



Titre: Problèmes de premier passage et commande optimale pour le
Title: processus de diffusion Cox-Ingersoll-Ross

Auteur: Romain Mrad
Author:

Date: 2026

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Mrad, R. (2026). Problèmes de premier passage et commande optimale pour le
Citation: processus de diffusion Cox-Ingersoll-Ross [Mémoire de maîtrise, Polytechnique
Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/75897/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/75897/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:** Mario Lefebvre
Advisors:

Programme: Maîtrise recherche en mathématiques appliquées
Program:

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

**Problèmes de premier passage et commande optimale pour le processus de
diffusion Cox–Ingersoll–Ross**

ROMAIN MRAD

Département de mathématiques et de génie industriel

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
Mathématiques

Mars 2026

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

**Problèmes de premier passage et commande optimale pour le processus de
diffusion Cox–Ingersoll–Ross**

présenté par **Romain MRAD**

en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

Julie CARREAU, présidente

Mario LEFEBVRE, membre et directeur de recherche

Yann-Meing LAW-KAM-CIO, membre

DÉDICACE

*La lutte elle-même vers les sommets suffit à remplir un cœur d'homme.
Il faut imaginer Sisyphe heureux.*

Albert Camus

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de recherche, le professeur Mario Lefebvre, pour la rigueur de son encadrement, sa disponibilité constante et la qualité de ses conseils tout au long de ce travail.

RÉSUMÉ

Le processus de diffusion de Cox–Ingersoll–Ross (CIR) est défini par l’équation différentielle stochastique suivante :

$$dX(t) = a[b - X(t)] dt + \sigma\sqrt{X(t)} dW(t)$$

où $W(t)$ désigne un mouvement brownien standard. Ce processus est largement utilisé en finance, notamment pour modéliser les taux d’intérêt ou la volatilité stochastique, en raison de sa propriété de rester strictement positif sous certaines conditions sur les paramètres.

L’analyse menée dans cette étude porte sur l’instant de premier passage :

$$\tau(x) = \inf\{t \geq 0 : X(t) \notin (0, c) \mid X(0) = x \in (0, c)\}$$

qui correspond au premier instant où la trajectoire de $X(t)$ sort de l’intervalle $(0, c)$. Trois quantités principales sont caractérisées analytiquement dans ce cadre : la fonction génératrice des moments du temps de sortie $\mathbb{E}[e^{-\alpha\tau(x)}]$, l’espérance du temps de sortie $\mathbb{E}[\tau(x)]$, et l’aire moyenne sous la trajectoire du processus jusqu’à l’instant de sortie.

Une extension du modèle est ensuite considérée, dans laquelle des sauts sont ajoutés à la dynamique continue du processus. Ce cadre permet d’étudier plus finement certains phénomènes asymétriques, tels que la probabilité de sortie par la borne inférieure 0 dans le cas de sauts orientés vers le bas, ou le dépassement moyen de la borne supérieure c en présence de sauts positifs. L’effet de ces sauts sur le temps moyen de sortie est également examiné.

Enfin, plusieurs problèmes de commande optimale sont étudiés dans le cadre purement diffusif. Ils consistent à déterminer la politique de commande optimale minimisant un coût attendu, ainsi que la fonction valeur associée. Ces problèmes s’inscrivent dans la classe des *homing problems*, où l’objectif est de guider le processus vers une cible ou de réguler sa trajectoire de manière optimale.

ABSTRACT

This work focuses on first-passage-time problems for the Cox–Ingersoll–Ross (CIR) diffusion, a stochastic process governed by the stochastic differential equation:

$$dX(t) = a[b - X(t)] dt + \sigma\sqrt{X(t)} dW(t)$$

where $W(t)$ denotes a standard Brownian motion. The quantity of interest is the exit time from the interval $(0, c)$, defined as:

$$\tau(x) = \inf\{t \geq 0 : X(t) \notin (0, c) \mid X(0) = x \in (0, c)\}$$

Analytical expressions are obtained for the moment-generating function of the exit time $\mathbb{E}[e^{-\alpha\tau(x)}]$, its expectation $\mathbb{E}[\tau(x)]$, and the average area under the path prior to exit.

The framework is extended to incorporate jumps into the dynamics. This generalization enables the study of the probability of hitting the lower boundary under downward jumps, the expected overshoot beyond the upper boundary in the presence of upward jumps, and the modification of the mean exit time due to the jump component.

Optimal control problems are also considered in the purely diffusive setting. The associated value function and the optimal control minimizing a given cost functional are characterized. This setup corresponds to a *homing* control problem, where the trajectory is influenced to reach or remain within a target region under optimal intervention.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vi
LISTE DES TABLEAUX	ix
LISTE DES FIGURES	x
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xi
LISTE DES ANNEXES	xii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Définitions et concepts de base	1
1.2 Éléments de la problématique	5
1.3 Objectifs de recherche	12
1.4 Plan du mémoire	12
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE	14
CHAPITRE 3 PREMIER PASSAGE EN DIFFUSION PURE	16
3.1 Fonction génératrice des moments	16
3.1.1 Résolution du problème	16
3.1.2 Validation de l'expression obtenue	17
3.2 Fonction temps moyen	18
3.2.1 Résolution du problème	18
3.2.2 Validation de l'expression obtenue	22
3.3 Fonction aire moyenne	24
3.3.1 Résolution du problème	24
3.3.2 Validation de l'expression obtenue	25
CHAPITRE 4 PREMIER PASSAGE EN DIFFUSION AVEC SAUTS	27
4.1 Fonction temps moyen — sauts uniformes descendants	27
4.1.1 Résolution du problème	27

4.1.2	Validation de l'expression obtenue	29
4.2	Fonction probabilité de sortie en zéro — sauts uniformes descendants	29
4.2.1	Résolution du problème	29
4.2.2	Validation de l'expression obtenue	30
4.3	Fonction dépassement moyen — sauts exponentiels ascendants	31
4.3.1	Formulation générale du problème	31
4.3.2	Sauts exponentiels ascendants	32
4.3.3	Application au processus CIR	35
4.3.4	Validation de l'expression obtenue	37
CHAPITRE 5 COMMANDE OPTIMALE STOCHASTIQUE		38
5.1	Formalisation du problème	38
5.2	Résolution du problème sous différentes configurations	40
5.2.1	P1 — Résolution	40
5.2.2	P1 — Visualisation	41
5.2.3	P2 — Résolution	44
5.2.4	P2 — Visualisation	46
5.2.5	P3 — Résolution	48
5.2.6	P3 — Visualisation	49
5.2.7	P4 — Résolution	50
5.2.8	P4 — Visualisation	50
5.3	Validation	51
5.4	Politiques optimales	53
CHAPITRE 6 CONCLUSION		55
6.1	Synthèse des travaux	55
6.2	Limitations	56
6.3	Perspectives et améliorations futures	56
RÉFÉRENCES		57
ANNEXES		60

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 5.1	Accélérations moyennes du temps de sortie	52
Tableau G.1	Longueurs moyennes des trajectoires simulées	69
Tableau G.2	Fréquence de sortie des trajectoires simulées	70

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Une trajectoire du mouvement brownien standard.	2
Figure 1.2	Une trajectoire d'un processus d'Itô avec $\mu(t, X(t)) \equiv 2 \forall t$	3
Figure 1.3	Simulation de 10 trajectoires d'un processus de sauts $J(t)$	4
Figure 1.4	Une trajectoire du processus CIR avec $a = 1,1$, $b = 0,7$, $\sigma = \sqrt{2}$	6
Figure 1.5	Simulations de 30 trajectoires du processus CIR avec deux frontières absorbantes.	7
Figure 1.6	Simulations de 30 trajectoires du processus CIR avec sauts dépassant la frontière c	9
Figure 1.7	Simulations de deux trajectoires du CIR avec et sans commande	11
Figure 3.1	Visualisation de la fonction génératrice des moments $M(x; \alpha)$	18
Figure 3.2	Visualisation de la fonction temps moyen $m(x)$	23
Figure 3.3	Visualisation de la fonction aire moyenne $A(x)$	26
Figure 4.1	Visualisation des temps moyens de sortie $m(x)$ et $m_0(x)$	29
Figure 4.2	Visualisation des probabilités de sortir en zéro $p(x)$ et $p_0(x)$	31
Figure 4.3	Visualisation de la fonction dépassement moyen $D(x)$	37
Figure 5.1	P1 — Visualisation de la fonction valeur et de la commande optimale.	42
Figure 5.2	P1 — Sensibilité de la fonction valeur et de la commande optimale.	43
Figure 5.3	P1 — Visualisation de l'effet de la commande optimale.	44
Figure 5.4	P2 — Visualisation de la fonction valeur et de la commande optimale.	46
Figure 5.5	P2 — Sensibilité de la fonction valeur et de la commande optimale.	47
Figure 5.6	P2 — Visualisation de l'effet de la commande optimale.	48
Figure 5.7	P3 — Visualisation de la fonction valeur et de la commande optimale.	49
Figure 5.8	P3 — Visualisation de l'effet de la commande optimale.	49
Figure 5.9	P4 — Visualisation de la fonction valeur et de la commande optimale.	51
Figure 5.10	P4 — Visualisation de l'effet de la commande optimale.	51

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

CIR	Cox–Ingersoll–Ross
MBS	Mouvement Brownien Standard
EDO	Équation Différentielle Ordinaire
EID	Équation Integro-différentielle
EDS	Équation Différentielle Stochastique
FGM	Fonction Génératrice des Moments
IPP	Instant de Premier Passage
HJB	Hamilton–Jacobi–Bellman

LISTE DES ANNEXES

Annexe A	Fonctions Spéciales	60
Annexe B	Formules Spéciales	63
Annexe C	Générateur Infinitésimal	65
Annexe D	Unicité Trajectorielle	66
Annexe E	Variation Quadratique d'un Processus d'Itô	67
Annexe F	Simulations pour le Dépassement Moyen	68
Annexe G	Simulations en Commande Optimale	69

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Les processus de diffusion occupent une place centrale en finance pour modéliser l'évolution temporelle d'une grande variété d'instruments financiers. Parmi les problématiques associées à ces modèles, l'étude des *instants de premier passage* revêt une importance particulière, notamment en gestion des risques, en évaluation d'options barrières ou encore en prévision d'événements extrêmes.

Un autre aspect fondamental concerne la *commande optimale stochastique*, qui consiste à influencer dynamiquement l'évolution du processus dans le but d'optimiser un objectif.

Ce mémoire s'intéresse à l'analyse conjointe des temps de franchissement et de la commande optimale appliquées au processus de Cox–Ingersoll–Ross [1], proposé en 1985, un modèle de référence largement utilisé pour représenter la dynamique des taux d'intérêt à court terme.

1.1 Définitions et concepts de base

Avant d'approfondir le sujet, il est essentiel de poser clairement les fondements théoriques sur lesquels repose cette étude.

L'élément central à introduire en premier lieu est le *mouvement brownien standard*, pierre angulaire des processus de diffusion.

Définition : Le mouvement brownien standard

Un processus stochastique $\{W(t), t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard s'il vérifie [2] :

- $W(0) = 0$;
- les trajectoires $t \mapsto W(t)$ sont continues presque sûrement ;
- il possède des accroissements indépendants : $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, les variables aléatoires $(W(t_i) - W(t_{i-1}))_{i=1}^n$ sont indépendantes ;
- il possède des accroissements stationnaires gaussiens : $\forall 0 \leq s \leq t, W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.

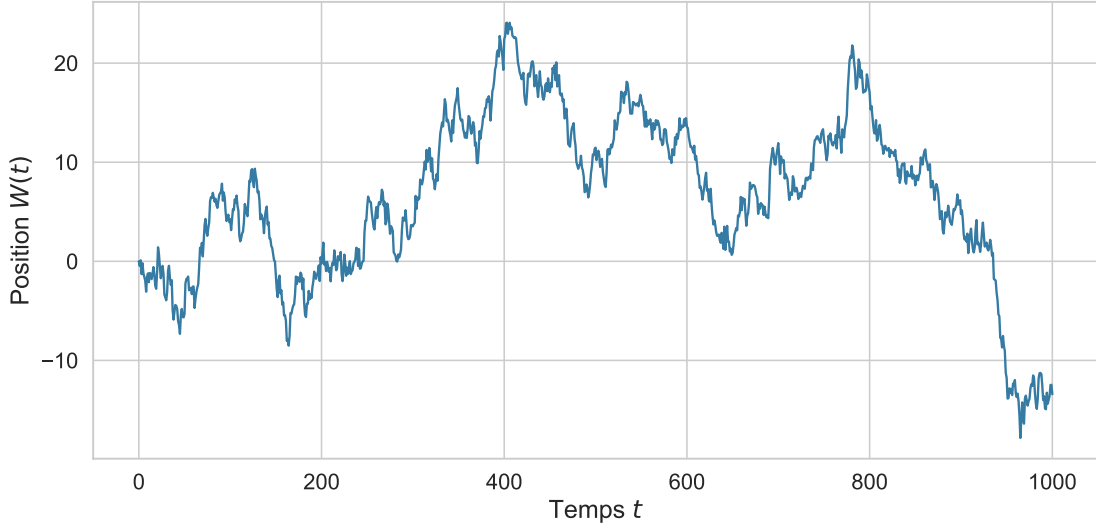


FIGURE 1.1 Une trajectoire du mouvement brownien standard.

Le MBS (figure 1.1) constitue la base de la construction des processus de diffusion employés dans de nombreux domaines tels que la finance, la physique ou la biologie. Ces processus sont modélisés par des équations différentielles stochastiques, qui consistent à enrichir le mouvement brownien en y ajoutant un terme de dérive et un terme de diffusion. Il en résulte une classe de processus dits *d'Itô*.

Définition : Processus d'Itô

$\{X(t), t \geq 0\}$ est un processus d'Itô [3] s'il vérifie une équation différentielle stochastique de la forme :

$$dX(t) = \mu(t, X(t)) dt + \sigma(t, X(t)) dW(t) \quad (1.1)$$

où :

- $\mu(t, X(t))$ et $\sigma(t, X(t))$ sont des fonctions mesurables et adaptées à la filtration brownienne standard $\mathcal{F}_t = \sigma\{W(s), s \leq t\}$;
- $\mathbb{P}\left(\int_0^T |\mu(s, X(s))| ds < +\infty\right) = 1$;
- $\mathbb{P}\left(\int_0^T \sigma^2(s, X(s)) ds < +\infty\right) = 1$.

Dans cette formulation, $\mu(t, X(t))$ est appelé le *terme de dérive* et $\sigma(t, X(t))$ le *terme de diffusion*.

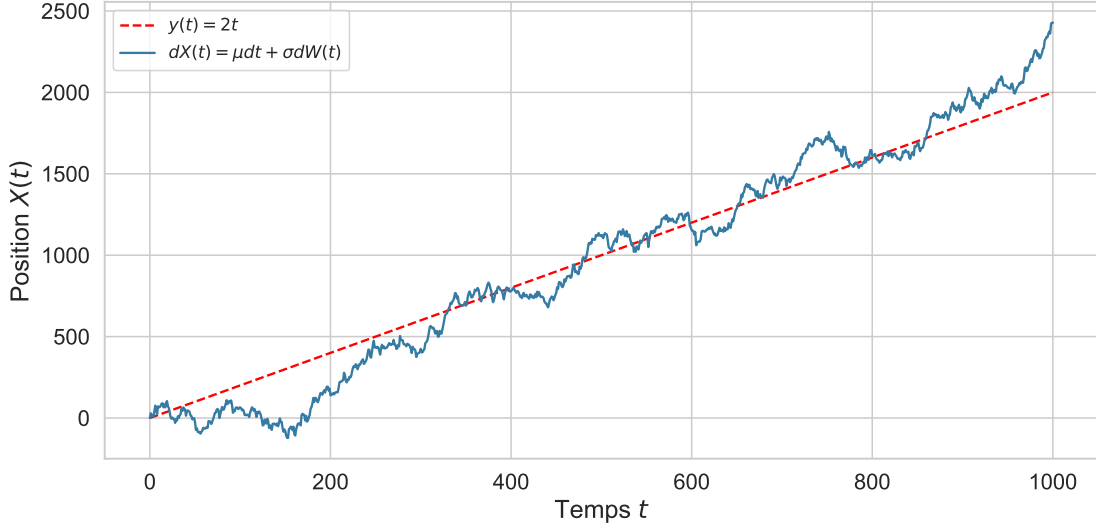


FIGURE 1.2 Une trajectoire d'un processus d'Itô avec $\mu(t, X(t)) \equiv 2 \forall t$.

La figure 1.2 illustre l'effet d'une dérive : la trajectoire du processus s'organise autour de la courbe moyenne $y(t) = 2t$, tout en étant perturbée par la composante aléatoire de la diffusion (ici, le terme de diffusion est constant : $\sigma(t, X(t)) \equiv 20 \forall t$).

De plus, il est important de noter que les termes de dérive et de diffusion peuvent eux-mêmes dépendre de l'état du processus ou du temps, ce qui permet de capturer des dynamiques complexes, comme une volatilité ou une dérive variable. Cette flexibilité permet notamment de modéliser des phénomènes réalistes dans les systèmes financiers ou physiques.

Par ailleurs, il est parfois intéressant d'enrichir les processus d'Itô en leur ajoutant une composante de sauts, gouvernée par un processus de Poisson (processus de comptage classique modélisant une file d'attente).

Définition : Processus de Poisson

Un processus $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de taux $\lambda > 0$ s'il vérifie [2] :

- Pour des intervalles de temps disjoints, le nombre d'occurrences est indépendant : pour tous $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, les variables aléatoires $(N(t_i) - N(t_{i-1}))_{i=1}^n$ sont indépendantes ;
- La probabilité d'une occurrence dans un intervalle de temps de petite taille est proportionnelle à la longueur de l'intervalle : $\lim_{h \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[N(t+h) - N(t) = 1] = \lambda h + o(h)$;
- La probabilité d'observer plus d'une occurrence dans un intervalle de petite taille est négligeable : $\lim_{h \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[N(t+h) - N(t) > 1] = o(h)$;
- Le nombre d'occurrences dans un intervalle de longueur t suit une loi de Poisson :

$$N(t) \sim \text{Poi}(\lambda t);$$

— Le temps d'arrivée du n^e événement T_n suit une loi exponentielle : $T_n \sim \text{Exp}(\lambda)$.

En utilisant un processus de Poisson, il est donc possible de définir un processus de sauts.

Définition : Processus de sauts

Soit $N(ds, dy)$ une mesure de Poisson sur $(0, \infty) \times \mathbb{R}$, représentant les occurrences d'événements aléatoires en temps et en amplitude. On suppose que les sauts ont une loi de probabilité $f_Y(y)$ et se produisent à un taux constant $\lambda > 0$. La mesure d'intensité associée est alors donnée par :

$$\Pi(dy) := \lambda f_Y(y) dy$$

Un processus de sauts $\{J(t), t \geq 0\}$ est défini comme :

$$J(t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}} y N(ds, dy) \quad (1.2)$$

La figure ci-dessous visualise différentes réalisations d'un processus de sauts gouverné par un processus de Poisson de paramètre $\lambda = 2$. La taille des sauts correspond à des réalisations d'une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\nu = 1,5$. La mesure d'intensité des sauts est donc donnée par :

$$\Pi(dy) = 2 \times 1,5e^{-1,5y} \mathbf{1}_{y \geq 0} dy$$

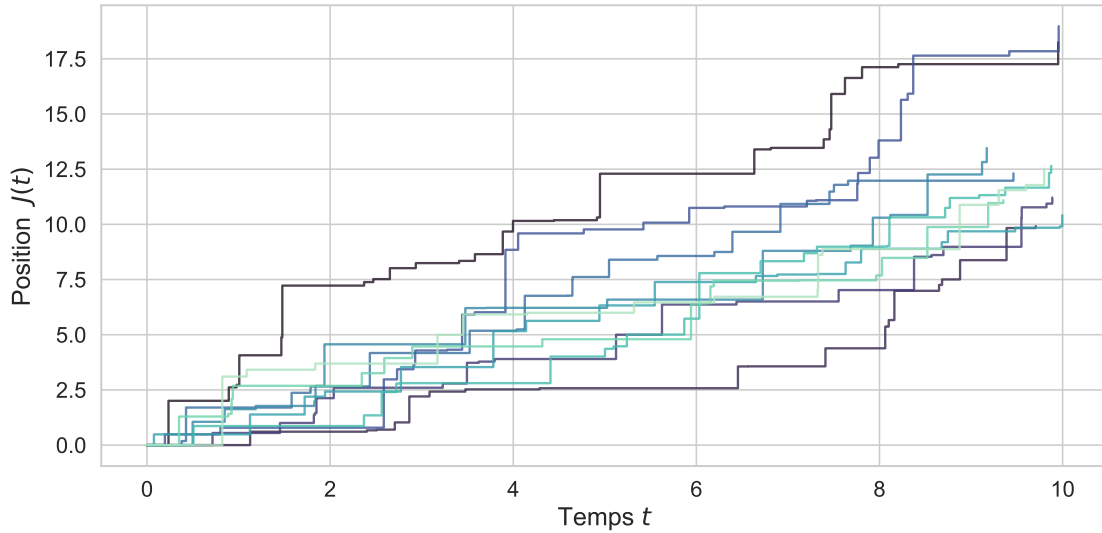


FIGURE 1.3 Simulation de 10 trajectoires d'un processus de sauts $J(t)$.

1.2 Éléments de la problématique

Comme évoqué précédemment, cette étude s'intéresse à des problèmes appliqués au processus Cox–Ingersoll–Ross. Il convient donc d'en donner une définition formelle.

Définition : Le processus de Cox–Ingersoll–Ross

Le processus de Cox–Ingersoll–Ross (CIR) [1] est un processus d'Itô défini par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX(t) = a[b - X(t)] dt + \sigma \sqrt{X(t)} dW(t) \quad (1.3)$$

où :

- $a \geq 0$ est le paramètre de vitesse ;
- $b > 0$ représente la moyenne long-terme ;
- $\sigma > 0$ est la volatilité instantanée ;
- $W(t)$ désigne un mouvement brownien standard.

Ce processus est particulièrement adapté à la modélisation des taux d'intérêt en raison de plusieurs propriétés clés. Premièrement, le terme de dérive $\mu(t, X(t)) \equiv \mu(X(t)) = a[b - X(t)]$ induit un mécanisme de retour vers la moyenne b , avec une vitesse déterminée par a . Dans le contexte de modélisation des taux, cela reflète l'idée que ces derniers tendent à revenir vers un niveau de long terme après des déviations temporaires. Deuxièmement, le terme de diffusion $\sigma(t, X(t)) \equiv \sigma(X(t)) = \sigma \sqrt{X(t)}$ garantit la non-négativité du processus grâce à la racine carrée. Ceci est essentiel, car un taux négatif serait irréaliste dans de nombreux contextes économiques [4], en particulier pour les modèles de taux à court terme comme le CIR. Troisièmement, le comportement à proximité de zéro est gouverné par la *condition de Feller*, selon laquelle :

$$\mathbb{P} \left[\exists t < \infty : X(t) = 0 \right] = 1 \quad \text{si et seulement si} \quad \sigma^2 > 2ab$$

Cela signifie que le processus peut atteindre zéro en un temps fini si la *diffusion* domine la *dérive*.

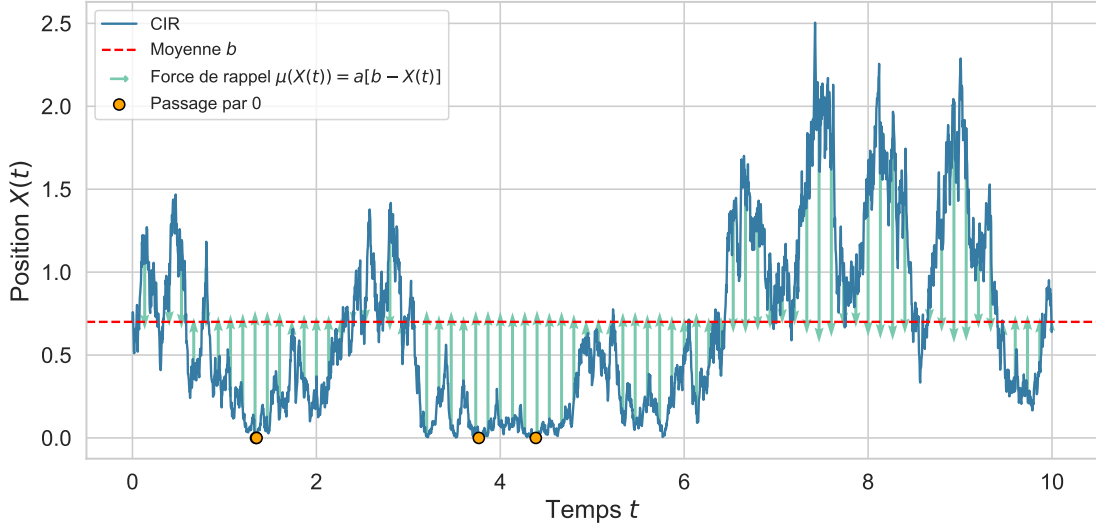


FIGURE 1.4 Une trajectoire du processus CIR avec $a = 1,1$, $b = 0,7$, $\sigma = \sqrt{2}$.

La figure ci-dessus présente une trajectoire simulée du processus CIR, accompagnée d'une représentation discrétisée de la force de rappel vers la moyenne (flèches vertes). Il est intéressant de noter que plus le processus s'éloigne de la moyenne b , plus l'intensité de cette force augmente. Aussi, lorsque le processus se trouve à proximité de zéro, les fluctuations aléatoires sont atténuées, tandis qu'elles deviennent plus marquées lorsqu'il s'éloigne. Ce comportement s'explique par la présence du terme $\sqrt{X(t)}$ dans le coefficient de diffusion, permettant ainsi de moduler l'amplitude stochastique en fonction de la position. En outre, la trajectoire passe par 0 plusieurs fois, car la *condition de Feller* est satisfaite :

$$\begin{cases} \sigma^2 = 2 \\ 2ab = 1,54 \end{cases} \implies \sigma^2 > 2ab$$

Le prochain élément de problématique à introduire dans le cadre de cette étude est celui de *l'instant de premier passage*.

Définition : L'instant de premier passage

Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus CIR. *L'instant de premier passage à deux frontières* est défini, pour un seuil $c > 0$, par :

$$\tau(x) = \inf\{t \geq 0 : X(t) \notin (0, c) \mid X(0) = x \in (0, c)\} \quad (1.4)$$

Autrement dit, $\tau(x)$ correspond au premier instant où le processus atteint l'une des bornes de l'intervalle $(0, c)$.

L'étude de ce temps d'arrêt est particulièrement pertinente dans le cadre du processus CIR, pour plusieurs raisons. D'une part, cela permet la modélisation du passage aux taux négatifs. En effet, lors de la crise économique japonaise de 2016, des taux d'intérêt négatifs ont été instaurés pour stimuler l'activité [5]. Or, le processus CIR, à valeurs strictement positives, ne permet pas de modéliser ce phénomène. Introduire une barrière à zéro permet de considérer le franchissement de ce seuil, au-delà duquel les taux deviennent négatifs. D'autre part, ce temps d'arrêt permet une surveillance des taux élevés, aspect important en gestion des risques où il est crucial de modéliser l'éventualité d'une hausse brutale ou excessive. L'introduction d'un seuil supérieur c permet de caractériser ces situations critiques et de quantifier leur probabilité d'occurrence via le temps de franchissement.

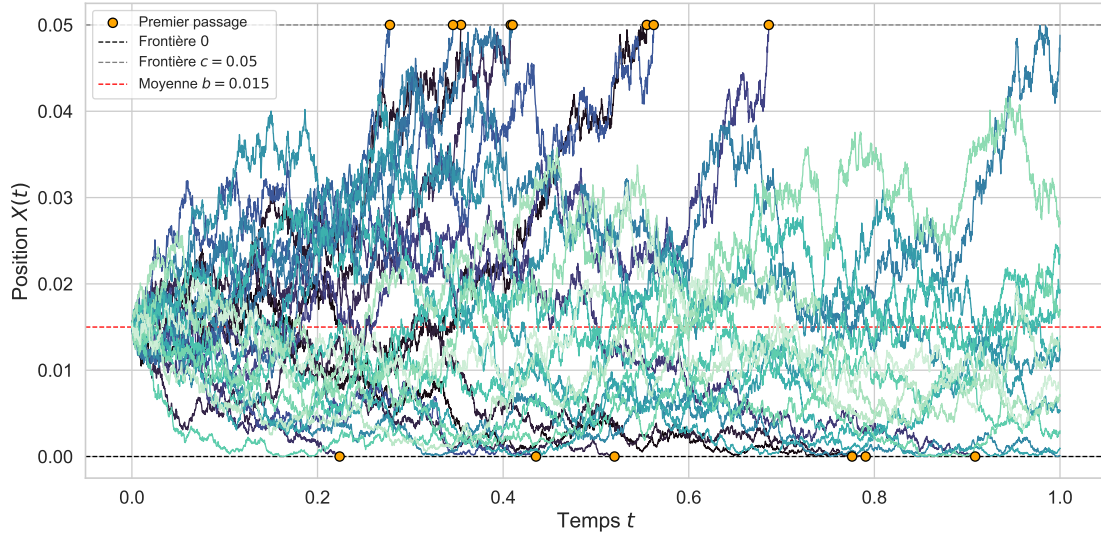


FIGURE 1.5 Simulations de 30 trajectoires du processus CIR avec deux frontières absorbantes.

L'étude portera principalement sur le processus CIR, noté $X(t)$, ainsi que sur la variable aléatoire associée à l'instant de premier passage $\tau(x)$.

Nous introduisons à présent les fonctions analytiques qui feront l'objet de l'analyse. La première est la *fonction génératrice des moments*, outil central pour caractériser la distribution du temps d'arrêt.

Définition : Fonction génératrice des moments (FGM)

La fonction génératrice des moments de l'instant de premier passage $\tau(x)$ est définie pour tout $x \in [0, c]$ par :

$$M(x; \alpha) := \mathbb{E}[e^{-\alpha\tau(x)}] \quad (1.5)$$

avec $\alpha > 0$. Cette fonction permet de résumer l'information probabiliste sur la variable $\tau(x)$, en particulier sa distribution. De plus, elle encode l'ensemble des moments de $\tau(x)$, lorsque ceux-ci existent, via dérivation en α .

La deuxième fonction d'intérêt est celle du *temps moyen de premier passage*, qui correspond à l'espérance de la variable aléatoire $\tau(x)$.

Définition : Temps moyen de premier passage

Le temps moyen de premier passage est défini pour tout $x \in [0, c]$ par :

$$m(x) := \mathbb{E}[\tau(x)] \quad (1.6)$$

Il représente le temps moyen que met le processus CIR, partant d'un niveau initial $x \in (0, c)$, pour atteindre l'une des deux limites de l'intervalle.

La troisième fonction étudiée est celle de l'*aire moyenne sous la trajectoire* jusqu'à l'instant de sortie.

Définition : Aire moyenne

La fonction d'aire moyenne est définie pour tout $x \in [0, c]$ par :

$$A(x) := \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau(x)} X(t) dt\right] \quad (1.7)$$

En finance, l'aire moyenne peut représenter l'accumulation moyenne d'un taux d'intérêt à court terme jusqu'à un événement de sortie. Elle intervient également dans la tarification d'options asiatiques avec barrière, où le *payoff* dépend de l'intégrale temporelle du sous-jacent avant la sortie d'un intervalle donné [6].

La quatrième fonction étudiée est celle de la *probabilité de toucher la frontière inférieure*.

Définition : Probabilité de sortie en zéro

La fonction de probabilité de sortie est définie pour tout $x \in [0, c]$ par :

$$p(x) := \mathbb{P}[X(\tau(x)) = 0] \quad (1.8)$$

Elle caractérise la probabilité que le processus, partant d'une position initiale x , sorte de l'intervalle $(0, c)$ par le bas. Cette quantité peut être utilisée pour quantifier un risque de ruine, de défaut, ou encore d'apparition de taux négatifs (si le contexte économique le permet).

La cinquième fonction étudiée est celle du *dépassement moyen*, en ajoutant des sauts au processus CIR.

Définition : Dépassement moyen

La fonction de dépassement moyen est définie pour tout $x \in [0, c]$ par :

$$D(x) := \mathbb{E}[(X(\tau(x)) - c)_+] \quad (1.9)$$

avec $(x - c)_+ = \max\{x - c, 0\}$. Cette fonction quantifie le dépassement moyen au-dessus de la frontière c , à partir d'une condition initiale $X(0) = x \in (0, c)$. Pour tout $x > c$, $D(x) = 0$, car le dépassement est déterministe, et la fonction perd donc son sens. Il est aussi essentiel de souligner que cette fonction ne présente un intérêt que dans le cas où le processus comporte des sauts. En effet, dans le cadre purement continu, la trajectoire atteint la frontière exactement, sans possibilité de la franchir.

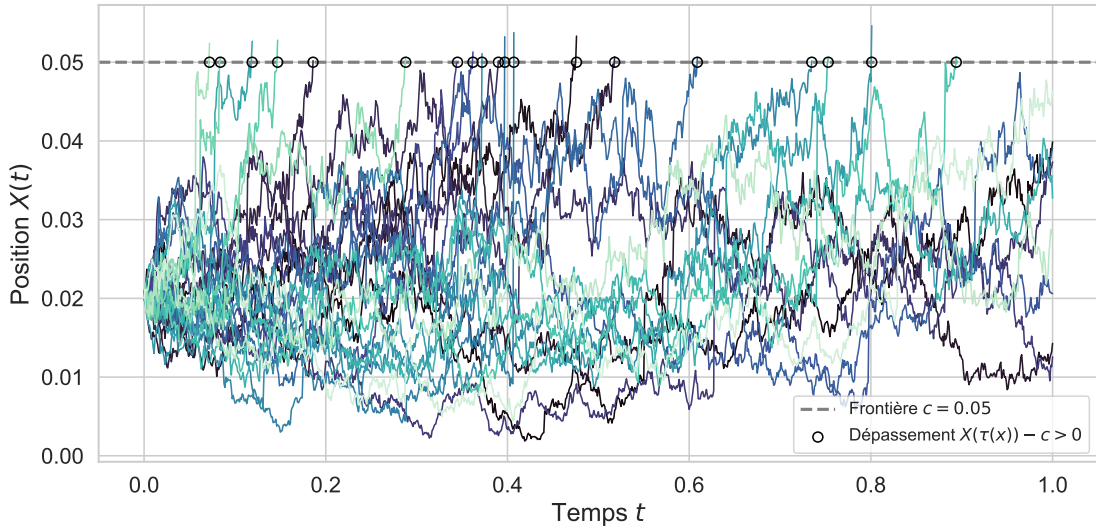


FIGURE 1.6 Simulations de 30 trajectoires du processus CIR avec sauts dépassant la frontière c .

Ce type de quantité apparaît notamment dans la valorisation de produits financiers *path-dependent*, tels que les options *lookback* ou les produits structurés à barrière, où le dépassement moyen modélise l'espérance de gain associée au franchissement d'un niveau critique par

le sous-jacent [7].

En complément de l'étude des instants de premier passage, ce mémoire s'intéresse également à un problème de *commande optimale stochastique* appliqué au processus CIR.

Définition : Problème de commande optimale — homing problem

Le *homing problem* [8] consiste à piloter un processus stochastique dynamiquement jusqu'à ce qu'il atteigne un ensemble d'arrêt donné, tout en optimisant un objectif. La configuration étudiée dans ce mémoire correspond à un processus CIR commandé $\{X_u(t), t \geq 0\}$ évoluant dans l'intervalle $(0, c)$, avec un arrêt déclenché dès que la trajectoire atteint l'une des deux frontières. Ce processus est défini par :

$$dX_u(t) = a[b - X_u(t)]dt + b[X_u(t)]u[X_u(t)]dt + \sigma\sqrt{X_u(t)}dW(t) \quad (1.10)$$

où $u(\cdot)$ est une stratégie de commande et $b(\cdot) \neq 0$ est le coût de la commande appliquée.

Le processus est commandé jusqu'à l'instant d'arrêt $\tau(x)$ défini précédemment (1.4). Par ailleurs, l'objectif est de minimiser l'espérance mathématique d'une fonction coût de type intégral, définie pour tout $x \in [0, c]$ par :

$$J(x) := \int_0^{\tau(x)} \left(\frac{1}{2}q[X_u(t)]u^2[X_u(t)] + r[X_u(t)] \right) dt \quad (1.11)$$

où $r(\cdot) \neq 0$ est le coût d'état (indépendant de la commande) et $q(\cdot) > 0$ est un poids pénalisant l'intensité de la commande.

Le problème consiste à déterminer une stratégie optimale $u^*(x)$ minimisant ce coût espéré. La fonction valeur associée au problème s'écrit :

$$F(x) := \inf_{\substack{u[X_u(t)] \\ 0 \leq t \leq \tau(x)}} \mathbb{E}[J(x)] \quad (1.12)$$

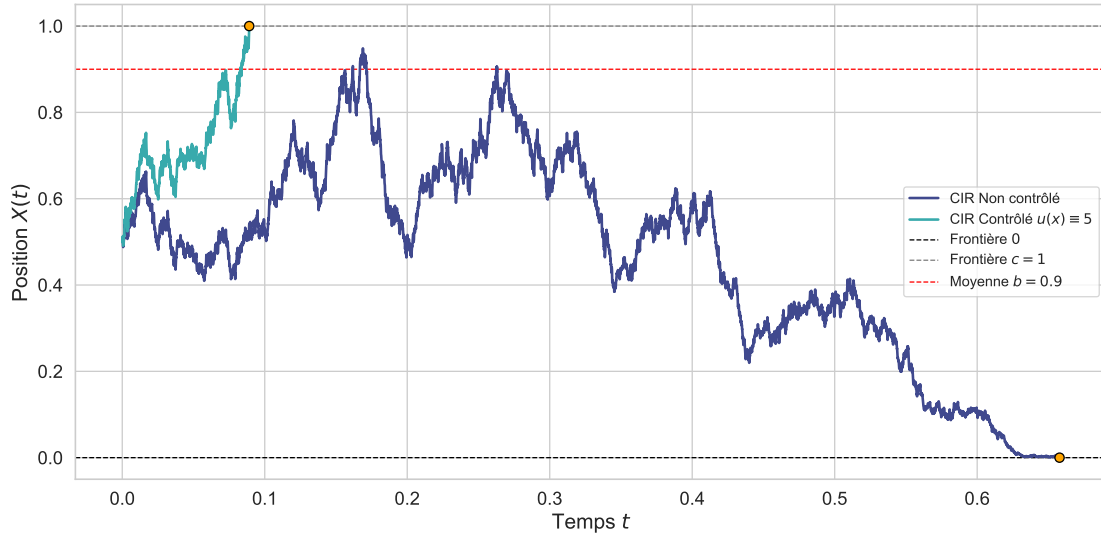


FIGURE 1.7 Simulations de deux trajectoires du CIR avec et sans commande

La figure ci-dessus illustre l'effet d'une stratégie de commande sur la dynamique du processus. Dans cet exemple, la commande est constante et positive ($u(x) \equiv 5$), et le même tirage aléatoire est utilisé pour les deux trajectoires. Il est intéressant de souligner que le processus commandé sort de l'intervalle beaucoup plus rapidement que celui sans commande. De plus, cette sortie s'effectue par la borne supérieure $c = 1$, alors que le processus non contrôlé atteint la borne inférieure 0. Cela met en évidence l'influence marquée d'une commande, même simple et non optimale, sur le comportement du processus CIR.

1.3 Objectifs de recherche

Après avoir posé les bases théoriques de l'étude, nous pouvons à présent formuler avec précision les objectifs de ce mémoire. Ceux-ci s'articulent autour de trois axes : l'analyse des instants de premier passage pour le processus CIR en l'absence de sauts, l'étude de ce même problème lorsque des sauts sont introduits, et enfin l'exploration de la commande optimale associée.

Objectifs pour le processus de diffusion

L'objectif est d'abord d'obtenir une expression explicite de la fonction génératrice des moments de l'instant de premier passage à deux frontières, notée $M(x; \alpha) = \mathbb{E}[e^{-\alpha\tau(x)}]$. Il s'agit ensuite d'expliciter une formule analytique pour le temps moyen de premier passage, $m(x) = \mathbb{E}[\tau(x)]$, pour une condition initiale $x \in (0, c)$. Enfin, il faudra déduire l'aire moyenne sous la trajectoire $A(x)$ jusqu'au franchissement de l'intervalle $(0, c)$.

Objectifs pour le processus de diffusion avec sauts

Il s'agit d'abord d'obtenir une expression analytique du temps moyen de sortie dans ce nouveau cadre, en tenant compte de l'impact des sauts sur la dynamique du processus. Dans le même contexte, il est pertinent d'établir une forme explicite de la probabilité de sortie par zéro, $p(x) = \mathbb{P}[X(\tau(x)) = 0]$. Enfin, il convient de déterminer le dépassement moyen à l'instant du franchissement supérieur c , défini par $D(x) = \mathbb{E}[(X(\tau(x)) - c)_+]$, afin d'évaluer l'intensité des excursions au-delà de la borne supérieure, dans le cas de sauts exponentiels ascendants.

Objectif pour la commande optimale

L'objectif est de résoudre différentes formes d'un problème de type *homing problem* associé au processus diffusif, en déterminant la fonction valeur $F(x) = \inf_u \mathbb{E}[J(x)]$, ainsi que la politique de commande optimale $u^*(x)$.

1.4 Plan du mémoire

Afin de répondre aux objectifs de recherche définis précédemment, ce mémoire est structuré de la manière suivante.

Dans un premier temps, une revue de la littérature est proposée afin de replacer l'étude dans le cadre des travaux existants sur les temps de premier passage et les problèmes de dépassement, avec une attention particulière portée au processus CIR et à ses extensions.

La suite du mémoire est consacrée à l'étude analytique des fonctions caractéristiques associées au processus. L'analyse se divise en trois parties distinctes. D'abord, la première porte sur les problèmes de premier passage pour le processus CIR en diffusion pure. Ensuite, la seconde examine sa version modifiée par l'introduction de sauts discrets. Enfin, la troisième se consacre à l'étude de la commande optimale appliquée au CIR diffusif.

Chaque section est accompagnée d'une analyse des résultats obtenus, permettant de vérifier la cohérence des solutions, d'en évaluer la sensibilité aux paramètres du modèle, et de comparer les dynamiques avec et sans sauts.

Enfin, la conclusion synthétise les contributions principales du mémoire, discute les limites de l'approche adoptée, et propose plusieurs pistes d'approfondissement pour des travaux futurs.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

Ce chapitre propose une synthèse des travaux existants sur les IPP appliqués au processus CIR et ses extensions (voir [9–15]) ainsi que les problèmes de dépassement pour différents processus de diffusion (voir [16–18]), en mettant l’accent sur les méthodes analytiques. L’objectif est donc de situer le présent mémoire dans l’état de l’art.

Approche par cumulants et fonctions de Kummer Dans [9], l’auteur développe une approche analytique de l’IPP pour le processus CIR en utilisant la transformée de Laplace de la densité de premier passage. Celle-ci s’exprime via la fonction hypergéométrique confluyente de Kummer. Les moments de l’IPP sont ensuite obtenus à partir des cumulants, exprimés en fonction de polynômes logarithmiques et de nombres de Stirling. Cela permet, entre autres, de construire des développements en série à l’aide de polynômes de Bell. L’auteur propose également une approximation de la fonction de répartition à l’aide d’un développement en séries basé sur la densité gamma et les polynômes de Laguerre.

Développement orthogonal basé sur la densité gamma Dans [10], l’approche est affinée par un développement tronqué de la densité de l’IPP obtenue en [9]. Cette méthode est accompagnée d’une analyse de convergence et d’un algorithme d’acceptation-rejet pour la simulation de l’IPP.

Méthodes analytiques et intégrales de Volterra L’article [11] traite l’IPP pour des processus de diffusion généraux en formulant une équation intégrale de Volterra du premier type. Pour le processus CIR, l’auteur utilise un changement de mesure transformant le problème en celui d’un processus de Feller. Les moments sont ensuite dérivés à l’aide de la transformée de Laplace et des fonctions de Kummer.

Formules analytiques pour le processus de Feller Dans [12], les auteurs généralisent les résultats précédents à différents régimes de dérive du processus de Feller, en exprimant la densité de l’IPP à travers la fonction de Tricomi ou la fonction de Bessel modifiée selon différentes valeurs des paramètres. Des expressions explicites pour la densité et l’espérance de l’IPP sont fournies.

Comparaison avec les processus de Wiener et d’Ornstein-Uhlenbeck Dans [13], une comparaison est effectuée entre les comportements de IPP pour les processus de Wiener,

d'Ornstein-Uhlenbeck et de Feller. Pour chacun, la probabilité d'atteindre l'état zéro est analysée. Des formules explicites sont données pour la densité de l'IPP avec absorption à zéro, et une étude asymptotique met en lumière les différences structurelles entre ces modèles.

Lien avec les processus de type Bessel L'article [14] s'intéresse à un processus de type Bessel présentant des similitudes structurelles avec le processus CIR. Selon l'ordre du processus, le comportement au voisinage de zéro varie (absorbant, réfléchissant, ou entrée). Les auteurs proposent une résolution du problème de passage à l'aide de la théorie de Sturm-Liouville et des fonctions de Bessel, et obtiennent des densités de l'IPP analytiques. Une validation par simulation de type Euler-Maruyama complète l'étude.

Temps de premier passage avec sauts Dans le cas de processus à sauts, le franchissement du seuil peut se faire par discontinuité, générant un dépassement (*overshoot*) dont l'analyse complique considérablement le calcul de l'IPP. Pour un processus de diffusion avec sauts doublement exponentiels, Kou et Wang [16] obtiennent des expressions fermées pour la transformée de Laplace de l'IPP et de la distribution conjointe entre l'instant de passage et le dépassement. Ils montrent que le dépassement est exponentiel conditionnellement à sa positivité, et que l'indépendance conditionnelle entre l'IPP et le dépassement peut être exploitée pour simplifier les calculs.

Extensions à des lois plus générales Yin et al. [17] généralisent ce cadre aux sauts suivant une loi mixte exponentielle, obtenant également des formules explicites pour la transformée de Laplace conjointe de l'IPP et de le dépassement. Par ailleurs, Klüppelberg, Kyprianou et Maller [18] analysent le cas de processus de Lévy à queue lourde et dérivent une expression asymptotique explicite de le dépassement conditionnellement au franchissement d'un niveau élevé. Ces résultats constituent les rares cas où des expressions analytiques sont disponibles, et fournissent un point de comparaison pour l'étude du processus de CIR avec sauts.

CHAPITRE 3 PREMIER PASSAGE EN DIFFUSION PURE

Cette partie du mémoire est consacrée à la résolution analytique des problèmes de premier passage appliqués au processus de Cox–Ingersoll–Ross en diffusion pure.

3.1 Fonction génératrice des moments

3.1.1 Résolution du problème

Dérivation de l'équation à résoudre

Il est connu que la fonction génératrice des moments de l'instant de premier passage $\tau(x)$ vérifie l'équation à rebours de Kolmogorov (voir [19] ou [2]) :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x M''(x; \alpha) + a(b - x)M'(x; \alpha) - \alpha M(x; \alpha) = 0 \quad (3.1)$$

avec $M(0; \alpha) = M(c; \alpha) = 1$.

Résolution

D'abord, en multipliant les deux côtés par $2/\sigma^2$, l'équation ci-dessus (3.1) est mise sous forme canonique :

$$xM''(x; \alpha) - \left(\frac{2a}{\sigma^2}x - \frac{2ab}{\sigma^2}\right)M'(x; \alpha) - \frac{2\alpha}{\sigma^2}M(x; \alpha) = 0$$

Ensuite, un changement de variable $y = \beta x$ avec $M(x; \alpha) = G(y; \alpha)$ est introduit. L'équation devient :

$$yG'''(y; \alpha) - \left(\frac{2a}{\sigma^2}\beta y - \frac{2ab}{\sigma^2}\right)G'(y; \alpha) - \beta \frac{2\alpha}{\sigma^2}G(y; \alpha) = 0$$

Ce changement de variable a pour objectif de déterminer, en fonction des autres paramètres du problème, la valeur de β qui permet de ramener l'équation à la forme générale de l'équation de Kummer (3.2) :

$$xf''(x) - (x - \theta)f'(x) - sf(x) = 0, \quad \theta, s \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

dont la solution est connue. Pour ce faire, il faut que :

$$\frac{2a}{\sigma^2}\beta = 1 \implies \beta = \frac{\sigma^2}{2a}$$

L'équation devient :

$$yG'''(y; \alpha) - \left(y - \frac{2ab}{\sigma^2}\right)G''(y; \alpha) - \frac{\alpha}{a}G'(y; \alpha) = 0 \quad (3.3)$$

La solution générale de cette dernière (3.3) est de la forme (voir [20]) :

$$G(y; \alpha) = C_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, y\right) + C_2 \Psi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, y\right)$$

avec C_1 et C_2 des constantes à déterminer, et $\Phi(\cdot, \cdot, \cdot)$ et $\Psi(\cdot, \cdot, \cdot)$ sont les fonctions hypergéo-métriques confluentes de première et seconde espèce (voir annexe A).

Finalement, l'expression analytique de la FGM de $\tau(x)$ est :

$$M(x; \alpha) = C_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ax}{\sigma^2}\right) + C_2 \Psi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ax}{\sigma^2}\right) \quad (3.4)$$

Détermination des constantes

Les conditions aux limites $M(0; \alpha) = M(c; \alpha) = 1$ permettent de déterminer les deux constantes C_1 et C_2 en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} C_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, 0\right) + C_2 \Psi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, 0\right) = 1 \\ C_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ac}{\sigma^2}\right) + C_2 \Psi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ac}{\sigma^2}\right) = 1 \end{cases}$$

Il en découle les valeurs suivantes pour C_1 et C_2 :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\Phi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, 0\right) - \Psi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, 0\right)}{\Phi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ac}{\sigma^2}\right) \Psi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, 0\right) - \Psi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ac}{\sigma^2}\right)} \\ C_2 &= \frac{\Phi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ac}{\sigma^2}\right) - 1}{\Phi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ac}{\sigma^2}\right) \Psi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, 0\right) - \Psi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ac}{\sigma^2}\right)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.1.2 Validation de l'expression obtenue

Visualisation

Il convient de valider le comportement de la fonction génératrice des moments $M(x; \alpha)$ définie par (3.4, 3.5). À cet effet, il faut tracer son évolution sur l'intervalle $[0, c]$ pour plusieurs valeurs du paramètre $\alpha \in \{1, 2, 5, 10\}$. Concernant les paramètres du processus CIR (1.3), et sauf indication contraire, les valeurs utilisées pour l'ensemble des visualisations sont :

- Vitesse de retour : $a = 0,1$;
- Moyenne long-terme : $b = 0,9$;

— Volatilité infinitésimale : $\sigma = 1$.

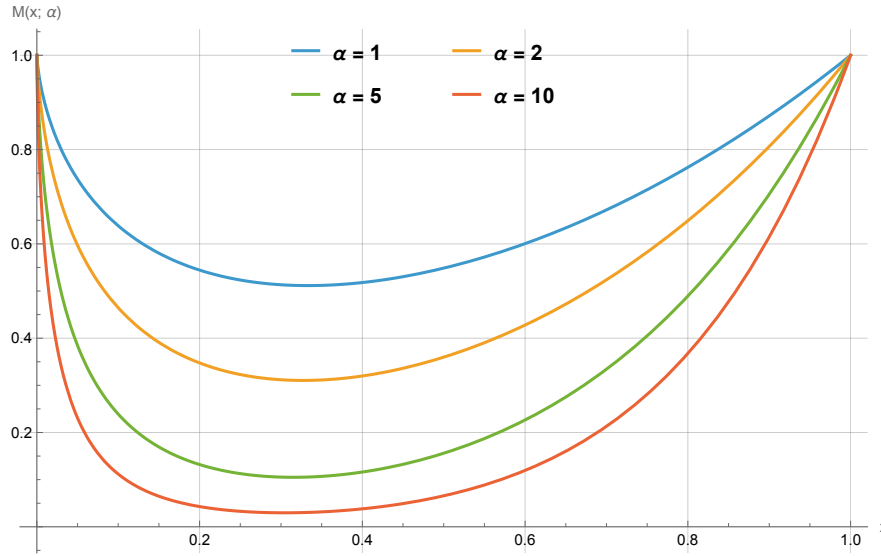


FIGURE 3.1 Visualisation de la fonction génératrice des moments $M(x; \alpha)$.

Analyse

Il est important de souligner que les conditions aux limites $M(0; \alpha) = M(c; \alpha) = 1$ sont respectées. Par ailleurs, puisque α est par définition un paramètre positif (1.5), la fonction est bien comprise dans l'intervalle $(0, 1)$, car elle correspond à l'exponentielle d'un nombre négatif; et pour la même raison, lorsque α augmente, la valeur de la fonction diminue.

L'expression obtenue pour la fonction génératrice des moments est ainsi validée.

3.2 Fonction temps moyen

3.2.1 Résolution du problème

Dérivation de l'équation à résoudre

En combinant le développement en série entière de l'exponentielle et la définition de la fonction génératrice des moments (1.5), il est possible d'écrire (en supposant que les moments de

$\tau(x)$ existent et sont finis) :

$$\begin{aligned}
 M(x; \alpha) &= \mathbb{E}[e^{-\alpha\tau(x)}] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha\tau(x))^k}{k!}\right] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k \mathbb{E}[\tau(x)^k]}{k!} \\
 &= 1 - \alpha \mathbb{E}[\tau(x)] + \frac{\alpha^2}{2} \mathbb{E}[\tau(x)^2] - \dots
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

En injectant (3.6) dans l'équation (3.1), et en reprenant la définition (1.6), il découle l'EDO linéaire de second ordre suivante :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x m''(x) + a(b-x)m'(x) = -1 \tag{3.7}$$

avec $m(0) = m(c) = 0$. En résolvant cette équation, une expression analytique de la fonction temps moyen est obtenue. Étant donné que le logiciel de calcul symbolique *Mathematica* ne parvient pas à déterminer une solution en forme fermée, l'équation doit être résolue manuellement.

Réduction d'ordre

D'abord, afin d'alléger la notation, soit :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2a}{\sigma^2} \\ \beta = \frac{2ab}{\sigma^2} \\ \theta = -\frac{2}{\sigma^2} \end{cases} \tag{3.8}$$

L'équation peut donc être réécrite comme suit :

$$x m''(x) + (\beta - \alpha x) m'(x) = \theta \tag{3.9}$$

La réduction d'ordre $u(x) = m'(x)$ donne l'EDO linéaire de premier ordre suivante :

$$x u'(x) + (\beta - \alpha x) u(x) = \theta \tag{3.10}$$

Pour procéder à sa résolution, il faut résoudre l'équation homogène associée puis déduire une solution particulière avec la méthode de variation de la constante. La solution générale

obtenue est, avec C_1 une constante :

$$u(x) = x^{-\beta} e^{\alpha x} (C_1 - \theta \alpha^{-\beta} \Gamma(\beta, \alpha x)) \quad (3.11)$$

où $\Gamma(\cdot, \cdot)$ est la fonction gamma incomplète (voir annexe A). Il suffit donc d'intégrer $u(x)$ et d'ajouter une constante C_2 pour obtenir l'expression de $m(x)$:

$$m(x) = \int u(x) dx + C_2 \quad (3.12)$$

Cependant, un problème survient lors de l'intégration du terme :

$$\int \theta \underbrace{(\alpha x)^{-\beta}}_P \underbrace{e^{\alpha x}}_E \underbrace{\Gamma(\beta, \alpha x)}_G dx \quad (3.13)$$

dans l'expression de $u(x)$ donnée par (3.11). En effet, cette intégrale ne possède pas de solution analytique. Les logiciels de calcul symbolique tels que *Mathematica* ou *Maple* échouent également à en trouver une. Il est donc nécessaire d'explorer une autre approche afin de contourner cette difficulté.

Intégration

L'intégrande de (3.13) présente des difficultés en raison de la présence du terme puissance $P := (\alpha x)^{-\beta}$ multiplié par le terme $E := e^{\alpha x}$, ainsi que le terme $G := \Gamma(\beta, \alpha x)$ (lui-même une intégrale). L'objectif est donc de reformuler cette expression afin de simplifier ou d'éliminer certains termes problématiques. C'est précisément ce qui sera abordé dans la suite de cette section. En effet, en combinant les deux expressions suivantes [21] :

$$\begin{cases} \Gamma(s, x) = \Gamma(s) - \gamma(s, x) \\ \gamma(s, x) = x^s \Gamma(s) e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(s + k + 1)} \end{cases}$$

avec $\gamma(\cdot, \cdot)$ une autre forme de la fonction gamma incomplète (voir annexe A), il est possible d'écrire :

$$\Gamma(s, x) = \Gamma(s) - x^s \Gamma(s) e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(s + k + 1)}$$

et donc, en reprenant les termes de l'équation à résoudre (3.8) il découle l'expression suivante :

$$\Gamma(\beta, \alpha x) = \Gamma(\beta) - \Gamma(\beta) \underbrace{(\alpha x)^{\beta}}_{P'} \underbrace{e^{-\alpha x}}_{E'} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^k}{\Gamma(\beta + k + 1)} \quad (3.14)$$

L'expression ci-dessus (3.14) est très intéressante. En effet, en remplaçant le terme G dans (3.13) par (3.14), les termes P et P' ainsi que E et E' se simplifient comme suit :

$$\begin{aligned}
& \int \theta \underbrace{(\alpha x)^{-\beta}}_P \underbrace{e^{\alpha x}}_E \overbrace{\left(\Gamma(\beta) - \Gamma(\beta) \underbrace{(\alpha x)^\beta}_{P'} \underbrace{e^{-\alpha x}}_{E'} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^k}{\Gamma(\beta + k + 1)} \right)}^G dx \\
&= \int \theta \Gamma(\beta) \underbrace{(\alpha x)^{-\beta}}_P \underbrace{e^{\alpha x}}_E dx - \int \theta \Gamma(\beta) \underbrace{(\alpha x)^{-\beta}}_P \underbrace{(\alpha x)^\beta}_{P'} \underbrace{e^{\alpha x}}_E \underbrace{e^{-\alpha x}}_{E'} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^k}{\Gamma(\beta + k + 1)} dx \\
&= \int \theta \Gamma(\beta) \underbrace{(\alpha x)^{-\beta}}_P \underbrace{e^{\alpha x}}_E dx - \theta \Gamma(\beta) \int \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^k}{\Gamma(\beta + k + 1)} dx
\end{aligned}$$

En injectant dans (3.12), il découle :

$$m(x) = (C_1 - \theta \alpha^{-\beta} \Gamma(\beta)) \underbrace{\int x^{-\beta} e^{\alpha x} dx}_I + \theta \Gamma(\beta) \underbrace{\int \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^k}{\Gamma(\beta + k + 1)} dx}_J + C_2$$

avec I et J deux intégrales à résoudre :

— **Résolution de I :**

Wolfram Mathematica donne :

$$\int x^{-\beta} e^{\alpha x} dx = -x^{1-\beta} E_\beta(-\alpha x) \quad (3.15)$$

où $E_n(x)$ est la fonction intégrale exponentielle généralisée (voir annexe A). La relation suivante [22] :

$$E_n(x) = x^{n-1} \Gamma(1 - n, x)$$

permet d'écrire :

$$E_\beta(-\alpha x) = (-\alpha x)^{\beta-1} \Gamma(1 - \beta, -\alpha x) \quad (3.16)$$

En combinant (3.15) et (3.16), l'expression analytique de la solution de I est obtenue :

$$I = -(-\alpha)^{\beta-1} \Gamma(1 - \beta, -\alpha x)$$

— **Résolution de J :**

La série à l'intérieur de l'intégrale converge uniformément grâce au terme factoriel au

dénominateur. L'intégration terme-à-terme est donc possible :

$$\begin{aligned}
 \int \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^k}{\Gamma(\beta + k + 1)} dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \int \frac{(\alpha x)^k}{\Gamma(\beta + k + 1)} dx \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k x^{k+1}}{(k+1)\Gamma(\beta + k + 1)} \\
 &= \frac{x}{\Gamma(1 + \beta)} {}_2F_2\left(\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 + \beta \end{matrix}\right], \alpha x\right)
 \end{aligned}$$

où ${}_pF_q(\cdot, \cdot, \cdot)$ est la fonction hypergéométrique généralisée (voir annexe A).

La forme finale de l'expression de la fonction temps moyen est donc :

$$m(x) = (-\alpha)^{\beta-1} \Gamma(1 - \beta, -\alpha x) [\theta \alpha^{-\beta} \Gamma(\beta) - C_1] + \frac{\theta x}{\beta} {}_2F_2\left(\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 + \beta \end{matrix}\right], \alpha x\right) + C_2 \quad (3.17)$$

Détermination des constantes

Les conditions aux limites $m(0) = m(c) = 0$ permettent de déterminer les deux constantes C_1 et C_2 en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases}
 (\theta \alpha^{-\beta} \Gamma(\beta) - C_1) \alpha^{\beta-1} \Gamma(1 - \beta) + C_2 = 0 \\
 (\theta \alpha^{-\beta} \Gamma(\beta) - C_1) \alpha^{\beta-1} \Gamma(1 - \beta, \alpha c) + \frac{c\theta}{\beta} {}_2F_2\left(\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 + \beta \end{matrix}\right], \alpha c\right) + C_2 = 0
 \end{cases}$$

Les expressions des constantes C_1 et C_2 sont donc :

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \alpha^{-\beta} \theta \Gamma(\beta) + \frac{\alpha c \theta (-\alpha)^{-\beta}}{\beta \gamma (1 - \beta, \alpha c)} {}_2F_2\left(\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 + \beta \end{matrix}\right], \alpha c\right) \\
 C_2 &= -\frac{c \theta \Gamma(1 - \beta)}{\beta \gamma (1 - \beta, \alpha c)} {}_2F_2\left(\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 + \beta \end{matrix}\right], \alpha c\right)
 \end{aligned} \quad (3.18)$$

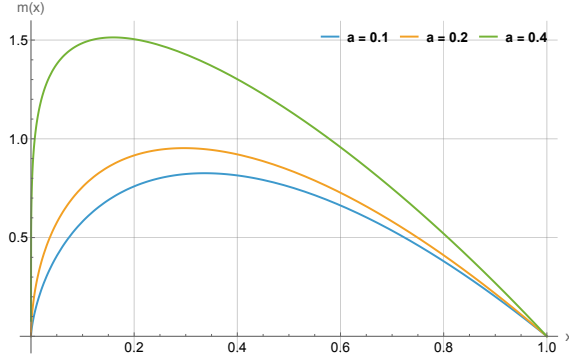
avec α , β et θ définis en (3.8).

3.2.2 Validation de l'expression obtenue

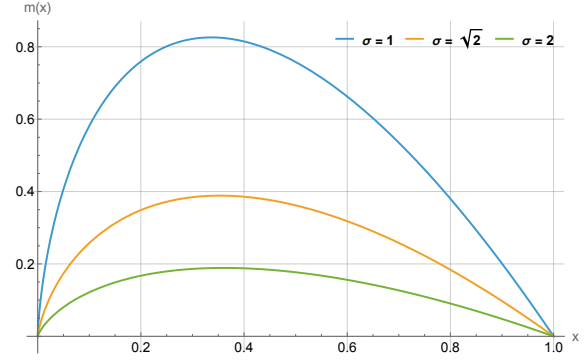
Visualisation

Enfin, il est nécessaire de valider le comportement de la fonction temps moyen $m(x)$ définie par (3.17, 3.18). La fonction est donc tracée pour différentes valeurs des paramètres a , $\forall a \in$

$\{0,1, 0,2, 0,4\}$ et $\sigma, \forall \sigma \in \{1, \sqrt{2}, 2\}$.



(a) Sensibilité de la vitesse a



(b) Sensibilité de la volatilité infinitésimale σ

FIGURE 3.2 Visualisation de la fonction temps moyen $m(x)$.

Analyse

Il est important de noter que les conditions aux limites $m(0) = m(c) = 0$ sont respectées. De plus, cette fonction représente un *temps moyen de premier passage*, elle doit donc être positive pour toute valeur de x dans $[0, c]$. Par ailleurs, une augmentation de la vitesse de retour a entraîne une hausse du temps moyen de sortie de l'intervalle. En effet, plus la force de rappel vers la moyenne est forte (c'est-à-dire que a est élevé), plus une déviation significative et peu probable est nécessaire pour franchir les bornes de l'intervalle. À l'inverse, une augmentation de la volatilité infinitésimale σ diminue le temps moyen de sortie. Cela s'explique naturellement : des fluctuations plus intenses accroissent la probabilité de quitter rapidement l'intervalle. Enfin, l'asymétrie de la fonction s'explique par l'affaiblissement de la composante stochastique du CIR dû au facteur $\sqrt{X(t)}$ dans le coefficient de diffusion qui tend vers 0 lorsque le processus s'approche de la borne inférieure. En effet, plus les fluctuations sont faibles, plus le processus prend du temps à sortir de l'intervalle.

L'expression obtenue pour la fonction de temps moyen de premier passage est ainsi validée.

3.3 Fonction aire moyenne

3.3.1 Résolution du problème

Dérivation de l'équation à résoudre

Il est connu que l'EDO de second ordre régissant la fonction (1.7) est (voir [23]) :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x A''(x) + a(b-x)A'(x) = -x$$

En reprenant les notations introduites en (3.8), l'équation devient :

$$xA''(x) + (\beta - \alpha x)A'(x) = \theta x$$

Il convient de noter que cette équation ressemble beaucoup à celle dérivée en (3.9). La résolution se fera donc de manière semblable.

Réduction d'ordre

En procédant de façon identique à la résolution de l'équation du temps moyen (3.10, 3.11, 3.12), il est possible d'écrire :

$$xu'(x) + (\beta - \alpha x)u(x) = \theta x$$

et donc :

$$u(x) = C_1 x^{-\beta} e^{\alpha x} - \theta \alpha^{-\beta-1} x^{-\beta} e^{\alpha x} \Gamma(\beta + 1, \alpha x)$$

En combinant l'expression dérivée précédemment (3.14) et l'identité suivante [21] :

$$\Gamma(s+1, x) = s\Gamma(s, x) + x^s e^{-x}$$

il est possible de réécrire la solution sous la forme :

$$u(x) = C_1 x^{-\beta} e^{\alpha x} - \theta \alpha^{-\beta-1} \left(\beta x^{-\beta} e^{\alpha x} \Gamma(\beta) \left(1 - (\alpha x)^\beta e^{-\alpha x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^k}{\Gamma(\beta + k + 1)} \right) + 1 \right)$$

Intégration

Pour obtenir la forme explicite de $A(x)$, il suffit d'intégrer $u(x)$ et d'ajouter une deuxième

constante :

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \int u(x)dx + C_2 \\
 &= (C_1 - \theta\alpha^{-\beta-1}\Gamma(\beta+1)) \underbrace{\int x^{-\beta}e^{\alpha x}dx}_I + \frac{\theta\beta\Gamma(\beta)}{\alpha} \underbrace{\int \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^k}{\Gamma(\beta+k+1)}dx}_J - \theta\alpha^{-\beta-1}x + C_2
 \end{aligned}$$

Les deux intégrales résolues précédemment I et J réapparaissent. En injectant leurs solutions analytiques, la forme finale de l'expression de la fonction aire moyenne est obtenue :

$$\begin{aligned}
 A(x) &= (-\alpha)^{\beta-1}\Gamma(1-\beta, -\alpha x)[\theta\alpha^{-\beta-1}\Gamma(\beta+1) - C_1] \\
 &\quad + \frac{x\theta}{\alpha} \left[{}_2F_2\left(\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 2 \\ 1+\beta \end{matrix}\right], \alpha x\right) - \alpha^{-\beta} \right] + C_2
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Détermination des constantes

Les conditions aux limites $A(0) = A(c) = 0$ nous permettent de déterminer les deux constantes C_1 et C_2 en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases}
 (-\alpha)^{\beta-1}\Gamma(1-\beta)(\theta\alpha^{-\beta-1}\Gamma(\beta+1) - C_1) + C_2 = 0 \\
 (-\alpha)^{\beta-1}\Gamma(1-\beta, -\alpha c)[\theta\alpha^{-\beta-1}\Gamma(\beta+1) - C_1] \\
 \quad + \frac{c\theta}{\alpha} \left[{}_2F_2\left(\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 2 \\ 1+\beta \end{matrix}\right], \alpha c\right) - \alpha^{-\beta} \right] + C_2 = 0
 \end{cases}$$

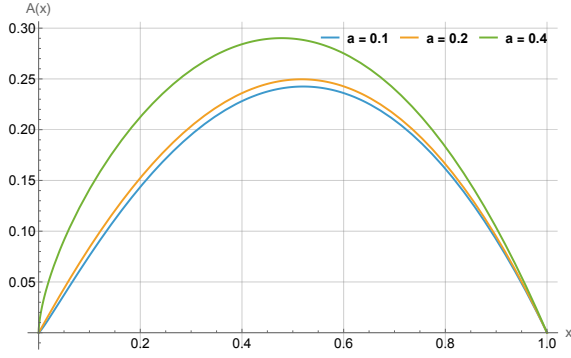
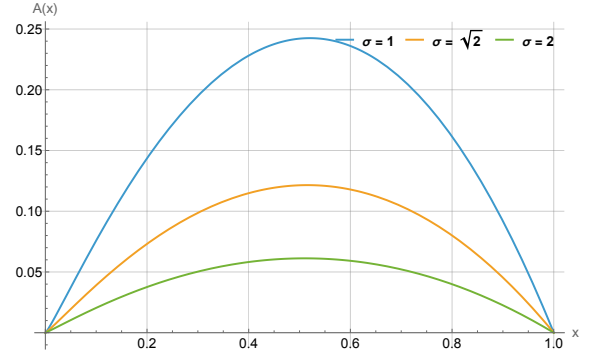
Les constantes C_1 et C_2 s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{1}{\gamma(1-\beta, -\alpha c)} \left[\theta(-\alpha)^{-\beta}\alpha^{-\beta-1} \left\{ c\alpha^{\beta+1} {}_2F_2\left(\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 2 \\ 1+\beta \end{matrix}\right], \alpha c\right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (-\alpha)^{\beta}\Gamma(\beta+1)\gamma(1-\beta, -c\alpha) - \alpha c \right\} \right] \\
 C_2 &= -\frac{c\theta\alpha^{-\beta-1}\Gamma(1-\beta)}{\gamma(1-\beta, -c\alpha)} \left[\alpha^{\beta} {}_2F_2\left(\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 2 \\ 1+\beta \end{matrix}\right], \alpha c\right) - 1 \right]
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

3.3.2 Validation de l'expression obtenue

Visualisation

Par ailleurs, la même démarche de validation est effectuée pour la fonction aire moyenne $A(x)$ définie par (3.19, 3.20).

(a) Sensibilité de la vitesse a (b) Sensibilité de la volatilité infinitésimale σ FIGURE 3.3 Visualisation de la fonction aire moyenne $A(x)$.

Analyse

Il convient de souligner que les conditions aux limites $A(0) = A(c) = 0$ sont respectées. De plus, la fonction est bien positive sur $[0, c]$ comme elle représente une *aire moyenne* sous un processus positif. Par ailleurs, une augmentation de la vitesse de retour a entraîne une augmentation de l'aire moyenne sous le processus avant la sortie de l'intervalle. En effet, une force de rappel plus intense maintient le processus autour de sa moyenne plus longtemps, retardant la sortie et augmentant ainsi l'accumulation totale. À l'inverse, une augmentation de la volatilité infinitésimale σ réduit l'aire moyenne. Des fluctuations plus fortes rendent les sorties plus précoces, limitant la durée pendant laquelle le processus peut contribuer à l'intégrale.

L'expression obtenue pour la fonction aire moyenne est ainsi validée.

CHAPITRE 4 PREMIER PASSAGE EN DIFFUSION AVEC SAUTS

Ce chapitre se concentre sur la variante discontinue du processus CIR. Le processus est donc défini comme suit :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(b - X(s))ds + \int_0^t \sigma \sqrt{X(s)}dW(s) + J(t) \quad (4.1)$$

avec

- $X(0) = x$;
- $W(t)$ un MBS;
- $J(t)$ un processus de sauts (1.2) avec une mesure d'intensité des sauts $\Pi(dy)$.

4.1 Fonction temps moyen — sauts uniformes descendants

4.1.1 Résolution du problème

Dans cette section, la variante du processus CIR avec sauts considérée est celle avec des sauts négatifs modélisés par des variables uniformément distribuées sur $[-x, 0]$. La mesure d'intensité des sauts est donc :

$$\Pi(dy) = \lambda \frac{1}{x} \mathbf{1}_{y \in [-x, 0]} dy$$

Dérivation de l'équation à résoudre

En reprenant ce qui avait été fait en (3.1) pour dériver l'EDO régissant la fonction génératrice des moments de $\tau(x)$ (voir [19] ou [2]), il est possible d'écrire :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x M''(x; \alpha) + a(b - x)M'(x; \alpha) + \lambda \left\{ \frac{1}{x} \int_{-x}^0 M(x + y; \alpha) dy - M(x; \alpha) \right\} - \alpha M(x; \alpha) = 0$$

avec $M(0; \alpha) = M(c; \alpha) = 1$.

Ensuite, en procédant comme dans (3.2), il découle l'équation du temps moyen de sortie de l'intervalle pour le processus avec sauts :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x m''(x) + a(b - x)m'(x) + \lambda \left\{ \frac{1}{x} \int_{-x}^0 m(x + y) dy - m(x) \right\} = -1 \quad (4.2)$$

avec $m(0) = m(c) = 0$.

Soit le changement de variable suivant :

$$\int_{-x}^0 m(x+y)dy = \int_0^x m(z)dz \quad (4.3)$$

La formule de Leibniz (voir annexe B) permet d'écrire :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^x m(z)dz \right) = m(x)$$

Donc, en dérivant les deux côtés de l'équation (4.2) et en éliminant le retour à la moyenne ($a = 0$), il découle une EDO d'ordre 3 :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x m'''(x) + \sigma^2 m''(x) - \lambda m'(x) = -\frac{1}{x} \quad (4.4)$$

Résolution

Soient les valeurs suivantes des paramètres : $\sigma = \sqrt{2}$, $\lambda = 1$ et $c = 1$. *Maple* donne comme solution :

$$m(x) = C_1 I_0(2\sqrt{x}) + C_2 K_0(2\sqrt{x}) + 2 \ln(2\sqrt{x}) + C_3 \quad (4.5)$$

avec C_1 , C_2 , C_3 des constantes à déterminer et $I_0(\cdot)$, $K_0(\cdot)$ les fonctions de Bessel modifiées de première et seconde espèce respectivement (voir annexe A).

Les constantes C_1 , C_2 et C_3 sont déterminées en imposant les conditions aux limites $m(0) = m(1) = 0$ ainsi qu'une condition supplémentaire $m(0,5) = r$. Ensuite, la valeur de r permettant de vérifier l'équation originale (4.2) est trouvée : $r \simeq 0,3281$.

Étude du cas sans sauts

Afin de comparer l'effet de la présence des sauts, il est intéressant de résoudre le même problème en retirant ces derniers. Soit $m_0(x)$ le temps moyen de sortie du processus sans sauts. En considérant les mêmes valeurs des paramètres, l'équation à résoudre devient :

$$x m_0''(x) = -1 \quad (4.6)$$

La solution qui vérifie $m_0(0) = m_0(1) = 0$ est :

$$m_0(x) = -x \ln(x) \quad (4.7)$$

4.1.2 Validation de l'expression obtenue

Les fonctions $m(x)$ (avec sauts) et $m_0(x)$ (sans sauts), données respectivement par (4.5) et (4.7), sont tracées.

Visualisation

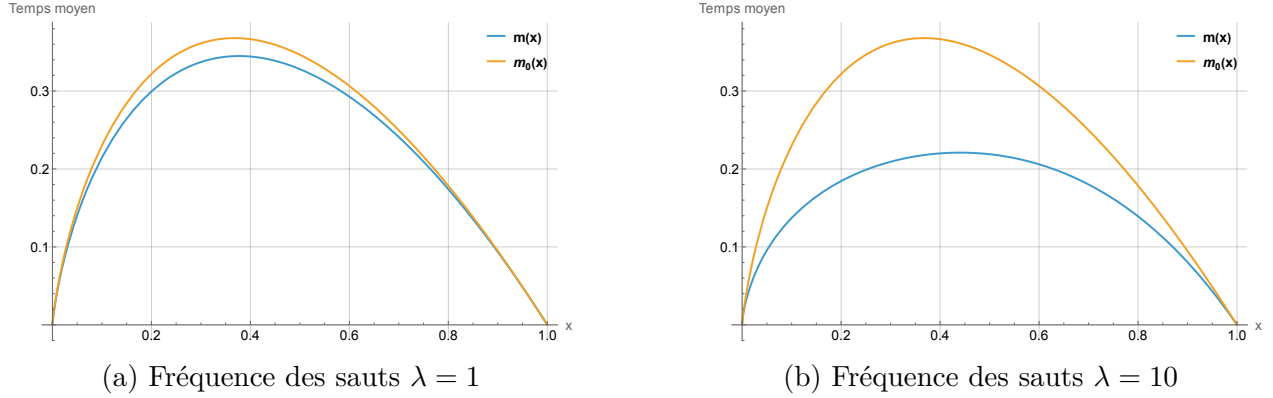


FIGURE 4.1 Visualisation des temps moyens de sortie $m(x)$ et $m_0(x)$.

Analyse

Il convient de souligner que les conditions aux limites $m(0) = m(c) = m_0(0) = m_0(c) = 0$ sont bien vérifiées. De plus, le temps moyen de sortie en présence de sauts ($m(x)$ en bleu) est inférieur à celui observé sans sauts ($m_0(x)$ en orange), ce qui illustre l'accélération du processus induite par ces derniers. En outre, une augmentation de la fréquence des sauts λ induit une diminution du temps moyen de sortie. Ce comportement est attendu comme les sauts augmentent la probabilité que le processus CIR quitte l'intervalle rapidement.

La fonction obtenue pour le temps moyen de sortie avec sauts est donc validée.

4.2 Fonction probabilité de sortie en zéro — sauts uniformes descendants

4.2.1 Résolution du problème

Dans cette section, la variante du processus CIR avec sauts considérée est identique à la précédente (sauts négatifs modélisés par des variables uniformément distribuées sur $[-x, 0]$).

Dérivation de l'équation à résoudre

Il est possible de montrer (voir [2]) que la fonction probabilité de sortie en zéro vérifie l'EDO :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 xp''(x) + a(b-x)p'(x) + \lambda \left\{ \frac{1}{x} \int_{-x}^0 p(x+y)dy - p(x) \right\} = 0 \quad (4.8)$$

sous les conditions $p(0) = 1$ et $p(c) = 0$.

Ensuite, en effectuant le même changement de variable que pour la fonction temps moyen (4.3), en dérivant les deux membres de l'équation et en éliminant le retour à la moyenne ($a = 0$), il découle :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 xp'''(x) + \sigma^2 p''(x) - \lambda p'(x) = 0 \quad (4.9)$$

Résolution

En reprenant les mêmes valeurs des paramètres ($\sigma = \sqrt{2}$, $\lambda = 1$ et $c = 1$) et en imposant les conditions $p(0) = 1$, $p(1) = 0$ et $p(0.5) = r$, *Maple* donne la solution suivante :

$$p(x) = \frac{I_0(2) - I_0(2\sqrt{x})}{I_0(2) - 1} \quad (4.10)$$

avec $I_0(\cdot)$ la fonction de Bessel modifiée de première espèce (voir annexe A) et $r \simeq 0,5567$.

Étude du cas sans sauts

Dans la même logique, le même problème en l'absence de sauts est résolu pour $p_0(x) = \mathbb{P}[X(\tau(x)) = 0]$. L'équation (4.9) devient :

$$xp_0''(x) = 0$$

La solution qui vérifie $p_0(0) = 1$ et $p_0(1) = 0$ est :

$$p_0(x) = 1 - x \quad (4.11)$$

4.2.2 Validation de l'expression obtenue

Les fonctions $p(x)$ (avec sauts) et $p_0(x)$ (sans sauts), correspondant respectivement aux expressions (4.10) et (4.11), sont représentées graphiquement.

Visualisation

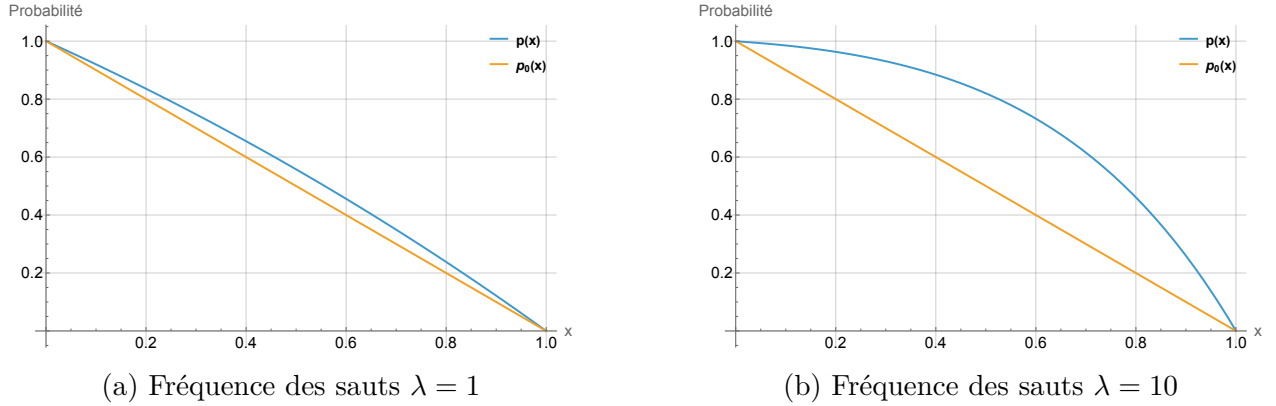


FIGURE 4.2 Visualisation des probabilités de sortir en zéro $p(x)$ et $p_0(x)$.

Analyse

D'abord, les conditions aux limites sont correctement satisfaites, à savoir $p(0) = p_0(0) = 1$ et $p(c) = p_0(c) = 0$. Ensuite, les sauts étant négatifs, ils favorisent une sortie par la borne inférieure. La probabilité de franchissement par zéro est donc plus élevée dans le cas avec sauts ($p(x)$ en bleu). Enfin, une augmentation de la fréquence des sauts λ entraîne une augmentation considérable de la probabilité de sortir par zéro. En effet, la multiplication des sauts tend à entraîner le processus vers la borne inférieure.

Ces résultats permettent donc de valider l'expression obtenue pour la probabilité de sortie en zéro.

4.3 Fonction dépassement moyen — sauts exponentiels ascendants

4.3.1 Formulation générale du problème

Théorème 1. Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus de diffusion à sauts vérifiant les conditions d'unicité trajectorielle (voir annexe D), et défini par :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(X(s)) ds + \int_0^t \sigma(X(s)) dW(s) + J(t)$$

où $J(t)$ est un processus de sauts (1.2) associé à une mesure d'intensité $\Pi(dy)$. Alors, la fonction $D(x)$ (1.9), représentant le dépassement moyen au-dessus de la frontière c au temps

du premier passage $\tau(x)$ (1.4), vérifie l'équation suivante :

$$\mathcal{L}D(x) = - \int_{c-x}^{+\infty} (x+y-c) \Pi(dy) \quad (4.12)$$

avec $D(0) = D(c) = 0$ et $\mathcal{L}$ le générateur infinitésimal du processus (voir annexe C).

Démonstration. Soit $f(x) = (x-c)_+ \in C^2([0, c])$ la fonction mesurant un dépassement. En appliquant la formule de Dynkin (voir annexe B), il est possible d'écrire :

$$\mathbb{E}[f(X(\tau(x)))] = f(x) + \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau(x)} \mathcal{L}f(X(s)) ds \right] \quad (4.13)$$

Pour $x \in (0, c)$:

$$\begin{aligned} - f(x) &= (x-c)_+ = 0 \\ - f'(x) &= \mathbb{1}_{x \geq c} = 0 \implies f''(x) = 0 \end{aligned}$$

Le générateur infinitésimal (voir annexe C) devient pour $x \in (0, c)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(x) &= \frac{1}{2} \sigma^2(x) f''(x) + \mu(x) f'(x) + \int_{\mathbb{R}} [f(x+y) - f(x)] \Pi(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (x+y-c)_+ \Pi(dy) \\ &= \int_{c-x}^{+\infty} (x+y-c) \Pi(dy) \end{aligned}$$

Le dépassement moyen est donc :

$$D(x) := \mathbb{E}[(X(\tau(x)) - c)_+] \equiv \mathbb{E}[f(X(\tau(x)))] = \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau(x)} U(X(s)) ds \right]$$

avec :

$$U(x) := \int_{c-x}^{+\infty} (x+y-c) \Pi(dy)$$

Or, Abundo [23] a montré que $D(x)$ vérifie :

$$\mathcal{L}D(x) = -U(x) \quad (4.14)$$

avec $D(0) = D(c) = 0$. □

4.3.2 Sauts exponentiels ascendants

Proposition 1. *Sous les mêmes hypothèses que précédemment, et en supposant que les sauts suivent une loi exponentielle de paramètre $\nu > 0$ avec un taux d'arrivée $\lambda > 0$, la fonction*

$D(x)$ (1.9) vérifie l'équation différentielle homogène d'ordre trois suivante :

$$\begin{aligned} \sigma(x)^2 D'''(x) + D''(x) [2\mu(x) + \sigma(x)(2\sigma'(x) - \nu\sigma(x))] \\ - 2D'(x) [\lambda - \mu'(x) + \nu\mu(x)] = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

avec $D(0) = D(c) = 0$.

Démonstration. Si la mesure d'intensité s'écrit :

$$\Pi(dy) := \lambda \nu e^{-\nu y} \mathbf{1}_{y \geq 0} dy$$

alors, l'équation (4.14) devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma^2(x) D''(x) + \mu(x) D'(x) + \lambda \int_0^\infty [D(x+y) - D(x)] \nu e^{-\nu y} dy \\ = -\lambda \int_{c-x}^{+\infty} (x+y-c) \nu e^{-\nu y} dy \end{aligned} \quad (4.16)$$

D'abord, l'intégrale peut être séparée en deux :

$$\lambda \int_0^\infty [D(x+y) - D(x)] \nu e^{-\nu y} dy = \lambda \int_0^\infty D(x+y) \nu e^{-\nu y} dy - \lambda D(x)$$

Ensuite, par définition de la fonction dépassement moyen (1.9), $D(x) = 0$ pour tout $x > c$. Cela permet de réduire l'intervalle d'intégration :

$$\lambda \int_0^\infty D(x+y) \nu e^{-\nu y} dy = \lambda \int_0^{c-x} D(x+y) \nu e^{-\nu y} dy$$

Alors, l'équation (4.16) devient :

$$\frac{1}{2} \sigma^2(x) D''(x) + \mu(x) D'(x) + \lambda \int_0^{c-x} D(x+y) \nu e^{-\nu y} dy - \lambda D(x) = -\lambda \int_{c-x}^{+\infty} (x+y-c) \nu e^{-\nu y} dy$$

Le terme de droite s'écrit :

$$-\lambda \int_{c-x}^{+\infty} (x+y-c) \Pi(dy) = \frac{-\lambda}{\nu e^{\nu c}} e^{\nu x}$$

L'équation devient alors :

$$\frac{1}{2} \sigma^2(x) D''(x) + \mu(x) D'(x) + \lambda \int_0^{c-x} D(x+y) \nu e^{-\nu y} dy - \lambda D(x) = -\frac{\lambda}{\nu e^{\nu c}} e^{\nu x} \quad (4.17)$$

Le changement de variable $z = x + y$ donne :

$$\begin{aligned}\int_0^{c-x} D(x+y)\nu e^{-\nu y} dy &= \int_x^c D(z)\nu e^{-\nu(z-x)} dz \\ &= \nu e^{\nu x} \int_x^c D(z)e^{-\nu z} dz\end{aligned}$$

Soit :

$$\Phi(x) := \int_x^c D(z)e^{-\nu z} dz$$

L'équation (4.17) devient :

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)D''(x) + \mu(x)D'(x) + \lambda\nu e^{\nu x}\Phi(x) - \lambda D(x) = -\frac{\lambda}{\nu e^{\nu c}}e^{\nu x} \quad (4.18)$$

D'une part, la dérivée de $\Phi(x)$ est (règle de Leibniz, voir annexe B) :

$$\Phi'(x) = -D(x)e^{-\nu x} \implies D(x) = -e^{\nu x}\Phi'(x) \quad (4.19)$$

D'autre part, les dérivées de $D(x)$ s'écrivent :

$$\begin{aligned}D'(x) &= -\nu e^{\nu x}\Phi'(x) - e^{\nu x}\Phi''(x) \\ D''(x) &= -\nu^2 e^{\nu x}\Phi'(x) - 2\nu e^{\nu x}\Phi''(x) - e^{\nu x}\Phi'''(x)\end{aligned} \quad (4.20)$$

En injectant (4.20) dans (4.18) et en éliminant les termes $-e^{\nu x}$, il découle l'EDO d'ordre 3 suivante :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sigma^2(x)\Phi'''(x) + \Phi''(x)\left[\nu\sigma^2(x) + \mu(x)\right] \\ &+ \Phi'(x)\left[\frac{1}{2}\nu^2\sigma^2(x) + \nu\mu(x) - \lambda\right] - \lambda\nu\Phi(x) = \frac{\lambda}{\nu e^{\nu c}}\end{aligned} \quad (4.21)$$

Comme $D(x)$ ne dépend que de $\Phi'(x)$ (4.19), il est intéressant de dériver l'équation ci-dessus (4.21) en posant $\phi(x) = \Phi'(x)$ pour obtenir l'EDO homogène suivante :

$$\begin{aligned}&\sigma(x)^2\phi'''(x) + 2\phi''(x)\left[\mu(x) + \sigma(x)(\sigma'(x) + \nu\sigma(x))\right] \\ &+ \phi'(x)\left[-2\lambda + 2\mu'(x) + 2\nu\mu(x) + \nu\sigma(x)(4\sigma'(x) + \nu\sigma(x))\right] \\ &+ 2\nu\phi(x)\left[-\lambda + \mu'(x) + \nu\sigma(x)\sigma'(x)\right] = 0\end{aligned} \quad (4.22)$$

avec $D(x) = -e^{\nu x}\Phi'(x) = -e^{\nu x}\phi(x)$ et $\phi(0) = \phi(c) = 0$.

Ensuite, il est possible de montrer que $\phi_1(x) = e^{-\nu x}$ est une solution particulière de (4.22).

La solution générale s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
 D(x) &= -e^{\nu x} \phi(x) \\
 &= -e^{\nu x} \phi_1(x) u(x) \\
 &= -e^{\nu x} e^{-\nu x} u(x) \\
 &= -u(x)
 \end{aligned}$$

avec $u(x)$ une fonction à déterminer. En effectuant un changement de variable avec la solution particulière et en échangeant $u(x)$ par $-D(x)$, l'EDO homogène d'ordre 3 suivante est obtenue :

$$\begin{aligned}
 \sigma(x)^2 D'''(x) + D''(x) [2\mu(x) + \sigma(x)(2\sigma'(x) - \nu\sigma(x))] \\
 - 2D'(x) [\lambda - \mu'(x) + \nu\mu(x)] = 0
 \end{aligned}$$

avec $D(0) = D(c) = 0$. □

Cette équation permet donc de résoudre le problème pour tout processus $\{X(t), t \geq 0\}$. Dans la suite, le processus CIR avec sauts exponentiels est considéré.

4.3.3 Application au processus CIR

En reprenant les termes de dérive et de diffusion du processus CIR (1.3), l'équation (4.15) devient :

$$\sigma^2 x D'''(x) + D''(x) [2a(b-x) + \sigma^2 - \nu\sigma^2 x] - 2D'(x) [a\nu(b-x) + a + \lambda] = 0$$

Cependant, une expression explicite pour $D(x)$, si elle existe, est très difficile à obtenir. Cela rend donc la résolution du problème général assez compliquée.

Résolution pour $a = 0$

En considérant le cas du processus CIR à sauts sans retour à la moyenne ($a = 0$), les équations (4.15, 4.17) deviennent :

$$\begin{aligned}
 x D'''(x) - (\nu x - 1) D''(x) - 2 \frac{\lambda}{\sigma^2} D'(x) &= 0 \\
 \frac{1}{2} \sigma^2 x D''(x) + \lambda \int_0^{c-x} D(x+y) \nu e^{-\nu y} dy - \lambda D(x) &= -\frac{\lambda}{\nu} e^{\nu(x-c)}
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Il est intéressant de noter que l'EDO d'ordre 3 ci-dessus est une équation de Kummer pour $D'(x)$ dont la solution est connue (voir [20]) :

$$D'(x) = C_1 \Phi\left(\frac{2\lambda}{\nu\sigma^2}, 1, \frac{x}{\nu}\right) + C_2 \Psi\left(\frac{2\lambda}{\nu\sigma^2}, 1, \frac{x}{\nu}\right) \quad (4.24)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes à déterminer, et $\Phi(\cdot, \cdot, \cdot)$ et $\Psi(\cdot, \cdot, \cdot)$ sont les fonctions hypergéométriques confluentes de première et seconde espèce (voir annexe A). Enfin, l'expression pour $D(x)$ est obtenue en intégrant l'expression (4.24) avec *Mathematica* :

$$\begin{aligned} D(x) &= \int D'(x)dx + C_3 \\ &= C_1 x \Phi\left(\frac{2\lambda}{\nu\sigma^2}, 2, \frac{x}{\nu}\right) + C_2 \frac{\nu^2 \sigma^2}{\nu\sigma^2 - 2\lambda} \Psi\left(\frac{2\lambda}{\nu\sigma^2} - 1, 0, \frac{x}{\nu}\right) + C_3 \end{aligned}$$

Détermination des constantes

Les conditions aux limites $D(0) = D(c) = 0$ sont imposées ainsi qu'une troisième condition $D(c/2) = r$ pour obtenir le système suivant :

$$\begin{cases} C_3 + C_2 \frac{\nu^2 \sigma^2}{\nu\sigma^2 - 2\lambda} \left(\frac{2\lambda}{\nu\sigma^2}\right)_{1 - \frac{2\lambda}{\nu\sigma^2}} = 0 \\ C_1 c \Phi\left(\frac{2\lambda}{\nu\sigma^2}, 2, \frac{c}{\nu}\right) + C_2 \frac{\nu^2 \sigma^2}{\nu\sigma^2 - 2\lambda} \Psi\left(\frac{2\lambda}{\nu\sigma^2} - 1, 0, \frac{c}{\nu}\right) + C_3 = 0 \\ C_1 \frac{c}{2} \Phi\left(\frac{2\lambda}{\nu\sigma^2}, 2, \frac{c}{2\nu}\right) + C_2 \frac{\nu^2 \sigma^2}{\nu\sigma^2 - 2\lambda} \Psi\left(\frac{2\lambda}{\nu\sigma^2} - 1, 0, \frac{c}{2\nu}\right) + C_3 = r \end{cases}$$

avec $(a)_n$ le symbole de Pochhammer (voir annexe A). En résolvant ce système, les trois constantes C_1 , C_2 et C_3 sont déterminées. Il en découle l'expression finale pour la fonction de dépassement moyen :

$$D(x) = \frac{2r \left\{ C_0 x \phi(x) + c \phi(c) \left[x \Gamma\left(\frac{2\lambda}{\nu\sigma^2}\right) \psi(x) - \nu \right] \right\}}{c \left\{ C_0 \phi\left(\frac{c}{2}\right) + \phi(c) \left[c \Gamma\left(\frac{2\lambda}{\nu\sigma^2}\right) \psi\left(\frac{c}{2}\right) - 2\nu \right] \right\}} \quad (4.25)$$

avec :

$$\begin{aligned} \phi(z) &:= \Phi\left(\frac{2\lambda}{\nu\sigma^2}, 2, \frac{z}{\nu}\right) \\ \psi(z) &:= \Psi\left(\frac{2\lambda}{\nu\sigma^2}, 2, \frac{z}{\nu}\right) \\ C_0 &:= \nu - c \Gamma\left(\frac{2\lambda}{\nu\sigma^2}\right) \psi(c) \end{aligned}$$

et où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction gamma (voir annexe A). Dans certains cas, il est possible de déterminer r en fixant λ, ν, σ et c et en injectant l'expression ci-dessus dans l'EID en (4.23).

Pour $\lambda = \nu = \sigma = c = 1$, la fonction se simplifie considérablement :

$$D(x) = xe^x [\text{Ei}(-1) - \text{Ei}(-x)] \quad (4.26)$$

avec $\text{Ei}(x)$ la fonction intégrale exponentielle (voir annexe A).

4.3.4 Validation de l'expression obtenue

Visualisation

Afin de valider le résultat, l'expression obtenue pour $D(x)$ (4.26) est comparée à des simulations (voir annexe F pour plus de détails). Il est aussi intéressant de visualiser l'effet de la variation de la fréquence des sauts.

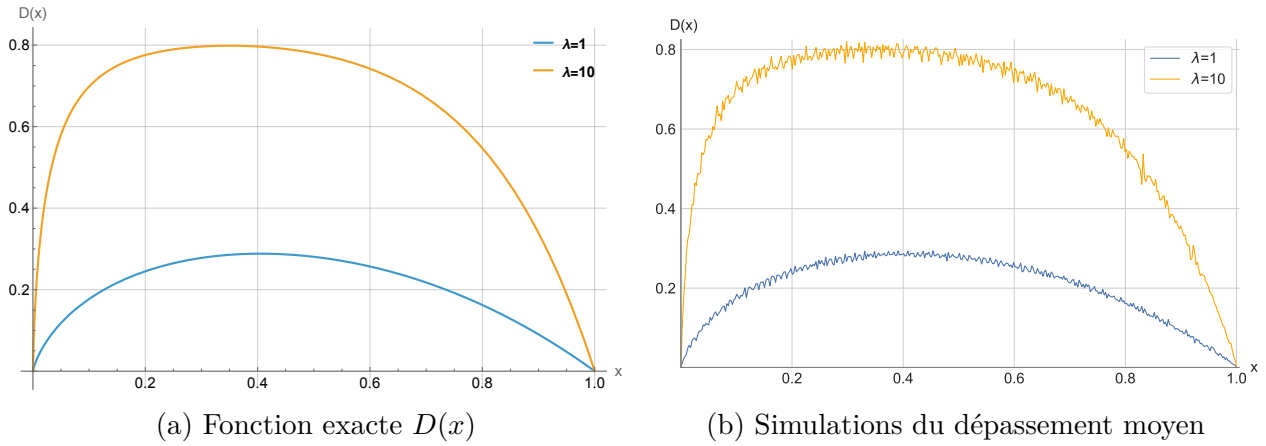


FIGURE 4.3 Visualisation de la fonction dépassement moyen $D(x)$.

Analyse

D'abord, les conditions aux limites $D(0) = D(c) = 0$ sont respectées. Ensuite, la fonction représente un *dépassement moyen*, elle doit donc être positive pour toute valeur x dans $[0, c]$. De plus, lorsque la fréquence des sauts λ augmente, le dépassement moyen augmente. En effet, la multiplication de ces derniers augmente la probabilité de dépasser la frontière supérieure. Enfin, l'allure et l'échelle de $D(x)$ (4.3a) coïncident parfaitement avec la courbe empirique (4.3b). Les légères oscillations observées sur la courbe empirique résultent de la méthode numérique utilisée et peuvent être considérées comme négligeables.

La fonction dépassement moyen $D(x)$ est donc validée.

CHAPITRE 5 COMMANDE OPTIMALE STOCHASTIQUE

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème de commande optimale défini dans la section (1.2).

5.1 Formalisation du problème

Dérivation de l'équation de programmation dynamique

En reprenant la définition (1.12) et en appliquant le principe d'optimalité de Bellman, il découle :

$$F(x) = \inf_{u(x)} \mathbb{E} \left[\int_0^{\delta t} \left(\frac{1}{2} q[X_u(s)] u^2[X_u(s)] + r[X_u(s)] \right) ds + F(X_u(\delta t)) \right] \quad (5.1)$$

D'une part, pour δt petit, il est possible d'écrire :

$$\int_0^{\delta t} \left(\frac{1}{2} q[X_u(s)] u^2[X_u(s)] + r[X_u(s)] \right) ds = \left(\frac{1}{2} q(x) u(x)^2 + r(x) \right) \delta t + o(\delta t) \quad (5.2)$$

D'autre part, un développement de Taylor combiné avec la formule d'Itô (voir annexe B) appliquée au processus contrôlé de dynamique (1.10) permet d'écrire (en supposant que $F \in C^2$) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F(X_u(\delta t))] &= F(x) + \mathbb{E}[dF(X_u(\delta t))] + o(\delta t) \\ &= F(x) + \mathbb{E} \left[F'(X_u(\delta t)) dX_u(\delta t) + \frac{1}{2} F''(X_u(\delta t)) d\langle X_u \rangle_{\delta t} \right] + o(\delta t) \\ &= F(x) + \mathbb{E} \left[F'(X_u(\delta t)) \left\{ \left[a(b - X_u(\delta t)) + b(X_u(\delta t)) u(X_u(\delta t)) \right] d\delta t \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma \sqrt{X_u(\delta t)} dW(\delta t) \right\} + \frac{1}{2} F''(X_u(\delta t)) \sigma^2 X(\delta t) d\delta t \right] \\ &= F(x) + [a(b - x) + b(x)u(x)] F'(x) \delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 x F''(x) \delta t + o(\delta t) \end{aligned} \quad (5.3)$$

avec $X_u(\delta t) = x$ (car δt petit), $\mathbb{E}[dW(\delta t)] = 0$ et où $\langle X_u \rangle_t$ dénote la variation quadratique du processus $X_u(t)$ (voir annexe E).

En injectant (5.2) et (5.3) dans (5.1), il découle :

$$F(x) = \inf_{u(x)} \left\{ \left(\frac{1}{2}q(x)u(x)^2 + r(x) \right) \delta t + F(x) + [a(b-x) + b(x)u(x)]F'(x)\delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 x F''(x)\delta t + o(\delta t) \right\} \quad (5.4)$$

Ensuite, en retranchant $F(x)$ des deux côtés, en divisant partout par δt et en prenant la limite lorsque $\delta t \rightarrow 0$, l'équation de programmation dynamique est obtenue :

$$0 = \min_{u(x)} \left\{ r(x) + \frac{1}{2}q(x)u^2(x) + [a(b-x) + b(x)u(x)]F'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x F''(x) \right\} \quad (5.5)$$

Détermination de la commande optimale et dérivation de l'équation associée

La minimisation à faire dans (5.5) est en fonction de $u(x)$. Le terme à minimiser est :

$$\frac{1}{2}q(x)u(x)^2 + b(x)u(x)F'(x) \quad (5.6)$$

dont la dérivée par rapport à $u(x)$ s'écrit :

$$q(x)u(x) + b(x)F'(x) \quad (5.7)$$

L'expression de $u(x)$ qui annule (5.7) est :

$$u^*(x) = -\frac{b(x)}{q(x)}F'(x) \quad (5.8)$$

Par ailleurs, la dérivée seconde de (5.6) est $q(x)$ qui est positive par définition (1.2). L'expression de $u^*(x)$ obtenue en (5.8) réalise donc bien un minimum global. Il s'agit ainsi de la commande optimale.

En injectant (5.8) dans (5.5), l'équation de Hamilton–Jacobi–Bellman est obtenue, régissant la fonction valeur associée à la commande optimale :

$$r(x) - \frac{b(x)^2}{2q(x)}[F'(x)]^2 + a(b-x)F'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x F''(x) = 0 \quad (5.9)$$

avec $F(0) = F(c) = 0$ et $r(x) \neq 0, b(x) \neq 0, q(x) > 0$.

5.2 Résolution du problème sous différentes configurations

5.2.1 P1 — Résolution

Résolution du problème

Il faut donc procéder à la résolution de l'équation (5.9). Whittle [8] a montré que la transformation :

$$F(x) = -K \log(\varphi(x))$$

avec $\varphi(0) = \varphi(c) = 1$ permet de linéariser l'équation si :

$$Kb^2(x) = \sigma^2 x q(x), \quad K \in \mathbb{R} \quad (5.10)$$

L'équation devient :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x \varphi''(x) + a(b-x)\varphi'(x) - \frac{r(x)}{K}\varphi(x) = 0 \quad (5.11)$$

Dans le cas où le terme suivant est constant :

$$\frac{r(x)}{K} \equiv k \in \mathbb{R} \quad \forall x \quad (5.12)$$

l'équation (5.11) est identique à celle de la FGM $M(x; \alpha)$ pour :

$$\alpha \equiv \frac{r(x)}{K}$$

Cela permet de résoudre une multitude de problèmes en supposant différentes formes pour $r(x)$, $b(x)$ et $q(x)$ tout en vérifiant les conditions (5.10, 5.12).

Soit les coûts suivants :

- $r(x) = \rho$: coût immédiat constant, indépendant de l'état x et de la commande ;
- $b(x) = \beta x$: coût de la commande proportionnel à x sur la dynamique ;
- $q(x) = \kappa x$: poids pénalisant l'intensité de la commande, linéaire avec x .

Cela donne :

$$K \equiv \frac{\kappa \sigma^2}{\beta^2}$$

L'équation devient :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x \varphi''(x) + a(b-x)\varphi'(x) - \frac{\rho \beta^2}{\kappa \sigma^2} \varphi(x) = 0 \quad (5.13)$$

La solution est :

$$\varphi(x) = C_1 \Phi\left(\frac{\rho\beta^2}{a\kappa\sigma^2}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ax}{\sigma^2}\right) + C_2 \Psi\left(\frac{\rho\beta^2}{a\kappa\sigma^2}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ax}{\sigma^2}\right)$$

Les conditions aux limites $\varphi(0) = \varphi(1) = 1$ permettent de déterminer les constantes C_1 et C_2 :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\Psi\left(\frac{\beta^2\rho}{a\kappa\sigma^2}, \frac{2ab}{\sigma^2}, 0\right) - \Psi\left(\frac{\beta^2\rho}{a\kappa\sigma^2}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ac}{\sigma^2}\right)}{\Psi\left(\frac{\beta^2\rho}{a\kappa\sigma^2}, \frac{2ab}{\sigma^2}, 0\right) \Phi\left(\frac{\beta^2\rho}{a\kappa\sigma^2}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ac}{\sigma^2}\right) - \Psi\left(\frac{\beta^2\rho}{a\kappa\sigma^2}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ac}{\sigma^2}\right)} \\ C_2 &= \frac{\Phi\left(\frac{\beta^2\rho}{a\kappa\sigma^2}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ac}{\sigma^2}\right) - 1}{\Psi\left(\frac{\beta^2\rho}{a\kappa\sigma^2}, \frac{2ab}{\sigma^2}, 0\right) \Phi\left(\frac{\beta^2\rho}{a\kappa\sigma^2}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ac}{\sigma^2}\right) - \Psi\left(\frac{\beta^2\rho}{a\kappa\sigma^2}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ac}{\sigma^2}\right)} \end{aligned} \quad (5.14)$$

L'expression analytique de la fonction valeur est donc :

$$F(x) = -\frac{\kappa\sigma^2}{\beta^2} \log \left[C_1 \Phi\left(\frac{\rho\beta^2}{a\kappa\sigma^2}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ax}{\sigma^2}\right) + C_2 \Psi\left(\frac{\rho\beta^2}{a\kappa\sigma^2}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ax}{\sigma^2}\right) \right] \quad (5.15)$$

Par ailleurs, la commande optimale est :

$$u^*(x) = -\frac{\beta}{\kappa} F'(x) \quad (5.16)$$

L'expression complète de la fonction $u^*(x)$ étant assez lourde en raison de la dérivée de $F(x)$, elle ne sera pas présentée dans ce mémoire.

5.2.2 P1 — Visualisation

La fonction valeur $F(x)$ (5.15, 5.14) et la commande optimale (5.16) sont tracés. D'abord, tous les paramètres des coûts sont fixés : $\rho = \beta = \kappa = 1$.

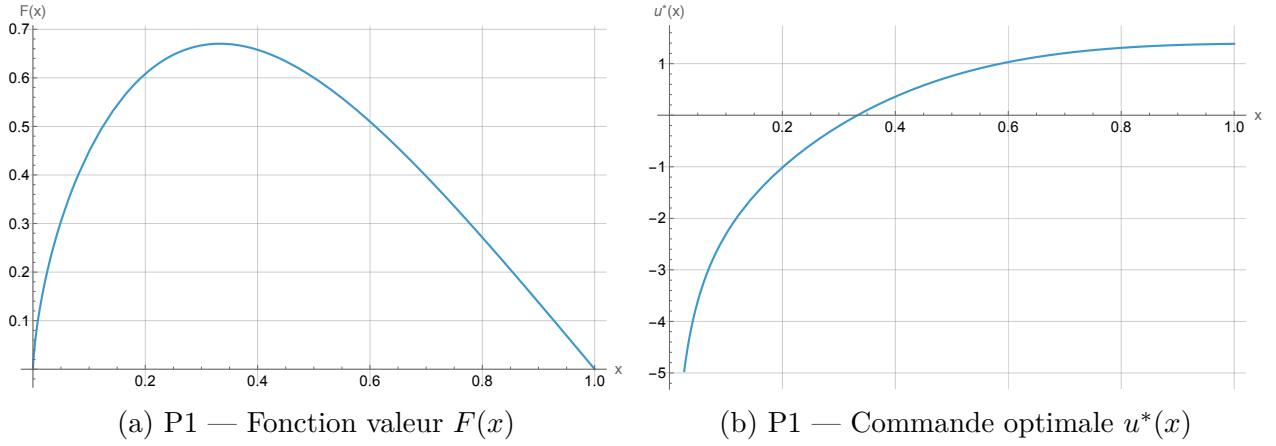


FIGURE 5.1 P1 — Visualisation de la fonction valeur et de la commande optimale.

De plus, il est intéressant d'analyser la sensibilité de ces fonctions par rapport à la variation des coûts. Les différentes valeurs des paramètres suivants sont évaluées :

- Paramètre du coût immédiat ρ , $\forall \rho \in \{1, 2, 3, 4\}$;
- Paramètre du coût de la commande β , $\forall \beta \in \{1, 2, 3, 4\}$;
- Paramètre du poids pénalisant l'intensité de la commande κ , $\forall \kappa \in \{1, 2, 3, 4\}$.

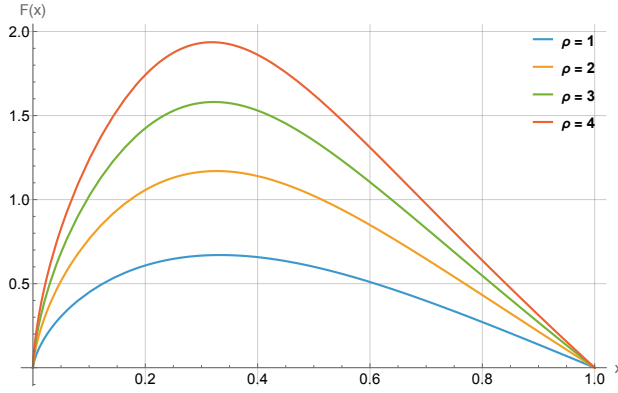
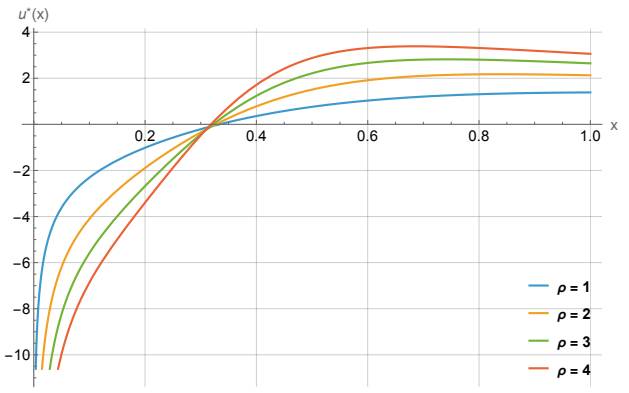
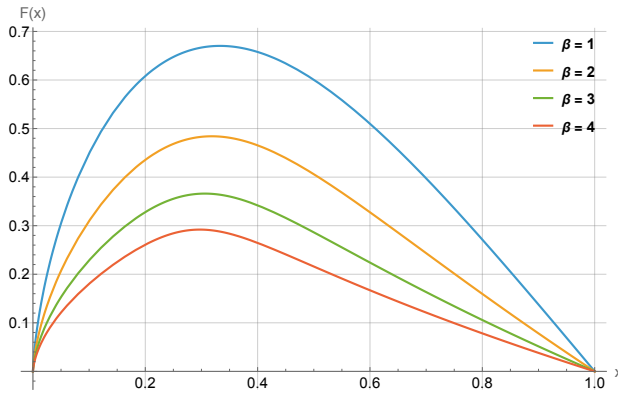
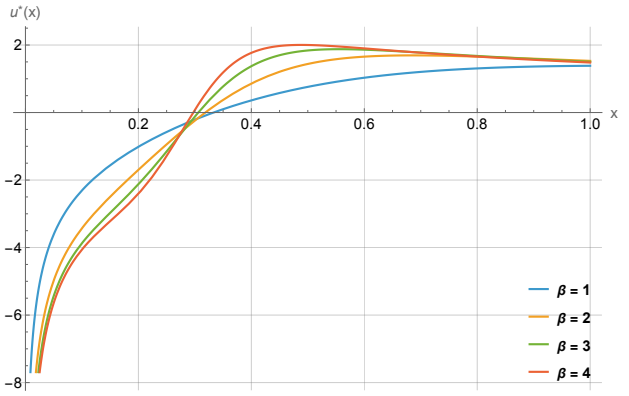
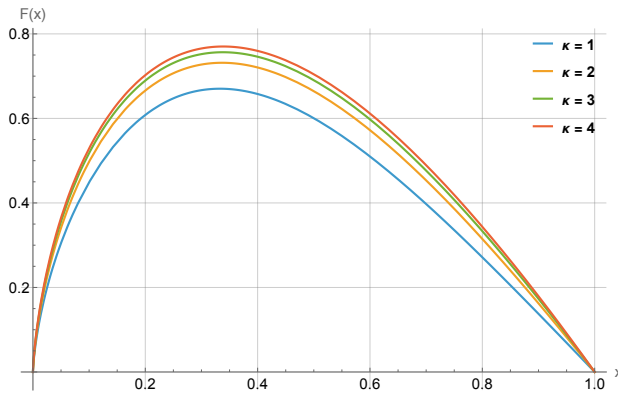
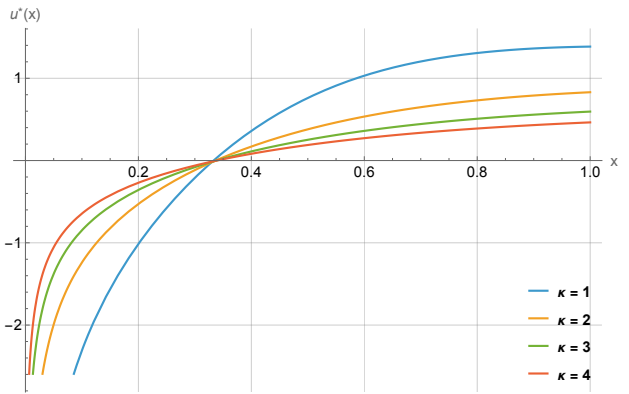
(a) P1 — Fonction valeur $F(x)$, $r(x) = \rho$ (b) P1 — Commande optimale $u^*(x)$, $r(x) = \rho$ (c) P1 — Fonction valeur $F(x)$, $b(x) = \beta x$ (d) P1 — Commande optimale $u^*(x)$, $b(x) = \beta x$ (e) P1 — Fonction valeur $F(x)$, $q(x) = \kappa x$ (f) P1 — Commande optimale $u^*(x)$, $q(x) = \kappa x$

FIGURE 5.2 P1 — Sensibilité de la fonction valeur et de la commande optimale.

Par ailleurs, une simulation d'une trajectoire commandée et d'une trajectoire non commandée est effectuée en utilisant un même tirage aléatoire, afin de permettre une comparaison pertinente entre les deux dynamiques.

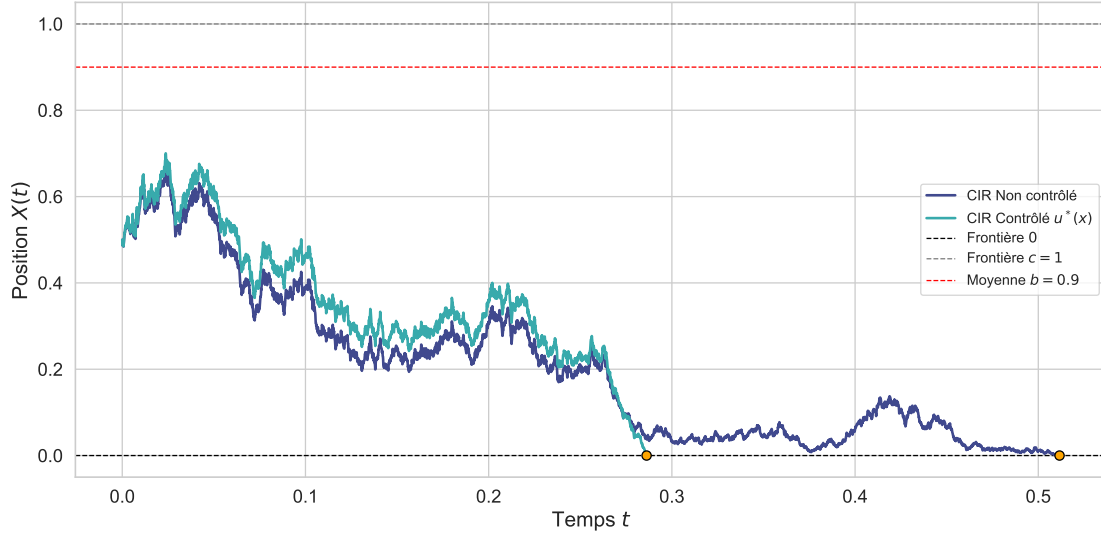


FIGURE 5.3 P1 — Visualisation de l'effet de la commande optimale.

5.2.3 P2 — Résolution

Soit le problème suivant :

- $r(x) = \rho^2 x$: coût immédiat linéaire en x , indépendant de la commande ;
- $b(x) = \beta\sqrt{x}$: coût de la commande proportionnel à $\sqrt{x}$ (dynamique semblable à celle de la diffusion du processus CIR) ;
- $q(x) = \kappa^2$: poids pénalisant l'intensité de la commande constant.

En éliminant le retour à la moyenne ($a = 0$) l'équation (5.9) devient :

$$\rho^2 x - \frac{\beta^2 x}{2\kappa^2} F'(x)^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 x F''(x) = 0$$

Mathematica donne comme solution :

$$F(x) = C_2 - \frac{\kappa^2 \sigma^2}{\beta^2} \log \left[\text{ch} \left(\frac{\sqrt{2} \beta \rho (x - C_1 \kappa^2 \sigma^2)}{\kappa \sigma^2} \right) \right] \quad (5.17)$$

avec $\text{ch}(\cdot)$ la fonction cosinus hyperbolique (voir annexe A). Les conditions aux limites $F(0) = F(c) = 0$ permettent de déterminer les constantes C_1 et C_2 en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} C_2 - \frac{\kappa^2 \sigma^2}{\beta^2} \log \left[\text{ch} \left(\frac{\sqrt{2} \beta \rho (-C_1 \kappa^2 \sigma^2)}{\kappa \sigma^2} \right) \right] = 0 \\ C_2 - \frac{\kappa^2 \sigma^2}{\beta^2} \log \left[\text{ch} \left(\frac{\sqrt{2} \beta \rho (c - C_1 \kappa^2 \sigma^2)}{\kappa \sigma^2} \right) \right] = 0 \end{cases}$$

Les constantes C_1 et C_2 s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{c}{2\kappa^2 \sigma^2} \\ C_2 &= \frac{\kappa^2 \sigma^2}{\beta^2} \log \left[\text{ch} \left(\frac{\beta \rho c}{\sqrt{2} \kappa \sigma^2} \right) \right] \end{aligned}$$

L'expression finale de la fonction valeur est donc :

$$F(x) = \frac{\kappa^2 \sigma^2}{\beta^2} \left(\log \left[\text{ch} \left(\frac{\beta \rho c}{\sqrt{2} \kappa \sigma^2} \right) \right] - \log \left[\text{ch} \left(\frac{\sqrt{2} \beta \rho \left(x - \frac{c}{2} \right)}{\kappa \sigma^2} \right) \right] \right) \quad (5.18)$$

Enfin, la commande optimale associée est :

$$\begin{aligned} u^*(x) &= -\frac{\beta \sqrt{x}}{\kappa^2} F'(x) \\ &= \frac{\sqrt{2} \rho}{\kappa} \sqrt{x} \text{th} \left[\frac{\sqrt{2} \beta \rho \left(x - \frac{c}{2} \right)}{\kappa \sigma^2} \right] \end{aligned} \quad (5.19)$$

avec $\text{th}(\cdot)$ la fonction tangente hyperbolique (voir annexe A).

5.2.4 P2 — Visualisation

D'abord, et comme pour P1, les paramètres des coûts sont fixés à 1 et la fonction valeur (5.18) et la commande optimale (5.19) sont tracées.

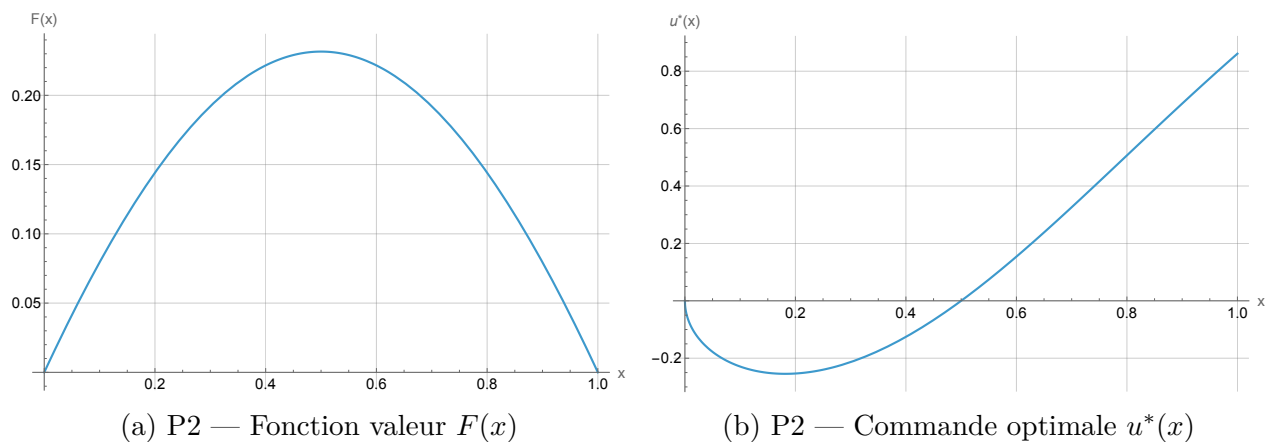


FIGURE 5.4 P2 — Visualisation de la fonction valeur et de la commande optimale.

Ensuite, la sensibilité aux paramètres des coûts est visualisée.

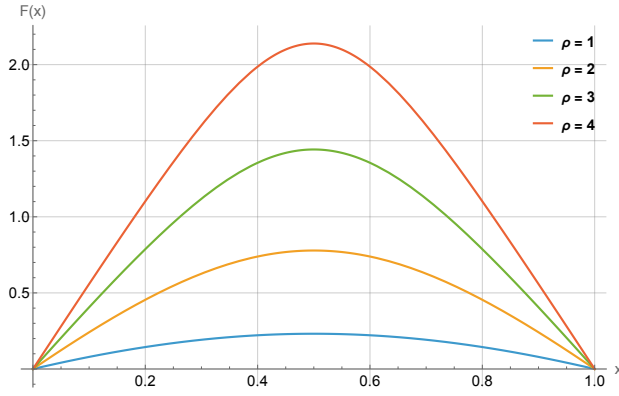
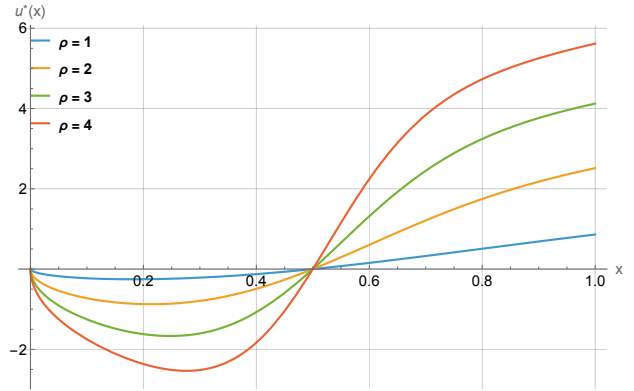
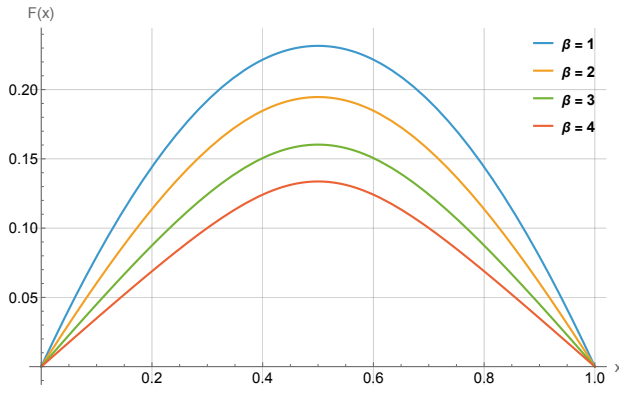
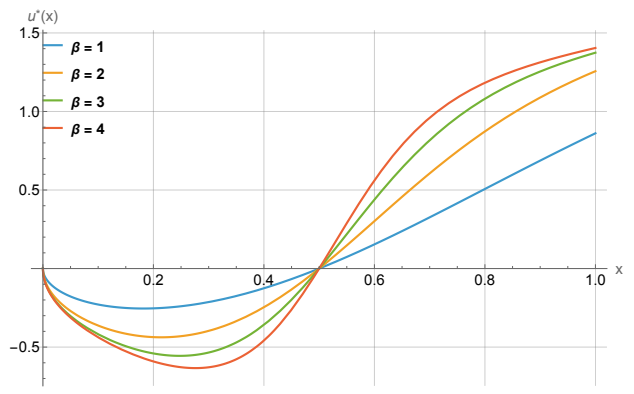
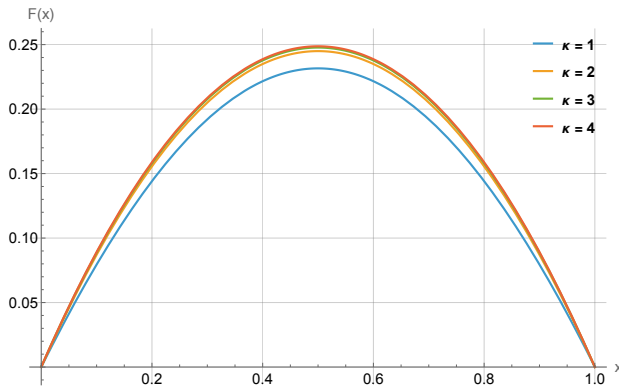
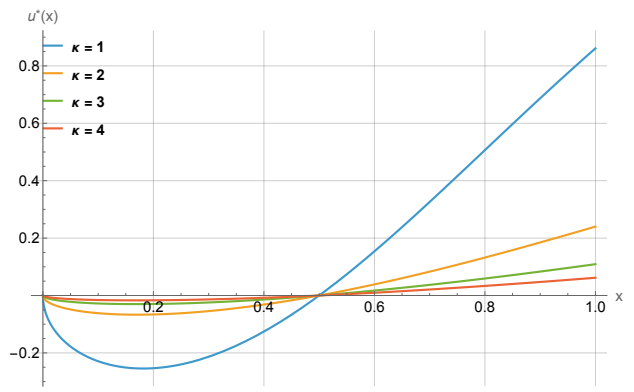
(a) P2 — Fonction valeur $F(x)$, $r(x) = \rho^2 x$ (b) P2 — Commande optimale $u^*(x)$, $r(x) = \rho^2 x$ (c) P2 — Fonction valeur $F(x)$, $b(x) = \beta x^{\frac{1}{2}}$ (d) P2 — Commande optimale $u^*(x)$, $b(x) = \beta x^{\frac{1}{2}}$ (e) P2 — Fonction valeur $F(x)$, $q(x) = \kappa^2$ (f) P2 — Commande optimale $u^*(x)$, $q(x) = \kappa^2$

FIGURE 5.5 P2 — Sensibilité de la fonction valeur et de la commande optimale.

Enfin, une simulation est effectuée avec le même tirage aléatoire.

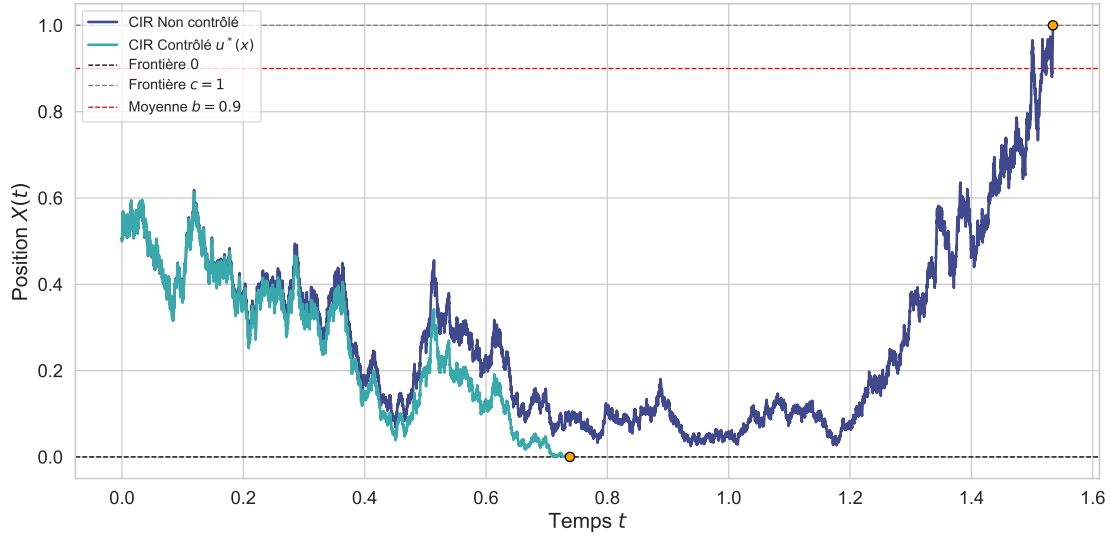


FIGURE 5.6 P2 — Visualisation de l'effet de la commande optimale.

5.2.5 P3 — Résolution

Soit le problème suivant :

- $r(x) = (\rho x)^2$: coût immédiat quadratique en x , indépendant de la commande ;
- $b(x) = \beta x$: coût de la commande linéaire égal à x ;
- $q(x) \equiv \kappa^2$: poids pénalisant l'intensité de la commande constant.

Les conditions (5.10, 5.12) n'étant pas satisfaites, la linéarisation facile n'est pas possible. En éliminant le retour à la moyenne ($a = 0$), l'équation (5.9) se réduit à :

$$(\rho x)^2 - \frac{(\beta x)^2}{2\kappa^2} F'(x)^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 x F''(x) = 0$$

Le logiciel de calcul symbolique *Maple* donne comme solution :

$$F(x) = C_2 + \int_0^x \frac{\sqrt{2}\kappa\rho}{\beta} \operatorname{th}\left(-\frac{\sqrt{2}\beta\rho z^2}{2\kappa\sigma^2} + \sqrt{2}\beta C_1\kappa\rho\right) dz$$

avec C_1 et C_2 des constantes à déterminer. En posant $\sigma = \rho = \beta = \kappa = c = 1$, la solution qui vérifie $F(0) = F(c) = 0$ est :

$$F(x) \simeq \int_0^x -\sqrt{2} \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{2}z^2}{2} - 0,1652\sqrt{2}\right) dz \quad (5.20)$$

La commande optimale est donc :

$$u^*(x) \simeq x\sqrt{2} \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{2}x^2}{2} - 0,1652\sqrt{2}\right) \quad (5.21)$$

5.2.6 P3 — Visualisation

La fonction valeur (5.20) ainsi que la commande optimale (5.21) sont tracés.

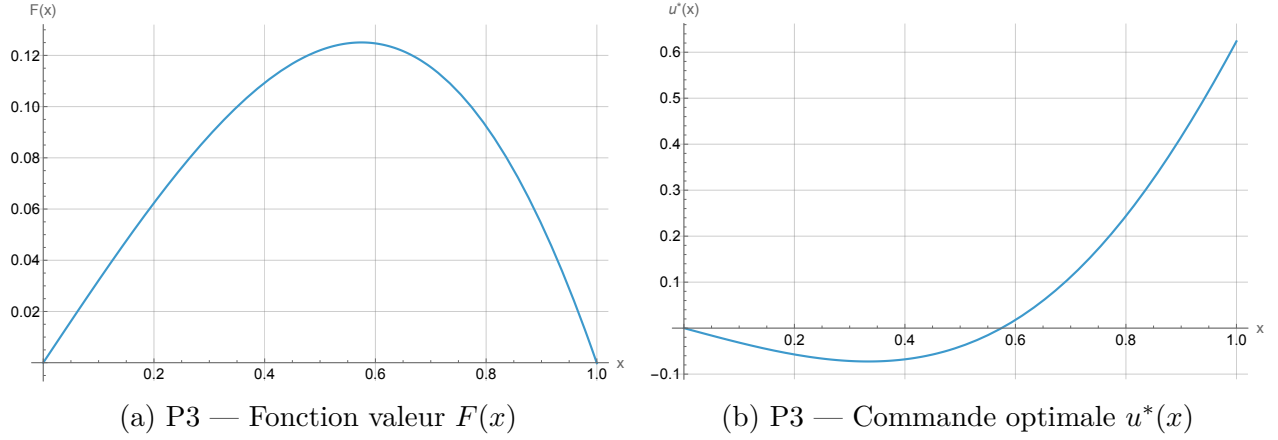


FIGURE 5.7 P3 — Visualisation de la fonction valeur et de la commande optimale.

Une simulation est aussi effectuée.

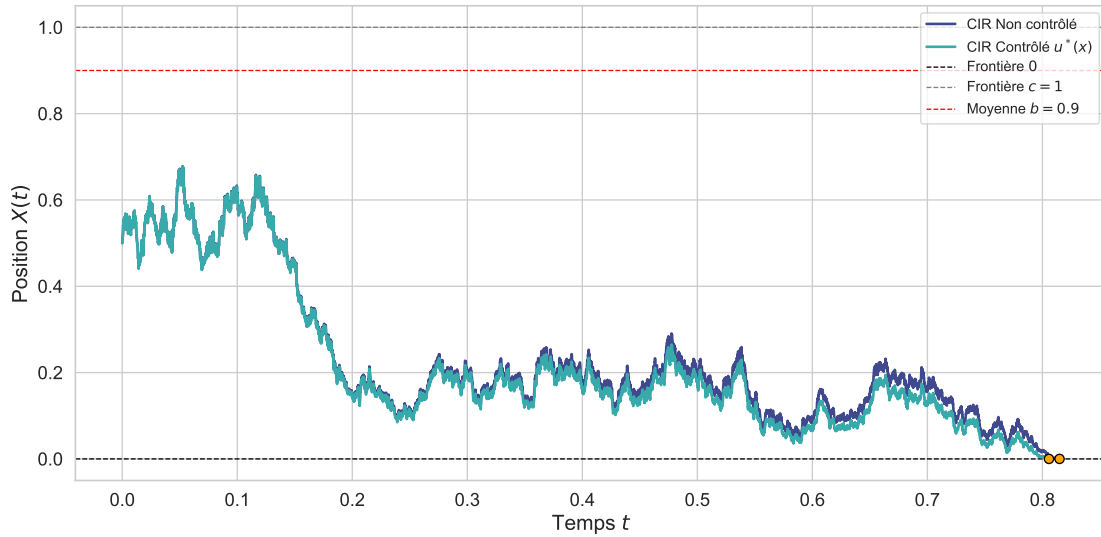


FIGURE 5.8 P3 — Visualisation de l'effet de la commande optimale.

5.2.7 P4 — Résolution

Soit le problème où tous les coûts sont constants :

- $r(x) \equiv \rho^2$;
- $b(x) \equiv \beta$;
- $q(x) \equiv \kappa^2$.

Comme ce qui précède, cette configuration ne permet pas de linéariser l'équation de la fonction valeur. En éliminant le retour à la moyenne, cette dernière devient :

$$\rho^2 - \frac{\beta^2 F'(x)^2}{2\kappa^2} + \frac{1}{2}\sigma^2 x F''(x) = 0$$

La solution donnée par *Mathematica* est :

$$F(x) = \frac{\sqrt{2}\kappa\rho x}{\beta} \left[{}_2F_1 \left(\left[\begin{matrix} 1 \\ \frac{\kappa\sigma^2}{2\sqrt{2}\beta\rho} \end{matrix} \right]; \frac{\kappa\sigma^2}{2\sqrt{2}\beta\rho} + 1; -e^{-2\sqrt{2}\beta\kappa\rho C_1} x^{\frac{2\sqrt{2}\beta\rho}{\kappa\sigma^2}} \right) - 1 \right] + C_2$$

avec C_1 et C_2 des constantes à déterminer et ${}_pF_q(\cdot, \cdot, \cdot)$ la fonction hypergéométrique généralisée (voir A). En posant $\sigma = \rho = \beta = \kappa = c = 1$, la solution qui vérifie $F(0) = F(c) = 0$ est :

$$F(x) \simeq \sqrt{2}x \left[{}_2F_1 \left(\left[\begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{matrix} \right]; \frac{\sqrt{2}+4}{4}; -9,76175x^{2\sqrt{2}} \right) - 1 \right] \quad (5.22)$$

La commande optimale associée est alors :

$$\begin{aligned} u^*(x) \simeq & 20,3985x^{2\sqrt{2}} {}_2F_1 \left(\left[\begin{matrix} 2 \\ 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{matrix} \right]; \frac{\sqrt{2}+8}{4}; -9,76175x^{2\sqrt{2}} \right) \\ & - \sqrt{2} \left[{}_2F_1 \left(\left[\begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{matrix} \right]; \frac{\sqrt{2}+4}{4}; -9,76175x^{2\sqrt{2}} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (5.23)$$

5.2.8 P4 — Visualisation

La fonction valeur (5.22) ainsi que la commande optimale (5.23) sont tracés.

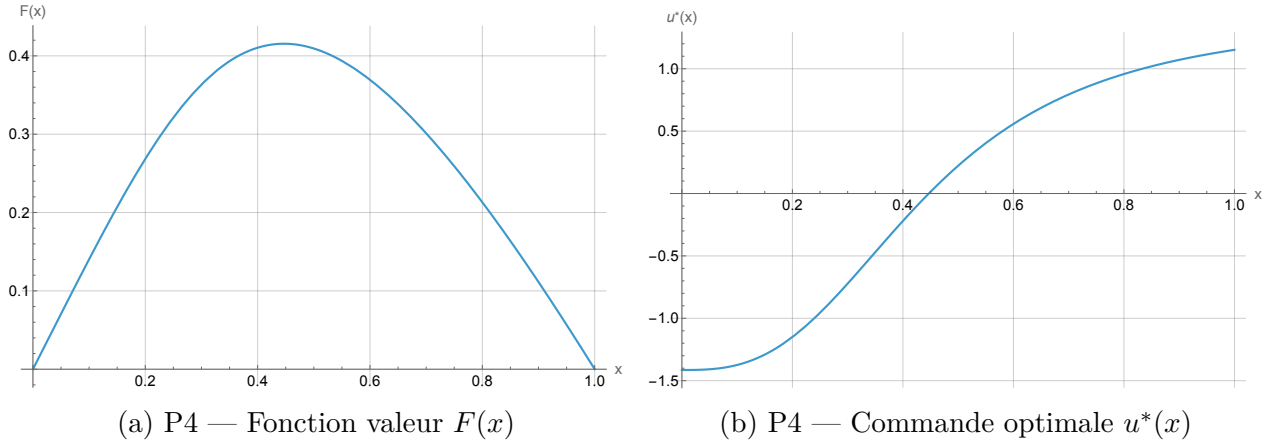


FIGURE 5.9 P4 — Visualisation de la fonction valeur et de la commande optimale.

Par ailleurs, une simulation est effectuée.

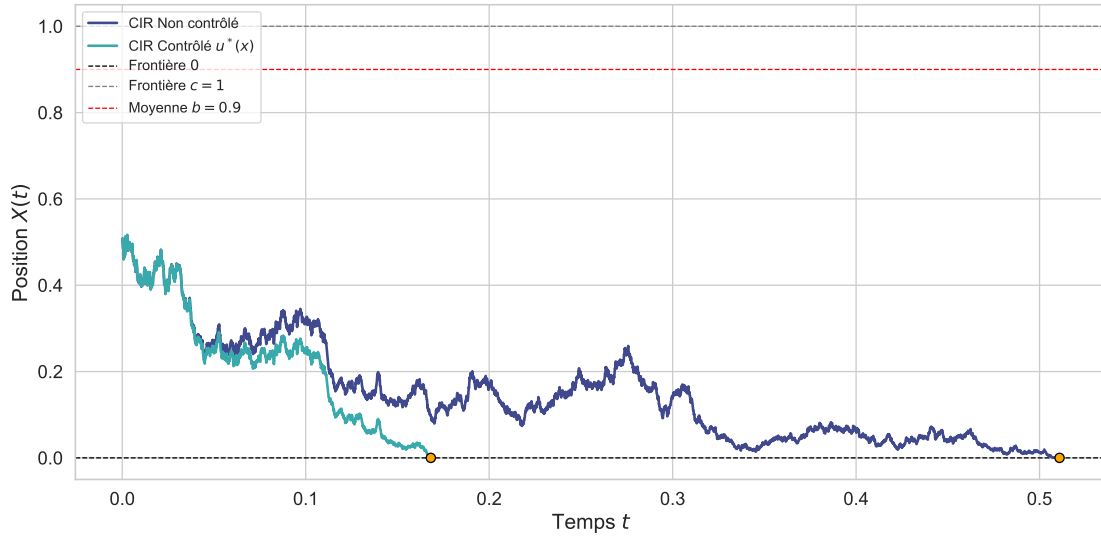


FIGURE 5.10 P4 — Visualisation de l'effet de la commande optimale.

5.3 Validation

Il est important de souligner que, dans les quatre problèmes étudiés et pour les différentes valeurs des paramètres considérés, les conditions aux limites $F(0) = F(c) = 0$ sont toujours respectées. De plus, la fonction valeur est toujours positive, le coût encouru étant nécessairement positif. En outre, la commande optimale est négative lorsque $x \rightarrow 0^+$, l'optimiseur

cherchant à diriger rapidement le processus vers la frontière inférieure, plus proche. Inversement, pour $x \rightarrow c^-$, la commande devient positive afin d'accélérer l'atteinte de la frontière supérieure.

L'analyse de la sensibilité des fonctions $F(x)$ et $u^*(x)$ aux paramètres des coûts ρ , β et κ en P1 et P2 permet de relever plusieurs relations. D'abord, une augmentation du coût immédiat ρ , induisant une hausse du coût encouru (voir figures 5.2a, 5.5a), entraîne un renforcement de la commande optimale ($|u^*(x)|$ augmente dans les figures 5.2b, 5.5b), traduisant ainsi une volonté accrue de quitter l'intervalle aussi rapidement que possible. Ensuite, une hausse du coût de la commande β incite à intensifier la commande optimale (voir figures 5.2d, 5.5d) afin de quitter l'intervalle plus rapidement. Cette stratégie réduit la durée d'exposition au coût instantané, ce qui compense partiellement le surcoût de la commande et diminue le coût total encouru $F(x)$ (voir figures 5.2c, 5.5c). Enfin, une augmentation du poids pénalisant la commande κ , induisant une hausse du coût encouru (voir figures 5.2e, 5.5e), entraîne une relaxation de la commande optimale (voir figures 5.2f, 5.5f). En effet, plus le poids de la commande est élevé, moins il est intéressant d'appliquer une commande forte ;

Les figures des simulations (5.3, 5.6, 5.8, 5.10) mettent en évidence l'effet de la commande optimale, qui accélère la sortie du processus par rapport au cas non commandé. Pour valider cette observation, 1000 trajectoires sont simulées pour chaque problème, et la durée moyenne jusqu'à la sortie est comparée. Un facteur d'accélération est ensuite estimé (voir annexe G pour les détails du calcul) :

TABLEAU 5.1 Accélérations moyennes du temps de sortie

Problème	Accélération Moyenne
P1	2,660552
P2	1,254483
P3	1,065163
P4	2,284579

Ainsi, les expressions obtenues pour la fonction valeur $F(x)$ et la commande optimale $u^*(x)$ sont validées.

Ces observations générales fournissent un cadre d'interprétation cohérent pour les stratégies optimales. Ces dernières sont détaillées dans la partie qui suit.

5.4 Politiques optimales

À partir des simulations réalisées, de l'analyse des profils des commandes optimales $u^*(x)$ illustrés dans les figures (5.1b, 5.4b, 5.7b et 5.9b), ainsi que de leur mise en relation avec les structures de coûts propres à chaque configuration, il est possible de caractériser précisément les différentes stratégies de commande optimales associées à chacun des problèmes étudiés :

Stratégie P1 : La politique optimale en configuration P1 adopte une structure à seuil, avec un point critique situé autour de $x^* \approx 0,33$. Pour $x < x^*$, la commande diverge rapidement vers $-\infty$, tirant agressivement le processus vers la borne inférieure. Ce comportement traduit une exploitation stratégique de la structure des coûts $b(x) = \beta x$ et $q(x) = \kappa x$, qui tendent eux aussi vers zéro, rendant la commande intensive peu pénalisante dans cette région. Inversement, pour $x > x^*$, la commande devient positive mais reste modérée, poussant le processus vers la borne supérieure de l'intervalle jusqu'à $u(1) \approx 1,4$. L'asymétrie du seuil observée dans cette politique s'explique par la nature du coût d'état constant $r(x) \equiv 1$ ainsi que deux mécanismes complémentaires. Premièrement, la dynamique du processus CIR possède un terme de retour à la moyenne dirigé vers b (fixé ici à 0,9). Ainsi, dès que le processus est situé en dessous de cette valeur, il bénéficie naturellement d'une poussée ascendante, ce qui rend avantageux de renforcer cette tendance au-delà du seuil x^* par une commande positive. Deuxièmement, la diffusion du processus étant proportionnelle à $\sqrt{X(t)}$, les perturbations aléatoires sont fortement atténuées près de zéro. Il est donc inefficace de chercher à atteindre la borne inférieure depuis une position trop éloignée, et la commande n'est justifiée dans cette direction que pour des valeurs suffisamment petites de x (en-dessous du seuil x^*). Ce comportement est corroboré par une analyse empirique : sur 1000 trajectoires simulées, le processus s'échappe par la borne supérieure dans 67 % des cas (voir tableau G.2).

Stratégie P2 : La politique optimale pour le problème P2 est aussi une politique à seuil $x^* \approx 0,5$. Sans retour à la moyenne, le processus CIR ne bénéficie d'aucune dérive, rendant ainsi le seuil d'inversion de la commande au centre de l'intervalle $(0, c)$. D'un côté, lorsque le processus s'approche de 0, la commande $u^*(x)$ s'annule, comme le coût d'état $r(x) = \rho^2 x$ et le coût de commande $b(x) = \beta\sqrt{x}$ s'annulent aussi. L'optimiseur attend donc que la dynamique propre du processus CIR entraîne la sortie. D'un autre côté, plus le processus s'approche de la borne supérieure, plus la commande augmente, comme le coût d'état devient conséquent. L'optimiseur cherche alors à provoquer une sortie le plus rapidement possible. Cependant, la commande appliquée dans les deux directions reste toujours modérée comme le poids pénalisant l'intensité de la commande est constant $q(x) \equiv \kappa^2$. Cela est validé par le facteur

d'accélération moyen d'environ 1,25 (voir tableau 5.1), ce qui confirme une accélération de sortie modérée, ni excessive ni négligeable, cohérente avec l'intensité relativement stable de la commande appliquée.

Stratégie P3 : La politique optimale correspond à une stratégie d'évasion passive. Bien qu'un seuil $x^* \approx 0,574$ subsiste, marquant l'inversion du signe de la commande, l'amplitude de $u^*(x)$ demeure globalement faible. En effet, comme pour P2, le poids pénalisant l'intensité de la commande étant constant $q(x) \equiv 1$, l'optimiseur n'est pas particulièrement incité à appliquer une commande intensive. Celui-ci n'intervient donc qu'avec une commande faible, sans chercher à forcer activement la dynamique du processus. Ce comportement est confirmé par le faible facteur d'accélération observé, estimé à 1,06 (voir tableau 5.1), ainsi qu'une fréquence de sortie pour chaque frontière presque identique à celle du processus non commandé (voir tableau G.2), indiquant une quasi-absence de différence entre les trajectoires avec ou sans commande.

Stratégie P4 : Cette configuration correspond au cas où tous les coûts sont constants et où le processus CIR est sans retour à la moyenne. La politique optimale est alors presque symétrique autour du seuil d'inversion $x^* \approx 0,44$: la commande s'intensifie progressivement à mesure que le processus approche les frontières, sans pour autant diverger. Ce comportement est cohérent, car l'optimiseur supporte un coût uniforme quelle que soit la position du processus. On observe toutefois une légère asymétrie du seuil. Comme mentionné précédemment, l'optimiseur cherche à exploiter les perturbations aléatoires plus marquées lorsque $X(t) \nearrow c$, du fait de la diffusion proportionnelle à $\sqrt{X(t)}$. Il est donc jugé optimal d'appliquer une commande positive (quoique modérée) dès que $X(t) > x^*$. En revanche, lorsque $X(t) \searrow 0$, la commande devient plus intense que dans la direction opposée, afin de compenser la diminution des fluctuations aléatoires. Les simulations confirment cette analyse avec une fréquence de sortie par zéro d'environ 53 % (voir tableau G.2), ainsi qu'un facteur d'accélération moyen de 2,28 (voir tableau 5.1), traduisant une sortie significativement anticipée tout en restant dans un régime de commande modérée.

CHAPITRE 6 CONCLUSION

6.1 Synthèse des travaux

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre de l'étude des instants de premier passage et des problèmes de commande optimale appliqués au processus CIR, à la fois en diffusion pure et en présence de sauts. L'objectif principal consistait à obtenir, sous forme analytique, plusieurs fonctions d'intérêt : la fonction génératrice des moments du temps de sortie, le temps moyen de sortie, l'aire moyenne sous la trajectoire, la probabilité de sortie en zéro, la fonction de dépassement moyen dans le cas avec sauts et la fonction valeur des problèmes de commande optimale considérés ainsi que la commande optimale associée.

Ces résultats ont été obtenus en résolvant des équations différentielles ordinaires faisant intervenir la dynamique du processus. Les méthodes utilisées incluent notamment des changements de variables adaptés (comme la transformation de Kummer), l'usage de fonctions spéciales (fonctions hypergéométriques, fonctions gamma, fonction intégrale exponentielle), ainsi que le recours à des outils de calcul symbolique comme *Wolfram Mathematica* ou encore *Maple*.

L'analyse des résultats a permis de valider les expressions obtenues à l'aide des conditions aux limites et des propriétés structurelles attendues des solutions. Les visualisations produites viennent renforcer cette validation en illustrant les comportements théoriques anticipés.

Enfin, l'étude des problèmes de commande optimale associés au processus CIR a permis de déterminer les fonctions valeur et les stratégies optimales dans quatre configurations de coûts différentes. Les solutions proposées satisfont les conditions de régularité et de positivité attendues, confirmant ainsi la solidité des approches analytiques adoptées. De plus, les simulations effectuées mettent en avant l'effet des différentes commandes optimales trouvées, permettant ainsi de valider davantage les expressions obtenues.

Les résultats relatifs à la fonction génératrice des moments, à l'aire moyenne, au temps moyen de sortie (avec et sans sauts), à la probabilité de sortie en zéro (avec et sans sauts), ainsi qu'au problème de commande non linéarisable P3, exposés dans ce mémoire, ont fait l'objet d'un article de recherche publié dans la revue internationale *WSEAS Transactions on Mathematics* [24].

6.2 Limitations

Les résultats présentés dans ce mémoire reposent sur des hypothèses spécifiques concernant les paramètres du processus CIR et la structure des coûts dans les problèmes de commande optimale. En particulier, les paramètres a , b et σ du processus CIR sont supposés constants dans le cadre de cette étude. Cette hypothèse permet de simplifier les équations différentielles associées, mais elle peut s'avérer restrictive lorsque ces paramètres varient en fonction du temps ou de l'état du processus. De plus, bien que les solutions analytiques proposées soient valides dans ces contextes particuliers, comme dans le cas du processus CIR sans retour à la moyenne, elles peuvent perdre en pertinence lorsque la dérive est non négligeable. Par ailleurs, les configurations de coûts étudiées en commande optimale réduisent le problème général à des cas spécifiques. Dans le cas où les coûts sont plus complexes, obtenir des formes fermées pour les solutions devient presque impossible.

6.3 Perspectives et améliorations futures

Afin de surmonter les limitations identifiées, plusieurs pistes de recherche peuvent être explorées. Une première perspective consisterait à étendre l'étude au processus de Chen [25] dans lequel la volatilité et la moyenne long terme du processus sont stochastiques. D'autres extensions du processus CIR à étudier seraient celles qui permettent au processus de prendre des valeurs négatives comme le CIR# [26], le CIR- et le CIR-- (voir [27] et [28]).

Une deuxième piste pourrait consister à explorer des méthodes numériques permettant de compléter les résultats analytiques dans des situations où les solutions exactes ne sont pas accessibles. L'utilisation de techniques de simulation Monte Carlo comme lors de l'étude du dépassement moyen (4.3b) ou de méthodes numériques pour la résolution des équations de HJB pourrait permettre de mieux appréhender les comportements dans des cadres plus réalistes.

Enfin, l'extension des modèles de commande optimale pour inclure des coûts non linéaires ou des contraintes supplémentaires pourrait offrir de nouvelles perspectives, en particulier dans le cadre de la gestion de portefeuille ou de la couverture d'actifs financiers sous contraintes réglementaires. Cependant, la complexité des équations associées augmentera considérablement.

En conclusion, ce mémoire propose une approche analytique rigoureuse pour l'étude des problèmes de premier passage et de commande optimale appliqués au processus CIR. Les résultats obtenus constituent une base solide pour des développements futurs dans des contextes plus généraux ou appliqués.

RÉFÉRENCES

- [1] J. C. Cox, J. E. Ingersoll et S. A. Ross, “A theory of the term structure of interest rates,” *Econometrica*, vol. 53, n°. 2, p. 385, mars 1985. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.2307/1911242>
- [2] M. Lefebvre, *Applied stochastic processes*. Springer New York, 2007. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-48976-6>
- [3] K. Itô, “Stochastic integral,” *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, vol. 20, n°. 8, p. 519–524, 1944. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.3792/pia/1195572786>
- [4] D. Brigo et F. Mercurio, *Interest Rate Models Theory and Practice*, ser. Springer Finance. Springer Berlin Heidelberg, 2013. [En ligne]. Disponible : <https://books.google.ca/books?id=USvrCAAQBAJ>
- [5] J. Hull, *Risk Management and Financial Institutions*, ser. Pearson international edition. Pearson Prentice Hall, 2007. [En ligne]. Disponible : <https://books.google.ca/books?id=G4nCQgAACAAJ>
- [6] T. Björk, *Arbitrage Theory in Continuous Time*, ser. Oxford Finance Series. Oxford University Press, Incorporated, 2004. [En ligne]. Disponible : <https://books.google.ca/books?id=TJgJgJATeVIC>
- [7] R. Cont et P. Tankov, *Financial Modelling with Jump Processes*, ser. Chapman and Hall/CRC Financial Mathematics Series. CRC Press, 2003. [En ligne]. Disponible : <https://books.google.ca/books?id=bVlieV8GBrIC>
- [8] P. Whittle, *Optimization over time : Dynamic Programming and stochastic control*. Wiley, 1982, vol. 1. [En ligne]. Disponible : <https://doi.org/10.2307/2981713>
- [9] E. Di Nardo et G. D’Onofrio, “A cumulant approach for the first-passage-time problem of the feller square-root process,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 391, p. 125707, 2021. [En ligne]. Disponible : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300320306603>
- [10] E. Di Nardo, G. D’Onofrio et T. Martini, “Orthogonal gamma-based expansion for the cir’s first passage time distribution,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 480, p. 128911, 2024. [En ligne]. Disponible : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300324003722>
- [11] B. Kepplinger, “The first passage time problem : Analytical, numerical and statistical methods (with r and mathematica)/submitted by bernhard kepplinger, bsc,” 2017.

- [12] V. Giorno et A. G. Nobile, “On the First-Passage Time Problem for a Feller-Type Diffusion Process,” *Mathematics*, vol. 9, n°. 19, p. 1–27, oct. 2021. [En ligne]. Disponible : <https://ideas.repec.org/a/gam/jmathe/v9y2021i19p2470-d649256.html>
- [13] —, “On the absorbing problems for wiener, ornstein-uhlenbeck, and feller diffusion processes : Similarities and differences,” *Fractal and Fractional*, vol. 7, n°. 1, 2023. [En ligne]. Disponible : <https://www.mdpi.com/2504-3110/7/1/11>
- [14] E. Martin, U. Behn et G. Germano, “First-passage and first-exit times of a bessel-like stochastic process,” *Phys. Rev. E*, vol. 83, p. 051115, mai 2011. [En ligne]. Disponible : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.83.051115>
- [15] J. Masoliver et J. Perelló, “First-passage and escape problems in the feller process,” *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, vol. 86, p. 041116, oct. 2012. [En ligne]. Disponible : <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.041116>
- [16] S. Kou et H. Wang, “First passage times of a jump diffusion process,” *Advances in Applied Probability*, vol. 35, 06 2003. [En ligne]. Disponible : <https://www.columbia.edu/~sk75/KouWangAAP.pdf>
- [17] C. Yin, Y. Wen et Y. Shen, “The first passage time problem for mixed-exponential jump processes with applications in insurance and finance,” *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2014, 07 2014. [En ligne]. Disponible : <https://doi.org/10.1155/2014/571724>
- [18] C. Klüppelberg, A. E. Kyprianou et R. A. Maller, “Ruin probabilities and overshoots for general Lévy insurance risk processes,” *The Annals of Applied Probability*, vol. 14, n°. 4, p. 1766 – 1801, 2004. [En ligne]. Disponible : <https://doi.org/10.1214/105051604000000927>
- [19] D. Cox et H. Miller, *The Theory of Stochastic Processes*. Routledge, sept. 2017. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.1201/9780203719152>
- [20] W. Magnus, F. Oberhettinger et R. P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, 1^{er} éd. Springer Berlin Heidelberg, 1966. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-11761-3>
- [21] “NIST Digital Library of Mathematical Functions,” <https://dlmf.nist.gov/>, Release 1.2.4 of 2025-03-15, 2025, f. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. S. Cohl, and M. A. McClain, eds. [En ligne]. Disponible : <https://dlmf.nist.gov/>
- [22] M. Abramowitz et I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, ninth dover printing, tenth gpo printing éd. New York : Dover, 1964. [En ligne]. Disponible : https://www.bibsonomy.org/bibtex/223ec744709b3a776a1af0a3fd65cd09f/a_olympia

- [23] M. Abundo, “On the First-Passage Area of a One-Dimensional Jump-Diffusion Process,” *Methodology and Computing in Applied Probability*, vol. 15, n^o. 1, p. 85–103, mars 2013. [En ligne]. Disponible : https://ideas.repec.org/a/spr/metcap/v15y2013i1d10.1007_s11009-011-9223-1.html
- [24] M. Lefebvre et R. Mrad, “First exit and optimization problems for a CIR diffusion process,” *WSEAS Transactions on Mathematics*, vol. 24, n^o. 36, p. 382–388, 2025. [En ligne]. Disponible : [https://wseas.com/journals/mathematics/2025/a725106-018\(2025\).pdf](https://wseas.com/journals/mathematics/2025/a725106-018(2025).pdf)
- [25] L. Chen, *A Three-Factor Model of the Term Structure of Interest Rates*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1996, p. 1–36. [En ligne]. Disponible : https://doi.org/10.1007/978-3-642-46825-4_1
- [26] G. Orlando, R. M. Mininni et M. Bufalo, “A new approach to forecast market interest rates through the CIR model,” *Studies in Economics and Finance*, vol. 37, n^o. 2, p. 267–292, sept. 2019. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.1108/SEF-03-2019-0116>
- [27] M. Di Francesco et K. Kamm, “How to handle negative interest rates in a CIR framework,” *SeMA Journal*, vol. 79, n^o. 4, p. 593–618, oct. 2021. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.1007/s40324-021-00267-w>
- [28] —, “On the deterministic-shift extended CIR model in a negative interest rate framework,” *International Journal of Financial Studies*, vol. 10, n^o. 2, 2022. [En ligne]. Disponible : <https://www.mdpi.com/2227-7072/10/2/38>
- [29] E. B. Dynkin, *Markov Processes*, ser. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. New York : Springer Berlin Heidelberg, 1965, vol. 1, translated by J. Fabius, V. Greenberg, A. Maitra, and G. Majone. See Vol. I, p. 133. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-00031-1>
- [30] A. Banner, *The Calculus Lifesaver : All the Tools You Need to Excel at Calculus*. Princeton, NJ : Princeton University Press, 2007.
- [31] D. Bakry, I. Gentil et M. Ledoux, *Analysis and Geometry of Markov Diffusion Operators*. Springer International Publishing, 2014. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-00227-9>

ANNEXE A FONCTIONS SPÉCIALES

Cette annexe contient une définition de toutes les fonctions spéciales utilisées dans ce mémoire. Pour plus d'information, voir [21].

Fonctions gamma

— La fonction gamma est définie par :

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Elle permet de généraliser la notion de factorielle :

$$\forall z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-, \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

— Les fonctions gamma incomplètes sont définies par :

$$\begin{aligned} \Gamma(s, x) &:= \int_x^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt \\ \gamma(s, x) &:= \int_0^x t^{s-1} e^{-t} dt \end{aligned}$$

Symbole de Pochhammer

Le symbole de Pochhammer (ou factoriel ascendant) est défini par :

$$(a)_n := \prod_{i=1}^n (a + i - 1)$$

Fonctions hypergéométriques

— Les fonctions hypergéométriques confluentes de première et seconde espèce (aussi appelées fonctions de Kummer et Tricomi) sont définies par :

$$\begin{aligned} \Phi(s, t, z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s)_n z^n}{(t)_n n!} \\ \Psi(s, t, z) &:= \frac{\Gamma(1-t)}{\Gamma(s+1-t)} \Phi(s, t, z) + \frac{\Gamma(t-1)}{\Gamma(s)} z^{1-t} \Phi(s+1-t, 2-t, z) \end{aligned}$$

— La fonction hypergéométrique généralisée est définie par :

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} [s_1] \\ \vdots \\ [s_p] \end{matrix}, \begin{matrix} [t_1] \\ \vdots \\ [t_q] \end{matrix}, z \right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s_1)_n \cdots (s_p)_n}{(t_1)_n \cdots (t_q)_n} \frac{z^n}{n!}$$

Il est intéressant de noter que la fonction hypergéométrique confluyente de première espèce $\Phi(\cdot, \cdot, \cdot)$ n'est autre que le cas particulier ${}_1F_1(\cdot, \cdot, \cdot)$.

Fonctions intégrale exponentielle

— La fonction intégrale exponentielle est définie par :

$$\text{Ei}(x) := - \int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

— La fonction intégrale exponentielle généralisée est définie par :

$$E_n(x) := \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^n} dt$$

Il est intéressant de noter que, pour $x > 0$:

$$\text{Ei}(x) = -E_1(-x)$$

Fonctions de Bessel

— Les fonctions de Bessel de première et seconde espèce sont définies par :

$$J_{\alpha}(x) := \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}$$

$$Y_{\alpha}(x) := \frac{J_{\alpha}(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}$$

— Les fonctions de Bessel modifiées de première et seconde espèce sont définies par :

$$I_{\alpha}(x) := i^{-\alpha} J_{\alpha}(ix)$$

$$K_{\alpha}(x) := \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\alpha}(x) - I_{\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}$$

Fonctions hyperboliques

- La fonction cosinus hyperbolique est définie par :

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- La fonction tangente hyperbolique est définie par :

$$\operatorname{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

ANNEXE B FORMULES SPÉCIALES

Formule de Leibniz

La formule de Leibniz [22] permet de dériver une fonction sous le signe de l'intégrale :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt \right) = f(x, b(x)) \frac{d}{dx} b(x) - f(x, a(x)) \frac{d}{dx} a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$$

Formule de Dynkin

La formule de Dynkin [29] permet de déterminer l'espérance d'une fonction $f(x) \in C^2$ d'un processus stochastique $X(t)$ évaluée en un temps d'arrêt τ avec $X(0) = x$. Cette formule est :

$$\mathbb{E}[f(X(\tau))] = f(x) + \mathbb{E} \left[\int_0^\tau \mathcal{L}f(X(s)) ds \right]$$

Elle découle de l'application de l'espérance à la forme intégrale de la formule d'Itô (voir ci-dessous).

Développement de Taylor

Le développement de Taylor [30] permet de réécrire une fonction $f(x) \in C^\infty$ en une série de ses dérivées évaluées en un point a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

avec $f^{(n)}(a)$ la dérivée d'ordre n .

Formule d'Itô

La formule d'Itô [3] permet de caractériser une fonction $f(t, x) \in C^{1,2}$ d'un processus stochastique $X(t)$ défini par l'EDS :

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t)$$

— Forme intégrale :

$$f(t, X(t)) = X(0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(s, X(s)) ds + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(s, X(s)) dX(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, X(s)) d\langle X \rangle_s$$

— Forme différentielle :

$$df(t, X(t)) = \frac{\partial}{\partial t} f(t, X(t)) dt + \frac{\partial}{\partial x} f(t, X(t)) dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, X(t)) d\langle X \rangle_t$$

où $\langle X \rangle_t$ dénote la variation quadratique du processus $X(t)$ (voir annexe E).

ANNEXE C GÉNÉRATEUR INFINITÉSIMAL

Le générateur infinitésimal $\mathcal{L}$ associé à un processus $\{X(t), t \geq 0\}$ est défini, pour toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$, par :

$$\mathcal{L}f(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[f(X(t)) \mid X(0) = x] - f(x)}{t}$$

Cet opérateur permet d'établir des équations différentielles décrivant l'évolution d'une statistique du processus étudié. Pour plus d'informations, voir [31].

Diffusion pure

Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus de diffusion pure à valeurs réelles, solution forte de l'équation différentielle stochastique :

$$dX(t) = \mu(X(t)) dt + \sigma(X(t)) dW(t) \quad (\text{C.1})$$

Sous des hypothèses standards d'unicité trajectorielle, le générateur infinitésimal s'écrit :

$$\mathcal{L}f(x) = \mu(x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x)$$

Diffusion avec sauts

Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus de diffusion avec sauts à valeurs réelles, solution forte de l'équation différentielle stochastique :

$$dX(t) = \mu(X(t)) dt + \sigma(X(t)) dW(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} y N(ds, dy) \quad (\text{C.2})$$

avec $N(ds, dy)$ une mesure de Poisson sur $(0, \infty) \times \mathbb{R}$, représentant les sauts aléatoires indépendants de X , avec une mesure d'intensité donnée par :

$$\Pi(dy) ds$$

Sous des hypothèses standards d'unicité trajectorielle, le générateur infinitésimal s'écrit :

$$\mathcal{L}f(x) = \mu(x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x) + \int_{\mathbb{R}} [f(x+y) - f(x)]\Pi(dy)$$

ANNEXE D UNICITÉ TRAJECTORIELLE

Diffusion pure

Soit un processus $\{X(t), t \geq 0\}$ à valeurs dans $\mathbb{D}$ défini par C.1. Si les conditions suivantes sont satisfaites :

- **Dérive Lipschitz** : il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout $x, y \in \mathbb{D}$,

$$|\mu(x) - \mu(y)| \leq K|x - y|$$

- **Diffusion Hölder** : il existe des constantes $K > 0$ et $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ telles que, pour tout $x, y \in \mathbb{D}$,

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K|x - y|^\alpha$$

- **Croissance au plus linéaire** : il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{D}$,

$$|\mu(x)|^2 + |\sigma(x)|^2 \leq K(1 + |x|^2)$$

$X(t)$ est alors l'unique solution forte, càdlàg, non explosive et adaptée de l'équation (C.1).

Diffusion avec sauts

Soit un processus $\{X(t), t \geq 0\}$ défini par C.2. Si les conditions d'unicité trajectorielle associées à la diffusion sont satisfaites (dérive Lipschitz, diffusion Hölder, croissance au plus linéaire), et si la mesure $\Pi(\cdot)$, modélisant la loi des tailles des sauts, vérifie la **Condition de Lévy minimale** :

$$\int_{\mathbb{R}} \min(1, y^2) \Pi(dy) < \infty$$

$X(t)$ est alors l'unique solution forte, càdlàg, non explosive et adaptée de l'équation (C.2).

ANNEXE E VARIATION QUADRATIQUE D'UN PROCESSUS D'ITÔ

Le mouvement brownien standard $W(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$ est par définition un processus dont la variation est infinie. Cependant, sa variation quadratique est finie, et est donnée par $\langle W \rangle_t = t$.

Ce résultat se généralise à un processus d'Itô $X(t)$ défini par l'EDS suivante :

$$dX(t) = \mu(t, X(t)) dt + \sigma(t, X(t)) dW(t)$$

La variation quadratique de $X(t)$ peut s'exprimer de deux façons [3] :

— En forme intégrale :

$$\langle X \rangle_t := \int_0^t \sigma(s, X(s))^2 ds$$

— En forme différentielle :

$$d\langle X \rangle_t := \sigma(t, X(t))^2 dt$$

ANNEXE F SIMULATIONS POUR LE DÉPASSEMENT MOYEN

Afin de générer la courbe (4.3b), l'intervalle $[0, c]$ est discrétisé en N_{x_0} points. Pour chaque point de départ x_i , N_{sim} trajectoires sont simulées jusqu'à une sortie par 0 ou c . Ensuite, le dépassement moyen est calculé comme suit :

$$\bar{D}(x_i) := \frac{1}{N_{\text{sim}}} \sum_{k=0}^{N_{\text{sim}}} (X_k(\tau(x_i)) - c)_+$$

où $X_k(\tau(x_i))$ correspond à la k^e trajectoire simulée partant de x_i . Enfin, les valeurs $(x_i, \bar{D}(x_i)) \forall i \in \{0 \dots N_{x_0}\}$ sont tracées.

ANNEXE G SIMULATIONS EN COMMANDE OPTIMALE

Les données suivantes découlent de l'analyse de 1000 simulations différentes du processus CIR.

Accélération de sortie

Les longueurs moyennes des trajectoires avec et sans commande simulées pour chaque problème sont présentées dans le tableau ci-dessous.

TABLEAU G.1 Longueurs moyennes des trajectoires simulées

Problème	Longueur moyenne CIR non contrôlé	Longueur moyenne CIR contrôlé
P1	6904,4004	2595,1005
P2	6927,486	5522,185
P3	7004,5290	6576,0133
P4	7291,346	3191,549

Ces dernières sont mesurées en discrétisant la trajectoire avec des pas temporels de longueur 10^{-4} . Il est donc possible d'estimer un facteur d'accélération moyenne pour le temps de sortie comme suit :

$$\text{Accélération} := \frac{\text{Longueur moyenne CIR non contrôlé}}{\text{Longueur moyenne CIR contrôlé}}$$

Statistiques de sortie

La fréquence de sortie par chaque frontière peut être estimée pour chaque configuration étudiée. Sur 1000 simulations, le calcul est :

— Fréquence de sortie en 0 :

$$\bar{f}_0 := \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} \mathbb{1}_{X(\tau(x))=0}$$

— Fréquence de sortie en c :

$$\bar{f}_c := 1 - \bar{f}_0$$

TABLEAU G.2 Fréquence de sortie des trajectoires simulées

Configuration	Fréquence de sortie en 0 $\bar{f}_0$	Fréquence de sortie en $c = 1$ $\bar{f}_c$
Sans commande	44,4 %	55,6 %
P1	33 %	67 %
P2	48,2 %	51,8 %
P3	45,2 %	54,8 %
P4	52,9 %	47,1 %