



**Titre:** Extraction de caractéristique géométriques et génération d'axes  
Title: médian à partir de surfaces courbes

**Auteur:** Haroun Bouazzi  
Author:

**Date:** 2005

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Bouazzi, H. (2005). Extraction de caractéristique géométriques et génération d'axes médian à partir de surfaces courbes [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/7592/>  
Citation:

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/7592/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** François Guibault  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

EXTRACTION DE CARACTÉRISTIQUE GÉOMÉTRIQUES ET GÉNÉRATION  
D'AXES MÉDIAN À PARTIR DE SURFACES COURBES

HAROUN BOUAZZI  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE INFORMATIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE INFORMATIQUE)  
JUN 2005



Library and  
Archives Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file    Votre référence*

*ISBN: 978-0-494-16761-8*

*Our file    Notre référence*

*ISBN: 978-0-494-16761-8*

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

  
**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

EXTRACTION DE CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES ET  
GÉNÉRATION D'AXES MÉDIANS À PARTIR DE SURFACES COURBES

présenté par: BOUAZZI Haroun

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. BILODEAU Guillaume-Alexandre, Ph.D., président

M. GUIBAULT François, Ph.D., membre et directeur de recherche

Mme CHERIET Farida, Ph.D., membre

À mes parents

À Dina

## REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe GMATH du laboratoire GRMIAO de l'école Polytechnique.

J'exprime à mon directeur de recherche, le Professeur François GUIBAULT, ma profonde reconnaissance pour la bienveillance avec laquelle il m'a accueilli, la confiance qu'il m'a témoignée et la motivation qu'il m'a insufflée. Il a constamment suivi mon travail en me faisant bénéficier de ses précieux conseils. Qu'il veuille bien trouver dans ce mémoire le résultat de son aide et de son inlassable sollicitude pour lesquelles je lui exprime ma plus respectueuse et profonde reconnaissance.

J'exprime mes très vifs et très respectueux remerciements à Ko-Foa TCHON, Associé de recherche, qui m'a patiemment initié aux techniques de la recherche et m'a guidé tout au long de ce travail en m'apportant son aide et ses conseils.

Je remercie vivement Julien DOMPIERRE, Associé de recherche, qui a toujours été présent pour répondre à mes questions et m'éclairer en me fournissant remarques et critiques constructives.

Je remercie tous les membres du GRMIAO pour la bonne ambiance qui règne dans le groupe et pour les conversations passionnantes que nous avons échangées.

Le Professeur Guillaume-Alexandre BILODEAU me fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire ; je le prie d'accepter ma très vive et très respectueuse gratitude.

La Professeure Farida CHERIET a bien voulu siéger dans le jury chargé de juger ce travail ; je la prie de croire à ma reconnaissance.

Enfin, j'adresse mes vifs remerciements à tous ceux que je ne cite pas ici et qui, par leur participation, ont permis à ce travail de voir le jour.

## RÉSUMÉ

Soit une surface gauche définie par un maillage triangulaire quelconque. Notre but est de calculer la distance à la frontière la plus proche ainsi que la largeur locale pour chacun des sommets du maillage.

Ce projet se greffe au travail de Ko-Foa Tchon dont le but est de générer des métriques géométriques adaptées à des volumes [Tchon *et al.* (2003)] à l'aide de technique de constructions d'un axe médian 3D. Les surfaces courbes que nous étudions sont en réalité les parois des volumes traités par M. Tchon et les informations qui y seront recueillies permettront de tenir compte des spécificités géométriques particulières aux parois là où une analyse de l'axe médian volumique ne suffit pas.

Pour parvenir à nos résultats, nous approximations une onde géodésique prenant naissance à la frontière et avançant perpendiculairement à cette dernière. L'analyse de la direction de propagation du front permet de localiser l'axe médian de la surface courbe et cette information permet à son tour d'approximer la largeur locale.

Pour simuler l'onde géodésique sur le maillage triangulaire initial, nous avons utilisé une variation de la méthode "Fast Marching Methods" développée par Sethian [Sethian (1999)a]. Cette méthode, initialement conçue pour calculer la plus courte distance entre deux sommets d'une grille en deux dimensions, a été ensuite étendue par Sethian et Vladimirsky [Sethian et Vladimirsky (2000)] aux maillages triangulaires non structurés. Notre propre méthode consiste à détecter tout d'abord les sommets appartenant à la frontière de la surface. Ces points constituent l'état initial du front. L'avancement du front représente la propagation de l'onde. À partir des points adjacents déjà calculés, et grâce à une fonction d'approximation géodésique empruntée à Kimmiel et Sethian [Sethian et Kimmel (1998)], nous calculons la distance à la frontière la plus proche des points se trouvant à la distance topologique 1 du front. Le

point le plus proche de la frontière sera englouti par l'onde. La simulation de l'onde s'arrête quand tous les points sont traversés par le front.

Pour savoir si l'axe médian passe à proximité d'un sommet donné du maillage, nous calculons les vecteurs de propagation des triangles qui l'entourent. Ensuite, nous comparons entre elles les directions des projections de ces vecteurs sur le plan tangent à la surface en ce sommet. Dans le cas où on détecte ainsi une collision de front, le sommet est à proximité de l'axe médian.

Étant donné que les maillages sur lesquels nous travaillons sont quelconques, et dans un souci de précision, nous opérons un raffinement local grâce à une subdivision autour des points détectés sur l'axe médian. Actuellement, un nombre fixe d'itérations est utilisé pour contrôler la précision. Un critère de convergence basé sur la comparaison entre la taille des triangles autour du squelette et la taille globale de la surface sera implémenté sous peu.

L'axe médian est une forme discontinue du squelette de la surface. Notre processus permet de le déterminer avec une bonne précision sans avoir recours à un maillage fin ni à de longs calculs. Il permet finalement de déterminer la largeur locale du domaine en chacun des sommets du maillage, au moyen d'une nouvelle simulation de propagation d'onde, partant cette fois de l'axe médian pour se diriger vers les frontières.

L'extraction de ces informations fournit une caractérisation géométrique de la surface. Combinée aux informations de courbure locale et de courbure des frontières, elle servira à générer une carte de taille géométrique, laquelle permet la génération automatique de maillages adaptés à la géométrie du domaine.



## ABSTRACT

Let a general free-form surface be defined using an arbitrary mesh of triangles, this paper presents an algorithm to compute the distance to the closest boundary and the local domain width at each mesh vertex through medial axis construction.

The present work is closely related to the work by Tchon *et al.* (2003), which aimed to construct domain adapted geometric metrics for mesh generation and a priori mesh adaptation. The free-form surfaces considered in the present study constitute the boundaries of volumes considered in [Tchon *et al.* (2003)]. The geometric information obtained on surfaces shall be incorporated in the volume metric in cases where volumic medial axis information is not sufficient to account for geometric characteristics of the boundaries.

The present approach is based on the approximate propagation of a geodesic wave originating at and traveling normal to the boundary. An analysis of the front propagation direction allows to localize the surface medial axis. This information then allows to approximate the local domain width. To compute the geodesic wave on the initial triangular mesh, a variation of the Fast Marching Method proposed by Sethian [Sethian (1999)a] is used. This method, initially developed to compute the shortest distance between two vertices of a bi-dimensional grid, was extended by Sethian and Vladimirsky [Sethian et Vladimirsky (2000)] to unstructured triangular meshes. The method proposed here consists to first initialize the front using vertices belonging to the surface boundary. This constitutes the initial front state and its movement represents the wave propagation. From adjacent points already computed, and using a geodesic approximation function based on Kimmel and Sethian [Sethian et Kimmel (1998)], the distance from points with a topological depth of 1 to the closest boundary is computed. The point closest to the boundary is then engulfed by the front, and

propagation proceeds. Wave propagation stops when all vertices have been traversed by the front. To determine whether the surface medial axis passes nearby a given vertex, propagation vectors from touching triangles are computed. Projected directions of these vectors on the local surface tangent plane are then compared. If a collision is detected, the vertex is close to the medial axis. Since the meshes on which the algorithm may be applied are completely arbitrary, and in order to increase precision, local refinement is used around the points detected to lie close to the medial axis. Currently, a fixed number of iterations is used to control precision, but a convergence criterion based on a comparison between the local triangle size and global surface dimensions will be implemented shortly. To compute width information, a second wave propagation problem is solved, this time from the medial axis toward the boundary. This information extraction process yields a geometric characterization of a surface, which can be combined with surface and boundary curvatures to construct of geometric size specification map. This size map will allow to generate meshes well adapted to the domain geometry.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iv
REMERCIEMENTS . . . . .	v
RÉSUMÉ . . . . .	vi
ABSTRACT . . . . .	viii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	x
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xiv
LISTE DES FIGURES . . . . .	xv
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . .	xix
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xx
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE 1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE . . . . .	7
1.1 Mise en contexte . . . . .	7
1.1.1 Triangulation d'un domaine . . . . .	8
1.1.1.1 Recouvrement . . . . .	8
1.1.1.2 Triangulation . . . . .	9
1.1.2 Maillage . . . . .	9
1.1.2.1 Types de maillages . . . . .	10
1.1.3 Comment créer un bon maillage? . . . . .	12
1.1.3.1 Qu'est-ce qu'un bon maillage? . . . . .	12

1.1.3.2	Choix du maillage initial pour une méthode de génération itérative . . . . .	13
1.1.4	Carte de taille . . . . .	15
1.2	Géodésique sur une surface courbe . . . . .	16
1.2.1	Définition . . . . .	16
1.2.2	Recherche du chemin le plus court sur une surface discrète . .	17
1.2.2.1	La méthode “ <i>Fast Marching Method</i> ” . . . . .	18
1.2.2.2	Calcul de distances géodésiques sur une surface gauche représentée par un maillage triangulaire . . . . .	19
1.3	Largeur locale . . . . .	26
1.3.1	Squelette et axe médian . . . . .	28
1.3.1.1	Définitions et propriétés . . . . .	28
1.3.1.2	Méthodes existantes pour la construction des squelettes	30
1.3.1.2.1	Méthodes discrètes . . . . .	30
1.3.1.2.2	Méthodes continues et graphe de Voronoï .	31
1.3.1.2.3	Conclusion . . . . .	31
1.3.1.3	Utilisation de l’axe médian pour l’extraction d’informations géométriques servant à la génération de maillages . . . . .	33
1.4	Conclusion . . . . .	34
CHAPITRE 2	CONCEPTION . . . . .	37
2.1	Distance des sommets aux frontières de la surface . . . . .	38
2.1.1	Détection des frontières . . . . .	38
2.1.2	Simulation de l’onde géodésique : algorithme d’avance de front	39
2.2	Détection de l’axe médian . . . . .	44
2.2.1	Calcul du vecteur de direction de propagation du front dans un triangle . . . . .	45
2.2.2	Angle limite . . . . .	47

2.2.3	Détection de l'axe médian par intersection de fronts . . . . .	48
2.3	Calcul de la largeur locale . . . . .	49
2.4	Raffinement . . . . .	50
2.4.1	subdivision . . . . .	51
2.5	Conception Informatique . . . . .	53
2.5.1	Éléments . . . . .	54
2.5.1.1	Maillage . . . . .	55
2.5.1.2	Triangle . . . . .	57
2.5.1.3	Arête . . . . .	57
2.5.1.4	Sommet . . . . .	58
2.5.2	Outil . . . . .	58
2.5.2.1	Vecteur . . . . .	58
2.5.2.2	Front . . . . .	59
2.5.2.3	Usine analytique . . . . .	60
CHAPITRE 3	RÉSULTATS ET DISCUSSION . . . . .	61
3.1	Méthodologie . . . . .	61
3.1.1	Surfaces planes . . . . .	62
3.1.2	Surfaces courbes . . . . .	65
3.2	Analyse des résultats . . . . .	68
3.2.1	Angle limite d'intersection de front . . . . .	68
3.2.2	Granularité du maillage . . . . .	68
3.2.3	Qualité des éléments . . . . .	72
3.2.4	Performance . . . . .	76
3.3	Améliorations possibles . . . . .	76
3.3.1	Critère d'arrêt . . . . .	77
3.3.2	Raffinement sélectif . . . . .	77
3.3.3	Propagation de l'information par diffusion . . . . .	77
3.3.4	Choix des frontières . . . . .	78

CONCLUSION . . . . .	79
RÉFÉRENCES . . . . .	82
ANNEXES . . . . .	85

**LISTE DES TABLEAUX**

TABLEAU 3.1	Vitesse d'exécution de l'application sur un Pentium IV à 2.2 GHz comportant 500 Mo de mémoire vive . . . . .	76
-------------	---	----

## LISTE DES FIGURES

FIGURE 1	Maillage d'une surface sans sommets internes là où la largeur est la plus faible . . . . .	5
FIGURE 1.1	Triangulation conforme . . . . .	9
FIGURE 1.2	Triangulation non conforme . . . . .	10
FIGURE 1.3	Ligne géodésique sur un cylindre . . . . .	17
FIGURE 1.4	Initialisation de l'algorithme de calcul de distance géodésique sur un maillage triangulaire . . . . .	22
FIGURE 1.5	Première itération de l'algorithme de calcul de distance géodésique sur un maillage triangulaire . . . . .	23
FIGURE 1.6	Premier cas d'intersection de cercle dans la procédure d'approximation de distance géodésique . . . . .	24
FIGURE 1.7	Deuxième cas d'intersection de cercle dans la procédure d'approximation de distance géodésique . . . . .	25
FIGURE 1.8	Troisième cas d'intersection de cercle dans la procédure d'approximation de distance géodésique . . . . .	26
FIGURE 1.9	(a) Épaisseur d'une planche en dimension 3, (b) Largeur d'une plaque en dimension 2 . . . . .	27
FIGURE 1.10	Exemples de largeur locale pour un objet en dimension 2 . . .	27
FIGURE 1.11	Exemple de squelette d'un objet en dimension 2 . . . . .	28



FIGURE 1.12	Génération d'axe médian par la méthode de graphe de Voronoï	32
FIGURE 1.13	Génération d'axe médian sur une surface plane par simple discrétisation des frontières . . . . .	35
FIGURE 1.14	Procédure de mise à jour de la distance géodésique d'un sommet proche du front . . . . .	35
FIGURE 2.1	Procédure optimisée de détection des frontières . . . . .	39
FIGURE 2.2	Vue en perspective (à gauche) et en deux dimensions (à droite) d'un triangle aigu dans lequel on approxime $d_C$ à partir de $d_A$ et de $d_B$ . . . . .	41
FIGURE 2.3	Procédure de mise à jour de la distance géodésique d'un sommet dans un triangle aigu . . . . .	43
FIGURE 2.4	Création d'un triangle $A'B'C$ temporaire pour la mise à jour de la distance géodésique du sommet $C$ dans le triangle obtus $ABC$	43
FIGURE 2.5	Procédure de mise à jour de la distance géodésique d'un sommet dans un triangle obtus . . . . .	44
FIGURE 2.6	Détection de l'axe médian par intersection de fronts . . . . .	46
FIGURE 2.7	Calcul du vecteur de direction de propagation du front dans un triangle . . . . .	47
FIGURE 2.8	Axe médian d'un carré . . . . .	48
FIGURE 2.9	Squelette d'un disque avant et après échantillonnage de la frontière	49
FIGURE 2.10	Détection de sommets appartenant à l'axe médian par intersection de fronts . . . . .	50

FIGURE 2.11	Exemple de subdivision à l'itération 0 . . . . .	52
FIGURE 2.12	Exemple de subdivision à l'itération 1 . . . . .	52
FIGURE 2.13	Diagramme de paquetage . . . . .	53
FIGURE 2.14	Diagramme de classe du paquetage element . . . . .	56
FIGURE 2.15	Diagramme de classe du paquetage outil . . . . .	59
FIGURE 3.1	Résultat de notre procédure appliquée à un chevron . . . . .	63
FIGURE 3.2	Résultat de notre procédure appliquée à une demie ellipse . . . . .	64
FIGURE 3.3	Résultat de notre procédure appliquée à un chevron projeté sur un ellipsoïde . . . . .	66
FIGURE 3.4	Résultat de notre procédure appliquée à une demie ellipse pro- jeté sur une surface sinusoïdale . . . . .	67
FIGURE 3.5	Résultat de notre procédure appliquée à une surface courbe trouée complexe . . . . .	69
FIGURE 3.6	Résultat de notre procédure appliquée à une surface courbe trouée simple . . . . .	70
FIGURE 3.7	Résultat de notre procédure appliquée à un maillage de granula- rité moyenne représentant un aspirateur hydraulique en prenant un angle $\theta = 60^0$ . . . . .	71
FIGURE 3.8	Détection de l'axe médian d'un aspirateur hydraulique repré- senté par deux maillages, l'un grossier et l'autre fin . . . . .	73

FIGURE 3.9	Extraction des informations géométriques d'un aspirateur hydraulique représenté par deux maillages, l'un grossier et l'autre fin . . . . .	74
FIGURE 3.10	Résultat de notre procédure appliquée à un maillage non aigu de granularité non homogène représentant un aspirateur hydraulique	75
FIGURE I.1	Structure d'un fichier d'entrée .mesh . . . . .	86
FIGURE I.2	Structure d'un fichier d'entrée .pie . . . . .	87

**LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS**

CAD	Computer Aided Design
FMM	Fast Marching Method
EF	Éléments Finis
OORT	Object Oriented Remeshing Toolkit
GE	General Electric

## LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	FORMAT DE FICHIER . . . . .	85
I.1	Fichier .mesh . . . . .	85
I.2	Fichier .pie . . . . .	85

## INTRODUCTION

La méthode des éléments finis permet de résoudre des problèmes physiques numériquement complexes, en particulier des équations différentielles avec conditions aux limites sur des surfaces ou dans des volumes. Afin de pouvoir appliquer cette méthode, trois étapes essentielles sont requises :

**Modélisation géométrique** La modélisation géométrique consiste à décrire numériquement la forme de l'objet à étudier dans le domaine continu. Cette description se fait au moyen de logiciels de CAO spécialisés, tels que CATIA ou AutoCAD.

**Génération de maillage** La génération de maillage est faite par un mailleur. Un mailleur est une application qui, à partir de la description numérique d'un domaine, construit une représentation discrète du domaine, c'est-à-dire un maillage le recouvrant.

**Résolution des équations** La résolution des équations se fait grâce à un résolveur. Un résolveur est une application qui résout sur un maillage des équations différentielles avec conditions aux limites grâce à la méthode des éléments finis.

Dans ce qui suit, la génération de maillage nous intéresse particulièrement.

### Motivation

En effet, la méthode des éléments finis est un outil mathématique qui donne de bons résultats lorsqu'on l'applique sur de "bons" maillages.

Au cours du processus de résolution, l'erreur maximale commise au niveau de chaque maille peut être estimée en fonction de schéma d'approximation des équations différentielles qui sont résolues. Un "bon" maillage minimise l'erreur sur l'ensemble de

l'objet étudié, ainsi que le nombre d'éléments du maillage. La qualité du résultat donné par la méthode des éléments finis est donc intimement liée à la qualité du maillage sur lequel on l'applique.

Pour minimiser le nombre d'éléments du maillage ainsi que l'erreur commise lors de la résolution, une méthode bien établie consiste à adapter le maillage au phénomène physique à étudier. Pour cela, il faut définir, pour chaque position du domaine à mailler, la taille des mailles ainsi que leur orientation. Ces informations peuvent être représentées sous forme tensorielle, comme une métrique définie en chaque point et l'ensemble des métriques forme alors une carte de taille. La génération de cartes de taille est donc une étape intermédiaire souhaitable dans la génération de maillage. Longtemps, les informations de métrique ont été définies par l'utilisateur du mailleur, et une grande partie du processus de génération et d'adaptation de maillage était basé sur l'expérience humaine. Mais un très grand nombre de travaux ont pris pour objectif d'automatiser partiellement ou complètement la génération de maillage adapté à un phénomène donné.

La plupart d'entre eux proposent une méthode itérative faisant intervenir le mailleur et le résolveur. Le processus de résolution se déroule de la manière suivante : à partir d'un maillage initial, le résolveur calcule une première solution du problème à étudier et effectue une estimation de l'erreur commise au niveau de chaque maille. Grâce à cette information, le mailleur crée une carte de taille de manière à minimiser l'erreur et il modifie ou recrée le maillage de départ. Ce processus est itéré jusqu'à ce que l'erreur commise lors de l'étape de résolution soit en dessous d'un seuil préalablement défini, ou que l'erreur soit équirépartie pour une taille de maillage donnée.

Cette méthode donne de très bons résultats mais, en général, elle n'élimine pas totalement l'intervention humaine, en particulier pour la génération du maillage initial, puisqu'un maillage initial trop "mauvais" peut empêcher la méthode de converger vers le "bon" maillage souhaité. De plus, son efficacité est principalement limitée par le fait qu'elle ne tient pas compte des caractéristiques géométriques du domaine. Or,

l'évolution d'un phénomène physique donné est fortement influencé par la géométrie de l'objet sur lequel il s'opère. Le respect de critères géométriques à l'étape de la génération des maillages permet donc d'obtenir ensuite, à l'étape de résolution, de bons résultats sans connaître a priori le phénomène physique à étudier. C'est pourquoi d'autres travaux proposent la création de maillages géométriques adaptés à la géométrie des objets. En fait, il faudrait combiner les deux types de méthodes pour tenir compte à la fois du phénomène physique et de la géométrie, ce qui donnerait une méthode universelle respectant toutes les informations de contrôle.

Nous nous intéressons ici aux caractéristiques géométriques.

Pour créer un maillage géométrique, il faut d'abord créer une métrique géométrique en tenant compte des critères géométriques principaux suivants :

- la courbure locale des frontières,
- la distance à la paroi aux parois,
- l'épaisseur locale,
- la distance aux points singuliers (discontinuités).

Dans ce cadre, plusieurs travaux sont en cours concernant la génération de métriques adaptées à la géométrie des volumes [Tchon *et al.* (2003)] et [Quadros *et al.* (2004)]. Ils devront intégrer une étude approfondie des surfaces qui limitent les volumes afin de prendre en compte les spécificités géométriques particulières aux parois, lesquelles risqueraient de ne pas apparaître lors d'une étude géométrique strictement volumique.

### **Pertinence des critères géométriques choisis**

Comme nous l'avons déjà mentionné, la manière dont les phénomènes physiques évoluent est étroitement liée à la géométrie des objets sur lesquels ils ont lieu. C'est pourquoi, lorsque l'on veut étudier l'évolution du phénomène physique, a priori inconnue, alors que l'objet géométrique est parfaitement déterminé, il est intéressant de créer un maillage adapté à la forme géométrique de l'objet, c'est-à-dire un maillage



géométrique. Le maillage sera finalement assez bien adapté à l'étude du phénomène physique. La création de maillages géométriques se fait au moyen de cartes de taille géométriques, lesquelles s'établissent à partir de critères géométriques liés aux objets. Afin de permettre dans de futurs travaux l'établissement des cartes de taille pour les surfaces des objets, nous avons choisi de privilégier la détermination de deux critères géométriques particuliers et nous nous proposons ici de présenter la pertinence de ce choix.

### **Distance à la paroi la plus proche**

La variation d'un phénomène physique est souvent très forte au voisinage des frontières (comme on le voit facilement pour un problème de diffusion de chaleur par exemple). Cette forte variation est due à la discontinuité au niveau des frontières et la résolution du problème physique dépend principalement des conditions aux limites aux frontières (source, drain, etc.). C'est pourquoi, dans le processus de création de la carte de taille, il est important de connaître la distance à la paroi la plus proche. Cette connaissance permet de créer des maillages dont les mailles sont de plus en plus fines au fur et à mesure qu'on s'approche de la paroi, et par conséquent de raffiner l'étude du phénomène physique là où ses variations sont probablement fortes.

### **La largeur locale**

La connaissance de la largeur locale en chaque point de la surface est importante quant à elle pour deux raisons.

En premier lieu, les variations d'un phénomène physique sont en général plus brutales et, surtout, plus intéressantes, là où l'objet est le moins large ; elles sont moins importantes là où l'objet est plus large. Il est donc souhaitable que la carte de taille tienne compte de la largeur locale afin que le maillage créé comporte des mailles de

petite taille là où la largeur de l'objet est faible, et de grande taille là où la largeur est grande.

La connaissance de la largeur locale est très importante pour une deuxième raison : elle permet, lors de la génération du maillage, d'éviter des omissions de création de sommets intérieurs là où la largeur de la surface est faible. Car, souvent, pour la création d'un maillage, on a besoin d'échantillonner la frontière. Or, à partir de cette discrétisation, on crée les sommets internes au moyen d'une méthode d'avance de front mixée à une méthode de Delaunay. Lorsque le front avance et qu'il trouve un sommet déjà existant à proximité du sommet qu'il voudrait créer, il se contente d'intégrer le point existant sans en créer de nouveau. Aux endroits où la largeur locale de la surface est faible, il peut ainsi arriver que le front saute d'un point de la discrétisation de la frontière à un autre, sans créer de point à l'intérieur de la surface. Voir par exemple la figure 1 : aucun point intérieur n'a été créé là où la largeur de la surface est faible. La méthode des éléments finis n'opérera à cet endroit aucune résolution fiable du phénomène et le résultat sera mauvais.

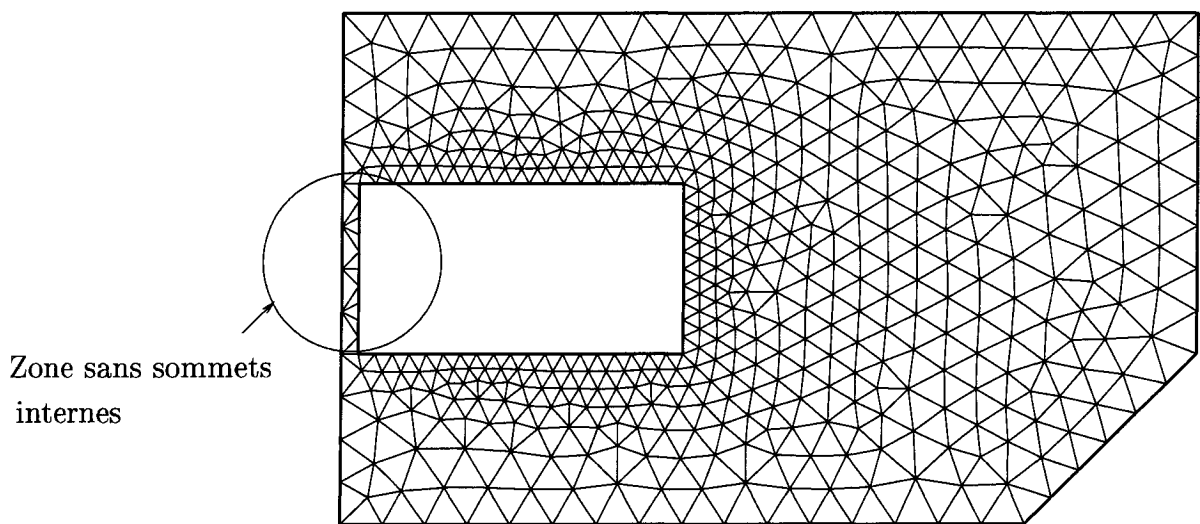


FIGURE 1 Maillage d'une surface sans sommets internes là où la largeur est la plus faible

## Objet de la maîtrise

Le but de notre travail est d'extraire des caractéristiques géométriques de surfaces courbes constituant les frontières de volumes à mailler. Les informations qui seront ainsi recueillies permettront de prendre en compte les spécificités particulières des parois, là où une analyse de propriétés volumiques telles que l'axe médian (ou squelette) volumique ne suffit pas. Pour chaque sommet de la triangulation, nous déterminerons les informations suivantes :

- la distance géodésique séparant le sommet de la frontière la plus proche<sup>1</sup>,
- la largeur locale.

Il n'existe actuellement pas d'algorithme qui permette de reconstruire efficacement cette information et de l'utiliser pour le contrôle à priori d'un processus de génération de maillage.

Le présent document présente d'abord une étude bibliographique dans laquelle nous effectuons une mise en contexte et une étude de différents travaux de chercheurs qui nous ont été utiles. Le chapitre suivant présente la conception de l'algorithme d'extraction de caractéristiques géométriques. Il se divise en deux volets : un premier pour la solution théorique du problème ; un deuxième pour la conception informatique de l'application que nous avons mise au point. Le dernier chapitre est celui de la validation. Il expose les résultats obtenus sur différents cas tests, ainsi que l'analyse de ces résultats.

---

<sup>1</sup>Il s'agit ici de la frontière de la surface à étudier. La surface est elle-même la frontière du volume que M. Tchon se propose d'étudier.

## CHAPITRE 1

### REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

L'extraction de propriétés géométriques d'une surface est un problème de recherche qui se pose dans des domaines très variés tels que la cartographie, le calcul de meilleurs chemins en robotique ou en navigation maritime, etc. Notre projet quant à lui répond à un besoin dans le domaine de la génération de maillages. En effet, différentes grandeurs géométriques extraites d'une surface courbe, associées à d'autres grandeurs géométriques données par ailleurs, servent à créer une carte de taille géométrique. La carte de taille a pour but de définir la taille des mailles du *maillage* qu'il faut construire sur la surface pour étudier, grâce à la méthode des éléments finis, des phénomènes physiques liés à la surface.

Nous allons subdiviser la revue bibliographique en plusieurs parties. Après une mise en contexte très générale du domaine de recherche où nous donnerons la définition des triangulations, des maillages et des cartes de tailles, nous donnerons la définition des géodésiques, qui constituent l'outil mathématique principal servant à extraire les différentes grandeurs géométriques de la surface gauche. Après quoi, nous parlerons de la distance à la paroi. Enfin, nous expliciterons ce qu'est l'épaisseur locale en nous concentrant sur l'extraction de l'axe médian puisque ce dernier est l'outil mathématique principal servant à définir l'épaisseur locale.

#### 1.1 Mise en contexte

Avant d'aborder le sujet des cartes de taille, nous devons passer par plusieurs étapes de mise en contexte. Dans ce qui suit, nous allons donc introduire d'une manière très générale les notions à connaître pour cerner notre projet, en partant du plus général

pour aller au particulier.

Nous présenterons d’abord la notion de triangulation. Puis nous introduirons les différentes sortes de *maillages* tout en centrant l’intérêt sur les maillages non structurés. Nous présenterons ensuite ce que l’on peut entendre par “*bon maillage*” et “*mauvais maillage*”, ce qui nous conduira naturellement à envisager l’utilité des cartes de tailles et la pertinence des critères géométriques utilisés pour leur création. La définition des maillages est d’autant plus intéressante que la surface d’entrée sera définie par un *maillage* triangulaire non structuré. Cela aura de fortes conséquences sur les algorithmes et les structures de données que nous allons utiliser.

Nous nous sommes référés à Frey et George (1999) pour la définition des différents concepts concernant les maillages.

### 1.1.1 Triangulation d’un domaine

Une *triangulation d’un domaine* est un *recouvrement* particulier de ce domaine.

Une définition mathématique possible d’un *recouvrement* est :

#### 1.1.1.1 Recouvrement

Soit  $S$  un ensemble fini de points de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d$  étant la dimension du domaine, et soit  $Conv(S)$  l’enveloppe convexe de  $S$ . Cette enveloppe forme un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ . Selon la dimension du domaine, un *simplexe* est un triangle ou un tétraèdre, considéré comme ensemble convexe et fermé. Par définition, un *recouvrement* de  $\Omega$  au moyen de simplexes, dit aussi *recouvrement simplicial* de  $\Omega$  et noté  $T_r$ , est un ensemble de simplexes vérifiant les conditions suivantes :

- l’ensemble des sommets des éléments de  $T_r$  est  $S$ ,

- la réunion des éléments de  $T_r$  est  $\Omega$ ,
- l'intérieur de tout élément de  $T_r$  est non vide,
- l'intersection des intérieurs de deux éléments distincts de  $T_r$  est vide.

### 1.1.1.2 Triangulation

Un *recouvrement conforme* d'un domaine sera appelé *triangulation conforme* au domaine ou bien, en abrégé, triangulation du domaine. Une triangulation répond donc aux exigences d'un recouvrement auxquelles on ajoute une cinquième condition :

- l'intersection de deux éléments distincts de  $T_r$  est réduite
  - soit à l'ensemble vide,
  - soit à un sommet, une arête complète ou une face complète (pour  $d = 3$ ) commun(e) aux deux éléments considérés.

Les figures 1.1 et 1.2 donnent un exemple de triangulation *conforme* et un exemple de triangulation *non conforme*.

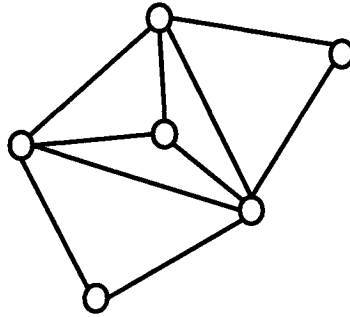


FIGURE 1.1 Triangulation conforme

### 1.1.2 Maillage

Dans un problème de maillage, le point de départ est un domaine borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{R}^3$ . Créer un *maillage* associé au domaine, c'est construire une triangulation

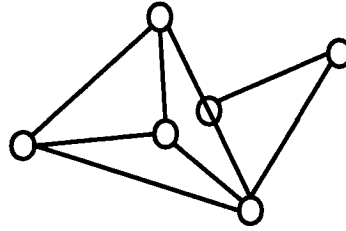


FIGURE 1.2 Triangulation non conforme

conforme au domaine. Mais un maillage n'est pas nécessairement une triangulation ; il peut être constitué d'éléments qui ne sont pas des simplexes, par exemple des quadrilatères ou des hexagones. Dans toute la suite, nous limiterons la discussion aux maillages constitués de simplexes puisque les propriétés présentées peuvent être étendues aux autres types de maillages.

Une définition rigoureuse d'un *maillage* suit :

Un *maillage* de  $\Omega$ , noté  $T_h$ , est un ensemble de simplexes vérifiant les conditions suivantes :

- la réunion des éléments de  $T_h$  est  $\Omega$ ,
- l'intérieur de tout élément de  $T_h$  est non vide,
- l'intersection des intérieurs de deux éléments distincts de  $T_h$  est vide.

Une quatrième condition est nécessaire pour définir un *maillage* conforme :

- l'intersection de deux éléments distincts de  $T_h$  est réduite
  - soit à l'ensemble vide,
  - soit à un sommet, une arête ou une face (pour  $d = 3$ ) commun(e) aux deux éléments considérés.

### 1.1.2.1 Types de maillages

Il existe 3 types de maillages : *structurés*, *non structurés* ou *mixtes*. La différence entre ces types réside dans la façon de spécifier leurs connectivités<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>la connectivité d'un *maillage* définit le type de connexion entre les sommets du maillage

**Maillages structurés** Les maillages *structurés*, ou encore *grilles*, possèdent une connectivité entre les nœuds de type  $(i, j, k)$  dérivée d'un ordre lexicographique. Le nœud d'indice  $(i - 1, j, k)$  est le voisin à gauche du nœud d'indice  $(i, j, k)$ . Le voisin de droite a pour indice  $(i + 1, j, k)$ , etc. Les maillages structurés sont généralement constitués de quadrilatères en 2D et d'hexaèdre en 3D. Dans ce cas, la connectivité est implicite.

**Maillages non structurés** Un *maillage* est dit *non structuré* si sa connectivité est quelconque, sans ordre particulier et que chaque élément stocke les index des nœuds qui le constitue.

**Maillages mixtes ou hybrides** Un *maillage mixte* est un *maillage* qui comporte des éléments de nature géométrique différente.

Dans le cadre de notre projet, la notion de *maillage* est très importante. Bien entendu, cela est dû au fait que le but premier de notre travail est d'évaluer certaines caractéristiques géométriques d'une surface gauche pour préparer le terrain à la génération d'un *maillage* géométrique associé à cette surface. Cela provient aussi du fait que la définition même de la surface passe par un *maillage* triangulaire non structuré : la surface à étudier est définie par un *maillage* qui lui est associé, ce qui dirige le choix des algorithmes et des structures de données à utiliser.

Le *maillage* doit répondre à quelques conditions particulières : la taille de ses éléments doit être la plus uniforme possible et le *maillage* doit être de préférence aigu. En effet, pour des raisons d'approximation de géodésique, qui seront développées plus loin, le nombre d'angles supérieurs à  $90^\circ$  dans les éléments du *maillage* décrivant la surface doit être le plus petit possible. Il est à noter que cette condition n'est pas obligatoire mais qu'elle permet d'obtenir de meilleurs résultats. La création de ce type de *maillage* ne fait pas partie de notre projet. Elle ne présente pas de difficultés particulières, en raison du peu de contraintes qu'elle implique.

Il est important de remarquer que les simplexes des maillages sont des triangles pour les domaines de dimension 2, et des tétraèdres pour les domaines de dimension 3.



Dans le cadre de notre projet, où nous travaillons sur des surfaces gauches, les simplexes des maillages seront des triangles bien que les surfaces soient plongées dans  $\mathbb{R}^3$  et non pas dans  $\mathbb{R}^2$ .

### 1.1.3 Comment créer un bon maillage ?

La qualité des maillages est très importante dans la méthode des éléments finis. Un mauvais *maillage* pourrait tout simplement donner de mauvais résultats.

#### 1.1.3.1 Qu'est-ce qu'un bon maillage ?

Il est très difficile de définir un bon maillage pour la méthode des éléments finis dans un contexte de design. Une propriété simple d'un bon *maillage* serait la suivante : appliquée à un maillage de bonne qualité, la méthode des éléments finis doit permettre de trouver une bonne approximation de la solution, en un minimum de temps.

Un mauvais maillage serait un maillage comportant des éléments trop grossiers dans la direction où la variation du phénomène physique à étudier est élevée. Dans ce cas, le résultat raterait tout simplement cette variation et la solution du problème physique à résoudre serait erronée.

Un autre exemple de mauvais maillage serait un maillage où les éléments seraient trop fins dans la direction où la variation du phénomène physique à étudier est très lente. Cela n'introduirait pas d'erreurs de résultat, mais rallongerait grandement le temps de calcul. Il ne faut pas oublier que dans la méthode des éléments finis, un maillage formé de  $n$  sommets conduit implicitement à résoudre une matrice de dimension  $n \times n$ . Lorsque l'on considère les maillages typiquement utilisés dans des applications industrielles, qui peuvent comprendre plusieurs centaines de milliers, voir des millions de sommets, les problèmes de capacité de stockage et de temps de calcul peuvent très vite devenir insurmontables.

Un bon maillage est donc un maillage qui comporte des éléments fins dans la direction des grandes variations du phénomène, et grossiers là où la variation du phénomène est lente. Il faudrait donc connaître la solution du phénomène à résoudre avant même de mailler ! Ce qui, bien sûr, représente un problème de taille (dans tout les sens du terme).

Une solution possible du problème serait de permettre aux utilisateurs du mailleur<sup>2</sup> de spécifier des contraintes de taille sur des régions du domaine à mailler. L'utilisation de ces applications serait basée sur l'expérience de leurs utilisateurs.

Cependant il est possible d'envisager une méthode automatique et itérative pour générer un bon maillage. Le principe en est simple. On part d'un maillage qui n'est pas spécialement bon. On résout le problème sur ce maillage et on détecte les régions où les variations du phénomène sont fortes. On opère alors des raffinements dans les régions de forte variation et éventuellement des déraffinement dans les régions où les variations sont faibles, et on répète la procédure jusqu'au moment où on considère que l'erreur sera acceptable.

#### **1.1.3.2 Choix du maillage initial pour une méthode de génération itérative**

Si le maillage de départ n'est pas du tout adapté à la solution, il est probable qu'à la première itération on ne détectera pas de zones de fortes variations. Aucun raffinement ne s'opèrera par conséquent dans ces zones et le maillage final obtenu sera mauvais.

---

<sup>2</sup>le mailleur est l'application qui génère les maillages

La génération de maillages basée sur l’aspect géométrique de l’objet à mailler peut résoudre une partie de ce problème. En effet, la forme géométrique d’un objet a souvent une grande influence sur la propagation des phénomènes physiques. Prenons l’exemple d’une aile d’avion. Supposons que l’on veuille définir la pression ou l’accélération de l’air sur la surface de l’aile. Les zones proches de l’aile et en particulier à l’arrière de l’aile (au bord de fuite) sont les zones de “turbulence” (de grande variation des quantités physiques). Or, justement, ces points constituent des singularités géométriques qui peuvent guider un processus de maillage a priori.

Aussi notre travail consiste-t-il à extraire des propriétés géométriques qui serviront à définir une carte de taille.

En d’autres termes, il faut définir, pour chaque sommet du maillage d’entrée définissant la surface gauche :

- le point de la paroi<sup>3</sup> qui lui est le plus proche,
- la distance à cette paroi,
- l’épaisseur locale.

D’autres critères pourront être ajoutés à cette liste pour créer la carte de taille géométrique, par exemple :

- la courbure de la paroi la plus proche,
- la courbure locale,
- la distance aux points singuliers.

Cette méthode fournira un bon - ou même un très bon - maillage initial, qui permettra d’appliquer ensuite une méthode itérative.

---

<sup>3</sup>Par paroi on fait référence à la frontière de la surface

#### 1.1.4 Carte de taille

Une *carte de taille*, dite encore *espace de contrôle*, associe une fonction tensorielle de mesure (ou métrique) à tout point d'un domaine donné. En dimension 2 par exemple, une carte de taille idéale associerait à chaque point  $P(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  une fonctionnelle  $H(x, y)$  indiquant une taille et une direction. Ces informations constituent les contraintes que le mailleur doit respecter lors de la création ou lors de l'adaptation du maillage associé à un domaine donné.

Dans la pratique, la définition d'une carte de taille est [George et Borouchaki (1997)] : Soient un domaine  $\Omega$ , un recouvrement  $\Delta$  de  $\Omega$  et un maillage  $\mathcal{T}$  de  $\Omega$ .

On note  $S^1$  le disque unité de l'espace de dimension 2, et  $S^2$  la sphère unité en dimension 3. Un espace de contrôle pour  $\mathcal{T}$  est un couple  $(\Delta, H)$ , où  $H$  est une fonctionnelle définie sur  $\Delta \times S^1$  (ou sur  $\Delta \times S^2$ ) associant à tout couple  $(P, \vec{d})$  constitué d'un point  $P$  de  $\Delta$  et d'une direction  $\vec{d}$  du disque (ou de la sphère) un résultat  $H(P, d)$ .

$$(\Delta, H) : \Delta \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

Le recouvrement peut être un quadtree, une grille, un maillage quelconque, etc. Son but principal est de se localiser dans le domaine  $\Omega$ .

Étant donné que la surface à étudier est courbe<sup>4</sup>, les distances à calculer ne seront pas euclidiennes mais géodésiques. Nous allons donc tout naturellement passer à la définition des géodésiques et exposer les différents travaux qui nous intéressent dans ce domaine.

---

<sup>4</sup>Une surface courbe ou encore surface gauche est une surface en dimension 3, par opposition à une surface droite ou encore plane qui est en dimension 2

## 1.2 Géodésique sur une surface courbe

Tout d’abord, il est important de spécifier que la notion de géodésique ne nous intéresse que pour le calcul de distance. Nous n’avons besoin de cette notion mathématique que pour définir la plus courte distance d’un point aux frontières de la surface. Nous allons donc nous contenter de définitions rigoureuses, simple et concises, sans nous enliser dans les définitions mathématiques trop poussées et mal adaptées à nos besoins.

### 1.2.1 Définition

**Courbure géodésique.** En géométrie différentielle, le vecteur de courbure géodésique d’une courbe en un point se définit dans un espace métrique. La courbure géodésique reflète la déviation de la courbe par rapport à l’arc de longueur minimale le long de chaque segment infinitésimal de cette courbe [Patrikalakis et Maekawa (2002)].

Le vecteur est défini comme suit :

Soit  $\mathcal{P}$  un point d’une courbe  $\mathcal{C}$  d’une surface  $\mathcal{S}$ . Le vecteur de courbure géodésique  $k_g$  est la projection du vecteur de courbure  $\vec{k}$  de  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{P}$  sur le plan tangent à  $\mathcal{S}$  en  $\mathcal{P}$ . La norme  $K_g$  de ce vecteur est la courbure géodésique.

**Ligne géodésique.** On désigne par ligne géodésique tout arc, dessiné sur la surface, ayant une courbure géodésique nulle en tout point. En particulier tout arc inclus dans une droite est une géodésique puisque sa courbure est nulle. Une ligne géodésique non rectiligne possède cette propriété particulière que le vecteur minimal principal à l’arc et le vecteur normal à la surface sont colinéaires [Reinhardt et Soeder (2002)].

La figure 1.3 représente une ligne géodésique sur un cylindre et illustre le fait que lorsqu’on déroule le cylindre sur un plan, la géodésique se transforme en une droite.

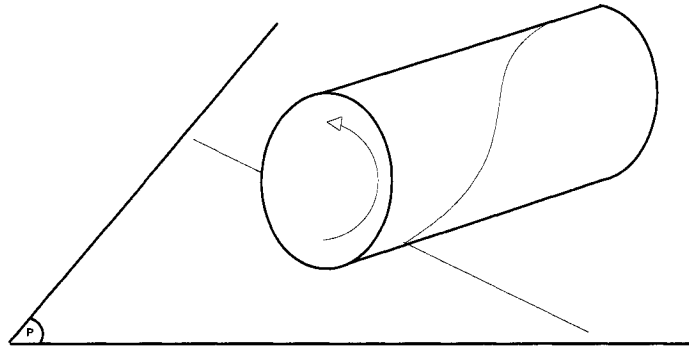


FIGURE 1.3 Ligne géodésique sur un cylindre

**Distance géodésique.** La distance géodésique entre deux points est la longueur de la ligne géodésique qui les relie.

Dans toute la suite, le chemin géodésique reliant deux points d'une surface courbe sera nommé chemin le plus court entre les deux points. La distance géodésique sera la longueur de ce chemin.

### 1.2.2 Recherche du chemin le plus court sur une surface discrète

La recherche du chemin le plus court entre deux points sur une surface est un problème sur lequel se sont penchés de nombreux chercheurs. Ce problème se pose dans des domaines très divers allant de la navigation maritime à l'installation de câbles dans les fonds marins, en passant par le calcul de trajectoires en robotique. Déjà, à la fin du 17<sup>e</sup> siècle, Johan Bernoulli avait résolu le problème sur une surface paramétrée convexe.

Dans le cadre de notre projet, puisque les différents calculs vont se faire sur une surface discrétisée représentée par un maillage qui la recouvre, nous nous concentrons sur l'étude bibliographique concernant le calcul des distances géodésiques dans le domaine des maillages, et nous laissons de côté le domaine continu ou paramétré.

Les travaux qui nous ont été particulièrement utiles sont [Kimmel (2003)] et [Sethian (1999)b] puisqu'ils développent un algorithme de calcul de géodésiques sur les surfaces courbes représentées par des maillages triangulaires, basé sur la méthode “*Fast Marching Method*” ou *FFM*. Plusieurs chercheurs, Novotni et Klein (2002) par exemple, se sont penchés sur les fonctions d'approximation dans la méthode *FFM*. Nous exposons plus loin dans cette section deux de ces méthodes d'approximation et nous expliquons pourquoi, pour notre propre travail, nous avons choisi celle de Sethian et Kimmel (1998).

### 1.2.2.1 La méthode “*Fast Marching Method*”

Cette méthode s'applique à une surface plane en dimension 2, ou à un volume en dimension 3. La surface en dimension 2 est représentée par une grille et on résout sur la grille l'équation *Eikonal* [Sethian (1999)a]. En d'autre termes :

Soit une surface plane représentée par une grille, un front de départ sur cette surface (une onde par exemple) et une vitesse de propagation de ce front. La méthode *FMM* consiste à résoudre l'équation :

$$|\nabla(\mathcal{T})| \cdot \mathcal{F} = 1 \quad (1.1)$$

où  $\mathcal{F}$  est la vitesse de propagation et  $\mathcal{T}$  la fonction d'arrivée qui associe aux coordonnées  $(x, y, z)$  d'un point une valeur temporelle  $t$  qui représente le moment où l'onde atteint le point.

La résolution de cette équation donne le temps minimal  $t$  nécessaire à une onde prenant naissance en un point  $O$  et avançant sur la surface à une vitesse  $\mathcal{F}$  pour atteindre un point  $P(x, y, z)$  du domaine. En d'autre termes, la distance géodésique séparant  $O$  de  $P$  est :

$$d_g = \mathcal{F} \times \mathcal{T}_O(P)$$

Cette méthode offre une alternative à d'autres méthodes itératives dont la complexité s'avère très élevée ( $\mathcal{O}(n^4)$ ) [Sethian (1999)a].

L'idée fondamentale de la méthode FMM est de calculer systématiquement la valeur de  $\mathcal{T}$  pour chacun des sommets à partir des valeurs se trouvant à contre courant du front (*upwind values*). L'information se déplace donc dans un seul sens, des plus petites valeurs de  $\mathcal{T}$  vers les plus grandes.

Le principe de l'algorithme est le suivant :

Soit  $S_0$  le sommet de départ du front. On calcule la valeur de  $\mathcal{T}$  pour les sommets situés à une distance topologique unitaire de  $S_0$  sur la grille. Le sommet ayant la valeur calculée de  $\mathcal{T}$  la plus petite peut être choisi une fois pour toutes puisque la valeur de  $\mathcal{T}$  en ce sommet ne peut pas être modifiée par les propriétés des sommets correspondant à des valeurs de  $\mathcal{T}$  supérieures à la sienne. On calcule ensuite la valeur de  $\mathcal{T}$  pour les points situés à une distance topologique unitaire du point choisi, on choisit le sommet ayant la valeur de  $\mathcal{T}$  la plus petite, et ainsi de suite. On s'arrête lorsque chaque sommet possède une valeur de  $\mathcal{T}$ .

#### **1.2.2.2 Calcul de distances géodésiques sur une surface gauche représentée par un maillage triangulaire**

Il est important de préciser que le but de cette méthode n'est pas de calculer un trajet géodésique mais seulement la distance géodésique entre deux points. Le principe, qui est simple, est une adaptation directe de la méthode *FMM*. On veut calculer la distance géodésique entre un sommet  $A$  et un sommet  $B$  du maillage. On prend par exemple le sommet  $A$  comme point de départ et on calcule par proximité la distance géodésique des sommets qui l'entourent jusqu'à arriver au sommet  $B$ . Pour adapter la méthode *FMM* aux calculs de distances géodésiques sur les maillages triangulaires en dimension 3, deux étapes ont été nécessaires [Sethian et Kimmel (1998)]. La première a été de passer des domaines quadrillés aux domaines triangulés. La deuxième a été



de trouver une bonne fonction d'approximation qui, à partir de deux sommets d'un triangle dont on connaît la distance géodésique au point de départ, donne la distance géodésique du troisième sommet.

L'adaptation de la *FMM* des domaines quadrillés aux domaines triangulaires s'est faite en plusieurs étapes. Il a fallu d'abord divisé chaque carré en deux triangles, on a ensuite migré vers des maillages triangulaires aigus quelconques, le but final étant d'adapter la méthode à des maillages triangulaires quelconques pouvant comporter des angles obtus [Barth et Sethian (1998)]. La difficulté dans le passage d'une étape à l'autre est de conserver le caractère monotone de la procédure de mise à jour. En d'autres termes, il ne faut pas qu'un sommet pour lequel la fonction distance a déjà été calculée puisse voir cette fonction modifiée par les calculs effectués ensuite sur d'autres sommets.

Pour pouvoir développer ce point, il nous faut d'abord présenter la fonction d'approximation de la géodésique exposée dans Sethian et Kimmel (1998), dont découlent les propriétés voulues.

### *Hypothèse*

On dispose d'un maillage triangulaire non structuré aigu de  $n$  sommets, représentant la surface courbe.

### *Problème*

On veut calculer la distance géodésique de chaque sommet du maillage à un sommet donné  $S_0$ .

### Notations

On partitionne le maillage en différents ensembles :

- Ensemble  $\mathcal{A}$  (*Alive*) : ensemble des sommets dont on a déjà calculé la fonction distance.
- Ensemble  $\mathcal{C}$  (*Close*) : ensemble des sommets dont la distance n'est pas encore calculée et qui sont situés à la distance topologique 1 d'au moins un des sommets appartenant à  $\mathcal{A}$ .
- ensemble  $\mathcal{F}$  (*Far*) : ensemble des sommets du maillage n'appartenant ni à  $\mathcal{A}$  ni à  $\mathcal{C}$ .
- ensemble  $\mathcal{M}$  (*Mesh*) : ensemble de tous les sommets du maillage.

$$\mathcal{M} = \mathcal{A} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{F}$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \mathcal{A} \cap \mathcal{F} = \mathcal{C} \cap \mathcal{F} = \emptyset$$

On note :

- $S_i$  : i<sup>e</sup> sommet de  $\mathcal{M}$ ,  $i \in [0, n]$ .
- $S_0$  : sommet source à partir duquel on veut calculer les distances géodésiques.
- $S_i.d$  : distance géodésique séparant  $S_i$  de  $S_0$ .
- $dE(A, B)$  : distance euclidienne de A à B.

### Initialisation

Au départ, l'ensemble  $\mathcal{A}$  est le singleton constitué du sommet  $S_0$ . On initialise la distance de ce point à 0.

$$\mathcal{A} = \{S_0\}$$

$$S_0.d = 0$$

L'ensemble  $\mathcal{C}$  est constitué des sommets  $S_i$  de  $\mathcal{M}$  qui sont à la distance topologique 1 de  $S_0$  (une liaison les sépare de  $S_0$ ).

L'ensemble  $\mathcal{F}$  est constitué des sommets  $S_i$  de  $\mathcal{M}$  n'appartenant ni à  $\mathcal{A}$  ni à  $\mathcal{C}$ .

$$\mathcal{F} = \mathcal{M} \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{C})$$

La figure 1.4 illustre l'initialisation de l'algorithme.

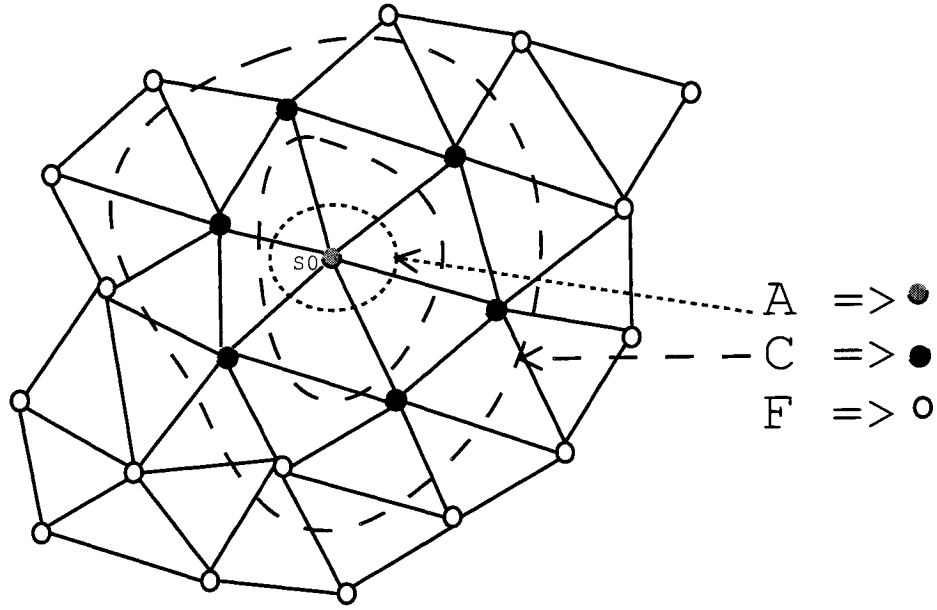


FIGURE 1.4 Initialisation de l'algorithme de calcul de distance géodésique sur un maillage triangulaire

### *Boucle générale*

Présentons d'une manière très générale la boucle principale de l'algorithme qui définit les distances géodésiques à  $S_0$  de tous les sommets du maillage. Le front est en fait constitué des sommets appartenant à  $\mathcal{C}$ .

À chaque itération, on choisit le sommet  $S_{dmin}$  de  $\mathcal{C}$  dont la fonction distance est la plus faible. Sur un maillage aigu, ce choix garantit par construction la monotonie du résultat [Crandall et Lions (1984)].

Le sommet  $S_{dmin}$  est alors transféré de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{A}$  et le front est mis à jour en consé-

quence. On calcule ensuite les fonctions distances des points rajoutés au front et on reprend la boucle.

La figure 1.5 illustre le résultat de la première itération de l'algorithme.

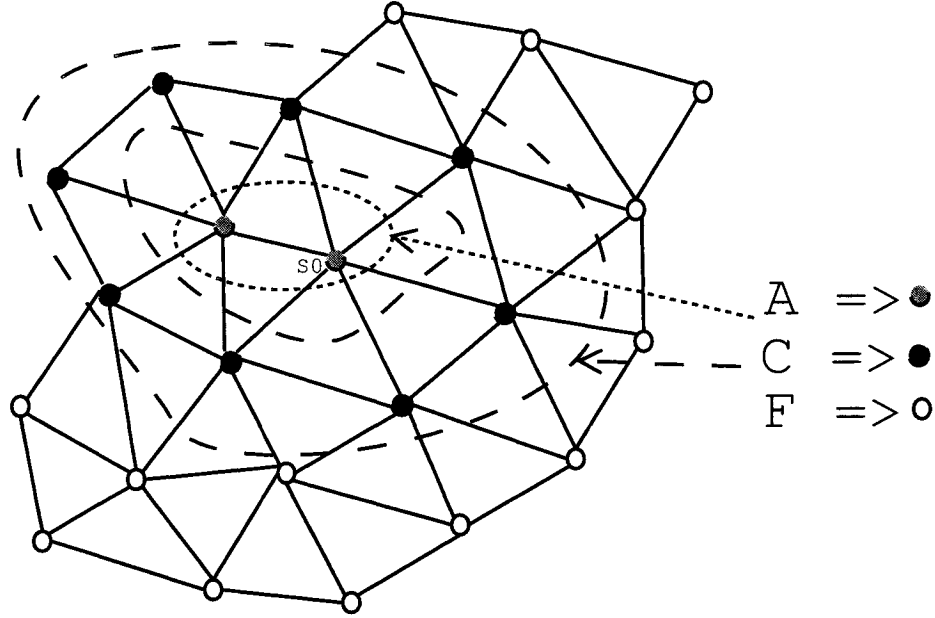


FIGURE 1.5 Première itération de l'algorithme de calcul de distance géodésique sur un maillage triangulaire

#### *Calcul de la fonction distance*

Soit un triangle  $T$  défini par les sommets  $V_1(0, 0, 0)$ ,  $V_2(x_2, 0, 0)$  et  $V_3(x_2, y_2, 0)$ . On suppose connues les distances géodésiques  $V_1.d$  et  $V_2.d$ . La fonction distance est une approximation de la distance  $V_3.d$ . Plusieurs fonctions d'approximation sont données dans la littérature. Novotni et Klein (2002) proposent l'approximation suivante : on trace les deux cercles  $C_{V_1}(V_1, V_1.d)$  et  $C_{V_2}(V_2, V_2.d)$  et on étudie leur intersection.

Trois cas se présentent (le premier étant le plus fréquent) :

#### **1<sup>er</sup> cas**

$$C_{V_1}(V_1, V_1.d) \cap C_{V_2}(V_2, V_2.d) = \{O_1, O_2\}$$

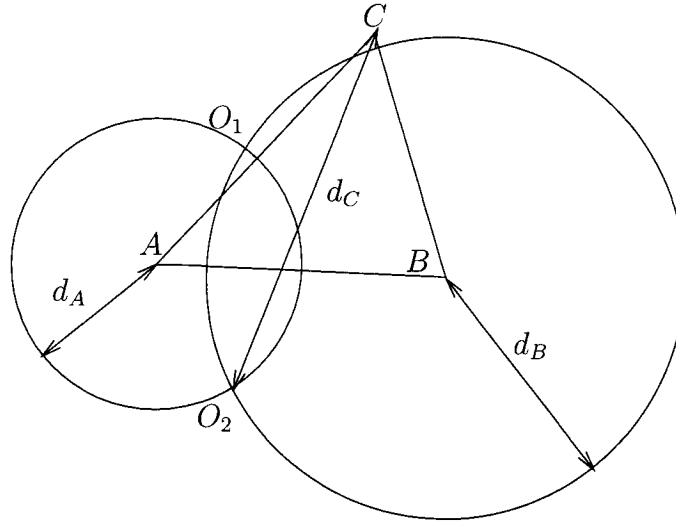


FIGURE 1.6 Premier cas d'intersection de cercle dans la procédure d'approximation de distance géodésique

$$V_3.d = \max(dE(O_1, V_3), dE(O_2, V_3))$$

Un exemple de ce cas est illustré à la figure 1.6.

**2<sup>e</sup> cas**

$$\mathcal{C}_{V_1}(V_1, V_1.d) \cap \mathcal{C}_{V_2}(V_2, V_2.d) = \{O_1\}$$

$$V_3.d = dE(O_1, V_3)$$

Un exemple de ce cas est illustré à la figure 1.7.

**3<sup>e</sup> cas**

$$\mathcal{C}_{V_1}(V_1, V_1.d) \cap \mathcal{C}_{V_2}(V_2, V_2.d) = \emptyset$$

$$V_3.d = \min(dE(V_1, V_3) + V_1.d, dE(V_2, V_3) + V_2.d)$$

Un exemple de ce cas est illustré à la figure 1.8.

Chaque fonction d'approximation possède des caractéristiques particulières, plus ou moins bien adaptées à l'utilisation qu'on en fait.

Celle que nous exposons ci-dessus par exemple, est spécialement bien adaptée au cal-

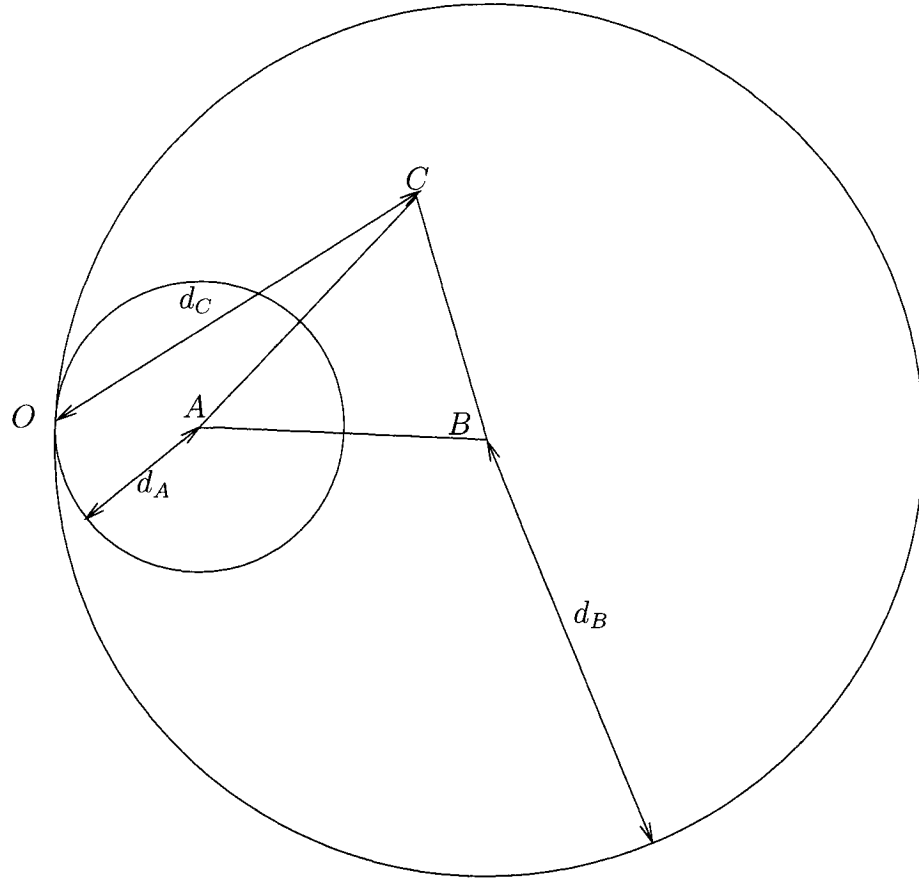


FIGURE 1.7 Deuxième cas d'intersection de cercle dans la procédure d'approximation de distance géodésique

cul de la distance géodésique séparant deux sommets d'un maillage.

Dans le cadre de notre travail, où nous avons à calculer la distance géodésique séparant un sommet d'une frontière, la fonction d'approximation qui nous a semblé être la meilleure est celle que présente Sethian et Kimmel (1998) et que nous exposons et développons au chapitre Conception, section 2.1.2. En effet cette fonction approxime la distance géodésique à une droite et tend à minimiser la fonction  $\mathcal{T}$  dans l'équation Eikonal 1.1, ce qui la rend particulièrement bien adaptée à notre utilisation de la FFM. D'autre part, sa mise en oeuvre n'est pas coûteuse puisqu'elle se réduit à la résolution d'une équation du 2<sup>e</sup> degré. C'est pour toutes ces raisons que nous l'avons choisie.

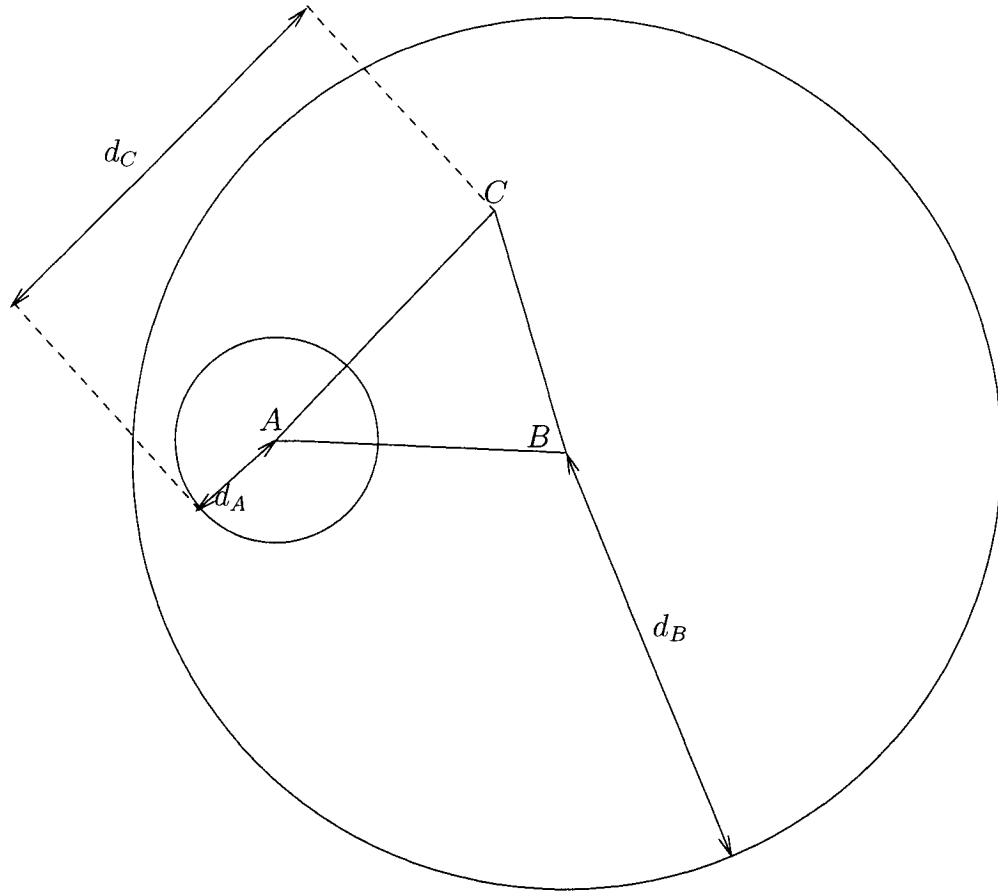


FIGURE 1.8 Troisième cas d'intersection de cercle dans la procédure d'approximation de distance géodésique

### 1.3 Largeur locale

D'une manière intuitive, il est facile d'imaginer ce qu'est une épaisseur. Par exemple, comme l'illustre la figure 1.9 en dimension 3, l'épaisseur d'une planche de bois de  $4 \times 4 \times 100$  est 4. En dimension 2, la largeur d'une plaque de  $4 \times 50$  est 4.

Nous avons choisi de définir la largeur locale en un point donné d'un objet en dimension 2 comme étant la longueur du plus petit segment passant par le point et reliant deux parois de la surface. La figure 1.10 donne plusieurs exemples de largeur locale en différents points d'un objet en dimension 2.

Puisque notre travail concerne les surfaces courbes en dimension 3, nous étendrons la

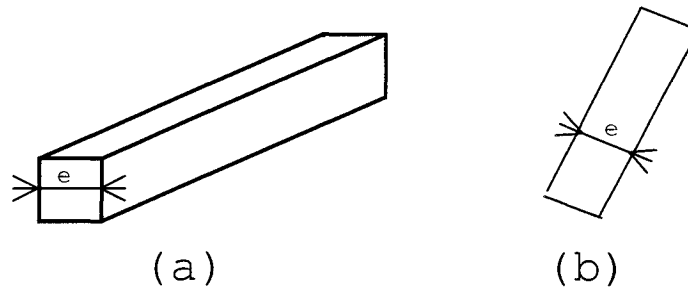


FIGURE 1.9 (a) Épaisseur d'une planche en dimension 3, (b) Largeur d'une plaque en dimension 2

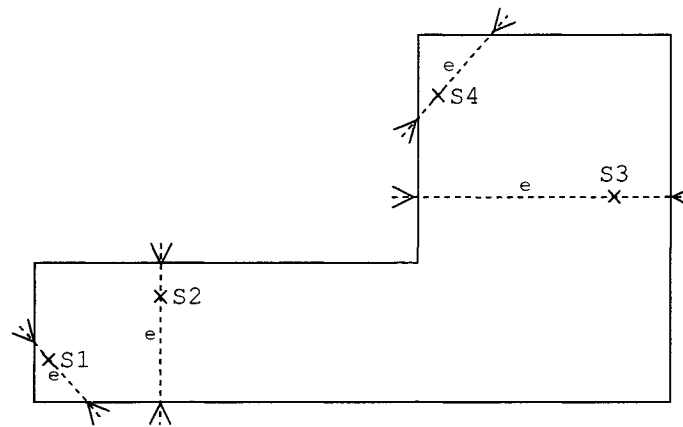


FIGURE 1.10 Exemples de largeur locale pour un objet en dimension 2

définition de la manière suivante : la largeur locale d'une surface courbe en un point donné est la longueur de la plus courte courbe géodésique passant par le point et reliant deux parois de la surface.

Un bon indicateur de l'épaisseur locale est l'axe médian ou encore le squelette. Il nous faut donc maintenant introduire quelques notions pour bien définir ces concepts mathématiques.



### 1.3.1 Squelette et axe médian

#### 1.3.1.1 Définitions et propriétés

Soit un objet  $\mathcal{X}$ . Par définition, le squelette  $Sk(\mathcal{X})$  de  $\mathcal{X}$  est l'ensemble des centres des boules maximales de  $\mathcal{X}$ .

Une boule  $B$  incluse dans l'objet  $\mathcal{X}$  est dite maximale s'il n'existe aucune boule  $B'$  incluse dans  $\mathcal{X}$  et contenant strictement  $B$  :

$$B \subset B' \subset \mathcal{X} \Rightarrow B = B'$$

En dimension 2, la boule est un cercle, alors que pour un volume en dimension 3, la boule est une sphère. La figure 1.11 donne un exemple de squelette en dimension 2.

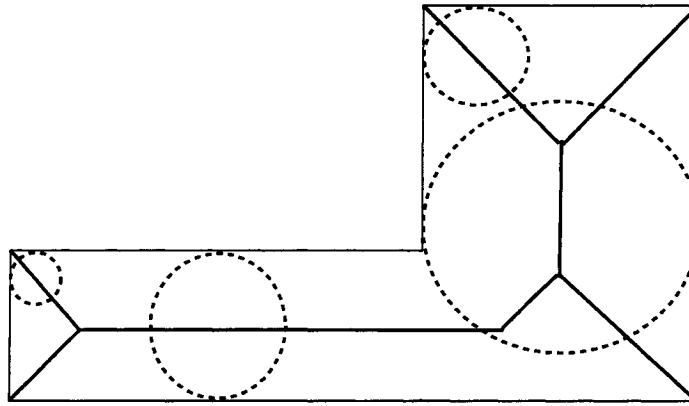


FIGURE 1.11 Exemple de squelette d'un objet en dimension 2

On peut donner une autre définition du squelette :

Le squelette d'un objet  $\mathcal{X}$  est le lieu des points où deux fronts d'ondes en provenance des contours de l'objet se rencontrent.

Les propriétés des squelettes sont nombreuses. Mais notre but étant d'adapter la notion de squelette aux surfaces courbes pour des raisons bien particulières d'approxima-

tion d'épaisseur, la plupart de ces propriétés ne nous intéressent pas particulièrement. De plus, dans le domaine discret qui est celui de notre travail, l'axe médian perd un grand nombre des propriétés du squelette.

Les deux propriétés les plus importantes des squelettes sont les suivantes :

**Invariance par transformation affine.** Le squelette est invariant par transformation.

Soient  $\mathcal{X}$  un objet et  $g$  une transformation ou une rotation. Alors :

$$Sk(g(\mathcal{X})) = g(Sk(\mathcal{X}))$$

**Réversibilité.** Si l'on mémorise pour chaque point  $P$  du squelette  $Sk(\mathcal{X})$  le rayon de la boule maximale  $B$  de centre  $P$ , on peut reconstruire l'objet  $\mathcal{X}$ .

L'union de toutes les boules ayant pour centre les points du squelette et pour rayon le rayon mémorisé forme l'objet  $\mathcal{X}$ . Mais cette propriété disparaît sur les surfaces gauches.

De plus, un squelette est mince, homotope, semi-continu, et il possède une structure de graphe.

Trouver le squelette d'un objet quelconque peut s'avérer difficile. Plusieurs chercheurs se sont penchés sur cette tâche. On peut regrouper leurs méthodes en trois catégories différentes [Attali (1995)] : les méthodes discrètes, les méthodes continues et les méthodes exactes. Mais nous ne nous intéresserons pas aux méthodes exactes car elles n'existent que pour les polygones et un très petit nombre d'autres formes.

### 1.3.1.2 Méthodes existantes pour la construction des squelettes

#### 1.3.1.2.1 Méthodes discrètes

Les méthodes discrètes s'appliquent habituellement sur des maillages rectangulaires en 2D, et sur des maillages hexagonaux en 3D. Elles produisent en général des versions discrètes approximatives du squelette, qu'on nomme axes médians.

**Amincissement homotopique.** Cette méthode consiste à éroder au fur et à mesure le contour de l'objet jusqu'à obtenir une figure mince et centrée. La figure résultante est l'axe médian de l'objet. Il existe un très grand nombre de publications à ce sujet ; [Lam *et al.* (1992)] en présente une centaine. On peut subdiviser les algorithmes utilisant cette méthode en deux familles :

**Algorithmes basés sur l'application de masques.** Dans ce type d'algorithme, un opérateur d'amincissement est appliqué suivant une ligne de balayage. L'opérateur peut être perçu comme une fonction booléenne qui prend en entrée un voxel et les informations sur son voisinage, et qui renvoie vrai si on peut supprimer le voxel, et faux sinon.

**Algorithmes basés sur les frontières.** Dans ce type d'algorithme, seuls sont étudiés les pixels appartenant aux frontières de l'objet, ce qui sert à réduire le nombre de voxels visités à chaque itération.

**Extraction à partir de cartes de distances.** Cette méthode consiste à créer une carte de taille pour l'objet à étudier. La carte associe à chaque sommet de l'objet une distance, qui est la distance minimale du sommet aux frontières de l'objet. Les points de l'axe médian sont les maxima locaux, c'est-à-dire les crêtes de la fonction distance. Rosenfeld et Pfaltz (1966) sont les premiers à avoir proposé cette caractérisation du

squelette.

**Simulation de la propagation d'une onde.** Comme nous l'avons déjà dit, un squelette peut être vu comme le lieu d'extinction d'un front d'onde prenant naissance aux frontières de l'objet et se déplaçant d'une manière isotrope à vitesse constante. Pour localiser l'axe médian d'un objet donné, on peut donc simuler la propagation de l'onde. Les travaux utilisant ce principe pour les objets en dimension 2 sont nombreux. Citons à titre d'exemple [Pavlidis (1980)] et [Arcelli (1981)]. La mise en oeuvre du principe est plus délicate en dimension 3 pour les volumes. Dans ce cadre, l'équipe de Giblin et Kimia (2004) s'est beaucoup intéressée aux problèmes de génération d'axe médian tridimensionnelle.

#### *1.3.1.2.2 Méthodes continues et graphe de Voronoï*

Ces méthodes reposent sur la génération du graphe de Voronoï, basé sur des points échantillonnés de la frontière de l'objet à étudier. La figure 1.12 illustre un exemple de génération d'axe médian à l'aide de cette méthode.

#### *1.3.1.2.3 Conclusion*

La plupart des travaux de recherche existants s'intègrent dans le domaine général de la reconnaissance des formes. Ils parviennent à l'extraction du squelette en prenant souvent comme point de départ des images binaires. La majorité d'entre eux proposent des solutions en dimension 2. Quelques unes de ces solutions ont été étendues aux volumes en dimension 3.

Dans le cadre de notre travail, nous ne pouvons pas appliquer directement ces méthodes puisque nous nous intéressons aux surfaces courbes et que nous quittons donc l'espace euclidien pour travailler sur l'espace géodésique. Les deux méthodes que

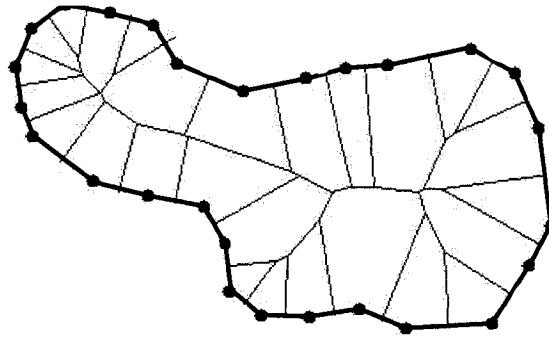


FIGURE 1.12 Génération d'axe médian par la méthode de graphe de Voronoï

nous pouvons envisager de généraliser sont celle de l'extraction du squelette à partir de cartes de distances et celle de la simulation de la propagation d'onde. C'est cette dernière qui nous a parue la plus appropriée à notre travail puisque notre objectif ultime est de générer des cartes de taille.

D'autre part, précisons que nous nous intéressons à l'axe médian dans un but bien précis, qui est l'extraction des caractéristiques géométriques de surfaces courbes parfaitement déterminées. La génération de squelette n'est pas pour nous une fin en soi, mais un moyen mathématique permettant d'atteindre d'autres objectifs liés à ces surfaces. Nous n'avons donc pas rencontré les problèmes classiques que l'on rencontre dans le domaine de reconnaissance de forme, par exemple celui du bruit à la frontière : il n'y a pas pour nous de bruit à la frontière puisque les surfaces que nous étudions possèdent des frontières parfaitement définies, et modélisées dans un système CAD.

### 1.3.1.3 Utilisation de l'axe médian pour l'extraction d'informations géométriques servant à la génération de maillages

L'utilisation de l'axe médian des objets pour l'extraction d'informations géométriques est une méthode assez répandue dans différents domaines de recherche. H. Blum est le premier à s'y être intéressé. En 1967, il a défini des surfaces polygonales au moyen de leur axe médian Blum (1967). Dans le domaine de la génération de maillages adaptés, Srinivasan *et al.* (1992) utilisent la fonction rayon de l'axe médian pour contrôler l'espacement des sommets au niveau des frontières et à l'intérieur d'un domaine plan (2D) à mailler. Gursoy et Patrikalakis (1992) utilisent l'axe médian pour détecter les étranglements et les trous afin de générer des maillages triangulaires adaptatifs. Bien que plusieurs travaux mettent directement en relation la génération de maillage avec la génération de l'axe médian, seuls les travaux de Tchon *et al.* (2003) et de Quadros *et al.* (2004) traitent explicitement du rapport entre la génération de l'axe médian et la métrique qui en découle pour la génération de maillages.

Le travail de Tchon a pour but la génération de métriques anisotropes adaptées à la géométrie des volumes. Il génère une métrique tridimensionnelle à partir d'une triangulation du domaine à étudier. Il commence par raffiner un octree cartésien en se basant non seulement sur la courbure des frontières mais aussi sur des critères de séparation locale reposant sur la topologie numérique. L'octree est utilisé ensuite pour extraire l'axe médian de l'objet. Il approxime à partir des surfaces triangulées les tenseurs de courbure et extrait l'information d'épaisseur à partir du squelette généré. À partir de ces informations géométriques, il crée une métrique euclidienne anisotrope qu'il stocke au niveau de l'octree. Cette métrique est créée afin de générer des maillages hexaédriques.

Sur les surfaces planes, Quadros *et al.* (2004) construit l'axe médian de la manière suivante : une discrétisation des frontières, comme illustré à la figure 1.13, lui permet

de créer une triangulation, à partir de laquelle il définit deux familles de points appartenant à l'axe médian :

- les centres des arêtes internes de la triangulation,
- les centres de gravité des triangles aigus.

Sur les surfaces en trois dimensions, l'auteur détermine l'axe médian au moyen d'une intersection de front, en vertu du principe du "feu de paille" ("grass fire") : un front prend naissance aux frontières et se déplace vers l'intérieur, englobant sur son passage les sommets du maillage représentant la surface. À chaque étape d'avancement du front, il recalcule la distance aux frontières pour les sommets proches du front. La figure 1.14 présente la fonction de mise à jour de la distance aux frontières pour un sommet proche du front. On voit que cette fonction ne fait intervenir qu'un seul sommet du front à la fois et qu'elle ne tient donc pas compte de la direction de l'avance de front.

Cette méthode de calcul est très peu précise puisqu'elle approxime la distance géodésique cherchée séparant une frontière et un sommet  $S$ , par la somme des longueurs des arêtes qui relient les sommets que le front doit parcourir pour atteindre  $S$ . De plus, on ne peut l'appliquer qu'à des maillages fins, aigus et homogènes sous peine de commettre une erreur trop élevée pour que l'emplacement du squelette soit détecté avec suffisamment de précision. Aussi faut-il, avant d'effectuer le processus de calcul, définir préalablement soi-même les caractéristiques du maillage d'entrée, ce qui n'est pas toujours possible.

## 1.4 Conclusion

Nous avons commencé cette étude bibliographique par une mise en contexte du domaine de recherche dans lequel se situe notre projet : la génération de maillages au moyen de cartes de taille.

Puisque notre travail porte sur l'extraction de critères géométriques sur des surfaces

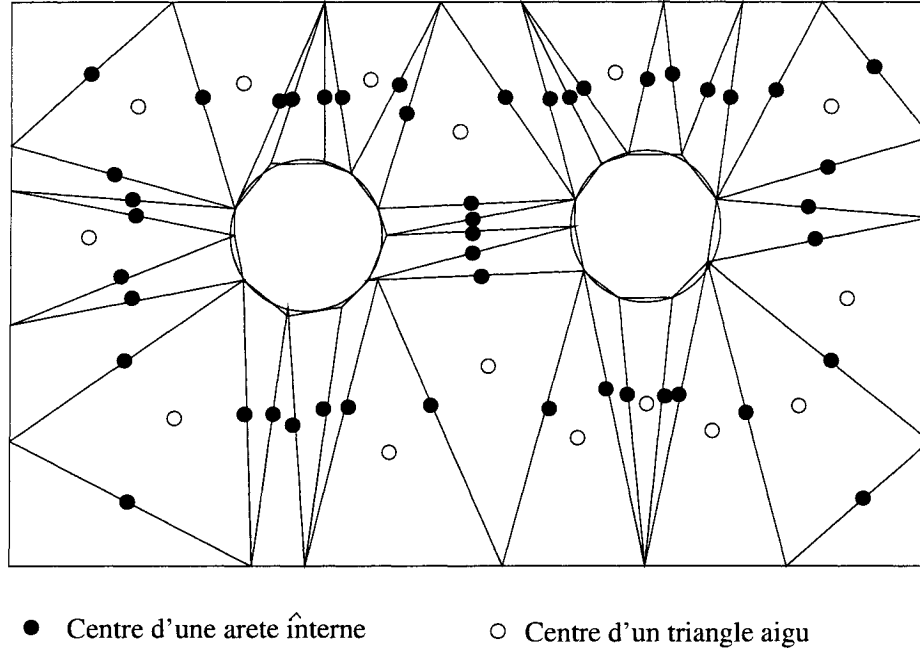


FIGURE 1.13 Génération d'axe médian sur une surface plane par simple discrétisation des frontières

```

procédure miseAJourDeLaDistance ( E  $S_{front}$  : Sommet    E/S  $S_{proche}$  : Sommet )
début
  si ( $S_{front}.d + \text{distanceEuclidienne}(S_{front}, S_{proche}) < S_{proche}.d$  alors
     $S_{proche}.d \leftarrow S_{front}.d + \text{distanceEuclidienne}(S_{front}, S_{proche})$ 
  finsi
fin
  
```

FIGURE 1.14 Procédure de mise à jour de la distance géodésique d'un sommet proche du front

gauches, au moyen de calculs de longueurs minimales de courbes, nous avons spécialement recherché les travaux traitant de l'approximation de géodésiques sur les surfaces gauches. Parmi ces travaux, nous avons privilégié ceux de M. Sethian, puisque c'est chez cet auteur qu'on trouve principalement développée la méthode FMM, qui s'applique facilement aux maillages triangulaires et qui répond parfaitement à nos besoins. En ce qui concerne la génération d'axes médians, nous avons constaté que l'extrême majorité des travaux existants traite du problème en dimension 2. Quelques-uns traitent des squelettes volumiques en dimension 3. Mais notre travail concerne les



squelettes tridimensionnels de surfaces et non de volumes, si bien que nous avons choisi de nous appuyer sur l'une des méthodes existantes pour les surfaces planes : la simulation de la propagation d'onde, pour l'étendre aux surfaces gauches.

Enfin, nous avons terminé notre étude bibliographique par la recherche des travaux en cours dans le domaine de la génération de maillage où notre travail pourrait s'intégrer.

## CHAPITRE 2

### CONCEPTION

Notre travail consiste à extraire deux informations géométriques caractérisant la surface tridimensionnelle à étudier. Nous voulons connaître, pour chacun des sommets du maillage représentant la surface, la distance aux frontières et la largeur locale. Pour ce faire, nous appliquons une méthode itérative passant par 4 étapes.

1. Nous commençons par le calcul de la distance géodésique de chaque sommet à la frontière la plus proche grâce à une méthode d'avance de front.
2. Nous détectons ensuite les sommets du maillage qui sont les plus proches de l'axe médian de la surface. L'axe médian est un bon indicateur pour approximer la largeur locale.
3. La troisième étape consiste à déterminer la largeur locale pour tous les sommets du maillage. Nous considérons que la largeur locale des sommets appartenant à l'axe médian vaut deux fois leur distance à la frontière qui leur est la plus proche. On diffuse ensuite cette information à travers le maillage par un mécanisme d'avance de front similaire à celui de l'étape un. Ici le front prend naissance sur l'axe médian au lieu de démarrer du contour.
4. La quatrième étape consiste à raffiner autour de l'axe médian.

Ces quatre étapes constituent un cycle qui peut être répété aussi longtemps que le degré de précision voulu n'est pas atteint. L'erreur de localisation de l'axe médian est au maximum égale à la taille des mailles qui l'entourent. Si on a besoin d'une très grande précision, on peut raffiner jusqu'à l'obtention autour de l'axe de triangles assimilables à des points à une tolérance donnée. Dans notre travail, nous nous sommes limités à itérer 7 fois au maximum ce qui revient à réduire l'erreur par un facteur  $2^7$ .

## 2.1 Distance des sommets aux frontières de la surface

Pour calculer la distance des différents sommets du maillage aux frontières, nous avons adapté à notre problème la méthode “Fast Marching Method” de Sethian. Nous simulons une onde géodésique, qui prend naissance aux frontières et qui avance uniformément vers l’intérieur de la surface. La distance que parcourt l’onde est calculée au fur et à mesure. Lorsqu’un sommet du maillage est traversé par l’onde, nous pouvons déterminer sa distance géodésique à la frontière la plus proche.

Pour appliquer cette méthode nous devons passer par des sous étapes.

### 2.1.1 Détection des frontières

Le principe utilisé pour la détection des frontières est simple. Lorsqu’une arête n’appartient qu’à un seul triangle, elle appartient à une frontière. On parcourt donc tous les triangles du maillage en coloriant les arêtes de chaque triangle. Une arête coloriée une seule fois appartient à une frontière de la surface. Il est à noter que nous ne faisons pas de différence dans notre travail entre les frontières extérieures à la surface et les frontières internes. L’algorithme fonctionne très bien même dans le cas de surfaces comportant des trous.

Pour optimiser le processus de recherche nous n’insérons pas les arêtes coloriées dans un vecteur d’arêtes mais plutôt dans un vecteur de vecteurs d’arêtes, afin que, à chaque insertion d’arête, le domaine de recherche soit limité. Le tri des arêtes se fait suivant l’index de leurs sommets comme le montre l’algorithme présenté à la figure 2.1. Une fois la fonction de tri d’arêtes appelée pour toutes les arêtes de tous les triangles du maillage, le vecteur de vecteurs d’arêtes ne contiendra que les arêtes des frontières.

```

procédure trier ( E A : Arête  E/S vvAretes : vecteur<vecteur<Arête> )
  Déclaration S : Sommet, indexMin : Entier
début
  S ← A.getSommetAyantIndexMin()
  indexMin ← S.getIndex()
  si A ∈ vvAretes[indexMin] alors
    vvAretes[indexMin].eliminer(A)
  sinon
    vvAretes[indexMin].ajouter(A)
  finsi
fin

```

FIGURE 2.1 Procédure optimisée de détection des frontières

### 2.1.2 Simulation de l'onde géodésique : algorithme d'avance de front

Pour simuler l'avancement de l'onde géodésique nous appliquons un algorithme d'avance de front. Le front prend naissance aux frontières de la surface. Il avance uniformément vers l'intérieur et se déplace par proximité dans le maillage. La distance géodésique  $d_f$  qui sépare un sommet  $S_i$  de la frontière la plus proche est fixée quand le sommet est intégré dans le front.

Les différents sommets du maillage sont divisés en trois ensembles :

- ensemble des sommets vivants : sommets ayant déjà été traversés par le front.
- ensemble des sommets proches : sommets situés à la distance topologique 1 du front.
- ensemble des sommets éloignés : cet ensemble rassemble les sommets qui ne sont ni vivants ni proches.

**Initialisation.** L'ensemble des sommets du maillage qui appartiennent à une frontière forme le front initial. Le déplacement du front représentera le déplacement de l'onde géodésique.

Pour chaque sommet appartenant à une frontière, la distance du sommet à cette frontière est initialisée à zéro et l'état du sommet est fixé à vivant.

Tous les sommets situés à la distance topologique 1 d'une frontière sont marqués comme proches et leur distance  $d$  à la frontière est calculée. L'ensemble des sommets proches est ordonné relativement à la distance  $d$  par ordre croissant.

**Principe.** Tant qu'il reste des sommets proches, nous effectuons les opérations suivantes :

Soit  $S$  un sommet proche ayant une distance  $d$  minimale. On insère  $S$  dans les sommets vivants. On calcule ou on recalcule la distance  $d$  de tous les sommets voisins non vivants de  $S$  et on les intègre dans les sommets proches. Nous avons choisi la fonction d'approximation de l'article de Sethian et Kimmel (1998) qui, à partir des distances géodésiques de deux sommets d'un triangle, approxime la distance géodésique du troisième sommet.

**Fonction d'approximation.** Soit  $ABC$  un triangle du maillage tel que  $A$  et  $B$  soient vivants. A partir de  $d_A$  et de  $d_B$ , nous voulons calculer la distance géodésique  $d_C$  séparant  $C$  de la frontière la plus proche. Pour obtenir une bonne approximation et pour conserver la monotonie de l'algorithme de mise à jour, il est important que le triangle  $ACB$  soit aigu et, par conséquent, que la hauteur issue du sommet  $C$  soit à l'intérieur du triangle (voir fig. 2.2).

Nous supposons sans perte de généralité que  $d_A < d_B$ .

On note :

$$a = BC$$

$$b = AC$$

$$\theta = \widehat{ACB}$$

$$\phi = \widehat{CBD}$$

$$u = d_B - d_A.$$

Soit  $H$  le point défini par :  $\overrightarrow{BH} = u \times \vec{N}$ , où  $\vec{N}$  désigne l'un des vecteurs

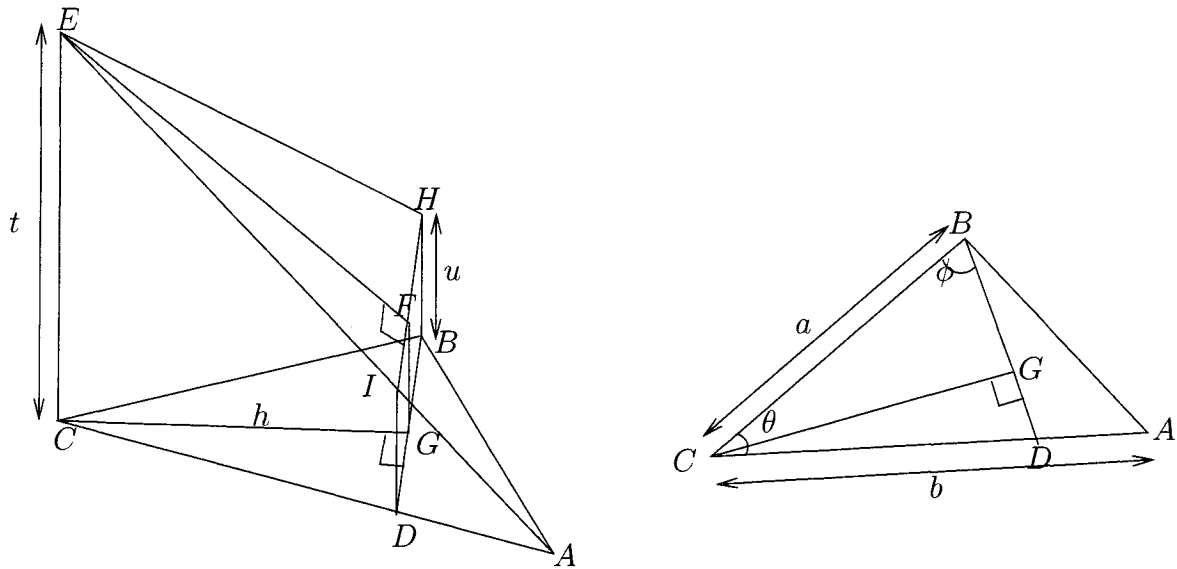


FIGURE 2.2 Vue en perspective (à gauche) et en deux dimensions (à droite) d'un triangle aigu dans lequel on approxime  $d_C$  à partir de  $d_A$  et de  $d_B$

normaux au plan  $(ABC)$ . Les points  $D$  et  $I$ , pour l'instant non définis, vérifient les conditions :  $D \in [CA]$  et  $\overrightarrow{DI} = u \times \vec{N}$ .

Le point  $E$  est le point d'intersection de la droite  $(AI)$  avec la droite orthogonale au plan  $(ABC)$  en  $C$ .

On note  $t$  la norme du vecteur  $CE$ , c'est-à-dire que :

$$\overrightarrow{CE} = t \times \vec{N}.$$

On a :

$$\frac{AI}{AE} = \frac{u}{t}.$$

Enfin,  $F$  est le pied de la hauteur issue de  $E$  dans le triangle  $AIH$ ,  $G$  est la projection orthogonale de  $F$  sur le plan  $(ABC)$  et on note  $h$  la norme de  $CG$ .

La procédure d'approximation consiste à calculer  $d_C = d_A + t$  où  $t$  est solution de :

$$\frac{t - u}{h} = V$$

la variable  $V$  étant la vitesse de propagation de l'onde. Dans notre cas l'onde se déplace de manière uniforme sur la surface. La vitesse  $V$  vaut donc 1.

Par similitude nous avons :

$$\frac{t}{b} = \frac{DF}{AD} = \frac{u}{AD}$$

Or,

$$CD = b - AD$$

donc,

$$CD = b - \frac{bu}{t} = b \frac{(t - u)}{t} .$$

La loi des cosinus appliquée au triangle  $BDC$  donne :

$$BD^2 = a^2 + CD^2 - 2aCD \cos(\theta) .$$

La loi des sinus appliquée au triangle  $BDC$  donne :

$$\sin(\phi) = \frac{CD}{BC} \sin(\theta) .$$

L'étude du triangle rectangle  $CBG$  donne :

$$h = a \sin(\phi) = \frac{CD}{BC} \sin(\theta) = \frac{aCD \sin(\theta)}{\sqrt{a^2 + CD^2 - 2aCD \cos(\theta)}} .$$

Finalement nous devons résoudre :

$$(a^2 + CD^2 - 2aCD \cos(\theta))t^2 + 2bu(a \cos(\theta) - b)t + b^2(u^2 - a^2 \sin^2(\theta)) = 0 .$$

La solution  $t$  doit satisfaire :

$$u < t \text{ et } a \cos(\theta) < \frac{b(t-u)}{t} < \frac{a}{\cos(\theta)} .$$

La procédure de mise à jour de la distance  $d_C$  est développée à la figure 2.3.

```

procédure miseAJourDeLaDistanceAigu ( E A,B : Sommet*   E/S C : Sommet* )
  Déclaration t,a,b : Réel
  début
    resoudreApproximation(A,B,C,t,a,b)
    si  $u < t$  et  $a \cos(\theta) < \frac{b(t-u)}{t} < \frac{a}{\cos(\theta)}$  alors
       $C \rightarrow d \leftarrow \min(C \rightarrow d, t + A \rightarrow d)$ 
    sinon
       $C \rightarrow d \leftarrow \min(C \rightarrow d, b + A \rightarrow d, c + B \rightarrow d)$ 
    finsi
  fin

```

FIGURE 2.3 Procédure de mise à jour de la distance géodésique d'un sommet dans un triangle aigu

**Extension de la fonction d'approximation aux angles obtus.** Soit  $ABC$  un triangle du maillage tel que  $A$  et  $B$  soient vivants et que l'angle  $\widehat{ACB}$  soit obtus. Nous voulons calculer la distance géodésique  $d_C$  séparant  $C$  de la frontière la plus proche à partir de  $d_A$  et de  $d_B$ . Notre méthode consiste à élire deux sommets du maillage  $A'$  et  $B'$  tels que l'angle  $\widehat{A'CB'}$  soit aigu, les sommets  $A'$  et  $B'$  remplaçant  $A$  et  $B$  dans le calcul de  $d_C$ , voir la figure 2.4. Nous appliquons une méthode récursive détaillée à la figures 2.5.

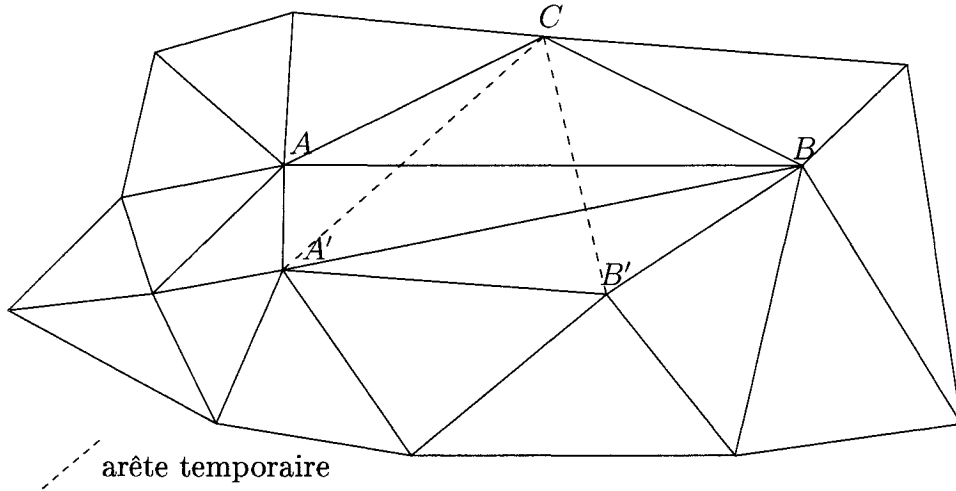


FIGURE 2.4 Création d'un triangle  $A'B'C$  temporaire pour la mise à jour de la distance géodésique du sommet  $C$  dans le triangle obtus  $ABC$



```

procédure miseAJourDeLaDistanceObtus ( E  $A, B$  : Sommet  E/S  $C$  : Sommet  E  $D$  :
Sommet )
  Déclaration  $\theta, \phi_1, \phi_2$  : Réel,  $A'$  : Sommet
début
   $\theta \leftarrow \text{calculerAngle}(A, C, B)$ 
  si  $\theta < (\pi/2)$  alors
    miseAJourDeLaDistanceAigu( $A, B, C$ )
  sinon
    si  $D = 0$  alors
       $D \leftarrow C$ 
    finsi
     $A' \leftarrow \text{sommetCommunDifferentDeD}(A, B, D)$ 
     $\phi_1 \leftarrow \text{calculerAngle}(A, C, A')$ 
     $\phi_2 \leftarrow \text{calculerAngle}(B, C, A')$ 
    si  $\phi_1 < \phi_2$  alors
      miseAJourDeLaDistanceObtus( $A, A', C, B$ )
    sinon
      miseAJourDeLaDistanceObtus( $B, A', C, A$ )
    finsi
  finsi
fin

```

FIGURE 2.5 Procédure de mise à jour de la distance géodésique d'un sommet dans un triangle obtus

## 2.2 Détection de l'axe médian

Pour la détection de l'axe médian, nous appliquons l'algorithme dit "du feu de paille". Imaginons la surface recouverte de paille. Si on met le feu aux frontières de la surface, on suppose que le feu avancera uniformément vers l'intérieur et l'axe médian se localise à l'endroit où deux fronts de feu se rencontrent. Nous allons donc chercher à détecter les intersections de fronts. Deux approches sont possibles.

**Détection de triangle :** On définit les vecteurs de propagation pour chaque sommet du maillage. L'axe médian passe par un triangle  $T$  si l'un des angles que font les vecteurs de ses sommets est supérieur à un angle limite  $\theta_0$ .

**Détection de sommet** On définit les vecteurs de propagation du front de chaque triangle du maillage. Un sommet peut être considéré comme appartenant à l'axe

médian si l'un des angles que font les vecteurs de propagation des triangles qui l'entourent est supérieur à un angle limite  $\theta_0$ .

Dans les deux cas l'erreur maximale commise est égale à la taille des mailles par lesquelles passe l'axe médian. Pour minimiser cette erreur, nous opérons un raffinement local autour de l'axe médian. Après raffinement, les deux méthodes donnent des résultats très similaires. Par contre, sur un maillage grossier, la détection de sommet est plus précise que la détection de triangle.

La figure 2.6 illustre la détection de l'axe médian d'une arche par les deux méthodes de détection sans raffinement et après 3 itérations de raffinement.

### 2.2.1 Calcul du vecteur de direction de propagation du front dans un triangle

Étant donné un triangle de sommets  $A$ ,  $B$  et  $C$ , soit respectivement  $d_a$ ,  $d_b$ , et  $d_c$  la distance de chaque sommet à la frontière la plus proche de la surface.

Soit  $\vec{N}$  le vecteur normal au plan  $(ABC)$ .

On construit les sommets  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  tels que :

$$\overrightarrow{AA'} = d_a \cdot \vec{N}$$

$$\overrightarrow{BB'} = d_b \cdot \vec{N}$$

$$\overrightarrow{CC'} = d_c \cdot \vec{N}$$

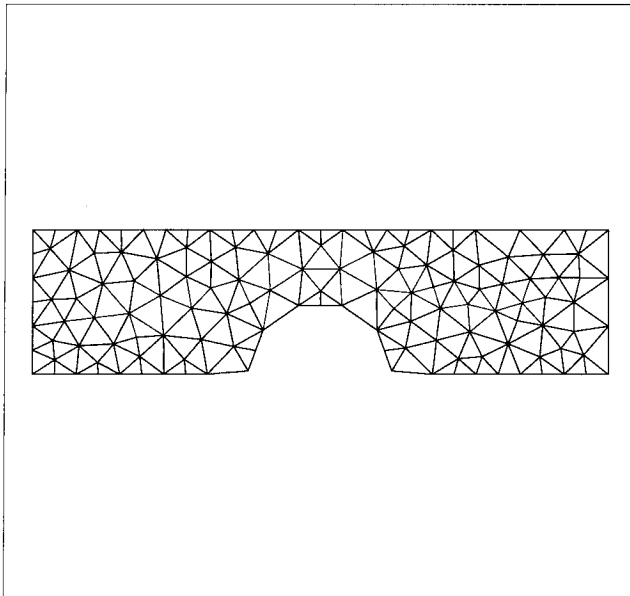
Soit  $\vec{N'}$  le vecteur normal au plan  $(A'B'C')$ .

La direction de propagation appartient au plan  $(ABC)$  et elle est normale à l'intersection des plans  $(ABC)$  et  $(A'B'C')$ .

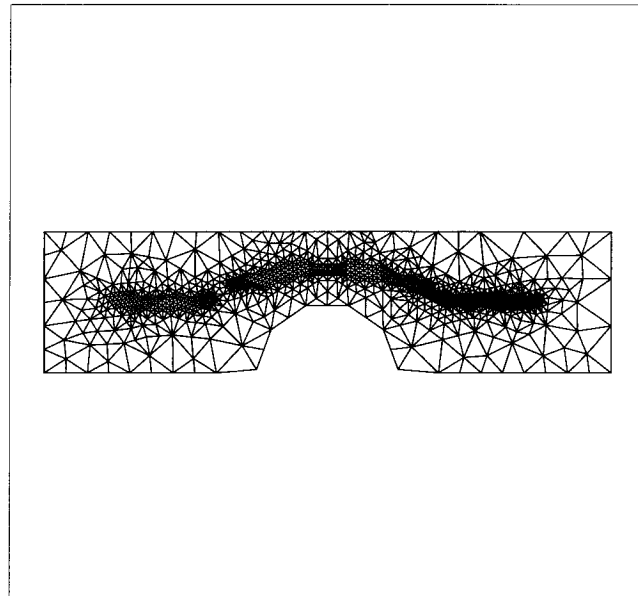
La figure 2.7 illustre le calcul.

Analytiquement :

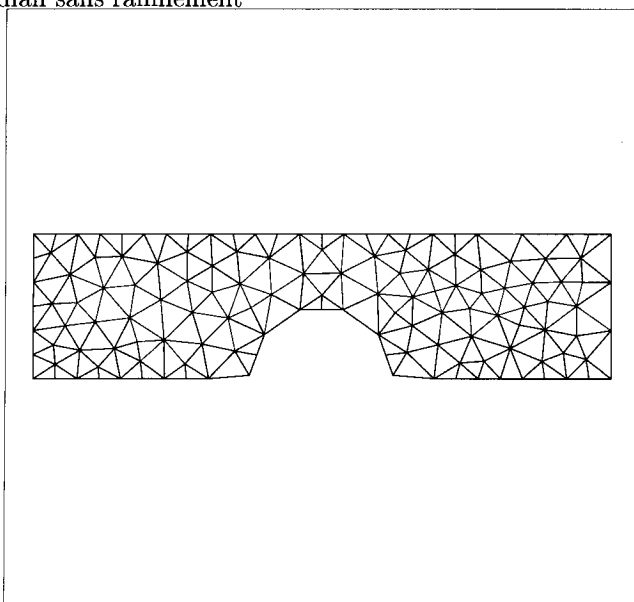
$$\vec{D} = \vec{N} \times (\vec{N} \times \vec{N'})$$



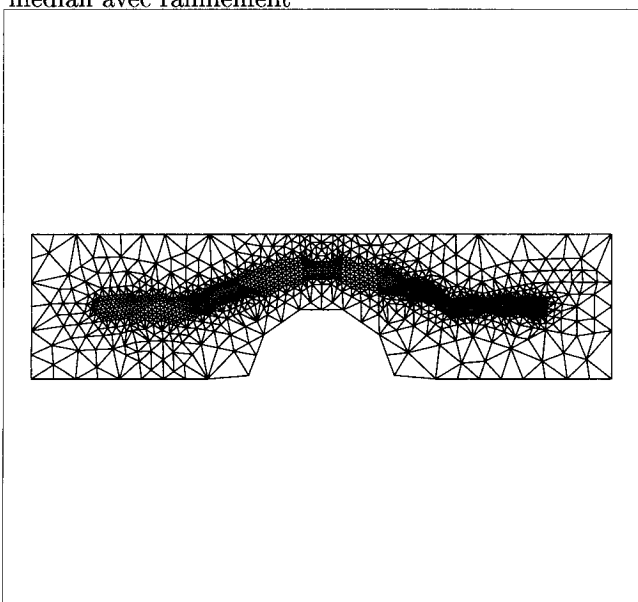
(a) Détection des sommets les plus proches de l'axe médian sans raffinement



(b) Détection des sommets les plus proches de l'axe médian avec raffinement



(c) Détection des triangles traversés par l'axe médian sans raffinement



(d) Détection des triangles traversés par l'axe médian avec raffinement

FIGURE 2.6 Détection de l'axe médian par intersection de fronts

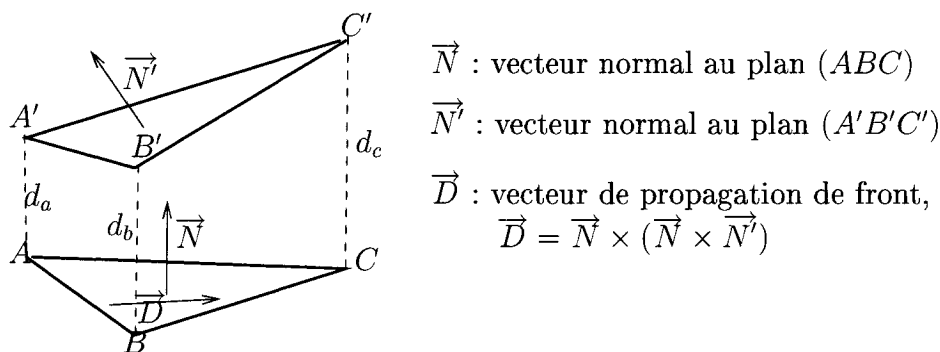


FIGURE 2.7 Calcul du vecteur de direction de propagation du front dans un triangle

### 2.2.2 Angle limite

Nous devons définir un angle  $\theta$  à partir duquel nous considérerons qu'il y a collision. Cet angle influence beaucoup les résultats obtenus. La figure 2.8 illustre sur un exemple les résultats obtenus au moyen de deux angles limites différents, l'un inférieur à  $90^\circ$  et l'autre supérieur. On voit que pour l'angle inférieur à  $90^\circ$  l'axe médian du carré est constitué des diagonales du carré, alors que pour l'angle supérieur, l'axe médian est un point au centre. Les deux résultats sont corrects suivant le contexte. Pour notre part, nous avons choisi de ne pas utiliser des angles inférieurs à  $90^\circ$ . En d'autres termes, nous considérons qu'il y a collision entre deux fronts si ces derniers proviennent de deux frontières situées l'une en face de l'autre. Notre calcul exclut donc les coins, ce qui n'est pas gênant puisque, dans une carte de taille géométrique, les coins constituent des singularités qui reçoivent un traitement particulier pour lequel le calcul de la largeur locale au voisinage des coins est inutile.

Il est important de préciser que plusieurs problèmes apparaissent si l'angle limite  $\theta$  est choisi trop petit. Puisque nous travaillons dans le domaine discret, nous discrétisons les frontières, ce qui supprime la continuité d'ordre 1 et provoque éventuellement des erreurs. Imaginons par exemple le cas d'un disque  $D$  de centre  $C$  et de rayon  $r$ . Le squelette de cette surface est constitué du seul point  $C$ . En discrétisant les frontières,

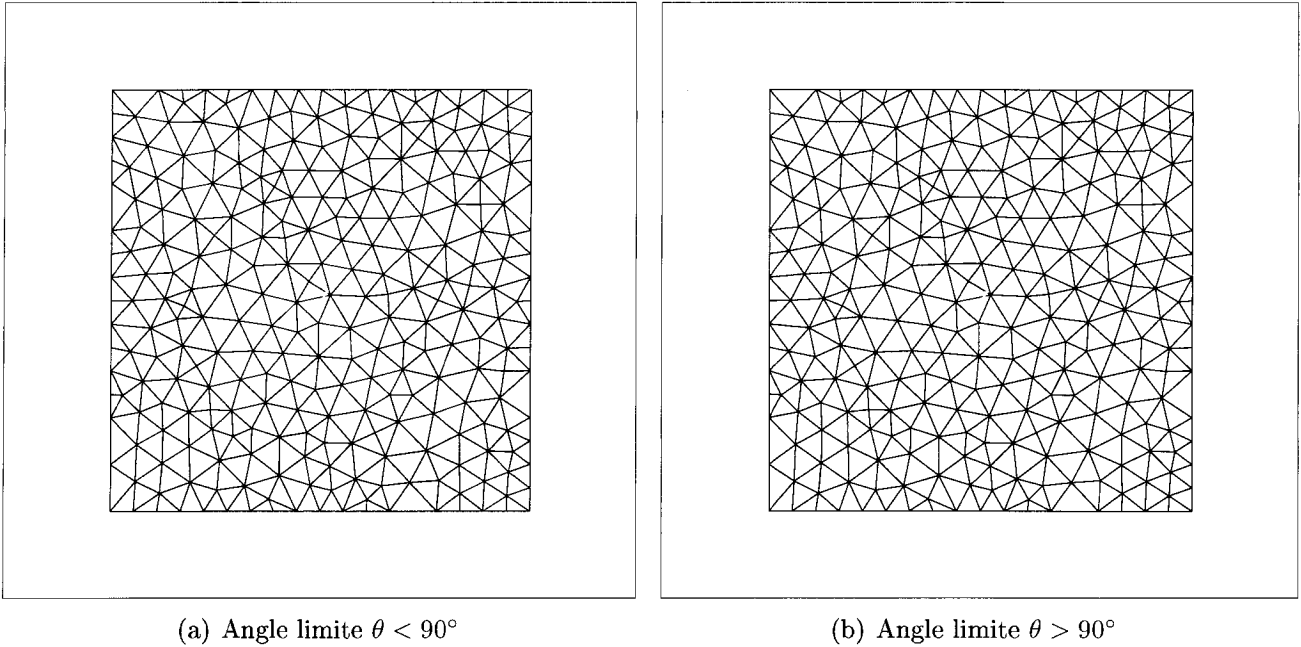


FIGURE 2.8 Axe médian d'un carré

on ne travaille plus réellement sur un disque mais sur un polygone dont le nombre  $n$  de sommets est le rapport entre le périmètre du disque et le pas d'échantillonnage  $e$ .  $n = \frac{2\pi r}{e}$ . Le squelette trouvé pour cette nouvelle surface peut comporter, si l'angle limite  $\theta$  est choisi trop petit, outre le centre  $C$ ,  $n$  petits segments issus de chacun des sommets : voir la figure 2.9. La détection de ces  $n$  segments est indésirable puisque la surface étudiée en fait est le disque. On voit que la discrétisation peut engendrer des perturbations qui faussent le résultat.

### 2.2.3 Détection de l'axe médian par intersection de fronts

Pour un sommet  $S$  donné, plusieurs étapes sont nécessaires pour détecter une intersection de fronts. La première consiste à définir le plan  $P$  tangent à la surface en  $S$ . Pour ce faire, nous calculons, pour chaque triangle  $T_i$  dont  $S$  est un sommet, la normale  $\vec{N}_i$  au plan du triangle. Nous définissons le vecteur  $\vec{N}_S$  comme étant la moyenne

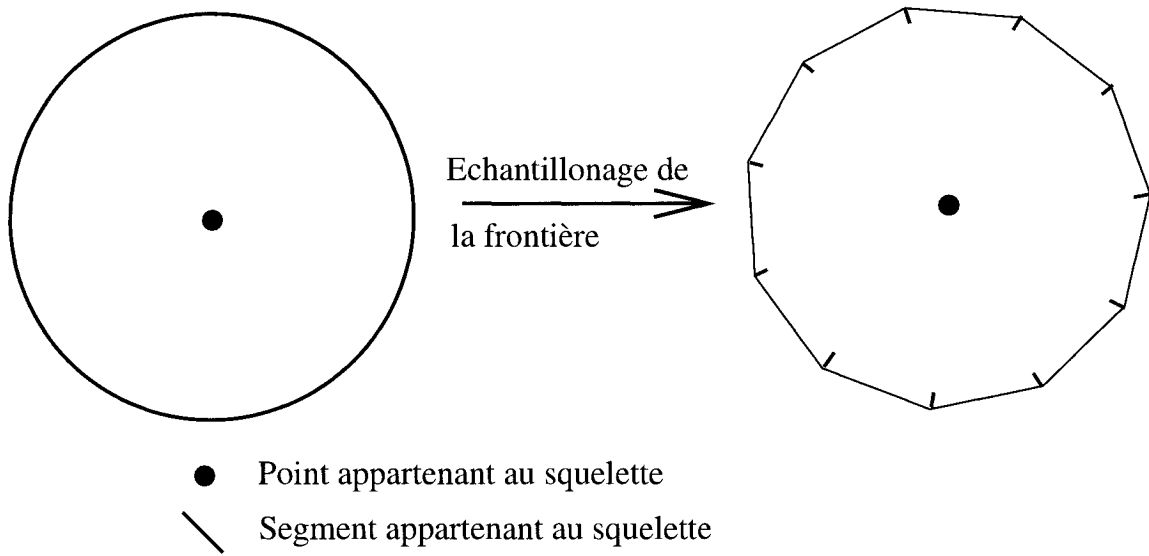


FIGURE 2.9 Squelette d'un disque avant et après échantillonnage de la frontière

des normales  $\vec{N}_i$ . Nous approximations alors le plan  $P$  par le plan passant par  $S$  dont le vecteur normal est  $\vec{N}_S$ .

Comme le montre la figure 2.10, l'étape suivante consiste à calculer les vecteurs de propagation des triangles  $T_i$ . Nous projetons ensuite ces vecteurs sur le plan  $P$  et nous obtenons ainsi une série de vecteurs. Finalement, si l'angle formé par deux de ces vecteurs est supérieur à l'angle limite  $\theta$ , le sommet appartient à l'axe médian.

### 2.3 Calcul de la largeur locale

Par définition, les sommets appartenant à l'axe médian sont les sommets où se rencontrent deux fronts géodésiques qui prennent naissance aux frontières de la surface. Ces sommets sont équidistants géodésiquement de deux frontières distinctes. Nous approximations la largeur locale de ces sommets par deux fois leur distance aux frontières. Une fois calculée la largeur locale des sommets de l'axe médian, nous propageons cette information à travers le maillage afin de calculer la largeur locale pour tous

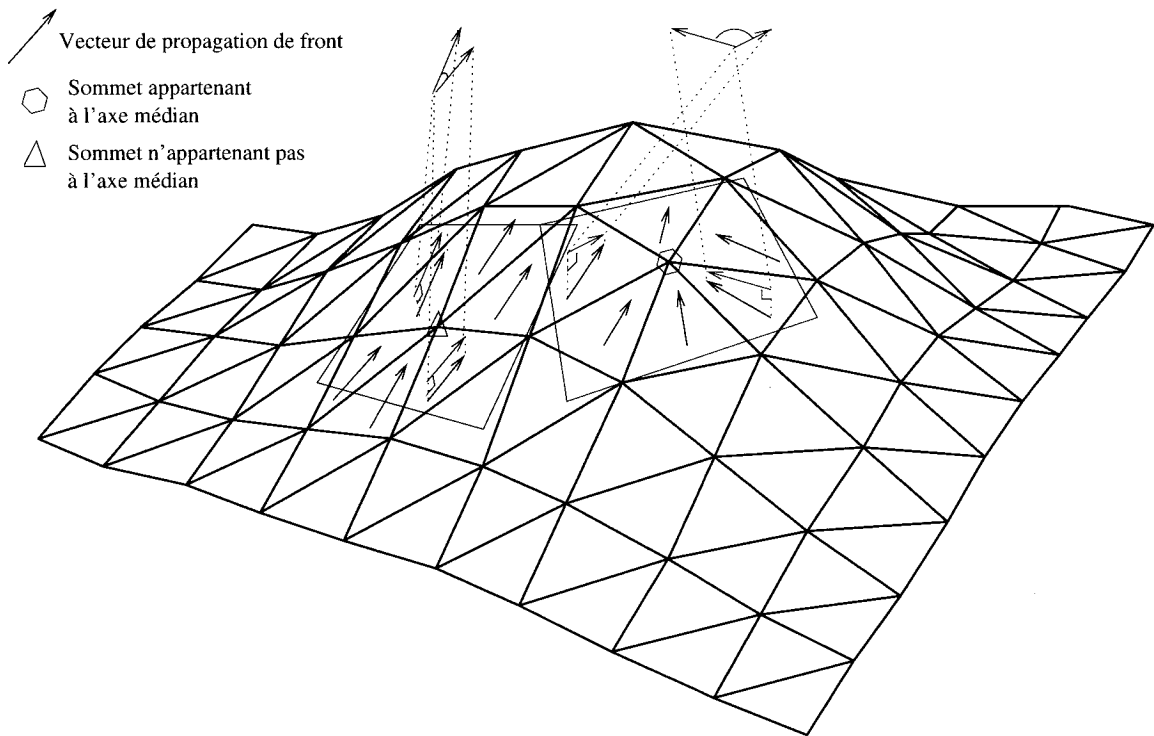


FIGURE 2.10 Détection de sommets appartenant à l'axe médian par intersection de fronts

les sommets. Pour cela, nous appliquons une deuxième fois un algorithme d'avance de front afin de déterminer, pour chaque sommet du maillage, le sommet de l'axe médian qui lui est le plus proche. Ce nouveau front prend naissance sur l'axe médian et se déplace vers les frontières. On attribuera à chaque sommet la largeur locale du sommet de l'axe médian qui lui est le plus proche.

## 2.4 Raffinement

Notre travail s'applique à des maillages triangulaires quelconques, où les mailles environnant l'axe médian peuvent être très grossières. Or, comme nous l'avons déjà dit, l'erreur est directement proportionnelle à la taille des mailles qui environnent les

sommets détectés comme appartenant à l'axe médian. C'est pourquoi, pour obtenir de bons résultats sans alourdir les calculs, nous raffinons localement autour de l'axe médian.

Étant donnée que nous travaillons sur des surfaces courbes, le déplacement ou la création de sommets s'avère être une opération délicate. En effet, il ne faut pas que les sommets déplacés ou créés se trouvent en dehors de la surface, définie elle même par le maillage initial.

Nous avons donc décidé de nous limiter à opérer une subdivision. Encore faut-il s'assurer que la méthode de subdivision ne crée pas trop de triangles obtus, puisque la méthode d'approximation de géodésiques donne de meilleurs résultats sur des maillages aigus.

#### 2.4.1 subdivision

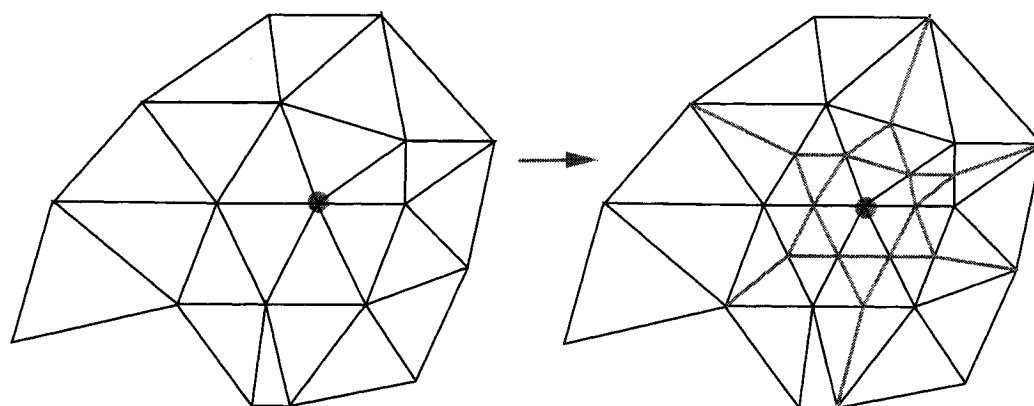
Pour raffiner autour d'un sommet, nous appliquons deux règles de subdivision.

**R1 :** Si l'un des sommets d'un triangle appartient à l'axe médian, on subdivise le triangle en quatre : on crée des sommets au milieu de chaque arête et on relie les nouveaux points par des arêtes. Pour conserver la conformité du maillage, on subdivise les triangles adjacents en deux. Voir figure 2.11.

**R2 :** On ne subdivise pas un triangle qui est lui-même le fruit d'une subdivision en deux. Si on se trouve devant ce cas de figure, on doit commencer par remplacer la subdivision initiale en deux par une subdivision en quatre puis opérer la subdivision qu'on voulait opérer si elle n'est pas devenue obsolète. Voir figure 2.12.

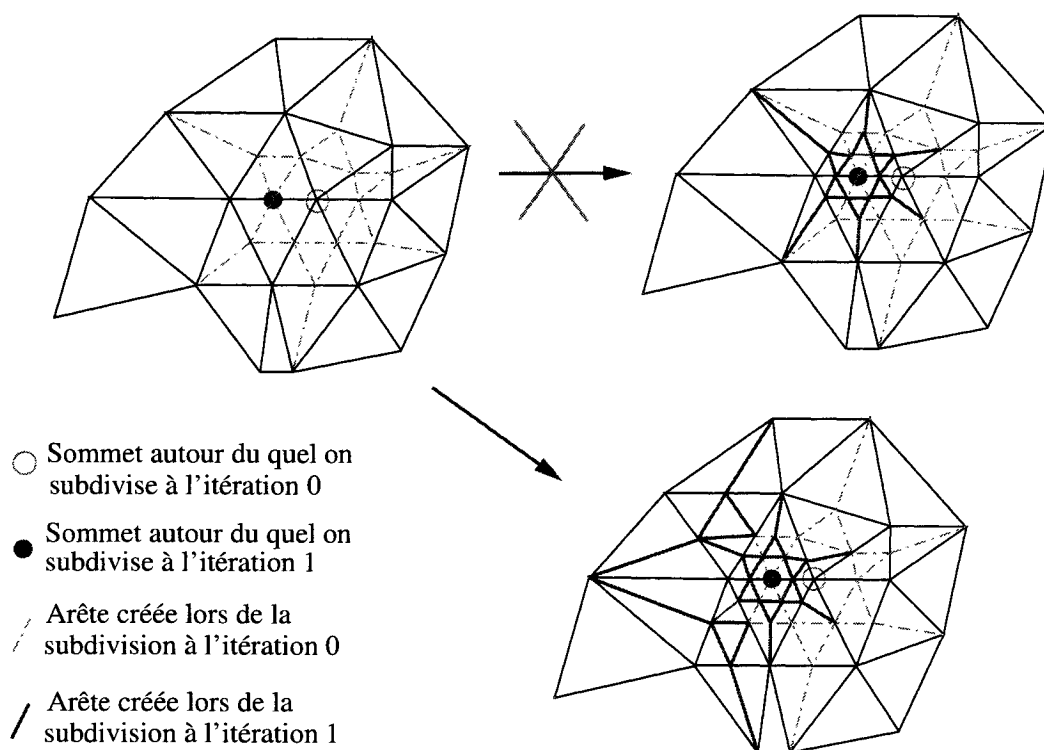
La règle R2 est utile dans deux cas différents. Premièrement lorsque, au cours d'une même itération, un triangle se trouve entre deux triangles à subdiviser en quatre.





- Sommet autour duquel il faut subdivier à l'itération 0
- / Arête créée lors de la subdivision à l'itération 0

FIGURE 2.11 Exemple de subdivision à l'itération 0



- Sommet autour duquel on subdivise à l'itération 0
- Sommet autour duquel on subdivise à l'itération 1
- / Arête créée lors de la subdivision à l'itération 0
- / Arête créée lors de la subdivision à l'itération 1

FIGURE 2.12 Exemple de subdivision à l'itération 1

Deuxièmement si, au cours d'une itération, on doit subdiviser un triangle qui a été subdivisé en deux lors d'une itération précédente. Afin de pouvoir appliquer la règle R2, il est très important de conserver des informations de voisinage et de parenté cohérentes pour tous les triangles créés au fur et à mesure du processus. Pour y parvenir, nous stockons les triangles au moyen d'une structure en arbre qui nous permet de savoir quel est le parent de chaque triangle, quels sont ses enfants et quels sont ses voisins.

## 2.5 Conception Informatique

Plusieurs concepts ressortent de notre analyse du problème. Nous avons réparti les classes qui en découlent en deux groupes, lesquels forment deux paquetages : le paquetage éléments et le paquetage outils, voir figure 2.13.

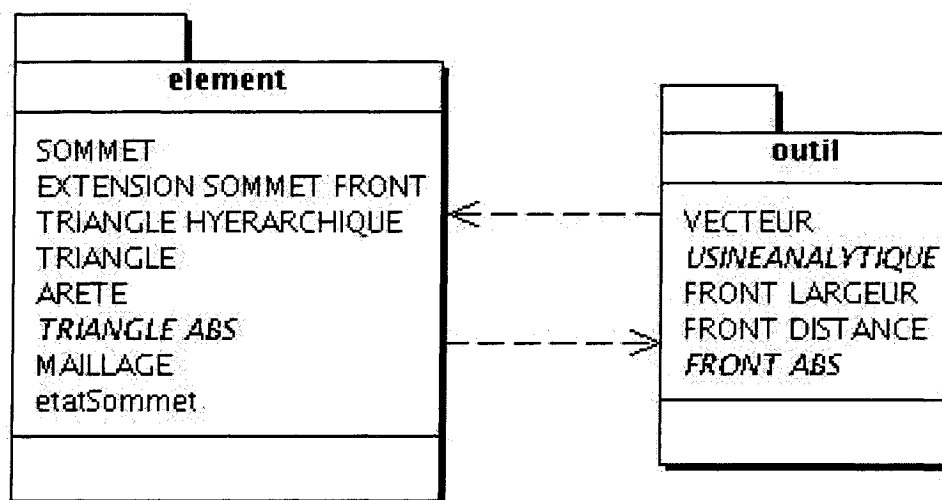


FIGURE 2.13 Diagramme de paquetage

Tout au long de la conception, nous nous sommes appliqués à optimiser l'utilisation de la mémoire. En effet l'optimisation est nécessaire, d'une part du fait qu'un maillage

peut être constitué d'un très grand nombre d'éléments, et d'autre part du fait que l'opération de subdivision que nous appliquons à chaque itération augmente sensiblement le nombre des éléments à stocker.

### 2.5.1 Éléments

Le paquetage éléments regroupe les classes constituant les éléments géométriques que nous allons manipuler. Ces éléments sont :

- maillage,
- triangle,
- arête, et
- sommet.

Les liaisons entre ces éléments sont très fortes puisqu'un maillage est constitué d'un ensemble de triangles, que la frontière du maillage est constituée d'un ensemble d'arêtes, qu'un triangle est défini par 3 sommets ou 3 arêtes et que, finalement, les arêtes sont définies par 2 sommets (voir figure 2.14).

Ces relations entre les éléments définissent le minimum d'informations que doivent contenir les structures de données :

- un sommet est défini par ses coordonnées  $(x,y,z)$ ,
- une arête possède 2 pointeurs, 1 sur chaque sommet,
- un triangle possède 3 pointeurs, 1 sur chaque sommet,
- un maillage possède une liste de sommets et une liste de triangles.

A ces informations s'ajoutent des informations de proximité, nécessaires aux algorithmes que nous appliquons aux maillages.

Pour stocker les informations de proximité, on dispose de plusieurs méthodes, dont chacune est plus ou moins bien adaptée à chaque algorithme.

On peut par exemple stocker l'information de proximité au niveau des sommets :

chaque sommet possédera ainsi une liste de pointeurs qui sont ceux des sommets adjacents. Ce type de structure est spécialement bien adapté à l'algorithme d'avance de front pour le calcul de distance géodésique. Le front étant un ensemble de sommets, le déplacement du front dans le maillage se trouve simplifié.

On peut aussi stocker l'information de proximité au niveau des triangles : chaque triangle possédera 3 pointeurs sur les trois triangles qui lui sont adjacents. Cette manière de stocker l'information est appropriée aux algorithmes de subdivision, puisque la subdivision se fait au niveau des triangles et que cette opération a une influence directe sur les triangles adjacents comme on l'a vu à la section 2.4.

La solution que nous avons retenue est un mélange des deux structures ci-dessus. Pour éviter de surcharger la mémoire, nous la libérons de l'information de proximité au niveau des sommets, à chaque fois qu'on termine une avance de front, pour ne conserver que l'information de proximité au niveau des triangles.

### 2.5.1.1 Maillage

Un maillage est généralement défini par une liste de sommets et une liste de connectivités. Par conséquent, la classe MAILLAGE possède une liste de pointeurs sur les sommets appartenant au maillage et une liste de pointeurs sur les triangles qui le constituent. La classe MAILLAGE possède aussi une liste de pointeurs sur les arêtes de sa frontière.

Les méthodes de la classe permettent d'appliquer plusieurs opérations sur le maillage, telles que le calcul de la distance des sommets aux frontières, la détection de l'axe médian, le raffinement localisé, l'inscription du résultat dans un fichier .pie<sup>1</sup>.

Un objet maillage est initialisé à partir d'un fichier .mesh<sup>2</sup> comportant les coordon-

---

<sup>1</sup>Format utilisé par la bibliothèque Pirate <http://www.polymtl.ca/grmiao/magnu/>

<sup>2</sup>Format utilisé par l'outil de visualisation medit  
<http://www.ann.jussieu.fr/frey/logiciels/Docmedit.dir/Fichiers/format.pdf>

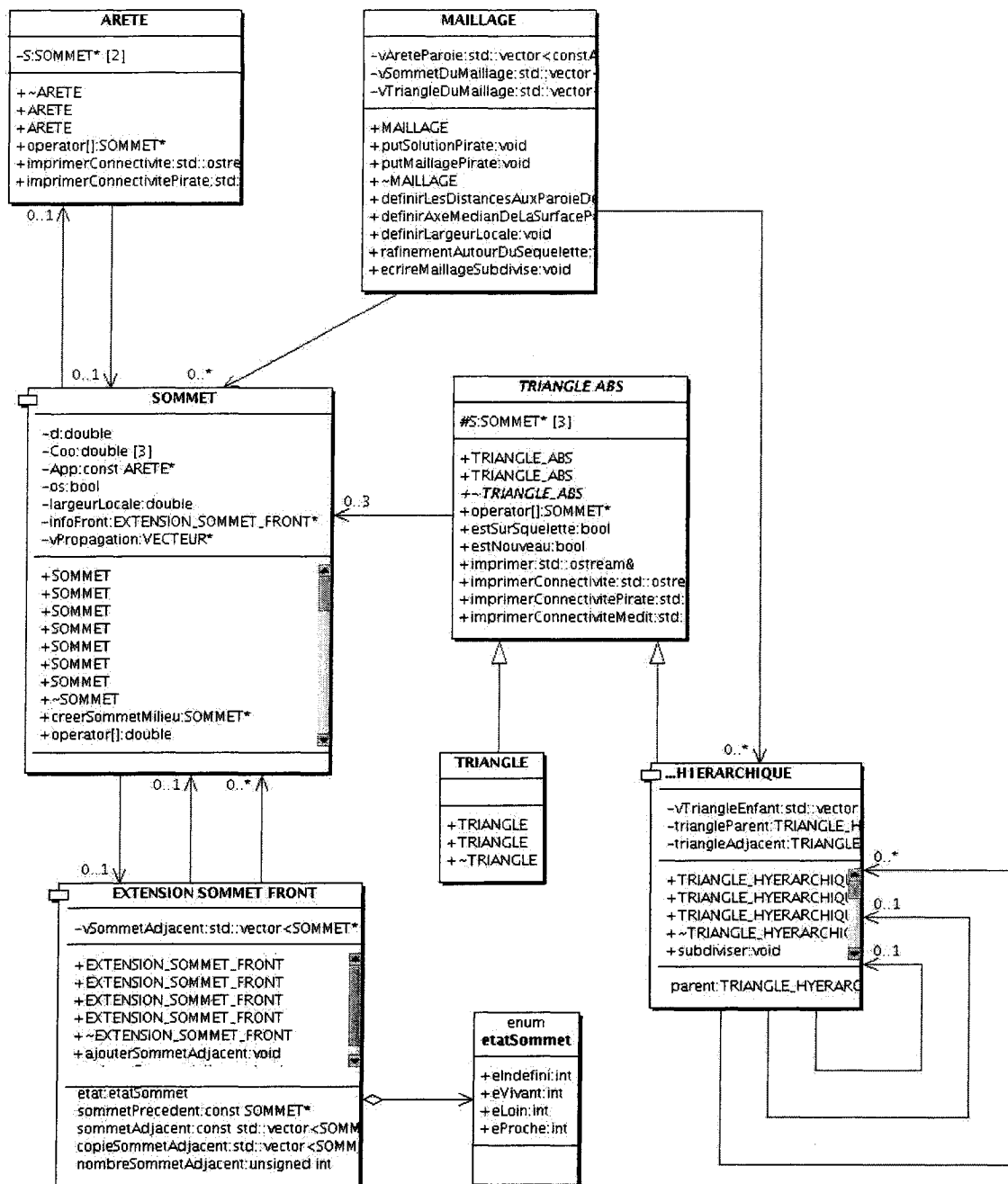


FIGURE 2.14 Diagramme de classe du paquetage element

nées des points et une connectivité.

Les formats des fichiers .pie et .mesh tel qu'utilisés dans notre application sont pré-

sentés à l'annexe I.

### 2.5.1.2 Triangle

Une classe abstraite définit les triangles. Un objet `TRIANGLE_ABS` contient un tableau de trois pointeurs dirigés vers les sommets, ainsi que des méthodes lui permettant d'opérer quelques opérations de bases.

Les deux classes concrètes `TRIANGLE` et `TRIANGLE_HIÉRARCHIQUE` héritent de cette classe abstraite. La classe `TRIANGLE` n'est qu'une représentation concrète de la classe `TRIANGLE_ABS`. Elle est utilisée dans tous les algorithmes, hormis les algorithmes de subdivision. Ainsi la réutilisation des algorithmes d'avance de front et de détection de squelette dans d'autres applications sera facile.

La classe `TRIANGLE_HIÉRARCHIQUE` est inspirée du parton composite. Elle permet de définir une structure en arbre pour le stockage des triangles, utile aux algorithmes de subdivision, pour lesquels chaque triangle doit connaître ses voisins, son père s'il est le fruit d'une subdivision, et ses enfants s'il est subdivisé. Ces informations étant superflues pour les autres algorithmes, cette conception permet d'optimiser l'utilisation de la mémoire.

### 2.5.1.3 Arête

La classe `ARÊTE` a comme attributs deux pointeurs : ceux des sommets qui la définissent. Elle permet d'écrire la connectivité pour les fichiers `.pie`.

#### 2.5.1.4 Sommet

La classe SOMMET définit les sommets du maillage. Les attributs d'un sommet sont ses coordonnées, sa distance à la frontière la plus proche, un pointeur sur l'arête de la frontière qui lui est la plus proche, la largeur locale de la surface à son emplacement, un booléen qui définit son appartenance au squelette et un pointeur sur un objet EXTENSION\_SOMMET\_FRONT.

Les informations de proximités se trouvent dans la classe EXTENSION\_SOMMET\_FRONT.

### 2.5.2 Outil

Le paquetage outil est composé des classes qui représentent les outils algorithmiques et analytiques que nous utilisons pour appliquer les solutions développées plus haut dans ce chapitre, voir figure 2.15. Les outils sont :

- vecteur,
- front, et
- usine analytique.

#### 2.5.2.1 Vecteur

La classe VECTEUR, au sens mathématique du terme, permet de créer des vecteurs et de les manipuler.

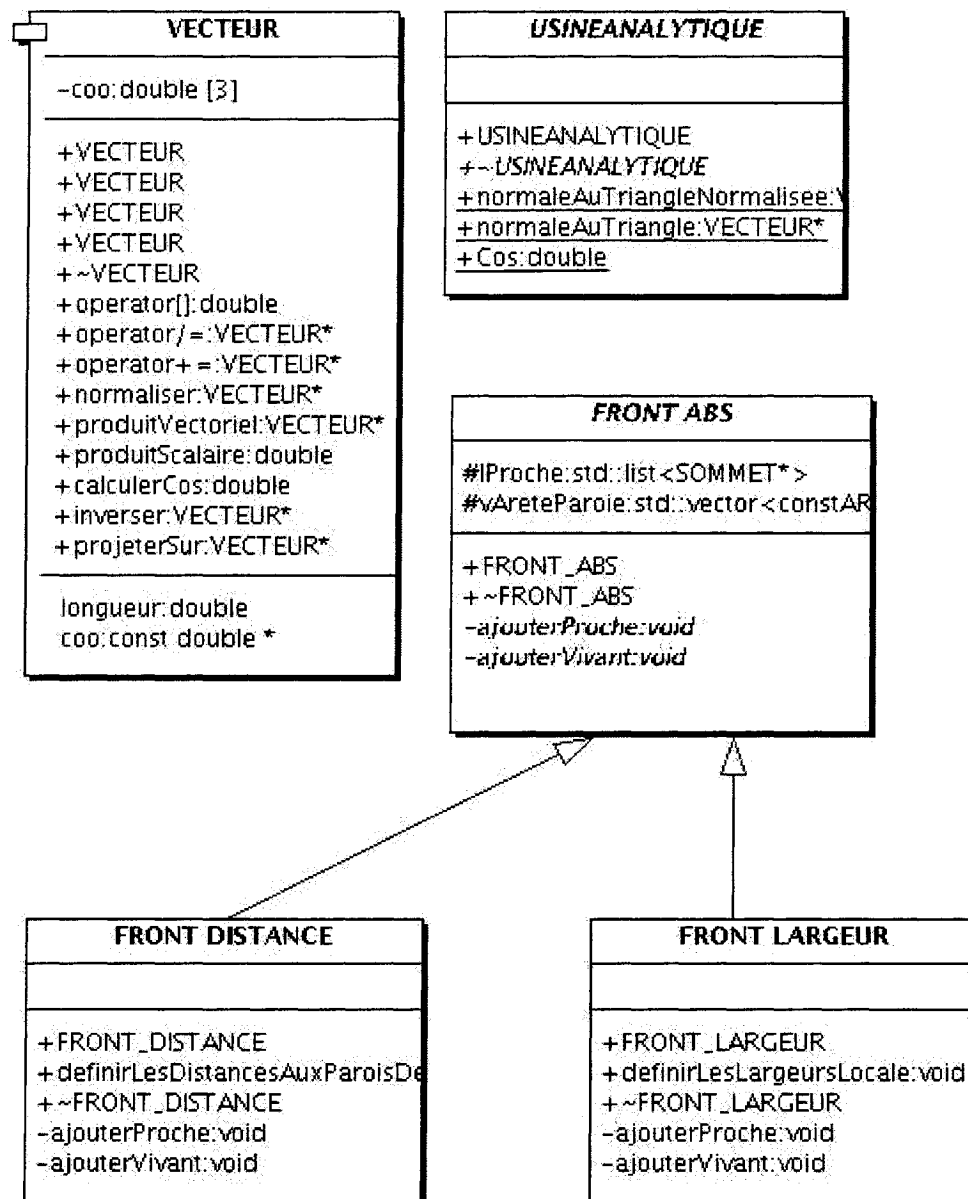


FIGURE 2.15 Diagramme de classe du paquetage outil

### 2.5.2.2 Front

La classe FRONT\_ABS est une classe abstraite qui définit les attributs et les méthodes communs à n'importe quelle avance de front géodésique. Comme nous l'avons expliqué dans 2.1.2, un front est défini par trois ensembles distincts de sommets :



les sommets vivants, les sommets proches et les sommets éloignés. L'état du sommet sera stocké au niveau du sommet dans la classe `EXTENSION_SOMMET_FRONT`. Le stockage de l'ensemble des sommets proches suffit à l'application de nos algorithmes. Cet ensemble sera représenté dans `FRONT_ABS` par une liste de pointeurs sur les sommets proches. Les méthodes possibles au niveau d'un front sont l'ajout de sommets proches et l'ajout de sommets vivants. Les classes `FRONT_DISTANCE` et `FRONT_LARGEUR` sont deux fronts concrets. Le premier sert à créer un front qui prend naissance aux frontières et qui calcule la distance géodésique de chaque sommet du maillage à l'arête de la frontière qui lui est la plus proche. Le deuxième prend naissance au niveau du squelette pour calculer la distance géodésique de chaque sommet du maillage au sommet du squelette qui lui est le plus proche.

#### **2.5.2.3 Usine analytique**

La classe `USINE_ANALYTIQUE` est une classe qui comporte des fonctions statiques servant à créer un vecteur normal à un plan défini par trois points.

## CHAPITRE 3

### RÉSULTATS ET DISCUSSION

L'application de notre procédure aux maillages d'entrée fournit finalement, pour chacun des sommets, deux caractéristiques géométriques : la distance à la frontière la plus proche et la largeur locale. Le calcul de cette dernière grandeur dépend directement de la détection de l'axe médian, puisqu'on commence par définir la largeur locale des sommets de l'axe médian avant de propager cette information au reste du maillage. Les erreurs dans les résultats se produisent principalement dans le cas où l'on détecte un sommet comme étant sur l'axe médian alors qu'il ne l'est pas. Le calcul de la largeur locale de ce sommet est alors erroné, et l'erreur se propage aux sommets avoisinants.

#### 3.1 Méthodologie

Comme nous l'avons déjà mentionné, les objets dont on peut déterminer analytiquement l'axe médian sont très rares. Pour des surfaces complexes, cette détermination est presque toujours impossible. Par contre, l'intuition permet d'en prévoir la position, une fois qu'on a donné une définition de cet axe (ou du squelette). C'est pourquoi, dans la plupart des cas, nous ne pouvons proposer pour valider nos résultats que des images et du bon sens.

Nous avons exécuté notre procédure sur une batterie de tests : surfaces de formes diverses et, pour une surface donnée, maillages d'entrée aux caractéristiques différentes. Nous avons d'abord appliqué nos algorithmes à un grand nombre de surfaces planes dont on connaît analytiquement l'axe médian. Nous avons pu vérifier sur ces cas que

l'axe médian obtenu correspondait bien à l'axe médian attendu.

Nous avons ensuite appliqué notre procédure à des surfaces courbes. Dans un premier temps, nous avons courbé des surfaces planes déjà étudiées en dimension 2, pour en faire des surfaces en dimension 3. Il était ainsi facile de prévoir intuitivement la position de l'axe médian et de vérifier là encore que l'axe médian obtenu correspondait à l'axe médian attendu.

Dans un deuxième temps, nous avons appliqué notre procédure à des surfaces tridimensionnelles complexes, et nous avons vérifié la validité des résultats à l'aide d'images et de bon sens.

Enfin, nous avons opéré des tests sur des exemples industriels.

Notre but était, entre autres, d'arriver à de bons résultats quel que soit le maillage d'entrée. Nous avons donc fait varier, pour chacune des surfaces étudiées, les caractéristiques du maillage qui les représente, et nous avons analysé l'effet des modifications sur la solution obtenue.

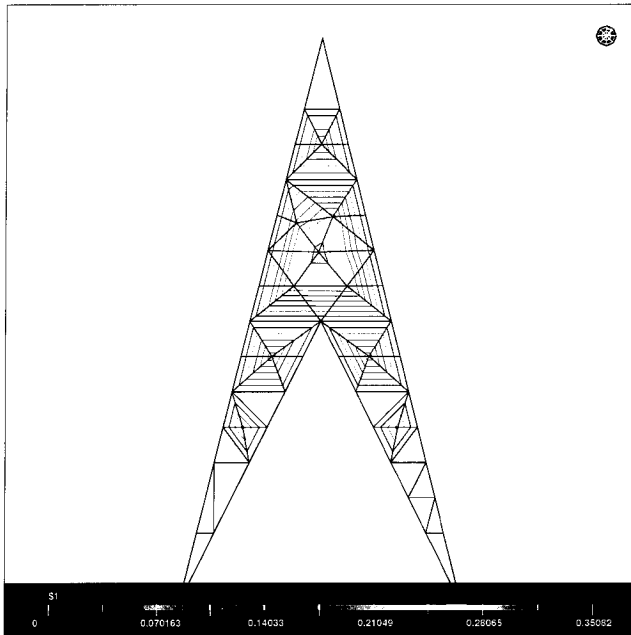
Notons que les maillages que nous avons à étudier sont produits dans un contexte de design industriel, si bien que les cas de frontières bruitées ne nous intéressent pas.

Toutes les figures présentées dans ce chapitre sont générées grâce à l'application de visualisation Vu.

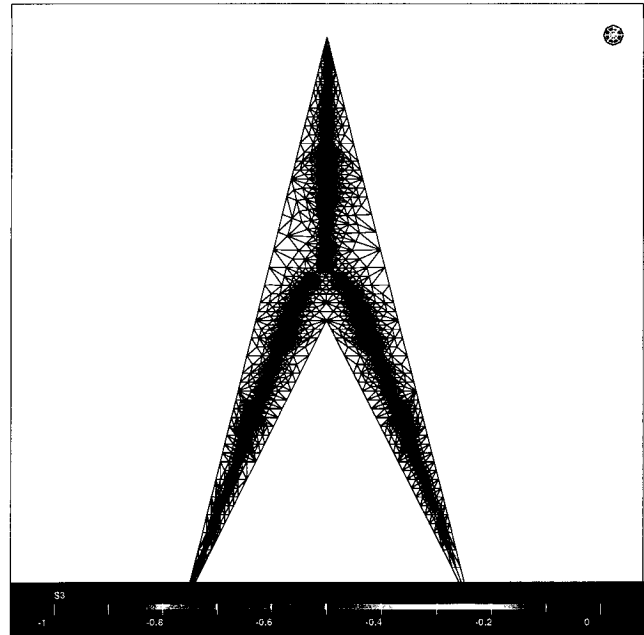
### **3.1.1 Surfaces planes**

Comme nous l'avons exposé au paragraphe 1.3.1.1, le squelette d'un objet surfacique donné est défini comme étant l'emplacement où s'intersectent deux fronts d'ondes prenant naissance aux frontières. Pour des surfaces courbes, cette définition permet très difficilement de déterminer analytiquement l'emplacement exact de l'axe médian. Pour valider nos résultats, nous avons donc commencé par appliquer notre procédure à des surfaces planes dont le squelette est facilement calculable.

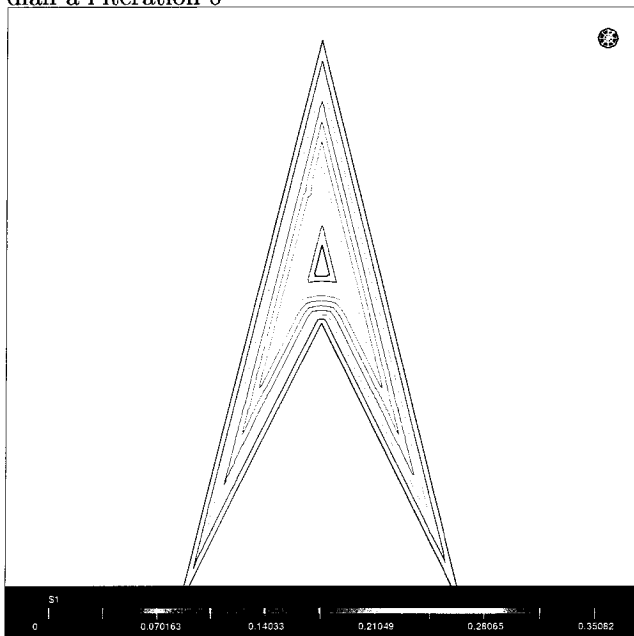
Le chevron présenté à la figure 3.1 est un polygone, dont le squelette, analytiquement



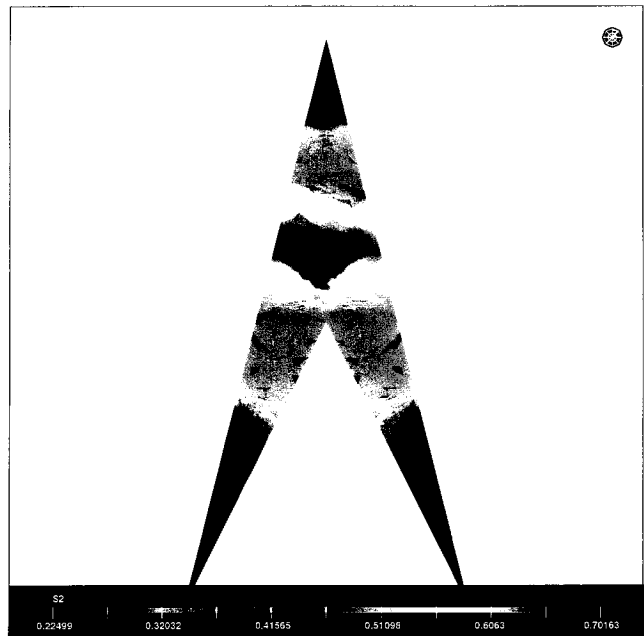
(a) Lignes iso de la distance aux frontières et axe médian à l'itération 0



(b) Axe médian à l'itération 5

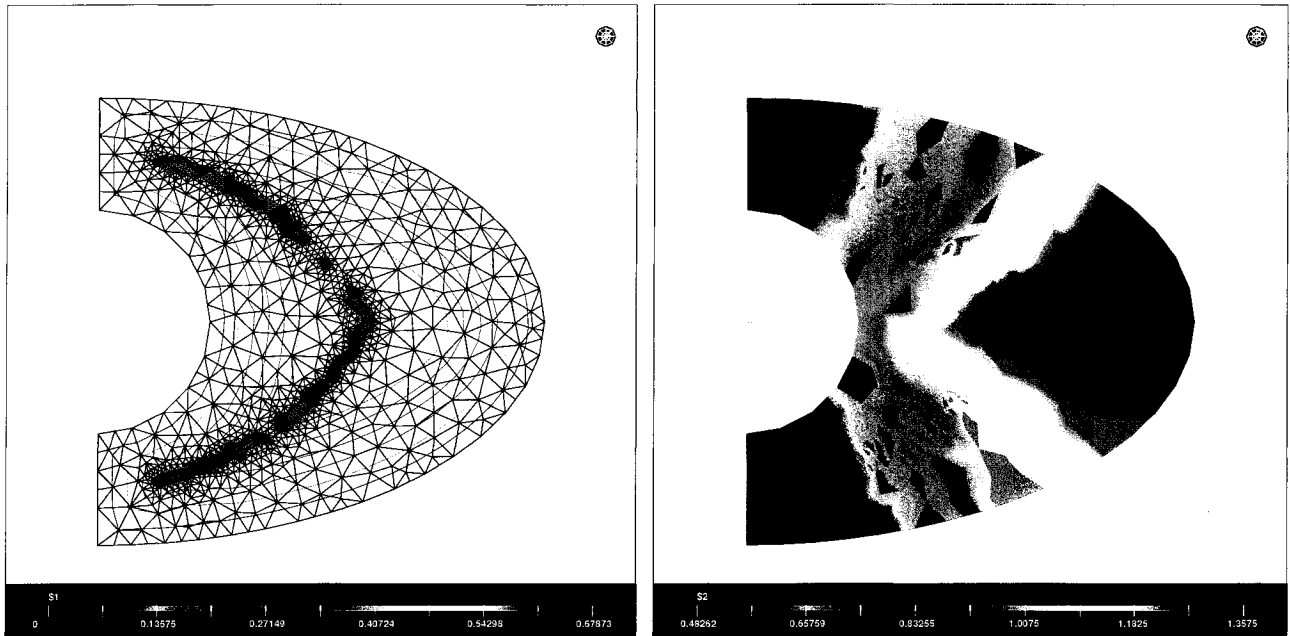


(c) Lignes iso de la distance aux frontières à l'itération 5



(d) Largeur locale à l'itération 5

FIGURE 3.1 Résultat de notre procédure appliquée à un chevron



(a) Lignes iso de la distance aux frontières et axe médian à l'itération 3

(b) Largeur locale à l'itération 3

FIGURE 3.2 Résultat de notre procédure appliquée à une demie ellipse

déterminé, est composé de l'ensemble des bissectrices. Notre procédure fournit pour ce chevron un résultat très satisfaisant au bout de 5 itérations, même en prenant comme point de départ un maillage très grossier : la figure 3.1(a) montre le maillage grossier ; la figure 3.1(b) montre, coloriés en bleu, les sommets détectés comme appartenant à l'axe médian à l'itération 5 ; on voit que les lignes tracées par ces sommets correspondent effectivement aux bissectrices des angles aigus du chevron.

A partir des distances séparant les sommets du maillage de leur frontière la plus proche, calculées par notre procédure, on détermine les lignes iso d'une manière satisfaisante : on voit figure 3.1(c) que ces lignes iso sont équidistantes les unes des autres. Enfin, la figure 3.1(d) montre la largeur locale calculée par notre processus. On voit que le centre du chevron est la localité la plus large (en rouge sur la figure) et que la largeur locale diminue au fur et à mesure qu'on se rapproche des extrémités (en bleu sur la figure).

La surface plane que nous présentons à la figure 3.2 est délimitée par deux moitiés

d'ellipses  $E_{1(O,a_1,b_1)}$  et  $E_{2(O,a_2,b_2)}$  de même centre  $O$ . Analytiquement, le squelette de cette surface est une moitié d'ellipse  $E_s(O,a_s,b_s)$  ayant pour centre  $O$  et dont les demi axes sont les moyennes des demi axes des ellipses frontières :  $a_s = \frac{a_1+a_2}{2}$  et  $b_s = \frac{b_1+b_2}{2}$ . Les résultats obtenus sur cet exemple sont également très satisfaisants, comme le montre la figure 3.2(a) : après 3 itérations seulement, le processus fournit un axe médian approximatif constitué des arêtes colorées en bleu ; on voit clairement qu'il correspond bien à la demie ellipse attendue.

La taille initiale des mailles est visible sur la figure 3.2(a) : les triangles du maillage proches des frontières, qui n'ont jamais été subdivisés, nous en donnent une idée.

Comme pour le chevron précédent, les lignes iso obtenues ici sont satisfaisantes : on voit figure 3.2(a) qu'elles sont espacées de manière régulière à partir de la frontière.

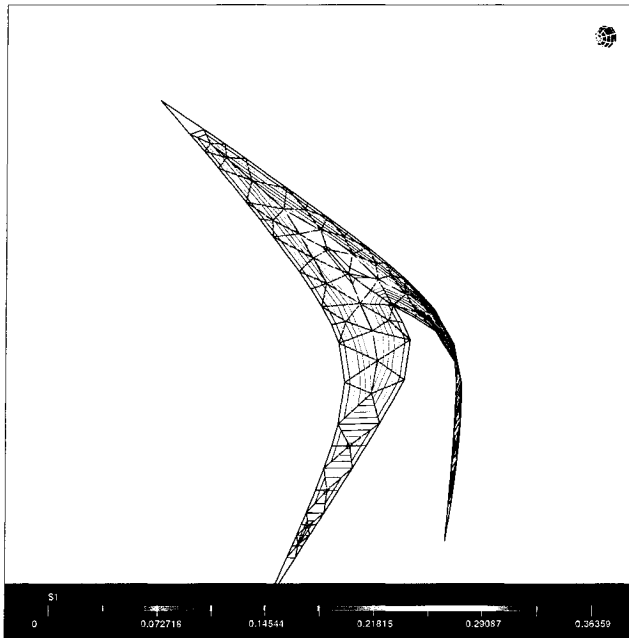
Enfin, la figure 3.2(b) montre la largeur locale que nous avons obtenue : nous avons colorié en rouge les localités les plus larges, et en bleu les plus étroites.

### 3.1.2 Surfaces courbes

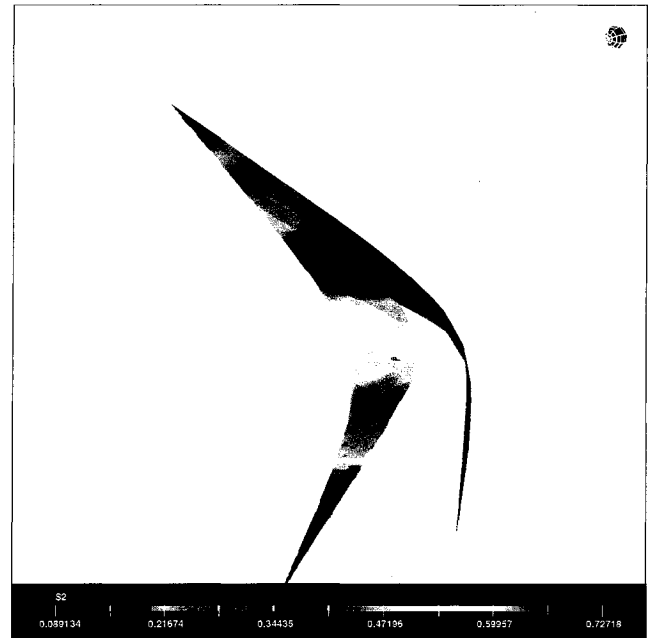
Le but de notre travail est de pouvoir extraire les informations géométriques de distance et de largeur à partir de n'importe quelle surface représentée par un maillage triangulaire. La première série de surfaces courbes que nous avons testées proviennent de la modification des surfaces planes déjà étudiées. Par exemple, la surface présentée à la figure 3.3 est la projection sur un ellipsoïde du chevron de la figure 3.1, et la surface présentée figure 3.4 est la projection sur une surface sinusoïdale de la surface de la figure 3.2. Intuitivement, nous pouvons prévoir l'allure du squelette et valider nos résultats.

Nous avons aussi appliqué notre procédure sur des surfaces diverses téléchargées de bibliothèques gratuites sur Internet. Nous présentons aux figures 3.5 et 3.6 deux surfaces comportant des trous et des courbures plus ou moins fortes.

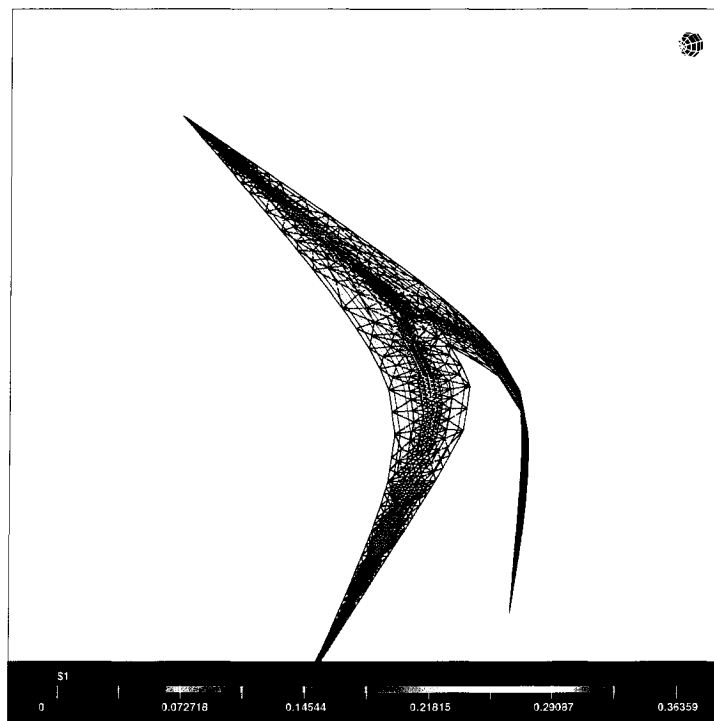
Enfin, les figures 3.8, 3.9, 3.7 et 3.10 présentent les résultats obtenus sur un exemple



(a) Lignes iso de la distance aux frontières et axe médian à l'itération 0

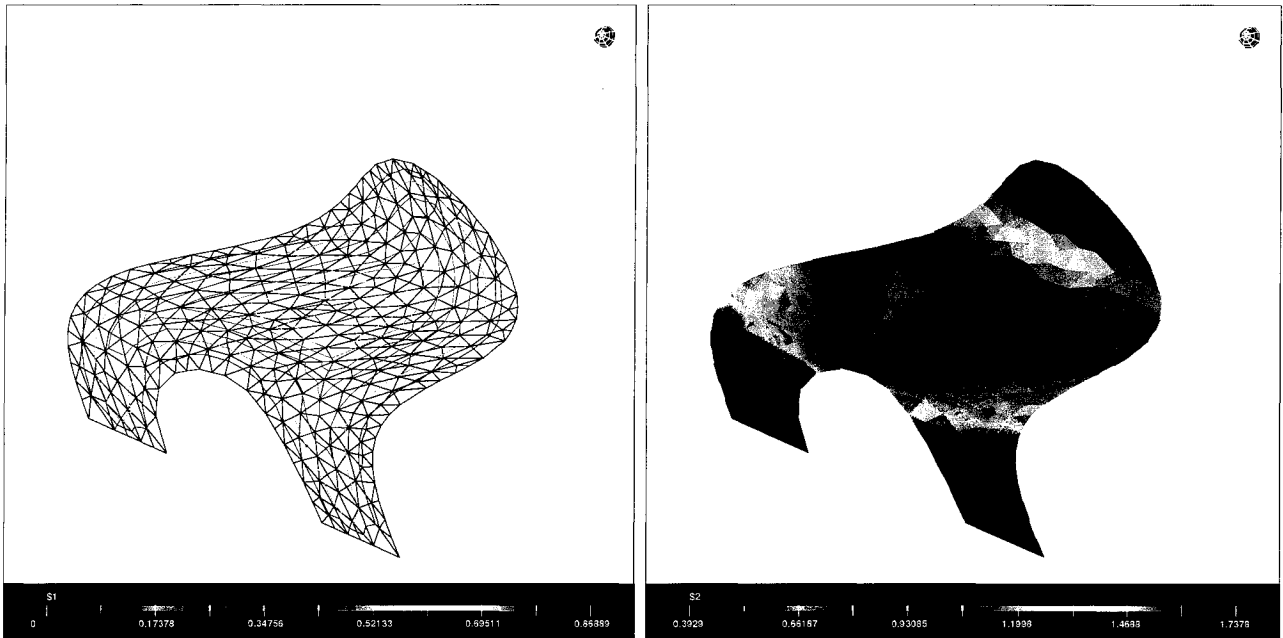


(b) Largeur locale à l'itération 3



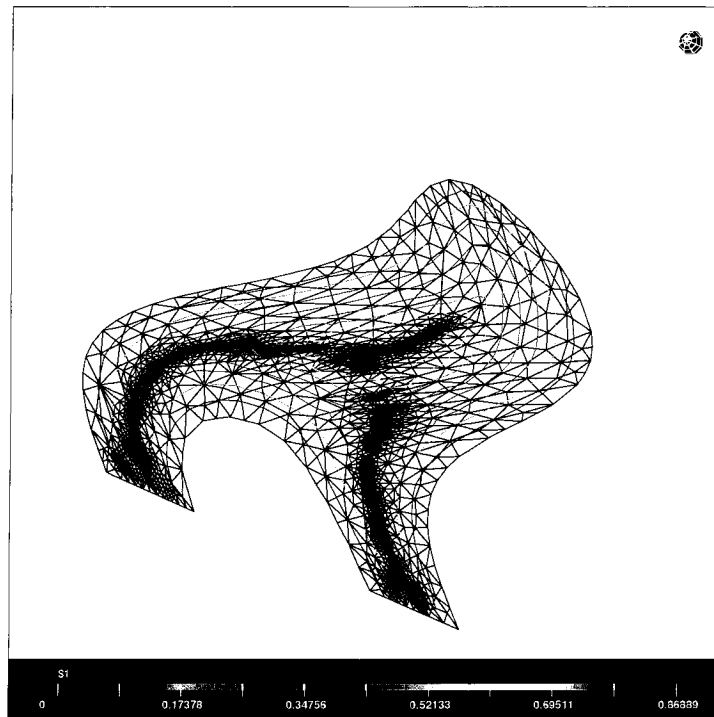
(c) Lignes iso de la distance aux frontières et axe médian à l'itération 3

FIGURE 3.3 Résultat de notre procédure appliquée à un chevron projeté sur un ellipsoïde



(a) Lignes iso de la distance aux frontières et axe médian à l'itération 0

(b) Largeur locale à l'itération 3



(c) Lignes iso de la distance aux frontières et axe médian à l'itération 3

FIGURE 3.4 Résultat de notre procédure appliquée à une demie ellipse projeté sur une surface sinusoïdale



d'aspirateur hydraulique fourni par GE Canada. Le maillage de la figure 3.10 est le résultat du maillage de cet aspirateur dans le domaine paramétrique grâce au mailleur “triangle” de l'application “maille”. Les maillages des figures 3.8, 3.9, 3.7 sont le fruit de l'adaptation du maillage précédent au domaine réel. Ils ont été obtenus grâce à l'application OORT, développée dans le cadre du projet GMATH de l'école Polytechnique.

## **3.2 Analyse des résultats**

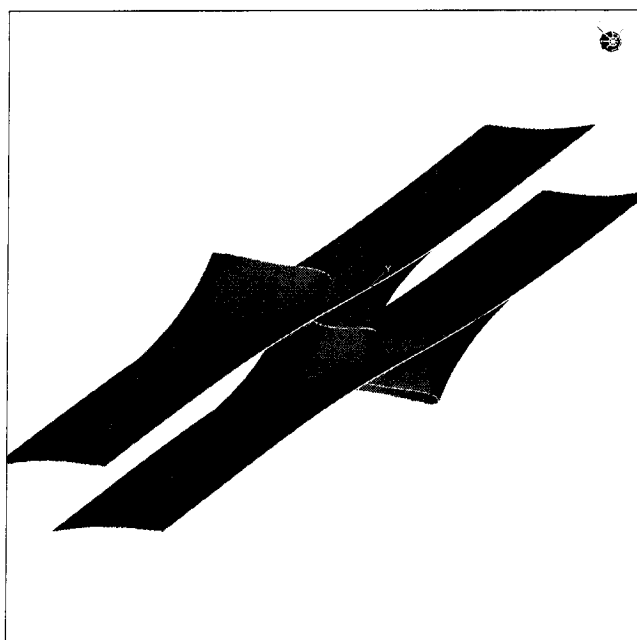
### **3.2.1 Angle limite d'intersection de front**

Pour une surface donnée, plusieurs axes médians sont possibles, comme le montrent les figures 3.7b et 3.9b. Comme nous l'avons exposé dans la section 2.2.2, l'utilisateur doit choisir l'angle limite à partir duquel il considère qu'il y a intersection de front, et ce choix a une incidence directe sur le calcul de la largeur locale, comme le montrent les figures 3.7d et 3.9d.

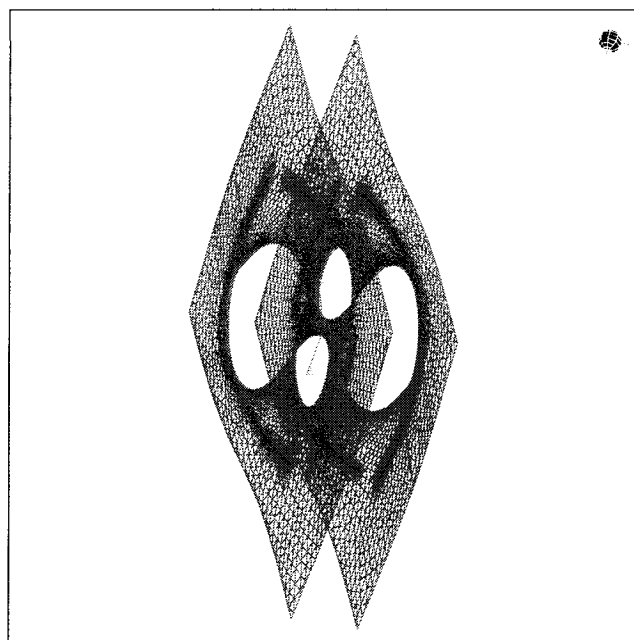
Dans le contexte de notre travail, qui vise à produire une information de largeur pour contrôler le processus de génération de maillage, l'information dont nous avons besoin est mieux représentée par un angle limite supérieur à 90 degrés. Pour tous les exemples que nous présentons dans ce chapitre, nous avons choisi un angle limite de 120 degrés, à l'exception de l'exemple de la figure 3.7 où l'angle limite vaut 60 degrés.

### **3.2.2 Granularité du maillage**

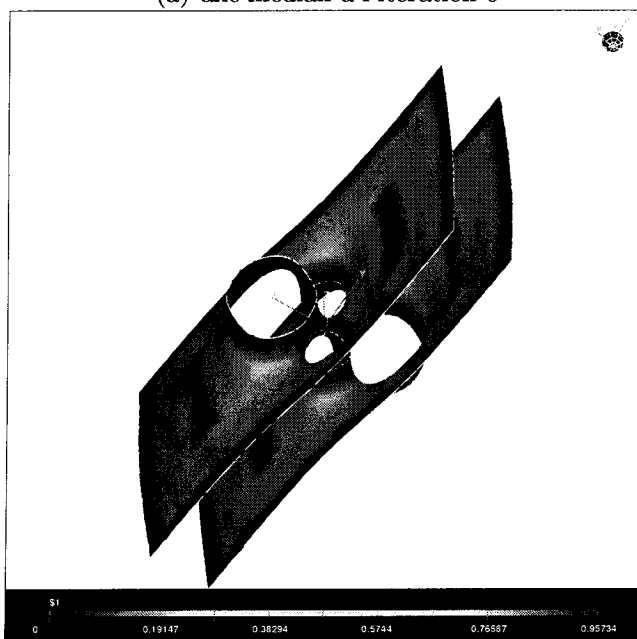
Même dans le cas de maillages grossiers, nous obtenons de bons résultats, ce qui est dû au fait que nous raffinons autour du squelette pour améliorer la précision. Les figures 3.8 et 3.9 montrent les résultats obtenus lorsque la procédure est appliquée à



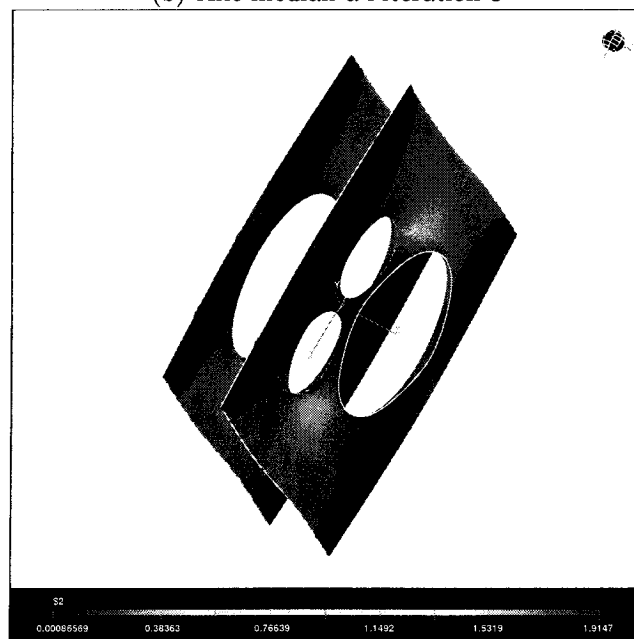
(a) axe médian à l'itération 0



(b) Axe médian à l'itération 3

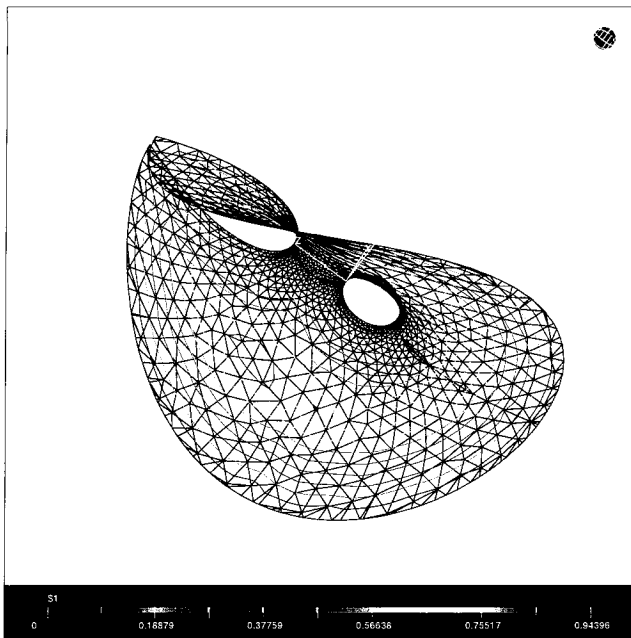


(c) Distance aux frontières à l'itération 0

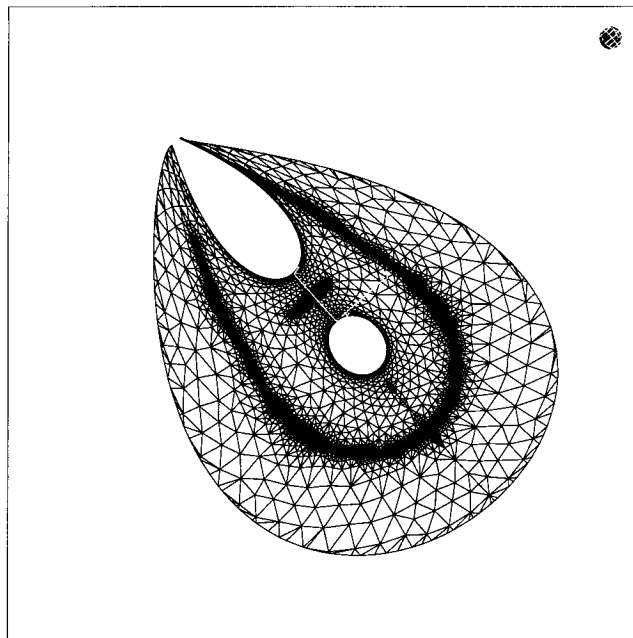


(d) Largeur locale à l'itération 3

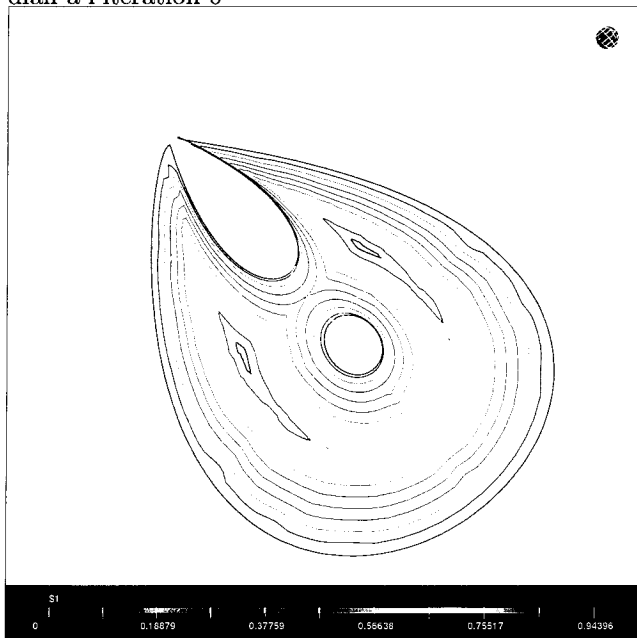
FIGURE 3.5 Résultat de notre procédure appliquée à une surface courbe trouée complexe



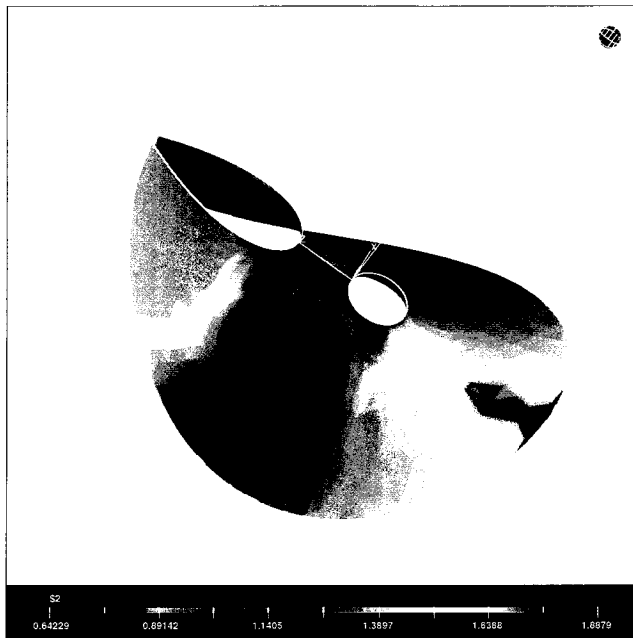
(a) Lignes iso de la distance aux frontières et axe médian à l'itération 0



(b) Axe médian à l'itération 3

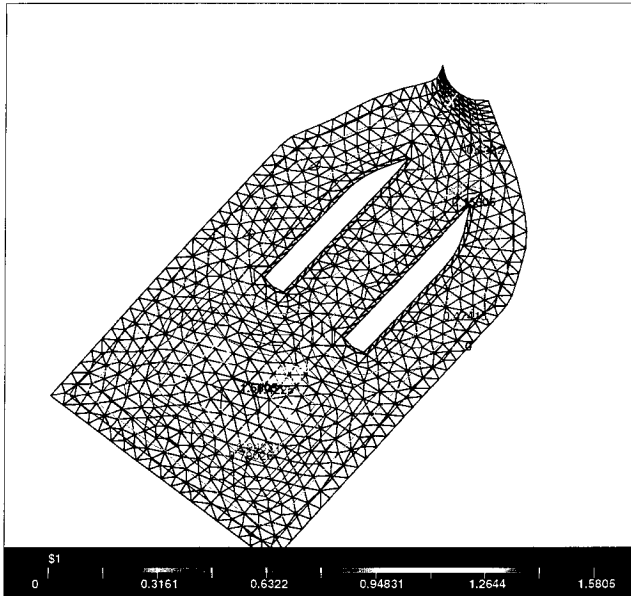


(c) Lignes iso de la distance aux frontières à l'itération 3

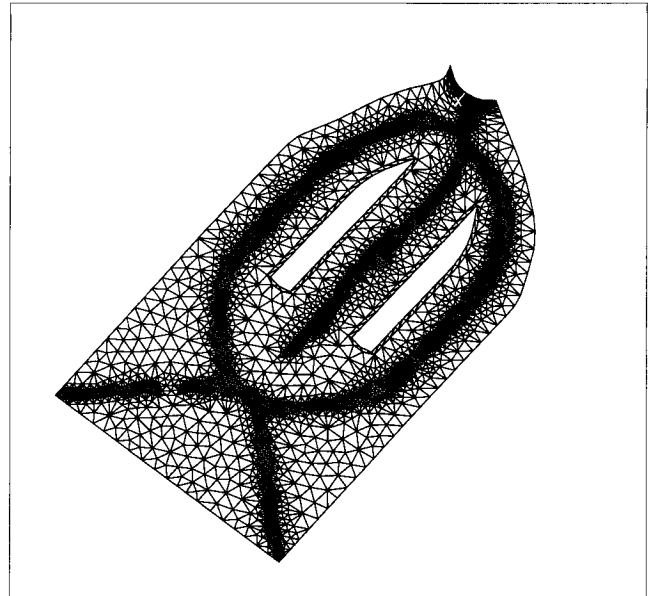


(d) Largeur locale à l'itération 3

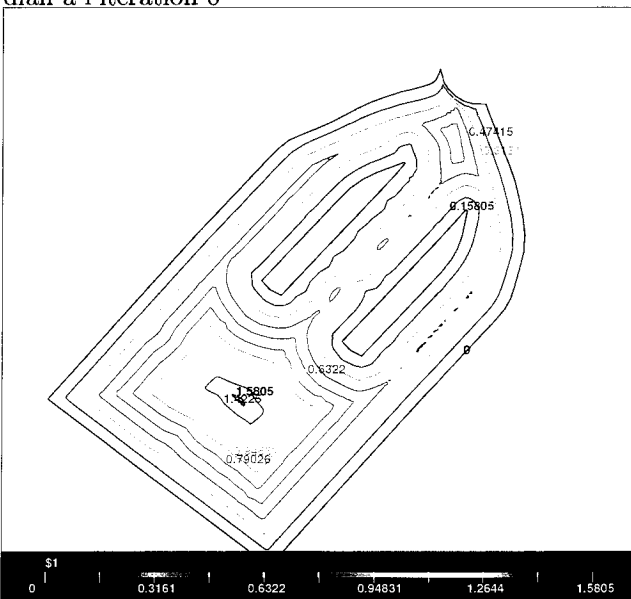
FIGURE 3.6 Résultat de notre procédure appliquée à une surface courbe trouée simple



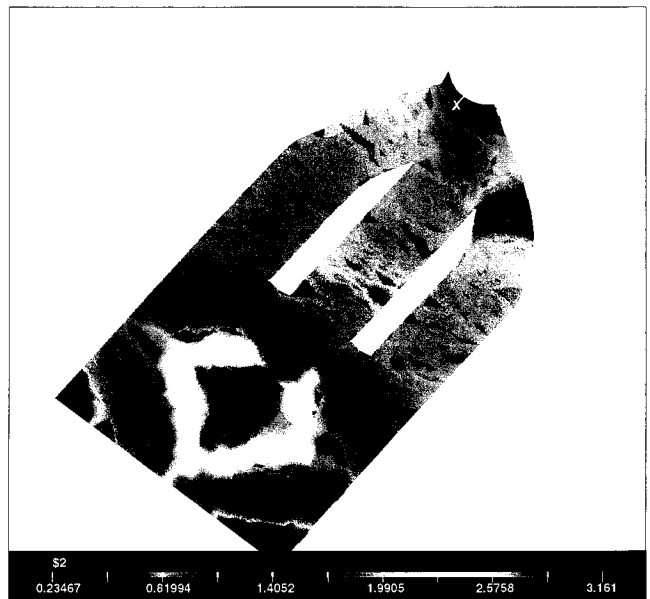
(a) Lignes iso de la distance aux frontières et axe médian à l'itération 0



(b) Axe médian à l'itération 2



(c) Lignes iso de la distance aux frontières à l'itération 2



(d) Largeur locale à l'itération 2

FIGURE 3.7 Résultat de notre procédure appliquée à un maillage de granularité moyenne représentant un aspirateur hydraulique en prenant un angle  $\theta = 60^\circ$

des maillages plus ou moins grossiers. On voit bien qu'en prenant comme point de départ un maillage grossier, et après seulement deux itérations, l'axe médian détecté tend rapidement vers celui qu'on détecte à partir d'un maillage fin.

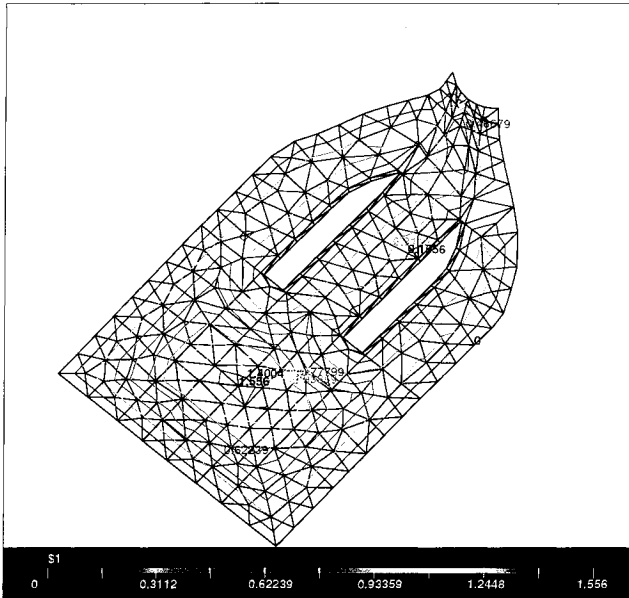
Étant donné que notre but n'est pas de déterminer l'axe médian pour lui-même, mais en tant que moyen vers le calcul de caractéristiques géométriques, il apparaît clairement, voir les figures 3.9 et 3.8, que les quelques détails qui différencient les résultats pour les deux types de maillages sont sans importance.

### 3.2.3 Qualité des éléments

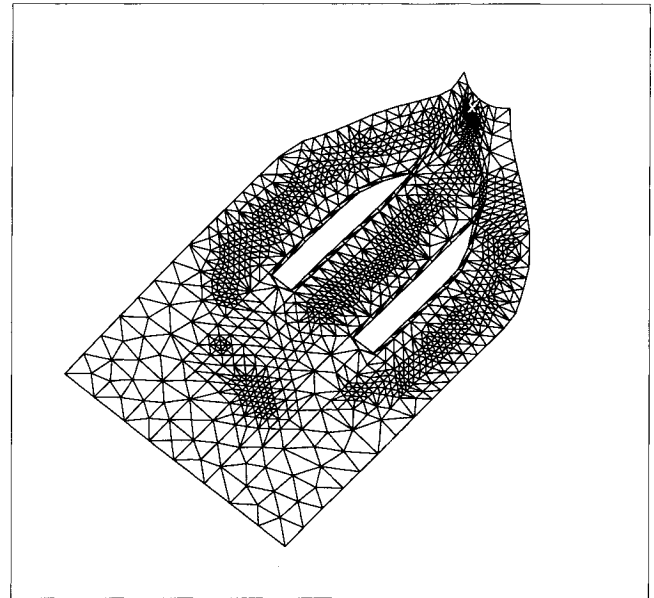
L'algorithme "Fast Marching Method" de Sethian s'applique initialement chez l'auteur à des maillages aigus. En nous appuyant sur son travail, nous avons étendu l'algorithme aux maillages quelconques. Notre algorithme fournit alors de bonnes approximations des distances géodésiques à condition que les triangles obtus ne se trouvent pas dans des zones du maillage où la courbure est trop forte. Voir les figures 3.8, 3.9 et 3.7, où les maillages comportent tous des angles obtus.

L'erreur commise lors de l'approximation des distances géodésiques en un sommet d'un triangle du maillage est directement proportionnelle à la taille du triangle. Si la taille des triangles n'est pas homogène et que le maillage comporte beaucoup d'angles obtus, la précision du calcul varie d'un sommet à un autre, ce qui crée du bruit dans le calcul de la distance à la frontière la plus proche. Or, cette information est directement utilisée pour déterminer les vecteurs de propagation de l'onde géodésique dans les triangles. Les directions calculées seront alors erronées, ce qui nuit à la détection de l'axe médian. De plus, le raffinement ne permettra pas d'éliminer le problème puisqu'il s'opère uniformément sur tous les éléments voisins du squelette sans tenir compte de la taille des triangles à subdiviser.

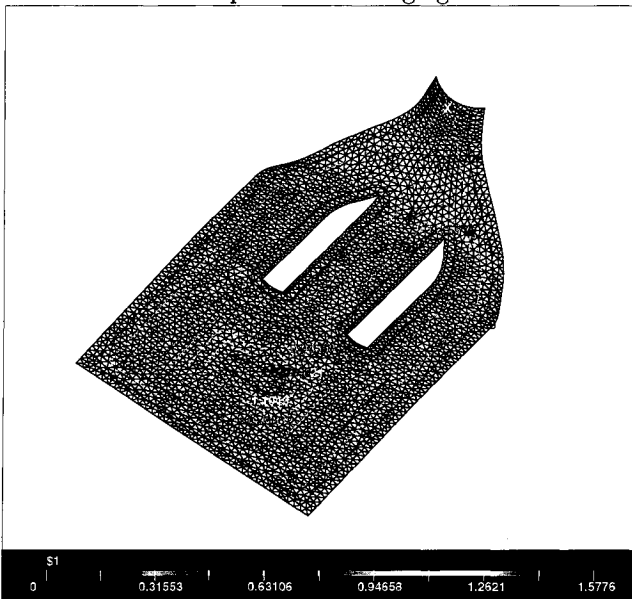
Notre procédure appliquée à un maillage aux éléments non homogènes, comme l'illustre la figure 3.10, produit donc un assez mauvais résultat pour le calcul de



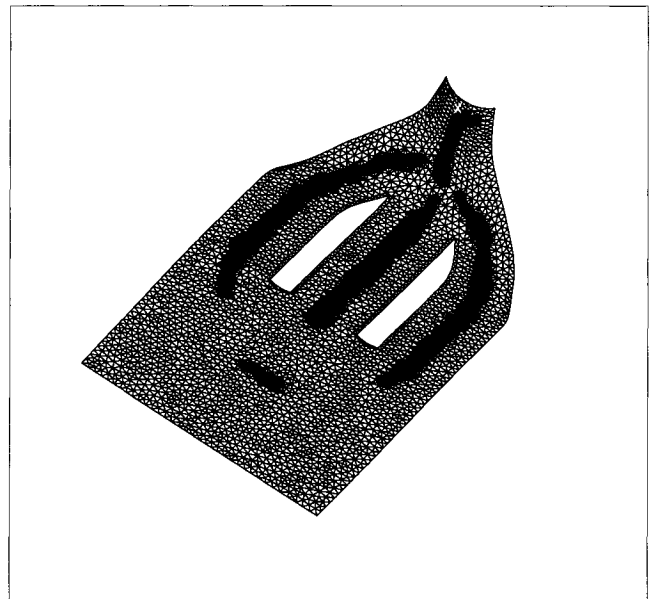
(a) Lignes iso de la distance aux frontières et axe médian à l'itération 0 pour un maillage grossier



(b) Axe médian à l'itération 2 pour un maillage grossier

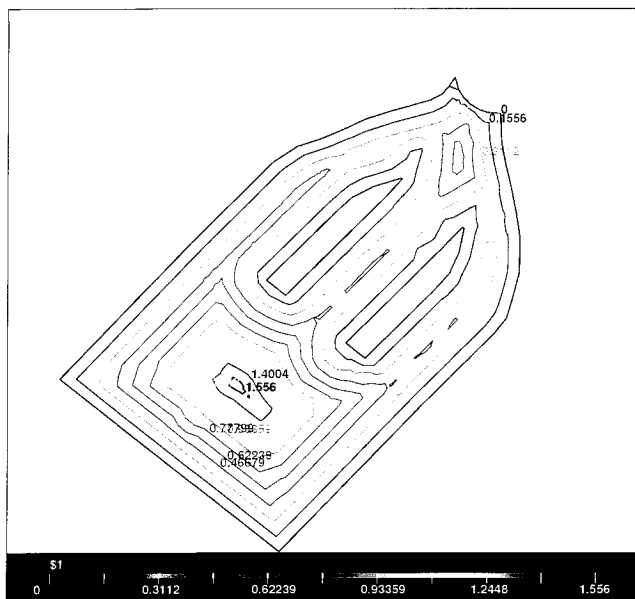


(c) Lignes iso de la distance aux frontières et axe médian à l'itération 0 maillage fin

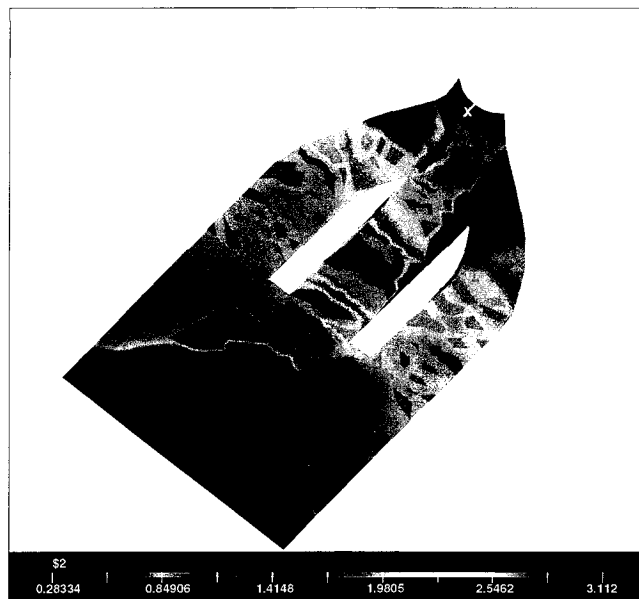


(d) Axe médian à l'itération 2 pour un maillage fin

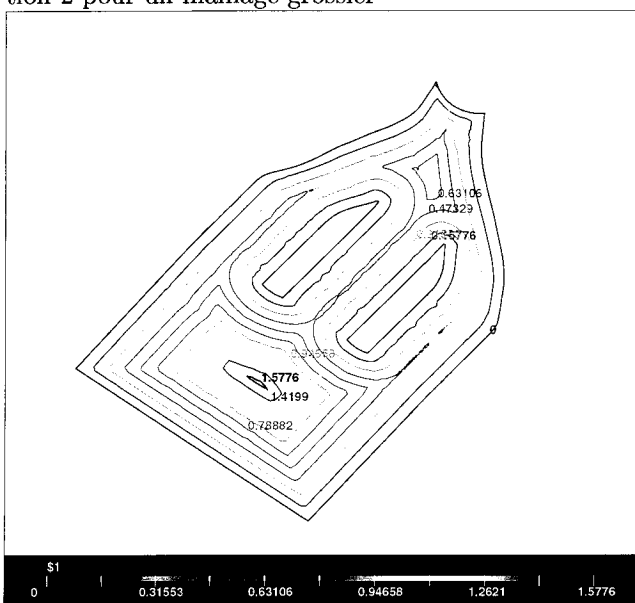
FIGURE 3.8 Détection de l'axe médian d'un aspirateur hydraulique représenté par deux maillages, l'un grossier et l'autre fin



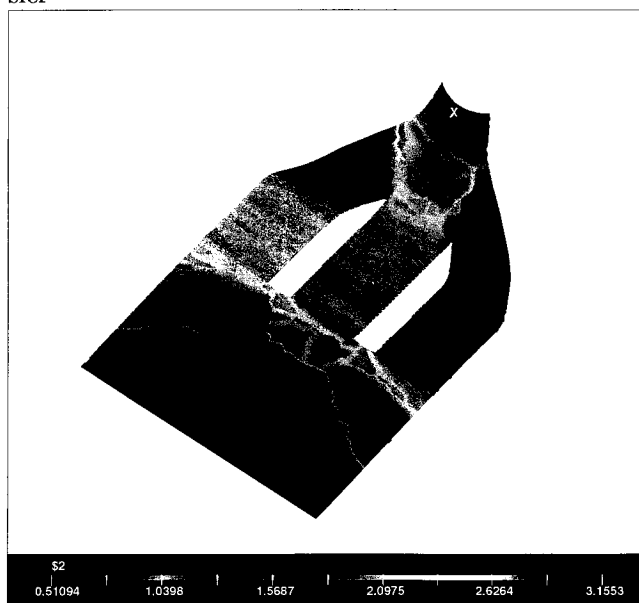
(a) Lignes iso de la distance aux frontières à l'itération 2 pour un maillage grossier



(b) Largeur locale à l'itération 2 pour un maillage grossier

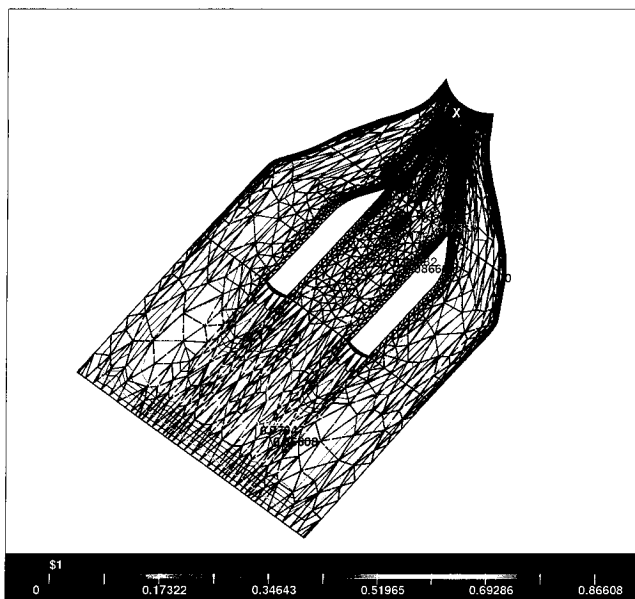


(c) Lignes iso de la distance aux frontières à l'itération 2 pour un maillage fin

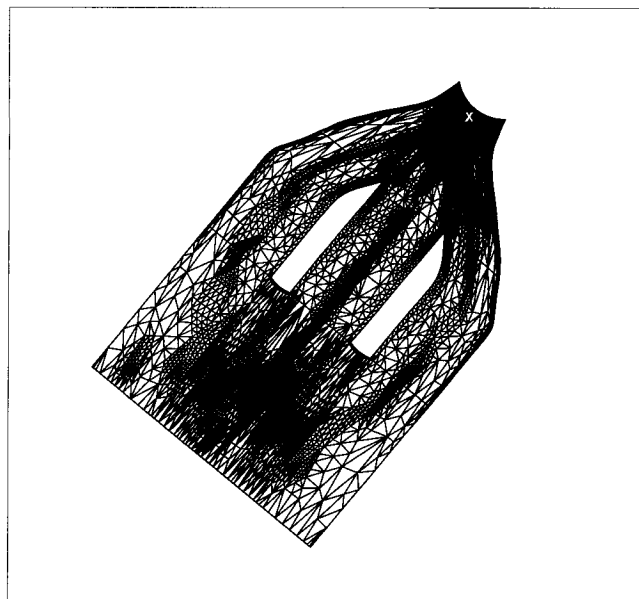


(d) Largeur locale à l'itération 2 pour un maillage fin

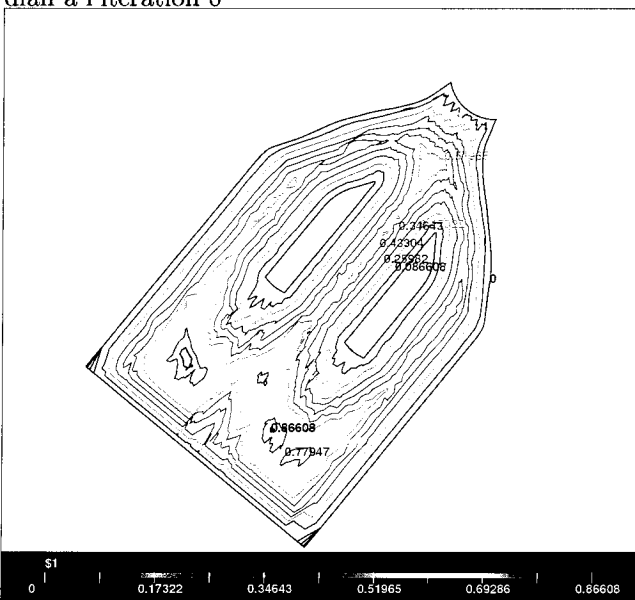
FIGURE 3.9 Extraction des informations géométriques d'un aspirateur hydraulique représenté par deux maillages, l'un grossier et l'autre fin



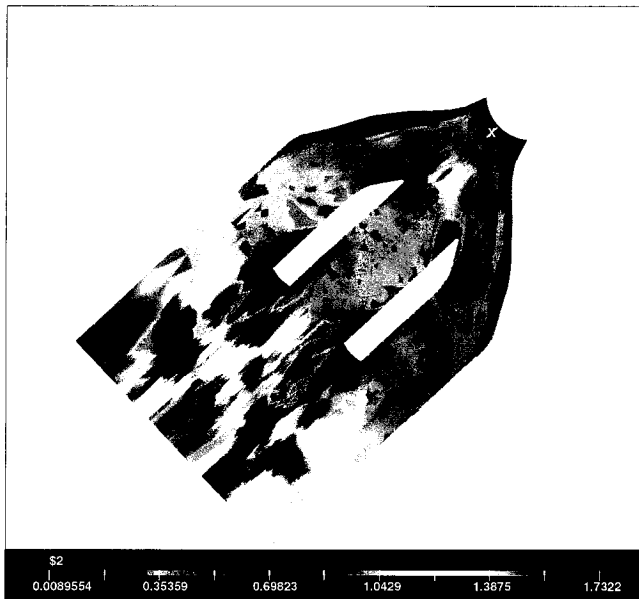
(a) Lignes iso de la distance aux frontières et axe médian à l'itération 0



(b) Axe médian à l'itération 2



(c) Lignes iso de la distance aux frontières à l'itération 2



(d) Largeur locale à l'itération 2

FIGURE 3.10 Résultat de notre procédure appliquée à un maillage non aigu de granularité non homogène représentant un aspirateur hydraulique

distance, beaucoup de perturbations dans la détermination de l'axe médian et, par conséquent, une approximation bruitée de la largeur locale.



### 3.2.4 Performance

La rapidité d'exécution de notre application est satisfaisante. Le tableaux 3.1 donne les temps d'exécution pour quelques unes des surfaces présentées dans ce chapitre. Si le processus s'effectue en une seule itération, environ la moitié du temps est consacré au remplissage des structures de données lors de la lecture du fichier d'entrée, et le tiers du temps à l'écriture des fichiers de sortie. Si le processus s'effectue en plusieurs itérations, on trouve qu'à l'itération 4 par exemple, 90 % du temps est consacré à la logique d'application et 10 % à l'écriture des fichiers résultats ; le temps de remplissage des structures de données est négligeable à ce stade. Comme nous l'exposons dans 3.3.3, les performances pourraient être améliorées en modifiant la procédure de propagation d'information de largeur.

TABLEAU 3.1 Vitesse d'exécution de l'application sur un Pentium IV à 2.2 GHz comportant 500 Mo de mémoire vive

	figure 3.5	figure 3.6	figure 3.7	figure 3.9
nombre d'éléments à l'itération 0	2068	11780	1551	5807
temps d'exécution à l'itération 0	0m0.361s	0m08.658s	0m0.262s	0m01.920s
nombre d'éléments à l'itération 1	2886	15334	2751	8163
temps d'exécutions à l'itération 1	0m0.553s	0m09.903s	0m0.426s	0m02.548s
nombre d'éléments à l'itération 2	4526	22204	5185	12759
temps d'exécution à l'itération 2	0m0.829s	0m12.127s	0m0.827s	0m03.663s
nombre d'éléments à l'itération 3	7474	35742	9891	21959
temps d'exécution à l'itération 3	0m1.356s	0m19.002s	0m1.795s	0m06.920s
nombre d'éléments à l'itération 4	13020	63527	18955	40019
temps d'exécution à l'itération 4	0m2.741s	0m58.410s	0m5.098s	0m23.106s

### 3.3 Améliorations possibles

Plusieurs améliorations peuvent être apportées à notre travail. Les trois principales sont :

### 3.3.1 Critère d'arrêt

Dans la version actuelle de notre application, c'est l'utilisateur qui choisit le nombre d'itérations à effectuer. Il n'existe aucun critère d'arrêt automatique pour l'instant. Étant donné que la précision de la détection de l'axe médian est directement proportionnelle à la taille des triangles qui l'entourent, il faudrait établir un critère d'arrêt qui dépende directement du rapport entre la taille des triangles voisins du squelette et la taille totale de la surface. De cette manière, on obtiendrait un critère d'arrêt qui s'adapterait automatiquement à chaque surface.

### 3.3.2 Raffinement sélectif

La majorité des mauvais résultats rencontrés proviennent de l'absence d'homogénéité des éléments du maillage. Il faudrait donc trouver le moyen d'opérer, aux premières itérations, un raffinement sélectif qui commencerait par subdiviser les éléments de grande taille. Un tel raffinement permettrait d'homogénéiser les mailles autour du squelette et d'éliminer une partie des sommets détectés sur le squelette par erreur.

### 3.3.3 Propagation de l'information par diffusion

A l'étape de propagation, nous avons opté pour la méthode d'avance de front, qui donne de bons résultats et dont le code avait déjà été implanté pour la première phase de l'algorithme.

Lorsque nous détectons des sommets comme étant sur l'axe médian alors qu'ils ne devraient pas l'être, nous introduisons des erreurs graves qui se propagent dans tout le maillage. Pour pallier à ce problème, nous avons donné la priorité à l'élimination de sommets lors de l'étape de détection de squelette. Nous filtrons alors des sommets que l'on devrait retrouver sur l'axe médian. La perte de ces sommets introduit des

discontinuités dans l'axe médian. On peut minimiser les conséquences de ces discontinuités à l'étape de propagation de l'information en opérant une simple diffusion par laplacien à la place de l'avance de front.

### **3.3.4 Choix des frontières**

Dans la version actuelle de notre travail, les frontières des surfaces à étudier constituent un point de départ à partir duquel nous simulons l'onde géodésique. Dans certains cas, il peut y avoir un doute sur ce qu'on doit considérer comme une frontière et il peut être nécessaire de le spécifier. Dans le cas de l'aspirateur hydraulique par exemple, le haut et le bas de la surface ne constituent pas de véritables frontières. Ce sont, en fait, des embouchures par lesquelles l'eau doit passer et ces fausses frontières ne doivent pas être prises en compte dans les différents calculs.

## CONCLUSION

### Synthèse

Nous avons présenté tout au long de ce document une solution au problème de l'extraction d'informations géométriques locales au niveau des sommets d'un maillage représentant une surface courbe.

Pour le calcul de la distance entre un sommet et la frontière la plus proche, nous nous sommes appuyés sur des techniques d'approximation de géodésiques puisque nous travaillions sur des surfaces courbes.

Pour la détermination de la largeur locale, il nous a fallu mettre au point une technique de génération de l'axe médian pour les surfaces courbes.

La précision du résultat du processus de génération que nous proposons dépend directement de la taille des éléments du maillage autour de l'axe, donc du nombre d'applications itérées du processus. À chaque itération, nous utilisons un type de subdivision tel que l'axe médian calculé évolue vers l'axe médian réel suivant une loi de progression géométrique. Précisons que la définition même de l'axe médian dépend du domaine d'application et des besoins. On trouve différents axes médians selon l'angle limite à partir duquel on considère qu'il y a collision de front dans l'application du principe du "feu de paille". Dans le cadre de notre travail, l'axe médian intéressant est celui qu'on obtient en choisissant un angle limite proche de 120 degrés. Mais notre travail est flexible quant à l'angle choisi par l'utilisateur et peut par conséquent s'adapter à d'autres applications.

Pour valider nos algorithmes, nous les avons d'abord testés sur des surfaces dont l'axe médian est connu a priori par un calcul analytique exact. Les résultats obtenus nous

ont permis de vérifier que notre procédure localise efficacement l'axe médian et que le processus de raffinement divise l'erreur par deux à chaque itération.

Nous avons ensuite testé notre travail sur des surfaces courbes de formes géométriques variables, et sur des surfaces représentées par des maillages aux spécificités différentes. Nous avons ainsi pu vérifier que nos algorithmes fonctionnaient parfaitement sur des surfaces comportant des trous, ainsi que sur des surfaces représentées par des maillages grossiers.

Les résultats que nous avons obtenus sont donc satisfaisants. Dans la plupart des cas, notre processus fournit l'axe médian et les informations géométriques avec une précision qui suffit largement à nos besoins, au bout d'un petit nombre d'itérations. Cependant, nous avons obtenu des résultats entachés de bruit pour quelques cas test où la taille des éléments du maillage représentant la surface est fortement hétérogène. Nous avons ainsi pu voir les limites de la procédure et imaginer des améliorations possibles.

## **Limitations**

Nous étions partis de surfaces courbes représentées par des maillages triangulaires quelconques, et nous avons réussi à en extraire les caractéristiques géométriques grâce, d'une part, à l'algorithme d'approximation de géodésiques sur les maillages obtus, que nous avons trouvé en généralisant celui qui existait jusque-là pour les maillages aigus ; d'autre part grâce au mécanisme de raffinement local que nous avons mis au point afin d'obtenir des résultats précis quelle que soit la granularité du maillage.

Mais les résultats que nous obtenons restent insatisfaisants lorsque les maillages de départ comportent à la fois un grand nombre de triangles obtus et une forte variation locale de la taille des mailles. De plus, l'efficacité de notre application est limitée

par le fait que le mécanisme de raffinement local n'est pas complété par un critère d'arrêt automatique en fonction de la précision souhaitée : c'est l'utilisateur qui décide d'arrêter le processus au bout d'un certain nombre d'itérations.

Pour améliorer notre procédure, il faudrait parvenir à opérer un raffinement localisé tendant à homogénéiser la taille des mailles autour de l'axe. Il faudrait aussi créer un critère d'arrêt automatique du raffinement qui tiendrait compte de la précision voulue au départ par l'utilisateur.

### **Travaux futurs**

On pourra utiliser notre algorithme pour compléter les travaux de Ko-Foa Tchou générant des cartes de taille géométriques adaptées à des objets volumiques. Pour y parvenir, il faudra passer par les étapes suivantes : extraire l'information de courbure locale pour chacun des sommets du maillage recouvrant la surface des volumes ; créer ensuite sur cette surface une carte de taille géométrique en tenant compte de la courbure locale et de l'ensemble des informations géométriques générées par notre application ; enfin, intersecter cette carte de taille surfacique avec la carte de taille volumique générée par l'application de Tchou. De cette manière, le résultat final sera une carte de taille volumique adaptée à la géométrie du volume à mailler et tenant compte des spécificités particulières aux frontières.

## RÉFÉRENCES

- ARCELLI, C. (1981). Pattern thinning by contour tracing. *Computer Graphics and Image Processing*, 17, 130–144.
- ATTALI, D. (1995). *Squelette et Graphe de Voronoi 2D et 3D*. Thèse de doctorat, Joseph Fourier University - Grenoble 1, France.
- BARTH, T. J. ET SETHIAN, J. A. (1998). Numerical schemes for the Hamilton-Jacobi and level set equations on triangulated domains. *J. Comput. Phys.*, 145, 1–40.
- BLUM, H. (1967). A transformation for extracting new descriptors of shape. *Models for Perception of Speech and Visual Form*, 362–380.
- CRANDALL, M. G. ET LIONS, P. L. (1984). Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Mathematics of Computation*, 43, 1–19.
- FREY, P. J. (1998). An interactive mesh visualization software. Rapport technique, INRIA, [ftp ://ftp.inria.fr/INRIA/publication/publi-ps-gz/RT/RT-0253.ps.gz](ftp://ftp.inria.fr/INRIA/publication/publi-ps-gz/RT/RT-0253.ps.gz).
- FREY, P. J. ET GEORGE, P.-L. (1999). *Maillages — Application aux éléments finis*. Hermès.
- GEORGE, P.-L. ET BOROUCHE, H. (1997). *Triangulation de Delaunay et maillage — applications aux éléments finis*. Hermès.
- GIBLIN, P. J. ET KIMIA, B. B. (2004). A formal classification of 3D medial axis points and their local geometry. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 26, 238–251.

- GURSOY, H. N. ET PATRIKALAKIS, N. M. (1992). An automatic coarse and fine surface mesh generation scheme based on medial axis transform : Part I algorithms. *Engineering with Computers*, 8, 121–137.
- KIMMEL, R. (2003). *Numerical Geometry of Images : Theory, Algorithms, and Applications*. Springer-Verlag.
- LAM, L., LEE, S.-W. ET SUEN, C. Y. (1992). Thinning methodologies — A comprehensive survey. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 14, 869–885.
- NOVOTNI, M. ET KLEIN, R. (2002). Computing geodesic distances on triangular meshes. *Tenth International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision'2002 (WSCG'2002)*.
- PATRIKALAKIS, N. M. ET MAEKAWA, T. (2002). *Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing*. Springer-Verlag.
- PAVLIDIS, T. (1980). A thinning algorithm for discrete binary images. *Computer Graphics and Image Processing* 13, 142–157.
- QUADROS, W. R., OWEN, S. J., BREWER, M. ET SHIMADA, K. (2004). Finite element mesh sizing for surfaces using skeleton. *IMR*. 389–400.
- REINHARDT, F. ET SOEDER, H. (2002). *Atlas des Mathématiques*. Hachette.
- ROSENFELD, A. ET PFALTZ, J. L. (1966). Sequential operations in digital picture processing. *J. ACM*, 13, 471–494.
- SETHIAN, J. A. (1999a). Fast marching methods. *SIAM Review*, 41, 199–235.
- SETHIAN, J. A. (1999b). *Level Set Methods and Fast Marching Methods : Evolving Interfaces in Computational Geometry*. Cambridge University Press.



SETHIAN, J. A. ET KIMMEL, R. (1998). Computing geodesic paths on manifolds. *Proc. of Natl. Acad. Sci.*, 95, 8431–8435.

SETHIAN, J. A. ET VLADIMIRSKY, A. (2000). Fast methods for the Eikonal and related Hamilton-Jacobi equations on unstructured meshes. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 97, 5699–5703.

SRINIVASAN, V., NACKMAN, L. R., TANG, J. M. ET MESHKAT, S. N. (1992). Automatic mesh generation using the symmetric axis transformation of polygonal domains. *Proceedings of the IEEE*. vol. 80, 1485–1501.

TCHON, K.-F., KHACHAN, M., GUIBAULT, F. ET CAMARERO, R. (2003). Constructing anisotropic geometric metrics using octrees and skeletons. *Twelfth International Meshing Roundtable*. Sandia National Laboratories, Santa Fe, NM, 293–304.

## ANNEXE I

### Format de fichier

Deux types de format de fichier sont utilisés dans notre travail. Le premier est le format mesh, qui est celui de nos fichiers d'entrée ; le deuxième est le format pie, qui est celui de nos fichiers de sortie.

#### I.1 Fichier .mesh

Nos fichiers d'entrée doivent comporter les coordonnées des sommets et une connectivité. N'importe quel format de fichier aurait pu répondre à ces besoins. Nous avons choisi d'utiliser le format mesh pour sa simplicité. Un fichier mesh est organisé par une série de champs identifiés par mots clés. Les fichiers mesh sont facilement visualisables grâce à l'application *medit* développée par l'INRIA. Pour plus de détail nous pouvons nous référer à Frey (1998). Nous n'utilisons qu'une petite partie des possibilités offertes par ce format de fichier. La figure I.1 donne la forme habituelle d'un fichier d'entrée de notre application.

#### I.2 Fichier .pie

Pour l'inscription de nos fichiers de sortie, nous avons choisi le format pirate pour plusieurs raisons. La première est que le format pirate permet d'inscrire plusieurs solutions et que nous devons inscrire dans le fichier, outre les coordonnées des sommets et la connectivité du maillage, les 3 paramètres que nous calculons : la distance du

```

MeshVersionFormatted
Dimension
3
Vertices
29
1 1 0 0
1 0 0 0
:
:
Triangles
40
4 9 10 0
11 6 14 0
:
:
End

```

FIGURE I.1 Structure d'un fichier d'entrée .mesh

sommet à la frontière la plus proche, la largeur locale et l'appartenance à l'axe médian. D'autre part, étant donné que nous opérons un raffinement itératif, il est très utile de stocker dans un même fichier résultat les solutions calculées à chaque itération. afin d'en étudier l'évolution. Ce stockage s'effectue facilement dans les fichiers .pie grâce au concept de zone.

Nous visualisons les fichiers .pie grâce à l'application Vu.

La figure I.2 donne la forme habituelle d'un fichier de sortie de notre application.

```

Maillage maillage_triangle(, [<double>
1 1 0
1 0 0
1 -1 0
:
] % 3 ) =
{ ZONE zone_iter0 ( LagrTrian03 , , [<int>
4 9 10
11 6 14
10 11 14
:
] );
ZONE zone_iter1 ( LagrTrian03 , , [<int>
11 6 14
6 11 15
17 7 15
:
] );
ZONE zone_iter2 ( LagrTrian03 , , [<int>
11 6 14
6 11 15
17 7 15
:
} );
Solution La_Solution0 ( maillage_triangle, [<double> ] ) =
{ Variable Les_Distances ( LagrTrian03, [<double>
0 0 0 0.46826 0.579984 ...], zone_iter0 );
Variable LargeurLocale ( LagrTrian03, [<double>
1.82893 1.82893 1.82893 ...], zone_iter0 );
Variable L_Axe ( LagrTrian03, [<double>
0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 ...], zone_iter0 );};
Solution La_Solution1 ( maillage_triangle, [<double> ] ) =
{ Variable Les_Distances ( LagrTrian03, [<double>
0 0 0 0 0 0 0 0.46826 0.579984 0.544086 0.525818 0.332617 ...
} );

```

FIGURE I.2 Structure d'un fichier d'entrée .pie