PolyPublie
Polytechnique Montréal

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Titre: Title:	Généralisation aux extra-chevauchements du modèle de Bechtold-Jacobs pour les horaires de personnel
Auteur: Author:	Idris Addou
Date:	2005
Type:	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis
Référence: Citation:	Addou, I. (2005). Généralisation aux extra-chevauchements du modèle de Bechtold-Jacobs pour les horaires de personnel [Master's thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/7578/

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: PolyPublie URL:	https://publications.polymtl.ca/7578/
Directeurs de recherche: Advisors:	François Soumis
Programme: Program:	Unspecified

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal

https://publications.polymtl.ca

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

GÉNÉRALISATION AUX EXTRA-CHEVAUCHEMENTS DU MODÈLE DE BECHTOLD-JACOBS POUR LES HORAIRES DE PERSONNEL

IDRIS ADDOU
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)
AVRIL 2005

© Idris Addou, 2005.

Library and Archives Canada

Published Heritage Branch

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque et Archives Canada

Direction du Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence
ISBN: 978-0-494-16746-5
Our file Notre référence
ISBN: 978-0-494-16746-5

NOTICE:
The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:
L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

GÉNÉRALISATION AUX EXTRA-CHEVAUCHEMENTS DU MODÈLE DE BECHTOLD-JACOBS POUR LES HORAIRES DE PERSONNEL

présenté par : ADDOU Idris
en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. ROUSSEAU Louis-Martin, Ph.D., président
M. SOUMIS François, Ph.D., membre et directeur de recherche
M. CORDEAU Jean-François, Ph.D., membre

À mon petit bout de choux...

Houceme

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier vivement mon directeur de recherche monsieur François Soumis qui avec ses idées ingénieuses et son flair exceptionnel a su me guider et me conseiller clairement ce qui ma permis d'avancer efficacement tout au long de ma maîtrise. Je le remercie aussi pour son appui financier qui m'a été très indispensable.

Je remercie monsieur Louis-Martin Rousseau de bien vouloir présider mon jury et monsieur Jean-François Cordeau d'avoir accepté d'être membre de ce jury.

Je remercie madame Monia Rekik qui, au début de ma recherche, m'a présenté son travail duquel je me suis inspiré. Je la remercie également pour l'intérêt qu'elle portait à mes recherches.

Pour le coté informatique, j'ai bénéficié de l'aide inestimable de mon collègue et ami monsieur Ahmed Baba-Hadji. Je lui adresse ici mes sincères remerciements.

Je dois aussi citer les collègues du laboratoire qui ont contribué à la création d'un climat particulier de travail : messieurs, Ahmed Baba-Hadji, Fabrice Ndikumagenge, Abdoulaye Houla Sanda, Amar Oukil, Mustapha Aouchiche, Nabile Hifi.

RÉSUMÉ

La construction de quarts de travail à l'aide de la programmation mathématique a débuté il y a déjà un demi siècle par l'avènement de l'article de Dantzig (1954). L'objet principal de son modèle est de minimiser le coût associé à l'ensemble des employés sous certaines contraintes assurant qu'il y est assez d'employés pour satisfaire la demande de toute la clientèle. Cette formulation représente explicitement chaque quart de travail par une variable de décision. De ce fait, le nombre de variables augmente rapidement avec la flexibilité de l'environnement de travail et par conséquent, la durée de résolution du problème devient de plus en plus longue.

Afin de contourner cette augmentation du nombre de variables tout en permettant une grande flexibilité, les chercheurs ont considéré des modèles pour lesquels la flexibilité n'apparaît pas explicitement dans les variables, mais elle est plutôt cachée implicitement dans les contraintes et/ou la fonction objectif. Ce genre de modèles est connu sous le nom de *modèles implicites.*

Bechtold et Jacobs (1990) ont introduit un modèle implicite où l'innovation cruciale est de représenter par une seule variable, sous le nom de *type de quart de travail*, tous les quarts de travail qui ont le même début, la même durée et dont la pause commence dans un même intervalle de temps appelé *fenêtre de pauses.* Ils utilisent aussi une variable par pause. Cette utilisation de deux types de variables représentant chacune une partie de l'information nécessite beaucoup moins de variables que d'énumérer explicitement tous les quarts. Afin que chaque quart de travail reçoive une et une seule pause prise dans la fenêtre de pause associée à son type de quart de travail, Bechtold et Jacobs ont eu recours à des contraintes additionnelles dites contraintes *forward*, contraintes *backward* et une contrainte particulière dite d'*égalité.* Pour que

cette formulation soit valide, certaines restrictions ont été imposées, notamment l'hypothèse *d'absence d'extra-chevauchement : aucune fenêtre de pauses n'est strictement incluse dans une autre fenêtre de pauses d'un autre type de quart de travail et ayant les périodes de début et de fin distinctes de celles de la plus grande fenêtre de pauses.*

Depuis l'apparition du travail de Bechtold et Jacobs (1990) plusieurs extensions ont été faites. Cependant aucune, à notre connaissance, n'a levé l'hypothèse selon laquelle il ne doit y avoir aucun extra-chevauchement. *L'objectif principal de ce mémoire est d'étendre le modèle de Bechtold et Jacobs (1990) aux cas où il y a des extra-chevauchements.* Le deuxième chapitre est le cœur de ce mémoire ; tous nos résultats originaux y sont regroupés. On peut les résumer dans les trois points suivants :

1. Extension du modèle de Bechtold et Jacobs (1990) aux cas où il y a présence d'extra-chevauchements et cela en ajoutant des contraintes (qu'on a appelé contraintes d'intervalles) à celles figurant dans le modèle de Bechtold et Jacobs (1990).
2. Preuve que notre extension est minimale. On a démontré qu'aucune de nos contraintes d'intervalles n'est redondante.
3. Un examen très fin des contraintes forward et backward de Bechtold-Jacobs (1990) nous a révélé que certaines d'entres elles sont redondantes dans le cas d'absence d'extra-chevauchement ! Autrement dit : nous avons prouvé que le modèle de Bechtold-Jacobs (1990) *n'est pas minimal* et nous avons clairement identifié les contraintes forward et backward redondantes.

Le troisième chapitre est consacré à quelques expérimentations numériques et le premier chapitre à une revue de la littérature sur le sujet.

ABSTRACT

Shift scheduling based on mathematical programming goes back to a half century ago by the appearance of Dantzig's (1954) paper. The main purpose of his model is to minimize the cost associated to all employees under some constraints ensuring that there are enough employees to satisfy customer demand. This formulation represents each shift by a decision variable. Hence, the number of variables number increases quickly with the flexibility of the environment and therefore the solution time too. In order to avoid the growth of the variables number and to keep enough flexibility the authors consider models for which flexibility does not appear in the variables but is implicitly hidden in the constraints and/or the objective function. This kind of models are known as *implicit models.*

Bechtold and Jacobs (1990) have introduced an implicit model where the crucial innovation is that they represent by only one variable all shifts having the same start time and same length and whose breaks start in the same prescribed interval of time called *break windows.* They denote the set of these shifts as *shift-type.* They also use a variable for each break. This consideration of two kinds of variables, each one representing a part of the information, requires much less variables than explicit enumeration of all shifts. In order to associate to each shift a unique break, some additional constraints are considered. Namely, *forward constraints*, *backward constraints* and a particular constraint named *the equality constraint.* In order to make valid this implicit formulation, some restrictions were imposed, in particular the hypothesis according to which *there is no extraordinary overlap in the sense that there is no break window contained as a subset in a larger break window such that its first and last period are different from those of the larger window.*

Since the appearance of the work of Bechtold and Jacobs (1990) several extensions

have been done. However, to the best of our knowledge, none of them concerns the relaxation of the hypothesis according to which *there is no extraordinary overlap. The main purpose of this thesis is to extend the Bechtold and Jacobs (1990) model to the case where there is extraordinary overlap by adding some constraints (we called, interval constraints) to those of Bechtold and Jacobs (1990).*

The first chapter is dedicated to the literature review on the subject. The second chapter is the heart of this thesis; all our original results are collected there. One can summarize them in the following three points:

1. Extension of Bechtold and Jacobs' (1990) model to the cases where there is extraordinary overlap. This was done by adding some constraints (we called interval constraints) to those in the Bechtold and Jacobs' (1990) model.

2. Proof that our extension is minimal. We have proved that none of our constraints is redundant.

3. A close examination of the Bechtold and Jacobs (1990) forward and backward constraints reveals that some of them are redundant in the case where there is no extraordinary overlap! In other words: we have proved that Bechtold and Jacobs' (1990) model *is not minimal* and we have clearly identified the redundant forward and backward constraints.

Some numerical experimentation is done in chapter three. Chapter one contains the related literature.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE iv

REMERCIEMENTS v

RÉSUMÉ vi

ABSTRACT viii

TABLE DES MATIÈRES x

LISTE DES TABLEAUX xii

LISTE DES FIGURES xiii

INTRODUCTION ET POSITION DU PROBLÈME 1

CHAPITRE 1 : REVUE DE LA LITTÉRATURE 5

1.1 : Introduction 5

1.2 : Heuristiques et modèle de recouvrement 5

1.3 : Modèles implicites 15

1.4 : Contribution de ce mémoire 19

CHAPITRE 2 : MODELE GÉNÉRALISÉ DE BECHTOLD-JACOBS POUR LES QUARTS-PAUSES DE TRAVAIL AVEC EXTRA-CHEVAUCHEMENT 20

2.1 : Introduction 20

2.2 : Bechtold-Jacobs generalized model for shift scheduling with extraordinary overlap 28

2.2.1 : Introduction 29

2.2.2 : Main results 39

2.2.3 : Conclusion 51

2.2.4 : Acknowledgments 53

CHAPITRE 3 : EXPÉRIMENTATION 56

3.1 : Comparaisons des temps CPU 56

3.2 : Faisabilités des solutions obtenues 59

DISCUSSIONS GÉNÉRALES ET CONCLUSION 63

BIBLIOGRAPHIE 65

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1 : Exemple de problème de construction de cycles 2

Tableau 2.1 : Different cases 47

Tableau 2.2 : Example 51

Tableau 3.1 : Durées de 7 h, Extra-chevauchements internes, ACT1 . . . 58

Tableau 3.2 : Durées de 7 h, Extra-chevauchements externes, ACT2 . . . 58

Tableau 3.3 : Durées de 9 h, Extra-chevauchements externes, ACT1 . . . 58

Tableau 3.4 : Durées de 9 h, Extra-chevauchements externes, ACT2 . . . 59

Tableau 3.5 : Fenêtres de pauses de 2h, ACT1 60

Tableau 3.6 : Fenêtres de pauses de 2h, ACT2 60

Tableau 3.7 : Fenêtres de pauses de 3h, ACT2 60

Tableau 3.8 : Durées de 5h, de 7h et de 9 h 61

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1 : Constraints network for the example 52

INTRODUCTION ET POSITION DU PROBLÈME

De façon générale, pour toute organisation, il s'agit de satisfaire la demande de la clientèle au moindre coût de main-d'oeuvre. C'est un compromis qui ne peut être atteint que si le nombre et l'horaire de chaque employé est planifié de façon judicieuse tout en tenant en compte de diverses contraintes. Le problème de construction d'horaire de personnel est constitué de trois volets :

- le problème de construction de cycles (*days-off scheduling*),
- le problème de construction de quarts de travail (*shift scheduling*),
- le problème de construction simultanée de cycles et de quarts de travail (*tour scheduling*).

Le premier consiste à determiner les jours de travail et les jours de repos sur un horizon donné (une semaine ou plus) pour chaque employé. Le second consiste à déterminer les heures de travail et les heures de repos pour chaque employé au cours d'une journée de travail. Le dernier consiste à déterminer simultanément, les jours de travail, et les jours de repos et pour chaque jour de travail determiner les heures de travail et les heures de repos.

Pour les organisations qui fonctionnent avec des quarts de travail fixes (par exemple de 8h00 à 17h00, avec une pause de repas fixée, et cela 7 jours par semaine) le seul problème auquel elles font face est celui de la construction des *cycles* hebdomadaires pour assurer que chaque employé travaille cinq jours par semaines. Le problème auquel font face les organisations qui travaillent cinq jours fixés par semaine (comme les bureaux qui sont fermés les fin de semaines, samedi-dimanche) est celui de la

construction de quarts de travail pour chaque jour de travail. Alors que les organisations qui s'intéressent à la construction simultanée des quarts de travail et de cycles sont celles qui ont une certaines flexibilité comme par exemple les horaires d'infirmières, d'équipages d'avions).

Le tableau suivant fournie un exemple simple de problèmes de construction de cycles :

Tableau 1 – Exemple de problème de construction de cycles

Jours	Lun	Mar	Mer	Jeu	Ven	Sam	Dim
Nombre d'employés requis	8	10	7	13	9	15	12

Pour résoudre ce problème plusieurs fonctions objectifs peuvent êtres considérées. Le plus souvent est celui de minimiser le nombre d'employés tout en respectant le nombre d'employés requis pour chaque journée et de telle sorte que chacun reçoive deux jours de repos consécutifs par semaine. Il existe plusieurs algorithmes qui résolvent ce type de problème. Nous indiquons quelques références dans ce sens : Abernathy, Baloff, Hershey et Wandel (1973), Aggarwal (1982), Ahuja et Sheppard (1975), Alfares (1998), Azmat, Hürlimann et Widmer (2004), Bailey et Field (1985), Baker (1974), Baker, Crabill, et Magazine (1973), Baker, Burns et Carter (1979), Bartholdi III et Ratliff (1978), Bartholdi III, Orlin et Ratliff (1980), Bartholdi III, (1981), Beaumont (1997a), (1997b), Bechtold (1988), Bechtold et Schowalter (1985), (1987), Bechtold et Brusco (1994a), (1994b), Berrada, Ferland et Michelon (1996), Billionnet (1999), Browne et Tiberwala (1975), Brownell et Lowerre (1976), Brusco et Jacobs (1998a), Burns (1978), Buffa, Cosgrove et Luce (1976), Burke, De Causmaecker, Vanden Berghe et Van Landeghem (2002), Burns et Carter (1985), Burns et Koop (1987), Chen (1976), Cochran, Chu et Chu (1997), Day et Ryan (1997), Emmons (1985), Emmons et Burns (1991), Emmons et Fuh (1997), Francis (1966), Gierl et Pollwein (1993), Güneş (1999), Heller (1971), Hung (1991), (1994a), (1994b),

et (1999), Jelinek (1973), Lowerre (1977), (1979), Luce (1974), Maier-Rothe et Wolfe (1973), Miller, Pierskalla, et Rath (1976), Monroe (1970), Narasimhan (1996), Panto (1991), Pedrosa et Constantino (2001), Smith(1976), Tiberwala, Philippe et Browne (1972), Topaloglu et Ozkarahan (2000), Warner et Prawda (1972), Warner (1976), Wermus et Pope (1994).

La construction simultanée des cycles et quarts de travail (tour scheduling) est un problème qui a retenu l'attention de plusieurs chercheurs. Il s'agit de choisir à la fois les jours de repos pour chaque employé ainsi que les heures de travail pour chaque jour de travail. Ce problème se réduit à celui des cycles de travail s'il n'y a qu'un seul quart de travail à chaque jour de travail et se réduit à celui des quarts de travail si l'horizon de travail est limité à une seule journée de travail. La littérature sur ce sujet est abondante (voir Ernst et al. (2004)). On se contente ici d'indiquer la liste suivante : Alfares (1998), (2004), Bailey (1985), Bailey et Field (1985), Bailey, Alfares et Lin (1995), Bard, Binici, et de Silva (2003), Beaumont (1997b), Bechtold et Brusco (1994a), (1994b), Bechtold et Showalter (1985), (1987), Betchold, Brusco et Showalter (1991), Berrada, Ferland et Michelon (1996), Brusco et Jacobs (1993), (1995), (1998a), (1998b), (2000), (2001), Brusco et Johns (1995a), (1995b), (1996), Brusco, et al. (1995), Cezik, Günük et Luss (2001), Dowsland et Thompson (2000), Easton et Rossin (1991a), (1991b), (1996), (1997), Güneş (1999), Isken (1995), (2004), Jacobs et Bechtold (1993), Jacobs et Brusco (1996), Jarrah, Bard et de Silva (1994), Jaumard, Semer et Vovor (1998), Monroe (1970), Morris et Showalter (1983), Ozkarahan (1989), Ozkarahan et Bailey (1988), Panton (1991), Rekik, Cordeau et Soumis (2004), Thompson (1995), (1996), (1997a), (1997b), (1999), Topaloglu et Ozkarahan (1998), (2000), Warner et Prawda (1972).

Dans ce mémoire nous allons nous occupé uniquement du problème de la construction de quarts de travail. Un quart de travail peut avoir différentes heures de début et de fin, peut être de différentes durées (par exemple lorsqu'on considère les employés à temps partiel) et plusieurs combinaisons de pauses de repas et de repos.

Jusqu'aux années 80 les chercheurs ont utilisé l'idée de Dantzig (1954) pour élaborer leurs modèles de construction d'horaires de quarts de travail. Cependant, le nombre de variables devient de plus en plus grand avec la flexibilité de l'environnement du travail. A partir des années 90 on a vu l'apparition du modèle de Bechtold-Jabocs (1990) qui modèlise implicitement les pauses. Ce modèle nécessite beaucoup moins de variables et est plus rapide à résoudre que les modèles basés sur le recouvrement de Dantzig (1954). Une des limitations du modèle de Bechtold-Jacobs est que dans l'environnement de travail il ne doit pas y avoir d'extra-chevauchement. Dans le chapitre 2 on va construire une extension à ce modèle lorsqu'il y a des extra-chevauchements. Dans le premier chapitre, on va passer en revue les principaux travaux de construction d'horaire de quarts de travail.

CHAPITRE 1 : REVUE DE LA LITTÉRATURE

1.1 Introduction

Dans ce chapitre on présente une revue de la littérature concernant le problème de construction de quarts de travail pour les employés d'organisations. On va parcourir l'évolution des principaux modèles depuis un demi siècle. On présente les principaux travaux de recherche depuis les premiers sur le sujet qui remontent à Edie (1954) et Dantzig (1954) jusqu'à certains travaux d'aujourd'hui. La dernière section de ce chapitre est consacrée à la description de la contribution originale de ce mémoire.

1.2 Heuristiques et modèle de recouvrement

Edie (1954). L'origine de la construction d'horaires de quarts de travail remonte aux travaux d'Edie (1954) qui s'est intéréssé aux retards dans le trafic de véhicules au niveau des cabines de péages portuaires (ponts et tunnels). Les officiers de police de trafic étaient aussi nombreux que 250 et leur masse salariale était trop élevée. L'objectif était de gérer ces employés de manière à satisfaire un certain compromis : mettre assez d'employés au service de la clientèle pour réduire le délai d'attente moyen des véhicules mais aussi de réduire la masse salariale en réduisant le nombre d'employés.

Edie a utilisé la théorie des probabilités pour calculer le nombre de cabines de péages nécessaires pour satisfaire la demande de la clientèle en assurant un délai moyen d'attente raisonnable. Dans une première étape, Edie a utilisé la théorie des probabilités

pour prévoir la demande en employés en différentes périodes de la journée puis dans une deuxième étape, il a construit des quarts de travail et déterminé le nombre d'employés affectés à chaque quart. C'est cette deuxième étape qui nous intéresse dans ce mémoire.

La première étape fournie pour chaque heure de la journée le nombre de cabines de péages qui doivent êtres opérationnelles afin de maintenir un certain délai d'attente moyen. Le deuxième point consiste à déterminer le nombre d'opérateurs (employés) qui maintiennent toutes les cabines de péages programmées opérationnelles mais aussi permettre à chaque employé de prendre des pauses tout en respectant certaines restrictions. Ces restrictions sont (a) les périodes de travail ne sont pas moindres d'une heure et ne sont pas plus longue que trois heures entre les pauses ou le début ou la fin du quart de travail de l'opérateur, (b) la pause de repas doit être au milieu de la quatrième heure du quart de travail de l'opérateur, et (c) le début de chaque quart ne doit pas être avant 6 heure du matin et la fin ne doit pas être après midi et demi.

La planification de tout le personnel de cette manière exige la construction de tableaux de type Gantt pour chaque journée de travail qui révèle les périodes de travail et de repos pour chaque employé. Les débuts de quarts de travail et les placements de pauses doivent êtres combinés de manière à fournir le nombre exact d'employés nécessaires pour donner un service optimal et cela pour chaque demi-heure de la journée. La technique d'essais-erreurs a été employée par Edie et donc la préparation des horaires des employés demande beaucoup de temps surtout lorsqu'il s'agit de construire des horaires aussi efficaces que possible. L'efficacité d'un horaire se mesure par le rapport du nombre d'employés nécessaire pour satisfaire la demande de la clientèle par le nombre d'employés planifiés par cet horaire. Les premiers horaires construits sont souvent peu efficaces et la question de savoir s'il s'agit du meilleur horaire qui puisse être construit se pose chaque fois que le nombre d'employés planifiés par l'horaire excède le premier nombre entier immédiatement supérieur au nombre

d'employés requis. Beaucoup de temps peut être perdu en essayant de réduire le nombre d'employés lorsque cette réduction n'est pas possible tout en respectant les restrictions imposées.

Dantzig (1954). Dantzig a abordé le problème de construction de quarts de travail des employés des cabines de péages étudié par Edie (1954) et cela en utilisant la programmation linéaire. Il est le premier a avoir introduit une formulation mathématique qui permet de construire les horaires d'employés en minimisant le coût de la main-d'oeuvre globale tout en satisfaisant la demande à chaque période de la journée. Il modélise le problème du personnel des cabines de péages de façon simplifiée en négligeant les pauses, excépté la pause du repas. À la fin de son article, il dit quelques mots concernant les pauses autres que celles du repas. Il suppose dans un premier temps que les employés travaillent 3 heures et demi consécutives puis prennent une pause pour le repas d'une demi heure et ensuite travaillent pendent 3 heures et demi avant de quitter. Il note x_j le nombre d'employés qui doivent commencer leur quart de travail à la période j de la journée, où $j = 0, 1, \cdots, 33$, correspondant aux intervalles de demi-heures de la journée. Ainsi chaque quart de travail est caractérisé par sa période j de début de travail (seulement). Ensuite il pose $a_{tj} = 1$ pour $t = j, \cdots, j+6, j+8, \cdots j+14$ (où $j+7$, correspondant à la période de pause de repas, est omise) et $a_{tj} = 0$ sinon. Il note b_t le nombre de cabines de péages qui doivent êtres opérationnelles durant la période $t = 0, 1, 2, \cdots, 47$. Il propose alors de minimiser le nombre d'employés affectés aux différentes cabines de péages

$$Minimiser \;\; Z = \sum_{j=0}^{33} x_j$$

tout en satisfaisant la demande à chaque période b_t, soit

$$\sum_{j=0}^{33} a_{tj} x_j \geq b_t, \quad t = 0, \cdots, 47.$$

et bien sur, en considérant les x_j des entiers positifs.

Ce modèle a été légèrement modifié par les chercheurs (mais conserve toujours le nom de modèle de Dantzig) pour s'adapter à des situations plus générales. En fait, on suppose que l'ensemble des quarts de travail est noté J. Un quart de travail $j \in J$ est un ensemble de périodes i de l'horizon de travail (une journée, une semaine,...) prescrit selon la convention collective de l'organization. On suppose aussi que les coûts d'affectations des employés aux différents quarts de travail *ne sont pas constants* mais dépendent des quarts de travail en question. On note alors c_j le coût d'affectation d'un employé au quart $j \in J$ et on représente par x_j le nombre d'employés a être affectés au quart de travail j. Le nombre de périodes de l'horizon de travail est noté n et par m on désigne le nombre des différents quarts de travail fixés par la convention collective de l'organisation. La demande en employés requis pour la période i est notée par d_i et on pose $a_{ij} = 1$ si la période i est une période de travail pour le quart de travail j et $a_{ij} = 0$ si la période i est une période de repos pour le quart de travail j. Le modèle général de Dantzig s'énonce alors comme suit :

$$Minimiser \quad Z = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \tag{1.1}$$

sous les contraintes

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \geq d_i, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{1.2}$$

$$x_j \geq 0, \text{ et entier, } i = 1, \cdots, n. \tag{1.3}$$

Ce modèle, très remarquable, a fait ses preuves. Cependant, ses limites commencent à apparaître lorsque la flexibilité de l'environnement de travail augmente. En effet, le nombre des variables x_j augmente (comme le nombre des quarts de travail) avec la flexibilité et le problème devient alors très difficile à résoudre.

Luce (1973). Luce (1973) a introduit un processus de construction d'horaires. Il a établi un algorithme heuristique qui sélectionne un type de quart de travail à la fois

(dans un grand ensemble de types de quarts de travail possibles) jusqu'à satisfaction de la demande en employés.

Byrne et Potts (1973). Dans sa thèse doctorale, faite sous la direction de R. B. Potts, J. L. Byrne (1970) (voir aussi Byrne et Potts (1973)) a considéré la construction des quarts de travail des employés des cabines de péages d'autoroutes. L'approche utilisée combine la programmation linéaire à quelques heuristiques et cela en huit étapes. La première étape résoud un problème LP relaxé. Les étages suivantes gérent le rapport temps-plein à temps partiel des employés et ajoutent successivement des contraintes à des problèmes de programmation linéaire en nombre entiers. Afin de réduire le surplus des employés, des fenêtres de pauses, des employés à temps partiels, et des quarts qui se chevauchent ont été considérés. Les employés à temps plein qui travaillent huit heures par jour, reçoivent deux pauses, l'une d'une demi heure et l'autre d'une heure pour le repas. Les fenêtres de pauses doivent respécter les deux exigences suivantes : 1. Un travail continue sans pause ne doit pas dépassé deux heures, et 2. Aucune pause n'est accordée durant la première et la dernière heure du quart de travail de tout employé. Les employés à temps-partiel travaillant trois heures et demi reçoivent une pause d'une demi heure chacun. La fenêtre de pause d'un employé à temps partiel est telle qu'aucune pause ne soit accordée durant la première ni la dernière heure du quart de travail.

Segal (1974). Une demande périodique a été envisagée par Segal (1974). Il a subdivisé la journée en quatre vingt seize périodes d'un quart d'heure chacune. Son étude s'est basée sur un modèl de réseau pour résoudre le problème de construction d'horaires d'employés qui est suivie par un algorithme post-processeur pour affecter les pauses selon certaines conditions. Son modèle présente une flexibilité originale dans sa façon de considérer les quarts de travail des employés à temps partiel. Il considère des quarts variant d'une heure jusqu'à neuf heures.

Kolesar, Rider, Crabill, et Walter (1975). Les auteurs Kolesar, Rider, Crabill,

et Walter (1975) utilisent une combinaison de programmation linéaire et de files d'attentes pour construire les horaires des voitures de patrouilles de police. Un modèle de files d'attentes a été construit pour estimer la demande en voitures de patrouilles de police et cela pour chaque heure de la journée. Ensuite, en fonction de cette demande un modèle de programmation en nombre entiers construit les horaires de voitures.

Moondra (1976). La flexibilité du modèle de Moondra (1976) réside dans les trois faits suivants :1. Employés à temps partiel. 2. Heures supplémentaires pour les employés à temps plein. 3. Fenêtres de pauses. Les employés à temps partiel peuvent travailler des quarts de travail d'une durée allant de quatre jusqu'à sept heures par jour. Les employés à temps plein reçoivent une pause d'une heure durant la troisième ou la quatrième heure de leur quart de travail. Les employés à temps partiel n'ont pas de pause. La durée des quarts de travail des employés à temps plein est de huit heures (incluant l'heure de pause) et peut être prolongée d'une heure ou de deux heures supplémetaires.

Dans une première étape, sa technique a été de réduire le nombre des variables représentants les employés à temps partiel. Pour cela deux ensembles de variables ont été considérés pour resprésenter les employés à temps partiels. Le premier ensemble représente les débuts et l'autre les fins des quarts de travail. La considération de ces deux ensembles de variables a réduit de manière importante la taille du problème. Par ailleurs, les pauses de repas pour les employés à temps plein n'est pas très flexible. En effet, il est exigé que la moitié des employés prennent leur pause durant la troisième période de leurs quarts de travail alors que l'autre moitié des employés la prennent durant la quatrième heure. De cette manière le nombre de variables représentants les employés à temps plein a été divisé par deux.

Les heures supplémentaires des employés à temps plein ont été modèlisées en ajoutant deux variables. Une pour chaque contrainte modélisant les deux dernières heures

de demande de la journée. Telles que formulées ces deux variables permettent à des employés à temps pleins d'être programmés à travailler des heures supplémetaires sans êtres programmés pour travailler les heures régulières. Un autre "défaut" est la possibilité qu'un employé à temps plein puisse avoir une pause "forcée" d'une heure après son quart de travail régulier avant de commencer son heure supplémentaire. Il est possible que ces circonstances ont été voulues par l'auteur mais cela n'a pas été mentionné dans son article. Un seul exemple numérique a été présenté. Les résultats montrent que la composante des employés à temps partiel est fortement représentative. Dans son exemple, vingt neuf employés à temps plein alors que trente et un employés à temps partiel sont nécessaires.

Le travail de Moondra fourni une contribution majeure dans les approaches de formulation réduisant la taille du modèle de programmation linéaire. Même si les représentations des heures supplémentaires présentent des faiblesses, les méthodes de réductions des variables ont été utilisées avec succès.

Keith (1976). Keith (1976) s'est intéressé à la construction d'horaires d'employés des centres d'appels téléphoniques. Au lieu de s'attaquer à résoudre directement le problème (1.1)-(1.3), en nombre entiers, il a mentionné que celà est très coûteux et il a proposé une approche heuristique. Son modèle contrôle le rapport du surplus relativement à la sous-couverture en imposant certaines bornes de tolérance.

Baker (1976). Dans une première étape, Baker (1976) a fait une revue historique du problème de construction d'horaires de personnels. Dans une deuxième étape, il a proposé un modèle de construction d'horaires. Pour cela, une analogie avec la théorie de l'inventaire a été exploitée. L'analogie réside dans le fait que dans cette théorie on gère le coût de sous-couverture (lorsque la demande n'est pas satisfaite en totalité) et le coût de surplus (capacité de stockage). Ainsi, un employé est affecté lorsque le coût marginal de son affectation est inférieur à l'économie marginale représentée

par le coût de sous-couverture. Si ces coûts de surplus et de sous couverture sont connus, le niveau d'inventaire optimal (ou bien en termes d'affectations d'employés, le nombre d'employés affectés par période) peut être déterminé. Ainsi, un programme linéaire est formulé qui incorpore ces coûts.

Mabert (1979). Mabert (1979) a introduit une méthode de programmation stochastique. Son modèle fait intervenir un ensemble de variables qui représentent la quantité de travail non accomplie chaque jour. La fonction objectif minimise la somme des coûts de labeur (habituels) plus la somme des coûts dûs au travail non accomplie. L'article étudie l'effet de la variation de la demande sur le coût. Il a été observé que le modèle est aussi performant pour les petites que pour les grandes demandes.

Henderson et Berry (1976). Dans sa thèse doctorale, sous la direction de Berry, Henderson (1974) voir aussi (Henderson et Berry (1976)) a considéré le problème de construction d'horaires pour les opérateurs de téléphone. Ils considèrent le modèle mathématique de Dantzig (1.1)-(1.3) modifié de telle sorte que tout les coûts c_j valent 1. Les quarts de travail considérés présentent une "large" flexibilité au sens où six paramètres sont nécessaires pour caractériser un quart de travail. Le nombre de quarts de travail à considérer étant très grand, ils abordent le problème mathématique par plusieurs heuristiques. Ils construisent une procédure heuristique pour sélectionner un sous ensemble initial de quarts de travail et d'autres heuristiques pour ajouter d'autres quarts de travail pour une ré-optimisation.

Henderson et Berry (1977). Contrairement à leur article de 1976 qui est basé que sur des heuristiques, en 1977, Henderson et Berry (1977) développent un algorithme de séparation et évaluation.

Mabert, Fairhurst, et Kilpatrick (1979). Mabert, Fairhurst et Kilpatrick (1979) se sont intéréssés à la construction d'horaires pour les employés d'un encodeur de

chèques pour une banque. C'est basé sur le modèle de programmation linéaire de construction d'horaires décrit par Mabert (1979). La contribution majeure de cet article est de donner la possibilité aux gestionnaires de tester plusieurs scénarios de flexibilité sous plusieurs demandes possibles. Cependant, leur modèle ne permet pas certaines flexibilités comme la possibilité de considérer des employés à temps partiels (moins de cinq jours par semaine). Aussi, le modèle ne permet pas d'analyser l'effet de permettre aux employés de commencer leurs quarts de travail à différentes heures de la journée en des journées différentes de la semaine.

Koelling (1982). Le modèle de Henderson et Berry (1976) minimise le nombre d'employés, le modèle de Baker (1976) minimise les coûts d'affectations d'employés aux différents quarts de travail, et le modèle de Luce (1973) minimise la valeur absolue de l'écart entre la demande en employés et le nombre d'employés affectés, (c'est à dire, minimise l'insatisfaction de la clientèle). Dans son doctorat, Koelling (1982) propose un modèle où il minimise à la fois les coûts d'attentes et les coûts d'affectations. Le coût global est constitué par les coûts d'attentes obtenus à l'aide d'un modèle de files d'attentes et les coûts de labeur.

Kim (1983). Kim (1983) s'est intéressé à la construction des quarts et des cycles de travail. Il a noté que, dans l'industrie des services, les employés doivent fournir un travail au moment demandé par la clientèle. Cependant, à moins de pouvoir affecter ces employés à des taches secondaires lorsque la demande des clients baisse, il y aura des périodes où certains employés se trouvent sans activité. Kim a classifié les taches en deux catégories : les activités reportables à plus tard, et les activités non reportables et qui doivent être executer au moment où la demande se fait. Ainsi, l'employé est engagé pour deux taches, une principale pour satisfaire les clients au moment où ils font la demande et l'autre tache lorsqu'il n'y a plus de client qui demande son temps. Kim a developpé un modèle mathématique de construction d'horaires d'employés pour les organisations qui ont les deux catégories de taches reportables et non

reportables. Dans l'ensemble, pour faire cette construction, Kim a eu à développer une méthodologie basée sur la programmation linéaire, la programmation vectorielle (goal programming), la programmation stochastique et la programmation vectorielle stochastique. Ensuite des comparaisons ont été faites avec des modèles de mono-activité non reportables. Il a été noté que le nombre d'employés requis et le coût de la main-d'oeuvre pour les systèmes à deux activités sont significativement moindre que ceux où seulement une activité non reportable est considérée.

Bailey et Field (1985). Les auteurs Bailey et Field (1985) ont étudié la flexibilité en termes des longueurs des quarts de travail. En effet, ils ont considéré des quarts de travail de six, huit et dix heures de longueurs. Des pauses de repas de trois périodes ont été considérées aussi. Ils ont considéré la version relaxée du modèle (1.1)-(1.3) pour obtenir des solutions non nécessairement entières. Ensuite à l'aide de la procédure développée par Bartholdi et al. (1980), ils arrondissent les solutions obtenues en des solutions entières.

Beaumont (1997). Il a proposé la plus détaillée des formulations de construction d'horaires de personnels. Il réduit au maximum le délai d'attente de la clientèle. Le nombre d'employés dans chaque période, le nombre maximum d'employés qui peuvent commencer à la même période, l'efficacité relative d'un employé, le coût de mettre un client en attente, le nombre moyen de taches attendues qu'un employé peut faire à chaque période, et le nombre maximal de taches qui doivent êtres accomplis à chaque période, le nombre d'entrepreneurs, ont été formulés comme des paramètres. Le modèle résultant est très large au point où la plupart des situations réalistes ne peuvent êtres traitées. Le nombre de variables augmente avec l'ajout de caractéristiques à considérer.

1.3 Modèles implicites

Le modèle de recouvrement (Dantzig (1954)) exige un nombre de plus en plus grand de variables lorsque l'on permet de plus en plus de flexibilité dans l'environnement de travail. Les modèles implicites ont l'avantage d'avoir moins de variables.

Bechtold et Jacobs (1990). Les auteurs ont développé un modèle implicite qui est considérablement plus petit que le modèle de recouvrement en termes de variables. En fait, au lieu de définir une variables pour chaque quart de travail avec sa pause spécifique, une variable est associée à chaque *type de quarts*. Ce dernier est définit par l'heure de début, la durée du quart de travail et la fenêtre de pauses associée dans laquelle la pause doit débuter. Ils utilisent aussi une variable par pause. Cette utilisation de deux types de variables représentant chacune une partie de l'information nécessite beaucoup moins de variables que d'énumérer explicitement tous les quarts. *Une limitation majeure dans leur modèle est la supposition que l'environnement de travail ne comporte aucun extra-chevauchement.* Par extra-chevauchement on entend la présence de type de quarts de travail de telle sorte que la fenêtre de pauses de l'un soit strictement incluse dans la fenêtre de pauses de l'autre au sens où la fenêtre de pauses de l'un commence plus tôt et se termine plus tard que l'autre fenêtre de pauses. Pour assurer que chaque quart de travail reçoive une seule pause qui débute dans sa fenêtre de pauses, d'autres contraintes sont considérées à cet effet.

Même si les modèles implicites ont déjà été construits avant Bechtold et Jacobs (1990), par exemple par Moondra (1976) ou encore Gaballa et Pearce (1979), leur modèlisation des placements des pauses est faite d'une manière nouvelle. Dans la littérature des horaires de personnels, ils sont considérés comme étant les premiers à avoir introduit la modélisation implicites des pauses dans les quarts de travail. Leur modèle est un modèle de programmation linéaire quit tient compte de la flexibilité

des pauses plutôt que d'être basé sur des heuristiques. Leur expérimentation numérique a montré la supériorité de leur modèle implicite par rapport aux modèles de recouvrements de Dantzig en ce qui concerne le temps de calcul. Bechtold et Jacobs (1990, page 1341) supposent que (1) l'horizon de travail est d'une durée inférieur à 24 heures, (2) les périodes de demande sont de durée égale, (3) à chaque quart de travail est affectée une seule pause, (4) la durée des pauses est d'une ou plusieurs périodes, (6) à chaque quart de travail est associée une fenêtre de pauses, (7) les pauses doivent débuter et prendre fin à l'intérieur du quart de travail, (8) absence d'extra-chevauchement, (au sens où aucune fenêtre de pauses n'est strictement incluse dans une autre fenêtre de pauses d'un autre type de quarts de travail et ayant les périodes de début et de fin distinctes de celles de la plus grande fenêtre de pauses) (9) Pas de sous couverture. Ajouter à cette liste de conditions le fait qu'ils ont supposé qu'une seule fenêtre de pauses est associée à chaque type de quarts de travail et que chaque pause est constituée d'un ensemble de périodes consécutives.

Bechtold et Jacobs (1996). Ces auteurs ont prouvé que leur formulation implicite de 1990 et la formulation de recouvrement de Dantzig (1954) sont équivalentes en nombres entiers sous certains conditions dont l'absence d'extra-chevauchement.

Aykin (1996). Cet auteur a proposé un autre modèle implicite de construction de quarts de travail où il a modèlisé implicitement le placement des pauses. Il a modelisé plusieurs pauses et fenêtres de pauses pour chaque quart de travail au lieu d'une seule pause. Cependant les pauses sont affectées aux quarts de travail avec une approche différente de celle de Bechtold et Jacobs. La différence réside dans le fait que Bechtold et Jacobs (1990) ont considéré une variable de pause associée à chaque période de demande et affectent les pauses aux quarts de travail implicitement alors qu'Aykin (1996) définit une variable de pause séparée pour chaque quart de travail. Cette approche d'Aykin (1996) généralise la représentation implicite des pauses introduite par Gaballa et Pearce (1979) au cadre générale de multi-pauses et multi-fenêtres de

pauses. Il est à noter que dans le cas particulier de Gaballa et Pearce leur modèle faisait intervenir plus de variables que le modèle équivalent de recouvrement c'est ce qui explique que leur approche n'a pas été considérée par d'autres chercheurs.

Thompson (1995). Thompson a utilisé la formulation de Bechtold et Jacobs (1990) combinée à une modélisation implicite des quarts de travail due à Moondra (1976) mettant en place une grande flexibilité dans la durée des quarts de travail et les débuts des quarts de travail. Les quarts de travail sont de durées, par exemple, de 6, 6.5, ..., 9.5 et 10 heures et peuvent commencer à toutes les 30 minutes au court de toute la journée. L'approche de Moondra consiste à modéliser les quarts de travail de durées et de périodes de début variables alors que l'approche de Bechtold et Jabocs consiste à modéliser les placements des pauses implicitement.

La modélisation implicite des placements des pauses a été aussi très largement utilisée dans les cycles combinés avec les quarts de travail. On notera Bailey (1985), Thompson (1992), Jacobs et Bechtold (1993a), Jacobs et Bechtold (1993b).

Jarrah, Bard et DeSilva (1994). Les auteurs ont décomposé le problème de construction de cycles combiné avec les quarts de travail en sept sous problèmes de construction de quarts de travail journaliers. Pour trouver une borne inférieure et une borne supérieure sur le nombre de cycles, ils ont considéré un processus d'énumération partielle et une heuristique assurant la réalisabilité qui converge rapidement vers des solutions presque-optimales. Le modèle a été appliqué aux employés d'un service postal. Leur modèle permet le temps partiel et le temps plein, plusieurs durées de quarts de travail, différents placements des pauses dans les jours de travail, et le nombre de jours de travail consécutifs de quatre et cinq jours et un rapport minimum entre le temps partiel et le temps plein.

Jacobs et Brusco (1996). Les auteurs ont donné une modélisation implicite des cycles combinés avec les quarts de travail en imposant aux débuts des quarts de

travail d'êtres dans une bande détérminée. Ce modèle est plus compact que celui du recouvrement. Ce modèle est appliqué à la construction des horaires du personnel des cabines de péages de la Illinois Tollway et a réduit d'environ 5% la taille de la main d'oeuvre.

Isken et Hancock (1998). Ces auteurs ont utilisé un modèle implicite pour générer l'horaire des cycles combinés avec les quarts de travail du personnel à temps plein et à temps partiel d'un hôpital.

Brusco et Jacobs (2000). Ces auteurs ont construit un modèle de cycles combinés avec les quarts de travail basé sur ceux de Betchold et Jacobs (1990), et de Jacobs et Brusco (1996). Ils ont incorporé aussi bien la flexilibilité des débuts de quarts de travail que les pauses et ont appliqué leur modèle à la construction d'horaires d'un centre d'appel.

Çezik et Günlük (2004). Les auteurs ont prouvé que la formulation implicite de Bechtold-Jacobs (1990) et la formulation de recouvrement sont équivalentes sous l'hypothèse d'absence d'extra-chevauchement. Ils ont considéré un modèle de programmation en nombres entiers avec contraintes de transport. Ils ont ensuite construit un réseau associé. En utilisant le théorème du min-cut max-flow de Ford-Fulkerson ils ont montré que les contraintes de leur modèle sont équivalentes à certaines contraintes portant sur les coupes du réseau considéré en cas d'absence d'extra-chevauchement.

Rekik, Cordeau et Soumis (2004). Indépendamment de Çezik et Günlük (2004), les auteurs Rekik, Cordeau et Soumis (2004) ont considéré la formulation de Benders du même problème de transport considéré par Çezik et Günlük et ont montré que les coupes de Benders qui en résultent correspondent aux contraintes du problème de transport. Une autre preuve de l'équivalence de la formulation implicite de Bechtold-Jacobs (1990) et la formulation de recouvrement a été donnée sous l'hypothèse d'absence d'extra-chevauchement.

Baba-Hadji (2004). Dans son mémoire de maîtrise, Baba-Hadji (2004) a donné une extension pour chacun des trois modèles de Dantzig (1954), Bechtold et Jacobs (1990) et de Aykin (1996) au cas général où il y a une grande flexibilité aussi bien dans les types de quarts que dans les pauses au sens où : (1) sont considérés des types de quarts avec des durées différentes et des plages de temps différentes, comme par exemple, des types de quarts de jour, de soir et de nuit ; (2) deux types de quarts n'ont pas nécessairement le même nombre de pauses ; (3) plusieurs décompositions sont possibles de la durée totale de pause ; (4) sont considérées des contraintes d'espacement entre les pauses. Comme pour Bechtold et Jacobs (1990), dans son extension de leur modèle, Baba-Hadji a supposé l'absence d'extra-chevauchement.

1.4 Contribution de ce mémoire

Depuis l'apparition du travail de Bechtold et Jacobs (1990), la littérature a connue plusieurs généralisations de leur modèle et cela toujours sous l'hypothèse d'absence d'extra-chevauchement. L'objectif de cette recherche est triple. Un premier volet consiste à trouver une extension au modèle implicite de Bechtold-Jacobs aux cas où il y a présence d'extra-chevauchement. Un deuxième volet de cette recherche est d'examiner la qualité de l'extension du modèle obtenu. On a montré qu'on a obtenu l'extension la meilleure possible qui soit au sens où aucune de nos contraintes n'est redondante. Un troisième volet consiste à examiner la qualité du modèle de Bechtold-Jacobs (1990) en cas d'absence d'extra-chevauchement. On a montré que leur modèle implicite sous leur hypothèse d'absence d'extra-chevauchement n'est pas optimal au sens où certaines de leurs contraintes (que nous avons détecter) sont redondantes. Ainsi, notre recherche s'est soldée par l'amélioration du modèle implicite de Bechtold-Jabocs en cas d'absence d'extra-chevauchement et par une extension minimale de celui çi en cas de présence d'extra-chevauchement.

CHAPITRE 2 : MODELE GÉNÉRALISÉ DE BECHTOLD-JACOBS POUR LES QUARTS-PAUSES DE TRAVAIL AVEC EXTRA-CHEVAUCHEMENT

2.1 Introduction

Ce deuxième chapitre est le cœur de ce mémoire. Les contraintes forward, backward et la contrainte d'égalité de Bechtold et Jacobs (1990) assurent que chaque employé reçoive une et une seule pause lorsqu'il n'y a pas d'extra-chevauchement. L'originalité dans notre travail est de construire des contraintes additionnelles (qu'on appelle *contraintes d'intervalles*) pour le modèle de Bechtold-Jacobs qui garantissent que chaque employé reçoive une et seule pause et celà lorsqu'il y a au moins un extra chevauchement. Bien entendu, nous allons aussi montrer que l'ensemble de nos contraintes d'intervalles est minimal au sens où aucune contrainte d'intervalle n'est redondante. Nous avons compléter notre étude de l'ensemble de toutes les contraintes et nous sommes parvenu à un résultat inattendu : En effet, nous avons détecter quelques contraintes forward et backward qui sont redondantes même en absence d'extra chevauchement ! Ceci veut dire que nous avons montrer que l'ensemble des contraintes de Bectold-Jabocs n'est pas minimal et qu'il est possible de le réduire davantage. Nous nous sommes pas contenter de cette étude de l'ensemble des contraintes mais nous avons aussi proposer un réseau orienté des contraintes qui révèle une certaine structure inhérente de l'ensemble de toutes les contraintes du problème. De plus, de ce réseau il apparaît clairement quel est le sous-ensemble minimal de contraintes à considérer aussi bien dans le cas où il y a des extra-chevauchements que dans le cas contraire.

Dans ce qui suit on illustre l'originalité de notre travail par un exemple. Cet exemple montre que s'il y a au moins un extra-chevauchement alors les contraintes forward, backward et l'égalité ne suffisent pas pour assurer que chaque employé puisse avoir une unique pause, alors que si on ajoute nos contraintes d'intervalles, l'affectation des pauses aux employés devient possible de telle sorte que chaque employé reçoive exactement une pause.

L'horizon de travail est l'intervalle de temps allant de 18h00 jusqu'à 23h00. La demande en employés est définie à tous les quarts d'heures. Ainsi, l'horizon de travail peut être considéré comme l'ensemble $I = \{1, 2, \cdots, 20\}$ de tout les quarts d'heures allant de 18h00 à 23h00. Le premier quart d'heure allant de 18h00 à 18h15 est noté par $i = 1$ et ainsi de suite jusqu'au dernier quart d'heure allant de 22h45 à 23h00 qui est noté par $i = 20$. Le tableau suivant définit la demande d_i en employés pour chaque $i \in I$:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_i	10	10	10	10	8	8	8	8	8	8
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d_i	8	8	6	6	6	6	2	2	2	2

Il y a au total 12 quarts de travail définis par les caractéristiques suivantes :

Quart de travail	début du quart	durée du quart	pause du quart
j_1	18h00	5h	$k_1 = [19h15, 19h45[$
j_2	18h00	5h	$k_2 = [19h30, 20h00[$
j_3	18h00	5h	$k_3 = [19h45, 20h15[$
j_4	18h00	5h	$k_4 = [20h00, 20h30[$
j_5	18h00	5h	$k_5 = [20h15, 20h45[$
j_6	18h00	5h	$k_6 = [20h30, 21h00[$
j_7	18h00	5h	$k_7 = [20h45, 21h15[$
j_8	18h15	4h30	$k_2 = [19h30, 20h00[$
j_9	18h15	4h30	$k_3 = [19h45, 20h15[$
j_{10}	18h15	4h30	$k_4 = [20h00, 20h30[$
j_{11}	18h15	4h30	$k_5 = [20h15, 20h45[$
j_{12}	18h15	4h30	$k_6 = [20h30, 21h00[$

Notons par $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{12}$ le nombre d'employés à recruter pour les quarts de travail $j_1,\ j_2, \cdots, j_{12}$ respectivement. Le modèle de recouvrement de Dantzig consiste à minimiser le nombre d'employés à recruter, soit

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12}$$

sous les contraintes de non négativité des variables entières

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0, \\ x_7 &\geq 0,\ x_8 \geq 0,\ x_9 \geq 0,\ x_{10} \geq 0,\ x_{11} \geq 0,\ x_{12} \geq 0, \end{aligned}$$

et les contraintes de couvertures correspondantes à chacune des 20 périodes de de-

mandes :

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 10 \quad (i = 1)\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} &\geq 10 \quad (i = 2)\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} &\geq 10 \quad (i = 3)\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} &\geq 10 \quad (i = 4)\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} &\geq 8 \quad (i = 5)\\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} &\geq 8 \quad (i = 6)\\
x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} &\geq 8 \quad (i = 7)\\
x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} &\geq 8 \quad (i = 8)\\
x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} &\geq 8 \quad (i = 9)\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} &\geq 8 \quad (i = 10)\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} &\geq 8 \quad (i = 11)\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} &\geq 8 \quad (i = 12)\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} &\geq 6 \quad (i = 13)\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} &\geq 6 \quad (i = 14)\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} &\geq 6 \quad (i = 15)\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} &\geq 6 \quad (i = 16)\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} &\geq 2 \quad (i = 17)\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} &\geq 2 \quad (i = 18)\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} &\geq 2 \quad (i = 19)\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 2 \quad (i = 20).
\end{aligned}
$$

Le modèle de Bechtold et Jacobs consiste à réduire le nombre de variables en regroupant certains quarts de travail en un seul type de quarts de travail de la manière

suivante. Tout d'abord on définit des ensembles de pauses consécutives de même durée chacune qu'on appelle *fenêtres de pauses* et on définit un *type de quarts de travail* comme étant la réunion de tous les quarts de travail qui ont le même *début*, la même *durée* et leur pauses appartiennent à la même *fenêtre de pauses*[1].

Dans l'exemple qui nous concerne, on peut définir deux types de quarts de travail, q_0, et q_1. Le premier est la réunion des sept premiers quarts de travail $j_1, \cdots, j_7$ et le second est la réunion des quarts de travail restants. Les fenêtres de pauses associées sont notées $P(q_0)$ et $P(q_1)$.

On note $J = \{q_0,\ q_1\}$ l'ensemble des types de quarts de travail ainsi définis :

Type de quarts de travail	début	durée	fenêtres de pauses
q_0	18h00	5h	$P(q_0) = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7\}$
q_1	18h15	4h30	$P(q_1) = \{k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$.

Pour tout $j \in J = \{q_0, q_1\}$ on définit les variables entières de décisions S_j qui représentent le nombre d'employés à recruter pour chaque type de quarts de travail j. Aussi, pour tout $k \in K = \{k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4,\ k_5,\ k_6,\ k_7\}$ on définit les variables entières de décisions B_k qui représentent le nombre d'employés qui prennent la pause k (et donc qui ne sont pas en service pendant toute la durée de la pause k).

Notons qu'un *quart de travail* est défini par la donnée simultanée d'un *type de quarts de travail* $j \in J$ et d'une *pause* $k \in P(j)$. Dans notre exemple, les quarts de travail

[1] Parfois on identifie une *pause* avec son *début*, cela est dû au fait que toutes les pauses considérées sont de même durée. Avec cette identification, une fenêtre de pauses s'identifie avec l'ensemble des débuts de pauses et cet ensemble de débuts de pauses est nécessairement un intervalle car les pauses de la même fenêtre de pauses sont consécutives.

sont au nombre de douze et sont définis par les couples :

$$\begin{aligned} j_1 &= (q_0, k_1);\ j_2 = (q_0, k_2);\ j_3 = (q_0, k_3);\ j_4 = (q_0, k_4); \\ j_5 &= (q_0, k_5);\ j_6 = (q_0, k_6);\ j_7 = (q_0, k_7) \\ j_8 &= (q_1, k_2);\ j_9 = (q_1, k_3);\ j_{10} = (q_1, k_4);\ j_{11} = (q_1, k_5);\ j_{12} = (q_1, k_6). \end{aligned}$$

Ainsi, pour déterminer le nombre minimal de quart de travail à partir des types de quarts de travail, on procède en deux étapes.

La première consiste à détérminer le nombre d'employés S_0 et S_1 qui doivent être recrutés pour chaque type de quarts de travail q_0 et q_1 respectivement, et le nombre d'employés B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, qui doivent êtres affectés à chaque pause; k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7 de telle sorte à minimiser le nombre total d'employés à recruter, $Z = S_0 + S_1$, tout en respectant les contraintes de couvertures de la demande,

S_0	$\geq$	10	$(i=1)$	$S_0 + S_1 - B_4 - B_5$	$\geq$	8	$(i=11)$
$S_0 + S_1$	$\geq$	10	$(i=2)$	$S_0 + S_1 - B_5 - B_6$	$\geq$	8	$(i=12)$
$S_0 + S_1$	$\geq$	10	$(i=3)$	$S_0 + S_1 - B_6$	$\geq$	6	$(i=13)$
$S_0 + S_1$	$\geq$	10	$(i=4)$	$S_0 + S_1$	$\geq$	6	$(i=14)$
$S_0 + S_1$	$\geq$	8	$(i=5)$	$S_0 + S_1$	$\geq$	6	$(i=15)$
$S_0 + S_1 - B_0$	$\geq$	8	$(i=6)$	$S_0 + S_1$	$\geq$	6	$(i=16)$
$S_0 + S_1 - B_0 - B_1$	$\geq$	8	$(i=7)$	$S_0 + S_1$	$\geq$	2	$(i=17)$
$S_0 + S_1 - B_1 - B_2$	$\geq$	8	$(i=8)$	$S_0 + S_1$	$\geq$	2	$(i=18)$
$S_0 + S_1 - B_2 - B_3$	$\geq$	8	$(i=9)$	$S_0 + S_1$	$\geq$	2	$(i=19)$
$S_0 + S_1 - B_3 - B_4$	$\geq$	8	$(i=10)$	S_0	$\geq$	2	$(i=20)$

Supposons que S_0, S_1, et B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7 sont déterminés, la deuxième étape consiste à affecter à chacun des S_0 et S_1 employés sa pause (unique) parmi les pauses k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7 tout en veillant à affecter un total de B_l employés à la pause k_l, pour tout $l = 1, 2, \cdots, 7$. Le problème qui se pose est de savoir si une telle affectation est possible ou non. Les auteurs Bechtold et Jacobs (1990) ont donné une réponse mais qui ne couvre pas toutes les situations possibles.

Bechtold et Jacobs (1990) ont définit des contraintes supplémentaires sous le nom de contraintes *forward*, contraintes *backward* et une autre contrainte particulière appelée contrainte d'*égalité*. Cette dernière est tout simplement la contrainte :

$$B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 + B_7 = S_0 + S_1,$$

qui s'interprète en disant qu'il y a autant de pauses que d'employés rectrutés. Dans notre exemple, la famille des contraintes forward est constituée d'une seule contrainte

$$B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 - S_1 \geq 0,$$

et la famille des contraintes backward est elle aussi constituée d'une seule contrainte

$$B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 + B_7 - S_1 \geq 0.$$

Bechtold et Jacobs ont démontré que l'affectation est garantie dans le cas où *il n'y a pas d'extra-chevauchement*. Ce dernier signifie qu'il existe au moins deux types de quarts A_1 et A_2 tels que la fenêtre de pauses $P(A_1)$ commence plus tôt et fini plus tard que $P(A_2)$. Cette situation est justement présente dans notre exemple. En effet, la première pause de $P(q_0)$ est k_1 qui commence plus tôt que toutes les pauses de $P(q_1)$ et la dernière pause de $P(q_0)$ est k_7 qui fini après la fin de la dernière pause k_6 de $P(q_1)$. La garantie que l'affectation soit possible n'est pas assurée dans notre exemple. Une résolution numérique de notre exemple, en tenant compte de toutes les contraintes de non négativité, de couvertures et des contraintes forward, backward et l'égalité, nous a donné les résultats suivant :

$Z = 16$ employés, $S_0 = 10,\ S_1 = 6$
$B_1 = B_7 = 8,\ B_2 = B_3 = B_4 = B_5 = B_6 = 0.$

On peux vérifier facilement que toutes les contraintes sont satisfaites. Cependant, l'affectation n'est pas possible car les six ($S_1 = 6$) employés qui vont travailler le

type de quarts de travail q_1 ne peuvent prendre aucune pause puisque leur pause doit être prise dans $P(q_1) = \{k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$ alors que le nombre d'employés qui doivent prendre chacune de ces pauses est $B_2 = B_3 = B_4 = B_5 = B_6 = 0$. De plus on constate que les dix ($S_0 = 10$) employés qui vont travailler le type de quarts de travail q_0 doivent prendre seize pauses au total puisque les huit employés qui doivent prendre la pause k_1 ($B_1 = 8$) et les huit employés qui doivent prendre la pause k_7 ($B_7 = 8$) doivent nécessairement travailler le type de quarts de travail q_0 (observons que k_1, et k_7 n'appartiennent pas à $P(q_1)$). Cela implique qu'il existe des employés de q_0 qui prennent la pause k_1 et la pause k_2. Ce qui n'est pas autorisé car chaque employé doit prendre une et une seule pause. Ainsi, le modèle de Bechtold-Jacobs n'a pas résolu le problème de notre exemple.

Le but de notre travail est de trouver un ensemble (minimal) de contraintes (que nous avons appeler *contraintes d'intervalles*) à ajouter à toutes les contraintes de Bechtold et Jacobs de manière à assurer l'affectation mentionnée ci-dessus. Pour chaque extra-chevauchement on a définit une contrainte d'intervalle. Dans notre exemple, il y a un seul extra-chevauchement, ce qui donne lieu à la contrainte d'intervalle :

$$B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 - S_1 \geq 0.$$

Une résolution numérique de notre exemple qui tient compte aussi de cette contrainte d'intervalle donne les résultats suivants :

$Z = 16$ employés, $S_0 = 10$, $S_1 = 6$
$B_1 = 2$, $B_2 = 6$, $B_3 = B_4 = B_5 = B_6 = 0$ *et* $B_7 = 8$.

À présent, on peut vérifier facilement que toutes les contraintes sont satisfaites, et on peut faire l'affectation des pauses aux employés des quarts de travail. En effet, Parmi les dix employés de q_0, ($S_0 = 10$), deux vont prendre la pause k_1 ($B_1 = 2$) et huit vont prendre la pause k_7 ($B_7 = 8$). Quant aux six ($S_1 = 6$) employés de q_1 ils prennent tous la même pause k_2 ($B_2 = 6$).

Dans ce chapitre, on va voir l'étude théorique qui concerne nos contraintes d'intervalles.

2.2 Bechtold-Jacobs generalized model for shift scheduling with extraordinary overlap

Idris Addou and François Soumis

École Polytechnique de Montréal et GERAD
C.P. 6079, succ. Centre-Ville Montréal, Canada H3C 3A7.

idris.addou@gerad.ca and francois.soumis@gerad.ca

June 14, 2004

Abstract :

In constructing working shifts, the classical Dantzig set covering model (1954) uses a great number of variables which makes computations very complicated for some cases of breaks flexibility. Bechtold and Jacobs (1990) proposed an implicit model under the assumption that there is no extraordinary overlap which reduced considerably the number of variables. In this paper we give a generalization valid without this hypothesis by adding a minimal set of constraints. Also, in case where there is no extraordinary overlap we reduce the constraints set of Bechtold and Jacobcs model to a minimal set.

Keywords : shift, break, forward, backward, implicit personnal scheduling, extraordinary overlap.

2.2.1 Introduction

To satisfy costumer demand, organizations construct shifts for their employees. "Labor scheduling–which involves putting the proper number of people in the right jobs at the correct time–is simple to say, but a challenge to accomplish"([2]). The classical integer programming approach is based on the set covering model which goes back to Dantzig 1954 [10] (hereafter, (P1)). The aim of (P1) is to minimize the cost associated to the whole set of employees under a set of constraints ensuring that there are enough employees satisfying total demand. It should be pointed out that this formulation lists all shifts explicitly by means of a decision variable; more precisely, two shifts having different breaks (for instance) are considered as different and a distinct variable is assigned to each one. Also, beside breaks, one can have other types of flexibility, for instance start-time, shift length. Consequently, the number of variables increases quickly with respect to flexibility of working environment. Therefore, the Dantzig model becomes very difficult, if not impossible, to solve optimally.

In order to avoid this variables number augmentation and to keep enough flexibility of working environment, authors considered several models in which flexibility do not appear explicitly in the variables, as is the case for (P1), but is implicitly hidden in constraints and/or objective function. This kind of models is known as *implicit models.*

Bechtold and Jacobs [6] introduced an implicit model (hereafter, (P2)) in which two particular families of constraints were considered. Namely, *forward* and *backward constraints.* This model has fewer variables since it represents all shifts having the same starting and ending time by just one variable. These shifts have a common associated interval of breaks in which they are assigned a break. These shifts constitute a shift-type. The authors prove the efficiency of (P2) over (P1) by numerical

[2]By Gary M. Thompson, see [19]

experiments and they conjecture that (P2) is equivalent to (P1) in the sense that the two models represent the same set of allowed shifts and that the optimal objective function values of the two models are equal. Next, using sets framework, the same authors prove, [7], that their conjecture holds. To do so, they first prove that to have (P1) equivalent to (P2) it is necessary and sufficient that a set of constraints of some integer programming model, say (P), are satisfied ([7, Theorem 1]). Note that (P) has a comparable disadvantage as that of (P1) since it contains not only constraints of (P2) but also a great number of other constraints. Next, they prove that under *the absence of extraordinary overlap* (hereafter EO) assumption, the constraints of (P) are consequences of those of (P2) ([7, Theorems 2 and 3]) and therefore, (P1), (P2) and (P) are equivalent under this assumption. An extraordinary overlap happens if earliest break in a break window P_{j_1} starts after the earlier one in some other break window P_{j_2} and the latest break in P_{j_1} ends before the end of the latest one in P_{j_2}. (Precise definition of extraordinary overlap is given in the next section.) Below are formulated (P1), (P2) and (P).

Very recently, Çezik and Günlük [9] have considered[3] an integer programming model with transportation constraints and the objective function of (P) and have constructed a related capacitated network and by making use of the min-cut max-flow theorem (Ford and Fulkerson [12]) they prove that constraints of (P) are equivalent to some constraints on cut-capacity of the considered network. So, they proved that (P) can be considered as a transportation problem. Next using cut-capacity framework they provide an elegant and short alternative proof of the equivalence of (P2) and (P) under *the absence of EO assumption.* That is, they proved that any constraint of (P) is a consequence of the forward and backward constraints. In case where there is extraordinary overlap they provide the model (P) with all its prohibitive number of constraints. [9, see, subsection 3.1.2].

[3]Actually, they prove further interesting results than those stated here.

Very recently and independently from Çezik and Günlük, the authors Rekik et al. [17] have considered Benders formulation of the same transportation problem as that considered by Çezik and Günlük and they show that the resulting Benders cut correspond to the constraints of model (P). Also, using Benders cut framework they provide elegant and short alternative proofs of the equivalence of (P2) and (P) and of the equivalence of their LP relaxation, under *the absence of EO assumption.* In case where there is extraordinary overlap there Proposition 1 implies that one has to consider model (P) with all its prohibitive number of constraints.

Roughly speaking, one can summarize the three mentioned articles above by saying that each group of authors have considered problem (P) and have shown that under *the absence of EO assumption* a big set of constraints of (P) can be reduced to forward and backward constraints only. None of them have reduced the whole constraints set of (P) when there is extraordinary overlap. So, one can *ask for a minimal set of constraints dominating all other constraints when there is EO*? The answer of this question is the main subject of this paper.

There are many utilizations of this kind of implicit models as those by Jacobs and Brusco [14], [15], [8]. We can also mention papers using forward and backward constraints as Jarrah et al. [16] which propose an implicit model for discontinuous tour scheduling problem and Thompson [18] which presented a doubly-implicit integer shift model. Some implicit models involve no forward nor backward constraint and are valid without extraordinary overlap hypothesis were presented by Aykin [2], [3], [4].

The purpose of this work is to study the case where there is extraordinary overlap. More precisely, in a first step we show that problem (P) can be reduced to a compact alternative problem (P2-EO). In a second step we show that (P2-EO) is obtained by adding a minimal set of constraints to the forward and backward constraints and the

equality. Next we show that some forward and backward constraint are redundant and we show that the other forward and backward constitute a minimal set, that is none of them can be generated by the others. Taking into account our result, this means that the set of forward and backward constraints considered by Bechtold and Jacobs is not minimal even if there is no EO. Next we construct a network where nodes represent constraints. This network revels some inherent structure of the constraints set and on the other hand it shows which constraint should belong to the minimal set of constraints.

The paper is organized as follows. In the reminder of this Introduction we list down all the formulations of underlying problems. In Section 2, after recalling one main result of Rekik et al. [17], we show that their result may be strengthened using the same proof. Next, we show that our augmented family of constraints (obtained by adding *interval constraints* defined below (2.25)) to the constraints of (P2) is both *sufficient* (Corollary 2.2.6) to generate all necessary constraints and *minimal* (Proposition 2.2.7). The following is to provide further reduction even under no EO assumption. Next, we construct a directed network which provide a representation of the set of all constraints. This representation makes clear the impact of the presence of EO as well as the absence of EO on the constraint set.

Dantzig set covering model (P1)

It can be stated as follows :

$$\text{Minimize} \sum_{j \in J} c_j S_j \tag{P1}$$

under the constraints

$$\sum_{j \in J} \delta_{ij} S_j \geq d_i \qquad \forall i \in I \tag{2.1}$$

$$S_j \geq 0 \text{ and integer} \qquad \forall j \in J \tag{2.2}$$

J is the set of all possible shifts, I is the set of all demand periods, c_j is the cost associated to shift $j \in J$, d_i is the number of employees required for the demand period $i \in I$, S_j is the variable representing the number of employees working shift $j \in J$, $\delta_{ij} = 1$ if shift $j \in J$ covers demand period $i \in I$; 0 otherwise.

Bechtold-Jacobs model (P2)

To state the model we need to introduce a notation. A break $k \in K$ is a finite set of successive demand periods $i, i+1, i+2, \cdots, i+l$ and a shift-type $j \in J$ is defined when its start-time, its length and its break window P_j are given, where P_j is defined as a set of breaks such that their union covers some number of successive demand periods $i, i+1, i+2, \cdots, i+t$. Union of P_j's when $j \in \bar{J} \subseteq J$ is noted by $P(\bar{J})$. The sets J and K are fixed at the beginning by union rules. A shift-type is represented by a variable and a break by an other. One variable is used to represent all shifts having the same break window. Thus, the number of shift-type variable is considerably reduced comparing to Dantzig model (P1) where each pair shift-break requires a separate variable. For brevity, in the rest of this paper, we shall say *shift* instead of *shift-type.* Next, define an order relation in K as follows : $k_1 \leq k_2$ if k_1 starts before k_2 or k_1 and k_2 start at the same time and k_1 ends before k_2. If k_1 and $k_2 \in K$, we denote by $[k_1, k_2]$ the subset of K of all elements are breaks k satisfying : $k_1 \leq k \leq k_2$. Let, $K^s = \bigcup_{j \in J} \{\min(P_j)\}$; $\min(P_j) = \min\{k \mid k \in P_j\}$, $K^e = \bigcup_{j \in J} \{\max(P_j)\}$; $\max(P_j) = \max\{k \mid k \in P_j\}$ and $k_s := \min(K)$, $k_e := \max(K)$.

Bechtold and Jacobs model (P2) can be stated as follows :

$$\text{Minimize} \sum_{j \in J} c_j S_j \tag{P2}$$

under the constraints :

$$\sum_{j\in J}\delta_{ij}S_j - \sum_{k\in K}\rho_{ik}B_k \geq d_i \qquad \forall i \in I \tag{2.3}$$

$$\sum_{j\in J}S_j - \sum_{k\in K}B_k = 0 \tag{2.4}$$

$$\sum_{k'\in K^F(k)}B_{k'} - \sum_{j\in J^F(k)}S_j \geq 0 \qquad \forall k \in K^e \setminus \{k_e\} \tag{2.5}$$

$$\sum_{k'\in K^B(k)}B_{k'} - \sum_{j\in J^B(k)}S_j \geq 0 \qquad \forall k \in K^s \setminus \{k_s\} \tag{2.6}$$

$$S_j \geq 0 \text{ and integer} \qquad \forall j \in J \tag{2.7}$$

$$B_k \geq 0 \text{ and integer} \qquad \forall k \in K. \tag{2.8}$$

$K^F(k)$ is the set of all breaks starting before break k or starting at the same time as k but ending before break k. The set $K^B(k)$ is that of all breaks starting after break k or starting at the same time as k but ending after break k. The set $J^F(k)$ is that of shifts $j \in J$ for which all assigned break in the breaks window P_j ends before or at the same time as break k do. At the end, $J^B(k)$ is the set of shifts $j \in J$ for which all assigned break in the breaks window P_j start after or at the same time as break k do.

Integer programming transportation problem

As before, S_j denotes the number of employees working shift $j \in J$, and B_k denotes the number of employees which are taking break k. Additional variables X_{jk} are added in order to indicate the number of shifts j assigned to the break k. The proposed integer programming transportation model reads as follows :

$$\text{Minimize } \sum_{j\in J}c_jS_j \tag{2.9}$$

under the constraints

$$\sum_{j\in J}\delta_{ij}S_j - \sum_{k\in K}\rho_{ik}B_k \geq d_i \qquad \forall i \in I \tag{2.10}$$

$$\sum_{k\in P_j} X_{jk} - S_j = 0 \qquad \forall j \in J \tag{2.11}$$

$$\sum_{j:k\in P_j} X_{jk} - B_k = 0 \qquad \forall k \in K \tag{2.12}$$

$$X_{jk} \geq 0 \text{ and integer}, \qquad \forall j \in J,\ \forall k \in P_j \tag{2.13}$$

$$S_j \geq 0 \text{ and integer}, \qquad \forall j \in J, \tag{2.14}$$

$$B_k \geq 0 \text{ and integer}, \qquad \forall k \in K. \tag{2.15}$$

where $\rho_{ik} = 1$ if break $k \in K$ covers demand period $i \in I$, 0 otherwise. Other parameters are defined as before. Note that as for Dantzig's model (P1), the objective function is to minimize the total cost associated to the employees. Constraints (2.10) ensure that, for all demand period $i \in I$, there are enough employees working shift $j \in J$ and are not at the rest in their break $k \in K$ in order to satisfy demand d_i. Constraints (2.11) and (2.12) ensure that to each shift $j \in J$ is assigned one and only one break $k \in K$ belonging to its breaks window P_j. Variables X_{jk} can be considered as float variables in a bipartite network $G(J \cup K,\ A)$ where an arc $(j,\ k)$ is in A if the break k is in the break window P_j.

Rekik et al. [17] proposed this transportation model from which they obtain implicit models of Bechtold and Jacobs [6] (P2) as well as Aykin [3], [4]. (see [17, Propositions 2 and 3]).

Even if we use notation from Rekik et al. [17], this transportation model has been considered independently by Rekik et al. [17] and by Çezik and Günlük. [9].

The common considered problem (P)

It can be stated as follows :

$$\text{Minimize} \sum_{j \in J} c_j S_j \tag{P}$$

under the constraints :

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in J} \delta_{ij} S_j - \sum_{k \in K} \rho_{ik} B_k &\geq d_i, \text{ for all } i \in I, \\
\sum_{k \in K} B_k &= \sum_{j \in J} S_j, && (2.16) \\
\sum_{d \leq k \leq f} B_k &\geq \sum_{j \in J(d,\, f)} S_j, \text{ for all } (d,\, f) \in A^+ && (2.17) \\
S_j &\geq 0, \text{ and integer} \qquad \forall j \in J && (2.18) \\
B_k &\geq 0, \text{ and integer} \qquad \forall k \in K, && (2.19)
\end{aligned}$$

where, for all couple $(d,\, f) \in K^s \times K^e$,

$$J(d,\, f) = \{j \in J \mid d \leq \min P_j \text{ and } \max P_j \leq f\}. \tag{2.20}$$

That is, $J(d,\, f)$ is the set of all shifts $j \in J$ such that their corresponding break window P_j are completely contained in the break interval $[d,\, f]$. Hence, for all $\bar{J} \subseteq J$, $P(\bar{J}) \subseteq \left[\bar{d},\, \bar{f}\right]$ if and only if $\bar{J} \subseteq J(d,\, f)$. In particular, for $\bar{J} = J(d,\, f)$, it follows that $P(J(d,\, f)) \subseteq [d,\, f]$. However, the inverse inclusion, "$[d,\, f] \subseteq P(J(d,\, f))$" is not necessarily true for all $(d,\, f) \in K^s \times K^e$. That is, if $(d,\, f) \in K^s \times K^e$ then the break interval $[d,\, f]$ do not correspond necessarily to some break window $P(\bar{J})$ for some $\bar{J} \subseteq J$. So, The set A^+ is defined such that ; for all couple $(d,\, f) \in K^s \times K^e$, $(d,\, f) \in A^+$ if and only if there exists $\bar{J}'$ a subset of J, such that $J(d,\, f) = \bar{J}'$ and $P(\bar{J}') = [d,\, f]$. That is,

$$A^+ = \{(d,\, f) \in K^s \times K^e : J(d,\, f) \neq \emptyset \text{ and } P(J(d,\, f)) = [d,\, f]\}. \tag{2.21}$$

One can note that if $(d_1,\ f_1)$ and $(d_2,\ f_2)$ are two elements of A^+ such that $[d_1,\ f_2] = [d_1,\ f_1] \cup [d_2,\ f_2]$ and $[d_1,\ f_1] \cap [d_2,\ f_2] = \emptyset$ and that $(d_1,\ f_2)$ is also an element of A^+ then one can immediately notice that constraint associated to $(d_1,\ f_2)$ is the sum of the two others. This suggests to define an order relation as follows. for all $(d_1,\ f_1) \in A^+$ and $(d_2,\ f_2) \in A^+$ we define $(d_1,\ f_1) \leq (d_2,\ f_2)$ if and only $[d_1,\ f_1] \subseteq [d_2,\ f_2]$. Hence A^+ is a partially ordered set. Next, denote by $A^{\min}$ the subset of minimal elements of the ordered set A^+. It follows that each constraint defined by a specified element in A^+ is the sum of (is dominated by) all the constraints defined by minimal elements of A^+ that the specified element contains.

Based on this observation, one can reduce the set of constraints in model (P) to the set of the following constraints :

$$\sum_{d \leq k \leq f} B_k \geq \sum_{j \in J(d,\ f)} S_j, \text{ for all } (d,\ f) \in A^{\min} \tag{2.22}$$

and obtain a little bit smaller model than model (P) above. We denote this smaller model as ($\mathrm{P}^{\min}$). However, if $A^{\min} \neq A^+$ then $A^{\min}$ do not contains all the forward and the backward constraint of problem (P2). Then if one needs these constraints one should consider $A^{\min}$ instead of A^+ but conserve the forward and backwards constraints.

Next, Rekik et al. eliminated the X_{jk} variables from the transportation problem as well as constraints (2.11)—(2.13) and replaced them by Benders cut which can be stated in terms of S_j and B_k. They show that the constraints (2.4) (2.6) are particular Benders cut and they show that they are enough ([4]), *under no extraordinary overlap assumption.* Next, they show that the transportation model is equivalent to the implicit model (P2) (which is very compact), *under no extraordinary overlap assumption.*

[4]In the sense that any other constraint is redundant.

Note that using Benders cuts formulation, analogous models to (P) and to (P^{min}) have been considered by Rekik et al. [17]. They first reduce (P) to (P^{min}) and next (P^{min}) to (P2) under no extraordinary overlap assumption (see [17, Propositions 1 and 2 respectively).]) However, Çezik and Günlük [9] as well as Bechtold and Jacobs [7] have considered in their respective formulations, only analogous models to (P).

Bechtold-Jacobs generalized shift-scheduling model

Our implicit Bechtold-Jacobs generalized model (hereafter, P2-EO) is obtained by adding some constraints (2.25)(we called *interval constraints*) to the implicit model of Bechtold-Jacobs (P2). The mathematical formulation reads as follows

$$\text{Minimize} \sum_{j\in J} c_j S_j \tag{P2-EO}$$

under the constraints :

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in J}\delta_{ij}S_j - \sum_{k\in K}\rho_{ik}B_k &\geq d_i, \text{ for all } i\in I,\\
\sum_{j\in J} S_j &= \sum_{k\in K} B_k,\\
\sum_{k_s\leq k\leq f} B_k &\geq \sum_{j\in J(k_s,\,f)} S_j, \text{for all } f\in K^e\setminus\{k_e\}. &(2.23)\\
\sum_{k\geq d} B_k &\geq \sum_{j\in J(d,\,k_e)} S_j, \text{for all } d\in K^e\setminus\{k_s\}. &(2.24)\\
\sum_{d\leq k\leq f} B_k &\geq \sum_{j\in J(d,\,f)} S_j, \text{for all } (d,\,f)\in A^{\min}\cap K^{OL}, &(2.25)\\
S_j &\geq 0, \text{and integer} \qquad \forall j\in J &(2.26)\\
B_k &\geq 0, \text{and integer} \qquad \forall k\in K. &(2.27)
\end{aligned}$$

where $J(k_s,f)$, $J(d,k_e)$ and $J(d,\ f)$ are defined in (2.20) and $A^{\min}$ is the subset of minimal elements of A^+ defined in (2.21) and K^{OL} is defined by

$$K^{OL}=\{(d,\ f)\in K^s\times K^e \mid \exists\, j_0\in J : \min P_{j_0} < d \text{ and } f < \max P_{j_0}\}.$$

Remark 2.2.1 *In subsection 2.2.2, we will show how it is possible to reduce the forward and the backward constraints (2.23) and (2.24). So, our best model is obtained by considering that above with the constraint in (2.23) and (2.24) reduced as in subsection 2.2.2.*

It is worth noticing that we have add no new variable for this model.

2.2.2 Main results

First, let us provide a precise definition of what is intended by an extraordinary overlap.

Definition 2.2.2 *For all $\bar{J} \subseteq J$, we say that $\bar{J}$ is involved in an extraordinary overlap if there exists some $j \in J$ such that*

$$\min P_j < \min P(\bar{J}) \tag{2.28}$$

and

$$\max P(\bar{J}) < \max P_j. \tag{2.29}$$

Also, we say that $\bar{J}$ is involved in no *extraordinary overlap if the following condition is satisfied :*

"For all $j \in J$, at most one condition holds among (2.28) and (2.29)." $(\mathbb{H}(\bar{J}))$

Observe that if $\mathbb{H}(\bar{J}')$ is satisfied for all single sets $\bar{J}' \subseteq \bar{J}$ then $\mathbb{H}(\bar{J})$ is satisfied too.

In 1996, Bechtold and Jacobs [7], and more recently, Rekik et al. [17], as well as Çezik and Günlük [9], have considered *no extraordinary overlap assumption*, which is equivalent to the assumption that $\mathbb{H}(\{j\})$ is satisfied for all $j \in J$.

Rekik et al.[17], have considered the transportation problem (2.9) and (2.15). Next, they show that the constraints associated to its Benders cut are nothing but the constraints of problem (P). Their first following result [17, Proposition 1] was to reduce the constraints set in (2.17) to those in (2.22) and to obtain model (P^{min}). In subsection 2.2.1, within our framework, we have provided an alternative short and straightforward proof of this reduction from (P) to (P^{min}). Next, they provide a second reduction from (P^{min}) to (P2). With our framework, their result ([17, Proposition 2]) reads as follows.

Proposition 2.2.3 *[17, Proposition 2]. Under the assumption of no extraordinary overlap, constraints in (2.22) are generated by forward (2.5) and backward (2.6) constraints and the equality constraint (2.4).*

Proof : We present the proof of [17, Proposition 2] within our framework and a slight different manner in order to highlight how one can strengthen the result for a large context. Consider a constraint from (2.22). Then it is of the form

$$\sum_{d\leq k\leq f} B_k \geq \sum_{j\in J(d,f)} S_j \tag{2.30}$$

for some $(d,\ f) \in A^{\min}$. Adding the following forward and backward constraints :

$$\sum_{k\leq f} B_k \geq \sum_{j\in J(k_s,\ f)} S_j \qquad \text{and} \qquad \sum_{k\geq d} B_k \geq \sum_{j\in J(d,\ k_e)} S_j$$

one gets :

$$\sum_{k\geq d} B_k + \sum_{k\leq f} B_k \geq \sum_{j\in J(k_s,\ f)} S_j + \sum_{j\in J(d,\ k_e)} S_j. \tag{2.31}$$

Note that :

$$\sum_{k\geq d} B_k + \sum_{k\leq f} B_k = \sum_{k\in K} B_k + \sum_{d\leq k\leq f} B_k.$$

Thus, inequality (2.31) becomes :

$$\sum_{k\in K} B_k + \sum_{d\leq k\leq f} B_k \geq \sum_{j\in J(k_s,\, f)} S_j + \sum_{j\in J(d,\, k_e)} S_j. \tag{2.32}$$

The complement of $J(k_s,\ f) \cup J(d,\ k_e)$ in J is denoted by J_0 and is given by

$$J_0 = J \setminus (J(k_s,\ f) \cup J(d,\ k_e)) = \{j \in J \mid \min P_j < d \leq f < \max P_j\}.$$

Hence, if there exists $j_0 \in J_0$, then $\min P_{j_0} < d \leq f < \max P_{j_0}$, which means that $J(d,\ f)$ is involved in an extraordinary overlap. However, we have assumed that there is no extraordinary overlap, which implies that $J_0 = \varnothing$ and then $J = J(k_s,\ f) \cup J(d,\ k_e)$.

Therefore,

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J(k_s,\, f)} S_j + \sum_{j\in J(d,\, k_e)} S_j &= \sum_{j\in J(k_s,\, f)\cup J(d,\, k_e)} S_j + \sum_{j\in J(k_s,\, f)\cap J(d,\, k_e)} S_j \\ &= \sum_{j\in J} S_j + \sum_{j\in J(k_s,\, f)\cap J(d,\, k_e)} S_j.\end{aligned}$$

Hence, inequality (2.32) becomes

$$\sum_{k\in K} B_k + \sum_{d\leq k\leq f} B_k \geq \sum_{j\in J} S_j + \sum_{j\in J(k_s,\, f)\cap J(d,\, k_e)} S_j.$$

and by the equality constraint (2.4), it follows that :

$$\sum_{d\leq k\leq f} B_k \geq \sum_{j\in J(k_s,\, f)\cap J(d,\, k_e)} S_j. \tag{2.33}$$

On the other hand, observe that $J(d,f) \subseteq J(k_s,\ f) \cap J(d,\ k_e)$ and $S_j \geq 0$ for all $j \in J$, so

$$\sum_{j\in J(k_s,\, f)\cap J(d,\, k_e)} S_j \geq \sum_{j\in J(d,f)} S_j \tag{2.34}$$

From (2.33) and (2.34), one deduce that

$$\sum_{d\leq k\leq f} B_k \geq \sum_{j\in J(d,f)} S_j,$$

which is nothing but constraint (2.30). ■

Generating family of constraints under EO assumption

An analysis of this version of the proof shows that the main idea was to consider a constraint from (2.22) and to prove that it is dominated by a combination of some specified forward constraint and some specified backward constraint, and the equality constraint. To do so, the assumption of no extraordinary overlap has not been used in its full sense. Indeed, for fixed $(d,\ f) \in A^{\min}$, the proof that the associated constraint $(\sum_{d\leq k\leq f} B_k \geq \sum_{j\in J(d,f)} S_j)$ is generated by a forward constraint and a backward constraint and the equality constraint, do not require that $\mathbb{H}(\{j\})$ is satisfied for all $j \in J$ but *only* for all $j \in J(d,\ f)$.

Based on this observation one can conclude that the proof given for Proposition 2 in [17] remains valid to prove the more general assertion which reads as follows.

Proposition 2.2.4 *For all $(d,\ f) \in A^{\min}$, the associated constraint, $\sum_{d\leq k\leq f} B_k \geq \sum_{j\in J(d,f)} S_j$, is dominated by the constraints forward, backward and the equality constraint, provided that $J(d, f)$ is involved in no extraordinary overlap.*

Observe that under the absence of extraordinary overlap assumption, that is, $\mathbb{H}(\bar{J})$ is satisfied for all $\bar{J} \subseteq J$, it follows from Proposition 2.2.4 that for all $(d,\ f) \in A^{\min}$, the associated constraint is dominated by the constraints forward, backward and the equality constraint. Hence, Proposition 2 in [17] is a direct corollary from Proposition 2.2.4.

Remark 2.2.5 *From Proposition 2.2.4 it follows that only the associated constraints to $(d,\ f) \in A^{\min}$ for which $J(d,\ f)$ are involved in some extraordinary overlap* are possibly not generated *by the forward, backward constraints and the equality constraint.*

Based on this remark, one can deduce the following corollary :

Corollary 2.2.6 *Constraint set associated to all* $(d,\ f) \in A^{\min}$ *are generated by the family of forward and backward constraints and the equality constraint and all the constraints associated to* $(d',\ f') \in A^{\min}$ *for which* $J(d',\ f')$ *are involved in some extraordinary overlap.*

At present, after getting this generating family of constraints in (2.22), it is natural to ask whether this family is minimal, that is, is it possible to eliminate some constraint from this family without affecting its generating future of all the other constraints? The answer of this question, which is negative, is the main subject of the following result.

Proposition 2.2.7 *Let* $(d,\ f) \in A^{\min}$ *such that* $J(d,\ f)$ *is involved in an extraordinary overlap. Then the associated constraint to* $(d,\ f)$ *is not a linear combination of any elements from the family of the constraints forward, backward, and the equality constraint and all the associated constraints to* $(d',\ f') \in A^{\min} \setminus \{(d,\ f)\}$, *for which* $J(d',\ f')$ *are involved in some extraordinary overlap.*

Remark 2.2.8 *This proposition implies that we have added a minimal family of constraints to the family of equality constraint, the forward and backward constraints. So, if there is some redundant constraint it should be outside our added family, necessarily among the equality constraint and/or the forward and/or backward constraints. (see the next subsection for further reductions).*

Proof : Let $(\bar{d},\ \bar{f}) \in A^{\min}$ such that $J(\bar{d},\ \bar{f})$ is involved in an extraordinary overlap. For brevity, we let $\bar{J} = \bar{J}(\bar{d},\ \bar{f})$. For all $j \in \bar{J}$, we denote by $|P_j|$ the number

of breaks in its associated break window. Assume that $\bar{J} = \{j_1, j_2, \cdots, j_n\}$. Let $B_k = 0$ for all $k \in K$. Next, we proceed by iterations. At iteration i, $i = 1, \cdots, n$, we set $S_{j_i} = |P_{j_i}|$ and upgrade the value of B_k by one unit for all $k \in P_{j_i}$. After the last iteration, we upgrade the value of S_{j_1} by one unit. On the other hand, since $\bar{J}$ is involved in some extraordinary overlap, there exists $j^* \in J \setminus \bar{J}$ such that $\min P_{j^*} < \min P\left(\bar{J}\right) = \bar{d} \leq \max P\left(\bar{J}\right) = \bar{f} < \max P_{j^*}$. Since P_{j^*} is an interval then the former element before $\bar{d}$ in K, say k_*, and the next element after $\bar{f}$ in K, say k_{**}, are necessarily in P_{j^*}. Therefore, $\min P_{j^*} \leq k_* < \bar{d} \leq \bar{f} < k^* \leq \max P_{j^*}$. Let, $S_{j^*} = B_{k_*} = B_{k^*} = 1$. Finally, for all $j \in J \setminus \left(\bar{J} \cup \{j^*\}\right)$ let $S_j = 0$. Hence, the equality constraint is satisfied.

The associated constraint to $(\bar{d},\ \bar{f})$ is not satisfied. In fact,

$$\sum_{j \in \bar{J}} S_j = 1 + \sum_{j \in \bar{J}} |P_j| > \sum_{j \in \bar{J}} |P_j| = \sum_{\bar{d} \leq k \leq \bar{f}} B_k.$$

Now, let $(d',\ f') \in A^{\min} \setminus \{(d,\ f)\}$ such that $J(d',\ f')$ is involved in some extraordinary overlap and let us prove that *the associated constraint to* $(d',\ f')$ *is satisfied.* As before, for brevity we let $\bar{J}' = J(d',\ f')$.

We distinguish several cases :

$\underline{j_* \in \bar{J}'}$ In this case $\sum_{k \in P(\bar{J}')} B_k = \sum_{k \in K} B_k$, thus, $\sum_{j \in \bar{J}'} S_j \leq \sum_{j \in J} S_j = \sum_{k \in K} B_k = \sum_{k \in P(\bar{J}')} B_k$.

$\underline{j_* \notin \bar{J}'}$ Note that the S_j are constructed such that, $S_j \neq 0$ if and only if $j \in \bar{J} \cup \{j_*\}$. So, $\sum_{j \in \bar{J}'} S_j = \sum_{j \in \bar{J}' \cap \bar{J}} S_j + \sum_{j \in \bar{J}' \cap \{j_*\}} S_j$. So, in this case $(\bar{J}' \cap \{j_*\} = \emptyset)$, $\sum_{j \in \bar{J}' \cap \{j_*\}} S_j = 0$ and therefore, $\sum_{j \in \bar{J}'} S_j = \sum_{j \in \bar{J} \cap \bar{J}'} S_j$. Hence, we have to distinguish if $\bar{J} \cap \bar{J}' = \varnothing$ or $\bar{J} \cap \bar{J}' \neq \varnothing$.

$\underline{j_* \notin \bar{J}' \textbf{ and } \bar{J} \cap \bar{J}' = \varnothing}$ In this case, $\sum_{j \in \bar{J}'} S_j = 0$.

$j_* \notin \bar{J}'$ **and** $\bar{J} \cap \bar{J}' \neq \varnothing$ **and** $\bar{J} \cap \bar{J}' \neq \bar{J}$ ($\bar{J}'$ contains a part of $\bar{J}$ but not all of $\bar{J}$.) One has to distinguish two situations.

$j_1 \notin \bar{J} \cap \bar{J}'$ one has, $\sum_{j \in \bar{J}'} S_j = \sum_{j \in \bar{J} \cap \bar{J}'} S_j = \sum_{k \in P(\bar{J} \cap \bar{J}')} B_k \leq \sum_{k \in P(\bar{J}')} B_k$.

$j_1 \in \bar{J} \cap \bar{J}'$ One has $\sum_{j \in \bar{J}'} S_j = \sum_{j \in \bar{J} \cap \bar{J}'} S_j = 1 + \sum_{j \in \bar{J} \cap \bar{J}'} |P_j|$. We need the following

Claim *There exists an element* $p \in \bar{J} \setminus \bar{J}'$ *such that* $P_p \cap P(\bar{J} \cap \bar{J}') \neq \emptyset$.

According to this claim $1 + \sum_{j \in \bar{J} \cap \bar{J}'} |P_j| \leq \sum_{k \in P\left(\bar{J} \cap \bar{J}'\right)} B_k$ and therefore $\sum_{j \in \bar{J}'} S_j = 1 + \sum_{j \in \bar{J} \cap \bar{J}'} |P_j| \leq \sum_{k \in P(\bar{J} \cap \bar{J}')} B_k \leq \sum_{k \in P(\bar{J}')} B_k$.

Proof of the Claim Note that $P\left(\bar{J} \cap \bar{J}'\right) \subseteq P\left(\bar{J}\right) \cap P\left(\bar{J}'\right)$. If this inclusion is strict, that is, if there exists $k \in P\left(\bar{J}\right) \cap P\left(\bar{J}'\right)$ such that $k \notin P\left(\bar{J} \cap \bar{J}'\right)$ then there exists necessarily $\bar{j} \in \bar{J} \setminus \bar{J}'$ and $j' \in \bar{J}' \setminus \bar{J}$ such that $k \in P_{\bar{j}}$ (and $k \in P_{j'}$) and therefore the claim follows. Assume that $P\left(\bar{J} \cap \bar{J}'\right) = P\left(\bar{J}\right) \cap P\left(\bar{J}'\right)$. Since $\bar{J} \cap \bar{J}' \neq \varnothing$ then $P\left(\bar{J} \cap \bar{J}'\right) \neq \varnothing$ and therefore $P\left(\bar{J}\right) \cap P\left(\bar{J}'\right) \neq \varnothing$. Note that $P\left(\bar{J}\right)$ and $P\left(\bar{J}'\right)$ are two intervals in K, so $P\left(\bar{J}\right) \cap P\left(\bar{J}'\right)$ is also a non empty interval, say $[a,\ b]$. Note that $J(a,b) = \bar{J} \cap \bar{J}'$ and $P(J(a,b)) = [a,\ b]$ then $[a,\ b] \in A^+$. Moreover, $[a,\ b] \subseteq \left[\bar{d},\ \bar{f}\right]$ with $[a,\ b] \neq \left[\bar{d},\ \bar{f}\right]$ since $\bar{J} \cap \bar{J}' \neq \bar{J}$. Then $(a,\ b) \leq \left(\bar{d},\ \bar{f}\right)$ and $(a,\ b) \neq \left(\bar{d},\ \bar{f}\right)$. This contradicts the fact that $\left(\bar{d},\ \bar{f}\right) \in A^{\min}$ which completes the proof of the claim.

$j_* \notin \bar{J}'$ **and** $\bar{J} \cap \bar{J}' \neq \varnothing$ **and** $\bar{J} \cap \bar{J}' = \bar{J}$ ($\bar{J}$ is completely contained in $\bar{J}'$.) In this case one has necessarily $P(\bar{J}) \subseteq P(\bar{J}')$. If $P(\bar{J}) = P(\bar{J}')$ then $\left[\bar{d},\ \bar{f}\right] = \left[\bar{d}',\ \bar{f}'\right]$ and therefore $\left(\bar{d},\ \bar{f}\right) = \left(\bar{d}',\ \bar{f}'\right)$ which is impossible since $\left(\bar{d}',\ \bar{f}'\right) \in A^{\min} \setminus \{(d,\ f)\}$. Thus, one have to assume that $P(\bar{J}) \neq P(\bar{J}')$. Thus $P(\bar{J}') \setminus P(\bar{J})$ contains at least one break among the pair of breaks $\{k_*,\ k_{**}\}$, and since $B_{k_*} = B_{k_{**}} = 1$, then $1 \leq \sum_{k \in P(\bar{J}') \setminus P(\bar{J})} B_k$ so,

$$1 + \sum_{k \in P(\bar{J})} B_k \leq \sum_{k \in \left(P(\bar{J}') \setminus P(\bar{J})\right)} B_k + \sum_{k \in P(\bar{J})} B_k = \sum_{k \in P(\bar{J}')} B_k. \tag{2.35}$$

On the other hand, based on the construction of the S_j and the B_k, it follows that $\sum_{k\in P(\bar{J})} B_k = \sum_{j\in\bar{J}} |P_j|$ and $\sum_{j\in\bar{J}} S_j = 1 + \sum_{j\in\bar{J}} |P_j|$, hence,

$$\sum_{j\in\bar{J}} S_j = 1 + \sum_{k\in P(\bar{J})} B_k. \tag{2.36}$$

By (2.35) and (2.36), one deduce that $\sum_{j\in\bar{J}} S_j \leq \sum_{k\in P(\bar{J}')} B_k$. Note that $S_j = 0$ for all $j \in \bar{J}' \setminus \bar{J}$, then $\sum_{j\in\bar{J}'} S_j = \sum_{j\in\bar{J}} S_j$ and therefore $\sum_{j\in\bar{J}'} S_j \leq \sum_{k\in P(\bar{J}')} B_k$.

One can easily check that all forward, or backward constraints are satisfied. This verification is omitted. ■

Further reductions even under no EO assumption

For each $(d,\ f) \in A^+$ one can consider the partition of J defined as follows :

$$J = J_{-,-}(d,f) \cup J_{0,0}(d,f) \cup J_{+,+}(d,f) \cup J_{-,0}(d,f) \cup J_{0,+}(d,f) \cup J_{-,+}(d,f)$$

where,

$$\begin{aligned}
J_{-,-}(d,f) &= \{j \in J \mid \min P_j \leq \max P_j < d\} \\
J_{0,0}(d,f) &= \{j \in J \mid d \leq \min P_j \text{ and } \max P_j \leq f\} \ (= J(d,f)) \\
J_{+,+}(d,f) &= \{j \in J \mid f < \min P_j \leq \max P_j\} \\
J_{-,0}(d,f) &= \{j \in J \mid \min P_j < d \leq \max P_j \leq f\} \\
J_{0,+}(d,f) &= \{j \in J \mid d \leq \min P_j \leq f < \max P_j\} \\
J_{-,+}(d,f) &= \{j \in J \mid \min P_j < d \leq f < \max P_j\}.
\end{aligned}$$

Since $(d,\ f) \in A^+$ then $J_{0,0}(d,f)$ is necessarily non empty. Each other set may be empty or not. So, given $(d,\ f) \in A^+$, there is $2^5 = 32$ situations to be considered.

The set $J_{0,0}(d,f)$ is involved in some extraordinary overlap if and only if $J_{-,+}(d,f)$ is non empty. So there are exactly $2^4 = 16$ cases where $J_{-,+}(d,f)$ is empty, that is, where $J_{0,0}(d,f)$ is involved in no EO. So, the cases may be listed as rows in a table as follows :

Tableau 2.1 – Different cases

Cases	$J_{-,-}(d,f)$	$J_{-,0}(d,f)$	$J_{0,+}(d,f)$	$J_{+,+}(d,f)$
1.	1	1	1	1
2.	1	1	1	0
3.	1	1	0	1
4.	1	1	0	0
5.	1	0	1	1
6.	1	0	1	0
7.	1	0	0	1
8.	1	0	0	0
9.	0	1	1	1
10.	0	1	1	0
11.	0	1	0	1
12.	0	1	0	0
13.	0	0	1	1
14.	0	0	1	0
15.	0	0	0	1
16.	0	0	0	0

where 1 means that the related set is non-empty and 0 otherwise. Note that all forward and all backward constraint are represented in this table. In fact these two constraints cannot be involved in some EO.

Note that Case 16. happens only for $d = k_s$ and $f = k_e$ and the related constraint is redundant since it is a direct consequence of the equality constraint. Cases 13, 14 and 15 are representing forward constraints. Cases 4, 8 and 12 are representing backward constraints. One can also note that Cases 8 and 15 are consequence of

each other and the equality constraint. So, one of them is redundant. Finally, one can easily prove that the corresponding forward and backward constraints associated to Cases 12 and 14 are redundant. Indeed, consider the forward case 14. Then J is partitioned as $J = J_{0,0}(d = k_s,\ f) \cup J_{0,+}(d,\ f)$. Note that $\sum_{j \in J_{0,+}(d,\ f)} S_j \geq \sum_{k>f} B_k$ because each break $k > f$ is selected by some $j \in J_{0,+}(d, f)$, but each element $j \in J_{0,+}(d, f)$ selects a break $k > f$ as well as $k \leq f$. On the other hand, taking into account the equality constraint it follows that $\sum_{k>f} B_k + \sum_{k \leq f} B_k = \sum_{j \in J_{0,+}(d,\ f)} S_j + \sum_{j \in J_{0,0}(d,\ f)} S_j$. Then, $\sum_{k \leq f} B_k - \sum_{j \in J_{0,0}(d,\ f)} S_j = \sum_{j \in J_{0,+}(d,\ f)} S_j - \sum_{k>f} B_k \geq 0$. Thus, the forward constraint $\sum_{k \leq f} B_k \geq \sum_{j \in J_{0,0}(d,\ f)}$ is redundant. The same reasoning holds for analogous backward counterpart. (Case 12).

Hence a generating family of forward and backward and the equality constraints is composed by forward constraint of Case 13 and backward constraint of Case 4 and forward constraints of case 8 or backward constraints of Case 15 (but not both). Does this family of constraints be minimal? The answer is yes. To see this, let us prove that any forward constraint of Case 13 is necessary. For, any given such forward constraint we construct an example in which (there is no EO) all the other forward constraints and all the backward constraint are satisfied but not the given forward constraint.

Consider a forward constraint of Case 13. Assume it is given by $(k_s,\ f) \in A^+$. Let $j_{00} \in J_{0,0}(k_s,\ f)$ such $\max P_{j_{00}} = f$. On the other hand, since $J_{+,+}(k_s,\ f) \neq \emptyset$, then consider an element in $J_{+,+}(k_s,\ f)$, say j_{++}. Then define $S_j = 0$ for all $j \in J \setminus \{j_{00}\}$ and $S_{j_{00}} = 1$. Also, define $B_k = 0$ for all $k \in K \setminus \{\max P_{j_{++}}\}$ and $B_{\max P_{j_{++}}} = 1$. Then $\sum_{k \leq f} B_k = 0 < \sum_{j \in J_{00}(k_s, f)} S_j = 1$, and the given forward is not satisfied. One can easily check that all the others, forward, backward and the equality constraints are satisfied. Also, a similar construction can be done for the backward counterpart.

These constructions imply that the generating family of constraints mentioned above is minimal under no EO assumption.

Constraints directed network

In this section we construct a directed network which revels some inherent structure of the whole set of constraints of problem (P^{min}). Also, from this network it appears clearly which subset of constraints are selected to form the minimal set of constraints in both cases where extraordinary overlap occurs or not.

Each constraint in (2.22) is defined by a couple $(d,\ f) \in A^{\min}$. If $d = k_s$ and $f = k_e$ then $(d,\ f)$ corresponds to a redundant constraint since it is a consequence of the equality constraint (2.16). If $d = k_s$ and $f \neq k_e$ then $(d,\ f)$ corresponds to some forward constraint (2.5). If $d \neq k_s$ and $f = k_e$ then $(d,\ f)$ corresponds to some backward constraint (2.6). If $d \neq k_s$ and $f \neq k_e$ then $(d,\ f)$ corresponds to some remaining constraint in (2.22).

Recall that breaks are linearly ordered. Let us index them such that

$$K^e = \{f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_{|K^e|} = k_e\} \quad \text{and} \quad K^s = \{d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_{|K^s|} = k_s\}$$

with

$$f_1 < f_2 < \cdots < f_{|K^e|} = k_e \quad \text{and} \quad d_1 > d_2 > \cdots > d_{|K^s|} = k_s.$$

Note that if $(d_a,\ f_b) \in A^{\min}$ then $d_a \leq f_b$.

For each element $(d_a,\ f_b)$ in $A^{\min}$ we construct a node $N_{a,b}$ for the network. We define an oriented arc from N_{ab} to $N_{a'b'}$ if and only if

$$(d_{a'} = d_a \text{ and } f_{b'} = \min\{f_t \in K^e \mid f_b < f_t \text{ and } (d_a,\ f_t) \in A^{\min}\})$$

or

$$\left(d_{a'} = \max\{d_t \in K^s \mid d_t < d_a \text{ and } (d_t,\ f_b) \in A^{\min}\} \quad \text{and} \quad f_{b'} = f_b\right).$$

Note that this network represents constraints in (2.17). So, since the equality constraint do not belong to (2.17), then there is no node in this network representing it.

Nodes $N_{|K^s|,b}$ corresponding to forward constraints are labelled depending on the sets $J_{0,+}(|K^s|,b)$ and $J_{+,+}(|K^s|,b)$ as follows

$$L(N_{|K^s|,b}) = \begin{cases} -1 & \text{if} \quad J_{0,+}(|K^s|,b) \neq \emptyset \text{ and } J_{+,+}(|K^s|,b) \neq \emptyset \\ -1 & \text{if} \quad J_{0,+}(|K^s|,b) = \emptyset \text{ and } J_{+,+}(|K^s|,b) \neq \emptyset \\ 0 & \text{if} \quad J_{0,+}(|K^s|,b) \neq \emptyset \text{ and } J_{+,+}(|K^s|,b) = \emptyset \end{cases}$$

Also, nodes $N_{a,|K^e|}$ corresponding to backward constraints are labelled depending on the sets $J_{-,-}(d,f)$ and $J_{-,0}(a,|K^e|)$ as follows

$$L(N_{a,|K^e|}) = \begin{cases} -1 & \text{if} \quad J_{-,-}(a,|K^e|) \neq \emptyset \text{ and } J_{-,0}(a,|K^e|) \neq \emptyset \\ 0 & \text{if} \quad J_{-,-}(a,|K^e|) = \emptyset \text{ and } J_{-,0}(a,|K^e|) \neq \emptyset \\ 0 & \text{if} \quad J_{-,0}(a,|K^e|) \neq \emptyset \text{ and } J_{-,0}(a,|K^e|) = \emptyset \end{cases}$$

We label the other constraints associated to $(d_i,\ f_j)$ in $A^{\min}$ depending on the sets $J_{-,-}(d_i,\ f_j)$, $J_{0,0}(d_i,\ f_j)$, $J_{+,+}(d_i,\ f_j)$, $J_{-,0}(d_i,\ f_j)$, $J_{0,+}(d_i,\ f_j)$ as follows :

$$L(N_{i,j}) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad J \setminus (J_{-,-}(d_i,\ f_j) \cup J_{0,0}(d_i,\ f_j) \cup J_{+,+}(d_i,\ f_j) \cup \\ & \quad \cup J_{-,0}(d_i,\ f_j) \cup J_{0,+}(d_i,\ f_j)) = \emptyset \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Remark 2.2.9 *From this network, it appears clearly that the minimal generating family to be considered is that corresponding to nodes labelled with* negative labels. *The other nodes labelled by zero are redundant.*

Example

Let $K = \{b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ b_6,\ b_7,\ b_8\}$ and $J = \{j_1,\ j_2,\ j_3,\ j_4,\ j_5,\ j_6\}$. To each j_i is associated a break interval defined by the rows of the following table

One has,

$$K^s = \{d_6 = k_s := b_1,\ d_5 := b_2,\ d_4 := b_3,\ d_3 := b_4,\ d_2 := b_5,\ d_1 := b_7\}$$

Tableau 2.2 – Example

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
j_1	1	1	1	1	0	0	0	0
j_2	0	1	1	0	0	0	0	0
j_3	0	0	1	1	1	1	0	0
j_4	0	0	0	1	1	0	0	0
j_5	0	0	0	0	1	1	1	1
j_6	0	0	0	0	0	0	1	1

and

$$K^e = \{f_1 := b_3,\ f_2 := b_4,\ f_3 := b_5,\ f_4 := b_6,\ f_5 := b_8\}.$$

Forward constraints are those associated to (d_6, f_1), (d_6, f_2), (d_6, f_3), (d_6, f_4), (d_6, f_5). and backward constraints are those associated to (d_6, f_5), (d_5, f_5), (d_4, f_5), (d_3, f_5), (d_2, f_5), (d_1, f_5). Other constraints in $A^{\min}$ are those associated to (d_6, f_2), (d_5, f_1), (d_4, f_4), (d_3, f_3), (d_2, f_5), (d_1, f_5).

The label of each node is shown near it (See Figure 1.). Note that backward constraints associated to nodes $N_{5,5}$, and $N_{4,5}$ are redundant in accordance with subsection 2.2.2 and constraint associated to $N_{4,4}$ is redundant too in accordance to Corollary 2.2.6. The constraint associated to $N_{6,5}$ is trivially redundant since it is a direct consequence of the equality constraint. All remaining constraints are to be considered to form the minimal generated family of constraints.

2.2.3 Conclusion

Recall that according to the result in [17, Proposition 2], constraints in (2.22) are generated by the family of the constraints forward, backward and the equality constraint

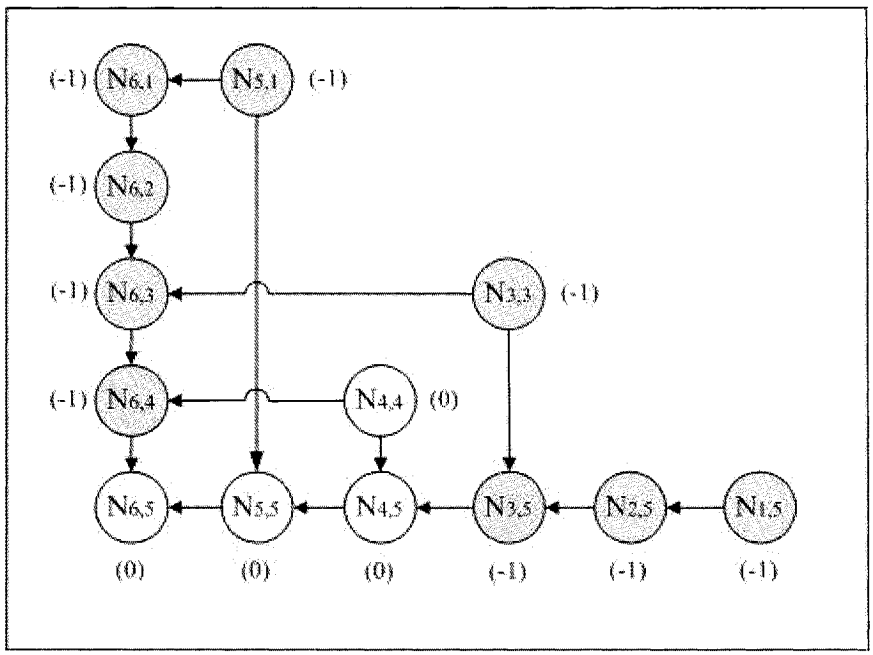

Figure 2.1 – Constraints network for the example

under the assumption of no EO. Next, in case of EO, taking into account Corollary 2.2.6, a generating family is composed by the same constraints as before to which are added a subfamily of the associated constraints to $(d,\ f) \in A^{\min}$ for which $J(d,\ f)$ are involved in some EO. Proposition 2.2.7 shows that this added subfamily is minimal, that is, it cannot be reduced. Next we have reduced the Forward and backward constraints in some cases without considering if there is or not an EO. Next we have shown that the resulting subfamily of forward and backward constraints is minimal. So, our resulting family sometimes contains less constraints than that of Bechtold and Jacobs which contains always all the forward and backward constraints.

Also, we have provided a directed network. It brings up the structure of the constraints. It shows which constraints have to be considered in the minimal generating family of constraints just by considering those nodes labelled by negative labels.

The added interval constraints (2.25) for single break should be generalized to other situations where the constraints forward and backward have been used; multi-break and tour. .

Extraordinary overlap occur rarely in real organizations. The break interval length is not much variable from a shift to another due to equity rules. Some small variations can appear when shift length varies. It rarely happens that these variations occur and then inclusions of some break windows into others are few. Note that for a break window to contain a smaller one, it should be greater than the smaller by at least two break periods; one before the starting of the smaller one and one after the end. Hence, the number of *interval constraints* is not so important. Numerical experiments of the model proposed in this paper and of some other implicit models for shift scheduling problems will appear in a forthcoming article.

2.2.4 Acknowledgments

Upon completing this work, interesting related articles have been appeared very recently (last two months) in *Annals of Operations Research 127 and 128, Special Issue on Staff Scheduling and Rostering* : Topaloglu and Ozkarahan [21], Isken [13], the survey article Alfares [1], and the exhaustive bibliographical article on the personal scheduling subject Ernst et al. [11].

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. K. ALFARES, *Survey, categorization, and comparison of recent tour scheduling literature*, *Annals Res. Oper.***127** (2004), pp. 145-175.

[2] T. AYKIN, *Optimal shift scheduling with multiple break windows*, Management Science, **42** (4) (1996), pp. 591-602.

[3] T. AYKIN, *A composite branch and cut algorithm for optimal shift scheduling with multiple breaks and break windows*, Journal of the Operational Research Society, **49** (1998), pp. 603-615.

[4] T. AYKIN, *A comparative evaluation of modeling approaches to the labor shift scheduling problem*, European Journal of Operational Research, **125** (2000), 381-397.

[5] J. BAILEY, *Integrated days off and shift personal scheduling,* Computers and Industrial Engineering, **9** (1985), (4), pp. 395-404.

[6] S. E. BECHTOLD & L. W. JACOBS, *Implicit modeling of flexible break assignment in optimal shift scheduling,* Management Science, **36** (1990), pp. 1339-1351.

[7] S. E. BECHTOLD & L. W. JACOBS, *The equivalence of general set-covering and implicit integer programming formulations for shift scheduling*, Naval Research Logistics, **43** (1996), pp. 233-249.

[8] M. J. BRUSCO AND L. W. JACOBS, *Optimal models for meal-break and start-time flexibility in continuous tour scheduling*, Management Science, **46** (2000), pp.1630-1641.

[9] T. ÇEZIK AND O. GÜNLÜK, *Reformulating linear programs with transportation constraints-with applications to workforce scheduling*, Naval Research Logistics, **51** (2004), pp. 275-296.

[10] G. B. DANTZIG, *A comment on Edie's traffic delays at toll booths*, Operation Research, **2** (1954), pp. 339-341.

[11] A. T. ERNST, H. JIANG, M. KRISHNAMOORTHY, B. OWENS & D. SIER, *An annotated bibliography of personnel scheduling and rostering, Annals Res. Oper.***127** (2004), pp. 21-144.

[12] L. R. FORD, JR. AND D. R. FULKERSON, Flows in networks, Princeton University Press, (1962).

[13] M. W. ISKEN, *An implicit tour scheduling model with applications in healthcare, Annals Res. Oper.***128** (2004), pp. 91-109.

[14] L. W. JACOBS AND BRUSCO, *Overlapping start-time bands in implicit tour scheduling*, Management Science **42** (1996), pp. 1247-1259.

[15] L. W. JACOBS AND BRUSCO, *Personal tour scheduling when starting time restrictions are present*, Management Science, **44** (1998), pp. 534–547.

[16] A. I. Z. JARRAH, J. F. BARD AND H. DE SILVA, *Solving large-scale tour scheduling problems*, Management Science **40** (1994), pp. 1124-1144.

[17] M. REKIK, J.-F. CORDEAU & F. SOUMIS, *Using Benders decomposition to implicitly model tour scheduling, Annals Res. Oper.***128** (2004), pp. 111-133.

[18] G. M. THOMPSON, *Improved implicit optimal modeling of the labor shift scheduling problem*, Management Science **41** (1995), pp. 595-607.

[19] G. M. THOMPSON, *Labor scheduling : A commentary*, Cornell Hotel and Restaurant Administration Quarterly, **44** (2003), pp.149-155.

[20] S. TOPALOGLU & I. OZKARAHAN, *Implicit optimal tour scheduling with flexible break assignments,* Computers & Industrial Engineering **44** (2002), pp. 75-89.

[21] S. TOPALOGLU & I. OZKARAHAN, *An implicit goal programming model for the tour scheduling problem considering the employee work preferences,* Annals Res. Oper.**128** (2004), pp. 135-158.

CHAPITRE 3 : EXPÉRIMENTATION

Afin de montrer l'intérêt et la nécessité de l'ajout des contraintes d'intervalles dans le modèle de Bechtold et Jacobs (1990) en présence d'extra-chevauchement, des tests ont été effectués. Les courbes de demandes proviennent d'instances réelles fournies par l'entreprise *Ad Opt (Montréal)*.

3.1 Comparaisons des temps CPU

Dans cette section nous présentons plusieurs tableaux de résultats pour comparer le nombre de contraintes et les temps de résolutions entre le modèle de Bechtold et Jacobs sans et avec contraintes d'intervalles. Ces résultats sont basés sur des exemples où l'on a construit des types de quart : - de durée de sept heures ; - début à chaque quinze minutes ; - fenêtre de pauses de longueur 60 minutes qui débutent après 3 heures de travail, soit au milieu de la durée du quart ; - pauses de durée 30 minutes chacune. Avec deux courbes de demandes différentes qu'on note ACT1 et ACT2. L'activité ACT1 a été utilisé pour générer les tableaux 3.1 et 3.3 alors que l'activité ACT2 pour les tableaux 3.2 et 3.4. Pour créer par exemple 5 extra-chevauchements, nous avons construit 5 quarts additionnels de telle sorte que le premier chevauche avec le premier quart parmi les 96 déjà construit, le deuxieme chevauche avec le deuxième des 96 et ainsi de suite jusqu'au cinquième qui chevauche avec le cinquième des 96. L'extra-chevauchement peut être interne (au sens où la fenêtre du quart additionnel est contenue dans la fenêtre du quart homologue des 96) ou externe. Pour le tableau 3.1 il est interne et pour le tableau 3.2 il est externe. La fenêtre contenante dépasse la plus petite du strict minimum de périodes additionnelles, soit uniquement deux periodes.

Un autre type d'exemples où l'on a construit des types de quarts : - de durée de neuf heures ; - début à chaque quinze minutes ; - fenêtre de pauses de longueur 120 minutes qui débutent après 3 heures 30 minutes de travail, soit au milieu de la durée du quart ; - pauses de durée 30 minutes. Les extra-chevauchements sont externes. Ces derniers exemples sont représentés dans les tableaux 3.3 et 3.4.

Ces deux exemples nous donnent un nombre de 96 types de quarts, sans présence d'extra-chevauchement. À chaque extra-chevauchement il correspond un type de quart additionnel. Les tableaux 3.1, 3.2, 3.3 et 3.4 présentent les temps de résolutions pour le modèle de Betchtold et Jacobs (1990) avec et sans considération des contraintes d'intervalles mais en présence d'extra-chevauchements. À chaque ligne, le nombre d'extra-chevauchement augmente. La première colonne indique le nombre d'extra-chevauchements. La deuxième colonne indique la valeur de la solution optimale entière : *nombre d'employées*. La troisième (resp. la quatrième) colonne indique *le nombre de variables* dans le modèle de Bechtold-Jacobs BJ (resp. Bechtold-Jacobs avec contraintes d'intervalles BJE) (SCEC signifie *Sans Contrainte d'intervalles*, et ACEC signifie *Avec Contrainte d'intervalles*). La cinquième (resp. sixième) colonne indique *le nombre de contraintes* dans le modèle de BJ (resp. BJE). Finalement, les deux dernières colonnes correspondent aux temps CPU (en seconde) pour les deux modèles respectivement. Les tableaux 3.1 et 3.2 donnent les résultats appliqués aux premiers exemples (types de quarts de durée sept heures), et les tableaux 3.3 et 3.4 ceux appliqués aux deuxièmes exemples (types de quarts de durée neuf heures).

En analysant les résultats obtenus, on conclut que lorsqu'il y a extra-chevauchement et en considérant les contraintes d'intervalles, le temps de résolution est en moyenne équivalent au temps de résolution lorsqu'on ne tient pas compte des contraintes d'intervalles.

Tableau 3.1 – Durées de 7 h, Extra-chevauchements internes, ACT1

Nbre d'EC	Objectif	NV SCEC	NV ACEC	NC SCEC	NC ACEC	CPU SCEC	CPU ACEC
0	25	196	-	287	-	25.5	25.4
5	25	201	201	288	293	16.1	15
10	25	206	206	288	298	5.2	4.8
30	25	226	226	288	318	2.2	5.4
50	25	246	246	288	338	16.3	9.8
96	25	292	292	289	385	2.6	32.4

Tableau 3.2 – Durées de 7 h, Extra-chevauchements externes, ACT2

Nbre d'EC	Objectif	NV SCEC	NV ACEC	NC SCEC	NC ACEC	CPU SCEC	CPU ACEC
0	20	196	196	287	287	1.3	1.3
5	20	202	202	288	293	4.0	2.9
10	20	207	207	288	298	11.7	1.4
30	20	227	227	288	318	2.0	2.8
50	20	247	247	288	338	9.5	1.6
96	20	294	294	289	385	1.6	2.8

Tableau 3.3 – Durées de 9 h, Extra-chevauchements externes, ACT1

Nbre d'EC	Objectif	NV SCEC	NV ACEC	NC SCEC	NC ACEC	CPU SCEC	CPU ACEC
0	20	200	200	287	287	0.9	0.9
5	20	206	206	288	293	1.1	1.0
10	20	211	211	288	298	1.1	1.1
30	20	231	231	288	318	1.3	2.2
50	20	251	251	288	338	1.5	2.1
96	20	298	298	289	385	1.8	2.5

Tableau 3.4 – Durées de 9 h, Extra-chevauchements externes, ACT2

Nbre d'EC	Objectif	NV SCEC	NV ACEC	NC SCEC	NC ACEC	CPU SCEC	CPU ACEC
0	17	200	200	287	287	1.0	0.9
5	17	206	206	288	293	0.9	0.9
10	17	211	211	288	298	1.1	0.9
30	17	231	231	288	318	1.2	1.7
50	17	251	251	288	338	1.4	1.6
96	17	298	298	289	385	1.3	1.6

3.2 Faisabilités des solutions obtenues

Pour voir l'effet d'inclure les contraintes d'intervalles lorsqu'il y a présence d'extra chevauchement sur la faisabilité de la solution, nous avons construit des exemples basés sur des types de quarts de différentes longueurs ainsi que leurs fenêtres de pauses et les fenêtres de début :

Premier exemple : (Voir, tableaux 3.5 et 3.6) Dans cet exemple, il y a :

- des types de quarts de durées de 7 heures, débuts à chaque 15 minutes, fenêtres de pauses de longueurs 30 minutes et durée de pause de 30 minutes, et

-des types de quarts de durées de 9 heures, débuts à chaque 15 minutes entre 7h et 9h, et entre 13h et 15h avec fenêtres de pauses de 2h et durée de pause de 30 minutes.

Deuxième exemple : (Voir tableau 3.7). Dans cet exemple, il y a :

- des types de quarts de durées de 7 heures, débuts à chaque 15 minutes, fenêtres de pauses de longueurs 30 minutes et durée de pause de 30 minutes, et

-des types de quarts de durées de 9 heures, débuts à chaque 15 minutes entre 7h et

Tableau 3.5 – Fenêtres de pauses de 2h, ACT1

Date	Objectif	NV SCEC	NV ACEC	NC SCEC	NC ACEC	CPU SCEC	CPU ACEC
1 Nov 2001	24	212	212	287	313	1.4	3.7
2 Nov 2001	24	212	212	287	313	1.4	3.7
7 Nov 2001	24	212	212	287	313	1.4	3.6

Tableau 3.6 – Fenêtres de pauses de 2h, ACT2

Date	Objectif	NV SCEC	NV ACEC	NC SCEC	NC ACEC	CPU SCEC	CPU ACEC
2 Nov 2001	16	212	212	287	313	5.7	5.2
7 Nov 2001	17	212	212	287	313	2.4	1.2
6 Nov 2001	19	212	212	287	313	2.1(*)	3.5

9h, et entre 13h et 15h avec fenêtres de pauses de 3h et durée de pause de 30 minutes.

Tableau 3.7 – Fenêtres de pauses de 3h, ACT2

ACT	Date	Obj	NV SCEC	NV ACEC	NC SCEC	NC ACEC	CPU SCEC	CPU ACEC
ACT1	1 Jan 2001	16	159	159	234	266	0.7	1.1
ACT1	2 Jan 2001	19	159	159	234	266	0.7 (*)	0.6
ACT2	1 Nov 2001	24	159	159	234	266	0.5 (*)	0.5
ACT2	6 Nov 2001	18	212	212	287	313	0.7 (*)	0.6
ACT2	7 Nov 2001	24	159	159	234	266	0.5 (*)	0.5

Troisième exemple : (Voir tableau 3.8). Dans cet exemple, il y a :

- des types de quarts de durées de 5 heures, débuts à chaque 15 minutes entre 16h et 18h, fenêtres de pauses de longueurs 30 minutes et durée de pause de 15 minutes, et

- des types de quarts de durées de 7 heures, débuts à chaque 15 minutes entre 6h et 10h, et entre 12h et 16h, fenêtres de pauses de longueurs 60 minutes et durée de pause de 30 minutes, et

- des types de quarts de durées de 9 heures, débuts à chaque 15 minutes entre 7h et 9h, et entre 13h et 15h, fenêtres de pauses de longueurs 180 minutes et durée de pause de 30 minutes.

Tableau 3.8 – Durées de 5h, de 7h et de 9 h

ACT	Date	Obj	NV SCEC	NV ACEC	NC SCEC	NC ACEC	CPU SCEC	CPU ACEC
ACT1	1 Nov 2001	21	101	101	151	175	0.2(*)	0.2
ACT2	1 Jan 2001	16	101	101	151	175	0.2(*)	0.2
ACT2	2 Jan 2001	19	101	101	151	175	0.2(*)	0.2
ACT2	6 Jan 2001	18	101	101	151	175	0.2	0.2

Pour les tableaux 3.7 et 3.8, la première colonne représente l'activité considérée (ACT1 ou ACT2), la deuxième colonne représente la date de la demande, les quatre colonnes qui suivent représentes le nombre de variables et le nombre de contraintes pour les deux modèles (avec contraintes d'intervalles et sans). Finalement les deux dernières colonnes représentent le temps de résolution en CPU pour le modèle sans contraintes d'intervalles et avec contraintes d'intervalles. On notera des astérisques (*) dans certaines cases. Cela signifie que la solution obtenue n'est pas réalisable. (C'est à dire que l'affectation des pauses aux quarts ne peut se faire de sorte que chaque quart ai une unique pause).

En analysant les résultats obtenus, on conclut que lorsqu'il y a extra-chevauchement et on ne prend pas en considération les contraintes d'intervalles alors dans la plupart des cas, la solution obtenue n'est pas réalisable, i.e. on obtient un nombre minimal

d'employés qui travaillent tous les quarts mais l'affectation des pauses aux quarts n'est pas satisfaite puisqu'il faut que chaque quart lui corresponde une pause unique.

Ceci justifi expérimentalement, la nécessité de nos **contraintes d'intervalles** en présence d'extra-chevauchements.

CONCLUSION

Rappelons que selon la Proposition 2 de Rekik-Cordeau-Soumis (2004), les contraintes dans (2.22) sont générées par la famille des contraintes forward, backward et l'égalité sous l'hypothèse d'absence d'extra-chevauchement. Ensuite, en présence d'extra-chevauchement et en tenant compte du Corollaire 2.2.6, une famille génératrice est composée par les mêmes contraintes que précédemment auxquelles sont ajoutées une sous-famille de contraintes associées aux $(d,\ f) \in A^{\min}$ pour lesquelles $J(d,\ f)$ est impliqué dans certain extra-chevauchement. La Proposition 2.2.7 montre que cette sous-famille ajoutée est minimale, c'est à dire, elle ne peut être réduite. Par la suite nous avons réduit la famille des contraintes forward et backward dans certains cas sans tenir compte s'il y a ou pas d'extra-chevauchement. Ensuite, on a montré que la famille qui en résulte est minimale. Ainsi, elle contient, dans certains cas, moins de contraintes que celle de Bechtold et Jacobs qui contient toujours toutes les contraintes forward et backward (même en l'absence d'extra-chevauchement).

Aussi, nous avons construit un réseau orienté. Il montre la structure des contraintes. Il indique quelles contraintes faut-il conserver dans la sous-famille génératrice minimale et cela uniquement en considérant les noeux avec une étiquette négative.

Les contraintes d'intervalles ajoutées (2.25) pour une seule pause peuvent êtres généralisées à d'autres situations où les contraintes forward et backward ont été considérées ; les multi-pauses et les cycles.

Notons que les extra-chevauchements arrivent rarement dans les organisations réelles. En effet, la longueur des intervalles de pauses n'est pas trop variable d'un quart de travail à un autre à cause des règles d'équité. De petites variations peuvent apparaitres

lorsque la longueure des quarts de travail varie. Il arrive rarement que ces variations ont lieu et donc les inclusoions de certaines fenêtres de pauses dans d'autres sont peu nombreuses. Il est à noter que pour qu'une fenêtre de pauses contiennent une autre, elle doit être plus grande que la petite par au moins deux périodes de pauses ; une avant le début de la petite et une après la fin. Par conséquent, le nombre de *contraintes d'intervalles* n'est pas si grand, et cela ajoute peu au temps de résolution.

BIBLIOGRAPHIE

ABERNATHY, W.J., BALOFF N., HERSHEY J.C., et WANDEL, S. (1973). A three-stage manpower planning and scheduling model-A service-sector example, *Operations Research* **21**, No. 3, May-June, 693–711.

AGGARWAL, S. (1982). Two methods of labor scheduling for shift operations, *Production and Inventory Management* **23**, No. 2, 36–44.

AHUJA, H. et SHEPPARD, R. (1975). Computerized nurse scheduling, *Industrial Engineering* **7**, No. 10, October, 24–29.

ALFARES, H. (1988). Aircraft maintenance workforce scheduling : A case study, *Journal of Quality in Maintenance Engineering* **5**, No. 2, 78–88.

ALFARES, H.K. (1991). *Integrated project activities and manpower scheduling.* Ph.D. Thesis, Arizona State University, USA.

ALFARES, H. (1998). An efficient two-phase algorithm for cyclic days-off scheduling, *Computers and Operations Research* **25**, No. 11, 913–923.

ALFARES, H.K. (2004). Survey, categorization, and comparison of recent tour scheduling literature, *Annals Res. Oper.* **127**, 145–175.

ALFARES, H.K. et BAILEY, J.E. (1997). Integrated project task and manpower scheduling, *IIE Transactions* **29**, 711–717.

ASHLEY, D.W. (1995). A spreadsheet optimization system for library staff scheduling, *Comput. Oper. Res.* **22**, 615–624.

AYKIN, T. (1996). Optimal shift scheduling with multiple break windows, *Management Science* **42** (4), 591–602.

AYKIN, T. (1998). A composite branch and cut algorithm for optimal shift scheduling with multiple breaks and break windows, *Journal Operational Res. Soc.* **49**, 603–615.

AYKIN, T. (2000). A comparative evaluation of modelling approaches to the labor shift scheduling problem, *European Journal of Operational Research* **125**, 381–397.

AZMAT, C.S., HÜRLIMANN, T. et WIDMER, M. (2004). Mixed integer programming to schedule a single-shift workforce under annulized hours, *Annals of Operations Research* **128**, Special Issue on Staff Scheduling and Rostering, 199–215.

BABA-HADJI, A. (2004). *Extension des modèles de construction de quarts de travail au cas de fenêtres de pause multiples.* Mémoire de Maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada.

BAILEY, J. (1985). Integrated days off and shift personal scheduling, *Computers Industrial Engineering* **9**, 395–404.

BAILEY, J. et FIELD, J. (1985). Personnel scheduling with flexishift models, *Journal of Operations Management* **5**, No. 3, 327–338.

BAILEY, J., ALFARES, H. et LIN, W. (1995). Optimization and heuristic models to integrate project task and manpower scheduling, *Computers and Industrial Engineering* **29**, 473–476.

BAKER, K.R. (1974). Scheduling a full-time workforce to meet cyclic staffing requirements, *Management Science* **20**, No. 12, 1561–1568.

BAKER, K.R. (1976). Workforce allocation in cyclic scheduling problems : a survey, *Operational Research Quarterly* **27** (1), 155–167.

BAKER, K.R. et MAGAZINE, M.J. (1977). Workforce scheduling with cyclic demands and day-off constraints, *Management Science* **24**, No. 2, 161–167.

BAKER, K.R., CRABILL, T.B. et MAGAZINE, M.J. (1973). An optimal procedure for allocating manpower with cyclic requirements, *AIIE Transactions* **5**, No. 2.

BAKER, K.R., BURNS, R.N. et CARTER, M.W. (1979). Staff scheduling with day-off and workstretch constraints, *AIIE Transactions* **11**, 286–292.

BALAKRISHNAN, N. et WONG, R.T. (1990). A network model for the rotating workforce scheduling problem, *Networks* **20**, 25-42.

BARD J.F., BINICI, C. et DE SILVA, A.H. (2003). Staff scheduling at the United States Postal Service, *Computers Operations Research* **30**, 745–771.

BARTHOLDI III, J.J. (1977). *Scheduling via networks, unnetworks, and almost networks.* Ph.D. Thesis, University of Florida, USA.

BARTHOLDI III, J.J. (1981). A guaranteed-accuracy round-off algorithm for cyclic scheduling and set covering, *Operations Research* **29**, No. 3, 501–510.

BARTHOLDI III, J.J. et RATLIFF, H.D. (1978). Unnetworks, with applications to idle time scheduling, *Management Science* **24**, No. 8, 850–858.

BARTHOLDI III, J.J., ORLIN, J.B. et RATLIFF, H.D. (1980). Cyclic scheduling via integer programs with circular ones, *Operations Research* **28**, No. 5, 1074–1085.

BEAULIEU, H. (2000). A mathematical programming approach for scheduling physicians in the emergency room, *Health care management science* **3**, 193–200.

BEAUMONT, N. (1997a). Scheduling staff using mixed interger programming, *European Journal of the Operational Research* **98**, No. 3, 473–484.

BEAUMONT, N. (1997b). Using mixed integer programming to design employee, *Journal of the Operational Research Society* **48**, No. 6, 585–590.

BECHTOLD, S.E. (1988). Implicit optimal and heuristic labor staffing in a multiobjective multilocation environment, *Decision Sciences* **19**, No. 2, Spring.

BECHTOLD, S.E. et BRUSCO, M.J. (1994a). A microcomputer-based heuristic for tour scheduling of a mixed workforce, *Computers and Operations Research* **21**, No. 9, 1001-1009.

BECHTOLD, S.E. et BRUSCO, M.J. (1994b). Working set generation methods for labor tour scheduling, *European J. Operational Research* **74**, 540–551.

BECHTOLD, S.E. et JACOBS, L.W. (1990). Implicit modelling of flexible break assignment in optimal shift scheduling, *Management Science* **36**, 1339–1351.

BECHTOLD, S.E. et JACOBS, L.W. (1993). Labor utilization effects of labor scheduling flexibility alternatives in a tour scheduling environment, *Decision Sciences* **24**, 148–166.

BECHTOLD, S.E. et JACOBS, L.W. (1996). The equivalence of general set-covering and implicit integer programming formulations for shift scheduling, *Naval Research Logistics* **43**, 233–249.

BECHTOLD, S.E. et SHOWALTER, M.J. (1985). Simple manpower scheduling methods for managers, *Production and Invotory Management* **26**, No. 3, 116-133.

BECHTOLD, S.E. et SHOWALTER, M.J. (1987). A methodology for labor scheduling in a service delivery system, *Decision Sciences* **18**, 89–107.

BECHTOLD, S.E., BRUSCO, M.J. et SHOWALTER, M.J. (1991). A comparative evaluation of labor tour scheduling methods, *Decision Sciences* **22**, 683–699.

BERRADA, I., FERLAND, J. et MICHELON, P. (1996). A multi-objective approach to nurse scheduling with both hard and soft constraints, *Socio-Economic Planning Sciences* **30**, No. 3, 183–193.

BILLIONNET, A. (1999). Integer programming to schedule a hierarchical workforce with variable demands, *European J. Operations Research* **114**, No. 1, 105–114.

BINICI, C. (2000). *Staff scheduling in the service industry : application to US postal service processing and distribution centers.* M.Sc. Thesis, The University of Texas at Austin, USA.

BLAIS, J., LAMONT, J. et ROUSSEAU, J. (1990). The haustus vehicle and manpower scheduling system at the Société de Transport de Commuauté Urbaine de Montréal, *Interfaces* **20**, 26–42.

BROWNE, J. et TIBERWALA, R. (1975). Manpower Scheduling, *Industrial Engineering* **7**, No. 8, 22–23.

BROWNWELL, W.S. et LOWERRE, J.W. (1976). Scheduling of work forces required in continuous operations under alternative labor policies, *Management Science* **22**, No. 5, 597–605.

BRUSCO, M.J. et JACOBS, L.W. (1993). A simulated annealing approach to the cyclic staff-scheduling problem, *Naval Research Logistics* **40**, 69–84.

BRUSCO, M.J. et JACOBS, L.W. (1995). A simulated annealing approach to the cyclic staff-scheduling problem, *Naval Research Logistics* **40**, 69–84.

BRUSCO, M.J. et JACOBS, L.W. (1998a). Personnel tour scheduling when starting-time restrictions are, *Management Science* **44**, No. 4, 534–547.

BRUSCO, M.J. et JACOBS, L.W. (1998b). Eliminating redundant columns in continuous tour scheduling problems, *European J. Operational Research* **111**, No. 3, 518–525.

BRUSCO, M.J. et JACOBS, L.W. (2000). Optimal models for meal-break and start-time flexibility in continuous tour scheduling, *Management Science* **46**, 1630–1641.

BRUSCO, M.J. et JACOBS, L.W. (2001). Starting-Time decisions in labor tour scheduling : An experimental analysis and case study, *European J. Operational Research* **131**, 459–475.

BRUSCO, M.J. et JOHNS, T. (1995a). The effect of demand characteristics on labour scheduling methods, *International J. Operations and Production Management* **15**, No. 1, 74.

BRUSCO, M.J. et JOHNS, T. (1995b). Improving the dispersion of surplus labor in personnel scheduling solutions, *Computers and Industrial Engineering* **28**, No. 4, 745–754.

BRUSCO, M.J. et JOHNS, T. (1996). A sequential integer programming method for discontinuous labor tour scheduling, *European J. Operational Research* **95**, No. 3, 537–548.

BRUSCO, M.J., JACOBS, L.W., BONGIORNO, R.J., LYNOS, D.V. et TANG, B. (1995). Improving personal scheduling at airline stations, *Operations Research* **43** (5), 741–751.

BUFFA, E.S., COSGROVE, M.S. et LUCE, B.J. (1976). An integrated work shift scheduling system, *Decision Science* **7**, 620–630.

BURGESS, W.J. et BUSBY, R.E. (1992). *Personnel scheduling*, in Handbook of Industrial Engineering, Wiley et Sons, New York, 2154–2169.

BURKE, E., DE CAUSMAECKER, P., VANDEN BERGHE, G. et VAN LANDEGHEM, H. (2002). The state of the art of nurse rostering, *Technical Report, School of Computer Science and IT, University of Nottingham.*

BURNS, R.N. (1978). Manpower scheduling with variable demands and alternate week-ends off, *INFOR* **16**, No. 2, 101–111.

BURNS, R.N. et CARTER, M.W. (1985). Workforce size and single shift schedules with variables demands, *Management Science* **31**, No. 5, 599–607.

BURNS, R.N. et KOOP, G.J. (1987). A modular approach to optimal multiple-shift manpower scheduling, *Operations Research* **35** No. 1, 100–110.

BURNS, R.N., NARASIMHAN, R. et SMITH, L. (1998). A set-processing algorithm for scheduling staff on 4-day or 3-day work weeks, *Naval Research Logistics* **45** No. 8, 839–853.

BYRNE, J.L. (1970). *An application of linear programming to the scheduling of toll collectors.* Ph.D. Thesis, University of Adelaide, Australia

BYRNE, J.L. et POTTS, R.B. (1973). Scheduling of toll collectors, *Transportation Science* **7**, 224–245.

ÇEZIK, T., GÜNLÜK, O. et LUSS, H. (2001). An integer programming model for the weekly tour scheduling problem, *Naval Research logistics* **48** (7), 607–624.

ÇEZIK, T. et GÜNLÜK, O. (2004). Reformulating linear programs with transportation constraints-with applications to workforce scheduling, *Naval Research logistics* **51**, 258–274.

CHEN, D.S. (1976). A simple manpower scheduling algorithm for two consecutive days-off, Presented at the ORSA/TIMS joint national meeting, Miami, Florida.

COCHRAN, J., CHU, D. et CHU, M. (1997). Optimal staffing for cyclically scheduled processes, *International Journal of Production Research* **35** No. 12, 3393–3403.

DANTZIG, G.B. (1954). A comment on Edie's traffic delays at toll booths, *Operation Research* **2**, 339–341.

DAY, P.R. et RYAN, M. (1997). Flight attendant rostering for short-haul airline operations, *Operation Research* **45**, No. 5, 649–661.

DOWNSLAND, K. (1998). Nurse scheduling with tabu search and strategic oscillations, *European J. Operations Research* **106**, 393–407.

DOWNSLAND, K. et THOMPSON, J. (2000). Solving a nurse scheduling problem with knapsacks, networks and tabu search, *Journal of the Operational Research Society* **51**, 825–833.

EASTON, F.F. et ROSSIN, D.F. (1991a). Equivalent alternate solutions for the tour scheduling problem, *Decision Sciences* **22**, 985-1001.

EASTON, F.F. et ROSSIN, D.F. (1991b). Sufficient working subsets for the tour scheduling problem, *Management Science* **37**, 1441–1451.

EASTON, F.F. et ROSSIN, D.F. (1996). A stochastic goal program for employee scheduling, *Decision Sciences* **27**, No. 3, 541–568.

EASTON, F.F. et ROSSIN, D.F. (1997). Overtime schedules for full-time service workers, *Omega* **25**, No. 3, 285–299.

EDIE, L.C. (1954). Traffic delays at toll booths, *Operations Research* **2**, 107–138.

EMMONS, H. (1985). Workforce scheduling with cyclic requirements and constraints on days off, week-ends off, and workstretch, *II Trans.* **17**, No. 1, 8–16.

EMMONS, H. et BURNS, R.N. (1991). Off-day scheduling with hierarchical worker categories, *Operation Research* **39**, No. 3, 484–495.

EMMONS, H. et FUH, D. (1997). Sizing and scheduling a full-time and part-time workforce with off-day and off-weekend constraints, *Annals of Operations Research* **70**, 473–492.

ERNST, A.T., JIANG, H., KRISHNAMOORTHY, M., OWENS, B. et SIER, D. (2004). An annotated bibliography of personnel scheduling and rostering, *Annals Research Operations* **127**, 21–144.

FOLKARD, S. et MONK, H.T. (EDS.) (1985). *Hours of work*, Wiley & Sons, New York, (1985), p. 197.

FRANCIS, M.A. (1966). Implementing a program of cyclical scheduling of nursing personnel, *Hospitals* January 16, 108–125.

GABALLA, A. et PEARCE, W. (1979). Telephone sales manpower planning at quantas, *Interfaces* **9**, 1–9.

GERSHKOFF, I. (1989). Optimizing flight crew scheduling, *Interfaces* **19**, 29–43.

GIERL, L. et POLLWEIN, B. (1993). Knowledge-based scheduling of duty rosters for physicians, *Medical Informatics* **18** No. 4, 355–366.

GLOVER, F. et LAGUNA, M. *Tabu search*, Kluwer Academic Publishers, 1997.

GLOVER, F. et MCMILLAN, C. (1986). The general employee scheduling problem : An integration of MS and AI, *Comput. Operations Research* **13** (5), 563–573. (Technical Report DBAI-TR-2001-45 20.)

GÜNEŞ, E.D. (1999). Workforce scheduling, Technical Report, Department of industrial Engineering, Bilkent University. *http ://www.ie.bilkent.edu.tr/~ie672/docs/present/gunes.ps.*

HELLER, N. (1971). Implementing proportional rotating schedules, *Proceedings, 6th Annual ACM Urban Symposium, New York City.*

HENDERSON, W.B. (1974). *Mathematical models for telephone operator shift scheduling.* Ph.D. Thesis, Purdue University, USA.

HENDERSON, W.B. et BERRY, W.L. (1976). Heuristic methods for telephone operator shift scheduling : An experimental analysis, *Management Science* **22**, 1372–1380.

HOEY, J.M. et LOVE, R.R. (1990). Management science improves fast-food operations, *Interfaces* **20**, 21–29.

HOLLORAN, T.J. et BRYN, J.E. (1986). United airlines station manpower planning system, *Interfaces* **16**, 39–50.

HUETER, J. et SWART, W. (1998). An integrated labor-management system for Taco-Bell, *Interfaces* **28**, 75–91.

HUNG, R. (1991). Single-shift workforce scheduling under a compressed workweek, *Omega* **19** No. 5, 494–497.

HUNG, R. (1994a). Managing compressed workweeks : A comparison of 4-day and 3-4 workweeks, *International Journal of Technology Management* **9** No. 2, 261-266.

HUNG, R. (1994b). Single-Shift off-day scheduling of a hierarchical workforce with variable demands, *European Journal of Operational Research* **78** No. 1, 49-57.

HUNG, R. (1999). Scheduling a workforce under annualized hours, *International Journal of Production Research* **37** No. 11, 2419-2427.

HUNG, R. et EMMONS, H. (1993). Multiple-shift workforce scheduling under the 3-4 compressed workweek with a hierarchical workforce, *IIE Transactions* **25** (5), 82–89.

HUXLEY, S.J. et TAYLOR, P.E. (1989). A break from tradition for the San Francisco police : Patrol scheduling using an optimization-based system, *Interfaces* **19**, 4–24.

ISKEN, M.W. (1995). Personnel scheduling models for hospital ancillary units, Ph.D. Thesis, University of Michigan. USA.

ISKEN, M.W. (2004). An implicit tour scheduling model with applications in healthcare, *Annals Research Operations* **128**, 91–109.

JACKSON, W.K., HAVENS, W.S. et DOLLARD, H. (1997). Staff scheduling : A simple approach that worked. *Technical Report* CMPT97-23.
(http ://www.cs.sfu.ca/research/groups/ISL/papers/jackson-staff/staff.html.)

JACOBS, L.W. (1989). *A compact integer programming approach to work-force scheduling : A study in flexibility.* Ph.D. Thesis, Floride State University, USA.

JACOBS, L.W. et BECHTOLD, S. (1993). Labor utilization effects of labor scheduling flexibility alternatives in a tour scheduling environment, *Decision Sciences* **24**, No. 1, 148–166.

JACOBS, L.W. et BRUSCO, M.J. (1996). Overlapping start-time bands in implicit tour scheduling, *Management Science* **42**, No. 9, 1247–1259.

JACOBS, L.W. et BRUSCO, M.J. (1998). Personal tour scheduling when starting time restrictions are present, *Management Science* **44**, 534–547.

JARRAH, A.I.Z. (1991). *Mathematical models for the analysis, design, and staffing of general mail facilities.* Ph.D. Thesis, University of Texas at Austin, USA.

JARRAH, A.I.Z. , BARD J.F. et DE SILVA, H. (1994). Solving large-scale tour scheduling problems, *Management Science* **40**, 1124–1144.

JAUMARD, B., SEMET, F. et VOVOR, T. (1998). A generalized linear programming model for nurse scheduling, *European J. Operation. Research* **107**, 1–18.

JELINEK, R.C. (1973). Tell the computer how sick the patients are and it will tell you how many nurses they need, *Modern Hospital* December.

KEITH, E.G. (1979). Operator scheduling. *AIIE Transactions* **11**, 37–41.

KIM, C.Y. (1983). *Manpower scheduling involving both delayable and non-delayable jobs.* Ph.D. Thesis, Arizona State University, USA.

KIRAGU, M.M. (1996). *Scheduling therapist personnel at a sport clinic : A flexible staff scheduling system.* M.SC. Thesis, University of Toronto, Canada.

KOELLING, C.P. (1982). *Computer-aided personnel scheduling.* Ph.D. Thesis, Arizona State University, USA.

KOLESAR, P.J., RIDER, K.L., CRABILL, T.B. et WALKER, W.E. (1975). A queuing-linear programming approach to scheduling police patrol cars. *Operations Research* **23** (6), 1045–1062.

LOUCKS, J.S. et JACOBS, F.R. (1991). Tour scheduling and task assignment of a heterogeneous workforce : A heuristic approach, *Decision Sciences* **22**, 719–739.

LOWERRE, J.M. (1977). Work stretch properties for the continuous operations under alternative labor policies, *Management Science* **23**, 963–971.

LOWERRE, J.M. (1979). On personnel budgeting for continuous operations (with emphasis on hospitals), *Decision Science* **10**, 126–135.

LUCE, B.J. (1974). Employee assignment system, paper presented at joint national meeting of ORSA/TIMS.

MABERT, V. et SHOWALTER, M. (1988). An evolution of full/part-time tour scheduling methodology, *Internat. J. Operations and Production Management* **9**, 54–71.

MABERT, V. et SHOWALTER, M.J. (1990). Measuring the impact of part-time workers in service organizations, *J. Oper. Management* **9**, 209–229.

MABERT, V. et WATTS, C.A. (1982). A simulation analysis of tour-shift scheduling construction procedures, *Management Science* **28**, 520–532.

MAIER-ROTHE, C. et WOLFE, H.C. (1973). Cyclical scheduling and allocation of nursing staff, *Socio-Economic Planning Sciences* **7**, No. 5, October.

MALHOTRA, M.K. (1990). *Staff scheduling models and policies in postal distribution systems.* Ph.D. Thesis, Ohio State University, USA.

MCGINNIS, L.F., CULVER, W.D. et DEANE, R.H. (1978). One- and two-phase heuristics for workforce scheduling, *Computers Industrial Engineering* **2**, 7–15.

MEHROTRA, A., MURTHY, K.E. et TRICK, M.A. (2000). Optimal shift scheduling : A branch-and-price approach, *Naval Research logistics* **47** (3), 185–200.

MILLER, H.E., PIERSKALLA, W.P., et RATH, G.J. (1976). Nurse scheduling using mathematical programming, *Operations Research* **24**, No. 5, September-October.

MONROE, G. (1970). Scheduling manpower for service operations, *Industrial Engineering* **2**, No. 8, 10–17.

MOONDRA, S.L. (1976). An L. P. model for workforce scheduling in banks, *J. Bank Res.* **6**, 299–301.

MORRIS, J.G. et SHOWALTER, M.J. (1983). Simple approaches to shift, days-off and tour scheduling problems, *Management Science* **29** (8), 942–950.

NANDA, R. et BROWNE, J. (1992). *Introduction to Employee Scheduling.* Van Nostrand Reinhold, Ney York.

NARASIMHAN, R. (1996). An algorithm for single shift scheduling of hierarchical workforce, *European Jounal of Operational Reseach* **96** No. 1, 113–121.

OZKARAHAN, I. (1989). A flexible nurse scheduling support system, In *Computer Methods and POrograms in Biomedicine, Symposium on Computer Applications in Medical Care* **30**, 145–153.

OZKARAHAN, I. et BAILEY, J. (1988). Goal programming model subsystem of a flexible nurse scheduling support system, *IIE Transactions* **20**, No. 3, 306–316.

PANTON, D.M. (1991). On the creation of multiple shift continuous operation cyclic rosters under general workforce conditions, *Asia-Pacific Journal of Operational Research* **8** No. 2, 189–201.

PANTON, D.M. et RYAN, D.M. (1999). Column generation models for optimal workforce allocation with multiple breaks, Proceedings of the 4th International Congress on Industrial & Applied Mathematics, Edinburgh, UK.

PEDROSA, D. et CONSTANTINO, M. (2001). Days-off scheduling in public transport companies, In S. Voss and J. Daduna (eds.) *Computer-Aided scheduling of public transport* Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, **505**, 215–232. Springer.

REKIK, M. (En préparation). Thèse de Doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada.

REKIK, M., CORDEAU, J.-F. et SOUMIS, F. (2004). Using Benders decomposition to implicitly model tour scheduling, *Annals of Operations Research* **128** (1-4), 111–133. Voir aussi dans : Les Cahiers du GERAD, Montréal, **G-2002-32**, Juin 2002.

RITZMAN, L., KRAJEWSKI, L.J. et SHOWALTER, M.J. (1976). The disaggregation of aggregate manpower plans, *Management Science* **22**, 1204–1214.

RYAN, D.M. et FOSTER, B.A. (1981). An integer programming approach to scheduling, Computer scheduling of public transport urban passenger vehicle and crew scheduling, A. Wren (Editor), North-Holland, Amsterdam, 269–280.

SCHINDLER, S. et SEMMEL, T. (1993). Station staffing at Pan American World Airways, *Interfaces* **23**, 91–98.

SEGAL, M. (1974). The operator scheduling problem : A network flow approach, *Operations research* **22**, 808–824.

SELKIRK, C.G. (1999). *Optimal algorithms for single shift workforce scheduling to avoid one day work stretches in a cyclic schedule.* Ph.D. Thesis, Queen's University, Canada.

SMITH, L.D. (1976). The application of an interactive algorithm to develop cyclical rotational schedules for nursing personnel, *INFOR* **14**, 53–70.

SHOWALTER, M.J. (1976). *A methodology for manpower tour assignement within a U.S. postal service processing center facility.* Ph.D. Thesis, Ohio State University, USA.

THOMPSON, G.M. (1993). Accounting for the multi-period impact of service when determining employee requirements for labor scheduling, *J. Operations Management* **11**, 269–287.

THOMPSON, G.M. (1995). Improved implicit optimal modelling of the labor shift scheduling problem, *Management Science* **41**, 595–607.

THOMPSON, G.M. (1995b). Labor scheduling using NPV estimates of the marginal benefit of additional labor capacity, *Journal of Operations Management* **13**, 67–86.

THOMPSON, G.M. (1996). A simulated-annealing heuristic for shift scheduling using non-continuously available employees, *Comput. Operat. Research* **23**, No. 3, 275–288.

THOMPSON, G.M. (1997a). Assigning telephone operators to shifts at new Brunswick Telephone Company, *Interfaces* **27**, No. 4, 1–11.

THOMPSON, G.M. (1997b). Labor staffing and scheduling models for controlling service levels, *Naval Research Logistics*, **44**, 719–740.

THOMPSON, G.M. (1999). Labor scheduling : Developing a workforce schedule, *Cornell Hotel and Restaurant Administration Quaterly* **40**, No. 1, 86–96.

THOMPSON, G.M. (2003). Labor scheduling : A commentary, *Cornell Hotel and Restaurant Administration Quarterly* **44**, 149–155.

TIBREWALA, R., PHILIPPE, D. et BROWNE, J. (1972). Optimal scheduling of two consecutive idle periods, *Management Science* **19** No. 1, 71–75.

TOPALOGLU, S. et OZKARAHAN, I. (1998). A research on optimization based modeling for tour scheduling problems with flexible break assignments, In *the Proceedings of the 7th Annual Industrial Engineering Research'98 Conference* Banff, Alberta, Canada.

TOPALOGLU, S. et OZKARAHAN, I. (2000). A goal programming approach for large-scale tour scheduling problems with flexible break assignments, In *the Proceedings of the 31st Annual Meeting of the Decision Science Institute, Orlando, Fl.*

TOPALOGLU, S. et OZKARAHAN, I. (2002). Implicit optimal tour scheduling with flexible break assignments, *Comput. Indust. Enginneering* **44**, 75-89.

TOPALOGLU, S. et OZKARAHAN, I. (2004). An implicit goal programming model for the tour scheduling problem considering the employee work preferences, *Annals of Operations Research* **128**, Special Issue on Staff Scheduling and Rostering, 135-158.

TIEN, J.M. et KAMIYAMA, A. (1982). On manpower scheduling algorithms, *SIAM Review* **24** No. 3, 275–287.

VATRI, E. (2001). *Intégration de la génération de quarts de travail et de l'attribution d'activités.* Mémoire de Maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada.

WARNER, D.M. (1976). Scheduling nursing personnel according to nursing preference : A mathematical programming approach, *Operations Research* **24**, No. 5, 842–856.

WARNER, D.M. et PRAWDA, J. (1972). A mathematical programming model for scheduling nursing personnel in a hospital, *Management Science* **19**.

WERMUS, M. et POPE, J. (1994). Scheduling harbor pilots, *Interfaces* **24**, No. 2, 44–52.

WONG, R. (1996). An approach for personnel scheduling, *INFORMS Conference*, SB28-4, Washington DC.