

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

Méthodes inverses pour les composants tout-fibre fonctionnant
en transmission

ALEXANDRE DUPUIS
DÉPARTEMENT DE GÉNIE PHYSIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES (M.Sc.A.)
(GÉNIE PHYSIQUE)
DÉCEMBRE 2005



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 978-0-494-16778-6

Our file Notre référence

ISBN: 978-0-494-16778-6

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.


Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

Méthodes inverses pour les composants tout-fibre fonctionnant
en transmission

présenté par: DUPUIS Alexandre,

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. GODBOUT Nicolas, Ph.D., président

Mme LACROIX Suzanne, D.Sc., membre et directrice de recherche

M. DAXHELET Xavier, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. SORIANO Patrick, Ph.D., membre

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs, Suzanne LACROIX et Xavier DAXHELET, pour leur soutien financier d'une part, mais surtout pour m'avoir guidé à travers une belle expérience d'apprentissage.

J'aimerais remercier mes parents du fond de mon cœur pour m'avoir supporté et enduré pendant si longtemps. Je sais que parfois je suis parti dans mon monde et c'est bien de se faire ramener sur terre.

Je voudrais remercier tous mes magnifiques collègues que j'ai eu la chance de côtoyer, notamment : Maryse AUBÉ, pour son *calinours* et son support moral, Simon FORTIER, pour son idée salvatrice de partir des calculs pendant la nuit, Simon LAFLAMME, pour avoir partagé si patiemment le CD de Matlab et Éric SAULNIER, car «*je n'ai jamais été aussi proche de finir*».

Finalement, mais certainement pas le moindre, je suis éternellement reconnaissant envers Bryan BURGOYNE : ami, mentor et *debugger* extraordinaire. Merci pour la patience infinie envers mes milles milliards de questions. Tu es toujours prêt à donner un coup de main, à écouter les idées et les frustrations, et à offrir des solutions. Notre amitié va bien au-delà de la physique et des jeux. Quand je pense à Bryan, il y a une citation de William Butler Yeats qui me vient à l'esprit :

Think where man's glory most begins and ends.

And say my glory was I had such friends.

Résumé

Dans ce mémoire, des méthodes numériques sont développées pour résoudre le problème inverse de trouver le profil de couplage d'un composant tout-fibre à partir de son spectre de transmission. Une méthode de diffusion inverse, dite de pelage de couches, est adaptée pour le cas des réseaux à longs pas. De plus, une étude approfondie démontre que cette méthode ne peut pas s'appliquer dans le cas des fibres effilées, en raison des dépendances supplémentaires en z et en ω du coefficient de couplage et des indices effectifs.

Par la suite, le problème inverse est transformé en problème d'optimisation. D'une part, une variété de méthodes d'optimisation ont été implémentées, soit : un algorithme génétique, une méthode de programmation évolutive et une méthode de partition de l'espace. D'une autre part, une fonction d'erreur a été construite pour évaluer l'écart entre un spectre cible et un spectre calculé à l'aide d'une méthode directe. Pour ces fins, différentes méthodes directes ont été étudiées et optimisées, afin de minimiser le temps de calcul. À l'aide de ces méthodes d'optimisation, il a été démontré qu'un réseau à 5 couches uniformes peut approximer le spectre d'un filtre, qui égalise le gain d'une fibre dopée à l'erbium, avec une erreur maximale de 0,46 dB. De plus, il a été montré que le même spectre peut être approximé par une série de 3 fibres effilées avec une erreur maximale de 0,14 dB.

Abstract

In this Masters thesis, numerical methods were developed to solve the inverse problem of calculating the coupling profile of all-fibre components from their spectral transmission response. A layer peeling method, which is a popular and powerful inverse scattering method, has been adapted for the determination of long period fiber gratings. However, an extensive study demonstrates that this method cannot be used for the determination of the longitudinal profile of tapered fibers, owing to the added dependencies, in z and ω , of the coupling coefficient and the effective indices.

Subsequently, the inverse problem is converted into an optimisation problem by constructing an error function, to evaluate the difference between a target spectrum and a spectrum calculated by a direct method. A variety of methods that solve the direct problem were studied and optimised, so as to minimize the calculation time. Furthermore, a multitude of optimisation methods were developed, namely: a genetic algorithm, an evolutionary programming method and a space partitioning method. Thus, it is shown that a long period grating of 5 uniform sections is sufficient for approximating the spectrum of a filter that flattens the gain of an erbium-doped fiber. The maximum error of this approximation is 0.46 dB. It is also shown that a series of 3 tapers can approximate the same spectrum with a maximum error of 0.14 dB.

Table des matières

Remerciements	iv
Résumé	v
Abstract	vi
Table des matières	vii
Liste des figures	xi
Liste des tableaux	xv
Liste des annexes	xvii
Liste des sigles et abréviations	xviii
Introduction	1
Chapitre 1 Méthodes de résolution du problème direct	8
1.1 Formalisme des équations couplées	9
1.1.1 Approximation bimodale	9
1.1.2 Modes idéaux	10
1.1.3 Modes locaux	11
1.2 Résolution numérique d'équations différentielles	13
1.2.1 Résolution par Runge-Kutta d'ordre 4	13

1.2.2	Résolution par matrices de transfert	15
1.3	Optimisation du calcul direct	17
1.3.1	Discrétisation du couplage et optimisation de la matrice de transfert	17
1.3.2	Interpolation en longueur d'onde	19
1.4	Comparaison des temps de calcul	20
Chapitre 2 Pelage de couches à l'aide de la transformée de Fourier		26
2.1	Méthode de pelage de couches appliquée aux réseaux à longs pas . . .	28
2.1.1	Formalisme de série de Fourier	29
2.1.2	Formalisme de transformée de Fourier inverse	34
2.1.3	Algorithme de la méthode de pelage de couches	37
2.1.4	Exemple de synthèse	37
2.1.5	Synthèse d'un filtre égalisateur de gain	38
2.2	Méthode de pelage de couches inapplicable aux fibres effilées	40
2.2.1	Cas $\{\Delta n = \text{cte.}, q(z)\}$	40
2.2.2	Cas $\{\Delta n(z), q(z)\}$	44
2.2.3	Cas $\{\Delta n(\omega), q(z)\}$	45
2.2.4	Cas $\{\Delta n(\omega), q(z, \omega)\}$	48
2.2.5	Cas $\{\Delta n(z, \omega), q(z, \omega)\}$	50
Chapitre 3 Optimisation d'une fonction à N dimensions à l'aide d'heuristiques modernes		52
3.1	Algorithme génétique	54
3.1.1	Description du comportement	54
3.1.2	Algorithme de la méthode	55
3.1.3	Détails de l'implémentation	56
3.2	Programmation évolutive	57
3.2.1	Description du comportement	57

3.2.2	Algorithme de la méthode	58
3.2.3	Détails de l'implémentation	58
3.3	Division cellulaire	60
3.3.1	Description du comportement	61
3.3.2	Algorithme de la méthode	61
3.3.3	Détails de l'implémentation	64
3.3.4	Freinage de la croissance exponentielle des cellules	64
3.3.5	Lancement d'heuristiques de descente	65
3.4	Comparaison des méthodes pour l'optimisation de diverses fonctions tests	65
3.4.1	Fonction test de <i>Joung</i>	66
3.4.2	Fonction test de <i>Shubert</i>	70
3.4.3	Fonction test d' <i>Easom</i>	73
3.5	Optimisation du spectre d'un réseau à longs pas	76
Chapitre 4	Optimisation du profil d'une fibre effilée	86
4.1	Optimisation difficile	87
4.2	Choix du modèle paramétrique	89
4.2.1	Modèle polynomial	90
4.2.2	Modèle discret de sections uniformes	91
4.2.3	Modèle de points clés	91
4.2.4	Modèle de <i>Birks & Li</i>	93
4.3	Choix d'une métrique	93
4.3.1	Moindre carrés sur le spectre	94
4.3.2	Moindre carrés sur la transformée de Fourier rapide des spectres	95
4.4	Mauvais conditionnement du problème	97
4.4.1	Critère d'adiabaticité	97
4.4.2	Interféromètre modal simple	98
4.4.3	Interféromètre modal composé	100

4.5	Optimisation de fibres effilées en cascade	100
4.5.1	Approximation quasi-sinusoidale	101
4.5.2	Cascade de 4 fibres effilées	102
4.5.3	Cascade de 3 fibres effilées	104
Conclusion		105
Bibliographie		108
Annexes		110

Liste des figures

Figure 1	Schéma des trois types de composants tout-fibre	2
Figure 2	Modes d'une fibre optique	3
Figure 3	Gain d'une fibre optique dopée à l'erbium	4
Figure 4	Spectre égalisateur du gain d'un EDFA, approximé par une cascade de fibres effilées	4
Figure 1.1	Schéma d'un guide local	12
Figure 1.2	Profil longitudinal discrétisé	15
Figure 1.3	Spectre d'une fibre effilée avec et sans interpolation en λ	20
Figure 1.4	Temps de calcul en fonction du nombre de modes	21
Figure 1.5	Temps de calcul en fonction du nombre de couches en z	21
Figure 1.6	Temps de calcul en fonction du nombre d'échantillons en λ	22
Figure 1.7	Spectre d'une fibre effilée calculé avec 2 et 5 modes	23
Figure 1.8	Erreur en fonction du nombre de couches	23
Figure 1.9	Erreur en fonction du nombre de d'échantillons en λ	24
Figure 2.1	Schéma des différents chemins optiques	30
Figure 2.2	Reconstruction d'un réseau uniforme à l'aide de la méthode de pelage de couches	37
Figure 2.3	Synthèse, à l'aide de la méthode de pelage de couche, d'un réseau à longs pas qui égalise le gain d'un EDFA	39

Figure 2.4	Spectre d'un réseau à longs pas, à profil complexe, qui égalise le gain d'un EDFA	39
Figure 2.5	Quatre chemins optiques	41
Figure 2.6	Réponse impulsionnelle d'un composant ayant la forme du cas intermédiaire $\{\Delta n = cte., q(z)\}$, avec les intégrales calculées par la méthode des trapèzes	42
Figure 2.7	Réponse impulsionnelle d'un composant ayant la forme du cas intermédiaire $\{\Delta n = cte., q(z)\}$, avec les intégrales calculées par TFRI	42
Figure 2.8	Réponse impulsionnelle d'un composant ayant la forme du cas intermédiaire $\{\Delta n = cte., q(z)\}$, avec les intégrales calculées par TFRI sur une largeur spectrale réduite	44
Figure 2.9	Réponse impulsionnelle d'un composant ayant la forme $\{\Delta n(z), q(z)\}$, avec les intégrales calculées par TFRI	45
Figure 2.10	Réponse impulsionnelle d'un composant ayant la forme $\{\Delta n(\omega), q(z)\}$, avec une dispersion forte	46
Figure 2.11	Réponse impulsionnelle d'un composant ayant la forme $\{\Delta n(\omega), q(z)\}$ avec une dispersion un peu plus faible	46
Figure 2.12	Réponse impulsionnelle d'un composant ayant la forme $\{\Delta n(\omega), q(z)\}$, avec une dispersion faible et une largeur spectrale réduite.	48
Figure 2.13	Réponse impulsionnelle d'un composant ayant la forme $\{\Delta n(\omega), q(z, \omega)\}$, avec une dispersion est forte	49
Figure 2.14	Réponse impulsionnelle d'un composant ayant la forme du cas intermédiaire $\{\Delta n = const., q(z, \omega)\}$	50
Figure 2.15	Réponse impulsionnelle d'un composant ayant la forme du cas ultime $\{\Delta n(z, \omega), q(z, \omega)\}$	51
Figure 3.1	Imposition d'une condition de frontière périodique sur une perturbation gaussienne.	59
Figure 3.2	Illustration de l'algorithme de la méthode de <i>division cellulaire</i> . .	62

Figure 3.3	Courbes de niveau et topologie de la fonction <i>de Jounge</i>	66
Figure 3.4	Exemple de courbes de convergence pour l'optimisation de la fonction <i>de Jounge</i>	68
Figure 3.5	Évolution de $(\Delta F)_{\text{moy}}$ lors de l'optimisation de la fonction <i>de Jounge</i>	69
Figure 3.6	Courbes de niveau et topologie de la fonction <i>Shubert</i>	70
Figure 3.7	Détermination simultanée de plusieurs minima globaux de la fonction <i>Shubert</i> à l'aide de la méthode de division cellulaire.	71
Figure 3.8	Évolution de $(\Delta F)_{\text{moy}}$ lors de l'optimisation de la fonction <i>Shubert</i>	72
Figure 3.9	Topologie de la fonction <i>Easom</i>	73
Figure 3.10	Évolution de $(\Delta F)_{\text{moy}}$ lors de l'optimisation de la fonction <i>Easom</i>	75
Figure 3.11	Optimisation d'un réseau à longs pas quelconque	78
Figure 3.12	Optimisation d'un réseau à longs pas quelconque	79
Figure 3.13	Spectres obtenus lors de l'optimisation d'un réseau à longs pas à 5 couches pour obtenir un GFF	80
Figure 3.14	Profils de couplage obtenus lors de l'optimisation d'un réseau à longs pas à 5 couches pour obtenir un GFF	81
Figure 3.15	Spectres obtenus lors de l'optimisation d'un réseau à longs pas à 20 couches pour obtenir un GFF	82
Figure 3.16	Profils de couplage obtenus lors de l'optimisation d'un réseau à longs pas à 20 couches pour obtenir un GFF	83
Figure 3.17	Comparaison des spectres d'un GFF à 5 couches et d'un à 20 couches	84
Figure 3.18	Comparaison des courbes de gain aplati d'un GFF à 5 couches et d'un à 20 couches	85
Figure 4.1	Difficulté de retrouver exactement un spectre quasi-sinusoidal d'une fibre effilée.	88
Figure 4.2	L'optimisation d'un GFF à partir du profil d'une seule fibre effilée n'est pas fructueuse	89

Figure 4.3	Exemples de profils construits par l'interpolation entre des points clés	92
Figure 4.4	Surévaluation de l'erreur associée au décalage entre la fonction calculée et la fonction cible	95
Figure 4.5	Topologie de la fonction d'erreur de moindre carrés sur le spectre dans le cas du modèle de Birks & Li	96
Figure 4.6	Topologie de la fonction d'erreur de moindre carrés sur la TFR dans le cas du modèle de Birks & Li	96
Figure 4.7	Profil longitudinal simple qui est décomposé en termes d'un interféromètre modal	99
Figure 4.8	Profil longitudinal quelconque qui est décomposé en termes d'un interféromètre modal composé	101
Figure 4.9	Optimisation du spectre d'un GFF à l'aide de 4 fibres effilées placées en série	103
Figure 4.10	Optimisation du spectre d'un GFF à l'aide de 3 fibres effilées placées en série	104

Liste des tableaux

Tableau 3.1	Paramètres optimaux pour obtenir une précision qui est au moins inférieure à 10^{-5} lors de l'optimisation de la fonction <i>de Jounq</i>	67
Tableau 3.2	Paramètres optimaux pour obtenir au moins une précision inférieure à 0,1 lors de l'optimisation de la fonction <i>Shubert</i>	71
Tableau 3.3	Paramètres optimaux pour obtenir une précision au moins inférieure à 10^{-2} lors de l'optimisation de la fonction <i>Easom</i>	75
Tableau C.1	Statistiques d'optimisation de la fonction <i>de Jounq</i> avec l'algorithme génétique.	125
Tableau C.2	Statistiques d'optimisation de la fonction <i>de Jounq</i> avec la programmation évolutive.	126
Tableau C.3	Statistiques d'optimisation de la fonction <i>de Jounq</i> avec la méthode de division cellulaire.	127
Tableau C.4	Statistiques d'optimisation de la fonction <i>Shubert</i> avec l'algorithme génétique.	128
Tableau C.5	Statistiques d'optimisation de la fonction <i>Shubert</i> avec la programmation évolutive.	129
Tableau C.6	Statistiques d'optimisation de la fonction <i>Shubert</i> avec la méthode de division cellulaire.	130
Tableau C.7	Statistiques d'optimisation de la fonction <i>Shubert</i> avec le <i>multinitium</i> de la méthode de classique de métrique variable	131

Tableau C.8 Statistiques d'optimisation de la fonction <i>Easom</i> avec l'algorithme génétique.	132
Tableau C.9 Statistiques d'optimisation de la fonction <i>Easom</i> avec la programmation évolutive.	133
Tableau C.10 Statistiques d'optimisation de la fonction <i>Easom</i> avec la méthode de division cellulaire.	134
Tableau C.11 Statistiques d'optimisation de la fonction <i>Easom</i> avec le <i>multinitium</i> de la méthode classique de métrique variable	135

Liste des annexes

Annexe A Équations de couplage entre des modes locaux	111
Annexe B Contributions des chemins optiques discrets aux spectres	117
Annexe C Détermination des paramètres optimaux pour la minimisa- tion de certaines fonctions tests	124
C.1 Fonction test <i>de Joung</i>	125
C.2 Fonction test de <i>Shubert</i>	128
C.3 Fonction test de <i>Easom</i>	132

Liste des sigles et abréviations

a = amplitude normalisée du mode $[-]$

$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$, vitesse de la lumière dans le vide

n = indice de réfraction du milieu $[-]$

n_c = indice de réfraction du cœur d'une fibre optique $[-]$

n_g = indice de réfraction de la gaine d'une fibre optique $[-]$

q = coefficient de couplage $[\text{m}^{-1}]$

x = élongation d'une fibre chauffée $[\text{m}]$

z = distance dans l'axe de la fibre $[\text{m}]$

$\vec{E}$ = champ électrique $\left[\frac{\text{V}}{\text{m}}\right]$

$\vec{H}$ = champ magnétique $\left[\frac{\text{A}}{\text{m}}\right]$

$\mathcal{L}$ = longueur de la zone chauffée $[\text{m}]$

$\mathcal{L}_0$ = variable dans le modèle de Birks & Li $[\text{m}]$

Noms de fonctions

F = fonction d'erreur (généralement une métrique de moindre carrés) $[-]$

F_{DJ} = fonction test *de Joung* $[-]$

F_{SH} = fonction test *Shubert* $[-]$

F_{EA} = fonction test *Easom* $[-]$

$F_{\text{Minkowsky}}$ = métrique de Minkowsky $[-]$

F_{MC} = métrique de moindre carrés $[-]$

F_{MC_FFT} = métrique de moindre carrés effectuée sur les TFR $[-]$

Symboles grecs

α = variable dans le modèle de Birks & Li $[-]$

β = constante de propagation $[m^{-1}]$

$\epsilon_0 = 8,8542 \times 10^{-12} [\frac{F}{m}]$, permittivité électrique

λ = longueur d'onde $[m]$

μ = taux de mutation, paramètre de contrôle $[-]$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [\frac{H}{m}]$, perméabilité électrique

ρ = rayon normalisé, inverse du taux de réduction (ITR) $[-]$

σ = coefficient de diffusion $[m^{-1}]$

τ = temps de propagation $[s]$

ϕ = phase $[rad]$

χ = fraction de l'intervalle de recherche, paramètre de contrôle $[-]$

$\omega = c \frac{2\pi}{\lambda}$ = fréquence angulaire ou pulsation $[\frac{rad}{s}]$

$\overleftrightarrow{\omega}$ = largeur de la fenêtre spectrale $[\frac{rad}{s}]$

Acronymes

EDFA = Erbium-Doped Fiber Amplifier

GFF = Gain Flattening Filter

GLM = Gel'fand-Levitan-Marchenko

TFR = Transformée de Fourier Rapide

TFRI = Transformée de Fourier Rapide Inverse

Introduction

Les réseaux de télécommunications par fibres optiques nécessitent des composants pour traiter les signaux envoyés dans la fibre sous forme d'impulsions à une longueur d'onde précise (un *canal*). Or, le design de ces composants doit répondre à des exigences sévères. Entre autres, les pertes d'insertion doivent être minimales ; c'est pour cette raison que les composants fabriqués à même une fibre possèdent un net avantage, puisque l'épissure entre deux fibres offre des faibles pertes $< 0,2$ dB. Il existe principalement trois types de composants tout-fibre : les réseaux de Bragg à courts et à longs pas, les fibres effilées et les coupleurs fusionnés (voir figure 1). La réponse spectrale de ces composants dépend de leur profil de couplage.

La lumière se propage de façon stable selon des modes spatiaux qui respectent la géométrie du guide d'onde. La symétrie circulaire d'une fibre optique engendre des modes dont les champs sont des combinaisons linéaires de fonctions de Bessel (figure 2). Pour le transport sur de longues distances, une fibre optique unimodale est utilisée, c'est-à-dire qu'elle ne guide dans le cœur que le mode fondamental, appelé LP_{01} . Cependant, lorsque son revêtement de plastique est enlevé, pour permettre la fabrication des composants, cette fibre devient multimodale à cause de la couche d'air. Afin de modifier la puissance transportée par le mode fondamental, on perturbe l'invariance en translation du guide d'onde. La perturbation induit un échange de puissance entre les modes de la fibre dégainée. En considérant une amplitude de mode qui varie en fonction de z , on peut caractériser ce couplage de puissance. Il est à noter que les modes supérieurs sont coupés par la gaine de revêtement à la fin de la

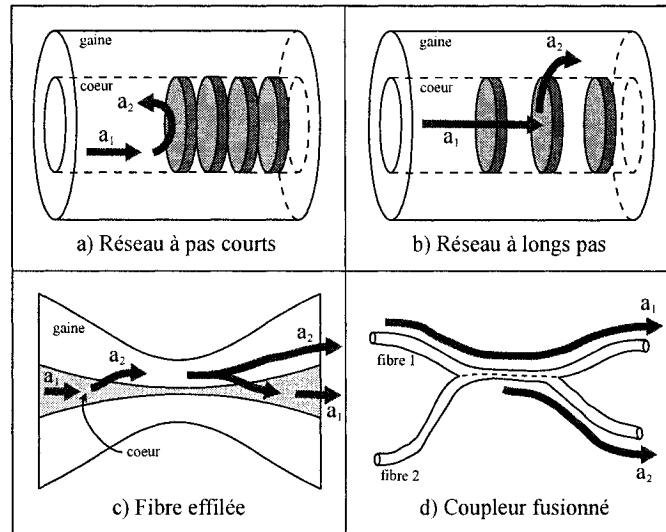


Figure 1 : Schématisation des trois types de composants tout-fibre. a) et b) des réseaux de Bragg, c) une fibre effilée et d) un coupleur fusionné.

perturbation, puisque la fibre redevient unimodale. Ainsi, la réponse spectrale d'un composant caractérise la modification apportée à la puissance du mode LP_{01} et un ajustement du profil de couplage permet de contrôler cette modification.

Le filtrage spectral pour le traitement de signaux constitue une des applications fondamentales de ces composantes. Il est souvent désirable d'extraire un canal en particulier ou d'augmenter l'isolation entre les canaux afin de réduire l'erreur de détection. Cependant, une des applications qui suscite le plus d'intérêt dans la littérature est l'égalisation du gain des amplificateurs à l'erbium. Bien que l'absorption dans les fibres soit faible (0,2 dB/km), le signal doit néanmoins être amplifié à tout les 100 km. Cette amplification peut être faite par des fibres dopées à l'erbium (EDFA¹), mais le gain n'est pas uniforme en longueur d'onde (figure 3). De plus, le gain de l'erbium dépend du niveau de dopants, donc le gain peut être différent d'une fibre à l'autre. Des filtres spéciaux (GFF²) doivent donc être conçus pour égaliser la puis-

¹Erbium Doped Fiber Amplifier

²Gain Flattening Filter

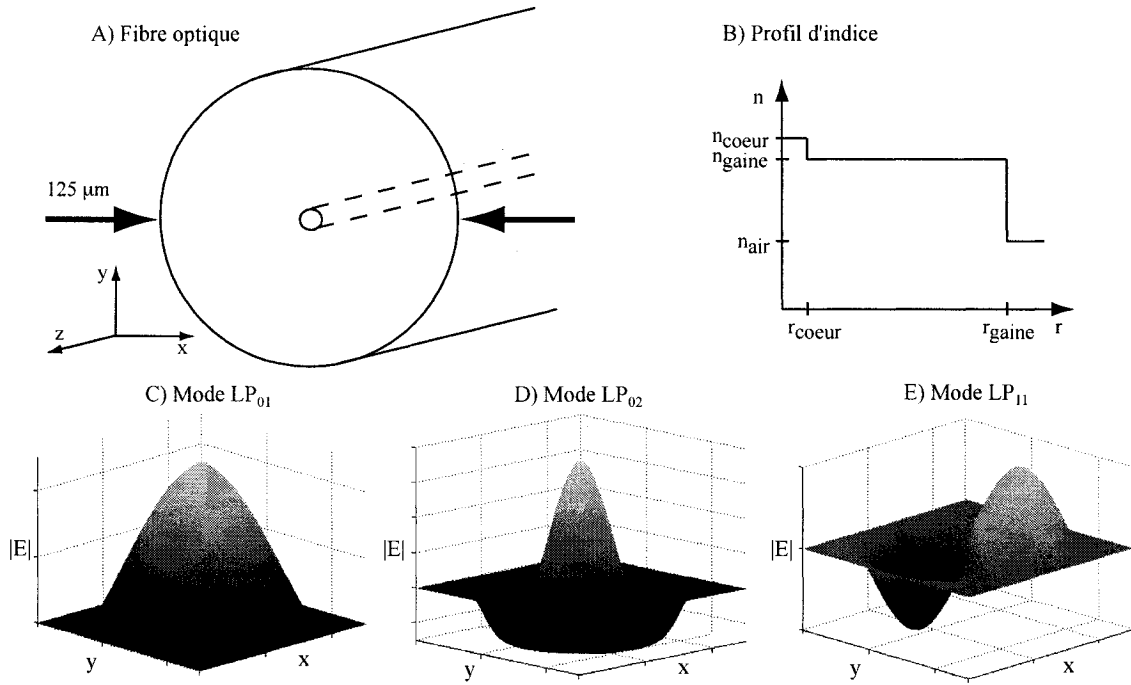


Figure 2 : Schéma de l'amplitude des modes d'une fibre optique. a) Schéma d'une fibre optique dont la gaine de plastique est enlevée, b) Profil d'indice d'une fibre à sauts d'indice, c) Schéma de l'amplitude du mode fondamental, d)-e) Schémas de l'amplitude des deux premiers modes excités.

sance du signal amplifié. Beaucoup d'efforts dans cette veine ont été mis sur les réseaux à longs pas [Lee & Lai 2002], [Brenne & Skaar 2003], mais il est peu connu qu'un tel filtre peut être réalisé par des fibres effilées placées en série [Daxhelet & Gonthier 2000].

En effet, plusieurs fibres effilées ayant une réponse spectrale quasi-sinusoidale peuvent être mises en cascade de façon à approximer un spectre arbitraire comme par une série de Fourier (figure 4). Or, un(e) ingénieur(e) peut se poser la question à savoir si le design d'un tel filtre est optimal. Est-ce qu'on peut arriver au même résultat, ou un résultat comparable avec moins de composants? Est-ce qu'on peut faire des composants plus performants ou plus compacts? Les méthodes inverses sont des outils

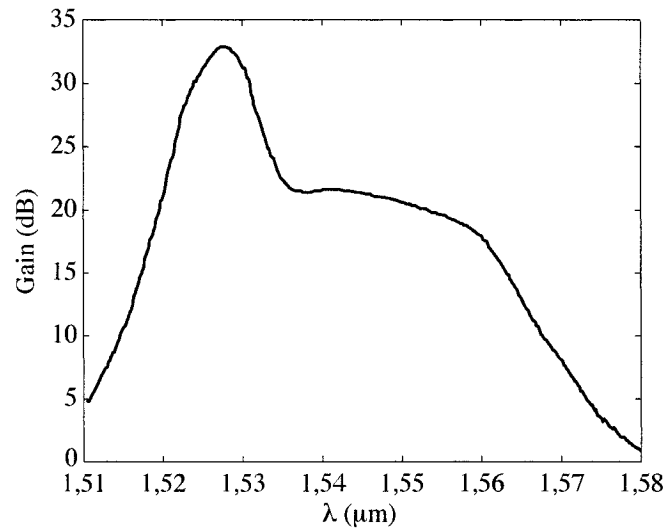


Figure 3 : Gain d'une fibre optique dopée à l'erbium.

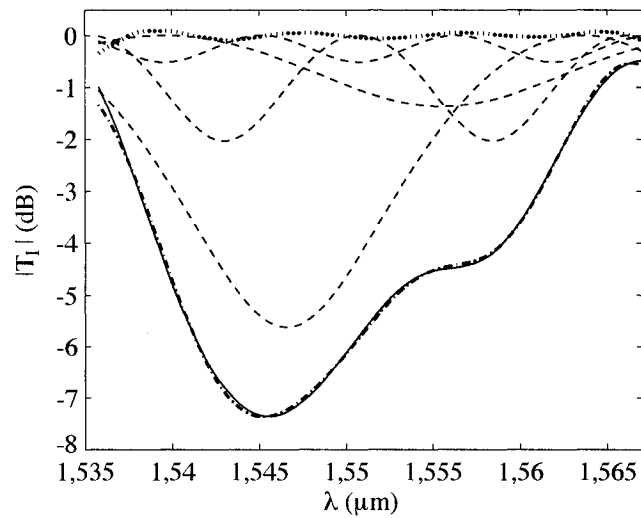


Figure 4 : Spectre égalisateur du gain d'un EDFA, approximé par une cascade de fibres effilées dont les spectres sont quasi-sinusoïdaux. Le spectre du GFF idéal est en trait plein, les spectres quasi-sinusoïdaux de 4 fibres effilées sont en traits tiretés, le spectre de la cascade de fibres effilées est en trait tireté-pointillé et la différence entre ce spectre et le filtre idéal est en pointillés. L'erreur moyenne est de 0,05 dB, tandis que l'erreur maximale est de 0,35 dB.

de design qui tentent de répondre à ces questions. Le *problème direct*, dans ce cas-ci, comprend le calcul de la réponse spectrale en connaissant le profil caractéristique du composant. Ainsi le *problème inverse* se résume à déterminer le profil caractéristique qui a pour réponse spectrale un spectre cible. Les *méthodes inverses* sont des méthodes numériques et analytiques qui s'attaquent au problème inverse et essayent d'en dégager des solutions. Parfois ces solutions sont approximatives, parfois elles ne sont pas uniques et parfois il n'existe pas de solution. Or, même dans le cas où une solution physique existe en théorie, il reste souvent à déterminer dans quelle mesure le composant peut être réalisé en pratique.

La majorité du travail dans ce domaine a été effectuée sur des problèmes contradictionnels. En d'autres mots, ce sont des problèmes où un signal de sonde interagit avec un milieu et on essaie de reconstituer cette interaction, ainsi que le milieu, à partir des réflexions captées. La méthode de pelage de couches est une technique très puissante qui a été développée pour reconstruire systématiquement le milieu à partir du spectre de réflexion. Cette technique a connu un grand succès pour les réseaux à pas courts dans les fibres optiques [Feced, Zervas & Muriel 1999], [Skaar, Wang & Erdogan 2001] et la méthode a été adaptée aux composants codirectionnels, notamment aux réseaux à longs pas [Wang & Erdogan 2001], [Brenne & Skaar 2003]. Toutefois, la méthode ne peut pas être appliquée à tous les problèmes. Dans ces cas, il faut recourir à des méthodes d'optimisation de fonctions à N dimensions. Le composant est modélisé par des paramètres qui doivent être optimisés de façon à minimiser une fonction qui évalue l'écart entre le spectre calculé et le spectre cible.

Le but de ce projet est d'aborder le problème inverse dans les composants tout-fibre fonctionnant en transmission. L'étude est axée particulièrement sur la fibre effilée et le réseau à longs pas. Le comportement spectral de ces composants peut être exprimé, en se limitant à deux modes, par les équations couplées suivantes [Lacroix, Bures & Daxhelet 2002] ,

Réseau à longs pas :

$$\begin{aligned}\frac{da_1(z, \lambda)}{dz} &= i\beta_1 a_1(z, \lambda) + iq_{12}(z) a_2(z, \lambda) \\ \frac{da_2(z, \lambda)}{dz} &= iq_{21}(z) a_1(z, \lambda) + i\beta_2 a_2(z, \lambda)\end{aligned}\tag{1}$$

Fibre effilée :

$$\begin{aligned}\frac{da_1(z, \lambda)}{dz} &= i\beta_1(z, \lambda) a_1(z, \lambda) + iq_{12}(z, \lambda) a_2(z, \lambda) \\ \frac{da_2(z, \lambda)}{dz} &= iq_{21}(z, \lambda) a_1(z, \lambda) + i\beta_2(z, \lambda) a_2(z, \lambda)\end{aligned}\tag{2}$$

où λ est la longueur d'onde, β la constante de propagation et q le coefficient de couplage ; a_1 , a_2 sont les amplitudes des champs des modes LP_{01} et LP_{02} dans le cas des fibres effilées, tandis qu'ils correspondent à LP_{01} et LP_{0m} dans le cas des réseaux à longs pas (m un entier).

Les différentes natures des constantes de propagation β et des coefficients de couplage q ont une influence considérable sur le problème inverse. Tandis qu'une dépendance $\{\beta = \text{const.}, q(z)\}$ est bien connue et traitable par les méthodes présentées ci-dessous, la dépendance $\{\beta(z, \lambda), q(z, \lambda)\}$ des fibres effilées présente un nouveau défi. La section 2.2, en particulier, souligne la complexité accrue que ces dépendances supplémentaires impliquent.

Le premier chapitre explicite le formalisme des équations couplées dans le cadre des fibres effilées et présente la résolution numérique du problème direct en général, c'est-à-dire la résolution des équations différentielles couplées lorsque le coefficient de couplage est connu. Il existe plusieurs façons de résoudre le système et les différentes méthodes disponibles sont comparées dans le but de déterminer celle qui est la plus efficace au niveau du temps de calcul.

Le deuxième chapitre présente la méthode de pelage de couches appliquée aux réseaux à longs pas. Cette méthode est basée sur l'extraction d'information de la transformée de Fourier inverse. Les arguments de causalité et la démarche pour recon-

struire un réseau à longs pas, couche par couche, sont expliqués. La deuxième section démontre que, même si les arguments de causalité tiennent encore, les dépendances supplémentaires en z et en λ rendent impossible la reconstruction couche par couche des fibres effilées.

Le troisième chapitre présente une variété de méthodes d'optimisation globale, qui optimisent une fonction continue en N dimensions. Ces heuristiques de recherche sont beaucoup plus robustes face à des fonctions très oscillantes qui contiennent une multitude de minima locaux. Un algorithme génétique, une méthode évolutive et une méthode hybride, basée sur la partition de l'espace, ont été développés. La première section donne une brève description des principes de fonctionnement, présente les pseudo-codes des algorithmes, et mentionne des détails sur les différentes implémentations retenues. La deuxième section compare la performance des méthodes sur diverses fonctions tests, ainsi que dans le cas des réseaux à longs pas. Les résultats de l'optimisation de réseaux à 5 et à 20 sections uniformes sont présentés.

Le dernier chapitre discute des difficultés encourues dans le cas des fibres effilées. La première section discute des problèmes de modélisation du profil, la deuxième, des problèmes de métrique, tandis que la troisième présente un décorticage du comportement spectral en termes d'un modèle interférométrique. Le mauvais conditionnement du problème inverse est mis de l'avant et l'existence même d'une solution, à l'aide d'un seul composant, est remise en question. Finalement, le problème est reformulé dans l'optique de fibres effilées simples qui sont mises en série. Les résultats de l'optimisation d'une cascade de 3 et de 4 fibres effilées sont présentés.

Chapitre 1

Méthodes de résolution du problème direct

Avant d'entreprendre la résolution du problème inverse il est essentiel de se familiariser avec le problème direct. Le comportement spectral des composants tout-fibre est bien expliqué par la théorie des modes couplés. La première section présente le formalisme des équations couplées et explique certains détails relatifs aux fibres effilées. La nécessité d'exprimer les champs d'une fibre effilée en termes de modes locaux est justifiée et les répercussions sur le problème inverse sont étudiées dans les chapitres subséquents. Les deuxième et troisième sections présentent respectivement les méthodes numériques disponibles pour résoudre le problème direct et les techniques utilisées pour minimiser le temps de calcul. La quatrième section compare le temps et l'erreur associés aux différentes méthodes de résolution. Le temps de calcul d'un spectre doit être minimisé afin de rendre raisonnable le temps de calcul des méthodes d'optimisation du chapitre 3.

1.1 Formalisme des équations couplées

La propagation de la lumière est régie par les équations de Maxwell qui, dans le cas des guides d'onde, caractérisent les champs électromagnétiques qui peuvent être guidés, c'est-à-dire les *modes* de propagation. Lorsque le guide est perturbé, le champ qui s'y propage est également perturbé. Dans ce cas, il est généralement possible de décrire l'évolution du champ en termes d'un échange de puissance entre plusieurs modes. Cet échange de puissance se traduit par des couplages entre les amplitudes a_j des différents modes considérés,

$$\frac{da_j}{dz} = i\beta_j a_j + \sum_k q_{jk} a_k, \quad (1.1)$$

où $\beta_j = \frac{2\pi}{\lambda} n_{\text{eff},j}$ est la constante de propagation du $j^{\text{ième}}$ mode, n_{eff} l'indice de réfraction effectif «vu» par le mode et q_{jk} le coefficient de couplage entre deux modes.

Ce système d'équations différentielles n'a généralement pas de solution analytique et doit être résolu numériquement. Une condition à la frontière $z = 0$ doit être respectée. Puisque la lumière injectée dans le composant provient d'une fibre unimodale, on considère que seul le mode LP_{01} contient initialement de la puissance, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} a_1(z = 0) &= 1 \\ a_j(z = 0) &= 0, \quad j = 2, 3, \dots, m. \end{aligned} \quad (1.2)$$

1.1.1 Approximation bimodale

Il existe une approximation qui simplifie énormément l'écriture des équations couplées :

Approximation 1 *On suppose que la réponse spectrale d'un composant est adéquatement décrite par le couplage entre seulement deux modes.*

La section 1.4 démontre que les autres modes ne contribuent pas significativement au spectre et que le temps associé au calcul de ces modes serait prohibitif pour les méthodes d'optimisation. De plus, cette approximation est nécessaire pour l'application des méthodes de synthèse du chapitre 2, puisque l'ensemble de ces méthodes n'ont été développées que pour deux modes. Il est à noter que les composants sont supposés sans pertes puisque les modes de radiation sont négligés aussi.

Ainsi, on peut se limiter à l'interaction entre deux modes

$$\begin{aligned}\frac{da_1(z,\lambda)}{dz} &= i\beta_1(z,\lambda)a_1(z,\lambda) + iq_{12}(z,\lambda)a_2(z,\lambda) \\ \frac{da_2(z,\lambda)}{dz} &= iq_{21}(z,\lambda)a_1(z,\lambda) + i\beta_2(z,\lambda)a_2(z,\lambda).\end{aligned}\tag{1.3}$$

1.1.2 Modes idéaux

Afin de simplifier les équations de Maxwell, on cherche toujours à décomposer le champ électromagnétique de la zone perturbée sur une base de modes appropriée. Si la perturbation est faible par rapport au guide idéal (invariant en z), il est alors naturel d'exprimer le champ perturbé en termes des modes du guide idéal, c'est-à-dire les *modes idéaux*. Tel est le cas, par exemple, pour les réseaux à longs pas. Le réseau, inscrit dans le cœur d'une fibre photosensible, est une perturbation sinusoïdale de l'indice de réfraction du cœur,

$$n_c(z) = n_{c,0} + \Delta n_{\text{mod}}(z) \cdot \sin\left(\frac{2\pi z}{\Lambda} + \phi(z)\right),\tag{1.4}$$

où $n_{c,0}$ est l'indice non perturbé, $\Delta n_{\text{mod}}(z)$ une fonction qui donne l'enveloppe de la modulation sinusoïdale, et $\phi(z)$ décrit le «piallement» de la période Λ du réseau. Cette perturbation sinusoïdale est de faible amplitude ($\Delta n_{\text{mod}} < 0,01$) de sorte que le champ perturbé peut être décrit par une combinaison linéaire des modes propagatifs de la fibre non perturbée. Il est possible de montrer que, dans ce cas, les équations

de Maxwell se réduisent [Bures 2001] aux équations couplées suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{da_1(z, \lambda)}{dz} &= i(\beta_1 - \frac{\pi}{\Lambda}) \cdot a_1(z, \lambda) + iq(z) \cdot a_2(z, \lambda) \\ \frac{da_2(z, \lambda)}{dz} &= iq^*(z) \cdot a_1(z, \lambda) + i(\beta_2 + \frac{\pi}{\Lambda}) \cdot a_2(z, \lambda).\end{aligned}\tag{1.5}$$

où a_1 et a_2 sont les amplitudes du mode fondamental (LP_{01}) et d'un mode de gaine (LP_{0m} , m un entier positif), avec β_1 et β_2 leurs constantes de propagation.

De plus, $q(z) = \kappa \cdot \Delta n_{\text{mod}}(z) e^{i \cdot \phi(z)}$ caractérise le couplage entre les modes induit par le réseau, avec $\Delta n_{\text{mod}}(z)$ correspondant à l'enveloppe de la modulation d'indice, $\phi(z)$ décrivant le piaiement de la période Λ du réseau, et κ un facteur proportionnel au recouvrement entre les modes. Il est à noter que la variation sinusoïdale sous-jacente au réseau est déjà prise en compte par un terme de phase ($e^{\pm i \frac{\pi}{\Lambda}}$) qui est enlevé des champs.

1.1.3 Modes locaux

Si la perturbation du guide est forte, comme dans le cas du profil d'une fibre effilée qui varie continûment en z , alors les champs du guide perturbé ne peuvent plus s'exprimer en termes des champs du guide non-perturbé. Il faut donc recourir à une décomposition sur une base de *modes locaux*. On définit un mode local d'une fibre effilée comme étant la solution d'une fibre fictive, invariant en z , qui a *localement* le même rayon r et le même profil d'indice $n(r)$ que la fibre effilée (figure 1.1).

Il est à noter que les modes locaux sont orthogonaux entre eux et que la base complète de ces modes constitue la solution exacte du guide fictif. Toutefois, il faut souligner que les modes locaux *ne sont pas* des solutions du guide perturbé. Les modes locaux changent d'un endroit à l'autre, car le guide fictif qui décrit localement la fibre effilée n'est pas le même d'un endroit à l'autre. C'est précisément ce changement qui cause un couplage entre les modes. De plus, la «constante» de propagation β dépend maintenant de z . Il faut donc considérer la phase accumulée, $\exp(i \int_0^z \beta_j(z) dz)$, des modes locaux. L'annexe A montre que les modes locaux mènent à l'expression

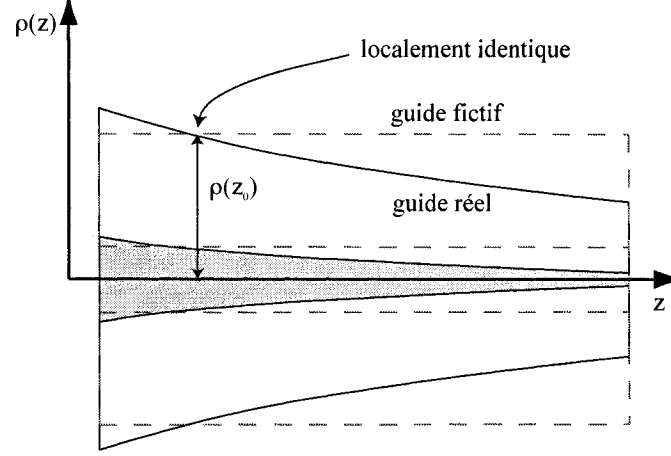


Figure 1.1 : Schéma du guide local d'une fibre effilée. Le guide réel est en trait plein et le guide fictif (local) est en trait pointillé.

suivante pour les coefficients de couplage d'une fibre effilée ayant trois couches avec sauts d'indice,

$$q_{jk}(z, \lambda) = \frac{1}{\rho(z)} \frac{d\rho}{dz} \cdot \bar{q}_{jk}(z, \lambda). \quad (1.6)$$

avec $\bar{q}_{jk}(z, \lambda)$, le coefficient de couplage normalisé, qui est défini comme

$$\bar{q}_{jk}(z, \lambda) = \frac{1}{2} \frac{k^2}{\sqrt{\beta_j \beta_k}} \frac{1}{[\beta_j - \beta_k]} \left[r_c^2 (n_c^2 - n_g^2) \hat{\Psi}_j(r_c) \hat{\Psi}_k(r_c) + r_g^2 (n_g^2 - n_e^2) \hat{\Psi}_j(r_g) \hat{\Psi}_k(r_g) \right], \quad (1.7)$$

où $\hat{\Psi}_j(r, \lambda)$ est la composante radiale du $j^{\text{ième}}$ mode, $n_c(\lambda)$, $n_g(\lambda)$ et $n_e(\lambda)$ sont les indices de réfraction du cœur, de la gaine et du milieu extérieur (généralement l'air) et $r_c(z)$, $r_g(z)$ sont les rayons du cœur et de la gaine respectivement.

En supposant que la symétrie circulaire est conservée le long de la fibre effilée et que la fibre a subi une réduction homothétique, c'est-à-dire que le rapport des dimensions transverses de la fibre est demeuré proportionnel, alors le rapport des

rayons des couches reste constant et on peut définir la pente normalisée comme

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = \frac{1}{r_c} \frac{dr_c}{dz} = \frac{1}{r_g} \frac{dr_g}{dz}, \quad (1.8)$$

où $\rho \equiv \frac{r}{r_0}$ correspond à l'inverse du taux de réduction.

Notons aussi que la symétrie circulaire implique que l'échange de puissance ne peut s'effectuer qu'entre des modes à symétrie circulaire, car l'intégrale de recouvrement avec les modes non-symétriques est annulée par la partie azimutale. Ainsi, le couplage le long de la fibre effilée ne peut s'effectuer qu'entre les modes LP_{0m} .

Il est important de garder deux faits à l'esprit : d'une part, le couplage est proportionnel à la pente normalisée et dépend de la longueur d'onde, et d'autre part, les «constantes» de propagation β_j ne sont plus constantes, puisque $n_{\text{eff}}(z, \lambda)$.

Dans le cas le plus simple, on peut se limiter à l'interaction entre les deux premiers modes (LP_{01} et LP_{02}) :

$$\begin{aligned} \frac{da_1(z, \lambda)}{dz} &= i\beta_1(z, \lambda)a_1(z, \lambda) + iq_{12}(z, \lambda)a_2(z, \lambda) \\ \frac{da_2(z, \lambda)}{dz} &= iq_{21}(z, \lambda)a_1(z, \lambda) + i\beta_2(z, \lambda)a_2(z, \lambda). \end{aligned} \quad (1.9)$$

1.2 Résolution numérique d'équations différentielles

1.2.1 Résolution par Runge-Kutta d'ordre 4

Avant de résoudre un système d'équations différentielles, il faut connaître comment résoudre numériquement une équation différentielle ordinaire. Un tel problème peut se formuler de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{da(z)}{dz} &= f(z, a(z)) \\ a(z_0) &= a_0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

La méthode d'Euler est la méthode de résolution la plus simple et consiste à

extrapoler linéairement la valeur en $z_0 + h$ à partir de l'information connue en z_0 .

$$a(z_0 + \Delta z) = a(z_0) + \Delta z f(z_0, a(z_0)). \quad (1.11)$$

Cette procédure peut être répétée itérativement pour avancer jusqu'à la valeur de z désirée. Il est noter que l'erreur commise à chaque itération est réintroduite dans le calcul de la prochaine itération. La méthode de Taylor est une généralisation de la méthode d'Euler qui utilise un développement de Taylor autour de $a(z_n)$ pour évaluer $a(z_n + \Delta z)$. Ainsi il est possible d'utiliser une approximation d'ordre plus élevée pour obtenir une erreur de troncature plus faible, ce qui réduit l'erreur cumulative de la méthode. Par exemple, le développement de Taylor à l'ordre 2 donne

$$\begin{aligned} a(z_n + \Delta z) = & a(z_n) + \Delta z f(z_n, a(z_n)) \\ & + \frac{(\Delta z)^2}{2} \left[\frac{\partial f(z_n, a(z_n))}{\partial z} + \frac{\partial f(z_n, a(z_n))}{\partial a} f(z_n, a(z_n)) \right]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Le désavantage de méthode de Taylor c'est la nécessité d'évaluer les dérivées partielles de $f(z_n, a(z_n))$. Or la méthode de Runge-Kutta offre une formulation équivalente à la méthode de Taylor qui utilise uniquement la fonction $f(z, a)$ et non ses dérivées. Au 2^{ieme} ordre, nous avons

$$a(z_n + \Delta z) = a(z_n) + b_1 \Delta z f(z_n, a(z_n)) + b_2 \Delta z f(z_n + b_3 \Delta z, a(z_n) + b_4 \Delta z). \quad (1.13)$$

Plusieurs variantes de la méthode sont possibles selon le choix des coefficients b_j . La méthode de Runge-Kutta se généralise à des ordres supérieurs, ainsi qu'à des systèmes d'équations différentielles [Fortin 1995]. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est fréquemment employée car elle est rapide et offre une précision raisonnable. Le système d'équations (1.9) se résout simplement en définissant, pour chaque longueur

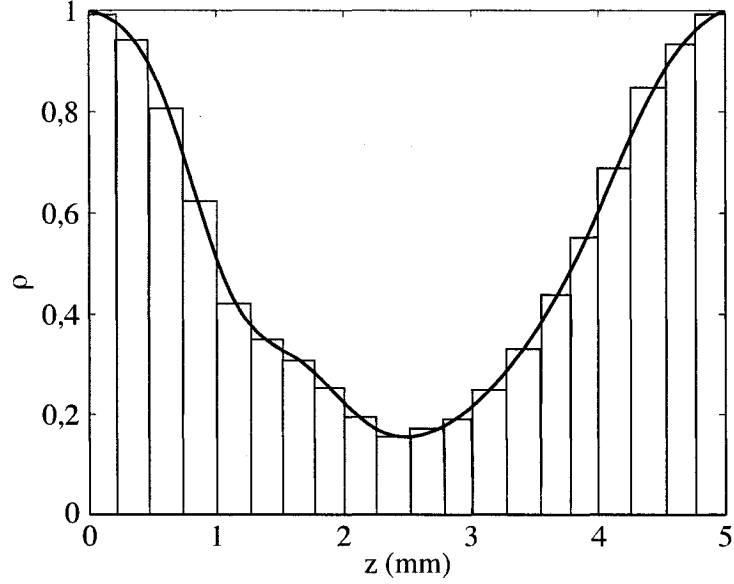


Figure 1.2 : Le profil longitudinal d'une fibre effilée est une fonction continue de z qui peut être discrétisé en tranches constantes. Le profil est alors une fonction constante par morceaux.

d'onde,

$$\begin{aligned} f_1(z, a_1(z, \lambda), a_2(z, \lambda)) &= i\beta_1(z, \lambda)a_1(z, \lambda) + iq_{12}(z, \lambda)a_2(z, \lambda) \\ f_2(z, a_1(z, \lambda), a_2(z, \lambda)) &= iq_{21}(z, \lambda)a_1(z, \lambda) + i\beta_2(z, \lambda)a_2(z, \lambda). \end{aligned} \quad (1.14)$$

1.2.2 Résolution par matrices de transfert

Le système d'équations (1.9) peut se réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\beta_1(z, \lambda) & iq_{12}(z, \lambda) \\ iq_{21}(z, \lambda) & i\beta_2(z, \lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

Toutefois il n'existe pas de solution pour ce système matriciel à moins que les éléments de la matrice ne dépendent pas de z [Yamada & Sakuda 1987]. Il faut donc procéder à une discrétisation du profil de la fibre effilée (voir fig.1.2).

Approximation 2 *On suppose qu'un profil longitudinal continu peut être bien approximé par un profil discret.*

Le profil discrétisé est constant par morceaux, impliquant que sur une couche le coefficient de couplage ne dépend plus de z . Il est donc possible de démontrer [Lacroix *et al.* 2002] que la solution de l'équation (1.15) sur une couche est décrite par une matrice de transfert $\mathbf{T}_j$,

$$\begin{bmatrix} a_1(z_j + \Delta z, \lambda) \\ a_2(z_j + \Delta z, \lambda) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_j \begin{bmatrix} a_1(z_j, \lambda) \\ a_2(z_j, \lambda) \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

$$\text{avec } \mathbf{T}_j \equiv e^{i\beta_{\text{moy},j}\Delta z} \begin{bmatrix} \cos(\gamma_j \Delta z) + i\frac{\delta_j}{\gamma_j} \sin(\gamma_j \Delta z) & i\frac{q_j}{\gamma_j} \sin(\gamma_j \Delta z) \\ i\frac{q_j^*}{\gamma_j} \sin(\gamma_j \Delta z) & \cos(\gamma_j \Delta z) - i\frac{\delta_j}{\gamma_j} \sin(\gamma_j \Delta z) \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

où $\gamma_j = \sqrt{|q_j|^2 + \delta_j^2}$, $\beta_{\text{moy},j} = \frac{\beta_{1,j} + \beta_{2,j}}{2}$ et

$$q_j = \begin{cases} \kappa(\Delta n_{\text{mod}})_j \cdot e^{i\phi_j}, & \text{Réseaux à longs pas,} \\ \frac{1}{\rho_j} \frac{d\rho_j}{dz} \bar{q}(z, \lambda), & \text{Fibres effilées,} \end{cases} \quad (1.18)$$

$$\delta_j = \begin{cases} \frac{\beta_{1,j} - \beta_{2,j}}{2} - \frac{\pi}{\Lambda}, & \text{Réseaux à longs pas,} \\ \frac{\beta_{1,j} - \beta_{2,j}}{2}, & \text{Fibres effilées.} \end{cases} \quad (1.19)$$

Ainsi la solution au système d'équations (1.15), qui caractérise le comportement spectral du profil en entier, se trouve à être le produit des solutions sur chacune des tranches.

$$\begin{bmatrix} a_1(z, \lambda) \\ a_2(z, \lambda) \end{bmatrix} \approx \mathbf{T}_{\text{total}} \begin{bmatrix} a_1(0, \lambda) \\ a_2(0, \lambda) \end{bmatrix}, \quad (1.20)$$

$$\mathbf{T}_{\text{total}} = \mathbf{T}_N \mathbf{T}_{N-1} \dots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1. \quad (1.21)$$

1.3 Optimisation du calcul direct

Premièrement, dans un effort de limiter le temps de calcul, seulement deux modes sont considérés. L'expression analytique pour les matrices de transfert s'avère nettement plus compliquée lorsqu'il y a plus de deux modes. La résolution numérique est possible, mais le calcul est beaucoup plus lent. Les calculs pourront être raffinés par la suite en considérant plus de modes, si besoin est. Deuxièmement, la matrice de transfert peut être simplifiée, de façon à nécessiter moins d'opérations de calcul. Troisièmement, le spectre des fibres effilées n'est pas très oscillant et l'interpolation en longueur d'onde permet de diminuer le temps de calcul.

1.3.1 Discrétisation du couplage et optimisation de la matrice de transfert

La discrétisation du couplage a un impact intéressant sur la causalité, qui est explorée dans le prochain chapitre, mais l'avantage principal est la réduction du temps de calcul. La multiplication est un calcul numérique qui prend plus de temps que l'addition. Afin de diminuer le nombre de multiplications requises pour effectuer la multiplication de deux matrices ayant la forme (1.17), il serait utile d'éliminer les sommes dans les éléments diagonaux. Une telle simplification résulte de l'approximation suivante :

Approximation 3 *On suppose que le couplage est discret. On présume donc que le couplage est instantané, c'est-à-dire infiniment fort sur une distance infiniment petite.*

Ainsi, la matrice de transfert d'une couche peut être décomposée en deux contributions, une matrice de couplage instantanée $\mathbf{S}_j$ et une matrice de propagation en absence de couplage $\mathbf{P}_j$.

$$\mathbf{T}_j \approx \mathbf{S}_j \mathbf{P}_j. \quad (1.22)$$

Hypothèse 1 *Si le coefficient de couplage est constant sur une couche, alors $q\Delta z = \text{const.}$. Conséquemment, $\Delta z \rightarrow 0$ si $|q| \rightarrow \infty$.*

Il faut prendre la limite de la variable γ dans le régime de couplage instantané,

$$\lim_{|q| \rightarrow \infty} \gamma = \lim_{|q| \rightarrow \infty} \sqrt{|q|^2 + \delta^2} = |q|. \quad (1.23)$$

Ainsi, $\gamma \rightarrow |q|$ et $|q| \gg \delta$, ce qui implique que la matrice de transfert devient

$$\mathbf{S}_j = \lim_{|q| \rightarrow \infty} \mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} \cos(|q_j|\Delta z) & i \frac{q_j}{|q_j|} \sin(|q_j|\Delta z) \\ i \frac{q_j^*}{|q_j|} \sin(|q_j|\Delta z) & \cos(|q_j|\Delta z) \end{bmatrix}. \quad (1.24)$$

Hypothèse 2 *Un couplage instantané est très localisé ($\Delta z \rightarrow 0$), alors il n'y a effectivement plus de couplage sur le reste de la couche, c'est-à-dire $|q| \rightarrow 0$.*

On prend, cette fois, la limite de la variable γ en absence de couplage,

$$\lim_{|q| \rightarrow 0} \gamma = \lim_{|q| \rightarrow 0} \sqrt{|q|^2 + \delta^2} = \delta. \quad (1.25)$$

Ainsi, $\gamma \rightarrow \delta$ et $|q| \rightarrow 0$, donc,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_j &= \lim_{|q| \rightarrow 0} \mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} \cos(\delta_j \Delta z) + i(\frac{\delta_j}{\delta_j}) \sin(\delta_j \Delta z) & 0 \\ 0 & \cos(\delta_j \Delta z) - i(\frac{\delta_j}{\delta_j}) \sin(\delta_j \Delta z) \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} e^{i\delta_j \Delta z} & 0 \\ 0 & e^{-i\delta_j \Delta z} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Le choix de la localisation du couplage sur une couche est arbitraire. Généralement, le couplage est mis au début, dans le milieu ou à la fin. Un couplage à la fin de la couche a été choisi pour une raison explicitée dans le chapitre 2. La matrice de transfert peut donc se réécrire sous la forme simplifiée, où il n'y a plus de sommes dans les éléments diagonaux,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_j &= \mathbf{S}_j \mathbf{P}_j = e^{i\beta_{\text{moy},j}\Delta z} \begin{bmatrix} \cos(|q_j|\Delta z) & i\frac{q_j}{|q_j|} \sin(|q_j|\Delta z) \\ i\frac{q_j^*}{|q_j|} \sin(|q_j|\Delta z) & \cos(|q_j|\Delta z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\delta_j\Delta z} & 0 \\ 0 & e^{-i\delta_j\Delta z} \end{bmatrix}, \\ &= e^{i\beta_{\text{moy},j}\Delta z} \begin{bmatrix} \cos(|q_j|\Delta z)e^{i\delta_j\Delta z} & i\frac{q_j}{|q_j|} \sin(|q_j|\Delta z)e^{-i\delta_j\Delta z} \\ i\frac{q_j^*}{|q_j|} \sin(|q_j|\Delta z)e^{i\delta_j\Delta z} & \cos(|q_j|\Delta z)e^{-i\delta_j\Delta z} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

1.3.2 Interpolation en longueur d'onde

D'abord, il est à noter que le temps de calcul pour la résolution par matrices de transfert varie selon

$$t_{\text{calcul}} \propto (N_{\text{Modes}})^2 N_{\text{Couches}} N_{\lambda}, \quad (1.28)$$

où N_{Couches} est le nombre de tranches en z et N_{λ} est le nombre de points calculés dans le spectre.

Quoique toujours oscillant, le spectre d'une fibre effilée est très lisse (figure 1.3). Il est donc naturel d'optimiser le temps de calcul en calculant moins de longueurs d'onde et en interpolant les valeurs qui manquent. Ainsi, l'*interpolation par splines cubiques* permet de compléter la fonction de façon à former une courbe régulière. En définissant un polynôme de degré 3 sur chaque intervalle connu, il est possible de rabouter les polynômes de façon à assurer la continuité de la dérivée seconde. Le calcul des coefficients se ramène à un système linéaire tridiagonal qui se résout simplement [Press, Teukolsky, Vetterling & Flannery 1992]. La figure 1.3 montre que peu de points sont nécessaires pour effectuer une interpolation précise du spectre.

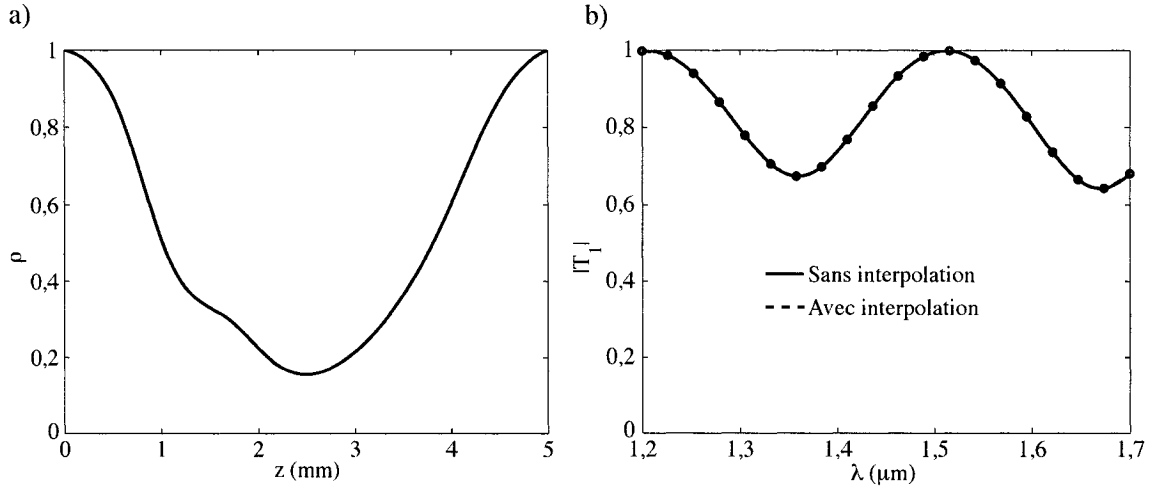


Figure 1.3 : Réponse spectrale (b) d'une fibre effilée (a) avec et sans interpolation en longueur d'onde. Le calcul, effectué par la méthode matricielle analytique avec 300 couches, utilise d'une part 1000 points en longueur d'onde et d'autre part 20 échantillons (cercles) pour effectuer une interpolation. Les courbes sont indiscernables.

1.4 Comparaison des temps de calcul

Les figures 1.4, 1.5 et 1.6 corroborent l'équation (1.28) en présentant respectivement l'augmentation du temps de calcul en fonction du nombre de modes, du nombre de couches et du nombre de points en λ calculés pour faire l'interpolation.

Premièrement, on remarque la croissance quadratique du temps de calcul de la méthode matricielle lorsque le nombre de modes considérés augmente, tandis que la croissance reste linéaire pour la méthode de Runge-Kutta. Lorsqu'il y a plus que deux modes, l'expression analytique de la matrice de transfert devient trop compliquée. Par conséquent, la matrice de transfert doit être déterminée numériquement. De plus, le nombre d'opérations numériques requis pour la multiplication matricielle augmente selon le cube de la taille de la matrice. Ainsi, la méthode matricielle est plus lente que la méthode de Runge-Kutta dans le cas où il y a plus que deux modes. La figure 1.7 montre qu'il est raisonnable de se limiter au calcul à deux modes puisque le spectre

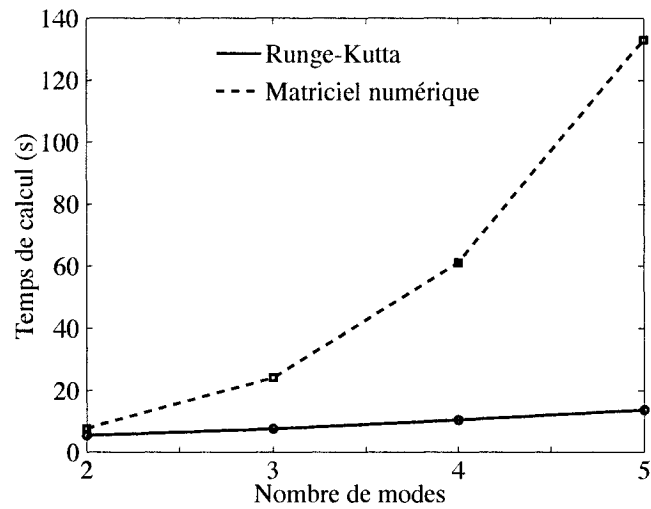


Figure 1.4 : Variation du temps de calcul en fonction du nombre de modes considérés. Le calcul est effectué sur le profil longitudinal de la figure 1.3 avec 300 couches en z et 80 échantillons en longueur d'onde.

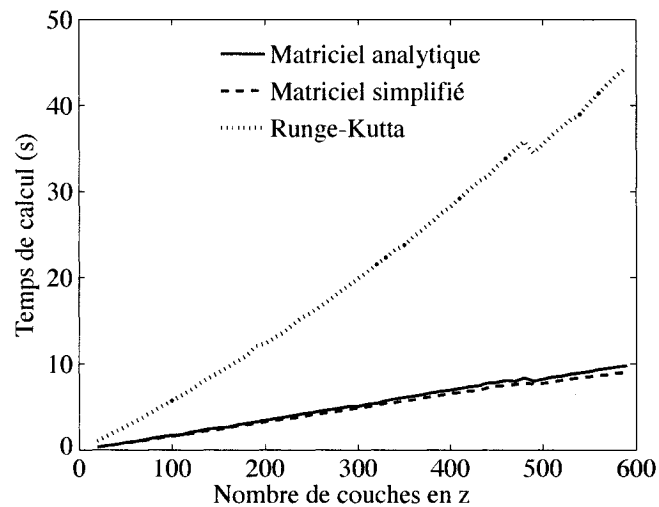


Figure 1.5 : Variation du temps de calcul en fonction du nombre de couches en z . Le calcul est effectué sur le profil longitudinal de la figure 1.3 avec 2 modes et 20 échantillons en longueur d'onde. La discontinuité autour de 500 couches provient d'un problème de partage de tâches du processeur.

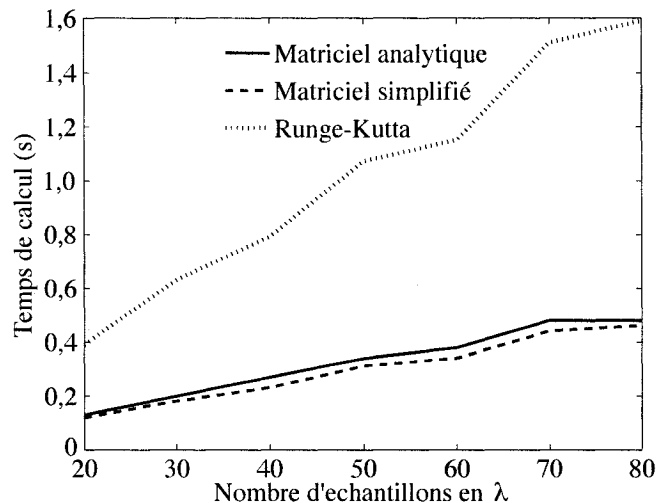


Figure 1.6 : Variation du temps de calcul en fonction du nombre d'échantillons en λ . Le calcul est effectué sur le profil longitudinal de la figure 1.3 avec 2 modes et 300 couches en z .

résultant est une approximation acceptable du spectre qui tient compte des modes supérieurs. Deuxièmement, lorsque limité à deux modes, le calcul matriciel s'avère nettement plus rapide que la méthode de Runge-Kutta, car la matrice de transfert est connue analytiquement. Il est à noter que la simplification de la matrice de transfert amène un léger gain de temps.

Quant à l'erreur associée aux différentes méthodes de calcul, la figure 1.8 présente la diminution polynomiale de l'erreur en fonction du nombre de points en z . L'erreur calculée correspond à la somme des carrés des différences entre le spectre calculé et un spectre de référence qui est considéré «exact». Il est à noter qu'il n'existe pas de solution analytique exacte pour le spectre de la fibre effilée qui est utilisée comme exemple. Donc le spectre de référence a été calculé à l'aide de la méthode matricielle analytique avec 600 couches et 1000 points non-interpolés en λ .

À première vue, la méthode de Runge-Kutta semble moins précise. Cependant, il y a un pas minimal à respecter pour calculer convenablement le spectre. Afin de

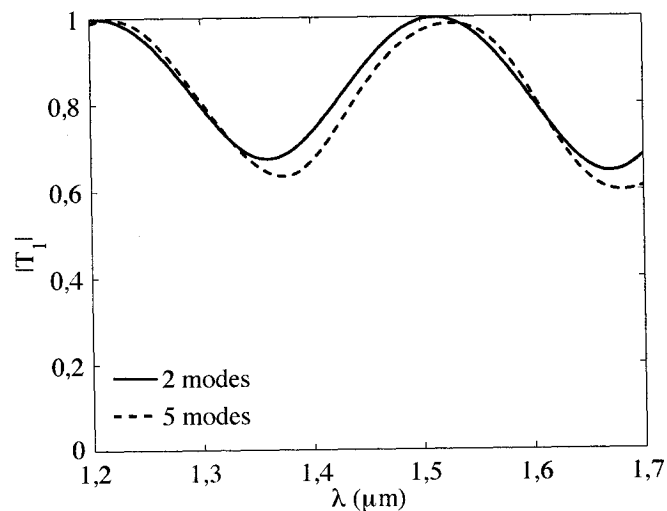


Figure 1.7 : Réponse spectrale (a) de la fibre effilée (b) lorsque calculé avec 2 et 5 modes. Le calcul est effectué, sans interpolation, par la méthode matricielle analytique non-approximée, avec 300 couches et 1000 points en longueur d'onde.

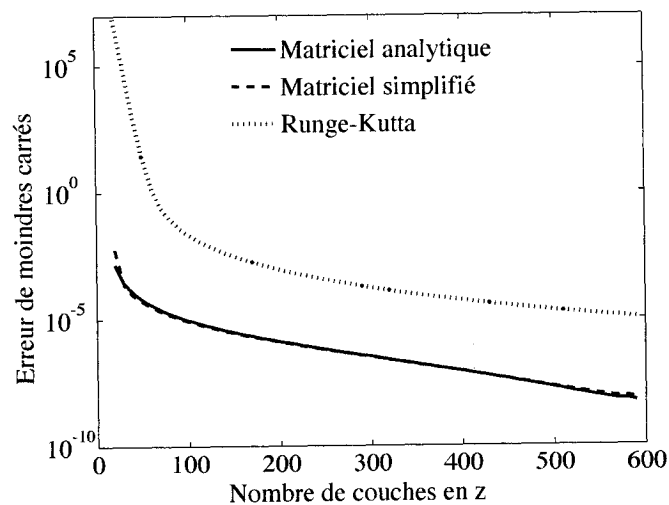


Figure 1.8 : Variation de l'erreur entre le spectre calculé et un spectre de référence lorsque le nombre de couches augmente. Le calcul est effectué sur le profil longitudinal de la figure 1.3 avec 2 modes et 20 échantillons en longueur d'onde.

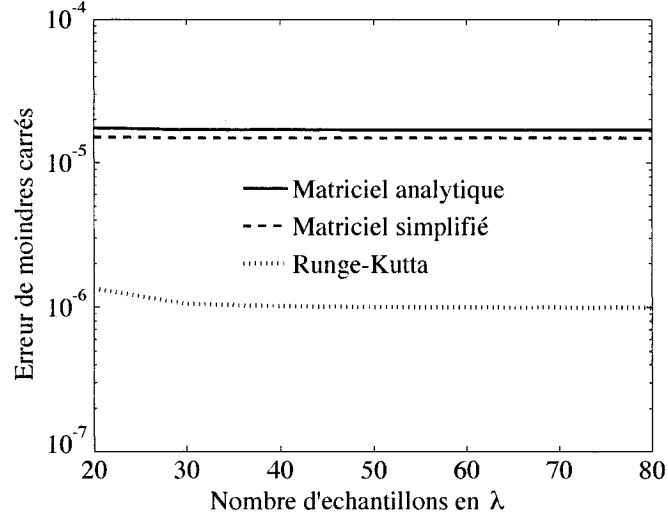


Figure 1.9 : Variation de l'erreur entre le spectre calculé et un spectre de référence lorsque le nombre d'échantillons en longueur d'onde augmente. Le calcul est effectué sur le profil longitudinal de la figure 1.3 avec 80 couches pour les méthodes matricielles et 520 points en z pour la méthode de Runge-Kutta.

résoudre les équations couplées (2) avec la méthode de Runge-Kutta, il faut éliminer la partie qui oscille rapidement ($e^{i\beta_1 z}$). Suite à un changement de variable, le système s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dz} &= iq_{12}a_2 \\ \frac{da_2}{dz} &= iq_{21}a_1 + i(\beta_2 - \beta_1)a_2. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Or, il reste une partie qui oscille avec une période $\frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \sim 70 \mu\text{m}$. De plus, la fréquence d'échantillonnage de Nyquist implique qu'il faut un pas en z d'au plus la moitié de cette période ($\Delta z \leq 35 \mu\text{m}$). Ainsi, pour une fibre effilée ayant une longueur de $5000 \mu\text{m}$, comme dans l'exemple de la figure 1.3, il faut au moins 143 points en z (préférentiellement beaucoup plus) pour calculer le spectre par Runge-Kutta. À partir de la figure 1.8, on déduit que la méthode de Runge-Kutta nécessite beaucoup plus de points en z pour arriver à une précision comparable à celle de la

méthode matricielle. À titre d'exemple, 80 couches pour la méthode matricielle et 520 points pour la méthode de Runge-Kutta donnent une erreur de $1,7 \cdot 10^{-5}$. Étant donné que le temps de calcul correspondant est un ordre de grandeur plus élevé pour Runge-Kutta que pour la multiplication matricielle, l'utilisation de la méthode de Runge-Kutta s'avère prohibitive.

Par ailleurs, la figure 1.9 montre qu'un échantillonnage de 20 points en longueur d'onde est suffisant pour interpoler le spectre avec une précision comparable au calcul de 1000 points non-interpolés. Cette technique permet de réduire davantage le temps de calcul par un facteur de 50.

En résumé, le spectre d'une fibre effilée peut être approximé raisonnablement à l'aide de la méthode matricielle simplifiée et une interpolation par splines cubiques. En utilisant 2 modes, 200 couches et 20 échantillons en λ il est possible de calculer un spectre en 77,2 ms sur un PowerPC G4 933 MHz. De façon analogue, le calcul du spectre d'un réseau à longs pas ayant 2 modes, 5 couches et 140 échantillons en λ s'effectue en 11,5 ms.

Chapitre 2

Pelage de couches à l'aide de la transformée de Fourier

Énormément d'efforts ont été consacrés à des méthodes inverses qui tirent de l'information sur la transformée de Fourier du spectre. Il est à noter que l'ensemble de ces méthodes traitent des équations couplées du type (1.5) et non du type (1.9). Néanmoins, il est intéressant d'examiner ces techniques afin d'évaluer si elles peuvent être modifiées pour tenir compte de dépendances supplémentaires¹ en ω (la fréquence angulaire) et en z des fibres effilées.

Pour beaucoup de problèmes, comme les réseaux de Bragg inscrits dans les fibres optiques, l'approximation de Born est un bon point de départ [Sossi 1974], [Dobrowolski & Lowe 1978], [Verly & al. 1989]. Elle stipule que si le couplage est faible, alors l'amplitude du profil de couplage ressemble, en première approximation, à la transformée de Fourier du spectre. Puisque l'information de phase n'est pas préservée et que cette technique se restreint à des couplages faibles, d'autres méthodes ont été envisagées. Le formalisme intégral des équations couplées mène à des équations intégrales couplées du type Gel'fand-Levitan-Marchenko (GLM) [Gelfand & Levitan

¹Dans ce chapitre, le spectre est exprimé en fréquence plutôt qu'en longueur d'onde puisque la transformée de Fourier inverse est effectuée par rapport à ω .

1955]. Ces équations peuvent être résolues exactement, si le spectre s'exprime par une fonction rationnelle [Song & Shin 1985], ou approximativement, par une méthode itérative qui utilise l'approximation de Born comme solution initiale [Peral, Capmany & Marti 1996]. Toutefois, une technique plus générale, plus rapide et moins compliquée a été développée en approximant la fonction de couplage plutôt que la forme du spectre. Cette méthode de diffusion inverse, dite *de pelage de couches*, synthétise le profil de couplage à l'aide d'un algorithme récursif.

L'origine de la méthode de pelage de couches remonte aux géophysiciens comme Robinson [Robinson 1975] qui reconstruisait des strates sédimentaires à partir de mesures d'ondes sismiques réfléchies. Bruckstein a généralisé la méthode par la suite [Bruckstein, Levy & Kailath 1985]. Le pelage de couches est basé sur deux concepts : la discrétisation du couplage et le principe de causalité. Si le profil de couplage est discret, alors le coefficient de couplage est constant sur chaque couche et le transfert de puissance d'un mode à l'autre ne peut s'effectuer qu'une fois par couche. Ainsi les différents chemins optiques qui traversent l'empilement de couches sont dénombrables (voir figure 2.1) et leur temps de parcours respectif est discrétisé aussi. Par la suite, des arguments de causalité permettent d'extraire du spectre la contribution des chemins les plus courts ou les plus longs. Les contributions de ces chemins au spectre fournissent suffisamment d'information pour reconstruire la valeur du couplage de la première ou la dernière couche, selon qu'il s'agit d'un problème contra- ou co-directionnel (c'est-à-dire en réflexion ou en transmission). L'effet de cette couche peut alors être soustrait du problème en propageant le spectre à travers la couche maintenant connue. Il en résulte un nouveau spectre, issu d'un empilement de $N - 1$ couches, et la procédure peut être répétée jusqu'à l'épuisement des couches. Plusieurs travaux ont été effectués sur les réseaux de Bragg à courts pas à partir de cette méthode [Feced *et al.* 1999], [Poladian 2000], [Skaar *et al.* 2001].

Il n'est pas évident qu'une telle technique pouvait s'étendre aux problèmes codirectionnels. Dans le cas des composants qui fonctionnent en réflexion, le spectre agit

comme filtre à Réponse Impulsionnelle Infinie (*Infinite Impulse Response* en Anglais) [Cristi 2004]. Tandis que le spectre agit comme filtre à Réponse Impulsionnelle Finie dans le cas des composants qui fonctionnent en transmission. Ces filtres ont des restrictions différentes sur les relations entre l'amplitude et la phase du spectre. D'autre part, la méthode de pelage de couches, dans le cas d'un problème contradirectionnel, consiste à extraire du spectre la contribution de l'onde qui s'est réfléchi uniquement sur la première couche, c'est-à-dire le calcul d'un point spécifique dans la réponse impulsionnelle qui est déterminé uniquement que par cette couche. Toutefois, tous les points de la réponse impulsionnelle d'un composant codirectionnel correspondent à des ondes qui ont traversé toutes les couches. Il n'est donc pas évident de pouvoir extraire de l'information sur une seule couche, puisque la réponse est déterminée par le composant entier.

La première section présente la méthode de pelage de couches appliquée aux réseaux à long pas [Wang & Erdogan 2001] en utilisant le formalisme de Skaar [Brenne & Skaar 2003], ce qui permet de mettre en valeur les différences avec le cas des fibres effilées. La construction du calcul à partir des arguments de causalité et de la transformée de Fourier est montrée. Par la suite, des exemples de synthèse sont présentés pour illustrer la puissance de la méthode. La deuxième section traite des difficultés encourues dans le cas des fibres effilées lorsque la constante de propagation β et le coefficient de couplage q ont des dépendances supplémentaires en ω et z . L'impossibilité de calculer les coefficients de couplage est démontrée, même si les arguments de causalité sont encore valables.

2.1 Méthode de pelage de couches appliquée aux réseaux à longs pas

La section 2.1.1 présente l'esprit de la méthode de pelage en montrant que si les spectres s'expriment sous forme de série de Fourier, alors le calcul des coefficients de

couplage provient du rapport de certains coefficients des séries de Fourier du mode coeur et du mode de gaine. La section 2.1.2 montre que ce calcul est équivalent à un rapport de transformées de Fourier inverses, évaluées au temps de parcours des deux chemins les plus longs. L'algorithme de la méthode est résumé dans la section 2.1.3, tandis que les sections 2.1.4 et 2.1.5 présentent des exemples de synthèse.

2.1.1 Formalisme de série de Fourier

Afin de comprendre le mécanisme du calcul de pelage de couches, il faut bien comprendre la décomposition du spectre en termes de contributions des divers chemins optiques. La figure (2.1) schématise les différents chemins pouvant être parcourus à travers un empilement de couches représentant un réseau à longs pas. Évidemment, un chemin optique qui se termine dans le mode fondamental contribue au spectre $a_1(\omega)$, tandis qu'il contribue au spectre $a_2(\omega)$ dans le cas contraire. Nous avons vu que le spectre d'un composant discrétisé en tranches peut être calculé en multipliant les matrices de transfert de toutes les couches (1.20, 1.21). D'ailleurs, le calcul explicite du produit des matrices de transfert correspond au dénombrement de tous les chemins possibles (voir annexe B).

Étant donné que la contribution de chaque chemin optique correspond à un produit d'éléments de matrice, leur écriture est grandement simplifiée par l'introduction du changement de variable suivant :

$$\sigma_j \equiv i \frac{q_j}{|q_j|} \tan(|q_j| \Delta z), \quad (2.1)$$

où σ_j définit un *coefficient de diffusion* de la couche.

Par ailleurs, l'écriture est aussi simplifiée en mettant la phase du mode le plus rapide en évidence. Ainsi les différents chemins sont décrits par un retard accumulé par rapport au chemin le plus rapide. La matrice de transfert d'une couche (1.27)

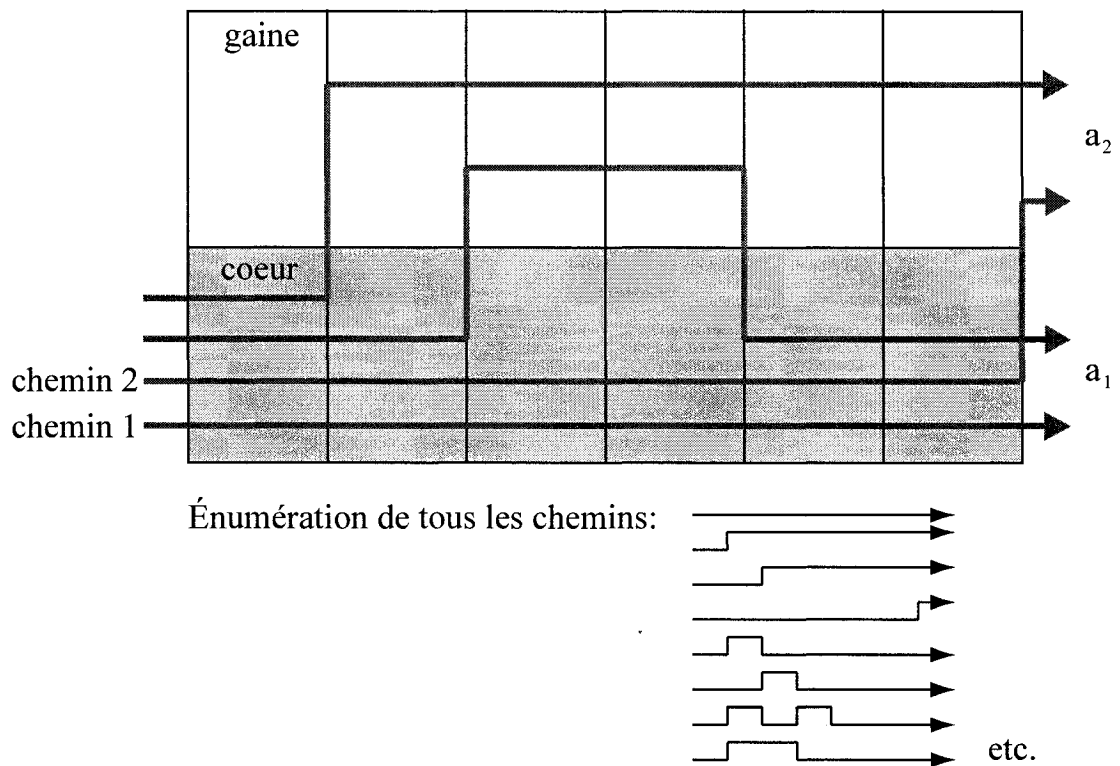


Figure 2.1 : Schéma des différents chemins optiques à travers un empilement de couches où le couplage ne peut se produire qu'à la fin d'une couche. Un changement de mode est indiqué par une discontinuité verticale dans la flèche de propagation. Il est à noter que la lumière est injectée dans le cœur et que les chemins 1 et 2 sont les chemins qui prennent le plus de temps à traverser les couches.

peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_j &= e^{i\beta_{\text{moy},j}\Delta z} \cos(|q_j|\Delta z_j) \begin{bmatrix} e^{i\delta_j\Delta z} & i\frac{q_j}{|q_j|} \tan(|q_j|\Delta z) e^{-i\delta_j\Delta z} \\ i\frac{q_j^*}{|q_j|} \tan(|q_j|\Delta z) e^{i\delta_j\Delta z} & e^{-i\delta_j\Delta z} \end{bmatrix}, \\
&= \frac{e^{i\beta_{\text{moy},j}\Delta z}}{\sqrt{1 + \tan^2(|q_j|\Delta z_j)}} \begin{bmatrix} e^{i\delta_j\Delta z} & i\frac{q_j}{|q_j|} \tan(|q_j|\Delta z) e^{-i\delta_j\Delta z} \\ i\frac{q_j^*}{|q_j|} \tan(|q_j|\Delta z) e^{i\delta_j\Delta z} & e^{-i\delta_j\Delta z} \end{bmatrix}, \\
&= \frac{e^{i\beta_{\text{moy},j}\Delta z}}{\sqrt{1 + |\sigma_j|^2}} \begin{bmatrix} e^{i\delta_j\Delta z} & \sigma_j e^{-i\delta_j\Delta z} \\ -\sigma_j^* e^{i\delta_j\Delta z} & e^{-i\delta_j\Delta z} \end{bmatrix}, \\
&= \frac{e^{i[\beta_{\text{moy},j} - \delta_j]\Delta z}}{\sqrt{1 + |\sigma_j|^2}} \begin{bmatrix} e^{i2\delta_j\Delta z} & \sigma_j \\ -\sigma_j^* e^{i2\delta_j\Delta z} & 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{T}_j &= \theta_j \cdot e^{i\xi_j\Delta z} \begin{bmatrix} e^{i\zeta_j\Delta z} & \sigma_j \\ -\sigma_j^* e^{i\zeta_j\Delta z} & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.2}
\end{aligned}$$

Dans la dernière expression, les variables suivantes ont été introduites afin de simplifier davantage la notation :

$$\theta_j \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + |\sigma_j|^2}}, \tag{2.3}$$

$$\xi_j \equiv \beta_{\text{moy},j} - \delta_j = \begin{cases} \beta_{2,j} + \frac{\pi}{\Lambda}, & \text{Réseaux à longs pas,} \\ \beta_{2,j}, & \text{Fibres effilées,} \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\zeta_j \equiv 2\delta_j = \begin{cases} \beta_{1,j} - \beta_{2,j} - \frac{2\pi}{\Lambda}, & \text{Réseaux à longs pas,} \\ \beta_{1,j} - \beta_{2,j}, & \text{Fibres effilées.} \end{cases} \tag{2.5}$$

En procédant à la multiplication successive des matrices de transfert (voir annexe B), il est possible de décomposer les champs du mode fondamental a_1 et du mode de couplage a_2 en termes des différents chemins optiques à travers l'empilement de couches. Les équations (B.1) et (B.2) présentent le cas général où toutes les couches sont différentes. Il est à noter qu'un terme $-\sigma_j^*$ correspond à un transfert au mode de

gaine dans la $j^{\text{ième}}$ couche, tandis que σ_j correspond à un retour au mode de cœur. Le nombre de chemins augmente exponentiellement, mais le chemin le plus long est celui qui a accumulé le plus de délai, c'est-à-dire le chemin où le mode fondamental n'a subi aucun couplage. Lorsque les déphasages de toutes les couches sont identiques, il n'est pas difficile de montrer (voir annexe B) que les sommations des contributions des divers chemins optiques (B.9, B.10) se réduisent à une série de Fourier pour chaque spectre,

$$\begin{aligned} a_1(z, \omega) &= \sum_{m=1}^N c_m(z) e^{i \cdot m \cdot [\omega(\frac{\Delta n_{\text{eff}}}{c}) - \frac{2\pi}{\Lambda}] \cdot \Delta z} \\ a_2(z, \omega) &= \sum_{m=1}^N d_m(z) e^{i \cdot m \cdot [\omega(\frac{\Delta n_{\text{eff}}}{c}) - \frac{2\pi}{\Lambda}] \cdot \Delta z}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

où Λ est la période du réseau et Δn_{eff} correspond à la différence d'indice effectif entre les deux modes.

D'une part, il est à noter que la dispersion est négligée, ce qui implique que le terme $\frac{\Delta n_{\text{eff}} \Delta z}{c}$ est constant ($n_{\text{eff}}(\omega) \approx \text{cte.}$). Cette approximation est raisonnable dans le cas des réseaux à longs pas, puisque le spectre ne s'étend pas beaucoup en longueur d'onde et que l'effet de la dispersion est par conséquent faible. D'autre part, vu que la phase accumulée lors du parcours sur une couche est la même pour toutes les couches ($\Delta n_{\text{eff}}(z) \approx \text{cte.}$), les coefficients c_m et d_m contiennent les contributions de tous les chemins qui ont parcouru m couches dans le cœur.

Il n'est pas difficile de constater que le rapport entre les contributions des chemins les plus longs de chacun des modes donne toujours le coefficient de diffusion σ_j de la dernière couche. Prenons, à titre d'exemple, le cas de quatre couches de déphasages identiques (voir (B.9), (B.10)) :

$$\begin{aligned} \frac{\text{Terme du chemin le plus long de } a_2(4\Delta z)}{\text{Terme du chemin le plus long de } a_1(4\Delta z)} &= \frac{-\sigma_4^* \cdot e^{i4\zeta\Delta z} \cdot \theta_4\theta_3\theta_2\theta_1 e^{i4\xi\Delta z}}{e^{i4\zeta\Delta z} \cdot \theta_4\theta_3\theta_2\theta_1 e^{i4\xi\Delta z}} \\ &= -\sigma_4^*. \end{aligned} \quad (2.7)$$

De façon analogue, le coefficient de diffusion σ_j de la dernière couche peut être obtenu par le rapport des contributions des chemins les plus courts, par exemple :

$$\frac{\text{Terme du chemin le plus court de } a_1(4\Delta z)}{\text{Terme du chemin le plus court de } a_2(4\Delta z)} = \frac{\sigma_4(-\sigma_1^*) \cdot e^{i\zeta\Delta z} \cdot \theta_4\theta_3\theta_2\theta_1 e^{i4\xi\Delta z}}{(-\sigma_1^*)e^{i\zeta\Delta z} \cdot \theta_4\theta_3\theta_2\theta_1 e^{i4\xi\Delta z}} = \sigma_4. \quad (2.8)$$

En fait, il est à noter que le rapport de plusieurs paires de chemins donnent le coefficient σ de la dernière couche, mais le choix des chemins les plus longs simplifie l'implémentation de l'algorithme de pelage de couches.

Rappelons que a_1 et a_2 sont des sommes de plusieurs termes. Afin d'extraire uniquement un terme de la somme, on procède à une intégration qui tire profit de l'orthogonalité des fonctions pour isoler le terme désiré. Ainsi, le calcul du coefficient de diffusion s'écrit plus formellement de la façon suivante, où le cas de quatre couches de déphasages identiques est encore utilisé comme exemple,

$$-\sigma_4^* = \frac{d_4}{c_4} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} a_2(4\Delta z) \cdot [e^{-i4\xi\Delta z} \cdot e^{-i4\zeta\Delta z}] d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} a_1(4\Delta z) \cdot [e^{-i4\xi\Delta z} \cdot e^{-i4\zeta\Delta z}] d\omega} \quad (2.9)$$

Or les hypothèses suivantes sont nécessaires pour que le calcul ci-dessus fonctionne. D'abord, les constantes $\theta_4\theta_3\theta_2\theta_1$ ne doivent pas dépendre de ω afin de pouvoir les sortir des intégrales et les simplifier. Par le fait même, les coefficients σ_j ne doivent pas dépendre de ω . Par la suite, les facteurs de phase entre crochets doivent se réduire à la forme $e^{-i\omega\tau}$, où τ est une constante qui s'apparente au temps de propagation. Ceci implique que ξ et ζ doivent être strictement proportionnel à ω , c'est-à-dire que Δn ne doit pas dépendre de ω . Dans ce cas, les spectres sont des sommes de fonctions orthogonales (plus précisément des séries de Fourier), et les intégrales permettent d'isoler un coefficient de chaque série, plus précisément les coefficients qui décrivent les contributions des chemins les plus longs. De cette façon, le problème inverse revient à calculer les σ_j , et donc les q_j , en connaissant les spectres $a_1(z, \omega)$ et $a_2(z, \omega)$.

2.1.2 Formalisme de transformée de Fourier inverse

Dans le cas plus général, où le déphasage est différent sur chaque couche (B.1, B.2), il est encore possible, en théorie, de calculer le coefficient de diffusion par un rapport de certaines contributions :

$$\begin{aligned} \frac{\text{Chemin le plus long de } a_2(4\Delta z)}{\text{Chemin le plus long de } a_1(4\Delta z)} &= \frac{-\sigma_4^* \cdot e^{i[\zeta_4+\zeta_3+\zeta_2+\zeta_1]\cdot\Delta z} \cdot \theta_4\theta_3\theta_2\theta_1 e^{i[\xi_4+\xi_3+\xi_2+\xi_1]\cdot\Delta z}}{e^{i[\zeta_4+\zeta_3+\zeta_2+\zeta_1]\cdot\Delta z} \cdot \theta_4\theta_3\theta_2\theta_1 e^{i[\xi_4+\xi_3+\xi_2+\xi_1]\cdot\Delta z}} \\ &= -\sigma_4^*. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Cependant, la section 2.2 discute de la difficulté d'extraire les termes ci-dessus de leur sommation. Pour ces fins, la présente section introduit un formalisme alternatif, tout à fait équivalent à celui de la section précédente, qui est basé sur la transformée de Fourier inverse évaluée au temps de parcours de divers chemins optiques.

Ainsi, la *réponse impulsionnelle* d'un spectre correspond à sa transformée de Fourier inverse, qui donne l'amplitude des contributions dans le temps :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1(z, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} a_1(z, \omega) e^{-i(\omega \cdot \tau)} d\omega \\ \tilde{a}_2(z, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} a_2(z, \omega) e^{-i(\omega \cdot \tau)} d\omega. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Or, chaque chemin optique contribue à la réponse impulsionnelle au temps qui correspond à son temps de parcours. Vu que la vitesse de groupe est plus grande dans la gaine que dans le cœur ($n_g < n_c$), la lumière prend plus de temps à parcourir les chemins qui traversent les couches dans le mode fondamental. Toutefois, il est à noter que le déphasage identique sur l'ensemble des couches implique une dégénérescence du point de vue du temps de parcours de certains chemins. De plus, le principe de causalité implique que la réponse impulsionnelle évaluée à un temps non-dégénéré ne peut correspondre qu'à la contribution d'un chemin optique en particulier. Le cœur de la méthode de pelage de couches consiste à choisir deux chemins non-dégénérés, un pour chaque spectre (a_1 et a_2), dont le rapport des contributions donne le coefficient

de diffusion d'une seule couche. Le rapport des amplitudes permet de simplifier des constantes afin d'isoler la valeur de σ .

Un examen des délais occasionnés par les différents chemins (voir annexe B) permet de constater que, dans le cas des réseaux à longs pas, il y a seulement deux chemins non-dégénérés qui contribuent à a_1 , et deux qui contribuent à a_2 . À ce point, trois remarques sont importantes. Premièrement, il s'agit des chemins les plus courts et les plus longs. Ainsi, en considérant les chemins les plus longs, les deux affirmations suivantes sont toujours valides :

- Le chemin le plus long du spectre a_1 correspond au trajet qui n'a pas subi de couplage (chemin 1 de la figure 2.1).
- Le chemin le plus long du spectre a_2 correspond au trajet où le seul couplage a lieu dans la dernière couche (chemin 2 de la figure 2.1).

Deuxièmement, les temps de parcours associés à ces deux chemins dépendent de la localisation du couplage sur la couche. Si le couplage était placé au début ou au milieu de chaque couche lors du processus de discrétisation, alors le temps de parcours de la contribution au spectre a_1 serait différent de celui de la contribution à a_2 . Cependant, en plaçant le couplage à la fin de chaque couche, les deux temps de parcours deviennent identiques. D'ailleurs, ce temps est connu *a priori*, puisque le déphasage est constant pour toutes les couches. Troisièmement, la méthode de pelage de couches aurait pu être construite sur la considération des chemins les plus courts, mais c'est l'autre technique qui fut adoptée dans la littérature. Ainsi, le coefficient

de diffusion de la dernière couche peut être calculé de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
-\sigma_N^* &= \frac{d_N}{c_N}, \\
d_N &= \tilde{a}_2(N\Delta z, \tau = \tau_a) = \int_{-\infty}^{\infty} a_2(N\Delta z, \omega) e^{i(\omega \cdot \tau_a)} d\omega, \\
c_N &= \tilde{a}_1(N\Delta z, \tau = \tau_a) = \int_{-\infty}^{\infty} a_1(N\Delta z, \omega) e^{i(\omega \cdot \tau_a)} d\omega, \\
\text{où } \tau_a &= \frac{n_{\text{eff},1} \cdot N\Delta z}{c}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Finalement, le calcul peut être répété itérativement à partir des nouveaux spectres $a_1((N-1)\Delta z, \omega)$ et $a_2((N-1)\Delta z, \omega)$, qui sont obtenus, à l'aide de la matrice de transfert (2.2) inversée, en propageant les spectres $a_1(N\Delta z, \omega)$ et $a_2(N\Delta z, \omega)$ à travers la $N^{\text{ième}}$ couche.

Évidemment, le calcul de pelage de couches ne peut être valide que si $\{a_1, a_2\}$ forment une paire physiquement réalisable. Il ne s'agit pas uniquement de la conservation de l'énergie ($|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$), mais aussi d'un lien causal entre les phases des deux spectres. Il est possible de démontrer [Brenne & Skaar 2003] que les spectres doivent satisfaire la condition suivante pour constituer une paire physiquement réalisable :

$$A_1(z)A_{1*}(z) + A_2(z)A_{2*}(z) = 1. \tag{2.13}$$

où $A_1(z)$ et $A_2(z)$ sont respectivement les transformées en z des réponses impulsionnelles $\tilde{a}_1(N\Delta z, \tau)$ et $\tilde{a}_2(N\Delta z, \tau)$. De plus, $A_*(z) \equiv A^*(\frac{1}{z^*})$ est le conjugué «parahermitien».

Ainsi, à partir d'un spectre a_1 connu, il faut trouver non seulement l'amplitude de a_2 , mais aussi la phase qui respecte la condition (2.13). Deux techniques ont été développées pour déterminer la phase [Brenne & Skaar 2003] : l'une procède par la factorisation de polynômes en z ; tandis que l'autre détermine la phase à partir d'une transformée de Hilbert.

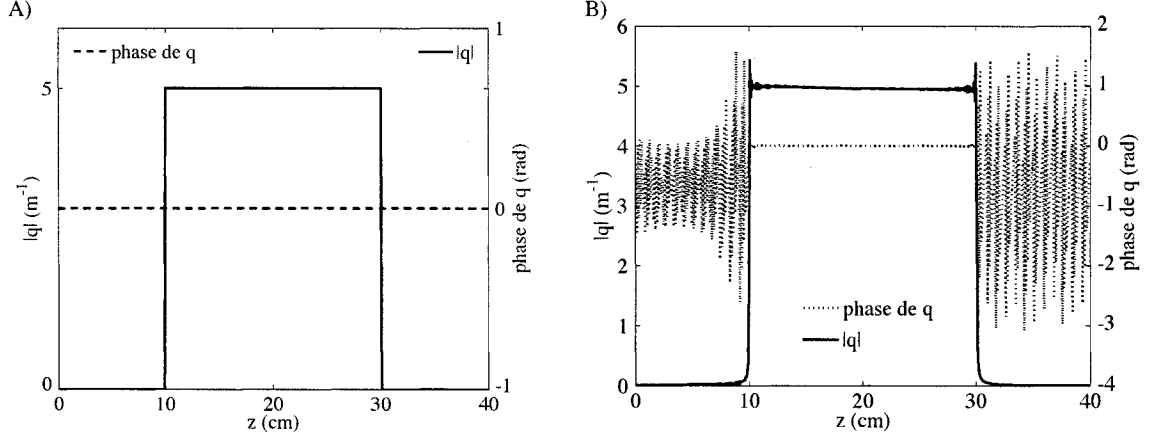


Figure 2.2 : Reconstruction d'un réseau uniforme à l'aide de la méthode de pelage de couches. Le spectre d'un réseau uniforme (a) est calculé par une méthode directe. Ensuite, le réseau est reconstruit (b) à partir de ce spectre à l'aide de la méthode inverse.

2.1.3 Algorithme de la méthode de pelage de couches

L'algorithme de Wang, légèrement simplifié en considérant un couplage instantané à la fin de chaque couche plutôt qu'au milieu, se résume ainsi :

- Pour chaque couche du composant (j allant de N à 1) :
 1. Calcul de $-\sigma_j^*$ à partir de $a_1(j\Delta z, \omega)$ et $a_2(j\Delta z, \omega)$, en utilisant (2.12).
 2. Calcul de q_j avec (2.1).
 3. Calcul de $a_1((j-1)\Delta z, \omega)$ et $a_2((j-1)\Delta z, \omega)$ en propageant $a_1(j\Delta z, \omega)$ et $a_2(j\Delta z, \omega)$ à travers la $j^{\text{ième}}$ couche, à l'aide de (2.2) inversée.

2.1.4 Exemple de synthèse

Une des difficultés pour les méthodes intégrales de GLM est de résoudre des transitions abruptes dans le profil de couplage. Or, la figure 2.2 montre que la méthode de pelage de couches peut être très précise. Un profil de couplage uniforme est d'abord

utilisé pour calculer les spectres a_1 et a_2 par une des méthodes directes. Par la suite, ces spectres sont utilisés pour reconstruire le profil à l'aide de la méthode de pelage de couches. Toutefois, la résolution en z est liée à la résolution temporelle de la transformée de Fourier inverse, puisque $\tau = n_{\text{eff},1} \cdot N\Delta z$. La résolution spatiale est donc inversement proportionnelle à la largeur de la fenêtre spectrale (noté $\overleftrightarrow{\omega}$ par définition) [Brenne & Skaar 2003] :

$$\Delta z = \frac{\pi \cdot c}{\Delta n \cdot \overleftrightarrow{\omega}}. \quad (2.14)$$

De plus, les petites oscillations dans l'amplitude de q près de la discontinuité sont attribuables au phénomène de Gibbs [Arfken & Weber 1996]. En d'autres mots, ces oscillations ne proviennent pas d'une erreur de reconstruction de la méthode de pelage de couches, mais sont une conséquence inhérente aux séries de Fourier. Par ailleurs, on note également que la phase est reconstruite arbitrairement dans les régions où le coefficient de couplage est nul.

2.1.5 Synthèse d'un filtre égalisateur de gain

Afin de démontrer la justesse de la présente implémentation de la méthode de pelage de couches (section 2.1.3), on procède à la vérification des résultats de Brenne pour le profil de couplage d'un réseau à longs pas qui égalise le gain d'un EDFA (GFF²). Le point de départ de la méthode de pelage de couches est forcément une paire de spectres physiquement réalisables. Normalement, la phase de a_2 n'est pas connu d'avance. Toutefois, pour les fins de cette vérification, plutôt qu'implémenter la méthode de transformée de Hilbert pour déterminer la phase de a_2 , les deux spectres sont calculés par une méthode directe à partir du profil de couplage complexe trouvé dans l'article de Brenne (figure 2.3). La figure 2.4 présente le spectre du mode fondamental qui est calculé par la méthode de matrices de transfert. Le spectre est

²*Gain Flattening Filter*

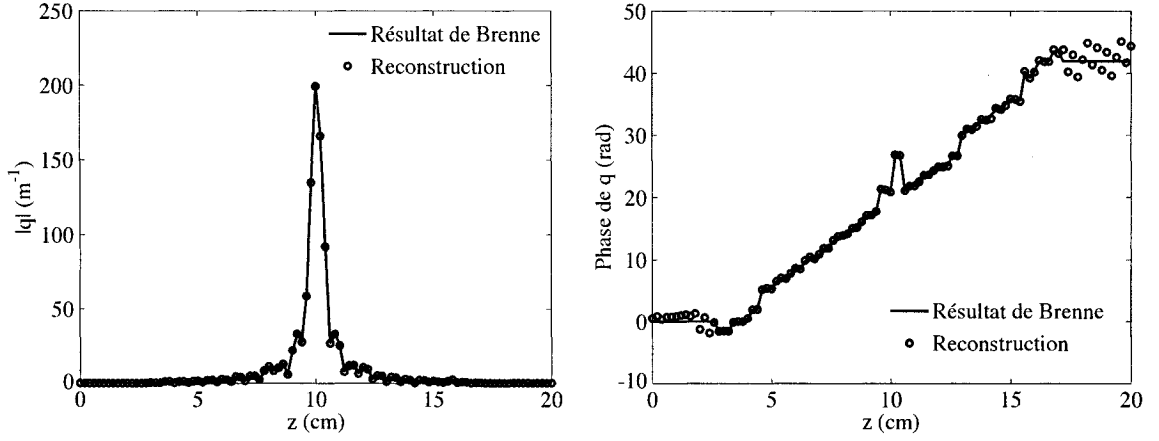


Figure 2.3 : Synthèse, à l'aide de la méthode de pelage de couche, d'un réseau à longs pas qui égalise le gain d'un EDFA. Le profil initial, en trait plein, est issu de [Brenne & Skaar 2003], tandis que les cercles correspondent aux points reconstruits par la méthode de pelage de couches. Les paramètres utilisés sont : $N_z = 101$, $\lambda_{\min} = 1,48 \mu\text{m}$, $\lambda_{\max} = 1,60 \mu\text{m}$, $\lambda_{\text{Bragg}} = 1,53 \mu\text{m}$, $N_\lambda = 2000$, $n_{\text{cœur}} = 1,452$, $n_{\text{gaine}} = 1,442$.

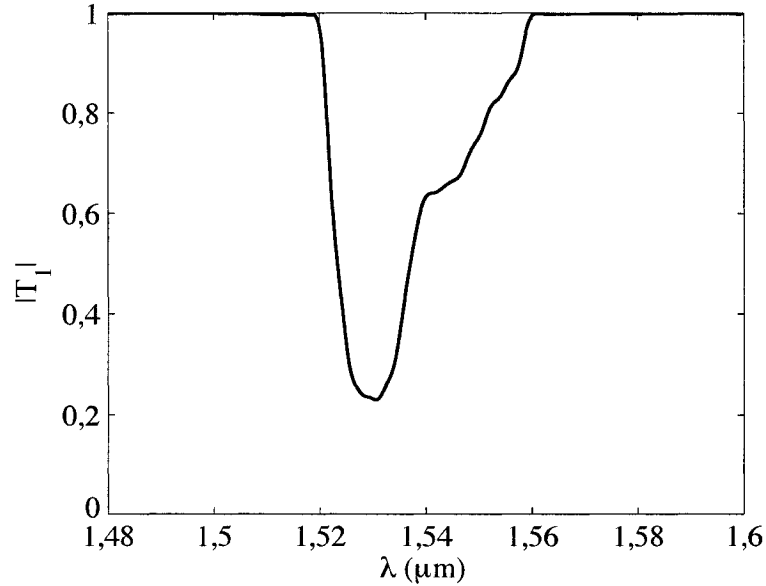


Figure 2.4 : Spectre de transmission dans le mode fondamental d'un réseau à longs pas, à profil complexe (voir figure 2.3), qui égalise le gain d'un EDFA.

calculé sur une largeur spectrale suffisamment grande pour obtenir une résolution de 1,97 mm lors de la reconstruction. La figure 2.3 démontre le très bon accord entre le profil initial et le profil reconstruit par la méthode de pelage de couches. Encore une fois, on constate que la phase ne peut pas être déterminée avec précision dans les régions où l'amplitude du couplage est nul. Malgré le fait que ce profil égalise bien le spectre d'un EDFA, et qu'il s'agit d'un profil physiquement réalisable, il faut souligner que la fabrication de ce réseau peut être très difficile en pratique.

2.2 Méthode de pelage de couches inapplicable aux fibres effilées

Dans la section précédente, nous avons vu que la méthode de pelage de couches a été établie sous la réserve que $\Delta n(z, \omega) = \text{cte.}$ et $q(z, \omega) = q(z)$. Or, dans le cas des fibres effilées, $\Delta n(z, \omega)$ et $q(z, \omega)$ dépendent de z et de ω . Les arguments de causalité sont encore valides, mais il devient plus difficile d'extraire de l'information utile de la transformée de Fourier inverse puisqu'on s'éloigne des hypothèses énoncées à la suite de l'équation (2.9). Afin de mieux comprendre l'influence de chaque dépendance supplémentaire sur la méthode de pelage de couches, il est utile de considérer des problèmes intermédiaires. Simplifions cette analyse en considérant un système à trois couches (figure 2.5) de sorte que la réponse impulsionnelle soit simple à analyser. Étudions progressivement les cas où $\{\Delta n = \text{cte.}, q(z)\}$, $\{\Delta n(\omega), q(z)\}$, $\{\Delta n(z), q(z)\}$, $\{\Delta n(z, \omega), q(z)\}$ et $\{\Delta n(\omega), q(z, \omega)\}$, avant d'en arriver au cas ultime des fibres effilées avec $\{\Delta n(z, \omega), q(z, \omega)\}$.

2.2.1 Cas $\{\Delta n = \text{cte.}, q(z)\}$

Considérons le système standard pour la méthode de pelage de couches, où $q(z)$ et $\Delta n = \text{cte.}$ Pour simplifier, on considère un système ayant la matrice de transfert

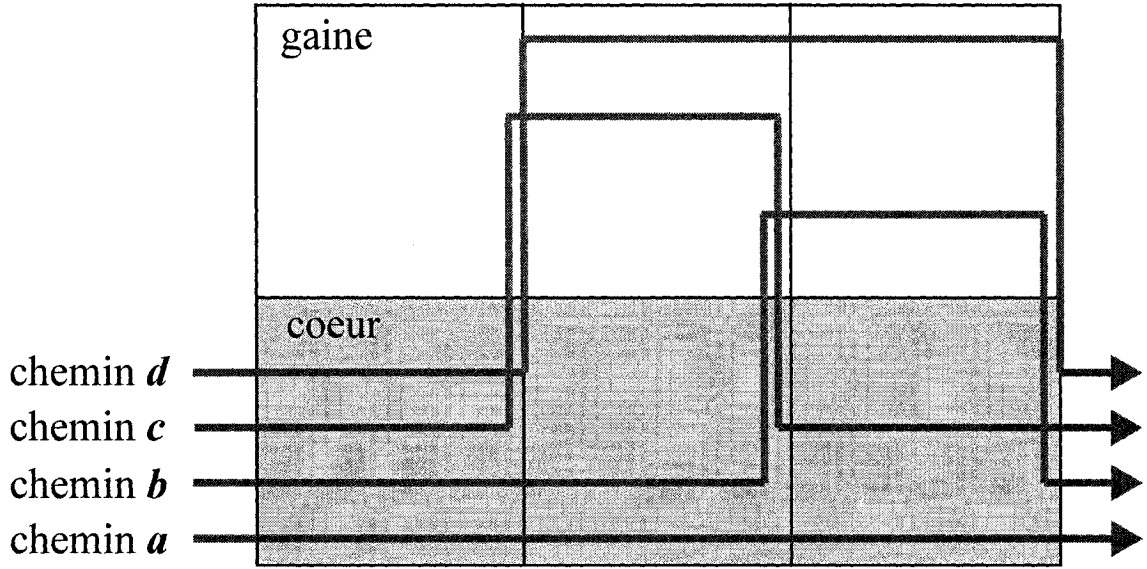


Figure 2.5 : Quatre chemins optiques. Il existe quatre chemins optiques pour la lumière du mode fondamental dans un modèle simplifié de trois couches. Les quatre autres chemins de ce système discret, qui ne sont pas indiqués sur la figure, sortent dans le mode de gaine.

suivante :

$$\mathbf{T}_j = e^{i2\Delta z} \begin{bmatrix} e^{i\Delta n_j \cdot \frac{\omega}{c} \Delta z} & q_j e^{-i\Delta n_j \cdot \frac{\omega}{c} \Delta z} \\ q_j e^{i\Delta n_j \cdot \frac{\omega}{c} \Delta z} & e^{-i\Delta n_j \cdot \frac{\omega}{c} \Delta z} \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

où ω est en GHz, Δz est en cm et la valeur de c est arbitrairement fixée à $1 \text{ GHz} \cdot \text{cm}$. Pour simplifier davantage, on considère q réel et on s'intéresse à déterminer $|q|$ par l'amplitude des réponses impulsionnelles. Dans ce cas-ci, le rapport des réponses impulsionnelles, évaluées au temps τ approprié, donne directement le coefficient de couplage ($\frac{|\tilde{a}_2(\tau)|}{|\tilde{a}_1(\tau)|} = |q_j|$).

La figure 2.6.a présente les données utilisées pour cet exemple. D'abord, le spectre de ce «composant» est calculé. Ensuite, la transformée de Fourier inverse de ce

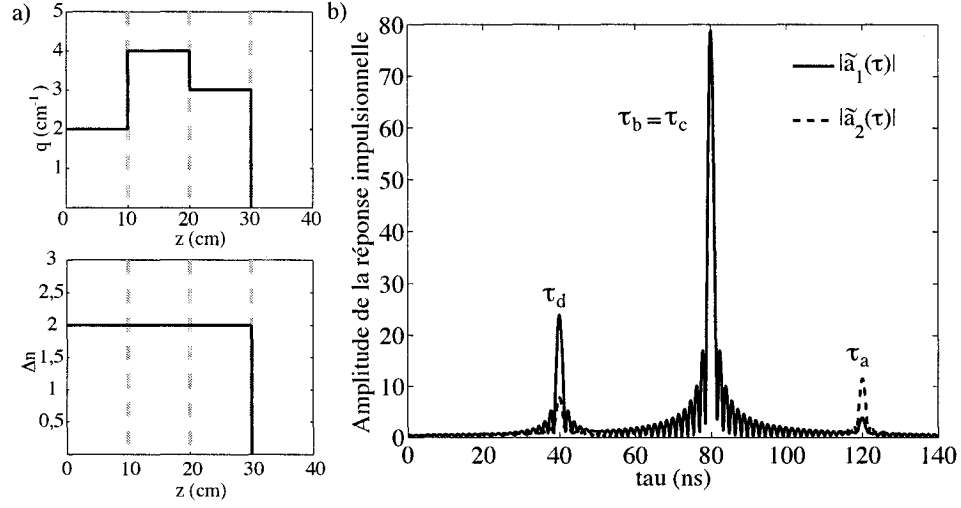


Figure 2.6 : Réponse impulsionnelle (b) d'un composant (a) ayant la forme $\{\Delta n = cte., q(z)\}$, avec les intégrales calculées par la méthode des trapèzes sur une largeur spectrale de $\overleftarrow{\omega} = 4$ GHz. Des sinus cardinaux au carrés sont centrés sur les temps de parcours des divers chemins optiques.

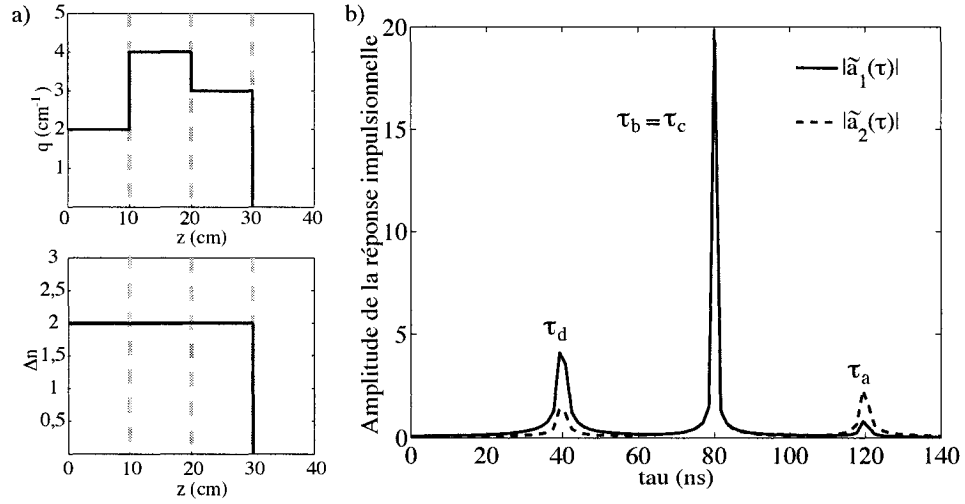


Figure 2.7 : Réponse impulsionnelle (b) d'un composant (a) ayant la forme $\{\Delta n = cte., q(z)\}$, avec les intégrales calculées par TFRI sur une largeur spectrale de $\overleftarrow{\omega} = 4$ GHz. L'amplitude du coefficient de couplage est donné par le rapport des deux derniers pics, c'est-à-dire $\frac{|\tilde{a}_2(\tau_a)|}{|\tilde{a}_1(\tau_a)|} = 2.987 \text{ cm}^{-1}$.

spectre est présentée à la figure 2.6.b, ce qui donne une visualisation directe du calcul du pelage de couches. Ce premier cas correspond au problème des réseaux à longs pas, mais avec un nombre réduit de couches pour bien visualiser la transformée inverse. D'abord, puisqu'il y a un nombre discret de chemins à travers l'empilement de couches, la réponse impulsionnelle devrait contenir des deltas de Dirac correspondant aux temps de parcours de chaque chemin. Or, les pics sont des sinus cardinaux au carré plutôt que des deltas de Dirac, car la largeur de la fenêtre spectrale ($\overleftarrow{\omega}$) n'est pas un multiple entier de la période du signal. De plus, la largeur des pics est inversement proportionnelle à cette largeur de fenêtre spectrale, qui ne peut jamais s'étendre à l'infini en pratique. La figure 2.7 présente la réponse impulsionnelle calculée à l'aide de la *transformée de Fourier rapide inverse* (TFRI), qui calcule la transformée inverse sur les harmoniques imposés par la largeur de fenêtre spectrale donnée, éliminant ainsi la convolution avec le sinus cardinal.

On observe des pics aux différents temps de parcours à travers les couches. Le temps de parcours de chaque chemin de la figure 2.5 est identifié sur la figure 2.6.b. Cette nomenclature ($\tau_{a,b,c,d}$) est conservée dans les sous-sections suivantes. De plus, on constate une dégénérescence des temps de parcours de certains chemins et une équidistance entre les pics, étant donné que les délais sur les couches sont identiques. Le rapport des amplitudes de $\tilde{a}_2(\tau_a)$ sur $\tilde{a}_1(\tau_a)$ donne $2,987 \text{ cm}^{-1}$, ce qui est une excellente approximation du coefficient de couplage de la dernière couche. Finalement, la largeur des pics affecte aussi la justesse des amplitudes. La figure 2.8 présente un calcul où la fenêtre spectrale est réduite de moitié. Dans ce cas, le rapport des amplitudes au temps τ_a donne $2,53 \text{ cm}^{-1}$. Il est donc possible, avec une largeur de fenêtre spectrale adéquate, d'effectuer une bonne reconstruction d'un système dans le cas où $\{\Delta n = \text{const.}, q(z)\}$.

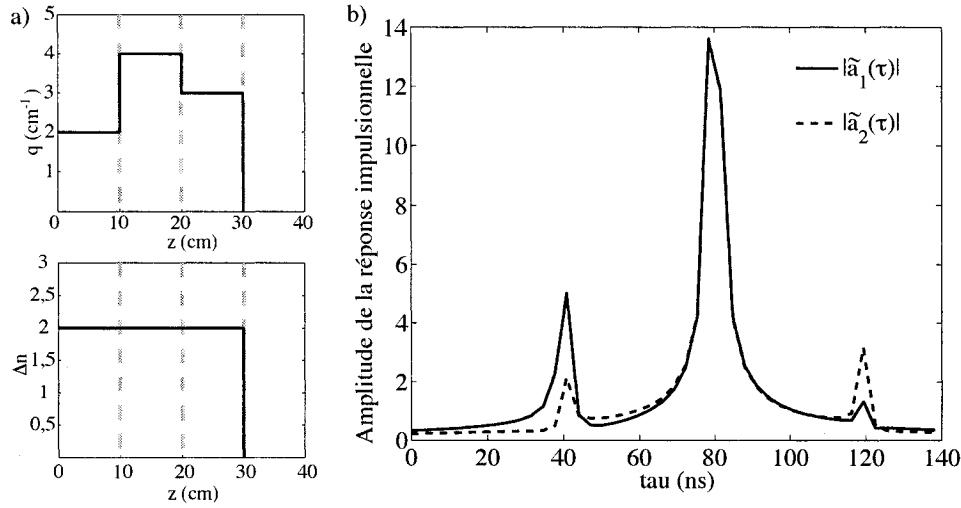


Figure 2.8 : Réponse impulsionnelle (b) d'un composant (a) ayant la forme $\{\Delta n = \text{cte.}, q(z)\}$, avec les intégrales calculées par TFRI sur une largeur spectrale réduite à $\overleftarrow{\omega} = 2$ GHz. La largeur des pics est inversement proportionnelle à la largeur de la fenêtre spectrale. $\frac{|\tilde{a}_2(\tau_a)|}{|\tilde{a}_1(\tau_a)|} = 2,53 \text{ cm}^{-1}$.

2.2.2 Cas $\{\Delta n(z), q(z)\}$

Évidemment la dégénérescence des temps de parcours est levée si le délai occasionné par chaque couche n'est plus invariant. La figure 2.9 montre clairement que les pics ne sont plus équidistants dans le cas où Δn a une dépendance en z . Qui plus est, cette dépendance complique grandement la méthode de pelage puisque le temps de parcours du chemin le plus long n'est plus connu d'avance (la dépendance en z de Δn n'est pas connue *a priori*). En principe, grâce au fait que les temps de parcours des deux chemins les plus longs sont identiques, c'est-à-dire dans le cas spécial où le couplage est considéré à la fin de chaque couche, la reconstruction est encore possible dans la mesure où le temps τ_a peut être deviné. Dans le cas simple illustré à la figure 2.9.a, τ_a peut être déterminé aveuglément en calculant la réponse impulsionnelle à un temps trop élevé et en réduisant le temps jusqu'à l'observation d'un pic. Toutefois, cette extrapolation devient plus compliquée lorsque des dépendances en ω sont ajoutées et la définition d'un «pic» devient arbitraire.

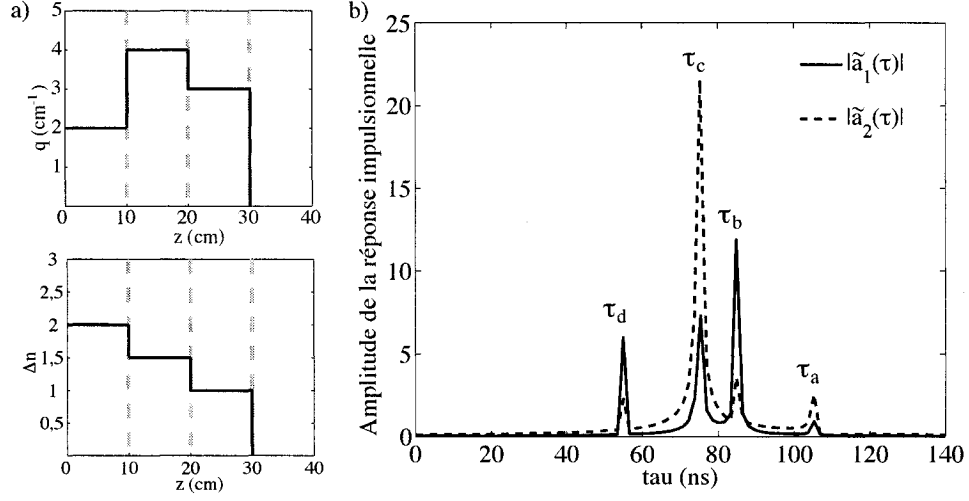


Figure 2.9 : Réponse impulsionnelle d'un composant ayant la forme $\{\Delta n(z), q(z)\}$, avec les intégrales calculées par TFRI sur une largeur spectrale de $\overleftarrow{\omega} = 4$ GHz. Les temps de parcours ne sont plus dégénérés.

2.2.3 Cas $\{\Delta n(\omega), q(z)\}$

Une modification naturelle du problème initial est d'ajouter la dispersion $n(\omega)$. Ainsi, la vitesse de phase de chaque fréquence est différente, donc les temps de parcours de tous les chemins ne sont plus dégénérés en fréquence. Dans le cas simplifié où on ne considère que deux valeurs pour la dispersion (figure 2.10.a), plutôt qu'une fonction continue en ω , on constate un dédoublement des pics (figure 2.10.b). Toutefois, le décalage temporel dû à la dispersion est en réalité beaucoup plus faible dans les vrais composants optiques que dans cette simulation. La figure 2.11 présente un exemple où la dispersion est un peu plus faible, mais encore invraisemblablement élevée. Dans ce cas, les pics sont tellement rapprochés qu'ils se chevauchent étant donné la résolution temporelle limitée de la transformée de Fourier inverse. Il faut donc une fenêtre spectrale très large pour espérer avoir une finesse suffisante pour résoudre les pics intéressants. En principe, si la résolution est assez grande il est encore possible de reconstruire q . Par exemple, pour la figure 2.11, le rapport de

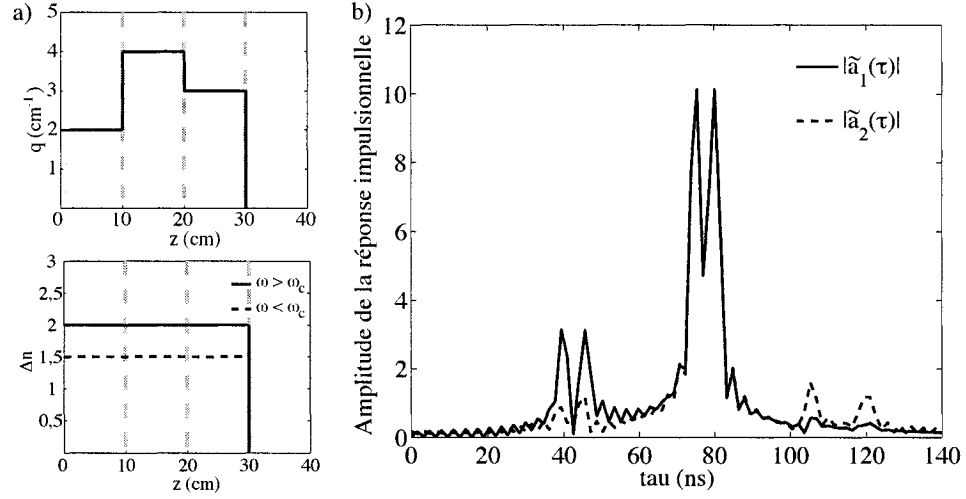


Figure 2.10 : Réponse impulsionnelle d'un composant ayant la forme $\{\Delta n(\omega), q(z)\}$, où la dispersion est forte. Les intégrales sont calculées par TFRI, avec $\overleftarrow{\omega} = 4$ GHz. La dispersion lève la dégénérescence des temps de parcours pour la lumière à différentes fréquences.

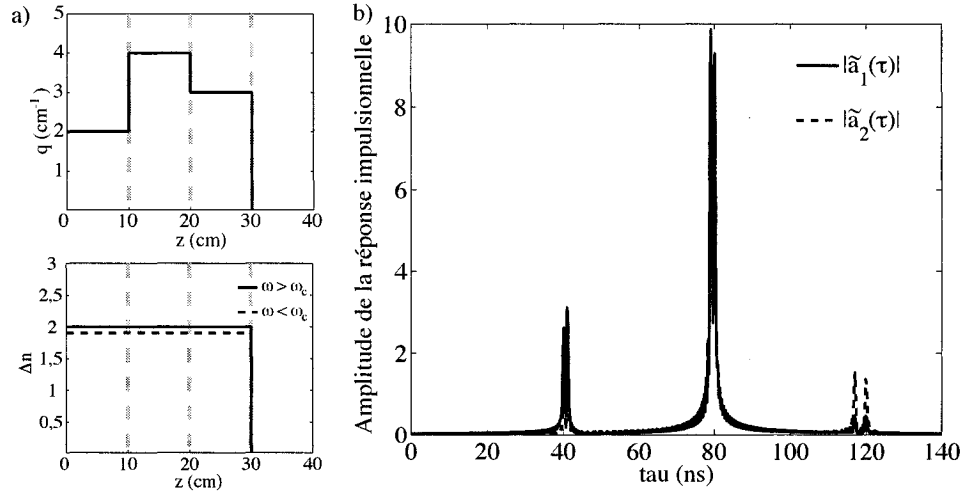


Figure 2.11 : Réponse impulsionnelle d'un composant ayant la forme $\{\Delta n(\omega), q(z)\}$, avec une dispersion un peu plus faible que la figure 2.10. Les intégrales sont calculées par TFRI avec $\overleftarrow{\omega} = 24$ GHz. Les pics sont tellement rapprochés qu'ils se chevauchent.

la somme des amplitudes à $\tau = 117$ ns et $\tau = 120$ ns (les chemins qui ont couplé uniquement sur la dernière couche) donne,

$$q = \frac{|\tilde{a}_2(\tau = 117 \text{ ns})| + |\tilde{a}_2(\tau = 120 \text{ ns})|}{|\tilde{a}_1(\tau = 117 \text{ ns})| + |\tilde{a}_1(\tau = 120 \text{ ns})|} = 3,0009 \text{ cm}^{-1}. \quad (2.16)$$

Cependant, un exemple plus concret, utilisant des valeurs typiques des fibres effilées, permet de mettre en relief le problème de la largeur de la fenêtre spectrale. Considérons encore une fois une dispersion simplifiée à deux valeurs discrètes : soit $\Delta n = 3,68 \cdot 10^{-3}$ à $\lambda_1 = 1,2 \mu\text{m}$ et $\Delta n = 3,23 \cdot 10^{-3}$ à $\lambda_2 = 1,8 \mu\text{m}$, avec $\rho = 1,0$. Considérons aussi des couches ayant une épaisseur de $10 \mu\text{m}$. Ainsi la dispersion entraîne un espacement minimal entre deux pics de l'ordre de,

$$\begin{aligned} (\Delta\tau)_{\text{dispersion}} &= \frac{(\Delta n(\omega_1) - \Delta n(\omega_2)) \cdot \Delta z}{c} \\ &\approx \frac{(0,45 \cdot 10^{-3}) \cdot 10 \mu\text{m}}{300 \frac{\mu\text{m}}{\text{fs}}} = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ fs}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Or, la relation d'incertitude temps-fréquence contraint la résolution temporelle de la transformée de Fourier inverse numérique :

$$(\Delta\tau)_{\overleftrightarrow{\omega}} = \frac{2\pi}{\overleftrightarrow{\omega}} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi c}{\lambda_1} - \frac{2\pi c}{\lambda_2}} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)} \approx \frac{1,2 \cdot 1,8 \mu\text{m}^2}{300 \frac{\mu\text{m}}{\text{fs}} (1,8 - 1,2) \mu\text{m}} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ fs}. \quad (2.18)$$

Il faut que $(\Delta\tau)_{\overleftrightarrow{\omega}} \ll (\Delta\tau)_{\text{dispersion}}$ pour résoudre les pics entraînés par la dispersion, mais plus la largeur spectrale est augmentée, pour réduire $(\Delta\tau)_{\overleftrightarrow{\omega}}$, plus les effets de la dispersion sont notables. Dans le cas des fibres effilées on est très loin de pouvoir résoudre des pics à des fréquences discrètes. Ainsi, la dispersion, qui est réellement une fonction continue, engendre un chevauchement de pics qui déforment la réponse impulsionnelle.

En d'autres mots, la dépendance $\Delta n(\omega)$ contribue à l'intégrale sur les fréquences (2.12) et déforme les deltas de Dirac idéalisés des sections précédentes. Or, l'informa-

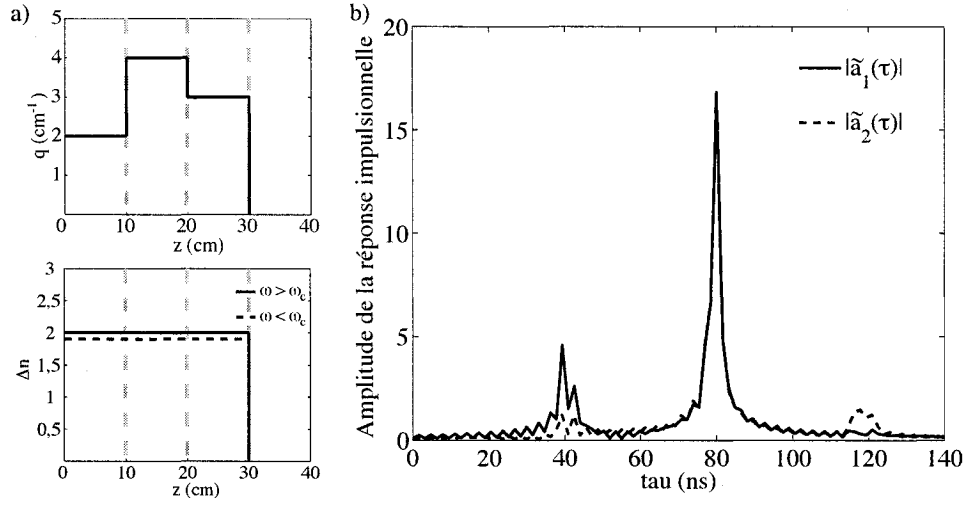


Figure 2.12 : Réponse impulsionnelle d'un composant ayant la forme $\{\Delta n(\omega), q(z)\}$, avec une dispersion faible et une largeur spectrale réduite par rapport à celle de la figure 2.11. Les intégrales sont calculées par TFRI, avec $\overleftarrow{\omega} = 4$ GHz. Même la comparaison de l'aire sous les réponses impulsionnelles, entre 113 ns et 124 ns, donne $2,55 \text{ cm}^{-1}$ au lieu de 3 cm^{-1} .

tion pour la reconstruction reposait sur la valeur crête des pics qui correspondaient à des chemins optiques particuliers. Maintenant, ces pics se trouvent étalés par les déformations mentionnées ci-haut. À titre d'exemple, la figure 2.12 présente le même cas de figure que 2.11, mais calculé avec une largeur spectrale 6 fois plus faible. On constate qu'il est impossible de reconstruire q à partir de chemins qui ont chevauché.

2.2.4 Cas $\{\Delta n(\omega), q(z, \omega)\}$

Il est intéressant de noter que, dans le cas où la dispersion est discrète en fréquence, suffisamment forte et que la fenêtre spectrale est suffisamment large pour séparer les pics, la reconstruction des couches est encore possible en principe, même si le coefficient de couplage a une dépendance en fréquence. Puisque le chemin le plus long correspond à une fréquence spécifique, le coefficient de couplage ne peut être qu'à cette fréquence aussi. Ainsi la figure 2.13 présente un cas où le rapport des réponses

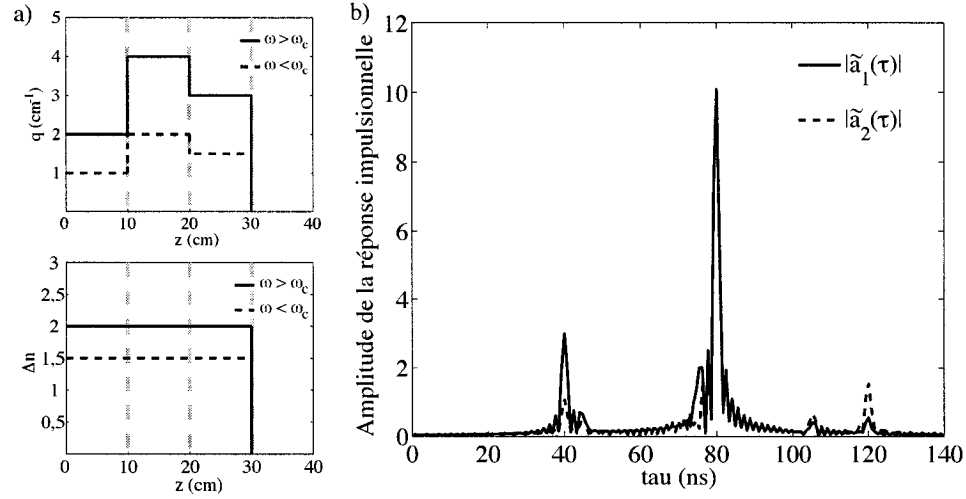


Figure 2.13 : Réponse impulsionnelle d'un composant ayant la forme $\{\Delta n(\omega), q(z, \omega)\}$, avec une dispersion est forte. Les intégrales sont calculées par TFRI, avec $\overleftrightarrow{\omega} = 4$ GHz. Les rapports des réponses impulsionnelles à 105 ns et 120 ns donnent respectivement $1,57 \text{ cm}^{-1}$ et $2,97 \text{ cm}^{-1}$, ce qui correspond à $q(30, \omega)$.

impulsionnelles à 105 ns et 120 ns donne respectivement $1,57 \text{ cm}^{-1}$ et $2,97 \text{ cm}^{-1}$. Évidemment, la qualité de la reconstruction dépend de la largeur de la fenêtre spectrale et dans un cas plus réaliste, où la dispersion entraîne plus de deux valeurs distinctes de $\Delta n(\omega)$, la séparation des pics devient impraticable.

Par ailleurs, lorsque la dispersion est vraiment faible, ce problème se ramène au cas $\{\Delta n \approx \text{cte.}, q(z, \omega)\}$. Or, avec $\Delta n \approx \text{cte.}$ (connue *a priori*) il est possible de savoir à quel temps il faut évaluer les réponses impulsionnelles, mais l'information que l'on peut en retirer est affectée par la dépendance en ω du coefficient de couplage. D'ailleurs, il est à noter que dans le cas où $q(z, \omega)$, les coefficients ne peuvent plus être sortis de l'intégrale de la transformée de Fourier inverse (2.12), étant donné leur dépendance en fréquence, donc l'intégrale moyenne la valeur de $\sigma(z, \omega)$. Ainsi, le rapport des deux derniers pics de la figure 2.14 correspond à $2,31 \text{ cm}^{-1}$, ce qui est près de $2,25 \text{ cm}^{-1}$, la valeur moyenne de $q(30, \omega)$. Malheureusement, la valeur moyenne du coefficient de couplage n'est d'aucune utilité pour reconstruire le composant, car

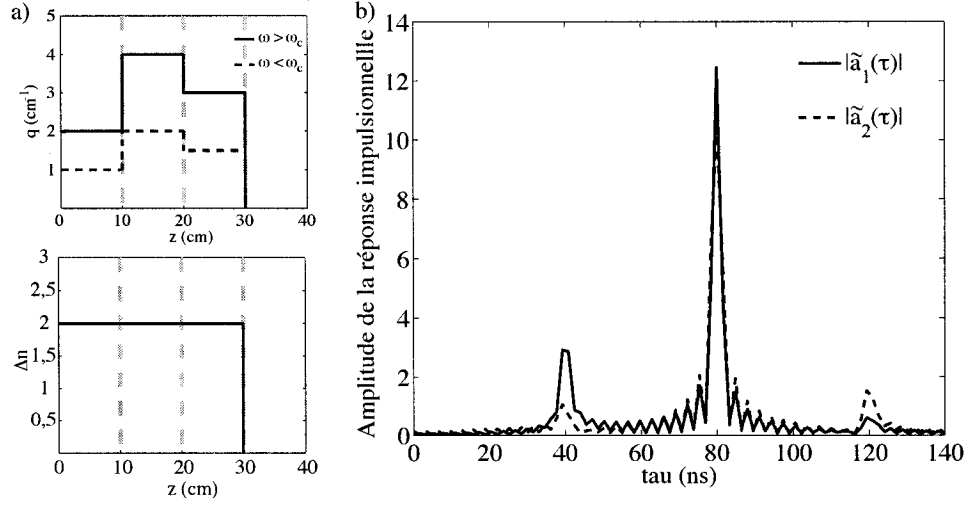


Figure 2.14 : Réponse impulsionnelle d'un composant ayant la forme $\{\Delta n = \text{const.}, q(z, \omega)\}$. Les intégrales sont calculées par TFRI, avec $\omega = 4$ GHz. Le rapport des deux derniers pics est de $2,31 \text{ cm}^{-1}$, ce qui est près de la valeur moyenne de $q(30, \omega)$.

l'information en fréquence est perdue. La méthode de pelage de couches reste bloquée sur ce point.

2.2.5 Cas $\{\Delta n(z, \omega), q(z, \omega)\}$

Ayant étudié les problèmes intermédiaires, il est maintenant possible d'analyser le cas des fibres effilées à sa juste valeur. D'abord, il faut noter que les cas intermédiaires ne donnent pas une bonne approximation du spectre d'une fibre effilée. Évidemment, le problème de reconstruction est d'autant plus difficile que le nombre de dépendances est grand. L'influence de ces dépendances peut se résumer ainsi :

- $\Delta n(\omega)$ déforme les pics, ce qui réduit la justesse de l'information extraite du rapport des pics.
- $\Delta n(z)$ multiplie le nombre de pics dans la réponse impulsionnelle et obscurcit le temps de parcours du chemin le plus long (si la dépendance en z n'est pas connue

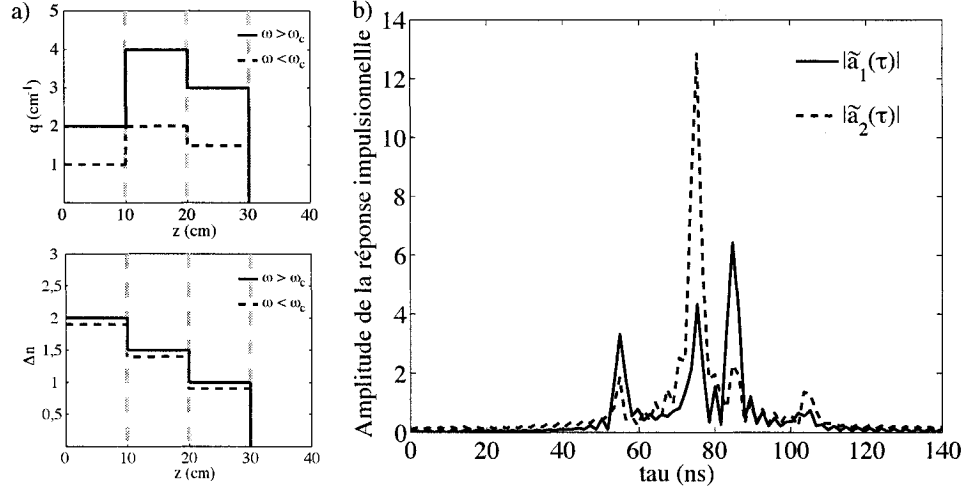


Figure 2.15 : Réponse impulsionnelle d'un composant ayant la forme $\{\Delta n(z, \omega), q(z, \omega)\}$. Les intégrales sont calculées par TFRI, avec $\overleftarrow{\omega} = 24$ GHz. La notion de «pic» autour de $\tau = 105$ ns est ambiguë pour $|\tilde{a}_1|$, ce qui rend impraticable l'extrapolation de la valeur de τ_a .

a priori). L'extrapolation du temps τ_a devient difficile. À titre d'exemple, la figure 2.15 montre que la notion de pic autour de 105 ns est floue.

- $q(\omega)$ déforme irrévocablement les pics ; alors la comparaison des réponses impulsionnelles ne peut donner que la valeur moyenne en fréquence, ce qui est inutile pour la reconstruction.

De plus, la largeur de la fenêtre spectrale est vraiment limitée dans le cas des fibres effilées. Le spectre d'un réseau à longs pas peut être prolongé facilement, puisqu'il remonte rapidement à 1.0 sur les extrémités de la fenêtre, mais la réponse spectrale d'une fibre effilée est une fonction oscillatoire quelconque qui ne peut pas être prolongée de façon arbitraire. Ainsi, l'imposition d'une largeur de fenêtre plutôt petite ne fait qu'exacerber les problèmes énumérés ci-haut. Malheureusement, il faut conclure que la méthode de pelage de couches ne peut pas être appliquée dans le cas des fibres effilées.

Chapitre 3

Optimisation d'une fonction à N dimensions à l'aide d'heuristiques modernes

Afin d'aborder des problèmes qui ont des dépendances supplémentaires en longueur d'onde et en z , il faut formuler le problème inverse dans une optique différente de celle des méthodes de diffusion inverse, que le chapitre 2 a montré insuffisantes. La façon la plus générale de traiter le problème inverse est de formuler un problème de minimisation. Ainsi, une fonction d'erreur est construite pour comparer l'écart entre un spectre cible et un spectre calculé en solutionnant le problème direct. La dispersion peut notamment être prise en compte dans le calcul direct. Chaque profil de composant est paramétrisé par N variables. Donc, il faut effectuer l'optimisation d'une fonction d'erreur à N dimensions de façon à minimiser la différence entre les deux spectres. Ce chapitre explore quelques méthodes d'optimisation qui sont disponibles pour aborder ce nouveau problème.

Les techniques d'optimisation «classiques», telles la *méthode des directions conjuguées* ou la *méthode du simplex géométrique* que l'on peut trouver dans *Numerical Recipes in C* ([Press et al. 1992]), ne sont appropriées que sur des régions où la

fonction d'erreur est convexe. En d'autres mots, ces méthodes ne trouvent que le minimum local le plus près de leur point de départ, ce qui n'est probablement pas le minimum global. Ces méthodes peuvent être dites des *méthodes de descente*, car elles descendent la fonction vers le minimum avoisinant. Si la fonction à minimiser contient plusieurs minima locaux, alors il faut relancer la méthode à plusieurs reprises avec différents points de départ choisis aléatoirement. Cette technique de *relance-ment aléatoire* effectue un échantillonnage des minima de la fonction. Le meilleur minimum trouvé par cette technique est potentiellement le minimum global. Or, une telle approche est peu efficace en termes d'évaluations de fonction.

Afin d'aborder l'optimisation de fonctions oscillantes à N dimensions, des méthodes de recherche plus robustes, appelées *heuristiques*, ont été développées dans les trente dernières années. Il n'y a aucune garantie de trouver le minimum global, mais les heuristiques donnent un meilleur rendement que l'utilisation répétée des techniques classiques. Ces méthodes amènent des mécanismes d'exploration, de façon à ressortir des vallées non-intéressantes au lieu de descendre aveuglément vers le premier minimum environnant. Le processus de refroidissement thermodynamique a inspiré le *recuit simulé*. Un déplacement sans retour en arrière est à la base de la *recherche tabou*. L'*algorithme génétique* et la *programmation évolutive* s'inspirent des mécanismes d'évolution naturelle comme la mutation et la reproduction des individus les plus forts (sélection naturelle). Ces deux dernières ont été retenues pour l'optimisation des composants tout-fibre. De plus, une méthode hybride, désignée *division cellulaire*, a été développée dans une tentative de marier les meilleurs éléments de plusieurs heuristiques. Ce chapitre décrit brièvement ces trois méthodes. Une description des principes de fonctionnement, le pseudo-code de chaque algorithme et une discussion sur les détails d'implémentation sont présentés. L'avant dernière section compare la performance des méthodes sur diverses fonctions tests, tandis que la dernière section traite spécifiquement du cas des réseaux à longs pas.

3.1 Algorithme génétique

3.1.1 Description du comportement

L'algorithme génétique s'inspire des processus évolutifs de la nature. On commence avec une population initiale de points qui sont choisis aléatoirement dans un espace de recherche. Ensuite on trie les *individus* (points) selon leur *aptitude*, où la plus grande aptitude est assignée à la plus petite valeur de la fonction d'erreur (triage en ordre croissant de valeur de fonction). Suivant la sélection naturelle, les individus les plus aptes se reproduisent pour former de nouveaux individus. La première étape consiste à choisir les *parents* qui vont former les couples. La deuxième étape est de recombinaison les *gènes* (coordonnées) des parents pour former des nouveaux individus. En troisième lieu, on ajoute un peu de mutation (modification d'une coordonnée choisie aléatoirement) pour ajouter un peu de variété dans la population. Ainsi, la population évolue de génération en génération et tend progressivement vers un minimum de la fonction.

Il existe une vaste littérature [Fogel, Bäck & Michalewicz 1997], [Haupt & Haupt 1998] sur les façons d'implémenter la sélection de parents, la recombinaison et la mutation. Par exemple, le choix des parents peut être uniforme, basé sur le rang dans la population, basé sur la valeur de l'aptitude ou même basé sur une sélection de type tournoi où le meilleur de deux individus choisis aléatoirement gagne le droit de se reproduire. La force de l'algorithme génétique provient du nombre. Le fait de considérer une population de points, au lieu d'un seul point à la fois, permet une prise de décision à partir d'un meilleur échantillonnage de l'espace. L'algorithme est performant sur les fonctions très oscillantes et il n'est pas rare de pouvoir trouver «l'aiguille dans la botte de foin», c'est-à-dire un profond abîme au milieu de plusieurs vallées moins profondes. Toutefois, la convergence est difficile à contrôler, parfois trop lente (points parsemés), parfois trop rapide («inceste» entre les individus qui mène à un minimum local). Il faut évidemment beaucoup d'évaluations de fonctions pour

évoluer à travers les générations et il y a beaucoup de paramètres de contrôle, comme la taille des populations et le taux de mutation, qui sont difficiles à calibrer.

3.1.2 Algorithme de la méthode

Un algorithme basé sur une représentation en nombres réels, par contraste avec la représentation binaire, a été retenu. Ici les individus sont des points dans l'espace de recherche, leurs coordonnées sont des nombres réels, qui sont traités comme des gènes, et leur aptitude correspond à la valeur de la fonction erreur évaluée à ce point. La recombinaison est une moyenne pondérée des coordonnées des parents et une mutation correspond à la variation aléatoire d'une coordonnée choisie au hasard. L'algorithme se résume comme suit :

1. Initialiser la population de $N_{\text{Individus}}$ en tirant aléatoirement les coordonnées de chaque individu et en évaluant son aptitude.
2. Pour chaque génération (g allant de 1 à $N_{\text{générations}}$) :
 - (a) Trier les individus selon leur aptitude.
 - (b) Choisir la moitié des individus comme parents en pigeant avec remise selon une probabilité basée sur le rang dans la population.
 - (c) Les parents survivent à la prochaine génération.
 - (d) Recombiner les gènes des parents pour former des enfants. Deux parents se reproduisent pour former deux enfants de la manière suivante :

$$\text{Enfant.gène} = \beta \cdot \text{Parent}_1.\text{gène} + (1 - \beta) \cdot \text{Parent}_2.\text{gène}$$
 où β est tiré aléatoirement entre 0 et 1 pour chaque gène et chaque enfant.
 - (e) Évaluer l'aptitude des enfants.
 - (f) Effectuer un certain nombre de mutations,

$$N_{\text{mutations}} = N_{\text{individus}} \cdot N_{\text{gènes}} \cdot (\text{Taux de mutation}).$$
 - (g) Évaluer l'aptitude des individus mutés.

3.1.3 Détails de l'implémentation

D'abord il faut noter que l'algorithme n'a pas été implémenté avec un codage binaire. À l'origine, les algorithmes génétiques ont été conçus pour travailler sur des séquences binaires qui encodent l'information des individus selon un schéma imposé par le problème à l'étude. Dans ce cas, la mutation et la recombinaison des gènes était plus littéralement implémentées en changeant les bits ou en croisant des sous-séquences de bits. Cette approche a connu du succès pour des problèmes combinatoires discrets, comme le problème du voyageur de commerce. Toutefois, le choix d'utiliser un encodage plutôt que d'optimiser directement les paramètres relève d'une croyance qu'il est utile d'opérer sur des sous-sections du problème. Or, il n'y a pas de résultats empiriques pour soutenir que l'encodage binaire est plus efficace ou robuste pour l'optimisation des problèmes à valeurs réelles [Davis 1991, Michalewicz 1992]. La tendance actuelle, dans le milieu de recherche sur les algorithmes génétiques, est de cesser d'utiliser les codages binaires. Ainsi, une implémentation basée sur la représentation des gènes par des valeurs réelles [Haupt & Haupt 1998] a été retenue.

Par ailleurs, malgré la prolifération des techniques pour implémenter la sélection et la recombinaison, il n'y a aucune preuve qu'une variante est supérieure à une autre de façon générale. Ainsi l'algorithme génétique a été implémenté en utilisant les mécanismes les plus simples, soit : une sélection des parents basée sur une probabilité uniforme, une mutation en tirant au hasard une nouvelle coordonnée à l'intérieur de bornes limites, et une recombinaison des gènes à partir d'une moyenne pondérée aléatoirement. De plus, il est à noter que le nombre de parents a été défini arbitrairement comme étant la moitié de la taille de la population (que l'on présume être un entier pair).

Les paramètres de la méthode sont : la taille de la population initiale, la taille de la population normale, le taux de mutation (μ) et le nombre maximal de générations.

3.2 Programmation évolutive

La programmation évolutive est un algorithme, originalement développé par Fogel [Fogel, Owens & Walsh 1966], qui est basé sur le principe d'évolution. Le mécanisme de recombinaison de gènes est mis à l'écart en faveur de la mutation. Cette méthode a déjà connu un certain succès pour le design d'un GFF avec un réseau à longs pas [Lee & Lai 2002]. Cet article prétend que la mutation est un mécanisme d'exploration plus efficace que la recombinaison.

3.2.1 Description du comportement

L'implémentation de la programmation évolutive, pour l'optimisation sur des valeurs réelles, peut être décrite comme suit. Une population initiale est formée de N points tirés aléatoirement. Encore une fois, chaque point représente un *individu*. Parmi ces individus, N parents sont choisis. Notons qu'un individu peut être choisi plus d'une fois, avec une probabilité reliée à son mérite. Le mérite d'un individu est défini par l'inverse de la valeur de la fonction. La règle de sélection des parents est donnée par une fonction de partition basée sur le mérite normalisé, c'est-à-dire le mérite d'un individu normalisé par rapport au mérite de la population entière. Les N parents subissent chacun une mutation pour donner N enfants, qui forment une nouvelle population. Le processus est répété pendant plusieurs générations. La mutation agit comme mécanisme d'exploration, alors que la convergence est assurée par un mécanisme qui réduit la portée de la mutation en fonction du mérite et/ou du nombre de générations écoulées. À titre d'exemple, la mutation peut être implémentée par une perturbation gaussienne centrée sur la valeur actuelle d'une coordonnée. Dans ce cas, la portée de la mutation est contrôlée par σ , la largeur en $\frac{1}{e}$, qui est définie comme suit :

$$\sigma = \sigma_0 \sqrt{1 - \frac{g}{g_{\max}}}, \quad (3.1)$$

où σ_0 est la valeur initiale, g est le compteur de générations et $g_{\max}$ est le nombre maximal de générations.

3.2.2 Algorithme de la méthode

L'algorithme suivant est inspiré de l'algorithme de Lee [Lee & Lai 2002]. Ici $N_{\text{parents}} = N_{\text{enfants}} = N_{\text{individus}} - 1$.

1. Initialiser la population de $N_{\text{Individus}}$ en tirant aléatoirement les coordonnées de chaque individu.
2. Pour chaque génération (g allant de 1 à $N_{\text{générations}}$) :
 - (a) Évaluer le mérite de tous les individus.
 - (b) Normaliser le mérite de chacun par rapport au mérite de l'ensemble de la population.
 - (c) Le meilleur individu survit sans mutation.
 - (d) Choisir les parents en pigeant $N_{\text{individus}} - 1$ avec remise en respectant une probabilité proportionnelle au mérite normalisé.
 - (e) Muter une coordonnée de tous les parents à l'aide d'une perturbation gaussienne qui respecte les bornes limites.

3.2.3 Détails de l'implémentation

Plusieurs variantes ont été essayées, mais c'est la perturbation gaussienne qui fut retenue pour la mutation. Il est important de souligner que cette perturbation doit être bornée. L'optimisation est faite sous contraintes, puisque les variables doivent respecter certaines contraintes physiques. De plus, une condition de frontière périodique est appliquée sur chaque dimension. La figure 3.1 illustre le bouclage qui empêche de tirer des points à l'extérieur de l'intervalle admissible de chaque variable,

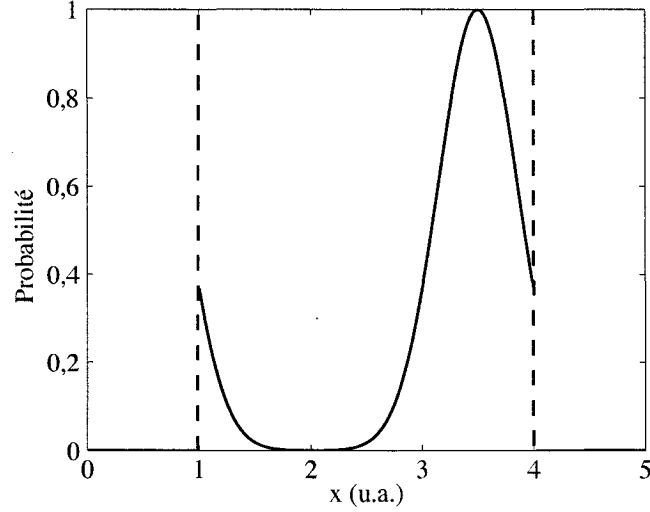


Figure 3.1 : Imposition d'une condition de frontière périodique sur une perturbation gaussienne, de sorte que la variable x demeure à l'intérieur des limites du domaine. Ici $x \in [1, 4]$.

tout en laissant la possibilité que la distribution gaussienne soit centrée sur n'importe quel point dans l'intervalle. De cette façon, le calibrage de la mutation est plus intuitif pour la programmation évolutive que l'algorithme génétique, puisque la demi-largeur σ est reliée à la largeur de l'intervalle de recherche. En effet, la demi-largeur initiale peut être définie comme étant une fraction fixe de l'intervalle de recherche ($\overleftrightarrow{x}$) imposé. Plutôt que définir directement le paramètre σ_0 , il est plus pratique d'utiliser un paramètre entier, χ . Puisque $6\sigma_0$ est un bon indicateur de la largeur totale de la gaussienne, σ_0 peut être relié arbitrairement à l'intervalle de recherche de la manière suivante :

$$6 \cdot (\sigma_0)_j \equiv \frac{\overleftrightarrow{x}_j}{\chi}. \quad (3.2)$$

À titre d'exemple, choisissons les réseaux à longs pas. Le coefficient de couplage peut s'écrire,

$$q_{n,j} = |q_{n,j} + \Delta q_{n,j}| e^{i(\phi_{n,j} + \Delta \phi_{n,j})}, \quad (3.3)$$

où n est l'indice de l'individu, j est l'indice de la position dans le réseau, et que $\Delta q_{n,j} \in [0, q_{\max}]$, $\Delta \phi_{n,j} \in [0, 2\pi]$ sont des perturbations gaussiennes centrées respectivement sur $q_{n,j}$ et $\phi_{n,j}$. Ainsi, avec $\chi = 3$, $(\sigma_0)_{n,j} = \frac{q_{\max}}{18}$ pour la perturbation gaussienne $\Delta q_{n,j}$. Dans ce cas, chaque variable a sa propre demi-largeur σ_j . Certaines variantes de la programmation évolutive utilisent la même demi-largeur pour tous les variables. De plus, il existe des algorithmes adaptatifs, qui optimisent automatiquement la valeur de σ au cours de l'optimisation.

Par ailleurs, la survie du meilleur individu de chaque génération n'est pas essentielle. Il s'agit uniquement d'une façon simple de s'assurer que l'information sur le meilleur point parmi toutes les générations ne soit pas perdue.

Les paramètres de la méthode sont : la taille de la population, la demi-largeur initiale (σ_0) de la perturbation gaussienne (ou le paramètre χ) et le nombre maximal de générations.

3.3 Division cellulaire

La plus grande difficulté dans le développement d'une heuristique d'optimisation est d'équilibrer les objectifs contradictoires d'exploration et de descente (convergence). Dans le cas de l'algorithme génétique, la recombinaison des gènes agit comme mécanisme de descente, tandis que l'exploration lointaine résulte de l'action des mutations. Or, la mutation revient essentiellement à tirer un point au hasard. Plus la fonction à minimiser est oscillante, plus l'exploration est nécessaire. On pourrait tout simplement tirer plus de points, mais on ne veut pas tomber dans l'autre extrême qui est tirer uniquement des points aléatoires (*pure random search*). Tirer des points revient à échantillonner aléatoirement la fonction, donc pour raffiner l'échantillonnage il faut réduire la zone à l'intérieur de laquelle les points sont tirés. Un mécanisme de partition de l'espace de recherche, qui a une certaine analogie avec la division cellulaire dans la nature, a été développé afin de contrôler l'exploration de la fonction.

Une zone de recherche forme une *cellule* dont la taille est réduite par un mécanisme de «refroidissement». Elle est divisée en deux afin d'éliminer la compétition entre plusieurs minima à l'intérieur de la cellule. Le processus est répété jusqu'à l'obtention de cellules qui encadrent les minima intéressants.

3.3.1 Description du comportement

Premièrement, il faut un moyen de définir une région à l'intérieur de laquelle on peut tirer des points. Or, il est plus facile d'implémenter des hyper-rectangles que des hyper-sphères [Chelouah & Siarry 1992]. Deuxièmement, il est à noter qu'un hyper-rectangle forme une boîte en N dimensions, et qu'il ne faut que deux points pour définir cette boîte : les deux coins opposés.

Prenons l'exemple de la minimisation d'une fonction à deux dimensions afin d'illustrer le comportement, sachant que le mécanisme se généralise aisément à N dimensions. La figure 3.2 illustre l'algorithme décrit ci-dessous. Initialement, le domaine de recherche imposé forme la première cellule mère rectangulaire. $N_{\text{individus}}$ points sont tirés aléatoirement dans cette région. Les individus sont triés selon leur mérite, c'est-à-dire dans l'ordre décroissant de l'inverse de la valeur de la fonction en ces points. Le mécanisme de «refroidissement» consiste à garder les meilleurs $N_{\text{conservés}}$ points parmi la population totale (8 meilleurs parmi 10 dans notre exemple) et de réduire la taille de cellule de façon à englober entièrement ces $N_{\text{conservés}}$ points (voir figure 3.2). Afin de réduire la compétition entre les multiples minima qui peuvent exister à l'intérieur de la cellule, la zone est aléatoirement divisée en deux cellules filles. Il suffit alors de tirer au hasard les points requis pour ramener la population de chaque cellule à $N_{\text{individus}}$. Ce processus peut être répété *ad infinitum*.

3.3.2 Algorithme de la méthode

L'algorithme décrit dans la sous-section précédente présente une version simplifiée de la méthode. L'algorithme qui suit est une version améliorée. Le processus de divi-

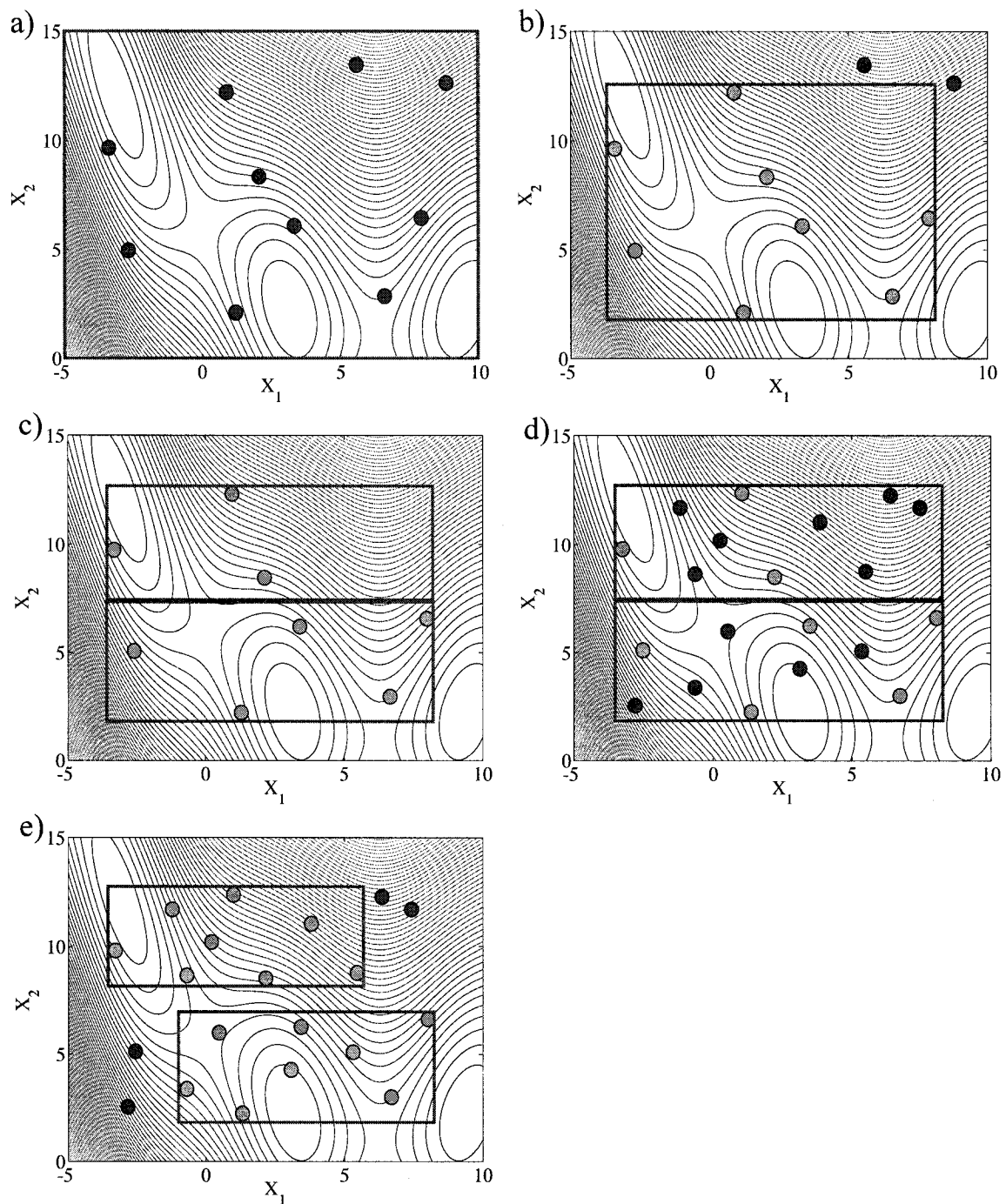


Figure 3.2 : Illustration de l'algorithme de la méthode de *division cellulaire*. Dans cet exemple $N_{\text{conservés}} = 8$ et $N_{\text{individus}} = 10$. a) 10 points sont tirés aléatoirement dans la cellule mère, b) La cellule est réduite pour encadrer les 8 meilleurs points, c) La cellule est divisée en 2. d) Des points sont tirés au hasard pour ramener la population de chaque cellule à 10, e) Chaque cellule est rapetissée de nouveau et continue à évoluer.

sion et de refroidissement de toutes les cellules constitue une génération. Une cellule correspond à une structure qui contient deux points limites, indiquant les limites de la cellule, ainsi qu'une population de $N_{\text{individus}}$ points, utilisés pour l'exploration de la fonction.

1. Initialiser le vecteur de cellules à une cellule, soit la cellule mère qui prend les dimensions du domaine de recherche imposé.
2. Initialiser la population de la première cellule en tirant uniformément $N_{\text{individus}}$ points à l'intérieur des limites de la cellule.
3. Trier les individus de la population selon leur mérite.
4. Rapetisser la cellule mère en réduisant sa taille de façon à englober les $N_{\text{conservés}}$ meilleurs points parmi les $N_{\text{individus}}$. Ainsi, pour *chaque dimension*, un point limite prend le minimum et l'autre le maximum de toutes les coordonnées des $N_{\text{conservés}}$ points.
5. Pour chaque génération (g allant de 1 à $N_{\text{générations}}$) :
 - (a) Créer un nouveau vecteur de cellules 2 fois plus grand que l'ancien.
 - (b) Définir les limites des cellules du nouveau vecteur en divisant chaque cellule de l'ancienne génération en 2 cellules filles, selon une dimension choisie aléatoirement.
 - (c) Copier les points des anciennes cellules dans les cellules filles correspondantes.
 - (d) Effacer l'ancien vecteur de cellules.
 - (e) Échantillonner les nouvelles cellules en tirant uniformément des points à l'intérieur de chaque cellule, jusqu'à ce que la population de la cellule remonte à $N_{\text{individus}}$.
 - (f) Trier les individus de chaque population selon leur mérite.

- (g) Rapetisser les cellules en réduisant leur taille de façon à englober les $N_{\text{conservés}}$ meilleurs points parmi les $N_{\text{individus}}$. Ainsi, pour chaque dimension, un point limite prend l'*infimum* et l'autre le *suprémum* de toutes les coordonnées des $N_{\text{conservés}}$ points.
6. Pour chaque itération supplémentaire (j allant de 1 à $N_{\text{itérations}}$) :
- (a) Trier les cellules selon le mérite de l'individu le plus méritant de chaque cellule.
 - (b) Conserver uniquement les $(N_{\text{cellules}})_j$ meilleures cellules.
 - (c) Répéter l'étape 5 avec $(N_{\text{générations}})_j$.
7. Appliquer une méthode de descente sur les $N_{\text{descentes}}$ meilleures cellules.

3.3.3 Détails de l'implémentation

La division binaire entraîne évidemment une croissance exponentielle du nombre de cellules. De plus, certaines cellules sont des descendantes de régions sans intérêt. Ainsi il y a beaucoup d'information d'utilité variable. Il faut donc un mécanisme pour trier les cellules et conserver celles qui valent la peine. Par ailleurs, la méthode de division cellulaire est forte en exploration mais plutôt faible en descente. L'algorithme fonctionne mais nécessite un grand nombre d'évaluations de fonction car le mécanisme de «refroidissement» est un processus de descente peu efficace.

3.3.4 Freinage de la croissance exponentielle des cellules

Afin de freiner la croissance du nombre de cellules, il faut tronquer l'arbre généalogique. Or, il y a plusieurs façons arbitraires de procéder. Dans le but de demeurer général, une liste de *méta-générations* peut être fournie à l'algorithme. Une méta-génération consiste en un certain nombre de cellules initiales qui ont évolué pendant un certain nombre de générations. Ainsi, n'importe quelle arborescence généalogique

peut être indiquée au programme de division cellulaire en définissant une suite de méta-génération. À titre d'exemple, il est possible de conserver les 16 meilleures cellules parmi 128, les faire évoluer pendant 4 générations, conserver les 8 meilleures parmi les 128 nouvelles cellules, évoluer pendant 5 générations, et ainsi de suite. Il est à noter qu'il n'existe pas de recette universelle et que la qualité de la convergence dépend fortement de la fonction à minimiser.

3.3.5 Lancement d'heuristiques de descente

La force de l'algorithme de division cellulaire est de faire une partition de l'espace en plus petites régions qui sont plus faciles à optimiser. C'est le principe de diviser pour régner. Ainsi, la méthode a tout à gagner à être combinée à d'autres heuristiques d'optimisation. En admettant que chaque cellule ne contient que quelques minima, une méthode de descente classique pourrait suffire. Une méthode classique peut donc être lancée à partir du meilleur point de chaque cellule, trouvé à la suite de l'optimisation par la méthode de division cellulaire. La *méthode du gradient*, qui consiste à effectuer des pas dans la direction de pente maximale («steepest descent method»), a été implémentée. Cette technique a été retenue pour sa simplicité, même si elle a tendance à zigzaguer inutilement.

3.4 Comparaison des méthodes pour l'optimisation de diverses fonctions tests

Avant de s'attaquer aux problèmes d'optimisation des composants tout-fibre, il faut comparer la performance des méthodes d'optimisation sur quelques fonctions plus simples. Il est important de comparer les méthodes sur un grand ensemble de fonctions tests pour vraiment avoir une idée de l'efficacité (rapidité de convergence), de la précision (justesse du minimum trouvé) et de la robustesse (taux de réussite) des méthodes. Malheureusement, il n'existe pas de batterie standard de fonctions à

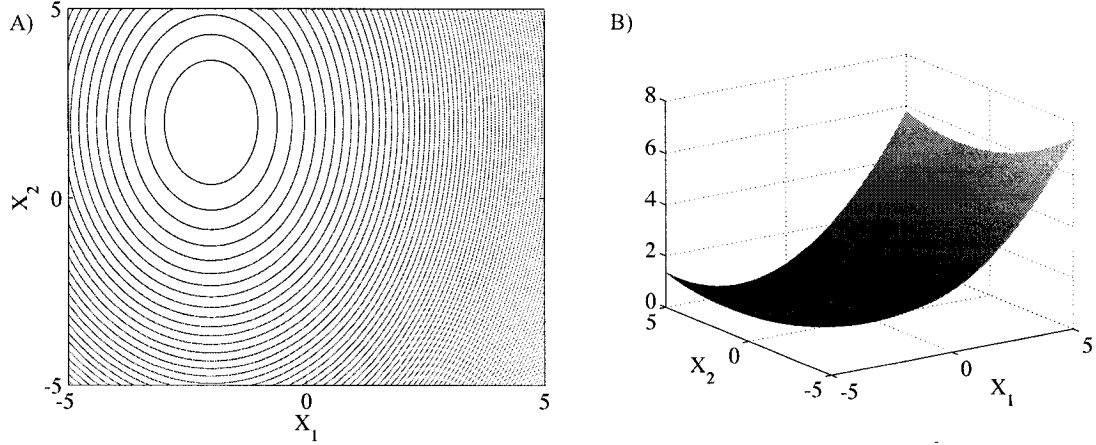


Figure 3.3 : Courbes de niveau (a) et topologie (b) de la fonction *de Jong*.

essayer. Néanmoins, les trois fonctions suivantes ont été retenues pour illustrer les concepts mentionnés ci-haut. Le but de cette section est de montrer que le choix optimal des paramètres de contrôle pour chaque méthode dépend de la fonction à minimiser, que les résultats obtenus dépendent énormément de ce choix et que la supériorité d'une méthode par rapport à une autre est discutable.

3.4.1 Fonction test *de Jong*

D'abord, il est bon de commencer par une fonction triviale qui sert à comparer la convergence. La fonction *de Jong* (figure 3.3) consiste en un simple puits de potentiel parabolique en N dimensions. En deux dimensions :

$$F_{DJ}(x_1, x_2) = a_1(x_1 - b_1)^2 + a_2(x_2 - b_2)^2, \quad (3.4)$$

où $a_{1,2}$ et $b_{1,2}$ sont des constantes choisies arbitrairement (pourvu que $a_{1,2} > 0$).

Étant donné la nature aléatoire des méthodes d'optimisation, toute analyse de performance doit reposer sur une étude statistique du comportement de la méthode. Ainsi 1000 essais ont été effectués et les valeurs moyennes des données sont calculées

sur les tentatives réussies. Une minimisation est considérée réussie si une précision minimale cible est atteinte sur la valeur de la fonction à l'intérieur d'un certain nombre d'évaluations de fonction. Dans le cas de la fonction *de Joug*, une précision d'au moins 10^{-5} était recherchée à l'intérieur de 3000 évaluations de fonction. De plus, la robustesse peut être caractérisée par le taux de réussite sur ces 1000 essais.

Naturellement, le choix des paramètres de chaque méthode influence la qualité de la minimisation. L'annexe C montre comment les paramètres optimaux, présentés dans le tableau 3.1, ont été déterminés. Essentiellement, les paramètres ont été choisis de façon à maximiser le taux de réussite. Par ailleurs, pour évaluer la convergence il est utile de tracer l'écart ΔF , entre le meilleur point trouvé et la vraie valeur du minimum ($\Delta F = [F_{\min}]_{\text{trouvé}} - [F_{\min}]_{\text{réel}}$), en fonction du nombre d'évaluations de cette fonction. Étant donné que le minimum de la fonction est zéro, cet écart correspond tout simplement à la meilleure valeur de F_{DJ} trouvée. La figure 3.4 montre la variabilité de la convergence d'une méthode d'optimisation sur plusieurs essais. Or, pour déterminer le comportement moyen des courbes de convergence, il a été jugé bon d'effectuer une moyenne sur une échelle logarithmique afin de tenir compte des différentes échelles de grandeur. Cependant, il est à noter que les valeurs moyennes retrouvées dans l'annexe C et dans les tableaux de cette section correspondent à des moyennes calculées sur une échelle linéaire, dans quel cas la moyenne est biaisée

Tableau 3.1 : Paramètres optimaux pour obtenir une précision qui est au moins inférieure à 10^{-5} lors de l'optimisation de la fonction *de Joug*.

Méthode	Paramètres		Taux de réussite	F_{DJ} moyen
Algorithme génétique	$(N_{\text{pop}})_{\text{ini}}$	100	96,8 %	$1,98 \cdot 10^{-8}$
	μ	0,1		
	N_{pop}	100		
Méthode évolutive	χ	10	92,8 %	$2,67 \cdot 10^{-7}$
	N_{pop}	90		
Division cellulaire	$N_{\text{conservés}}$	10	79,3 %	$7,46 \cdot 10^{-8}$
	N_{pop}	100		

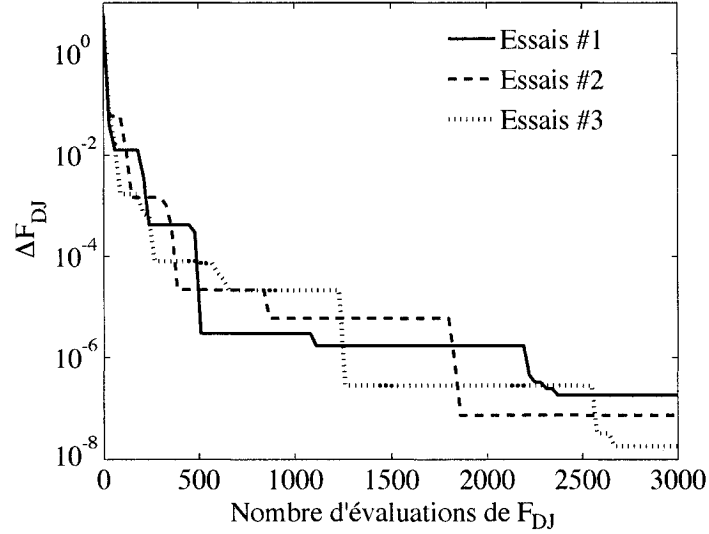


Figure 3.4 : Exemple de courbes de convergence pour l'optimisation de la fonction *de Joung*. Plusieurs essais de minimisation avec la méthode de division cellulaire (version simple) montre un taux de convergence variable.

vers la pire valeur trouvée. La figure 3.5 trace la courbe de convergence «moyenne» $([\Delta F]_{\text{moy}})$ pour les trois méthodes d'optimisation, où $[\Delta F]_{\text{moy}}$ est une moyenne sur les tentatives réussies qui est défini de la façon suivante :

$$\log_{10}([\Delta F]_{\text{moy}}) \equiv \frac{1}{N_{\text{succès}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{succès}}} \log_{10}(\Delta F_j), \quad (3.5)$$

avec $N_{\text{succès}}$, le nombre de tentatives réussies.

Pour cette fonction simple, on constate que l'algorithme génétique converge beaucoup plus rapidement que les deux autres méthodes, qui semblent comparables. Il est à noter que la méthode de division cellulaire est testée dans sa version simple, c'est-à-dire sans méta-générations et sans être combinée avec d'autres heuristiques. De plus, les statistiques de la figure 3.5 sont légèrement différents de ceux du tableau 3.1, car il ne s'agit pas des mêmes essais. Souvent les heuristiques d'optimisation semblent être la panacée aux problèmes d'optimisation, mais les méthodes classiques

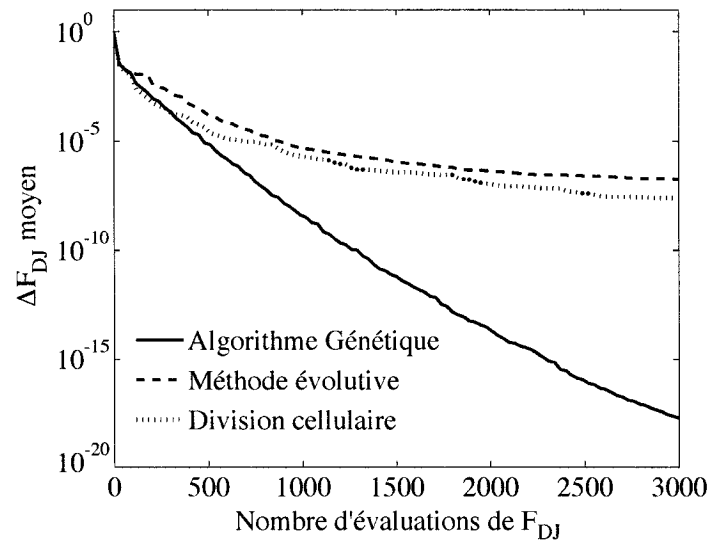


Figure 3.5 : Évolution de $(\Delta F)_{\text{moy}}$ lors de l'optimisation de la fonction *de Joug*. Les méthodes ont atteint une précision d'au moins 10^{-5} avec un taux de réussite sur 1000 essais de 94,9 % pour l'algorithme génétique, 84 % pour la programmation évolutive et 72,1 % pour la division cellulaire.

demeurent plus efficaces pour certains problèmes simples. À titre de comparaison, la méthode du gradient peut atteindre une précision de 10^{-8} après 17 évaluations de la fonction *de Joug*.

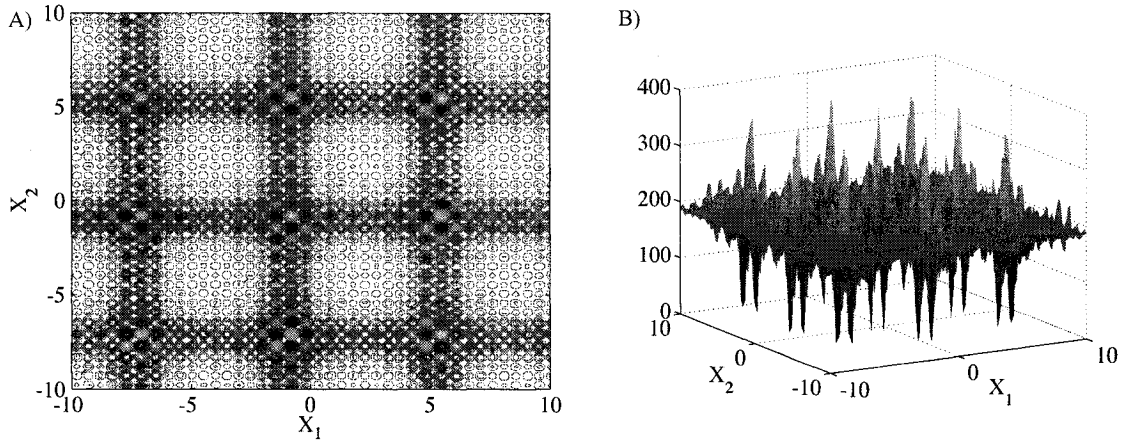


Figure 3.6 : Courbes de niveau et topologie de la fonction *Shubert*.

3.4.2 Fonction test de *Shubert*

La majorité des heuristiques d'optimisation ne trouvent qu'un minimum à la fois. Dans le cas où il y a plusieurs minima globaux, il faut lancer les heuristiques plusieurs fois avant de les dénombrer. À titre d'exemple, la fonction *Shubert* (figure 3.6),

$$F_{SH}(x_1, x_2) = \left\{ \sum_{j=1}^5 j \cdot \cos([j+1]x_1 + j) \right\} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^5 j \cdot \cos([j+1]x_2 + j) \right\} + \mathcal{K}, \quad (3.6)$$

possède 18 minima globaux et 760 minima locaux. $\mathcal{K} = 186,73090883103$ est une constante ajoutée arbitrairement pour avoir une fonction définie positive.

Ce cas de figure permet d'illustrer un aspect intéressant de la division cellulaire : l'atteinte simultanée de plusieurs minima globaux. La figure 3.7 illustre les points obtenus suite à une tentative de minimisation par la méthode de division cellulaire. On constate clairement que plusieurs des minima globaux ont été cernés ; quatre points ont même déjà atteint la précision ciblée, qui était d'au moins 0,1.

Le tableau 3.2 présente les paramètres optimaux pour effectuer la minimisation avec une précision d'au moins 0,1. Encore une fois, les statistiques ont été compilées sur 1000 essais. Dans les exemples qui suivent, la méthode dite *classique* consiste en

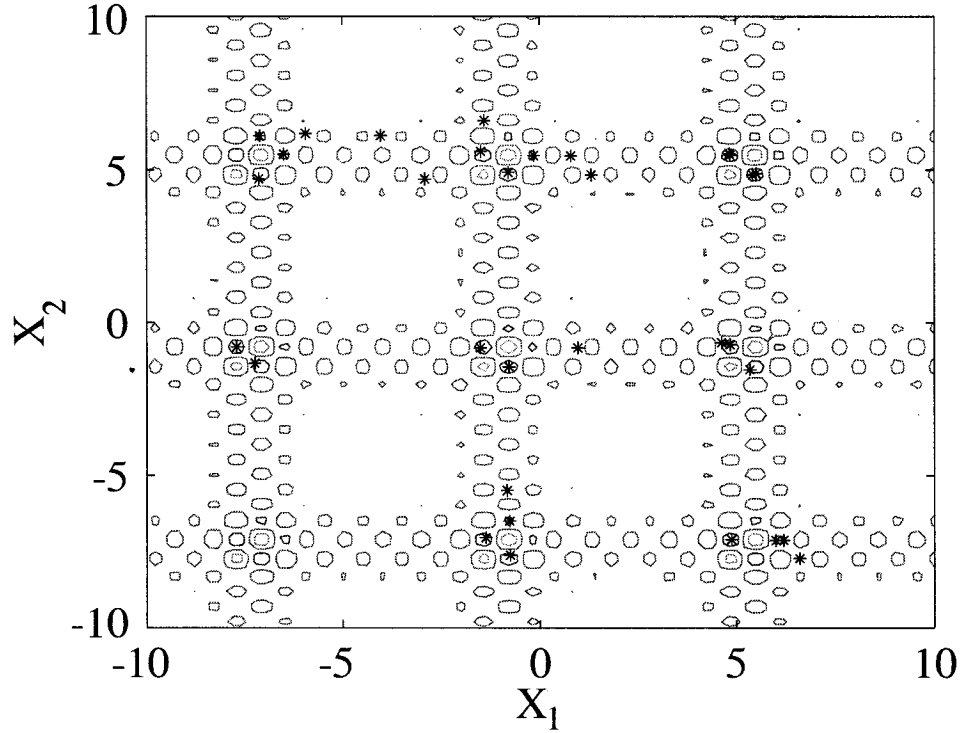


Figure 3.7 : Détermination simultanée de plusieurs minima globaux de la fonction *Shubert* à l'aide de la méthode de division cellulaire. Plusieurs points sont proches des minima globaux (comparer avec la figure 3.6), dont 4 points ayant $F_{SH} < 0.1$, la tolérance qui était fixée lors de cette minimisation.

Tableau 3.2 : Paramètres optimaux pour obtenir une précision qui est au moins inférieure à 0,1 lors de l'optimisation de la fonction *Shubert*. Le paramètre $\text{Max}_{\text{descente}}$ correspond au nombre maximal d'évaluations de la fonction permis pour une tentative de la méthode classique.

Méthode	Paramètres		Taux de réussite	F_{SH} moyen
Algorithme génétique	$(N_{\text{pop}})_{\text{ini}}$	100	77,3 %	$9,27 \cdot 10^{-3}$
	μ	0,1		
	N_{pop}	100		
Méthode évolutive	χ	10	90 %	$3,50 \cdot 10^{-2}$
	N_{pop}	40		
Division cellulaire	$N_{\text{conservés}}$	10	11,1 %	$5,01 \cdot 10^{-2}$
	N_{pop}	80		
Classique	$\text{Max}_{\text{descente}}$	100	69,5 %	$1,03 \cdot 10^{-9}$

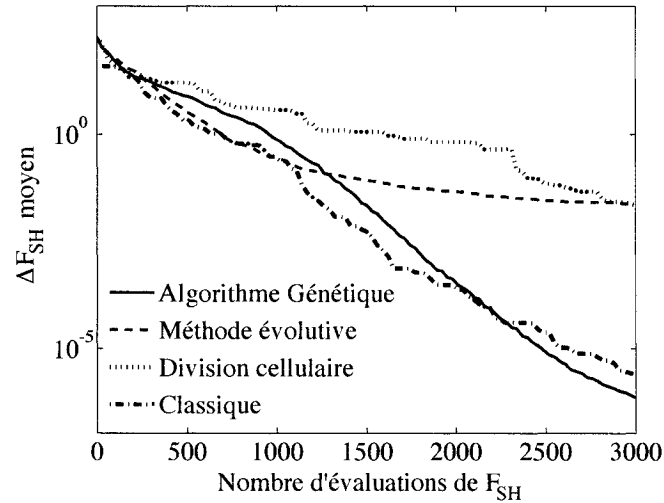


Figure 3.8 : Évolution de $(\Delta F)_{\text{moy}}$ lors de l'optimisation de la fonction *Shubert*. Les méthodes ont atteint une précision d'au moins 10^{-3} avec un taux de réussite sur 1000 essais de 80,1 % pour l'algorithme génétique, 82,7 % pour la programmation évolutive, 9,9 % pour la division cellulaire et 62,9% pour la méthode classique.

un *multinitium*¹ de la méthode du gradient.

La figure 3.8 montre les courbes de convergence «moyennes». Cette fois-ci, la multiplicité des minima commence à départager l'efficacité des différentes méthodes. Bien que d'autres méthodes ont convergé plus vite initialement, l'algorithme génétique a atteint la plus grande précision après 3000 évaluations de fonction. Toutefois, il est à noter que la méthode évolutive a une plus grande robustesse, ce qui est très désirable étant donné la nature aléatoire de l'optimisation. Il se trouve que la méthode de division cellulaire est surclassée par les autres techniques et que la méthode classique a une performance acceptable. Lorsque la quantité de minima locaux augmente, le succès de la méthode classique devient de plus en plus fortuit.

¹lancement multiple avec une position de départ aléatoire

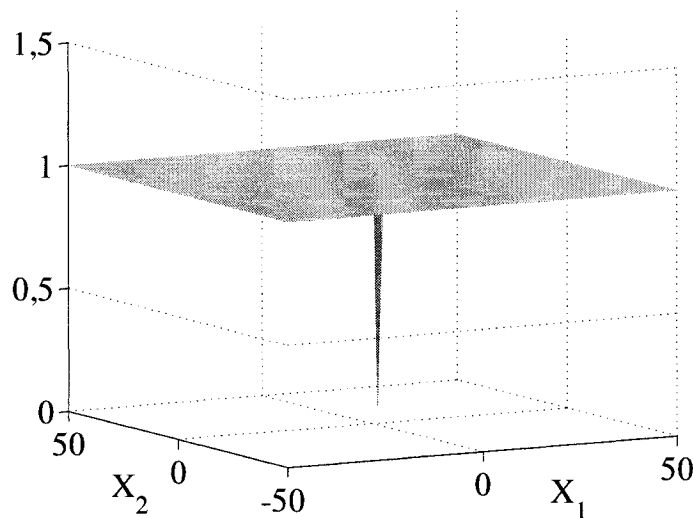


Figure 3.9 : Topologie de la fonction *Easom*.

3.4.3 Fonction test d'*Easom*

Cette fonction illustre le problème de *l'aiguille dans la botte de foin*, c'est-à-dire un minimum global très profond mais qui est perdu dans une mer de minima locaux. Il faut beaucoup d'exploration avant de trouver le minimum global. La figure 3.9 présente la topologie de la fonction, qui s'écrit,

$$F_{EA}(x_1, x_2) = -\cos(x_1) \cos(x_2) \exp(-[(x_1 - \pi)^2 + (x_2 - \pi)^2]) + 1, \quad (3.7)$$

où la constante est rajoutée arbitrairement pour avoir une fonction définie positive.

Encore une fois, suite à l'analyse d'un millier d'essais, le tableau 3.3 présente les paramètres optimaux pour minimiser cette fonction avec une précision d'au moins 10^{-2} après 3000 évaluations de fonction. La figure 3.10 présente les courbes de convergence «moyennes». Cette fois-ci, l'algorithme génétique semble nettement supérieur. De plus, la précision de la méthode classique est à prendre avec un grain de sel, car son taux de réussite est plutôt faible. La mauvaise performance de la méthode de

division cellulaire est probablement attribuable à un refroidissement trop rapide dans lequel le minimum global s'est retrouvé à l'extérieur des cellules de recherche.

Dans les sous-sections précédentes, nous avons vu que le choix des paramètres affecte la performance des méthodes d'optimisation et que les valeurs optimales dépendent de la fonction à minimiser. Or, un certain dilemme se pose pour l'optimisation du spectre des composants optiques. Étant donné l'énorme temps de calcul requis pour une tentative de minimisation, il n'est plus raisonnable d'effectuer une étude statistique pour déterminer systématiquement les paramètres optimaux. Ainsi, les paramètres utilisés doivent être choisis aveuglément, en sachant que de meilleurs résultats peuvent potentiellement être obtenus à l'aide d'autres valeurs. Intuitivement, la recherche du meilleur profil de couplage semble analogue à la recherche d'une *aiguille dans une botte de foin*, comme pour la fonction *Easom*. C'est donc les paramètres optimaux de la fonction *Easom* qui ont été choisis pour tenter l'optimisation des composants optiques.

Tableau 3.3 : Paramètres optimaux pour obtenir une précision au moins inférieure à 10^{-2} lors de l'optimisation de la fonction *Easom*.

Méthode	Paramètres		Taux de réussite	F_{EA} moyen
Algorithme génétique	$(N_{pop})_{ini}$	100	87,3 %	$4,43 \cdot 10^{-4}$
	μ	0,1		
	N_{pop}	100		
Méthode évolutive	χ	6	67,8 %	$2,40 \cdot 10^{-3}$
	N_{pop}	50		
Division cellulaire	$N_{conservés}$	10	17 %	$4,45 \cdot 10^{-3}$
	N_{pop}	100		
Classique	$Max_{descente}$	30	22,3 %	$4,49 \cdot 10^{-4}$

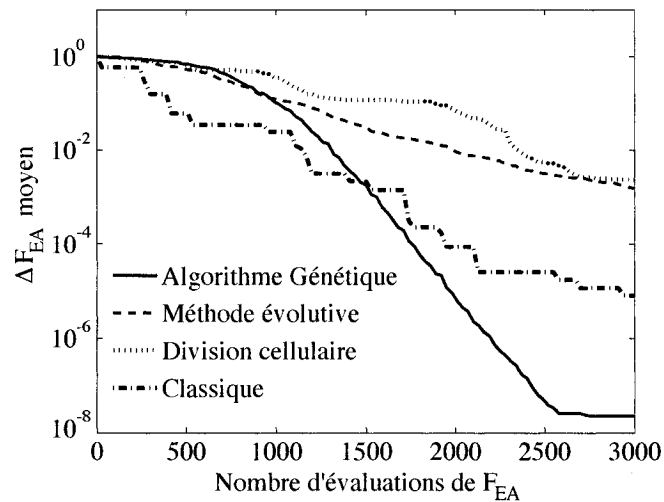


Figure 3.10 : Évolution de $(\Delta F)_{moy}$ lors de l'optimisation de la fonction *Easom*. Les méthodes ont atteint une précision d'au moins 10^{-2} avec un taux de réussite sur 1000 essais de 84,2 % pour l'algorithme génétique, 65,8 % pour la programmation évolutive, 24,2 % pour la division cellulaire et 18,5 % pour la méthode classique.

3.5 Optimisation du spectre d'un réseau à longs pas

Afin d'optimiser le spectre d'un réseau à longs pas, il faut construire une fonction d'erreur. D'abord, pour calculer le spectre, le profil de couplage d'un réseau à long pas est modélisé par

$$q(z_j) = |q_j|e^{i\phi_j}, \quad (3.8)$$

où $|q_j|$ et ϕ_j sont des fonctions constantes par morceaux.

Il est à noter que les valeurs de $|q_j|$ sont comprises entre 0 et $q_{\max}$, tandis que les valeurs de ϕ_j sont comprises entre 0 et 2π . Par la suite, le spectre est calculé à partir de ce profil de couplage à l'aide des méthodes décrites dans le chapitre 1. Par après, la technique des moindres carrés est utilisée comme discriminant. En d'autres mots, la fonction d'erreur correspond à la somme, sur toutes les valeurs en λ , des carrés des différences entre le spectre calculé et un spectre cible :

$$F = \sum_{i=1}^{N_\lambda} \left[|S_{\text{théo}}(\lambda_i)| - |S_{\text{exp}}(\lambda_i)| \right]^2. \quad (3.9)$$

Il faut souligner que la fonction d'erreur compare l'amplitude des spectres et que la phase n'est pas optimisée.

Le réseau est donc considéré comme une suite de N_{couches} réseaux uniformes. Chaque couche uniforme nécessite 2 variables, donc il faut effectuer une optimisation d'une fonction de $2N_{\text{couches}}$ variables. Considérons d'abord des systèmes à 5 couches avec $q_{\max} = 20 \text{ cm}^{-1}$. Comme premier cas de figure, un point est choisi arbitrairement dans l'espace de recherche afin de servir de cible de référence. Ainsi, avec un minimum global connu, il est possible de comparer qualitativement la performance des méthodes d'optimisation, même si une étude statistique n'est pas possible. Plutôt que de prendre un point au hasard, un profil simple a été choisi comme référence. Les figures 3.11.a et 3.11.b présentent respectivement le profil cible et le spectre cible

correspondant. L'optimisation a été effectuée avec un critère d'arrêt de 100 000 évaluations de fonction (temps de calcul ~ 19 minutes). Tel qu'expliqué plus haut, les méthodes d'optimisation utilisaient les paramètres optimaux pour la minimisation de la fonction *Easom* (voir tableau 3.3). Les figures 3.11.c-f présentent le meilleur profil de couplage obtenu à l'aide de chaque méthode d'optimisation. On constate que les profils trouvés sont très différents du profil cible. En effet, il est très difficile d'obtenir plusieurs paliers à la même hauteur pour $|q|$, comme dans le profil cible. Cet effet est exacerbé par le fait que le coefficient de couplage du profil cible est un ordre de grandeur plus faible que la valeur de $q_{\max}$ utilisée comme borne.

La figure 3.12.a compare les spectres optimisés par rapport au spectre cible. On constate que la méthode évolutive donne un accord exceptionnel tandis que les autres méthodes sont très loin d'être en accord avec le spectre cible. À titre de comparaison, les meilleurs valeurs de F trouvées sont : $F = 8,1 \cdot 10^{-3}$ pour la méthode évolutive, $F = 2,3 \cdot 10^{-2}$ pour l'algorithme génétique, $F = 4,4 \cdot 10^{-2}$ pour la division cellulaire et $F = 6,3 \cdot 10^{-2}$ pour la méthode classique. Les courbes de convergence sont présentées à la figure 3.12.b et on remarque que la méthode évolutive est plus efficace. Encore une fois, il faut souligner que ces comparaisons sont qualitatives puisque les paramètres choisis pour les méthodes ne sont peut-être pas optimaux. Néanmoins, les études sur les fonctions tests nous laissent croire que l'algorithme génétique est suffisant, mais on constate à quel point il est important d'essayer une variété de méthodes. Cet exemple sert aussi à illustrer que deux profils de couplage très différents, 3.11.a et 3.11.d, peuvent donner des spectres semblables en intensité, même si leurs dispersions sont différentes.

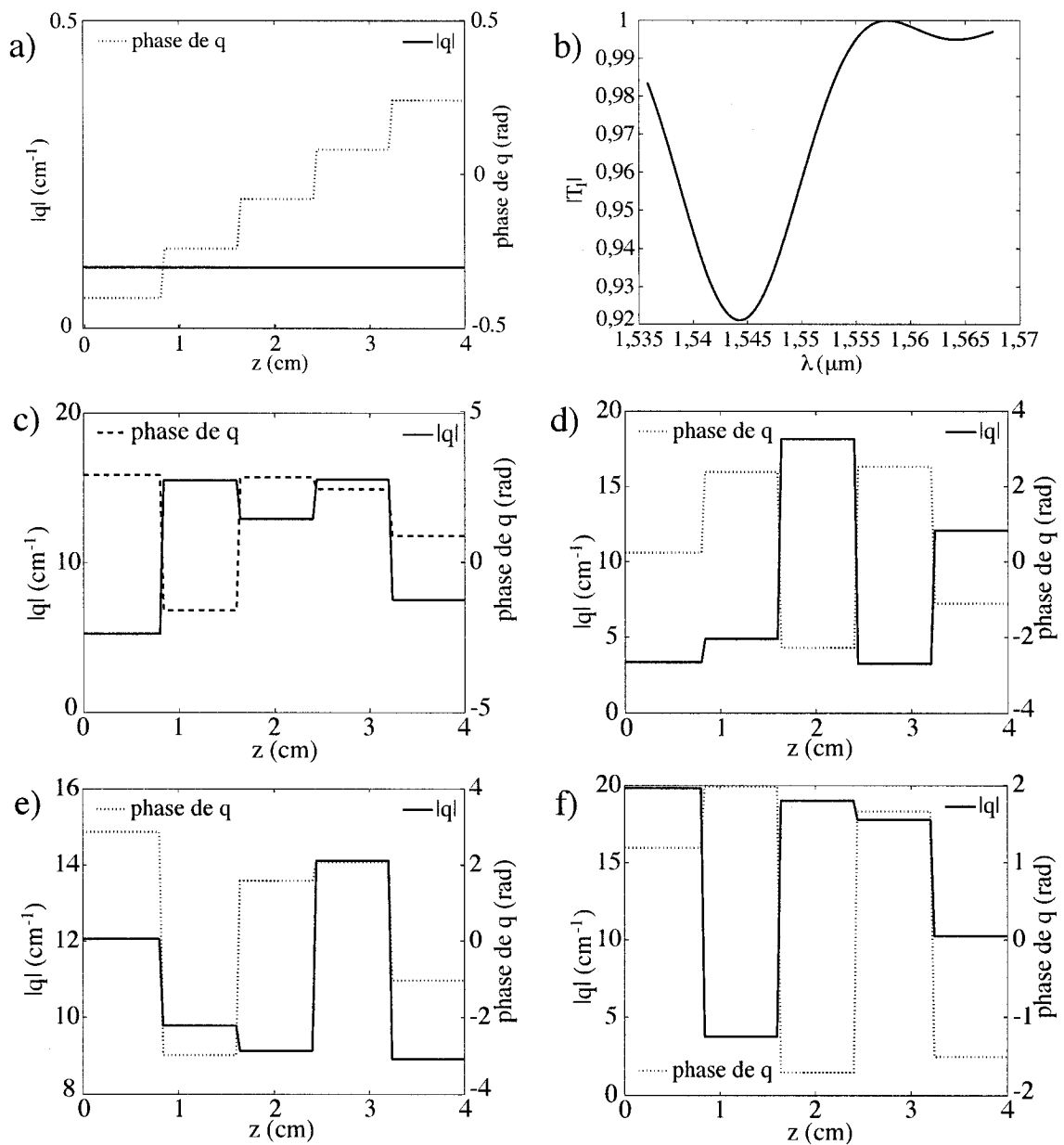


Figure 3.11 : Optimisation d'un réseau à longs pas quelconque. a) profil complexe cible, b) spectre du profil cible, ainsi que les meilleurs profils trouvés par c) l'algorithme génétique, d) la méthode évolutive, e) la méthode de division cellulaire et f) la méthode classique. Les profils trouvés sont très différents du profil cible.

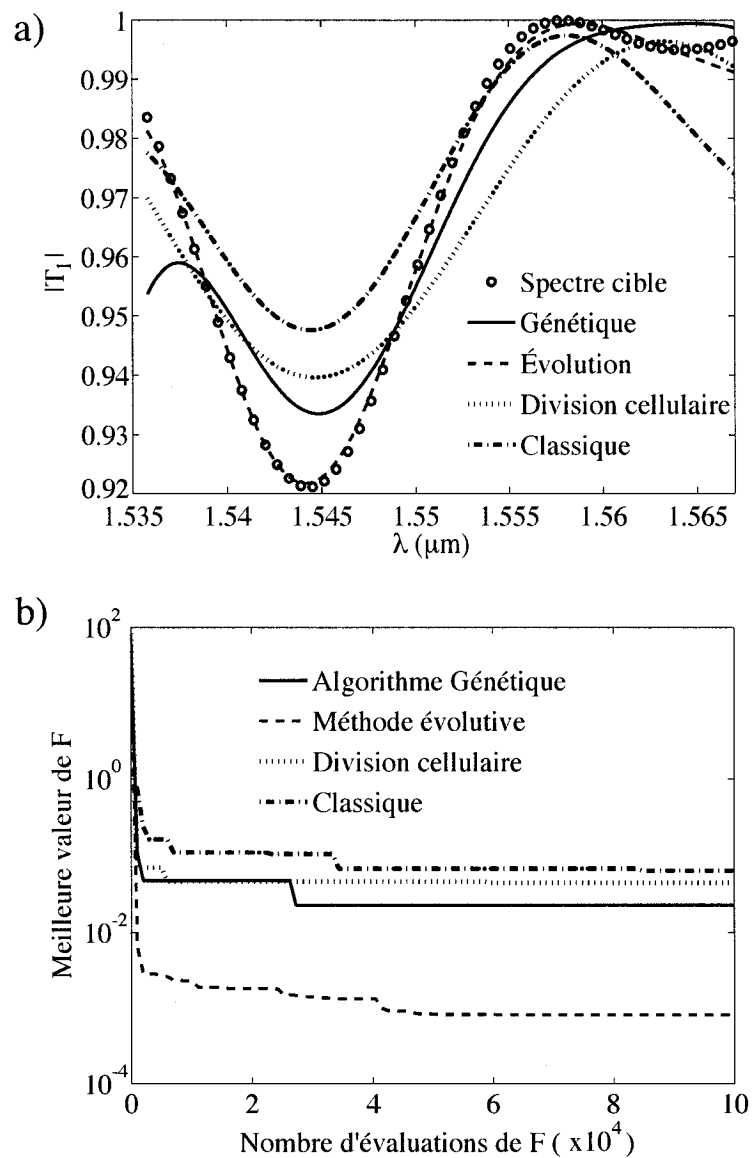


Figure 3.12 : Optimisation d'un réseau à longs pas quelconque. a) Les meilleurs spectres trouvés par les différentes méthodes d'optimisation, b) Les courbes de convergence des méthodes d'optimisation. Avec les paramètres de la table 3.3, la méthode évolutive s'avère nettement meilleure pour l'optimisation du spectre d'un réseau à longs pas.

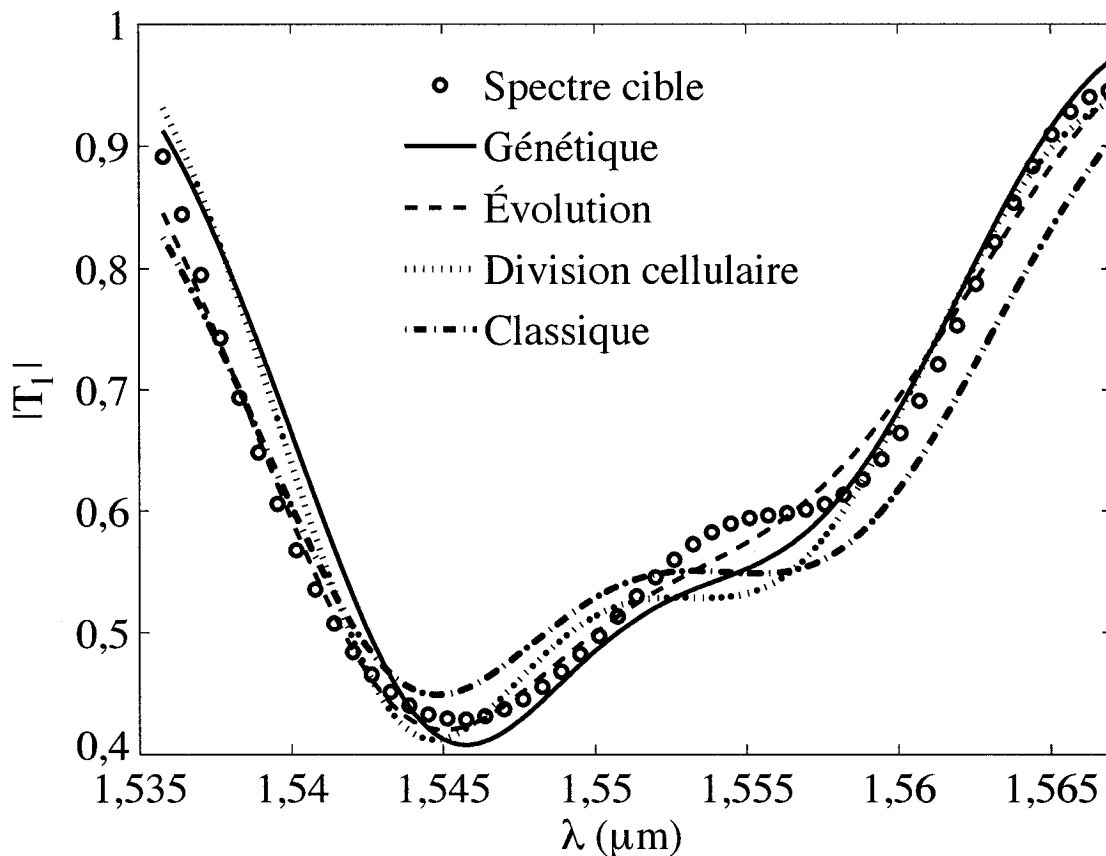


Figure 3.13 : Spectres obtenus lors de l'optimisation d'un réseau à longs pas à 5 couches pour obtenir un GFF. La méthode évolutive donne le meilleur accord.

Par la suite, l'optimisation du spectre d'un GFF a été tentée avec un réseau à 5 couches. La figure 3.13 présente les spectres obtenus et la figure 3.14 présente les profils correspondants. En ordre croissant, les meilleures valeurs de F trouvées sont : $F = 8,90 \cdot 10^{-2}$ pour la méthode évolutive, $F = 0,41$ pour la division cellulaire, $F = 0,45$ pour l'algorithme génétique et $F = 0,55$ pour la méthode classique. La méthode évolutive a encore trouvé le spectre le plus près du spectre cible. Néanmoins, les autres méthodes ont trouvé des spectres qui respectent la forme sinueuse du GFF même si l'accord n'est pas parfait.

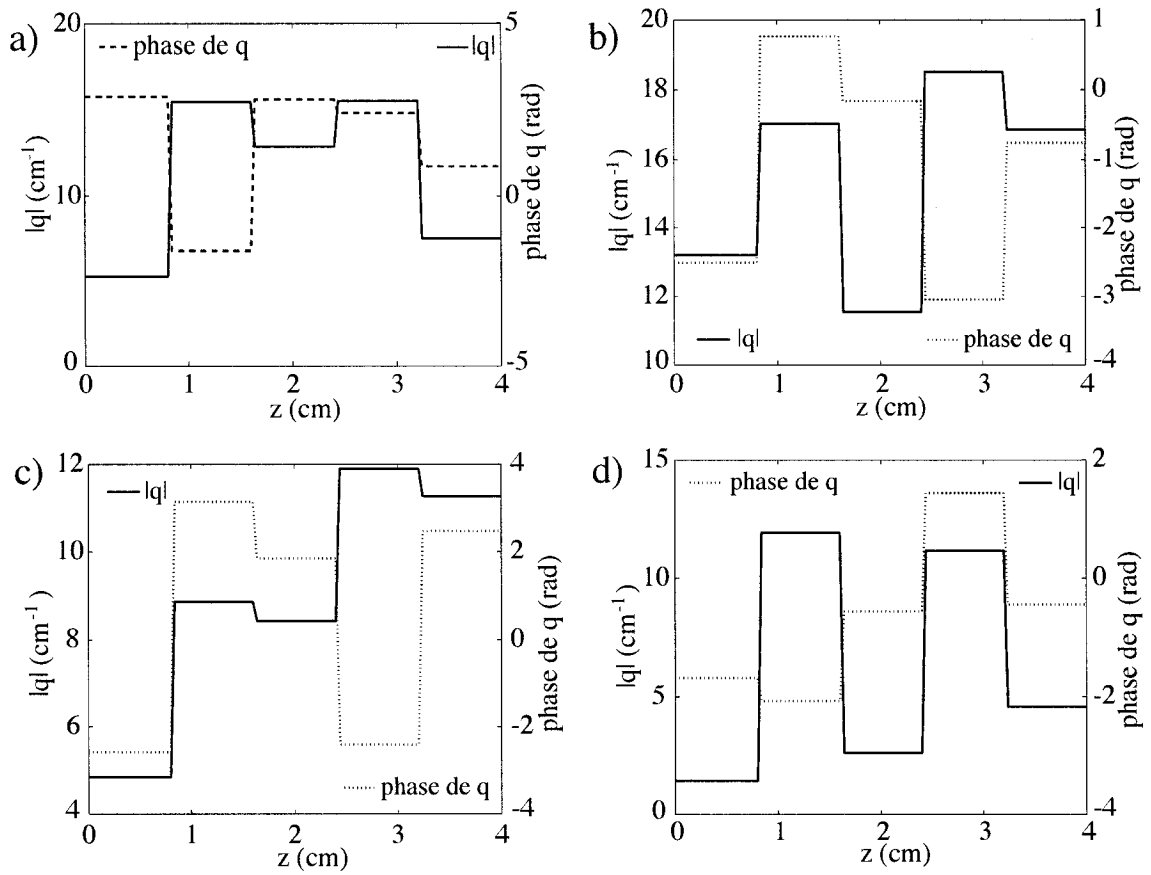


Figure 3.14 : Profils de couplage obtenus lors de l'optimisation d'un réseau à longs pas à 5 couches pour obtenir un GFF. a) Algorithme génétique, b) Méthode évolutive, c) Division cellulaire, d) Méthode classique.

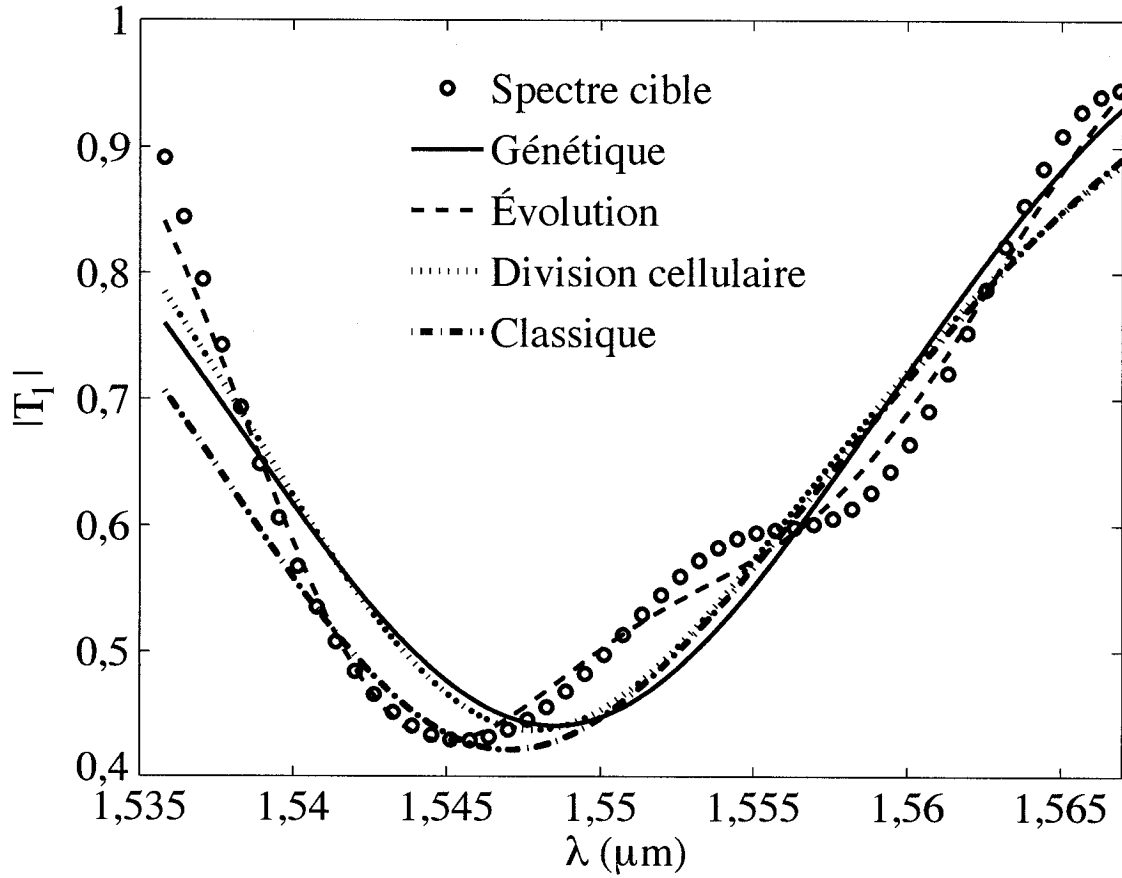


Figure 3.15 : Spectres obtenus lors de l'optimisation d'un réseau à longs pas à 20 couches pour obtenir un GFF. La méthode évolutive donne le meilleur accord.

Une optimisation à 20 couches a également été essayée afin de voir si de meilleurs résultats pouvait être obtenus avec plus de couches. Les figures 3.15 et 3.16 présentent respectivement les spectres et les profils résultants de l'optimisation. En ordre croissant, les meilleures valeurs de F trouvées sont : $F = 8,89 \cdot 10^{-2}$ pour la méthode évolutive, $F = 0,69$ pour la division cellulaire, $F = 0,75$ pour l'algorithme génétique et $F = 0,91$ pour la méthode classique.

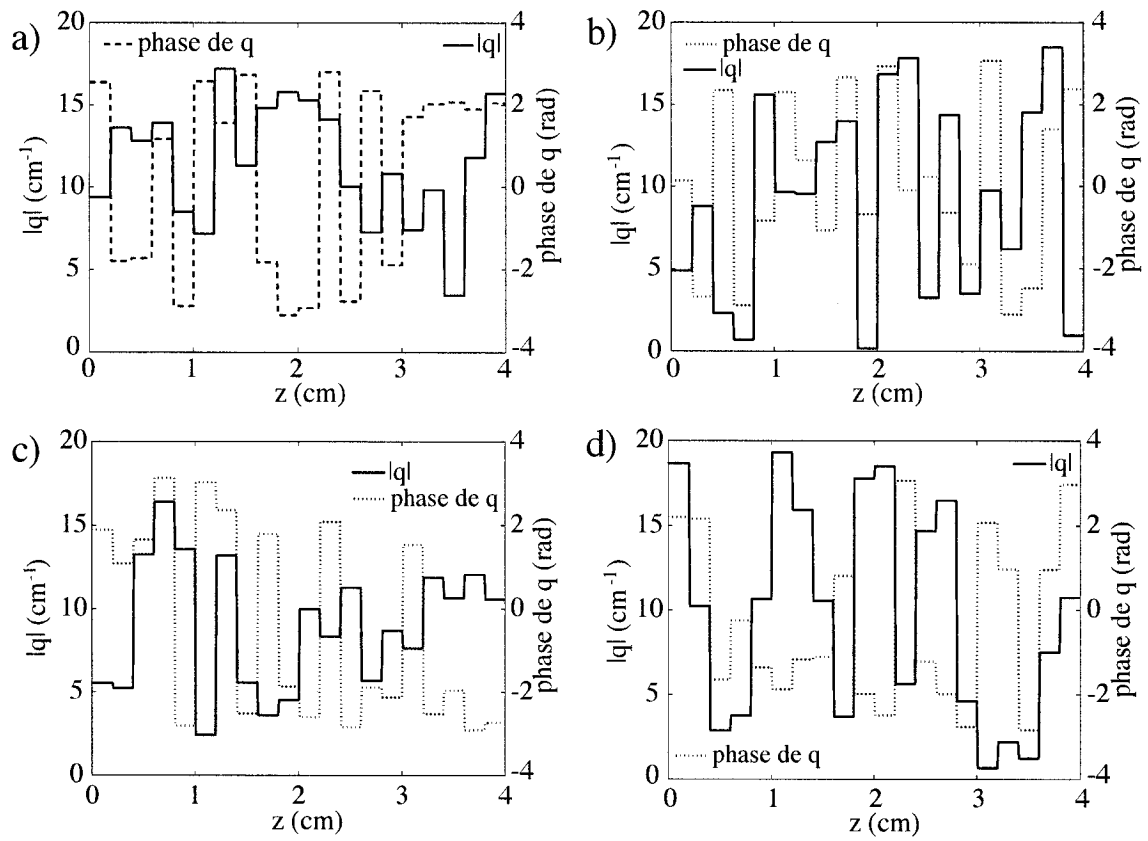


Figure 3.16 : Profils de couplage obtenus lors de l'optimisation d'un réseau à longs pas à 20 couches pour obtenir un GFF. a) Algorithme génétique, b) Méthode évolutive, c) Division cellulaire, d) Méthode classique.

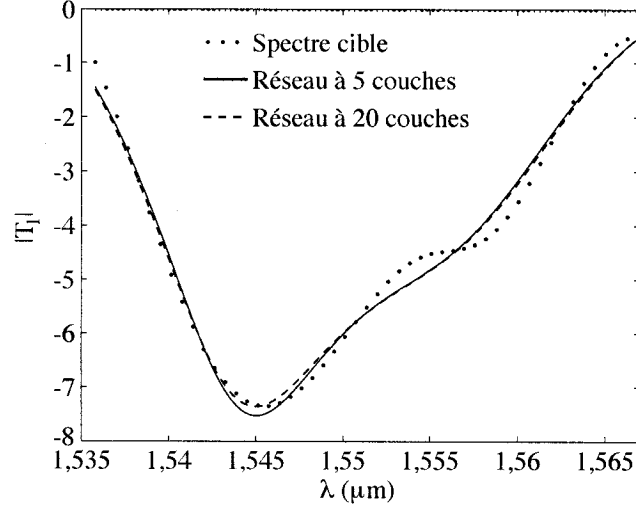


Figure 3.17 : Comparaison des spectres d'un GFF à 5 couches ($F = 0,08900877$) et d'un à 20 couches ($F = 0,088947142$). Les spectres ont été calculés par la méthode évolutive.

La méthode évolutive donne presque le même spectre que dans le cas à 5 couches (voir la comparaison à la figure 3.17), tandis que les autres méthodes trouvent des spectres non satisfaisants. D'après les valeurs de F , le spectre du réseau à 20 couches est marginalement meilleur, mais le réseau à 5 couches est beaucoup plus simple à réaliser expérimentalement. La figure 3.18 présente le gain aplati suite suite aux GFFs. Pour le GFF à 5 couches, l'erreur maximale sur la correction du gain est 0,46 dB sur 30 nm et l'erreur moyenne est de 0,19 dB. Il est à noter que le spectre trouvé par la méthode évolutive, qui tenait compte de la dispersion, est comparable au résultat de Lee [Lee & Lai 2002], qui optimisait le spectre d'un profil de 20 couches sans tenir compte de la dispersion. Cependant, il faut noter que Lee égalisait le gain sur 15 dB plutôt que sur 7 dB, mais il n'y a pas de raison pour croire que l'implémentation actuelle des méthodes d'optimisation ne pourrait pas faire autant. De plus, il est important de souligner que la phase du spectre n'a pas été optimisée. Bien que l'effet de la dispersion a été pris en compte dans le calcul direct de chaque

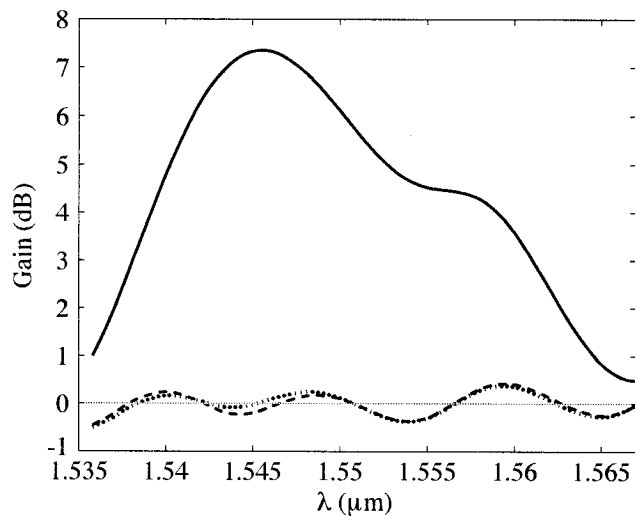


Figure 3.18 : Comparaison des courbes de gain aplati d'un GFF à 5 couches et d'un à 20 couches. La ligne pleine correspond à la courbe de gain d'un EDFA qui doit être aplatie. La ligne tiretée correspond au gain aplati par le GFF à 5 couches et la ligne pointillée correspond au gain aplati par le GFF à 20 couches. Les oscillations dans la compensation du gain sont comparables, avec une erreur maximale de 0,46 dB et 0,50 dB pour les GFFs à 5 et 20 couches respectivement.

spectre, la fonction d'erreur n'a pas été construite de façon à obtenir un délai de groupe (relié à la dérivée de la phase du spectre) constant. Encore une fois, il n'y a pas de raison pour croire qu'une telle optimisation n'est pas réalisable. Il suffit de minimiser une moyenne pondérée de deux fonctions moindres carrés, une pour évaluer l'écart en amplitude et l'autre pour évaluer l'écart sur le délai de groupe.

Chapitre 4

Optimisation du profil d'une fibre effilée

Les fibres effilées se sont avérées trop compliquées pour la méthode de pelage de couches, mais les difficultés ne sont pas moins grandes lors des tentatives d'optimisation. Ce chapitre commence par montrer que l'approche usuelle d'optimiser la fonction de couplage directement n'est pas fructueuse pour la conception d'un GFF. Les sections subséquentes explorent les différentes facettes du problème d'optimisation qui pourraient mener à des difficultés de minimisation. Si la fonction est si difficile à optimiser, on peut se demander si elle est bien construite. La deuxième section traite des différentes façons de modéliser le profil et l'influence des contraintes physiques sur l'optimisation est considérée. La troisième section explore l'importance du choix de métrique, c'est-à-dire de la façon de comparer les spectres. La quatrième section explique le comportement spectral d'une fibre effilée à l'aide d'un modèle d'interféromètre modal. De plus, cette section discute du mauvais conditionnement des paramètres d'un interféromètre et de la difficulté d'optimiser un interféromètre composé pour s'approcher d'un spectre quelconque. Finalement, la dernière section offre les résultats de l'optimisation du spectre de plusieurs fibres effilées simples qui sont mises en série.

4.1 Optimisation difficile

Afin d'optimiser le spectre d'une fibre effilée, il faut construire une fonction d'erreur. D'abord, pour calculer le spectre, il faut un modèle adéquat pour le profil longitudinal de la fibre effilée. Le profil d'une fibre effilée est contraint physiquement à être supérieur à zéro (sinon la fibre serait cassée) et inférieur ou égal à un, le rayon normalisé de la fibre initiale. Une astuce mathématique permet de contraindre le rayon normalisé à ses limites physiques ($\rho \in]0, 1]$) :

$$\begin{aligned}\rho(z) &\equiv \frac{1}{1 + (g(z))^2}, \\ \frac{dg}{dz} &\equiv d \cdot (z - a)(z - b)(z - c), \\ g(z) &= d \cdot \left[\frac{z^4}{4} - (a + b + c) \cdot \frac{z^3}{3} + (ab + bc + ac) \cdot \frac{z^2}{2} - abc \cdot z + e \right],\end{aligned}\quad (4.1)$$

où a, b, c, d, e sont des constantes réelles à déterminer.

Ici, la dérivée de $g(z)$ est un polynôme d'ordre 3, mais ce choix est tout à fait arbitraire. Un polynôme d'ordre 5 ou plus, permettrait d'imposer une pente nulle aux extrémités (en 0 et L) ou d'avoir plus de minima dans le profil, plutôt que se limiter à un ou deux. Une section ultérieure discute des limites du modèle. Avec les conditions aux frontières $\rho(0) = \rho(L) = 1$, nous avons que $e = 0$ et que a peut être écrit en termes des autres variables. La dérivée de $g(z)$ est un polynôme d'ordre 3 qui peut avoir 3 racines réelles ou 1 racine réelle et 2 racines complexe conjuguées. Dans le cas des 3 racines réelles, la racine a est déterminée à partir des autres variables et les racines b et c peuvent être contraintes à se situer dans l'intervalle $[0, L]$. Finalement, la valeur de d peut être exprimée en termes de $\rho_{\min}$ puisque la position de la valeur minimale de $\rho(z)$ correspond à une des racines de $\frac{dg}{dz}$. Nous avons donc un modèle à 3 paramètres ($\rho_{\min}, b, c$) pour décrire le profil longitudinal. Il est à noter que la longueur (L) de la fibre effilée est aussi un paramètre, mais la valeur est considérée fixe dans les exemples qui vont suivre. La difficulté à optimiser la longueur est traitée

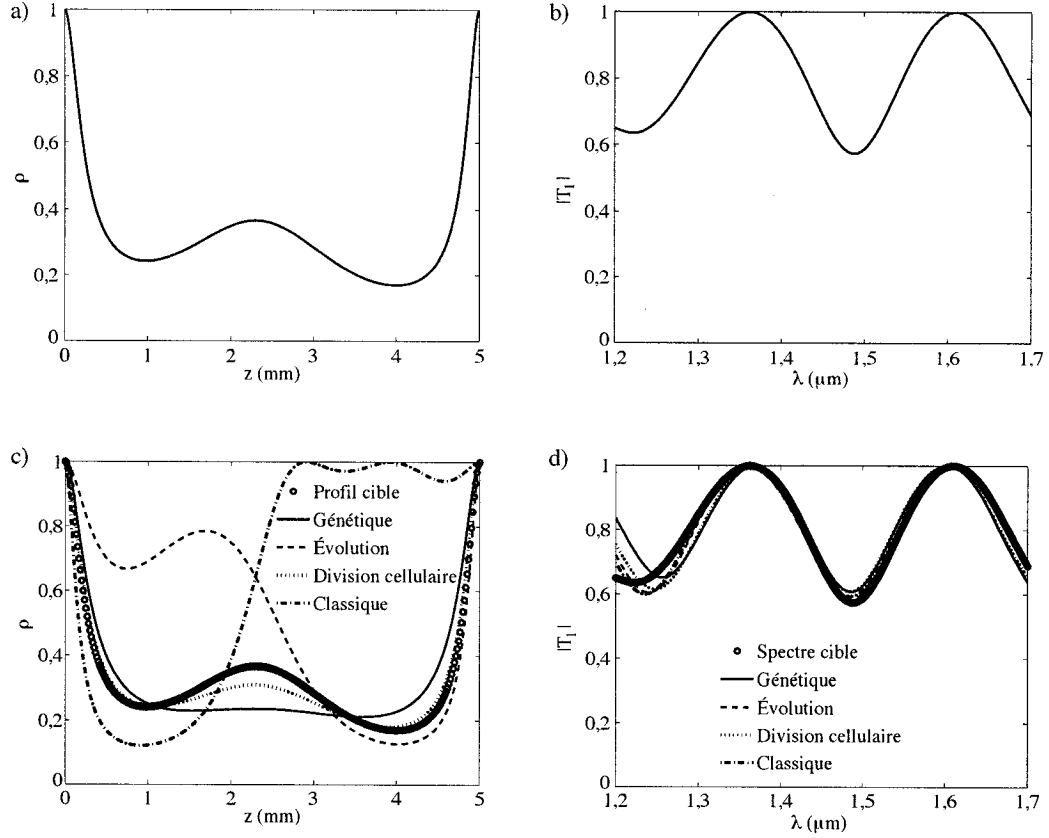


Figure 4.1 : Difficulté de retrouver exactement un spectre quasi-sinusoidal d'une fibre effilée. Un point dans l'espace de recherche est choisi arbitrairement comme cible. Ce point correspond à un profil (a) et un spectre (b). Les méthodes d'optimisation trouvent une multitude de profils (c) qui ont une réponse spectrale similaire (d). Il est donc difficile de départager les profils.

dans une section ultérieure.

Par la suite, le spectre est calculé à partir du profil longitudinal à l'aide de la méthode matricielle décrite au chapitre 1. Finalement, la technique des moindres carrés (3.9) est encore utilisée comme discriminant pour construire la fonction d'erreur.

Pour étudier le comportement de ce modèle, on commence par choisir arbitrairement un point dans l'espace de recherche ($\rho_{\min} = 0.17$, $b = 2.3$ mm, $c = 4$ mm) pour servir de spectre de référence. Ensuite, une optimisation est effectuée pour tenter de retrouver le minimum global imposé. La figure 4.1 montre la nature quasi-sinusoidale

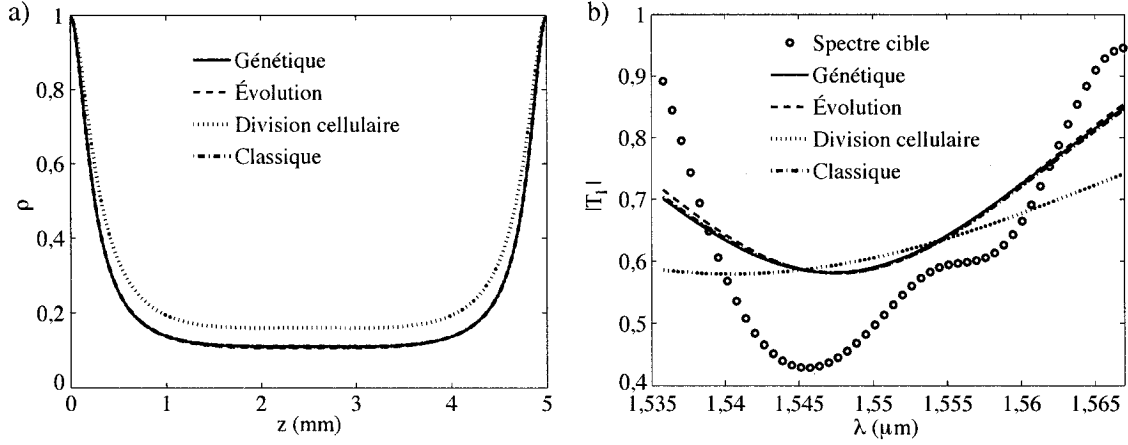


Figure 4.2 : L'optimisation d'un GFF à partir du profil d'une seule fibre effilée n'est pas fructueuse. Les profils (a) trouvés par les méthodes d'optimisation ne donnent pas des spectres (b) qui s'approchent du spectre d'un GFF.

des spectres des fibres effilées. De plus, plusieurs profils longitudinaux disparates donnent une réponse spectrale similaire en intensité, ce qui rend l'optimisation ardue puisqu'il est difficile de départager les profils.

La figure 4.2 présente une tentative d'optimisation du spectre d'un GFF. On constate que les spectres trouvés sont loin de pouvoir suivre la forme sinueuse d'un GFF. Une telle difficulté à optimiser mène à poser des questions sur la formulation du problème. Dans les sections qui suivent, on explore l'influence du modèle, de la métrique qui discrimine les spectres, et on remet en question la faisabilité de trouver une solution à l'aide d'une seule fibre effilée.

4.2 Choix du modèle paramétrique

Un volet de la construction de la fonction d'erreur est la modélisation du profil de la fibre effilée. D'une part, la taille de l'espace de recherche doit être suffisamment grande pour générer toutes (ou du moins la majorité) les courbes admissibles. Par contre, plus l'espace de recherche est grand plus le temps de calcul pour l'optimisation

est long. En d'autres termes, pour un temps de calcul équivalent, un domaine plus grand implique une diminution des chances de trouver l'optimum global. D'une autre part, la sensibilité de la variation de la fonction d'erreur, suite aux variations des paramètres, a des répercussions directes sur la topologie de la fonction. Par ailleurs, un modèle se limite souvent à une certaine famille de courbes admissibles et il peut s'avérer difficile d'imposer certaines contraintes physiques. Une contrainte importante est de limiter la pente normalisée ($\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz}$) à la valeur maximale que l'on peut atteindre sur un montage d'étirage, soit $\sim 10^{-4} \text{m}^{-1}$. De plus, l'hypothèse de deux modes est remise en question par les pentes élevées, car elles permettent également le couplage aux autres modes de gaine.

4.2.1 Modèle polynomial

Dans la première section, nous avons vu un modèle polynomial qui respectait la contrainte physique $\rho \in]0, 1]$. Toutefois, plusieurs contraintes additionnelles ont été ajoutées. Premièrement, $g(z)$ peut être une fonction quelconque, pourvu que $g(0) = g(L) = 0$. Le choix d'un modèle polynomial est arbitraire. De plus, la contrainte $\frac{dg(0)}{dz} = \frac{dg(L)}{dz} = 0$ n'a pas été implémentée, mais il n'est pas difficile de le faire. Deuxièmement, le polynôme est restreint à l'ordre 4, ce qui limite les formes possibles, ainsi que le nombre de minima qui se retrouvent dans le profil. Troisièmement, la paramétrisation a été effectuée sur les racines de $\frac{dg}{dz}$ plutôt que sur les coefficients du polynômes $g(z)$. Deux profils similaires (voisins) peuvent être paramétrisés par des polynômes qui ont des coefficients très différents, ce qui implique des points qui ne sont pas voisins dans l'espace de recherche. Ainsi, en utilisant les racines, les paramètres sont mieux conditionnés et ils sont du même ordre de grandeur, ce qui n'est pas nécessairement le cas pour les coefficients d'un polynôme. Quatrièmement, le cas des 3 racines réelles a été retenu plutôt que les racines complexe conjugués et les racines ont été contraintes à l'intervalle $[0, L]$, ce qui n'est pas strictement nécessaire. De plus, le fait d'utiliser g^2 plutôt qu'avoir g défini positif ($g(z) > 0, \forall z$) implique que

si $g(z)$ change de signe, ρ est ramené à 1 avant la supposée fin du profil ($z < L$). Or, il est difficile de paramétrer une fonction pour qu'elle soit définie positive. Ainsi, on constate déjà que l'optimisation a été restreinte à un sous-ensemble des profils admissibles. On peut alors se demander si le modèle est suffisamment représentatif des profils de fibres effilées. Finalement, le spectre d'une fibre effilée est très sensible aux modifications du profil. Même une paramétrisation sur les racines donne des paramètres sensibles puisqu'ils modifient le profil longitudinal sur toute sa longueur.

4.2.2 Modèle discret de sections uniformes

Afin de diminuer la sensibilité des réponses aux changements des paramètres, il faut être en mesure de déformer localement le profil de façon à engendrer des plus petites variations au niveau du spectre. Une méthode, conceptuellement simple, consiste à considérer une fonction constante par morceaux. Nous avons vu dans le premier chapitre que le profil peut être découpé en petites tranches constantes pour effectuer le calcul direct. Toutefois, il faut beaucoup de couches avant d'approximer convenablement un profil réaliste, ce qui impliquerait beaucoup de paramètres. De plus, une fonction constante par morceaux est plus difficile à implémenter dans le cas des fibres effilées que dans le cas des réseaux à long pas, car la limite de pente impose une contrainte sur l'écart entre deux points adjacents. Si des points d'un profil sont tirés au hasard entre 0 et 1, il en résulte une forme très oscillante (d'apparence bruitée) qui ne respecte pas le critère de continuité (pente limite). Or, il s'avère difficile d'imposer une contrainte de pente sur une fonction constante par morceaux.

4.2.3 Modèle de points clés

Une alternative pour la déformation locale est de considérer un profil issu de l'interpolation à travers des points clés. La figure 4.3 présente des profils qui ont été calculés par une interpolation par splines cubiques avec les points clés utilisés comme référence. On remarque qu'une modification d'un point clé entraîne une perturba-

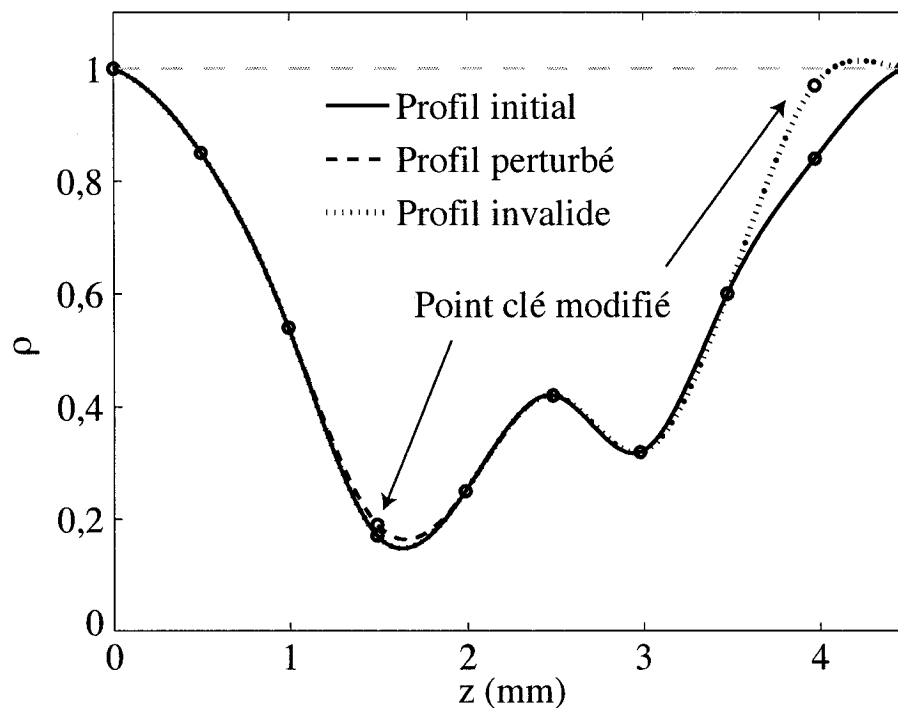


Figure 4.3 : Exemples de profils construits par l'interpolation par splines cubiques entre des points clés. La modification d'un point clé entraîne une perturbation locale du profil longitudinal (profil perturbé). Les valeurs interpolées peuvent parfois violer les contraintes physiques (profil invalide).

tion locale du profil. Dans ce modèle, le domaine des paramètres est simplement contraint à $]0,1]$, puisque les points clés sont directement des points dans le profil longitudinal. Cependant, l'interpolation peut causer des ennuis puisqu'il est difficile de restreindre les valeurs interpolées à $]0,1]$, comme en témoigne la figure 4.3. Toutefois, l'interpolation de la fonction $g(z)$, plutôt que la fonction $\rho(z)$, peut régler ce problème.

4.2.4 Modèle de *Birks & Li*

Les modèles présentés jusqu'à maintenant traitent de profils ayant des formes arbitraires. Même dans le cas où l'optimisation trouve un profil intéressant, il reste à déterminer comment fabriquer ce profil. Un modèle plus simple, mais peut-être plus pratique, donne la forme du profil en fonction des paramètres d'étirage de la fibre. Ce modèle est issu d'un article [Birks & Li 1992], qui explique l'étirage d'une fibre à l'aide d'un simple modèle de conservation de la masse. La longueur de la zone chauffée $\mathcal{L}$ est une fonction de l'élongation x . Dans le cas simple où la longueur de la zone chauffée varie linéairement avec l'élongation, nous avons :

$$\mathcal{L}(x) = \alpha \cdot x + \mathcal{L}_0, \quad (4.2)$$

où α et $\mathcal{L}_0$ sont des constantes.

Ainsi, il est possible de démontrer que le profil résultant prend la forme :

$$\rho(z) = \left[1 + \frac{2\alpha z}{(1 - \alpha)\mathcal{L}_0} \right]^{\frac{-1}{2\alpha}}. \quad (4.3)$$

Ce modèle n'a que deux paramètres, mais se limite à des profils de formes simples, qui sont symétriques et qui n'ont qu'un minimum pour un segment donné.

4.3 Choix d'une métrique

On désigne par *métrique* la fonction qui évalue la «distance» entre la courbe cible et la courbe calculée. Cette notion de distance entre les courbes est ambiguë et il peut exister plusieurs fonctions oscillantes qui donnent sensiblement la même distance. Mais est-ce que ces courbes sont vraiment équivalentes ? Est-ce que certaines régions de la courbe ont plus d'importance ? Qu'arrive-t-il dans le cas d'un décalage horizontal ou vertical des courbes ? Est-ce qu'il existe une métrique qui est en mesure

de rendre la fonction d'erreur plus lisse et donc plus facile à optimiser ? Plusieurs métriques ont été considérées pour tenter de répondre à ces questions.

4.3.1 Moindre carrés sur le spectre

Pour des raisons pratiques et peut-être historiques, la somme des carrés des différences est une métrique très populaire. C'est une des méthodes les plus simples pour évaluer l'écart entre deux fonctions.

$$F_{\text{MC}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_\lambda} \left[S_{\text{theo}}(\lambda_i) - S_{\text{exp}}(\lambda_i) \right]^2} \quad (4.4)$$

C'est un calcul rapide qui est souvent utilisé dans la modélisation des données expérimentales («fitting» en Anglais) où les paramètres d'un modèle sont optimisés de façon à minimiser la somme des carrés des écarts, d'où l'appellation courante d'une méthode de *moindre carrés*. Il est à noter que, lors de l'optimisation, la racine de l'équation (4.4) n'est pas nécessaire, puisque que le minimum de F^2 est le même que le minimum de F . La somme des carrés des différences se généralise à la métrique de Minkowski, qui attribue plus de poids aux plus grandes différences :

$$F_{\text{Minkowski}} = \left(\sum_{i=1}^{N_\lambda} \left[S_{\text{theo}}(\lambda_i) - S_{\text{exp}}(\lambda_i) \right]^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.5)$$

où $p = 1, 2, \dots, \infty$

Toutefois, ce type de métrique est sensible aux problèmes de décalage. La figure 4.4 illustre la surévaluation de l'erreur associée aux décalages horizontaux et verticaux.

Par ailleurs, il est intéressant de pouvoir observer visuellement la topologie d'une fonction à minimiser. Le modèle de Birks & Li est un modèle simple de deux paramètres qui a l'avantage de permettre de tracer la fonction d'erreur en trois dimensions. Il est à noter que la valeur de $\mathcal{L}_0$ peut être déterminé par $\rho_{\min}$, qui est

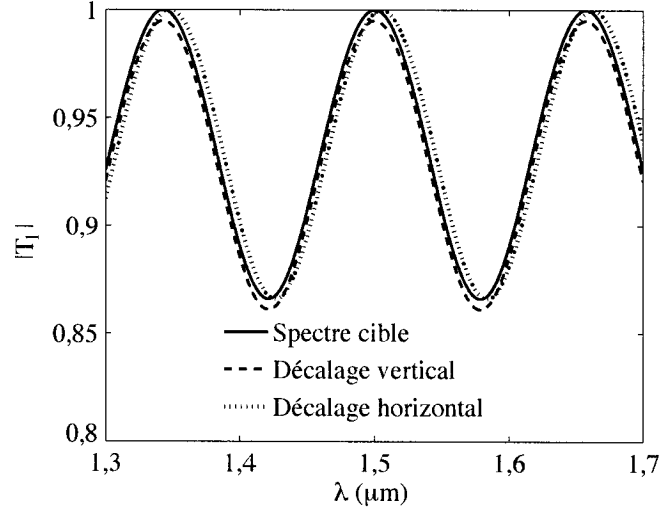


Figure 4.4 : Surévaluation de l'erreur associée au décalage entre la fonction calculée et la fonction cible. Une fonction sinusoïdale cible est en trait plein, la même sinusoïde décalée horizontalement est en trait tireté ($F_{MC} = 0.0125$), tandis que la même sinusoïde décalée verticalement est en trait pointillé ($F_{MC} = 0.04508$). La valeur de la fonction d'erreur par moindre carrés croît très rapidement avec le décalage entre les courbes, ce qui peut exagérer leur discordance.

une variable plus conviviale. Ainsi la figure 4.5 montre la topologie de F_{MC} dans le cas de l'espace de spectres engendrés par le modèle de Birks & Li. On constate la présence d'une vallée de points qui correspondent à des spectres de qualité similaire. De plus, ce n'est que dans le voisinage immédiat du minimum global que la valeur de la fonction d'erreur chute de plusieurs ordres de grandeur.

4.3.2 Moindre carrés sur la transformée de Fourier rapide des spectres

Pour remédier au problème de décalage on peut comparer l'écart dans la forme des spectres plutôt que de comparer l'écart entre la position des points. La transformée de Fourier du spectre nous indique les composantes sinusoïdales principales qui composent le spectre. Ainsi, en calculant la somme des carrés des différences entre les

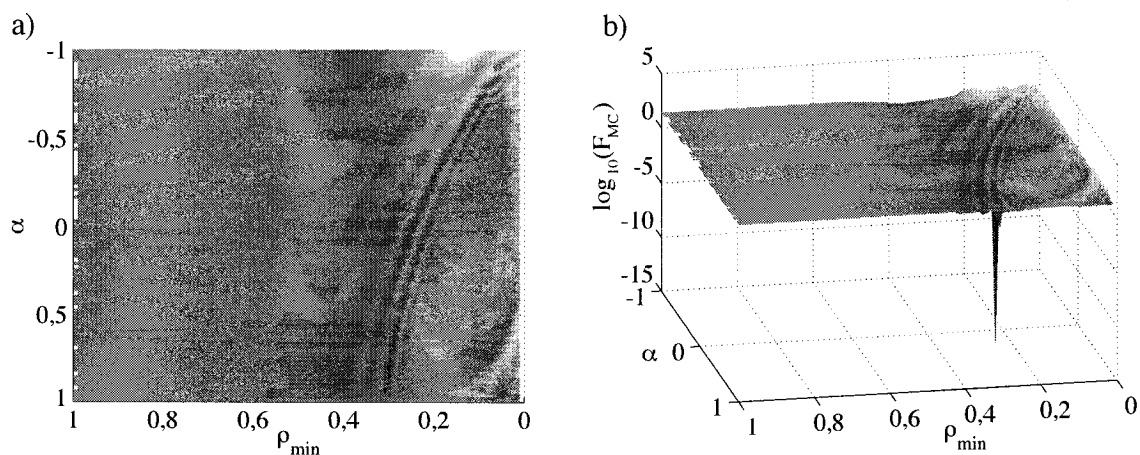


Figure 4.5 : Topologie de la fonction d'erreur de moindres carrés sur le spectre (sur une échelle logarithmique) dans le cas du modèle de Birks & Li. a) Vue de haut, b) Vue de côté. Il existe une vallée de points qui donnent des spectres similaires, mais le minimum global est dans un abîme très localisé.

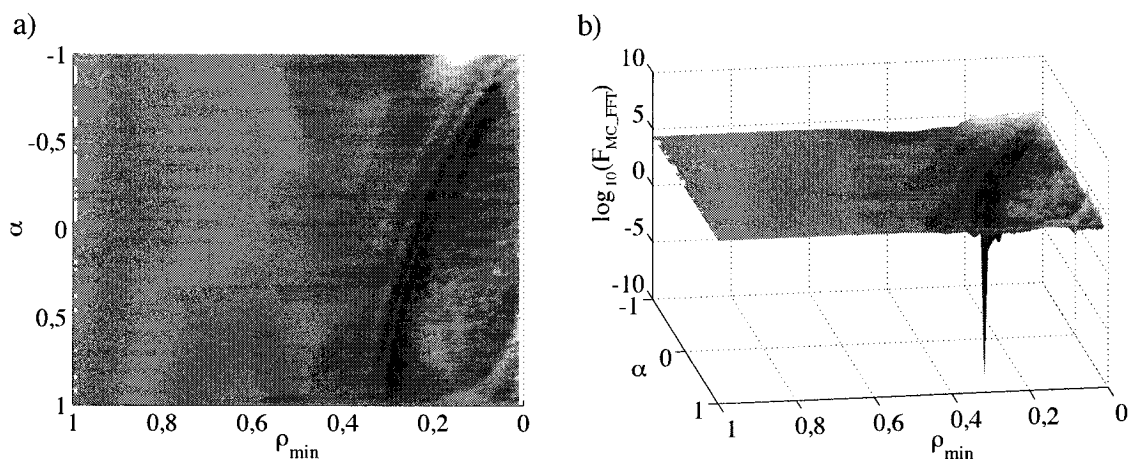


Figure 4.6 : Topologie de la fonction d'erreur de moindres carrés sur la TFR des spectres (sur une échelle logarithmique) dans le cas du modèle de Birks & Li. a) Vue de haut, b) Vue de côté. La vallée de points similaires se trouve évasée, ce qui pourrait faciliter l'optimisation.

TFR (*Transformée de Fourier Rapide*), la métrique devient insensible aux décalages de la courbe calculée. À titre d'exemple, pour les mêmes exemples que la figure 4.4, cette nouvelle fonction d'erreur donne $F_{\text{MC_TFR}} = 0$ pour le décalage horizontal et le décalage vertical. De plus, la figure 4.6 montre le changement de topologie de l'espace de recherche. La vallée de points similaires se trouve évasée, ce qui pourrait faciliter l'optimisation.

4.4 Mauvais conditionnement du problème

Malgré les efforts de mieux formuler la fonction à optimiser, à l'aide d'un meilleur modèle où d'une métrique plus appropriée, les tentatives de traiter l'optimisation du profil des fibres effilées de façon générale ont échoué. Les causes du mauvais conditionnement peuvent être élucidées en considérant la nature du couplage et le comportement des diverses sections d'une fibre effilée.

4.4.1 Critère d'adiabaticité

Le coefficient de couplage d'une fibre effilée est proportionnel à la pente, or ce n'est pas toutes les sections d'une fibre effilée qui ont une pente suffisamment élevée pour induire un couplage notable. Une section de pentes faibles est dite *adiabatique*, puisque le mode s'adapte aux petites perturbations du guide sans perdre de puissance. Pour quantifier cette transition, on définit comme critère d'adiabaticité l'égalité entre la longueur de couplage et la longueur de battement entre le mode fondamental (LP_{01}) et le premier mode de gaine à symétrie circulaire (LP_{02}) :

$$\begin{aligned} L_{\text{couplage}} &\equiv \frac{1}{\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \bar{q}_{12}} = \frac{2\pi}{\beta_1 - \beta_2} \equiv L_{\text{battement}} \\ \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} &= \frac{\beta_1(\lambda, \rho) - \beta_2(\lambda, \rho)}{2\pi \cdot \bar{q}_{12}(\lambda, \rho)} \equiv C_{\text{adia}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ainsi, le critère d'adiabaticité permet de découper le profil en sections non-adia-

batiques, dont la pente du profil est suffisamment grande ($\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} > C_{\text{adia}}$) pour induire un couplage entre les modes de la fibre, et en sections adiabatiques, où la pente est trop faible ($\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} < C_{\text{adia}}$) pour induire un couplage. Un point important à souligner est que peu importe les fluctuations du profil dans une section adiabatique, il n'y a essentiellement qu'un déphasage accumulé sans transfert de puissance. Ainsi on peut toujours réduire le profil à des sections de couplage et de déphasage.

4.4.2 Interféromètre modal simple

Dans le cas le plus simple du profil en forme de «U» (figure 4.7), il y a une région de couplage, une région de déphasage et une autre région de couplage. Cet arrangement peut être interprété en terme d'un interféromètre modal [Bures 2001]. Le système ne transmet que le mode fondamental puisque les modes supérieurs sont absorbés par la gaine de plastique. Le couplage se fait d'abord du mode fondamental vers les modes d'ordre supérieur (pour ce travail on ne considère typiquement que le mode LP_{02}). Or, les différents modes ont des vitesses de phase différentes puisqu'ils n'ont pas le même indice effectif. Le chemin géométrique est le même, mais les chemins optiques sont différents, ce qui est équivalent à deux bras de longueurs différentes dans un interféromètre Mach-Zehnder. La première zone de couplage agit effectivement comme une lame séparatrice qui transfère une fraction de l'amplitude du mode LP_{01} dans le mode LP_{02} . La section adiabatique permet d'accumuler un déphasage entre les deux modes. La deuxième zone de couplage agit comme lame séparatrice qui mélange les modes selon l'interférence entre les deux. La figure 4.7 schématise l'interféromètre modal par un interféromètre Mach-Zehnder. De ce modèle il est facile de démontrer que la réponse spectrale est

$$\begin{aligned} |a_1(L, \lambda)|^2 &= T_A(\lambda)T_C(\lambda) + R_A(\lambda)R_C(\lambda) + 2\sqrt{T_A(\lambda)T_C(\lambda)R_A(\lambda)R_C(\lambda)} \cos(\phi_2 - \phi_1) \\ |a_2(L, \lambda)|^2 &= 2\sqrt{T_A(\lambda)T_C(\lambda)R_A(\lambda)R_C(\lambda)} [1 - \cos(\phi_2 - \phi_1)] \end{aligned} \quad (4.7)$$

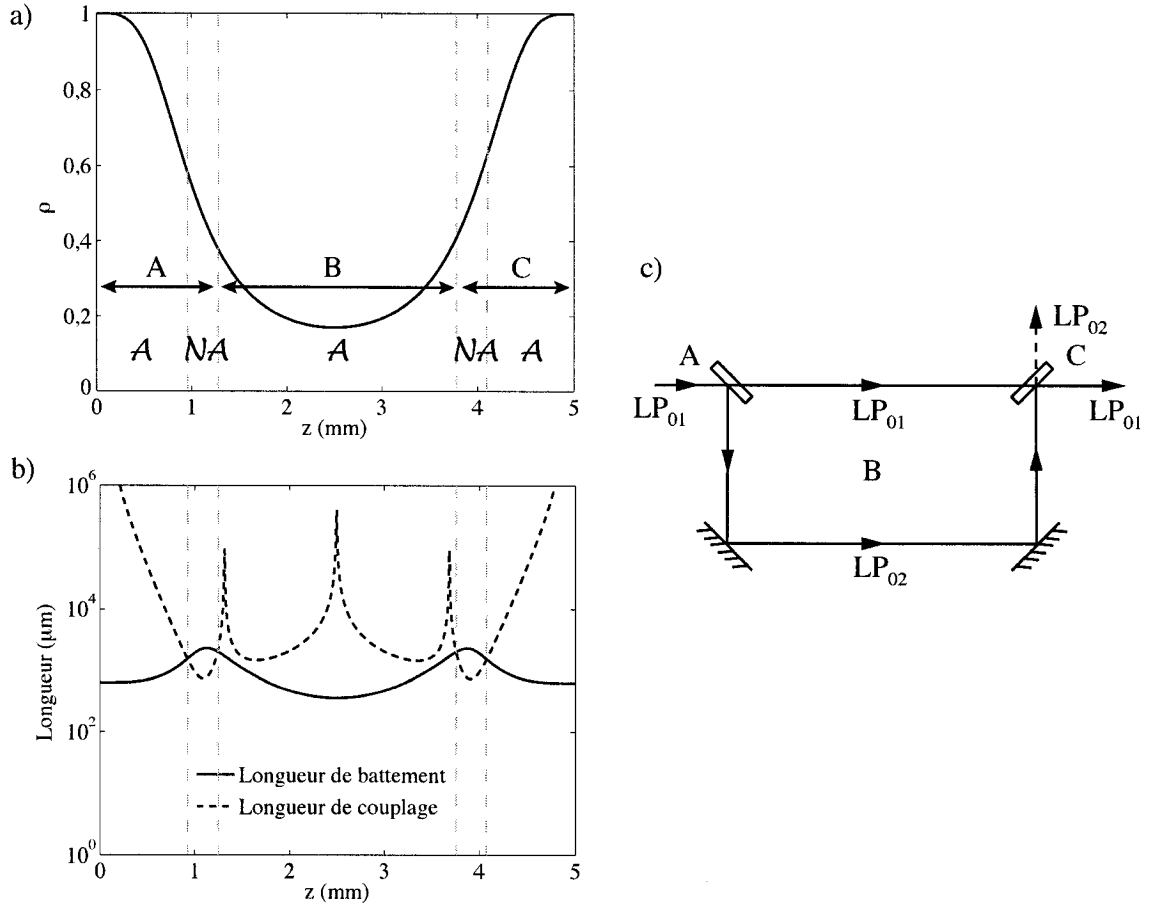


Figure 4.7 : Profil longitudinal simple qui est décomposé en termes d'un interféromètre modal. Le critère d'adiabaticité (b) permet de découper le profil longitudinal (a) en segments adiabatiques (**A**), qui engendrent un déphasage, et non-adiabatiques (**NA**), qui engendrent un couplage. Ainsi, les régions A et C agissent comme les lames séparatrices d'un interféromètre Mach-Zehnder, tandis que la région B agit comme les bras de longueurs inégales. C'est la différence de vitesse des modes qui engendre la différence de chemin optique.

où T_A et R_A correspondent aux coefficients de transmission en puissance de la première région de couplage dans les modes LP_{01} et LP_{02} respectivement. T_C , R_C correspondent aux coefficients de la deuxième région de couplage et $\phi_1 = \exp(\int_{z_1}^{z_2} \beta_1(z) dz)$, $\phi_2 = \exp(\int_{z_1}^{z_2} \beta_2(z) dz)$ sont les déphasages accumulés dans la région adiabatique.

4.4.3 Interféromètre modal composé

Il est à noter que T et R sont fonctions de λ . On peut toujours considérer un interféromètre composé, où les zones de couplage de l'interféromètre global sont elles-mêmes des interféromètres modaux. Tel est le cas, par exemple, du profil longitudinal de la figure 4.8. Si $\{T_A, R_A\}$ et $\{T_C, R_C\}$ sont de formes sinusoïdales, alors leur combinaison interférométrique donne un spectre oscillant. Or, pour obtenir une réponse spectrale de forme *arbitraire* (comme un GFF), les sections A et C doivent elles aussi être constituées d'interféromètres composés, pour que les réponses $\{T_A, R_A\}$ et $\{T_C, R_C\}$ s'éloignent de la forme sinusoïdale. Ce jeu de poupées russes peut continuer sur plusieurs niveaux. En rajoutant le fait que la réponse dépend énormément de la phase accumulée dans les sections adiabatiques, et que la phase est très sensible à la longueur de ces sections, de tels interféromètres composés sont très difficiles à modéliser et à optimiser. C'est d'ailleurs pour cette raison que la longueur n'a pas été optimisée dans la précédente tentative d'optimisation.

4.5 Optimisation de fibres effilées en cascade

Afin d'obtenir un spectre arbitraire à partir d'une seule fibre effilée, il faut un profil longitudinal qui est très long avec beaucoup d'oscillations pour former plusieurs interféromètres composés. On peut alors se demander s'il n'y a pas une alternative pour simplifier le design. En effet, si les profils longitudinaux simples donnent des réponses spectrales quasi-sinusoïdales, un spectre de forme arbitraire peut être construit en additionnant (en dB) les réponses spectrales de plusieurs fibres effilées,

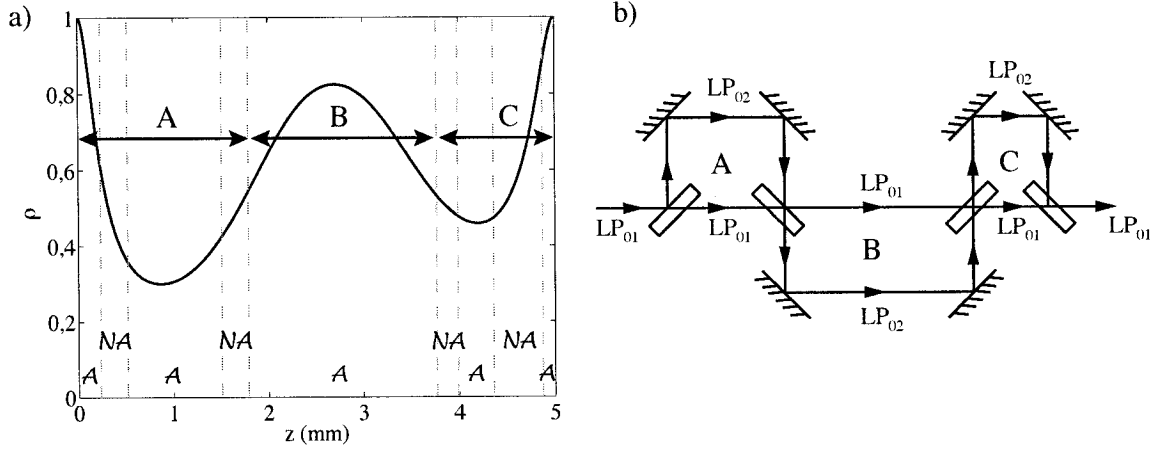


Figure 4.8 : Profil longitudinal quelconque (a) qui est décomposé en termes d'un interféromètre modal composé (b). Chaque section non-adiabatique agit comme une lame séparatrice et chaque région adiabatique donne une différence de chemin optique entre les modes de la fibre effilée (bras de longueurs différentes).

comme une série de Fourier. Une fois que les spectres quasi-sinusoïdaux nécessaires sont déterminés, il est possible de trouver le profil longitudinal simple qui correspond à chacun d'eux. Ainsi, en considérant une cascade de plusieurs fibres effilées simples, le problème complexe de design d'un GFF se décompose en problèmes plus simples. Toutefois, il faut noter qu'on perd la compacité du composant final puisqu'il faut une section de fibre non-dégainée entre chaque fibre effilée simple afin d'éliminer la lumière dans le mode LP_{02} .

4.5.1 Approximation quasi-sinusoïdale

La puissance transmise par une fibre effilée dont le profil longitudinal a une forme équivalente à un interféromètre modal simple, comme celui de la figure 4.7, prend une forme quasi-sinusoïdale qui peut s'écrire

$$|a_1(\lambda)|^2 = 1 - A \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi}{\Lambda} \lambda - \Phi \right) \quad (4.8)$$

où l'amplitude A , la période Λ et le décalage en longueur d'onde Φ sont des paramètres à déterminer. Par la suite, l'étirage d'une fibre effilée peut être ajusté pour fabriquer un composant qui donne ces paramètres.

4.5.2 Cascade de 4 fibres effilées

L'optimisation du spectre d'un GFF a été effectuée sur la somme des réponses quasi-sinusoidales de 4 fibres effilées. Les paramètres ont été restreints aux domaines suivants : $A \in [0, 0,9]$, $\Lambda \in [0, 500]$ nm et $\Phi \in [0, \pi]$. Les paramètres de contrôle de la fonction *Easom* sont utilisés une fois de plus. Les résultats de l'optimisation, avec une fonction d'erreur de moindre carrés (équation 3.9), sont présentés à la figure 4.9. Il est à noter que cette fois l'écart de moindre carrés est effectué avec les spectres en dB. On constate un excellent accord entre la cible et le spectre trouvé par la méthode évolutive ($F = 1,5671$ dB²). La figure 4.9 montre également les composantes quasi-sinusoidales qui forment le GFF, ainsi que l'erreur sur le gain aplati. L'erreur maximale est de 0,35 dB et l'erreur moyenne est de 0,05 dB.

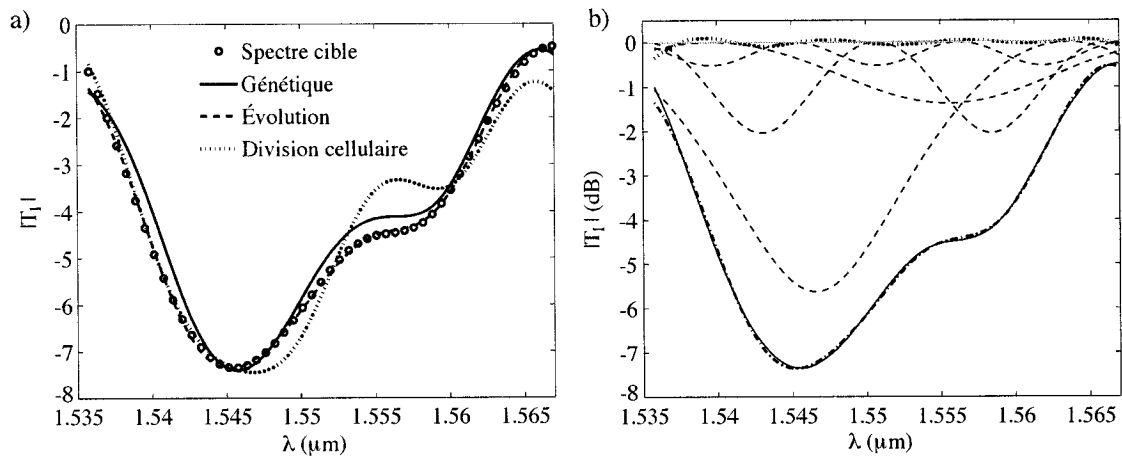


Figure 4.9 : Optimisation du spectre d'un GFF à l'aide de 4 fibres effilées placées en série (a). Le meilleur spectre obtenu, celui de la méthode évolutive, est repris en b) où : le spectre du GFF idéal est en trait plein, les spectres quasi-sinusoïdaux des 4 fibres effilées sont en traits tiretés, le spectre de la cascade de fibres effilées est en trait tireté-pointillé et la différence entre ce spectre et le filtre idéal est en pointillés. L'erreur moyenne est de 0,05 dB, tandis que l'erreur maximale est de 0,35 dB.

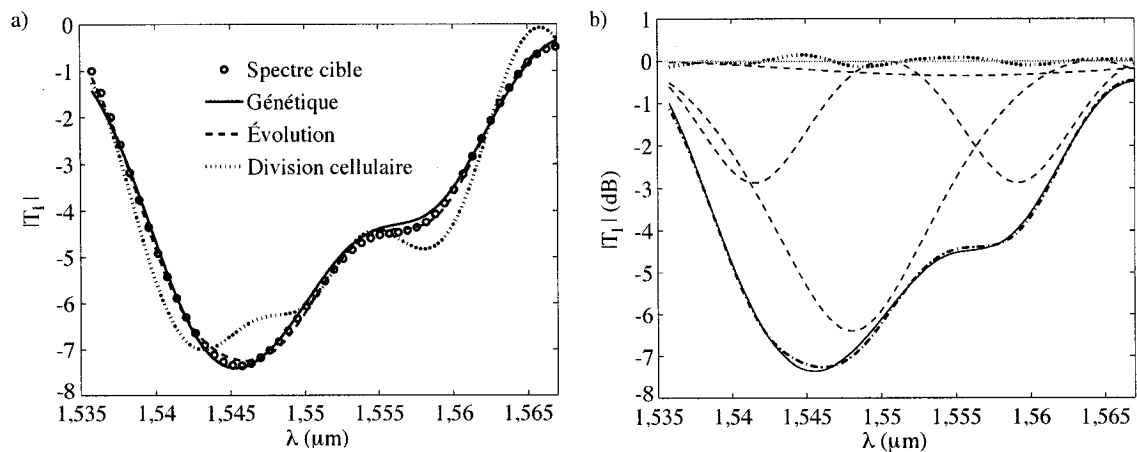


Figure 4.10 : Optimisation du spectre d'un GFF à l'aide de 3 fibres effilées placées en série. Le meilleur spectre obtenu, celui de la méthode évolutive, est repris en b) où : le spectre du GFF idéal est en trait plein, les spectres quasi-sinusoidaux des 3 fibres effilées sont en traits tiretés, le spectre de la cascade de fibres effilées est en trait tireté-pointillé et la différence entre ce spectre et le filtre idéal est en pointillés. L'erreur moyenne est de 0.06 dB, tandis que l'erreur maximale est de 0.15 dB.

4.5.3 Cascade de 3 fibres effilées

Suite au succès de l'optimisation avec 4 fibres effilées, on peut se demander s'il est possible d'en faire autant avec 3. La figure 4.10 montre les résultats de l'optimisation. Selon la métrique de moindre carrés, le spectre trouvé par la méthode évolutive est très marginalement moins bon ($F = 1,5711 \text{ dB}^2$) que le meilleur spectre trouvé avec 4 fibres effilées. Toutefois, l'erreur maximale est de 0,15 dB et l'erreur moyenne est de 0,06 dB.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons développé des outils, basés sur la résolution du problème inverse, pour le design de composants tout-fibre qui fonctionnent en transmission. Nous avons étudié en profondeur le mécanisme de calcul d'une méthode de diffusion inverse, qui est communément appelée la méthode de pelage de couches. Nous avons vu comment les arguments de causalité, pour un composant fonctionnant en transmission, peuvent être exploités pour reconstruire un profil de couplage discret à partir de la transformée de Fourier inverse des spectres de transmission des deux premiers modes. Ainsi, il est possible d'atteindre le spectre d'un GFF à l'aide d'un seul réseau à long pas, qui est physiquement, mais difficilement, réalisable. De plus, cette étude a exploré les difficultés encourues pour des composants ayant des dépendances supplémentaires en z et en ω . Cette analyse a permis de démontrer clairement que la méthode de pelage de couches ne peut pas s'appliquer dans le cas des fibres effilées.

Par la suite, nous avons transformé le problème inverse en problème d'optimisation en construisant une fonction d'erreur pour comparer des spectres calculés par une méthode de diffusion directe à un spectre cible. Pour ces fins, nous avons préalablement étudié différentes méthodes directes pour calculer le spectre d'un composant à partir de son profil de couplage. Or, pour un profil de couplage discret de deux modes, la méthode matricielle s'avère nettement plus rapide que la méthode de Runge-Kutta. De plus, il est à noter que la dispersion est prise en compte dans le calcul direct. Par ailleurs, l'interpolation du spectre à partir d'un certain nombre d'échantillons

en longueur d'onde peut, dans le cas des fibres effilées, diminuer considérablement le temps de calcul. Ainsi, en se limitant à deux modes, un nombre raisonnable de couches en z et un nombre minimal d'échantillons en λ , le temps de calcul d'un spectre à été optimisé afin de minimiser le temps de calcul des méthodes d'optimisation.

Un algorithme génétique élémentaire, une méthode de programmation évolutive et une méthode de division cellulaire de l'espace de recherche ont été implémentés en C++. De plus, ces heuristiques d'optimisation ont été comparées au relancement aléatoire d'une méthode de descente classique. Le développement de plusieurs méthodes d'optimisation et une étude statistique de leur comportement a permis de relativiser les résultats obtenus par les tentatives d'optimisation. Nous avons vu que l'efficacité, la précision et la robustesse des méthodes d'optimisation dépend énormément du choix de leurs paramètres de contrôle. Or, l'optimisation du spectre d'un composant est un problème dont le temps de calcul est trop long pour effectuer une étude systématique des paramètres de contrôle. Le choix de paramètres dépend donc de l'intuition de l'utilisateur et c'est avec un choix arbitraire de paramètres que la méthode évolutive s'est montrée plus performante pour l'optimisation du profil de couplage d'un réseau à longs pas. Afin de faciliter la réalisation du réseau, nous avons étudié un modèle simple ayant des sections uniformes. Ainsi, nous avons démontré qu'un réseau à 5 couches est suffisant pour émuler le spectre d'un GFF, avec une erreur maximale de 0,46 dB et une erreur moyenne de 0,19 dB sur le gain aplati. Toutefois, il faut souligner que la phase n'a pas été optimisée. Il se peut donc que le délai de groupe ne soit pas constant.

Par ailleurs, l'optimisation du profil longitudinal d'une fibre effilée s'est avérée compliquée. Une multitude de métriques, pour la comparaison des spectres, et de modèles paramétriques, pour la génération du profil, ont été étudiés dans le but de modifier la topologie de fonction d'erreur, dans l'espoir de la rendre plus facile à minimiser. Toutefois, une réévaluation de la nature du couplage a permis de mettre en évidence le mauvais conditionnement du problème lorsqu'on cherche à optimiser

le profil longitudinal directement. Pour pallier ce problème, le composant final est subdivisé en problèmes plus simples, c'est-à-dire qu'il est constitué de plusieurs fibres effilées de formes simples qui sont placées en série. Or, un profil de forme simple donne un spectre quasi-sinusoidal. Il est donc plus facile de trouver les spectres sinusoidaux nécessaires pour construire une réponse spectrale arbitraire et de retrouver, par la suite, les profils simples qui donnent les spectres correspondants. Ainsi, nous avons vu qu'il est possible d'obtenir, avec trois ou quatre fibres effilées, une excellente approximation du spectre d'un GFF qui aplatit 7 dB de gain. Pour la cascade de trois fibres effilées, l'erreur maximale sur le gain aplati était de 0,14 dB et l'erreur moyenne était de 0,06 dB.

La prochaine étape dans l'analyse serait d'optimiser le spectre avec plusieurs modes, en utilisant l'optimisation à deux modes comme point de départ. Par ailleurs, il serait utile d'essayer d'optimiser la phase, ainsi que d'aplatir le gain sur des plus grandes plages. De plus, il pourrait être intéressant d'implémenter des versions plus sophistiquées des méthodes d'optimisation. Notamment, les méthodes pourraient être modifiées pour travailler avec une population de minima locaux, issus de descentes à l'aide d'une méthode classique, plutôt que de travailler avec des points tirés aléatoirement. Finalement, elles pourraient être modifiées pour changer automatiquement leurs paramètres de contrôle.

Bibliographie

- ARFKEN, G. B. & WEBER, H. J. (1996). *Mathematical Methods for Physicists*, chap. 14. Fourth edition éd., Academic Press, 836–839.
- BIRKS, T. A. & LI, Y. W., The shape of fiber tapers. *Journal of Lightwave Technology*, **10**(4) (1992).
- BRENNE, J. K. & SKAAR, J., Design of grating-assisted codirectional couplers with discrete inverse-scattering algorithms. *Journal of Lightwave Technology*, **21**(1) (2003).
- BRUCKSTEIN, A. M., LEVY, B. C. & KAILATH, T., Differential methods in inverse scattering. *SIAM J. Appl. Math.*, **45**(2) (1985).
- BURES, J., *Technologie de l'optique guidée*, École Polytechnique de Montréal (2001).
- CHELOUAH, R. & SIARRY, P. (1992). *Meta-Heuristics : Advances and Trends in Local Search Paradigms of Optimization*, chap. 4 : Enhanced Continuous Tabu Search : an algorithm for optimizing multim minima functions. Springer-Verlag, 49–61.
- CRISTI, R., *Modern Digital Signal Processing*, Brooks/Cole - Thomson Learning (2004).
- DAVIS, L., *Handbook of Genetic Algorithms, A genetic algorithms tutorial IV, Hybrid genetics algorithms (p.63)*, Van Nostrand Reinhold, New York (1991).

- DAXHELET, X. & GONTHIER, F., Tapered fiber filters : theory and applications. Dans *Photonics East*, S.P.I.E., Boston (2000).
- DOBROWOLSKI, J. A. & LOWE, D., Optical thin film synthesis program based on the use of fourier transforms. *Appl. Opt.*, **28**(14) (1978).
- FECED, R., ZERVAS, M. & MURIEL, M., An efficient inverse scattering algorithm for the design of nonuniform fiber Bragg gratings. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, **35**(8) (1999).
- FOGEL, D. B., BÄCK, T. & MICHALEWICZ, Z., *Handbook of evolutionary computation*, Bristol [England]: Institute of Physics Pub. (1997).
- FOGEL, J. L., OWENS, A. J. & WALSH, M. J., *Artificial Intelligence Through Simulated Evolution*, Wiley, New York (1966).
- FORTIN, A., *Analyse numérique pour ingénieurs*, Éditions de l'École Polytechnique de Montréal (1995).
- GELFAND, I. M. & LEVITAN, B. M., On the determination of a differential equation from its spectral function. *Amer. Math. Soc. Transl.*, **1**, series **2** (1955).
- HAUPT, R. & HAUPT, S. E., *Practical Genetic Algorithms*, Wiley Interscience, New York (1998).
- LACROIX, S., BURES, J. & DAXHELET, X., *Optique Intégrée et Fibres Optiques*, École Polytechnique de Montréal (2002).
- LEE, C. L. & LAI, Y., Evolutionary programming synthesis of optimal long-period fiber grating filters for EDFA gain flattening. *IEEE Photonics Technology Letters*, **14**(11) (2002).
- MICHALEWICZ, Z., *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs* (p.82), Springer, Berlin (1992).

- PERAL, E., CAPMANY, J. & MARTI, J., Iterative solution to the Gel'fand-Levitan-Marchenko coupled equations and application to synthesis of fiber gratings. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, **32**(12) (1996).
- POLADIAN, L., Simple grating synthesis algorithm. *Optics Letters*, **25** (2000).
- PRESS, W., TEUKOLSKY, S., VETTERLING, W. & FLANNERY, B., *Numerical Recipes in C*, 2nd edition éd., Press Syndicate of the University of Cambridge (1992).
- ROBINSON, E. A., Dynamic predictive deconvolution. *Geophys. Prospecting*, **23** (1975).
- SKAAR, J., WANG, L. & ERDOGAN, T., On the synthesis of fiber Bragg gratings by layer peeling. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, **37** (2001).
- SNYDER, A. W. & LOVE, J. D., *Optical Waveguide Theory*, Chapman and Hall, New York (1983).
- SONG, G.-H. & SHIN, S.-Y., Design of corrugated waveguide filters by the Gel'fand-Levitan-Marchenko inverse-scattering method. *J. Opt. Soc. Am. A*, **2**(11) (1985).
- SOSSI, L., A method for the synthesis of multilayer dielectric interference coatings. *Eesti NSV Teaduste Akadeemia Toimetised Füüsika Matemaatika*, **25** (1974).
- VERLY, P. G. & AL., Synthesis of high rejection filters with the fourier transform method. *Appl. Opt.*, **28**(14) (1989).
- WANG, L. & ERDOGAN, T., Layer peeling algorithm for reconstruction of long-period fibre gratings. *Electron. Lett.*, **37**(3) (2001).
- YAMADA, M. & SAKUDA, K., Analysis of almost-periodic distributed feedback slab waveguides via a fundamental matrix approach. *Appl. Opt.*, **26** (1987).

Annexe A

Équations de couplage entre des modes locaux

Si la perturbation d'un guide d'onde est forte, comme dans le cas du profil d'une fibre effilée qui varie continûment en z , alors les champs du guide perturbé ne peuvent plus s'exprimer en termes des champs du guide non-perturbé. Il faut alors recourir à une décomposition sur une base de *modes locaux*. Or, les modes locaux ont une influence considérable sur les équations couplées qui décrivent la propagation à travers la perturbation, notamment sur la forme des coefficients de couplage.

Afin de mieux apprécier l'influence des modes locaux, regardons comment les équations de Maxwell mènent aux équations couplées dans le cas des fibres effilées. De façon générale, les champs électrique et magnétique, $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{H}}$, du guide perturbé respectent les équations de Maxwell :

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{\mathbf{E}}) &= \rho, \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{H}} &= 0, \\
 \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{H}}}{\partial t}, \\
 \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} &= \frac{\partial(\epsilon \vec{\mathbf{E}})}{\partial t} + \vec{\mathbf{J}}.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

En supposant un guide diélectrique ($\epsilon = n^2(r) \cdot \epsilon_0$), c'est-à-dire non-magnétique ($\mu = \mu_0$) et sans charge ($\rho = 0$), ni courant ($\vec{\mathbf{J}} = \vec{0}$), les équations de Maxwell se réduisent aux équations d'onde :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_t \times \vec{\mathbf{E}} + \hat{z} \times \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial z} &= i \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} k \vec{\mathbf{H}} \\ \vec{\nabla}_t \times \vec{\mathbf{H}} + \hat{z} \times \frac{\partial \vec{\mathbf{H}}}{\partial z} &= -i \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} k n^2 \vec{\mathbf{E}}.\end{aligned}\tag{A.2}$$

De plus, ces équations peuvent être réduites davantage à (A.3) si les champs longitudinaux sont exprimés en termes des champs transverses sans l'approximation du guidage faible [Snyder & Love 1983].

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{E}}_t &= \frac{1}{k n^2} \left[i \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \hat{z} \times \frac{\partial \vec{\mathbf{H}}_t}{\partial z} + \frac{1}{k} \vec{\nabla}_t \times (\vec{\nabla}_t \times \vec{\mathbf{E}}_t) \right] \\ \vec{\mathbf{H}}_t &= -\frac{1}{k} \left[i \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \hat{z} \times \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}_t}{\partial z} - \frac{1}{k} \vec{\nabla}_t \times \left(\frac{\vec{\nabla}_t \times \vec{\mathbf{H}}_t}{n^2} \right) \right].\end{aligned}\tag{A.3}$$

Ainsi, il suffit de décrire l'évolution des champs transverses pour caractériser la propagation à travers le guide perturbé. Cependant, la perturbation est tellement grande que le champ transverse est mieux défini par un champ qui respecte la géométrie locale que par celui qui respecte la géométrie du guide non perturbé. On définit ce *mode local* comme étant la solution d'un guide fictif, invariant en z , qui a *localement* le même rayon r et le même profil d'indice $n(r)$ que le guide perturbé. Il est à noter que les modes locaux sont orthogonaux entre eux et que la base complète de ces modes constitue la solution exacte *du guide fictif*. Toutefois, il faut souligner que les modes locaux *ne sont pas* des solutions globales du guide perturbé, puisque le guide fictif qui décrit localement la fibre effilée n'est pas le même d'un endroit à l'autre. La propagation à travers la fibre effilée se résume donc à un couplage entre les modes locaux en z et les modes locaux en $z + dz$.

Avant de procéder à la décomposition du champ transverse en termes de modes

locaux, il faut souligner une autre conséquence du changement progressif du guide : la «constante de propagation» β dépend maintenant de z . La phase accumulée par les modes locaux est donc décrite par une intégrale, $\int_0^z \beta_j(z) dz$. On définit les champs des modes locaux de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}_j(r, \phi, z) &= \vec{\mathbf{e}}_j(r, \phi, \beta(z)) \cdot \exp\left(i \int_0^z \beta_j(z) dz\right), \quad \vec{\mathbf{e}}_j = \vec{\mathbf{e}}_{tj} + \hat{\mathbf{z}}e_z \\ \vec{\mathcal{H}}_j(r, \phi, z) &= \vec{\mathbf{h}}_j(r, \phi, \beta(z)) \cdot \exp\left(i \int_0^z \beta_j(z) dz\right), \quad \vec{\mathbf{h}}_j = \vec{\mathbf{h}}_{tj} + \hat{\mathbf{z}}h_z,\end{aligned}\quad (\text{A.4})$$

où $\vec{\mathcal{E}}_j$ est le champ électrique du $j^{\text{ième}}$ mode local et $\vec{\mathbf{e}}_{tj}$, $\hat{\mathbf{z}}e_z$ sont respectivement les composantes transverse et longitudinale.

Or, les composantes orthonormalisées (A.4) d'un mode local j doivent elles aussi satisfaire les équations (A.3), ce qui donne

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}_t &= \frac{1}{kn^2} \left[i \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}_t}{\partial z} + \frac{1}{k} \vec{\nabla}_t \times (\vec{\nabla}_t \times \vec{\mathcal{E}}_t) \right] \\ \vec{\mathcal{H}}_t &= -\frac{1}{k} \left[i \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_t}{\partial z} - \frac{1}{k} \vec{\nabla}_t \times \left(\frac{\vec{\nabla}_t \times \vec{\mathcal{H}}_t}{n^2} \right) \right].\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

Puisque la phase varie beaucoup plus rapidement que l'amplitude du champ sur une petite tranche dz du guide, nous pouvons faire l'approximation de *l'enveloppe lentement variable* :

Approximation *On suppose que la dérivée du champ est négligeable devant la dérivée de la phase sur une petite tranche du profil.*

C'est-à-dire,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_j}{\partial z} &\approx i\beta_j(z)\vec{\mathcal{E}}_j \\ \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}_j}{\partial z} &\approx i\beta_j(z)\vec{\mathcal{H}}_j.\end{aligned}\quad (\text{A.6})$$

En utilisant l'approximation de l'enveloppe lentement variable (A.6) et en simpli-

fiant les facteurs de phase, (A.5) devient :

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{e}}_{tj} &= \frac{1}{kn^2} \left[i \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \beta_j \hat{\mathbf{z}} \times \vec{\mathbf{h}}_{tj} + \frac{1}{k} \vec{\nabla}_t \times (\vec{\nabla}_t \times \vec{\mathbf{e}}_{tj}) \right] \\ \vec{\mathbf{h}}_{tj} &= -\frac{1}{k} \left[i \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \beta_j \hat{\mathbf{z}} \times \vec{\mathbf{e}}_{tj} - \frac{1}{k} \vec{\nabla}_t \times \left(\frac{\vec{\nabla}_t \times \vec{\mathbf{h}}_{tj}}{n^2} \right) \right],\end{aligned}\quad (\text{A.7})$$

où $\vec{\mathbf{e}}_{tj}$ et $\vec{\mathbf{h}}_{tj}$ sont les champs transverses du $j^{\text{ième}}$ mode local.

Les champs transverses du guide perturbé peuvent être décomposés exactement sur la base complète de tous les modes locaux progressifs et régressifs. Or, les modes régressifs sont négligés, de même que les modes de radiation, puisque le composant est supposée sans pertes. La décomposition s'écrit donc,

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{E}}_t &= \sum_j a_j(z) \cdot \vec{\mathbf{e}}_{tj}(r, \phi, \beta(z)) \\ \vec{\mathbf{H}}_t &= \sum_j a_j(z) \cdot \vec{\mathbf{h}}_{tj}(r, \phi, \beta(z)),\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

où a_j correspond à l'amplitude du $j^{\text{ième}}$ mode local progressif.

En substituant (A.8) dans (A.3) et en se servant de (A.7) et des relations d'orthonormalité locale, on obtient après quelques manipulations les équations couplées suivantes :

$$\frac{da_j}{dz} = i\beta_j a_j + \sum_k q_{jk} a_k. \quad (\text{A.9})$$

Avec,

$$q_{jk} = \begin{cases} \frac{1}{4} \int_{A_\infty} \left[\vec{\mathbf{h}}_j \times \frac{\partial \vec{\mathbf{e}}_k}{\partial z} - \vec{\mathbf{e}}_j \times \frac{\partial \vec{\mathbf{h}}_k}{\partial z} \right] \cdot \vec{\mathbf{z}} dA, & j \neq k, \\ 0, & j = k. \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

En s'assurant que les composantes orthonormalisées du mode local (A.4) satisfont les équations (A.2), il est possible de démontrer une autre expression des coefficients

de couplage [Snyder & Love 1983] :

$$q_{jk} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{k}{4} \frac{1}{[\beta_j(z) - \beta_k(z)]} \int_{A_\infty} \frac{\partial n^2}{\partial z} \vec{e}_j^* \cdot \vec{e}_k dA, & j \neq k, \\ 0, & j = k. \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Pour une fibre à symétrie circulaire ayant un profil d'indice de réfraction de N couches à sauts d'indice nous avons,

$$n^2 = \sum_{i=1}^{N-1} \left[n_i^2 - (n_i^2 - n_{i+1}^2) \cdot \text{Heav}(r - r_i(z)) \right], \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial n^2}{\partial z} = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial n^2}{\partial r_i} \frac{\partial r_i}{\partial z} = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial r_i}{\partial z} (n_i^2 - n_{i+1}^2) \delta(r - r_i), \quad (\text{A.13})$$

où $\text{Heav}(r)$ et $\delta(r)$ sont respectivement la fonction Heaviside et la distribution delta de Dirac.

Dans l'approximation du guidage faible, les composantes longitudinales sont négligeables et les parties azimutales des champs transverses se simplifient, de sorte que l'expression (A.11) se réduit à

$$q_{jk}(z, \lambda) = \frac{1}{2} \frac{k^2}{\sqrt{\beta_j \beta_k}} \frac{1}{[\beta_j - \beta_k]} \sum_{i=1}^{N-1} r_i \frac{dr_i}{dz} (n_i^2 - n_{i+1}^2) \hat{\Psi}_j(r) \hat{\Psi}_k(r) \Big|_{r=r_i}, \quad (\text{A.14})$$

où $\hat{\Psi}_j(r)$ est la partie radiale du champ transverse et $\beta_j(z, \lambda)$ est une fonction de z et de λ .

En supposant que la symétrie circulaire est conservée le long de la fibre effilée et que la fibre a subi une réduction homothétique, alors le rapport des rayons des couches en une tranche donnée reste constant et on peut définir la pente normalisée comme suit,

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = \frac{1}{r_c} \frac{dr_c}{dz} = \frac{1}{r_g} \frac{dr_g}{dz}, \quad (\text{A.15})$$

où $\rho \equiv \frac{r_c}{(r_c)_{\text{initial}}}$ correspond à l'inverse du taux de réduction de la tranche locale.

Ainsi les coefficients de couplage d'une fibre effilée peuvent s'écrire sous la forme plus compacte,

$$q_{jk}(z, \lambda) = \frac{1}{\rho(z)} \frac{d\rho}{dz} \cdot \bar{q}_{jk}(z, \lambda). \quad (\text{A.16})$$

avec $\bar{q}_{jk}(z, \lambda)$, le coefficient de couplage normalisé, défini comme suit,

$$\bar{q}_{jk}(z, \lambda) = \frac{1}{2} \frac{k^2}{\sqrt{\beta_j \beta_k}} \frac{1}{[\beta_j - \beta_k]} \left[r_c^2 (n_c^2 - n_g^2) \hat{\Psi}_j(r_c) \hat{\Psi}_k(r_c) + r_g^2 (n_g^2 - n_e^2) \hat{\Psi}_j(r_g) \hat{\Psi}_k(r_g) \right], \quad (\text{A.17})$$

où $\hat{\Psi}_j(r, \lambda)$ est la composante radiale du $j^{\text{ième}}$ mode, $n_c(\lambda)$, $n_g(\lambda)$ et $n_e(\lambda)$ sont les indices de réfraction du cœur, de la gaine et du milieu extérieur (généralement l'air) et $r_c(z)$, $r_g(z)$ sont les rayons du cœur et de la gaine respectivement.

De plus, le coefficient de couplage normalisé peut être précalculé en termes de V , la fréquence normalisée qui est définie comme suit:

$$\begin{aligned} V &\equiv \frac{2\pi}{\lambda} r_c \sqrt{n_c^2(\lambda) - n_g^2(\lambda)} \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \rho r_{c,0} \sqrt{n_c^2(\lambda) - n_g^2(\lambda)}, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Ainsi, le coefficient de couplage peut s'écrire alternativement,

$$q_{jk}(\rho(z), V) = \frac{1}{\rho(z)} \frac{d\rho}{dz} \cdot \bar{q}_{jk}(V). \quad (\text{A.19})$$

Finalement, les équations couplées (A.9) peuvent être résolues pour un profil longitudinal $\rho(z)$ donné.

Annexe B

Contributions des chemins optiques discrets aux spectres

Si un composant est discrétisé, c'est-à-dire découpé en petites tranches, alors le nombre de chemins optiques qui traversent le composant est discrétisé aussi. Nous avons vu que le spectre d'un composant discrétisé est relié au produit cumulatif des matrices de transfert de chaque tranche (1.20, 1.21). Ainsi, le spectre peut s'exprimer par une somme de termes issus de la multiplication matricielle. Or, chaque terme correspond à la contribution d'un chemin optique qui traverse l'empilement de couches (le composant). Une bonne compréhension de cette décomposition permet de saisir le mécanisme de la méthode de pelage de couches. La façon la plus simple d'analyser les contributions spectrales des différents chemins consiste à observer directement l'évolution des termes des spectres lorsque le nombre de couches augmente. En comparant les termes qui évoluent, il n'est pas difficile de constater comment le calcul de pelage de couches est construit (voir section 2.1). Malgré le fait que la reconstruction soit possible *si* les contributions de certains chemins sont connues, le chapitre 2 discute des difficultés d'extraire ces contributions du spectre.

(B.1)

$$a_1(0) = 1$$

$$a_1(\Delta z) = \left[e^{i\zeta_1 \cdot \Delta z} \right] \cdot \theta_1 e^{i\zeta_1 \cdot \Delta z}$$

$$a_1(2\Delta z) = \left[e^{i[\zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i\zeta_1 \cdot \Delta z} \right] \cdot \theta_2 \theta_1 e^{i[\zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z}$$

$$a_1(3\Delta z) = \left[e^{i[\zeta_3 + \zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i[\zeta_3 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + \sigma_3(-\sigma_2^*) \cdot e^{i[\zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + \sigma_3(-\sigma_1^*) \cdot e^{i\zeta_1 \cdot \Delta z} \right] \cdot \theta_3 \theta_2 \theta_1 e^{i[\zeta_3 + \zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z}$$

$$a_1(4\Delta z) = \left[e^{i[\zeta_4 + \zeta_3 + \zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i[\zeta_4 + \zeta_3 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + \sigma_3(-\sigma_2^*) \cdot e^{i[\zeta_4 + \zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + \sigma_3(-\sigma_1^*) \cdot e^{i[\zeta_4 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + \sigma_4(-\sigma_3^*) \cdot e^{i[\zeta_4 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + \sigma_4(-\sigma_3^*) \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i[\zeta_3 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + \sigma_4(-\sigma_2^*) \cdot e^{i[\zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + \sigma_4(-\sigma_1^*) \cdot e^{i\zeta_1 \cdot \Delta z} \right] \cdot \theta_4 \theta_3 \theta_2 \theta_1 e^{i[\zeta_4 + \zeta_3 + \zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z}$$

$$a_1(5\Delta z) = \left[e^{i[\zeta_5 + \zeta_4 + \zeta_3 + \zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i[\zeta_5 + \zeta_4 + \zeta_3 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + \sigma_3(-\sigma_2^*) \cdot e^{i[\zeta_5 + \zeta_4 + \zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + \sigma_3(-\sigma_1^*) \cdot e^{i[\zeta_5 + \zeta_4 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + \sigma_4(-\sigma_3^*) \cdot e^{i[\zeta_5 + \zeta_4 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + \sigma_4(-\sigma_3^*) \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i[\zeta_5 + \zeta_3 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + \sigma_4(-\sigma_2^*) \cdot e^{i[\zeta_5 + \zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + \sigma_4(-\sigma_1^*) \cdot e^{i[\zeta_5 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + \sigma_5(-\sigma_4^*) \sigma_3(-\sigma_2^*) \cdot e^{i[\zeta_4 + \zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + \sigma_5(-\sigma_4^*) \sigma_3(-\sigma_1^*) \cdot e^{i[\zeta_4 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + \sigma_5(-\sigma_3^*) \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i[\zeta_3 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + \sigma_5(-\sigma_2^*) \cdot e^{i[\zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + \sigma_5(-\sigma_1^*) \cdot e^{i\zeta_1 \cdot \Delta z} \right] \cdot \theta_5 \theta_4 \theta_3 \theta_2 \theta_1 e^{i[\zeta_5 + \zeta_4 + \zeta_3 + \zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z}$$

(B.2)

$$a_2(0) = 0$$

$$a_2(1\Delta z) = \left[(-\sigma_1^*) \cdot e^{i\zeta_1 \cdot \Delta z} \right] \cdot \theta_1 e^{i\zeta_1 \cdot \Delta z}$$

$$a_2(2\Delta z) = \left[(-\sigma_2^*) \cdot e^{i[\zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + (-\sigma_1^*) \cdot e^{i\zeta_1 \cdot \Delta z} \right] \cdot \theta_2 \theta_1 e^{i[\zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z}$$

$$a_2(3\Delta z) = \left[(-\sigma_3^*) \cdot e^{i[\zeta_3 + \zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + (-\sigma_3^*) \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i[\zeta_3 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + (-\sigma_2^*) \cdot e^{i[\zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + (-\sigma_1^*) \cdot e^{i\zeta_1 \cdot \Delta z} \right] \cdot \theta_3 \theta_2 \theta_1 e^{i[\zeta_3 + \zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z}$$

$$a_2(4\Delta z) = \left[\begin{aligned} & (-\sigma_4^*) \cdot e^{i[\zeta_4 + \zeta_3 + \zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + (-\sigma_4^*) \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i[\zeta_4 + \zeta_3 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + (-\sigma_4^*) \sigma_3(-\sigma_2^*) \cdot e^{i[\zeta_4 + \zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z} \\ & + (-\sigma_4^*) \sigma_3(-\sigma_1^*) \cdot e^{i[\zeta_4 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + (-\sigma_3^*) \cdot e^{i[\zeta_3 + \zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + (-\sigma_3^*) \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i[\zeta_3 + \zeta_1] \cdot \Delta z} \\ & + (-\sigma_2^*) \cdot e^{i[\zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + (-\sigma_1^*) \cdot e^{i\zeta_1 \cdot \Delta z} \end{aligned} \right] \cdot \theta_4 \theta_3 \theta_2 \theta_1 e^{i[\zeta_4 + \zeta_3 + \zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z}$$

$$a_2(5\Delta z) = \left[\begin{aligned} & (-\sigma_5^*) \cdot e^{i[\zeta_5 + \zeta_4 + \zeta_3 + \zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + (-\sigma_5^*) \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i[\zeta_5 + \zeta_4 + \zeta_3 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + (-\sigma_5^*) \sigma_3(-\sigma_2^*) \cdot e^{i[\zeta_5 + \zeta_4 + \zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z} \\ & + (-\sigma_5^*) \sigma_3(-\sigma_1^*) \cdot e^{i[\zeta_5 + \zeta_4 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + (-\sigma_5^*) \sigma_4(-\sigma_3^*) \cdot e^{i[\zeta_5 + \zeta_3 + \zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + (-\sigma_5^*) \sigma_4(-\sigma_3^*) \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i[\zeta_5 + \zeta_3 + \zeta_1] \cdot \Delta z} \\ & + (-\sigma_5^*) \sigma_4(-\sigma_2^*) \cdot e^{i[\zeta_5 + \zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + (-\sigma_5^*) \sigma_4(-\sigma_1^*) \cdot e^{i[\zeta_5 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + (-\sigma_4^*) \cdot e^{i[\zeta_4 + \zeta_3 + \zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z} \\ & + (-\sigma_4^*) \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i[\zeta_4 + \zeta_3 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + (-\sigma_4^*) \sigma_3(-\sigma_2^*) \cdot e^{i[\zeta_4 + \zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + (-\sigma_4^*) \sigma_3(-\sigma_1^*) \cdot e^{i[\zeta_4 + \zeta_1] \cdot \Delta z} \\ & + (-\sigma_3^*) \cdot e^{i[\zeta_3 + \zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + (-\sigma_3^*) \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i[\zeta_3 + \zeta_1] \cdot \Delta z} + (-\sigma_2^*) \cdot e^{i[\zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z} \\ & + (-\sigma_1^*) \cdot e^{i\zeta_1 \cdot \Delta z} \end{aligned} \right] \cdot \theta_5 \theta_4 \theta_3 \theta_2 \theta_1 e^{i[\zeta_5 + \zeta_4 + \zeta_3 + \zeta_2 + \zeta_1] \cdot \Delta z}$$

D'abord, la matrice de transfert est nettement allégée par les simplifications de notation introduites par les équations (2.1) à (2.5). Ensuite, en procédant à la multiplication successive des matrices de transfert, il est possible de décomposer les champs du mode fondamental a_1 et du mode de couplage a_2 en termes des différents chemins optiques à travers l'empilement de couches. Les équations (B.1) et (B.2) présentent le cas général où le déphasage sur chaque couche est différent. On peut voir l'évolution des termes pour les cas allant de une à cinq couches. Il est à noter qu'un terme $-\sigma_j^*$ correspond à un transfert au mode de gaine dans la $j^{ième}$ couche, tandis que σ_j correspond à un retour au mode de cœur. De plus, le nombre de chemins augmente exponentiellement, mais le chemin le plus long est celui qui a accumulé le plus de délai, c'est-à-dire le chemin où le mode fondamental n'a subi aucun couplage.

Par ailleurs, si les déphasages de toutes les couches sont identiques, la dégénérescence implique,

$$\begin{aligned}\zeta_j &= \zeta \\ \xi_j &= \xi.\end{aligned}\tag{B.3}$$

Ainsi, les équations (B.1) et (B.2) se réduisent aux équations (B.9) et (B.10). On constate aisément que les champs peuvent alors se réécrire sous la forme,

$$\begin{aligned}a_1(z, \zeta) &= \sum_{j=1}^N \left[c_j(z, \zeta) e^{i \cdot N \cdot \xi \cdot \Delta z} \right] e^{i \cdot j \cdot \zeta \cdot \Delta z} \\ a_2(z, \zeta) &= \sum_{j=1}^N \left[d_j(z, \zeta) e^{i \cdot N \cdot \xi \cdot \Delta z} \right] e^{i \cdot j \cdot \zeta \cdot \Delta z}.\end{aligned}\tag{B.4}$$

Il est à noter que les coefficients $c_j(z, \zeta)$ et $d_j(z, \zeta)$ des séries de Fourier comprennent une dépendance en ζ qui remonte à la potentielle dépendance en ω des coefficients de couplage. Or, les coefficients de couplage sont considérés indépendants de ω , donc $c_j(z, \zeta) = c_j(z)$ et $d_j(z, \zeta) = d_j(z)$.

De plus, pour le cas des réseaux à longs pas, nous avons

$$\zeta = \beta_1 - \beta_2 - \frac{2\pi}{\Lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n_{\text{eff}} - \frac{2\pi}{\Lambda} = \omega \left(\frac{\Delta n_{\text{eff}}}{c} \right) - \frac{2\pi}{\Lambda}. \quad (\text{B.5})$$

Finalement, ξ est connu d'avance, ce qui permet le changement de variable suivant pour éliminer un terme de phase commun :

$$a_2(z, \zeta) = \bar{a}_2(z, \zeta) e^{i \cdot N \cdot \xi \cdot \Delta z}. \quad (\text{B.6})$$

Ainsi, le champ des modes d'un réseau à longs pas discrétisé peut s'écrire sous forme d'une série de Fourier,

$$\begin{aligned} \bar{a}_1(z, \omega) &= \sum_{m=1}^N c_m(z) e^{i \cdot m \cdot [\omega(\frac{\Delta n_{\text{eff}}}{c}) - \frac{2\pi}{\Lambda}] \cdot \Delta z} \\ \bar{a}_2(z, \omega) &= \sum_{m=1}^N d_m(z) e^{i \cdot m \cdot [\omega(\frac{\Delta n_{\text{eff}}}{c}) - \frac{2\pi}{\Lambda}] \cdot \Delta z}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Une écriture alternative est peut-être plus claire : pour un z_j donné, le spectre se décompose en série de Fourier en ω ,

$$\begin{aligned} [\bar{a}_1(\omega)]_j &= \sum_{m=1}^N [c_m]_j e^{i \cdot m \cdot [\omega(\frac{\Delta n_{\text{eff}}}{c}) - \frac{2\pi}{\Lambda}] \cdot \Delta z} \\ [\bar{a}_2(\omega)]_j &= \sum_{m=1}^N [d_m]_j e^{i \cdot m \cdot [\omega(\frac{\Delta n_{\text{eff}}}{c}) - \frac{2\pi}{\Lambda}] \cdot \Delta z}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Il est à noter que même si le spectre s'exprime sous forme de série de Fourier dans le cas où les déphasages de toutes les couches sont identiques, la simplification sous forme de série n'est plus valide dans le cas général où il s'ajoute des dépendances en z et en ω .

(B.9)

$$\begin{aligned}
a_1(0) &= 1 \\
a_1(\Delta z) &= \left[e^{i\zeta \cdot \Delta z} \right] \cdot \theta_1 e^{i\zeta \cdot \Delta z} \\
a_1(2\Delta z) &= \left[e^{i2\zeta \cdot \Delta z} + \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i\zeta \cdot \Delta z} \right] \cdot \theta_2 \theta_1 e^{i2\zeta \cdot \Delta z} \\
a_1(3\Delta z) &= \left[e^{i3\zeta \cdot \Delta z} + \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i2\zeta \cdot \Delta z} + \sigma_3(-\sigma_2^*) \cdot e^{i\zeta \cdot \Delta z} + \sigma_3(-\sigma_1^*) \cdot e^{i3\zeta \cdot \Delta z} \right] \cdot \theta_3 \theta_2 \theta_1 e^{i3\zeta \cdot \Delta z} \\
a_1(4\Delta z) &= \left[e^{i4\zeta \cdot \Delta z} + \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i3\zeta \cdot \Delta z} + \sigma_3(-\sigma_2^*) \cdot e^{i2\zeta \cdot \Delta z} \right. \\
&\quad + \sigma_3(-\sigma_1^*) \cdot e^{i2\zeta \cdot \Delta z} + \sigma_4(-\sigma_3^*) \cdot e^{i3\zeta \cdot \Delta z} + \sigma_4(-\sigma_2^*) \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i2\zeta \cdot \Delta z} \\
&\quad \left. + \sigma_4(-\sigma_2^*) \cdot e^{i2\zeta \cdot \Delta z} + \sigma_4(-\sigma_1^*) \cdot e^{i\zeta \cdot \Delta z} \right] \cdot \theta_4 \theta_3 \theta_2 \theta_1 e^{i4\zeta \cdot \Delta z} \\
a_1(5\Delta z) &= \left[e^{i5\zeta \cdot \Delta z} + \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i4\zeta \cdot \Delta z} + \sigma_3(-\sigma_2^*) \cdot e^{i3\zeta \cdot \Delta z} \right. \\
&\quad + \sigma_3(-\sigma_1^*) \cdot e^{i3\zeta \cdot \Delta z} + \sigma_4(-\sigma_3^*) \cdot e^{i4\zeta \cdot \Delta z} + \sigma_4(-\sigma_2^*) \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i3\zeta \cdot \Delta z} \\
&\quad + \sigma_4(-\sigma_2^*) \cdot e^{i3\zeta \cdot \Delta z} + \sigma_4(-\sigma_1^*) \cdot e^{i2\zeta \cdot \Delta z} + \sigma_5(-\sigma_4^*) \sigma_3(-\sigma_2^*) \cdot e^{i3\zeta \cdot \Delta z} + \sigma_5(-\sigma_4^*) \sigma_3(-\sigma_1^*) \cdot e^{i2\zeta \cdot \Delta z} \\
&\quad + \sigma_5(-\sigma_3^*) \cdot e^{i3\zeta \cdot \Delta z} + \sigma_5(-\sigma_2^*) \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i2\zeta \cdot \Delta z} + \sigma_5(-\sigma_2^*) \cdot e^{i2\zeta \cdot \Delta z} \\
&\quad \left. + \sigma_5(-\sigma_1^*) \cdot e^{i\zeta \cdot \Delta z} \right] \cdot \theta_5 \theta_4 \theta_3 \theta_2 \theta_1 e^{i5\zeta \cdot \Delta z}
\end{aligned}$$

(B.10)

$$\begin{aligned}
a_2(0) &= 0 \\
a_2(1\Delta z) &= \left[(-\sigma_1^*) \cdot e^{i\zeta \cdot \Delta z} \right] \cdot \theta_1 e^{i\zeta \cdot \Delta z} \\
a_2(2\Delta z) &= \left[(-\sigma_2^*) \cdot e^{i \cdot 2\zeta \cdot \Delta z} + (-\sigma_1^*) \cdot e^{i\zeta \cdot \Delta z} \right] \cdot \theta_2 \theta_1 e^{i \cdot 2\zeta \cdot \Delta z} \\
a_2(3\Delta z) &= \left[(-\sigma_3^*) \cdot e^{i \cdot 3\zeta \cdot \Delta z} + (-\sigma_2^*) \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i \cdot 2\zeta \cdot \Delta z} + (-\sigma_1^*) \cdot e^{i\zeta \cdot \Delta z} + (-\sigma_2^*) \cdot e^{i \cdot 2\zeta \cdot \Delta z} + (-\sigma_1^*) \cdot e^{i\zeta \cdot \Delta z} \right] \cdot \theta_3 \theta_2 \theta_1 e^{i \cdot 3\zeta \cdot \Delta z} \\
a_2(4\Delta z) &= \left[(-\sigma_4^*) \cdot e^{i \cdot 4\zeta \cdot \Delta z} + (-\sigma_4^*) \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i \cdot 3\zeta \cdot \Delta z} + (-\sigma_4^*) \sigma_3(-\sigma_2^*) \cdot e^{i \cdot 3\zeta \cdot \Delta z} \right. \\
&\quad + (-\sigma_4^*) \sigma_3(-\sigma_1^*) \cdot e^{i \cdot 2\zeta \cdot \Delta z} + (-\sigma_3^*) \cdot e^{i \cdot 3\zeta \cdot \Delta z} + (-\sigma_3^*) \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i \cdot 2\zeta \cdot \Delta z} \\
&\quad \left. + (-\sigma_2^*) \cdot e^{i \cdot 2\zeta \cdot \Delta z} + (-\sigma_1^*) \cdot e^{i\zeta \cdot \Delta z} \right] \cdot \theta_4 \theta_3 \theta_2 \theta_1 e^{i \cdot 4\zeta \cdot \Delta z} \\
a_2(5\Delta z) &= \left[(-\sigma_5^*) \cdot e^{i \cdot 5\zeta \cdot \Delta z} + (-\sigma_5^*) \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i \cdot 4\zeta \cdot \Delta z} + (-\sigma_5^*) \sigma_3(-\sigma_2^*) \cdot e^{i \cdot 4\zeta \cdot \Delta z} \right. \\
&\quad + (-\sigma_5^*) \sigma_3(-\sigma_1^*) \cdot e^{i \cdot 3\zeta \cdot \Delta z} + (-\sigma_5^*) \sigma_4(-\sigma_3^*) \cdot e^{i \cdot 4\zeta \cdot \Delta z} + (-\sigma_5^*) \sigma_4(-\sigma_3^*) \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i \cdot 3\zeta \cdot \Delta z} \\
&\quad + (-\sigma_5^*) \sigma_4(-\sigma_2^*) \cdot e^{i \cdot 3\zeta \cdot \Delta z} + (-\sigma_5^*) \sigma_4(-\sigma_1^*) \cdot e^{i \cdot 2\zeta \cdot \Delta z} + (-\sigma_4^*) \cdot e^{i \cdot 4\zeta \cdot \Delta z} \\
&\quad + (-\sigma_4^*) \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i \cdot 3\zeta \cdot \Delta z} + (-\sigma_4^*) \sigma_3(-\sigma_2^*) \cdot e^{i \cdot 3\zeta \cdot \Delta z} + (-\sigma_4^*) \sigma_3(-\sigma_1^*) \cdot e^{i \cdot 2\zeta \cdot \Delta z} \\
&\quad + (-\sigma_3^*) \cdot e^{i \cdot 3\zeta \cdot \Delta z} + (-\sigma_3^*) \sigma_2(-\sigma_1^*) \cdot e^{i \cdot 2\zeta \cdot \Delta z} + (-\sigma_2^*) \cdot e^{i \cdot 2\zeta \cdot \Delta z} \\
&\quad \left. + (-\sigma_1^*) \cdot e^{i\zeta \cdot \Delta z} \right] \cdot \theta_5 \theta_4 \theta_3 \theta_2 \theta_1 e^{i \cdot 5\zeta \cdot \Delta z}
\end{aligned}$$

Annexe C

Détermination des paramètres optimaux pour la minimisation de certaines fonctions tests

Étant donné la nature aléatoire des méthodes d'optimisation, il est nécessaire d'effectuer une étude statistique sur plusieurs tentatives de minimisation afin de caractériser leur comportement. De plus, la qualité de la minimisation dépend des paramètres qui ont été choisis pour la méthode. Donc, pour tenter de comparer les méthodes au même niveau, il faut déterminer les paramètres optimaux de chaque méthode. Les paramètres sont considérés optimaux si le taux de réussite est maximisé. Rappelons qu'une réussite est définie par l'atteinte d'une précision minimale avant d'atteindre le nombre maximal d'évaluations de fonction qui a été imposé (exemple : une précision d'au moins 10^{-5} après 3000 évaluations de fonction). Ainsi, pour tester les différentes méthodes, 1000 essais ont été effectués, sur différentes fonctions tests avec une série de paramètres de contrôles, et le taux de réussite correspond au rapport de tentatives réussies. Des statistiques sur le taux de réussite ont été calculées. Étant donné que les fonctions testées ont leur minimum global en zéro, l'écart par rapport au minimum global est directement la valeur de F trouvée. Les meilleures valeurs trouvées

pour le minimum ont été moyennés sur les essais réussis et la meilleure valeur parmi tous les essais a été conservée. Les tableaux suivants présentent les résultats. Les paramètres optimaux, suivant la définition ci-dessus, ont été retenus pour les études de convergence. Rappelons que μ est le taux de mutation de l'algorithme génétique et que χ définit indirectement (par la formule (3.2)), mais plus intuitivement, la valeur de σ_0 de la méthode de programmation évolutive.

C.1 Fonction test *de Jourg*

Tableau C.1 : Statistiques d'optimisation de la fonction *de Jourg* avec l'algorithme génétique.

μ	N_{Pop}	Taux de réussite [%]	F moyen	F min	μ	N_{Pop}	Taux de réussite [%]	F moyen	F min
0,1	20	49,7	2,11E-07	7,56E-26	0,1	80	90,8	3,21E-08	2,68E-31
0,2	20	48,7	2,29E-07	2,95E-16	0,2	80	89,5	6,96E-08	1,64E-22
0,3	20	47,3	2,50E-07	1,88E-14	0,3	80	82,1	1,20E-07	4,85E-16
0,4	20	57,6	3,19E-07	2,53E-11	0,4	80	73,7	1,92E-07	1,65E-11
0,5	20	15,8	4,82E-07	4,82E-10	0,5	80	33,8	4,43E-07	5,92E-09
0,6	20	5,1	4,38E-07	7,08E-09	0,6	80	7,8	4,66E-07	7,62E-09
0,7	20	2,1	6,21E-07	7,83E-08	0,7	80	3,1	5,25E-07	1,50E-07
0,8	20	1,3	4,41E-07	5,08E-09	0,8	80	1,8	5,88E-07	4,90E-08
0,9	20	1,1	5,46E-07	1,01E-08	0,9	80	0,6	4,87E-07	2,84E-08
1	20	0,5	4,43E-07	1,66E-07	1	80	0,5	5,99E-07	3,46E-07
0,1	40	66,6	1,19E-07	0	0,1	100	96,8	1,98E-08	1,52E-27
0,2	40	66,8	1,73E-07	1,81E-19	0,2	100	93,8	3,69E-08	4,33E-20
0,3	40	53,1	2,33E-07	2,35E-17	0,3	100	86,2	8,70E-08	1,06E-15
0,4	40	71,2	2,30E-07	3,25E-11	0,4	100	78,2	1,82E-07	2,18E-11
0,5	40	29,8	4,51E-07	9,62E-10	0,5	100	31,5	4,48E-07	1,78E-09
0,6	40	7,2	4,35E-07	2,83E-09	0,6	100	7,7	5,46E-07	5,86E-11
0,7	40	1,4	3,87E-07	1,31E-08	0,7	100	4,4	4,93E-07	1,83E-08
0,8	40	1,9	5,33E-07	8,85E-08	0,8	100	1,4	5,36E-07	1,04E-07
0,9	40	1,5	4,42E-07	2,47E-08	0,9	100	1,3	5,57E-07	9,89E-09
1	40	1,1	6,20E-07	1,29E-07	1	100	0,8	4,87E-07	1,95E-08
0,1	60	82,3	8,44E-08	0					
0,2	60	79,3	1,09E-07	1,03E-26					
0,3	60	71,4	1,48E-07	1,26E-17					
0,4	60	72,9	2,24E-07	2,77E-12					
0,5	60	32,4	4,41E-07	4,35E-09					
0,6	60	8,7	4,74E-07	2,62E-09					
0,7	60	3,1	4,94E-07	1,23E-08					
0,8	60	1,1	4,98E-07	1,84E-08					
0,9	60	1,2	5,46E-07	2,96E-08					
1	60	1	4,16E-07	1,34E-07					

Tableau C.2 : Statistiques d'optimisation de la fonction *de Joung* avec la programmation évolutive.

χ	N_{Pop}	Taux de réussite [%]	F moyen	F min	χ	N_{Pop}	Taux de réussite [%]	F moyen	F min
1	20	0	0	0	1	60	2,5	9,85E-07	9,85E-07
2	20	10,8	3,12E-07	1,08E-07	2	60	11,1	4,56E-07	1,40E-07
3	20	10,7	4,36E-07	1,75E-07	3	60	20,2	5,48E-07	4,05E-08
4	20	26,2	5,13E-07	1,24E-08	4	60	29	4,58E-07	3,12E-08
5	20	51,8	3,81E-07	3,02E-08	5	60	38,3	5,55E-07	2,63E-08
6	20	48,4	5,28E-07	2,98E-08	6	60	66,3	4,07E-07	6,33E-10
7	20	48,3	4,25E-07	1,41E-08	7	60	85,5	3,88E-07	7,55E-09
8	20	79,2	4,38E-07	2,57E-08	8	60	71,3	3,05E-07	1,54E-08
9	20	65	4,84E-07	1,00E-08	9	60	86,2	3,07E-07	1,67E-09
10	20	75,7	2,59E-07	3,79E-09	10	60	90,6	3,26E-07	1,91E-08
1	30	0	0	0	1	70	4,7	1,35E-07	2,78E-08
2	30	10,7	6,90E-07	2,75E-07	2	70	9,6	5,23E-07	1,46E-07
3	30	22,6	3,30E-07	1,02E-08	3	70	24,5	4,47E-07	1,81E-08
4	30	24,7	4,94E-07	1,53E-08	4	70	42	4,69E-07	2,43E-08
5	30	59,8	4,24E-07	3,61E-08	5	70	58,3	4,20E-07	2,88E-08
6	30	65,6	4,28E-07	5,21E-08	6	70	60,1	4,15E-07	1,61E-09
7	30	58,5	4,11E-07	5,33E-09	7	70	72,3	3,97E-07	2,91E-09
8	30	67	4,05E-07	2,33E-09	8	70	81,2	3,39E-07	4,84E-08
9	30	84,8	3,43E-07	1,77E-09	9	70	81,4	3,50E-07	7,55E-09
10	30	86,7	3,70E-07	2,06E-08	10	70	83,7	2,86E-07	1,33E-08
1	40	2,7	8,83E-07	8,83E-07	1	80	4,6	6,27E-07	4,14E-07
2	40	7,7	4,49E-07	8,10E-08	2	80	6,9	3,67E-07	2,43E-07
3	40	15,9	3,42E-07	7,18E-09	3	80	14	7,35E-07	2,64E-07
4	40	31,3	5,22E-07	8,31E-08	4	80	35,7	3,50E-07	1,10E-08
5	40	52,5	4,37E-07	9,80E-10	5	80	73,2	4,60E-07	4,29E-08
6	40	52,8	5,35E-07	3,97E-08	6	80	69,9	3,26E-07	1,34E-08
7	40	71,2	3,74E-07	6,65E-09	7	80	71,7	2,97E-07	5,56E-09
8	40	65,8	3,89E-07	4,19E-08	8	80	77,1	4,52E-07	4,82E-09
9	40	88,7	3,51E-07	2,29E-08	9	80	79,3	3,37E-07	3,16E-10
10	40	84,3	3,55E-07	2,50E-09	10	80	91,5	3,28E-07	1,95E-08
1	50	0	0	0	1	90	5	8,70E-07	7,91E-07
2	50	23,5	4,90E-07	2,09E-08	2	90	4,9	3,61E-07	1,87E-07
3	50	13	4,63E-07	2,47E-07	3	90	24,4	5,41E-07	2,36E-08
4	50	36	4,30E-07	1,93E-08	4	90	39,2	3,54E-07	3,98E-08
5	50	36,5	5,19E-07	1,84E-08	5	90	51,3	4,09E-07	8,32E-08
6	50	56,1	4,10E-07	1,74E-09	6	90	73,4	3,32E-07	3,69E-09
7	50	77,3	3,65E-07	1,77E-08	7	90	71,9	4,38E-07	1,00E-08
8	50	80,2	3,68E-07	3,04E-08	8	90	71	3,69E-07	2,88E-08
9	50	92,2	2,79E-07	8,06E-11	9	90	81,1	2,98E-07	4,51E-10
10	50	82	3,16E-07	5,30E-09	10	90	92,8	2,67E-07	2,66E-10
					1	100	7,1	7,48E-07	5,00E-07
					2	100	4,9	7,16E-07	5,30E-07
					3	100	24,1	5,15E-07	6,45E-08
					4	100	38,7	4,26E-07	9,53E-10
					5	100	51,6	4,16E-07	4,33E-12
					6	100	62,4	3,18E-07	9,51E-09
					7	100	73,6	3,55E-07	1,21E-08
					8	100	73,5	3,65E-07	2,95E-08
					9	100	80,7	3,54E-07	6,25E-09
					10	100	78,7	3,36E-07	7,78E-09

Tableau C.3 : Statistiques d'optimisation de la fonction *de Joug* avec la méthode de division cellulaire.

$N_{\text{conservés}}$	$N_{\text{Population}}$	Taux de réussite [%]	F moyen	F min
10	20	8,6	8,02E-07	3,54E-07
20	20	0	0	0
10	30	28,4	1,94E-07	3,59E-09
20	30	0	0	0
30	30	0	0	0
10	40	49,7	2,33E-07	2,11E-10
20	40	2,1	8,00E-07	8,00E-07
30	40	1,3	8,15E-07	8,15E-07
40	40	0	0	0
10	50	52,1	6,43E-08	4,74E-09
20	50	2,9	5,12E-07	5,12E-07
30	50	2,8	4,70E-07	4,70E-07
40	50	0	0	0
50	50	0	0	0
10	60	68,3	8,38E-08	1,67E-10
20	60	23	5,33E-07	6,83E-08
30	60	2,1	5,97E-08	5,97E-08
40	60	0	0	0
50	60	0	0	0
60	60	0	0	0
10	70	51,5	2,03E-07	3,60E-09
20	70	18,6	4,80E-07	2,15E-07
30	70	3,2	4,68E-07	4,58E-07
40	70	3,2	7,94E-07	6,67E-07
50	70	1,6	3,04E-07	3,04E-07
60	70	0	0	0
70	70	0	0	0
10	80	73,1	1,24E-07	1,26E-11
20	80	25,9	3,84E-07	5,04E-08
30	80	3,9	3,65E-07	6,48E-08
40	80	3,8	5,58E-07	1,76E-07
50	80	3,5	6,66E-07	3,19E-07
60	80	0	0	0
70	80	0	0	0
80	80	0	0	0
10	90	73	1,43E-07	3,23E-11
20	90	25,3	3,94E-07	1,77E-08
30	90	5,7	5,46E-07	8,61E-08
40	90	0	0	0
50	90	1,1	1,24E-07	1,24E-07
60	90	0	0	0
70	90	2	8,12E-07	6,43E-07
80	90	1	8,95E-07	8,95E-07
90	90	0	0	0
10	100	79,3	7,46E-08	1,73E-11
20	100	40,6	4,30E-07	3,73E-08
30	100	8,5	5,40E-07	7,26E-08
40	100	0	0	0
50	100	4,6	7,62E-07	6,37E-07
60	100	0	0	0
70	100	0	0	0
80	100	0	0	0
90	100	0	0	0
100	100	0	0	0

C.2 Fonction test de *Shubert*

Tableau C.4 : Statistiques d'optimisation de la fonction *Shubert* avec l'algorithme génétique.

μ	N_{Pop}	Taux de réussite [%]	F moyen	F min	μ	N_{Pop}	Taux de réussite [%]	F moyen	F min
0,1	20	57,2	2,19E-02	6,31E-12	0,1	80	71,7	1,13E-02	6,08E-12
0,2	20	56,5	2,34E-02	1,94E-11	0,2	80	44,9	1,72E-02	8,21E-12
0,3	20	21,8	3,48E-02	1,27E-06	0,3	80	7	4,08E-02	2,84E-06
0,4	20	5,1	4,56E-02	1,37E-03	0,4	80	3,1	5,39E-02	3,10E-03
0,5	20	3,1	4,78E-02	9,78E-04	0,5	80	3,2	4,75E-02	3,08E-04
0,6	20	2	4,51E-02	4,87E-04	0,6	80	3,2	4,81E-02	4,34E-04
0,7	20	2,6	5,10E-02	3,72E-03	0,7	80	3	5,33E-02	4,71E-03
0,8	20	2,4	5,93E-02	7,31E-03	0,8	80	2,3	5,18E-02	2,68E-03
0,9	20	2,6	4,63E-02	4,37E-03	0,9	80	2,2	4,88E-02	2,49E-03
1	20	2	4,12E-02	6,22E-03	1	80	2,6	4,47E-02	2,82E-03
0,1	40	61,8	1,88E-02	6,08E-12	0,1	100	77,3	9,27E-03	6,05E-12
0,2	40	54,5	2,01E-02	6,11E-12	0,2	100	37,7	2,07E-02	7,41E-10
0,3	40	12,7	3,70E-02	2,42E-11	0,3	100	6,2	5,55E-02	1,25E-03
0,4	40	3,9	5,32E-02	1,47E-03	0,4	100	2,2	4,70E-02	2,95E-03
0,5	40	3,8	5,26E-02	3,80E-03	0,5	100	3,7	4,66E-02	1,30E-03
0,6	40	2,5	4,85E-02	3,73E-03	0,6	100	2,3	5,02E-02	4,63E-03
0,7	40	2,9	5,11E-02	3,44E-03	0,7	100	2	6,14E-02	8,10E-03
0,8	40	3,5	4,92E-02	4,06E-03	0,8	100	2,1	4,63E-02	3,44E-04
0,9	40	3	6,40E-02	4,09E-03	0,9	100	2,5	5,23E-02	1,25E-03
1	40	2,6	4,40E-02	4,19E-03	1	100	2	3,65E-02	5,20E-04
0,1	60	66,5	1,62E-02	6,08E-12					
0,2	60	52,4	1,91E-02	6,22E-12					
0,3	60	7,2	3,69E-02	1,12E-06					
0,4	60	3,1	5,17E-02	5,12E-03					
0,5	60	3,5	4,37E-02	1,30E-03					
0,6	60	2,3	4,74E-02	9,35E-04					
0,7	60	2,5	5,27E-02	6,93E-03					
0,8	60	2,1	5,76E-02	4,42E-03					
0,9	60	2,3	3,56E-02	1,75E-04					
1	60	2,4	6,15E-02	9,58E-03					

Tableau C.5 : Statistiques d'optimisation de la fonction *Shubert* avec la programmation évolutive.

χ	N_{Pop}	Taux de réussite [%]	F moyen	F min	χ	N_{Pop}	Taux de réussite [%]	F moyen	F min
1	20	16,8	5,71E-02	1,42E-03	1	60	16,3	4,34E-02	1,21E-02
2	20	10,5	4,44E-02	7,11E-03	2	60	14	5,00E-02	5,87E-03
3	20	19,4	2,38E-02	8,54E-04	3	60	14,3	5,30E-02	2,40E-03
4	20	32,1	3,67E-02	3,49E-03	4	60	24,6	4,31E-02	6,10E-03
5	20	26,4	4,60E-02	7,96E-03	5	60	49,1	4,46E-02	2,28E-03
6	20	45	4,70E-02	4,10E-03	6	60	50,5	4,27E-02	5,89E-03
7	20	61,9	3,86E-02	5,05E-03	7	60	54,9	4,05E-02	7,19E-05
8	20	78,6	5,00E-02	3,00E-03	8	60	70,2	4,53E-02	1,62E-03
9	20	62,8	3,56E-02	1,51E-03	9	60	77,4	3,63E-02	7,16E-04
10	20	64,7	3,31E-02	1,54E-03	10	60	81,9	3,40E-02	1,27E-03
1	30	24,7	4,57E-02	2,40E-04	1	70	14,1	6,71E-02	2,03E-02
2	30	6,4	4,16E-02	1,11E-02	2	70	16,2	4,14E-02	6,61E-03
3	30	19,1	3,33E-02	1,70E-05	3	70	21,5	4,59E-02	1,92E-02
4	30	24,9	3,83E-02	9,19E-04	4	70	28,2	5,08E-02	2,67E-04
5	30	20,7	3,55E-02	1,28E-02	5	70	38,3	4,43E-02	3,02E-03
6	30	53,5	4,18E-02	1,24E-03	6	70	65,8	3,86E-02	7,42E-04
7	30	40,4	4,39E-02	6,61E-03	7	70	55,9	4,03E-02	9,93E-04
8	30	57,7	4,29E-02	7,37E-04	8	70	65	4,30E-02	5,92E-04
9	30	66,5	3,24E-02	1,07E-03	9	70	75,7	4,03E-02	1,01E-04
10	30	78,9	4,20E-02	1,74E-03	10	70	75,9	2,79E-02	2,03E-03
1	40	18,1	5,67E-02	2,12E-02	1	80	9,8	3,08E-02	1,39E-02
2	40	10,4	4,45E-02	1,44E-02	2	80	13,7	2,35E-02	6,41E-03
3	40	19,4	5,05E-02	2,18E-03	3	80	7,8	3,11E-02	1,70E-02
4	40	27,4	5,94E-02	1,26E-03	4	80	24,7	4,85E-02	8,91E-04
5	40	26,4	4,20E-02	8,71E-03	5	80	33,1	4,34E-02	4,52E-03
6	40	39,3	4,89E-02	8,72E-03	6	80	47,6	4,68E-02	2,57E-03
7	40	58	4,04E-02	6,56E-04	7	80	59,6	4,26E-02	1,14E-03
8	40	57,4	4,61E-02	5,18E-04	8	80	69,7	3,05E-02	1,12E-03
9	40	83,2	3,83E-02	3,61E-04	9	80	72,3	3,01E-02	1,69E-03
10	40	90	3,50E-02	3,93E-03	10	80	78,4	3,81E-02	1,86E-03
1	50	31,7	4,45E-02	9,71E-04	1	90	15,4	4,79E-02	2,84E-03
2	50	9,4	5,07E-02	1,93E-02	2	90	13,8	4,74E-02	7,92E-03
3	50	25,3	5,44E-02	1,93E-02	3	90	25,3	4,86E-02	1,06E-02
4	50	33,2	3,52E-02	5,55E-03	4	90	23,6	5,99E-02	2,00E-02
5	50	41,5	3,65E-02	7,33E-04	5	90	49,2	4,99E-02	4,99E-03
6	50	40,3	4,34E-02	1,96E-03	6	90	44,9	4,64E-02	5,13E-03
7	50	64,8	4,58E-02	1,44E-03	7	90	66,1	3,98E-02	3,17E-03
8	50	61,3	4,72E-02	1,14E-03	8	90	54,9	3,43E-02	1,67E-05
9	50	77,8	3,99E-02	1,28E-03	9	90	59,5	3,87E-02	3,27E-03
10	50	78,2	3,59E-02	2,21E-03	10	90	76,7	3,78E-02	4,67E-05
					1	100	19,6	3,53E-02	1,22E-03
					2	100	10,8	4,24E-02	1,01E-02
					3	100	21,4	4,92E-02	8,23E-05
					4	100	31	5,12E-02	1,55E-02
					5	100	26,3	4,82E-02	1,87E-03
					6	100	52,9	4,33E-02	4,25E-03
					7	100	55	4,92E-02	6,79E-04
					8	100	62,7	3,54E-02	3,63E-06
					9	100	70,2	4,51E-02	2,85E-04
					10	100	74,2	3,33E-02	1,07E-03

Tableau C.6 : Statistiques d'optimisation de la fonction *Shubert* avec la méthode de division cellulaire.

$N_{\text{conservés}}$	$N_{\text{Population}}$	Taux de réussite [%]	F moyen	F min
10	20	6	4,43E-02	1,51E-03
20	20	2	9,06E-02	9,06E-02
10	30	8,4	2,63E-02	3,02E-03
20	30	2,5	4,09E-02	4,09E-02
30	30	0	0	0
10	40	8,1	2,75E-02	4,69E-03
20	40	3,4	5,38E-02	1,04E-02
30	40	1,5	9,99E-02	9,85E-02
40	40	1,5	8,87E-03	8,87E-03
10	50	4	7,97E-02	5,54E-02
20	50	4,4	4,96E-02	2,21E-02
30	50	2,4	2,87E-02	2,87E-02
40	50	4,8	4,37E-02	4,23E-03
50	50	2,3	4,14E-03	4,14E-03
10	60	9,2	2,45E-02	1,59E-03
20	60	5,4	9,02E-02	8,59E-02
30	60	1,8	7,72E-02	7,72E-02
40	60	0	0	0
50	60	0	0	0
60	60	1,8	9,24E-02	9,24E-02
10	70	7,5	4,84E-02	1,82E-03
20	70	2,9	5,24E-02	1,27E-02
30	70	1,4	3,78E-02	3,78E-02
40	70	1,4	6,45E-02	6,45E-02
50	70	0	0	0
60	70	2,8	8,46E-02	7,68E-02
70	70	0	0	0
10	80	11,1	5,01E-02	1,72E-02
20	80	0	0	0
30	80	0	0	0
40	80	3,6	6,77E-02	4,47E-02
50	80	1,1	2,20E-02	2,20E-02
60	80	1,2	4,38E-02	4,38E-02
70	80	0	0	0
80	80	1,1	6,57E-02	6,57E-02
10	90	9,9	5,73E-02	7,13E-03
20	90	2,9	5,90E-02	4,14E-02
30	90	2	3,76E-02	2,95E-02
40	90	1	8,78E-02	8,78E-02
50	90	3,7	4,35E-02	7,40E-03
60	90	1,3	3,82E-02	2,81E-02
70	90	1,7	8,15E-02	7,70E-02
80	90	1,8	2,63E-02	1,07E-02
90	90	1,7	2,18E-02	4,31E-03
10	100	6,1	4,63E-02	3,64E-03
20	100	5,9	6,29E-02	2,05E-02
30	100	1,4	6,58E-03	6,58E-03
40	100	5,9	2,67E-02	2,25E-03
50	100	0	0	0
60	100	0	0	0
70	100	0	0	0
80	100	3,1	5,26E-02	4,06E-02
90	100	3,2	4,08E-02	3,29E-03
100	100	0	0	0

Tableau C.7 : Statistiques d'optimisation de la fonction *Shubert* avec le *multinitium* de la méthode de classique de métrique variable. Le paramètre $\text{Max}_{\text{descente}}$ correspond au nombre maximal d'évaluations de fonction permis pour une tentative de la méthode classique.

$\text{Max}_{\text{descente}}$	Taux de réussite [%]	F moyen	F min
20	23,2	1,85E-02	5,89E-03
30	32,9	9,11E-03	3,16E-05
40	52,7	1,54E-02	4,64E-11
50	54,2	2,11E-04	5,28E-09
60	40,2	4,28E-03	2,76E-08
70	45	6,16E-03	5,68E-09
80	40,1	6,20E-03	3,50E-07
90	47,3	3,02E-03	1,06E-07
100	69,5	5,23E-04	1,03E-09

C.3 Fonction test de *Easom*

Tableau C.8 : Statistiques d'optimisation de la fonction *Easom* avec l'algorithme génétique.

μ	N_{Pop}	Taux de réussite [%]	F moyen	F min	μ	N_{Pop}	Taux de réussite [%]	F moyen	F min
0,1	20	37,5	2,02E-03	0,00E+00	0,1	80	78,7	6,20E-04	0,00E+00
0,2	20	32,9	2,50E-03	3,34E-12	0,2	80	44,9	1,35E-03	0,00E+00
0,3	20	7	3,44E-03	5,81E-07	0,3	80	4,4	4,40E-03	1,20E-05
0,4	20	1,5	4,92E-03	2,10E-04	0,4	80	2	4,46E-03	2,03E-05
0,5	20	1,1	5,62E-03	1,49E-03	0,5	80	1,9	4,80E-03	1,28E-04
0,6	20	1	4,74E-03	1,12E-03	0,6	80	0,4	6,22E-03	4,12E-03
0,7	20	0,7	3,79E-03	1,09E-03	0,7	80	1	4,16E-03	5,10E-04
0,8	20	1,6	4,08E-03	4,12E-04	0,8	80	1,3	4,90E-03	1,67E-03
0,9	20	1,5	5,78E-03	1,32E-03	0,9	80	0,8	5,24E-03	3,11E-04
1	20	0,8	5,65E-03	2,33E-03	1	80	0,8	5,14E-03	4,24E-04
0,1	40	59,3	1,39E-03	0,00E+00	0,1	100	87,3	4,43E-04	0,00E+00
0,2	40	41,8	1,68E-03	0,00E+00	0,2	100	44,5	1,30E-03	1,58E-11
0,3	40	5,7	2,41E-03	7,27E-07	0,3	100	1,9	4,18E-03	1,36E-05
0,4	40	1,2	3,96E-03	5,66E-04	0,4	100	1,8	5,06E-03	1,21E-03
0,5	40	1,2	5,93E-03	1,06E-04	0,5	100	1,9	6,38E-03	9,82E-04
0,6	40	0,7	6,05E-03	1,48E-03	0,6	100	1,6	5,21E-03	7,84E-05
0,7	40	1,2	3,99E-03	3,85E-04	0,7	100	1,3	5,66E-03	2,31E-03
0,8	40	0,9	5,09E-03	5,99E-04	0,8	100	0,9	3,90E-03	8,83E-05
0,9	40	0,8	4,88E-03	1,02E-04	0,9	100	0,9	4,65E-03	1,39E-03
1	40	0,9	6,70E-03	2,95E-03	1	100	0,7	3,63E-03	5,14E-04
0,1	60	71,2	1,06E-03	0,00E+00					
0,2	60	45,6	1,49E-03	0,00E+00					
0,3	60	5,6	2,87E-03	2,40E-07					
0,4	60	2	5,30E-03	1,66E-03					
0,5	60	1,4	4,31E-03	1,41E-03					
0,6	60	1,7	6,00E-03	5,79E-04					
0,7	60	1	4,76E-03	4,60E-04					
0,8	60	0,8	4,79E-03	3,72E-04					
0,9	60	0,8	3,17E-03	3,16E-04					
1	60	1,4	5,03E-03	1,03E-03					

Tableau C.9 : Statistiques d'optimisation de la fonction *Easom* avec la programmation évolutive.

χ	N_{Pop}	Taux de réussite [%]	F moyen	F min	χ	N_{Pop}	Taux de réussite [%]	F moyen	F min
1	20	7,3	5,50E-03	5,71E-04	1	60	2,4	4,75E-03	2,57E-03
2	20	37,3	4,67E-03	1,19E-04	2	60	12	2,74E-03	6,33E-04
3	20	51,8	4,67E-03	1,44E-04	3	60	25,9	4,34E-03	7,68E-06
4	20	61,7	3,62E-03	3,57E-05	4	60	45,2	3,79E-03	7,74E-06
5	20	59,9	2,89E-03	2,43E-05	5	60	48,2	3,44E-03	3,17E-04
6	20	64,3	2,57E-03	1,29E-05	6	60	58,4	3,28E-03	2,80E-05
7	20	58,7	2,27E-03	2,17E-06	7	60	61,8	2,82E-03	3,09E-06
8	20	44,4	2,26E-03	2,26E-05	8	60	57,6	1,96E-03	2,20E-05
9	20	43,7	1,88E-03	1,42E-05	9	60	60,1	1,78E-03	5,78E-06
10	20	50,6	1,42E-03	2,27E-05	10	60	62,2	1,77E-03	6,76E-06
1	30	10,9	6,21E-03	1,26E-03	1	70	4	4,90E-03	3,46E-04
2	30	23,9	4,33E-03	5,48E-04	2	70	16,1	3,80E-03	1,04E-04
3	30	50,2	3,79E-03	1,34E-05	3	70	20,9	3,75E-03	1,58E-04
4	30	59	3,46E-03	1,25E-05	4	70	20,9	3,50E-03	9,25E-05
5	30	61,7	3,31E-03	3,11E-05	5	70	46,2	3,58E-03	7,24E-06
6	30	58,5	2,73E-03	2,07E-05	6	70	46,5	2,68E-03	1,59E-05
7	30	51	2,50E-03	3,47E-05	7	70	51,4	2,76E-03	3,67E-06
8	30	52,4	1,57E-03	8,33E-05	8	70	55,2	1,88E-03	1,82E-05
9	30	54,4	1,96E-03	2,53E-05	9	70	51,4	2,41E-03	1,38E-04
10	30	51,7	1,89E-03	1,40E-05	10	70	60,1	1,91E-03	4,68E-05
1	40	0,8	2,20E-03	2,20E-03	1	80	2,4	3,18E-03	1,60E-03
2	40	16,3	5,50E-03	5,81E-05	2	80	7,2	3,25E-03	1,23E-04
3	40	41,4	4,84E-03	3,01E-04	3	80	11,1	4,98E-03	6,22E-04
4	40	54,9	3,71E-03	1,62E-04	4	80	20,8	3,11E-03	1,99E-04
5	40	52,1	2,33E-03	3,36E-07	5	80	39	3,43E-03	1,41E-04
6	40	64	2,56E-03	2,07E-05	6	80	50,1	2,76E-03	1,81E-05
7	40	60,7	2,52E-03	1,49E-07	7	80	44,5	2,79E-03	2,90E-05
8	40	63	2,08E-03	1,60E-04	8	80	58,4	2,29E-03	4,49E-05
9	40	56,9	1,83E-03	2,34E-05	9	80	61,1	2,52E-03	1,78E-06
10	40	55,6	1,33E-03	2,20E-05	10	80	61,1	1,95E-03	5,34E-05
1	50	3,3	5,24E-03	2,01E-03	1	90	1,6	5,57E-03	2,24E-03
2	50	20	4,31E-03	1,76E-04	2	90	4,8	4,12E-03	1,17E-03
3	50	29,7	4,16E-03	3,30E-04	3	90	14,2	3,56E-03	3,20E-04
4	50	46,1	3,33E-03	1,38E-04	4	90	16,7	4,63E-03	2,30E-05
5	50	61,5	3,24E-03	9,21E-06	5	90	29,5	3,16E-03	3,45E-06
6	50	67,8	2,40E-03	1,53E-05	6	90	35,1	3,36E-03	2,89E-05
7	50	53,3	2,43E-03	8,09E-06	7	90	49,3	3,47E-03	5,34E-05
8	50	52,4	2,00E-03	2,72E-05	8	90	45,2	2,74E-03	9,59E-05
9	50	51,2	2,01E-03	3,97E-07	9	90	57,1	2,30E-03	3,57E-06
10	50	58,2	1,49E-03	1,36E-05	10	90	52,6	2,45E-03	5,21E-05
					1	100	1,6	4,10E-03	1,28E-03
					2	100	4	5,21E-03	4,33E-03
					3	100	12,5	4,93E-03	4,76E-04
					4	100	12,5	4,59E-03	3,29E-04
					5	100	27,4	3,09E-03	2,22E-05
					6	100	33,8	3,06E-03	5,43E-05
					7	100	38	3,32E-03	5,08E-05
					8	100	43,4	2,70E-03	1,17E-05
					9	100	47,4	2,50E-03	1,36E-04
					10	100	51,3	2,76E-03	8,73E-06

Tableau C.10 : Statistiques d'optimisation de la fonction *Easom* avec la méthode de division cellulaire.

$N_{\text{conservés}}$	$N_{\text{Population}}$	Taux de réussite [%]	F moyen	F min
10	20	1,9	2,53E-03	4,19E-04
20	20	0,9	3,12E-03	3,12E-03
10	30	2,4	2,85E-03	1,70E-03
20	30	1,2	5,95E-03	5,95E-03
30	30	0	0	0
10	40	3,5	3,40E-03	5,92E-05
20	40	0	0	0
30	40	1,6	1,52E-03	3,03E-04
40	40	0,8	7,27E-03	7,27E-03
10	50	11,8	5,31E-03	1,48E-03
20	50	3,8	4,05E-03	1,05E-04
30	50	0	0	0
40	50	1,3	3,71E-03	3,71E-03
50	50	0	0	0
10	60	7,1	4,74E-03	1,92E-04
20	60	2	5,85E-03	2,21E-03
30	60	0	0	0
40	60	0	0	0
50	60	1	2,48E-03	2,48E-03
60	60	3	8,28E-03	7,51E-03
10	70	8,7	3,72E-03	2,90E-04
20	70	0,9	7,42E-03	7,42E-03
30	70	0	0	0
40	70	0	0	0
50	70	0	0	0
60	70	0,8	2,93E-03	2,93E-03
70	70	0	0	0
10	80	8,1	5,30E-03	1,83E-04
20	80	0,7	9,26E-03	9,26E-03
30	80	0,8	1,32E-03	1,32E-03
40	80	0	0	0
50	80	0,7	7,03E-03	7,03E-03
60	80	1,3	2,20E-03	1,54E-03
70	80	0	0	0
80	80	0,7	9,02E-03	9,02E-03
10	90	10,4	4,59E-03	2,13E-04
20	90	0,6	2,03E-03	2,03E-03
30	90	1,2	3,71E-03	1,27E-03
40	90	0,6	6,14E-03	6,14E-03
50	90	0,6	1,91E-04	1,91E-04
60	90	1,2	4,72E-03	2,52E-03
70	90	0,6	4,01E-03	4,01E-03
80	90	0,6	4,61E-03	4,61E-03
90	90	0	0	0
10	100	17	4,45E-03	2,36E-04
20	100	0	0	0
30	100	1,1	6,11E-03	6,11E-03
40	100	2,1	1,55E-03	7,30E-04
50	100	1	6,52E-03	6,52E-03
60	100	0	0	0
70	100	0	0	0
80	100	0	0	0
90	100	0	0	0
100	100	0	0	0

Tableau C.11 : Statistiques d'optimisation de la fonction *Easom* avec le *multinitium* de la méthode classique de métrique variable. Le paramètre $\text{Max}_{\text{descente}}$ correspond au nombre maximal d'évaluations de fonction permis pour une tentative de la méthode classique.

$\text{Max}_{\text{descente}}$	Taux de réussite [%]	F moyen	F min
20	15,8	3,71E-04	3,48E-09
30	22,3	4,49E-04	2,10E-09
40	21,7	1,39E-04	5,48E-10
50	17,3	4,44E-04	3,47E-10
60	15	5,74E-04	7,56E-10
70	18,4	7,70E-05	2,16E-11
80	20,7	3,30E-05	8,13E-13
90	18,9	1,38E-04	4,53E-08
100	19	2,40E-04	6,35E-11