec et un coefficient de Manning de 0,0162. Les ponts, ni les bâtiments présents dans la vallée n'ont été représentés.

La figure 8.7g présente les limnigrammes simulés tirés à la position des cinq premières sondes, tandis que les limnigrammes de la figure 8.7h correspondent aux cinq dernières sondes.

Le tableau 8.1 présente une comparaison des mesures aux valeurs simulées du niveau maximal et du temps de propagation. L'écart maximal pour le niveau est de 4 centimètres, tandis que l'écart maximal pour le temps de propagation est 6 secondes.

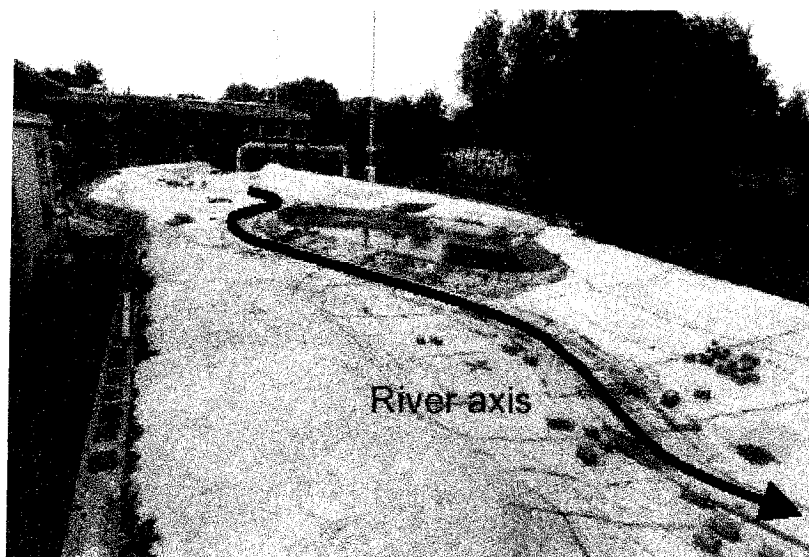


Figure 8.7a Inondation de la vallée de Toce. Photographie du modèle physique.

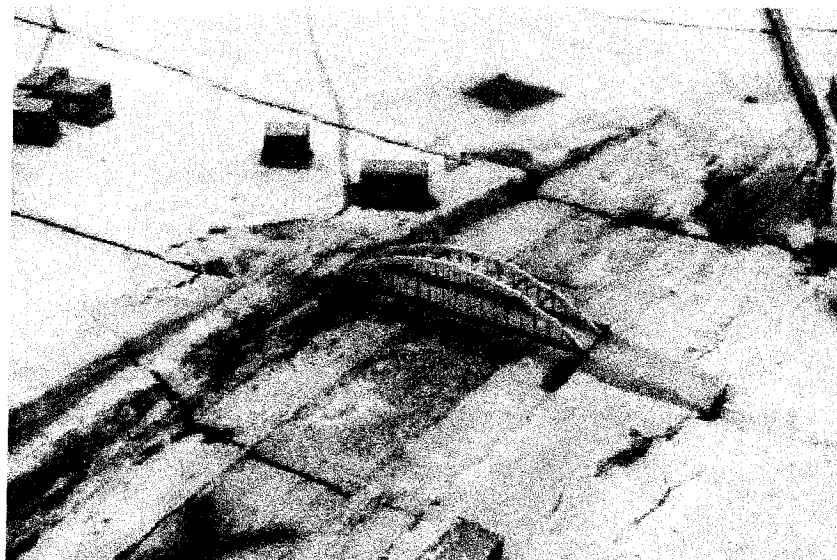


Figure 8.7b Inondation de la vallée de Toce. Photographie d'un des deux ponts intégrés au modèle.

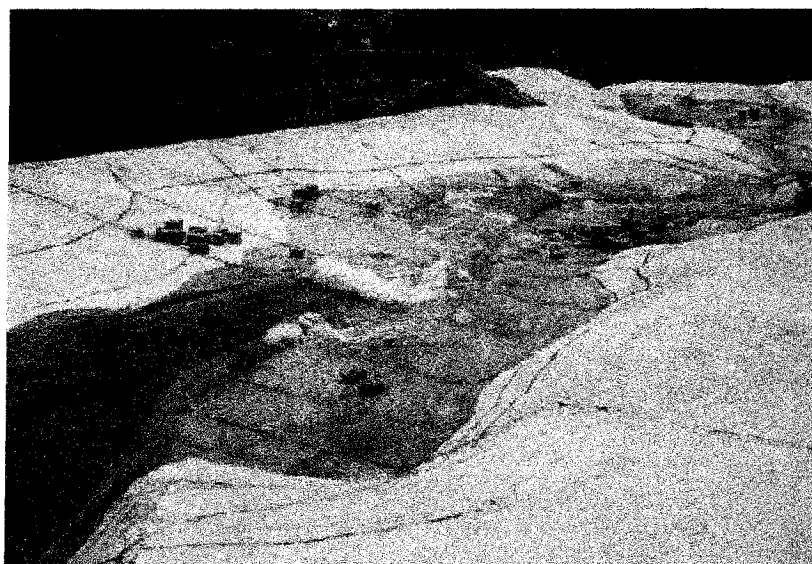


Figure 8.7c Inondation de la vallée de Toce. Bâtiments intégrés au modèle.

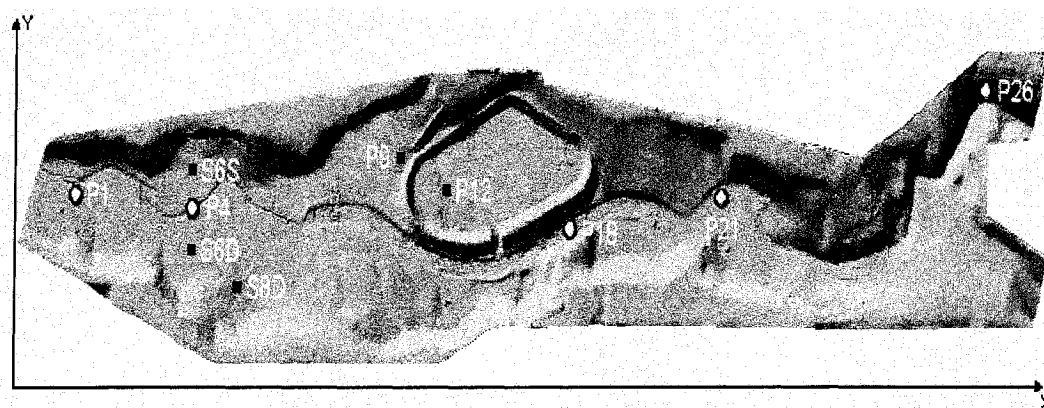


Figure 8.7d Inondation de la vallée de Toce. Localisation des sondes de niveau.

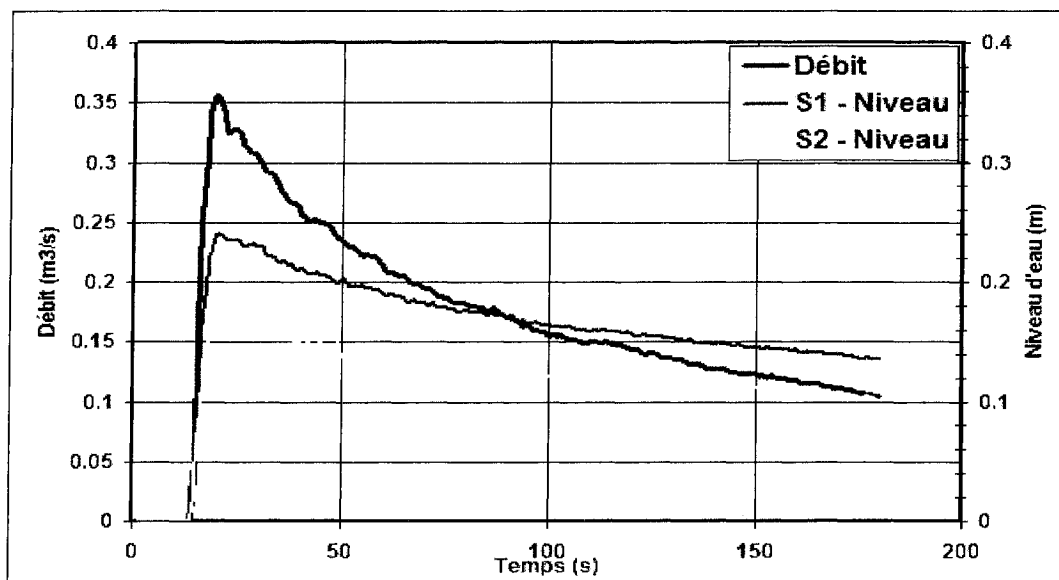


Figure 8.7f Inondation de la vallée de Toce. Hydrogramme et limnogrammes à l'amont du modèle.

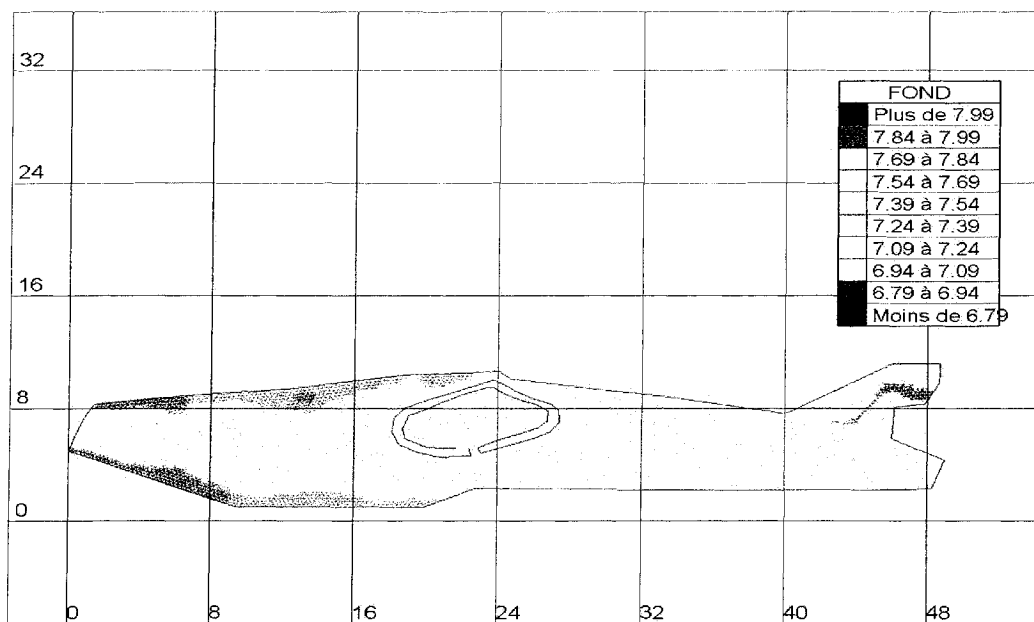


Figure 8.7e Inondation de la vallée de Toce. Maillage triangulaire du domaine.

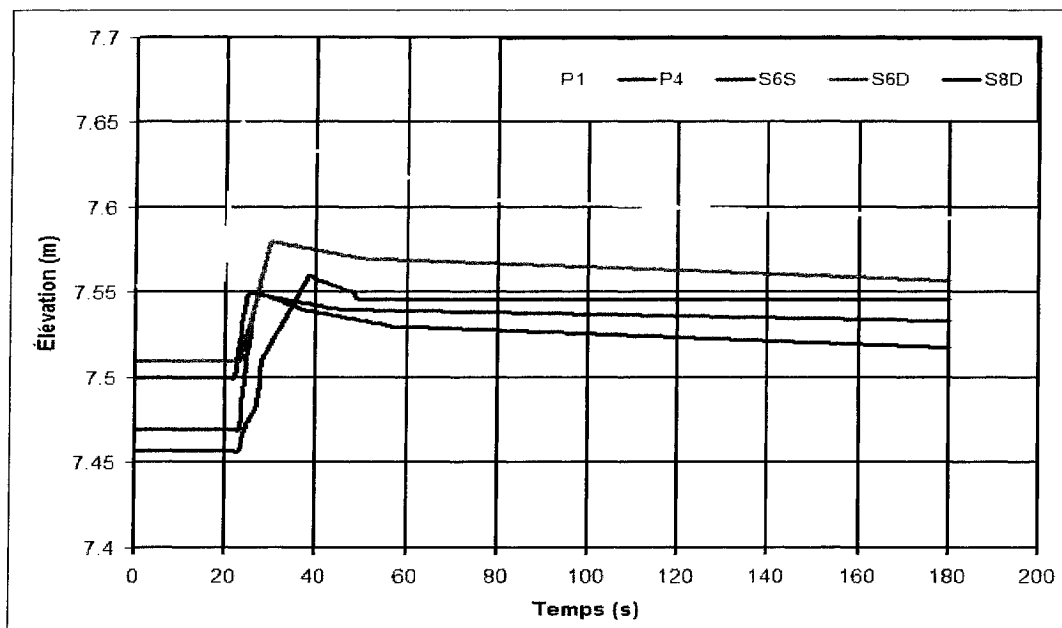


Figure 8.7g Inondation de la vallée de Toce. Limnigrammes simulés des sondes P1, P4, S6S, S6D et S8D.

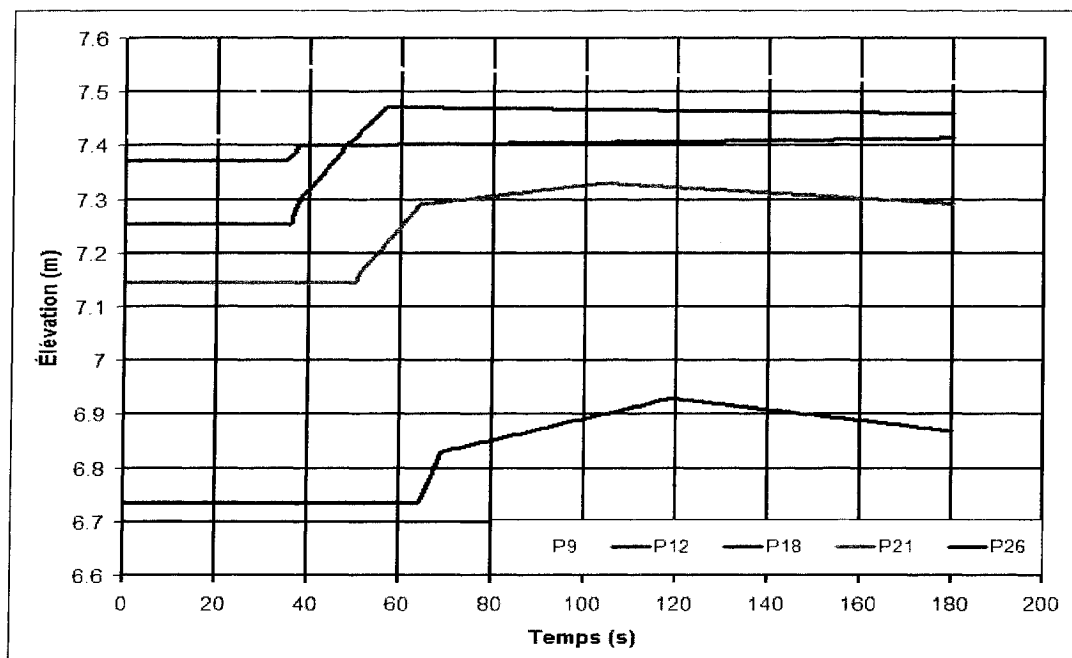


Figure 8.7g Inondation de la vallée de Toce. Limnigrammes simulés des sondes P9, P12, P18, P21 et P26.

Tableau 8.1 Inondation de la vallée de Toce. Comparaisons du niveau maximal et du temps de propagation de l'onde.

Sonde	Niveau maximal atteint (m)		Temps de propagation de l'onde (s)	
	Mesuré	Calculé	Mesuré	Calculé
P1	7,68	7,65	18	19
P4	7,59	7,55	22	23
S6S	7,54	7,55	20	22
S6D	7,60	7,58	22	23
S8D	7,59	7,56	22	23
P9	7,57	7,55	28	30
P12	7,41	7,40	35	39
P18	7,45	7,47	35	40
P21	7,33	7,35	45	51
P26	6,97	6,93	60	65

8.9 Rupture du barrage principal de LG-4

Le réservoir LG-4 constitue le réservoir de tête du complexe de La Grande Rivière située au Nord du Québec. L'aménagement LG-4 possède une centrale dont la puissance installée s'élève à près de 2650 mégawatts. Le réservoir LG-4 a une capacité d'emmagasinement de 20 000 hm³ sur une superficie de près de 800 km². Ce réservoir est fermé par un barrage principal et une dizaine de digues.

Dans le cadre des études de sécurité de ces ouvrages, Hydro-Québec étudie plusieurs scénarios catastrophiques de rupture. Le scénario le plus catastrophique en terme de d'inondation potentielle à l'aval, sur l'aménagement LG-4, correspond à la rupture du barrage principal. C'est ce scénario qui a été reproduit dans cette section.

La figure 8.8a présente le maillage et la bathymétrie du domaine qui couvre le réservoir LG-4 ainsi qu'une portion longue de près de 75 km de la rivière La Grande située à l'aval du barrage LG-4.

La figure 8.8b présente le profil transversal de la brèche qui a été envisagée en considérant les caractéristiques physiques de l'ouvrage qui est un barrage en remblai et la géologie du site.

La figure 8.8c présente l'hydrogramme à la brèche, obtenu avec le schéma SRD22, en superposition avec l'hydrogramme correspondant obtenu avec Telemac2D qui est un modèle numérique commercial utilisant la technique d'éléments finis pour résoudre les équations de Saint-Venant en deux dimensions spatiales horizontales (Hervouet 2000 ou Hervouet 2003). La figure 8.8d présente les limites d'inondation maximales à l'aval obtenues avec les deux modèles.

Les différences qui sont observées sont relativement faibles tant pour les hydrogrammes que pour les limites d'inondation. Il n'est pas aisé d'analyser plus en profondeur ces différences du fait que les deux solutions ont été obtenues à partir de

conditions initiales différentes. Néanmoins, le test démontre la capacité du schéma SRD22 à effectuer les simulations de rupture d'ouvrage de grande taille, la vidange du réservoir amont, ainsi que les inondations à l'aval.

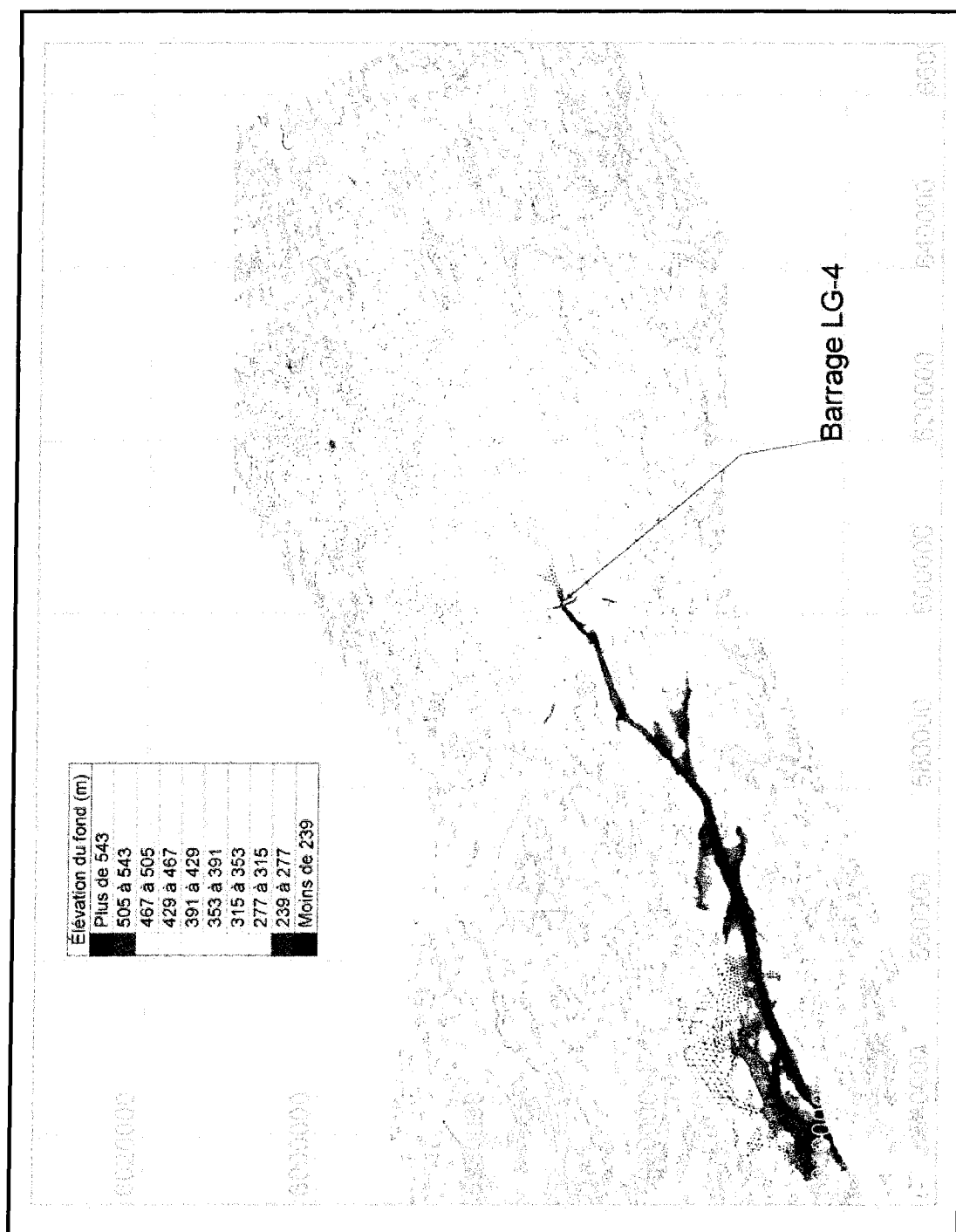


Figure 8.8a Rupture du barrage de LG-4. Maillage et topographie du domaine.

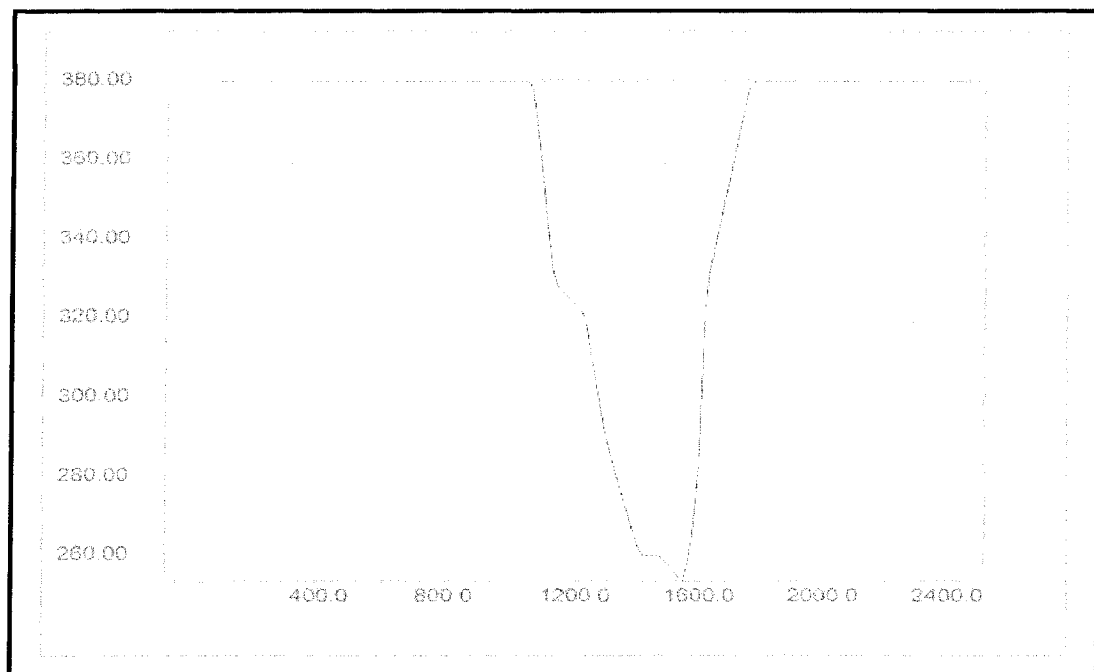


Figure 8.8b Rupture du barrage de LG-4. Profil de la brèche dans le barrage principal.

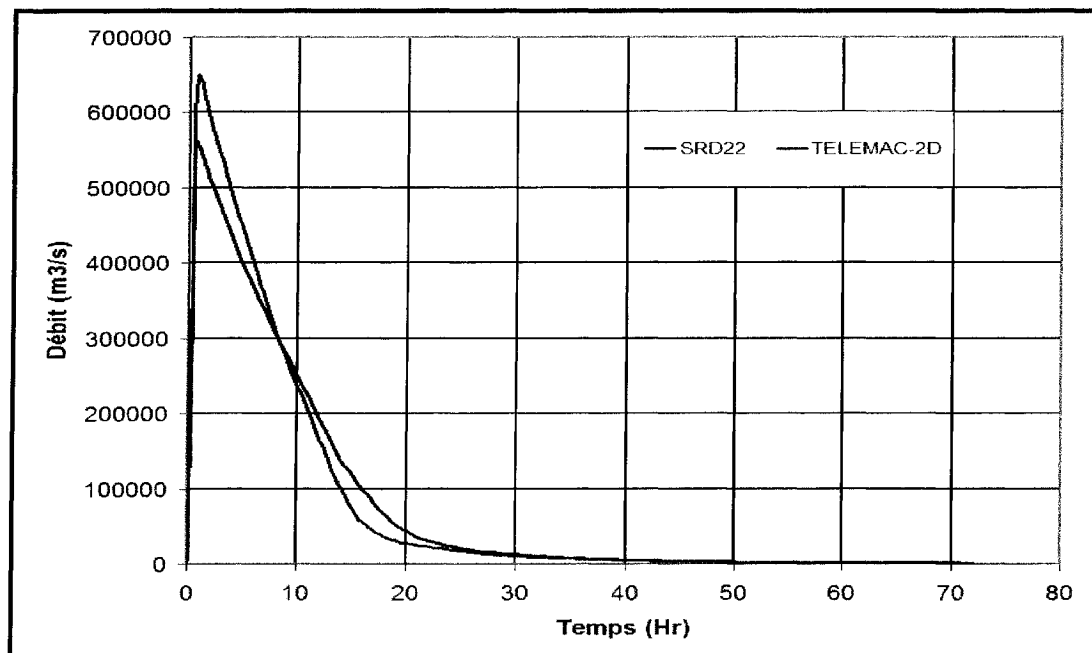


Figure 8.8c Rupture du barrage de LG-4. Hydrogrammes à la brèche.

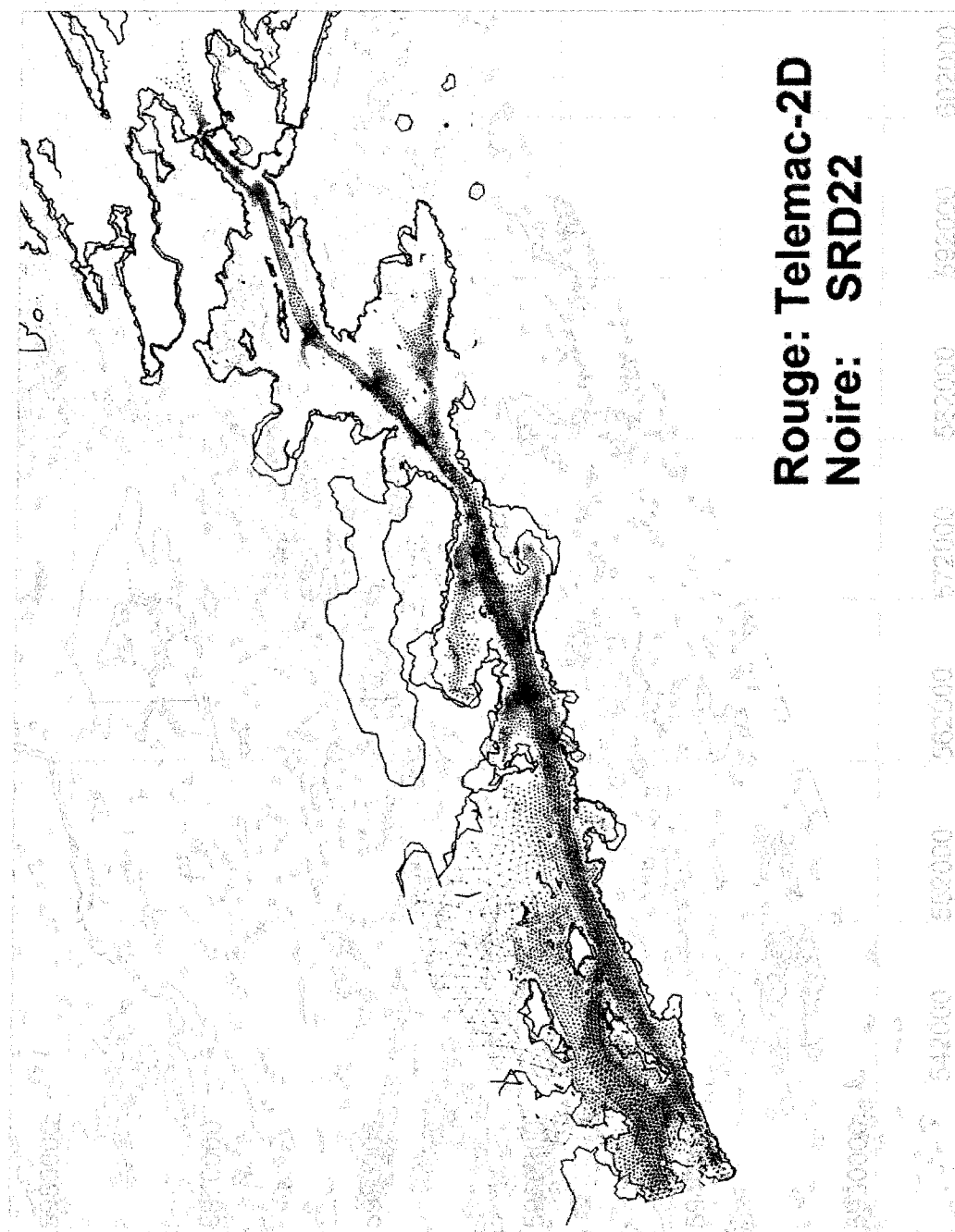


Figure 8.8d Rupture du barrage de LG-4. Limites d'inondation à l'aval du barrage.

CHAPITRE 9 CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

9.1 Conclusions

La présente thèse présente une étude des méthodes numériques de la classe des schémas de Riemann dans l'optique de développer un code de type industriel, c'est-à-dire un code qui puisse être utilisé de manière régulière et satisfaisante pour des analyses d'ingénierie hydrauliques. La catégorie des problèmes envisagés correspond à celle des phénomènes transitoires d'inondation du type crue, rupture de barrage ou de digue, Tsunamis etc. Ce sont des phénomènes où le caractère non linéaire des équations de Saint-Venant se manifeste sous la forme de ressaut mobiles et où le défi de la simulation des zones d'inondation initialement sèche, ou l'inverse, l'assèchement de zones préalablement recouvertes, est souvent présent. La classe des schémas de Riemann est particulièrement adaptée à ce type de phénomène transitoire et de nature hyperbolique.

Toutefois les propositions publiées, depuis la dernière décennie, transférant des acquis de cette classe de schémas du domaine de la dynamique des gaz vers celui de l'hydraulique de surface ont rarement dépassé le stade d'outil académique appliqués à des écoulements dans des géométries régulières. À notre connaissance, les codes commerciaux, pour l'hydraulique de surface, basés sur les schémas de Riemann sont peu nombreux. TASE (Zhang, Kahawita, Shen et Li 1992) a été un pionnier avec un code bidimensionnel, sur DOS, qui offrait une interface de prétraitement de données et de post-traitement des résultats. La cessation de mise à jour de cet outil pour l'adapter aux systèmes d'exploitation actuels a limité son utilisation. En une dimension, les codes Mascaret (Goutal & Maurel 1998) et Rubar3 (Paquier 1998) utilisent également le schéma de Roe, mais semblent souffrir d'un déficit de robustesse, lors d'utilisation sur des rivières naturelles, qui nécessite l'ajout de sections intermédiaires très rapprochées.

L'étude présentée a identifié la forme des équations de base comme principale source du déficit de robustesse des schémas de Riemann jusqu'ici proposés pour l'hydraulique. Les transformations des équations de base pour faire apparaître une forme divergente, propice à l'utilisation des flux de surfaces approximées par les schémas de Riemann, favorisent également l'apparition de termes sources qui dépendent surtout des variables géométriques. L'ordre de grandeur de ces variables géométriques ou de leurs dérivées est quelque fois beaucoup plus considérable que l'ordre de grandeur des variables de l'écoulement. Cela peut expliquer parfois que l'application en une dimension des schémas de Riemann, proposés dans la littérature, à des rivières naturelles aux caractéristiques géométriques généralement irrégulières nécessite l'utilisation d'un pas de discrétisation spatiale aussi faible que 10,0 m et même parfois moins. Cette restriction sur le pas de discrétisation spatiale entraîne également, en vertu de la contrainte de stabilité de Courant, une contrainte sur le pas de temps. La conjugaison de ces deux contraintes pour des rivières longues de quelques centaines de kilomètres et pour des épisodes de crues pouvant s'étaler sur plusieurs jours, voire semaine, produit des temps de simulation prohibitifs même pour les ordinateurs les plus performants. Le schéma proposé au cours de la présente étude suggère l'utilisation de la forme de base des équations de Saint-Venant. L'éclatement du terme de gravité en terme source de géométrie est évité. Une proposition d'approximation locale est faite pour traiter ce terme sous forme de flux d'interface, et pouvoir utiliser le schéma classique de Roe sous une forme légèrement, mais surtout adéquatement, modifiée pour reproduire le comportement réel des écoulements les plus variés.

Une autre source d'instabilité des schémas de Riemann dans les écoulements réels semble être reliée à la forme des équations utilisant le débit en une dimension, et les débits spécifiques en deux dimensions en tant variables dépendantes du système d'équations à résoudre. En une dimension, le système à conservation de charge qui utilise la vitesse à la place du débit a exhibé de beaucoup de robustesse lors de la simulation sur des rivières naturelles. Toutefois, il est connu, et il a été vérifié notamment sur le test 4 en une dimension, que le système à conservation de charge

prédit des ressauts erronés tant sur la hauteur, que sur la position et parfois sur la vitesse, de ces discontinuités.

Pour les raisons évoquées dans les deux paragraphes précédents, le schéma recommandée à l'issue de la présente thèse utilise les systèmes de base avec débit, en une dimension et débits spécifiques en deux dimensions, avec une formule de flux de type Roe particulièrement adapté. Aux étapes classiques de la technique des volumes finis appliquée aux schémas de Riemann, est ajoutée une étape de transformation par opération matricielle du différentiel de débit vers le différentiel de vitesse. Il en ressort que le schéma global résout plutôt les équations pour la vitesse à la place des débits, même si à une étape intermédiaire les équations pour les débits sont résolues au moyen d'un schéma de Riemann.

Le schéma proposé a été soumis, dans ses versions unidimensionnelle et bidimensionnelle, à une série de tests de validation comprenant aussi bien des tests académiques classiques utilisés dans la littérature, que des cas réels correspondant à des passages de crue ou d'onde de rupture sur des rivières longues de centaines de kilomètres aux parcours très irréguliers. La performance du schéma proposé s'avère comparable à celles des schémas de Riemann publiés en ce qui concerne les cas tests académiques qui utilisent des géométries régulières. Toutefois, le schéma proposé se distingue lors du passage sur des rivières naturelles. Sa grande robustesse permet d'utiliser, par exemple en une dimension, des sections de profil en travers espacés de plusieurs centaines de mètres, voire du kilomètre, sans besoin de créer des sections intermédiaires. Ce comportement permet d'utiliser des pas de temps de grandeur suffisamment élevée (de l'ordre de 10 secondes) pour que la simulation de crues de plusieurs jours s'effectue régulièrement en moins d'une heure sur un ordinateur du type Pentium 4.

Le principal avantage d'un tel schéma est qu'il permet de développer un code qui permet de réaliser une simulation en un temps limité. Le code ainsi peut véritablement être utilisé par l'ingénieur comme un outil de calcul lui permettant d'effectuer le nombre de scénarios qu'il juge nécessaire et de consacrer l'essentiel de son temps à l'analyse

des solutions et non aux manœuvres de stabilisation du code pour obtenir une solution.

9.2 Recommandations

La première recommandation qui résulte de la présente recherche est d'effectuer une analyse mathématique plus approfondie du schéma proposé dans le but d'expliquer sur la base d'arguments mathématiques plus rigoureux le processus de stabilisation qui semble résulter de la transformation matricielle de débit en vitesse. Les schémas numériques utilisant les formes des équations de Saint-Venant, basées la vitesse, semblent plus robustes que les mêmes équations basées sur le débit. Il est également possible que ce comportement soit vérifié pour les équations plus générales de Navier-Stokes. Une étude de cet aspect pourrait apporter un peu d'éclairage à la question complexe de la stabilité non linéaire de cette classe de schémas ou plus directement celle des systèmes d'équations hyperboliques.

La seconde recommandation est la poursuite du développement du code en élevant l'ordre d'approximation du schéma de Riemann de base. Il est bien connu qu'en portant l'ordre d'approximation des fonctions reconstruites, localement autour des interfaces entre les volumes de contrôle, à une ordre plus élevé (linéaire voire parabolique), il est possible d'améliorer la précision du schéma global, notamment en terme d'erreur d'amplitude et d'erreur de phase. L'étude de Paquier (1995) propose les couples de variables les plus appropriés pour effectuer la reconstruction de fonction d'ordre supérieur à zéro. La majorité des travaux dans cette direction utilise la démarche MUSCL proposée par van Leer (1979), et pour laquelle les principales étapes, de la démarche de volume finis proposée, sont inchangées. Seule l'étape de reconstruction local du profil se voit modifiée pour l'approximation locale des fonctions sélectionnées à l'ordre voulu.

La troisième recommandation concerne les phénomènes physiques dont la simulation devrait être facilitée par les schémas proposés. En réalité, une rupture de barrage ou une inondation de crue transporte sur son passage de nombreux sédiments et débris. Pour que la simulation de tels événements reproduise fidèlement la réalité, il est

essentiel que le transport solide soit intégré à la simulation en interaction directe avec la simulation hydrodynamique.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ALCRUDO F., GARCIA-NAVARRO P., SAVIRON, J. M. 1991. «Flux difference splitting for 1D open channel flow equations». *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **13**, 85-95.
- AUBIN, F, TCHAMEN, G.W., FORTIN, M. 2003. *Rivière saint-Marguerite. Étude de bris du barrage Denis-Perron (SM-3)*. Montréal : Hydro-Québec, Barrages et Ouvrages Civils. 200p. RA-0721-05.
- AUDUSSE, E., BRISTEAU, M-O. 2005. «A well-balanced positivity preserving second-order scheme for shallow water flows on unstructured meshes». *Journal of Computational Physics*. 206. 311-333.
- BERMUDEZ, A., VASQUEZ, M.E. 1994. «Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms», *Computers and fluids*, 23:8, 1049-1071.
- BURGUETE, J., GARCIA-NAVARRO P. 2001. «Efficient construction of high-resolution TVD conservative schemes for equations with source terms: application to shallow water flows». *International Journal For Numerical Methods in Fluids*. 37. 209-248.
- CARRIER, G.F., & GREENSPAN, H.P. 1958. «Water waves of finite amplitude on a sloping beach». *Journal of Fluid Mechanics*. 4. 97-109.
- CUNGE, J. A., HOLLY, F. M., VERWEY, A. 1980. *Practical Aspects of River Computational Hydraulics*. Pitman. 200 p.
- DRESSLER, R.F. 1952. «Hydraulic resistance effect upon the dam-break functions». *Journal of Research of the National Bureau of Standards*. 49:3. 217-225.
- DRESSLER, R. F., 1958. «Unsteady non-linear waves in sloping channels». *Proceedings of the royal society. London, Series A..* 247. 186-198.

- FRAZAO, S.S., TESTA, G. 1999a. «3rd CADAM meeting. The Toce River test case: numerical results analysis», rencontre du groupe CADAM (*European Union Concerted Action on Dambreak Modelling*) à Milan. [En ligne], à l'adresse <http://www.hrwallingford.co.uk/projects/CADAM/CADAM/>. (Page consultée le 21 Avril 2005).
- FREAD, D. L., LEWIS, J. M. 1998. *NWS FLDWAV Model. Theoretical description. User manual*. Sylver Spring, Maryland: Hydrologic Research Laboratory, National Weather Service (NWS). 341 p.
- GARCIA, R., KAHAWITA, R. 1986. «Numerical Solution of the St-Venant equations with the MacCormack finite-difference Scheme». *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, 6. 259-274.
- GLAISTER, P. 1988. «Approximate Riemann Solution of the Shallow-Water equations». *Journal of Hydraulic Research*. 26:3. 293-306.
- GODUNOV, S.K. 1959. «A difference scheme for numerical computation of discontinuous solutions of equations of fluid dynamics». *Math. Sbornik*. 47:3. 271-306.
- GODUNOV, S.K. 1979. *Résolution numérique des problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz*. Moscou: Éditions Mir.
- GOUTAL, N., MAUREL, F. 1997a. «Description of the test cases», *Proceedings of the 2nd workshop on Dam-Break wave simulation*. Chatou/Paris : EDF-DER. 7-28.
- GOUTAL, N., MAUREL, F. 1997b. *Note de principe de la version 4.1 du code MASCARET*. Chatou/Paris : EDF-DER. 59 p.
- GOUTAL, N., 1999a. «The Malpasset dam failure. An overview and test case definition». Rencontre du groupe CADAM (*European Union Concerted Action on Dambreak Modelling*) à Zaragoza. [En ligne] à l'adresse <http://www.hrwallingford.co.uk/projects/CADAM/CADAM/>. (Page consultée le 21 Avril 2005).

- GOUTAL, N., 1999b. «Presentation of 1D and 2D simulations of Malpasset dam break wave propagation». Rencontre du groupe CADAM (*European Union Concerted Action on Dambreak Modelling*) à Zaragoza. [En ligne] à l'adresse <http://www.hrwallingford.co.uk/projects/CADAM/CADAM/>. (Page consultée le 21 Avril 2005).
- GOUTAL, N., MAUREL, F. 2002. «A finite volume solver for 1D shallow-water equations applied to an actual river». *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 38, 1-19.
- GUCKENHEIMER, J., 1975, «Shocks and rarefactions in two space dimensions», *Arch. Rational Mech. Anal.* 59, p.281-291.
- HENDERSON, F.M., 1966, *Open Channel Flow*. New York: MacMillan Series In Civil Engineering, 522 p.
- HERVOUET, J.M. 2000, «A high resolution 2-D dam-break model using parallelization». Special issue of *Hydrological Processes*: The Telemac Modelling System. 14(13). 211-230.
- HERVOUET, J.M. 2003, *Hydrodynamique des écoulements à surface libre. Modélisation numérique avec la méthode des éléments finis*. Paris : Presses de l'école nationale des ponts et chaussées. 311p.
- HIRSCH, C., 1988. *Numerical computation of internal and external flows*. First edition. Chichester: Wiley. 515 pages. Volume 1.
- HIRSCH, C., 1990. *Numerical computation of internal and external flows*. First edition. Chichester: Wiley. 691 pages. Volume 2.
- HUGHES, T. J. R., FRANCA, L. P., MALLET, M., 1986a. «A new finite Element formulation for computational fluid dynamics. Part I». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 54. 223-234.
- HUGHES, T. J. R., FRANCA, L. P., MALLET, M., 1986b. «A new finite Element formulation for computational fluid dynamics. Part II». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 54. 341-355.

- HUGHES, T. J. R., FRANCA, L. P., MALLET, M., 1986c. «A new finite Element formulation for computational fluid dynamics. Part III». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 54. 341-305-328.
- LINDQUIST, W. B., 1986, «The scalar Riemann problem in two spatial dimensions: Piecewise smoothness of solutions and its breakdown». *SIAM J. MATH. ANAL.* 17:5. 1178-1197.
- MICHALEK, D. J. 1992. *An Investigation of Genuinely Multidimensionnal Schemes for the Euler Equations*. 95 p. Thèse de Doctorat, Université du Texas a Arlington.
- OSHER, S. 1982. «Upwind Differences Schemes For Hyperbolic Conservation Systems of Conservation Laws». *Mathematics of Computation*. 38 :158. 339-374.
- PAQUIER, A. 1995. *Modélisation et simulation de la propagation de l'onde de rupture de barrage*. 200 p. Thèse de l'université Jean-Monnet de Saint-Étienne.
- PAQUIER, A. 1998. «1-D and 2-D models for simulating Dam-Break waves and natural floods». Rencontre du groupe CADAM (*European Union Concerted Action on Dambreak Modelling*) à Wallingford. [En ligne] À l'adresse <http://www.hrwallingford.co.uk/projects/CADAM/CADAM/>. (page consultée le 21 Avril 2005).
- PAQUIER, A. 1999. «Computations performed by Cemagref on the Malpasset test case». Rencontre du groupe CADAM (*European Union Concerted Action on Dambreak Modelling*) à Zaragoza. [En ligne] À l'adresse <http://www.hrwallingford.co.uk/projects/CADAM/CADAM/>. (Page consultée le 21 Avril 2005).
- PETITJEAN, A. 1998. «Some words of history ...». Rencontre du groupe CADAM (*European Union Concerted Action on Dambreak Modelling*) à Wallingford. [<http://www.hrwallingford.co.uk/projects/CADAM/CADAM/>]. (Page consultée le 21 Avril 2005).
- ROACHE, P. J., 1972. *Computational Fluid Dynamics*. First edition. Alberduque: Hermosa. 446 pages.

- ROE, P.L. 1981. «Approximate Riemann Solver, Parameter Vectors and Difference Schemes». *Journal of Computational Physics*. **43:2**. 357-372.
- RUMSEY, C. L. 1991. *Development of A Grid-Independent Approximate Riemann Solver*. 200 p. Thèse de Doctorat, University of Michigan.
- SMOLLER, J. 1983. *Equations of Reaction-Diffusion and Shock waves*. Springer Verlag. 450 pages.
- SCHNEIDER, G. E., RAW, M. J. 1987. «Control Volume Finite-Element Method for Heat Transfer and Fluid Flow using colocated variables -1. Computational procedure». *Numerical heat Transfer*. 11. 363-390.
- STELLING, G. S., KERNKAMP, H.W.J., LAGUZZI, M. M. 1998. «A powerful tool for inundation assessment based upon a positive flow simulation». *Proceedings of the Hydroinformatic conference*. 449-455.
- STELLING, G. S., DUINMEIJER, S.P.A. 2003. «A staggered conservative scheme for every Froude number in rapidly varied shallow water flows», *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 43, 1329-1354.
- STOKER, J. J. 1959. *Water Waves*. New-York: Interscience Publising Co. 350 p.
- TCHAMEN, G. W. 1992. *Une étude expérimentale de l'onde de rupture de barrage*. 155 p. Mémoire de maîtrise en génie civil, École Polytechnique de Montréal.
- TCHAMEN, G. W., KAHAWITA, R., TESSIER, J-C. 1994. «On the Construction of a Numerical Model for the solution of the Shallow Water Wave Equations on a general unstructured mesh using Riemann Solvers». *Proceedings of the Hydroinformatic Conference*. 679-686.
- TCHAMEN, G. W., KAHAWITA, R. 1994. «The numerical simulation of wetting and drying areas using Riemann solvers». *Conference on Modelling of flood propagation over initially dry areas*. 127-140.
- TCHAMEN, G. W., KAHAWITA, R. 1998. «Modelling wetting and drying effects over complex topography». *Hydrological processes*. 12. 1151-1182.

- TORO, E.F., SLEIGH, P.A, & MORRIS, M.W. 1998. «CADAM: A review of testing methods and solutions obtained». Première rencontre du groupe CADAM (*European Union Concerted Action on Dambreak Modelling*), Mars 1998, Wallingford. <http://www.hrwallingford.co.uk/projects/CADAM/CADAM/> (Page consultée le 21 Avril 2005).
- TORO, E. F. 1992. «Riemann problems and the waf method for solving the two-dimensional shallow water equations». *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.* 338. 43-68.
- TORO, E. F. 2001. *Shock-capturing methods for free-surface shallow flows*. First edition. Chichester: Wiley. 309 pages.
- VAN LEER, B. 1979. «Towards the ultimate conservative difference scheme, V: A second-order sequel to Godunov's method», *Journal of Computational Physics*, 32, 101-136.
- VAN LEER, B. 1982, «Flux-vector splitting for the Euler Equations». *Lecture Notes in Physics*. 170. New-York/Berlin : Springer-Verlag. p. 507.
- VASQUEZ-CENDON, M.E. 1999. «Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry». *Journal of Computational Physics*. 148:8. 497-526.
- VILA, J. P. 1986. Sur la Théorie et L'Approximation Numérique de Problèmes Hyperboliques non Linéaires Applications aux Équations de Saint-Venant et à la Modélisation des Avalanches de Neige Dense. Thèse de Doctorat, Université de Paris VI.
- WAGNER, D. H. 1983. «The Riemann Problem in Two Space Dimensions for a Single Conservation Law». *SIAM J. Math. Anal.* 14: 3. 287-301.
- ZHANG, H., KAHAWITA, R., SHEN, M., & LI, Z. 1992. «A PC - based Numerical Package for the Simulation of Two-Dimensional Free Surface Flows». *Second Canadian Conference on Computing in Civil Engineering, Water Resources Division*, Ottawa, Ontario, Canada.

ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L., 1989. *The finite element method*. Fourth edition.
London: McGraw-Hill. 648 pages. Volume 1.