

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

EFFETS DE LA DISPERSION ET DE LA FORME DU SPECTRE DE LA
SOURCE EN TOMOGRAPHIE PAR COHÉRENCE OPTIQUE

GABY TOUMA

DÉPARTEMENT DE GÉNIE PHYSIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE D'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE PHYSIQUE)

SEPTEMBRE 2005



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 978-0-494-16860-8

Our file Notre référence

ISBN: 978-0-494-16860-8

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.


Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

EFFETS DE LA DISPERSION ET DE LA FORME DU
SPECTRE DE LA SOURCE EN TOMOGRAPHIE
PAR COHÉRENCE OPTIQUE

présenté par: GABY Touma

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. BURES Jacques, D. Sc., président

M. MACIEJKO Romain, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. CONAN Jean, Ph.D., membre

À mes chères Marie
Et
À la chère mémoire de Samir

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je voudrais exprimer un profond sentiment de gratitude envers M. Romain Maciejko qui a accepté d'être mon directeur de recherche en génie physique, bien que je vienne du génie électrique, après une dizaine d'année d'interruption d'études. Je tiens encore à le remercier, pour tout son support académique et financier durant ma période d'étude.

Je voudrais aussi remercier M. Lionel Carrion pour les échantillons numériques et les précieux articles qu'il m'a fournis.

Enfin, je voudrais manifester un véritable geste de reconnaissance envers M. Michel Lestrade pour toute l'aide qu'il m'a offerte, surtout je voudrais le remercier pour son aide en Matlab, pour les discussions que nous avons eues ensemble et pour ses inestimables commentaires et suggestions.

RÉSUMÉ

La tomographie par cohérence optique (TCO) est une technique d'imagerie assez récente qui fit son apparition vers l'année 1990. Son importance réside dans le fait qu'elle surpasse en résolution toutes les autres méthodes non invasives connues jusqu'à présent, notamment la tomographie par rayons X, la résonance magnétique, les ultrasons, etc.... D'où le grand intérêt qu'on a accordé à cette technique, surtout dans le domaine biomédical.

Les premières applications médicales furent dans le domaine du diagnostic ophtalmologique. Mais le progrès réalisé sur les sources optiques à large spectre, opérant dans le proche infrarouge, a ouvert le chemin pour des applications plus importantes en biopsie. Puisque cette plage de longueurs d'ondes est moins absorbée par les tissus biologiques, on peut donc espérer examiner des tissus assez profonds et utiliser la TCO pour la détection des maladies graves dans leur première phase d'apparition (Cancers et autres).

Cependant, un aspect important, lié à la dispersion, doit être traité. Il se résume par le fait qu'une très haute résolution longitudinale ($\approx 1\mu m$) exige une source à large spectre ($\Delta\lambda > 300nm$), et comme on s'intéresse à pouvoir obtenir des informations des zones les plus enfouies au dessous de la surface du spécimen, dans des milieux qui sont généralement dispersifs, les effets de la dispersion vont inévitablement apparaître: réduction de la résolution longitudinale, apparition de faux pics, oscillation des flancs des signatures,...

D'autre part, la forme du spectre de la source et sa stabilité jouent un rôle primordial dans la qualité des images obtenues: un spectre modulé, par exemple, introduira des signatures satellites fictives des points réflecteurs à l'intérieur du spécimen qui n'existent pas en réalité.

Nous avons alors présenté, dans une première étape, une analyse détaillée de ces effets dans l'hypothèse du régime linéaire, en exposant les équations mathématiques qui les décrivent.

Comme remède à ces problèmes, il existe deux approches :

Une approche standard consiste à introduire dans le bras de référence de l'interféromètre, des dispositifs correcteurs (par exemple des lignes à retard), mais il est difficile de faire une compensation précise puisqu'on traite des spécimens de natures et d'épaisseurs différentes, et on aura donc besoin d'un système de compensation dynamique asservi avec le mouvement de balayage en profondeur de l'échantillon d'une part, et avec la nature de cet échantillon d'une autre part.

La deuxième approche est une approche purement numérique basée sur des modèles mathématiques élaborés qui tiennent compte de ces effets et qui les éliminent par des techniques numériques appropriées. Nous nous sommes engagés plutôt dans cette voie, en présentant plusieurs méthodes déjà existantes dans les domaines temporel et spectral: les méthodes de l'arrangement spectral, de la déconvolution itérative avec contrainte, de l'auto-convolution généralisée, de l'intégration des signatures et de la corrélation avec un noyau dispersif. Nous avons analysé les avantages et les limitations de ces techniques.

Enfin, nous avons présenté deux approches complètement nouvelles que nous avons, nous-mêmes développées et intitulées: méthode par arrangement spectral et transformée en ondelettes (ASTO) et méthode des pseudo-ondelettes du signal à vide (POSAV). Nous avons montré que les résultats obtenus avec ces deux méthodes sur des échantillons biologiques réels sont comparables et dans certains aspects meilleurs à ceux obtenus par la méthode de la déconvolution itérative.

Nous avons conclu ce mémoire avec quelques suggestions pour améliorer les approches ASTO et POSAV.

ABSTRACT

Optical coherence tomography (OCT) is a relatively recent imaging technique which appeared around 1990. Its importance lies in the fact that it surpasses all other non invasive methods known at the present time such as X-rays, magnetic resonance, ultrasound, etc...Hence, a great interest has been given to this technique, especially in the biomedical field.

The first medical applications were in the ophthalmologic diagnostics. But the progress achieved on broad spectrum optical sources, operating in the near infra-red, opens the way to more important applications in biopsy. Because this band of wavelengths is less absorbed by the biological tissues, there is a hope to probe relatively thicker tissues and then utilize OCT to detect major diseases in their early stage (cancers and others).

However, one important issue has to be addressed; it is due to the medium dispersion effects resulting from the sources spectrum width ($\Delta\lambda > 300nm$), needed to achieve a high longitudinal resolution ($\approx 1\mu m$), especially if we are interested in getting information, from buried zones, as deep as possible, beneath the tissue surface. In such a case, dispersion effects will inevitably appear: reduction of the longitudinal resolution, appearance of spurious peaks, oscillation of signatures tails, etc ...

Also, the source spectrum shape and stability play a major role in images quality: For example, a modulated spectrum introduces spurious signatures of reflective points inside the specimen.

In the first part of this work, we present a detailed analysis of the above mentioned dispersion effects in the linear regime and we present the mathematical formulation which describes them.

As remedies to these effects, there are two approaches:

The standard approach consists in introducing a compensating element (for example delay lines) in the reference arm, but this is difficult to implement since we are dealing with specimens of different natures and thicknesses. Hence, we need a dynamic compensation system, tracking the movement of the depth scans inside the sample on the one hand, and matching with the nature of the sample on the other.

The second approach would be purely numerical, based on elaborate mathematical model which take into account the dispersion and source shape effects, and then eliminate them via adequate numerical techniques.

We have chosen the latter approach, and present several existing temporal and spectral methods: spectral shaping, constrained iterative deconvolution, generalized auto-convolution, integration of the signatures and correlation with a dispersive kernel. We analyze all these techniques and show their advantages and limitations.

Finally, we present two completely novel approaches developed by ourselves and which we have identified as: spectral arrangement and wavelet transform (ASTO), and pseudo-wavelet with the empty interferometer signal (POSAV). We showed that the results obtained with these new techniques, on real biological samples, are equivalent and in some aspects better than those obtained by the constrained iterative deconvolution.

We conclude this thesis with some suggestions for the future improvements of these newly developed techniques.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE.....	iv
REMERCIEMENTS.....	v
RÉSUMÉ.....	vi
ABSTRACT.....	ix
TABLES DES MATIÈRES.....	xi
LISTE DES FIGURES.....	xv
LISTE DES ABBRÉVIATIONS ET DES SYMBOLES.....	xxi
LISTE DES ANNEXES.....	xxiii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION.....	1
1.1 Description générale d'un système de TCO.....	1
1.2 Étude analytique de l'interféromètre de Michelson.....	2
1.3 Relation fondamentale entre l'interférogramme et le spectre de la source.....	4
1.3.1 Spectre gaussien.....	5
1.3.2 Spectre lorentzien.....	5
1.3.3 Spectre rectangulaire.....	6
1.3.4 Conclusions.....	6
1.4 Spectres et interférogrammes réels.....	7
1.5 Remarque.....	9
1.6 Temps de cohérence et longueur de cohérence.....	10
CHAPITRE 2 EFFETS DE LA DISPERSION SUR UN SIGNAL DE TCO	12
2.1 Introduction.....	12
2.2 Effet du coefficient de dispersion du premier ordre.....	13
2.3 Effet du coefficient de dispersion du second ordre.....	14
2.4 Effet de dispersion des ordres supérieurs.....	15

2.5 Autre effet de la dispersion.....	17
---------------------------------------	----

CHAPITRE 3 ÉLIMINATION DES EFFETS DUS À LA FORME DU SPECTRE

.....	23
3.1 Introduction.....	23
3.2 Déconvolution.....	24
3.2.1 Déconvolution directe.....	24
3.2.2 Déconvolution par itération avec contrainte.....	24
3.2.3 Résultats expérimentaux.....	27
3.3 Arrangement spectral.....	30
3.3.1 Introduction.....	30
3.3.2 Étapes de la méthode.....	30
3.3.3 Résultats expérimentaux.....	31

CHAPITRE 4 MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR ÉLIMINER LA DISPERSION

.....	35
4.1 Méthode de l'auto -convolution généralisée.....	35
4.1.1 Introduction.....	35
4.1.2 Formulation mathématique.....	35
4.1.3 Interprétation et analyse.....	38
4.1.4 Simulations numériques.....	40
4.1.5 Conclusion.....	44
4.2 Méthode de l'intégration des signatures	44
4.2.1 Introduction.....	44
4.2.2 Formulation mathématique.....	44
4.2.3 Interprétation et suggestion.....	45
4.2.4 Remarques.....	45
4.3 Méthode de la corrélation avec un noyau dispersif.....	46
4.3.1 Introduction.....	46

4.3.2	Formulation mathématique.....	46
4.3.2.1	Construction du signal noyau.....	46
4.3.2.2	Propriété fondamentale du signal noyau.....	47
4.3.2.3	Compensation de la dispersion dans un signal de TCO.....	48
4.3.3	Récapitulation.....	49
4.3.4	Remarques.....	50
4.3.5	Simulation numérique.....	50
4.4	Méthode spectrale pour éliminer la dispersion.....	52

CHAPITRE 5 DÉTECTION ET CORRECTION DES SIGNATURES PAR LA MÉTHODE DE L'ARRANGEMENT SPECTRAL ET DES TRANSFORMÉES EN ONDELETTES (ASTO).....53

5.1	Introduction.....	53
5.2	Transformée en ondelette (TO).....	54
5.2.1	Aperçu historique.....	54
5.2.2	Sommaire sur les transformées en ondelette continue et discrète.....	54
5.2.3	Technique d'élagage en utilisant une TOD.....	58
5.3	Détection des pics des signatures en utilisant les transformées en ondelette.....	59
5.4	Correction de l'élargissement des signatures dû à la dispersion.....	61
5.5	Récapitulation de la méthode suggérée.....	61
5.6	Résultats expérimentaux.....	62
5.6.1	Tissu d'oignon imagé avec le laser Titane:Saphir.....	62
5.6.2	Ruban adhésif et écailles de poisson imagés avec la diode JDS.....	70
5.7	Conclusion.....	74

CHAPITRE 6 DÉTECTION ET CORRECTION DES SIGNATURES PAR LA MÉTHODE DES PSEUDO-ONDELETTES DU SIGNAL À VIDE (POSAV).....75

6.1	Introduction.....	75
-----	-------------------	----

6.2 Formulation mathématique.....	75
6.3 Remarques.....	78
6.4 Élimination des lobes secondaires.....	79
6.5 Résultats expérimentaux.....	81
6.5.1 Trace de la section 3.2.3.....	81
6.5.2 Tissu d'oignon imagé avec le laser Titane:Saphir.....	84
6.5.3 Ruban adhésif et écailles de poisson imagés avec la diode JDS.....	88
6.6 Conclusion.....	92
 CONCLUSION.....	93
 RÉFÉRENCES.....	97
 ANNEXES.....	101

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Schéma bloc d'un interféromètre de Michelson	2
Figure 1.2	L'auto-corrélation et le spectre effectif de la source JDS.....	8
Figure 1.3	L'auto-corrélation et le spectre effectif du laser Titane:Saphir pulsé.....	9
Figure 1.4	Différents cas de chevauchement entre deux impulsions gaussiennes. (Axes horizontaux en unité arbitraire.).....	11
Figure 2.1	Effets de dispersion du second et du troisième ordre. Amplitude des impulsions en fonction du temps. (Unités arbitraires sur les axes horizontaux et verticaux.).....	16
Figure 2.2	Effets des coefficients de dispersion du second et du troisième ordre sur une impulsion gaussienne se propageant dans un milieu linéaire d'après [6, page 78]. Amplitudes normalisées en fonction du temps. (Unité arbitraire sur l'axe horizontal.).....	17
Figure 2.3	Subdivision des pics induite par le chevauchement de deux impulsions dans un milieu dispersif. Intensité optique (unité arbitraire) en fonction de la position dans l'échantillon (en μm).....	19
Figure 2.4	Subdivision des pics induite par le chevauchement de deux impulsions dans un milieu dispersif d'après [9] obtenue en utilisant la formule de Danielson et al. [10]. (L'axe horizontal est en millimètres, l'axe vertical en unités arbitraires)	20
Figure 2.5	Interférogramme à vide normalisé de la diode supra luminescente. (Axe horizontal en micromètres).....	21
Figure 2.6	Résultats expérimentaux du phénomène d'apparition des pics. (a) Sans la lame de verre. (b) Avec la lame de verre. (Axes horizontaux en millimètres.)	22
Figure 3.1	Différentes étapes de la déconvolution par itération d'une trace de TCO. Intensité optique normalisée en fonction du point d'échantillonnage	27

Figure 3.2	Image du ruban adhésif et d'écailles de poisson obtenue à partir du signal brut. (Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.).....	29
Figure 3.3	Image du ruban adhésif et d'écailles de poisson après une seule itération. (Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.)	29
Figure 3.4	Image du ruban adhésif et d'écailles de poisson après 10 itérations. (Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.)	30
Figure 3.5	Arrangement spectral avec deux spectres différents: large à gauche et étroit à droite. (a), (b), (e) et (f): axes verticaux en unité arbitraire, axes horizontaux en unité arbitraire de fréquence. (c), (d), (g) et (h): intensité optique normalisée en fonction du point d'échantillonnage.....	32
Figure 3.6	Image du ruban adhésif et d'écailles de poisson obtenue par la méthode de l'arrangement spectral. (Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.).....	34
Figure 4.1	Auto-convolution généralisée de deux impulsions gaussiennes largement espacées. Intensité optique normalisée en fonction du temps (en fs)	41
Figure 4.2	Auto-convolution généralisée de deux impulsions réelles et identiques. Intensité optique normalisée en fonction du temps (unité arbitraire).....	42
Figure 4.3	Auto-convolution généralisée de deux impulsions gaussiennes en cas de chevauchement. Intensité optique normalisée en fonction du temps (en fs)	43
Figure 4.4	Élimination de la dispersion par la méthode de la corrélation avec un noyau dans le cas du signal dispersé par une lame de microscope (Axes horizontaux et verticaux en unités arbitraires).....	51
Figure 5.1	Schéma bloc d'une décomposition d'un signal en coefficients de détails et d'approximations en utilisant une TOD (d'après [31]).....	58

- Figure 5.2** (a) Spectre gaussien équivalent ayant les 3 premiers moments égaux à ceux du spectre effectif du laser Titane:Saphir. (b) Fonction de transfert correspondante. (Axes horizontaux et verticaux en unités arbitraires.).....63
- Figure 5.3** Graphique de la centième trace longitudinale avant arrangement spectral (trait pointillé) et après arrangement spectral (trait continu): intensité optique normalisée en fonction de la position dans l'échantillon en unité arbitraire 64
- Figure 5.4** Courbe SAP vis-à-vis de la trace arrangée avec les positions des maximums sur la courbe SAP indiquées par des cercles. (Les chiffres sur les axes horizontaux représentent les points d'échantillonnage et correspondent à des positions physiques dans l'échantillon.).....65
- Figure 5.5** Signal brut mesuré vis-à-vis du signal construit en implantant des courbes gaussiennes centrées sur les positions des pics supérieurs au seuil choisi. (Les chiffres sur les axes horizontaux représentent les points d'échantillonnage et correspondent à des points physiques dans l'échantillon.).....66
- Figure 5.6** Image de tissu d'oignon obtenue à partir du signal mesuré brut non traité. (Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.) 67
- Figure 5.7** Image de tissu d'oignon obtenue par la méthode de déconvolution itérative. (Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.) 68
- Figure 5.8** Image de tissu d'oignon obtenue par la méthode ASTO pour un seuil de 1%. (Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.) 68
- Figure 5.9** Spectre gaussien choisi ayant un contenu spectral nettement inférieur au spectre effectif. (Axe vertical en unité arbitraire, axe horizontal en unité de fréquence arbitraire.).....69

- Figure 5.10** Image du tissu d'oignon obtenue avec un spectre gaussien plus étroit que celui obtenu avec le critère du second moment. (Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.).....70
- Figure 5.11** Graphiques relatifs aux différentes étapes de la méthode ASTO appliquée à la 100^{ième} trace de l'échantillon ruban adhésif et écailles de poisson. (a) et (b): axes verticaux en unité arbitraire, axes horizontaux en unité de fréquence arbitraire. (c) et (d): intensités normalisées en fonction du point d'échantillonnage.....71
- Figure 5.12** Image du ruban adhésif et d'écailles de poisson obtenue par ASTO pour un seuil de 10%. (Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.).....72
- Figure 5.13** Image du ruban adhésif et d'écailles de poisson obtenue par ASTO pour un seuil de 5%. (Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.).....73
- Figure 5.14** Image du ruban adhésif et d'écailles de poisson obtenue par ASTO pour un seuil de 1%. (Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.).....73
- Figure 6.1** Le paquet de 6 pseudo-ondelettes normalisées obtenues à partir du signal à vide du laser Titane:Saphir. (Axe horizontal en unité de temps arbitraire.) 80
- Figure 6.2** (a) Les signaux de détection $\overline{D}_j^2(t)$ correspondant aux différentes pseudo-ondelettes. (b) La courbe SAP obtenue en faisant la moyenne des courbes en (a) suivie d'un filtrage. (Axes horizontaux et verticaux en unités arbitraires.) 80
- Figure 6.3** Deux pseudo-ondelettes normalisées obtenues à partir du signal à vide de la diode JDS. (Axe horizontal en unité de temps arbitraire.).....82
- Figure 6.4** La trace de la section 3.2.3 traitée par POSAV en utilisant une seule pseudo-ondelette. Courbes normalisées: signal brut, SAP et signal construit en fonction du point d'échantillonnage.....83

- Figure 6.5** La trace de la section 3.2.3 traitée par POSAV en utilisant 4 pseudo-ondelettes. Courbes normalisées: signal brut, SAP et signal construit en fonction du point d'échantillonnage.....83
- Figure 6.6** Courbe SAP vis-à-vis du signal brut (pointillé) et positions des maximums sur la courbe SAP signalées par des cercles. (Les chiffres sur les axes horizontaux représentent les points d'échantillonnage et correspondent à des positions physiques dans l'échantillon.).....85
- Figure 6.7** Image du tissu d'oignon obtenue par POSAV. (Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.).....86
- Figure 6.8** Image du tissu d'oignon obtenue par POSAV avec un seuil de détection bas. (Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.).....87
- Figure 6.9** Image du tissu d'oignon obtenu par POSAV avec un seuil de détection haut. (Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.).....87
- Figure 6.10** Courbe SAP vis-à-vis du signal brut (pointillé) et position des maximums de la 100^{ième} trace. (Les chiffres sur les axes horizontaux représentent les points d'échantillonnage et correspondent à des positions physiques dans l'échantillon.).....88
- Figure 6.11** Image du ruban adhésif et d'écailles de poisson obtenue par POSAV avec un seuil de 10%. (Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.).....90
- Figure 6.12** Image du ruban adhésif et d'écailles de poisson obtenue par POSAV pour un seuil de 5%. (Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.).....90
- Figure 6.13** Image du ruban adhésif et d'écailles de poisson obtenue par POSAV avec un seuil de 1%. (Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.).....91

Figure 6.14	Structure d'une écaille de poisson obtenue par microscope électronique d'après [40].....	91
--------------------	--	----

LISTE DES ABBRÉVIATIONS ET DES SYMBOLES

ASTO	Arrangement Spectral et Transformée en Ondelette
BS	Beam Splitter
FFT	Fast Fourier Transform
POSAV	Pseudo-Ondelette du Signal À Vide
SAP	Scale Average Power
TCO	Tomographie par Cohérence Optique
TO	Transformée en ondelette
TOC	Transformée en ondelette continue
TOD	Transformée en ondelette discrète
$CP[h(t)]$	Contrainte de positivité appliquée à $h(t)$
F	Opérateur de la transformée de Fourier
F^{-1}	Opérateur de la transformée de Fourier inverse
$\otimes$	Opérateur de corrélation
$*$	Opérateur de convolution
L_c	Longueur de cohérence dans la source dans le vide
T_c	Temps de cohérence de la source dans le vide
β_1	Coefficient de dispersion du premier ordre
β_2	Coefficient de dispersion du second ordre
β_3	Coefficient de dispersion du troisième ordre
n	Indice de phase
n_g	Indice de réfraction du groupe
v_g	Vitesse du groupe
C	Vitesse de la lumière dans le vide
$\hat{\Gamma}_0$	Fonction d'auto-corrélation
Γ_0	Enveloppe de la fonction d'auto-corrélation

$\hat{\Gamma}_c$	Fonction de corrélation croisée
Γ_c	Enveloppe de la fonction de corrélation croisée
w_0	Pulsation centrale de la source optique
ν_0	Fréquence centrale de la source optique
λ_0	Longueur d'onde centrale de la source optique

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE A FONCTION DE CORRÉLATION CROISÉE ET TEMPS DE COHÉRENCE POUR UN ÉCHANTILLON DISPERSIF.....	101
A.1 Calcul de la fonction de corrélation croisée.....	101
A.2 Calcul du temps de cohérence.....	103
ANNEXE B DÉVELOPPEMENT DES EXPRESSIONS RELATIVES À L'AUTO-CONVOLUTION GÉNÉRALISÉE.....	106
B.1 Calcul de l'enveloppe de la fonction de corrélation croisée.....	106
B.2 Calcul de la fonction d'auto-convolution généralisée.....	106
ANNEXE C DÉVELOPPEMENT DE L'INTÉGRALE DES SIGNATURES	116
ANNEXE D DÉMONSTRATIONS DES EXPRESSIONS RELATIVES À LA MÉTHODE DE LA CORRÉLATION AVEC UN NOYAU DISPERSIF.....	118
ANNEXE E RÉSUMÉ DE LA MÉTHODE DE BRINKMEYER ET AL.....	122

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 Description générale d'un système de TCO

Dans sa configuration la plus simple, la TCO est basée sur l'interférence de deux faisceaux optiques dans un interféromètre de Michelson (figure 1.1). Celui-ci est alimenté par une source optique à faible cohérence temporelle ; les rayons de la source, incident sur un cube séparateur (Beam Splitter), se divisent en un faisceau $E_R(t)$ de référence et un faisceau $E_S(t)$ illuminant le spécimen. $E_R(t)$ est réfléchi sur un miroir de référence qui sert à fournir l'information sur la position du point examiné à l'intérieur de l'échantillon. Le faisceau $E_S(t)$, après réflexion dans le spécimen, interfère avec $E_R(t)$ à la sortie du cube séparateur. Le signal d'interférence est capté par un photodétecteur et transformé en un signal électrique contenant l'information sur les caractéristiques physiques du spécimen. Notons que ce signal sera numérisé pour être traité par un système d'analyse informatisé. Pour obtenir une image complète de l'objet à observer, le système optique effectue une série de balayages en profondeur à des positions latérales juxtaposées. En général, le balayage en profondeur se fait par le biais d'un mouvement rectiligne uniforme du miroir de référence qui sera alors monté sur un moteur de translation de très haute stabilité. Pour déterminer la position des points de réflexion, l'intensité captée par le photodétecteur est enregistrée en fonction de la position du miroir de référence: au maximum des franges d'interférence, c'est-à-dire, au sommet des enveloppes du signal enregistré, les chemins optiques dans les deux bras de l'interféromètre sont identiques et la position inconnue du point réflecteur dans le spécimen est déduite de la position connue du miroir de référence. Pour faire le balayage latéral, le spécimen est monté sur un actuateur à deux dimensions qui sert à modifier la position transversale des points à observer, une fois qu'un balayage longitudinal est achevé.

1.2 Étude analytique de l'interféromètre de Michelson

Le cœur du système de TCO est un interféromètre de Michelson et nous étudierons dans ce chapitre le fonctionnement de ce dispositif à vide. Les résultats obtenus seront étendus dans les chapitres suivants au cas où le dispositif est chargé par le spécimen à analyser.

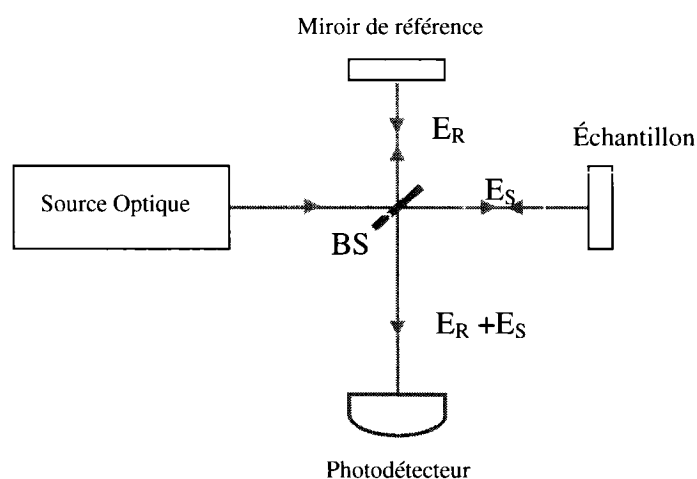


Figure 1.1 Schéma bloc d'un interféromètre de Michelson

On se place dans le cas où l'échantillon dans le bras de mesure est remplacé par un miroir plan supposé parfaitement réfléchissant et on suppose dans cette approche que tous les éléments du système sont parfaits (pas de dépendance spectrale, pas d'aberrations, pas de bruit,...).

Soit $\hat{E}(t)$ le champ complexe en provenance de la source lumineuse; alors les champs électriques complexes circulant dans les bras de mesure et de référence s'écrivent respectivement:

$$\hat{E}_S(t) = K_S \hat{E}(t) \quad (1.1)$$

$$\hat{E}_R(t) = K_R \hat{E}(t) \quad (1.2)$$

Nous supposons dans ce développement que K_S et K_R sont deux constantes réelles caractérisant les pertes dans les deux bras.

Ces deux signaux se réfléchissent sur les deux miroirs et se recombinent à la sortie du cube séparateur pour donner un signal d'interférence:

$$\hat{E}_d(t) = \hat{E}_S(t) + \hat{E}_R(t + \tau) = K_S \hat{E}(t) + K_R \hat{E}(t + \tau) \quad (1.3)$$

où le délai τ est introduit pour tenir compte de la différence des chemins optiques entre les deux bras de l'interféromètre.

Or, l'intensité optique du signal d'interférence captée par le photodétecteur, est proportionnelle à:

$$I_d(\tau) \propto \left\langle \left| K_S \hat{E}(t) + K_R \hat{E}(t + \tau) \right|^2 \right\rangle \quad (1.4)$$

où $\langle \rangle$ est une moyenne temporelle définie telle que:

$$\langle f(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

Posons :

$$\hat{\Gamma}_0(\tau) = \langle \hat{E}^*(t) \hat{E}(t + \tau) \rangle \quad (1.5)$$

Avec :

$$\hat{\Gamma}_0(\tau) = \Gamma_0(\tau) \exp\{-j[2\pi\nu_0\tau - \alpha(\tau)]\} \quad (1.6)$$

$\hat{\Gamma}_0(\tau)$ est dite par définition la fonction d'auto-corrélation de la source, $\Gamma_0(\tau)$ et $\alpha(\tau)$ représentent respectivement son enveloppe et sa phase lentes; ν_0 étant la fréquence centrale de la source. En développant (1.4) nous aboutissons à [1, page 162]:

$$I_d(\tau) \propto (K_S^2 + K_R^2) \Gamma_0(0) \left\{ 1 + 2 \frac{K_S K_R}{K_S^2 + K_R^2} \cdot \frac{\Gamma_0(\tau)}{\Gamma_0(0)} \cos[2\pi\nu_0\tau - \alpha(\tau)] \right\} \quad (1.7)$$

Avec:
$$\Gamma_0(0) = |\hat{\Gamma}_0(0)| = \langle |E(t)|^2 \rangle = \langle |E(t+\tau)|^2 \rangle = I_0 \quad (1.8)$$

Évidemment I_0 représente l'intensité moyenne de la source.

En assumant des pertes égales dans les deux bras de l'interféromètre ($K_s = K_r = K$) et en introduisant (1.8) dans (1.7), nous obtenons :

$$I_d(\tau) \propto 2K^2 I_0 \left\{ 1 + \frac{\Gamma_0(\tau)}{I_0} \cos[2\pi\nu_0\tau - \alpha(\tau)] \right\} \quad (1.9)$$

Normalisons (1.9) en posant:

$$\hat{\gamma}_0(\tau) = \frac{\hat{\Gamma}_0(\tau)}{I_0} = \gamma_0(\tau) \exp\{-j[2\pi\nu_0\tau - \alpha(\tau)]\} \quad (1.10)$$

$\hat{\gamma}_0(\tau)$ est dit le degré de cohérence complexe de la source [1, page 162]. Notons aussi que :

$$|\hat{\gamma}_0(0)| = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq |\hat{\gamma}_0(\tau)| \leq 1$$

En combinant (1.9) et (1.10), nous aboutissons alors à :

$$I_d(\tau) \propto 2K^2 I_0 \{1 + \gamma_0(\tau) \cos[2\pi\nu_0\tau - \alpha(\tau)]\} \quad (1.11)$$

Notons que dans (1.11), le premier terme $2K^2 I_0$ est un terme constant proportionnel à l'intensité moyenne de la source; le second $2K^2 I_0 \gamma_0(\tau) \cos[2\pi\nu_0\tau - \alpha(\tau)]$ est le signal utile décrivant les franges d'interférence, il représente la partie réelle de la fonction d'auto-corrélation et on l'appelle "interferogramme" dans la littérature courante.

1.3 Relation fondamentale entre l'interférogramme et le spectre de la source

Nous pouvons démontrer [2, page 506] que la fonction d'auto-corrélation normalisée est liée à la densité spectrale en puissance normalisée de la source par une transformée de Fourier de la forme :

$$\hat{\gamma}_0(\tau) = \int_0^\infty \hat{S}_0(\nu) \exp(-j2\pi\nu\tau) d\nu \quad (1.12)$$

Avec :

$$\int_0^{\infty} \hat{S}_0(\nu) d\nu = 1 \quad (1.13)$$

Donc, en connaissant le spectre de puissance de la source, nous pouvons obtenir la forme de l'interférogramme à vide par une transformée de Fourier. Prenons à titre indicatif quelques exemples de spectres théoriques:

1.3.1 Spectre gaussien

$$\hat{S}_0(\nu) = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\pi}\Delta\nu} \exp\left[-\left(2\sqrt{\ln 2} \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu}\right)^2\right] \quad (1.14)$$

Où $\Delta\nu$ représente la largeur totale à mi-hauteur du spectre.

En insérant (1.14) dans (1.12) et en intégrant nous trouvons [1, page 165]:

$$\hat{\gamma}_0(\tau) = \exp\left[-\left(\frac{\pi\tau\Delta\nu}{2\sqrt{\ln 2}}\right)^2\right] \exp(-j2\pi\nu_0\tau) \quad (1.15)$$

D'où l'on tire les expressions de l'enveloppe lente $\gamma_0(\tau)$ ainsi que celle de la phase lente $\alpha(\tau)$:

$$\gamma_0(\tau) = \exp\left[-\left(\frac{\pi\tau\Delta\nu}{2\sqrt{\ln 2}}\right)^2\right] \quad (1.16)$$

$$\alpha(\tau) = 0 \quad (1.17)$$

1.3.2 Spectre lorentzien

$$\hat{S}_0(\nu) = \frac{2(\pi\Delta\nu)^{-1}}{1 + \left(2\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu}\right)^2} \quad (1.18)$$

De même, en introduisant (1.18) dans (1.12) et en intégrant, nous obtenons [1, page 166]:

$$\hat{\gamma}_0(\tau) = \exp[-\pi\Delta\nu|\tau|] \exp[-j2\pi\nu_0\tau] \quad (1.19)$$

Alors :

$$\gamma_0(\tau) = \exp[-\pi\Delta\nu|\tau|] \quad (1.20)$$

et :

$$\alpha(\tau) = 0 \quad (1.21)$$

1.3.3 Spectre rectangulaire

$$\hat{S}_0(\nu) = \frac{1}{\Delta\nu} \text{rect}\left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu}\right) \quad (1.22)$$

De la même façon nous trouvons [1, page 167]:

$$\hat{\gamma}_0(\tau) = \sin c(\Delta\nu\tau) \exp(-j2\pi\nu_0\tau) \quad (1.23)$$

$$\gamma_0(\tau) = |\sin c(\Delta\nu\tau)| \quad (1.24)$$

$$\alpha(\tau) = 0 \quad \text{pour } 2n < |\Delta\nu\tau| < 2n+1; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.25)$$

$$\alpha(\tau) = \pi \quad \text{pour } 2n+1 < |\Delta\nu\tau| < 2n+2; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

1.3.4 Conclusions

- Les interférogrammes d'un interféromètre de Michelson à vide sont toujours des fonctions paires en τ et c'est là une propriété universelle d'un tel interféromètre: physiquement peu importe lequel des signaux dans les deux bras de l'interféromètre est en retard par rapport à l'autre [1, page 167].
- Pour une source ayant un spectre symétrique par rapport à la fréquence centrale, $\hat{\gamma}_0(\tau)$ est le produit d'un terme réel qui multiplie $\exp(-j2\pi\nu_0\tau)$; ceci n'est pas vrai si le spectre de la source est asymétrique [1, page 167].

1.4 Spectres et interférogrammes réels

Considérons maintenant le cas de certaines sources réelles utilisées dans notre laboratoire d'optoélectronique.

La figure 1.2(a) montre l'interférogramme obtenue avec la diode JDS, ou en termes mathématiques la quantité réelle $\Gamma_0(\tau)\cos[2\pi\nu_0\tau - \alpha(\tau)]$ obtenue par une mesure à vide de l'interféromètre du laboratoire.

La figure 1.2(b) représente l'enveloppe lente de l'interférogramme. Elle est obtenue en calculant d'abord son prolongement analytique par une transformée de Hilbert [2, page 495]:

$$\hat{\Gamma}_0(\tau) = \Gamma_0(\tau)\cos[2\pi\nu_0\tau - \alpha(\tau)] + j\Gamma_0(\tau)\sin[2\pi\nu_0\tau - \alpha(\tau)].$$

Puis nous tirons l'enveloppe de $\Gamma_0(\tau)$ en calculant le module de $\hat{\Gamma}_0(\tau)$.

Le graphique (c) montre le spectre effectif obtenu à partir de l'enveloppe lente par une transformée de Fourier rapide FFT. Celui-ci serait identique au spectre réel de la source uniquement dans le cas idéal d'un interféromètre parfaitement balancé et où tous les éléments du système (miroirs, lames, détecteur optique, actuateurs,...) sont parfaits. Pour cela nous insistons sur le terme effectif pour décrire le spectre résultant de notre système réel. Le graphique (d) montre le même spectre mais en décibels.

En revenant au graphique de l'enveloppe de la trace à vide, nous pouvons facilement remarquer la présence de plusieurs lobes secondaires, ceux-ci ont des effets nuisibles en TCO lorsque l'interféromètre est chargé avec l'échantillon à imager, car ils peuvent suggérer faussement l'existence de petites réflexions, donc des variations dans la structure du spécimen, absentes en réalité. Ce phénomène sera encore plus accentué lors d'un chevauchement entre deux signaux réfléchis à partir de deux surfaces voisines dans l'échantillon. En effet, un tel chevauchement peut produire une interférence constructive

entre les lobes secondaires du premier signal réfléchi avec ceux du second. Il en résulte de nouveaux lobes dont les amplitudes seront plus importantes que celle des lobes initiaux. Les lobes secondaires sont dus principalement à la forme non gaussienne du spectre effectif [12,13].

D'autre part, nous pouvons observer une symétrie presque parfaite de l'interférogramme, comme il faut s'attendre d'un interféromètre de Michelson équilibré.

Pour la source laser Titane:Saphir pulsé de notre laboratoire, nous remarquons dans la figure 1.3 que les lobes secondaires sont présents, mais leurs amplitudes par rapport au lobe principal sont beaucoup plus faibles que dans le cas de la diode JDS. De plus, nous observons une très légère asymétrie dans son interférogramme, probablement due à la dispersion et aux différentes aberrations chromatiques des éléments optiques utilisés lors de cette mesure.

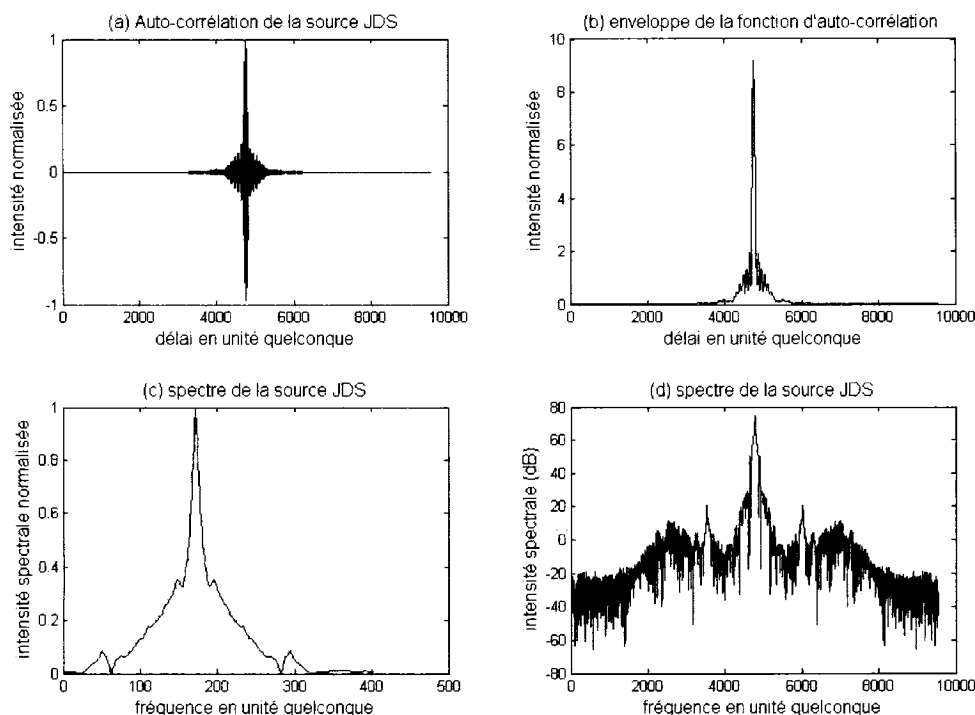


Figure 1.2 L'auto-corrélation et le spectre effectif de la source JDS

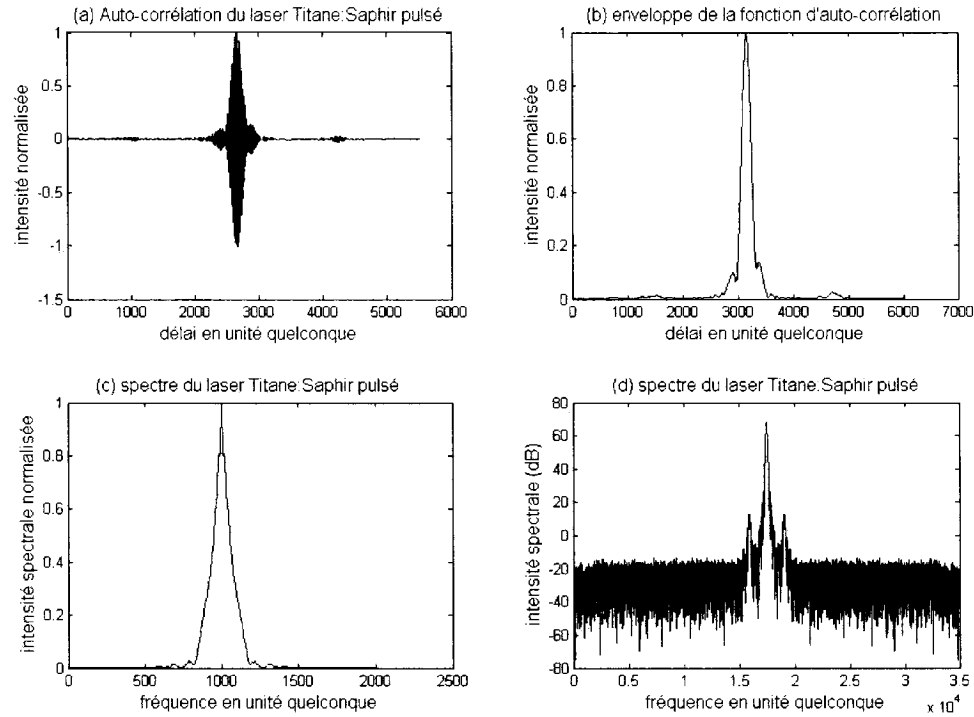


Figure 1.3 L'auto-corrélation et le spectre effectif du laser Titane:Saphir pulsé

1.5 Remarque

Il importe de noter dans ce contexte que dans le cas théorique d'un spectre effectif gaussien, le problème de lobes secondaires ne se pose pas. En effet, comme le montrent les équations (1.14) à (1.17), l'enveloppe de la fonction d'auto-corrélation d'un spectre effectif gaussien est elle-même gaussienne, donc dépourvue de tout lobe secondaire. Pour cette raison, ce spectre représente une situation idéale en tomographie par cohérence optique.

Remédier au problème causé par le spectre effectif des sources réelles constitue l'un des principaux objectifs de ce mémoire.

1.6 Temps de cohérence et longueur de cohérence

On définit le temps de cohérence T_c de l'interféromètre à vide par la durée totale durant laquelle $|\hat{\gamma}_0(\tau)| \geq \frac{1}{2}$ [9]; dans le cas d'une source gaussienne idéale et en utilisant (1.15) nous pouvons facilement trouver:

$$T_c = \frac{4 \ln 2}{\pi \Delta \nu} \equiv \frac{0,88 \lambda_0^2}{C \Delta \lambda} \quad (1.26)$$

où λ_0 représente la longueur d'onde centrale de la source et $\Delta \lambda$ sa largeur spectrale à mi-hauteur, C étant la vitesse de la lumière dans le vide.

La longueur de cohérence est définie naturellement par :

$$L_c = CT_c \equiv \frac{0,88 \lambda_0^2}{\Delta \lambda} \quad (1.27)$$

Pour un laser Titane:Saphir centré à $850nm$ et de largeur spectrale de $320nm$ nous obtenons une longueur de cohérence $L_c \approx 2\mu m$.

Voyons la signification physique de ces deux paramètres. Pour cela, imaginons un milieu optique non dispersif dans lequel il existe deux surfaces réfléchissantes séparées d'une distance optique δ . Et supposons qu'une impulsion gaussienne se propage dans ce milieu.

Nous obtenons alors deux impulsions réfléchies $\gamma_0(\tau)$ et $\gamma_0(\tau + 2\frac{\delta}{C})$ espacées de 2δ (ou

décalées temporellement de $2\frac{\delta}{C}$). Dans le cas où $2\delta < L_c$ (voir figure 1.4 (a) et 1.4 (b)),

les deux enveloppes se chevauchent de sorte que dans l'enveloppe résultante il sera impossible de discerner l'existence de deux réflexions. Par contre dans le cas où $2\delta > L_c$,

(figure 1.4 (c) et 1.4 (d)) même si les deux impulsions se touchent, nous pouvons facilement discerner deux réflexions dans l'enveloppe résultante. Les graphiques (e) et (f) obtenus pour $L_c = 2\delta$ représentent le cas limite entre ces deux situations, et par contre,

$\delta = \frac{L_c}{2}$ détermine la résolution longitudinale maximale qu'on peut s'attendre de la source utilisée, d'où la grande importance accordée à la longueur de cohérence dans un système de TCO.

Avec l'exemple du Titane:Saphir mentionné ci haut, nous pouvons espérer une résolution de:

$$\delta = \frac{L_c}{2} \cong 0,44 \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} \cong 1\mu m$$

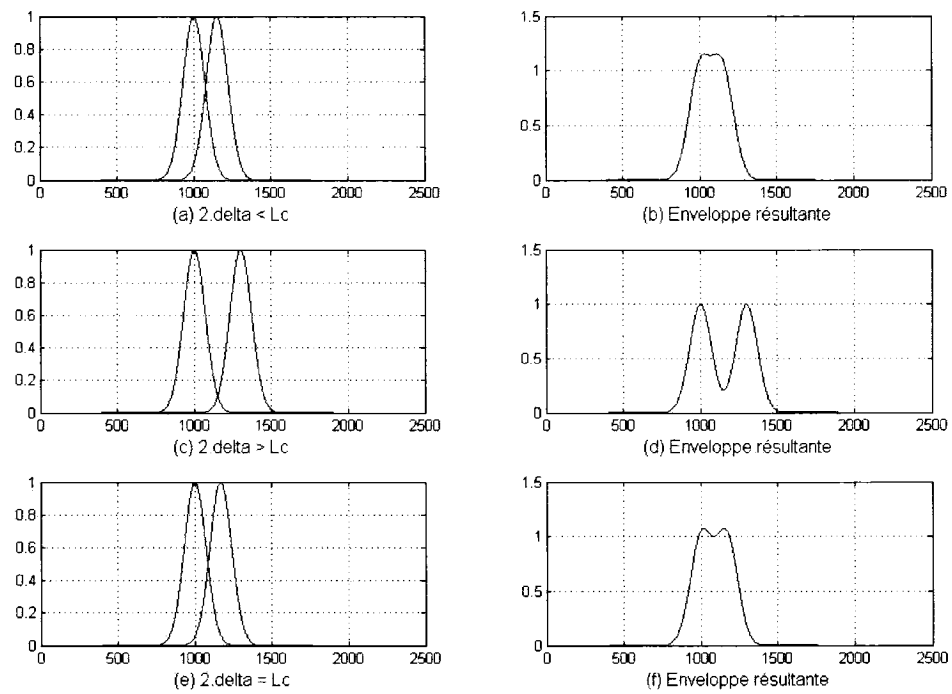


Figure 1.4 Différents cas de chevauchement entre deux impulsions gaussiennes.
(Axes horizontaux en unité arbitraire.)

CHAPITRE 2

EFFETS DE LA DISPERSION SUR UN SIGNAL DE TCO

2.1 Introduction

Comme on l'a déjà signalé, la dispersion affecte directement les performances d'un système de TCO. Pour le voir, considérons le cas idéal d'une source gaussienne caractérisée par son temps de cohérence T_c dans l'espace libre. Donc dans un interféromètre idéal à vide, et d'après les équations (1.16) et (1.26), l'enveloppe lente de la fonction d'auto-corrélation est donnée par :

$$\Gamma_0(\tau) = I_0 \exp \left[-4 \ln 2 \left(\frac{\tau}{T_c} \right)^2 \right] \quad (2.1)$$

Introduisons maintenant, dans le bras de mesure, un échantillon fictif constitué d'un seul point réflecteur situé dans un milieu dispersif. Ce milieu est caractérisé par sa constante de propagation $\beta(w)$ dont le développement en série de Taylor s'écrit sous la forme:

$$\beta(w) = \beta_0 + (w - w_0)\beta_1 + \frac{1}{2}(w - w_0)^2 \beta_2 + \frac{1}{6}(w - w_0)^3 \beta_3 + \dots \quad (2.2)$$

$$\beta_i = \left. \frac{d^i \beta}{dw^i} \right|_{w_0} \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

w_0 étant la pulsation centrale de la source. Notons particulièrement que le premier coefficient de dispersion β_1 est lié à la vitesse du groupe v_g par la relation :

$$\beta_1 = \frac{d\beta}{dw} = \frac{1}{v_g} \quad (2.4)$$

Comme dans le cas de l'interféromètre à vide, le photodétecteur capte la valeur moyenne de l'intensité résultant de l'interférence du signal en provenance des deux bras de l'interféromètre. On peut facilement démontrer [3,4] que dans le régime linéaire, ce signal de corrélation croisée est lié au signal d'auto-corrélation par la relation:

$$\hat{\Gamma}_c(\tau, z) = \hat{\Gamma}_0(\tau) * h(\tau, z) \quad (2.5)$$

où $h(\tau, z)$ représente la réponse impulsionnelle du point réflectif situé à l'abscisse $\frac{z}{2}$ dans l'échantillon.

Dans le cas d'une source gaussienne, (1.6), (1.16), (1.17), (2.1) et (2.5) entraînent :

$$\hat{\Gamma}_c(\tau, z) \equiv \Gamma_c(\tau, z) \exp(jw_0\tau) = \left\{ I_0 \exp \left[-4 \ln 2 \left(\frac{\tau}{T_c} \right)^2 \right] \exp(jw_0\tau) \right\} * h(\tau, z) \quad (2.6)$$

2.2 Effet du coefficient de dispersion du premier ordre

Nous avons établi à la fin du chapitre précédent que la résolution longitudinale dans le vide est liée à la longueur de cohérence de la source par la relation :

$$\delta = \frac{L_c}{2} \quad (2.7)$$

Dans un système de TCO, on relie les distances optiques aux distances géométriques par l'indice de groupe $n_g \equiv \frac{C}{v_g}$ et non par l'indice de phase n [5], ce qui signifie que la résolution longitudinale effective dans le milieu considéré sera donnée par:

$$\delta_e = \frac{\delta}{n_g} = \frac{L_c}{2n_g} \quad (2.8)$$

En tenant compte de (2.4), nous pouvons écrire :

$$n_g = \beta_1 \cdot C = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} > n \quad \text{puisque} \quad \frac{dn}{d\lambda} < 0,$$

et puisque $n > 1$, nous tirons que:

$$\delta_e < \frac{\delta}{n} \quad (2.9)$$

Donc, le premier coefficient de dispersion β_1 améliore la résolution.

2.3 Effet du coefficient de dispersion du second ordre

Supposons tout d'abord que les dispersions d'ordres supérieurs sont négligeables et observons l'effet de β_2 ; on peut démontrer [6, page 66] que dans ce cas:

$$h(\tau, z) = R_z F^{-1} \left\{ \exp \left[\frac{i\beta_2 z (w - w_0)^2}{2} \right] \right\} \quad (2.10)$$

où R_z représente le coefficient de réflexion d'un point situé à une profondeur $\frac{z}{2}$ dans l'échantillon. Ce coefficient est supposé être indépendant de la fréquence dans le cadre de cette analyse. F^{-1} est l'opérateur de la transformée de Fourier inverse.

En utilisant (2.10) dans (2.6), nous pouvons démontrer (voir A.1 annexe A) que l'enveloppe lente du signal de corrélation croisée est donnée par:

$$\Gamma_c(z, \tau) = I_0 R_z \frac{T_c}{[T_c^2 - i(8 \ln 2) \beta_2 z]^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ \frac{-(4 \ln 2) \tau^2}{[T_c^2 - i(8 \ln 2) \beta_2 z]} \right\} \quad (2.11)$$

et que le temps de cohérence T'_c associé à cette enveloppe vaut (voir A.2 annexe A):

$$T'_c = T_c \left[1 + \left(\frac{(8 \ln 2) \beta_2 z}{T_c^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.12)$$

Nous en déduisons la nouvelle longueur de cohérence:

$$L'_c = \frac{C}{n_g} T'_c \quad (2.13)$$

Donc, en se limitant aux effets de la dispersion de la vitesse de groupe, la fonction de corrélation croisée garde toujours la forme gaussienne de la fonction d'auto-corrélation mais subit une augmentation de sa longueur de cohérence (donc détérioration de la résolution) et ceci quelque soit le signe de β_2 .

2.4 Effet de dispersion des ordres supérieurs

Pour la majorité des milieux qui nous intéressent, à savoir les milieux biologiques tout spécialement, il suffit de se limiter au second ordre de dispersion [7]. Mais pour des milieux très dispersifs et des sources à très large spectre, les effets des ordres supérieurs apparaissent.

Envisageons l'effet additionnel du troisième ordre représenté par β_3 ; pour cela nous pouvons écrire dans ce cas que [6, page 77]:

$$h(\tau, z) = R_z F^{-1} \left\{ \exp \left[\frac{i\beta_2 z (w - w_0)^2}{2} + \frac{i\beta_3 z (w - w_0)^3}{6} \right] \right\} \quad (2.14)$$

En utilisant les propriétés de la convolution et de la transformée de Fourier et en notant que [16, page 578]:

$$F \left(\exp \left[-4 \ln 2 \left(\frac{\tau}{T_c} \right)^2 \right] \right) = \frac{\sqrt{\pi} T_c}{2\sqrt{\ln 2}} \exp \left(-\frac{T_c^2 w^2}{16 \ln 2} \right) \quad (2.15)$$

l'expression (2.6) peut être alors mise sous la forme :

$$|\Gamma_c(z, \tau)| = \left| F^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{\pi} I_0 R_z T_c}{2\sqrt{\ln 2}} \exp \left(-\frac{T_c^2 (w - w_0)^2}{16 \ln 2} \right) Q(w) \right\} \right| \quad (2.16)$$

avec:

$$Q(w) = \exp \left[\frac{i\beta_2 z (w - w_0)^2}{2} + \frac{i\beta_3 z (w - w_0)^3}{6} \right] \quad (2.17)$$

La solution analytique de l'équation (2.16) existe en terme de fonctions d'Airy [8] qui sont assez compliquées, mais cependant nous pouvons chercher facilement une solution numérique par *Matlab* :

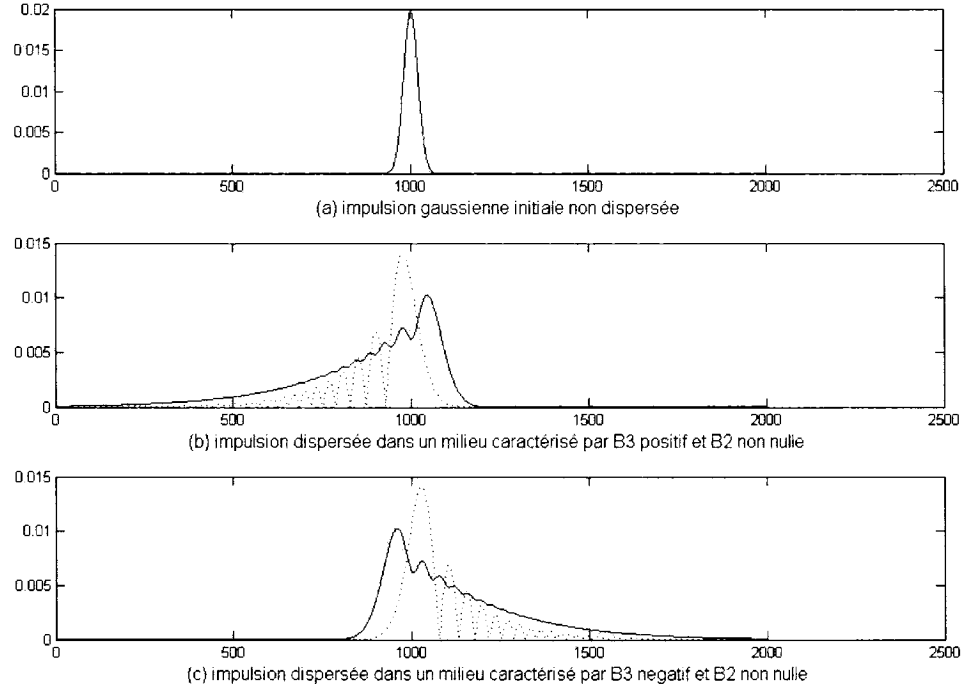


Figure 2.1 Effets de dispersion du second et du troisième ordre. Amplitude des impulsions en fonction du temps. (Unités arbitraires sur les axes horizontaux et verticaux.)

Les courbes de la figure 2.1 nous montrent l'évolution de l'enveloppe gaussienne pour des valeurs de β_3 positive et négative. Les courbes en trait continu en (b) et (c) sont tracées pour le cas $\beta_2 = 0$, dans le but d'isoler l'effet de β_3 tout seul. Nous constatons alors que l'impulsion se déforme et que des oscillations apparaissent sur le flanc avancé de l'impulsion pour β_3 négatif, et sur le flanc retardé pour les valeurs positives. L'amplitude de ces oscillations est proportionnelle au produit $\beta_3 z$.

Pour $\beta_2 \neq 0$, les oscillations de l'un des flancs, selon le signe de β_3 , sont toujours présentes, mais nous observons que les impulsions sont plus élargies et aplaties et que les

flancs oscillants sont plus ou moins soulevés comme le montrent les graphes en pointillé de la même figure.

Noter que nos graphiques concordent avec ceux montrés dans [6, page 78] dans le cadre de l'étude de l'effet de β_2 et β_3 sur la propagation d'une impulsion gaussienne dans une fibre optique comme le montre la figure 2.2

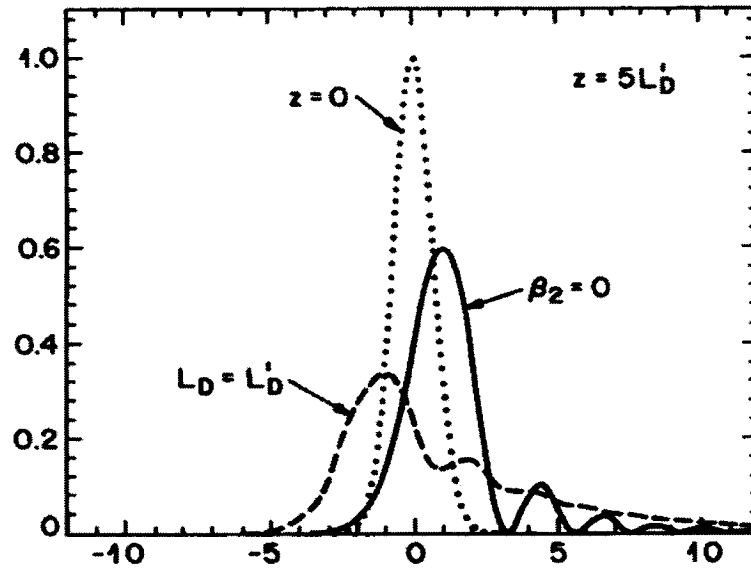


Figure 2.2 Effets des coefficients de dispersion du second et du troisième ordre sur une impulsion gaussienne se propageant dans un milieu linéaire d'après [6, page 78]. Amplitudes normalisées en fonction du temps. (Unité arbitraire sur l'axe horizontal.)

2.5 Autre effet de la dispersion

Considérons le cas de deux surfaces réfléchives enfouies dans un corps dispersif, et supposons que l'espacement optique de ces 2 surfaces est inférieur à la longueur de cohérence L_c' de la source dans le milieu considéré (définie par les équations (2.12) et (2.13)). Les signaux réfléchis de ces deux surfaces vont donc se chevaucher et interférer entre eux. Par conséquent, au lieu d'observer deux pics de réflexion, la dispersion va

provoquer leur subdivision en une série de pics plus étroits [9]. Tout se passe comme s'il y avait, non seulement deux couches réfléchives, mais plusieurs autres intercalées entre elles.

Pour décrire analytiquement cette situation, nous allons nous limiter au second ordre de dispersion et considérer comme toujours une forme gaussienne de l'impulsion incidente. Nous pouvons alors écrire que le signal résultant des deux réflexions a la forme:

$$\Gamma_s(z_1, \tau) = R_1 \Gamma(z_1, \tau - \tau_0) + R_2 \Gamma(z_1 + e_0, \tau - \tau_0 - \tau_e) \quad (2.18)$$

où $\Gamma(z_1, \tau - \tau_0)$ et $\Gamma(z_1 + e_0, \tau - \tau_0 - \tau_e)$ sont deux impulsions gaussiennes complexes dispersées ayant la forme décrite par l'équation (2.11) ; R_1 et R_2 sont les coefficients de réflexion de la première et la deuxième surface respectivement, z_1 est le trajet géométrique aller-retour qui sépare l'interface air -échantillon de la première surface réfléchive et e_0 le trajet géométrique aller -retour qui sépare les deux surfaces.

$\tau_0 = \frac{zn_g}{C}$: le délai du au parcours de l'onde de la distance z_1 .

$\tau_e = \frac{e_0 n_g}{C}$: le délai supplémentaire pour parcourir e_0

Le module de $\Gamma_s(z_1, \tau)$ est donné par :

$$|\Gamma_s(z_1, \tau)| = \left\{ R_1^2 |\Gamma(z_1, \tau - \tau_0)|^2 + R_2^2 |\Gamma(z_1 + e_0, \tau - \tau_0 - \tau_e)|^2 + 2R_1 R_2 \operatorname{Re}[\Gamma(z_1, \tau - \tau_0) \Gamma^*(z_1 + e_0, \tau - \tau_0 - \tau_e)] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.19)$$

En utilisant *Matlab*, nous avons simulé trois cas fictifs avec des sources gaussiennes centrées sur 850 nm et de largeurs spectrales 30 nm , 80 nm et 150 nm successivement. Nous avons considéré un milieu fictif caractérisé par une dispersion globale $\beta_2 z_1 = 1700 \text{ fs}^2$ et nous avons supposé arbitrairement un indice de groupe moyen de 1,5.

Nous avons pris la distance géométrique entre les deux surfaces réfléchives $e_0 = 20 \text{ }\mu\text{m}$,

et par conséquent la distance optique entre les deux surfaces sera $e = \frac{20}{1,5} = 13,3 \text{ }\mu\text{m}$.

Nous avons considéré arbitrairement $R_2 = 0,75R_1$. Pour ces sources nous pouvons calculer facilement les longueurs de cohérence dans le milieu en question en utilisant les équations (1.26), (2.12) et (2.13); nous trouvons successivement les valeurs 15,1; 35,7 et 66,7 μm . Toutes ces valeurs sont supérieures à e .

Dans la figure 2.3, nous avons tracé numériquement $|\Gamma_s(\tau)|$ pour les trois cas mentionnés en utilisant (2.11) et (2.19). Les courbes obtenues nous montrent clairement l'existence de pics d'interférence dus au chevauchement des deux impulsions dans le milieu dispersif considéré. Il est clair que le nombre de pics augmente avec la largeur spectrale de la source. Mentionnons que l'axe des abscisses est calibré en μm où l'abscisse 0 correspond à la position de la première surface réfléchive, et l'axe vertical est en unité arbitraire.

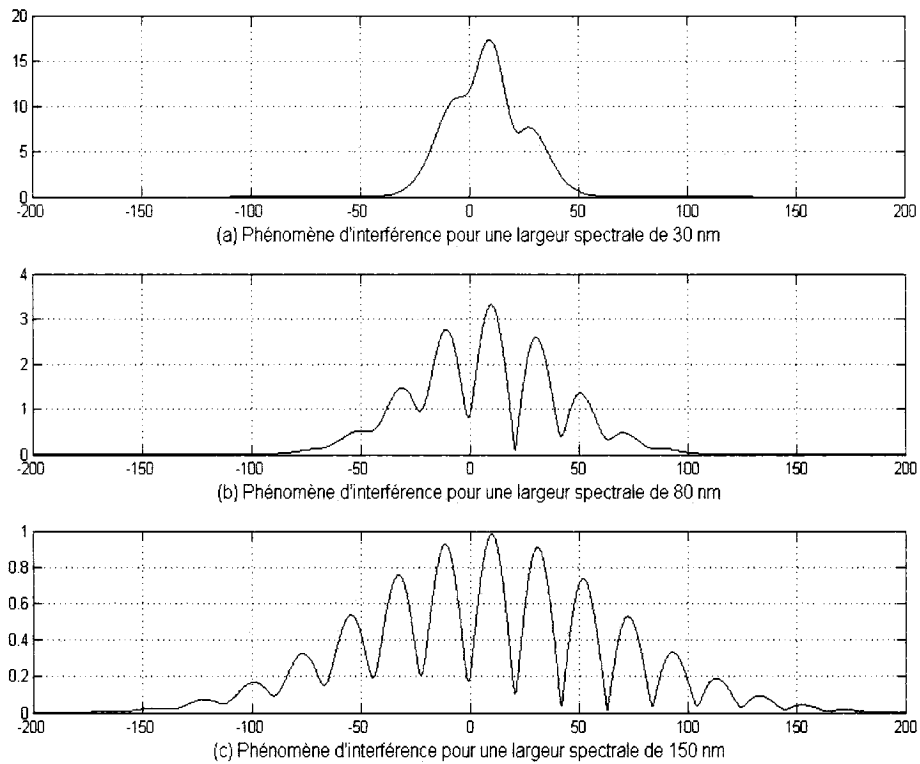


Figure 2.3 Subdivision des pics induite par le chevauchement de deux impulsions dans un milieu dispersif. Intensité optique (unité arbitraire) en fonction de la position dans l'échantillon (en μm).

Nos courbes ressemblent étroitement avec celles obtenues dans l'étude théorique et expérimentale faite par Fercher et al. [9]. Ils ont pris une lame de verre de BK7 comme milieu dispersif, et ils ont collé sur sa face arrière un film d'aluminium d'épaisseur $19 \mu m$ dont les faces avant et arrière jouent le rôle de deux surfaces réfléchives.

La figure 2.4 représentent les graphiques qu'ils ont obtenus par simulation numérique en utilisant une formule dans le domaine spectrale établie par Danielson et al. [10] :

$$|\Gamma_s(\tau)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} S(k) [R_1 \exp(-i\phi_1(k)) + R_2 \exp(-i\phi_2(k))] \exp(-ik\tau) dk \right|$$

Où k est le nombre d'onde, $S(k)$ spectre de la source, $R_{1,2}$ les coefficients de réflexion des deux surfaces, $\phi_{1,2}$ les phases spectrales données par $\phi_1(k) = kL_v n(k)$ et $\phi_2(k) = k(L_v + e_0)n(k)$ avec e_0 , L_v et $n(k)$ étant respectivement l'épaisseur du film d'aluminium, l'épaisseur du verre et l'indice de réfraction de ce dernier.

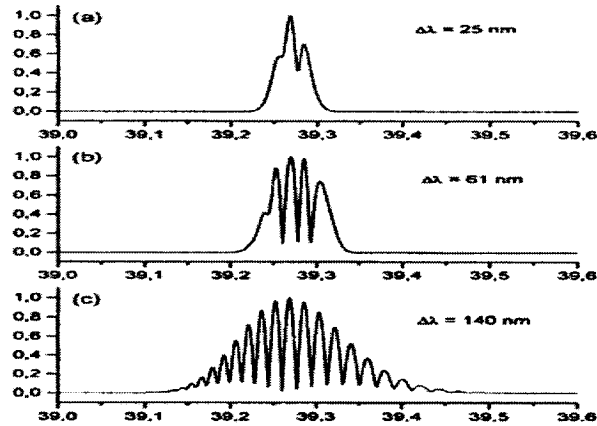


Figure 2.4 Subdivision des pics induite par le chevauchement de deux impulsions dans un milieu dispersif d'après [9], obtenue en utilisant la formule de Danielson et al. [10]. (L'axe horizontal est en millimètres, l'axe vertical en unité arbitraire)

Notons qu'en (a) et (c), la simulation a été faite avec des sources hypothétiques gaussiennes centrées sur 800 nm et qu'en (b), ils ont utilisé le spectre réel d'une diode supra lumineuse centré sur 800 nm et de largeur spectrale de 61 nm et dont l'interférogramme à vide est montré à la figure 2.5.

La figure 2.6 représente les résultats expérimentaux de [9] effectués avec la diode supra lumineuse. Les courbes (a) et (b) correspondent aux mesures de réflexion du film d'aluminium obtenues avec et sans la lame de verre respectivement, dans le but de faire la comparaison des réflexions obtenues en absence et en présence de la dispersion.

En (a), les pics d'interférence ont disparu et les petits pics qui y apparaissent sont dus aux lobes secondaires de l'enveloppe de l'interférogramme à vide de la diode utilisée comme on peut le remarquer en observant la figure 2.5. En (b), nous observons la présence des pics d'interférence et un bon accord avec le graphique de la figure 2.4 (b).

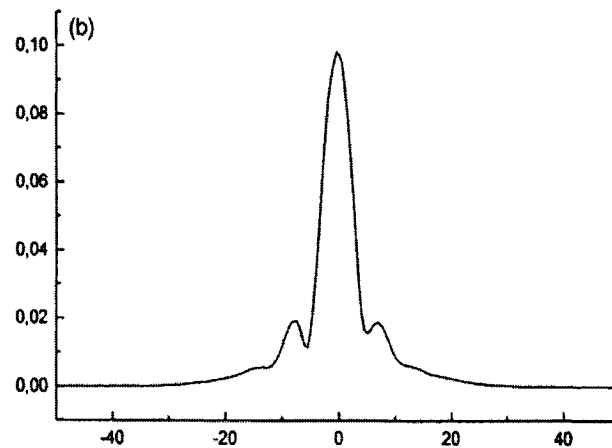


Figure 2.5 Interférogramme à vide normalisé de la diode supra lumineuse.
(Axe horizontal en micromètres.)

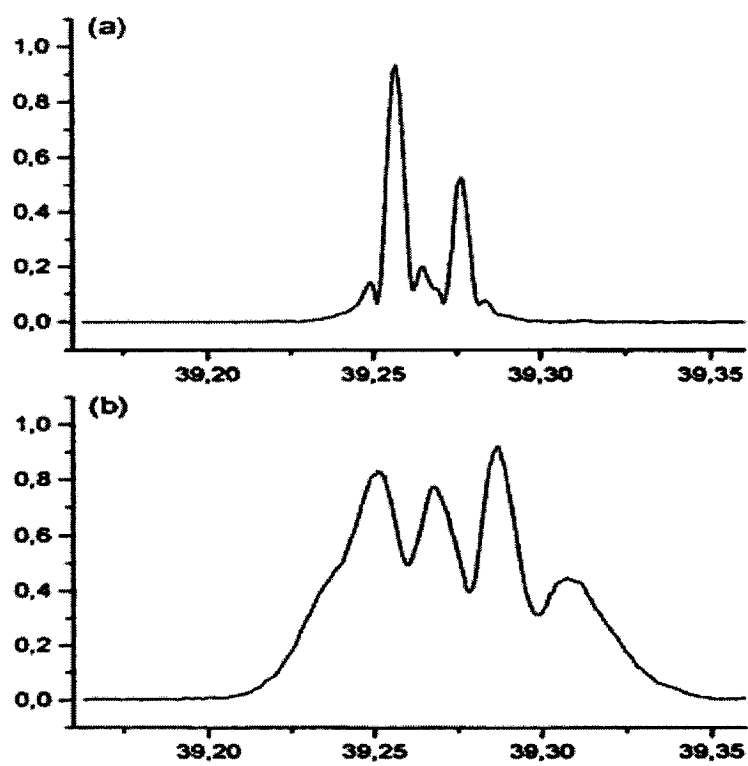


Figure 2.6 Résultats expérimentaux du phénomène d'apparition des pics. (a) Sans la lame de verre. (b) Avec la lame de verre. (Axes horizontaux en millimètres.)

CHAPITRE 3

ÉLIMINATION DES EFFETS DE LA FORME DU SPECTRE

3.1 Introduction

La forme du spectre effectif de la source utilisée joue un rôle primordial dans la qualité des images obtenues. Dans le cas d'une source à spectre gaussien, d'un interféromètre parfait sans aberrations et pertes spectrales, d'un photodétecteur à réponse spectrale parfaitement constante dans la bande passante de la source, nous avons établi que l'enveloppe du signal d'auto-corrélation est une gaussienne (équation (1.16)). De même, nous avons établi que l'enveloppe du signal de corrélation croisée, résultant d'une réflexion dans l'échantillon est elle-même une gaussienne (équation (2.11)). Par suite nous pouvons déduire que le signal d'un balayage longitudinal en profondeur de l'échantillon sera une succession d'enveloppes gaussiennes.

Mais en pratique, comme nous l'avons vu dans la section 1.4, le spectre effectif obtenu avec une source réelle, dans un interféromètre réel, est loin d'être gaussien, ce qui va produire des lobes secondaires et des "queues" dans le signal d'auto-corrélation. Ces déformations vont affecter le signal de corrélation croisée puisque d'après (2.5), nous avons:

$$\hat{\Gamma}_c(\tau, z) = \hat{\Gamma}_0(\tau) * h(\tau, z) \quad (3.1)$$

Ce qui a pour effet de brouiller et de rendre floues les images obtenues [11,12]. Pour remédier à ce problème, nous exposons pour le moment, deux approches numériques différentes existant dans la littérature: la première consiste à effectuer dans l'équation (3.1) une déconvolution appropriée pour découpler la réponse propre de l'échantillon $h(\tau, z)$ de la fonction d'auto-corrélation $\Gamma_0(\tau)$ [15], et la seconde consiste en un arrangement spectral qui transforme le spectre effectif en un spectre gaussien idéal [12]. Dans les chapitres 5 et 6 nous proposerons nos propres solutions au problème.

3.2 Déconvolution

3.2.1 Déconvolution directe

D'abord, rappelons que $\hat{\Gamma}_0(\tau)$ est obtenue numériquement par une transformée de Hilbert à partir de la trace à vide, alors que $\hat{\Gamma}_c(\tau, z)$ est obtenu de la même façon mais avec l'échantillon dans le bras de mesure de l'interféromètre. En effectuant la transformée de Fourier de (3.1), nous obtenons:

$$F(h(\tau, z)) = \frac{F(\hat{\Gamma}_c(\tau, z))}{F(\hat{\Gamma}_0(\tau))} \quad (3.2)$$

Une première approche toute simple proposée par Kulkarni et al. [17] consiste à effectuer numériquement la division spectrale (3.2) et ensuite tirer $h(\tau, z)$ par une transformée de Fourier inverse. Malheureusement une telle opération augmente le niveau du bruit, et peut mener à une dégradation de 20 dB de la gamme dynamique [17] définie par:

$$\frac{\max(|\hat{\Gamma}_0(\tau)|)}{\sigma_{\text{bruit}}} \cdot (\sigma_{\text{bruit}} : \text{déviation standard de l'amplitude du bruit}).$$

3.2.2 Déconvolution par itération avec contrainte

En se basant sur un algorithme de déconvolution par itération avec contrainte [18], une approche beaucoup plus efficace a été proposée par les mêmes chercheurs [15] et qui limite à 2 dB la dégradation de la gamme dynamique.

Cette méthode suppose en premier lieu une construction d'images de TCO à partir du module de $\Gamma_c(\tau, z)$; pour cela, l'équation de départ prend une forme approximative de l'équation (3.1), plus précisément [15]:

$$|\hat{\Gamma}_c(\tau, z)| \equiv |\hat{\Gamma}_0(\tau)| * h'(\tau, z) \quad (3.3)$$

où $h'(\tau, z)$ est un estimé de $h(\tau, z)$ sur lequel on impose la contrainte de positivité suivante :

$$\begin{aligned} h'(\tau, z) &= h'(\tau, z) ; \text{ si } h'(\tau, z) \geq 0 \\ h'(\tau, z) &= 0 ; \quad \text{ailleurs} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$h'(\tau, z)$ est obtenue par la méthode des approximations successives [18] :

$$h'_{l+1} = CP[h'_l] + \lambda \left(|\hat{\Gamma}_c| - |\hat{\Gamma}_0| * CP[h'_l] \right) \quad (3.5)$$

où l est un indice d'itération, λ est un paramètre réel et $CP[h'_l]$ symbolise le résultat de la contrainte de positivité appliquée sur l'estimé d'ordre l de h' . $|\hat{\Gamma}_0|$ et $|\hat{\Gamma}_c|$ sont évidemment les enveloppes des signaux mesurés par l'interféromètre à vide et chargé respectivement. Comme premier estimé nous pouvons choisir [15]:

$$h'_0 = \lambda |\hat{\Gamma}_c|. \quad (3.6)$$

Les conditions requises pour la convergence de cet algorithme sont [15,18] :

$$0 < \lambda \leq \frac{2}{\max |S_0(w)|} \quad (3.7)$$

et

$$\operatorname{Re}[S_0(w)] > 0 \quad \forall w \quad (3.8)$$

$S_0(w)$ étant la transformée de Fourier de $|\hat{\Gamma}_0(\tau)|$.

La condition (3.7) peut être facilement satisfaite en choisissant λ dans l'intervalle indiqué. La condition (3.8) dépend de la fonction d'auto-corrélation de l'interféromètre et

n'est pas automatiquement satisfaite. Pour la satisfaire, on effectue dans l'équation (3.3), une convolution à gauche et à droite avec le terme $F^{-1}(S_0^*(w))$ [18]. Nous obtenons alors :

$$|\hat{\Gamma}_c(\tau, z)| * F^{-1}(S_0^*(w)) \equiv |\hat{\Gamma}_0(\tau)| * F^{-1}(S_0^*(w)) * h'(\tau, z) \quad (3.9)$$

Donc, le système est maintenant équivalent à:

$$|\bar{\Gamma}_c(\tau, z)| \equiv |\bar{\Gamma}_0(\tau)| * h'(\tau, z)$$

où :

$$|\bar{\Gamma}_c(\tau, z)| = |\hat{\Gamma}_c(\tau, z)| * F^{-1}(S_0^*(w))$$

et :

$$|\bar{\Gamma}_0(\tau)| = |\hat{\Gamma}_0(\tau)| * F^{-1}(S_0^*(w))$$

Alors dans ce cas :

$$\bar{S}_0(w) = F(|\bar{\Gamma}_0(\tau)|) = |S_0(w)|^2 > 0 \Rightarrow \text{Re}[\bar{S}_0(w)] > 0 \quad \forall w \quad (3.10)$$

Donc maintenant il faut modifier (3.7) pour tenir compte de ce changement, à savoir:

$$0 < \lambda \leq \frac{2}{\max(\bar{S}_0(w))} \quad (3.11)$$

De plus comme premier estimé, (3.6) doit être aussi modifiée de sorte que maintenant:

$$h'_0(\tau, z) = \lambda |\bar{\Gamma}_c(\tau, z)|. \quad (3.12)$$

Enfin, notons que nous avons constaté expérimentalement que 10 à 15 itérations suffisent pour converger et c'est d'ailleurs l'ordre de grandeur mentionné dans [15].

3.2.3 Résultats expérimentaux

Pour tester l'efficacité de la méthode en question, nous allons l'appliquer sur une mesure obtenue avec la diode JDS comme source optique dont le spectre et l'interférogramme ont été montrés à la figure 1.2. Nous portons un intérêt particulier à ce type de source car elle n'a pas la complexité d'un laser Titane:Saphir pulsé.

La figure 3.1 nous montre les signaux relatifs à une trace typique qui contient assez de structure. Les abscisses sur les axes horizontaux représentent les points d'échantillonnage et correspondent à des positions physiques dans l'échantillon.

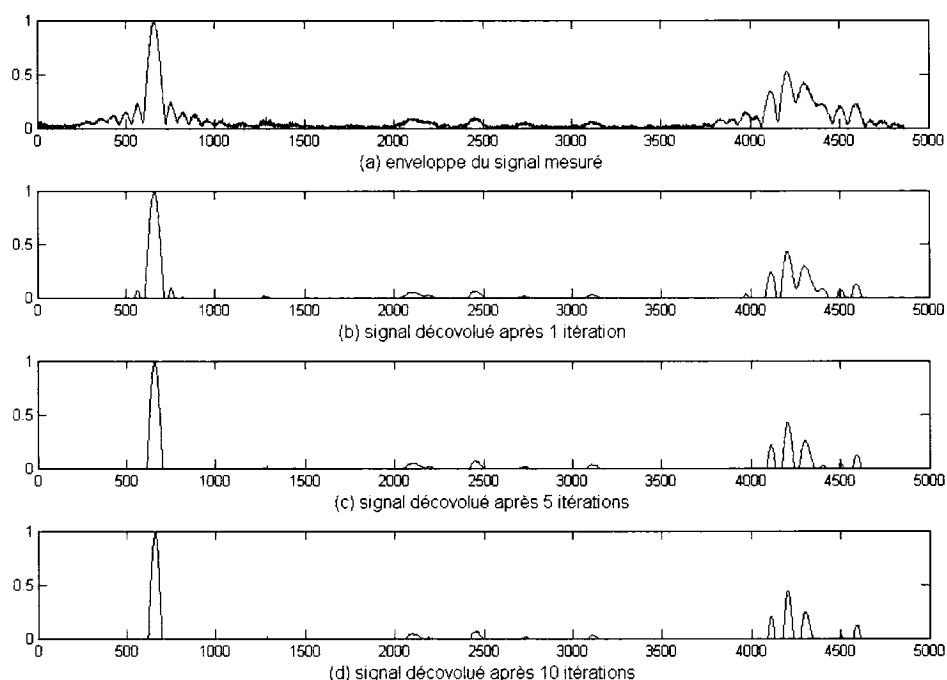


Figure 3.1 Différentes étapes de la déconvolution par itération d'une trace de TCO.
Intensité optique normalisée en fonction du point d'échantillonnage.

Dans (a), nous avons affiché l'enveloppe de la trace mesurée que nous traitons. Nous y reconnaissons facilement, tout au début, la forme du signal à vide où les pics secondaires apparaissent à droite et à gauche du pic central.

Les graphiques (b), (c) et (d) nous montrent les signaux déconvolués après 1, 5 et 10 itérations respectivement. En observant ces figures, nous pouvons constater qu'au fur et à mesure que le nombre d'itérations augmente, les lobes secondaires diminuent jusqu'à disparaître. Mais par contre, les hauteurs relatives entre les pics détectés varient et il semble que plusieurs vrais pics disparaissent. Nous avons constaté ce fait sur plusieurs échantillons analysés. Nous pensons que ceci soit principalement dû au fait qu'il n'y a rien dans cette approche qui prévoit la distorsion des impulsions soumises à toutes sortes d'effets (dispersion, diffusion, interférence,...) lors de leur pénétration progressive dans l'échantillon. Par conséquent, nous suspectons que l'algorithme ne reconnaisse plus les pics déformés qui ne ressemblent pas assez au signal à vide; c'est peut-être ce que nous pouvons remarquer en observant les impulsions entre les abscisses 1000 et 4000 de la figure 3.1.

Les images ci-dessous sont celles d'un ruban adhésif sur lequel on a collé des écailles de poisson. Le signal mesuré consiste en 240 traces longitudinales représentant typiquement une surface de $1mm \times 1mm$. La figure 3.2 est celle obtenue avec l'enveloppe filtrée du signal brut alors que les figures 3.3 et 3.4 sont celles obtenues respectivement avec une itération et dix itérations. Les chiffres apparaissant sur les axes horizontal et vertical, sont uniquement à titre indicatif afin d'identifier les traces, et correspondent indirectement à des unités de longueur. Il est clair que l'effet des lobes secondaires visible dans l'image brute est complètement éliminé après 10 itérations. Mais nous craignons que certains détails dans l'image brute soient disparus aussi.

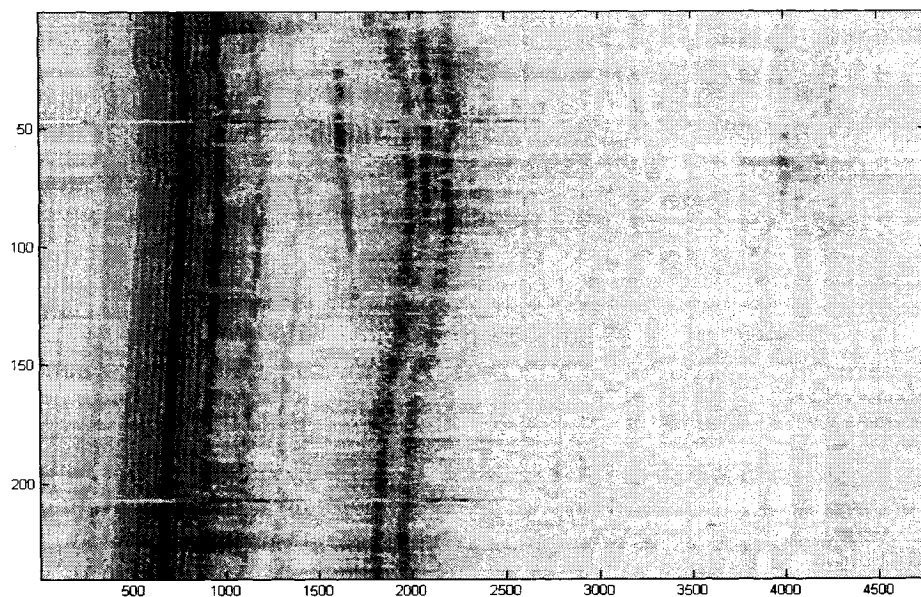


Figure 3.2 Image du ruban adhésif et d'écaïlles de poisson obtenue à partir du signal brut (Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.)

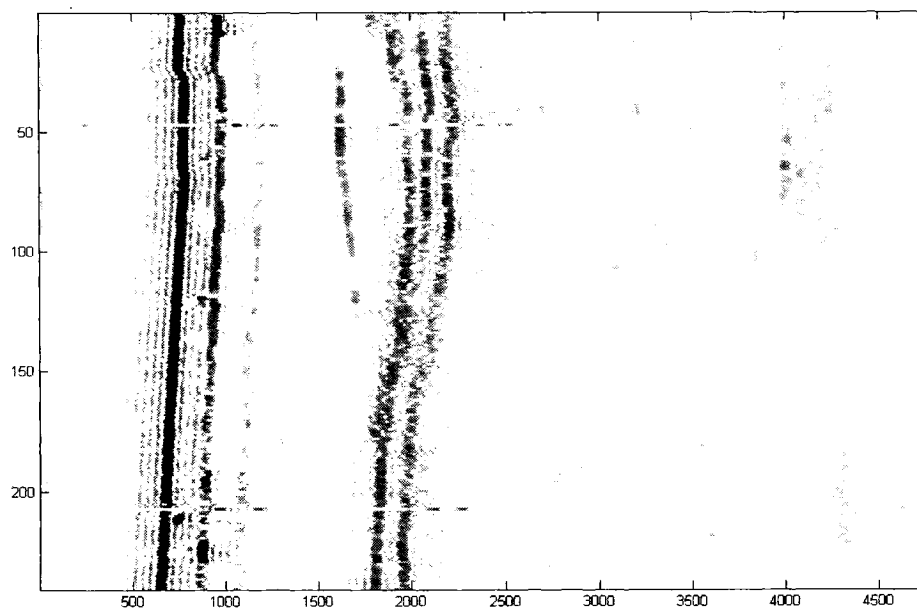


Figure 3.3 Image du ruban adhésif et d'écaïlles de poisson après une seule itération. (Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.)

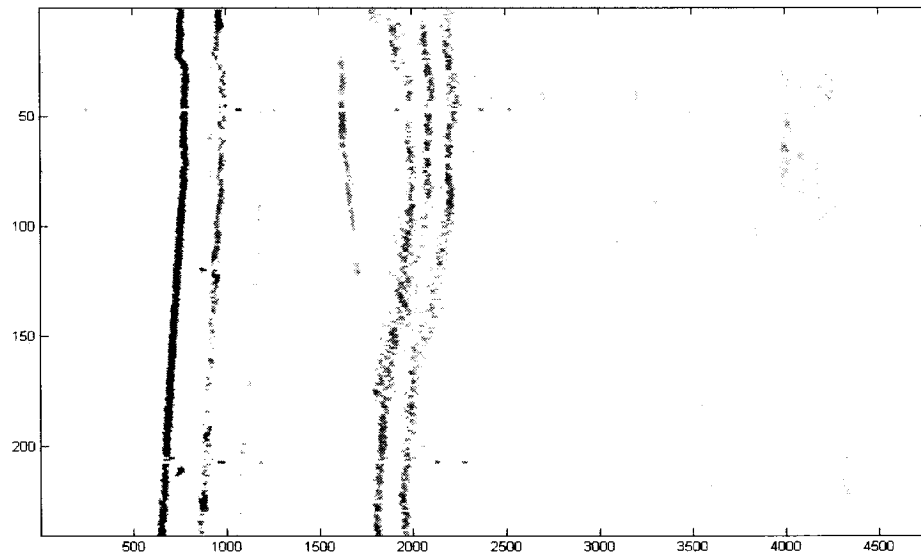


Figure 3.4 Image du ruban adhésif et d'écailles de poisson après 10 itérations.
(Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.)

3.3 Arrangement spectral

3.3.1 Introduction

L'arrangement spectral (spectral shaping) est une méthode proposée par J. F. De Boer et al. [12] pour réduire les lobes secondaires produits par les spectres non gaussiens dans une trace de TCO. En ce qui nous concerne, nous exposons cette approche, non seulement dans ce but précis, mais surtout parce qu'elle est une étape indispensable dans la méthode de détection par ondelette que nous aborderons au chapitre 5.

3.3.2 Étapes de la méthode

Effectuons une transformée de Fourier sur l'équation (3.1) :

$$\hat{S}_c(w, z) = F(\hat{\Gamma}_c(\tau, z)) = \hat{S}_0(w)H(w, z) \quad (3.13)$$

$\hat{S}_0(w)$ étant évidemment le spectre de la source et $H(w, z)$ la fonction de transfert de l'échantillon.

La méthode de l'arrangement spectral telle qu'exposée dans [12], consiste à multiplier (3.13) par une fonction de transfert de sorte que $\hat{S}_0(w)$ soit remplacé par une gaussienne $\hat{S}_G(w)$ convenablement choisie; pour cela, il suffit de multiplier (3.13) par:

$$G(w) = \frac{\hat{S}_G(w)}{\hat{S}_0(w)} \quad (3.14)$$

$\hat{S}_c(w, z)$ se transforme alors en $\hat{S}_{idéale}(w, z)$ tel que:

$$\hat{S}_{idéale}(w, z) = \hat{S}_G(w)H(w, z) \quad (3.15)$$

Et en effectuant une transformée de Fourier inverse, nous obtenons la fonction de corrélation croisée arrangée idéale:

$$\hat{\Gamma}_{c, idéale}(\tau, z) = F^{-1}(\hat{S}_{idéale}(w, z)) \quad (3.16)$$

Il reste à déterminer les critères pour choisir $\hat{S}_G(w)$. Pour maintenir approximativement les mêmes hauteurs des pics de l'enveloppe du signal de corrélation croisée avant et après l'arrangement spectral, il suffit que [12,14]:

$$\int_0^{+\infty} \hat{S}_0(w)dw = \int_0^{+\infty} \hat{S}_G(w)dw \quad (3.17)$$

Quant aux autres critères, ils seront éclaircis dans la partie expérimentale.

3.3.3 Résultats expérimentaux

Nous allons illustrer la méthode en l'appliquant sur la 100^{ième} trace du même échantillon "ruban adhésif et écailles de poisson" que nous avons imagé auparavant par la méthode de la déconvolution itérative.

Tout d'abord, nous devons chercher $\hat{S}_c(w, z)$ de cette trace en effectuant une FFT comme indiqué par l'équation (3.13). Ensuite nous avons à choisir un spectre gaussien $\hat{S}_G(w)$ convenable pour obtenir la fonction de transfert $G(w)$ donnée par l'équation (3.14). Une fois $G(w)$ calculée, il suffit de la multiplier par $\hat{S}_c(w, z)$ et effectuer une FFT inverse pour obtenir la trace arrangée. La figure 3.5 montre quelques étapes essentielles de la méthode, effectuées sur la 100^{ième} trace, avec deux choix différents pour le spectre gaussien $\hat{S}_G(w)$:

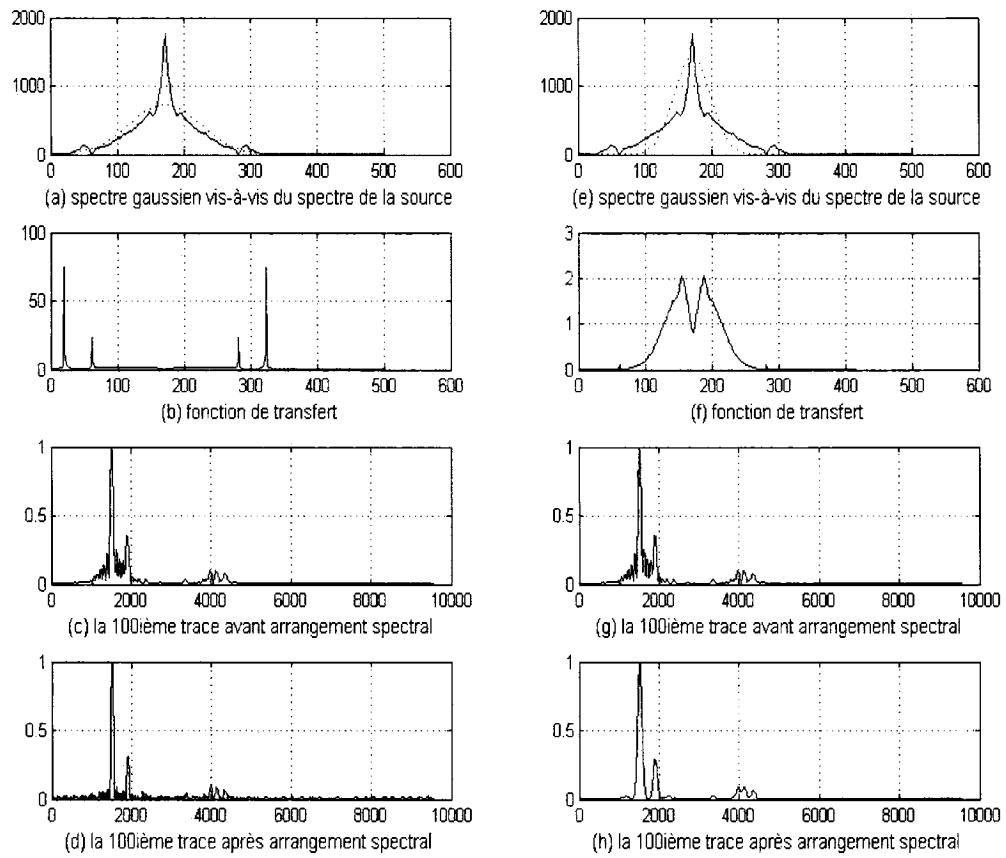


Figure 3.5 Arrangement spectral avec deux spectres différents: large à droite et étroit à gauche. (a), (b), (e) et (f): axes verticaux en unité arbitraire, axes horizontaux en unité arbitraire de fréquence. (c), (d), (g) et (h): intensité optique normalisée en fonction du point d'échantillonnage.

Les graphiques de gauche dans la figure précédente, correspondent à un spectre gaussien choisi ayant presque la même largeur spectrale que le spectre effectif de la source. Nous pouvons observer, en comparant les traces (c) et (d) avant et après arrangement spectral, une réduction substantielle des lobes secondaires ($\cong 9dB$) et une conservation de la largeur des pics, donc de la résolution. Mais par contre, nous pouvons remarquer la présence d'une ondulation parasite tout au long de la trace arrangée. Ce phénomène résulte de la forme peu orthodoxe du spectre effectif de la diode JDS qui contient des bosses et des creux à ses extrémités comme on le voit sur la figure 1.2. En divisant numériquement les deux spectres, des pics très accentués, ressemblant grossièrement à des impulsions de Dirac, paraissent aux positions correspondant aux irrégularités du spectre effectif. Et en faisant une FFT inverse pour obtenir la trace arrangée, des ondulations sinusoïdales nuisibles en résultent et qui ont pour effet de créer un arrière plan picoté qui dégrade la qualité de l'image obtenue.

Les graphiques de droite sont ceux d'un spectre gaussien plus étroit que le spectre effectif; nous l'avons choisi de sorte à éliminer de justesse les pics dans la fonction de transfert tout en gardant la plus grande largeur spectrale possible. Avec ce choix, nous avons réussi à éliminer les ondulations et à réduire de $20dB$ approximativement les lobes secondaires. Mais, en observant les traces (g) et (h), nous réalisons que la résolution s'est détériorée d'une façon inacceptable et des pics ont fusionné ensemble (aux alentours de l'abscisse 4000).

Donc, nous sommes devant un dilemme qui consiste à trouver un compromis acceptable entre la résolution et le bruit de fond. Pour essayer d'en sortir, nous avons modifié l'approche telle que présentée dans [12] en utilisant une technique bien connue de Wiener [39], soit de remplacer la fonction de transfert (3.14) par une autre de la forme:

$$G(w) = \frac{\hat{S}_G(w)\hat{S}_0^*(w)}{|\hat{S}_0(w)|^2 + \varepsilon(w)}$$

Puisque nous n'avons fait aucune étude quantitative sur le bruit du système de mesure, nous avons considéré le cas simple où $\varepsilon(w)$ est une constante que nous avons ajustée d'une façon empirique en fonction de l'image finale obtenue. Nous avons essayé plusieurs spectres gaussiens ayant des largeurs intermédiaires entre celles des deux spectres de la figure 3.5. Les résultats n'étaient pas encourageants au niveau de l'image finale telle que le montre la figure 3.6 :

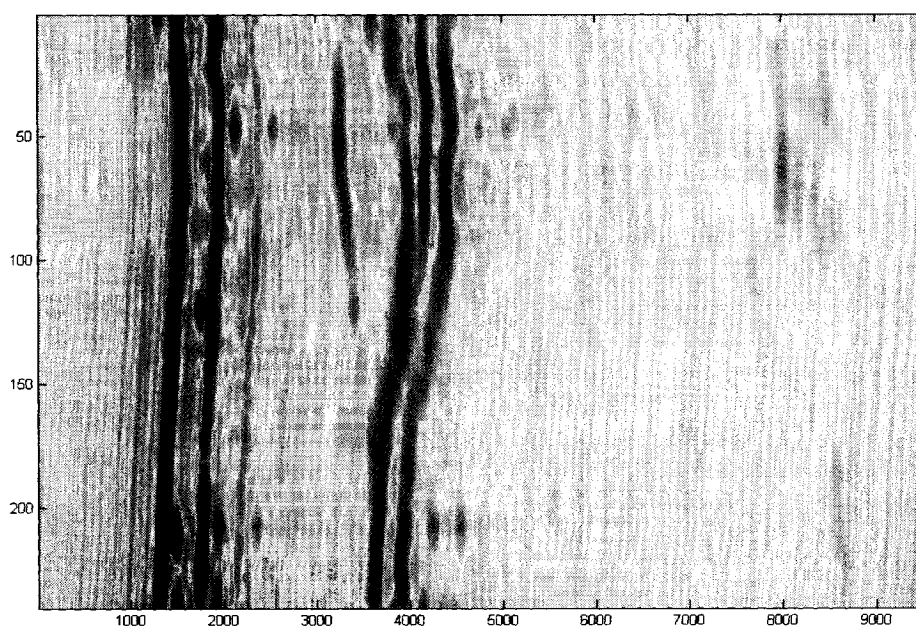


Figure 3.6 Image du ruban adhésif et d'écailles de poisson obtenue par la méthode de l'arrangement spectral. (Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.)

Il importe de noter, que l'arrangement spectral tout seul, comme présenté dans cette section, ne nous a pas servi à grande chose pour le traitement des images de la source JDS à cause de la nature de son spectre. Par contre, il va servir comme étape indispensable dans la méthode de détection par ondelettes que nous allons exposer au chapitre 5.

CHAPITRE 4

MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR ÉLIMINER LA DISPERSION

4.1 Méthode de l'auto-convolution généralisée

4.1.1 Introduction

Parue en Avril 2004 [19], la méthode de l'auto-convolution généralisée est proposée par I. Walmsley et al. comme technique numérique pour éliminer la dispersion dans les systèmes de TCO sans connaissance à priori des propriétés physiques et optiques de l'échantillon à imager. Elle se base sur les propriétés mathématiques de l'auto-convolution généralisée de l'enveloppe complexe du signal de corrélation croisée.

Nous présentons en première étape la formulation mathématique de cette approche tout en reléguant en annexe B le développement des formules utilisées et qui ont été présentées sans aucune démonstration ou référence par les auteurs. Dans une seconde étape, nous faisons l'analyse et l'interprétation des résultats analytiques obtenus. Ensuite, nous testons la validité de ces résultats sur des signaux simulés et réels. Enfin nous concluons sur l'applicabilité de cette méthode sur les mesures en TCO.

4.1.2 Formulation mathématique

Nous allons prendre comme modèle un spectre gaussien de la source; donc nous avons:

$$S_0(w - w_0) = s_0 \exp[-T^2(w - w_0)^2] \quad (4.1)$$

où T est relié au temps de cohérence de la source par :

$$T^2 = \frac{T_c^2}{8 \ln 2} \quad (4.2)$$

Reprenons l'expression (2.5) de la fonction de corrélation croisée d'un interféromètre chargé, et prenons 2τ comme temps de délai entre les deux bras de l'interféromètre.

Nous pouvons alors écrire :

$$\hat{\Gamma}_c(\tau) = \Gamma_c(\tau) \exp(-2jw_0\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(w) S_0(w - w_0) \exp(-2jw\tau) dw \quad (4.3)$$

En adoptant une distribution discrète des surfaces réfléchives à l'intérieur de l'échantillon, $H(w)$ peut être mise sous la forme :

$$H(w) = \sum_n r_n \exp[2j\varphi_n(w)] \quad (4.4)$$

Exprimée en série de Taylor jusqu'au second ordre, la phase $\varphi_n(w)$ s'écrit:

$$\varphi_n(w) = \varphi_n(w_0) + (w - w_0)\tau_n + \frac{1}{2}(w - w_0)^2 D_n + \dots \quad (4.5)$$

- $\varphi_n(w_0)$ est une phase constante que l'on peut incorporer dans la phase de r_n tel que :

$$r'_n = |r_n| \exp[2j\varphi'_n(w_0)] \quad (4.6)$$

- $\tau_n = \left. \frac{d\varphi_n(w)}{dw} \right|_{w_0}$ représente le délai du signal réfléchi sur le nième réflecteur situé

à l'abscisse $z_n = \frac{C}{n_g} \tau_n$ à l'intérieur de l'échantillon.

- $D_n = \left. \frac{d^2\varphi_n(w)}{dw^2} \right|_{w_0}$ est le terme de dispersion équivalent à $\beta_2 z_n$.

En insérant les équations (4.4) à (4.6) dans (4.3) et en intégrant nous aboutissons à (voir B.1 annexe B) :

$$\Gamma_c(\tau) = \sum_n \Gamma_n(\tau) \approx \sum_n r'_n \exp \left[-\frac{(\tau - \tau_n)^2}{T^2 - jD_n} \right] \quad (4.7)$$

Donc : l'enveloppe du signal analytique est la somme de n enveloppes gaussiennes, chacune centrée sur un τ_n et ayant une mi-largeur à mi-hauteur (half width half maximum) T_{HWHM} telle que :

$$\left| \exp\left(-\frac{T_n^2}{T^2 - jD_n}\right) \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow T_{HWHM} = \sqrt{\ln 2 \left(T^2 + \frac{D_n^2}{T^2} \right)} \quad (4.8)$$

Ou bien pour rester conforme avec [19], nous utilisons la hauteur à $\frac{1}{e}$ du maximum :

$$\left| \exp\left(-\frac{T_n^2}{T^2 - jD_n}\right) \right| = \frac{1}{e} \Rightarrow T_{HW} = \sqrt{\left(T^2 + \frac{D_n^2}{T^2} \right)} \quad (4.9)$$

Comme il fallait s'y attendre, la déformation de ces enveloppes est d'autant plus accentuée que le terme de dispersion D_n est grand.

Effectuons une convolution généralisée de $\Gamma_c(\tau)$ définie par :

$$Y_\omega(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\omega^2 \tau'^2) \Gamma_c^*(\tau + \tau') \Gamma_c(\tau - \tau') d\tau' \quad (4.10)$$

où ω est un paramètre d'ajustement de forme comme nous allons voir un peu plus loin.

En introduisons (4.7) dans (4.10), nous obtenons (B.2 annexe B) :

$$Y_\omega(\tau) = \sum_{n,m} Y_{n,m}(\tau, \omega) \quad (4.11)$$

Avec :

$$Y_{n,m}(\tau, \omega) \approx r_n'^* r_m' \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j2\omega^2 \tau'^2) \exp\left[-\frac{(\tau + \tau' - \tau_n)^2}{(T^2 + jD_n)}\right] \exp\left[-\frac{(\tau - \tau' - \tau_m)^2}{(T^2 - jD_m)}\right] d\tau' \quad (4.12)$$

Nous pouvons démontrer (B.2 annexeB) que dans la limite où ω est choisi tel que :

$$\omega^2 \ll \frac{T^2}{T^4 + D_n^2} \Leftrightarrow \omega^2 T^2 \ll \frac{T^4}{T^4 + D_n^2} \Rightarrow \omega^2 T^2 \ll 1 \quad (4.13)$$

nous avons pour $m = n$ ($D_n = D_m$, $r_n' = r_m'$ et $\tau_n = \tau_m$):

$$Y_{m=n}(\tau, \omega) \equiv Y_n(\tau, \omega) \cong \frac{|r_n'|^2 s_0^2}{4\sqrt{2\pi} \sqrt{T^2 + \omega^2 D_n^2}} \exp\left[-\frac{2(\tau - \tau_n)^2}{T^2 + \omega^2 D_n^2}\right] \quad (4.14)$$

La mi-largeur à $\frac{1}{e}$ du maximum de $Y_n(\tau, \omega)$ temps vaut :

$$T_Y = \sqrt{\frac{T^2 + D_n^2 \omega^2}{2}} \quad (4.15)$$

Puis, pour $m \neq n$ et en supposant que $D_n \equiv D_m \equiv D$, hypothèse faite pour simplifier l'expression mathématique sans toutefois affecter la généralité de l'approche comme nous verrons un peu plus loin dans la simulation numérique, nous obtenons:

$$|Y_{n,m}(\tau, \omega)| \cong \frac{|r_n'^* r_m'| s_0^2}{4\sqrt{2\pi}\sqrt{T^2 + \omega^2 D^2}} \exp\left[-2 \frac{(\tau - \bar{\tau})^2}{T^2 + \omega^2 D^2}\right] \exp\left[-\frac{\omega^2 (\tau_n - \tau_m)^2}{2}\right] \quad (4.16)$$

où :

$$\bar{\tau} = \frac{\tau_m + \tau_n}{2} \quad (4.17)$$

4.1.3 Interprétation et analyse

1- Les équations (4.14) à (4.17) signifient que l'auto-convolution généralisée de Γ_c produit deux types d'impulsions $Y_n(\tau, \omega)$ et $Y_{n,m}(\tau, \omega)$. Le premier type est une série d'impulsions gaussiennes centrées sur $\tau_n = \frac{z_n}{n_g C}$, c'est-à-dire sur les positions exactes des surfaces réfléchives repérées par les abscisses z_n . Le deuxième type est aussi une série d'impulsions gaussiennes mais centrées sur $\bar{\tau} = \frac{\tau_m + \tau_n}{2}$; donc ces dernières représentent des surfaces réfléchives fictives situées à mi-distance entre deux surfaces réelles dénotées par les abscisses z_m et z_n . Par conséquent, les $Y_{n,m}(\tau, \omega)$ sont des termes parasites résultant de l'auto-convolution et qu'il faut éliminer. Pour le faire, il faut choisir ω tel que :

$$\omega \gg \frac{\sqrt{2}}{|\tau_m - \tau_n|} \quad (4.18)$$

2- Les $Y_n(\tau, \omega)$ ont une demi largeur de $\sqrt{\frac{T^2 + D_n^2 \omega^2}{2}}$. Dans la limite où ω est choisi assez petit tel que $D_n^2 \omega^2 \ll T^2$, cette largeur approche $\frac{T}{\sqrt{2}}$. Comparée à $\Gamma_c(\tau)$, considérée même en absence de dispersion (voir équation (4.9)), $Y_n(\tau, \omega)$ a une largeur de $\sqrt{2}$ fois plus petite, ce qui constitue un très grand avantage pour discerner les lieux de réflexions.

3- Donc d'une part, nous avons besoin d'un ω grand satisfaisant à (4.18) pour éliminer les signatures parasites $Y_{n,m}(\tau, \omega)$, et d'autre part, un ω assez faible satisfaisant à (4.13) pour limiter la largeur des impulsions utiles $Y_n(\tau, \omega)$; d'où un compromis à faire entre la largeur des impulsions utiles et la hauteur des impulsions nuisibles.

4- Dans le cas où les réflexions dans l'échantillon sont assez proches les unes des autres, il n'y aura plus la possibilité de faire le compromis mentionné dans le point précédent. En effet, pour visualiser clairement la situation, il suffit de combiner les équations (4.13) et (4.18), ce qui mène à

$$\frac{\sqrt{2}}{|\tau_m - \tau_n|} \ll \omega \ll \frac{1}{T} \quad (4.19)$$

Introduisons le temps de cohérence de la source en insérant (4.2) dans (4.19), nous sommes ramenés à:

$$\frac{\sqrt{2}}{|\tau_m - \tau_n|} \ll \omega \ll \frac{\sqrt{8 \ln 2}}{T_c} \quad (4.20)$$

ce qui exige que:

$$|\tau_m - \tau_n| \gg \frac{T_c}{2\sqrt{\ln 2}} \quad (4.21)$$

Donc, pour pouvoir trouver un ω vérifiant à la fois (4.13) et (4.18), il faut impérativement que le temps (ou la distance) qui sépare deux réflexions soit beaucoup plus grand(e) que le temps (ou la longueur) de cohérence de la source.

4.1.4 Simulations numériques

En premier lieu nous allons tester la validité des résultats analytiques sur des traces artificielles que nous avons construites.

La figure 4.1 résume les résultats obtenus pour une trace constituée de deux réflexions gaussiennes décalées entre elles de $80 fs$, et ayant des largeurs à mi-hauteur de $10 fs$.

Nous avons pris arbitrairement les termes de dispersion $D_1 = 80 fs^2$ et $D_2 = 100 fs^2$. Dans les graphiques (a) de cette figure, nous avons tracé en trait continu la trace originale sans dispersion et en trait pointillé la trace dispersée. Ensuite nous avons choisi des valeurs de ω vérifiant (4.20) et précisément:

$$\frac{\sqrt{2}}{80 fs} = 0,0176 fs^{-1} \ll \omega \ll \frac{\sqrt{8 \cdot \ln 2}}{10 fs} = 0,235 fs^{-1} \quad (4.22)$$

Les graphes (b), (c) et (d) représentent les signaux corrigés, obtenus par l'auto-convolution généralisée de la trace dispersée telle que définie par l'équation (4.10), pour ω successivement égal à 0,02; 0,04 et 0,07 :

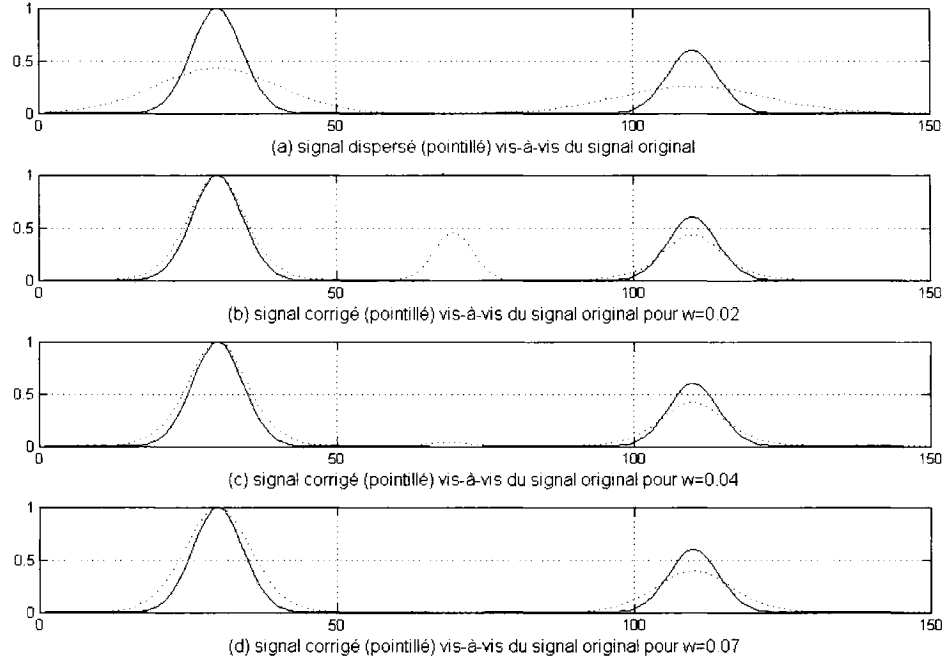


Figure 4.1 Auto-convolution généralisée de deux impulsions gaussiennes largement espacées. Intensité optique normalisée en fonction du temps (en fs).

De ces graphes nous constatons que pour la valeur de ω la plus faible (0,02), les largeurs des impulsions sont réduites pour atteindre presque la largeur du signal original non dispersé, mais que l'impulsion parasite à mi-distance entre les deux vraies, a une amplitude comparable à ces dernières. Par contre, pour la valeur de ω la plus grande (0,07), l'impulsion parasite a presque totalement disparu, alors que les largeurs des vraies impulsions du signal corrigé sont bien supérieures à celles du signal original, tout en étant nettement inférieures à celles du signal dispersé non corrigé tracé en pointillé en (a).

Le cas $\omega = 0,04$ représente une situation de compromis entre les deux cas précédents. Donc, nous pouvons conclure que jusqu'ici il y a accord complet entre la simulation numérique et le développement analytique, ce qui justifie les approximations faites durant le développement mathématique et en particulier le fait de prendre $D_m = D_n = D$.

Mais comme nous le savons déjà, les sources réelles ne sont pas gaussiennes et il importe de tester la validité de l'approche avec des impulsions réelles.

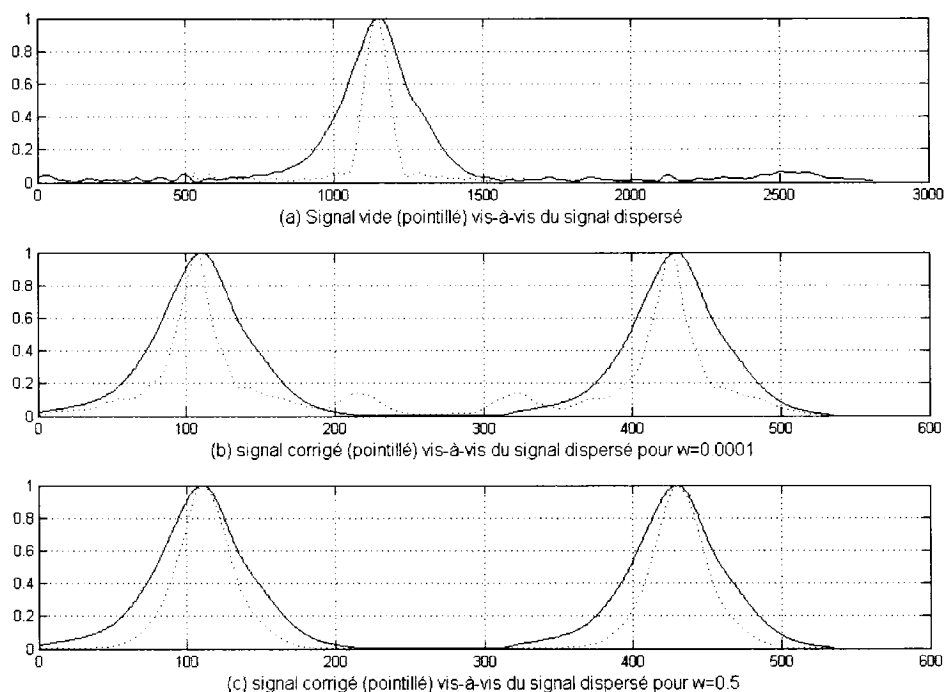


Figure 4.2 Auto-convolution généralisée de deux impulsions réelles et identiques.
 Intensité optique normalisée en fonction du temps (unité arbitraire).

Les graphes (b) et (c) de la figure 4.2 montrent une trace constituée de deux impulsions réelles identiques. Cette trace a été construite artificiellement en juxtaposant le signal en trait continu du graphe (a) à lui-même. Celui-ci est obtenu par une mesure de TCO, faite avec le laser Titane:Saphir pulsé, en introduisant une lame de microscope comme échantillon dans le bras de mesure de l'interféromètre. Bien sûr, à cause de la dispersion dans la lame, le signal mesuré est élargi par rapport au signal obtenu avec interféromètre vide (signal en pointillé en (a)).

En observant les graphes (b) et (c), nous pouvons constater que les signaux corrigés (en pointillé) résultant de l'auto-convolution du signal dispersé, se comportent d'une façon presque identique au cas des impulsions gaussiennes de la figure 4.1. La seule différence

réside dans l'apparition de plusieurs lobes parasites au lieu d'un seul, pour les faibles valeurs de ω . L'emplacement de ces lobes est plus ou moins arbitraire et ils disparaissent au dépend d'un élargissement des vraies impulsions lorsque ω augmente, exactement comme dans le cas gaussien.

Il nous reste à envisager le cas où les impulsions se chevauchent. C'est une situation très souvent rencontrée en pratique et surtout dans les échantillons biologiques. Pour cela, nous allons reprendre le cas gaussien mais cette fois-ci, les deux gaussiennes se touchent. La figure 4.3 représente cette situation. Nous y constatons qu'il n'est plus possible de trouver un compromis acceptable entre la largeur des impulsions utiles et l'amplitude des impulsions nuisibles dans le signal corrigé. Ceci ne doit pas nous surprendre puisque dans ce cas, la condition (4.21) est maintenant violée.

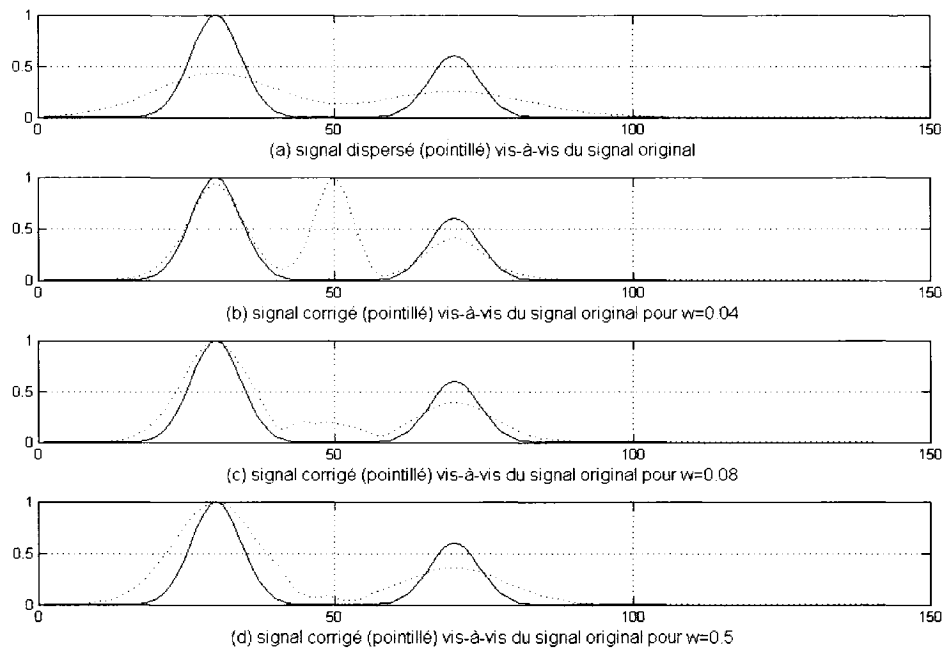


Figure 4.3 Auto-convolution généralisée de deux impulsions gaussiennes en cas de chevauchement
 Intensité optique normalisée en fonction du temps (en fs).

4.1.5 Conclusion

Comme approche pour éliminer la dispersion, cette méthode est très élégante et facile à appliquer. Elle n'exige ni une connaissance à priori des paramètres physiques de l'échantillon, ni une mesure à vide pour déterminer la fonction d'auto-corrélation de la source. Malheureusement, elle présente une faiblesse insurmontable dans les échantillons où les réflexions se chevauchent entre elles comme c'est souvent le cas dans les signaux de TCO biologiques. À notre avis, elle ne pourrait être utilisée que dans le cas où l'échantillon présente des irrégularités espacées de plusieurs fois la longueur de cohérence de la source comme par exemple pour détecter les défauts dans les guides d'ondes optiques .

4.2 Méthode de l'intégration des signatures

4.2.1 Introduction

En utilisant une formule suggérée par Gallion et al [20] et développée par Kasaya et al. [21], nous allons proposer dans cette section, une autre méthode pour éliminer la dispersion, sans connaître à priori les caractéristiques de l'objet observé.

Pour cela, nous nous posons dans la même situation que dans l'approche précédente; c'est-à-dire, nous considérons que la source est gaussienne et nous représentons l'échantillon par un ensemble discret de points réflectifs.

4.2.2 Formulation mathématique

En tenant compte des hypothèses faites, nous pouvons utiliser la formule (b.10) de l'annexe B pour représenter l'enveloppe lente du signal de corrélation croisée:

$$\Gamma_c(\tau) = \sum_n \Gamma_n(\tau) = \sum_n \frac{r'_n s_0}{2\sqrt{\pi} \sqrt{T^2 - jD_n}} \exp \left[-\frac{(\tau - \tau_n)^2}{T^2 - jD_n} \right] \quad (4.23)$$

Considérons l'intégrale suivante [20] :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma_n(\tau)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{r'_n s_0}{2\sqrt{\pi} \sqrt{T^2 - jD_n}} \exp\left[-\frac{(\tau - \tau_n)^2}{T^2 - jD_n}\right] \right|^2 d\tau \quad (4.24)$$

En effectuant l'intégration nous trouvons (annexe C):

$$I_n = \frac{|r'_n|^2 s_0^2}{4\sqrt{2\pi}T} \Leftrightarrow \sqrt{I_n} = \sqrt{\frac{1}{4\sqrt{2\pi}T}} s_0 |r'_n| \quad (4.25)$$

4.2.3 Interprétation et suggestion

L'intégrale (4.24) associe à chaque signature $|\Gamma_n(\tau)|$ une quantité réelle $\sqrt{I_n}$ directement proportionnelle au coefficient de réflexion effectif $|r'_n|$ au point z_n ; notons que $\sqrt{I_n}$ est absolument indépendant du terme de dispersion $D_n \approx \beta_2 z_n$. Donc nous pouvons remplacer ces n signatures par n autres, caractérisée chacune par une amplitude maximale proportionnelle à $\sqrt{I_n}$, et ayant toutes la même largeur à mi-hauteur de la source gaussienne. L'interférogramme ajusté prendra alors la forme:

$$\Gamma_{ajustée}(\tau) = \sum_n K \sqrt{I_n} \exp\left[-\frac{(\tau - \tau_n)^2}{T^2}\right] \quad (4.26)$$

où K est une constante de proportionnalité et T est relié au temps de cohérence T_c de la source par la relation (4.2) :

$$T^2 = \frac{T_c^2}{8 \ln 2}$$

4.2.4 Remarques

Une fois que nous sommes capables de délimiter les bornes de chaque signature $\Gamma_n(\tau)$, cette méthode est immédiate et facile à appliquer: il suffit de calculer $\sqrt{I_n}$ pour

chaque $\Gamma_n(\tau)$, en intégrant le carré de son module entre ses bornes inférieure et supérieure, et ensuite construire le signal corrigé en utilisant (4.26).

Mais dans un signal réel de TCO, la reconnaissance des vraies signatures ainsi que leurs bornes est l'une des plus grandes difficultés dans le traitement d'un tel signal. Ceci est dû, comme on l'a déjà vu, à la présence de signatures parasites causées principalement par l'imperfection du spectre de la source et par le chevauchement entre les réflexions. Nous proposerons une solution à ce problème aux chapitres suivants.

4.3 Méthode de la corrélation avec un noyau dispersif

4.3.1 Introduction

Cette méthode a été proposée par Fercher et al. [7] et al. Elle se base sur la technique de corrélation entre deux signaux: le premier étant le signal analytique associé au signal réel mesuré et le second un noyau de dispersion ("Kernel" en nomenclature anglaise) construit numériquement. On suppose dans cette approche la connaissance à priori des coefficients de dispersion de l'échantillon β_1, β_2 , etc.... ainsi que la position du centre et les bornes de chacune des signatures.

4.3.2 Formulation mathématique

4.3.2.1 Construction du signal noyau

Considérons une onde qui se propage dans un milieu purement dispersif et limitons-nous tout d'abord au cas où les dispersions d'ordres supérieurs sont négligeables. Nous connaissons maintenant d'après l'équation (2.10), que la fonction de transfert d'un tel milieu est donnée par:

$$Q(w, z) = \exp \left[\frac{i\beta_2 z (w - w_0)^2}{2} \right] \quad (4.27)$$

D'où l'on tire la réponse impulsionnelle par une transformée de Fourier inverse :

$$Q(\tau, z) = F^{-1} \left\{ \exp \left[\frac{i\beta_2 z (w - w_0)^2}{2} \right] \right\} \quad (4.28)$$

Le noyau dispersif est défini par:

$$J_{Noyau}(\tau, z) = \hat{\Gamma}_0(\tau) * Q(\tau, z) \quad (4.29)$$

$\hat{\Gamma}_0(\tau)$ étant comme toujours la fonction d'auto-corrélation de l'interféromètre.

4.3.2.2 Propriété fondamentale du signal noyau

Effectuons une corrélation du signal noyau avec lui-même et appelons cette corrélation $J_{CD}(\tau)$:

$$J_{CD}(\tau) = J_{Noyau}(\tau, z) \otimes J_{Noyau}(\tau, z) \quad (4.30)$$

où le symbole $\otimes$ désigne l'opérateur de corrélation. Nous pouvons démontrer (voir annexe D) que:

$$J_{CD}(\tau) \equiv \hat{\Gamma}_0(\tau) \otimes \hat{\Gamma}_0(\tau) \quad (4.31)$$

Ceci signifie que l'auto-corrélation du signal noyau est identique à l'auto-corrélation de $\hat{\Gamma}_0(\tau)$. Donc, elle est absolument indépendante de la dispersion et c'est d'ailleurs la raison pour laquelle on a indicé cette fonction par CD qui tient pour: "Compensation de la Dispersion".

4.3.2.3 Compensation de la dispersion dans un signal de TCO

Considérons le signal de corrélation croisée de l'interféromètre chargé par un échantillon quelconque; comme nous l'avons déjà vu à maintes reprises, nous pouvons écrire que:

$$\hat{\Gamma}_c(\tau, z) = \hat{\Gamma}_0(\tau) * h(\tau, z) \Leftrightarrow F(\hat{\Gamma}_c(\tau, z)) = \hat{S}_0(w)H(w, z) \quad (4.32)$$

D'une façon très générale, nous pouvons exprimer $H(w, z)$ sous la forme d'un produit de deux termes; le premier tient compte de la dispersion et le second de toutes les autres propriétés du milieu. On appelle ce dernier "potentiel de diffusion" [7,22] et c'est ce terme que nous cherchons à caractériser en TCO ; nous le notons par $f(\tau, z)$.

Donc, nous pouvons écrire:

$$H(w, z) = F(w, z) \left\{ \exp \left[\frac{i\beta_2 z (w - w_0)^2}{2} \right] \right\} \Leftrightarrow h(\tau, z) = f(\tau, z) * Q(\tau, z) \quad (4.33)$$

En insérant (4.33) dans (4.32), et en notant que la convolution est associative, nous obtenons:

$$\hat{\Gamma}_c(\tau, z) = \hat{\Gamma}_0(\tau) * f(\tau, z) * Q(\tau, z) \quad (4.34)$$

Considérons maintenant la corrélation entre $\hat{\Gamma}_c(\tau, z)$ et le noyau $J_{Noyau}(\tau, z)$ donnée par:

$$J_c(\tau, z) = \hat{\Gamma}_c(\tau, z) \otimes J_{Noyau}(\tau, z) \quad (4.35)$$

Nous pouvons démontrer (voir annexe D) que l'opération (4.35) mène à:

$$J_c(\tau, z) = f(\tau, z) * [\hat{\Gamma}_0(\tau) \otimes \hat{\Gamma}_0(\tau)] \quad (4.36)$$

Donc, nous pouvons conclure que $J_c(\tau, z)$ représente une mesure des caractéristiques physiques de l'échantillon non affectée par la dispersion.

Si nous désirons obtenir explicitement $f(\tau, z)$, il suffit par exemple d'appliquer la méthode de déconvolution itérative présentée au chapitre 3 à $J_c(\tau, z)$ et dans laquelle nous remplaçons $\hat{\Gamma}_0(\tau)$ par $\hat{\Gamma}_0(\tau) \otimes \hat{\Gamma}_0(\tau)$.

4.3.3 Récapitulation

Pratiquement, cette méthode se résume par les étapes suivantes:

1. À partir de la trace à vide, nous obtenons numériquement par la transformation de Hilbert le signal analytique associé $\hat{\Gamma}_0(\tau)$.
2. Pour une trace longitudinale donnée, d'une mesure avec échantillon, nous associons numériquement par la transformée de Hilbert, à chaque signature repérée par son centre z_m , le signal analytique. Nous obtenons le $\hat{\Gamma}_c(\tau, z_m)$ de (4.34).
3. Pour chaque signature repérée par son centre z_m , nous construisons numériquement son noyau dispersif en effectuant une corrélation entre $\hat{\Gamma}_0(\tau)$ et $Q(\tau, z_m)$ associé à cette signature. C'est le signal $J_{Noyau}(\tau, z_m)$ de l'équation (4.29).
4. Pour chaque signature, nous effectuons la corrélation entre $\hat{\Gamma}_c(\tau, z_m)$ et $J_{Noyau}(\tau, z_m)$ pour obtenir le signal $J_c(\tau, z_m)$ de l'équation (4.36). Ce signal est une mesure non affectée par la dispersion, des caractéristiques de l'échantillon au point z_m .

4.3.4 Remarques

1- Pour pouvoir construire le signal noyau $J_{Noyau}(\tau, z_m)$ à partir des équations (4.28) et (4.29), il est évident que nous avons besoin de calculer le coefficient de dispersion β_2 . Pour cela, nous devons connaître les caractéristiques de dispersion de l'échantillon en question. Puisque la matière biologique est constituée de plus de 70 % d'eau, on ne se trompe pas beaucoup en adoptant les caractéristiques dispersives de l'eau [23] connues avec une assez bonne précision dans le domaine spectral utilisé en TCO [24].

2- L'approche telle que présentée par Fercher et al. [7] se limite à la dispersion du deuxième ordre en construisant le signal noyau dispersif. Mais nous pouvons assurer que rien n'empêche d'introduire les coefficients d'ordres supérieurs une fois que ceux-ci sont connus. En effet, nous avons démontré en annexe D, que la relation (4.31) reste toujours dans le cas où l'on substitue

$$Q(\tau, z) = F^{-1} \left\{ \exp \left[i \frac{\beta_2 z (w - w_0)^2}{2} + i \frac{\beta_3 z (w - w_0)^3}{6} + \dots \right] \right\}$$

à

$$Q(\tau, z) = F^{-1} \left\{ \exp \left[\frac{i \beta_2 z (w - w_0)^2}{2} \right] \right\}$$

3- Pour pouvoir l'appliquer sur une trace réelle, cette méthode nécessite la connaissance des positions z_m des centres des signatures utiles ainsi que leurs bornes. Comme nous l'avons déjà annoncé, nous proposerons une solution à ce problème aux chapitres 5 et 6.

4.3.5 Simulation numérique

Nous allons vérifier le fonctionnement de cette méthode dans un cas particulier simple en utilisant le même signal dispersé de la figure 4.2.(a). Rappelons que ce signal est obtenu en introduisant une lame de microscope dans le bras de mesure de l'interféromètre. Donc

grossièrement, nous pouvons représenter ce signal comme étant simplement, le résultat de la propagation du signal à vide dans un milieu purement dispersif; en termes mathématiques ceci se traduit par:

$$\hat{\Gamma}_c(\tau, z) = \hat{\Gamma}_0(\tau) * F^{-1} \left\{ \exp \left[i \frac{\beta_2 z (w - w_0)^2}{2} \right] \right\} \quad (4.37)$$

En comparant (4.37) à (4.29), nous concluons que ce signal est identique à son propre noyau dispersif. Par conséquent, il suffit de faire la corrélation de ce signal avec lui-même et de comparer le résultat avec $\hat{\Gamma}_0(\tau) \otimes \hat{\Gamma}_0(\tau)$.

La figure 4.4 résume les résultats des opérations effectuées :

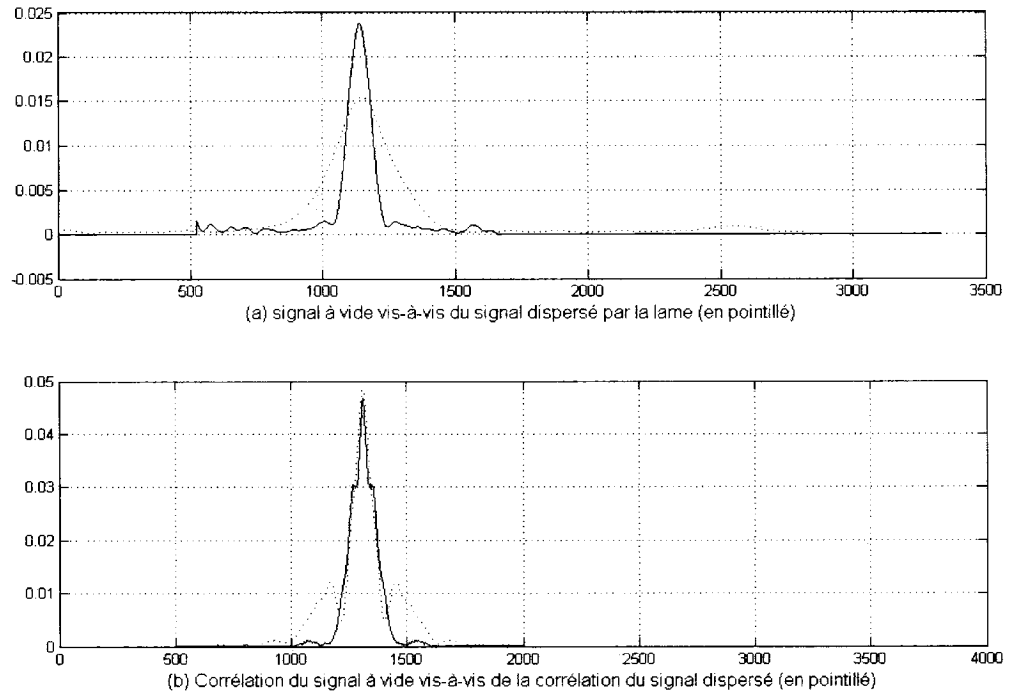


Figure 4.4 Élimination de la dispersion par la méthode de la corrélation avec un noyau dispersif dans le cas du signal dispersé par une lame de microscope. (Axes horizontaux et verticaux en unités arbitraires.)

Nous pouvons observer dans les graphiques (b) qu'effectivement les deux corrélations ont la même largeur à mi-hauteur bien que la courbe relative au signal de la lame présente des lobes secondaires plus élevés. Ceci est dû probablement à l'hypothèse que nous avons faite sur la constitution du signal de la lame.

4.4 Méthode spectrale pour éliminer la dispersion

Jusque là, toutes les méthodes que nous avons présentées, opèrent dans le domaine temporel. Il existe une méthode spectrale qui contourne la difficulté de reconnaître les bornes des signatures utiles. Elle a été proposée par Brinkmeyer et al. [13,14] dans le contexte de tester les guides d'ondes optiques intégrés en utilisant la réflectométrie par cohérence optique. Cette méthode est exposée brièvement en annexe E, nous nous contentons ici de mentionner qu'elle se base sur un arrangement spectral gaussien identique à ce que nous avons présenté au chapitre 3, suivi d'une transformation non linéaire de l'échelle des pulsations du type :

$$\bar{w} = w + \frac{(w - w_0)^2}{2\beta_1} \beta_2$$

À première vue, l'approche est très séduisante puisqu'elle n'exige pas la connaissance à priori des centres et des bornes des signatures. Mais en réalité, elle est très difficile à implémenter puisqu'elle exige l'interpolation à la nouvelle pulsation $\bar{w}$ du module et de la phase du spectre de chacune des traces mesurées. Or, nous savons que ce spectre varie en module et en phase, d'une trace à une autre, en fonction de la structure de l'échantillon. Par conséquent, le nombre de paramètres nécessaires pour une bonne interpolation varie pour chaque balayage longitudinal et ne peut être facilement déterminé d'une façon automatique. Bien sûr dans une situation statique, on peut aboutir à une bonne interpolation par essai et erreur pour chaque balayage, mais une telle disposition ne présente aucun intérêt dans un système pratique.

CHAPITRE 5

DÉTECTION ET CORRECTION DES SIGNATURES PAR LA MÉTHODE DE L'ARRANGEMENT SPECTRAL ET DES TRANSFORMÉES EN ONDELETTE (ASTO)

5.1 Introduction

Nous avons exposé dans les chapitres précédents, différentes méthodes numériques pour éliminer la dispersion dans les signaux de TCO. Dans plusieurs de ces méthodes, nous avons supposé connaître la position et les bornes de chacune des signatures représentant les signaux réfléchis en provenance des points réflectifs de l'échantillon. Malheureusement, au fur et à mesure que l'onde pénètre dans l'échantillon, elle se déforme à cause des phénomènes de dispersion, de diffusion, d'interférence, de fluctuation du spectre de la source, etc....Ce qui rend la détection des vraies signatures l'une des tâches les plus difficiles dans le domaine de la TCO.

Il existe dans la littérature un vaste arsenal d'outils mathématiques tels que la transformée de Fourier à temps -court (Short Time Fourier Transform), la transformée de Gabor, la transformée de Wigner-Ville, etc.... Mais toutes ces transformations utilisent des fenêtres de détection à largeur constante. Ceci entraîne que, pour une fenêtre large, les grands détails sont détectés alors que les petits détails sont ignorés, et vice-versa pour une fenêtre étroite. C'est pour cette raison, tous ces outils n'ont pas pu nous fournir une méthode assez robuste pour la détection des signatures de TCO dont les dimensions et les formes changent dramatiquement en fonction de la position et les propriétés locales dans l'échantillon en question.

Pour toutes ces raisons, nous avons décidé d'aborder ce problème avec un outil mathématique assez récent qui est la transformée en ondelette. Ce type de transformation permet, comme nous verrons un peu plus loin, une représentation tempo –fréquentielle avec des fenêtres variables adaptées à la nature et à la forme du signal en question.

5.2 Transformée en ondelette (TO)

5.2.1 Aperçu historique

Les séries et les transformées de Fourier ont été connues depuis le dix-neuvième siècle et un nombre incalculable de livres et d'articles de recherche ont été écrits à leur propos. Par contre, le développement des transformées en ondelette est beaucoup plus récent. Bien que son origine remonte à quelques décennies, le sujet des ondelettes n'est devenu populaire comme outil d'analyse des signaux et autres applications que durant les deux dernières décennies. En effet, on a dû attendre jusqu'au début des années 90, pour voir l'apparition de "la théorie des supports" (Frames theory dans la nomenclature anglaise) avec Ingrid Daubechies [25]. Cette théorie a permis de trouver des critères bien précis pour construire des ondelettes à support fini et orthogonales qui constituent le noyau de la transformée en ondelette discrète (TOD).

Dès lors, le recours aux TO est devenu très populaire dans plusieurs domaines de la science moderne: la géophysique, le biomédical, la caractérisation des matériaux, l'imagerie,...et à notre connaissance nous sommes les premiers à l'introduire dans le domaine de la tomographie par cohérence optique.

5.2.2 Sommaire sur les transformées en ondelette continue et discrète

Pour toute fonction à carré sommable $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt < \infty$,

on définit sa transformée en ondelette continue (TOC) par [26,27]:

$$W_{\Psi,f}(a,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\Psi_{a,\tau}^*(t)dt \quad (5.1)$$

où $\Psi_{a,\tau}(t)$ est "l'ondelette-fille" correspondant à l'échelle a et à la translation τ de "l'ondelette-mère" $\Psi(t)$ et telle que:

$$\Psi_{a,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right); \quad a > 0 \quad (5.2)$$

Compte tenu de (5.2), nous pouvons écrire (5.1) sous la forme d'une corrélation :

$$W_{\Psi,f}(a,\tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} f(t) \otimes \Psi^*\left(\frac{t}{a}\right) \quad (5.3)$$

Le facteur de normalisation $\frac{1}{\sqrt{a}}$ a été introduit pour satisfaire :

$$\|\Psi_{a,\tau}(t)\| = \|\Psi(t)\| \quad (5.4)$$

En effet :

$$\|\Psi_{a,\tau}(t)\| = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \right]^* dt$$

Et en posant :

$$t' = \frac{t-\tau}{a} \Rightarrow dt = a dt',$$

on obtient :

$$\|\Psi_{a,\tau}(t)\| = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{\sqrt{a}\sqrt{a}} \Psi(t') \Psi^*(t') dt' \equiv \|\Psi(t)\|.$$

Pour être en mesure de reconstruire $f(t)$ à partir des coefficients $W_{\Psi,f}(a,\tau)$, l'ondelette-mère $\Psi(t)$ doit satisfaire la condition d'admissibilité [27, page 61]:

$$C_{\Psi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\Psi}(w)|^2}{|w|} dw < \infty \quad (5.5)$$

où $\hat{\Psi}(w)$ est la transformée de Fourier de $\Psi(t)$. La condition (5.5) restreint la classe des fonctions qui peuvent être des ondelettes, elle exige d'une façon non équivoque que:

$$\hat{\Psi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t) dt = 0 \quad (5.6)$$

sinon (5.5) divergera à cause du terme w au dénominateur.

De la relation (5.6) nous pouvons conclure que les ondelettes doivent être de nature oscillatoire et c'est d'ailleurs pour cette raison qu'on les a appelées ainsi.

Donc dans le cas où (5.5) est satisfaite, nous pouvons obtenir $f(t)$ à partir de $W_{\Psi,f}(a, \tau)$ par la relation [27, page 76]:

$$f(t) = \frac{1}{C_{\Psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\Psi,f}(a, \tau) \Psi_{a,\tau}(t) \frac{da d\tau}{|a|^2} \quad (5.7)$$

Donc, la transformation d'ondelette définie par (5.1) ressemble à plusieurs autres types de transformations qui permettent une représentation simultanée temps-fréquence (Transformation de Gabor, transformation de Fourier à temps court STFT, transformation de Wigner -Villes,...), mais elle les surpasse toutes par le fait qu'elle permet un fenêtrage adapté variable selon le contenu fréquentiel des différentes positions temporelles du signal à analyser. En d'autres termes, pour les faibles valeurs de a , la fenêtre $\Psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)$ sera étroite et par conséquent plus apte à détecter les variations brusques (c-à-d les hautes fréquences) aux alentours de la position temporelle τ du signal en question. Par contre, les grandes valeurs de a sont plus adaptées pour capter les variations lentes (les basses fréquences) du signal aux alentours de la même position τ [31]. Donc, en faisant varier d'une façon continue les deux paramètres a et τ , nous obtenons une carte tempo – fréquentielle à deux dimensions $W_{\Psi,f}(a, \tau)$. Cependant ces coefficients $W_{\Psi,f}(a, \tau)$ contiennent une certaine redondance puisque le signal original $f(t)$ est à une seule dimension. C'est pour cela que l'évaluation numérique de l'intégrale (5.1) dans le cas des signaux réels pourrait être très lourde et coûteuse au niveau du nombre d'opérations et du

temps de calcul. D'ailleurs, c'est la raison pour laquelle ce formalisme puissant a été délaissé par la majorité des scientifiques pendant de longues décennies jusqu'à l'avènement de la version discrète.

Donc, au lieu d'effectuer l'intégrale (5.1) pour des valeurs continues de l'échelle a et de la translation τ , seulement un ensemble de valeurs discrètes est utilisé. C'est l'équivalent du théorème d'échantillonnage de Shanon pour les transformées de Fourier. Par exemple, nous pourrions choisir $a = a_0^m$ et $\tau = nb_0 a_0^m$ où m, n sont deux entiers et $a_0 > 1, b_0 > 0$. Par conséquent, les ondelettes en ces points discrets prennent la forme:

$$\Psi_{m,n}(t) = a_0^{-m/2} \Psi\left(\frac{t - nb_0 a_0^m}{a_0^m}\right) = a_0^{-m/2} \Psi(a_0^{-m} t - nb_0) \quad (5.8)$$

La théorie des supports permet d'évaluer la validité d'une telle discrétisation; en d'autres termes, pour que cette discrétisation caractérise complètement $f(t)$, il faut que les $\Psi_{m,n}(t)$ constituent un support (une base), ce qui revient à dire qu'il existe deux valeurs A et B ne dépendant que du choix des $\Psi_{m,n}(t)$, telles que [27, page 100]:

$$A \|f(t)\|^2 \leq \sum_{m,n} |\langle f(t), \Psi_{m,n}(t) \rangle|^2 \leq B \|f(t)\|^2 \quad (5.9)$$

où $\langle f(t), \Psi_{m,n}(t) \rangle$ est le produit scalaire des deux fonctions et qui est donné par:

$$\langle f(t), \Psi_{m,n}(t) \rangle = \frac{1}{a_0^{m/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Psi^*(a_0^{-m} t - nb_0) dt \quad (5.10)$$

Il est évident donc que le choix des ondelettes $\Psi_{m,n}(t)$ n'est pas arbitraire et qu'il est nécessaire de balancer la redondance avec les restrictions imposées sur $\Psi_{m,n}(t)$. Naturellement, si la redondance est forte, alors les contraintes imposées sur $\Psi_{m,n}(t)$ seront faibles et vice-versa. Donc au cas extrême de redondance, correspond la transformée continue en ondelette. À l'autre extrême, correspond la décomposition en ondelettes de base qui exige uniquement les valeurs des transformées aux échelles $a = 2^m$ et aux translations $\tau = n2^m$ [28,29]. Dans ce cas, le nombre de coefficients $W_{f,m,n}$ exigé pour une

reconstruction parfaite de $f(t)$ est minimal et il est égal au nombre de points de $f(t)$. Une telle discrétisation est dite la transformée en ondelette discrète (TOD)

5.2.3 Technique d'élagage en utilisant une TOD

La technique d'élagage (pruning en littérature anglaise) en utilisant une TOD est une technique de filtrage très puissante basée sur les TOD [30,31] et qui permet la réjection à un niveau déterminé des détails d'un signal. Nous nous contentons dans ce mémoire de la décrire très brièvement.

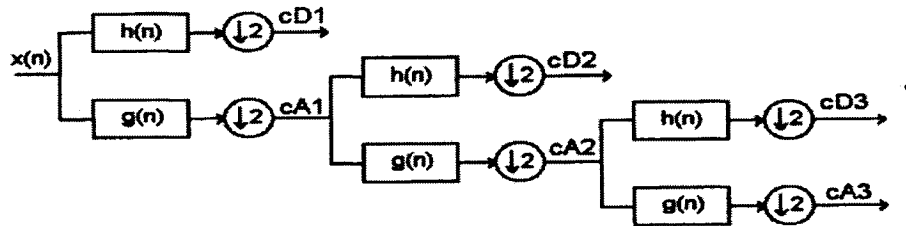


Figure 5.1. Schéma bloc d'une décomposition d'un signal en coefficients de détails et d'approximations en utilisant une TOD (d'après [31]).

Soit $x(n)$ une version discrète du signal à filtrer $x(t)$. En utilisant une TOD, on peut produire à partir de $x(n)$ deux familles de coefficients: les cA_i et les cD_i . L'indice i indique le niveau de décomposition. La première famille contient l'information sur ce qu'on appelle les "approximations" ou les variations lentes de $x(n)$ et la deuxième contient l'information relative aux "détails" ou les variations brusques. L'élagage que nous utiliserons à plusieurs reprises dans ce chapitre et dans le chapitre suivant, consiste à mettre à zéro les coefficients de tous les cD_i , sauf ceux correspondant au dernier niveau de décomposition. Ensuite, en utilisant une TOD inverse, nous reconstruisons à partir des coefficients cA_i et cD_i restants une version "purifiée" $x_p(n)$ de $x(n)$. La technique décrite, permet entre autres, l'élimination quasi-complète des oscillations brusques sur l'enveloppe d'un signal.

5.3 Détection des pics des signatures en utilisant les transformées en ondelette

Pour détecter les pics des signatures, nous allons nous inspirer d'une méthode de détection par signaux ultrasons, des défauts dans les matériaux métalliques, tels que corrosion, fissure,... [31].

Le point de départ sera d'effectuer sur $\Gamma_c(t)$ une transformée en ondelette continue telle que définie par l'équation (5.1) ou (5.3). Évidemment $\Gamma_c(t)$ y remplace $f(t)$. Il reste alors à régler le problème délicat concernant le choix convenable de l'ondelette-mère $\Psi(t)$. Le problème se complique davantage en notant que nous utilisons différentes sources optiques dans notre système de mesure. Dans [31], on a utilisé des signaux ultrasonores ayant toujours la même forme et qui ressemblent étroitement à la fameuse ondelette de Morley, incorporée dans le *Wavelet Toolbox* de *Matlab*. Malheureusement, tous les signaux d'auto-corrélation que nous obtenons ne ressemblent pas suffisamment à l'une ou à l'autre des ondelettes connues incorporées dans *Matlab* ou dans un autre logiciel de mathématiques que nous connaissons.

Pour surmonter cet obstacle, nous proposons pour toute source utilisée, un arrangement spectral numérique, identique à celui présenté au chapitre 3, de façon à rapprocher autant que faire se peut, la forme des signatures à la forme gaussienne. Une fois ceci est fait, nous pouvons recourir aux ondelettes gaussiennes incorporées dans *Matlab* et effectuer numériquement les opérations.

Supposons maintenant que le signal arrangé $\Gamma_{c/arrangé}(t)$ soit constitué de n points équidistants de T . Pour une échelle " a_j " donnée et une ondelette-fille correspondante

$\Psi\left(\frac{t}{a_j}\right)$, appliquons à $\Gamma_{c/arrangé}(t)$ une transformée en ondelette continue; cette opération produira n coefficients :

$$W_{\Psi}(t_i, a_j) \text{ avec : } t_i = iT ; i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Ces coefficients admettent des pics de corrélation indiquant chacun l'existence d'une concentration d'énergie, donc d'une signature [32]. En répétant la même opération avec une autre ondelette-fille $\Psi\left(\frac{t}{a_k}\right)$, nous obtenons un autre ensemble de coefficients ayant à leur tour des pics de corrélation, et ainsi de suite pour les autres échelles. Pour obtenir les centres des signatures, nous calculons d'abord la moyenne sur toutes les échelles de la puissance du signal (SAP: Scale Average Power) comme proposé par Georgiou et Cohen [33]:

$$\bar{W}_{\Psi}(t_i) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M |W_{\Psi}(t_i, a_j)|^2 ; i = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (5.11)$$

M étant le nombre d'échelles utilisées et dépendant des conditions expérimentales comme nous verrons dans la partie "Résultats expérimentaux".

Ensuite nous prenons les maximums de $\bar{W}_{\Psi}(t_i)$ comme étant les centres des signatures après avoir éliminé par la méthode d'élagage les oscillations rapides de $\bar{W}_{\Psi}(t_i)$. Il importe de signaler, qu'en prenant les positions des maximums comme étant les centres des signatures, nous supposons implicitement que ces signatures se déforment tout en gardant la symétrie du signal à vide. En réalité pour être rigoureux, ces centres doivent coïncider avec les positions des centres de gravité énergétiques de la courbe SAP [36]. Afin de simplifier le traitement numérique, nous avons relaxé ce critère rigoureux comme J. Hou a fait dans sa thèse [31].

En adoptant la technique de différenciation, nous détectons les maximums chaque fois la dérivée change de signe du positif au négatif.

La justification de tout le mécanisme présenté ci haut, notamment la transformée en ondelette continue, le calcul de la puissance moyenne et l'adoption des maximums de $\bar{W}_{\Psi}(t_i)$ comme centres des signatures, apparaîtra à la lumière des critères utilisés pour

développer la méthode de détection par "pseudo-ondelette signal à vide" présentée dans le chapitre suivant. Dans ce chapitre, nous nous contentons seulement d'exposer ce mécanisme en tant que tel sans vraiment puiser aux fondements logiques et mathématiques à partir desquels il découle.

5.4 Correction de l'élargissement des signatures dû à la dispersion

Puisque nous connaissons maintenant exactement la position des centres des signatures, la méthode que nous proposons pour remédier à cet effet est simple. Elle consiste à remplacer complètement le signal initial $\Gamma_c(t)$ par un autre $\Gamma_g(t)$ construit synthétiquement en "plantant" des signatures gaussiennes centrées sur les centres détectés des signatures de $\Gamma_{c/arrangé}(t)$. Évidemment toutes ces impulsions gaussiennes doivent avoir la même largeur à mi-hauteur du lobe principal du signal d'auto-corrélation et ne diffèrent entre elles que par leur amplitude. Pour conserver les hauteurs relatives des signatures du signal initial, il faut que les amplitudes des gaussiennes soient directement proportionnelles à la racine carrée des maximums des puissances détectés.

5.5 Récapitulation de la méthode suggérée

1. Faire un arrangement spectral du signal mesuré $\Gamma_c(t)$ par la méthode exposée au chapitre 3 pour obtenir le signal arrangé $\Gamma_{c/arrangé}(t)$.
2. Appliquer une transformée en ondelette continue à $\Gamma_{c/arrangé}(t)$ pour obtenir les coefficients $W_\Psi(t_i, a_j)$; $t_i = iT$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.
3. Calculer la puissance moyenne sur toutes les M échelles utilisées:

$$\overline{W}_\Psi(t_i) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M |W_\Psi(t_i, a_j)|^2; i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

4. Appliquer la technique d'élagage (pruning) à $\overline{W}_\Psi(t_i)$ pour éliminer les oscillations rapides et obtenir le signal "purifié" $\overline{W}_{\Psi/P}(t_i)$.
5. Détecter les maximums de $\overline{W}_{\Psi/P}(t_i)$ par différentiation numérique.
6. Construire le signal corrigé $\Gamma_g(t)$ en remplaçant toutes les signatures initiales par des signatures gaussiennes ayant toutes la même largeur à mi-hauteur que le signal d'auto-corrélation mais des amplitudes relatives proportionnelles à la racine carrée des maximums détectés sur la courbe SAP.

5.6 Résultats expérimentaux

5.6.1 Tissu d'oignon imagé par le laser Titane:Saphir

Tout d'abord, nous allons appliquer le formalisme décrit sur un signal de 180 traces longitudinales obtenues par le laser Titane:Saphir pulsé en utilisant un tissu d'oignon comme spécimen à imager. Ces traces représentent typiquement une surface de $1mm \times 1mm$.

La première étape consiste donc à faire un arrangement spectral sur le spectre effectif obtenu par une FFT du signal à vide. Nous allons choisir une courbe gaussienne qui l'approxime le plus possible. Pour cela, il faut que les deux courbes aient les moments spectraux d'ordre zéro, un et deux égaux [12]. Notons que dans le cas de l'arrangement spectral que nous avons fait à la section 3.3.3 avec la diode JDS comme source, nous n'avons pas mentionné le critère relatif au moment d'ordre deux, car la fonction de transfert obtenue en respectant ce critère admettait des pics très accentués à ses extrémités. Pour cette raison nous avons ignoré ce critère quantitatif et opté à une approche plus ou moins empirique. Notons en passant, que le premier moment est toujours respecté puisque les deux spectres sont symétriques et par contre ce moment est

toujours nul. Encore ici, nous utiliserons le critère de Wiener dans la détermination de la fonction de transfert adéquate.

La figure 5.2 résume les résultats obtenus pour cette première étape:

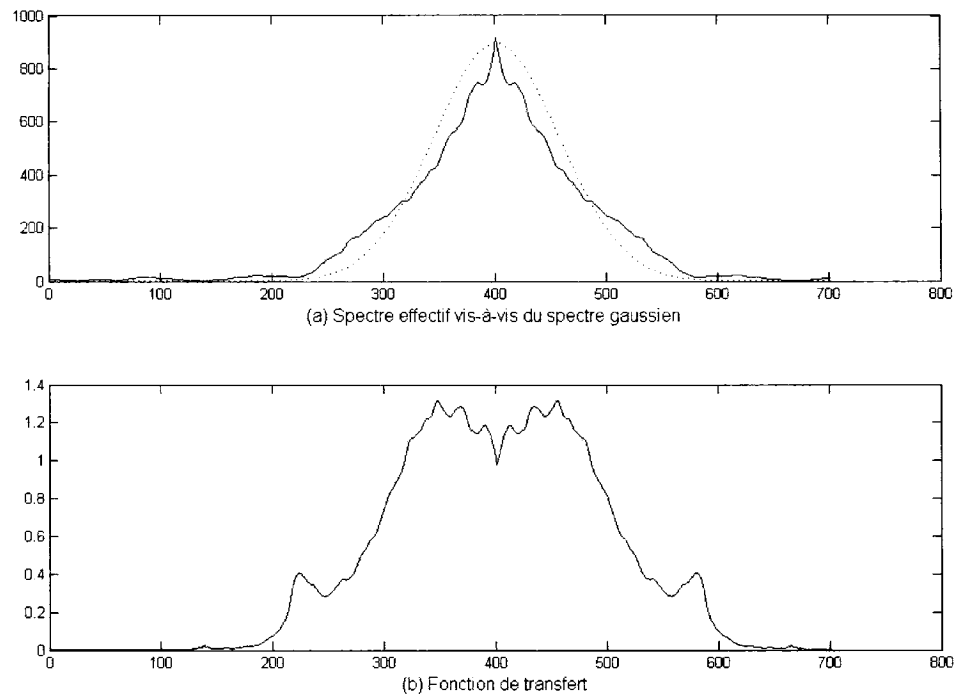


Figure 5.2 (a) Spectre gaussien équivalent ayant les 3 premiers moments spectraux égaux à ceux du spectre effectif du laser Titane:Saphir. (b) Fonction de transfert correspondante. (Axes horizontaux et verticaux en unités arbitraires.)

L'étape suivante consiste à multiplier le spectre de chacune des traces par la fonction de transfert $G(w)$ et à effectuer une FFT inverse pour obtenir les traces arrangées.

La figure 5.3 (a), nous montre la 100^{ième} trace longitudinale avant et après l'arrangement spectral. Dans (b), nous avons fait un zoom entre les points 2000 et 6000 pour montrer de près la forme du signal arrangé vis-à-vis celle du signal brut :

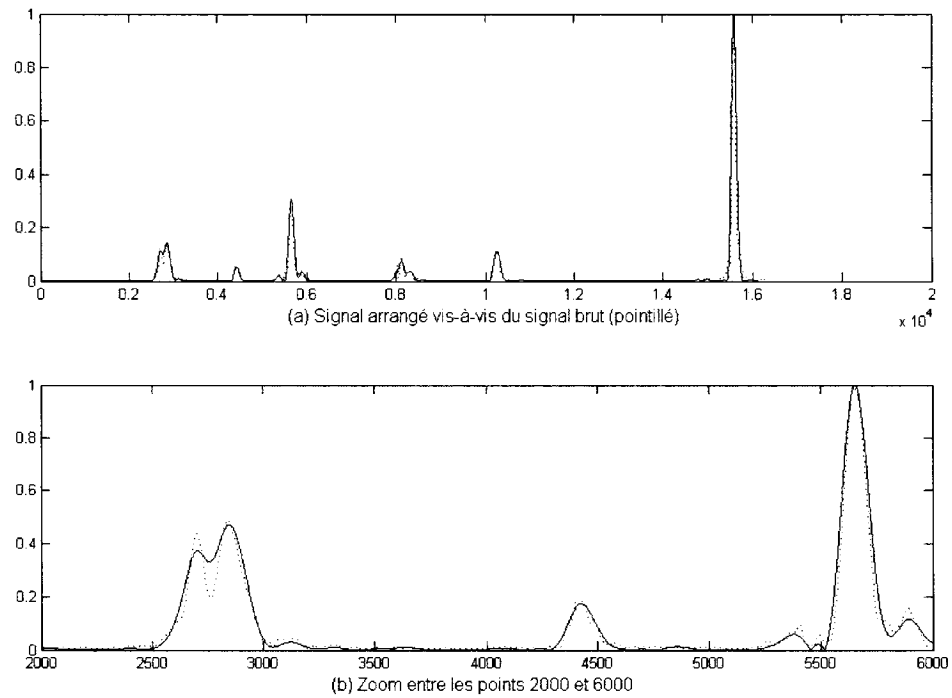


Figure 5.3 Graphique de la centième trace longitudinale avant arrangement spectral (trait pointillé) et après arrangement spectral (trait continu): intensité optique normalisée en fonction de la position dans l'échantillon en unité arbitraire.

Ensuite, à chacune des traces arrangées, nous avons appliqué une TOC en se servant des ondelettes gaussiennes de *Matlab* ; cette opération a été suivie par le calcul de la moyenne des puissances (SAP) sur les 4 échelles que nous avons utilisées dans cet exemple:

$$\overline{W}_{\Psi}(t_i) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 |W_{\Psi}(t_i, a_j)|^2 ; i = 0, 1, 2, \dots, 16249.$$

Notons que chacune de nos traces était constituée initialement de 16250 points. Puis nous avons procédé à la technique d'élagage pour filtrer la courbe SAP en utilisant une TOD avec l'ondelette de Coifman "coif3". Par différenciation, nous avons détecté les maximums de la courbe SAP qui représentent les positions des pics dans le signal arrangé. Pour éliminer les pics qui pourraient provenir de toute sorte de bruit, nous avons

adopté dans cet exemple, un critère empirique qui consiste à rejeter tous les pics inférieurs à 1 % de la valeur moyenne de la courbe SAP.

La figure 5.4 résume les résultats obtenus pour cette série d'opérations : Nous y avons tracé la courbe SAP (ligne continue) vis-à-vis du signal arrangé (en pointillé). Les petits cercles représentent les positions des maximums sur la courbe SAP qui sont supérieurs au seuil fixé uniquement. Ces maximums doivent correspondre à des positions où le signal arrangé possède une concentration d'énergie. Les différents zooms en (b), (c) et (d) montrent qu'effectivement à chacun des maximums détectés, une concentration d'énergie dans la trace arrangée (en pointillé) est présente.

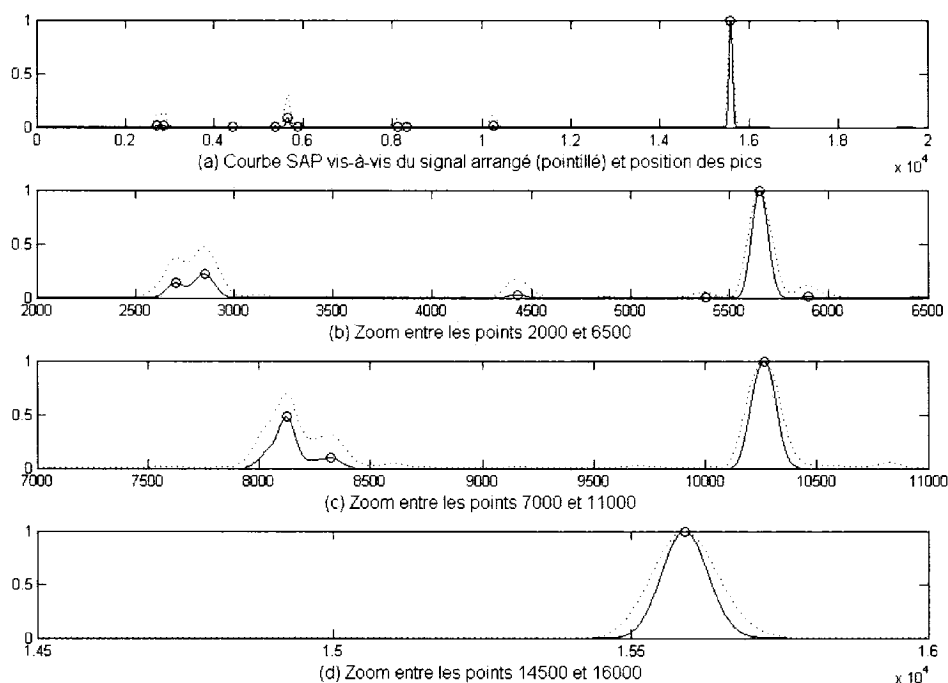


Figure 5.4 Courbes normalisées : SAP vis-à-vis de la trace arrangée avec les positions des maximums indiquées par des cercles. (Les chiffres sur les axes horizontaux représentent les points d'échantillonnage et correspondent à des positions physiques dans l'échantillon.)

Maintenant que les positions des pics supérieurs au seuil sont connues, nous passons à l'étape relativement simple qui consiste à construire synthétiquement, pour chacune des

traces longitudinales, le signal $\Gamma_g(t)$ constitué d'un train d'impulsions gaussiennes centrées sur les positions des pics. Toutes les gaussiennes auront la même largeur comparable à celle du signal à vide mais des hauteurs proportionnelles à la racine carrée de la hauteur du pic correspondant.

Nous avons tracé dans la figure 5.5 (a) le signal construit $\Gamma_g(t)$ vis-à-vis du signal brut de la centième trace, et en (b) nous avons fait un zoom entre les points 2000 et 6000 pour montrer que le signal construit est une version plus "polie" du signal brut:

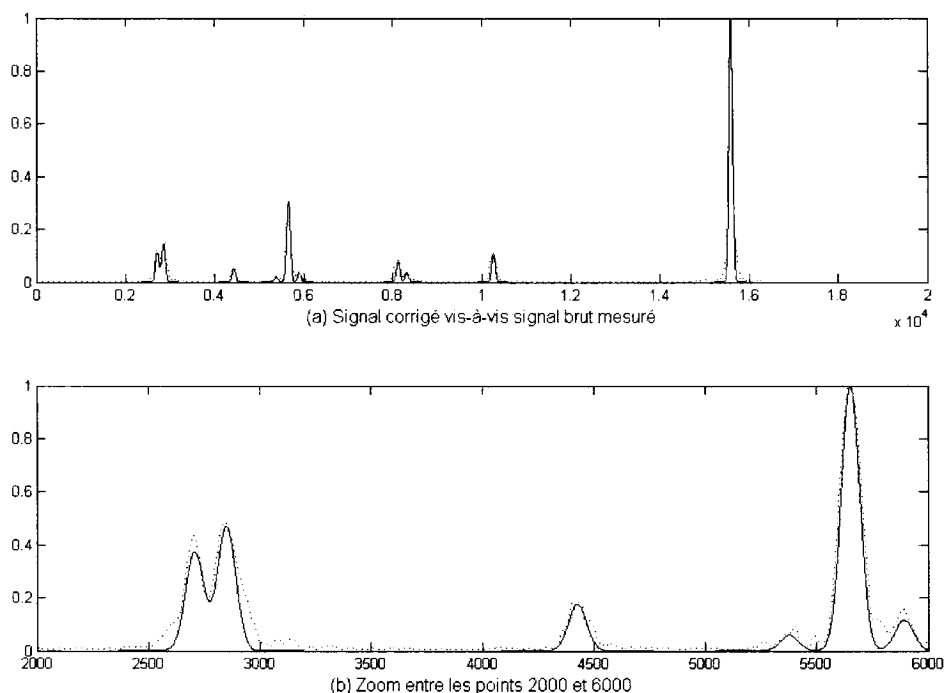


Figure 5.5 Courbes normalisées: signal brut mesuré vis-à-vis du signal construit en implantant des courbes gaussiennes centrées sur les positions des pics supérieurs au seuil choisi. (Les chiffres sur les axes horizontaux représentent les points d'échantillonnage et correspondent à des positions physiques dans l'échantillon.)

Pour conclure cette première partie, nous allons juger les effets apportés par cette approche sur l'image complète de 180 traces (figure 5.8). Pour cela nous allons la comparer avec l'image obtenue à partir du signal brut (figure 5.6) et avec celle obtenue par la méthode de la déconvolution itérative (figure 5.7). Il importe de noter que toutes ces images ainsi que celles qui vont suivre, ont été obtenues avec le même contraste, de façon à compenser les atténuations subies par les réflexions en provenance des zones profondes dans le spécimen.

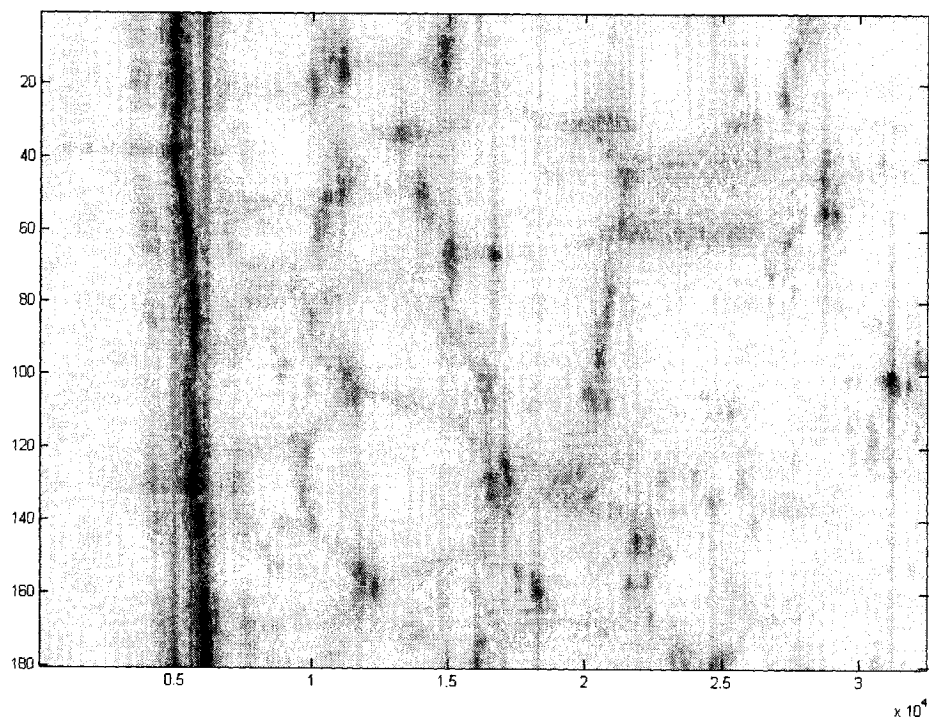


Figure 5.6 Image de tissu d'oignon obtenue à partir du signal mesuré brut non traité.
(Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.)

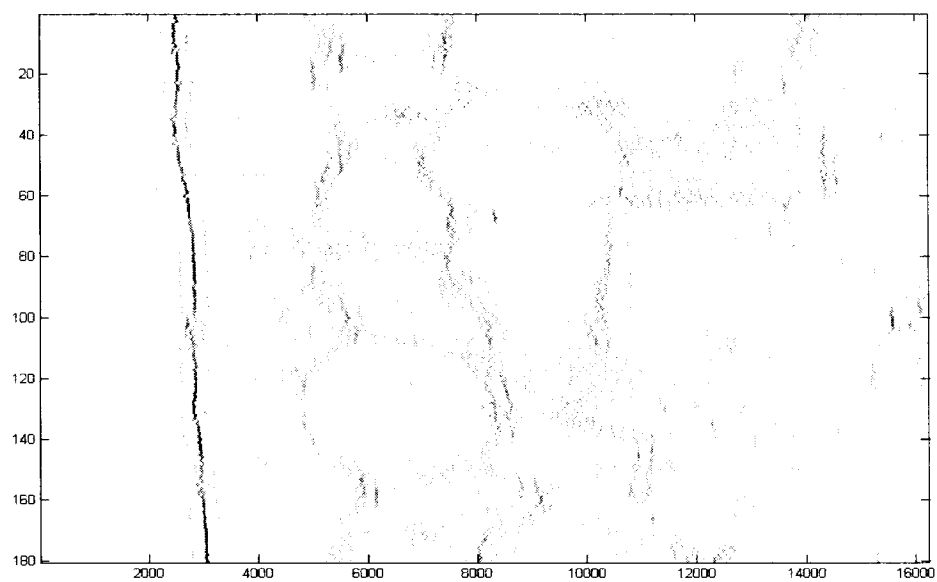


Figure 5.7 Image de tissu d'oignon obtenue par la méthode de déconvolution itérative (Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.)

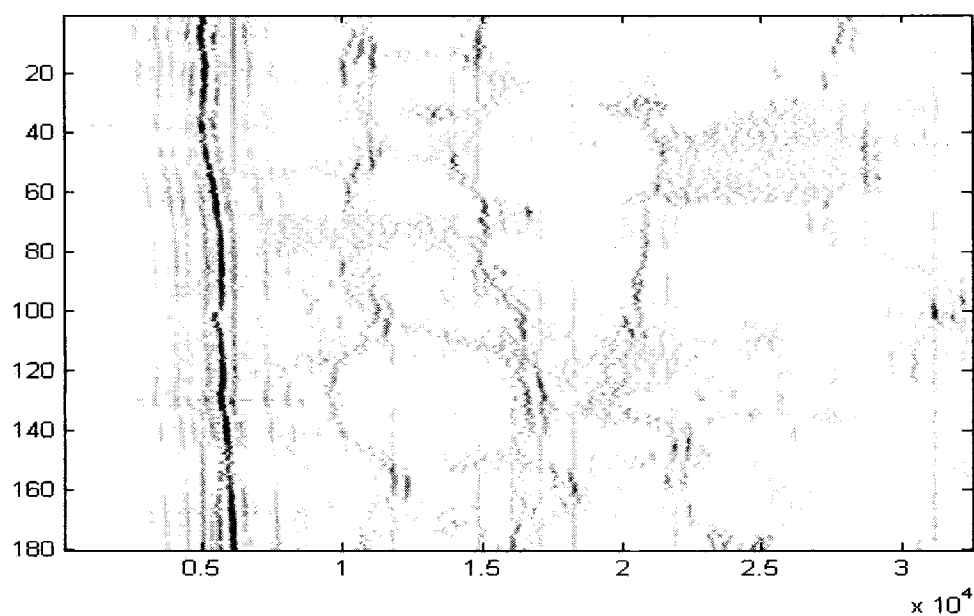


Figure 5.8 Image de tissu d'oignon obtenue par la méthode ASTO pour un seuil de 1 % (Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.)

En observant ces figures, nous pouvons réaliser que l'image obtenue par ASTO est plus claire et les contours y sont mieux définis. Par contre cette image contient toujours des traces de reflets dus aux lobes secondaires (surtout aux alentours de l'abscisse 5000) existant dans l'image brute mais qui sont beaucoup moins visibles dans l'image obtenue par itération. Nous pouvons les atténuer en diminuant la largeur spectrale de la gaussienne de l'arrangement spectral.

En effet, comme nous l'avons vu au chapitre 3, un spectre gaussien plus étroit réduit davantage les lobes secondaires qui sont la cause de ces reflets. Dans le contexte actuel, nous n'avons plus à nous soucier de la résolution en tant que telle, puisque dans tous les cas, nous allons remplacer toutes les signatures du signal arrangé par des gaussiennes à la largeur voulue. Le prix à payer apparaît dans les situations assez rares où deux signatures dans le signal brut se chevauchent étroitement de sorte que le signal arrangé ne contient qu'un seul pic au lieu de deux. Ceci se traduit évidemment par la perte de petits détails dans l'image. La figure 5.10 montre l'image obtenue pour le spectre gaussien de la figure 5.9 et qui est évidemment plus étroite que celui de la figure 5.2 (a) :

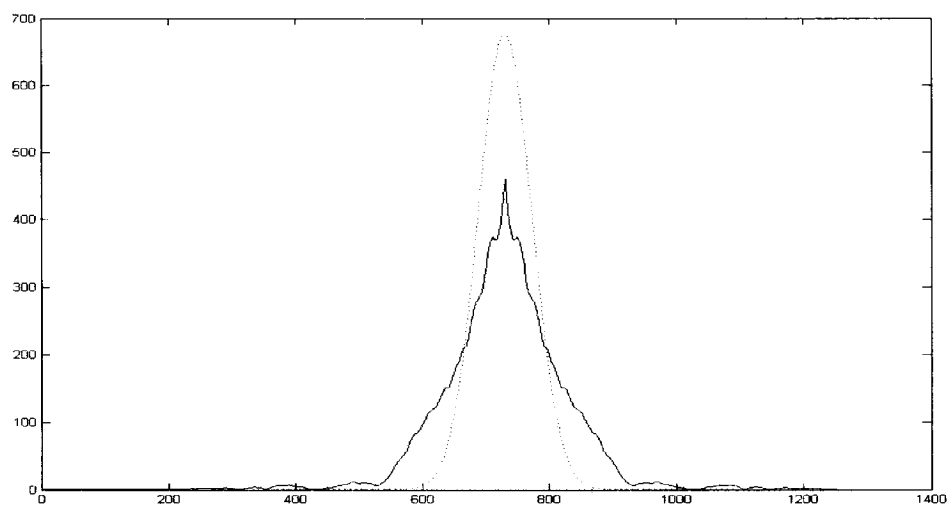


Figure 5.9 Spectre gaussien choisi ayant un contenu spectral nettement inférieur au spectre effectif. (Axe vertical en unité arbitraire, axe horizontal en unité de fréquence arbitraire.)

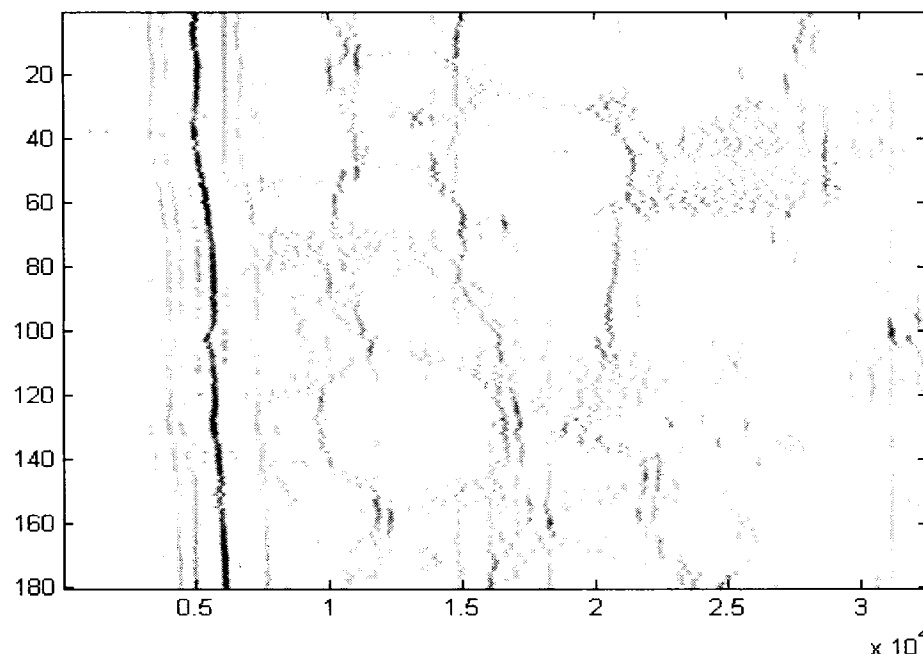


Figure 5.10 Image du tissu d'oignon obtenue avec un spectre gaussien plus étroit que celui obtenu avec le critère du second moment. (Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.)

Bien sûr, ASTO permet de capter plus de détails en abaissant le seuil de détection mais le risque de ramasser du bruit sera plus grand. Malheureusement, nous ne sommes pas capables, pour le moment, de discerner entre les pics utiles et nuisibles et par contre nous nous contentons de fixer, subjectivement à l'œil, le seuil qui donne la meilleure image.

5.6.2 Ruban adhésif et écailles de poisson imagés avec la diode JDS

Nous allons tester maintenant la méthode proposée sur l'échantillon mentionné. Comme nous l'avons mentionné au paragraphe précédent, un bon arrangement spectral est un facteur-clé pour la détection des pics aux bons endroits. Pour la diode JDS, nous avons vu au chapitre 3, qu'avec une gaussienne de largeur voisine de celle du spectre effectif, le bruit de fond est assez élevé et peut masquer les bons pics de faible amplitude. Pour cela, nous sommes obligés de choisir une gaussienne plus étroite que celle obtenue par le critère de l'égalité des moments spectraux. Mais cette fois, nous n'avons plus à nous

inquiéter de la dégradation de la résolution puisque nous allons remplacer le signal arrangé par le signal construit avec les impulsions gaussiennes ayant toutes la même largeur convenable. Mais encore, comme expliqué précédemment, certains détails pourraient disparaître.

La figure 5.11 montre les différentes étapes des opérations exécutées sur la 100^{ième} trace : En (a) nous montrons le spectre gaussien choisi, en (b) la fonction de transfert résultant en utilisant le critère de Wiener, en (c) le signal brut et le signal arrangé ainsi que les positions des maximums supérieurs au seuil fixé à 10 %, et enfin en (d) le signal construit final.

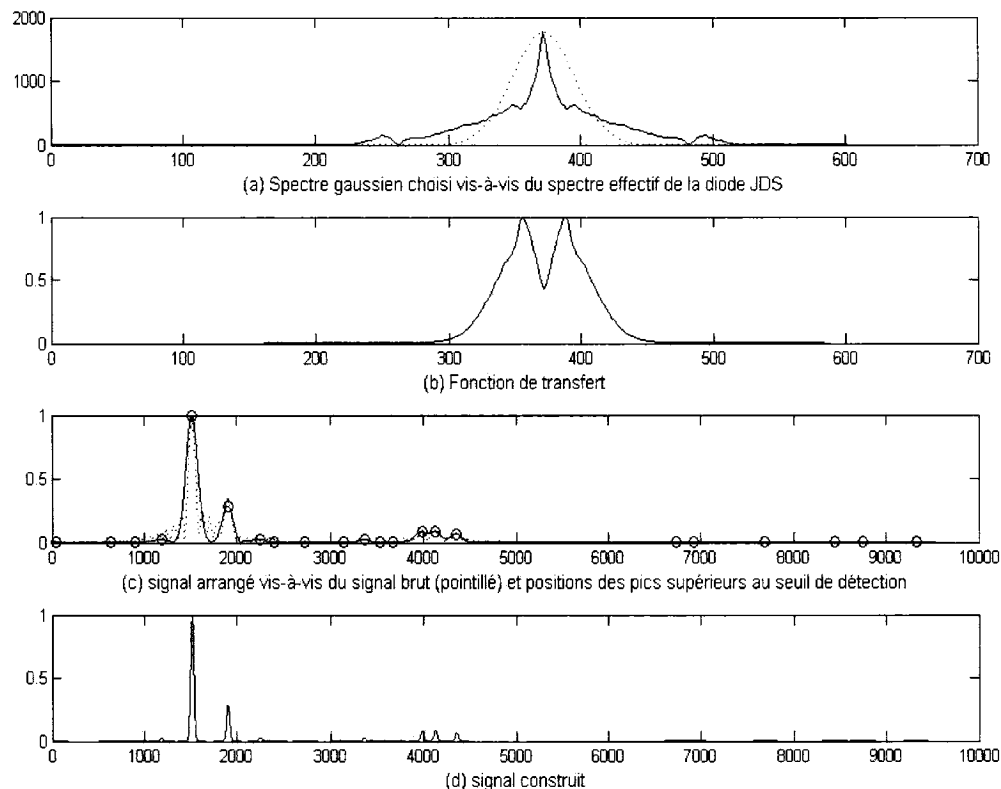


Figure 5.11 Graphiques relatifs aux différentes étapes de la méthode ASTO appliquée à la 100^{ième} trace de l'échantillon ruban adhésif et écailles de poisson. (a) et (b) : axes verticaux en unité arbitraire, axes horizontaux en unité de fréquence arbitraire. (c) et (d): intensités normalisées en fonction du point d'échantillonnage.

Envisageons maintenant l'effet global en comparant les images obtenues par ASTO pour différents seuils (figures 5.12, 5.13 et 5.14) avec celle obtenue à partir du signal brut (figure 3.2) et celle obtenue par la méthode de la déconvolution itérative (figure 3.4):

Dans toutes les images produites par ASTO, les effets des lobes secondaires sont beaucoup moins visibles que dans l'image brute, et on se rapproche à ce sujet de l'image obtenue par itération. À un seuil élevé (figure 5.12), l'image produite par ASTO contient tous les détails existant dans l'image obtenue par la méthode itérative. Mais pour un seuil inférieur, une structure feuilletée apparaît graduellement et qui n'est absolument pas présente dans l'image par itération. Nous nous contentons seulement de signaler cette observation pour le moment, quitte à la commenter plus tard au chapitre 6.

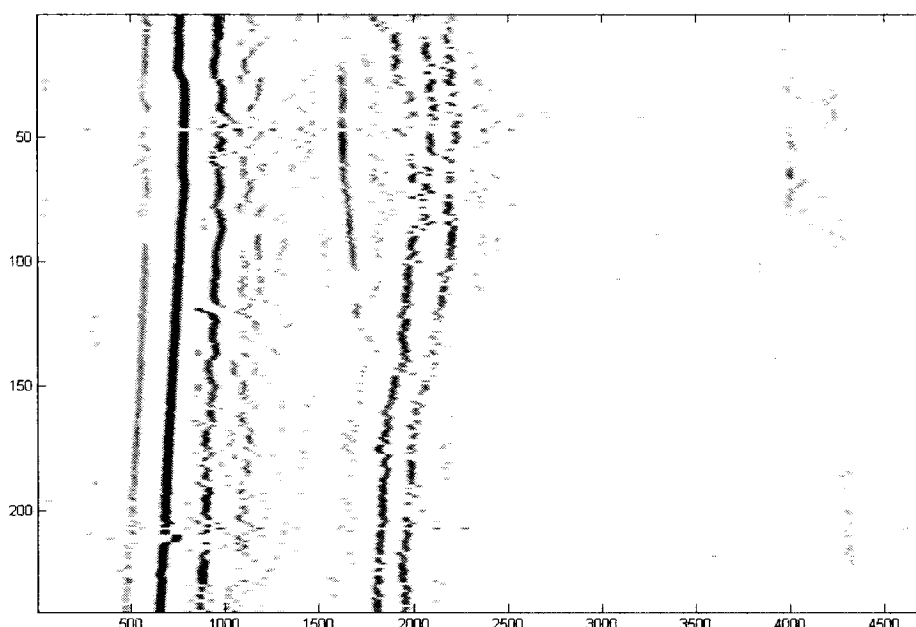


Figure 5.12 Image du ruban adhésif et d'écailles de poisson obtenue par ASTO pour un seuil de 10%.
(Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.)

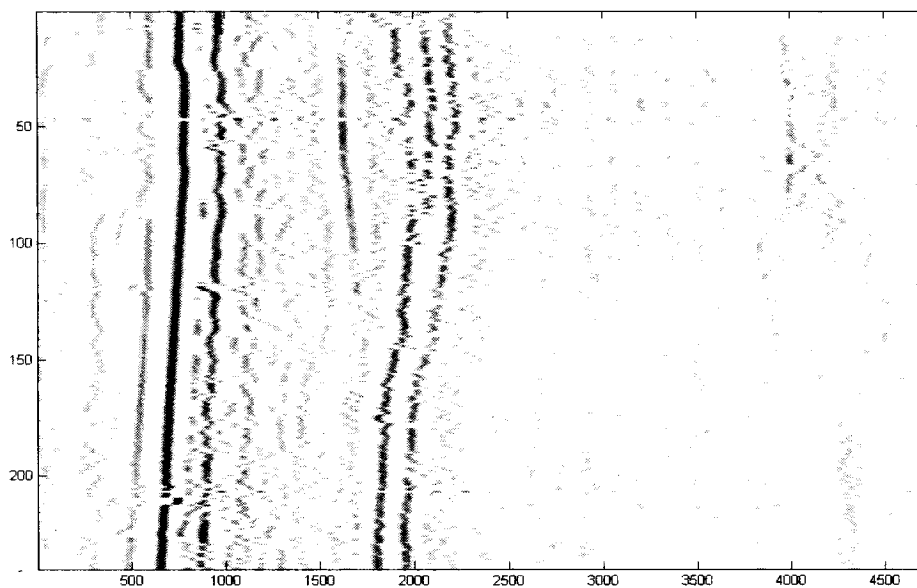


Figure 5.13 Image du ruban adhésif et d'écailles de poisson obtenue par ASTO pour un seuil de 5%.
(Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.)

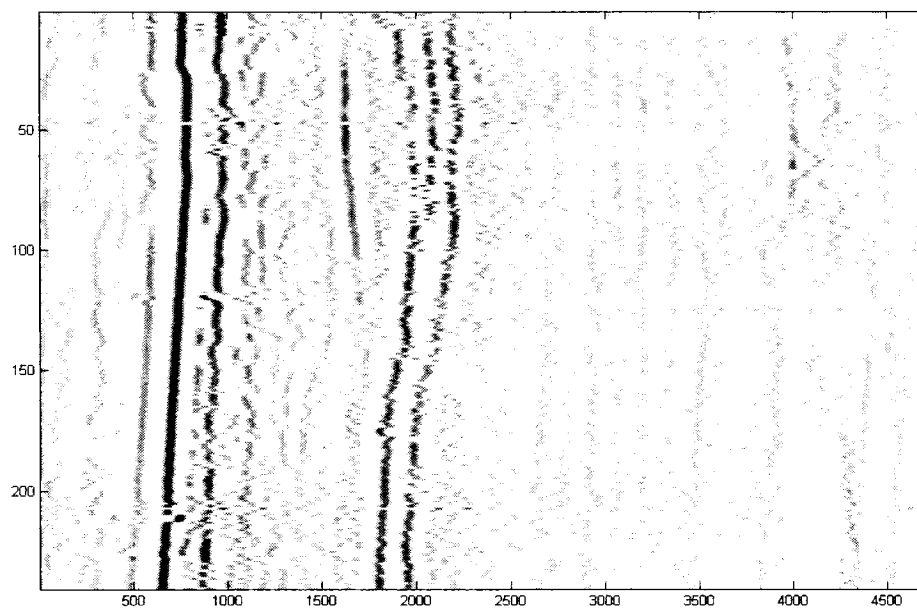


Figure 5.14 Image du ruban adhésif et d'écailles de poisson obtenue par ASTO pour un seuil de 1%.
(Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.)

5.7 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une toute nouvelle méthode (ASTO) pour traiter les effets de la forme du spectre de la source et de la dispersion. Cette méthode utilise les techniques des transformées en ondelette pour détecter les positions des pics sur les traces du signal, modifiées par un arrangement spectral gaussien approprié. Une fois les pics détectés, ils sont tous remplacés par des impulsions gaussiennes ayant chacune une hauteur proportionnelle à la hauteur du pic correspondant mais ayant toutes la même largeur comparable à celle du signal à vide de la source utilisée. Cette dernière opération permet d'éliminer complètement la détérioration de la résolution causée par la dispersion.

La performance d'ASTO est étroitement liée au degré de succès dans l'arrangement spectral effectué. Nous avons montré qu'elle est capable de produire au moins les détails détectés par la technique de déconvolution itérative alors que cette dernière reste supérieure au sujet de l'élimination des lobes secondaires.

CHAPITRE 6

DÉTECTION ET CORRECTION DES SIGNATURES PAR LA MÉTHODE DES PSEUDO-ONDELETTES DU SIGNAL À VIDE (POSAV)

6.1 Introduction

Nous allons aborder le problème de détection des pics sous un autre angle, en élaborant une nouvelle technique, abrégée POSAV, basée sur un théorème très connu dans la théorie des signaux en régime linéaire. Cette nouvelle approche va nous permettre d'éviter l'arrangement spectral utilisé dans la méthode précédente et qui pourrait être quelquefois difficile si le spectre de la source n'est pas régulier, un peu comme le spectre de la diode JDS. De plus, durant l'exposé, nous ferons un parallèle entre ces deux méthodes, et nous éclaircirons en cours de route les fondements mathématiques et logiques du mécanisme d'ASTO, qui ressemble étroitement en plusieurs points à celui de POSAV.

6.2 Formulation mathématique

Tout d'abord, considérons un modèle simplifié en écrivant le signal associé à une trace longitudinale d'une mesure de TCO comme un train d'impulsions du signal à vide ayant la forme:

$$\Gamma_c(t) = \sum_m g_m \Gamma_0(t - t_m) + n(t) \quad (6.1)$$

où $\Gamma_0(t)$ désigne l'enveloppe réelle du signal à vide, $n(t)$ le signal associé au bruit du système, g_m un facteur d'atténuation de l'impulsion réfléchie au point m et t_m le temps d'allée-retour associé à la réflexion au point m .

En considérant un bruit blanc gaussien, nous connaissons d'après la théorie des systèmes linéaires que le filtre optimal pour détecter les impulsions $\Gamma_0(t)$ est le filtre adapté ayant une réponse impulsionnelle de la même forme que $\Gamma_0(t)$, mais renversée dans le temps [34]. Donc, sa réponse impulsionnelle sera donnée par:

$$h(t) = \Gamma_0(-t) \quad (6.2)$$

Or, nous savons qu'une convolution avec un signal renversé est équivalente à une corrélation avec le signal original [35, page 172]; donc, la détection optimale sera donnée par l'opération :

$$D(t) = \Gamma_c(t) * \Gamma_0(-t) \equiv \Gamma_c(t) \otimes \Gamma_0(t) \quad (6.3)$$

Maintenant, adoptons un modèle plus général en modifiant l'équation (6.1) pour décrire une situation beaucoup plus réaliste et ceci en posant que:

$$\Gamma_c(t) = \sum_m g_m \Gamma_0(t - t_m) + \sum_n g_n \Gamma_0\left(\frac{t - t_n}{a_1}\right) + \sum_u g_u \Gamma_0\left(\frac{t - t_u}{a_2}\right) + \dots + n(t) \quad (6.4)$$

Donc maintenant $\Gamma_c(t)$ est décrite par plusieurs familles d'impulsions. Chaque famille est caractérisée par un ensemble d'impulsions identiques, ayant la même forme que le signal à vide $\Gamma_0(t)$, mais étirées à une échelle a_i . De cette façon, nous tenons compte des déformations dues, entre autres, à la propagation de ces impulsions dans un milieu dispersif. Proposons-nous de trouver une manière optimale pour la détection de l'ensemble de toutes les familles.

Or, nous savons déjà que le filtre optimal pour la détection de la famille $\Gamma_0(t)$ est le filtre $h_0(t) = \Gamma_0(-t)$ pour lequel on associe le signal de détection $D_0(t)$ tel que:

$$D_0(t) = \Gamma_c(t) \otimes \Gamma_0(t) \quad (6.5)$$

De même pour la détection de la famille $\Gamma_0\left(\frac{t}{a_1}\right)$, nous associons $D_1(t)$ tel que:

$$D_1(t) = \Gamma_c(t) \otimes \Gamma_0\left(\frac{t}{a_1}\right) \quad (6.6)$$

Et d'une façon générale, pour une famille $\Gamma_0\left(\frac{t}{a_j}\right)$ la détection optimale associée est donnée par :

$$D_j(t) = \Gamma_c(t) \otimes \Gamma_0\left(\frac{t}{a_j}\right) \quad (6.7)$$

Notons qu'à un facteur de normalisation près, nous pouvons facilement identifier l'opération (6.7) à une transformée en ondelette continue (TOC) à l'échelle a_j (voir équation (5.3)) et où $\Gamma_0\left(\frac{t}{a}\right)$ est identifiée à $\Psi\left(\frac{t}{a}\right)$. Pour rester conformes avec le formalisme des ondelettes, normalisons $D_j(t)$ en introduisant le terme $\frac{1}{\sqrt{a_j}}$:

$$\bar{D}_j(t) = \frac{1}{\sqrt{a_j}} \Gamma_c(t) \otimes \Gamma_0\left(\frac{t}{a_j}\right) \quad (6.8)$$

Maintenant, d'une façon intuitive, adoptons comme signal de détection optimal global pour l'ensemble des N familles $\Gamma_0\left(\frac{t}{a_j}\right)$, la moyenne de tous les signaux de détection optimaux individuels $\bar{D}_j(t)$ ou en termes mathématiques:

$$\bar{D}_{globale}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{D}_j(t) \quad (6.9)$$

En détectant les maximums de $\overline{D}_{globale}(t)$, nous devons trouver les positions des centres des signatures utiles. Puisque nous travaillons avec les enveloppes réelles, tous les $\overline{D}_j(t)$ sont positifs. Par conséquent, les maximums de la courbe $\overline{D}_{globale}(t)$ coïncident avec ceux de la courbe $\overline{W}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \overline{D}_j^2(t)$ qui est équivalente à la moyenne sur toutes les échelles de la puissance du signal (SAP) donnée par l'équation (5.11).

Maintenant que les centres des signatures sont connus, nous procédons pour la suite exactement comme nous avons fait pour ASTO au chapitre 5.

6.3 Remarques

1- Du fait que $\Gamma_0(t)$ est l'enveloppe réelle du signal à vide, elle ne vérifie pas la condition d'admissibilité (5.6) des ondelettes. Pour ne pas contrevenir au concept utilisé dans le domaine des mathématiques, nous avons évité le terme d'ondelette et adopté la désignation de 'pseudo-ondelette' pour cette nouvelle méthode. Cependant, cette condition d'admissibilité n'est nécessaire que pour la transformation inverse, ou en d'autres termes, la reconstruction de $\Gamma_c(t)$ à partir des signaux de détection $D_j(t)$. Il importe de noter dans ce contexte, que nous n'avons jamais eu besoin de cette opération inverse dans notre démarche de toute façon.

2- Dans le modèle décrit par l'équation (6.4), nous avons considéré le cas simple d'un bruit blanc gaussien, mais rien n'empêche de généraliser la situation avec un modèle de bruit plus approprié. En effet, nous savons d'après la théorie des signaux [34] que dans ce cas, le filtre adapté optimal pour la détection d'un signal $\Gamma_0(t)$ est caractérisé par une fonction de transfert de la forme:

$$H(f) = \frac{F(\Gamma_0(-t))}{N(f)} \quad (6.10)$$

où $N(f)$ est le spectre associé au bruit supposé connu et $F(\Gamma_0(-t))$ est la transformée de Fourier de $\Gamma_0(-t)$. Une fois $H(f)$ calculée, nous obtenons $h(t)$ par une transformée de Fourier inverse. Et on procède de la même façon pour déterminer toute la famille de filtres correspondant à $\Gamma_0\left(\frac{t}{a_1}\right), \Gamma_0\left(\frac{t}{a_2}\right), etc...$

3- Dans ASTO, les ondelettes gaussiennes de *Matlab* jouent le même rôle que les $\Gamma_0\left(\frac{t}{a_j}\right)$, mais pour les traces arrangées par un spectre gaussien.

6.4 Élimination des lobes secondaires

Nous avons vu dans ASTO que la réduction des lobes secondaires dépend de l'arrangement spectral effectué; dans POSAV, ce but est atteint d'une manière beaucoup plus efficace par l'effet combiné des corrélations et de l'élagage de leur moyenne. Pour le montrer, nous allons prendre l'enveloppe du signal à vide du Titane:Saphir pulsé et lui appliquer une série de corrélations avec un paquet de six pseudo-ondelettes construites à partir de cette même enveloppe et s'étalant en intervalles réguliers de 1 à 1,4. Ceci signifie que la première est identique au signal à vide alors que la dernière s'étale sur un support temporel de 40 % plus large que la première. En fait, avec ce choix, nous simulons un cas hypothétique où l'impulsion initiale s'étale au fur et à mesure qu'elle pénètre dans l'échantillon, pour atteindre 140 % de sa largeur originale au point de réflexion le plus éloigné dans l'échantillon.

Nous montrons dans la figure 6.1 ces pseudo-ondelettes. Chacune d'elles a été normalisée en la divisant par la racine carrée de l'échelle correspondante comme indiqué juste avant l'équation (6.8).

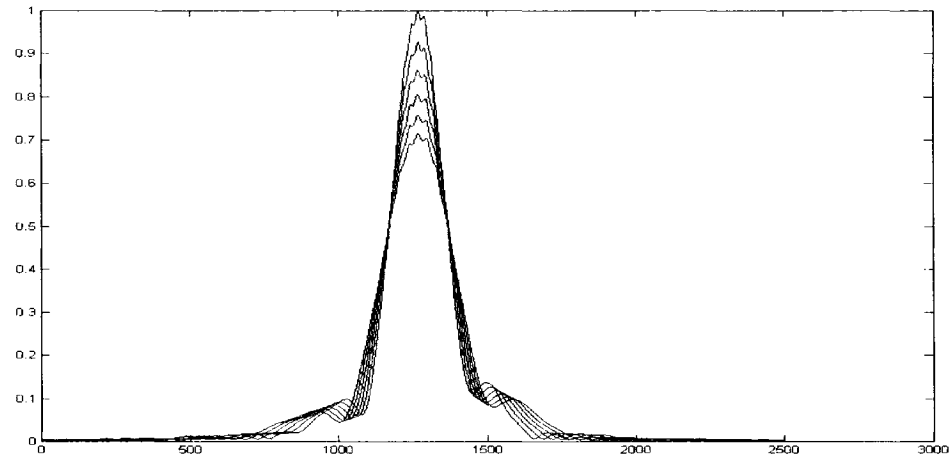


Figure 6.1 Le paquet de 6 pseudo-ondelettes normalisées obtenues à partir du signal à vide du laser Titane:Saphir. (Axe horizontal en unité de temps arbitraire.)

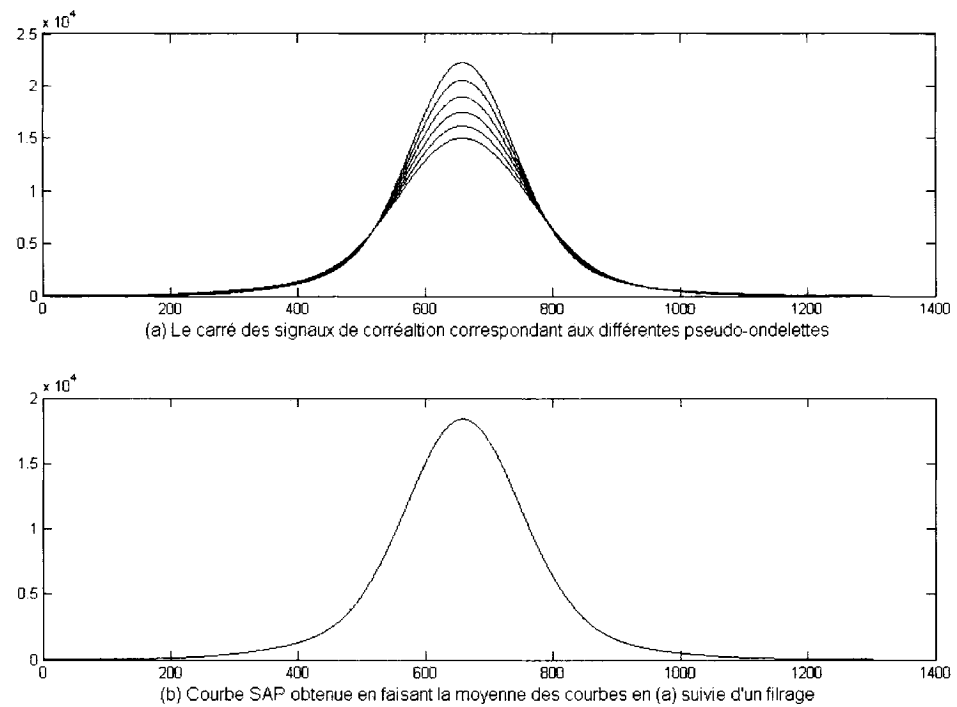


Figure 6.2 (a) Les signaux de détection $\overline{D}_i^2(t)$ correspondant aux différentes pseudo-ondelettes. (b) La courbe SAP obtenue en faisant la moyenne des courbes en (a) suivie d'un filtrage. (Axes horizontaux et verticaux en unités arbitraires.)

Dans la figure 6.2 (a), nous avons tracé les signaux de détection $\overline{D}_j^2(t)$. Dans (b) nous avons montré la courbe SAP obtenue en faisant la moyenne des signaux en (a) suivie d'un filtrage par élagage. En observant cette courbe, nous constatons la disparition quasi-totale des lobes secondaires contenus dans le signal à vide de la figure 6.1. Comme nous allons voir dans les résultats expérimentaux, cet effet combiné de corrélation et d'élagage permet toujours l'élimination des lobes secondaires.

6.5 Résultats expérimentaux

6.5.1 Trace de la section 3.2.3

Pour juger la performance de POSAV, nous allons l'appliquer, tout d'abord, sur la trace traitée par la méthode de déconvolution itérative dans la section 3.2.3. Pour cela, nous considérons deux cas. Dans le premier, nous supposons que le signal à vide se propage dans l'échantillon sans déformation significative. Ceci entraîne qu'une seule pseudo-ondelette, identique au signal à vide, suffit pour détecter les pics. Dans le second, nous supposons que l'impulsion initiale s'étale au fur et à mesure qu'elle pénètre dans l'échantillon, pour atteindre 125 % de sa largeur d'origine au point de réflexion le plus éloigné dans le spécimen. Alors, nous allons utiliser six pseudo-ondelettes normalisées s'étalant en intervalles réguliers sur une échelle de 1 à 1,25. Dans la figure 6.3, nous avons tracé deux de ces pseudo-ondelettes, juste pour pouvoir visualiser les formes obtenues.

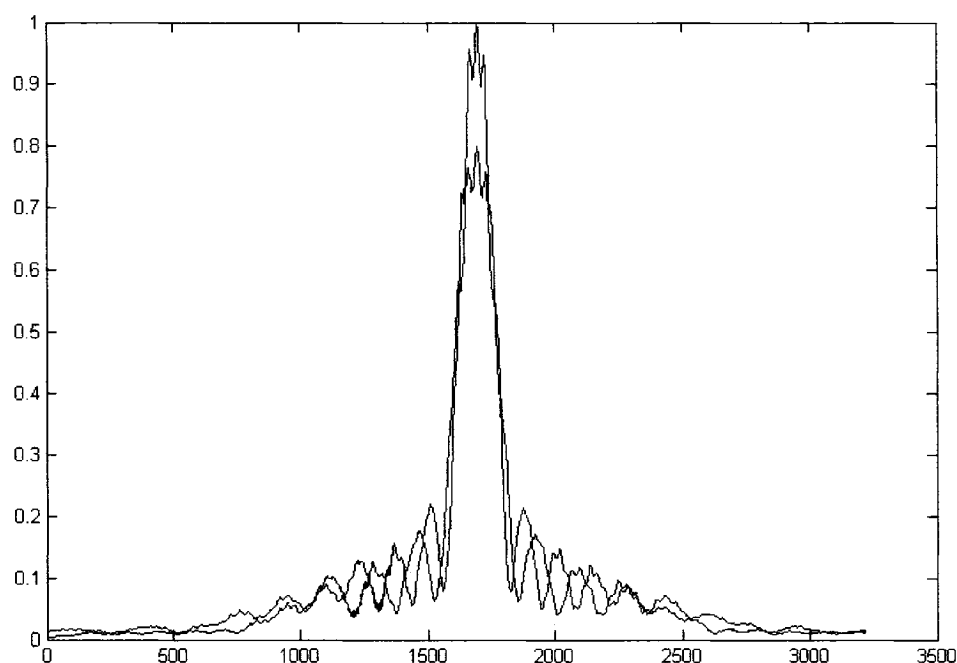


Figure 6.3 Deux pseudo-ondelettes normalisées obtenues à partir du signal à vide de la diode JDS.
(Axe horizontal en unité de temps arbitraire.)

Ci-dessous, les figures 6.4 et 6.5 résument les opérations effectuées. Dans les graphiques (b), nous avons montré la courbe SAP relative à la trace en question et nous avons indiqué, comme d'habitude, par des petits cercles, les positions des maximums supérieurs au seuil de détection choisi. Dans (c), nous avons tracé le signal final construit en implantant des impulsions gaussiennes centrées sur les positions des maximums détectés, exactement comme nous l'avons fait dans la méthode ASTO. En observant ces graphiques, nous constatons facilement la disparition totale des lobes secondaires. Aussi, nous pouvons constater que tous les pics du signal brut, apparents à l'œil dans la zone située entre les abscisses 1000 et 4000, sont correctement détectés.

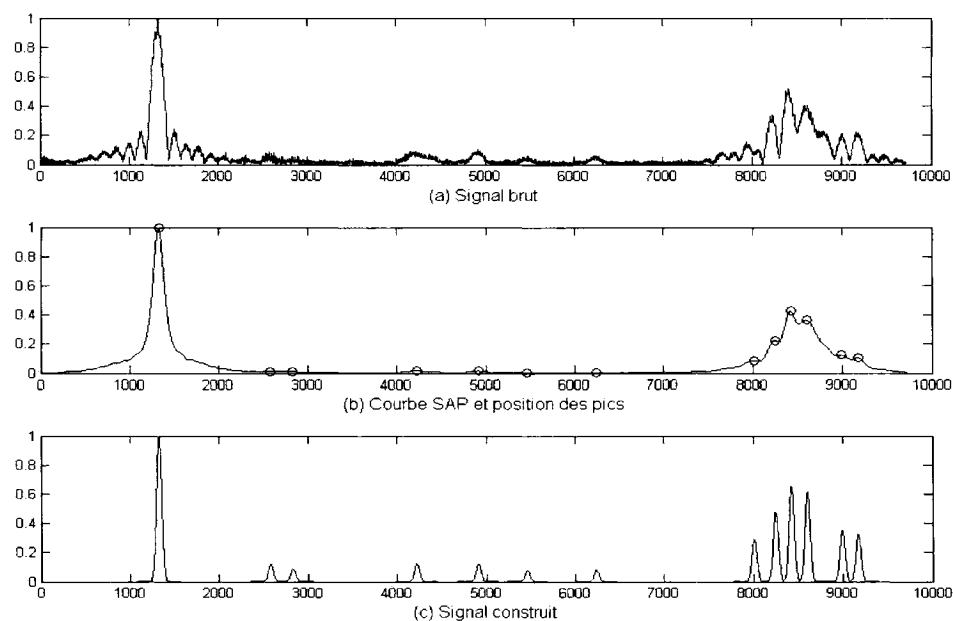


Figure 6.4 La trace de la section 3.2.3 traitée par POSAV en utilisant une seule pseudo-ondelette. Courbes normalisées: signal brut, SAP et signal construit en fonction du point d'échantillonnage.

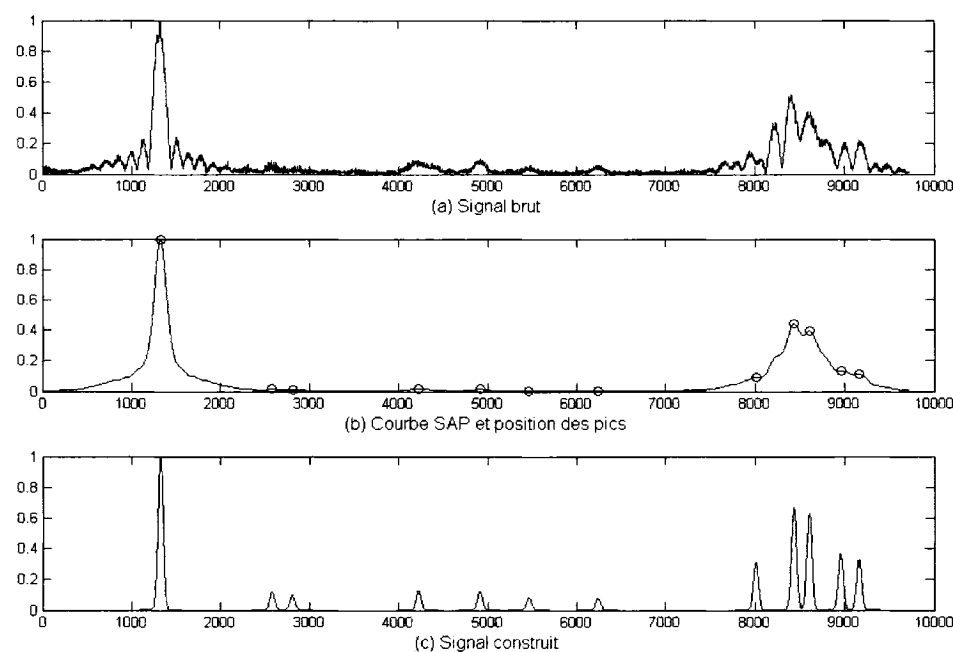


Figure 6.5 La trace de la section 3.2.3 traitée par POSAV en utilisant 6 pseudo-ondelettes. Courbes normalisées: signal brut, SAP et signal construit en fonction du point d'échantillonnage.

En comparant les graphiques précédents, avec ceux de la figure 3.1, nous constatons que POSAV a réussi à détecter dans la zone mentionnée, tous les pics qui ont échappé, pour une raison ou une autre, à la méthode de la déconvolution itérative. De là, nous osons avancer que POSAV est capable de capter des détails invisibles pour la méthode itérative. Notons encore, qu'en abaissant le seuil de détection, nous captons davantage des pics, exactement comme dans la méthode ASTO. Dans cet exemple, nous avons fixé le seuil de sorte que nous ne détectons que les maximums clairement visibles dans la trace brute.

Il reste un détail important à signaler: le nombre de pics captés à partir de l'abscisse 4000 est de 6, 5 et 4 pour les traces 6.4 (c), 6.5 (c) et 3.1 (d) respectivement. Il est difficile de connaître le nombre exact de pics contenus dans cette portion du signal brut, bien qu'il nous semble à l'œil nu, que les 6 pics détectés par POSAV avec une seule pseudo-ondelette, soient effectivement présents. Nous soulevons ce point pour souligner que jusqu'à présent nous fixons le nombre d'ondelettes ainsi que leur échelle d'une façon empirique (à l'œil) en fonction de la qualité de l'image finale obtenue. Durant les tests que nous avons effectués, sur les divers échantillons, obtenus avec les sources optiques existant présentement dans notre laboratoire, nous avons constaté que nous n'avons pas besoin de plus de 6 pseudo-ondelettes, étirées au maximum jusqu'à 150 % du signal à vide. Évidemment, pour des sources plus larges que celles utilisées, et pour des échantillons plus dispersifs, nous aurons besoin d'un nombre plus grand de pseudo-ondelettes, étirées à des échelles supérieures à 150 %.

6.5.2 Tissu d'oignon imagé avec le laser Titane:Saphir

Pour comparer POSAV aux autres méthodes, nous allons utiliser le même échantillon et la même trace qu'en 5.6.1. Dans cet exemple, nous choisissons le même paquet de 6 pseudo-ondelettes de la section 6.4.

Dans la figure 6.6, nous montrons la courbe SAP relative à la centième trace vis-à-vis du signal brut:

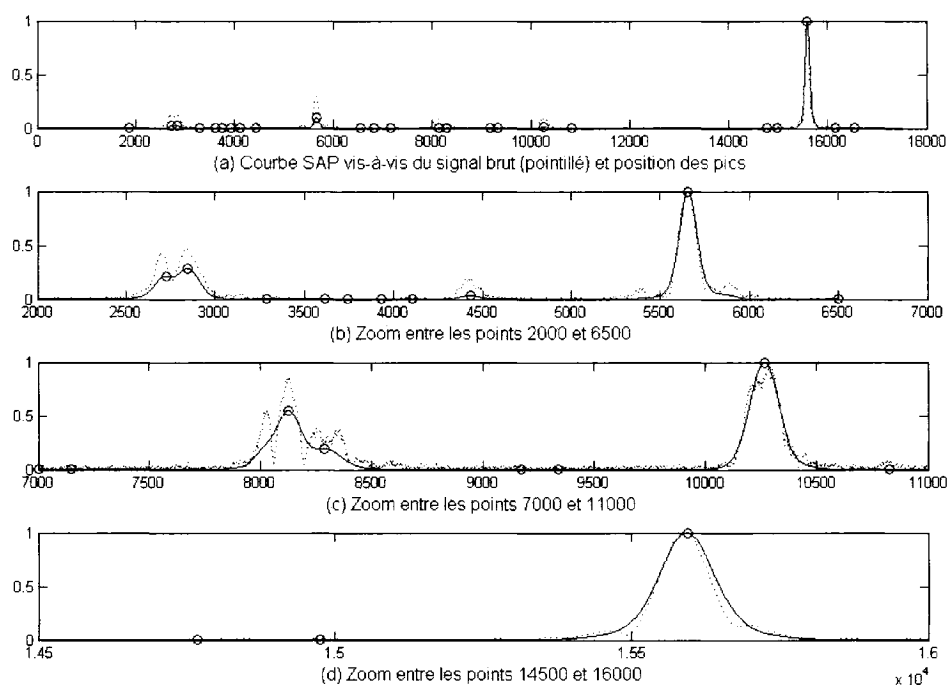


Figure 6.6 Courbes normalisées : SAP vis-à-vis du signal brut (pointillé) et positions des maximums signalées par des cercles. (Les chiffres sur les axes horizontaux représentent les points d'échantillonnage et correspondent à des positions physiques dans l'échantillon.)

Nous y avons indiqué les positions des maximums par les petits cercles sur cette courbe. Nous pouvons observer que ces maximums se situent dans des zones où l'on a effectivement une concentration d'énergie dans le signal brut (signal en pointillé). De plus, nous pouvons constater la disparition de lobes secondaires (voir par exemple la zone comprise entre 5000 et 6000 dans le graphique (b)).

En observant le graphique (c), entre les abscisses 8000 et 8500, il nous semble que POSAV a raté des pics. Ce n'est pas du tout le cas: il suffit d'observer la même zone, de cette même trace, traitée par ASTO (figure 5.4 (c)).

Maintenant que les positions des signatures sont déterminées, nous remplaçons le signal brut par le signal synthétique constitué par les impulsions gaussiennes centrées sur les positions des maximums détectés, exactement comme nous l'avons fait dans la méthode ASTO.

En traitant toutes les traces de la même manière, nous avons obtenu l'image de la figure 6.7. Nous y décelons facilement les contours des cellules et la disparition des effets des lobes secondaires. La pigmentation est présente et nous pouvons la réduire ou l'augmenter, en haussant ou en abaissant, le seuil de détection des pics comme le montrent respectivement les images des figures 6.8 et 6.9.

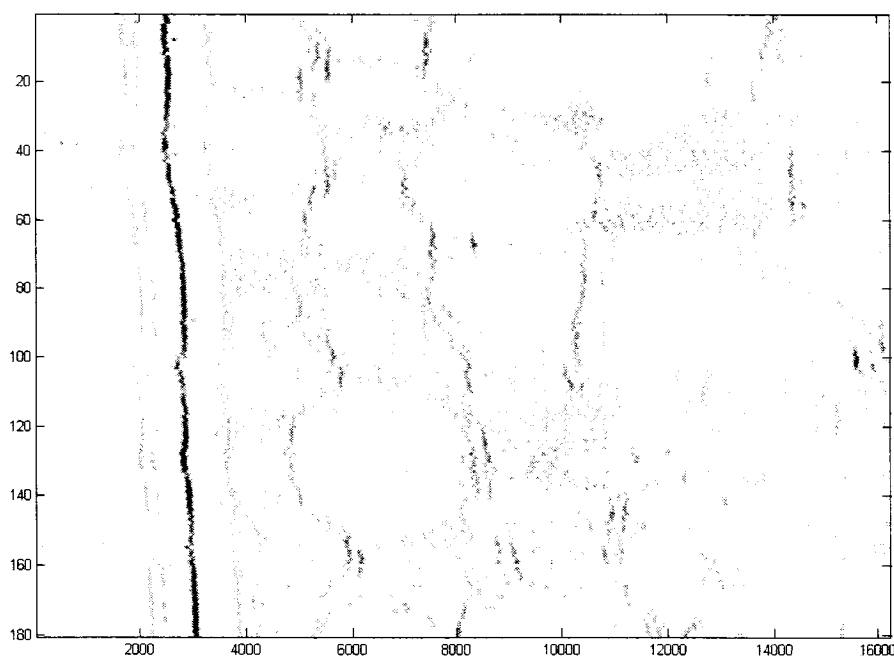


Figure 6.7 Image du tissu d'oignon obtenue par POSAV.

(Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.)

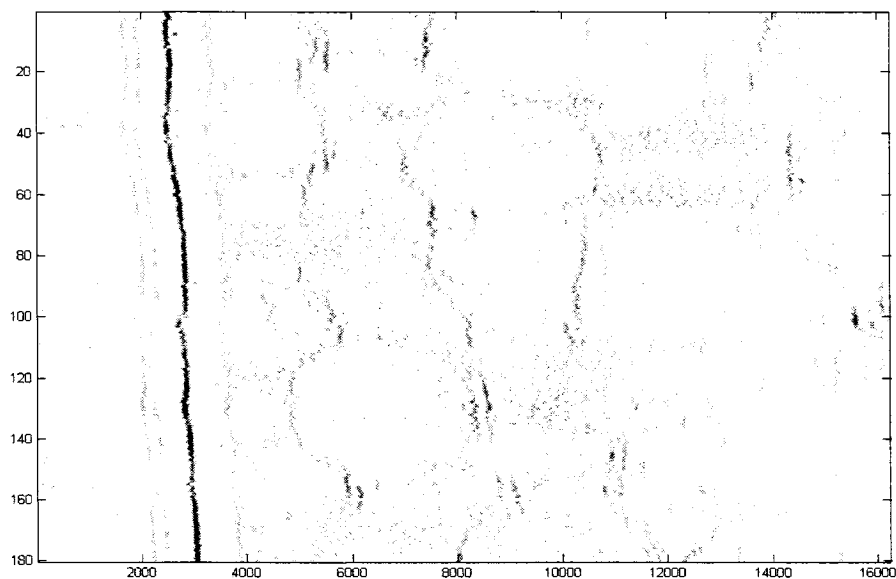


Figure 6.8 Image du tissu d'oignon obtenue par POSAV avec un seuil de détection bas.
(Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.)

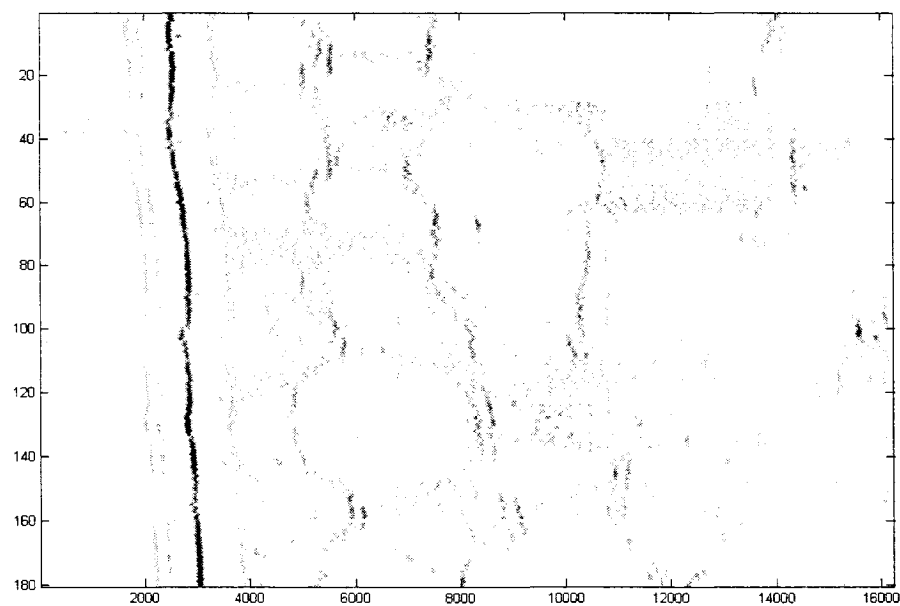


Figure 6.9 Image du tissu d'oignon obtenu par POSAV avec un seuil de détection haut.
(Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.)

6.5.3 Ruban adhésif et écailles de poisson imagés avec la diode JDS

Encore une fois, pour pouvoir comparer entre les méthodes, nous allons utiliser le même échantillon qu'en 3.2.3 et 5.6.2. Dans la figure 6.10, nous avons montré la courbe SAP relative à la 100^{ème} trace ainsi que les positions des maximums détectés. Nous avons utilisé 6 pseudo-ondelettes régulièrement étalées jusqu'à 150 % de la largeur initiale du signal à vide. Une fois de plus nous pouvons constater l'efficacité de POSAV à éliminer les lobes secondaires et à détecter les pics aux bons endroits.

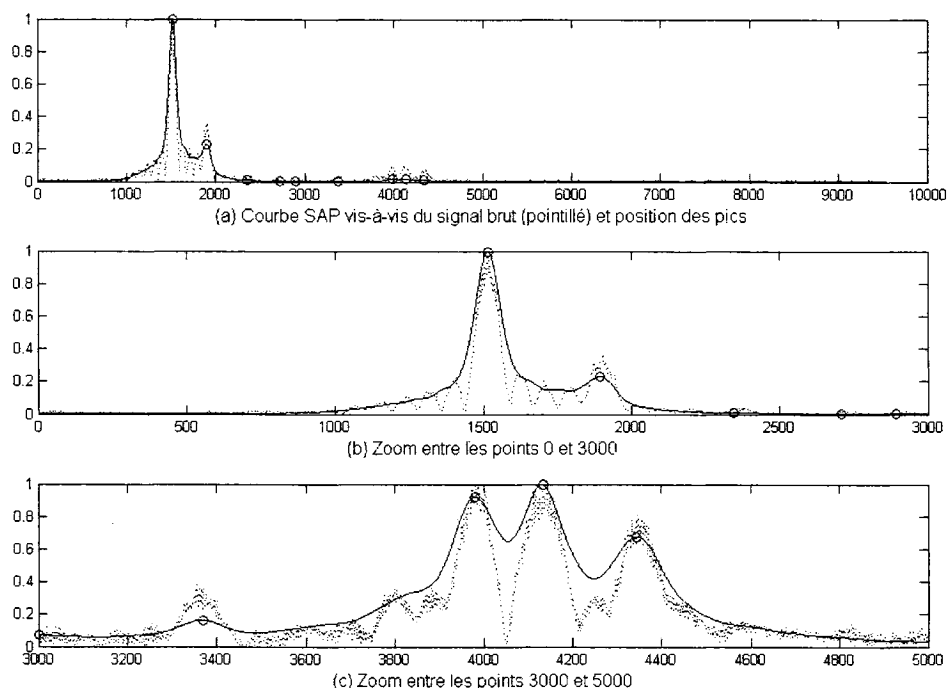


Figure 6.10 Courbes normalisées: SAP vis-à-vis du signal brut (pointillé) et position des maximums de la centième trace. (Les chiffres sur les axes horizontaux représentent les points d'échantillonnage et correspondent à des positions physiques dans l'échantillon.)

Les figures 6.11, 6.12 et 6.13 nous montrent les images obtenues en utilisant les mêmes paramètres dans les trois cas, mais en faisant varier le seuil de détection. Nous y

observons, pour les faibles valeurs du seuil, l'apparition d'une structure feuilletée ressemblant à celle obtenue par ASTO, bien que les deux méthodes utilisent deux combinaisons d'ondelettes complètement différentes.

Nous n'excluons pas la possibilité qu'en abaissant substantiellement le niveau de détection, nous captions des pics de bruit que nous remplaçons ensuite, dans les deux méthodes, par des impulsions gaussiennes identiques. Par conséquent, nous obtenons la même structure dans les deux cas. Mais en utilisant cette même logique, nous devrions obtenir cette même structure pour tous les échantillons, chaque fois que nous abaissons le seuil, ce qui n'est absolument pas le cas avec des dizaines d'échantillons en provenances de sources diverses, sur lesquels nous avons testé ces deux méthodes, et en particulier sur l'échantillon du tissu d'oignon, comme le montrent les images des figures 6.7, 6.8 et 6.9 ou 5.8 et 5.10.

D'ailleurs, l'image obtenue par arrangement spectral (figure 3.6) semble indiquer une structure feuilletée qui ressemblent plus ou moins avec celle des figures 5.14 et 6.13, obtenues par ASTO et POSAV respectivement. Quelle pourrait être l'origine de cette structure ? En observant l'image d'une écaille de poisson, obtenue par un microscope électronique (figure 6.14), nous voyons une structure alternée de couches verticales et transversales. La largeur de ces couches est environ de $2\mu m$, alors que la diode JDS a une longueur de cohérence de l'ordre de $16\mu m$. La structure feuilletée de l'écaille correspond à un réseau de Bragg. Ce qu'on observe, provient d'une superposition d'ondes réfléchies à un certain ordre, conduisant à une structure feuilletée, observable à une résolution inférieure à celle du réseau original.

Dans tous les cas, pour l'échantillon en question, nous pouvons par un choix d'ondelettes et de seuil appropriés, retrouver par POSAV et ASTO presque les mêmes détails que par la méthode de la déconvolution itérative (voir par exemple figure 5.12).

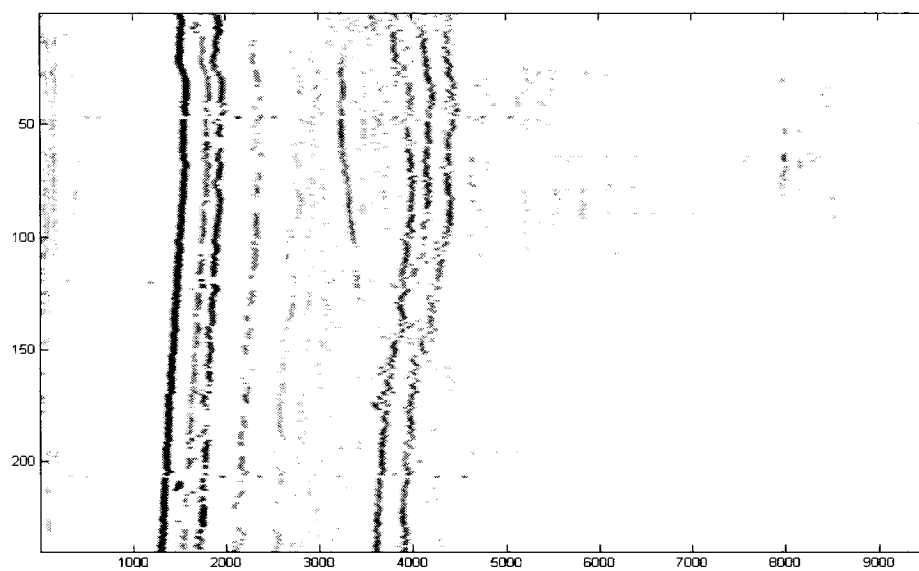


Figure 6.11 Image du ruban adhésif et d'écailles de poisson obtenue par POSAV avec un seuil de 10%. (Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.)

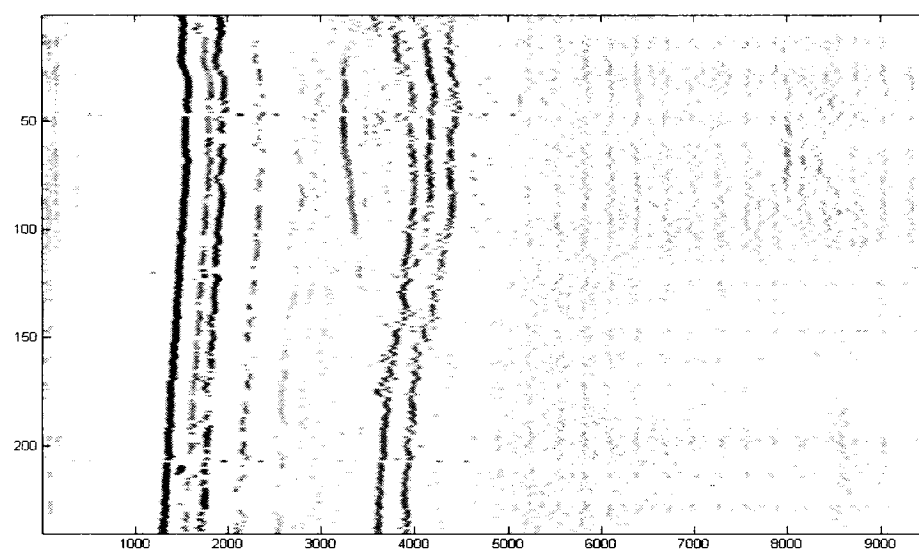


Figure 6.12 Image du ruban adhésif et d'écailles de poisson obtenue par POSAV pour un seuil de 5%. (Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.)

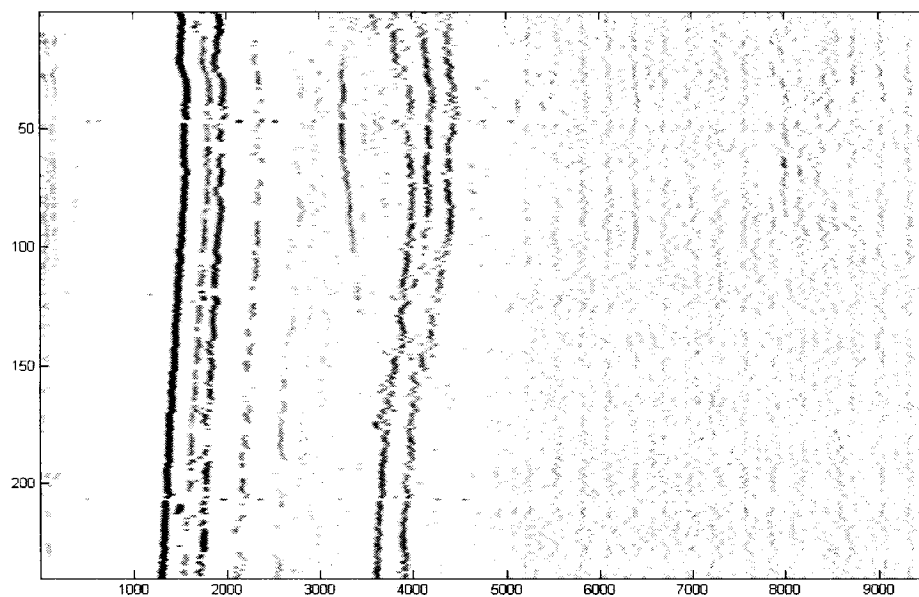


Figure 6.13 Image du ruban adhésif et d'écaillés de poisson obtenue par POSAV avec un seuil de 1%. (Axe horizontal, balayage en profondeur. Axe vertical, balayage latéral.)

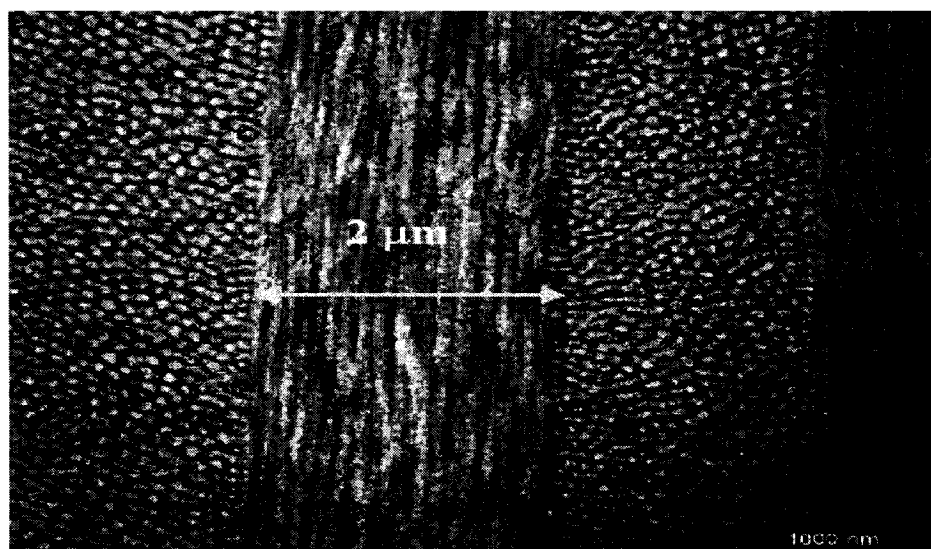


Figure 6.14 Structure d'une écaïlle de poisson obtenue par microscope électronique d'après [40].

6.6 Conclusion

Nous avons développé une toute nouvelle méthode (POSAV) dans le domaine de TCO pour éliminer les effets de la forme du spectre effectif de la source et de la dispersion. Cette méthode se base sur une technique de pseudo-ondes construites à partir du signal à vide et peut être appliquée à toute source quelle que soit la forme de son spectre effectif. Nous avons démontré son efficacité à réduire considérablement les lobes secondaires, et sur ce point, elle surpasse ASTO et se rapproche de très près de la méthode de la déconvolution itérative. De même nous avons montré qu'elle est au moins équivalente à la méthode itérative au sujet de détails détectés. Il reste un problème majeur commun à POSAV et ASTO que nous n'avons pas encore réglé ; c'est de pouvoir discerner entre les pics réels et fictifs pour les faibles niveaux du signal brut mesuré. Dans la conclusion de ce mémoire, nous suggérerons sans la développer, une méthode assez récente qui pourrait surmonter cette difficulté.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons présenté une étude détaillée des effets de la dispersion et de la forme du spectre de la source sur les signaux de TCO, et nous avons exposé différentes méthodes numériques pour les compenser.

En premier lieu, nous avons étudié l'interféromètre de Michelson à vide et nous avons extrait les équations analytiques de base qui décrivent la fonction d'auto-corrélation et la relation entre celle-ci et le spectre effectif de la source optique utilisée. Ces équations nous ont servi par la suite à comprendre la structure et le comportement du signal de corrélation croisée, obtenu lorsque le bras de mesure de l'interféromètre est chargé par le spécimen à imager.

Ensuite, nous avons analysé les effets de chacun des coefficients de dispersion. Nous avons montré que le premier coefficient améliore la résolution longitudinale alors que le second la réduit en élargissant la largeur temporelle des signatures du signal de corrélation croisée, et que le troisième, selon son signe, provoque des oscillations sur le flanc avancé ou retardé des signatures. De plus, nous avons démontré par une simulation numérique que deux surfaces réfléchissantes enfouies dans un milieu dispersif, peuvent provoquer l'apparition d'une succession de pics d'interférence, si la distance optique qui les sépare est inférieure à la longueur de cohérence de la source. Nous avons montré que le nombre de ces pics est proportionnel à la largeur spectrale de la source.

Pour compenser les effets de la forme non gaussienne du spectre effectif, nous avons exposé la méthode de la déconvolution itérative et la méthode de l'arrangement spectral dont nous avons montré les avantages et les limitations.

Pour éliminer la dispersion, nous avons présenté plusieurs méthodes existant dans la littérature:

La première se base sur une auto-convolution généralisée de la fonction de corrélation croisée et ne nécessite aucune connaissance à priori des propriétés physiques de l'échantillon. Nous avons montré par simulation, que cette approche n'est pas acceptable pour les signaux de TCO où les distances qui séparent les signatures sont voisines de la longueur de cohérence de la source dans l'échantillon.

La deuxième méthode repose sur le fait que l'intégrale de chaque signature provenant d'un point réflectif dans l'échantillon, est proportionnelle au coefficient de réflexion en ce point. Bien qu'elle ne nécessite pas, elle non plus, une connaissance à priori des propriétés physiques de l'échantillon, cette approche suppose la connaissance des bornes inférieure et supérieure de chaque signature utile.

Une troisième approche consiste à faire une corrélation entre le signal analytique associé à une signature et un noyau dispersif préalablement établi. Elle suppose la connaissance à priori et des propriétés dispersives du milieu et des positions des centres des signatures.

Une dernière approche dans le domaine spectral se base sur un arrangement gaussien du spectre de chacune des traces, suivi d'une interpolation non linéaire du module et de la phase de ce spectre. Cette méthode est très difficile à appliquer, car elle nécessite pour chaque trace, une interpolation dont le nombre de paramètres varie en fonction du nombre de réflexions.

Ensuite, nous avons proposé nos solutions globales aux problèmes soulevés, en introduisant deux techniques complètement nouvelles dans le domaine de TCO, basées sur les transformées en ondelettes continues et discrètes.

La première méthode abrégée ASTO, consiste en un arrangement spectral gaussien suivi par des transformées en ondelette sur plusieurs échelles en se servant des ondelettes gaussiennes de *Matlab*. Ces ondelettes agissent comme une batterie de filtres adaptés au

signal arrangé. Cette opération est suivie d'un calcul de la puissance moyennée sur toutes les échelles (SAP), puis d'un élagage de cette moyenne, pour ensuite y détecter par différenciation les positions des maximums. En nous appuyant sur l'hypothèse de la conservation de la symétrie des signatures, nous avons adopté ces maximums comme étant les centres des signatures. Nous avons reconstruit les traces en substituant les signatures originales par des impulsions gaussiennes ayant toutes la même largeur, mais ayant chacune, une amplitude proportionnelle à la racine carrée du maximum correspondant. Ceci a pour conséquence de rétablir la résolution initiale des impulsions élargies par dispersion.

Nous avons montré que la performance de cette méthode, surtout au niveau de la réduction des lobes secondaires, est étroitement liée à l'efficacité de l'arrangement spectral effectué. Pour ce qui est de la détection des pics sur le signal arrangé, nous avons montré que pour les échantillons utilisés, quatre ondelettes sont suffisantes pour détecter complètement tous les maximums aux bons endroits.

Pour surmonter les problèmes associés à l'arrangement spectral d'ASTO, tels que le bruit de fond provoqué par la division numérique des spectres, et la difficulté de réduire suffisamment les lobes secondaires pour certaines sources, nous avons développé une deuxième méthode que nous avons nommée POSAV. Celle-ci, diffère de la précédente par le fait qu'elle substitue l'arrangement spectral et les transformées d'ondelettes gaussiennes, par des transformées de pseudo-ondelettes construites à partir du signal à vide. Ces pseudo-ondelettes agissent comme un ensemble de filtres adaptés pour capter toute version déformée du signal à vide. Nous avons montré par des graphiques la capacité de POSAV à supprimer efficacement les lobes secondaires et à capter les pics aux bonnes positions.

Les deux méthodes proposées pourraient être améliorées par plusieurs opérations supplémentaires que nous n'avons pas développées dans ce mémoire.

L'une de ces opérations, consiste à tenir compte de l'affaïssement des signatures dû à la dispersion. En fait, en détectant les minimums de la courbe SAP de la même façon que pour détecter les maximums, nous pourrions déterminer les bornes de chacune des signatures utiles. Par conséquent, nous serons capables d'appliquer la méthode de l'intégration des signatures, pour obtenir une mesure non affectée par la dispersion, du coefficient de réflexion relatif à cette signature. Ainsi, dans le signal reconstruit, nous donnerons aux impulsions gaussiennes des hauteurs, non pas proportionnelles aux maximums sur lesquels elles sont centrées, mais plutôt, aux coefficients de réflexion calculés par intégration.

Récemment, nous avons pris connaissance d'une technique très intéressante pour trier les pics détectés sur la courbe SAP, ou en d'autres termes, pour discerner entre les pics provenant de la source optique et ceux provenant de toute autre source de bruit. Cette technique se base sur une méthode très originale, consistant à attribuer au signal à vide de la source, une empreinte spécifique de sorte que ce signal demeure toujours reconnaissable à partir de cette empreinte, même s'il s'élargit ou se rétrécit en pénétrant dans l'échantillon. C'est un peu, comme l'être humain qui reste toujours identifiable à partir de ses empreintes, même s'il grossit ou maigrit avec le temps. Cette technique qui se base aussi sur les transformées en ondelettes, a été développée par Lunin et Barat [37,38] et utilisée avec succès par J. Hou pour la reconnaissance des signaux ultrasonores, utilisés dans des mesures biomédicales et dans la caractérisation des matériaux [31]. Faute de temps, nous ne l'avons pas développée pour les signaux de TCO, mais nous recommandons fortement de l'investiguer. Une fois établie, elle permettrait de se débarrasser du seuil de détection fixé subjectivement dans ASTO et POSAV, et par conséquent de trier d'une façon automatique, tous les pics détectés.

REFERENCES

- 1- Joseph W. Goodman. "Statistical optics". John Wiley and Sons, 1985.
- 2- Max Born and Emil Wolf. "Principles of Optics". Sixth Edition, Cambridge University Press, 1997
- 3- K. B. Hill, S. A. Basinger, R. Stack and D. J. Brady. "Noise and information in interferometric cross correlators". Applied Optics, Vol. 36, No 17, 10 June 1997.
- 4- T. Fudji, M. Miyata, S. Kawato, T. Hattori and H. Nakatsuka. "Linear propagation of light investigated with a white-light Michelson interferometer". Journal of Opt. Soc. Am. B, Vol. 14, No. 5, May 1997
- 5- A. F. Fercher, C.K Hitzenberger, M. Sticker, R. Zawadzki. "Numerical dispersion compensation for partial coherence interferometry and optical coherence tomography". Optics Express, Vol. 9, No. 12, December 2001.
- 6- Govind P. Agrawal. "Non Linear Fiber Optics". Third Edition, Academic Press, 2001
- 7- A.F. Fercher, C.K Hitzenberger, M. Sticker, R. Zawadzki, B. Karamata and T. Lasser. "Dispersion compensation for optical coherence tomography depth-scan signals by a numerical technique". Optics Communications 204 (2002) 67-74.
- 8- M. Miyagi and S. Nishida. "Pulse spreading in a single-mode fiber due to third-order dispersion". Applied optics 18, 678- 682 (1979)
- 9- C.K. Hitzenberger, A. Baumgartner, A.F. Fercher. "Dispersion induced multiple signal splitting in partial coherence interferometry". Optics communications, 154 (1998) 179-185.
- 10- B.L. Danielson, C.Y. Boisrobert. "Absolute optical ranging using low coherence interferometry". Applied Optics, Vol. 30, No. 21 (1991), p. 2975
- 11- Jen Hsu, Chia -Wei Sun, Chih-wei Lu, Chun-Ping Chiang and Chii-wan Lin. "Resolution improvement with dispersion manipulation and a retrieval algorithm in optical coherence tomography." Applied optics, Vol. 42, NO. 2 (2003), p. 227.

- 12- R. Tripathi, N. Nassif, J.S. Nelson, B. H. Park and J.F. De Boer. "Spectral shaping for non-Gaussian source spectra in optical coherence tomography". Optics letters, vol. 27, No 6 March 2002.
- 13- A. Kohlhaas, C. Fromchen, and E. Brinkmeyer. "High resolution O.C.D.R for testing integrated optical waveguides; Dispersion corrupted experimental data corrected by a numerical algorithm". Journal of lightwave technology, Vol. 9, No. 11, p. 406, Nov. 1991.
- 14- E. Brinkmeyer and R. Ulrich. "High resolution O.C.D.R in dispersive waveguides". Electron letters vol. 26 p. 413-414 (1990).
- 15- M. D. Kulkarni, C. W. Thomas and J.A. Izatt. "Image enhancement in optical coherence tomography using deconvolution". Electronics Letters, July 1997, Vol. 33 No.16, p. 1365.
- 16- E. Kreyszig. "Advanced Engineering Mathematics", 8th edition, John Wiley and Sons, 1997
- 17- M. D. Kulkarni and J.A. Izatt. "Digital signal processing in optical coherence tomography". Proc. SPIE, 1997, Vol. 2981.
- 18- R. Shaffer, R. Mersereau and M. Richards. "Constrained Iterative Restoration Algorithms." Proceedings of the IEEE, Vol. 69, NO. 4, April 1981.
- 19- K. Banaszek, A. Radunsky, and I. Walmsley. "Blind dispersion compensation for optical coherence tomography". arxiv. physics /0404054 V1, April 1994.
- 20- U. Wiedmann et P. Gallion. "A generalized approach to optical low-coherence reflectometry including spectral filtering effects," J. Lightwave Technol., Vol.16, NO. 7, Jul. 1998.
- 21- K. Kasaya, Y. yoshikuni and H. Ishii. "Measurements of a semiconductor waveguide using a low-coherence interferometric reflectometer". IEEE Photonics Technology Letters, vol. 8, No. 2, February 1996.
- 22- A .F. Fercher, W.Drexler, C.K Hitzenberger and T. Lasser. "Optical coherence tomography- Principles and applications". Rep. Prog. Phys. 66 (2003) 239-303

- 23- A. F. Fercher, C.K Hitzenberger, M. Sticker, R. Zawadski. "Numerical dispersion compensation for partial coherence interferometry and optical coherence tomography". *Optics Express*, Vol. 9, No. 12, December 2001.
- 24- A.G. Van Engen, S. Diddams, T.S. Clement. "Dispersion measurements of water with white-light interferometry". *Appl. Opt.* 37, pp. 5679-5686 (1998).
- 25- Daubechies I. *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, 1992.
- 26- Albert Boggess and Francis Narcowich . "A first course in wavelets with Fourier analysis". Prentice Hall (2001).
- 27- Christian Blatter. "Wavelets ". A. K. Peters, Natick, Massachusetts (1998).
- 28- J. C. Goswam, A.K. Chan, "Fundamentals of wavelets: Theory, Algorithms and Applications". John Wiley & Sons, Inc., New York. 1999.
- 29- Y.T. Chan, "Wavelets Basics". Kluwer Academic Publishers. 1995.
- 30- S.E. Moubarik, D. Vadder, and P. Benoist. "Wavelets and non-destructive evaluation". *Review of Progress in Quantitative Non-Destructive Evaluation*, D. O. Thompson and D. E. Chiment, Eds. New York: Plenum, 1993, vol. 12.
- 31- Jidong Hou. "Ultrasonic signal detection and recognition using dynamic wavelet fingerprints". Doctoral Dissertation, College of William and Mary, Virginia. 2004.
- 32- Agostino Abbate, Jeff Koay, Julius Frankel, Stephan Schroeder, and Pankaj Das. "Signal detection and noise suppression using a wavelet transform signal processor: Application to ultrasonic flaw detection". *IEEE Transaction on ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, Vol. 44, No.1, January 1997.
- 33- G. Georgiou and F.S. Cohen. "Tissue characterization using the continuous wavelet transforms. Part I: Decomposition method". *IEEE Transactions on ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 48: 355-373, 2001.
- 34- P. Das. "Optical signal processing". New York, Springer –Verlag. Ch. 3, pp. 242-256.
- 35- Jack Gaskill. "Linear Systems, Fourier Transforms, and Optics". John Wiley and Sons, 1978.

- 36- J. L. Rose. "Ultrasonic Waves in Solid Media". Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999.
- 37- V.P. Lunin and V.A. Barat. "Crack angle and depth estimation using wavelet preprocessing MFL signal". Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, D.O. Thompson and D.E.Chimenti, Eds.18:821-828, 1999.
- 38- V.P. Lunin, V.A. Barat and D. Podobedov. "Neural network-based crack parameterization using wavelet preprocessing MFL signal". Review of Progress in Quantative Nondestructive Evalaution, D.O. Thompson and D.E.Chimenti, Eds.20:641-648, 2001.
- 39- E. Sekko, G. Thomas, A. Boukrouche. " A deconvolution technique using optimal Wiener filtering and regularization". Signal processing, 72 (1999) 23-32.
- 40- T. Ikoma, Y. Suetsugu, S. Mann. "Internal Structure and Biometrics Properties of Fish Scales". NIMS, Vol. 2, No. 13, November, 2004.

ANNEXE A

FONCTION DE CORRÉLATION CROISÉE ET TEMPS DE COHÉRENCE POUR UN ÉCHANTILLON DISPERSIF

A.1- Calcul de la fonction de corrélation croisée

Partons des équations (2.6) et (2.10) :

$$\Gamma_c(\tau, z) \exp(jw_0 \tau) = \left\{ I_0 \exp \left[-4 \ln 2 \left(\frac{\tau}{T_c} \right)^2 \right] \exp(jw_0 \tau) \right\} * h(\tau, z) \quad (\text{a.1})$$

$$h(\tau, z) = R_z F^{-1} \left\{ \exp \left[i\beta_1 z(w - w_0) + i \frac{\beta_2 z(w - w_0)^2}{2} \right] \right\} \quad (\text{a.2})$$

D'après [16, page 578], nous avons:

$$F \left(\exp \left[-2 \ln 2 \left(\frac{\tau}{T_c} \right)^2 \right] \right) = \frac{\sqrt{\pi} T_c}{2\sqrt{\ln 2}} \cdot \exp \left(-\frac{T_c^2 w^2}{16 \ln 2} \right)$$

D'où l'on déduit en utilisant les propriétés de la transformation de Fourier et de la convolution que :

$$\Gamma_c(w - w_0, z) = I_0 R_z \frac{\sqrt{\pi} T_c}{2\sqrt{\ln 2}} \exp \left(-\frac{T_c^2 (w - w_0)^2}{16 \ln 2} \right) \exp \left[i\beta_1 z(w - w_0) + i\beta_2 z(w - w_0)^2 / 2 \right] \quad (\text{a.3})$$

Posons dans (a.3) :

$$w - w_0 = \varpi \quad (\text{a.4})$$

$$T = \frac{T_c}{4\sqrt{\ln 2}} \quad (\text{a.5})$$

Cherchons la transformée de Fourier inverse de (a.3):

$$\Gamma_c(\tau, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} I_0 R_z \frac{\sqrt{\pi} T_c}{2\sqrt{\ln 2}} \exp(-T^2 \varpi^2) \exp\left[i\left(\frac{\beta_2 z \varpi^2}{2} + \beta_1 z \varpi\right)\right] \exp(-i\varpi \tau) d\varpi$$

En considérant R_z indépendant de ϖ et en regroupant des termes dans les exponentielles

$$\Gamma_c(\tau, z) = \frac{I_0 R_z T}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-T^2 \varpi^2 + i\frac{\beta_2 z \varpi^2}{2} + \beta_1 z \varpi - i\varpi \tau\right] d\varpi \quad (\text{a.6})$$

Posons :

$$A^2 = T^2 - i\frac{\beta_2 z}{2} ; 2B = i(\beta_1 z - \tau) \quad (\text{a.7})$$

Alors, (a.6) s'écrit:

$$\Gamma_c(\tau, z) = \frac{I_0 R_z T}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-A^2 \varpi^2 + 2B\varpi) d\varpi \quad (\text{a.8})$$

Or:

$$-A^2 \varpi^2 + 2B\varpi = -\left(A\varpi - \frac{B}{A}\right)^2 + \left(\frac{B}{A}\right)^2 \quad (\text{a.9})$$

En tenant compte de (a.9), (a.8) s'écrit:

$$\Gamma_c(\tau, z) = \frac{I_0 R_z T}{\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{B}{A}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\left(A\varpi - \frac{B}{A}\right)^2\right] d\varpi \quad (\text{a.10})$$

Posons dans (a.10): $X = A\varpi - \frac{B}{A} \Rightarrow d\varpi = \frac{dX}{A}$

$$\Rightarrow \Gamma_c(\tau, z) = \frac{I_0 R_z T \exp\left(\frac{B}{A}\right)^2}{\sqrt{\pi} A} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-X^2) dX \quad (\text{a.11})$$

Or, d'après [16, page 571]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-X^2) dX = \sqrt{\pi}$$

D'où nous tirons que:

$$\Gamma_c(\tau, z) = \frac{I_0 R_z T \exp\left(\frac{B}{A}\right)^2}{A} \quad (\text{a.12})$$

En utilisant (a.7), remplaçons A et B par leur expression :

$$\Gamma_c(\tau, z) = \frac{I_0 R_z T}{\sqrt{T^2 - i \frac{\beta_2 z}{2}}} \exp \left[\frac{-(\tau - \beta_1 z)^2}{4 \left(T^2 - i \frac{\beta_2 z}{2} \right)} \right] \quad (\text{a.13})$$

Servons-nous de (a.5) pour éliminer T de (a.13) :

$$\Gamma_c(\tau, z) = \frac{I_0 R_z \left(\frac{T_c}{4\sqrt{\ln 2}} \right)}{\sqrt{\left(\frac{T_c}{4\sqrt{\ln 2}} \right)^2 - i \frac{\beta_2 z}{2}}} \exp \left[- \frac{(\tau - \beta_1 z)^2}{4 \left(\left(\frac{T_c}{4\sqrt{\ln 2}} \right)^2 - i \frac{\beta_2 z}{2} \right)} \right] \quad (\text{a.14})$$

En arrangeant (a.14), nous obtenons l'expression recherchée:

$$\Gamma_c(z, \tau) = I_0 R_z \frac{T_c}{[T_c^2 - i(8 \ln 2) \beta_2 z]^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ - \frac{(\tau - \beta_1 z)^2 4 \ln 2}{[T_c^2 - i(8 \ln 2) \beta_2 z]} \right\}.$$

A.2 Calcul du temps de cohérence

Il faut chercher l'intervalle temporel pour lequel:

$$|\Gamma_c(\tau)|^2 \geq \frac{1}{4} \max(|\Gamma_c(\tau)|^2) \quad (\text{a.15})$$

Pour cela il suffit de chercher les valeurs de $\tau' = \tau - \beta_1 z$ telles que:

$$\Gamma_c(z, \tau') \Gamma_c^*(z, \tau') \geq \frac{1}{4} \left\{ I_0 R_z \frac{T_c}{[T_c^2 - i(8 \ln 2) \beta_2 z]^{\frac{1}{2}}} \right\} \left\{ I_0 R_z \frac{T_c}{[T_c^2 - i(8 \ln 2) \beta_2 z]^{\frac{1}{2}}} \right\}^*$$

$$\Rightarrow \exp \left[-\frac{(4 \ln 2) \tau'^2}{T_c^2 - i(8 \ln 2) \beta_2 z} \right] \left\{ \exp \left[-\frac{(4 \ln 2) \tau'^2}{T_c^2 - i(8 \ln 2) \beta_2 z} \right] \right\}^* \geq \frac{1}{4} \quad (\text{a.16})$$

Dans (a.16) faisons: $T^2 = (4 \ln 2) \tau'^2$; $b = -(8 \ln 2) \beta_2 z$ (a.17)

Nous obtenons:

$$\exp \left[-\frac{T^2}{(T_c^2 + ib)} \right] \left\{ \exp \left[-\frac{T^2}{(T_c^2 + ib)} \right] \right\}^* \geq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \exp \left[-\frac{T^2(T_c^2 - ib)}{(T_c^4 + b^2)} \right] \left\{ \exp \left[-\frac{T^2(T_c^2 - ib)}{(T_c^4 + b^2)} \right] \right\}^* \geq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \exp \left[-\frac{T^2 T_c^2}{(T_c^4 + b^2)} \right] \exp \left[\frac{i T^2 b}{(T_c^4 + b^2)} \right] \exp \left[-\frac{T^2 T_c^2}{(T_c^4 + b^2)} \right] \exp \left[-\frac{i T^2 b}{(T_c^4 + b^2)} \right] \geq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \exp \left[-2 \frac{T^2 T_c^2}{(T_c^4 + b^2)} \right] \geq \frac{1}{4} \quad (\text{a.18})$$

Appliquons le logarithme à gauche et à droite de (a.18) :

$$2 \frac{T^2 T_c^2}{(T_c^4 + b^2)} \leq \ln 4 \Rightarrow \frac{T^2 T_c^2}{(T_c^4 + b^2)} \leq \ln 2$$

$$\Rightarrow -\sqrt{\frac{(T_c^4 + b^2) \ln 2}{T_c^2}} \leq T \leq \sqrt{\frac{(T_c^4 + b^2) \ln 2}{T_c^2}} \quad (\text{a.19})$$

Et en utilisant (a.17) dans (a.19), nous obtenons:

$$-\frac{1}{\sqrt{4\ln 2}} \sqrt{\frac{\ln 2 [\mathrm{T}_c^4 + (\beta_2 z 8 \ln 2)^2]}{\mathrm{T}_c^2}} \leq \tau' \leq \frac{1}{\sqrt{4\ln 2}} \sqrt{\frac{\ln 2 [\mathrm{T}_c^4 + (\beta_2 z 8 \ln 2)^2]}{\mathrm{T}_c^2}}$$

$$\Rightarrow -\frac{\mathrm{T}_c}{2} \sqrt{1 + \frac{(\beta_2 z 8 \ln 2)^2}{\mathrm{T}_c^4}} \leq \tau' \leq \frac{\mathrm{T}_c}{2} \sqrt{1 + \frac{(\beta_2 z 8 \ln 2)^2}{\mathrm{T}_c^4}}$$

Donc, le nouveau temps de cohérence est donné par :

$$\mathrm{T}'_c = \mathrm{T}_c \sqrt{1 + \frac{(\beta_2 z 8 \ln 2)^2}{\mathrm{T}_c^4}} \quad (\text{a.20})$$

ANNEXE B

DÉVELOPPEMENT DES EXPRESSIONS RELATIVES À L'AUTO- CONVOLUTION GÉNÉRALISÉE

B.1 Calcul de l'enveloppe de la fonction de corrélation croisée

$$\hat{\Gamma}_c(\tau) = \Gamma_c(\tau) \exp(-2jw_0\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(w) S_0(w - w_0) \exp(-2jw\tau) dw \quad (b.1)$$

Source gaussienne :

$$S_0(w - w_0) = s_0 \exp[-T^2(w - w_0)^2] \quad (b.2)$$

Échantillon constitué d'un ensemble discret de surfaces réfléchives :

$$H(w) = \sum_n r_n \exp[2j\varphi_n(w)] \quad (b.3)$$

Exprimée en série de Taylor jusqu'au second ordre, la phase $\varphi_n(w)$ s'écrit:

$$\varphi_n(w) = \varphi_n(w_0) + (w - w_0)\tau_n + \frac{1}{2}(w - w_0)^2 D_n + \dots \quad (b.4)$$

(b.1) à (b.4) entraînent :

$$\begin{aligned} \Gamma_c(\tau) \exp(-2jw_0\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_n r_n s_0 \exp[j2\varphi_n(w_0)] \exp[-T^2(w - w_0)^2 + jD_n(w - w_0)^2] \\ &\quad \cdot \exp[j2\tau_n(w - w_0) - 2jw\tau] dw \end{aligned} \quad (b.5)$$

Posons:

$$r'_n = |r_n| \exp[j2\varphi_n(w_0)].$$

En ajoutant et retranchant $2jw_0\tau$ à l'intérieur des crochets du dernier exponentielle dans (b.5) et en inversant l'ordre de l'intégrale et de la somme, il vient après un arrangement des termes et simplification à gauche et à droite par le terme $\exp(-2jw_0\tau)$ que :

$$\Gamma_c(\tau) = \sum_n \frac{r'_n s_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(T^2 - jD_n)(w - w_0)^2] \exp[-2j(w - w_0)(\tau - \tau_n)] dw \quad (b.6)$$

Posons dans (b.6) :

$$\alpha_n^2 = T^2 - jD_n ; \theta_n = j(\tau - \tau_n) \quad (b.7)$$

Puis, effectuons le changement de variable:

$$\omega = (w - w_0)$$

Compte tenu de ces changements, (b-6) s'écrit alors :

$$\Gamma_c(\tau) = \sum_n \frac{r'_n s_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\alpha_n^2 \omega^2 - 2\theta_n \omega] d\omega \quad (b.8)$$

Écrivons le terme entre crochets dans (b.8) sous la forme:

$$-\alpha_n^2 \omega^2 - 2\theta_n \omega = -\alpha_n^2 \omega^2 - 2\theta_n \omega - \left(\frac{\theta_n}{\alpha_n}\right)^2 + \left(\frac{\theta_n}{\alpha_n}\right)^2 = -\left(\alpha_n \omega + \frac{\theta_n}{\alpha_n}\right)^2 + \left(\frac{\theta_n}{\alpha_n}\right)^2$$

Or, le terme $\left(\frac{\theta_n}{\alpha_n}\right)^2$ est indépendant de ω , il sort alors de l'intégrale et (b-8) devient:

$$\Gamma_c(\tau) = \sum_n \frac{r'_n s_0}{2\pi} \cdot \exp\left(\frac{\theta_n}{\alpha_n}\right)^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\left(\alpha_n \omega + \frac{\theta_n}{\alpha_n}\right)^2\right] d\omega \quad (b.9)$$

Posons maintenant :

$$\chi = \alpha_n \omega + \frac{\theta_n}{\alpha_n} \Rightarrow d\chi = \alpha_n d\omega$$

Alors :

$$\Gamma_c(\tau) = \sum_n \frac{r'_n s_0}{2\pi \alpha_n} \exp\left(\frac{\theta_n}{\alpha_n}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\chi^2] d\chi$$

D'après [16, page571], l'intégrale ci-dessus vaut $\sqrt{\pi}$, d'où l'on tire en utilisant (b.7)

que :

$$\Gamma_c(\tau) = \sum_n \frac{r'_n s_0}{2\sqrt{\pi} \sqrt{T^2 - jD_n}} \exp\left[-\frac{(\tau - \tau_n)^2}{T^2 - jD_n}\right] \quad (b.10)$$

Cherchons la demi largeur à $\frac{1}{e}$ du max $|\Gamma_c(\tau)|$ pour cela il faut trouver τ' tel que :

$$\left| \exp\left[-\frac{\tau'^2}{T^2 - jD_n}\right] \right| \geq \frac{1}{e} \Rightarrow \exp\left[-\frac{\tau'^2}{T^2 - jD_n}\right] \exp\left[-\frac{\tau'^2}{T^2 - jD_n}\right]^* \geq \frac{1}{e^2}$$

$$\Rightarrow \exp\left[-\frac{\tau'^2}{T^2 - jD_n}\right] \exp\left[-\frac{\tau'^2}{T^2 + jD_n}\right] \geq \frac{1}{e^2} \Rightarrow \exp\left[-\frac{2T^2\tau'^2}{T^4 + D_n^2}\right] \geq \frac{1}{e^2}$$

Appliquons le logarithme aux deux membres de la dernière inégalité :

$$-\frac{2T^2\tau'^2}{T^4 + D_n^2} \geq \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\ln(e^2) = -2 \Rightarrow \tau'^2 \leq T^2 + \left(\frac{D_n^2}{T^2}\right)$$

D'où l'on tire que la demi largeur à $\frac{1}{e}$ du maximum vaut :

$$T_{HW} = \sqrt{T^2 + \left(\frac{D_n^2}{T^2}\right)} \quad (b.11)$$

Si au lieu de $\frac{1}{e}$, nous cherchons la demi hauteur à $\frac{1}{2}$ du maximum, nous trouvons par une démarche parfaitement identique :

$$T_{HWHM} = \sqrt{\ln 2 \left[T^2 + \left(\frac{D_n^2}{T^2}\right) \right]} \quad (b.12)$$

B.2 Calcul de la fonction d'auto-convolution généralisée

$$Y_\omega(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\omega^2\tau'^2) \Gamma_c^*(\tau + \tau') \Gamma_c(\tau - \tau') d\tau' \quad (b.13)$$

Posons dans (b.10):

$$A_n = \frac{r'_n s_0}{2\sqrt{\pi} \sqrt{T^2 - jD_n}} \quad (b.14)$$

Et introduisons (b.10) dans (b.13), nous obtenons :

$$Y_{\omega}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\omega^2 \tau'^2) \left\{ \sum_n A_n \exp \left[-\frac{(\tau + \tau' - \tau_n)^2}{T^2 - jD_n} \right] \right\}^* G(\tau') d\tau' \quad (\text{b.15})$$

Avec :

$$G(\tau') = \left\{ \sum_m A_m \exp \left[-\frac{(\tau - \tau' - \tau_m)^2}{T^2 - jD_m} \right] \right\} \quad (\text{b.16})$$

Donc, en observant (b.15) et (b.16), nous pouvons écrire $Y_{\omega}(\tau)$ sous la forme générale:

$$Y_{\omega}(\tau) = \sum_{n,m} Y_{n,m}(\tau, \omega) \quad (\text{b.17})$$

Avec :

$$Y_{n,m}(\tau, \omega) = A_n^* A_m \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j2\omega^2 \tau'^2) \exp \left[-\frac{(\tau + \tau' - \tau_n)^2}{(T^2 + jD_n)} \right] \exp \left[-\frac{(\tau - \tau' - \tau_m)^2}{(T^2 - jD_m)} \right] d\tau' \quad (\text{b.18})$$

Posons :

$$\alpha_n = \tau - \tau_n; \alpha_m = \tau - \tau_m. \quad (\text{b.19})$$

et :

$$P_n = T^2 - jD_n; P_m = T^2 - jD_m. \quad (\text{b.20})$$

Distinguons :

1^{ier} Cas : $m = n \Rightarrow \alpha_n = \alpha_m; D_n = D_m; P_n = P_m$ (b.21)

Les équations (b.18) à (b.21) entraînent alors que:

$$Y_{n=m}(\tau, \omega) = |A_n|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j2\omega^2 \tau'^2) \exp \left[-\frac{(\tau' + \alpha_n)^2}{P_n^*} - \frac{(\tau' - \alpha_n)^2}{P_n} \right] d\tau' \quad (\text{b.22})$$

En réduisant au même dénominateur, nous obtenons :

$$Y_{n=m}(\tau, \omega) = |A_n|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{2|P_n|^2 \omega^2 \tau'^2 + P_n(\tau' + \alpha_n)^2 + P_n^*(\tau' - \alpha_n)^2}{|P_n|^2} \right] d\tau' \quad (\text{b.23})$$

En regroupant les termes selon les puissances de τ' , il s'ensuit que:

$$Y_{n=m}(\tau, \omega) = |A_n|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau') d\tau' \quad (\text{b.24})$$

avec :

$$g(\tau') = \exp \left[- \frac{(2|P_n|^2 \omega^2 + P_n + P_n^*)\tau'^2 + 2(P_n \alpha_n - P_n^* \alpha_n)\tau' + P_n^* \alpha_n^2 + P_n \alpha_n^2}{|P_n|^2} \right] \quad (\text{b.25})$$

En notant dans (b.25) que $P_n + P_n^* = 2T^2$ et que les deux derniers termes de l'exponentielle sont indépendants de τ' , nous obtenons en posant:

$$a^2 = 2 \frac{|P_n|^2 \omega^2 + T^2}{|P_n|^2}; \quad b = \frac{P_n \alpha_n - P_n^* \alpha_n}{|P_n|^2} \quad (\text{b.26})$$

$$Y_{n=m}(\tau, \omega) = |A_n|^2 \exp \left[- \frac{P_n^* \alpha_n^2 + P_n \alpha_n^2}{|P_n|^2} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[- (a^2 \tau'^2 + 2b \tau') \right] d\tau' \quad (\text{b.27})$$

En écrivant que:

$$a^2 \tau'^2 + 2b \tau' = a^2 \tau'^2 + 2b \tau' + \left(\frac{b}{a} \right)^2 - \left(\frac{b}{a} \right)^2 = \left(a \tau' + \frac{b}{a} \right)^2 - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \quad (\text{b.28})$$

et en notant que $\left(\frac{b}{a} \right)^2$ est indépendant de τ' , (b.27) se met alors sous la forme:

$$Y_{n=m}(\tau, \omega) = |A_n|^2 \exp \left[- \frac{P_n^* \alpha_n^2 + P_n \alpha_n^2}{|P_n|^2} \right] \exp \left(\frac{b}{a} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[- \left(a \tau' + \frac{b}{a} \right)^2 \right] d\tau' \quad (\text{b.29})$$

Or, nous avons vu à plusieurs reprises que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[- \left(a \tau' + \frac{b}{a} \right)^2 \right] d\tau' = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

D'où:

$$Y_{n=m}(\tau, \omega) = |A_n|^2 \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp \left[- \frac{P_n^* \alpha_n^2 + P_n \alpha_n^2}{|P_n|^2} \right] \exp \left(\frac{b}{a} \right)^2 \quad (\text{b.30})$$

En utilisant (b.19) à (b.21), nous tirons que:

$$\frac{P_n^* \alpha_n^2 + P_n \alpha_n^2}{|P_n|^2} = \frac{2\alpha_n^2 \operatorname{Re}(\ell(P_n))}{|P_n|^2} = \frac{2T^2(\tau - \tau_n)^2}{(T^4 + D_n^2)} \quad (\text{b.31})$$

D'après (b.26), nous avons:

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{a^2} &= \frac{(P_n \alpha_n - P_n^* \alpha_n)^2}{2|P_n|^2(|P_n|^2 \omega^2 + T^2)} = \frac{[j2\alpha_n \operatorname{Im}(P_n)]}{2(D_n^2 + T^4)(T^2 + \omega^2(D_n^2 + T^4))} \\ \Rightarrow \quad \frac{b^2}{a^2} &= \frac{-2(\tau - \tau_n)^2 D_n^2}{(D_n^2 + T^4)(T^2 + \omega^2(D_n^2 + T^4))} \end{aligned} \quad (\text{b.32})$$

Combinons (b.31) et (b.32) dans (b-30), ce qui donne:

$$Y_{n=m}(\tau, \omega) = |A_n|^2 \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp \left[-\frac{2(\tau - \tau_n)^2 D_n^2}{(D_n^2 + T^4)(T^2 + \omega^2(D_n^2 + T^4))} - \frac{2T^2(\tau - \tau_n)^2}{(T^4 + D_n^2)} \right] \quad (\text{b.33})$$

En réduisant au même dénominateur, nous obtenons:

$$Y_{n=m}(\tau, \omega) = |A_n|^2 \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp \left[-\frac{2(\tau - \tau_n)^2 (D_n^2 + T^4)(1 + \omega^2 T^2)}{(D_n^2 + T^4)(T^2 + \omega^2(D_n^2 + T^4))} \right] \quad (\text{b.34})$$

En simplifiant par le facteur commun et en divisant par le terme $(1 + \omega^2 T^2)$, (b.34)

$$\text{devient:} \quad Y_{n=m}(\tau, \omega) = |A_n|^2 \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp \left[-\frac{2(\tau - \tau_n)^2}{T^2 + \frac{\omega^2 D_n^2}{1 + \omega^2 T^2}} \right] \quad (\text{b.35})$$

Or ω est un paramètre arbitraire jusqu'à présent, choisissons le tel que:

$$\omega^2 \ll \frac{1}{\left(T^2 + \frac{D_n^2}{T^2}\right)} \Rightarrow \omega^2 T^2 \ll \frac{T^4}{T^4 + D_n^2} < 1 \quad (\text{b.36})$$

Ce qui veut dire que :

$$\omega^2 \ll \frac{1}{T^2} \Leftrightarrow \omega^2 T^2 \ll 1 \quad (\text{b.37})$$

En tenant compte de ce choix de ω et en utilisant (b.20) et (b.26) pour remplacer a par son expression, nous aboutissons à l'expression :

$$Y_{n=m}(\tau, \omega) \cong |A_n|^2 \frac{\sqrt{\pi(D_n^2 + T^4)}}{\sqrt{2[T^2 + \omega^2 D_n^2]}} \exp\left[-\frac{2(\tau - \tau_n)^2}{T^2 + \omega^2 D_n^2}\right] \quad (\text{b.38})$$

Et en utilisant (b.14) pour substituer $|A_n|^2$, il s'en suit que:

$$\begin{aligned} Y_{n=m}(\tau, \omega) &\cong \left| \frac{r'_n s_0}{2\sqrt{\pi}\sqrt{T^2 - jD_n}} \right|^2 \frac{\sqrt{\pi(D_n^2 + T^4)}}{\sqrt{2[T^2 + \omega^2 D_n^2]}} \exp\left[-\frac{2(\tau - \tau_n)^2}{T^2 + \omega^2 D_n^2}\right] \\ \Rightarrow Y_{n=m}(\tau, \omega) &\cong \frac{|r'_n|^2 s_0^2}{4\sqrt{2\pi}\sqrt{T^2 + \omega^2 D_n^2}} \exp\left[-\frac{2(\tau - \tau_n)^2}{T^2 + \omega^2 D_n^2}\right] \end{aligned} \quad (\text{b.39})$$

2^{ème} Cas $m \neq n$:

Supposons que tous les D_n sont égaux; nous montrerons par les simulations numériques, que la généralité des résultats ne sera pas affectée par cette approximation. Alors:

$$D_m = D_n = D \quad (\text{b.40})$$

Et il s'en suit d'après (b.20) que :

$$P_m = P_n = P \quad (\text{b.41})$$

L'équation (b.18) devient:

$$Y_{n,m}(\tau, \omega) = A_n^* A_m \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j2\omega^2 \tau'^2) \exp\left[-\frac{(\tau' + \alpha_n)^2}{P^*} - \frac{(\tau' - \alpha_m)^2}{P}\right] d\tau' \quad (\text{b.42})$$

En reprenant exactement le même cheminement fait entre (b.22) et (b.30), nous obtenons :

$$Y_{n,m}(\tau, \omega) = A_n^* A_m \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp\left[-\frac{P^* \alpha_n^2 + P \alpha_m^2}{|P|^2}\right] \exp\left(\frac{b'}{a}\right)^2 \quad (\text{b.43})$$

Avec :

$$b' = \frac{P \alpha_n - P^* \alpha_m}{|P|^2} \quad (\text{b.44})$$

Évaluons $|Y_{n,m}(\tau, \omega)|$; pour cela commençons par calculer:

$$\begin{aligned}
 & \left| \exp \left[-\frac{P^* \alpha_n^2 + P \alpha_m^2}{|P|^2} \right] \right| = \left| \exp \left[-\frac{\alpha_n^2 (T^2 - jD) + \alpha_m^2 (T^2 - jD)}{|P|^2} \right] \right| \\
 \Rightarrow & \left| \exp \left[-\frac{P^* \alpha_n^2 + P \alpha_m^2}{|P|^2} \right] \right| = \left| \exp \left[-\frac{(\alpha_n^2 + \alpha_m^2) T^2 - j D (\alpha_n^2 + \alpha_m^2)}{|P|^2} \right] \right| \\
 \Rightarrow & \left| \exp \left[-\frac{P^* \alpha_n^2 + P \alpha_m^2}{|P|^2} \right] \right| = \exp \left[-\frac{(\alpha_n^2 + \alpha_m^2) T^2}{|P|^2} \right] \quad (\text{b.45})
 \end{aligned}$$

Calculons ensuite :

$$\begin{aligned}
 & \left| \exp \left(\frac{b'}{a} \right) \right| = \left| \exp \left[\frac{|P|^2 (P \alpha_n - P^* \alpha_m)^2}{2|P|^4 (T^2 + \omega^2 |P|^2)} \right] \right| = \left| \exp \left[\frac{|P|^2 [\alpha_n (T^2 - jD) - \alpha_m (T^2 + jD)]^2}{2|P|^4 (T^2 + \omega^2 |P|^2)} \right] \right| \\
 \Rightarrow & \left| \exp \left(\frac{b'}{a} \right) \right| = \left| \exp \left[\frac{(\alpha_n^2 + \alpha_m^2) (T^4 - D^2) - 2|P|^2 \alpha_n \alpha_m - j \frac{2DT^2 (\alpha_n^2 - \alpha_m^2)}{2|P|^2 (T^2 + \omega^2 |P|^2)}}{2|P|^2 (T^2 + \omega^2 |P|^2)} \right] \right| \\
 \Rightarrow & \left| \exp \left(\frac{b'}{a} \right) \right| = \exp \left[\frac{(\alpha_n^2 + \alpha_m^2) (T^4 - D^2) - 2|P|^2 \alpha_n \alpha_m}{2|P|^2 (T^2 + \omega^2 |P|^2)} \right] \quad (\text{b.46})
 \end{aligned}$$

En combinant (b.45) et (b.46) avec (b.43), il s'en suit que:

$$|Y_{n,m}(\tau, \omega)| = \frac{\sqrt{\pi}}{a} |A_n^* A_m| \exp \left[\frac{(\alpha_n^2 + \alpha_m^2) (T^4 - D^2) - 2|P|^2 \alpha_n \alpha_m}{2|P|^2 (T^2 + \omega^2 |P|^2)} - \frac{(\alpha_n^2 + \alpha_m^2) T^2}{|P|^2} \right]$$

En réduisant au même dénominateur et en regroupant les termes, nous obtenons :

$$|Y_{n,m}(\tau, \omega)| = \frac{\sqrt{\pi}}{a} |A_n^* A_m| \exp \left[-\frac{(\alpha_n^2 + \alpha_m^2) (1 + 2T^2 \omega^2) + 2\alpha_n \alpha_m}{2(T^2 + \omega^2 |P|^2)} \right] \quad (\text{b.47})$$

Développons le numérateur de l'exponentielle:

$$Num = (\alpha_n^2 + \alpha_m^2)(1 + 2T^2\omega^2) - 2\alpha_n\alpha_m \Rightarrow$$

$$Num = [(\tau - \tau_n)^2 + (\tau - \tau_m)^2](1 + 2T^2\omega^2) + 2(\tau - \tau_n)(\tau - \tau_m) \Rightarrow$$

$$Num = (\tau - \tau_n)^2 + (\tau - \tau_m)^2 + 2(\tau - \tau_n)(\tau - \tau_m) + [(\tau - \tau_n)^2 + (\tau - \tau_m)^2] 2T^2\omega^2 \Rightarrow$$

$$Num = 4\tau^2 - 4\tau\tau_n - 4\tau\tau_m + \tau_n^2 + \tau_m^2 + 2\tau_n\tau_m + 2\omega^2T^2(2\tau^2 + \tau_n^2 + \tau_m^2 - 2\tau\tau_n - 2\tau\tau_m)$$

$$\Rightarrow Num = 4\tau^2 - 8\tau\left(\frac{\tau_n + \tau_m}{2}\right) + 4\left(\frac{\tau_n + \tau_m}{2}\right)^2 + 2\omega^2T^2\left[2\left(\tau - \frac{\tau_n + \tau_m}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(\tau_n - \tau_m)^2\right] \quad (b.48)$$

Posons:
$$\bar{\tau} = \frac{\tau_n + \tau_m}{2} \quad (b.49)$$

Alors (b.48) devient:

$$\begin{aligned} Num &= 4\tau^2 - 8\tau\bar{\tau} + 4\bar{\tau}^2 + 2\omega^2T^2\left[2(\tau - \bar{\tau})^2 + \frac{1}{2}(\tau_n - \tau_m)^2\right] \\ \Rightarrow Num &= 4(\tau - \bar{\tau})^2 + 2\omega^2T^2\left[2(\tau - \bar{\tau})^2 + \frac{1}{2}(\tau_n - \tau_m)^2\right] \\ \Rightarrow Num &= 4(\tau - \bar{\tau})^2(1 + \omega^2T^2) + \omega^2T^2(\tau_n - \tau_m)^2 \quad (b.50) \end{aligned}$$

(b.47) à (b.50) impliquent:

$$|Y_{n,m}(\tau, \omega)| = \frac{\sqrt{\pi}}{a} |A_n^* A_m| \exp\left[-2\frac{(\tau - \bar{\tau})^2(1 + \omega^2T^2)}{(T^2 + \omega^2|P|^2)}\right] \cdot \exp\left[-\frac{\omega^2T^2(\tau_n - \tau_m)^2}{2(T^2 + \omega^2|P|^2)}\right] \quad (b.51)$$

D'après (b.37):
$$(\tau - \bar{\tau})^2(1 + \omega^2T^2) \equiv (\tau - \bar{\tau})^2 \quad (b.52)$$

Remarquons que :
$$T^2 + \omega^2|P|^2 = T^2 + \omega^2(T^4 + D^2) = T^2(1 + \omega^2T^2) + \omega^2D^2$$

$$\Rightarrow T^2 + \omega^2|P|^2 \equiv T^2 + \omega^2D^2 \quad (b.53)$$

D'autre part:

$$\frac{\omega^2 T^2 (\tau_n - \tau_m)^2}{2(T^2 + \omega^2 |P|^2)} \equiv \frac{\omega^2 T^2 (\tau_n - \tau_m)^2}{2(T^2 + \omega^2 D^2)} = \frac{\omega^2 (\tau_n - \tau_m)^2}{2\left(1 + \frac{\omega^2 D^2}{T^2}\right)} \quad (\text{b.54})$$

Reprenons (b.37):

$$\omega^2 \ll \frac{1}{\left(T^2 + \frac{D^2}{T^2}\right)} \Rightarrow \omega^2 T^2 + \frac{\omega^2 D^2}{T^2} \ll 1 \Rightarrow \frac{\omega^2 D^2}{T^2} \ll 1 \quad (\text{b.55})$$

Les équations (b.54) et (b.55) entraînent que:

$$\frac{\omega^2 T^2 (\tau_n - \tau_m)^2}{2(T^2 + \omega^2 |P|^2)} \equiv \frac{\omega^2 (\tau_n - \tau_m)^2}{2} \quad (\text{b.56})$$

Les relations (b.51), (b.52), (b.53) et (b.56) impliquent:

$$|Y_{n,m}(\tau, \omega)| \equiv \frac{\sqrt{\pi}}{a} |A_n^* A_m| \exp\left[-2 \frac{(\tau - \bar{\tau})^2}{T^2 + \omega^2 D^2}\right] \cdot \exp\left[-\frac{\omega^2 (\tau_n - \tau_m)^2}{2}\right] \quad (\text{b.57})$$

Et en remplaçant a , A_n et A_m par leur expression en utilisant (b.14) et (b.26):

$$|Y_{n,m}(\tau, \omega)| \equiv \frac{\sqrt{T^4 + D^2} s_0^2}{4\sqrt{2\pi} \sqrt{(T^2 + \omega^2 D^2)}} |r_n'^* r_m'| \frac{1}{\sqrt{T^4 + D^2}} \cdot \exp\left[-2 \frac{(\tau - \bar{\tau})^2}{T^2 + \omega^2 D^2}\right] \exp\left[-\frac{\omega^2 (\tau_n - \tau_m)^2}{2}\right]$$

Et finalement en simplifiant par le terme commun au dénominateur et au numérateur de l'expression précédente, nous aboutissons à l'expression recherchée :

$$|Y_{n,m}(\tau, \omega)| \equiv \frac{s_0^2}{4\sqrt{2\pi} \sqrt{(T^2 + \omega^2 D^2)}} |r_n'^* r_m'| \exp\left[-2 \frac{(\tau - \bar{\tau})^2}{T^2 + \omega^2 D^2}\right] \exp\left[-\frac{\omega^2 (\tau_n - \tau_m)^2}{2}\right] \quad (\text{b-58})$$

ANNEXE C

DÉVELOPPEMENT DE L'INTÉGRALE DES SIGNATURES

$$\Gamma_c(\tau) = \sum_n \Gamma_n(\tau) = \sum_n \frac{r'_n s_0}{2\sqrt{\pi} \sqrt{T^2 - jD_n}} \exp\left[-\frac{(\tau - \tau_n)^2}{T^2 - jD_n}\right]$$

Posons:
$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma_n(\tau)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{r'_n s_0}{2\sqrt{\pi} \sqrt{T^2 - jD_n}} \exp\left[-\frac{(\tau - \tau_n)^2}{T^2 - jD_n}\right] \right|^2 d\tau \quad (c.1)$$

$$\Rightarrow I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|r'_n|^2 s_0^2}{4\pi \sqrt{T^4 + D_n^2}} \exp\left[-\frac{(\tau - \tau_n)^2}{T^2 - jD_n}\right] \left\{ \exp\left[-\frac{(\tau - \tau_n)^2}{T^2 - jD_n}\right] \right\}^* d\tau \quad (c.2)$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{|r'_n|^2 s_0^2}{4\pi \sqrt{T^4 + D_n^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(\tau - \tau_n)^2}{T^2 - jD_n} - \frac{(\tau - \tau_n)^2}{T^2 + jD_n}\right] d\tau \quad (c.3)$$

En réduisant au même dénominateur les termes entre crochets dans l'équation précédente, il s'ensuit que :

$$I_n = \frac{|r'_n|^2 s_0^2}{4\pi \sqrt{T^4 + D_n^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{2T^2(\tau - \tau_n)^2}{T^4 + D_n^2}\right] d\tau \quad (c.4)$$

Posons :
$$\tau' = \tau - \tau_n \Rightarrow d\tau' = d\tau$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{|r'_n|^2 s_0^2}{4\pi \sqrt{T^4 + D_n^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{2T^2\tau'^2}{T^4 + D_n^2}\right] d\tau' \quad (c.5)$$

L'intégrale dans (c.5) est de la forme :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha.X^2) dX = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (\text{c.6})$$

En identifiant α à $\frac{2T^2}{T^4 + D_n^2}$, nous obtenons :

$$I_n = \frac{|r'_n|^2 s_0^2}{4\pi\sqrt{T^4 + D_n^2}} \sqrt{\frac{\pi(T^4 + D_n^2)}{2T^2}}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{|r'_n|^2 s_0^2}{4T\sqrt{2\pi}}$$

ANNEXE D

DÉMONSTRATION DES EXPRESSIONS RELATIVES À LA MÉTHODE DE CORRÉLATION PAR UN NOYAU DISPERSIF

La corrélation entre deux fonctions complexes $h(t)$ et $g(t)$ est définie par [35, page 172]:

$$h(t) \otimes g(t) = h(t) * g^*(-t) \quad (d.1)$$

D'après les propriétés de la transformée de Fourier [35, page 200]:

$$F[h(t) \otimes g(t)] = H(w)G^*(w) \quad (d.2)$$

Démontrons l'égalité:

$$J_{Noyau}(\tau, z) \otimes J_{Noyau}(\tau, z) = \Gamma_0(\tau) \otimes \Gamma_0(\tau) \quad (d.3)$$

En effet, nous avons d'après (4.29) :

$$J_{Noyau}(\tau, z) \otimes J_{Noyau}(\tau, z) = [\hat{\Gamma}_0(\tau) * Q(\tau, z)] \otimes [\hat{\Gamma}_0(\tau) * Q(\tau, z)] \quad (d.4)$$

Appliquons la transformée de Fourier aux deux membres de l'équation (d.4), nous obtenons, en utilisant l'égalité (d.2):

$$\begin{aligned} F[J_{Disp}(\tau, z) \otimes J_{Disp}(\tau, z)] &= F[\hat{\Gamma}_0(\tau) * Q(\tau, z)] F^*[\hat{\Gamma}_0(\tau) * Q(\tau, z)] \\ \Rightarrow F[J_{Disp}(\tau, z) \otimes J_{Disp}(\tau, z)] &= F[\hat{\Gamma}_0(\tau)] F[Q(\tau, z)] F^*[\hat{\Gamma}_0(\tau)] F^*[Q(\tau, z)] \end{aligned} \quad (d.5)$$

Or, d'après (4.28):

$$\begin{aligned}
F[Q(\tau, z)] &= \exp\left[i\beta_2 z \frac{(w - w_0)^2}{2}\right] \Leftrightarrow F^*[Q(\tau, z)] = \exp\left[-i\beta_2 z \frac{(w - w_0)^2}{2}\right] \\
\Rightarrow F[Q(\tau, z)]F^*[Q(\tau, z)] &= \exp\left[i\beta_2 z \frac{(w - w_0)^2}{2}\right] \exp\left[-i\beta_2 z \frac{(w - w_0)^2}{2}\right] \\
\Rightarrow F[Q(\tau, z)]F^*[Q(\tau, z)] &= 1
\end{aligned} \tag{d.6}$$

En utilisant (d.6) dans (d.5), il s'en suit:

$$F[J_{Disp}(\tau, z) \otimes J_{Disp}(\tau, z)] = F[\hat{\Gamma}_0(\tau)]F^*[\hat{\Gamma}_0(\tau)] = |F[\hat{\Gamma}_0(\tau)]|^2 \tag{d.7}$$

Dans l'égalité (d.2), faisons $h = g$; nous tirons alors l'identité:

$$F[h(t) \otimes h(t)] = H(w)H^*(w) = |H(w)|^2 \tag{d.8}$$

En identifiant dans (d-7) $H(w)$ à $F[\hat{\Gamma}_0(\tau)]$, nous obtenons:

$$F[J_{Disp}(\tau, z) \otimes J_{Disp}(\tau, z)] = F[\hat{\Gamma}_0(\tau) \otimes \hat{\Gamma}_0(\tau)]$$

Par une transformée de Fourier inverse, nous obtenons l'identité recherchée:

$$J_{Disp}(\tau, z) \otimes J_{Disp}(\tau, z) = \hat{\Gamma}_0(\tau) \otimes \hat{\Gamma}_0(\tau) \tag{d.9}$$

Remarque importante

Nous nous sommes limités ci-dessus au second ordre de dispersion, cependant l'égalité

(d-9) est valable pour tout ordre; en effet en tenant compte de tous les ordres de dispersion, nous avons vu au chapitre 2 que $Q(\tau, z)$ s'écrit:

$$\begin{aligned}
 Q(\tau, z) &= F^{-1} \left\{ \exp \left[\frac{i\beta_2 z (w - w_0)^2}{2} + \frac{i\beta_3 z (w - w_0)^3}{6} + \dots \right] \right\} \\
 \Rightarrow F[Q(\tau, z)] &= \exp \left[\frac{i\beta_2 z (w - w_0)^2}{2} + \frac{i\beta_3 z (w - w_0)^3}{6} + \dots \right] \\
 \Rightarrow F^*[Q(\tau, z)] &= \exp \left[-\frac{i\beta_2 z (w - w_0)^2}{2} - \frac{i\beta_3 z (w - w_0)^3}{6} + \dots \right] \\
 \Rightarrow F[Q(\tau, z)] F^*[Q(\tau, z)] &= 1
 \end{aligned} \tag{d.10}$$

Donc, nous sommes ramenés à (d.6) et par contre (d.9) reste toujours vraie.

Démontrons maintenant l'égalité:

$$\hat{\Gamma}_c(\tau, z) \otimes J_{Disp}(\tau, z) = f(\tau, z) * [\Gamma_0(\tau) \otimes \Gamma_0(\tau)] \tag{d.11}$$

$$\text{Avec :} \quad \hat{\Gamma}_c(\tau, z) = f(\tau, z) * \Gamma_0(\tau) * Q(\tau, z) \tag{d.12}$$

En effet :

$$\hat{\Gamma}_c(\tau, z) \otimes J_{Disp}(\tau, z) = [f(\tau, z) * \Gamma_0(\tau) * Q(\tau, z)] \otimes [\hat{\Gamma}_0(\tau) * Q(\tau, z)] \tag{d.13}$$

Appliquons la transformée de Fourier aux deux membres de (d.13), il s'en suit en utilisant (d.2) que:

$$F[\hat{\Gamma}_c(\tau, z) \otimes J_{Disp}(\tau, z)] = F[f(\tau, z) * \Gamma_0(\tau) * Q(\tau, z)] F^*[\hat{\Gamma}_0(\tau) * Q(\tau, z)]$$

En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier appliquée à la convolution, nous obtenons:

$$F[\hat{\Gamma}_c(\tau, z) \otimes J_{Disp}(\tau, z)] = F[f(\tau, z)F[\Gamma_0(\tau)]F[Q(\tau, z)]F^*[\Gamma_0(\tau)]F^*[Q(\tau, z)]] \quad (d.14)$$

Mais d'après (d.5), nous avons:

$$\begin{aligned} F[\hat{\Gamma}_0(\tau)]F[Q(\tau, z)]F^*[\hat{\Gamma}_0(\tau)]F^*[Q(\tau, z)] &= F[J_{Disp}(\tau, z) \otimes J_{Disp}(\tau, z)] \\ \Rightarrow F[\hat{\Gamma}_c(\tau, z) \otimes J_{Disp}(\tau, z)] &= F[f(\tau, z)F[J_{Disp}(\tau, z) \otimes J_{Disp}(\tau, z)]] \end{aligned} \quad (d.15)$$

En appliquant les propriétés de la transformée de Fourier inverse, nous tirons l'égalité recherchée:

$$\hat{\Gamma}_c(\tau, z) \otimes J_{Disp}(\tau, z) = f(\tau, z) * [\Gamma_0(\tau) \otimes \Gamma_0(\tau)] \quad (d.16)$$

ANNEXE E

RÉSUMÉ DE LA MÉTHODE DE BRINKMEYER ET AL.

Dans cette approche [13,14], on représente l'échantillon par un ensemble discret de points réflectifs. La première étape consiste à faire un arrangement spectral identique à celui que nous avons présenté au chapitre 3. En utilisant la formule (3.15) et en écrivant la fonction de transfert de l'échantillon sous la forme:

$$H(w, z) = \sum_m |r_m| \exp[-j\phi_m(w, z)]$$

Nous obtenons :

$$\hat{S}_{c/arrangé}(w, z) = \sum_m |r_m| \hat{S}_G(w) \exp[-j\phi_m(w, z)] \quad (\text{e.1})$$

Et en notant que $\phi_m(w, z) = \beta(w)z_m$, (e.1) s'écrit :

$$\hat{S}_{c/arrangé}(w, z) = \sum_m |r_m| \hat{S}_G(w) \exp[-j\beta(w)z_m] \quad (\text{e.2})$$

Faisons la transformation d'échelle suivante :

$$\bar{w} = w + \frac{\beta(w) - \beta_0 - \beta_1(w - w_0)}{\beta_1} \quad (\text{e.3})$$

De (e.3), nous tirons que:

$$\beta(w) = \beta_0 + \beta_1(\bar{w} - w_0) \equiv \beta(\bar{w}) \quad (\text{e.4})$$

En utilisant le développement de Taylor jusqu'au second ordre de $\beta(w)$:

$$\beta(w) = \beta_0 + (w - w_0)\beta_1 + \frac{(w - w_0)^2}{2}\beta_2 \quad (\text{e.5})$$

En combinant (e.3) et (e.5), nous pouvons éliminer le terme $\beta(w)$ pour obtenir la relation entre w et $\bar{w}$ en fonction des coefficients de dispersion qui sont supposés connus dans cette approche:

$$\bar{w} = w + \frac{(w - w_0)^2}{2\beta_1}\beta_2 \quad (\text{e.6})$$

Alors, en effectuant la transformation de l'échelle w à l'échelle $\bar{w}$ dans (e.2) et en tenant compte de (e.4), nous obtenons la relation importante:

$$\hat{S}_{c/ideal}(\bar{w}, z) = \sum_m |r_m| \hat{S}_G(\bar{w}) \exp\{j[\beta_0 + (\bar{w} - w_0)\beta_1]z_m\} \quad (e.7)$$

Dans la relation précédente, le spectre de la trace dans l'échelle $\bar{w}$ est indépendant de la dispersion puisqu'il n'y a pas de termes en β_2 . En effectuant une transformée de Fourier inverse, nous trouvons la trace idéale avec des impulsions gaussiennes où l'effet de la dispersion a été éliminé:

$$\hat{\Gamma}_{c/ideal} = F^{-1}(\hat{S}_{c/ideal}(\bar{w}, z)) \quad (e.8)$$