

Titre: Optimisation du placement et de l'assignation de fréquences
Title: d'antennes dans un réseau de télécommunications

Auteur: Alexandre Marty
Author:

Date: 2011

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Marty, A. (2011). Optimisation du placement et de l'assignation de fréquences
Citation: d'antennes dans un réseau de télécommunications [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/771/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/771/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Charles Audet, & Alain Hertz
Advisors:

Programme: Mathématiques appliquées
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

OPTIMISATION DU PLACEMENT ET DE L'ASSIGNATION DE
FRÉQUENCES D'ANTENNES DANS UN RÉSEAU DE
TÉLÉCOMMUNICATIONS

ALEXANDRE MARTY
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE
MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(MATHÉMATIQUES ET GÉNIE INDUSTRIEL)
NOVEMBRE 2011

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

OPTIMISATION DU PLACEMENT ET DE L'ASSIGNATION DE
FRÉQUENCES D'ANTENNES DANS UN RÉSEAU DE
TÉLÉCOMMUNICATIONS

présenté par : MARTY Alexandre

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury constitué de :

M. LE DIGABEL Sébastien, Ph.D., président

M. AUDET Charles, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. HERTZ Alain, Doct. ès Sc., membre et codirecteur de recherche

Mme SANSÒ Brunilde, Ph.D., membre

Résumé

Les nombreux services de communication mobile disponibles aujourd'hui reposent sur des réseaux d'infrastructures exploités par des opérateurs de télécommunications. Pour rester compétitifs, ils doivent s'adapter à la demande du marché et faire face à la croissance permanente du nombre d'utilisateurs ainsi qu'à l'augmentation de leurs exigences en termes de services et de couverture géographique. Il leur faut pour cela constamment améliorer leurs réseaux en mettant à niveau leurs installations existantes et en en ajoutant de nouvelles. Le déploiement et l'entretien d'un réseau de télécommunications étant très onéreux, la minimisation du coût lié aux infrastructures est un enjeu très important pour les opérateurs.

Or les réseaux de télécommunications sont aujourd'hui devenus des systèmes très complexes, composés d'éléments variés et dépendant de très nombreux paramètres qui doivent être pris en compte lors de leur conception. La difficulté de conception d'un réseau est donc très élevée et il serait intéressant pour les opérateurs de pouvoir se munir d'outils d'optimisation conçus pour les aider dans cette tâche. Le présent travail se propose de poser les bases d'une nouvelle méthode d'optimisation d'un réseau de télécommunications, dans le but de permettre le développement futur de tels outils d'aide à la décision pour la conception de réseaux de télécommunications.

Les constituants de base d'un réseau de télécommunications sont les antennes ou stations de base, qui doivent être placées judicieusement sur le territoire à couvrir pour fournir un service à tous les usagers. La difficulté de placement des antennes provient du fait que des antennes émettant aux mêmes fréquences interfèrent entre elles, donnant aux zones de couverture de chacune des formes irrégulières et sensibles aux variations de position et de fréquence. La méthode développée ici s'attache à optimiser la localisation des antennes conjointement avec leur assignation de fréquence.

La démarche utilisée se décompose en deux étapes principales. Il est d'abord nécessaire de développer un modèle de réseau de télécommunications adapté à l'optimisation que l'on souhaite en faire et de l'implémenter sous forme de programme informatique afin d'effectuer des simulations. Le modèle doit être suffisamment précis pour donner des résultats concordant avec la réalité mais sans être trop complexe pour que les simulations puissent s'exécuter en un temps court. Un algorithme d'optimi-

sation est ensuite développé, utilisant une méthode de recherche directe, l'algorithme MADS, et une métaheuristique, la recherche tabou, et traitant la simulation de réseau comme une boîte noire à optimiser.

La méthode est testée avec différentes instances et les résultats sont présentés et analysés. Les résultats obtenus sont encourageants, en particulier avec l'instance correspondant à un territoire réel. La méthode semble donc pouvoir être utilisée comme point de départ pour le développement d'outils d'optimisation de réseaux de télécommunications.

Abstract

All the mobile communication services available today rely on networks operated by telecommunications companies. To remain competitive, they have to conform to the market and cope with the ever growing number of users and the increase in their demands in terms of services and geographic coverage. They need to constantly improve their networks by upgrading their facilities and adding new ones. Expanding and maintaining a telecommunications network is very expensive, therefore minimizing the costs related to networks is a very important issue for operators.

And yet, telecommunications networks have now become very complex systems, made up of various elements and depending on a large number of parameters which have to be considered when designing a network. Thus it is a difficult task and it would be very interesting for operators to have optimization tools to help them. The present work intends to lay the foundations for a new telecommunications network optimization method, in order to enable the future development of tools to help in the process of designing a network.

The components at the root of a telecommunications network are antennas or base stations, which have to be placed wisely on the target territory in order to supply all users with mobile service. Placing antennas is difficult because antennas emitting at the same frequencies interfere, and the shape of their coverage zones can then be irregular and sensitive to variations of localization and frequencies. The goal of the method developed here is to optimize the localization of the antennas together with their frequency allocation.

The approach used in this work breaks down into two stages. First, a telecommunications network model suitable to the optimization is developed and implemented as a computer program in order to perform simulations. The model needs to be accurate enough to give realistic results, but not too complex so as to allow quick simulations. An optimization algorithm is then developed, which uses a direct search method, the MADS algorithm, and a metaheuristic, the tabu search, and handles the network simulation as a black-box.

The method is tested on various instances and results are presented and analysed. The results are encouraging, especially with the instance corresponding to an actual

territory. Therefore the method seems a promising first step in the development of telecommunications networks optimization tools.

Table des matières

RÉSUMÉ	iii
ABSTRACT	v
TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES TABLEAUX	xii
LISTE DES FIGURES	xiii
LISTE DES ALGORITHMES	xv
LISTE DES ANNEXES	xvi
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xvii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
CHAPITRE 2 LES RÉSEAUX DE TÉLÉCOMMUNICATIONS	5
2.1 Généralités sur les canaux de communication	5
2.1.1 Définition	5
2.1.2 Spectre de fréquence d'un signal	5
2.1.3 Bande passante d'un canal	6
2.1.4 Adaptation au canal	7
2.2 Débit de données et bande passante	8
2.2.1 Capacité d'un canal de communications	9
2.2.2 Ondes radioélectriques	10
2.2.3 Division du spectre radiofréquence	10
2.2.4 Réglementation	11
2.3 Propagation des ondes	13
2.3.1 Modèle de propagation dans le vide	13
2.3.2 Propagation en présence d'obstacles	14
2.3.3 Modèle retenu	16

2.4	Rapport signal-bruit et zone de couverture	17
2.4.1	Rapport signal-bruit	17
2.4.2	Critère de qualité du signal	18
2.4.3	Zone de couverture	19
2.4.4	Détermination du rapport signal-bruit	19
2.5	Assignation de fréquences	21
2.5.1	Multiplexage et division en canaux	21
2.5.2	Groupes de canaux	22
2.5.3	Zones de couverture	23
2.6	Méthodes d'optimisation actuelles	24
2.6.1	Optimisation du placement	24
2.6.2	Optimisation de l'assignation de fréquences	26
2.6.3	Optimisation simultanée du placement et de l'assignation de fréquences	27
CHAPITRE 3 MODÉLISATION ET SIMULATION		29
3.1	Entrées et sorties de la boîte noire	29
3.2	Modèle physique	30
3.2.1	Notations	30
3.2.2	Modèle de propagation des ondes	30
3.2.3	Puissance de canal et interférences	33
3.2.4	Rapport signal-bruit	34
3.2.5	Zone de couverture	34
3.2.6	Zone de couverture effective	35
3.2.7	Nombre d'utilisateurs	35
3.2.8	Sorties	36
3.3	Implémentation	37
3.3.1	Discretisation du plan	37
3.3.2	Puissance reçue des antennes	38
3.3.3	Étapes de la simulation	38
3.4	Approximation par diagramme de Voronoï	40
3.4.1	Diagramme de Voronoï	40
3.4.2	Intérêt	41
3.4.3	Calcul d'un diagramme de Voronoï	42

CHAPITRE 4	RECHERCHE DIRECTE	43
4.1	L'optimisation par recherche directe	43
4.1.1	Motivations	43
4.1.2	Un problème d'optimisation	44
4.1.3	Concept de boîte noire	45
4.1.4	Propriétés des problèmes de boîte noire	46
4.2	La recherche par motifs	46
4.2.1	Bref historique de la recherche directe	47
4.2.2	Notions importantes en recherche par motifs	48
4.2.3	Les algorithmes de recherche par motifs	50
4.3	L'algorithme MADS	52
4.3.1	Définitions et notations	53
4.3.2	Construction des ensembles	54
4.3.3	Algorithme	55
4.3.4	Mise à jour des paramètres	56
4.3.5	Gestion des contraintes	56
4.3.6	Ordre d'évaluation	57
4.4	Analyse de convergence	57
4.4.1	Notions d'analyse non lisse	58
4.4.2	Résultats de convergence	59
4.5	NOMAD	60
CHAPITRE 5	OPTIMISATION D'UN RÉSEAU	62
5.1	Définition de la simulation et notations	62
5.1.1	Entrées de la boîte noire	62
5.1.2	Sorties de la boîte noire	63
5.2	Plan général de l'algorithme	64
5.3	Mise en place du problème	66
5.3.1	Couverture géographique et nombre total d'utilisateurs	66
5.3.2	Équilibrage de la charge	67
5.3.3	Séparation des problèmes	67
5.4	Construction de la solution initiale	68
5.4.1	Centre géométrique et centre de masse	68
5.4.2	Moments centraux et découpage	69

5.4.3	Placement récursif des antennes	70
5.4.4	Amélioration du placement initial	71
5.4.5	Assignation initiale de canaux	72
5.5	Recherche tabou	72
5.5.1	Métaheuristiques	72
5.5.2	La recherche tabou	73
5.5.3	Recherche tabou avec mouvements	74
5.6	Optimisation de l'assignation de canaux	75
5.6.1	Caractéristiques des recherches tabou	75
5.6.2	Fonctions objectifs	79
5.7	Optimisation de la localisation des antennes	81
5.7.1	Fonction objectif	81
5.7.2	Contraintes	81
5.7.3	Paramètres algorithmiques	82
5.8	Optimisation du problème complet	83
5.8.1	Couplage des recherches	83
5.8.2	Critères d'arrêt	83
CHAPITRE 6	RÉSULTATS	86
6.1	Présentation des instances	86
6.1.1	Cartes de terrain	86
6.1.2	Cartes de densité	87
6.2	Déroulement de l'optimisation	92
6.3	Profils d'évolution	97
6.3.1	Recherche Voronoï initiale	100
6.3.2	Nombre d'antennes et nombre d'utilisateurs non servis	101
6.3.3	Analyse des tendances générales d'évolution	103
6.3.4	Comportement individuel des recherches	112
6.3.5	Phase de terminaison	114
6.4	Résultats finaux	114
6.4.1	Influence des nombre de canaux et d'antennes	115
6.4.2	Influence du terrain et de la densité	116
6.4.3	Comportement avec les instances réelles	118

CHAPITRE 7 CONCLUSION	119
7.1 Synthèse des travaux	119
7.2 Limitations de la solution proposée	120
7.3 Améliorations futures	121
RÉFÉRENCES	123
ANNEXES	131

Liste des tableaux

Tableau 1.1	Évolution des technologies de téléphonie mobile	3
Tableau 2.1	Division du spectre radiofréquence et exemples d'utilisation . .	12
Tableau 2.2	Caractéristiques des principales technologies de téléphonie 2G .	21
Tableau 6.1	Résultats pour l'instance de terrain $Square^{U,V}$	101
Tableau 6.2	Résultats pour l'instance de terrain Mtl^V	102
Tableau 6.3	Résultats finaux agrégés par nombre de canaux et d'antennes.	116
Tableau 6.4	Résultats finaux agrégés par type de terrain.	117
Tableau 6.5	Résultats finaux agrégés par type de densité.	117
Tableau A.1	Résultats pour l'instance de terrain $Square^U$	132
Tableau A.2	Résultats pour l'instance de terrain $Square^C$	133
Tableau A.3	Résultats pour l'instance de terrain $Square^E$	134
Tableau A.4	Résultats pour l'instance de terrain $Square^B$	135
Tableau A.5	Résultats pour l'instance de terrain $Circle^U$	136
Tableau A.6	Résultats pour l'instance de terrain $Circle^C$	137
Tableau A.7	Résultats pour l'instance de terrain $Circle^E$	138
Tableau A.8	Résultats pour l'instance de terrain $Circle^B$	139
Tableau A.9	Résultats pour l'instance de terrain $Banana^U$	140
Tableau A.10	Résultats pour l'instance de terrain $Banana^C$	141
Tableau A.11	Résultats pour l'instance de terrain $Banana^E$	142
Tableau A.12	Résultats pour l'instance de terrain $Banana^B$	143
Tableau A.13	Résultats pour l'instance de terrain Mtl	144

Liste des figures

Figure 1.1	Évolution du nombre d'abonnés à un service de téléphonie mobile	2
Figure 1.2	Couverture du territoire canadien par l'opérateur Koodo Mobile en 2010	4
Figure 2.1	Bande de fréquences occupée par un signal.	6
Figure 2.2	Exemple d'un flux de données numériques représenté par différents codages.	8
Figure 2.3	Occupation spectrale d'un signal en bande de base et bande passante de l'air	9
Figure 2.4	Effet de l'utilisation des décibels sur une courbe de rapport signal-bruit typique.	18
Figure 3.1	Entrées et sorties de la boîte noire.	29
Figure 3.2	Puissance reçue d'une antenne isotrope dans le vide	32
Figure 3.3	Puissance reçue d'une antenne isotrope dans le vide en décibels	32
Figure 3.4	Exemple de diagramme de Voronoï.	41
Figure 4.1	Le concept de boîte noire	45
Figure 5.1	Entrées et sorties de la boîte noire	64
Figure 6.1	Les différentes cartes de terrain utilisées.	87
Figure 6.2	Cartes de densité pour terrain carré.	89
Figure 6.3	Cartes de densité pour terrain circulaire.	90
Figure 6.4	Cartes de densité pour terrain en forme de banane.	91
Figure 6.5	<i>Mtl</i> : Carte de densité pour l'île de Montréal.	91
Figure 6.6	Cartes de service à différentes étapes de la recherche pour l'instance $Square_{10,20}^U$	93
Figure 6.7	Cartes de service à différentes étapes de la recherche pour l'instance $Circle_{10,20}^C$	94
Figure 6.8	Cartes de service à différentes étapes de la recherche pour l'instance $Banana_{10,20}^E$	95
Figure 6.9	Cartes de service à différentes étapes de la recherche pour l'instance $Mtl_{10,20}$	96
Figure 6.10	Profil d'évolution de l'instance $Square_{10,20}^U$	98

Figure 6.11	Profil d'évolution de l'instance $Circle_{10,20}^C$	98
Figure 6.12	Profil d'évolution de l'instance $Banana_{10,20}^E$	99
Figure 6.13	Profil d'évolution de l'instance $Mtl_{10,20}$	99
Figure 6.14	Deux profils d'évolution avec des longueurs relatives de recherche Voronoï initiale différentes.	105
Figure 6.13	Effet de l'augmentation du nombre d'antennes sur l'instance $Circle_{10}^C$	108
Figure 6.14	Deux instances avec couverture totale.	109
Figure 6.15	Deux instances ne permettant pas d'obtenir une couverture totale.	111
Figure 6.16	Exemple de l'instance $Banana_{15,60}^C$, pour laquelle la couverture complète n'est obtenue qu'après un temps long.	112

Liste des Algorithmes

1	Mise à jour des puissances de canal.	39
2	Mise à jour de la matrice des zones de couverture.	40
3	Algorithme CS	51
4	Algorithme GPS	52
5	Algorithme MADS	55
6	Plan général	64
7	Fonction récursive de placement des antennes.	71
8	Recherche tabou	74
9	Recherche tabou avec utilisation de mouvements.	76
10	Plan de l'algorithme général.	84

Liste des annexes

Annexe A Tableaux de résultats	131
--	-----

Liste des sigles et abréviations

CS	Coordinate Search
GPS	Generalized Pattern Search
MADS	Mesh Adaptive Direct Search
VNS	Variable Neighborhood Search
SMS	Short Message Service
MMS	Multimedia Messaging Service
WAP	Wireless Application Protocol
IP	Internet Protocol
UIT	Union Internationale des Télécommunications
GSM	Global System for Mobile Communications
UMTS	Universal Mobile Telecommunications System
SIR	Signal to Interference Ratio
FDMA	Frequency Division Multiple Access
TDMA	Time Division Multiple Access
CDMA	Code Division Multiple Access

Chapitre 1

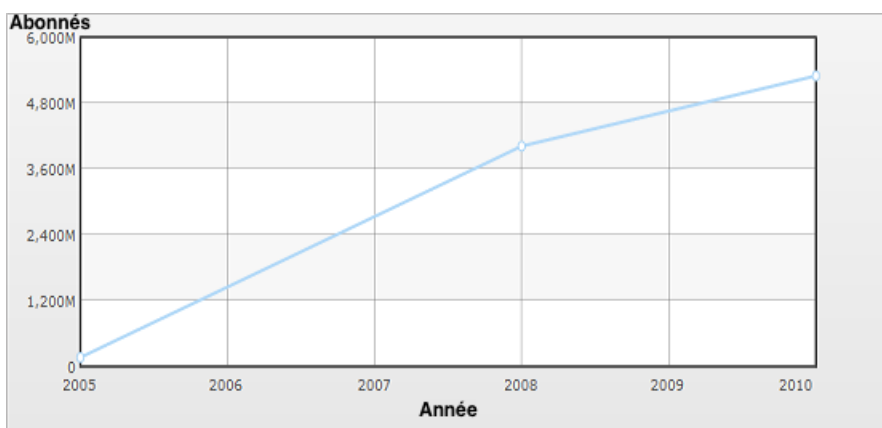
Introduction

Les communications mobiles font aujourd'hui partie intégrante de nos sociétés, quelle que soit la zone du monde où l'on se trouve. Depuis l'apparition des premiers réseaux de téléphonie mobile dans les années 1980, le nombre d'applications différentes des réseaux sans fil ainsi que leur nombre d'utilisateurs et leurs exigences n'ont cessé de croître, et à un rythme toujours plus rapide. Les opérateurs de téléphonie mobile ont dû s'adapter à l'évolution soutenue du marché, en investissant sans cesse dans de nouvelles installations et de nouvelles technologies afin de proposer des services toujours plus complets à des consommateurs de plus en plus exigeants.

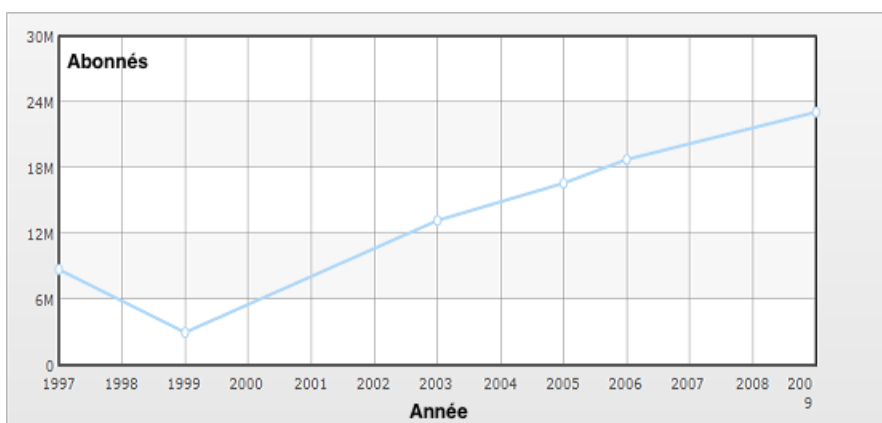
Pour répondre aux attentes croissantes des usagers, les opérateurs mobiles doivent répondre à trois enjeux principaux des réseaux de télécommunications : l'augmentation du nombre d'utilisateurs, l'amélioration des services et la couverture géographique des réseaux.

Nombre d'utilisateurs

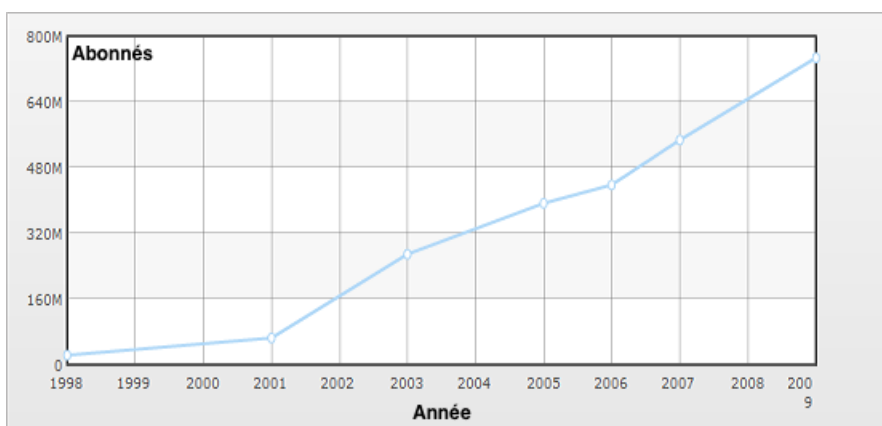
Le nombre d'utilisateurs des réseaux de téléphonie mobile dans le monde connaît une croissance très rapide depuis de nombreuses années et s'élève en 2010 à plus de 5 milliards d'abonnés ([BBC(2010)]). Cette donnée est illustrée par la figure 1.1 qui présente l'évolution du nombre d'abonnés à un opérateur de téléphonie mobile dans le monde, au Canada et en Chine, pays où le nombre d'utilisateurs est aujourd'hui le plus élevé et le plus rapidement croissant.



(a) Monde



(b) Canada



(c) Chine

Figure 1.1 Évolution du nombre d'abonnés à un service de téléphonie mobile (source : Index Mundi).

Amélioration des services

Les premiers réseaux de téléphonie mobile n'offraient à leurs usagers que la possibilité de passer des appels téléphoniques. Mais l'évolution des technologies et des habitudes de consommation a permis aux réseaux de téléphonie mobile d'offrir de plus en plus de fonctionnalités : envoi de SMS, de MMS, navigation sur Internet (encore très limitée) grâce au WAP. Aujourd'hui, les réseaux 3G permettent un accès à Internet à haute vitesse, autorisant l'envoi et la réception de courriels, la navigation sur l'Internet complet, le visionnage de vidéos ou encore le téléchargement d'applications. Toutes ces nouvelles possibilités demandent des débits de données importants. L'évolution des débits de données disponibles dans les réseaux de télécommunications est illustrée par le tableau 1.1 avec quelques unes des technologies principales ayant marqué le domaine des télécommunications.

Tableau 1.1 Évolution des technologies de téléphonie mobile (sources : [Lee(2006)], Wikipedia).

Technologie	Génération	Année d'introduction	Débit de données maximal théorique
AMPS	1	1984	10 kb/s
GSM	2	1991	33 kb/s
GPRS	2.5	2001	114 kb/s
UMTS	3	2001	56 Mb/s (2011)
LTE-Advanced	4	Futur	1 Gb/s

Couverture géographique

La couverture géographique est également un des objectifs importants dont doivent tenir compte les opérateurs téléphoniques lorsqu'ils conçoivent leurs réseaux. Si en zone urbaine il est clair que l'ensemble du territoire doit être couvert par le réseau, il n'en va pas de même à l'échelle d'une région ou d'un pays, où les densités de population sont variables et ne justifient pas une couverture complète du territoire. Les opérateurs doivent faire le choix de fournir un service à certaines zones géographiques et non à d'autres en évaluant l'importance de couvrir certains territoires par rapport à leurs contraintes économiques. La figure 1.2 illustre la couverture du territoire du Canada réalisée par l'opérateur Koodo Mobile.

Cet enjeu possède une importance particulière à l'heure actuelle, en raison du

développement rapide de la téléphonie mobile dans les pays émergents et en voie de développement, où les territoires sont souvent très étendus et les populations concentrées dans les zones urbaines. Il est primordial dans ces nouveaux marchés de parvenir à arbitrer correctement entre l'objectif de couverture et des coûts des installations élevés.



Figure 1.2 Couverture du territoire canadien par l'opérateur Koodo Mobile en 2010 (source : Koodo Mobile). Les zones couvertes sont les zones foncées.

Le marché de la téléphonie mobile représente un enjeu économique et social très important, obligeant les différents acteurs à développer leurs réseaux et à sans cesse les mettre à niveau au rythme de l'évolution des technologies. L'installation et la mise à niveau permanente d'un réseau de télécommunications engendre des dépenses considérables pour les opérateurs de téléphonie mobile, qui doivent pourtant toujours répondre aux demandes croissantes du marché. C'est pourquoi il est intéressant de posséder des outils permettant d'optimiser la conception des réseaux de télécommunications, afin de réduire au maximum les coûts des infrastructures, tout en répondant le mieux possible aux contraintes du marché. C'est dans ce cadre que s'inscrit le présent travail, en tentant d'ouvrir la voie à de nouvelles méthodes d'optimisation d'un réseau de télécommunications s'appuyant sur la modélisation et la simulation des réseaux, et sur un algorithme d'optimisation utilisant des techniques de recherche directe et des métaheuristiques.

Chapitre 2

Les réseaux de télécommunications

Un réseau de télécommunications est un système complexe dont l'étude et la modélisation nécessitent la maîtrise de nombreuses notions dans plusieurs domaines scientifiques. Afin de pouvoir modéliser puis optimiser un réseau de télécommunications, il faut d'abord en étudier tous les aspects différents et la façon dont ils s'organisent.

Le présent chapitre est une introduction aux concepts fondamentaux des réseaux de télécommunications nécessaires à la compréhension de leur fonctionnement et à la modélisation.

2.1 Généralités sur les canaux de communication

2.1.1 Définition

En télécommunications ou dans les réseaux informatiques, un canal de communication est un médium de transmission d'information, permettant l'acheminement d'un message d'une ou plusieurs sources à un ou plusieurs destinataires. Cette transmission d'information peut se faire au travers d'un support physique, comme un câble, ou d'un support logique, comme un canal radio.

En communications sans fil, le support de communication est constitué par des ondes radioélectriques transmises entre émetteurs et récepteurs. Il s'agit d'un canal analogique présentant de nombreuses spécificités par rapport aux autres canaux physiques.

2.1.2 Spectre de fréquence d'un signal

Quel que soit le type de support utilisé pour la transmission de données, le signal se propageant dans le médium de transmission est de nature analogique. Il s'agit de signaux électriques dans un câble et d'ondes électromagnétiques dans l'air. Pour comprendre comment l'information est transportée, il faut posséder certaines notions

d'analyse et de traitement du signal. Nous résumons ici les notions présentées dans [Gaillard et Lengellé(2006)] ou [Bellanger(2006)].

Considérons un signal s se propageant dans un canal. On peut effectuer une analyse spectrale de ce signal en calculant la transformée de Fourier de s , ou la série de Fourier de s dans le cas particulier d'un signal périodique. On obtient alors le *spectre de fréquences* de s , qui indique la puissance transportée par le signal pour chaque fréquence.

Pour un signal réel (par opposition à un signal aléatoire), la quasi-totalité de l'énergie contenue dans le signal est comprise dans une bande de fréquence limitée, en dehors de laquelle la puissance du signal est très faible. On définit ainsi un seuil de puissance en-dessous duquel on considère que la puissance du signal est nulle, ce qui permet d'identifier clairement la bande de fréquences occupée par le signal comme illustré par la figure 2.1.

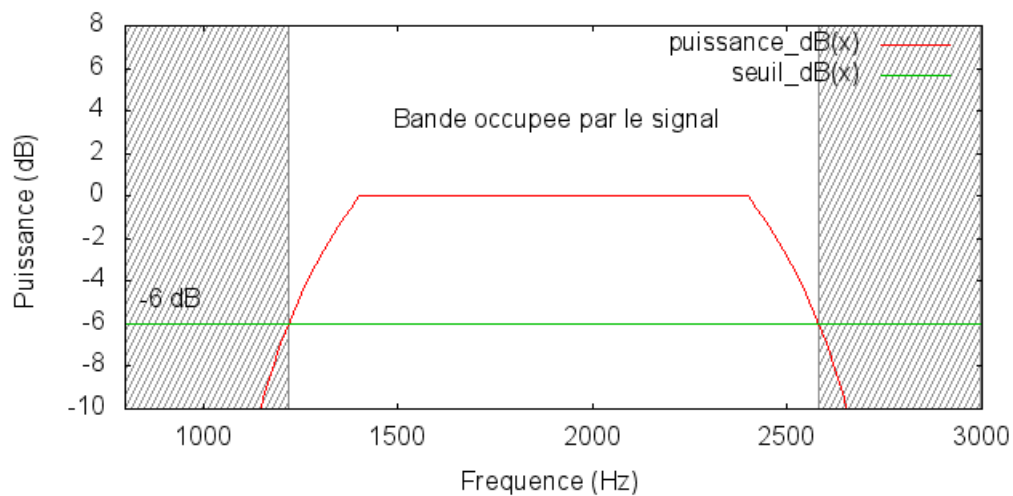


Figure 2.1 Bande de fréquences occupée par un signal.

2.1.3 Bande passante d'un canal

Il est très important de connaître les caractéristiques fréquentielles du canal sur lequel on veut transmettre de l'information. En effet, un canal ne peut transporter des signaux que dans une certaine bande de fréquences, appelée *bande passante du canal*. Les signaux ayant une fréquence à l'extérieur de cette bande seront très rapidement

atténués sur de très courtes distances, de sorte que l'on dit que le canal est opaque à ces fréquences. Au contraire, les fréquences situées dans la bande passante du canal se propageront beaucoup mieux. La bande passante d'un canal dépend bien sûr de la nature du support, mais également de la longueur de transmission nécessaire pour l'utilisation envisagée.

2.1.4 Adaptation au canal

Les informations transmises au sein d'un réseau de télécommunications peuvent provenir de différentes sources et correspondre à diverses applications : voix humaine pour une conversation téléphonique, paquets IP pour la navigation sur internet, flux vidéo... Quelle que soit la source initiale de l'information, cette dernière est d'abord convertie en un flux de données numériques. Ce sont pourtant des signaux de nature analogique qui sont transmis au sein du réseau, et il faut donc transformer les données numériques à transmettre en un signal pouvant transiter dans le réseau.

Signal en bande de base

Le flux de données numériques à transmettre peut être transporté par un courant électrique dont l'amplitude varie dans le temps. Notons s_I ce signal à transmettre. Il a typiquement l'allure d'une fonction en créneaux, et l'information à transmettre peut être encodée de différentes façons, comme illustré par la figure 2.2.

Ce signal, appelé *signal en bande de base*, contient toute l'information que l'on veut envoyer. Cependant, il ne peut pas être transmis en l'état. En effet, une analyse spectrale de ce type de signal montre que l'essentiel de l'énergie qu'il transporte est située dans une bande de fréquences faibles. Or, la plupart du temps, la bande passante du support de transmission est située dans des fréquences beaucoup plus élevées (voir figure 2.3). Le signal en bande de base se propage donc très mal dans le support, et est rapidement atténué sur de très courtes distances.

Modulation du signal

Il est nécessaire de changer la fréquence du signal à transmettre pour qu'il se situe dans la bande passante du support. Pour cela, on réalise la modulation d'une onde porteuse par le signal en bande de base. Une onde porteuse s_P est une onde sinusoïdale, d'amplitude a_P , et de fréquence f_P située dans la bande passante du

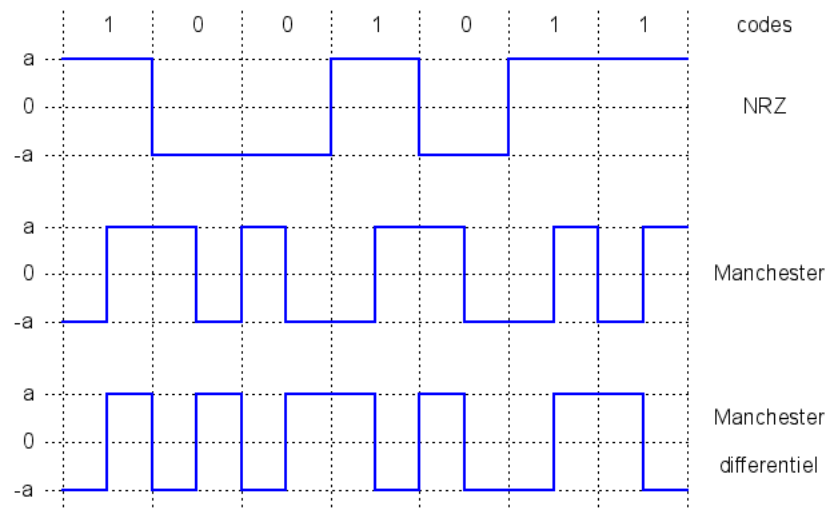


Figure 2.2 Exemple d'un flux de données numériques représenté par différents codages.

support, de la forme : $s_P(t) = a_P \cos(2\pi f_P t)$. Cette onde porteuse est modulée par le signal à transmettre pour obtenir un nouveau signal, dont le spectre est centré autour de f_P et possédant un certain étalement spectral. Le signal est alors composé de fréquences comprises dans la bande passante du support et peut maintenant être transmis.

2.2 Débit de données et bande passante

Le débit de données d'un canal de communications est un élément très important, puisqu'il détermine la quantité d'informations que ce canal pourra véhiculer. Chaque usager d'un réseau de télécommunications requiert un certain débit de données pour les différents services qu'il utilise. Si le débit de données que peuvent transporter les signaux électromagnétiques était illimité, la conception d'un réseau de télécommunications serait chose facile. Malheureusement, nous allons voir qu'au contraire, la bande passante est une ressource rare et coûteuse, et que les débits de données pouvant être transmis par les ondes électromagnétiques sont limités, d'où la difficulté de concevoir les réseaux de télécommunications.

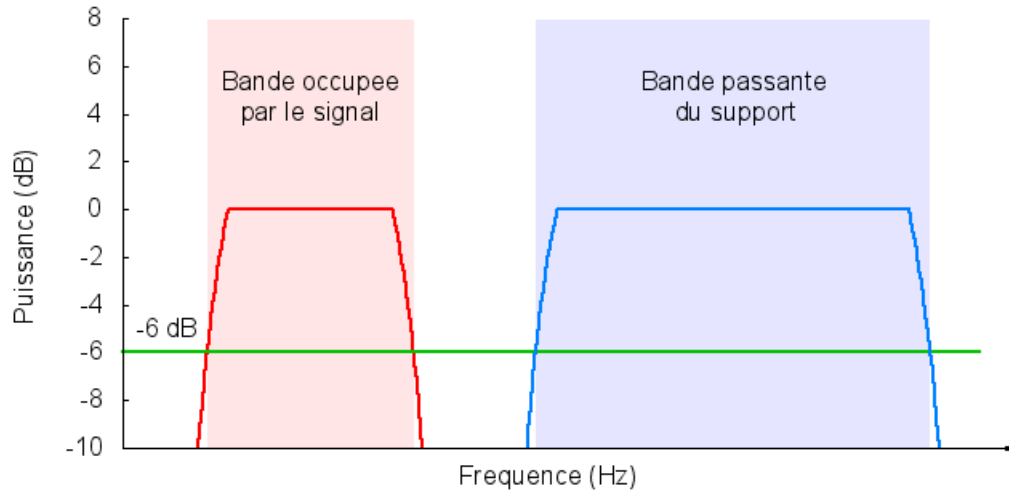


Figure 2.3 Occupation spectrale d'un signal en bande de base et bande passante de l'air

2.2.1 Capacité d'un canal de communications

Les signaux électromagnétiques transmis dans un réseau de télécommunications sont, d'après la section précédente, des signaux modulés, qui possèdent un certain étalement spectral. Le médium de transmission utilisé, l'air, possède quant à lui une certaine bande passante Δf , qui est l'intervalle des fréquences pouvant être transmises par ce canal de transmission.

Une formule de la théorie de l'information de Shannon ([Shannon(1948)]) donne un lien entre la largeur de bande du canal de transmission et la quantité d'informations que celui-ci peut transporter :

$$C_I = \Delta f \log_2 \left(1 + \frac{P_S}{P_N} \right) \quad (2.1)$$

où : C_I : capacité du canal en bits/s ;

Δf : largeur de bande du canal (ici l'air) ;

P_S : puissance du signal reçu de l'émetteur ;

P_N : puissance du bruit perturbant la réception.

On voit d'après cette formule que la largeur de bande du canal Δf joue un rôle prépondérant dans la capacité du canal, puisque cette capacité dépend linéairement de Δf .

Un autre facteur important est la qualité de réception du signal, qui apparaît dans le logarithme. C'est le rapport entre la puissance utile reçue d'une antenne et le bruit, qui est la somme des contributions de tous les signaux à la même fréquence que celui de l'antenne et qui perturbent les transmissions. Cet aspect sera discuté dans la section suivante.

Il découle de cette formule que si l'on peut augmenter la largeur de bande de façon arbitraire, on peut alors transmettre la quantité de données que l'on veut, et donc fournir du service à autant d'utilisateurs que l'on souhaite. Mais en pratique la largeur de bande disponible est limitée, et est même faible par rapport à l'utilisation que l'on aimerait en faire.

2.2.2 Ondes radioélectriques

Les ondes radioélectriques (ou simplement ondes radio, ou encore ondes hertziennes) sont, d'après la définition de l'Union Internationale des Télécommunications (UIT), les « ondes électromagnétiques dont la fréquence est par convention inférieure à 3000 GHz, se propageant dans l'espace sans guide artificiel ». L'ensemble de ces fréquences constitue le *spectre radiofréquence*.

La limite de 3000 GHz correspond à la frontière des ondes infrarouges, de fréquence plus élevée, et que l'on ne sait utiliser aujourd'hui qu'avec des supports optiques. On ne peut donc pas utiliser d'ondes électromagnétiques de fréquences supérieures à 3000 GHz pour les radiocommunications, d'où cette définition des ondes radio.

2.2.3 Division du spectre radiofréquence

Bien que l'ensemble du spectre radiofréquence puisse être utilisé pour transmettre des ondes radio, toutes les fréquences ne peuvent pas être utilisées pour les télécommunications. En effet, de nombreux phénomènes naturels influent sur la propagation des ondes radio, et de façon différente selon la fréquence considérée.

Par exemple, les fréquences plus élevées sont plus rapidement atténuées, et ne permettent pas de transporter de l'information sur de très grandes distances. En revanche, elles permettent d'utiliser des bandes de fréquences plus importantes et de transmettre de plus grandes quantités de données. Il faut donc trouver un compromis entre ces deux aspects. De plus, les équipements nécessaires pour l'utilisation d'ondes de fréquences élevées sont plus coûteux.

D'autre part, il faut aussi prendre en compte les phénomènes naturels tels la réflexion sur l'atmosphère ou la sensibilité aux intempéries. Des utilisations telles que la radio AM, qui émet dans des bandes de fréquences de l'ordre de 100 kHz à 10000 kHz, tirent parti de la réflexion sur l'ionosphère des ondes de ces fréquences pour augmenter leur portée d'émission. Les radio AM peuvent ainsi être reçues jusqu'à 1000 km de leur point d'émission. Cependant, cela est possible car les signaux de la radio AM transportent une faible quantité de données par rapport à la largeur de bande utilisée par les signaux, ce qui rend les transmissions plus robustes. Une telle approche n'est pas envisageable dans le cas des télécommunications.

Enfin, il faut également considérer les perturbations occasionnées par les obstacles tels que les bâtiments, les reliefs de terrain ou les arbres. Certaines applications utilisent une transmission en « ligne de vue », où il n'y a pas d'obstacle entre l'émetteur et le récepteur. Pour les télécommunications, on aimerait au contraire que les signaux puissent se propager malgré la présence d'obstacles, et il faut donc choisir des fréquences qui le permettent.

Le choix de la bande de fréquence utilisée pour chaque type de transmission ne doit pas être laissé au hasard. On divise conventionnellement le spectre radiofréquence en bandes d'une décade, portant chacune un nom et correspondant à des utilisations différentes, dont des exemples sont donnés dans le tableau 2.1.

2.2.4 Réglementation

Le domaine des radiocommunications est un domaine très réglementé. C'est l'UIT qui établit et fait respecter le règlement des radiocommunications dans le monde. Il concerne les ondes de fréquences comprises entre 9 kHz et 3000 GHz, les fréquences inférieures à 9 kHz n'étant pas réglementées car elles ne sont pas utilisables pour les radiocommunications.

La nécessité d'une réglementation des radiocommunications est indiscutable tant le nombre d'utilisations diverses est élevé, ce qui fait du spectre radiofréquence une ressource rare et convoitée, qu'il faut partager entre un grand nombre d'acteurs. Sans une stratégie d'attribution efficace, l'utilisation incontrôlée du spectre radiofréquence provoquerait des brouillages entre différentes applications qui utiliseraient les mêmes bandes de fréquence, ce qui rendrait les communications radio impossibles.

L'UIT réserve donc des bandes de fréquences pour chaque type d'application uti-

Tableau 2.1 Division du spectre radiofréquence et exemples d'utilisation, tiré de [Wikipedia(2011b)].

Désignation internationale	Fréquence	Exemples d'utilisation
ELF (extremely low frequency)	3 Hz à 30 Hz	Détection de phénomènes naturels
SLF (super low frequency)	30 Hz à 300 Hz	Communication avec les sous-marins
ULF (ultra low frequency)	300 Hz à 3 000 Hz	Détection de phénomènes naturels
VLF (very low frequency)	3 kHz à 30 kHz	Communication avec les sous-marins, implants médicaux, recherches scientifiques...
LF (low frequency)	30 kHz à 300 kHz	Radionavigation, radiodiffusion GO, radio-identification
MF (medium frequency)	300 kHz à 3 MHz	Radio AM, service maritime, appareil de recherche de victimes d'avalanche
HF (high frequency)	3 MHz à 30 MHz	Organisations diverses, militaire, radiodiffusion, maritime, aéronautique, radioamateur, météo, radio de catastrophe...
VHF (very high frequency)	30 MHz à 300 MHz	Radio FM, aéronautique, maritime, radioamateur, pompiers, réseaux privés, taxis, militaire, météo...
UHF (ultra high frequency)	300 MHz à 3 GHz	Réseaux privés, militaire, GSM, GPS, Wi-Fi, Télévision
SHF (super high frequency)	3 GHz à 30 GHz	Réseaux privés, micro-onde
EHF (extremely high frequency)	30 GHz à 300 GHz	Réseaux privés, radars anticollision pour automobiles, liaisons vidéo transportables
Terahertz	300 GHz à 3 000 GHz	Applications scientifiques

lisant des ondes radio. On peut voir dans le tableau 2.1 quelques exemples de bandes de fréquences réservées et les utilisations correspondantes. Toutes les technologies de télécommunications utilisées aujourd'hui (en tête desquelles les technologies GSM,

3G et Wi-Fi) se partagent des fréquences dans la bande UHF.

2.3 Propagation des ondes

Dans un réseau de télécommunications, les informations sont échangées par le biais d'ondes radio émises et captées par les différents appareils qui composent le réseau. Les stations de base et terminaux émettent des ondes qui se propagent dans l'air et dont la puissance décroît à mesure que l'on s'éloigne de l'émetteur ou que ces ondes rencontrent des obstacles. Pour pouvoir déterminer la région couverte par un émetteur, il nous faut connaître la puissance des signaux que l'on reçoit lorsqu'on se déplace.

La première étape de la modélisation d'un réseau de télécommunications consiste en la modélisation de la propagation des ondes radio. De nombreux facteurs influencent cette propagation, et les modèles développés peuvent devenir très complexes si l'on essaye de prendre en compte plusieurs phénomènes différents. Dans cette section sera d'abord présenté le modèle le plus simple, celui de la propagation des ondes dans le vide, puis quelques modèles décrivant l'influence des phénomènes les plus importants seront évoqués.

2.3.1 Modèle de propagation dans le vide

Le modèle le plus simple pour la propagation des ondes est le modèle de propagation dans le vide. Il se fonde sur les hypothèses principales suivantes :

- *Le milieu dans lequel se propagent les ondes est le vide.* En pratique, le fait qu'on se situe dans l'air et non dans le vide a une influence négligeable, et cette hypothèse n'est donc pas trop restrictive de ce point de vue. En revanche on ne tient pas compte de la présence d'obstacles.
- *L'émetteur est isotrope*, c'est-à-dire qu'il rayonne la même puissance dans toutes les directions de l'espace. On ne considère pas le cas où on utilise des émetteurs directionnels.

Sous ces hypothèses, la puissance reçue d'un émetteur à une distance d de celui-ci est donnée par l'équation de Friis ([Friis(1946)]). Elle est aussi appelée *équation des télécommunications*, en raison de son aspect fondamental, et est présentée dans [Rappaport(2002a)], [Granatstein(2008)] et [Lee(2006)] sous la forme suivante :

$$P_r = P_e G_e G_r \left(\frac{\lambda}{4\pi d} \right)^2, \quad (2.2)$$

où : P_r : puissance du signal capté par le récepteur ;

P_e : puissance de l'émetteur ;

G_r : gain de l'antenne du récepteur ;

G_e : gain de l'antenne de l'émetteur ;

λ : longueur d'onde du signal ;

d : distance entre l'émetteur et le récepteur.

En télécommunications on préfère en général travailler avec des fréquences plutôt que des longueurs d'onde. L'équation peut être réécrite en fonction de la fréquence f , en vertu de la relation $f = \frac{c}{\lambda}$, où c est la vitesse de la lumière :

$$P_r = P_e G_e G_r \left(\frac{c}{4\pi d f} \right)^2. \quad (2.3)$$

Cette équation permet de réaliser deux observations importantes :

- La puissance reçue a une dépendance à la fréquence des signaux en f^{-2} . Cela démontre le fait que des signaux de fréquence élevée se propagent sur des distances plus courtes que des signaux de fréquence plus faible ;
- La puissance reçue décroît très rapidement avec la distance à laquelle on se trouve de l'émetteur, comme le montre le facteur d^{-2} dans l'équation.

2.3.2 Propagation en présence d'obstacles

La propagation des ondes est fortement perturbée par la présence d'obstacles. Deux types d'approches sont couramment utilisés pour modéliser la propagation des ondes lorsque les obstacles sont pris en compte : une approche théorique ou une approche empirique.

Modèles théoriques

Pour étudier l'effet des obstacles sur la propagation des ondes, une première approche consiste à déterminer les différents chemins que peuvent emprunter les ondes émises par une antenne pour arriver jusqu'au récepteur. Dans le modèle de propagation dans le vide, le récepteur ne reçoit les transmissions de l'émetteur qu'en ligne

directe. En réalité, les ondes radio subissent deux types de déviations par les obstacles : elles peuvent être réfléchies ou diffractées. Il y a alors en général plusieurs chemins que peuvent emprunter les ondes pour aller de l'émetteur au récepteur. Cela crée des interférences qui dégradent la réception.

Les différents modèles utilisant une approche analytique considèrent un type d'obstacle et développent une formule donnant la puissance reçue de l'émetteur en fonction de la géométrie et des caractéristiques des obstacles rencontrés. Par exemple, le modèle de réflexion sur le sol, présenté dans [Rappaport(2002b)], considère que les ondes atteignent le récepteur en empruntant deux chemins différents : un chemin en ligne directe, et un obtenu par réflexion sur le sol.

D'autres modèles comme ceux de Walfisch-Bertoni ou Ikegami, décrits dans [Granatstein(2008)], rendent compte de la diffraction subie par les ondes sur les toits des bâtiments lorsque l'antenne est située au-dessus des toits et le récepteur plus bas dans une rue.

L'utilisation de tels modèles peut être intéressante pour effectuer des simulations si l'on ne recherche pas une trop grande précision et si les environnements restent simples. C'est le cas en général pour les réseaux de téléphonie mobile. En revanche, si l'on souhaite réaliser des simulations sur de petites échelles dans des environnements complexes, comme c'est le cas pour les réseaux Wi-Fi à l'intérieur de bâtiments, on préférera effectuer des simulations par lancer de rayons. Cette technique consiste à simuler l'émission d'un grand nombre de rayons depuis la source, se propageant en ligne droite, et à suivre le chemin de chacun d'eux. On peut ainsi obtenir des résultats très précis, mais au prix d'un temps de calcul très long.

Modèles empiriques

L'approche empirique peut être illustrée par le modèle de Delisle-Egli, présenté dans [Granatstein(2008)], qui est un modèle de propagation en milieu urbain. Il se base sur un grand nombre de mesures effectuées dans des villes des États-Unis, qui ont permis d'établir la formule suivante pour l'atténuation de la puissance d'un signal :

$$L_{\text{empirique}} = \begin{cases} 4.27 \times 10^{-17} \frac{d^4 f^2}{h_b^2 h_m} & \text{si } h_m < 10 \text{ m} \\ 4.27 \times 10^{-17} \frac{d^4 f^2}{h_b^2 h_m^2} & \text{si } h_m > 10 \text{ m} \end{cases} \quad (2.4)$$

où : $L_{\text{empirique}}$: atténuation de la puissance reçue ;
 d : distance entre l'émetteur et le récepteur ;
 f : fréquence du signal ;
 h_b : hauteur de l'antenne de la station de base ;
 h_m : hauteur de l'antenne du récepteur.

Ce modèle est valable en milieu urbain. Pour modéliser la propagation des ondes dans des milieux de densités variées, une autre méthode consiste à utiliser, pour l'atténuation L de la puissance du signal, une formule du type :

$$L = Kd^\alpha f^2 \quad \text{avec } \alpha \in [2, 4] \quad (2.5)$$

où K est une constante et α est un paramètre dépendant de la densité du milieu, variant de 2 pour les milieux vides de bâtiments comme les zones rurales, à 4 pour les milieux les plus denses comme les zones urbaines.

Ce type de modèle permet d'obtenir de bons résultats si l'on s'intéresse à des simulations de réseaux sur de grandes distances, où les phénomènes à petite échelle ont une influence limitée. C'est en général le cas pour les réseaux de téléphonie mobile par exemple.

2.3.3 Modèle retenu

Même s'il est important de connaître les différents facteurs qui influencent la propagation des ondes et la façon dont on peut les modéliser, l'utilisation de modèles élaborés mène à des calculs complexes et coûteux, et à une difficulté d'implémentation accrue. Pour ces raisons, c'est le modèle de propagation des ondes dans le vide, avec la formule de Friis, qui est retenu.

On fait également l'hypothèse que toutes les ondes électromagnétiques participant aux différents phénomènes physiques impliqués dans les communications sont générées par les antennes faisant partie du réseau. On néglige donc toutes les sources d'ondes extérieures (rayons cosmiques, rayonnements naturels, autres utilisations des ondes radio...).

Le présent travail de maîtrise doit être vu comme une première expérimentation d'une nouvelle méthode de simulation et d'optimisation, et ne prétend donc pas tenir compte de tous les facteurs de modélisation. L'extension de notre approche à

des modèles plus élaborés est donc laissée aux travaux ultérieurs qui souhaiteraient l'utiliser.

2.4 Rapport signal-bruit et zone de couverture

La section précédente a décrit le calcul de la puissance reçue d'une antenne en un point donné de l'espace. Mais cette donnée n'est pas suffisante pour déterminer la zone de couverture de cette antenne. En effet, il n'existe pas de critère absolu sur la seule puissance reçue d'une antenne pour établir si la qualité du signal est suffisante ou non. On ne peut pas considérer une antenne de façon isolée, et il faut donc examiner les sources d'interférences.

2.4.1 Rapport signal-bruit

Les interférences gênant la réception du signal d'un émetteur sont tous les autres signaux de même fréquence que celui que l'on veut capter. Ces signaux se superposent aux émissions de la source considérée et dégradent donc la qualité du signal reçu. Dans notre modèle, on fait l'hypothèse que les ondes électromagnétiques provenant de l'extérieur du réseau sont négligeables. Les seules ondes que l'on considère sont celles générées à l'intérieur du réseau, par les antennes y appartenant. Les interférences perturbant les émissions de l'une des antennes sont donc les signaux émis par les autres antennes du réseau travaillant à la même fréquence.

Le *rapport signal-bruit*, souvent noté *SIR* (pour Signal to Interference Ratio), est défini comme le rapport entre la puissance reçue d'une source P_S et la puissance des interférences perturbant la réception P_I :

$$SIR = \frac{P_S}{P_I}, \quad (2.6)$$

ou encore en décibels :

$$SIR_{dB} = 10 \log \left(\frac{P_S}{P_I} \right). \quad (2.7)$$

Dans le cadre de notre modèle, P_S sera la puissance reçue d'une antenne, et P_I la somme des puissances reçues des autres antennes émettant à la même fréquence.

Il est souvent très pratique d'utiliser le décibel comme unité pour les grandeurs

que l'on considère. On utilisera alors l'indice dB pour indiquer les fonctions exprimées en décibels, par exemple P_{dB} pour la puissance reçue d'une antenne.

Pour rappel, la conversion en décibels s'effectue en prenant le logarithme de la grandeur considérée, multiplié par 10, par exemple :

$$P_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{P}{1 \text{ W}} \right). \quad (2.8)$$

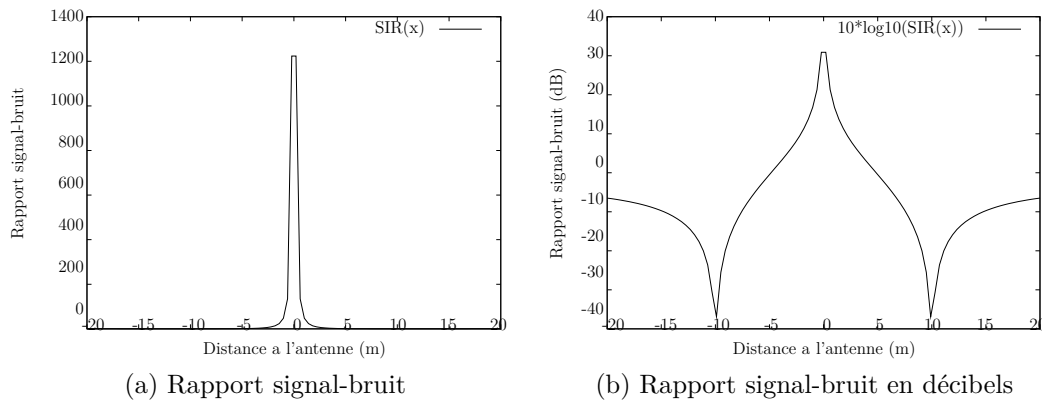


Figure 2.4 Effet de l'utilisation des décibels sur une courbe de rapport signal-bruit typique.

La figure 2.4 illustre la conversion d'un rapport signal-bruit en décibels. L'intérêt de cette conversion est évident : l'utilisation des décibels permet de mieux visualiser l'évolution de grandeurs ayant de grandes variations. On voit par exemple sur la figure 2.4 que le rapport signal-bruit est très élevé lorsqu'on est très proche d'un émetteur, et rapidement faible autour, sans que ses variations soient distinguables. Pourtant, ce sont elles qui sont significatives pour nous. L'utilisation des décibels permet de les faire apparaître.

2.4.2 Critère de qualité du signal

Pour déterminer si la transmission est de qualité suffisante pour effectuer une communication, il n'est pas possible de ne se référer qu'à la puissance reçue P_S . En effet, il est toujours possible d'amplifier un signal électromagnétique. On pourrait donc théoriquement capter le signal d'une antenne à une distance arbitrairement grande de celle-ci, et il suffirait de l'amplifier pour pouvoir communiquer. En l'absence

d'interférences, la zone de couverture d'une antenne est donc théoriquement infinie.

Mais lorsque l'on considère que des ondes électromagnétiques interfèrent avec les signaux provenant de notre antenne, il n'en est plus ainsi. Pour que la communication puisse avoir lieu, il faut que les signaux envoyés par l'antenne puissent être discernés au milieu des ondes électromagnétiques que l'on capte. Il faut que la puissance reçue de l'antenne soit suffisamment grande par rapport au bruit pour que l'on puisse filtrer le signal et récupérer la partie qui nous intéresse.

Le rapport signal-bruit est un parfait indicateur : la communication est possible si et seulement si la puissance P_S reçue de l'émetteur est suffisamment grande par rapport à la puissance des interférences P_I , donc lorsque le rapport signal-bruit est suffisamment élevé. On peut définir un seuil SIR^* pour la qualité du signal. On pourra alors dire que le signal reçu d'une antenne est de qualité suffisante lorsque $SIR_{dB} \geq SIR_{dB}^*$.

Ce seuil est généralement de l'ordre de 10 dB ([Rappaport(2002a)]), ce qui signifie que le signal est suffisamment bon lorsque la puissance reçue d'une antenne est au moins 10 fois supérieure à la puissance des interférences.

2.4.3 Zone de couverture

La zone de couverture d'une antenne est l'ensemble des points du plan où la qualité du signal reçu de cette antenne est suffisante pour pouvoir effectuer une communication. Elle est définie à partir du rapport signal-bruit, de la façon suivante :

$$Z = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : SIR_{dB}(x, y) \geq SIR_{dB}^* \right\}. \quad (2.9)$$

2.4.4 Détermination du rapport signal-bruit

Pour déterminer si un point du plan fait partie de la zone de couverture d'une antenne, il faut calculer le rapport signal-bruit de l'antenne en ce point, et donc la puissance reçue ainsi que la puissance des interférences. Ce sont ces deux grandeurs qui sont les plus difficiles à déterminer.

Puissance de la source P_S

Pour déterminer la puissance reçue d'une antenne, on vient de voir différentes façons de modéliser la propagation des ondes électromagnétiques. La difficulté du

calcul de la puissance reçue dépend de la complexité du modèle choisi. Le modèle de propagation retenu dans ce travail est celui de la propagation des ondes dans le vide, qui nous permet de calculer la puissance reçue de façon assez simple.

Puissance des interférences P_I

Les interférences perturbant la réception des signaux d'une antenne peuvent provenir de différentes origines. Il y a trois types d'interférences importantes :

- *les interférences extérieures au réseau* : il s'agit principalement des interférences d'origine naturelle, comme le bruit provenant du soleil ou des rayons cosmiques. En première approximation, on peut les considérer constantes dans le temps et l'espace. Elles apportent donc une constante additive supplémentaire dans les interférences P_I . Cela est équivalent, lorsque l'on travaille en décibels, à intégrer ce terme dans le seuil SIR_{dB}^* que l'on fixe alors à une valeur plus élevée. C'est pourquoi ces interférences ne sont pas intégrées dans le modèle.
- *les interférences de canal* : il s'agit des ondes émises par les autres antennes travaillant sur le même canal. La division du spectre en canaux est présentée de façon détaillée à la section suivante. Pour effectuer le calcul, il suffit de faire la somme des puissances reçues de toutes les antennes émettant à la même fréquence.
- *les interférences inter-canaux* : ce sont les interférences se produisant entre les signaux d'antennes émettant sur des canaux différents. Elles sont causées par les imperfections des filtres utilisés par les équipements. Certaines fréquences proches de celle du canal utilisé peuvent ainsi être mal filtrées et causer des interférences. En pratique, on fait en sorte que les antennes placées à proximité les unes des autres utilisent des canaux de fréquences assez éloignées. On divise pour cela le spectre de fréquences disponibles en un grand nombre de canaux de largeur plus petite. La contribution de ces interférences à la puissance totale P_I est alors faible en première approximation, et on néglige donc ce type d'interférences dans le modèle. Il faudrait bien sûr en tenir compte dans un modèle plus précis.

2.5 Assignation de fréquences

La qualité de réception d'un signal est déterminée par la valeur du rapport signal-bruit, et est intimement liée au niveau des interférences subies par chaque récepteur. Il est donc primordial de minimiser les interférences au sein du réseau. Pour cela, il convient de bien effectuer la répartition des canaux entre les antennes.

2.5.1 Multiplexage et division en canaux

Comme on l'a vu à la section 2.2.3, la bande de fréquence allouée aux télécommunications est limitée. Par exemple, les bandes de fréquences allouées aux principales technologies de téléphonie mobile de deuxième génération (2G) sont données dans le tableau 2.2. Pour permettre à un grand nombre d'utilisateurs d'utiliser simultanément le spectre de fréquences partagé, on utilise des techniques de multiplexage, notamment en fréquence et en temps, comme indiqué par [Rappaport(2002a)].

Tableau 2.2 Caractéristiques des principales technologie de téléphonie 2G ([Rappaport(2002a)]).

Caractéristiques	Technologie		
	GSM (Europe)	cdmaOne (Etats-Unis)	NADC (Japon)
Fréquences émission	890-915 MHz	824-849 MHz	800-1500 MHz
Fréquences réception	935-960 MHz	869-894 MHz	800-1500 MHz
Séparation des porteuses	200 kHz	1.25 MHz	30 kHz
Créneaux temporels par canal	8	64	3

Multiplexage fréquentiel (FDMA)

Le multiplexage FDMA (Frequency Division Multiple Access) consiste à diviser le spectre de fréquences disponible en N canaux de largeur plus faible. Chaque canal peut alors transporter une certaine quantité d'informations, et donc véhiculer les données d'un certain nombre d'utilisateurs.

Multiplexage temporel (TDMA)

Le multiplexage temporel TDMA (Time Division Multiple Access) divise le temps en créneaux temporels qui se succèdent, durant lesquels un seul utilisateur peut recevoir ou émettre. On divise ainsi le temps en C créneaux de durée T , alloués chacun à un utilisateur différent.

Dans les technologies de télécommunications, ces deux types de multiplexage sont en général utilisés conjointement. Ainsi, le spectre de fréquences est divisé en N canaux, et chacun d'eux est à son tour divisé en créneaux temporels, ce qui permet de transporter les données de plusieurs utilisateurs sur chaque canal. Les caractéristiques des multiplexages fréquentiel et temporel des principales technologies 2G sont données dans le tableau 2.2.

Par exemple, pour la technologie GSM, le spectre de fréquences disponibles est d'abord divisé en deux bandes de largeur égale : la bande 890-915 MHz pour les émissions depuis les antennes de base, et la bande 935-960 MHz pour les réceptions. Chacune de ces bandes de 25 MHz est divisée en 125 canaux de 200 kHz. On a donc 250 canaux unidirectionnels, ou 125 canaux bidirectionnels. Enfin, chaque canal est divisé en 8 créneaux temporels, et peut donc véhiculer les conversations de 8 utilisateurs différents. Il y a au total un maximum de 1000 canaux logiques disponibles pour transporter une conversation. En pratique, ce nombre est inférieur en raison de l'utilisation de certains canaux comme canaux de contrôle.

2.5.2 Groupes de canaux

Le spectre de fréquences disponible pour les communications mobiles est divisé en N canaux de largeur égale. Chacun de ces canaux peut transporter les données d'un certain nombre d'utilisateurs. On assigne à chaque antenne non pas un seul mais plusieurs canaux, et on divise alors les N canaux disponibles en p groupes de canaux. Habituellement, on fait en sorte que tous les groupes de canaux possèdent le même nombre de canaux $\frac{N}{p}$.

Le choix du nombre p de groupes de canaux n'est pas laissé au hasard. En effet, il a une grande influence à la fois sur la couverture géographique du réseau et sur le nombre d'utilisateurs qui peuvent être servis, comme on va le voir dans les sections suivantes.

Par abus de langage et pour simplifier, on omet souvent de faire la distinction entre canal et groupe de canaux lorsque le contexte rend la distinction inutile. Par exemple, on parlera en général du canal assigné à une antenne, alors qu'il s'agit en fait du groupe de canaux.

2.5.3 Zones de couverture

Dans la section précédente a été définie la zone de couverture d'une antenne à partir du rapport signal-bruit. Ce dernier est défini comme le rapport de la puissance P_S reçue de l'antenne considérée sur la puissance totale des interférences P_I . Dans le modèle choisi pour ce travail, on ne considère qu'un seul type d'interférences : les interférences de canal, qui ont lieu entre antennes travaillant sur le même canal.

Considérons donc, dans un réseau de télécommunications, une antenne A , produisant une puissance $P(x, y)$ au point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et émettant sur le canal c . Les seules sources d'interférences perturbant la réception sont les autres antennes émettant également sur le canal c , que nous noterons A_1, A_2, \dots, A_k .

Avec le modèle de propagation des ondes dans le vide, la puissance reçue d'une antenne à une distance d de celle-ci est de la forme : $P = \frac{K}{d^2}$. Si on considère que toutes les antennes sont identiques, le facteur K est le même pour toutes les antennes du réseau. La puissance totale des interférences subies de la part des antennes A_i au point (x, y) est :

$$P_I(x, y) = \sum_{i=1}^k \frac{K}{d_i^2}, \quad (2.10)$$

où d_i est la distance de l'antenne A_i au point (x, y) .

Le rapport signal-bruit pour notre antenne s'écrit :

$$SIR(x, y) = \frac{P(x, y)}{P_I(x, y)} = \frac{\frac{1}{d^2}}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{d_i^2}}. \quad (2.11)$$

Selon cette formule, le rapport signal-bruit dépend principalement de deux facteurs :

- le nombre k d'antennes qui interfèrent avec A : plus le nombre d'antennes dans le canal c est élevé, plus il y a de termes qui s'additionnent dans le calcul des interférences et plus la réception est mauvaise. On a donc intérêt à avoir le plus faible nombre possible d'antennes par canal.

- les distances d_i : plus les antennes A_i sont proches de l’antenne A , et plus les interférences subies en un point (x, y) situé dans le voisinage de A sont élevées. On a donc intérêt à maximiser la distance entre les antennes utilisant le même canal.

En conséquence, on voit apparaître deux voies possibles pour maximiser les zones de couverture des antennes :

- optimiser l’assignation de canaux : il s’agit de choisir adéquatement le canal à assigner à chaque antenne, afin de maximiser la distance entre antennes appartenant au même canal ;
- augmenter le nombre de groupes de canaux : cela permettrait d’avoir un faible nombre d’antennes utilisant un même canal. Malheureusement, réduire le nombre de canaux disponibles pour une antenne conduit à une réduction du nombre d’utilisateurs pouvant être servis par une antenne, et donc à augmenter le nombre d’antennes nécessaires pour servir tous les usagers.

2.6 Méthodes d’optimisation actuelles

L’optimisation d’un réseau de télécommunications est un sujet qui a déjà donné lieu à plusieurs travaux. Mais les recherches effectuées jusqu’à présent se focalisent presque toujours sur l’optimisation d’un seul aspect des réseaux. En particulier, les problèmes du placement des antennes et de l’assignation de leurs fréquences sont deux problèmes qui sont traités séparément. Pour chacun d’entre eux, différentes méthodes ont été testées, chacune étant plutôt adaptée à des conditions particulières.

2.6.1 Optimisation du placement

Les réseaux de télécommunications

Lors de l’optimisation du placement des stations de base d’un réseau de télécommunications, on cherche en général à maximiser un objectif de couverture géographique, de capacité totale ou de débit moyen par utilisateur. On veut en outre minimiser le nombre de stations de base afin de réduire les coûts du réseau. On cherche pour cela la localisation optimale des stations de base sur un territoire donné.

Les premiers travaux sur l’optimisation du placement des stations de base, tels [Sherali *et al.*(1996)] ou [Tutschku(1998)], utilisent une modélisation simple des ré-

seaux, ne tenant pas compte des interférences entre émetteurs. La zone couverte par un émetteur est simplement la zone où la puissance reçue est supérieure à un seuil. Des modèles plus fidèles apparaissent ensuite, qui tiennent compte des interférences engendrées par plusieurs stations émettant sur la même fréquence et utilisent un critère de seuil sur le rapport signal-bruit pour définir les zones de couverture, comme [Amaldi *et al.*(2003)] ou [Yang *et al.*(2007)]. Enfin, les travaux plus récents tendent à considérer des modèles plus élaborés, comme [Abdel Khalek *et al.*(2011)] qui traite différemment les canaux montant et descendant entre stations de base et mobiles, prenant en compte la dissymétrie des échanges.

Une fois une modélisation choisie, l'optimisation consiste à trouver un placement optimal des émetteurs sur un territoire. Dans la plupart des travaux, ce sont des approches basées sur des métaheuristiques qui sont utilisées. Ainsi, [Amaldi *et al.*(2003)] utilise une recherche tabou pour optimiser le placement, alors que [Cerri *et al.*(2002)] choisit plutôt un algorithme génétique. [Yang *et al.*(2007)] compare quant à lui l'efficacité de trois algorithmes différents : un algorithme génétique, le recuit simulé, et un algorithme hybride de recuit simulé évolutionniste. Les métaheuristiques sont un type d'algorithme très populaire pour le problème de l'optimisation du placement des stations de base, toujours à l'heure actuelle, car ils permettent d'atteindre assez rapidement des solutions de bonne qualité malgré des problèmes de grande taille, longs à simuler et présentant des fonctions non lisses.

Des méthodes de recherche directe, également bien adaptées à ce type de problème d'optimisation, ont aussi été employées. L'idée d'utiliser ce type d'algorithme remonte à [Wright(1998)], qui ne propose pas d'exemple d'application mais suggère l'utilisation de l'algorithme de Nelder-Mead ([Nelder et Mead(1965)]) et décrit son fonctionnement. Parmi les travaux récents qui utilisent des méthodes de recherche directe, on peut citer [Abdel Khalek *et al.*(2011)] qui sépare le problème de placement en deux sous-problèmes, l'un continu et l'autre entier, et l'optimise avec un algorithme de recherche par motifs.

Les réseaux d'accès en intérieur

Une autre direction de recherche est utilisée pour le cas des réseaux d'accès en intérieur, comme les réseaux WiFi par exemple. Pour optimiser le placement des stations de base dans ce type de réseau, une modélisation par lancer de rayons est le plus souvent utilisée. Ce type de simulation permet de tenir compte de la géométrie

des espaces intérieurs, ce qui est nécessaire pour le placement d’antennes à l’intérieur de bâtiments. Des systèmes tels que WISE ([Fortune *et al.*(1995)]) ou POPULAR ([Frühwirth et Brisset(1998)]) utilisent ce type de simulation. Le placement est ensuite optimisé grâce à l’algorithme de recherche directe de Nelder-Mead pour le premier exemple, et par programmation par contraintes pour le second.

Il s’agit dans ces exemples de maximiser la taille de la zone de couverture du réseau, celle-ci étant définie par une puissance de réception minimale. Des environnements de résolution de problèmes plus récents intègrent des simulations plus précises qui utilisent un critère sur le rapport signal-bruit. Par exemple, l’environnement S4W de [Mishra *et al.*(2007)] permet de choisir entre deux types de simulations différentes, soit par lancer de rayons, soit par estimation de puissance comme ce qui est réalisé pour les réseaux de télécommunications. Le module d’optimisation utilise l’algorithme de recherche directe DIRECT de [Jones *et al.*(1993)] pour optimiser le placement des émetteurs.

D’autres voies de modélisation et d’optimisation sont également explorées, comme par [Vilovic *et al.*(2007)] qui s’appuie sur un modèle de réseau de neurones et effectue une optimisation par essaims particulaires.

2.6.2 Optimisation de l’assignation de fréquences

Dans cette deuxième phase de conception d’un réseau de télécommunications, il s’agit d’assigner à chaque station de base un ou plusieurs canaux parmi ceux disponibles. L’objectif est ici toujours de minimiser la somme des interférences subies au sein du réseau, qu’il s’agisse des interférences de canal ou des interférences inter-canaux. Il s’agit donc d’un problème combinatoire, et c’est pourquoi les métaheuristiques occupent une place privilégiée dans la littérature concernant ce sujet.

Le problème de l’optimisation de l’assignation de canaux dans un réseau est toujours un défi important aujourd’hui. Les travaux traitant de ce problème n’effectuent pas de simulation d’un réseau de télécommunications pour évaluer la qualité de leurs solutions, ce qui serait trop lourd. Ce n’est d’ailleurs pas nécessaire, le placement des antennes étant connu. Des fonctions relativement simples à évaluer sont développées dans les différents travaux.

Le schéma de distribution des fréquences le plus simple est un schéma fixe, dans lequel les fréquences sont attribuées a priori aux émetteurs et ne changent jamais.

Une répartition orthogonale est utilisée, ce qui signifie que des stations de base rapprochées recevront des fréquences suffisamment éloignées pour diminuer les interférences inter-canaux, simplifiant l'optimisation mais réduisant l'efficacité spectrale du réseau. De très nombreux travaux existent exploitant cette répartition et un grand nombre d'algorithmes différents ont été testés. Par exemple [Ruiz *et al.*(1999)] réalise l'optimisation grâce à un algorithme de recuit simulé, alors que [Reilly(2009)] utilise l'algorithme SIMBA, variation de l'optimisation par essais particuliers.

Une meilleure utilisation du spectre radio peut être obtenue en n'utilisant pas un schéma d'assignation fixe mais en modifiant l'assignation de fréquences dynamiquement en fonction de l'évolution de la répartition de la demande. Le défi principal de ce type de planification est qu'une optimisation doit s'effectuer en un temps très court pour que le réseau s'adapte en temps réel. [Lopez-Perez *et al.*(2009)] développe un modèle de planification dynamique, et [Lopez-Perez *et al.*(2008)] présente deux méthodes d'optimisation pour ce problème, avec un recuit simulé et une recherche tabou.

Une autre approche, plus expérimentale, est utilisée par [Luna *et al.*(2007)] : les solutions sont évaluées en utilisant des données précises d'interférences provenant d'un réseau GSM réel. Deux algorithmes d'optimisation sont comparés : une optimisation par colonie de fourmis et un algorithme génétique, le premier donnant des résultats bien meilleurs. [Luna *et al.*(2008)] poursuit dans la même voie en ajoutant de nouvelles instances de test et en comparant un plus grand nombre d'algorithmes.

2.6.3 Optimisation simultanée du placement et de l'assignation de fréquences

Bien que les deux problèmes précédents soient déjà difficiles à traiter séparément, il est intéressant d'essayer de les considérer conjointement. En effet, ces deux problèmes ne sont pas séparables, et il est donc naturel que de meilleures solutions puissent être obtenues par une méthode globale. Cependant les travaux tentant d'explorer cette voie sont presque inexistantes. Le seul article intéressant à signaler est [Weicker *et al.*(2003)], qui présente un algorithme évolutionniste ayant pour objectif d'optimiser simultanément le placement des stations de base, l'assignation des fréquences ainsi que leur niveau de puissance. Le modèle de réseau utilisé est toutefois très simplifié : la zone de couverture de chaque station est représentée par un cercle dont le rayon

dépend de son réglage de puissance. Le niveau d'interférences est ensuite calculé en comptant le nombre de canaux qui interfèrent entre stations adjacentes. On est donc loin de simulations réalistes d'un réseau de télécommunications.

Chapitre 3

Modélisation et simulation

Le chapitre précédent a posé les bases de la conception d'un réseau de télécommunications. Le problème que nous voulons traiter est celui de l'optimisation de la localisation et de l'assignation de canaux des antennes dans un tel réseau. Pour pouvoir effectuer cette optimisation, il faut d'abord construire un modèle de réseau, ce qui sera présenté dans la première partie de ce chapitre. Le modèle doit ensuite être implémenté, sous forme de boîte noire, pour pouvoir être simulé.

3.1 Entrées et sorties de la boîte noire

Étant donné que l'on veut optimiser le placement des antennes conjointement avec l'assignation des fréquences du réseau, les entrées de la boîte noire seront les positions des antennes et les canaux qui y sont assignés. Pour ce qui est des sorties, la capacité du réseau et sa couverture doivent être maximisées en même temps. On utilisera donc pour l'optimisation des sorties reflétant ces deux grandeurs. La figure 3.1 illustre cette situation.



Figure 3.1 Entrées et sorties de la boîte noire.

3.2 Modèle physique

Le modèle développé doit être suffisamment élaboré pour ne pas être trop éloigné de la réalité, sans contraindre au développement d'un module de simulation trop complexe. Cette section présente le modèle construit et les différentes étapes de calcul permettant d'effectuer la simulation.

3.2.1 Notations

Soit un réseau de communications composé de p stations de base A_1, A_2, \dots, A_p . Les canaux sont au nombre de q et sont notés C_1, C_2, \dots, C_q .

Les entrées de la boîte noire sont les coordonnées $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_p, y_p)\}$ de chaque antenne, et les canaux assignés à chacune $(c_1, c_2, \dots, c_p) \in \{C_1, C_2, \dots, C_q\}^n$.

La puissance reçue d'une antenne A_i au point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sera notée $P_i(x, y)$. De même, $P_j^C(x, y)$ sera la puissance du canal C_j au point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, soit la somme des puissances de toutes les antennes émettant sur ce canal.

3.2.2 Modèle de propagation des ondes

La modélisation de la propagation des ondes électromagnétiques est un élément critique dans la conception de la boîte noire. En effet, c'est du choix de la finesse de modélisation de ce phénomène que dépendent à la fois la précision et le temps de calcul de la simulation. Et une grande latitude est laissée dans ce choix, selon que l'on utilise le modèle le plus simple, celui de la propagation des ondes dans le vide, ou que l'on souhaite considérer un maximum de phénomènes physiques liés aux obstacles sur le terrain, comme les réflexions ou la diffraction. Il est également possible de considérer des émetteurs anisotropes, c'est-à-dire dont la puissance d'émission n'est pas identique dans toutes les directions de l'espace.

La modélisation retenue pour la réalisation de la boîte noire est la plus simple qui puisse être utilisée. On se place sur un territoire plan, sans relief. Le modèle de propagation utilisé est celui de la propagation des ondes dans le vide. Les antennes sont toutes identiques : ce sont des émetteurs isotropes ayant tous les mêmes caractéristiques physiques et la même puissance. La puissance reçue de la part d'une antenne en un point de l'espace ne dépend donc que de la distance d à l'émetteur, et elle est

proportionnelle à l'inverse du carré de cette distance :

$$P_i(x, y) = \frac{K}{d^2}, \quad i \in \llbracket 1; p \rrbracket, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.1)$$

où $d = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$ est la distance de l'antenne au point (x, y) .

Il faut cependant adapter cette formule, puisqu'elle indique que lorsqu'on se rapproche de l'antenne, la puissance reçue tend vers l'infini, ce qui est évidemment incorrect. Cette formule n'est en réalité valable que dans le champ lointain de l'antenne, où les phénomènes de diffraction sont négligeables et ne subsiste que le rayonnement. Comme l'indique [Rappaport(2002a)], la limite entre le champ proche et le champ lointain se situe à la distance de Fraunhofer d_F :

$$d_F = \frac{2D^2}{\lambda} \quad (3.2)$$

où D est la plus grande dimension physique de l'antenne, dépendant de sa géométrie et typiquement de l'ordre du mètre, et λ est la longueur d'onde du rayonnement électromagnétique émis par l'antenne.

La formule (3.1) peut dès lors être modifiée pour tenir compte de cette limite, en introduisant une saturation dans la zone $d < d_F$:

$$P_i(x, y) = \begin{cases} \frac{K}{d_F^2} & \text{si } d < d_F \\ \frac{K}{d^2} & \text{si } d \geq d_F \end{cases} \quad i \in \llbracket 1; p \rrbracket, (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.3)$$

Ou encore en décibels :

$$P_{i,dB}(x, y) = \begin{cases} 10 \log \left(\frac{K}{d_F^2} \right) & \text{si } d < d_F \\ 10 \log \left(\frac{K}{d^2} \right) & \text{si } d \geq d_F \end{cases} \quad i \in \llbracket 1; p \rrbracket, (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.4)$$

Une illustration de ces formules est donnée par les figures 3.2 et 3.3.

Afin d'éviter les problèmes liés à la non validité du modèle dans le champ proche, on fera en sorte lors de l'optimisation que deux antennes ne puissent pas se situer dans le champ proche l'une de l'autre, c'est-à-dire que l'on empêchera qu'elles soient à une distance trop proche.

Ce modèle pourrait être affiné, si nécessaire, en utilisant une des modélisations présentées dans le chapitre précédent. Par exemple, on pourrait prendre en compte les milieux urbains et la densité des obstacles que doivent traverser les ondes. Une

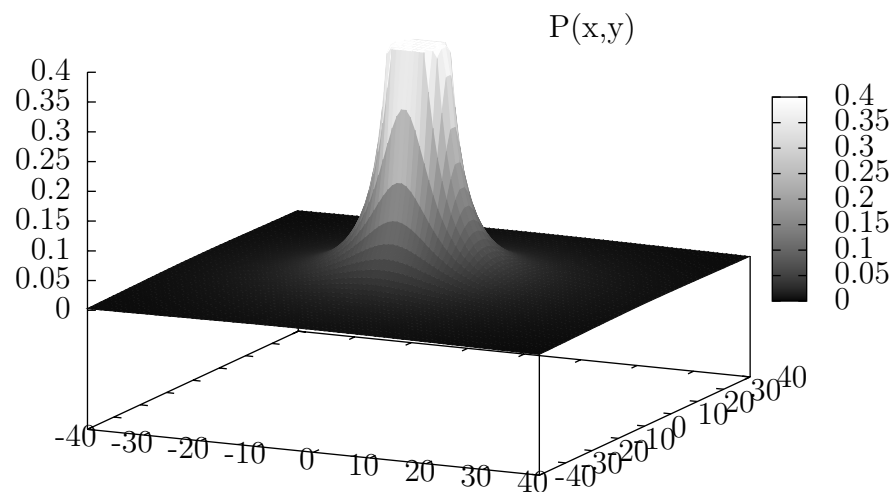


Figure 3.2 Puissance reçue d'une antenne isotrope dans le vide

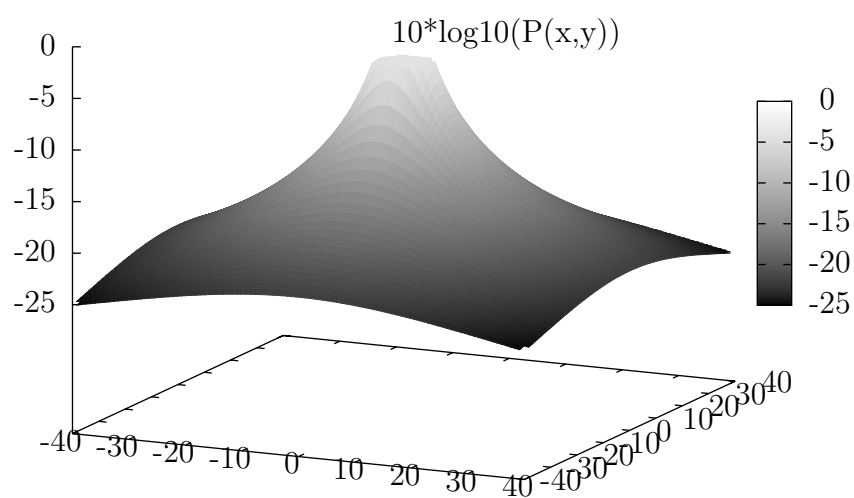


Figure 3.3 Puissance reçue d'une antenne isotrope dans le vide en décibels

pratique courante dans les simulations consiste à utiliser un exposant différent pour la distance à l'antenne selon la densité du milieu :

$$P_i(x, y) = \begin{cases} \frac{K}{d_F^\alpha} & \text{si } d < d_F \\ \frac{K}{d^\alpha} & \text{si } d \geq d_F \end{cases} \quad (3.5)$$

avec $\alpha \in [2; 4]$, $\alpha = 2$ pour les zones dégagées jusqu'à $\alpha = 4$ pour les zones urbaines denses.

Attention cependant à l'apparente simplicité de ce modèle de propagation. La simulation est tout aussi simple que le modèle de propagation dans le vide si l'ensemble du territoire est d'un seul type et donc si la valeur de α est fixe sur tout le terrain. Mais dès que la densité est variable et que les rayons émis par une station de base doivent traverser des zones avec des valeurs de α variées, la difficulté de simulation augmente considérablement et il devient nécessaire d'utiliser des simulations par lancer de rayons.

3.2.3 Puissance de canal et interférences

L'étape suivante consiste à calculer les interférences qui perturbent les transmissions de chaque antenne. Pour une antenne A_i , il s'agit de l'ensemble des contributions des sources émettant à la même fréquence autres que A_i .

Dans notre modèle, on néglige toutes les sources naturelles d'ondes électromagnétiques, et toutes les émissions sont produites par les antennes du réseau. De plus, seules les interférences de canal sont prises en compte, et les interférences inter-canaux sont négligées.

Dans ce cadre, les interférences perturbant les transmissions d'une antenne A_i sont constituées par la somme des puissances émises par toutes les antennes émettant sur le même canal que A_i autres que A_i .

On définit d'abord, pour chaque canal C_j , la puissance de canal P_j^C , qui est la puissance totale reçue de toutes les antennes émettant sur ce canal :

$$P_j^C(x, y) = \sum_{\{i \in [1;p]: A_i \in C_j\}} P_i(x, y). \quad (3.6)$$

Les interférences I_i subies par l'antenne A_i peuvent alors s'écrire comme la diffé-

rence entre la puissance du canal c_i et la puissance de A_i :

$$I_i(x, y) = P_{c_i}^C(x, y) - P_i(x, y). \quad (3.7)$$

3.2.4 Rapport signal-bruit

Comme indiqué précédemment, il n'existe pas de critère sur la seule puissance d'une antenne pour déterminer si l'on capte correctement son signal. Pour savoir si le signal reçu d'une antenne en un point de l'espace est de qualité suffisante pour pouvoir être utilisé, il faut comparer sa puissance à celle des interférences qui le brouillent. On peut alors définir un critère de bonne réception basé sur le ratio des deux grandeurs.

Comme indiqué dans le chapitre précédent, le rapport signal-bruit de l'antenne A_i est défini comme le rapport de la puissance de l'antenne P_i sur la puissance des interférences I_i :

$$SIR_i(x, y) = \frac{P_i(x, y)}{I_i(x, y)}. \quad (3.8)$$

Le critère de qualité de signal pour l'antenne A_i au point (x, y) s'écrit, en décibels :

$$SIR_{dB,i}(x, y) \geq SIR_{dB}^*. \quad (3.9)$$

La valeur du seuil SIR_{dB}^* est à déterminer en fonction des caractéristiques du réseau et de l'équipement utilisé. Elle est typiquement de l'ordre de 10 dB, ce qui signifie que l'on reçoit correctement le signal de A_i si sa puissance est environ 10 fois supérieure à celle des interférences.

3.2.5 Zone de couverture

La zone de couverture Z_i d'une antenne A_i est définie dans le chapitre précédent. Il s'agit de la zone géographique dans laquelle la qualité du signal reçu est considérée comme suffisante :

$$Z_i = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : SIR_{dB,i}(x, y) \geq SIR_{dB}^* \right\}, \quad i \in \llbracket 1; p \rrbracket. \quad (3.10)$$

La zone de couverture du réseau Z_R est la région du plan où l'on capte correctement le signal d'au moins une antenne appartenant au réseau :

$$\mathcal{Z} = \bigcup_{i=1}^p Z_i. \quad (3.11)$$

3.2.6 Zone de couverture effective

La zone de couverture effective Z_i^e est l'ensemble des points du plan où le service sera assuré aux clients par l'antenne A_i . Elle est incluse dans la zone de couverture Z_i de l'antenne, puisqu'il faut d'abord que la qualité du signal reçu par le client soit suffisante. Mais elle peut être plus petite que Z_i . En effet, il est possible que les zones de couverture de deux antennes se recoupent. C'est généralement le cas par exemple pour deux antennes proches émettant sur des canaux différents. Un client situé dans l'intersection des deux zones captera alors les signaux des deux antennes de façon satisfaisante. Cependant, il ne sera connecté qu'à une seule des deux antennes. Celle qu'il choisira sera celle dont il reçoit le signal avec la meilleure qualité.

La zone de couverture effective Z_i^e est donc l'ensemble des points de Z_i où la qualité du signal reçu de A_i est supérieure à celle des autres antennes :

$$Z_i^e = \{(x, y) \in Z_i : \forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket, SIR_{dB,i}(x, y) \geq SIR_{dB,j}(x, y)\}. \quad (3.12)$$

3.2.7 Nombre d'utilisateurs

Contrairement aux zones de couverture des antennes, les zones de couverture effective ne se recoupent pas. Elles correspondent exactement aux zones qui seront desservies par chaque antenne. Cela permet de déterminer, pour un ensemble de clients répartis sur le territoire à couvrir, par quelle antenne sera servi chacun d'eux.

On utilise des cartes de densité de population sur les territoires traités. Ces cartes donnent la densité de population en chaque point du plan, qui peut être représentée par une fonction de densité $D(x, y)$ indiquant le nombre de clients au mètre carré en chaque point (x, y) .

Il est alors facile de calculer le nombre de clients à servir par chaque antenne :

$$N_i = \iint_{(x,y) \in Z_i^e} D(x, y) dx dy. \quad (3.13)$$

Le nombre total d'utilisateurs à servir par l'ensemble du réseau est alors simplement

obtenu en faisant la somme du nombre d'utilisateurs pour toutes les antennes :

$$\mathcal{N} = \sum_{i=1}^p N_i \quad (3.14)$$

3.2.8 Sorties

Une fois les calculs précédents effectués, on dispose d'assez d'informations pour calculer toutes les grandeurs pertinentes qui apportent des connaissances sur le réseau.

Couverture géographique totale du réseau

La couverture géographique totale est l'aire de la zone desservie par le réseau. C'est l'aire de la zone \mathcal{Z} définie à l'équation (3.11) :

$$\mathcal{A} = \iint_{(x,y) \in \mathcal{Z}_R} dx dy. \quad (3.15)$$

On pourra également définir, pour la simulation et l'optimisation, un domaine $T \subset \mathbb{R}^2$ qui sera le territoire sur lequel on veut optimiser le réseau. Il s'agira du domaine réalisable pour le placement des antennes, qui ne pourront donc pas se trouver à l'extérieur. De plus, tous les utilisateurs à servir seront également situés dans cette région T , et donc $\forall (x,y) \notin T, D(x,y) = 0$. La couverture géographique devient alors :

$$\mathcal{A} = \iint_{(x,y) \in T \cap \mathcal{Z}_R} dx dy. \quad (3.16)$$

Nombre total d'utilisateurs servis

Le nombre total d'utilisateurs servis par le réseau est la somme du nombre d'utilisateurs servis par chaque antenne. On peut aussi l'obtenir à partir de la zone de couverture totale du réseau :

$$\mathcal{N} = \sum_{i=1}^p N_i = \iint_{(x,y) \in \mathcal{Z}_R} D(x,y) dx dy. \quad (3.17)$$

Variance du nombre d'utilisateurs par antenne

Un des objectifs principaux de l'optimisation sera de minimiser le nombre d'utilisateurs servis par chaque antenne. Cela revient à équilibrer le nombre d'utilisateurs servis entre toutes les antennes. Il est donc intéressant de considérer la variance du

nombre d'utilisateurs par antenne, qu'il faudra alors minimiser. Notons $\bar{N} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p N_i$ la moyenne du nombre d'utilisateurs par antenne. La variance est alors :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (N_i - \bar{N})^2. \quad (3.18)$$

Charge maximale des antennes

La charge maximale des antennes est le nombre d'utilisateurs servis par l'antenne la plus chargée :

$$\mathcal{N}_{max} = \max_{i \in [1, p]} N_i. \quad (3.19)$$

Cette sortie peut aussi servir à l'équilibrage du nombre d'utilisateurs par antenne, au même titre que la variance. Cependant, elle apporte moins d'informations que la variance, puisqu'elle ne considère la charge que d'une seule antenne, alors que la variance apporte une information tenant compte de toutes les antennes, ce qui est préférable pour l'optimisation. L'intérêt de la charge maximale est alors plutôt d'apporter une information plus claire et compréhensible.

3.3 Implémentation

Le modèle de propagation des ondes dans le vide et les calculs qui viennent d'être présentés ont été implémentés sous forme de programme informatique en C++ pour l'exécution de simulations. L'ensemble des calculs présentés dans la section précédente doit être effectué au sein d'une boîte noire. Il convient de les implémenter de façon réfléchie afin d'optimiser le temps de calcul.

3.3.1 Discrétisation du plan

Tous les aspects de la simulation nécessitent d'effectuer des calculs sur des régions du plan. Le plan a donc été discrétisé sous forme matricielle pour pouvoir réaliser les calculs en chaque point du terrain. La simulation est réalisée sur une région T du plan. On construit un treillis régulier sur ce domaine, avec une taille de maille δ constante. Le terrain peut alors être représenté par une matrice de taille $n_1 \times n_2$, de sorte qu'il soit contenu dans un rectangle de taille $\delta n_1 \times \delta n_2$. Tous les calculs au sein de la boîte noire sont ensuite effectués sur des matrices de cette taille, exceptée la

puissance de réception des antennes. Chaque élément (u, v) d'une matrice correspond à la valeur prise par une grandeur physique au point $(x, y) = (\delta u, \delta v)$.

3.3.2 Puissance reçue des antennes

Étant donné que le modèle de propagation des ondes utilisé est celui de la propagation dans le vide, la puissance reçue d'une antenne ne dépend que de la distance d à laquelle on s'en trouve, et non de la localisation de l'antenne. On peut donc effectuer le calcul de la puissance des antennes une seule fois, et le réutiliser à chaque évaluation, ce qui apporte un gain de temps de calcul très important.

Pour ce faire, on utilise pour chaque antenne A_i une matrice $M_{A,i}^P$ de taille $(2n_1 - 1) \times (2n_2 - 1)$. L'antenne est placée au point (n_1, n_2) dans la matrice. Le remplissage de la matrice est réalisé avec l'équation (3.3). L'intérêt d'utiliser une matrice de taille plus grande que le terrain est que cela permet de retrouver la puissance reçue en un point en effectuant le minimum de calculs. Ainsi, si une antenne A a pour coordonnées $(x_A, y_A) = (\delta u_A, \delta v_A)$, la puissance reçue au point $(x, y) = (\delta u, \delta v)$ se trouve dans la matrice M_A^P à l'élément $(n_1 - u_A + u, n_2 - v_A + v)$. On retrouve ainsi la puissance recherchée très rapidement.

Enfin, on considère dans notre modèle que toutes les antennes sont identiques, c'est-à-dire que le facteur K apparaissant dans le numérateur de l'équation (3.3) est le même pour toutes. En conséquence, une seule matrice M_A^P suffit.

3.3.3 Étapes de la simulation

Afin de rendre la simulation la plus rapide possible, il est important de ne pas effectuer de calculs inutiles ou redondants. Cette section décrit la suite de calculs réalisés au sein de la boîte noire lors d'une évaluation et précise leur complexité.

Mise à jour des puissances de canal

Lorsque de nouvelles valeurs sont appliquées en entrée de la boîte noire, il convient d'abord de déterminer quels canaux seront modifiés. Si une antenne est déplacée par rapport à la simulation précédente, ce sont toutes les antennes du canal qui sont affectées. De même, si une antenne se voit assigner un nouveau canal, il faudra mettre à jour la puissance du canal que l'antenne vient de quitter ainsi que la puissance de celui qu'elle vient de rejoindre. Un déplacement d'antenne cause donc la mise à jour

de la puissance d'un seul canal, alors que l'échange des canaux entre deux antennes nécessite la mise à jour de deux canaux.

Chaque canal C_j possède une matrice $M_{C,j}^P$, de taille $n_1 \times n_2$, contenant la puissance totale du canal en chaque point du treillis. Pour chaque canal à mettre à jour, il faut recalculer la puissance de canal sur l'ensemble du terrain, comme décrit par l'algorithme 1.

Algorithme 1: Mise à jour des puissances de canal.

```

pour chaque canal  $C_j$  à mettre à jour faire
  pour chaque élément  $(u, v)$  de  $M_{C,j}^P$  faire
     $s = 0$ 
    pour chaque antenne  $A_i$  appartenant au canal  $C_j$  faire
       $s = s + M_A^P(n_1 - u_{A_i} + u, n_2 - v_{A_i} + v)$ 
    fin
     $M_{C,j}^P(u, v) = s$ 
  fin
fin

```

Ainsi, en notant N_C le nombre de canaux à mettre à jour, comme chaque canal possède exactement $\frac{p}{q}$ antennes, la complexité de cette étape du calcul est de l'ordre de $O(N_C \frac{p}{q} n_1 n_2)$.

On peut remarquer que le calcul de chaque élément (u, v) de $M_{C,j}^P$ est indépendant. Il est donc possible d'effectuer le calcul de tranches de la matrice $M_{C,j}^P$ de façon indépendante. Cela permet de paralléliser le calcul en utilisant plusieurs fils d'exécution. La bibliothèque Boost ([Boost(2011)]) a été utilisée pour réaliser cette parallélisation.

Mise à jour des zones de couverture

Le calcul préalable des puissances de canal permet ensuite de faire le calcul des rapports signal-bruit plus rapidement. On met maintenant à jour la matrice M_Z qui indique, en chaque point du treillis, si ce point est couvert par le réseau et si oui, par quelle antenne. Le calcul est décrit dans l'algorithme 2.

À la fin de ce calcul, chaque élément de M_Z indique, pour chaque point du treillis, s'il est desservi par une antenne, auquel cas $M_Z(u, v)$ est le numéro de l'antenne en question. Si au contraire le point n'est couvert par aucune antenne, on a $M_Z(u, v) = -1$. La matrice M_Z contient donc les zones de couverture effective de chaque antenne,

Algorithme 2: Mise à jour de la matrice des zones de couverture.

```

pour chaque point  $(u, v)$  du treillis géographique faire
     $SIR_m = -\infty$ 
     $p_m = -1$ 
    pour chaque antenne  $A_i$  faire
        Soit  $C_j$  le canal de l'antenne  $A_i$ 
         $P = M_{A,i}^P(n_1 - u_A + u, n_2 - v_A + v)$ 
         $SIR = \frac{P}{M_{C,j}^P(u, v) - P}$ 
        si  $SIR \geq SIR^*$  et  $SIR > SIR_m$  alors
             $SIR_m = SIR$ 
             $p_m = i$ 
        fin
    fin
     $M_Z(u, v) = p_m$ 
fin

```

ce qui permet de calculer toutes les sorties de la boîte noire.

La complexité de cette partie du calcul est de l'ordre de $O(p n_1 n_2)$. D'autre part, on constate qu'ici également, les éléments de la matrice M_Z peuvent être calculés de façon indépendante, et le calcul a aussi été parallélisé.

3.4 Approximation par diagramme de Voronoï

Le modèle et l'implémentation présentés ci-dessus permettent d'effectuer des simulations assez rapidement, mais il est intéressant d'envisager des méthodes d'approximation pour accélérer encore les calculs. Une méthode utilisant les diagrammes de Voronoï est ici présentée.

3.4.1 Diagramme de Voronoï

Comme défini sur [Wikipedia(2011a)], un diagramme de Voronoï dans un espace métrique de dimension n , relativement à un ensemble S d'objets, est une décomposition de l'espace en régions telles que tous les points d'une région sont plus proches d'un des objets de S que de n'importe quel autre. Le plus souvent, les objets de S sont simplement des points dans l'espace. Et dans notre cas, on se limite à un espace à deux dimensions, puisqu'on travaille dans le plan.

Considérons un ensemble S de n points du plan muni de la distance euclidienne d . Les points p de S sont appelés les germes du diagramme. Le diagramme de Voronoï associé à S est l'unique découpage du plan en n régions $Vor_S(p)$ telles que tout point de $Vor_S(p)$ est plus proche du point p que de tout autre point de S :

$$\forall p \in S, Vor_S(p) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \forall q \in S \setminus \{p\}, d(x, p) \leq d(x, q) \right\}. \quad (3.20)$$

3.4.2 Intérêt

L'idée d'utiliser les diagrammes de Voronoï vient de l'observation des cartes des zones de couverture obtenues lors de simulations avec le modèle complet. On constate en effet rapidement que, de façon tout à fait visuelle, elles ressemblent à des diagrammes de Voronoï où les germes seraient aux mêmes coordonnées que les antennes, comme illustré par l'exemple de la figure 3.4. Les diagrammes de Voronoï pourraient donc permettre d'obtenir une approximation des zones de couverture des antennes.

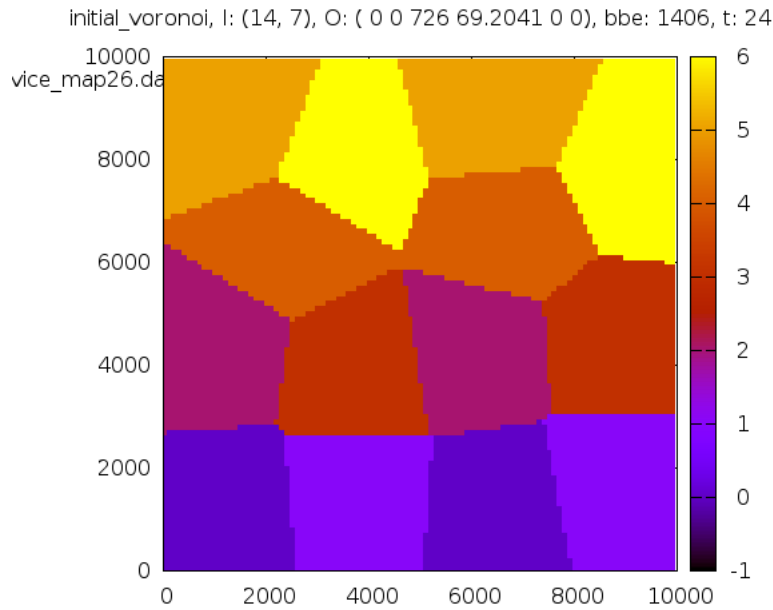


Figure 3.4 Exemple de diagramme de Voronoï.

L'intérêt d'utiliser les diagrammes de Voronoï pour effectuer des approximations de la simulation est double. D'une part, il est plus rapide de calculer les zones de couverture des antennes avec un diagramme de Voronoï qu'avec le modèle de réseau,

comme précisé dans la section suivante. D'autre part, le calcul du diagramme de Voronoï est indépendant de l'assignation de canaux utilisée pour les antennes, et ne prend en compte que leur localisation. Ces diagrammes peuvent donc être utilisés pour essayer de trouver une bonne localisation initiale des antennes, où le nombre d'utilisateurs contenus dans les régions de Voronoï de chaque antenne serait équilibré.

3.4.3 Calcul d'un diagramme de Voronoï

Depuis leur introduction en 1908, les diagrammes de Voronoï ont été très largement étudiés, notamment en dimension 2. Ainsi, [Fortune(1987)] présente un algorithme de calcul de diagramme de Voronoï ayant une complexité de l'ordre de $O(p \log(p))$, p étant le nombre de germes. Le problème de cet algorithme est qu'il ne permet de calculer un diagramme de Voronoï que de façon analytique, en donnant les équations des droites formant les limites des régions de Voronoï. Or pour la simulation, il est nécessaire de connaître, pour chaque point du treillis, l'antenne qui en est la plus proche. Calculer le diagramme de Voronoï discret à partir du diagramme analytique n'est pas judicieux d'un point de vue algorithmique.

Dans ces conditions, il n'y a pas d'autre choix que de déterminer, pour chaque point du treillis, la distance à chaque antenne, et d'identifier ainsi la plus proche. L'algorithme ainsi obtenu a une complexité en $O(p n_1 n_2)$, à comparer avec la complexité de la simulation du modèle complet, en $O((1 + \frac{N_c}{q}) p n_1 n_2)$. Une légère diminution du temps de calcul est obtenue. De plus, il existe des méthodes utilisant les capacités des cartes graphiques des ordinateurs récents pour calculer un diagramme de Voronoï discret très rapidement, comme présenté par exemple par [Majdandzic *et al.*(2008)]. Ils permettent une réduction du temps de calcul très importante. Ce type d'algorithme n'a pas été implémenté dans le cadre de ce travail, mais pourrait l'être assez facilement, rendant le calcul de l'approximation de la simulation beaucoup plus rapide.

Chapitre 4

Recherche directe

L'optimisation d'un système est bien souvent une tâche difficile et coûteuse en termes de temps de calcul, en particulier lorsque les problèmes sont complexes ou de grande taille. De nombreuses méthodes d'optimisation existent qui ciblent des classes de problèmes particulières et parviennent à en résoudre de grandes instances en un temps raisonnable. Mais ces méthodes reposent sur la connaissance du modèle mathématique décrivant le problème et nécessitent que ce dernier possède une forme ou des caractéristiques particulières. Par exemple, la programmation linéaire ne permet de traiter que des problèmes dont la fonction objectif ainsi que les contraintes sont linéaires. La plupart des méthodes d'optimisation non linéaire nécessitent quant à elles que toutes les fonctions apparaissant dans le problème possèdent un certain degré de régularité.

Pourtant, il existe un grand nombre de problèmes ne possédant pas ces propriétés, ou pour lesquels on ne peut ou ne souhaite pas obtenir toutes ces informations. Dans ce cas, on ne peut pas utiliser toutes les techniques développées dans ce cadre. C'est ce type de problèmes que l'optimisation par recherche directe se propose de traiter.

4.1 L'optimisation par recherche directe

4.1.1 Motivations

Les techniques d'optimisation reposant sur une structure particulière de problème sont séduisantes, car elles permettent de résoudre des problèmes de grande taille en un temps raisonnable. Mais bien souvent en ingénierie, elles ne sont pas adaptées aux problèmes concrets rencontrés. Beaucoup de facteurs peuvent jouer en défaveur de ces approches.

En premier lieu, elles nécessitent toujours des hypothèses de régularité sur les fonctions entrant en jeu dans le problème : linéarité, convexité, différentiabilité, ou

simplement continuité pour les moins contraignantes. Il arrive pourtant souvent dans les problèmes réels que l'on rencontre des fonctions ne présentant pas ces caractéristiques. En particulier, lors de la modélisation de phénomènes physiques complexes, on peut facilement avoir à composer avec des fonctions très irrégulières, qui ne sont dérivables qu'en peu d'endroits et présentant de nombreuses discontinuités. Un exemple d'un tel problème est donné par [Audet *et al.*(2008a)]. D'autre part, même si on a affaire à des fonctions dont les dérivées peuvent théoriquement être évaluées, il peut arriver qu'en pratique leur approximation soit beaucoup trop coûteuse pour qu'on puisse les exploiter.

Deuxièmement, il arrive fréquemment dans l'industrie que l'on n'ait pas accès au fonctionnement interne du système que l'on souhaite optimiser. Cela arrive par exemple lorsque le code informatique qui effectue les calculs est trop complexe, ou inaccessible pour des raisons de confidentialité ou de propriété intellectuelle.

Face à toutes ces difficultés, on n'a pas d'autre choix que de se contenter de tester la réponse du système à différents paramètres d'entrée, et d'effectuer l'optimisation à partir de cette seule information. C'est pourquoi on nomme les algorithmes fonctionnant sur ce modèle des algorithmes de recherche directe, des algorithmes d'optimisation de boîte noire, ou encore des méthodes sans dérivées. Une bonne introduction à ce sujet peut être trouvée dans le livre [Conn *et al.*(2009)].

4.1.2 Un problème d'optimisation

On se place dans \mathbb{R}^n et on considère donc un problème à n variables réelles. Soit X une partie de \mathbb{R}^n , dont le rôle sera discuté plus loin. On définit :

- une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, appelée fonction objectif du problème ;
- m fonctions $c_j : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$, servant à définir les contraintes.

Tout problème d'optimisation mono-objectif peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\min_{x \in \Omega} f(x) \tag{4.1}$$

où $\Omega = \{x \in X : c_j(x) \leq 0, \forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket\}$ est le domaine réalisable.

A cette écriture on préfère souvent la suivante en optimisation :

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} \quad & f(x) \\ \text{s.c.} \quad & c_j(x) \leq 0 \quad j \in \llbracket 1, m \rrbracket. \end{aligned} \tag{4.2}$$

4.1.3 Concept de boîte noire

Une boîte noire conceptualise un système dont on ne connaît pas le fonctionnement interne, encapsulé dans un objet avec lequel on ne peut interagir qu'en essayant différents paramètres d'entrée et en analysant les réponses. Pour le problème général décrit ci-dessus, on peut agir sur le paramètre d'entrée x , et recueillir les valeurs de la fonction objectif f et des fonctions contraintes c_j en ce point, comme décrit par la figure 4.1.

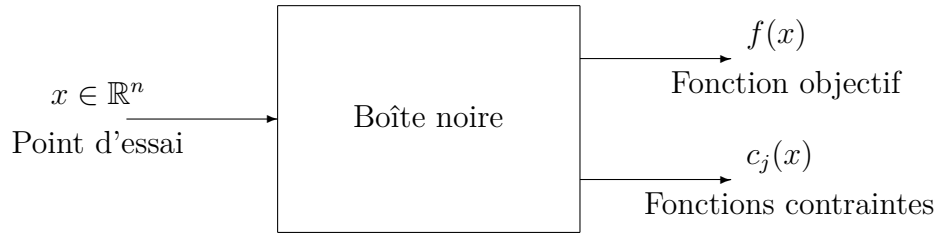


Figure 4.1 Le concept de boîte noire

On ne connaît pas a priori le domaine réalisable Ω , qui est défini à partir de X et des fonctions contraintes c_j . Il est important de distinguer plusieurs types de contraintes, car il existe des mécanismes différents pour les traiter. On identifie ainsi trois types de contraintes ([Audet *et al.*(2010)]) :

- *les contraintes non relaxables* : elles définissent X , et ne peuvent être violées par aucun point d'essai. En tout point n'appartenant pas à X , la valeur de la fonction objectif est fixée à $+\infty$.
- *les contraintes relaxables* : ce sont les contraintes $c_j(x) \leq 0$. Un point d'essai violant ces contraintes est non réalisable, mais l'évaluation de la boîte noire peut avoir lieu et apporte une information supplémentaire. En effet, les fonctions c_j sont sensées être conçues de telle sorte que la valeur de $c_j(x)$ en un point non réalisable apporte une mesure de la violation de la contrainte.
- *les contraintes cachées* : ces contraintes ne peuvent être définies à l'avance, et peuvent entraîner l'existence de points non réalisables qui ne violent pas les

autres contraintes. De tels points peuvent être produits par exemple lorsque l'évaluation de la boîte noire échoue pour une raison quelconque, comme dans [Audet *et al.*(2008a)] où l'évaluation échoue 43 % du temps.

4.1.4 Propriétés des problèmes de boîte noire

Le concept de boîte noire permet d'encapsuler le problème à optimiser et de faire abstraction de ses propriétés. Les algorithmes de recherche directe sont donc capables de s'accommoder d'une très grande variété de problèmes aux propriétés diverses :

- aucune hypothèse de régularité n'est nécessaire pour les fonctions du problème f et les c_j : elles peuvent être non convexes, non différentiables, non continues. Les propriétés de convergence des algorithmes sont toutefois plus ou moins fortes selon le niveau de régularité des fonctions ;
- aucune hypothèse n'est non plus requise pour le domaine X , qui peut être non convexe ou même non connexe ;
- l'évaluation de la boîte noire peut échouer même si l'on se trouve dans le domaine réalisable Ω ;
- une évaluation de la boîte noire peut prendre un temps très long, comme par exemple lorsqu'il s'agit d'une simulation de mécanique des fluides comme dans [Marsden *et al.*(2007)], où une seule simulation peut durer plusieurs semaines.

Une boîte noire est, comme on peut le voir, un objet mathématique très pratique d'un point de vue conceptuel, mais qui peut avoir un comportement très irrégulier et inattendu. Un tel objet peut donc se révéler très difficile à manipuler.

4.2 La recherche par motifs

L'intérêt des algorithmes de recherche directe, comparativement aux algorithmes d'optimisation classiques, est qu'ils ne nécessitent pas de calcul de dérivées, mais se contentent d'évaluations numériques de fonctions. Les exemples de problèmes avec des dérivées inexistantes ou trop laborieuses à évaluer sont légion. Différentes approches de résolution de tels problèmes ont rapidement vu le jour, mais elles ont toutes en commun la même idée de base. En partant d'une solution initiale, les algorithmes de recherche directe évoluent itérativement en évaluant un certain nombre de points d'essai proches du point actuel et en se déplaçant vers celui offrant la plus grande

amélioration de l'objectif.

4.2.1 Bref historique de la recherche directe

Parmi les premières tentatives de résolution par recherche directe, on peut citer [Box(1957)] qui utilise une approche similaire à celle des algorithmes génétiques, mise en pratique dans un contexte industriel. Par la suite, la période 1960-1971 fut l'« âge d'or » de la recherche directe, comme le relate [Lewis *et al.*(2000)]. Durant cette période, trois grands types d'algorithmes de recherche directe furent développés. Ces trois catégories sont, d'après [Lewis *et al.*(2000)] :

- la recherche par simplexe, introduite par [Spendley *et al.*(1962)] et améliorée ensuite par [Nelder et Mead(1965)] ;
- la recherche avec directions de recherche dynamiques, dont la première méthode fut celle de [Rosenbrock(1960)]. Un autre exemple est l'algorithme de [Powell(1964)], qui assure la convergence vers l'optimum en un nombre fini d'itérations pour les fonctions quadratiques ;
- la recherche par motifs, dont le tout premier algorithme fut présenté par [Hooke et Jeeves(1961)]. Il s'agit également de la première utilisation de l'expression « recherche directe ».

Les algorithmes modernes exploitent également d'autres techniques de recherche. En particulier, les algorithmes comme DFO ([Conn *et al.*(1998)]) tentent de créer un modèle polynomial par échantillonnage de la fonction objectif et l'affinent progressivement. La régularité du modèle polynomial permet d'utiliser des techniques exploitant les dérivées pour l'optimiser rapidement. Plus récemment, [Conn et Le Digabel(2011)] combinent les avantages de DFO et de MADS (Mesh Adaptive Direct Search). On peut également citer l'algorithme DIRECT, présenté dans [Jones *et al.*(1993)], avec une analyse de convergence dans [Finkel et Kelley(2004b)] et une extension dans [Finkel et Kelley(2004a)]. Il divise récursivement et de façon déterministe l'espace de recherche en hyper-rectangles de plus en plus petits, et échantillonne la fonction objectif en un point de ces zones.

On retrouve sinon les mêmes catégories que celles présentées ci-dessus. Bien que de sérieux problèmes de convergence dans le cas général ont été identifiés pour les algorithmes de simplexe dans [McKinnon(1998)], de nombreuses variantes, adaptées à des problèmes spécifiques, ont été développées, comme [Price *et al.*(2002)] ou [Nazareth

et Tseng(2002)]. Des propriétés de convergence en faible dimension ont également été identifiées dans [Lagarias *et al.*(1998)].

Un exemple récent d'algorithme de recherche par motifs est GPS, décrit dans [Torczon(1997)]. Finalement, l'algorithme MADS, développé par [Audet et Dennis, Jr.(2006)], est une généralisation de GPS (Generalized Pattern Search), utilisant un jeu de directions dynamique évoluant à chaque itération.

Les algorithmes de recherche directe ont longtemps souffert de l'absence de preuves de convergence suffisamment générales. De nombreux travaux ont tenté de combler cette lacune au fil du temps, avec de nouveaux algorithmes et des analyses de convergence de plus en plus poussées, comme par exemple [Conn *et al.*(1997)] ou [Torczon(1997)]. Mais ce n'est que récemment, grâce notamment à l'analyse non lisse de [Clarke(1983)], que des analyses de convergence robustes et complètes ont pu voir le jour. D'abord [Audet et Dennis, Jr.(2003)] réalise une analyse de convergence de GPS, puis [Audet et Dennis, Jr.(2006)] présente l'algorithme MADS et prouve sa convergence vers un point stationnaire au sens de l'analyse de [Clarke(1983)], grâce à sa capacité à générer ultimement une infinité de directions de recherche différentes qui couvrent toutes les directions de l'espace de recherche.

4.2.2 Notions importantes en recherche par motifs

- La plupart des algorithmes de recherche directe fonctionnent sur le même principe :
- à partir d'une solution courante, l'algorithme génère un ensemble de directions de recherche à partir d'une *base positive* de l'espace de recherche ;
 - à partir de ces directions de recherche, des points d'essai sont créés sur un *treillis*, permettant de contrôler la distance du point courant aux points d'essai ;
 - la boîte noire est alors évaluée en chacun de ces points d'essai. Si une meilleure solution que la solution courante est trouvée, l'algorithme s'y déplace. Sinon, on reste au point actuel et on réduit la taille du treillis.

Cette étape de recherche est appelée *étape de sonde*. Elle est répétée de façon itérative jusqu'à arriver au critère d'arrêt. On peut y ajouter une *étape de recherche*, qui permet à l'algorithme d'essayer de chercher un optimum global.

Base positive

La notion de base positive est analogue à celle de base de \mathbb{R}^n : c'est une famille génératrice positive minimale de \mathbb{R}^n , c'est-à-dire qu'elle engendre \mathbb{R}^n par des combinaisons linéaires positives de ses vecteurs, et qu'aucune sous-famille n'a cette propriété. Elles ont été étudiées dans [Davis(1954)] et [Audet(2011)]. Une caractéristique intéressante d'une telle famille, primordiale pour l'analyse de convergence, est qu'il existe au moins un vecteur compris dans tout demi-espace ouvert de \mathbb{R}^n .

Treillis

Un treillis est une discétisation régulière de \mathbb{R}^n , sur laquelle on construit les points d'essai pour les évaluer. Il est défini par trois paramètres : sa taille $\Delta \in \mathbb{R}^+$, qui définit la distance entre deux points adjacents du treillis, sa position, imposée par la position du point courant $x \in \mathbb{R}^n$, qui doit se trouver sur le treillis, ainsi qu'un ensemble de directions $D \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Il est également très important dans l'analyse de convergence des algorithmes de recherche par motifs.

Lors de la recherche, sa taille est mise à jour à chaque itération. Lorsque l'évaluation des points générés lors de l'étape de sonde conduit à un succès, donc à une amélioration de la solution, la taille du treillis est conservée ou augmentée. Au contraire, s'il s'agit d'un échec, la taille du treillis est réduite.

Étape de sonde

L'étape de sonde est aussi appelée *sonde locale*, car elle consiste en une étape de recherche locale autour du point courant. C'est lors de cette étape que les directions de recherche, qui forment une base positive, sont générées, ainsi que les points d'essai qui sont attachés au treillis. La boîte noire est ensuite évaluée en ces points d'essai. Si un point avec une meilleure valeur de la fonction objectif est trouvé, l'étape est un succès, dans le cas contraire c'est un échec. La taille du treillis est alors mise à jour et l'itération suivante peut avoir lieu.

Ce processus se poursuit jusqu'à atteindre le critère d'arrêt, qui peut être une taille minimale du treillis, un nombre d'itérations de l'algorithme, un nombre d'évaluations de la boîte noire ou encore une durée maximale d'exécution.

Étape de recherche

A l'étape de sonde peut s'ajouter une étape de recherche, aussi appelée *recherche globale*. Une recherche composée uniquement de la sonde locale se retrouve attirée dans un optimum local. Si l'on veut effectuer une recherche plus large, on peut élaborer une stratégie de recherche globale qui sera exécutée lors de la phase de recherche. A chaque itération un certain nombre de points supplémentaires seront également évalués. Ces points, qui devront toujours être attachés au treillis, sont générés par une stratégie définie par l'utilisateur, qui devrait tirer profit de sa connaissance du problème pour identifier des points intéressants à explorer.

En pratique, cette étape se révèle très importante. Même si l'étape de sonde permet de se déplacer vers un minimum local avec des preuves de convergence, l'étape de recherche permet de diversifier la recherche et entraîne généralement une nette amélioration des solutions par rapport à la seule sonde locale.

4.2.3 Les algorithmes de recherche par motifs

Les notions définies ci-dessus sont au cœur de toutes les méthodes de recherche par motifs. Le premier algorithme de recherche par motifs à avoir été formalisé est l'algorithme Coordinate Search (CS), qui utilise les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n comme directions de recherche. Une évolution de CS est l'algorithme GPS (Generalized Pattern Search), présenté par [Torczon(1997)], qui utilise des directions de recherche plus évoluées. Enfin, la dernière évolution de cette classe d'algorithmes est MADS (Mesh Adaptive Direct Search), introduit dans [Audet et Dennis, Jr.(2006)], dont la méthode de génération des directions de recherche est encore plus élaborée, et permet une analyse de convergence poussée. Ce dernier algorithme sera présenté en détails dans la section suivante.

Coordinate Search (CS)

L'algorithme CS, en tant que premier véritable algorithme de recherche directe, n'utilise pas encore explicitement les notions de base positive, de treillis, d'étapes de sonde ou de recherche. Seule une phase de sonde locale est en fait présente. A partir d'un point courant x_k , l'algorithme évalue simplement la fonction objectif f en les $2n$ points de l'ensemble $P_k = \{x_k \pm \Delta_k e_i : i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$. Les directions de recherche sont donc $\pm e_i$, les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n et leurs opposés. Le paramètre Δ_k

est en fait la taille du treillis, qui est divisée par 2 en cas d'échec de l'étape de sonde, et gardée constante en cas de succès. L'algorithme 3 détaille le fonctionnement de CS.

Algorithme 3: Algorithme CS

INITIALISATION :

Compteur d'itérations : $k = 0$

Point initial : x_0

Taille de pas initiale : $\Delta_0 > 0$

SONDE LOCALE :

tant que *le critère d'arrêt n'est pas atteint* **faire**

$P_k = \{x_k \pm \Delta_k e_i : i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$

si $\exists y \in P_k, f(y) < f(x_k)$ **alors**

$x_{k+1} = y$

$\Delta_{k+1} = \Delta_k$

sinon

$x_{k+1} = x_k$

$\Delta_{k+1} = \frac{\Delta_k}{2}$

fin

$k = k + 1$

fin

Generalized Pattern Search (GPS)

Du fait de l'utilisation d'un faible nombre de directions de recherche, l'algorithme CS n'est pas toujours très efficace en pratique. L'algorithme GPS a été développé par [Torczon(1997)] et [Lewis et Torczon(1999)] pour améliorer ce comportement. Ses principales améliorations par rapport à CS sont : l'ajout d'une étape de recherche globale optionnelle, l'utilisation de directions de recherche plus variées, et une gestion plus évoluée de la taille du treillis.

A chaque itération, les directions de recherche D_k de GPS sont formées des p vecteurs d'un ensemble générateur positif D , avec $p \geq n + 1$. Afin d'assurer les propriétés de convergence de GPS, la construction de l'ensemble D obéit à des règles strictes qui seront détaillées dans la section suivante avec la description de MADS. La remarque importante à effectuer ici est qu'on dispose maintenant d'un ensemble de directions de recherche bien plus variées que les simples vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n . Cependant, les directions de recherche restent en nombre fini.

La taille du treillis, quant à elle, n'est plus limitée à seulement se réduire ou rester

constante. Son mécanisme de mise à jour lui permet de se réduire en cas d'échec de l'étape de sonde et à grandir en cas de succès. Cette caractéristique ne modifie aucunement l'analyse mathématique par rapport à CS, mais permet généralement une convergence plus rapide en pratique.

L'algorithme GPS tel que décrit ici est succinctement détaillé dans l'algorithme 4.

Algorithme 4: Algorithme GPS

1. INITIALISATION :
 Compteur d'itérations : $k = 0$
 Point initial : x_0
 Taille de treillis initiale : $\Delta_0 > 0$
 2. ÉTAPE DE RECHERCHE (optionnelle) :
 Évaluer l'objectif f en un nombre fini de points d'essai fournis par l'utilisateur, situés sur le treillis.
 3. ÉTAPE DE SONDE (si l'étape de recherche a échoué) :
 Évaluer f en les points de $P_k = \{x_k + \Delta_k d : d \in D_k\}$, avec $D_k \subset D$.
 4. MISE À JOUR DES PARAMÈTRES :
si *un point d'essai y tel que $f(y) < f(x_k)$ est trouvé* **alors**
 Poser $x_{k+1} = y$
 Mettre à jour la taille du treillis $\Delta_{k+1} \geq \Delta_k$
sinon
 Poser $x_{k+1} = x_k$
 Mettre à jour la taille du treillis $\Delta_{k+1} < \Delta_k$
fin
 5. CRITÈRE D'ARRÊT :
 Si le critère d'arrêt n'est pas rencontré, poser $k = k + 1$ et retourner à l'étape de recherche.
-

4.3 L'algorithme MADS

L'algorithme MADS est la dernière évolution des algorithmes de recherche par motifs sur treillis, développée par [Audet et Dennis, Jr.(2006)]. Il est une généralisation de l'algorithme GPS, et possède une analyse de convergence détaillée.

4.3.1 Définitions et notations

La principale amélioration apportée par MADS par rapport à GPS est de pouvoir générer des directions de recherche encore plus variées, grâce à l'introduction d'un paramètre de taille de sonde et à une nouvelle façon de choisir ces directions. En fait, l'algorithme peut générer ultimement une infinité de directions de recherche qui balayent toutes les directions possibles.

Ensemble générateur positif D

Il est nécessaire de définir un ensemble de directions D qui seront utilisées tout au long de l'algorithme pour construire les directions de recherche. L'ensemble D défini par MADS est identique à celui utilisé dans GPS. Soit $Z \subset \mathbb{Z}^n$ un ensemble générateur positif entier de \mathbb{R}^n , contenant $p \geq n + 1$ éléments. Soit également une matrice $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible. Posons, pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $d_j = Gz_j$, et définissons l'ensemble $D = \{d_1, d_2, \dots, d_p\}$. Avec cette construction, D est un ensemble générateur positif de \mathbb{R}^n . Il peut être pratique de considérer les ensembles Z et D comme des matrices de taille $n \times p$, et on peut alors écrire $D = GZ$.

La propriété fondamentale qui découle de cette construction de D est que tous les points du treillis généré à partir des vecteurs de D sont à une distance finie les uns des autres. Sans cette propriété, rien n'assure que le treillis généré ne puisse avoir de points infiniment proches. Ce résultat joue un rôle majeur à la fois dans les analyses de convergence de GPS et MADS et dans le comportement des algorithmes.

Notations

Pour présenter l'algorithme MADS, il est nécessaire d'introduire un certain nombre de notations. La plupart des paramètres de l'algorithme évoluent au fil des itérations. Le compteur d'itérations sera noté k , et les notations dépendant de l'itération courante seront indicées par k . On définit alors :

- M_k : le treillis ;
- x_k : le centre de sonde ;
- Δ_k^m : le paramètre de taille du treillis ;
- Δ_k^p : le paramètre de taille de sonde ;
- D_k : l'ensemble des directions de sonde ;
- P_k : le voisinage de sonde ;

- S_k : l'ensemble de recherche.

4.3.2 Construction des ensembles

À chaque itération de l'algorithme, le treillis M_k , l'ensemble de recherche S_k et le voisinage de sonde P_k doivent être mis à jour.

Treillis

De façon générale, le treillis centré en $x \in \mathbb{R}^n$ de taille $\Delta \geq 0$ est défini par :

$$M(x, \Delta) = \{x + \Delta D y : y \in \mathbb{N}^p\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (4.3)$$

Soit V_k l'ensemble des points de \mathbb{R}^n où l'objectif f a été évalué au début de l'itération k . Le treillis courant à l'itération k est l'ensemble suivant :

$$M_k = \bigcup_{x \in V_k} M(x, \Delta_k^m) = \{x + \Delta_k^m D z : x \in V_k, z \in \mathbb{N}^{|D|}\}. \quad (4.4)$$

Ensemble de recherche

L'ensemble de recherche S_k est un ensemble fini de points fournis par l'utilisateur qui seront évalués avant l'étape de sonde. Les seules règles auxquelles doit obéir l'étape de recherche sont que les points générés doivent se trouver sur le treillis courant M_k , et que l'évaluation de S_k doit se faire en un temps fini.

Voisinage de sonde

À l'itération k , le voisinage de sonde est défini par :

$$P_k = \{x_k\} \cup \{x_k + \Delta_k^m d : d \in D_k\} \subset M_k, \quad (4.5)$$

où D_k est tel que pour tout $d \in D_k$:

- d est une combinaison linéaire entière positive non nulle de vecteurs de D :

$$D_k \subset \{D u : u \in \mathbb{N}^{|D|}\} \setminus \{0\}; \quad (4.6)$$

- la distance du centre de sonde x_k à un point d'essai $x_k + \Delta_k^m d$ est majorée par une valeur dépendant du paramètre de taille de sonde Δ_k^p :

$$\Delta_k^m \|d\| \leq \Delta_k^p \max \{\|d'\| : d' \in D\}. \quad (4.7)$$

4.3.3 Algorithme

Le fonctionnement de MADS sans contraintes est détaillé dans l'algorithme 5. Le traitement des contraintes est expliqué dans les sections suivantes.

Algorithme 5: Algorithme MADS

1. INITIALISATION :

Compteur d'itérations : $k = 0$

Point initial : $x_0 \in X$

Taille de treillis initiale : Δ_0^m

Taille de sonde initiale : Δ_0^p

2. ÉTAPE DE RECHERCHE (optionnelle) :

Générer l'ensemble des points de recherche S_k avec la stratégie définie par l'utilisateur.

Évaluer l'objectif f sur l'ensemble S_k .

3. ÉTAPE DE SONDE (si l'étape de recherche a échoué) :

Générer les directions de recherche D_k puis le voisinage de sonde P_k .

Évaluer l'objectif f sur l'ensemble P_k .

4. MISE À JOUR DES PARAMÈTRES :

si un point d'essai y tel que $f(y) < f(x_k)$ est trouvé **alors**

 Poser $x_{k+1} = y$

 Mettre à jour $\Delta_{k+1}^m \geq \Delta_k^m$

 Mettre à jour la taille de sonde Δ_{k+1}^p

sinon

 Poser $x_{k+1} = x_k$

 Mettre à jour $\Delta_{k+1}^m < \Delta_k^m$

 Mettre à jour la taille de sonde Δ_{k+1}^p

fin

5. CRITÈRE D'ARRÊT :

Si le critère d'arrêt n'est pas rencontré, poser $k = k + 1$ et retourner à l'étape de recherche.

4.3.4 Mise à jour des paramètres

À chaque itération, les paramètres de taille du treillis et de la sonde doivent être mis à jour. La taille du treillis est mise à jour selon la formule :

$$\Delta_{k+1}^m = \tau^{w_k} \Delta_k^m \quad (4.8)$$

où $\tau > 1$ est une constante rationnelle et w_k est un entier. La valeur de w_k dépend de l'issue des évaluations :

- si l'itération conduit à un succès, on choisit $w_k \geq 0$, de sorte que la taille du treillis est maintenue constante ou agrandie ;
- si on a un échec, on prend $w_k \leq -1$, et la taille du treillis est réduite.

Le paramètre de taille de sonde doit quant à lui obéir à la relation $\Delta_k^p \geq \Delta_k^m$, et doit satisfaire la propriété suivante :

$$\text{Pour tout } K \subset \mathbb{N} \text{ de cardinal infini : } \lim_{k \in K} \Delta_k^m = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \in K} \Delta_k^p = 0. \quad (4.9)$$

Une stratégie de mise à jour typique consiste à poser $\Delta_{k+1}^m = 2\Delta_k^m$ et $\Delta_{k+1}^p = 4\Delta_k^p$ en cas de succès de l'itération, et $\Delta_{k+1}^m = \frac{1}{4}\Delta_k^m$ et $\Delta_{k+1}^p = \frac{1}{2}\Delta_k^p$ en cas d'échec.

4.3.5 Gestion des contraintes

Comme mentionné précédemment, il existe trois types de contraintes dans un problème d'optimisation de boîte noire : les contraintes relaxables, non relaxables et cachées. Deux mécanismes principaux existent pour traiter ces contraintes : la barrière extrême et la barrière progressive.

La barrière extrême

La première version de MADS, présentée dans [Audet et Dennis, Jr.(2006)], ne possédait que la barrière extrême comme mécanisme de gestion des contraintes. Elle ne nécessite pas de modifier l'algorithme présenté ci-dessus. Elle consiste à remplacer la fonction objectif f par une fonction f_Ω définie comme suit :

$$f_\Omega(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.10)$$

La barrière progressive

La barrière progressive, définie par [Audet et Dennis, Jr.(2009)], distingue les contraintes non relaxables, définies par le domaine X , des contraintes relaxables définies par les fonctions c_j . Elle définit une fonction de violation de contraintes h de la façon suivante :

$$h(x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^m (\max(c_j(x), 0))^2 & \text{si } x \in X, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.11)$$

La fonction de violation de contraintes prend la valeur $h(x) = 0$ si et seulement $x \in \Omega$. D'autre part, si le point x n'est pas réalisable mais ne viole que les contraintes relaxables, on a $0 < h(x) < +\infty$. On obtient ainsi une mesure de la violation des contraintes. Lors de la progression de l'algorithme, un paramètre $h_k^{max} \geq 0$ est utilisé définissant le seuil d'acceptation ou de rejet d'un point d'essai. Ainsi, tout point x tel que $h(x) > h_k^{max}$ sera rejeté. Le seuil h_k^{max} est progressivement abaissé au cours de la recherche pour forcer une violation des contraintes de moins en moins importante.

4.3.6 Ordre d'évaluation

Les solutions du voisinage de sonde P_k sont évaluées lors de l'étape de sonde. L'ordre d'évaluation des solutions peut avoir une influence importante sur l'efficacité de l'algorithme. Il est donc intéressant de chercher une stratégie d'évaluation efficace plutôt que d'évaluer les solutions dans un ordre quelconque. La stratégie la plus souvent utilisée est la stratégie opportuniste, qui consiste à évaluer en premier lieu lors d'une itération les directions qui ont donné lieu à un succès le plus récemment lors des itérations précédentes, et à arrêter l'évaluation des solutions du voisinage de sonde dès qu'un succès est obtenu.

4.4 Analyse de convergence

L'algorithme MADS est un des premiers algorithmes de recherche par motifs à bénéficier d'une analyse de convergence complète pour l'optimisation non lisse sous contraintes. Pour pouvoir présenter les résultats de convergence de l'algorithme, il faut d'abord introduire des définitions de calcul non lisse.

4.4.1 Notions d'analyse non lisse

Dans le cadre de l'établissement de conditions d'équilibre pour des fonctions non lisses, l'étude des dérivées d'une fonction régulière est remplacée par l'étude de la dérivée directionnelle généralisée de Clarke dans les directions contenues dans le cône hypertangent en un point. La dérivée directionnelle généralisée s'applique aux fonctions Lipschitz, définies comme suit :

Définition 1. Soient I un sous-ensemble non vide de \mathbb{R}^n et un réel $\lambda > 0$. La fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite λ -lipschitzienne ou λ -Lipschitz si :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq \lambda \|x - y\|.$$

Une fonction f est dite lipschitzienne ou Lipschitz s'il existe $\lambda > 0$ tel que f est λ -lipschitzienne.

La dérivée directionnelle généralisée est alors introduite par [Clarke(1983)] de la façon suivante :

Définition 2. Soient une fonction f localement Lipschitz autour d'un point $x \in \mathbb{R}^n$, un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ et un réel positif $t \in \mathbb{R}^+$. La dérivée directionnelle généralisée de f en x dans la direction v est notée $f^\circ(x; v)$ et est définie ainsi :

$$f^\circ(x; v) = \limsup_{y \rightarrow x} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t}.$$

Notons $B_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq \epsilon\}$ la boule fermée de rayon ϵ centrée en x . Introduisons enfin le cône hypertangent, défini par [Rockafellar(1980)] :

Définition 3. Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est dit hypertangent à l'ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ au point $x \in \Omega$ s'il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que :

$$y + tw \in \Omega \text{ pour tout } y \in \Omega \cap B_\epsilon(x), w \in B_\epsilon(v) \text{ et } t \in]0, \epsilon[.$$

L'ensemble des vecteurs hypertangents à Ω en x est appelé le cône hypertangent à Ω en x et se note $T_\Omega^H(x)$.

C'est une généralisation du cône tangent, obtenu par des combinaisons linéaires des gradients des contraintes, lorsque celles-ci sont différentiables.

4.4.2 Résultats de convergence

Les preuves des résultats de l'analyse de convergence énoncées dans cette section ont été développées par [Audet et Dennis, Jr.(2006)]. Elles reposent sur l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1. *La suite d'itérés produite par MADS appartient à un sous-ensemble borné de \mathbb{R}^n .*

Introduisons d'abord les définitions de sous-suite raffinante et de direction raffinante, propres à l'algorithme MADS :

Définition 4. *Une sous-suite de centres de sonde $\{x_k\}_{k \in K}$, pour un sous-ensemble d'indices $K \subset \mathbb{N}$, convergente vers \hat{x} , est une sous-suite raffinante si $\lim_{k \in K} \Delta_k^m = 0$.*

Définition 5. *Si la limite $\lim_{k \in L} \frac{d_k}{\|d_k\|}$ existe pour un sous-ensemble d'indices $L \subseteq K$ avec des directions de sonde $d_k \in D_k$, et si $x_k + \Delta_k^m d_k \in \Omega$ pour une infinité d'indices $k \in L$, alors cette limite est une direction raffinante pour \hat{x} .*

On peut alors énoncer le théorème de convergence de MADS :

Théorème 1. *Soit f une fonction Lipschitz autour de la limite $\hat{x} \in \Omega$ d'une sous-suite raffinante, et supposons que $T_\Omega^H(\hat{x}) \neq \emptyset$. Si l'ensemble des directions raffinantes pour \hat{x} est dense dans $T_\Omega^H(\hat{x})$, alors \hat{x} est un point Clarke-stationnaire de f sur Ω , c'est-à-dire que $f^\circ(\hat{x}; v) \geq 0$ pour tout $v \in T_\Omega^H(\hat{x})$.*

Ce résultat est une généralisation au cas des fonctions simplement Lipschitz des conditions KKT (Karush-Kuhn-Tucker) pour une fonction strictement différentiable. On peut en effet obtenir ce second résultat comme un corollaire du premier :

Corollaire 1. *Soit f une fonction strictement différentiable autour de la limite $\hat{x} \in \Omega$ d'une sous-suite raffinante, et supposons que $T_\Omega^H(\hat{x}) \neq \emptyset$. Si l'ensemble des directions raffinantes pour \hat{x} est dense dans $T_\Omega^H(\hat{x})$, alors \hat{x} est un point Clarke-KKT-stationnaire pour f sur Ω .*

Il est à noter que les résultats énoncés ici nécessitent que l'algorithme génère un ensemble de directions raffinantes denses dans $T_\Omega^H(\hat{x})$. Il existe différentes stratégies de génération des directions de sonde permettant de satisfaire cette condition. Parmi celles-ci on peut citer la stratégie ORTHOMADS, une instance de l'algorithme MADS présentée dans [Abramson et al.(2009b)].

4.5 NOMAD

NOMAD est un logiciel développé en C++ implémentant l'algorithme MADS. Le projet NOMAD a été initié par [Abramson *et al.*(2003)] et développé par [Le Digabel(2011)]. Il permet le développement rapide d'applications d'optimisation de boîte noire, grâce à l'existence d'un mode console pour les problèmes les plus simples. Pour les problèmes plus complexes, le mode librairie permet le paramétrage complet de l'algorithme MADS et l'utilisation de nombreuses fonctionnalités avancées, présentées ici.

Variables de catégorie

L'algorithme MADS classique ne fonctionne qu'avec des variables prenant leurs valeurs dans un ensemble ordonné, et tire parti de la relation d'ordre qui existe dans cet ensemble. Les variables de catégorie, dont l'utilisation avec MADS est introduite par [Audet et Dennis, Jr.(2001)], sont quant à elles des variables prenant des valeurs discrètes dans un ensemble non ordonné. L'analyse de convergence de MADS a été étendue à ce type de variables par [Abramson *et al.*(2009a)], et la gestion de ces variables est implémentée dans NOMAD.

Variables périodiques

Les variables périodiques sont également supportées par NOMAD. Elles bénéficient d'une analyse de convergence dans [Audet et Le Digabel(2011)]. Le gain d'efficacité qu'elles apportent dans le déroulement de l'algorithme est incontestable lorsqu'il s'agit par exemple de traiter des variables représentant des angles.

Optimisation biobjectif

Au lieu de se contenter d'une fonction objectif f unique, l'optimisation biobjectif cherche à optimiser un problème comportant deux fonctions objectif f_1 et f_2 . Au sein de NOMAD, elle est réalisée grâce à l'algorithme BiMADS, présenté dans [Audet *et al.*(2008d)] et qui construit une approximation du front Pareto du problème en lançant de multiples instances de MADS mono-objectif.

Recherche globale à voisinage variable

NOMAD implémente une stratégie de recherche globale dont l'utilisateur peut choisir de se servir pour l'étape de recherche de MADS. Elle permet de diversifier les zones de recherche et de traiter les problèmes possédant de multiples optima locaux. Il s'agit d'un algorithme de type VNS, dont le couplage avec MADS est proposé et décrit dans [Audet *et al.*(2008b)].

Groupes de variables

L'utilisation de groupes de variables permet de définir des ensembles de variables intéressantes à traiter conjointement. Par exemple, dans un problème de localisation, il peut être intéressant de grouper les 2 ou 3 variables représentant la position d'un objet dans l'espace à 2 ou 3 dimensions. L'utilisation des groupes de variables a été explorée en profondeur par [Garnier(2010)] grâce à l'application au problème de localisation de balises permettant d'estimer le couvert nival dans un bassin hydrologique.

Parallélisme

NOMAD implémente différentes extensions de MADS permettant l'évaluation en parallèle de plusieurs solutions, notamment grâce à l'algorithme PSD-MADS présenté dans [Audet *et al.*(2008c)]. Ces extensions, implémentées avec la bibliothèque MPI, permettent de réduire les temps d'exécution de façon importante et de traiter de plus gros problèmes. D'autres exemples d'algorithmes parallèles pour MADS sont décrits dans [Le Digabel *et al.*(2010)].

Chapitre 5

Optimisation d'un réseau

La boîte noire conçue dans le chapitre 3 permet d'effectuer des simulations de couverture d'un réseau d'accès sans fil. C'est grâce à ces simulations qu'est effectuée l'optimisation du placement des antennes du réseau ainsi que de leur assignation de fréquence.

5.1 Définition de la simulation et notations

Comme précédemment, on considère un réseau d'accès constitué de p antennes A_1, A_2, \dots, A_p et de q canaux C_1, C_2, \dots, C_q .

5.1.1 Entrées de la boîte noire

Les variables d'entrée de la boîte noire appartiennent à deux catégories : les variables de position des antennes, et les variables de canaux.

Variables de position

Le problème traité dans ce travail est à deux dimensions d'espace, et les antennes sont placées sur une surface plane. En revanche, le territoire considéré peut être de forme quelconque. La position des antennes est repérée par leurs coordonnées $X_i = (x_i, y_i), i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. La région du plan correspondant au territoire autorisé pour le placement des antennes sera notée T .

Les variables de position sont au nombre de $2p$, et sont des variables continues. Cependant, même si la boîte noire accepte des variables réelles en entrée pour les positions des antennes, les calculs sont réalisés sur un terrain discrétisé.

Variables d'assignation de canaux

Chaque antenne émet et reçoit sur un canal (ou un groupe de canaux) donné. Chaque groupe de canaux C_j , $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$ correspond à des fréquences d'onde porteuses différentes. On considère dans le modèle que les interférences entre canaux sont négligeables, et on n'en tient donc pas compte. En revanche les antennes possédant le même canal interfèrent entre elles, puisqu'elles émettent et reçoivent sur les mêmes fréquences.

On notera c_i le canal de l'antenne A_i . On pourra considérer indifféremment que $c_i \in \{1, 2, \dots, q\}$ ou que $c_i \in \{C_1, C_2, \dots, C_q\}$, selon la notation la plus commode.

D'autre part, il est utile de définir $A(C_j)$ comme l'ensemble des antennes utilisant le canal C_j :

$$A(C_j) = \{A_i : c_i = C_j, i \in \llbracket 1, p \rrbracket\}. \quad (5.1)$$

Ces variables d'assignation de canaux c_i , au nombre de p , sont de nature combinatoire, et peuvent prendre q valeurs différentes. Il faut les traiter avec une méthode adaptée aux variables entières.

5.1.2 Sorties de la boîte noire

En réponse à une entrée donnée, la boîte noire simule le réseau de télécommunications et calcule un plan de couverture du terrain par les différentes antennes, comme décrit dans le chapitre 3. Ce plan permet alors de déterminer toutes les sorties importantes dont on a besoin. Les informations pertinentes que l'on peut obtenir sont :

- la couverture géographique totale du réseau \mathcal{A} ;
- le nombre total d'utilisateurs servis \mathcal{N} ;
- la variance du nombre d'utilisateurs par antenne \mathcal{V} ;
- la charge maximale des antennes \mathcal{N}_{\max} .

Cette situation est illustrée par la figure 5.1.

Appartenance au territoire T

Une autre information utile dans le cadre de l'optimisation et qui n'a pas encore été mentionnée est la mesure de la violation de la contrainte d'appartenance des antennes au territoire T . Soit $d(X_i, T)$ la distance du point X_i , représentant la localisation de

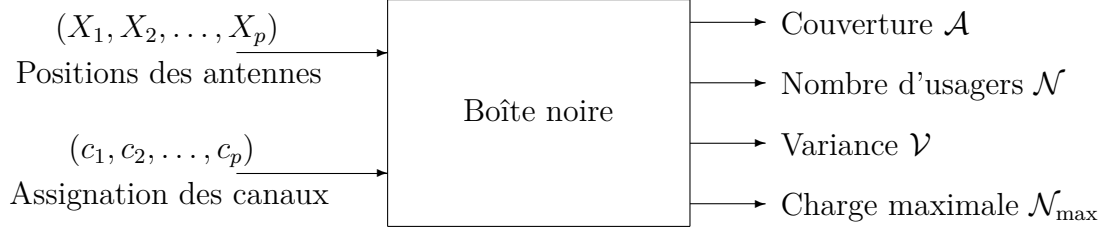


Figure 5.1 Entrées et sorties de la boîte noire

l'antenne A_i , au territoire T . C'est la distance du point X_i au point de T le plus proche de X_i . La mesure de la violation de la contrainte d'appartenance à T peut être exprimée de la manière suivante :

$$d_{T,2} = \sum_{i=1}^p d(X_i, T)^2. \quad (5.2)$$

5.2 Plan général de l'algorithme

L'algorithme développé ici se déroule en plusieurs étapes. Dans un premier temps, une solution initiale est construite. Puis cette solution est améliorée de façon itérative au sein d'une boucle.

Le plan général de l'algorithme utilisé est décrit dans l'algorithme 6.

Algorithme 6: Plan général

INITIALISATION :

Construire une solution initiale

RECHERCHE :

Optimiser l'assignation de canaux (recherche tabou)

Optimiser le placement des antennes (algorithme MADS)

BOUCLAGE :

Si un critère d'arrêt n'est pas atteint, recommencer l'étape de recherche

Au sein de la boucle d'optimisation, deux méthodes sont utilisées. En effet, les variables d'entrée que l'on manipule sont de natures différentes : les variables de position sont considérées comme continues, alors que les variables d'assignation de canaux sont combinatoires. Il n'est donc pas forcément judicieux d'utiliser la même méthode d'optimisation pour traiter ces deux groupes de variables.

Variables continues

Les variables continues, qui sont les variables de position, seront traitées avec l'algorithme MADS, présenté dans le chapitre 4.

Variables combinatoires

Les variables d'assignation de canaux ne peuvent pas être traitées de la même façon que les variables continues. La principale difficulté, en dehors du fait qu'il s'agisse de variables discrètes, est qu'il n'existe pas de relation d'ordre entre les différentes valeurs prises par ces variables.

Il s'agit de variables de catégorie et l'algorithme MADS avec extension aux variables de catégorie pourrait être utilisé. Dans ce cas, le problème traité serait alors un problème d'optimisation de boîte noire à $3p$ variables, dont p seraient des variables de catégorie. Ce problème serait très lourd et coûteux, et n'exploiterait aucunement le fait que les variables combinatoires ont un rôle particulier.

Pour traiter ces variables, une métaheuristique sera utilisée. Ce type d'algorithme est destiné au traitement des problèmes combinatoires. Plus précisément, l'algorithme choisi est une recherche tabou, qui sera décrite plus loin.

Critère d'arrêt

Différents critères d'arrêt peuvent être utilisés. Le plus évident serait sans doute d'utiliser un critère de qualité de la solution, qui permettrait de continuer l'optimisation jusqu'à ce que la solution obtenue soit jugée de qualité suffisante. Cependant, il peut être difficile de définir précisément un objectif de qualité. En effet, avant d'effectuer l'optimisation, on ne peut pas vraiment savoir quelle serait la solution optimale, et donc à quelle distance on s'en trouve tout au long de la recherche.

Un autre critère simple à utiliser est une borne supérieure sur le nombre d'itérations de chaque type de recherche. C'est par exemple le type de borne qui sera utilisé pour la recherche tabou.

Pour la recherche directe avec MADS, une particularité intéressante de l'algorithme est l'utilisation d'un treillis. Étant donné que le terrain est discrétisé, il est inutile d'essayer de placer les antennes avec une précision plus importante que la taille du pas de discrétisation. On peut donc arrêter la recherche lorsque la taille du treillis

interne de MADS passe en-dessous de la taille du pas de discrétisation, car on sait que l'algorithme ne pourra alors plus améliorer la solution.

5.3 Mise en place du problème

Les informations que l'on peut obtenir en sortie de la boîte noire sont nombreuses et de natures différentes. Il est donc important de comprendre le rôle de chacune et de bien définir les objectifs à atteindre pour pouvoir bien exploiter les informations disponibles.

5.3.1 Couverture géographique et nombre total d'utilisateurs

Le premier objectif que l'on veut atteindre lors de l'optimisation d'un réseau de télécommunications est la maximisation de sa couverture. Mais déjà une première question se pose : parle-t-on de la couverture géographique, ou de la couverture en termes de population servie ? En fait, c'est au concepteur du réseau de déterminer quel aspect sera le plus important pour lui, et son choix sera guidé par le type de zone géographique à couvrir.

Dans le cas d'une zone urbaine, la population à servir est généralement répartie sur une grande partie du territoire, et il serait inadmissible d'avoir des régions non desservies au milieu d'une ville ou dans ses environs proches. Il est préférable dans ce cas d'essayer de couvrir l'ensemble du territoire, et toute la population sera alors également couverte.

Dans le cas d'une zone rurale, ou d'un territoire très étendu comme une province ou un pays, la population ne recouvre plus qu'une petite partie de la région considérée. Couvrir l'ensemble du territoire serait alors trop coûteux et inutile. On préférera donc dans ce cas maximiser le nombre d'utilisateurs servis. Ainsi, seules les zones nécessitant réellement une couverture du réseau seront desservies.

Le présent travail ne se concentre que sur des zones de type urbain, où la population à servir recouvre l'ensemble du territoire. La distinction entre les objectifs de couverture géographique \mathcal{A} et de la population \mathcal{N} reste importante dans le cas où il n'est pas possible d'arriver à une couverture totale. En effet, la densité de population D , a priori inhomogène, intervient dans le calcul de \mathcal{N} , alors que pour \mathcal{A} , tous les points du territoire ont la même importance.

Cependant, si le réseau parvient à réaliser une couverture complète, les objectifs de couverture géographique et de la population sont équivalents, et dans ce cas l'un ou l'autre de ces deux points de vue peut être utilisé indifféremment.

Il a été fait le choix ici de privilégier une approche qui tienne compte de la non-homogénéité de la répartition de la population. On choisit donc de maximiser le nombre total d'utilisateurs servis \mathcal{N} .

5.3.2 Équilibrage de la charge

L'objectif de maximisation de la couverture est insuffisant pour réaliser l'optimisation. Deux situations peuvent se présenter. Premièrement, s'il n'est pas possible de réaliser une couverture complète, l'objectif de maximisation de la couverture conduit l'optimisation à éloigner les antennes d'un même canal les une des autres, afin d'agrandir la zone de couverture de chacune et de couvrir un maximum d'utilisateurs. Cela mène généralement à des solutions aberrantes où quelques antennes seulement servent des utilisateurs et les autres, rejetées aux limites du territoire, sont presque inutiles. Deuxièmement, si une couverture totale peut être atteinte, il existe alors un grand nombre de solutions équivalentes qui maximisent la couverture mais qui ne peuvent pas être distinguées.

D'autre part, il a été montré dans le chapitre 2 qu'une antenne ne peut servir qu'un nombre limité d'utilisateurs. Plus une antenne est chargée, plus la qualité de la communication d'un nouvel utilisateur voulant se connecter via cette antenne sera dégradée. Il est donc important de garder le nombre d'utilisateurs à servir par chaque antenne aussi bas que possible.

L'introduction d'un objectif d'équilibrage de la charge des antennes est donc nécessaire. Le rôle de cet objectif est de minimiser la charge supportée par chaque antenne en essayant de répartir la charge totale entre toutes les antennes. La variance du nombre d'utilisateurs par antenne \mathcal{V} est un bon indicateur du déséquilibre de charge entre les antennes et sera donc utilisé pour l'optimisation.

5.3.3 Séparation des problèmes

Dans notre algorithme d'optimisation, les deux aspects de l'optimisation que sont le placement des antennes et l'assignation de canaux sont traités séparément. Les deux problèmes ne sont pourtant pas séparables, et il pourrait être tentant de les

traiter ensemble avec une méthode d'optimisation bi-objectif. La méthode utilisée ici est cependant une méthode d'optimisation mono-objectif, pour deux raisons principales. Premièrement, l'optimisation bi-objectif est très longue et coûteuse en temps de calcul, beaucoup plus que l'optimisation mono-objectif. Deuxièmement, elle n'est pas nécessaire ici, car on ne veut pas calculer un front de Pareto complet, mais obtenir seulement une solution qui réalise un compromis entre les deux aspects.

5.4 Construction de la solution initiale

Lors de la construction de la solution initiale, on cherche avant tout à trouver un placement des antennes de qualité correcte. La méthode développée ici se déroule en deux parties. La première est inspirée de techniques de reconnaissance d'images et de formes, utilisées notamment en robotique pour localiser, identifier et positionner des objets filmés par une caméra. La seconde utilise l'algorithme MADS avec l'approximation de la simulation par diagrammes de Voronoï.

5.4.1 Centre géométrique et centre de masse

Le centre géométrique d'une région du plan est, de façon intuitive, la « moyenne » de tous les points de la région.

Soit R une région du plan. Son aire A est définie de la façon suivante :

$$A = \iint_R dx dy. \quad (5.3)$$

Les coordonnées de son centre (x_c, y_c) sont alors données par :

$$x_c = \frac{\iint_R x dx dy}{A}, \quad (5.4)$$

$$y_c = \frac{\iint_R y dx dy}{A}. \quad (5.5)$$

Le centre géométrique de R est l'unique point du plan qui minimise la somme des distances à tous les autres points de R . On a donc l'intuition que ce point serait le plus adapté pour placer une antenne si l'on voulait couvrir la région R . Cependant, on voudrait aussi traiter des problèmes avec une densité de population non uniforme sur le terrain considéré. Le centre géométrique n'est alors plus forcément un bon choix

pour placer une antenne, et il faut trouver un placement initial tenant compte de cette densité.

Introduisons alors la notion de centre de masse, par analogie avec la physique, où il est aussi appelé centre de gravité. Soit $D(x, y)$ une fonction de densité sur la région R . Dans l'analogie mécanique, il s'agirait d'une densité de masse. La masse totale m de la région R est alors :

$$m = \iint_R D(x, y) \, dx \, dy. \quad (5.6)$$

Les coordonnées (x_m, y_m) du centre de gravité sont données par les équations suivantes :

$$x_m = \frac{\iint_R x D(x, y) \, dx \, dy}{m}, \quad (5.7)$$

$$y_m = \frac{\iint_R y D(x, y) \, dx \, dy}{m}. \quad (5.8)$$

Si D représente la densité de population sur la région R , m est alors la population totale à l'intérieur de cette région et le centre de masse est le barycentre de la population.

5.4.2 Moments centraux et découpage

Le centre de masse, tel que défini ci-dessus, semble être un bon choix pour le placement initial d'une antenne sur une région du plan. Cependant, cette information est insuffisante si on veut placer un plus grand nombre d'antennes. Idéalement, il faudrait trouver un placement qui équilibre la charge de toutes les antennes, c'est-à-dire qu'elles servent toutes le même nombre d'utilisateurs. Pour essayer d'approcher une telle configuration, on tente de découper le territoire en n régions contenant chacune le même nombre d'usagers.

Afin de réaliser un bon découpage, il faut analyser la structure du territoire et obtenir des informations sur la répartition de la population. Pour cela, la méthode des moments centraux est utilisée. Le moment central d'ordre $(\alpha + \beta)$, où α et β sont deux entiers positifs, est défini par :

$$\mu_{\alpha\beta} = \iint_R (x - x_m)^\alpha (y - y_m)^\beta D(x, y) \, dx \, dy \quad (5.9)$$

où (x_m, y_m) sont les coordonnées du centre de masse de R .

On définit ensuite le moment central normalisé d'ordre $(\alpha + \beta)$ comme :

$$\eta_{\alpha\beta} = \frac{\mu_{\alpha\beta}}{(\mu_{00})^\gamma} \quad (5.10)$$

avec

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} + 1. \quad (5.11)$$

Les seuls moments qui sont utiles ici sont les moments η_{11} , η_{20} et η_{02} . Le moment η_{11} quantifie l'éloignement de la population par rapport au centre de masse. Les moments η_{02} et η_{20} renseignent quant à eux sur la direction dans laquelle la population est le plus étalée. C'est cette information qui est importante : si $\eta_{02} > \eta_{20}$, la population est plus étalée le long de l'axe des x , alors que si $\eta_{02} < \eta_{20}$, elle est plus étalée selon l'axe des y .

Grâce à cette information, on peut réaliser le découpage de la région R en deux régions R_1 et R_2 en sachant s'il est plus judicieux de l'effectuer selon l'axe des x ou des y . Ainsi, si $\eta_{02} > \eta_{20}$, R sera coupé en deux par une droite verticale, placée de telle sorte que les deux parties résultantes contiennent la même population. Si au contraire $\eta_{02} < \eta_{20}$, c'est par une droite horizontale que R sera coupé.

On pourrait également calculer l'angle de l'axe principal de la région R , au regard de la densité de population $D(x, y)$, avec la formule suivante :

$$\theta = \frac{1}{2} \text{atan2}(2\mu_{11}, \mu_{20} - \mu_{02}) \quad (5.12)$$

Cet angle donne la direction de l'axe dans lequel la population est la plus étalée. Couper R selon une droite perpendiculaire à l'axe principal permettrait d'obtenir une meilleure répartition.

5.4.3 Placement récursif des antennes

La méthode qui vient d'être décrite permet de trouver un bon découpage du terrain. Le placement initial des antennes peut alors être effectué de façon récursive grâce à l'algorithme 7.

Algorithme 7: Fonction récursive de placement des antennes.

DONNÉES :

Nombre d'antennes à placer : p

Territoire à découper : R

Densité de population : $D(x, y)$

FONCTION RÉCURSIVE : PlacerAntennes(p, R, D)

Calculer les coordonnées (x_m, y_m) du centre de masse de R

si $p = 1$ **alors**

 | Retourner (x_m, y_m)

sinon

 | Soit d la droite de découpe

 | Calculer les moments μ_{11} , μ_{20} et μ_{02}

si $\eta_{02} > \eta_{20}$ **alors**

 | Orienter d verticalement

sinon

 | Orienter d horizontalement

fin

 Calculer la position de d pour couper R en régions de même poids

 Couper R en deux régions R_1 et R_2 selon d

$positions_1 = \text{PlacerAntennes}(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor, R_1, D)$

$positions_2 = \text{PlacerAntennes}(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor, R_2, D)$

 Retourner $(positions_1, positions_2)$

fin

5.4.4 Amélioration du placement initial

Le placement initial obtenu à l'issue de la première phase est utilisé comme point de départ pour la seconde phase. Dans cette deuxième partie, la boîte noire est utilisée pour réaliser des simulations à l'aide de la méthode des diagrammes de Voronoï décrite dans le chapitre 3. On ne se préoccupe ici pas encore de l'assignation de canaux, et seule la localisation des antennes est optimisée.

La boîte noire en mode Voronoï permet de calculer le nombre d'utilisateurs N_i servis par chaque antenne en assimilant leurs zones de couverture à leurs régions de Voronoï. La variance \mathcal{V} des charges des antennes est une approximation de sa valeur réelle, telle qu'elle serait calculée avec le modèle complet. On n'a pas ici à tenir compte de l'objectif de couverture, puisque le diagramme de Voronoï couvre tout le territoire. On peut donc se concentrer sur l'objectif d'équilibrage des charges, en utilisant seulement \mathcal{V} comme sortie.

L'algorithme MADS est utilisé pour réaliser cette deuxième phase de construction de la solution initiale, avec les paramètres suivants :

- *entrées de la boîte noire* : les localisations des antennes (X_1, X_2, \dots, X_p) ;
- *fonction objectif* : la variance des charges des antennes \mathcal{V} ;
- *contrainte* : la mesure de la violation de la contrainte d'appartenance au territoire $d_{T,2}$;
- *critère d'arrêt* : arrêter lorsque la taille du treillis atteint la taille de discrétisation du territoire.

Avec des territoires de formes réalistes, il est rare que la localisation des antennes viole la contrainte d'appartenance au territoire. Ce problème d'optimisation est donc principalement le problème non contraint de minimisation de la variance \mathcal{V} .

5.4.5 Assignation initiale de canaux

Pour ce qui est de l'assignation de fréquence, il n'est pas évident de trouver une heuristique permettant de donner facilement un bon résultat. En outre, il n'est pas nécessaire de démarrer avec une bonne assignation de canaux car la première étape de la recherche subséquente permet d'améliorer très rapidement le choix des canaux. Une simple numérotation séquentielle des canaux suffit alors : $c_i = i \bmod q$.

5.5 Recherche tabou

L'assignation des canaux dans le réseau est un problème combinatoire. Son traitement est réalisé grâce à une recherche tabou. Le fonctionnement de ce type de recherche est décrit dans cette section.

5.5.1 Métaheuristiques

Une métaheuristique est un algorithme d'optimisation destiné à résoudre des problèmes difficiles, en général de façon non optimale. Les métaheuristiques sont particulièrement adaptées aux problèmes combinatoires, pour lesquels on ne connaît pas de méthode efficace de résolution optimale.

Il existe de nombreux types de métaheuristiques, possédant chacune des caractéristiques différentes et étant adaptées à différents types de problèmes. Dans ce travail, c'est une recherche tabou qui a été choisie, car il s'agit d'une métaheuristique assez

simple à mettre en place et présentant généralement de bonnes performances sur les problèmes de coloration de graphes, auxquels le problème d'assignation de canaux peut se ramener.

5.5.2 La recherche tabou

La recherche tabou est une métaheuristique itérative, introduite par [Glover(1989)]. Elle a été depuis très largement utilisée pour traiter de nombreux problèmes d'optimisation combinatoire, et reste populaire aujourd'hui en raison de sa puissance et de sa facilité de mise en œuvre, comme en témoignent des applications récentes décrites dans [Galinier *et al.*(2011)], [St-Hilaire et Liu(2011)] ou [Rajalakshmi et Hima Bindu(2011)].

La recherche tabou consiste, en partant de la solution actuelle, à explorer un ensemble de solutions proches, que l'on nomme voisinage, et à se déplacer vers l'élément du voisinage possédant la meilleure valeur de la solution objectif. Ce processus est ensuite répété jusqu'à atteindre le critère d'arrêt souhaité. Sous cette forme, l'algorithme ressemble de très près à une classique méthode de descente, mais permet en réalité de s'échapper des minima locaux et d'explorer efficacement l'espace de recherche.

Si la solution actuelle est un minimum local, les solutions voisines ont une valeur de la fonction objectif supérieure. À la différence des algorithmes de descente, la recherche tabou se déplace alors vers une solution de moins bonne qualité. Une difficulté apparaît immédiatement : si l'algorithme s'échappe d'un minimum local en dégradant la solution, il y a de fortes chances que la position qu'il vient de quitter soit dans le nouveau voisinage, et qu'il y retourne à l'itération suivante. C'est pourquoi il est nécessaire de mettre en place un mécanisme de mémoire, appelé liste tabou. Cette liste contient l'ensemble des positions qui ont été explorées, et l'algorithme interdit d'y revenir tant qu'elles sont dans la liste. Ce mécanisme permet de ne pas retomber dans les minima locaux et de franchir les zones de valeurs de la fonction objectif plus élevées, pour ensuite espérer retomber vers un minimum plus bas.

Pour écrire l'algorithme de façon mathématique, introduisons les notations suivantes :

- f : fonction objectif ;
- s : solution actuelle ;
- s^* : meilleure solution trouvée jusqu'à présent ;

- $N(s)$: voisinage de la solution s ;
- L : liste tabou.

Une recherche tabou typique est décrite par l’algorithme 8. Une autre façon de gérer la structure de voisinage et les déplacements dans l’espace de recherche est l’utilisation de mouvements. La section suivante décrit une version modifiée de la recherche tabou avec l’utilisation de mouvements.

Algorithme 8: Recherche tabou

INITIALISATION :

$s = s^* = s_0$

$L = \emptyset$

RECHERCHE :

tant que *critère d’arrêt non atteint* **faire**

$eval = \infty$

pour $s' \in N(s)$ **faire**

si $f(s') < eval$ *et* $s' \notin L$ **alors**

$\hat{s} = s'$

$eval = f(s')$

fin

fin

$s = \hat{s}$

$L = L \cup \{s\}$

si $f(s) < f(s^*)$ **alors** $s^* = s$

fin

5.5.3 Recherche tabou avec mouvements

Il n’est pas toujours judicieux de garder des solutions complètes dans la liste tabou, même lorsque le problème n’est pas très grand. En effet, cela peut conduire à stocker de grandes quantités de données, et à alourdir le travail de recherche dans la liste. C’est pourquoi il est souvent préférable de ne stocker que la suite de *mouvements* qui a conduit à l’état actuel.

Lorsque l’on travaille avec les mouvements, le voisinage de la solution actuelle, auparavant noté $N(s)$, ne contient plus des solutions complètes mais des mouvements, et il sera alors noté $N_m(s)$. Pour évaluer les solutions voisines de s définies par la structure de voisinage, chaque mouvement $m \in N_m(s)$ est appliqué à s et la solution

résultante est évaluée. La solution obtenue par application d'un mouvement m à une solution s sera notée $m|s$.

La liste tabou, elle aussi, contient maintenant des mouvements et non des solutions complètes. Elle sera notée L_m pour éviter des confusions. Il faut bien voir les conséquences de considérer des mouvements plutôt que des solutions. Il n'est plus possible de garder dans la liste tabou tous les mouvements effectués précédemment, sinon il arriverait un moment où plus aucun mouvement ne serait possible et l'algorithme serait bloqué. D'autre part, un mouvement qui vient d'être effectué doit être interdit pour ne pas retourner immédiatement à la position précédente, mais il est tout à fait possible qu'il soit intéressant de l'effectuer à nouveau plus tard dans la recherche, une fois que l'on se sera éloigné du minimum local auquel on voulait échapper. Il faut donc limiter la taille de la liste tabou, en n'y gardant les mouvements que pendant un certain nombre d'itérations.

La nouvelle version de l'algorithme avec l'utilisation de mouvements est décrite par l'algorithme 9.

5.6 Optimisation de l'assignation de canaux

L'optimisation de l'assignation de canaux est réalisée en deux étapes distinctes. Ces deux étapes sont deux recherches tabou effectuées l'une à la suite de l'autre. Au cours de la première, la couverture du réseau est maximisée, alors qu'au cours de la seconde, l'équilibrage des charges des antennes est optimisé. Ces deux instanciations de la recherche tabou sont strictement identiques et partagent donc les mêmes caractéristiques, à l'exception des fonctions objectif utilisées dans chacune. Toutes les caractéristiques des recherches sont décrites dans cette section.

5.6.1 Caractéristiques des recherches tabou

Les deux recherches tabou utilisées pour l'optimisation de l'assignation de canaux sont des instanciations particulières de l'algorithme de la recherche tabou décrit ci-dessus. Il suffit de redéfinir tous les paramètres de l'algorithme pour caractériser complètement la recherche. Les paramètres à redéfinir sont :

- le type de recherche : classique en utilisant des solutions complètes, ou en utilisant des mouvements ;

Algorithme 9: Recherche tabou avec utilisation de mouvements.

INITIALISATION :

$s = s^* = s_0$

$L_m = \emptyset$

RECHERCHE :

tant que *critère d'arrêt non atteint* **faire**

$eval = \infty$

pour $m \in N_m(s)$ **faire**

si $f(m|s) < eval$ et $m \notin L_m$ **alors**

$\hat{s} = m|s$

$eval = f(m|s)$

fin

fin

$s = \hat{s}$

$L_m = L_m \cup \{s\}$

si $f(s) < f(s^*)$ **alors** $s^* = s$

pour $m \in L_m$ **faire**

si m doit être retiré de L_m **alors**

$L_m = L_m \setminus \{m\}$

fin

fin

fin

- la forme des solutions s ;
- le domaine de recherche ;
- la fonction objectif f ;
- la nature des mouvements m le cas échéant ;
- la structure de voisinage $N(s)$ ou $N_m(s)$;
- la longueur de la liste tabou ;
- le critère d'arrêt.

Cette section décrit les paramètres communs aux deux recherches, c'est-à-dire tous sauf la fonction objectif, qui sera discutée à la section suivante.

Type de recherche

La recherche utilisée ici est une recherche tabou avec mouvements, plutôt qu'une recherche avec solutions complètes.

Forme des solutions

Les solutions sont représentées par un vecteur de taille p , sous la forme $s = (c_1, c_2, \dots, c_p)$, où chaque c_i est, comme défini précédemment, le canal de l'antenne A_i , et représente un canal parmi $\{C_1, C_2, \dots, C_q\}$.

Nature des mouvements

Les mouvements utilisés sont des échanges (*swaps* en Anglais), c'est-à-dire qu'un mouvement peut être représenté par un couple (i, j) , signifiant qu'il faut échanger les canaux des antennes A_i et A_j . Considérant une solution $s = (c_1, c_2, \dots, c_p)$, l'application du mouvement $m = (i, j)$ donne la solution :

$$m|s = (c_1, c_2, \dots, c_{i-1}, c_j, c_{i+1}, \dots, c_{j-1}, c_i, c_{j+1}, \dots, c_p) \quad (\text{si } i < j).$$

Domaine de recherche

Le réseau est constitué de p antennes et q groupes de canaux. Les antennes pourraient être réparties, a priori, de façon quelconque entre les canaux, qui pourraient ainsi avoir des nombres d'antennes différents. Certains groupes d'antennes pourraient alors jouer un rôle différent des autres, permettant de mettre en œuvre des techniques avancées de conception de réseaux. Cependant, le choix de techniques spécifiques est un sujet complexe qui dépend de décisions de conception qui sortent du cadre de l'optimisation.

On ne fait dans ce travail aucun choix de conception particulier. Tous les canaux sont équivalents, et chacun d'eux se voit attribuer le même nombre d'antennes. Le nombre d'antennes p est ainsi contraint à être un multiple du nombre de canaux q , et le nombre d'antennes dans chaque canal est $\frac{p}{q}$.

Il conviendra dans la recherche tabou d'assurer que toutes les solutions manipulées soient bien de cette forme. On remarquera que l'algorithme séquentiel utilisé pour générer une attribution de canaux initiale produit bien une solution valide.

Structure de voisinage

Étant donné que les échanges ne modifient pas le nombre d'antennes par canal et mènent toujours à une solution valide, ils sont tous autorisés. Cependant, il n'est pas nécessaire de tous les évaluer. Par exemple, il est inutile d'échanger les canaux

de deux antennes si elles possèdent le même canal. De même, pour tout (i, j) dans $\llbracket 1, p \rrbracket^2$, les mouvements (i, j) et (j, i) sont entièrement équivalents, puisqu'ils mènent à la même solution. Il conviendra donc d'éviter d'inclure plusieurs mouvements menant à la même solution.

Le voisinage d'une solution $s = (c_1, c_2, \dots, c_p)$ peut être défini de la façon suivante :

$$N_m(s) = \left\{ (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2 : i < j, c_i \neq c_j \right\}. \quad (5.13)$$

La détermination du nombre de mouvements contenus dans un voisinage $N_m(s)$ n'est pas triviale. Ce nombre peut être plus facilement évalué en réécrivant l'ensemble de la façon suivante :

$$N_m(s) = \left\{ (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2 : i < j \right\} \setminus \bigcup_{k=1}^q \left\{ (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2 : i < j, c_i = c_j = k \right\}. \quad (5.14)$$

Comme l'union d'ensembles est incluse dans l'ensemble de gauche, et que tous les ensembles de l'union sont disjoints, on a :

$$|N_m(s)| = \left| \left\{ (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2 : i < j \right\} \right| - \sum_{k=1}^p \left| \left\{ (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2 : i < j, c_i = c_j = k \right\} \right|. \quad (5.15)$$

D'une part, $|\{(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2 : i < j\}| = (p-1) + (p-2) + \dots + 1 = \frac{p(p-1)}{2}$. D'autre part, chaque canal C_k possède $|A(C_k)|$ antennes. Le nombre de couples (i, j) que l'on peut construire avec les entiers de 1 à $|A(C_k)|$, tels que $i < j$, est égal à :

$$(|A(C_k)| - 1) + (|A(C_k)| - 2) + \dots + 1 = \frac{|A(C_k)|(|A(C_k)| - 1)}{2}.$$

On obtient donc :

$$|N_m(s)| = \frac{p(p-1)}{2} - \sum_{k=1}^q \frac{|A(C_k)|(|A(C_k)| - 1)}{2}. \quad (5.16)$$

Lorsque n est un multiple de p , ce qui correspond au cas étudié, tous les canaux ont le même nombre d'antennes $|A(C_k)| = \frac{n}{p}$. Le nombre de mouvements dans le voisinage est alors :

$$|N_m(s)| = \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{p} \right). \quad (5.17)$$

La taille du voisinage peut devenir très importante pour les problèmes de grande taille. Dans ce cas, l'évaluation complète du voisinage à chaque itération est trop longue en temps de calcul. Le voisinage n'est donc pas entièrement généré, et seule une partie de tous les mouvements possibles est évaluée. Il a été choisi de ne générer que 20 % du voisinage complet, car il a été observé sur plusieurs essais que cette proportion permet de réduire le temps de calcul de façon importante tout en conservant de bons résultats.

Longueur de la liste tabou

La longueur de la liste tabou désigne ici le nombre d'itérations pendant lequel un mouvement restera tabou. Il existe deux stratégies principales pour le choix de la longueur : la stratégie statique, où l'on fixe la longueur de la liste tabou au début de la recherche, et la stratégie dynamique, où la longueur de la liste tabou est modifiée au cours de la recherche.

Ici, une stratégie statique a été choisie, et la longueur de la liste tabou a été fixée à 10 itérations. Quelques essais ont permis de voir, empiriquement, que cette longueur permettait d'obtenir de bons résultats.

Critère d'arrêt

Le critère d'arrêt utilisé est une limite sur le nombre d'itérations sans amélioration. Un paramètre k est fixé au début de la recherche, qui se poursuit tant que k itérations successives sans amélioration de la valeur de l'objectif n'ont pas été réalisées. De cette façon, la recherche parvient à sortir des minima locaux dont il est facile de s'échapper, mais lorsqu'elle rencontre un minimum difficile à améliorer, ce mécanisme évite d'y passer trop de temps en stoppant la recherche en cours et en passant à l'étape suivante de l'optimisation.

Quelques tests ont permis de déterminer de façon empirique qu'une valeur de $k = 15$ permettait d'obtenir des résultats satisfaisants.

5.6.2 Fonctions objectifs

Les deux recherches tabou permettant de réaliser l'optimisation de l'assignation de canaux diffèrent seulement par leur fonction objectif, qui est adaptée dans chaque

cas à l'aspect qui doit être amélioré : la couverture du réseau, ou l'équilibrage de la charge.

Couverture du réseau

Dans la première recherche tabou, on s'intéresse à la maximisation de la couverture de la population, ou, de façon équivalente, à la minimisation de la population non desservie par le réseau. Soit \mathcal{N}_T la population totale dans le territoire T . La population non couverte est définie ainsi :

$$\mathcal{N}_{nc}(s) = \mathcal{N}_T - \mathcal{N}(s), \quad (5.18)$$

où \mathcal{N} est la population totale servie par le réseau, comme défini précédemment.

Équilibrage de la charge

Lors de la deuxième recherche tabou, l'équilibrage de la charge des antennes doit être amélioré, tout en essayant de ne pas dégrader la couverture de la population. Pour cela, une approche avec pénalité est utilisée. Le critère choisi pour mesurer l'équilibrage de la charge est la variance de la charge des antennes \mathcal{V} . Afin de calculer la pénalité, les valeurs de la couverture $\hat{\mathcal{N}}_{nc}$ et de la variance $\hat{\mathcal{V}}$ obtenues à l'issue de la recherche précédente sont stockées. La fonction objectif avec pénalité $\tilde{\mathcal{V}}$ est définie de la façon suivante :

$$\tilde{\mathcal{V}}(s) = \begin{cases} \frac{\mathcal{V}(s)}{\hat{\mathcal{V}}} + \left(\frac{\mathcal{N}_{nc}(s)}{\hat{\mathcal{N}}_{nc}} \right)^2 & \text{si } \hat{\mathcal{N}}_{nc} > 0, \\ \frac{\mathcal{V}(s)}{\hat{\mathcal{V}}} + (\mathcal{N}_{nc}(s))^2 & \text{si } \hat{\mathcal{N}}_{nc} = 0. \end{cases} \quad (5.19)$$

Les deux cas distingués dans cette fonction objectif correspondent aux situations suivantes :

- $\hat{\mathcal{N}}_{nc} > 0$: la recherche précédente n'est par parvenue à atteindre une couverture totale. Cette deuxième recherche est susceptible d'améliorer à la fois l'équilibrage de la charge et la couverture ;
- $\hat{\mathcal{N}}_{nc} = 0$: une couverture totale est atteinte. Il n'est plus nécessaire d'améliorer la couverture, puisqu'elle est maximale, mais il faut empêcher qu'elle soit trop dégradée.

Le cas $\hat{\mathcal{V}} = 0$ correspondrait à un équilibrage optimal de la charge dans le réseau. La solution correspondante serait optimale, et il n'y aurait aucun moyen de l'améliorer. C'est pourquoi ce cas n'est pas considéré dans le calcul.

5.7 Optimisation de la localisation des antennes

L'optimisation de la localisation des antennes est réalisée au moyen de l'algorithme de recherche directe MADS, décrit dans le chapitre 4. Il s'occupe des $2p$ variables de position des antennes $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_p, y_p)$. La fonction objectif, les contraintes, ainsi que les paramètres algorithmiques utilisés dans cette optimisation sont décrits dans cette section.

5.7.1 Fonction objectif

La fonction objectif utilisée pour l'optimisation de la localisation des antennes est la variance de la charge des antennes \mathcal{V} . La couverture du réseau est quant à elle intégrée dans les contraintes, et une distinction est donc faite entre le rôle des deux objectifs de l'optimisation.

5.7.2 Contraintes

Les contraintes définies pour cette partie de l'optimisation sont au nombre de trois, gérées avec les mécanismes de la barrière extrême ou progressive :

- *la contrainte de non-superposition des antennes*, gérée par la *barrière extrême*, interdit à deux antennes de se trouver plus proches l'une de l'autre que la discrétisation du territoire ;
- *la contrainte d'appartenance au territoire* $d_{T,2}$, gérée par la *barrière progressive*, mesure la violation de la contrainte d'appartenance au territoire. Sa gestion par la barrière progressive peut permettre à la recherche de faire sortir temporairement des antennes du terrain pour aller vers de meilleures régions de l'espace de recherche ;
- *la population non couverte* \mathcal{N}_{nc} , gérée par la *barrière progressive*. Grâce à l'utilisation de la barrière progressive avec cette contrainte, l'algorithme MADS essaye de minimiser la population non couverte si elle est non nulle. Si toute la population est desservie, l'objectif n'est plus violé et la recherche se concentre sur

l'amélioration de la variance \mathcal{V} . Il est intéressant de traiter \mathcal{N}_{nc} comme une contrainte dans la mesure où on cherche principalement à trouver des solutions réalisant une couverture totale.

5.7.3 Paramètres algorithmiques

Recherche globale

L'algorithme MADS est utilisé ici sans stratégie de recherche globale, sauf la recherche spéculative, activée par défaut, qui consiste à explorer plus loin dans la direction d'un succès. Toutefois, les recherches tabou utilisées pour l'optimisation de l'assignation de canaux constituent un mécanisme de diversification qui peut être vu comme faisant office d'étape de recherche pour MADS.

Groupes de variables

Aucune stratégie de groupement de variables n'est mise en place dans cette recherche. Il pourrait être intéressant d'essayer de former des groupes de variables, d'autant plus que la structure du problème peut suggérer des stratégies intéressantes. D'une part, la position de chaque antenne est représentée par deux variables de position x_i et y_i , qui pourraient être groupées ensemble. D'autre part, les groupes d'antennes appartenant à un même canal peuvent aussi constituer une stratégie de groupement intéressante. Il faudrait en revanche bien gérer l'évolution des groupes au cours de la recherche afin de conserver les propriétés de convergence de MADS, comme expliqué dans [Garnier(2010)].

Taille de treillis

Comme indiqué au chapitre précédent, la taille minimale du treillis employé par MADS peut être définie par l'utilisateur de l'algorithme. Ici, il est inutile que la recherche se poursuive lorsque la taille du treillis devient inférieure à la taille de discrétisation du terrain. La taille minimale du treillis est donc réglée sur cette valeur.

5.8 Optimisation du problème complet

Les deux recherches qui viennent d'être présentées se concentrent chacune sur l'un des deux aspects du problème : l'assignation de canaux pour optimiser la couverture ou l'équilibrage, et la localisation des antennes. Pour optimiser le problème complet, qui consiste à optimiser ces trois sous-problèmes conjointement, il convient de coupler les différentes recherches.

5.8.1 Couplage des recherches

La plus importante partie de l'optimisation débute dès que la phase de construction de la solution initiale est terminée. Durant cette phase, le contrôle alterne rapidement entre les trois types de recherche. Cela permet d'évoluer rapidement vers une bonne région de l'espace de recherche en ne négligeant pas un groupe de variables par rapport à l'autre.

Cette phase d'alternance se termine lorsqu'aucune amélioration n'est obtenue pendant plusieurs itérations lors de l'optimisation de l'assignation de canaux pour la couverture de la population, qui ne peut alors plus être améliorée. La dernière phase, qui est la phase de terminaison, se focalise uniquement sur la localisation des antennes. Le couplage des recherches est illustré par l'algorithme 10.

5.8.2 Critères d'arrêt

Sous-étapes de recherche

Pendant la phase de recherche, l'optimisation alterne rapidement entre la localisation des antennes et l'assignation de canaux pour la couverture ou pour l'équilibrage. Chacune de ces sous-étapes s'exécute pendant un temps court.

L'étape d'optimisation de l'assignation de canaux pour la couverture de population est stoppée lorsque la recherche tabou effectuée $N_1 = 15$ itérations sans améliorer la solution. Il en est de même pour l'optimisation de l'assignation de canaux pour l'équilibrage de la charge des antennes. Elle se termine après $N_2 = 15$ itérations sans amélioration. Quant à l'étape d'optimisation de la localisation des antennes, elle s'arrête après $N_3 = 30$ itérations de l'algorithme MADS.

Ces valeurs ont été choisies après quelques essais, qui ont montré qu'elles permettent une alternance assez rapide, et ont mené à des résultats satisfaisants sur les

Algorithme 10: Plan de l'algorithme général.

INITIALISATION :

Construire la solution initiale
 Fixer N_1 , N_2 et N_3

RECHERCHE :

Optimiser l'assignation pour la couverture pendant N_1 itérations
si *l'assignation de canaux n'apporte aucune amélioration pour la deuxième fois consécutive* **alors**
 | Aller à la phase de terminaison
sinon
 | Recommencer l'étape de recherche
fin
 Optimiser l'assignation pour l'équilibrage pendant N_2 itérations
 Optimiser la localisation des antennes pendant N_3 itérations

TERMINAISON :

Optimiser la localisation des antennes jusqu'à rencontrer le critère d'arrêt

instances de test. Ces critères d'arrêt pourraient sans doute être améliorés, notamment grâce à l'utilisation de critères dynamiques plutôt que statiques.

Phase de recherche

Lorsqu'aucune amélioration n'est obtenue après deux exécutions successives de l'optimisation de l'assignation de canaux pour la couverture, l'assignation de canaux est de très bonne qualité considérant la localisation des antennes courante. Il est alors difficile de continuer à l'améliorer, c'est pourquoi on peut arrêter la phase de recherche et passer à la phase de terminaison.

Phase de terminaison

Cette dernière phase de l'optimisation s'occupe exclusivement de l'optimisation de la localisation des antennes. Après la phase de recherche, les antennes sont généralement assez proches de leur position finale, et cette dernière étape permet d'améliorer leur localisation le plus possible.

Un critère d'arrêt possible pour cette optimisation est la taille de treillis de MADS. Comme expliqué précédemment, il est possible d'indiquer à l'algorithme MADS de s'arrêter lorsque la taille de son treillis atteint la taille de discrétisation du territoire.

La solution alors obtenue est normalement un minimum local. Cependant, avec ce critère, cette dernière phase de recherche peut être très longue, alors que les améliorations obtenues en fin de recherche sont faibles.

Il peut être plus judicieux de choisir un critère d'arrêt qui permette à la recherche de se terminer plus tôt. On obtient ainsi une solution de légèrement moins bonne qualité, mais au bénéfice d'un temps d'exécution nettement plus court. Ce choix ne doit être fait que si le temps d'exécution de l'optimisation est un critère important.

Chapitre 6

Résultats

Le cadre d'optimisation d'un réseau de télécommunications mis en place dans les chapitres précédents est composé d'une boîte noire permettant de faire des simulations d'un réseau, présentée au chapitre 3, et d'un algorithme d'optimisation mêlant recherche directe et métaheuristiques, développé au chapitre 5. La pertinence de cette approche reste à être évaluée et c'est ce qui est fait dans le présent chapitre avec la présentation des résultats numériques obtenus.

6.1 Présentation des instances

Plusieurs instances de test ont été utilisées pour réaliser des essais et obtenir les résultats numériques. Les données d'entrée nécessaires pour réaliser l'optimisation sont d'une part une carte de terrain représentant un terrain $T \subset \mathbb{R}^2$, et d'autre part une carte de densité donnant la densité de population $D(x, y) \in \mathbb{R}^+$ sur l'ensemble du terrain. Pour chacun de ces deux types de cartes, différentes configurations ont été utilisées, le but étant d'évaluer l'influence de différents paramètres sur les résultats.

Toutes les cartes utilisées ont une taille de discrétisation du terrain de 100 mètres. Chaque pixel des images représentant les cartes, qui sont présentées ci-dessous, représente donc un élément de terrain carré de 100 mètres de côté.

6.1.1 Cartes de terrain

Quatre types de terrains ont été testées :

- un terrain carré *Square* (figure 6.1a), terrain le plus simple possible, mais présentant des effets de bords à cause de la présence de coins ;
- un terrain circulaire *Circle* (figure 6.1b), permettant de tester l'influence de la symétrie circulaire ;
- un terrain en forme de banane *Banana* (figure 6.1c), présentant une non-convexité prononcée ;

- l'île de Montréal *Mtl* (figure 6.1d), possédant une forme assez régulière ainsi que des non-convexités.

Sur les cartes, une valeur de pixel de 1 (pixels clairs) signifie qu'il fait partie du terrain T , alors qu'une valeur de 0 (pixels noirs) signifie qu'il en est exclu.

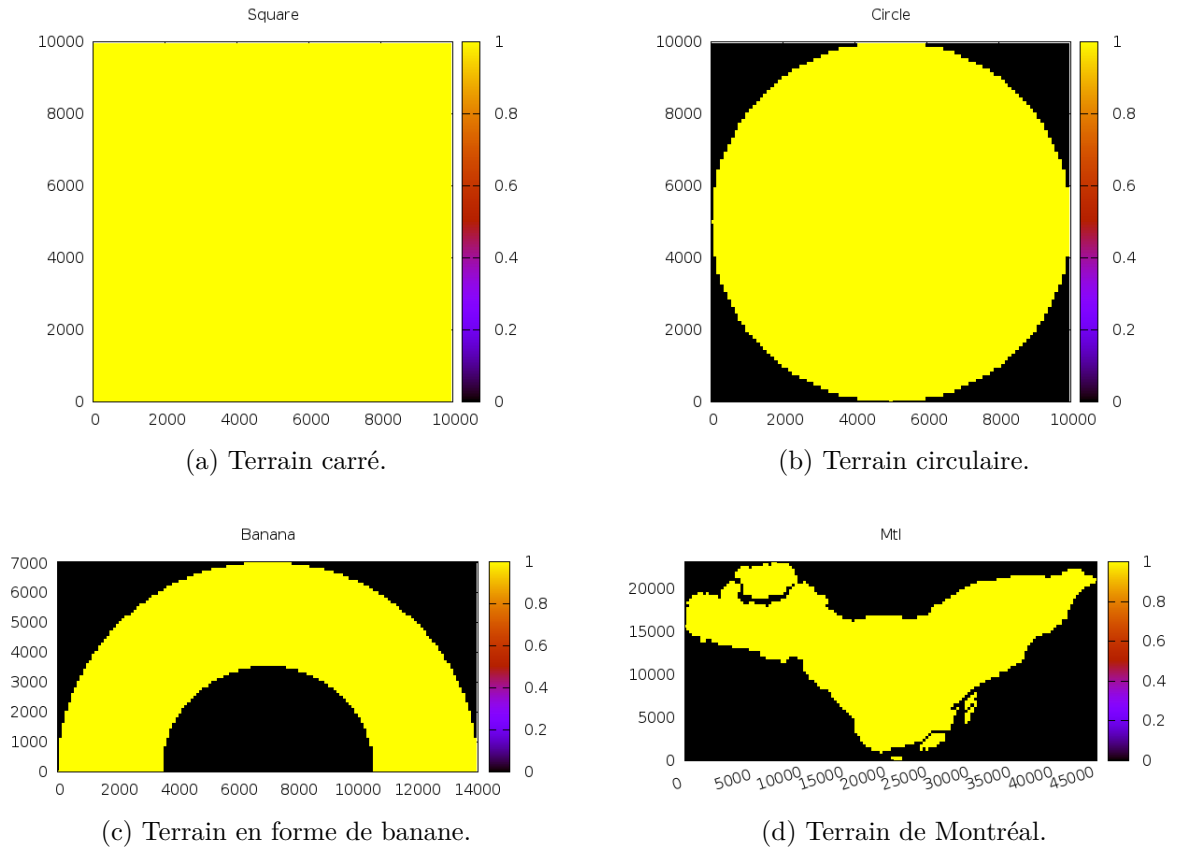


Figure 6.1 Les différentes cartes de terrain utilisées.

6.1.2 Cartes de densité

Le modèle de réseau et l'algorithme d'optimisation sont conçus dans le but de pouvoir prendre en compte des densités de populations quelconques sur le terrain considéré. Quatre types différents de cartes de densité ont été utilisés pour chacun des terrains, carré, circulaire et en banane :

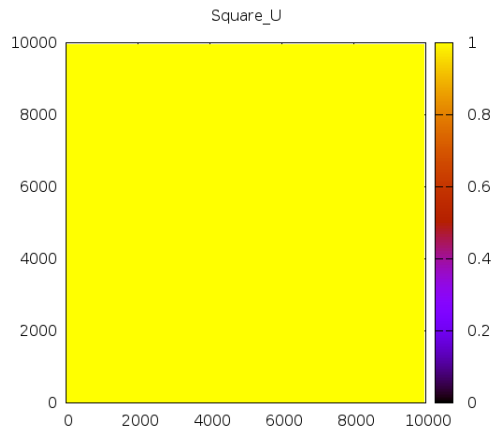
- une densité uniforme U ;
- une densité C avec une seule zone centrale de concentration de la population ;

- une densité E avec une seule zone de concentration de la population, excentrée ;
- une densité B avec deux zones de concentration de la population.

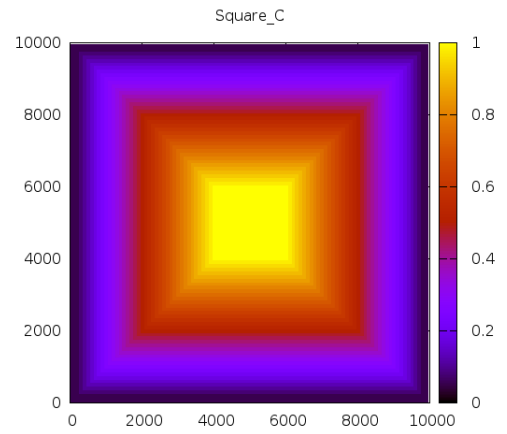
Ces cartes de densité sont représentées pour les terrains carré, circulaire et en banane par les figures 6.2, 6.3 et 6.4 respectivement. Pour ce qui est du terrain de l'île de Montréal, la carte de densité utilisée est basée sur la densité de population réelle de la ville, représentée figure 6.5.

Les valeurs des pixels sur ces cartes sont comprises entre 0 et 1, la valeur 1 indiquant une densité maximale alors que la valeur 0 indique une absence de population. En réalité, aucun point du terrain ne possède une densité de 0, afin de forcer l'algorithme d'optimisation à essayer de couvrir l'ensemble du territoire. Le seuil minimum est fixé à une valeur de 0.05.

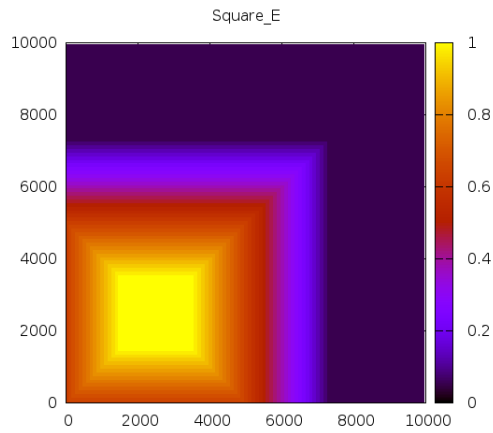
Pour désigner les différentes instances de terrains et densités, on les notera avec le nom du terrain, suivi du type de carte de densité en exposant. Les notations des instances sont indiquées en regard de chaque figure.



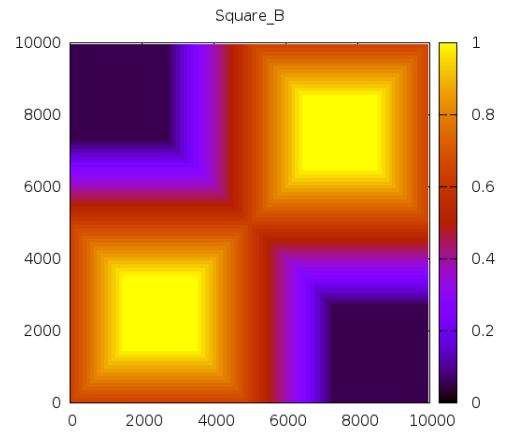
(a) $Square^U$: Densité uniforme.



(b) $Square^C$: Une zone de concentration centrale.



(c) $Square^E$: Une zone de concentration excentrée.



(d) $Square^B$: Deux zones de concentration.

Figure 6.2 Cartes de densité pour terrain carré.

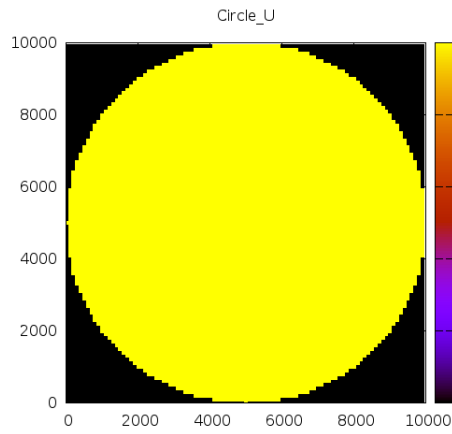
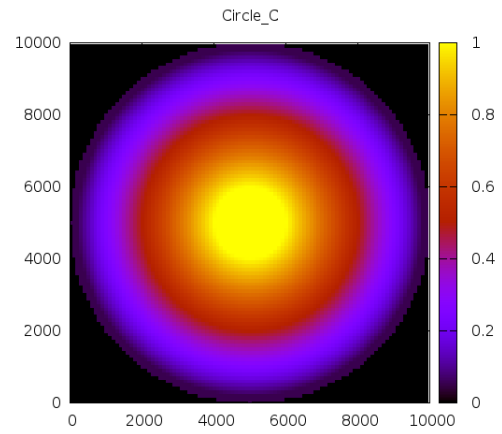
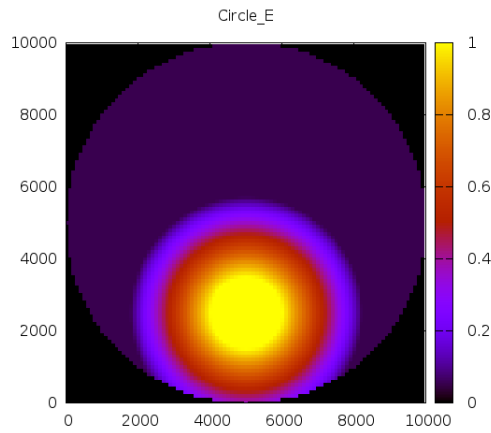
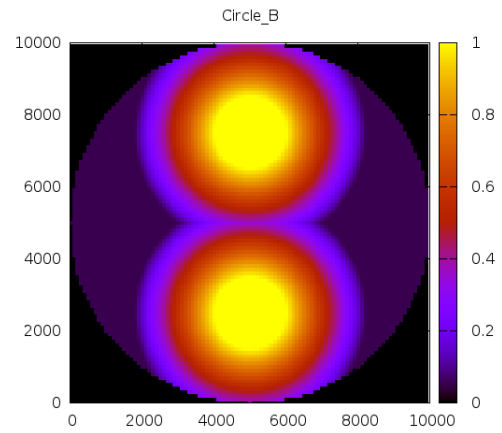
(a) $Circle^U$: Densité uniforme.(b) $Circle^C$: Une zone de concentration centrale.(c) $Circle^E$: Une zone de concentration excentrée.(d) $Circle^B$: Deux zones de concentration.

Figure 6.3 Cartes de densité pour terrain circulaire.

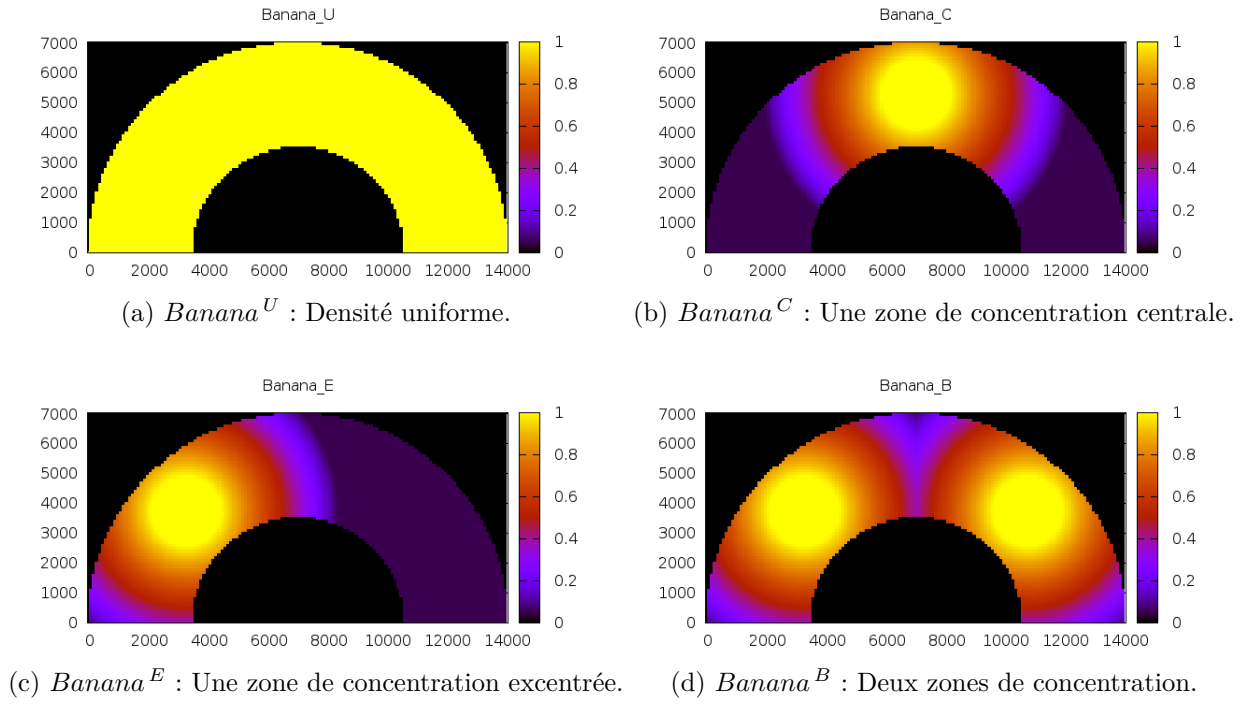


Figure 6.4 Cartes de densité pour terrain en forme de banane.

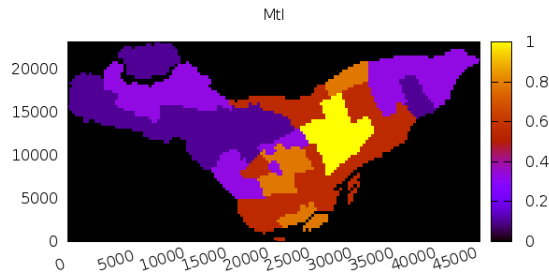


Figure 6.5 Mtl : Carte de densité pour l'île de Montréal.

6.2 Déroulement de l'optimisation

L'algorithme d'optimisation d'un réseau de télécommunications se compose de plusieurs étapes, chacune ayant un rôle particulier. La génération des cartes des zones de service des antennes permet de suivre visuellement l'évolution du réseau au cours de l'optimisation et donne facilement une bonne indication de la qualité de la solution courante. Les figures 6.6, 6.7, 6.8 et 6.9 sont une illustration, pour différentes instances de terrain, de l'état du réseau au début des grandes étapes de l'optimisation, pour un réseau composé de 20 antennes et 10 canaux.

Pour ce qui est de l'identification des instances, on les notera avec le nom du terrain et le type de densité en exposant, comme précédemment, suivi du nombre de canaux puis du nombre d'antennes en indice.

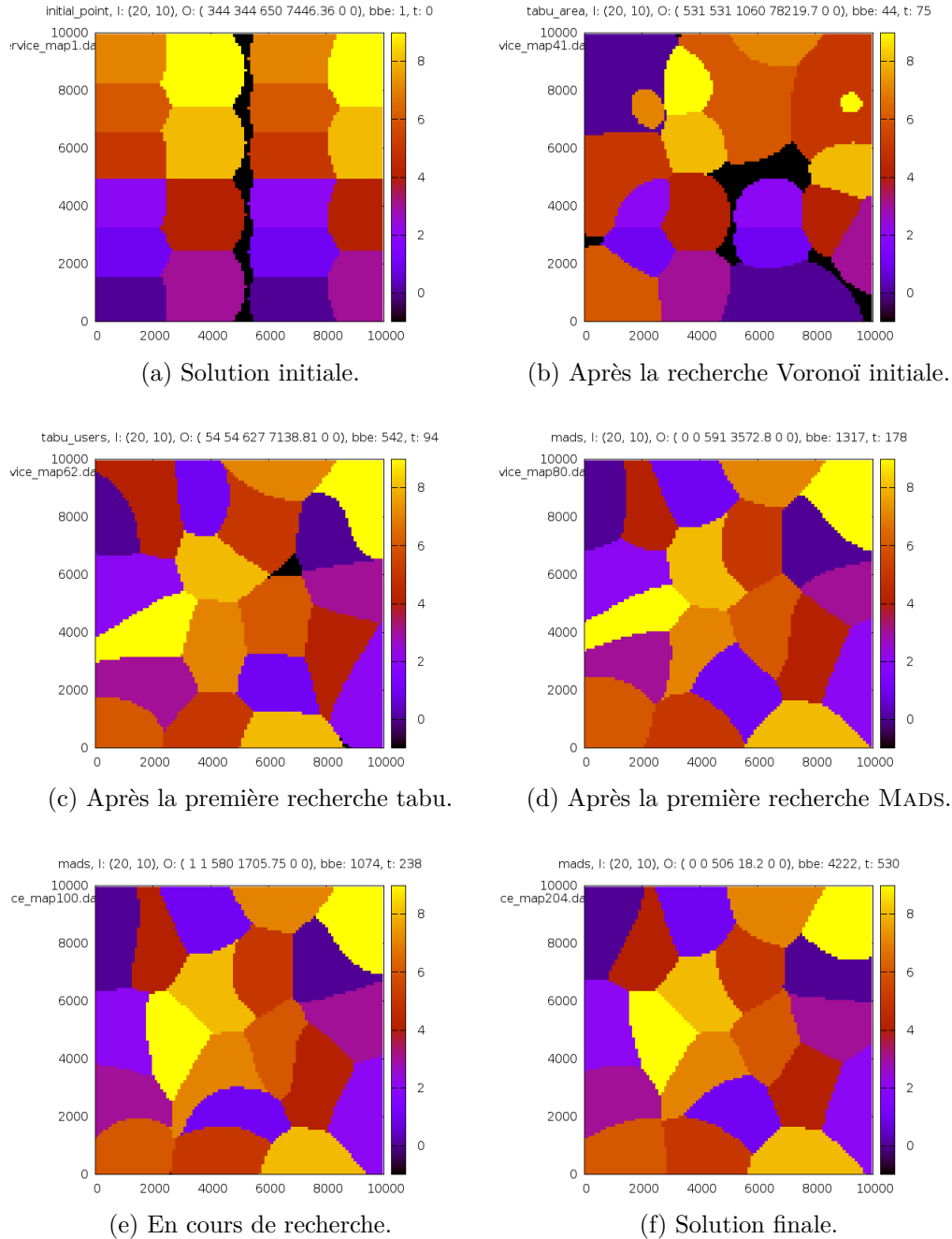


Figure 6.6 Cartes de service à différentes étapes de la recherche pour l'instance $Square_{10,20}^U$.

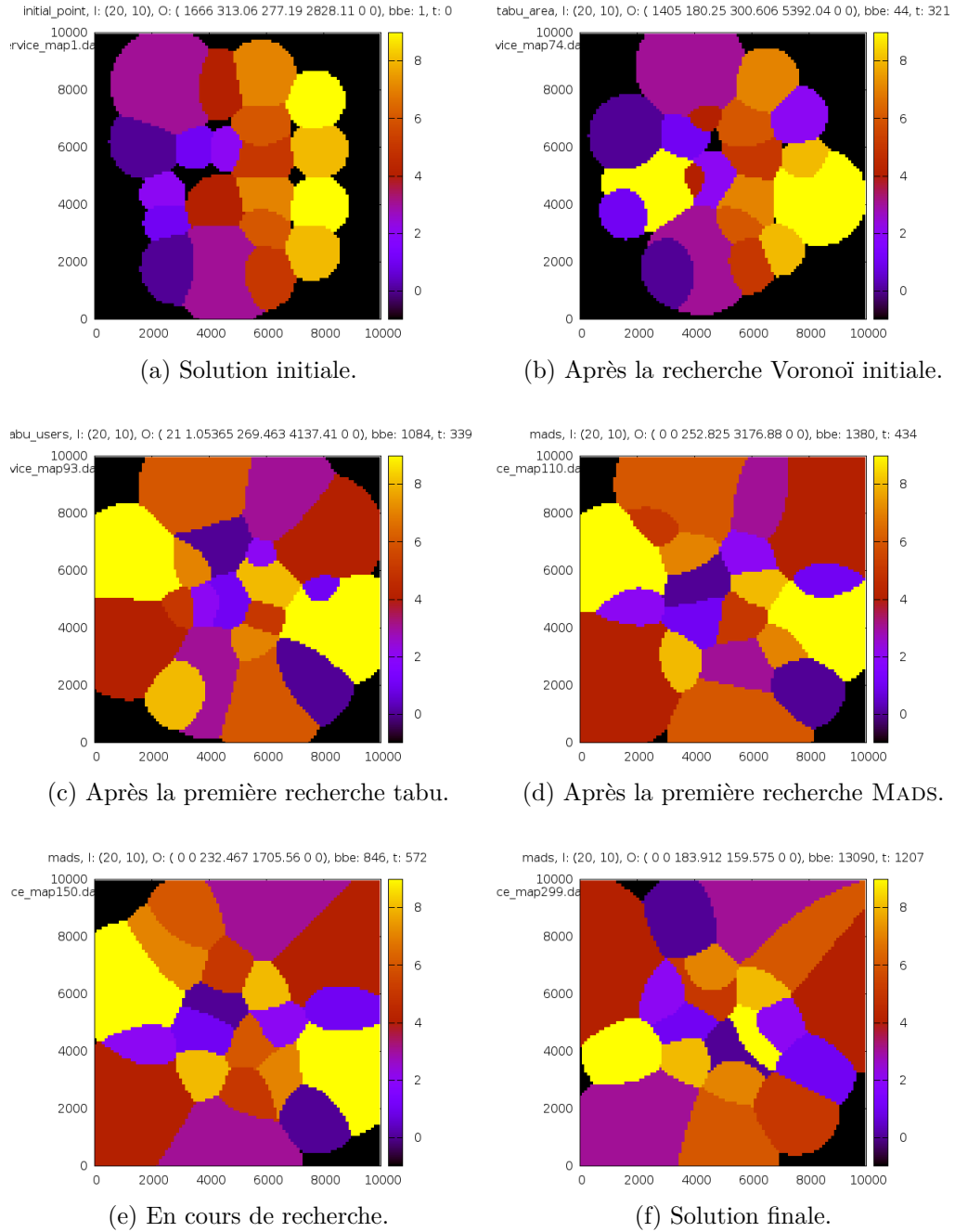


Figure 6.7 Cartes de service à différentes étapes de la recherche pour l'instance $CircleC_{10,20}$.

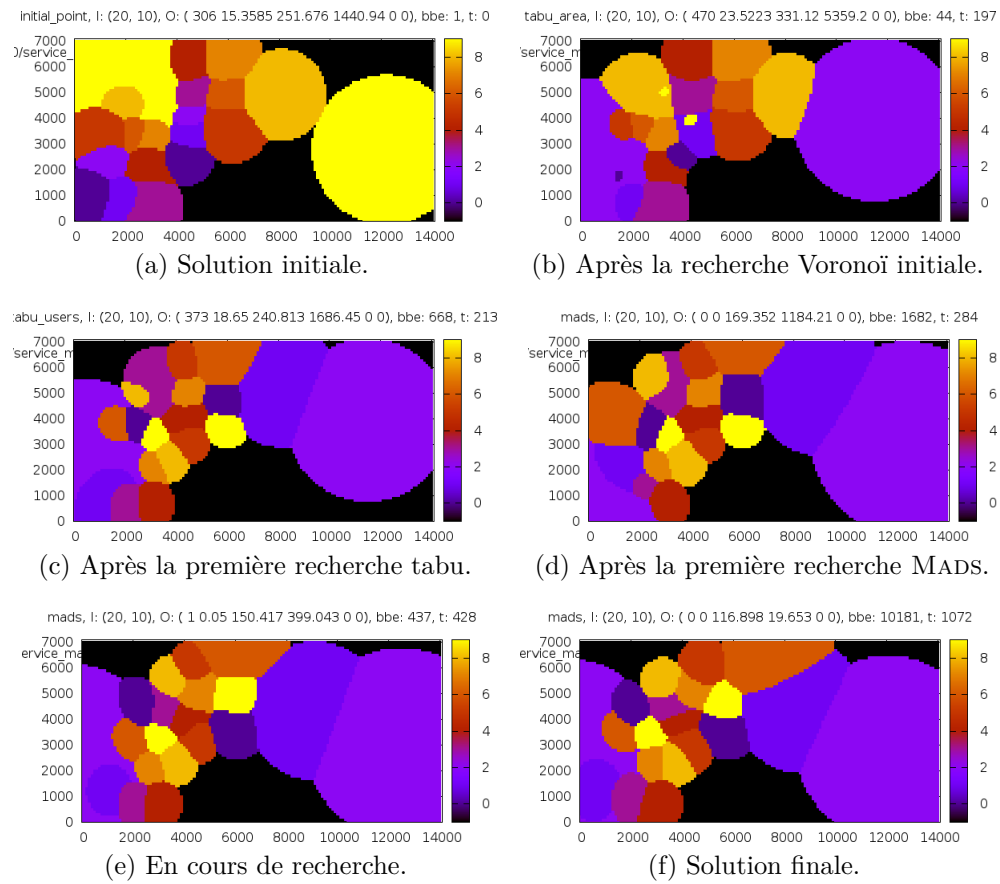


Figure 6.8 Cartes de service à différentes étapes de la recherche pour l'instance $Banana_{10,20}^E$.

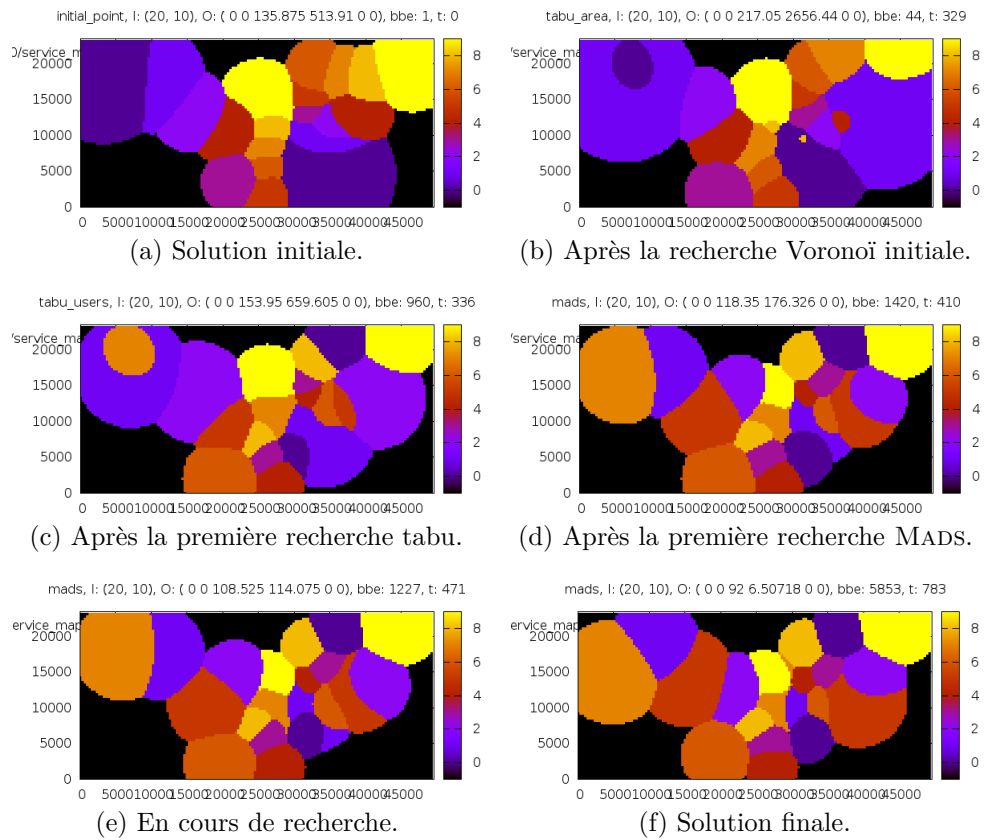


Figure 6.9 Cartes de service à différentes étapes de la recherche pour l'instance $Mtl_{10,20}$.

Ces cartes de service permettent d’avoir une vision intuitive du déroulement de la recherche, et de se faire visuellement une idée sur le rôle de chacune des étapes de l’algorithme. On voit en particulier que les localisations initiales des antennes, obtenues par une heuristique, sont en général éloignées de celles de la solution finale. Toutefois la recherche Voronoï initiale permet de rapprocher sensiblement les antennes d’une bonne localisation. On voit bien par ailleurs l’influence très importante de la première recherche tabou qui, sans déplacer les antennes, apporte rapidement une très importante amélioration de la couverture du réseau. La première recherche MADS pour l’optimisation de la localisation apporte elle aussi une forte amélioration du réseau en peu d’itérations.

Finalement, pour les instances illustrées ici, le reste de l’optimisation permet d’approcher petit à petit la solution finale à partir d’une configuration qui en est déjà assez proche. Ce n’est pas forcément le cas pour les instances de grande taille qui, comme on le verra, nécessitent plus d’itérations pour atteindre une configuration de bonne qualité.

6.3 Profils d’évolution

Les cartes de service présentées ci-dessus permettent une vision intuitive du déroulement de la recherche. Une vision plus quantitative peut être donnée par les profils d’évolution des fonctions au cours de la recherche. Ces graphiques présentent l’évolution de la variance du nombre d’utilisateurs \mathcal{V} et du nombre d’utilisateurs non servis \mathcal{N}_{nc} en fonction du nombre d’évaluations de boîte noire effectuées par l’optimisation.

Les profils d’évolution pour les mêmes instances que précédemment, comportant 20 antennes et 10 canaux, sont donnés par les figures 6.10, 6.11, 6.12 et 6.13. Sur ces graphiques, la zone grisée correspond à la recherche Voronoï initiale, les rayures obliques ascendantes à la recherche tabou pour l’optimisation de la couverture et les rayures descendantes à la recherche tabou pour l’optimisation de la variance du nombre d’utilisateurs. Enfin, les zones sur fond blanc correspondent aux recherches avec l’algorithme MADS.

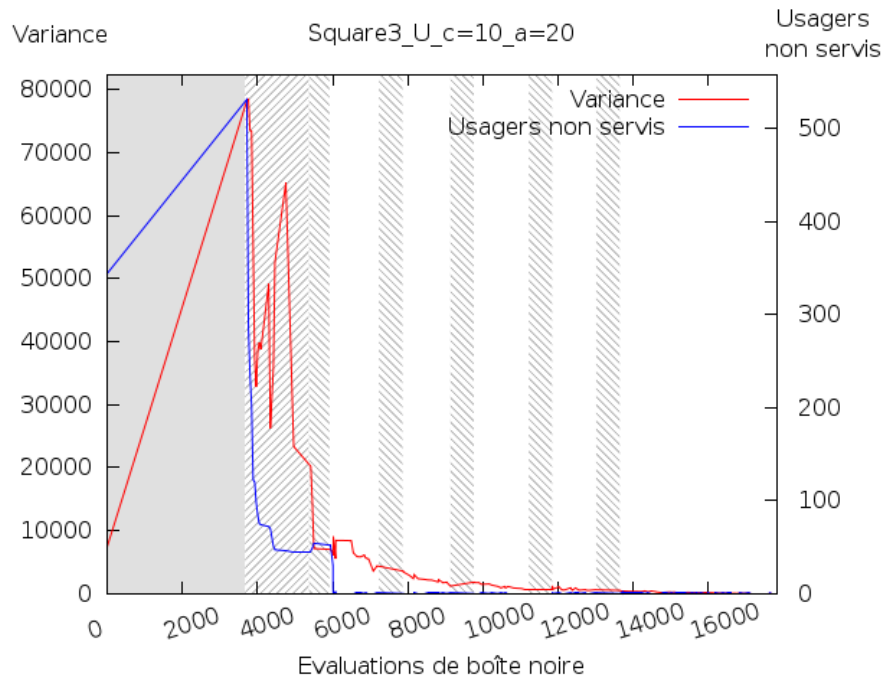


Figure 6.10 Profil d'évolution de l'instance $Square_{10,20}^U$.

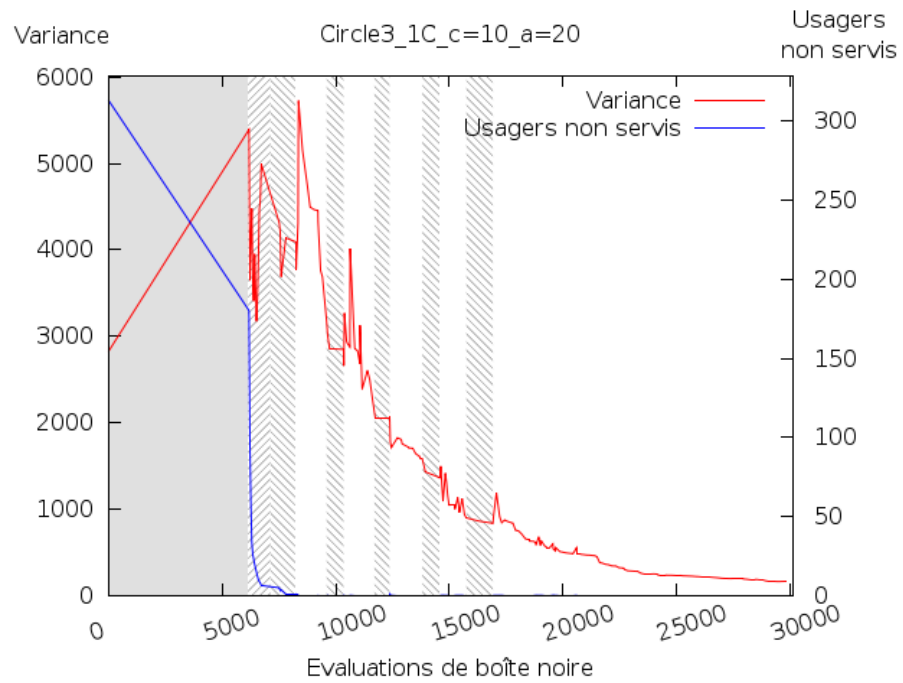


Figure 6.11 Profil d'évolution de l'instance $Circle_{10,20}^C$.

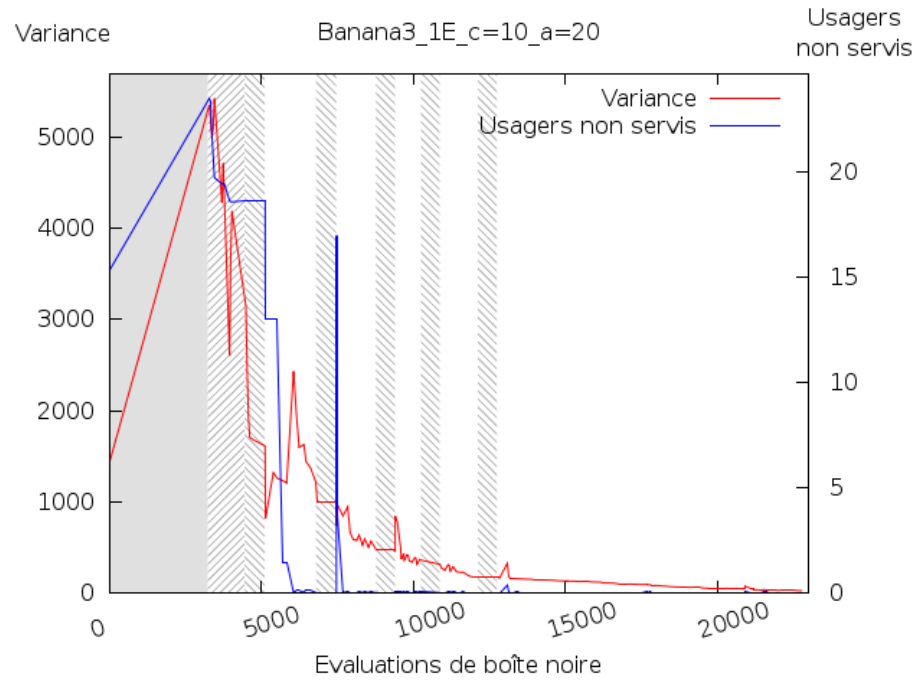


Figure 6.12 Profil d'évolution de l'instance $Banana_{10,20}^E$.

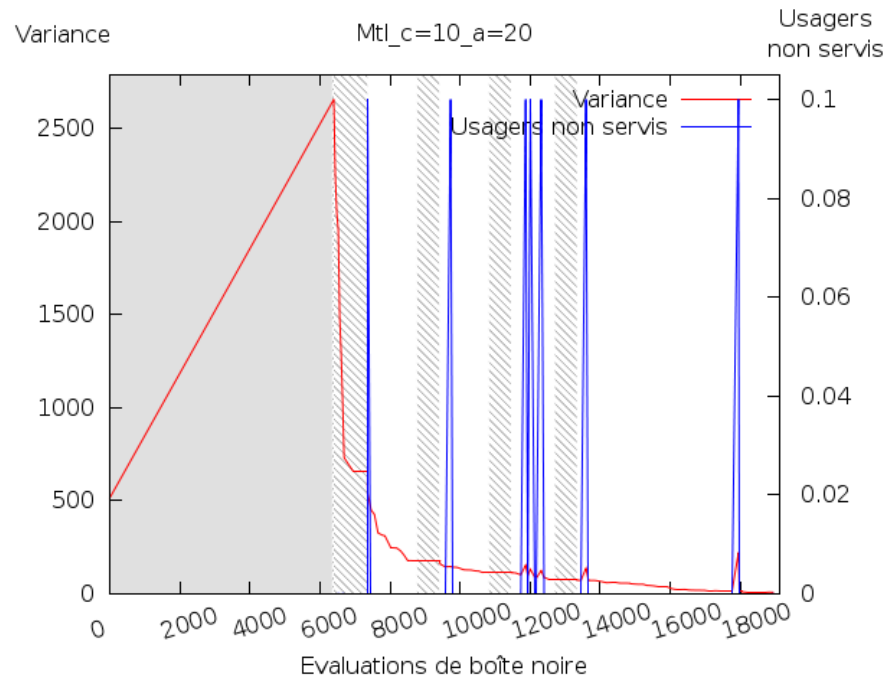


Figure 6.13 Profil d'évolution de l'instance $Mtl_{10,20}$.

6.3.1 Recherche Voronoï initiale

Les profils d'évolution permettent de voir le nombre d'évaluations consommées par la phase de la recherche Voronoï initiale, ainsi que les valeurs initiale et finale des fonctions considérées. Les figures ci-dessus présentent des phases de recherche Voronoï plutôt longues et qui nécessitent un grand nombre d'évaluations de boîte noire. La longueur de cette phase de recherche initiale peut être très variable d'une instance à l'autre, quel que soit le terrain et la dimension du réseau. Ce fait est illustré par la figure 6.14 qui montre les profils d'évolution des instances $Square_{10,50}^B$ et $Banana_{10,20}^B$ ayant des phases de recherche Voronoï initiales de longueurs très différentes par rapport à la durée totale de la recherche.

Quoi qu'il en soit, cette recherche initiale consomme généralement un nombre assez important d'évaluations. Cela est dû au fait que le critère d'arrêt choisi pour l'algorithme MADS est l'obtention de la taille minimale du treillis de recherche, qui est un critère exigeant. On n'a peut-être pas besoin d'atteindre une telle précision pour une recherche initiale. Ce choix a été fait comme choix par défaut, et aucun essai n'a été fait pour améliorer l'efficacité de la recherche Voronoï initiale. Il s'agirait donc d'une piste d'amélioration de l'algorithme.

D'autre part, on peut constater sur certains profils que les valeurs des fonctions à la suite de la recherche Voronoï sont plus élevées que celles de la solution initiale. On pourrait donc se dire que cette recherche dégrade la solution. En réalité ce n'est pas forcément le cas. La dégradation des valeurs des fonctions est due au fait que la recherche Voronoï déplace les antennes vers de nouvelles positions alors que l'assignation de canaux est toujours l'assignation initiale, qui n'a pas été optimisée. La situation est très vite rétablie par la première recherche tabou qui améliore de façon drastique l'assignation de canaux.

Pour tenter d'évaluer la pertinence et l'efficacité de la recherche Voronoï initiale, deux séries de tests ont été réalisées avec les instances $Square^U$ et Mtl , où l'optimisation a été à nouveau réalisée, mais cette fois-ci sans effectuer la recherche Voronoï. Les résultats sont présentés dans les tableaux 6.1 et 6.2 et sont à comparer aux résultats de l'optimisation avec recherche Voronoï donnés dans les tableaux A.1 et A.13 situés en annexe. Ces données semblent indiquer que la recherche complète avec Voronoï permet d'obtenir de meilleures solutions finales, en particulier en ce qui concerne le nombre d'utilisateurs non couverts. La variance du nombre d'utilisateurs par antenne s'en trouve légèrement affectée, mais reste sensiblement identique. En revanche, le nombre

Tableau 6.1 Résultats pour l'instance de terrain $Square^{U,V}$.

Terrain	p	n	$\mathcal{V}^{\%} \times 10^2$	$\mathcal{N}_{nc}^{\%}$	Évaluations	Temps (s)
$Square^{U,V}$	4	8	64	0.45	4264	39
		12	2.1	19	10188	110
		16	0.25	33	15039	162
		20	0.28	43	38064	483
	7	14	0.0013	0	6180	239
		21	2.2	1.7	22592	240
		28	0.046	13	48667	388
		35	0.091	19	138254	1332
	10	20	0.0027	0	10237	425
		30	0.031	0	44293	349
		40	0.84	0.41	132378	1447
		50	0.17	5.2	238936	2777
	15	30	0.0018	0	23294	180
		45	0.00072	0	52460	505
		60	0.0011	0	70654	768
		75	0.06	0.02	368696	5325
	20	40	0.0015	0	26059	234
		60	0.00054	0	86840	999
		80	0.00054	0	154288	2098
		100	0.0006	0	283748	4606

d'évaluations de boîte noire nécessaires à l'optimisation est beaucoup plus important avec la recherche Voronoï activée et il est légitime de se demander si la légère amélioration de la solution justifie une si grande augmentation du temps de calcul. Il faudrait toutefois vérifier s'il n'est pas possible de remédier à cet inconvénient en instaurant un meilleur critère d'arrêt.

6.3.2 Nombre d'antennes et nombre d'utilisateurs non servis

Parmi toutes les instances utilisées, toutes ne permettent pas d'atteindre une couverture totale du réseau. En fait, pour un nombre de canaux donné, il est de plus en plus difficile d'obtenir une couverture complète lorsque le nombre d'antennes augmente. Cette situation est illustrée par la figure 6.13, qui montre l'exemple de

Tableau 6.2 Résultats pour l'instance de terrain Mtl^V .

Terrain	p	n	$\mathcal{V}^{\%} \times 10^2$	$\mathcal{N}_{nc}^{\%}$	Évaluations	Temps (s)
Mtl^V	4	8	24	0	4183	110
		12	15	10	7927	123
		16	15	14	25534	380
		20	4.5	28	43453	697
	7	14	0.49	0	7600	331
		21	5.2	0.0057	31182	405
		28	1.4	3.9	65750	480
		35	0.35	13	105843	839
	10	20	0.058	0	13774	598
		30	1.4	0.011	30319	232
		40	1.1	0.17	106776	880
		50	0.5	1.4	267865	3438
	15	30	0.006	0	18390	187
		45	0.0032	0	45309	581
		60	0.042	0	225778	3556
		75	0.28	0	510816	9269
	20	40	0.0043	0	42395	487
		60	0.0033	0	65511	954
		80	0.054	0	299633	5633
		100	0.17	0	1421581	30582

l'instance $Circle^C$ avec 10 canaux et 2, 3, 4 et 5 antennes par canal.

Les instances $Circle_{10,20}^C$ et $Circle_{10,30}^C$, avec 2 et 3 antennes par canal, permettent d'atteindre une couverture totale, alors que les instances $Circle_{10,40}^C$ et $Circle_{10,50}^C$, avec 4 et 5 antennes par canal, ne le permettent pas. Le fait qu'il soit plus difficile de couvrir la totalité du territoire lorsque le nombre d'antennes augmente peut sembler contre-intuitif. En réalité, lorsqu'on ajoute des antennes, les interférences entre antennes d'un même canal augmentent rapidement, réduisant la zone de couverture de chaque antenne. C'est ce phénomène d'augmentation des interférences qui est prépondérant lors de l'ajout d'antennes.

Pour un nombre de canaux donné, il existe donc un nombre maximal d'antennes par canal permettant d'obtenir une couverture complète. Ce comportement est bien connu dans le domaine des télécommunications. Pour pouvoir augmenter le nombre d'antennes du réseau, il faut alors également ajouter des canaux. Ce résultat est par exemple décrit dans [Rappaport(2002a)].

En ce qui concerne l'évolution du nombre d'utilisateurs non servis pendant l'optimisation, on peut voir qu'elle est constituée de deux phases. Ce nombre chute très rapidement en début de recherche. On part en effet d'une assignation de canaux non optimisée, obtenue de façon séquentielle, et qui peut donc être arbitrairement éloignée d'une bonne assignation. Il est donc naturel que les premières étapes de la recherche améliorent fortement la valeur de cette fonction. Les premières recherches tabou sont particulièrement efficaces pour cette tâche, car elles permettent de se déplacer rapidement vers une bonne assignation de canaux.

En revanche, pour les instances où l'on ne peut pas obtenir de couverture complète, on observe un ralentissement de l'amélioration avec les recherches tabou. On parvient même généralement à un stade où les recherches tabou n'apportent plus aucune modification. L'assignation de canaux est alors probablement optimale vis-à-vis de la localisation des antennes, et on ne peut plus améliorer la couverture de cette façon. Par contre, les recherches MADS pour l'optimisation de la localisation parviennent toujours à améliorer la solution petit à petit jusqu'à l'arrêt de la recherche.

6.3.3 Analyse des tendances générales d'évolution

L'évolution de la variance du nombre d'utilisateurs par antenne est fortement liée à la possibilité ou non de couvrir l'ensemble des usagers. Premièrement, pour les instances qui permettent une couverture complète comme celles de la figure 6.14,

le nombre d'utilisateurs non servis a peu d'influence. En effet, il chute très rapidement dès le début de l'optimisation, atteignant une valeur nulle. La recherche se concentre alors sur la seule optimisation de la variance, et on observe alors sa décroissance, rapide dans la figure 6.14a, plus lente dans la figure 6.14b. Cette différence de vitesse s'explique par la différence de difficulté à atteindre une couverture complète entre les instances considérées.

Pour les instances comportant peu d'antennes par canal, lors de l'optimisation de la localisation avec l'algorithme MADS, les antennes possèdent une grande liberté de mouvement et peuvent être facilement déplacées sans pour autant dégrader la couverture, ce qui permet aux recherches d'emprunter de meilleures directions. On observe alors une décroissance très rapide de la variance, d'allure exponentielle, et l'optimisation pourrait dans ce cas être arrêtée assez vite selon la qualité de la solution recherchée.

Au contraire, pour les instances ayant un grand nombre d'antennes par canal, il est plus difficile d'atteindre une couverture complète. Une fois qu'on l'a obtenue, de petits changements de position des antennes peuvent la dégrader considérablement. Les recherches subséquentes sont donc plus contraintes et progressent moins rapidement, d'où l'observation d'une décroissance plus lente, d'allure plutôt linéaire, ne permettant pas d'arrêter l'optimisation trop tôt.

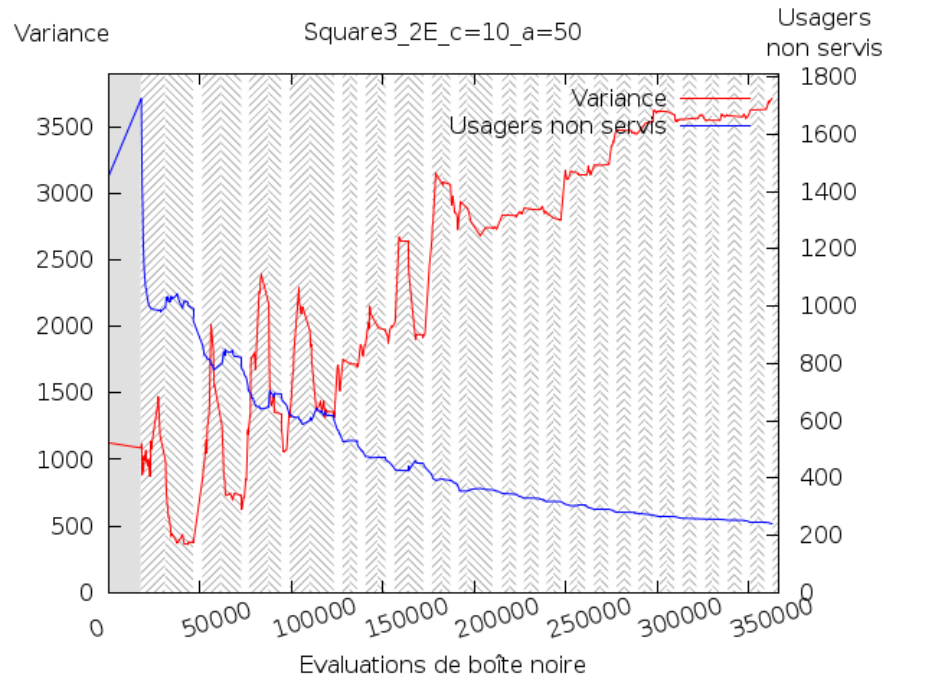
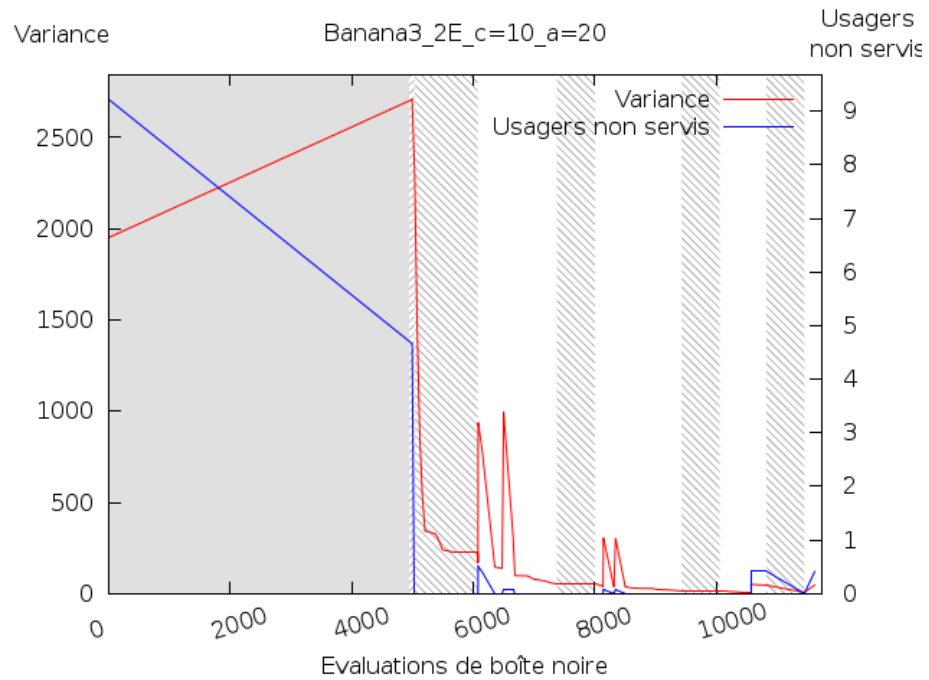
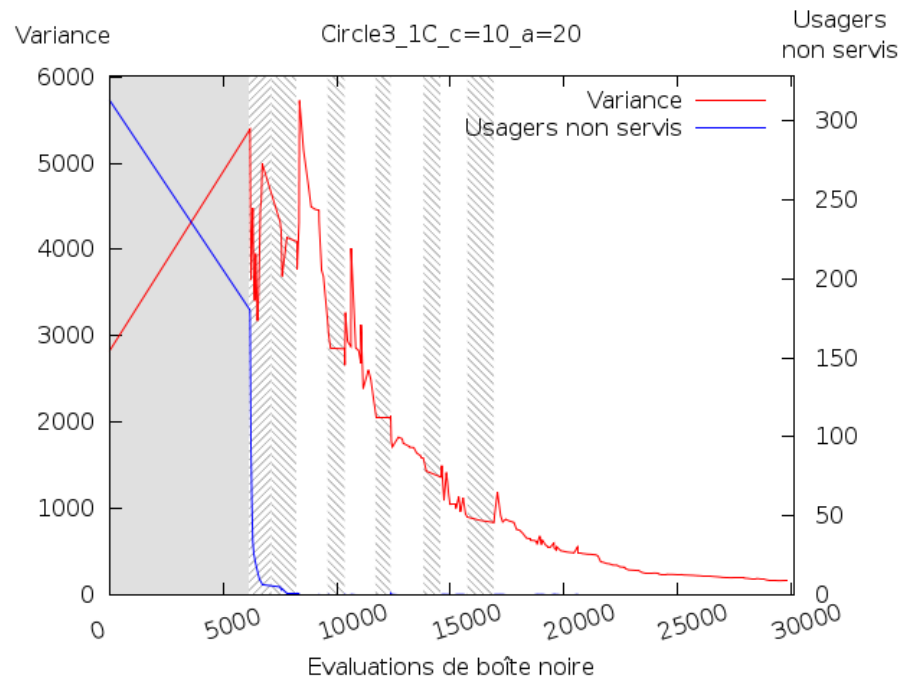
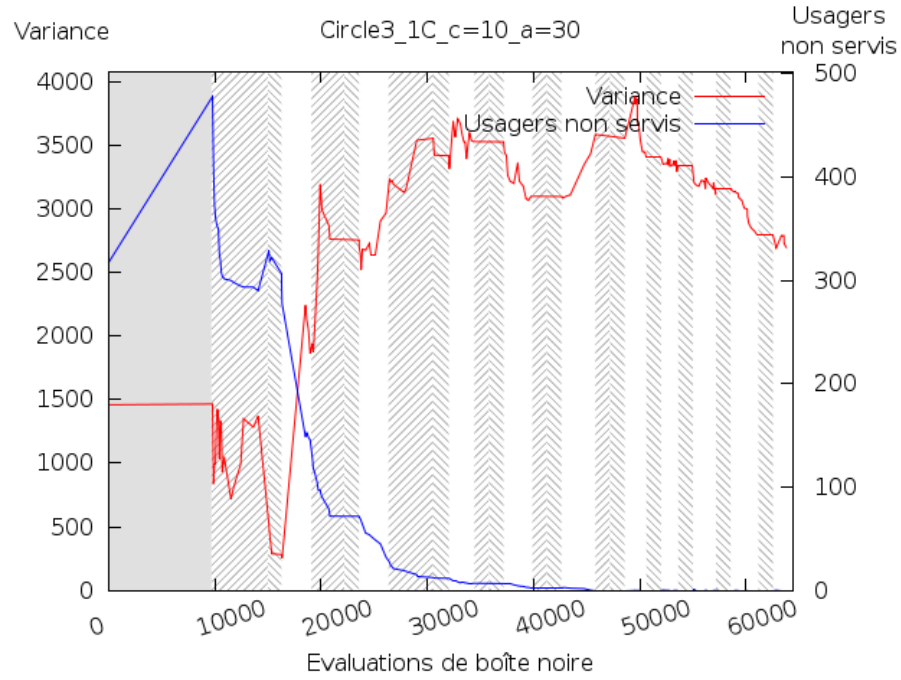
(a) $Square_{10,50}^B$.(b) $Banana_{10,20}^B$.

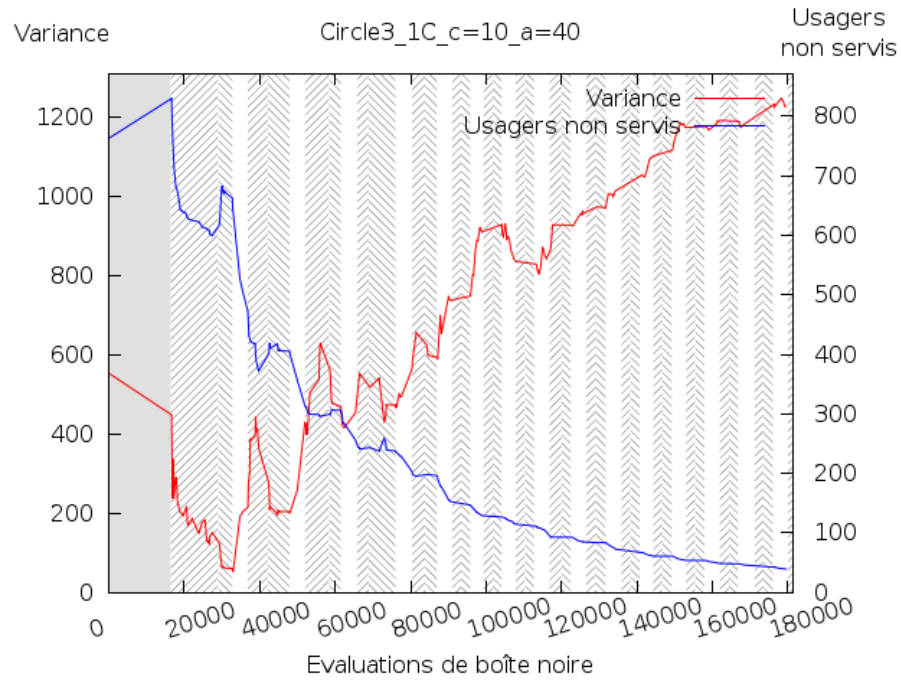
Figure 6.14 Deux profils d'évolution avec des longueurs relatives de recherche Voronoï initiale différentes.



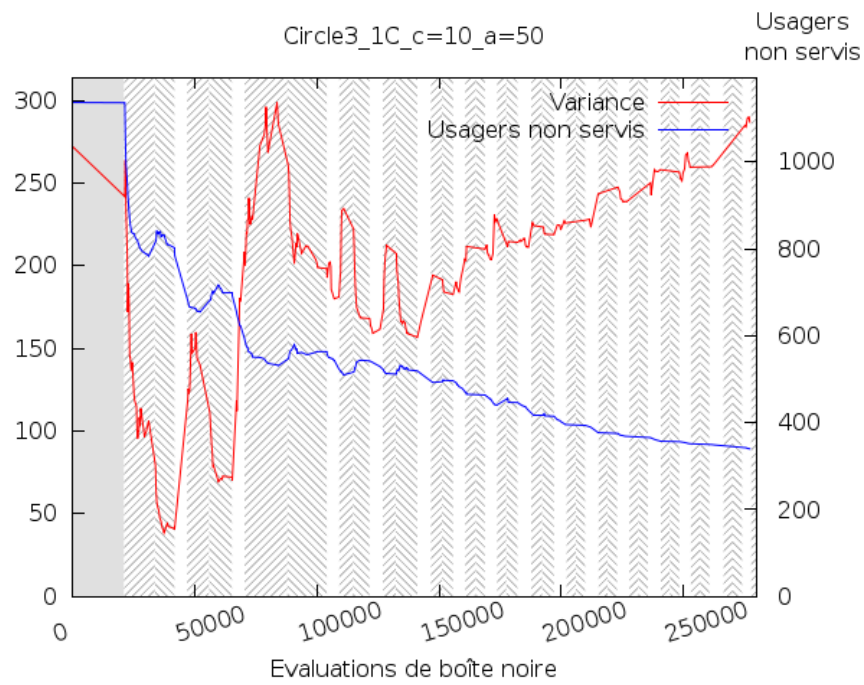
(a) $Circle_{10,20}^C$: deux antennes par canal.



(b) $Circle_{10,30}^C$: trois antennes par canal.



(c) $Circle_{10,40}^C$: quatre antennes par canal.



(d) $Circle_{10,50}^C$: cinq antennes par canal.

Figure 6.13 Effet de l'augmentation du nombre d'antennes sur l'instance $Circle_{10}^C$.

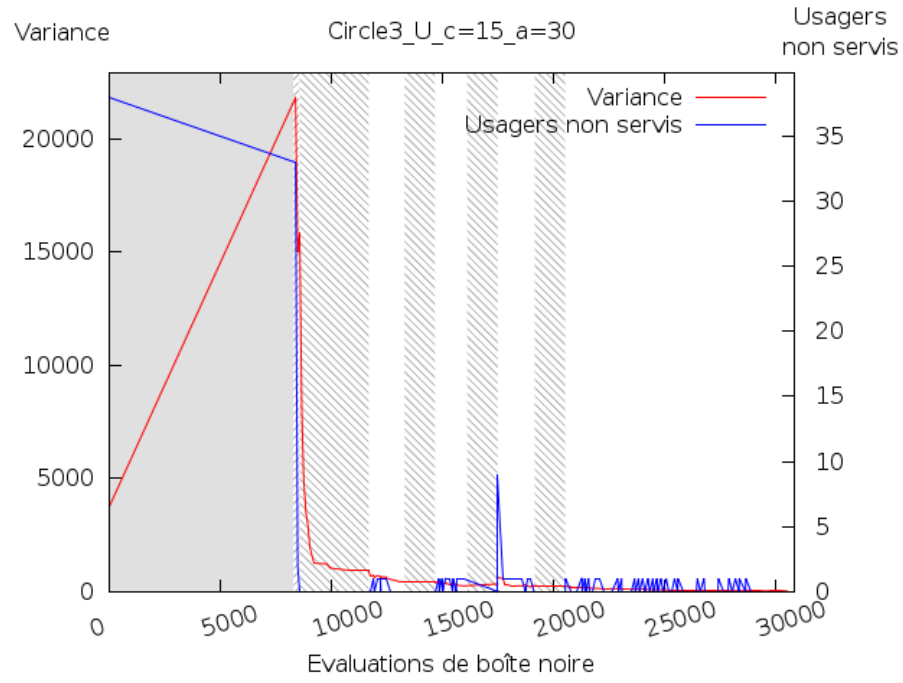
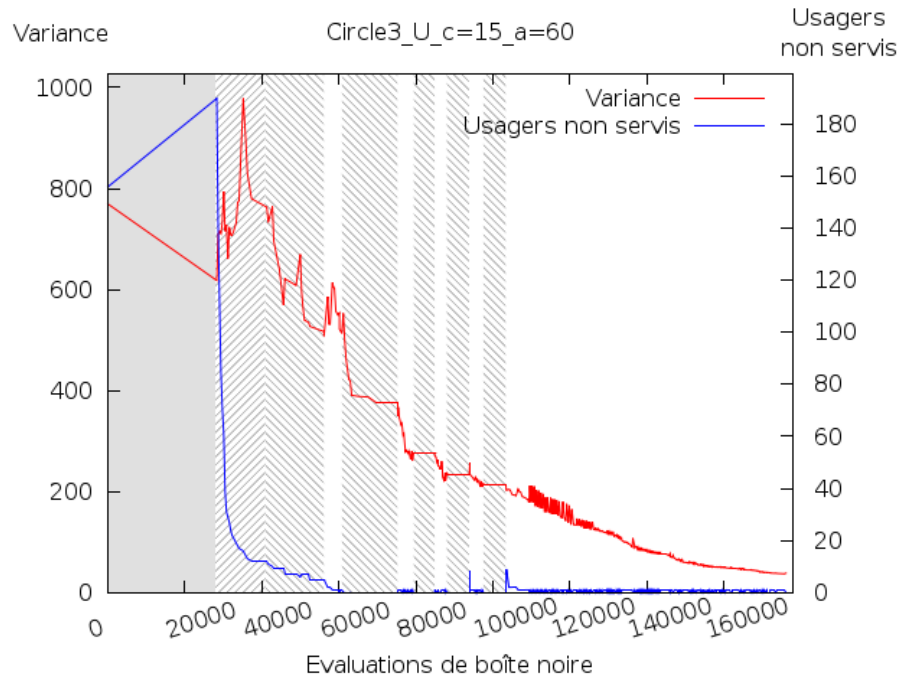
(a) $Circle^U_{15,30}$.(b) $Circle^U_{15,60}$.

Figure 6.14 Deux instances avec couverture totale.

Deuxièmement, on trouve à l'opposé les instances ne permettant pas d'obtenir une couverture complète, qui possèdent un grand nombre d'antennes par canal. La figure 6.15 illustre de telles instances. On voit dans ce cas que les deux objectifs de couverture complète et d'équilibrage des charges sont antagonistes. Ainsi, le nombre d'utilisateurs non couverts diminue peu à peu durant l'optimisation, alors que la variance du nombre d'utilisateurs ne fait qu'augmenter. Ce comportement est dû au fait qu'il a été fait le choix d'optimiser en priorité le nombre d'utilisateurs non servis pour obtenir une couverture complète, ce qui se fait au détriment de la variance.

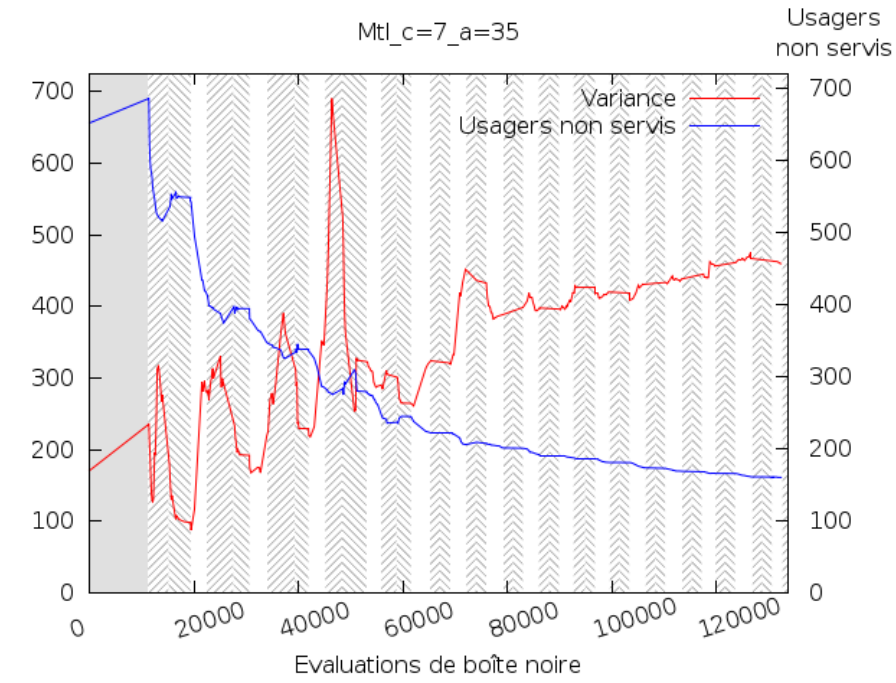
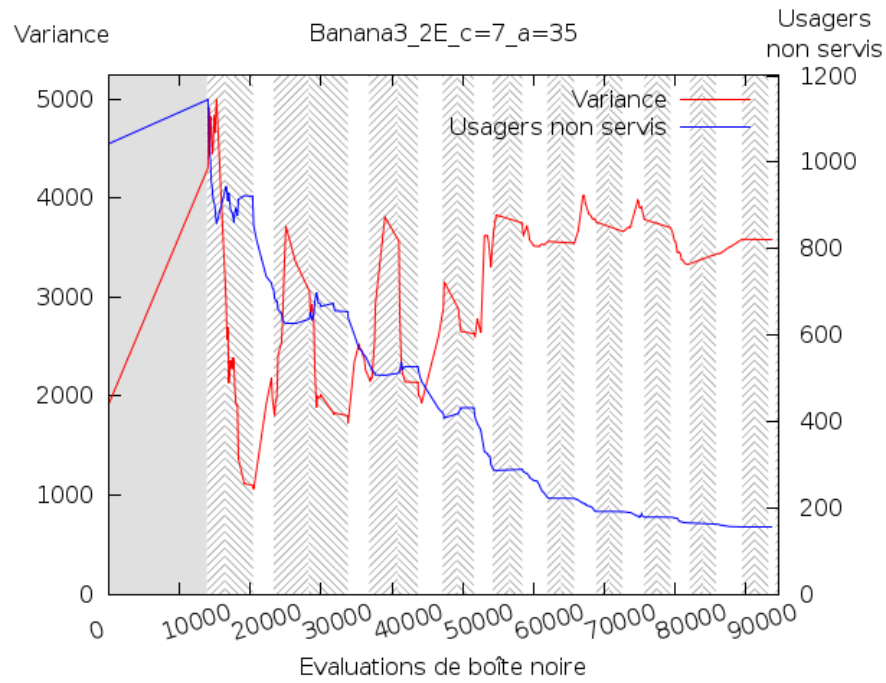
(a) $Mtl_{7,35}$.(b) $Banana_{7,35}^E$.

Figure 6.15 Deux instances ne permettant pas d'obtenir une couverture totale.

Finalement, entre ces deux cas se trouvent un grand nombre d'instances pour lesquelles une couverture totale est obtenue, mais seulement après un certain nombre d'itérations. Un exemple d'une telle instance est donné par la figure 6.16. Deux phases apparaissent dans l'optimisation. Dans un premier temps, la couverture du réseau est optimisée, et la variance se dégrade rapidement, jusqu'à ce que la recherche atteigne une couverture complète. Dans un second temps, l'optimisation peut se concentrer sur l'optimisation de la variance du nombre d'utilisateurs, qui est alors progressivement améliorée.

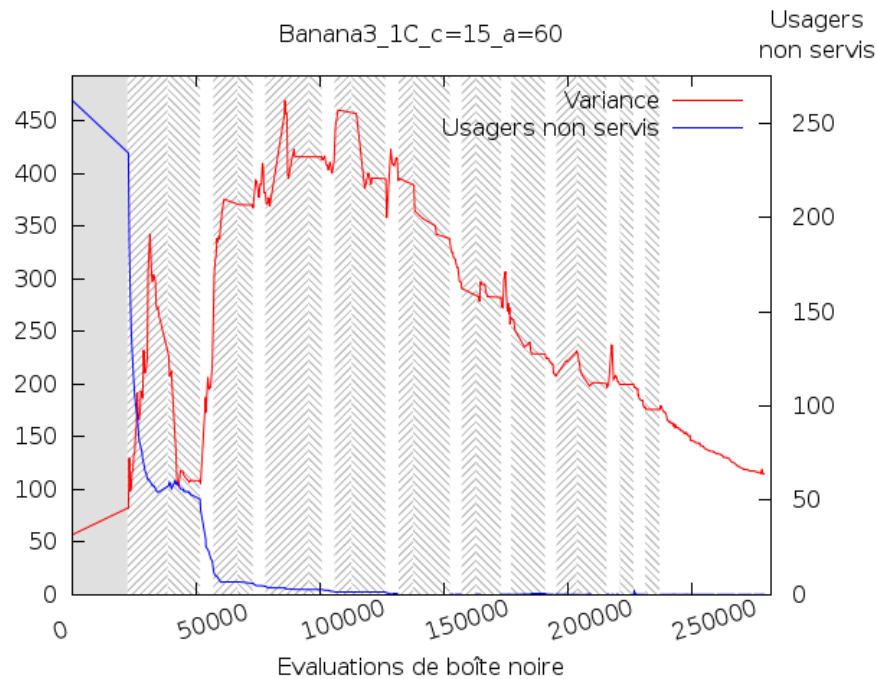


Figure 6.16 Exemple de l'instance $Banana_{15,60}^C$, pour laquelle la couverture complète n'est obtenue qu'après un temps long.

6.3.4 Comportement individuel des recherches

L'analyse qui vient d'être faite ne décrit que l'évolution générale des fonctions au cours de la recherche, sans s'attarder sur le comportement particulier des différentes recherches. Elles ont en effet chacune un impact différent, qui dépend ici aussi de l'état dans lequel se trouve l'optimisation vis-à-vis de la couverture du réseau.

La recherche tabou pour la minimisation du nombre d'utilisateurs non servis est indiquée sur les profils d'évolution par les rayures obliques montantes. Son rôle n'est intéressant que lorsqu'une solution réalisant une couverture complète n'a pas encore été trouvée, car dans le cas contraire on ne peut pas améliorer la fonction objectif et la recherche n'est tout simplement pas exécutée. On peut s'appuyer sur la figure 6.15 pour faire des observations. On voit que dans les premiers temps de l'optimisation, les recherches tabou pour l'amélioration de la couverture font chuter très rapidement le nombre d'utilisateurs non servis, tout en dégradant la variance du nombre d'utilisateurs par antenne. C'est bien le comportement attendu, puisque l'assignation de canaux initiale n'est pas du tout optimisée. Mais plus on avance dans l'optimisation, et plus les recherches tabou suivantes ont un effet faible, voire nul. On pouvait également s'y attendre, car il arrive un point de l'optimisation où l'assignation de fréquences est presque optimale par rapport à la localisation des antennes. Il est donc difficile d'améliorer la couverture de cette façon, et c'est pourquoi les dernières recherches tabou sont courtes, car elles apportent une petite amélioration puis s'arrêtent au bout de 15 itérations sans succès.

Il semble donc que beaucoup de temps soit perdu dans les dernières étapes de l'optimisation pour certaines instances comme celles de la figure 6.15, en raison d'une trop rapide alternance entre les recherches tabou et MADS. Il pourrait donc être intéressant d'essayer de détecter que l'on se trouve dans cette phase et d'allonger la durée des recherches MADS pour l'optimisation de la localisation entre deux étapes de recherche tabou.

Ensuite, la recherche tabou pour l'optimisation de l'équilibrage du nombre d'utilisateurs par antenne, qui est indiquée par les rayures obliques descendantes, a un comportement très différent de la précédente. Comme on peut le voir sur la figure 6.16, elle s'attache surtout à améliorer la variance du nombre d'utilisateurs par antenne, sans trop dégrader la couverture. Cela correspond tout à fait à la fonction objectif utilisée par cette recherche, qui valorise l'amélioration de l'équilibrage et pénalise fortement la dégradation de la couverture. Cela permet de compenser en partie la dégradation de la variance induite par le premier type de recherche tabou lors de la recherche d'une couverture complète, mais aussi d'essayer d'améliorer la variance si la couverture est déjà complète. Comme précédemment, on constate que cette recherche peut avoir un effet très bénéfique en début d'optimisation, mais qu'elle peine à améliorer la solution dans les étapes plus avancées. La voie d'amélioration à privilégier est la même :

il faudrait gérer dynamiquement la durée des recherches MADS entre les recherches tabou.

Enfin, les recherches MADS pour l'optimisation de la localisation des antennes permettent d'améliorer la solution tout au long de l'optimisation. Comme pour les recherches tabou, les recherches MADS entraînent une très rapide amélioration de la solution en début de recherche, puis la vitesse d'amélioration se réduit peu à peu. On constate également que lorsque la couverture n'est pas complète, la recherche optimise en priorité la couverture au détriment de la variance. Cela est dû au fait que la couverture est gérée au sein de l'algorithme comme une contrainte avec barrière progressive, ce qui revient à résoudre un problème non contraint où la couverture compterait comme une pénalité dont la valeur est le carré du nombre d'utilisateurs non servis. Le poids de cette pénalité est alors plus important que celui de la variance.

6.3.5 Phase de terminaison

La phase de terminaison consiste en une dernière recherche MADS pour l'amélioration de l'équilibrage du nombre d'utilisateurs. Dans les essais effectués, le critère d'arrêt utilisé pour cette recherche est l'obtention de la taille de treillis minimale. L'existence de cette phase de terminaison peut bien être visualisée sur la figure 6.14, où elle se traduit par une large zone finale sur fond blanc. Sur d'autres instances, comme celles de la figure 6.15, cette zone n'apparaît pas. Cela est dû au fait que les profils d'évolution ont ici été tracés jusqu'au dernier point représentant une amélioration de la solution. Il se peut qu'en réalité l'optimisation se soit poursuivie plus longtemps, mais tous les points situés à droite du dernier point représenté ne réalisent pas d'amélioration de la solution. Il serait aisé de définir un critère d'arrêt permettant d'arrêter la recherche plus rapidement lors de la phase de terminaison. En effet, il est possible de s'apercevoir assez rapidement si la recherche stagne, auquel cas il suffit de l'arrêter au bout d'un certain nombre d'itérations sans amélioration.

6.4 Résultats finaux

Les profils d'évolution présentés dans la section précédente permettent d'observer la progression de l'algorithme d'optimisation et d'analyser son comportement au cours de la recherche. Il est essentiel d'analyser également les résultats finaux obtenus à la

suite des optimisations effectuées avec les différentes instances.

Comme on l'a vu, chaque instance peut être identifiée par le type de terrain (*Square*, *Circle*, *Banana* ou *Mtl*), le type de densité (U , C , E ou B), le nombre de canaux p et le nombre d'antennes n . Les chiffres intéressants que l'on peut observer sont la variance du nombre d'utilisateurs par antenne \mathcal{V} , le nombre d'utilisateurs non servis \mathcal{N}_{nc} , le nombre d'évaluations de boîte noire effectuées, ainsi que, à titre indicatif, la durée de l'optimisation. En réalité, il est surtout intéressant de considérer les grandeurs $\mathcal{V}^{\%}$ et $\mathcal{N}_{nc}^{\%}$, exprimées en pourcentage de la population totale de chaque territoire, ce qui permet de comparer les résultats pour toutes les instances. L'ensemble des résultats pour toutes les instances testées sont présentées à l'annexe A, avec des précisions sur les machines utilisées pour aider à comprendre les temps de calcul réels observés.

6.4.1 Influence des nombre de canaux et d'antennes

Les résultats finaux sont présentés dans le tableau 6.3 sous forme agrégée. Il indique les moyennes des résultats finaux pour chaque nombre de canaux et d'antennes, en agrégeant les données des différents terrains. On peut ainsi facilement observer l'influence des nombre de canaux et d'antennes sur chacun des aspects des solutions finales.

Tout d'abord, on remarque immédiatement que, comme prévu, le nombre d'utilisateurs non servis $\mathcal{N}_{nc}^{\%}$ est le plus faible lorsque le nombre d'antennes par canal est faible. Pour les instances ne comportant que 4 canaux, on ne parvient pratiquement jamais à obtenir une couverture complète et ce nombre de canaux est donc insuffisant. En revanche pour les nombres de canaux plus élevés, il est possible d'ajouter un plus grand nombre d'antennes tout en gardant une couverture complète.

Une deuxième observation immédiate qui peut être réalisée est que le nombre d'évaluations de boîte noire requises, et donc le temps de calcul, sont croissants avec le nombre d'antennes pour un nombre de canaux donné, ce qui est naturel puisque cela entraîne une augmentation du nombre de variables. En revanche, on peut également constater que pour un nombre d'antennes donné, le nombre d'évaluations nécessaires diminue avec l'augmentation du nombre de canaux. Cela peut être expliqué par le fait que cette augmentation du nombre de canaux augmente la robustesse des solutions courantes au cours de la recherche, qui peuvent alors être davantage perturbées ce

Tableau 6.3 Résultats finaux agrégés par nombre de canaux et d'antennes.

p	n	$\mathcal{V}^{\%} \times 10^2$	$\mathcal{N}_{nc}^{\%}$	Évaluations	Temps (s)
4	8	628.14	0.30	5605.25	97.31
	12	468.28	11.56	11636.94	232.50
	16	148.97	25.44	25603.81	473.31
	20	31.70	39.50	56496.63	975.69
7	14	42.10	0	11518.44	537.56
	21	99.63	0.51	36930.00	920.06
	28	66.65	6.02	85451.81	727.38
	35	26.00	14.14	149120.94	1431.75
10	20	3.50	0	21026.06	852.38
	30	23.49	0	59013.13	475.75
	40	22.19	0.48	153124.88	1492.31
	50	28.11	3.28	314344.56	3659.75
15	30	0.49	0	36383.13	291.13
	45	2.04	0	112710.88	1189.13
	60	3.95	0	260898.31	3312.56
	75	3.65	0.07	608441.94	9089.63
20	40	0.05	0	57483.50	556.88
	60	0.29	0	179039.81	2223.56
	80	0.59	0	455167.69	6733.56
	100	0.70	0	919709.75	14354.63

qui permet à l'optimisation d'avoir accès à de meilleures directions de recherche.

Enfin, pour ce qui est de la variance du nombre d'utilisateurs par antenne, il n'est pas nécessairement évident de déceler une tendance dans son évolution lorsque le nombre d'antennes augmente pour un nombre de canaux fixé. En revanche, on voit nettement que l'augmentation du nombre de canaux permet une grande amélioration de l'équilibrage du nombre d'utilisateurs par antenne. Un plus grand nombre de canaux permet en effet une plus grande liberté dans le choix de la localisation des antennes, puisqu'elles interfèrent moins entre elles, ce qui entraîne un meilleur équilibrage.

6.4.2 Influence du terrain et de la densité

Le tableau 6.4 présente les résultats agrégés par type de carte de terrain. Les données présentées sont donc la moyenne, pour chaque terrain, de toutes les instances

utilisant cette carte de terrain. On remarque que les cartes de terrain a priori les plus régulières donnent en fait les moins bons résultats, alors que les meilleurs chiffres sont obtenus pour les instances les plus irrégulières, aussi bien en termes de qualité de la solution qu'en termes de temps d'exécution. Ce résultat peut sembler étonnant à première vue, mais peut s'expliquer par le fait que les instances les plus régulières présentent en réalité des effets de conditions aux limites importants. Par exemple, le terrain *Square*, de forme carrée, possède quatre coins qui sont difficiles à couvrir, car il faut placer des antennes assez près des limites du terrain tout en veillant à ne pas perdre toute leur zone de couverture en dehors du terrain.

Tableau 6.4 Résultats finaux agrégés par type de terrain.

Terrain	$\mathcal{V}^{\%} \times 10^2$	$\mathcal{N}_{nc}^{\%}$	Évaluations	Temps (s)
<i>Square</i>	9.24	6.76	207626.88	3011.95
<i>Circle</i>	8.38	7.06	214231.98	3157.48
<i>Banana</i>	6.63	3.26	149318.44	2050.79
<i>Mtl</i>	7.76	3.18	140764.20	1705.15

Pour ce qui est du type de carte de densité, les résultats agrégés sont présentés dans le tableau 6.5. On constate cette fois-ci que les instance les plus faciles à traiter en termes de temps de calcul sont celles présentant une densité de population uniforme, ou en tous cas assez bien répartie, comme c'est le cas pour les densités *U*, *B* et celle du terrain de Montréal. Au contraire, plus la répartition de la population est déséquilibrée et dissymétrique et plus le temps de calcul augmente. Les valeurs des fonctions objectif suivent également cette tendance, les moins bon scores étant réalisés avec les densités *C* et *E*, qui sont les plus déséquilibrées.

Tableau 6.5 Résultats finaux agrégés par type de densité.

Densité	$\mathcal{V}^{\%} \times 10^2$	$\mathcal{N}_{nc}^{\%}$	Évaluations	Temps (s)
<i>U</i>	1.98	5.44	114844.32	1662.37
<i>C</i>	10.88	7.24	197340.57	2702.08
<i>E</i>	14.58	5.29	257378.40	3685.33
<i>B</i>	4.89	4.81	192006.43	2910.50
<i>Mtl</i>	7.76	3.18	140764.20	1705.15

6.4.3 Comportement avec les instances réelles

L'analyse des résultats finaux présentés ci-dessus permet de voir que l'optimisation avec une instance réelle, ici l'île de Montréal, possède un très bon comportement. Il s'agit en effet du type de terrain sur lequel l'optimisation est la plus rapide. De même en comparaison avec les différents types de densités, l'optimisation avec la carte de densité réelle de Montréal est à peine moins rapide à réaliser qu'avec une densité uniforme. De plus, pour ce qui est des fonctions objectifs, c'est cette instance qui parvient à obtenir les meilleurs taux de couverture, et elle est également parmi les meilleures en ce qui concerne la variance du nombre d'utilisateurs.

On voit donc que l'optimisation d'une instance réelle permet ici d'obtenir de meilleurs résultats qu'avec des instances de test théoriques, qui sembleraient pourtant plus faciles à traiter à première vue. Ce constat est très intéressant, puisqu'en pratique on s'intéressera surtout à optimiser des réseaux sur des territoires réels et l'algorithme développé dans ce travail semble bien adapté à ce type de problème.

Chapitre 7

Conclusion

La téléphonie mobile et les réseaux sans fil représentent aujourd'hui un enjeu économique considérable. Ils constituent également un défi technique important, tant la croissance de la demande est forte et les solutions technologiques développées sont complexes. Le travail réalisé ici avait pour objectif initial d'évaluer la possibilité d'utiliser de nouvelles techniques d'optimisation pour l'amélioration de réseaux mobiles. C'est ce qui a été réalisé tout au long de ce travail de maîtrise, qui se veut donc une ouverture vers le développement de nouvelles méthodes de conception et d'optimisation de réseaux de téléphonie mobile.

7.1 Synthèse des travaux

L'objectif premier de ce travail de recherche était de déterminer s'il était possible d'utiliser une méthode de recherche directe pour l'optimisation de la localisation des antennes au sein d'un réseau de téléphonie mobile. Pour cela il a fallu développer un modèle de réseau qui soit adapté à l'optimisation qui en serait faite. Initialement, nos connaissances en ce qui a trait aux réseaux de communications sans fil étaient très limitées. La première étape du travail a donc consisté à se documenter abondamment sur le sujet, afin d'acquérir une bonne compréhension des phénomènes physiques mis en jeu et des solutions techniques utilisées dans l'industrie. Un modèle simple de réseau a ensuite été développé, sur la base du modèle de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide.

Le modèle ainsi réalisé a ensuite été implémenté sous forme de programme informatique en C++ afin de pouvoir réaliser des simulations et, à l'aide de nombreux tests, d'essayer d'acquérir une compréhension profonde du comportement du modèle face à la modification des différents paramètres du réseau. Cette étape a été cruciale dans le déroulement du projet, puisque c'est grâce à ces essais et tâtonnements que l'étendue de l'optimisation a été fixée. En particulier, il a alors été fait le choix de s'in-

téresser à l'optimisation simultanée de la localisation des antennes et de l'assignation de fréquences, ces deux aspects étant très liés et difficilement dissociables.

Une fois obtenu ce premier élément essentiel du projet et la possibilité de réaliser des simulations, il a été possible de s'attacher au développement d'une méthode d'optimisation pour ce problème. L'objectif initial étant d'utiliser l'algorithme MADS pour l'optimisation de la localisation des antennes, il a été décidé de conserver ce choix qui semblait parfaitement convenir à ce rôle. Pour ce qui est de l'assignation de fréquences, qui est un problème combinatoire, il a été rapidement décidé d'utiliser une métaheuristique, et la recherche tabou s'est naturellement présentée comme un très bon choix d'algorithme. Ces décisions préliminaires réalisées, il a ensuite fallu effectuer l'implémentation de ces algorithmes. Il a ensuite été possible d'ajuster les paramètres de chacune des étapes du processus et d'améliorer leurs interactions. Il n'a bien sûr pas été possible de tester en détail l'influence de tous les paramètres en raison de leur grand nombre et de la durée limitée du projet, et leurs valeurs ont généralement été fixées de façon empirique à la suite de plusieurs essais.

Finalement, l'ensemble du système développé jusqu'ici a été utilisé pour réaliser de nombreuses batteries de tests sur des instances de problèmes variées. Les données obtenues à la suite de ces tests ont fait l'objet d'une analyse poussée, qui a permis de conclure que la méthode développée permet d'obtenir des résultats satisfaisants, en particulier lorsqu'utilisée avec des instances réelles, et qu'elle constitue par conséquent une piste sérieuse pour le développement de techniques de conception et d'optimisation de réseaux de télécommunications.

7.2 Limitations de la solution proposée

La solution proposée ici pour l'optimisation d'un réseau de télécommunications est le fruit d'un travail exploratoire visant l'évaluation de la pertinence de l'approche utilisée. Son champ d'application se limite donc pour l'instant à des problèmes expérimentaux, et elle ne peut pas être utilisée en l'état pour la conception de réseaux réels à l'échelle industrielle. Leur optimisation nécessiterait en effet un modèle de réseau bien plus élaboré et complexe que le modèle élémentaire utilisé ici.

D'autre part, l'algorithme d'optimisation ne présente pas du tout des performances optimales. De très nombreux paramètres différents définissent son comportement, et ceux-ci ont été fixés de façon empirique à des valeurs qui semblaient convenables. Il est

clair que de gros progrès pourraient être apportés par l’optimisation des paramètres algorithmiques, aussi bien en termes de qualité des résultats que de performances et temps de résolution.

7.3 Améliorations futures

Il existe de très nombreuses voies d’amélioration possibles pour la solution réalisée au cours de ce projet de maîtrise. Celles-ci rejoignent les limitations identifiées ci-dessus, et suivent donc deux axes principaux : l’élaboration d’un modèle et d’une simulation plus réaliste, et l’amélioration de l’algorithme d’optimisation. Il est aussi nécessaire de réaliser une comparaison avec d’autres méthodes afin de justifier l’approche proposée.

Le modèle de réseau conçu dans ce travail est un modèle très simple ne pouvant pas être appliqué au traitement de cas réels. De nombreux ajouts peuvent être faits au modèle qui permettraient d’affiner la simulation, selon les objectifs que l’on veut se donner. Une des améliorations les plus simples à réaliser serait l’ajout du traitement de terrains en relief, qui permettrait ainsi de tenir compte de l’altitude. Pour ce qui est du modèle de propagation des ondes, il serait possible d’utiliser un modèle plus élaboré, comme ceux présentés dans le chapitre 3, ce qui serait sans doute l’amélioration ayant le plus gros impact sur la qualité de la modélisation. Enfin, un élément ayant également une grande influence sur la finesse de la simulation serait la prise en compte de types d’interférences supplémentaires, comme les interférences inter-canaux. Les possibilités de développement du modèle sont innombrables, et on peut donc affiner le modèle jusqu’au niveau souhaité. Cependant, sa complexification entraîne aussi une rapide augmentation du temps de la simulation.

Le deuxième axe d’amélioration de la solution se situe du côté de l’algorithme d’optimisation. Comme indiqué précédemment, il est lui-même constitué d’algorithmes évolués possédant chacun de nombreux paramètres, et interagissant entre eux à plusieurs niveaux. Pour obtenir des valeurs optimales de tous les paramètres, il faudrait faire de nombreux tests et déterminer la meilleure stratégie à utiliser pour chacun d’eux, ce qui serait très laborieux. Toutefois, il est possible d’identifier certains paramètres principaux dont l’influence semble prépondérante. Le changement qui apporterait sans doute la meilleure amélioration est le choix de meilleurs critères d’arrêt pour les différentes recherches qui composent l’algorithme. L’utilisation de critères

d'arrêt dynamiques plutôt que statiques, bien calibrés, permettrait à la recherche d'évoluer plus rapidement vers l'optimum et de perdre moins de temps à réaliser des itérations inutiles. D'autres paramètres algorithmiques comme l'utilisation de groupes de variables et l'ajout d'une étape de recherche globale avec l'algorithme MADS pourraient également améliorer les performances de l'algorithme et la qualité des solutions produites.

La solution proposée est encore loin d'être adaptée à la résolution de problèmes réels, mais les pistes d'amélioration sont très nombreuses et ouvrent un vaste horizon de possibilités qui permettront peut-être à terme de parvenir à une méthode d'optimisation utilisable en pratique dans l'industrie.

Références

- [Abdel Khalek *et al.*(2011)] ABDEL KHALEK, A., AL-KANJ, L., DAWY, Z. et TURKIYYAH, G. (2011). Optimization Models and Algorithms for Joint Uplink/Downlink UMTS Radio Network Planning With SIR-Based Power Control. *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, 60, 1612–1625.
- [Abramson *et al.*(2009a)] ABRAMSON, M. A., AUDET, C., CHRISSIS, J. W. et WALSTON, J. G. (2009a). Mesh Adaptive Direct Search Algorithms for Mixed Variable Optimization. *Optimization Letters*, 3, 35–47.
- [Abramson *et al.*(2003)] ABRAMSON, M. A., AUDET, C., COUTURE, G., DENNIS, JR., J. E. et LE DIGABEL, S. (2003). The NOMAD project. Software available at <http://www.gerad.ca/nomad>.
- [Abramson *et al.*(2009b)] ABRAMSON, M. A., AUDET, C., DENNIS, JR., J. E. et LE DIGABEL, S. (2009b). OrthoMADS : A Deterministic MADS Instance with Orthogonal Directions. *SIAM Journal on Optimization*, 20, 948–966.
- [Amaldi *et al.*(2003)] AMALDI, E., CAPONE, A. et MALUCELLI, F. (2003). Planning UMTS base station location : optimization models with power control and algorithms. *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, 2, 939–952.
- [Audet(2011)] AUDET, C. (2011). A short proof on the cardinality of maximal positive bases. *Optimization Letters*, 5, 191–194.
- [Audet *et al.*(2008a)] AUDET, C., BÉCHARD, V. et CHAOUKI, J. (2008a). Spent potliner treatment process optimization using a MADS algorithm. *Optimization and Engineering*, 9, 143–160.
- [Audet *et al.*(2008b)] AUDET, C., BÉCHARD, V. et LE DIGABEL, S. (2008b). Nonsmooth optimization through Mesh Adaptive Direct Search and Variable Neighborhood Search. *Journal of Global Optimization*, 41, 299–318.
- [Audet et Dennis, Jr.(2001)] AUDET, C. et DENNIS, JR., J. E. (2001). Pattern Search Algorithms for Mixed Variable Programming. *SIAM Journal on Optimization*, 11, 573–594.
- [Audet et Dennis, Jr.(2003)] AUDET, C. et DENNIS, JR., J. E. (2003). Analysis of Generalized Pattern Searches. *SIAM Journal on Optimization*, 13, 889–903.

- [Audet et Dennis, Jr.(2006)] AUDET, C. et DENNIS, JR., J. E. (2006). Mesh Adaptive Direct Search Algorithms for Constrained Optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 17, 188–217.
- [Audet et Dennis, Jr.(2009)] AUDET, C. et DENNIS, JR., J. E. (2009). A Progressive Barrier for Derivative-Free Nonlinear Programming. *SIAM Journal on Optimization*, 20, 445–472.
- [Audet *et al.*(2008c)] AUDET, C., DENNIS, JR., J. E. et LE DIGABEL, S. (2008c). Parallel Space Decomposition of the Mesh Adaptive Direct Search Algorithm. *SIAM Journal on Optimization*, 19, 1150–1170.
- [Audet *et al.*(2010)] AUDET, C., DENNIS, JR., J. E. et LE DIGABEL, S. (2010). Globalization strategies for Mesh Adaptive Direct Search. *Computational Optimization and Applications*, 46, 193–215.
- [Audet et Le Digabel(2011)] AUDET, C. et LE DIGABEL, S. (2011). The mesh adaptive direct search algorithm for periodic variables. Rapport technique G-2009-23, Les Cahiers du GERAD. À paraître dans Pacific Journal of Optimization.
- [Audet *et al.*(2008d)] AUDET, C., SAVARD, G. et ZGHAL, W. (2008d). Multiobjective Optimization Through a Series of Single-Objective Formulations. *SIAM Journal on Optimization*, 19, 188–210.
- [BBC(2010)] BBC (2010). Over 5 billion mobile phone connections worldwide, BBC, <http://www.bbc.co.uk/news/10569081>.
- [Bellanger(2006)] BELLANGER, M. (2006). *Traitement numérique du signal - Théorie et pratique (8e édition)*. Dunod.
- [Boost(2011)] BOOST (2011). Boost C++ Librairies, <http://www.boost.org>.
- [Box(1957)] BOX, G. E. P. (1957). Evolutionary Operation : A Method for Increasing Industrial Productivity. *Applied Statistics*, 6, 81–101.
- [Cerri *et al.*(2002)] CERRI, G., DE LEO, R., RUSSO, P. et MICHELI, D. (2002). Optimized Planning for Base Station Location. *EMC Europe 2002. International Symposium on Electromagnetic Compatibility*. Milan, Italy, vol. vol.1, 463 – 6.
- [Clarke(1983)] CLARKE, F. H. (1983). *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Wiley, New York.

- [Conn et Le Digabel(2011)] CONN, A. R. et LE DIGABEL, S. (2011). Use of Quadratic Models with Mesh Adaptive Direct Search for Constrained Black Box Optimization. Rapport technique G-2011-11, Les cahiers du GERAD. À paraître dans Optimization Methods and Software.
- [Conn *et al.*(1997)] CONN, A. R., SCHEINBERG, K. et TOINT, P. (1997). On the Convergence of Derivative-Free Methods for Unconstrained Optimization. M. D. Buhmann et A. Iserles, éditeurs, *Approximation Theory and Optimization : Tributes to M.J.D. Powell*, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom. 83–108.
- [Conn *et al.*(1998)] CONN, A. R., SCHEINBERG, K. et TOINT, P. (1998). A Derivative Free Optimization Algorithm in Practice. *Proceedings the of 7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*. St. Louis, Missouri.
- [Conn *et al.*(2009)] CONN, A. R., SCHEINBERG, K. et VICENTE, L. N. (2009). *Introduction to Derivative-Free Optimization*. MPS/SIAM Book Series on Optimization. SIAM, Philadelphia.
- [Davis(1954)] DAVIS, C. (1954). Theory of Positive Linear Dependence. *American Journal of Mathematics*, 76, 733–746.
- [Finkel et Kelley(2004a)] FINKEL, D. E. et KELLEY, C. T. (2004a). An Adaptive Restart Implementation of DIRECT.
- [Finkel et Kelley(2004b)] FINKEL, D. E. et KELLEY, C. T. (2004b). Convergence Analysis of the DIRECT Algorithm. Rapport technique CRSC-TR04-28, Center for Research in Scientific Computation.
- [Fortune(1987)] FORTUNE, S. (1987). A Sweepline Algorithm for Voronoi Diagrams. *Algorithmica*, 2, 153–174.
- [Fortune *et al.*(1995)] FORTUNE, S. J., GAY, D. M., KERNIGHAN, B. W., LANDRON, O., VALENZUELA, R. A. et WRIGHT, M. H. (1995). WISE design of indoor wireless systems : practical computation and optimization. *Computational*, 2, 58–68.
- [Friis(1946)] FRIIS, H. T. (1946). A note on a simple transmission formula. *Proc IRE*, 34, 254–256.

- [Frühwirth et Brisset(1998)] FRÜHWIRTH, T. et BRISSET, P. (1998). Optimal Placement of Base Stations in Wireless Indoor Telecommunication. *Principles and Practice of Constraint Programming—CP98*, Springer. 476–480.
- [Gaillard et Lengellé(2006)] GAILLARD, P. et LENGELLÉ, R. (2006). *Analyse et traitement du signal*. Ellipses.
- [Galinier et al.(2011)] GALINIER, P., HERTZ, A., PAROZ, S. et PESANT, G. (2011). Using local search to speed up filtering algorithms for some NP-hard constraints. *Annals of Operations Research*, 184, 121–135.
- [Garnier(2010)] GARNIER, V. (2010). *La gestion des groupes de variables en recherche directe*. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal.
- [Glover(1989)] GLOVER, F. (1989). Tabu Search - Part I. *INFORMS Journal on Computing*, 1, 190–206.
- [Granatstein(2008)] GRANATSTEIN, V. L. (2008). *Physical principles of wireless communications*. Auerbach Publications.
- [Hooke et Jeeves(1961)] HOOKE, R. et JEEVES, T. A. (1961). Direct Search Solution of Numerical and Statistical Problems. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 8, 212–229.
- [Jones et al.(1993)] JONES, D. R., PERTTUNEN, C. D. et STUCKMAN, B. E. (1993). Lipschitzian optimization without the Lipschitz constant. *Journal of Optimization Theory and Application*, 79, 157–181.
- [Lagarias et al.(1998)] LAGARIAS, J. C., REEDS, J. A., WRIGHT, M. H. et WRIGHT, P. E. (1998). Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions. *SIAM Journal on Optimization*, 9, 112–147.
- [Le Digabel(2011)] LE DIGABEL, S. (2011). Algorithm 909 : NOMAD : Nonlinear Optimization with the MADS Algorithm. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 37, 44 :1—44 :15.
- [Le Digabel et al.(2010)] LE DIGABEL, S., ABRAMSON, M. A., AUDET, C. et DENNIS, JR., J. E. (2010). Parallel Versions of the MADS Algorithm for Black-Box Optimization. *Optimization days*. GERAD, Montreal.
- [Lee(2006)] LEE, W. C. Y. (2006). *Wireless and cellular telecommunications*. McGraw-Hill, troisième édition.

- [Lewis et Torczon(1999)] LEWIS, R. M. et TORCZON, V. (1999). Pattern Search Algorithms for Bound Constrained Minimization. *SIAM Journal on Optimization*, 9, 1082–1099.
- [Lewis et al.(2000)] LEWIS, R. M., TORCZON, V. et TROSSET, M. W. (2000). Direct Search Methods : Then and Now. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 124, 191–207.
- [Lopez-Perez et al.(2008)] LOPEZ-PEREZ, D., JUTTNER, A. et ZHANG, J. (2008). Optimisation Methods for Dynamic Frequency Planning in OFDMA Networks. *Telecommunications Network Strategy and Planning Symposium, 2008. Networks 2008. The 13th International*. 1–28.
- [Lopez-Perez et al.(2009)] LOPEZ-PEREZ, D., JUTTNER, A. et ZHANG, J. (2009). Dynamic Frequency Planning Versus Frequency Reuse Schemes in OFDMA Networks. *VTC Spring 2009 IEEE 69th Vehicular Technology Conference*, 1–5.
- [Luna et al.(2007)] LUNA, F., BLUM, C., ALBA, E. et NEBRO, A. J. (2007). ACO vs EAs for solving a real-world frequency assignment problem in GSM networks. *Proceedings of the 9th annual conference on Genetic and evolutionary computation*. ACM, New York, NY, USA, GECCO '07, 94–101.
- [Luna et al.(2008)] LUNA, F., ESTÉBANEZ, C., LEÓN, C., CHAVES-GONZÁLEZ, J. M., ALBA, E., ALER, R., SEGURA, C., VEGA-RODRÍGUEZ, M. A., NEBRO, A. J., VALLS, J. M., MIRANDA, G. et GÓMEZ-PULIDO, J. A. (2008). Metaheuristics for solving a real-world frequency assignment problem in GSM networks. *Proceedings of the 10th annual conference on Genetic and evolutionary computation*. ACM, New York, NY, USA, GECCO '08, 1579–1586.
- [Majdandzic et al.(2008)] MAJDANDZIC, I., TREFFTZ, C. et WOLFFE, G. (2008). Computation of Voronoi diagrams using a graphics processing unit. *2008 IEEE International Conference on ElectroInformation Technology*, 437–441.
- [Marsden et al.(2007)] MARSDEN, A. L., WANG, M., DENNIS, JR., J. E. et MOIN, P. (2007). Trailing-edge noise reduction using derivative-free optimization and large-eddy simulation. *Journal of Fluid Mechanics*, 572, 13–36.
- [McKinnon(1998)] MCKINNON, K. I. M. (1998). Convergence of the Nelder-Mead Simplex Method to a Nonstationary Point. *SIAM Journal on Optimization*, 9, 148–158.

- [Mishra *et al.*(2007)] MISHRA, D., SHAFFER, C. A., RAMAKRISHNAN, N., WATSON, L. T., BAE, K. K., HE, J., VERSTAK, A. A. et TRANTER, W. H. (2007). S4W : a problem-solving environment for wireless system design. *Softw. Pract. Exper.*, 37, 1539–1558.
- [Nazareth et Tseng(2002)] NAZARETH, L. et TSENG, P. (2002). Gilding the Lily : A Variant of the Nelder-Mead Algorithm Based on Golden-Section Search. *Computational Optimization and Applications*, 22, 133–144.
- [Nelder et Mead(1965)] NELDER, J. A. et MEAD, R. (1965). A Simplex Method for Function Minimization. *The Computer Journal*, 7, 308–313.
- [Powell(1964)] POWELL, M. J. D. (1964). An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives. *The Computer Journal*, 7, 155–162.
- [Price *et al.*(2002)] PRICE, C. J., COOPE, I. D. et BYATT, D. (2002). A Convergent Variant of the Nelder-Mead Algorithm. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 113, 5–19.
- [Rajalakshmi et Hima Bindu(2011)] RAJALAKSHMI, K. et HIMA BINDU, M. (2011). An Overview of Solution Approaches for Assignment Problem in Wireless Telecommunication Network. V. V. Das, G. Thomas et F. Lumban Gaol, éditeurs, *Information Technology and Mobile Communication*, Springer Berlin Heidelberg, vol. 147 de *Communications in Computer and Information Science*. 407–410.
- [Rappaport(2002a)] RAPPAPORT, T. S. (2002a). *Wireless Communications : principles and practice*. Prentice Hall, seconde édition.
- [Rappaport(2002b)] RAPPAPORT, T. S. (2002b). *Wireless Communications : principles and practice*, Prentice Hall, chapitre 1. Seconde édition.
- [Reilly(2009)] REILLY, G. B. O. (2009). Frequency Assignment Optimization using the Swarm Intelligence Multi-agent based Algorithm (SIMBA). J. A. Cordeiro et J. Filipe, éditeurs, *ICEIS 2009 - Proceedings of the 11th International Conference on Enterprise Information Systems, Volume AIDSS, Milan, Italy, May 6-10, 2009*. 25–32.
- [Rockafellar(1980)] ROCKAFELLAR, R. T. (1980). Generalized directional derivatives and subgradients of nonconvex functions. *Canad. J. Math.*, 32, 257–280.

- [Rosenbrock(1960)] ROSENBROCK, H. H. (1960). An Automatic Method for Finding the Greatest or Least Value of a Function. *The Computer Journal*, 3, 175–184.
- [Ruiz *et al.*(1999)] RUIZ, S., COLET, X. et ESTEVEZ, J. J. (1999). Frequency planning optimisation in real mobile networks. *Vehicular Technology Conference, 1999. VTC 1999 - Fall. IEEE VTS 50th.* vol. 4, 2082–2086 vol.4.
- [Shannon(1948)] SHANNON, C. E. (1948). A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Technical Journal*, 27, 379–423.
- [Sherali *et al.*(1996)] SHERALI, H. D., PENDYALA, C. M. et RAPPAPORT, T. S. (1996). Optimal location of transmitters for micro-cellular radio communication system design. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 14, 662–673.
- [Spendley *et al.*(1962)] SPENDLEY, W., HEXT, G. R. et HIMSWORTH, F. R. (1962). Sequential Application of Simplex Designs in Optimisation and Evolutionary Operation. *Technometrics*, 4, 441–461.
- [St-Hilaire et Liu(2011)] ST-HILAIRE, M. et LIU, S. (2011). Comparison of different meta-heuristics to solve the global planning problem of UMTS networks. *Comput. Netw.*, 55, 2705–2716.
- [Torczon(1997)] TORCZON, V. (1997). On the Convergence of Pattern Search Algorithms. *SIAM Journal on Optimization*, 7, 1–25.
- [Tutschku(1998)] TUTSCHKU, K. (1998). Demand-based radio network planning of cellular mobile communication systems. *INFOCOM 98 Seventeenth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies Proceedings IEEE*, 3, 1054–1061 vol.3.
- [Vilovic *et al.*(2007)] VILOVIC, I., BURUM, N. et SIPUS, Z. (2007). Design of an Indoor Wireless Network with Neural Prediction Model. *Antennas and Propagation 2007 EuCAP 2007 The Second European Conference on.* 1–5.
- [Weicker *et al.*(2003)] WEICKER, N., SZABO, G., WEICKER, K. et WIDMAYER, P. (2003). Evolutionary multiobjective optimization for base station transmitter placement with frequency assignment. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, 7, 189–203.
- [Wikipedia(2011a)] WIKIPEDIA (2011a). Diagramme de Voronoï, Wikipédia, http://fr.wikipedia.org/wiki/Diagramme_de_Voronoi.

- [Wikipedia(2011b)] WIKIPEDIA (2011b). Spectre électromagnétique, Wikipédia, http://fr.wikipedia.org/wiki/Spectre_electromagnetique.
- [Wright(1998)] WRIGHT, M. H. (1998). Optimization methods for base station placement in wireless applications. *Proceedings of the 48th IEEE Vehicular Technology Conference*, 1, 387–391.
- [Yang *et al.*(2007)] YANG, J., AYDIN, M. E., ZHANG, J. et MAPLE, C. (2007). UMTS base station location planning : A mathematical model and heuristic optimisation algorithms. *IET Communications*, 1, 1007–1014.

Annexe A

Tableaux de résultats

Les tableaux ci-dessous présentent l'ensemble des résultats finaux pour toutes les cartes de terrain et de densité et tous les nombres de canaux et d'antennes. Pour chaque instance, les données présentées sont les valeurs des deux fonctions objectif principales en pourcentage de la population totale, la variance du nombre d'utilisateurs par antenne $\mathcal{V}^{\%}$ et le nombre d'utilisateurs non servis $\mathcal{N}_{nc}^{\%}$, le nombre d'évaluations de boîte noire réalisées, ainsi que le temps d'exécution de l'optimisation.

Note sur le nombre d'évaluations de boîte noire : les nombres d'évaluations de boîte noire indiqués dans ces résultats sont les nombres d'évaluations totaux, obtenus en allant jusqu'au bout de l'étape de terminaison de l'algorithme d'optimisation, c'est-à-dire jusqu'à l'obtention d'une taille de treillis minimale lors de la dernière recherche MADS pour l'optimisation de la localisation des antennes. Comme indiqué au chapitre 6, cette dernière étape consomme généralement un grand nombre d'évaluations, et pourrait le plus souvent être arrêtée bien avant d'atteindre ce critère d'arrêt en conservant une bonne qualité de la solution.

Note sur les temps d'exécution : les tests ont été réalisés sur deux ordinateurs possédant les mêmes caractéristiques : un processeur Intel i7 à 6 cœurs cadencés à 3.3 GHz avec 12 GB de mémoire, tournant sous OpenSUSE 10.4. Bien que les deux ordinateurs possédaient des configurations identiques, on a pu constater une certaine différence entre les temps d'exécution moyens sur les deux machines. Sur la première machine, la plus rapide, ont été effectués les tests pour toutes les instances de terrain avec les densités U et C , alors que les densités E et B , ainsi que le terrain Mtl , ont été testés sur la deuxième machine, un peu plus lente. Ceci explique la différence moyenne de temps d'exécution qui peut être observée entre les instances.

Tableau A.1 Résultats pour l'instance de terrain $Square^U$.

Terrain	p	n	$\mathcal{V}\% \times 10^2$	$\mathcal{N}_{nc}\%$	Évaluations	Temps (s)
$Square^U$	4	8	64	0.45	4272	37
		12	2.3	19	7184	89
		16	0.15	32	12703	134
		20	0.26	41	50347	647
	7	14	0.0013	0	6681	218
		21	3.3	0.27	30833	380
		28	0.13	11	74114	589
		35	0.16	18	163870	1599
	10	20	0.0018	0	17858	530
		30	0.099	0	69147	527
		40	0.92	0.44	147192	1473
		50	0.35	4.8	266844	3197
	15	30	0.0017	0	26334	209
		45	0.00098	0	77450	784
		60	0.0018	0	155050	1847
		75	0.098	0	435761	6652
	20	40	0.0012	0	55736	705
		60	0.00068	0	99200	1299
		80	0.00062	0	359884	5827
		100	0.00064	0	559524	10388

Tableau A.2 Résultats pour l'instance de terrain $Square^C$.

Terrain	p	n	$\mathcal{V}^{\%} \times 10^2$	$\mathcal{N}_{nc}^{\%}$	Évaluations	Temps (s)
$Square^C$	4	8	1.2e+02	0.27	5254	49
		12	35	24	12748	215
		16	5	44	27622	403
		20	2.2	53	46257	898
	7	14	4.4	0	9334	296
		21	17	0.49	39919	527
		28	2.2	15	67380	572
		35	1.1	26	149555	1432
	10	20	0.52	0	24318	765
		30	4.7	0	63131	582
		40	2.2	0.68	181053	1911
		50	0.42	7.9	314360	3993
	15	30	0.015	0	31516	334
		45	0.12	0	116329	1350
		60	0.34	0.0084	314744	4372
		75	0.52	0.011	719546	12466
	20	40	0.0011	0	55958	563
		60	0.0016	0	140666	1943
		80	0.027	0	483780	6564
		100	0.069	0	992199	13040

Tableau A.3 Résultats pour l'instance de terrain *Square*^E.

Terrain	p	n	$\mathcal{V}^{\%} \times 10^2$	$\mathcal{N}_{nc}^{\%}$	Évaluations	Temps (s)
<i>Square</i> ^E	4	8	1.5e+02	0.034	5416	57
		12	1.1e+02	9.7	11401	188
		16	13	34	24157	407
		20	9.4	42	42109	691
	7	14	17	0	18253	620
		21	17	1.5	51996	724
		28	6.5	10	94988	821
		35	3.3	19	196075	1934
	10	20	0.44	0	21567	685
		30	7.8	0	74561	706
		40	5.9	1	176872	1887
		50	2.2	4.7	371763	4452
	15	30	0.25	0	39233	345
		45	0.64	0	177353	1981
		60	1	0	444819	5945
		75	0.57	0.36	809432	12893
	20	40	0.0073	0	64851	720
		60	0.049	0	359420	4893
		80	0.2	0	988855	16491
		100	0.21	0	1664465	25681

Tableau A.4 Résultats pour l'instance de terrain *Square*^B.

Terrain	p	n	$\mathcal{V}^{\%} \times 10^2$	$\mathcal{N}_{nc}^{\%}$	Évaluations	Temps (s)
<i>Square</i> ^B	4	8	73	0.28	5562	57
		12	13	18	10192	155
		16	12	29	29670	430
		20	2.7	41	47973	846
	7	14	4.5	0	12768	341
		21	9.4	1.5	34909	528
		28	3.7	7.6	74263	617
		35	0.81	17	154560	1455
	10	20	0.059	0	21457	644
		30	2.1	0	60680	512
		40	2.3	0.95	180575	1823
		50	1.2	4.4	402621	4809
	15	30	0.0019	0	37607	318
		45	0.28	0	147824	1594
		60	0.78	0	355461	4715
		75	0.33	0.14	917237	14550
	20	40	0.0024	0	66174	693
		60	0.008	0	225369	2967
		80	0.066	0	581080	9612
		100	0.082	0	1190929	22763

Tableau A.5 Résultats pour l'instance de terrain $Circle^U$.

Terrain	p	n	$\mathcal{V}^{\%} \times 10^2$	$\mathcal{N}_{nc}^{\%}$	Évaluations	Temps (s)
$Circle^U$	4	8	29	0.064	7274	82
		12	0.85	23	8182	127
		16	1.3	35	16959	338
		20	0.056	43	47169	806
	7	14	0.06	0	11651	445
		21	1.4	1.1	37291	533
		28	0.084	12	93016	741
		35	0.034	21	159445	1443
	10	20	0.0015	0	14318	728
		30	0.011	0	62801	486
		40	0.22	0.85	149967	1427
		50	0.022	6.3	311926	3686
	15	30	0.0027	0	30784	242
		45	0.00089	0	79794	830
		60	0.0062	0	176148	2112
		75	0.038	0.026	556088	9003
	20	40	0.0011	0	53675	532
		60	0.00081	0	95294	1300
		80	0.00052	0	264631	4480
		100	0.0012	0	402030	8108

Tableau A.6 Résultats pour l'instance de terrain *Circle^C*.

Terrain	p	n	$\mathcal{V}^{\%} \times 10^2$	$\mathcal{N}_{nc}^{\%}$	Évaluations	Temps (s)
<i>Circle^C</i>	4	8	99	0.76	7292	96
		12	38	23	12906	399
		16	3.2	49	22991	685
		20	1.5	56	61190	1327
	7	14	6.3	0	12282	463
		21	8.7	1.6	39656	950
		28	2.1	18	76248	641
		35	0.48	31	167095	1559
	10	20	0.15	0	30016	1207
		30	2.6	0	64250	584
		40	1.2	1.2	200621	2086
		50	0.28	10	317559	3953
	15	30	0.0084	0	40562	325
		45	0.031	0	127694	1593
		60	0.4	0.0061	281920	3911
		75	0.34	0.11	629111	10449
	20	40	0.0025	0	63161	858
		60	0.0014	0	170326	2440
		80	0.025	0	596931	8055
		100	0.079	0.0046	921258	12606

Tableau A.7 Résultats pour l'instance de terrain $Circle^E$.

Terrain	p	n	$\mathcal{V}^{\%} \times 10^2$	$\mathcal{N}_{nc}^{\%}$	Évaluations	Temps (s)
$Circle^E$	4	8	1.2e+02	1.5	7885	104
		12	95	10	12924	257
		16	42	23	38072	624
		20	6.3	45	66880	1490
	7	14	20	0	14832	491
		21	21	1	48393	755
		28	8.3	9.4	110098	934
		35	2.5	21	146127	1295
	10	20	3.4	0	36966	1797
		30	9.7	0	64865	578
		40	5.9	1.1	213550	2315
		50	2.7	4.7	406760	4910
	15	30	0.42	0	66063	571
		45	1.4	0	202090	2204
		60	2.1	0.011	401840	5820
		75	1.2	0.066	898047	14251
	20	40	0.037	0	83059	829
		60	0.23	0	431491	5621
		80	0.38	0	881846	14648
		100	0.34	0	1751993	27008

Tableau A.8 Résultats pour l'instance de terrain $Circle^B$.

Terrain	p	n	$\mathcal{V}^{\%} \times 10^2$	$\mathcal{N}_{nc}^{\%}$	Évaluations	Temps (s)
$Circle^B$	4	8	51	1.5	3839	42
		12	18	17	11436	196
		16	14	28	19623	457
		20	7.1	40	55483	984
	7	14	3.4	0	13098	532
		21	17	0.58	38582	715
		28	4.9	7.1	79692	628
		35	1.9	16	146145	1403
	10	20	0.89	0	25029	1054
		30	4.2	0	64942	506
		40	3.3	0.99	173064	1659
		50	1.5	4.1	406465	4879
	15	30	0.025	0	53429	450
		45	0.48	0	155311	1713
		60	0.88	0	304814	4000
		75	0.86	0.078	788180	12353
	20	40	0.0032	0	72347	737
		60	0.13	0	345374	4590
		80	0.17	0	648747	10519
		100	0.18	0	1427665	27043

Tableau A.9 Résultats pour l'instance de terrain $Banana^U$.

Terrain	p	n	$\mathcal{V}^{\%} \times 10^2$	$\mathcal{N}_{nc}^{\%}$	Évaluations	Temps (s)
$Banana^U$	4	8	0.021	0	4986	122
		12	8.1	5.4	12549	236
		16	2	16	18350	284
		20	0.6	30	52135	821
	7	14	0.0021	0	9460	402
		21	0.6	0	24714	986
		28	0.92	0.8	47797	384
		35	0.62	4.9	97115	887
	10	20	0.0035	0	11498	468
		30	0.0016	0	27472	216
		40	0.046	0	83706	815
		50	0.91	0.051	254433	2939
	15	30	0.0026	0	27095	210
		45	0.0011	0	66806	680
		60	0.0027	0	114686	1460
		75	0.002	0	222992	3378
	20	40	0.0062	0	54053	546
		60	0.0015	0	117509	1564
		80	0.00085	0	159743	2798
		100	0.00092	0	285133	5966

Tableau A.10 Résultats pour l'instance de terrain *Banana*^C.

Terrain	p	n	$\mathcal{V}^{\%} \times 10^2$	$\mathcal{N}_{nc}^{\%}$	Évaluations	Temps (s)
<i>Banana</i> ^C	4	8	63	0	7693	157
		12	1.1e+02	4.1	12591	267
		16	81	10	33566	645
		20	3.9	40	74298	1387
	7	14	1.9	0	13010	537
		21	19	0.0066	48010	860
		28	6.5	2.2	111913	896
		35	2.5	11	159140	1679
	10	20	0.01	0	22096	1110
		30	1.2	0	69451	599
		40	2.4	0.47	192967	2124
		50	0.5	4.3	306197	3976
	15	30	0.0028	0	27790	241
		45	0.12	0	127431	1430
		60	0.22	0	279559	4268
		75	0.36	0.0022	588389	8678
	20	40	0.0029	0	68034	540
		60	0.022	0	183543	1748
		80	0.031	0	476698	5669
		100	0.014	0	1399320	18852

Tableau A.11 Résultats pour l'instance de terrain *Banana*^E.

Terrain	p	n	$\mathcal{V}^{\%} \times 10^2$	$\mathcal{N}_{nc}^{\%}$	Évaluations	Temps (s)
<i>Banana</i> ^E	4	8	68	0	6294	152
		12	23	10	15727	236
		16	17	21	27227	465
		20	1.4	44	65183	1137
	7	14	9	0	11904	443
		21	13	0	33934	1423
		28	28	0.84	79240	658
		35	20	1.5	142464	1438
	10	20	0.04	0	22921	1072
		30	1.7	0	82985	686
		40	3.2	0.014	126027	1362
		50	1.3	0.76	358349	4542
	15	30	0.014	0	42112	352
		45	0.17	0	135937	1438
		60	0.22	0	258306	3435
		75	0.27	0.36	847102	13471
	20	40	0.0054	0	46000	342
		60	0.0074	0	184261	1801
		80	0.033	0	516637	5910
		100	0.044	0	918727	12134

Tableau A.12 Résultats pour l'instance de terrain *Banana*^B.

Terrain	p	n	$\mathcal{V}^{\%} \times 10^2$	$\mathcal{N}_{nc}^{\%}$	Évaluations	Temps (s)
<i>Banana</i> ^B	4	8	0.006	0	3537	70
		12	20	2.1	10275	183
		16	3.7	18	14529	217
		20	2.9	29	43622	717
	7	14	0.0042	0	7486	269
		21	2.8	0	25151	912
		28	3.3	0.32	67176	541
		35	2.2	3.8	110116	996
	10	20	0.004	0	11629	446
		30	0.03	0	43733	346
		40	0.72	0	109932	1055
		50	1.6	0.085	229120	2628
	15	30	0.0036	0	27093	217
		45	0.0016	0	73039	781
		60	0.0022	0	183074	2356
		75	0.056	0	430502	6198
	20	40	0.0029	0	46020	477
		60	0.0013	0	95452	1371
		80	0.001	0	195743	3212
		100	0.00099	0	402981	7749

Tableau A.13 Résultats pour l'instance de terrain *Mtl*.

Terrain	p	n	$\mathcal{V}^{\%} \times 10^2$	$\mathcal{N}_{nc}^{\%}$	Évaluations	Temps (s)
<i>Mtl</i>	4	8	42	0	5095	133
		12	69	4.9	12019	293
		16	11	17	31048	621
		20	3.1	32	62825	965
	7	14	0.2	0	10884	886
		21	7.3	0.011	34373	1357
		28	10	0.51	97826	904
		35	1.5	9	148557	1447
	10	20	0.021	0	19186	783
		30	0.86	0	49048	321
		40	1.8	0	128618	985
		50	8	0.096	270779	2648
	15	30	0.0078	0	33128	211
		45	0.0035	0	79079	662
		60	0.092	0	225988	2190
		75	0.3	0	473171	5273
	20	40	0.0034	0	47667	342
		60	0.0025	0	104183	1010
		80	0.0025	0	282027	3488
		100	0.023	0	699783	9584