

**Titre:** Modélisation et contrôle non linéaire pour le suivi de chemin d'un robot mobile sur terrains à adhérence limitée  
Title: Modélisation et contrôle non linéaire pour le suivi de chemin d'un robot mobile sur terrains à adhérence limitée

**Auteur:** Julien Pelletier  
Author:

**Date:** 2005

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Pelletier, J. (2005). Modélisation et contrôle non linéaire pour le suivi de chemin d'un robot mobile sur terrains à adhérence limitée [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/7659/>  
Citation:

## Document en libre accès dans PolyPublie Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/7659/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Romano M. De Santis  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

**UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL**

**Modélisation et contrôle non linéaire pour  
le suivi de chemin d'un robot mobile  
sur terrains à adhérence limitée**

JULIEN PELLETIER  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)  
DÉCEMBRE 2005



Library and  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*  
ISBN: 978-0-494-16830-1

*Our file* *Notre référence*  
ISBN: 978-0-494-16830-1

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

\*\*  
**Canada**

**UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL**  
**ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL**

Ce mémoire intitulé:

**Modélisation et contrôle non linéaire pour  
le suivi de chemin d'un robot mobile  
sur terrains à adhérence limitée**

présenté par: PELLETIER, Julien  
en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées  
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. HURTEAU Richard, D.Eng., membre président  
M. DESANTIS Romano, Ph.D., membre et directeur de recherche  
M. GOURDEAU Richard, Ph.D., membre

## REMERCIEMENTS

Je remercie vivement mon directeur de recherche, M. Romano M. De Santis, pour ses précieux conseils et son support constant tout au long de ce projet. Merci aussi à tout les professeurs de Polytechnique qui m'ont fait découvrir la passionnante discipline de l'automatique. De plus je remercie spécialement M. Vladimir Polotski qui m'a supervisé au début de mes travaux, ainsi que M. Gourdeau, pour sa référence auprès du CRSNG.

Je tiens également à remercier le Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie du Canada (CRSNG), l'Agence Spatiale Canadienne et l'École Polytechnique de Montréal pour leurs contributions financières.

## RÉSUMÉ

Ce projet consiste à étudier le problème classique de suivi de chemin d'un robot mobile, plus particulièrement dans le contexte où le robot se déplace sur un sol à adhérence limitée. Afin d'étudier le déplacement du robot mobile sur le sol à adhérence limitée, nous modélisons d'abord la dynamique du robot et du sol. Deux modèles sont développés, le premier suppose un sol avec une adhérence idéale. Le second modèle incorpore un modèle du sol qui tient en compte du glissement des roues (phénomène qui apparaît aussitôt que le sol n'est pas parfaitement adhérent) et du glissement latéral. Nous étudions le comportement du robot mobile pour les deux modèles et nous montrons le bon fonctionnement d'un algorithme de suivi de chemin sur le modèle qui utilise un sol idéal (modèle sans glissement). Par la suite nous montrons de quelle manière l'algorithme de suivi de chemin est perturbé lorsque le robot mobile se déplace sur un terrain où les glissements ne sont plus négligeables, c'est-à-dire sur un sol qui possède une adhérence limitée. Nous observons alors que l'algorithme de suivi n'accomplit plus correctement sa tâche lorsque les hypothèses de non glissement ne tiennent plus. Nous montrons ensuite qu'il est possible d'utiliser le modèle du sol afin de développer un nouveau contrôleur dynamique, faisant parti du contrôleur de suivi de chemin, qui permettra d'obtenir un contrôle de suivi adéquat, même lorsque le robot glisse sur un terrain à adhérence limitée. Finalement, nous montrons en simulation que le contrôleur développé fonctionne efficacement sur plusieurs types de sols naturels, enneigés et glacés. Toutes les étapes de ce travail sont validées par des simulations utilisant les outils informatiques Matlab et Simulink.

## ABSTRACT

This project examines the classical problem of the path tracking of a mobile robot in the specific context of limited adherence soils. In order to study the displacement of the mobile robot on a ground with limited adherence, we model both the dynamics of the robot and of the ground. Two models are developed: the first model assumes a ground with an ideal adherence whereas the second model takes into account a soil model that uses the slip of the wheels (phenomenon that appears when the ground is not perfectly adherent) and the side slip. We investigate the behavior of the mobile robot for both models and we illustrate the usage of a typical path-tracking algorithm on the first model on an ideal ground. We then show in what ways the path-tracking algorithm is disturbed when the mobile robot moves on a ground where the slips are no more negligible; on a ground which has a limited adherence. We observe that the path-tracking algorithm cannot follow correctly its path when the assumptions of non slipping do not hold. We show that it is possible to use the soil model to develop a new dynamic controller, part of the path-tracking controller, which will allow the overall path-tracking controller to remain effective even when the robot slips on a ground with limited adherence. Finally, we use simulations to illustrate that the proposed dynamic controller functions adequately on several types of natural grounds and on snowy or frozen grounds. All parts of this work are validated by simulations using the computer tools Matlab and Simulink.

## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS.....	iv
RÉSUMÉ.....	v
ABSTRACT.....	vi
LISTE DES TABLEAUX.....	xii
LISTE DES FIGURES.....	xiii
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS.....	xix
INTRODUCTION.....	1
Objectif.....	3
Méthodologie .....	4
Structure du mémoire .....	5
CHAPITRE 1 – REVUE DE LITTÉRATURE.....	6
1.1     Description du robot mobile à l'étude .....	6
1.2     Revue de la littérature pertinente et critique .....	8
1.2.1 Modélisation .....	8
1.2.2 Glissements et interactions sol-roues .....	10
1.2.3 Contrôle de véhicules nonholonomes.....	14
1.2.4 Contrôle de suivi de chemin .....	17
1.2.5 Commande robuste.....	20
1.3     Conclusion du chapitre .....	21
CHAPITRE 2 - MODÉLISATION DU ROBOT MOBILE ET DU SOL.....	22
2.1     Hypothèses générales .....	22
2.2     Assignement d'un repère.....	23
2.3     Définition des vitesses.....	24
2.4     Modèle du robot mobile sans glissement .....	25
2.4.1 Hypothèses supplémentaires .....	25
2.4.2 Contraintes nonholonomes .....	26
2.4.3 Simplification de la représentation des forces et moments .....	26
2.4.4 Sommation des forces et des moments.....	27

2.4.5 Modèle dynamique .....	28
2.4.6 Résumé schématique du modèle sans glissement .....	31
2.5 Modèle du robot mobile avec glissement et modèle du sol .....	33
2.5.1 Hypothèses supplémentaires .....	33
2.5.2 Simplification de la représentation des forces et moments .....	33
2.5.3 Glissement longitudinal.....	35
2.5.4 Force de traction et modèle du sol.....	36
2.5.5 Force de résistance au mouvement.....	40
2.5.6 Angle de glissement .....	42
2.5.7 Force de friction latérale.....	42
2.5.8 Moment dû aux forces de tractions .....	44
2.5.9 Moment résistif (couple d'auto-alignement) .....	45
2.5.10 Sommation des forces et des moments.....	46
2.5.11 Modèle d'une roue.....	46
2.5.12 Modèle dynamique .....	48
2.5.13 Relation entre les vitesses du robot et les vitesses des roues .....	50
2.5.14 Résumé schématique du modèle avec glissement .....	51
2.6 Conclusion du chapitre.....	53
<b>CHAPITRE 3 - ÉTUDE DES MODÈLES ET DU COMPORTEMENT DU ROBOT MOBILE EN BOUCLE OUVERTE.....</b>	<b>54</b>
3.1 Comportement du robot soumis à des couples aux roues égaux à gauche et droite qui augmentent linéairement.....	56
3.2 Comportement du robot soumis à des couples aux roues égaux mais de signe inversé à gauche et à droite qui augmentent linéairement .....	61
3.3 Comportement en accélération longitudinale du robot soumis à des couples aux roues constants .....	65
3.4 Comportement du robot soumis à des couples constants, puis nuls.....	68
3.5 Comportement angulaire du robot soumis à une différence de couples à droite et à gauche variant linéairement.....	70

3.6 Comportement longitudinal du robot soumis à des vitesses aux roues égales, pour différents types de sol .....	73
3.7 Comportement latéral du robot soumis à des vitesses aux roues différentes constantes .....	79
3.8 Comportement angulaire du robot en fonction de la vitesse longitudinale.....	81
3.9 Comportement du robot soumis à des vitesses différentes aux roues et passant d'un sol adhérent à un sol moins adhérent .....	86
3.10 Comportement du robot soumis à des vitesses égales aux roues, les roues à gauche sur un sol relativement adhérent et les roues à droite sur un sol moins adhérent .....	88
3.11 Étude du phénomène d'arrêt-glisser .....	92
3.12 Conclusion du chapitre.....	96
<b>CHAPITRE 4 – CONTRÔLE POUR LE SUIVI DE CHEMIN.....</b>	<b>97</b>
4.1 Contrôleur de suivi de chemin pour le modèle sans glissement.....	98
4.1.1 Définition du problème de suivi de chemin .....	98
4.1.2 Définition et description des erreurs de navigation.....	99
4.1.3 Première étape : linéarisation partielle du modèle d'état .....	100
4.1.4 Deuxième étape : contrôleur cinématique .....	103
4.1.5 Contrôleur de suivi de chemin complet.....	107
4.1.6 Essais en simulation du contrôleur .....	111
4.2 Impact du glissement sur la performance des algorithmes de contrôle de suivi de chemin .....	117
4.2.1 Impact du glissement sur le suivi d'une ligne droite.....	118
4.2.2 Impact du glissement sur le suivi d'un chemin courbé .....	121
4.3 Conclusion du chapitre.....	123
<b>CHAPITRE 5 – CONTRÔLE DU ROBOT MOBILE SOUMIS À DU GLISSEMENT .....</b>	<b>124</b>
5.1 Contrôleur de vitesse longitudinale.....	125
5.1.1 Contrôleur de vitesse angulaire des roues .....	125

5.1.2	Calcul des vitesses de référence des roues en fonction de la vitesse .....	128
	longitudinale de référence .....	128
5.1.3	Contrôleur de vitesse longitudinale complet.....	131
5.1.4	Essais en simulation du contrôleur de vitesse longitudinale .....	132
5.1.5	Limitations du contrôleur de vitesse longitudinale .....	135
5.2	Contrôleur de vitesse angulaire .....	137
5.2.1	Problématique de conception : glissement latéral .....	137
5.2.2	Conception du contrôleur de vitesse angulaire .....	139
5.3	Contrôleur complet.....	141
5.3.1	Structure du contrôleur complet .....	141
5.3.2	Résumé schématique du contrôle de suivi de chemin pour le modèle avec glissement.....	142
5.3.3	Résultats de simulations .....	146
5.4	Assomptions, limitations et forces du contrôleur .....	166
5.5	Considérations pratiques .....	168
5.6	Conclusion du chapitre .....	174
	CONCLUSION GÉNÉRALE .....	175
	LISTE DES RÉFÉRENCES .....	177
	ANNEXE I: Élément du contrôle non linéaire.....	181
	Crochet de Lie .....	181
	Dérivée de Lie .....	181
	Distribution .....	182
	Distribution involutive .....	182
	ANNEXE II: Description des modèles réalisés en Matlab / Simulink .....	183
	AII.1- Modèles en boucle ouverte du robot mobile .....	184
1.1	Modèle en boucle ouverte sans glissement .....	184
1.1.1	Schéma de bloc du modèle .....	184
1.1.2	Description comportementale globale.....	184
1.1.3	Bloc « Calcul des forces et moments » .....	185

1.1.4 Bloc « Modèle dynamique » .....	186
1.2 Modèle en boucle ouverte avec glissement.....	187
1.2.1 Schéma de bloc du modèle .....	187
1.2.3 Bloc « Modèle des roues » .....	188
1.2.4 Bloc « Interactions roues-sol ».....	189
1.2.5 Bloc « Modèle dynamique » .....	191
AII.2- Modèles en boucle fermée du robot mobile .....	192
2.1 Schéma de bloc du modèle .....	192
2.2 Description comportementale globale .....	192
2.3 Bloc « Modèle cinématique ».....	193
2.4 Bloc « Navigation ».....	194
2.5 Bloc « Contrôleur cinématique ».....	195
2.6 Bloc « Contrôleur dynamique [modèle sans glissement] » .....	196
2.7 Bloc « Contrôleur dynamique [modèle avec glissement] » .....	197

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1 : Paramètres du robot mobile simulé.....	7
Tableau 2.1 : Description des vitesses.....	25
Tableau 2.2 : Propriétés géophysiques de différents types de terrains [WONG93] [APOSTOPOULOS01].....	38
Tableau 3.1 : Résumé des essais en boucle ouverte effectués.....	55
Tableau 3.2 : Accélérations longitudinales atteintes pour différents couples en entrées.....	66
Tableau 3.3 : Glissement stationnaire et accélération longitudinale stationnaire pour un robot soumis à des vitesses aux roues linéaires pour différents types de sols.....	75
Tableau 3.4 : Vitesse latérale moyenne en fonction du coefficient de rigidité latéral.....	80
Tableau 3.5 : Vitesse longitudinale, vitesse latérale et rayon de courbure pour $v_{xdes} = 0.4m/s$ .....	82
Tableau 3.6 : Vitesse longitudinale, vitesse latérale et rayon de courbure pour $v_{xdes} = 0.8m/s$ .....	82
Tableau 3.7 : Vitesse longitudinale, vitesse latérale et rayon de courbure pour $v_{xdes} = 1.2m/s$ .....	83
Tableau 3.8 : États stationnaires pour un essai avec sols différents sur les roues à gauche et à droite du robot.....	89
Tableau 4.1 : Paramètres des compensateurs du contrôleur cinématique.....	112
Tableau 4.2 : Erreurs de navigation maximales pour le 1er essai.....	113
Tableau 4.3 : Paramètres des compensateurs du contrôleur cinématique.....	114
Tableau 4.4 : Erreurs de navigation maximales pour le 2e essai.....	115
Tableau 5.1 : Paramètres du compensateur PI pour le contrôleur de vitesse angulaire des roues.....	132
Tableau 5.2 : Paramètres du contrôleur de vitesse angulaire.....	141
Tableau 5.3 : Essais pour une adhérence au contrôleur différente de l'adhérence du modèle .....	156

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 : Le robot ATRV-2 de iRobot inc.....	6
Figure 1.2 : Paramètres géométriques et inertiels du robot mobile.....	8
Figure 1.3 : Rapport force de traction sur force normale en fonction du glissement des roues.....	11
Figure 2.1 : Diagramme du corps libre du robot mobile.....	23
Figure 2.2 : Vitesses du robot mobile dans le repère local.....	24
Figure 2.3 : Diagramme du corps libre simplifié pour le robot sans glissement.....	27
Figure 2.4: Schéma de bloc du robot sans glissement.....	31
Figure 2.5 : Diagramme du corps libre simplifié pour le robot avec glissement.....	35
Figure 2.6 : Adhérence en fonction du glissement longitudinal pour différentes classes de sols.....	36
Figure 2.7 : Coefficient d'adhérence longitudinal pour différents types de sol calculé avec le modèle de Wong.....	39
Figure 2.8 : Angle de glissement.....	42
Figure 2.9 : Coefficient de frottement latéral en fonction de l'angle de glissement et du glissement longitudinal [PETERSEN03].....	43
Figure 2.10 : Approximation de la force latérale de friction par le Cornering Stiffness [WONG93].....	44
Figure 2.11 : Approximation de la force latérale de friction par un terme de friction dynamique.....	44
Figure 2.12 : Moment d'auto-alignement en fonction de l'angle de glissement [WONG93].....	45
Figure 2.13 : Diagramme du corps libre d'une roue soumise à du glissement.....	46
Figure 2.14: Schéma de bloc du modèle avec glissement.....	51
Figure 3.1 : Terrains et adhérences considérés pour les essais 3.1 et 3.2.....	56
Figure 3.2 : Influence des couples appliqués aux roues sur la vitesse longitudinale du robot mobile pour le modèle sans glissement.....	57
Figure 3.3 : Influence des couples appliqués aux roues sur la vitesse longitudinale	

du robot mobile pour le modèle avec glissement et pour différentes adhérences.....	58
Figure 3.4 : Influence des couples appliqués aux roues sur la vitesse	
angulaire du robot mobile pour le modèle sans glissement.....	62
Figure 3.5 : Influence des couples appliqués aux roues sur la vitesse angulaire du	
robot mobile pour le modèle avec glissement.....	63
Figure 3.6 : Influence de couples constants appliqués aux roues sur l'accélération	
et la vitesse longitudinale du robot mobile.....	66
Figure 3.7 : Comportement en freinage du robot mobile.....	68
Figure 3.8 : Influence sur la vitesse angulaire de la différence des couples	
appliqués aux roues.....	71
Figure 3.9 : Chemin suivi par le robot mobile.....	71
Figure 3.10 : Caractéristiques de la vitesse longitudinale en fonction des vitesses	
aux roues, selon le glissement pour différents types de sol	
<i>(dom <math>\omega_{fg,d}=[0,0.4/r]</math> rad/s)</i> .....	74
Figure 3.11 : Caractéristiques de la vitesse longitudinale en fonction des vitesses	
aux roues, selon le glissement pour différents types de sol	
<i>(dom <math>\omega_{fg,d}=[1.5/r,2.0/r]</math> rad/s)</i> .....	75
Figure 3.12 : Influence du coefficient de rigidité latérale sur le chemin parcouru	
pour des vitesses de roues figées.....	79
Figure 3.13: Variation du rayon de courbure suivi sur le rayon de courbure désiré,	
pour différentes vitesses longitudinales.....	83
Figure 3.14: Vitesse latérale atteinte en fonction de la vitesse longitudinale et du	
rayon de courbure désiré.....	84
Figure 3.15: Comportement du robot mobile passant sur des sols naturels de moins	
en moins adhérents (signaux filtrés).....	87
Figure 3.16: Comportement du robot mobile passant sur des sols naturels de moins	
en moins adhérents (signaux filtrés).....	89
Figure 3.17 : Phénomène d'arrêt glissement pour différents pas de simulations.....	93

Figure 3.18 : Phénomène d'arrêt glissement pour différents pas de simulations (signaux filtrés) .....	93
Figure 3.19 : Phénomène d'arrêt glissement pour différents pas de simulations (petite échelle).....	94
Figure 4.1: Erreurs de suivi de chemin.....	99
Figure 4.2: Modèle sans glissement partiellement linéarisé.....	102
Figure 4.3: Contrôleur de suivi de chemin pour le modèle sans glissement.....	106
Figure 4.4 : Système d'asservissement complet pour le modèle sans glissement.....	107
Figure 4.5 : Chemin de référence choisi pour les essais de simulation.....	111
Figure 4.6 : Suivi de chemin à 0.4m/s, 0.8m/s et 1.2m/s pour le 1 <sup>er</sup> essai.....	112
Figure 4.7 : Erreurs de suivi à 0.4m/s, 0.8m/s et 1.2m/s pour le 1 <sup>er</sup> essai.....	113
Figure 4.8 : Suivi de chemin à 0.4m/s, 0.8m/s et 1.2m/s pour le 2 <sup>e</sup> essai.....	114
Figure 4.9 : Erreurs de suivi à 0.4m/s, 0.8m/s et 1.2m/s pour le 2 <sup>e</sup> essai.....	115
Figure 4.10 : Couples appliqués au robot mobile pour le 2 <sup>e</sup> essai.....	115
Figure 4.11 : Couples appliqués au robot mobile pour le 2 <sup>e</sup> essai.....	116
Figure 4.12 : Impact du glissement longitudinal sur le suivi d'une ligne droite.....	119
Figure 4.13 : Impact du glissement longitudinal et latéral sur le suivi d'un chemin courbé : chemin suivi.....	122
Figure 4.14 : Impact du glissement longitudinal et latéral sur le suivi d'un chemin courbé : états.....	122
Figure 5.1 : Diagramme du corps libre d'une roue soumise à du glissement.....	125
Figure 5.2 : Schéma de bloc mathématique du contrôleur de vitesse angulaire des roues.....	127
Figure 5.3 : Schéma de bloc du contrôleur de vitesse angulaire des roues.....	127
Figure 5.4 : Vitesse longitudinale du robot mobile en fonction des vitesses linéaires des roues, pour les cas avec et sans glissement.....	129
Figure 5.5 : Vitesse linéaire des roues du robot mobile en fonction de la vitesse longitudinale, pour le cas avec glissement.....	130
Figure 5.6 : Schéma de bloc « calcul des vitesses angulaires de référence des	

roues.....	131
Figure 5.7 : Schéma de bloc du contrôleur de vitesse longitudinal complet.....	131
Figure 5.8 : Vue de synthèse du contrôleur de vitesse longitudinale complet.....	132
Figure 5.9 : Essai #1, suivi pour le contrôleur de vitesse longitudinale sur différents types de sol.....	133
Figure 5.10 : Essai #1, erreur de suivi pour le contrôleur de vitesse longitudinale....	133
Figure 5.11 : Essai #2, suivi pour le contrôleur de vitesse longitudinale sur différents types de sols.....	134
Figure 5.12 : Essai #2, erreur de suivi pour le contrôleur de vitesse longitudinale....	135
Figure 5.13 : Contrôleur de vitesses angulaires des roues utilisant en entrée les vitesses de référence aux roues additionnées.....	138
Figure 5.14 : Essai en simulation du contrôleur de vitesse angulaire des roues utilisant les vitesses de référence aux roues additionnées.....	138
Figure 5.15 : Modulation de largeur d'impulsion utilisant une onde porteuse en dents de scie.....	139
Figure 5.16 : Schéma de bloc mathématique de contrôleur de vitesse angulaire.....	140
Figure 5.17 : Schéma de bloc de la première partie du contrôleur de vitesse longitudinale.....	140
Figure 5.18 : Schéma de bloc du contrôleur complet pour le suivi de chemin avec glissement.....	141
Figure 5.19 : Système complet d'asservissement pour le modèle avec glissement....	142
Figure 5.20 : Chemin de référence choisi pour les essais de simulations.....	146
Figure 5.21 : Suivi de chemin à 0.4m/s pour différents types de sol.....	147
Figure 5.22 : Erreurs de suivi de chemin à 0.4m/s pour différents types de sols.....	148
Figure 5.23 : Suivi de chemin à 0.8m/s pour différents types de sols.....	149
Figure 5.24 : Erreurs de suivi de chemin à 0.8m/s pour différents types de sols.....	150
Figure 5.25 : Suivi de chemin à 1.2m/s pour différents types de sols.....	151
Figure 5.26 : Erreurs de suivi de chemin à 1.2m/s pour différents types de sols.....	152
Figure 5.27 : Profil de vitesse longitudinale de référence.....	153

Figure 5.28 : Suivi de chemin à vitesse de référence variable pour différents types de sols.....	154
Figure 5.29 : Erreurs de suivi de chemin à vitesse de référence variable pour différents types de sols.....	155
Figure 5.30 : Suivi de chemin avec adhérence du modèle différente de l'adhérence du contrôleur ( $\mu_m$ =Sable, $\mu_c$ =Neige) .....	157
Figure 5.31 : Erreurs de suivi de chemin pour une adhérence du modèle différente de l'adhérence du contrôleur ( $\mu_m$ =Sable, $\mu_c$ =Neige) .....	157
Figure 5.32 : Suivi de chemin avec adhérence du modèle différente de l'adhérence du contrôleur ( $\mu_m$ =Neige, $\mu_c$ =Sable).....	158
Figure 5.33 : Erreurs de suivi de chemin pour une adhérence du modèle différente de l'adhérence du contrôleur ( $\mu_m$ =Neige, $\mu_c$ =Sable) .....	158
Figure 5.34 : Suivi de chemin avec adhérence du modèle différente de l'adhérence du contrôleur ( $\mu_m$ =Sable, $\mu_c$ =Argile).....	159
Figure 5.35 : Erreurs de suivi de chemin pour une adhérence du modèle différente de l'adhérence du contrôleur ( $\mu_m$ =Sable, $\mu_c$ =Argile) .....	159
Figure 5.36 : Suivi de chemin avec adhérence du modèle différente de l'adhérence du contrôleur ( $\mu_m$ =Argile, $\mu_c$ =Sable) .....	160
Figure 5.37 : Erreurs de suivi de chemin pour une adhérence du modèle différente de l'adhérence du contrôleur ( $\mu_m$ =Argile, $\mu_c$ =Sable) .....	160
Figure 5.38 : Suivi de chemin avec adhérence du modèle différente de l'adhérence du contrôleur ( $\mu_m$ =Sable, $\mu_c$ =Glace) .....	161
Figure 5.39 : Erreurs de suivi de chemin pour une adhérence du modèle différente de l'adhérence du contrôleur ( $\mu_m$ =Sable, $\mu_c$ =Glace) .....	161
Figure 5.40 : Suivi de chemin avec adhérence du modèle différente de l'adhérence du contrôleur ( $\mu_m$ =Glace, $\mu_c$ =Sable) .....	162
Figure 5.41 : Erreurs de suivi de chemin pour une adhérence du modèle différente de l'adhérence du contrôleur ( $\mu_m$ =Glace, $\mu_c$ =Sable) .....	162

Figure 5.42 : Exemple d'essai pratique en boucle ouverte pour estimer les paramètres du sol .....	170
Figure 5.43 : Système complet d'asservissement théorique pour le modèle avec glissement .....	173
Figure 5.44 : Système complet d'asservissement pratique pour le modèle avec glissement.....	173
Figure AII.1: Schéma de bloc du modèle boucle ouverte sans glissement.....	185
Figure AII.2: Bloc « Calcul des forces et moments ».....	186
Figure AII.3: Bloc « Modèle dynamique ».....	187
Figure AII.4: Schéma de bloc du modèle boucle ouverte avec glissement.....	188
Figure AII.5: Bloc « Modèle des roues ».....	189
Figure AII.6: Bloc « Interractions roues-sol ».....	190
Figure AII.7: Bloc « Modèle dynamique ».....	192
Figure AII.8: Schéma de bloc du système d'asservissement en boucle fermée.....	193
Figure AII.9: Bloc « Modèle cinématique ».....	194
Figure AII.10: Bloc « Navigation ».....	195
Figure AII.11: Bloc « Contrôleur cinématique ».....	196
Figure AII.12: Bloc « Contrôleur dynamique [modèle sans glissement] ».....	197
Figure AII.13: Bloc « Contrôleur dynamique [modèle avec glissement] ».....	198

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

Paramètres géométriques et inertIELS du robot mobile

<i>a</i>	Demi-longueur, au niveau des roues
<i>b</i>	Demi-largeur, au niveau des roues
<i>c</i>	Demi-largeur, au niveau de la plate-forme mobile
<i>m</i>	Masse
<i>I</i>	Moment d'inertie par rapport à l'axe passant par son centre de masse
<i>W</i>	Poids total
<i>N<sub>roue</sub></i>	Nombre de roues
<i>CDM</i>	Centre de masse

Paramètres des roues

<i>r</i>	Rayon d'une roue
<i>I<sub>roue</sub></i>	Moment d'inertie d'une roue par rapport à son axe de rotation
<i>L</i>	Longueur de la surface de contact du pneu sur le sol
<i>l</i>	Largeur de la surface de contact du pneu sur le sol

Paramètres du sol

$\tau_{\max}$	Pression maximale en cisaillement avant rupture du sol (kPa)
<i>c</i>	Cohésion apparente du sol (kPa)
$\varphi$	Angle de résistance interne du sol (°)
<i>p</i>	Pression normale du sol (kPa)
$F_{\max}$	Force maximale de traction d'un sol (N)
<i>A</i>	Surface de contact entre une roue et le sol ( $m^2$ )
<i>J</i>	Déplacement en cisaillement (m)
<i>K</i>	Déplacement en cisaillement où $\tau_{\max}$ se produit (m)
$\theta_0$	Angle où la roue commence à toucher le sol (°)
$F_T$	Force de traction (N)
$F_N$	Force normale (N)
$K_c$	Module de cohésion de la déformation du terrain (kN/mn+1)
$K_\varphi$	Module de friction de la déformation du terrain (kN/mn+2)
<i>n</i>	Exposant de la déformation du terrain
$\mu_r$	Coefficient de friction latérale
$\tau(\cdot)$	Pression en cisaillement du sol sur la roue
<i>p</i>	Pression normale du sol sur la roue
<i>z</i>	Enfoncement des roues dans le sol (m)

Forces et Moments

$\tau_{\{g,d\}}$	Couples appliqués aux roues, respectivement à <i>gauche</i> et à <i>droite</i> du robot mobile
$F_{x\{g,d\}}$	Forces de traction agissant respectivement à <i>gauche</i> et à <i>droite</i> du robot mobile

$R_{x\{g,d\}}$	Forces de résistance au mouvement, respectivement à <i>gauche</i> et à <i>droite</i> du robot mobile
$F_{y\{av,ar\}}$	Forces latérales agissant respectivement à l' <i>avant</i> et à l' <i>arrière</i> du robot mobile
$M_x$	Moment dû aux forces actives de traction agissant sur le robot mobile
$M_{Rx}$	Moment résistif dû aux forces de résistance au mouvement
$M_r$	Moment résistif dû aux forces résistives latérales et aux forces de résistance au mouvement
$C_\alpha$	Coefficient de rigidité latérale (cornering stiffness)
$\mu_x(S)$	Coefficient d'adhérence en traction longitudinale. Fourni par le modèle du sol.
$\mu_{x\{g,d\}}(S)$	Coefficient d'adhérence en traction longitudinale pour les roues à <i>gauche</i> et à <i>droite</i> du robot mobile. Fourni par le modèle du sol
$\mu_y$	Coefficient de friction latérale. Fourni par le modèle du sol
$\mu_{MAX}$	Adhérence maximale (maximum de la fonction d'adhérence par rapport au glissement)
$F_{N_{roue}}$	Module de la force normale du robot sur la roue
$N$	Module de la force normale du sol sur la roue
$F_{x\{g,d\}_{roue}}$	Module de la force de traction agissant sur une seule roue. Fourni par le modèle du sol
$F_{y_{roue}}$	Module de la force latérale agissant sur une seule roue. Fourni par le modèle du sol
$R_{x_{roue}}$	Module de la force de résistance au mouvement agissant sur une seule roue. Fourni par le modèle du sol
$R_C$	Résistance à la compaction
$R_B$	Résistance à la poussée du terrain
$R_R$	Résistance au roulement
$R_G$	Résistance à la gravité
$R_O$	Résistance due aux obstacles
$F_{GEN}$	Vecteur des forces généralisées
$\sum F_x$	Force généralisée : sommation des forces agissant sur le robot mobile, dans la direction longitudinale de son repère local
$\sum F_y$	Force généralisée : sommation des forces agissant sur le robot mobile, dans la direction latérale de son repère local
$\sum M$	Force généralisée : sommation des moments agissant sur robot mobile, par rapport à l'axe vertical passant par son centre de masse
<u>Repères</u>	
$I_{xy}$	Repère inertiel
$G_{xy}$	Repère local solidaire avec le centre de masse du robot mobile

$L_{xy}$	Repère mobile se déplaçant sur le chemin de référence
<u>Modèles dynamique et cinématique</u>	
$\chi(q)$	Matrice de la fonction de cinématique directe
$M(q)$	Matrice d'inertie
$f(q, \dot{q})$	Matrice des forces de Coriolis
$A(q)$	Matrice associée aux contraintes nonholonomes
$B(q)$	Matrice de transformation des entrées
$W(q)$	Matrice d'énergie potentielle du système
$S(q)$	Matrice permettant de passer des vitesses du repère local aux vitesses du repère inertiel
$u$	Vecteur de forces et de couples externes
$x$	Vecteur d'états
<u>Paramètres de glissement</u>	
$S$	Glissement longitudinal des roues
$S_{x\{g,d\}}$	Glissement longitudinal des roues, respectivement à <i>gauche</i> et à <i>droite</i> du robot mobile
$S_{STAT}$	Glissement longitudinal des roues stationnaires
$\alpha$	Angle de glissement : angle entre la vitesse $v$ du robot et la vitesse longitudinale $v_x$
<u>Paramètres cinétiques</u>	
$v$	Vitesse linéaire du CDM du robot
$v_x$	Vitesse longitudinale (selon x) du CDM du robot par rapport au repère local
$\dot{v}_x$	Accélération linéaire du CDM du robot
$v_{x\{g,d\}}$	Vitesse longitudinale (selon x) des points situés à l'extrême <i>gauche</i> ou à l'extrême <i>droite</i> du robot
$v_y$	Vitesse latérale (selon y) du CDM du robot par rapport au repère local
$\dot{v}_y$	Accélération latérale (selon y) du CDM du robot par rapport au repère local
$v_{y\{av,ar\}}$	Vitesses latérales (selon y) des points situés à l'extrême <i>avant</i> ou à l'extrême <i>arrière</i> du robot
$\Omega$	Vitesse angulaire du robot par rapport au repère local
$\dot{\Omega}$	Accélération angulaire du robot par rapport au repère local
$\dot{x}$	Vitesse longitudinale (selon X) par rapport au repère inertiel
$\dot{y}$	Vitesse latérale (selon Y) par rapport au repère inertiel
$\dot{\theta}$	Vitesse angulaire par rapport au repère inertiel
$\omega_{\{g,d\}}$	Vitesses angulaires des roues à <i>gauche</i> et à <i>droite</i> du robot
$\eta$	Vecteur des quasi ou pseudo vitesses du centre de masse
<u>Autres paramètres</u>	
$q$	Vecteur des coordonnées généralisées

$x$	Position (selon X) dans le repère inertiel
$y$	Position (selon Y) dans le repère inertiel
$\theta$	Orientation dans le repère inertiel

Signaux désirés pour les tests en boucle ouverte

$v_{xDES}$	Vitesse longitudinale désirée
$R_{DES}$	Rayon de courbure de référence désiré
$\Omega_{DES}$	Vitesse angulaire désirée
$v_{ymoy}$	Vitesse latérale moyenne
$R$	Rayon de courbure suivi

Paramètres de contrôle – Signaux de références

$\Pi$	Chemin de référence
$v_{xREF}$	Vitesse longitudinale de référence
$\theta_{REF}$	Orientation de référence
$\Omega_{REF}$	Vitesse angulaire de référence
$\rho_{REF}$	Rayon de courbure de référence
$\omega_{\{g,d\}REF}$	Vitesse angulaire des roues de référence
$x_{REF}$	Coordonnée en abscisse de référence
$y_{REF}$	Coordonnée en ordonnée de référence
$\dot{v}_{xREF}$	Accélération longitudinale de référence
$\dot{\Omega}_{REF}$	Accélération angulaire de référence

Paramètres de contrôle - Erreurs

$e_{\omega\{g,d\}}$	Erreurs de vitesses angulaires des roues à <i>gauche</i> et à <i>droite</i> du robot
$e_{vx}$	Erreur de vitesse longitudinale
$e_\theta$	Erreur d'orientation
$e_\Omega$	Erreur de vitesse longitudinale
$e_{lat}$	Erreur latérale
$e$	Vecteur d'états pour les erreurs de suivi de chemin

Paramètres de contrôle – Gains, pôles et paramètres

$K_{vx\{1,2\}}, K_{\theta\{1,2,3\}}$	Gains proportionnel et intégral pour le contrôleur de vitesse longitudinale et angulaire du contrôleur de suivi de chemin
$P_{vx\{1,2\}}, P_{\theta\{1,2,3\}}$	Pôles pour le contrôleur de vitesse longitudinale et angulaire des roues, pour le contrôleur de suivi de chemin
$K_{P\{g,d\}}, K_{I\{g,d\}}$	Gains proportionnel et intégral pour le contrôleur de vitesse angulaire des roues, pour le modèle avec glissement
$P_{1\{g,d\}}, P_{2\{g,d\}}$	Pôles pour le contrôleur de vitesse angulaire des roues, pour le modèle avec glissement
$A$	Amplitude de l'onde porteuse pour le contrôleur de vitesse angulaire pour le modèle avec glissement

$T$	Période de l'onde porteuse pour le contrôleur de vitesse angulaire pour le modèle avec glissement
$K$	Gain du contrôleur de vitesse angulaire pour le modèle avec glissement
<b><u>Paramètres de contrôle – Lois de commandes</u></b>	
$u$	Loi de commande permettant de linéariser partiellement le modèle d'état
$v$	Loi de commande permettant de stabiliser les erreurs de navigation du contrôleur de suivi.
<b><u>Paramètres de contrôle – Signaux de contrôles</u></b>	
$v_{vx}$	Signal de contrôle linéarisé de vitesse longitudinale
$v_\Omega$	Signal de contrôle linéarisé de vitesse angulaire
$v_1$	Accélération longitudinale désirée
$v_2$	Accélération angulaire désirée

# Introduction

Le contrôle, bien que rarement visible explicitement, joue une part cruciale dans la plupart des disciplines d'ingénierie. Les systèmes intelligents, la robotique, la réseautique, les systèmes basés sur l'information, la biologie, la médecine, l'aérospatiale et les systèmes de transport ne sont que quelques exemples de disciplines hautement dépendantes du contrôle. Dans l'article *Control in an Information Rich World* [MURRAY03], on énonce que le contrôle classique basé sur la physique fait place graduellement à de nouveaux types de contrôle, où la complexité, émanant de l'augmentation de la quantité d'informations, est prédominante. Des problèmes d'allocations complexes de ressources ou encore de contrôle de la congestion d'Internet sont des exemples de ces nouveaux problèmes de contrôle.

Plus spécifiquement, dans le domaine de la robotique mobile, la disponibilité et le bas prix des composantes informatiques ont rendu l'usage d'ordinateurs sur les robots mobiles monnaie courante. Divers contrôleurs peuvent être simulés sur ordinateur et directement implémentés sur une plateforme mobile. Un exemple intéressant d'un tel prototypage rapide effectué au département d'automatique de Polytechnique se trouve dans [DEMERS-ROY03]. De puissants outils tels que Matlab combiné à Simulink, permettent de concevoir rapidement des contrôleurs et de simuler la dynamique de systèmes mécaniques complexes tels que des robots mobiles.

Dans ce travail, nous utiliserons ces outils informatiques afin d'étudier le comportement d'un robot mobile et de valider différents contrôleurs. Idéalement, l'aspect théorique et de simulation de ce projet aurait avantage à être complété par un second projet basé sur les aspects d'estimation des paramètres et d'implémentation expérimentale sur un robot réel.

La recherche en robotique mobile se divise en plusieurs sous-domaines :

- Localisation et navigation
- Exploration et cartographie de l'environnement
- Détection et évitement d'obstacles
- Planification de chemins
- Suivi de chemin
- Commande robuste de mouvement
- Coopération multi-robots

Le problème qui nous intéresse plus particulièrement est celui du suivi de chemin. Même si ce problème a été résolu depuis plusieurs années déjà, notamment dans [DESANTIS95], les contrôleurs de suivi de chemin développés se basent en grande majorité sur l'hypothèse que le robot mobile ne glisse ni longitudinalement (la vitesse linéaire des roues est supposée égale en tout temps à la vitesse longitudinale du centre de masse), ni latéralement (la vitesse latérale est supposée nulle). Il a été démontré que ces hypothèses sont généralement valides pour un robot mobile se déplaçant sur un terrain ayant une bonne adhérence et à basse vitesse. Par contre, sur un terrain avec une adhérence réduite tel que, par exemple, le sable ou la neige, des glissements longitudinaux et latéral non négligeables peuvent survenir. Nous sommes alors en mesure de nous demander à quel point les algorithmes de suivis de chemin sont perturbés dans de telles conditions, c'est-à-dire lorsque les hypothèses de non glissements ne tiennent plus. Nous pouvons aussi nous interroger sur la manière de modifier ces algorithmes dans de telles situations. Nous proposons dans le présent travail d'étudier ces questions et plusieurs questions secondaires périphériques.

## Objectif

Un des objectifs principaux de ce travail est d'étudier en simulation le comportement d'un robot mobile qui se déplace sur un sol à adhérence limitée. Pour ce faire, nous modélisons la dynamique d'un robot mobile typique et l'interaction roues/sol. Le deuxième objectif principal est d'évaluer comment les algorithmes de suivis de chemin existants, établis sous l'hypothèse d'absence de glissements longitudinal et latéral et prenant en compte un sol idéal, se comportent lorsque le robot mobile se déplace sur un sol à adhérence limitée, c'est-à-dire où les glissements longitudinaux et latéraux ne sont plus négligeables. Finalement, nous avons comme objectif de voir dans quelle mesure nous pouvons « aider » les contrôleurs existants à continuer de fonctionner correctement, même lorsque le robot mobile se déplace sur un sol à adhérence limitée.

Plus spécifiquement, nous désirons atteindre les objectifs suivants:

- I. Modéliser la dynamique et la cinématique d'un robot mobile à vitesses différentielles.
- II. Modéliser le contact roues/sol via un modèle du sol.
- III. Étudier le comportement du robot mobile lorsque les hypothèses de non glissements longitudinal et latéral sont respectées et lorsqu'elles ne le sont pas.
- IV. Implémenter une stratégie de contrôle de suivi de chemin pour le robot mobile et montrer le bon fonctionnement lorsque les hypothèses de non glissement sont respectées.
- V. Montrer en quoi les stratégies de contrôle de suivi de chemin deviennent insuffisantes lorsque les glissements ne sont plus négligeables.
- VI. Développer une action corrective au contrôleur de suivi de chemin existant dans le but de permettre au robot mobile de suivre son chemin correctement, même en présence de glissements importants.
- VII. Valider par voies de simulations les objectifs décrits précédemment.

## Méthodologie

Afin d'atteindre les deux premiers objectifs, nous dériverons les modèles dynamiques, cinématiques et du sol en nous basant sur des sources littéraires reconnues. Nous implémenterons ces modèles en simulation et nous aurons ainsi une base permettant leur étude. Nous construirons un modèle idéal du robot mobile, c'est-à-dire un modèle où le sol a une adhérence idéale et où le robot n'est soumis à aucun glissement. Un deuxième modèle plus réaliste incorporera le modèle du sol paramétrisé par types de terrain et les glissements longitudinal et latéral seront pris en compte. Ces deux modèles permettront une étude comparative du robot mobile soumis ou pas, à du glissement.

Le contrôleur de suivi de chemin se basera en partie sur les travaux de M. De Santis [DESANTIS95] et le bon fonctionnement des algorithmes sera illustré pour le *modèle sans glissement*. Par la suite, nous appliquerons au *modèle avec glissement* les couples aux roues trouvés par l'algorithme de suivi de chemin prenant pour acquis une absence de glissement. Cette opération permettra d'évaluer l'impact de l'adhérence limitée du sol sur le suivi de chemin.

Finalement, nous utiliserons le modèle du sol et les acquis de l'étude des modèles pour reconstruire une partie du contrôleur de suivi de chemin, qui permettra de garder la fonctionnalité de celui-ci les types de terrains où l'adhérence est limitée.

## Structure du mémoire

Ce mémoire est divisé en cinq chapitres. Le premier chapitre constitue une revue de littérature du domaine de la robotique mobile en relation avec la problématique et les objectifs établis.

Le deuxième chapitre s'attarde à la modélisation dynamique avec et sans glissement du robot mobile et du sol, soit les objectifs I et II.

Le troisième chapitre étudie le comportement du robot mobile en boucle ouverte, c'est-à-dire en absence de tout mécanisme de contrôle. Les modèles construits au chapitre 2 sont analysés en détail. Il s'agit de l'objectif III.

Au quatrième chapitre, nous dérivons un contrôleur de suivi de chemin sous l'hypothèse d'une absence de glissement et nous montrons en simulation le bon fonctionnement de l'algorithme avec le modèle sans glissement (objectif IV). La seconde partie du chapitre montre en quoi les stratégies de contrôle de suivi de chemin deviennent insuffisantes lorsque les glissements ne sont plus négligeables (objectif V).

Le cinquième chapitre fait l'analyse du modèle du sol afin de dériver un nouveau contrôleur permettant de contrôler le robot mobile même lorsqu'il est soumis à un glissement important. Par la suite, les performances du contrôleur sont présentées sur différents types de sol à adhérence limitée. Il s'agit de l'objectif VI.

Finalement, en annexe, nous fournissons un ensemble de schémas de blocs décrivant l'ensemble des modèles implémentés en Matlab/Simulink, rendant ainsi possible la simulation de tous les objectifs des travaux. Les blocs sont décrits de manière « haut-niveau » avec une description non mathématique des entrées et sorties.

# Chapitre 1 – Revue de littérature

## 1.1 Description du robot mobile à l'étude

Le robot mobile à l'étude est constitué de quatre roues motrices commandées de façon indépendante. Ce robot possède une géométrie dite *différentielle* : la vitesse angulaire du robot, la vitesse de rotation autour de son centre de masse, est proportionnelle à la différence entre les vitesses des roues à droite et à gauche. Un exemple commercial d'un tel robot est l'ATRV-2, tel que montré à la figure 1.1. Toutefois, une version simulée de ce robot sera uniquement utilisée dans le présent projet.

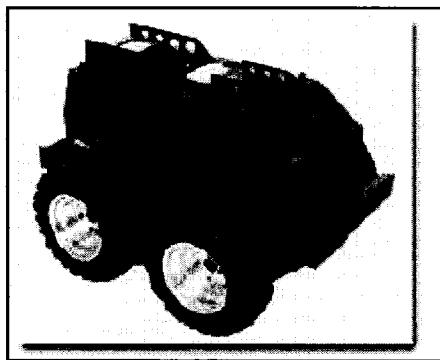


Figure 1.1 : Le robot ATRV-2 de iRobot inc.

Ces robots à vitesses différentielles se distinguent des robots à braquage explicite (par exemple, un robot avec la géométrie d'une automobile) par le fait qu'ils ont deux plutôt qu'un degré de liberté instantané [SHAMAH99]; ils peuvent avancer ou tourner sur eux-mêmes, tandis qu'un robot de type automobile devra successivement avancer puis

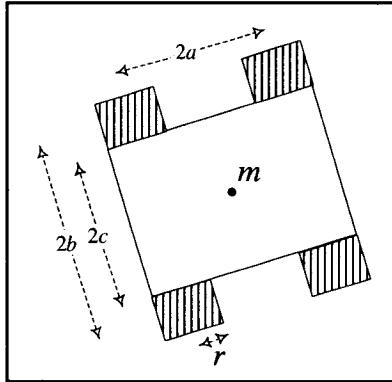
reculer en braquant les roues, afin de tourner sur lui-même. Ces types de robots sont souvent utilisés en robotique mobile : ils sont très robustes du à une absence de système mécanique de braquage, tout en ayant une grande mobilité et une bonne manœuvrabilité. Toutefois, le phénomène de braquage par roues différentielles (en anglais *skid-steering*) est un phénomène complexe qui dépend de manière pratique des propriétés du sol, de la constitution des pneus, de la friction entre les roues et le sol et du glissement des roues.

Le type de robot à l'étude appartient à une classe de systèmes mécaniques dits *nonholonomique* [CAMPION91], c'est-à-dire qu'il est généralement considéré comme étant soumis à un ensemble de contraintes dites nonholonomiques ou *non-intégrables*. Une contrainte nonholonomique ou cinématique s'exprime par une relation entre les coordonnées généralisées du système et leurs dérivées temporelles. Nous examinerons plus longuement les contraintes nonholonomiques lorsque nous dériverons le modèle dynamique du robot mobile au chapitre 2.

Les paramètres géométriques et inertiels utilisés pour la simulation du robot mobile sont illustrés à la figure 1.2 et listés au tableau 1.1.

**Tableau 1.1 : Paramètres du robot mobile simulé**

Paramètre	Description	Valeur
$a$	Demi-longueur du robot mobile, au niveau des roues	0.31m
$b$	Demi-largeur du robot mobile, au niveau des roues	0.46m
$c$	Demi-largeur du robot mobile, au niveau de la plateforme mobile	0.36m
$m$	Masse du robot mobile	116 kg
$I$	Moment d'inertie du robot mobile par rapport à l'axe passant par son centre de masse	3.0kgm <sup>2</sup>
$r$	Rayon des roues	0.175m
$I_{roue}$	Moment d'inertie d'une roue par rapport à son axe de rotation	0.08 kgm <sup>2</sup>



**Figure 1.2 : Paramètres géométriques et inertIELS du robot mobile**

## 1.2 Revue de la littérature pertinente et critique

### 1.2.1 Modélisation

Selon plusieurs auteurs (dont [RAJAGOPALAN96] et [CAMPION91]), les robots mobiles étaient historiquement contrôlés via un modèle cinématique seulement, sans tenir compte de la dynamique du système. Il est connu maintenant que pour cette classe de système mécanique, un contrôle uniquement basé sur le modèle cinématique est réducteur et peut résulter en d'importantes erreurs. Plus récemment, la majorité des auteurs préfère utiliser un modèle dynamique complet du véhicule [CAMPION96, LE97, CARACCIOLLO99, DESANTIS95, AHMADI00] pour baser leurs contrôleurs de mouvements et de suivis de chemin. De tels modèles, qui relient les forces aux accélérations du robot, sont plus complexes mais comportent de nombreux avantages : ils permettent une étude plus rigoureuse du problème (contrôlabilité, stabilité, linéarisabilité) et de dériver des contrôleurs (possiblement dynamiques) plus performants. De plus, l'utilisation d'un modèle dynamique permet de simuler le comportement du robot mobile et d'offrir une base solide pour la conception des contrôleurs et de leurs tests. Dans le présent travail, l'approche choisie consistera à dériver un modèle dynamique et cinématique complet du robot mobile.

La dynamique du robot mobile peut être décrite par différentes méthodes. Notons, entre autres, les méthodes classiques de Newton-Euler, Lagrange, D'Alembert, Hamilton,

Boltzmann-Hamel et de Gibbs-Appell. Dans [THANJAVUR97], les auteurs utilisent le formalisme de Kane (aussi appelé la forme de Lagrange du principe d'Alembert) pour dériver le modèle dynamique d'un robot mobile à vitesses différentielles soumis à des contraintes nonholonomes. Ils mettent en relief les avantages du formalisme de Kane par rapport aux autres approches comme Newton-Euler ou Lagrange : les contraintes de mouvements sont intégrées dans la dérivation du modèle et l'approche mise davantage sur les degrés de liberté que sur la configuration et élimine ainsi la redondance. Malgré certains avantages du formalisme de Kane, force est de constater que la majorité des auteurs utilise les équations de mouvement d'Euler-Lagrange (formalisme de Lagrange) (exemples : [CAMPION91], [SARKAR94], CHWA02]) pour dériver le modèle dynamique de systèmes mécaniques nonholonomes. L'approche de [CAMPION91], un des articles les plus cités en robotique mobile, introduit les relations de contraintes nonholonomiques dans l'élaboration du modèle dynamique utilisant les équations d'Euler-Lagrange. L'article poursuit en s'attaquant au problème du contrôle de tels systèmes nonholonomiques. Cette approche claire et systématique est devenue très populaire et est utilisée dans le cas spécifique des robots mobiles par plusieurs auteurs [D'ANDREA-NOVEL91][SARKAR94]. Dans la présente étude, nous utiliserons cette méthode, maintenant rendue classique, pour décrire la dynamique du robot.

Un autre article très instructif concernant l'élaboration de modèles d'états dynamique et cinématique de robots mobiles se trouve dans [CAMPION96]. Les auteurs définissent en premier lieu cinq classes de robots auxquelles appartiennent la plupart des robots mobiles. Par la suite, pour chacune des classes, ils étudient des questions de contrôle telles que la mobilité, la contrôlabilité et le caractère holonomique ou nonholonomique. Ils dérivent ensuite le modèle dynamique et cinématique pour chacun des types.

Les modèles dynamiques et cinématiques sont exprimés sous la forme de modèles d'états, qui sont des systèmes d'équations différentielles permettant de représenter l'évolution temporelle de systèmes pouvant comporter une ou plusieurs entrées-sorties. De tels modèles d'états sont par la suite facilement implantables dans un outil

mathématique de simulation tel que Matlab ou Simulink, ce que nous nous proposons de faire.

### 1.2.2 Glissements et interactions sol-roues

Afin d'obtenir un modèle fidèle à la réalité, les forces agissant sur le véhicule en mouvement doivent être modélisées ou estimées. La force la plus difficile à modéliser ou estimer dans le cas d'un robot mobile est la force de traction propulsant le robot vers l'avant et lui permettant d'avancer. Cette force est équivalente à la force de friction produite entre le sol et les roues due à l'application d'un couple sur les roues motrices. Plusieurs auteurs (par exemple, [CARACCIOLLO99]) utilisent l'hypothèse d'absence de glissement des roues. Cette hypothèse revient à affirmer que la force de traction agissant d'un côté du véhicule est égale à la somme des couples appliqués sur les roues, divisée par le rayon des roues. Si cette hypothèse est valide pour un sol uniforme et dont le coefficient de traction est élevé (exemple : l'asphalte), elle perd sa validité pour tous les autres types de sols où le glissement est important. Il est connu que l'utilisation d'un modèle de sol est une étape nécessaire pour obtenir une modélisation précise du phénomène de locomotion des véhicules et obtenir ainsi un contrôle plus précis.

Différentes approches [GUSTAFSSON97] ont été développées pour estimer la force de friction sol/roues : mesure directe des déformations des pneus, senseurs acoustiques pour détecter le bruit des pneus, senseurs optiques examinant le sol à l'avant du véhicule, mesure du glissement des roues, senseurs enchâssés dans les pneus, convertisseurs de couples, etc. La mesure du glissement des roues est la technique la plus utilisée et étudiée. La référence [SVENDENIUS03] fait une excellente revue des différents modèles de friction utilisant le glissement des roues. On y trouve entre autres les différentes définitions formelles du glissement. La définition la plus utilisée pour le glissement que nous emploierons s'exprime ainsi pour une seule roue :

$$S_{x(g,d)} = \begin{cases} (r\omega - v_x) / r\omega & : r\omega \geq v_x \text{ (roue en accélération)} \\ (v_x - r\omega) / v_x & : r\omega < v_x \text{ (roue en décélération)} \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $\omega$  est la vitesse de la roue et  $v_x$  la vitesse longitudinale du véhicule ou du robot mobile.

Le glissement des roues est donc une mesure relative entre la vitesse longitudinale du centre de masse du robot mobile et la vitesse linéaire de ses roues (rayon des roues multiplié par la vitesse angulaire de la roue). Les glissements calculés sont ensuite utilisés dans une courbe de *force versus glissement*, basée sur un modèle de friction roues/sol, permettant d'obtenir les forces de traction agissant sur le véhicule. Un exemple d'une telle courbe est illustré à la figure 1.3.

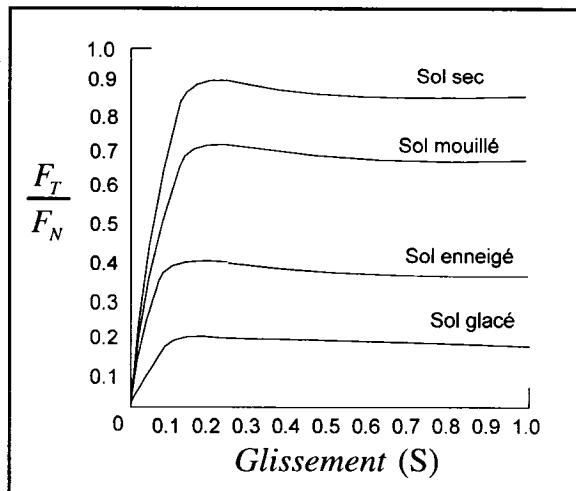


Figure 1.3 : Rapport force de traction sur force normale en fonction du glissement des roues

où  $F_N$  est la force normale agissant sur la roue et  $F_T$ , la force de traction du sol sur la roue. La dernière figure permet de voir l'influence des changements de conditions du sol sur la force de traction agissant sur le véhicule. Des courbes similaires peuvent être obtenues à partir des différents *types* de terrains : terrains terreux, rocheux, sableux, etc. De telles courbes sont issues de modèles de friction roues/sol qui dépendent de plusieurs paramètres. Un des premiers modèles empiriques permettant d'obtenir une force en fonction d'un glissement a été publié dans [BAKKER89] par H.B. Pacejka. Ce modèle très utilisé en entreprise fut nommé la *formule magique* et est de la forme suivante :

$$F = D \sin(C \arctan(B\lambda - E(B\lambda - \arctan(B\lambda)))) \quad (1.2)$$

où B, C, D et E sont des paramètres devant être mesurés expérimentalement et où  $\lambda$  correspond à un glissement défini par la SAE. D'autres modèles tels que publiés dans [GIM90] (Amérique) et [SAKAI81] (Japon) sont aussi utilisés en industrie. Ils traduisent tous les deux le phénomène microscopique de l'interaction entre les pneus et le sol. Une approche théorique plus récente est décrite dans [DEWIT95]. Ce modèle a l'avantage de décrire dynamiquement le phénomène pneumatique du contact roues/sol en étant utilisable à de faibles vitesses, ce qui est généralement le cas en robotique mobile. L'approche est basée sur le modèle de friction LuGre et il est dit qu'elle capture tous les effets essentiels de la friction : striction et effet de Stribeck, déplacements sans glissement en plus de la plupart des comportements d'hystéresis observés en pratique. Le modèle possède six paramètres qui doivent être identifiés par des données expérimentales et il s'agit d'un des modèles les plus populaires après l'introduction de la formule magique. Dans [CLAEYS01], le travail de De Wit est étendu pour tenir compte de la force de traction latérale (utilisant le glissement latéral en plus du glissement longitudinal). De plus, l'auteur de cet article montre qu'on peut faire correspondre le modèle de De Wit avec la traditionnelle *formule magique*. Ces modèles, même s'ils sont théoriquement utilisables, recèlent tous la même difficulté : pour être précis ils doivent être calibrés avec de nombreuses données issues d'expérimentations. L'article [DEWIT02] nous permet d'entrevoir la complexité d'estimer les paramètres entrant dans de tels modèles de friction dynamique. Une modélisation aussi complexe de la friction est par conséquent destinée à des applications plus critiques (contrôle de traction, freins ABS, etc). Bref, le grand nombre de paramètres de ces modèles et/ou l'absence de données aisément disponibles pour différents types de sol rend leur utilisation difficile. Pour notre application de robotique mobile, il semble plus avantageux d'utiliser un modèle du sol moins complexe, où une quantité moins élevée de paramètres changent en fonction du sol, et où les paramètres n'ont pas besoin d'être nécessairement calculé expérimentalement (étant donné la nature de simulée du présent projet).

Les travaux effectués dans [BEKKER56], [BEKKER69] et [WONG93] concernent l'étude mécanique de véhicules sur différents terrains. Bekker a, entre autres, travaillé

sur l'analyse de différents aspects des interactions roues/sol tandis que Wong, dans son réputé ouvrage « Theory of Ground Vehicles », étudie de façon approfondie la mécanique de la locomotion basée sur la théorie de l'équilibre plastique des sols. Ces deux auteurs ont ouvert à eux seuls la voie vers de nombreuses recherches en robotique mobile tentant d'incorporer une modélisation roues/sol réaliste.

Dans l'article [LE97], les auteurs utilisent les modèles du sol définis par Bekker et Wong afin de simuler le déplacement d'un véhicule à chenilles sur différents types de sol. La force de traction du sol agissant sur le véhicule dépend de certains paramètres de sols (disponible dans l'ouvrage [WONG93]) et du glissement respectif des chenilles. Les auteurs montrent qu'un contrôleur de suivi de chemin est sensible aux paramètres de sols et développent des observateurs d'états qui permettent de détecter en temps réel les paramètres du sol. Cette approche leur permet de tenir compte des paramètres du sol dans la boucle de contrôle et d'obtenir ainsi un meilleur suivi de parcours. Même si cette étude concerne les véhicules à chenilles, il est raisonnable de penser que l'on puisse effectuer un travail similaire avec les robots à roues étant donné la similitude entre le braquage différentiel et le braquage à l'aide de deux chenilles.

Dans son travail de thèse de doctorat [APOSTOLOPOULOS01], cet auteur établit une méthode permettant de classifier les robots mobiles en fonction de critères de performance tels que par exemple, leur habileté à traverser des terrains irréguliers. Ce qui nous intéresse plus particulièrement, c'est que l'auteur se base entièrement sur la théorie de Bekker et Wong pour la modélisation des contacts roues/sol pour un robot mobile ayant une géométrie différentielle. Cette étude doctorale montre que la théorie de Wong est applicable dans une étude concernant la robotique mobile. C'est ce que nous nous proposons de faire dans le présent travail : nous allons nous baser sur ce modèle de sol pour simuler l'interaction entre le sol et les roues.

Un autre exemple d'utilisation des théories de Bekker et Wong se retrouve dans l'étude des *rovers* : ces robots mobiles destinés à l'exploration spatiale. L'agence spatiale

japonaise, dans [TOSHIDA01], étudie le comportement d'un rover en portant une attention particulière aux interactions roues/sol lorsque celui-ci se déplace sur un terrain naturel difficile. Les auteurs utilisent une relation qui donne la force de traction versus le glissement des roues et vérifie celle-ci à l'aide d'expérimentations. Ils étudient les phénomènes physiques du sol et ont réussi à caractériser le sol de façon assez précise pour que le modèle théorique du sol corresponde à leurs expérimentations. Ils établissent une simulation dynamique incorporant plusieurs aspects : modèle du robot, modèle du sol, modèle de la suspension, etc. Ils procèdent ensuite au contrôle du rover qui est fait de sorte à maintenir une traction sur le sol et ne s'enfonce pas dans celui-ci (contrôle du glissement). Ce dernier article montre une fois de plus que la théorie de Wong s'applique très bien à la modélisation des interactions roues/sol pour le contrôle de robots mobiles. De plus, il est important de noter la disponibilité immédiate des paramètres pour plusieurs types de sol (dans l'ouvrage [WONG93]), ce qui permet d'éviter dans un premier temps le problème complexe d'estimation des paramètres et de calibration des courbes à l'aide de données expérimentales. Nous choisissons dès lors cette approche pour effectuer nos travaux, mais en simplifiant certaines parties afin de tenir compte du degré de précision requis pour notre application.

### 1.2.3 Contrôle de véhicules nonholonomes

L'article de [MUKHERJEE99] fait une excellente revue historique du contrôle des systèmes mécaniques nonholonomes, un sujet de recherche datant de plusieurs années. Déjà en 1989, les auteurs dans [BLOCH89] publiaient un résultat important basé sur le théorème de Brokett [BROKETT83] qui s'articule ainsi : *les systèmes mécaniques nonholonomiques ne peuvent être stabilisés en un seul point d'équilibre à l'aide d'un retour d'état lisse.* Note : une fonction lisse est une fonction ayant des dérivées continues jusqu'à un certain ordre (entre 2 et l'infini) au-dessus d'un domaine. Cet état de fait diffère du cas des systèmes holonomes pour lesquels il a été prouvé que n'importe quel point d'équilibre peut être stabilisé asymptotiquement à l'aide d'un retour d'état lisse. Par conséquent les contrôleurs développés pour cette classe de systèmes sont soit variant

dans le temps et lisse, invariant dans le temps et non lisse, ou une combinaison des deux (contrôleurs hybrides). Une des premières approches utilisant un contrôleur variant dans le temps se trouve dans [SAMSON90], et dans [POMET92], on retrouve une version périodique, lisse et variant dans le temps d'un contrôleur pour une classe précise de systèmes non linéaires. Toutefois, on affirme dans l'article [MUKHERJEE99] que ces contrôleurs lisses et variant dans le temps souffrent typiquement d'un taux de convergence très lent, ce qui a poussé l'approche de contrôleurs lisses et continus par morceaux ayant une convergence exponentielle tel que montré dans [DEWIT92], approche maintes fois reprise en robotique mobile par la suite. Une autre approche telle que présentée par Astolfi dans [ASTOLFI94] consiste à construire un contrôleur lisse par morceaux dans un repère utilisant une transformation d'états non lisses (un changement de coordonnées polaires). Le changement de coordonnées permet en effet d'éviter le problème causé par le théorème de stabilité de Brokett et de dériver une loi de commande lisse stabilisant exponentiellement le système *dans le repère transformé*. Toutefois, la loi de commande par retour d'état résultante en coordonnées cartésiennes est discontinue et invariante mais permet quand même de stabiliser exponentiellement le système nonholonome dans le cas d'un robot mobile [ASTOLFI99]. D'autres contrôleurs discontinus utilisant des modes de glissement ont par la suite été dérivés (voir [BLOCH94], ou plus récemment [CHWA02]). Finalement, une approche utilisant un modèle hybride, c'est-à-dire où un contrôleur est constitué à la fois d'une partie variante dans le temps et lisse et d'une partie invariante dans le temps et discontinue peut être trouvée dans [SORDALEN95].

Dans l'article [CAMPION91], les auteurs montrent que même s'il n'existe pas de retour d'état lisse qui stabilise le système complètement au sens entrée-état, il est toutefois possible de trouver une loi de commande par retour d'état lisse qui permet de stabiliser *au sens entrée-sortie* (linéarisation entrée-sortie) un système soumis à des contraintes nonholonomiques. Les mêmes auteurs montrent aussi que peu importe la structure des contraintes nonholonomes, ces systèmes sont contrôlables localement (STLC, *small-time*

*locally controllable*). Plus tard, dans [D'ANDREA-NOVEL92], ces mêmes auteurs appliquent ces résultats au problème de contrôle de robots mobiles. Ils linéarisent le modèle d'état pour différentes classes de robots mobiles en appliquant une stratégie de linéarisation entrée-sortie *dynamique* par retour d'état. Des extensions dynamiques sont ajoutées aux entrées, ce qui permet de surmonter la difficulté d'avoir une matrice de découplément de rang incomplet, rendant ainsi la linéarisation possible.

Des techniques pour le contrôle non linéaire autre que la linéarisation ont été successivement développées pour le contrôle de véhicule mobile. Par exemple, dans [TEEL92], on utilise la technique de contrôle par sinusoïdes afin de contrôler le braquage et de stabiliser le système mécanique nonholonome. Les auteurs dérivent un modèle cinématique simple et utilisent une transformation par retour d'état afin de rendre le système sous la forme d'un modèle d'état sous forme de puissance. Par la suite, ils présentent une loi de contrôle qui utilise des sinusoïdes et permet de stabiliser un système sous forme de puissance globalement et asymptotiquement. Ils utilisent comme exemple le modèle cinématique d'un véhicule automobile très semblable à certains robots mobiles. Cette approche est toutefois limitée aux systèmes mécaniques nonholonomes qui sont convertibles sous forme de puissance.

Dans [CHWA02], on élabore un contrôleur par modes de glissements pour contrôler un robot mobile. Le modèle dynamique et cinématique du robot est premièrement dérivé via les équations du mouvement d'Euler-Lagrange. On représente la cinématique du robot avec des coordonnées polaires. La surface de glissement est choisie en fonction des coordonnées polaires afin d'obtenir un contrôleur par mode de glissement. Ce contrôleur permet d'obtenir, semble-t-il, de très bonnes erreurs de suivi de parcours.

Certains auteurs préfèrent utiliser des techniques issues de la théorie de la logique floue pour résoudre le problème de contrôle d'un robot à vitesse différentielle. Des exemples récents peuvent être trouvés dans [ECONOMOU02] et [DOITSIDIS02]. Les adeptes de

cette théorie stipulent que l'avantage des schèmes de logiques floues par rapport aux techniques conventionnelles de modélisation se situe au niveau de la pratique, où ces dernières ont de la difficulté à représenter fidèlement un phénomène complexe à l'aide d'un seul modèle mathématique. Dans le premier article, les auteurs utilisent une technique de modélisation hybride et une méthode de logique floue pour représenter le système non linéaire. Ils proposent une méthodologie qui permet d'identifier les paramètres de leurs modèles à l'aide de données expérimentales. Ces méthodes produisent en général de bons résultats mais requièrent beaucoup de validations expérimentales.

#### 1.2.4 Contrôle de suivi de chemin

Plusieurs auteurs tels que [SARKAR94] et [DESGANTIS95] différencient deux catégories de suivis de chemin :

- Le *suivi de trajectoire*, qui consiste à suivre une trajectoire  $P(t)$  fonction du temps  $t$  constituée d'un ensemble de coordonnées généralisées à suivre.
- Le *suivi de chemin géométrique*, qui consiste à suivre un chemin  $P(s)$  où  $s$  est une variable qui paramétrise le chemin.

Dans l'article de Sarkar [SARKAR94], les deux catégories de suivis de chemin sont abordées et comparées. Il est premièrement montré que la linéarisation entrée-états est impossible pour la classe de robots mobiles nonholonomes considérée. Par la suite, les conditions permettant une linéarisation entrée-sortie sont abordées pour les deux catégories de contrôle : suivi de trajectoire et suivi de chemin. Dans chacun des cas, une étude des différentes fonctions de sortie possible est effectuée et un retour d'état lisse issu d'une linéarisation entrée-sortie est réalisée. Dans cette méthode, l'approche préconisée est de choisir comme variables (toujours au nombre de deux car il y a deux entrées, les couples aux roues) à contrôler la vitesse longitudinale du véhicule mobile sur le chemin et la distance du véhicule au chemin. L'auteur conclut que la méthode de suivi de chemin géométrique est plus appropriée en ce qui concerne les robots mobiles : il est

généralement plus important pour le robot de suivre son chemin correctement (minimiser les erreurs de position) que de suivre celui-ci à un temps précis.

Dans l'article [DESGANTIS95], il est question de la modélisation et du contrôle en suivi de chemin d'un robot mobile à vitesses différentielles nonholonomes avec aucun glissement latéral et longitudinal. L'auteur distingue aussi les deux catégories de contrôle de positions : suivi de trajectoire (fonction du temps) et suivi de chemin, et s'attarde au problème de suivi de chemin géométrique. Une linéarisation entrée-sortie par retour d'états est appliquée afin de contrôler directement l'erreur de vitesse longitudinale du véhicule par rapport à son chemin et son erreur d'orientation (l'erreur latérale est contrôlée indirectement).

Les auteurs de [CARACCIOLI99] présentent un article très intéressant. Ils considèrent un robot mobile à vitesses différentielles et dérivent le modèle dynamique complet. Ils ajoutent par la suite au modèle une *contrainte nonholonomique opérative* pour contrôler la position du centre instantané de rotation du robot afin de prévenir un dérapage incontrôlé de celui-ci. Le modèle résultant étant non linéaire, ils appliquent une linéarisation entrée-états partielle puis établissent une linéarisation par retour d'états entrée-sortie qui leur permet de stabiliser le robot autour d'une trajectoire de référence à suivre dans le plan (ici ce sont les erreurs de position en x et en y qui sont contrôlées). Leur contrôleur est par la suite rendu robuste afin de tenir compte des incertitudes liées aux paramètres du sol. Cette recherche est très bien formulée et excessivement pertinente. Toutefois, on affirme tenir compte des effets des glissements des roues mais on ne considère réellement qu'un des aspects lié au glissement, soit le dérapage latéral incontrôlé et on ne tient pas compte du glissement réel des roues en considérant que le couple des roues est entièrement transformé en force de traction. Par conséquent, cette recherche aurait bénéficié d'une modélisation plus réaliste du contact roues/sol et de tenir compte explicitement du glissement des roues. C'est ce que nous nous proposons de faire dans le présent travail.

Dans l'article [AHMADI00], le modèle dynamique complet d'un robot à chenilles est développé. Ce type de robots agit à plusieurs niveaux comme un robot à vitesses différentielles ayant des roues. Ils utilisent l'information du glissement des roues combiné au modèle de Wong pour obtenir la force longitudinale de traction agissant sur le véhicule. L'effet des glissements rendant la linéarisation impossible, le contrôleur est dérivé en deux temps. Dans un premier temps, on considère que les forces agissant sur le robot (au lieu des couples des roues) sont les entrées du système afin de rendre possible la linéarisation. Dans un deuxième temps, l'équation donnant la force en fonction des glissements est inversée, ce qui permet ultimement de trouver les vitesses à appliquer au roues, de manière à ce que les forces requises pour la linéarisation soient atteintes. Pour le contrôle de suivi de chemin, des erreurs de suivi latéral et de vitesse longitudinale sont dérivées et un contrôle est mis en place afin que ces erreurs convergent vers zéro, provoquant du même coup la convergence du robot vers son chemin. Certains termes de friction (dynamique) sont appliqués en *feed-forward* afin d'annuler certaines non linéarités. Toutefois, contrairement au dernier article présenté, les auteurs n'ont pas de mécanisme pour contrôler le glissement latéral du robot.

L'article [LEROQUAIS96] est un des très rares articles qui considère le problème de contrôle et de suivi de chemin d'un robot mobile soumis à un glissement des roues (dont les contraintes nonholonomes de roulement pures sont transgressées). Pour arriver à leurs fins, les auteurs dérivent un modèle dynamique basé sur l'approche des perturbations singulières et référencié par la trajectoire à suivre. Ils mettent en relief la nécessité que trajectoire tienne compte de la dynamique des effets du glissement et proposent ensuite une loi de contrôle variant dans le temps, permettant de stabiliser asymptotiquement le robot mobile de type unicycle par rapport à la trajectoire de référence, elle aussi variant par rapport au temps. Cette approche a le défaut d'être relativement complexe car elle fait intervenir un contrôle et une trajectoire variant dans le temps. De plus, la modélisation du contact roues/sol est plus simple que ce que nous avons envisagé de faire.

### 1.2.5 Commande robuste

Nous avons vu que la linéarisation exacte au sens entrée-sortie est l'un des schèmes les plus populaires dans la littérature pour résoudre le problème de contrôle et de suivi de chemin d'un robot mobile. La technique de linéarisation exacte se base sur l'annulation explicite des non linéarités. Elle a comme avantage de linéariser le modèle autrement non linéaire mais est très sensible aux bruits, aux erreurs de modélisations et d'estimation des paramètres (dans le cas pratique) ainsi qu'aux saturations des actuateurs. Une variation des paramètres peut provoquer une déstabilisation du système en boucle fermée et c'est pourquoi certains auteurs effectuent une analyse de robustesse de leur design qui utilise la linéarisation exacte. Un exemple d'une telle étude de robustesse est trouvée dans [BENDSTEN02]. Il est montré que même des incertitudes limitées peuvent déstabiliser le système et les auteurs suggèrent des approches pour remédier à ce problème. Les auteurs utilisent par la suite des arguments *à la Lyapunov* pour prouver la stabilité du système soumis à des perturbations paramétriques.

Dans [CARACCIOL099], on considère comme incertains les paramètres reliés au contact roues/sol tels que la friction latérale, la résistance au roulement et le moment de rotation résistif. Les auteurs poursuivent avec une analyse de l'impact des perturbations provenant d'un sol inconnu sur le contrôleur dynamique préalablement dérivé. Ils établissent un contrôleur linéaire modifié qui permet de rejeter les perturbations, pourvu que le chemin de référence soit au moins d'ordre 3 (splines). Finalement, ils illustrent par voies de simulation la réponse du système en boucle fermé sur un sol dont les paramètres varient : le robot mobile suit son chemin de référence de façon acceptable malgré les perturbations liées aux paramètres du sol.

### 1.3 Conclusion du chapitre

Nous avons introduit le sujet du présent travail de recherche en l'inscrivant à travers la recherche actuelle en robotique mobile. Nous avons ciblé la problématique principale, c'est-à-dire l'impact de l'adhérence limitée des terrains sur le comportement du robot mobile et sur les algorithmes de suivi de chemin développés. Nous avons mentionné que l'accomplissement des objectifs se fera par voies de simulation et nous avons décrit le type de robot mobile qui fera l'objet de l'étude.

Une revue de littérature nous a permis d'avoir une idée générale de la recherche par rapport au sujet principal et aux sujets secondaires. L'énoncé de résultats importants dans le domaine a permis de mieux situer le travail qui s'accomplira en détail au terme des quatre prochains chapitres, suivant rigoureusement les objectifs décrits.

# Chapitre 2 - Modélisation du robot mobile et du sol

On propose dans cette section de dériver le modèle d'état du système mécanique constituant le robot mobile. L'approche développée se base fortement sur le modèle du robot mobile développé dans [CARACCIOL099] et incorpore le modèle du sol tiré de l'ouvrage [WONG93].

Il importe en premier lieu de considérer certaines hypothèses qui simplifieront l'analyse.

## 2.1 Hypothèses générales

1. Le véhicule se déplace sur un plan horizontal. De plus, les obstacles sur le parcours sont assez petits pour être négligés.
2. La vitesse du véhicule est faible (maximum 1.5 m/s). Les effets à haute vitesse tels que l'aérodynamisme sont négligeables.
3. Le centre de masse (CDM) est situé au milieu géométrique du robot et au milieu des quatre roues motrices.
4. Les roues d'un même côté du véhicule (gauche ou droite) sont commandées de la même manière afin de réduire le glissement longitudinal. De plus, les roues sont en contact avec le même type de sol. Par conséquent, les forces agissant sur les roues *d'un même côté du véhicule* (gauche ou droit) sont supposées égales.  
De même pour les forces de résistance au mouvement à gauche et à droite.
5. Les vitesses des roues d'un même côté (gauche ou droit) du véhicule sont égales.

## 2.2 Assignment d'un repère

Considérons avant tout la figure suivante dans laquelle est représentée le diagramme du corps libre du robot mobile. Ce diagramme se base sur le diagramme de corps libre illustré dans [CARACCIOL099].

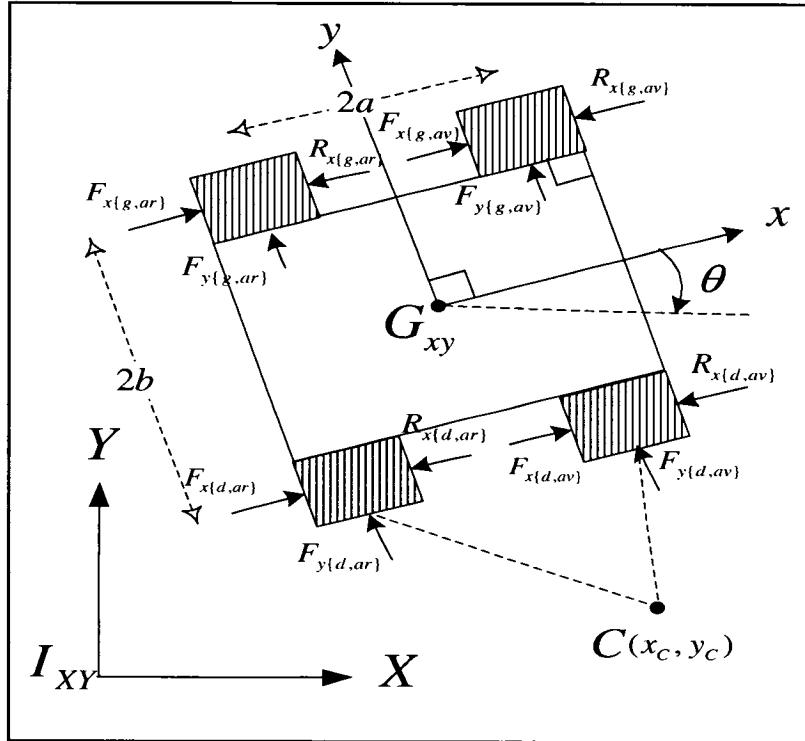


Figure 2.1 : Diagramme du corps libre du robot mobile

Un repère inertiel  $I_{XY}$  est défini et c'est par rapport à ce repère qu'on exprime la configuration (position orientation) du robot  $(x, y, \theta)$ . On attache un repère local  $G_{xy}$  au centre de masse (G) du robot mobile et l'angle d'orientation  $\theta$  est défini comme étant la différence d'angle entre l'axe  $I_x$  du repère  $I_{XY}$  et l'axe  $G_x$  du repère  $G_{xy}$ . Les différentes dimensions du robot sont montrées à la figure 2.1. Le centre instantané de rotation du robot se situe au point C.

## 2.3 Définition des vitesses

Considérons la figure suivante :

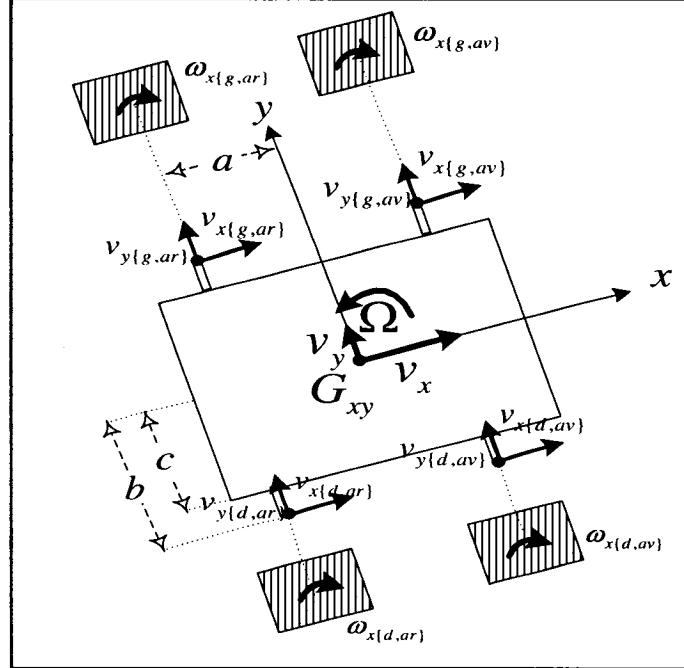


Figure 2.2 : Vitesses du robot mobile dans le repère local

En utilisant les notions définies du tableau 2.1, on exprime les différentes vitesses  $v_{\{x,y\}\{i,j\}}$  de la plateforme en fonction des vitesses principales  $v_x$ ,  $v_y$  et  $\Omega$ .

$$\begin{aligned}
 v_{xg} &\triangleq v_x - b\Omega = v_{x\{g,ar\}} = v_{x\{g,av\}} \\
 v_{xd} &\triangleq v_x + b\Omega = v_{x\{d,ar\}} = v_{x\{d,av\}} \\
 v_{yar} &\triangleq v_y - a\Omega = v_{y\{g,ar\}} = v_{y\{d,ar\}} \\
 v_{yav} &\triangleq v_y + a\Omega = v_{y\{g,av\}} = v_{y\{d,av\}}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

De même pour les vitesses des roues (*hypothèse 5*).

$$\begin{aligned}
 \omega_g &= \omega_{\{g,ar\}} = \omega_{\{g,av\}} \\
 \omega_d &= \omega_{\{d,ar\}} = \omega_{\{d,av\}}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

**Tableau 2.1 : Description des vitesses**

$v_x$	Vitesse longitudinale (selon x) du CDM du véhicule par rapport au repère local $G_{xy}$
$v_{x\{g,d\}}$	Vitesse longitudinale (selon x) des points situés à l'extrême <i>gauche</i> ou à l'extrême <i>droite</i> du robot
$v_y$	Vitesse latérale (selon y) du CDM du véhicule par rapport au repère local $G_{xy}$
$v_{y\{av,ar\}}$	Vitesse latérale (selon y) des points situés à l'extrême <i>avant</i> ou à l'extrême <i>arrière</i> du robot
$\Omega$	Vitesse angulaire par rapport au repère local $G_{xy}$
$\dot{x}$	Vitesse longitudinale (selon X) par rapport au repère inertiel $I_{XY}$
$\dot{y}$	Vitesse latérale (selon Y) par rapport au repère inertiel $I_{XY}$
$\dot{\theta}$	Vitesse angulaire par rapport au repère inertiel ( $= \Omega$ ) $I_{XY}$
$\omega_{\{g,d\}}$	Vitesse angulaire des roues à <i>gauche</i> et à <i>droite</i> du véhicule

## 2.4 Modèle du robot mobile sans glissement

Le modèle sans glissement est basé sur le modèle décrit dans l'article [CARACCIOLI99], en ajoutant l'hypothèse supplémentaire que la vitesse latérale est nulle (contrainte nonholonome). Il s'agit d'un modèle idéal et de base pour un tel type de robot.

### 2.4.1 Hypothèses supplémentaires

- I Le robot mobile se déplace sur un sol où l'adhérence est très élevée et où les contraintes nonholonomiques du mouvement des roues (voir 2.4.2) sont respectées (absence de glissement des roues).
- II La vitesse latérale du robot mobile est nulle et la contrainte nonholonomique de vitesse latérale est respectée (voir 2.4.2)
- III L'inertie des roues est négligeable comparativement à la masse du robot mobile.

### 2.4.2 Contraintes nonholonomes

Supposer que le robot mobile ne glisse pas implique en fait que :

I La vitesse latérale du robot est nulle

$$v_y = 0 \Leftrightarrow -\dot{x}\sin(\theta) + \dot{y}\cos(\theta) = 0 \quad (2.3)$$

II Les roues du robot mobile ne glissent pas, c'est-à-dire que les vitesses du centre de masse peuvent s'exprimer en fonction des vitesses des roues

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{1}{2}(r\omega_g + r\omega_d) & \Leftrightarrow v_x + b\dot{\theta} - r\omega_d &= 0 & \Leftrightarrow \dot{x}\cos(\theta) + \dot{y}\sin(\theta) + b\dot{\theta} - r\omega_d &= 0 \\ \Omega &= \frac{1}{2b}(r\omega_g - r\omega_d) & \Leftrightarrow v_x - b\dot{\theta} - r\omega_g &= 0 & \Leftrightarrow \dot{x}\cos(\theta) + \dot{y}\sin(\theta) - b\dot{\theta} - r\omega_g &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Il s'agit donc de trois contraintes nonholonomes qui sont réécrites sous la forme du produit de matrice  $A(q)\dot{q} = 0$  et qui sont par la suite intégrées au modèle. C'est d'ailleurs à cause de ces contraintes que ce type de robot est généralement appelé robot mobile *nonholonome*.

### 2.4.3 Simplification de la représentation des forces et moments

Selon l'hypothèse 4, on suppose que les roues d'un même côté du véhicule sont soumises à des forces égales. Les forces longitudinales de traction ayant le même module, on définit de nouvelles forces  $F_{x\{g,d\}}$  qui sont la sommation des forces respectivement à gauche et à droite du véhicule.

$$\begin{aligned} F_{xg} &= \sum_i^{\text{Roues à gauche}} F_{x_{rouei}} = F_{x\{g,ar\}} + F_{x\{g,av\}} = \frac{2\tau_g}{r} \\ F_{xd} &= \sum_i^{\text{Roues à droite}} F_{x_{rouei}} = F_{x\{d,ar\}} + F_{x\{d,av\}} = \frac{2\tau_d}{r} \end{aligned} \quad (2.5)$$

où  $\tau_{\{g,d\}}$  représente les couples appliqués aux roues.

Dans ce modèle de base, on ne considère pas l'effet des forces de résistance au mouvement. De plus, les forces latérales n'entrent pas en jeu à cause de la contrainte nonholonome de vitesse latérale.

$$R_{x\{g,ar\}} = R_{x\{g,av\}} = R_{x\{d,ar\}} = R_{x\{d,av\}} = 0 \quad (2.6)$$

La vitesse latérale est nulle, ce qui implique que :

$$\begin{aligned} v_y &\equiv 0 \\ v_{yar} &= v_y - a\Omega = -a\Omega \\ v_{yaw} &= v_y + a\Omega = a\Omega \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ces simplifications nous permettent d'obtenir le modèle simplifié illustré à la prochaine figure. Le modèle sans glissement du robot mobile est analogue à un robot mobile ayant deux roues et ne glissant pas latéralement.

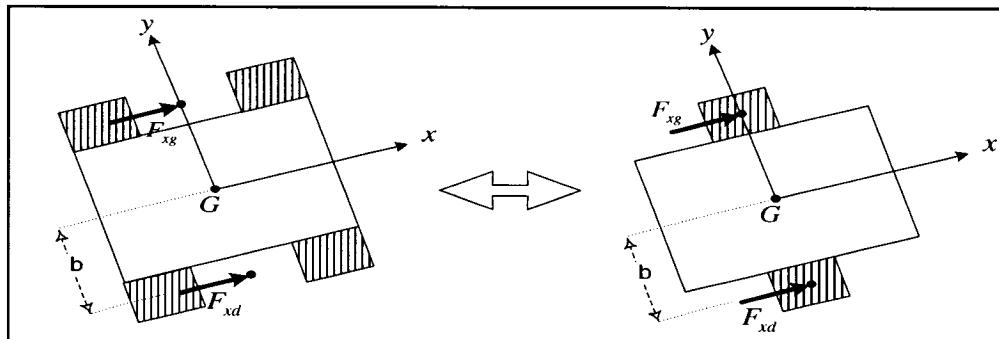


Figure 2.3 : Diagramme du corps libre simplifié pour le robot sans glissement

#### 2.4.4 Sommation des forces et des moments

Dans le repère local (figure 2.1), la somme des forces et des moments est donnée par :

$$\begin{aligned} \sum F_x &= F_{xg} + F_{xd} = \frac{2}{r}(\tau_g + \tau_d) \\ \sum M &= b(F_{xd} - F_{xg}) = \frac{2b}{r}(\tau_d - \tau_g) \end{aligned} \quad (2.8)$$

où les termes  $\sum F_x$ ,  $\sum F_y$  et  $\sum M$  correspondent aux forces généralisées appliquées sur le robot mobile.

### 2.4.5 Modèle dynamique

Le modèle dynamique du robot mobile est développé en utilisant le formalisme d'Euler-Lagrange pour les systèmes mécaniques soumis à des contraintes nonholonomes tels qu'utilisés dans [D'ANDREA-NOVEL92] et [CARACCIOLLO99].

Les coordonnées généralisées qui expriment la configuration du robot sont exprimées par le vecteur de coordonnées généralisées suivant :

$$q = [x \ y \ \theta]^T \quad (2.9)$$

où  $x$ ,  $y$  et  $\theta$  correspondent à la position et l'orientation du véhicule par rapport au repère inertiel. L'espace des configurations noté  $\Gamma$  est tel que  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ .

La fonction de cinématique directe permet de passer des coordonnées généralisées aux coordonnées dans le repère inertiel. Dans notre cas, cette fonction est l'identité et elle est exprimée de la façon suivante :

$$\chi(q) = I_{3x3}q = [x \ y \ \theta]^T \quad (2.10)$$

Le vecteur des vitesses généralisées correspond à la tangente au point de la trajectoire constituée des coordonnées généralisées.

$$\dot{q} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\theta}]^T \quad (2.11)$$

Le présent système ne possède pas de contraintes holonomiques. Nous utilisons les équations d'Euler-Lagrange afin d'exprimer la dynamique du système.

$$M(q)\ddot{q} + f(q, \dot{q}) = A(q)\lambda + B(q)u \quad (2.12)$$

où  $M(q)$  correspond à la matrice d'inertie,  $f(q, \dot{q})$  correspond aux forces de Coriolis,  $A(q)$  est la matrice associée aux contraintes nonholonomes,  $B(q)u$  est un ensemble de forces généralisées appliquées au système,  $u$  est le vecteur de forces et de couples externes appliqués au système et  $B(q)$  est une matrice ( $n \times p$ ) de transformation des entrées où  $n$  est le nombre de degrés de liberté du système et  $p$  le nombre de forces/couples externes. De plus, nous avons :

$$f(q, \dot{q}) = \frac{dM(q)}{dt} \dot{q} - \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial q} [\dot{q}^T M(q) \dot{q}] + \frac{\partial W(q)}{\partial q}}_0 = C(q, \dot{q}) \dot{q} \quad (2.13)$$

où  $W(q)$  représente l'énergie potentielle du système et où  $C(q, \dot{q})$  représente les forces de Coriolis. Étant donné que la résistance au mouvement et que les forces latérales sont négligées, le terme des forces de Coriolis est nul, dès lors :

$$f(q, \dot{q}) = Rot(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

La matrice d'inertie définie positive est donnée par l'expression suivante :

$$M(q) = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

où  $m$  est la masse du véhicule et  $I$  son moment d'inertie par rapport à l'axe z. Nous avons la contrainte nonholonomique suivante:

$$v_y = 0 \Leftrightarrow -\dot{x} \sin(\theta) + \dot{y} \cos(\theta) = 0 \quad (2.16)$$

$$A(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.17)$$

Le vecteur des forces actives est constitué des couples appliqués aux roues

$$u = \begin{bmatrix} \tau_s \\ \tau_d \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

À ceci est associé la matrice  $B(q)$  suivante :

$$B(q) = \begin{bmatrix} 2\cos(\theta)/r & 2\cos(\theta)/r \\ 2\sin(\theta)/r & 2\sin(\theta)/r \\ -2b/r & 2b/r \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Soit  $\eta$  un ensemble de vitesses indépendantes choisies de manière à mesurer les vitesses longitudinale et angulaire du robot mobile, relativement au repère solidaire du robot mobile et ayant comme origine le centre de masse.

$$\boldsymbol{\eta} = [v_x \quad \Omega]^T \quad (2.20)$$

Alors il existe une matrice  $S(q)$  qui permet de passer des vitesses du repère local aux vitesses du repère inertiel.

$$\dot{\boldsymbol{q}} = S(q)\boldsymbol{\eta}(q, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad (2.21)$$

Dans le cas qui nous concerne, cette matrice est donnée par l'expression :

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Pour intégrer la contrainte non holonomique au modèle d'état, nous réécrivons l'équation d'Euler-Lagrange

$$M(q)\ddot{\boldsymbol{q}} = A(q)^T \boldsymbol{\lambda} + B(q)\boldsymbol{u} \quad (2.23)$$

où  $\boldsymbol{\lambda}$  est un multiplicateur de Lagrange.

En dérivant  $\dot{\boldsymbol{q}} = S\boldsymbol{\eta}$  et en remplaçant dans l'équation précédente, nous obtenons :

$$M(q)\dot{S}(q)\boldsymbol{\eta}(q, \dot{\boldsymbol{q}}) + M(q)S(q)\dot{\boldsymbol{\eta}}(q, \dot{\boldsymbol{q}}) = A(q)^T \boldsymbol{\lambda} + B(q)\boldsymbol{u} \quad (2.24)$$

Afin d'éliminer le terme  $A(q)^T \boldsymbol{\lambda}$  dû à la contrainte nonholonomique nous devons prémultiplier l'équation précédente par  $S(q)^T$ , ce qui nous donne :

$$S^T M \dot{S} \boldsymbol{\eta} + S^T M S \dot{\boldsymbol{\eta}} = S^T B(q)\boldsymbol{u} \quad (2.25)$$

Isolant  $\dot{\boldsymbol{\eta}}$  nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{q}} &= S\boldsymbol{\eta} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} &= (S^T M S)^{-1} [S^T B(q)\boldsymbol{u} - S^T M \dot{S} \boldsymbol{\eta}] \end{aligned} \quad (2.26)$$

Avec les valeurs pour le système, nous obtenons les modèles suivants qui sont respectivement les modèles cinématique et dynamique :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)v_x \\ \sin(\theta)v_x \\ \Omega \end{bmatrix} \quad \text{Modèle cinématique} \quad (2.27)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{mr}(\tau_g + \tau_d) \\ \frac{2b}{Ir}(\tau_d - \tau_g) \end{bmatrix} \quad \text{Modèle dynamique} \quad (2.28)$$

#### 2.4.6 Résumé schématique du modèle sans glissement

Le schéma de bloc du modèle sans glissement du robot mobile est représenté par la figure suivante. Une représentation détaillée de chaque symbole mathématique et de chaque bloc de simulation se trouve à l'annexe AII.1, section 1.1.

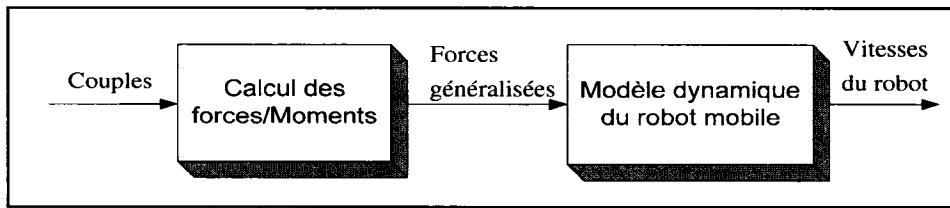


Figure 2.4: Schéma de bloc du robot sans glissement

##### Calcul des forces/Moments

- *Couples* : Vecteur 2x1 contenant les couples appliqués aux roues à gauche et à droite du robot mobile. Noté respectivement :  $\tau_g$  et  $\tau_d$ .
- *Forces généralisées* : Vecteur 2x1 contenant la somme des forces agissant sur la plateforme mobile en x (selon l'axe longitudinal) ainsi que la somme des moments tendant à faire tourner le véhicule sur son axe de rotation passant par son centre de masse. Noté respectivement :  $\sum F_x$  et  $\sum M$ .

$$\begin{aligned} \sum F_x &= F_{xg} + F_{xd} = \frac{2}{r}(\tau_g + \tau_d) \\ \sum M &= b(F_{xd} - F_{xg}) = \frac{2b}{r}(\tau_d - \tau_g) \end{aligned} \quad (2.8)$$

##### Modèle dynamique du robot mobile

- *Vitesses du robot* : Vecteur 2x1 contenant les vitesses longitudinale et angulaire du robot mobile par rapport à son centre de masse. Noté  $\eta = [v_x \ \Omega]^T$ .
- *Forces généralisées* : Vecteur 3x1 contenant la somme des forces agissant sur la plateforme mobile en x et en y (selon l'axe longitudinal et latéral passant par le centre de

masse du robot mobile) ainsi que la somme des moments tendant à faire tourner le véhicule sur son axe de rotation passant par son centre de masse.  $\sum F_x$ ,  $\sum F_y$  et  $\sum M$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^{-1} \sum F_x \\ I^{-1} \sum M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{mr}(\tau_g + \tau_d) \\ \frac{2b}{Ir}(\tau_d - \tau_g) \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

## 2.5 Modèle du robot mobile avec glissement et modèle du sol

Le modèle avec glissement est basé sur le modèle du robot mobile décrit dans l'article [CARACCIOL099] avec le modèle du sol défini dans [WONG93] afin de tenir compte du glissement longitudinal et latéral. Plus spécifiquement, c'est au niveau des forces de traction, des forces latérales et des forces de résistance au mouvement que le modèle de Wong entre en jeu.

### 2.5.1 Hypothèses supplémentaires

- I Le véhicule se déplace sur plusieurs types de terrain naturel où le glissement des roues n'est pas négligeable.
- II Les forces latérales sur les pneus (selon l'axe y local) sont directement proportionnelles à la force normale agissant sur le pneu (elles sont également proportionnelles à l'angle de glissement multiplié par un coefficient de *cornering stiffness*)

### 2.5.2 Simplification de la représentation des forces et moments

Selon l'hypothèse 4 de la section 2.1, on suppose que les roues d'un même côté du véhicule sont soumises à des forces égales. Les forces longitudinales de traction ayant le même module, on définit de nouvelles forces  $F_{x\{g,d\}}$  qui sont la sommation des forces respectivement à gauche et à droite du véhicule.

$$\begin{aligned} F_{xg} &= \sum_i^{\text{Roues à gauche}} F_{x_{roue i}} = F_{x\{g,ar\}} + F_{x\{g,av\}} = 2F_{xg_{roue}} \text{sign}(S_{xg}) \\ F_{xd} &= \sum_i^{\text{Roues à droite}} F_{x_{roue i}} = F_{x\{d,ar\}} + F_{x\{d,av\}} = 2F_{xd_{roue}} \text{sign}(S_{xg}) \end{aligned} \quad (2.29)$$

où  $F_{x\{g,d\}_{roue}}$  sont les modules des forces de traction agissant sur les roues à gauche et à droite du robot mobile. Celles-ci dépendent des glissements des roues  $S_{\{g,d\}}$ , définis à la section 2.5.3.

Les forces de résistance au mouvement ont l'expression suivante :

$$\begin{aligned} R_{x\{g,ar\}} &= R_{x_{roue}} \text{sign}(S_{xg}) \\ R_{x\{g,av\}} &= R_{x_{roue}} \text{sign}(S_{xg}) \\ R_{x\{d,ar\}} &= R_{x_{roue}} \text{sign}(S_{xd}) \\ R_{x\{d,av\}} &= R_{x_{roue}} \text{sign}(S_{xd}) \end{aligned} \quad (2.30)$$

où  $R_{x_{roue}}$  est le module de la force de résistance au mouvement agissant sur les roues. La fonction  $\text{sign}$  est définie comme suit :

$$\text{sign}(p) = \begin{cases} 1 & : p > 0 \\ 0 & : p = 0 \\ -1 & : p < 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

De la même manière que pour les forces de traction, on définit de nouvelles forces de résistance au mouvement qui sont la sommation des forces de résistance pour un côté du véhicule.

$$\begin{aligned} R_{xg} &= \sum_i^{\text{Roues à gauche}} R_{x_{rouei}} = R_{x\{g,ar\}} + R_{x\{g,av\}} = 2R_{x_{roue}} \text{sign}(S_{xg}) \\ R_{xd} &= \sum_i^{\text{Roues à droite}} R_{x_{rouei}} = R_{x\{d,ar\}} + R_{x\{d,av\}} = 2R_{x_{roue}} \text{sign}(S_{xd}) \end{aligned} \quad (2.32)$$

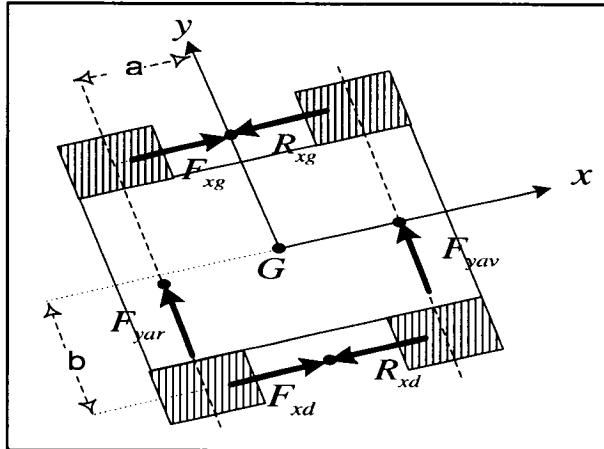
Appliquant la même méthode pour les forces latérales nous obtenons :

$$\begin{aligned} F_{y\{g,ar\}} &= -F_{y_{roue}} \text{sign}(v_{y\{g,ar\}}) = -F_{y_{roue}} \text{sign}(v_{yar}) \\ F_{y\{d,ar\}} &= -F_{y_{roue}} \text{sign}(v_{y\{d,ar\}}) = -F_{y_{roue}} \text{sign}(v_{yar}) \\ F_{y\{g,av\}} &= -F_{y_{roue}} \text{sign}(v_{y\{g,av\}}) = -F_{y_{roue}} \text{sign}(v_{yaw}) \\ F_{y\{d,av\}} &= -F_{y_{roue}} \text{sign}(v_{y\{d,av\}}) = -F_{y_{roue}} \text{sign}(v_{yaw}) \end{aligned} \quad (2.33)$$

où  $F_{y_{roue}}$  est le module de la force latérale agissant sur une roue. On définit de nouvelles forces de friction latérale de la même manière que pour les forces de résistance mais respectivement à l'avant et à l'arrière du robot mobile.

$$\begin{aligned} F_{yar} &= \sum_i^{\text{Roues à l'avant}} F_{y_{rouei}} = F_{y\{g,ar\}} + F_{y\{d,ar\}} = -2F_{y_{roue}} \text{sign}(v_{yar}) \\ F_{yaw} &= \sum_i^{\text{Roues à l'arrière}} F_{y_{rouei}} = F_{y\{g,av\}} + F_{y\{d,av\}} = -2F_{y_{roue}} \text{sign}(v_{yaw}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Ces simplifications nous permettent d'obtenir le modèle simplifié de la prochaine figure.



**Figure 2.5 : Diagramme du corps libre simplifié pour le robot avec glissement**

Avec les forces suivantes :

$$\begin{aligned} F_{x\{g,d\}} &= 2F_{x\{g,d\}_{roue}} \text{sign}(S_{x\{g,d\}}) \\ R_{x\{g,d\}} &= 2R_{x_{roue}} \text{sign}(S_{x\{g,d\}}) \\ F_{y\{ar,av\}} &= -2F_{y_{roue}} \text{sign}(v_{y\{ar,av\}}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

où les forces agissant sur les roues  $F_{x\{g,d\}_{roue}}$ ,  $F_{y_{roue}}$  et  $R_{x_{roue}}$ , sont fournies par le modèle du sol et définies respectivement aux sections 2.5.4, 2.5.7 et 2.5.5.

### 2.5.3 Glissement longitudinal

Avant d'aborder la question de la force de traction, il importe de définir l'expression du glissement de façon formelle.

$$S_{x\{g,d\}} = \begin{cases} (r\omega_{\{g,d\}} - v_{x\{g,d\}})/r\omega_{\{g,d\}} & \text{Véhicule en traction} \\ (v_{x\{g,d\}} - r\omega_{\{g,d\}})/v_{x\{g,d\}} & \text{Véhicule en freinage} \end{cases} \quad (2.36)$$

En vertu des hypothèses émises, pour chaque côté du véhicule on a une seule vitesse longitudinale ( $v_{xg}$  ou  $v_{xd}$ ) et des roues ( $\omega_g$  ou  $\omega_d$ ). Dès lors, le glissement longitudinal total du véhicule peut s'exprimer à l'aide de deux variables, une pour le glissement des roues à gauche et une pour le glissement à droite.

### 2.5.4 Force de traction et modèle du sol

La force longitudinale de traction provenant de la friction entre les roues et le sol pour chaque roue du véhicule est donnée par l'expression suivante.

$$F_{x(g,d)_{roue}} = \mu_x(S_{\{g,d\}}) F_{N_{roue}} \quad (2.37)$$

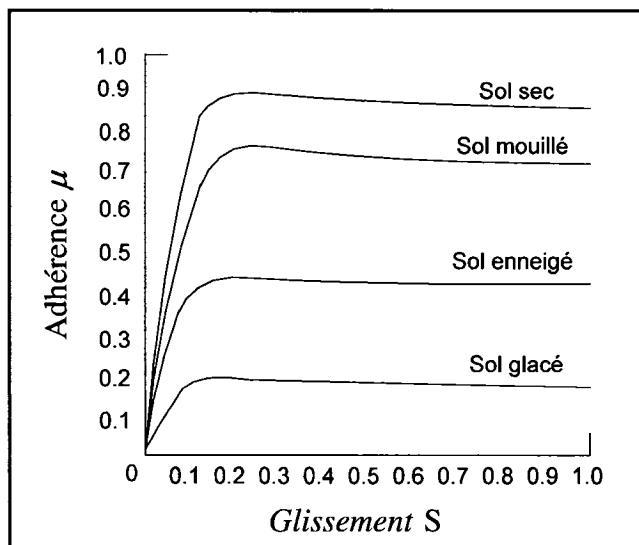
où le coefficient d'adhérence  $\mu_x$  dépend du glissement des roues sur le sol et  $F_{N_{roue}}$  est la force normale agissant sur une roue du véhicule. Cette force normale est dépendante de la position du centre de masse, la masse du véhicule, la suspension et le type de braquage. Toutefois, en vertu de la géométrie du véhicule à l'étude et des hypothèses, cette force normale sera simplement égale au poids du véhicule divisé par le nombre de roues.

$$F_{N_{roue}} = W / N_{roues} \quad (2.38)$$

où  $W$  est le poids total du véhicule et  $N_{roue}$  le nombre de roues. De façon générale, l'adhérence est le rapport de la force de traction sur la force normale :

$$\mu(S) = F_T / F_N \quad (2.39)$$

La prochaine image montre une courbe typique d'adhérence en fonction du glissement longitudinal pour différentes classes de sol.



**Figure 2.6 : Adhérence en fonction du glissement longitudinal pour différentes classes de sol**

Une théorie très utilisée pour déduire la relation entre la force de traction et le glissement des roues est élaborée par Wong [WONG93] et se base sur la théorie de l'équilibre plastique des sols. En résumé, cette théorie stipule que lorsque la force exercée par le véhicule sur un terrain dépasse un certain niveau, la masse du terrain approche un état critique. À ce moment, une légère augmentation de la force sur le terrain provoque un écoulement plastique du terrain sous les roues. La condition pour entrer en phase d'écoulement plastique est donnée par la condition de cisaillement de Mohr-Coulomb qui donne la pression maximale que le terrain peut tolérer avant de rompre :

$$\tau_{\max} = c + p \tan \varphi \quad (2.40)$$

où  $c$  représente la cohésion apparente du sol,  $\varphi$  l'angle de résistance interne du sol,  $p$  est la pression normale et  $\tau_{\max}$  représente le cisaillement maximal du sol. De cette expression, on peut calculer la force maximale pouvant agir entre les roues du véhicule et le sol :

$$F_{\max} = A\tau_{\max} = Ac + Ap \tan \varphi \quad (2.41)$$

où  $A$  représente l'aire de contact entre une roue et le sol ( $A \approx \pi lL / 4$  pour approximer une surface de contact elliptique d'axes  $l$  et  $L$ ) et  $Ap$  représente la force normale agissant sur le sol. Cette expression dépend des paramètres du sol, de sorte que la force maximale de traction appliquée sur le véhicule est égale à la poussée maximale pouvant être fournie par le sol. La prochaine formule donne la force de traction en fonction effective de la force maximale et du déplacement en cisaillement.

$$F = (Ac + Ap \tan \varphi)(1 - e^{-\frac{J}{K}}) \quad (2.42)$$

où  $J$  est le déplacement en cisaillement et  $K$ , le déplacement du sol en cisaillement où  $\tau_{\max}$  apparaît. La grandeur  $J$  est fonction du glissement et elle est différente selon qu'on utilise un véhicule à chenille ou un véhicule à roues motrices. Dans le cas d'un véhicule à roues, le paramètre  $J$  est défini par :

$$J = r[(\theta_0 - \theta) - (1 - S)(\sin \theta_0 - \sin \theta)] \quad (2.43)$$

où  $r$  est le rayon de la roue,  $\theta_0$  est l'angle où la roue commence à toucher le sol et  $\theta$  prend comme valeur la plage d'angle où la roue touche au sol. On obtient par la suite la force normale et la force de traction par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} F_N &= rl \int_0^{\theta_0} p \cos \theta d\theta + \int_0^{\theta_0} \tau(\theta) \sin \theta d\theta \\ F_T &= rl \int_0^{\theta_0} \tau(\theta) \cos \theta d\theta - \int_0^{\theta_0} p \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (2.44)$$

où  $r$  est le rayon de la roue et  $l$ , sa largeur. La pression normale est reliée à l'enfoncement dans le sol de la roue  $z$  par l'expression suivante :

$$p = \left( \frac{K_c}{l} + K_\phi \right) z^n \quad (2.45)$$

où  $K_c$ ,  $K_\phi$  et  $n$  représentent respectivement le module de cohésion, le module de friction et l'exposant de la déformation du terrain. Fort heureusement, les valeurs de ces paramètres ont déjà été tabulés pour différents types de sol, terrains organiques et neige. Ceci est présenté dans le prochain tableau.

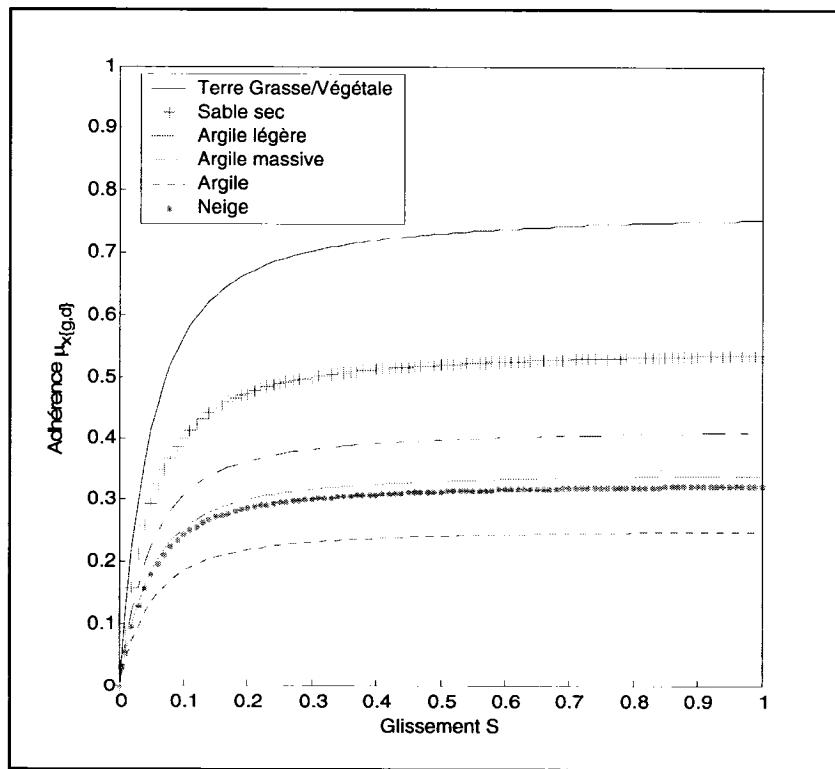
**Tableau 2.2 : Propriétés géophysiques de différents types de terrains [WONG93]  
[APOSTOPOULOS01]**

Terrains	Humidité (%)	c (kPa)	$\phi$ (°)	$K_c$ (kN/m <sup>n+1</sup> )	$K_\phi$ (kN/m <sup>n+2</sup> )	n	$\mu_r$
Sable sec	0	1.04	28°	0.99	1528.43	1.1	0.2-0.3
Terre grasse sableuse	22	1.38	38°	2.56	43.12	0.2	0.25
Argile	38	4.14	13°	13.19	692.15	0.5	~0.10
Argile massive	40	20.69	6°	1.84	103.27	0.11	0.08
Argile légère	22	68.95	20°	16.43	1724.69	0.2	0.15
Neige	-	1.03	19.7°	4.37	196.72	1.6	~0.10

La figure 2.7 montre pour plusieurs types de sol la courbe de la force de traction versus la force normale appliquée sur la roue pour des valeurs constantes des paramètres  $K$ ,  $\theta_0$  et  $z$ . Notre but dans ce travail étant de modéliser et d'étudier le comportement du véhicule lors du suivi d'un chemin sur différents terrains, il nous importe d'avoir une

idée de l'allure générale des forces de traction. En pratique, ces coefficients doivent être estimés afin que le modèle corresponde le plus fidèlement possible à la réalité. Par exemple, sur un terrain sableux, l'angle de contact de la roue sur le sol pourrait s'avérer plus élevé que celui utilisé pour calculer la courbe.

Ayant maintenant en main le type du sol et le glissement, il nous est possible de trouver le coefficient de traction ou coefficient d'adhérence, en utilisant les relations définies précédemment. La figure 2.7 montre les courbes d'adhérences générées à l'aide du modèle de Wong pour les sols du tableau 2.2. Il est à noter qu'il est prévu dans le modèle de Wong que les courbes d'adhérence peuvent être strictement positives dans le cas où le sol est libre et granuleux (non compacté). C'est le cas pour les courbes générées à la figure 2.7.



**Figure 2.7 : Coefficient d'adhérence longitudinal pour différents types de sol calculé avec le modèle de Wong**

Paramètres utilisés :  $r = 0.15m$ ,  $l = 0.1m$ ,  $K = 0.1cm$ ,  $\theta_0 = 5^\circ$ ,  $z = 1cm$

### 2.5.5 Force de résistance au mouvement

Les forces de résistance au mouvement sont des forces qui s'opposent à la force de traction définie précédemment. Elles sont causées par plusieurs effets : le frottement entre les roues et le sol, le glissement des roues et la déflexion entre les pneus et les éléments du sol, la compaction du sol, la poussée du sol, la résistance due à la gravité et la résistance due aux obstacles.

#### Résistance au compactage

Lorsque la roue s'enfonce dans le sol, le sol résiste au compactage en appliquant une force opposée à la direction du mouvement du véhicule. Suivant le modèle simplifié dans [BEKKER69], la force de résistance au compactage est donnée par :

$$R_C = \frac{1}{(3-n)^{(2n+2)/(2n+1)} (n+1) l^{1/(2n+1)} (K_C / l + K_\phi)^{1/(2n+1)}} \left[ \frac{3F_{N_{roue}}}{\sqrt{2r}} \right]^{(2n+2)/(2n+1)} \quad (2.46)$$

où  $r$  est le rayon de la roue et  $l$  est la largeur de la roue. Cette force de résistance est importante à considérer et c'est souvent celle-ci qui cause une perte de poussée en pratique.

#### Résistance de la poussée de la terre (*bulldozing resistance*)

Lorsque le robot mobile déplace une très grande quantité de terre devant lui, une résistance à la poussée se développe en une force qui freine son mouvement. Ce phénomène est apparent surtout lorsque la largeur des pneus dépasse 10 pouces, ce qui est loin d'être le cas présent. Étant donné que nous considérons que le robot n'aura pas à pousser de masse excessive de terre, nous négligeons cette force de résistance au mouvement. Par conséquent :

$$R_B = 0 \quad (2.47)$$

#### Résistance au roulement

La résistance au roulement est due à plusieurs effets combinés tels que le glissement des pneus et la déflexion entre les pneus et les éléments du sol. Cette force est généralement considérée comme étant indépendante de la vitesse longitudinale. L'expression donnant

la force de résistance au mouvement est simple, cette force étant directement proportionnelle à la force normale agissant sur les roues.

$$R_R = \mu_r F_{N_{roue}} \quad (2.48)$$

où  $\mu_r$  est le coefficient de résistance au roulement. Le coefficient de résistance au roulement est généralement très difficile à calculer car il dépend de plusieurs paramètres. Toutefois, pour les types de terrains à l'étude, il est disponible (voir tableau 2.2).

### Résistance à la gravité

La résistance à la gravité apparaît lorsque le véhicule est sur une pente qu'il tente de franchir. Soit  $\theta$  l'angle entre la pente à franchir et le véhicule, alors la résistance à la gravité est donnée par l'expression suivante :

$$R_G = F_{N_{roue}} \sin \theta \quad (2.49)$$

Dans notre cas, on suppose un sol relativement plat (hypothèse 1), dès lors  $\theta = 0$  et la résistance due à la gravité est négligeable. Par conséquent :

$$R_G = 0 \quad (2.50)$$

### Résistance aux obstacles

Une résistance aux obstacles est développée lorsque le robot mobile tente de grimper un obstacle, due au changement de la force normale des pneus qui touche à l'obstacle. La force normale change tout au long du franchissement de l'obstacle et il est possible de calculer cette force explicitement. Toutefois, dans notre cas, nous supposons dans un premier temps un sol plat et aucun obstacle provoquant des forces de résistance non négligeables. Par conséquent :

$$R_O = 0 \quad (2.51)$$

Au total, si nous faisons la somme des forces de résistance que nous prenons en compte :

$$R_{x_{roue}} = \sum_i R_i = R_C + R_R = f(F_{N_{roue}}) \quad (2.52)$$

Cette force peut maintenant être introduite dans l'équation 2.2.3.

### 2.5.6 Angle de glissement

L'angle de glissement (figure 2.8) est l'angle entre la direction de la vitesse  $v$  et de la direction vitesse longitudinale  $v_x$ .

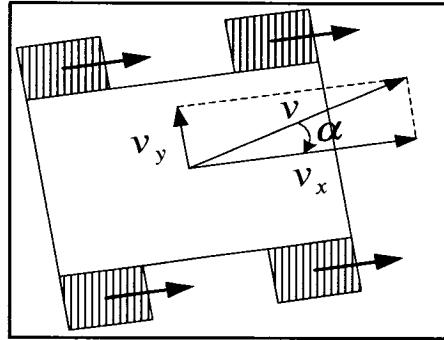


Figure 2.8 : Angle de glissement

Dans le cas d'un robot à vitesse différentielle, il s'agit aussi de l'angle entre la direction des forces de traction longitudinales et la direction de la vitesse linéaire résultante  $v$ . La relation suivante lit l'angle de glissement aux vitesses du repère local du robot.

$$\tan(\alpha) = \frac{v_y}{v_x} \quad (2.53)$$

### 2.5.7 Force de friction latérale

Pour une roue, la force de friction latérale est définie par la formule suivante :

$$F_{y_{roue}} = \mu_y(S, \alpha) F_{N_{roue}} \quad (2.54)$$

où  $\mu_y$  est le coefficient de friction latéral ou coefficient d'adhésion latéral,  $S$  le glissement longitudinal et  $\alpha$ , l'angle de glissement. La prochaine figure montre la dépendance entre le coefficient de friction latérale, le glissement longitudinal et l'angle de glissement.

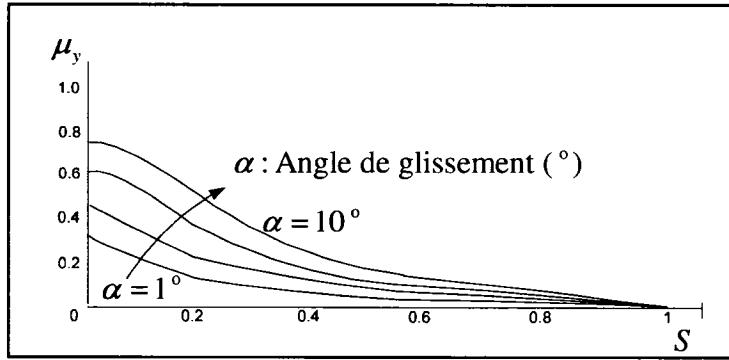


Figure 2.9 : Coefficient de frottement latéral en fonction de l'angle de glissement et du glissement longitudinal [PETERSEN03]

On note que lorsque le glissement longitudinal est élevé, on perd pratiquement toute force latérale. Ainsi, pour conserver une stabilité latérale, il est impératif de garder le glissement longitudinal le plus faible possible.

Il est possible de simplifier la représentation de la force latérale en négligeant les termes d'ordre élevé de la relation donnant la force latérale. Ainsi :

$$\mu_y = f(S)\alpha \quad (2.55)$$

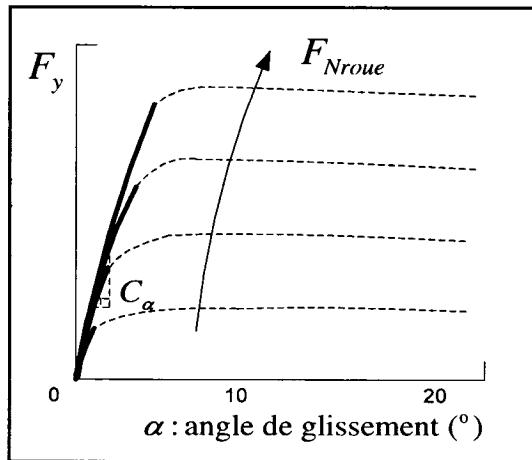
et le coefficient de rigidité latéral (cornering stiffness) défini par

$$C_\alpha = f(S)F_{N_{roue}} = \left. \frac{\partial F_y}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \quad (2.56)$$

alors, la force latérale en fonction de l'angle de glissement est donnée par :

$$F_{y_{roue}} = \mu_y F_{N_{roue}} = C_\alpha \alpha \quad (2.57)$$

Cette approximation n'est toutefois valide que pour les petits angles de glissement.

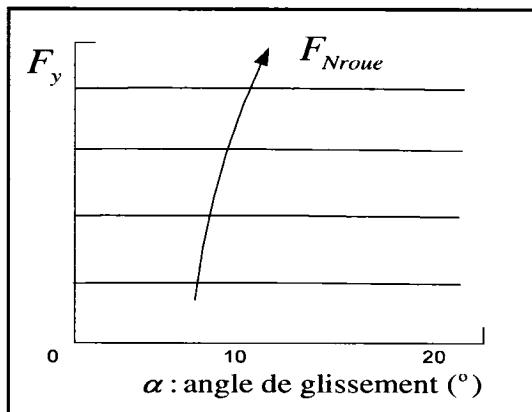


**Figure 2.10 : Approximation de la force latérale de friction par le Cornering Stiffness [WONG93]**

Finalement, d'autres auteurs utilisent simplement une représentation constante de la force de friction latérale (friction de Coulomb). Ainsi :

$$F_{y_{roue}} = \mu_y F_{N_{roue}} \quad (2.58)$$

où  $\mu_y$  est une constante. Une telle approximation est montrée à la figure 2.11.



**Figure 2.11 : Approximation de la force latérale de friction par un terme de friction dynamique**

## 2.5.8 Moment dû aux forces de tractions

Nous commençons par définir un *bloc de friction* qui permettra de simuler de façon plus exacte les effets d'une force soumise à une force de friction [AHMADI00][KHALIL02].

$$G(F, f, v) = \begin{cases} F - f\text{sign}(v) & v \neq 0 \\ 0 & v = 0, |F| \leq f \\ F - f\text{sign}(F) & v = 0, |F| > f \end{cases} \quad (2.59)$$

où  $F$  est une force active appliquée à un corps rigide et  $f$  une force de friction agissant en sens opposé à la force active. Le paramètre  $v$  est la vitesse du corps.

Le moment dû aux forces longitudinales de traction est donné par l'expression suivante:

$$M_x = b(F_{xd} - F_{xg}) \quad (2.60)$$

où  $b$  correspond à la demi-largeur du véhicule.

### 2.5.9 Moment résistif (couple d'auto-alignement)

Le moment résistif dû aux forces de friction latérale est donné par :

$$M_r = a(F_{yav} - F_{yar}) + b(R_{xg} - R_{xd}) \quad (2.61)$$

où  $a$  correspond à la demi-longueur du véhicule. Pour de faibles valeurs de l'angle de glissement (voir figure 2.12), le couple résistif se produit et tend à aligner la vitesse du véhicule avec l'angle des roues (d'où l'appellation couple d'auto-alignement).

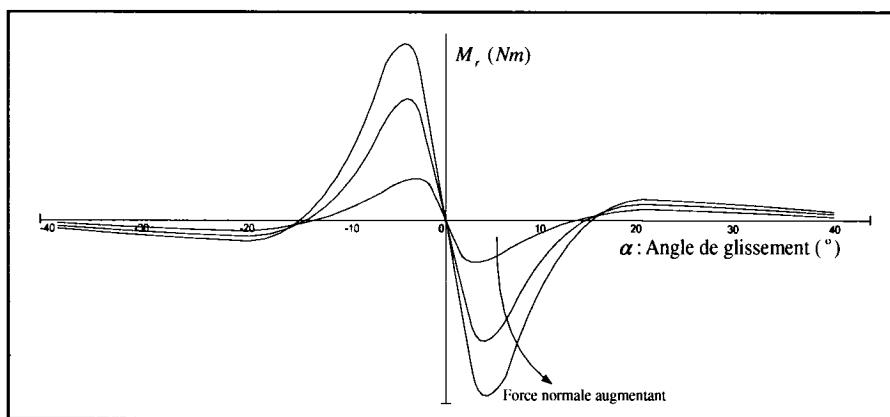


Figure 2.12 : Moment d'auto-alignement en fonction de l'angle de glissement [WONG93]

Le moment résistif dû aux forces de résistance au mouvement est quant à lui non nul uniquement lorsque les roues situées de part et d'autre du véhicule se déplacent en sens opposé. Dès lors :

$$M_{Rx} = b(R_{xg} - R_{xd}) = 4bR_{x_{roue}}(\text{sign}(S_{xg}) - \text{sign}(S_{xd})) \quad (2.62)$$

### 2.5.10 Sommation des forces et des moments

Dans le repère local (figure 2.1), la somme des forces et des moments est donnée par :

$$\begin{aligned}\sum F_x &= (F_{xg} - R_{xg}) + (F_{xd} - R_{xd}) \\ \sum F_y &= F_{yaw} + F_{yar} \\ \sum M &= M_x - M_r\end{aligned}\quad (2.63)$$

où, utilisant les blocs de friction :

$$\begin{aligned}\sum F_x &= G(F_{xd}, R_{xd}, v_{xd}) + G(F_{xg}, R_{xg}, v_{xg}) \\ \sum F_y &= F_{yaw} + F_{yar} \\ \sum M &= G(M_x, M_r, \Omega)\end{aligned}\quad (2.64)$$

Les conditions pour soutenir la traction lors d'un virage sont :

$$G(F_{xg}, R_{xg}, v_{xg}) > 0 \text{ et } G(F_{xd}, R_{xd}, v_{xd}) > 0 \text{ et } G(M_x, M_r, \Omega) \neq 0 \quad (2.65)$$

### 2.5.11 Modèle d'une roue

Nous dérivons le modèle d'état d'une roue qui est soumise à un couple. Considérons cette figure.

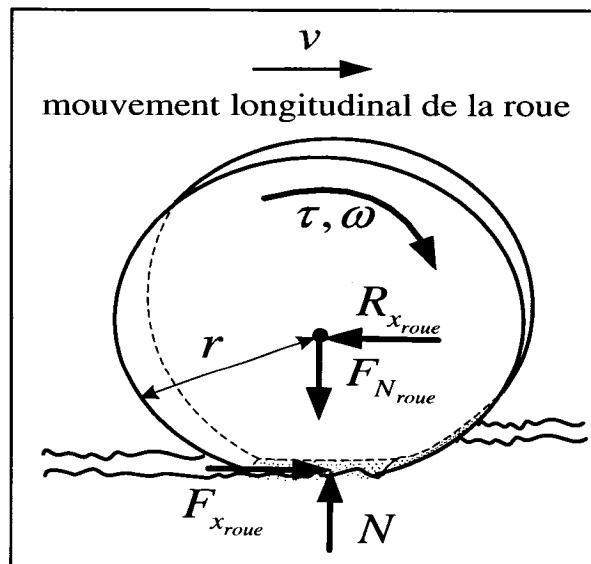


Figure 2.13 : Diagramme du corps libre d'une roue soumise à du glissement

Les équations de dynamique de Newton sur ce système donnent :

$$\begin{aligned} m_{roue} \dot{v} &= F_{x_{roue}} - R_{x_{roue}} \\ N - F_{N_{roue}} &= 0 \\ I_{roue} \dot{\omega} &= \tau - rF_{x_{roue}} \end{aligned} \quad (2.66)$$

où  $I_{roue}$  est le moment d'inertie de la roue et  $\omega$  la vitesse angulaire de la roue.

Le couple provenant du moteur appliqué à la roue est noté  $\tau$ . La résistance au mouvement  $R_{x_{roue}}$  est modélisée comme une force de friction statique agissant sur le milieu de la roue, ce qui est équivalent à un couple de freinage. L'application du couple du moteur provoque une force de réaction de traction du sol sur la roue notée  $F_{x_{roue}}$  qui dépend de la quantité de glissement de la roue. Si la roue n'a pas de vitesse linéaire ( $v = 0$ ) et que la force de traction est inférieure à la force de résistance au mouvement  $F_{x_{roue}} \leq R_{x_{roue}}$ , la vitesse linéaire de la roue demeure à zéro. Lorsque  $F_{x_{roue}} > R_{x_{roue}}$  suite à un couple assez élevé (provoquant un glissement assez élevé), la vitesse linéaire augmente et le robot mobile est entraîné par les roues.

La force de résistance au mouvement étant une force de friction, un comportement plus réaliste est obtenu de la manière suivante :

$$R_{x_{roue}} = \begin{cases} \min(F_x, R_{x_{roue}}) & v = 0 \\ R_{x_{roue}} & v \neq 0 \end{cases} \quad (2.67)$$

Ce qui est équivalent à réécrire le modèle de la manière suivante :

$$\begin{aligned} m_{roue} \dot{v} &= G(F_{x_{roue}}, R_{x_{roue}}, v) \\ I_{roue} \dot{\omega} &= G(\tau, rF_{x_{roue}}, \omega) \end{aligned} \quad (2.68)$$

où  $G(F, f, v)$  est un *bloc de friction* tel que défini dans [KHALIL02] :

$$G(F, f, v) = \begin{cases} F - f\text{sign}(v) & v \neq 0 \\ 0 & v = 0, |F| \leq f \\ F - f\text{sign}(F) & v = 0, |F| > f \end{cases} \quad (2.69)$$

On déduit finalement les équations qui fournissent l'accélération longitudinale du robot mobile complet et les modèles d'état pour les deux roues modélisées.

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= G(F_{xg}, R_{xg}, v_{xg}) + G(F_{xd}, R_{xd}, v_{xd}) \\ I_{roue}\dot{\omega}_g &= G(\tau_g, \frac{rF_{xg}}{2}, \omega_g) \\ I_{roue}\dot{\omega}_d &= G(\tau_d, \frac{rF_{xg}}{2}, \omega_d) \end{aligned} \quad (2.70)$$

### 2.5.12 Modèle dynamique

La dérivation du modèle dynamique du robot mobile en présence de glissement utilise la même approche que pour le modèle sans glissement dérivé à la section 2.4.5. Les différences uniquement seront montrées ici. Le terme de Coriolis  $f(q, \dot{q})$  pour le robot mobile avec glissement devient :

$$f(q, \dot{q}) = Rot(\theta) \begin{bmatrix} R_{xg} + R_{xd} \\ F_{yaw} + F_{yar} \\ a(F_{yar} - F_{yaw}) + b(R_{xd} - R_{xg}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)(R_{xg} + R_{xd}) - \sin(\theta)(F_{yaw} + F_{yar}) \\ \sin(\theta)(R_{xg} + R_{xd}) - \cos(\theta)(F_{yaw} + F_{yar}) \\ a(F_{yar} - F_{yaw}) + b(R_{xd} - R_{xg}) \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Il n'y a pas de contraintes nonholonomiques car il est possible que la vitesse latérale soit non nulle, par conséquent :

$$A(q) = 0 \quad (2.72)$$

Dans notre cas, la force de traction transmise sur le véhicule n'étant pas proportionnelle aux couples des moteurs mais fonction du glissement des roues, nous utiliserons comme vecteur des forces externes agissant sur le véhicule :

$$u = \begin{bmatrix} F_{xg} \\ F_{xd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(S_g) \\ f(S_d) \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

À ceci est associé la matrice  $B(q)$  suivante :

$$B(q) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \sin(\theta) \\ -b & b \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

Soit  $\eta$  un ensemble de vitesses indépendantes choisies de manière à représenter les vitesses longitudinale, latérale et angulaire du robot mobile *dans le repère solidaire avec son centre de masse*.

$$\eta = \begin{bmatrix} v_x & v_y & \Omega \end{bmatrix}^T \quad (2.75)$$

Alors il existe une matrice  $S(q)$  qui permet de passer des vitesses du repère local aux vitesses du repère inertiel.

$$\dot{q} = S(q)\eta(q, \dot{q}) \quad (2.76)$$

Dans notre cas, cette matrice est simplement égale à la matrice de rotation.

$$S(q) = Rot(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Réécrivant (2.76) nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)v_x - \sin(\theta)v_y \\ \sin(\theta)v_x + \cos(\theta)v_y \\ \Omega \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

Nous nous retrouvons avec le système d'équations suivant :

$$\dot{q} = S(q)\eta(q, \dot{q}) \quad (1) \quad (2.79)$$

$$M(q)\ddot{q} + f(q, \dot{q}) = B(q)u \quad (2)$$

En dérivant (1) nous obtenons :

$$\ddot{q} = \dot{S}(q)\eta(q, \dot{q}) + S(q)\dot{\eta}(q, \dot{q}) \quad (2.80)$$

que nous remplaçons dans (2) pour obtenir :

$$M(q)\dot{S}(q)\eta(q, \dot{q}) + M(q)S(q)\dot{\eta}(q, \dot{q}) + f(q, \dot{q}) = B(q)u \quad (2.81)$$

Isolant  $\dot{\eta}$  :

$$\dot{\eta} = (MS)^{-1}[Bu - f - M\dot{S}\eta] \quad (2.82)$$

Finalement nous obtenons le modèle d'état suivant :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= S\eta \\ \dot{\eta} &= (MS)^{-1}[Bu - f - M\dot{S}\eta] \end{aligned} \quad (2.83)$$

Avec les valeurs pour le système, nous obtenons les modèles suivants :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)v_x - \sin(\theta)v_y \\ \sin(\theta)v_x + \cos(\theta)v_y \\ \Omega \end{bmatrix} \quad \text{Modèle cinématique (2.84)}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^{-1}[(F_{xg} - R_{xg}) + (F_{xd} - R_{xd})] + v_y\Omega \\ m^{-1}[F_{yaw} + F_{yar}] - v_x\Omega \\ I^{-1}[b((F_{xd} - R_{xd}) - (F_{xg} - R_{xg})) + a(F_{yaw} - F_{yar})] \end{bmatrix} \quad \text{Modèle dynamique (2.85)}$$

### 2.5.13 Relation entre les vitesses du robot et les vitesses des roues

Lorsque l'on considère le glissement des roues  $S_{(g,d)}$ , les équations suivantes permettent de relier les vitesses du robot aux vitesses des roues via les variables de glissement.

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2}[\omega_d(1 - S_{xd}) + \omega_g(1 - S_{xg})] \\ \tan(\alpha)v_x \\ \frac{r}{2b}[\omega_d(1 - S_{xd}) - \omega_g(1 - S_{xg})] \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

### 2.5.14 Résumé schématique du modèle avec glissement

Le schéma de bloc du modèle avec glissement du robot mobile est représenté par la figure suivante. Une représentation détaillée de chaque symbole mathématique et de chaque bloc de simulation se trouve à l'annexe AII.1, section 1.2.

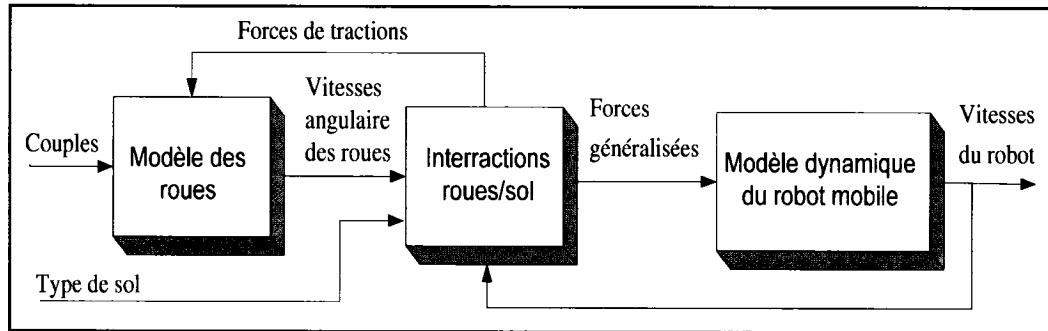


Figure 2.14: Schéma de bloc du modèle avec glissement

#### Modèle des roues

- *Couples* : Vecteur 2x1 contenant les couples appliqués aux roues à gauche et à droite du robot mobile. Notés respectivement :  $\tau_g$  et  $\tau_d$ .
- *Forces de traction* : Vecteur 2x1 contenant les forces de traction agissant entre les roues et le sol à gauche et à droite du robot mobile. Notées respectivement :  $F_{xg}$  et  $F_{xd}$ .
- *Vitesses angulaires des roues* : Vecteur 2x1 contenant les vitesses angulaires des roues respectivement situées à gauche et à droite du robot mobile. Notées resp.  $\omega_g$  et  $\omega_d$ .

$$\begin{aligned} I_{roue} \dot{\omega}_g &= \tau_g - 0.5rF_{xg} \\ I_{roue} \dot{\omega}_d &= \tau_d - 0.5rF_{xd} \end{aligned} \quad (2.70)$$

#### Interaction roues/sol

- *Vitesses angulaires des roues* : Vecteur 2x1 contenant les vitesses angulaires des roues respectivement situées à gauche et à droite du robot mobile. Notées resp.  $\omega_g$  et  $\omega_d$ .
- *Type de sol* : Entier correspondant à un type de sol sur lequel on désire simuler le déplacement du robot mobile. Pour chaque type de sol, les données caractérisant le sol doivent être entrées préalablement.

- *Vitesses du robot* : Vecteur 3x1 contenant les vitesses longitudinale, latérale et angulaire du robot mobile par rapport à son centre de masse. Notées  $\eta = \begin{bmatrix} v_x & v_y & \Omega \end{bmatrix}^T$ .
- *Forces de traction* : Vecteur 2x1 contenant les forces de traction agissant entre les roues et le sol à gauche et à droite du robot mobile. Notées respectivement :  $F_{xg}$  et  $F_{xd}$ .
- *Forces généralisées* : Vecteur 3x1 contenant la somme des forces agissant sur la plateforme mobile en x et en y, ainsi que la somme des moments tendant à faire tourner le véhicule sur son axe de rotation passant par son centre de masse.

Noté respectivement :  $\sum F_x$ ,  $\sum F_y$  et  $\sum M$ .

$$S_{x\{g,d\}} = \begin{cases} (r\omega_{\{g,d\}} - v_{x\{g,d\}}) / r\omega_{\{g,d\}} \\ (v_{x\{g,d\}} - r\omega_{\{g,d\}}) / v_{x\{g,d\}} \end{cases} \quad (2.36)$$

$$\alpha = \tan(v_y / v_x) \quad (2.53)$$

$$F_{x\{g,d\}} = 2F_{x\{g,d\}_{roue}}(S_{x\{g,d\}})sign(S_{x\{g,d\}}) \quad (2.35)$$

$$R_{x\{g,d\}} = 2R_{x_{roue}}sign(S_{x\{g,d\}}) \quad (2.35)$$

$$F_{y\{ar,av\}} = -2F_{y_{roue}}sign(v_{y\{ar,av\}}) \quad (2.35)$$

$$M_x = b(F_{xd} - F_{xg}) \quad (2.60)$$

$$M_r = a(F_{yav} - F_{yar}) + b(R_{xg} - R_{xd}) \quad (2.61)$$

$$\sum F_x = F_{xd} - R_{xd} + F_{xg} - R_{xg} \quad (2.64)$$

$$\sum F_y = F_{yav} + F_{yar} \quad (2.64)$$

$$\sum M = M_x - M_r \quad (2.64)$$

où  $F_{x_{roue}}$ ,  $R_{x_{roue}}$ ,  $F_{y_{roue}}$  proviennent du modèle du sol [WONG93] :

$$F_{x\{g,d\}_{roue}} = \mu_x(S_{\{g,d\}})F_{N_{roue}} \quad (2.37)$$

$$R_{x_{roue}} = R_C(F_{N_{roue}}) + R_R(F_{N_{roue}}) = cte \quad (2.52)$$

$$R_C = \frac{1}{(3-n)^{(2n+2)/(2n+1)}(n+1)l^{1/(2n+1)}(K_C/l + K_p)^{1/(2n+1)}} \left[ \frac{3F_{N_{roue}}}{\sqrt{2r}} \right]^{(2n+2)/(2n+1)} \quad (2.46)$$

$$R_R = \mu_r F_{N_{roue}} \quad (2.48)$$

$$F_{y_{roue}} = C_\alpha \alpha \quad (2.57)$$

$$F_{N_{roue}} = W / N_{roues} \quad (2.38)$$

où  $\mu_x(S_{\{g,d\}})$ , la fonction non linéaire d'adhérence, est générée pour chaque type de sol par le modèle et illustrée à la figure 2.7. La résistance au mouvement sur une roue ( $R_{x_{roue}}$ ) est constante car la force normale ( $F_{N_{roue}}$ ) sur une roue est considéré constante en vertu des hypothèses émises.

### Modèle dynamique du robot mobile

- *Forces généralisées* : Vecteur 3x1 contenant la somme des forces agissant sur la plateforme mobile en x et en y, ainsi que la somme des moments tendant à faire tourner le véhicule sur son axe de rotation passant par son centre de masse. .

Noté respectivement :  $\sum F_x$ ,  $\sum F_y$  et  $\sum M$ .

- *Vitesses du robot* : Vecteur 3x1 contenant les vitesses longitudinale, latérale et angulaire du robot mobile par rapport à son centre de masse. Noté  $\eta = \begin{bmatrix} v_x & v_y & \Omega \end{bmatrix}^T$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^{-1} \sum F_x + v_y \Omega \\ m^{-1} \sum F_y - v_x \Omega \\ I^{-1} \sum M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^{-1}[(F_{xg} - R_{xg}) + (F_{xd} - R_{xd})] + v_y \Omega \\ m^{-1}[F_{yaw} + F_{yar}] - v_x \Omega \\ I^{-1}[b((F_{xd} - R_{xd}) - (F_{xg} - R_{xg})) + a(F_{yaw} - F_{yar})] \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

## 2.6 Conclusion du chapitre

Nous avons étudié la dynamique du robot mobile et dérivé deux modèles en nous basant sur des sources littéraires reconnues. Le premier *modèle sans glissement* ne tient compte d'aucun glissement, suppose que les couples aux roues sont entièrement transformés en force de traction et que le robot a une vitesse latérale nulle. Le second *modèle avec glissement* incorpore le modèle de sol trouvé dans [WONG93], tient compte du glissement longitudinal et latéral et est paramétrisé par un type de terrain à adhérence limitée. Ces modèles seront simulés et analysés en détail au prochain chapitre.

## Chapitre 3 - Étude des modèles et du comportement du robot mobile en boucle ouverte

Ce chapitre propose d'étudier les deux modèles définis au deuxième chapitre, soit :

1. Le modèle simplifié sans glissement (adhérence parfaite au sol)
2. Le modèle avec glissement incluant le modèle du sol (adhérence limitée du sol)

Ces modèles sont dits en « boucle ouverte » car ils n'incorporent aucun niveau de contrôle. Les tests qui seront mis en place ici viseront à mettre en relief le comportement du robot soumis à différentes entrées telles que les couples appliqués aux roues, les vitesses des roues ou encore les types de sol, dans le cas du modèle avec glissement. Étant donné que pour le second modèle, les relations entre les états, et plus spécialement entre les entrées et les états étudiés, sont non linéaires, des états intermédiaires seront analysés. Les glissements des roues et l'adhérence des roues sont des exemples de ces états importants à étudier pour bien comprendre le comportement macroscopique (vitesses et accélérations) du robot mobile. Les premiers essais concernent à la fois le modèle sans glissement et le modèle avec glissement pour fins de comparaison. Toutefois, étant donné la plus grande complexité du modèle avec glissement, la majeure partie des essais concerne ce modèle. Le tableau 3.1 est un résumé des essais effectués en boucle ouverte.

**Tableau 3.1 : Résumé des essais en boucle ouverte effectués**

Essai	Modèle sans glissement	Modèle avec glissement	Variations en entrée		
			Couples	Vitesses des roues	Terrains
3.1	✓	✓	✓		✓
3.2	✓	✓	✓		✓
3.3		✓	✓		
3.4		✓	✓		
3.5		✓	✓		
3.6		✓		✓	
3.7		✓		✓	
3.8		✓		✓	
3.9		✓		✓	✓
3.10		✓		✓	✓
3.11		✓	✓		

**Glossaire des termes souvent utilisés dans ce chapitre****Plateforme/plateforme mobile**

Partie du robot mobile qui exclut les roues du robot mobile.

**Vitesse de la plateforme**

Terme utilisé pour désigner les vitesses linéaires du centre de masse (longitudinale ou latérale) ou de la vitesse angulaire du robot. Terme utilisé pour désigner les vitesses longitudinales des essieux des roues, afin de comparer ces vitesses avec celles des roues (pour discuter du glissement longitudinal qui est une mesure relative entre ces deux états).

**Couple critique d'entraînement**

Couple minimum à appliquer aux roues pour que les roues accélèrent.

**Vitesse linéaire des roues**

Vitesse angulaire des roues multipliée par le rayon des roues. Utile pour discuter du glissement longitudinal.

**Phénomène d'arrêt glissement (stick-slip en anglais)**

Comportement d'un corps soumis à une force de friction où la force appliquée est trop faible par rapport à la force de friction. La vitesse oscille alors et le corps colle et glisse à répétition. Utilisé dans ce contexte pour discuter de la friction entre les roues et le sol.

### 3.1 Comportement du robot soumis à des couples aux roues égaux à gauche et droite qui augmentent linéairement

#### But

Montrer le comportement longitudinal du robot mobile lorsqu'il est soumis à des couples aux roues initialement nuls et augmentant linéairement avec le temps. Pour les modèles sans et avec glissement, observer, étudier, comparer et interpréter les états pertinents.

#### Protocole

- État initial : vitesses longitudinale, latérale et angulaire nulles, couples aux roues nuls.
- Terrains et adhérences : terrain idéal ( $\mu = 1$ ), terre grasse ( $\mu_{MAX} = 0.7$ ), neige ( $\mu_{MAX} = 0.3$ ), glace ( $\mu_{MAX} = 0.15$ ), adhérence quasi-nulle ( $\mu_{MAX} = 0.01$ ).

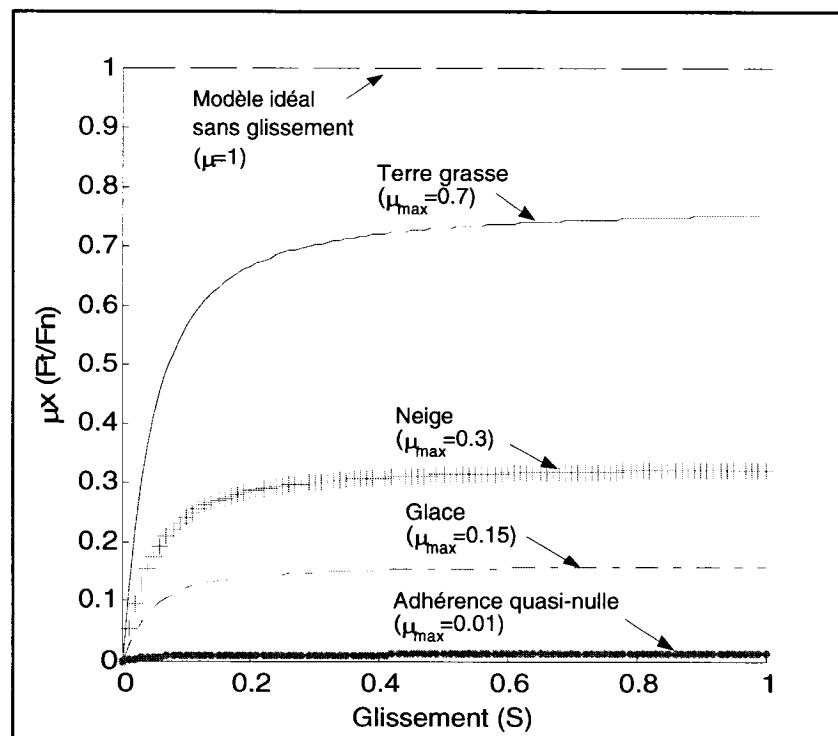
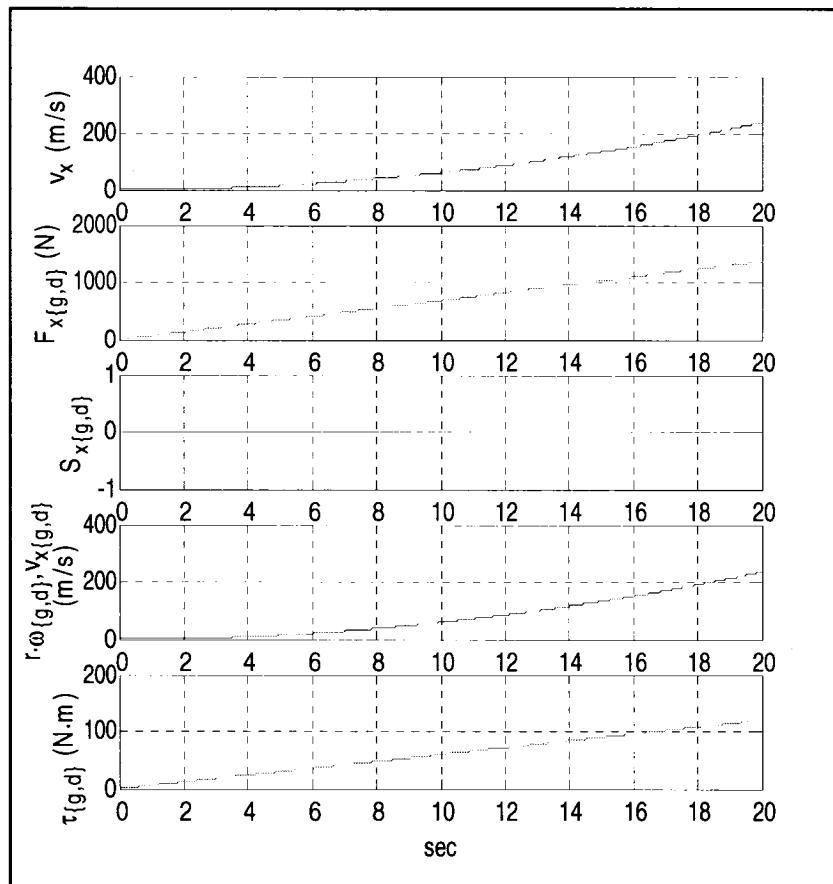


Figure 3.1 : Terrains et adhérences considérés pour les essais 3.1 et 3.2.

- Appliquer des couples aux roues augmentant linéairement avec le temps ( $\tau_g = \tau_d = 6t$ ).
- Simuler pendant 20s et enregistrer tous les états pertinents pour les deux types de modèle.

### **Résultats de simulations pour le modèle sans glissement**



**Figure 3.2 : Influence des couples appliqués aux roues sur la vitesse longitudinale du robot mobile pour le modèle sans glissement**

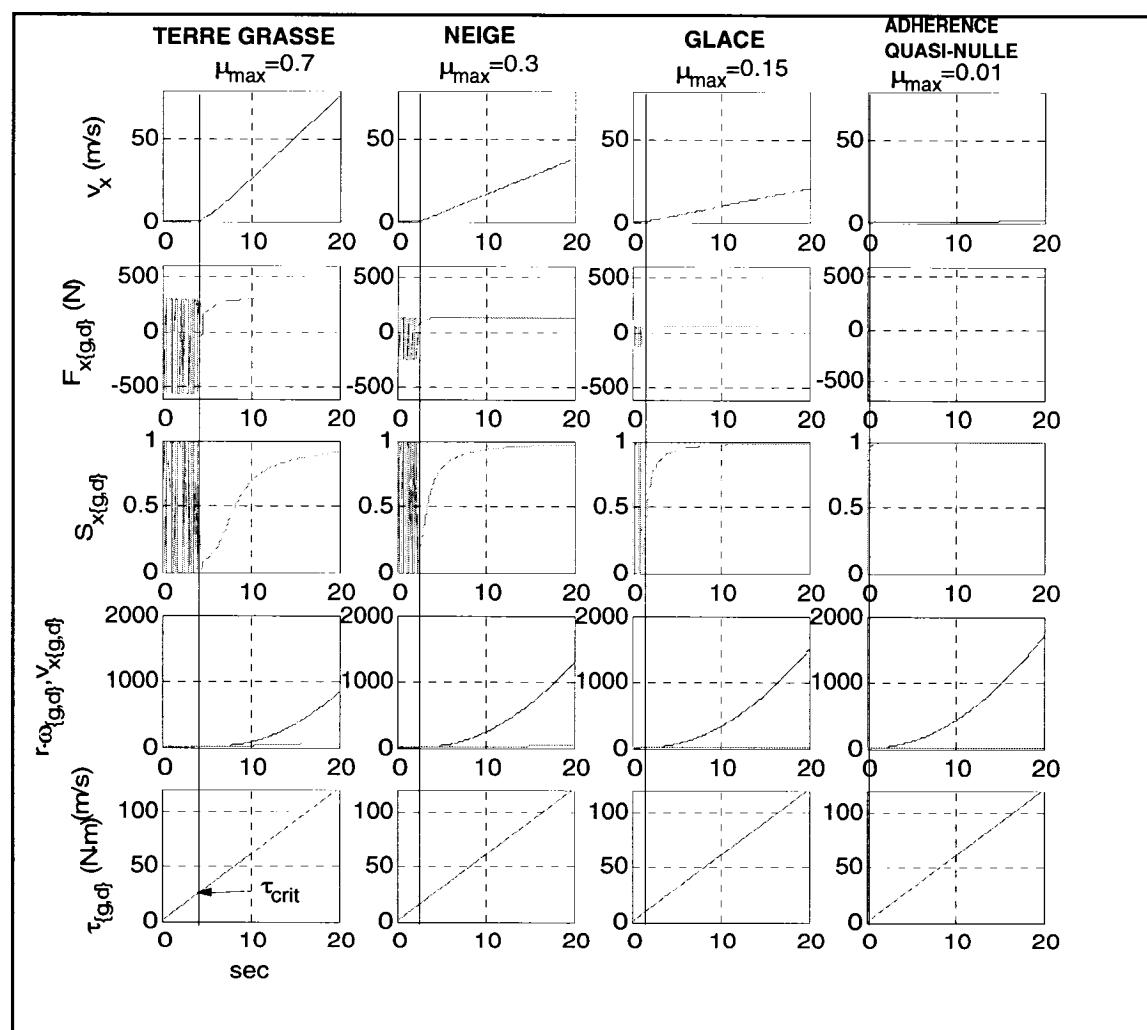
### **Analyse pour le modèle sans glissement**

#### i) Robot mobile :

Pour le modèle sans glissement, les couples appliqués au robot sont entièrement transformés en forces de traction. On suppose ainsi que le sol est capable de fournir une force de traction aux roues d'une amplitude quelconque. Pour cet essai, le glissement est

toujours nul car les vitesses linéaires des roues (rayon des roues multiplié par les vitesses angulaires des roues) égalent toujours les vitesses longitudinales sur les côtés de la plateforme. La vitesse longitudinale du robot mobile commence à augmenter dès que les couples appliqués aux roues sont positifs et elle progresse de manière quadratique. La vitesse longitudinale atteinte après 20s est de 236m/s. Le robot suit, évidemment, une trajectoire rectiligne.

### Résultats de simulations pour le modèle avec glissement



**Figure 3.3 : Influence des couples appliqués aux roues sur la vitesse longitudinale du robot mobile pour le modèle avec glissement et pour différentes adhérences**

### **Analyse pour le modèle avec glissement**

i) **Roues** :

Pour les couples appliqués de  $0Nm$  à  $\tau_{crit}$  (voir sur la figure 3.3 les lignes pointillées verticales montrant le couple critique pour chaque type de terrain) les roues subissent un phénomène d'arrêt glissement (appelé stick-slip en anglais) : le couple appliqué n'est pas suffisant pour combattre la force de friction (résistance au mouvement) agissant sur la roue. Lorsque les couples appliqués dépassent  $\tau_{crit}$ , les roues sont libres de tourner et leurs vitesses angulaires (et par conséquent leurs vitesses linéaires) progressent au fur et à mesure que les couples aux roues augmentent. Pour un même couple, les vitesses angulaires des roues sont plus grandes pour un terrain avec une faible adhérence car les forces de réaction du sol sur les roues sont plus faibles, rendant ainsi les roues plus libres de tourner. Une analyse plus détaillée du phénomène d'arrêt glissement est présentée à la section 3.11.

ii) **Glissement** :

Pour les couples appliqués de  $0Nm$  à  $\tau_{crit}$ , le glissement est élevé et oscille, dû au fait que les vitesses des roues varient légèrement sans que le robot bouge. L'adhérence oscille rapidement et est instable. Lorsque le couple s'approche de  $\tau_{crit}$ , le glissement réduit progressivement pour atteindre une valeur faible, ce qui signifie que la vitesse du robot rejoint progressivement celle des roues (ie : les roues entraînent la plateforme). Par la suite, les vitesses des roues progressant plus rapidement que les vitesses de la plateforme, le glissement longitudinal augmente jusqu'à atteindre progressivement 100%. Ce glissement maximal est atteint en un temps très court sur un terrain très glissant : les roues étant libres de tourner très rapidement et n'entraînant que très peu la plateforme. Le glissement maximal est atteint de manière asymptotique en un temps plus long au fur et à mesure que l'adhérence augmente.

iii) **Robot mobile** :

Pour les couples appliqués de  $0Nm$  à  $\tau_{crit}$ , la vitesse longitudinale du centre de masse subit un phénomène d'arrêt glissement dû à l'arrêt glissement des roues qui n'arrivent

pas à combattre leur friction. Lorsque le couple dépasse le couple critique  $\tau_{crit}$ , la vitesse longitudinale augmente (accélération positive pratiquement constante) avec l'augmentation des couples. On remarque que plus l'adhérence est élevée, plus les forces de traction sont importantes et plus la vitesse longitudinale est élevée après les 20s de simulation. Les vitesses latérale et angulaire demeurent nulles car aucun couple actif visant à faire tourner le robot n'est appliqué, les couples aux roues appliqués étant égaux.

### **Conclusion**

Lorsque le robot se déplace sur le sol idéal (modèle sans glissement), la vitesse longitudinale augmente pour n'importe quel couple non nul. Lorsque le sol a une adhérence limitée (modèle avec glissement), le robot mobile est plus difficile à accélérer : un couple minimum doit être appliqué pour que les roues commencent à entraîner le robot mobile et que l'accélération longitudinale soit positive. L'accélération longitudinale dépend de l'adhérence au sol. Pour un sol avec une adhérence parfaite, la vitesse longitudinale devient très élevée après un temps fixe et cette vitesse longitudinale diminue au fur et à mesure que l'adhérence du sol diminue. De plus, pour tout couple inférieur au couple critique d'entraînement, le robot subit un phénomène d'arrêt glissement et ne peut avancer. Ce couple critique d'entraînement diminue avec l'adhérence du sol.

### 3.2 Comportement du robot soumis à des couples aux roues égaux mais de signe inversé à gauche et à droite qui augmentent linéairement

#### But

Montrer le comportement angulaire du robot mobile lorsqu'il est soumis à des couples aux roues, inversés en signes, initialement nuls et augmentant linéairement. Pour les modèles sans et avec glissement, observer, étudier, comparer et interpréter les états pertinents.

#### Protocole

- État initial : vitesses longitudinale, latérale et angulaire nulles, couples aux roues nuls.
- Terrains et adhérences : terrain idéal ( $\mu = 1$ ), terre grasse ( $\mu_{MAX} = 0.7$ ), neige ( $\mu_{MAX} = 0.3$ ), glace ( $\mu_{MAX} = 0.15$ ), adhérence quasi-nulle ( $\mu_{MAX} = 0.01$ ). (voir figure 3.1)
- Appliquer des couples aux roues augmentant linéairement avec le temps ( $\tau_d = -\tau_g = 6t$ ).
- Simuler pendant 20s et enregistrer tous les états pertinents pour les deux types de modèle.

### Résultats de simulations pour le modèle sans glissement

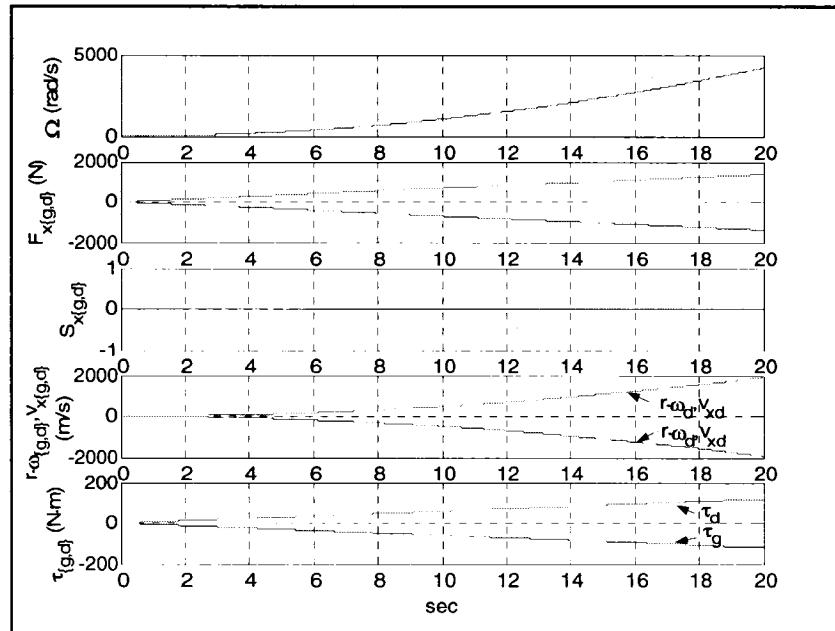


Figure 3.4 : Influence des couples appliqués aux roues sur la vitesse angulaire du robot mobile pour le modèle sans glissement

### Analyse pour le modèle sans glissement

#### i) Robot mobile :

Pour le modèle sans glissement, les couples appliqués au robot sont entièrement transformés en forces de traction. On suppose ainsi que le sol est capable de fournir une force de traction aux roues d'une amplitude quelconque. Pour cet essai, le glissement est toujours nul car les vitesses linéaires des roues (rayon des roues multiplié par les vitesses angulaires des roues) égalent toujours les vitesses longitudinales sur les côtés de la plateforme. La vitesse angulaire du robot mobile commence à augmenter dès que les couples appliqués aux roues sont non nuls et elle progresse de manière quadratique. La vitesse angulaire atteinte après 20s est de 4200 rad/s. Le robot reste sur place et tourne sur lui-même.

### Résultats de simulations pour le modèle sans glissement

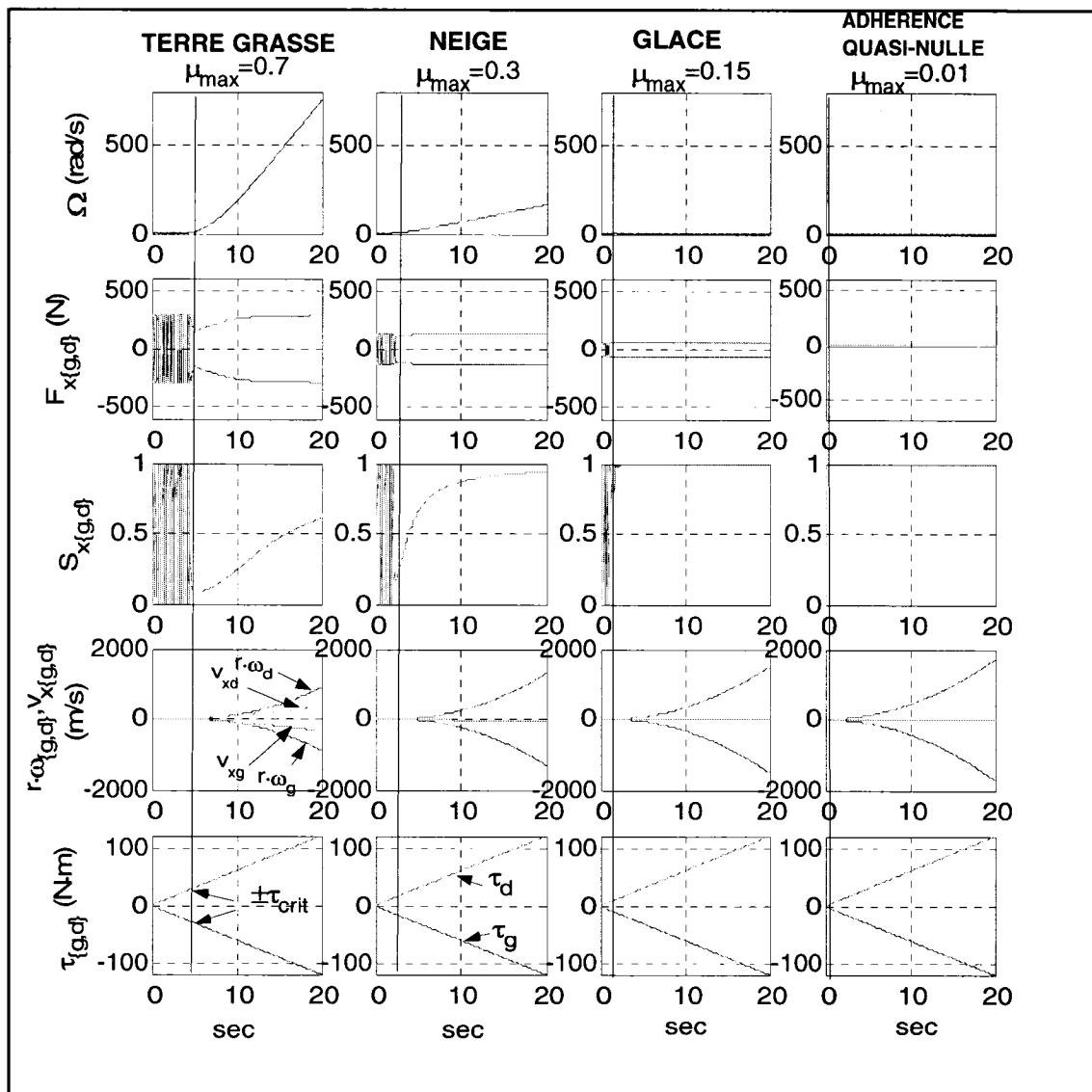


Figure 3.5 : Influence des couples appliqués aux roues sur la vitesse angulaire du robot mobile pour le modèle avec glissement

### Analyse pour le modèle avec glissement

#### i) Roues :

Pour les couples appliqués de  $0Nm$  à  $\pm\tau_{crit}$  (voir sur la figure 3.5 les lignes pointillées verticales montrant le couple critique pour chaque type de terrain) les roues subissent un phénomène d'arrêt glissement (appelé *stick-slip* en anglais) : le couple appliqué n'est pas

suffisant pour combattre la force de friction (résistance au mouvement) agissant sur la roue. Lorsque les couples appliqués dépassent  $\tau_{crit}$ , les roues sont libres de tourner, et leurs vitesses angulaires (et par conséquent leurs vitesses linéaires) progressent au fur et à mesure que les couples aux roues augmentent. Pour un même couple, les vitesses angulaires des roues sont plus grandes pour un terrain avec une faible adhérence car les forces de réaction du sol sur les roues sont plus faibles, rendant ainsi les roues plus libres de tourner. Les vitesses angulaires des roues sont égales mais de signe inversé car le couple appliqué est inversé en signe.

*ii) Glissement :*

Pour les couples appliqués de  $0Nm$  à  $\pm\tau_{crit}$ , le glissement est élevé et oscille, dû au fait que les vitesses des roues varient légèrement sans que le robot bouge. L'adhérence oscille rapidement et est instable. Lorsque le couple s'approche de  $\pm\tau_{crit}$ , le glissement descend progressivement pour atteindre une valeur faible, ce qui signifie que la vitesse du robot rejoint progressivement celle des roues (ie : les roues entraînent la plateforme). Par la suite, les vitesses des roues progressent plus rapidement que les vitesses de la plateforme, le glissement longitudinal augmente jusqu'à atteindre progressivement 100%. Ce glissement maximal est atteint en un temps très court sur un terrain très glissant : les roues étant libres de tourner très rapidement et n'entraînant que très peu la plateforme. Le glissement maximal est atteint de manière asymptotique en un temps plus long au fur et à mesure que l'adhérence augmente.

*iii) Robot mobile :*

Pour les couples appliqués de  $0Nm$  à  $\pm\tau_{crit}$ , la vitesse angulaire du robot subit un phénomène d'arrêt glissement dû à l'arrêt glissement des roues qui n'arrivent pas à combattre leur friction. Lorsque le couple dépasse le couple critique  $\pm\tau_{crit}$ , la vitesse angulaire augmente (accélération positive pratiquement constante) avec l'augmentation des couples. On remarque que plus l'adhérence est élevée, plus les forces de traction sont importantes et plus la vitesse angulaire est élevée après les 20s de simulation. Les

vitesses longitudinales et latérales demeurent nulles car aucune force longitudinale n'est appliquée (les couples appliqués étant égaux mais de signes opposés).

### **Conclusion**

Lorsque le robot se déplace sur le sol idéal (modèle sans glissement), la vitesse angulaire augmente pour n'importe quel couple non nul. Lorsque le sol a une adhérence limitée (modèle avec glissement), le robot mobile est plus difficile à accélérer : un couple minimum doit être appliqué afin que les roues commencent à entraîner le robot mobile et que l'accélération angulaire soit positive. L'accélération angulaire dépend de l'adhérence au sol. Pour un sol avec une adhérence parfaite, la vitesse angulaire devient très élevée après un temps fixe et cette vitesse angulaire diminue au fur et à mesure que l'adhérence du sol diminue. De plus, pour tout couple inférieur au couple critique d'entraînement, le robot subit un phénomène d'arrêt glissement et ne peut tourner. Ce couple critique d'entraînement diminue avec l'adhérence du sol.

## **3.3 Comportement en accélération longitudinale du robot soumis à des couples aux roues constantes**

### **But**

Montrer le comportement en accélération longitudinale du robot pour différents couples constants et identiques appliqués aux roues des côtés gauche et droit. Pour le modèle avec glissement seulement, observer et interpréter les états pertinents.

### **Protocole**

- État initial : vitesses longitudinale, latérale et angulaire nulles.
- Terrain avec adhérence moyenne : sable
- Appliquer aux roues à droite et à gauche la série de couples suivants :  $10Nm, 20Nm, 25Nm, 26Nm, 27Nm, 30Nm, 40Nm, 50Nm, 70Nm, 100Nm$ .
- Simuler pendant quelques secondes et enregistrer tous les états pertinents pour le modèle avec glissement.

### Résultats de simulations pour le modèle avec glissement

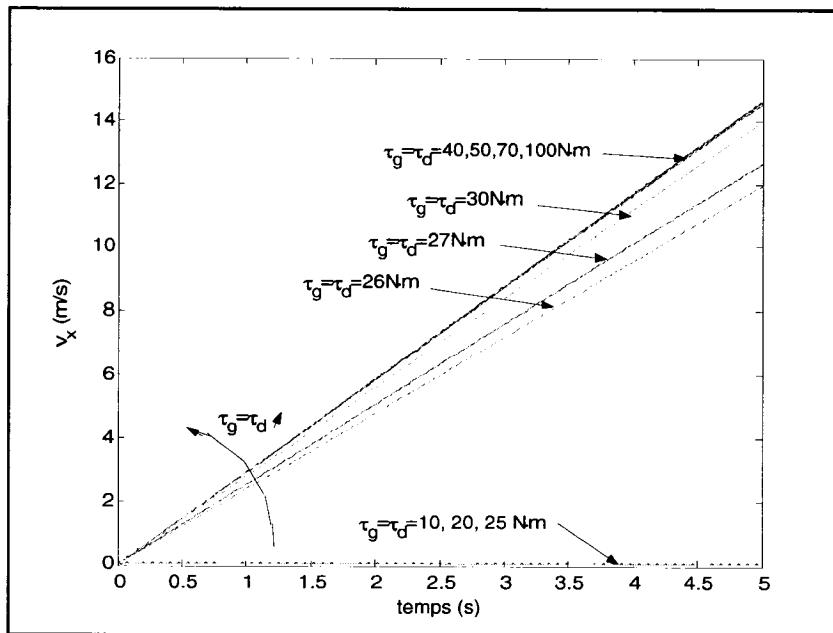


Figure 3.6 : Influence de couples constants appliqués aux roues sur l'accélération et la vitesse longitudinale du robot mobile.

Tableau 3.2 : Accélérations longitudinales atteintes pour différents couples en entrées

Couple aux roues (Nm)	Accélération longitudinale (m/s <sup>2</sup> )
$10 < \tau_{crit}$	$\approx 0$
$20 < \tau_{crit}$	$\approx 0$
$25 < \tau_{crit}$	$\approx 0$
$26 \approx \tau_{crit}$	2.39
$27 > \tau_{crit}$	2.53
$30 > \tau_{crit}$	2.80
$40 > \tau_{crit}$	2.91
$50 > \tau_{crit}$	2.92
$70 > \tau_{crit}$	2.93
$100 > \tau_{crit}$	2.93

### **Analyse pour le modèle avec glissement**

On remarque une fois de plus que pour les couples inférieurs au couple critique ( $\tau_{crit} \approx 25.5Nm$  pour le terrain choisi), le robot subit un phénomène d'arrêt glissement.

Pour les couples supérieurs au couple critique, l'accélération est relativement constante et ce, peu importe la valeur du couple en entrée. Les accélérations produites pour différents couples sont très près les unes des autres, malgré la grande plage de couples testés. À titre d'exemple, pour un couple à l'entrée de  $100Nm$ , l'accélération est de  $2.93m/s^2$  tandis que pour un couple à l'entrée de  $30Nm$  (soit légèrement au-dessus du couple critique), l'accélération est de  $2.80m/s^2$ . On remarque ainsi qu'il ne sert à rien d'appliquer un couple trop élevé au robot, celui-ci n'accélérera pas plus vite, car le sol lui fournit déjà sa traction maximale.

### **Conclusion**

Cet essai montre clairement que *l'accélération longitudinale, la variation de vitesse longitudinale par rapport au temps, varie peu et de manière non linéaire, avec la valeur du couple en entrée appliqué aux roues, pourvu que celui-ci soit supérieur au couple critique*. Cet état de fait signifie aussi que la vitesse longitudinale ne pourra pas être variée linéairement en faisant varier les couples aux roues, chose possible pour le robot mobile sans glissement.

### 3.4 Comportement du robot soumis à des couples constants, puis nuls

#### But

Montrer le comportement longitudinal du robot lorsqu'il est soumis à des couples aux roues égaux et constants, puis nuls après quelques instants. Pour le modèle avec glissement seulement, observer et interpréter les états pertinents.

#### Protocole

- État initial : vitesses longitudinale, latérale et angulaire nulles.
- Terrain avec adhérence moyenne : sable
- Appliquer des couples aux roues de  $30Nm$  à gauche et à droite ( $\tau_g = \tau_d = 30Nm$ ) pendant 2s. Ensuite, appliquer des couples nuls pendant 4s.
- Simuler et enregistrer tous les états pertinents pour le modèle avec glissement.

#### Résultats de simulations pour le modèle avec glissement

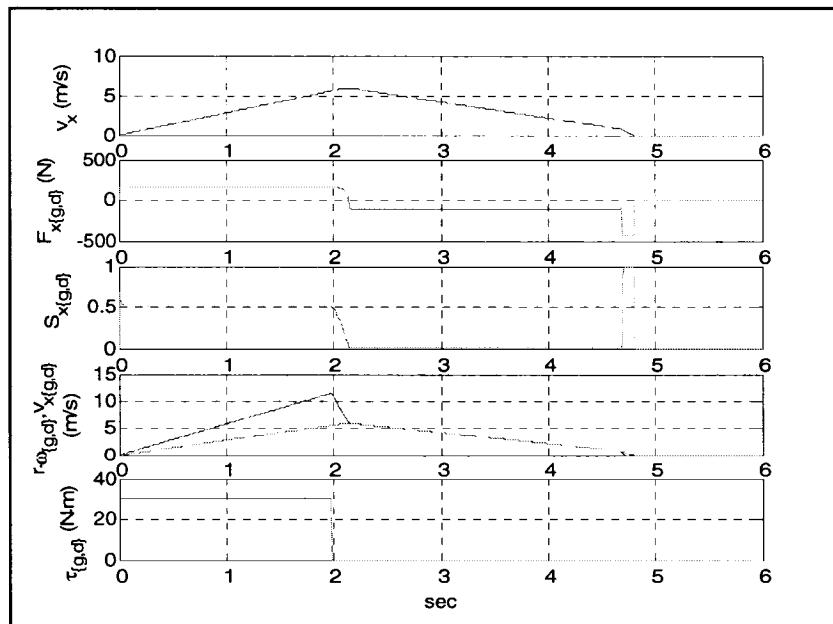


Figure 3.7 : Comportement en freinage du robot mobile

### **Résultats de simulations pour le modèle avec glissement**

#### i) Roues :

Étant donné que les couples appliqués sont supérieurs au couple critique  $\tau_{crit}$ , les roues accélèrent de manière constante. Lorsque le couple appliqué aux roues devient nul, la vitesse des roues diminue de manière abrupte pour rattraper la vitesse de la plateforme, qui diminue, mais plus lentement.

#### ii) Glissement :

Le glissement débute à 70% mais diminue promptement pour s'arrêter à une valeur d'environ 50%. Lorsque le couple aux roues retombe nul, le glissement revient nul car la vitesse des roues suit celle du véhicule : le véhicule entraîne les roues maintenant car aucun couple n'est appliqué aux roues. Lorsque la vitesse des roues descend finalement à zéro, un glissement de 100% apparaît, il s'agit ici d'un glissement *skid* (la vitesse des roues est plus faible que la vitesse de la plateforme), c'est-à-dire que les roues ne bougent plus mais sont entraînées par la plateforme mobile pendant un certain temps. Lorsque le robot mobile est complètement arrêté, le glissement retombe à zéro.

#### iii) Robot mobile :

Le robot mobile accélère longitudinalement lorsque les couples appliqués sont non nuls. Le robot atteint une vitesse longitudinale d'environ  $7m/s$ . Lorsque le couple devient nul, le robot prend un certain temps à ralentir, jusqu'à  $0m/s$ ; il est progressivement ralenti par la force de résistance au mouvement. Nous observons donc que le robot mobile est plus difficile à arrêter que si le robot était sur une surface avec une adhérence parfaite.

### **Conclusion**

Nous avons vu précédemment que le robot est plus difficile à accélérer lorsque l'adhérence au sol est limitée. Il en est de même pour l'arrêter. *Lorsqu'on cesse d'appliquer des couples aux roues du robot, les roues se laissent entraîner par la plateforme qui ralentit progressivement suite à la force de résistance au mouvement.* L'effet remarqué concorde aussi avec ce à quoi on pourrait s'attendre en voiture, par exemple.

### 3.5 Comportement angulaire du robot soumis à une différence de couples à droite et à gauche variant linéairement

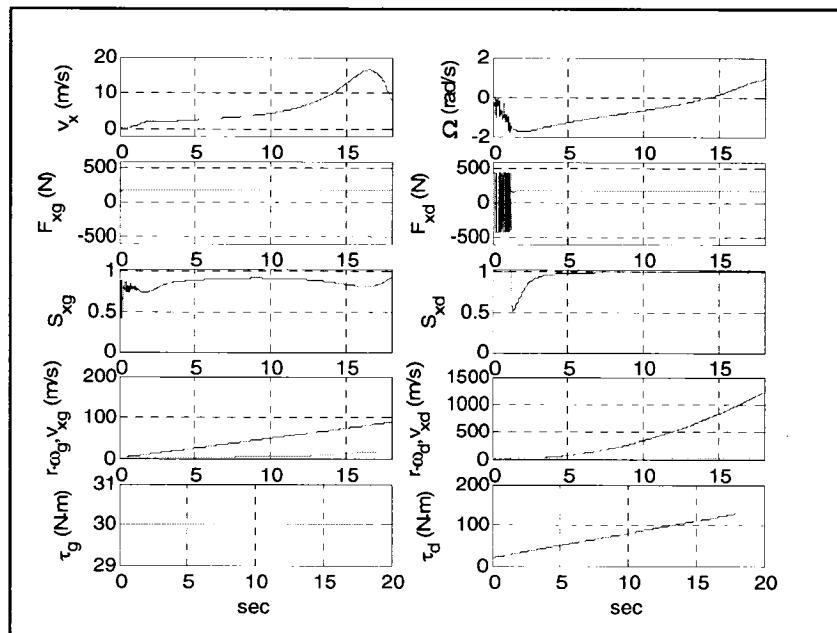
#### But

Montrer le comportement angulaire du robot lorsqu'il est soumis à une différence de couple à droite et à gauche variant linéairement par rapport au temps. Pour le modèle avec glissement seulement, observer et interpréter les états pertinents.

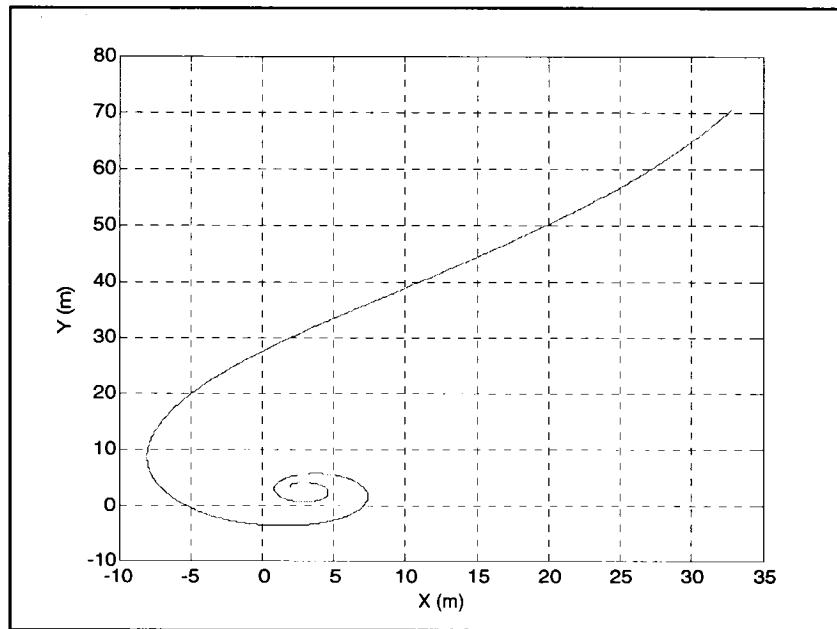
#### Protocole

- État initial : vitesses longitudinale, latérale et angulaire nulles.
- Terrain avec adhérence moyenne : sable
- Utiliser un coefficient de rigidité latérale typique ( $C_\alpha = 2N \deg^{-1}$ )
- Appliquer un couple aux roues à gauche constant tel que les roues ne soient pas bloquées par la résistance au mouvement ( $\tau_g = 30Nm > \tau_{crit}$ ).
- Appliquer un couple aux roues à droite inférieur au couple critique pour débuter et augmentant linéairement avec le temps ( $\tau_d = (20 + 6t)Nm$ ) afin d'obtenir une différence des couples à droite et à gauche variant dans le temps.
- Simuler et enregistrer tous les états pertinents pour le modèle avec glissement.

### Résultats de simulations pour le modèle avec glissement



**Figure 3.8 : Influence sur la vitesse angulaire de la différence des couples appliqués aux roues**



**Figure 3.9 : Chemin suivi par le robot mobile**

### **Analyse pour le modèle avec glissement**

i) Roues :

Les vitesses des roues à gauche, sous l'action d'un couple supérieur au couple critique, progressent de manière linéaire. Les roues à droite ont une vitesse angulaire initialement nulle car le couple appliqué à la roue est trop faible pour combattre la force de résistance au mouvement. Lorsque le couple dépasse finalement le couple critique, la vitesse augmente plus rapidement que celle des roues à gauche car le couple est supérieur.

ii) Glissement :

Le glissement des roues à gauche et à droite est toujours élevé (plus de 50% en tout temps) car les couples appliqués aux roues sont intenses et les vitesses des roues sont alors plus grandes que les vitesses de la plateforme. Au départ, la roue de droite a un glissement de 100% car la roue ne combat pas sa force de résistance au mouvement et est entraînée par la roue de gauche qui avance. Peu de temps après, la roue a un couple suffisamment élevé et adhère au sol. Son glissement grimpe alors à nouveau car le couple appliqué à la roue est très élevé et augmente sans cesse.

iii) Robot mobile :

Au début du test, le robot à une vitesse angulaire négative car la roue de gauche avance sans que la roue de droite puisse avancer. Au fur et à mesure que le couple de la roue de droite augmente, la vitesse angulaire augmente jusqu'à devenir nulle et même positive, ce qui concorde bien avec ce à quoi on s'attend pour un robot réel. Par contre, on observe que l'accélération angulaire est presque constante et ne dépend donc pas de la différence entre les couples appliqués aux roues, comme c'est le cas pour le modèle sans glissement (voir essai 3.2). Dans cet essai on observe aussi un dérapage latéral suite à une application de couples élevés aux roues.

### **Conclusion**

On remarque qu'aussitôt que le couple aux roues dépasse une valeur critique, la roue accélère angulairement suivant le couple appliqué aux roues. Dans notre essai, les roues à droite accélèrent angulairement davantage que les roues à gauche. Par contre, les

forces de traction du robot n'augmentent pas indéfiniment. Ainsi, même si les vitesses des roues à droite sont beaucoup plus élevées que les vitesses des roues à gauche, *l'accélération angulaire du robot ne varie pas linéairement avec la différence de couples appliqués aux roues*, comme ce serait le cas pour le robot mobile sans glissement. Cet essai variant les couples entre les roues à droite et à gauche suggère des relations non linéaires entre les vitesses/accélérations et les couples. L'essai 3.3 montre que le même phénomène se produit pour l'accélération longitudinale.

Note :

Les relations très non linéaires entre les couples aux roues et les accélérations suggèrent l'utilisation de nouvelles variables d'entrées qui permettront d'analyser les caractéristiques du système de manière plus linéaire et directe. En effet, il peut être avantageux d'analyser le robot en faisant varier les vitesses des roues au lieu des couples. Les vitesses des roues sont directement reliées aux glissements qui sont reliés aux forces de traction et aux accélérations longitudinales et angulaires. Il est toujours possible par la suite de créer un contrôleur qui trouvera le couple approprié à appliquer aux roues afin d'obtenir une vitesse angulaire des roues désirée (nous nous proposons de dériver ce contrôleur à la section 1 du chapitre 5). Les prochains essais utiliseront dorénavant les vitesses des roues comme entrées.

### 3.6 Comportement longitudinal du robot soumis à des vitesses aux roues égales, pour différents types de sol

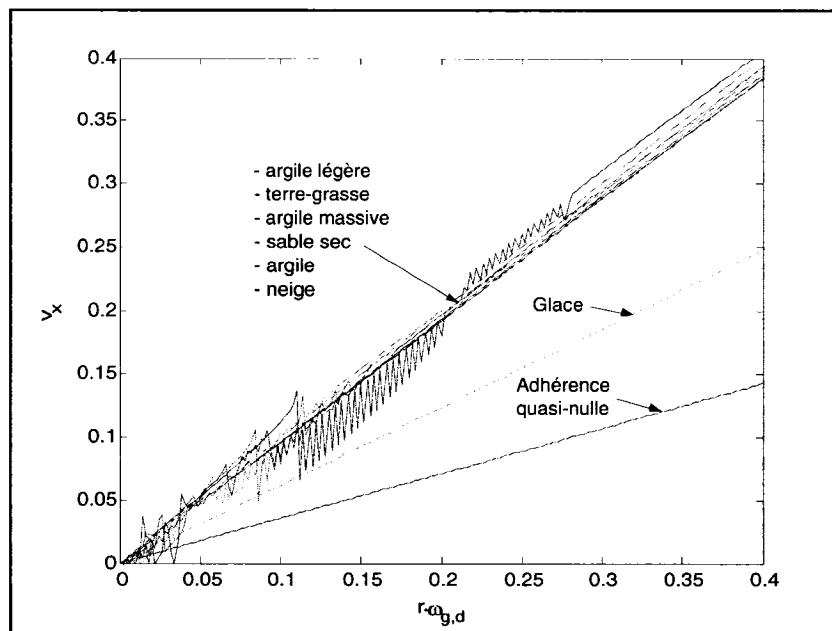
But

Montrer le comportement longitudinal du robot mobile lorsqu'il est soumis à des vitesses aux roues égales augmentant linéairement avec le temps. Pour le modèle avec glissement seulement, observer et interpréter les états pertinents.

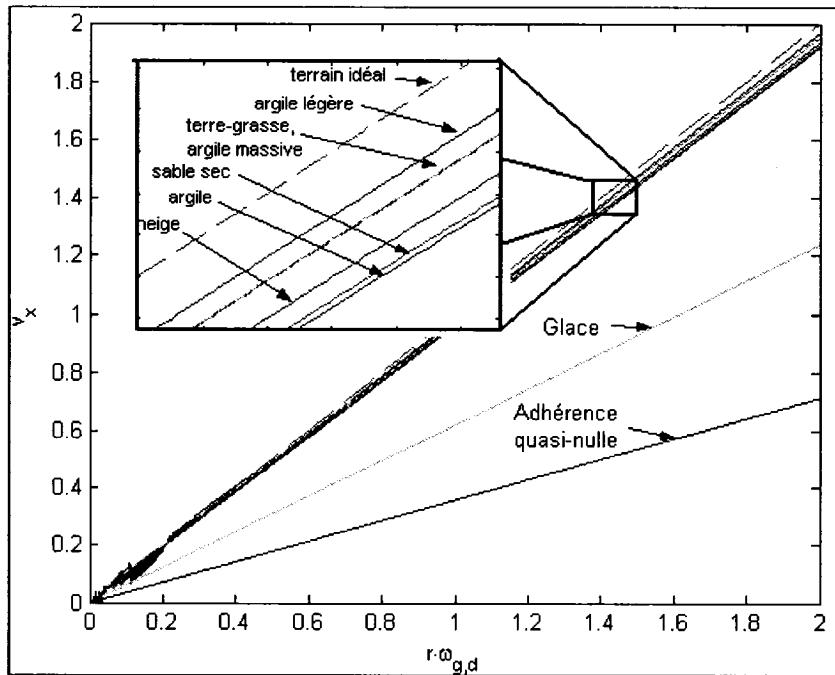
### Protocole

- État initial : vitesses longitudinale, latérale et angulaire nulles.
- Terrain avec adhérence moyenne : sable
- Appliquer les vitesses aux roues suivantes :  $\omega_g = \omega_d = 0.2t/r$  rad/s, pendant 10s.  
Alors  $\omega_{\{g,d\}} \in [0, 0.4/r]$  rad/s.
- Faire varier le type de sol pour les sols suivants : *terre grasse, sable sec, argile légère, argile massive, argile, neige, glace, adhérence quasi-nulle*.
- Enregistrer le profil de vitesse longitudinale suivie, le glissement et l'accélération longitudinale stationnaire.

### Résultats de simulations pour le modèle avec glissement



**Figure 3.10 : Caractéristiques de la vitesse longitudinale en fonction des vitesses aux roues, selon le glissement pour différents types de sol (dom  $\omega_{\{g,d\}} = [0, 0.4/r]$  rad/s)**



**Figure 3.11 : Caractéristiques de la vitesse longitudinale en fonction des vitesses aux roues, selon le glissement pour différents types de sol (dom  $\omega_{l,g,d} = [1.5/r, 2.0/r]$  rad/s)**

**Tableau 3.3 : Glissement stationnaire et accélération longitudinale stationnaire pour un robot soumis à des vitesses aux roues linéaires pour différents types de sol**

Type de sol	Glissement stationnaire (%)	Accélération longitudinale stationnaire ( $m/s^2$ )
Terre grasse	2.37	0.1953
Sable sec	3.97	0.1921
Argile légère	1.72	0.1966
Argile grasse	2.35	0.1953
Argile	4.15	0.1917
Neige	2.71	0.1946
Glace	3.36	0.1933
Adhérence quasi-nulle	65.34	0.0714

### Analyse pour le modèle avec glissement

La figure 3.10 illustre l'effet d'arrêt glissement sur la vitesse longitudinale pour des vitesses faibles des roues. Cet effet apparaît au début car la vitesse longitudinale au niveau de l'essieu oscille momentanément autour de la vitesse longitudinale des roues à cause de la résistance au mouvement. Le glissement oscille pour finalement se stabiliser.

La figure 3.11 montre l'effet du glissement des roues sur la vitesse longitudinale maximale atteignable par le robot : pour un glissement en régime permanent constant, l'accélération longitudinale est constante, signifiant que le profil de vitesse est une ligne droite (par rapport aux vitesses linéaires des roues), avec une pente différente de l'unité. On remarque donc qu'aussitôt que le glissement est positif, la vitesse maximale atteignable longitudinalement est inférieure à la vitesse linéaire des roues. Ceci est dû au fait que les vitesses linéaires des roues sont toujours supérieures à la vitesse de la plateforme, dû au phénomène de glissement longitudinal. La vitesse longitudinale atteignable dépend aussi des caractéristiques du sol. Le tableau 3.3 illustre pour différents types de sol la valeur stationnaire du glissement et de l'accélération, étant donné une entrée de vitesse des roues augmentant linéairement. Il est possible de déduire analytiquement les valeurs des glissements et accélérations longitudinales stationnaires. C'est ce que nous proposons de faire ici.

Démonstration qu'une entrée en vitesse variant linéairement avec le temps provoquera un glissement constant et une accélération constante en régime permanent.

Mathématiquement, on voudrait montrer que  $\omega = \omega_g = \omega_d = kt$  implique qu'il existe une valeur du glissement stationnaire (STAT) telle que  $\dot{S} = \dot{S}_{xg} = \dot{S}_{xd} = 0$ , et qu'il s'ensuit que  $\dot{a}_x = 0$ ,  $a_x = \dot{v}_x = cte$ .

Si  $\omega = \omega_g = \omega_d = kt$ , alors  $\dot{\omega} = \dot{\omega}_g = \dot{\omega}_d = k$ . De plus,  $S = S_{xg} = S_{xd}$ ,  $v_x = (v_{xg} + v_{xd})/2$ , mais  $v_{xg} = v_{xd}$ , alors  $v_{xg} = v_{xd} = v_x$ , et  $S = (r\omega - v_x)/r\omega$  en traction.

Si on dérive l'expression du glissement, on obtient :

$$\dot{S} = \frac{r\dot{\omega} - \dot{v}_x}{r\omega} - \underbrace{\frac{\dot{\omega}}{\omega} \frac{(r\omega - v_x)}{r\omega}}_S = \frac{\dot{\omega}}{\omega} (1 - S) - \frac{\dot{v}_x}{r\omega} \quad (3.1)$$

Si on cherche à savoir quand le glissement sera stationnaire, on met sa dérivée à zéro :

---

<sup>1</sup> On remarque aussi que cette fonction est strictement négative à partir du moment où  $S=1$  (se produit au début, au démarrage du robot mobile).

$$\dot{S} = \frac{\dot{\omega}}{\omega} (1 - S_{STAT}) - \frac{\dot{v}_x}{r\omega} = 0 \quad (3.2)$$

En réorganisant, on remarque que cela implique que l'accélération longitudinale est une constante :

$$\dot{v}_x = r\dot{\omega}(S - 1) \rightarrow \dot{v}_{x_{STAT}} = rk(S_{STAT} - 1) = cte \quad (3.3)$$

De plus, en utilisant ( $R_x = R_{xg} = R_{xd}$ ), dans l'équation donnant l'accélération longitudinale en fonction des forces :

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= m^{-1} (F_{xg} - R_{xg} + F_{xd} - R_{xd}) + \underbrace{v_y \Omega}_0 \\ &= m^{-1} (2F_{N_{roue}} \mu(S_{xg}) - R_{xg} + 2F_{N_{roue}} \mu(S_{xd}) - R_{xd}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

On découvre que :

$$\dot{v}_{x_{STAT}} = 2m^{-1} (2F_{N_{roue}} \mu(S_{STAT}) - R_x) = cte \quad (3.5)$$

En égalant (3.3) et (3.5), on peut trouver analytiquement les valeurs stationnaires de l'accélération longitudinale et du glissement des roues.

En procédant de manière analogue, on peut montrer ce qui se produit lorsque les vitesses à l'entrée sont constantes par rapport au temps.

Démonstration qu'une entrée en vitesse constante par rapport au temps provoquera un glissement constant et une accélération nulle :

Mathématiquement, on voudrait démontrer que  $\omega = \omega_g = \omega_d = k$  implique qu'il existe une valeur du glissement stationnaire (STAT) telle que  $\dot{S} = \dot{S}_{xg} = \dot{S}_{xd} = 0$ , et qu'il s'ensuit que  $a_x = 0$ ,  $v_x = cte$ .

Nous avons que  $\dot{\omega} = 0$ , alors  $\dot{S} = \dot{v}_x = r\dot{\omega}(S - 1) = 0$

Alors

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= m^{-1} (F_{xg} - R_{xg} + F_{xd} - R_{xd}) \\ &= m^{-1} (2F_{N_{roue}} \mu(S_{xg}) - R_{xg} + 2F_{N_{roue}} \mu(S_{xd}) - R_{xd}) \\ \dot{v}_{x_{STAT}} &= 2F_{N_{roue}} \mu(S_{STAT}) - R_x = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

On peut trouver de manière analytique la valeur du glissement en régime permanent qui est la même pour les deux roues.

$$S_{STAT} = \mu^{-1}\left(\frac{R_x}{2F_{N_{roue}}}\right) \quad (3.7)$$

### Conclusion

Lorsque le robot mobile est soumis à du glissement longitudinal en traction, les vitesses linéaires des roues ( $r\omega_{[g,d]}$ ) sont toujours un peu plus grandes que les vitesses de la plateforme en régime permanent ( $v_{x[g,d]}$ ). Cet état de fait implique l'existence d'un glissement constant en régime permanent, pour des entrées en vitesse des roues constante ou linéaire par rapport au temps. Il a aussi été démontré que pour le cas spécial où les vitesses des roues sont constantes, l'accélération longitudinale du robot sera nulle, tandis que pour des vitesses aux roues augmentant linéairement avec le temps, l'accélération longitudinale du robot sera constante.

Le glissement stationnaire et l'accélération longitudinale stationnaire, lorsque non nuls, sont fonction de la courbe de *force de traction sur force normale en fonction du glissement*  $\mu(S)$  et de la résistance au mouvement, propre au sol où le robot mobile se déplace.

### 3.7 Comportement latéral du robot soumis à des vitesses aux roues différentes constantes

#### But

Montrer le comportement latéral du robot mobile lorsqu'il est soumis à des vitesses aux roues différentes et constantes. Pour le modèle avec glissement seulement, observer et interpréter les états pertinents.

#### Protocole

- État initial : vitesses longitudinale, latérale et angulaire nulles.
- Terrain avec adhérence moyenne : sable
- Appliquer les vitesses aux roues suivantes :  $\omega_g = 0.8/r$  rad/s,  $\omega_d = 0.6/r$  rad/s
- Faire varier le coefficient de rigidité latérale pour les valeurs suivantes :  $C_\alpha = \{0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0\} N \text{ deg}^{-1}$ .
- Enregistrer les trajectoires suivies et les vitesses latérales moyennes atteintes pour chaque essai.

#### Résultats de simulations pour le modèle avec glissement

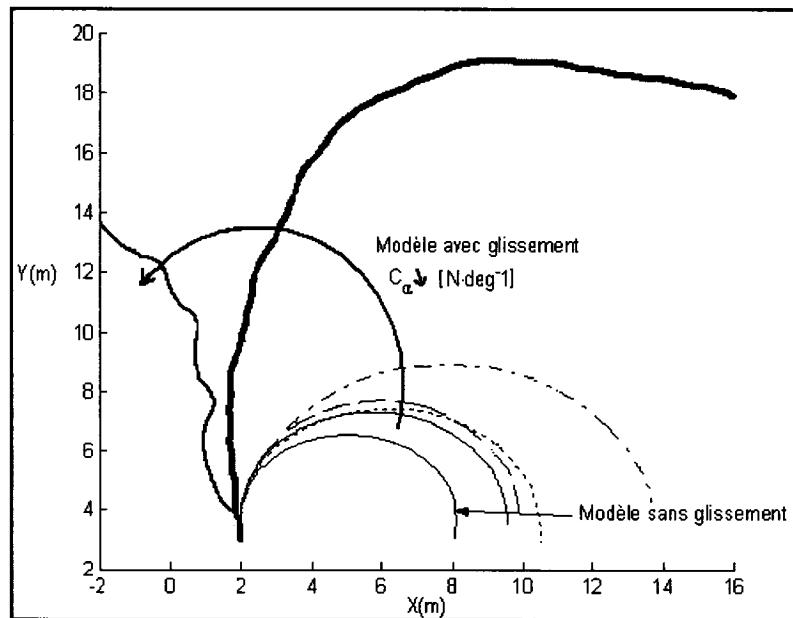


Figure 3.12 : Influence du coefficient de rigidité latérale sur le chemin parcouru pour des vitesses de roues figées

**Tableau 3.4 : Vitesse latérale moyenne en fonction du coefficient de rigidité latéral.**

Coefficient de rigidité latérale $C_\alpha$ (N·deg <sup>-1</sup> )	Force latérale maximale sur une roue $F_{y_{roue \ max}}$ (N) (lorsque $\alpha = \alpha_{MAX} = \pm 90^\circ$ )	Vitesse latérale moyenne $v_y$ (m/s)
3.0	270	0.05
2.5	225	0.06
2.0*	180	0.07
1.5	135	0.09
1.0	90	0.18
0.5	45	0.29

(\*) Coefficient typique pour ce type de sol

### Analyse pour le modèle avec glissement

Lorsque le coefficient de rigidité latérale est élevé, le robot glisse peu latéralement et suit la trajectoire d'un cercle, étant donné les vitesses différentes appliquées aux roues. Lorsqu'on diminue  $C_\alpha$ , le robot mobile glisse de plus en plus latéralement (voir tableau) et suit une trajectoire en cercle dont le rayon de courbure diminue. Le rayon de courbure diminue car la force latérale diminuant, le robot peut tourner plus facilement. Toutefois, lorsque  $C_\alpha$  devient excessivement faible, le robot n'a plus la force latérale nécessaire pour tourner sans déraper latéralement et la vitesse latérale devient élevée. Ainsi, le robot ne peut même plus poursuivre la trajectoire d'un cercle. Il est à noter que cette situation « théorique », ne devrait pas se produire en réalité, elle correspond à la situation où un sol serait très glissant latéralement mais assez adhérent longitudinalement.

### Conclusion

Pour des vitesses aux roues différentes et constantes, le coefficient de rigidité latérale joue sur la capacité du robot mobile à tourner en limitant la vitesse latérale. Lorsque le coefficient est assez élevé, le robot glisse un peu latéralement et réussit à suivre un cercle. Toutefois, pour un coefficient très faible, le robot dérape de façon incontrôlée et la vitesse latérale augmentant, le robot ne peut plus suivre un trajet.

### 3.8 Comportement angulaire du robot en fonction de la vitesse longitudinale

#### But

Montrer l'effet de la vitesse longitudinale sur la capacité du robot mobile à suivre un rayon de courbure idéal. Pour le modèle avec glissement seulement, observer et interpréter les états pertinents.

#### Protocole

- État initial : vitesses longitudinale, latérale et angulaire nulles.
- Terrain avec adhérence moyenne : sable
- Choisir un coefficient de rigidité latérale typique pour ce type de sol ( $C_\alpha = 2N\ deg^{-1}$ )
- Pour les vitesses longitudinales suivantes :  $v_{xDES} = \{0.4, 0.8, 1.2\} \text{ m/s}$  et pour les rayons de courbure désirés suivants :  $R_{DES} = \{2, 4, 6, 8, 12, 16, 20\} \text{ m}$  :
- Calculer la vitesse angulaire  $\Omega_{DES}$  et les vitesses linéaires des roues  $r\omega_{\{g,d\}}$  telles que si le robot se mouvait sur un sol sans glissement, il convergerait vers un cercle de rayon  $R_{DES}$  avec une vitesse longitudinale égale à  $v_{xDES}$ .  
ie:  $\Omega_{DES} = v_{xDES} / R_{DES}$ ,  $r\omega_g = v_{xDES} - b\Omega_{DES}$  et  $r\omega_d = v_{xDES} + b\Omega_{DES}$ .
- Enregistrer le rayon de courbure réellement suivi, la vitesse longitudinale suivie et la vitesse latérale moyenne (et maximale lorsqu'elle diffère de la moyenne).

### Résultats de simulations pour le modèle avec glissement

Tableau 3.5 : Vitesse longitudinale, vitesse latérale et rayon de courbure pour  $v_{xdes} = 0.4m/s$

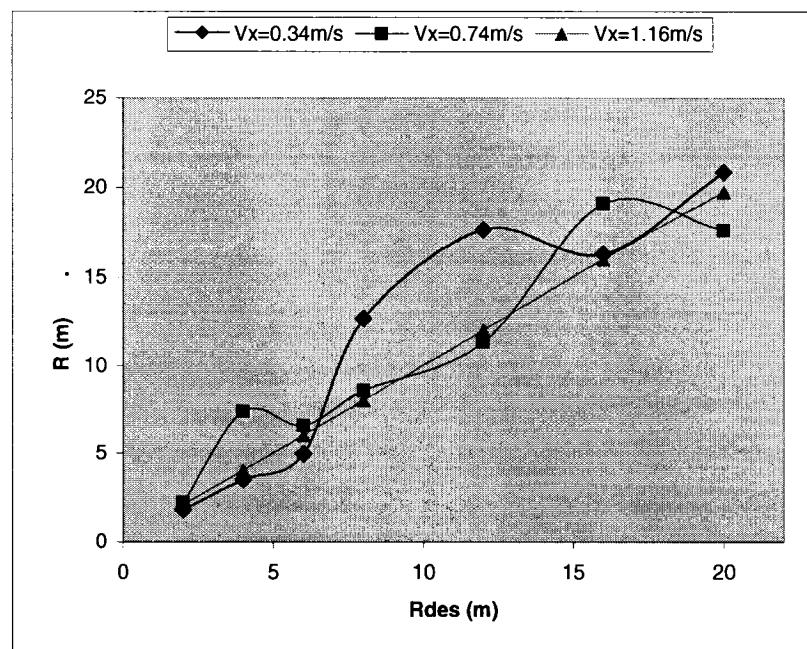
$R_{DES}$ (m)	$\Omega_{DES}$ (rad/s)	$r\omega_g$ (m/s)	$r\omega_d$ (m/s)	$v_x$ (m/s)	$v_x / v_{xDES}$ (m/s)	$R$ (m)	$R / R_{DES}$	$v_{ymoy}$ [ $v_{y\max}$ ] (m/s)
2	0.200	0.492	0.308	0.34	0.85	1.785	<b>0.893</b>	<b>0.050</b> [ <b>0.065</b> ]
4	0.100	0.446	0.354	0.34	0.85	3.485	<b>0.871</b>	<b>0.010</b> [ <b>0.045</b> ]
6	0.0667	0.4307	0.3693	0.34	0.85	4.97	<b>0.828</b>	<b>0.005</b> [ <b>0.050</b> ]
8	0.0500	0.4230	0.3770	0.35	0.88	12.67	<b>1.584</b>	<b>0.02</b> [ <b>0.06</b> ]
12	0.0333	0.4153	0.3847	0.34	0.85	14.7	<b>1.470</b>	<b>0.03</b> [ <b>0.04</b> ]
16	0.0250	0.4115	0.3885	0.34	0.85	16.35	<b>1.02</b>	<b>0.025</b> [ <b>0.045</b> ]
20	0.0200	0.4092	0.3908	0.34	0.85	20.85	<b>1.043</b>	<b>0.02</b> [ <b>0.05</b> ]

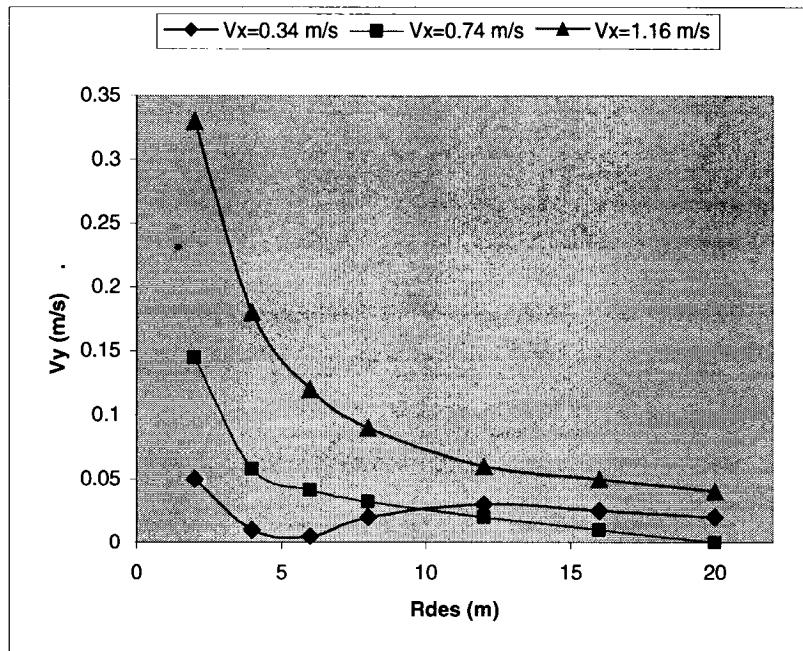
Tableau 3.6 : Vitesse longitudinale, vitesse latérale et rayon de courbure pour  $v_{xdes} = 0.8m/s$

$R_{DES}$ (m)	$\Omega_{DES}$ (rad/s)	$r\omega_g$ (m/s)	$r\omega_d$ (m/s)	$v_x$ (m/s)	$v_x / v_{xDES}$ (m/s)	$R$ (m)	$R / R_{DES}$	$v_{ymoy}$ [ $v_{y\max}$ ] (m/s)
2	0.400	0.984	0.616	0.74	0.925	2.19	<b>1.095</b>	<b>0.145</b>
4	0.200	0.892	0.708	0.74	0.925	7.38	<b>1.848</b>	<b>0.058</b>
6	0.133	0.861	0.739	0.74	0.925	6.61	<b>1.100</b>	<b>0.041</b>
8	0.100	0.846	0.754	0.74	0.925	8.57	<b>1.071</b>	<b>0.032</b>
12	0.067	0.830	0.769	0.74	0.925	11.32	<b>0.943</b>	<b>0.02</b> [ <b>0.04</b> ]
16	0.050	0.823	0.777	0.74	0.925	19.07	<b>1.192</b>	<b>0.01</b> [ <b>0.03</b> ]
20	0.040	0.8184	0.7816	0.74	0.925	17.54	<b>0.880</b>	<b>0.00</b> [ <b>0.02</b> ]

**Tableau 3.7 : Vitesse longitudinale, vitesse latérale et rayon de courbure pour  $v_{xdes} = 1.2m/s$** 

$R_{DES}$ (m)	$\Omega_{DES}$ (rad/s)	$r\omega_g$ (m/s)	$r\omega_d$ (m/s)	$v_x$ (m/s)	$v_x / v_{xDES}$ (m/s)	$R$ (m)	$R / R_{DES}$	$v_{ymoy}$ [ $v_{y\max}$ ] (m/s)
2	0.60	1.476	0.924	1.16	0.966	2.09	1.045	0.33
4	0.30	1.338	1.062	1.16	0.966	4.05	1.013	0.18
6	0.20	1.292	1.108	1.16	0.966	6.03	1.005	0.12
8	0.15	1.269	1.131	1.16	0.966	8.03	1.004	0.09
12	0.10	1.246	1.154	1.16	0.966	12.02	1.002	0.06
16	0.075	1.235	1.166	1.16	0.966	16.02	1.001	0.05
20	0.060	1.228	1.172	1.16	0.966	19.73	0.987	0.04

**Figure 3.13: Variation du rayon de courbure suivi sur le rayon de courbure désiré, pour différentes vitesses longitudinales**



**Figure 3.14: Vitesse latérale atteinte en fonction de la vitesse longitudinale et du rayon de courbure désiré**

### Analyse pour le modèle avec glissement

On observe premièrement, tel que démontré pour le test 3.5, que la vitesse longitudinale atteinte est toujours moins élevée que la vitesse linéaire des roues lorsque le robot est soumis à du glissement longitudinal des roues. Ainsi, pour une vitesse linéaire des roues de  $0.4\text{m/s}$ , la vitesse longitudinale atteinte est de  $0.34\text{m/s}$  soit 85% de la vitesse linéaire des roues. Pour une vitesse linéaire des roues de  $0.8\text{m/s}$  et  $1.2\text{m/s}$ , on obtient respectivement une vitesse longitudinale du robot de  $0.74\text{m/s}$  et  $0.8\text{m/s}$ , correspondant respectivement à 93% et 97% de la vitesse linéaire des roues. Il est intéressant de constater que la vitesse longitudinale atteinte est indépendante du rayon de courbure suivi ou désiré.

En ce qui concerne le rayon de courbure suivi en fonction du rayon de courbure désiré, illustré à la figure 3.13, on observe que pour les deux premiers essais ayant des vitesses longitudinales de  $0.34\text{m/s}$  et  $0.74\text{m/s}$ , le rayon de courbure suivi varie entre une fois et

deux fois le rayon de courbure désiré. Cela signifie que si on commande les vitesses des roues du robot en considérant aucun glissement afin qu'il suive un cercle ayant un rayon de courbure prescrit, le robot peut suivre réellement un cercle ayant un rayon de courbure jusqu'à 2 fois plus élevé. La relation entre  $R$  et  $R_{DES}$  est donc non linéaire, surtout pour les vitesses relativement basses du robot mobile. Toutefois, l'expérience à 1.16m/s montre que pour une vitesse longitudinale plus élevée, le robot suit très bien un cercle pour plusieurs rayons de courbures différents (rapport  $R/R_{DES} \approx 1$ ).

La figure 3.14 illustre la vitesse latérale atteinte en fonction de la vitesse longitudinale et du rayon de courbure désiré. On remarque que pour les trois essais, la vitesse latérale du robot mobile est, de façon générale, inversement proportionnelle au rayon de courbure du cercle qu'il tente de suivre. Cet état de fait semble indiquer que la vitesse latérale est directement proportionnelle à la vitesse angulaire du robot mobile. Plus le robot tente de suivre rapidement un cercle, plus sa vitesse angulaire doit être importante et plus il glisse latéralement. Une légère déviation de cette règle apparaît lorsque la vitesse est très faible (essai à 0.34m/s).

### **Conclusion**

Il a été observé que par rapport à un cercle de rayon de courbure désiré, un cercle de rayon de courbure différent est actuellement suivi par le robot mobile. Le rayon suivi dépend non linéairement de la vitesse longitudinale du robot, du glissement longitudinal, de la vitesse angulaire et du glissement latéral. Pour des vitesses longitudinales faibles à moyennes (0.34m/s et 0.74m/s), le rapport  $R/R_{DES}$  varie entre 1 et 2. Par contre, pour une vitesse plus élevée de 1.14m/s,  $R/R_{DES} \approx 1$ , il semble que la vitesse latérale, et donc le glissement latéral, soient proportionnels à la vitesse angulaire.

### 3.9 Comportement du robot soumis à des vitesses différentes aux roues et passant d'un sol adhérent à un sol moins adhérent

#### But

Montrer l'effet du changement de sol sur le comportement du robot mobile lorsqu'il avance et tourne. Pour le modèle avec glissement seulement, observer et interpréter les états pertinents.

#### Protocole

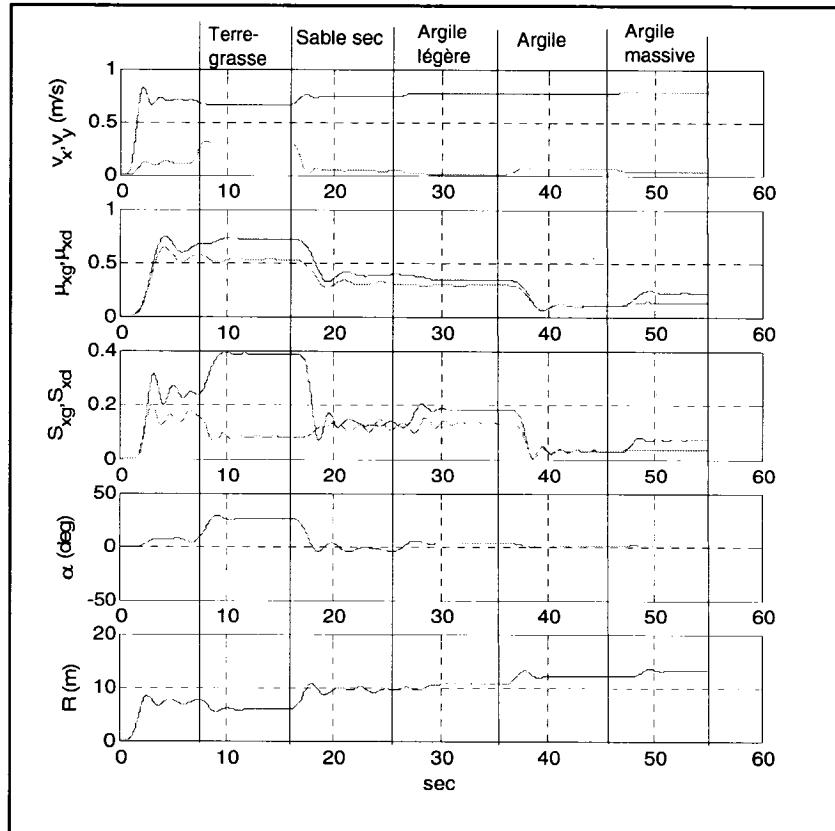
- État initial : vitesses longitudinale, latérale et angulaire nulles.
- Terrain avec une bonne adhérence : terre grasse
- Choisir un coefficient de rigidité latérale typique ( $C_\alpha = 2N \deg^{-1}$ )
- Appliquer des vitesses aux roues différentes, de manière à obtenir une vitesse longitudinale d'environ 0.8m/s et suivre un rayon de courbure d'environ 6m. ie :

$$\Omega_{DES} = 0.8 / 6 = 0.133 \text{ rad/s}, \quad r\omega_g = v_{xDES} + b\Omega_{DES} = 0.861 \text{ m/s},$$

$$r\omega_d = v_{xDES} - b\Omega_{DES} = 0.739 \text{ m/s}$$

- Commencer à simuler avec le sol terre grasse et changer de type de sol à chaque 10s pour les types de sol suivants : *sable sec, argile légère, argile, argile massive*.
- Enregistrer les vitesses longitudinales et latérales, l'adhérence longitudinale (rapport de traction/force normale), les glissements longitudinaux, l'angle de glissement et le rayon de courbure du chemin suivi.

### Résultats de simulations pour le modèle avec glissement



**Figure 3.15: Comportement du robot mobile passant sur des sols naturels de moins en moins adhérents (signaux filtrés)**

### Analyse pour le modèle avec glissement

Pour chaque changement de terrain, on observe une transition des états, puis une stabilisation de l'état. Concernant les vitesses longitudinale et latérale, on observe qu'elles se stabilisent à différentes valeurs selon le sol. C'est pour la terre grasse que la vitesse latérale est la plus élevée, ce qui est aussi confirmé par l'angle de glissement se situant à  $\pm 25^\circ$ , contrairement aux autres sols où il est plus faible. Ceci s'explique par le fait que le coefficient de rigidité latérale choisi constant pour tous les essais est typique pour le sable mais est en réalité en-dessous du coefficient typique pour la terre grasse, qui est plus élevé vu l'adhérence longitudinale plus élevée. Par conséquent, on se retrouve avec un sol de terre grasse plus glissant latéralement qu'il le devrait.

Pour tous les essais, le glissement des roues de gauche est sensiblement toujours supérieur au glissement des roues de droite. Ceci est dû au fait que les vitesses des roues à gauche sont plus élevées que celles des roues à droite. Un glissement plus élevé sur les roues de gauche dans tous les cas signifie aussi une adhérence plus élevée pour les roues de gauche, ce qui est aussi exposé dans la figure 3.15. Le robot mobile maintient un moment angulaire négatif et suit un rayon de courbure qui dépend également du type de sol parcouru.

### **Conclusion**

Cet essai montre que pour des vitesses aux roues différentes, un changement de terrain du robot mobile aura pour conséquence de modifier les valeurs stationnaires de ses états comme : ses vitesses, ses glissements, son angle de glissement et ses coefficients adhérence (et donc ses forces de traction). Ceci a pour effet que le rayon de courbure du cercle qu'il suivra changera lui aussi en fonction du sol.

## **3.10 Comportement du robot soumis à des vitesses égales aux roues, les roues à gauche sur un sol relativement adhérent et les roues à droite sur un sol moins adhérent**

### **But**

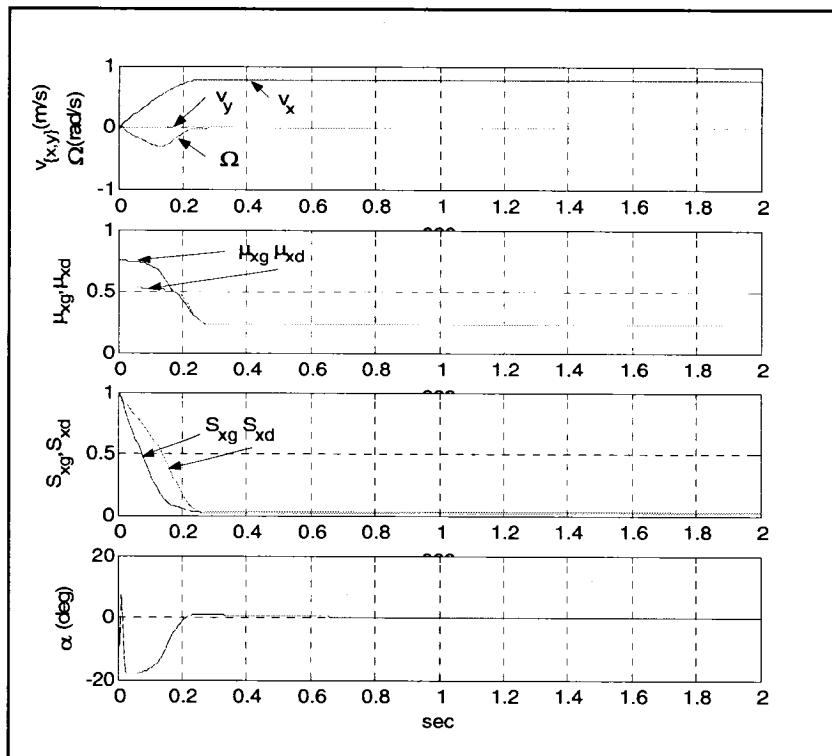
Montrer l'effet du roulement sur un sol non uniforme sur le comportement du robot mobile. Pour le modèle avec glissement seulement, observer et interpréter les états pertinents.

### **Protocole**

- État initial : vitesses longitudinale, latérale et angulaire nulles.
- Terrain : terre grasse sur les roues de gauche et sable sur les roues de droite.
- Choisir un coefficient de rigidité latérale typique ( $C_\alpha = 2N \deg^{-1}$ )
- Appliquer des vitesses aux roues égales de 0.8m/s ie :  $r\omega_g = r\omega_d = 0.8m/s$

- Enregistrer les vitesses longitudinale, latérale, angulaire, l'adhérence longitudinale (rapport de traction/force normale), les glissements longitudinaux et l'angle de glissement.

### **Résultats de simulations pour le modèle avec glissement**



**Figure 3.16: Comportement du robot mobile passant sur des sols naturels de moins en moins adhérents (signaux filtrés)**

**Tableau 3.8 : États stationnaires pour un essai avec sols différents sur les roues à gauche et à droite du robot.**

Variable	Valeur en régime permanent
Vitesses du robot : $v_x, v_y, \Omega$	$0.778\text{m/s}, 0.005\text{m/s}, -0.0113\text{rad/s}$
Glissement long. : $S_{xg}, S_{xd}$	$2.07\%, 3.34\%$
Facteur de traction sur force normale $\mu_{xg}, \mu_{xd}$	$0.2308, 0.2308$
Angle de glissement : $\alpha$	$0.13^\circ$

### Analyse pour le modèle avec glissement

Le robot dont les roues de droite se meuvent sur un sol moins adhérent aura, naturellement, un plus fort glissement sur les roues à droite que sur les roues à gauche. Par contre, l'adhérence des roues de gauche restera plus élevée, car la courbe de traction en fonction du glissement est plus prononcée et plus élevée. De même, pour un même glissement à gauche et à droite, la traction à gauche sera supérieure.

On remarque dans la figure 3.16 que les deux glissements débutent à 100% et diminuent progressivement, le glissement des roues de droite demeurant toujours supérieur à celui des roues de gauche. La force de traction des roues à gauche est plus élevée en débutant et un moment angulaire assez élevé est appliqué au robot mobile tournant et glissant latéralement. À 0.2s les glissements sont tels que les forces de traction deviennent égales d'un côté et de l'autre du véhicule. L'angle de glissement et la vitesse latérale se stabilisent à de faibles valeurs. Les valeurs stationnaires de tous les signaux sont illustrées dans le tableau 3.8. Les trois vitesses se stabilisent à une valeur constante, de même que les glissements aux roues, de sorte que les forces de traction soient égales. Ceci implique un moment angulaire nul et une vitesse angulaire constante.

Si on désire voir sous quelles conditions les signaux décrits plus haut deviennent constants, on peut égaler à zéro l'expression des accélérations du centre de masse :

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^{-1}[(F_{xg} - R_{xg}) + (F_{xd} - R_{xd})] + v_y \Omega \\ m^{-1}[F_{yaw} + F_{yar}] - v_x \Omega \\ I^{-1}[b((F_{xd} - R_{xd}) - (F_{xg} - R_{xg})) + a(F_{yaw} - F_{yar})] \end{bmatrix} = 0 \quad (3.8)$$

En réorganisant :

$$\begin{aligned} F_{xg} &= 2\mu(S_{xg})F_{N_{roue}} = \frac{-bm v_y \Omega + 2bR_{xg} + amv_x \Omega - 2aF_{yar}(\alpha)}{2b} \\ F_{xd} &= 2\mu(S_{xd})F_{N_{roue}} = \frac{-bm v_y \Omega + 2bR_{xd} - amv_x \Omega + 2aF_{yar}(\alpha)}{2b} \\ F_{yaw}(\alpha) &= -F_{yar}(\alpha) + mv_x \Omega \end{aligned} \quad (3.9)$$

Et on obtient les valeurs suivantes pour le glissement stationnaire:

$$\begin{aligned} S_{xg_{STAT}} &= \mu_{\text{terre grasse}}^{-1} \left( \frac{-bmv_y \Omega + 2bR_{xg} + amv_x \Omega - 2aF_{yar}(\alpha)}{4bF_{N_{roue}}} \right) \\ S_{xd_{STAT}} &= \mu_{\text{sable sec}}^{-1} \left( \frac{-bmv_y \Omega + 2bR_{xd} - amv_x \Omega + 2aF_{yar}(\alpha)}{4bF_{N_{roue}}} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Si les termes à l'intérieur de la fonction  $\mu^{-1}(\cdot)$  sont constants, les glissements sont alors constants en régime permanent. Étant donné que  $\mu_{\text{terre grasse}}(S) \geq \mu_{\text{sable}}(S) \forall S$ , alors pour un même terme  $k$ ,  $\mu_{\text{terre grasse}}^{-1}(k) \leq \mu_{\text{sable}}^{-1}(k) \forall k$ , ie : pour un même terme dans la fonction  $\mu^{-1}(\cdot)$ , le glissement pour le terrain *sableux* sera plus élevé que pour le terrain *terre grasse*, où l'adhérence est plus forte.

### **Conclusion**

Dans le cas où la moitié des roues du robot se déplacerait sur un type de sol et l'autre moitié sur un autre type de sol à adhérence différente, nous remarquons l'effet suivant: les roues sur le sol le moins adhérent vont glisser davantage et le robot aura tendance à tourner vers le sol le moins adhérent. Pour des vitesses aux roues constantes, le robot tournera et après un moment, ses glissements aux roues, ses vitesses et ses forces deviendront constantes : il tournera légèrement en glissant un peu latéralement et longitudinalement.

### 3.11 Étude du phénomène d'arrêt-glisсement

#### But

Étudier plus en détail le phénomène d'arrêt glissement qui se produit lorsque le couple appliqué aux roues est inférieur au couple critique d'entraînement et déterminer la nature physique ou numérique de ce phénomène.

#### Protocole

- État initial : vitesses longitudinale, latérale et angulaire nulles, couples aux roues nuls.
- Terrain : terre grasse
- Appliquer des couples aux roues augmentant linéairement avec le temps ( $\tau_g = \tau_d = 6t$ ).
- Simuler pendant 10s et enregistrer tous les états pertinents pour les deux types de modèle.
- Effectuer la simulation pour des pas de simulation  $\Delta t$  de 0.01s, 0.001s et 0.0001s, avec un résolveur numérique d'ordre élevé (ordre 5).

#### Analyse pour le modèle avec glissement

Une méthode connue pour déterminer si un phénomène est physique ou numérique consiste à effectuer des simulations en appliquant un pas de simulation toujours de plus en plus petit et d'observer si le phénomène, physique ou numérique, continue de se manifester. Si l'effet observé est numérique, il disparaîtra alors en diminuant le pas de simulation, sinon il s'agit probablement d'un phénomène physique. La figure 3.17 montre le phénomène oscillatoire d'arrêt glissement pour des pas de simulation toujours de plus en plus faibles. On remarque que le phénomène oscillatoire existe même pour des pas de simulation très petits. Si on regarde ce qui se passe à plus petite échelle, à la figure 3.19, on remarque que les oscillations persistent et augmentent en fréquence au fur et à mesure que l'on diminue le pas. Ceci suggère que le phénomène oscillatoire d'arrêt glissement est de nature physique.

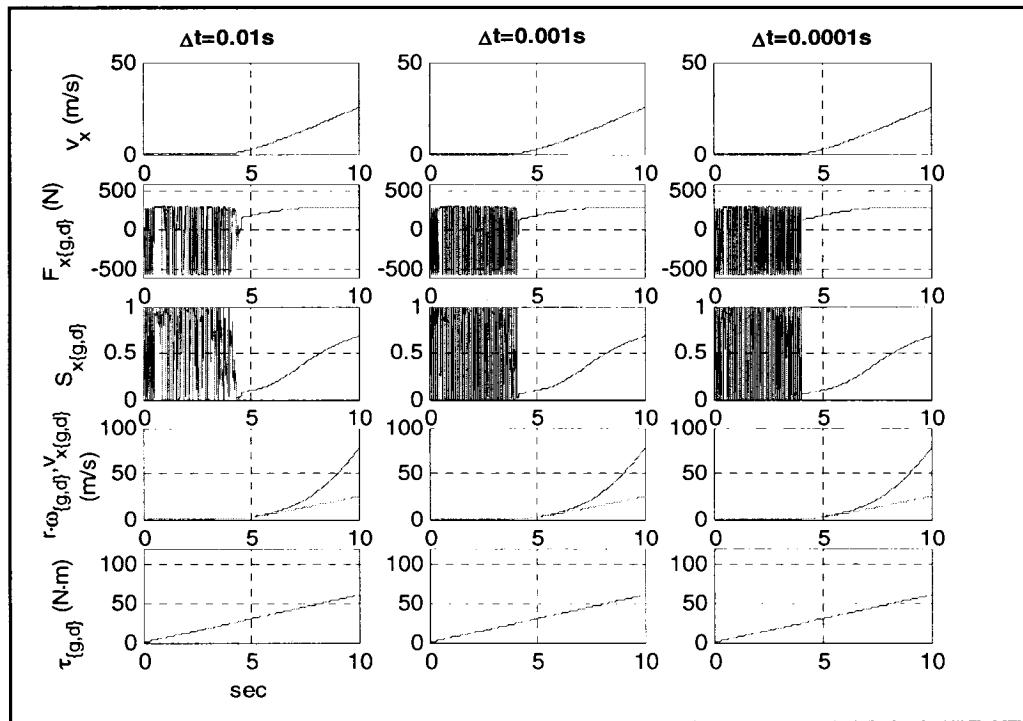


Figure 3.17: Phénomène d'arrêt glissement pour différents pas de simulations

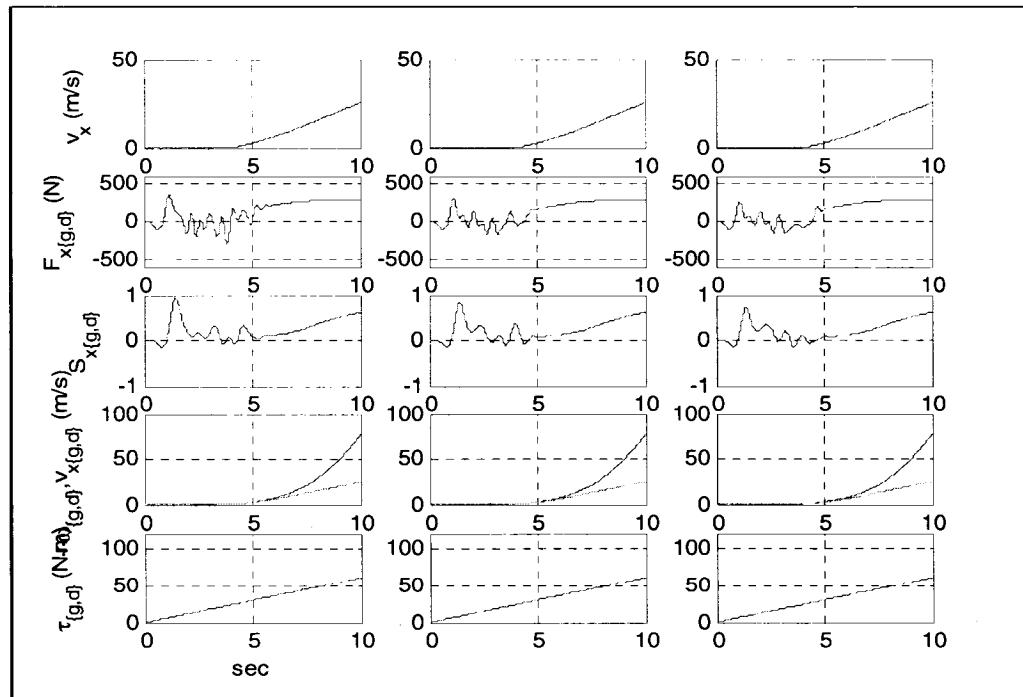


Figure 3.18: Phénomène d'arrêt glissement pour différents pas de simulations (signaux filtrés)

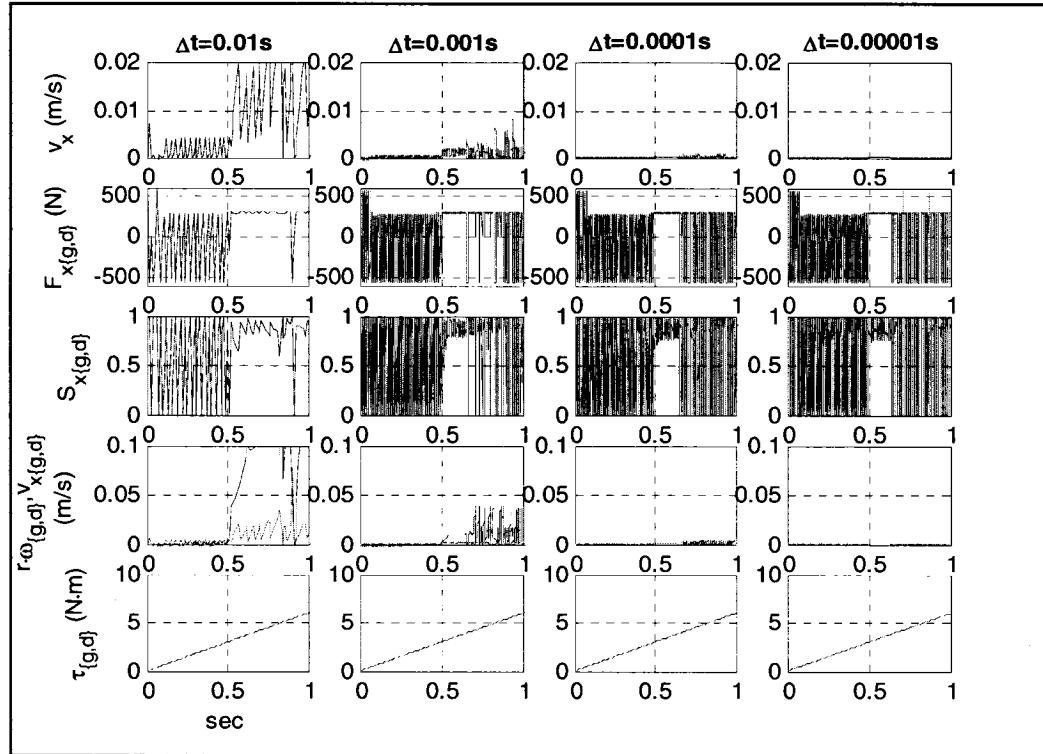


Figure 3.19: Phénomène d'arrêt glissement pour différents pas de simulations (petite échelle)

Nous tentons maintenant à expliquer en quoi la caractéristique oscillatoire d'arrêt glissement est reliée aux équations définissant intrinsèquement le modèle. Si on observe plus attentivement ce qui se passe lorsque la vitesse longitudinale du robot est nulle au départ, la première variation positive de couple va provoquer la chaîne causale suivante :

$$\tau_{\{g,d\}} > 0 \rightarrow \omega_{\{g,d\}} > 0 \rightarrow (r\omega_{\{g,d\}} - \underbrace{v_{x\{g,d\}}}_0) > 0 \rightarrow S_{x\{g,d\}} > 0 \rightarrow F_{x\{g,d\}} > 0 \rightarrow v_{x\{g,d\}} > 0 \quad (3.11)$$

Donc, un delta de couple sur une roue appliquera un delta de force de traction et provoquera un incrément très petit de vitesse longitudinale. De plus, dans ces circonstances, considérons ces deux équations tirées du chapitre 2 :

$$I_{roue} \dot{\omega}_{\{g,d\}} = G(\tau_{\{g,d\}}, 0.5rF_{x\{g,d\}}, \omega_{\{g,d\}}) \quad (3.12)$$

$$G(F, f, v) = \begin{cases} F - fsign(v) & v \neq 0 \\ 0 & v = 0, |F| \leq f \\ F - fsign(F) & v = 0, |F| > f \end{cases} \quad (3.13)$$

qui, dans le cas où  $\omega_{\{g,d\}} > 0$ , l'équation 3.12 et 3.13 devient:

$$I_{roue} \dot{\omega}_{\{g,d\}} = \tau_{\{g,d\}} - 0.5rF_{x\{g,d\}} sign(\omega_{\{g,d\}}) \quad (3.14)$$

Dès lors, si l'incrément en force de traction dépasse l'incrément en couple appliqué sur les roues :

$$0.5rF_{x\{g,d\}} > \tau_{\{g,d\}} \quad (3.15)$$

Alors, en vertu de l'équation 3.14, la chaîne de causalité suivante va se produire :

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{\{g,d\}} < 0 \rightarrow \omega_{\{g,d\}} \approx 0 \rightarrow (r\omega_{\{g,d\}} - v_{x\{g,d\}}) < 0 \rightarrow S_{x\{g,d\}} < 0 \rightarrow F_{x\{g,d\}} < 0 \\ \rightarrow \dot{v}_{x\{g,d\}} < 0 \rightarrow v_{x\{g,d\}} \approx 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

rendant à nouveau la vitesse longitudinale à zéro. Bref, sous l'action d'un nouvel incrément très petit de couple, le phénomène décrit par 3.11 et 3.18 se produit à répétition et provoque une variation oscillatoire des états suivants : vitesses des roues, glissements longitudinaux, forces de traction et vitesse longitudinale du robot mobile.

Même si nous observons que le phénomène oscillatoire provient des équations différentielles « physiques » définissant le modèle, force est de constater que « physiquement » les oscillations ne seraient pas aussi rapides. À cet effet, nous avons tenté de filtrer les signaux oscillants. Les résultats sont montrés à la figure 3.18 (signaux filtrés) qu'il est aisément de comparer avec la figure 3.17 (signaux non filtrés). Cette figure est révélatrice, on y observe que même si les forces de traction et les glissements sont filtrés, ils varient quand même de positifs à négatifs tout au long du départ du robot mobile. Les forces de traction sont donc physiquement oscillatoires durant la période de départ du robot, lorsque le couple appliqué au roues est très faible. Dans l'éventualité où le phénomène aurait été purement numérique, un filtrage des états aurait montré un signal plus continu, non oscillatoire.

### Conclusion

Une étude plus approfondie du phénomène oscillatoire d'arrêt glissement, observé lors des essais en boucle ouverte, nous a permis de relier la caractéristique oscillatoire aux équations différentielles et au bloc de friction discontinu utilisé pour simuler la friction.

Nous avons vu que plus nous utilisons un pas de simulation petit, plus la fréquence d'oscillation est élevée, sans toutefois disparaître, ce qui suggère un phénomène dû aux équations « physiques » du modèle. Nous avons de plus filtré les signaux oscillatoires et observé qu'ils conservent leur caractéristique, ce qui tente à confirmer la nature physique du phénomène.

### 3.12 Conclusion du chapitre

Nous avons étudié le comportement des deux modèles, sans et avec glissement, dérivés du chapitre précédent en utilisant différents stimulus en entrées, soient : les couples appliqués aux roues, les vitesses des roues et les types de sol. Nous avons vu à la suite lors des cinq premiers essais que pour le cas du modèle avec glissement, les relations entre les accélérations longitudinale et angulaire du robot sont non linéaires et ceci nous a amenés à considérer une variation des vitesses angulaires des roues. Cet asservissement des roues sera développé ultérieurement à la section 5.1. Finalement, nous avons étudié plus en détail le phénomène d'arrêt glissement et avons conclu que les effets perçus en simulation, lorsque le couple appliqué aux roues est inférieur au couple critique d' entraînement, suggèrent un phénomène physique et non numérique.

Enfin, nous avons exploré le comportement des modèles pour différents types de sol, soient des sols naturels, des sols enneigés ou glacés ainsi qu'un sol avec adhérence quasi-nulle et un sol avec adhérence idéale. Les effets observés sont « naturels » et correspondent au comportement que l'on pourrait facilement imaginer pour un robot mobile réel sur un sol avec adhérence réduite, ou encore à celui d'une voiture sur la neige ou la glace. Ces essais valident donc, préliminairement à l'étude pratique, les modèles utilisés en plus de constituer une étude approfondie de ceux-ci.

## Chapitre 4 – Contrôle pour le suivi de chemin

Ce chapitre est destiné en premier lieu à la dérivation d'un contrôleur de suivi de chemin pour le modèle sans glissement. Ce contrôleur est construit sous l'hypothèse d'une absence de glissement longitudinal et latéral. Il se base sur la linéarisation exacte par retour d'états et sur les techniques de contrôle de suivi de chemin géométrique décrites dans [DESANTIS95]. Le bon fonctionnement du contrôleur est ensuite montré en simulation sur un terrain idéal sans glissement.

La seconde partie du chapitre s'attarde à montrer en quoi le contrôleur développé est insuffisant lorsque le robot est soumis à un glissement longitudinal et latéral non négligeable (ie : modèle avec glissement). Lors du prochain chapitre, des actions correctives menant à tenir compte explicitement du glissement longitudinal et latéral seront mises en œuvre et un nouveau contrôleur dynamique permettra d'étendre la fonctionnalité de celui-ci aux terrains à adhérence limitée.

## 4.1 Contrôleur de suivi de chemin pour le modèle sans glissement

### 4.1.1 Définition du problème de suivi de chemin

Il importe de définir de façon formelle le problème de suivi de chemin. Celui-ci se formule ainsi :

*Soit un chemin de référence à suivre  $\Pi$  constitué d'un ensemble de points  $(x_{REF}, y_{REF})$  de référence exprimé dans le repère inertiel, de même qu'un ensemble d'orientations de référence  $(\theta_{REF})$ , de rayons de courbure  $(\rho_{REF})$  et de vitesse longitudinale de référence  $(v_{xREF})$ , déterminer les couples à fournir aux roues de manière à ce que la configuration (position/orientation) et la vitesse longitudinale du robot mobile tendent asymptotiquement vers celles définies pour le chemin de référence.*

Il est important de différencier le suivi de trajectoire du suivi de chemin géométrique dont il est question ici. Le suivi de trajectoire consiste à suivre une trajectoire constituée d'un ensemble de coordonnées généralisées définies pour chaque instant. Le suivi de chemin géométrique est quant à lui paramétrisé dans l'espace au lieu du temps. Pour le suivi géométrique, le chemin lui-même est plus important que l'historique de la trajectoire. Il a été montré dans [SARKAR94] que le suivi de chemin géométrique est plus approprié que le suivi de trajectoire pour le contrôle de robot mobile. Le présent contrôleur de suivi de chemin est construit sous l'hypothèse d'une absence de glissement et est testé pour le modèle sans glissement.

#### 4.1.2 Définition et description des erreurs de navigation

La stratégie de contrôle utilise les erreurs de navigation définies de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 e_{lat} &= \min\{|(x - x_{REF})^2 + (y - y_{REF})^2|, \forall x_{REF}, y_{REF} \in \Pi\} && \text{Erreur latérale} \\
 e_\theta &= \theta - \theta_{REF} && \text{Erreur d'orientation} \quad (4.1) \\
 e_\Omega &= \dot{\theta} - \dot{\theta}_{REF} && \text{Erreur de vitesse angulaire} \\
 e_{vx} &= v_x - v_{xREF} && \text{Erreur de vitesse longitudinale}
 \end{aligned}$$

Les erreurs de suivi sont définies par rapport au point sur le chemin étant le plus près géométriquement du centre de masse du robot mobile. Un repère  $L_{xy}$  est tel que l'axe latéral  $L_y$  du repère passe en tout temps par le centre de masse du robot mobile et son axe  $L_x$  est tangentiel au chemin. La figure 4.1 montre les erreurs de suivi de chemin du robot mobile par rapport à son chemin. Les erreurs d'orientation et latérale sont montrées.

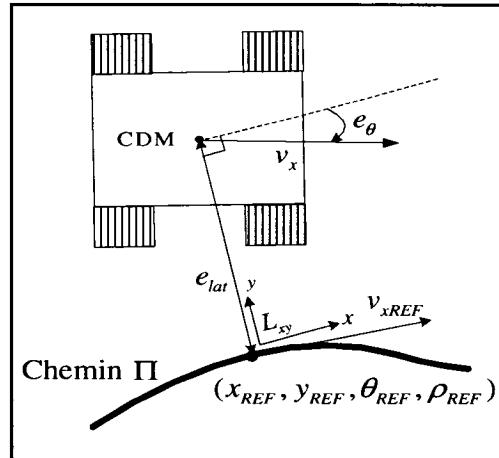


Figure 4.1: Erreurs de suivi de chemin

### 4.1.3 Première étape : linéarisation partielle du modèle d'état

La première partie du contrôleur se base sur la linéarisation exacte. La technique de linéarisation exacte se base sur l'annulation explicite des non linéarités. Elle a l'avantage de linéariser le modèle autrement non linéaire mais elle est sensible aux bruits, aux erreurs de modélisation et aux saturations des actuateurs.

Nous reprenons le modèle d'état non linéaire développé pour le modèle sans glissement au chapitre 2 (équation 2.26) :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4.1)$$

$$\text{où } f(x) = \begin{bmatrix} S(q)\eta \\ (S^T M S)^{-1} (-S^T M \dot{\eta}) \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ (S^T M S)^{-1} S^T B \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Où, en explicitant les états :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v}_x \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)v_x \\ \sin(\theta)v_x \\ \Omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2/mr & 2/mr \\ -2b/Ir & 2b/Ir \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_g \\ \tau_d \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Un système de cette forme SISO (single-input, single-output) est linéarisable *au sens entrée-état* si et seulement si [KHALIL02]:

Il existe une région  $U \subset R^n$ , contenant l'origine, telle que

1. *Les champs vectoriels  $\Delta_1 = \{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g\}$  sont linéairement indépendants dans  $U$ .*
2. *L'ensemble  $\Delta_2 = \{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g\}$  est involutif dans  $U$ .*

Pour les systèmes MIMO (multi-input multi-output), cette condition se transforme de la manière suivante :

1. *Les champs vectoriels  $\Delta_1 = \{g_i, ad_f g_i, \dots, ad_f^{n-1} g_i\}$  ( $0 \leq i \leq m$ ) sont linéairement indépendants dans  $U$ .*
2. *L'ensemble  $\Delta_2 = \{g_i, ad_f g_i, \dots, ad_f^{n-2} g_i\}$  ( $0 \leq i \leq m$ ) est involutif dans  $U$ .*

La première condition<sup>\*</sup> consiste à tester la contrôlabilité du système. Elle est toujours satisfaite, c'est-à-dire que le rang de la matrice est égal au nombre d'états.

$$\text{rang}(\Delta_1) = n = 5 \quad (4.6)$$

La deuxième condition<sup>\*</sup> consiste en premier lieu à calculer la distribution  $\Delta_2 = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_k\}$  et à vérifier son involutivité en vérifiant que chacun des crochets de lie appliqués sur les éléments est inclus dans la distribution elle-même. C'est-à-dire :

$$e_i \in \Delta_2 \quad e_j \in \Delta_2 \Rightarrow [e_i, e_j] \in \Delta_2 \quad 1 \leq i, j \leq k \quad (4.7)$$

On peut vérifier que pour le système à l'étude, la deuxième condition n'est pas satisfaite, Le système non linéaire est par conséquent *contrôlable mais non entièrement linéarisable au sens entrée-états pour tous les états*.

On peut obtenir directement une linéarisation partielle en choisissant une loi de contrôle qui annule les termes non linéaires de la deuxième partie du modèle d'état. On désire trouver une loi de commande  $u$  tel que le modèle d'état :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= S\eta \\ \dot{\eta} &= (S^T MS)^{-1}[S^T Bu - S^T M\dot{S}\eta] \end{aligned} \quad (4.8)$$

devienne sous l'application de la commande  $u$  :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= S(q)\eta \\ \dot{\eta} &= v \end{aligned} \quad (4.9)$$

où  $v$  est un contrôle auxiliaire trouvé ultérieurement. La loi de commande s'obtient immédiatement en solvant pour  $u$  l'équation suivante :

$$v = (S^T MS)^{-1}[S^T Bu - S^T M\dot{S}\eta] \quad (4.10)$$

On obtient ainsi la loi de commande suivante :

$$u = (S^T B)^{-1}(S^T MSv + S^T M\dot{S}\eta) \quad (4.11)$$

Ou, de manière plus explicite :

---

<sup>\*</sup> Les détails des calculs sont omis, car très longs.

$$\begin{bmatrix} \tau_g \\ \tau_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{4b}(bm v_1 - I v_2) \\ \frac{r}{4b}(bm v_1 + I v_2) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

L'utilisation de cette loi de commande permet de réécrire le modèle d'état sous la forme :

$$\dot{x} = F(x) + G(x)v$$

$$\text{avec } F(x) = \begin{bmatrix} S(q)\eta \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } G(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{2x2} \end{bmatrix}$$

Qui donne le modèle d'état final partiellement linéarisé suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v}_x \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)v_x \\ \sin(\theta)v_x \\ \Omega \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{États non linéaires} \\ \text{États linéaires} \end{array} \right\} \quad (4.14)$$

La prochaine figure montre un schéma du système partiellement linéarisé.

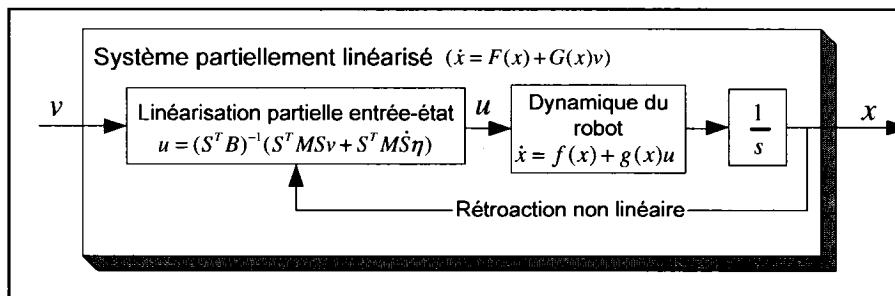


Figure 4.2: Modèle sans glissement partiellement linéarisé

Dans un contrôleur de suivi de chemin, le contrôle auxiliaire  $v$  peut être calculé tel que la dynamique des erreurs de vitesses longitudinale et angulaire converge vers zéro, provoquant ainsi un suivi du chemin par le robot mobile. C'est ce que nous verrons dans la section qui suit. Cette linéarisation peut être vue comme un *contrôleur dynamique* qui fait en sorte que l'accélération longitudinale et angulaire tend vers les accélérations longitudinale et angulaire désirées, fournies par le contrôle auxiliaire  $v$ .

#### 4.1.4 Deuxième étape : contrôleur cinématique

Le contrôleur cinématique a pour but de trouver les vitesses et accélérations à appliquer au robot qui feront en sorte que les erreurs de navigation convergent vers zéro, provoquant ainsi une convergence du chemin du robot vers le chemin de référence.

On débute en définissant un vecteur d'erreurs qui représente les erreurs *dans le repère solidaire avec le robot mobile*. Ces erreurs sont fonction des états et des paramètres du chemin de référence.

$$\begin{bmatrix} e_{long} \\ e_{lat} \\ e_\theta \\ e_{vx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{REF}) & \sin(\theta_{REF}) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_{REF}) & \cos(\theta_{REF}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_{REF} \\ y - y_{REF} \\ \theta - \theta_{REF} \\ v_x - v_{REF} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Étant donné que l'axe  $L_y$  du repère se déplaçant sur le chemin de référence passe par le centre de masse du robot mobile, l'erreur longitudinale  $e_{long}$  est nulle et sa dérivée temporelle aussi. L'expression impliquant l'erreur longitudinale nous permettra sous peu de calculer une vitesse angulaire de référence.

En dérivant le vecteur d'erreur par rapport au temps et en utilisant les identités trigonométriques suivantes :

$$\begin{aligned} \cos(e_\theta) &= \cos(\theta - \theta_{REF}) = \cos(\theta)\cos(\theta_{REF}) + \sin(\theta)\sin(\theta_{REF}) \\ \sin(e_\theta) &= \sin(\theta - \theta_{REF}) = \sin(\theta)\cos(\theta_{REF}) - \cos(\theta)\sin(\theta_{REF}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

On obtient :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{long} \\ \dot{e}_{lat} \\ \dot{e}_\theta \\ \dot{e}_{vx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \cos(e_\theta) + \Omega_{REF} e_{lat} - v_{xREF} \cos(\theta_{REF}) \\ v_x \sin(e_\theta) \\ \dot{\theta} - \dot{\theta}_{REF} \\ \dot{v}_x - \dot{v}_{xREF} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

En assumant que l'erreur d'orientation sera suffisamment petite, on peut faire l'approximation que  $\sin(e_\theta) \approx e_\theta$ .

L'erreur longitudinale étant nulle, il est possible d'extraire de l'équation suivante

$$v_x \cos(e_\theta) + \Omega_{REF} e_{lat} - v_{xREF} \cos(\theta_{REF}) = 0 \quad (4.18)$$

Et ainsi isoler de cette expression la vitesse angulaire de référence :

$$\Omega_{REF} = \frac{v_{xREF} \cos(\theta_{REF}) - v_x \cos(e_\theta)}{e_{lat}} \quad (4.19)$$

Il est possible de contrôler l'erreur de vitesse longitudinale et l'erreur d'orientation de la manière suivante en posant les dérivées des erreurs à un nouveau contrôle  $v$  [DESANTIS95] :

$$\begin{aligned} \dot{e}_{vx} &= v_1 \\ \dot{e}_\Omega &= v_2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Il est maintenant possible de décrire sous forme de modèle d'état quasi-linéaire la dynamique des erreurs de suivi de chemin.

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Ce + Dv \\ \begin{bmatrix} \dot{e}_{lat} \\ \dot{e}_\theta \\ \dot{e}_\Omega \\ \dot{e}_{vx} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & v_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{lat} \\ e_\theta \\ e_\Omega \\ e_{vx} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Ce système linéaire peut être stabilisé à l'aide de la loi de commande suivante :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{vx1} e_{vx} - \frac{K_{vx2}}{s} e_{vx} \\ -K_{\theta 1} \dot{e}_\theta - K_{\theta 2} e_\theta - \frac{K_{\theta 3}}{v_{xREF}} e_{lat} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

La dynamique des erreurs est alors décrite en Laplace par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} e_{vx}(s^2 + K_{vx1}s + K_{vx2}) &= e_{vx} p_{vx}(s) = 0 \\ e_\theta(s^3 + K_{\theta 1}s^2 + K_{\theta 2}s + K_{\theta 3}) &= e_\theta p_\theta(s) = 0 \quad \text{Note: } \dot{e}_{lat} \approx v_x e_\theta \end{aligned} \quad (4.23)$$

Le polynôme se réécrit aussi sous la forme :

$$\begin{aligned} p_{vx}(s) &= (s - p_{vx1})(s - p_{vx2}) = 0 \\ p_\theta(s) &= (s - p_{\theta 1})(s - p_{\theta 2})(s - p_{\theta 3}) = 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

où  $p_{vx_i}$  et  $p_{\theta_j}$  sont des pôles devant être choisis dans le plan complexe gauche. Les gains se trouvent alors facilement en fonction des pôles choisis.

$$\begin{aligned} K_{vx1} &= -p_{vx1} - p_{vx2} \\ K_{vx2} &= p_{vx1} p_{vx2} \\ K_{\theta1} &= p_{\theta1} p_{\theta2} + p_{\theta1} p_{\theta3} + p_{\theta2} p_{\theta3} \\ K_{\theta2} &= -(p_{\theta1} + p_{\theta2} + p_{\theta3}) \\ K_{\theta3} &= \frac{-p_{\theta1} p_{\theta2} p_{\theta3}}{v_{xREF}} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Note : L'approximation  $\dot{e}_{lat} \approx v_x e_\theta$  est valide pour les petites erreurs d'orientation. Étant donné que  $v_x \rightarrow v_{xREF}$ , il est alors possible d'utiliser l'approximation :  $e_{lat} \approx v_{xREF} \int e_\theta dt$  [DESANTIS95].

La dernière étape consiste à exprimer la commande  $v$  issue de la linéarisation partielle entrée-état en fonction du nouveau contrôle  $v$  que l'on vient de trouver. Rappelons que nous avons obtenu le modèle d'état suivant issu de l'équation (4.14) :

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Où les états  $v_x$  et  $\Omega$  sont déjà linéarisés par la loi de commande 4.11. En explicitant l'équation 4.20, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{vx} \\ \dot{e}_\Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x - \dot{v}_{xREF} \\ \dot{\Omega} - \dot{\Omega}_{REF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_{REF} + v_1 \\ \dot{\Omega}_{REF} + v_2 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Finalement, en remplaçant l'équation 4.26 dans l'équation 4.27 on peut trouver le contrôle  $v$  en fonction du nouveau contrôle intermédiaire  $v$ , ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_{xREF} + v_1 \\ \dot{\Omega}_{REF} + v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_{xREF} - K_{vx1} e_{vx} - \frac{K_{vx2}}{s} e_{vx} \\ \dot{\Omega}_{REF} - K_{\theta1} \dot{e}_\theta - K_{\theta2} e_\theta - \frac{K_{\theta3}}{v_{xREF}} e_{lat} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

La dernière expression permet de trouver une accélération linéaire et angulaire telle que si l'accélération linéaire et angulaire du robot mobile égale celle-ci, le robot convergera alors vers son chemin désiré. La prochaine figure représente graphiquement les différents contrôles qui permettent d'amener le robot mobile vers son chemin désiré.

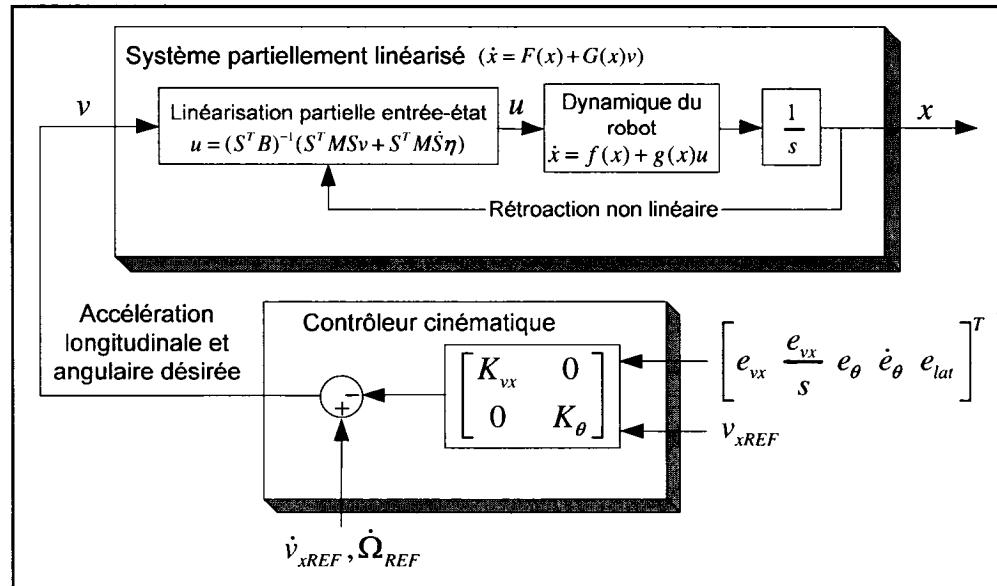


Figure 4.3: Contrôleur de suivi de chemin pour le modèle sans glissement

### 4.1.5 Contrôleur de suivi de chemin complet

#### Bloc de navigation

La figure 4.4 montre graphiquement le contrôleur de suivi de chemin parmi le système d'asservissement complet, incluant le modèle du robot mobile et la partie navigation. Le contrôleur de suivi de chemin est constitué des deux parties développées respectivement aux sections 4.1.3 et 4.1.4. Le contrôleur utilise en entrée les erreurs de suivi de chemin qui sont calculées par un bloc de navigation. Le bloc de navigation effectue les tâches suivantes :

- À l'aide des coordonnées généralisées, il trouve le point le plus près du chemin de référence.
- Il calcule les erreurs de navigation qui sont essentiellement des différences entre les états (coordonnées généralisées, vitesse) du robot mobile et les paramètres du chemin de référence, pris au point du chemin le plus près du robot mobile à l'instant  $t$ .

#### Résumé schématique du contrôleur de suivi de chemin pour le modèle sans glissement

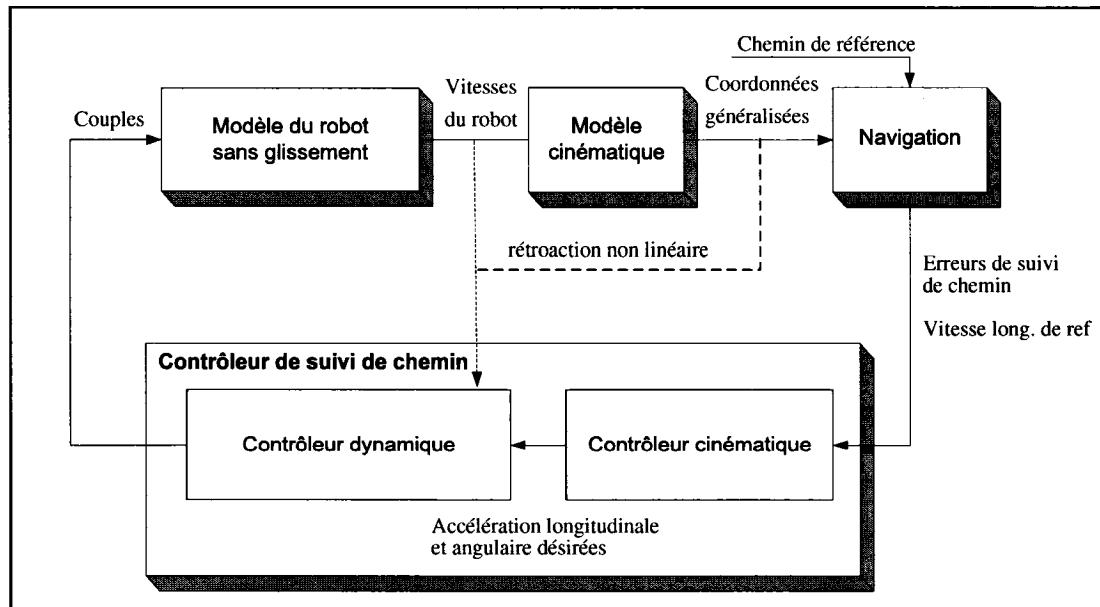


Figure 4.4 : Système d'asservissement complet pour le modèle sans glissement

### Modèle cinématique

- *Vitesses du robot*: Vecteur 3x1 contenant les vitesses longitudinale, latérale et angulaire du robot mobile par rapport à son centre de masse. Noté  $\eta = [v_x \ v_y \ \Omega]^T$ .
- *Coordonnées généralisées*: Vecteur 3x1 contenant les coordonnées généralisées qui définissent la position/orientation du robot mobile dans le repère inertiel. Noté  $q = [x \ y \ \theta]^T$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)v_x - \sin(\theta)v_y \\ \sin(\theta)v_x + \cos(\theta)v_y \\ \Omega \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

### Navigation

- *Vitesses du robot*: Vecteur 3x1 contenant les vitesses longitudinale, latérale et angulaire du robot mobile par rapport à son centre de masse. Noté  $\eta = [v_x \ v_y \ \Omega]^T$
- *Coordonnées généralisées*: Vecteur 3x1 contenant les coordonnées généralisées qui définissent la position/orientation du robot mobile dans le repère inertiel.

Noté  $q = [x \ y \ \theta]^T$

- *Chemin de référence*: ensemble de points  $(x_{REF}, y_{REF})$ , d'orientations  $(\theta_{REF})$ , de rayons de courbure  $(\rho_{REF})$  et de vitesses longitudinales  $(v_{xREF})$  de référence exprimés dans le repère inertiel. Noté  $\Pi$ .

- *Erreurs de suivi*: Vecteur 4x1 désignant les erreurs de navigation : erreur latérale, erreur de vitesse longitudinale, erreur d'orientation et erreur de vitesse angulaire. Notées  $e = [e_{lat} \ e_{vx} \ e_\theta \ e_\Omega]^T$ .

$$\begin{bmatrix} e_{lat} \\ e_\theta \\ e_\Omega \\ e_{vx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \min\{|(x - x_{REF})^2 + (y - y_{REF})^2|, \forall x_{REF}, y_{REF} \in \Pi\} \\ \theta - \theta_{REF} \\ \dot{\theta} - \dot{\theta}_{REF} \\ v_x - v_{xREF} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

### Contrôleur cinématique

- *Chemin de référence*: ensemble de points  $(x_{REF}, y_{REF})$ , d'orientations  $(\theta_{REF})$ , de rayons de courbure  $(\rho_{REF})$  et de vitesses longitudinales  $(v_{xREF})$ , accélération longitudinale  $(\dot{v}_{xREF})$  et angulaire  $(\Omega_{REF})$  de référence exprimés dans le repère inertiel.

Noté  $\Pi$ .

- *Erreurs de suivi*: Vecteur  $4 \times 1$  désignant les erreurs de navigation : erreur latérale, erreur de vitesse longitudinale, erreur d'orientation et erreur de vitesse angulaire. Notées  $e = [e_{lat} \quad e_{vx} \quad e_\theta \quad e_\Omega]^T$ .

- *Gains du contrôleur cinématique*: Vecteur  $5 \times 1$  désignant les gains des vitesses longitudinale et angulaire. Noté  $K_{cin} = [K_{vx1} \quad K_{vx2} \quad K_{\theta1} \quad K_{\theta2} \quad K_{\theta3}]^T$ .

- *Accélérations longitudinale et angulaire désirées*: Vecteur  $2 \times 1$  contenant les accélérations linéaire et angulaire requises (désirées) afin d'obtenir des vitesses faisant en sorte que la plate-forme mobile convergera vers son chemin de référence. Noté  $v = [v_1 \quad v_2]^T$ .

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_{xREF} - K_{vx1}e_{vx} - \frac{K_{vx2}}{s}e_{vx} \\ \dot{\Omega}_{REF} - K_{\theta1}\dot{e}_\theta - K_{\theta2}e_\theta - \frac{K_{\theta3}}{v_{xREF}}e_{lat} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

### Contrôleur dynamique

- *Accélérations longitudinale et angulaire désirées*: Vecteur  $2 \times 1$  contenant les accélérations linéaire et angulaire requises (désirées) afin d'obtenir des vitesses faisant en sorte que la plate-forme mobile convergera vers son chemin de référence. Noté  $v = [v_1 \quad v_2]^T$ .

- *Vitesses du robot*: Vecteur 3x1 contenant les vitesses longitudinale, latérale et angulaire du robot mobile par rapport à son centre de masse. Noté  $\eta = [v_x \quad v_y \quad \Omega]^T$ .
- *Couples*: Vecteur 2x1 contenant les couples appliqués aux roues à gauche et à droite du robot mobile. Noté respectivement :  $\tau_g$  et  $\tau_d$ .

$$\begin{bmatrix} \tau_g \\ \tau_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{4b}(bm v_1 - I v_2) \\ \frac{r}{4b}(bm v_1 + I v_2) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

#### 4.1.6 Essais en simulation du contrôleur

##### 4.1.6.1 Chemin de référence

Le chemin de référence choisi pour la simulation du contrôleur est constitué de segments de droites et d'arcs de cercles de différents rayons. La figure 4.5 illustre le chemin de référence utilisé. Le point de départ du robot mobile est assez proche du chemin de référence (voir figure). Pour les segments de droite, le rayon de courbure de référence est infini et une grande valeur est utilisée pour la simulation. Ce chemin de référence est long de 77.12m.

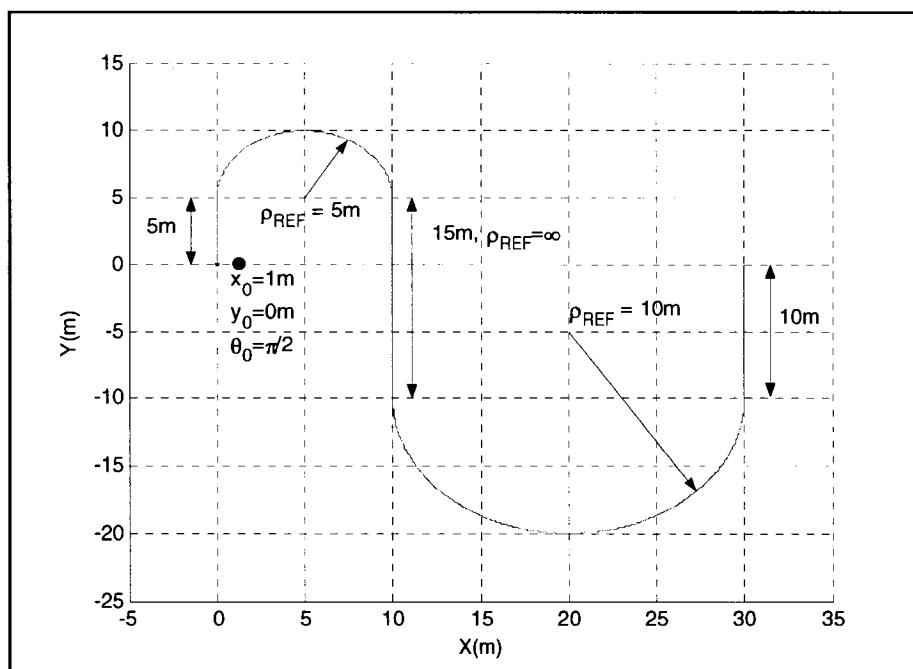


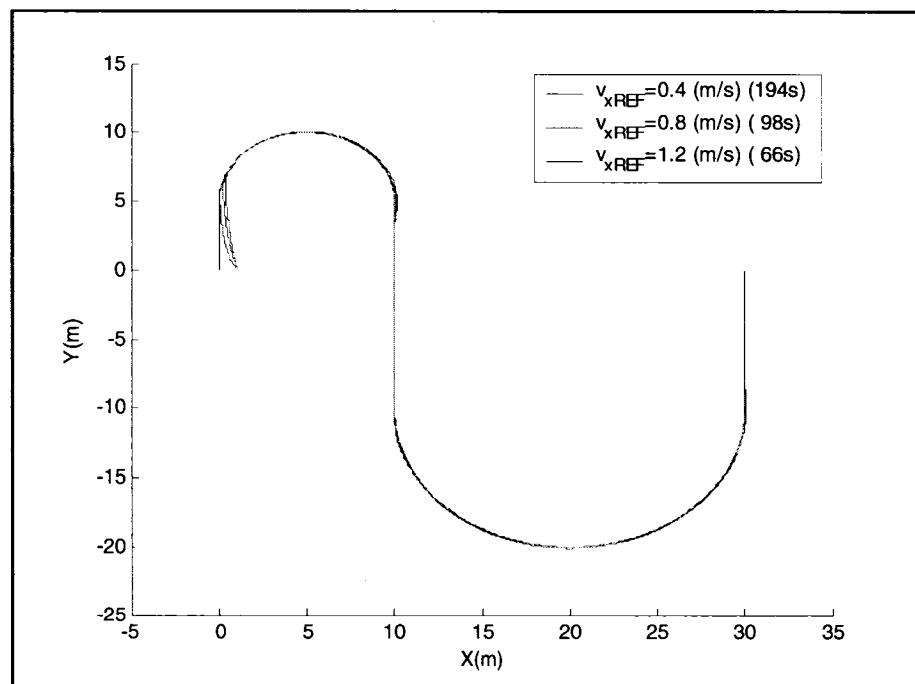
Figure 4.5 : Chemin de référence choisi pour les essais de simulation

#### 4.1.6.2 Essai de simulation avec une vitesse longitudinale uniforme de 0.4m/s, 0.8m/s et 1.2m/s.

Le premier essai en simulation du contrôleur est effectué pour différentes vitesses longitudinales de référence, uniformes et constantes tout le long du chemin. Les premiers gains choisis sont conservateurs. Les pôles et gains choisis sont montrés dans le tableau 4.1. Les résultats du suivi de chemin sont montrés aux figures 4.6 et 4.7.

**Tableau 4.1 : Paramètres des compensateurs du contrôleur cinématique**

Paramètres	Valeur
Pôles $p_{vx1}, p_{vx2}$	-0.48, -0.02
Gains $K_{vx1}, K_{vx2}$	0.50, 0.01
Pôles $p_{\theta 1}, p_{\theta 2}, p_{\theta 3}$	-0.76, -0.76, -0.76
Gains $K_{\theta 1}, K_{\theta 2}, K_{\theta 3}$	1.73, 2.28, 0.44/ $v_{xREF}$

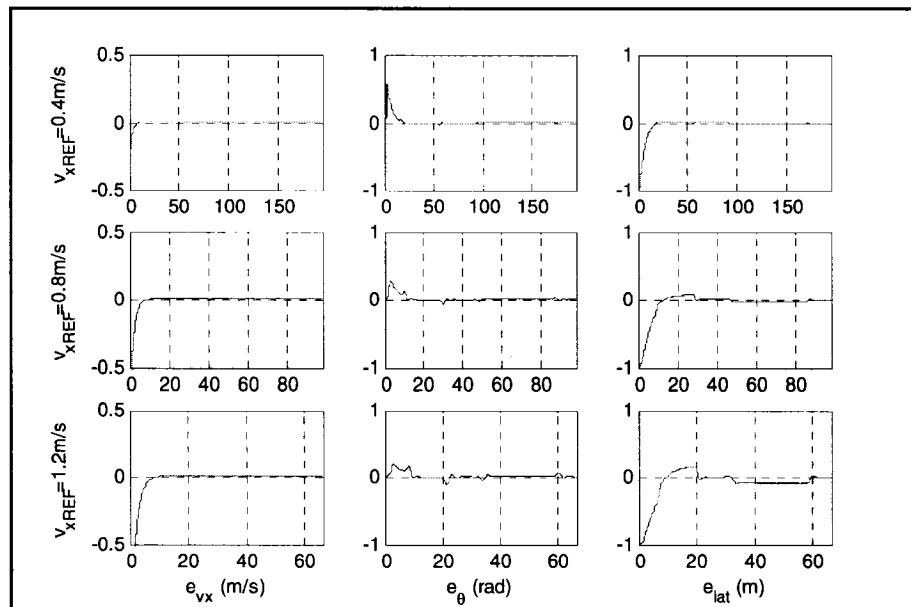


**Figure 4.6 : Suivi de chemin à 0.4m/s, 0.8m/s et 1.2m/s pour le 1<sup>er</sup> essai**

La figure 4.6 montre pour chacun des essais avec une vitesse longitudinale de référence différente, le chemin de référence à suivre, le chemin suivi par le robot mobile et le temps total de suivi. Le temps de suivi total n'est pas important généralement dans l'approche de suivi de chemin géométrique, il n'est discuté ici que parce que cette valeur est intimement liée à l'erreur de vitesse longitudinale. Le suivi de chemin est excellent quoique de légères erreurs de navigation subsistent (voir tableau 4.2 et figure 4.7). Le tableau 4.2 montre la norme maximale des erreurs de navigation, une fois que le robot mobile a convergé vers son chemin. On remarque que les erreurs augmentent avec la vitesse longitudinale de référence. Les erreurs sont toutes acceptables mais l'erreur latérale demeure un peu élevée à de hautes vitesses longitudinales.

**Tableau 4.2 : Erreurs de navigation maximales pour le 1<sup>er</sup> essai**

	$ e_{vx} _{\max}$ (m/s)	$ e_{\theta} _{\max}$ (rad)	$ e_{lat} _{\max}$ (m)
$v_{xREF} = 0.4m/s$	0.0015	0.04	0.01
$v_{xREF} = 0.8m/s$	0.0031	0.08	0.04
$v_{xREF} = 1.2m/s$	0.0046	0.12	0.09



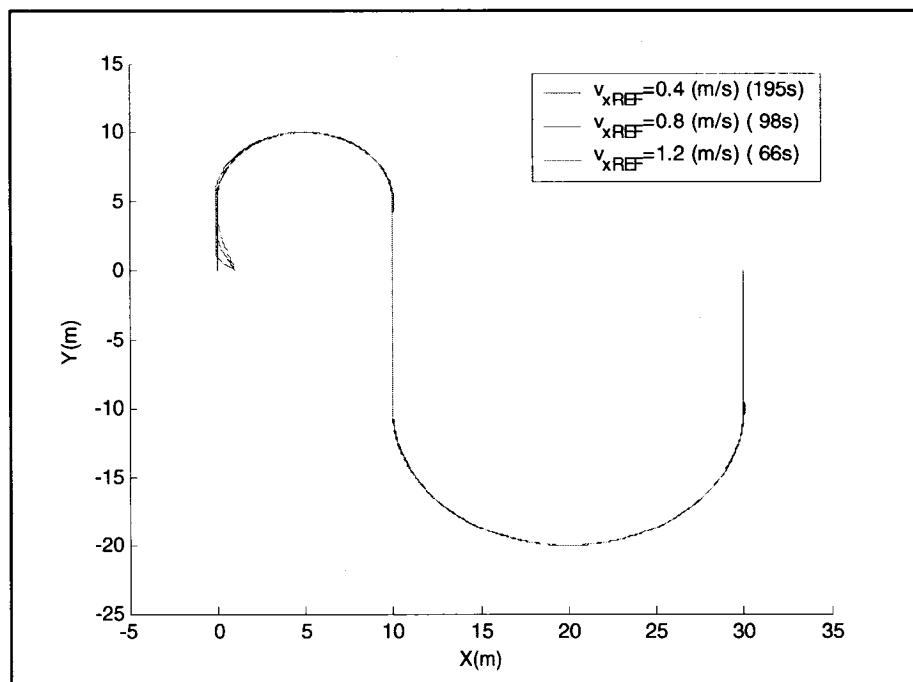
**Figure 4.7 : Erreurs de suivi à 0.4m/s, 0.8m/s et 1.2m/s pour le 1<sup>er</sup> essai**

#### 4.1.6.2 Essai de simulation avec une vitesse longitudinale uniforme de 0.4m/s, 0.8m/s, 1.2m/s et gains angulaires plus élevés

Le deuxième essai utilise les mêmes vitesses longitudinales de référence et le même chemin pour le premier essai, en utilisant des gains plus élevés pour le contrôleur angulaire (voir tableau 4.3). On observe sur la figure 4.7 que le robot converge plus abruptement vers son chemin en début de parcours et réduit du même coup l'erreur latérale tout au long du suivi. Avec les nouveaux gains, les erreurs de suivi d'orientation et latérale sont diminuées d'environ 50%. Finalement, à titre d'indication, la figure 4.10 montre les couples appliqués aux roues (la commande).

**Tableau 4.3 : Paramètres des compensateurs du contrôleur cinématique**

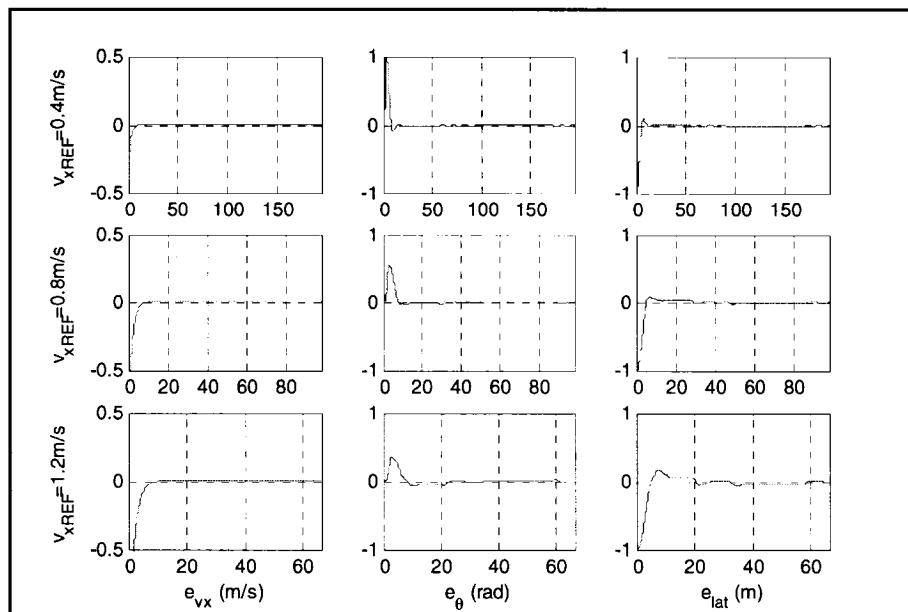
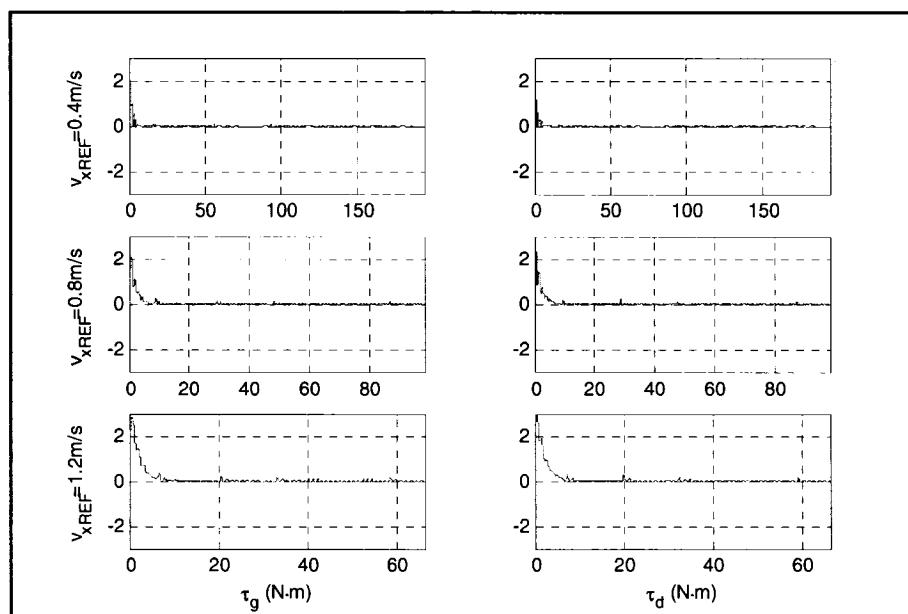
Paramètres	Valeur
Pôles $p_{vx1}, p_{vx2}$	-0.48, -0.02
Gains $K_{vx1}, K_{vx2}$	0.50, 0.01
Pôles $p_{\theta1}, p_{\theta2}, p_{\theta3}$	-1.3, -1.3, 1.3
Gains $K_{\theta1}, K_{\theta2}, K_{\theta3}$	5.07, 3.90, 2.20/ $v_{xREF}$



**Figure 4.8 : Suivi de chemin à 0.4m/s, 0.8m/s et 1.2m/s pour le 2<sup>e</sup> essai**

**Tableau 4.4 : Erreurs de navigation maximales pour le 2<sup>e</sup> essai**

	$ e_{vx} _{\max}$ (m/s)	$ e_{\theta} _{\max}$ (rad)	$ e_{lat} _{\max}$ (m)
$v_{xREF} = 0.4m/s$	0.0015	0.020	0.065
$v_{xREF} = 0.8m/s$	0.0031	0.040	0.024
$v_{xREF} = 1.2m/s$	0.0046	0.065	0.054

**Figure 4.9 : Erreurs de suivi à 0.4m/s, 0.8m/s et 1.2m/s pour le 2<sup>e</sup> essai****Figure 4.10 : Couples appliqués au robot mobile pour le 2<sup>e</sup> essai**

#### 4.1.6.3 Essai de simulation avec différentes configurations initiales

Cet essai vise à montrer la convergence du robot mobile vers son chemin de référence, lorsque différentes positions et orientations initiales sont utilisées. L'essai est effectué avec une vitesse longitudinale de référence de 0.8m/s. La figure 4.11 montre les résultats obtenus pour quatre points initiaux situés autour du chemin de référence. En démarrant d'une vitesse nulle, le robot à basse vitesse s'oriente correctement vers le chemin. Par la suite, il atteint sa vitesse longitudinale de référence et son chemin converge asymptotiquement vers son chemin de référence. La convergence du robot est bonne, peu importe la position/orientation initiale qu'on lui donne, pourvu qu'il soit relativement (à quelques mètres) près de son chemin. Une étude de la stabilité de l'algorithme de suivi de chemin se retrouve dans [DESANTIS95].

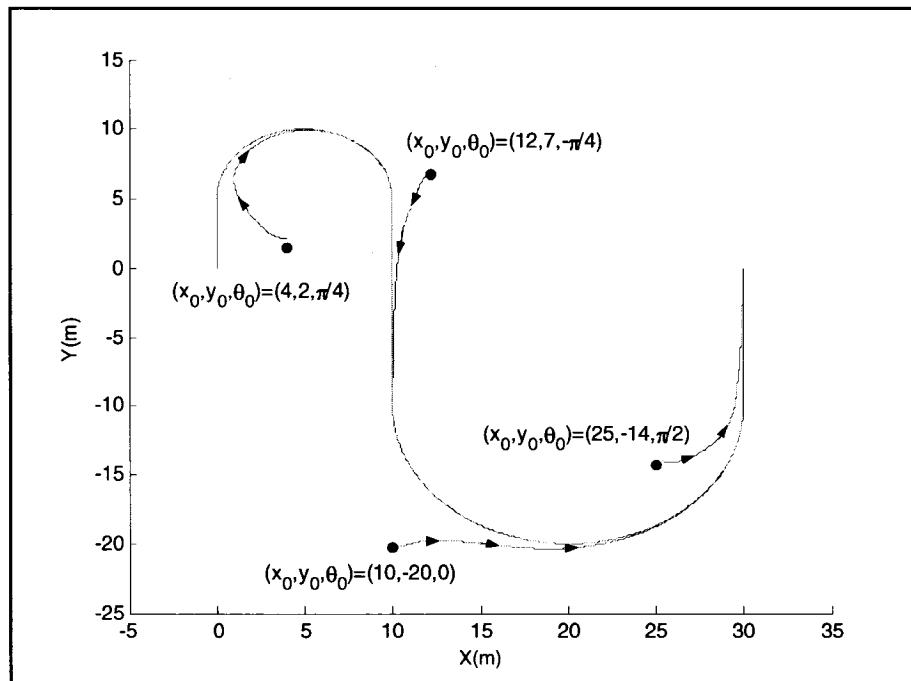


Figure 4.11 : Couples appliqués au robot mobile pour le 2<sup>e</sup> essai

## 4.2 Impact du glissement sur la performance des algorithmes de contrôle de suivi de chemin

Avant d'élaborer un contrôleur permettant au robot mobile de se déplacer sur un terrain à adhérence limitée, nous montrons l'impact des glissements longitudinaux et latéral sur la performance des algorithmes de suivi de chemin qui ont été élaborés suivant l'hypothèse d'une absence de glissement.

Pour le modèle idéal sans glissement, il n'y a pas de force de résistance au mouvement et *tout le couple appliqué à la roue est transmis en force de traction*. Cela implique que pour atteindre une vitesse longitudinale et angulaire prescrites, le contrôleur de suivi de chemin commencera tout d'abord par calculer des petits couples à appliquer aux roues (provoquant une accélération positive). Ces couples tendront ensuite rapidement vers zéro aussitôt que les vitesses de référence seront atteintes, car les vitesses du robot ayant atteint les vitesses de référence, plus aucune accélération n'est requise (donc plus aucune force). Par contre, pour le cas avec glissement, nous modélisons l'effet de la rétroaction de la force du sol sur la roue et de la résistance au mouvement. On ne peut plus appliquer un couple nul aux roues en aucun cas car le robot s'arrêterait jusqu'à s'immobiliser sous l'effet de la force de résistance au mouvement (voir chapitre 3, essai 3.4). Le robot, dans une situation réaliste avec glissement, a alors besoin d'un couple minimum afin que ses roues tournent. En effet, *le couple appliqué sur une roue* (voir les essais 3.1 et 3.2) *doit être supérieur au couple critique d'entraînement afin que les roues accélèrent* et ce couple critique minimum est fonction de l'adhérence au sol et de sa résistance au mouvement. Ainsi, pour obtenir un suivi de chemin adéquat lorsque le robot est soumis à des glissements non négligeables, il faut que le couple oscille d'une certaine manière autour du couple critique d'entraînement, contrôlant ainsi les vitesses des roues et indirectement, celles du robot mobile.

### 4.2.1 Impact du glissement sur le suivi d'une ligne droite

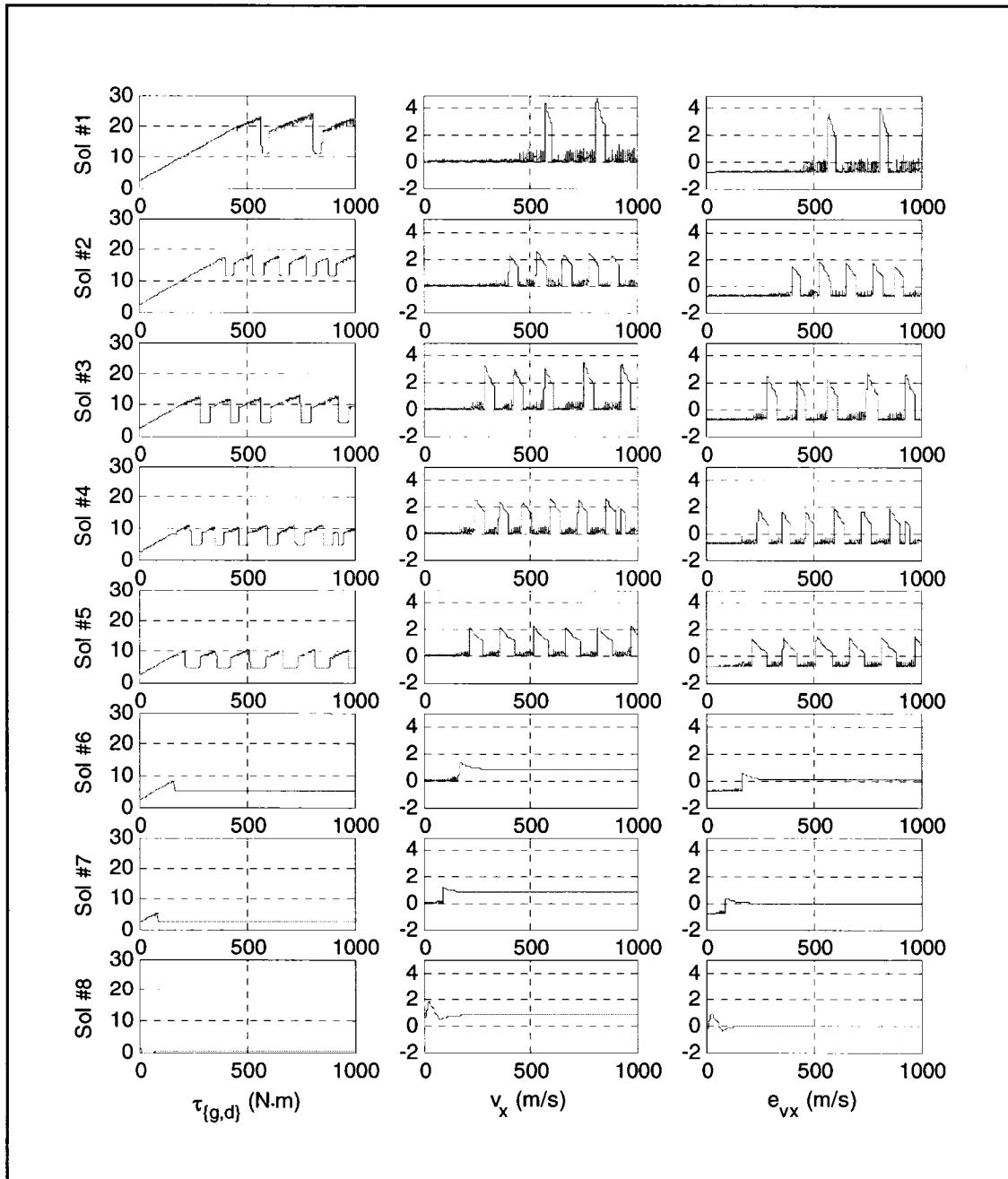
Nous débutons par l'analyse du comportement du glissement longitudinal sur le contrôleur de suivi de chemin, développé sous l'hypothèse d'un glissement longitudinal nul. Pour ce faire, nous appliquons à l'entrée du modèle du robot mobile avec glissement les couples calculés sous l'hypothèse de non glissement. Le chemin de référence pour ce test est une droite infinie avec une vitesse longitudinale de référence uniforme de 0.8m/s. Une durée de simulation de 1000s est choisie car les effets observés sont très lents dans le temps. Les résultats pour différents types de sol sont présentés à la figure 4.12.

#### Analyse

Le couple fourni par l'algorithme est beaucoup trop faible pour combattre la force de résistance au mouvement qui agit sur la roue. L'algorithme calcule un couple requis de quelques Newton-mètres tandis que le couple critique d'entraînement (couple minimum pour lequel la roue est libre de tourner) est beaucoup plus élevé. Cette situation fait en sorte que la roue ne bouge pas (phénomène d'arrêt glissement) et la vitesse longitudinale du robot, par conséquent, demeure nulle. L'erreur de vitesse longitudinale demeurant à -0.8m/s, le contrôleur longitudinal intègre lentement cette erreur et le couple appliqué aux roues augmente linéairement jusqu'à atteindre une valeur près du couple critique d'entraînement. À ce moment, on observe une variation de la vitesse longitudinale qui cherche à suivre celle des roues qui oscillent. Le couple appliqué aux roues augmente encore jusqu'à ce qu'il dépasse pour de bon le couple critique d'entraînement, provoquant une accélération positive des roues. Le véhicule atteint alors une vitesse longitudinale élevée : le couple appliqué aux roues est trop élevé. Cela a pour effet de rendre l'erreur de suivi de vitesse longitudinale positive et de diminuer ainsi brusquement le couple appliqué aux roues qui retombe au-dessous du couple critique d'entraînement. La vitesse longitudinale devient alors faible et oscillatoire, le sol appliquant une force sur la roue supérieure au couple appliqué. À cette phase, l'erreur de

vitesse est encore intégrée et le couple se remet à augmenter progressivement, provoquant à répétition le phénomène décrit précédemment.

Nous avons vu au chapitre 3 que moins un sol est adhérent et plus le couple critique d'entraînement est faible (plus la roue est facile à tourner).



**Figure 4.12 : Impact du glissement longitudinal sur le suivi d'une ligne droite**

Cet essai de simulation permet d'observer ce phénomène : l'amplitude maximale des couples aux roues est proportionnelle au couple critique d'entraînement pour le sol simulé. Pour les sols à adhérence excessivement faible (sol #6, sol #7 et sol #8), le couple critique d'entraînement est très faible. Dans ces cas, le couple aux roues dépasse le couple critique d'entraînement qui est très petit et le robot mobile se met à avancer et à dépasser sa vitesse de référence. Cela provoque un changement de signe de l'intégrale de l'erreur de vitesse et le couple aux roues est diminué. Par contre, la force tendant à arrêter le robot mobile est tellement faible qu'elle est pratiquement inexistante, gardant ainsi une vitesse longitudinale pratiquement constante. Pour comprendre ce phénomène, nous n'avons qu'à imaginer un objet déplacé sur une surface très peu adhérente, par exemple la glace. Une très petite poussée sera requise pour le déplacement de départ et par la suite une plus petite poussée encore sera requise pour garder la vitesse constante.

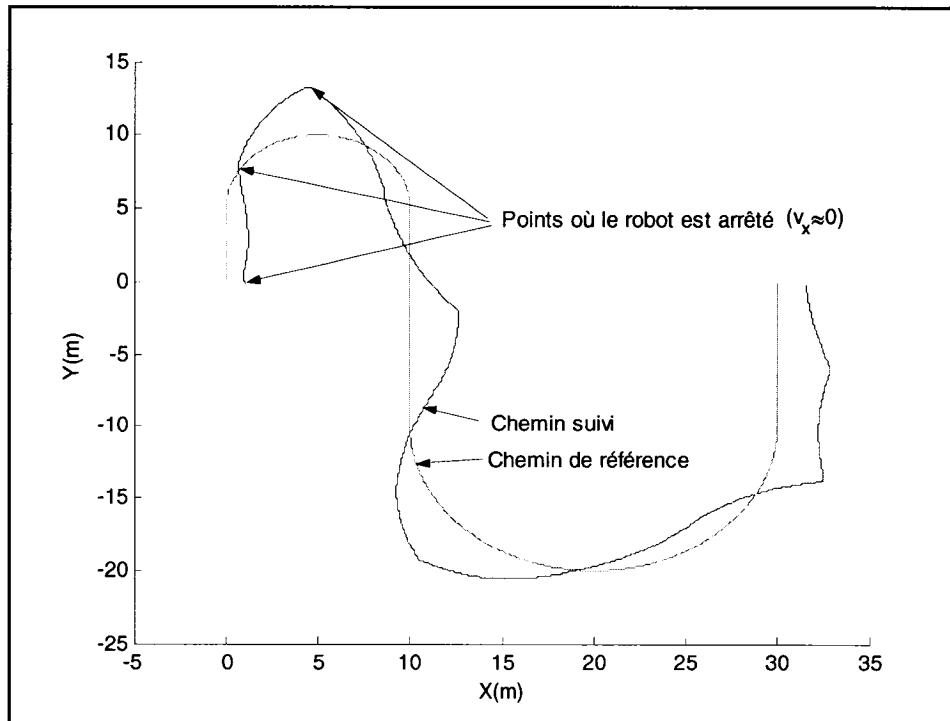
En résumé, le contrôleur de suivi de chemin élaboré avec l'hypothèse d'une absence de glissement longitudinal calcule des couples beaucoup trop faibles pour le robot avec glissement. En effet, le modèle avec glissement prend en considération une force de résistance au mouvement qui doit être contrebalancée afin que la roue puisse se libérer de son emprise et tourner. Le couple appliqué aux roues étant trop faible, la roue reste bloquée (phénomène d'arrêt glissement) et le robot mobile ne peut avancer. C'est alors qu'entre en jeu l'intégration de l'erreur de vitesse longitudinale. Celle-ci fait en sorte que le couple aux roues augmente lentement jusqu'à ce que les roues tournent et que le robot avance. Mais le robot, une fois mis en marche, dépasse sa vitesse de référence et le couple aux roues redescend subitement. Dès lors, le phénomène de montée/descente du couple appliqué se répète lentement dans le temps. Le contrôleur n'arrive pas à fonctionner de manière efficace car seulement son action intégrale très faible entre en jeu à ce point.

### 4.2.2 Impact du glissement sur le suivi d'un chemin courbé

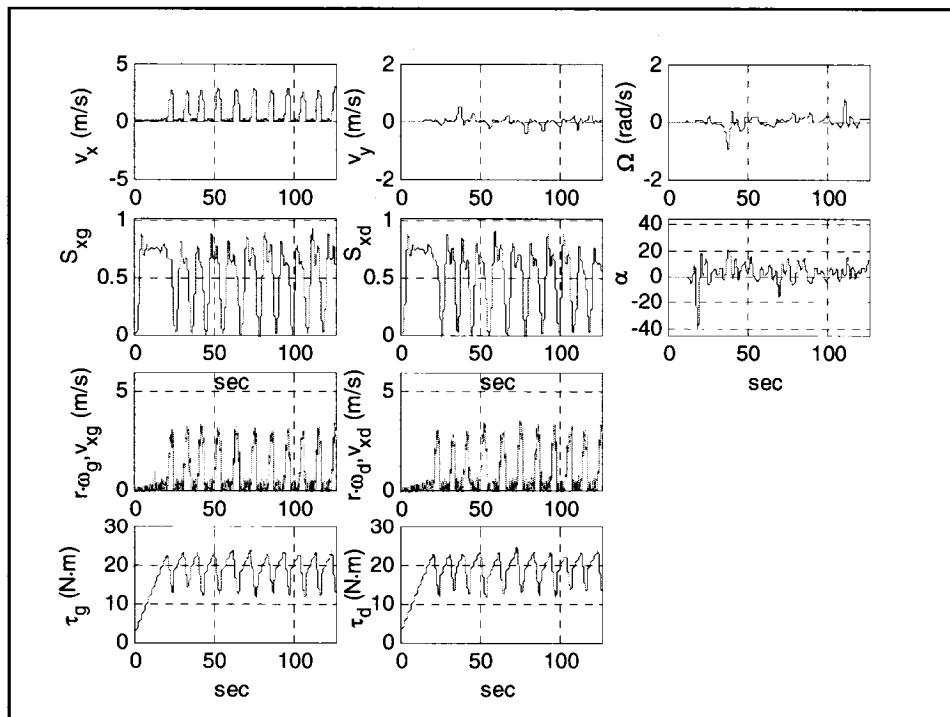
Le chemin de référence pour ce test est le même que celui utilisé précédemment. Le test en simulation est effectué sur le sable, un terrain à adhérence moyenne. La figure 4.13 montre le chemin suivi par le robot mobile lorsqu'il est soumis à du glissement longitudinal et latéral, ayant comme couples d'entrée ce que lui fournit le contrôleur de suivi de chemin développé avec les hypothèses de non glissement. Pour cet essai, le gain de l'intégrateur de l'erreur de vitesse longitudinale a été augmenté afin que la vitesse longitudinale devienne élevée plus rapidement et permette d'étudier ainsi le comportement du robot au début de la courbe.

#### Analyse

De façon générale, nous observons que le robot va suivre son chemin de référence (voir figure 4.13) mais avec de très fortes erreurs de navigation. En observant plus attentivement, nous voyons que le robot débute son chemin en restant pratiquement immobile, car le couple appliqué aux roues est trop petit pour combattre la friction statique agissant sur la roue. Due à la vitesse longitudinale pratiquement nulle, l'erreur de vitesse longitudinale intègre ce qui fait augmenter linéairement les couples appliqués aux roues, qui finissent éventuellement par dépasser les couples critiques d'entraînement. À ce moment, les roues se débloquent et d'un élan rapide, entraînent la plateforme mobile avec une grande vitesse. Le robot avance alors de quelques mètres mais l'erreur de vitesse longitudinale changeant de signe encore une fois, le couple appliqué aux roues retombe en deçà du couple critique d'entraînement, provoquant ainsi un arrêt des roues et de la plateforme. Le robot s'oriente alors latéralement et les couples se remettent à augmenter, ce qui provoque une répétition « arrêt, avance rapide, arrêt, avance rapide, ... » du robot. Des exemples de points où le robot est arrêté sur le chemin sont montrés à la figure 4.13. Si on regarde les états du robot à la figure 4.14, on voit que le glissement des roues passe de 0% à 80% selon que le robot soit arrêté ou en train d'avancer rapidement. Il existe aussi un glissement latéral non nul lié à une vitesse latérale non nulle. Finalement, les couples varient en dents de scie, selon le signe de l'erreur de vitesse longitudinale suivant l'explication précédente.



**Figure 4.13 : Impact du glissement longitudinal et latéral sur le suivi d'un chemin courbé : chemin suivi**



**Figure 4.14 : Impact du glissement longitudinal et latéral sur le suivi d'un chemin courbé : états**

Les phénomènes décrits en 4.2.1 et 4.2.2 exposent la problématique sur les terrains à adhérence limitée : le contrôleur de suivi de chemin développé sous l'hypothèse d'une absence de glissement produit des couples inadéquats aux roues et de fortes erreurs de navigation surviennent car le contrôleur ne tient pas compte de la force de résistance au mouvement qui empêche la roue de tourner librement, de l'adhérence maintenant limitée du terrain et des glissements longitudinaux et latéral importants. Ces constats amènent le besoin de modifier le contrôleur de suivi de chemin existant afin qu'il puisse continuer de fonctionner en présence de glissements typiques aux terrains avec adhérence limitée. Avec une analyse approfondie du phénomène de glissement et du modèle du sol, nous allons montrer au prochain chapitre qu'il est possible de contrôler le robot mobile pour qu'il puisse suivre un chemin de référence, même en présence de glissements longitudinal et latéral importants.

### 4.3 Conclusion du chapitre

Nous avons discuté dans ce chapitre du problème de suivi de chemin et développé un algorithme basé en partie sur une source littéraire. Ce contrôleur est basé sur les hypothèses de non glissement et nous avons montré son bon fonctionnement pour différents cas en utilisant le modèle du robot sans glissement.

En deuxième partie, afin de montrer l'impact du glissement sur le suivi de chemin, nous avons utilisé le contrôleur développé pour le modèle sans glissement sur le modèle qui tient compte du glissement. Nous avons vu que ce contrôleur fournit des couples aux roues au robot qui font en sorte que le robot suit son chemin inefficacement, avec de très grandes erreurs de navigation. Nous avons illustré que ces erreurs importantes de suivi proviennent du fait que le contrôleur de suivi ne tient pas compte des glissements, de la résistance au mouvement et de l'adhérence maintenant limitée du sol.

## Chapitre 5 – Contrôle du robot mobile soumis à du glissement

Lors de l’analyse du contrôleur de suivi de chemin au chapitre 4, nous avons conclu que le contrôleur éprouvait de la difficulté à bien diriger le robot mobile lorsque celui-ci est soumis à du glissement important. Dans ce chapitre, nous proposons de développer un nouveau *contrôleur dynamique* qui s’ajoutera à la partie *contrôleur cinématique* du contrôleur de suivi de chemin existant. Nous verrons qu’il est possible de se baser sur le modèle du sol et d’une roue afin de dériver ce contrôleur. Cette étape permettra ultimement de rendre le robot mobile capable de se déplacer sur un sol à adhérence limitée, en utilisant les contrôleurs de suivi de chemin existants. Le contrôleur dynamique proposé sera composé de deux parties, soit un contrôleur qui permettra d’atteindre une vitesse longitudinale prescrite, en limitant le glissement longitudinal, et un contrôleur qui permettra d’atteindre une vitesse angulaire prescrite, en minimisant le glissement latéral.

## 5.1 Contrôleur de vitesse longitudinale

### But

Concevoir un contrôleur qui trouvera les couples à appliquer aux roues  $\tau_{\{g,d\}}$ , de sorte que la vitesse longitudinale du robot mobile  $v_x$  tende vers sa vitesse de référence  $v_{xREF}$ , en présence de glissement longitudinal.

### Méthodologie

1. Trouver les couples à appliquer aux roues, de sorte que les vitesses des roues tendent vers les vitesses aux roues de référence. (Section 5.1.1)
2. Trouver les vitesses de référence aux roues à l'aide de la vitesse longitudinale de référence et en tenant compte du glissement longitudinal. (Section 5.1.2)

### 5.1.1 Contrôleur de vitesse angulaire des roues

### But

Concevoir un contrôleur qui trouvera les couples à appliquer aux roues  $\tau_{\{g,d\}}$ , de sorte que les vitesses des roues  $\omega_{\{g,d\}}$  tendent vers les vitesses des roues désirées  $\omega_{\{g,d\}DES}$ .

### Conception du contrôleur

Il importe en premier lieu de reconsidérer le modèle d'une roue présenté au chapitre 2.

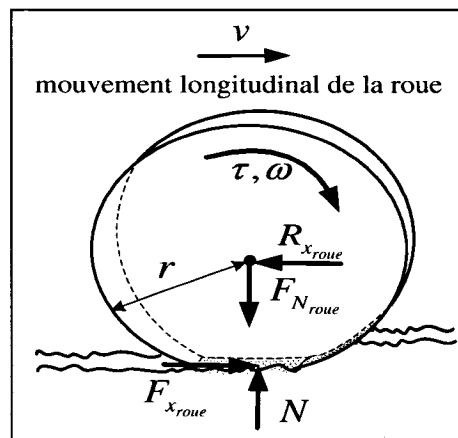


Figure 5.1 : Diagramme du corps libre d'une roue soumise à du glissement

Les équations donnant les accélérations des roues sont celles-ci :

$$\begin{aligned} I_{roue} \dot{\omega}_g &= \tau_g - \frac{rF_{xg}}{2} \\ I_{roue} \dot{\omega}_d &= \tau_d - \frac{rF_{xd}}{2} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Nous définissons le vecteur d'erreur des vitesses angulaires :

$$\begin{aligned} e_{\omega g} &= \omega_g - \omega_{gREF} \\ e_{\omega d} &= \omega_d - \omega_{dREF} \end{aligned} \quad (5.2)$$

et ses dérivées temporelles :

$$\begin{aligned} \dot{e}_{\omega g} &= \dot{\omega}_g - \dot{\omega}_{gREF} \\ \dot{e}_{\omega d} &= \dot{\omega}_d - \dot{\omega}_{dREF} \\ \ddot{e}_{\omega g} &= \ddot{\omega}_g - \ddot{\omega}_{gREF} \\ \ddot{e}_{\omega d} &= \ddot{\omega}_d - \ddot{\omega}_{dREF} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Il est possible de contrôler les vitesses des roues en choisissant la commande suivante :

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_g \\ \tau_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} F_{xg} - I_{roue} (K_{Pg} e_{\omega g} + K_{Ig} \int e_{\omega g} dt - \dot{\omega}_{gREF}) \\ \frac{r}{2} F_{xd} - I_{roue} (K_{Pd} e_{\omega d} + K_{Id} \int e_{\omega d} dt - \dot{\omega}_{dREF}) \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

En substituant la dernière équation et l'équation 5.3 dans l'équation 5.1, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \cancel{I_{roue} (\dot{e}_{\omega g} + \dot{\omega}_{gREF})} \\ \cancel{I_{roue} (\dot{e}_{\omega d} + \dot{\omega}_{dREF})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{\frac{r}{2} F_{xg}} - \cancel{I_{roue} (K_{Pg} e_{\omega g} + K_{Ig} \int e_{\omega g} dt - \dot{\omega}_{gREF})} - \cancel{\frac{r}{2} F_{xg}} \\ \cancel{\frac{r}{2} F_{xd}} - \cancel{I_{roue} (K_{Pd} e_{\omega d} + K_{Id} \int e_{\omega d} dt - \dot{\omega}_{dREF})} - \cancel{\frac{r}{2} F_{xd}} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{\omega g} + K_{Pg} e_{\omega g} + K_{Ig} \int e_{\omega g} dt \\ \dot{e}_{\omega d} + K_{Pd} e_{\omega d} + K_{Id} \int e_{\omega d} dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

En dérivant et en prenant la transformée de Laplace de chaque côté, on trouve :

$$\begin{bmatrix} (s^2 + K_{Pg}s + K_{Ig})e_{\omega g} \\ (s^2 + K_{Pd}s + K_{Id})e_{\omega d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_g(s)e_{\omega g} \\ p_d(s)e_{\omega d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

où  $p_{\{g,d\}}(s)$  représente le polynôme caractéristique qui doit être Hurwitz afin que l'erreur et ses deux dérivées convergent vers zéro. Les polynômes s'écrivent aussi de cette manière :

$$\begin{aligned} p_g(s) &= (s - p_{1g})(s - p_{2g}) = 0 \\ p_d(s) &= (s - p_{1d})(s - p_{2d}) = 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

où les pôles  $p_{i\{g,d\}}$  sont choisis dans le plan complexe gauche. Une fois les pôles choisis, on trouve les gains qui entrent dans le calcul la loi de commande 5.4.

$$\begin{aligned} K_{Pg} &= -(p_{1g} + p_{2g}) \\ K_{Ig} &= p_{1g}p_{2g} \\ K_{Pd} &= -(p_{1d} + p_{2d}) \\ K_{Id} &= p_{1d}p_{2d} \end{aligned} \quad (5.9)$$

La procédure explicitée ici nous permet d'obtenir le contrôleur de vitesse angulaire des roues. Ce contrôleur permet aux roues de suivre correctement une vitesse angulaire désirée. Nous exposons la structure mathématique (format Simulink/Matlab) du contrôleur à la figure 5.2 et sa structure schématique haut niveau à la figure 5.3.

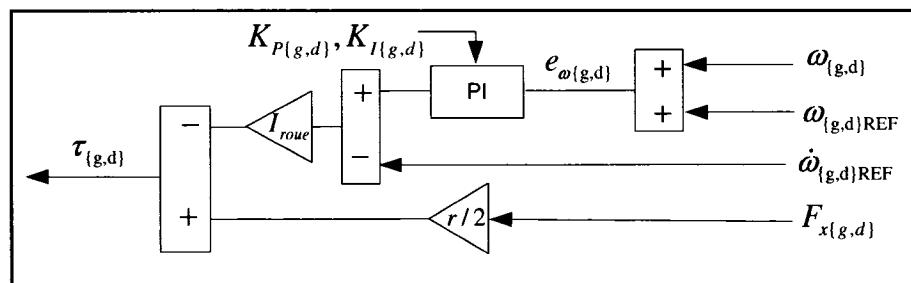


Figure 5.2 : Schéma de bloc du contrôleur de vitesse angulaire des roues

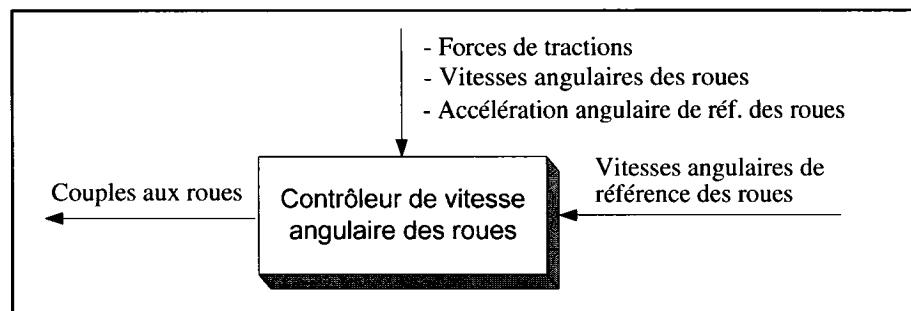


Figure 5.3 : Schéma de bloc du contrôleur de vitesse angulaire des roues

### 5.1.2 Calcul des vitesses de référence des roues en fonction de la vitesse longitudinale de référence

La deuxième étape du contrôleur de vitesse longitudinale consiste à déterminer la vitesse angulaire des roues de référence en fonction de la vitesse longitudinale de référence.

#### Problématique

Dans le cas sans glissement, la vitesse linéaire des roues est toujours égale à la vitesse longitudinale de la plateforme au niveau des essieux (via des contraintes nonholomiques) :

$$r\omega_{\{g,d\}} = v_{x\{g,d\}} \quad (5.10)$$

Cette situation fait en sorte que les glissements (en traction) des roues sont toujours nuls :

$$S_{\{g,d\}} = \frac{r\omega_{\{g,d\}} - v_{x\{g,d\}}}{r\omega_{\{g,d\}}} = 0 \quad (5.11)$$

Toutefois, aussitôt qu'il existe un glissement des roues, ce qui est le cas pour tout terrain avec adhérence non parfaite, la vitesse linéaire des roues est toujours plus grande que la vitesse longitudinale de la plateforme au niveau des essieux :

$$r\omega_{\{g,d\}} > v_{x\{g,d\}} \quad (5.12)$$

Ce qui rend les glissements non nuls :

$$S_{\{g,d\}} = \frac{r\omega_{\{g,d\}} - v_{x\{g,d\}}}{r\omega_{\{g,d\}}} > 0 \quad (5.13)$$

La figure 5.4 permet de voir la vitesse longitudinale atteinte du robot mobile en fonction de la vitesse linéaire des roues pour un glissement stationnaire. On voit que pour le cas sans glissement, une vitesse linéaire des roues de 1.6m/s donnera une vitesse de la plateforme de 1.6m/s lorsque le glissement est nul, tandis qu'elle donnera une vitesse de la plateforme de 1m/s lorsque le glissement est très important (par exemple, sur la glace) tel qu'illustré dans la figure. Ainsi, moins le sol est adhérent, plus le glissement en

régime permanent sera élevé et plus la vitesse longitudinale du robot mobile sera faible comparativement à la vitesse des roues.

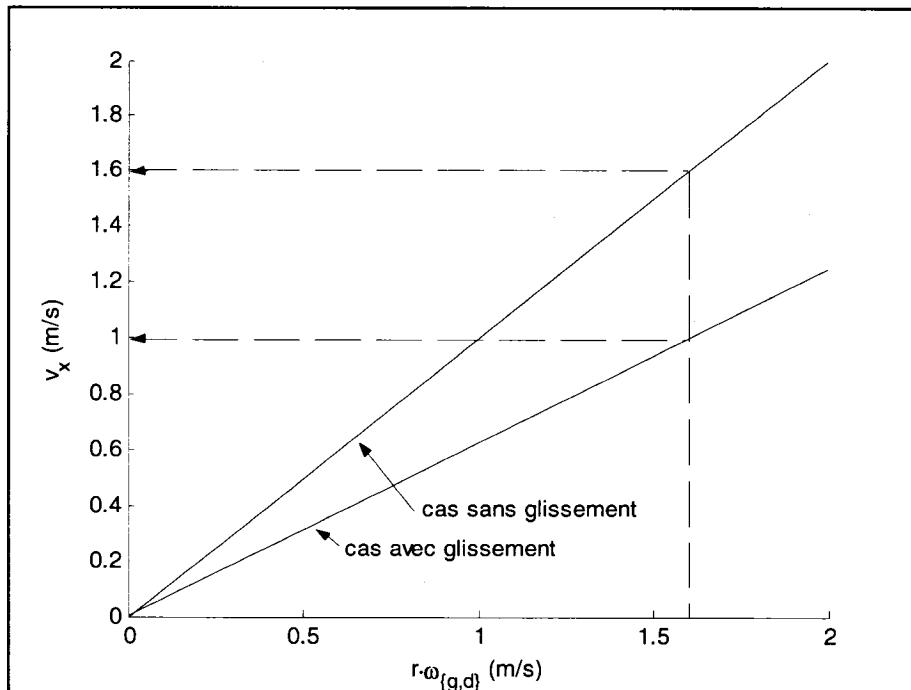


Figure 5.4 : Vitesse longitudinale du robot mobile en fonction des vitesses linéaires des roues, pour les cas avec et sans glissement

Le problème est que l'on voudrait trouver les vitesses angulaires des roues de référence à obtenir, telles que si les vitesses des roues réelles atteignent ces vitesses, alors la vitesse longitudinale du robot mobile sera la vitesse longitudinale de référence du robot mobile. Mathématiquement : à l'aide de  $v_{xREF}$ , trouver  $\omega_{\{g,d\}REF}$  tel que si  $\omega_{\{g,d\}} = \omega_{\{g,d\}REF}$ , alors  $v_x = v_{xREF}$  : le robot avance sur son chemin avec la vitesse longitudinale de référence.

Pour arriver à nos fins, nous inversons les axes de la figure 5.4, pour obtenir la vitesse des roues en fonction de la vitesse longitudinale. Nous voyons sur la figure que pour une vitesse  $v_x = v_{xREF}$ , nous obtenons la vitesse angulaire de référence  $\omega_{\{g,d\}REF}$ .

Pour calculer de façon explicite la vitesse angulaire de référence, nous solutionnons par  $\omega_{\{g,d\}REF}$ , l'équation du glissement :

$$\omega_{\{g,d\}REF} = \frac{v_{xREF}}{r(1 - S_{\{g,d\}})} \quad (5.14)$$

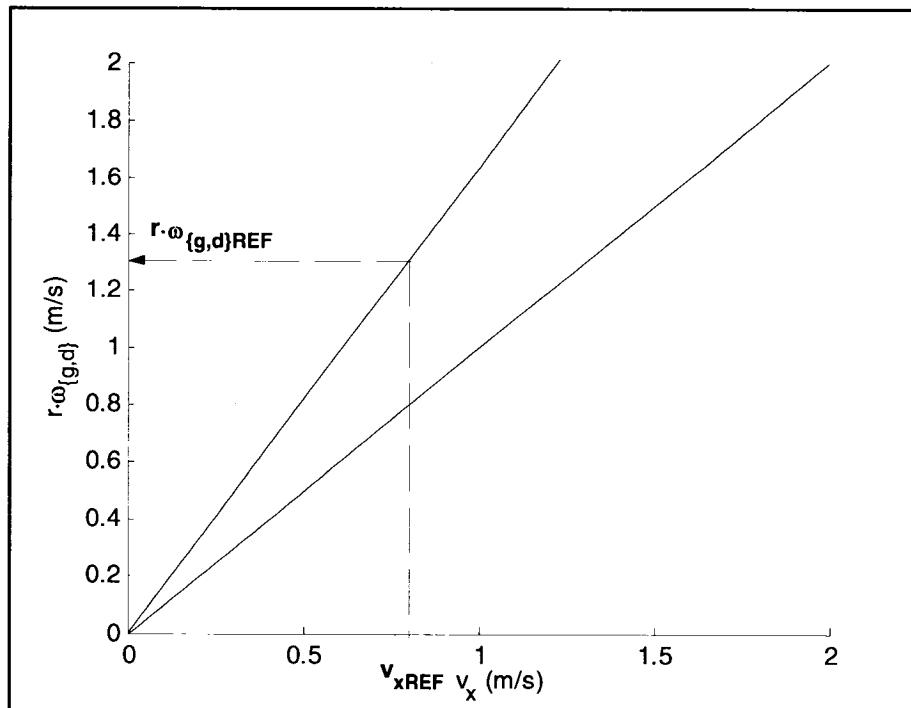


Figure 5.5 : Vitesse linéaire des roues du robot mobile en fonction de la vitesse longitudinale, pour le cas avec glissement

Il ne reste qu'à trouver l'expression du glissement stationnaire  $S_{\{g,d\}}$  et à l'inclure dans l'équation précédente. Pour ce faire, nous faisons l'hypothèse que les vitesses des roues sont constantes. À la section 3.6 nous avons montré que si les vitesses des roues sont constantes, le glissement en régime permanent stationnaire sera alors donné par l'expression suivante :

$$S_{\{g,d\}} = \mu_{\text{type de sol}}^{-1} \left( \frac{R_{x\{g,d\}}}{2F_{N_{\text{roue}}}} \right) \quad (5.15)$$

où  $\mu(\cdot)$  est la fonction d'adhérence, donnant la force de traction sur la force normale en fonction du glissement et dépendante du type de sol. En substituant dans l'équation 5.14,

nous obtenons la vitesse de référence des roues en fonction de la vitesse longitudinale de référence pour le robot mobile :

$$\omega_{\{g,d\}REF} = \frac{v_{xREF}}{r \cdot [1 - \mu_{\text{type de sol}}^{-1}(\frac{R_{x\{g,d\}}}{2F_{N_{\text{roue}}}})]} \quad (5.16)$$

Nous présentons à la figure 5.6 un schéma de bloc du calcul des vitesses angulaires de référence des roues. Ce bloc utilise les informations provenant du modèle du sol pour déterminer les vitesses angulaires de référence des roues.

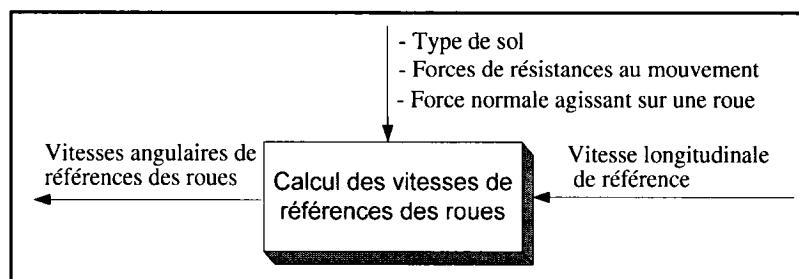


Figure 5.6 : Schéma de bloc « calcul des vitesses angulaires de référence des roues »

### 5.1.3 Contrôleur de vitesse longitudinale complet

Les deux blocs précédemment développés à la section 5.1.1 et 5.1.2 forment le contrôleur de vitesse longitudinale lorsqu'ils sont placés ensemble. Les figures 5.7 et 5.8 sont révélatrices à ce sujet.

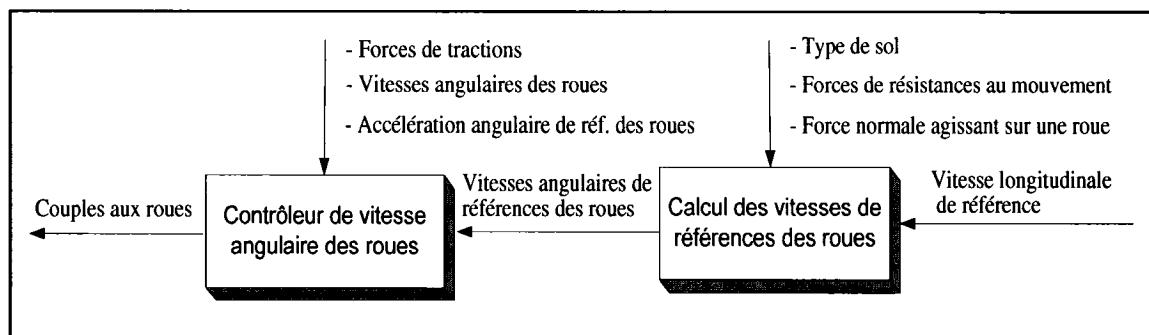


Figure 5.7 : Schéma de bloc du contrôleur de vitesse longitudinale complet

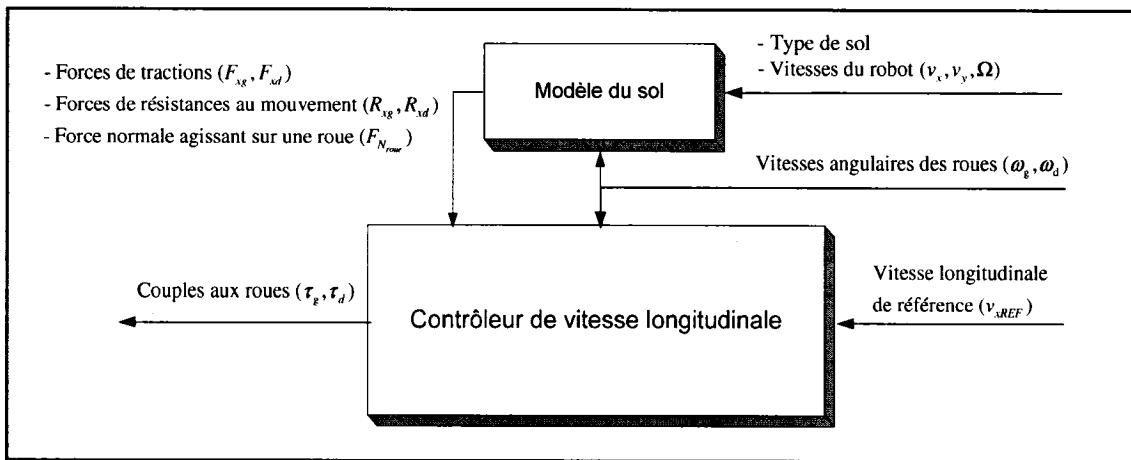


Figure 5.8: Vue de synthèse du contrôleur de vitesse longitudinale complet

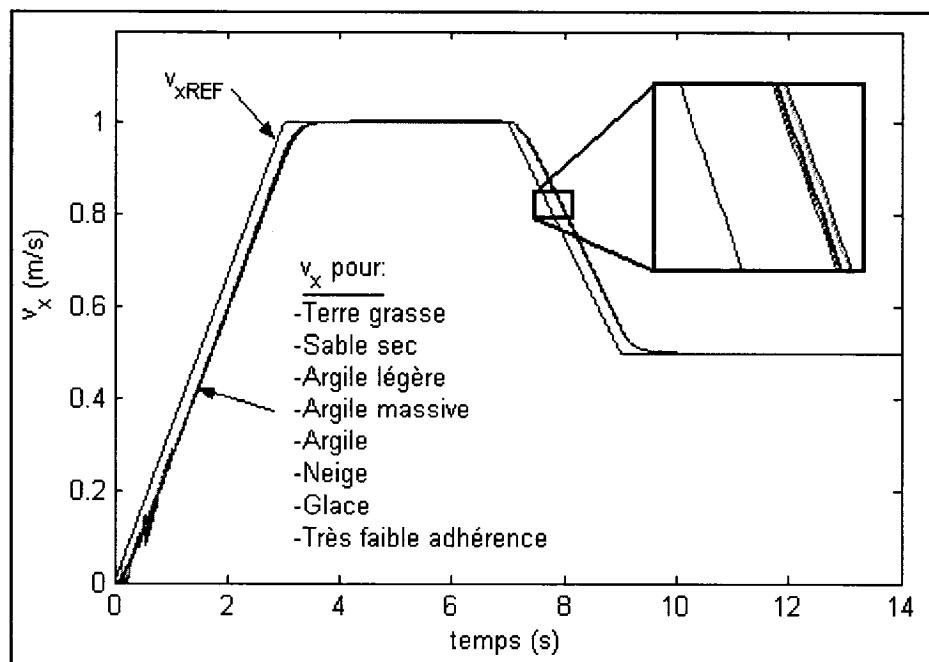
#### 5.1.4 Essais en simulation du contrôleur de vitesse longitudinale

Le contrôleur de vitesses des roues développé à la section 5.1.1 utilise deux compensateurs proportionnel-intégral (PI). Les pôles et gains utilisés pour la simulation sont rapportés dans le tableau 5.1. Nous avons choisi un gain rapide et un plus lent, de manière à limiter le temps de réponse afin de permettre au contrôleur de vitesse angulaire de pouvoir effectuer son travail (nous y reviendrons à la section 5.2.2) de manière concurrentielle au contrôleur de vitesse longitudinal.

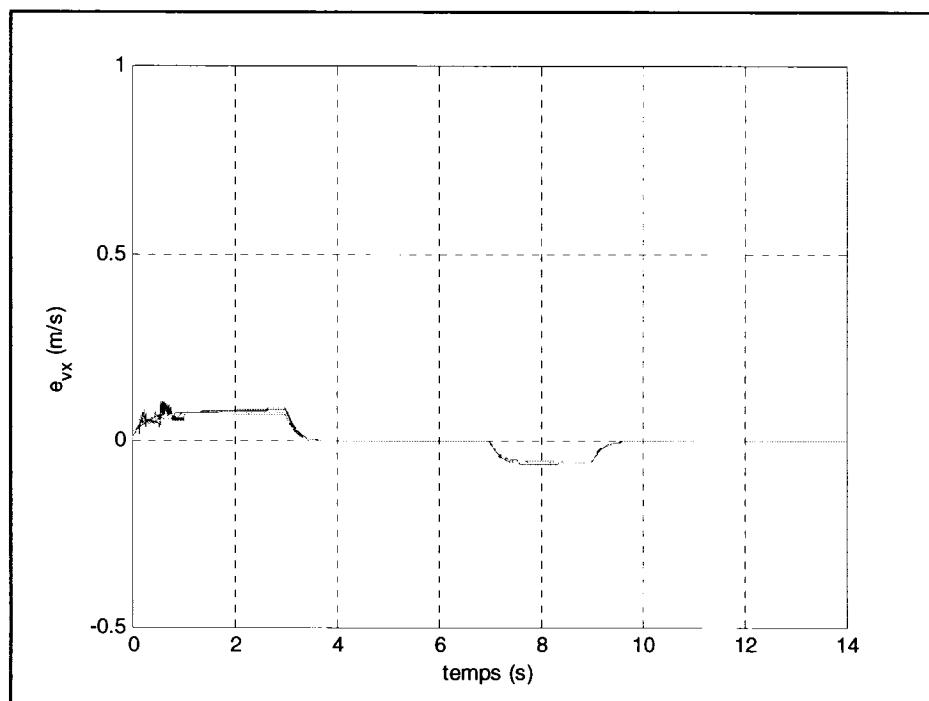
Tableau 5.1 : Paramètres du compensateur PI pour le contrôleur de vitesse angulaire des roues

Paramètres	Valeur
Pôles $p_{1g}, p_{2g}$	-4.98, -0.02
Gains $K_{Pg}, K_{Ig}$	5, 0.1
Pôles $p_{1d}, p_{2d}$	-4.98, -0.02
Gains $K_{Pd}, K_{Id}$	5, 0.1

Le premier essai en simulation consiste à suivre un profil de vitesse longitudinale de référence typique pour le suivi de chemin, c'est-à-dire des vitesses de référence constantes interreliées par des droites afin de rendre plus lisses les transitions. Cet essai vise tous les types de sol et les résultats sont illustrés dans les figures 5.9 et 5.10.



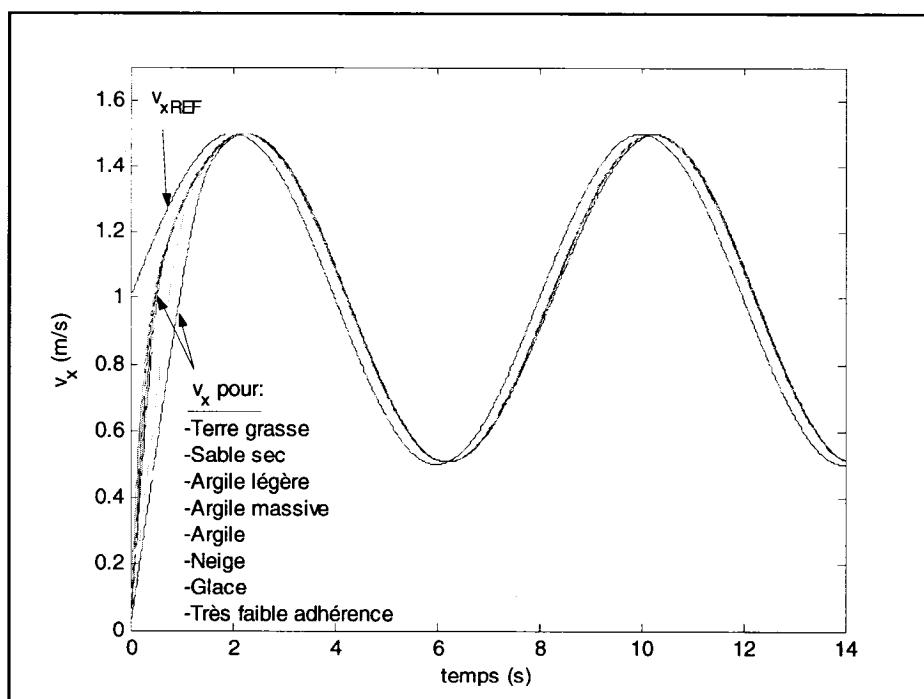
**Figure 5.9 : Essai #1, suivi pour le contrôleur de vitesse longitudinale sur différents types de sol**



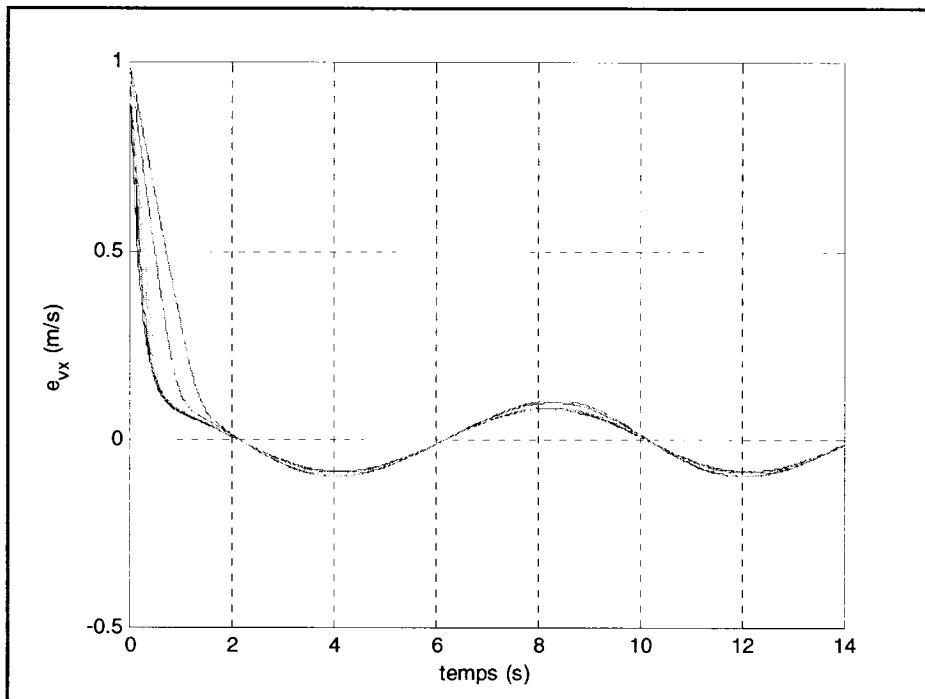
**Figure 5.10 : Essai #1, erreur de suivi pour le contrôleur de vitesse longitudinale**

On observe un bon suivi de la vitesse longitudinale de référence, et ce, pour tous les types de sol, même le sol fictif utilisant une adhérence quasi-nulle. L'erreur de suivi est pratiquement nulle ( $\leq 0.004\text{m/s}$ ) lorsque la consigne est constante et faible ( $\approx 0.07\text{m/s}$ ) lorsque la consigne est en transition. La vitesse à suivre étant généralement constante sur un parcours à suivre, cet essai montre que ce contrôleur est bien adapté et suffisamment rapide pour les besoins de l'application.

Le second essai vérifie la capacité du contrôleur à suivre une vitesse de référence ayant la forme d'une sinusoïde. Les résultats de simulation sont illustrés dans les figures 5.11 et 5.12. On voit que le contrôleur permet de suivre correctement un sinus avec une petite erreur due au temps de réponse. Cette erreur reste toutefois limitée, le contrôleur fait son travail correctement et ce, pour toute la gamme de terrains et adhérences testés.



**Figure 5.11 : Essai #2, suivi pour le contrôleur de vitesse longitudinale sur différents types de sol**



**Figure 5.12 : Essai #2, erreur de suivi pour le contrôleur de vitesse longitudinale**

### 5.1.5 Limitations du contrôleur de vitesse longitudinale

La plus grande faiblesse du contrôleur de vitesse longitudinale se situe au niveau du contrôleur de vitesse angulaire des roues qui suppose une connaissance parfaite des forces de traction et de résistance au mouvement agissant sur la roue. Dans un scénario pratique ces forces doivent être estimées (le modèle du sol peut être utilisé à cet effet), et la connaissance de celles-ci comporte des erreurs. Une évaluation de la robustesse aurait été intéressante, mais ce travail vise en premier lieu à faire la preuve de concept théorique d'un contrôleur permettant au robot de se mouvoir correctement, même en présence d'une adhérence limitée.

Concernant la performance du contrôleur, l'erreur en régime permanent est tout à fait acceptable mais le temps de réponse pourrait être amélioré davantage en modifiant les pôles pour les compensateurs PI. Par contre, nous allons nous rendre compte dans la

section (5.2.2) qu'il n'est pas avantageux d'être trop performant longitudinalement, si nous désirons conserver un jeu pour le compensateur de vitesse angulaire. C'est pourquoi nous maintenons ces valeurs de pôles et de gains, qui sont d'ailleurs très adéquats pour l'application de suivi de chemin qui nous intéresse, où le profil de vitesse longitudinale de référence est généralement constitué de segments constants liés par des droites.

## 5.2 Contrôleur de vitesse angulaire

### But

Concevoir un contrôleur qui trouvera les couples à appliquer aux roues  $\tau_{(g,d)}$ , de sorte que la vitesse angulaire du robot mobile  $\Omega$  tende vers la vitesse angulaire de référence  $\Omega_{REF}$ , en présence de glissement latéral.

### 5.2.1 Problématique de conception : glissement latéral

Une première approche testée (sans succès) pour le contrôleur de vitesse angulaire consiste à trouver les vitesses aux roues de référence permettant au robot de tourner avec une vitesse angulaire  $\Omega_{REF}$  et d'additionner celles-ci aux vitesses des roues trouvées pour atteindre la vitesse longitudinale  $v_{xREF}$  (trouvé à la section 5.1.2). Les vitesses de référence des roues pour obtenir une vitesse angulaire  $\Omega_{REF}$  lorsque le glissement latéral est nul sont données par les expressions suivantes :

$$\omega_{gREF} = \frac{-b\Omega_{REF}}{r}, \quad \omega_{dREF} = \frac{b\Omega_{REF}}{r} \quad (5.17)$$

À la section 5.1.2, nous avons trouvé les vitesses angulaires aux roues de référence permettant d'atteindre la vitesse longitudinale de référence en présence de glissement longitudinal :

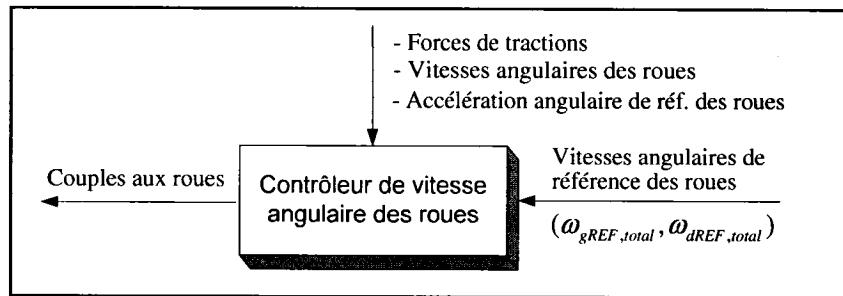
$$\omega_{gREF} = \frac{v_{xREF}}{r(1-S_g)}, \quad \omega_{dREF} = \frac{v_{xREF}}{r(1-S_d)} \quad (5.18)$$

Lorsqu'on additionne les deux vitesses de référence trouvées ci-contre, on découvre les vitesses à appliquer aux roues afin que le robot converge vers une vitesse longitudinale et angulaire de référence.

$$\omega_{gREF,total} = \frac{v_{xREF}}{r(1-S_g)} - \frac{b\Omega_{REF}}{r}, \quad \omega_{dREF,total} = \frac{v_{xREF}}{r(1-S_d)} + \frac{b\Omega_{REF}}{r} \quad (5.19)$$

En apposant ces vitesses à l'entrée du contrôleur de vitesse angulaire des roues découvert à la section 5.1.1, nous avons pensé que le robot mobile atteindrait sa vitesse

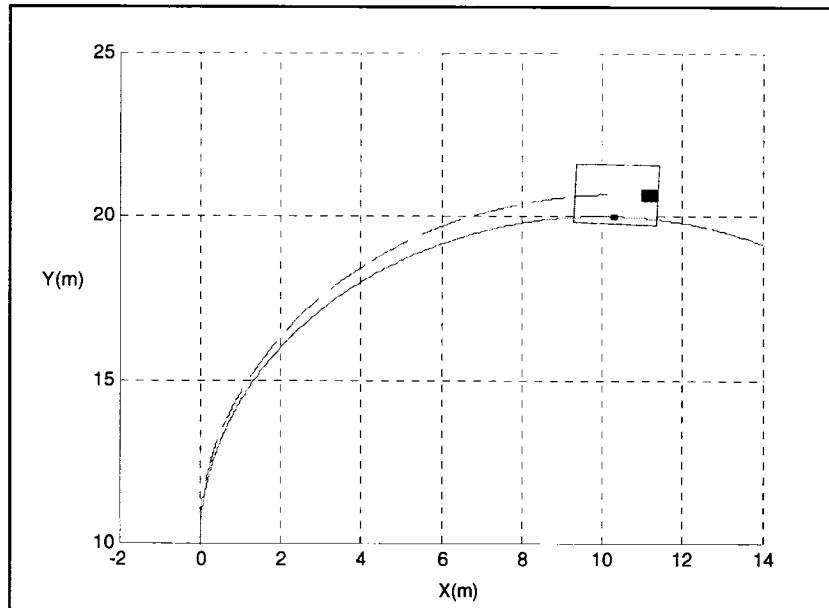
angulaire désirée, en plus de sa vitesse longitudinale désirée. La prochaine figure montre la représentation schématique du contrôleur testé.



**Figure 5.13 : Contrôleur de vitesses angulaires des roues utilisant en entrée les vitesses de référence aux roues additionnées**

Un essai de ce contrôleur sur un chemin constitué d'un cercle (figure 5.14) permet de constater les comportements suivants :

- Le robot atteint correctement sa vitesse longitudinale désirée (ici 0.8m/s)
- Le robot atteint correctement sa vitesse angulaire désirée
- Le robot subit un glissement latéral non négligeable ( $v_{ymoy} = 0.04m/s$ ) qui le fait atteindre un cercle rayon de courbure supérieur au rayon de courbure désiré.



**Figure 5.14 : Essai en simulation du contrôleur de vitesse angulaire des roues utilisant les vitesses de référence aux roues additionnées**

(Terrain : sable,  $v_{xREF} = 0.8m/s$ ,  $\rho_{REF} = 10m$ )

On remarque que le glissement latéral entre en jeu et n'est pas négligeable. La situation décrite ci-contre suggère le développement d'un contrôleur plus sophistiqué qui prendra précisément en compte le glissement latéral.

### 5.2.2 Conception du contrôleur de vitesse angulaire

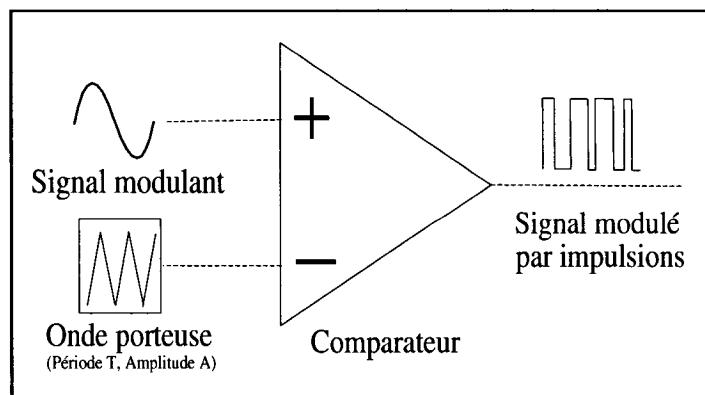
Nous observons que plus le robot tente d'atteindre une vitesse angulaire élevée pour une vitesse longitudinale donnée, plus il glissera latéralement. On sait aussi que lorsque les couples appliqués aux roues sont égaux, la vitesse latérale tend vers zéro car le robot suit une ligne droite. Notre but est de permettre l'atteinte d'une vitesse angulaire précise tout en limitant le glissement latéral, qui est un effet indésirable.

#### Idée de base

En appliquant au robot mobile un moment angulaire non-nul *pour un bref instant* et par la suite nul, il peut être possible de faire tourner celui-ci légèrement sans provoquer un glissement latéral élevé. En répétant la procédure périodiquement, il peut être possible d'obtenir une vitesse angulaire prescrite tout en limitant le glissement latéral.

#### Création du signal de contrôle périodique

La création du signal de contrôle utilise la modulation de largeur d'impulsion (Pulse Width Modulation ou PWM) utilisant une onde porteuse en dents de scie (figure 5.15).



**Figure 5.15 : Modulation de largeur d'impulsion utilisant une onde porteuse en dents de scie**

Le contrôleur de vitesse angulaire développé est représenté schématiquement à la figure 5.16. Il utilise la modulation par largeur d'impulsion pour produire périodiquement un moment angulaire sur le robot mobile. Le résultat de la modulation par largeur d'impulsion est ensuite multiplié par l'onde elle-même afin d'obtenir un moment angulaire signé et dont l'amplitude est proportionnelle à l'amplitude du signal *accélération angulaire désirée*, qui lui, provient du bloc *contrôleur cinématique* du contrôleur de suivi de chemin. Une augmentation en amplitude de l'accélération angulaire désirée provoquera donc à la fois une augmentation en amplitude et en fréquence du moment appliqué au robot mobile. Ce contrôleur possède trois paramètres configurables, soit :

- La fréquence et l'amplitude de l'onde porteuse utilisée pour la modulation en fréquence.
- Un gain noté  $K$  qui permet d'ajuster la valeur de la différence de couple appliquée au robot en fonction du signal modélisé par largeur d'impulsion.

La figure 5.16 illustre le schéma de bloc complet du contrôleur de vitesse angulaire et la figure 5.17 montre le schéma haut niveau entrée-sortie du contrôleur.

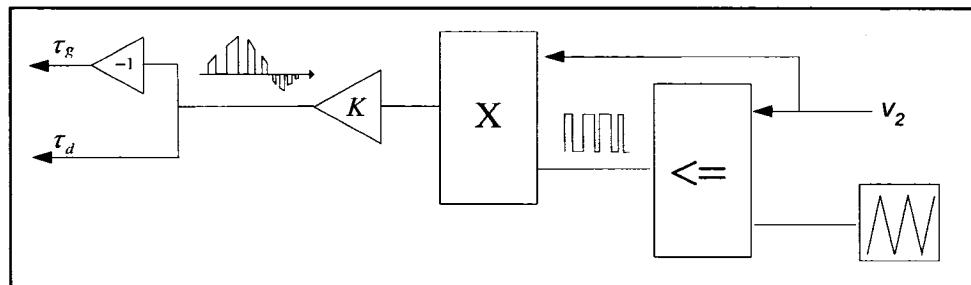


Figure 5.16 : Schéma de bloc mathématique de contrôleur de vitesse angulaire

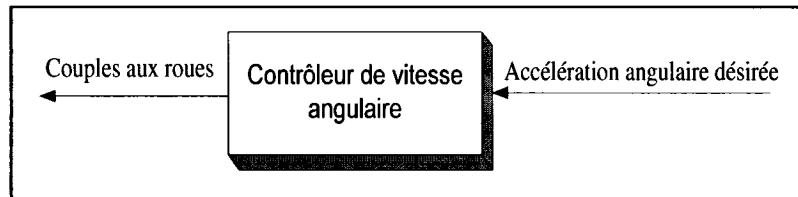


Figure 5.17 : Schéma de bloc de la première partie du contrôleur de vitesse longitudinale

Plusieurs essais ont été effectués avec le contrôleur avant de pouvoir déterminer des paramètres permettant un bon fonctionnement sur plusieurs types de sol. Les paramètres retenus sont présentés au tableau 5.2.

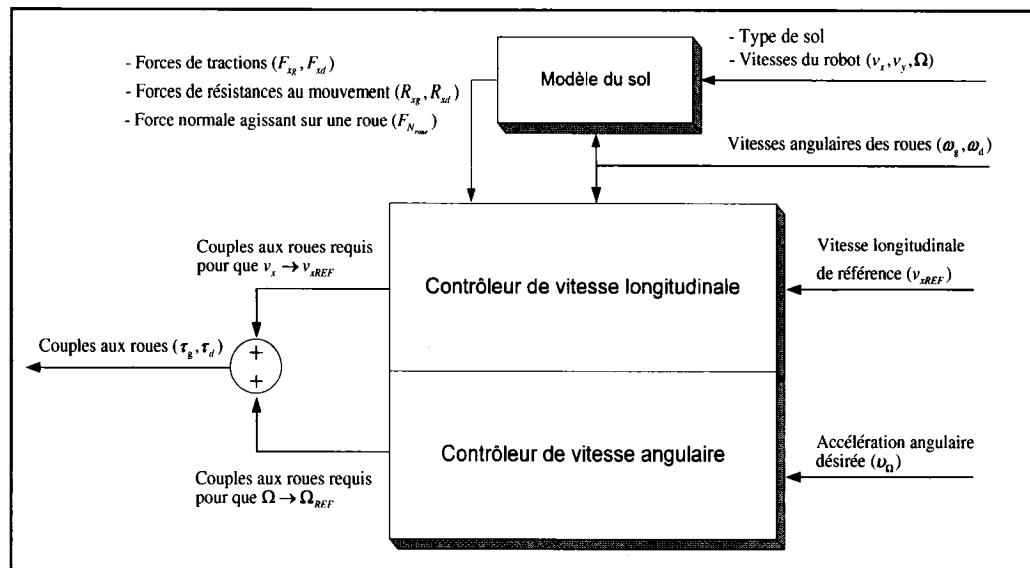
**Tableau 5.2 : Paramètres du contrôleur de vitesse angulaire**

Paramètres	Valeur
Amplitude (A) de l'onde porteuse en dents de scie	5
Période (T) de l'onde porteuse en dents de scie	0.2
Gain $K$	0.78

## 5.3 Contrôleur complet

### 5.3.1 Structure du contrôleur complet

Finalement, nous présentons la structure complète du contrôleur proposé. Les deux contrôleurs développés respectivement à la section 5.2 et 5.3 sont utilisés de manière additive : les couples à appliquer aux roues du robot sont simplement une addition des couples trouvés pour les deux contrôleurs séparément. La figure 5.18 montre un schéma de bloc du contrôleur dynamique complet développé et implémenté en Matlab/Simulink.



**Figure 5.18 : Schéma de bloc du contrôleur dynamique pour le suivi de chemin avec glissement**

### 5.3.2 Résumé schématique du contrôle de suivi de chemin pour le modèle avec glissement

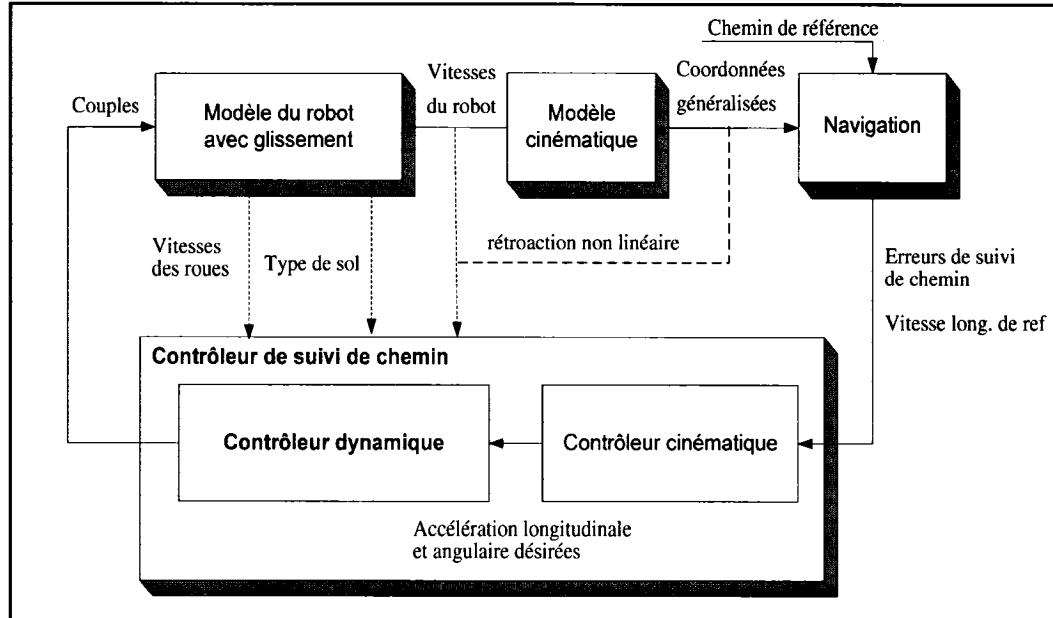


Figure 5.19 : Système complet d'asservissement pour le modèle avec glissement

Modèle cinématique (même que pour le contrôleur sans glissement du chapitre 4)

- *Vitesses du robot* : Vecteur 3x1 contenant les vitesses longitudinale, latérale et angulaire du robot mobile par rapport à son centre de masse. Noté  $\eta = [v_x \ v_y \ \Omega]^T$ .
- *Coordonnées généralisées* : Vecteur 3x1 contenant les coordonnées généralisées qui définissent la position/orientation du robot mobile dans le repère inertiel. Noté  $q = [x \ y \ \theta]^T$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)v_x - \sin(\theta)v_y \\ \sin(\theta)v_x + \cos(\theta)v_y \\ \Omega \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

Navigation (même que pour le contrôleur sans glissement du chapitre 4)

- *Vitesses du robot* : Vecteur 3x1 contenant les vitesses longitudinale, latérale et angulaire du robot mobile par rapport à son centre de masse. Noté  $\eta = [v_x \ v_y \ \Omega]^T$

- *Coordonnées généralisées* : Vecteur 3x1 contenant les coordonnées généralisées qui définissent la position/orientation du robot mobile dans le repère inertiel.

$$\text{Noté } q = [x \ y \ \theta]^T$$

- *Chemin de référence* : ensemble de points  $(x_{REF}, y_{REF})$ , d'orientations  $(\theta_{REF})$ , de rayons de courbure  $(\rho_{REF})$  et de vitesses longitudinales  $(v_{XREF})$  de référence exprimés dans le repère inertiel. Noté  $\Pi$ .

$$\begin{bmatrix} e_{lat} \\ e_\theta \\ e_\Omega \\ e_{vx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \min\{|(x - x_{REF})^2 + (y - y_{REF})^2|, \forall x_{REF}, y_{REF} \in \Pi\} \\ \theta - \theta_{REF} \\ \dot{\theta} - \dot{\theta}_{REF} \\ v_x - v_{REF} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Contrôleur cinématique (même que pour le contrôleur sans glissement du chapitre 4)

- *Chemin de référence* : ensemble de points  $(x_{REF}, y_{REF})$ , d'orientations  $(\theta_{REF})$ , de rayons de courbure  $(\rho_{REF})$  et de vitesses longitudinales  $(v_{XREF})$ , accélération longitudinale ( $\dot{v}_{XREF}$ ) et angulaire ( $\Omega_{REF}$ ) de référence exprimés dans le repère inertiel.

Noté  $\Pi$ .

- *Erreurs de suivi* : Vecteur 4x1 désignant les erreurs de navigation : erreur latérale, erreur de vitesse longitudinale, erreur d'orientation et erreur de vitesse angulaire. Notées  $e = [e_{lat} \ e_{vx} \ e_\theta \ e_\Omega]^T$ .

- *Gains du contrôleur cinématique* : Vecteur 5x1 désignant les gains des vitesses longitudinale et angulaire. Noté  $K_{cin} = [K_{vx1} \ K_{vx2} \ K_{\theta1} \ K_{\theta2} \ K_{\theta3}]^T$ .

- *Accélérations longitudinale et angulaire désirées*: Vecteur 2x1 contenant les accélérations linéaire et angulaire requises (désirées) afin d'obtenir des vitesses faisant en sorte que la plate-forme mobile convergera vers son chemin de référence. Noté  $v = [v_1 \ v_2]^T$ .

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_{xREF} - K_{vx1}e_{vx} - \frac{K_{vx2}}{s}e_{\dot{v}_x} \\ \dot{\Omega}_{REF} - K_{\theta1}\dot{e}_{\theta} - K_{\theta2}e_{\theta} - \frac{K_{\theta3}}{v_{xREF}}e_{lat} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

### Contrôleur dynamique

- *Vitesses du robot*: Vecteur 3x1 contenant les vitesses longitudinale, latérale et angulaire du robot mobile par rapport à son centre de masse. Noté  $\eta = [v_x \quad v_y \quad \Omega]^T$ .
- *Accélérations longitudinale et angulaire désirées*: Vecteur 2x1 contenant les accélérations linéaire et angulaire requises (désirées) afin d'obtenir des vitesses faisant en sorte que la plateforme mobile convergera vers son chemin de référence. Noté  $v = [v_1 \quad v_2]^T$ .
- *Vitesses des roues*: Vecteur 2x1 contenant les vitesses angulaires des roues situées de part et d'autre du robot mobile. Noté  $\omega_g$  et  $\omega_d$ .
- *Vitesses de référence des roues*: Vecteur 2x1 contenant les vitesses angulaires désirées des roues, celles-ci sont calculées à l'intérieur de ce bloc. Noté  $\omega_{gREF}$  et  $\omega_{dREF}$ .
- *Erreur de vitesse angulaires des roues*: Vecteur 2x1 contenant les erreurs de vitesses angulaires des roues, celles-ci sont calculées à l'intérieur de ce bloc. Noté  $e_{\omega g}$  et  $e_{\omega d}$ .
- *Forces et moments*: Vecteur 5x1 contenant les forces de traction agissant entre les roues et le sol à gauche et à droite, les forces de résistance au mouvement et les forces normales agissant sur les roues. Noté respectivement :  $F_{xg}$ ,  $F_{xd}$ ,  $R_{xg}$ ,  $R_{xd}$  et  $F_{Nroue}$ .
- *Couples* : Vecteur 2x1 contenant les couples appliqués aux roues à gauche et à droite du robot mobile. Noté respectivement :  $\tau_g$  et  $\tau_d$ .
- *Gains du contrôleur de vitesses angulaires des roues* : Vecteur 4x1 désignant les gains du contrôleur de vitesses angulaires des roues. Noté  $K_\Omega = [K_{Pg} \quad K_{Ig} \quad K_{Pd} \quad K_{Id}]^T$ .

- *Gains du contrôleur de vitesse angulaire* : Scalaire désignant le gain du contrôleur de vitesse angulaire du robot. Noté  $K$ .

$$\begin{bmatrix} \omega_{gREF} \\ \omega_{dREF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_{xREF}}{r \cdot [1 - \mu_{\text{type de sol}}^{-1}(\frac{R_{xg}}{2F_{N_{roue}}})]} & \frac{v_{xREF}}{r \cdot [1 - \mu_{\text{type de sol}}^{-1}(\frac{R_{xd}}{2F_{N_{roue}}})]} \end{bmatrix}^T \quad (5.16)$$

$$\begin{bmatrix} e_{\omega g} \\ e_{\omega d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_g - \omega_{gREF} \\ \omega_d - \omega_{dREF} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_g \\ \tau_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} F_{xg} - I_{roue} (K_{Pg} e_{\omega g} + K_{Ig} \int e_{\omega g} dt - \dot{\omega}_{gREF}) \\ \frac{r}{2} F_{xg} - I_{roue} (K_{Pd} e_{\omega d} + K_{Id} \int e_{\omega d} dt - \dot{\omega}_{dREF}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K \cdot \text{Comp}(v_2, \text{Onde}_{PWM}) \\ K \cdot \text{Comp}(v_2, \text{Onde}_{PWM}) \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$\text{Comp}(a, b) = \begin{cases} 1 & a \geq b \\ 0 & a < b \end{cases} \quad (5.17)$$

Voir la figure 5.16 pour des détails sur le signal OndePWM.

### 5.3.3 Résultats de simulations

#### 5.3.3.1 Chemin de référence

Le chemin de référence choisi pour la simulation du contrôleur est constitué de segments de droites et d'arcs de cercles de différents rayons. La figure 5.20 illustre le chemin de référence utilisé. Le point de départ du robot mobile est assez proche du chemin de référence (voir figure). Pour les segments de droites, le rayon de courbure de référence est infini et une valeur très grande est utilisée pour la simulation. Ce chemin de référence est long de 77.12m.

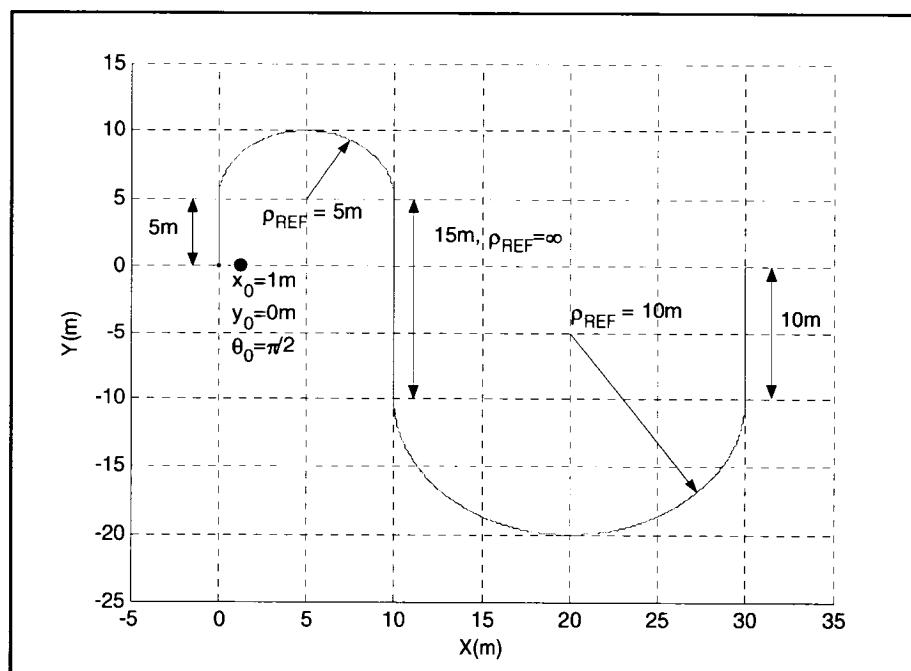


Figure 5.20 : Chemin de référence choisi pour les essais de simulations

#### 5.3.3.2 Essai de simulation avec une vitesse longitudinale uniforme de 0.4m/s

Le premier essai est effectué avec une vitesse longitudinale constante et uniforme tout le long du parcours de 0.4m/s. La figure 5.21 illustre le suivi de chemin pour tous les types de terrains et la figure 5.22 montre les erreurs de navigation, de suivi de vitesse longitudinale ( $e_{vx}$ ), d'orientation ( $e_\theta$ ) et d'erreur latérale ( $e_{lat}$ ) tout au long du parcours du chemin. Si le suivi était parfait et la vitesse initiale du robot égale à la vitesse longitudinale de référence, le temps de parcours serait alors de 192.8s (77.12m ÷ 0.4m/s = 192.8s).

Le contrôleur développé fait en sorte que le robot mobile suit correctement son chemin et ce, pour toute la gamme de terrains et d'adhérences testés. Les chemins sont suivis avec un temps légèrement supérieur au temps idéal car la vitesse longitudinale du robot évolue autour de la vitesse longitudinale de référence et est finalement en moyenne un peu inférieure à la vitesse longitudinale de référence à cause du glissement des roues. On observe que les erreurs de navigation sont limitées et se tiennent aux environs de zéro, avec de légères oscillations. Le contrôleur fonctionne bien même lorsque l'adhérence est très faible (glace) ou même pratiquement nulle.

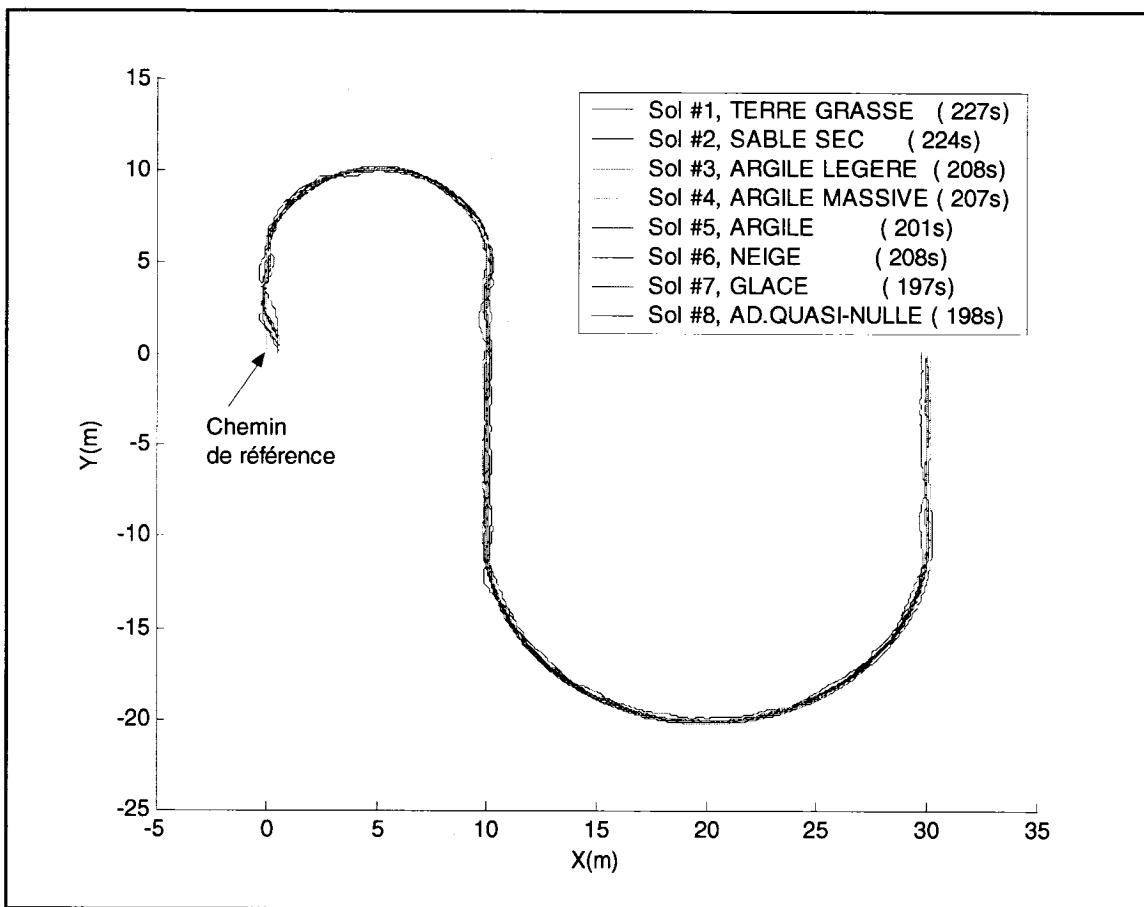


Figure 5.21 : Suivi de chemin à 0.4m/s pour différents types de sol

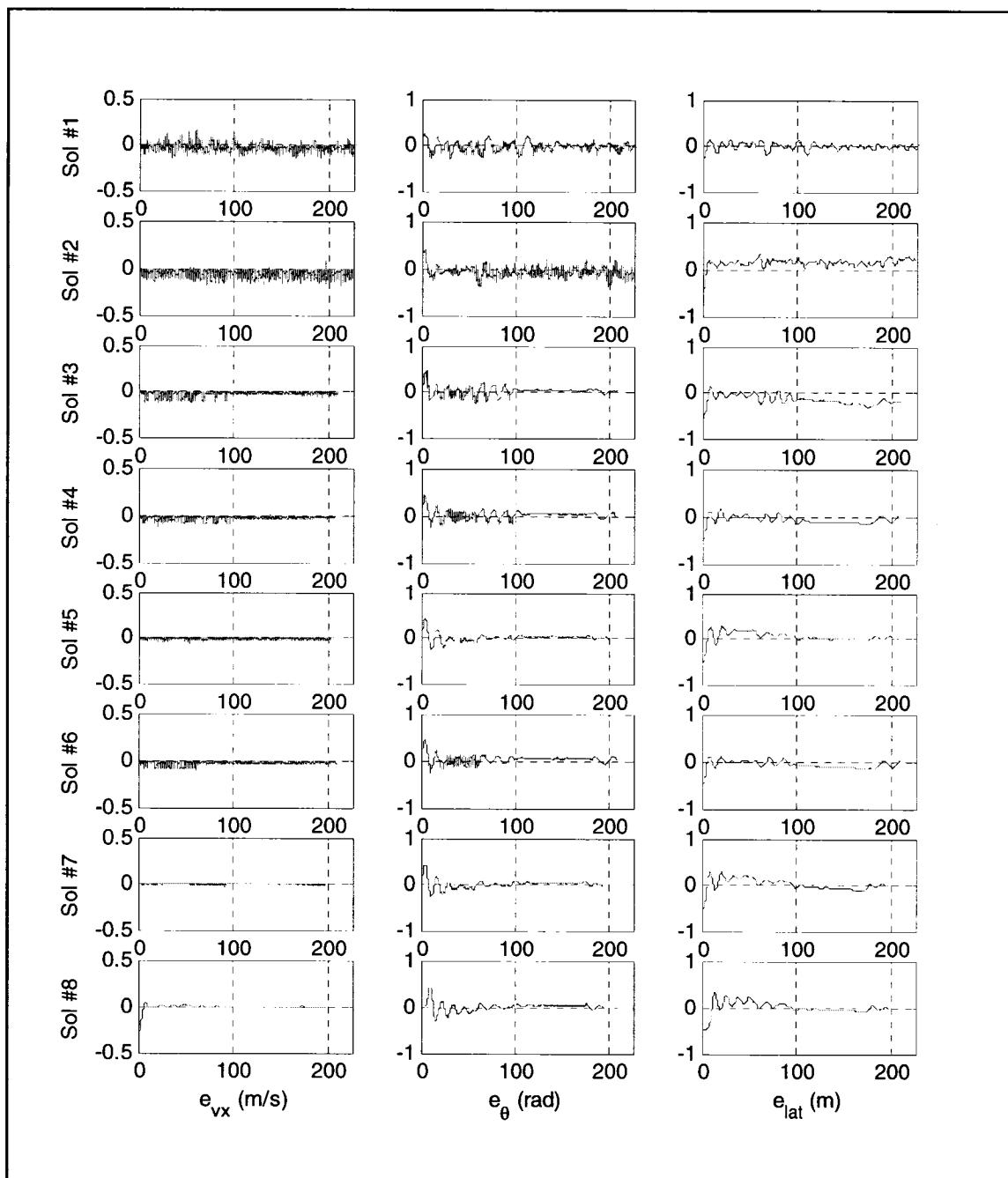


Figure 5.22 : Erreurs de suivi de chemin à 0.4m/s pour différents types de sol

### 5.3.3.2 Essai de simulation avec une vitesse longitudinale uniforme de 0.8m/s

Pour le second essai, nous doublons la vitesse longitudinale de référence utilisée pour le premier essai. Nous observons un moins bon suivi par rapport au premier essai : lorsque le robot essaie de suivre un cercle avec un rayon de courbure spécifique, il est moins stable latéralement et dévie un peu. Toutefois le suivi est quand même acceptable avec des erreurs latérales maximales de l'ordre de 80cm.

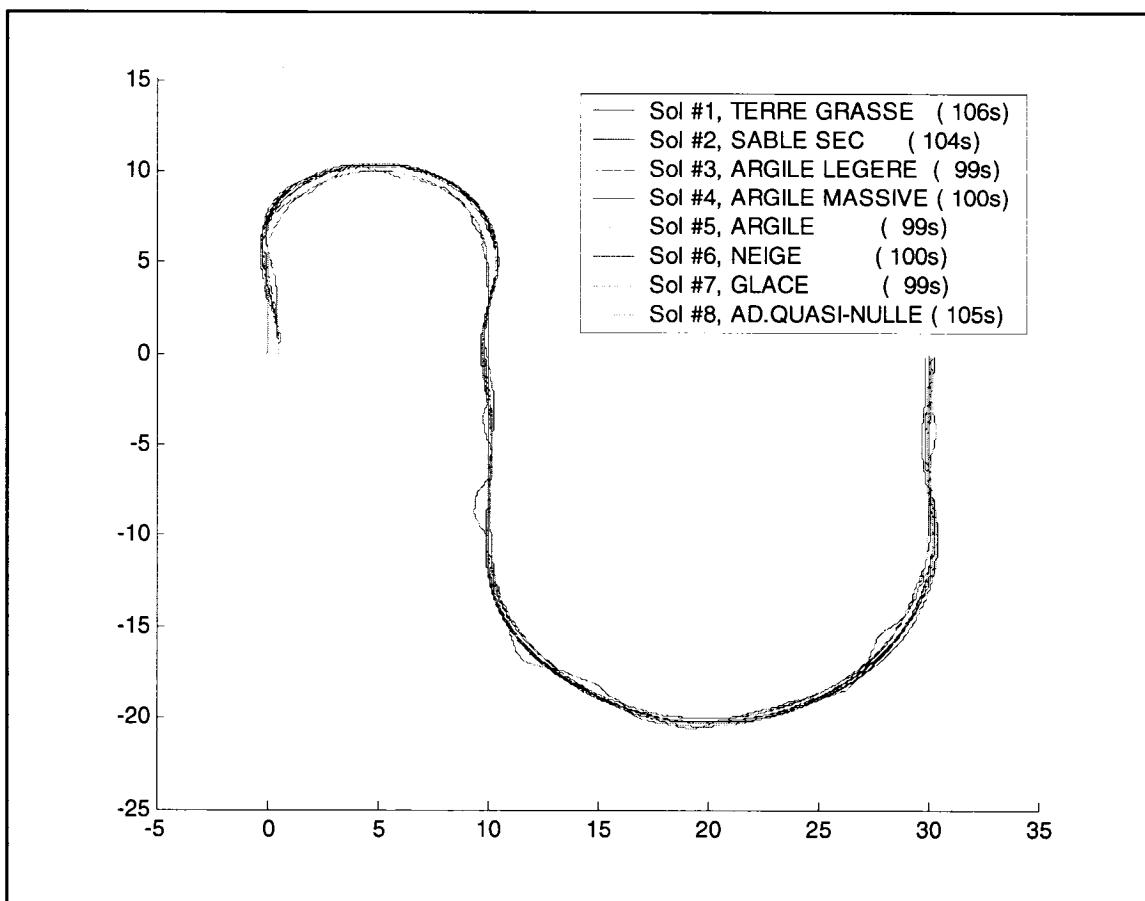


Figure 5.23 : Suivi de chemin à 0.8m/s pour différents types de sol

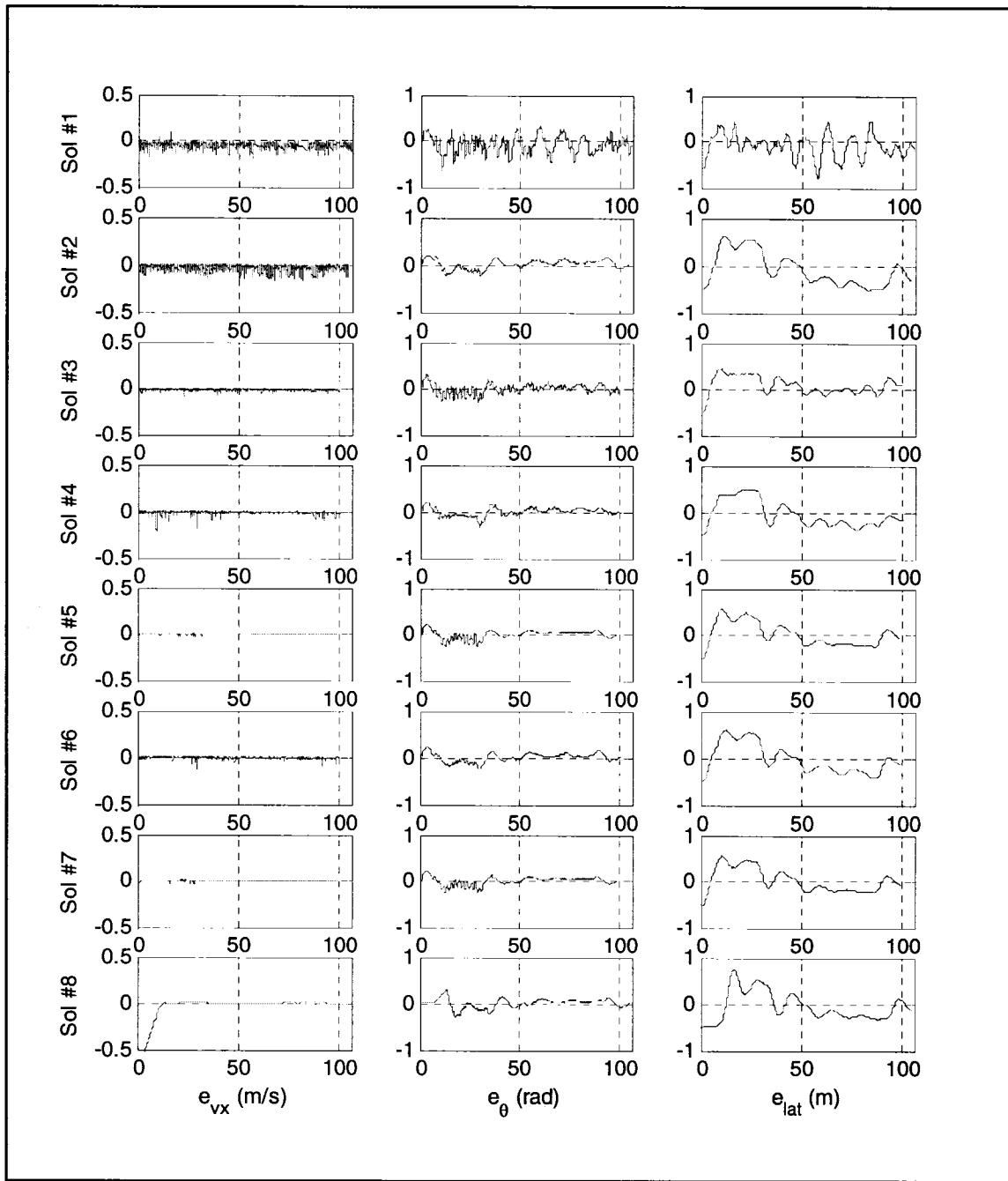


Figure 5.24 : Erreurs de suivi de chemin à 0.8m/s pour différents types de sol

### 5.3.3.3 Essai de simulation avec une vitesse longitudinale uniforme de 1.2m/s

Pour le troisième essai, nous triplons la vitesse de référence utilisée pour le premier essai. Cet essai permet de constater les limites du contrôleur. Le suivi de chemin n'est clairement plus adéquat (figure 5.25) et d'importantes erreurs de navigation se produisent (figure 5.26). En effet, déjà au début du parcours (premier virage à droite) on observe que le robot mobile est dans l'impossibilité de suivre la courbe à cause de la vitesse longitudinale trop élevée. Le contrôleur de vitesse longitudinale continue de bien faire son travail mais le contrôleur de vitesse angulaire n'est plus en mesure de faire tourner le robot mobile sans le déstabiliser latéralement. On peut alors affirmer que ce contrôleur fonctionne correctement pour une vitesse longitudinale de référence inférieure à 1m/s.

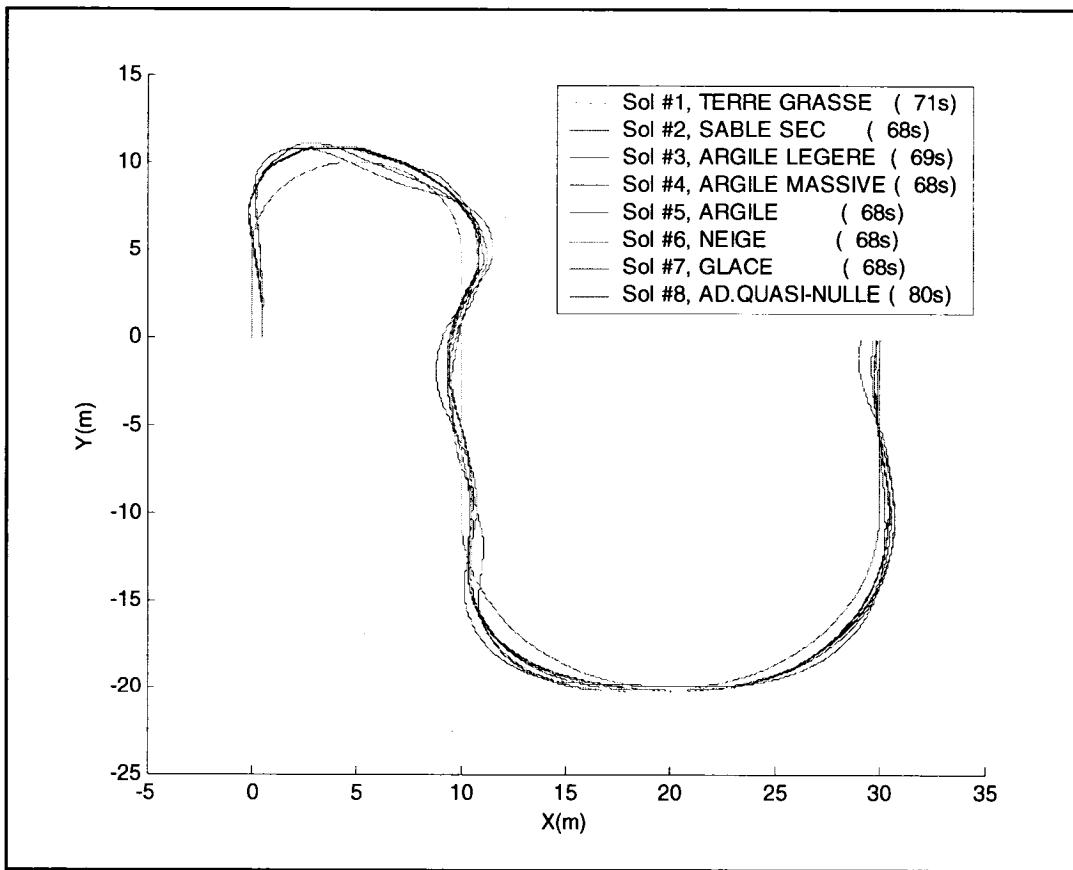
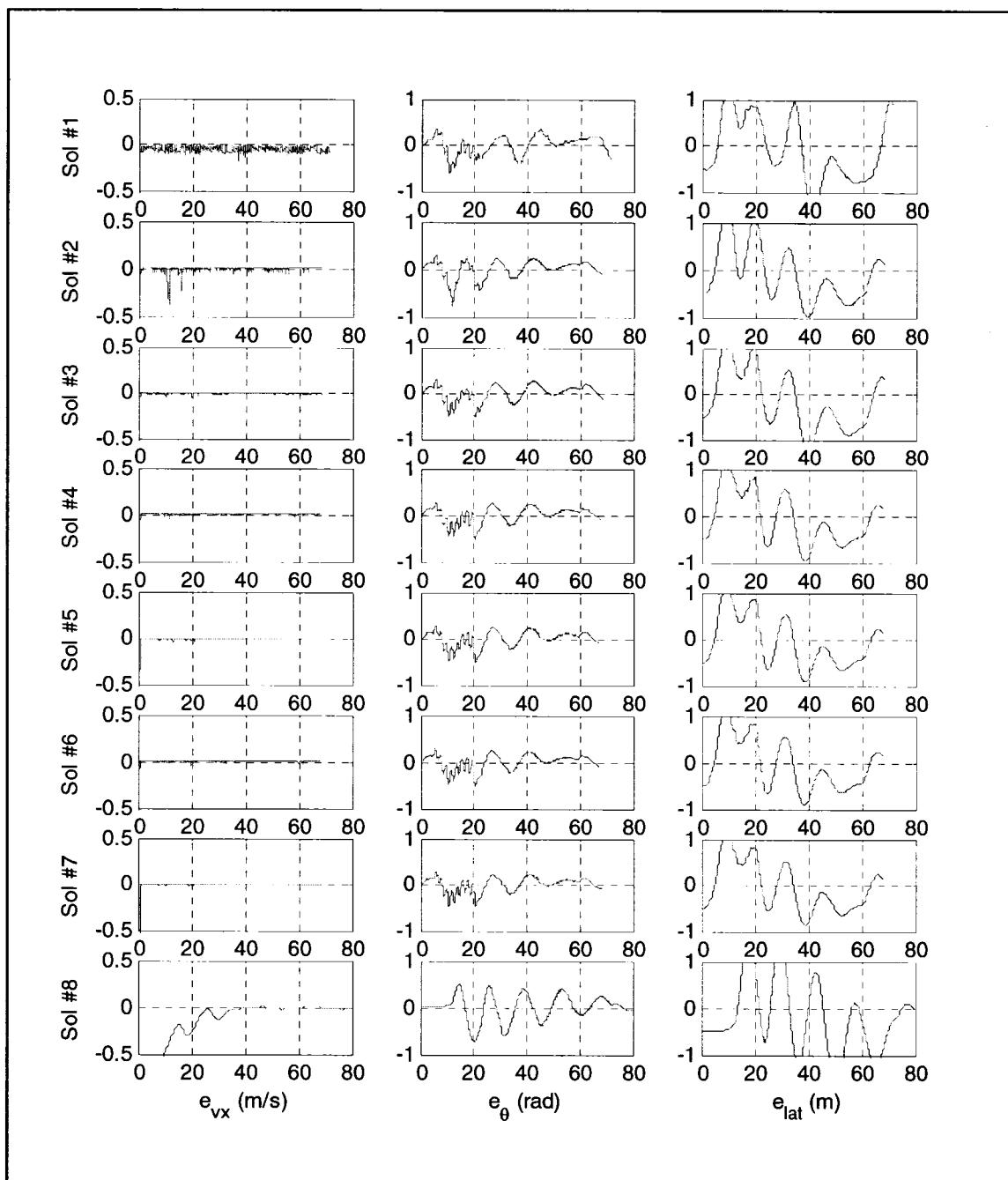


Figure 5.25 : Suivi de chemin à 1.2m/s pour différents types de sol



**Figure 5.26 : Erreurs de suivi de chemin à 1.2m/s pour différents types de sol**

### 5.3.3.4 Essai de simulation avec une vitesse longitudinale variante

Les essais précédents montrent que le robot mobile a de la difficulté à suivre une courbe à haute vitesse. Une alternative naturelle au problème est de limiter la vitesse longitudinale de référence dans les courbes et d'accélérer en ligne droite. C'est ce que nous nous proposons de faire pour ce dernier essai. La vitesse longitudinale est limitée à  $v_{xREF} \leq 0.08 \cdot \rho_{REF}$ , autrement dit,  $v_{xREF} = 0.4m/s$  pour le premier arc de cercle de 5m de rayon et  $v_{xREF} = 0.8m/s$  pour le deuxième arc de cercle de 10m de rayon. La vitesse est augmentée dans les lignes droites à 1.2m/s. Le profil de vitesse utilisé est illustré dans la figure 5.27.

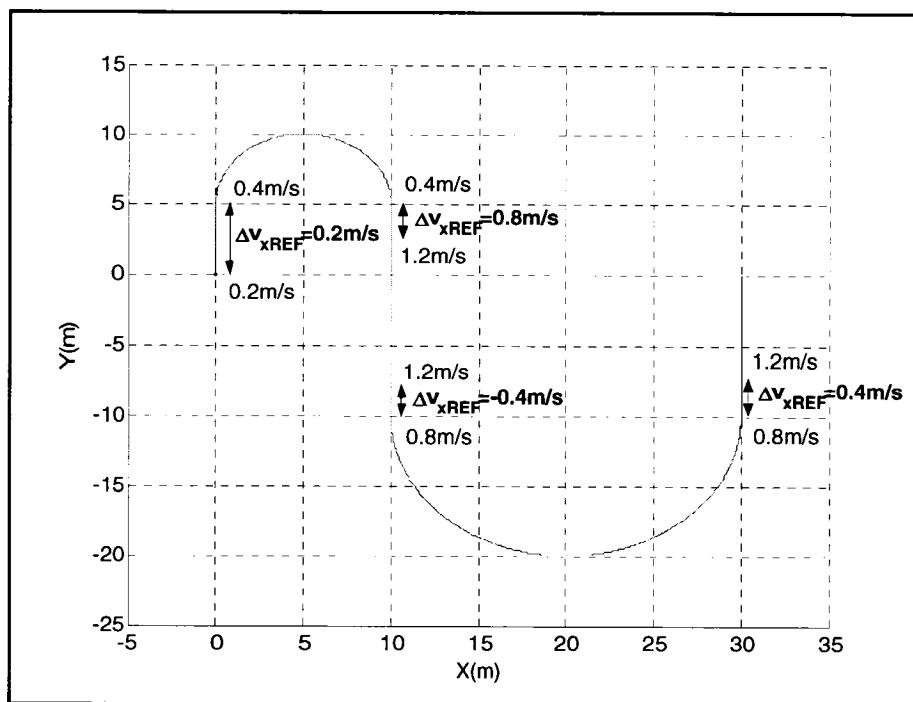
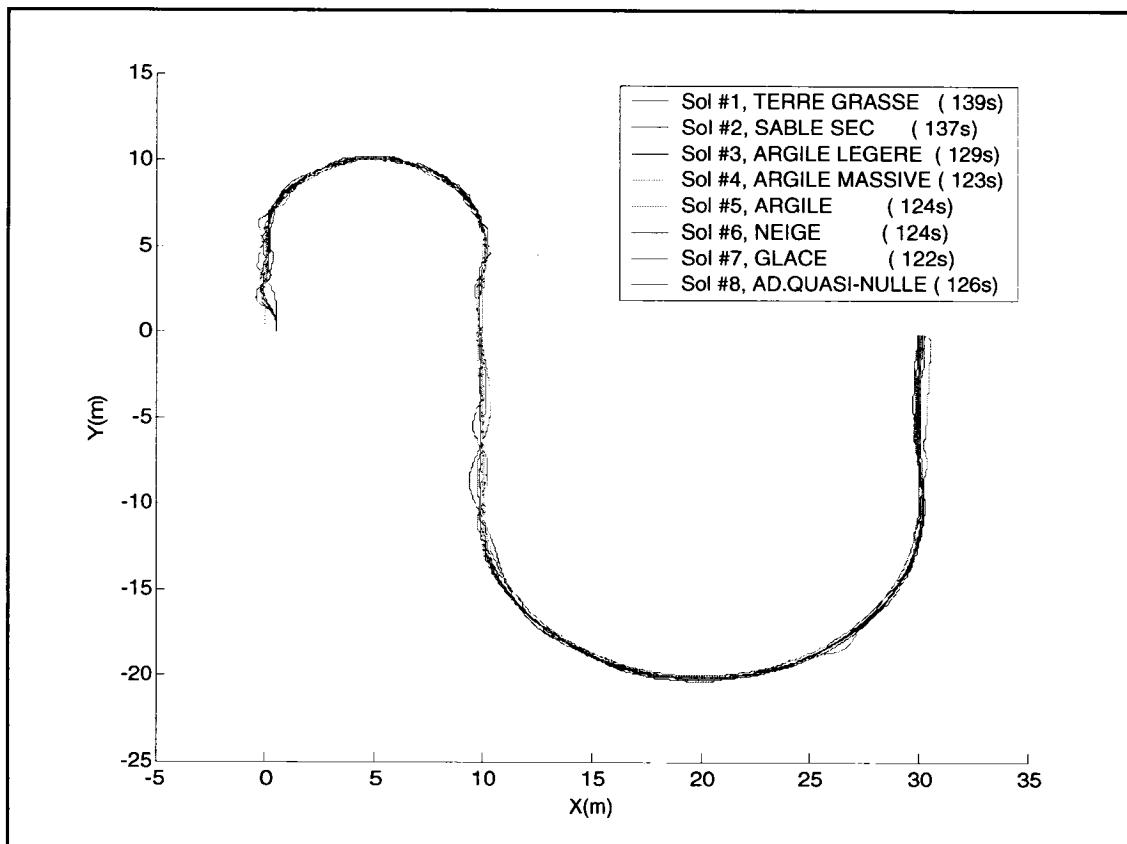


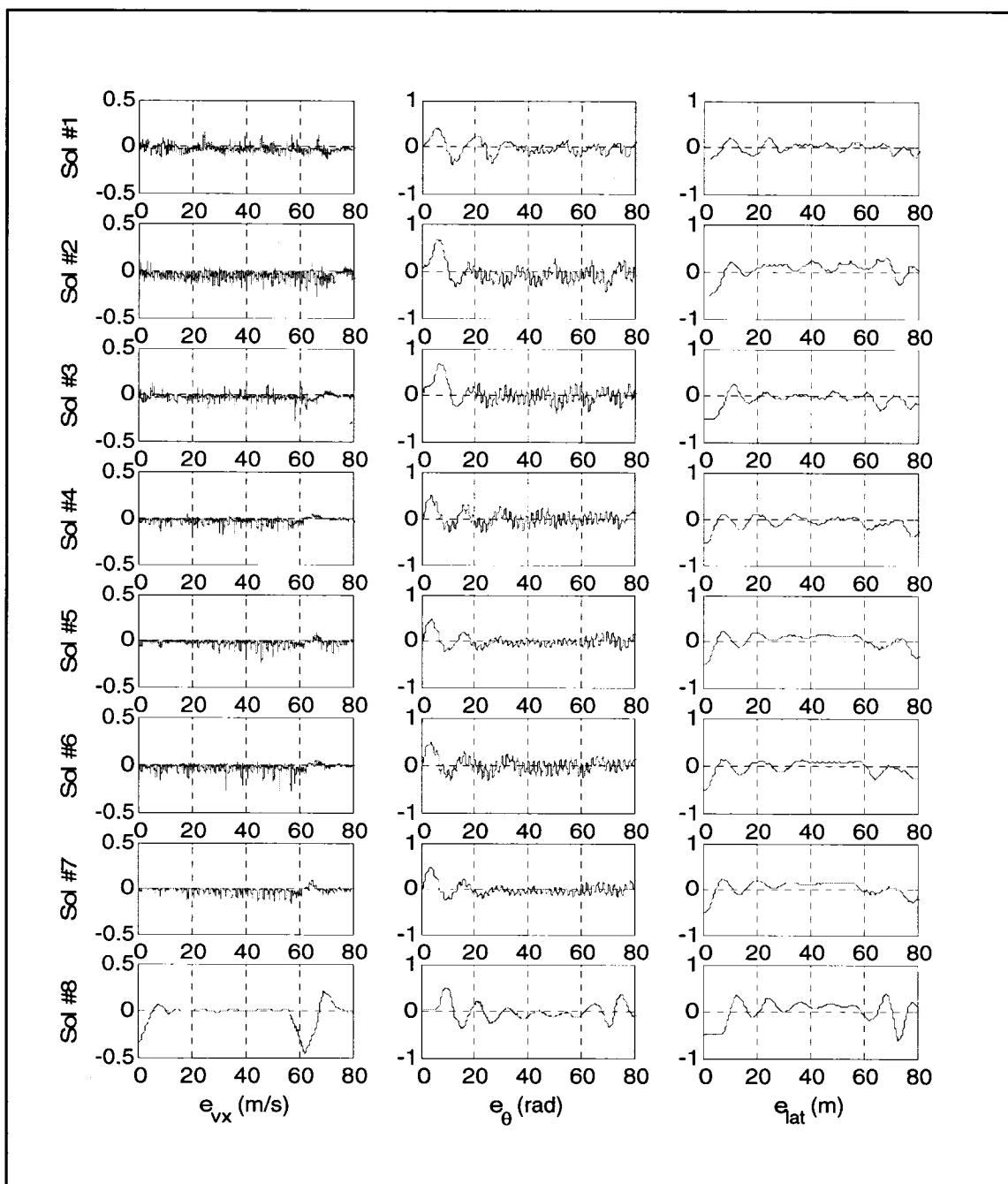
Figure 5.27 : Profil de vitesse longitudinale de référence

Les prochains résultats de simulation illustrés à la figure 5.28 et 5.29 présentent le comportement du robot mobile sous l'effet du contrôleur lorsque la vitesse longitudinale de référence au long du parcours est variable. Le robot mobile suit correctement son chemin désigné et les changements de vitesse longitudinale de référence ont un impact mineur sur sa performance. On ne constate qu'une fluctuation de l'erreur de vitesse

longitudinale vers la fin de l'essai, lorsque la vitesse passe de 0.8m/s à 1.2m/s. Les erreurs de suivi sont assez bonnes et elles demeurent bornées. Un seul problème subsiste au niveau de l'essai sur le sol avec une adhérence quasi-nulle, ce sol *théorique* très peu adhérent cause des problèmes de suivi non négligeables et les erreurs de vitesses longitudinales et latérales deviennent importantes. De manière générale, le contrôleur tolère très bien les changements de vitesse au long du parcours et le suivi est suffisamment précis, étant donné la complexité de l'environnement (sols avec une adhérence moyenne à très faible) dans lequel le robot est simulé.



**Figure 5.28 : Suivi de chemin à vitesse de référence variable pour différents types de sol**



**Figure 5.29 : Erreurs de suivi de chemin à vitesse de référence variable pour différents types de sol**

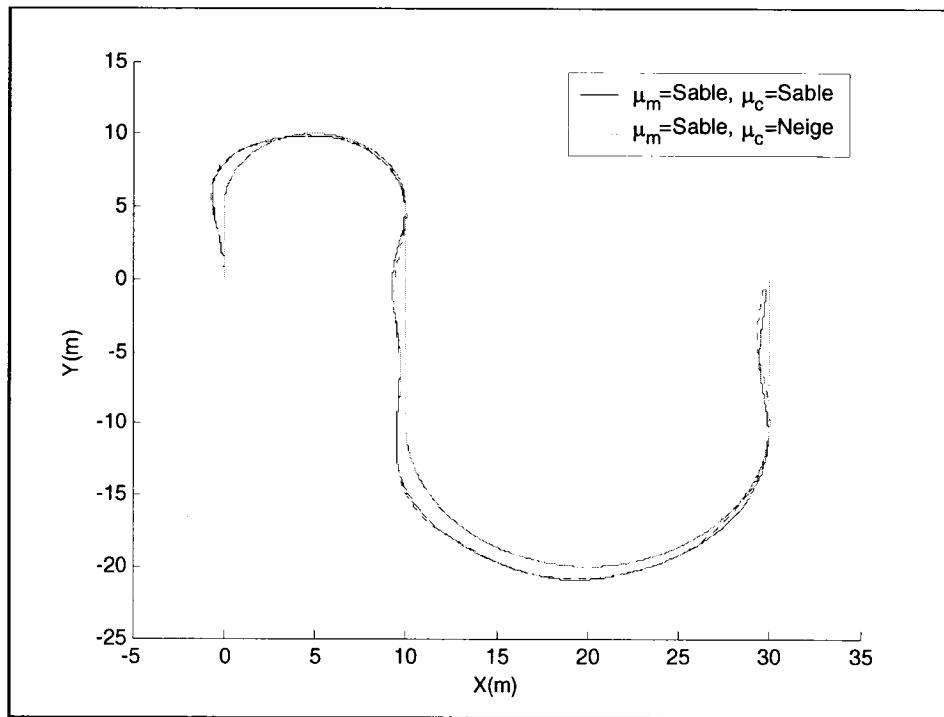
### 5.3.3.5 Essai de simulation avec une adhérence au niveau du contrôleur différente de l'adhérence utilisée pour la modélisation du robot

Jusqu'à maintenant, les simulations effectuées prennent pour acquis que le contrôleur connaît parfaitement les paramètres du sol sur lequel le robot bouge, c'est-à-dire que celui-ci utilise la même fonction d'adhérence  $\mu$  que celle utilisée pour simuler la dynamique du robot mobile. Afin d'étudier la robustesse du contrôleur, ou sa sensibilité à la connaissance du type de sol, il peut être intéressant d'appliquer un sol différent au niveau du contrôleur qu'au niveau du modèle.

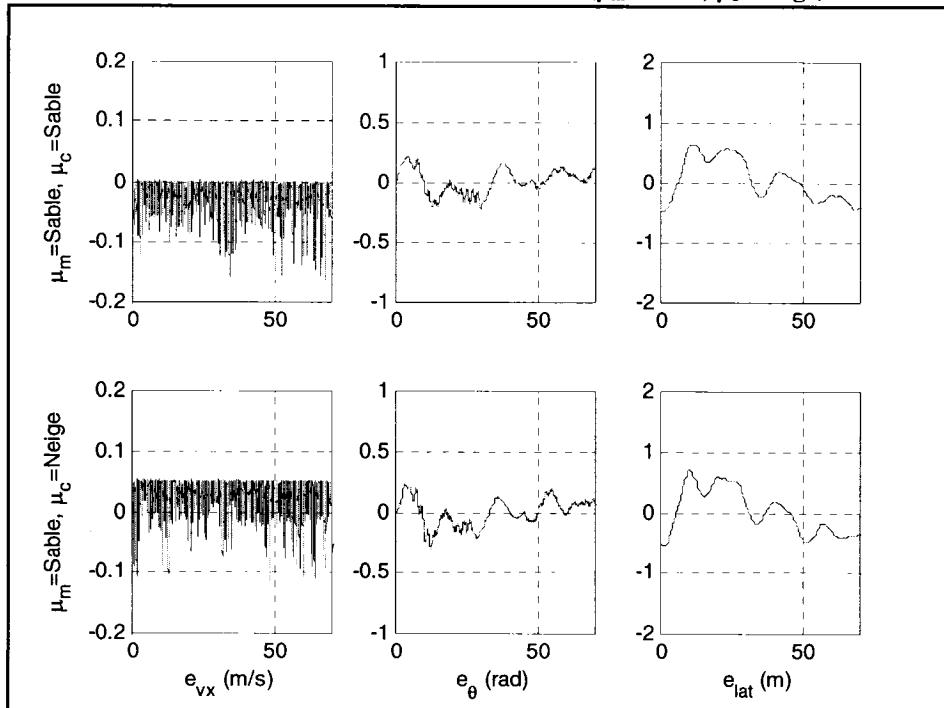
Nous effectuerons ces tests sur quatre types de sol : sable (adhérence maximale  $\mu_{\max} \approx 0.50$ ), neige (adhérence maximale  $\mu_{\max} \approx 0.30$ ), argile (adhérence maximale  $\mu_{\max} \approx 0.22$ ) et glace (adhérence maximale  $\mu_{\max} \approx 0.15$ ). Pour chacun des tests nous comparons les résultats obtenus lorsque le contrôleur utilise la même adhérence que le sol sur lequel il se déplace ( $\mu_{\text{contrôleur}} = \mu_{\text{modèle}}$ ), et le cas où le contrôleur a une adhérence plus faible ( $\mu_{\text{contrôleur}} < \mu_{\text{modèle}}$ ) ou plus élevée que l'adhérence du sol ( $\mu_{\text{contrôleur}} > \mu_{\text{modèle}}$ ) . Les essais effectués sont résumés au tableau 5.3 et les résultats de suivi de chemin combinés aux erreurs de navigation suivent immédiatement pour tous les tests.

**Tableau 5.3 : Essais pour une adhérence au contrôleur différente de l'adhérence du modèle**

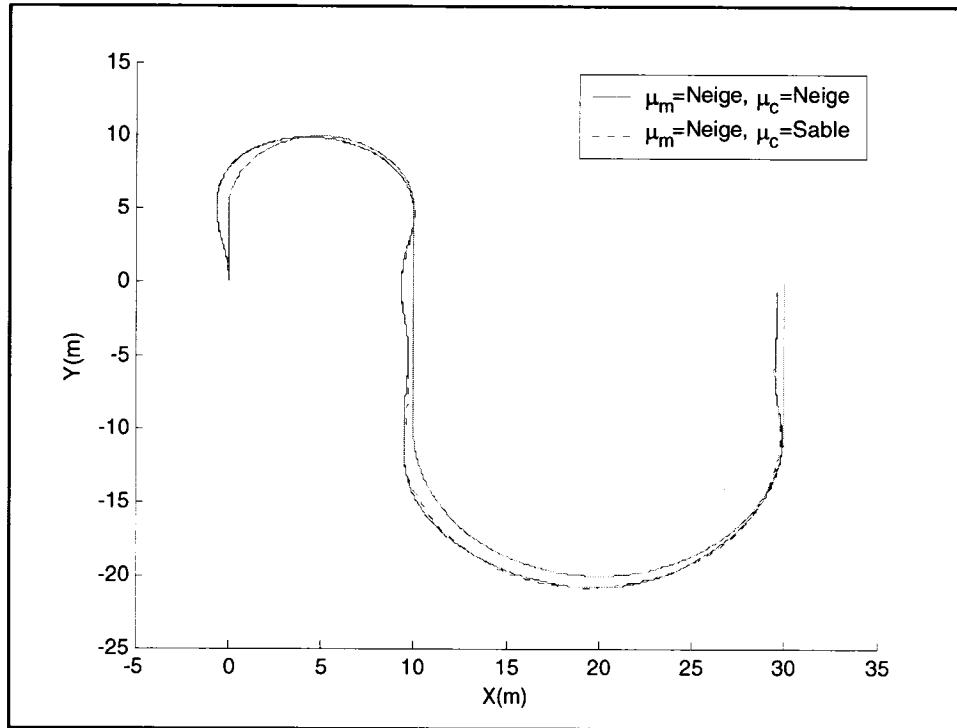
Test	$\mu_{\text{modèle}}$	$\mu_{\text{contrôleur}}$	Figure
Sable ( $\mu_{\max} \approx 0.50$ ) Neige ( $\mu_{\max} \approx 0.30$ )	Sable	Sable ( $\mu_{\text{contrôleur}} = \mu_{\text{modèle}}$ ) (référence)	5.30/5.31
	Sable	Neige ( $\mu_{\text{contrôleur}} < \mu_{\text{modèle}}$ )	
	Neige	Neige ( $\mu_{\text{contrôleur}} = \mu_{\text{modèle}}$ ) (référence)	5.32/5.33
	Neige	Sable ( $\mu_{\text{contrôleur}} > \mu_{\text{modèle}}$ )	
Sable ( $\mu_{\max} \approx 0.50$ ) Argile ( $\mu_{\max} \approx 0.22$ )	Sable	Sable ( $\mu_{\text{contrôleur}} = \mu_{\text{modèle}}$ ) (référence)	5.34/5.35
	Sable	Argile ( $\mu_{\text{contrôleur}} < \mu_{\text{modèle}}$ )	
	Argile	Neige ( $\mu_{\text{contrôleur}} = \mu_{\text{modèle}}$ ) (référence)	5.36/5.37
	Argile	Argile ( $\mu_{\text{contrôleur}} > \mu_{\text{modèle}}$ )	
Sable ( $\mu_{\max} \approx 0.50$ ) Glace ( $\mu_{\max} \approx 0.15$ )	Sable	Sable ( $\mu_{\text{contrôleur}} = \mu_{\text{modèle}}$ ) (référence)	5.38/5.39
	Sable	Glace ( $\mu_{\text{contrôleur}} < \mu_{\text{modèle}}$ )	
	Glace	Glace ( $\mu_{\text{contrôleur}} = \mu_{\text{modèle}}$ ) (référence)	5.40/5.41
	Glace	Sable ( $\mu_{\text{contrôleur}} > \mu_{\text{modèle}}$ )	



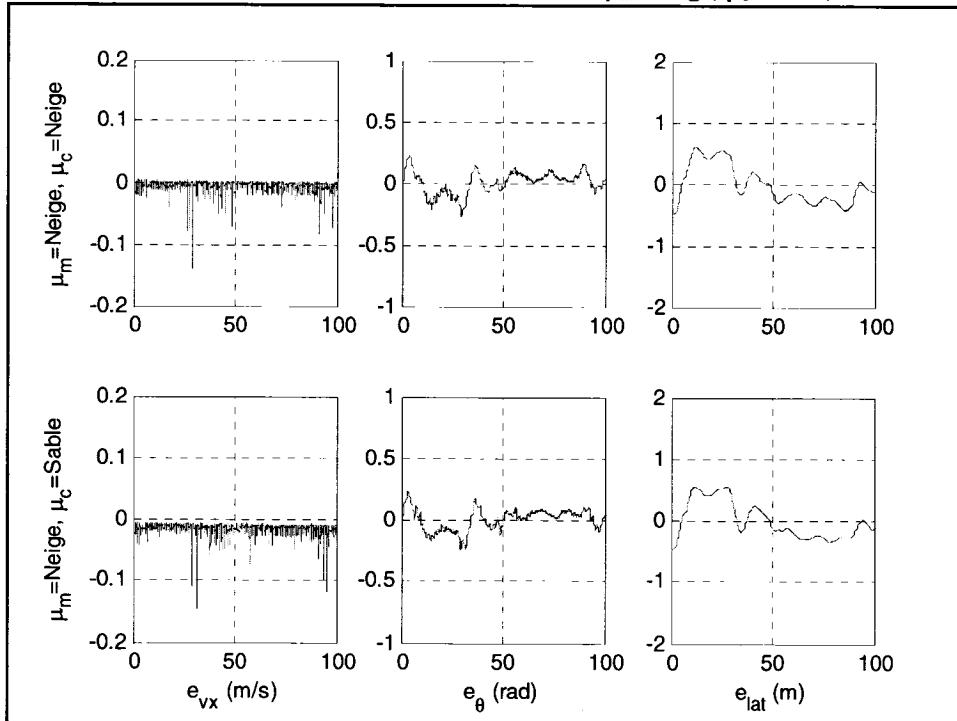
**Figure 5.30 : Suivi de chemin avec adhérence du modèle différente de l'adhérence du contrôleur ( $\mu_m$ =Sable,  $\mu_c$ =Neige)**



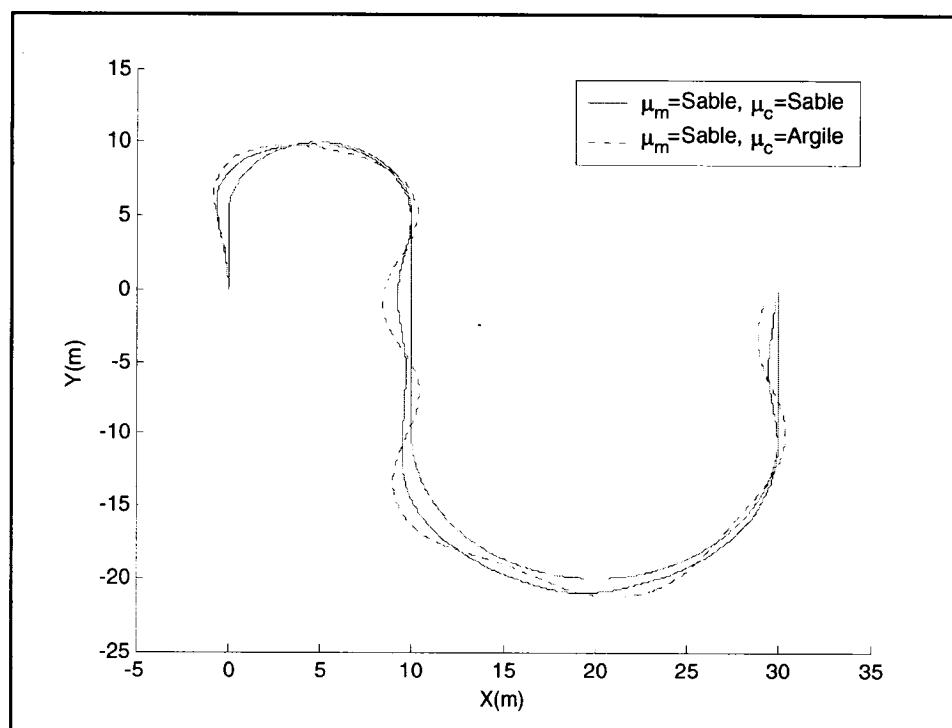
**Figure 5.31 : Erreurs de suivi de chemin pour une adhérence du modèle différente de l'adhérence du contrôleur ( $\mu_m$ =Sable,  $\mu_c$ =Neige)**



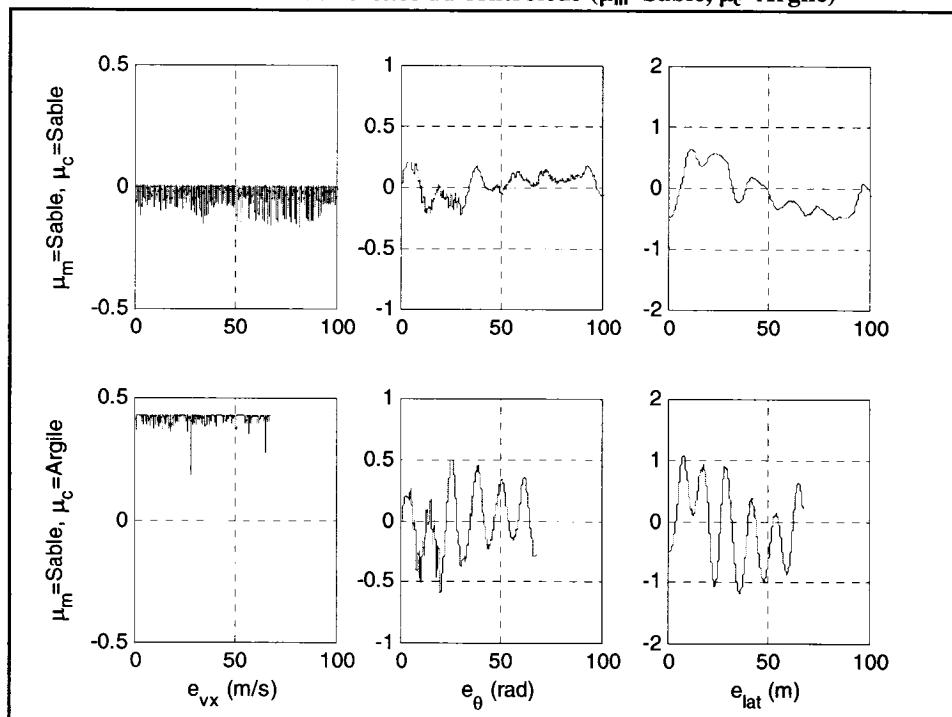
**Figure 5.32 : Suivi de chemin avec adhérence du modèle différente de l'adhérence du contrôleur ( $\mu_m$ =Neige,  $\mu_c$ =Sable)**



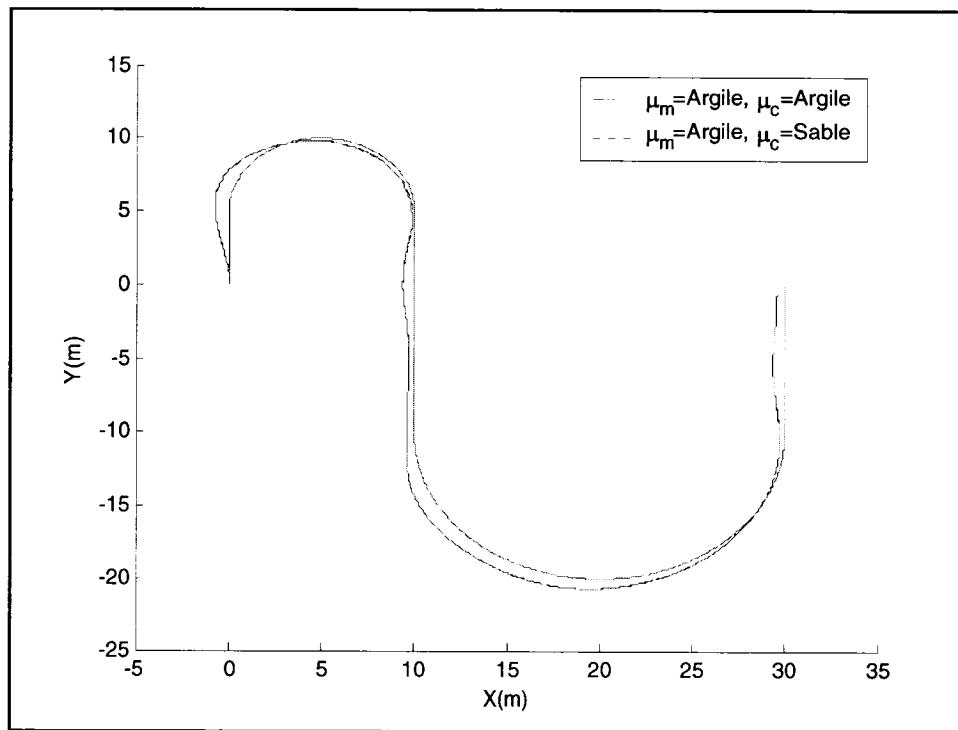
**Figure 5.33 : Erreurs de suivi de chemin pour une adhérence du modèle différente de l'adhérence du contrôleur ( $\mu_m$ =Neige,  $\mu_c$ =Sable)**



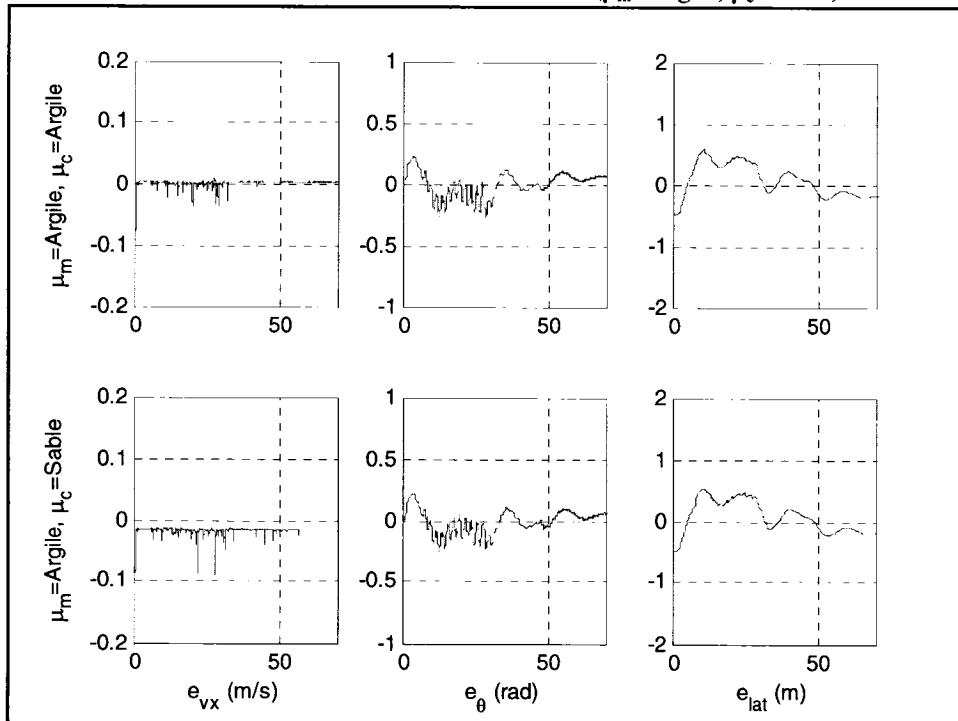
**Figure 5.34 : Suivi de chemin avec adhérence du modèle différente de l'adhérence du contrôleur ( $\mu_m$ =Sable,  $\mu_c$ =Argile)**



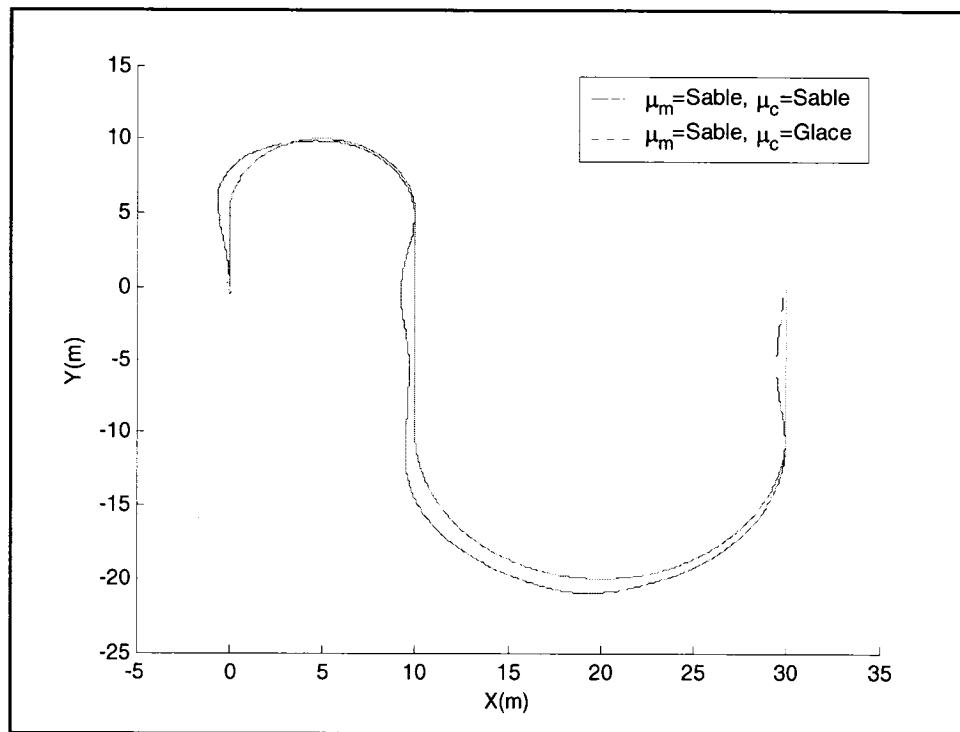
**Figure 5.35 : Erreurs de suivi de chemin pour une adhérence du modèle différente de l'adhérence du contrôleur ( $\mu_m$ =Sable,  $\mu_c$ =Argile)**



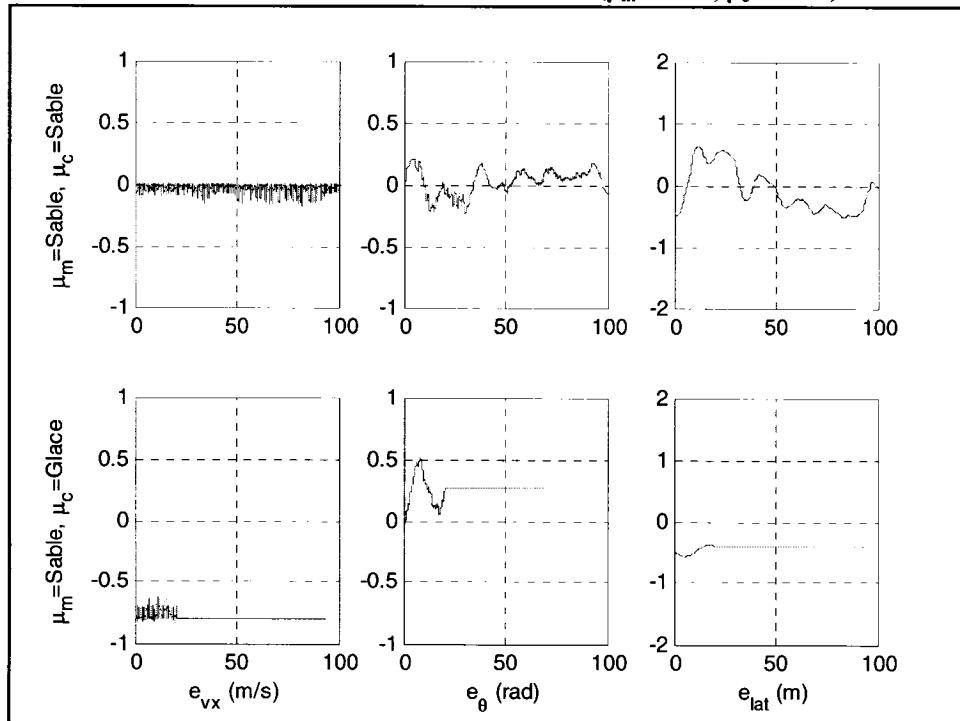
**Figure 5.36 : Suivi de chemin avec adhérence du modèle différente de l'adhérence du contrôleur ( $\mu_m$ =Argile,  $\mu_c$ =Sable)**



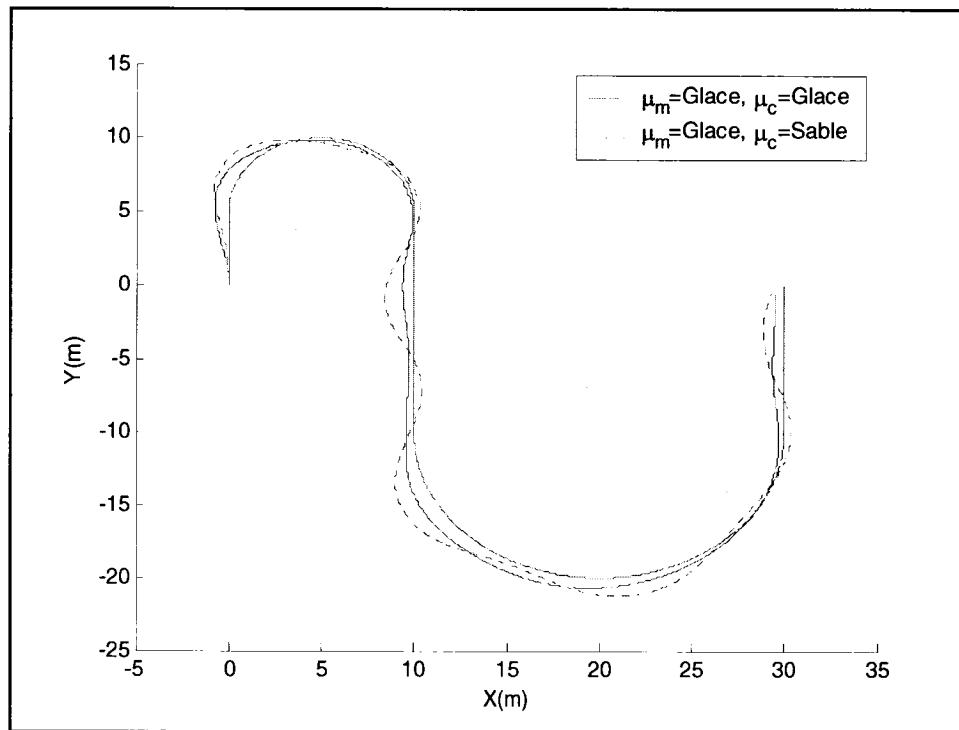
**Figure 5.37 : Erreurs de suivi de chemin pour une adhérence du modèle différente de l'adhérence du contrôleur ( $\mu_m$ =Argile,  $\mu_c$ =Sable)**



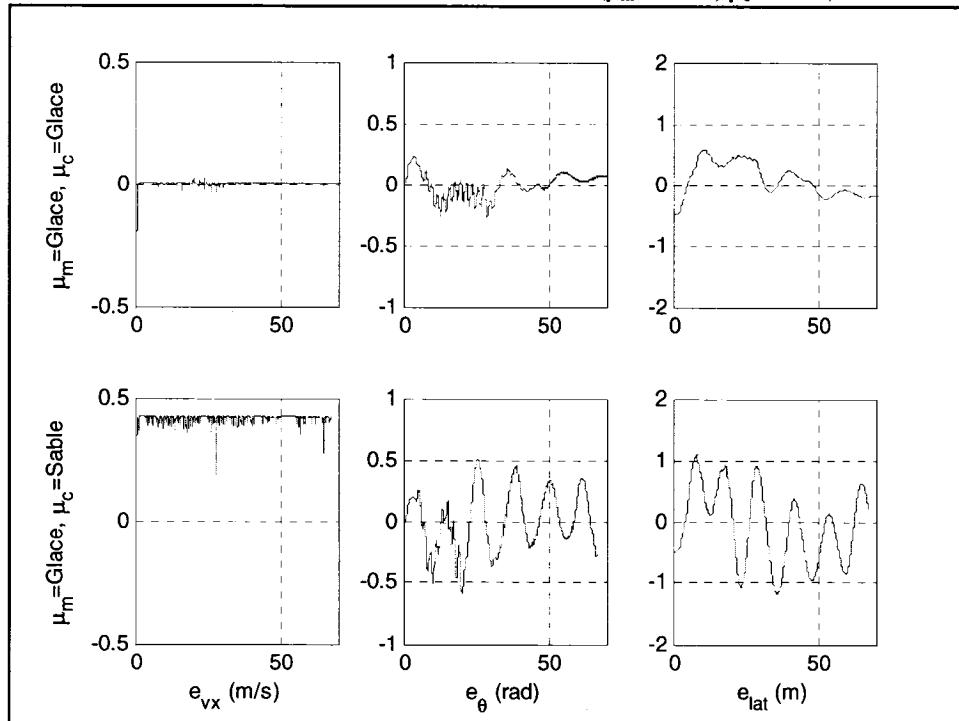
**Figure 5.38 : Suivi de chemin avec adhérence du modèle différente de l'adhérence du contrôleur ( $\mu_m$ =Sable,  $\mu_c$ =Glace)**



**Figure 5.39 : Erreurs de suivi de chemin pour une adhérence du modèle différente de l'adhérence du contrôleur ( $\mu_m$ =Sable,  $\mu_c$ =Glace)**



**Figure 5.40 : Suivi de chemin avec adhérence du modèle différente de l'adhérence du contrôleur ( $\mu_m=\text{Glace}$ ,  $\mu_c=\text{Sable}$ )**



**Figure 5.41 : Erreurs de suivi de chemin pour une adhérence du modèle différente de l'adhérence du contrôleur ( $\mu_m=\text{Glace}$ ,  $\mu_c=\text{Sable}$ )**

### Sable/Neige

Pour le premier essai sur le sable et la neige, lorsque le contrôleur prend pour acquis qu'il est sur un terrain avec une adhérence plus faible (neige) qu'en réalité (sable), aucun grand changement n'est observé : le chemin suivi est presque identique au chemin suivi lorsque le contrôleur utilise le sable en entrée (figure 5.30). Les erreurs de navigations d'orientation et latérale sont sensiblement les mêmes (figure 5.31) mais l'erreur de vitesse longitudinale est de 0.05 lorsque le contrôleur pense que le sol est de la neige, comparativement à environ 0 lorsque le contrôleur sais que le sol est du sable.

Lorsqu'on observe maintenant le comportement du contrôleur ayant une connaissance plus élevée de l'adhérence (sable) que l'adhérence réelle du sol (neige), on observe que le suivi de chemin est très près du chemin suivi si le contrôleur avait une connaissance exacte du sol (figure 5.32). On remarque que les erreurs de navigation sont très proches les unes des autres, même pour l'erreur de vitesse longitudinale.

Par conséquent, on peut conclure que le contrôleur jouit d'une bonne robustesse, lorsque la différence d'adhérence maximale entre le sol réel et le sol connu par le contrôleur est d'environ 0.20 (sable ( $\mu_{\max} \approx 0.50$ ) - neige ( $\mu_{\max} \approx 0.30$ )).

### Sable/Argile

Lorsque le contrôleur prend pour acquis une adhérence de sol d'argile et que le sol réel est du sable, le suivi de chemin est beaucoup moins efficace (voir figure 5.34) que si le contrôleur prenait pour acquis un sol de sable. Le robot suit son chemin mais de plus fortes erreurs de navigation vont survenir : les erreurs d'orientation et latérale (figure 5.35) doublent d'amplitude comparativement au cas où le contrôleur aurait une connaissance parfaite du sol. De plus, l'erreur de vitesse longitudinale est constante et fixe à environ 0.4m/s, ce qui montre une sensibilité du contrôleur de vitesse longitudinale.

Si on essaie maintenant le contrôleur ayant une connaissance plus élevée de l'adhérence (sable) que l'adhérence réelle du sol (argile), on observe que le contrôleur se comporte beaucoup mieux. Il ne faut que constater la superposition des chemins suivis à la figure 5.36 pour conclure que le suivi n'est pratiquement pas affecté par la mauvaise connaissance de l'adhérence au niveau du contrôleur. Ceci est aussi confirmé par les erreurs de navigation montrées à la figure 5.36, qui sont toutes très bonnes. Pour ce test on peut conclure que le contrôleur n'est sensible que lorsqu'il a une connaissance de l'adhérence plus faible que l'adhérence réelle. La différence d'adhérence maximale entre le sol réel et le sol connu par le contrôleur est d'environ 0.28 (Sable ( $\mu_{\max} \approx 0.50$ ) - Argile ( $\mu_{\max} \approx 0.22$ )).

### Sable/Glace

Le dernier test concerne le sable et la glace. Lorsqu'on place le robot mobile sur du sable et qu'on applique une adhérence de glace au niveau du contrôleur, le robot reste à son point de départ et ne se déplace pas sur son chemin (figure 5.38). Ceci est dû au fait que la force de résistance au mouvement calculée par le contrôleur pour la glace est beaucoup plus petite que le couple d'entraînement minimum requis pour faire bouger le robot sur le sable. Rappelons-nous qu'à l'essai 3.1 nous avions observé que le couple critique d'entraînement est proportionnel à l'adhérence. Les erreurs de navigation sont bien entendu très élevées (figure 5.39).

Maintenant, lorsque le contrôleur pense qu'il est sur le sable et que le robot est effectivement sur la glace, le suivi de chemin se fait mais avec des déviations non négligeables (figure 5.40). Ce cas ressemble beaucoup à celui sable/argile; le robot avance en fait trop rapidement (à 1.2m/s) à cause de la sensibilité du contrôleur de vitesse longitudinale, plus particulièrement à cause du bloc « calcul des vitesses de référence des roues en fonction de la vitesse longitudinale de référence ». Bref, le suivi se fait dans cette situation mais avec d'assez grandes erreurs de navigation (figure 5.41). Pour l'essai sable/glace, la différence d'adhérence maximale entre le sol réel et le sol

connu par le contrôleur est d'environ 0.35 (sable ( $\mu_{\max} \approx 0.50$ ) - glace ( $\mu_{\max} \approx 0.15$ ) = 0.35).

### Interprétation et conclusion

Lorsque la différence d'adhérence maximale entre le sol réel et le sol connu par le contrôleur est d'environ 0.20, le contrôleur semble très bien fonctionner et est robuste à une méconnaissance de l'adhérence. Toutefois, lorsque cette différence atteint 0.28 ou 0.35, les performances restent acceptables, voire bonnes lorsque le contrôleur a *une adhérence plus élevée que l'adhérence du modèle*, mais se dégradent beaucoup lorsque le contrôleur a *une adhérence plus faible que l'adhérence du modèle*. La sensibilité du contrôleur tient essentiellement au bloc de « calcul des vitesses de référence des roues en fonction de la vitesse longitudinale de référence ». Celui-ci utilise l'équation suivante :

$$\omega_{\{g,d\}REF} = \frac{v_{xREF}}{r \cdot [1 - \mu_{\text{type de sol}}^{-1} \left( \frac{R_{x\{g,d\}}}{2F_{N_{roue}}} \right)]} \quad (5.14)$$

Une sous-estimation ou surestimation du terme d'adhérence  $\mu$  fera en sorte que la vitesse de référence au roues calculée sera trop grande ou trop faible, ce qui résultera en d'importantes erreurs de vitesse longitudinale. De plus, la force de résistance au mouvement agit à l'intérieur du bloc « contrôleur de vitesse angulaire des roues » et peut avoir un impact important lorsque la valeur estimée est très loin de la valeur réelle (comme vu aux figures 5.38 et 5.39).

Malgré tout, nous devons conclure que le contrôleur possède de bonnes capacités de robustesse lorsque l'adhérence perçue au niveau du contrôleur est assez près de l'adhérence réelle du sol. Cette marge de robustesse semble assez grande pour accommoder une situation réelle pratique. L'adhérence perçue par le contrôleur devra, dans un scénario pratique, être estimée, tout comme la force de résistance au mouvement et le coefficient de rigidité latérale. Nous abordons ce sujet à la prochaine section.

## 5.4 Assomptions, limitations et forces du contrôleur

Pour concevoir le contrôleur, nous avons développé indépendamment un contrôleur de vitesse longitudinale et un contrôleur de vitesse angulaire. Les couples trouvés par les deux contrôleurs indépendants sont par la suite additionnés pour donner les couples finaux à appliquer aux roues du robot mobile. Cette approche a l'avantage de découpler le problème en deux problèmes plus simples mais a aussi le désavantage de diviser la performance : un contrôleur longitudinal trop rapide limitera la capacité du contrôleur de vitesse angulaire et vice-versa. De plus, cette approche suppose que la dynamique des vitesses longitudinale et latérale est découpée et que les glissements longitudinaux et latéral sont couplés, ce qui n'est pas le cas en réalité.

Une limitation possible se situe au niveau de la capacité du contrôleur à faire tourner le robot mobile lorsque la vitesse longitudinale dépasse 1m/s environ. Lorsque la vitesse longitudinale devient trop élevée, des déviations non négligeables du chemin surviennent. À cet égard, nous pouvons nous demander s'il s'agit de limitations du contrôleur ou de limitations physiques dues à la nature du chemin à suivre. En effet, nous pouvons argumenter que, physiquement, n'importe quel véhicule est plus difficile à tourner de manière stable lorsqu'il avance rapidement, cet effet étant amplifié dans notre contexte de terrain à adhérence limitée à très faible. Du côté de la littérature, à notre connaissance, un des seuls articles [LEROQUAIS96] discutant du suivi de chemin pour un robot mobile soumis à du glissement arrive à la conclusion qu'*il est nécessaire que le chemin de référence satisfasse à la dynamique du glissement*. Les auteurs parviennent donc à un ensemble de règles mathématiques guidant la construction du chemin de référence, et c'est uniquement sous l'application strictes de ces règles que leur contrôleur stabilise leur modèle dynamique d'un robot mobile de type unicycle. Il est difficile de déterminer la proportion des erreurs qui sont dues à la conception du contrôleur lui-même et la proportion des erreurs dues à la nature du chemin à suivre. Toutefois, nous avons vu qu'il est possible de limiter la vitesse longitudinale de

référence à un multiple du rayon de courbure instantané du chemin de référence. Cette contrainte nous permet d'obtenir de bons résultats tout en minimisant le temps de parcours au long du chemin.

Au niveau du contrôleur lui-même, il est important de mentionner que les gains utilisés ont été calibrés pour un robot se déplaçant à une vitesse longitudinale d'environ 0.5m/s, il n'est pas exclu qu'il soit possible de trouver des gains qui permettraient un bon suivi de chemin à plus haute vitesse ( $> 1\text{m/s}$ ). Ainsi, l'espace d'opération pourrait être divisé avec un vecteur de gains spécifique pour chaque région.

Un autre assumption du contrôleur se situe au niveau de la connaissance exacte d'états. À cet égard nous avons effectué des tests montrant une bonne robustesse du contrôleur à la connaissance de l'adhérence du sol, mais la sensibilité aux autres états n'a pas été établie. Il est par conséquent important de lier le contrôleur théorique développé à une stratégie efficace d'estimation des états telle que celle discutée à la section suivante.

Du côté des points forts du contrôleur proposé, notons un très bon suivi de chemin pour des vitesses longitudinales de référence inférieures à 1m/s, ce qui est généralement la norme pour les robots mobiles. De plus, le contrôleur est performant pour une vaste gamme de terrains naturels ou enneigés/glacés, même sur les sols à adhérence très faible. Aussi, le contrôleur dynamique proposé permet de modifier uniquement la partie « dynamique » du contrôleur de suivi de chemin ayant une architecture « contrôleur dynamique / contrôleur cinématique ». Ceci permet d'utiliser tel quel le contrôleur cinématique développé sous l'hypothèse d'une absence de glissement.

## 5.5 Considérations pratiques

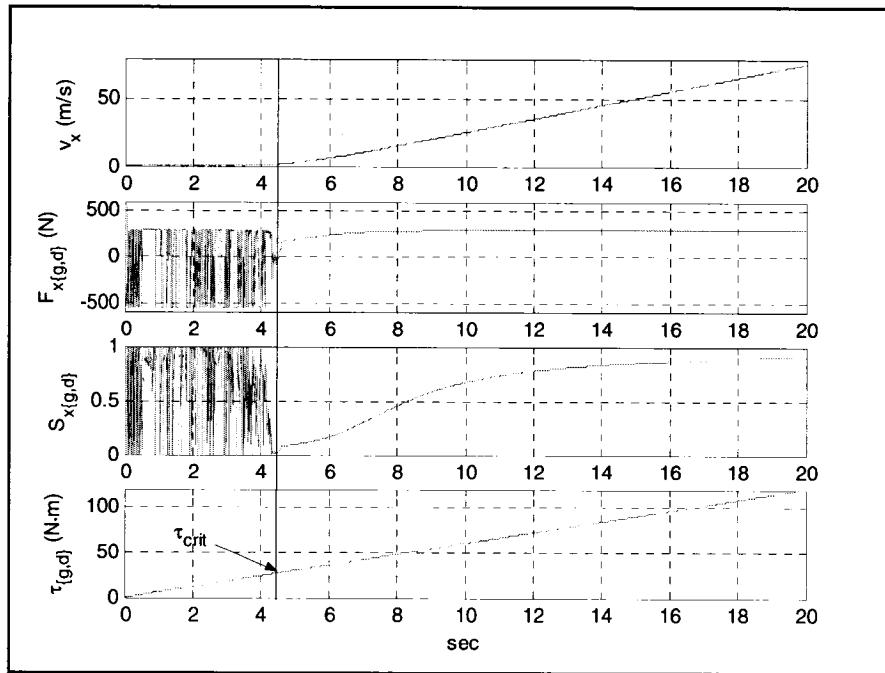
### Estimation des états

L'efficacité des contrôleurs décrits plus haut dépend de la qualité de la connaissance des états suivants (figure 5.18) :

1. Vitesses du robot mobile (longitudinale, latérale, et angulaire)
2. Configuration (position/orientation)
3. Vitesses angulaires des roues
4. Fonction d'adhérence dépendante du glissement
5. Résistance au mouvement
6. Coefficient de rigidité latérale

Afin d'estimer les vitesses et la configuration du robot (1) (2), il est usuel de combiner des senseurs absolus (ex : GPS) à des senseurs relatifs (encodeurs, gyroscope, accéléromètres), afin d'obtenir des mesures corrigées plus précises. On peut ensuite utiliser un ou des filtres successifs de Kalman étendus afin d'estimer les états permettant la navigation du robot mobile. Un exemple d'une telle approche se trouve dans [HE02]. Il y a aussi moyen d'utiliser une méthode de *dead reckoning* : utiliser uniquement des senseurs relatifs (odométrie et senseurs inertIELS) pour estimer les vitesses et la configuration du robot mobile. Un exemple d'une telle implémentation pour un robot mobile à vitesse différentielle qui utilise aussi des filtres de Kalman étendus se trouve dans [ANOUSAKI04]. Finalement, pour estimer les vitesses angulaires des roues (3), il est commun et aisément d'utiliser des senseurs optiques au niveau des roues.

L'estimation pratique des paramètres du sol (4), (5), (6) est moins discutée dans la littérature. Afin d'estimer la fonction d'adhérence (4) et la force de résistance au mouvement (5), nous proposons d'effectuer un test pratique comme celui de l'essai 3.1 au chapitre 3, qui est un test en boucle ouverte du robot mobile sur terrain à adhérence limitée. La figure 3.3 montre un exemple (théorique) de test expérimental possible montrant la vitesse longitudinale suivie du robot mobile pour un échelon de couple appliqué.



**Figure 5.42 : Exemple d'essai pratique en boucle ouverte pour estimer les paramètres du sol**

On propose de trouver sur cette courbe le couple critique d'entraînement, qui est le couple à partir duquel la vitesse longitudinale devient positive non nulle, et d'estimer la force de résistance au mouvement de la manière suivante :

$$R_x \approx \frac{2\tau_{crit}}{r} \quad (5.15)$$

Démonstration : on doit regarder sous quelles conditions la vitesse longitudinale devient non nulle. Il s'agit de :

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= m^{-1}(F_{xg} - R_{xg} + F_{xd} - R_{xd}) + \underbrace{v_y \Omega}_0 > 0 \\ \dot{\omega}_{(g,d)} &= I_{roue}^{-1}(\tau_{(g,d)} - 0.5rF_{x(g,d)}) > 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Posons  $F_x = F_{xg} = F_{xd}$ ,  $R_x = R_{xg} = R_{xd}$  et  $\tau = \tau_g = \tau_d$ , alors 5.16 se réécrit :

$$\begin{aligned} F_x - R_x &> 0 \\ \tau - 0.5rF_x &> 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

En pré-multipliant la première équation par  $0.5r$ , on obtient :

$$\begin{aligned} 0.5rF_x &> 0.5rR_x \\ \tau &> 0.5rF_x \end{aligned} \quad (5.18)$$

On remplace la première équation dans la deuxième et on arrive à :

$$\tau > 0.5rR_x \rightarrow \tau_{\{g,d\}} > 0.5rR_{x\{g,d\}} \quad (5.19)$$

L'équation 5.19 donne la condition des couples à appliquer aux roues afin que les roues soient libres de tourner et entraînent la plateforme vers une vitesse longitudinale non nulle, ce que nous avons appelé le couple critique d'entraînement. Celui-ci est environ égal à :

$$\tau_{crit} \approx 0.5rR_x \quad (5.20)$$

Dès lors, pour estimer la force de résistance au mouvement qui agit sur le robot mobile, on n'a qu'à observer la vitesse longitudinale par rapport au couple appliqué, noter le point où la vitesse longitudinale devient positive, voir quel couple nous avons appliqués à ce moment, ceci correspondant au couple critique d'entraînement et appliquer la formule suivante pour estimer la force de résistance au mouvement :

$$R_x \approx \frac{2\tau_{crit}}{r} \quad (5.21)$$

La courbe d'adhérence (4) en fonction du glissement peut elle aussi être estimée avec un essai en boucle ouverte tel que présenté ci-dessus. Disposant de la vitesse longitudinale en fonction du glissement, on peut calculer l'accélération longitudinale en fonction du glissement, qui est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= m^{-1}(F_{xg} - R_{xg} + F_{xd} - R_{xd}) + \underbrace{v_y \Omega}_0 \\ &= m^{-1}(2F_{N_{roue}}\mu(S_{xg}) - R_{xg} + 2F_{N_{roue}}\mu(S_{xd}) - R_{xd}) \end{aligned} \quad (5.22)$$

Dans notre cas  $F_x = F_{xg} = F_{xd}$ ,  $R_x = R_{xg} = R_{xd}$  et  $S_x = S_{xg} = S_{xd}$ , alors la dernière formule se réécrit :

$$\dot{v}_x = 2m^{-1}(2F_{N_{roue}}\mu(S_x) - R_x) \quad (5.23)$$

On peut facilement isoler le terme d'adhérence et obtenir une estimation de l'adhérence en fonction des autres paramètres qui sont connus :

$$\mu(S_x) = \frac{0.5m\dot{v}_x + R_x}{2F_{N_{roue}}} \quad (5.24)$$

Afin que la courbe d'adhérence soit complète sur son domaine  $[0,1]$  elle doit être évaluée pour chaque glissement  $S_x \in [0,1]$ . On a alors intérêt à fournir un couple toujours de plus en plus élevé, de sorte à faire augmenter le glissement jusqu'à 100%. Cette dernière équation n'est valide que lorsque le couple aux roues dépasse le couple critique d'entraînement, ie :

$$\tau_{\{g,d\}} > \tau_{crit} \quad (5.25)$$

En résumé, nous proposons d'appliquer un échelon de couple aux roues du robot mobile et d'enregistrer pour chaque instant la vitesse longitudinale du robot et le glissement des roues (qui dépend des vitesses du robot et des roues, estimées par la technique proposée plus haut). Avec les vitesses longitudinales obtenues, on calcule les accélérations longitudinales à chaque instant. On regarde la vitesse longitudinale en fonction des couples appliqués pour trouver le couple critique d'entraînement et on applique la formule 5.20 pour estimer la force de résistance au mouvement (5). Finalement, on trouve l'adhérence en fonction du glissement en appliquant la formule 5.24.

En ce qui concerne l'estimation du coefficient de rigidité latérale (6) et de la force de friction latérale, l'article [HAHN02] fournit une méthode intéressante. Les auteurs proposent un algorithme d'identification de paramètres qui utilise un GPS différentiel et un gyroscope pour identifier le coefficient de rigidité latérale et les forces de friction latérales agissant sur la plateforme mobile. Cette méthode utilise les disparités entre les mesures expérimentales et les états obtenus d'un modèle du véhicule afin d'élaborer un algorithme d'identification de paramètres. Toutefois, la méthode décrite dans cet article ne se base pas sur un robot mobile à vitesse différentielle, elle devrait être adaptée au modèle présenté dans ce travail pour être applicable. La figure 5.43 montre le système complet d'asservissement pour le modèle avec glissement lorsque le modèle du robot est utilisé. Cette situation correspond à la théorie (simulation). Afin d'implémenter pratiquement les contrôleurs validés en simulation, nous proposons un système d'asservissement tel que celui montré à la figure 5.44. On retrouve un bloc *d'estimation des paramètres/filtres de Kalman*, qui implémente les techniques décrites à cette section

(en plus d'incorporer implicitement un modèle cinématique). L'adhérence du sol et la force de résistance au mouvement ne sont pas déterminées en temps réel durant l'opération du robot, elles sont déterminées hors-ligne suivant la méthode décrite plus haut.

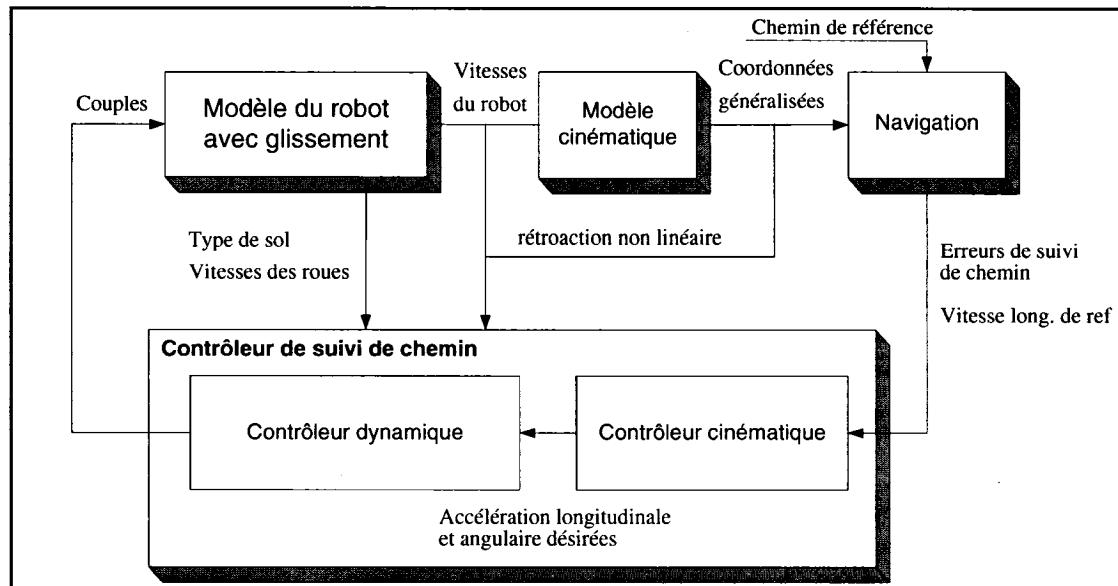


Figure 5.43 : Système complet d'asservissement théorique pour le modèle avec glissement

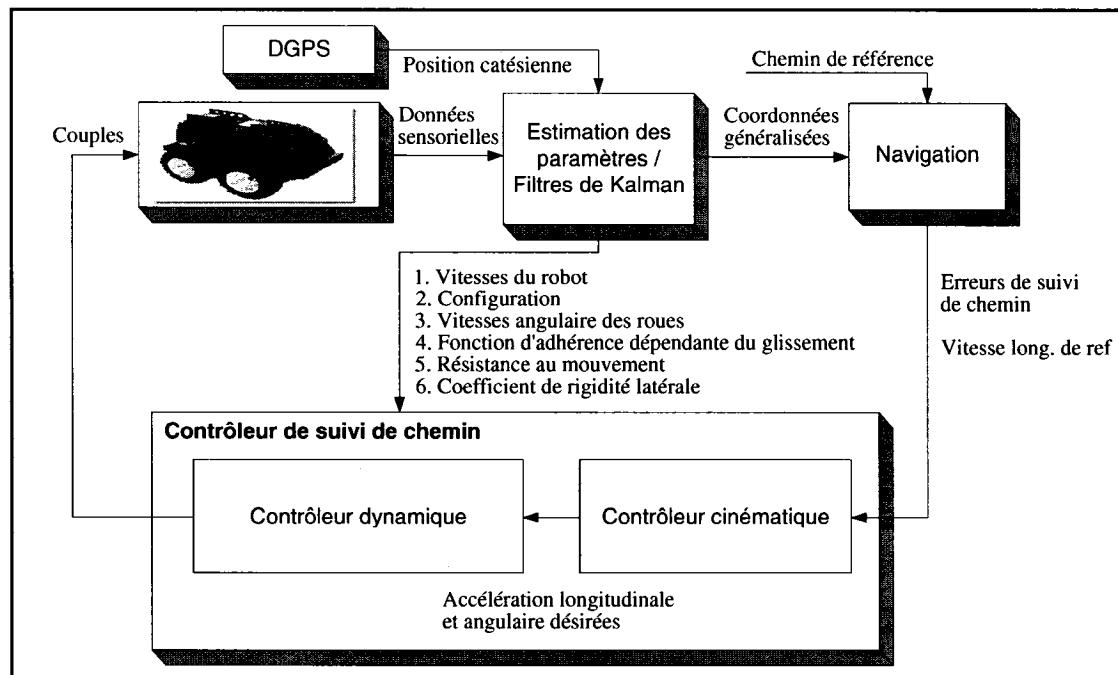


Figure 5.44 : Système complet d'asservissement pratique pour le modèle avec glissement

### Robustesse

Nous avons vu à la section 5.3.3.5 que le contrôleur dynamique proposé pour le suivi de chemin possède une certaine marge de robustesse en ce qui concerne la connaissance de l'adhérence du sol. Pour les autres paramètres toutefois, aucun test explicite n'a été effectué afin de vérifier la robustesse du contrôleur de suivi de chemin. Considérant une situation pratique, nous proposons donc une estimation des paramètres la meilleure possible en ajoutant un bloc d'estimation des paramètres, tel que présenté à la figure 5.44. Ce n'est qu'après certains tests pratiques qu'il sera possible de savoir explicitement quels sont les paramètres pour lesquels le contrôleur est le plus sensible et par conséquent, les paramètres les plus importants à bien mesurer.

Nous suggérons un scénario d'estimation en ligne pour la majorité des paramètres, excepté les paramètres d'adhérence du sol et de résistance au mouvement qui peuvent être estimés hors-ligne (avec un essai en boucle ouverte) pour chacun des types de sol sur lequel le robot mobile doit se mouvoir. Il est noté qu'il est possible d'estimer dynamiquement en ligne les paramètres du sol [LE97] mais il s'agit d'un problème d'estimation très complexe qui devrait être idéalement implémenté dans une deuxième phase, lorsque la stratégie hors-ligne s'avèrera fonctionnelle.

## 5.6 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous proposons un nouveau contrôleur dynamique qui permet au robot mobile de suivre son chemin sur des terrains à adhérence limitée. Dans un premier temps, nous avons développé un contrôleur de vitesse longitudinale qui utilise les informations provenant du modèle du sol afin de contrôler correctement les roues soumises à du glissement. Cette étape rend le robot mobile capable d'atteindre une vitesse longitudinale prescrite sur un sol à adhérence limitée. Dans un second temps, nous avons développé un contrôleur de vitesse angulaire qui utilise la modulation par largeur d'impulsions afin d'appliquer de manière non continue un couple angulaire au robot mobile, lui permettant ainsi de tourner progressivement sans se déstabiliser latéralement. Le défi dans ce contrôleur dynamique a été de prendre en compte et de limiter les glissements longitudinaux et latéral.

Les résultats de simulation montrent que le contrôleur développé permet un bon suivi de chemin sur plusieurs types de sol, c'est-à-dire sur des sols naturels et même sur des sols à adhérence très limitée, comme la neige ou la glace. L'étude en simulation du contrôleur nous a permis de trouver des contraintes à appliquer au niveau du chemin de référence à suivre, permettant de maintenir de bonnes performances.

Le contrôleur proposé prend pour acquis une bonne connaissance des états. Par conséquent, une implémentation pratique devra porter une attention particulière au problème d'estimation des états. La section *considérations pratiques* propose un ensemble de techniques permettant d'estimer en ligne ou hors-ligne les paramètres importants permettant le bon fonctionnement du système d'asservissement. Ces techniques utilisent essentiellement un ensemble de senseurs et des filtres de Kalman étendus. Au point de vue de la sensibilité de la connaissance du contrôleur à la connaissance de l'adhérence du sol, nous avons montré que le contrôleur jouit d'une bonne marge de stabilité, c'est-à-dire que le suivi de chemin continuera de bien se faire lorsque l'adhérence connue par le contrôleur est assez proche de l'adhérence réelle sur laquelle le robot se déplace.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

Ce travail concerne l'étude de la robotique mobile et du problème de suivi de chemin, spécifiquement dans le contexte où le robot mobile doit se déplacer sur un terrain ayant une adhérence limitée.

Nous avons commencé par la modélisation de la dynamique du robot mobile à vitesses différentielles. Pour ce faire, nous avons développé un modèle idéal du robot mobile se déplaçant sur un sol ayant une adhérence idéale (modèle sans glissement). Nous avons développé en parallèle un modèle plus complexe du robot mobile qui incorpore un modèle de sol complet pour les terrains à adhérence limitée et prend pour acquis les phénomènes de glissement longitudinal des roues et du glissement latéral (modèle avec glissement).

Une étude comparative de ces modèles nous a permis de mettre en relief les différences entre les deux modèles et d'étudier la dynamique du robot mobile soumis à différentes entrées telles que les couples aux roues, les vitesses aux roues et les types de terrains.

Nous avons ensuite discuté du problème de suivi de chemin pour le modèle sans glissement. Nous avons montré le bon fonctionnement d'un contrôleur de suivi de chemin typique pour le cas du robot se déplaçant sur un sol à adhérence idéale. Par la suite, nous avons combiné le modèle du robot avec glissement avec le contrôleur de suivi chemin établi sous une hypothèse d'absence de glissement. Des résultats de simulations nous ont permis de voir qu'un tel contrôleur est peu efficace lorsqu'il ne considère pas explicitement les paramètres du sol à adhérence limitée sur lequel le robot se déplace.

Pour remédier à ce problème, nous avons proposé un nouveau *contrôleur dynamique* qui rend possible le suivi de chemin d'un robot mobile sur les terrains à adhérence limitée. Il s'agit de la contribution la plus importante de ce mémoire. Le contrôleur proposé est

développé grâce aux acquis de l'étude des modèles. Il utilise le modèle du sol afin de linéariser et de contrôler la dynamique complexe du robot mobile se déplaçant sur un terrain à adhérence limitée. Il minimise les effets indésirables du glissement des roues et du glissement latéral qui peuvent déstabiliser le robot mobile.

Il a été montré par voies de simulation que le contrôleur suggéré fonctionne bien lorsque les vitesses du robot mobile sont inférieures à 1 m/s et ce, pour une vaste gamme de types de sol, ayant des adhérences parfois très faibles, telle que la glace. Le contrôleur proposé est en soi une preuve de concept et devrait idéalement être validé expérimentalement. Des tests pratiques permettront de mieux cerner sa sensibilité et nous avons vu qu'il possède déjà une bonne marge de robustesse au niveau de la connaissance de l'adhérence.

Un contrôleur tel que celui proposé permettra ultimement à un robot mobile de poursuivre ses tâches principales telles que, par exemple, l'exploration ou la cartographie d'environnement, sur une gamme de terrains (naturels ou glacés) plus élargie.

## LISTE DES RÉFÉRENCES

1. SHAMAH, B. « Experimental Comparison of Skid Steering Vs. Explicit Steering for a Wheeled Mobile Robot », master's thesis, tech. report CMU-RI-TR-99-06, Robotics Institute, Carnegie Mellon University, March, 1999.
2. CAMPION, G., D'ANDREA-NOVEL, B., BASTIN, G. « Modeling and State Feedback Control of Non Holonomic Mechanical Systems », IEEE Int. Conf. on Decision and Control, pp. 1184-1189, 1991.
3. D'ANDREA-NOVEL, B., CAMPION, G., BASTIN, G. « Modeling and Control of Non Holonomic Wheeled Mobile Robots », IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 1130-1135, 1991.
4. CAMPION, G., BASTIN, G. D'ANDREA-NOVEL, B. « Structural Properties and Classification of Dynamic models of Wheeled Mobile Robots », IEEE Trans. on Robotics and Automation, Vol. 12, No. 1, p. 47-62, February 1996.
5. SARKAR, N., et al., « Control of mechanical systems with rolling constraints: Application to dynamic control of Mobile Robots », Int. J. of Robotics Research, Vol. 13, No. 1, 1994.
6. THANJAVUR, K., RAJAGOPALAN, R., « Ease of Dynamic Modelling of Wheeled Mobile Robots (WMRs) using Kane's Approach », IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Vol 4, pp20-25, April 1997.
7. RAJAGOPALAN, R., BARAKAT, N. « Comparative Study of Velocity and Computed Torque Control Schemes for a Differentially Driven Automated Vehicle », IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 3637-3643, 1996.
8. GUSTAFSSON, F. « Slip-Based Tire-Road Friction Estimation », Automatica, Vol. 33, No. 6, pp.1087-1099, 1997.
9. SVENDENIUS, J., WITTERNMARK, B. « Review of Wheel Modeling and Friction Estimation », Technical report, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Sweden, August 2003
10. BAKKER, E., PACEJKA, H.B., LIDNER, L. « A new tire model with an application in vehicle dynamics studies ». SAE 8890087, 1989.
11. GIM, G., NIKRAVESTH, P. « An analytical model of pneumatic tires for vehicle dynamic simulations ». Part 1-3, International Journal of Vehicle Design, 1990-1991.
12. SAKAI, H. « Theoretical and experimental studies on the dynamic properties of tires», Part 1-3, International Journal of Vehicle Design, 1981-1982.

13. DE WIT, C.C., OLSSON, H., ASTROM, J., LISCHINSKY, P. « A New Model for Control of Systems With Friction », IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 40, No 3, pp. 419-425, March 1995.
14. CLAEYS, X., YI, J., ALVAREZ, L., HOROWITZ, R, DE WIT, C.C. « A Dynamic Tire/Road Friction Model for 3D Vehicle Control and Simulation », IEEE Intelligent Transportation Systems Conference Proceedings, 2001.
15. DE WIT, C.C., TSIOTRAS, P., VELENIS, E., BASSET, E., GISSINGER, G. « Dynamic Friction Models for Longitudinal Road/Tire Interaction: Experimental Results », 21st IASTED Conference on Modelling, Identification and Control, Innsbruck, Austria, February 18-21, 2002.
16. BEKKER, G., « Introduction to Terrain-Vehicle Systems », University of Michigan Press, 1969
17. BEKKER, G., « Theory of Land Locomotion », University of Michigan Press, 1956
18. WONG, J.Y., « Theory of Ground Vehicles », John Wiley & Sons, 2nd edition, 1993
19. LE, A.T., RYE, D.C., DURRANT-WHYTE, H.F. « Estimation of track-soil interactions for autonomous tracked vehicles », IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Albuquerque, NM, pp. 1388-1393, 1997.
20. APOSTOLOPOULOS, D.S. « Analytical Configuration of Wheel Robotic Locomotion », Doctoral Thesis, Report CMU-RI-TR-01-08, Robotic Institute, Carnegie Mellon University, Pittsburg, Pennsylvania, April 2001.
21. YOSHIDA, K., HAMANO, H. « Motion Dynamics of a Rover With Slip-Based Traction Model », IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 3155-3160, 2002.
22. MUKHERJEE, R., CHEN, D, SONG, G. « Feedback Control Strategies for a Nonholonomic Mobile Robot using a Nonlinear Oscillator », Journal of Robotic Systems, Vol.16, No.4, pp.237-248, April 1999.
23. BLOCH, A., McCLAMROCH, N.H. « Control of mechanical systems with classical nonholonomic constraints », IEEE Conf. on Decision and Control, pp.201-205, Tampa, Florida, December 1989.
24. BROCKETT, R.W. « Asymptotic stability and feedback stabilization », Differential geometric control theory, R.S. Millman, and H.J. Sussman Editors , Birkhauser, Basel, pp. 181-208, 1983.
25. SAMSON, C. « Velocity and Torque Feedback Control of a Nonholonomic cart », Int. Workshop in Adaptive and Nonlinear Control: Issues in Robotics, Proc Advanced Robot Control, C. Canudas de Wit (Editor), Springer-Verlag, Berlin/New York, Vol. 162, pp. 125-151, 1990.

26. POMET, J.B. « Explicit Design of Time-varying Stabilizing Control Laws for a Class of Controllable Systems Without Drift », *System and Control Letters* 18, pp. 147-158., 1992.
27. DE WIT, C.C., SORDALEN, O.J. « Exponential Stabilization of Mobile Robots with Nonholonomic Constraints », *IEEE Trans. On Automatic Control*, Vol 37., pp. 1791-1797, 1992.
28. ASTOLFI, A. « On the Stabilization of Nonholonomic Systems », *IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 3481-3486, 1994.
29. ASTOLFI, A. « Exponential Stabilization of a Wheeled Mobile Robot », *ASME, Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, March 1999.
30. BLOCH, A.M., DRAKUNOV, S. « Stabilization of a Nonholonomic System via Sliding Modes, *IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 2961-2963., 1994.
31. SORDALEN, O.J., EGELAND, O., « Exponential Stabilization of Nonholonomic Chained Systems », *IEEE Trans. On Automatic Control*, Vol 40, pp. 35-49, 1995.
32. D'ANDREA-NOVEL, B., BASTIN, G., CAMPION, G. « Dynamic feedback linearization of nonholonomic wheeled mobile robots », *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Nice, pp. 2527-2532, May 1992.
33. TEEL, A. R., MURRAY, R.M., WALSH, G « Nonholonomic control systems: from steering to stabilization with sinusoids, *IEEE Conf. On Decision and Control*, Vol. 2, pp. 1603-1609, Dec. 1992.
34. CHWA, D., SEO, J.H., PYOJAE, K., JIN YOUNG, C. « Sliding mode tracking control of nonholonomic wheeled mobile robots », *Proc. of the American Control Conference*, Vol. 5, pp. 3991-3996, May 2002
35. ECONOMOU, R.E., COLYER, A., TSOURDOS, B.A., WHITE, B.A, « Fuzzy logic approaches for wheeled skid-steer vehicles », *IEEE Proc. of Vehicular Technology Conference*, Vol. 2, pp. 990-994, 2002
36. DOITSIDIS, L., VALAVANIS, K.P., TSOURVELOUDIS, N.C. « Fuzzy logic based software control architecture for a skid steering vehicle », *RoMoCo '02. Proc. of the 3rd Int. Workshop on Robot Motion and Control*, 2002
37. DESANTIS, R.M., « Modeling and Path-Tracking Control for a Mobile Wheeled Robot with a Differential Drive », *Robotica*, Vol. 13, pp. 401-410, 1995.
38. CARACCIOLI, L., DE LUCA, A., IANNITTI, S., « Trajectory Tracking Control of a Four-Wheeled Differentially Driven Mobile Robot », *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 2632-2638, 1999.
39. AHMADI, M., POLOTSKI, V., HURTEAU, R. « Path Tracking Control of Tracked Vehicles », *IEEE Int Conf. on Robotics and Automation*, 2000.

40. PETROV, P., DE LAFONTAINE, J., BIGRAS, P., TÉTREAU, M. « Lateral Control of a Skid-steering Mining Vehicle », 2000 IEEE Proc. Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, pp. 1804-1809, 2000.
41. LEROQUAIS, W., D'ANDREA-NOVEL, B. « Modeling and control of wheeled mobile robots not satisfying ideal velocity constraints: the unicycle case » IEEE Proc. on Decision and Control, Vol. 2 , No. 11-13, pp. 1437-1442, 1996.
42. BENDTSEN, J., ANDERSEN, P., PEDERSEN, T. « Robust Feedback Linearization-based Control Design for a Wheeled Mobile Robot », 6<sup>th</sup> Inter. Symposium. On Advanced Vehicle Control (AVEC '02), Hiroshima, Japan, Sept 2002.
43. KHALIL, H.K « Nonlinear systems », Prentice-Hall, 3<sup>rd</sup> edition, 2002.
44. PETERSEN, I., « Wheel Slip Control in ABS Brakes using Gain Scheduled Optimal Control with Constraints », Thèse de Doctorat, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norvège, 2003.
45. MURRAY, R.M., ASTROM, K.J., BOYD, S.P., BROCKETT, R.W., STEIN, G., « Future directions in control in an information-rich world », IEEE Control Systems Magazine, Vol. 23, pp. 20-33, 2003.
46. DEMERS-ROY, C., BEAUDRY, J., « Un véhicule robotisé pour le prototypage rapide de stratégies de guidage intelligent », Rapport technique EPM-RT-2003-14, École Polytechnique de Montréal, 2003.
47. HAHN, J-O., RAJAMANI, R., ALEXANDER, L., « GPS-based real-time identification of tire-road friction coefficient », IEEE Transactions on Control System Technology, Vol. 10, pp. 331-343, 2002.
48. HE, B., WANG, D., PHAM, M., YU, T., « GPS/encoder based precise navigation for a 4WS mobile robot », IEEE International conference on Control, Automation, Robotics and Vision, Vol. 3, pp. 1256-1261, 2002.
49. ANOUSAKI, G., KYRIAKOPOULOS, K.J., « A dead-reckoning scheme for skid-steered vehicles in outdoor environments », IEEE International conference on Robotics and Automation, Vol. 1, pp. 580-585, 2004.

## ANNEXE I: Élément du contrôle non linéaire

Référence : [KHALIL02]

### Crochet de Lie

Soit deux champs vectoriels  $f$  et  $g$  définis sur  $D \subset \mathbb{R}^n$ , le crochet de Lie est un 3<sup>e</sup> champ vectoriel défini par :

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$$

Il est possible de répéter le crochet entre  $f$  et  $g$ , on utilise alors la notation suivante :

$$\begin{aligned} ad_f^0 g(x) &= g(x) \\ ad_f g(x) &= [f, g](x) \\ ad_f^k g(x) &= [f, ad_f^{k-1} g](x) \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

### Dérivée de Lie

Soit un champ vectoriel  $f$  et  $h$  défini sur  $D \subset \mathbb{R}^n$ , la dérivée de Lie de  $h$  respectivement à  $f$  le long de  $f$ , est notée :

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x)$$

On utilise aussi la notation récursive suivante :

$$\begin{aligned} L_f^0 h(x) &= h(x) \\ L_f h(x) &= \frac{\partial h}{\partial x} f(x) \\ L_f^k h(x) &= \frac{\partial(L_f^{k-1} h)}{\partial x} f(x), \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

## Distribution

Soit les champs vectoriels, alors

$$\Delta(x) = \text{span}\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\}$$

est le sous-espace engendré par les vecteurs  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$  pour un  $x \in D$  fixé.

L'ensemble de tous les espaces vectoriels  $\Delta(x)$  pour  $x \in D$  est appelé une *distribution* et noté :

$$\Delta = \text{span}\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$$

La dimension de  $\Delta(x)$  est définie par :

$$\dim(\Delta(x)) = \text{rank}[f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)]$$

## Distribution involutive

Une distribution est involutive si, pour chaque champ vectoriel élément de la distribution, le crochet de lie appliqué sur une combinaison de ces éléments est aussi élément de la distribution (la distribution est fermée sous le crochet de Lie).

$$f_i \in \Delta \quad f_j \in \Delta \quad \Rightarrow \quad [f_i, f_j] \in \Delta \quad \forall 1 \leq i, j \leq k$$

## **ANNEXE II: Description des modèles réalisés en Matlab / Simulink**

Cette annexe constitue une référence rapide décrivant les modèles par blocs tels qu’implémentés en Matlab et Simulink. Une description comportementale et une présentation des signaux d’entrées et de sorties sont présentées.

### **1- Modèles en boucle ouverte du robot mobile**

#### **1.1 Modèle en boucle ouverte sans glissement**

**1.1.1 Schéma de bloc du modèle**

**1.1.2 Description comportementale globale**

**1.1.3 Bloc « *Calcul des forces et moments* »**

**1.1.4 Bloc « *Modèle dynamique* »**

#### **1.2 Modèle en boucle ouverte avec glissement**

**1.1.1 Schéma de bloc du modèle**

**1.1.2 Description comportementale globale**

**1.2.3 Bloc « *Modèle des roues* »**

**1.2.4 Bloc « *Interactions roues-sol* »**

**1.2.5 Bloc « *Modèle dynamique* »**

### **2- Modèle en boucle fermée du robot mobile**

**2.1 Schéma de bloc du modèle**

**2.2 Description comportementale globale**

**2.3 Bloc « *Modèle cinématique* »**

**2.4 Bloc « *Erreurs de navigation* »**

**2.5 Bloc « *Contrôleurs de suivi de chemin* »**

**2.6 Bloc « *Rétroaction non linéaire pour modèle sans glissement* »**

**2.7 Bloc « *Contrôleur dynamique pour le suivi avec glissement* »**

## AII.1- Modèles en boucle ouverte du robot mobile

### 1.1 Modèle en boucle ouverte sans glissement

#### 1.1.1 Schéma de bloc du modèle

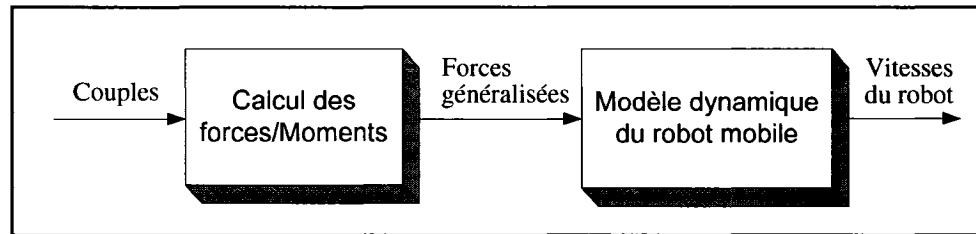
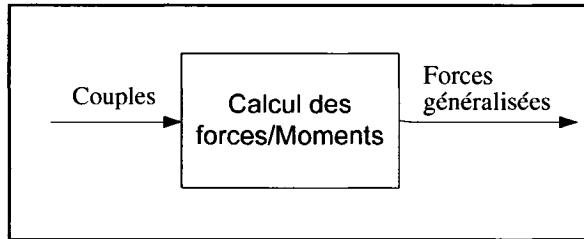


Figure AII.1: Schéma de bloc du modèle boucle ouverte sans glissement

#### 1.1.2 Description comportementale globale

Ce modèle en boucle ouverte implémente le comportement dynamique du robot mobile respectant les contraintes nonholonomes issues de l'hypothèse de non-glissement longitudinal (des roues) et latéral. Les couples appliqués aux roues sont entièrement transformés en des forces de tractions longitudinales qui sont directement appliquées au robot mobile. Les forces latérales sont nulles (car la contrainte nonholonome dicte que la vitesse latérale est nulle en tout temps) et le moment agissant sur le véhicule est facilement calculé à l'aide des forces de traction. Les forces et moments sont ensuite appliqués à l'entrée d'un module dynamique. La série de position/orientation obtenue représente le déplacement idéal, soit celui du robot mobile se déplaçant sur un sol ayant une adhérence de 100% (maximale) en tout temps.

### 1.1.3 Bloc « Calcul des forces et moments »



**Figure AII.2: Bloc « Calcul des forces et moments »**

#### i. Entrées

- *Couples* : Vecteur 2x1 contenant les couples appliqués aux roues à gauche et à droite du robot mobile. Noté respectivement :  $\tau_g$  et  $\tau_d$ .

#### ii. Sorties

- *Forces généralisées* : Vecteur 2x1 contenant la somme des forces agissant sur la plateforme mobile en x (selon l'axe longitudinal par le centre de masse du robot mobile) ainsi que la somme des moments tendant à faire tourner le véhicule sur son axe de rotation passant par son centre de masse. Noté respectivement :  $\sum F_x$  et  $\sum M$ .

#### iii. Description comportementale

Lorsque le robot mobile respecte les contraintes nonholonomes issues de l'hypothèse de non-glissement longitudinal et latéral, les couples appliqués aux roues sont entièrement transformés en une force de traction longitudinale directement appliquée au robot mobile. Les forces latérales sont nulles et le moment agissant sur le véhicule est facilement calculé à l'aide des forces de traction. Les forces et moments sont ensuite mises à l'entrée d'un module dynamique.

#### iv. Équations et références

Les sommes des forces et moments sont calculées selon les formules suivantes :

$$\sum F_x = F_{xg} + F_{xd} = \frac{2}{r}(\tau_g + \tau_d)$$

$$\sum M = b(F_{xd} - F_{xg}) = \frac{2b}{r}(\tau_d - \tau_g)$$

Référence: Chapitre 2, section 2.4.4, équation 2.8.

### 1.1.4 Bloc « Modèle dynamique »

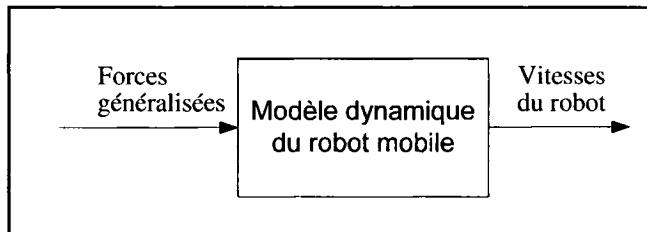


Figure AII.3: Bloc « Modèle dynamique »

#### i. Entrées

- *Forces généralisées* : Vecteur 2x1 contenant la somme des forces agissant sur la plateforme mobile en x, ainsi que la somme des moments tendant à faire tourner le véhicule sur son axe de rotation passant par son centre de masse. Noté respectivement :  $\sum F_x$  et  $\sum M$ .

#### ii. Sorties

- *Vitesses du robot* : Vecteur 2x1 contenant les vitesses longitudinale et angulaire du robot mobile par rapport à son centre de masse. Noté  $\eta = [v_x \quad \Omega]^T$ .

#### iii. Description comportementale

Le module dynamique incorpore les équations de la dynamique du corps rigide constitué par le robot mobile. Le modèle d'état du robot est dérivé à l'aide du formalisme d'Euler-Lagrange. En entrées sont fournies la sommation des forces et la sommation des moments appliqués au robot mobile. À la sortie, nous avons les vitesses longitudinale et angulaire du robot mobile par rapport au repère solidaire avec son centre de masse. Ces vitesses peuvent être utilisées à l'entrée d'un bloc de cinématique afin de calculer la position/configuration ( $x, y, \theta$ ) du robot dans le repère inertiel.

#### iv. Équations et références

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^{-1} \sum F_x \\ I^{-1} \sum M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{mr} (\tau_g + \tau_d) \\ \frac{2b}{Ir} (\tau_d - \tau_g) \end{bmatrix}$$

Référence: Chapitre 2, section 2.4.4, équation 2.28.

## 1.2 Modèle en boucle ouverte avec glissement

### 1.2.1 Schéma de bloc du modèle

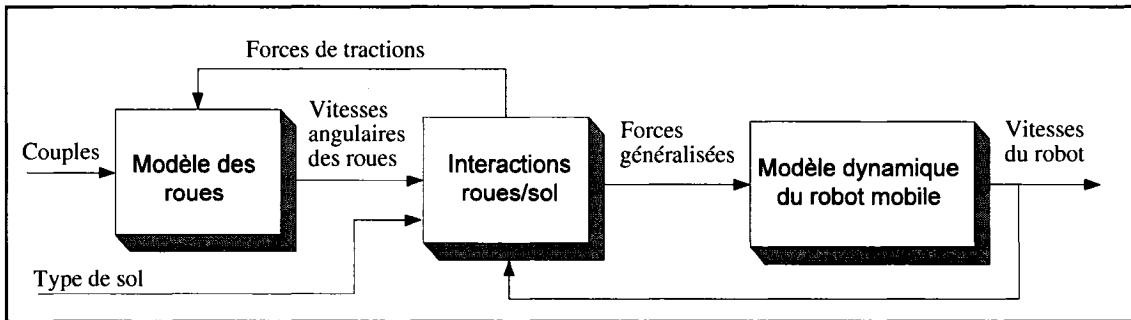


Figure AII.4: Schéma de bloc du modèle boucle ouverte avec glissement

### 1.2.2 Description comportementale globale

Ce modèle en boucle ouverte implémente le comportement dynamique du robot mobile lorsque les contraintes nonholonomes ne tiennent plus, c'est-à-dire lorsque les glissements longitudinal (des roues) et latéral ne sont plus négligeables. Lorsque le robot se déplace sur un sol naturel (sable, argile, gazon, glacé/enneigé, etc.) les roues glissent, le couple appliqué aux roues n'est pas totalement transformé en force active de traction. Dans le présent module de simulation, le modèle de sol utilisé a été élaboré par Wong [WONG93]. Le modèle du sol est alors paramétrisable pour différents types de terrains naturels et enneigés, les données étant disponibles dans la littérature. Ce modèle permet d'estimer les forces de traction et moments agissant sur le robot mobile à partir du glissement des roues et des vitesses du robot mobile. Ces forces généralisées sont ensuite transmises au module dynamique et fourniront les vitesses du robot de la plate-forme mobile de la même manière que pour le modèle sans glissement.

### 1.2.3 Bloc « Modèle des roues »

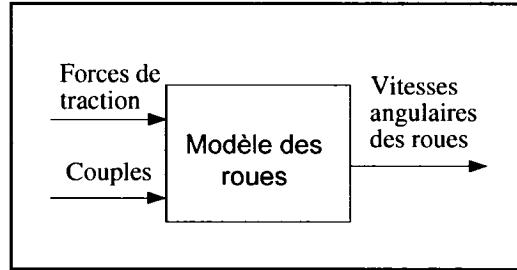


Figure AII.5: Bloc « Modèle des roues »

#### i. Entrées

- *Couples* : Vecteur 2x1 contenant les couples appliqués aux roues à gauche et à droite du robot mobile. Notés respectivement :  $\tau_g$  et  $\tau_d$ .

#### ii. Sorties

- *Vitesses angulaires des roues* : Vecteur 2x1 contenant les vitesses angulaires des roues respectivement situées à gauche et à droite du robot mobile. Notées resp.  $\omega_g$  et  $\omega_d$ .

#### iii. Description comportementale

Ce bloc implémente le modèle d'état de 2 roues, une à gauche et une à droite du robot mobile. Le robot mobile possède 4 roues motrices mais il est supposé que les roues d'un même côté sont soumises à un même couple et une même force de résistance. Dès lors, les vitesses pour les roues d'un même côté sont égales : il est possible de modéliser uniquement 2 roues. Le modèle dynamique d'une roue est déduit et on trouve l'accélération d'une roue en soustrayant du couple appliqué à la roue la force de friction empêchant la roue de tourner (force qui est aussi la force de traction propulsant le robot mobile vers l'avant). Un *bloc de friction Simulink* est utilisé pour modéliser adéquatement l'effet de la friction sur la roue.

#### iv. Équations et références

$$I_{roue} \dot{\omega}_g = \tau_g - \frac{rF_{xg}}{2}$$

$$I_{roue} \dot{\omega}_d = \tau_d - \frac{rF_{xd}}{2}$$

ou encore, de façon équivalente, en utilisant les blocs de friction Simulink :

$$I_{roue} \dot{\omega}_g = G(\tau_g, \frac{rF_{xg}}{2}, \omega_g)$$

$$I_{roue} \dot{\omega}_d = G(\tau_d, \frac{rF_{xd}}{2}, \omega_d)$$

Référence: Chapitre 2, section 2.5.11, équation 2.70

### 1.2.4 Bloc « Interactions roues-sol »

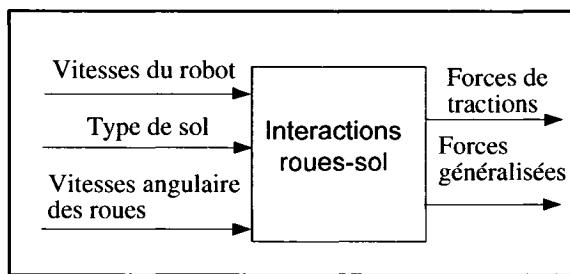


Figure AII.6: Bloc « Interactions roues-sol »

#### i. Entrées

- *Vitesses angulaires des roues* : Vecteur 2x1 contenant les vitesses angulaires des roues respectivement situées à gauche et à droite du robot mobile. Notées resp.  $\omega_g$  et  $\omega_d$ .
- *Type de sol* : Entier correspondant à un type de sol sur lequel on désire simuler le déplacement du robot mobile. Pour chaque type de sol, les données caractérisant le sol doivent être entrées préalablement.
- *Vitesses du robot* : Vecteur 3x1 contenant les vitesses longitudinale, latérale et angulaire du robot mobile par rapport à son centre de masse. Notées  $\eta = [v_x \ v_y \ \Omega]^T$ .

#### ii. Sorties

- *Forces de traction* : Vecteur 2x1 contenant les forces de traction agissant entre les roues et le sol à gauche et à droite du robot mobile. Notées respectivement :  $F_{xg}$  et  $F_{xd}$ .
- *Forces généralisées* : Vecteur 3x1 contenant la somme des forces agissant sur la plateforme mobile en x et en y, ainsi que la somme des moments tendant à faire tourner le véhicule sur son axe de rotation passant par son centre de masse. Noté respectivement :  $\sum F_x$ ,  $\sum F_y$  et  $\sum M$ .

### iii. Description comportementale

Ce bloc reçoit les vitesses des roues et calcule, avec les vitesses du centre de masse, les glissements des roues de part et d'autre (gauche et droit) du robot mobile. Ces glissements sont utilisés dans une courbe de *traction versus glissement* générée par le modèle de friction pour le type de sol spécifié en entrée. À ce niveau, on récupère aussi la résistance au roulement et la friction latérale pour le type de sol choisi. On calcule l'angle de glissement et on obtient le module de la force latérale agissant à l'avant et à l'arrière du véhicule qui permettra par la suite de calculer le moment résistif. À l'aide des différentes vitesses, on calcule toutes les forces et moments actifs et de résistance agissant sur le robot. Les forces et moments de résistance sont soustraites aux forces actives via des *blocs de friction Simulink*, ce qui permet d'obtenir un comportement réaliste. Par la suite, toutes les forces et moments sont additionnés et appliqués en sortie au bloc du modèle dynamique.

### iv. Équations et références

$$S_{x\{g,d\}} = \begin{cases} (r\omega_{\{g,d\}} - v_{x\{g,d\}})/r\omega_{\{g,d\}} \\ (v_{x\{g,d\}} - r\omega_{\{g,d\}})/v_{x\{g,d\}} \end{cases} \quad (2.36)$$

$$\alpha = \tan(v_y/v_x) \quad (2.53)$$

$$F_{x\{g,d\}} = 2F_{x\{g,d\}_{roue}} \text{sign}(S_{x\{g,d\}}) \quad (2.35)$$

$$R_{x\{g,d\}} = 2R_{x_{roue}} \text{sign}(v_{x\{g,d\}}) \quad (2.35)$$

$$F_{y\{ar,av\}} = -2F_{y_{roue}} \text{sign}(v_{y\{ar,av\}}) \quad (2.35)$$

$$M_x = b(F_{xd} - F_{xg}) \quad (2.60)$$

$$M_r = a(F_{yav} - F_{yar}) + b(R_{xg} - R_{xd}) \quad (2.61)$$

$$\sum F_x = F_{xd} - R_{xd} + F_{xg} - R_{xg} \quad (2.64)$$

$$\sum F_y = F_{yav} + F_{yar} \quad (2.64)$$

$$\sum M = M_x - M_r \quad (2.64)$$

où  $F_{x_{roue}}$ ,  $R_{x_{roue}}$ ,  $F_{y_{roue}}$  proviennent du modèle du sol [WONG93]

Référence: Chapitre 2, Section 2.5.

### 1.2.5 Bloc « Modèle dynamique »

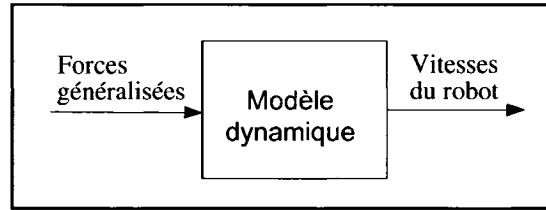


Figure AII.7: Bloc « Modèle dynamique »

#### i. Entrées

- *Forces généralisées* : Vecteur 3x1 contenant la somme des forces agissant sur la plateforme mobile en x et en y, ainsi que la somme des moments tendant à faire tourner le véhicule sur son axe de rotation passant par son centre de masse.

Noté respectivement :  $\sum F_x$ ,  $\sum F_y$  et  $\sum M$ .

#### ii. Sorties

- *Vitesses du robot* : Vecteur 3x1 contenant les vitesses longitudinale, latérale et angulaire du robot mobile par rapport à son centre de masse. Noté  $\eta = [v_x \ v_y \ \Omega]^T$ .

#### iii. Description comportementale

Le module dynamique incorpore les équations de la dynamique du corps rigide constitué par le robot mobile. Le modèle d'état du robot est dérivé à l'aide du formalisme d'Euler-Lagrange. En entrées, sont fournies la sommation des forces et la sommation des moments appliquées au robot mobile. À la sortie, nous avons les vitesses longitudinale et angulaire du robot mobile par rapport au repère solidaire avec son centre de masse. Ces vitesses peuvent être utilisées à l'entrée d'un bloc de cinématique afin de calculer la position/configuration ( $x, y, \theta$ ) du robot dans le repère inertiel.

#### iv. Équations et références

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^{-1} \sum F_x + v_y \Omega \\ m^{-1} \sum F_y - v_x \Omega \\ I^{-1} \sum M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^{-1}[(F_{xg} - R_{xg}) + (F_{xd} - R_{xd})] + v_y \Omega \\ m^{-1}[F_{yaw} + F_{yar}] - v_x \Omega \\ I^{-1}[b((F_{xd} - R_{xd}) - (F_{xg} - R_{xg})) + a(F_{yaw} - F_{yar})] \end{bmatrix}$$

Référence: Chapitre 2, section 2.5.12, équation 2.85.

## AII.2- Modèles en boucle fermée du robot mobile

### 2.1 Schéma de bloc du modèle

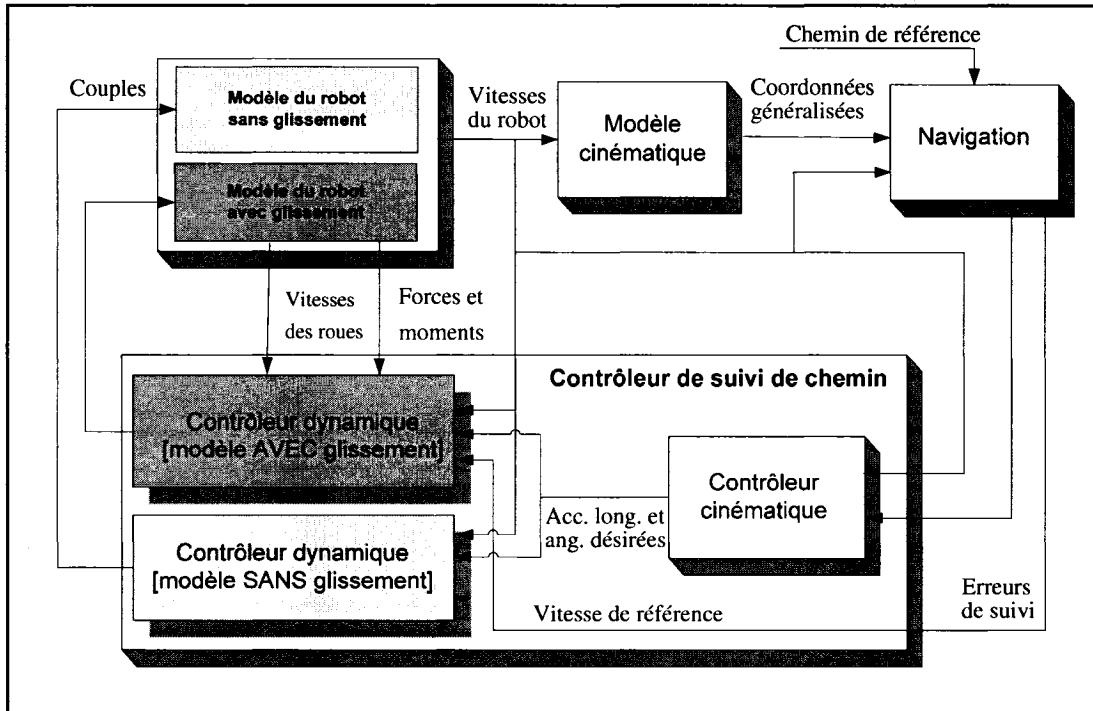


Figure AII.8: Schéma de bloc du système d'asservissement en boucle fermée

### 2.2 Description comportementale globale

Le modèle en boucle fermée permet de simuler le système complet en boucle fermée : le robot mobile, avec ou sans glissement, se déplaçant suite à l'application de couples sur ses roues et tentant de suivre un chemin de référence. Un système de base de navigation calcule les erreurs de suivi de chemin qui sont transmises au contrôleur de suivi de chemin qui détermine des accélérations telles que si le robot mobile atteignait ces accélérations désirées, son parcours convergerait alors vers le chemin de référence. Si on utilise un robot « idéal » sans glissement, une simple rétroaction non linéaire est alors appliquée afin de trouver les couples requis aux roues pour atteindre la commande calculée par le contrôleur de suivi de chemin. Si le robot mobile se déplace sur un sol naturel où le glissement des roues n'est pas négligeable, le type de sol sur lequel il se

déplace est premièrement entré dans le module « Modèle boucle ouverte avec glissement », qui contient une modélisation complète du sol naturel. D'autre part, la détermination des couples à appliquer au robot mobile pour obtenir les accélérations désirées n'est pas aussi simple que dans le cas sans glissement. Un nouveau contrôleur dynamique pour le suivi avec glissement est développé. Celui-ci détermine les couples à appliquer aux roues en tenant compte du glissement et du modèle des forces agissant sur le robot mobile, des vitesses des roues et du centre de masse.

### 2.3 Bloc « Modèle cinématique »

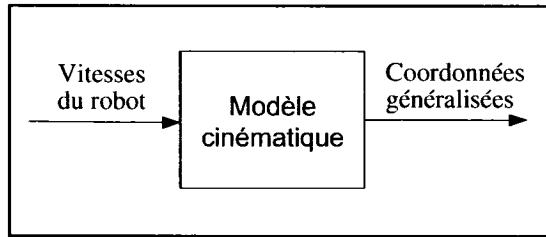


Figure AII.9: Bloc « Modèle cinématique »

#### i. Entrées

- *Vitesses du robot* : Vecteur 3x1 contenant les vitesses longitudinale, latérale et angulaire du robot mobile par rapport à son centre de masse. Noté  $\eta = [v_x \ v_y \ \Omega]^T$ .

#### ii. Sorties

- *Coordonnées généralisées* : Vecteur 3x1 contenant les coordonnées généralisées qui définissent la position/orientation du robot mobile dans le repère inertiel. Noté  $q = [x \ y \ \theta]^T$ .

#### iii. Description comportementale

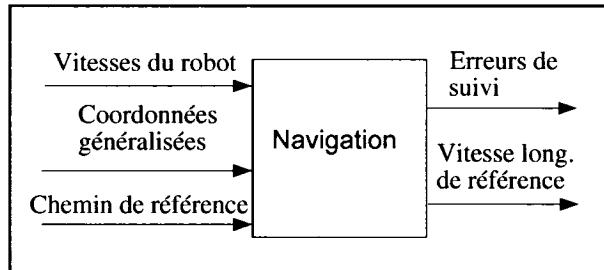
Le module cinématique établit une relation entre les vitesses du centre de masse et la position du robot mobile dans le repère inertiel.

#### iv. Équations et références

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)v_x - \sin(\theta)v_y \\ \sin(\theta)v_x + \cos(\theta)v_y \\ \Omega \end{bmatrix}$$

Référence: Chapitre 2, section 2.5.12, equation 2.84.

## 2.4 Bloc « Navigation »



**Figure AII.10: Bloc « Navigation »**

### i. Entrées

- *Vitesses du robot*: Vecteur 3x1 contenant les vitesses longitudinale, latérale et angulaire du robot mobile par rapport à son centre de masse. Noté  $\eta = [v_x \ v_y \ \Omega]^T$ .
- *Coordonnées généralisées*: Vecteur 3x1 contenant les coordonnées généralisées qui définissent la position/orientation du robot mobile dans le repère inertiel. Noté  $q = [x \ y \ \theta]^T$ .
- *Chemin de référence*: ensemble de points  $(x_{REF}, y_{REF})$ , d'orientations  $(\theta_{REF})$ , de rayons de courbure  $(\rho_{REF})$  et de vitesses longitudinales  $(v_{xREF})$  de référence exprimés dans le repère inertiel. Noté  $\Pi$ .

### ii. Sorties

- *Erreurs de suivi*: Vecteur 4x1 désignant les erreurs de navigation : erreur latérale, erreur de vitesse longitudinale, erreur d'orientation et erreur de vitesse angulaire. Notées  $e = [e_{lat} \ e_{vx} \ e_{\theta} \ e_{\Omega}]^T$ .
- *Vitesse longitudinale de référence*: Vitesse longitudinale désirée pour le parcours du robot mobile. Noté  $v_{xREF}$ .

### iii. Description comportementale

Ce module s'occupe de trouver le point situé sur le chemin de référence le plus près de la position actuelle du robot mobile. En extrayant les vitesses désirées pour le point de référence, le module calcule différentes erreurs de navigation à l'aide de la position/orientation et des vitesses du robot mobile.

#### iv. Équations et références

$$\begin{aligned}
 e_{lat} &= \min \{ |(x - x_{REF})^2 + (y - y_{REF})^2|, \forall x_{REF}, y_{REF} \in \Pi \} \\
 e_\theta &= \theta - \theta_{REF} \\
 e_\Omega &= \dot{\theta} - \dot{\theta}_{REF} \\
 e_{vx} &= v_x - v_{REF}
 \end{aligned}$$

Référence: Chapitre 4, section 4.1.2, équation 4.1.

### 2.5 Bloc « Contrôleur cinématique »

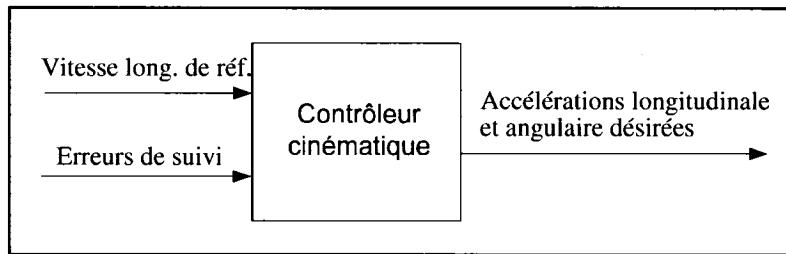


Figure AII.11: Bloc « Contrôleur cinématique »

#### i. Entrées

- *Vitesse longitudinale de référence*: Vitesse longitudinale désirée pour le parcours du robot mobile. Notée  $v_{xREF}$ .
- *Erreurs de suivi*: Vecteur 4x1 désignant les erreurs de navigation : erreur latérale, erreur de vitesse longitudinale, erreur d'orientation et erreur de vitesse angulaire. Noté  $e = [e_{lat} \quad e_{vx} \quad e_\theta \quad e_\Omega]^T$ .

#### ii. Sorties

- *Accélérations longitudinale et angulaire désirées*: Vecteur 2x1 contenant les accélérations linéaire et angulaire requise (désirées) afin d'obtenir des vitesses faisant en sorte que la plateforme mobile convergera vers son chemin de référence. Noté  $v = [v_1 \quad v_2]^T$ .

#### iii. Description comportementale

Ce module calcule des accélérations longitudinale et angulaire requises (désirées) afin d'obtenir des vitesses faisant en sorte que la plateforme mobile convergera vers son chemin de référence.

#### iv. Équations et références

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_{xREF} + v_1 \\ \dot{\Omega}_{REF} + v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_{xREF} - K_{vx1}e_{vx} - \frac{K_{vx2}}{s}e_{vx} \\ \dot{\Omega}_{REF} - K_{\theta1}\dot{e}_{\theta} - K_{\theta2}e_{\theta} - \frac{K_{\theta3}}{v_{xREF}}e_{lat} \end{bmatrix}$$

Références: Chapitre 4, section 4.1.4, equation 4.28.

### 2.6 Bloc « Contrôleur dynamique [modèle sans glissement] »

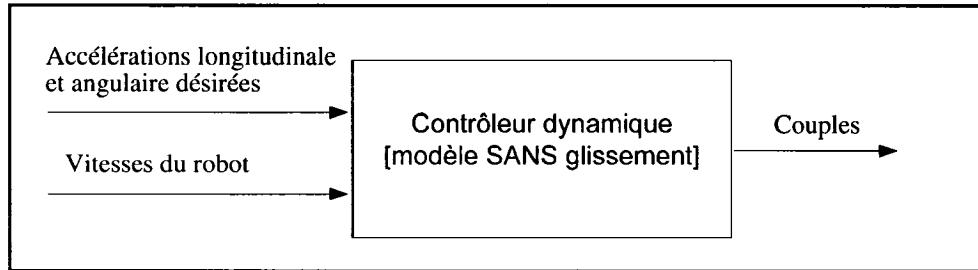


Figure AII.12: Bloc « Contrôleur dynamique [modèle sans glissement] »

#### i. Entrées

- *Accélérations longitudinale et angulaire désirées:* Vecteur 2x1 contenant les accélérations linéaire et angulaire requises (désirées) afin d'obtenir des vitesses faisant en sorte que la plate-forme mobile convergera vers son chemin de référence. Noté  $v = [v_1 \ v_2]^T$ .

- *Vitesses du robot:* Vecteur 3x1 contenant les vitesses longitudinale, latérale et angulaire du robot mobile par rapport à son centre de masse. Noté  $\eta = [v_x \ v_y \ \Omega]^T$ .

#### ii. Sorties

- *Couples :* Vecteur 2x1 contenant les couples appliqués aux roues à gauche et à droite du robot mobile. Noté respectivement :  $\tau_g$  et  $\tau_d$ .

### iii. Description comportementale

Ce module calcule le couple aux roues requis en annulant les non linéarités du modèle dynamique. Ceci a pour effet de rendre les accélérations du robot égales aux accélérations désirées produites par le contrôleur cinématique de suivi de chemin (et provoquer ainsi du même coup une convergence des vitesses du robot vers celles désirées).

### iv. Équations et références

$$\begin{bmatrix} \tau_g \\ \tau_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{4b}(bmv_1 - Iv_2) \\ \frac{r}{4b}(bmv_1 + Iv_2) \end{bmatrix}$$

Référence: Chapitre 4, section 4.1.3, équation 4.12.

## 2.7 Bloc « Contrôleur dynamique [modèle avec glissement] »

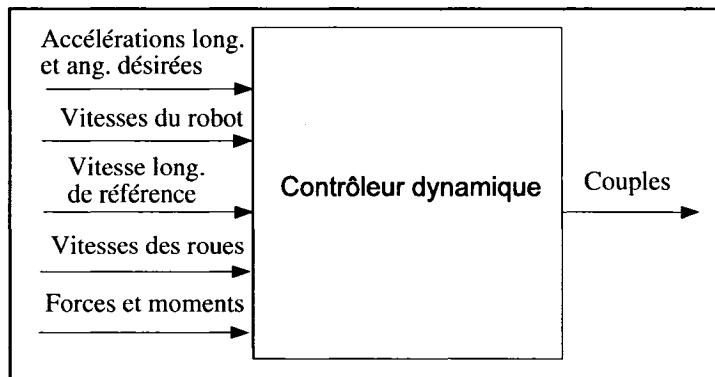


Figure AII.13: Bloc « Contrôleur dynamique [modèle avec glissement] »

### i. Entrées

- *Accélérations longitudinale et angulaire désirées:* Vecteur 2x1 contenant les accélérations linéaire et angulaire requises (désirées) afin d'obtenir des vitesses faisant en sorte que la plateforme mobile convergera vers son chemin de référence. Noté  $v = [v_1 \ v_2]^T$ .
- *Vitesses du robot:* Vecteur 3x1 contenant les vitesses longitudinale, latérale et angulaire du robot mobile par rapport à son centre de masse. Noté  $\eta = [v_x \ v_y \ \Omega]^T$ .

- *Vitesse longitudinale de référence* : Vitesse longitudinale désirée pour le parcours du robot mobile. Noté  $v_{x_{REF}}$ .
- *Vitesses des roues*: Vecteur 2x1 contenant les vitesses angulaires des roues situées de part et d'autre du robot mobile. Noté  $\omega_g$  et  $\omega_d$ .
- *Forces et moments*: Vecteur 3x1 contenant les forces de traction agissant entre les roues et le sol à gauche et à droite, les forces de résistance au mouvement et les forces normales agissant sur les roues. Noté respectivement :  $F_{xg}$ ,  $F_{xd}$ ,  $R_{xg}$ ,  $R_{xd}$  et  $F_{Nroue}$

#### ii. Sorties

- *Couples* : Vecteur 2x1 contenant les couples appliqués aux roues à gauche et à droite du robot mobile. Noté respectivement :  $\tau_g$  et  $\tau_d$ .

#### iii. Description comportementale

Ce module calcule le couple aux roues requis afin que le robot suive correctement son chemin en gérant les glissements longitudinal et latéral. Ce module est divisé en deux sous-modules : un contrôleur de vitesse longitudinale qui gère le glissement longitudinal et permet d'atteindre une vitesse longitudinale de référence, et un contrôleur de vitesse angulaire qui gère le glissement latéral et qui permet de tourner progressivement sans déraper latéralement.

#### iv. Équations et références

##### Contrôleur de vitesse longitudinale

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_g \\ \boldsymbol{\tau}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} F_{xg} - I_{roue} (K_{Pg} e_{\omega g} + K_{Ig} \int e_{\omega g} dt - \dot{\omega}_{gREF}) \\ \frac{r}{2} F_{xd} - I_{roue} (K_{Pd} e_{\omega d} + K_{Id} \int e_{\omega d} dt - \dot{\omega}_{dREF}) \end{bmatrix}$$

Référence: Chapitre 5, section 5.1.1, équation 5.4.

$$\omega_{\{g,d\}REF} = \frac{v_{xREF}}{r \cdot [1 - \mu_{\text{type de sol}}^{-1} (\frac{R_{x\{g,d\}}}{2F_{Nroue}})]}$$

Référence : Chapitre 5, section 5.1.2, equation 5.16.

Contrôleur de vitesse angulaire

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_s \\ \tau_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K \cdot \text{Comp}(v_\Omega, Onde_{PWM}) \\ K \cdot \text{Comp}(v_\Omega, Onde_{PWM}) \end{bmatrix}$$

où la fonction *Comp* est définie de la manière suivante :

$$\text{Comp}(a, b) = \begin{cases} 1 & a \geq b \\ 0 & a < b \end{cases}$$

et *Onde<sub>PWM</sub>* est une onde porteuse triangulaire.

Référence: Chapitre 5, section 5.2.2, figure 5.17.