POLYPUBLIE

Comparaison automatisée d'invariants en théorie des graphes

Mustapha Aouchiche

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

Date	2006
Type	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis Thèse de doctorat/Ph.D. thesis
URL de PolyPublie PolyPublie URL	https://publications.polymtl.ca/7741/
Conditions d'utilisation Terms of use	© Tous droits réservés / All rights reserved
Référence Citation	Aouchiche, M. (2006). Comparaison automatisée d'invariants en théorie des graphes [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/7741/

Détails de la thèse
Thesis details

Directeurs de recherche Advisors	Gilles Savard
Programme Program	Non spécifié

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal
https://publications.polymtl.ca

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

COMPARAISON AUTOMATISÉE D'INVARIANTS EN THÉORIE DES GRAPHES

MUSTAPHA AOUCHICHE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR (Ph.D.)
(MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR)
FÉVRIER 2006

© Mustapha AOUCHICHE, 2006.

Library and Archives Canada

Published Heritage Branch

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque et Archives Canada

Direction du Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence
ISBN: 978-0-494-17974-1
Our file Notre référence
ISBN: 978-0-494-17974-1

NOTICE:
The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:
L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

COMPARAISON AUTOMATISÉE D'INVARIANTS EN THÉORIE DES GRAPHES

présentée par : AOUCHICHE Mustapha

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. ROUSSEAU Louis-Martin, Ph.D., président

M. SAVARD Gilles, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. HANSEN Pierre, D.Agr., membre et codirecteur

M. HERTZ Alain, Doct. ès Sc., membre

M. MAFFRAY Frédéric, Doctorat, membre externe

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier

Monsieur Pierre Hansen pour avoir rendu les conditions de travail aussi agréables que favorables pour la recherche. Cette thèse a pris forme sous les orientations et directions d'une main aussi savante que cordiale et généreuse.

Monsieur Gilles Caporossi pour son aide et sa présence le long de tout le travail.

Monsieur Gilles Savard d'avoir accepté la direction administrative de cette thèse.

Monsieur Frédéric Maffray d'avoir accepté d'être l'examinateur externe de cette thèse.

Monsieur Alain Hertz d'avoir accepté d'être examinateur de cette thèse.

Monsieur Louis-Martin Rousseau d'avoir accepté la présidence du jury de thèse.

Mes remerciements à tous les étudiants stagiaires pour leur travail de programmation, tout le personnel du GERAD pour sa disponibilité, particulièrement Francine Benoit, tous les amis au GERAD.

Ma reconnaissance va à ma femme, Fazia, mes enfants Sami-Yasten et Elisa pour m'avoir supporté durant mon travail à la maison, mais aussi d'avoir supporté mes absences parfois prolongées, ainsi que pour leur soutien sans faille.

RÉSUMÉ

L'évolution et le développement de *la théorie des graphes* constituent un phénomène étrange et extraordinaire ; d'abord apparue sous forme de curiosités mathématiques, puis devenue un outil exploité par diverses sciences comme l'étude des circuits électriques, la chimie, la psychologie et l'économie, avec le temps elle s'est imposée comme une des branches les plus florissantes des mathématiques modernes. Les récents développements dans les technologies de l'informatique, avec des ordinateurs de plus en plus puissants, fournissent à la théorie des graphes une excellente opportunité pour pousser les frontières du savoir, notamment dans sa branche qui traite des *invariants* et des *graphes extrêmes*. Cette branche tire profit essentiellement des techniques modernes de calcul et d'optimisation (par exemple *la recherche à voisinage variables de graphes extrêmes*), mais aussi de l'ordinateur lui même, avec une vitesse de calcul sans cesse croissante.

Parallèlement à l'essor des technologies de l'informatique, et avec son aide, *l'intelligence artificielle* a connu elle aussi un progrès considérable. L'une des plus importantes conséquences de ce progrès est la naissance de *la découverte scientifique par ou assistée par l'ordinateur*. La DSA (découverte scientifique automatisée) a vu le jour en 1956 avec la mise au point du système *Logic Theorist* de Newell, Shaw et Simon, et a connu un grand succès en mathématiques, particulièrement en théorie des graphes avec plusieurs systèmes comme *Graph*, *Graph Theorist*, *Ingrid*, *Graffiti* et *AutoGraphiX*.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à *l'automatisation de la comparaison systématique d'invariants* en théorie des graphes. Par comparaison systématique de deux invariants, on entend la recherche de bornes inférieures et supérieures sur leur somme,

différence, rapport et produit, ainsi qu'une caractérisation des familles de graphes extrêmes associées à chaque borne. La comparaison automatique est faite par le système AutoGraphiX.

Avant l'étude de la forme générale (appelée par la suite *Forme 1 d'AGX*), on s'intéresse au cheminement de l'intelligence artificielle et aux différents progrès de la DSA en mathématiques avec un accent sur la théorie des graphes (Section 1.1) ; puis l'attention est portée sur quelques techniques modernes de l'optimisation (Section 1.2) ainsi que sur les différentes méthodes, *numérique, algébrique et géométrique*, de génération de conjectures en théorie des graphes (Section 1.3) ; par la suite (Section 1.4) on présente une discussion des multiples facettes sous lesquelles se présentent les résultats (théorèmes, propositions, conjectures, ...) en théorie des graphes. Une liste de la plupart des formes de ces résultats est présentée avec des commentaires sur la forme même et l'éventualité de l'automatisation de leur obtention soit comme conjectures soit comme résultats prouvés, toutefois sans prétendre que la liste serait complète.

Une fois le choix de la *Forme 1 d'AGX* fixé, une étude expérimentale a été menée sur un échantillon de 300 bornes, pour décider du schéma général du processus de génération de résultats et de conjectures qu'on veut automatiser. Le processus se présente comme suit.

En premier lieu une recherche est effectuée pour trouver les bornes simples à démontrer et dont la preuve se fait automatiquement. L'intérêt des résultats obtenus à l'issue de cette première étape relève beaucoup plus de l'intelligence artificielle que de la théorie des graphes, c'est à dire, qu'il réside dans la façon de le trouver et prouver plus que dans le résultat même. Les techniques de preuve automatique implémentées sont au nombre de quatre (Section 2.3) : *règle basée sur la définition*, *règle de l'intersection*, *règle de la deuxième valeur* et *règle de la déduction*. La deuxième est la règle qui a donné le plus de résultats, et la troisième est celle qui représente le plus long raisonnement parmi les quatre.

Après l'étape de la preuve automatique, et pour les bornes qui ne répondent pas aux critères de celle-ci, AutoGraphiX 2 fait appel à sa composante d'optimisation pour trouver les graphes extrêmes, qui minimisent ou maximisent, selon le cas, la combinaison des deux invariants considérés, et par la suite l'expression algébrique de la borne. Contrairement à l'étape précédente, celle-ci fournit des *conjectures* (Section 2.4) et non des résultats prouvés. L'optimisation (la recherche de graphes extrêmes) est basée sur la *méta-heuristique* de recherche à voisinage variable. La recherche de la formule algébrique de la borne est basée sur une technique exploitant les propriétés mathématiques de *l'analyse en composantes principales.*

On obtient des conjectures de différents types : *conjectures entièrement automatiques*, dans lesquelles on a une formule algébrique et la ou les familles de graphes extrêmes associées à chaque borne ; *conjectures assistées*, lorsque les graphes extrêmes sont fournis par le système et la formule algébrique est déduite par l'utilisateur en exploitant les propriétés de ces graphes ; *conjectures structurales*, qui contiennent uniquement une description des graphes extrêmes associés à la borne, sans qu'on puisse donner une formule algébrique pour de multiples raisons (voir Section 2.4.4). Plusieurs de ces conjectures (des trois types) sont démontrées dans cette thèse, et leur difficulté est variable.

À l'issue de la première et la deuxième étape, AutoGraphiX génére automatiquement un rapport contenant les résultats, accompagnés de leurs preuves, et les conjectures qu'il a pu trouver (Section 2.5). L'intervention de l'usager pour tenter de déduire les formules qu'AGX n'a pas trouvé vient après le rapport.

Outre la comparaison automatique, les fonctions interactive d'AGX sont améliorées pour le rendre plus convivial (voir Section 2.2), mais surtout pour développer ses outils de recherche assistée de conjectures, comme la visualisation des graphes et des informations s'y rapportant, et des courbes de fonctions (objectif et autres) avec

possibilités d'approximations interactives. Cette dernière fonction s'est avérée être un puissant outil pour la génération interactive de conjectures.

Une fois le processus de génération de résultats et de conjectures automatisé, on l'a appliqué à une vingtaine d'invariants portant le nombre de bornes de 300 à plus de 1500. Des exemples de comparaisons systématiques d'invariants sont donnés, sans toutefois donner tous les résultats, et concentrés autour de 3 invariants : la maille (Section 3.1), la distance moyenne (Section 3.2) et l'index (Section 3.3).

L'ensemble des conjectures obtenues et leur statut sont donnés en annexe.

ABSTRACT

Graph theory's evolution and development constitute a strange and extraordinary phenomenon; it first appeared as mathematical curiosities, and then became a tool exploited by several sciences such as the study of electrical circuits, chemistry, psychology and economics. In the course of time, it imposed itself as one of the fastest growing disciplines in contemporary mathematics. The recent developments in computer technologies, with increasingly powerful computers, provide to graph theory the opportunity of extending the knowledge field, notably about *invariants* and *extremal graphs*. This discipline benefits mainly from modern computing and optimization methods (such as *the variable neighborhood search for extremal graphs*), but also from the computer itself, increasingly with fast computations.

At the same time of the evolution in computer technologies, and with its help, the *artificial intelligence* also makes a considerable advancement. The most important consequence of this advancement is the birth of *scientific discovery by and/or with the help of the computer*. The ASD (automated scientific discovery) appeared in 1956 with the construction of the *Logic Theorist* system by Newell, Shaw and Simon, and had made an important success in mathematics, especially in graph theory with several systems such as *Graph*, *Graph Theorist*, *Ingrid*, *Graffiti* and *AutoGraphiX*.

In this thesis, we are concerned by the *automation of a systematic comparison of invariants* in graph theory. By systematic comparison of two invariants, we mean to find lower and upper bounding on their sum, difference, ratio and product, together with a characterization of the corresponding family (ies) of extremal graphs. The automated comparison is made by the AutoGraphiX system.

Before choosing the general form (further called *AGX Form 1*), we take an interest of artificial intelligence evolution and of various ASD progress in mathematics with

a focus upon the graph theory (Section 1.1); then we are concerned by some modern optimization techniques (Section 1.2) together with different methods, *numerical, algebraic and geometric*, of conjecture making in graph theory (Section 1.3); thereafter (Section 1.4), we discuss different forms of graph theory results (theorems, propositions, conjectures, ...). A list of the most existing forms is presented together with comments about the forms themselves and the possible automation of their obtaining even as conjectures or as proved results.

Once the choice of the *AGX Forme 1* is made, an experimental study was done on a sample of 300 bounds, to fix the scheme to automate the result and conjecture formation process. It is as follow.

First, the system seeks for the bounds that are easy to prove automatically. The interest of the results obtained at the fist step, concerns more the artificial intelligence than the graph theory, that is, it is inherent to the way used to derive the result and not to the result itself. There are four automated proof techniques coded: *a definition*, *an intersection*, *a second value* and *a deduction based rules*. The second rule is the one that gave the greatest number of results, while the third one is the longest logical argument.

After this step, and for the bounds that are not satisfying the criteria of automated proof rules, AutoGraphiX calls its optimization component in order to find extremal graphs, that minimize or maximize, depending on the case, the invariants combination considered, and then find the algebraic expression of the bound. Contrary to the first step, this one provides *conjectures* (Section 2.4) instead of proved results. The optimization (search for extremal graphs) uses the variable neighborhood search *metaheuristics*. To find the algebraic formulae of the bound, the system uses a technique exploiting mathematical properties of *the principle component analysis*.

We obtain various types of conjectures: *fully automated conjectures*, that contain an algebraic formulae together with a description of the relevant family (ies) of extremal

graphs for each bound; *assisted conjectures*, when the extremal graphs are given by the system and the algebraic formulae is derived by hand; *structural conjectures*, in which we have only a description of the extremal graphs, and we can not derive any formulae for the bound, due to many raisons (see Section 2.4.4). Several conjectures (from the three types), of variable difficulties, are proved in this thesis.

After the first and second step, AutoGraphiX generates automatically a report that contains the results, together with their proofs, and the found conjectures (Section 2.5). The user intervention in order to find the missing formulas is done after the report.

In addition to the automated comparison, the AGX interactive functions are improved in order to make it more convivial (Section 2.2), but also to improve its tools to find assisted conjectures, such as displaying graphs and relevant informations, and curves (the objective and others) with the ability of interactive curve-fitting. The latest function turns out to be a useful tool in interactive conjecture making.

Once the result and conjecture generating process is automated, we applied it to a set of twenty invariants, then the number of studied bounds increases from 300 to more than 1500. Examples of systematic comparison of graph invariants are given, not all cases, focussing around 3 invariants: the girth (Section 3.1), the average distance (Section 3.2) and the index (Section 3.3).

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS iv

RÉSUMÉ v

ABSTRACT ix

TABLE DES MATIÈRES xii

LISTE DES TABLEAUX xviii

LISTE DES FIGURES xx

LISTE DES ANNEXES xxiv

INTRODUCTION ET DÉFINITIONS 1

CHAPITRE 1 : INTELLIGENCE ARTIFICIELLE ET DÉCOUVERTE AUTOMATISÉE 13

1.1 : L'Intelligence Artificielle au Fil du Temps 14

1.1.1 : DSA en mathématiques 16

1.1.2 : DSA en théorie des graphes 19

1.2 : Quelques Techniques de la Découverte 26

1.2.1 : La recherche à voisinage variable 26

1.2.2 : La Génération automatique de relations 28

1.3 : La Recherche Automatique de Conjectures 34

1.3.1 : La méthode numérique 34

1.3.2 : La méthode algébrique 36

1.3.3 : La méthode géométrique 37

1.4 : Différentes Formes de Résultats en Théorie des Graphes 38

1.4.1 : L'attrait d'une conjecture en théorie des graphes 39

1.4.2 : Relations algébriques 41

1.4.3 : Relations non-linéaires 45

1.4.4 : Relations qualitatives 48

1.4.5 : Conditions 49

1.4.6 : Inclusions entre classes de graphs 54

1.4.7 : Implications entre les relations 55

1.4.8 : Conjectures structurales 59

1.4.9 : Dénombrement de graphes 60

CHAPITRE 2 : DE AUTOGRAPHIX À AUTOGRAPHIX 2 . . . 62

2.1 : Le Système AutoGraphiX 62

2.1.1 : RVV et AGX 62

2.1.2 : Les tâches exécutées par AGX 63

2.1.3 : Conjectures réfutées par AGX 66

2.1.4 : Conjectures renforcées par AGX 67

2.1.5 : Conjectures obtenues par AGX 67

2.2 : AutoGraphiX 2 : Fonctions Interactives 69

2.2.1 : Centre de contrôle 70

2.2.2 : Éditer un problème 70

2.2.3 : Les paramètres d'optimisation 72

2.2.4 : L'optimisation 72

2.2.5 : La visualisation des graphes 74

2.2.6 : Le mode interactif 74

2.2.7 : La visualisation des résultats 77

2.2.8 : Trouver des conjectures 80

2.3 : AutoGraphiX 2 : Preuves Automatiques 81

2.3.1 : La règle de la définition 82

2.3.2 : La règle de l'intersection 83

2.3.3 : La règle de la deuxième valeur 87

2.3.4 : La règle de la déduction 89

2.4 : Génération de Conjectures 93

2.4.1 : Génération automatique : la méthode numérique 93

2.4.2 : Génération assistée : la méthode algébrique 97

2.4.3 : Conjectures structurales 104

2.4.4 : Difficultés dans la génération de conjectures 110

2.5 : Rapport Automatique sur la Comparaison de deux Invariants . . . 118

CHAPITRE 3 : COMPARAISON SYSTÉMATIQUE DE QUELQUES INVARIANTS 125

3.1 : La Maille 128

3.1.1 : Le nombre de stabilité 128

3.1.2 : Le rayon 132

3.1.3 : Le diamètre 134

3.1.4 : Le degré maximum 138

3.1.5 : Le degré moyen 141

3.1.6 : Le degré minimum 143

3.1.7 : Résultats divers 144

3.2 : La Distance Moyenne 148

3.2.1 : Le nombre de stabilité 148

3.2.2 : Le diamètre 153

3.2.3 : Le rayon 155

3.2.4 : La maille 160

3.2.5 : Le degré maximum 164

3.2.6 : Le degré moyen 169

3.2.7 : Le degré minimum 173

3.3 : L'Index 178

3.3.1 : Le nombre chromatique 178

3.3.2 : Le degré maximum 184

3.3.3 : Le degré minimum 186

3.3.4 : Le degré moyen 189

3.3.5 : Le rayon 191

3.3.6 : La distance moyenne 193

3.3.7 : L'indice de Randić 196

CONCLUSION 199

BIBLIOGRAPHIE 205

ANNEXES 227

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1 : Définitions des invariants utilisés. 12

Tableau 2.1 : Un élément de la base de connaissances. 85

Tableau 2.2 : Le degré maximum dans la base de connaissances. 86

Tableau 2.3 : L'indice de Randić dans la base de connaissances. 86

Tableau 2.4 : Liste d'inégalités pour une sélection d'invariants. 90

Tableau 2.5 : Liste des inégalités sans mauvais signe. 91

Tableau 2.6 : Liste d'inégalités sans redondance. 91

Tableau 2.7 : Liste d'inégalités sans autres invariants. 92

Tableau 2.8 : Un rapport automatique d'*AutoGraphiX 2* sur Ra et D. . . 120

Tableau 2.9 : Un rapport automatique sur D et r. 123

Tableau 3.1 : Énoncé d'un résultat de la Forme 1 d'AGX 2. 125

Tableau 3.2 : Résultat de la Forme 1 d'AGX 2 impliquant la maille. . . . 128

Tableau 3.3 : Résultat de la Forme 1 d'AGX 2 impliquant la distance moyenne. 148

Tableau 3.4 : Les values optimales de Δ. 168

Tableau 2 : – Répartition et statistiques des résultats. 204

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 : Situation géométrique illustrant une règle 29

Figure 1.2 : Exemple de situation géométrique 30

Figure 1.3 : Trois classes d'arbres chimiques minimisant l'indice de Randić. 60

Figure 1.4 : Dendrimères avec et sans arêtes additionnelles. 61

Figure 2.1 : Centre de contrôle 69

Figure 2.2 : Syntaxe d'un problème et paramètres d'optimisation 70

Figure 2.3 : Optimisation simple (gauche) et optimisation en batch (droite) 72

Figure 2.4 : Liste des graphes associés au problème (haut) et un graphe (bas) 73

Figure 2.5 : Visualiser un graphe et ses attributs. 74

Figure 2.6 : Affichage des matrices et des vectors 75

Figure 2.7 : Le mode backup 76

Figure 2.8 : Visualisation des résultats en 3D 77

Figure 2.9 : Une comparaison avec la borne de Hong 79

Figure 2.10 : Graphe maximisant λ_1 pour n et m donnés. 79

Figure 2.11 : Sélection d'invariants pour la recherche de conjecures . . . 80

Figure 2.12 : La courbe de la minimisation de $\alpha + \omega$. 99

Figure 2.13 : Approximation de la courbe de $\alpha + \omega$. 100

Figure 2.14 : Un contre-exemple pour la borne inférieure sur $\alpha + \omega$. . . . 101

Figure 2.15 : Le graphe $K_{9,3}$ maximise $\alpha + Ra$ pour $n = 12$. 102

Figure 2.16 : La courbe de α en fonction de n. 103

Figure 2.17 : La courbe de $\alpha - \lceil \frac{3n-2}{4} \rceil$ en fonction de n. 104

Figure 2.18 : La courbe de la borne supérieure pour $\lambda_1 - \overline{d}$. 105

Figure 2.19 : Un ananas d'ordre 14 d'une clique sur 8 sommets. 106

Figure 2.20 : La minimisation de $\overline{l}/r$: un panier avec $n = 20$ et $\omega = 14$ (haut) et ω en fonction de n (bas). 109

Figure 2.21 : La courbe de la borne inférieure sur $\Delta + \overline{l}$. 117

Figure 2.22 : Graphes obtenus par AGX 2 lors de la minimisation de $\Delta + \overline{l}$. 117

Figure 3.1 : Un contre-exemple pour la Conjecture 48. 147

Figure 3.2 : Élimination d'arêtes non-incidentes aux sommets de S. . . . 151

Figure 3.3 : Contraction d'un arbre. 151

Figure 3.4 : Une bestiole équilibrée sur 12 sommets : $B_{7,2,3}$. 156

Figure 3.5 : Un panier pair : $PN_{15,8}$. 158

Figure 3.6 : Graphes obtenus par AGX 2 lors de la maximisation de $\overline{l} - r$. 159

Figure 3.7 : La courbe de la borne supérieure sur $\overline{l} - r$. 160

Figure 3.8 : Un cerf-volant : $PK_{12,32}$. 162

Figure 3.9 : Obtention de $PK_{n,m+1}$ à partir de $PK_{n,m}$. 171

Figure 3.10 : Graphes obtenus par AGX 2 lors de la maximisation de $\overline{l} \cdot \overline{d}$. 173

Figure 3.11 : Le diviseur d'un graphe. 180

Figure 3.12 : Les graphes "minimisant" $\lambda_1 + \overline{l}$ for $n = 9, \cdots 14$. 195

Figure 3.13 : La courbe de la borne inférieure sur $\lambda_1 + \overline{l}$. 196

Figure A.1 : Un contre-exemple pour la Conjecture A.42 on 23 vertices. 239

Figure A.2 : Un contre-exemple pour la borne inférieure sur $\beta + \Delta$. . . . 245

Figure A.3 : Un contre-exemple pour la borne supérieure de A.88 avec $n = 24$, $D = 15$ et $\delta = 2$. 253

Figure A.4 : Un contre-exemple pour la borne inférieure de A.137 avec $n = 9$, $\omega = 3$ et $\delta = 6$. 267

Figure A.5 : Un contre-exemple pour la borne supérieure de A.200 avec $n = 12$ et $\alpha = 7$. 284

Figure A.6 : Un contre-exemple pour la borne supérieure de A.207 avec $n = 19$ et $\omega = 6$. 287

Figure A.7 : Un contre-exemple pour la borne supérieure de A.244. . . . 297

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE A : LA COMPARAISON SYSTÉMATIQUE DE VINGT INVARIANTS 227

A.1 : Le degré maximum 228

A.1.1 : Degré minimum 228

A.1.2 : Degré moyen 229

A.1.3 : La distance moyenne 230

A.1.4 : Le diamètre 231

A.1.5 : Le rayon 232

A.1.6 : La maille 233

A.1.7 : Excentricité 234

A.1.8 : La proximité 235

A.1.9 : L'éloignement 236

A.1.10 : L'index 238

A.1.11 : L'indice de Randić 239

A.1.12 : La connectivité algébrique 240

A.1.13 :La connectivité aux sommets 241

A.1.14 :La connectivité aux arêtes 242

A.1.15 :Le nombre de stabilité 243

A.1.16 :Le nombre de domination 244

A.1.17 :La cardinalité maximale d'une clique 246

A.1.18 :Le nombre chromatique 247

A.1.19 :La cardinalité maximale d'un couplage 248

A.2 : Le degré minimum 249

A.2.1 : Le degré moyen 249

A.2.2 : La distance moyenne 251

A.2.3 : Le diamètre 252

A.2.4 : Le rayon 253

A.2.5 : La maille 254

A.2.6 : L'excentricité 255

A.2.7 : La proximité 256

A.2.8 : L'éloignement 257

A.2.9 : L'index 258

A.2.10 : L'indice de Randić 259

A.2.11 : La connectivité algébrique 260

A.2.12 : La connectivité aux sommets 261

A.2.13 : La connectivité aux arêtes 263

A.2.14 : Le nombre de stabilité 264

A.2.15 : Le nombre de domination 265

A.2.16 : La cardinalité maximale d'une clique 266

A.2.17 : Le nombre chromatique 268

A.2.18 : La cardinalité maximale d'un couplage 269

A.3 : Le degré moyen 270

A.3.1 : La distance moyenne 270

A.3.2 : Le diamètre 271

A.3.3 : Le rayon 272

A.3.4 : La maille 273

A.3.5 : L'excentricité 274

A.3.6 : La proximité 275

A.3.7 : L'éloignement 276

A.3.8 : L'index 277

A.3.9 : L'indice de Randic 278

A.3.10 : La connectivité algébrique 280

A.3.11 : La connectivité aux sommets 281

A.3.12 : La connectivité aux arêtes 282

A.3.13 : Le nombre de stabilité 283

A.3.14 : Le nombre de domination 284

A.3.15 : La cardinalité maximale d'une clique 286

A.3.16 : Le nombre chromatique 287

A.3.17 : La cardinalité maximale d'un couplage 289

A.4 : La distance moyenne 290

A.4.1 : Le diamètre 290

A.4.2 : Le rayon 291

A.4.3 : La maille 292

A.4.4 : L'excentricité moyenne 293

A.4.5 : La proximité 294

A.4.6 : L'éloignement 295

A.4.7 : L'index 296

A.4.8 : L'indice de Randić 297

A.4.9 : La connectivité algébrique 298

A.4.10 : La connectivité aux sommets 299

A.4.11 : La connectivité aux arêtes 300

A.4.12 : Le nombre de stabilité 301

A.4.13 : Le nombre de domination 302

A.4.14 : La cardinalité maximale d'une clique 303

A.4.15 : Le nombre chromatique 304

A.4.16 : La cardinalité maximale d'un couplage 305

A.5 : Le diamètre 306

A.5.1 : Le rayon 306

A.5.2 : La maille 308

A.5.3 : L'excentricité moyenne 309

A.5.4 : La proximité 310

A.5.5 : L'éloignement 311

A.5.6 : L'index 313

A.5.7 : L'indice de Randić 314

A.5.8 : La connectivité algébrique 315

A.5.9 : La connectivité aux sommets 316

A.5.10 : La connectivité aux arêtes 317

A.5.11 : Le nombre de stabilité 318

A.5.12 : Le nombre de domination 319

A.5.13 : La cardinalité maximale d'une clique 320

A.5.14 : Le nombre chromatique 321

A.5.15 : La cardinalité maximale d'un couplage 322

A.6 : Le rayon 323

A.6.1 : La maille 323

A.6.2 : L'excentricité moyenne 324

A.6.3 : La proximité 325

A.6.4 : L'éloignement 326

A.6.5 : L'index 327

A.6.6 : L'indice de Randić 328

A.6.7 : La connectivité algébrique 329

A.6.8 : La connectivité aux sommets 330

A.6.9 : La connectivité aux arêtes 331

A.6.10 :Le nombre de stabilité 332

A.6.11 :Le nombre de domination 333

A.6.12 :La cardinalité maximale d'une clique 334

A.6.13 :Le nombre chromatique 335

A.6.14 :La cardinalité maximale d'un couplage 336

A.7 : La maille 337

A.7.1 : L'excentricité moyenne 337

A.7.2 : La proximité 339

A.7.3 : L'éloignement 340

A.7.4 : L'index 342

A.7.5 : L'indice de Randić 343

A.7.6 : La connectivité algébrique 344

A.7.7 : La connectivité aux sommets 345

A.7.8 : La connectivité aux arêtes 346

A.7.9 : Le nombre de stabilité 347

A.7.10 :Le nombre de domination 348

A.7.11 :La cardinalité maximale d'une clique 350

A.7.12 :Le nombre chromatique 351

A.7.13 :La cardinalité maximale d'un couplage 352

A.8 : L'excentricité moyenne 354

A.8.1 : La proximité 354

A.8.2 : L'éloignement 355

A.8.3 : L'index 356

A.8.4 : L'indice de Randić 357

A.8.5 : La connectivité algébrique 358

A.8.6 : La connectivité aux sommets 359

A.8.7 : La connectivité aux arêtes 360

A.8.8 : Le nombre de stabilité 361

A.8.9 : Le nombre de domination 362

A.8.10 :La cardinalité maximale d'une clique 364

A.8.11 :Le nombre chromatique 365

A.8.12 :La cardinalité maximale d'un couplage 366

A.9 : La proximité 367

A.9.1 : L'éloignement 367

A.9.2 : L'index 368

A.9.3 : L'indice de Randić 369

A.9.4 : La connectivité algébrique 370

A.9.5 : La connectivité aux sommets 371

A.9.6 : La connectivité aux arêtes 372

A.9.7 : Le nombre de stabilité 373

A.9.8 : Le nombre de domination 374

A.9.9 : La cardinalité maximale d'une clique 375

A.9.10 : Le nombre chromatique 376

A.9.11 : La cardinalité maximale d'un couplage 377

A.10 : L'éloignement 378

A.10.1 : L'index 378

A.10.2 : L'indice de Randić 379

A.10.3 : La connectivité algébrique 380

A.10.4 : La connectivité aux sommets 381

A.10.5 :La connectivité aux arêtes 382

A.10.6 :Le nombre de stabilité 384

A.10.7 :Le nombre de domination 385

A.10.8 :La cardinalité maximale d'une clique 386

A.10.9 :Le nombre chromatique 387

A.10.10 :La cardinalité maximale d'un couplage 388

A.11 : L'index 389

A.11.1 : L'indice de Randić 389

A.11.2 : La connectivité algébrique 390

A.11.3 : La connectivité aux sommets 391

A.11.4 : La connectivité aux arêtes 392

A.11.5 : Le nombre de stabilité 393

A.11.6 : Le nombre de domination 394

A.11.7 : La cardinalité maximale d'une clique 395

A.11.8 : Le nombre chromatique 396

A.11.9 : La cardinalité maximale d'un couplage 397

A.12 : L'indice de Randić 398

A.12.1 : La connectivité algébrique 398

A.12.2 : La connectivité aux sommets 399

A.12.3 : La connectivité aux arêtes 400

A.12.4 : Le nombre de stabilité 401

A.12.5 : Le nombre de domination 402

A.12.6 : La cardinalité maximale d'une clique 403

A.12.7 : Le nombre chromatique 404

A.12.8 : La cardinalité maximale d'un couplage 405

A.13 : La connectivité algébrique 406

A.13.1 : La connectivité aux sommets 406

A.13.2 : La connectivité aux arêtes 407

A.13.3 : Le nombre de stabilité 408

A.13.4 : Le nombre de domination 409

A.13.5 : La cardinalité maximale d'une clique 410

A.13.6 : Le nombre chromatique 411

A.13.7 : La cardinalité maximale d'un couplage 412

A.14 : La connectivité aux sommets 413

A.14.1 : La connectivité aux arêtes 413

A.14.2 : Le nombre de stabilité 414

A.14.3 : Le nombre de domination 415

A.14.4 : La cardinalité maximale d'une clique 416

A.14.5 : Le nombre chromatique 417

A.14.6 : La cardinalité maximale d'un couplage 419

A.15 : La connectivité aux arêtes 420

A.15.1 : Le nombre de stabilité 420

A.15.2 : Le nombre de domination 421

A.15.3 : La cardinalité maximale d'une clique 422

A.15.4 : Le nombre chromatique 423

A.15.5 : La cardinalité maximale d'un couplage 424

A.16 : Le nombre de stabilité 425

A.16.1 : Le nombre de domination 425

A.16.2 : La cardinalité maximale d'une clique 426

A.16.3 : Le nombre chromatique 427

A.16.4 : La cardinalité maximale d'un couplage 428

A.17 : Le nombre de domination 429

A.17.1 : La cardinalité maximale d'une clique 429

A.17.2 : Le nombre chromatique 431

A.17.3 : La cardinalité maximale d'un couplage 432

A.18 : La cardinalité maximale d'une clique 433

A.18.1 : Le nombre chromatique 433

A.18.2 : La cardinalité maximale d'un couplage 434

A.19 : Le nombre chromatique 435

A.19.1 : La cardinalité maximale d'un couplage 435

ANNEXE B : LES RÈGLES DE L'INTERSECTION 437

INTRODUCTION ET DÉFINITIONS

Introduction

Sujet

Il y a un demi siècle, un des pionniers de l'intelligence artificielle, Simon [165], a affirmé lors d'une conférence qu'il animait que "*dans une dizaine d'années l'ordinateur va découvrir et démontrer un important théorème en mathématiques*". À ce jour la prophétie ne s'est pas réalisée, ce qui ne peut être attribué à une inaction de la part des chercheurs dans le domaine. Un énorme travail s'est fait et est en train de se faire en intelligence artificielle sans toutefois atteindre l'objectif fixé par Simon. C'est dans ce contexte que se situe le travail présenté dans cette thèse. Il s'agit de la découverte scientifique par ou assistée par l'ordinateur en théorie des graphes, une discipline qu'on peut répartir en deux branches : *génération automatique ou assistée de conjectures* et *preuve automatique ou assistée de résultats (théorèmes).*

Preuve automatique de résultats simples

La preuve assistée ou automatique, comparée à la génération de conjectures, est la branche ayant connu le moins de succès, contrairement à ce qui s'est dans d'autres branches des mathématiques comme la logique ou la géométrie. Le pionnier dans ce domaine est le système *Graph* de Cvetković [60, 62, 64], spécialisé dans la théorie algébrique des graphes. *THEOR*, la composante de *Graph* destinée à la démonstration automatique ou assistée des théorèmes en théorie des graphes, reçoit une proposition en termes symboliques pour laquelle il doit construire une démonstration en coordination avec l'usager.

Dans le système AutoGraphiX 2, une autre approche est adoptée. Au lieu de formaliser et symboliser les notions de la théorie des graphes, on se base sur l'observation du comportement et du travail d'un mathématicien, en particulier le spécialiste de la théorie des graphes, pour retenir les méthodes les plus simples et les plus générales possibles. Dans le but d'automatiser la preuve de résultats exprimant des relations entre invariants en théorie des graphes, tout en restant dans un cadre simple et général, on s'est intéressé à une forme particulière de résultats, dite Forme 1 d'AGX, qui est la suivante :

$$\underline{b}_n \leq i_1 \otimes i_2 \leq \overline{b}_n \tag{1}$$

où $\underline{b}_n$ et $\overline{b}_n$ sont des bornes inférieure et supérieure respectivement, en fonction de l'ordre n du graphe (ou nombre de sommets), sur la combinaison de deux invariants graphiques i_1 et i_2 à l'aide de $\otimes$ qui représente l'une des quatre opérations arithmétiques de base : $-, +, /, \times$. Le but est donc de trouver les bornes $\underline{b}_n$ et $\overline{b}_n$ sur $i_1 \otimes i_2$ pour une paire d'invariants i_1 et i_2 donnée. Pour chacune des bornes, on donne la famille des graphes extrêmes pour lesquels elle est atteinte. Le choix de la formule est dû à sa simplicité et aussi à la conviction que pour progresser dans le domaine, *il faut d'abord résoudre le problème de la découverte scientifique automatisée pour les cas simples et généraux, puis progresser en fonction des résultats obtenus.* La Forme 1 d'AGX constitue, comme on le verra plus loin, une généralisation des formules largement étudiées en théorie des graphes et connues sous le nom, dû à leurs auteurs [152], de *relations de Nordhaus-Gaddum.*

En considérant les deux invariants i_1 et i_2 comme des fonctions d'un graphe G, il y a de bonnes chances que leurs minima et leurs maxima soient atteints pour les mêmes familles respectives de graphes. Si tel est le cas, une règle générale s'applique : *si un graphe G maximise simultanément i_1 et i_2, alors G maximise i_1+i_2.* De façon similaire on pose des règles pour le minimum de i_1+i_2 et pour le minimum et le maximum pour chacune des trois autres opérations de base. On reconnaît ici une approche *simple*

et *générale.* Cette technique de preuve automatique de résultats simples, dite *règle basée sur l'intersection*, ainsi que trois autres (*basée sur la définition, de la deuxième valeur et de la déduction*) sont développées plus loin.

Génération de conjectures

Contrairement au cas de la démonstration automatique cette branche a connu assez peu de succès en mathématiques, la théorie des graphes étant une exception. Les principaux systèmes experts sont *AM* (*Automated Mathematician*) [133, 134, 135], *Eurisko* [131, 132], *Cyrano* [99, 100, 101], *HR* [52, 53, 54], et en théorie des graphes *Graph* [60, 62, 64], *Graph Theorist* [73, 74, 75], *Graffiti* [76, 77, 78], *Ingrid* [28, 29, 30, 31, 32] et plus récemment *AutoGraphiX* (dans ses deux versions, AGX 1 et AGX 2) [3, 35, 41, 42].

Dans le cadre de la génération de conjectures, on ajoute au système AutoGraphiX de nouvelles fonctions. Une automatisation complète du processus de génération (incluant une composante pour la preuve automatique) a été faite pour la Forme 1 d'AGX (1). Si lors de la tentative de génération de résultats à l'aide de la composante de preuve automatique d'AutoGraphiX 2, aucune règle ne s'applique à une borne donnée, la composante d'optimisation est automatiquement appelée. Une recherche de graphes extrêmes (minimisation ou maximisation de $i_1 \otimes i_2$ selon le cas) basée sur la méthode de recherche à voisinage variable, est lancée. Les graphes obtenus pour diverses valeurs de n ne sont pas nécessairement optimaux, car la résolution du problème de minimisation ou de maximisation de $i_1 \otimes i_2$ a été faite à l'aide d'une heuristique. L'expérience montre cependant que les graphes optimaux sont très souvent obtenus, du moins pour $n \leq 12$. Pour de plus grandes valeurs, diverses améliorations de l'heuristique peuvent être faites (par exemple, le choix du graphe initial G peut se faire parmi des familles de graphes qui sont souvent extrémales, ou encore une sé-

rie de telles familles peuvent être testées ; une correction automatique ou interactive peut être faite sur des graphes qui diffèrent fortement des autres, etc.).

La famille de graphes extrêmes obtenue est exploitée pour obtenir des conjectures. La méthode utilisée est dite *numérique* et basée sur les mathématiques de l'analyse en composantes principales, qui fournit une base de relations affines entre invariants. Deux autres méthodes (*algébrique et géométrique*) sont aussi utilisées mais uniquement en cas d'échec de la méthode numérique qui est entièrement automatisée. Les deux autres approches sont partiellement automatisées dans la version d'AGX 2 que nous avons utilisée ; des programmes expérimentaux automatisant complètement ces méthodes sont en cours d'incorporation dans AGX 2.

À l'issue de ces opérations, le système génère un rapport complet des résultats et conjectures obtenus. Si un résultat est prouvé automatiquement, il est accompagné de sa preuve en précisant quelle technique a été utilisée. En cas de conjecture, il est indiqué que la borne est obtenue par AGX. Il faut comprendre par là que la conjecture est obtenue avec la méthode numérique.

Il est à noter que le rapport généré automatiquement par le système ne contient que les résultats obtenus de façon entièrement automatique, donc parfois il ne contient ni résultat ni conjecture pour une ou plusieurs bornes. Dans ce cas l'utilisateur fait appel aux outils de visualisation et de manipulation des graphes obtenus et de la courbe de l'objectif $(i_1 \otimes i_2)$ en fonction de n, l'ordre du graphe, pour essayer de trouver les conjectures que le système n'a pas pu trouver automatiquement. Il y a deux façon de faire :

• Interactivement, l'usager fait des approximations de la courbe de l'objectif dans le but de trouver une fonction en n uniquement et dont la courbe se superpose avec celle des résultats. En cas de succès, la fonction ainsi obtenue est l'expression de la borne étudiée.

• L'observation des graphes "extrêmes" trouvés par AutoGraphiX, permet de reconnaître la structure régulière de ceux-ci, si tel est le cas. Une fois la famille des graphes extrêmes identifiée, on exploite ses propriètés *algébriques* pour exprimer les invariants i_1 et i_2 pour cette famille, en fonction du paramètre n. La substitution des invariants par leurs expressions donne la borne recherchée. Il s'agit ici de *la méthode algébrique* de génération de conjectures.

Malgré toutes ces opérations, il se peut qu'on ne trouve pas d'expression algébrique pour la borne. Il y a deux principales raisons pour un tel échec. Si les graphes présentent une structure régulière, l'absence de résultat est due au fait que l'expression algébrique d'au moins un des deux invariants considérés n'est pas connue. La deuxième raison est que la structure n'est pas assez régulière pour déduire une formulation algébrique de la borne. Dans le cas d'une structure régulière et en l'absence d'une formule algébrique pour la borne, on se contente de donner une conjecture *structurale*, qui décrit donc la structure des graphes extrêmes.

La méthode *géométrique* de génération de conjectures consiste à considérer les graphes comme un ensemble de points dans l'espace d'une sélection d'invariants, puis trouver la fermeture convexe pour ce nuage de points. L'inégalité représentant chaque facette est une conjecture sur les invariants ayant servis à l'exprimer. Cette méthode ne sera pas étudiée dans le cadre de ce travail.

AutoGraphiX 2

Pour atteindre ces objectifs, de nombreuses modifications sont apportées à la première version du système. Le mode interactif, qui représente un outil aussi important que puissant pour l'analyse des résultats obtenus à l'issue de la phase d'optimisation, a été rendu plus convivial. Pour ce faire, de nombreuses fonctions ont été ajoutées. Pour

la visualisation des informations sur un graphe, différents modes sont mis au point. Lors des tentatives d'amélioration d'un graphe relativement à un objectif donné, il est possible de garder bien en vue un graphe *référentiel*, le meilleur dont on dispose, pour des fins de comparaisons : *le mode backup*. Il est possible d'afficher les valeurs d'une sélection d'invariants pour le graphe sous observation, son complémentaire et/ou le graphe référentiel. Deux types de colorations sont disponibles. L'un pour les sommets et en fonction des degrés (une couleur pour chaque valeur) ou selon la classification chromatique, ou pour mettre en évidence un sous-ensemble particulier (de sommets) comme un stable maximum, un ensemble dominant minimum ou une clique maximum. L'autre pour visualiser un sous-ensemble d'arêtes particulier tel qu'un plus petit cycle (la maille), un rayon, un diamètre, un couplage maximum ou une clique maximum. Plusieurs autres fonctions et opérations sont disponibles en mode interactif et sont décrites plus loin.

La génération interactive de conjectures nécessite l'analyse des résultats numériques fournis par la composante d'optimisation, donc des manipulations sur la courbe de l'objectif. Ainsi un outil d'approximation interactive des courbes s'avère d'une grande utilité. L'usager d'AGX 2 peut faire une représentation en simultané de deux courbes, l'une représente l'objectif et l'autre exprime *la croyance de l'utilisateur* entrée sous forme de fonction d'invariants dans le champ approprié. Le but de telles approximations est de trouver la fonction en n qui se superpose à l'objectif et qui serait l'expression algébrique de la borne étudiée.

Dans le but de déterminer les fontions à ajouter au système AutoGraphiX, une étude experimentale a été faite sur environ 150 doubles inégalités de la Forme 1 d'AGX (1), donc environ 300 bornes. C'est sur la base de résultats obtenus pour ces 300 bornes que se sont décidées les tâches à ajouter à AutoGraphiX. Après l'ajout des nouvelles fonctions le nombre de résultats de la Forme 1 d'AGX a dépassé les 750, impliquant une vingtaine d'invariants. Pour ne pas alourdir ce document seulement

une sélection de ces résultats sera présentée. Les applications rapportées ici, sont centrées autour de trois principaux invariants : la maille g, la distance moyenne $\overline{l}$ et l'index λ_1. Chacun de ces trois invariants sera comparé avec une sélection d'autres parmi la vingtaine ayant fait l'objet de notre travail.

Présentation de la thèse

Ce manuscrit est organisé de la façon suivante. Le premier chapitre, sous le titre de "*Intelligence Artificielle et Découverte Automatisée*", contient quatre sections. Une première section dans laquelle on présente un bref historique de l'intelligence artificielle, avec un peu plus de détails sur la *découverte scientifique automatisée (DSA)* et sur les différents systèmes exploités en mathématiques, puis en théorie des graphes. La section suivante est consacrée à quelques techniques de découvertes ou utilisées dans des systèmes de découvertes, plus précisément la *recherche à voisinage variable* et les techniques de génération de relations algébriques. La troisième section de ce chapitre traite de trois méthodes de génération de conjectures en théorie des graphes : *numérique, algébrique* et *géométrique*. La dernière section du premier chapitre est constituée d'une revue systématique des différentes formes sous lesquelles se présentent les résultats (conjectures, théorèmes, ...) en théorie des graphes. Dans l'ordre, on explore les résultats qui traitent des relations algébriques linéaires, non-linéaires et qualitatives, les conditions d'appartenance à une classe de graphes, les implications entres classes de graphes et entre relations, des résultats structuraux et enfin des dénombrements et énumérations.

Le deuxième chapitre est entièrement réservé à la description du système AutoGraphiX, dans ses deux versions. Une première section décrit la première version, notamment l'exploitation de la recherche à voisinage variable dans la recherche de

graphes extrêmes, les différentes tâches exécutées et la façon dont on renforce et génère des conjectures. Par la suite, on donne une description détaillée et accompagnée d'exemples, des différentes fonctions interactives d'AutoGraphiX 2. Il s'agit plus précisément de la façon d'éditer un problème à étudier, de l'optimisation et de ses paramètres, et de la visualisation des graphes et des résultats. Les règles de *la preuve automatique* font l'objet de la troisième section de ce chapitre. On discute le fondement théorique des règles tout en donnant des exemples de résultats obtenus lors de leurs applications. Par la suite l'accent sera mis sur la génération de conjectures *par* et *avec* AutoGraphiX 2, de façon automatique ou assistée ; des conjectures "complètes" (contenant des relations algébriques et des descriptions des structures des graphes extrêmes) ou uniquement structurales. On termine la section avec une discussion des difficultés et problèmes rencontrés dans la génération de conjectures. Une dernière section de ce chapitre présente le rapport généré automatiquement par AutoGraphiX 2 à l'issue d'une comparaison de deux invariants graphiques. On entend par comparaison de deux invariants i_1 et i_2 l'étude des résultats de la Forme 1 d'AGX (1).

Des comparaisons systématiques de quelques paires d'invariants, en guise d'applications des méthodes présentées dans ce travail, font l'objet du troisième et dernier chapitre de cette thèse. Il est composé de trois sections chacune représentant un invariant principal, comparé avec une liste d'autres invariants. D'abord, la maille est comparée au nombre de stabilité, au rayon au diamètre et aux degrés maximum, moyen et minimum ; ensuite la distance moyenne l'est aux mêmes inavariants ainsi que la maille ; enfin, l'index est comparé avec le nombre chromatique, les degrés maximum, minimum et moyen, le rayon, la distance moyenne et l'indice de Randić.

Pour ne pas alourdir le présent document, les conjectures, sur les invariants considérés dans la comparaison systématique du Chapitre 3, qui ne sont ni prouvées ni discutées sont présentées en annexe.

Avant d'aborder ces chapitres, donnons dans la section suivante les rappels de quelques définitions et notations.

Définitions et notations

Notions générales

Un graphe simple non orienté $G = (V, E)$ est un ensemble fini de *sommets* V et un ensemble d'*arêtes* E. Une arête e de G est une paire, non ordonnée, de sommets distincts u et v, qu'on note $e = uv$. Dans ce cas on dit que u et v sont *voisins* ou *adjacents*, e est *incidente* à u et à v et que u et v sont les extrémités de e. Deux arêtes sont dites *incidentes* si elles ont une extrémité commune. Le nombre d'arêtes incidentes à un sommet v de G, qui est aussi le nombre de ses voisins, est appelé *degré* de v et noté $d_G(v)$ ou $d(v)$ s'il n'y a pas de risque de confusion. Un sommet v est *pendant* si $d(v) = 1$, et est dominant si $d(v) = n - 1$, où n est le nombre de sommets du graphe. La matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, où $a_{ij} = 1$ si $u_i u_j \in E$ et $a_{ij} = 0$ sinon, est appelée *matrice d'adjacence* de G. *L'ordre* d'un graphe G est le nombre de sommets $n = |V|$ de $G = (V, E)$. *La taille* de $G = (V, E)$ est le nombre de ses arêtes $m = |E|$.

Étant donné un graphe $G = (V, E)$, *la graphe complémentaire de* G, noté $\overline{G} = (V, \overline{E})$, est défini sur le même ensemble de sommets V et dans lequel deux sommets sont voisins si et seulement s'ils ne le sont pas dans G.

Une séquence de sommets $u_1, u_2, \cdots u_k$ est dite *chaîne* si $u_i u_{i+1}$ est une arête de G pour tout $i = 1, \cdots k - 1$ et $u_{i-1} \neq u_{i+1}$ pour tout $i = 2, \cdots k - 1$. *Un cycle* est une chaîne $u_1, u_2, \cdots u_k$ telle que $u_1 = u_k$. Un graphe G est dit *connexe* si toute paire de sommets de G est reliée par au moins une chaîne. La *longueur d'une chaîne* est le

nombre d'arêtes la composant. Étant donné deux sommets distincts u et v, une chaîne reliant u et v de longueur minimum est *une plus courte chaîne entre u et v. La distance* entre deux sommets u et v, notée $d(u, v)$, est la longueur d'une plus courte chaîne les reliant. *L'excentricité* d'un sommet v de G, notée $ecc(v)$, est le maximum des distances entre v et le reste des sommets de G, c'est-à-dire, $ecc(v) = \max_{u \in V} d(u, v)$. *La transmission* d'un sommet v d'un graphe G, notée $tr(v)$, est la somme des distances entre v et tous les autres sommets, c'est-à-dire, $tr(v) = \sum_{u \in V} d(u, v)$, et elle est dite *normalisée* si elle est divisée par $n - 1$, où n est l'ordre de G.

Sous-ensembles particuliers

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple et W un sous-ensemble de sommets de G. *Le sous-graphe de G induit par W* est le graphe $G_W = (W, E_W)$ où E_W désigne l'ensemble des arêtes de G ayant les deux extrémités dans W. Le graphe $H = (W, F)$ est *un sous-graphe partiel* de G si $F \subset E_W$. Il est dit *graphe partiel* de G si $W = V$.
Une clique d'un graphe G est un sous-graphe induit dans lequel toute paire de sommets est une arête. Un sous-ensemble de sommets W d'un graphe connexe G, est dit *déconnectant* si le sous-graphe induit G_{V-W} n'est pas connexe. De même un sous-ensemble d'arêtes F d'un graphe connexe $G = (V, E)$ est déconnectant si le graphe partiel $H = (V, E - F)$ n'est pas connexe. Un sous-ensemble de sommets S d'un graphe simple G est dit *stable* (ou *indépendant*) si le graphe induit par S, G_S, ne contient pas d'arêtes. Un sous-ensemble de sommets W d'un graphe simple G est dit *dominant* si tout sommet du graphe soit est dans W soit possède un voisin dans W.

Graphes particuliers

Un graphe complet d'ordre n, noté K_n, est un graphe dans lequel toute paire de sommets distincts est une arête. Un graphe simple est *régulier de degré k* si tous

ses sommets sont de degré k. Un graphe $G = (V, E)$ est dit *biparti* s'il existe une partition de V en deux stables, c'est-à-dire, il existe deux stables V_1 et V_2 de G tels que $V_1 \cup V_2 = V$ et $V_1 \cap V_2 = \phi$. Un graphe biparti est *équilibré* si $|V_1| - 1 \leq |V_2| \leq |V_1| + 1$, où $|M|$ désigne la cardinalité de l'ensemble M. *Un graphe biparti complet* est un graphe biparti dans lequel tout sommet d'un stable est relié à tous les sommets de l'autre stable. *Un arbre* $T = (V, E)$ est un graphe connexe sans cycle. *Un chemin* d'ordre n, noté P_n est un arbre constitué d'une seule chaîne. *Une étoile* est un arbre avec un sommet dominant. *Une comète* est un arbre composé d'une étoile et d'un chemin dont une extrémité est reliée à un des sommet de l'étoile. *Une double comète* est un arbre composé de deux étoiles reliées par un chemin. Un graphe simple est dit *unicyclique* s'il contient exactement un cycle. Si un graphe est connexe, il est unicyclique si et seulement si $n = m$, où n est l'ordre et m est la taille du graphe. Un graphe est un *cycle* s'il est régulier de degré 2. Il est dit *pair* ou *impair* selon la parité de son nombre de sommets. Un graphe est *planaire* si on peut le représenter dans un plan de telle sorte que deux arêtes quelconques se rencontrent au plus en leurs extrémités et donc ne se coupent pas.

Les invariants

Un invariant graphique est une fonction numérique d'un graphe dont la valeur ne depend ni de la numérotation des sommets ni de celle des arêtes du graphe. Le tableau ci-dessous contient la liste des invariants, ainsi que leurs définitions respectives, utilisés dans les comparaisons effectuées dans le cadre de la présente thèse. D'autres invariants sont cités dans cette thèse sans qu'ils soient considérés dans les différentes comparaisons. Dans ce cas leurs définitions sont données lors de leurs citations.

Tableau 1 – Définitions des invariants utilisés.

Δ	*Le degré maximum.*
δ	*Le degré minimum.*
d	*Le degré moyen.*
l	*La distance moyenne.*
D	*Le diamètre, le maximum des distances entre paires de sommets.*
r	*Le rayon, le minimum des excentricités.*
g	*La maille, la longueur du plus petit cycle d'un graphe.*
ecc	*L'excentricité moyenne.*
π	*La proximité, le minimum des transmissions normalisées.*
ρ	*L'éloignement, le maximum des transmissions normalisées.*
λ_1	*L'index (le rayon spectral), la plus grande des valeurs propres de la matrice d'adjacence d'un graphe.*
Ra	*L'indice de Randić d'un graphe* $G = (V, E)$, $Ra = \sum_{ij \in E} \frac{1}{\sqrt{d_i d_j}}$, *où* d_i *et* d_j *représentent les degrés respectifs des extrémités de l'arête* ij.
a	*La connectivité algébrique, la deuxième plus petite valeur propre du Laplacien* L *d'un graphe, qui est défini par :* $L_{ii} = -d(v_i)$ *et* $L_{ij} = 1$ $(i \neq j)$ *où* $d(v_i)$ *est le degré du sommet* v_i.
ν	*La connectivité (aux sommets), la cardinalité minimum d'un sous-ensemble de sommets déconnectant.*
κ	*La connectivité aux arêtes, la cardinalité minimum d'un sous-ensemble d'arêtes déconnectant.*
α	*Le nombre de stabilité, la cardinalité maximum d'un stable.*
β	*Le nombre de domination, la cardinalité minimum d'un sous-ensemble dominant.*
ω	*La cardinalité maximale d'une clique, le nombre de sommets dans la plus grande clique dans un graphe.*
χ	*Le nombre chromatique, le nombre minimum de couleurs qu'on peut affecter aux sommets tel que deux sommets de la même couleur ne soient jamais adjacents.*
μ	*La cardinalité maximale d'un couplage d'un graphe, le plus grand nombre d'arêtes disjointes.*

CHAPITRE 1 : INTELLIGENCE ARTIFICIELLE ET DÉCOUVERTE AUTOMATISÉE

La découverte scientifique automatisée (DSA), branche florissante de *l'intelligence artificielle*, s'est largement répandue dans les milieux scientifiques au fur et à mesure des progrès de la technologie informatique.

Tout comme l'intelligence artificielle, la découverte scientifique automatisée (DSA) a suscité des malentendus et peut assurément être interprétée de diverses façons. En effet, si chacun peut apprécier les capacités toujours croissantes des machines à effectuer des calculs numériques et des opérations symboliques en des temps toujours décroissants, l'idée que la machine peut détenir un brin d'intelligence provoque bien des questions et des craintes. On peut considérer que l'histoire de la découverte automatisée en intelligence artificielle a commencé avec *Newell, Shaw* et *Simon* en 1956. Depuis cette date de nombreux travaux ont été faits dans le domaine et touchent de plus en plus de thèmes : la médecine, la psychologie, la physique, la chimie, les mathématiques....

Dans ce travail, il sera essentiellement question de la découverte scientifique automatisée (*DSA*) en théorie des graphes. Par découverte scientifique automatisée (*DSA*), on entend les méthodes automatiques, généralement implémentées sous forme de systèmes experts, pour la découverte de résultats, souvent sous forme de conjectures, mais parfois accompagnés de preuves. En théorie des graphes, les expériences les plus réussies sont celles des systèmes *Graph, Graph Theorist, Graffiti* et, la plus récente, *AutoGraphiX* (première et deuxième versions).

1.1 L'Intelligence Artificielle au Fil du Temps

Le premier programme général d'intelligence artificielle, baptisé *Logic Theorist*, a été conçu par *Newell, Shaw* et *Simon* en 1956 [147, 150]. Manipulant un ensemble de théorèmes connus, *Logic Theorist* en déduit de nouveaux conformément aux trois principes suivants :

1. *Substitution :* Remplacer systématiquement une variable par une expression.
2. *Remplacement :* Remplacer une expression par une autre expression équivalente. Par exemple $P \Rightarrow R$ est équivalente à $\overline{P} \vee R$.
3. *Détachement :* Le principe du détachement se résume comme suit : étant donné deux énoncés A et B, si A est un théorème et que B est une conséquence de A, alors B est aussi un théorème.

Les concepteurs du *Logic Theorist* ne se sont pas limités à leur première oeuvre. En effet, se basant sur les résultats obtenus, *Newell, Shaw* et *Simon* [146, 148, 149, 151] ont mis au point le *General Problem Solver* en 1959. La principale nouveauté de ce dernier programme, comparé à son aîné, est que la méthode de résolution est entièrement *indépendante du problème résolu. General Problem Solver* offre la possibilité de résoudre différents types de problèmes sans modification dans le programme.

Avec leurs deux programmes, *Newell, Shaw* et *Simon* ont le mérite d'être les premiers à avoir prouvé qu'un programme informatique peut accomplir une tâche "intelligente".

Dans le cadre des tentatives de tracer un chemin "algorithmique" vers la découverte scientifique, les programmes *BACON* sont une expérience des plus notables. Ces programmes, dus à *Langley, Simon, Bradshaw* et *Zytkow* [126], principalement utilisés en physique et en chimie, font des recherches à partir de données numériques afin d'établir des relations entre deux ou plusieurs variables observées. Une de ces méthodes (la plus simple) se conforme aux règles suivantes :

- Si une variable est constante, une loi est établie.
- Si deux variables sont linéairement liées, une loi est établie.
- Si deux variables croissent simultanément ou décroissent simultanément, une troisième variable doit être considérée, le rapport des deux.
- Si une variable croît tandis qu'une autre décroît, on considère le produit des deux.

Avec ces deux dernières règles, le processus est répété jusqu'à l'obtention d'une constante ; puis on retrace les transformations (produits et/ou rapports) qui ont mené à la constante pour ainsi établir une loi. Les programmes *BACON* ont permis la redécouverte de quelques lois fondamentales telles que la 3^{eme} loi de *Kepler*, la loi de la gravitation universelle ou la loi des gaz parfaits. La simplicité des procédures *BACON* suggère que le processus de la découverte scientifique n'est pas nécessairement un processus complexe.

Avec l'essor qu'a connu le réseau Internet ces dernières années et la masse de bases de données qu'il contient, son utilisation dans la découverte scientifique est devenue impérative : il faut exploiter sa fluidité de communication et ses banques de données. *Swanson* et *Smalheiser* ont bien vu cela [172, 173] et ont construit leur programme *Arrowsmith*. Ce programme explore la base de données *MEDLINE* (accessible sur Internet) et découvre des relations en médecine. Partant du fait que les relations entre une première et une deuxième variable, puis celles entre la deuxième et une troisième ont fait l'objet d'études et d'analyses sans qu'on traite de celles entre la première et la troisième, le programme - après avoir découvert ce fait - suggère d'étudier les relations pouvant exister entre la première et la troisième. Cette approche simple a permis la découverte de relations jusque-là inconnues. L'approche *Arrowsmith* de la découverte scientifique n'aurait pas connu de succès si elle avait été créée il y a un siècle, et ce en raison du nombre peu élevé de publications scientifiques de l'époque. Par contre, de nos jours tout comme dans ceux à venir, avec le nombre sans cesse croissant d'articles scientifiques, l'apport d'*Arrowsmith* est considérable.

On reconnaît là un caractère contemporain du programme. En résumé, on peut dire que le programme de *Swanson* et *Smalheiser* met en évidence des informations déjà existantes mais difficiles à exploiter.

1.1.1 DSA en mathématiques

En 1956, les pionniers de l'intelligence artificielle *H. Simon et A. Newell* ont prédit que "dans une dizaine d'années, l'ordinateur va découvrir et démontrer un important théorème en mathématiques" [165]. Un demi-siècle plus tard, la prédiction ne s'est toujours pas réalisée (bien qu'une conjecture importante ouverte pendant 63 ans, à savoir que toutes les algèbres de *Robbins* sont booléennes, ait été démontrée pour la première fois par un programme dû à *McCune* [140] et que la preuve du célèbre théorème des 4 couleurs s'appuie fortement sur l'ordinateur), mais le nombre de chercheurs qui s'intéressent au domaine s'est considérablement accru. *C. E. Larson* [127] avance quatre motivations fondamentales pour la recherche de systèmes automatisés de découverte et preuve de théorèmes en mathématiques. La première (mathématique) est de savoir comment utiliser les machines pour faire progresser les mathématiques. La deuxième motivation (historique) est de situer différents progrès dans le temps, connaître qui les a réalisés ainsi que la vitesse de progression en mathématiques comparée à d'autres domaines. La troisième est que le succès dans la construction d'une machine avec une certaine habilité en mathématiques peut conduire à la construction de machines avec des habilités similaires, mais dans d'autres domaines. Une dernière motivation, le succès ou l'échec dans la construction d'une telle machine, peut aider sur le plan méthodologique les autres chercheurs pour la construction d'une machine avec certaines habilités, pas nécessairement en mathématiques.

En observant un mathématicien chercheur, on constate que ses activités les plus répétées sont : poser la conjecture qu'une proposition mathématique est vraie ou fausse ;

essayer de prouver ou de réfuter sa conjecture (ou celle d'autrui) ; définir de nouveaux concepts en fonction des besoins des conjectures et des preuves. En résumé, il s'agit des trois tâches suivantes : faire des conjectures, les prouver (pour en faire des théorèmes) ou les réfuter, et définir de nouveaux concepts. Ces dernières sont les habilités que doit posséder un système expert pour la découverte scientifique en mathématiques. À ce moment-là ces trois activités changent de noms pour devenir : *génération automatique de conjectures, preuve automatique de théorèmes* et *formation automatique de concepts.*

Dans ce cadre, plusieurs systèmes ont été mis au point abordant tous au moins la tâche de génération de conjectures, mais en utilisant des méthodes variées et en se basant sur des critères différents. Parmi ces systèmes, on peut citer dans l'ordre chronologique :

AM et Eurisko

Au milieu des années 70, *D. Lenat* [133, 134, 135] a publié la première étude sur un système qui fait des conjectures en mathématiques de façon automatique. Il l'a appelé *AM* pour *"Automated Mathematician"*. Pour présenter son système en une seule phrase, *Lenat* dit : "AM est un programme informatique qui définit de nouveaux concepts, les explore, utilise une base de données pour détecter des relations entre ces concepts et les formule sous forme de conjectures". Cette découverte en chaîne de concepts mathématiques est régie par deux principes fondamentaux :

- Une stratégie de priorité pour les tâches à accomplir (les ensembles de concepts à explorer).
- Un noyau dont le rôle est d'indiquer les méthodes (heuristiques), *a priori*, adéquates pour une exploration donnée.

Lenat a effectué la première avancée significative en découverte scientifique automatisée dans le domaine des mathématiques avec son programme. Entre autre, *AM* a pu redécouvrir le concept de nombre premier. Il a donné quelques propositions mathématiques, incluant certains théorèmes et conjectures connus comme *le théorème*

fondamental de l'arithmétique et *la conjecture de Goldbach.* Cependant il ne semble pas avoir obtenu de résultats vraiment nouveaux.

Dans le but de contourner les difficultés rencontrées par *AM*, *Lenat* [131, 132] a mis au point *Eurisko.* Ce dernier ne diffère pas de son aîné sur le plan des principes. La nouveauté consiste dans l'introduction d'un procédé permettant de modifier ses heuristiques et méta-heuristiques afin d'améliorer ses performances. Un autre fait nouveau est l'élargissement du domaine d'utilisation du système qui touche cette fois d'autres disciplines comme la conception de circuits électriques. Historiquement, il est le premier programme a avoir fait preuve de ce qui ressemble vraiment à de la créativité, et dans des domaines différents.

Cyrano

Après une séries d'expériences sur une réimplémentation, plus ou moins directe, des systèmes de *Lenat, AM* et *Eurisko*, *K. Haase* a mis au point *Cyrano* [99, 100, 101]. Il caractérise ses domaines uniquement en termes de catégories et d'opérations. De nouveaux concepts sont formés par des combinaisons de ces catégories et de ces opérations. *Typical*, la composante "déductive" de *Cyrano*, construit des ensembles de déductions, qui apparaissent intéressantes, concernant des définitions (concepts) fournies par l'usager ou formées par *Cyrano* lui même. Le programme est conçu pour supporter les descriptions effectives de nouveaux concepts ainsi que l'explication de leurs origines respectives. Une idée originale dans la conception de *Cyrano*, est la mise au point d'un mode interactif.

Le système de Bagaï *et al.*

Ce programme a été conçu et réalisé par *R. Bagaï, V. Shanbhogue, J. M. Zytkow* et *S. C. Chou* [10]. Il construit des propositions mathématiques en géométrie plane, mais ne les fournit que lorsqu'il trouve leur preuves. Ce système génère des situations géométriques, construit des conjectures à partir de ces situations, essaie de les démontrer en les ramenant à des systèmes d'équations linéaires et quadratiques résolus

par des techniques telles que les bases de *Groebner*. A l'issue de cette troisième étape, le programme ne garde que les conjectures prouvées : les théorèmes. Dans l'article qui présente ce système, les auteurs donnent uniquement deux exemples de nouveaux résultats entièrement attribués à leur programme.

HR de Colton *et al.*

Le programme *HR*, de *S. Colton, A. Bundy* et *T. Walsh* [52, 53, 54], invente des définitions dans l'algèbre finie, comme la théorie des groupes et des anneaux, et dans d'autres domaines en mathématiques pures, comme la théorie des graphes et celle des nombres. Se conformant à un certain nombre de règles de "production", il construit de nouveaux concepts à partir de ceux déjà connus, et à chaque concept, il associe une pondération qui représente son importance. La stratégie adoptée, à un instant donné, est la construction d'un nouveau concept en utilisant les plus importants (selon les pondérations) parmi ceux déjà disponibles. Lors de la construction de nouvelles définitions, certains faits apparaissent empiriquement comme des évidences, *HR* les détecte et les énonce comme des conjectures. C'est donc *un générateur de conjectures*. *HR* est couplé avec un autre programme, *OTTER* dû à *McCune* [141, 139], pour prouver ses conjectures. Si *OTTER* échoue dans sa tentative de fournir la preuve d'une conjecture, il fait appel à une autre composante, *MACE*, dont la fonction est la recherche de contre-exemples pour les conjectures non démontrées. Si un contre-exemple est trouvé, la conjecture est rejetée (réfutée), sinon, l'échec de *MACE* est perçu comme un renforcement de la probabilité que la conjecture soit vraie. *HR* montre comment une théorie peut être construite, uniquement, à partir des axiomes d'une algèbre, et comment la recherche heuristique peut faire progresser la théorie.

1.1.2 DSA en théorie des graphes

L'ordinateur est beaucoup utilisé en théorie des graphes pour déterminer les caractéristiques d'un graphe donné, comme le nombre ou l'indice chromatiques, le nombre

de stabilité, le diamètre et le rayon, les valeurs propres de la matrice d'adjacence ou du Laplacien etc.... On l'utilise aussi pour la résolution d'un problème particulier sur un graphe comme la question de trouver les plus courts chemins (dans ses différentes variantes), déterminer l'arbre de poids maximum ou minimum, évaluer la valeur d'un flot maximum etc.... Pour la résolution de tels problèmes, un grand nombre d'algorithmes ont été conçus se basant sur des résultats théoriques spécifiques aux problèmes. Dans ce genre d'applications, les chercheurs s'intéressent essentiellement au problème de trouver des algorithmes assez rapide pour traiter, en un temps raisonnable, les problèmes auxquels les praticiens et autres utilisateurs sont confrontés. Mais de nos jours l'utilisation de l'ordinateur en théorie des graphes ne traite pas uniquement ce genre d'applications. Elle contribue aussi à repousser les limites du savoir (en théorie des graphes), grâce à l'obtention de conjectures et éventuellement de leurs preuves et/ou réfutations (y compris de celles dont l'existence n'est pas nécessairement due à l'ordinateur).

Déterminer les propriétés d'un graphe ou d'une classe de graphes intéresse aussi bien un chercheur en théorie des graphes qu'un simple utilisateur. Parmi les propriétés les plus recherchées sont celles exprimées par des invariants, qui nécessitent donc l'évaluation de ces invariants. Pour un graphe spécifié, ou même une classe de graphes, le calcul d'invariants se fait assez simplement en faisant appel à une panoplie d'algorithmes. Toutefois, pour un grand nombre de graphes et de classes de graphes, l'évaluation correcte de nombreux invariants est pratiquement très difficile, voire impossible en un temps raisonable ; d'où la nécessité de faire appel aux approximations. Ces dernières s'expriment généralement par des bornes inférieures ou supérieures ou les deux bornes (intervalles) à la fois. Une borne est donnée par une fonction d'un ou plusieurs autres invariants connus (dont l'évaluation est déjà faite ou simple à faire). C'est dans ce but bien précis que toute une série de systèmes experts ont été implémentés, avec plus ou moins de succès, mais le plus souvent avec un apport

considérable pour la recherche dans le domaine. Parmi les systèmes les plus connus en théorie des graphes, on peut citer *Graph, Cabri-Graphes, Graph Theorist, Ingrid, Graffiti* et *AutoGraphiX (AGX).*

Graph

Graph, construit par *Cvetković* et son groupe entre 1980 et 1984 [55, 56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 65], est le premier système conçu pour la collaboration entre l'homme et la machine dans la recherche en théorie des graphes. Il a été exploité pour faire des conjectures et démontrer des théorèmes, particulièrement en théorie algébrique des graphes. Ce système comprend trois composantes : bibliographique (*BIBLI*), algorithmique (*ALGOR*) et de démonstration automatique de théorèmes (*THEOR*).

La composante *BIBLI* de *Graph* est conçue pour la recherche bibliographique. Elle permet de stocker et de retrouver des informations concernant des articles, livres, rapports et tout autre type de documents.

La littérature de la théorie des graphes est très vaste, dispersée et diversifiée, elle se développe de façon indépendante d'un groupe de recherche à l'autre, ce qui fait la diversité de sa terminologie. Par exemple, ce qu'est l'indice de Wiener d'un arbre chez *Dobrynin* [70], est la distance d'un arbre dans [71], c'est aussi la somme des distances entre toutes les paires de sommets d'un arbre pour la plupart des spécialistes de la théorie des graphes. La dépendance entre les concepts fait qu'un même résultat peut prendre différentes formes. Par exemple on peut considérer l'indice de *Wiener* ou la distance moyenne entre paires de sommets, ou encore les résultats dans un graphe G ou son complémentaire $\overline{G}$. Ce ne sont là que quelques unes des raisons d'être de *BIBLI.*

La partie *ALGOR* de *Graph* est celle directement reliée à la génération de conjectures. Son rôle est d'aider à examiner (rapidement), réfuter et générer des conjectures en

théorie des graphes. *ALGOR* exécute, sur les graphes, une série d'opérations comme évaluer et afficher des valeurs associées aux graphes, générer des graphes particuliers ou aléatoires, examiner les propriétés des graphes ....

La composante *THEOR* est destinée à la démonstration automatique ou assistée des théorèmes en théorie des graphes. *THEOR* reçoit une proposition en termes symboliques pour laquelle il doit construire une démonstration en coordination avec l'usager. La preuve est représentée sous forme d'un arbre. La proposition reçue est décomposée de façon récurrente en sous-propositions simples, jusqu'à ce qu'aucune décomposition ne soit plus possible. Ainsi, on génère l'arbre de la preuve dont les sommets représentent les sous-propositions, et qui est stocké dans le système. La racine de l'arbre représente la (sous) proposition courante à démontrer. La preuve est finie une fois que toutes les sous-propositions sont prouvées. Lors de la preuve, *THEOR* exécute un ensemble de tâches qui sont décrites dans [62]. La preuve automatique de propositions en théorie des graphes est longue et malaisée ; seules des propositions simples ont pu être démontrées entièrement automatiquement.

Graph Theorist

Comme décrit par *S. Epstein* [73, 74, 75], son concepteur, le programme *GT (Graph Theorist)* définit des concepts, construit des conjectures et démontre des théorèmes en théorie des graphes. Si on fournit à *GT* le concept de graphe, il est capable de réinventer certaines classes de graphes définies par des propriétés telles que les graphes acycliques, connexes, les étoiles, les arbres et autres. De plus, si on lui fournit des concepts définissants des propriétés de graphes, *GT* est capable de construire des conjectures comme :
Un graphe est un arbre si et seulement s'il est acyclique et connexe (ce qui est bien sûr assez élémentaire).

Le programme d'*Epstein* a montré la possibilité de faire de la découverte automatisée en mathématiques se basant sur les deux principes d'*induction* et de *déduction.* Ceci

est rendu possible par la représentation des propriétés des graphes, décrite dans la thèse de *S. Epstein* [72]. Chaque propriété est représentée par un triplet (f, S, σ), un constructeur f, une base d'états (graphes) élémentaires et un ensemble de contraintes, σ, sur le constructeur. Le constructeur et l'ensemble des contraintes donnent les détails de la construction récursive de graphes, avec des propriétés données, à partir d'un élément simple de la base.

GT fonctionne en accomplissant les tâches suivantes : (*i*) générer des exemples de graphes ayant certaines propriétés, (*ii*) voir si une propriété en entraîne une autre, (*iii*) voir si deux propriétés sont équivalentes, (*iv*) examiner la fusion de deux propriétés, (*v*) généraliser un concept et (*vi*) différencier (particulariser) un concept. L'accomplissement des tâches se fait dans un ordre (agenda) régi par les règles suivantes :

- Si une propriété possède peu d'exemples dans la base de données, en générer d'autres immédiatement.
- Deux propriétés sont prioritaires si leurs bases respectives sont similaires (deux bases sont similaires si leur intersection n'est pas vide).
- Effectuer (*v*) et (*vi*) uniquement sur un concept jugé intéressant par l'utilisateur.
- Avant de tenter de prouver une conjecture, chercher d'abord s'il n'y a pas de contre-exemple parmi les exemples générés.

Graffiti

Ce programme a été conçu par *S. Fajtlowicz* en 1986 [76, 77, 78], et développé avec *E. DeLaVina* depuis 1990 [67, 79, 80, 81]. *Fajtlowicz* a donné une première description de *Graffiti* dans une séries d'articles sous le titre de *"On Conjectures of Graffiti"*. Les conjectures de *Graffiti* ont attiré l'attention de plusieurs chercheurs en théorie des graphes, parmi lesquels *N. Alon, B. Bollobas, F. Chung, P. Erdos, L. Lovasz,* et *P. Seymour, etc....*

Étant donné un ensemble d'invariants de graphes, comme l'ordre, la taille, le dia-

mètre, le nombre chromatique et le nombre de stabilité, *Graffiti* utilise une base de données de graphes pour détecter empiriquement d'éventuelles inégalités linéaires entre les invariants. Les formes générales (des formes plus générales peuvent être obtenues dans les versions plus récentes) de ces inégalités sont comme suit :

- $a(G) \leq b(G)$
- $a(G) \leq b(G) + c(G)$
- $a(G) + b(G) \leq c(G) + d(G)$

où $a(G), b(G), c(G)$ et $d(G)$ sont des invariants d'un graphe G.

Comme exemple de ces conjectures, on peut citer celle qui est connue par la suite sous le nom de théorème de *Chung* [48] : $\bar{l}(G) \leq \alpha(G)$, où $\bar{l}(G)$ désigne la distance moyenne et $\alpha(G)$ le nombre de stabilité d'un graphe connexe G. Une fois les inégalités fournies par *Graffiti*, elles sont soumises à une suite de tests. On regarde si elles ne peuvent pas être déduites directement de résultats déjà connus, dans ce cas elles sont rejetées. Aussi, *Fajtlowicz* tente de les démontrer, s'il y arrive facilement pour une conjecture, celle-ci est rejetée. Seules les conjectures qui passent ces tests sont répertoriées dans le recueil *"Written on the Wall"* [81], disponible sur Internet. Si un chercheur trouve un contre-exemple à une conjecture, celle-ci est réfutée et le ou les graphes constituants le ou les contre-exemples sont ajoutés à la base de données de *Graffiti*.

Récemment, deux heuristiques, *Beagle* et *Dalmatian*, ont été ajoutées à *Graffiti* dans le but de réduire le temps considérable que celui-ci passait pour tester les conjectures avec sa base de données, et surtout d'éviter l'accumulation de conjectures fausses ou triviales.

Beagle est une heuristique qui rejette les résultats triviaux et évidents. *Dalmatian* est une autre heuristique qui vérifie si une conjecture (actuelle) donne des informations plus précises que celles fournies par d'autres conjectures déjà trouvées par *Graffiti*,

dans le cas contraire elle est rejetée. Pour l'application de l'heuristique sur une conjecture du type $p(G) \leq q(G)$, *Graffiti* collecte toutes les conjectures déjà trouvées, et qui sont sous la forme $p(G) \leq r_i(G)$, pour un certain ensemble d'indices i. Pour que l'heuristique retienne la conjecture ($p(G) \leq q(G)$), il doit y avoir dans la base de données de *Graffiti* au moins un graphe H pour lequel, $p(H) < r_i(H)$ pour tout indice i, c'est-à-dire, $q(G)$ est la meilleure borne supérieure disponible.

Ingrid

Ingrid est un programme qui manipule les invariants graphiques dans le but de découvrir d'éventuelles relations entre eux par petits groupes. Il a été mis au point par *R. Dutton, C. Brigham* et *F.Gomez* [28, 29, 30, 31, 32]. Il utilise une base de données de 36 invariants graphiques décrits symboliquement par 350 théorèmes, et se base sur un ensemble d'environ 1200 règles de chaînage pour détecter par transitivité les relations pouvant exister entre les 36 invariants. Le but d'*Ingrid* est de déterminer un intervalle contenant un certain invariant, c'est-à-dire, donner une borne inférieure, supérieure ou les deux à la fois sur un invariant en fonction d'autres invariants.

Cabri-Graphes

Cabri-Graphes est un outil interactif, construit par une équipe de chercheurs de *Grenoble*, [14, 15, 43] qui permet de visualiser et de manipuler les graphes et d'évaluer leurs propriétés et leurs principaux invariants. L'usager construit interactivement des graphes, les manipule avec la simplicité du support papier-crayon, et la puissance de l'ordinateur, sélectionne les algorithmes et les transformations de graphes à appliquer sur un graphe donné. Ces manipulations permettent de tester des conjectures, soit pour les invalider, soit pour apporter un support à leurs démonstrations.

1.2 Quelques Techniques de la Découverte

1.2.1 La recherche à voisinage variable

La recherche à voisinage variable (RVV, VNS : variable neighborhood search) est une méta-heuristique récente basée sur l'idée d'un changement systématique de voisinage, à la fois dans une phase de descente et dans une phase d'exploration. La *RVV*, due à *P. Hansen* et *N. Mladenović* [108, 109, 110, 144], a connu une utilisation aussi réussie que diversifiée [109]. C'est la méthode utilisée par le système *AutoGraphiX* dans la recherche de graphes extrêmes [41]. Les principales qualités de la *RVV* sont la simplicité, la cohérence, l'efficacité et la robustesse. Le schéma général de la *RVV* peut se résumer comme suit :

Initialisation :
Sélectionner l'ensemble des structures de voisinages N_k, $k = 1, \cdots k_{max}$;
déterminer une solution initiale x ;
choisir une condition d'arrêt.

Itération :
Répéter les étapes suivantes jusqu'à satisfaction de la condition d'arrêt.
(1) Poser $k = 1$;
(2) Tant que $k < k_{max}$, itérer :
- *Perturbation :* générer un point x' dans le voisinage $N_k(x)$.
- *Recherche locale :* appliquer une méthode de recherche locale avec x' comme solution initiale. Soit x'' l'optimum local ainsi obtenu.
- *Déplacement ou continuation :* si l'optimum local est meilleur que la meilleure solution connue, recentrer la recherche avec $x \leftarrow x''$ en allant à (1), sinon $k \leftarrow k + 1$.

Pour résoudre un problème particulier suivant le schéma de base d'une *RVV*, on a besoin de bien définir essentiellement les deux points suivants :

La structure de voisinage :
Un moyen simple pour obtenir un ensemble de structures de voisinage est de considérer un mouvement élémentaire et de définir $N_k(x)$ comme l'ensemble des solutions obtenues en appliquant k tels mouvements à x (sans mouvements inverses).

Recherche locale :
En principe, toute méthode de recherche locale, peut être utilisée. Un schéma général d'une heuristique de recherche locale peut être le suivant :

Initialisation :
Sélectionner une structure de voisinage N qui sera utilisée pour la recherche ;
trouver une solution initiale x ;

Itération :
Répéter les étapes suivantes jusqu'à ce que la condition d'arrêt soit satisfaite :
(a) Trouver le meilleur voisin $x' \in N(x)$ de x.
(b) Si x' n'est pas meilleur que x, fin.
Sinon, poser $x = x'$ et retour en (a).

Cette recherche n'utilise qu'une seule structure de voisinage. On peut cependant rendre, *a priori*, la descente plus performante, notamment en utilisant plusieurs voisinages. Ce qui peut se faire selon le schéma de base pour *la descente à voisinage variable (DVV)* :

Initialisation :
Sélectionner un ensemble de structures de voisinage V_l, $l = 1, \cdots l_{max}$, qui sera utilisé pour la descente ; déterminer une solution initiale x ;

Itération :
Répéter les étapes suivantes jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'amélioration :
(1) $l \leftarrow 1$;
(2) répéter les étapes ci-dessous jusqu'à $l = l_{max}$:
- explorer le voisinage $V_l(x)$ et trouver le meilleur $x' \in V_l(x)$;
- si x' est meilleur que x, poser $x \leftarrow x'$ et aller en (1) ; sinon, $l \leftarrow l + 1$.

1.2.2 La Génération automatique de relations

En Géométrie

Il existe essentiellement trois approches pour le raisonnement automatique en géométrie : *déduction synthétique* [49, 93, 123, 145, 160], *calcul algébrique* [45, 121, 177], *invariants géométriques* [46, 116, 178]. Pour d'autres travaux dans le domaine se référer à [120, 176]. Dans le cadre de ce travail, on se limite à une brève présentation de la méthode de *Chou et al.* [47]. Se basant sur les travaux de *Gallaire et al.* [92], *Chou, Gao* et *Zhang* [47] ont développé une base de données géométrique *déductive* qui, en l'explorant, permet la découverte et la démonstration de résultats en géométrie. Ils ont développé également un programme d'exploration automatique de cette base. Le programme peut trouver toutes les propriétés d'une configuration donnée et relativement à un ensemble de règles et d'axiomes géométriques. Les points forts de cette méthode peuvent se résumer en :

• l'utilisation d'une base de données structurée en exploitant des propriétés fondamentales comme la transitivité et la symétrie ;

• l'utilisation des structures mathématiques telles les suites ou les classes d'équivalence pour exprimer certains faits des données ;

• une stratégie de recherche basée sur les données (contrairement à la stratégie traditionnelle qui est basée sur les règles) dans laquelle une nouvelle liste de données est retenue. Le programme cherche un ensemble de règles, pour chacune de ces nouvelles données. Cette stratégie élimine automatiquement la possibilité de retrouver le même résultat plusieurs fois.

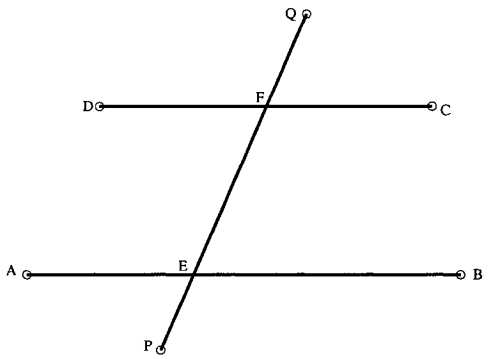


Figure 1.1 – Situation géométrique illustrant une règle

Comme exemple de règle utilisée dans ce programme, on cite, pour la configuration de la Figure 1.1 :

$$AB \parallel CD \iff \angle[AB, PQ] = \angle[CD, PQ]$$

où $\angle[S, T]$ est l'angle formé par les deux segments S et T dans l'ordre et dans le sens trigonométrique.

Les modèles utilisés par le programme sont des diagrammes numériques exacts (comme c'est le cas dans la majorité des tentatives antérieures pour l'automatisation de la démonstration des théorèmes en géométrie). La nouveauté est qu'un diagramme est généré automatiquement (et non par l'usager) en utilisant une suite d'opérations constructives du type :

• Considérer un point quelconque.

- Considérer un point quelconque sur une droite.
- Considérer le point d'intersection de deux droites.
- Considérer le point d'intersection d'une droite et d'un cercle.

Par exemple la Figure 1.2 est construite comme suit :
Considérer trois points A, B et C ; considérer D, le point intersection de la droite passant par A et parallèle au segment BC et de la droite passant par C et parallèle au segment AB ; considérer O, le point d'intersection des segments AC et BD.

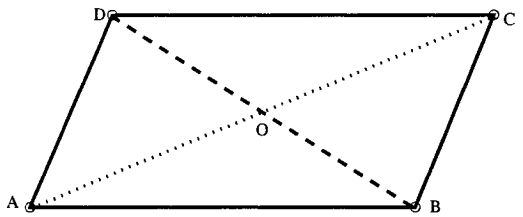


Figure 1.2 – Exemple de situation géométrique

Chou et al. ont exploité les propriétés des données pour les représenter sous forme de structures permettant une réduction considérable du volume des bases de données sans perdre de l'information. Ces structures obéissent aux trois principes fondamentaux suivants :

- Utilisation d'une forme canonique pour les attributs.
- Utilisation des classes d'équivalence pour la représentation de certains attributs.
- Utilisation d'un élément représentatif pour chaque classe d'équivalence.

Lorsqu'un résultat R est atteint, il est toujours exprimé sous forme d'une proposition simple C conséquence d'un ensemble de propositions simples ou composées $P_1, \cdots, P_k$, c'est-à-dire,

$$(R): \quad P_1, P_2, \cdots, P_k \Longrightarrow C$$

Pour imprimer ce résultat, donc générer la preuve, on imprime d'abord C. Pour chaque P_i, si la proposition est simple, elle est imprimée et on recherche dans la

base de données la première proposition qui implique P_i. Si P_i est composée, on doit trouver une proposition simple conséquence de P_i et pertinente dans la déduction de R. On applique cette procédure à toutes les propositions P_i intervenant dans la déduction de R. Une lecture inverse de ce processus nous permet de comprendre et de construire la preuve.

La méthode LLL

Lenstra, Lenstra et Lovász [136] ont proposé la méthode *LLL* pour la résolution du problème suivant : étant donné un polynôme non nul $P \in Z[X]$, trouver sa décomposition en facteurs irréductibles dans $Z[X]$, où $Z[X]$ est l'ensemble des polynômes à une indéterminée avec des coefficients entiers. La complexité de l'algorithme est de $O(n^{12}+n^9(log|P|)^3)$ où n est le degré du polynôme P et $|P| = |\sum_i a_i X_i| = (\sum_i a_i^2)^{1/2}$. L'algorithme fonctionne comme suit : en premier lieu, on cherche, pour un nombre premier relativement petit p, un facteur $p-$adique irréductible R d'un polynôme P avec une certaine précision. Dans cette première étape, on utilise l'algorithme de *Berlekamp* [122] combiné avec le lemme de *Hensel* [1]. Ensuite, on cherche un polynôme irréductible R_0 de $Z[X]$ divisible par R. On itère jusqu'à l'obtention de tous les facteurs de P. Les détails de l'algorithme sont présentés dans [136].

La factorisation des polynômes en temps polynomial est l'application originale [136] de la méthode *LLL*. Après cette application, l'algorithme, avec des adaptations appropriées, a connu une large utilisation en théorie des nombres comme trouver le terme général d'une suite à valeurs entières [50, 156, 157], calculer le noyau et l'image d'une matrice à valeurs entières [50], trouver le polynôme minimal pour une valeur réelle [50]. Comme exemple d'utilisation de la méthode *LLL*, on présente ici son application dans la recherche du terme général d'une suite $P-$récurrente, c'est-à-dire, une suite (a_n) qui vérifie :

$$a_n P_0(n) = a_{n-1} P_1(n) + a_{n-2} P_2(n) + \cdots + a_{n-k} P_k(n)$$

où les $P_i(n)$, $0 \leq i \leq k$, sont des polynômes à coefficients rationnels. La procédure est la suivante :

(1) On teste si la suite est $P-$récurrente. Si oui aller en (2), sinon arrêter.

(2) On calcule plusieurs centaines de termes de la récurrence (en pratique au moins 200).

(3) On construit une série $S(z)$ avec les termes calculés.

(4) On évalue $S(z)$ aux points $1/m, 1/(m+1), 1/(m+2), \cdots$ (en pratique $m = 100$ et le nombre de termes est 12)

(5) On appelle la procédure "algdep" de Pari-GP [13] avec les 12 valeurs trouvées.

(6) On teste avec les polynômes de degré $2, 3, 4, \cdots$ (en pratique les degrés 2 à 8 sont suffisants)

(7) On garde les bons polynômes, on pose la variable comme étant t.

(8) On identifie les coefficients de même degré et on calcule le polynôme d'interpolation en t avec la méthode de Newton.

(9) On substitue $t = 1/z$ dans l'expression trouvée et on résout (si le degré de l'expression le permet).

A l'issue de l'étape (1), qui se fait à l'aide de beaucoup de programmes comme *Maple* [163], on obtient une suite récurrente qu'on utilise en (2). A l'aide du même programme, on peut calculer une fonction génératrice $S(z)$, c'est-à-dire, l'étape (3). Ainsi aux étapes (1) et (2), on utilise la méthode *LLL* programmée dans *Maple*, par exemple. La méthode *LLL* intervient encore une fois à l'étape (5) implémentée dans la composante *algdep* de *Pari-GP* : pour cette étape les performances de *Pari-GP* sont largement supérieures à celles de *Maple*.

Cet algorithme dû à *Plouffe* [156] est testé sur toutes les suites de nombres entiers de l'ouvrage de *Plouffe* et *Sloane* [157].

La méthode *LLL* a connu plusieurs autres applications, par exemple, *Lenstra* [137] l'a utilisée pour la programmation en nombres entiers, *Shamir* [164], *Odlyzko* [154] et *Hastad* [114] l'ont utilisée dans des applications en cryptographie, *Sugihara* [171] dans la représentation des objets géométriques.

Relations entières

Étant donné un vecteur réel $a \in R^n$, on dit qu'un vecteur non nul $c \in Z^n$ est une relation entière pour a si :

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_n a_n = 0$$

Le problème de trouver une relation entière pour un vecteur réel donné a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche (voir [115] pour une revue) dont les plus importants peuvent être répartis en deux groupes.

Le premier groupe contient les méthodes basées sur l'algorithme *LLL* de [136]. Ce dernier a connu plusieurs applications dont celle présentée ci-dessus et d'autres peuvent être trouvées dans [22, 23, 24, 25, 26, 113].

Le deuxième groupe contient les méthodes basées sur l'algorithme *PSLQ* de [86, 87, 88]. Cet algorithme utilise une procédure de réduction de matrices numériquement stables éliminant ainsi les difficultés dans les calculs. Une caractéristique propre à l'algorithme est qu'en plus du fait qu'il fournit une relation entière si elle existe, il donne une borne inférieure sur la norme euclidienne [11, 12] d'une relation entière. Cette méthode a permis la découverte de plusieurs nouvelles identités comme :

$$\pi = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{16^i} \left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6} \right),$$

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}(\ln x)^5}{(1-x)^5} dx = \frac{5}{24} \pi^2 (3\pi^4 - 28\pi^2 - 24).$$

Pour une description détaillée de la méthode *PSLQ* voir [86, 87, 88], disponibles sur Internet à l'adresse *http ://www.nas.nasa.gov/Research/Reports/.*

1.3 La Recherche Automatique de Conjectures

Les systèmes experts évoqués dans ce travail utilisent différentes approches pour la découverte de résultats et de conjectures. Dans cette partie, on s'intéresse à ce sujet, mais pour ne parler que des approches développées dans *AGX*. On a déjà vu qu'en premier lieu *AutoGraphiX* recherche des graphes extrêmes relativement à une fonction d'invariants donnée. Il fait la recherche de conjectures en analysant de façon automatique l'ensemble de graphes obtenus à la première étape. Pour la recherche automatique de conjectures, *AutoGraphiX* utilise trois méthodes :

1.3.1 La méthode numérique

Cette méthode consiste en la recherche de relations en explorant une base de données. Il s'agit, plus précisément, de trouver des relations algébriques reliants un sous-ensemble de variables (pas nécessairement toutes les variables considérées) et vérifiées par toutes les observations. Cette méthode, telle qu'utilisée dans *AGX*, fait appel à un algorithme polynomial qui se base sur des résultats d'algèbre linéaire.

L'algorithme utilisé dans cette méthode peut se résumer comme suit :
On considère une matrice de données $X_{m\times n}$, m observations de n variables, et le vecteur des moyennes des colonnes $\mu = \frac{1}{m} X^t_{m,n} \cdot 1_m$, où 1_m est le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1. Le but est de trouver des relations affines du type

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b,$$

en suivant les étapes ci-dessous :

(1) Centrer les variables avec $Y = X - 1_m\mu^t$, ce qui transforme le problème de trouver des relations affines en celui de trouver des relations linéaires.

(2) Calculer la matrice des variances-covariances $V = Y^tY$.

(3) Diagonaliser V, soit V' la matrice diagonale semblable à V. Les $rg(V')$ (rang de la matrice V') lignes non nulles de V' correspondent aux variables indépendantes et les $n - rg(V')$ lignes nulles correspondent aux variables liées qui s'expriment en fonction des premières. Les relations forment une base du noyau de V.

(4) Utiliser les variables d'origine pour exprimer les relation affines.

L'algorithme, dont la complexité est de $O(n^3)$, a été testé pour retrouver des relations connues dans divers domaines comme la troisième loi de *Kepler*, la loi des gaz parfaits, la loi de la gravitation universelle de *Newton* et la loi d'Ohm. En théorie des graphes de nouveaux résultats ont été trouvés, comme :

Théorème 1 ([35]) :

Pour tout arbre de nombre de stabilité α, de taille m, de diamètre D, de rayon r et ayant n_1 sommets pendants,

$$\alpha \leq \frac{1}{2}(m + n_1 + D - 2r).$$

Théorème 2 ([35]) :

Pour tout arbre de nombre de stabilité α, d'ordre n, de taille m, de dimètre D, de rayon r et ayant n_1 sommets pendants,

$$\alpha \geq \frac{1}{2}\left(m + n_1 + D - 2r - \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor\right).$$

1.3.2 La méthode algébrique

Cette méthode est inspirée de certains aspects du raisonnement humain. Elle consiste à identifier les familles auxquelles appartiennent les graphes, supposées extrêmes, trouvés par *AGX*. Cette étape se fait en examinant les propriétés communes aux graphes obtenus. Le but est de déduire une expression *analytique* de la fonction objectif ne dépendant que des invariants utilisés. Il s'agit donc de caractériser un ensemble de points (graphes) dans un espace dont la dimension est égale au nombre d'invariants utilisés. Il a été constaté lors de l'application de cette méthode qu'en général un ensemble assez restreint suffit pour caractériser les graphes extrêmes. Pour certaines de ces familles (les étoiles, chemins, cycles ....), dites simples, il est possible de caractériser entièrement un graphe par son ordre. Dans ce cas, il est en général possible de définir un invariant par une expression algébrique simple avec un seul paramètre, en général n. La première conjecture d'*AGX* obtenue avec cette méthode est :

Conjecture 1 :
Pour tout graphe connexe d'ordre n, de nombre chromatique χ et d'indice de Randić Ra,

$$Ra \geq \frac{\chi - 2}{2} + \frac{1}{\sqrt{n-1}}(\sqrt{\chi - 1} + n - \chi).$$

Les graphes pour lesquels la borne est atteinte ont tous la même structure et sont entièrement définis par n et χ. En effet, un tel graphe est composé d'une clique de cardinalité χ et de $n - \chi$ sommets pendants tous connectés au même sommet de la clique, c'est-à-dire, un *ananas* dont la clique est sur χ sommets. Donc une formule analytique de Ra en fonction de n et χ, pour cette famille de graphes, représente l'expression de la borne inférieure pour l'indice de Randić. C'est de cette façon qu'est obtenue la conjecture.

La méthode a été appliquée pour essayer de resserrer les 12 premières conjectures de *Graffiti* dont les invariants étaient disponible sur *AGX*. Ce dernier a renforcé automatiquement 7 conjectures. Il s'est limité à donner des graphes "extrêmes" pour 3 des conjectures. Il a réussi à trouver un contre-exemple pour une conjecture et n'a rien trouvé concernant une autre.

1.3.3 La méthode géométrique

Cette méthode est basée sur un principe simple ; il s'agit de trouver l'enveloppe convexe d'un ensemble de graphes représentés dans l'espace des invariants. L'enveloppe convexe est donnée sous forme d'inégalités linéaires respectées par tous les graphes considérés. La méthode telle qu'utilisée dans *AGX* considère un ensemble de graphes extrêmes relativement à un invariant ou une combinaison d'invariants, disons $I(G)$, et par la suite déduire, à partir des inégalités linéaires, des résultats de la forme :
Si G est un graphe et $I(G)$ un invariant, alors $I_1(G) \leq I(G) \leq I_2(G)$, où $I_1(G)$ et $I_2(G)$ sont deux invariants et/ou combinaisons d'invariants.
Les résultats obtenus par cette méthode sont peu nombreux et il est difficile de discriminer entre eux ; les auteurs d'*AGX* ne l'ont que peu explorée, comparée aux deux autres.

1.4 Différentes Formes de Résultats en Théorie des Graphes

Dans cette section, on discutera des multiples facettes sous lesquelles peut se présenter un résultat en théorie des graphes. Une classification des résultats et conjectures en théorie des graphes est présentée en détails dans [105], et différentes approches de l'automatisation (éventuelle) de leur obtention, que ce soit sous forme de résultats ou sous forme de conjectures, sont discutées dans [102].

Partant du principe que tout résultat scientifique se manifeste d'abord sous forme de conjecture, même si c'est pour une très courte durée et peut être uniquement dans l'esprit de celui qui l'a découvert, on parlera plus de conjecture que de théorème ou toute autre forme de résultat. Aussi il sera essentiellement question de génération de conjectures. Pour ces raisons, il paraît impératif de donner une définition formelle du mot *conjecture*. Reprenons ici la définition du *Dictionnaire des Mathématiques* de Bouvier et George [27] :

Conjecture : *Une hypothèse émise, a priori, sur l'exactitude ou l'inexactitude d'un énoncé dont on ignore la démonstration.*

Comme l'énoncé est un concept général en mathématiques, on s'attend à ce qu'une conjecture prenne des formes variées. Dans cette section, une tentative est faite de répertorier un nombre aussi grand que possible de ces différentes formes en théorie des graphes, sans toutefois prétendre établir une liste complète. La recherche est effectuée sur les références classiques de la théorie des graphes qui sont dues à Berge [17], Biggs [18], Bondy et Murty [21], Busacker et Saaty [34], Cvetković, Doob et Sachs [59], Haynes, Hedetniemi et Slater [117], et quelques autres. Avant de détailler ces formes, essayons d'abord de donner une liste de critères auxquels on se réfère pour dire si une conjecture est intéressante.

1.4.1 L'attrait d'une conjecture en théorie des graphes

"Qu'est ce qui rend un résultat mathématique intéressant ?" est une question de la philosophie des mathématiques posée et discutée depuis très longtemps. Elle est transmise d'une génération à l'autre sans perdre de son intérêt et demeure d'actualité. Les façons de traiter cette question diffèrent dans le temps, voire d'un groupe de recherche à l'autre, selon les moyens et les besoins : pas tant ceux relatifs aux tentatives de répondre à la question elle même que ceux se rapportant aux interprétations et formulations d'un résultat en soi. Les récents développements dans les systèmes, assistés par ordinateur ou entièrement automatisés, pour la découverte de théorèmes et de conjectures ont revêtu la question d'une certaine actualité, essentiellement en théorie des graphes. Les différents points de vues, qui représentent les tendances actuelles en théorie des graphes, sont présentés dans [53, 81, 102, 128].

Dans le but de faire une appréciation, la plus objective possible, de l'intérêt d'une conjecture, un ensemble de critères est proposé :

(a) *Simplicité* : Les formules simples sont les plus utilisées, et donc probablement les plus riches en conséquences. Il est toutefois assez difficile d'en trouver de nouvelles en grand nombre. De plus, certaines d'entre elles sont triviales, par exemple,

$$\chi \geq \omega,$$

où χ et ω désignent respectivement le nombre chromatique et la cardinalité maximale d'une clique d'un graphe.

(b) *Centralité* : Il est préférable qu'un résultat ou une conjecture utilise les concepts centraux en théorie des graphes comme par exemple la connexité, la stabilité, la domination, la coloration et les distances. Certains nouveaux concepts se sont avérés intéressants et ont conduit à plusieurs résultats, comme la *pancyclicité*,

introduite par Bondy [20], qui est un concept proche de celui, fondamental, de cycle. Ceci n'est pas le cas avec la plupart des nouveaux concepts qui, de nous jours, prolifèrent et dont l'utilisation se limite parfois aux besoins de la preuve d'un seul résultat.

(c) *Résolution de problèmes* : Ce critère est semblable à la centralité, sauf qu'au lieu de se référer aux concepts, on se réfère au problèmes posés par les scientifiques dans différents domaines (pas nécessairemnt en théorie des graphes). Ainsi un théorème (ou une conjecture) est considéré intéressant s'il apporte des réponses et des solutions aux problèmes posés.

(d) *Surprise* : Un résultat ou une conjecture suscite la curiosité pour autant qu'il ou elle contient des choses auxquelles on s'attend le moins. La surprise contenue dans un tel résultat mobilise les spécialistes autant pour tenter de l'expliquer que pour trouver d'autres résultats semblables.

(e) *Distance entre les concepts* : Un des facteurs qui provoque un effet de surprise dans un résultat est la distance entre les concepts : plus la distance est grande plus l'est la surprise.

(f) *Le contenu en information* : Un énoncé est intéressant s'il contient des informations, sur au moins un graphe, qu'on ne retrouve pas dans les autres résultats : en d'autres termes, il faut éviter la redondance.

(g) *Précision* : Un résultat doit être le meilleur possible (au sens faible, *c-à-d,* vérifié comme une égalité pour certaines valeurs des paramètres du problème, ou au sens fort, *c-à-d,* pour toutes les valeurs des paramètres).

En plus de ces critères abstraits (plus au moins objectifs), on peut ajouter un paramètre pour mesurer l'intérêt d'un énoncé, plus particulièrement d'une conjecture, *le nombre de mathématiciens* qui s'y intéressent. Il est à noter toutefois que la popularité d'un résultat n'est pas due uniquement à ses mérites propres mais aussi à sa visibilité (la journal de sa publication, la réputation de ses auteurs, ...).

1.4.2 Relations algébriques

Forme générale

Une première classe de conjectures en théorie des graphes est constituée de celles qui prennent la forme de relations algébriques entre invariants graphiques. De telles relations peuvent être énoncées pour tout graphe G ou pour une classe particulière de graphes.

Il s'agit ici de la classe de conjectures la plus étudiée dans la génération automatique ou assistée par ordinateur, mais sans être la seule ; pour une discussion et une liste de références à ce sujet voir [102].

Soit $\mathcal{R}$ une relation algébrique et $\mathcal{C}$ une classe de graphes.

La forme générale des conjectures considerées ici peut être présentée comme suit :

"Pour tout graphe G de la classe $\mathcal{C}$, la relation $\mathcal{R}$ est vraie".

Si la relation $\mathcal{R}$ est vraie pour tout graphe G, on ne parlera pas de la classe $\mathcal{C}$. En spécifiant la nature de la relation $\mathcal{R}$ et en précisant la classe $\mathcal{C}$, on obtient les sous-classes présentées ci-dessous.

Relations linéaire et extensions

Notons $\mathcal{R}_1$ la classe des égalités linéaires entre les invariants graphiques. Avant de donner un exemple de résultat de cette classe, rappelons qu'un sous-ensemble de sommets W est *transversal* dans un graphe G si chaque arête de G a au moins une extrémité dans W.

Théorème 3 (Norman, Rabin [153], Gallaï [91]) :
Pour tout graphe G de cardinalité maximale d'un couplage μ, de nombre de domination des sommets par les arêtes ϵ, de taille du plus petit transversal τ, de nombre de stabilité α et d'ordre n,

$$\mu + \epsilon = n$$

et si G ne contient pas de sommets isolé,

$$\alpha + \tau = n.$$

De telles égalités, valides pour tous les graphes (ou une très grande classe) sont rares. Elles sont nombreuses pour des classes particulières de graphes. Ainsi, par exemple, le théorème suivant donne des relations vraies pour la classe des arbres.

Théorème 4 (Folklore) :
Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 2$, de taille m, de la cardinalité maximale d'une clique ω et de nombre chromatique χ,

$$m = n - 1, \quad \omega = 2 \quad et \quad \chi = 2.$$

On remarque, dans ces relation, que les coefficients sont tous égaux à 1. Ceci n'est pas toujours le cas.

Soit n_1 le nombre de sommets pendants d'un graphe G, c'est-à-dire, le nombre de sommets de degré 1. Rappelons que le *centre* d'un graphe est l'ensemble des sommets dont l'excentricité est égale au rayon du graphe.

Conjecture 2 (Caporossi, Hansen [40, 42]) :
Pour tout arbre T d'index minimum, de nombre de stabilité α, de taille m, de diamètre D, de rayon r et dont le nombre de sommets pendant est n_1,

$$2\alpha - m - n_1 + 2r - D = 0.$$

Cette conjecture, obtenue par AGX, est ouverte. Il est à noter que les coefficients des invariants sont de petits entiers. AGX peut aussi générer (automatiquement ou interactivement) des conjectures avec des coefficients réels (avec une certaine précision étant donné que les calculs sont faits à l'aide de machines).

L'*irrégularité* $irr(G)$ [2] d'un graphe $G = (V, E)$ est définie par

$$irr(G) = \sum_{(i,j)/\{v_i,v_j\}\in E} |d_i - d_j|.$$

Conjecture 3 (Gutman, Hansen, Mélot, [97]) :
Pour tout arbre T de degré maximum $\Delta \geq 3$, d'irrégularité maximum $irr(G)$, d'indice de Randić Ra, de taille m et ayant n_1 sommets pendants,

$$Ra = 0.027421\, irr(G) + 0.539005\, m - 0.1104848\, n_1 + 0.614014.$$

Les arbres extrêmes ont des sommets de degré 3, 2 ou 1 alternativement.

Notons que le système GRAPH [55, 60] peut aussi être utilisé pour trouver de tels graphes extrêmes, interactivement.

Les inégalités linéaires forment une classe $\mathcal{R}_2$ de relations qui sont plus répandues en théorie des graphes que les égalités linéaires. Notons χ' l'indice chromatique d'un graphe, c'est-à-dire, le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorer les arêtes du graphe de sorte que deux arêtes incidentes au même sommet ne soient pas de même couleur.

Théorème 5 (Vizing [175], Gupta [94]) :
Pour tout G de degré maximum Δ et d'indice chromatique χ',

$$\Delta \leq \chi' \leq \Delta + 1.$$

Plusieurs conjectures sous forme d'inégalités linéaires, prouvées, réfutées ou encore ouvertes, ont été obtenues avec différents système informatisés. On en donne ci-dessous quelques unes.

Conjecture 4 (Graffiti 2 [81]) :
Pour tout graphe connexe G de distance moyenne $\bar{l}$ de nombre de stabilité α,

$$\bar{l} \leq \alpha.$$

Cette conjecture est peut-être celle, parmi celles de Graffiti, dont on a le plus parlé, après sa preuve par Chung [48] (d'où son nom actuel, Théorème de Chung). Ceci est due à la difficulté de sa preuve, mais surtout à l'éloignement apparent entre les deux concepts de stabilité et de distance. La conjecture suivante est toujours ouverte :

Conjecture 5 (Graffiti 3 [81]) :
Pour tout graphe connexe G de distance moyenne $\bar{l}$ d'indice de Randić Ra,

$$\bar{l} \leq Ra.$$

Un graphe chimique G est un graphe sans triangle de degré maximum au plus 4 (dû à la valence du carbone).

Conjecture 6 ([40, 42]) :
Pour tout graphe chimique G d'indice de Randić Ra, de taille m et ayant n_1 sommets pendants,

$$Ra \geq \frac{m + n_1}{4}.$$

Cette conjecture obtenue par AGX, a été démontrée par G. Caporossi en utilisant des techniques de la programmation linéaire.

Une troisième classe, $\mathcal{R}_3$ est obtenue en utilisant les opérateurs plancher et plafond d'un nombre entier.

Peu de chose ont été faites dans la génération automatique ou assistée de conjectures en théorie des graphes, relativement aux opérateurs $\lfloor a \rfloor$ (plancher de a, le plus grand entier inférieur ou égal à a) et $\lceil a \rceil$ (plafond de a, le plus petit entier supérieur ou égal à a). Parmi les rares exceptions les deux exemples ci-dessous.

Théorème 6 ([30]) :
Pour tout graphe connexe G de nombre de domination β de degré minimum $\delta \geq 2$ et de maille $g \geq 5$,

$$\beta \leq \left\lceil \frac{n - \lfloor g/3 \rfloor}{2} \right\rceil .$$

Conjecture 7 ([3]) :
Pour tout graphe connexe d'ordre $n \geq 2$, d'indice de Randić Ra et de nombre de stabilité α,

$$\frac{n}{2} \leq Ra \cdot \alpha \leq \left\lceil \frac{3n-2}{4} \right\rceil \sqrt{\left\lceil \frac{3n-2}{4} \right\rceil \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. bipartis complets K_{pq} avec $p = \alpha = \lceil \frac{3n-2}{4} \rceil$ et $q = \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor$).

1.4.3 Relations non-linéaires

Une quatrième classe, $\mathcal{R}_4$, de relations est celle utilisant les puissances et les produits d'invariants. Les puissances les plus fréquentes sont les carrés, les cubes, les inverses et les racines carrées et cubiques. Le produit s'applique généralement à deux invariants.

Théorème 7 (Nordhaus, Gaddum [152]) :
Pour tout graphe G d'ordre n, de nombre chromatique χ et dont le nombre chromatique du complémentaire est $\overline{\chi}$,

$$2\sqrt{n} \leq \chi + \overline{\chi} \leq n + 1$$

et

$$n \leq \chi \cdot \overline{\chi} \leq \frac{(n+1)^2}{4}.$$

Plusieurs conjectures ont été obtenues à l'aide des systèmes Graffiti et AGX avec des puissances ou des produits d'invariants. Rappelons que la température d'un sommet v_j de G est définie par

$$t_j = \frac{d_j}{n - d_j}, \qquad j = 1, 2, .., n,$$

où d_j désigne le degré du sommet v_j.

Conjecture 8 (Graffiti 834 [81]) :
Pour tout graphe connexe G d'ordre n, de distance moyenne $\overline{l}$ et dont les températures des sommets dans le complémentaire sont $(\overline{t}_j)$, $j = 1, \ldots n$,

$$\overline{l} \leq 1 + \max_j (\overline{t}_j).$$

Cette conjecture peut être reformulée de la façon suivante :

Conjecture 8′ :
Pour tout graphe connexe d'ordre n, de distance moyenne $\overline{l}$ et de degré minimum δ

$$(1 + \delta)\,\overline{l} \leq n.$$

Cette conjecture a été réfutée par AGX [35] ; le countre-exemple est un graphe composé de deux triangles reliés par un chemin de 7 arêtes.

Un autre exemple de conjectures utilisant le produit est la suivante :

Conjecture 9 (Graffiti 127 [81]) **:**

Pour tout graphe connexe G de degré minimum δ et de distance moyenne $\bar{l}$,

$$\delta \cdot \bar{l} \leq n.$$

Cette conjecture, qui est restée ouverte durant 10 ans, a été renforcée par AGX pour avoir

Conjecture 9′ :

Pour tout graphe connexe G de degré minimum δ et de distance moyenne $\bar{l}$,

$$\delta \cdot \bar{l} \leq n - 1,$$

avec égalité si et seulement si G est un graphe complet.

Les deux conjectures précédentes sont des corollaires du même (et plus fort) résultat dû à Beezer *et al.* [16].

L'*énergie* E d'un graphe G [95, 96] est définie par

$$E = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|,$$

où les λ_i , pour $i = 1, 2, .., n$, sont les valeurs propres de la matrice d'adjacence A de G.

Conjecture 10 ([36]) **:**

Pour tout graphe G d'ordre n, de taille m et d'énergie E,

$$E \geq 2\sqrt{m} \quad \text{et} \quad E \geq \frac{4m}{n}.$$

Ces deux relations, obtenues par AGX, sont simples à prouver.

Une cinquième classe de conjectures (rares), $\mathcal{R}_5$, est celle utilisant des exponentielles ou des logarithmes d'invariants.

Théorème 8 (Berge [17]) :
Pour tout graphe G d'ordre n, de degré maximum Δ et de rayon r

$$r \geq \frac{log(n\,\Delta - n + 1)}{log(\Delta)}.$$

Quelques conjectures faisant intervenir des logarithmes ont été obtenues par une version récente de Graffiti [68].

Soit ϱ le nombre de recouvrement des sommets par des chemins, c'est-à-dire, le nombre minimum de chemins, deux à deux disjoints, nécessaire pour recouvrir tous les sommets d'un graphe.

Conjecture 11 [68] :
Pour tout graphe connexe de nombre de stabilité α, de rayon r et de nombre de recouvrement des sommets par des chemins ϱ,

$$\alpha \geq r + ln(\varrho) \quad et \quad \alpha \geq ln(r) + \varrho.$$

Ces conjectures sont ouvertes.

1.4.4 Relations qualitatives

Une autre forme de relations, dites *qualitatives*, constituent une classe $\mathcal{R}_6$. Elles sont rarement utilisées en théorie des graphes, mais assez fréquentes dans d'autres domaines des sciences comme l'économie. En théorie des graphes ces relations décrivent

les variations d'un invariant relativement à un autre, par exemple,

"l'invariant i_1 croît lorsque l'invariant i_2 croît"

ou

"l'invariant i_1 décroît lorsque l'invariant i_2 croît"

qui peuvent s'exprimer, respectivement par

$$\frac{\Delta i_1}{\Delta i_2} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\Delta i_1}{\Delta i_2} < 0,$$

où Δi_1 désigne la variation dans la valeur de l'invariant i_1 et Δi_2 la variation correspondante dans i_2.

Un arbre sur n sommets est biparti et peut être coloré, par exemple, en noir et blanc ; soit n_B et n_N les nombres de sommets blancs et noirs respectivement ($n_B + n_N = n$). Dans [66], les arbres sous contraintes de coloration, c'est-à-dire, des arbres avec n et $n_N \geq n_B$ fixés, et qui minimisent λ_1 sont étudiés. Ceci a conduit au résultat suivant :

Conjecture 12 ([66]) **:**
Pour tout arbre T, sur n sommets dont n_N noirs et n_B blancs, qui minimise l'index λ_1 sous contraintes de coloration,

$$\frac{\Delta \lambda_1}{\Delta(n_N - n_B)} > 0.$$

Cette conjecture a été trouvée avec AGX et prouvée dans [66].

1.4.5 Conditions

Dans cette section, on discute la classe $\mathcal{C}$ des graphes G les plus utilisés dans des conjectures de la forme $\mathcal{R}|\mathcal{C}$.

Une première classe $\mathcal{C}_1$, est composée de *conditions nécessaires* sur les invariants $i_1, i_2, \cdots$ utilisés dans une relation $\mathcal{R}$. Le plus souvent le graphe est contraint à être *connexe*. Dans d'autres conjectures, comme celles sur les arbres (conjecture 12), la connexité est implicite, étant donné qu'un arbre est un graphe connexe sans cycles.

Une autre classe $\mathcal{C}_2$ est constituée de *conditions éliminant les cas triviaux*. Comme exemple de ce type de conditions, "un graphe sans sommets isolés" c'est-à-dire, "un graphe de degré minimum $\delta \geq 1$". Ceci est illustré par le Théorème 3.

Sous-graphes interdits (ou exclus) peuvent être utilisés pour obtenir des classes de graphes bien connues, collectivement notées $\mathcal{C}_3$.

Un premier cas est la classe des graphes *sans triangle*.

Théorème 9 (Fraughnaugh, Locke [90]) :
Pour tout graphe G sans triangle, régulier de degré 3, de nombre de stabilité α et d'ordre n,

$$\frac{\alpha}{n} \geq \frac{11}{30} - \frac{2}{15n}.$$

Conjecture 13 (Graffiti 116, [81]) :
Pour tout graphe G sans triangle, d'index λ_1 et d'indice de Randić Ra,

$$\lambda_1 \leq Ra.$$

Cette conjecture a été prouvée par Favaron, Mahéo et Saclé dans [84].

Une généralisation de cette classe est de considérer les graphes sans cycles impairs C_{2k+1}, c'est-à-dire, *les graphes bipartis*.

Théorème 10 (König [124]) :
Pour tout graphe biparti G de cardinalité maximale d'un couplage μ et de taille du plus petit transversal τ,

$$\mu = \tau.$$

Une condition plus contraignante est d'exclure tous les cycles, qui donne les arbres, si on suppose la connexité, les forêts dans le cas contraire.

La conjecture 2 (page 42) n'est pas vraie pour tous les arbres, mais la suivante l'est :

Conjecture 14 (Caporossi, Hansen [40, 42]) :
Pour tout arbre T, de nombre de stabilité α, de taille m, de diamètre D, de rayon r et dont le nombre de sommets pendant est n_1,

$$\alpha \leq \tfrac{1}{2}(m + n_1 + D - 2r)$$

et

$$\alpha \geq \tfrac{1}{2}(m + n_1 + D - 2r - \lfloor \tfrac{n-2}{2} \rfloor).$$

Les deux relations ont été trouvées avec AGX ; la première est prouvée dans [40] et la seconde dans [42].

Une généralisation de $\mathcal{C}_3$ est de définir une nouvelle classe $\mathcal{C}_4$, qui consiste à exclure des sous-graphes, non du graphe G lui-même, mais d'un graphe G' obtenu de G à l'aide d'une opération donnée.

Une première opération consiste à supprimer les sommets de degré 2 : si le degré d'un sommet v_j est $d_j = 2$ et v_i et v_k sont ses voisins, supprimer v_j puis relier v_i et v_k. À l'issue d'une telle opération (éventuellement itérée), on dit que G est homéomorphe à G'.

Avant de donner un exemple illustrant ce type de résultat, rappelons qu'un graphe G est dit *planaire* s'il est possible de le représenter dans un plan de telle sorte que deux arêtes quelconques se rencontrent au plus en leurs extrémités et donc ne se coupent pas.

Théorème 11 (Théorème des 4-couleurs, Appel, Haken [6, 7, 9]) :
Si G est un graphe planaire de nombre chromatique χ, alors

$$\chi \leq 4.$$

Cette conjecture est très ancienne, mais prouvée en 1976 avec une importante contribution de l'ordinateur ; Robertson *et al.* [161] donne une preuve plus récente et plus courte, mais toujours avec l'aide de l'ordinateur.

Conditions d'appartenance à une classe

Une autre classe de conjectures en théorie des graphes comprend les conditions nécessaires et/ou suffisantes, exprimées sous forme de relations algébriques, pour qu'un graphe soit dans une classe particulière de graphes $\mathcal{C}$. Les conditions suffisantes apparaissent, le plus souvent, sous la forme

$$\mathcal{C} \Leftarrow \mathcal{R}$$

qui est lue : *Si un graphe G vérifie la relation $\mathcal{R}$, alors G appartient à la classe $\mathcal{C}$* .

Les conditions nécessaires ont la forme

$$\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{R}$$

et sont discutées plus haut.

Dans de rares cas, on trouve les conditions nécessaires et suffisantes simultanément :

$$\mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{R}.$$

Il est possible d'avoir aussi des conditions nécessaires et/ou suffisantes conditionnelles :

$$(\mathcal{C}_1 \Leftarrow \mathcal{R}) \mid \mathcal{C}_2.$$

Rappelons qu'un graphe G est dit *hamiltonien* si et seulement s'il contient un cycle passant une et une seule fois par chacun de ses sommets.

Théorème 12 :
Un graphe G d'ordre $n \geq 3$ de séquence des degrés $d_1 \leq d_2 \leq \ldots d_n$, est hamiltonien si l'une des conditions suivantes est vraie :
(*i*) (Dirac [69]) $d_k \geq \frac{n}{2}$, *pour* $k = 1, 2, \ldots n$;
(*ii*) (Ore [155]) $d_u + d_v \geq n$, *pour toute paire de sommets non-adjacents* u, v ;
(*iii*) (Pósa [158]) $d_k > k$, *pour tout* k *avec* $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$;
(*iv*) (Bondy [19]) $d_j + d_k \geq n$, *pour tout* j, k *avec* $d_j \leq j, d_k \leq k - 1$.

Au lieu d'une seule relation, il est possible d'avoir une conjonction et/ou une disjonction de plusieurs relations, voir même une combinaison logique plus ou moins complexe de relations. Les relations de cette forme n'ont pas fait l'objet de beaucoup d'études avec les systèmes de génération, assistée ou automatisée, de conjectures. Une approche possible, serait de considérer des conjectures encore ouvertes, pour une certaine classe $\mathcal{C}$ de graphes et de tester, sur une base de données de graphes ou en utilisant un programme d'optimisation, si une ou plusieurs de ces relations apparaissent comme suffisantes pour l'appartenance d'un graphe G à une classe $\mathcal{C}$.

Une autre approche serait d'étudier des conjectures vraies pour les graphes critiques relativement à la propriété définissant $\mathcal{C}$ (c'est-à-dire, les graphes G appartenant à $\mathcal{C}$, mais qui cessent de l'être si on supprime un sommet ou une arête), puis de voir si ces conjectures sont vraies pour tout graphe de $\mathcal{C}$, sinon les modifier.

1.4.6 Inclusions entre classes de graphs

Une troisième classe de conjectures en théorie des graphes décrit les inclusions entre les classes de graphes, et se présentent sous la forme

$$\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$$

ou dans des cas rares

$$\mathcal{C}_1 \equiv \mathcal{C}_2$$

qui se lisent

"Tous les graphes de la classe $\mathcal{C}_1$ appartiennent à la classe $\mathcal{C}_2$"

par exemple

"Tous les arbres sont des graphes bipartis"

et

"Un graphe appartient à la classe $\mathcal{C}_1$ si et seulement s'il appartient à la classe $\mathcal{C}_2$"

par exemple

"Un arbre est un graphe connexe sans cycle."

Les définitions des classes peuvent être plus générales, c'est-à-dire, sous forme de combinaisons logiques de classes simples de graphes ou de sous-graphes de G, ou encore de graphes dérivés de G à l'aide d'un certain nombre d'opérations.

Théorème 13 (Kuratowski [125]) **:**
Un graphe G est planaire si et seulement s'il ne contient pas de sous-graphes homéomorphes à K_5 (graphe complet sur 5 sommets) ou à $K_{3,3}$ (graphe biparti complet et équilibré sur 6 sommets).

Le système *Graph Theorist* développé par Epstein [73, 74, 75] représente les classes de graphes par des définitions constructives, c'est-à-dire que des propriétés sont associées aux classes des graphes qui les satisfont et des algorithmes sont spécifiés pour construire (au moins en principe) tous les graphes de ces classes.

L'étude des inclusions entre les classes conduit à des conjectures et à leurs preuves. De telles conjectures sont d'un type rare et nouveau. Il semble que ce type n'est étudié que par *Graph Theorist*, parmi les système de génération de conjectures en théorie des graphes.

1.4.7 Implications entre les relations

Une autre classe de conjectures contient les implications et les équivalences entre les relations $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots$, c'est-à-dire, celles se présentant sous forme

$$\mathcal{R}_1 \Rightarrow \mathcal{R}_2$$

ou

$$\mathcal{R}_1 \Leftrightarrow \mathcal{R}_2.$$

Aussi cette classe peut être généralisée en utilisant les opérations logiques comme les conjonctions et disjonctions sur l'ensemble des relations. Il s'agit ici de formes de base en mathématiques et en théorie des graphes et cette classe contient plusieurs sous-classes.

Corollaires

Une conjecture est considérée comme un corollaire $\mathcal{R}_2$ si elle est une conséquence d'un théorème $\mathcal{R}_1$.

Conjecture 15 (Berge [17]) :

Une borne inférieure sur le nombre de stabilité α d'un graphe G d'ordre n et de taille m,

$$\alpha \geq \frac{n^2}{2m+n}.$$

Cette conjecture peut être considérée comme un corollaire de la borne (Favaron *et al.* [85]) suivante :

$$\alpha \geq \left\lceil \frac{2n - \frac{2m}{\lceil \frac{2m}{n} \rceil}}{\lceil \frac{2m}{n} \rceil + 1} \right\rceil.$$

En effet, cette dernière est la meilleure possible étant donné qu'elle est atteinte pour tout n et tout m. Elle est équivalente à la suivante, proposée antérieurement par Hansen dans [103],

$$\alpha \geq \left\lceil n - \frac{2m}{1 + \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor} \right\rceil + \left\lceil \frac{n - \lceil n - 2m/(1 + \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor)(1 + \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor) \rceil}{2 + \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor} \right\rceil.$$

On peut corroborer ou réfuter des conjectures du type précédent de différentes façons :
(*i*) énumeration des petits graphes à l'aide de systèmes comme *Nauty* ou *geng* de McKay [142] ;
(*ii*) construction interactive de contre-exemples, avec des systèmes comme GRAPH de Cvetković [55, 56, 57] ;
(*iii*) minimisation de la différence entre les deux membres de l'inégalité avec une paramètrisation sur n et m [36, 42], avec AGX par exemple.

Redondance

Si une relation $\mathcal{R}_2$ est impliquée par une autre relation $\mathcal{R}_1$ dans une base de données, elle doit être considérée comme redondante. En considérant deux relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, AGX est bien adapté afin de les tester pour redondance : il minimise (ou maximise)

la dernière sous hypothèse que la première est vraie. Ce qui peut être étendu pour tester des conjectures de la forme

$$\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots \mathcal{R}_k \Rightarrow \mathcal{R}_{k+1}$$

ainsi que pour les équivalences entre relations.

Il est à noter que ce genre d'opérations conduit à la réfutation ou la corroboration et non à trouver une conjecture.

Le système Ingrid [32] peut trouver, parmi une base de données (relations) s'il existe, un (petit) ensemble de relations impliquant une relation donnée. Ainsi, pour un ensemble de relations $\Re = \{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots \mathcal{R}_p\}$ et une relation $\mathcal{R}$, Ingrid formule un énoncé de la forme

$$\mathcal{R}_{i_1} \cap \mathcal{R}_{i_2} \cap \ldots \mathcal{R}_{i_k} \Rightarrow \mathcal{R},$$

où $k \ll p$.

Conjecture 16 (Brigham *et al.* [32]) :
Les relations sur l'index λ_1 d'un graphe G de nombre chromatique χ et de taille m

$$\lambda_1 \leq \sqrt{\frac{2m(\chi-1)}{\chi}}$$

et

$$\chi \leq \left\lfloor 1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{1+8m} \right\rfloor$$

impliquent la relation [119]

$$\lambda_1 \leq -1 + \sqrt{1+8m}.$$

Cette conjecture a été prouvée en utilisant des manipulations algébriques. Noter que la preuve de telles conjectures est loin d'être évidente.

À ce jour, Ingrid [32] semble être l'unique programme de génération automatique ou assistée de conjecture, capable de conjecturer de telles implications.

Les voies vers de nouvelles relations

La fonction de génération de conjectures du système Ingrid peut être exploitée dans la découverte de nouvelles relations. En effet, le système opère en restreignant les valeurs des invariants dans des intervalles, puis en réduisant ces derniers en utilisant interactivement les relations de sa base de données. Une fonction du système, dite de retraçage, se charge de retracer le cheminement qui a conduit au résultat.

Sous l'hypothèse qu'une relation inconnue mais intéressante existe entre deux invariants i_1 et i_2, on peut changer les valeurs de l'un en observant l'influence des variations sur les bornes (de l'intervalle) de l'autre. La fonction de retraçage fournit la liste des relations qui on conduit au résultat, et ainsi on obtient une conjecture de la forme
"Les relations $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots \mathcal{R}_k$ dans la base de données entraînent une relation entre les invariants i_1 et i_2."

Ainsi, des manipulations algébriques sont utilisées pour déduire cette relation, comme l'exemple suivant :

Conjecture 17 (Brigham *et al.* [32]) **:**
Soit G un graphe d'ordre n, d'index λ_1, de degré maximum Δ, de cardinalité maximale d'un couplage μ, de nombre de domination des sommets par les arêtes ϵ, de nombre de stabilité α et de nombre de recouvrement par des cliques θ_0. Les relations

$$\Delta \leq \lambda_1^2,$$

$$\nu \geq \frac{n}{\Delta - 1},$$

$$\epsilon \leq n - \nu,$$

et

$$\theta_0 \leq \alpha.$$

impliquent des relations entre λ_1 *et* θ_0.

En effet, les relations ci-dessus conduisent aux relations

$$\theta_0 \leq n[\lambda_1^2/(1+\lambda_1^2)]$$

et

$$\theta_0 \leq \tfrac{1}{2} + [n(n-1) - \lambda_1(\lambda_1 - 1) + \tfrac{1}{4}]^2,$$

qui peuvent être prouvées algébriquement et sont nouvelles.

1.4.8 Conjectures structurales

Plusieurs théorèmes en théorie des graphes caractérisent, entièrement ou partiellement, la structure des familles de graphes : particulièrement les graphes extrêmes, c'est-à-dire, les graphes pour lesquels la valeur d'un invariant est maximum ou minimum, et aussi les graphes critiques.

Théorème 14 (Turan [174]) :
Si G *est un graphe d'ordre* n *avec un nombre de stabilité* α *et un nombre d'arêtes minimum* m, *alors* G *est isomorphe au graphe* $G_{n,k}$ *composé de* k *cliques disjointes, dont* r *ont* q *sommets chaque, et les* $k-r$ *autres ont* $q-1$ *sommets, où* r *et* q *sont tels que* $n = q(k-1)+r$.

Ce théorème a été généralisé de plusieurs façons.

Conjecture 18 ([36]) :
Pour tout graphe G *d'ordre* n, *de taille* m *et d'énergie* E *la borne*

$$E \geq 2\sqrt{m}$$

est atteinte si et seulement le graphe G *est biparti complet.*

Cette conjecture est prouvée dans [36].

Conjecture 19 :
Pour tout arbre chimique T, l'index de Randić Ra est minimum si et seulement si T appartient à l'une des 3 familles d'arbres représentées dans Figure 1.3, ou est obtenu à partir d'un tel arbre en supprimant itérativement 3 arêtes pendantes incidentes au même sommet et en les reconnectant à un autre sommet pendant.

Cette conjecture est prouvée dans [38].

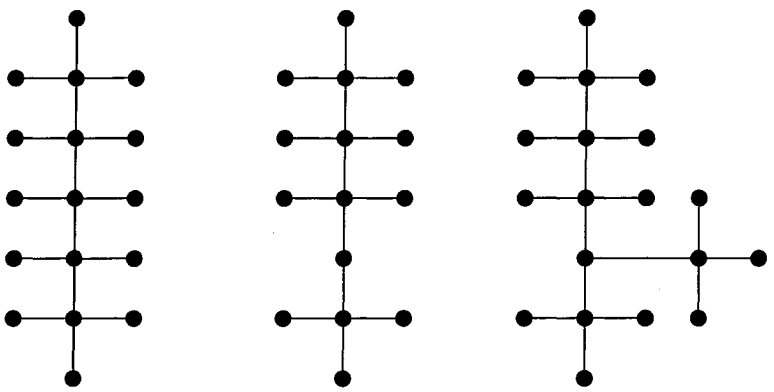
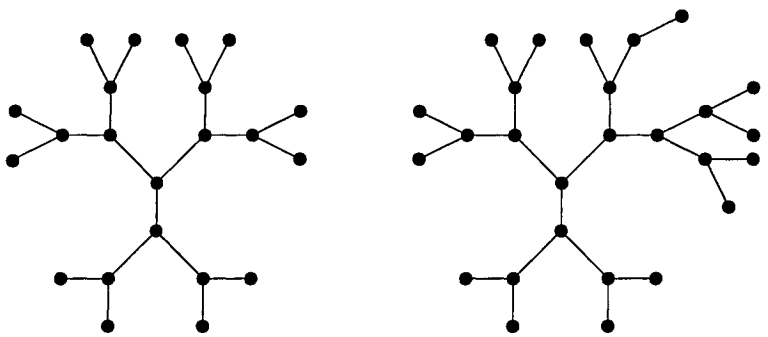


Figure 1.3 – Trois classes d'arbres chimiques minimisant l'indice de Randić.

Conjecture 20 ([130, 129]) **:**
Les dendrimères minimisent l'indice de Wiener (ou la somme de toutes les distances entre paires de sommets) sur l'ensemble de tous les arbres d'ordre n et d'un degré maximum fixé Δ.

1.4.9 Dénombrement de graphes

Un certain nombre de théorèmes en théorie des graphes donnent le nombre de graphes satisfaisant des propriétés spécifiques, souvent en fonction de la taille et de l'ordre, et



(a) (b)

Figure 1.4 – Dendrimères avec et sans arêtes additionnelles.

parfois une liste implicite de tels graphes est fournie. Un autre problème semblable, est de trouver l'ordre minimum d'un graphe qui vérifie une propriété donnée. Les ordinateurs sont largement utilisés dans des tâches d'énumeration en théorie des graphes. Ce qui a conduit à plusieurs conjectures (génération assistée) et preuves.

Un graphe est étiqueté (numéroté) si ses sommets sont numérotés $v_1, v_2, \ldots v_n$. Deux graphes sont dits isomorphes s'ils sont considérés différents uniquement lorsque leurs sommets ne sont pas numérotés de la même façon.

Théorème 15 (Cayley [44]) :
Il y a exactement n^{n-2} *arbres numérotés sur* $n \geq 2$ *sommets.*

Une approche pour la génération de telles conjectures serait l'énumération de tous les graphes vérifiant une propriété donnée, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ avec un système puissant comme *Nauty* ou *geng* [142], puis
(i) vérifier si la séquence des nombres obtenus est connue, à l'aide de *Online Encyclopedia of Integer Sequences* [166] ;
(ii) sinon, utiliser les outils de l'algèbre pour étudier la séquence.

CHAPITRE 2 : DE AUTOGRAPHIX À AUTOGRAPHIX 2

2.1 Le Système AutoGraphiX

Le système AutoGraphiX (*AGX*) a été conçu mis au point par *G. Caporossi* et *P. Hansen* [35, 40, 41, 42] à *l'École Polytechnique de Montréal* et à *HEC Montréal.* Il est spécialisé dans la recherche de graphes extrêmes relativement à un invariant ou une combinaison d'invariants graphiques [4, 36, 37, 38, 39, 42, 89, 98, 106, 107, 170] parmi une trentaine d'invariants disponibles (actuellement, on en compte près de cent). AGX utilise les outils d'optimisation combinatoire et particulièrement la méta-heuristique de recherche à voisinage variable [40, 42, 104, 108, 109, 110, 111] pour l'obtention de graphes extrêmes satisfaisant un certain nombre de contraintes afin de les analyser par la suite.

2.1.1 RVV et AGX

La *RVV* est la méta-heuristique qu'exploite *AGX* [35, 36, 41] pour la recherche de graphes extrêmes relativement à une fonction en un ou plusieurs invariants. Cette méta-heuristique apparaît comme le meilleur moyen pour l'exploration des familles de graphes, car elle permet d'utiliser un grand nombre d'opérations élémentaires sur les graphes et de sortir des optimums locaux. Comme le fonctionnement d'AGX est décrit plus bas, on ne donnera ici que les descriptions relatives aux structures de voisinage, c'est-à-dire, les opérations élémentaires de construction d'un graphe G' voisin de G.

Le fonctionnement d'AGX se fait en trois étapes :

- Initialisation : énoncé du problème, graphe initial, stratégie de recherche.
- *RVV* (l'optimisation en utilisant la recherche à voisinage variable).
- Analyse des graphes (résultats).

L'étape *RVV* utilise deux structures de voisinages $N_1(G), N_2(G), \cdots N_{k_{max}}(G)$ et $V_1(G), V_2(G), \cdots V_{l_{max}}(G)$. La première, la plus simple, consiste à supprimer ou ajouter k arêtes distinctes de toutes les manières possibles à G pour $k = 1, 2, \cdots k_{max}$. La deuxième série est plus diversifiée. Elle contient les opérations suivantes : rotation d'une arête ; suppression d'une arête ; ajout d'une arête ; déplacement d'une arête (les deux premières opérations simultanément) ; détour qui consiste à supprimer une arête et la remplacer par deux nouvelles arêtes reliant les extrémités de l'arête supprimée à un sommet non-adjacent à aucun des deux premiers ; court-circuit, l'opération inverse du détour ; 2-opt, suppression de deux arêtes disjointes et leur remplacement par deux nouvelles arêtes reliant les extrémités des arêtes supprimées ; insérer un sommet pendant, supprimer l'arête incidente à un sommet pendant et relier celui-ci à deux sommets adjacents tout en supprimant l'arête entre eux ; ajout d'un sommet pendant, ajouter une arête entre un nouveau sommet et un autre déjà existant ; suppression d'un sommet (avec les arêtes qui lui sont incidentes) ; connexion, la suppression de deux arêtes non-incidentes et l'ajout de deux autres arêtes incidentes ; séparation, l'opération inverse de la précédente.

2.1.2 Les tâches exécutées par AGX

On peut utiliser le système AutoGraphiX pour accomplir les tâches suivantes :

Trouver un graphe satisfaisant des contraintes données

Soit $i_1(G), i_2(G), \cdots i_k(G)$, k invariants d'un graphe G et $b_1, b_2, \cdots b_k$ des réels. AGX cherche des graphes satisfaisant un ensemble de contraintes du type :

$$i_l(G) \begin{cases} \leq b_l & \text{si } l \in I^- \\ \geq b_l & \text{si } l \in I^+ \\ = b_l & \text{si } l \in I^= \end{cases} \tag{2.1}$$

où $I^- \cup I^= \cup I^+ = \{1, 2, ...k\}$.

Pour cela, on définit les fonctions suivantes :

$$h_l(G) = \begin{cases} max\{i_l(G) - b_l, 0\} & \text{si } l \in I^- \\ max\{b_l - i_l(G), 0\} & \text{si } l \in I^+ \\ |i_l(G) - b_l| & \text{si } l \in I^= \end{cases} \tag{2.2}$$

Le problème de trouver un graphe G satisfaisant (2.1) revient à résoudre le problème d'optimisation suivant, sur une famille de graphes $\mathcal{G}$:

$$\min_{G \in \mathcal{G}} f(G) = \sum_{l=1}^{k} h_l(G)$$

Tout graphe G avec $f(G) = 0$ satisfait (2.1). Les contraintes (2.1) peuvent être généralisées en remplaçant les invariants par des fonctions d'un ou de plusieurs de ceux-ci, et le principe reste le même.

Trouver des graphes de valeur optimale ou quasi optimale pour un invariant parmi des graphes définis par des contraintes

Il s'agit de trouver un graphe G (ou plusieurs pour différentes valeurs d'un ou plusieurs paramètres) parmi ceux satisfaisant un ensemble de contraintes (comme (2.1)), qui minimise la valeur d'un invariant $i(G)$. Le problème est équivalent à :

$$\min_{G \in \mathcal{G}} f(G) = i(G) + M \sum_{l=1}^{k} h_l(G)$$

où M est une constante suffisamment grande. On définit de façon analogue un problème de maximisation.

Réfuter une conjecture

Soit une conjecture du type $h(G) \leq g(G)$, où $h(G)$ et $g(G)$ sont des fonctions d'un ou plusieurs invariants de G. Si en résolvant le problème :

$$\min_{G \in \mathcal{G}} f(G) = g(G) - h(G)$$

on trouve une valeur négative de $f(G)$, c'est-à-dire, un graphe G tel que $f(G) < 0$, alors la conjecture est réfutée.

Suggérer ou renforcer une conjecture

En général, on résout un problème d'optimisation du type $min_{G \in \mathcal{G}_n} f(G)$, où n, le nombre de sommets, est considéré comme paramètre (on peut aussi considérer n et m, le nombre d'arêtes) et f une fonction d'un ou plusieurs invariants de G. L'analyse des graphes ainsi obtenus (supposés extrêmes) suggère des relations entre invariants considérés dans f. Il y a différentes manières de procéder. Elles seront décrites dans la partie consacrée à la génération de conjectures (Section 2.4).

Donner des idées de preuves

Il s'agit ici de la tâche qui a donné jusqu'ici le moins de résultats dans AGX, mais aussi la plus difficile, non seulement pour AGX mais également pour tout autre système expert "accomplissant" cette tâche. Le cheminement suivi pour l'obtention d'une conjecture suggérée par AGX constitue une source d'inspiration pour une démonstration.

Considérons une conjecture du type $h(G) \leq g(G)$ et G_1 un graphe "supposé" extrême pour la minimisation de la fonction $f(G) = g(G) - h(G)$. S'il est possible de transformer un graphe quelconque G en G_1 avec une suite d'opérations utilisant un voisinage

V générant une séquence de graphes dont l'évaluation f est monotone décroissante, le programme peut suggérer que c'est le cas et préciser le voisinage particulier V en question. L'idée est là, il ne reste qu'à la concrétiser en preuve. Par contre si une telle procédure de construction du graphe G_1 échoue, il faut changer de méthode. Il est clair que la preuve est ailleurs. Citons ici un cas concret. Il s'agit de l'étude [35] de la Conjecture 12 de *Graffiti* [81] par AGX. La conjecture dit que $1 + Ra \geq r$, où Ra est l'indice de Randić et r le rayon d'un graphe. AGX, en minimisant la fonction $f(G) = 1 + Ra - r$, suggère que les graphes extrêmes sont des arbres [41]. Il est possible d'obtenir un arbre à partir d'un graphe connexe du même ordre, par une suite de suppressions d'arêtes. Lors de l'application de la procédure, AGX a buté sur un minimum local qui n'est pas un arbre, mais un graphe unicyclique. Donc la preuve ne peut se baser uniquement sur l'opération de suppression d'une arête. Dans le cas particulier des arbres, la suppression d'arêtes suffit et a conduit à une preuve.

AGX exécute aussi d'autres tâches (plus simples) comme la représentation des graphes sur écran, leur sauvegarde sous les formats PostScript ou Combinatorica, leur modification interactive et le calcul rapide des invariants choisis par l'usager.

2.1.3 Conjectures réfutées par AGX

Avec AGX et dans le cadre de l'étude des conjectures en théorie des graphes, ses concepteurs se sont intéressés, en guise de test, à celles de *Graffiti.* Dans l'étude [35] (considérée comme un test), un certain nombre de conjectures de *Graffiti* sont réfutées. Pour la conjecture 15 (numérotée comme dans [81]), qui dit $r \leq \sigma^2(d) + Ra$, où $r, \sigma^2(d)$ et Ra désignent respectivement le rayon, la variance des degrés et l'indice de Randić, AGX a trouvé que le chemin sur 22 sommets est un contre-exemple. Une analyse a permis de conclure que les chemins pairs sur au moins 22 sommets constituent une famille infinie de contre-exemples pour cette conjecture. AGX a aussi

réfuté la conjecture 16 de *Graffiti* [81] ($\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{n-d_i} + Ra - r \geq 0$, où n, d_i, r et Ra représentent l'ordre, le degré du i^{ieme} sommet, le rayon et l'indice de Randić dans l'ordre), en trouvant le chemin sur 26 sommets comme contre-exemple. Plusieurs autres conjectures de *Graffiti* ont été réfutées par AGX ; pour une liste détaillée voir [35].

2.1.4 Conjectures renforcées par AGX

Lors du test d'un certain nombre de conjectures de *Graffiti* [81], AGX a pu en renforcer quelques unes. Par exemple *Graffiti* 4 qui dit que

$$\sigma^2(d) + \sum_i \frac{1}{d_i} - \bar{l} \geq 0$$

est renforcée par AGX pour obtenir la formulation suivante :

$$\sigma^2(d) + \sum_i \frac{1}{d_i} - \bar{l} \geq \frac{n}{n-1} - 1 = \frac{1}{n-1}.$$

De plus, AGX suggère que les graphes extrêmes sont les graphes complets.

Aussi *Graffiti* 12 ($1 + Ra - r \geq 0$) est renforcée pour avoir :

$$Ra - r \geq \frac{n-3}{2} + \sqrt{2} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

De plus, AGX suggère les chemins comme graphes extrêmes.

Pour d'autres conjectures de *Graffiti* renforcées par AGX voir [35].

2.1.5 Conjectures obtenues par AGX

AGX a trouvé une série de conjectures, certaines de façon automatique, d'autres de façon assistée. Un grand nombre de ces conjectures sont démontrées dans [35] ou dans différentes publications [36, 38, 66, 89]. On n'en citera ici que quelques unes.

Conjecture 21 : *Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 3$, d'indice de Randić Ra et d'écart type σ,*

$$Ra - \sigma \geq \sqrt{n-1} - \sqrt{n-3+\frac{n}{2}}$$

Le polynôme d'*Hosoya* d'un graphe connexe G est défini par :

$$H(G) = H(G,x) = \sum_{k=0}^{D} d(G,k)x^k$$

où D est le diamètre de G et $d(G,k)$ est le nombre de paires de sommets à distance k dans G. On dit que G est H-palindromique si $d(G,k) = d(G,D-k)$, pour $k = 0, 1, \cdots D$. La distance de palindromicité d'un graphe G est

$$D^{pal}(G) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{D}{2} \rfloor} |d(G,k) - d(G,D-k)|.$$

Conjecture 22 : *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 4$ avec un diamètre impair, la distance de palindromicité est au moins $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

Conjecture 23 : *Il n'y a pas d'arbre H-palindromique avec un diamètre impair.*

Les quatre conjectures ci-dessus, comme tout une série d'autres [35], sont ouvertes. D'autres résultats sont obtenus avec AGX, comme le suivant :

Théorème 16 [35] : *Si T_n et P_n sont respectivement un arbre et un chemin d'ordre $n \geq 2$, alors $Ra(T_n) \leq Ra(P_n)$. Avec égalité si et seulement T_n est le chemin.*

Ce résultat a été conjecturé également par plusieurs auteurs, dont Randić [159] ; la première preuve est due à Yu [181]. D'autres preuves sont données ou citées dans Favaron *et al.* [83].

2.2 AutoGraphiX 2 : Fonctions Interactives

Cette section est essentiellement consacrée à la description des fonctions effectuées par et/ou en utilisant AutoGraphiX 2 et qui n'existaient pas dans la première version d'AutoGraphiX. Il sera question des fonctions interactives uniquement. Avant de se lancer dans leur description, il est important de savoir que le système AutoGraphiX 2 est une version améliorée d'AutoGraphiX. Il faut comprendre, par version améliorée, que presque toutes les fonctions d'AutoGraphiX [35, 41] se retrouvent dans AutoGraphiX 2, qu'elles soient interactives, comme les différentes manipulations sur les graphes, ou non comme la génération automatique de conjectures. Il est à noter que dans le but de faciliter la tâche aux lecteurs, certaines fonctions d'AutoGraphiX sont décrites à nouveau ici.

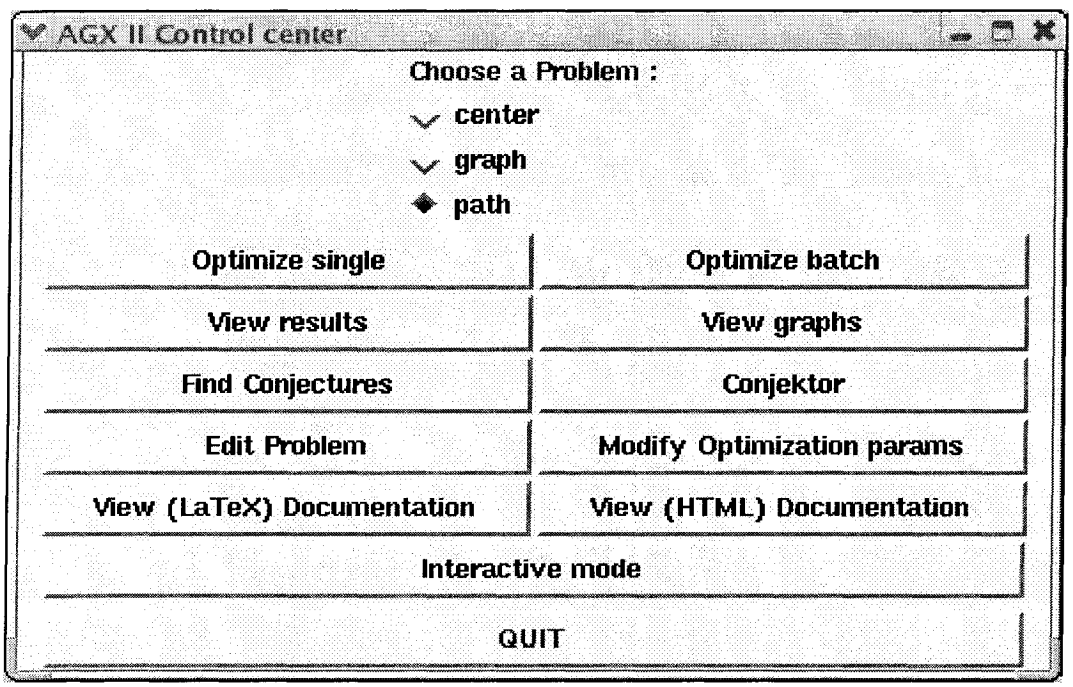


Figure 2.1 – Centre de contrôle

2.2.1 Centre de contrôle

En lançant *AGX2* (AutoGraphiX), avec la commande "agx2", une boite de dialogue apparaît (Figure 2.1). Elle contient la liste des problèmes (définis par l'utilisateur) disponible dans le répertoire courant, et un ensemble de boutons représentant chacun une fonction (Optimize single, Optimize batch, View results...).

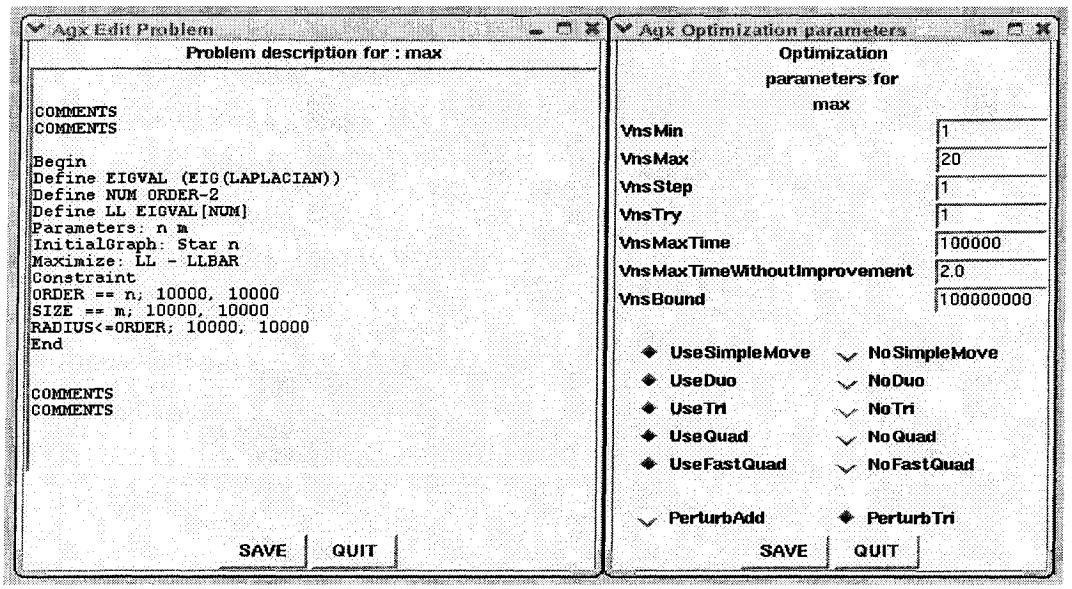


Figure 2.2 – Syntaxe d'un problème et paramètres d'optimisation

2.2.2 Éditer un problème

Un fichier problème (voir Figure 2.2) est un fichier ".def", édité une première fois en utilisant un éditeur de texte de base comme *Nedit* et *Emacs*. Les instructions du problème sont comprises entre les deux mots-clés *Begin* et *End*; chacun d'eux occupe une ligne. Les deux champs, avant *Begin* et après *End* sont réservés aux commentaires de l'usager. Les composantes du champs des instructions sont :

- *Define* : une partie optionnelle qui offre à l'usager la possibilité de définir un nouvel

invariant en combinant ceux déjà programmés dans AGX et/ou ceux définis (à l'aide de *Define* même), en utilisant les opérateurs existants (on peut avoir la liste complète des invariants et des opérateurs disponibles en pressant le bouton *View Documentation*, en format DVI ou HTML). Le mot-clé *Define* est suivi du nom (qui ne doit ni être un des mots réservés ni se terminer par BAR) de l'invariant, puis de l'expression algébrique le définissant. Dans la Figure 2.2 (gauche), LL représente la deuxième plus petite valeur propre du Laplacien d'un graphe. Aussi EIGVAL représente le vecteur des valeurs propres ordonnées du Laplacien ; pour l'avoir, on applique l'opérateur EIG (appliqué à une matrice, il fournit le vecteur de toutes les valeurs propres dans l'ordre décroissant) au Laplacien du graphe.

• *Parameters* : Les symboles des paramètres du problème, qui sont n et m dans l'exemple.

• *InitialGraph* : Tout processus d'optimization nécessite une solution de départ, pour AutoGraphiX, il s'agit d'un graphe initial. *InitialGraph* est suivi d'un mot-clé correspondant au graphe initial choisi (on peut avoir la liste complète via la documentation). Dans la Figure 2.2, le graphe initial choisi est le chemin, qui correspond au mot-clé *Path*, sur n (paramètre) sommets.

• *Minimize* ou *Maximize :* est suivi de la fonction objectif. Dans la Figure 2.2, l'objectif est de maximiser $LL - LLBAR$ (la connectivité algébrique, la deuxième plus petite valeur propre du Laplacien d'un graphe G, moins la connectivité algébrique du graphe complémentaire $\overline{G}$).

• *Constraint* (optionnelle) suivi d'une liste de contraintes, chacune se terminant avec ";" puis une pénalité constante et une autre linéaire. Dans l'exemple, une première contrainte impose à l'ordre de prendre la valeur du paramètre n, une deuxième fixe la taille du graphe à m (le deuxième paramètre) et une troisième contraint le rayon à être fini : une façon d'assurer la connectivité du graphe.

2.2.3 Les paramètres d'optimisation

Avant de lancer le processus d'optimisation, on peut modifier les paramètres d'optimisation de la Recherche à Voisinage Variable (méta-heuristique exploitée par AutoGraphiX, voir par exemple [108, 110, 111, 144] pour une description détaillée), en utilisant la touche *Modify Optimization params.* Une fois que la fenêtre de droite de la Figure 2.2 est apparue, on peut changer la taille minimum (VnsMin) et/ou maximum (VnsMax) des perturbations, l'incrément des perturbations (VnsStep), le nombre d'essais lors d'une perturbation (VnsTry), la tolérence maximum pour le temps global de l'optimisation (VnsMaxTime), la tolérence maximum pour le temps sans amélioration de la solution (VnsMaxTimeWithoutImprovement), et enfin VnsBound, qui est utilisé lors des tentatives de réfutation d'une conjecture (le programme s'arrête si un contre-exemple est trouvé, si on ne veut pas utiliser cette option on affecte une grande valeur, par exemple 1000000, à VnsBound).

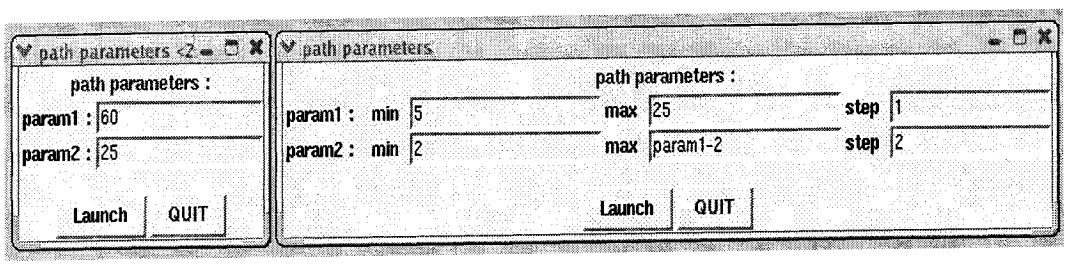


Figure 2.3 – Optimisation simple (gauche) et optimisation en batch (droite)

2.2.4 L'optimisation

Une fois les paramètres d'optimisations fixés, on peut optimiser de deux façons différentes. L'optimisation simple consiste à donner une valeur pour chacun des paramètres du problème dans les champs de la fenêtre gauche de la Figure 2.3 (qui

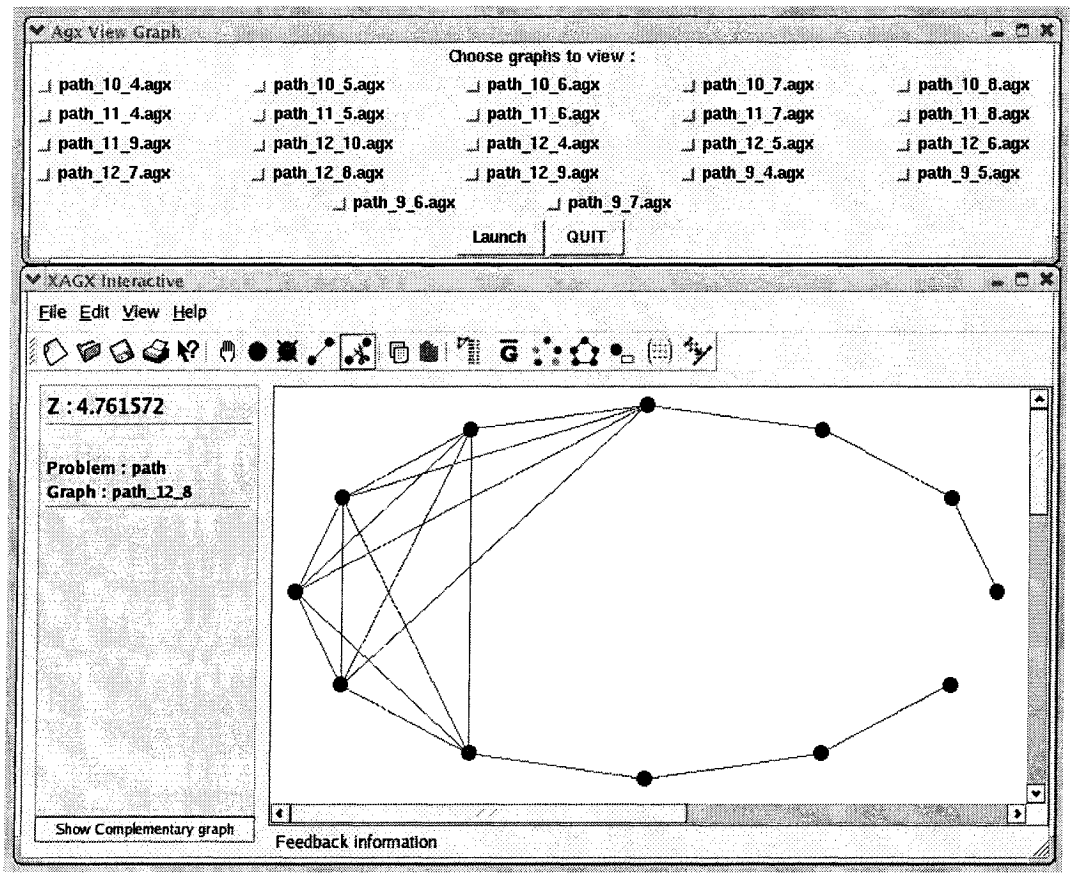


Figure 2.4 – Liste des graphes associés au problème (haut) et un graphe (bas)

s'obtient à l'aide de la touche *Optimize single*). L'alternative pour cette première option est la ligne de commande "*xagx -opt prob val1 val2*", où prob est le nom donné au problème, et val1 et val2 sont les valeurs que prendront les (deux) paramètres du problème. La deuxième option, l'optimisation en batch, consiste à spécifier un intervalle de valeurs (la plus petite et la plus grande valeur et l'incrément) pour chacun des paramètres du problème dans les champs appropriés (Figure 2.3, droite).

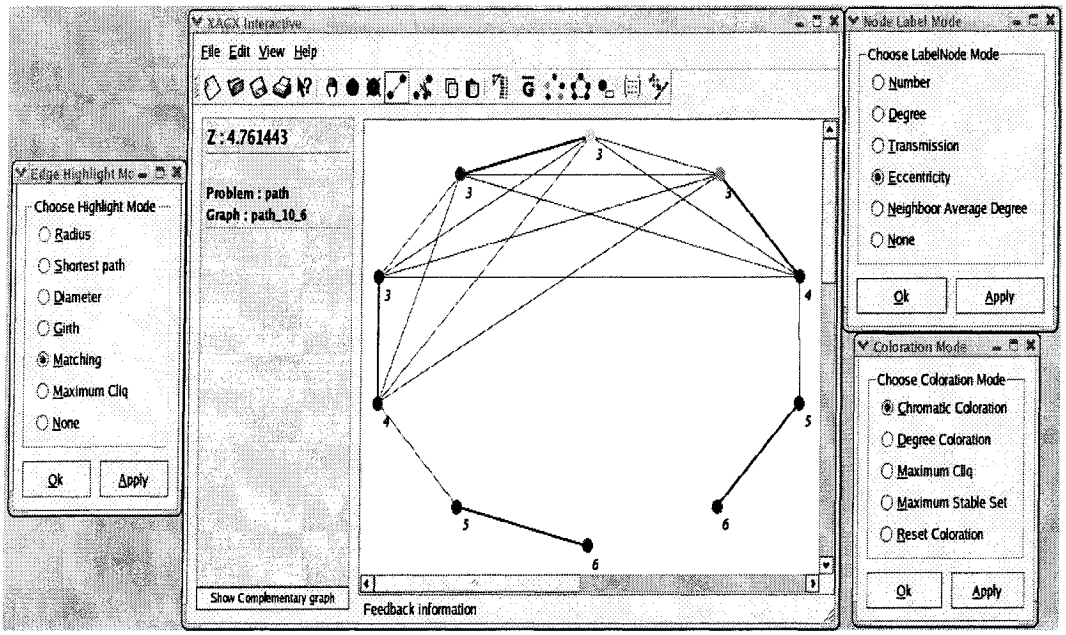


Figure 2.5 – Visualiser un graphe et ses attributs.

2.2.5 La visualisation des graphes

En pressant sur la touche *View graphs* du centre de contrôle (Figure 2.1), la liste de tous les graphes associés au problème sélectionné s'affiche. Le nom de chaque graphe est une concaténation du nom du problème et des valeurs respectives des paramètres : "prob_val1_val2". On sélectionne le graphe désiré et on l'affiche à l'aide du bouton *Launch*. Une fois le graphe disponible à l'écran, on peut le modifier comme on le désire (les modifications possibles sont décrites ci-dessous).

2.2.6 Le mode interactif

En plus de visualiser un graphe déjà existant (résultat d'un processus d'optimisation), on peut en générer ou en construire un nouveau. Après le lancement d'AGX 2 en mode interactif, à l'aide du bouton *Interactive mode* depuis le centre de contrôle

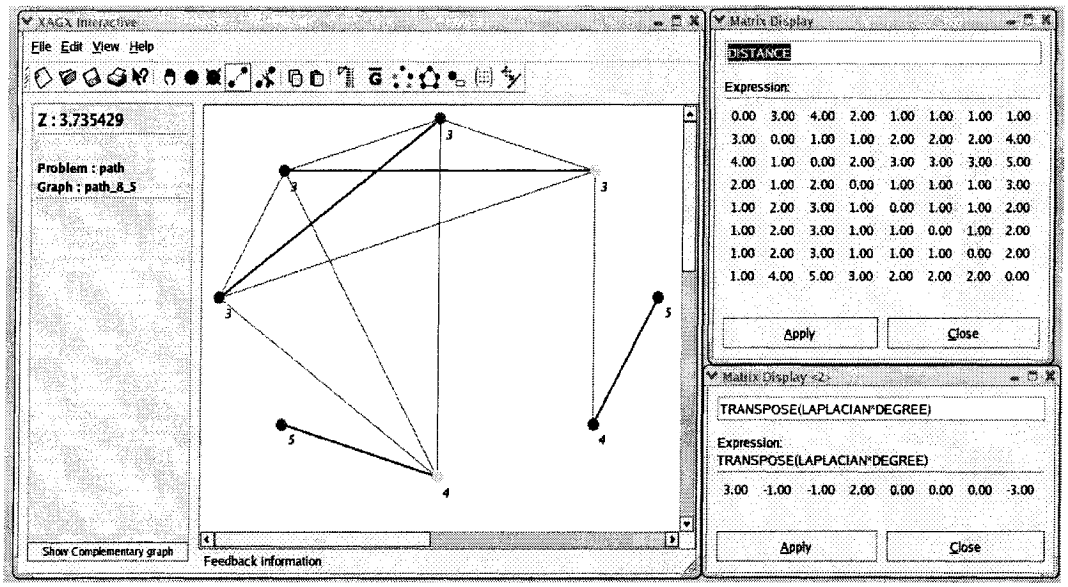


Figure 2.6 – Affichage des matrices et des vectors

(l'alternative est la ligne de commande "xagx -i"), on peut construire un graphe en fonction des besoins, en utilisant les opérations : ajouter ou supprimer un sommet ; ajouter, déplacer ou supprimer une arête ; échanger un graphe et son complémentaire. Chacune d'elles est représentée sur la barre des opérations en haut de la fenêtre. Mieux visualiser un graphe ne se limite pas à observer ses arêtes et ses sommets, mais s'étend aussi à l'évaluation des invariants (auxquels on s'intéresse) pour ce même graphe (voir Figure 2.5). Cette fonction se fait de trois façons différentes et complémentaires :

(*i*) Sur le graphe même par la coloration des sommets (coloration chromatique, en fonction des degrés, les sommets d'un stable maximum ou d'une clique maximum, *etc...*), et la surbrillance des arêtes (les plus courts chemins à partir d'un sommet, un couplage maximum, une clique maximum, le rayon, le diamètre, la maille, ...).

(*ii*) Affichage sur la marge de la fenêtre d'un ensemble d'invariants (nom et valeur) sélectionnés de la liste qu'on peut choisir à l'aide du bouton approprié. L'affichage des invariants sélectionnés se rapportant au graphe courant et à son complémentaire peut se faire en simultané.

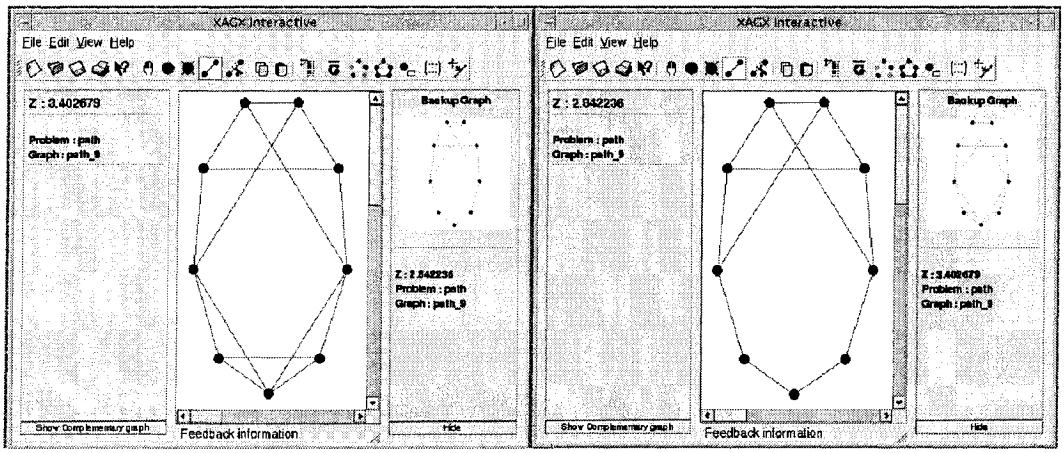


Figure 2.7 – Le mode backup

(*iii*) Sur une autre fenêtre (Figure 2.6), on peut visualiser des vecteurs et des matrices (un à la fois) associés au graphe, comme le vecteur des degrés, des valeurs propres, des excentricités ou des transmissions, la matrice d'adjacence ou des distances, le Laplacien ou toute autre combinaison (à l'aide des opérateurs disponibles) de vecteurs et/ou de matrices déjà définis.
Toutes les informations au sujet du graphe courant, discutées ci-dessus, sont automatiquement remises à jour au fur et à mesure que le graphe change.

Le mode backup

Le but principal des changements interactifs sur un graphe est l'obtention d'une amélioration (relativement à l'objectif fixé), donc on doit retenir le graphe actuel afin d'effectuer des comparaisons. C'est le rôle de la petite fenêtre en arrière plan de la Figure 2.7. Celle-ci contient le graphe actuel (ou de référence), les valeurs des invariants sélectionnés et de la fonction objectif. Une fois le graphe de référence retenu (en marge), on peut changer comme on veut le graphe courant (dans le champs principal de la fenêtre). Il est possible d'interchange les deux graphes ou remplacer l'un par l'autre.

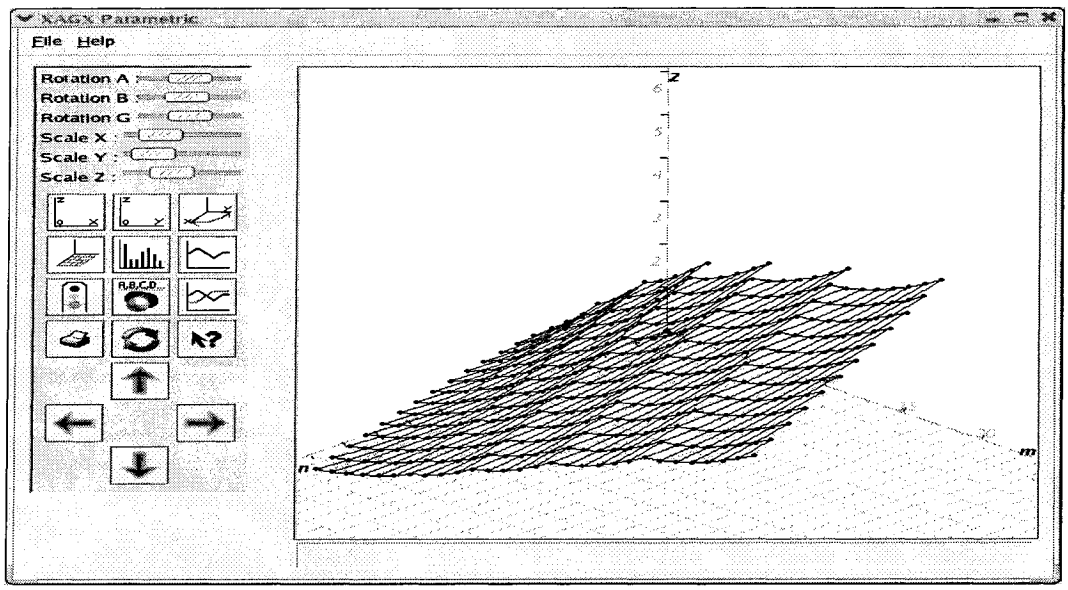


Figure 2.8 – Visualisation des résultats en 3D

2.2.7 La visualisation des résultats

En pressant le bouton *View results* dans la boite de dialogue du centre de contrôle (ou en entrant la ligne de commande "xagx -p prob"), on obtient les outils d'analyse des résultats. En premier, une petite boite de dialogue apparaît pour le choix d'un (pour une courbe en 2D) ou deux (pour une courbe en 3D) paramètres parmi ceux du problème, et d'un ou plusieurs filtres (optionnel, si aucun filtre n'est sélectionné tous les graphes son affichés) pour sélectionner, parmi les graphes disponibles et associés au problème, ceux qui répondent à certaines conditions (connexes, complémentaires connexes, satisfaisants les contraintes du problème et/ou ceux dont les paramètres sont dans un intervalle donné). Puis (Figure 2.8) la fonction objectif apparaît sous forme de courbe ou de nuage de points dans un espace à 2 ou 3 dimensions. La courbe ou le nuage de points (il est possible d'interchanger entre les deux formes) donne les valeurs de la fonction objectif pour les intervalles choisis des paramètres, et représente uniquement les graphes satisfaisant les conditions (filtres) choisies. On peut effectuer

plusieurs manipulations géométriques nous permettant de mieux voir et analyser les résultats : changer l'échelle de chacun des axes (Scale X, Scale Y, Scale Z), rotation autour de chaque axe (Rotation A, Rotation B, Rotation C), translater un axe à gauche, à droite, vers le haut ou vers le bas, projeter sur l'un des trois plans, et permuter entre les deux axes représentant les paramètres. Tous les boutons permettant ces manipulations se trouvent dans la marge gauche de la fenêtre. En faisant passer la souris sur un point, la barre d'état affiche le nom, les valeurs des paramètres et celle de l'objectif, associés au graphe correspondant. Pour visualiser un des graphes représentés, il suffit d'un clic sur le point correspondant, puis il apparaît dans une fenêtre du mode interactif. Une fois le graphe disponible, toutes les opérations décrites dans *le mode interactif* et dans *le mode backup* sont possibles.

Tracer les courbes de fonctions

Pour des fins d'approximation, AGX 2 interactif offre la possibilité de représenter une courbe, entrée manuellement, simultanément avec la courbe de l'objectif. Chose qui peut se faire de deux façons différentes. En premier lieu, on ouvre la boite de dialogue *Input function* à l'aide du bouton approprié, puis (*i*) on affiche la courbe correspondant à un invariant en le choisissant de la liste complète des invariants ; ou (*ii*) on saisit l'expression algébrique voulue, en respectant les règles de syntaxe décrites dans le paragraphe **Éditer un problème**, et la courbe correspondante s'affiche. La possibilité de tracer des fonctions interactivement, s'est avérée d'une grande utilité dans l'approximation des fonctions et dans la génération interactive des conjectures. Pour illustrer, les courbes de la Figure 2.9 représentent la borne de Hong (en haut) sur l'index d'un graphe connexe ([118] : $\lambda_1 \leq \sqrt{2m - n + 1}$, où n et m sont respectivement l'ordre et la taille du graphe), et (en bas) la borne obtenue par AutoGraphiX. Un des graphes correspondant à la borne obtenue par AGX est représenté dans la Figure 2.10.

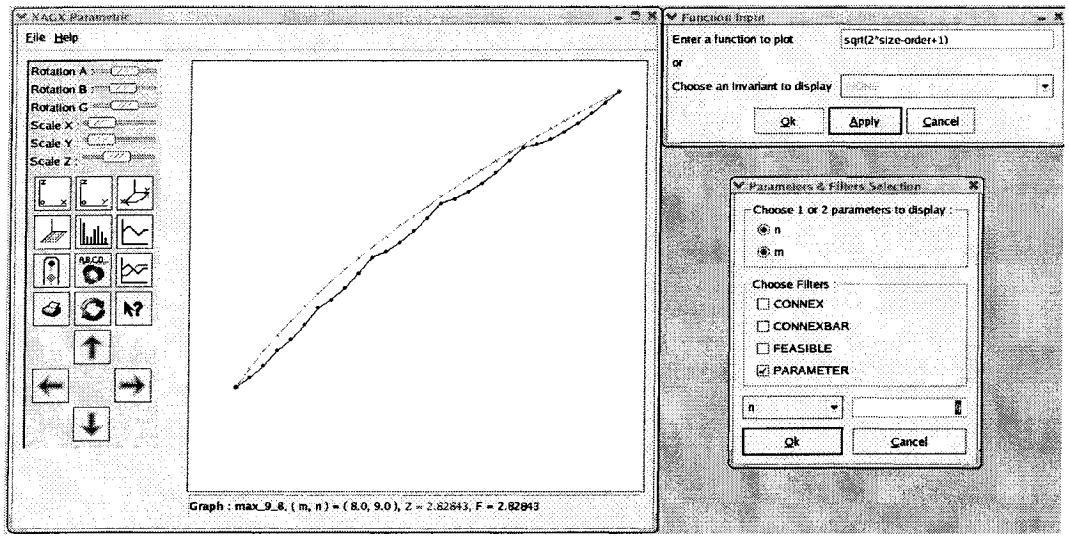


Figure 2.9 – Une comparaison avec la borne de Hong

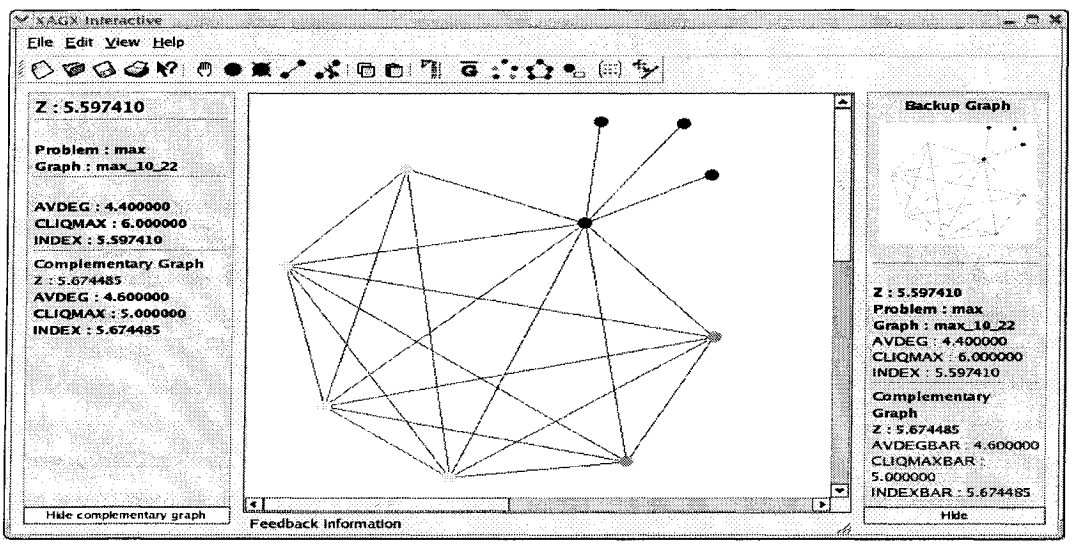


Figure 2.10 – Graphe maximisant λ_1 pour n et m donnés.

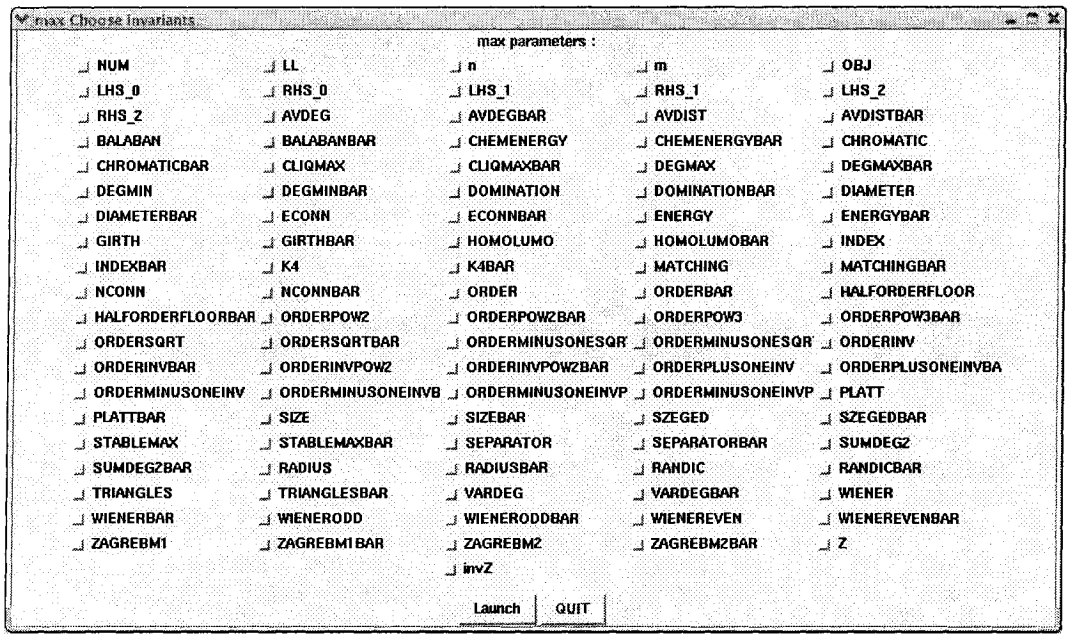


Figure 2.11 – Sélection d'invariants pour la recherche de conjecures

2.2.8 Trouver des conjectures

Une fois le processus d'optimisation achevé, et en plus des possibilités de visualiser les graphes et les courbes des résultats, on peut aussi rechercher des conjectures à partir du centre de contrôle. En pressant le bouton *Find Conjectures*, on obtient une boite de dialogue contenant la liste de tous les invariants disponibles (définis ou prédéfinis, aussi bien pour un graphe que pour son complémentaire, et la fonction objectif). On en sélectionne un certain nombre (qui ne doit pas dépasser la moitié du nombre de graphes disponibles, pour des raisons de stabilité numérique) et on lance la recherche de conjectures. Si des relations affines existent entre certains des invariants sélectionnés et vraies pour tous les graphes disponibles, AutoGraphiX les détecte et génère une base de toutes ces relations.

2.3 AutoGraphiX 2 : Preuves Automatiques

Les preuves assistées par ordinateur sont assez fréquentes en théorie des graphes et ont donné de bon résultats, le plus remarquable étant la preuve du théorème des 4 couleurs [6, 7, 8, 9, 161]. À l'opposé, les preuves entièrement automatisées sont rares ; toutefois quelques approches ont été explorées. Le système Graph de Cvetković et de ses collaborateurs [62, 64] est considéré comme le pionnier de l'approche de la preuve assistée par l'ordinateur en théorie des graphes. Il contient aussi une composante, THEOR, pour la preuve automatique des propriétés théoriques des graphes. Une approche différente a été adoptée dans Graph Theorist d'Epstein [72, 73, 74, 75]. Ces approches ont été discutées plus haut, mais il est à signaler que ces systèmes sont construits dans les années 80 et que depuis, de nombreux progrès et développements ont eu lieu tant dans les ordinateurs que dans l'automatisation des preuves de résultats ; ce qui ouvre la voie à de nouveaux travaux et axes de recherche.

Dans le système *AutoGraphiX 2* une approche différente est suivie : au lieu de formaliser les notions de la théorie des graphes, on adopte une démarche à un niveau plus global, c'est-à-dire, d'un côté la reconnaissance des familles de graphes extrêmes en se basant sur les valeurs des invariants et en les exploitant, et d'un autre côté, la combinaison de relations sur les invariants des graphes. Ces deux approches semblent plus proches, que celles suivies dans Graph et Graph Theorist, de l'attitude du théoricien des graphes dans son travail quotidien. Elles ont fait leurs preuves : plusieurs centaines de conjectures peuvent être prouvées ainsi. Il s'agit de résultats simples, mais qui sont d'un intérêt non négligeable, notamment dans l'enrichissement de la base de relations entre invariants dans AGX. Le but de l'implémentation d'une composante de preuve automatique n'est pas de prouver des théorèmes compliqués, mais de mettre au point des techniques de preuve simples et les plus générales possibles. Les techniques sont conçues pour opèrer sur une base de connaissances en respectant

un certain nombre de règles et de déduire tous les résultats qui sont théoriquement déductibles à partir des informations disponibles et en n'utilisant que les règles implémentées.

2.3.1 La règle de la définition

Le système AutoGraphiX 2 exploite une première approche élémentaire, dite *règle de la définition*, pour la preuve automatique de certains résultats. Lorsque les deux invariants sélectionnés sont définis à partir du même objet algébrique S (vecteur ou matrice), en utilisant des opérateurs comme le minimum (min), la moyenne (moy) ou le maximum (max), il est évident que

$$\min_{s \in S} S \leq \text{moy}\, S \leq \max_{s \in S} S,$$

avec égalités si et seulement si toutes les composantes de S ont la même valeur. Exploitant ce fait comme règle et ayant dans sa base de connaissances une liste des graphes pour lesquels les égalités se réalisent (pour chaque ensemble d'invariants définis avec ces opérateurs), AGX 2 prouve automatiquement les bornes sur la différence et le quotient entre ces invariants, c'est-à-dire, les bornes du type

$$Moy\ S - \min_{s \in S} S \geq 0; \quad \max_{s \in S} S - Moy\ S \geq 0; \quad \max_{s \in S} S - \min_{s \in S} S \geq 0;$$

et les bornes du type

$$Moy\ S / \min_{s \in S} S \geq 1; \quad \max_{s \in S} S / Moy\ S \geq 1; \quad \max_{s \in S} S / \min_{s \in S} S \geq 1.$$

Le système fournit aussi les graphes pour lesquels les bornes sont atteintes. C'est là le principal intérêt de cette règle.

Comme exemple de résultats obtenus lors de l'applications de l'approche basée sur la définition, on donne l'observation ci-dessous.

Rappelons que l'excentricité d'un sommet v d'un graphe $G = (V, E)$ est définie par

$$ecc(v) = \max_{u \in V} d(u, v),$$

où $d(u, v)$ désigne la distance entre les deux sommets u et v dans G; aussi l'excentricité moyenne ecc, le rayon r et le diamètre D de G sont définis par

$$ecc = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} ecc(v), \qquad r = \min_{v \in V} ecc(v) \qquad \text{et} \qquad D = \max_{v \in V} ecc(v).$$

Observation 1 :
Pour tout graphe G sur n sommets de rayon r, de diamètre D et d'excentricité moyenne ecc,

$$D - r \geq 0, \quad D - ecc \geq 0, \quad ecc - r \geq 0,$$
$$D/r \geq 1, \quad D/ecc \geq 1, \quad ecc/r \geq 1.$$

De plus, les bornes sont atteintes si et seulement si G est diamétrique (complet, cycle, biparti complet, ...).

2.3.2 La règle de l'intersection

Une autre approche pour la preuve automatique, implémentée dans AutoGraphiX, est celle basée sur *la règle de l'intersection*. La technique consiste à considérer les familles de graphes extrêmes associés à deux invariants sélectionnés. S'il existe une famille de graphes qui maximisent (resp. minimisent) les deux invariants en même temps, alors les mêmes graphes maximisent (resp. minimisent) et la somme et le produit des deux invariants considérés. D'autre part, si un premier invariant est minimum (resp. maximum) en même temps qu'un deuxième est maximum (resp. minimum) pour la même famille de graphes, alors la différence, le premier moins le deuxième,

et le rapport, le premier sur le deuxième, sont minimums (resp. maximums) pour la même famille.

Pour justifier ces règles considérons deux invariants graphiques $i_1(G)$ et $i_2(G)$, ainsi que l'opération $\oplus$ (resp. $\ominus$) qui désigne l'une des deux opérations $+$ et $\times$ (resp.$-$ et $/$). Il est évident que

(*i*) $Max\ (Min)\ \ i_1(G) \oplus i_2(G) = Max\ (Min)\ \ i_1(G) \oplus Max\ (Min)\ \ i_2(G)$ si et seulement s'il existe au moins un graphe G qui maximise (minimise) simultanément $i_1(G)$ et $i_2(G)$.

(*ii*) $Max\ (Min)\ \ i_1(G) \ominus i_2(G) = Max\ (Min)\ \ i_1(G) \ominus Min\ (Max)\ \ i_2(G)$ si et seulement s'il existe au moins un graphe G qui maximise (minimise) $i_1(G)$ et minimise (maximise) $i_2(G)$ simultanément.

En utilisant (*i*) et (*ii*) comme des règles et en considérant deux invariants choisis par l'usager, AutoGraphiX opère sur sa base de connaissances et teste si l'intersection des ensembles de familles de graphes extrêmes est vide ou pas. Si l'intersection n'est pas vide, AGX génère le résultat correspondant accompagné de sa preuve. Dans le résultat, la famille des graphes extrêmes est l'intersection des familles associées aux deux invariants choisis, et la formule algébrique de la borne est la combinaison, à l'aide de l'opération appropriée, des deux expressions respectives des deux invariants, aux bornes, en fonction de l'ordre n du graphe. Pour la combinaison des expressions algébriques, AutoGraphiX 2 fait appel à une composante conçue pour faire des calculs symboliques simples. Chaque élément de la base de connaissances est un invariant graphique et est représenté sous la forme illustrée dans Tableau 2.1. Pour illustrer cette méthode donnons les observations suivantes :

Observation 2 : *Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 3$, de degré maximum Δ et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$-\frac{n-5}{3} \leq \Delta - \bar{l} \leq n-2.$$

La borne inférieure est atteinte si et seulement si G est un chemin et la borne supérieure si et seulement si G est un graphe complet.

Tableau 2.1 – Un élément de la base de connaissances.

Définition de l'invariant.	
Symbole de l'invariant dans AutoGraphiX 2.	
Notation de l'invariant dans la littérature.	
$\underline{b}_n$: la formule de la borne inférieure (minimum de l'invariant) en fonction de l'ordre n du graphe.	$\overline{b}_n$: la formule de la borne supérieure (maximum de l'invariant) en fonction de l'ordre n du graphe.
$\mathcal{F}_{inf}$: liste de familles de graphes extrêmes associés à la borne inférieure.	$\mathcal{F}_{sup}$: liste de familles de graphes extrêmes associés à la borne supérieure.
$\underline{sb}_n$: la formule de la deuxième plus petite valeur de l'invariant en fonction de l'ordre n du graphe.	$\overline{sb}_n$: la formule de la deuxième plus grande valeur de l'invariant en fonction de l'ordre n du graphe.
$\mathcal{SF}_{inf}$: liste de familles de graphes associés à la deuxième plus petite valeur.	$\mathcal{SF}_{sup}$: liste de familles de graphes associés à la deuxième plus grande valeur.

Les graphes qui minimisent Δ sont les cycles et les chemins, et les graphes qui maximisent $\overline{l}$ sont les chemins. Donc $\Delta - \overline{l}$ est minimum pour les chemins avec, pour n fixé, $\Delta - \overline{l} = -\frac{n-5}{3}$.

Les graphes ayant un sommet dominant (les étoiles, les graphes complets, ...) maximisent Δ. Parmi ceux-ci, les graphes complets minimisent $\overline{l}$. Donc, les graphes complets maximisent $\Delta - \overline{l}$ avec $\Delta - \overline{l} = n - 2$.

Observation 3 :

Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 2$, de cardinalité maximale d'un couplage μ et de nombre chromatique χ,

$$2 \leq \mu \cdot \chi \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot n.$$

Tableau 2.2 – Le degré maximum dans la base de connaissances.

Le degré maximum	
DEGMAX	
Δ	
2.	$n-1$.
Les cycles et les chemins.	Les graphes avec au moins un sommet dominant : étoiles, complets ...
3.	$n-2$.
Graphes cubiques, lollipop, peigne, ...	Complémentaire d'un recouvrement minimum, ...

La borne inférieure est atteinte si et seulement si G est une étoile et la borne supérieure si et seulement si le graphe est complet.

Tableau 2.3 – L'indice de Randić dans la base de connaissances.

L'indice de Randić	
RANDIC	
Ra	
$\sqrt{n-1}$	$n/2$
Les étoiles.	Les graphes réguliers : les cycles, les complets, ...

Les graphes qui minimisent la cardinalité maximale d'un couplage (resp. le nombre chromatique) sont les étoiles (resp. les graphes bipartis). Donc les étoiles (qui sont des graphes bipartis) sont les graphes qui minimisent $\mu \cdot \chi$ avec $\mu \cdot \chi = 2$. D'autre part, les graphes complets sont ceux (uniques) qui maximisent le nombre chromatique et parmi ceux qui maximisent μ. Donc $\mu \cdot \chi$ est maximum pour les graphes complets avec $\mu \cdot \chi = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot n$.

2.3.3 La règle de la deuxième valeur

Pour simplifier la présentation de cette technique de preuve automatique, supposons que le but est de trouver une borne inférieure sur la somme de deux invariants à valeurs entières i_1 et i_2, et l'étape de la règle de l'intersection s'est terminée sur un échec, c'est-à-dire, que l'intersection des familles de graphes extrêmes est vide. Donc lorsque $i_1 = \underline{b}_n(i_1)$, $i_2 > \underline{b}_n(i_2)$. S'il existe une famille de graphes pour lesquels $i_1 = \underline{b}_n(i_1)$ et $i_2 = \underline{b}_n(i_2)+1 = \underline{sb}_n(i_2)$ ou $i_1 = \underline{b}_n(i_1)+1 = \underline{sb}_n(i_1)$ et $i_2 = \underline{b}_n(i_2)$, alors $i_1 + i_2 \geq \underline{b}_n(i_1) + \underline{sb}_n(i_2)$ ou $i_1 + i_2 \geq \underline{sb}_n(i_1) + \underline{b}_n(i_2)$, selon le cas. Pour savoir si une telle famille de graphes existe, AutoGraphiX 2 utilise le test de l'intersection appliqué aux familles de graphes associées à la plus petite valeur de l'un et à la deuxième plus petite de l'autre des deux invariants. Contrairement à la règle de l'intersection, celle de la deuxième valeur ne s'applique pas à toutes les paires d'invariants. Le problème réside dans la difficulté de trouver la deuxième plus petite valeur (et les graphes associés) pour certains invariants, essentiellement ceux à valeurs non entières. Pour illustrer la règle de la deuxième valeur considérons le diamètre D et la connectivité aux arêtes κ. La première étape montre que l'intersection des ensembles de familles de graphes extrêmes respectifs, est vide. En effet, $D \geq 1$ avec égalité si et seulement le graphe est complet, au moment où $\kappa = n-1$ est maximum pour le graphe complet. Ensuite, on considère la deuxième plus petite valeur pour le diamètre D, et puis on applique à nouveau le test de l'intersection et on examine si elle est vide ou pas pour les familles de graphes avec $D = 2$ (la deuxième plus petite valeur de D) d'une part, et la famille des graphes minimisant κ d'autre part. Par exemple, les étoiles sont des graphes avec $D = 2$ et minimisant κ, donc $D + \kappa \geq 3$.

Des règles similaires existent pour la borne supérieure sur la somme, les borne inférieure et supérieure sur la différence. Comme exemples de résultats obtenus et prouvés à l'aide de cette approche, considérons les observations suivantes :

Observation 4 :

Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 3$, de degré minimum δ et de maille g,

$$\delta - g \geq 2 - n.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est un cycle ou composé d'un cycle sur $n-1$ sommets et une arête pendante.

Cette observation peut s'obtenir en considérant la deuxième plus grande valeur de g ou la deuxième plus petite de δ.

Observation 5 :

Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 3$, de diamètre D et de degré minimum δ,

$$D + \delta \geq 3.$$

La borne est atteinte si est seulement si G est une étoile.

Remarque :

• La règle de la deuxième valeur ne s'applique pas directement à la division et au produit. En effet, si une variation d'une unité pour un des deux invariants considérés, engendre une variation d'une unité pour la somme et pour la différence, ceci n'est pas le cas pour le rapport ou pour le produit. Si on applique la technique au rapport $\frac{\delta}{g}$, comme pour la différence dans l'Observation 4, on obtiendrait

$$\frac{\delta}{g} \geq \frac{2}{n},$$

en utilisant la deuxième plus petite valeur de δ au lieu de la deuxième plus grande de g qui donne le vrai résultat (dont la preuve est simple) :

$$\frac{\delta}{g} \geq \frac{1}{n-1}.$$

• Il y a aussi des problèmes qui empêchent la généralisation de la méthode au cas d'invariants non entiers. En effet, son application pour la borne supérieure sur la différence $Ra - \delta$, avec la deuxième valeur de δ donnerait

$$Ra - \delta \leq \frac{n}{2} - 2,$$

avec égalité si et seulement si G est un cycle, or la composante d'optimisation d'AutoGraphiX 2 donne la conjecture (ouverte) suivante qui donne une meilleure borne.

Conjecture 24 : *Pour tout graphe G d'indice de Randić Ra et degré minimum δ,*

$$Ra - \delta \leq \frac{3n - 13 + \sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{6}.$$

La borne est atteinte si G est un graphe construit comme suit, on considère un graphe H régulier de degré 3 sur $p \leq n - 3$ sommets, un chemin sur $n - p$ sommets et d'extrêmités u_1 et u_2 ; on supprime de H une arête v_1v_2 et on relie u_1 à v_1 et à v_2.

2.3.4 La règle de la déduction

Le système AutoGraphiX 2 est muni d'une base d'inégalités de la forme

$$a \leq b; \quad a + b \leq c; \quad a \leq b + c; \quad a + b \leq c + d,$$

qu'il explore dans le but de déduire de nouvelles inégalités du même type. L'exploration de cette base se fait également dans le but de démontrer des conjectures exprimées sous forme d'inégalités entre invariants graphiques, fournies par la composante de génération de conjectures du système même ou par l'utilisateur. Pour ces fins, AutoGraphiX 2 se conforme aux règles qu'on peut exprimer comme suit :

$$\begin{array}{llllll} Si & a \leq b & et & b \leq c & alors & a \leq c\,; \\ Si & a \leq b & & & alors & a + c \leq b + c\,; \\ Si & a \leq b & et & c \leq d & alors & a + c \leq b + d\,. \end{array}$$

Contrairement aux trois premières techniques ci-dessus où à chaque borne est associée une famille de graphes extrêmes, la présente technique consiste à démontrer des inégalités entre invariants, simples ou composés, à partir d'inégalités connues sans se soucier des familles de graphes pour lesquelles les bornes sont atteintes ni si les bornes sont les meilleures possibles ou pas. Un des avantages de cette technique est la détection de redondances parmi un ensemble d'inégalités.

On va illustrer les étapes de cette technique en l'appliquant à l'inégalité suivante :

$$\Delta + D \leq \kappa + n.$$

1. Mettre l'inégalité sous la forme standard, les constantes et n à droite du signe $\leq$ et les autres invariants à gauche. Ce qui donne

$$\Delta + D - \kappa \leq n.$$

2. Faire la liste de tous les invariants, avec leur signe, apparaissant dans l'inégalité, excepté l'ordre n, pour l'exemple il s'agit du degré maximum Δ, du diamètre D et de la connectivité aux arêtes avec un signe négatif $-\kappa$.
   Sélectionner de la base de données toutes les relations faisant intervenir chacun des invariants :

Tableau 2.4 – Liste d'inégalités pour une sélection d'invariants.

Δ	D	κ
$\Delta \leq n-1$	$D \leq n-1$	$\kappa \leq n-1$
$-\Delta \leq -1$	$-D \leq -1$	$-\kappa \leq -1$
$\overline{d} - \Delta \leq 0$	$r - D \leq 0$	$-\delta + \kappa \leq 0$
$\chi - \Delta \leq 1$	$\Delta + D \leq n+1$	$-\Delta + \kappa \leq 0$
$-\Delta + \kappa \leq 0$	$\delta + D \leq n$	
$\Delta + D \leq n+1$	$D + \overline{d} \leq n + 1 - \frac{2}{n}$	
$\Delta + r \leq n$		

3. Éliminer les relations dont l'invariant n'a pas le bon signe (de telles relations ne seront pas utilisées pour prouver l'inégalité donnée, car on n'utilise que l'addition). Les résultats de cette opération sont représentés dans le Tableau 2.5.

Tableau 2.5 – Liste des inégalités sans mauvais signe.

Δ	D	κ
$\Delta \leq n-1$	$D \leq n-1$	$-\kappa \leq -1$
$\Delta + D \leq n+1$	$\Delta + D \leq n+1$	
$\Delta + r \leq n$	$\delta + D \leq n$	
	$D + \overline{d} \leq n+1-\frac{2}{n}$	

4. Élimination des relations redondantes (voir Tableau 2.6). Une relation est redondante si elle apparaît dans au moins deux colonnes. Ceci est assez fréquent vu l'existence de relations reliant presque toute paire d'invariants.

Tableau 2.6 – Liste d'inégalités sans redondance.

Δ	D	κ
$\Delta \leq n-1$	$D \leq n-1$	$-\kappa \leq -1$
$\Delta + D \leq n+1$	$\delta + D \leq n$	
$\Delta + r \leq n$	$D + \overline{d} \leq n+1-\frac{2}{n}$	

5. Éliminer les relations contenant des invariants autres que ceux de l'énoncé. Si une des relations à combiner contient un invariant que l'énoncé à prouver ne contient pas, il a de forte chance de se retrouver dans toute relation issue de la combinaison. Donc, dès le début les relations contenant des invariants "intrus" sont éliminées.

Une fois cette sélection effectuée, on combine les relations restantes de différentes façon et on compare avec l'énoncé. Dans cet exemple, la deuxième relation de la première colonne du Tableau 2.7 additionnée à l'unique relation de la troisième colonne,

Tableau 2.7 – Liste d'inégalités sans autres invariants.

Δ	D	κ
$\Delta \leq n-1$ $\Delta + D \leq n+1$	$D \leq n-1$	$-\kappa \leq -1$

donne le résultat recherché. L'addition des relations $\Delta \leq n-1$, $D \leq n-1$ et $-\kappa \leq -1$ donne $\Delta + D - \kappa \leq 2n-3$, qui est un résultat moins bon que celui recherché.

Cette technique de la preuve automatique a été utilisée pour étudier une série de 259 conjectures du système HR. Sur ces 259 conjectures, 205 (79.15%) sont prouvées, parmi lesquelles 21 ont été améliorées et 17 existaient déjà dans la base de connaissances. D'autre part, 16 conjectures ont été prouvées à la main, 37 réfutées et une reste ouverte.

Sur une autre série de 1645 conjectures, toujours de HR, 318 sont prouvées parmi lesquelles 122 sont améliorées et 91 existaient déjà dans la base de connaissances. Par exemple la relation $D + n \geq \Delta$ (de HR) a été amélioré en $\Delta - D \leq n-2$, avec la condition $n \geq 2$.

2.4 Génération de Conjectures

2.4.1 Génération automatique : la méthode numérique

Introduction de fonctions en n

La méthode numérique [41, 42] de génération de conjectures d'AGX 1 est réimplémentée dans AGX 2 avec quelques modifications. Ces dernières concernent essentiellement l'introduction de fonctions non linéaires en n, l'ordre du graphe. En effet, la méthode numérique, basée sur les propriétés algébriques de l'analyse en composantes principales, détecte une base de toutes les relations affines existantes entre une sélection d'invariants et relativement à un ensemble de graphes extrêmes. La méthode ne trouve pas les relations non affines entre invariants, toutefois, se basant sur la remarque que si $i, i_1, i_2, \cdots i_k$ sont des invariants liés par

$$F(i_1, i_2, \cdots i_k) = h(i) \tag{2.3}$$

où F est une fonction affine en $i_1, i_2, \cdots i_k$ et $h(i)$ une fonction non affine en i, alors la relation (2.3) est affine en $h(i), i_1, i_2, \cdots i_k$. Ainsi, si on introduit $h(i)$ dans le système, celui-ci peut détecter et énoncer la relation explicitement, ou implicitement par la donnée d'une base de relations qui permet de la déduire. Il est à noter qu'il est impossible de fournir au système toutes les fonctions $(h(i))$ possibles. Une étude[1] a été effectuée pour déterminer un petit ensemble de fonctions en n, en général suffisant, à l'issue de laquelle on a constaté que les fonctions les plus fréquentes sont du type $n^2, n^3, 1/n, 1/n^2, 1/n^3, 1/(n-1), 1/(n-1)^2, 1/(n-1)^3, \sqrt{n-1}, 1/\sqrt{n-1}, \lfloor n/2 \rfloor, \ldots$

En considérant les expressions ci-dessus comme des invariants, il est possible d'obtenir de façon automatique un grand nombre de bornes non affines en n. Il est notamment possible de détecter toutes les bornes polynomiales de degré inférieur ou égal à 3.

[1] L'étude en question a porté sur un échantillon de 300 bornes sur des paires d'invariants combinées à l'aide des quatre opérations arithmétiques de base.

Comme exemples illustrant ce type de bornes, on peut donner les conjectures suivantes :

Conjecture 25 : *Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 2$, de degré minimum δ et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$\frac{2n^2-4}{n(n-1)} \leq \bar{l} + \delta \leq n.$$

De plus la borne inférieure est atteinte si et seulement si G est composé d'une clique sur $n-1$ sommets et une arête pendante. La borne supérieure est atteinte si et seulement si G est un graphe complet.

Pour voir que la borne inférieure de cette conjecture est une fonction affine en $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n-1}$, il suffit de remarquer que

$$\frac{2n^2-4}{n(n-1)} = 2 + \frac{4}{n} - \frac{2}{n-1}.$$

Cette conjecture et la suivante sont prouvées dans la Section 3.2.

Conjecture 26 : *Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 2$, de degré minimum δ et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$\frac{n^2+n-4}{n(n-1)} \leq \bar{l} \cdot \delta \leq n-1.$$

De plus la borne inférieure est atteinte si et seulement si G est composé d'une clique sur $n-1$ sommets et une arête pendante. La borne supérieure est atteinte si et seulement si G est un graphe complet.

Comme pour la conjecture précédente la borne inférieure de celle-ci s'écrit sous la forme

$$\frac{n^2+n-4}{n(n-1)} = 1 + \frac{4}{n} - \frac{2}{n-1}.$$

Conjecture 27 : *Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 2$, de degré moyen $\overline{d}$ et d'index λ_1,*

$$1 \leq \frac{\lambda_1}{\overline{d}} \leq \frac{n}{2\sqrt{n-1}}.$$

De plus la borne inférieure est atteinte si et seulement si G est un graphe régulier et la borne supérieure si et seulement si G est une étoile.

Pour voir que la borne supérieure est une fonction affine en $\sqrt{n-1}$ et $1/\sqrt{n-1}$, il suffit de constater que

$$\frac{n}{2\sqrt{n-1}} = \frac{1}{2}\sqrt{n-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n-1}}.$$

La borne inférieure de cette conjecture est connue dans la littérature [59]. La borne supérieure est prouvée dans la Section 3.3.

Séparation de l'ensemble des graphes extrêmes

Les expériences menées avec AutoGraphiX montrent que dans certains cas les familles de graphes extrêmes dépendent de la parité de l'ordre. Dans de tels cas, il est plus faciles de trouver les formules algébriques pour les bornes étudiés si l'ensemble des graphes supposés extrêmes est séparé selon cette parité. Pour résoudre ce problème, on a implémenté dans AutoGraphiX 2 une routine qui, en cas d'échec dans la recherche de conjectures sur l'ensemble de tous les graphes extrêmes, subdivise celui-ci en deux sous-ensembles. Un premier sous-ensemble contient les graphes d'ordre pair, et un deuxième contient les graphes d'ordre impair. Après quoi la composante de recherche de conjectures est appelée à nouveau pour tenter de trouver des relations affines. En cas de succès, une formule algébrique est fournie pour chacun des deux sous-ensembles. Les deux formules sont réunies dans un même énoncé, pour obtenir une conjecture générale.

Donnons comme exemples de conjectures obtenues après séparation de l'ensemble des graphes extrêmes selon la parité de leur ordre, les suivantes :

Conjecture 28 : *Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 3$, de distance moyenne $\overline{l}$ et de maille g,*

$$g - \overline{l} \leq \begin{cases} n - \frac{n^2}{4(n-1)} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n - \frac{n+1}{4} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

De plus la borne est atteinte si et seulement si G est un cycle.

Cette conjecture est démontrée dans la Section 3.2 ; la suivante dans la Section 3.1.

Conjecture 29 : *Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 3$, de diamètre D et de maille g,*

$$D \cdot g \leq \begin{cases} \frac{n^2}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{n^2-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

De plus la borne est atteinte si et seulement si G est un cycle si n est pair et si et seulement si G est composé d'un cycle sur $n-1$ sommets et une arête pendante si n est impair.

2.4.2 Génération assistée : la méthode algébrique

On dit qu'une conjecture est générée de façon assistée si les graphes extrêmes sont obtenus automatiquement avec AutoGraphiX sans pouvoir fournir une formule algébrique, et que cette dernière est déduite par l'utilisateur. Il y a deux façons distinctes de calculer la formule algébrique associée à une borne.

Exploitation des propiétés des graphes extrêmes

Dans cette première méthode de génération de conjecture, l'utilisateur observe les graphes, obtenus lors du processus d'optimisation d'AutoGraphiX, à l'aide des outils de visualisation des graphes et des résultats du système. Si une régularité dans les graphes est distinguée, l'usager exploite les propriétés théoriques des graphes ayant cette structure et évalue les valeurs des invariants considérés en fonction de l'ordre n. En combinant ces expressions avec les mêmes opérations qu'on a utilisées pour la combinaison des invariants dans l'objectif, on obtient la formule algébrique associée à la borne.

Illustrons cette méthode à l'aide de l'exemple suivant. À l'issue de l'optimisation dans le but de l'obtention des bornes supérieures sur $Ra - \lambda_1$ et sur Ra/λ_1, où Ra et λ_1 désignent respectivement l'indice de Randić et l'index d'un graphe, on a eu comme graphes extrêmes les chemins, si $n \leq 9$ pour la différence et si $n \leq 26$ pour le rapport, et les cycles si $n \geq 10$ pour la différence et si $n \geq 27$ pour le rapport. AutoGraphiX n'a pas fourni de formules algébriques ni pour l'un ni pour l'autre des deux cas. En visualisant les graphes, on distingue sans aucune difficulté les familles de graphes supposés extrêmes : les chemins et les cycles. Il est bien connu que pour un chemin sur n sommets,

$$\lambda_1 = 2cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \quad \text{et} \quad Ra = \frac{n-3+2\sqrt{2}}{2},$$

et que pour un cycle sur n sommets,

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{et} \quad Ra = \frac{n}{2}.$$

En substituant dans l'expression de la fonction objectif correspondant à chaque cas, on obtient les conjectures suivantes, qui sont prouvées dans la Section 3.3.

Conjecture 30 : *Pour tout graphe d'ordre $n \geq 3$, d'indice de Randić Ra et d'index λ_1,*

$$Ra - \lambda_1 \leq \begin{cases} \frac{n-3+2\sqrt{2}}{2} - 2cos(\frac{\pi}{n+1}) & si\ n \leq 9, \\ \\ \frac{n-4}{2} & si\ n \geq 10. \end{cases}$$

La borne est atteinte pour les chemins si $n \leq 9$ et pour les cycles si $n \geq 10$.

Conjecture 31 : *Pour tout graphe d'ordre $n \geq 3$, d'indice de Randić Ra et d'index λ_1,*

$$Ra/\lambda_1 \leq \begin{cases} (n-3+2\sqrt{2})/(4cos(\frac{\pi}{n+1})) & si\ n \leq 26, \\ \\ \frac{n}{4} & si\ n \geq 27. \end{cases}$$

La borne est atteinte pour les chemins si $n \leq 26$ et pour les cycles si $n \geq 27$.

Approximation interactive des courbes

Après l'obtention des graphes "extrêmes" avec l'optimisation et dans le cas où aucune régularité n'est obsérvée, l'utilisateur essaie de faire des approximations interactives de la courbe des résultats (l'objectif, dans le problème, en fonction de l'ordre n du graphe) en utilisant les outils de visualisation et d'approximation des courbes dans AutoGraphiX 2.

Par exemple, lors de la minimisation de $\alpha + \omega$, où α et ω désignent respectivement le nombre de stabilité et la cardinalité maximale d'une clique, les graphes obtenus

sont très denses, et il est très difficile de distinguer une régularité parmi ces graphes supposés extrêmes. Toutefois, la courbe de l'objectif en fonction de l'ordre présente une régularité très distincte comme on peut le constater sur la Figure 2.12 (courbe en escalier).

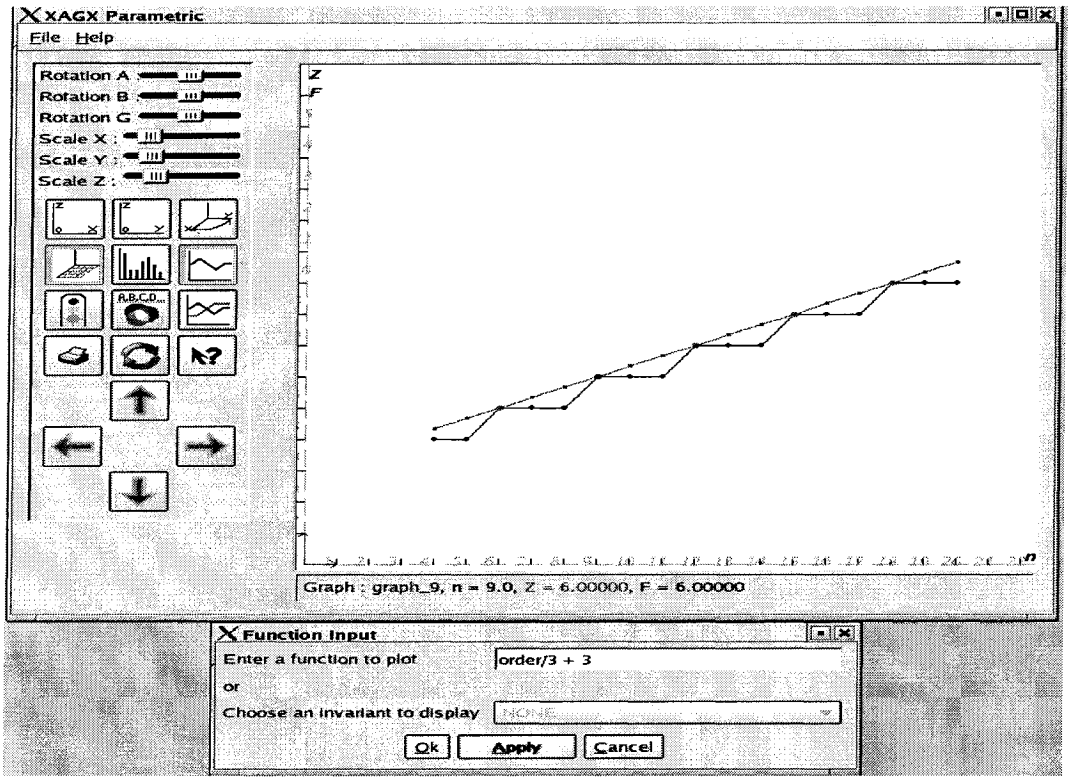


Figure 2.12 – La courbe de la minimisation de $\alpha + \omega$.

Une première approximation donne tous les pics de la courbe sur la droite d'équation $\alpha + \omega = 3 + \frac{n}{3}$, comme illustré dans la Figure 2.12. En introduisant l'opérateur plancher d'un nombre ($\lfloor x \rfloor$: le plus grand entier inférieur ou égal à x), pour une deuxième approximation, on obtient l'équation de l'objectif, à savoir $\alpha + \omega = 3 + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ tel qu'illustré dans la Figure 2.13. Ces approximations nous conduisent à la conjecture suivante :

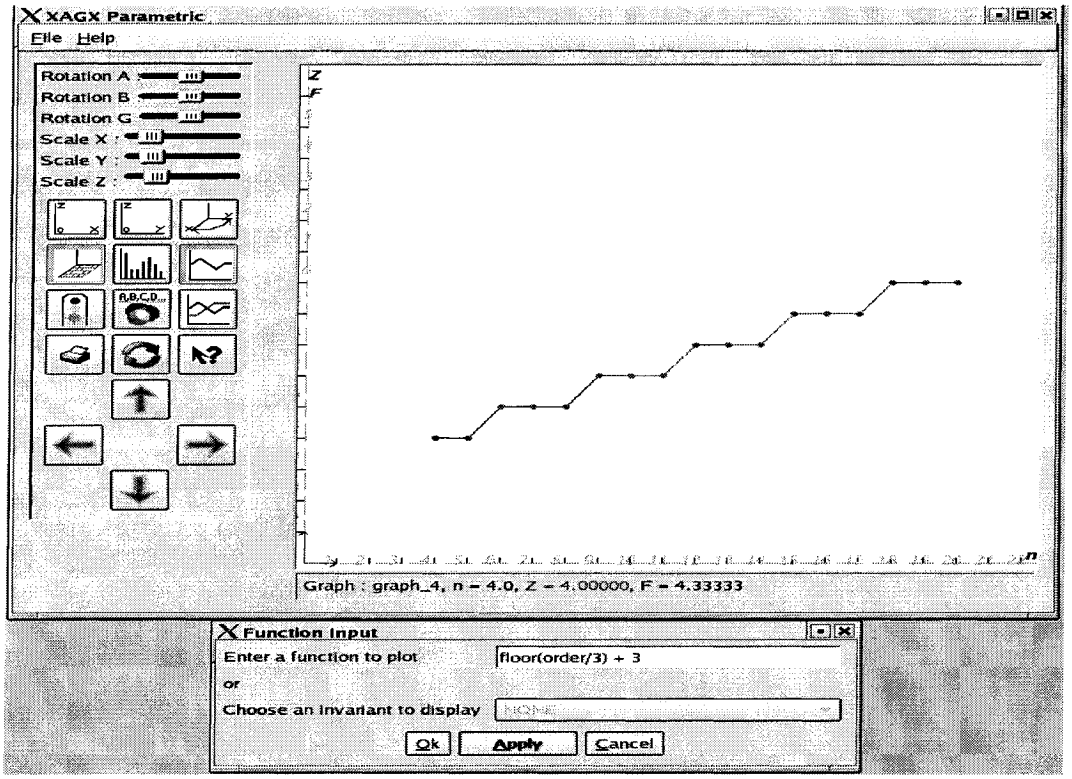


Figure 2.13 – Approximation de la courbe de $\alpha + \omega$.

Conjecture 32 : *Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 3$, de nombre de stabilité α et de nombre cliquomatique ω,*

$$\alpha + \omega \geq 3 + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor .$$

Lors de la rédaction du manuscript de cette thèse, nous avons observé que le graphe constitué de deux copies du graphe B_2 de Locke et Lou [138] reliées par une arête, est un contre-exemple pour la borne inférieure de la Conjecture 32 avec $n = 16$, $\omega = 3$ et $\alpha = 4$ (voir Figure 2.14). Ce graphe étant compliqué on voit mal comment il aurait pu être obtenu par l'ordinateur seul.

Il est possible de combiner les deux méthodes précédentes (reconnaîssance des graphes et approximation des courbes) pour générer interactivement des conjectures, comme illustré dans l'exemple suivant.

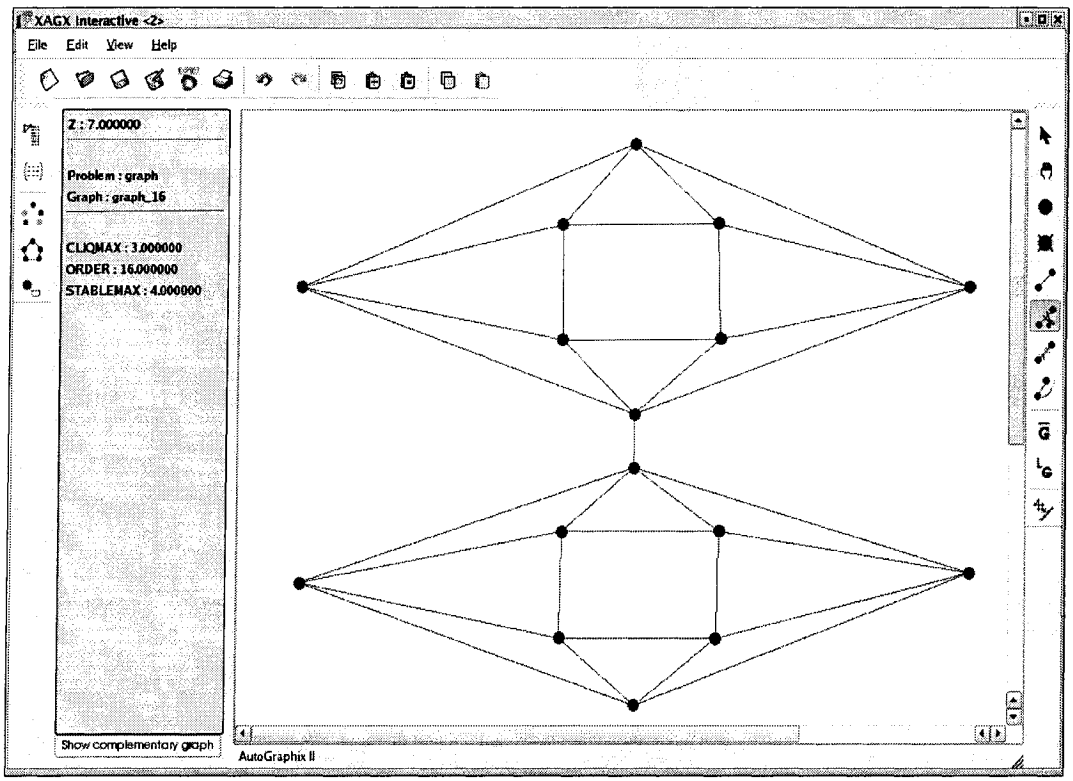


Figure 2.14 – Un contre-exemple pour la borne inférieure sur $\alpha + \omega$.

Il s'agit de trouver la borne supérieure pour $\alpha \cdot Ra$, où α et Ra désignent le nombre de stabilité et l'indice de Randić respectivement. La visualisation des graphes obtenus à l'issue de l'optimisation permet de reconnaître facilement la famille des graphes extrêmes : les bipartis complets (Figure 2.15). Pour un graphe biparti complet, $K_{p,q}$ avec $p \geq q$, on sait que $\alpha = p$ et $Ra = \sqrt{pq}$. Ainsi, il suffit de connaître la valeur de p en fonction de n pour avoir la formule algébrique de la borne recherchée.

Pour avoir l'expression de α en fonction de n, on va donc faire une approximation de la courbe (Figure 2.16) des valeurs du stable maximum pour les différents graphes, et non pour la courbe de la fonction objectif.

En introduisant dans le champs d'entrée des fonctions l'expression $\alpha - \lceil \frac{3n-2}{4} \rceil$, Fi-

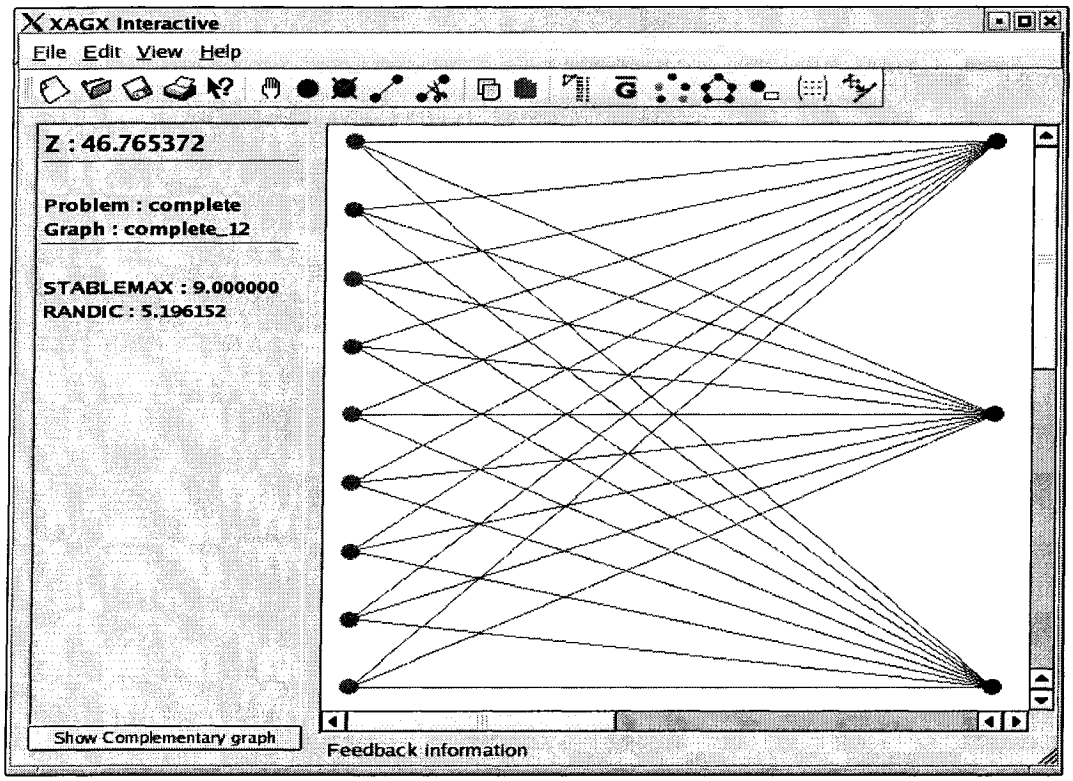


Figure 2.15 – Le graphe $K_{9,3}$ maximise $\alpha + Ra$ pour $n = 12$.

gure 2.17 : $stablemax - ceil((3 * order - 2)/4)$, on obtient une droite superposée avec l'axe des abscisses. Ceci signifie que pour les graphes supposés extrêmes pour la maximisation de $\alpha \cdot Ra$, on a $\alpha = \lceil \frac{3n-2}{4} \rceil$. Une simple substitution nous donne les valeurs suivantes pour les graphes extrêmes

$$p = \alpha = \left\lceil \frac{3n-2}{4} \right\rceil,$$
$$q = n - \alpha = \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor,$$
$$Ra = \sqrt{pq} = \sqrt{\left\lceil \frac{3n-2}{4} \right\rceil \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor},$$

et nous permet d'obtenir la conjecture suivante :

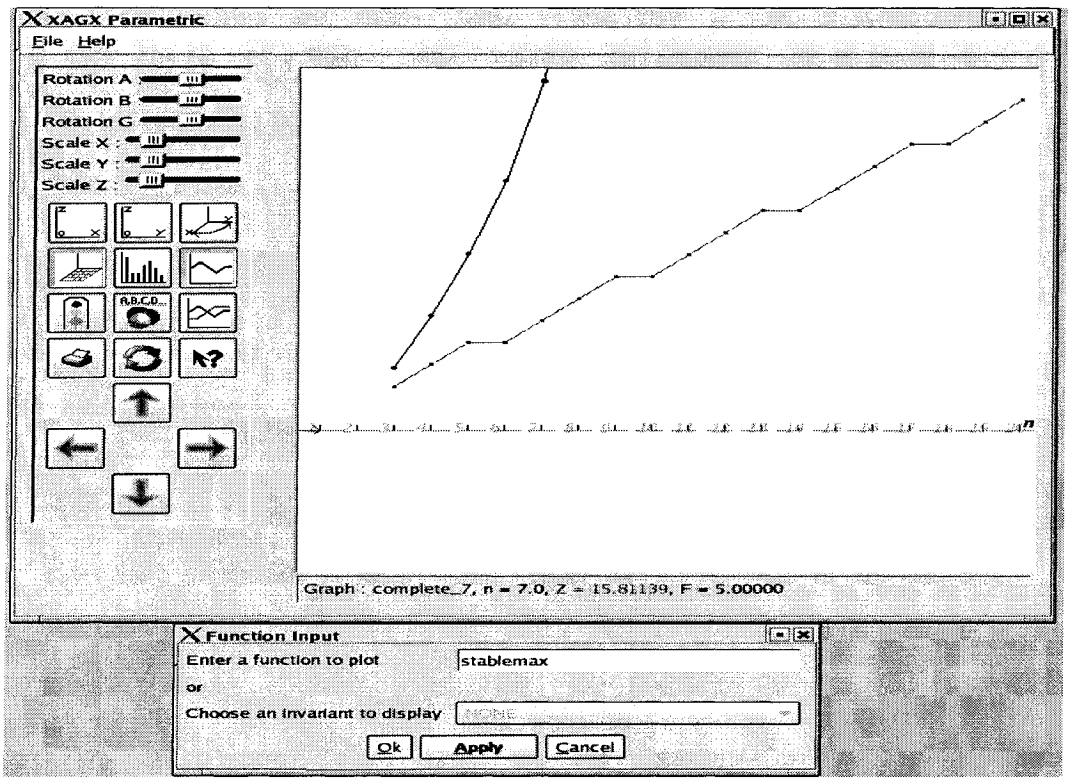


Figure 2.16 – La courbe de α en fonction de n.

Conjecture 33 : *Pour tout graphe G d'ordre n, de nombre de stabilité α et d'indice de Randić Ra,*

$$\alpha \cdot Ra \leq \left\lceil \frac{3n-2}{4} \right\rceil \sqrt{\left\lceil \frac{3n-2}{4} \right\rceil \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor}.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est un graphe biparti complet K_{pq} avec $p = \alpha = \left\lceil \frac{3n-2}{4} \right\rceil$ et $q = \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor$.

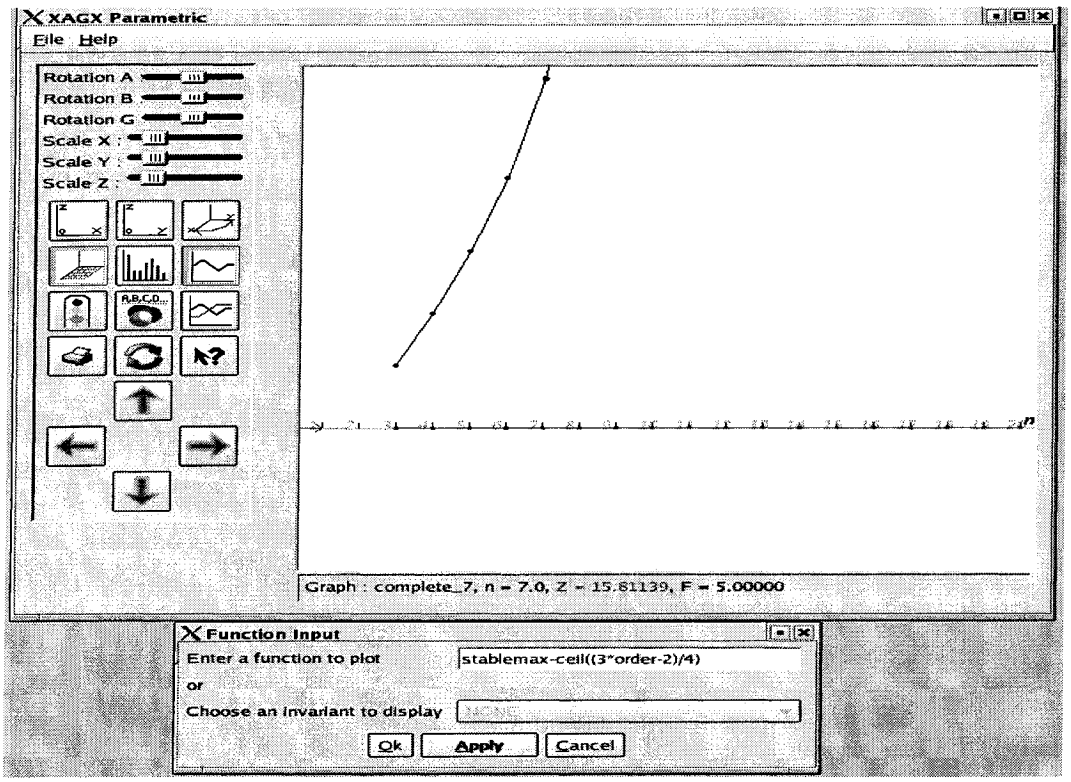


Figure 2.17 – La courbe de $\alpha - \lceil \frac{3n-2}{4} \rceil$ en fonction de n.

2.4.3 Conjectures structurales

Une conjecture est dite structurale si son énoncé contient une description de la structure des graphes extrêmes sans formules algébriques pour la borne. Une telle situation est rencontrée lorsque la structure des graphes extrêmes est reconnaissable sans pouvoir évaluer ni automatiquement ni manuellement les expressions d'un ou de plusieurs des invariants considérés. Lorsque la régularité de la structure est très distincte, le problème d'obtention de l'expression d'un invariant en fonction de l'ordre, est dû essentiellement à deux raisons.

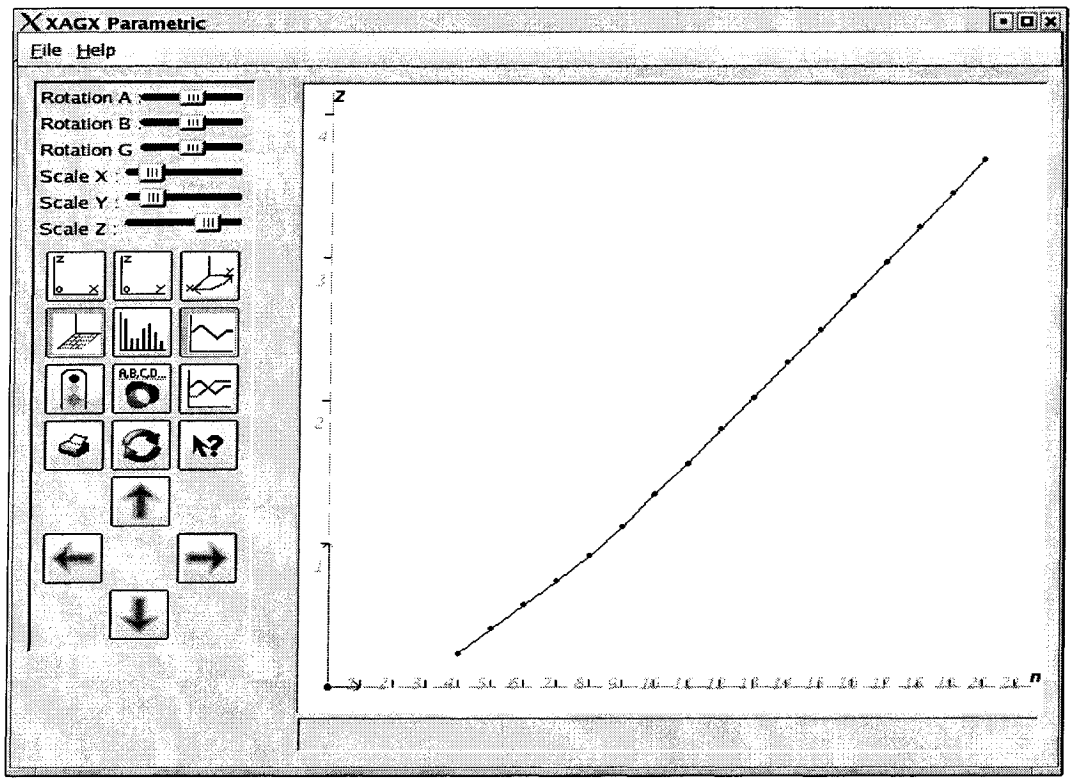


Figure 2.18 – La courbe de la borne supérieure pour $\lambda_1 - \overline{d}$.

Formule inconnue pour l'invariant

La première raison est attribuable à la nature de l'invariant même. Parmi les invariants dont l'évaluation en fonction de l'ordre n n'est pas faite à ce jour (ni dans le cadre de cette thèse ni dans les publications en théorie des graphes), on peut citer :
(i) l'index λ_1 pour la famille des graphes de Soltés, une clique avec un chemin attenant, et pour bien d'autres familles ;
(ii) la connectivité algébrique a pour la famille des graphes composés d'un cycle et d'un chemin dont une extrémité coincide avec un des sommets du cycle, et bien d'autres familles.

Un des résultats très connus en théorie spectrale des graphes [59] est $\delta \leq \overline{d} \leq \lambda_1 \leq \Delta$,

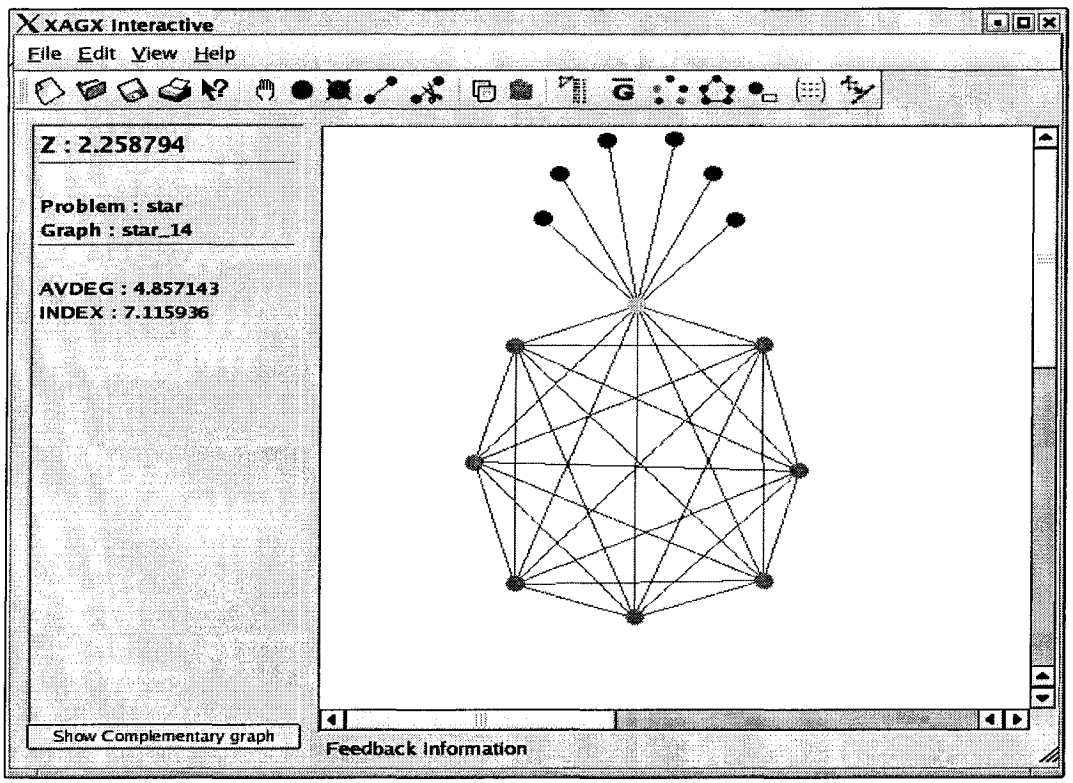


Figure 2.19 – Un ananas d'ordre 14 d'une clique sur 8 sommets.

où δ, $\overline{d}$, Δ et λ_1 désignent, respectivement le degré minimum, moyen et maximum et l'index d'un graphe connexe, avec l'égalité des quatre invariants si et seulement si le graphe est régulier. Comme conséquence de ce résultat, les spécialistes de la théorie spectrale des graphes ont introduit un nouvel invariant [51], $irr = \lambda_1 - \overline{d}$ pour mesurer l'irrégularité d'un graphe. Dans le cadre du présent travail l'*irrégularité* d'un graphe n'est étudiée que comme un cas particulier de la comparaison entre les deux invariants $\overline{d}$ et λ_1. Ainsi, lors de la maximisation de la différence $\lambda_1 - \overline{d}$, on a obtenu une courbe (Figure 2.18) pour la borne supérieure, qui correspond à la classe des ananas, c'est-à-dire des graphes composés d'une clique et des arêtes pendantes toutes incidentes au même sommet de la clique (Figure 2.19). Aucune formule algébrique n'est obtenue pour cette borne en raison de l'absence d'une formule explicite de l'in-

dex λ_1 en fonction de l'ordre n. La conjecture structurale (ouverte) correspondant à ce cas est la suivante :

Conjecture 34 : *Sur l'ensemble de tous les graphes connexes d'ordre fixé $n \geq 3$, de degré moyen $\overline{d}$ et d'index λ_1, l'irrégularité d'un graphe $irr = \lambda_1 - \overline{d}$ est maximum pour un ananas.*

Un autre exemple de conjecture (ouverte) structurale est la suivante :

Conjecture 35 : *Sur l'ensemble de tous les graphes connexes d'ordre fixé $n \geq 6$, de degré minimum δ et de connectivité algébrique a, le rapport a/δ est minimum pour le graphe composé de deux triangles reliés par un chemin.*

L'absence d'une formule algébrique dans cette conjecture est due au fait qu'aucune formule pour la connectivité algébrique n'est connue pour ces graphes extrêmes.

Irrégularité dans les variations de l'invariant

La deuxième raison est due à l'absence de régularité, du moins apparente, dans les variations de l'invariant en fonction de l'ordre n. Par exemple lors de la maximisation de $\Delta \cdot \overline{l}$, on a obtenu la conjecture structurale suivante :

Conjecture 36 : *Sur l'ensemble de tous les graphes connexes d'ordre fixé $n \geq 3$, de degré maximum Δ et de distance moyenne $\overline{l}$, le produit $\Delta \cdot \overline{l}$ est maximum pour les étoiles si $n \leq 11$ et pour les comètes si $n \geq 12$.*

Dans ce cas, on a constaté que le degré maximum décroît d'une unité lorsque l'ordre n augmente de 2 ou 3 unités mais sans pouvoir distinguer une régularité ; ce qui ne

nous permet pas de donner une formule générale pour la borne supérieure sur $\Delta \cdot \bar{l}$. La preuve de cette conjecture est donnée dans la Section 3.2 ainsi qu'un tableau des valeurs optimales de Δ pour $12 \leq n \leq 63$.

Un autre exemple est la conjecture ci-dessous obtenue lors de la recherche d'une borne inférieure sur le rapport $\bar{l}/r$, où $\bar{l}$ et r désignent respectivement la distance moyenne et le rayon d'un graphe. Dans cet exemple, les graphes extrêmes sont des paniers (Figure 2.20, haut).

Conjecture 37 : *Sur l'ensemble de tous les graphes connexes d'ordre fixé $n \geq 5$, de rayon r et de distance moyenne $\bar{l}$, le rapport $\bar{l}/r$ est minimum pour un panier, c'est-à-dire, une clique dans laquelle une arête est remplacée par un chemin.*

Un panier est entièrement défini par l'ordre n et la taille de sa clique maximum ω, toutefois, pour la borne étudiée ici, on ne distingue pas de régularité dans les variations de la cardinalité maximale d'une clique en fonction de l'ordre (Figure 2.20, bas). Ce fait rend difficile la formulation algébrique de la borne en dépit de la clarté de la structure des graphes extrêmes.

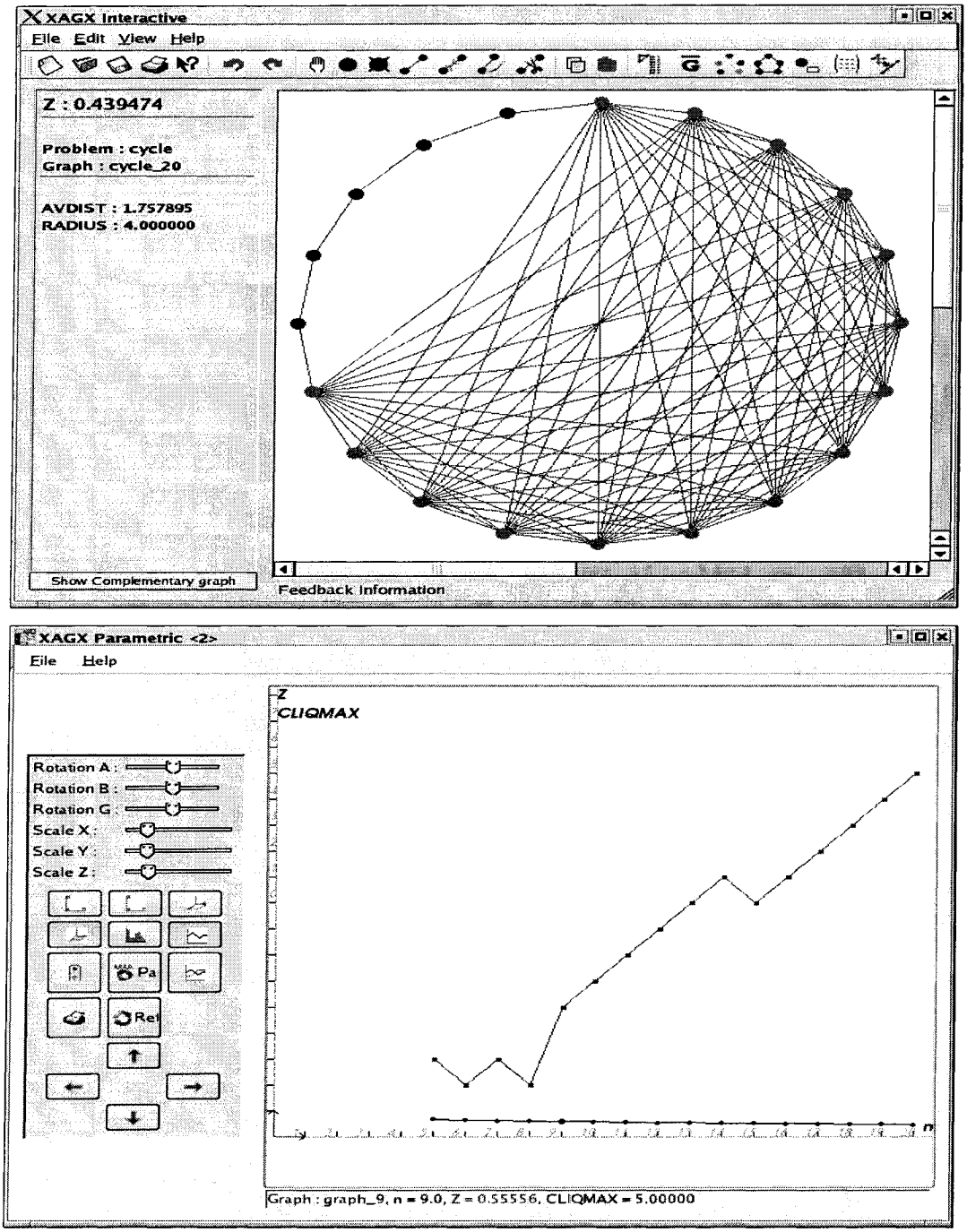


Figure 2.20 – La minimisation de $\bar{l}/r$: un panier avec $n = 20$ et $\omega = 14$ (haut) et ω en fonction de n (bas).

2.4.4 Difficultés dans la génération de conjectures

Plusieurs problèmes ont été rencontrés lors de la génération automatique ou assistée de conjectures, dans le cadre de la comparaison systématique des invariants. Ils ne sont pas nécessairement insurmontables, mais suggèrent une réflexion approfondie et un travail de recherche qui semble très prometteur aussi bien en théorie des graphes qu'en intelligence artificielle. Ces problèmes sont regroupés en quatre classes et discutés ci-dessous.

Relations non linéaires

La méthode de génération automatique de conjectures inplémentée dans AutoGraphiX 2 permet la détection, implicite ou explicite, de toute relation affine entre des invariants sélectionnés par l'utilisateur. Seules deux conditions s'appliquent : (*i*) la relation doit être vraie pour tous les graphes extrêmes (relativement à l'objectif étudié) disponibles et (*ii*) le nombre de graphes doit être suffisant, au moins le double du nombre d'invariants sélectionnés. Toutefois, les relations entre une sélection d'invariants ne sont pas toujours affines. Le problème de trouver une méthode permettant de détecter une relation non linéaire entre un ensemble de variables demeure une question en grande partie ouverte. Dans le cadre de ce travail, une solution partielle (discutée dans la Section 2.4.1) pour des cas particuliers est proposée, mais sa portée reste limitée.

La première approche qui consiste à introduire des termes en fonction de l'ordre n comme des invariants présente au moins deux limites majeures.
(*i*) Une première limite est due aux connaissances et croyances *a priori* de l'utilisateur ou du chercheur. Il est impossible de considérer tous les termes possibles, pour la simple raison que personne ne peut prévoir (du moins pas pour tous les objectifs

considérés), toutes les fonctions en n qui interviennent dans une relation entre un ensemble d'invariants et sur une sélection de graphes extrêmes. Pour la comparaison systématique effectuée dans le cadre de ce travail, on a considéré les termes qui revenaient le plus souvent dans un échantillon d'environs 300 bornes. Le choix des fonctions s'est avéré fructueux étant donné que sur plus de 1200 bornes étudiées par la suite, un nombre minime de cas se sont soldés par des échecs. Certaines fonctions sont rencontrées mais n'ont pas été retenues car elles n'apparaissaient que dans un nombre insignifiant de bornes. Ainsi, par exemple, la fonction $cos(\frac{\pi}{n+1})$ apparaît, mais uniquement lorsque la famille des graphes extrêmes est constituée de chemins et qu'un des invariants considérés est l'index (pour un chemin d'ordre n, l'index est donné par $\lambda_1 = 2cos(\frac{\pi}{n+1})$). Comme le chemin est un graphe extrême pour plusieurs invariants, la composante de la preuve automatique d'AutoGraphiX 2 permet l'obtention de la plupart des bornes faisant intervenir l'expression $\lambda_1 = 2cos(\frac{\pi}{n+1})$; ainsi l'intérêt de la coder est minime. Les rares bornes avec l'expression et qui ne sont pas prouvées automatiquement sont (voir les conjectures 30 et 31) :

$$Ra - \lambda_1 \leq \begin{cases} \frac{n-3+2\sqrt{2}}{2} - 2cos(\frac{\pi}{n+1}) & \text{si } n \leq 9, \\ \\ \frac{n-4}{2} & \text{si } n \geq 10. \end{cases}$$

$$Ra/\lambda_1 \leq \begin{cases} (n-3+2\sqrt{2})/(4cos(\frac{\pi}{n+1})) & \text{si } n \leq 26, \\ \\ \frac{n}{4} & \text{si } n \geq 27. \end{cases}$$

D'autres fonctions comme $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$, $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$, $\lfloor \frac{3n}{4} \rfloor$, ... sont rarement rencontrées et par conséquent ne sont pas codées. Parmi les rares cas où de telles expressions sont rencontrées figurent les conjectures suivantes :

Conjecture 38 : *Pour tout graphe connexe d'ordre $n \geq 4$, de nombre de domination β et de rayon r,*

$$\beta + r \leq \left\lfloor \frac{5n+4}{6} \right\rfloor.$$

La borne est atteinte pour un arbre de diamètre $D = n - 2$ *si* $n \equiv 3[6]$ *et pour un chemin sinon.*

Conjecture 39 : *Pour tout graphe connexe d'ordre* $n \geq 4$*, de nombre de domination* β *et de degré maximum* Δ*,*

$$\frac{\beta}{\Delta} \leq \frac{1}{2}\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil .$$

La borne est atteinte, entre autres, pour les chemins.

Ces deux conjectures sont ouvertes.

(*ii*) La deuxième limite est due à la stabilité numérique de la méthode de recherche de conjectures. Comme on l'a déjà mentionné plus haut, le nombre d'invariants qu'on peut sélectionner simultanément est la moitié de celui des graphes extrêmes associés au problème étudié. D'une autre part, l'expérience montre que l'efficacité de la méthode de la recherche à voisinage variable des graphes extrêmes, est décroissante lorsque le nombre de sommets devient de plus en plus grand. Si on ajoute à cela les effets de bord, le nombre de graphes extrêmes qu'on peut considérer, avec un seuil de confiance significatif, varie entre 10 et 15 graphes à la fois. Ainsi le nombre d'invariants qu'on peut sélectionner pour une seule tentative de trouver une conjecture, est de 5 à 7. Toutefois, si la structure des graphes extrêmes est bien identifiée, on peut en construire un plus grand nombre et relancer la recherche de conjectures avec plus d'invariants.

Différence dans les structures

On a constaté que, parfois, la structure des familles de graphes extrêmes varie en fonction de l'ordre n (le paramètre). Ceci se produit dans deux types de cas :

(i) Au moins deux sous-ensembles infinis des valeurs des paramètres. La subdivision qui revient le plus souvent est celle basée sur la parité du paramètre n, ou encore une subdivision modulo 3 ou 4, comme on peut le voir dans les exemples suivants :

Conjecture 40 : *Pour tout graphe connexe G d'ordre $n \geq 3$, de nombre chromatique χ et de degré maximum Δ,*

$$\frac{\chi}{\Delta} \leq \begin{cases} \frac{n}{n-1} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{3}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La borne est atteinte pour les graphes complets si n est pair et pour les cycles si n est impair.

Cette conjecture est une conséquence immédiate du théorème de Brooks [33].

Conjecture 41 : *Pour tout graphe connexe G d'ordre $n \geq 3$, de nombre de stabilité α et d'index λ_1,*

$$\alpha + \lambda_1 \leq \begin{cases} \frac{5n-3}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{(3n-1)^2+8} & si \quad n \equiv 0[3], \\ \frac{5n-2}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{(3n-2)^2+8} & si \quad n \equiv 1[3], \\ \frac{4n-2}{3} & si \quad n \equiv 2[3]. \end{cases}$$

La borne est atteinte si et seulement si G est un graphe complet eclaté avec $\alpha = \lfloor \frac{2n+1}{3} \rfloor$.

Cette conjecture est démontrée, mais la preuve n'est pas donnée dans le présent document.

Conjecture 42 : *Pour tout graphe connexe G d'ordre $n \geq 4$, de rayon r et de degré maximum Δ,*

$$\Delta \cdot r \leq \begin{cases} \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor & si \quad n \equiv 2[4], \\ (\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor + 1) \cdot \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor & si \quad n \not\equiv 2[4]. \end{cases}$$

La borne est atteinte pour les comètes vérifiant $2r + \Delta = n + 2$.

Cette conjecture est toujours ouverte.

Pour ce problème, la solution (partielle) apportée est la séparation de l'ensemble des graphes extrêmes obtenus en deux sous-ensembles selon leur parité (telle que discutée plus haut). La séparation en trois (modulo 3) ou en quatre (modulo 4) n'a pas été faite pour une seule raison : le nombre de graphes extrêmes serait considérablement réduit et par conséquent, la stabilité numérique de la méthode de recherche automatique de conjectures serait perturbée. Ainsi la question de trouver une solution acceptable dans cette situation reste posée.

(*ii*) Un deuxième cas est celui où on a une structure sur un intervalle fini du paramètre (les petites valeurs) et une autre structure sur le reste de l'intervalle (à partir d'un certain rang). Même si la relation est affine dans chacun des intervalles, mais avec deux fonctions différentes, la méthode automatique peut détecter les fonctions, car elle ne détecte que les relations vraies pour tous les graphes. Une méthode basée sur une séparation systématique de l'intervalle des paramètres a été implémentée mais aussitôt abondonnée, car elle n'a pas donné de bons resultats. Si les différentes structures sont bien identifiées et les intervalles respectifs bien situés, la méthode interactive donne de bons résultats. Une méthode qui permet l'automatisation de la recherche de conjectures dans une telle situation reste à trouver. Dans la catégorie des résultats présentant ces particularités, on trouve les conjectures suivantes :

Conjecture 43 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets d'indice de Randić Ra et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$Ra \cdot \bar{l} \geq \begin{cases} \frac{n}{2} & si\ n \leq 12, \\ (\sqrt{n-1})(2-\frac{2}{n}) & si\ n \geq 13. \end{cases}$$

La borne est atteinte pour les graphes complets si $n \leq 12$ et pour les étoiles si $n \geq 13$.

Conjecture 44 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets d'indice de Randić Ra et d'excentricité moyenne ecc,*

$$Ra \cdot ecc \geq \begin{cases} \frac{n}{2} & si\ n \leq 13, \\ \sqrt{n-1} \cdot (2-\frac{1}{n}) & si\ n \geq 14. \end{cases}$$

La borne est atteinte pour les graphes complets si $n \leq 13$ et pour les étoiles sinon.

Formules inconnues pour certains invariants

Une difficulté rencontrée dans le cadre de ce travail, mais qui est loin d'être propre à notre problème, est l'évaluation de certains invariants en fonction de l'ordre pour certaines familles de graphes extrêmes. Ce type de difficulté apparaît essentiellement avec l'index et la connectivité algébrique. Il nous a été impossible de trouver des conjectures automatiquement ou même de façon assistée dans plusieurs cas. Lorsque, dans de rares cas, la formule recherchée est (ou contient) une solution d'une équation difficile ou impossible à résoudre on se contente de donner une formulation implicite. C'est le cas dans la conjecture (prouvée dans la Section 3.3) suivante :

Conjecture 45 : *Pour tout graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, d'index λ_1 et de degré minimum δ,*

$$\lambda_1 - \delta \leq n - 3 + t,$$

où t vérifie $0 < t < 1$ et l'équation $t^3 + (2n-3)t^2 + (n^2-3n+1)t - 1 = 0$.
La borne est atteinte pour les graphes composés d'une clique sur $n-1$ sommets et une arête pendante.

Dans d'autres cas, plus fréquents, il n'est même pas possible de trouver une équation qui permettrait de donner une formule implicite de la borne étudiée. Dans une telle situation une conjecture structurale s'impose, comme dans les conjectures (ouvertes) suivantes :

Conjecture 46 : *Pour tout graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, d'index λ_1 et de nombre chromatique χ, le rapport $\frac{\lambda_1}{\chi}$ est minimum pour les cycles si n est impair et pour les graphes composés d'un cycle sur $n-1$ sommets et une arête pendante si n est pair.*

Conjecture 47 : *Pour tout graphe connexe d'ordre $n \geq 6$, de connectivité algébrique a et de degré minimum δ, la borne inférieure sur $\frac{a}{\delta}$ est atteinte pour les graphes composés de 2 triangles reliés par un chemin.*

Structures irrégulières

Ce cas est extrême dans la mesure où aucune régularité n'est apparente ni au niveau de la courbe représentant la borne, ni au niveau de la structure des graphes extrêmes. Lors de la recherche d'une borne inférieure sur $\Delta + \overline{l}$, on n'a pas pu distinguer une régularité ni au niveau de la courbe représentant la borne inférieure (Figures 2.21) ni concernant la structure des graphes extrêmes (Figure 2.22).

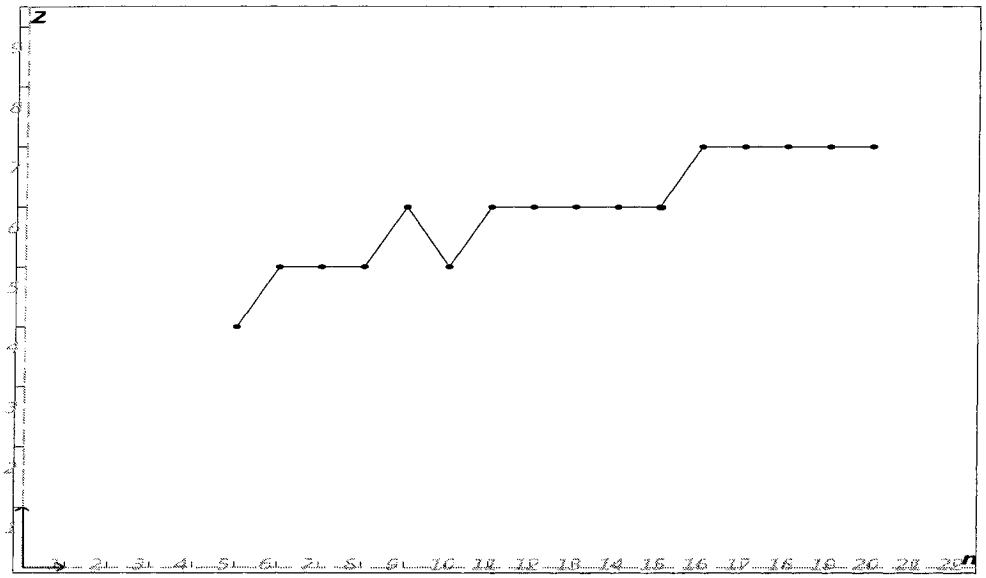


Figure 2.21 – La courbe de la borne inférieure sur $\Delta + \bar{l}$.

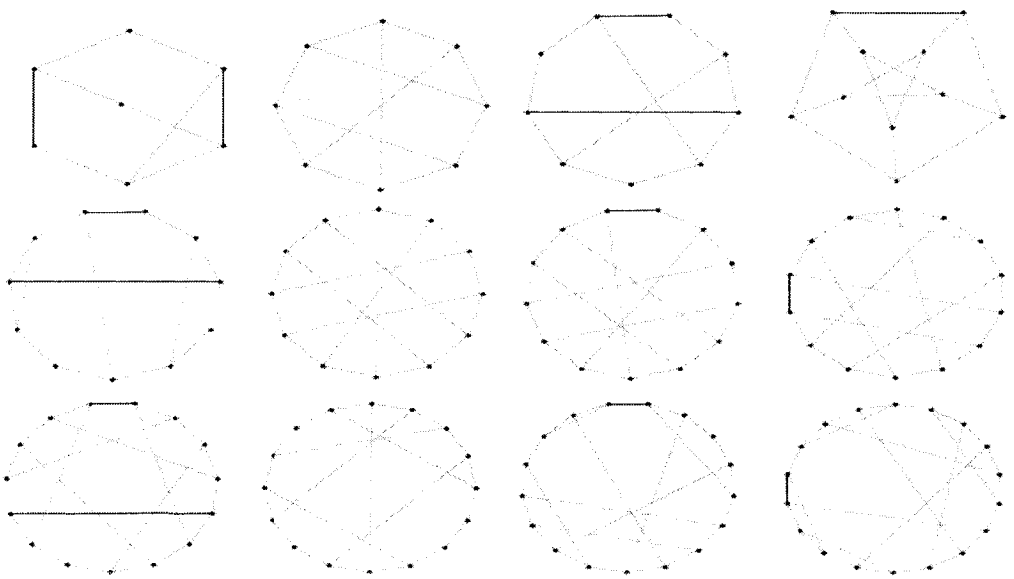


Figure 2.22 – Graphes obtenus par AGX 2 lors de la minimisation de $\Delta + \bar{l}$.

2.5 Rapport Automatique sur la Comparaison de deux Invariants

Cette section est une illustration de la comparaison automatique de deux invariants. Cette dernière est constituée de l'ensemble des processus accomplis par AutoGraphiX 2 dès l'instant où l'utilisateur choisit deux invariants pour fin de comparaison, jusqu'à la génération automatique d'un rapport détaillé des résultats obtenus. En fait, il s'agit des tâches suivantes :

(a) Tentative de génération des résultats en appliquant les règles de la preuve automatique décrites ci-dessus, pour les huit cas possibles (4 opérations $\times$ 2 bornes).

(b) Édition automatique des fichiers problème (des fichiers d'extensions .def décrits dans la Section 2.2.2) pour chacun des cas où la génération automatique de résultats s'est soldée par un échec.

(c) Appel automatique de la composante d'optimisation pour chacun des problèmes générés dans l'étape précédente.

(d) Appel automatique de la composante de recherche de conjectures (méthode numérique) à l'issue de chaque optimisation.

(e) Génération automatique d'un rapport en format pdf contenant tous les résultats (avec leur preuve respective) et toutes les conjectures.

Un exemple de rapport automatique est donné dans le tableau ci-dessous (Tableau 2.8). Deux invariants sont sélectionnés pour comparaison : *l'indice de Randić Ra* et le diamètre D d'un graphe G. Le système exploite les informations, concernant les deux invariants sous étude, disponibles dans la base de connaissances (décrite dans la Section 2.3) pour donner en premier lieu les bornes inférieure et supérieure sur chacun des invariants ainsi que les familles de graphes extrêmes associées. Par la suite les

deux invariants sont combinés à l'aide des opérations $-$, $+$, $/$ et $\times$, une à la fois, puis le système fait appel à la composante de preuve automatique pour voir si une des règles, décrites plus haut, peut donner des résultats. Le test de preuve automatique est appliqué à chacune des 8 bornes. Pour les deux invariants de l'exemple (Tableau 2.8), le système a réussi à trouver et prouver 4 bornes sur 8. Les bornes supérieures sur la différence et le rapport sont démontrées en utilisant la règle de l'intersection. En effet, le graphe complet maximise l'indice de Randić Ra et minimise le diamètre D, donc $Ra - D$ et Ra/D sont maximum pour la famille des graphes complets. Les bornes inférieures sur la somme et le produit sont prouvées en utilisant la règle de la deuxième valeur. En effet, la plus petite valeur pour D est 1, et n'est atteinte que pour le graphe complet, qui maximise Ra. La deuxième plus petite valeur pour D est 2 qui est atteinte, entre autres, pour l'étoile, qui minimise l'indice de Randić Ra. Donc $Ra + D \geq 2 + \sqrt{n-1}$ et $Ra \cdot D \geq 2 \cdot \sqrt{n-1}$, avec égalité pour les étoiles. Après cette première étape qui a donné des résultats pour quatre bornes mais s'est soldée par des échecs pour les quatre autres, AutoGraphiX génère automatiquement des fichiers problème pour chacune des quatre dernières bornes. Ensuite la composante d'optimisation est appelée pour effectuer des recherches de graphes extrêmes dans chacun de ces cas. À l'issue de l'optimisation le système fait des recherches automatiques de conjectures en utilisant la méthode numérique. Dans notre exemple, AGX obtient 4 conjectures (une borne inférieure sur $Ra - D$ et sur Ra/D, une borne supérieure sur $Ra + D$ et sur $Ra \cdot D$). Il est à noter que seule une formule algébrique est obtenue avec la méthode numérique de recherche de conjectures, et qu'il faut visualiser les graphes pour reconnaître la structure de la famille des graphes extrêmes associées. Pour ce qui est de la comparaison entre l'indice de Randić et le diamètre, et dans les quatre cas où on a eu des conjectures, les graphes extrêmes sont des chemins.

Tableau 2.8 – Un rapport automatique d'*AutoGraphiX 2* sur Ra et D.

Invariants

Ce rapport contient les conjectures obtenues par AGX pour les deux invariants graphiques suivants : Ra (randic) et D (diamètre).

Soit G un graphe connexe ayant $n \geq 3$ sommets, alors les invariants sélectionnés ont les bornes suivantes :

$$\sqrt{n-1} \leq Ra \leq \frac{n}{2}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes réguliers).

$$1 \leq D \leq n-1$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjectures

Soit G un graphe connexe ayant pour randic Ra, et pour diamètre D. Soit n le nombre de sommets du graphe. Alors AGX obtient les résultats suivants :

Conjecture 1
Pour tout graphe G connexe ayant au moins 3 sommets, on a :

$$0.9142136 - (0.5)n \leq Ra - D \leq -1 + \frac{1}{2}n$$

La borne supérieure est atteinte pour les graphes complets.

Preuve :
La borne inférieure a été obtenue par AGX.
Pour les graphes connexes ayant au moins 3 sommets, on a $Ra \leq n/2$ et la borne est atteinte pour les graphes réguliers. Pour les graphes connexes ayant au moins 3 sommets, on a $1 \leq D$ et la borne est atteinte pour les graphes complets. L'intersection des graphes réguliers et des graphes complets est constituée par les graphes complets. En soustrayant, on obtient la borne supérieure.

Conjecture 2
Pour tout graphe G connexe ayant au moins 3 sommets, on a :

$$2 + \sqrt{-1+n} \leq Ra + D \leq -1.0857864 + (1.5)n$$

La borne inférieure est atteinte pour les étoiles.

Preuve :
La borne inférieure a été obtenue en considérant la seconde valeur d'un des invariants.
La borne supérieure a été obtenue par AGX.

Conjecture 3
Pour tout graphe G connexe ayant au moins 3 sommets, on a :

$$\frac{-0.0857864 + (0.5)n}{-1+n} \leq Ra/D \leq \frac{1}{2}n$$

La borne supérieure est atteinte pour les graphes complets.

Preuve :
La borne inférieure a été obtenue par AGX.
Pour la borne supérieure, la preuve est la même que pour la Conjecture 1, en divisant à la place de soustraire.

Conjecture 4
Pour tout graphe G connexe ayant au moins 3 sommets, on a :

$$2\sqrt{-1+n} \leq Ra * D \leq 0.0857864 + (0.5)n^2 - (0.585786)n$$

La borne inférieure est atteinte pour les étoiles.

Preuve :
Pour la borne inférieure, la preuve est la même que pour la Conjecture 2, en multipliant à la place d'additionner.
La borne supérieure a été obtenue par AGX.

Lors de la recherche de conjectures, le système effectue des calculs numériques et non symboliques. Cela explique la présence de valeurs approchées dans les bornes obtenues. Ainsi, pour la borne inférieure sur $Ra - D$, le système fournit (Conjecture 1 du Tableau 2.8) l'expression $0.9142136 - (0.5)n$ et la borne analytique exacte est $\frac{2\sqrt{2}-1-n}{2}$. Pour apporter ce type d'ajustement aux bornes obtenues, il est nécessaire de reconnaître les graphes extrêmes et exploiter leurs propriétés pour en déduire les expressions exactes.

Un autre exemple de rapport automatique est présenté dans le Tableau 2.9 et contient les résultats d'une comparaison automatique du rayon r et du diamètre D d'un graphe G. L'application de la règle de l'intersection donne les deux propositions (Proposition 2 et 4) du Tableau 2.9. Par l'application de la règle de la définition, le système trouve et prouve la borne inférieure sur la différence $D - r$ et celle sur le rapport D/r. En effet, l'information $r \leq D$ ainsi que la famille des graphes pour lesquels l'égalité est réalisée sont disponibles dans la base de connaissances d'AGX. La borne supérieure de la Conjecture 1 (Tableau 2.9) est obtenue de la façon suivante. La première étape, l'appel de la composante de preuve automatique, n'a pas donné de résultat : les règles ne s'appliquent pas. L'étape de la recherche de conjecture (après l'optimisation) n'a pas donné de résultat : l'expression de la fonction objectif n'est pas une combinaison affine des fonctions de l'ordre n disponibles dans le système. À l'issue de cette étape l'ensemble des graphes extrêmes est partitionné en deux, selon la parité de l'ordre. L'application de la méthode numérique de recherche de conjectures à chacun des deux sous-ensembles de graphes extrêmes, a donné la conjecture (borne supérieure de Conjecture 1) qui a été démontrée par la suite. Cette preuve ainsi que celle de la borne supérieure (obtenue automatiquement sous forme de conjecture) de la Conjecture 3 du même tableau sont données en annexe.

Tableau 2.9 – Un rapport automatique sur D et r.

Invariants

Ce rapport contient les conjectures obtenues par AGX pour les deux invariants graphiques suivants : D (diamètre) et r (rayon).
Soit G un graphe connexe ayant $n \geq 3$ sommets, alors les invariants sélectionnés ont les bornes suivantes :

$$1 \leq D \leq n-1$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

$$1 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant (resp. les chemins et les cycles).

Conjectures

Soit G un graphe connexe ayant pour diamètre D, et pour rayon r. Soit n le nombre de sommets du graphe. Alors AGX obtient les résultats suivants :

Conjecture 1
Pour tout graphe G connexe ayant au moins 3 sommets, on a :

$$0 \leq D - r \leq \begin{cases} -1 + (0.5)n \text{ si } n \text{ est pair} \\ -0.5 + (0.5)n \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Preuve :
On sait que $r \leq D$, donc on obtient directement la borne inférieure.
La borne supérieure a été obtenue par AGX.

Proposition 2
Pour tout graphe G connexe ayant au moins 3 sommets, on a :

$$2 \leq D + r \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n - 1$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Preuve :
Pour les graphes connexes ayant au moins 3 sommets, on a $1 \leq D$ et la borne est atteinte pour les graphes complets. Pour les graphes connexes ayant au moins 3 sommets, on a $1 \leq r$ et la borne est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant. L'intersection des graphes complets et des graphes ayant un sommet dominant est constituée par les graphes complets. En additionnant, on obtient la borne inférieure.
Pour les graphes connexes ayant au moins 3 sommets, on a $D \leq n-1$ et la borne est atteinte pour les chemins. Pour les graphes connexes ayant au moins 3 sommets, on a $r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et la borne est atteinte pour les chemins et les cycles. L'intersection des chemins et des chemins et des cycles est constituée par les chemins. En additionnant, on obtient la borne supérieure.

Conjecture 3
Pour tout graphe G connexe ayant au moins 3 sommets, on a :

$$1 \leq D/r \leq 2$$

Preuve :
Pour la borne inférieure, la preuve est la même que pour la Conjecture 1, en divisant à la place de soustraire.
La borne supérieure a été obtenue par AGX.

Proposition 4
Pour tout graphe G connexe ayant au moins 3 sommets, on a :

$$1 \leq D * r \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (n-1)$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Preuve :
La preuve est la même que pour la Proposition 2, en multipliant à la place d'additionner.

CHAPITRE 3 : COMPARAISON SYSTÉMATIQUE DE QUELQUES INVARIANTS

Dans le présent chapitre, on présente quelques applications de la comparaison systématique d'invariants graphiques. Une comparaison consiste à choisir deux invariants graphiques i_1 et i_2 puis à générer des résultats prouvés automatiquement, ou des conjectures algébriques et/ou structurales, qu'on essaie de prouver à la main. Elles se présentent sous la forme dite *Forme 1 d'AGX 2* suivante :

Tableau 3.1 – Énoncé d'un résultat de la Forme 1 d'AGX 2.

Pour tout graphe connexe G d'ordre $n \geq n_0$, d'invariants i_1 et i_2, $$\underline{b}_n \leq i_1 \otimes i_2 \leq \overline{b}_n.$$ *La borne inférieure est atteinte si $G \in \mathcal{G}_1$ et la borne supérieure si $G \in \mathcal{G}_2$.*

Dans l'énoncé du Tableau 3.1, n et n_0 désignent respectivement l'ordre du graphe G et l'ordre minimum requis pour la validité du résultat. $\otimes$ désigne l'une des quatre opérations arithmétiques de base : $-, +, /, \times$, les bornes $\underline{b}_n$ (inférieure) et $\overline{b}_n$ (supérieure) sont des fonctions en n (l'ordre) les meilleures possibles, dans le sens que pour tout $n \geq n_0$, il existe au moins un graphe pour lequel la borne est atteinte. Les ensembles $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ sont des familles de graphes extrêmes pour lesquelles les bornes inférieure et supérieure sont atteintes, respectivement. Si une borne n'est pas obtenue, pour l'une ou l'autre des raisons discutées dans la Section 2.4.4, on se contente de donner une conjecture structurale, c'est-à-dire, une description de la famille ou des familles

des graphes extrêmes correspondants à la borne en question. Si de plus les graphes extêmes ne présentent pas de régularité, du moins en apparence, on donnera quelques uns des graphes et éventuellement une discussion des résultats numériques obtenus.

Si i est un invariant graphique, les relations du type Nordhaus-Gaddum pour i se présentent sous la forme suivante :

$$\underline{a}_n \leq i + \bar{i} \leq \overline{a}_n \quad \text{et} \quad \underline{b}_n \leq i \cdot \bar{i} \leq \overline{b}_n,$$

où les bornes sont, en général, des fonctions de l'ordre n (parfois elles sont des fonctions de n et d'un ou plusieurs invariants), et $\bar{i}$ est l'invariant i évalué pour le complémentaire du graphe. Cette appellation fait référence aux auteurs, Nordhaus et Gaddum [152], des premières relations de ce type, qui sont les suivantes (voir aussi le Théorème 7 p. 46) :

$$2\sqrt{n} \leq \chi + \overline{\chi} \leq n+1 \qquad \text{et} \qquad n \leq \chi \cdot \overline{\chi} \leq \frac{(n+1)^2}{4},$$

où χ représente le nombre chromatique. Depuis, de nombreux chercheurs en théorie des graphes ont étudié cette forme d'inégalités pour de multiples invariants.

Les relations de la Forme 1 d'AGX 2 (Tableau 3.1) généralisent les formules du type Nordhaus-Gaddum [152], de deux manières :
(i) on considère deux invariants i_1 et i_2 plutôt que le même invariant dans G et dans son complémentaire $\bar{G}$;
(ii) on considère en plus des opérations $+$ et $\times$ les opérations $-$ et $/$.

Les formules obtenues ainsi ont plusieurs avantages : elles sont souvent simples (on retrouve par exemple le théorème de Chung [48] $\bar{l} \leq \alpha$, où $\bar{l}$ désigne la distance moyenne et α le nombre de stabilité d'un graphe connexe G) et précises (on améliore, par exemple, la conjecture $\bar{l} \cdot \delta \leq n$ de *Graffiti* [81] en la conjecture $\bar{l} \cdot \delta \leq n - 1$

qui est la meilleure possible et est prouvée dans la Section 3.2, ainsi que par Smith [167]). Enfin, la difficulté des preuves est variable, sans qu'elles ne soient en général trop compliquées.

Les conjectures les plus simples sont prouvées automatiquement par *AGX2* en utilisant les techniques de preuve automatique basées, selon le cas, sur les règles de la définition, de l'intersection, de la deuxième valeur et de la déduction discutées dans la Section 2.3.

Certaines de ces conjectures sont la reproduction de résultats déjà connus dans la littérature comme

$$\lambda_1 - \delta \geq 0, \quad \lambda_1 - \overline{d} \geq 0, \quad \lambda_1 - \Delta \leq 0.$$

Les conjectures encore ouvertes sur lesquelles aucune discussion n'est faite sont données en annexe, dans le but de ne pas alourdir le texte.

Dans la première section du chapitre, l'étude porte essentiellement sur la maille g. Elle est comparée de façon systématique avec 6 invariants : le nombre de stabilité α, le rayon r, le diamètre D et les degrés maximum Δ, moyen $\overline{d}$ et minimum δ. Par la suite (Section 3.2) une étude similaire est faite en considérant la distance moyenne $\overline{l}$ comme principal invariant. Dans la Section 3.3, l'index sera comparé avec 7 invariants : le nombre chromatique χ, les degrés maximum Δ, minimum δ et moyen $\overline{d}$, le rayon r, la distance moyenne $\overline{l}$ et l'indice de Randić Ra.

3.1 La Maille

Dans la présente section, on étudie les conjectures et résultats de la Forme 1 d'AGX 2 où i_2 est la maille g de G et i_1 un autre invariant. Les énoncés (observations et propositions) sont, donc, de la forme suivante :

Tableau 3.2 – Résultat de la Forme 1 d'AGX 2 impliquant la maille.

Pour tout graphe connexe G d'ordre $n \geq n_0$, d'invariant i_1 et de maille finie g,

$$\underline{b}_n \leq i_1 \otimes g \leq \overline{b}_n.$$

La borne inférieure est atteinte si $G \in \mathcal{G}_1$ et la borne supérieure si $G \in \mathcal{G}_2$.

Dans l'ordre, les sous-sections suivantes correspondent aux cas où i_1 est le nombre de stabilité, le rayon, le diamètre, le degré maximum, moyen et minimum, et enfin quelques résultats variés.

3.1.1 Le nombre de stabilité

Les résultats (simples) obtenus et prouvés automatiquement lors de la comparaison de la maille g avec le nombre de stabilité α sont :

$$\alpha + g \geq 4 \qquad \text{et} \qquad \alpha \cdot g \geq 3,$$

avec égalité, dans les deux cas, si et seulement si le graphe est complet.

Les conjectures issues de la comparaison de α et de g sont aisées à obtenir automatiquement. Leur preuve n'est pas non plus difficile. Elles sont données ci-dessous sous forme de propositions.

Proposition 1 : *Soit G un graphe connexe avec $n \geq 3$ sommets, de maille finie g et de nombre de stabilité α. Alors :*

$$\alpha + g \leq n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

De plus la borne est atteinte si et seulement si G est un cycle.

Preuve :

Le sous-graphe induit par le plus petit cycle de G contient au plus $\lfloor g/2 \rfloor$ sommets du stable maximum, d'où

$$\alpha \leq \left\lfloor \tfrac{g}{2} \right\rfloor + n - g; \tag{3.1}$$

et

$$\alpha + g \leq \left\lfloor \tfrac{g}{2} \right\rfloor + n \leq \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor + n.$$

La borne est atteinte si et seulement si $g = n$, c'est-à-dire, si G est un cycle. □

Proposition 2 : *Soit G un graphe connexe avec $n \geq 3$ sommets, de maille finie g et de nombre de stabilité α. Alors :*

$$-\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq \alpha - g \leq n - 5.$$

De plus la borne inférieure est atteinte si et seulement si G est un cycle et la borne supérieure si et seulement si G est composé d'un triangle uvw dont au moins un sommet, disons u, est de degré 2, et d'un ensemble stable S de $n - 3$ sommets, chacun voisin d'un ou des deux sommets v et w du triangle.

Preuve :

Pour la borne inférieure, comme tout cycle induit de longueur g contient un sous-ensemble stable de $\left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor$ sommets,

$$\alpha - g \geq \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor - g = -\left\lceil \frac{g}{2} \right\rceil \geq -\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil ,$$

d'où la borne. Elle est atteinte si et seulement si $g = n$, c'est-à-dire, si G est un cycle.

Pour la borne supérieure, comme G a au moins un cycle, $\alpha \leq n-2$ et $g \geq 3$, d'où le résultat. Cette borne est atteinte si et seulement si ces deux conditions sont des égalités ($\alpha = n-2$ et $g = 3$), c'est-à-dire, si G est composé d'un triangle T soit uvw ($g = 3$) dont au moins un sommet, disons u, est de degré 2, et d'un ensemble stable S de $n-3$ sommets, chacun voisin d'un ou des deux sommets v et w du triangle ($\alpha = |S \cup \{u\}| = n-2$). En effet l'existence d'une arête entre chacun des sommets du triangle, d'une part, et des sommets de S, d'autre part, ou encore entre deux sommets de S réduirait le nombre de stabilité α. □

Proposition 3 : *Soit G un graphe connexe avec $n \geq 3$ sommets, de maille finie g et de nombre de stabilité α. Alors :*

$$\alpha \cdot g \leq \left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor .$$

De plus la borne est atteinte si et seulement si G est un cycle pour n pair et un cycle sur $n-1$ sommets et une arête pendante si n est impair.

Preuve :

La relation (3.1) implique

$$\alpha \cdot g \leq \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor g + ng - g^2. \tag{3.2}$$

Si g est pair, le membre de droite de (3.2) est égal à

$$ng - \frac{g^2}{2},$$

et sa dérivée par rapport à g est

$$n - g \geq 0.$$

Si g est impair, le membre de droite de (3.2) devient égal à

$$ng - \frac{g^2}{2} - \frac{g}{2},$$

et sa dérivée par rapport à g est

$$n - g - \frac{1}{2},$$

qui est non négative sauf si $g = n$ (et n est impair).

Le maximum de l'expression est atteint pour $n = g$ si n est pair et pour $g = n - 1$ si n est impair, car alors $\alpha = \frac{n+1}{2}$ et $g = n - 1$ d'où $\alpha g = \frac{n^2-1}{2}$, ce qui est plus grand que $\alpha g = \frac{n^2-n}{2}$, qui correspond au cas où $\alpha = \frac{n-1}{2}$, $g = n$. Dans les deux cas la borne est atteinte. L'unicité du graphe extrême, dans chacun des deux cas, est due au fait que le membre de droite de (3.2) est une fonction strictement croissante en g. □

Proposition 4 : *Soit G un graphe connexe avec $n \geq 3$ sommets, de maille finie g et de nombre de stabilité α. Alors :*

$$\frac{1}{3} \leq \frac{\alpha}{g} \leq \frac{n-2}{3}.$$

La borne inférieure est atteinte si et seulement si G est un graphe complet et la borne supérieure si et seulement si G est composé d'un triangle uvw dont au moins un sommet, disons u, est de degré 2, et d'un ensemble stable S de $n - 3$ sommets, chacun voisin d'un ou des deux sommets v et w du triangle.

Preuve :

Pour la borne inférieure, comme $\alpha \geq \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$, on a $\frac{\alpha}{g} \geq \frac{\lfloor g/2 \rfloor}{g}$ qui est égal à $\frac{1}{2}$ si g est pair et à $\frac{g-1}{2g}$ si g est impair. Cette dernière expression est minimum et égale à $1/3$ pour $g = 3$. Alors $\alpha = 1$ et G est un graphe complet.

La borne supérieure se démontre comme celle de la Proposition 2. □

3.1.2 Le rayon

Lors de la recherche automatique de formules du type Forme 1 d'AGX 2 pour le rayon r et la maille g, le système trouve et prouve facilement, en se basant sur la règle de l'intersection, les relations suivantes :

$$4 \leq r+g \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \qquad \text{et} \qquad 3 \leq r \cdot g \leq n \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

Les bornes inférieures sont atteintes pour les graphes contenant un sommet dominant et au moins un triangle, et les bornes supérieures si et seulement si le graphe est un cycle.

AGX 2 obtient également les conjectures prouvées dans les propositions suivantes :

Proposition 5 : *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, de rayon r et de maille finie g. Alors :*

$$-\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq r-g \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 3.$$

La borne inférieure est atteinte pour les cycles et la borne supérieure pour les cycles avec une corde formant un triangle, et autres graphes de rayon $r = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ et de maille $g = 3$.

Preuve :

Borne inférieure : pour un graphe G de rayon r et de maille g on a $r \geq \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$, donc,

$$r-g \geq \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor - g \geq -\left\lceil \frac{g}{2} \right\rceil \geq -\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil .$$

D'où le résultat. La borne est atteinte si et seulement si $g = n$, c'est-à-dire, G est un cycle.

Borne supérieure : pour tout graphe connexe contenant au moins un cycle, on a $r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $g \geq 3$, si n est impair le résultat est évident ($\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$). Donc, il nous reste à prouver le cas où n est pair. Avec la condition $m \geq n$, $r = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$ si et seulement si G est un cycle. Si G est un cycle, $r - g = -\frac{n}{2} < \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 3$. Donc nécessairement $r - g \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 3$.

Pour tout n, la borne est atteinte pour plusieurs familles de graphes avec $r = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ et $g = 3$, comme :

- un cycle ou un chemin plus une arête qui forme un triangle ;
- un cycle ou un chemin plus deux arêtes croisées sur 4 sommets successifs ;
- si n est pair, on considère 5 sommets successifs sur un cycle ou un chemin, puis on en relie au moins deux pour former un triangle et on ajoute d'autres arêtes entre les 5 sommets sans toutefois relier le premier et le cinquième sommet. □

Proposition 6 : *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, de rayon r et de maille finie g. Alors :*

$$\frac{1}{3} \leq \frac{r}{g} \leq \frac{1}{3} \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes avec un sommet dominant et au moins un triangle, et la borne supérieure pour les cycles avec une corde formant un triangle, et autres graphes de rayon $r = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ et de maille $g = 3$.

Preuve :

Pour la borne inférieure, comme $r \geq \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$, on a $r/g \geq \lfloor \frac{g}{2} \rfloor / g$ qui est égal à $\frac{1}{2}$ si g est pair et à $\frac{1}{2} \cdot \frac{g-1}{g}$ si g est impair. Cette dernière expression est minimum et égale à $\frac{1}{3}$ pour $g = 3$. Alors, la borne est atteinte si G possède un sommet dominant ($r = 1$) et un triangle ($g = 3$).

La borne supérieure se démontre de la même façon et est atteinte pour les mêmes graphes que la borne supérieure de la Proposition 5. □

3.1.3 Le diamètre

Lors de la comparaison automatique de la maille g avec le diamètre D, AGX 2 prouve les résultats simples suivants :

$$D + g \geq 4 \qquad \text{et} \qquad D \cdot g \geq 3,$$

avec égalité si et seulement si le graphe est complet.

On obtient aussi, sous forme de conjectures, les propositions prouvées ci-dessous.

Proposition 7 : *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, de diamètre D et de maille finie g. Alors :*

$$-\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq D - g \leq n - 5.$$

La borne inférieure est atteinte pour les cycles. La borne supérieure est atteinte par les graphes ayant l'une des structures suivantes :

- *un triangle et un chemin incident à un des sommets du triangle ;*
- *un triangle et deux chemins incidents chacun à un des sommets du triangle (sans restriction sur la répartition du nombre de sommets des chemins) ;*
- *un $K_4 - e$ (graphe complet sur 4 sommets moins une arête) et un chemin incident à un des deux sommets non-adjacents du $K_4 - e$;*
- *un $K_4 - e$ et deux chemins incidents chacun à un des deux sommets non adjacents du $K_4 - e$ (sans restriction sur la répartition du nombre de sommets des chemins).*

Preuve :

La borne inférieure est une conséquence immédiate de celle de la Proposition 5.

Borne supérieure : avec les notations définies et les conditions exprimées dans l'énoncé, on a : $D \leq n - 2$ et $g \geq 3$. Donc on a bien la borne supérieure, c'est-à-dire,

$$D - g \leq n - 5.$$

Soit G un graphe pour lequel la borne est atteinte, c'est-à-dire, $D = n - 2$ et $g = 3$. Notons $P = u_1\, u_2\, u_3 \cdots u_{n-1}$ un chemin réalisant le diamètre et u_n le n^{ieme} sommet de G. Le sommet u_n est voisin d'au moins 2 sommets successifs de P, pour former un cycle de longueur 3, et d'au plus 3 sommets successifs. S'il y a plus de 3 sommets ou s'ils ne sont pas successifs, alors $D < n - 2$. Donc les graphes de l'énoncé sont bien les seuls graphes extrêmes pour la borne supérieure. □

Proposition 8 : *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, de diamètre D et de maille finie g. Alors :*

$$D + g \leq \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor.$$

La borne est atteinte pour les cycles si n est pair, et pour les cycles ou les cycles de longueur $n - 1$ avec une arête pendante si n est impair.

Preuve :

Remarquons d'abord qu'une plus courte chaîne entre deux sommets de G (tel que défini dans l'énoncé) contient au plus $\lfloor g/2 \rfloor$ sommets de la maille de G et au plus les $n - g$ sommets qui ne sont pas sur la maille. Donc

$$D \leq \lfloor g/2 \rfloor + n - g = n - \lceil g/2 \rceil.$$

Alors

$$D + g \leq n + \lfloor g/2 \rfloor \leq n + \lfloor n/2 \rfloor.$$

Ce qui prouve la borne.

Soit G un graphe pour lequel la borne est atteinte. Alors,

$$n + \lfloor n/2 \rfloor = D + g \leq n + \lfloor g/2 \rfloor \leq n + \lfloor n/2 \rfloor.$$

Donc, on a $\lfloor g/2 \rfloor = \lfloor n/2 \rfloor$ et par conséquent, soit $g = n$, soit $g = n - 1$.

Si $g = n$, alors nécessairement G est un cycle. Si $g = n - 1$, (dans ce cas n est nécessairement impair) G contient un cycle sur $n - 1$ sommets et le n^{ieme} sommet est relié à exactement un sommet du cycle (sinon la maille serait réduite). □

Proposition 9 : *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, de diamètre D et de maille finie g. Alors :*

$$\frac{1}{3} \leq \frac{D}{g} \leq \frac{n-2}{3}.$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes complets. La borne supérieure est atteinte par les graphes ayant l'une des structures suivantes :

- *un triangle et un chemin incident à un des sommets du triangle ;*
- *un triangle et deux chemins incidents chacun à un des sommets du triangle (sans restriction sur la répartition du nombre de sommets des chemins) ;*
- *un $K_4 - e$ (graphe complet sur 4 sommets moins une arête) et un chemin incident à un des deux sommets non-adjacents du $K_4 - e$;*
- *un $K_4 - e$ et deux chemins incidents chacun à un des deux sommets non adjacents du $K_4 - e$ (sans restriction sur la répartition du nombre de sommets des chemins).*

Preuve :

La borne inférieure est une conséquence de celle de la Proposition 6 ; toutefois les graphes extrêmes ne sont pas les mêmes. La présente borne est atteinte si et seulement si G est complet ($D = 1$).

Pour la borne supérieure, on sait que $D = n - 1$ si et seulement si le graphe est un chemin. Donc si $g < \infty$, alors $D \leq n - 2$, et comme $g \geq 3$, on obtient

$$\frac{D}{g} \leq \frac{n-2}{3}.$$

La caractérisation des graphes extrêmes pour la borne supérieure se fait exactement comme dans la Proposition 7. □

Proposition 10 : *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, de diamètre D et de maille finie g. Alors :*

$$D \cdot g \leq \left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor .$$

La borne est atteinte pour les cycles dans le cas où n est pair, et pour les cycles de longueur $n-1$ avec une arête pendante si n est impair.

Preuve :

On a déjà noté que $D \leq n - \lceil g/2 \rceil$, donc

$$D \cdot g \leq (n - \lceil g/2 \rceil) \cdot g.$$

Si g est pair,

$$D \cdot g \leq ng - \frac{g^2}{2}$$

et le second membre de l'inégalité atteint son maximum (i) pour $n = g$ si n est pair, le graphe correspondant étant un cycle et la valeur de la borne $n^2/2$, et (ii) pour $g = n-1$ si n est impair, le graphe correspondant étant composé d'un cycle sur $n-1$ sommets, avec une arête pendante et la valeur de la borne supérieure est $(n^2-1)/2$.

Si g est impair,

$$D \cdot g \leq ng - \frac{g^2+g}{2}$$

et le second membre de l'inégalité atteint son maximum (i) pour $n = g$ si n est impair et le graphe correspondant étant un cycle, ou (ii) pour $g = n-1$ si n est pair, le graphe correspondant étant composé d'un cycle sur $n-1$ sommets et une arête pendante. Dans ce cas (g impair) la valeur de la borne supérieure est $(n^2-n)/2$.

En comparant les deux bornes (selon la parité de g), il est immédiat que les graphes extrêmes correspondent au cas où g est pair. □

3.1.4 Le degré maximum

Lors de la comparaison systématique de la maille g et du degrés maximum Δ, AGX 2 formule et prouve les résultats suivants :

$$2 - n \leq \Delta - g \leq n - 4 \qquad \text{et} \qquad \frac{2}{n} \leq \frac{\Delta}{g} \leq \frac{n-1}{3}.$$

Les bornes inférieures sont atteintes si et seulement si le graphe est un cycle, et les bornes supérieures sont atteintes si et seulement si le graphe contient au moins un sommet dominant ($\Delta = n - 1$) et au moins n arêtes.

AGX 2 obtient également les conjectures prouvées dans les deux propositions suivantes :

Proposition 11 : *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 4$, de degré maximum Δ et de maille finie g. Alors :*

$$6 \leq \Delta + g \leq n + 2. \tag{3.3}$$

De plus la borne inférieure est atteinte si et seulement si le graphe est tel que $\Delta = g = 3$ ou pour C_4, un cycle sur 4 sommets, et la borne supérieure pour les graphes ayant l'une des trois structures suivantes :

- *un graphe avec un sommet dominant et un triangle ;*
- *un graphe de maille $g = 4$ composé d'un sommet v de degré $n - 2$, un sommet u qui n'est pas voisin de v et adjacent à au moins 2 des $n - 2$ voisins de v et les voisins de v forment un ensemble stable ;*
- *un graphe de maille $g \geq 5$ composé d'un cycle de longueur g et de $n - g$ arêtes pendantes, toutes incidentes au même sommet du cycle.*

Preuve :

Pour la borne inférieure, si $\Delta = 2$ et $g < \infty$ alors nécessairement G est un cycle et

$\Delta + g = n + 2$. Dans ce cas la borne est atteinte uniquement pour $n = 4$, donc pour C_4, un cycle sur 4 sommets. Sinon, on a $\Delta \geq 3$ et $g \geq 3$, d'où la borne inférieure. Cette dernière est atteinte si et seulement si le graphe contient un triangle ($g = 3$) et a un degré maximum $\Delta = 3$.

Pour la borne supérieure, considérons un graphe G de maille finie g et soit v un sommet de G. Il y a deux possibilités :

• Le sommet v appartient à un cycle C de longueur g. Dans ce cas v est voisin d'exactement deux sommets sur C et au plus des $n - g$ sommets de G qui ne sont pas sur C. Ainsi $d(v) \leq n - g + 2$ et donc $d(v) + g \leq n + 2$.

• Le sommet v n'est sur aucun cycle de longueur g.

Si $g = 3$, il est évident que $d(v) + g \leq n + 2$.

Si $g = 4$, le sommet v ne peut être voisin d'au moins deux sommets d'un cycle de longueur égale à la maille (sinon G contiendrait un triangle), donc $d(v) \leq n - 2$ et $d(v) + g \leq n + 2$.

Si $g \geq 5$, le sommet v est voisin d'au plus un sommet de tout cycle de longueur égale à la maille (sinon il y aurait un cycle de longueur inférieure à g), donc $d(v) \leq (n - 1) - (g - 1) = n - g$ et $d(v) + g \leq n < n + 2$.

Ainsi pour tout sommet v de G, $d(v) + g \leq n + 2$ et par conséquent $\Delta + g \leq n + 2$.

Soit maintenant G un graphe tel que $\Delta + g = n + 2$.

• Si $g = 3$, alors $\Delta = n - 1$ et G contient un sommet dominant et un triangle.

• Si $g = 4$, alors $\Delta = n - 2$. Soit v un sommet de degré $n - 2$, alors les voisins de v forment un ensemble stable (sinon G contiendrait un triangle) et l'unique sommet non adjacent à v doit avoir au moins 2 voisins communs avec v pour former un cycle de longueur $g = 4$.

• Si $5 \leq g < n$, alors $\Delta = n-g+2$. On a vu plus haut que, dans ce cas, un sommet qui n'est pas sur un cycle de longueur égale à la maille est de degré au plus $n - g$. Alors le sommet v de degré maximum est nécessairement sur un cycle C de longueur g.

Comme v admet exactement 2 voisins sur C, il est nécessairement adjacent à tous les sommets qui ne sont pas sur C. Comme les voisins de v forment un ensemble stable (sinon, il y aurait un triangle et on aurait $g = 3$), le graphe G est bien composé d'un cycle sur g sommets et les $n - g$ autres sommets sont pendants et tous voisins du même sommet du cycle.

• Si $g = n$, G est un cycle et $\Delta + g = n + 2$. □

Proposition 12 : *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 5$, de degré maximum Δ et de maille finie g. Alors :*

$$9 \leq \Delta \cdot g \leq \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil$$

De plus la borne inférieure est atteinte si et seulement si le graphe est tel que $\Delta = g = 3$, et la borne supérieure pour les graphes ayant l'une des deux structures suivantes :

• *un graphe composé d'un cycle de longueur $g = \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$ et $\Delta = \lceil \frac{n+2}{2} \rceil$ arêtes pendantes toutes incidentes au même sommet du cycle ;*

• *un graphe composé d'un cycle de longueur $g = \lceil \frac{n+2}{2} \rceil$ et $\Delta = \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$ arêtes pendantes toutes incidentes au même sommet du cycle.*

Preuve :

La borne inférieure se démontre exactement comme la borne inférieure de la Proposition 11.

Pour la borne supérieure et d'après la Proposition 11, on a :

$$\Delta \cdot g \leq (n - g + 2) \cdot g = f(g).$$

Si on considère $f(g)$ comme une fonction en g, elle atteint son maximum pour $g = \lceil \frac{n+2}{2} \rceil$ ou $g = \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$ avec $f(g) = \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n+2}{2} \rceil$. D'où la borne.

Soit maintenant G un graphe pour lequel la borne supérieure est atteinte. Tout sommet du plus petit cycle de G ne peut avoir que 2 voisins dans ce cycle. Pour que $\Delta = n - g + 2$, il faut qu'un sommet de ce cycle soit adjacent à tous les sommets n'appartenant pas à ce cycle. Alors l'ajout de toute arête créerait un cycle de longueur inférieure à g. D'où le résultat. □

3.1.5 Le degré moyen

Considérons maintenant le degré moyen $\bar{d}$ et la maille g. AGX 2 trouve et prouve les bornes suivantes :

$$2 - n \leq \bar{d} - g \leq n - 4 \qquad \text{et} \qquad \frac{2}{n} \leq \frac{\bar{d}}{g} \leq \frac{n-1}{3}.$$

Les bornes inférieures sont atteintes uniquement pour les cycles, et les bornes supérieures pour les graphes complets.

AGX 2 obtient également les conjectures prouvées dans les deux propositions suivantes :

Proposition 13 : *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 4$, de degré moyen $\bar{d}$ et de maille finie g. Alors :*

$$5 \leq \bar{d} + g \leq n + 2. \tag{3.4}$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes unicycliques dont l'unique cycle est un triangle. La borne supérieure est atteinte pour les graphes complets et les cycles.

Preuve :

Pour la borne inférieure, comme G a un cycle, $m \geq n$ et $\bar{d} \geq 2$. Comme $g \geq 3$ la

borne s'ensuit. Les conditions $\bar{d} = 2$ et $g = 3$ impliquent que G est unicyclique et contient un triangle.

La borne supérieure découle de celle de (3.3) et de $\bar{d} \leq \Delta$. Elle est atteinte pour un graphe régulier. D'après la preuve de la Proposition 11, soit $\bar{d} = \Delta = 2$ et $g = n$, c'est-à-dire, G est un cycle, soit $\bar{d} = \Delta = n - 1$ et $g = 3$, donc G est un graphe complet. □

Proposition 14 : *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, de degré moyen $\bar{d}$ et de maille finie g. Alors :*

$$6 \leq \bar{d} \cdot g \leq 3n - 3. \tag{3.5}$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes unicycliques dont l'unique cycle est un triangle. La borne supérieure est atteinte pour les graphes complets.

Preuve :

La borne inférieure se démontre comme la borne inférieure de la Proposition 13.

Pour la borne supérieure, si $g = 3$, il est évident que $g \cdot \bar{d} \leq 3n - 3$ avec égalité si et seulement si le graphe est complet. Il nous reste à montrer que si $g > 3$, nécessairement $g \cdot \bar{d} < 3n - 3$.

Si $g = 4$, d'après le théorème de Turan [174], $\bar{d} \leq \frac{n}{2}$, d'où

$$g \cdot \bar{d} \leq 2n < 3n - 3.$$

Si $5 \leq g \leq \frac{n}{2}$, on a, d'après [31], pour tout $n \geq 5$

$$g \cdot \bar{d} \leq \frac{n^2 - ng + 2g}{2n} < 3n - 3.$$

Si $\frac{n}{2} < g < n$, on a, d'après [31],

$$g \cdot \bar{d} \leq (2n - g - 1)\frac{g}{2n} < 3n - 3.$$

Si $g = n$, le graphe est un cycle et donc, pour tout $n \geq 4$,

$$g \cdot \bar{d} = 2n < 3n - 3.$$

Ce qui prouve le résultat. □

3.1.6 Le degré minimum

Considérons maintenant le degré minimum et la maille. AGX 2 trouve et prouve les résultats suivants :

$$2 - n \leq \delta - g \leq n - 4 \qquad \text{et} \qquad \frac{\delta}{g} \leq \frac{n-1}{3},$$

la borne inférieure sur la différence est atteinte pour les cycles ou pour les graphes composés d'un cycle sur $n - 1$ sommets et une arête pendante, et les deux bornes supérieures pour les graphes complets ;

$$\delta + g \geq 4 \qquad \text{et} \qquad \delta \cdot g \geq 3,$$

avec égalité si et seulement si G contient un triangle et un sommet pendant.

Remarque :
Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 4$ sommets, de maille finie g et de degré minimum δ,

$$\frac{\delta}{g} \geq \frac{1}{n-1},$$

avec égalité si et seulement si G est composé d'un cycle sur $n - 1$ sommets, et d'une arête pendante. La preuve de ce résultat simple repose sur le principe de la deuxième valeur, mais son obtention automatique n'est pas garantie (ce cas est discuté dans la Section 2.3.3).

AGX 2 obtient également les conjectures prouvées dans les deux propositions suivantes :

Proposition 15 : *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 4$, de degré minimum δ et de maille finie g. Alors :*

$$\delta + g \leq n + 2.$$

La borne est atteinte pour les graphes complets et les cycles.

Preuve :

Le résultat est une conséquence de la Proposition 13. □

Proposition 16 : *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 4$, de degré minimum δ et de maille finie g. Alors :*

$$\delta \cdot g \leq 3n - 3.$$

La borne est atteinte pour les graphes complets.

Preuve :

Le résultat est une conséquence de la Proposition 14. □

3.1.7 Résultats divers

Nous présentons dans cette dernière section quelques résultats sur la comparaison de la maille avec le nombre chromatique χ, le nombre de domination β et l'index λ_1, sans toutefois traiter de toutes les bornes issues d'une comparaison systématique.

Proposition 17 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets, de maille finie g et de nombre chromatique χ,*

$$\chi \cdot g \leq 3n.$$

La borne est atteinte si et seulement si le graphe est un cycle impair ou un graphe complet.

Preuve[1] **:**

Comme la maille est finie, le graphe contient un cycle, et aussi $\chi \geq 2$. Si $\chi = 2$, alors $\chi \cdot g \leq 2n$.

Supposons que $\chi \geq 3$ et soit $V_1, V_2, \ldots V_\chi$ les classes de couleurs du graphe. Notons H le sous-graphe induit par la réunion des trois plus petites classes de couleurs. Alors H contient au plus $3n/\chi$ sommets. En effet, soit k le nombre minimum de sommets dans un triplet de classes de couleurs. En faisant la somme des sommets sur l'ensemble de tous les triplets de classes, chaque sommet est compté $\binom{\chi-1}{2}$ fois, donc $k \cdot \binom{\chi}{3} \leq n \cdot \binom{\chi-1}{2}$, qui donne $k \leq 3n/\chi$. De plus, H ne peut pas être biparti, sinon le graphe d'origine serait coloriable avec $\chi - 1$ couleurs. Par conséquent, H contient un cycle impair, dont la longueur est au plus $3n/\chi$, et donc $g \leq 3n/\chi$.

Si $\chi = 3$, on a l'égalité si est seulement si H, et par conséquent le graphe, est isomorphe à un cycle impair.

Si $g = 3$, on a l'égalité si est seulement si $\chi = n$, c'est-à-dire, le graphe est complet.

Supposons que $g > 3$ et $\chi > 3$ et que la borne est atteinte. Alors H est isomorphe à un cycle impair C_g, donc g est impair et alors $g \geq 5$. Considérons une autre classe de couleurs V_i non incluse dans H. V_i contient un sommet u adjacent à un sommet de chacune des autres classes, sinon les sommets de V_i peuvent être répartis sur les autres classes et avoir une coloration avec $\chi - 1$ couleurs. Le sous-graphe induit par H et u est une roue, avec au moins 3 rayons. Sa maille est au plus $2 + g/3$, qui est inférieur à g, ce qui est une contradiction.

Alors, la borne est atteinte si et seulement si le graphe est un cycle impair ou un graphe complet. □

Proposition 18 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets, de maille finie g et de nombre de domination β,*

$$\beta - g \geq -\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor.$$

[1] Cette preuve est due à un arbitre anonyme de [5].

La borne est atteinte pour toute valeur de $n \geq 3$ (par le cycle qui n'est toutefois pas unique).

Preuve :

Dans un graphe connexe de maille finie g, il faut au moins $\lceil g/3 \rceil$ sommets pour dominer le plus petit cycle. Donc

$$\beta - g \geq \left\lceil \frac{g}{3} \right\rceil - g = -\left\lfloor \frac{2g}{3} \right\rfloor \geq -\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor.$$

Il est facile de voir que la borne est atteinte au moins pour les cycles. □

Proposition 19 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets, de maille finie g et de nombre de domination β,*

$$\frac{\beta}{g} \geq \frac{1}{3}.$$

La borne est atteinte pour toute valeur de $n \geq 3$ (par un graphe contenant un sommet dominant et un triangle, qui n'est toutefois pas unique).

Preuve :

Comme pour la proposition précédente,

$$\frac{\beta}{g} \geq \frac{\left\lceil \frac{g}{3} \right\rceil}{g} \geq \frac{1}{3}.$$

Il est facile de voir que la borne est atteinte au moins pour les graphes ayant un sommet dominant et un triangle, ou encore pour un graphe composé d'un cycle sur 6 sommets et de $n - 6$ arêtes pendantes réparties sur deux sommets à distance 3 dans le cycle ($\beta = 2, g = 6$). □

Conjecture 48 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets, de maille finie g et d'index λ_1,*

$$\lambda_1 \cdot g \leq 3(n-1),$$

avec égalité si et seulement si le graphe est complet.

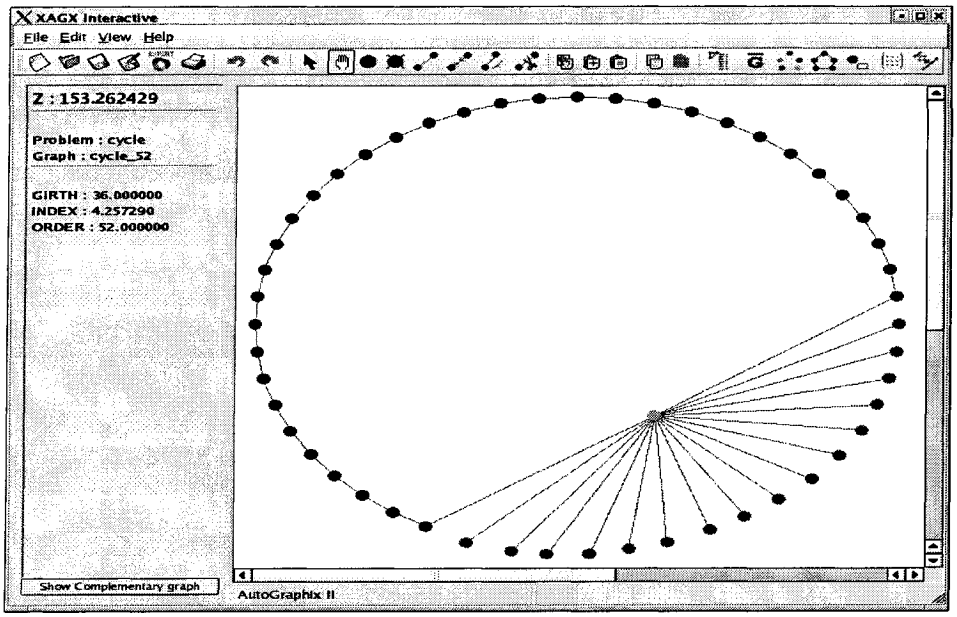


Figure 3.1 – Un contre-exemple pour la Conjecture 48.

Il exite des contre-exemples[2] à cette conjecture. Si G est le graphe constitué d'un cycle C_g de longueur g et de $n-g$ sommets pendants tous reliés au même sommet de C_g, alors l'index de G est supérieur à celui ($\sqrt{n-g+2}$, Théorème 20 page 185) d'une étoile de degré $n-g+2$. Donc, $\lambda_1 \cdot g \geq g \cdot \sqrt{n-g+2}$, qui peut être arbitrairement plus grand que $3(n-1)$, par exemple, pour $g = (n-1)/2$, et $n \geq 69$. Un exemple de ce type de graphe avec $g = 36$ et $n = 52$ est donné dans la Figure 3.1. Il s'agit du plus petit contre-exemple connu.

[2]Les contre-exemples ont été trouvés par un arbitre anonyme (celui ayant prouvé la Proposition 17) de [5].

3.2 La Distance Moyenne

Dans la présente section, on étudie les conjectures et résultats de la Forme 1 d'AGX 2 où i_2 est la distance moyenne $\bar{l}$ de G et i_1 un autre invariant. Ainsi les énoncés (observations et propositions) sont de la forme suivante :

Tableau 3.3 – Résultat de la Forme 1 d'AGX 2 impliquant la distance moyenne.

Pour tout graphe connexe G d'ordre $n \geq n_0$, d'invariant i_1 et de distance moyenne $\bar{l}$,

$$\underline{b}_n \leq i_1 \otimes \bar{l} \leq \overline{b}_n.$$

La borne inférieure est atteinte si $G \in \mathcal{G}_1$ et la borne supérieure si $G \in \mathcal{G}_2$.

Dans l'ordre, les sous-sections suivantes correspondent aux cas où i_1 est le nombre de stabilité α, le diamètre D, le rayon r, la maille g et le degré maximum Δ, moyen $\overline{d}$ et minimum δ.

3.2.1 Le nombre de stabilité

Le premier invariant comparé avec la distance moyenne $\bar{l}$ est le nombre de stabilité α. Exploitant le fait que le graphe complet est l'unique graphe qui minimise à la fois le nombre de stabilité α et la distance moyenne $\bar{l}$, et utilisant sa composante de preuve atutomatique, AutoGraphiX 2 génère les observations suivantes :

Observation 6 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de nombre de stabilité α et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$\alpha + \bar{l} \geq 2,$$

avec égalité si et seulement si G est un graphe complet.

Observation 7 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de nombre de stabilité α et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$\alpha \cdot \bar{l} \geq 1,$$

avec égalité si et seulement si G est un graphe complet.

Lors de la recherche des bornes inférieures sur $\alpha - \bar{l}$ et sur $\alpha/\bar{l}$, AutoGraphiX donne, sous forme de conjectures les inégalités suivantes :

$$\alpha - \bar{l} \geq 0, \quad \text{et} \quad \alpha/\bar{l} \geq 1,$$

avec égalité si et seulement si G est un graphe complet, dans les deux cas.
Ces deux bornes sont deux autres formulations du théorème de Chung [48] ($\bar{l} \leq \alpha$), qui a été obtenu, en premier lieu, comme conjecture avec le système Graffiti [81].

Les autres résultats obtenus lors de la comparaison entre la distance moyenne $\bar{l}$ et le nombre de stabilité α sont donnés dans les propositions suivantes :

Proposition 20 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de nombre de stabilité α et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$\alpha - \bar{l} \leq n - 3 + \frac{2}{n}.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est une étoile.

Preuve :

• Si $\alpha = n - 1$, G est une étoile et on a :

$$\alpha - \bar{l} = n - 3 + \frac{2}{n}.$$

• Si $\alpha \leq n-2$, alors ($\bar{l} \geq 1$) :

$$\alpha - \bar{l} \leq n-3 < n-3+\frac{2}{n}.$$

D'où le résultat. □

Proposition 21 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de nombre de stabilité α et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$\alpha + \bar{l} \leq n+1-\frac{2}{n}.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est une étoile.

Preuve :

(a) La borne est atteinte pour un arbre, car la suppression d'arêtes augmente la distance moyenne $\bar{l}$ et éventuellement le nombre de stabilité α.

(b) On peut supposer, sans perte de généralité, que tous les sommets pendants sont dans un stable maximum S (sinon le voisin d'un sommet pendant serait nécessairement dans un stable maximum et on peut le remplacer par le sommet pendant).

(c) Éliminer les arêtes non-incidentes aux sommets de S. Remplacer une arête de poids $n_i(n-n_i)$ (le poids d'une arête étant le produit des nombres de sommets des deux composantes connexes issues de la suppression de cette arête) par une arête de poids $n-1$ conduit à (voir Figure 3.2) :

$$\begin{aligned} Diff(W) &= -n_i(n-n_i)+n-1 = n_i^2 - nn_i + n - 1 \\ &\geq -\frac{n}{2}(n-\frac{n}{2})+n-1 = -\frac{(n-2)^2}{4}, \end{aligned}$$

où $Diff(W)$ désigne la différence dans la somme de toutes les distances entre paires de sommets (appelé aussi indice de Wiener) de l'arbre à l'issue de l'opération.

La différence dans le nombre de stabilité, quant à elle, est de

$$Diff(\alpha) = 1.$$

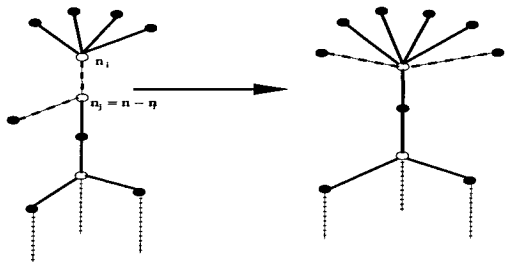


Figure 3.2 – Élimination d'arêtes non-incidentes aux sommets de S.

Donc, la différence pour la somme $\alpha + \bar{l}$ est

$$Diff(\alpha + \bar{l}\,) \;\geq\; 1 - \frac{(n-2)^2}{2n(n-1)} \;\geq\; \frac{n^2+2n-2}{2n(n-1)} \;>\; 0.$$

(d) Contracter un arbre T en supprimant toutes les feuilles adjacentes à un sommet v et v même et les relier à un autre sommet z adjacent à w voisin de v (voir Figure 3.3).

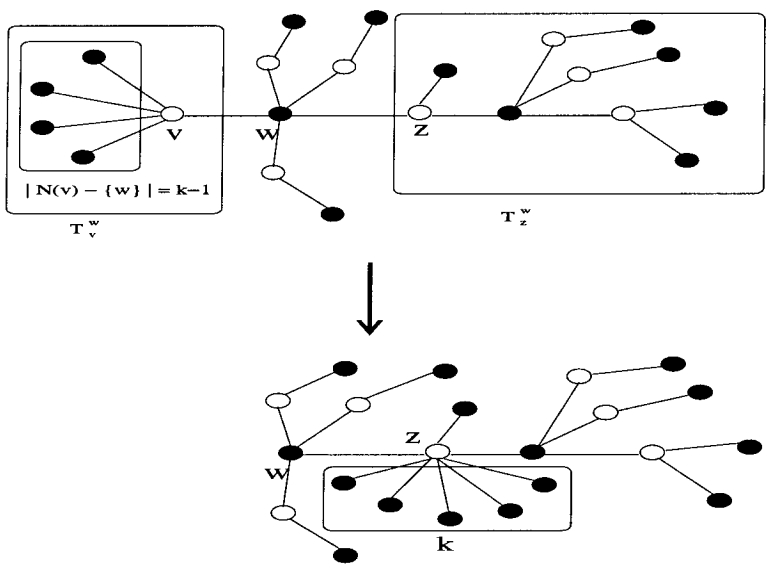


Figure 3.3 – Contraction d'un arbre.

Soit T_v^w et T_z^w les arbres obtenus de T après la suppression de w et contenant v et z respectivement (voir Figure 3.3). Il est facile de voir que $|T_v^w| = k$ et $|T_z^w| \leq n-k-1$.

On a :

$$\begin{aligned} Diff(W) &\geq -2(k-1)(n-k-1)-(n-k-1)+1 \\ Diff(W) &\geq -(2k-1)(n-k-1)+1 = 2k^2+(1-2n)k+n. \end{aligned}$$

En notant cette dernière borne $f(k)$ (une fonction de k), on a

$$f'(k)=0 \iff 4k-2n+1=0 \iff k=\frac{2n-1}{4}.$$

Ainsi

$$Diff(W) \geq 2(\frac{2n-1}{4})^2+(1-2n)(\frac{2n-1}{4})+n = \frac{-4n^2+12n-1}{8}.$$

Ceci conduit à

$$\begin{aligned} Diff(\alpha+\bar{l}) &\geq 1-\frac{-4n^2+12n-1}{4n(n-1)} = 1+\frac{4n^2-12n+1}{4n(n-1)}, \\ Diff(\alpha+\bar{l}) &\geq 2-\frac{2}{n-1}+\frac{1}{4n(n-1)} > 0. \end{aligned}$$

Ainsi de façon globale, $\alpha+\bar{l}$ croît strictement à l'issue de la contraction. On répète la contraction jusqu'à l'obtention de l'étoile S_n pour laquelle

$$\alpha+\bar{l}=n+1-\frac{2}{n},$$

ce qui complète la preuve. □

Proposition 22 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de nombre de stabilité α et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$\frac{\alpha}{\bar{l}} \leq \frac{n}{2}.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est une étoile.

Preuve :

Cette proposition se démontre exactement comme la Proposition 20. □

3.2.2 Le diamètre

En se basant sur la règle de l'intersection des familles de graphes extrêmes, AGX 2 prouve les observations suivantes :

Observation 8 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de diamètre D et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$2 \leq D + \bar{l} \leq \frac{4n-2}{3}.$$

La borne inférieure est atteinte si et seulement si G est un graphe complet, et la borne supérieure si et seulement si G est un chemin.

Observation 9 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de diamètre D et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$1 \leq D \cdot \bar{l} \leq \frac{n^2-1}{3}.$$

La borne inférieure est atteinte si et seulement si G est un graphe complet, et la borne supérieure si et seulement si G est un chemin.

En appliquant la méthode de preuve automatique basée sur la définition, AutoGraphiX 2 énonce les observations suivantes :

Observation 10 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de diamètre D et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$D - \bar{l} \geq 0.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est un graphe complet.

Observation 11 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de diamètre D et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$D/\bar{l} \geq 1.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est un graphe complet.

Les propositions suivantes sont obtenues automatiquement sous forme de conjectures par le système AGX 2 et prouvées à la main par la suite :

Proposition 23 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de diamètre D et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$D - \bar{l} \leq \frac{2n-4}{3}.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est un chemin.

Preuve :
Si G est un chemin, on a la borne. Sinon, soit G un graphe connexe de diamètre $D \leq n-2$ et de distance moyenne $\bar{l}$, et H un sous-graphe de G induit par un chemin diamétrique. Posons

$$\sigma = \sum_{u,v \in V} d(u,v) \quad \text{et} \quad \sigma_H = \sum_{u,v \in V(H)} d(u,v),$$

où $V(H)$ est l'ensemble des sommets de H. Il est facile de voir que

$$\sigma > \sigma(H) = \frac{D \cdot (D+1) \cdot (D+2)}{6} \quad \text{et} \quad \bar{l} > \frac{D \cdot (D+1) \cdot (D+2)}{3n(n-1)}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} D - \bar{l} &< D - \frac{D \cdot (D+1) \cdot (D+2)}{3n(n-1)} \\ &= \frac{3n(n-1) \cdot D - D \cdot (D+1) \cdot (D+2)}{3n(n-1)} \\ &= \frac{-D^3 - 3D^2 + (3n(n-1) - 2) \cdot D}{3n(n-1)}. \end{aligned}$$

En considérant la dernière expression comme une fonction de D, notée $f(D)$, sa dérivée est

$$f'(D) = \frac{-3D^2 - 6D + (3n(n-1) - 2)}{3n(n-1)} = \frac{(3n(n-1) - 2) - (3D(D+2))}{3n(n-1)},$$

qui est positive pour $1 \leq D \leq n-2$. Donc $f(D)$ atteint son unique maximum pour $D = n-2$, c'est-à-dire,

$$D - \bar{l} < f(n-2) = \frac{2n-4}{3},$$

ce qui prouve le résultat. □

Lors de la recherche d'une borne supérieure sur $D/\bar{l}$, aucune formule n'a été obtenue, mais on a constaté une régularité dans la structure des graphes extrêmes trouvés par le système. Cette famille de graphes n'était pas connue. Un graphe de cette famille est appelé *bestiole* en raison de son apparence.
Une bestiole B_{p,k_1,k_2} (Figure 3.4) est un graphe obtenu à partir d'un graphe complet K_p, en supprimant une arête uv et en reliant un chemin P_{k_1} à u et un autre P_{k_2} à v. Dans B_{p,k_1,k_2}, l'ordre est $n = p + k_1 + k_2$ et la taille $m = k_1 + k_2 - 1 + p(p-1)/2$. Une bestiole B_{p,k_1,k_2} est est dite *équilibrée* si $|k_1 - k_2| \leq 1$.

La conjecture obtenue pour la borne supérieure sur $D/\bar{l}$ est structurale et est la suivante :

Conjecture 49 : *Sur l'ensemble de tous les graphes connexes sur $n \geq 3$ sommets de diamètre D et de distance moyenne $\bar{l}$, $D/\bar{l}$ est maximum pour une bestiole équilibrée.*

3.2.3 Le rayon

La comparaison automatique entre la distance moyenne et le rayon a donné en premier lieu les observations ci-dessous :

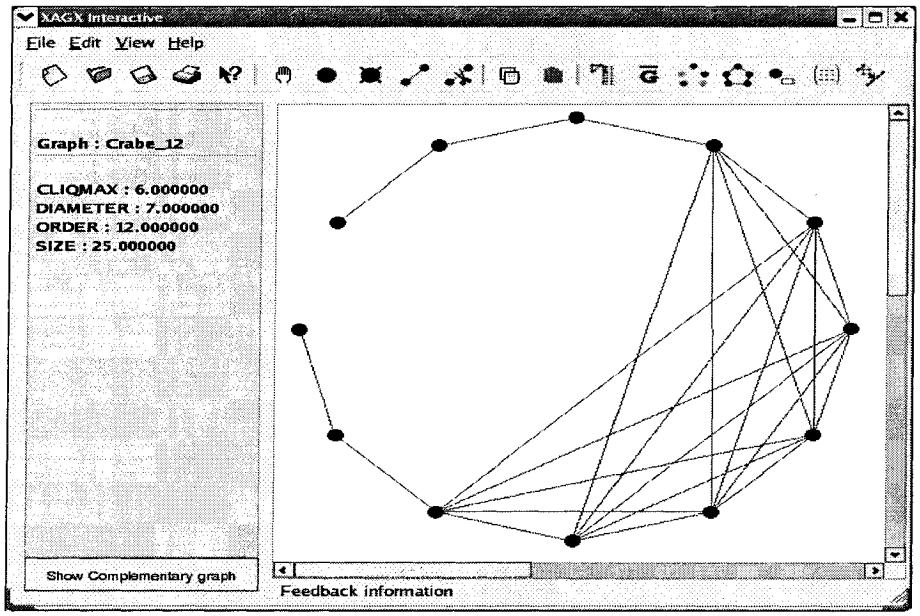


Figure 3.4 – Une bestiole équilibrée sur 12 sommets : $B_{7,2,3}$.

Observation 12 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de rayon r et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$2 \leq \bar{l} + r \leq \begin{cases} \frac{5n-1}{6} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \\ \frac{5n+2}{6} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure est atteinte si et seulement si G est un graphe complet, et la borne supérieure si et seulement si G est un chemin.

Observation 13 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de diamètre D et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$1 \leq \bar{l} \cdot r \leq \begin{cases} \frac{n^2-1}{6} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \\ \frac{n^2+n}{6} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure est atteinte si et seulement si G est un graphe complet, et la borne supérieure si et seulement si G est un chemin.

AutoGraphiX 2 a prouvé automatiquement les résultats ci-dessus en utilisant la méthode basée sur la règle de l'intersection.

La méthode numérique de recherche de conjectures a conduit à la conjecture prouvée dans la proposition suivante :

Proposition 24 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de rayon r et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$\bar{l}/r \leq 2 - \frac{2}{n}.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est une étoile.

Preuve :

Si G est un graphe connexe de rayon r, alors il contient un arbre partiel T de même rayon $r(T) = r$. Du fait que la suppression d'arêtes dans un graphe augmente la distance moyenne, il est évident que $\bar{l}(T) \geq \bar{l}$, où $\bar{l}(T)$ et $\bar{l}$ désignent la distance moyenne dans T et G respectivement. Donc $\bar{l}/r$ atteint son maximum pour un arbre. Pour la suite de la preuve, on suppose que G est un arbre.

Soit m_i le nombre de paires de sommets de G à distance i, pour $1 \leq i \leq D$, où D représente le diamètre de G. Avec ces notations et le fait que $m_1 \geq n - 1$, on a

$$\begin{aligned} \bar{l} &= 2 \cdot \frac{m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \cdots + Dm_D}{n(n-1)} \\ \bar{l} &\leq \frac{2n - 2 + D\left(n(n-1) - 2n + 2\right)}{n(n-1)} = D - 2\frac{D-1}{n}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{\bar{l}}{r} \leq \frac{D}{r} - \frac{D-1}{r} \cdot \frac{2}{n}.$$

Comme G est supposé être un arbre, d'après Berge [17], on a $D = 2r$ ou $D = 2r - 1$, ainsi

$$\frac{\bar{l}}{r} \leq 2 - \frac{4}{n} + \frac{2}{rn}.$$

Pour n fixé, cette dernière expression est maximum pour $r = 1$, et la borne s'ensuit.

Considérons maintenant un arbre G pour lequel la borne est atteinte. En raison de

$$\frac{\bar{l}}{r} = 2 - \frac{2}{n} \leq \frac{D}{r} - \frac{D-1}{r} \cdot \frac{2}{n} \leq 2 - \frac{2}{n},$$

nécessairement

$$\frac{D}{r} - \frac{D-1}{r} \cdot \frac{2}{n} = 2 - \frac{2}{n}$$

qui entraîne $D/r = 2$ et $D - 1 = r$, c'est-à-dire, $D = 2$ et $r = 1$. L'étoile est l'unique arbre satisfaisant ces conditions. □

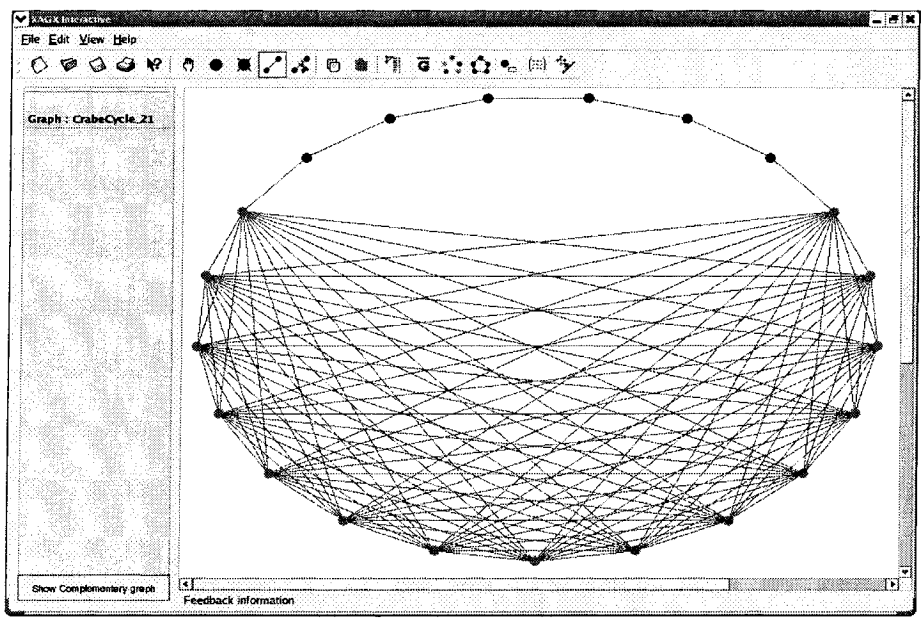


Figure 3.5 – Un panier pair : $PN_{15,8}$.

Avant d'énoncer les conjectures obtenues par AGX 2 pour $\overline{l} - r$ et $\overline{l}/r$, définissons la famille de graphes extrêmes trouvés par le système lors de l'étude des bornes inférieures de ces expressions. Un *panier* $PN_{p,k}$ (Figure 3.5) est obtenu à partir d'un graphe complet K_p en remplaçant une arête uv par un chemin P_k. L'ordre d'un panier $PN_{p,k}$ est $n = p + k - 2$ et sa taille $m = \frac{p(p-1)}{2} + k - 2$. Il est dit *impair* si k est impair et *pair* si k est pair.

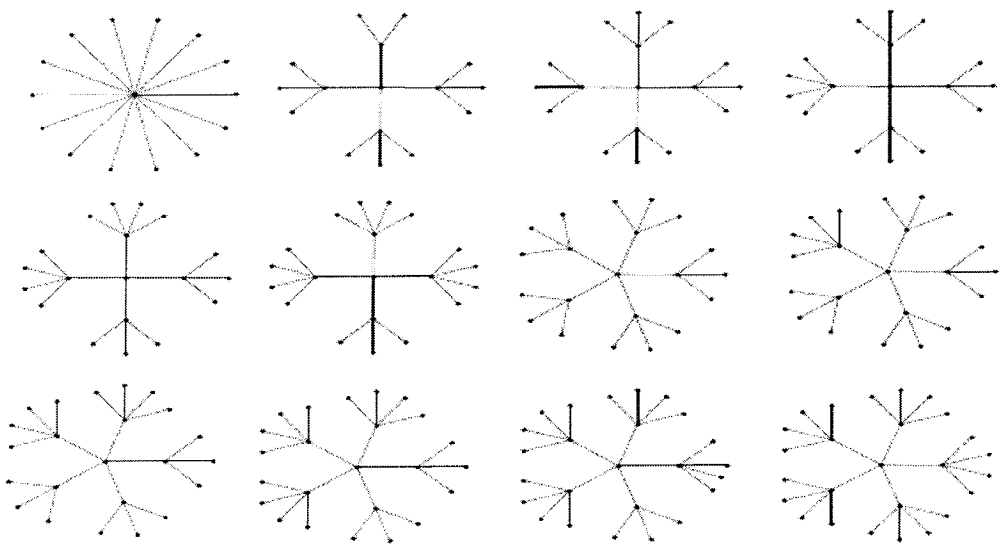


Figure 3.6 – Graphes obtenus par AGX 2 lors de la maximisation de $\overline{l} - r$.

Conjecture 50 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de rayon r et de distance moyenne $\overline{l}$,*

$$\overline{l} - r \geq \begin{cases} \frac{-n(n-2)}{4(n-1)} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \\ \frac{8-(n-1)^3}{4n(n-1)} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La borne est atteinte si et seulement si G est un cycle pour n pair et si G est un panier $PN_{4,n-2}$ pour n impair.

Conjecture 51 : *Pour tout $n \geq 3$, sur l'ensemble de tous les graphes connexes d'ordre n, de rayon r et de distance moyenne $\bar{l}$, $\bar{l}/r$ est minimum pour les paniers.*

Lors de la recherche d'une borne supérieure sur $\bar{l} - r$, AGX 2 donne les graphes extrêmes ($n = 15, \cdots 26$) représentés dans la Figure 3.6. La courbe associée est donnée dans la Figure 3.7. La courbe et les graphes ne présentent pas une régularité suffisante pour en déduire une conjecture.

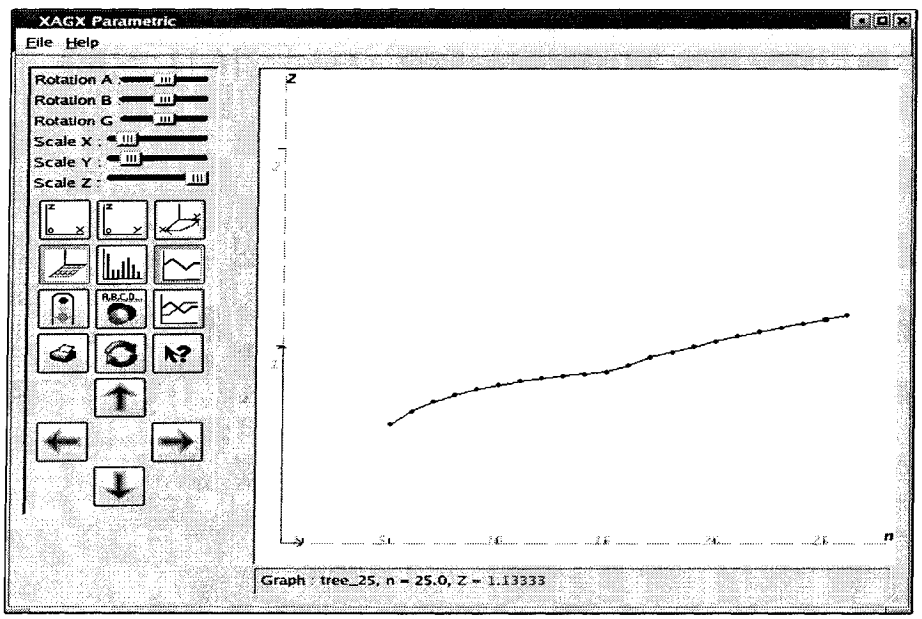


Figure 3.7 – La courbe de la borne supérieure sur $\bar{l} - r$.

3.2.4 La maille

L'unique graphe qui minimise à la fois la distance moyenne et la maille est le graphe complet (sur au moins 3 sommets). Ce fait est détecté par AGX 2 en utilisant la méthode de preuve automatique basée sur la règle de l'intersection et en explorant sa base de connaissances, notamment les éléments représentant la maille et la distance moyenne. Le système génère les deux observations suivantes :

Observation 14 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de maille finie g et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$\bar{l} + g \geq 4.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est un graphe complet.

Observation 15 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de maille finie g et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$\bar{l} \cdot g \geq 3.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est un graphe complet.

Avant l'énoncé des résultats suivant, rappelons la définition d'un *graphe de Soltés* [168]. Soit u un sommet isolé ou une extrêmité d'un chemin P_k. Relions u à au moins un sommet d'une clique K_{n-k}. Le graphe ainsi obtenu est le graphe de Soltés $PK_{n,m}$ d'ordre n et de taille m. $PK_{n,m}$ est entièrement défini par la donnée de son ordre n et de sa taille m, avec $1 \leq n-1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$. Pour n et m fixés, $PK_{n,m}$ maximise, mais non de façon unique, le diamètre [112] et, de façon unique, la distance moyenne [168]. Si $PK_{n,m}$ est composé d'une clique et d'un chemin incident à un sommet de cette clique, il est appelé *cerf-volant.*

Proposition 25 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de maille finie g et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{si } n \textit{ est pair} & \frac{n^2}{4(n-1)} - n \\ \textit{si } n \textit{ est impair} & \frac{n+1}{4} - n \end{array}\right\} \leq \bar{l} - g \leq \frac{(n+1)(n^2-10n+12)}{3n(n-1)}.$$

La borne inférieure est atteinte si et seulement si G est un cycle, et la borne supérieure si et seulement si G est un $PK_{n,n}$.

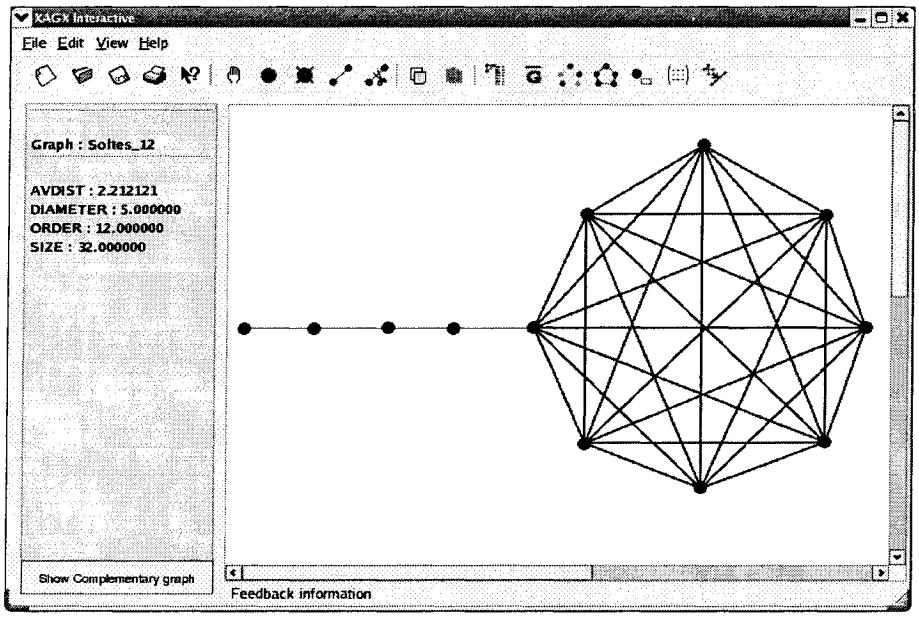


Figure 3.8 – Un cerf-volant : $PK_{12,32}$.

Preuve :

La borne inférieure : Soit G un graphe connexe de maille finie g, et H un sous-graphe de G induit par un cycle, C_g, de longueur g. Soit σ et σ_H la somme de toutes les distances entre paires de sommets dans G et H respectivement. Il est évident que $\sigma \geq \sigma_H$, donc

$$\bar{l} - g \geq \frac{2\sigma_H}{n(n-1)} - g.$$

Notons le membre de droite de cette inégalité par $f(g)$. On a

$$f(g) = \begin{cases} \frac{g^3 - 4(n-\frac{1}{2})^2 g}{4n(n-1)} & \text{si } g \text{ est impair,} \\ \frac{g^3 - 4n(n-1)g}{4n(n-1)} & \text{si } g \text{ est pair.} \end{cases}$$

La fonction $f(g)$ est strictement croissante pour $3 \leq g \leq n$, donc atteint son maximum si et seulement si $g = n$, et on a :

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n^2}{4(n-1)} - n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \\ \frac{n+1}{4} - n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Le cycle est l'unique graphe avec $g = n$.

La borne supérieure : Si G est un graphe connexe d'ordre n, de taille m et de maille finie g, alors $m \geq n$. De plus, la suppression d'une arête accroît la distance moyenne $\bar{l}$ dans un graphe. Donc

$$\max_{m \geq n}(\bar{l} - g) = \max_{m=n}(\bar{l} - g) \leq \max_{m=n} \bar{l} - 3.$$

D'après [168], sous la condition $m = n$, $\bar{l}$ est maximum si et seulement si G est isomorphe au graphe de Soltés $PK_{n,n}$ (qui en l'occurence est un triangle avec un chemin incident à un de ses sommets). Un calcul algébrique simple donne alors la borne supérieure. □

Proposition 26 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de maille finie g et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$\bar{l} + g \leq \begin{cases} \frac{n^2}{4(n-1)} + n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{5n+1}{4} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La borne est atteinte si et seulement si G est un cycle.

Preuve :

Comme la suppression d'arêtes augmente la distance moyenne dans un graphe, alors, sous la condition $g < \infty$, l'expression $\bar{l} + g$ atteint son maximum pour un graphe unicyclique.

Soit G un graphe unicyclique. Si $g = n$, le graphe est un cycle et on a la borne.

Supposons que $g < n$ et considérons un sommet u sur l'unique cycle de G et de degré $d(u) \geq 3$ (un tel sommet existe car G est unicyclique et connexe mais pas un cycle). Soient v et w les voisins de u tels que v soit sur le cycle de G mais pas w. Considérons le graphe H construit à partir de G en supprimant l'arête uv et en ajoutant une arête

entre v et w. Il est évident que $g(H) = g + 1$, où $g(H)$ désigne la maille de H. Il est facile de voir que pour toute paire de sommets (x, y) de G,

$$d(x, y) - 1 \leq d_H(x, y) \leq d(x, y) + 1.$$

où d et d_H désignent respectivement les fonctions de distance dans G et H. Les deux inégalités sont strictes pour au moins les $n - 1$ paires de sommets formant les arêtes communes de G et H. Donc

$$\bar{l} < \bar{l}(H) + 1.$$

Ainsi

$$\bar{l} + g < \bar{l}(H) + g + 1 = \bar{l}(H) + g(H).$$

Par conséquent, $\bar{l} + g$, considérée comme fonction de g est strictement croissante et atteint son maximum si et seulement si $g = n$, qui est une caractérisation du cycle sur n sommets. Un simple calcul permet alors d'obtenir la borne. □

Proposition 27 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de maille finie g et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$\frac{\bar{l}}{g} \leq \frac{n^3 - 7n + 12}{9n(n-1)}.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est isomorphe au graphe de Soltés $PK_{n,n}$.

Preuve :

Cette proposition se démontre exactement comme la borne supérieure sur $\bar{l} - g$. □

3.2.5 Le degré maximum

Les observations suivantes sont obtenues et prouvées automatiquement par AGX 2 en utilisant la règle de l'intersection.

Observation 16 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de degré maximum Δ et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$-\frac{n-5}{3} \leq \Delta - \bar{l} \leq n-2.$$

La borne inférieure est atteinte si et seulement si G est un chemin, et la borne supérieure si et seulement si G est un graphe complet.

Observation 17 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de degré maximum Δ et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$\frac{6}{n+1} \leq \frac{\Delta}{\bar{l}} \leq n-1.$$

La borne inférieure est atteinte si et seulement si G est un chemin, et la borne supérieure si et seulement si G est un graphe complet.

La proposition suivante, générée automatiquement par AGX 2, comme conjecture a été prouvée à la main par la suite :

Proposition 28 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de degré maximum Δ et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$\Delta + \bar{l} \leq n+1-\frac{2}{n}.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est une étoile.

Preuve :

(i) Tout graphe maximisant $\Delta + \bar{l}$ est un arbre.

En effet, supposons le contraire ; alors G doit contenir un cycle dont au moins une

arête n'est pas incidente au sommet de degré maximum, disons u. La suppression de cette arête ne change pas le degré maximum Δ mais augmente la distance moyenne $\bar{l}$. Ce qui est une contradiction.

(ii) Sur l'ensemble des arbres d'ordre n et de degré maximum Δ, la distance moyenne $\bar{l}$ est maximum pour une comète.

Soit T un arbre et u un sommet de degré $d(u) = \Delta$. Soit v un sommet de degré $d(v) \geq 3$ (si un tel sommet existe) le plus éloigné de u, avec $v \neq u$. Soit r et s deux sommets pendants extrêmités de deux chemins de u vers r en passant par v et de u vers s en passant par v dans T. Notons P_1 (resp. P_2) le chemin reliant v et r (resp. v et s) dans T. Soit $l(P_1)$ (resp. $l(P_2)$) la longueur de P_1 (resp. P_2). Notons P l'unique chemin reliant les deux sommets r et s dans T de longueur $l(P_1) + l(P_2)$.

(ii-a) Considérons dans T la transformation suivante : déconnecter le chemin P_1 en v puis le relier au sommet s, pour ainsi avoir un chemin P' reliant v et r d'une longueur de $l(P') = l(P)$. Montrons que cette opération augmente la somme des distances (appelée aussi l'indice de Wiener [179]), et ainsi la distance moyenne entre toutes les paires de sommets distincts dans T. Notons $d(V_1)$ la somme de toutes les distances entre les paires de sommets de $V_1 \subset V$. Soit $V_1 = V(P) = V(P')$. Alors, à l'issue de la transformation décrite ci-dessus, $d(V_1)$ et $d(V \backslash V_1)$ ne changent pas. Notons $d(V_1, V \backslash V_1)$ la somme de toutes les distances entre un sommet de V_1 et un autre de $V \backslash V_1$ dans T. La transformation augmente $d(V_1, V \backslash V_1)$ de $|V \backslash V_1| \cdot l(P_1) > 0$ et $d(V) = d(V_1) + d(V \backslash V_1) + d(V_1, V \backslash V_1)$ croît.

Itérer cette transformation tant qu'il y a des sommets de degré au moins 3, autres que u, conduit à un arbre T' homéomorphe à une étoile.

(ii-b) Considérons la transformation suivante sur T'. Soit P_3 un plus long chemin de u vers un sommet pendant r dans T', et P_4 un plus court chemin d'un sommet pendant $s \neq r$ dans T' vers le voisin w de u le plus proche de r, avec $l(P_4) \geq 1$ (si une telle configuration existe, sinon T' est une comète). Déconnectons P_4 de w et connectons le à r, pour ainsi avoir un arbre T'' de même degré maximum que T'

et T. Démontrons que cette transformation augmente la somme des distances de T'. Soit P'' le chemin reliant r et s dans T' et P''' le chemin reliant r et s dans T''. Il est évident que $l(P'') = l(P''')$, et en notant V_2 l'ensemble des sommets de ces chemins, $d(V_2)$ et $d(V\backslash V_2)$ restent inchangés. Le changement dans $d(V_2, V\backslash V_2)$ est de $|V\backslash V_2| \cdot l(P_3) \cdot l(P_4) > 0$.

Itérer cette opération conduit à une comète T''.

(iii) Pour finir la preuve du résultat, considérons une troisième opération : soit r le sommet le plus éloigné de u dans la comète T'', et P_5 le chemin reliant u et r dans T'' avec $l(P_5) \geq 2$ (si un tel sommet n'existe pas alors T'' est une étoile). Soit w le voisin de r dans T'', et déconnectons l'arête rw, puis relions r à u. Le graphe ainsi obtenu est une comète T''' de degré maximum $\Delta + 1$. Soit P_6 le chemin reliant r et w dans T''', et V_3 l'ensemble de ses sommets. Il est évident que $l(P_5) = l(P_6)$ et que $d(V_3)$ et $d(V\backslash V_3)$ ne changent pas. Dans $d(V_3, V\backslash V_3)$, seules les distances entre r et les $\Delta - 1$ voisins pendants de u changent. Pour tout u' voisin pendant de u, la distance $d(r, u')$ décroit d'exactement $n - \Delta - 1$. Donc la distance moyenne (de T'' à T''') décroit de $\frac{2(\Delta-1)(n-\Delta-1)}{n(n-1)} < 1$. Alors, à l'issue de cette transformation, $\bar{l} + \Delta$ croît strictement.

Itérer cette transformation conduit à une étoile avec $\Delta = n - 1$ et $\bar{l} = 2 - \frac{2}{n}$, qui donnent la borne de l'énoncé. □

Proposition 29 : *Sur l'ensemble de tous graphes connexes G d'ordre $n \geq 3$, de degré maximum Δ et de distance moyenne $\bar{l}$, l'expression $\Delta \cdot \bar{l}$ atteint son maximum pour une étoile si $n \leq 11$, et pour une comète du même degré maximum Δ si $n \geq 12$. Les valeurs de Δ pour $12 \leq n \leq 63$ sont données dans le Tableau 3.4.*

Preuve :

Le résultat sur la structure des graphes extrêmes est démontré dans la preuve de la proposition 28. En raison de l'irrégularité, du moins apparente, dans les variations

Tableau 3.4 – Les values optimales de Δ.

n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Δ	7	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11	12	12
n	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
Δ	13	13	13	14	14	15	15	15	16	16	17	17	17
n	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Δ	18	18	19	19	20	20	20	21	21	22	22	23	23
n	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
Δ	23	24	24	25	25	25	26	26	27	27	28	28	28

de Δ en fonction de n, il nous est impossible de donner une formule algébrique à cette borne. Afin de montrer que chaque valeur de Δ, donnée dans le Tableau 3.4, est optimale pour l'ordre n associé, il suffit de montrer que la valeur maximise la fonction $f_n(\Delta) = \Delta \cdot \bar{l}(\Delta, n)$, où $\bar{l}(\Delta, n)$ est la distance moyenne d'une comète sur n (fixé) sommets et de degré maximum Δ, qui est donnée par

$$f_n(\Delta) = \Delta \cdot \frac{(n-\Delta+1)(n-\Delta+2)(n-4\Delta-3)+12(\Delta-1)(\Delta-2)}{3n(n-1)}.$$

Par exemple pour $n = 12$, on a

$$f_{12}(\Delta) = \frac{-4\Delta^4+123\Delta^3-989\Delta^2+1650\Delta}{396}.$$

En considérant $f_{12}(\Delta)$ comme fonction d'une variable entière Δ avec $2 \leq \Delta \leq 11$, elle atteint son maximum en $\Delta = 7$. □

Lors de l'étude des bornes inférieures sur $\Delta + \bar{l}$ et $\Delta \cdot \bar{l}$, le système AutoGraphiX 2 a donné des courbes et des graphes extrêmes qui ne sont pas suffisamment réguliers pour déduire des conjectures. Ce cas a fait l'objet d'une discussion dans la Section 2.4.4, la courbe et les graphes associés à $\Delta + \bar{l}$ sont représentés dans les figures 2.21 (p. 117) et 2.22 (p. 117) respectivement.

3.2.6 Le degré moyen

AutoGraphiX 2 génère les observations ci-dessous, en exploitant les informations suivantes, sur la distance moyenne $\overline{l}$ et le degré moyen $\overline{d}$, et disponibles dans sa base de connaissances :

$$1 \leq \overline{l} \leq \frac{n+1}{3};$$

la borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte si et seulement si le graphe est complet (resp. un chemin).

$$2 - \frac{2}{n} \leq \overline{d} \leq n - 1;$$

la borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte si et seulement si le graphe est un arbre (resp. complet).

Observation 18 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de degré moyen $\overline{d}$ et de distance moyenne $\overline{l}$,*

$$-n + 2 \leq \overline{l} - \overline{d} \leq \frac{n-5}{3} + \frac{2}{n}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte si et seulement si G est un graphe complet (resp. un chemin).

Observation 19 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de degré moyen $\overline{d}$ et de distance moyenne $\overline{l}$,*

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\overline{l}}{\overline{d}} \leq \frac{n^2+n}{6(n-1)}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte si et seulement si G est un graphe complet (resp. un chemin).

Les deux propositions suivantes sont obtenues sous forme de conjectures automatiquement avec le système AGX 2, et démontrées à la main par la suite :

Proposition 30 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de degré moyen $\overline{d}$ et de distance moyenne $\overline{l}$,*

$$4 - \frac{4}{n} \leq \overline{l} + \overline{d} \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte si et seulement si G est une étoile (resp. un graphe complet).

Preuve :

La borne inférieure :

Soit $\sigma_G(r, m)$ la somme de toutes les distances dans un graphe connexe G d'ordre fixé n, de taille m et de rayon r. Si $r = 1$, on a

$$\sigma_G(1, m) = m + 2(\frac{n(n-1)}{2} - m) = n(n-1) - m.$$

Donc

$$\overline{l} + \overline{d} = 2\frac{n(n-1) - m}{n(n-1)} + \frac{2m}{n} = 2 + \frac{m(2n-4)}{n(n-1)}.$$

Cette dernière expression est minimum si et seulement si $m = n-1$, c'est-à-dire, quand le graphe est une étoile.

Considérons maintenant le cas où $r > 1$, et notons m_k le nombre de paires de sommets de G à distance k. Ce qui donne

$$\sigma_G(r, m) = m + 2m_2 + 3m_3 + \cdots \geq m + 2(m_2 + m_3 + \cdots)$$

$$\sigma_G(r, m) \geq m + 2\left(\tfrac{n(n-1)}{2} - m\right) = \sigma_G(1, m).$$

Par conséquent

$$\overline{l} + \overline{d} = \frac{2\sigma_G(r, m)}{n(n-1)} + \frac{2m}{n} \geq \frac{2\sigma_G(1, m)}{n(n-1)} + \frac{2m}{n} \geq 4 - \frac{4}{n},$$

ce qui prouve la borne et caractérise les graphes extrêmes associés.

La borne supérieure :
D'après [168], pour tout graphe connexe G sur n sommets et m arêtes, on a,

$$\bar{l}(G) \leq \bar{l}(PK_{n,m})$$

où $PK_{n,m}$ est le graphe de Soltés sur n sommets et m arêtes. Donc

$$\bar{l}(G) + \bar{d}(G) \leq \bar{l}(PK_{n,m}) + \frac{2m}{n}.$$

Pour prouver la borne supérieure, il suffit de montrer que pour toute taille m,

$$\bar{l}(PK_{n,m}) + \frac{2m}{n} \leq \bar{l}(PK_{n,m+1}) + \frac{2(m+1)}{n}$$

Pour l'obtention de $PK_{n,m+1}$ à patir de $PK_{n,m}$, on ajoute une arête entre un sommet u de la clique de $PK_{n,m}$ et la plus proche des extrémité de son chemin (voir Figure 3.9). En ajoutant une telle arête à $PK_{n,m}$, la distance moyenne diminue d'au plus $2(n-$

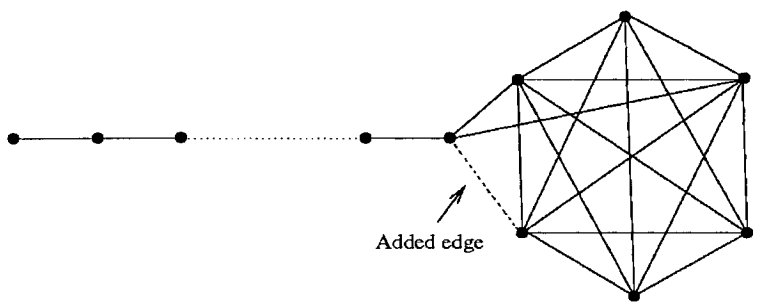


Figure 3.9 – Obtention de $PK_{n,m+1}$ à partir de $PK_{n,m}$.

$2)/(n(n-1))$, étant donné que seules les distances de u vers chacun des autres sommets qui diminuent d'au plus une unité, et, d'autre part, le degré moyen augmente d'exactement $2/n$, alors

$$\bar{l}(PK_{n,m+1}) - \bar{l}(PK_{n,m}) \geq -\frac{2(n-2)}{n(n-1)} + \frac{2}{n} = \frac{2}{n(n-1)} > 0.$$

En itérant cette opération, on obtient le graphe complet K_n, donc

$$\bar{l}(G) + \bar{d}(G) \leq \bar{l}(K_n) + \bar{d}(K_n) = n.$$

avec égalité si et seulement si $G \equiv K_n$. □

Proposition 31 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de degré moyen $\bar{d}$ et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$\bar{l} \cdot \bar{d} \geq 4\left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est une étoile.

Preuve :

Comme on l'a vu dans la preuve de la Proposition 30, pour un ordre n et une taille m donnés, la somme de toutes les distances dans un graphe est minimum pour un rayon $r = 1$, donc

$$\bar{l} \cdot \bar{d} \geq 2\frac{n(n-1) - m}{n(n-1)} \cdot \frac{2m}{n} = \frac{4n(n-1)m - 4m^2}{n(n-1)}.$$

Cette dernière expression est minimum si et seulement si $m = n-1$, c'est-à-dire, pour une étoile. □

Pour la borne supérieure sur $\bar{l} \cdot \bar{d}$ le système ne donne pas de formule algébrique, étant donné que la relation n'est pas affine. D'autre part, l'irrégularité dans les variations des paramètres des graphes extrêmes ne nous permet pas de déduire une formulation algébrique malgré le fait que la famille est bien distinguée. On se contente de donner une proposition sur la structure des graphes extrêmes, dont certains sont représentés dans la Figure 3.10.

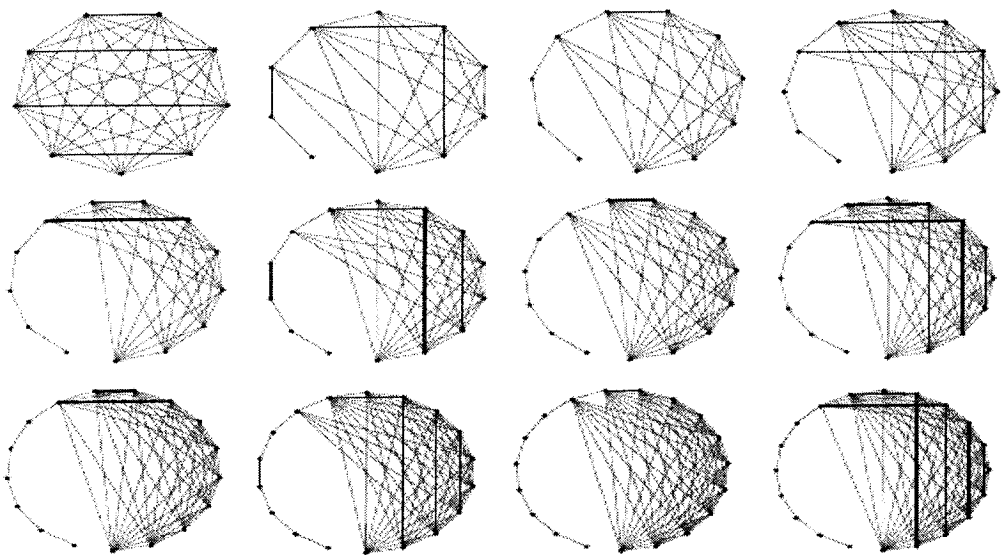


Figure 3.10 – Graphes obtenus par AGX 2 lors de la maximisation de $\overline{l} \cdot \overline{d}$.

Proposition 32 : *Sur l'ensemble de tous les graphes connexes sur* $n \geq 3$ *sommets de degré moyen* $\overline{d}$ *et de distance moyenne* $\overline{l}$ *le produit* $\overline{l} \cdot \overline{d}$ *est maximum pour un graphe complet si* $n \leq 9$ *et pour un graphe de Soltés si* $n \geq 10$.

Preuve :

Cette proposition est une conséquence immédiate du théorème de Soltés [168]. □

3.2.7 Le degré minimum

Dans ce qui suit on donne les résultats obtenus lors de la comparaison entre la distance moyenne $\overline{l}$ et le degré minimum δ. Tout d'abord, les résultats obtenus et prouvés auotmatiquement sont donnés sous forme d'observations. La preuve automatique est basée sur la règle de l'intersection.

Observation 20 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de degré minimum δ et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$-n+2 \leq \bar{l} - \delta \leq \frac{n-2}{3}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte si et seulement si G est un graphe complet (resp. un chemin).

Observation 21 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de degré minimum δ et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\bar{l}}{\delta} \leq \frac{n+1}{3}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte si et seulement si G est un graphe complet (resp. un chemin).

Les conjectures obtenues automatiquement lors de l'étude des bornes inférieures et supérieures sur la somme et le produit de $\bar{l}$ et δ sont prouvées dans les propositions suivantes :

Proposition 33 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de degré minimum δ et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$\frac{2n^2-4}{n(n-1)} \leq \bar{l} + \delta \leq n.$$

La borne inférieure est atteinte si et seulement si G est isomorphe au graphe de Soltés $PK_{n,m}$, avec $m = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 = \frac{n^2-3n+4}{2}$. La borne supérieure est atteinte si et seulement si G est un graphe complet.

Preuve :

La borne supérieure est une conséquence directe de la Proposition 30.

Pour la borne inférieure, on associe à tout graphe d'ordre fixé n, de taille m, de diamètre D et de degré minimum δ, la fonction suivante

$$F_{G,n}(m, \delta, D) = \bar{l} + \delta.$$

• Si $D = 1$, nécessairement $m = n(n-1)/2$, $\delta = n-1$ et $F_{G,n}(m, \delta, 1) = n$. L'unique graphe avec ces valeurs des paramètres est le graphe complet, et on a la borne supérieure.

• Si $D \geq 2$:

$$F_{G,n}(m, \delta, D) = 2\frac{m+2m_2+3m_3+\cdots+Dm_D}{n(n-1)} + \delta \geq 2\frac{m+2(m_2+m_3+\cdots+m_D)}{n(n-1)} + \delta,$$

$$F_{G,n}(m, \delta, D) \geq 2\frac{m+2(\frac{n(n-1)}{2}-m)}{n(n-1)} + \delta = F_{G,n}(m, \delta, 2).$$

La fonction $F_{G,n}(m, \delta, 2)$ est décroissante en m, donc atteint son minimum pour la plus grande valeur possible de m, qui est $m = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \delta$. Ainsi, on a

$$F_{G,n}(m, \delta, 2) \geq F_{G,n}(\frac{(n-1)(n-2)}{2} + \delta, \delta, 2) = \frac{(1+\delta)n^2 + (1-\delta)n - 2(1+\delta)}{n(n-1)}.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$F_{G,n}(\frac{(n-1)(n-2)}{2} + \delta, \delta, 2) \geq F_{G,n}(\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1, 1, 2) = \frac{2n^2-4}{n(n-1)}.$$

et que l'unique graphe d'ordre n, de taille $m = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$, de diamètre $D = 2$ et de degré minimum $\delta = 1$ est le graphe de Soltés $PK_{n,m}$, avec $m = \frac{n^2-3n+4}{2}$. □

Avant d'énoncer la proposition suivante, il est utile de rappeler le théorème suivant, dû à Beezer *et al.* [16] :

Théorème 17 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de degré minimum δ et de distance moyenne $\bar{l}$, on a*

$$\bar{l} \leq \frac{\left\lfloor \frac{(n+1)n(n-1)-2m}{\delta+1} \right\rfloor}{n(n-1)}.$$

Un des corollaires de ce théorème est la conjecture 127 de Graffiti [81], $\bar{l}\delta \leq n$, qui est restée ouverte pendant plus d'une décennie et qui a fait l'objet de quelques publications. Cette conjecture a été renforcée par AutoGraphiX 2 en la borne supérieure de la proposition suivante :

Proposition 34 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets, de degré minimum δ et de distance moyenne $\bar{l}$,*

$$\frac{n^2+n-4}{n(n-1)} \leq \bar{l} \cdot \delta \leq n-1.$$

La borne inférieure est atteinte si et seulement si G est isomorphe au graphe de Soltés $PK_{n,m}$, avec $m = \frac{n^2-3n+4}{2}$. La borne supérieure est atteinte si et seulement si G est un graphe complet.

Preuve :

La borne inférieure se démontre exactement comme celle de la Proposition 33.

Pour la borne supérieure, d'après le Théorème 17 ci-dessus, on a

$$\bar{l} \leq \frac{(n+1)n(n-1)-2m}{(\delta+1)n(n-1)} = \frac{n+1}{\delta+1} - \frac{2m}{n} \cdot \frac{1}{(\delta+1)(n-1)}.$$

En remplaçant $\frac{2m}{n}$ par $\bar{d}$, multipliant par δ, et utilisant le fait que $\delta \leq \bar{d}$, on obtient

$$\bar{l} \cdot \delta \leq (n+1-\frac{\bar{d}}{n-1})\frac{\delta}{\delta+1} \leq (n+1-\frac{\delta}{n-1})\frac{\delta}{\delta+1}.$$

Cette dernière expression, considérée comme fonction de δ, est maximum si et seulement si $\delta = n - 1$, c'est-à-dire que G est un graphe compplet. □

La borne supérieure de la proposition précédente a été aussi démontrée (indépendamment) par Smith [167], co-auteur dans [16] (voir Théorème 17 ci-dessus), comme conjecture d'AutoGraphiX 2.

3.3 L'Index

Cette section porte sur la comparaison systématique de l'index λ_1 (connu aussi sous le nom de rayon spectral d'un graphe) avec un certain nombre d'invariants. L'index présente une difficulté particulière, étant donné que son évaluation est difficile, voir même impossible, pour beaucoup de structures de graphes extrêmes, même s'il s'agit de structures bien identifiées. Cette difficulté fait que la plupart des conjectures obtenues à l'aide du système AutoGraphiX 2, et encore ouvertes, sont seulement structurales.

Rappelons que pour l'index λ_1 et sur l'ensemble des graphe connexes d'ordre $n \geq 2$ on a [59] :

$$2cos\frac{\pi}{n+1} \leq \lambda_1 \leq n-1.$$

La borne inférieure est atteinte si et seulement si le graphe est un chemin, et la borne supérieure si et seulement si le graphe est complet.

Les invariants comparés à l'index dans cette section sont dans l'ordre, le nombre chromatique, le degré maximum, minimum et moyen, le rayon, la distance moyenne et l'indice de Randić.

3.3.1 Le nombre chromatique

Les résultats prouvés automatiquement dans le cadre de la comparaison de l'index λ_1 avec le nombre chromatique sont les suivants :

Observation 22 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets de nombre chromatique χ et d'index λ_1,*

$$2 + 2cos\frac{\pi}{n+1} \leq \lambda_1 + \chi \leq 2n-1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte si et seulement si G est un chemin (resp. un graphe complet).

Observation 23 : *Pour tout graphe connexe G sur $n \geq 3$ sommets de nombre chromatique χ et d'index λ_1,*

$$4cos\frac{\pi}{n+1} \leq \lambda_1 \cdot \chi \leq n(n-1).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte si et seulement si G est un chemin (resp. un graphe complet).

Parmi les conjectures obtenues ici, on retrouve le théorème de Wilf [180] qui est le suivant :

Théorème 18 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets de nombre chromatique χ et d'index λ_1,*

$$\chi - \lambda_1 \leq 1.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est un graphe complet ou un cycle impair.

La proposition suivante a été obtenue en premier lieu automatiquement comme conjecture structurale, puis la formulation algébrique de la borne a été obtenue en exploitant les propriétés des graphes extrêmes. Ces derniers sont des graphes bipartis complets équilibrés pour lesquels $\lambda_1 = \sqrt{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Plus généralement, pour un graphe biparti complet $K_{p,q}$, on a $\lambda_1 = \sqrt{pq}$.

Avant d'énoncer la proposition, il est nécessaire de rappeler quelques éléments de calcul de l'index λ_1 dans certains cas particuliers.

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Considérons une partition $V = V_1 \cup V_2 \cdots \cup V_k$

de l'ensemble des sommets de G, telle que pour chaque sommet v d'une partie quelconque V_i $(i = 1, \cdots k)$ et pour tout $j \in \{1, \cdots k\}$, il existe exactement d_{ij} arêtes entre v et d_{ij} sommets de V_j. La matrice $M = (d_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$ définit un multi-graphe G_M dont la matrice d'adjacence est M. Le multi-graphe G_M est appelé *diviseur* de G. Parmi les relations entre un graphe G et son diviseur G_M, la plus importante pour nous est la propriété selon laquelle $\lambda_1(G) = \lambda_1(G_M)$. Un exemple de graphe et de son diviseur est représenté dans la Figure 3.11. La matrice M associée est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour plus de détails sur les propriétés du diviseur d'un graphe, et la théorie spectrale en général, voir Cvetković *et al.* [59].

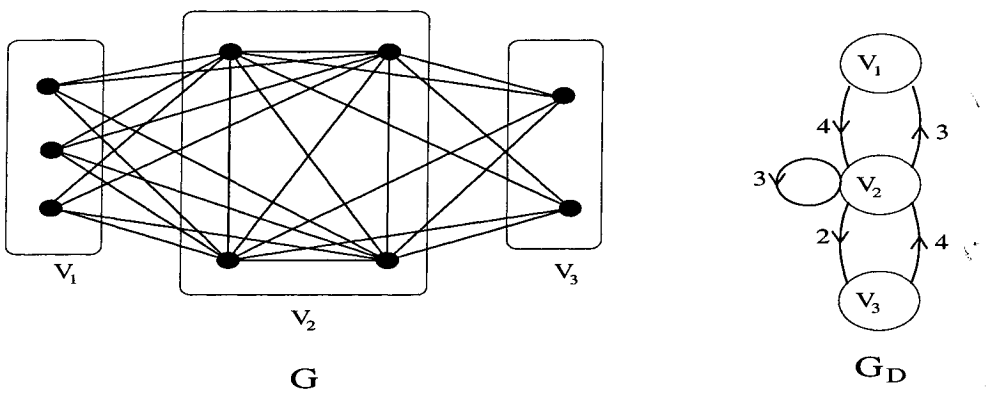


Figure 3.11 – Le diviseur d'un graphe.

Proposition 35 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets de nombre chromatique χ et d'index λ_1,*

$$\frac{\lambda_1}{\chi} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est un graphe biparti complet équilibré $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

Preuve :

Soit G un graphe connexe d'ordre n, d'index λ_1 et de nombre chromatique χ. On sait qu'ajouter une arête à un graphe augmente strictement l'index λ_1, donc pour χ donné le maximum de λ_1/χ est atteint pour un graphe χ-parti complet.

• Si $\chi = 2$, soit a et b les nombre de sommets dans les stables du graphe biparti G qui maximise λ_1/χ. Alors d'après [118] $\lambda_1 = \sqrt{ab}$ qui est maximum si et seulement si $a = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $b = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Donc pour un graphe biparti

$$\frac{\lambda_1}{\chi} = \frac{\lambda_1}{2} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil},$$

avec égalité si et seulement si le graphe est biparti complet équilibré.

Pour prouver le résultat, on doit démontrer que

$$\frac{\lambda_1}{\chi} < \frac{1}{2}\sqrt{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil}$$

pour tout graphe χ-parti complet avec $\chi \geq 3$.

• Si $\chi = 3$, soit a, b et c les cardinalités respectives des stables de G. En considérant le diviseur G_M de G [59], l'index λ_1 est la plus grande valeur propre de la matrice d'adjacence de G_M suivante

$$M = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ a & 0 & c \\ a & b & 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire, la plus grande racine du polynôme caractéristique de M, donc la plus grande solution de l'équation

$$P(t) = t^3 - (ab + ac + bc)t - 2abc = 0.$$

Pour la dérivée du polynôme ci-dessus, on a

$$P'(t) = 3t^2 - (ab + ac + bc) = 0 \iff \begin{cases} t = t_1 = \sqrt{\frac{ab+ac+bc}{3}}, \\ t = t_2 = -\sqrt{\frac{ab+ac+bc}{3}}. \end{cases}$$

Les solutions t_1 et t_2 correspondent à un minimum et un maximum locaux de $P(t)$ respectivement.

Sachant que $t_1 = \sqrt{(ab+ac+bc)/3}$ est un minimum local, que $P(t_1) < 0$ et que $P(t)$ est un polynôme du troisième degré dont le coefficient de la plus grande puissance est positif, nécessairement $\lambda_1 > t_1$ et on a $t > \lambda_1$ si et seulement si $P(t) > 0$ et $t > t_1$. En posant $s = \frac{3}{4}\sqrt{n^2-1}$, on a

$$\begin{aligned} P(s) &= \left(\frac{3\sqrt{n^2-1}}{4}\right)^3 - (ab+ac+bc)(\frac{3}{4}\sqrt{n^2-1}) - 2abc \\ &\geq \min_{\{a,b,c\geq 0\}} \left\{ \left(\frac{3}{4}\sqrt{n^2-1}\right)^3 - (ab+ac+bc)\left(\frac{3}{4}\sqrt{n^2-1}\right) - 2abc \right\}. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier, en utilisant les conditions suffisantes d'optimalité [143] d'un problème d'optimisation sous contraintes, que sous les conditions $a+b+c = n$ et $a, b, c \geq 0$, on a

$$\max ab+ac+bc = \frac{n^2}{3} \quad \text{et} \quad \max abc = \left(\frac{n}{3}\right)^3.$$

Alors

$$\begin{aligned} P\left(\frac{3}{4}\sqrt{n^2-1}\right) &\geq \left(\frac{3}{4}\sqrt{n^2-1}\right)^3 - \frac{n^2}{3}\frac{3\sqrt{n^2-1}}{4} - 2\left(\frac{n}{3}\right)^3 \\ &\geq \frac{11\sqrt{n^2-1}n^2 - 27\sqrt{n^2-1}}{64} - 2\frac{n^2}{27}. \end{aligned}$$

Cette dernière expression est positive pour tout $n \geq 3$. D'autre part, on a

$$\sqrt{\frac{ab+ac+bc}{3}} \leq \frac{n}{3} < \frac{3\sqrt{n^2-1}}{4}.$$

Ainsi on a

$$P\left(\frac{3\sqrt{n^2-1}}{4}\right) > 0 \quad \text{et} \quad \frac{3\sqrt{n^2-1}}{4} > \sqrt{\frac{ab+ac+bc}{3}},$$

c'est-à-dire,

$$\lambda_1 < \frac{3\sqrt{n^2-1}}{4} \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_1}{\chi} = \frac{\lambda_1}{3} < \frac{\sqrt{n^2-1}}{4} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \cdot \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}.$$

• Si $\chi \geq 4$, d'une part, comme $\lambda_1 \leq n-1$, on a

$$\frac{\lambda_1}{\chi} \leq \frac{n-1}{4};$$

et d'autre part, on a

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil > \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} = \frac{(n-1)^2}{4},$$

donc

$$\sqrt{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil} > \frac{n-1}{2},$$

et par conséquent

$$\frac{\lambda_1}{\chi} < \frac{1}{2}\sqrt{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$

En conclusion, dans tous les cas on a

$$\frac{\lambda_1}{\chi} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil},$$

avec égalité si et seulement si G est un graphe biparti complet équilibré. □

Conjecture 52 : *Sur l'ensemble des graphes connexes d'ordre $n \geq 4$, de nombre chromatique χ et d'index λ_1, la valeur de λ_1/χ est minimum pour un cycle si n est impair et pour un graphe composé d'un cycle sur $n-1$ sommets et d'une arête pendante si n est pair.*

Cette conjecture est vraie pour n impair. Supposons que n est impair.

• Si $\chi = 2$, λ_1 est minimum pour un chemin, donc $\lambda_1/\chi \geq cos(\frac{\pi}{n+1}) > 2/3$, pour tout $n \geq 3$.

• Si $\chi = 3$, alors le graphe contient nécessairement un cycle impair (sinon il serait

biparti). Du fait que λ_1 décroît avec la suppression d'arêtes d'un graphe, il atteint son minimum pour un graphe unicyclique, dont l'unique cycle est impair. Aussi (Théorème 22, page 190), on sait que $\lambda_1 \geq \bar{d}$ (pour un graphe unicyclique $\bar{d} = 2$) avec égalité si et seulement si le graphe est régulier, c'est-à-dire, un cycle impair.
Ainsi, $\lambda_1/\chi \geq 2/3$, avec égalité si et seulement si le graphe est un cycle.
• Si $\chi \geq 4$, on sait que [180] $\lambda_1 \geq \chi - 1$. Donc

$$\lambda_1/\chi \geq 1 - 1/\chi \geq 3/4 > 2/3.$$

Ce qui prouve que la conjecture est vraie pour n impair.
Pour le cas où n est pair, la conjecture reste ouverte.

3.3.2 Le degré maximum

Les résultats prouvés automatiquement lors de la comparaison entre l'index λ_1 et le degré maximum Δ sont :

Observation 24 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets de degré maximum Δ et d'index λ_1,*

$$2 + 2cos\frac{\pi}{n+1} \leq \lambda_1 + \Delta \leq 2n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte si et seulement si G est un chemin (resp. un graphe complet).

Observation 25 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets de degré maximum Δ et d'index λ_1,*

$$4cos\frac{\pi}{n+1} \leq \lambda_1 \cdot \Delta \leq (n-1)^2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte si et seulement si G est un chemin (resp. un graphe complet).

Toujours lors de la comparaison de λ_1 et Δ, on a retrouvé les résultats connus [59] suivants :

Théorème 19 [59] : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets de degré maximum Δ et d'index λ_1,*

$$\lambda_1 - \Delta \leq 0 \qquad \textit{et (ce qui est équivalent)} \qquad \frac{\lambda_1}{\Delta} \leq 1.$$

Les deux bornes sont atteintes si et seulement si G est régulier.

Avant d'énoncer et prouver les conjectures suivantes, rappelons un théorème dont on aura besoin pour les preuves :

Théorème 20 [51] : *Pour tout arbre sur $n \geq 3$ sommets de degré maximum Δ et d'index λ_1,*

$$\lambda_1 \geq \sqrt{\Delta},$$

avec égalité si et seulement si G est une étoile.

Proposition 36 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets de degré maximum Δ et d'index λ_1,*

$$\lambda_1 - \Delta \geq \sqrt{n-1} - n + 1.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est une étoile.

Preuve :

Soit G un graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets d'index λ_1 et de degré maximum Δ. D'une part, on sait que [51] la valeur de l'index λ_1 décroit avec la suppression d'une ou

plusieurs arêtes d'un graphe. D'autre part, tout graphe connexe de degré maximum Δ contient un arbre partiel de même degré maximum Δ. Alors, la borne inférieure sur $\lambda_1 - \Delta$ est nécessairement atteinte pour un arbre.
En utilisant le Théorème 20, on a

$$\lambda_1 - \Delta \geq \sqrt{\Delta} - \Delta = f(\Delta).$$

La fonction $f(\Delta)$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[2, n-1]$, et donc atteint son minimum pour $\Delta = n - 1$, qui correspond à une étoile. □

Proposition 37 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets de degré maximum Δ et d'index λ_1,*

$$\frac{\lambda_1}{\Delta} \geq \frac{1}{\sqrt{n-1}}.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est une étoile.

Preuve :
Cette proposition se démontre exactement comme la précédente. La seule différence est que la fonction $f(\Delta)$ devient $f(\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\Delta}$. □

3.3.3 Le degré minimum

Les résultats prouvés automatiquement lors de la comparaison entre l'index λ_1 et le degré minimum δ sont :

Observation 26 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets de degré minimum δ et d'index λ_1,*

$$1 + 2cos\frac{\pi}{n+1} \leq \lambda_1 + \delta \leq 2n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte si et seulement si G est un chemin (resp. un graphe complet).

Observation 27 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets de degré minimum δ et d'index λ_1,*

$$2cos\frac{\pi}{n+1} \leq \lambda_1 \cdot \delta \leq (n-1)^2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte si et seulement si G est un chemin (resp. un graphe complet).

Toujours lors de la comparaison de λ_1 et δ, on a retrouvé les résultats connus [59] suivants :

Théorème 21 [59] : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets de degré minimum δ et d'index λ_1,*

$$\lambda_1 - \delta \geq 0 \qquad \textit{et (ce qui est équivalent)} \qquad \frac{\lambda_1}{\delta} \geq 1.$$

Les deux bornes sont atteintes si et seulement si G est régulier.

Les deux propositions ci-dessous ont été trouvées d'abord comme des conjectures structurales, à l'aide du système AutoGraphiX 2, puis en exploitant les propriétés spectrales des graphes extrêmes (qui présentaient une régularité évidente), on a trouvé des bornes comportant un terme donné implicitement uniquement. Ceci est dû à la difficulté d'évaluer avec exactitude l'index λ_1, en fonction de n, pour la famille des graphes obtenus.

Proposition 38 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets de degré minimum δ et d'index λ_1,*

$$\lambda_1 - \delta \leq n - 3 + t,$$

où t vérifie la double inégalité $0 < t < 1$ et l'équation

$$t^3 + (2n-3)t^2 + (n^2 - 3n + 1)t - 1 = 0.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est composé d'une clique sur $n-1$ sommets et d'une arête pendante.

Preuve :

Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, d'index λ_1 et de degré minimum δ.

Considérons le graphe H_δ sur n sommets composé d'une clique sur $n-1$ sommets, le $n^{\text{ième}}$ sommet étant relié à δ sommets de la clique. Alors $\lambda_1 \leq \lambda_1(H_\delta)$, c'est-à-dire, sur l'ensemble des graphes connexes d'ordre n et de degré minimum δ, λ_1 est maximum pour H_δ.

Démontrons, maintenant, que $\lambda_1(H_\delta) - \delta$ est une fonction décroissante en δ. Rowlinson [162] a prouvé que

$$\lambda_1(H_\delta) = n - 2 + t_\delta$$

où $0 < t_\delta < 1$ et $t^3 + (2n-3)t^2 + (n^2 - 3n + 2 - \delta)t - \delta^2 = 0$. Alors

$$\begin{aligned}(\lambda_1(H_\delta) - \delta) - (\lambda_1(H_{\delta+1}) - (\delta+1)) &= (n - 2 + t_\delta - \delta) - (n - 3 + t_{\delta+1} - \delta) \\ &= 1 + (t_\delta - t_{\delta+1}) > 0,\end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\lambda_1(H_\delta) - \delta > \lambda_1(H_{\delta+1}) - (\delta+1).$$

Ainsi la borne est prouvée, et elle est atteinte si et seulement si G est isomorphe au graphe H_1. □

Proposition 39 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets de degré minimum δ et d'index λ_1,*

$$\frac{\lambda_1}{\delta} \leq n - 2 + t,$$

où t vérifie la double inégalité $0 < t < 1$ et l'équation

$$t^3 + (2n-3)t^2 + (n^2 - 3n + 1)t - 1 = 0.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est composé d'une clique sur $n-1$ sommets et d'une arête pendante.

Preuve :

En reprenant les notations utilisées dans la preuve de la Proposition 38, on a à démontrer que

$$\frac{\lambda_1(H_\delta)}{\delta} > \frac{\lambda_1(H_{\delta+1})}{\delta+1}$$

pour tout $\delta \leq n-2$. On a

$$\frac{\lambda_1(H_\delta)}{\delta} - \frac{\lambda_1(H_{\delta+1})}{\delta+1} = \frac{n-2+\delta(t_\delta - t_{\delta+1}) + t_\delta}{\delta(\delta+1)} > 0.$$

Cette dernière inégalité est vraie car $|t_\delta - t_{\delta+1}| < 1$, qui entraîne la double inégalité $2-n < \delta(t_\delta - t_{\delta+1}) < n-2$. □

3.3.4 Le degré moyen

Les résultats prouvés automatiquement, et basés sur la règle de l'intersection des familles de graphes extrêmes, lors de la comparaison entre l'index λ_1 et le degré moyen $\overline{d}$ sont :

Observation 28 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets de degré moyen $\overline{d}$ et d'index λ_1,*

$$2 - \frac{2}{n} + 2cos\frac{\pi}{n+1} \leq \lambda_1 + \overline{d} \leq 2n-2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte si et seulement si G est un chemin (resp. un graphe complet).

Observation 29 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets de degré moyen $\overline{d}$ et d'index λ_1,*

$$\left(4 - \frac{4}{n}\right) cos\frac{\pi}{n+1} \leq \lambda_1 \cdot \overline{d} \leq (n-1)^2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte si et seulement si G est un chemin (resp. un graphe complet).

Toujours lors de la comparaison de λ_1 et $\overline{d}$, on a reproduit les résultats connus [59] suivants :

Théorème 22 [59] **:** *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets de degré moyen $\overline{d}$ et d'index λ_1,*

$$\lambda_1 - \overline{d} \geq 0 \qquad \textit{et (ce qui est équivalent)} \qquad \frac{\lambda_1}{\overline{d}} \geq 1.$$

Les deux bornes sont atteintes si et seulement si G est régulier.

La proposition suivante est une conjecture obtenue automatiquement par AutoGraphiX, puis prouvée à la main.

Proposition 40 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets de degré moyen $\overline{d}$ et d'index λ_1,*

$$\frac{\lambda_1}{\overline{d}} \leq \frac{n}{2\sqrt{n-1}}.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est une étoile.

Preuve :

Dans [119], Hong a montré que

$$\lambda_1 \leq \sqrt{2m - n + 1}.$$

Une simple substitution nous donne

$$\frac{\lambda_1}{\overline{d}} = \frac{n\lambda_1}{2m} \leq \frac{n\sqrt{2m-n+1}}{2m}.$$

En considérant cette dernière expression comme une fonction en m, qu'on va noter $f(m)$, pour $m > n-1$, on a

$$f'(m) = \frac{n(n-1-m)}{2m^2\sqrt{2m-n+1}} < 0.$$

Donc

$$\max_{m \geq n-1} f(m) = f(n-1) = \frac{n}{2\sqrt{n-1}},$$

et ce maximum est atteint si et seulement si $m = n-1$. Finalement, il est facile de voir que

$$\frac{\lambda_1}{\overline{d}} = \lambda_1 \frac{n}{2(n-1)} = \frac{n}{2\sqrt{n-1}}$$

si et seulement si

$$\lambda_1 = \sqrt{n-1},$$

c'est-à-dire, si et seulement si G est une étoile. □

3.3.5 Le rayon

Les résultats simples et prouvés automatiquement, en utilisant la méthode basée sur l'intersection des familles de graphes extrêmes, dans le cadre de la comparaison entre le rayon r et l'index λ_1 d'un graphe, sont les suivants :

Observation 30 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets de rayon r et d'index λ_1,*

$$2\cos\frac{\pi}{n+1} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \lambda_1 - r \leq n-2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte si et seulement si G est un chemin (resp. un graphe complet).

Observation 31 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets de rayon r et d'index λ_1,*

$$\frac{2\cos\frac{\pi}{n+1}}{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor} \leq \frac{\lambda_1}{r} \leq n-1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte si et seulement si G est un chemin (resp. un graphe complet).

La proposition suivante est obtenue automatiquement comme conjecture par AutoGraphiX.

Proposition 41 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets de rayon r et d'index λ_1,*

$$\lambda_1 + r \leq n.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est un graphe complet et, si n est pair, pour le complémentaire d'un couplage parfait.

Cette proposition est une conséquence directe du fait que [59] $\lambda_1 \leq \Delta$, et du lemme ci-dessous (qui est aussi une conjecture d'AutoGraphiX 2, obtenue lors de la comparaison du rayon r et du degré maximum Δ).

Lemme 1 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets de rayon r et de degré maximum Δ,*

$$\Delta + r \leq n.$$

La borne est atteinte pour plusieurs familles de graphes.

Preuve :

Soit G un graphe connexe d'ordre n, de degré maximum Δ et de rayon r. Dans la

preuve on utilise un résultat dû à Brigham et Dutton [31], qui est

$$r \leq \frac{n - \Delta + 2}{2}$$

c'est-à-dire,

$$\Delta + 2r \leq n + 2.$$

- Si $r = 1$, nécessairement $\Delta = n - 1$, donc

$$\Delta + r = n.$$

- Si $r = 2$, on a

$$\Delta + r + 2 = \Delta + 2r \leq n + 2.$$

Donc

$$\Delta + r \leq n,$$

avec égalité si et seulement si $\Delta = n - 2$.

- Si $r \geq 3$, on a

$$\Delta + r + 3 \leq \Delta + 2r \leq n + 2.$$

Ce qui nous donne

$$\Delta + r < n.$$

Ainsi la borne est prouvée, et l'égalité est atteinte si et seulement si $\Delta = n - 1$ ou $\Delta = n - 2$. □

3.3.6 La distance moyenne

Les résultats simples et prouvés automatiquement, en utilisant la méthode basée sur l'intersection des familles de graphes extrêmes, dans le cadre de la comparaison entre la distance moyenne $\bar{l}$ et l'index λ_1 d'un graphe, sont les suivants :

Observation 32 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets de distance moyenne $\bar{l}$ et d'index λ_1,*

$$2\cos\frac{\pi}{n+1} - \frac{n+1}{3} \leq \lambda_1 - \bar{l} \leq n-2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte si et seulement si G est un chemin (resp. un graphe complet).

Observation 33 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets de distance moyenne $\bar{l}$ et d'index λ_1,*

$$\frac{6\cos\frac{\pi}{n+1}}{n+1} \leq \frac{\lambda_1}{\bar{l}} \leq n-1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte si et seulement si G est un chemin (resp. un graphe complet).

Proposition 42 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets de distance moyenne $\bar{l}$ et d'index λ_1,*

$$\lambda_1 + \bar{l} \leq n.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est un graphe complet.

Cette proposition a été prouvée par Stevanović [169], comme conjecture d'AutoGraphiX 2, de façon directe une première fois, puis comme corollaire d'un autre résultat plus fort (prouvé aussi par Stevanović [169]), obtenu aussi comme conjecture par AutoGraphiX, et qui est

Proposition 43 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets d'éloignement ρ et d'index λ_1,*

$$\lambda_1 + \rho \leq n.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est un graphe complet.

Remarque 1 :

Il est connu [59] que $\delta \leq \overline{d} \leq \lambda_1 \leq \Delta$ [59]. On donne ici quelques résultats semblables aux deux propositions précédentes :

- $\delta + \overline{l} \leq n$, avec égalité si et seulement si le graphe est complet (voir Proposition 33 p. 174).
- $\overline{d} + \overline{l} \leq n$, avec égalité si et seulement si le graphe est complet (voir Proposition 30 p. 170).
- $\Delta + \overline{l} \leq n + 1 - \frac{2}{n}$, avec égalité si et seulement si le graphe est une étoile (voir Proposition 28 p. 165).

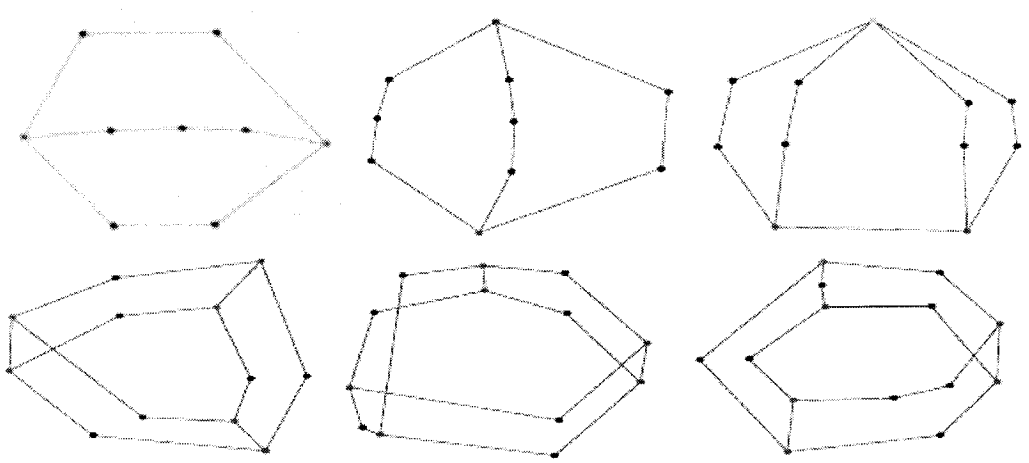


Figure 3.12 – Les graphes "minimisant" $\lambda_1 + \overline{l}$ for $n = 9, \cdots 14$.

Remarque 2 :

Pour la borne inférieure sur $\lambda_1 + \overline{l}$, le système AutoGraphiX 2 donne des graphes dont la structure n'est pas assez régulière pour pouvoir en déduire une conjecture. Quelques uns des graphes obtenus sont donnés dans la Figure 3.12, et la courbe correspondante est représentée dans la Figure 3.13.

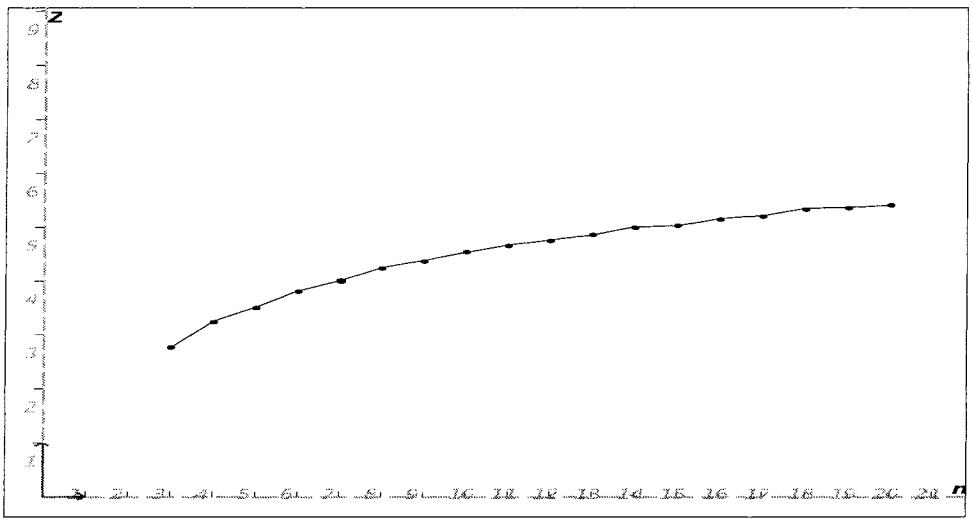


Figure 3.13 – La courbe de la borne inférieure sur $\lambda_1 + \bar{l}$.

3.3.7 L'indice de Randić

Les résultats prouvés automatiquement dans le cadre de la comparaison de l'index et de l'indice de Randić sont les suivants :

Observation 34 *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets d'indice de Randić Ra et d'index λ_1,*

$$\lambda_1 + Ra \leq \frac{3n-2}{2}.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est un graphe complet.

Observation 35 *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets d'indice de Randić Ra et d'index λ_1,*

$$\lambda_1 \cdot Ra \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est un graphe complet.

Lors de la comparaison systématique entre λ_1 et Ra, les conjectures obtenues et qu'on a pu prouver sont données ci-dessous, et celles encore ouvertes sont données en annexe.

Proposition 44 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets d'indice de Randić Ra et d'index λ_1,*

$$\lambda_1 - Ra \geq \begin{cases} 2cos(\frac{\pi}{n+1}) - \frac{n}{2} + \frac{3}{2} - \sqrt{2} & si\ n \leq 9, \\ 2 - \frac{n}{2} & si\ n \geq 10. \end{cases}$$

La borne est atteinte si et seulement si G est un chemin pour $n \leq 9$ et un cycle pour $n \geq 10$.

Preuve :

Il connu que, sur l'ensemble des arbres l'indice de Randić [181] est maximum pour les chemins, et l'index est minimum pour les chemins aussi. Donc pour les arbres on a

$$\lambda_1 - Ra \geq 2cos(\frac{\pi}{n+1}) - \frac{n}{2} + \frac{3}{2} - \sqrt{2}. \tag{3.6}$$

D'autre part, si $m \geq n$ le cycle est le graphe (non unique) qui maximise l'indice de Randić et qui minimise l'index. Donc sous cette condition

$$\lambda_1 - Ra \geq 2 - \frac{n}{2}. \tag{3.7}$$

Une comparaison entre les deux bornes permet de conclure. □

Proposition 45 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets d'indice de Randić Ra et d'index λ_1,*

$$\frac{\lambda_1}{Ra} \geq \begin{cases} \frac{cos\frac{\pi}{n+1}}{n-3+\sqrt{2}} & si\ n \leq 26, \\ \frac{4}{n} & si\ n \geq 27. \end{cases}$$

La borne est atteinte si et seulement si G est un chemin pour $n \leq 26$ et un cycle pour $n \geq 27$.

Preuve :
Cette proposition se démontre exactement comme la précédente, en considérant le rapport des deux invariants au lieu de leur différence. □

Avant d'énoncer la proposition suivante, rappelons le théorème suivant, dû à Favaron *et al.* [85].

Théorème 23 : *Pour tout graphe G de taille m, d'indice de Randić Ra et d'index λ_1, on a*

$$\lambda_1 \geq \frac{m}{Ra}.$$

Proposition 46 : *Pour tout graphe connexe sur $n \geq 3$ sommets d'indice de Randić Ra et d'index λ_1,*

$$\lambda_1 \cdot Ra \geq n - 1.$$

Cette borne est la meilleure possible et est atteinte pour toute valeur de n.

Preuve :
Sachant que pour un graphe connexe d'ordre n et de taille m, on a $m \geq n - 1$, alors la borne de la proposition est une conséquence directe du théorème précédent.
Sachant que pour une étoile sur n sommets

$$\lambda_1 = Ra = \sqrt{n-1},$$

il est évident que pour toute valeur de n la borne ci-dessus est atteinte au moins pour l'étoile. □

Si G n'est pas un arbre ($m > n - 1$), alors $\lambda_1 \cdot Ra > n - 1$. Ainsi la borne est nécessairement atteinte pour un arbre. Mais la question de savoir si l'étoile est l'unique graphe pour lequel la borne est atteinte, est toujours ouverte.

CONCLUSION

L'étude effectuée dans le cadre de ce travail, démontre clairement qu'une comparaison systématique et *automatique* d'invariants en théorie des graphes n'est plus du domaine du fictif, même si parfois l'intervention de l'humain est nécessaire pour apporter des améliorations à certains des résultats fournis par l'ordinateur. On est loin de prétendre que l'ordinateur détient la faculté de penser, aussi petite soit-elle, mais le succès enregistré dans le codage des techniques de preuves, même aussi simples et élémentaires que les règles de l'intersection, de la deuxième valeur, basée sur la définition et de la déduction, constitue un premier pas vers l'automatisation d'autres techniques plus élaborées. La simplicité des techniques codées ne fait que renforcer la conviction selon laquelle, pour réussir un projet quelconque *il faut commencer par le commencement.* Le commencement dans le domaine du raisonnement mathématique est constitué par les premières techniques de preuves enseignées aux jeunes étudiants. On constate que le progrès enregistré dans *la génération de conjectures* avec AutoGraphiX (et même avec les autres sytèmes) dépasse de loin *la preuve automatique.* Un fait qui ne peut être attribué au hasard, mais se conforme à la réalité de la recherche scientifique. Pour se convaincre, il suffit de se rappeler que *tout théorème, dans toute science, se présente en premier lieu sous forme de conjecture, même si ce n'est que pour un instant dans l'esprit de celui qui le prouve.*

Un système expert, et même tout programme informatique, destiné à un large public ne peut être considéré comme réussi si la personne appelée à l'utiliser doit posséder des connaissances approfondies en informatique. Dans le but d'éviter un tel problème, les fonctions interactives d'AutoGraphiX ont été rendues très simples et très conviviales, à tel point que toute personne ayant connaissance des notions élémentaires en théorie des graphes et sachant manipuler une souris et un clavier, peut utiliser le sytème sans aucune difficulté. Par exemple, pour les opérations élémentaires sur un

graphe, on utilise des boutons imagés représentant le plus fidèlement possible l'opération (une paire de ciseaux pour supprimer une arête, des couleurs pour les colorations de sommets et/ou d'arêtes ...).
Les outils d'analyse des résultats obtenus, sont améliorés pour faciliter la tâche à l'usager. La fonction permettant de représenter une courbe à coté de celle de l'objectif pour approximation ou tout simplement pour observer les variations d'un ou d'une combinaison d'invariants, considérés ou pas dans l'objectif, s'est avérée d'un grand apport pour la compréhension et l'analyse des résultats. Cet outil a beaucoup aidé dans la génération interactive de conjectures. D'autre part, la visualisation des graphes extrêmes, relativement à un objectif choisi par l'utilisateur, en utilisant les outils de mise en relief de leurs particularités (modes de colorations des arêtes et des sommets), permet la reconnaissance de la structure générale des graphes résultats. L'exploitation des propriétés algébriques des structures observées permet l'obtention de conjectures (la méthode algébrique).

Conjectures de Graffiti

La comparaison systématique d'invariants effectuée dans le cadre de cette thèse a permis de confirmer, renforcer et réfuter quelques conjectures de Graffiti [81]. Il est à noter que dans chacun des trois cas - confirmation, renforcement ou réfutation - en plus de la formule algébrique, contrairement à Graffiti, AutoGraphiX fournit aussi les graphes extrêmes associés aux bornes.

Parmi le conjectures renforcées :
$\bar{l} \leq Ra$ devient $\bar{l} \leq Ra - \sqrt{n-1} + 2 - 2/n$, où $\bar{l}$ et Ra désigne respectivement la distance moyenne et l'indice de Randić. Cette dernière inégalité est atteinte si et seulement si le graphe est une étoile.
$\delta \cdot \bar{l} \leq n$ devient $\delta \cdot \bar{l} \leq n-1$, où δ désigne le degré minimum d'un graphe (voir Proposition 34, page 176). Ce résultat conduit directement aux deux corollaires suivants :

Pour tout graphe connexe régulier de degré d, $d \cdot \bar{l} \leq n-1$, qui est aussi un renforcement de la conjecture 62 de Graffiti (*Pour tout graphe connexe régulier de degré d,* $d \cdot \bar{l} \leq n$).
Pour tout graphe connexe de connectivité algébrique a, $a\bar{l} \leq n$, *avec égalité si et seulement si le graphe est complet*, qui est aussi la conjecture 128 de Graffiti, jusque là ouverte.

Parmi les conjectures réfutées :
La conjecture 268 de Graffiti stipule que $\Delta \cdot \bar{l} \leq 2n$, pour tout graphe connexe. Cette conjecture est réfutée par Favaron *et al.* [83] et par AutoGraphiX. Avec AutoGraphiX, on a pas de formule algébrique pour la borne supérieure sur $\Delta \cdot \bar{l}$, mais un résultat sur la structure des graphes extrêmes est prouvé (voir Proposition 29, page 167).

Plusieurs conjectures de Graffiti ont été reproduites par AutoGraphiX, comme $r \leq \alpha$, $\bar{l} \leq \alpha$, $r+\alpha \leq n$ et $\delta+\alpha \leq n$, où r et α désignent, respectivement, le rayon et nombre de stabilité d'un graphe.

Cas sans formules algébrique

Dans certains cas rares, il nous a été impossible de fournir une formulation algébrique d'une borne, se contentant ainsi de donner une conjecture structurale. La difficulté est due à des raisons multiples et différentes. Un problème, qui n'est pas propre au sujet abordé mais qui est général à la théorie des graphes, est celui de trouver des formules algébrique de quelques invariants en fonction de l'ordre, pour certains familles de graphes extrêmes. C'est le cas avec l'index λ_1 pour la famille des ananas, et pour la connectivité algébrique a pour la famille des graphes composés de deux triangles reliés par un chemin.
Un autre problème rencontré n'est propre ni à notre sujet ni à la théorie des graphes,

mais inhérent à la résolution des équations. On a rencontré des cas où la borne est solution d'une équation de degré 4 ou plus, ou encore des équations paramétriques dont la résolution est très difficile (voir Proposition 29, page 167).

Cas sans résultats

Dans une situation où on n'a ni une formule algébrique ni une conjecture structurale (cas rares), la raison est toujours la même : aucune régularité n'est obsérvée dans la structure des graphes extrêmes fournis par AutoGraphiX. Pour les grandes valeurs du paramètre n, il est possible que le système ne trouve pas les bons graphes extrêmes. Ce qui est peut probable pour les petites valeurs (par exemple, $n \leq 15$).

Cas de réfutations

Un très petit nombre de conjectures d'AutoGraphiX sont réfutées. Plusieurs conjectures sont encore ouverte, donc le nombre de réfutations peut toujours augmenter. Même si ce nombre venait à augmenter, la crédibilité des méthodes de génération de conjectures exloitées par AGX ne peut être remise en cause. En effet, d'une part les conjectures générées sont basées (en général) sur des échantillons de 18 graphes ($n = 3, \cdots 20$), d'autre part les contre-exemples connus sont, pour la plupart des cas, des graphes sur plus de 20 sommets. Par exemple, le plus petit contre-exemple pour la conjecture 48 (page 146) contient 52 sommets (voir Figure 3.1, page 147).

Perspectives

Dans la conclusion de sa thèse [35], Gilles Caporossi (le concepteur, avec Pierre Hansen, d'AutoGraphiX) a écrit : ≪ *AGX a démontré le potentiel qui réside dans les concepts qu'il utilise. Bien sûr ce constat n'est pas une fin en soi et il reste une large place pour des améliorations dans le but que le programme soit utilisé par les chercheurs* ≫. À l'exception du fait qu'un certain nombre de chercheurs utilisent

déjà AutoGraphiX, ce constat reste d'actualité. Il ne faut pas comprendre par là que des améliorations n'ont pas été apportées depuis, bien au contraire des progrès sont enregistrés et mieux encore de nouvelles voies de recherche s'ouvrent à mesure qu'on avance.

L'appelation *Forme 1* d'AGX implique l'existence d'une *Forme 2* dans les projets futurs. La première généralisation envisagée est la suivante. Étudier les relations de la forme :

$$\underline{b}_{n,m} \leq i_1 \otimes i_2 \leq \overline{b}_{n,m}$$

où le sens des termes reste le même que dans la Forme 1 ((1), p. 2), sauf que les bornes seront exprimées - et par conséquent la paramétrisation de l'optimisation sera faite - en fonction de l'ordre n et de la taille m du graphe. D'autres paramétrisations sont envisagées, aussi les possibilités d'automatisation d'autres techniques de preuves seront explorées.
Dans la génération de conjectures, les efforts seront concentrés, du moins en premier lieu, sur l'automatisation de la méthode algébrique. Les expériences menées à ce jour montrent que cette automatisation se fera en créant une base de données de familles de graphes extêmes (celles déjà connues, avec des mises à jour au fur et à mesure qu'on en découvre), comportant aussi les expressions des invariants évalués pour ces familles. Ensuite, la mise au point de routines de reconnaissance de familles, d'une part, et de calcul symbolique pour la combinaison des expressions des invariants, d'autre part.

On a vu que la technique de preuve automatique basée sur la deuxième valeur ne s'applique pas toujours aux cas d'un produit ou d'une division. À ce jour, lorsque les deux invariants considérés sont à valeurs entières, la bonne borne correspond à la deuxième valeur d'un seul de ceux-ci. Il est nécessaire d'approfondir la réflexion pour pouvoir déterminer un raisonnement vrai pour tous les cas. Une autre difficulté,

reliée à la même technique de preuve, est rencontrée avec les invariants à valeurs non entières. Pour la plupart de ces inavariants, les familles de graphes associées à la deuxième (plus grande ou plus petite) valeur ne sont pas connues. Ainsi. une étude préalable pour l'enrichissement de la base de connaissances d'AutoGraphiX est nécessaire.

Pour finir cette conclusion, donnons les statistiques relatives aux résultats obtenus, qui démontrent que le choix de la formule Forme 1 d'AGX, les techniques de preuves ainsi que les méthodes de génération de conjectures se sont avérés très fructueux. Le Tableau 2 ci-dessous présente les statistiques de la comparaison des vingt invariants, pris par paires, donnés dans le Tableau 1 (p. 12).

Tableau 2 : – Répartition et statistiques des résultats.

Resultats reproduits (connus dans la littérature)	34	(2.24 %)
Resultats prouvés automatiquement	841	(55.33 %)
Conjectures obtenues de façon automatique et prouvées	310	(20.39 %)
Conjectures obtenues de façon automatique et ouvertes	96	(6.32 %)
Conjectures obtenues de façon automatique et réfutées	15	(0.99 %)
Conjectures obtenues de façon assistée et prouvées	27	(1.78 %)
Conjectures obtenues de façon assistée et ouvertes	51	(3.35 %)
Conjectures obtenues de façon assistée et réfutées	6	(0.39 %)
Conjectures structurales et prouvées	5	(0.33 %)
Conjectures structurales et ouvertes	75	(4.93 %)
Conjectures structurales réfutées	0	(0.00 %)
Cas où aucun résultat n'est obtenu	60	(3.95 %)
Total	1520	(100 %)

BIBLIOGRAPHIE

[1] ABHYANKAR, S. S. (1964) *Local Analytic Geometry.* Academic Press, New York.

[2] ALBERSTON, M. O. (1997) The Irregularity of a Graph. *Ars Combinatoria 46*, 215–225.

[3] AOUCHICHE, M., BONNEFOY, J.-M., FIDAHOUSSEN, A., CAPOROSSI, G., HANSEN, P. ANDHIESSE, L., LACHERÉ, J., AND MONHAIT, A. (2005) Variable Neighborhood Search for Extremal Graphs 14 : The AutoGraphiX 2 System. *Les Cahiers du GERAD G-2005-19*.

[4] AOUCHICHE, M., CAPOROSSI, G., AND HANSEN, P. Variable Neighborhood Search for Extremal Graphs 8 : Variations on Graffiti 105. *Congressus Numerantium 148* (2001), 129–144.

[5] AOUCHICHE, M., AND HANSEN, P. (2005) Recherche à Voisinage Variable de Graphes Extrémaux. 13. À Propos de la Maille. *Les Cahiers du GERAD G-2005-09*.

[6] APPEL, K., AND HAKEN, W. (1977) Every Planar Map Is Four Colorable. part I. Discharging. *Illinois J. Math. 21*, 429–490.

[7] APPEL, K., AND HAKEN, W. (1977) Every Planar Map Is Four Colorable. Part II. Reducibility. *Illinois J. Math. 21*, 491–567.

[8] APPEL, K., AND HAKEN, W. (1986) The Four Color Proof Suffices. *Mathematical Intelligencer 8*, 10–20.

[9] APPEL, K., AND HAKEN, W. (1989) Every Planar Map Is Four Colorable. *Contemp. Math. 98*, 1–741.

[10] BAGAI, R., SHANBHOGUE, V., ZYTKOW, J. M., AND CHOU, S. C. (1993) Discovery of Geometry Theorems : Avoiding Isomorphic Situation Descriptions. In *Computing and Information*, pp. 354–358.

[11] BAILEY, D. (1988) Numerical Results on the Transcendence of Constants Involving π, e and Euler's Constant. *Math. Comput. 50*, 275–281.

[12] BAILEY, D., AND FERGUSON, H. R. P. (1989) Numerical Results on Relations between Numerical Constants Using a New Algorithm. *Math. Comput. 53*, 649–656.

[13] BATUT, C., BERNARDI, D., COHEN, H., AND OLIVIER, M. (1991) *User's Guide to PARI-GP, Version 1.36.* Université Bordeaux I.

[14] BAUDON, O. (1990) *Cabri Graphes : Un CAhier de BRouillon Interactif pour la Théorie des Graphes.* Thèse de Troisième Cycle, Grenoble, France.

[15] BAUDON, O., AND LABORDE, J. M. (1996) Cabri Graph : A Sketchpad for Graph Theory. *Math. Comput. Simulation (42) No. 4-6*, 765–774.

[16] BEEZER, R. A., RIEGSECKER, J., AND SMITH, B. A. (2001) Using

Minimum Degree to Bound Average Distance. *Discrete Mathematics 226*, 365–377.

[17] BERGE, C. (1970) *Graphs and Hypergraphs.* North-Holland, Amsterdam.

[18] BIGGS, N. (1974) *Algebraic Graph Theory.* Combridge University Press.

[19] BONDY, J. A. (1969) Properties of Graphs with Constraints on Degrees. *Studia Sc. Math. Hung. 4*, 473–475.

[20] BONDY, J. A. (1971) Pancyclic Graphs. I. *J. Combin. Theory Ser. B 11*, 80–84.

[21] BONDY, J. A., AND MURTY, U. S. R. (1972) *Graph Theory with Applications.* McMillan, London.

[22] BORWEIN, J. M., BRADLEY, D. M., BROADHURST, D. J., AND EK, P. L. (2001) Special Values of Multiple Polylogarithms. *Trans. Amer. Math. Soc. 353*, no. 3, 907–941. Disponible sur http ://www.cecm.sfu.ca/~pborwein/.

[23] BORWEIN, P., AND ERDÉLYI, T. (1996) The Integer Chebyshev Problem. *Math. Comp. 65*, no. 214, 661–681. Disponible sur http ://www.cecm.sfu.ca/~pborwein/.

[24] BORWEIN, P., AND HARE, K. G. (2002) Some Computations on the Spectra of Pisot and Salem Numbers. *Math. Comp. 71*, no. 238, 767–780. Disponible sur http ://www.cecm.sfu.ca/~pborwein/.

[25] BORWEIN, P., HARE, K. G., AND MEICHSNER, A. Reverse Symbolic Computations, the Identity Function. Disponible sur http ://www.cecm.sfu.ca/~pborwein/.

[26] BORWEIN, P., AND MOSSINGHOFF, M. J. (2000) Polynomials with Height 1 and Prescribed Vanishing at 1. *Experiment. Math. 9*, no. 3, 425–433. Disponible sur http ://www.cecm.sfu.ca/~pborwein/.

[27] BOUVIER, A., AND GEORGE, M. (1979) *Dictionnaire des Mathematiques.* Paris, Presses Universitaires de France.

[28] BRIGHAM, R. C., AND DUTTON, R. D. (1983) INGRID : A Software Tool for Extremal Graph Theory Research. *Congressus Numeratium 39*, 337–352.

[29] BRIGHAM, R. C., AND DUTTON, R. D. (1985) A Compilation of Relations between Graph Invariants. *Networks 15*, 73–107.

[30] BRIGHAM, R. C., AND DUTTON, R. D. (1990) Bounds on the Domination Number of a Graph. *Quart. J. Math. Oxford Ser. 2 41*, 269–275.

[31] BRIGHAM, R. C., AND DUTTON, R. D. (1991) A Compilation of Relations between Graphs Invariants. Supplement 1. *Networks 21*, 421–455.

[32] BRIGHAM, R. C., DUTTON, R. D., AND GOMEZ, F. (1989) INGRID : A Graph Invariants Manipulator. *Journal of Symbolic Computation 7*, 163–177.

[33] BROOKS, R. L. (1941) On Colouring the Nodes of a Network. *Proc. Cambridge Philos. Soc. 37*, 194–197.

[34] BUSACKER, R. G., AND SAATY, T. L. (1965) *Finite Graphs and Networks.* McGraw-Hill Book Company.

[35] CAPOROSSI, G. (2000) *Découverte par Ordinateur en Théorie des Graphes.* Thèse de PhD, Ecole Polythechnique de Montréal.

[36] CAPOROSSI, G., CVETKOVIĆ, D., GUTMAN, I., AND HANSEN, P. (1999) Variable Neighborhood Search for Extremal Graphs 2 : Finding Graphs with Extremal Energy. *J. Chem. Inf. Comput. Sci. 39*, 984–996.

[37] CAPOROSSI, G., DOBRYNIN, A., GUTMAN, I., AND HANSEN, P. (1999) Trees with Palindromic Hosoya Polynomials. *Graph Theory Notes of New York 37*, 10–16.

[38] CAPOROSSI, G., GUTMAN, I., AND HANSEN, P. (1999) Variable Neighborhood Search for Extremal Graphs 4 : Chemical Trees with Extremal Connectivity Index. *Computers and Chemistry 23*, 469–477.

[39] CAPOROSSI, G., GUTMAN, I., HANSEN, P., AND PAVLOVIĆ, L. (2003) Graphs with Maximum Connectivity Index. *Computational Biology and Chemistry 27*, 85–90.

[40] CAPOROSSI, G., AND HANSEN, P. (1999) Finding Relations in Polynomial Time. In *16th International Joint Conference on Artificial Intelligence Proceedings*, vol. 2, pp. 780–785.

[41] CAPOROSSI, G., AND HANSEN, P. (2000) Variable Neighborhood Search for Extremal Graphs 1 : The AutoGraphiX System. *Discrete Mathematics 212*, 29–44.

[42] CAPOROSSI, G., AND HANSEN, P. (2004) Variable Neighborhood Search for Extremal Graphs 5 : Three Ways to Automate Finding Conjectures. *Discrete Mathematics 276*, 81–94.

[43] CARBONNEAUX, Y., LABORDE, J. M., AND MADANI, R. M. (1996) Cabri Graph : A Tool for Research and Teaching in Graph Theory. *Proceedings of the symposium (GD '95) held in Passau edited by Franz J. Brandenburg. Lecture Notes in Computer Science, 1027. Springer-Verlag, Berlin*, 123–126.

[44] CAYLEY, A. (1889) A Theorem on Trees. *Quart. J. Math. 23*, 376–378.

[45] CHOU, S. C. (1988) *Mechanical Geometry Proving.* D. Reidel Publishing Compagny, Dordrecht, Netherlands.

[46] CHOU, S. C., GAO, X. S., AND ZHANG, J. Z. (1996) Automated Generation of Readable Proofs with Geometric Invariants, I : Multiple and Shortest Proof Generation. *J. Automated Reasoning 17(3)*, 325–347.

[47] CHOU, S. C., GAO, X. S., AND ZHANG, J. Z. (1996) Automated Generation of Readable Proofs with Geometric Invariants, II : Proving Theorems with Full-Angles. *J. Automated Reasoning 17(3)*, 349–370.

[48] CHUNG., F. (1988) The Average Distance and the Independence Number. *Journal of Graph Theory 12*, 229–235.

[49] COELHO, H., AND PEREIRA, L. M. (1986) Automated Reasoning in Geometry Theorem Proving with Prolog. *J. Automated Reasoning 2*, 329–390.

[50] COHEN, H. (1993) *A Course in Computational Algebraic Number Theory.* Springer-Verlag. GTM 138.

[51] COLLATZ, L., AND SINOGOWITZ, U. (1957) Spektren Endlicher Grafen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 21*, 63–77.

[52] COLTON, S. (1999) Refactorable Numbers - A Machine Invention. *Journal of Integer Sequences 2.*

[53] COLTON, S., BUNDY, A., AND WALSH, T. (1999) HR : Automatic Concept Formation in Pure Mathematics. *In Proceedings of the 16th International Joint Conference on Artificial Intelligence.*

[54] COLTON, S., BUNDY, A., AND WALSH, T. (1999) On the Notion of Interestingness in Automated Mathematical Discovery. *Special issue on Machine discovery of the International Journal of Human Computer Studies.*

[55] CVETKOVIĆ, D. (1983) Discussing Graph Theory with a Computer, II : Theorems Suggested by the Computer. *Publications de l'Institut Mathématique 47*, 29–33.

[56] CVETKOVIĆ, D. (1983) Discussing Graph Theory with a Computer, III : Man-Machine Theorem Proving. *Publications de l'Institut Mathématique de Beograd 48*, 37–47.

[57] CVETKOVIĆ, D. (1983) Discussing Graph Theory with a Computer IV, Knowledge Organization and Examples of Theorem Proving. *Proceedings of the fourth Yugoslav Seminar on Graph Theory, Novi Sad*, 43–68.

[58] CVETKOVIĆ, D. (1988) Discussing Graph Theory with a Computer, VI : Theorems Proved with the Aid of the Computer. *Bulletin de l'academie des Sciences et des Arts T. XCVII*, 51–70.

[59] CVETKOVIĆ, D., DOOB, M., AND SACHS, H. (1995) *Horst Spectra of Graphs. Theory and applications.* Third edition. Johann Ambrosius Barth, Heidelberg.

[60] CVETKOVIĆ, D., AND GUTMAN, I. (1985) The Computer System GRAPH : A Useful Tool in Chemical Graph Theory. *Comput. Chem. 7*, 640–644.

[61] CVETKOVIĆ, D., KRAUS, L., AND SIMIĆ, S. (1981) Discussing Graph Theory with a Computer, I : Implementation of Graph Theoretic Algorithms. *Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak*, 100–104.

[62] CVETKOVIĆ, D., AND PEVAC, I. (1988) Man-Machine Theorem Proving in Graph Theory. *Artificial Intelligence 35*, 1–23.

[63] CVETKOVIĆ, D., AND ROWLINSON., P. (1990) The Largest Eigenvalue of a Graph : A Survey. *Linear and Multilinear Algebra 28*, 3–33.

[64] CVETKOVIĆ, D., AND SIMIĆ, S. (2005) Graph Theoretical Results Obtained by the Support of the Expert System "GRAPH" - an Extended Survey -. *In [82].*

[65] CVETKOVIĆ, D., AND SIMIĆ., S. (1994) Graph Theoretical Results Obtained by the Support of the Expert System "Graph". *Bulletin de l'Academie Serbe des Sciences et des Arts T CVII*.

[66] CVETKOVIĆ, D., SIMIĆ, S., CAPOROSSI, G., AND HANSEN, P. (2001) Variable Neighborhood Search for Extremal Graphs 3 : On the Largest Eigenvalue of Color-Constrained Trees. *Linear and Multilinear Algebra 49*, 143–146.

[67] DELAVINA, E. (2000) Bibliography on Conjectures of Graffiti. http ://cms.dt.uh.edu/faculty/delavinae/research/wowref.htm.

[68] DELAVINA, E. (2000) On Conjectures of Griggs and Graffiti. Preprint.

[69] DIRAC, G. A. (1952) Some Theorems on Abstract Graphs. *Proc. London Math. Soc. 2*, 69–81.

[70] DOBRYNIN, A. A., ENTRINGER, R., AND GUTMAN, I. (2001) Wiener Index of Trees : Theory and Applications. *Acta Applicandea Mathematicae 66*, 211–240.

[71] ENTRINGER, R., JACKSON, D., AND SNYDER, D. (1974) Distance in Graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal 26(101)*, 283–296.

[72] EPSTEIN, S. L. (1983) *Knowledge Representation in Mathematics : A Case Study in Graph Theory.* Ph.D. Thesis, Department of Computer Science, Rutgers University.

[73] EPSTEIN, S. L. (1987) On the Discovery of Mathematical Theorems. *In Proceedings of the Tenth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, 194–197.

[74] EPSTEIN, S. L. (1988) Learning and Discovery : One System's Search for Mathematical Knowledge. *Comput. Intell. 4*, 42–53.

[75] EPSTEIN, S. L., AND SRIDHARAN, N. S. (1991) Knowledge Presentation for Mathematical Discovery : Three Experiments in Graph Theory. *J. Applied Intelligence 1*, 7–33.

[76] FAJTLOWICZ, S. (1987) On Conjectures of Graffiti - II. *Congressus Numerantium 60*, 187–197.

[77] FAJTLOWICZ, S. (1988) On Conjectures of Graffiti. *Discrete Mathematics 72*, 113–118.

[78] FAJTLOWICZ, S. (1988) On Conjectures of Graffiti - III. *Congressus Numerantium 66*, 23–32.

[79] FAJTLOWICZ, S. (1990) On Conjectures of Graffiti - IV. *Congressus Numerantium 70*, 231–240.

[80] FAJTLOWICZ, S. (1995) On Conjectures of Graffiti - V. In *Seventh International Quadrennial Conference on Graph Theory*, vol. 1, pp. 367–376.

[81] FAJTLOWICZ, S. (2000) *Written on the Wall.* Electronic file accessible via e-mail from clarson@math.uh.edu.

[82] FAJTLOWICZ, S., FOWLER, P., HANSEN, P., JANOWITZ, M., AND (EDITORS), F. R. (2005) Graphs and Discovery. *DIMACS Series in Discrete Math. and Theoretical Computer Science, AMS forthcoming.*

[83] FAVARON, O., MAHÉO, M., AND SACLÉ, J.-F. (1990) Some Results on Conjectures of Graffiti. I. *Ars Combin. 29*, 90–106.

[84] FAVARON, O., MAHÉO, M., AND SACLÉ, J.-F. (1991) On the Residue of a Graph. *Journal of Graph Theory 15*, 39–64.

[85] FAVARON, O., MAHÉO, M., AND SACLÉ, J.-F. (1993) Some Eigenvalue Properties in Graphs (Conjectures of Graffiti. II). *Discr. Math. 111*, 197–220.

[86] FERGUSON, H. R. P., AND BAILEY, D. H. (1992) A Polynomial Time, Numerically Stable Integer Relation Algorithm. *RNR Technical Report RNR-91-032.*

[87] FERGUSON, H. R. P., BAILEY, D. H., AND ARNO, S. (1999) Analysis of PLSQ, an Integer Relation Finding Algorithm. *Math. Comp. 68*, no. 225, 351–369.

[88] FERGUSON, H. R. P., AND FORCADE, R. W. (1982) Multidimensional Euclidean Algorithms. *J. Reine Angew. Math. 334*, 171–181.

[89] FOWLER, P. W., HANSEN, P., CAPOROSSI, G., AND SONCINI, A. (2001) Polyenes with Maximum HOMO-LUMO Gap (Variable Neighborhood Search for Extremal Graphs 7). *Chem. Phys. Lett. 342*, 105–112.

[90] FRAUGHNAUGH, K., AND LOCKE, S. C. (1995) 11/30 (Finding Large Independent Sets in Connected Triangle-free 3-regular Graphs). *J. Combin. Theory Ser. B 65 no. 1*, 51–72.

[91] GALLAI, T. (1959) Maximum - Minimum Safze uber Graphen. *Acta Mth. Acad. Sci. Hungarica 9*, 395–434.

[92] GALLAIRE, H., MINKER, J., AND NICOLAS, J. M. (1984) Logic and Databases : A Deductive Approach. *ACM Comput. Surveys 16(2)*, 153–185.

[93] GERLENTNER, H., HANSON, J. R., AND LOVELAND, D. W. (1960) Empirical Explorations of the Geometry-Theorem Proving Machine. *In Proc. West. Joint Computer Conf.*, 1143–147.

[94] GUPTA, R. P. (1966) The Chromatic Index and the Degree of a Graph. *Notices Am. Math. Soc. 13 No. 6*, 429.

[95] GUTMAN, I. (1992) Total π-Electron Energy of Benzenoid Hydrocarbons. *Topics in Current Chemistry 162*, 29–63.

[96] GUTMAN, I., AND CYVIN, S. (1989) *Introduction to the Theory of Benzenoid Hydrocarbons.* Springer-Verlag.

[97] GUTMAN, I., HANSEN, P., AND MÉLOT, H. (2005) Variable Neighborhood Search for Extremal Graphs. 10. Comparing Measures of Irregularity for Chemical Trees. *Journal of Chemical Information and Modeling 45*, 222–230.

[98] GUTMAN, I., MILJKOVIC, O., CAPOROSSI, G., AND HANSEN, P. (1999) Alkanes with Small and Large Randic Connectivity Index. *Chem. Phys. Lett 306*, 366–372.

[99] HAASE, K. W. (1986) Discovery Systems. In Advances in Artificial Intelligence. In *European Conference on Artificial Intelligence, North-Holland.*

[100] HAASE, K. W. (1990) *Exploration and Invention in Discovery.* Phd Thesis, MIT.

[101] HAASE, K. W. (1992) Cyrano-3 : An Experiment in Representation Invention. In *Int. Conf. on Machine Learning.*

[102] HANSEN, P. (2005) How Far Is, Should and Could Be Conjecture-Making in Graph Theory an Automated Process? *In [82],.*

[103] HANSEN, P. (1975) Degrés et Nombre de Stabilité d'un Graphe. *Cahiers du Centre d'Études de Recherche Opérationnelle 17*, 213–220.

[104] HANSEN, P. Computers in Graph Theory. Graph Theory Notes of New York (to appear), 2002.

[105] HANSEN, P., AOUCHICHE, M., CAPOROSSI, G., MÉLOT, H., AND STEVANOVIĆ, D. (2005) What Forms Do Interesting Conjectures Have in Graph Theory? *In [82].*

[106] HANSEN, P., AND MÉLOT, H. (2002) Variable Neighborhood Search

for Extremal Graphs 9 : Bounding the Irregularity of Graphs. *Les Cahiers du GERAD G-2002-39*.

[107] HANSEN, P., AND MÉLOT, H. 2003 Variable Neighborhood Search for Extremal Graphs 6 : Analysing Bounds for the Connectivity Index. J. Chem. Inf. Comp. Sci.

[108] HANSEN, P., AND MLADENOVIĆ, N. (2001) Variable Neighborhood Search. In *Handbook of Applied Optimization*.

[109] HANSEN, P., AND MLADENOVIĆ, N. (2001) Variable Neighborhood Search : Principles and Applications. *Eur. J. Oper. Res. 130 (3)*, 449–467.

[110] HANSEN, P., AND MLADENOVIĆ, N. (2002) Variable Neighborhood Search. In *State-of-the-art Handbook of Metaheuristics*.

[111] HANSEN, P., AND MLADENOVIĆ, N. (2003) An Introduction to Variable Neighborhood Search. in S. Voss et al. (eds), Proceedings of MIC 97 Conference Kluwer, Dordrecht.

[112] HARARY, F. (1962) The Maximum Connectivity of a Graph. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 48*, 1142–1146.

[113] HARE, K. G. Some Applications of the LLL Algorithm. Disponible sur http ://www.cecm.sfu.ca/~pborwein/.

[114] HASTAD, J. (1988) Solving Simultaneous Modular Equations of Low Degree. *SIAM J. Comput. 17*, n0. 2, 336–341.

[115] HASTAD, J., JUST, B., AND SCHNORR, C. P. (1989) Polynomial Time Algorithms for Finding Integer Relations among Real Numbers. *SIAM J. Comput. 18*, 859–881.

[116] HAVEL, T. (1988) The Use of Distance as Coordinates in Computer-Aided Proofs of Theorems in Euclidean Geometry. *IAM Preprint, No 389, University of Minnesota.*

[117] HAYNES, T. W., HEDETNIEMI, S. T., AND SLATER, P. J. (1998) *Fundamentals of Domination in Graphs.* Dekker, New York.

[118] HONG, H. (1993) Bounds of Eigenvalues of Graphs. *Discrete Math. 123*, 65–74.

[119] HONG, Y. (1988) A Bound of the Spectral Radius of Graphs. *Linear Algebra Appl. 108*, 135–139.

[120] HONG-BO, L., AND MINTEH, C. (1998) Clifford Algebraic Reduction Method for Automated Theorem Proving in Differential Geometry. *J. Automated Reasoning 21(1)*, 1–21.

[121] KAPUR, D. (1986) Geometry Theorem Proving Using Helbert's Nullstellensatz. *In Proc. SYMSAC'86, Waterloo*, 202–208.

[122] KNUTH, D. E. (1997) *The Art of Computer Programming, Volume 2.* Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 3rd Edition.

[123] KOEDINGER, K. R., AND ANDERSON, J. R. (1990) Abstract Planning and Perceptual Chunks : Elements of Expertise Geometry. *Cognitive Science 14*, 511–550.

[124] KÖNIG, D. (1931) Graphs and Matrices. *Mat. Fiz. Lapok 38*, 116–119.

[125] KURATOWSKI, C. (1930) Sur le Probl'eme des Courbes Gauches en Topologie. *Fund. Math. 5*, 271–283.

[126] LANGLEY, P., SIMON, H., BRADSHAW, G., AND ZYTKOW, J. (1987) *Scientific Discovery. Computational Exploration of the Creative Process.* MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

[127] LARSON, C. (1999) Intelligent Machinery and Mathematical Discovery. Available at http ://math.uh.edu/ clarson.

[128] LARSON, C. (2002) Intelligent Machinery and Mathematical Discovery. *Graph Theory Notes of New York XLII*, 8–17.

[129] LEE, S. L., GUTMAN, I., YEH, Y. N., AND CHEN, J. C. (1994) Wiener Numbers of Dendrimers. *Match-Comm. Math. Chem. 30*, 103–115.

[130] LEE, S. L., GUTMAN, I., YEH, Y. N., AND LUO, Y. L. (1993) Some Recent Results in the Theory of Wiener Number. *Indian J. Chem. 32 A*, 651–661.

[131] LENAT, D. (1983) Eurisko : A Program that Learns New Heuristics and Domain Doncepts. *Artificial Intelligence 21*, 61–98.

[132] LENAT, D., AND BROWN, J. S. (1983) Why AM and Eurisko Appear to Work. *Artificial Intelligence*, 23.

[133] LENAT, D. B. (1976) *AM : An Artificial Intelligence Approach to Discovery in Mathematics as Heuristic Search.* PhD Thesis, Stanford University.

[134] LENAT, D. B. (1977) Automated Theory Formation in Mathematics. *Proceedings of the Fifth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, 833–842.

[135] LENAT, D. B. (1982) AM : Discovery in Mathematics as Heuristic Search. *R. Davis and D.B. Lenat, Knowledge-Based Systems in Artificial Intelligence, McGraw-Hill, New York*, 1–227.

[136] LENSTRA, A. K., LENSTRA, H. W., AND LOVÁSZ, L. (1982) Factoring Polynomials with Rational Coefficients. *Mathematische Annalen 261*, 515–534.

[137] LENSTRA, H. W. (1983) Integer Programming with Fixed Number of Variables. *Math. Oper. Res. 8, no. 4*, 538–548.

[138] LOCKE, S., AND LOU, F. (1997) Finding Independent Sets in k_4-Free 4-Regular Connected Graphs. *J. of Comb. Theory, Series B 71*, 85–110.

[139] MCCUNE, W. (1994) Otter 3.0 Reference Manual and Guide. *URL : ftp ://info.mcs.anl.gov/pub/Otter/Papers/otter3_manual.ps.gz.*

[140] McCUNE, W. (1997) Solution of the Robbins Problem. *J. Autom. Reasoning 19(3)*, 263–276.

[141] McCUNE, W., AND WOS, L. (1997) Otter : The CADE-13 Competition Incarnations. *J. Automated Reasoning 18(2)*, 211–220.

[142] MCKAY, B. (1990) Nauty User's Guide (version 1.5). *Technical Report. TR-CS-90-02, Department of Computer Science, Australian National University.*

[143] MINOUX, M. (1983) *Programmation Mathématique, Théorie et Algorithmes.* DUNOD, Paris, France.

[144] MLADENOVIĆ, N., AND HANSEN, P. (1997) Variable Neighborhood Search. *Computers and Operations Research 24*, no. 11, 1097–1100.

[145] NEVINS, A. J. (1975) Plane Geometry Theorem Proving Using Forward Chaining. *Artif. Intell. 6*, 1–23.

[146] NEWELL, A. (1963) Limitations of the Current Stock of Ideas about Problem-Solving. In *Proceedings of a Conference on Electronic Information Handling, (eds. Kent, A. and Taulbee, O.). New York : Spartan*, pp. 195–208.

[147] NEWELL, A., SHAW, J., AND SIMON, H. (1957) Empirical Explorations of the Logic Theory Machine. In *Proceedings of the Western Joint Computer Conference*, pp. 218–239.

[148] NEWELL, A., SHAW, J., AND SIMON, H. (1958) Elements of a Theory of Human Problem-Solving. *Psychological Review 65*, 151–166.

[149] NEWELL, A., SHAW, J., AND SIMON, H. (1959) Report on a General Problem-Solving Program. In *Proceedings of the International Conference on Information Processing, Paris*, pp. 256–264.

[150] NEWELL, A., AND SIMON, H. (1956) The Logic Theory Machine. *IRE, Transactions on Information Theory IT-2(3)*, 61–79.

[151] NEWELL, A., AND SIMON, H. (1963) GPS - a Program that Simulates Human Problem-Solving. In *E. A. Feigenbaum and J. Feldman (Eds.) Computers and Thought. New York : McGraw-Hill*, pp. 279–293.

[152] NORDHAUS, E. A., AND GADDUM, J. (1956) On Complementary Graphs. *Amer. Math. Monthly 63*, 175–177.

[153] NORMAN, R. Z., AND RABIN, M. O. (1959) An algorithm for a Minimum Cover of Graph. *Proc. Amer. Math. Soc. 10*, 315–319.

[154] ODLYZKO, A. M. (1989) Cryptanatytic Attacks on the Multiplicative Knapsack Cryptosystem and Shamir's Fast Signature Scheme. *IEEE Trans. Inf. Theory IT-30*, no. 4, 594–601.

[155] ORE, O. (1961) Arc Covering of Graphs. *Ann. Math. Pura Appl. 55*, 315–321.

[156] PLOUFFE, S. (1992) *Approximations de Series Génératrices et Quelques Conjectures.* Université du Québec à Montréal.

[157] PLOUFFE, S., AND SLOANE, N. J. A. (1995) *The Encyclopedia of Integer Sequences.* Academic Press.

[158] PÓSA, O. (1962) A Theorem Covering Hamilton Lines. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int Zözl. 7*, 225–226.

[159] RANDIĆ, M. (1975) On Characterization of Molecular Branching. *J. Am. Chem. Soc. 97*, 6609–6615.

[160] REITER, R. (1976) A Semantically Guided Deductive System for Automatic Theorem Proving. *IEEE Trans. on Computers C-25(4)*, 328–334.

[161] ROBERTSON, N., SANDERS, D., SEYMOUR, P., AND THOMAS, R. (1997) The Four-Color Theorem. *Journal of Combinatorial Theory, Ser. B 70*, 2–44.

[162] ROWLINSON, P. (1988) On the Maximal Index of Graphs with a Prescribed Number of Edges. *Linear Algebra Appl. 110*, 43–53.

[163] SALVY, B., AND ZIMMERMANN, P. (1992) Gfun : A Maple Package for the Manipulation of Generating and Holonomic Functions in One Variable. *Rapport Technique, INRIA.*

[164] SHAMIR, A. (1984) A Polynomial Time Algorithm for Breaking the Basic Merkle-Hellman Cryptosystem. *IEEE Trans. Inf. Theory IT-30*, no. 5, 699–704.

[165] SIMON, H., AND NEWELL, A. (1958) Heuristic Problem Solving : The Next Advance in Operation Research. *Operation Research*, 1–10.

[166] SLOANE, N. *The on-line Encyclopedia of Integer Sequences.* http ://www.research.att.com/minjas/sequences/.

[167] SMITH, B. (2004) Communication privée destinée à A. Bondy. Transmise au Pr P. Hansen le 24 mai 2004.

[168] SOLTÉS, L. (1991) Transmission in Graphs : a Bound and Vertex Removing. *Math. Slovaca 41 No. 1*, 11–16.

[169] STEVANOVIĆ, D. (2004) Communication privée.

[170] STEVANOVIĆ, D., AND CAPOROSSI, G. (2001) On the Separator of Fullerenes. *Les Cahiers du GERAD G-2001-55*.

[171] SUGIHARA, K. (1989) On Finite-precision Representations of Geometric Objects. *J. Comput. Syst. Sci. 39*, no. 2, 236–247.

[172] SWANSON, D., AND SMALHEISER, N. (1997) An Interactive System for Finding Complementary Literatures : A Stimulus to Scientific Discovery. *Artificial Intelligence 91(2)*, 183–203.

[173] SWANSON, D., AND SMALHEISER, N. (1999) Implicit Text Linkages between Medline Records : Using Arrowsmith as an Aid to Scientific Discovery. *Libr. Trends 48(1)*, 48–59.

[174] TURÁN, P. (1941) An Extremal Problem in Graph Theory. *Mat. Fiz. Lapok 48*, 436–452.

[175] VIZING, V. (1964) On an Estimate of the Chromatic Class of a p-Graph. *Metody Diskret. Analiz. 3*, 25–30.

[176] WANG, D. M. (1995) Reasoning about Geometric Problems Using an Elimination Method. In *Automated Practical Reasoning*, Springer-Verlag, pp. 148–185.

[177] WEN-TSÜN, W. (1993) *Basic Principles of Mechanical Theorem Proving in Geometries, Volume I.* Springer-Verlag.

[178] WHITE, N. L., AND MCMILLAN, T. (1988) Cayley Factorisation. In *ISSAC'88*, ACM Press, pp. 4–8.

[179] WIENER, H. (1947) Structural Determination of Paraffin Boiling Points. *J. Am. Chem. Soc. 69*, 17–20.

[180] WILF, H. S. (1967) The Eigenvalues of a Graph and Its Chromatic Number. *J. London Math. Soc. 42*, 330–332.

[181] YU, P. (1998) An Upper Bound on the Randić of Trees. *J. Math. Study 31*, 225–230.

ANNEXE A : LA COMPARAISON SYSTÉMATIQUE DE VINGT INVARIANTS

Dans cette annexe, on donne la liste complète des conjectures et résultats obtenus lors de la comparaison systématique de la vingtaine d'invariants, pris par paire, du Tableau 1 (page 12). On utilise l'appelation **Conjecture** aussi bien pour une conjecture ouverte, que pour un résultat prouvé. Après le numéro de la conjecture et entre parenthèses, on spécifie le statut de la borne inférieure et supérieure, dans l'ordre, selon la légende suivante :

P :	obtenue automatiquement et prouvée,	**SP** :	structurale, prouvée,
O :	obtenue automatiquement et ouverte,	**SO** :	structurale, ouverte,
R :	obtenue automatiquement et réfutée,	**K** :	connue,
AP :	obtenue de façon assistée et prouvée,	**T** :	prouvée automatiquement,
AO :	obtenue de façon assistée et ouverte,	**ND** :	non déterminée.
AR :	obtenue de façon assistée et réfutée,		

Si une borne est prouvée et que la preuve est donnée dans la partie principale de cette thèse, on se contente de référer au résultat en question. Si elle est prouvée, mais dont la preuve n'est pas donnée dans cette thèse, on donnera des indications.
À la lecture des conjectures ci-dessous, il faut tenir compte du fait, dû aux effets de bord, que les résultats ne sont pas vrais dans certains cas. La plupart des énoncés supposent que $n \geq 3$.

A.1 Le degré maximum

A.1.1 Degré minimum

Conjecture A.1 (T, T) :

$$0 \leq \Delta - \delta \leq n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes réguliers (resp. les graphes ayant un sommet dominant et une arête pendante).

Conjecture A.2 (T, T) :

$$3 \leq \Delta + \delta \leq 2n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.3 (T, T) :

$$1 \leq \frac{\Delta}{\delta} \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes réguliers (resp. les graphes ayant un sommet dominant et une arête pendante).

Conjecture A.4 (T, T) :

$$2 \leq \Delta \cdot \delta \leq (n-1)^2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

A.1.2 Degré moyen

Conjecture A.5 (T, T) :

$$0 \leq \Delta - \overline{d} \leq \frac{(n-1)(n-2)}{n}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes réguliers (resp. l'étoile).

Conjecture A.6 (T, T) :

$$4 - \frac{2}{n} \leq \Delta + \overline{d} \leq 2n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.7 (T, T) :

$$1 \leq \frac{\Delta}{\overline{d}} \leq \frac{n}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes réguliers (resp. l'étoile).

Conjecture A.8 (T, T) :

$$4 - \frac{4}{n} \leq \Delta \cdot \overline{d} \leq (n-1)^2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

A.1.3 La distance moyenne

Conjecture A.9 (T, T) :

$$-\frac{n-5}{3} \leq \Delta - \bar{l} \leq n-2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.10 (ND, P) : (Proposition 28 page 165)

$$???? \leq \Delta + \bar{l} \leq n+1-\frac{2}{n}.$$

La borne supérieure est atteinte pour les étoiles.

Conjecture A.11 (T, T) :

$$\frac{6}{n+1} \leq \frac{\Delta}{\bar{l}} \leq n-1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.12 (ND, SP) : (Proposition 29 page 167)

$$???? \leq \Delta \cdot \bar{l} \leq ????$$

La borne supérieure est atteinte pour les étoiles si $n \leq 11$, *et pour les comètes si* $n \geq 12$.

A.1.4 Le diamètre

Conjecture A.13 (T, T) :

$$-n+3 \leq \Delta - D \leq n-2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.14 (ND, P) :

$$??? \leq \Delta + D \leq n+1.$$

La borne supérieure est atteinte pour plusieurs familles de graphes comme les graphes complets moins une arête, les chemins, les étoiles et autres.

Si un sommet v est sur un chemin diamétrique P, alors v est voisin d'au plus 2 sommets sur P et d'au plus tous les autres sommets, c'est-à-dire, $d(v) \leq 2 + (n - D - 1) = n - D + 1$. Si v n'est pas sur P, il est voisin d'au plus 3 sommets successifs de P et d'au plus tous les autres sommets, c'est-à-dire, $d(v) \leq 3 + (n - D - 2) = n - D + 1$. Ainsi $\Delta \leq n - D + 1$.

Conjecture A.15 (T, T) :

$$\frac{2}{n-1} \leq \frac{\Delta}{D} \leq n-1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.16 (ND, P) :

$$??? \leq \Delta \cdot D \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil .$$

La borne supérieure est atteinte pour plusieurs familles de graphes comme les comètes de degré maximum $\Delta = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ *ou* $\Delta = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.14.

A.1.5 Le rayon

Conjecture A.17 (T, T) :

$$2 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \Delta - r \leq n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins et les cycles (resp. les graphes ayant un sommet dominant).

Conjecture A.18 (ND, P) : (Lemme 1 page 192)

$$????? \leq \Delta + r \leq n.$$

La borne supérieure est atteinte pour les graphes avec $\Delta = n - 1$ *ou avec* $\Delta = n - 2$ *et* $r = 2$.

Conjecture A.19 (T, T) :

$$\frac{2}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq \frac{\Delta}{r} \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins et les cycles (resp. les graphes ayant un sommet dominant).

Conjecture A.20 (ND, AO) :

$$????? \leq \Delta \cdot r \leq \begin{cases} \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor & si \quad n \equiv 2[4], \\ (\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor + 1) \cdot \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor & si \quad n \not\equiv 2[4]. \end{cases}$$

La borne supérieure est atteinte pour plusieurs familles de graphes comme les comètes vérifiant $2r + \Delta = n + 2$ *et* $r = \lfloor \frac{n+3}{4} \rfloor$ *sauf pour* $n = 8$ *où* $r = 3$.

A.1.6 La maille

Conjecture A.21 (T, T) :

$$-n + 2 \leq \Delta - g \leq n - 4.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles (resp. les graphes ayant un sommet dominant et contenant un triangle).

Conjecture A.22 (P, P) : (Proposition 11 page 138)

$$6 \leq \Delta + g \leq n + 2.$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes avec $\Delta = 3$ *et contenant un triangle. La borne supérieure est atteinte pour plusieurs familles de graphes comme ceux ayant un sommet dominant et contenant un triangle.*

Conjecture A.23 (T, T) :

$$\frac{2}{n} \leq \frac{\Delta}{g} \leq \frac{n-1}{3}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles (resp. les graphes ayant un sommet dominant et contenant un triangle).

Conjecture A.24 (P, P) : (Proposition 12 page 140)

$$9 \leq \Delta \cdot g \leq \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil .$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes avec $\Delta = 3$ et contenant un triangle. La borne supérieure est atteinte pour les graphes composés d'un cycle de longueur g, C_g, et $n_1 = n - g$ arêtes pendantes, toutes incidentes au même sommet du cycle, avec $n_1 = g$ si n est pair et $|n_1 - g| = 1$ si n est impair.

A.1.7 Excentricité

Conjecture A.25 (T, T) :

$$2 - n \leq ecc - \Delta \leq \begin{cases} \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n} - 2 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{3n-2}{4} - 2 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.26 (ND, P) :

$$?????? \leq ecc + \Delta \leq n + 1 - \frac{1}{n}.$$

La borne supérieure est atteinte pour les graphes ayant un seul sommet dominant.

Pour K_n on a $ecc + \Delta = n < n + 1 - \frac{1}{n}$. Si G n'est pas complet, $\sum_i ecc_i \leq nD - 1$. Donc $ecc \leq D - \frac{1}{n}$, et ainsi $ecc + \Delta \leq D + \Delta - \frac{1}{n}$. La borne supérieure de A.14 permet de conclure que $ecc + \Delta \leq n + 1 - \frac{1}{n}$.

Conjecture A.27 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{ecc}{\Delta} \leq \begin{cases} \frac{3n+1}{8}\frac{n-1}{n} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{3n-2}{8} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.28 (ND, SO) :

$$?????? \leq ecc \cdot \Delta \leq ??????$$

La borne supérieure est atteinte pour les graphes de Soltés.

A.1.8 La proximité

Conjecture A.29 (T, T) :

$$2 - n \leq \pi - \Delta \leq \begin{cases} \frac{n-7}{4} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{n-8}{4} + \frac{n}{4n-4} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant (resp. les chemins).

Conjecture A.30 (ND, P) :

$$????? \leq \pi + \Delta \leq n.$$

La borne supérieure est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant.

Si $\Delta = n - 1$, on a $\pi + \Delta = n$. Sinon, π est au plus la transmission normalisée π_Δ du sommet de degré maximum, donc

$$\pi \leq \pi_\Delta \leq \frac{1}{n-1}(\Delta + 2 + \cdots + n - \Delta) \leq \frac{1}{n-1}\left(\frac{(n-\Delta+1)(n-\Delta-2)}{2} + n\right).$$

D'où :

$$\pi + \Delta \leq \frac{1}{n-1}\left(n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{\Delta^2 - \Delta - 2}{2}\right) \leq n - \frac{n-2}{n-1} < n.$$

Conjecture A.31 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\pi}{\Delta} \leq \begin{cases} \frac{n+1}{8} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{n}{8} + \frac{n}{8n-8} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant (resp. les chemins).

Conjecture A.32 (ND, SO) :

$$????? \leq \pi \cdot \Delta \leq ??????$$

La borne supérieure est atteinte pour les comètes avec d'éventuelles arêtes entre les voisins du sommet de degré maximum.

A.1.9 L'éloignement

Conjecture A.33 (T, T) :

$$2 - n \leq \rho - \Delta \leq \frac{n}{2} - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.34 (AO, P) :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{si } n \text{ est impair,} & \frac{n+9}{4} \\ \text{si } n \text{ est pair,} & 2 + \frac{n^2}{4n-4} \end{array}\right\} \leq \rho + \Delta \leq n + 1 - \frac{1}{n-1}.$$

La borne inférieure est atteinte pour les cycles et la borne supérieure pour les graphes contenant un sommet dominant et une arête pendante.

Il est facile de voir que

$$\rho \leq \frac{1}{n-1}(1+2+\cdots+(D-1)+D(\Delta-1)).$$

D'après A.14, $D \leq n-\Delta+1$, donc

$$\rho \leq \frac{1+2+\cdots+(n-\Delta)+(n-\Delta+1)(\Delta-1)}{n-1} \leq \frac{(n-\Delta+1)(n+\Delta-2)}{2(n-1)}.$$

Alors

$$\rho+\Delta \leq \frac{(n-\Delta+1)(n+\Delta-2)}{2(n-1)}+\Delta \leq n+1-\frac{1}{n-1}.$$

Conjecture A.35 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\rho}{\Delta} \leq \frac{n}{4}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.36 (ND, SP) :

$$???? \leq \rho \cdot \Delta \leq ?????$$

La borne supérieure est atteinte pour les comètes avec d'éventuelles arêtes entre les voisins du sommet de degré maximum.

Si G est un graphe de diamètre D, soit v le sommet avec $\rho = tr(v)/(n-1)$, et notons N_i le nombre de sommets de G à distance i de v. Alors

$$\rho = N_1 + 2N_2 + \cdots + DN_D \leq 1+2+\cdots+D(n-D+1).$$

Cette borne est atteinte pour, par exemple, les comètes de degré maximum $\Delta = n-D+1$.

A.1.10 L'index

Conjecture A.37 (P, K) : (Proposition 36 et Théorème 19 page 185)

$$\sqrt{n-1} - n + 1 \leq \lambda_1 - \Delta \leq 0.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes réguliers).

Conjecture A.38 (T, T) :

$$2 + 2cos\frac{\pi}{n+1} \leq \lambda_1 + \Delta \leq 2n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.39 (P, K) : (Proposition 37 page 186 et Théorème 19 page 185)

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}} \leq \frac{\lambda_1}{\Delta} \leq 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes réguliers).

Conjecture A.40 (T, T) :

$$4cos\frac{\pi}{n+1} \leq \lambda_1 \cdot \Delta \leq (n-1)^2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

A.1.11 L'indice de Randić

Conjecture A.41 (T, T) :

$$1 - n + \sqrt{n-1} \leq Ra - \Delta \leq \frac{n-4}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.42 (R, T) :

$$\frac{n+1+2\sqrt{2}}{2} \leq Ra + \Delta \leq \frac{3n-2}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

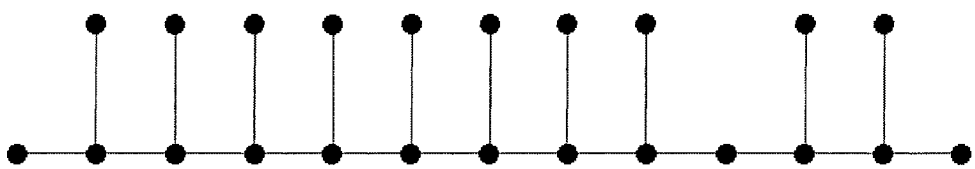


Figure A.1 – Un contre-exemple pour la Conjecture A.42 on 23 vertices.

Conjecture A.43 (T, T) :

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}} \leq \frac{Ra}{\Delta} \leq \frac{n}{4}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.44 (P, T) :

$$n - 3 + 2\sqrt{2} \leq Ra \cdot \Delta \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Si $\Delta = 2$, G est soit un chemin soit un cycle, le minimum correspond au chemin.
Si $\Delta \geq 3$ et G un arbre, le nombre de sommets pendants $n_1 \geq \Delta$. Donc

$$Ra \cdot \Delta \geq (\frac{n-1-n_1}{\Delta} + \frac{n_1}{\sqrt{\Delta}}) \cdot \Delta \geq n - 1 + \Delta(\sqrt{\Delta} - 1) > n - 3 + 2\sqrt{2}.$$

Si $\Delta \geq 3$ et $m \geq n$,

$$Ra \cdot \Delta \geq (\frac{m-1}{\Delta} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}}) \cdot \Delta \geq n - 1 + \sqrt{\Delta} > n - 3 + 2\sqrt{2}.$$

A.1.12 La connectivité algébrique

Conjecture A.45 (P, P) :

$$2 - n \leq a - \Delta \leq 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes avec $\Delta = n - 1$ et $a = 1$ (resp. les graphes complets).

Borne inférieure : Si $\Delta = n - 1$, alors $a \geq 1$, donc $a - \Delta \geq 2 - n$. Si $\Delta \leq n - 2$, comme $a > 0$ (graphe connexe), on a $a - \Delta > 2 - n$.
Borne supérieure : Si G est complet, on a la borne ; sinon $a \leq \Delta$.

Conjecture A.46 (T, T) :

$$4 - 2cos\frac{\pi}{n} \leq a + \Delta \leq 2n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.47 (SO, P) :

$$????? \leq \frac{a}{\Delta} \leq \frac{n}{n-1}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les comètes de diamètre $D = \lceil \frac{n+2}{2} \rceil$ *si* $n \geq 8$ *et* $D = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ *si* $n \leq 7$*et avec d'éventuelles arêtes entre les voisins du sommet de degré maximum (resp. les graphes complets).*

La borne supérieure se démontre comme celle de A.45.

Conjecture A.48 (T, T) :

$$4 - 4cos\frac{\pi}{n} \leq a \cdot \Delta \leq n(n-1).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

A.1.13 La connectivité aux sommets

Conjecture A.49 (T, K) :

$$2 - n \leq \nu - \Delta \leq 0.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes avec $\Delta = n - 1$ *et* $\nu = 1$ *(resp. les graphes réguliers).*

Conjecture A.50 (T, T) :

$$3 \leq \nu + \Delta \leq 2n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.51 (T, K) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\nu}{\Delta} \leq 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes contenant un sommet dominant et avec $\nu = 1$ (resp. les graphes réguliers).

Conjecture A.52 (T, T) :

$$2 \leq \nu \cdot \Delta \leq (n-1)^2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

A.1.14 La connectivité aux arêtes

Conjecture A.53 (T, K) :

$$2 - n \leq \kappa - \Delta \leq 0.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes avec $\Delta = n - 1$ et $\kappa = 1$ (resp. les graphes réguliers).

Conjecture A.54 (T, T) :

$$3 \leq \kappa + \Delta \leq 2n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.55 (T, K) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\kappa}{\Delta} \leq 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes contenant un sommet dominant et avec $\kappa = 1$ (resp. les graphes réguliers).

Conjecture A.56 (T, T) :

$$2 \leq \kappa \cdot \Delta \leq (n-1)^2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

A.1.15 Le nombre de stabilité

Conjecture A.57 (T, ND) :

$$2 - n \leq \alpha - \Delta \leq ?????$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes complets.

Conjecture A.58 (ND, T) :

$$???? \leq \alpha + \Delta \leq 2n - 2.$$

La borne supérieure est atteinte pour les étoiles.

Conjecture A.59 (T, P) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\alpha}{\Delta} \leq \frac{1}{2}\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil .$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins si n est impair et pour les chemins et les cycles si n est pair).

Si $\Delta = 2$, la borne supérieure est atteinte pour les chemins et les cycles pair.
Si $\Delta = 3$ et $\alpha/\Delta > \lceil n/2 \rceil /2$, G contiendrait un stable S dont le complémentaire T serait de cardinalité $|T| < n/4$. Cette dernière inégalité implique $m < 3|T| < n-1$ pour $n \geq 5$, qui est en contradiction avec G connexe.
Si $\Delta \geq 4$, nécessairement $\alpha/\Delta \leq (n-1)/4 < \lceil n/2 \rceil /2$.

Conjecture A.60 (P, T) :

$$n - 1 \leq \alpha \cdot \Delta \leq (n-1)^2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les étoiles).

Si G est un cycle impair ou un graphe complet, on a la borne inférieure. Sinon, les théorèmes de Berge $\alpha\chi \geq n$ et de Brooks $\Delta \geq \chi$ (si G n'est ni complet ni un cycle impair) permettent de conclure.

A.1.16 Le nombre de domination

Conjecture A.61 (T, P) :

$$2 - n \leq \beta - \Delta \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 3.$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant, et la borne supérieure pour des chenilles contenant des sommets de degré 1 ou 3 et un seul sommet de degré 2 si n est impair et deux de degré 2 si n est pair avec $n \geq 8$.

Si $\Delta = 2$, le graphe est soit un cycle soit un chemin et $\beta - \Delta \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil - 2$. Sinon $\beta \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $\Delta \geq 3$.

Conjecture A.62 (AR, K) :

$$\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 2 \leq \beta + \Delta \leq n.$$

La borne inférieure est atteinte pour les chemins (et autres), et la borne supérieure pour les graphes complets (et autres).

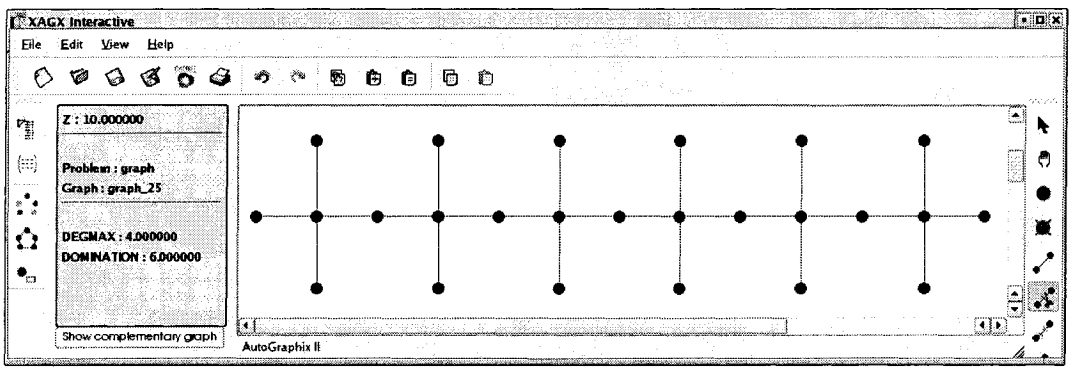


Figure A.2 – Un contre-exemple pour la borne inférieure sur $\beta + \Delta$.

Le graphe représenté dans la Figure A.2 est un contre-exemple pour la borne inférieure.
La borne supériuere est un théorème dû à Claude Berge [17].

Conjecture A.63 (T, AP) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\beta}{\Delta} \leq \frac{1}{2} \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant (resp. les chemins).

Si $\Delta = 2$, G est soit un chemin soit un cycle, donc $\frac{\beta}{\Delta} \leq \frac{1}{2}\lceil\frac{n}{3}\rceil$. Si $\Delta \geq 3$, $\frac{\beta}{\Delta} \leq \frac{1}{3}\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$.

Conjecture A.64 (AP, P) :

$$2\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil \leq \beta \cdot \Delta \leq \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor.$$

La borne inférieure est atteinte pour les chemins (et autres) et la borne supérieure pour les graphes avec $\beta = \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ *et* $\Delta = \lceil\frac{n}{2}\rceil$ *(une clique sur* $\lceil\frac{n}{2}\rceil$ *sommets et* $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ *sommets pendants sans voisins communs).*

Pour la borne inférieure, en utilisant le fait que $\beta \geq n/(\Delta+1)$, on obtient

$$\beta \cdot \Delta \geq \frac{n\Delta}{\Delta+1} \geq \frac{2n}{3}.$$

La borne supérieure est une conséquense de A.62.

A.1.17 La cardinalité maximale d'une clique

Conjecture A.65 (T, K) :

$$3 - n \leq \omega - \Delta \leq 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.66 (T, T) :

$$4 \leq \omega + \Delta \leq 2n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles et les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.67 (T, P) :

$$\frac{2}{n-1} \leq \frac{\omega}{\Delta} \leq \frac{n}{n-1}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Si $G \equiv K_n$, on a la borne supérieure ; sinon $\omega \leq \Delta$.

Conjecture A.68 (T, T) :

$$4 \leq \omega \cdot \Delta \leq n(n-1).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles et les chemins (resp. les graphes complets).

A.1.18 Le nombre chromatique

Conjecture A.69 (T, K) :

$$3 - n \leq \chi - \Delta \leq 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets et les cycles impairs).

Conjecture A.70 (T, T) :

$$4 \leq \chi + \Delta \leq 2n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles pairs et les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.71 (T, P) :

$$\frac{2}{n-1} \leq \frac{\chi}{\Delta} \leq \begin{cases} \frac{n}{n-1} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{3}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets si n est pair et pour les cycles impairs).

Si $G \equiv K_n$ ou $G \equiv C_n$ avec n impair, on a la borne supérieure ; sinon $\chi \leq \Delta$.

Conjecture A.72 (T, T) :

$$4 \leq \chi \cdot \Delta \leq n(n-1).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles pairs et les chemins (resp. les graphes complets).

A.1.19 La cardinalité maximale d'un couplage

Conjecture A.73 (T, T) :

$$2 - n \leq \mu - \Delta \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les chemins et les cycles).

Conjecture A.74 (ND, T) :

$$????? \leq \mu + \Delta \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n - 1.$$

La borne supérieure est atteinte pour les graphes complets.

Conjecture A.75 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\mu}{\Delta} \leq \frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les chemins et les cycles).

Conjecture A.76 (P, T) :

$$n - 1 \leq \mu \cdot \Delta \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot (n-1).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles et autres (resp. les graphes complets).

A.2 Le degré minimum

A.2.1 Le degré moyen

Conjecture A.77 (T, P) :

$$0 \leq \overline{d} - \delta \leq \frac{(n-2)^2}{n}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes réguliers (resp. une clique sur $n-1$ sommets et une arête pendante).

Si G est de degré minimum δ, alors $m \leq \delta + (n-1)(n-2)/2$. Donc

$$\overline{d} - \delta \leq \frac{(n-1)(n-2)}{n} + \frac{2-n}{n}\delta \leq \frac{(n-2)^2}{n}.$$

Conjecture A.78 (T, T) :

$$3 - \frac{2}{n} \leq \overline{d} + \delta \leq 2n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les arbres (resp. les graphes complets).

Conjecture A.79 (AP, T) :

$$\frac{n}{n^2 - 3n + 4} \leq \frac{\delta}{\overline{d}} \leq 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour un graphe composé d'une clique et d'une arête pendante (resp. un graphe régulier).

La borne inférieure se démontre comme la borne supérieure de A.77.

Conjecture A.80 (T, T) :

$$2 - \frac{2}{n} \leq \delta \cdot \overline{d} \leq (n-1)^2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour un arbre (resp. un graphe complet).

A.2.2 La distance moyenne

Conjecture A.81 (T, T) :

$$-n+2 \leq \bar{l}-\delta \leq \frac{n-2}{3}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.82 (P, P) : (Proposition 33 page 174)

$$\frac{2n^2-4}{n(n-1)} \leq \bar{l}+\delta \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés d'une clique sur $n-1$ sommets et une arête pendante (resp. les graphes complets).

Conjecture A.83 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\bar{l}}{\delta} \leq \frac{n+1}{3}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.84 (P, P) : (Proposition 34 page 176)

$$\frac{n^2+n-4}{n(n-1)} \leq \bar{l} \cdot \delta \leq n-1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés d'une clique sur $n-1$ sommets et une arête pendante (resp. les graphes complets).

A.2.3 Le diamètre

Conjecture A.85 (T, T) :

$$-n+2 \leq D-\delta \leq n-2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.86 (T, P) :

$$3 \leq D+\delta \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et une arête pendante (resp. pour les chemins, les graphes complets et autres).

Si $D=1$, G est complet et on a la borne. Sinon, une plus courte chaîne de G entre deux sommets u et v, contient au plus $n-(d(u)-1)-(d(v)-1)-1$ sommets. Donc

$$D \leq n-2\delta+1 \leq n+(1-\delta)-\delta \leq n-\delta.$$

Conjecture A.87 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{D}{\delta} \leq n-1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.88 (P, R) :

$$2 \leq D \cdot \delta \leq 2n-4.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles et autres (resp. les graphes complets moins une arête).

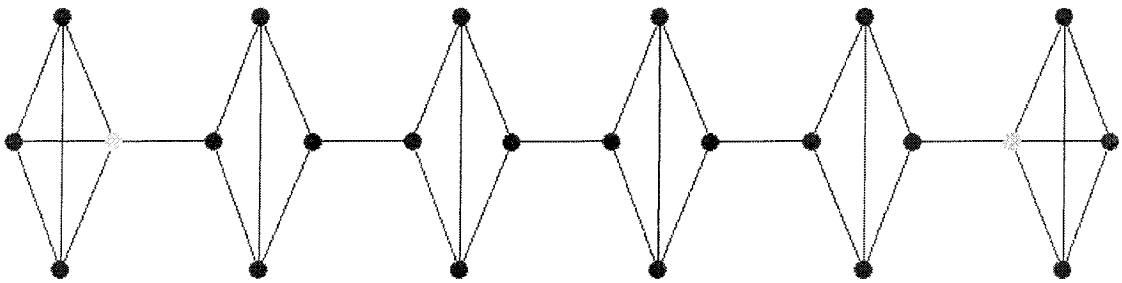


Figure A.3 – Un contre-exemple pour la borne supérieure de A.88 avec $n = 24$, $D = 15$ et $\delta = 2$.

A.2.4 Le rayon

Conjecture A.89 (T, T) :

$$1 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \delta - r \leq n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.90 (T, P) :

$$2 \leq \delta + r \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes avec un sommet dominant et une arête pendante (resp. les graphes complets).

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.18.

Conjecture A.91 (T, T) :

$$\frac{1}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \leq \frac{\delta}{r} \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins si n est pair, et pour les arbres de diamètre au moins $n - 2$ (resp. les graphes complets).

Conjecture A.92 (T, O) :

$$1 \leq \delta \cdot r \leq \begin{cases} 2n-4 & \textit{si } n \textit{ est pair,} \\ 2n-6 & \textit{si } n \textit{ est impair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes avec un sommet dominant et une arête pendante (resp. les graphes complets moins un recouvrement minimum des sommets par les arêtes).

A.2.5 La maille

Conjecture A.93 (T, T) :

$$-n+2 \leq \delta - g \leq n-4.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles et pour les cycles de longueur $n-1$ avec un sommet pendant (resp. les graphes complets).

Conjecture A.94 (T, P) : (Proposition 15 page 144)

$$4 \leq \delta + g \leq n+2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes contenant un triangle et un sommet pendant (resp. les graphes complets et les cycles).

Conjecture A.95 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\delta}{g} \leq \frac{n-1}{3}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles et pour les cycles de longueur $n-1$ avec un sommet pendant (resp. les graphes complets).

Conjecture A.96 (T, P) : (Proposition 16 page 144)

$$3 \leq \delta \cdot g \leq 3n - 3.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes contenant un triangle et un sommet pendant (resp. les graphes complets).

A.2.6 L'excentricité

Conjecture A.97 (T, T) :

$$2 - n \leq ecc - \delta \leq \begin{cases} \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n} - 1 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{3n-2}{4} - 1 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.98 (P, P) :

$$3 - \frac{1}{n} \leq ecc + \delta \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et une arête pendante (resp. les graphes complets ou le complémentaire d'un couplage parfait si n est pair).

Pour la borne inférieure, si $\delta = 1$, alors le sommet pendant et ceux qui ne sont pas ses voisins sont d'excentricité au moins 2. Donc

$$ecc \geq \frac{2(n-1)+1}{n} = 2 - \frac{1}{n}.$$

Sinon, $\delta + ecc \geq 3$. La borne supérieure est une conséquence de celle de A.86.

Conjecture A.99 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{ecc}{\delta} \leq \begin{cases} \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n} & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{3n-2}{4} & si\ n\ est\ pair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.100 (P, SO) :

$$2 - \frac{1}{n} \leq ecc \cdot \delta \leq ??????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et un sommet pendant (resp. un complémentaire d'un recouvrement minimum des sommets par les arêtes).

La borne inférieure se démontre exactement comme celle de A.98.

A.2.7 La proximité

Conjecture A.101 (T, T) :

$$2 - n \leq \pi - \delta \leq \begin{cases} \frac{n-3}{4} & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{n-4}{4} + \frac{n}{4n-4} & si\ n\ est\ pair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.102 (T, P) :

$$2 \leq \pi + \delta \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et un sommet pendant (resp. les graphes complets).

La borne supérieure est une conséquence de A.86.

Conjecture A.103 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\pi}{\delta} \leq \begin{cases} \frac{n+1}{4} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{n}{4} + \frac{n}{4n-4} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.104 (T, P) :

$$1 \leq \pi \cdot \delta \leq n-1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et un sommet pendant (resp. les graphes complets).

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.84.

A.2.8 L'éloignement

Conjecture A.105 (T, T) :

$$2 - n \leq \rho - \delta \leq \frac{n}{2} - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.106 (P, P) :

$$3 - \frac{1}{n-1} \leq \rho + \delta \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et une arête pendante (resp. les graphes complets).

Pour la borne inférieure, si $\delta = 1$, alors ρ est au moins la transmission normalisée du sommet pendant, c'est-à-dire,

$$\rho \geq \frac{1 + 2(n-2)}{n-1} = 2 - \frac{1}{n-1}.$$

Sinon, $\delta + \rho \geq 3$.

La borne supérieure est une conséquence de A.86.

Conjecture A.107 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\rho}{\delta} \leq \frac{n}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.108 (P, ND) :

$$\frac{2n-3}{n-1} \leq \rho \cdot \delta \leq ?????$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et un sommet pendant.

La borne inférieure se démontre comme celle de A.106.

A.2.9 L'index

Conjecture A.109 (K, AP) : (Théorème 21 page 187 et Proposition 38 page 187)

$$0 \leq \lambda_1 - \delta \leq n - 3 + t,$$

où t vérifie $0 < t < 1$ et l'équation $t^3 + (2n-3)t^2 + (n^2 - 3n + 1)t - 1 = 0$.

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes réguliers (resp. les graphes composés d'une clique sur $n-1$ sommets et un sommet pendant).

Conjecture A.110 (T, T) :

$$1 + 2cos\frac{\pi}{n+1} \leq \lambda_1 + \delta \leq 2n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.111 (K, AP) : (Théorème 21 page 187 et Proposition 39 page 188)

$$1 \leq \frac{\lambda_1}{\delta} \leq n - 2 + t,$$

où t vérifie $0 < t < 1$ et l'équation $t^3 + (2n-3)t^2 + (n^2 - 3n + 1)t - 1 = 0$.
La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes réguliers (resp. les graphes composés d'une clique sur $n-1$ sommets et un sommet pendant).

Conjecture A.112 (T, T)

$$2cos\frac{\pi}{n+1} \leq \lambda_1 \cdot \delta \leq (n-1)^2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

A.2.10 L'indice de Randić

Conjecture A.113 (P, P) :

$$\frac{2-n}{2} \leq Ra - \delta \leq \frac{3n - 13 + \sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{6}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. un graphe construit comme suit, on considère un graphe H régulier de degré 3 sur $p \leq n-3$ sommets, un chemin sur $n-p$ sommets et d'extrêmités u_1 et u_2 ; on supprime de H une arête v_1v_2 et on relie u_1 à v_1 et à v_2.).

Conjecture A.114 (T, T) :

$$1 + \sqrt{n-1} \leq Ra + \delta \leq \frac{3n-2}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.115 (P, P) :

$$\frac{n}{2n-2} \leq \frac{Ra}{\delta} \leq \frac{3n-7+\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{6}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. un graphe construit comme suit, on considère un graphe H régulier de degré 3 sur $p \leq n-3$ sommets, un chemin sur $n-p$ sommets et d'extrêmités u_1 et u_2 ; on supprime de H une arête v_1v_2 et on relie u_1 à v_1 et à v_2.).

Conjecture A.116 (T, T) :

$$\sqrt{n-1} \leq Ra \cdot \delta \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

A.2.11 La connectivité algébrique

Conjecture A.117 (SO, P) :

$$????? \leq a - \delta \leq 1$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes constitués de 2 cliques sur $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ sommets, ayant un sommet commun si n est impair et reliées par une seule arête si n est pair. La borne supérieure est atteinte pour les graphes complets.

Si G est complet, on a la borne supérieure ; sinon, il est connu que $a \leq \delta$.

Conjecture A.118 (T, T) :

$$3 - 2cos\frac{\pi}{n} \leq a + \delta \leq 2n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.119 (SO, K) :

$$????? \leq \frac{a}{\delta} \leq \frac{n}{n-1}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés de 2 triangles reliés par un chemin (resp. les graphes complets).

Conjecture A.120 (T, T) :

$$2 - 2cos\frac{\pi}{n} \leq a \cdot \delta \leq n(n-1).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

A.2.12 La connectivité aux sommets

Conjecture A.121 (P, K) :

$$-\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor \leq \nu - \delta \leq 0.$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes constitués de 2 cliques sur $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ et $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ sommets, respectivement, et ayant un sommet commun sans arêtes entre sommets de 2 cliques différentes. La borne supérieure est atteinte pour plusieurs familles de graphes.

Pour la borne inférieure, il facile de voir que si U est un ensemble de sommets déconnectant avec δ maximum, alors $G-U$ est composé de deux composantes connexes C_1 et C_2, et que la plus petite des deux avec U forme une clique. Sinon, l'ajout de toutes les arêtes possibles entre les sommets de $C_1 \cup U$, sous l'hypothèse que C_1 est la plus grande des composantes, et entre les sommets des autres composantes augmenterait δ.

Si $\nu = 1$, alors δ est maximum lorsque C_1 et C_2 sont le plus équilibrées possible et que la plus petite des deux avec U, disons $C_2 \cup U$, forme une clique avec $\delta = \delta(G_{C_2 \cup U})$. Sous ces conditions, $\delta = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$.

Si $\nu \geq 2$, un raisonnement analogue au précédent permet de conclure que

$$\nu - \delta \geq \nu - \left(\left\lfloor \frac{n-\nu}{2} \right\rfloor + \nu - 1\right) = -\left\lfloor \frac{n-\nu-2}{2} \right\rfloor \geq -\left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor.$$

Conjecture A.122 (T, T) :

$$2 \leq \nu + \delta \leq 2n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet pendant (resp. les graphes complets).

Conjecture A.123 (AP, K) :

$$\frac{1}{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \leq \frac{\nu}{\delta} \leq 1.$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes constitués de 2 cliques sur $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ et $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ sommets, respectivement, ayant un sommet commun, sans arêtes entre sommets de 2 cliques différentes. La borne supérieure est atteinte pour plusieurs familles de graphes.

La borne inférieure se démontre comme celle de A.121.

Conjecture A.124 (T, T) :

$$1 \leq \nu \cdot \delta \leq (n-1)^2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet pendant (resp. les graphes complets).

A.2.13 La connectivité aux arêtes

Conjecture A.125 (P, K) :

$$-\left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor \leq \kappa - \delta \leq 0.$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes constitués de 2 cliques sur $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ sommets reliées par une seule arête. La borne supérieure est atteinte pour plusieurs familles de graphes.

La borne inférieure se démontre comme celle de A.121, toutefois sans inclure U dans les composantes connexes issues de la suppression du sous-ensemble déconnectant d'arêtes.

Conjecture A.126 (T, T) :

$$2 \leq \kappa + \delta \leq 2n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet pendant (resp. les graphes complets).

Conjecture A.127 (AP, K) :

$$\frac{1}{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \leq \frac{\kappa}{\delta} \leq 1$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes constitués de 2 cliques sur $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ sommets reliées par une seule arête. La borne supérieure est atteinte pour plusieurs familles de graphes.

La borne inférieure se démontre comme celle de A.125.

Conjecture A.128 (T, T) :

$$1 \leq \kappa \cdot \delta \leq (n-1)^2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet pendant (resp. les graphes complets).

A.2.14 Le nombre de stabilité

Conjecture A.129 (T, T) :

$$2 - n \leq \alpha - \delta \leq n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les étoiles).

Conjecture A.130 (T, P) :

$$3 \leq \alpha + \delta \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour un graphe composé d'une clique et d'un sommet pendant (resp. les étoiles, graphes complets, les graphes bipartis complets et autres).

Pour la borne supérieure, tout sommet d'un stable maximum est voisin d'au plus les $n - \alpha$ sommets qui ne sont pas dans le stable. Donc $\delta \leq n - \alpha$.

Conjecture A.131 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\alpha}{\delta} \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les étoiles).

Conjecture A.132 (T, P) :

$$2 \leq \alpha \cdot \delta \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour un graphe composé d'une clique et d'un sommet pendant (resp. les graphes bipartis complets équilibrés et autres).

La borne supérieure est une conséquense de celle de A.130.

A.2.15 Le nombre de domination

Conjecture A.133 (T, T) :

$$2 - n \leq \beta - \delta \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les graphes avec $\beta = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et ayant un sommet pendant).

Conjecture A.134 (T, P) :

$$2 \leq \beta + \delta \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et un sommet pendant (resp. les graphes complets et autres).

Pour la borne supérieure, le sous-ensemble composé du sommet de degré minimum et de tous ceux qui ne sont pas ses voisins est un ensmble dominant. Donc $\beta \leq n - \delta$.

Conjecture A.135 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\beta}{\delta} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les graphes avec $\beta = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *et ayant un sommet pendant).*

Conjecture A.136 (T, O) :

$$1 \leq \beta \cdot \delta \leq \begin{cases} 2n-4 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 2n-6 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et un sommet pendant (resp. les graphes avec $\delta = n-2$ *et* $\beta = 2$ *si* n *est pair et* $\delta = n-3$ *et* $\beta = 2$ *si* n *est impair).*

A.2.16 La cardinalité maximale d'une clique

Conjecture A.137 (R, T) :

$$2 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \omega - \delta \leq n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis complets équilibrés (resp. les graphes composés d'une clique sur $n-1$ *sommets et un sommet pendant).*

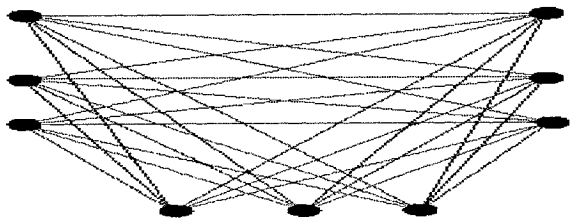


Figure A.4 – Un contre-exemple pour la borne inférieure de A.137 avec $n = 9$, $\omega = 3$ et $\delta = 6$.

Conjecture A.138 (T, T) :

$$3 \leq \omega + \delta \leq 2n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis ayant un sommet pendant (resp. les graphes complets).

Conjecture A.139 (O, T) :

$$\frac{2}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq \frac{\omega}{\delta} \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis complets équilibrés (resp. les graphes composés d'une clique sur $n - 1$ sommets et un sommet pendant).

Conjecture A.140 (T, T) :

$$2 \leq \omega \cdot \delta \leq n(n - 1).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis ayant un sommet pendant (resp. les graphes complets).

A.2.17 Le nombre chromatique

Conjecture A.141 (R, T) :

$$2 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \chi - \delta \leq n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis complets équilibrés (resp. les graphes composés d'une clique sur $n-1$ sommets et un sommet pendant).

Le graphe de la Figure A.4 est un contre-exemple pour la borne inférieure.

Conjecture A.142 (T, T) :

$$3 \leq \chi + \delta \leq 2n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis ayant un sommet pendant (resp. les graphes complets).

Conjecture A.143 (P, T) :

$$\frac{2}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \leq \frac{\chi}{\delta} \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis complets équilibrés (resp. les graphes composés d'une clique sur $n-1$ sommets et un sommet pendant).

Pour la borne inférieure, il suffit de constater que pour χ fixé δ est maximum pour un graphe χ-parti équilibré.

Conjecture A.144 (T, T) :

$$2 \leq \chi \cdot \delta \leq n(n-1).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis ayant un sommet pendant (resp. les graphes complets).

A.2.18 La cardinalité maximale d'un couplage

Conjecture A.145 (O, T) :

$$1 - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq \mu - \delta \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les graphes avec $\mu = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et un sommet pendant).

Conjecture A.146 (T, T) :

$$2 \leq \mu + \delta \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.147 (O, T) :

$$\frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n-1} \leq \frac{\mu}{\delta} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les graphes avec $\mu = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et un sommet pendant).

Conjecture A.148 (T, T) :

$$1 \leq \mu \cdot \delta \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot (n-1).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

A.3 Le degré moyen

A.3.1 La distance moyenne

Conjecture A.149 (T, T) :

$$-n+2 \leq \bar{l} - \bar{d} \leq \frac{n-5}{3} + \frac{2}{n}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.150 (P, P) : (Proposition 30 page 170)

$$4 - \frac{4}{n} \leq \bar{l} + \bar{d} \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.151 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\bar{l}}{\bar{d}} \leq \frac{n^2+n}{6(n-1)}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.152 (P, SP) : (Proposition 31 page 172 et Proposition 32 page 173)

$$4\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \leq \bar{l} \cdot \bar{d} \leq \begin{cases} n-1 & si\ n \leq 9, \\ ???? & si\ n \geq 10. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets si $n \leq 9$ et les graphes Soltés sinon).

A.3.2 Le diamètre

Conjecture A.153 (T, T) :

$$2 - n \leq D - \overline{d} \leq n - 3 + \frac{2}{n}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.154 (P, P) :

$$4 - \frac{2}{n} \leq D + \overline{d} \leq n + 1 - \frac{2}{n}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les chemins et les graphes complets moins une arête, $K_n - e$).

Pour la borne inférieure, si $D = 1$ le graphe est complet, sinon $D \geq 2$ et $\overline{d} \geq 2 - 2/n$. Pour la borne supérieure, d'après Harary [112], si G est un graphe de taille m et de diamètre D,

$$D + \overline{d} \leq D(PK_{n,m}) + \frac{2m}{n}.$$

Des calculs algébriques simples permettent de conclure que le second membre ci-dessus est maximum si $PK_{n,m} \equiv P_n$ ou $PK_{n,m} \equiv K_n - e$.

Conjecture A.155 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{D}{\overline{d}} \leq \frac{n}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.156 (P, SP) :

$$4 - \frac{4}{n} \leq D \cdot \overline{d} \leq ????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les bestioles).

La borne inférieure se démontre comme celle de A.154. Pour la borne supérieure, le résultat structural est une conséquence d'un théorème dû à Harary [112].

A.3.3 Le rayon

Conjecture A.157 (T, T) :

$$2 - \frac{2}{n} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \overline{d} - r \leq n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.158 (T, P) :

$$3 - \frac{2}{n} \leq \overline{d} + r \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets si n est impair et les graphes complets ou le complémentaire d'un couplage parfait si n est pair).

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.18.

Conjecture A.159 (T, T) :

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{si } n \textit{ est pair,} & \frac{4(n-1)}{n^2} \\ \textit{si } n \textit{ est impair,} & \frac{4}{n} \end{array}\right\} \leq \frac{\overline{d}}{r} \leq n-1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les arbres de diamètre $D \geq n-2$ (resp. les graphes complets).

Conjecture A.160 (T, SO) :

$$2 - \frac{2}{n} \leq \overline{d} \cdot r \leq ?????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les paniers).

A.3.4 La maille

Conjecture A.161 (T, T) :

$$-n+2 \leq \overline{d} - g \leq n-4.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.162 (T, P) : (Proposition 13 page 141)

$$5 \leq \overline{d} + g \leq n+2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes unicycliques dont l'unique cycle est un triangle (resp. les graphes complets et les cycles).

Conjecture A.163 (T, T) :

$$\frac{2}{n} \leq \frac{\overline{d}}{g} \leq \frac{n-1}{3}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.164 (T, P) : (Proposition 14 page 142)

$$6 \leq \overline{d} \cdot g \leq 3n - 3.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes unicycliques dont l'unique cycle est un triangle (resp. les graphes complets).

A.3.5 L'excentricité

Conjecture A.165 (T, T) :

$$2 - n \leq ecc - \overline{d} \leq \begin{cases} \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n} - 2 + \frac{2}{n} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{3n-2}{4} - 2 + \frac{2}{n} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.166 (P, P) :

$$4 - \frac{3}{n} \leq ecc + \overline{d} \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les $K_n - E$ où E est un ensemble de 0 à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ arêtes disjointes).

Pour la borne inférieure, si $ecc = 1$, le graphe est complet et $ecc + \overline{d} = n$. Sinon, si $r \geq 2$ alors $ecc + \overline{d} \geq 4 - \frac{2}{n} > 4 - \frac{3}{n}$; si $r = 1$, soit t le dombre de sommets dominants du graphe et on a pour tout sommet v,

$$ecc + \overline{d} \geq \frac{nt + (n-t)(2+t)}{n} = 2t + 2 - \frac{t(t+2)}{n} \geq 4 - \frac{3}{n}.$$

Conjecture A.167 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{ecc}{\overline{d}} \leq \begin{cases} \frac{3n+1}{8} & \textit{si } n \textit{ est impair,} \\ \frac{3n-2}{8}\frac{n}{n-1} & \textit{si } n \textit{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.168 (P, SO) :

$$4 - \frac{6}{n} \leq ecc \cdot \overline{d} \leq ??????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles ($n \geq 4$) (resp. les graphes de Soltés).

La borne inférieure se démontre comme celle de A.166.

A.3.6 La proximité

Conjecture A.169 (T, T) :

$$2 - n \leq \pi - \overline{d} \leq \begin{cases} \frac{n-7}{4} + \frac{2}{n} & \textit{si } n \textit{ est impair,} \\ \frac{n}{4} + \frac{n}{4n-4} + \frac{2}{n} - 2 & \textit{si } n \textit{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.170 (T, P) :

$$3 - \frac{2}{n} \leq \pi + \overline{d} \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.150.

Conjecture A.171 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\pi}{\overline{d}} \leq \begin{cases} \frac{n(n+1)}{8n-8} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{n^2}{8n-8} + \frac{n^2}{8(n-1)^2} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.172 (T, O) :

$$2 - \frac{2}{n} \leq \pi \cdot \overline{d} \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

A.3.7 L'éloignement

Conjecture A.173 (T, T) :

$$2 - n \leq \rho - \overline{d} \leq \frac{n}{2} - 2 + \frac{2}{n}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.174 (P, P) :

$$4 - \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} \leq \rho + \overline{d} \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Pour la borne inférieure, on a

$$\rho \geq \frac{\delta + 2(n-\delta-1)}{n-1} = 2 - \frac{\delta}{n-1} \geq 2 - \frac{1}{n-1} \quad \text{et} \quad \overline{d} \geq 2 - \frac{2}{n}.$$

Conjecture A.175 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\rho}{\overline{d}} \leq \frac{n^2}{4n-4}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.176 (P, SO) :

$$(2 - \frac{1}{n-1})(2 - \frac{2}{n}) \leq \rho \cdot \overline{d} \leq ?????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes de Soltés).

La borne inférieure se démontre comme celle de A.174.

A.3.8 L'index

Conjecture A.177 (K, SO) : (Théorème 22 page 190 et Conjecture 34 page 107)

$$0 \leq \lambda_1 - \overline{d} \leq ????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes réguliers (resp. les ananas).

Conjecture A.178 (T, T) :

$$2 - \frac{2}{n} + 2\cos\frac{\pi}{n+1} \leq \lambda_1 + \overline{d} \leq 2n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.179 (K, P) : (Théorème 22 page 190 et Proposition 40 page 190)

$$1 \leq \frac{\lambda_1}{\overline{d}} \leq \frac{n}{2\sqrt{n-1}}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes réguliers (resp. les étoiles).

Conjecture A.180 (T, T) :

$$\left(4 - \frac{4}{n}\right) \cdot cos\frac{\pi}{n+1} \leq \lambda_1 \cdot \overline{d} \leq (n-1)^2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

A.3.9 L'indice de Randic

Conjecture A.181 (P, P) :

$$\frac{2-n}{2} \leq Ra - \overline{d} \leq \frac{n-7+2\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{n}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Pour la borne supérieure, sur l'ensemble des arbres $\overline{d}$ est fixe et Ra est maximum pour les chemins. Si $m \geq n$ (le graphe n'est pas un arbre), il facile de voir que $Ra - \overline{d}$ est maximum pour les cycles. La comparaison des deux bornes respectives permet de conclure.

Conjecture A.182 (T, T) :

$$2 + \sqrt{n-1} - \frac{2}{n} \leq Ra + \overline{d} \leq \frac{3n-2}{2}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.183 (P, P) :

$$\frac{n}{2n-2} \leq \frac{Ra}{\overline{d}} \leq \frac{n-3+2\sqrt{2}}{n-1}\frac{n}{4}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

La borne supérieure se démontre comme celle de A.181.

Conjecture A.184 (T, T) :

$$\sqrt{n-1}(2 - \frac{2}{n}) \leq Ra \cdot \overline{d} \leq \frac{1}{2}(n-1)n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

A.3.10 La connectivité algébrique

Conjecture A.185 (O, P) :

$$4 - n - \frac{4}{n} \leq a - \overline{d} \leq 1$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes constitués d'une clique sur $n-1$ sommets et un sommet pendant, et la borne supérieure est atteinte pour les graphes complets.

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.117.

Conjecture A.186 (T, T) :

$$4 - \frac{2}{n} - 2cos\frac{\pi}{n} \leq a + \overline{d} \leq 2n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.187 (SO, P) :

$$????? \leq \frac{a}{\overline{d}} \leq \frac{n}{n-1}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cerfs-volants (resp. les graphes complets).

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.119.

Conjecture A.188 (T, T) :

$$(4 - \frac{4}{n})(1 - cos\frac{\pi}{n}) \leq a \cdot \overline{d} \leq n(n-1).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

A.3.11 La connectivité aux sommets

Conjecture A.189 (P, K) :

$$4 - n - \frac{4}{n} \leq \nu - \overline{d} \leq 0.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes constitués d'une clique sur $n-1$ sommets et un sommet pendant (resp. certains graphes réguliers comme les complets).

Pour la borne inférieure, on montre d'abord que pour ν fixé, $\overline{d}$ est maximum si G est composé de deux cliques équilibrées avec ν sommets communs. Puis on démontre que pour de tels graphes $\nu - \overline{d}$ est minimum pour $\nu = 1$.

Conjecture A.190 (T, T) :

$$3 - \frac{2}{n} \leq \nu + \overline{d} \leq 2n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les arbres (resp. les graphes complets).

Conjecture A.191 (AP, K) :

$$\frac{n}{n^2 - 3n + 4} \leq \frac{\nu}{\overline{d}} \leq 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes constitués d'une clique sur $n-1$ sommets et un sommet pendant (resp. certains graphes réguliers comme les complets).

La borne inférieure se démontre exactement comme celle de A.189.

Conjecture A.192 (T, T) :

$$1 \leq \nu \cdot \overline{d} \leq (n-1)^2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les arbres (resp. les graphes complets).

A.3.12 La connectivité aux arêtes

Conjecture A.193 (P, K) :

$$4 - n - \frac{4}{n} \leq \kappa - \overline{d} \leq 0.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes constitués d'une clique sur $n-1$ sommets et un sommet pendant (resp. certains graphes réguliers comme les complets).

La borne inférieure est une conséquence de celle de A.189.

Conjecture A.194 (T, T) :

$$3 - \frac{2}{n} \leq \kappa + \overline{d} \leq 2n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les arbres (resp. les graphes complets).

Conjecture A.195 (AP, K) :

$$\frac{n}{n^2 - 3n + 4} \leq \frac{\kappa}{\overline{d}} \leq 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes constitués d'une clique sur $n-1$ sommets et un sommet pendant (resp. certains graphes réguliers comme les complets).

La borne inférieure est une conséquence de celle de A.191.

Conjecture A.196 (T, T) :

$$1 \leq \kappa \cdot \overline{d} \leq (n-1)^2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les arbres (resp. les graphes complets).

A.3.13 Le nombre de stabilité

Conjecture A.197 (T, T) :

$$2 - n \leq \alpha - \overline{d} \leq n - 3 + \frac{2}{n}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les étoiles).

Conjecture A.198 (SO, P) :

$$????? \leq \alpha + \overline{d} \leq \begin{cases} \frac{5n-2}{4} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{5n-2}{4} + \frac{1}{4n} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour un graphe composé d'une suite de cliques (resp. les graphes complets éclatés avec $\alpha = \lceil \frac{n}{2} \rceil$).

Pour la borne supérieure, il est facile de voir que pour α fixé, $\overline{d}$ est maximum pour un graphe complet éclaté $K_{n-\alpha,\alpha}$; et on montre que pour cette classe de graphes, $\alpha + \overline{d}$ est maximum pour $\alpha = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

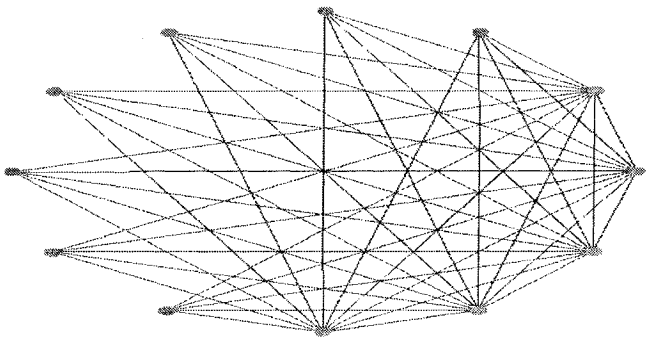


Figure A.5 – Un contre-exemple pour la borne supérieure de A.200 avec $n = 12$ et $\alpha = 7$.

Conjecture A.199 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\alpha}{\overline{d}} \leq \frac{n}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les étoiles).

Conjecture A.200 (SO, R) :

$$?????? \leq \alpha \cdot \overline{d} \leq \begin{cases} \frac{3n^2-2n}{8} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{3(n+1)(n-1)^2}{8n} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour un graphe composé d'une suite de cliques (resp. les graphes complets éclatés avec $\alpha = \lceil \frac{n}{2} \rceil$).

Un contre-exemple (le plus petit connu) est représenté dans la Figure A.5.

A.3.14 Le nombre de domination

Conjecture A.201 (T, T) :

$$2 - n \leq \beta - \overline{d} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2 + \frac{2}{n}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chenilles contenant des sommets de degré 1 ou 3 et un seul sommet de degré 2 si n est impair et deux de degré 2 si n est pair).

Conjecture A.202 (T, P) :

$$3 - \frac{2}{n} \leq \beta + \overline{d} \leq n.$$

La borne supérieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets et autres).

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.62.

Conjecture A.203 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\beta}{\overline{d}} \leq \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2 - \frac{2}{n}}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chenilles contenant des sommets de degré 1 ou 3 et un seul sommet de degré 2 si n est impair et deux de degré 2 si n est pair).

Conjecture A.204 (T, ND) :

$$2 - \frac{2}{n} \leq \beta \cdot \overline{d} \leq ???????$$

La borne inférieure est atteinte pour les étoiles.

A.3.15 La cardinalité maximale d'une clique

Conjecture A.205 (AR, AP) :

$$2 - 2\frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil}{n} \leq \omega - \overline{d} \leq \begin{cases} \frac{n-2}{4} + \frac{2}{n} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{n-2}{4} + \frac{9}{4n} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis complets équilibrés (resp. les graphes composés d'une clique sur $\omega = \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor$ sommets et $n - \omega$ arêtes connectant les autres sommets).

Le graphe de la Figure A.4 est un contre-exemple pour la borne inférieure.
Pour ω fixé, $m \geq n - \omega + \omega(\omega - 1)/2$, donc

$$\omega - \overline{d} \leq \omega + \frac{2n - 2\omega + \omega(\omega - 1)}{n}.$$

Cette dernière expression est maximum pour $\omega = \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor$. D'où la borne supérieure.

Conjecture A.206 (T, T) :

$$4 - \frac{2}{n} \leq \omega + \overline{d} \leq 2n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les arbres (resp. les graphes complets).

Conjecture A.207 (AO, AR) :

$$\frac{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil} \leq \frac{\omega}{\overline{d}} \leq \frac{nt}{t^2 - 3t + 2n}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis complets équilibrés (resp. les graphes composés d'une clique sur $\omega = t = \lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor + 2$ sommets et $n - \omega$ arêtes connectant les autres sommets).

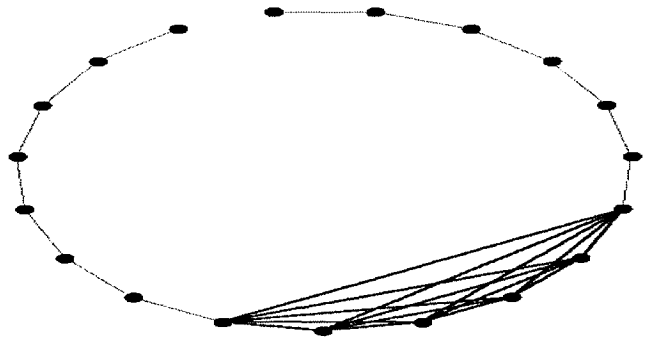


Figure A.6 – Un contre-exemple pour la borne supérieure de A.207 avec $n = 19$ et $\omega = 6$.

Un contre-exemple pour la borne supérieure est représenté dans la Figure A.6.

Conjecture A.208 (T, T) :

$$4 - \frac{4}{n} \leq \omega \cdot \overline{d} \leq n(n-1).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les arbres (resp. les graphes complets).

A.3.16 Le nombre chromatique

Conjecture A.209 (AR, AP) :

$$2 - 2\frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil}{n} \leq \chi - \overline{d} \leq \begin{cases} \frac{n-2}{4} + \frac{2}{n} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{n-2}{4} + \frac{9}{4n} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis complets équilibrés (resp. les graphes composés d'une clique sur $\omega = \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor$ sommets et $n - \omega$ arêtes connectant les autres sommets).

Le graphe de la Figure A.4 est un contre-exemple pour la borne inférieure.
Pour la borne supérieure, on utilise le théorème de Wilf- ? ? (tout graphe χ chromatique admet un graphe partiel dans lequel au moins χ sommets sont de degré au moins $\chi - 1$) et le fait que le graphe est connexe pour déduire que

$$m \geq \frac{\chi(\chi-1)}{2} + n - \chi.$$

Ce qui donne

$$\chi - \overline{d} \leq \chi - \frac{\chi(\chi-1) + 2n - 2\chi}{n} = \frac{\chi^2 - 3\chi + 2n}{n}.$$

Des calculs algébriques simples permettent de montrer que cette dernière formule atteint son maximum pour $\chi = \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor$.

Conjecture A.210 (T, T) :

$$4 - \frac{2}{n} \leq \chi + \overline{d} \leq 2n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les arbres (resp. les graphes complets).

Conjecture A.211 (AO, AR) :

$$\frac{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil} \leq \frac{\chi}{\overline{d}} \leq \frac{nt}{t^2 - 3t + 2n}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis complets équilibrés (resp. les graphes composés d'une clique sur $\omega = t = \lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor + 2$ sommets et $n - t$ arêtes connectant les autres sommets).

Un contre-exemple pour la borne supérieure est représenté dans la Figure A.6.

Conjecture A.212 (T, T) :

$$4 - \frac{4}{n} \leq \chi \cdot \overline{d} \leq n(n-1).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les arbres (resp. les graphes complets).

A.3.17 La cardinalité maximale d'un couplage

Conjecture A.213 (O, T) :

$$1 - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq \mu - \overline{d} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2 + \frac{2}{n}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.214 (T, T) :

$$3 - \frac{2}{n} \leq \mu + \overline{d} \leq \left\lfloor \frac{2}{n} \right\rfloor + n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.215 (O, T) :

$$\frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}{n-1} \leq \frac{\mu}{\overline{d}} \leq \frac{\left\lfloor \frac{2}{n} \right\rfloor}{2 - \frac{2}{n}}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.216 (T, T) :

$$2 - \frac{2}{n} \leq \mu \cdot \overline{d} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot (n-1).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

A.4 La distance moyenne

A.4.1 Le diamètre

Conjecture A.217 (P, T) : (Proposition 23 page 154)

$$\frac{4-2n}{3} \leq \bar{l} - D \leq 0.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.218 (T, T) :

$$2 \leq \bar{l} + D \leq \frac{4n-2}{3}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.219 (SP, T) :(SPC par O. F.)

$$?????? \leq \frac{\bar{l}}{D} \leq 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour des bestioles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.220 (T, T) :

$$1 \leq \bar{l} \cdot D \leq \frac{n^2-1}{3}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

A.4.2 Le rayon

Conjecture A.221 (O, ND) :

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{si } n \textit{ est pair,} & \frac{-n(n-2)}{4(n-1)} \\ \textit{si } n \textit{ est impair,} & \frac{8-(n-1)^3}{4n(n-1)} \end{array}\right\} \leq \bar{l} - r \leq \left\{\begin{array}{ll} 1-\frac{2}{n} & \textit{si } 5 \leq n \leq 15, \\ ????? & \textit{si } n \geq 16. \end{array}\right.$$

La borne inférieure est atteinte pour les cycles pairs et si n est impair pour un cycle avec deux arêtes croisées sur 4 sommets successifs.

Conjecture A.222 (T, T) :

$$2 \leq \bar{l} + r \leq \left\{\begin{array}{ll} \frac{5n-1}{6} & \textit{si } n \textit{ est pair,} \\ \frac{5n+2}{6} & \textit{si } n \textit{ est impair.} \end{array}\right.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.223 (SO, P) : (Proposition 24 page 157)

$$????? \leq \frac{\bar{l}}{r} \leq 2 - \frac{2}{n}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les paniers (resp. les étoiles).

Conjecture A.224 (T, T) :

$$1 \leq \bar{l} \cdot r \leq \left\{\begin{array}{ll} \frac{n^2-1}{6} & \textit{si } n \textit{ est pair,} \\ \frac{n^2+n}{6} & \textit{si } n \textit{ est impair.} \end{array}\right.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

A.4.3 La maille

Conjecture A.225 (P, P) : (Proposition 25 page 161)

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{si } n \textit{ est pair,} & \frac{n^2}{4(n-1)} - n \\ \textit{si } n \textit{ est impair,} & \frac{n+1}{4} - n \end{array}\right\} \leq \bar{l} - g \leq \frac{(n+1)(n^2-10n+12)}{3n(n-1)}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles (resp. un triangle avec un chemin incident à l'un de ses sommets).

Conjecture A.226 (T, P) : (Proposition 26 page 163)

$$4 \leq \bar{l} + g \leq \left\{ \begin{array}{ll} \frac{n^2}{4(n-1)} + n & \textit{si } n \textit{ est pair,} \\ \frac{5n+1}{4} & \textit{si } n \textit{ est impair.} \end{array}\right.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les cycles).

Conjecture A.227 (R, P) :

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{si } n \textit{ est pair,} & \frac{n}{4(n-1)} \\ \textit{si } n \textit{ est impair,} & \frac{n+1}{4n} \end{array}\right\} \leq \frac{\bar{l}}{g} \leq \frac{n^3-7n+12}{9n(n-1)}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles (resp. un triangle avec un chemin incident à l'un de ses sommets).

Conjecture A.228 (T, P) : (P par O. F.)

$$3 \leq \bar{l} \cdot g \leq \left\{ \begin{array}{ll} \frac{n^3}{4(n-1)} & \textit{si } n \textit{ est pair,} \\ \frac{n^2+n}{4} & \textit{si } n \textit{ est impair.} \end{array}\right.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les cycles).

A.4.4 L'excentricité moyenne

Conjecture A.229 (T, AO) :

$$0 \leq ecc - \bar{l} \leq \begin{cases} \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n} - \frac{n+1}{3} & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{5n-10}{12} & si\ n\ est\ pair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.230 (T, T) :

$$2 \leq ecc + \bar{l} \leq \begin{cases} \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n} + \frac{n+1}{3} & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{13n-2}{12} & si\ n\ est\ pair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.231 (T, SO) :

$$1 \leq \frac{ecc}{\bar{l}} \leq ??????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les graphes de Soltés).

Conjecture A.232 (T, T) :

$$1 \leq ecc \cdot \bar{l} \leq \begin{cases} \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n}\frac{n+1}{3} & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{(3n-2)(n+1)}{12} & si\ n\ est\ pair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

A.4.5 La proximité

Conjecture A.233 (SO, T) :

$$???? \leq \pi - \bar{l} \leq 0.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés de 3 chemins équilibrés avec une extrêmité commune, avec $D = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ *(resp. les graphes transmission-réguliers comme les complets et les cycles).*

Conjecture A.234 (T, T) :

$$2 \leq \pi + \bar{l} \leq \begin{cases} \frac{7}{12}(n+1) & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{7}{12}(n+1) + \frac{1}{4n-4} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.235 (O, T) :

$$\frac{n}{2n-2} \leq \frac{\pi}{\bar{l}} \leq 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes transmission-réguliers comme les complets et les cycles).

Conjecture A.236 (T, T) :

$$1 \leq \pi \cdot \bar{l} \leq \begin{cases} \frac{(n+1)^2}{12} & \text{si } n \text{ est impair.} \\ \frac{(n+1)^2}{12} + \frac{n+1}{12n-12} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

A.4.6 L'éloignement

Conjecture A.237 (T, SO) :

$$0 \leq \rho - \bar{l} \leq ??????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes transmission-réguliers comme les complets et les cycles (resp. les graphes de Soltés de diamètre $D = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$*).*

Conjecture A.238 (T, T) :

$$2 \leq \rho + \bar{l} \leq \frac{5n+3}{6}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.239 (T, SO) :

$$1 \leq \frac{\rho}{\bar{l}} \leq ??????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes transmission-réguliers comme les complets et les cycles (resp. les graphes de Soltés).

Conjecture A.240 (T, T) :

$$1 \leq \rho \cdot \bar{l} \leq \frac{n^2+n}{6}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

A.4.7 L'index

Conjecture A.241 (T, T) :

$$2\cos\frac{\pi}{n+1} - \frac{n+1}{3} \leq \lambda_1 - \bar{l} \leq n-2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.242 (ND, P) : (Proposition 42 page 194)

$$???? \leq \lambda_1 + \bar{l} \leq n.$$

la borne supérieure est atteinte pour les graphes complets.

Conjecture A.243 (T, T) :

$$\frac{6}{n+1}\cos\frac{\pi}{n+1} \leq \frac{\lambda_1}{\bar{l}} \leq n-1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.244 (ND, AR) :

$$???? \leq \lambda_1 \cdot \bar{l} \leq \frac{1}{2}\left(n-3+\sqrt{n^2+2n-7}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n(n-1)}\right).$$

La borne supérieure est atteinte pour les graphes complets moins une arête.

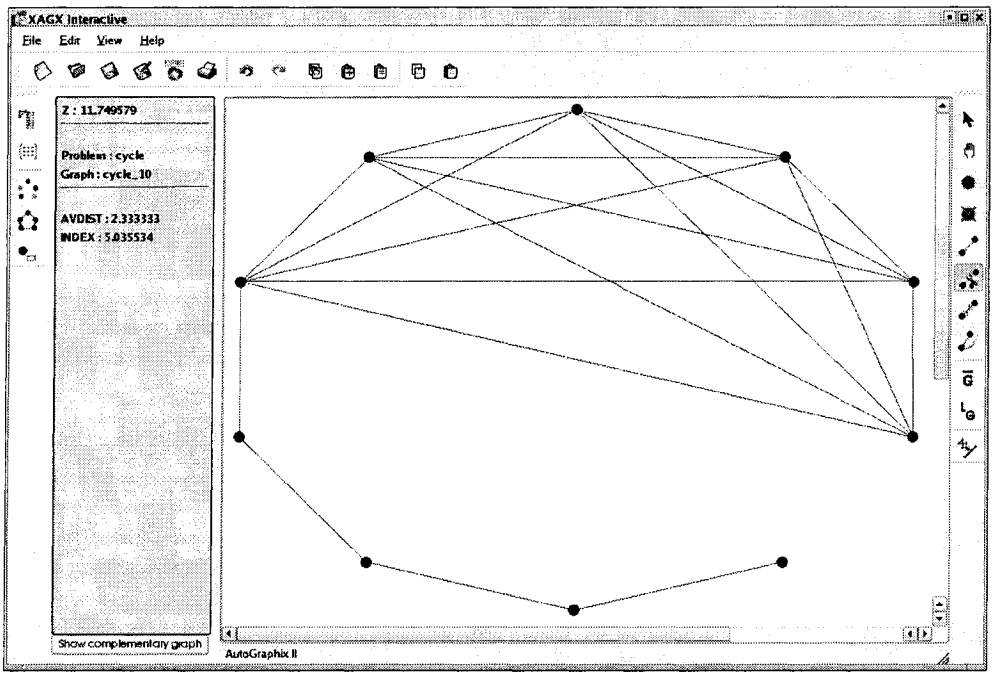


Figure A.7 – Un contre-exemple pour la borne supérieure de A.244.

A.4.8 L'indice de Randić

Conjecture A.245 (O, T) :

$$\sqrt{n-1} - 2 + \frac{2}{n} \leq Ra - \bar{l} \leq \frac{n-2}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.246 (AO, R) :

$$\left.\begin{array}{ll} si\ n \leq 5 & \frac{n+2}{2} \\ si\ n \geq 6 & 2 - \frac{2}{n} + \sqrt{n-1} \end{array}\right\} \leq Ra + \bar{l} \leq \frac{5n - 7 + 6\sqrt{2}}{6}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets si $n \leq 5$ *et pour les étoiles si* $n \geq 6$ *(resp. les chemins).*

Conjecture A.247 (ND, T) :

$$???? \leq \frac{Ra}{\bar{l}} \leq \frac{n}{2}.$$

La borne supérieure est atteinte pour les graphes complets.

Conjecture A.248 (AO, R) :

$$\left.\begin{array}{ll} si\ n \leq 12 & \frac{n}{2} \\ si\ n \geq 13 & (\sqrt{n-1})(2-\frac{2}{n}) \end{array}\right\} \leq Ra \cdot \bar{l} \leq \frac{n+1}{3} \cdot \frac{n-3+2\sqrt{2}}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets si $n \leq 12$ *et pour les étoiles si* $n \geq 13$ *(resp. les chemins).*

A.4.9 La connectivité algébrique

Conjecture A.249 (T, T) :

$$2(1 - cos\frac{\pi}{n}) - \frac{n+1}{3} \leq a - \bar{l} \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.250 (SO, P) :

$$????? \leq a + \bar{l} \leq n + 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cerfs-volants de diamètre $D = 3$ *(resp. les graphes complets).*

Si $G \equiv K_n$, on a la borne supérieure, sinon $a + \bar{l} \leq \delta + \bar{l} \leq n$ (voir Proposition 33 page 174).

Conjecture A.251 (T, T) :

$$6\frac{1-cos\frac{\pi}{n}}{n+1} \leq \frac{a}{\bar{l}} \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.252 (SO, P) :

$$????? \leq a \cdot \bar{l} \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés de 2 triangles reliés par un chemin (resp. les graphes complets).

Si $G \equiv K_n$, on a la borne supérieure, sinon $a \cdot \bar{l} \leq \delta \cdot \bar{l} \leq n-1$ (voir Proposition 34 page 176).

A.4.10 La connectivité aux sommets

Conjecture A.253 (T, T) :

$$\frac{2-n}{3} \leq \nu - \bar{l} \leq n-2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.254 (P, P) :

$$\frac{2n^2-4}{n(n-1)} \leq \nu + \bar{l} \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cerfs-volants de diamètre $D = 2$ (resp. les graphes complets).

La borne inférieure se démontre comme celle de A.189. La borne supérieure est une conséquence de celle de A.82 (Proposition 33 page 174) et du fait que $\nu \leq \delta$.

Conjecture A.255 (T, T) :

$$\frac{3}{n+1} \leq \frac{\nu}{\bar{l}} \leq n-1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.256 (P, P) :

$$\frac{n^2+n-4}{n(n-1)} \leq \nu \cdot \bar{l} \leq n-1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cerfs-volants de diamètre $D = 2$ (resp. les graphes complets).

La borne inférieure se démontre comme celle de A.191. La borne supérieure est une conséquence de celle de A.84 (Proposition 34 page 176) et du fait que $\nu \leq \delta$.

A.4.11 La connectivité aux arêtes

Conjecture A.257 (T, T) :

$$\frac{2-n}{3} \leq \kappa - \bar{l} \leq n-2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.258 (P, P) :

$$\frac{2n^2-4}{n(n-1)} \leq \kappa + \bar{l} \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cerfs-volants de diamètre $D = 2$ (resp. les graphes complets).

Les deux borne se démontrent comme celles de A.254.

Conjecture A.259 (T, T) :

$$\frac{3}{n+1} \leq \frac{\kappa}{\bar{l}} \leq n-1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.260 (P, P) :

$$\frac{n^2+n-4}{n(n-1)} \leq \kappa \cdot \bar{l} \leq n-1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cerfs-volants de diamètre $D = 2$ (resp. les graphes complets).

Les deux borne se démontrent comme celles de A.256.

A.4.12 Le nombre de stabilité

Conjecture A.261 (K, P) : (Proposition 20 page 148)

$$0 \leq \alpha - \bar{l} \leq n - 3 + \frac{2}{n}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les étoiles).

Conjecture A.262 (T, P) : (Proposition 21 page 150)

$$2 \leq \alpha + \bar{l} \leq n + 1 - \frac{2}{n}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les étoiles).

Conjecture A.263 (K, P) : (Proposition 22 page 152)

$$1 \leq \frac{\alpha}{\bar{l}} \leq \frac{n}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les étoiles).

Conjecture A.264 (T, ND) :

$$1 \leq \alpha \cdot \bar{l} \leq ????$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes complets.

A.4.13 Le nombre de domination

Conjecture A.265 (SO, SO) :

$$????? \leq \beta - \bar{l} \leq ??????$$

La borne inférieure est atteinte pour les doubles comètes équilibrées avec $D = 3\left\lceil \frac{2n}{9} \right\rceil - 4$ *et* $\beta = \left\lfloor \frac{2n}{9} \right\rfloor - 1$. *La borne supérieure* ($n \geq 9$) *est atteinte pour des graphes composés d'une clique sur* $\frac{n}{2}$ *et* $\frac{n}{2}$ *sommets pendants sans voisins communs si* n *est pair, et pour les graphes composés d'une clique sur* $\frac{n+1}{2}$ *sommets et* $\frac{n-3}{2}$ *sommets pendants sans voisins communs, et le dernier sommet est relié aux deux sommets de la clique qui n'ont pas de voisins pendants, si* n *est impair.*

Conjecture A.266 (T, ND) :

$$2 \leq \beta + \bar{l} \leq ??????$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes complets.

Conjecture A.267 (O, AO) :

$$\frac{n}{2n-2} \leq \frac{\beta}{\bar{l}} \leq \frac{1}{2} + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

La borne inférieure est atteinte pour les étoiles. La borne supérieure, si $n \geq 9$, pour des graphes composés d'une clique sur $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2}$ sommets pendants sans voisins communs si n est pair, et pour les graphes composés d'une clique sur $\frac{n+1}{2}$ sommets et $\frac{n-3}{2}$ sommets pendants sans voisins communs, et le dernier sommet est relié aux deux sommets de la clique qui n'ont pas de voisins pendants, si n est impair.

Conjecture A.268 (T, ND) :

$$1 \leq \beta \cdot \bar{l} \leq ??????$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes complets.

A.4.14 La cardinalité maximale d'une clique

Conjecture A.269 (T, T) :

$$\left\lfloor \frac{5-n}{3} \right\rfloor \leq \omega - \bar{l} \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.270 (AO, P) :

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{si } n \textit{ est pair,} & \frac{7}{2} - \frac{1}{2n-2} \\ \textit{si } n \textit{ est impair,} & \frac{7}{2} - \frac{1}{2n} \end{array}\right\} \leq \omega + \bar{l} \leq n+1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis complets équilibrés (resp. les graphes complets).

Pour la borne supérieure, si $G \equiv K_n$, on a la borne ; sinon $\omega \leq \Delta$ et en utilisant la borne supérieure de A.10,

$$\omega + \bar{l} \leq \Delta + \bar{l} \leq n + 1 - \frac{2}{n} < n+1.$$

Conjecture A.271 (T, T) :

$$\frac{6}{n+1} \leq \frac{\omega}{\bar{l}} \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.272 (AO, SO) :

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{si } n \textit{ est pair,} & 3 - \frac{1}{n-1} \\ \textit{si } n \textit{ est impair,} & 3 - \frac{1}{n} \end{array}\right\} \leq \omega \cdot \bar{l} \leq ?????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis complets équilibrés (resp. les graphes de Soltés).

A.4.15 Le nombre chromatique

Conjecture A.273 (T, T) :

$$\left\lfloor \frac{5-n}{3} \right\rfloor \leq \chi - \bar{l} \leq n-1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis complets équilibrés (resp. les graphes complets).

Conjecture A.274 (AP, P) :

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{si } n \textit{ est pair,} & \frac{7}{2} - \frac{1}{2n-2} \\ \textit{si } n \textit{ est impair,} & \frac{7}{2} - \frac{1}{2n} \end{array}\right\} \leq \chi + \bar{l} \leq n + 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis complets équilibrés (resp. les graphes complets).

Pour la borne inférieure, si $\chi = 2$, il est facile de démontrer que $\bar{l}$ est minimum pour un graphe biparti complet équilibré. Si $\chi \geq 3$, alors $\chi + \bar{l} \geq 4$. La borne supérieure se démontre comme celle de A.270.

Conjecture A.275 (T, T) :

$$\frac{6}{n+1} \leq \frac{\chi}{\bar{l}} \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis complets équilibrés (resp. les graphes complets).

Conjecture A.276 (AP, SO) :

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{si } n \textit{ est pair,} & 3 - \frac{1}{n-1} \\ \textit{si } n \textit{ est impair,} & 3 - \frac{1}{n} \end{array}\right\} \leq \chi \cdot \bar{l} \leq ?????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis complets équilibrés (resp. les graphes de Soltés).

La borne inférieure se démontre comme celle de A.274.

A.4.16 La cardinalité maximale d'un couplage

Conjecture A.277 (O, T) :

$$-1 + \frac{2}{n} \leq \mu - \bar{l} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.278 (P, T) :

$$3 - \frac{2}{n} \leq \mu + \bar{l} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \frac{n+1}{3}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les chemins).

Pour la borne inférieure, si $\mu = 1$, alors $G \equiv S_n$ et on a la borne ; sinon $\mu + \bar{l} \geq 3$.

Conjecture A.279 (O, T) :

$$\frac{n}{2n-2} \leq \frac{\mu}{\bar{l}} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.280 (P, T) :

$$2 - \frac{2}{n} \leq \mu \cdot \bar{l} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \frac{n+1}{3}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les chemins).

La borne inférieure se démontre comme celle de A.278.

A.5 Le diamètre

A.5.1 Le rayon

Conjecture A.281 (T, P) :

$$0 \leq D - r \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins si n est pair, et les arbres de diamètre $D \geq n-2$).

Pour la borne supérieure, en utilisant la relation $r \leq D \leq 2r$, on obtient $D - r \leq r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Si n est impair, il n'y a rien à démontrer. Sinon, supposons que $D - r = \frac{n}{2}$, donc nécessairement $r = \frac{n}{2}$; et on obtient $D = 2r = n$. Ce qui est une contradiction.

Conjecture A.282 (T, T) :

$$2 \leq D + r \leq n - 1 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.283 (T, K) :

$$1 \leq \frac{D}{r} \leq 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour plusieurs familles de graphes avec $D = r$ comme les graphes complets et les cycles (resp. plusieurs familles de graphes avec $D = 2r$ comme les étoiles et les graphes completes moins une arête, $K_n - e$).

Conjecture A.284 (T, T) :

$$1 \leq D \cdot r \leq (n-1) \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

A.5.2 La maille

Conjecture A.285 (P, P) : (Proposition 7 page 134)

$$-\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq D - g \leq n - 5.$$

La borne inférieure est atteinte pour les cycles. La borne supérieure est atteinte par des graphes ayant l'une des structures suivantes :

- *un triangle et un chemin suspendu à un des sommets du triangle.*
- *un triangle et deux chemins suspendus chacun à un des sommets du triangle (sans restriction sur la répartition du nombre de sommets des chemins).*
- *un $K_4 - e$ (graphe complets sur 4 sommets moins une arête) et un chemin suspendu à un des sommets non adjacents du $K_4 - e$.*
- *un $K_4 - e$ et deux chemins suspendus chacun à un des deux sommets non adjacents du $K_4 - e$ (sans restriction sur la répartition du nombre de sommets des chemins).*

Conjecture A.286 (P, P) : (Proposition 8 page 135)

$$4 \leq D + g \leq \begin{cases} \frac{3n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{3n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets. La borne supérieure est atteinte pour les cycles pairs pour n pair, et pour les cycles impairs et les cycles de longueur $n - 1$ auxquels est suspendu un sommet si n est impair.

Conjecture A.287 (P, P) : (Proposition 9 page 136)

$$\frac{1}{3} \leq \frac{D}{g} \leq \frac{n-2}{3}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les complets. La borne supérieure est atteinte par des graphes ayant l'une des structures suivantes :

- *un triangle et un chemin suspendu à un des sommets du triangle.*
- *un triangle et deux chemins suspendus chacun à un des sommets du triangle (sans restriction sur la répartition du nombre de sommets des chemins).*
- *un K_4-e (graphe complets sur 4 sommets moins une arête) et un chemin suspendu à un des sommets non adjacents du K_4-e.*
- *un K_4-e et deux chemins suspendus chacun à un des deux sommets non adjacents du K_4-e (sans restriction sur la répartition du nombre de sommets des chemins).*

Conjecture A.288 (P, P) : (Proposition 10 page 137)

$$3 \leq D \cdot g \leq \begin{cases} \frac{n^2}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{n^2-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les cycles si n est pair, et les cycles de longueur $n-1$ avec une arête pendante si n est impair).

A.5.3 L'excentricité moyenne

Conjecture A.289 (SO, T) :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{si } n \text{ est pair,} & \frac{2-n}{4} \\ \text{si } n \text{ est impair,} & \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n} - n + 1 \end{array}\right\} \leq ecc - D \leq 0.$$

La borne inférieure est atteinte pour les chemins et si n est pair aussi pour les graphes composé d'un C_4 (resp. K_4-e) avec deux chemins de même longueur reliés à deux sommets non adjacents du C_4 (resp. du K_4-e). La borne supérieure est atteinte pour les graphes diamètriques.

Conjecture A.290 (T, T) :

$$2 \leq ecc + D \leq \begin{cases} \frac{7n-6}{4} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n} + n - 1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.291 (O, T) :

$$2 - \frac{4}{n+2} \leq \frac{ecc}{D} \leq 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets moins une arête (resp. les graphes diamétriques).

Conjecture A.292 (T, T) :

$$1 \leq ecc \cdot D \leq \begin{cases} \frac{3n+1}{4}\frac{(n-1)^2}{n} & \textit{si } n \textit{ est impair,} \\ \frac{(3n-2)(n-1)}{4} & \textit{si } n \textit{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

A.5.4 La proximité

Conjecture A.293 (P, T) :

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{si } n \textit{ est impair,} & \frac{5-3n}{4} \\ \textit{si } n \textit{ est pair,} & \frac{5-3n}{4} + \frac{1}{4n-4} \end{array}\right\} \leq \pi - D \leq 0.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Pour un diamètre fixé D,

$$\pi \geq \begin{cases} \frac{1}{n-1}\left(n - D - 1 + \sum_{k=1}^{\frac{D-1}{2}} k + \sum_{k=1}^{\frac{D+1}{2}} k\right) & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{1}{n-1}\left(n - D - 1 + 2\sum_{k=1}^{\frac{D}{2}} k\right) & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

$$\pi - D \geq \begin{cases} \frac{D^2-2D+4n-3}{4n-4} - D & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{D^2-2D+4n-4}{4n-4} - D & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Les deux expressions de droite sont decroissantes et atteignent leur minimums respectifs pour $D = n - 1$. D'où la borne inférieure.

Conjecture A.294 (T, T) :

$$2 \leq \pi + D \leq \begin{cases} \frac{5n-3}{4} & \textit{si } n \textit{ est impair,} \\ \frac{5n-3}{4} + \frac{1}{4n-4} & \textit{si } n \textit{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.295 (ND, T) :

$$?????? \leq \frac{\pi}{D} \leq 1.$$

La borne supérieure est atteinte pour les graphes complets.

Conjecture A.296 (T, T) :

$$1 \leq \pi \cdot D \leq \begin{cases} \frac{n^2-1}{4} & \textit{si } n \textit{ est impair,} \\ \frac{n^2}{4} & \textit{si } n \textit{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

A.5.5 L'éloignement

Conjecture A.297 (P, T) :

$$\frac{2-n}{2} \leq \rho - D \leq 0.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Pour la borne inférieure, soit v un sommet avec $ecc(v) = D$. La transmission de v est d'au moins $(n - D) + 2 + 3 \cdots + D$. Donc

$$\rho - D \geq \frac{(n - D) + 2 + 3 \cdots + D}{(n - 1)} - D = \frac{D(D - 1)}{2(n - 1)} - D + 1.$$

Cette dernière expression atteint son minimum pour $D = n - 1$.

Conjecture A.298 (T, T) :

$$2 \leq \rho + D \leq \frac{3n - 2}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.299 (P, T) :

$$\frac{n}{2n - 2} \leq \frac{\rho}{D} \leq 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Pour la borne inférieure, soit v un sommet avec $ecc(v) = D$. La transmission de v est d'au moins $(n - D) + 2 + 3 \cdots + D$. Donc

$$\frac{\rho}{D} \geq \frac{(n - D) + 2 + 3 \cdots + D}{D(n - 1)} = \frac{D(D + 1) + 2n - 2D - 2}{2D(n - 1)}.$$

Cette dernière expression atteint son minimum pour $D = n - 1$.

Conjecture A.300 (T, T) :

$$1 \leq \rho \cdot D \leq \frac{n(n - 1)}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

A.5.6 L'index

Conjecture A.301 (T, T) :

$$2\cos\frac{\pi}{n+1} - n + 1 \leq \lambda_1 - D \leq n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.302 (R, AO) :

$$2 + \sqrt{n-1} \leq \lambda_1 + D \leq n - 1 + 2cos\frac{\pi}{n+1}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les chemins).

L'hypercube de dimension d, noté Q_d, est le graphe dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des mots de longueur d sur $\{0, 1\}$ et où deux mots sont liés par une arête si et seulement s'ils diffèrent d'un seul bit. Pour Q_d, on a $D = r = \lambda_1 = d$. Si $d \geq 17$, Q_d est un contre-exemple pour la borne inférieure ci-dessus.

Conjecture A.303 (T, T) :

$$\frac{2}{n-1}\cos\frac{\pi}{n+1} \leq \frac{\lambda_1}{D} \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.304 (R, SO) :

$$2\sqrt{n-1} \leq \lambda_1 \cdot D \leq ????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les bestioles de diamètre $D = \frac{n+1}{2}$).

La borne inférieure a les mêmes contre-exemples que celle de A.302.

A.5.7 L'indice de Randić

Conjecture A.305 (O, T) :

$$\sqrt{2} - \frac{n+1}{2} \leq Ra - D \leq \frac{n-2}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.306 (T, P) :

$$2 + \sqrt{n-1} \leq Ra + D \leq \frac{3n - 5 + 2\sqrt{2}}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les chemins).

Pour la borne supérieure, si G est un arbre la borne est évidente, sinon,

$$Ra + D \leq \frac{n}{2} + n - 2 < \frac{3n - 5 + 2\sqrt{2}}{2}.$$

Conjecture A.307 (O, T) :

$$\frac{n - 3 + 2\sqrt{2}}{2n - 2} \leq \frac{Ra}{D} \leq \frac{n}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.308 (T, P) :

$$2\sqrt{n-1} \leq Ra \cdot D \leq (n-1)(\frac{n - 3 + 2\sqrt{2}}{2}).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les chemins).

La borne supérieure se démontre comme celle de A.306.

A.5.8 La connectivité algébrique

Conjecture A.309 (T, T) :

$$3 - n - 2cos\frac{\pi}{n} \leq a - D \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.310 (O, P) :

$$3 \leq a + D \leq n + 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes de diamètre $D = 2$ et de connectivité algébrique $a = 1$ (resp. les graphes complets).

Pour la borne supérieure, si $G \equiv K_n$ on a la borne ; sinon $a + D \leq \delta + D \leq n$.

Conjecture A.311 (T, T) :

$$\frac{2}{n-1}(1 - cos\frac{\pi}{n}) \leq \frac{a}{D} \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.312 (SO, O) :

$$????? \leq a \cdot D \leq 2n - 4.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les doubles comètes équilibrées (sauf pour $n = 7, 9$) avec d'éventuelles arêtes entre les voisins d'un même sommet de degré maximum $\Delta = \lceil \frac{n+1}{3} \rceil$ (resp. le complémentaire d'un couplage : un ensemble d'arêtes disjointes).

A.5.9 La connectivité aux sommets

Conjecture A.313 (T, T) :

$$2 - n \leq \nu - D \leq n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.314 (T, P) :

$$3 \leq \nu + D \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes de diamètre $D = 2$ et de connectivité $\nu = 1$ (resp. les graphes complets, les chemins ou le complémentaire d'un couplage parfait).

La borne supérieure est une conséquence de A.86.

Conjecture A.315 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\nu}{D} \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.316 (T, O) :

$$2 \leq \nu \cdot D \leq 2n - 4.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes de diamètre $D = 2$ et de connectivité $\nu = 1$ (resp. le complémentaire d'un couplage : un ensemble d'arêtes disjointes).

A.5.10 La connectivité aux arêtes

Conjecture A.317 (T, T) :

$$2 - n \leq \kappa - D \leq n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.318 (T, P) :

$$3 \leq \kappa + D \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes de diamètre $D = 2$ et de connectivité $\kappa = 1$ (resp. les graphes complets, les chemins ou le complémentaire d'un couplage parfait).

La borne supérieure est une conséquence de A.86.

Conjecture A.319 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\kappa}{D} \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.320 (T, O) :

$$2 \leq \kappa \cdot D \leq 2n - 4.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes de diamètre $D = 2$ et de connectivité $\kappa = 1$ (resp. le complémentaire d'un couplage : un ensemble d'arêtes disjointes).

A.5.11 Le nombre de stabilité

Conjecture A.321 (P, T) :

$$1 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \alpha - D \leq n - 3.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les étoiles).

La borne inférieure se déduit du fait que $\alpha \geq \lceil \frac{D+1}{2} \rceil$.

Conjecture A.322 (T, P) :

$$2 \leq \alpha + D \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

La borne supérieure se déduit du fait que $\alpha \leq \lceil \frac{D+1}{2} \rceil + n - D - 1$.

Conjecture A.323 (AP, T) :

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{si } n \textit{ est pair,} & \frac{n}{2n-2} \\ \textit{si } n \textit{ est impair,} & \frac{n-1}{2n-4} \end{array}\right\} \leq \frac{\alpha}{D} \leq \frac{n-1}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins si n est pair et pour les graphes de Soltés $K_{n,n}$ si n est impair (resp. les étoiles).

Pour la borne inférieure, même remarque que pour A.321.

Conjecture A.324 (T, P) :

$$1 \leq \alpha \cdot D \leq \begin{cases} \frac{n^2-4}{2} & \textit{si } n \textit{ est pair,} \\ \frac{n^2-1}{2} & \textit{si } n \textit{ est impair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins se terminant en V si n est pair et les chemins si n est impair).

Pour la borne supérieure, même remarque que pour A.322.

A.5.12 Le nombre de domination

Conjecture A.325 (AP, O) :

$$\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - n + 1 \leq \beta - D \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 3.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. des graphes composés d'une clique sur $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ sommets et $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sommets pendants sans voisins communs).

Pour la borne inférieure, il suffit de constater que $\beta \geq \lceil \frac{D+1}{3} \rceil$.

Conjecture A.326 (T, AP) :

$$2 \leq \beta + D \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + n - 1.$$

La borne supérieure est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins et autres).

On montre d'abord que le maximum est atteint pour un arbre, puis on définit l'operation qui consiste à déconnecter un sommet pendant, qui n'est pas extrémité d'une chaîne diamétrique, et de le relier à une extrémité d'une chaîne diamétrique. Cette opération augmente $\beta + D$ et, itérée, conduit à un chemin.

Conjecture A.327 (AP, P) :

$$\frac{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}{n - 1 - n[3]} \leq \frac{\beta}{D} \leq \frac{1}{3} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

La borne inférieure est atteinte pour les chemins si $n \equiv 0[3]$, *pour les graphes composés d'un triangle et d'un chemin incident à un de ses sommets si* $n \equiv 1[3]$, *les graphes composés d'un chemin sur* $n-2$ *sommets et d'un triangle dont l'un des sommets coincide avec le voisin d'une des extrémités du chemin si* $n \equiv 2[3]$. *La borne supérieure est atteinte pour des graphes composés d'une clique sur* $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ *sommets et* $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *sommets pendants qui pris deux à deux n'ont pas de voisin commun.*

Conjecture A.328 (T, AO) :

$$1 \leq \beta \cdot D \leq \begin{cases} \frac{n+3}{3}(n-2) & si\ n \equiv 3[n], \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil (n-1) & sinon. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les arbres avec $D = n-2$ *et* $\beta = \frac{n+3}{3}$ *si* $n \equiv 3[n]$, *et les chemins sinon).*

A.5.13 La cardinalité maximale d'une clique

Conjecture A.329 (T, T) :

$$3 - n \leq \omega - D \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.330 (T, P) :

$$4 \leq \omega + D \leq n + 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis de diamètre 2 (resp. les graphes complets, les chemins et autres).

Un chaîne diamétrique contient au plus 2 sommets d'une clique, donc $D \leq n - \omega + 1$. D'où la borne supérieure.

Conjecture A.331 (T, T) :

$$\frac{2}{n-1} \leq \frac{\omega}{D} \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.332 (T, P) :

$$4 \leq \omega \cdot D \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis de diamètre 2 (resp. les cerfs-volants avec $\omega \in \{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor, \lceil \frac{n+1}{2} \rceil\}$*).*

La borne supérieure est une conséquence de A.330.

A.5.14 Le nombre chromatique

Conjecture A.333 (T, T) :

$$3 - n \leq \chi - D \leq n - 1$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.334 (T, P) :

$$4 \leq \chi + D \leq n + 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis de diamètre 2 (resp. les graphes complets, les chemins et autres).

Les sommets de G peuvent être colorés avec au plus $n - D + 1$ couleurs ; 2 couleurs pour une chaîne diamétrique et $n - D - 1$ pour les autres sommets. D'où la borne supérieure.

Conjecture A.335 (T, T) :

$$\frac{2}{n-1} \leq \frac{\chi}{D} \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.336 (T, P) :

$$4 \leq \chi \cdot D \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis de diamètre 2 (resp. pour les cerfs-volants avec $\chi \in \{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor, \lceil \frac{n+1}{2} \rceil\}$*).*

La borne supérieure est une conséquence de A.334.

A.5.15 La cardinalité maximale d'un couplage

Conjecture A.337 (P, T) :

$$1 - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq \mu - D \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Pour la borne inférieure, il suffit de constater que $\mu \geq \lceil D/2 \rceil$.

Conjecture A.338 (T, T) :

$$3 \leq \mu + D \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les chemins).

Conjecture A.339 (P, T) :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\mu}{D} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

La borne inférieure se démontre comme celle de A.337.

Conjecture A.340 (T, T) :

$$2 \leq \mu \cdot D \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot (n-1).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

A.6 Le rayon

A.6.1 La maille

Conjecture A.341 (P, P) : (Proposition 5 page 132)

$$-\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq r - g \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 3.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles (resp. les cycles avec une corde pour former un triangle).

Conjecture A.342 (T, T) :

$$4 \leq r + g \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et un triangle (resp. les cycles).

Conjecture A.343 (P, P) : (Proposition 6 page 133)

$$\frac{1}{3} \leq \frac{r}{g} \leq \frac{1}{3} \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et un triangle (resp. les cycles avec une corde pour former un triangle).

Conjecture A.344 (T, T) :

$$3 \leq r \cdot g \leq n \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et un triangle (resp. les cycles).

A.6.2 L'excentricité moyenne

Conjecture A.345 (T, P) :

$$0 \leq ecc - r \leq \begin{cases} \frac{n}{4} - \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{n}{4} - \frac{1}{4n} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes diamétriques (resp. les chemins si n est impair et les chemins en V ou les graphes composés d'un triangle et d'un chemin incident à un de ses sommets si n est pair).

Conjecture A.346 (T, T) :

$$2 \leq ecc + r \leq \begin{cases} \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{5n-2}{4} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.347 (T, P) :

$$1 \leq \frac{ecc}{r} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes diamétriques (resp. les graphes contenant un seul sommet dominant).

Si $r = 1$, on a

$$ecc \leq \frac{1 + 2(n-1)}{n} = 2 - \frac{1}{n}.$$

Si $r \geq 2$, on a

$$\frac{ecc}{r} \leq \frac{2 + D(n-1)}{rn} \leq \frac{D}{r} - \frac{D}{rn} + \frac{2}{rn} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Conjecture A.348 (T, T) :

$$1 \leq ecc \cdot r \leq \begin{cases} \frac{(3n+1)(n-1)^2}{8n} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{3n^2-2n}{8} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

A.6.3 La proximité

Conjecture A.349 (O, T) :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{si } n \text{ est pair,} & \frac{n^2}{4n-4} - \frac{n}{2} \\ \text{si } n \text{ est impair,} & \frac{1-n}{4} + \frac{1}{n-1} \end{array}\right\} \leq \pi - r \leq 0.$$

La borne inférieure est atteinte pour les cycles ou les chemins si n est pair et pour les cycles avec une arête pour former un triangle ou les cycles avec deux arêtes croisées sur 4 sommets successifs si n est impair. La borne supérieure est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant.

Conjecture A.350 (T, T) :

$$2 \leq \pi + r \leq \begin{cases} \frac{3n+1}{4} + \frac{1}{4n-4} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{3n-1}{4} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant (resp. les chemins).

Conjecture A.351 (ND, T) :

$$????? \leq \frac{\pi}{r} \leq 1.$$

La borne supérieure est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant.

Conjecture A.352 (T, T) :

$$1 \leq \pi \cdot r \leq \begin{cases} \frac{n^2+n}{8} + \frac{1}{8n-8} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{n^2-1}{8} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant (resp. les chemins).

A.6.4 L'éloignement

Conjecture A.353 (O, AO) :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{si } n \text{ est pair,} & \frac{n^2}{4n-4} - \frac{n}{2} \\ \text{si } n \text{ est impair,} & \frac{3-n}{4} \end{array}\right\} \leq \rho - r \leq t - t\frac{2t-1}{n-1}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles si n est pair et pour les cycles avec deux arêtes croisées sur 4 sommets successifs si n est impair (resp. les comètes avec d'éventuelles arêtes entre les voisins du sommets de degré maximum, de plus $r = t = \lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor$ et $\Delta = n - 2\lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor + 1$).

Conjecture A.354 (T, T) :

$$2 \leq \rho + r \leq \frac{n}{2} + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.355 (O, P) :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{si } n \text{ est pair,} & \frac{n}{2n-2} \\ \text{si } n \text{ est impair,} & \frac{n+1}{2n-2} \end{array}\right\} \leq \frac{\rho}{r} \leq 2 - \frac{1}{n-1}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles si n est pair et pour les cycles avec deux arêtes croisées sur 4 sommets successifs si n est impair (resp. les graphes ayant un sommet dominant et un sommet pendant).

Conjecture A.356 (T, T) :

$$1 \leq \rho \cdot r \leq \frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

A.6.5 L'index

Conjecture A.357 (T, T) :

$$2\cos\frac{\pi}{n+1} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \lambda_1 - r \leq n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.358 (ND, P) : (Proposition 41 page 192)

$$????? \leq \lambda_1 + r \leq n.$$

La borne supérieure est atteinte pour les graphes complets et, si n est pair, pour le complémentaire d'un couplage parfait.

Conjecture A.359 (T, T) :

$$\frac{2\cos\frac{\pi}{n+1}}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} \leq \frac{\lambda_1}{r} \leq n-1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.360 (R, SO) :

$$\sqrt{n-1} \leq \lambda_1 \cdot r \leq ?????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les paniers avec $r = \lfloor\frac{n+3}{4}\rfloor$*).*

La borne inférieure a les mêmes contre-exemples que celle de A.302.

A.6.6 L'indice de Randić

Conjecture A.361 (O, T) :

$$\frac{n+2\sqrt{2}-3}{2} - \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \leq Ra - r \leq \frac{n-2}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins si n est pair et pour les chemins en V si n est impair (resp. les graphes complets).

Conjecture A.362 (T, T) :

$$1 + \sqrt{n-1} \leq Ra + r \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \frac{n}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les cycles).

Conjecture A.363 (O, T) :

$$\frac{n + 2\sqrt{2} - 3}{2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \leq \frac{Ra}{r} \leq \frac{n}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins si n est pair et pour les chemins en V si n est impair (resp. les graphes complets).

Conjecture A.364 (T, T) :

$$\sqrt{n-1} \leq Ra \cdot r \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \frac{n}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les cycles).

A.6.7 La connectivité algébrique

Conjecture A.365 (T, T) :

$$2(1 - cos(\frac{\pi}{n})) - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq a - r \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.366 (P, P) :

$$2 \leq a + r \leq n + 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes de rayon $r = 1$ *et de connectivité algébrique* $a = 1$ *(resp. les graphes complets).*

Si $r = 1$, alors $\Delta = n - 1$ et donc $a \geq 1$, sinon $a + r > 2$. D'où la borne inférieure. Pour la borne supérieure, si $G \equiv K_n$, on a la borne, sinon $a + r \leq \delta + r \leq n$ (voir A.90).

Conjecture A.367 (T, T) :

$$\frac{2(1 - cos\frac{\pi}{n})}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq \frac{a}{r} \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.368 (ND, O) :

$$????? \leq a \cdot r \leq 4 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 4.$$

La borne supérieure est atteinte pour le complémentaire d'un couplage parfait.

A.6.8 La connectivité aux sommets

Conjecture A.369 (T, T) :

$$1 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \nu - r \leq n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins et tout graphe avec $\nu = 1$ *et* $r = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *(resp. les graphes complets).*

Conjecture A.370 (T, P) :

$$2 \leq \nu + r \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes de rayon $r = 1$ *et de connectivité* $\nu = 1$ *(resp. les graphes complets ou le complémentaire d'un couplage parfait).*

La borne supérieure est une conséquence de A.90.

Conjecture A.371 (T, T) :

$$\frac{1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq \frac{\nu}{r} \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins et tout graphe avec $\nu = 1$ *et* $r = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *(resp. les graphes complets).*

Conjecture A.372 (T, O) :

$$2 \leq \nu \cdot r \leq 4 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 4.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes de rayon $r = 1$ *et de connectivité* $\nu = 1$ *(resp. le complémentaire d'un recouvrement minimum).*

A.6.9 La connectivité aux arêtes

Conjecture A.373 (T, T) :

$$2 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \kappa - r \leq n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins et tout graphe avec $\kappa = 1$ *et* $r = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *(resp. les graphes complets).*

Conjecture A.374 (T, P) :

$$2 \leq \kappa + r \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes de rayon $r = 1$ et de connectivité $\kappa = 1$ (resp. les graphes complets ou le complémentaire d'un couplage parfait).

La borne supérieure est une conséquence de A.90.

Conjecture A.375 (T, T) :

$$\frac{1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq \frac{\kappa}{r} \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins et tout graphe avec $\kappa = 1$ et $r = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (resp. les graphes complets).

Conjecture A.376 (T, O) :

$$2 \leq \kappa \cdot r \leq 4 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 4.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes de rayon $r = 1$ et de connectivité $\kappa = 1$ (resp. le complémentaire d'un recouvrement minimum des sommets par des arêtes).

A.6.10 Le nombre de stabilité

Conjecture A.377 (K, T) : (Graffiti 0)

$$0 \leq \alpha - r \leq n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets, les chemins d'ordre pair, les cycles ... (resp. les étoiles).

Conjecture A.378 (T, K) : (Graffiti 120)

$$2 \leq \alpha + r \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins, les étoiles, les cycles pairs ....)

Conjecture A.379 (K, T) : (Graffiti 0)

$$1 \leq \frac{\alpha}{r} \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets, les chemins, les cycles ... (resp. les étoiles).

Conjecture A.380 (T, P) :

$$1 \leq \alpha \cdot r \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins et les cycles pairs).

La borne supérieure est une conséquence de A.378.

A.6.11 Le nombre de domination

Conjecture A.381 (O, P) :

$$-\left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil \leq \beta - r \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins si $n \not\equiv 1[6]$ *et pour les chemins se terminant en* V *ou pour les graphe de Soltés avec* $m = n$ *sinon (resp. les graphes composés d'une clique sur* $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ *sommets et* $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *sommets pendants n'ayant pas de voisins communs).*

Si $r = 1$, alors $\beta = 1$, sinon $\beta - r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2$. Ce qui prouve la borne supérieure.

Conjecture A.382 (T, O) :

$$2 \leq \beta + r \leq \left\lfloor \frac{5n+4}{6} \right\rfloor.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant (resp. les arbres de diamètre $D = n - 2$ si $n \equiv 3[6]$ et un chemin sinon).

Conjecture A.383 (ND, P) :

$$????? \leq \frac{\beta}{r} \leq \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

La borne supérieure est atteinte pour les graphes composés d'une clique sur $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ sommets et $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sommets pendants n'ayant pas de voisins communs.

La borne supérieure se démontre comme celle de A.381.

Conjecture A.384 (T, ND) :

$$1 \leq \beta \cdot r \leq ??????$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant.

A.6.12 La cardinalité maximale d'une clique

Conjecture A.385 (T, T) :

$$2 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \omega - r \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins, les cycles et autres (resp. les graphes complets).

Conjecture A.386 (T, P) :

$$3 \leq \omega + r \leq n + 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets et le complémentaire d'un couplage parfait si n est pair).

La borne supérieure est une conséquence de A.330.

Conjecture A.387 (T, T) :

$$\frac{2}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq \frac{\omega}{r} \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.388 (T, AO) :

$$2 \leq \omega \cdot r \leq \left(n - 2\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1\right).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les cerfs-volants, les paniers et bestioles avec $r = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$).

A.6.13 Le nombre chromatique

Conjecture A.389 (T, T) :

$$3 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \chi - r \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins, les cycles et autres (resp. les graphes complets).

Conjecture A.390 (T, P) :

$$3 \leq \chi + r \leq n + 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets et le complémentaire d'un couplage parfait si n est pair).

La borne supérieure est une conséquence de A.334.

Conjecture A.391 (T, T) :

$$\frac{2}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq \frac{\chi}{r} \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.392 (T, AO) :

$$2 \leq \chi \cdot r \leq \left(n - 2\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1\right).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les cerfs-volants, les paniers et les bestioles avec $r = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$).

A.6.14 La cardinalité maximale d'un couplage

Conjecture A.393 (P, T) :

$$0 \leq \mu - r \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles, les chemins les cycles et autres (resp. les graphes complets et autres).

Pour la borne inférieure, il suffit de constater qu'un graphe de rayon r contient au moins r arêtes disjointes.

Conjecture A.394 (T, T) :

$$2 \leq \mu + r \leq 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les chemins, les cycles et autres).

Conjecture A.395 (P, T) :

$$1 \leq \frac{\mu}{r} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles, les chemins les cycles et autres (resp. les graphes complets et autres).

La borne inférieure se démontre comme celle de A.393.

Conjecture A.396 (T, T) :

$$1 \leq \mu \cdot r \leq (\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor)^2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les chemins, les cycles et autres).

A.7 La maille

A.7.1 L'excentricité moyenne

Conjecture A.397 (P, P) :

$$-\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq ecc - g \leq \begin{cases} \frac{3n-16}{4} - \frac{1}{n} & si\ n\ est\ pair, \\ \frac{3n-16}{4} - \frac{3}{4n} & si\ n\ est\ impair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles (resp. les graphes composés d'un triangle et d'un chemin incident à un de ses sommets).

Pour un graphe de maille finie g, $ecc \geq \lfloor g/2 \rfloor$, donc

$$ecc - g \geq \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor - g = - \left\lceil \frac{g}{2} \right\rceil \geq - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil .$$

D'où la borne inférieure.

Conjecture A.398 (T, P) :

$$4 \leq ecc + g \leq n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les cycles).

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.286.

Conjecture A.399 (P, P) :

$$\frac{1}{3} \leq \frac{ecc}{g} \leq \begin{cases} \frac{3n-4}{12} - \frac{1}{3n} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{3n-4}{12} - \frac{1}{4n} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles (resp. les graphes composés d'un triangle et d'un chemin incident à un de ses sommets).

La borne inférieure est une conséquence de celle de A.397.

Conjecture A.400 (T, P) :

$$3 \leq ecc \cdot g \leq n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les cycles).

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.288.

A.7.2 La proximité

Conjecture A.401 (P, P) :

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{si } n \textit{ est impair,} & \frac{1-3n}{4} \\ \textit{si } n \textit{ est pair,} & \frac{4n-3n^2}{4n-4} \end{array}\right\} \leq \pi - g \leq \left\{\begin{array}{ll} \frac{n-11}{4} - \frac{1}{n-1} & \textit{si } n \textit{ est impair,} \\ \frac{n^2-4}{4n-4} - 3 & \textit{si } n \textit{ est pair.} \end{array}\right.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles (resp. les graphes composés d'un triangle et d'un chemin incident à un de ses sommets).

Pour la borne inférieure comme $\pi \geq 1$, g doit être au moins égal à $\frac{3n}{4}$. Dans ce cas, le graphe G est nécessairement unicyclique. Si G est un cycle, on a la borne. Supposons que G est tel que $\frac{3n}{4} \leq g < n$. Insérons une incidente au cycle C de G dans le cycle même. Cette opération augmente d'une unité la maille et change la transmission d'un certain nombre de sommets d'une valeur inférieure à 1. Donc globalement, la valeur de $\pi - g$ diminue. L'itération de l'opération conduit au résultat.
Pour la borne supérieure, comme g est finie, nécessairement $D \leq n-2$. De plus la proximité est au plus la transmission normalisée d'un sommet central d'un chemin diamétrique, donc

$$\pi \leq \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{n-1}\left(\frac{n-1}{2} + \frac{n-3}{2} + 2\sum_{k=1}^{\frac{n-3}{2}} k\right) & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{1}{n-1}\left(\frac{n-2}{2} + 2\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} k\right) & \text{si } n \text{ est pair.} \end{array}\right.$$

$$\pi \leq \left\{\begin{array}{ll} \frac{n+1}{4} - \frac{1}{n-1} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{n^2-4}{4n-4} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{array}\right.$$

En utilisant le fait que $g \geq 3$, on obtient le résultat.

Conjecture A.402 (T, P) :

$$4 \leq \pi + g \leq \left\{\begin{array}{ll} \frac{5n^2-4n}{4n-4} & \textit{si } n \textit{ est pair,} \\ \frac{5n+1}{4} & \textit{si } n \textit{ est impair.} \end{array}\right.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et un triangle (resp. les cycles).

La borne supérieure est une conséquence de A.226.

Conjecture A.403 (AO, P) :

$$\frac{1}{2\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1}+\frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor(\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1)}{(2\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1)(n-1)}\leq\frac{\pi}{g}\leq\begin{cases}\frac{n^2-4}{12n-12} & \textit{si } n \textit{ est pair,}\\ \frac{n+1}{12}-\frac{1}{3n-3} & \textit{si } n \textit{ est impair.}\end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés d'un cycle C_g, où $g=2\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1$, et de $n-g$ arêtes pendantes toutes incidentes au même sommet du cycle (resp. les graphes composés d'un triangle et d'un chemin incident à un de ses sommets).

La borne supérieure se démontre comme celle de A.401.

Conjecture A.404 (T, O) :

$$3\leq\pi\cdot g\leq\begin{cases}\frac{n^3}{4n-4} & \textit{si } n \textit{ est pair,}\\ \frac{n^2+n}{4} & \textit{si } n \textit{ est impair.}\end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et un triangle (resp. les cycles).

A.7.3 L'éloignement

Conjecture A.405 (P, P) :

$$\left.\begin{array}{ll}\textit{si } n \textit{ est impair,} & \frac{1-3n}{4}\\ \textit{si } n \textit{ est pair,} & \frac{4n-3n^2}{4n-4}\end{array}\right\}\leq\rho-g\leq\frac{(n+1)(n-2)}{2n-2}-3.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles (resp. les graphes composés d'un triangle et d'un chemin incident à un de ses sommets).

Si g est fini, alors $D \leq n-2$ et par conséquent,

$$\rho - g \leq \frac{1+2+\cdots n-2+n-2}{n-1} - 3 = \frac{(n+1)(n-2)}{2n-2} - 3.$$

D'où la borne supérieure.

La borne inférieure est une conséquence de celle de A.401 et du fait que $\rho \geq \pi$.

Conjecture A.406 (T, P) :

$$4 \leq \rho + g \leq \begin{cases} \frac{5n^2-4n}{4n-4} & \textit{si } n \textit{ est pair,} \\ \frac{5n+1}{4} & \textit{si } n \textit{ est impair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les cycles).

Conjecture A.407 (O, P) :

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{si } n \textit{ est impair,} & \frac{n+1}{4n} \\ \textit{si } n \textit{ est pair,} & \frac{n}{4n-4} \end{array}\right\} \leq \frac{\rho}{g} \leq \frac{(n+1)(n-2)}{6n-6}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles (resp. les graphes composés d'un triangle et d'un chemin incident à un de ses sommets).

La borne supérieure se démontre comme celle de A.405.

Conjecture A.408 (T, ND) :

$$3 \leq \rho \cdot g \leq ??????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les graphes composés d'un cycle C_g et d'un chemin relié au cycle avec $g = \lfloor \frac{4n+4}{5} \rfloor$ et $D = \lfloor \frac{3n}{5} \rfloor$).

A.7.4 L'index

Conjecture A.409 (P, T) :

$$-n+2 \leq \lambda_1 - g \leq n-4.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles (resp. les graphes complets).

Si g est fini, $\lambda_1 \geq \overline{d} \geq 2$. Ce qui nous permet de conclure quat à la borne supérieure.

Conjecture A.410 (SO, P) :

$$???? \leq \lambda_1 + g \leq n+2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés d'un triangle et d'un chemin incident à un de ses sommets (resp. es graphes complets et les cycles).

La borne supérieure est une conséquence de A.22 et du fait que $\lambda_1 \leq \Delta$.

Conjecture A.411 (P, T) :

$$\frac{2}{n} \leq \frac{\lambda_1}{g} \leq \frac{n-1}{3}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles (resp. les graphes complets).

La borne inférieure se démontre comme celle de A.409.

Conjecture A.412 (SO, R) :

$$???? \leq \lambda_1 \cdot g \leq 3(n-1).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés d'un triangle et d'un chemin incident à un de ses sommets (resp. es graphes complets et les cycles).

La Figure 3.1 (page 147) représente un contre-exemple pour le borne supérieure.

A.7.5 L'indice de Randić

Conjecture A.413 (P, T) :

$$-\frac{n}{2} \leq Ra - g \leq \frac{n}{2} - 3.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles (resp. les graphes réguliers ayant un triangle).

Conjecture A.414 (P, T) :

$$\frac{n-3+\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} + \frac{7}{2} \leq Ra + g \leq \frac{3n}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour un graphe avec $m = n$ arêtes et ayant un sommet dominant (resp. les cycles).

Conjecture A.415 (P, T) :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{Ra}{g} \leq \frac{n}{6}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles (resp. les graphes réguliers ayant un triangle).

Conjecture A.416 (P, T) :

$$\frac{3n-9+3\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{2}\leq Ra\cdot g\leq\frac{n^2}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes unicycliques ayant un sommet dominant (resp. les cycles).

A.7.6 La connectivité algébrique

Conjecture A.417 (AP, T) :

$$2(1-cos\frac{2\pi}{n})-n\leq a-g\leq n-3.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles (resp. les graphes complets).

Pour la borne inférieure si $G\equiv C_n$, on a la borne ; sinon

$$a-g\geq 2(1-cos\frac{\pi}{n})-(n-1)>2(1-cos\frac{2\pi}{n})-n.$$

Conjecture A.418 (SO, P) :

$$?????\leq a+g\leq n+3.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés d'un triangle et d'un chemin incident à un de ses sommets (resp. les graphes complets).

Pour la borne supérieure, si $G\equiv K_n$ on a la borne ; sinon $a+g\leq\delta+g\leq n+2$ (voir A.94).

Conjecture A.419 (SO, T) :

$$????? \leq \frac{a}{g} \leq \frac{n}{3}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés d'un cycle sur $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sommets et le reste de sommets forme un chemin relié au cycle (resp. les graphes complets).

Conjecture A.420 (SO, P) :

$$????? \leq a \cdot g \leq 3n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés d'un triangle et d'un chemin incident à un de ses sommets (resp. les graphes complets).

Pour la borne supérieure, si $G \equiv K_n$ on a la borne ; sinon $a \cdot g \leq \delta \cdot g \leq 3n - 3$ (voir A.96).

A.7.7 La connectivité aux sommets

Conjecture A.421 (T, T) :

$$2 - n \leq \nu - g \leq n - 4.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles ou les graphes composés d'un cycle C_{n-1} et d'une arête pendante (resp. les graphes complets).

Conjecture A.422 (T, P) :

$$4 \leq \nu + g \leq n + 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes contenant un triangle avec $\nu = 1$ (resp. les graphes complets).

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.94.

Conjecture A.423 (P, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\nu}{g} \leq \frac{n-1}{3}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés d'un cycle C_{n-1} et d'une arête pendante (resp. les graphes complets).

La preuve de la borne inférieure se base sur le principe de la deuxième valeur.

Conjecture A.424 (T, P) :

$$3 \leq \nu \cdot g \leq 3n - 3.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes contenant un triangle avec $\nu = 1$ (resp. les graphes complets).

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.96.

A.7.8 La connectivité aux arêtes

Conjecture A.425 (T, T) :

$$2 - n \leq \kappa - g \leq n - 4.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles ou les graphes composés d'un cycle C_{n-1} et d'une arête pendante (resp. les graphes complets).

Conjecture A.426 (T, P) :

$$4 \leq \kappa + g \leq n + 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes contenant un triangle avec $\kappa = 1$ (resp. les graphes complets).

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.94.

Conjecture A.427 (P, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\kappa}{g} \leq \frac{n-1}{3}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés d'un cycle C_{n-1} et d'une arête pendante (resp. les graphes complets).

La preuve de la borne inférieure se base sur le principe de la deuxième valeur.

Conjecture A.428 (T, P) :

$$3 \leq \kappa \cdot g \leq 3n - 3.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes contenant un triangle avec $\kappa = 1$ (resp. les graphes complets).

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.96.

A.7.9 Le nombre de stabilité

Conjecture A.429 (P, P) : (Proposition 2 page 129)

$$-\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq \alpha - g \leq n - 5.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles (resp les étoiles plus une arête et autres graphes avec $\alpha = n - 2,\ g = 3$).

Conjecture A.430 (T, P) : (Proposition 1 page 129)

$$4 \leq \alpha + g \leq n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les cycles).

Conjecture A.431 (P, P) : (Proposition 4 page 131)

$$\frac{1}{3} \leq \frac{\alpha}{g} \leq \frac{n-2}{3}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les étoiles plus une arête et autres graphes avec $\alpha = n - 2,\ g = 3$).

Conjecture A.432 (T, P) : (Proposition 3 page 130)

$$3 \leq \alpha \cdot g \leq 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les cycles si n est pair et les graphes composés d'un cycle C_{n-1} et d'une arête pendante si n est impair).

A.7.10 Le nombre de domination

Conjecture A.433 (AP, T) :

$$-\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor \leq \beta - g \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 3.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles et autres (resp. les graphes avec $\beta = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $g = 3$, comme le graphe composé d'une clique sur $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ sommets et $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sommets pendants, deux à deux sans voisin commun).

Pour la borne inférieure, une maille finie entraine $\beta \geq \lceil g/3 \rceil$ ce qui donne

$$\beta - g \geq \left\lceil \frac{g}{3} \right\rceil - g \geq - \left\lfloor \frac{2g}{3} \right\rfloor \geq - \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor .$$

Conjecture A.434 (T, AP) :

$$4 \leq \beta + g \leq n + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil .$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et contenant un triangle (resp. les cycles).

Pour un graphe de maille finie,

$$\beta \leq \left\lceil \frac{g}{3} \right\rceil n - g.$$

D'où la borne supérieure.

Conjecture A.435 (P, T) :

$$\frac{1}{3} \leq \frac{\beta}{g} \leq \frac{1}{3} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et contenant un triangle (resp. les graphes avec $\beta = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $g = 3$, comme les graphes composés d'une clique sur $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ sommets et $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sommets pendants, deux à deux sans voisin commun).

La borne inférieure se démontre comme celle de A.433.

Conjecture A.436 (T, AP) :

$$3 \leq \beta \cdot g \leq n \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil .$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et contenant un triangle (resp. les cycles).

Comme pour la borne supérieure de A.434,

$$\beta \cdot g \leq \left(\left\lceil \frac{g}{3} \right\rceil n - g \right) g.$$

Cette dernière expression est maximum pour $g = n$. Ce qui donne la borne supérieure.

A.7.11 La cardinalité maximale d'une clique

Conjecture A.437 (T, T) :

$$2 - n \leq \omega - g \leq n - 3.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.438 (T, P) :

$$6 \leq \omega + g \leq n + 3.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes avec $\omega = g = 3$ ou avec $\omega = 2$ et $g = 4$ (resp. les graphes complets).

Sachant que $\omega \leq \Delta + 1$, la borne supérieure est une conséquence de A.22.

Conjecture A.439 (T, T) :

$$\frac{2}{n} \leq \frac{\omega}{g} \leq \frac{n}{3}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.440 (P, P) :

$$8 \leq \omega \cdot g \leq 3n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes avec $\omega = 2$ *et* $g = 4$ *(resp. les graphes complets).*

La preuve de la borne inférieure se base sur le principe de la deuxième valeur. Pour la borne supérieure, si $\omega = n$, on a la borne ; si $\omega = 2$, alors $\omega \cdot g \leq 2n < 3n$; si $3 \leq \omega \leq n-1$, alors $g = 3$ et $\omega \cdot g \leq 3n - 3$.

A.7.12 Le nombre chromatique

Conjecture A.441 (P, T) :

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{si } n \textit{ est impair,} & 3-n \\ \textit{si } n \textit{ est pair,} & 2-n \end{array}\right\} \leq \chi - g \leq n-3.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles si n *est pair et pour les graphes (entièrement définis) avec* $g \in \{n-1, n\}$ *si* n *est impair (resp. les graphes complets).*

La preuve de la borne inférieure se base sur le principe de la deuxième valeur.

Conjecture A.442 (P, P) :

$$6 \leq \chi + g \leq n+3.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes avec $\chi = g = 3$ *ou avec* $\chi = 2$ *et* $g = 4$ *(resp. les graphes complets et les cycles impairs).*

La preuve de la borne inférieure se base sur le principe de la deuxième valeur. Pour la borne supérieure, si G est complet ou un cycle impair, on a la borne. Sinon $\chi \leq \Delta$, donc la borne supéreure est une conséquence de celle de A.22.

Conjecture A.443 (P, T) :

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{si } n \textit{ est impair,} & \frac{2}{n-1} \\ \textit{si } n \textit{ est pair,} & \frac{2}{n} \end{array}\right\} \leq \frac{\chi}{g} \leq \frac{n}{3}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles si n est pair et pour les graphes (entièrement définis) avec $g = n - 1$ si n est impair (resp. les graphes complets).

La preuve de la borne inférieure se base sur le principe de la deuxième valeur.

Conjecture A.444 (P, P) :

$$8 \leq \chi \cdot g \leq 3n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes avec $\chi = 2$ et $g = 4$ (resp. les graphes complets et les cycles impairs).

La preuve de la borne inférieure se base sur le principe de la deuxième valeur. La borne supérieure est prouvée dans la Proposition 17 (page 144).

A.7.13 La cardinalité maximale d'un couplage

Conjecture A.445 (P, T) :

$$-\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq \mu - g \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 3.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles (resp. les graphes complets et autres graphes).

Pour la borne inférieure, il suffit de constater que $\mu \geq \lfloor g/2 \rfloor$.

Conjecture A.446 (P, T) :

$$5 \leq \mu + g \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour, entre autres, les graphes unicycliques contenant un triangle (resp. les cycles).

La preuve de la borne inférieure se base sur le principe de la deuxième valeur.

Conjecture A.447 (P, T) :

$$\frac{1}{n}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \frac{\mu}{g} \leq \frac{1}{3}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles (resp. les graphes complets et autres graphes).

La borne inférieure se démontre comme celle de A.445.

Conjecture A.448 (P, T) :

$$6 \leq \mu \cdot g \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour, entre autres, les graphes unicycliques contenant un triangle (resp. les cycles).

La preuve de la borne inférieure se base sur le principe de la deuxième valeur.

A.8 L'excentricité moyenne

A.8.1 La proximité

Conjecture A.449 (O, T) :

$$\left.\begin{array}{ll} si\ n\ est\ impair, & \frac{n+1}{4} - \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n} \\ si\ n\ est\ pair, & \frac{n}{4n-4} - \frac{n-1}{2} \end{array}\right\} \leq \pi - ecc \leq 0.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.450 (T, T) :

$$2 \leq \pi + ecc \leq \left\{\begin{array}{ll} \frac{n+1}{4} + \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n} & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{n}{4n-4} + \frac{2n-1}{2} & si\ n\ est\ pair. \end{array}\right.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.451 (ND, T) :

$$????? \leq \frac{\pi}{ecc} \leq 1.$$

La borne supérieure pour les graphes complets.

Conjecture A.452 (T, T) :

$$1 \leq \pi \cdot ecc \leq \left\{\begin{array}{ll} \frac{n+1}{4}\frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n} & si\ n\ est\ impair, \\ (\frac{n}{4} + \frac{n}{4n-4})(\frac{3n-2}{4}) & si\ n\ est\ pair. \end{array}\right.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

A.8.2 L'éloignement

Conjecture A.453 (O, P) :

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{si } n \textit{ est impair,} & \frac{n}{2} - \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n} \\ \textit{si } n \textit{ est pair,} & \frac{1}{4n-4} - \frac{n-1}{4} \end{array}\right\} \leq \rho - ecc \leq 0.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins si n est impair et les cycles si n est pair (resp. les graphes complets).

Pour la borne supérieure, soit v_1 le sommet de transmission maximum, on a

$$\rho = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} d(v_1, v_i) \leq \frac{1}{n}\left(ecc_1 + \sum_{i=2}^{n} d(v_1, v_i)\right) \leq \frac{1}{n}\left(ecc_1 + \sum_{i=2}^{n} ecc_i\right) = ecc.$$

Conjecture A.454 (T, T) :

$$2 \leq \rho + ecc \leq \left\{\begin{array}{ll} \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n} + \frac{n}{2} & \textit{si } n \textit{ est impair} \\ \frac{3n-2}{4} + \frac{n}{2} & \textit{si } n \textit{ est pair.} \end{array}\right.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.455 (SO, P) :

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{si } n \textit{ est impair,} & ????? \\ \textit{si } n \textit{ est pair,} & ????? \end{array}\right\} \leq \frac{\rho}{ecc} \leq 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour le complémentaire d'un couplage de $(n-1)/2$ arêtes si n est impair et les cycles si n est pair (resp. les graphes complets).

La borne supérieure se démontre comme celle de A.453.

Conjecture A.456 (T, T) :

$$1 \leq \rho \cdot ecc \leq \begin{cases} \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n}\frac{n}{2} & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{3n-2}{4}\frac{n}{2} & si\ n\ est\ pair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

A.8.3 L'index

Conjecture A.457 (T, T) :

$$\left.\begin{array}{ll} si\ n\ est\ impair, & 2cos(\frac{\pi}{n+1}) - \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n} \\ si\ n\ est\ pair, & 2cos(\frac{\pi}{n+1}) - \frac{3n-2}{4} \end{array}\right\} \leq \lambda_1 - ecc \leq n-2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.458 (O, SO) :

$$\sqrt{n-1} + 2 - \frac{1}{n} \leq \lambda_1 + ecc \leq ??????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. le complémentaire d'un graphe composé de $\lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor$ arêtes disjointes).

Conjecture A.459 (T, T) :

$$\left.\begin{array}{ll} si\ n\ est\ impair, \\ si\ n\ est\ pair, \end{array}\right\} \leq \frac{\lambda_1}{ecc} \leq n-1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.460 (O, SO) :

$$\sqrt{n-1} \cdot (2 - \frac{1}{n}) \leq \lambda_1 \cdot ecc \leq ??????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes de Soltés avec $D = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, $\omega = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ *et exactement* $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *arêtes entre le chemin et la clique).*

A.8.4 L'indice de Randić

Conjecture A.461 (O, T) :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{si } n \text{ est impair,} & \frac{n-3+2\sqrt{2}}{2} - \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n} \\ \text{si } n \text{ est pair,} & \frac{n-3+2\sqrt{2}}{2} - \frac{3n-2}{4} \end{array}\right\} \leq Ra - ecc \leq \frac{n-2}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.462 (O, O) :

$$\sqrt{n-1} + 2 - \frac{1}{n} \leq Ra + ecc \leq \left\{ \begin{array}{ll} \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n} + \frac{n-3+2\sqrt{2}}{2} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{3n-2}{4} + \frac{n-3+2\sqrt{2}}{2} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{array} \right.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les chemins).

Conjecture A.463 (AO, T) :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{si } n \text{ est impair,} & \frac{2n^2-(6+4\sqrt{2})n}{(3n+1)(n-1)} \\ \text{si } n \text{ est pair,} & \frac{2n-6+4\sqrt{2}}{3n-2} \end{array}\right\} \leq \frac{Ra}{ecc} \leq \frac{n}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.464 (AO, O) :

$$\left.\begin{array}{ll} si\ n \leq 13 & \frac{n}{2} \\ si\ n \geq 14 & (2-\frac{1}{n}) \cdot \sqrt{n-1} \end{array}\right\} \leq Ra \cdot ecc \leq \left\{\begin{array}{ll} \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n}\frac{n-3+2\sqrt{2}}{2} & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{3n-2}{4}\frac{n-3+2\sqrt{2}}{2} & si\ n\ est\ pair. \end{array}\right.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets si $n \leq 13$ *et pour les étoiles sinon (resp. les chemins).*

A.8.5 La connectivité algébrique

Conjecture A.465 (T, T) :

$$1 - n \leq ecc - a \leq \left\{\begin{array}{ll} \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n} - 2(1-cos\frac{\pi}{n}) & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{3n-2}{4} - 2(1-cos\frac{\pi}{n}) & si\ n\ est\ pair. \end{array}\right.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.466 (P, P) :

$$3 - \frac{1}{n} \leq ecc + a \leq n + 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant avec $a = 1$ *(resp. les graphes complets).*

Pour la borne supérieure, si $G \equiv K_n$, on la borne ; sinon $ecc + a \leq ecc + \delta \leq n$ (voir A.98).

Conjecture A.467 (T, T) :

$$\frac{1}{n} \leq \frac{ecc}{a} \leq \left\{\begin{array}{ll} \frac{(3n+1)(n-1)}{8n(1-cos\frac{\pi}{n})} & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{3n-2}{8(1-cos\frac{\pi}{n})} & si\ n\ est\ pair. \end{array}\right.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.468 (SO, O) :

$$????? \leq ecc \cdot a \leq \begin{cases} 2n-5+\frac{2}{n} & si\ n\ est\ impair, \\ 2n-4 & si\ n\ est\ pair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les doubles comètes avec $2\Delta + D = n+3$ *(sauf pour* $n = 10$*)(resp. un graphe complémentaire d'un recouvrement minimum).*

A.8.6 La connectivité aux sommets

Conjecture A.469 (T, T) :

$$2-n \leq ecc-\nu \leq \begin{cases} \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n}-1 & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{3n-6}{4} & si\ n\ est\ pair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.470 (P, P) :

$$3-\frac{1}{n} \leq ecc+\nu \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant avec $\nu = 1$ *(resp. les graphes complets).*

Pour la borne inférieure, si $r \geq 2$, alors $ecc + \nu \geq 3$. Si $r = 1$, soit k le nombre de sommets dominants de G, alors

$$ecc+\nu \geq \frac{k+2(n-k)}{n} + k = (2+k) - \frac{k}{n}.$$

Cette dernière expression est minimum pour $k = 1$. La borne supérieure est une conséquence de A.98.

Conjecture A.471 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{ecc}{\nu} \leq \begin{cases} \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{3n-2}{4} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.472 (P, O) :

$$2 - \frac{1}{n} \leq ecc \cdot \nu \leq \begin{cases} 2n - 5 + \frac{2}{n} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 2n - 4 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant avec $\nu = 1$ (resp. un graphe complémentaire d'un recouvrement minimum).

La borne inférieure se démontre comme celle de A.470.

A.8.7 La connectivité aux arêtes

Conjecture A.473 (T, T) :

$$2 - n \leq ecc - \kappa \leq \begin{cases} \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n} - 1 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{3n-6}{4} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.474 (P, P) :

$$3 - \frac{1}{n} \leq ecc + \kappa \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant avec $\kappa = 1$ (resp. les graphes complets).

La preuve s'obtient comme pour A.470.

Conjecture A.475 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{ecc}{\kappa} \leq \begin{cases} \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n} & \textit{si } n \textit{ est impair,} \\ \frac{3n-2}{4} & \textit{si } n \textit{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.476 (P, O) :

$$2 - \frac{1}{n} \leq ecc \cdot \kappa \leq \begin{cases} 2n - 5 + \frac{2}{n} & \textit{si } n \textit{ est impair,} \\ 2n - 4 & \textit{si } n \textit{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant avec $\kappa = 1$ (resp. un graphe complémentaire d'un recouvrement minimum).

La borne inférieure se démontre comme celle de A.472.

A.8.8 Le nombre de stabilité

Conjecture A.477 (P, O) :

$$3 - n - \frac{1}{n} \leq ecc - \alpha \leq \begin{cases} \frac{3n^2-4n-3}{4n} - \frac{n-1}{2} & \textit{si } n \textit{ est impair,} \\ \frac{n-2}{4} & \textit{si } n \textit{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les chemins si n est pair et les graphes composés d'un triangle et d'un chemin incident à un de ses sommets si n est impair).

Pour la borne inférieure, si $G \equiv S_n$, on a la borne sinon $ecc - \alpha \geq 3 - n$.

Conjecture A.478 (T, O) :

$$2 \leq ecc + \alpha \leq \begin{cases} \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n} + \frac{n+1}{2} & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{(3n+2)(n-2)}{4n} + \frac{n+2}{2} & si\ n\ est\ pair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins en V si n est pair et les chemins si n est impair).

Conjecture A.479 (P, SO) :

$$\frac{2-\frac{1}{n}}{n-1} \leq \frac{ecc}{\alpha} \leq ??????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes composés de deux cliques reliées par un chemin).

La borne inférieure se démontre comme celle de A.477.

Conjecture A.480 (T, ND) :

$$1 \leq ecc \cdot \alpha \leq ??????$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes complets.

A.8.9 Le nombre de domination

Conjecture A.481 (O, O) :

$$\left.\begin{array}{ll} si\ n\ est\ impair\ et\ n \not\equiv 1[3], & \left\lfloor\frac{n+1}{3}\right\rfloor - \frac{3n+1}{4}\frac{n}{n-1} \\ si\ n\ est\ pair\ et\ n \not\equiv 1[3], & \left\lfloor\frac{n+1}{3}\right\rfloor - \frac{3n-2}{4} \\ si\ n\ est\ impair\ et\ n \equiv 1[3], & \frac{3}{4n} - \frac{5n-8}{12} \\ si\ n\ est\ pair\ et\ n \equiv 1[3], & \frac{1}{n} - \frac{5n-8}{12} \end{array}\right\} \leq \beta{-}ecc \leq \begin{cases} \frac{n-6}{2} + \frac{1}{2n} & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{n-5}{2} & si\ n\ est\ pair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes avec $\beta = \lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$ *et de diamètre* $D = n - 1$ *si* $n \not\equiv 1[3]$ *et* $D = n - 2$ *si* $n \equiv 1[3]$ *(resp. les graphes de rayon 2 et* $\beta = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$*, comme le graphe composé d'une clique sur* $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ *sommets et* $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *sommets pendants n'ayant pas de voisin commun).*

Conjecture A.482 (T, O) :

$$2 \leq \beta + ecc \leq \begin{cases} \lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor + \frac{3n+1}{4} \frac{n}{n-1} & si\ n\ est\ impair\ et\ n \not\equiv 1[3], \\ \lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor + \frac{3n-2}{4} & si\ n\ est\ pair\ et\ n \not\equiv 1[3], \\ \frac{13n-16}{12} - \frac{3}{4n} & si\ n\ est\ impair\ et\ n \equiv 1[3], \\ \frac{13n-16}{12} - \frac{1}{n} & si\ n\ est\ pair\ et\ n \equiv 1[3]. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les graphes avec $\beta = \lceil \frac{n+1}{3} \rceil$ *et de diamètre* $D = n - 1$ *si* $n \not\equiv 1[3]$ *et* $D = n - 2$ *si* $n \equiv 1[3]$*).*

Conjecture A.483 (ND, AO) :

$$?????? \leq \frac{\beta}{ecc} \leq \begin{cases} \frac{n(n-1)}{5n-1} & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{n}{5} & si\ n\ est\ pair. \end{cases}$$

La borne supérieure pour les graphes de rayon 2 et $\beta = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *(comme le graphe composé d'une clique sur* $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ *sommets et* $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *sommets pendants n'ayant pas de voisin commun).*

Conjecture A.484 (T, ND) :

$$1 \leq \beta \cdot ecc \leq ??????$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes complets.

A.8.10 La cardinalité maximale d'une clique

Conjecture A.485 (T, T) :

$$1 - n \leq ecc - \omega \leq \begin{cases} \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n} - 2 & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{3n-10}{4} & si\ n\ est\ pair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.486 (P, P) :

$$4 - \frac{1}{n} \leq ecc + \omega \leq n + 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

La borne inférieure se démontre comme celle de A.470. Pour la borne supérieure, si $G \equiv K_n$, on a la borne ; si $ecc + \omega \leq ecc + \Delta < n + 1$ (voir A.26).

Conjecture A.487 (T, T) :

$$\frac{1}{n} \leq \frac{ecc}{\omega} \leq \begin{cases} \frac{3n+1}{8}\frac{n-1}{n} & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{3n-2}{8} & si\ n\ est\ pair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.488 (P, SO) :

$$4 - \frac{2}{n} \leq ecc \cdot \omega \leq ??????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les cerfs-volants).

La borne inférieure se démontre comme celle de A.486.

A.8.11 Le nombre chromatique

Conjecture A.489 (T, T) :

$$1 - n \leq ecc - \chi \leq \begin{cases} \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n} - 2 & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{3n-10}{4} & si\ n\ est\ pair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.490 (P, P) :

$$4 - \frac{1}{n} \leq ecc + \chi \leq n + 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Les deux bornes se démontrent comme celles de A.486.

Conjecture A.491 (T, T) :

$$\frac{1}{n} \leq \frac{ecc}{\chi} \leq \begin{cases} \frac{3n+1}{8}\frac{n-1}{n} & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{3n-2}{8} & si\ n\ est\ pair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.492 (P, SO) :

$$4 - \frac{2}{n} \leq ecc \cdot \chi \leq ??????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les cerfs-volants).

La borne inférieure se démontre comme celle de A.486.

A.8.12 La cardinalité maximale d'un couplage

Conjecture A.493 (T, O) :

$$1 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq ecc - \mu \leq \begin{cases} \frac{n^2-1}{4n} & \textit{si } n \textit{ est impair,} \\ \frac{n^2-4}{4n} & \textit{si } n \textit{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins si n est impair et les chemins en V si n est pair).

Conjecture A.494 (P, T) :

$$3 - \frac{1}{n} \leq ecc + \mu \leq \begin{cases} \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{2} & \textit{si } n \textit{ est impair,} \\ \frac{5n-2}{4} & \textit{si } n \textit{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les chemins).

Pour la borne inférieure, si $G \equiv S_n$, on a la borne ; sinon $ecc + \mu \geq 3$.

Conjecture A.495 (T, P) :

$$\frac{1}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \leq \frac{ecc}{\mu} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les étoiles).

Pour la borne supérieure, on utilise le fait que $r \leq \mu$ et $r \leq D \leq 2r$.
Si $D = r$, alors $ecc = r \leq \mu$.
Si $D = 2r$, alors $ecc \leq (r + (n-1)D)/n = D - r/n = r(2 - 1/n) \leq \mu(2 - 1/n)$.
Si $r < D < 2r$, alors $ecc < D \leq r(2 - 1/r) \leq \mu(2 - 1/n)$.

Conjecture A.496 (P, T) :

$$2 - \frac{1}{n} \leq ecc \cdot \mu \leq \begin{cases} \frac{3n+1}{8}\frac{(n-1)^2}{n} & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{3n^2-2n}{8} & si\ n\ est\ pair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les chemins).

Pour la borne inférieure, si $G \equiv S_n$, on a la borne ; sinon $ecc \cdot \mu \geq 2$.

A.9 La proximité

A.9.1 L'éloignement

Conjecture A.497 (T, O) :

$$0 \leq \rho - \pi \leq \begin{cases} \frac{n-1}{4} & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{n}{4} - \frac{n}{4n-4} & si\ n\ est\ pair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes transmission réguliers (resp. les chemins et autres).

Conjecture A.498 (T, T) :

$$2 \leq \rho + \pi \leq \begin{cases} \frac{3n+1}{4} & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{3n}{4} - \frac{n}{4n-4} & si\ n\ est\ pair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.499 (T, SO) :

$$1 \leq \frac{\rho}{\pi} \leq ??????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes transmission réguliers (resp. les comètes avec d'éventuelles arêtes entre les voisins du sommet de degré maximum).

Conjecture A.500 (T, T) :

$$1 \leq \rho \cdot \pi \leq \begin{cases} \frac{n(n+1)}{8} & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{n^2}{8} + \frac{n}{8n-8} & si\ n\ est\ pair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

A.9.2 L'index

Conjecture A.501 (T, T) :

$$2 - n \leq \pi - \lambda_1 \leq \begin{cases} \frac{n+1}{4} - 2cos\frac{\pi}{n+1} & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{n+1}{4} + \frac{1}{4n-4} - 2cos\frac{\pi}{n+1} & si\ n\ est\ pair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.502 (ND, P) :

$$????? \leq \pi + \lambda_1 \leq n$$

La borne supérieure est atteinte pour les graphes complets.

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.242.

Conjecture A.503 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\pi}{\lambda_1} \leq \begin{cases} \frac{n+1}{8cos\frac{\pi}{n+1}} & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{\frac{n+1}{4} + \frac{1}{4n-4}}{2cos\frac{\pi}{n+1}} & si\ n\ est\ pair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.504 (O, O) :

$$\sqrt{n-1} \leq \pi \cdot \lambda_1 \leq n-1$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

A.9.3 L'indice de Randić

Conjecture A.505 (AO, T) :

$$\sqrt{n-1} - 1 \leq Ra - \pi \leq \frac{n-2}{2}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour une étoile si $n \geq 9$ (resp. les graphes complets).

Conjecture A.506 (T, T) :

$$1 + \sqrt{n-1} \leq Ra + \pi \leq \begin{cases} \frac{n^2}{4(n-1)} + \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{3n+1}{4} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les cycles).

Conjecture A.507 (AO, T) :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{si } n \text{ est impair,} & \frac{2(n-1)((D-4)\sqrt{\Delta}+4\Delta+2\sqrt{2}-4)}{D(D+4\Delta-6)\sqrt{\Delta}} \\ \text{si } n \text{ est pair,} & \frac{2(n-1)((D-4)\sqrt{\Delta}+4\Delta+2\sqrt{2}-4)}{((D-1)(D-3)+(D+1)(4\Delta-2)-4\Delta)\sqrt{\Delta}} \end{array}\right\} \leq \frac{Ra}{\pi} \leq \frac{n}{2},$$

où

$$D = n - 2\Delta + 3 \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor & \text{si } n \not\equiv 4[5], \\ \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil & \text{si } n \equiv 4[5]. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins si $n \leq 13$ et pour les doubles comètes avec $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ si $n \geq 14$ (resp. les graphes complets).

Conjecture A.508 (T, T) :

$$\sqrt{n+1} \leq Ra \cdot \pi \leq \begin{cases} \frac{n(n+1)}{8} & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{n^3}{8n-8} & si\ n\ est\ pair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les cycles).

A.9.4 La connectivité algébrique

Conjecture A.509 (T, T) :

$$1 - n \leq \pi - a \leq \begin{cases} \frac{3n+1}{4}\frac{n-1}{n} - 2(1 - cos\frac{\pi}{n}) & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{3n-2}{4} - 2(1 - cos\frac{\pi}{n}) & si\ n\ est\ pair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.510 (ND, P) :

$$???? \leq \pi + a \leq n + 1$$

La borne supérieure est atteinte pour les graphes complets.

La borne supérieure est une conséquence de A.250.

Conjecture A.511 (T, T) :

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\pi}{a} \leq \begin{cases} \frac{(3n+1)(n-1)}{8n(1-cos\frac{\pi}{n})} & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{3n-2}{8(1-cos\frac{\pi}{n})} & si\ n\ est\ pair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.512 (AO, P) :

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{si } n \textit{ est impair,} & \frac{3n+1}{2}\frac{n-1}{n}(1-cos\frac{\pi}{n}) \\ \textit{si } n \textit{ est pair,} & \frac{3n-2}{2}(1-cos\frac{\pi}{n}) \end{array}\right\} \leq \pi \cdot a \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

La borne supérieure est une conséquence de A.252.

A.9.5 La connectivité aux sommets

Conjecture A.513 (T, T) :

$$2 - n \leq \pi - \nu \leq \begin{cases} \frac{n-3}{4} & \textit{si } n \textit{ est impair,} \\ \frac{n^2}{4(n-1)} - 1 & \textit{si } n \textit{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.514 (T, P) :

$$2 \leq \pi + \nu \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et $\nu = 1$ (resp. les graphes complets).

La borne supérieure est une conséquence de A.254.

Conjecture A.515 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\pi}{\nu} \leq \begin{cases} \frac{n+1}{4} & \textit{si } n \textit{ est impair,} \\ \frac{n^2}{4(n-1)} & \textit{si } n \textit{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.516 (T, P) :

$$1 \leq \pi \cdot \nu \leq n - 1$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et $\nu = 1$ *(resp. les graphes complets).*

La borne supérieure est une conséquence de A.256.

A.9.6 La connectivité aux arêtes

Conjecture A.517 (T, T) :

$$2 - n \leq \pi - \kappa \leq \begin{cases} \frac{n-3}{4} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{n^2}{4(n-1)} - 1 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.518 (T, P) :

$$2 \leq \pi + \kappa \leq n$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et un sommet pendant (resp. les graphes complets).

La borne supérieure est une conséquence de A.258.

Conjecture A.519 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\pi}{\kappa} \leq \begin{cases} \frac{n+1}{4} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{n^2}{4(n-1)} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.520 (T, P) :

$$1 \leq \pi \cdot \kappa \leq n - 1$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et un sommet pendant (resp. les graphes complets).

La borne supérieure est une conséquence de A.260.

A.9.7 Le nombre de stabilité

Conjecture A.521 (T, P) :

$$2 - n \leq \pi - \alpha \leq 0.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

La borne supérieure est une conséquence de la borne inférieure de A.261.

Conjecture A.522 (T, P) :

$$2 \leq \pi + \alpha \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les étoiles).

Sachant que $\pi \leq r$, la borne supérieure est une conséquence de A.378.

Conjecture A.523 (T, P) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\pi}{\alpha} \leq 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

La borne supérieure est une conséquence de la borne inférieure de A.263.

Conjecture A.524 (T, AO) :

$$1 \leq \pi \cdot \alpha \leq \frac{1}{n-1} \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor \left\lfloor \frac{2n+1}{3} \right\rfloor^2$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les doubles comètes avec $D = 2\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor$, $\alpha = \left\lceil \frac{2n-1}{3} \right\rceil = \left\lfloor \frac{2n+1}{3} \right\rfloor$ *et* $n_1 = n - 2\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + 1$*).*

A.9.8 Le nombre de domination

Conjecture A.525 (SO, O) :

$$????? \leq \beta - \pi \leq \begin{cases} \frac{n-3}{2} + \frac{1}{2n-2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{n-4}{2} + \frac{1}{n-1} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour des doubles comètes avec d'éventuelles arêtes entre les voisins du sommet du degré maximum (resp. les graphes de rayon 2 et $\beta = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$*, comme le graphe composé d'une clique sur* $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ *sommets et* $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ *sommets pendants, deux à deux sans voisin commun).*

Conjecture A.526 (T, SO) :

$$2 \leq \beta + \pi \leq ??????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant (resp. les chemins si $n \equiv 1[3]$*, un chemin sur* $n-1$ *sommets et le* n^{me} *sommet est voisin du* 3^{me}*, à partir de l'une des extrémités du chemin si* $n \equiv 0[3]$*, et un chemin sur* $n-2$ *sommets et les deux autres sommets sont pendants et voisins du* 3^{me} *et du* 4^{em} *sommet respectivement, à partir de l'une des extrémités du chemin si* $n \equiv 2[3]$*).*

Conjecture A.527 (SO, SO) :

$$????? \leq \frac{\beta}{\pi} \leq ??????.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant si $n \leq 9$ *et pour les comètes de diamètre* 5 *avec d'éventuelles arêtes entre les voisins du sommet du degré maximum (resp. les graphes de rayon* 2 *et* $\beta = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$*, comme les graphes composés d'une clique sur* $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ *sommets et* $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *sommets pendants n'ayant pas de voisin commun).*

Conjecture A.528 (T, ND) :

$$1 \leq \beta \cdot \pi \leq ?????$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes complets.

A.9.9 La cardinalité maximale d'une clique

Conjecture A.529 (T, T) :

$$1 - n \leq \pi - \omega \leq \begin{cases} \frac{n-7}{4} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{n-8}{4} + \frac{n}{4n-4} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.530 (T, P) :

$$3 \leq \pi + \omega \leq n + 1$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

La borne supérieure est une conséquence de A.386.

Conjecture A.531 (T, T) :

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\pi}{\omega} \leq \begin{cases} \frac{n+1}{8} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{n}{8} + \frac{n}{8n-8} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins et les cycles pairs).

Conjecture A.532 (T, SO) :

$$2 \leq \pi \cdot \omega \leq ?????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets si $n \leq 9$ et les graphes de Soltés sinon).

A.9.10 Le nombre chromatique

Conjecture A.533 (T, T) :

$$1 - n \leq \pi - \chi \leq \begin{cases} \frac{n-7}{4} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{n-8}{4} + \frac{n}{4n-4} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins et les cycles pairs).

Conjecture A.534 (T, P) :

$$3 \leq \pi + \chi \leq n + 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

La borne supérieure est une conséquence de A.390.

Conjecture A.535 (T, T) :

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\pi}{\chi} \leq \begin{cases} \frac{n+1}{8} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{n}{4} + \frac{n}{8n-8} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins et les cycles pairs).

Conjecture A.536 (T, SO) :

$$2 \leq \pi \cdot \chi \leq \begin{cases} n & \text{si } n \leq 9 \\ ????? & \text{si } n \geq 10 \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets si $n \leq 9$ et les graphes de Soltés sinon).

A.9.11 La cardinalité maximale d'un couplage

Conjecture A.537 (T, P) :

$$1 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \pi - \mu \leq 0$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets et tout graphe avec $\Delta = n - 1$ et $\mu = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (resp. les étoiles).

La borne supérieure est une conséquence de la borne inférieure de A.393.

Conjecture A.538 (T, T) :

$$2 \leq \pi + \mu \leq \begin{cases} \frac{3n-1}{4} & si\ n\ est\ impair, \\ \frac{3n+1}{4} + \frac{1}{4n-4} & si\ n\ est\ pair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les chemins).

Conjecture A.539 (T, P) :

$$\frac{1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq \frac{\pi}{\mu} \leq 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets et tout graphe avec $\Delta = n - 1$ et $\mu = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (resp. les étoiles).

La borne supérieure est une conséquence de la borne inférieure de A.395.

Conjecture A.540 (T, T) :

$$1 \leq \pi \cdot \mu \leq \begin{cases} \frac{n^2-1}{8} & si\ n\ est\ impair \\ \frac{n^2+n}{4} + \frac{n}{8n-8} & si\ n\ est\ pair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les chemins).

A.10 L'éloignement

A.10.1 L'index

Conjecture A.541 (T, T) :

$$2 - n \leq \rho - \lambda_1 \leq \frac{n}{2} - 2cos(\frac{\pi}{n+1})$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.542 (ND, P) : (Proposition 43 page 194)

$$?????? \leq \rho + \lambda_1 \leq n$$

La borne supérieure est atteinte pour les graphes complets.

Conjecture A.543 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\rho}{\lambda_1} \leq \frac{n}{4cos\frac{\pi}{n+1}}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.544 (ND, SO) :

$$?????? \leq \rho \cdot \lambda_1 \leq ??????$$

La borne supérieure est atteinte pour les graphes de Soltés.

A.10.2 L'indice de Randić

Conjecture A.545 (SO, T) :

$$\left.\begin{array}{ll} si\ n \leq 7 & \sqrt{2} - \frac{3}{2}, \\ si\ n \geq 8 & ?????? \end{array}\right\} \leq Ra - \rho \leq \frac{n-2}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins si $n \leq 7$ et une comète si $n \geq 8$ (resp. les graphes complets).

Conjecture A.546 (AO, SO) :

$$\left.\begin{array}{ll} si\ n \leq 6 & \frac{n+2}{2} \\ si\ n \geq 7 & 2 - \frac{1}{n-1} + \sqrt{n-1} \end{array}\right\} \leq Ra + \rho \leq \left\{\begin{array}{ll} n + \sqrt{2} - \frac{3}{2} & si\ n \leq 56 \\ ????? & si\ n \geq 57 \end{array}\right.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets si $n \leq 6$ et pour les étoiles si $n \geq 7$ (resp. les chemins si $n \leq 56$ et pour les graphes de Soltés si $n \geq 57$).

Conjecture A.547 (SO, T) :

$$\left.\begin{array}{ll} si\ n \leq 7 & \frac{n-3+2\sqrt{2}}{n} \\ si\ n \geq 8 & ?????? \end{array}\right\} \leq \frac{Ra}{\rho} \leq \frac{n}{2}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins si $n \leq 7$ et une comète si $n \geq 8$ (resp. les graphes complets).

Conjecture A.548 (AO, SO) :

$$\left.\begin{array}{ll} si\ n \leq 6 & \frac{n}{2} \\ si\ n \geq 7 & (2 - \frac{1}{n-1}) \cdot \sqrt{n-1} \end{array}\right\} \leq Ra \cdot \rho \leq \left\{\begin{array}{ll} \frac{n-3+2\sqrt{2}}{2}\frac{n}{2} & si\ n \leq 57 \\ ????? & si\ n \geq 58 \end{array}\right.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets si $n \leq 6$ et pour les étoiles si $n \geq 7$ (resp. les chemins si $n \leq 57$ et pour les graphes de Soltés si $n \geq 58$).

A.10.3 La connectivité algébrique

Conjecture A.549 (T, T) :

$$1 - n \leq \rho - a \leq \frac{n}{2} - 2 + 2cos\frac{\pi}{n}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.550 (SO, P) :

$$?????? \leq \rho + a \leq n + 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés de deux cliques ayant un sommet commun ou deux cliques reliées par une arête (resp. les graphes complets).

Pour la borne supérieure, si $G \equiv K_n$, on a la borne ; sinon $\rho + a \leq \rho + \delta \leq n$ (voir A.106).

Conjecture A.551 (T, T) :

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\rho}{a} \leq \frac{n}{4(1 - cos\frac{\pi}{n})}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.552 (SO, O) :

$$????? \leq \rho \cdot a \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés de deux cliques ayant $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ sommets chacune et le reste des sommets constitue un chemin reliant les deux cliques (resp. les graphes complets).

A.10.4 La connectivité aux sommets

Conjecture A.553 (T, T) :

$$2 - n \leq \rho - \nu \leq \frac{n-2}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.554 (P, P) :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{si } n \text{ est pair,} & \frac{5}{2} + \frac{1}{2n-2} \\ \text{si } n \text{ est impair,} & \frac{5}{2} \end{array}\right\} \leq \rho + \nu \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés de deux cliques sur $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ et $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ sommets respectivement, avec un sommet commun et sans arêtes entre les deux cliques (resp. les graphes complets).

Pour la borne inférieure, si $\nu \geq 2$, alors $\rho + \nu \geq 3$. Donc nécessairement $\nu = 1$. Sous cette dernière condition, il facile de voir qu'un graphe conposé de deux cliques équilibrées avec un sommet commun minimise ρ. D'où le résultat.
La borne supérieure est une conséquence de A.106.

Conjecture A.555 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\rho}{\nu} \leq \frac{n}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.556 (P, O) :

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{si } n \textit{ est pair,} & \frac{3}{2} + \frac{1}{2n-2} \\ \textit{si } n \textit{ est impair,} & \frac{3}{2} \end{array}\right\} \leq \rho \cdot \nu \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés de deux cliques sur $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ et $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ sommets respectivement, avec un sommet commun et sans arêtes entre les deux cliques (resp. les graphes complets).

La borne inférieure se démontre comme celle de A.554.

A.10.5 La connectivité aux arêtes

Conjecture A.557 (T, T) :

$$2 - n \leq \rho - \kappa \leq \frac{n-2}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.558 (P, P) :

$$3 - \frac{1}{n-1} \leq \rho + \kappa \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et un sommet pendant (resp. les graphes complets).

Pour la borne inférieure, si $\kappa \geq 2$, alors $\rho + \kappa \geq 3$. Donc nécessairement $\kappa = 1$. Sous cette dernière condition, il facile de voir qu'un graphe ayant un sommet dominant et un sommet pendant minimise ρ. D'où le résultat.
La borne supérieure est une conséquence de A.106.

Conjecture A.559 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\rho}{\kappa} \leq \frac{n}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.560 (P, O) :

$$2 - \frac{1}{n-1} \leq \rho \cdot \kappa \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et un sommet pendant (resp. les graphes complets).

La borne inférieure se démontre comme celle de A.558.

A.10.6 Le nombre de stabilité

Conjecture A.561 (P, SO) :

$$3 - n - \frac{1}{n-1} \leq \rho - \alpha \leq ??????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes de Soltés).

Pour la borne inférieure, si $G \equiv S_n$, on a la borne ; sinon $\rho - \alpha \geq 3 - n$.

Conjecture A.562 (T, AO) :

$$2 \leq \rho + \alpha \leq \left\lfloor \frac{3n+1}{4} \right\rfloor + \frac{1}{n-1} \cdot \left(2 \left\lfloor \frac{3n+1}{4} \right\rfloor - 1 \right) \cdot \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les comètes de diamètre $D = 2 \left\lceil \frac{n-1}{4} \right\rceil$ et $\alpha = \left\lfloor \frac{3n+1}{4} \right\rfloor$).

Conjecture A.563 (P, SO) :

$$\frac{2n-5}{(n-1)^2} \leq \frac{\rho}{\alpha} \leq ?????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes de Soltés).

La borne inférieure se démontre comme celle de A.561.

Conjecture A.564 (T, AO) :

$$1 \leq \rho \cdot \alpha \leq \frac{2}{n-1} \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil \left(n - \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil - \frac{1}{2} \right) \left\lceil \frac{2n-1}{3} \right\rceil .$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les comètes de diamètre $D = 2 \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil$ et $\alpha = \left\lceil \frac{2n-1}{3} \right\rceil$).

A.10.7 Le nombre de domination

Conjecture A.565 (SO, AO) :

$$????? \leq \beta - \rho \leq \begin{cases} \frac{n-5}{2} + \frac{3}{2n-2} & si\ n\ est\ pair, \\ \frac{n-6}{2} + \frac{2}{n-1} & si\ n\ est\ impair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les comètes avec d'éventuelles arêtes entre les voisins du sommet de degré maximum (resp. les graphes de rayon 2 et $\beta = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, comme le graphe composé d'une clique sur $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ sommets et $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sommets pendants, deux à deux sans voisin commun).

Conjecture A.566 (T, AO) :

$$2 \leq \beta + \rho \leq \begin{cases} \frac{5n+6}{6} - \frac{2}{n-1} & si\ n \equiv 0[3], \\ \frac{5n+4}{6} & si\ n \equiv 1[3], \\ \frac{5n+8}{6} - \frac{6}{n-1} & si\ n \equiv 2[3]. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant (resp. les chemins si $n \equiv 1[3]$, un chemin sur $n-1$ sommets et le n^{me} sommet est voisin du 3^{me}, à partir de l'une des extrémités du chemin, si $n \equiv 0[3]$, et un chemin sur $n-2$ sommets et les deux autres sommets sont pendants et voisins du 3^{me} et du 4^{em} sommet respectivement, à partir de l'une des extrémités du chemin, si $n \equiv 2[3]$).

Conjecture A.567 (SO, AO) :

$$????? \leq \frac{\beta}{\rho} \leq \begin{cases} \frac{n(n-1)}{5n-8} & si\ n\ est\ pair, \\ \frac{(n-1)^2}{5n-9} & si\ n\ est\ impair. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant si $n \leq 9$ et pour les comètes de diamètre 5 avec d'éventuelles arêtes entre les voisins du sommet du degré maximum (resp. les graphes de rayon 2 et $\beta = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, comme le graphe composé d'une clique sur $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ sommets et $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sommets pendants n'ayant pas de voisin commun).

Conjecture A.568 (T, ND) :

$$1 \leq \beta \cdot \rho \leq ?????$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes complets.

A.10.8 La cardinalité maximale d'une clique

Conjecture A.569 (T, T) :

$$1 - n \leq \rho - \omega \leq \frac{n}{2} - 2$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.570 (O, P) :

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{si } n \textit{ est impair,} & \frac{7}{2} \\ \textit{si } n \textit{ est pair,} & \frac{7}{2} - \frac{1}{2n-2}. \end{array}\right\} \leq \rho + \omega \leq n + 1$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis complets équilibrés (resp. les graphes complets).

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.330.

Conjecture A.571 (T, T) :

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\rho}{\omega} \leq \frac{n}{4}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.572 (O, SO) :

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{si } n \textit{ est impair,} & 3 \\ \textit{si } n \textit{ est pair,} & 3-\frac{1}{n-1} \end{array}\right\} \leq \rho \cdot \omega \leq ??????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis complets équilibrés (resp. les graphes de Soltés).

A.10.9 Le nombre chromatique

Conjecture A.573 (T, T) :

$$1-n \leq \rho-\chi \leq \frac{n}{2}-2$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.574 (P, P) :

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{si } n \textit{ est impair,} & \frac{7}{2} \\ \textit{si } n \textit{ est pair,} & \frac{7}{2}-\frac{1}{2n-2} \end{array}\right\} \leq \rho+\chi \leq n+1$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis complets équilibrés (resp. les graphes complets).

Pour la borne inférieure, on démontre d'abord que pour $\chi = 2$, ρ est minimum pour un graphe biparti complet équilibré; et pour $\chi \geq 3$, on a $\rho + \chi \geq 4$. La borne supérieure est une conséquence de celle de A.334.

Conjecture A.575 (T, T) :

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\rho}{\chi} \leq \frac{n}{4}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.576 (P, SO) :

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{si } n \textit{ est impair,} & 3 \\ \textit{si } n \textit{ est pair,} & 3-\frac{1}{n-1} \end{array}\right\} \leq \rho \cdot \chi \leq ??????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis complets équilibrés (resp. les graphes de Soltés).

La borne inférieure se démontre comme celle de A.574.

A.10.10 La cardinalité maximale d'un couplage

Conjecture A.577 (T, AO) :

$$1-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \leq \rho-\mu \leq \begin{cases} \frac{n^2}{8n-8} & \textit{si } n \equiv 0[4], \\ \frac{(n-2)(n+2)}{8n-8} & \textit{si } n \equiv 2[4], \\ \frac{n+1}{8} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les doubles comètes avec $D = 2\left\lfloor\frac{n+2}{4}\right\rfloor$).

Conjecture A.578 (P, T) :

$$3-\frac{1}{n-1} \leq \rho+\mu \leq \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\frac{n}{2}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les chemins).

Pour la borne inférieure, si $\mu = 1$, alors on a la borne ; sinon $\mu + \rho \geq 3$.

Conjecture A.579 (T, O) :

$$\frac{1}{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor} \leq \frac{\rho}{\mu} \leq 2-\frac{1}{n-1}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les étoiles).

Conjecture A.580 (P, T) :

$$2 - \frac{1}{n-1} \leq \rho \cdot \mu \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \frac{n}{2}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les chemins).

La borne inférieure se démontre comme celle de A.578.

A.11 L'index

A.11.1 L'indice de Randić

Conjecture A.581 (P, AP) : (Proposition 30 page 98)

$$\frac{2-n}{2} \leq Ra - \lambda_1 \leq \begin{cases} \frac{n-3+2\sqrt{2}}{2} - 2cos(\frac{\pi}{n+1}) & si\ n \leq 9, \\ \frac{n-4}{2} & si\ n \geq 10\ . \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins si $n \leq 9$ et les cycles si $n \geq 10$).

Conjecture A.582 (P, T) :

$$2\sqrt{n-1} \leq Ra + \lambda_1 \leq \frac{3n-2}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.583 (P, AP) : (Proposition 31 page 98)

$$\frac{n}{2n-2} \leq \frac{Ra}{\lambda_1} \leq \begin{cases} \frac{n-3+2\sqrt{2}}{4cos(\frac{\pi}{n+1})} & si\ n \leq 26, \\ \frac{n}{4} & si\ n \geq 27. \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins si $n \leq 26$ et les cycles si $n \geq 27$).

Conjecture A.584 (P, T) : (Proposition 3

$$n - 1 \leq Ra \cdot \lambda_1 \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

A.11.2 La connectivité algébrique

Conjecture A.585 (AO, P) :

$$3 - n - t \leq a - \lambda_1 \leq 1$$

où t vérifie $0 < t < 1$ et l'équation $t^3 + (2n-3)t^2 + (n^2 - 3n + 1)t - 1 = 0$.
La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés d'une clique sur $n-1$ sommets et un sommet pendant (resp. les graphes complets).

Pour la borne supérieure, si $G \equiv K_n$, on a la borne ; sinon $a - \lambda_1 \leq a - \delta \leq 0$.

Conjecture A.586 (T, T) :

$$2 - 2cos\frac{\pi}{n} + 2cos\frac{\pi}{n+1} \leq a + \lambda_1 \leq 2n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.587 (SO, P) :

$$????? \leq \frac{a}{\lambda_1} \leq \frac{n}{n-1}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cerfs-volants avec $\omega = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $n \geq 6$ (resp. les graphes complets).

La borne supérieure se démontre comme celle de A.585.

Conjecture A.588 (T, T) :

$$4(1 - cos\frac{\pi}{n})(cos\frac{\pi}{n+1}) \leq a \cdot \lambda_1 \leq n(n-1).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

A.11.3 La connectivité aux sommets

Conjecture A.589 (AO, P) :

$$3 - n - t \leq \nu - \lambda_1 \leq 0.$$

où t vérifie $0 < t < 1$ et l'équation $t^3 + (2n-3)t^2 + (n^2 - 3n + 1)t - 1 = 0$.
La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés d'une clique sur $n-1$ sommets et une arête pendante (resp. les graphes réguliers).

La borne supérieure est une conséquence de la borne inférieure de A.109.

Conjecture A.590 (T, T) :

$$1 + 2cos(\frac{\pi}{n+1}) \leq \nu + \lambda_1 \leq 2n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.591 (AO, P) :

$$\frac{1}{n-2+t} \leq \frac{\nu}{\lambda_1} \leq 1.$$

où t vérifie $0 < t < 1$ et l'équation $t^3 + (2n-3)t^2 + (n^2-3n+1)t - 1 = 0$.
La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés d'une clique sur $n-1$ sommets et une arête pendante (resp. les graphes réguliers).

La borne supérieure est une conséquence de la borne inférieure de A.111.

Conjecture A.592 (T, T) :

$$2cos(\frac{\pi}{n+1}) \leq \nu \cdot \lambda_1 \leq (n-1)^2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

A.11.4 La connectivité aux arêtes

Conjecture A.593 (AO, P) :

$$3 - n - t \leq \kappa - \lambda_1 \leq 0.$$

où t vérifie $0 < t < 1$ et l'équation $t^3 + (2n-3)t^2 + (n^2-3n+1)t - 1 = 0$.
La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés d'une clique sur $n-1$ sommets et une arête pendante (resp. les graphes réguliers).

La borne supérieure est une conséquence de la borne inférieure de A.109.

Conjecture A.594 (T, T) :

$$1 + 2cos(\frac{\pi}{n+1}) \leq \kappa + \lambda_1 \leq 2n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.595 (AO, P) :

$$\frac{1}{n-2+t} \leq \frac{\kappa}{\lambda_1} \leq 1.$$

où t vérifie $0 < t < 1$ et l'équation $t^3 + (2n-3)t^2 + (n^2-3n+1)t - 1 = 0$.
La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés d'une clique sur $n-1$ sommets et une arête pendante (resp. les graphes réguliers).

La borne supérieure est une conséquence de la borne inférieure de A.111.

Conjecture A.596 (T, T) :

$$2cos(\frac{\pi}{n+1}) \leq \kappa \cdot \lambda_1 \leq (n-1)^2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

A.11.5 Le nombre de stabilité

Conjecture A.597 (T, O) :

$$2 - n \leq \alpha - \lambda_1 \leq n - 1 - \sqrt{n-1}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les étoiles).

Conjecture A.598 (ND, AP) :

$$???? \leq \alpha + \lambda_1 \leq \frac{n + \alpha' - 1 + \sqrt{(n-\alpha'-1)^2 + 4\alpha'(n-\alpha')}}{2}$$

où

$$\alpha' = \begin{cases} \left\lceil \frac{n+1+\sqrt{n^2-n+1}}{3} \right\rceil & si\ n \equiv 1[3], \\ \left\lfloor \frac{n+1+\sqrt{n^2-n+1}}{3} \right\rfloor & sinon. \end{cases}$$

La borne supérieure est atteinte pour les graphes éclatés complets ($\frac{2n}{3}$ sommets dans le stable).

Pour la borne supérieure, on démontre que pour α fixé, λ_1 est maximum pour $SK_{n,\alpha}$. Sur l'ensemble des graphes éclatés complets, $\alpha + \lambda_1$ est maxixmum pour $\alpha = \alpha'$.

Conjecture A.599 (T, ND) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\alpha}{\lambda_1} \leq ??????$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes complets.

Conjecture A.600 (ND, ND) :

$$???? \leq \alpha \cdot \lambda_1 \leq ??????$$

La borne inférieure est atteinte pour une suite de cliques, entre deux cliques successives une seule arête.

A.11.6 Le nombre de domination

Conjecture A.601 (T, SO) :

$$2 - n \leq \beta - \lambda_1 \leq ??????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chenilles avec $\Delta = 3$ de diamètre $D = \frac{n+2}{2}$ si n est pair et $D = \frac{n+5}{2}$ si n est impair).

Conjecture A.602 (SO, P) :

$$???? \leq \beta + \lambda_1 \leq n.$$

La borne inférieure(resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles puis pour les doubles comètes (resp. les graphes complets ou le complémentaire d'un couplage parfait si n est pair).

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.62.

Conjecture A.603 (T, SO) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\beta}{\lambda_1} \leq ??????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chenilles avec $\Delta = 3$ de diamètre $D = \frac{n+2}{2}$ si n est pair et $D = \frac{n+5}{2}$ si n est impair).

Conjecture A.604 (O, SO) :

$$\sqrt{n-1} \leq \beta \cdot \lambda_1 \leq ??????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes composés d'une clique sur $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ sommets et $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1$ sommets pendants sans voisin commun et un n^{me} sommet voisin des 2 ou 3 sommets de la clique sans voisins pendants).

A.11.7 La cardinalité maximale d'une clique

Conjecture A.605 (P, SO) :

$$-1 \leq \lambda_1 - \omega \leq ?????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les graphes multipartis complets équilibrés).

La borne inférieure est une conséquence du théorème de Wilf [180] ($\chi \leq \lambda_1 + 1$) et du fait que $\omega \leq \chi$.

Conjecture A.606 (T, T) :

$$2 + 2cos\frac{\pi}{n+1} \leq \lambda_1 + \omega \leq 2n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.607 (SO, AO) :

$$???? \leq \frac{\lambda_1}{\omega} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés d'un triangle et d'un chemin incident à un de ses sommets (resp. les graphes bipartis complets équilibrés).

Conjecture A.608 (T, T) :

$$4cos\frac{\pi}{n+1} \leq \lambda_1 \cdot \omega \leq n(n-1).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

A.11.8 Le nombre chromatique

Conjecture A.609 (K, SO) : (La borne inférieure, voir Théorème 18 page 179)

$$-1 \leq \lambda_1 - \chi \leq ?????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets et les cycles (resp. les graphes multipartis complets équilibrés).

Conjecture A.610 (T, T) :

$$2 + 2cos\frac{\pi}{n+1} \leq \lambda_1 + \chi \leq 2n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.611 (SO, P) : (Proposition 35 page 180)

$$???? \leq \frac{\lambda_1}{\chi} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les cycles si n est impair et les cycles avec un sommet pendant si n est pair (resp. les graphes bipartis complets équilibréss).

Conjecture A.612 (T, T) :

$$4cos\frac{\pi}{n+1} \leq \lambda_1 \cdot \chi \leq n(n-1).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

A.11.9 La cardinalité maximale d'un couplage

Conjecture A.613 (T, O) :

$$2cos(\frac{\pi}{n+1}) - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \lambda_1 - \mu \leq n - 1 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.614 (O, T) :

$$\sqrt{n-1}+1 \leq \lambda_1 + \mu \leq n-1+\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.615 (T, O) :

$$\frac{2cos(\frac{\pi}{n+1})}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq \frac{\lambda_1}{\mu} \leq \sqrt{n-1}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les étoiles).

Conjecture A.616 (P, T) :

$$\sqrt{n-1} \leq \lambda_1 \cdot \mu \leq (n-1)\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

La borne inférieure est une conséquence de la borne suérieure de A.647 et de la borne inférieure de A.584.

A.12 L'indice de Randić

A.12.1 La connectivité algébrique

Conjecture A.617 (P, ND) :

$$-\frac{n}{2} \leq Ra - a \leq ?????$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes complets.

Conjecture A.618 (SO, T) :

$$????? \leq Ra + a \leq \frac{3n}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les comètes (resp. les graphes complets)

Conjecture A.619 (P, AO) :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{Ra}{a} \leq \frac{n-3+2\sqrt{2}}{4(1-cos\frac{\pi}{n})}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.620 (SO, T) :

$$\left.\begin{array}{ll} si\ n \leq 9 & (n-3+2\sqrt{2})(1-cos\frac{\pi}{n}) \\ si\ n \geq 10 & ????? \end{array}\right\} \leq Ra \cdot a \leq \frac{n^2}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins si $n \leq 9$ et pour les doubles comètes équilibrées avec $\Delta_1 = \Delta_2 = \lfloor \frac{n-2}{7} \rfloor$ si $n \geq 10$ (resp. les graphes complets).

A.12.2 La connectivité aux sommets

Conjecture A.621 (P, R) :

$$\frac{2-n}{2} \leq Ra - \nu \leq \frac{n-5+2\sqrt{2}}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.622 (T, T) :

$$1 + \sqrt{n-1} \leq Ra + \nu \leq \frac{3n-2}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets)

Conjecture A.623 (P, ND) : (UB PC par M. Z.)

$$\frac{n}{2n-2} \leq \frac{Ra}{\nu} \leq ??????$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes complets.

Conjecture A.624 (T, T) :

$$\sqrt{n-1} \leq Ra \cdot \nu \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets)

A.12.3 La connectivité aux arêtes

Conjecture A.625 (P, R) :

$$\frac{2-n}{2} \leq Ra - \kappa \leq \frac{n-5+2\sqrt{2}}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.626 (T, T) :

$$1 + \sqrt{n-1} \leq Ra + \kappa \leq \frac{3n-2}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets)

Conjecture A.627 (P, ND) : (UB PC par M. Z.)

$$\frac{n}{2n-2} \leq \frac{Ra}{\kappa} \leq ??????$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes complets.

Conjecture A.628 (T, T) :

$$\sqrt{n-1} \leq Ra \cdot \kappa \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets)

A.12.4 Le nombre de stabilité

Conjecture A.629 (T, T) :

$$\sqrt{n-1} - (n-1) \leq Ra - \alpha \leq \frac{n-2}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.630 (O, O) :

$$\frac{n+2}{2} \leq Ra + \alpha \leq (n-1) + \sqrt{n-1}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les étoiles).

Conjecture A.631 (T, T) :

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}} \leq \frac{Ra}{\alpha} \leq \frac{n}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.632 (O, AO) :

$$\frac{n}{2} \leq Ra \cdot \alpha \leq \left\lceil \frac{3n-2}{4} \right\rceil \sqrt{\left\lceil \frac{3n-2}{4} \right\rceil \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les graphes bipartis complets K_{pq} avec $p = \alpha = \lceil \frac{3n-2}{4} \rceil$ et $q = \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor$).

A.12.5 Le nombre de domination

Conjecture A.633 (T, AO) :

$$\frac{2-n}{2} \leq \beta - Ra \leq \begin{cases} \frac{n-2}{4} - \sqrt{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{n-1}{2} - \frac{n-3}{\sqrt{2n-2}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}} - \frac{(n-3)(n-5)}{4n-4} - \frac{n-4}{\sqrt{n^2-1}} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les graphes composés d'une clique sur $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sommets et $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ sommets pendants dominant les sommets de la clique).

Conjecture A.634 (T, ND) :

$$1 + \sqrt{n-1} \leq \beta + Ra \leq ?????$$

La borne inférieure est atteinte pour les étoiles.

Conjecture A.635 (T, AO) :

$$\frac{2}{n} \leq \frac{\beta}{Ra} \leq \begin{cases} \frac{n-2}{4} - \sqrt{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-3}{\sqrt{2n-2}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}} + \frac{(n-3)(n-5)}{4n-4} + \frac{n-4}{\sqrt{n^2-1}}} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les graphes composés d'une clique sur $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sommets et $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ sommets pendants dominant les sommets de la clique).

Conjecture A.636 (T, ND) :

$$\sqrt{n-1} \leq \beta \cdot Ra \leq ???????$$

La borne inférieure est atteinte pour les étoiles.

A.12.6 La cardinalité maximale d'une clique

Conjecture A.637 (O, T) :

$$-\frac{n}{2} \leq Ra - \omega \leq \frac{n}{2} - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour graphes complets (resp. les cycles et les bipartis réguliers si n est pair).

Conjecture A.638 (T, T) :

$$2 + \sqrt{n-1} \leq Ra + \omega \leq \frac{3n}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.639 (O, T) :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{Ra}{\omega} \leq \frac{n}{4}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour graphes complets (resp. les cycles et aussi pour les graphes bipartis réguliers si n est pair).

Conjecture A.640 (T, T) :

$$2\sqrt{n-1} \leq Ra \cdot \omega \leq \frac{n^2}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

A.12.7 Le nombre chromatique

Conjecture A.641 (O, AP) :

$$-\frac{n}{2} \leq Ra - \chi \leq \sqrt{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour graphes complets (resp. les graphes bipartis réguliers).

Conjecture A.642 (T, T) :

$$2 + \sqrt{n-1} \leq Ra + \chi \leq \frac{3n}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.643 (O, AP) :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{Ra}{\chi} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour graphes complets (resp. les graphes bipartis réguliers).

Conjecture A.644 (T, T) :

$$2\sqrt{n-1} \leq Ra \cdot \chi \leq \frac{n^2}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

A.12.8 La cardinalité maximale d'un couplage

Conjecture A.645 (ND, AO) :

$$????? \leq Ra - \mu \leq \sqrt{\left\lfloor \frac{n+4}{7} \right\rfloor \left\lfloor \frac{6n+2}{7} \right\rfloor} - \left\lfloor \frac{n+4}{7} \right\rfloor$$

La borne supérieure est atteinte pour les graphes bipartis complets avec $\mu = \lfloor \frac{n+4}{7} \rfloor$.

Conjecture A.646 (T, T) :

$$1 + \sqrt{n-1} \leq Ra + \mu \leq \frac{n}{2} + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes réguliers avec $\mu = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$*).*

Conjecture A.647 (ND, P) :

$$?????? \leq \frac{Ra}{\mu} \leq \sqrt{n-1}.$$

La borne supérieure est atteinte pour les étoiles.

La borne supérieure est une conséquence d'un résultat plus fort, $Ra \leq \mu\sqrt{\Delta}$, dû à Maolin Zheng (communication privée).

Conjecture A.648 (T, T) :

$$\sqrt{n-1} \leq Ra \cdot \mu \leq \frac{n^2}{2}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes réguliers avec $\mu = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$*).*

A.13 La connectivité algébrique

A.13.1 La connectivité aux sommets

Conjecture A.649 (ND, K) :

$$????? \leq a - \nu \leq 1.$$

La borne supérieure est atteinte pour les graphes complets.

Conjecture A.650 (T, T) :

$$3 - 2cos\frac{\pi}{n} \leq a + \nu \leq 2n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.651 (AO, K) :

$$2 - 2cos\frac{\pi}{n} \leq \frac{a}{\nu} \leq \frac{n}{n-1}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.652 (T, T) :

$$2 - 2cos\frac{\pi}{n} \leq a \cdot \nu \leq n(n-1).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

A.13.2 La connectivité aux arêtes

Conjecture A.653 (ND, K) :

$$????? \leq a - \kappa \leq 1.$$

La borne supérieure est atteint pour les graphes complets.

Conjecture A.654 (T, T) :

$$3 - 2cos\frac{\pi}{n} \leq a + \kappa \leq 2n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.655 (AO, K) :

$$2 - 2cos\frac{\pi}{n} \leq \frac{a}{\kappa} \leq \frac{n}{n-1}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.656 (T, T) :

$$2 - 2cos\frac{\pi}{n} \leq a \cdot \kappa \leq n(n-1).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

A.13.3 Le nombre de stabilité

Conjecture A.657 (P, T) :

$$2 - n \leq a - \alpha \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Si $G \equiv S_n$, on a la borne inférieure sinon $a - \alpha > 2 - n$.

Conjecture A.658 (SO, P) :

$$????? \leq a + \alpha \leq n + 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés de deux cliques équilibrées et reliées par une seule arête (resp. les graphes complets).

Si $G \equiv K_n$, on a la borne supérieure ; sinon $a + \alpha \leq \delta + \alpha \leq n$ (voir A.130).

Conjecture A.659 (SO, T) :

$$????? \leq \frac{a}{\alpha} \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les doubles comètes (resp. les graphes complets).

Conjecture A.660 (SO, P) :

$$????? \leq a \cdot \alpha \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés de deux cliques équilibrées et reliées par un chemin (resp. les graphes complets éclatés équilibrés).

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.658.

A.13.4 Le nombre de domination

Conjecture A.661 (T, SO) :

$$1 - n \leq \beta - a \leq ?????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chenilles de degré maximum $\Delta = 3$ avec un sommet pendant et un sommet de degré deux à chaque extrémité si n est pair, et un sommet pendant et un sommet de degré deux à chaque extrémité et trois sommets successifs de degré 2 au milieu, si n est impair).

Conjecture A.662 (P, P) :

$$2 \leq \beta + a \leq n + 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et $a = 1$ (resp. les graphes complets).

Pour la borne inférieure, si $\beta = 1$, alors $a \geq 1$; sinon $\beta \geq 2$. Pour la borne supérieure, si $G \equiv K_n$, on a la borne ; sinon $\beta + a \leq \beta + \delta \leq n$ (voir A.134).

Conjecture A.663 (T, ND) :

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\beta}{a} \leq ?????$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets.

Conjecture A.664 (P, O) :

$$1 \leq \beta \cdot a \leq 4 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 4.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et $a = 1$ (resp. les graphes complémentaire d'un recouvrement minimum des sommets par les arêtes).

La borne inférieure se démontre comme celle de A.662.

A.13.5 La cardinalité maximale d'une clique

Conjecture A.665 (P, AO) :

$$2 - n \leq a - \omega \leq \left\lfloor (1 - \frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}) n \right\rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor .$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés d'une clique sur $n-1$ sommets et un sommet pendant (resp. les graphes multipartis complets équilibrés).

Si $\omega = n$, alors $a - \omega = 0$. Si $\omega = n-1$, alors $a \geq 1$. Si $\omega \leq n-2$, alors $a - \omega > 2 - n$. D'où la borne inférieure.

Conjecture A.666 (T, T) :

$$4 - 2cos\frac{\pi}{n} \leq a + \omega \leq 2n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.667 (SO, O) :

$$????? \leq \frac{a}{\omega} \leq \frac{1}{2}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes de Soltés avec $\omega = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ *(sauf pour* $n = 5, 7$*) (resp. les graphes bipartis complets équilibrés).*

Conjecture A.668 (T, T) :

$$4 - 4cos\frac{\pi}{n} \leq a \cdot \omega \leq n^2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

A.13.6 Le nombre chromatique

Conjecture A.669 (P, AO) :

$$2 - n \leq a - \chi \leq \left\lfloor (1 - \frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor})n \right\rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor .$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés d'une clique sur $n-1$ *sommets et un sommet pendant (resp. les graphes multipartis complets équilibrés).*

La borne inférieure se démontre comme celle de A.665.

Conjecture A.670 (T, T) :

$$4 - 2cos\frac{\pi}{n} \leq a + \chi \leq 2n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

Conjecture A.671 (SO, P) :

$$????? \leq \frac{a}{\chi} \leq \frac{1}{2}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes de Soltés avec $\chi = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ *(sauf pour* $n = 5, 7$*) (resp. les graphes bipartis complets).*

La borne supérieure est une conséquence de la borne inférieure de A.143.

Conjecture A.672 (T, T) :

$$4 - 4cos\frac{\pi}{n} \leq a \cdot \chi \leq n^2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les chemins (resp. les graphes complets).

A.13.7 La cardinalité maximale d'un couplage

Conjecture A.673 (O, T) :

$$-\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq \mu - a \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 2 + 2cos\frac{\pi}{n}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.674 (P, T) :

$$2 \leq \mu + a \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Si $\mu = 1$, le graphe est une étoile et on a la borne, sinon $\mu \geq 2$. D'où la borne inférieure.

Conjecture A.675 (O, T) :

$$\frac{1}{n}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \leq \frac{\mu}{a} \leq \frac{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}{2-2cos\frac{\pi}{n}}.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins).

Conjecture A.676 (O, T) :

$$1 \leq \mu \cdot a \leq \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \cdot n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

A.14 La connectivité aux sommets

A.14.1 La connectivité aux arêtes

Conjecture A.677 (P, T) :

$$-\left\lfloor\frac{n-3}{2}\right\rfloor \leq \nu - \kappa \leq 0.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés de 2 cliques sur $\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$ et $\lceil\frac{n+1}{2}\rceil$ sommets respectivement et ayant un sommet commun (resp. les graphes avec $\nu = \kappa = \delta$, comme les cycles et les graphes bipartis complets).

La borne inférieure est une conséquence de celle de A.121.

Conjecture A.678 (T, T) :

$$2 \leq \nu + \kappa \leq 2n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes avec $\nu = \kappa = 1$ (resp. les graphes complets).

Conjecture A.679 (AP, T) :

$$\frac{1}{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \leq \frac{\nu}{\kappa} \leq 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés de 2 cliques sur $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ et $\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ sommets respectivement et ayant un sommet commun (resp. les graphes avec $\nu = \kappa = \delta$, comme les cycles et les graphes bipartis complets).

La borne inférieure est une conséquence de celle de A.123.

Conjecture A.680 (T, T) :

$$1 \leq \nu \cdot \kappa \leq (n-1)^2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes avec $\nu = \kappa = 1$ (resp. les graphes complets).

A.14.2 Le nombre de stabilité

Conjecture A.681 (T, T) :

$$2 - n \leq \nu - \alpha \leq n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.682 (T, P) :

$$3 \leq \nu + \alpha \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant $\nu = 1$ *et* $\alpha = 2$ *(resp. les graphes complets, les bipartis complets et autres).*

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.130.

Conjecture A.683 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\nu}{\alpha} \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.684 (T, P) :

$$2 \leq \nu \cdot \alpha \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant $\nu = 1$ *et* $\alpha = 2$ *(resp. les bipartis complets et autres).*

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.682.

A.14.3 Le nombre de domination

Conjecture A.685 (T, T) :

$$2 - n \leq \beta - \nu \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les graphes avec $\beta = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ *et* $\nu = 1$*).*

Conjecture A.686 (T, P) :

$$2 \leq \beta + \nu \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et $\nu = 1$ *(resp. les graphes complets ou complémentaire d'un couplage parfait si* n *est pair).*

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.134.

Conjecture A.687 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\beta}{\nu} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les graphes avec $\beta = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ *et* $\nu = 1$*).*

Conjecture A.688 (T, O) :

$$1 \leq \beta \cdot \nu \leq 4 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 4.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et $\nu = 1$ *(resp. les graphes complémentaire d'un recouvrement minimum des sommets par les arêtes).*

A.14.4 La cardinalité maximale d'une clique

Conjecture A.689 (P, AO) :

$$2 - n \leq \nu - \omega \leq \left\lfloor (1 - \frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}) n \right\rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés d'une clique sur $n - 1$ *sommets et un sommet pendant (resp. les graphes multipartis complets).*

Si $G \equiv K_n$, alors $\nu - \omega = -1$, sinon $\nu \geq 1$ et $\omega \leq n-1$. D'où la borne inférieure.

Conjecture A.690 (T, T) :

$$3 \leq \nu + \omega \leq 2n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant $\nu = 1$ *et* $\omega = 2$ *(resp. les graphes complets).*

Conjecture A.691 (P, O) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\nu}{\omega} \leq \frac{1}{2}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés d'une clique sur $n-1$ *sommets et un sommet pendant (resp. les graphes bipartis complets équilibrés).*

La borne inférieure est une conséquence de celle de A.689.

Conjecture A.692 (T, T) :

$$2 \leq \nu \cdot \omega \leq n(n-1).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant $\nu = 1$ *et* $\omega = 2$ *(resp. les graphes complets).*

A.14.5 Le nombre chromatique

Conjecture A.693 (P, AO) :

$$2 - n \leq \nu - \chi \leq \left\lfloor (1 - \frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor})n \right\rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés d'une clique sur $n-1$ sommets et un sommet pendant (resp. les graphes multipartis complets).

La borne inférieure est une conséquence de celle de A.689.

Conjecture A.694 (T, T) :

$$3 \leq \nu + \chi \leq 2n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant $\nu = 1$ et $\chi = 2$ (resp. les graphes complets).

Conjecture A.695 (P, P) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\nu}{\chi} \leq \frac{1}{2}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés d'une clique sur $n-1$ sommets et un sommet pendant (resp. les graphes bipartis complets équilibrés).

La borne inférieure est une conséquence de celle de A.689. La borne supérieure est une conséquence de celle de A.611 et du fait que $\nu \leq \lambda_1$.

Conjecture A.696 (T, T) :

$$2 \leq \nu \cdot \chi \leq n(n-1).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant $\nu = 1$ et $\chi = 2$ (resp. les graphes complets).

A.14.6 La cardinalité maximale d'un couplage

Conjecture A.697 (P, T) :

$$1 - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq \mu - \nu \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins et les graphes avec $\mu = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et un sommet pendant).

Conjecture A.698 (T, T) :

$$2 \leq \mu + \nu \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.699 (O, T) :

$$\frac{1}{n-1} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \frac{\mu}{\nu} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les chemins et les graphes avec $\mu = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et un sommet pendant).

Conjecture A.700 (T, T) :

$$1 \leq \mu \cdot \nu \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

A.15 La connectivité aux arêtes

A.15.1 Le nombre de stabilité

Conjecture A.701 (T, T) :

$$2 - n \leq \kappa - \alpha \leq n - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.702 (T, P) :

$$3 \leq \kappa + \alpha \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant $\kappa = 1$ et $\alpha = 2$ (resp. les graphes complets, les bipartis complets et autres).

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.130.

Conjecture A.703 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\kappa}{\alpha} \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.704 (T, P) :

$$2 \leq \kappa \cdot \alpha \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant $\kappa = 1$ et $\alpha = 2$ (resp. les bipartis complets et autres).

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.702.

A.15.2 Le nombre de domination

Conjecture A.705 (T, T) :

$$2 - n \leq \beta - \kappa \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les graphes avec $\beta = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ *et* $\kappa = 1$*).*

Conjecture A.706 (T, P) :

$$2 \leq \beta + \kappa \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et $\kappa = 1$ *(resp. les graphes complets, ou complémentaire d'un couplage parfait si* n *est pair).*

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.134.

Conjecture A.707 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\beta}{\kappa} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les graphes avec $\beta = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ *et* $\kappa = 1$*).*

Conjecture A.708 (T, O) :

$$1 \leq \beta \cdot \kappa \leq 4 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 4.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant un sommet dominant et $\kappa = 1$ *(resp. le complémentaire d'un recouvrement minimum des sommets par les arêtes).*

A.15.3 La cardinalité maximale d'une clique

Conjecture A.709 (P, AO) :

$$2 - n \leq \kappa - \omega \leq \left\lfloor (1 - \frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor})n \right\rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor .$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés d'une clique sur $n-1$ sommets et un sommet pendant (resp. les graphes multipartis complets).

Si $\omega = n$, alors $G \equiv K_n$ et $\kappa - \omega = -1$. Sinon, $\kappa \geq 1$, $\omega \leq n-1$ et on a la borne inférieure.

Conjecture A.710 (T, T) :

$$3 \leq \kappa + \omega \leq 2n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant $\kappa = 1$ et $\omega = 2$ (resp. les graphes complets).

Conjecture A.711 (P, O) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\kappa}{\omega} \leq \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés d'une clique sur $n-1$ sommets et un sommet pendant (resp. les graphes bipartis complets équilibrés).

La borne inférieure se démontre comme celle de A.709.

Conjecture A.712 (T, T) :

$$2 \leq \kappa \cdot \omega \leq n(n-1).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant $\kappa = 1$ *et* $\omega = 2$ *(resp. les graphes complets).*

A.15.4 Le nombre chromatique

Conjecture A.713 (P, AO) :

$$2 - n \leq \kappa - \chi \leq \left\lfloor (1 - \frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor})n \right\rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor .$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés d'une clique sur $n-1$ *sommets et un sommet pendant (resp. les graphes mulripartis complets équilibrés).*

La borne inférieure se démontre comme celle de A.709.

Conjecture A.714 (T, T) :

$$3 \leq \kappa + \chi \leq 2n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant $\kappa = 1$ *et* $\omega = 2$ *(resp. les graphes complets).*

Conjecture A.715 (P, P) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\kappa}{\chi} \leq \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes composés d'une clique sur $n-1$ *sommets et un sommet pendant (resp. les graphes bipartis complets équilibrés).*

La borne inférieure se démontre comme celle de A.709. La borne supérieure est une conséquence de la borne inférieure de A.143 et du fait que $\kappa \leq \delta$.

Conjecture A.716 (T, T) :

$$2 \leq \kappa \cdot \chi \leq n(n-1).$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes ayant $\kappa = 1$ *et* $\omega = 2$ *(resp. les graphes complets).*

A.15.5 La cardinalité maximale d'un couplage

Conjecture A.717 (P, T) :

$$1 - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq \mu - \kappa \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chemins et les graphes $\mu = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *et un sommet pendant).*

Conjecture A.718 (T, T) :

$$2 \leq \mu + \kappa \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.719 (O, T) :

$$\frac{1}{n-1} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \frac{\mu}{\kappa} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les chemins et les graphes avec $\mu = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *et un sommet pendant).*

Conjecture A.720 (T, T) :

$$1 \leq \mu \cdot \kappa \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

A.16 Le nombre de stabilité

A.16.1 Le nombre de domination

Conjecture A.721 (T, T) :

$$2 - n \leq \beta - \alpha \leq 0.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. plusieurs familles de graphes avec $\beta = \alpha$).

Conjecture A.722 (T, P) :

$$2 \leq \beta + \alpha \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les étoiles, et autres).

Pour la borne supérieure, il suffit de constater que le complementaire d'un stable est un ensemble dominant.

Conjecture A.723 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\beta}{\alpha} \leq 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. plusieurs familles de graphes avec $\beta = \alpha$).

Conjecture A.724 (T, P) :

$$1 \leq \beta \cdot \alpha \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil .$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les chenilles avec un maximum de sommets pendants, $\Delta = 3$ et $\alpha = \lceil \frac{n}{2} \rceil$).

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.722.

A.16.2 La cardinalité maximale d'une clique

Conjecture A.725 (T, T) :

$$3 - n \leq \omega - \alpha \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.726 (R, K) :

$$\left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil + 2 \leq \omega + \alpha \leq n + 1.$$

La borne supérieure est atteinte pour les graphes éclatés complets et autres. La structure des graphes extrêmes associés à la borne inférieure n'est pas assez régulière pour la caractériser.

Un contre-exemple est donné dans la Figure 2.14 page 101.

Conjecture A.727 (T, T) :

$$\frac{2}{n-1} \leq \frac{\omega}{\alpha} \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.728 (ND, P) :

$$????? \leq \omega \cdot \alpha \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil.$$

La borne supérieure est atteinte pour les graphes éclatés complets équilibrés et autres.

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.726.

A.16.3 Le nombre chromatique

Conjecture A.729 (T, T) :

$$3 - n \leq \chi - \alpha \leq n - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.730 (ND, P) :

$$?????? \leq \chi + \alpha \leq n + 1.$$

La borne supérieure est atteinte pour les graphes complets et autres.

Pour la borne supérieure, on colore avec une seule couleur les sommets d'un stable maximum et une couleur pour chacun des autres sommets. Donc $\chi \leq n - \alpha + 1$.

Conjecture A.731 (T, T) :

$$\frac{2}{n-1} \leq \frac{\chi}{\alpha} \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.732 (ND, P) :

$$????? \leq \chi \cdot \alpha \leq \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{4} \right\rfloor.$$

La borne supérieure est atteinte pour les graphes éclatés complets avec $\alpha = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ *et autres.*

Pour la borne supérieure, il suffit de remarquer que

$$\chi \cdot \alpha = \chi \cdot \overline{\omega} \leq \chi \cdot \overline{\chi} \leq \frac{(n+1)^2}{4}.$$

Pour la dernière inégalité voir le Théorème 7 p. 46.

A.16.4 La cardinalité maximale d'un couplage

Conjecture A.733 (T, T) :

$$2 - n \leq \mu - \alpha \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.734 (P, P) :

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq \mu + \alpha \leq n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les étoiles, les chemins et les graphes éclatés complets).

Un ensemble stable contient au plus une extrémité de chaque arête d'un couplage maximum. Donc $\alpha \leq n - \mu$. D'où la borne supérieure.

Conjecture A.735 (T, T) :

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{\mu}{\alpha} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.736 (P, P) :

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \mu \cdot \alpha \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les étoiles, les chemins et les graphes éclatés complets avec $\alpha = \lceil \frac{n}{2} \rceil$).

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.734.

A.17 Le nombre de domination

A.17.1 La cardinalité maximale d'une clique

Conjecture A.737 (T, T) :

$$1 - n \leq \beta - \omega \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les graphes bipartis avec $\beta = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$).

Conjecture A.738 (T, P) :

$$3 \leq \beta + \omega \leq n + 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Pour la borne supérieure, si $G \equiv K_n$, on a la borne ; sinon $\beta \leq n - \omega$.

Conjecture A.739 (T, T) :

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\beta}{\omega} \leq \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les graphes bipartis avec $\beta = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$).

Conjecture A.740 (T, P) :

$$2 \leq \beta \cdot \omega \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes composés d'une clique sur $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ sommets et $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sommets pendants, deux à deux sans voisins communs).

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.738.

A.17.2 Le nombre chromatique

Conjecture A.741 (T, T) :

$$1 - n \leq \beta - \chi \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les graphes bipartis avec $\beta = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$).

Conjecture A.742 (T, P) :

$$3 \leq \beta + \chi \leq n + 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets et autres).

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.62 et du fait que $\chi \leq \Delta + 1$.

Conjecture A.743 (T, T) :

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\beta}{\chi} \leq \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les graphes bipartis avec $\beta = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$).

Conjecture A.744 (T, P) :

$$2 \leq \beta \cdot \chi \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes composés d'une clique sur $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ sommets et $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sommets pendants, deux à deux sans voisin commun).

La borne supérieure est une conséquence de celle de A.742.

A.17.3 La cardinalité maximale d'un couplage

Conjecture A.745 (T, P) :

$$1 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \beta - \mu \leq 0.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets et pour tout graphe avec $\Delta = n - 1$ *et* $\mu = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *(resp. plusieurs familles de graphes).*

Pour la borne supérieure, on démontre d'abord que pour un couplage maximum M, on peut choisir un ensemble dominant de μ sommets en prenant une extrémité de chaque arête de M. En effet si deux sommets non saturés par le M sont dominés chacun par une extrémitité (pas la même) d'une arête de M, on aurait une chaîne augmentante et par conséquent on obtiendrait un couplage de cardinalité $\mu + 1$. D'où $\mu \geq \beta$.

Conjecture A.746 (T, T) :

$$2 \leq \beta + \mu \leq 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes composés d'une clique sur $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ *sommets et* $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *sommets pendants, deux à deux sans voisin commun).*

Conjecture A.747 (T, P) :

$$\frac{1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq \frac{\beta}{\mu} \leq 1.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets et pour tout graphe avec $\Delta = n - 1$ *et* $\mu = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *(resp. plusieurs familles de graphes).*

La borne supérieure se démontre comme celle de A.745.

Conjecture A.748 (T, T) :

$$1 \leq \beta \cdot \mu \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes composés d'une clique sur $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ sommets et $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sommets pendants, deux à deux sans voisin commun).

A.18 La cardinalité maximale d'une clique

A.18.1 Le nombre chromatique

Conjecture A.749 (ND, K) :

$$?????? \leq \omega - \chi \leq 0.$$

La borne supérieure est atteinte pour plusieurs familles de graphes.

Conjecture A.750 (T, T) :

$$4 \leq \omega + \chi \leq 2n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis (resp. les graphes complets).

Conjecture A.751 (ND, T) :

$$????? \leq \frac{\omega}{\chi} \leq 1.$$

La borne supérieure est atteinte pour plusieurs familles de graphes.

Conjecture A.752 (T, T) :

$$4 \leq \omega \cdot \chi \leq n^2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes bipartis (resp. les graphes complets).

A.18.2 La cardinalité maximale d'un couplage

Conjecture A.753 (P, T) :

$$-\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq \mu - \omega \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les graphes bipartis avec $\mu = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et les cycles).

Pour démontrer la borne inférieure, il suffit de constater que $\mu \geq \lfloor \omega/2 \rfloor$.

Conjecture A.754 (T, T) :

$$3 \leq \mu + \omega \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n.$$

La borne inférieure est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.755 (P, T) :

$$\frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \frac{\mu}{\omega} \leq \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. lees graphes bipartis avec $\mu = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et les cycles).

La borne inférieure se démontre comme celle de A.753.

Conjecture A.756 (T, T) :

$$2 \leq \mu \cdot \omega \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot n.$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

A.19 Le nombre chromatique

A.19.1 La cardinalité maximale d'un couplage

Conjecture A.757 (P, T) :

$$-\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq \mu - \chi \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les graphes bipartis avec $\mu = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$).

Si $V_1, V_2 \cdots V_\chi$ est une partition chromatique des sommets de G, il y a au moins une arête entre chaque paire de stables, donc

$$\mu \geq \left\lfloor \frac{\chi}{2} \right\rfloor.$$

Ce qui permet de démontrer la borne inférieure.

Conjecture A.758 (T, T) :

$$3 \leq \mu + \chi \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

Conjecture A.759 (P, T) :

$$\frac{1}{n}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \leq \frac{\mu}{\chi} \leq \frac{1}{2}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les graphes complets (resp. les graphes bipartis avec $\mu = \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$*).*

La borne inférieure se démontre comme celle de A.757.

Conjecture A.760 (T, T) :

$$2 \leq \mu \cdot \chi \leq \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \cdot n$$

La borne inférieure (resp. supérieure) est atteinte pour les étoiles (resp. les graphes complets).

ANNEXE B : LES RÈGLES DE L'INTERSECTION

Dans cette annexe, on présente les différentes règles de l'intersection utilisées dans la preuve automatique de résultats.

Les règles, dites de l'intersection, sur lesquelles est basée la génération automatique de résultats sont les suivantes :
Considérons deux invariants graphiques i_1 et i_2, et notons $\mathcal{G}_n$ l'ensemble des graphes connexe sur n sommets, où n est un paramètre entier.

1. $max_{\mathcal{G}_n}(i_1 - i_2) = max_{\mathcal{G}_n} i_1 - min_{\mathcal{G}_n} i_2$ si et seulement s'il existe un graphe G^* qui, à la fois, maximise i_1 et minimise i_2 sur $\mathcal{G}_n$.
2. $max_{\mathcal{G}_n}(i_1 + i_2) = max_{\mathcal{G}_n} i_1 + max_{\mathcal{G}_n} i_2$ si et seulement s'il existe un graphe G^* qui maximise simultanément i_1 et i_2 sur $\mathcal{G}_n$.
3. $max_{\mathcal{G}_n}(i_1/i_2) = max_{\mathcal{G}_n} i_1/min_{\mathcal{G}_n} i_2$ si et seulement s'il existe un graphe G^* qui, à la fois, maximise i_1 et minimise i_2 sur $\mathcal{G}_n$.
4. $max_{\mathcal{G}_n}(i_1 \cdot i_2) = max_{\mathcal{G}_n} i_1 \cdot max_{\mathcal{G}_n} i_2$ si et seulement s'il existe un graphe G^* qui maximise simultanément i_1 et i_2 sur $\mathcal{G}_n$.
5. $min_{\mathcal{G}_n}(i_1 - i_2) = min_{\mathcal{G}_n} i_1 - max_{\mathcal{G}_n} i_2$ si et seulement s'il existe un graphe G^* qui, à la fois, minimise i_1 et maximise i_2 sur $\mathcal{G}_n$.
6. $min_{\mathcal{G}_n}(i_1 + i_2) = min_{\mathcal{G}_n} i_1 + min_{\mathcal{G}_n} i_2$ si et seulement s'il existe un graphe G^* qui minimise simultanément i_1 et i_2 sur $\mathcal{G}_n$.
7. $min_{\mathcal{G}_n}(i_1/i_2) = min_{\mathcal{G}_n} i_1/max_{\mathcal{G}_n} i_2$ si et seulement s'il existe un graphe G^* qui, à la fois, minimise i_1 et maximise i_2 sur $\mathcal{G}_n$.
8. $min_{\mathcal{G}_n}(i_1 \cdot i_2) = min_{\mathcal{G}_n} i_1 \cdot min_{\mathcal{G}_n} i_2$ si et seulement s'il existe un graphe G^* qui minimise simultanément i_1 et i_2 sur $\mathcal{G}_n$.