

Titre:	Modélisation des coupleurs à fibres fusionnées
Title:	
Auteur:	Elio Pone
Author:	
Date:	2005
Type:	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis
Référence:	Pone, E. (2005). Modélisation des coupleurs à fibres fusionnées [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. Citation: https://publications.polymtl.ca/7572/

Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie:	https://publications.polymtl.ca/7572/
PolyPublie URL:	

Directeurs de recherche:	Suzanne Lacroix, & Xavier Daxhelet
Advisors:	

Programme:	Non spécifié
Program:	

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÉLISATION DES COUPLEURS À FIBRES FUSIONNÉES

ELIO PONE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE PHYSIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR
(GÉNIE PHYSIQUE)
JUILLET 2005



Library and
Archives Canada

Published Heritage
Branch

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Direction du
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file *Votre référence*

ISBN: 978-0-494-17012-0

Our file *Notre référence*

ISBN: 978-0-494-17012-0

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

**
Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

MODÉLISATION DES COUPLEURS À FIBRES FUSIONNÉES

présentée par: Elio PONE

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiae Doctor (Ph.D.)
a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. GODBOUT Nicolas, Ph.D., président

Mme. LACROIX Suzanne, D.Sc., membre et directeur de recherche

M. DAXHELET Xavier, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. DUFOUR Steven, Ph.D., membre

M. PIERRE Roger, Ph.D., membre

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Madame Suzanne Lacroix pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire de fibres optiques et de m'avoir permis de préparer mon doctorat dans les meilleures conditions. Je tiens à la remercier tout particulièrement pour tous ses efforts et pour le soutien qu'elle m'a témoigné tout au long de cette étude placée sous sa direction.

Je tiens également à exprimer tous mes sincères remerciements à mon codirecteur Xavier Daxhelet pour l'intérêt qu'il a toujours porté à mon travail, pour ses précieux conseils et ses encouragements.

Plusieurs personnes au laboratoire des fibres optiques ont contribué à mes travaux. Je tiens à remercier Mikaël Leduc, Maryse Aubé et Tania Pincaud pour leur aide dans mes expériences au laboratoire.

Finalement, je souhaite remercier de tout cœur ma famille et mes proches pour leur soutien et leurs encouragements à toute épreuve tout au long de l'élaboration de cette thèse.

RÉSUMÉ

Les coupleurs à fibres fusionnées sont utilisés couramment dans l'industrie de télécommunications pour distribuer les signaux lumineux dans les fibres optiques. Ils peuvent également réaliser d'autres fonctions comme la séparation de deux longueurs d'onde, séparation de deux modes ou la séparation des polarisations.

Pour fabriquer les coupleurs fusionnés, deux fibres sont d'abord fusionnées latéralement et ensuite la structure fusionnée est étirée pour créer un effilage central. On observe alors, si les pentes de la structure effilée ne sont pas trop abruptes, un échange de puissance périodique en fonction de l'allongement et de la longueur d'onde entre les deux fibres à la sortie du coupleur.

Pour la conception des recettes de fabrication des coupleurs, il est important d'avoir un modèle qui peut associer à une recette de fabrication le comportement optique du coupleur. La construction de ce modèle est l'objectif de cette thèse qui est séparée en deux parties. Premièrement, on construit un modèle qui décrit l'évolution du profil d'indice de réfraction durant le processus de fabrication. Ensuite, on calcule les propriétés optiques du coupleur en utilisant le modèle de profil d'indice.

Pour modéliser le profil d'indice, nous faisons l'hypothèse que l'indice de réfraction est une fonction linéaire de la concentration du dopant. Puisque l'évolution du profil de la concentration dépend du déplacement de la matière et de la diffusion des dopants, nous devons résoudre l'équation de convection-diffusion. Cela nécessite l'évaluation du champ de vitesse. Nous considérons le verre fondu comme un liquide newtonien très visqueux. Dans ce cas, l'écoulement est géré par les équations de Stokes. Il s'agit d'un écoulement à surface libre. La seule force qui agit sur cette surface est la force de tension superficielle.

On commence avec la fusion des fibres. À cause de leurs dimensions transversales réduites, on peut considérer l'écoulement bidimensionnel et la viscosité uniforme dans la section droite. Le problème de l'écoulement bidimensionnel de Stokes, guidé par la force de tension superficielle, est résolu par une méthode basée sur les transformations conformes. L'évolution de la section droite du coupleur, durant la fusion, est considérée dans un plan complexe comme l'évolution d'une transformation conforme d'un domaine de référence fixe qui est le disque unitaire. Pour utiliser cette transformation conforme, nous exprimons les variables d'écoulement comme

des fonctions d'une variable complexe à l'aide de deux fonctions holomorphes appelées potentiels complexes. En utilisant la condition à la frontière, nous résolvons d'abord le problème de l'évolution de l'interface extérieure. Puis, en prenant le prolongement analytique des fonctions holomorphes, la solution dans tout le domaine est obtenue.

Après l'évaluation du champ de vitesse, nous résolvons l'équation de convection-diffusion en deux dimensions utilisant un schéma explicite en différences finies. Pour valider cette partie du modèle, les résultats des simulations sont comparés avec des photographies et des mesures expérimentales de profil d'indice de différentes sections droites à des différents degrés de fusion et une très bonne correspondance a été observée.

Nous avons également établi des méthodes pour caractériser les différents paramètres expérimentaux nécessaires à la résolution des équations en effectuant des mesures simples. Ainsi, nous faisons l'évaluation de la viscosité des fibres à partir de l'avancement de la fusion et du temps écoulé pour cet avancement.

Après la fusion, nous considérons l'étirage des coupleurs. À partir de la minceur de la géométrie du coupleur, nous simplifions les équations, en transformant le problème tridimensionnel en un couplage entre un problème unidimensionnel et une évolution de sections droites identique à la fusion des fibres. Dans ce cas, il faut utiliser un repère mobile qui se déplace avec les sections droites. Ainsi, nous obtenons le profil longitudinal du coupleur et l'avancement de la fusion pendant l'étirage du coupleur. L'équation de convection-diffusion est résolue séparément pour chaque section droite mobile, à l'aide d'un schéma en différences finies, en négligeant la diffusion d'une section droite à l'autre.

Nous avons fabriqué une série de coupleurs selon une recette arbitraire et les avons clivés à différents endroits. Ensuite, nous avons mesuré les profils d'indice de ces sections droites. Ces mesures sont comparées avec les résultats des simulations et une très bonne correspondance a été observée.

Pour calculer la transmission optique des coupleurs, nous avons utilisé deux méthodes différentes, le battement des supermodes et la méthode de propagation des faisceaux. La méthode de battement des supermodes consiste à calculer le déphasage des modes symétrique et antisymétrique de la structure fusionnée. La méthode de propagation des faisceaux calcule le champ électromagnétique dans une section droite à partir du champ connu dans une section droite proche précédente.

Pour utiliser la méthode de battement des supermodes, nous devons calculer les constantes de propagation des modes guidés dans le coupleur. Pour réaliser cela, nous calculons les modes vectoriels avec la méthode des différences finies en se basant sur une discrétisation du champ magnétique transverse. La discrétisation de la section droite est faite en utilisant un maillage non uniforme. Le calcul des valeurs propres a été fait par la méthode d'Arnoldi en utilisant la commande *eigs* de MATLAB. La comparaison avec des modes des fibres cylindriques calculés analytiquement a montré une bonne précision.

Pour valider le modèle, nous avons fabriqué un coupleur et nous avons mesuré la transmission optique en fonction de la longueur d'onde dans les deux fibres de sortie. Pour ce coupleur nous avons fait une modélisation complète, c'est-à-dire, nous avons construit un modèle pour le profil d'indice et nous avons calculé sa transmission en fonction de la longueur d'onde. La comparaison entre la transmission mesurée et celle calculée montre une correspondance relativement bonne, même si l'évaluation des paramètres expérimentaux est faite en un seul point, le centre du coupleur.

La deuxième approche pour calculer la transmission est la méthode de propagation des faisceaux (BPM). Nous choisissons une BPM vectorielle basée sur le champ magnétique transverse pour utiliser la même technique de discrétisation de la section droite que nous avons utilisée pour le calcul des modes. Pour un coupleur uniforme en z , la BPM a donné exactement la même transmission que la méthode de battement des supermodes, ce qui confirme la précision de la méthode. Ensuite, nous calculons la transmission du même coupleur que celui étudié avec la méthode des battements et on obtient presque la même transmission ce qui montre de nouveau la même précision des deux approches.

La différence entre les simulations et les mesures s'explique par une légère différence entre le profil d'indice calculé et le profil réel à cause de l'évaluation des paramètres expérimentaux en un seul point au centre du coupleur. En plus, il se peut que dans le coupleur soient introduites des poussières durant la fabrication qui induisent des pertes et que notre modèle ne peut pas prendre en compte. Mais puisque les courbes de transmission ne diffèrent pas beaucoup, on peut considérer que l'objectif de la thèse a été atteint.

ABSTRACT

Fused fiber couplers have a wide range of uses in the optical networking industry. They are used as power splitters, wavelength-division multiplexers, polarization beam splitters, mode splitters, filters etc.

Fused couplers are fabricated using a combination of fusion and tapering. Two or more optical fibers have their coatings removed and are then brought into contact along their length. The adhering fibers are then heated until a certain amount of coalescence takes place due to the surface tension. Then the fibers are drawn along their length under tension into a taper until the required functionality of the coupler is achieved. The power exchange along a coupler can be described in terms of the beating of the lowest-order symmetric (even) and antisymmetric (odd) modes of the composite waveguide.

It is important for the coupler designer to have a model which can predict the optical properties of the coupler from the fabrication recipe parameters. The construction of this model is the objective of this thesis which is separated in two parts. First, we consider the modeling of the evolution of the refractive index profile during the coupler fabrication. Then, we consider the simulation of the optical transmission of the coupler based on the refractive index profile calculated by our model.

We assume the refractive index to be a linear function of the dopant concentration. Thus, to determine the evolution of the refractive index of the coupler, one has to solve the diffusion-convection equation for different dopants within optical fiber cores. We must determine the velocity field in order to solve this equation. To do so, we assume that softened glass may be considered as a viscous incompressible Newtonian fluid surrounded by a free surface. The motion is driven by the action of a constant surface tension acting at that free surface and the drawing force. The magnitude of inertial and gravitational forces are considered negligible compared with viscous or capillary forces. The governing equations are in this case the Stokes equations.

We consider first the fusion of the fibers. Because of the reduced transversal dimensions of the optical fibers, we consider a two-dimensional flow and a constant viscosity. The evolution of the cross-section is considered in the complex plane and is described in terms of a time-dependent conformal mapping from a fixed refe-

rence domain, the unit disc. The flow variables can then be expressed in terms of two analytic functions called complex potentials. Using the boundary condition, the solution at the external interface is obtained first, and by taking the analytical continuation of the complex potentials the solution for the whole domain is obtained.

Once the velocity field is obtained the convection-diffusion equation is solved by applying an explicit finite difference scheme. A good agreement is observed between the numerical results and the photographs and the measurements of cross-section profiles of real fused couplers.

We have also established some methods to characterize different fabrication parameters. As an example, the viscosity is evaluated from a derived relation between the degree of fusion and the time it takes to arrive at that fusion.

After the fusion, we consider the tapering of the coupler. The three dimensional Stokes equation can be simplified into a unidirectional problem coupled with the known two-dimensional fusion if a moving reference frame is used. In this way, we obtain the longitudinal profile of the coupler and the axial distribution of the degree of fusion. The convection-diffusion equation is solved separately for each cross-section neglecting the inter-sectional diffusion.

In order to validate the model, a series of couplers are fabricated and clived at different axial positions. The measured cross-sectional refractive index profiles are compared with numerical simulations and a very good agreement is observed.

The optical transmission of the couplers is calculated with two different methods; the beating of the guided modes in the composite structure and the beam propagation method. The first method consists in calculating the phase difference of the lowest-order symmetric and antisymmetric modes of the coupler. The beam propagation method calculates the electromagnetic field at a given cross-section from the known field at a previous nearby cross-section.

In the method based on the beating of lowest-order modes, the propagation constants are needed. So, we calculate the vectorial modes using a finite difference method based on the discretization of the transversal magnetic field using a non uniform mesh. The MATLAB command *eigs* is used for the eigenvalue evaluations. The comparison of the numerical results with the analytical solutions for the step index cylindrical fibers shows a very good accuracy of the method.

In order to validate our model, a real coupler is fabricated and the power trans-

mission as a function of the wavelength is measured. For this coupler, a complete modeling is done, that is, we simulate the refractive index profile and the optical transmission. The comparison between the measured and the calculated transmission shows a relatively good agreement even though the fabrication parameters are evaluated at a single point in the center of the coupler.

The second approach for the transmission simulation is the beam propagation method (BPM). We choose a vectorial BPM based on the transversal magnetic field in order to employ the same technique of cross-section discretization as in the mode calculations. For a longitudinally uniform coupler, the method based on the beating of lowest-order modes and the beam propagation method give exactly the same optical transmission which confirms the validity of our BPM code. After that, we simulate the optical transmission of the same coupler already considered with the other method (the beating of modes). We obtain again almost the same calculated transmission except for some losses related to the non adiabatic profile of the coupler and which can not be calculated by the method based on the beating of modes.

The difference between the measured and the calculated transmission is attributed to a slight difference between the real and the modeled refractive index profile which is constructed by evaluating the fabrication parameters at a single point at the center of the coupler. Furthermore, we have measured some considerable losses which can be attributed only to some dust inserted into the coupler during the fabrication process. These losses can not be accounted for by our model. But, since the measured and simulated transmission curves don't differ too much even though they are very sensitive to the refractive index profile, we consider our objective accomplished.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	viii
TABLE DES MATIÈRES	xi
LISTE DES TABLEAUX	xiv
LISTE DES FIGURES	xv
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES	xix
LISTE DES ANNEXES	xxii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 FABRICATION DES COUPLEURS, ÉCOULEMENT DE VERRE ET DIFFUSION DES DOPANTS	5
1.1 Fabrication des coupleurs	5
1.1.1 Fibres optiques	5
1.1.2 Méthode de fabrication	6
1.2 Écoulement de verre	8
1.2.1 Équations de Stokes	8
1.2.2 Conditions aux limites	11
1.2.2.1 Coefficient de tension superficielle	11
1.2.2.2 Condition à la frontière pour le vecteur contrainte	12
1.3 Diffusion des dopants	13
1.3.1 Mécanismes de diffusion	14
1.3.2 Équation de convection-diffusion	14
CHAPITRE 2 FUSION DES COUPLEURS	17
2.1 Coalescence des fibres	18

2.1.1	Hypothèses de départ	19
2.1.2	Méthode Hopper-Richardson	21
2.1.3	Intégration numérique	24
2.1.4	Degré de fusion	25
2.2	Fusion des fibres multi-couches, sans effets de diffusion	26
2.2.1	Coupleurs 2×2	27
2.2.2	Coupleurs 3×3 plats	30
2.2.3	Coupleurs 5×5	32
2.2.4	Les configurations avec un trou au milieu	33
2.2.5	Comparaison avec le modèle empirique	36
2.3	Coefficient de diffusion	38
2.3.1	Mesure du profil de concentration	39
2.3.2	Évaluation du coefficient de diffusion	40
2.4	Solution de l'équation de convection-diffusion	44
2.4.1	Évaluation de la viscosité	44
2.4.2	Méthode des différences finies	46
2.4.3	Analyse de la stabilité	48
2.4.4	Comparaison avec des mesures expérimentales	50
2.4.5	Effets de la température	52
CHAPITRE 3 ÉTIRAGE DES COUPLEURS		55
3.1	Équations d'étirage	57
3.1.1	Hypothèses de départ	57
3.1.2	Évolution de la section droite	58
3.1.3	Conservation de la masse et l'équilibre des forces axiales . .	62
3.2	Évaluation des paramètres	66
3.2.1	Rapport viscosité-coefficient de tension superficielle	67
3.2.2	Coefficient de diffusion	69
3.3	Méthode numérique et comparaison avec des mesures expérimentales	73
3.3.1	Méthode numérique	73
3.3.2	Comparaison avec des mesures expérimentales	77
3.4	Effets des paramètres de contrôle	79

CHAPITRE 4 TRANSMISSION OPTIQUE DU COUPLEUR PAR BATTEMENT DES SUPERMODES	90
4.1 Propriétés optiques du coupleur	90
4.1.1 Transmission du coupleur 2×2	91
4.1.2 Effets de polarisation	93
4.1.3 Dépendance en longueur d'onde	97
4.2 Calcul des modes vectoriels par la méthode des différences finies	98
4.2.1 Équation d'onde vectorielle en coordonnées cartésiennes	98
4.2.2 Discrétisation en différences finies	100
4.2.3 Précision des calculs et quelques exemples	104
4.3 Simulation de la transmission d'un coupleur réel	111
4.3.1 Structure du coupleur	111
4.3.1.1 Fusion du coupleur	111
4.3.1.2 Étirage du coupleur	114
4.3.2 Transmission optique	118
CHAPITRE 5 LA MÉTHODE DE PROPAGATION DES FAISCEAUX	121
5.1 BPM en différences finies	122
5.1.1 Équations de base	122
5.1.2 Discrétisation en différences finies	124
5.1.3 Approximations de Padé	127
5.1.4 Conditions aux frontières	129
5.2 Calcul de la transmission optique	129
5.2.1 Validation du modèle	130
5.2.2 Transmission d'un coupleur réel	131
CONCLUSION	134
RÉFÉRENCES	138
ANNEXES	143

LISTE DES TABLEAUX

TAB. 1.1	Paramètres de la fibre SMF-28	6
TAB. 4.1	Comparaison du calcul de l'indice effectif du mode vectoriel HE_{11} avec d'autres techniques en différences finies	106

LISTE DES FIGURES

FIG. 1.1	Schéma de profil d'indice de réfraction d'une fibre à saut d'indice	6
FIG. 1.2	Force de tension superficielle	12
FIG. 2.1	Le schéma de la transformation conforme	21
FIG. 2.2	L'état initial d'un coupleur symétrique : $\lambda = 0,9999$	26
FIG. 2.3	Fusion d'un coupleur symétrique multi-couches. Le degré de fusion f est donné par l'équation (2.15).	28
FIG. 2.4	Fusion d'un coupleur asymétrique multi-couches. Le degré de fusion f est donné par l'équation (2.15).	30
FIG. 2.5	Fusion d'un coupleur 3×3	32
FIG. 2.6	Fusion d'un coupleur 5×5	34
FIG. 2.7	Fusion d'un coupleur 3×3 en triangle	35
FIG. 2.8	Fusion d'un coupleur 4×4 en carré	36
FIG. 2.9	Comparaison avec le modèle empirique	37
FIG. 2.10	Montage de mesure de profil d'indice	40
FIG. 2.11	Mesure du profil de concentration du dopant pour une fibre SMF-28. On remarque trois niveaux différents de concentration qui représentent le cœur, la gaine et le glycérol où baigne la fibre.	41
FIG. 2.12	Profil de concentration calculé pour différents coefficients de diffusion et une durée de 30s	42
FIG. 2.13	Profils mesurés de la concentration du dopant dans une seule fibre.	43
FIG. 2.14	Variation du degré de fusion en fonction du temps adimensionnel	46
FIG. 2.15	Comparaison des mesures avec la simulation pour la section droite à $f = 0,36$	51
FIG. 2.16	Comparaison de la photo expérimentale avec la simulation pour la section droite à $f = 0,6$	52
FIG. 2.17	Comparaison de la photo expérimentale avec la simulation pour la section droite à $f = 0,92$	53
FIG. 3.1	Le volume de contrôle	62

FIG. 3.2	Direction de la force de tension superficielle	64
FIG. 3.3	Frontière de section droite	65
FIG. 3.4	Fusion de deux fibres non étirées	68
FIG. 3.5	Distribution axiale de la largeur de la section droite à la même échelle que la photo 3.4. L'incertitude relative est de 2%	69
FIG. 3.6	Distribution axiale du degré de fusion. L'incertitude relative est de 2%	69
FIG. 3.7	Distribution axiale du rapport $\frac{\mu}{\gamma}(z)$	70
FIG. 3.8	Fibre chauffée pendant 45s à une distance de 3mm	71
FIG. 3.9	Distribution de diamètre $d(z)$ à la même échelle que la photo 3.8. L'incertitude relative est de 2%	72
FIG. 3.10	Profils de concentration mesurés	73
FIG. 3.11	Distribution $D(z)$ pour la moitié du coupleur	74
FIG. 3.12	Profil longitudinal du coupleur	77
FIG. 3.13	Profil longitudinal normalisé par rapport à deux fibres non fusionnées et distribution du degré de fusion pour la moitié du coupleur	78
FIG. 3.14	Profil d'indice mesuré et calculé de la section droite: degré de fusion = 0,99, largeur mesurée = $88\mu\text{m}$, largeur calculée = $91,3\mu\text{m}$. Les niveaux de concentration sont à 0,5, 0,77, 1,03 et 1,3% (en moles)	80
FIG. 3.15	Profil d'indice mesuré et calculé de la section droite: degré de fusion = 0,98, largeur mesurée = $99,5\mu\text{m}$, largeur calculée = $102,8\mu\text{m}$. Les niveaux de concentration sont à 0,4, 0,73, 1,07 et 1,4% (en moles)	81
FIG. 3.16	Profil d'indice mesuré et calculé de la section droite: degré de fusion = 0,97, largeur mesurée = $106,5\mu\text{m}$, largeur calculée = $108,4\mu\text{m}$. Les niveaux de concentration sont à 0,4, 0,87, 1,33 et 1,8% (en moles)	82
FIG. 3.17	Profil d'indice mesuré et calculé de la section droite: degré de fusion = 0,92, largeur mesurée = $125,5\mu\text{m}$, largeur calculée = $129,1\mu\text{m}$. Les niveaux de concentration sont à 0,4, 1,07, 1,73 et 2,4% (en moles)	83

FIG. 3.18	Profil d'indice mesuré et calculé de la section droite: degré de fusion = 0,88, largeur mesurée = $140\mu\text{m}$, largeur calculée = $140,6\mu\text{m}$. Les niveaux de concentration sont à 0,4, 1,07, 1,73 et 2,4% (en moles)	84
FIG. 3.19	Profil d'indice mesuré et calculé de la section droite: degré de fusion = 0,75, largeur mesurée = $163,5\mu\text{m}$, largeur calculée = $165\mu\text{m}$. Les niveaux de concentration sont à 0,4, 1,07, 1,73 et 2,4% (en moles)	85
FIG. 3.20	Distribution $\frac{\mu}{\gamma}(z)$ pour le cas étudié à la section 3.3 et pour une température plus basse	87
FIG. 3.21	Distribution $\frac{\mu}{\gamma}(z)$ pour le cas étudié à la section 3.3 et pour une partie centrale uniforme	87
FIG. 3.22	Largeur normalisée et degré de fusion pour le cas étudié à la section 3.3 et pour une température plus basse	88
FIG. 3.23	Largeur normalisée et degré de fusion pour le cas étudié à la section 3.3 et pour une distribution de la température avec une partie centrale uniforme	89
FIG. 3.24	Largeur normalisée et degré de fusion pour le cas étudié à la section 3.3 et pour une vitesse d'étirage doublée	89
FIG. 4.1	Puissance P_1 pour $\eta = 0,75$ et $B_\delta = 5 \cdot 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$	95
FIG. 4.2	Puissance P_1 pour $\eta = 0,75$ et $B_\delta = 2,5 \cdot 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$	95
FIG. 4.3	Puissance P_1 pour $\eta = 0,5$ et $B_\delta = 5 \cdot 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$	96
FIG. 4.4	Discrétisation non uniforme	101
FIG. 4.5	Équation aux valeurs propres	103
FIG. 4.6	Champ du mode fondamental : $d = 6\mu\text{m}$, $n_c = 1,45$, $n_g = 1$ et $\lambda = 1,5\mu\text{m}$	106
FIG. 4.7	Variation de l'erreur de calcul de l'indice effectif du mode HE_{11} , d'une fibre avec les paramètres données en légende de la figure 4.6, en fonction de N_x	107
FIG. 4.8	Variation de l'erreur de calcul de l'indice effectif du mode HE_{11} en fonction de N_x	108
FIG. 4.9	Mode fondamental de la fibre SMF-28 à trois couches pour un ITR = 0,3	109
FIG. 4.10	Section droite d'un coupleur avec $f = 0,3$, ITR = 0,3 . . .	110

FIG. 4.11	Mode symétrique et antisymétrique d'un coupleur : $f = 0,3$, ITR = 0,3	110
FIG. 4.12	État du coupleur après la fusion	111
FIG. 4.13	Distribution initiale du degré de fusion	112
FIG. 4.14	Profil de concentration mesuré dans la fibre avant et après l'application de la recette de fusion $t = 264s$	113
FIG. 4.15	Section droite au centre du coupleur $f = 0,55$	114
FIG. 4.16	Distribution du degré de fusion après l'application de la re- cette de fusion et de l'étirage	115
FIG. 4.17	Distribution $\mu/\gamma(z)$ durant le processus d'étirage	116
FIG. 4.18	Profil de concentration mesuré dans la fibre après l'appli- cation de la recette de l'étirage, $t = 580s$	117
FIG. 4.19	Profil longitudinal calculé pour la moitié du coupleur	118
FIG. 4.20	Section droite au centre du coupleur après l'étirage : $f =$ 0,66, ITR = 0,376	119
FIG. 4.21	Courbes de transmission mesurées et calculées dans les deux fibres de sortie en fonction de la longueur d'onde	120
FIG. 5.1	Comparaison de la transmission calculée par battement des supermodes et celle calculée par la BPM	131
FIG. 5.2	Courbes de transmission mesurées et calculées dans les deux fibres de sortie en fonction de la longueur d'onde	132
FIG. I.1	Schéma d'une transformation conforme	146
FIG. II.1	La contrainte à la frontière	155
FIG. III.1	Réflexion de x en y	176

LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

Structure du coupleur (chapitres 1 à 3)

α	diffusivité thermique
A	fonction d'Airy
$\beta_{1,2}$	paramètres de la transformation conforme
c	concentration du dopant
D	coefficient de diffusion
f	degré de fusion
F	intégrale de Cauchy
γ	coefficient de tension superficielle
Γ	circonférence de section droite
\vec{g}	vecteur d'accélération de pesanteur
η	variable complexe
J	flux de particules
κ	courbure moyenne de la surface
λ	paramètre de fusion
L	largeur de section droite
μ	viscosité
\vec{n}	normale unitaire vers l'extérieur
\hat{n}	normale unitaire plan de la section droite
Ω	transformation conforme
p	pression
Q	énergie d'activation
ρ	densité
\vec{r}	vecteur position
R	constante des gaz parfaits
S	surface de section droite
$\bar{\tau}$	tenseur des contraintes
t	temps
T	température
T_{sz}	composante axiale de la force de tension superficielle
\vec{T}	vecteur contrainte

u, v, w	composantes cartésiennes de la vitesse selon x, y, z
\vec{V}	vecteur vitesse
ζ	variable complexe

Transmission optique (chapitres 4, 5)

α	demi phase accumulée
$\alpha_{x,y}$	demi phase accumulée pour la polarisation x ou y
a_j	amplitudes modales réelles
A	matrice opérationnelle dans le plan transverse
β	constante de propagation
β_0	constante de propagation de référence
β_j	constante de propagation du mode j
B_δ	terme de caractérisation des battement de polarisation
$B_{s,a}$	constantes de propagation des supermodes
c_j	amplitudes modales complexes
Δ	déphasage accumulé entre les deux états de polarisation
ε_r	permittivité relative
\vec{E}	champ électrique
$ g_{1,2}\rangle$	modes des fibres individuelles
$ G_{s,a}\rangle$	supermodes normalisés symétrique et antisymétrique
\vec{H}	champ magnétique
\vec{H}_t	champ magnétique transverse
$\vec{H}_{x,y}$	composantes cartésiennes du champ magnétique transverse
η	paramètre de polarisation
I	matrice identité
k_0	nombre d'onde dans le vide
λ	longueur d'onde
Λ	période en longueur d'onde
μ_0	susceptibilité magnétique du vide
n	indice de réfraction
n_0	indice de réfraction de référence
n_{eff}	indice effectif des modes
N_α	nombre de battements

$ \psi_j\rangle$	champ normalisé des modes
Ψ	champ électrique ou magnétique
P	matrice opérationnelle dans le plan transverse
$P_{1,2}$	puissance dans les fibres de sortie
Q_{zb}	nombre de battements rapides entre deux nœuds de polarisation
z_b	longueur de battement
z_p	longueur de battement de polarisation

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	FONCTIONS HOLOMORPHES ET TRANSFORMATION	143
	CONFORME	143
	I.1 Fonctions holomorphes	143
	I.2 Transformation conforme	145
ANNEXE II	CHAMP DE VITESSE	148
	II.1 Potentiels complexes	148
	II.1.1 Rappel des équations de Stokes	148
	II.1.2 Introduction des potentiels complexes	149
	II.1.3 Unicité du champ de vitesse	157
	II.2 Calcul de la vitesse	158
	II.2.1 Transformation conforme	158
	II.2.2 Description paramétrique de la transformation	163
	II.2.3 Formule pour la vitesse	166
	II.2.4 Valeur des paramètres pour quelques configurations simples	168
	II.2.4.1 Coupleurs 2×2	168
	II.2.4.2 Coupleur 3×3 plat	169
	II.2.4.3 Coupleur 5×5 symétrique	170
ANNEXE III	MÉTHODE D'ARNOLDI AVEC REDÉMARRAGE IMPLICITE	171
	III.1 Quelques méthodes simples	171
	III.1.1 Méthode des puissances	171
	III.1.2 Méthode des puissances inverses déplacée	172
	III.2 Méthode QR	173
	III.2.1 Décomposition QR par les matrices de rotation et de réflexion	173
	III.2.2 Algorithme QR	177
	III.3 Procédure d'Arnoldi	179
	III.4 Méthode d'Arnoldi avec redémarrage implicite	182

INTRODUCTION

Les réseaux à fibres optiques occupent un rôle très important dans l'industrie des télécommunications. Les avantages des fibres optiques, comparés à ceux des autres systèmes, sont nombreux. Les fibres optiques ont une bande passante énorme, avec une capacité d'information de l'ordre du Tbits/s. Les systèmes à fibres optiques ont de faibles pertes, ce qui fait que la distance entre les répéteurs nécessaires à la génération des signaux est de 100 à 500 km à comparer par exemple avec les 7 km pour un câble coaxial de bonne qualité. L'insensibilité aux influences extérieures fait que la fibre est un milieu fiable pour les transmissions. En plus, le coût de fabrication des fibres est minime par rapport aux autres systèmes.

Dans les réseaux à fibres optiques, il faut pouvoir distribuer les signaux lumineux dans les fibres. Cela est réalisé à l'aide de coupleurs à fibres optiques qui permettent de transférer une partie ou la totalité de la lumière des fibres d'entrée aux fibres de sortie. Selon les recettes de fabrication et les conditions d'utilisation, le coupleur permet de réaliser plusieurs fonctions comme division de puissance, séparation de deux longueurs d'onde et séparation de deux modes.

Pour fabriquer les coupleurs, il y a plusieurs méthodes. La méthode la plus utilisée et la plus efficace est celle basée sur la fusion et l'étirage des deux fibres. Les fibres sont d'abord fusionnées latéralement et ensuite, cette structure fusionnée est étirée pour créer un effilage central. Dans la partie effilée du coupleur, les cœurs des fibres deviennent trop petits pour assurer le guidage et le champ s'étend sur toute la section droite du coupleur. Si l'effilage de la structure est graduel, on observe un échange de puissance périodique entre les deux fibres de sortie du coupleur, en fonction de l'allongement et de la longueur d'onde. Cela est expliqué par le phénomène de battement entre les deux premiers modes symétrique et antisymétrique qui ont des constantes de propagation différentes et accumulent un déphasage en se propageant le long du coupleur [1].

Les propriétés optiques du coupleur dépendent de sa structure, c'est-à-dire de son profil d'indice de réfraction. Ce profil est déterminé par la structure des fibres qui constituent le coupleur ainsi que par la procédure de fabrication. Il est alors souhaitable d'avoir un modèle qui peut associer à une recette de fabrication le

comportement optique du coupleur. Ce modèle constituerait un outil important pour la conception et le design des coupleurs.

Il est clair qu'un tel modèle doit comporter deux parties. Premièrement, à partir de différents paramètres expérimentaux de la recette de fabrication et de la structure des fibres optiques, on doit construire un modèle qui décrit l'évolution de la structure du coupleur durant la fabrication, pour obtenir un profil d'indice de réfraction. Deuxièmement, la transmission optique du coupleur doit être calculée à partir de ce profil d'indice.

Pour la modélisation de la structure du coupleur, on trouve dans la littérature plusieurs modèles empiriques. Presque tous ces modèles utilisent des modèles séparés pour la section droite et le profil longitudinal, en négligeant la fusion des fibres durant l'étirage du coupleur. Ainsi, pour la section droite du coupleur, Bures et al. [1] considèrent le modèle de deux fibres tangentes et sans cœur, Payne [2] considère un modèle rectangulaire qui tient compte du degré de fusion, Zheng [3] remplace le rectangle par des cercles et Wright [4] ajoute à ce modèle les coeurs. Dans ces modèles on ne tient pas compte de la conservation de la matière. Un modèle beaucoup plus réaliste est celui de Gonthier [5,6], qui permet de passer continûment de deux fibres tangentes à un degré de fusion quelconque en conservant la surface transversale. La position des coeurs, qui sont assimilés à des cercles, est aussi déterminée d'une façon empirique mais correspond cependant bien avec la vraie position.

Pour modéliser le profil longitudinal des coupleurs Bures [1] et Burns [7] proposent un profil parabolique alors qu'Eisenmann [8] et Tekippe [9] ont choisi un profil exponentiel. Une amélioration importante du modèle exponentiel a été fait par Birks [10] qui relie la distribution de l'effilage avec la largeur de la flamme. Gonthier [5] propose un modèle où l'allongement local est proportionnel à la valeur de la température et inversement proportionnel à la surface de la section droite. Farget [11] est le seul à proposer un modèle où la section droite évolue durant l'étirage en fonction de la distribution de la température. Les profils longitudinal et transversal sont obtenus à l'aide du modèle de Gonthier.

Les modèles de profil d'indice, décrits dans la littérature, sont donc tous des modèles qui ne tiennent pas compte de la physique du problème qui est l'écoulement du verre durant la fabrication du coupleur et la diffusion des dopants. En effet, l'in-

dice de réfraction dépend directement de la concentration du dopant et la diffusion peut jouer alors un rôle important dans le profil d'indice.

Ainsi le premier et le plus important objectif de cette thèse est de construire un modèle réaliste pour l'évolution de la structure du coupleur, en résolvant les équations de la mécanique des fluides et celles de la diffusion, pour obtenir un profil d'indice de réfraction plus réaliste. En plus, on développe dans cette thèse des méthodes pour la caractérisation des différents paramètres des recettes expérimentales, ce qui n'a pas été fait dans les modèles antérieurs.

Après le profil d'indice, pour compléter le modèle, il faut calculer la transmission optique du coupleur qui est ainsi le deuxième objectif de cette thèse. Cette transmission peut être calculée de deux façons différentes. La méthode la plus courante est celle de battement des supermodes qui sont les modes de la structure fusionnée. L'autre méthode est la méthode de propagation des faisceaux (BPM). Les deux méthodes décrivent bien le comportement optique du coupleur mais, avec la BPM, il est beaucoup plus facile de calculer les pertes du coupleur puisque c'est une méthode qui tient compte automatiquement du champ de radiation. Dans cette thèse, nous utilisons les deux approches.

La modélisation de la transmission optique du coupleur par la méthode de battement des supermodes nécessite le calcul numérique des modes guidés. Dépendant de l'équation d'onde considérée, on distingue entre les modes scalaires, semivectoriels ou vectoriels. Pour la transmission du coupleur, les modes scalaires sont en général calculés [5, 6, 12], à cause de leur simplicité. Pour inclure dans cette transmission les effets de polarisation causés par la biréfringence de la section droite, les corrections de polarisation [13] sont calculées. Nous calculons dans cette thèse les modes vectoriels qui incluent automatiquement les effets de polarisation. Cet argument est aussi valable pour la méthode de propagation des faisceaux. Nous considérons donc une BPM vectorielle.

La thèse est divisée en deux parties. La première partie, constituée des chapitres 1 à 3, est consacrée à la modélisation de la structure des coupleurs. La deuxième partie, comprenant les chapitres 4 et 5, porte sur la modélisation de la transmission optique. Les chapitres sont divisés comme suit :

Le chapitre 1 commence avec une présentation de la méthode de fabrication des coupleurs et continue avec l'explication des mécanismes qui affectent le profil de la concentration du dopant : l'écoulement de verre et la diffusion du dopant. Les équations principales sont dérivées dans ce chapitre.

Le chapitre 2 porte sur la modélisation de l'évolution de la section droite du coupleur durant la fusion des fibres. Ce modèle est construit en résolvant l'équation de convection-diffusion. Les équations d'écoulement sont résolues avec des méthodes semi-analytiques dont les détails sont donnés dans les annexes I et II.

Le chapitre 3 est consacré à la modélisation de l'étirage du coupleur en résolvant l'équation de convection-diffusion en 3D. Le couplage entre l'étirage et la fusion est considéré en détail.

Le chapitre 4 porte sur la modélisation de la transmission optique par la méthode de battement des supermodes. Le calcul des modes vectoriels est effectué par une méthode en différences finies. L'explication de la méthode d'Arnoldi, utilisée pour le calcul des valeurs propres, est donnée dans l'annexe III.

Le chapitre 5 discute la méthode de propagation des faisceaux (BPM). La méthode numérique utilisée est de nouveau la méthode des différences finies. Les transmissions calculées par les deux méthodes (supermodes et BPM) sont comparées avec des mesures.

CHAPITRE 1

FABRICATION DES COUPLEURS, ÉCOULEMENT DE VERRE ET DIFFUSION DES DOPANTS

Les coupleurs fusionnés sont fabriqués en fusionnant par le côté deux fibres optiques adjacentes et en étirant la structure de façon à créer un effilage local. Pour modéliser la structure du coupleur, nous considérons que l'indice de réfraction est proportionnel à la concentration des dopants. Donc, il est important de considérer l'évolution de la concentration des dopants durant la fusion et l'étirage du coupleur. L'évolution du profil de la concentration dépend du déplacement de la matière et de la diffusion des dopants. Ce sont ces deux mécanismes que nous traitons dans ce chapitre.

1.1 Fabrication des coupleurs

1.1.1 Fibres optiques

Une fibre optique est constituée d'un cœur de silice dopée généralement avec de l'oxyde de germanium ($\text{SiO}_2 + \text{GeO}_2$) et entourée d'une gaine optique constituée de silice pure. Le dopant confère au cœur un indice de réfraction légèrement supérieur à l'indice de la gaine optique. Une enveloppe de plastique protège la fibre des agressions mécaniques.

La réalisation des premiers coupleurs a mis en évidence l'importance du profil d'indice de la gaine optique de la fibre utilisée. En fait, seuls les coupleurs réalisés avec des fibres unimodales à gaine uniforme sont considérés ici pour leurs propriétés optiques. Les coupleurs à fibres à gaine semi-enterrée ont des problèmes importants de pertes. Ces effets sont dus à la non-adiabacité de la transition entre les fibres initiales et la structure fusionnée et étirée. La transition du guide est considérée comme étant adiabatique quand la puissance guidée reste dans le mode où elle était initialement et n'est pas perdue par couplage avec des modes d'ordre supérieur.

Les critères d'adiabacité sont beaucoup plus sévères pour les fibres à gaine semi-enterrée ce qui rend presque impossible leur utilisation pour réaliser des coupleurs adiabatiques.

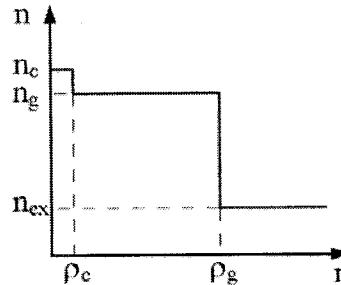


FIG. 1.1 Schéma de profil d'indice de réfraction d'une fibre à saut d'indice

Donc les fibres unimodales à saut d'indice et à gaine optique uniforme sont utilisées pour fabriquer les coupleurs fusionnés. Nous représenterons par n_c l'indice de réfraction du cœur, n_g l'indice de la gaine et n_{ex} l'indice du milieu extérieur. Le rayon du cœur est ρ_c et celui de la gaine ρ_g . Un schéma du profil d'indice de réfraction pour la fibre à saut d'indice est donné à la figure 1.1. La fibre utilisée dans nos expériences est du type SMF-28 fabriquée par Corning Glass Inc. Ses paramètres typiques utilisés dans nos calculs sont donnés dans le Tableau 1.1.

Paramètres	Valeurs
ρ_c	$4,5\mu\text{m}$
ρ_g	$62,5\mu\text{m}$
$\Delta n = n_c - n_g$	0,0045

TAB. 1.1 Paramètres de la fibre SMF-28

La gaine optique de la fibre SMF-28 est constituée de silice et le dopant dans le cœur est le germanium. La valeur de l'indice de réfraction de la silice dépend de la longueur d'onde, mais le saut d'indice entre le cœur et la gaine étant très petit, celui-ci est considéré indépendant de la longueur d'onde.

1.1.2 Méthode de fabrication

Pour créer le couplage dans les coupleurs fusionnés, il faut réduire la dimension des coeurs en effilant la structure fusionnée de façon à ce que les modes guidés

deviennent modes de gaine. Le processus de fabrication comprend deux processus, la fusion et l'étirage.

D'abord il faut enlever la gaine protectrice de plastique et nettoyer les fibres. La gaine protectrice est enlevée à l'aide d'une pince à dénuder spéciale et le nettoyage est fait avec de l'accétone. Après la préparation des fibres, vient leur alignement, qui est réalisé simplement en tenant les fibres parallèlement l'une à l'autre. On utilise les pinces d'alignement pour amener les fibres en contact, dans un plan horizontal. Il faut s'assurer que la tension sur les deux fibres est la même et vérifier sous microscope que les fibres sont bien positionnées sur toute la distance entre les deux pinces d'alignement.

Les fibres doivent ensuite être chauffées de façon à les fusionner et les étirer. Ceci est réalisé à l'aide d'une flamme de micro-torche qui utilise un mélange de propane et d'oxygène fourni par l'intermédiaire de débitmètres électroniques.

La fusion d'un coupleur est réalisée avec une petite flamme que l'on doit rapprocher des fibres jusqu'à ce qu'elles soient incandescentes. Pour éviter de trop fortes déformations, cette petite flamme est balayée. La coalescence des fibres commence quand le verre devient mou. Le degré de fusion est mesuré à l'aide de l'image de la région fusionnée sur l'écran relié au microscope, qui permet de mesurer la largeur actuelle par rapport à la largeur initiale des deux fibres.

Une fois la fusion accomplie, on procède à l'étirage. Il faut alors utiliser une flamme plus large et à une distance des fibres plus grande. Les bouts du coupleur sont étirés à l'aide des moteurs à une vitesse constante. La flamme est balayée sur une zone plus petite que pour la fusion. Le processus de l'étirage est terminé lorsqu'on obtient la transmission voulue mesurée en temps réel à un analyseur de spectre. Tout le processus de fabrication des coupleurs est contrôlé par l'ordinateur à l'aide d'un programme Labview. Une intervention de l'opérateur est possible à toutes les étapes du processus.

1.2 Écoulement de verre

L'état liquide du coupleur lors de sa formation fait intervenir les lois de la mécanique des fluides. Les équations de cette section nous vont permettre de calculer plus loin le champ de vitesse durant la fusion et l'étirage du coupleur.

1.2.1 Équations de Stokes

Considérons un petit domaine fluide. Les forces extérieures appliquées à ce domaine se distinguent en forces de volume et forces de surface. Les forces de volume s'exercent à distance en tout point du volume comme par exemple les forces de gravité.

Les forces de surface sont transmises par contact du fluide extérieur au domaine en tout point de la surface limitant ce domaine. En un point donné, il est clair que cette force dépend à un instant donné de l'orientation de l'élément de surface autour du point considéré. Nous représenterons ainsi par $d\vec{F}_S(\vec{n})$ la valeur élémentaire de cette force s'exerçant sur une facette de normale unitaire \vec{n} et d'aire dS . En divisant cette force par la surface sur laquelle elle s'exerce, on définit le vecteur de contrainte local

$$\vec{T}(\vec{n}) = \frac{d\vec{F}_S(\vec{n})}{dS}. \quad (1.1)$$

Le vecteur de contrainte et la normale unitaire sont reliées par

$$\vec{T} = \bar{\tau} \vec{n} \quad (1.2)$$

où $\bar{\tau}$ est le tenseur des contraintes.

Le verre fondu est considéré comme un fluide incompressible. La conservation de la masse est exprimée par l'équation de continuité, qui pour un fluide incompressible est donnée par

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (1.3)$$

où \vec{V} est la vitesse. De plus le verre fondu est considéré comme un fluide newtonien [14]. Pour les fluides composés de molécules simples, comme c'est le cas du verre, cette supposition est presque toujours vraie. Un fluide est considéré comme

newtonien si les composantes du tenseur des contraintes vérifient les relations suivantes (fluide incompressible)

$$\tau_{ji} = -p\delta_{ji} + \mu \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.4)$$

où p est la pression, δ_{ji} le symbole de Krönecker, μ la viscosité et x_i sont les coordonnées cartésiennes. Cette relation sert aussi comme définition de la viscosité. La viscosité est le coefficient de proportionnalité entre le tenseur des contraintes et celui des vitesses de déformation, dont les composantes sont données par le terme entre les parenthèses. L'unité de la viscosité est $\text{Pa}\cdot\text{s} = \text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}$ et appelée poiseuille.

Le bilan de quantité de mouvement aboutit à l'équation de Navier-Stokes [15], avec ces composantes cartésiennes

$$\rho \frac{dV_i}{dt} = \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \quad (1.5)$$

où g_i sont les composantes cartésiennes du vecteur d'accélération de pesanteur \vec{g} et le dernier terme est une sommation selon l'indice répété (nous utilisons la convention d'Einstein dans ce chapitre). Cette forme de l'équation de Navier-Stokes est valable pour un fluide incompressible.

Une démarche très répandue en mécanique des fluides vise à simplifier les modèles en ne retenant dans les équations que les termes prépondérants. La procédure s'appuie sur une écriture adimensionnelle dégageant des groupements sans dimensions ou nombres caractéristiques du poids relatif de différents termes pris deux à deux. Les grandeurs sans dimensions sont définies en référence à des échelles caractéristiques. Cette démarche est utilisée aussi au troisième chapitre pour la mise en place du modèle d'étirage des coupleurs.

Si on note L , V et P , les échelles pour la longueur, la vitesse et la pression, on obtient ces grandeurs adimensionnelles

$$x_i = \frac{x_i^*}{L} \quad V_i = \frac{V_i^*}{V} \quad p = \frac{p^*}{P} \quad (1.6)$$

où l'astérisque note les variables réelles. Il n'a pas été introduit d'échelle spécifique pour le temps. La grandeur adimensionnelle correspondante est bâtie sur les échelles

de vitesse et de longueur conformément à $t = t^* \frac{V}{L}$. En introduisant ces grandeurs sans dimension, l'équation de Navier-Stokes (1.5) s'écrit

$$\rho \frac{V^2}{L} \frac{\partial V_i}{\partial t} = \rho g_i - \frac{P}{L} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{V}{L^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) \right]. \quad (1.7)$$

Après division membre à membre par $\frac{\mu V}{L^2}$ et en faisant apparaître la norme g du vecteur d'accélération de pesanteur, on obtient

$$\frac{\rho V L}{\mu} \frac{\partial V_i}{\partial t} = \frac{\rho L^2 g}{\mu V} \left(\frac{g_i}{g} \right) - \frac{P L}{\mu V} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) \right]. \quad (1.8)$$

Les termes sans dimension $Re = \frac{\rho V L}{\mu}$ et $St = \frac{\rho L^2 g}{\mu V}$ sont respectivement les nombres de Reynolds et Stokes. Le nombre de Reynolds représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces de viscosité. Le nombre de Stokes représente le rapport entre les forces de pesanteur et les forces de viscosité. Selon les calculs effectués par Howell [16], pour la fabrication d'un coupleur à fibres SMF-28 fusionnées les valeurs typiques des nombres de Reynolds et de Stokes sont respectivement : $Re \approx 10^{-7}$ et $St \approx 10^{-2}$.

Donc, on peut négliger les termes d'inertie et de gravité dans l'équation de Navier-Stokes (1.5) qui se réduit à l'équation de Stokes [17]

$$\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} = 0 \quad (1.9)$$

qui s'écrit souvent sous la forme équivalente

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \mu \nabla^2 V_i \quad (1.10)$$

si la viscosité μ est uniforme et le fluide est incompressible $\frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0$. Il faut noter qu'ici on est revenu aux variables réelles. L'équation (1.10) s'applique aux écoulements très visqueux connus sous le nom des écoulements rampants.

1.2.2 Conditions aux limites

Nous avons vu que l'étirage du coupleur se fait à vitesse constante. Alors, la condition à la limite dans la direction axiale est cette vitesse constante des sections droites aux extrémités du coupleur. Les autres conditions aux limites sont liées à l'interface gaine-air qui est une surface libre. La force qui guide la coalescence des fibres est la force de tension superficielle. Elle cause une diminution de la surface totale, et le profil de la section droite du coupleur tend vers un cercle. La réduction de l'énergie de surface, causée par la réduction de surface, est relâchée comme chaleur par la dissipation d'écoulement visqueux.

1.2.2.1 Coefficient de tension superficielle

Un liquide, au contraire d'un gaz, ne tend pas à occuper tout l'espace qui lui est offert. Ses molécules sont retenues au voisinage les unes des autres par des forces de cohésion, qui sont des forces d'attraction s'exerçant entre elles. Si nous considérons une molécule prise dans la masse du liquide, elle est soumise, de la part des molécules qui l'entourent, à des forces d'attraction ayant toutes les directions possibles et s'équilibrant statistiquement. Au contraire, une molécule située à la surface est soumise à des forces d'attraction dont la résultante n'est pas nulle, mais dirigée vers l'intérieur du liquide. Si l'on veut accroître la surface du liquide en exerçant sur elle une traction parallèle à son plan, il faut faire un travail correspondant à cet accroissement d'énergie.

Considérons une masse liquide M limitée par une surface libre S , et imaginons que nous la séparions en deux parties M_1 et M_2 par une surface Σ qui coupe S suivant une courbe C (figure 1.2). La masse M_2 est en équilibre sous l'action des forces appliquées et des réactions de la masse M_1 , ces dernières se composant des forces de pression qui s'exercent sur la surface Σ , et des forces F de tension superficielle qui s'exercent sur les divers éléments de la courbe C . Nous admettrons que la force $d\vec{F}$ qui agit sur un élément ds de la courbe C est normale à ds dans le plan de la surface du liquide, dirigée vers l'extérieur de M_2 , et qu'elle est proportionnelle à ds

$$dF = \gamma ds. \quad (1.11)$$

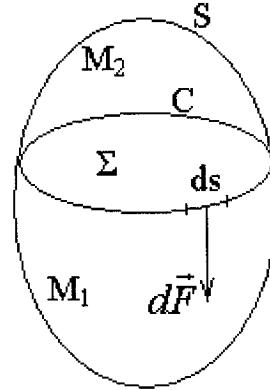


FIG. 1.2 Force de tension superficielle

La constante γ , que nous admettons ne dépendre que de la nature du liquide et du gaz avec lequel il est en contact, ainsi que de la température, s'appelle le coefficient de tension superficielle et son unité est N/m.

1.2.2.2 Condition à la frontière pour le vecteur contrainte

La dérivation détaillée de la condition à la frontière pour le vecteur contrainte implique la géométrie différentielle des surfaces. Nous donnons ici seulement l'argument physique de cette dérivation.

Considérons d'abord le cas hydrostatique, où on peut parler plutôt de pression que de contrainte. Il y a un saut de pression à travers la surface liquide à chaque point où la surface est courbée. La valeur de ce saut de pression se calcule en utilisant le travail virtuel. Si à un élément de surface, on donne un déplacement virtuel vers l'extérieur du liquide, la surface augmente. L'énergie nécessaire dans ce cas provient des forces de pression non équilibrées agissant durant le déplacement virtuel. En prenant la limite lorsque l'élément de surface tend vers un point, on obtient [18]

$$p_{fluid} - p_{ambient} = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.12)$$

où R_1 et R_2 sont les rayons principaux de la courbure de surface. C'est la formule de Laplace. La pression de liquide est plus élevée que celle du milieu ambiant si la surface est concave vers l'intérieur du liquide. Le terme entre les parenthèses

s'appelle la courbure moyenne de la surface et nous le noterons κ .

Le cas hydrodynamique se base sur le même principe. Dans ce cas il faut tenir compte des changements d'énergie d'un élément de volume limité d'un coté par l'élément de surface qui correspond au cas hydrostatique. Toutefois, en prenant la limite lorsque l'élément de volume tend vers un point, les effets de volume tendent vers zéro comme le cube d'une dimension linéaire. Ils sont en conséquence négligeables par rapport aux effets de surface qui tendent vers zéro comme le carré de la dimension linéaire. De cette façon on obtient [19]

$$\vec{T}_n = -\gamma\kappa\vec{n} \quad (1.13)$$

où \vec{T}_n est la contrainte normale à la surface libre et \vec{n} est orienté vers l'extérieur. Il faut noter qu'à partir d'ici nous considérons comme pression la différence entre la vraie pression et celle du milieu ambiant. La pression du milieu ambiant est une constante qui ne joue aucun rôle dans la dynamique de l'écoulement du coupleur.

1.3 Diffusion des dopants

Pour obtenir un guidage de la lumière, il est en général nécessaire de réaliser un profil d'indice de réfraction. Ceci peut être réalisé en introduisant un certain pourcentage d'éléments chimiques, nommés dopants, compatibles avec le réseau du verre de silice et modifiant de ce fait le profil d'indice de réfraction du matériau ainsi que d'autres propriétés physico-chimiques (viscosité, coefficient d'expansion thermique).

Parmi les dopants les plus utilisés, on note le germanium (Ge), le fluor (F) et le bore (B). L'addition du fluor et du bore diminue l'indice de réfraction et la dispersion de la silice alors que le germanium augmente l'indice de réfraction et déplace le zéro de dispersion matériel ($d^2n(\lambda)/d\lambda^2 = 0$) vers les plus grandes longueurs d'onde. L'intérêt d'utiliser les fibres co-dopées germanium/fluor est en outre d'exploiter la photosensibilité du germanium ou de réaliser des profils d'indice spécifiques (gaine photosensible, intermédiaire et semi-enterrée ou profil triangulaire).

1.3.1 Mécanismes de diffusion

La plupart des mécanismes de diffusion exigent la présence de défauts ponctuels [20]. La plus simple analyse des mécanismes de diffusion donne deux processus possibles expliquant la migration d'un atome au sein du réseau de silice. L'espèce atomique qui diffuse peut :

1) soit se déplacer dans les lacunes du réseau \implies **diffusion lacunaire**

Si un site n'est pas occupé, un atome proche voisin peut sauter sur ce site, faisant apparaître une lacune au site qu'il vient de quitter. Il y a conservation du nombre de lacunes : on parle de migration de la lacune et/ou de l'atome.

2) soit se déplacer dans les sites libres de l'autre espèce \implies **diffusion intersticielle**

Un atome interstitiel sautant de site interstitiel en site interstitiel est un défaut ponctuel dont les sauts successifs ne sont pas corrélés.

Dans chaque cas, les atomes doivent posséder une énergie suffisante pour franchir une barrière de potentiel. La distribution des énergies des atomes est une fonction de la température. Ainsi, plus la température est élevée, plus la probabilité de saut est grande. La diffusion est donc un phénomène activé thermiquement.

1.3.2 Équation de convection-diffusion

Plaçons-nous dans un système unidirectionnel et considérons le flux de particules d'une certaine espèce. Les particules peuvent être des molécules ou des atomes. Soit $c(x, t)$ leur concentration, exprimée en nombre de particules ou de moles par unité de volume.

En présence d'un gradient de concentration $\partial c / \partial x$, on admet qu'il s'établit un flux de particules dans le sens descendant du gradient, et que ce flux est proportionnel au gradient correspondant

$$J = -D \frac{\partial c}{\partial x} \quad (1.14)$$

D est appelé coefficient de diffusion, ou diffusivité.

Le flux est exprimé en nombre de particules ou de moles traversant l'unité d'aire par unité de temps. Il s'ensuit que l'unité de D est m^2/s . Cette loi, dite de Fick [21], est formellement identique à la loi de Fourier pour l'écoulement de la chaleur.

La loi de Fick se généralise sans peine à trois dimensions

$$\vec{J} = -D\vec{\nabla}c. \quad (1.15)$$

En fait l'écoulement de particules dans une direction donnée peut avoir deux origines : l'une est bien le gradient de concentration, mais l'autre est l'action d'une force extérieure, ou force de transport, sous l'effet de laquelle les particules se déplacent avec une certaine vitesse \vec{V} , donnant ainsi naissance à un flux $c\vec{V}$. D'où l'expression générale

$$\vec{J} = -D\vec{\nabla}c + c\vec{V}. \quad (1.16)$$

L'équation (1.16) n'est utilisable qu'en régime permanent, c'est-à-dire lorsque le flux ne dépend pas du temps. En régime non permanent, c'est-à-dire lorsque le flux en chaque point varie avec le temps, il faut compléter l'équation de Fick par une équation de bilan. Si nous nous plaçons de nouveau dans un système unidirectionnel, pour des espèces conservatives, nous obtenons l'équation de continuité

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -\frac{\partial c}{\partial t} \quad (1.17)$$

qui se démontre très simplement. Considérons un cylindre parallèle à la direction de diffusion et de section droite unité. Soit un petit volume limité par deux plans d'abscisses x , $x + dx$, à travers lesquels les flux de particules dirigés de gauche à droite valent respectivement $J(x)$ et $J(x + dx)$. La quantité de matière accumulée pendant le temps dt dans le cylindre limité par ces plans vaut

$$[J(x) - J(x + dx)] dt = -\frac{\partial J}{\partial x} dx dt \quad (1.18)$$

par application de la formule des accroissement finis. Cette quantité est égale à la variation du nombre de particules dans le volume $1 \cdot dx$, soit $[c(t + dt) - c(t)] dx = \frac{\partial c}{\partial t} dt dx$. En égalant les deux expressions nous obtenons (1.17).

La généralisation à trois dimensions de (1.17) et l'équation (1.16) donne

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (D \vec{\nabla} c) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} c). \quad (1.19)$$

Le coefficient de diffusion D est considéré indépendant de la concentration. De plus, le verre fondu est un liquide incompressible ($\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$) et l'équation ci-dessus devient

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \nabla^2 c - \vec{V} \cdot \vec{\nabla} c. \quad (1.20)$$

C'est l'équation de convection-diffusion.

CHAPITRE 2

FUSION DES COUPLEURS

La fusion des coupleurs est la première étape de la fabrication des coupleurs. Dans ce chapitre, nous allons construire un modèle de fusion en résolvant l'équation de convection-diffusion (1.20) établie au chapitre précédent. Les résultats de ce chapitre seront aussi très utiles pour le modèle d'étirage au chapitre suivant.

Les modèles de fusion décrits dans la littérature sont tous des modèles empiriques. Le modèle de deux fibres tangentées et sans cœur [1] est simple, mais n'est exact que dans le cas d'une fusion très faible. Le modèle rectangulaire [2] tient compte du degré de fusion, décrit par le rapport des deux côtés du rectangle, mais reste très grossier pour une structure formée à partir de fibres circulaires. Une amélioration de ce modèle est faite par Zheng [3] où le rectangle est remplacé par des cercles. Le modèle de Wright [4] va un pas plus loin en incluant les cœurs. Dans ces deux modèles, on ne tient pas compte de la conservation de la matière.

Le modèle le plus réaliste jusqu'à présent était celui de Gonthier [5, 6], qui est un modèle géométrique simple. Il permet de passer continûment de deux fibres tangentées à une fusion complète caractérisée par une section circulaire, tout en conservant la surface transversale. Le modèle inclut aussi les cœurs des fibres qui sont assimilés à des cercles. De plus, le modèle de fusion est appliqué aux cas des coupleurs à plus de deux fibres.

Le modèle que nous proposons ici est basé sur l'hypothèse que l'indice de réfraction est une fonction linéaire de la concentration de dopants. Donc, nous allons construire un modèle qui tient compte de l'évolution du champ de concentration des dopants durant la fusion. De plus, la forme de l'interface gaine-air de la section droite du coupleur est calculée en résolvant les équations de Stokes qui gèrent l'écoulement de la matière.

Avant de considérer la résolution de l'équation de convection-diffusion (1.20) nous devons résoudre les équations de Stokes pour calculer le champ de vitesse \vec{V}

et l'évolution de l'interface extérieure durant la coalescence des fibres.

2.1 Coalescence des fibres

La coalescence des fibres est due à la force de tension superficielle. L'écoulement est géré par les équations de Stokes (1.10) et (1.3) avec la condition aux limites (1.13) à la surface libre. Le problème de Stokes avec une frontière libre et tension superficielle est, en général, un problème difficile.

La première analyse quantitative de ce problème est faite par Frenkel [22] qui a étudié la coalescence de deux sphères. Le principe de sa méthode est basé sur le bilan d'énergie. La réduction de l'énergie de la surface libre est égale à l'énergie totale produite par la dissipation visqueuse. Mais Frenkel a dû faire des approximations incorrectes qui ne lui ont pas permis d'obtenir des résultats exacts.

La première simulation numérique de la coalescence visqueuse est faite par Cosgrove [23] qui a étudié la coalescence d'un nombre infini de cylindres alignés. Il a employé une technique partiellement analytique et partiellement numérique basée sur les séries de Fourier. Mais pour résoudre les équations il a considéré que la frontière est localement plane, ce qui a pour effet d'exclure les premiers instants de la coalescence dans son modèle. Ross [24] a considéré le même problème et il l'a résolu en utilisant la méthode des éléments finis. Jagota [25] a utilisé aussi une méthode d'éléments finis pour étudier la coalescence de deux sphères et d'un nombre infini de sphères alignées. Il a obtenu des résultats qui décrivent bien l'expérience.

Kuiken [26] a utilisé avec succès la méthode des éléments de frontière (boundary element method) pour un écoulement plan avec une frontière de courbure modérée. Cette technique est perfectionnée plus tard par Van de Vorst [27] qui a réussi à obtenir, entre autres, l'évolution de l'interface extérieure pour la fusion de deux cylindres.

Le progrès le plus fascinant dans ce domaine est fait par Hopper qui a été le premier à obtenir une solution analytique exacte pour le problème de la coalescence de deux cylindres égaux [28] et celui de la fusion d'un cylindre avec un demi-espace [29]. Dans sa méthode, le problème d'écoulement de Stokes, guidé par la

force de tension superficielle, est abordé en utilisant la théorie des fonctions d'une variable complexe (fonctions holomorphes, transformation conforme, intégrales de Cauchy, prolongement analytique, etc.).

La méthode de Hopper est améliorée et élargie par Richardson qui a réussi à résoudre le problème de la coalescence de deux cylindres différents [30]. Dans un article plus récent [31], il a simplifié considérablement la méthode en dérivant des équations plus simples, qui lui ont permis d'obtenir en principe la solution pour un ensemble quelconque de cylindres entourés d'un contour simple. Récemment dans un nouvel article [32], il a ajouté à son modèle les configurations des cylindres entourés d'un double contour. Cependant, la forme de la transformation conforme utilisée dans ce cas est beaucoup plus complexe.

À ce point, il faut dire que toutes ces solutions analytiques sont limitées au calcul de l'évolution de l'interface extérieure. Nous allons les employer pour calculer le champ de vitesse interne.

2.1.1 Hypothèses de départ

La fusion du coupleur est considérée comme la coalescence de deux cylindres infiniment longs, ce qui est vrai pour les coupleurs où les dimensions transversales des fibres sont très petites par rapport à la longueur de la zone fusionnée. Donc, nous allons considérer un écoulement plan, c'est à dire que toutes les quantités sont indépendantes de la coordonnée axiale et le vecteur de vitesse est perpendiculaire à cet axe. L'équation de Stokes (1.10) est bidimensionnelle dans ce cas et les opérateurs gradient et laplacien sont des opérateurs transversaux.

Une autre hypothèse est que la viscosité dans le plan de la section droite est considérée constante. En réalité, la viscosité dépend de la température ainsi que de la nature du liquide, c'est-à-dire de sa composition. Les dimensions transversales des fibres optiques sont assez réduites et la conduction thermique maintient une température constante dans la section droite.

Pour supporter cette hypothèse, nous allons effectuer quelques calculs simples. Selon la référence [33], la viscosité de silice en fonction de la température est donnée

par cette relation

$$\mu(\text{Pa s}) = 10^{-2,49+15004/(T(\text{°C})-253)}/10. \quad (2.1)$$

On remarque dans cette relation que la viscosité est très sensible au changement de la température. Dans l'intervalle 1200-1400°C la viscosité double presque sa valeur pour une baisse de seulement 20°C de la température.

Calculons maintenant la conduction thermique. Elle est gérée par l'équation [34]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \quad (2.2)$$

où α est la diffusivité thermique, qui pour la silice prend une valeur [33] de $\alpha = 8,4 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$.

Considérons une fibre optique ayant 125 μm de diamètre initialement à une température 300K dont l'interface extérieure est mise instantanément à une température 1700K et maintenue à cette valeur. Avec ces conditions initiale et de frontière nous devons résoudre l'équation (2.2) qui pour une géométrie à symétrie cylindrique prend la forme

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (2.3)$$

Nous avons résolu numériquement cette équation, à l'aide d'une discrétisation en différences finies, et nous avons obtenu les résultats suivants. Il faut seulement 1ms pour que la température du centre de la fibre devienne 1699K, 1,9ms pour qu'elle devienne 1699,999K et après 3ms on obtient une température uniforme dans la fibre. Les 3ms sont négligeables par rapport au temps de fusion des fibres, ce qui prouve la validité de notre hypothèse.

La viscosité de la silice dopée avec du germanium est plus basse que celle de la silice pure à une température donnée [35]. Mais, comme les coupleurs que nous étudions sont composés de fibres optiques unimodales, le cœur étant beaucoup plus petit que la gaine, nous avons considéré une viscosité moyenne uniforme.

Nous avons aussi considéré un coefficient de tension superficielle constant. En réalité, il a une faible dépendance avec la température qui, elle-même, est considérée constante dans la section droite.

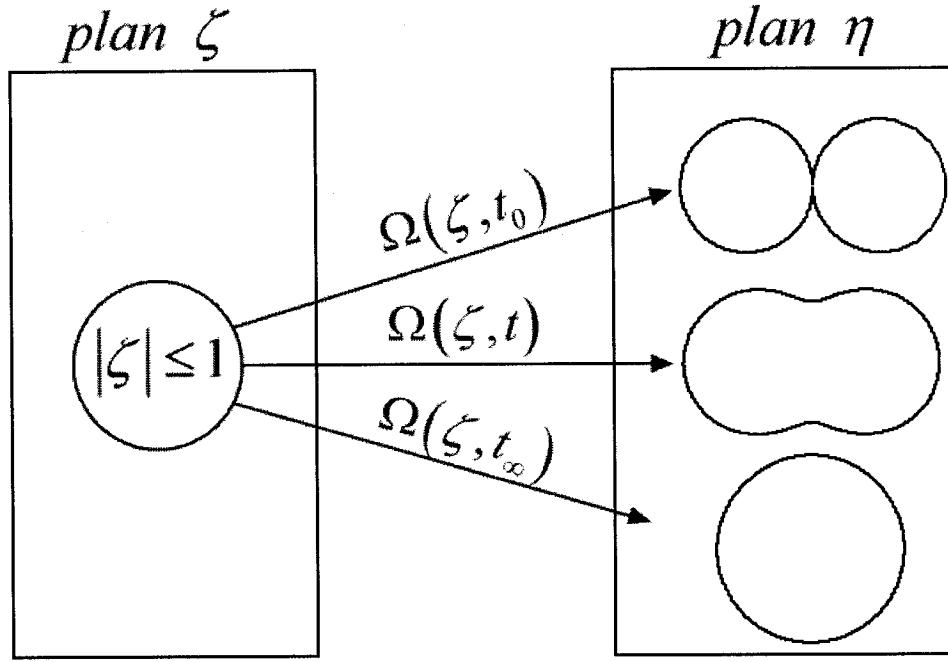


FIG. 2.1 Le schéma de la transformation conforme

2.1.2 Méthode Hopper-Richardson

Considérons un repère de coordonnées cartésiennes x et y dans un plan. À chaque point $A(x, y)$ de ce plan on pourrait mettre en correspondance un nombre complexe $\eta(x, y)$ avec x et y la partie réelle et imaginaire respectivement. Alors, tout domaine dans ce plan pourrait être considéré comme un ensemble de nombres complexes.

L'évolution de la section droite du coupleur, durant la fusion, est considérée dans un plan complexe η comme l'évolution de l'image d'une transformation conforme d'un domaine de référence fixe dans un autre plan complexe ζ . Le domaine de référence fixe est un disque de rayon unitaire. Cette transformation conforme, qui évolue dans le temps, est notée $\eta = \Omega(\zeta, t)$. Le schéma de cette transformation est donné à la figure 2.1. Donc, le profil transversal du coupleur est l'image dans le plan complexe η du disque unitaire $|\zeta| \leq 1$, dans le plan ζ , obtenu par la transformation Ω . La définition d'une transformation conforme est donnée à l'annexe I.

Notre objectif est de résoudre les équations de Stokes (1.10) et (1.3) avec la

condition à la limite (1.13). Alors, pour utiliser cette transformation conforme, nous devons d'abord représenter nos variables \vec{V} , p et \vec{T} comme des fonctions de la variable complexe η . Cela est réalisé par l'intermédiaire de deux fonctions holomorphes appelées potentiels complexes. Après les variables, ce sont les équations de Stokes et la condition à la frontière qui sont exprimées en fonction de ces potentiels complexes. À l'aide de la transformation $\Omega(\zeta, t)$, toutes les équations sont exprimées en fonction de ζ . Ensuite, en utilisant la condition à la limite (1.13), nous avons d'abord résolu le problème de l'évolution de l'interface extérieure. Puis, en prenant le prolongement analytique de différentes fonctions holomorphes, la solution dans tout le domaine est obtenue.

Les détails de la méthode décrite ci-dessus sont donnés à l'annexe II. Nous donnons ici seulement les résultats obtenus par cette méthode.

Pour un coupleur fabriqué en fusionnant deux fibres, la transformation conforme a la forme (II.96)

$$\eta = \Omega(\zeta) = \beta_1 \zeta + \frac{\beta_2 \zeta}{1 - \lambda \zeta} \quad (2.4)$$

avec des paramètres réels $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ et $0 \leq \lambda < 1$. Les paramètres β_1 et β_2 dépendent de λ et sont calculés à l'aide des relations (II.97)

$$\begin{aligned} \beta_1 (\beta_1 + \beta_2) &= r_1^2 \\ \beta_2 \left[\beta_1 + \beta_2 \frac{1}{(1 - \lambda^2)^2} \right] &= r_2^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

où r_1 et r_2 sont les rayons initiaux des fibres. Donc la transformation Ω est complètement déterminée par la valeur de λ . Pour cette raison λ est appelé "le paramètre de la fusion". Comme expliqué à l'annexe II, sa valeur initiale est 1^- , c'est-à-dire un nombre tout près de 1. En pratique nous prenons comme valeur initiale : $\lambda(t_0) = 0,9999$. L'évolution temporelle du λ est donnée par l'équation différentielle suivante

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\mu \cdot 1m}{\gamma} \lambda F(\lambda). \quad (2.6)$$

Il s'agit de l'équation (II.93) avec des variables réelles. Pour comprendre la différence entre les équations (2.6) et (II.93), il faut se rappeler que le temps adimensionnel est donné par (II.60) : $t = t^* \frac{\gamma}{\mu R}$ où t^* est le temps réel et $R = 1m$ quand les

dimensions réelles des fibres sont utilisées.

La fonction F est donnée par l'intégrale de Cauchy (II.69)

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{2|\Omega'(\sigma)|} \frac{\sigma + \zeta}{\sigma(\sigma - \zeta)} d\sigma. \quad (2.7)$$

Le contour de l'intégration est le cercle unitaire $|\sigma| = 1$ et le prime ($'$) note la dérivée par rapport à la variable complexe indépendante.

L'équation (2.6) est une équation différentielle ordinaire de λ si on tient compte du fait que les β_1 et β_2 dans Ω' sont des fonctions de λ .

Les composantes u et v de la vitesse \vec{V} selon les axes x et y , sont la partie réelle et la partie imaginaire d'une vitesse complexe, donnée par (II.95)

$$\begin{aligned} 2[u(\zeta, t) + iv(\zeta, t)] &= -\zeta \Omega'(\zeta, t) F(\zeta, t) + \frac{\partial}{\partial t} \Omega(\zeta, t) \\ &+ \frac{\Omega(\zeta, t) - \overline{\Omega_1(\zeta, t)}}{\overline{\Omega'(\zeta, t)}} \overline{[\Omega'(\zeta, t) F(\zeta, t) + \zeta \Omega''(\zeta, t) F(\zeta, t)]} \\ &+ \overline{\zeta \Omega'(\zeta, t) F'(\zeta, t) - \frac{\partial}{\partial t} \Omega'(\zeta, t)} - \overline{\zeta \Omega'_1(\zeta, t) F(\zeta, t)} + \overline{\frac{\partial}{\partial t} \Omega_1(\zeta, t)}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ici, une ligne au dessus des termes indique le complexe conjugué, et Ω_1 est donné par (II.94)

$$\Omega_1(\zeta) = \Omega\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{\beta_1}{\zeta} + \frac{\beta_2}{\zeta - \lambda}. \quad (2.9)$$

Regardons plus en détail comment l'on peut utiliser la formule (2.8) pour calculer la vitesse en un point donné, à un instant donné où les valeurs de β_1 , β_2 et λ sont connues. Considérons un point quelconque $A(x, y)$ de la section droite du coupleur. À ce point correspond un nombre complexe $\eta(x, y)$. En prenant la transformation inverse $\zeta = \Omega^{-1}(\eta)$, c'est-à-dire en résolvant (2.4) pour ζ , nous trouvons le point ζ dont η est l'image. Les composantes de la vitesse sont alors obtenues en remplaçant la valeur de ζ dans l'expression (2.8). Les dérivées par rapport au temps en (2.8) sont calculées à l'aide des relations (2.5) et (2.6). La fonction $F(\zeta)$ est calculée numériquement. En ce qui concerne $F'(\zeta)$, nous calculons d'abord la dérivée sous le signe de l'intégrale de façon analytique et après, l'intégrale elle-même est calculée

numériquement.

2.1.3 Intégration numérique

Nous remarquons qu'à la formule (2.8), il y a plusieurs intégrales de la forme (2.7) qu'il faut évaluer numériquement. Une grande précision d'intégration est cruciale pour que la vitesse soit calculée correctement. Les intégrales $F(\zeta)$ et $F'(\zeta)$ sont des intégrales de Cauchy où on peut séparer la partie réelle de la partie imaginaire et on obtient deux intégrations ordinaires au lieu d'une complexe. De plus, comme le contour d'intégration est le cercle unitaire $|\sigma| = 1$, l'intégrant dans ce cas est une fonction périodique avec une période 2π et le domaine d'intégration est une période. Comme nous allons l'expliquer, la meilleure technique d'intégration dans ce cas est la méthode des trapèzes.

Considérons l'intégrale

$$I = \int_a^b f(\theta) d\theta. \quad (2.10)$$

En subdivisant l'intervalle $[a, b]$ en un certain nombre n d'intervalles égaux $\Delta\theta = (b - a)/n$ la valeur de l'intégrale selon la méthode des trapèzes est donnée par

$$I_a = \frac{b - a}{2n} \{f(0) + 2[f(\Delta\theta) + \cdots + f((n-1)\Delta\theta)] + f(n\Delta\theta)\} \quad (2.11)$$

avec l'erreur principale $E_r = I_a - I = \frac{1}{12}(b - a)f''(\xi)$ où $a \leq \xi \leq b$. Pour nos fonctions périodiques en $[0, 2\pi]$ la relation (2.11) prend la forme

$$I_a = \frac{\pi}{n} \{f(0) + f(\Delta\theta) + \cdots + f((n-1)\Delta\theta)\} \quad (2.12)$$

et l'erreur principale devient $E_r = 0$ parce que $a = b$ dans ce cas. En utilisant la formule de Euler-Maclaurin on peut montrer que si l'intégrant est infiniment dérivable, ce qui est vrai dans notre cas, l'erreur associée à la méthode des trapèzes diminue de façon super algébrique en doublant n , ce qui veut dire que l'erreur diminue plus rapidement que toute puissance de Δx [36]. Dans ce cas, la méthode des trapèzes avec un nombre n d'intervalles égaux, donne la valeur exacte des intégrales des fonctions périodiques qui sont représentées par une série trigonométrique de Fourier qui

se termine au n -ième terme.

Pour les fonctions périodiques, la méthode des trapèzes est beaucoup plus efficace que d'autres méthodes avancées telle que la méthode de Gauss. En pratique, nos fonctions à intégrer sont très régulières dans le sens qu'elles n'oscillent pas et une vingtaine d'intervalles suffit pour obtenir une très bonne précision d'intégration. Nous avons utilisé dans nos calculs $n = 500$, ce qui fait que nos intégrations sont pratiquement exactes.

2.1.4 Degré de fusion

L'image de la frontière du disque unitaire, c'est-à-dire du cercle $|\sigma| = 1$, est l'interface extérieure de notre coupleur. Pour obtenir les équations paramétriques de cette interface nous remplaçons en (2.4) $\zeta = e^{i\theta}$ et en dénommant la partie réelle de η , x et sa partie imaginaire y nous obtenons :

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \beta_1 \cos \theta + \beta_2 \frac{\cos \theta - \lambda}{1 - 2\lambda \cos \theta + \lambda^2} \\ y(\theta) &= \beta_1 \sin \theta + \beta_2 \frac{\sin \theta}{1 - 2\lambda \cos \theta + \lambda^2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Le paramètre $0 \leq \lambda < 1$ diminue durant la fusion. La valeur $\lambda = 0$ correspond à l'état final de la coalescence, c'est-à-dire au moment où la section droite devient un disque. Les centres des fibres sont sur l'axe réel x . Les valeurs $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ correspondent aux points où l'interface extérieure et l'axe x s'intersectent. Le schéma de l'état initial d'un coupleur symétrique est montré à figure 2.2. Notons que l'origine du repère (x, y) , ne correspond pas avec le centre du coupleur sauf après une fusion complète, pour $\lambda = 0$, c'est-à-dire pour un temps infini. À l'instant initial elle se trouve au centre de la fibre de gauche.

La largeur de la section droite du coupleur, c'est-à-dire la longueur de l'axe majeur, est alors

$$L(t) = x(0) - x(\pi) = 2\beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1}{1 - \lambda(t)} + \frac{1}{1 + \lambda(t)} \right). \quad (2.14)$$

Pour un coupleur composé de deux fibres de rayon r_1 et r_2 , la valeur initiale de

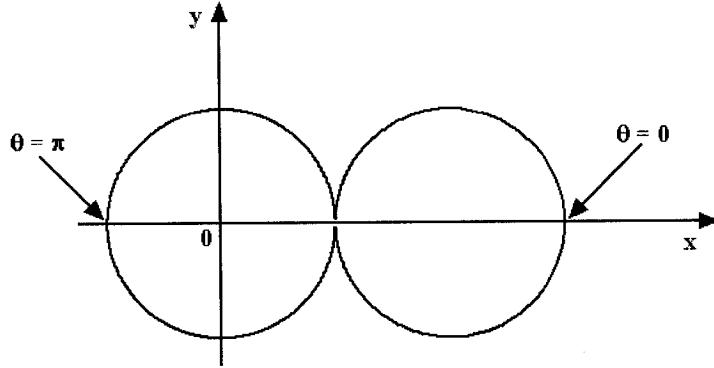


FIG. 2.2 L'état initial d'un coupleur symétrique : $\lambda = 0,9999$

la largeur du coupleur est $L(t_0) = 2(r_1 + r_2)$. À l'instant final lorsque l'interface devient un cercle, pour que la masse soit conservée, la largeur du coupleur doit être $L(t_\infty) = 2\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$. On définit le degré de fusion à un instant donné par

$$f(t) = \frac{L(t_0) - L(t)}{L(t_0) - L(t_\infty)}. \quad (2.15)$$

À l'instant initial le degré de fusion est $f = 0$, et pour une fusion complète $f = 1$.

2.2 Fusion des fibres multi-couches, sans effets de diffusion

Avant de considérer les effets de la diffusion des dopants, nous considérons d'abord seulement les effets de fusion. Le but de cette section et de montrer comment la matière à l'intérieur du coupleur se transforme au cours de la fusion. C'est pour cette raison que les fibres qui fusionnent sont considérées multi-couches. Les coupleurs 2×2 symétriques et asymétriques, ainsi que les coupleurs 3×3 plats sont considérés en détail. Pour les coupleurs à contour simple composés de plus de trois fibres ainsi que pour les coupleurs à double contour les calculs se compliquent, même si la procédure du calcul de la vitesse reste la même. Nous donnons, pour quelques coupleurs de ces catégories, seulement l'évolution de l'interface extérieure.

2.2.1 Coupleurs 2×2

La transformation conforme pour les coupleurs 2×2 est donnée par l'équation (2.4). Nous voulons calculer l'évolution de différentes couches internes en fonction du degré de fusion ou de façon équivalente en fonction du temps. Étant donné que la viscosité est considérée constante et la diffusion des dopants est ignorée dans cette section, les interfaces entre différentes couches représentent juste des lignes tracées à la section droite homogène. Pour cette raison, nous distribuons sur ces interfaces un certain nombre de marqueurs qui se déplacent avec la vitesse du point où ils se trouvent et nous suivons leur parcours durant la fusion. À tout instant l'interface est représentée par l'ensemble de ces marqueurs.

Dans cette section nous résolvons l'équation de Stokes sous la forme adimensionnelle : $\vec{\nabla}p = \vec{\nabla}^2\vec{V}$ avec la condition à la limite : $\vec{T}_n = k\vec{n}$. La façon d'obtenir les variables adimensionnelles est donnée à l'annexe II par les relations (II.60). Dans ce cas μ et γ disparaissent de nos équations. La structure de la section droite ainsi obtenue est homothétique à celle réelle et la durée de fusion est donnée par un temps adimensionnel. Le temps réel pour arriver à un degré de fusion donné est obtenu seulement si on connaît les valeurs de μ et de γ (2.6). Nous revenons plus loin sur cet argument. Au lieu de donner l'évolution de la section droite en fonction du temps, nous le donnons en fonction du degré de fusion qui n'est pas affecté par ce changement de variables.

Pour déplacer les marqueurs nous divisons le temps en petits intervalles dt . Si la position du marqueur à l'instant t est \vec{r}_t , sa position à l'instant $t + dt$ est

$$\vec{r}_{t+dt} = \vec{r}_t + \vec{V}dt. \quad (2.16)$$

Il est clair que l'intervalle dt doit être assez petit pour que l'erreur dans le calcul de la position soit négligeable. En effet, un développement en série de Taylor montre que l'erreur principale est donnée par $\frac{dt}{2} \frac{d\vec{V}}{dt}$. L'accélération $d\vec{V}/dt$ pour un écoulement de Stokes est pratiquement nulle, ce qui rend la formule (2.16) assez précise. Dans nos calculs, nous avons choisi quand même un pas dt très petit (d'habitude un millième du temps de fusion) pour que les calculs soient très précis.

Pour les coupleurs symétriques où il y a deux axes de symétrie, les calculs se

font seulement dans un quart du domaine. C'est à la fibre à gauche que les calculs se font, parce que, comme nous l'expliquons un peu plus loin, dans la fibre à droite, il y a des points critiques qui affectent la précision des calculs pour la vitesse. À la figure 2.3 nous donnons les résultats de nos calculs pour l'évolution de la section droite d'un coupleur symétrique, composé de deux fibres à 6 couches.

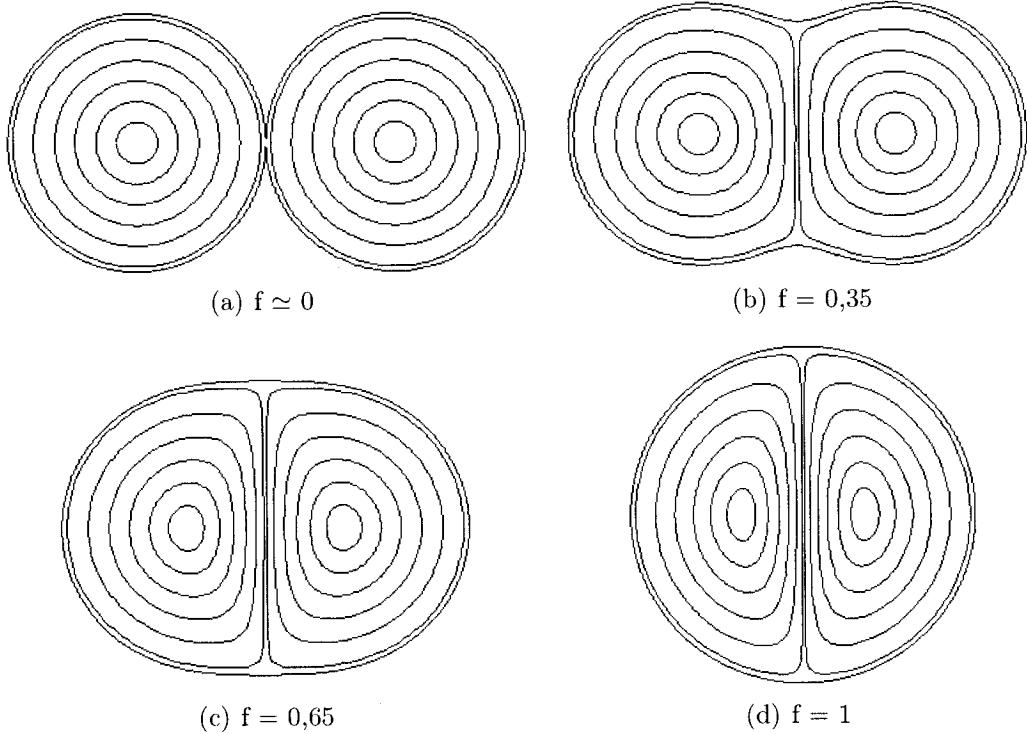


FIG. 2.3 Fusion d'un coupleur symétrique multi-couches. Le degré de fusion f est donné par l'équation (2.15).

Considérons maintenant les coupleurs asymétriques. On pourrait penser que la procédure du calcul de la vitesse dans ce cas est identique avec celle utilisée pour les coupleurs symétriques, avec pour seul changement le fait qu'on devrait faire les calculs dans la moitié du coupleur au lieu de les faire dans le quart du coupleur à cause d'un seul axe de symétrie. Cependant le problème est un peu plus compliqué.

Si nous regardons attentivement la forme de la relation (2.9), nous voyons que le terme $\frac{1}{\zeta - \lambda}$ devient infini pour $\zeta = \lambda$ qui est un point à l'intérieur du disque de référence $|\zeta| \leq 1$, sur l'axe réel. De plus, la dérivée $\Omega'(\zeta)$ contient le terme $\frac{1}{(\zeta - \lambda)^2}$ avec le même point critique. La valeur des coefficients devant ces termes

au point critique est identiquement nulle, ce qui élimine les valeurs infinies. Ces coefficients sont en réalité des différences de termes égaux. En pratique, ces termes se calculent numériquement parce qu'ils contiennent des intégrales comme $F(\zeta)$ ou $F'(\zeta)$. Ces intégrations numériques apportent une erreur qui, si petite soit elle, une fois multipliée avec des valeurs très élevées ($\frac{1}{\zeta-\lambda}$ ou $\frac{1}{(\zeta-\lambda)^2}$ avec $\zeta \approx \lambda$), cause une évaluation erronée de la vitesse.

Donc, pour un marqueur à proximité de $\Omega(\lambda, t)$, la vitesse pourrait être évaluée incorrectement. De plus, à l'instant initial, lorsque $\lambda \approx 1$, tel que montré à l'annexe II (section II.2.2) tout le disque ajouté, qui pour nous représente la fibre à droite, est obtenu comme l'image des points à proximité de λ . Donc, la vitesse de tous les marqueurs de la fibre à droite est calculée incorrectement pour $\lambda \approx 1$. Même si on commence les calculs à partir d'un λ initial un peu plus petit que 0,9999, les marqueurs sur l'axe réel, à un instant donné vont être à la proximité de $\Omega(\lambda)$.

En pratique nous avons observé que les erreurs provenant des intégrations numériques sont si petites que seulement une petite partie des couches avec un diamètre élevé est affectée par ces erreurs. Par contre dans la fibre à gauche il n'y a pas de point critique ($\Omega(\lambda)$ tombe toujours dans la fibre à droite) et la vitesse est évaluée correctement. Nous avons utilisé ce fait pour éliminer les erreurs dans la fibre à droite.

Pour réaliser cela, nous avons inversé la situation. Nous avons permuted la place des fibres, donc la fibre à droite est mise à gauche et vice versa. Dans cette situation la transformation $\Omega(\zeta)$ n'est plus la même parce que les coefficients $\beta_1(\lambda)$ et $\beta_2(\lambda)$ vérifient un autre système (2.5), celui où r_1 et r_2 sont permuts. Cette permutation des fibres élimine les points critiques pour la fibre qui a été initialement à droite. À chaque intervalle dt , nous évaluons la vitesse des marqueurs de la fibre à gauche et nous les déplaçons à leur nouvelle position. Après nous faisons une permutation des fibres pour faire la même chose avec les marqueurs de la deuxième fibre et ensuite nous passons au prochain pas.

À la figure 2.4 nous donnons les résultats de nos calculs pour l'évolution de la section droite durant la fusion d'un coupleur asymétrique, composé de deux fibres à 6 et 5 couches.

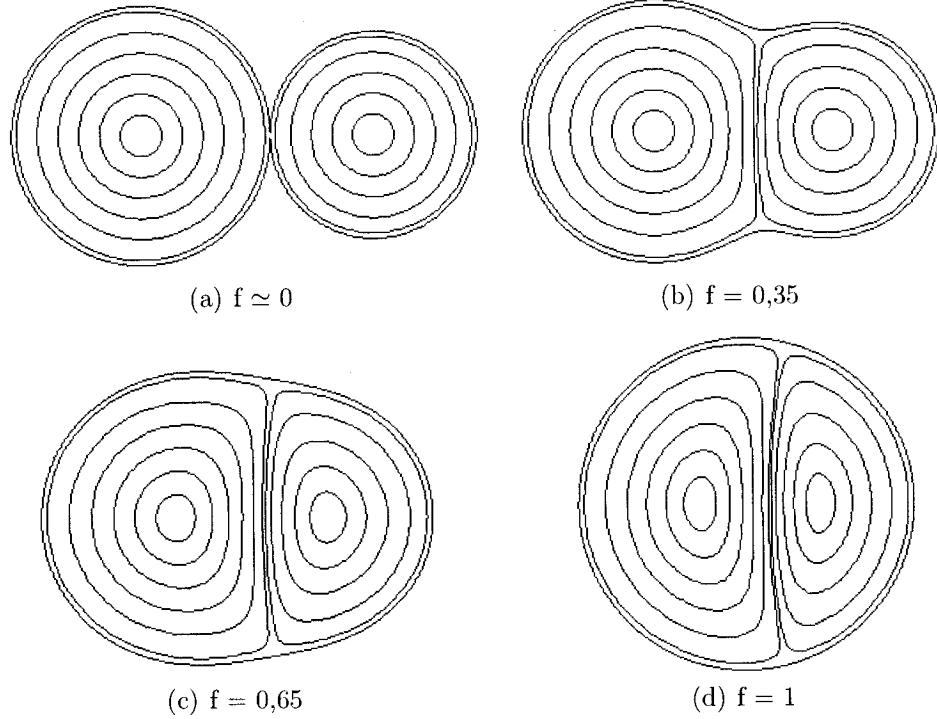


FIG. 2.4 Fusion d'un coupleur asymétrique multi-couches. Le degré de fusion f est donné par l'équation (2.15).

2.2.2 Coupleurs 3×3 plats

Le coupleur 3×3 plat est le cas le plus simple des configurations possibles à contour simple avec trois fibres. Pour simplifier les équations, nous supposons les fibres latérales identiques. La forme de la transformation est donnée par (II.99)

$$\Omega(\zeta) = \beta_1 \zeta + \beta_2 \frac{\zeta}{1 - \lambda \zeta} + \beta_2 \frac{\zeta}{1 + \lambda \zeta} \quad (2.17)$$

où $|\zeta| \leq 1$. La forme extérieure est obtenue en remplaçant $\zeta = e^{i\theta}$ en (2.17). Nous obtenons les équations paramétriques suivantes

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \beta_1 \cos \theta + \beta_2 \frac{\cos \theta - \lambda}{1 - 2\lambda \cos \theta + \lambda^2} + \beta_2 \frac{\cos \theta + \lambda}{1 + 2\lambda \cos \theta + \lambda^2} \\ y(\theta) &= \beta_1 \sin \theta + \beta_2 \frac{\sin \theta}{1 - 2\lambda \cos \theta + \lambda^2} + \beta_2 \frac{\sin \theta}{1 + 2\lambda \cos \theta + \lambda^2}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Les paramètres β_1 et β_2 sont déterminés en résolvant le système d'équations (II.100)

$$\begin{aligned}\beta_1(\beta_1 + 2\beta_2) &= r_1^2 \\ \beta_2 \left(\beta_1 + \beta_2 \frac{1}{(1-\lambda^2)^2} + \beta_2 \frac{1}{(1+\lambda^2)^2} \right) &= r_2^2.\end{aligned}\quad (2.19)$$

Voyons maintenant comment on peut déterminer le degré de fusion. La largeur de la section droite est $L(\lambda) = x(0) - x(\pi)$. À l'instant initial $L = 2r_1 + 4r_2$ et à l'instant final $L = 2\sqrt{r_1^2 + 2r_2^2}$. Donc, le degré de fusion est donné par

$$f = \frac{2r_1 + 4r_2 - L(\lambda)}{2r_1 + 4r_2 - 2\sqrt{r_1^2 + 2r_2^2}}. \quad (2.20)$$

La formule pour la vitesse est encore donné par la relation (2.8), mais Ω_1 est donné dans ce cas par

$$\Omega_1(\zeta) = \frac{\beta_1}{\zeta} + \frac{\beta_2}{\zeta - \lambda} + \frac{\beta_2}{\zeta + \lambda}. \quad (2.21)$$

Ici nous avons le même problème que pour les coupleurs 2×2 dans l'évaluation des coefficients devant les termes $\frac{1}{\zeta - \lambda}$, $\frac{1}{(\zeta - \lambda)^2}$, $\frac{1}{\zeta + \lambda}$ et $\frac{1}{(\zeta + \lambda)^2}$ où nous avons les points critiques $\zeta = \lambda$ et $\zeta = -\lambda$. À proximité de ces points où ces termes ont des valeurs très élevées, à cause des petites erreurs d'intégration, nous ne pouvons pas évaluer correctement la vitesse. À l'instant initial lorsque $\lambda \approx 1$, nous avons vu à l'annexe II que les disques latéraux sont obtenus comme l'image des points à proximité des points $(\pm 1, 0)$. Donc, tous les marqueurs des fibres latérales sont à proximité de $\Omega(\pm \lambda, 0)$.

Au lieu d'appliquer la technique utilisée pour les coupleurs 2×2 asymétriques qui pour les coupleurs 3×3 s'avère compliquée (au lieu d'un seul paramètre λ dans ce cas il y en a deux paramètres indépendants $\lambda_2 \neq \lambda_3$) nous commençons nos calculs à partir de $\lambda = 0,995$ et tout simplement enlevons les marqueurs qui sont dans la zone des erreurs (sur l'axe réel). À la figure 2.5 nous montrons nos calculs pour l'évolution de la fusion d'un coupleur 3×3 composé de 3 fibres égales. La

la fibre centrale est composée de 3 couches et les fibres latérales d'une seule couche.

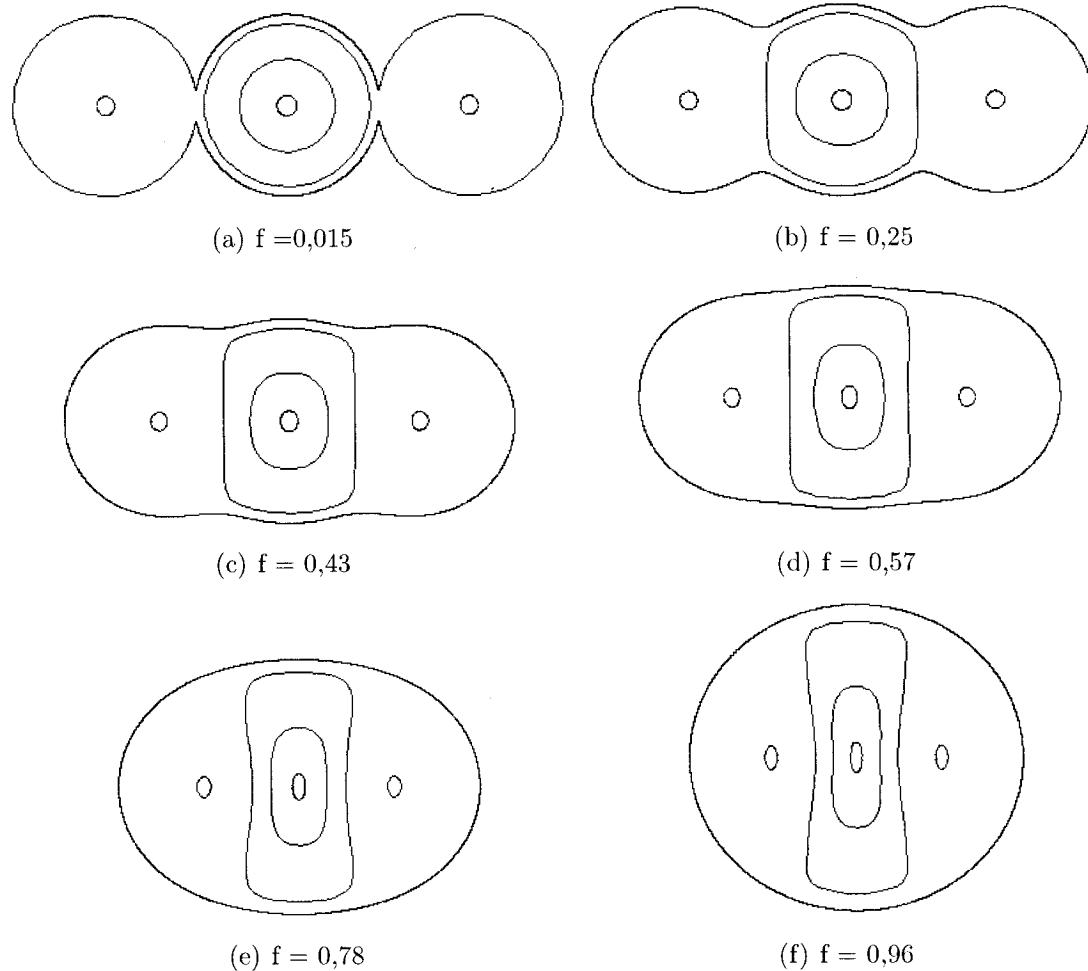


FIG. 2.5 Fusion d'un coupleur 3×3

2.2.3 Coupleurs 5×5

Le coupleur symétrique 5×5 avec des fibres latérales identiques est représenté par une transformation simple (II.101)

$$\Omega(\zeta) = \beta_1 \zeta + \beta_2 \frac{\zeta}{1 - \lambda \zeta} + \beta_2 \frac{\zeta}{1 + \lambda \zeta} + \beta_2 \frac{\zeta}{1 - i \lambda \zeta} + \beta_2 \frac{\zeta}{1 + i \lambda \zeta} \quad (2.22)$$

où $|\zeta| \leq 1$. La forme extérieure est obtenue en remplaçant $\zeta = e^{i\theta}$ dans l'équation (2.22) et nous obtenons les équations paramétriques suivantes

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \beta_1 \cos \theta + \beta_2 \frac{\cos \theta - \lambda}{1 - 2\lambda \cos \theta + \lambda^2} + \beta_2 \frac{\cos \theta + \lambda}{1 + 2\lambda \cos \theta + \lambda^2} \\ &\quad + \beta_2 \frac{\cos \theta}{1 - 2\lambda \sin \theta + \lambda^2} + \beta_2 \frac{\cos \theta}{1 + 2\lambda \sin \theta + \lambda^2} \\ y(\theta) &= \beta_1 \sin \theta + \beta_2 \frac{\sin \theta}{1 - 2\lambda \cos \theta + \lambda^2} + \beta_2 \frac{\sin \theta}{1 + 2\lambda \cos \theta + \lambda^2} \\ &\quad + \beta_2 \frac{\sin \theta - \lambda}{1 - 2\lambda \sin \theta + \lambda^2} + \beta_2 \frac{\sin \theta + \lambda}{1 + 2\lambda \sin \theta + \lambda^2}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Les paramètres β_1 et β_2 sont déterminés en résolvant le système d'équations (II.102)

$$\begin{aligned} \beta_1 (\beta_1 + 4\beta_2) &= r_1^2 \\ \beta_2 \left(\beta_1 + \beta_2 \frac{1}{(1 - \lambda^2)^2} + \beta_2 \frac{1}{(1 + \lambda^2)^2} + 2\beta_2 \frac{1 - \lambda^4}{(1 + \lambda^4)^2} \right) &= r_2^2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

où r_1 est le rayon initial de la fibre centrale et r_2 celui des fibres latérales.

Voyons maintenant comment nous pouvons déterminer le degré de fusion. La largeur de la section droite est $L(\lambda) = x(0) - x(\pi)$. À l'instant initial $L = 2r_1 + 4r_2$ et à l'instant final $L = 2\sqrt{r_1^2 + 4r_2^2}$. Donc, le degré de fusion est donné dans ce cas par la relation

$$f = \frac{2r_1 + 4r_2 - L(\lambda)}{2r_1 + 4r_2 - 2\sqrt{r_1^2 + 4r_2^2}}. \quad (2.25)$$

Nous montrons à la figure 2.6, l'évolution de l'interface extérieure d'un coupleur 5×5 à fibres égales, au cours de la fusion.

2.2.4 Les configurations avec un trou au milieu

Nous considérons maintenant la fusion des coupleurs dont la section droite a un double contour. Dans ce cas, le problème est beaucoup plus compliqué. La transformation conforme dans ce cas est donnée par une combinaison de fonctions elliptiques. L'analyse détaillée de ce problème est donnée par Richardson [32]. Nous

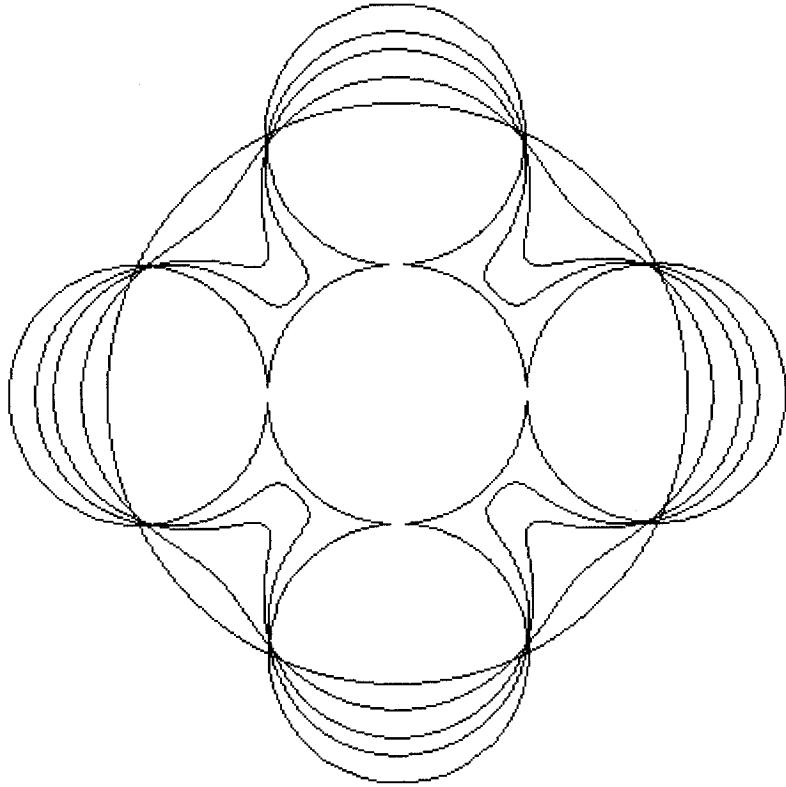


FIG. 2.6 Fusion d'un coupleur 5×5

nous limitons ici à donner une brève description de la méthode et deux exemples de l'évolution de l'interface extérieure.

La méthode est valable seulement pour les configurations où l'on a une symétrie par rapport à une rotation d'un angle $2\pi/n$ avec $n \geq 2$. L'évolution de la section droite est donnée par une transformation conforme d'un domaine référence qui, contrairement aux coupleurs à simple contour, n'est pas fixe.

Le domaine de référence est, dans ce cas, un rectangle. À l'instant initial, le côté horizontal du rectangle, c'est-à-dire celui en direction de l'axe réel, tend vers l'infini et le côté vertical vers $\pi/2$. Au cours de la fusion, le côté horizontal diminue et celui vertical augmente. Au moment où le trou au milieu disparaît, c'est le côté vertical qui devient infini et le côté horizontal $\pi/2$. Ensuite, puisque le contour devient simple, on passe au domaine de référence habituel qui est le disque unitaire.

La transformation conforme est donnée à l'aide des fonctions *Zeta de Jacobi* mo-

difiées. Ces fonctions sont des intégrales complexes qui s'évaluent numériquement.

Pour les configurations à simple contour que nous avons étudiées, l'évolution d'un seul paramètre, $\lambda(t)$, est calculé à l'aide d'une équation différentielle et les autres paramètres (β_j) sont calculés en résolvant un système algébrique. Pour les configurations à double contour, avec n fibres qui fusionnent, la transformation est déterminée par un paramètre réel, qui détermine l'évolution du rectangle de référence, plus $2n$ autres paramètres qui sont en général complexes. L'évolution du paramètre réel et de n des paramètres complexes est calculée en résolvant $n + 1$ équations différentielles. Les n paramètres qui restent sont calculés en résolvant un système de n équations algébriques.

Dans ce cas où la transformation elle-même se calcule numériquement, le calcul du champ de vitesse devient une tâche très compliquée. La vitesse est toujours donnée par la formule (2.8), mais les potentiels complexes n'ont pas une forme explicite. On peut d'abord calculer ces fonctions à la frontière. Après, en prenant le prolongement analytique, elles s'évaluent dans tout le domaine.

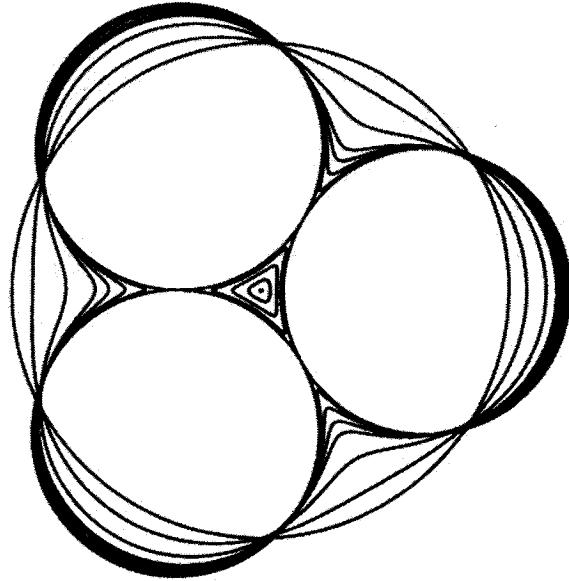


FIG. 2.7 Fusion d'un coupleur 3×3 en triangle

Il peut être plus facile, dans ce cas, de résoudre les équations de Stokes de façon numérique que d'utiliser la méthode de Richardson pour calculer le champ de vitesse. Puisque l'évolution de l'interface extérieure est connue, les conditions

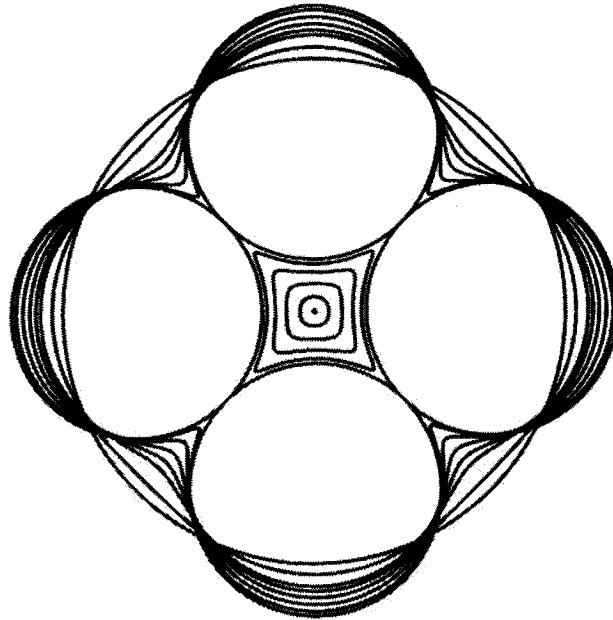


FIG. 2.8 Fusion d'un coupleur 4×4 en carré

aux limites sont plus simples. La vitesse et la pression à la frontière sont connues. Nous montrons aux figures 2.7 et 2.8 l'évolution de l'interface extérieure pour les coupleurs 3×3 en triangle et 4×4 en carré.

2.2.5 Comparaison avec le modèle empirique

Avant de considérer les effets de diffusion on pourrait comparer notre modèle avec le modèle empirique [5,6]. Notre modèle est basé sur la solution des équations de Stokes qui gèrent l'écoulement durant la fusion des fibres. Le modèle empirique, par contre, tient compte seulement de la conservation de la surface totale.

La forme de l'interface extérieure est donnée par deux cercles qui s'intersectent. La surface de l'intersection des deux cercles est reportée sur les côtés dans les régions qui sont délimitées par des arcs de cercles tangents aux deux fibres. Les cœurs restent inchangés en dimension et leurs positions sont calculées de façon à ce qu'il y ait toujours la même surface entre la parallèle à l'axe des y passant par le centre du cœur et l'interface extérieure.

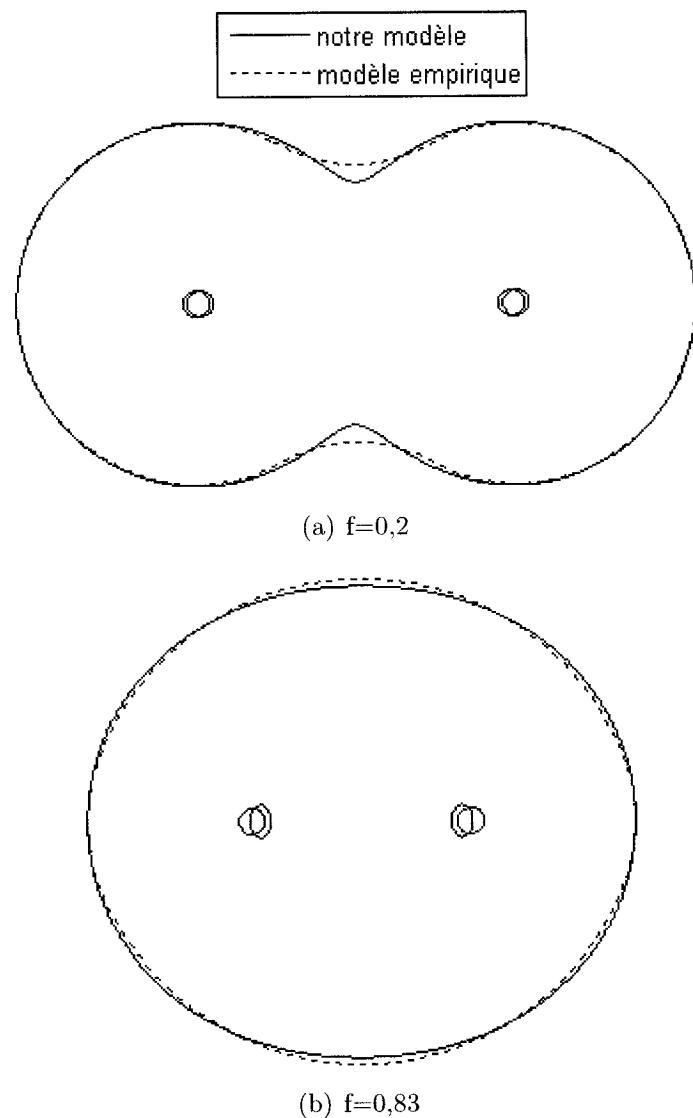


FIG. 2.9 Comparaison avec le modèle empirique

Nous montrons à la figure 2.9 la comparaison entre notre modèle et le modèle empirique pour les degrés de fusion $f = 0,2$ et $f = 0,83$. Nous voyons que pour des faibles degrés de fusion la différence est plus visible pour les interfaces extérieures. Pour les degrés de fusion élevés c'est plutôt dans les formes des coeurs ainsi que leurs positions que la différence est plus grande.

2.3 Coefficient de diffusion

Pour résoudre l'équation de convection-diffusion, les valeurs du champ de vitesse et du coefficient de diffusion sont nécessaires. Le calcul du champ de vitesse a été établi à la section précédente. Nous considérons maintenant la valeur du coefficient de diffusion.

Les dopants les plus utilisés dans les fibres optiques sont le germanium, le fluor et le bore. Les coupleurs fusionnés sont en général fabriqués en fusionnant deux fibres unimodales tel que SMF-28 ayant un seul dopant : le germanium. C'est le cas que nous allons étudier dans cette thèse. Le cas des coupleurs composés des fibres avec plusieurs dopants ne devrait pas poser beaucoup de problèmes à condition que la diffusion de chaque dopant puisse être considérée indépendamment des autres.

La dépendance du coefficient de diffusion des dopants avec la concentration est très faible et elle pourrait être négligée. Par contre, le coefficient de diffusion dépend significativement de la température. Cette dépendance est donnée par la loi d'Arrhenius

$$D = D_0 \exp(-Q/RT) \quad (2.26)$$

où D_0 est un facteur constant, Q est l'énergie d'activation et $R = 8,31\text{J/K/mol}$ est la constante des gaz parfaits.

On trouve dans la littérature des valeurs différentes de D_0 et Q pour le même intervalle de température. Par exemple à la référence [37], ces valeurs pour la diffusion de l'oxyde de germanium dans la silice pure, dans l'intervalle $1200 \leq T \leq 1400^\circ\text{C}$, sont $D_0 = 1,9 \cdot 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ et $Q = 2,9 \cdot 10^5\text{J/mol}$. À la référence [38] on donne les valeurs suivantes : $D_0 = 2,4 \cdot 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ et $Q = 3,1 \cdot 10^5\text{J/mol}$.

Même si les valeurs de D_0 et Q étaient bien établies, nous ne pouvons pas utiliser

la formule (2.26) à cause de la méconnaissance de la température. Notre source de chaleur est la flamme de la micro-torche et il est très difficile de déterminer la température des fibres dans ce cas. Nous devons donc déterminer le coefficient de diffusion de façon expérimentale.

Pour réaliser cela, une seule fibre est chauffée de la même façon que le coupleur. Dans ce cas il s'agit de la diffusion d'un simple cylindre, qui est le cœur de la fibre. La solution théorique de ce problème est facile à obtenir et elle dépend du temps écoulé et de la valeur du coefficient de diffusion. Si on clive la fibre et on mesure le profil réel de la concentration du dopant, on peut évaluer le coefficient de diffusion en faisant correspondre la solution théorique avec le résultat expérimental. Il est clair que cette méthode d'évaluation est précise seulement si la fibre et le coupleur sont chauffés exactement de la même façon. Pour cette raison nous effectuons le chauffage de la fibre tout juste avant, ou tout de suite après, la fusion du coupleur en appliquant la même recette de fusion. De cette façon la reproduction des mêmes conditions de chauffage est plus assurée.

2.3.1 Mesure du profil de concentration

L'indice de réfraction est considéré comme une fonction linéaire de la concentration du dopant. Alors, pour mesurer le profil de la concentration, il suffit de mesurer le profil d'indice de réfraction dans le cas d'un seul dopant. La mesure du profil d'indice de réfraction d'un coupleur ou d'une fibre est réalisée par la technique du champ proche réfracté [39]. Elle a l'avantage d'être précise et facilement réalisable au laboratoire.

La figure 2.10 montre le schéma du montage utilisé. Le faisceau du laser à HeNe est étendu puis focalisé, à l'aide de l'objectif de microscope, sur la face d'entrée du coupleur ou de la fibre. La dimension de la tache lumineuse est de l'ordre du micron, ce qui assure une bonne résolution des mesures. La fibre à étudier baigne dans un bassin rempli de glycérol. Comme son indice est voisin de l'indice de la gaine, le cône d'acceptance de la fibre est beaucoup plus petit que celui de la sortie de l'objectif du microscope. Il en résulte que la lumière réfractée à l'interface cœur gaine est importante. Le cache circulaire situé à la sortie du bassin permet de délimiter correctement le faisceau de lumière réfractée en éliminant les rayons

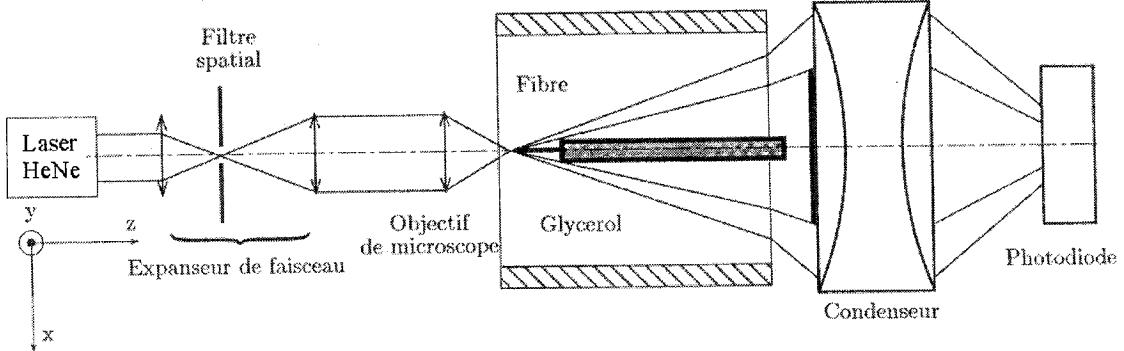


FIG. 2.10 Montage de mesure de profil d'indice

de faible inclinaison comme ceux correspondant aux modes à fuite. Le condenseur focalise le faisceau utile sur la photodiode reliée à un système d'acquisition de données. Enfin, un système de moteurs DC de précision permet de déplacer la fibre par rapport au spot lumineux dans le deux directions X et Y . La puissance lumineuse transmise par le système est donnée par

$$P_t = An(r) + B \quad (2.27)$$

où A et B sont deux constantes et $n(r)$ l'indice de réfraction. Pour calibrer l'appareil les valeurs connues de l'indice de la gaine et du cœur de la fibre SMF-28 sont utilisées. Pour évaluer la concentration du germanium la calibration est faite en considérant $c = 0\%$ en moles dans la gaine de la fibre SMF-28 non-chauffée et $c = 3,4\%$ en moles dans le cœur. Nous montrons à la figure 2.11 le profil de concentration de l'oxyde de germanium pour une fibre SMF-28 non-chauffée. L'axe x correspond à un diamètre de la fibre.

2.3.2 Évaluation du coefficient de diffusion

Considérons maintenant le problème de la diffusion du dopant du cœur de la fibre. Nous devons résoudre l'équation de diffusion pour connaître la distribution de la concentration du dopant en fonction du temps. C'est l'équation (1.20) avec $\vec{V} = 0$:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \nabla^2 c \quad (2.28)$$

avec les conditions initiales : $c(t_0) = c_0$ dans le cœur et $c(t_0) = 0$ dans la gaine.

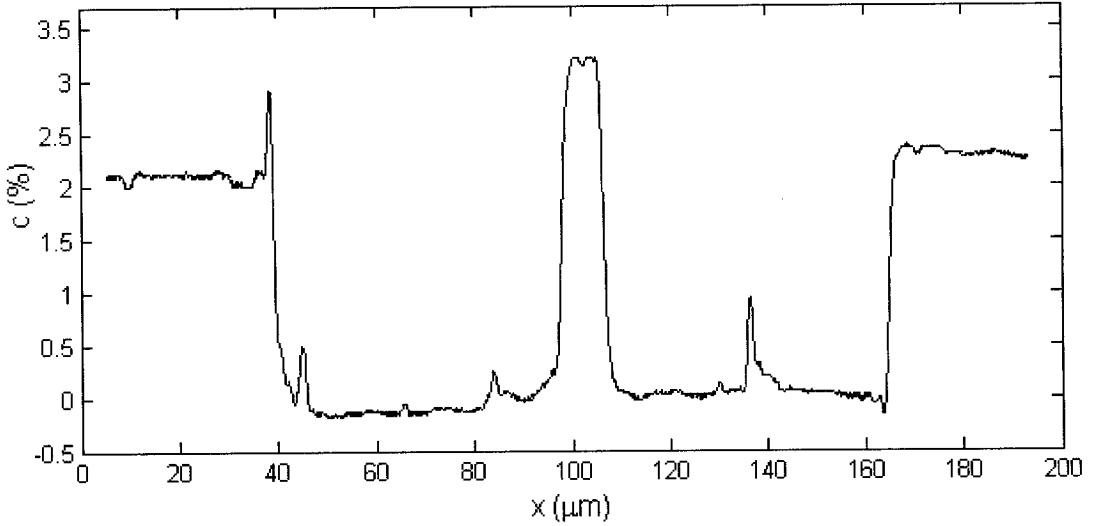


FIG. 2.11 Mesure du profil de concentration du dopant pour une fibre SMF-28. On remarque trois niveaux différents de concentration qui représentent le cœur, la gaine et le glycérol où baigne la fibre.

À cause de la symétrie cylindrique, le laplacien dépend seulement de la coordonnée radiale r et l'équation (2.28) devient

$$\frac{\partial c(r, t)}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 c(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c(r, t)}{\partial r} \right). \quad (2.29)$$

Cette équation différentielle est à variables séparables et la solution est donnée par une série infinie de termes contenant les fonctions de Bessel de première espèce. Pour des fins pratiques, cette série doit être tronquée.

Au lieu d'utiliser cette solution nous avons utilisé la méthode de différences finies programmée pour l'équation de diffusion-convection. Les détails de cette méthode sont donnés un peu plus loin (section 2.4.2). À titre d'exemple, nous considérons la diffusion du germanium dans une fibre SMF-28 pour différentes valeurs du coefficient de diffusion. Le diamètre initial du cœur est $9\mu\text{m}$ et le temps de diffusion est considéré fixe $t = 30\text{s}$. Les résultats pour le coefficient de diffusion $D = 1,51 \cdot 10^{-14}\text{m}^2/\text{s}$, $D = 10^{-13}\text{m}^2/\text{s}$ et $D = 4 \cdot 10^{-13}\text{m}^2/\text{s}$ sont montrés à la figure 2.12. Le petit creux au centre du cœur est un défaut de fabrication de la fibre SMF28 et il est inséré dans le profil initial de nos calculs pour augmenter la précision.

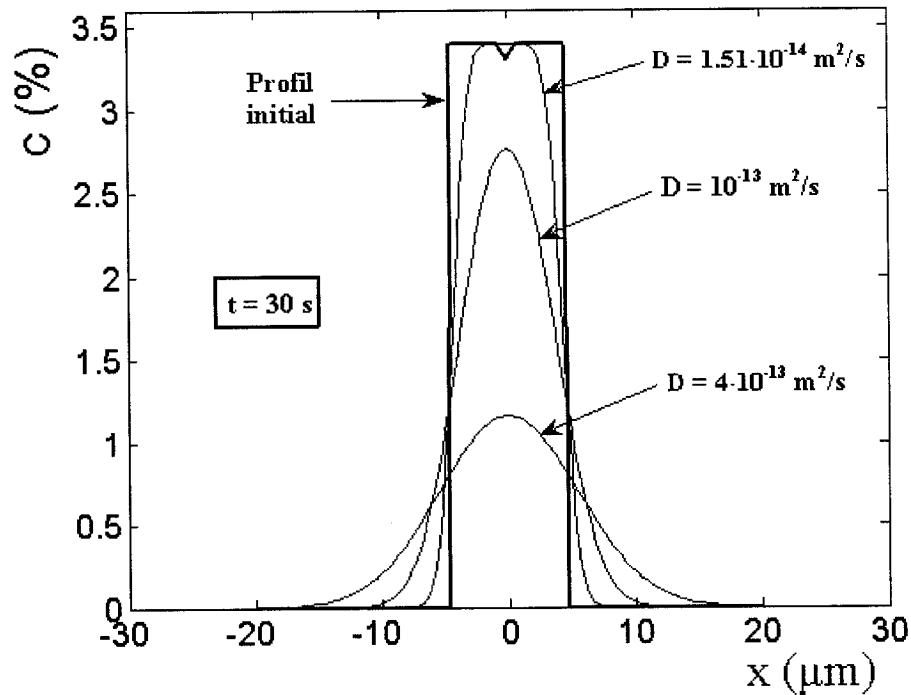


FIG. 2.12 Profil de concentration calculé pour différents coefficients de diffusion et une durée de 30s

Considérons maintenant l'évaluation du coefficient de diffusion dans un cas concret. La fusion d'un coupleur est réalisée selon la recette suivante.

Deux fibres SMF-28 sont placées l'une à côté de l'autre sur le banc de support dans le montage de fabrication des coupleurs décrit au chapitre précédent. La micro-torche qui à l'instant initial se trouve à une distance de 64 mm des fibres, s'approche avec une vitesse de 10 mm/s jusqu'à ce que la distance devient 4 mm. Ensuite, la flamme de la micro-torche est balayée sur une zone de 10 mm avec une vitesse de 2 mm/s. La durée de balayage est de 30 s et la micro-torche se retire.

Nous voulons déterminer le coefficient de diffusion du dopant (germanium) à la température où cette fusion est faite. Alors, tout de suite après cette fusion, une seule fibre est mise à la place du coupleur et la même recette est appliquée. La fibre est ensuite clivée au milieu de la zone chauffée. Nous effectuons une mesure de profil d'indice ou de concentration telle que montré à la figure 2.13.

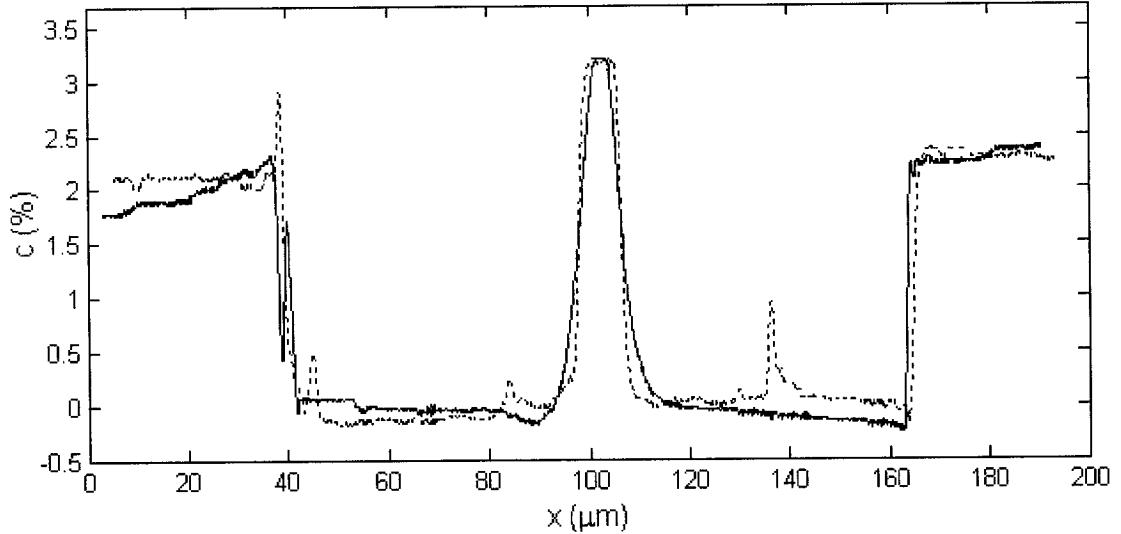


FIG. 2.13 Profils mesurés de la concentration du dopant dans une seule fibre chauffée selon la recette de fusion du coupleur. Les deux courbes correspondent à deux expériences (avant et après la fusion).

Si nous comparons le profil mesuré avec les calculs montrés à la figure 2.12 nous remarquons que c'est la courbe avec $D = 1,51 \cdot 10^{-14} \text{m}^2/\text{s}$ qui correspond au ce profil. C'est la valeur maximale de la concentration qui est égale dans ce cas, mais nous voyons que la forme du profil l'est aussi. C'est d'ailleurs pour cette raison que cette courbe a été incluse dans la figure 2.12.

Regardons plus en détail l'évaluation du coefficient de diffusion et l'incertitude associée à cette évaluation. Commençons avec la mesure de la concentration. Notre système d'acquisition de données donne une valeur de $90,6350 \pm 0,0025$ unité pour la valeur de la concentration du cœur. Donc il s'agit d'une incertitude absolue de 0,0025 unité et d'une incertitude relative de 0,0028%. À cette valeur, nous avons mis en correspondance une concentration de $c = 3,4\%$ en moles. Donc la concentration est évaluée à quatre chiffres significatifs. Considérons maintenant le coefficient de diffusion. La valeur maximale de la concentration mesurée après le chauffage de 30s dans la figure 2.13 est $c_{max} = 3.3930\%$. Les calculs numériques montrent que les valeurs $D = 1.49 \cdot 10^{-14} \text{m}^2/\text{s}$, $D = 1,51 \cdot 10^{-14} \text{m}^2/\text{s}$ et $D = 1,53 \cdot 10^{-14} \text{m}^2/\text{s}$ donnent comme concentration maximale $c_{max} = 3.3929\%$, $c_{max} = 3.3930\%$ et $c_{max} = 3.3931\%$ respectivement. Alors on conclut que la valeur du coefficient de diffusion est $D = (1,51 \pm 0,01) \cdot 10^{-14} \text{m}^2/\text{s}$ dans ce cas.

On peut faire à ce moment une dernière remarque. Même si les valeurs de D_0 et Q ne sont pas très bien établies dans la littérature, on peut conclure quand même à partir de la valeur du coefficient de diffusion que la température de la flamme pour cette recette particulière est approximativement 1700°C. Dans ce cas la fusion est faite à une température plus élevée que la fusion des coupleurs réels qui se fait habituellement vers 1400°C.

2.4 Solution de l'équation de convection-diffusion

Dans cette section nous cherchons la solution de l'équation de convection-diffusion (1.20). Pour résoudre cette équation nous employons la méthode des différences finies. Nous comparons les résultats des calculs numériques avec des observations et des mesures expérimentales.

2.4.1 Évaluation de la viscosité

À la section précédente, nous avons résolu les équations de Stokes sous la forme adimensionnelle pour obtenir l'évolution de la section droite sans diffusion. Cela a été fait pour éviter l'utilisation de la valeur de la viscosité μ et du coefficient de tension superficielle γ . L'ajout des effets de diffusion nous oblige à évaluer ces paramètres.

On pourrait aussi considérer une forme adimensionnelle pour l'équation de convection-diffusion. La forme de cette équation ne change pas, mais le coefficient de diffusion adimensionnel dans ce cas est donné par

$$D = \frac{D^* \mu}{\gamma R} \quad (2.30)$$

où D^* est la valeur réelle du coefficient de diffusion et R une dimension typique de la section droite. Pour déterminer le coefficient de diffusion adimensionnel nous devons connaître μ et γ .

Le coefficient de tension superficielle pour la silice pure, qui constitue l'interface

extérieure, a une faible dépendance avec la température [33]

$$\gamma = 0,28 - 0,00004 \cdot (T - 1200) \quad (2.31)$$

où γ est exprimé en N/m et la température T en °C. Puisque le coefficient 0,00004 apparaissant devant la température T est petit, une évaluation approximative de la température suffit pour obtenir une valeur raisonnable de γ . À titre d'exemple considérons la recette de fusion décrite à la section précédente. À partir de la valeur du coefficient de diffusion nous avons conclu que la température de fusion est environ $T = 1700^\circ\text{C}$ dans ce cas. Cela correspond à une valeur de $\gamma = 0,26$ N/m.

Il nous reste à déterminer la viscosité μ . Pour cela, nous exploitons la relation entre la durée de la fusion et le degré de fusion. Considérons la relation (2.6). En intégrant nous obtenons

$$t = \frac{\mu}{\gamma} \int_{\lambda}^{0,9999} \frac{dx}{xF(x)}. \quad (2.32)$$

Il est facile de mesurer le degré de fusion f ou de façon équivalente λ . Il suffit de mesurer la largeur du coupleur et à partir de la relation (2.14) on peut évaluer λ . Une fois λ déterminé, on peut facilement évaluer numériquement l'intégrale en (2.32) et en conséquence la valeur de la viscosité si on connaît le temps de fusion t et la tension superficielle γ .

À la figure 2.14 on présente la variation du degré de fusion d'un coupleur symétrique en fonction du temps adimensionnel qui est défini par $t = \frac{t_r \gamma}{\mu r_{\text{fibre}}}$ où t_r est le temps réel et r_{fibre} le rayon des fibres du coupleur.

Considérons la recette de fusion décrite à la section précédente. Le degré de fusion mesuré est $f = 0,36$, ce qui correspond à $\lambda = 0,87$. (La mesure du degré de fusion est effectuée sur l'écran relié avec une caméra montée sur un microscope installé au dessus des fibres. Puisque la largeur de la section droite est d'environ 70 pixels sur l'écran et nous considérons une incertitude absolue d'un pixel dans ce cas, l'incertitude relative sur le degré de fusion est de 1,4%.) Le temps de fusion est $t = 30\text{s}$ et la valeur du coefficient de tension superficielle qu'on vient d'estimer est

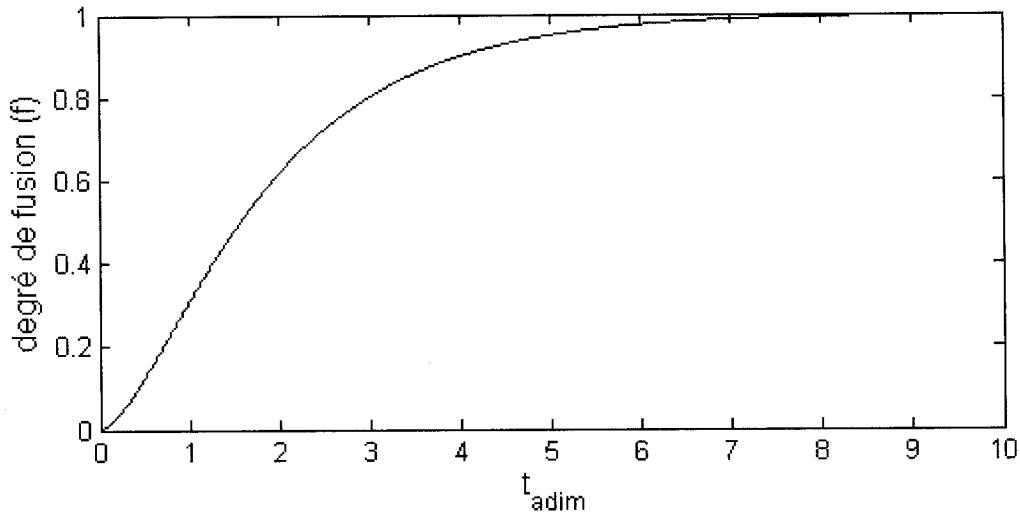


FIG. 2.14 Variation du degré de fusion en fonction du temps adimensionnel $t = \frac{t_r \gamma}{\mu r_{\text{fibre}}}$ pour un coupleur symétrique.

$\gamma = 0,26 \text{ N/m}$. En évaluant numériquement l'intégrale en (2.32), nous obtenons $\mu = 1,1 \cdot 10^5 \text{ Pas}$. Comparons cette valeur avec la viscosité de la silice pure à $T = 1700^\circ\text{C}$ qui selon la formule (2.1) est $\mu = 7,6 \cdot 10^6 \text{ Pas}$. On conclut que la viscosité de la fibre SMF-28 est beaucoup plus basse que celle de la silice pure. Nous attribuons cette différence à la présence du germanium, mais aussi aux ions OH insérés par la flamme. Nous mesurons une viscosité moyenne parce que même si la température est constante, c'est-à-dire la distance torche-fibres ne change pas, la quantité des ions OH insérés dans le verre augmente avec le temps et en conséquence la viscosité diminue avec le temps.

2.4.2 Méthode des différences finies

La méthode classique permettant l'obtention d'expressions aux différences finies repose sur la combinaison de divers développements en série de Taylor. Ce mécanisme est général et il permet la construction d'un nombre varié de formules. Par exemple, les développements en avant et en arrière autour d'un point i , pour

une fonction $y(x)$, s'écrivent comme

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{dy}{dx} \Delta x + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{\Delta x^2}{2} + O(\Delta x^2) \\ y_{i-1} &= y_i - \frac{dy}{dx} \Delta x + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{\Delta x^2}{2} + O(\Delta x^2). \end{aligned} \quad (2.33)$$

À partir de ces séries, il est possible de déduire différentes formules qui donnent des approximations pour les dérivées

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Considérons maintenant la discrétisation de l'équation de convection-diffusion qui, en coordonnées cartésiennes, prend la forme

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial c}{\partial x} - v \frac{\partial c}{\partial y}. \quad (2.35)$$

Elle est constituée d'une dérivée partielle par rapport à la variable temporelle et des dérivées partielles par rapport à la variable spatiale. Pour faire une discrétisation de la section droite, nous allons construire un maillage uniforme avec un pas constant $\Delta x = \Delta y = h$. Si l'indice i est utilisé pour noter les nœuds en direction de l'axe x et j en direction de l'axe y le schéma explicite en différences finies est donné par

$$\begin{aligned} \frac{c_{i,j}(t + \Delta t) - c_{i,j}(t)}{\Delta t} &= D \left(\frac{c_{i+1,j}(t) + c_{i-1,j}(t) + c_{i,j+1}(t) + c_{i,j-1}(t) - 4c_{i,j}(t)}{h^2} \right) \\ &\quad - u_{i,j}(t) \frac{c_{i+1,j}(t) - c_{i-1,j}(t)}{2h} - v_{i,j}(t) \frac{c_{i,j+1}(t) - c_{i,j-1}(t)}{2h} + O(\Delta t) + O(h^2). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Ici nous avons utilisé les relations (2.34). C'est un schéma en amont en temps et centré en espace. On remarque que la valeur de la concentration c à un point i, j à l'instant $t + \Delta t$, $c_{i,j}(t + \Delta t)$ s'obtient de façon explicite à partir des valeurs de la concentration et de la vitesse à l'instant t , d'où le nom : schéma explicite. La

condition initiale est la distribution connue de la concentration du dopant dans les cœurs des fibres non-chauffées tel que montré à la figure 2.11.

Le temps de fusion et la valeur du coefficient de diffusion sont tels que le dopant n'arrive pas jusqu'à l'interface extérieure du coupleur. En effet, nos calculs ont montré que le domaine affecté ne dépasse même pas le carré $4d \times 4d$ où d est le diamètre initial du cœur de la fibre. Donc nous avons effectué nos calculs seulement dans ce domaine centré toujours au centre du cœur et nous avons considéré une condition à la limite $c = 0$. Si le dopant avait atteint les frontières, cette condition ferait agir les frontières comme des miroirs pour le dopant et la solution serait erronée. Nous faisons donc attention de vérifier que la valeur de concentration est bien zéro près de la frontière en tout temps.

2.4.3 Analyse de la stabilité

Nous voyons que l'erreur de ce schéma est de premier ordre en temps et de deuxième ordre en espace. Le domaine des calculs est discréteisé par un maillage de 401×401 noeuds, ce qui correspond à un pas $h = 0,09 \mu\text{m}$. Mais ce n'est pas seulement l'erreur que l'on doit prendre en compte dans un schéma en différences finies. La stabilité du schéma impose des conditions supplémentaires. Pour tout schéma en différences finies, il faut faire une analyse de stabilité, parce que, même si en diminuant le pas du maillage l'erreur dans la discréteisation des équations diminue, l'erreur dans la solution elle-même pourrait augmenter de façon exponentielle. La méthode d'analyse la plus répandue et la plus précise est celle de von Neumann.

Les détails de l'analyse de von Neumann peuvent se trouver dans les références [40, 41]. Nous montrons ici seulement l'application à notre schéma. Considérons l'expression

$$c_{i,j}^n = \xi^n e^{I(i\theta_x + j\theta_y)} \quad (2.37)$$

où l'indice n est utilisé pour la discréteisation temporelle $t = n\Delta t$, i et j sont les indices de discréteisation en x et y , $I = \sqrt{-1}$ et θ_x, θ_y prennent des valeurs arbitraires dans $[-\pi, \pi]$. L'idée est maintenant de remplacer cette expression dans

notre schéma (2.36) et de demander que $|\xi| \leq 1$ pour tout (θ_x, θ_y)

$$\frac{c_{i,j}^{n+1} - c_{i,j}^n}{\Delta t} = D \left(\frac{c_{i+1,j}^n + c_{i-1,j}^n + c_{i,j+1}^n + c_{i,j-1}^n - 4c_{i,j}^n}{h^2} \right) - u \frac{c_{i+1,j}^n - c_{i-1,j}^n}{2h} - v \frac{c_{i,j+1}^n - c_{i,j-1}^n}{2h}. \quad (2.38)$$

En effectuant les calculs, nous obtenons

$$\xi = \alpha(\cos \theta_x - 1) + \alpha(\cos \theta_y - 1) + 1 + I(\beta_x \sin \theta_x + \beta_y \sin \theta_y) \quad (2.39)$$

avec $\alpha = 2D\Delta t/h^2$, $\beta_x = u\Delta t/h$ et $\beta_y = v\Delta t/h$. À partir de l'expression de $|\xi|^2$ et en considérant les deux cas extrêmes : $\theta_x = \theta_y = \pi$ et $\theta_x = \theta_y \rightarrow 0$, on peut montrer que la condition de stabilité de notre schéma $|\xi| \leq 1$ se vérifie seulement si les relations suivantes sont vérifiées

$$\begin{aligned} \Delta t &\leq \frac{h^2}{4D} \\ \Delta t &\leq \frac{2D}{u^2 + v^2}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Nous avons inséré ces conditions dans notre programme afin d'assurer que le pas Δt prenne la valeur la plus petite des valeurs en (2.40). Pour s'assurer d'une petite erreur, nous avons ajouté en plus la condition : $\Delta t \leq 0,1s$.

Nous remarquons à la deuxième condition en (2.40), que c'est la présence de diffusion qui rend ce schéma stable. Pour $D = 0$, c'est-à-dire dans le cas d'une convection seulement, le schéma explicite centré en espace est instable pour n'importe quelle valeur de Δt . Mais, dans les cas que nous avons calculé, le rapport vitesse-diffusion était tel que la deuxième condition était la moins restrictive de toutes.

Notre critère de sélection du schéma en différences finies a été de choisir le schéma le plus simple qui donne des résultats corrects. Les schémas implicites sont en général stables pour tout Δt , mais une équation matricielle doit être résolue à chaque pas de temps.

2.4.4 Comparaison avec des mesures expérimentales

L'application de la méthode en différences finies décrite à la section précédente nous permet de résoudre l'équation de convection-diffusion et d'obtenir l'évolution du profil de concentration, ou de façon équivalente celui du profil d'indice, durant la fusion des coupleurs. Dans cette section nous allons montrer les résultats de ces calculs et les comparer avec des mesures expérimentales, afin de vérifier la validité de notre modèle.

Considérons de nouveau la recette expérimentale décrite à la section 2.3.2 : La micro-torche s'approche à une distance de 4 mm des fibres et la flamme est balayée sur une zone de 10 mm avec une vitesse de 2 mm/s. La durée de fusion est de 30 s. Dans ce cas, nous avons calculé le coefficient de diffusion $D = 1,51 \cdot 10^{-14} \text{m}^2/\text{s}$, la viscosité $\mu = 1,1 \cdot 10^5 \text{ Pa s}$ et le coefficient de tension superficielle $\gamma = 0,26 \text{ N/m}$. Le profil initial de la concentration du dopant est celui montré à la figure 2.11. Le degré de fusion final est $f = 0,36$ dans ce cas.

Après la fusion, nous avons clivé le coupleur et nous avons effectué une mesure du profil de concentration. Nous avons aussi photographié la section droite en illuminant les bouts des fibres avec une source blanche. À la figure 2.15, nous montrons les résultats de nos calculs, la mesure du profil de concentration, la photo de la section droite et des superpositions. On remarque une très bonne correspondance entre le modèle théorique et l'expérience. Tous les aspects de section droite, l'interface extérieure, la position des cœurs ainsi que leur forme détaillée sont très bien décrits par le modèle.

Nous avons appliqué la même recette mais avec des durées de fusion plus élevées ; $t = 51,5 \text{ s}$ et $t = 114,5 \text{ s}$. Les degrés de fusion obtenus dans ces cas sont : $f = 0,6$ et $f = 0,92$. Ces coupleurs sont ensuite clivés et seulement une photo de la section droite a été prise. Aux figures 2.16 et 2.17, nous montrons les résultats de notre modèle, la photo ainsi que leur superposition. On remarque de nouveau une très bonne correspondance entre les simulations et les observations expérimentales.

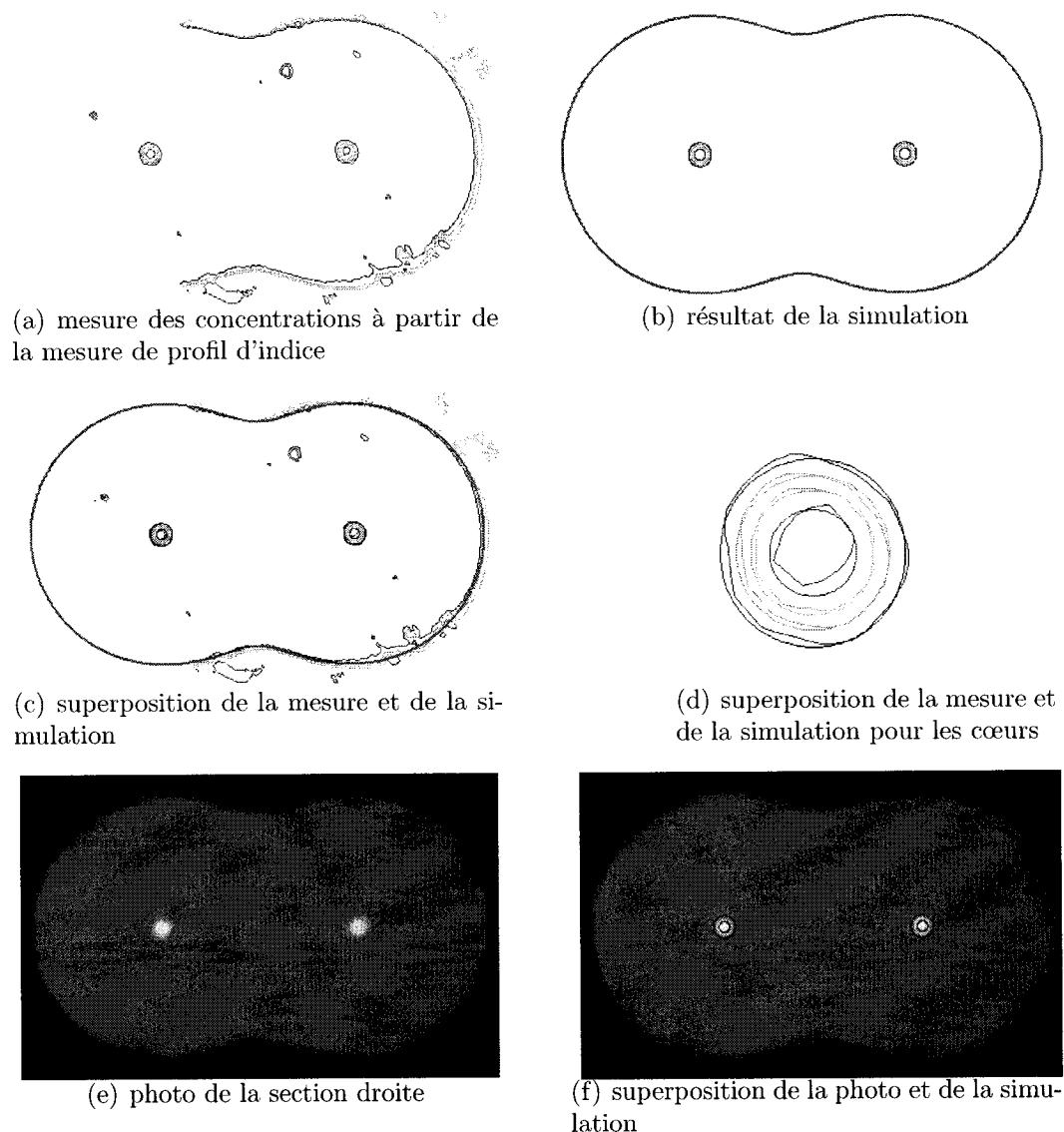


FIG. 2.15 Comparaison des mesures avec la simulation pour la section droite à $f = 0.36$, les niveaux de concentration sont à : 0,5, 1,5, 2,6 et 3,3% en moles

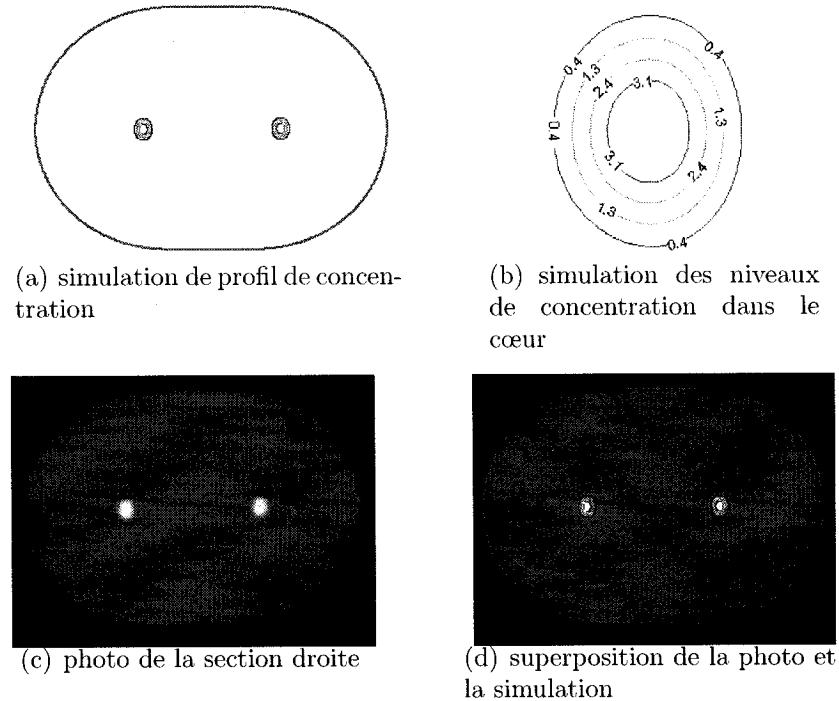


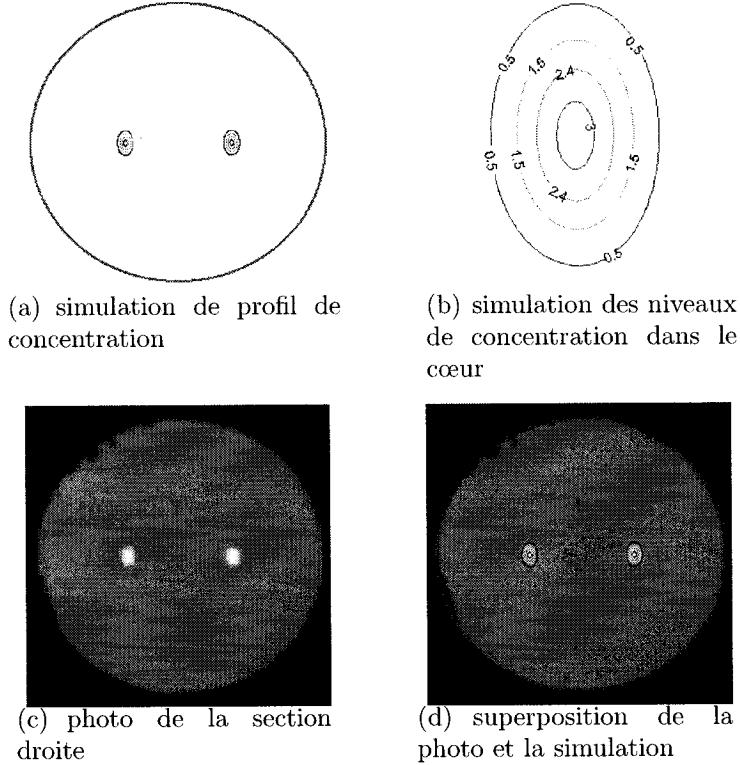
FIG. 2.16 Comparaison de la photo expérimentale avec la simulation pour la section droite à $f = 0,6$

2.4.5 Effets de la température

La température est le seul paramètre de contrôle durant la fusion des coupleurs. Il serait très utile alors de faire une investigation de ses effets dans la fusion des coupleurs. Comme nous l'avons déjà mentionné, nous ne sommes pas en mesure de déterminer la température exacte du coupleur durant la fusion à cause du fait que nous utilisons une flamme de micro-torche comme source de chaleur. Alors nous nous limitons à une description qualitative des effets de la température.

C'est par l'intermédiaire de la viscosité μ , le coefficient de tension superficielle γ et le coefficient de diffusion D que la température affecte la fusion. Nous avons montré comment on peut évaluer ces paramètres en pratique même si on ne connaît pas avec exactitude à quelle température on fait cette évaluation.

Considérons d'abord le temps de fusion. À partir de la relation (2.32), nous voyons que le temps de fusion est directement proportionnel au rapport μ/γ . La



taux et leur produit reste constant. Dans notre cas, si la distance entre la torche et les fibres passe de $4mm$ à $7mm$ le temps de fusion se multiplie par dix, mais le coefficient de diffusion diminue avec la même proportion et le profil de la section droite est pareil à la fin de la fusion.

Si nous considérons la loi de Arrhenius (2.26), avec n'importe quelles valeurs de D_0 et Q données dans la littérature, et si nous comparons cette dépendance avec celle de la viscosité de la silice pure (2.1), on s'attendrait à une diminution du coefficient de diffusion adimensionnel avec l'augmentation de la température. Dans ce cas, si on augmentait la température de fusion, on observerait moins de diffusion du dopant à un degré de fusion donné. Nous attribuons cette différente dépendance en température du coefficient de diffusion adimensionnel à la viscosité des fibres qui est différente de celle de la silice pure à cause de la présence du germanium et du fait que le coupleur a été chauffé avec une flamme de propane qui modifie les propriétés du verre en insérant des ions OH.

CHAPITRE 3

ÉTIRAGE DES COUPLEURS

Le principe de base pour créer le couplage dans les coupleurs fusionnés est de réduire la dimension des cœurs en effilant la structure fusionnée de façon à ce qu'ils ne guident plus efficacement la lumière. On observe alors, si les pentes de la structure effilée ne sont pas trop abruptes, un échange de puissance périodique en fonction de l'allongement entre les deux fibres à la sortie de la structure effilée.

Pour créer cette structure effilée, il faut chauffer un coupleur qui a été préalablement fusionné, ou deux fibres mises l'une à côté de l'autre, et étirer les bouts des fibres en appliquant une tension. L'étirage du coupleur est réalisé à l'aide du montage décrit au premier chapitre. Une flamme au propane est utilisée pour chauffer le coupleur et les bouts des fibres sont étirés par deux moteurs à vitesse constante. La structure finale du coupleur dépend de plusieurs paramètres tels que la distribution axiale de la température durant l'étirage, la vitesse avec laquelle il a été étiré et la durée du processus.

Dans ce chapitre nous construisons un modèle qui décrit l'évolution de la structure du coupleur durant l'étirage. Pour que le modèle soit réaliste, il faut tenir compte du déplacement du matériau durant l'étirage et la diffusion des dopants. Donc, comme c'était le cas pour la fusion, nous allons résoudre les équations de Stokes et l'équation de convection-diffusion. La solution des équations de Stokes nous permet d'obtenir l'évolution de l'interface extérieure et de calculer le champ de vitesse. La solution de l'équation de convection-diffusion nous donne l'évolution du profil de concentration du dopant ou de façon équivalente celui du profil d'indice.

Une difficulté majeure s'impose dans ce cas : les équations sont tridimensionnelles ce qui rend les calculs numériques beaucoup plus compliqués. Nous sommes obligés de considérer les équations en 3D parce que l'étirage du coupleur ne se fait pas de façon homothétique, c'est-à-dire la section droite évolue elle aussi durant l'étirage et cette évolution est différente d'un point à l'autre sur l'axe du coupleur. Il y a donc un lien entre la fusion et l'effilage de la structure du coupleur.

Les modèles d'étirage décrits dans la littérature sont presque tous unidimensionnels et ils tiennent compte seulement de la conservation de la matière. La section droite est considérée inchangée et le profil longitudinal est déterminé de façon empirique.

Bures [1] et Burns [7] proposent un profil longitudinal parabolique alors qu'Eisenmann [8] et Tekippe [9] ont choisi un profil exponentiel. Une amélioration du modèle exponentiel a été faite par Birks [10] en considérant une variation de la largeur de la flamme en fonction d'elongation. Gonthier [5] propose un modèle où l'allongement local est proportionnel à la valeur de la température, qui est modélisée par une gaussienne, et inversement proportionnel à la surface de la section droite. Daxhelet [12] a remplacé la forme gaussienne de la température par une fonction qui amène à des profils ayant une partie centrale uniforme.

Farget [11] propose un modèle plus réaliste où la section droite évolue durant l'étirage en fonction de la distribution de la température. Pour obtenir cette évolution, il a utilisé le modèle de fusion de Gonthier [5] et les résultats de Frenkel [22]. Le profil longitudinal est obtenu à l'aide d'un modèle simple unidimensionnel semblable à celui de Gonthier.

Cummings [42] a été la première à étudier l'étirage d'une structure visqueuse avec des effets de tension superficielle non négligeables en utilisant les équations de la mécanique des fluides. Ce problème a été considéré aussi par Dewynne [43–45] mais sans tension superficielle. Les équations d'écoulement sont simplifiées en faisant un développement asymptotique en puissance du paramètre de minceur qui est représenté par un rapport typique entre les dimensions transversales et longitudinales. Seuls les termes de premier ordre sont retenus dans ce développement. Cela permet d'obtenir des équations plus simples qu'on peut résoudre numériquement.

En considérant un problème plus général, les équations de Navier-Stokes au lieu des équations de Stokes et incluant les effets de la force de gravité, Cummings s'est limitée à déterminer les équations qui gèrent l'évolution de l'interface extérieure d'un coupleur sans les résoudre, et cela pour une distribution uniforme de la température. De plus les équations sont obtenues en effectuant une analyse mathématique compliquée.

Pour construire notre modèle, nous procédons comme Cummings en simplifiant les équations de Stokes par un développement asymptotique. Mais, à la section 3.1, pour dériver les équations, au lieu d'effectuer une analyse mathématique, nous nous basons sur des arguments physiques simples tels que l'équilibre des forces axiales et la conservation de la masse. De plus, nous considérons une distribution variable de la température sur l'axe du coupleur. Nous négligeons par contre les effets d'inertie (équations de Stokes au lieu de Navier-Stokes) et la force de gravité. Une fois les équations obtenues, à la section 3.3.1, nous les résolvons numériquement pour obtenir l'évolution de l'interface extérieure et le champ de vitesse interne. De plus, simultanément avec les équations de Stokes, nous résolvons l'équation de convection-diffusion pour obtenir l'évolution du profil de la concentration du dopant. Enfin, à la section 3.3.2, les résultats numériques sont comparés avec des mesures expérimentales.

3.1 Équations d'étirage

3.1.1 Hypothèses de départ

Au chapitre précédent, nous avons considéré une température constante dans la section droite du coupleur. La conduction thermique maintient une température uniforme dans la section droite des fibres optiques où les dimensions transversales sont assez réduites. Cette hypothèse est aussi valable pour l'étirage des coupleurs.

Par contre, la température est considérée variable selon l'axe du coupleur. Une autre hypothèse que nous faisons est que cette distribution de la température est considérée inchangée au cours du temps, ce qui veut dire que la distribution de la température est calculée par un modèle de transfert de chaleur non couplé avec l'écoulement de verre. Cette supposition est vraie dans le cas où les pertes de chaleur par radiation dominent la conduction et la convection.

En effet, selon les calculs effectués par Williamson [46], les pertes de chaleur par la radiation sont environ d'un ordre de grandeur plus élevées que les contributions de la conduction et de la convection, pour les fibres optiques à une température où on peut les étirer. Donc, notre hypothèse est justifiée.

Il s'ensuit que les paramètres qui dépendent de la température (la viscosité, le coefficient de diffusion et celui de tension superficielle) sont constants sur une section droite et leur valeur dépend seulement de la position axiale de la section droite.

Comme au chapitre précédent, le verre fondu est considéré comme un fluide newtonien et les forces d'inertie et de gravité négligeables. Donc, l'écoulement est géré par les équations de Stokes (1.10) et (1.3). Enfin, l'indice de réfraction est considéré comme une fonction linéaire de la concentration du dopant.

3.1.2 Évolution de la section droite

Considérons la partie du coupleur que nous allons étirer. On associe à cette structure un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) dont l'axe des z correspond avec l'axe du coupleur. La section droite du coupleur est alors dans le plan (x, y) . Les composantes de la vitesse dans ce système sont notées (u, v, w) . Le tenseur des contraintes (1.4) dans ce cas prend la forme

$$\bar{\tau} = \begin{pmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

où p est la pression et μ la viscosité.

Nous allons maintenant passer aux variables adimensionnelles en considérant un paramètre de minceur défini par

$$\epsilon = \frac{R_0}{L_0} \quad (3.2)$$

où R_0 est une dimension typique de la section droite et L_0 une dimension typique de la longueur du coupleur. Par exemple, pour un coupleur typique à fibres SMF-28 on peut considérer $R_0 = 100\mu\text{m}$ et $L_0 = 4\text{cm}$ ce qui donne $\epsilon = 0,0025$.

Nous passons aux variables adimensionnelles et ajustons en même temps leur

échelle de la façon suivante

$$\begin{aligned} (x^*, y^*, z^*) &= L_0(\epsilon x, \epsilon y, z), \quad t^* = \frac{L_0}{W}t, \quad \mu^* = M\mu, \quad \gamma^* = \epsilon MW\gamma \\ (u^*, v^*, w^*) &= W(\epsilon u, \epsilon v, w), \quad p^* = \frac{MW}{L_0}p, \quad \kappa^* = \frac{1}{\epsilon L_0}\kappa, \quad \bar{\tau}^* = \frac{MW}{L_0}\bar{\tau} \end{aligned} \quad (3.3)$$

où l'astérisque est utilisé pour noter les variables réelles, W est une vitesse typique d'étirage (celle des moteurs) et M une valeur typique de la viscosité. On rappelle aussi que γ représente le coefficient de tension superficielle et κ la courbure de la surface libre. Avec cette ajustement de l'échelle, l'ordre de toutes les variables est $O(1)$.

Remplaçant ces variables adimensionnelles dans (3.1) nous obtenons cette forme pour le tenseur des contraintes adimensionnel

$$\bar{\tau} = \begin{pmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \mu \left(\epsilon \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \mu \left(\epsilon \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \mu \left(\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial w}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \mu \left(\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial w}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial v}{\partial z} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

On peut écrire le terme τ_{xz} sous la forme

$$\tau_{xz} = \mu \left(\epsilon^2 \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (3.5)$$

En négligeant le terme d'ordre ϵ^2 , ce qui veut dire qu'on retient seulement le terme de premier ordre dans une expansion en puissances de ϵ^2 , on obtient

$$\tau_{xz} = \mu \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (3.6)$$

En faisant la même chose avec d'autres termes, (3.4) devient

$$\bar{\bar{\tau}} = \begin{pmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \mu \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \mu \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \mu \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial w}{\partial x} & \mu \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial w}{\partial y} & -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Considérons la composante z de l'équation de Stokes (1.9). En tenant compte de la forme adimensionnelle de l'opérateur $\nabla(\frac{\partial}{\epsilon \partial x}, \frac{\partial}{\epsilon \partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ et le tenseur donné par (3.7), nous obtenons

$$\mu \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0. \quad (3.8)$$

En négligeant de nouveau les termes d'ordre ϵ^2 nous obtenons

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (3.9)$$

Considérons maintenant la composante z de la condition à la frontière (1.13) qui avec le tenseur des contraintes donné par (3.7) prend la forme

$$\mu \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial w}{\partial x} n_x + \frac{\partial w}{\partial y} n_y \right) + \left(-p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) n_z = -\gamma \kappa n_z \quad (3.10)$$

où n_x , n_y et n_z sont les composantes de la normale unitaire à la surface \vec{n} .

Nous considérons des coupleurs adiabatiques avec une pente qui varie doucement. De plus, nous considérons une géométrie mince caractérisé par le paramètre de minceur ϵ . Il en découle que n_z est de l'ordre $O(\epsilon)$ par rapport aux composantes transversales n_x et n_y . Utilisant ce fait et négligeant les termes d'ordre ϵ^2 dans (3.10), nous obtenons pour la composante z de la condition à la frontière

$$\frac{\partial w}{\partial x} n_x + \frac{\partial w}{\partial y} n_y = 0. \quad (3.11)$$

Donc, à la section droite du coupleur, la composante axiale de la vitesse w vérifie l'équation (3.9) avec la condition à la frontière (3.11). La solution de cette équation aux dérivées partielles est que w est constante sur une section droite

$$w = w(z, t). \quad (3.12)$$

C'est un résultat très important. On peut parler maintenant de la vitesse axiale d'une section droite. Le tenseur des contraintes devient maintenant

$$\bar{\tau} = \begin{pmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 \\ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Nous voyons que la partie transversale de ce tenseur est identique au tenseur bidimensionnel considéré au chapitre précédent. Mais, la situation à la section droite dans ce cas n'est pas identique à celle du chapitre précédent à cause de la relation de continuité tridimensionnelle

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial z} \neq 0. \quad (3.14)$$

Cette remarque est valable pour une section droite fixée en temps à une position donnée. Considérons maintenant un repère cartésien qui se déplace avec le liquide dans la direction axiale avec la vitesse $w(z, t)$. La vitesse axiale de la section droite associée à ce repère est $w = 0$ et l'équation de continuité pour cette section droite mobile est

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.15)$$

Dans ce cas, l'évolution de la section droite mobile est gérée par les mêmes lois que la fusion étudiée au chapitre précédent. Cependant, la situation n'est pas exactement identique. Durant l'étirage, la température de la section droite mobile n'est pas constante en temps parce qu'elle dépend de sa position axiale. En plus, la surface de la section droite change elle aussi, à cause de l'effilage de la structure. Mais, nous pouvons quand même utiliser le modèle de fusion du chapitre précédent,

pour un court intervalle dt , en considérant la température et la surface de la section droite constantes pour cet intervalle. Nous reviendrons plus tard sur cet argument quand nous décrirons la méthode numérique.

3.1.3 Conservation de la masse et l'équilibre des forces axiales

Dérivons maintenant l'équation de la conservation de la masse. Revenons au système de référence fixe et considérons un volume de contrôle limité par les sections droites avec les coordonnées axiales z et $z + dz$, comme montré à la figure 3.1.

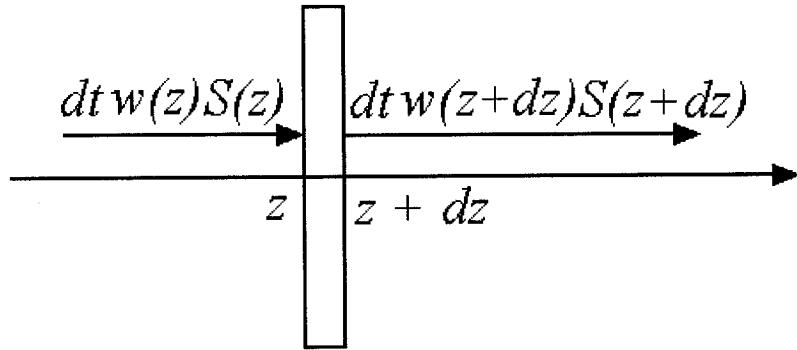


FIG. 3.1 Le volume de contrôle

Notons $S(z)$ la surface de la section droite au point z . Durant un court intervalle dt , la quantité de masse qui entre dans ce volume est $\rho dt w(z) S(z)$ et celle qui sort $\rho dt w(z + dz) S(z + dz)$ où ρ est la densité constante du liquide. Le changement total de la quantité de masse dans ce volume est $\rho S(t + dt) dz - \rho S(t) dz$ où $S = (S(z) + S(z + dz)) / 2$ est la valeur moyenne de la surface de la section droite. Il s'ensuit

$$dt w(z) S(z) - dt w(z + dz) S(z + dz) = S(t + dt) dz - S(t) dz. \quad (3.16)$$

En prenant la limite $dt, dz \rightarrow 0$ de la relation ci-dessus, on obtient facilement

$$\frac{\partial S(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial (w(z, t) S(z, t))}{\partial z} = 0. \quad (3.17)$$

C'est l'équation de la conservation de la masse.

Puisque nous considérons un écoulement de Stokes où l'inertie est négligeable, la tension axiale doit être constante dans le coupleur durant l'étirage. Donc, en tout point z sur l'axe du coupleur, on doit avoir

$$\iint_{S(z)} \tau_{zz} \, dS + T_{sz} = \text{constante} \quad (3.18)$$

où le premier terme est la contrainte axiale et T_{sz} est la composante axiale de la force de tension superficielle \vec{T}_s qui agit tout au long de la circonférence enfermant la section droite. En effet, la tension superficielle a un double rôle dans cette relation. À part le fait qu'elle a une composante axiale, la force de tension superficielle compresse la section droite en modifiant la pression, et en conséquence τ_{zz} . Pour comprendre ces effets, on peut imaginer que l'interface extérieure agit comme une membrane élastique étirée.

Pour calculer T_{sz} , il faut d'abord déterminer la direction de \vec{T}_s . Considérons une section droite $S(z)$ et un point de sa circonférence. Soit $\vec{n}(n_x, n_y, n_z)$ la normale unitaire de l'interface extérieure du coupleur et \vec{t} la tangente de la section droite en ce point. La direction de la force de tension superficielle est celle du vecteur $\vec{b} = \vec{n} \times \vec{t}$ qui est un vecteur tangent avec l'interface extérieure comme montré à la figure 3.2. L'angle entre \vec{b} et l'axe des z sera noté α et il est égal avec l'angle entre \vec{n} et la normale unitaire de la section droite $\hat{n}(n_x, n_y)$. Cet angle est petit à cause de la géométrie mince et de la variation lente de la pente. En effet, nous avons déjà considéré que $\sin \alpha = n_z = O(\epsilon)$.

Si nous notons par Γ la circonférence de la section droite, la composante axiale de la force de tension superficielle est donnée par

$$T_{sz} = \oint_{\Gamma} \gamma \cos \alpha \, ds. \quad (3.19)$$

Vu que pour des petits angles $\cos \alpha \simeq 1 - \sin^2 \alpha / 2$ et en négligeant le terme d'ordre $O(\epsilon^2)$, la force de tension superficielle prend la forme simple

$$T_{sz} = \gamma \Gamma. \quad (3.20)$$

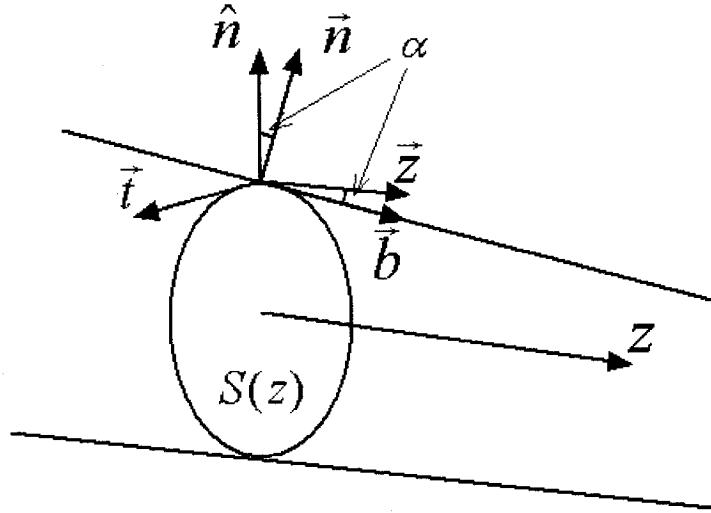


FIG. 3.2 Direction de la force de tension superficielle

Nous avons utilisé ici le fait que le coefficient de tension superficielle est constant pour une section droite donnée.

Considérons maintenant la contrainte axiale donnée par l'intégrale de surface en (3.18). Les composantes x et y de l'équation de Stokes (1.9) avec le tenseur des contraintes donné par (3.13) prennent la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[-p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Comme nous le faisons à l'annexe II, à partir de ces relations, on peut introduire une fonction de contrainte ou d'Airy A telle que

$$\begin{aligned} -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \\ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \\ -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

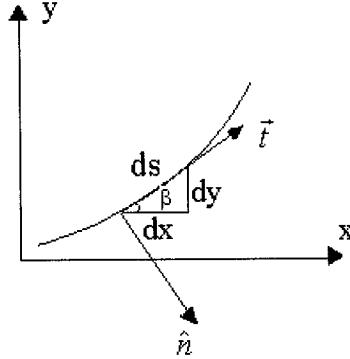


FIG. 3.3 Frontière de section droite

Remplaçant ces relations dans la condition de frontière (1.13) nous obtenons

$$\begin{aligned} n_x \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - n_y \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} &= -\gamma \kappa n_x \\ -n_x \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} + n_y \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} &= -\gamma \kappa n_y. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ces relations sont valables seulement à la frontière. À ce point il faut faire une remarque. La courbure κ de l'interface extérieure du coupleur en un point donné pourrait être identifiée avec la courbure de la section droite à ce point si nous négligeons les termes d'ordre $O(\epsilon^2)$. On peut démontrer ça en considérant, comme toujours, la minceur de la géométrie.

Considérons maintenant la frontière de la section droite dont une partie est montrée à la figure 3.3. Si la longueur de cette courbe est caractérisée par un paramètre s on peut facilement démontrer ces relations

$$\begin{aligned} t_x &= \cos \beta = \frac{dx}{ds} = -n_y \\ t_y &= \sin \beta = \frac{dy}{ds} = n_x \\ \frac{dn_x}{ds} &= \cos \beta \frac{d\beta}{ds} = -n_y \kappa \\ \frac{dn_y}{ds} &= \sin \beta \frac{d\beta}{ds} = n_x \kappa. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Remplaçant les deux dernières relations ci-dessus dans l'équation (3.23) on ob-

tient

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \gamma n_x \right) &= 0 \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial A}{\partial y} + \gamma n_y \right) &= 0\end{aligned}\tag{3.25}$$

d'où il découle que $\hat{\nabla}A + \gamma\hat{n} = \text{constante}$ sur le contour, avec $\hat{\nabla}$ le gradient transversal. Sans perte de généralité, cette constante est considérée nulle et on obtient

$$\frac{\partial A}{\partial \hat{n}} = -\gamma\tag{3.26}$$

qui est une relation qui est valable à la frontière de la section droite. Maintenant, à partir des relations (3.22) et de l'équation de continuité (3.14) on peut déduire

$$p = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) - \mu \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{2} \hat{\nabla}^2 A - \mu \frac{\partial w}{\partial z}.\tag{3.27}$$

Avec cette équation pour la pression, l'intégrale de surface en (3.18) devient

$$\begin{aligned}\iint_{S(z)} \tau_{zz} dS &= \iint_S \left(-p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) dS = \frac{1}{2} \iint_S \hat{\nabla}A dS + 3\mu \frac{\partial w}{\partial z} S = \\ &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \frac{\partial A}{\partial \hat{n}} ds + 3\mu \frac{\partial w}{\partial z} S = -\frac{1}{2} \gamma \Gamma + 3\mu \frac{\partial w}{\partial z} S.\end{aligned}\tag{3.28}$$

Enfin, remplaçant (3.28) et (3.20) dans (3.18) on obtient l'équation de l'équilibre des forces axiales

$$3\mu \frac{\partial w}{\partial z} S + \frac{1}{2} \gamma \Gamma = \text{constante}.\tag{3.29}$$

Dans cette relation toutes les variables dépendent de z .

3.2 Évaluation des paramètres

On remarque que pour résoudre l'équation (3.29) ou l'équation de convection-diffusion en 3D nous devons connaître les distributions axiales $\mu(z)$, $\gamma(z)$ et $D(z)$. Ces fonctions, selon nos hypothèses de départ, sont considérées inchangées au cours

du temps et elles dépendent de la distribution de la température $T(z)$. En effet, il y a des fluctuations de ces paramètres en temps mais nous considérons leur valeur moyenne dans nos calculs. Le coupleur est chauffé en balayant la flamme de micro-torche et en conséquence il est très difficile de déterminer $T(z)$. De plus, la dépendance en température de ces paramètres n'est pas bien connue. Nous sommes donc obligés d'évaluer ces paramètres expérimentalement.

Pour concrétiser la démarche suivie, l'évaluation de la distribution axiale de nos paramètres est faite pour la recette d'étirage suivante.

Le coupleur est préalablement fusionné jusqu'à un degré de fusion $f = 0,36$ selon la recette décrite au chapitre précédent, ce qui veut dire que le profil de la section droite du coupleur avant l'étirage est celui montré à la figure 2.15. Après, on continue avec l'étirage. La micro-torche est balayée sur une zone de 3mm avec une vitesse de 2mm/s. La distance entre la micro-torche et les fibres est de 3mm. La vitesse des moteurs d'étirage est de 50 $\mu\text{m/s}$. La durée de l'étirage est de 30,5s.

L'étirage du coupleur est fait à une température plus élevée que la fusion parce que la distance torche-fibres est de 3mm pendant l'étirage contre les 4mm pour la fusion. En pratique, les coupleurs sont étirés à une température inférieure à celle de la fusion. Nous avons procédé de cette manière parce que nous voulons tester notre modèle dans un cas où il y a beaucoup de couplage entre l'effilage et la fusion. Ce chauffage à très haute température, comme nous le discutons un peu plus loin, entraîne d'autres conséquences.

3.2.1 Rapport viscosité-coefficient de tension superficielle

On écrit l'équation de l'équilibre des forces axiales (3.29) sous la forme

$$3\frac{\mu}{\gamma}\frac{\partial w}{\partial z}S + \frac{1}{2}\Gamma = \text{constante.} \quad (3.30)$$

Il est clair alors que, pour résoudre cette équation, c'est seulement de la valeur $\frac{\mu}{\gamma}(z)$ dont on a besoin à part les conditions initiales et aux frontières.

En effet, même pour d'autres équations comme celles de Stokes (1.10) et de

convection-diffusion (1.20) on peut faire une transformation de variables comme à (II.60) pour passer à des variables adimensionnelles. Dans ce cas, μ et γ disparaissent des équations. On doit connaître leur valeur pour évaluer le temps $t = t^* \frac{\gamma}{\mu R}$ et le coefficient de diffusion $D = \frac{D^* \mu}{\gamma R}$ (2.30). On remarque que c'est toujours sous la forme du rapport $\frac{\mu}{\gamma}$ que ces paramètres interviennent. Il s'ensuit qu'on doit évaluer seulement ce rapport pour résoudre nos équations.

Nous avons déjà montré au chapitre précédent comment ce rapport se détermine à partir du degré de fusion et de la durée de la fusion à l'aide de la relation (2.32). Nous allons appliquer la même technique pour évaluer $\frac{\mu}{\gamma}(z)$ dans notre cas aussi. Pour cette raison nous allons chauffer deux fibres mises l'une à côté de l'autre, conformément à la recette d'étirage décrite ci-dessus, mais sans les étirer. On obtient ainsi une distribution du degré de fusion sur l'axe z qu'on peut facilement mesurer. À partir de cette distribution et de la relation (2.32) on évalue $\frac{\mu}{\gamma}(z)$.

On peut faire une remarque à ce point. Vu que la flamme de propane modifie le matériau des fibres en les chauffant, la valeur de viscosité des fibres pour un coupleur qui a été pré-fusionné est différente de celle des fibres non chauffées à une température donnée. Nous devons donc chauffer les fibres individuelles de la même façon qu'on a chauffé le coupleur pour la fusion initiale. C'est seulement après ce chauffage initial qu'on fait leur fusion conformément à la recette d'étirage.

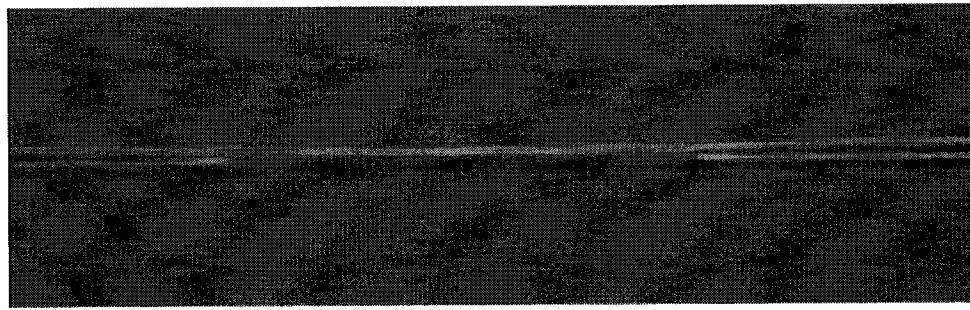


FIG. 3.4 Fusion de deux fibres non étirées

À la figure 3.4, nous montrons l'image de cette fusion des fibres. Cette image est obtenue à l'aide d'une caméra montée sur un microscope installé au dessus des fibres. Connaissant le diamètre de la fibre pour la partie qui n'est pas affectée par cette fusion $d = 125 \mu\text{m}$, il est facile d'associer à cette image une distribution axiale pour la largeur de la section droite comme celle montrée à la figure 3.5.

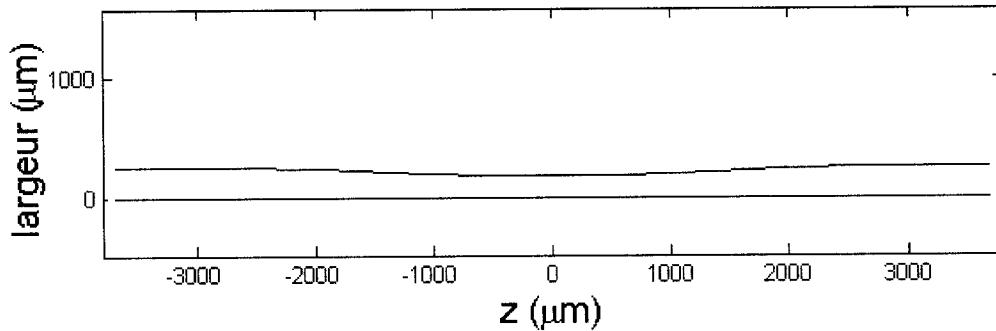


FIG. 3.5 Distribution axiale de la largeur de la section droite à la même échelle que la photo 3.4. L'incertitude relative est de 2%.

Nous avons déjà montré au chapitre précédent comment la largeur de la section droite est liée au degré de fusion par la relation (2.15). On peut alors déterminer, à partir de cette relation et la distribution de la largeur ci-dessus, la distribution axiale du degré de fusion $f(z)$ montrée à la figure 3.6.

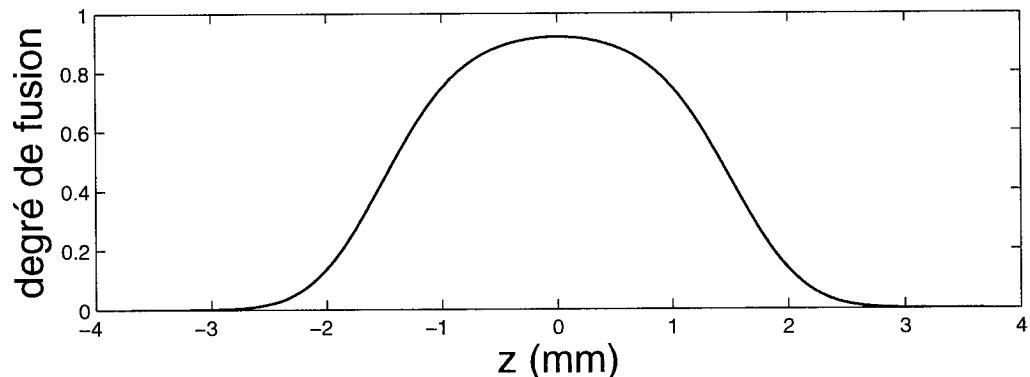


FIG. 3.6 Distribution axiale du degré de fusion. L'incertitude relative est de 2%.

Enfin, à partir de cette distribution pour le degré de fusion et à l'aide de la relation (2.32), on obtient la distribution $\frac{\mu}{\gamma}(z)$ montrée à la figure 3.7.

3.2.2 Coefficient de diffusion

Considérons maintenant l'évaluation de la distribution du coefficient de diffusion $D(z)$. Nous utilisons la même technique que celle décrite au chapitre précédent, en effectuant des mesures sur une seule fibre. La fibre est chauffée conformément à

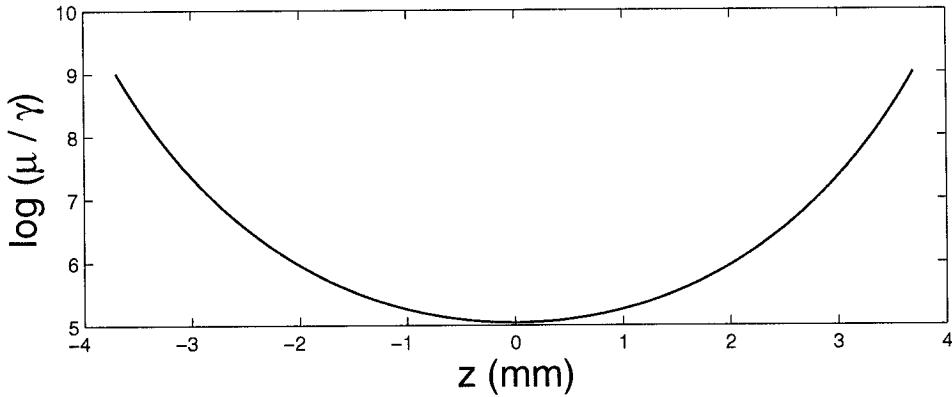


FIG. 3.7 Distribution axiale du rapport $\frac{u}{\gamma}(z)$

la recette d'étirage décrite ci-dessus mais sans appliquer d'étirage. Dans ce cas, la diffusion du dopant dans une section droite avec une coordonnée axiale z , dépend de la valeur $D(z)$ qu'on veut estimer et de la durée du chauffage.

Nous avons déjà montré au chapitre précédent comment on peut évaluer le coefficient de diffusion en comparant le profil réel de la concentration du dopant avec des profils calculés numériquement pour différentes valeurs du coefficient de diffusion. Les calculs numériques du profil de la concentration sur une section droite sont faits en considérant une diffusion bidimensionnelle. En effet, bien que nous ayons dans ce cas une variation axiale du coefficient de diffusion, ce qui amène à un processus de diffusion tridimensionnel, nous négligeons la diffusion en direction de z .

Nous devons donc cliver la fibre à plusieurs endroits sur son axe et évaluer le coefficient de diffusion pour chaque section droite pour construire $D(z)$. Vu que cette évaluation de la distribution $D(z)$ doit être faite pour chaque recette d'étirage qu'on veut modéliser, il convient de réduire le nombre de mesures le plus possible. Pour cette raison, nous faisons l'hypothèse d'une distribution gaussienne pour la température : $T = T_0 \exp\left(-\frac{z^2}{z_0^2}\right)$. En considérant la loi d'Arrhenius (2.26), on obtient une dépendance de la forme : $\ln D = a + b \exp\left(\frac{z^2}{z_0^2}\right)$ pour le coefficient de diffusion qui n'est pas une gaussienne. Dans ce cas, il suffit de mesurer le coefficient de diffusion à seulement trois endroits différents pour déterminer les coefficients a , b et z_0 en résolvant un système de trois équations.

Vu que pratiquement on ne peut pas cliver la même fibre plusieurs fois, nous avons chauffé trois fibres différentes dans les mêmes conditions et les avons clivées chacune à un seul endroit. Pour avoir une reproduction des mêmes conditions, nous effectuons toutes les mesures tout de suite après, ou juste avant, la fabrication du coupleur.

Pour évaluer correctement $D(z)$, nous devons déterminer avec exactitude à quel point z nous avons clivé la fibre. Mais, cette tâche s'avère difficile en pratique. Pour surmonter cette difficulté, un phénomène observé durant le chauffage des fibres et des coupleurs nous a aidé. Nous avons remarqué qu'à très haute température, ou pour de longues durées de chauffage, à cause de l'interaction entre la flamme de propane et le matériau des fibres, une petite partie du matériau s'évapore, résultant en un effilage de la structure chauffée, même quand il n'y a pas d'étirage. Comme nous le montrons plus loin, ce phénomène affecte seulement la partie extérieure des fibres ou des coupleurs.

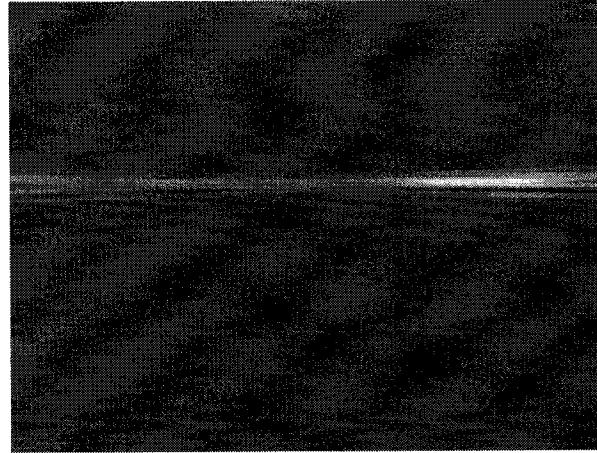


FIG. 3.8 Fibre chauffée pendant 45s à une distance de 3mm

Quand on chauffe la fibre selon la recette décrite ci-dessus, même si la température est très élevée, l'effilage de la fibre n'est pas visible. Mais, si on prolonge la durée de chauffage jusqu'à 45s tout en conservant les mêmes conditions de chauffage on obtient le profil longitudinal montré à la figure 3.8. Pour d'autres recettes d'étirage où la fibre est chauffée à des plus grandes distances fibre-torche, c'est-à-dire à des températures moins élevées, on observe ce même phénomène, mais, pour des durées de chauffage plus longues.

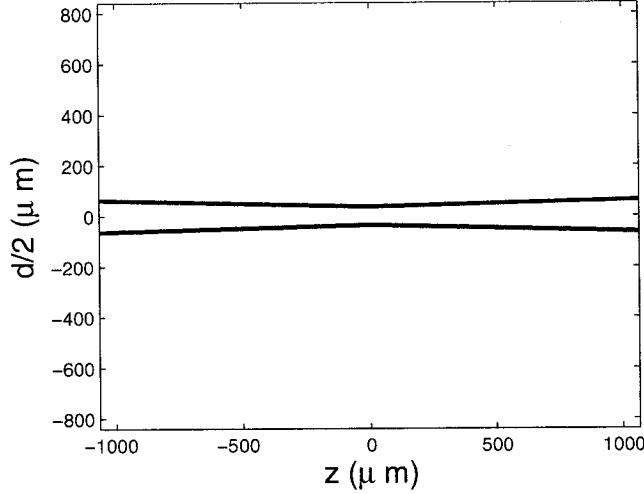


FIG. 3.9 Distribution de diamètre $d(z)$ à la même échelle que la photo 3.8. L'incertitude relative est de 2%.

Connaissant le diamètre $d = 125 \mu\text{m}$ de la fibre pour la partie qui n'est pas affectée par cet effilage, il est facile d'associer à cette image une distribution de diamètre $d(z)$ pour la structure effilée comme montré à la figure 3.9. Maintenant, si on clive cette fibre effilée, on est capable de mesurer le coefficient de diffusion, à la section droite où la clive a été faite, en procédant de la même manière qu'au chapitre précédent (section 2.3.2). De plus, à partir de la valeur du diamètre mesuré de la fibre et de la distribution $d(z)$, nous sommes aussi capables de déterminer avec exactitude la position sur l'axe z de cette section droite.

Nous montrons à la figure 3.10 les mesures du profil de concentration effectuées pour trois sections droites différentes où une fibre SMF-28, chauffée conformément à la recette d'étirage, a été clivée. Pour avoir une idée de combien la fibre est effilée et combien de diffusion il y en a dans ce cas, nous avons aussi montré le profil de la concentration initial de la fibre SMF-28.

À partir de la largeur des sections droites et de la distribution $d(z)$, nous avons estimé que la fibre est clivée au centre du coupleur $z = 0$, ainsi qu'à $z = 240 \mu\text{m}$ et $z = 940 \mu\text{m}$. En comparant ces profils avec des simulations numériques pour la diffusion du dopant comme au chapitre précédent, nous avons obtenu ces valeurs pour le coefficient de diffusion : $D = (1, 231 \pm 0, 002) \cdot 10^{-13} \text{m}^2/\text{s}$, $D = (1, 127 \pm 0, 002) \cdot 10^{-13} \text{m}^2/\text{s}$ et $D = (4, 15 \pm 0, 02) \cdot 10^{-14} \text{m}^2/\text{s}$ respectivement. En résolvant

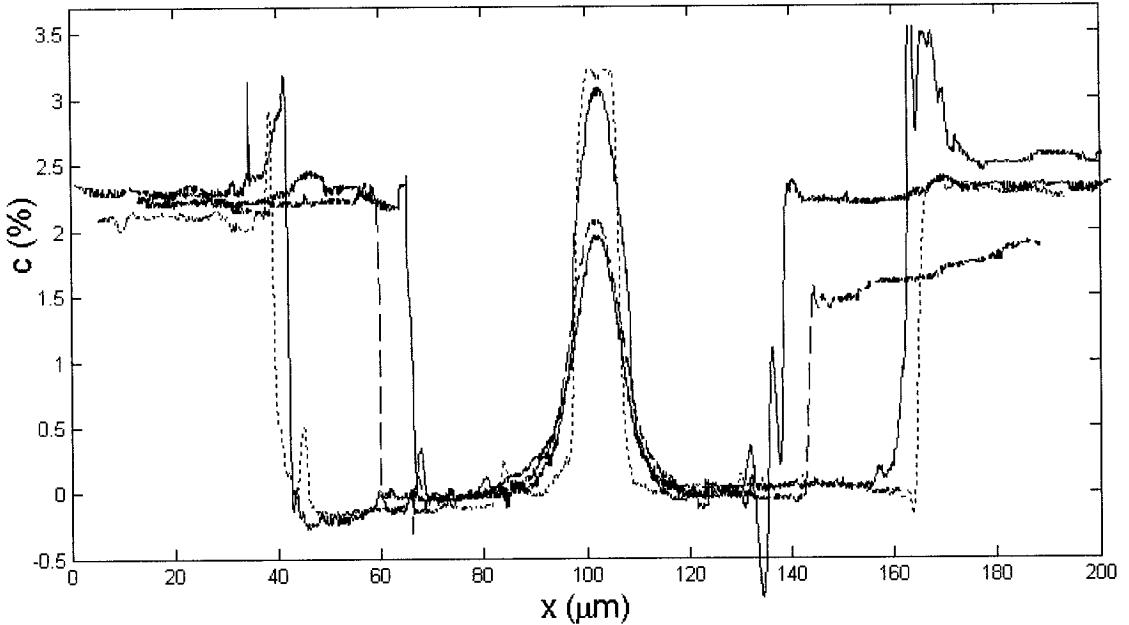


FIG. 3.10 Profils de concentration mesurés

le système de trois équations, on obtient $a = -29,04$, $b = 0,69$ et $z_0 = 705,4\mu\text{m}$. Avec ces valeurs on obtient la distribution présentée à la figure 3.11. À cause de la symétrie longitudinale, on montre seulement la moitié de notre coupleur.

3.3 Méthode numérique et comparaison avec des mesures expérimentales

Après l'évaluation des paramètres, nous considérons dans cette section la solution numérique des équations. Nous décrivons d'abord la méthode numérique utilisée pour obtenir l'évolution de la structure du coupleur durant l'étirage. Ensuite, nous allons présenter nos résultats numériques pour cette évolution et nous allons les comparer avec des mesures expérimentales.

3.3.1 Méthode numérique

Afin d'obtenir l'évolution de la structure du coupleur, nous devons résoudre simultanément les équations d'écoulement et de convection-diffusion. Puisque cette

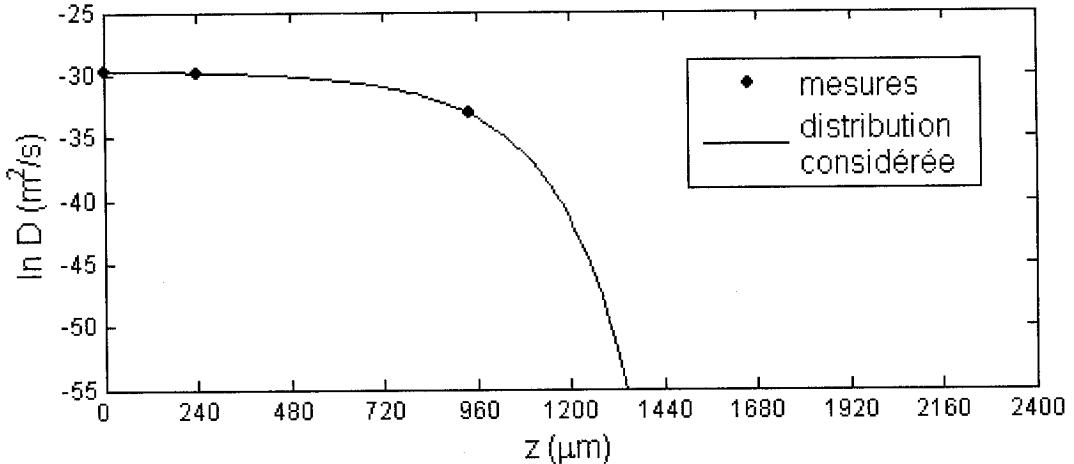


FIG. 3.11 Distribution $D(z)$ pour la moitié du coupleur

évolution est un couplage entre la fusion et l'effilage de la structure du coupleur, nous séparons le processus d'étirage en petits intervalles temporels dt durant lesquels la fusion et l'effilage sont considérés indépendants.

Nous avons déjà montré que la valeur de la vitesse axiale w dans une section droite est constante. Les sections droites se déplacent alors, au cours de l'étirage, avec une vitesse axiale $w(z)$. Nous avons montré en plus que l'écoulement dans la section droite mobile est géré par les mêmes équations que la fusion étudiée au chapitre précédent. Mais, puisque la section droite se déplace au cours de l'étirage, les valeurs de la viscosité μ , du coefficient de tension superficielle γ et du coefficient de diffusion D évoluent en temps conformément à la position axiale de la section droite. La surface de la section droite change elle aussi à cause de l'effilage de la structure.

Considérons de nouveau la recette d'étirage décrite à la section précédente. Nous présentons maintenant la méthode numérique appliquée à cette recette. Commençons par les calculs effectués au premier pas dt .

La structure initiale du coupleur, c'est-à-dire celle après la fusion $f = 0,36$ est connue. Donc, nous avons initialement une distribution uniforme de la surface de la section droite $S(z)$ et de la circonférence $\Gamma(z)$ connues. Il est facile de calculer la circonférence de la section droite à partir des équations paramétriques (2.13).

Nous avons donc tout ce qu'il faut pour résoudre l'équation (3.30) afin d'obtenir $w(z)$. Les conditions aux limites dans ce cas sont les vitesses constantes connues des moteurs d'étirage. Il est facile d'intégrer cette équation à l'aide d'une méthode en différences finies pour obtenir une solution discrète. En effet, si l'indice i est utilisé pour noter les nœuds du maillage unidimensionnel en direction de z , la forme discrète de l'équation (3.30) s'écrit

$$\frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2dz} = \frac{T_z - \frac{1}{2}\Gamma_i}{3\left(\frac{\mu}{\gamma}\right)_i S_i} + O(dz^2) \quad (3.31)$$

où dz est le pas du maillage et T_z la tension axiale constante. À cause de la symétrie longitudinale du coupleur, nous effectuons nos calculs seulement pour la moitié du coupleur. La valeur de la vitesse pour le premier nœud est $w_1 = 0$ et celle pour le dernier est $w_{N_d} = 50 \mu\text{m/s}$, qui est la vitesse des moteurs d'étirage. Si nous utilisons un nombre impair de nœuds N_d (de cette façon on peut utiliser la formule centrale en différences finies en chaque nœud) pour la discrétisation du maillage, en utilisant la relation (3.31), on trouve que ces deux vitesses vérifient aussi la relation

$$w_{N_d} = w_1 + T_z \left(\frac{2dz}{3} \sum_{i=1}^{(N_d-1)/2} \frac{1}{\left(\frac{\mu}{\gamma}\right)_{2i} S_{2i}} \right) - \frac{dz}{3} \sum_{i=1}^{(N_d-1)/2} \frac{\Gamma_{2i}}{\left(\frac{\mu}{\gamma}\right)_{2i} S_{2i}} \quad (3.32)$$

d'où on peut évaluer la tension axiale T_z . Ensuite, il est facile d'évaluer les vitesses w_i , l'une après l'autre, en utilisant la relation (3.31) sauf pour w_2 où le membre de gauche de (3.31) doit être remplacé par $\frac{w_2 - w_1}{dz}$.

Une fois $w(z)$ obtenue, on peut résoudre numériquement l'équation (3.17) pour obtenir la distribution $S(z)$ à la fin de l'intervalle dt . La forme discrète de cette équation est

$$\frac{S(z_i, t + dt) - S(z_i, t)}{dt} + \frac{w(z_{i+1}, t) S(z_{i+1}, t) - w(z_{i-1}, t) S(z_{i-1}, t)}{2dz} = 0. \quad (3.33)$$

On remarque qu'il est facile d'obtenir la distribution $S(z, t+dt)$ dans ce cas. L'erreur est de l'ordre $O(dt, dz^2)$. La solution de cette équation représente l'évolution de l'effilage du coupleur.

Considérons maintenant l'évolution des sections droites. Jusqu'à maintenant, les calculs ont été effectués pour un système de référence fixe, c'est-à-dire, notre maillage unidimensionnel est immobile. À partir de la distribution $w(z)$, en effectuant une interpolation, on peut déterminer les coordonnées z des sections droites qui vont se trouver aux noeuds du maillage à la fin de l'intervalle dt . On suit alors l'évolution de ces sections droites. En faisant une interpolation, on peut déterminer la structure de ces sections au début de l'intervalle dt . L'évolution de ces sections, y compris celle du champ de concentration, durant l'intervalle dt , est obtenue comme au chapitre précédent. Dans ce cas, il faut tenir compte de la valeur appropriée des $\frac{\mu}{\gamma}(z)$, $D(z)$ et $S(z)$.

L'évolution du profil de la concentration est obtenue donc, en résolvant l'équation bidimensionnelle de convection-diffusion dans le plan de la section droite. Nous avons donc négligé la diffusion d'une section droite à l'autre. Cela est justifié pour les coupleurs adiabatiques avec une variation lente du profil longitudinal.

Après avoir obtenu l'évolution de toutes les sections droites durant le pas dt , on peut évaluer la distribution $\Gamma(z)$ à la fin de l'intervalle dt . On peut alors passer au prochain pas dt et recommencer avec la solution de (3.30).

Considérons maintenant le couplage entre la fusion et l'effilage du coupleur. La fusion affecte l'effilage par l'intermédiaire du terme $\Gamma(z)$. La présence de ce terme, qui dépend du degré de fusion, dans l'équation (3.30) affecte la distribution $w(z)$ qui, de son côté, affecte l'équation de l'effilage (3.17). Sans ce terme, l'effilage du coupleur serait décrit par un modèle simple unidimensionnel : le système des équations (3.30) et (3.17).

L'effilage affecte la fusion par l'intermédiaire de la valeur $S(z)$. Plus cette valeur diminue, plus vite avance la fusion. Pour expliquer cet effet, il faut se rappeler les relations (2.5) où les rayons initiaux des fibres apparaissent. Ces rayons doivent être ajustés conformément à la valeur actuelle de S . En utilisant les variables adimensionnelles (II.60), on peut montrer que le temps pour arriver à un degré de fusion donné est proportionnel à la racine carré de la surface.

Enfin, l'erreur de la méthode numérique décrite dans cette section est de premier ordre en dt et de second ordre en dz et nous devons donc utiliser des petits pas, sur-

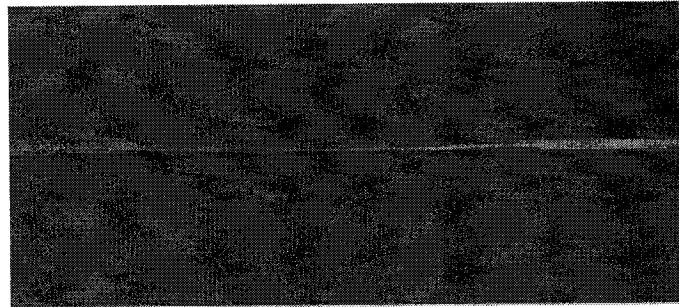


FIG. 3.12 Profil longitudinal du coupleur

tout en temps. L'erreur dépend aussi des dérivées par rapport à z et t de différentes variables. Ces dérivées sont très petites à cause d'une géométrie qui varie peu selon l'axe des z et un écoulement de Stokes lent, ce qui diminue considérablement l'erreur.

3.3.2 Comparaison avec des mesures expérimentales

Présentons maintenant les résultats obtenus par cette méthode pour la recette décrite au début de la section 3.2. Nous avons déjà montré comment les paramètres nécessaires pour la résolution des équations sont évalués dans ce cas. Pour valider la méthode, il faut comparer des résultats de simulations avec des mesures expérimentales.

Pour cette raison, nous avons fabriqué plusieurs coupleurs selon cette recette. Nous les avons ensuite clivés à différents endroits sur l'axe des z . Il a été nécessaire de fabriquer plusieurs coupleurs, parce que pratiquement on ne peut pas cliver un coupleur plus d'une fois sans l'endommager. Après, nous avons effectué des mesures de profil d'indice de réfraction, ou, de façon équivalente, de leur profil de concentration du dopant sur ces sections droites. Ces mesures en deux dimensions sont effectuées à l'aide du montage de profil d'indice décrit au chapitre précédent (section 2.3.1). Il faut noter que le clivage et la mesure du profil d'indice des coupleurs sont très délicats par rapport à celles d'une seule fibre, parce qu'ils se cassent facilement.

Pour présenter nos résultats, nous avons choisi de montrer le profil longitudinal de la largeur du coupleur, c'est-à-dire, l'axe majeur de la section droite. C'est

ce profil qu'on observe quand on voit le coupleur de dessus. À la figure 3.12 nous présentons ce profil pour un coupleur après l'étirage selon notre recette. Notons que la largeur de la section droite est affectée par l'effilage du coupleur et la progression simultanée de la fusion.

À part ce profil longitudinal, nous présentons aussi la distribution du degré de fusion pour montrer comment la fusion évolue au cours de l'étirage. Pour insérer les deux profils sur le même graphique, nous avons normalisé la largeur de la section droite par rapport à sa valeur maximale, c'est-à-dire $250 \mu\text{m}$. Enfin, à cause de la symétrie longitudinale, les résultats sont présentés seulement pour la moitié du coupleur. Les deux profils sont présentés à la figure 3.13.

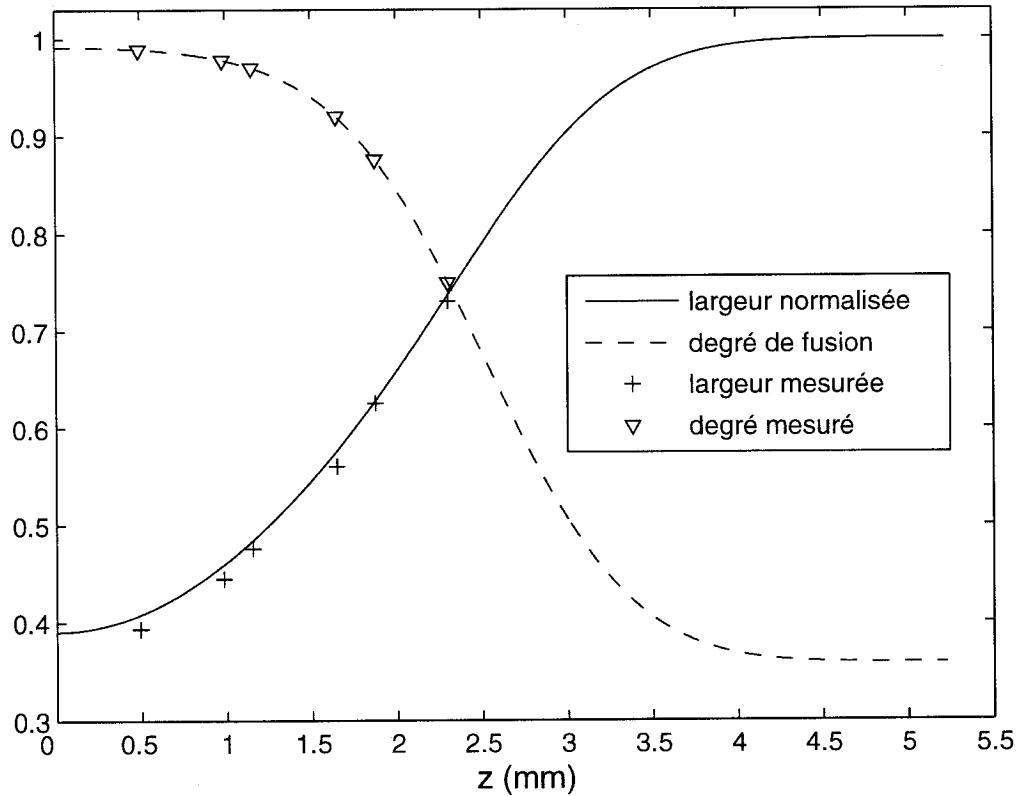


FIG. 3.13 Profil longitudinal normalisé par rapport à deux fibres non fusionnées et distribution du degré de fusion pour la moitié du coupleur

En plus de nos résultats numériques, nous avons présenté dans ce graphique les résultats de nos mesures effectuées à six sections droites différentes. Nous avons

rencontré dans ce cas le même problème que pour l'évaluation de la distribution $D(z)$, c'est-à-dire, celui de la détermination précise de la position axiale z de ces sections. La résolution de l'image à la figure 3.12 n'est pas suffisante dans ce cas pour construire une distribution expérimentale de la largeur du coupleur. Alors, la position z de ces sections est obtenue en faisant correspondre le degré de fusion mesuré avec la distribution $f(z)$ calculée. C'est alors la différence entre les largeurs mesurées et celles calculées qui indique la précision de notre modèle.

On remarque que cette différence est petite, ce qui prouve la validité de notre modèle. Nous observons aussi que cette différence est plus grande pour les sections qui sont plus près du centre du coupleur où la température est plus élevée. En effet, cette différence provient surtout de la perte du matériau situé à l'interface extérieure qui interagit avec la flamme de propane. On peut se convaincre de cet argument en observant les comparaisons détaillées, entre les mesures et les calculs du profil d'indice en 2D pour les six sections droites. Ces comparaisons sont présentées aux figures 3.14-3.19. Cette présentation est faite en ordre à partir de la section la plus proche du centre du coupleur.

On remarque dans ces comparaisons que la position et la forme des cœurs pour les profils d'indice calculés correspondent très bien avec celles mesurées. C'est surtout pour l'interface extérieure qu'on voit des différences, qui sont quand même petites. Pour chaque section, nous donnons la valeur du degré de fusion, la largeur mesurée et celle calculée, ainsi que les valeurs des niveaux de concentration. Il faut se rappeler que la concentration initiale de l'oxyde de germanium pour la fibre SMF-28 non-chauffée est de 3.4%. Donc, nous avons construit un modèle fiable qui nous permet d'étudier théoriquement l'influence des paramètres de fabrication.

3.4 Effets des paramètres de contrôle

Quand on conçoit une recette d'étirage, on choisit la façon de chauffer le coupleur, la vitesse d'étirage ainsi que sa durée. Il y a plusieurs paramètres pratiques qui déterminent la façon dont un coupleur est chauffé, tels que, la forme et l'intensité de la flamme contrôlée par la taille de la micro-torche et les débits de propane et d'oxygène, la distance entre la micro-torche et les fibres, la zone de balayage, la

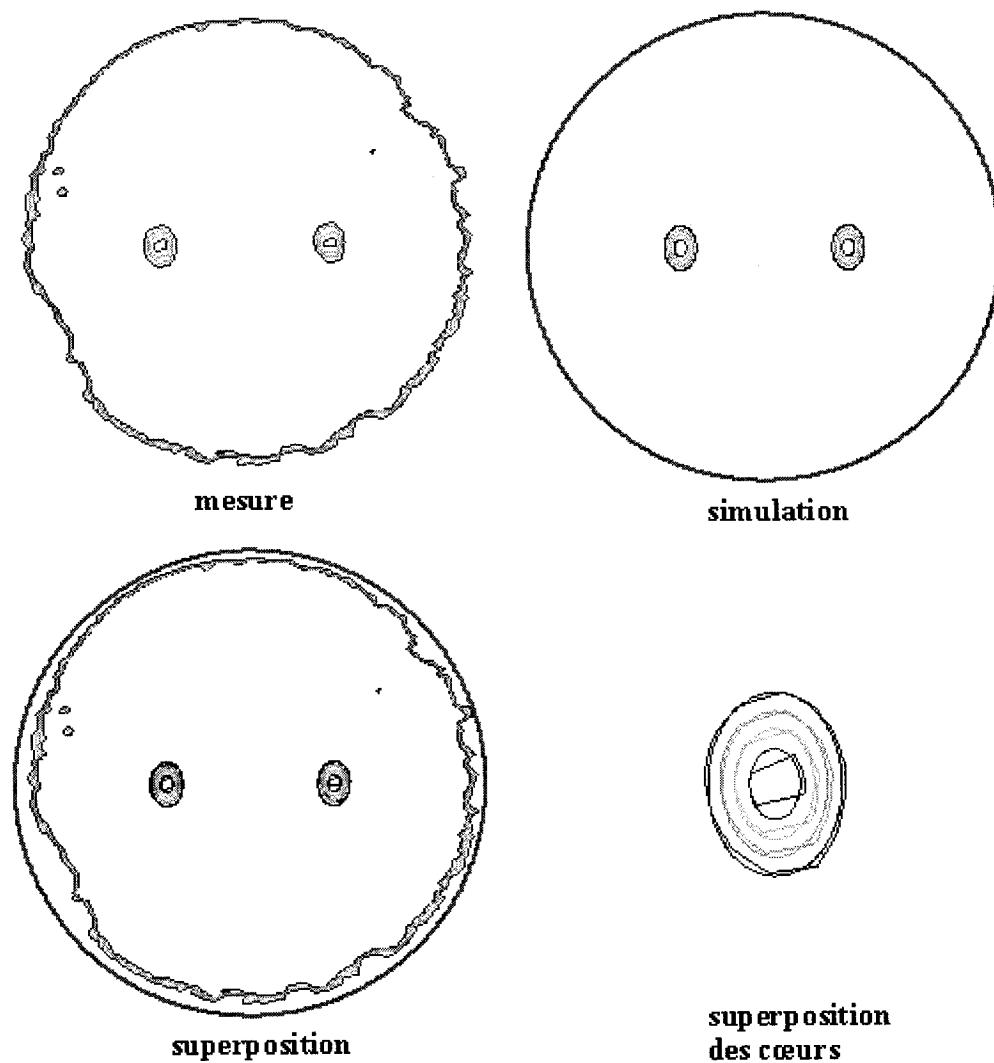


FIG. 3.14 Profil d'indice mesuré et calculé de la section droite : degré de fusion = 0,99, largeur mesurée = $88\mu\text{m}$, largeur calculée = $91,3\mu\text{m}$. Les niveaux de concentration sont à 0,5, 0,77, 1,03 et 1,3% (en moles)

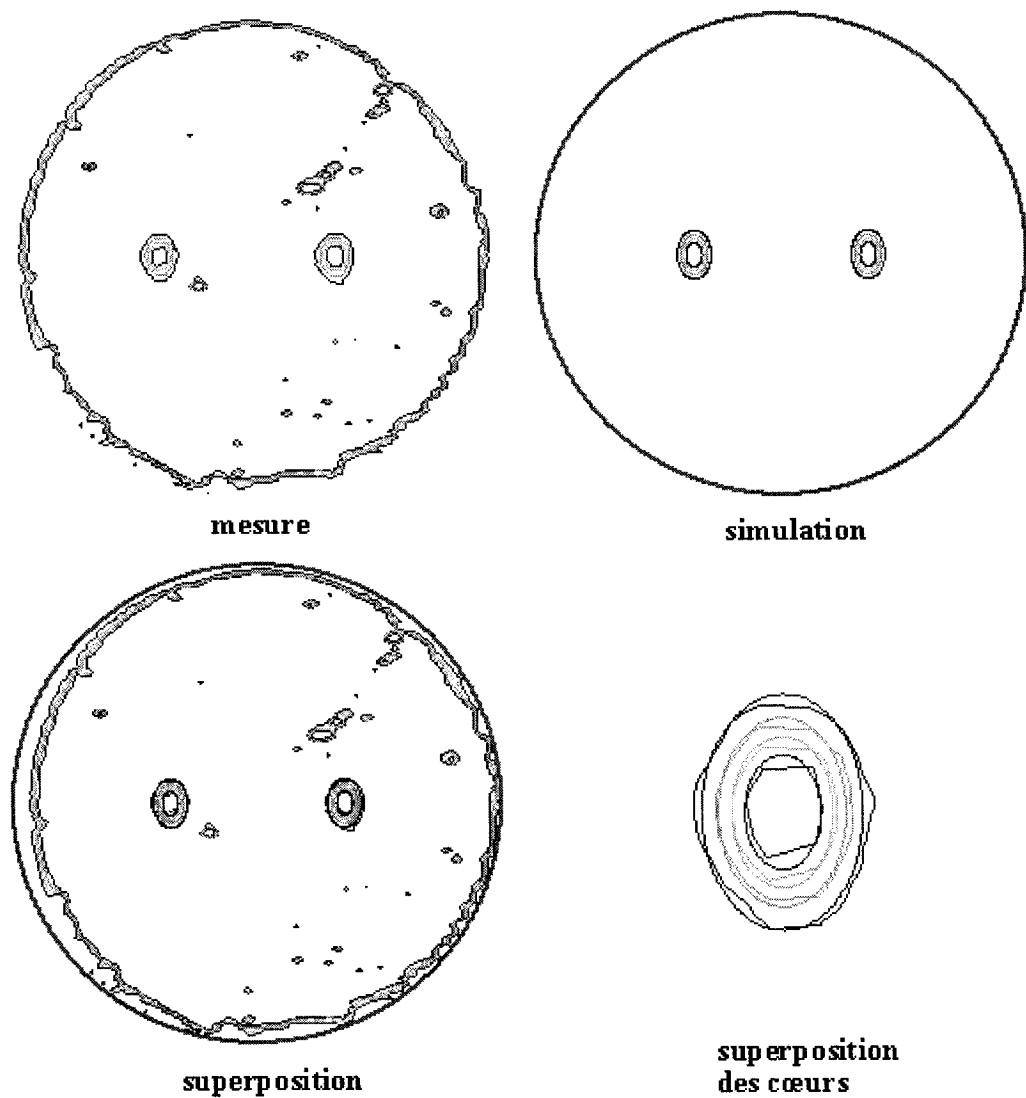


FIG. 3.15 Profil d'indice mesuré et calculé de la section droite : degré de fusion = 0,98, largeur mesurée = $99,5\mu\text{m}$, largeur calculée = $102,8\mu\text{m}$. Les niveaux de concentration sont à 0,4, 0,73, 1,07 et 1,4% (en moles)

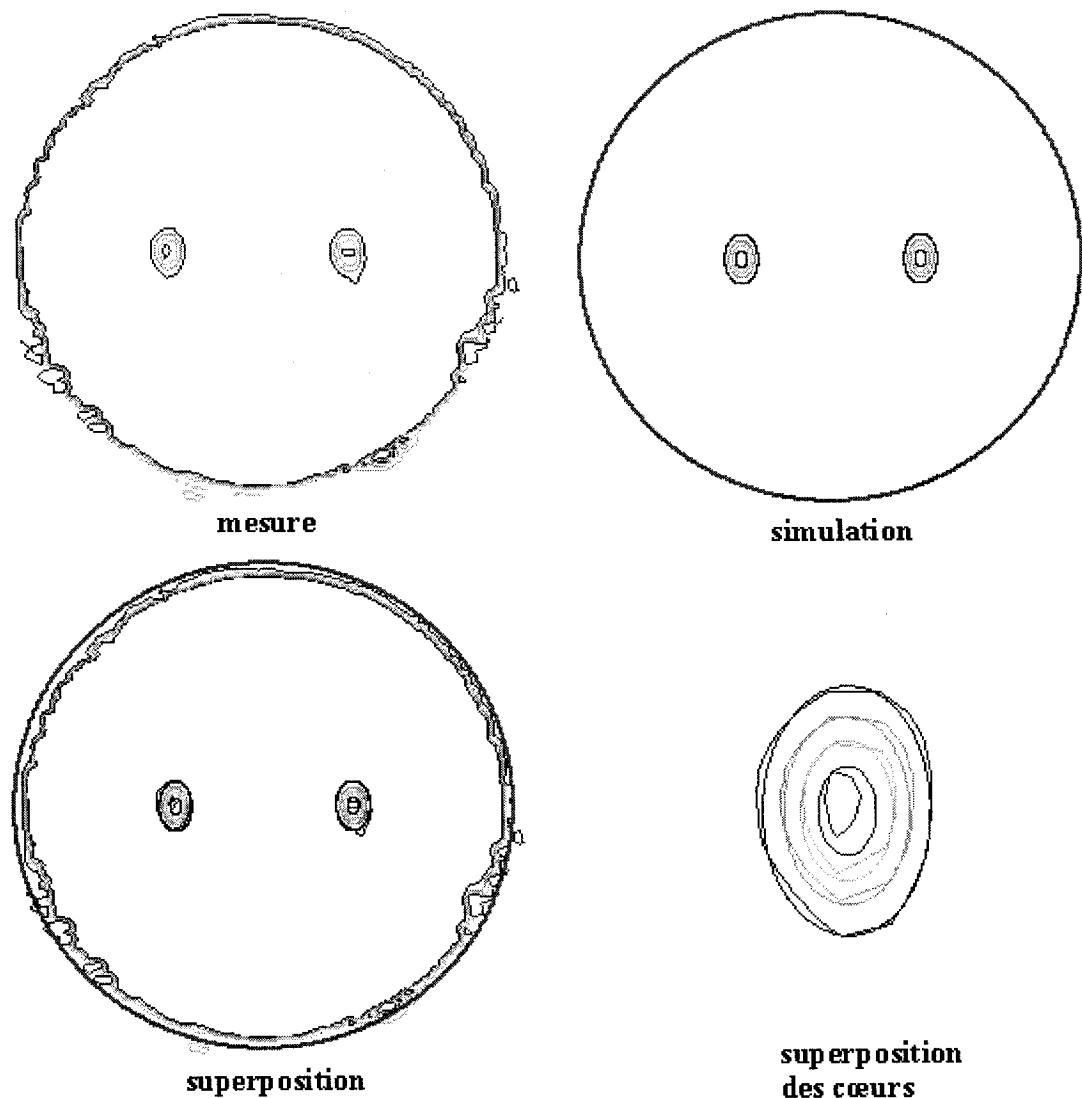


FIG. 3.16 Profil d'indice mesuré et calculé de la section droite: degré de fusion = 0,97, largeur mesurée = $106,5\mu\text{m}$, largeur calculée = $108,4\mu\text{m}$. Les niveaux de concentration sont à 0,4, 0,87, 1,33 et 1,8% (en moles)

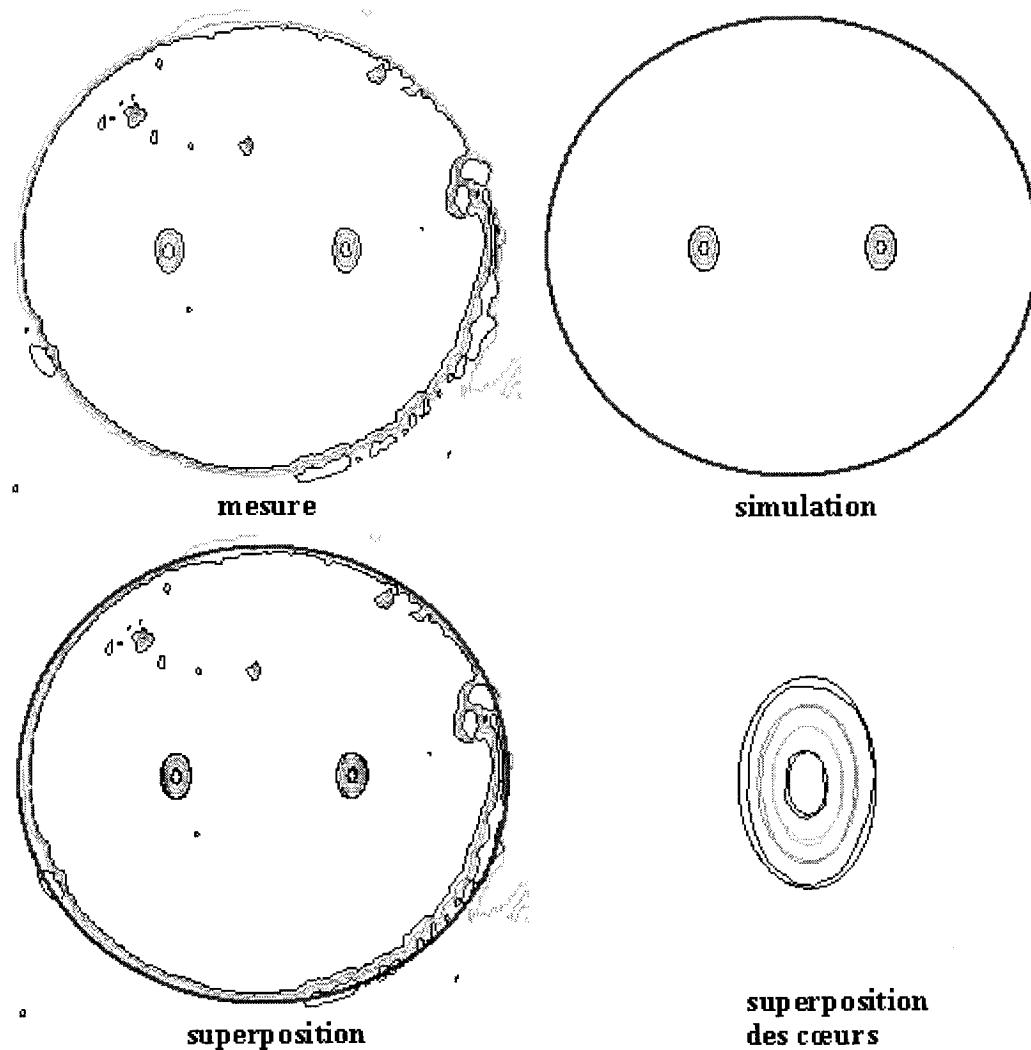


FIG. 3.17 Profil d'indice mesuré et calculé de la section droite: degré de fusion = 0,92, largeur mesurée = $125,5\mu\text{m}$, largeur calculée = $129,1\mu\text{m}$. Les niveaux de concentration sont à 0,4, 1,07, 1,73 et 2,4% (en moles)

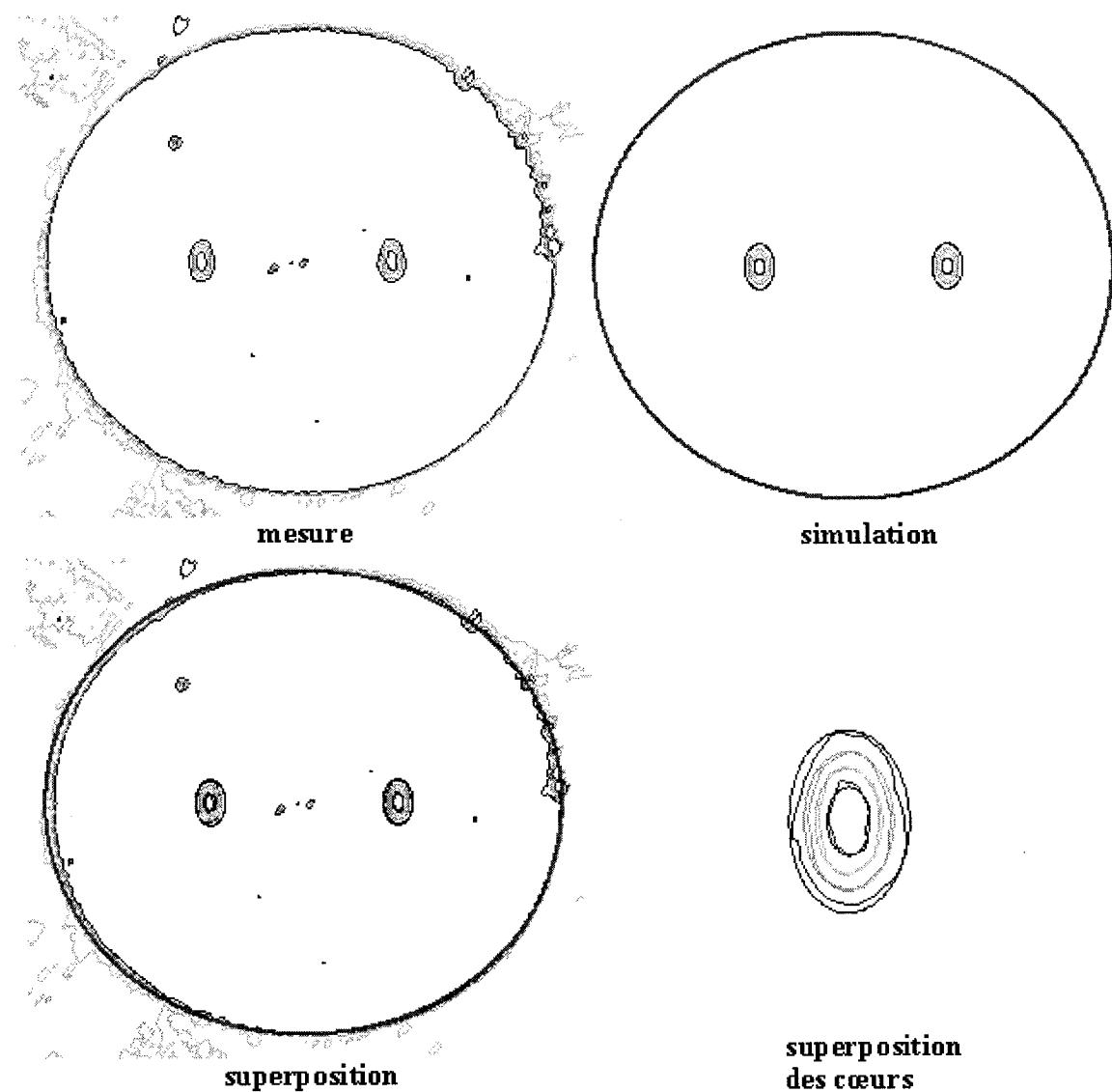


FIG. 3.18 Profil d'indice mesuré et calculé de la section droite : degré de fusion = 0,88, largeur mesurée = $140\mu\text{m}$, largeur calculée = $140,6\mu\text{m}$. Les niveaux de concentration sont à 0,4, 1,07, 1,73 et 2,4% (en moles)

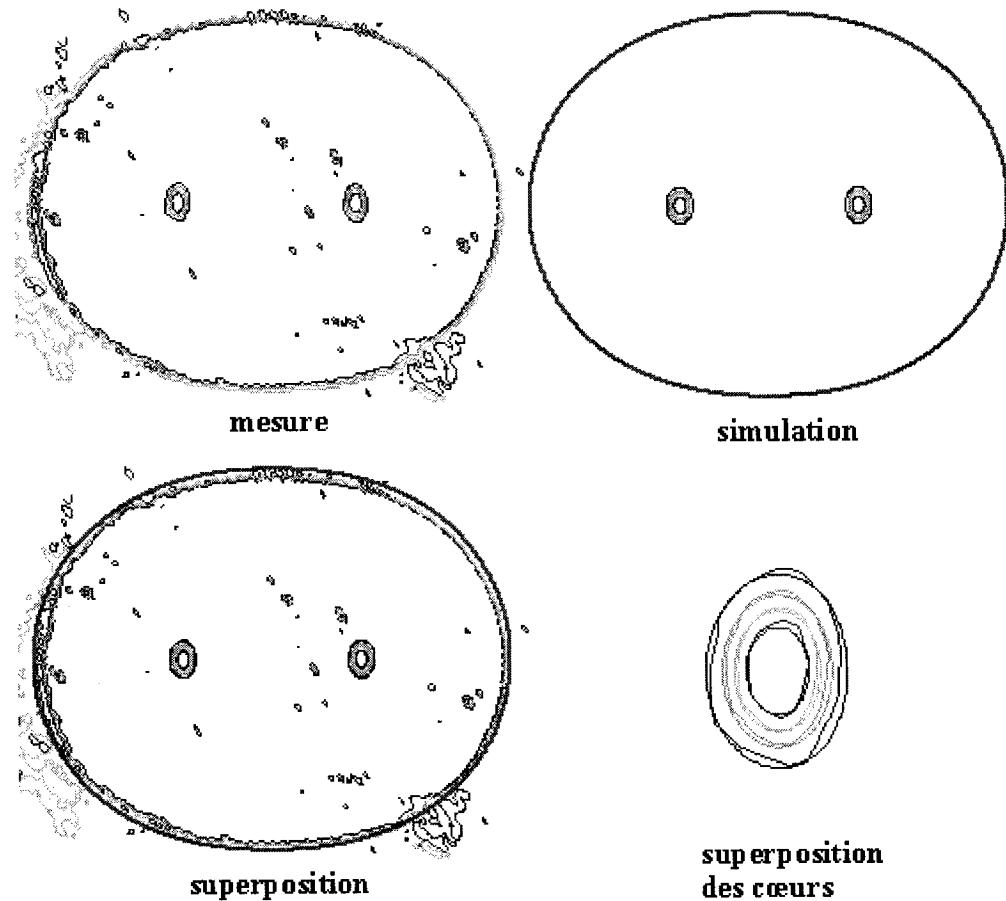


FIG. 3.19 Profil d'indice mesuré et calculé de la section droite : degré de fusion = 0,75, largeur mesurée = 163,5 μm , largeur calculée = 165 μm . Les niveaux de concentration sont à 0,4, 1,07, 1,73 et 2,4% (en moles)

vitesse de balayage etc.

L'ensemble de tous ces paramètres détermine la distribution axiale de la température. Cette distribution peut varier en temps, mais nous avons considéré dans notre modèle une valeur moyenne fixe. Cette distribution de la température affecte l'évolution de la structure du coupleur par l'intermédiaire de la distribution du rapport μ/γ et celle du coefficient de diffusion D . Nous avons déjà montré comment évaluer ces distributions pour une recette concrète.

Dans cette section, nous faisons une analyse qualitative des effets de la distribution de la température T et de la vitesse d'étirage.

Pour analyser les effets de la distribution de la température, nous considérons comment le profil longitudinal du coupleur et la distribution du degré de fusion obtenus à la section précédente changent pour deux situations différentes. D'abord, nous considérons le cas où le coupleur est chauffé à une température plus basse que celle considérée à la section précédente. Après, nous considérons le cas où la distribution de la température a la même valeur maximale mais sa forme est plus aplatie au centre.

Nous montrons aux figures 3.20 et 3.21 deux exemples pour ces situations. Au premier cas (figure 3.20), nous avons considéré la même forme de $\frac{\mu}{\gamma}(z)$ qu'à la section précédente, mais à une valeur plus élevée. Dans l'autre cas (figure 3.21), la valeur maximale de $\frac{\mu}{\gamma}$ est la même qu'à la section précédente, mais la distribution est uniforme dans la partie centrale avec des variations rapides sur les côtés. Pour faire une comparaison, nous avons aussi présenté dans ces figures la distribution $\frac{\mu}{\gamma}(z)$ de la section précédente. Les résultats de la section précédente sont utilisés comme des références dans cette section.

Aux figures 3.22 et 3.23, nous présentons les résultats de nos calculs pour ces deux situations. Nous observons que, quand des températures plus basses sont considérées, les degrés de fusion obtenus sont beaucoup plus bas qu'avant, mais le profil longitudinal ne change pas beaucoup. Donc, si on ne veut pas apporter beaucoup de changements au degré de fusion au cours de l'étirage, la température doit être la plus basse possible. À la figure 3.23, nous observons que le profil longitudinal et la distribution de degré de fusion suivent la distribution de la température. Ces

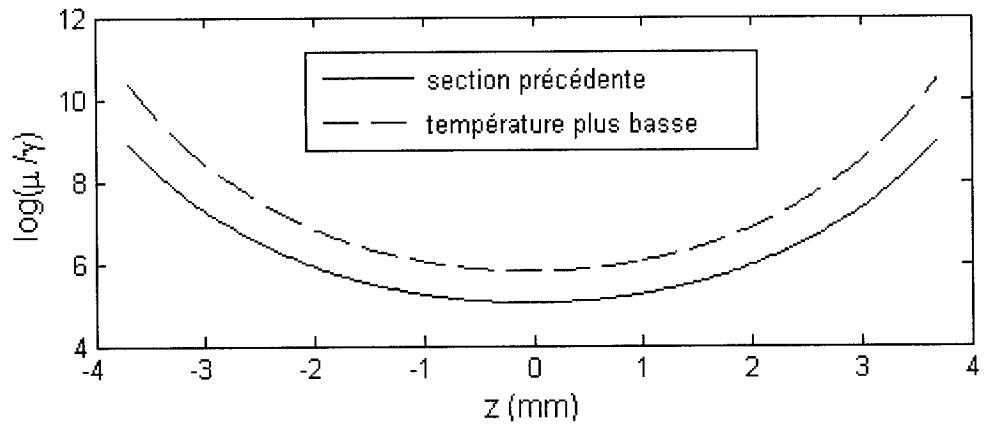


FIG. 3.20 Distribution $\frac{\mu}{\gamma}(z)$ pour le cas étudié à la section 3.3 et pour une température plus basse

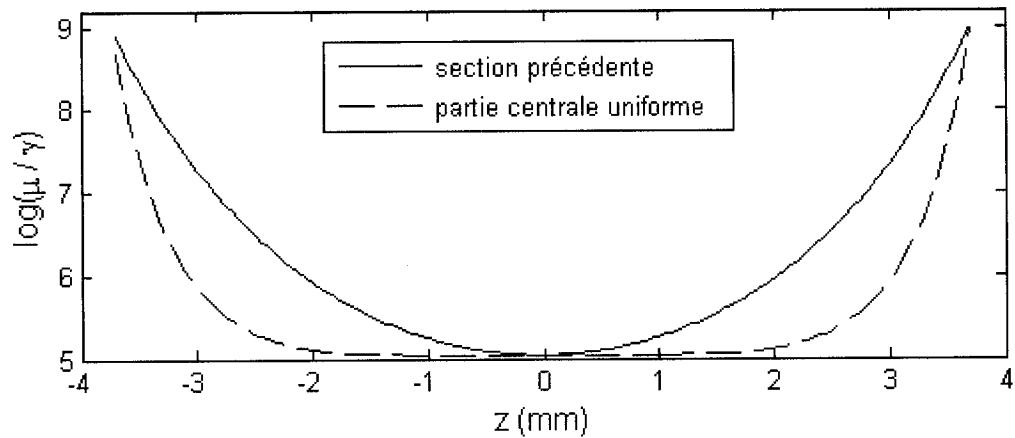


FIG. 3.21 Distribution $\frac{\mu}{\gamma}(z)$ pour le cas étudié à la section 3.3 et pour une partie centrale uniforme

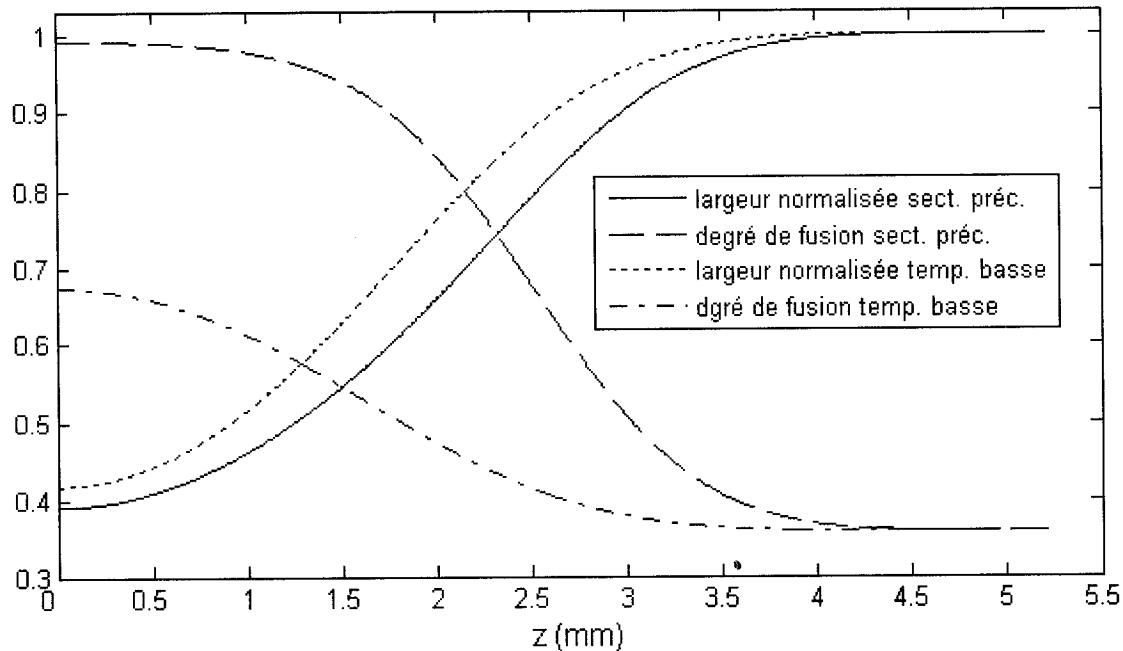


FIG. 3.22 Largeur normalisée et degré de fusion pour le cas étudié à la section 3.3 et pour une température plus basse

exemples donnent une idée comment la distribution de la température affecte la structure du coupleur.

Nous considérons maintenant l'effet de la vitesse d'étirage en observant comment les résultats de la section précédente changent dans le cas où l'étirage est effectué avec une vitesse d'étirage doublée. La durée de l'étirage est considérée dans ce cas la moitié de la durée précédente pour que les coupleurs aient la même longueur. Les résultats de nos calculs sont montrés à la figure 3.24. Nous observons que, quand des vitesses d'étirage plus élevées sont appliquées, des valeurs moins élevées pour le degré de fusion sont obtenues. Cela s'explique par le fait que le degré de fusion est proportionnel à la durée du processus. Le profil longitudinal n'est pas beaucoup affecté par la vitesse d'étirage.

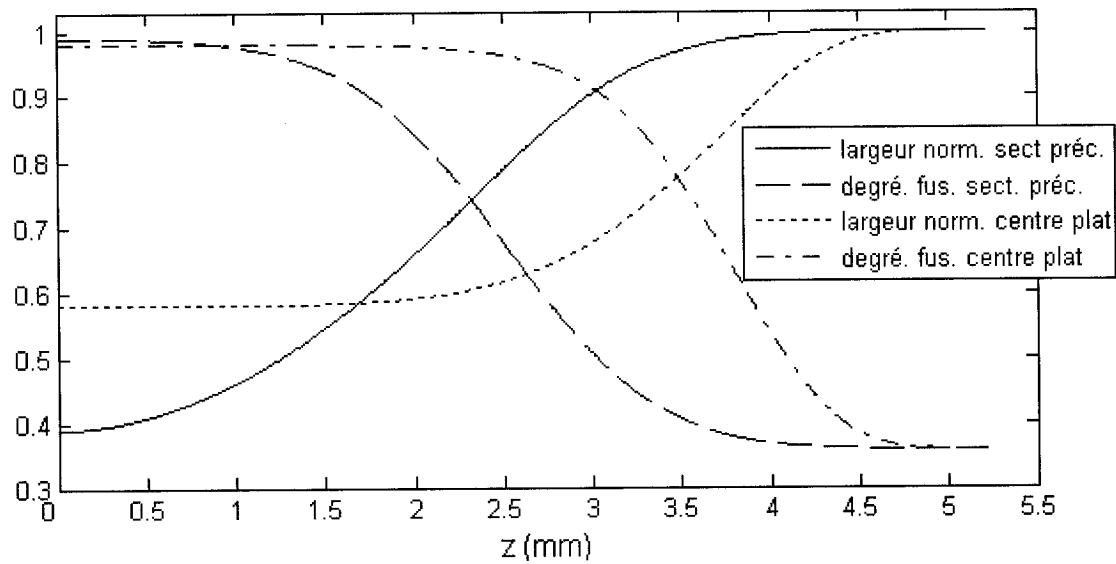


FIG. 3.23 Largeur normalisée et degré de fusion pour le cas étudié à la section 3.3 et pour une distribution de la température avec une partie centrale uniforme

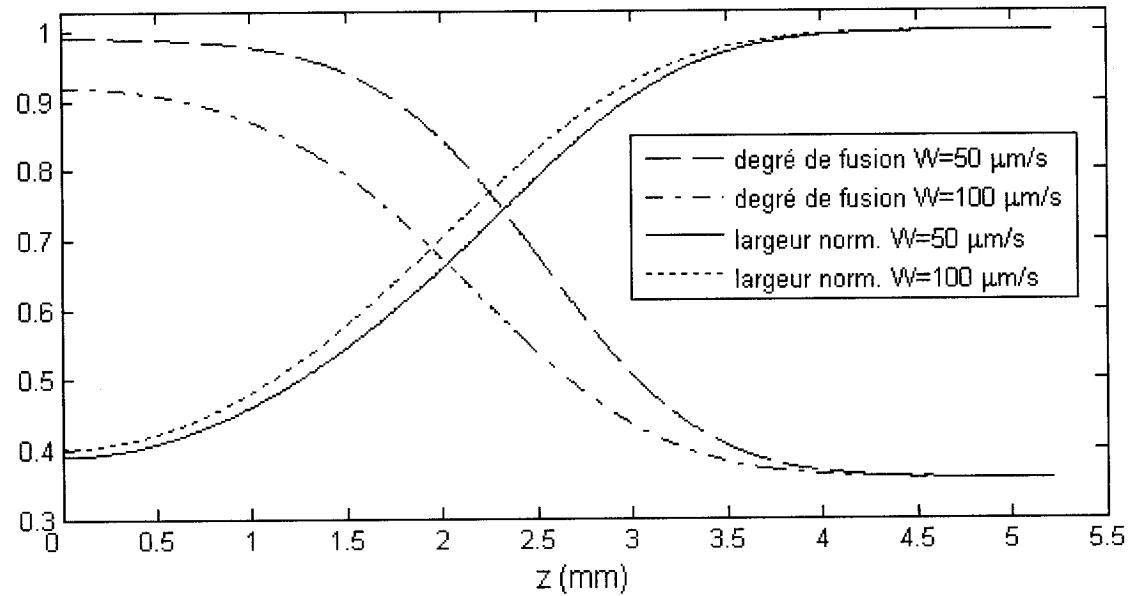


FIG. 3.24 Largeur normalisée et degré de fusion pour le cas étudié à la section 3.3 et pour une vitesse d'étirage doublée

CHAPITRE 4

TRANSMISSION OPTIQUE DU COUPLEUR PAR BATTEMENT DES SUPERMODES

Les trois premiers chapitres sont consacrés à la modélisation de la structure du coupleur. Dans le présent et le prochain chapitre, nous traitons la transmission optique des coupleurs. Pour modéliser les propriétés optiques des coupleurs, il existe deux grandes catégories d'approche. La première est celle basée sur le phénomène de battement entre deux modes de la structure fusionnée. C'est cette approche que nous choisissons dans ce chapitre. La seconde approche est la méthode de propagation des faisceaux avec laquelle nous traitons le problème au chapitre suivant.

4.1 Propriétés optiques du coupleur

Le phénomène de battement des supermodes a été modélisé par Bures et al. en 1983 [1]. Dans la partie effilée des coupleurs, les cœurs des fibres optiques sont trop petits pour guider la lumière. Dans cette portion du coupleur, le guidage est assuré par la gaine optique qui joue le rôle de cœur et le milieu extérieur qui joue le rôle de gaine optique. Cette région est hautement multimode. Le mode fondamental de la fibre d'entrée sort du cœur quand celui-ci devient trop petit dans la région effilée et s'étend dans le guide fusionné. À cause de sa position décentrée par rapport au guide, il excite une superposition du mode fondamental et du premier mode antisymétrique de la structure fusionnée. Afin de distinguer les modes de la structure du coupleur des modes des guides individuels, les premiers sont souvent appelés supermodes.

Ces deux supermodes ont des constantes de propagation différentes et accumulent un déphasage en se propageant le long de la structure. À la sortie, la lumière est guidée de nouveau par les cœurs des fibres individuelles. La distribution de la puissance entre les fibres est déterminée par le déphasage entre les supermodes. Ce modèle simple met en évidence les propriétés fondamentales des coupleurs fu-

sionnés tels que les réponses oscillatoires en fonction de l'étirage, de la longueur d'onde et de l'indice de réfraction du milieu extérieur.

Les supermodes sont en effet les modes locaux du coupleur qui varie longitudinalement. Dans la théorie des modes locaux, on associe localement la solution du guide infiniment long coïncidant avec le guide local [13]. Le calcul de la transmission optique par battement des supermodes symétrique et antisymétrique est valable seulement pour les coupleurs qui se déforment adiabatiquement. Si le guide se déforme suffisamment lentement, c'est-à-dire si la déformation est lente par rapport à la longueur de battement entre les deux premiers modes locaux, alors l'amplitude de chaque mode local reste constante le long du guide, bien que la forme et la constante de propagation du mode varient avec le guide. Dans ce cas, la déformation du guide est qualifiée d'adiabatique. Dans ce chapitre, nous considérons seulement les coupleurs adiabatiques.

4.1.1 Transmission du coupleur 2×2

Les coupleurs 2×2 à fibres fusionnées sont les coupleurs les plus courants en pratique. C'est seulement pour ces coupleurs que nous faisons une analyse détaillée de la transmission optique. Pour les coupleurs constitués de plus de deux fibres, la méthode du calcul est la même.

Pour un guide uniforme selon l'axe des z , le champ électrique ou magnétique sous la forme complexe est donné par

$$\Psi(z) = \sum_j c_j e^{-i\beta_j z} |\psi_j\rangle \quad (4.1)$$

où c_j sont les amplitudes modales complexes, β_j les constantes de propagation et $|\psi_j\rangle$ le champ normalisé des modes. Ici nous avons considéré que les modes sont en phase à $z = 0$. Si on considère le vrai champ, qui est la partie réelle du champ complexe, et qu'on considère en plus un guide non uniforme mais adiabatique, on

obtient pour le champ à un point $z = z_p$

$$\Psi(z_p) = \sum_j a_j \cos \left(\int_0^{z_p} \beta_j(z) dz \right) |\psi_j\rangle \quad (4.2)$$

où a_j sont les amplitudes modales réelles.

Les supermodes à l'entrée et à la sortie du coupleur sont des combinaisons linéaires des modes fondamentaux des fibres individuelles. Il s'ensuit qu'à l'entrée et à la sortie du coupleur on peut faire un changement de base pour le champ électrique ou magnétique, qui peut être représenté comme une combinaison linéaire des modes des guides individuels ou des supermodes. À l'entrée du coupleur, sont excités seulement les supermodes symétrique et antisymétrique dont le recouvrement avec les modes fondamentaux des fibres individuelles est non nul. Soient $|g_1\rangle$ et $|g_2\rangle$ les modes des fibres individuelles. Les supermodes normalisés symétrique et antisymétrique de la structure fusionnée $|G_s\rangle$ et $|G_a\rangle$ sont donnés à $z = 0$ par les relations

$$\begin{aligned} |G_s\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|g_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|g_2\rangle \\ |G_a\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|g_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|g_2\rangle. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Supposons qu'à l'entrée du coupleur, $z = 0$, les amplitudes modales des fibres individuelles sont $a_1(0) = 1$ et $a_2(0) = 0$. Il en découle que les amplitudes des supermodes symétrique et antisymétrique sont respectivement $A_s(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $A_a(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On vérifie bien dans ce cas que le champ à l'entrée a la même valeur dans les deux représentations : $a_1(0)|g_1\rangle + a_2(0)|g_2\rangle = A_s(0)|G_s\rangle + A_a(0)|G_a\rangle$.

À l'aide de la relation (4.2) le champ à la sortie du coupleur, dont la longueur est l , est donné par

$$\Psi(l) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos \left(\int_0^l B_s(z) dz \right) |G_s\rangle + \cos \left(\int_0^l B_a(z) dz \right) |G_a\rangle \right] \quad (4.4)$$

où B_s et B_a sont les constantes de propagation des supermodes symétrique et

antisymétrique respectivement. Maintenant, passons de nouveau à la base des modes des fibres individuelles, en remplaçant les relations (4.3) dans (4.4). En tenant compte des relations $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$ et $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$, on obtient

$$\Psi(l) = \cos \alpha \cos \bar{\alpha} |g_1\rangle - \sin \alpha \sin \bar{\alpha} |g_2\rangle \quad (4.5)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_0^l \frac{B_s(z) - B_a(z)}{2} dz \\ \bar{\alpha} &= \int_0^l \frac{B_s(z) + B_a(z)}{2} dz. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dans le premier guide nous avons donc le champ modal avec l'amplitude $\cos \alpha$ et la phase $\bar{\alpha}$ et dans le second, une amplitude $\sin \alpha$ et une phase $\bar{\alpha} + \pi/2$. La puissance dans chaque fibre est alors

$$\begin{aligned} P_1 &= \cos^2 \alpha \\ P_2 &= \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (4.7)$$

On remarque la conservation de la puissance totale qui est une conséquence de l'adiabacité du coupleur.

4.1.2 Effets de polarisation

Dans les expressions ci-dessus nous n'avons pas tenu compte des effets de polarisation. En effet, la section droite des coupleurs à fibres fusionnées n'a pas du tout la symétrie circulaire et les constantes de propagation des supermodes sont différentes selon les deux axes de symétrie x et y . La géométrie du coupleur provoque alors une biréfringence de forme et introduit une dépendance en polarisation. Nous considérons qu'il n'y a pas de couplage entre ces deux états de polarisation puisque les axes de biréfringence ne changent pas. Les supermodes du coupleur sont polarisés linéairement suivant ces axes.

Supposons qu'à l'entrée du coupleur le mode fondamental de la première fibre a une amplitude unité et qu'il est polarisé linéairement selon un axe qui forme un angle θ avec l'axe des x . Alors les amplitudes modales selon les axes x et y , sont $\cos \theta$ et $\sin \theta$. Puisqu'on considère qu'il n'y pas de couplage entre les états de polarisations à la sortie du coupleur, on obtient la même proportion des amplitudes. Donc les relations (4.7) deviennent

$$\begin{aligned} P_1 &= \eta \cos^2 \alpha_x + (1 - \eta) \cos^2 \alpha_y \\ P_2 &= \eta \sin^2 \alpha_x + (1 - \eta) \sin^2 \alpha_y \end{aligned} \quad (4.8)$$

où $\eta = \cos^2 \theta$ et α_x et α_y sont définis de la même façon que α dans la première relation de (4.6) avec (B_s, B_a) remplacés par (B_{sx}, B_{ax}) et (B_{sy}, B_{ay}) respectivement.

Le terme

$$B_\delta(z) = \frac{B_{sx}(z) - B_{ax}(z)}{2} - \frac{B_{sy}(z) - B_{ay}(z)}{2} \quad (4.9)$$

sera utile pour caractériser les battements de polarisation. Le déphasage accumulé entre les deux états de polarisation à la sortie du coupleur est donné par

$$\Delta(l) = \int_0^l B_\delta(z) dz. \quad (4.10)$$

Examinons les effets du terme B_δ et du paramètre η sur la transmission du coupleur. On peut considérer sans perte de généralité que $\eta \geq 0.5$. Dans ce cas, la première relation dans (4.8) prend la forme

$$\begin{aligned} P_1 &= \eta \cos^2 \alpha_x + (1 - \eta) \cos^2(\alpha_x - \Delta) = [\eta + (1 - \eta) \cos^2 \Delta] \cos^2 \alpha_x + \\ &\quad [(1 - \eta) \sin^2 \Delta] \sin^2 \alpha_x + [(1 - \eta) \sin 2\Delta] \cos \alpha_x \sin \alpha_x. \end{aligned} \quad (4.11)$$

On remarque dans cette relation que la courbe $P_1(z)$ avec $\alpha_x = 0$ est presque (à cause du dernier terme) une enveloppe pour les valeurs maximales de la puissance P_1 . De même façon, la courbe $P_1(z)$ avec $\alpha_x = \pi/2$ est presque une enveloppe pour les valeurs minimales de la puissance P_1 . Ces deux courbes sont caractérisées par une fréquence Δ .

Pour clarifier ces résultats considérons un coupleur uniforme en z de longueur $l = 20\text{mm}$ et supposons que $\frac{B_{sx}(z) - B_{ax}(z)}{2} = 5 \cdot 10^{-3} \mu\text{m}^{-1}$ et $B_\delta = 5 \cdot 10^{-4} \mu\text{m}^{-1}$. La

puissance dans la première fibre en fonction de z est donnée à la figure 4.1 pour $\eta = 0,75$.

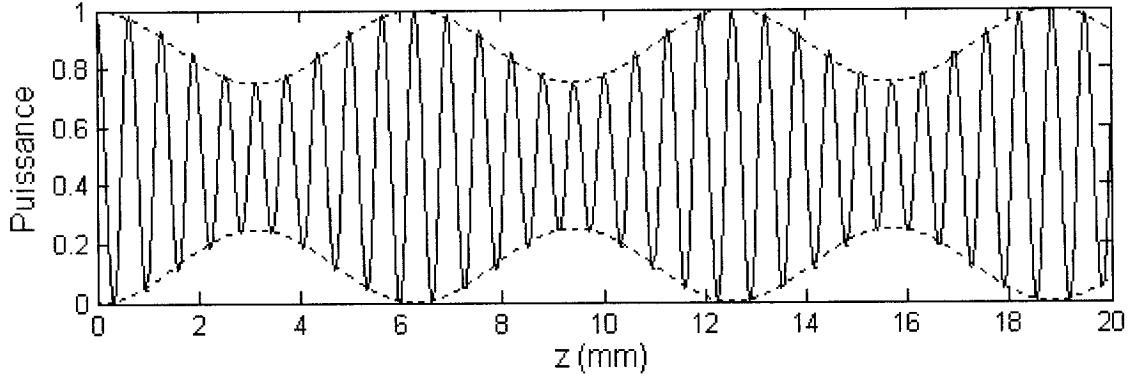


FIG. 4.1 Puissance P_1 pour $\eta = 0,75$ et $B_\delta = 5 \cdot 10^{-4} \mu\text{m}^{-1}$

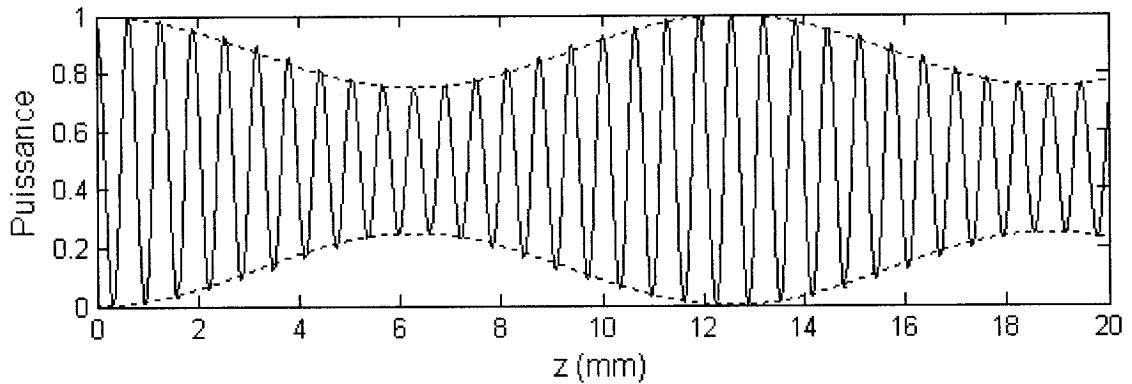


FIG. 4.2 Puissance P_1 pour $\eta = 0,75$ et $B_\delta = 2,5 \cdot 10^{-4} \mu\text{m}^{-1}$

En prenant B_δ deux fois plus faible, c'est-à-dire en considérant $B_\delta = 2,5 \cdot 10^{-4} \mu\text{m}^{-1}$ au lieu de $B_\delta = 5 \cdot 10^{-4} \mu\text{m}^{-1}$, on obtient la transmission donnée à la figure 4.2. Revenons de nouveau à $B_\delta = 5 \cdot 10^{-4} \mu\text{m}^{-1}$ et considérons $\eta = 0,5$ au lieu de $\eta = 0,75$. On obtient dans ce cas, la transmission donnée à la figure 4.3. Dans ces figures, nous avons inséré en plus les quasi enveloppes $\eta + (1 - \eta) \cos^2 \Delta(z)$ et $(1 - \eta) \sin^2 \Delta(z)$.

On remarque que la fréquence des battements de polarisation augmente avec B_δ , et que pour $\eta = 0,5$, c'est-à-dire quand les deux polarisations ont la même amplitude, le battement de polarisation a une amplitude maximale. En effet, la

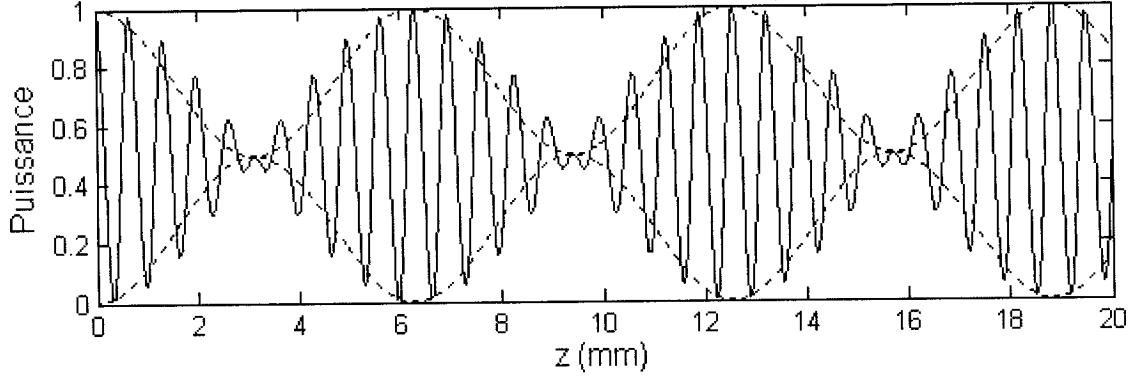


FIG. 4.3 Puissance P_1 pour $\eta = 0,5$ et $B_\delta = 5 \cdot 10^{-4} \mu\text{m}^{-1}$

situation est symétrique par rapport au $\eta = 0,5$. Si on avait pris $\eta = 0,25$, on obtiendrait la même transmission que pour $\eta = 0,75$.

Une notion utile est celle de la longueur de battement. La longueur de battement z_b est la distance sur laquelle les modes i et j se retrouvent périodiquement dans le même état de phase

$$z_b = \frac{2\pi}{\beta_i - \beta_j}. \quad (4.12)$$

On peut par ailleurs écrire la demi phase accumulée pour chaque polarisation en fonction de la longueur de battement par la relation

$$\alpha_x = \pi \int_0^l \frac{1}{z_{bx}} dz \quad (4.13)$$

α_y étant donné par une relation semblable. Si l'on connaît le nombre de battements

$$N_\alpha = \int_0^l \frac{1}{z_b} dz = \frac{\alpha}{\pi} \quad (4.14)$$

à une longueur d'onde donnée, alors le calcul de la longueur du battement nous donne une idée de la longueur du coupleur.

La longueur de battement de polarisation est donnée par

$$z_p = \frac{\pi}{B_\delta} = \frac{z_{by} z_{bx}}{z_{bx} - z_{by}}. \quad (4.15)$$

En considérant comme longueur du battement rapide la valeur moyenne $z_r \approx \frac{z_{bx} + z_{by}}{2}$, le nombre de battements rapides entre deux nœuds de polarisation est alors donné par

$$Q_{zb} = \frac{2z_{by}z_{bx}}{(z_{bx} - z_{by})(z_{bx} + z_{by})}. \quad (4.16)$$

Dans la pratique, les effets de polarisation sont souvent indésirables. En général, on préfère avoir des coupleurs diviseurs de puissance insensibles à la polarisation.

4.1.3 Dépendance en longueur d'onde

Jusqu'à présent, nous avons considéré la réponse oscillatoire du coupleur en fonction de la longueur d'étirage pour une longueur d'onde et un milieu extérieur donnés. Cette réponse est sinusoïdale pour les coupleurs uniformes, parce que le déphasage accumulé 2α augmente linéairement avec z . Mais, pour la plupart des coupleurs, le déphasage accumulé augmente à peu près linéairement avec la longueur d'onde aussi. Cette propriété, qui donne aux coupleurs 2 x 2 une réponse spectrale sinusoïdale, aide à la réalisation de multiplexeurs en longueur d'onde. La connaissance de la période de cette réponse spectrale en fonction des divers paramètres du coupleur est très utile pour la fabrication de ces multiplexeurs.

L'analyse de la dépendance de la transmission des coupleurs en fonction de la longueur d'onde est alors semblable à la dépendance en fonction de l'étirage. Par exemple, la période en longueur d'onde Λ est donnée par

$$\Lambda = \frac{2\pi}{\frac{d(2\alpha)}{d\lambda}} = \frac{2\pi}{\int_0^l \frac{d(B_s(z) - B_a(z))}{d\lambda} dz} \quad (4.17)$$

ce qui ressemble à $z_b = 2\pi / \frac{d(2\alpha)}{dz}$.

Les effets de polarisation s'observent aussi pour la dépendance en longueur d'onde. On observe dans ce cas, des battements de polarisation en fonction de la longueur d'onde, semblables à ceux en fonction de z , montrées aux figures 4.1-4.3. Puisque le déphasage accumulé est presque toujours une fonction linéaire de la longueur d'onde, la forme des battements de polarisation est à peu près sinusoïdale même pour des coupleurs non uniforme en z .

4.2 Calcul des modes vectoriels par la méthode des différences finies

Dans la section précédente nous avons vu que le calcul de la transmission optique du coupleur dépend des valeurs des constantes de propagation des différents modes locaux dans le coupleur. Pour modéliser la transmission du coupleur, nous devons donc calculer ces constantes de propagation. Puisque le calcul des modes guidés, d'une façon analytique, est possible seulement pour quelques cas à géométrie très simple, on a recours aux méthodes numériques.

Plusieurs méthodes numériques pour analyser les guides d'ondes dont le profil transversal d'indice de réfraction est à deux dimensions sont décrites dans la littérature. Les différentes méthodes sont comparées et analysées dans des articles de revue comme [47,48]. Certaines méthodes sont très rapides mais pas très précises, comme la méthode dite de l'indice effectif, d'autres sont lentes mais précises, comme les méthodes par différences finies ou éléments finis. Tout dépendant de l'équation d'onde considérée, il existe des méthodes scalaires, semivectorielles et vectorielles.

Nous avons choisi de calculer les modes vectoriels par la méthode des différences finies. Il s'agit d'une méthode précise et simple. Le fait d'utiliser l'équation d'onde vectorielle nous permet d'inclure les effets de polarisation dans nos calculs. En plus, nous avons décidé de discréteriser l'équation d'onde pour le champ magnétique transverse, comme il est fait dans la plupart des autres articles de la littérature (voir par exemple [49–51]), mais il faut mentionner que les méthodes en termes du champ électrique transverse sont également précises et faciles à implanter.

4.2.1 Équation d'onde vectorielle en coordonnées cartésiennes

Pour une densité de courant \vec{J} et une distribution de charges nulles, les équations de Maxwell dans un matériau diélectrique sont

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -i\omega\mu_0\vec{H} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= i\omega\epsilon\vec{E} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_r \vec{E}) &= 0\end{aligned}\tag{4.18}$$

où \vec{E} et \vec{H} sont les champs électrique et magnétique vectoriels complexes, μ_0 la susceptibilité magnétique du vide, $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ la permittivité et ω la fréquence angulaire. La dépendance temporelle est considérée de la forme $e^{i\omega t}$. En prenant le rotationnel de la seconde relation et en utilisant la première, on obtient l'équation d'onde pour le champ magnétique

$$\nabla^2 \vec{H} + \frac{\vec{\nabla} \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) + k_0^2 \varepsilon_r \vec{H} = 0 \quad (4.19)$$

où $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ est le nombre d'onde dans le vide. Considérons en détail le second terme dans cette équation. Soient \hat{x} , \hat{y} et \hat{z} les vecteurs unitaires dans les directions x , y et z . On obtient

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \varepsilon_r \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) &= \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \hat{x} - \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \hat{y} \\ &\quad + \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \hat{z} - \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \hat{z}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Ici nous avons utilisé le fait que $\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial z} = 0$ puisque nous cherchons les modes d'un guide uniforme. En remplaçant cette relation dans (4.19) et séparant les composants x et y , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} - \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k_0^2 \varepsilon_r H_x + \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y} \frac{\partial H_y}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} - \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + k_0^2 \varepsilon_r H_y + \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} \frac{\partial H_x}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Puisque le champ des modes guidés est donné par : $H(x, y, z) = H(x, y) e^{-i\beta z}$, on peut utiliser la relation

$$\frac{\partial}{\partial z} = -i\beta \quad (4.22)$$

où β est la constante de propagation. Les relations (4.21) deviennent

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} - \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial y} + (k_0^2 \varepsilon_r - \beta^2) H_x + \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y} \frac{\partial H_y}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} - \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial x} + (k_0^2 \varepsilon_r - \beta^2) H_y + \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} \frac{\partial H_x}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

En utilisant les relations $\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} \frac{1}{\varepsilon_r} = 0 = \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_r}$, on écrit ces équations sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \varepsilon_r \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + (k_0^2 \varepsilon_r - \beta^2) H_x + \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y} \frac{\partial H_y}{\partial x} &= 0 \\ \varepsilon_r \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + (k_0^2 \varepsilon_r - \beta^2) H_y + \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} \frac{\partial H_x}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Enfin, pour alléger l'écriture, ainsi que pour obtenir une forme générale qui est utile pour les calculs du chapitre suivant aussi, nous écrivons ces relations sous la forme

$$\begin{aligned} A_{xx} H_x + A_{xy} H_y &= \beta^2 H_x \\ A_{yx} H_x + A_{yy} H_y &= \beta^2 H_y \end{aligned} \quad (4.25)$$

avec ces opérateurs différentiels

$$\begin{aligned} A_{xx} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \varepsilon_r \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial}{\partial y} \right) + k_0^2 \varepsilon_r \\ A_{xy} &= \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \\ A_{yx} &= \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \\ A_{yy} &= \varepsilon_r \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_0^2 \varepsilon_r. \end{aligned} \quad (4.26)$$

4.2.2 Discrétisation en différences finies

Pour discrétiser les équations en différences finies nous utilisons un maillage non uniforme. Cela nous permet d'obtenir une discrétisation plus flexible de différents domaines. L'idée initiale était de mettre plus de noeuds dans les coeurs des fibres pour un nombre total donné des noeuds. Mais, comme nous allons voir en peu plus loin, cette flexibilité est limitée beaucoup par la précision des formules discrètes non uniformes.

À la figure 4.4 nous montrons un schéma de cette discrétisation. La notation des distances entre les noeuds (*n*, *e*, *s* et *o*) est utilisée pour désigner nord, est,

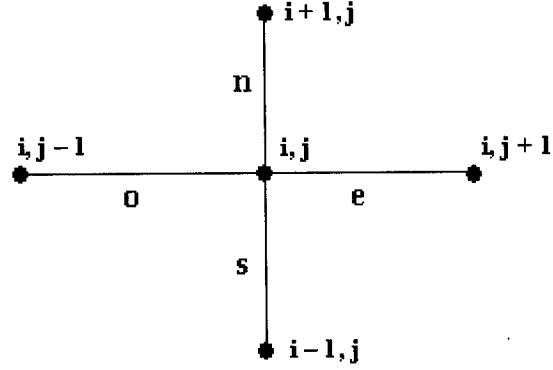


FIG. 4.4 Discrétisation non uniforme

sud et ouest. Un tel schéma a été utilisé à la référence [52] pour discrétiser les équations d'onde semi-vectorielles. Dans ce cas, si les indices j et i sont utilisés pour la discrétisation en x et y respectivement. Les dérivées premières et secondes en x sont données par

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_{i,j}}{\partial x} &= \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{o+e} + O(o-e) \\ \frac{\partial^2 \psi_{i,j}}{\partial x^2} &= \frac{2}{oe} \frac{e\psi_{i,j-1} - (o+e)\psi_{i,j} + o\psi_{i,j+1}}{o+e} + O(o-e).\end{aligned}\quad (4.27)$$

Pour les dérivées en y , on obtient des expressions semblables à celles en x . On remarque que l'erreur de la discrétisation est de l'ordre $O(o-e)$, d'où il est clair que la différence entre deux pas voisins doit être comparable au carré du pas, pour avoir la même erreur que pour une discrétisation uniforme. Cela restreint énormément la flexibilité du maillage non uniforme. Dans le cas d'un maillage uniforme on a $o = e = h$ et on retrouve les expressions (2.34) avec une erreur $O(h^2)$.

En remplaçant ces formules dans les équations (4.24) on obtient ces formules

$$\begin{aligned}a_o H_{x(i,j-1)} + a_e H_{x(i,j-1)} + a_n H_{x(i+1,j)} + a_s H_{x(i-1,j)} \\ + a_c H_{x(i,j)} + a_{bo} H_{y(i,j-1)} + a_{be} H_{y(i,j+1)} &= \beta^2 H_{x(i,j)} \\ b_o H_{y(i,j-1)} + b_e H_{y(i,j-1)} + b_n H_{y(i+1,j)} + b_s H_{y(i-1,j)} \\ + b_c H_{y(i,j)} + b_{an} H_{x(i+1,j)} + b_{as} H_{x(i-1,j)} &= \beta^2 H_{y(i,j)}\end{aligned}\quad (4.28)$$

où

$$\begin{aligned} a_o &= \frac{2}{o(e+o)} & a_e &= \frac{2}{e(o+e)} & a_n &= \frac{2}{n(s+n)} \frac{2\varepsilon_{r(i,j)}}{\varepsilon_{r(i,j)} + \varepsilon_{r(i+1,j)}} \\ a_s &= \frac{2}{s(n+s)} \frac{2\varepsilon_{r(i,j)}}{\varepsilon_{r(i,j)} + \varepsilon_{r(i-1,j)}} & a_c &= -a_e - a_o - a_n - a_s + k_o^2 \varepsilon_r \\ a_{bo} &= \frac{\varepsilon_{r(i+1,j)} - \varepsilon_{r(i-1,j)}}{\varepsilon_{r(i,j)}(e+o)(n+s)} & a_{be} &= -a_{bo} \end{aligned} \quad (4.29)$$

et

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{n(s+n)} & b_s &= \frac{2}{s(n+s)} & b_o &= \frac{2}{o(e+o)} \frac{2\varepsilon_{r(i,j)}}{\varepsilon_{r(i,j)} + \varepsilon_{r(i,j+1)}} \\ b_e &= \frac{2}{e(o+e)} \frac{2\varepsilon_{r(i,j)}}{\varepsilon_{r(i,j)} + \varepsilon_{r(i,j-1)}} & b_c &= -b_e - b_o - b_n - b_s + k_o^2 \varepsilon_r \\ b_{an} &= \frac{\varepsilon_{r(i,j+1)} - \varepsilon_{r(i,j-1)}}{\varepsilon_{r(i,j)}(n+s)(e+o)} & b_{as} &= -b_{an}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Donc pour chaque nœud du maillage, nous avons deux équations linéaires pour les deux composantes cartésiennes du champ magnétique transverse. On remarque que ces équations sont couplées. Pour écrire ces relations sous une forme matricielle, nous représentons les champs H_x et H_y comme un seul vecteur $\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix}$. On peut écrire alors les relations (4.26) sous la forme

$$\begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} = \beta^2 \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

La numérotation des nœuds est faite selon les rangées, à partir de celle du bas, de gauche à droite. Donc, si l'indice i est utilisé pour les rangées, et j pour les colonnes, les nœuds $H_{i,j}$ et $H_{i,j+1}$ sont consécutifs, mais $H_{i,j}$ et $H_{i+1,j}$ sont séparés par $N_c - 1$ nœuds, où N_c est le nombre total des colonnes. La figure 4.5 représente de façon schématique l'équation (4.31). Les lignes tracées représentent les éléments non nuls. Dans chaque bloc, la distance entre les diagonales secondaires et celle principale est 1 ou N_c éléments.

Pour augmenter la précision des calculs, on remplace la valeur de ε_r à un nœud donné, par sa valeur moyenne dans la cellule autour du nœud $\int_{cellule} \varepsilon_r(x, y) dx dy$.

$$\begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix} = \beta^2 \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix}$$

FIG. 4.5 Équation aux valeurs propres

Cette astuce permet d'augmenter beaucoup la précision des calculs.

Comme conditions frontières, nous considérons le champ nul à l'extérieur du domaine de calculs, parce que nous sommes intéressés aux modes guidés du coupleur. Les dimensions des coupleurs que nous allons étudier sont en général beaucoup plus grandes que la longueur d'onde d'intérêt pour nous, et la différence entre les indices de la gaine et de l'air est relativement grande. Cela fait que les modes guidés dans le coupleur sont presque complètement confinés dans sa gaine. Les frontières du domaine de la discréétisation sont placées quand même assez loin de la gaine, dans l'air, pour que le champ soit effectivement nul. Dans ce cas, cette condition frontière est bien justifiée.

Nous utilisons aussi la symétrie du problème. Par exemple, pour un coupleur symétrique, le champ des modes guidés est symétrique ou antisymétrique dépendant du mode, par rapport aux axes de symétrie. Donc, dans ce cas, on peut discréétiser seulement un quart du domaine, en imposant les conditions frontières symétriques ou antisymétriques aux axes x et y .

L'équation (4.31) est une équation aux valeurs propres. La résolution de cette équation nous donne la valeur propre β^2 dont la racine carrée est la constante de propagation du mode. Le vecteur propre $\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix}$ nous donne le champ modal

magnétique transversal. À partir des équations de Maxwell on peut calculer la partie longitudinale du champ magnétique et le champ électrique associé. Cependant, pour calculer la transmission des coupleurs, nous sommes intéressés surtout à la constante de propagation des modes.

Quand on voit les éléments de la matrice A dans les relations (5.7), mais aussi sa forme dans le schéma de la figure 4.5, on remarque qu'il s'agit d'une matrice non symétrique. Cette matrice non symétrique est creuse, c'est-à-dire, la plupart des éléments sont nuls. De plus, cette matrice est de très grande taille. En effet, une discréétisation typique du domaine qui comporte la section droite du coupleur est de l'ordre de 200×200 nœuds. Donc, le nombre des éléments du vecteur propre est : $2 \times 200 \times 200 = 80\,000$. La taille de la matrice A est donc de l'ordre $80\,000 \times 80\,000$. On doit résoudre alors le problème aux valeurs propres pour une matrice non symétrique, creuse et de grande taille. De plus, dans un cas général, on pourrait être intéressé à plusieurs valeurs propres.

Dans ce cas, la méthode de choix est celle d'Arnoldi avec redémarrage implicite. Pour cette méthode, il existe un ensemble de routines en FORTRAN appelé ARPACK. En plus, cette méthode est à la base de la commande *eigs* en MATLAB. C'est cette méthode que nous utilisons pour résoudre les équations aux valeurs propres. Les détails de cette méthode sont donnés dans l'annexe III, où nous expliquons comment et pourquoi la méthode d'Arnoldi fonctionne.

4.2.3 Précision des calculs et quelques exemples

Le calcul des modes vectoriels nécessite le calcul des valeurs propres des matrices de très grande taille. Le temps de calcul et la mémoire vive nécessaire pour calculer les valeurs propres sont proportionnels à la taille de la matrice. Il convient alors d'utiliser une discréétisation optimale pour obtenir des valeurs propres avec une erreur qui ne dépasse pas une valeur cible.

Dans nos calculs, cette valeur cible de l'erreur est choisie de l'ordre de $1 \cdot 10^{-6}$ pour l'indice effectif des modes guidés. On admet que cette précision est suffisante pour une évaluation correcte de la transmission du coupleur. En effet, si deux supermodes ont des indices effectifs avec une telle différence, à une longueur d'onde

$\lambda = 1,55 \mu\text{m}$ par exemple, la longueur de battement est $1,55\text{m}$, ce qui est très grand par rapport à la longueur des coupleurs qui est d'habitude de quelques centimètres.

On considère une erreur maximale de l'ordre de $1 \cdot 10^{-6}$, mais il s'agit d'une erreur oscillatoire, parce que, comme nous allons voir un peu plus loin, l'indice effectif calculé pour un mode oscille autour de la valeur exacte. Le fait que l'erreur sur l'indice effectif des modes n'a pas le même signe pour différentes sections droites augmente la précision du calcul des intégrales (4.6). Dans ce cas, une erreur oscillatoire du terme $B_s(z) + B_a(z)$ avec une amplitude $1 \cdot 10^{-6}$ fait que les intégrales sont beaucoup plus précises que pour la même erreur de signe constant.

Considérons une fibre à saut d'indice. La gaine de la fibre est considérée très grande et le problème est alors à deux couches seulement. Dans ce cas, on peut trouver facilement la solution analytique. Pour des raisons qu'on explique un peu plus loin, plus le saut d'indice est grand, plus la précision des calculs numériques diminue. De plus, si le diamètre du cœur est comparable à la longueur d'onde, le champ modal s'étend dans la gaine et on doit choisir une fenêtre de calcul assez grande pour que le champ soit considéré nul aux frontières. Ce fait diminue la précision pour une taille donnée du maillage de la discréétisation.

Considérons donc une fibre avec un saut d'indice relativement grand et un diamètre petit, un cas où on s'attend à avoir une précision faible. Le diamètre du cœur est de $6\mu\text{m}$, son indice 1,45 et celui de la gaine 1, à une longueur d'onde $\lambda = 1,5\mu\text{m}$. Cette fibre est considérée aussi par Zhu [53]. Il compare sa méthode de calcul des modes vectoriels basée sur un maillage de Yee, avec d'autres techniques en différences finies. À cause de la symétrie, on discréétise seulement un quart de la fibre. La fenêtre de calcul choisie est considérée $6 \times 6 \mu\text{m}$ et on fait une discréétisation uniforme. L'indice effectif du mode fondamental HE_{11} , calculé de façon analytique, est 1,438604. À la figure 4.6 nous présentons le champ calculé du mode fondamental polarisé en y (champ électrique). Le champ H_y , qui est un champ mineur pour cette polarisation, a une amplitude de deux ordres de grandeur plus petite que H_x .

Dans le tableau 4.1 nous comparons, comme Zhu à la référence [53], les résultats de nos calculs pour l'indice effectif du mode fondamental avec d'autres techniques de discréétisation de l'équation d'onde, pour deux maillages différents $N_x \times N_y$. On

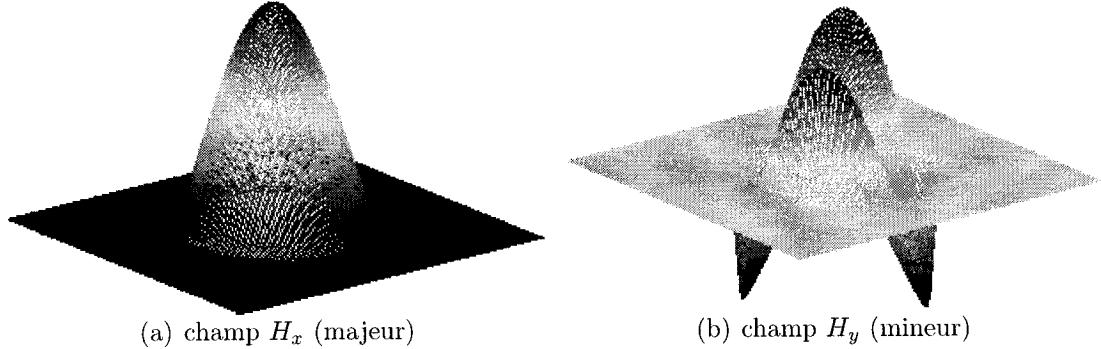


FIG. 4.6 Champ du mode fondamental : $d = 6\mu\text{m}$, $n_c = 1,45$, $n_g = 1$ et $\lambda = 1,5\mu\text{m}$

remarque que nos calculs ont une précision légèrement meilleure que les autres pour ces valeurs de N_x , mais on remarque aussi que la précision diminue quand on double le nombre des nœuds du maillage. Pour clarifier ce résultat, à la figure 4.7, nous présentons la variation de l'erreur de l'indice effectif en fonction de N_x , qui est choisi égal à N_y .

Discrétisation $N_x = N_y$	Nos calculs	Zhu [53]	Lusse [50]	Huang [54]
60	1,438608	1,438616	1,438543	1,438613
120	1,438612	1,438613	1,438593	1,438614

TAB. 4.1 Comparaison du calcul de l'indice effectif du mode vectoriel HE_{11} d'une fibre à saut d'indice ayant ces paramètres : $d = 6\mu\text{m}$, $n_c = 1,45$, $n_g = 1$ pour $\lambda = 1,5\mu\text{m}$ avec d'autres techniques en différences finies. La valeur exacte calculée est $n_{\text{eff}} = 1,438604$.

On remarque un caractère oscillatoire de l'indice effectif calculé en fonction de N_x . En diminuant le pas de la discrétisation, on s'attendrait à une meilleur précision, parce que l'erreur de la discrétisation (uniforme) en différences finies (2.34) est de l'ordre de h^2 . En effet, le problème provient de l'application de la formule (2.34) pour la seconde dérivée à l'interface cœur-gaine, où il y a un saut d'indice important. En regardant l'équation d'onde, on remarque que la seconde dérivée possède, elle aussi, un saut proportionnel au saut d'indice, à cette interface, alors que la formule discrète (2.34) considère une dérivée continue.

Ainsi l'erreur qu'on fait dans ce cas, n'est pas de l'ordre $O(h^2)$, mais plutôt $O(\Delta n)$. Donc, elle ne dépend pas du pas de discrétisation h . L'équation matricielle (4.31) ne représente pas alors, d'une façon tout à fait correcte, le problème physique.

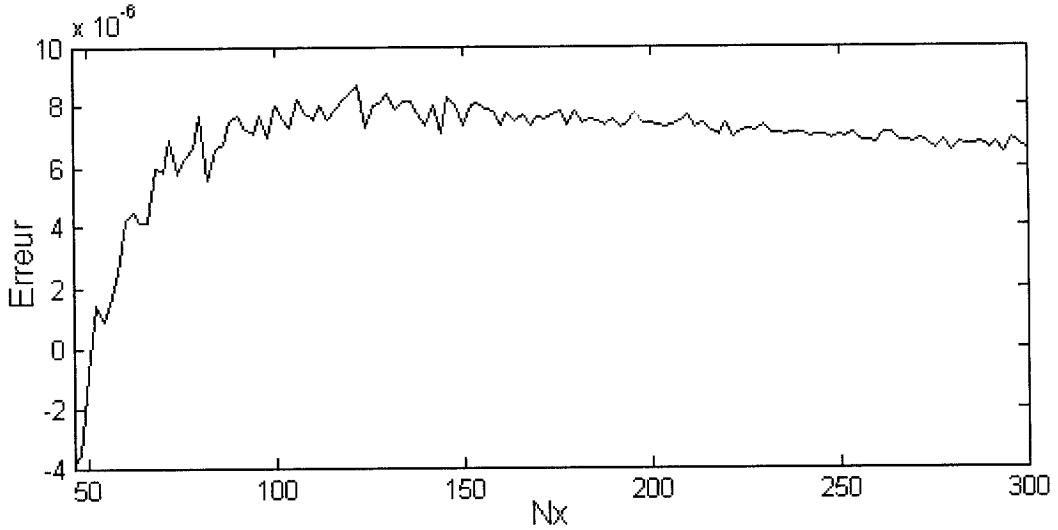


FIG. 4.7 Variation de l'erreur de calcul de l'indice effectif du mode HE_{11} , d'une fibre avec les paramètres données en légende de la figure 4.6, en fonction de N_x

Cependant, en augmentant le nombre des nœuds du maillage $N_x = N_y$, n fois, le nombre total des nœuds augmente n^2 fois. Par contre, le nombre des nœuds près de l'interface cœur-gaine augmente proportionnellement à n . Donc, pour des N_x toujours plus grands, on s'attend à ce que l'erreur diminue. En pratique, nous sommes limités par la capacité de la mémoire vive de l'ordinateur, qui dans notre cas impose $N_x = N_y = 320$.

Considérons maintenant les coupleurs fusionnés. Dans ce cas, il est difficile de déterminer la précision de l'indice effectif calculé, parce que le problème n'a pas de solution analytique. Puisque le coupleur est composé de deux fibres, nous considérons comme erreur celle qu'on obtient au calcul de l'indice effectif d'une de ces fibres, utilisant le même maillage de discréttisation. La fibre est considérée à trois couches, cœur-gaine-air, et sa section droite est réduite conformément à la section droite du coupleur.

Pour exprimer le taux de réduction de la section droite dû à l'étirage, nous utilisons un paramètre appelé le taux de réduction inverse, noté ITR, qui représente le rapport entre la dimension du guide réduit par l'étirage et sa dimension initiale.

À titre d'exemple, considérons la section droite d'un coupleur fabriqué par fusion de deux fibres SMF-28 à un degré de fusion quelconque, et étiré à un $ITR = 0,3$.

Supposons qu'on veuille calculer les indices effectifs des supermodes à une longueur d'onde $\lambda = 1,3 \mu\text{m}$ avec une précision autour de $\Delta n = 1 \cdot 10^{-6}$. On cherche le maillage minimal pour assurer une telle précision.

On considère donc l'erreur obtenue sur l'indice effectif de la fibre SMF-28 à trois couches, à un ITR = 0,3. Les paramètres de cette fibre sont : diamètre de cœur $d_c = 2,7 \mu\text{m}$ et diamètre de gaine $d_g = 37,5 \mu\text{m}$ avec les indices des couches à $\lambda = 1,3 \mu\text{m}$; $n_c = 1,4519175$, $n_g = 1,4469175$, et $n_a = 1,0002737$. La valeur exacte de l'indice effectif du mode fondamental est $n_{\text{eff}} = 1,4468687985$. Les dimensions de la fenêtre de calcul sont considérées $d_g \cdot 1,2 \times d_g \cdot 1,2$.

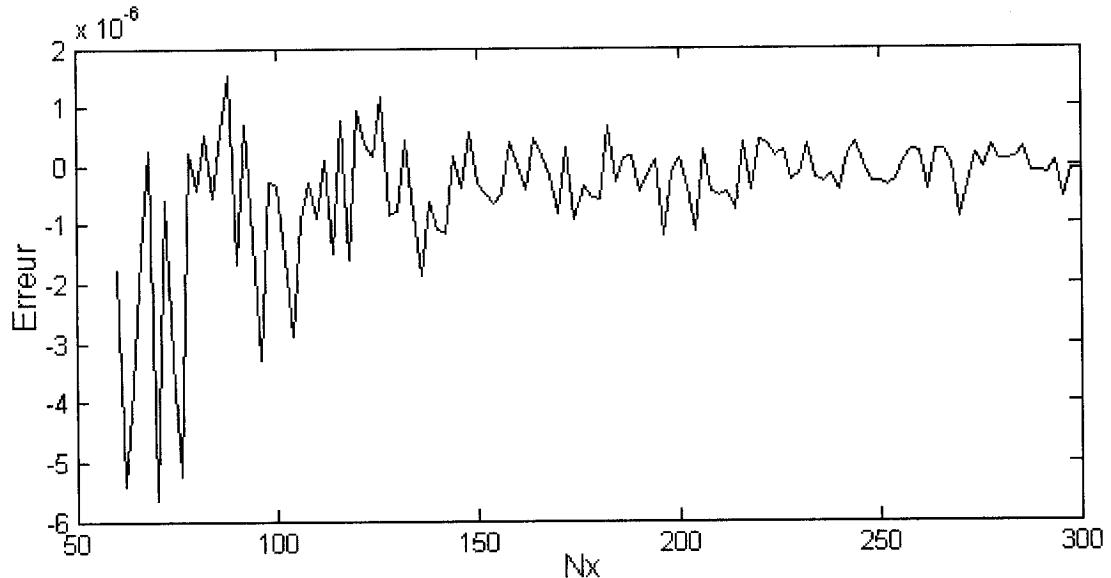


FIG. 4.8 Variation de l'erreur de calcul de l'indice effectif du mode HE₁₁ en fonction de N_x , pour une fibre avec ces paramètres : diamètre de cœur $d_c = 2,7 \mu\text{m}$, diamètre de gaine $d_g = 37,5 \mu\text{m}$, indice de cœur $n_c = 1,4519175$, indice de gaine $n_g = 1,4469175$, et celui de l'air $n_a = 1,0002737$ à $\lambda = 1,3 \mu\text{m}$. La valeur exacte de l'indice effectif du mode fondamental est $n_{\text{eff}} = 1,4468687985$.

À la figure 4.8, nous présentons l'erreur de l'indice effectif du mode fondamental en fonction de N_x ($= N_y$). On remarque le caractère oscillatoire de l'erreur. On voit aussi que pour $N_x \geq 210$, ce qui correspond à $h \leq 0,214 \mu\text{m}$, on peut considérer que la précision est inférieure à la valeur cible $\Delta n = 1 \cdot 10^{-6}$. Donc, pour calculer les supermodes de cette section droite du coupleur avec notre méthode de différences finies, à $\lambda = 1,3 \mu\text{m}$, on suppose qu'un maillage uniforme avec un pas $h = 0,214 \mu\text{m}$

est suffisant pour arriver à la précision cible.

On ne répète pas cette procédure de détermination du pas minimal de maillage pour chaque section droite du coupleur. Puisque la valeur du pas minimal ainsi calculée varie très peu, il suffit de le faire pour les valeurs extrêmes de l'ITR et de la longueur d'onde ainsi que pour une valeur au milieu du spectre. Par exemple, si on s'intéresse aux sections droites avec un ITR entre 0,1 et 0,75 dans l'intervalle $\lambda \in [1,3 \dots 1,65 \mu\text{m}]$, on calcule h minimal pour $\text{ITR} = 0,1, 0,425, 0,75$ aux longueurs d'onde $\lambda = 1,3, 1,475$ et $1,65 \mu\text{m}$. Pour les autres valeurs, on fait une interpolation.

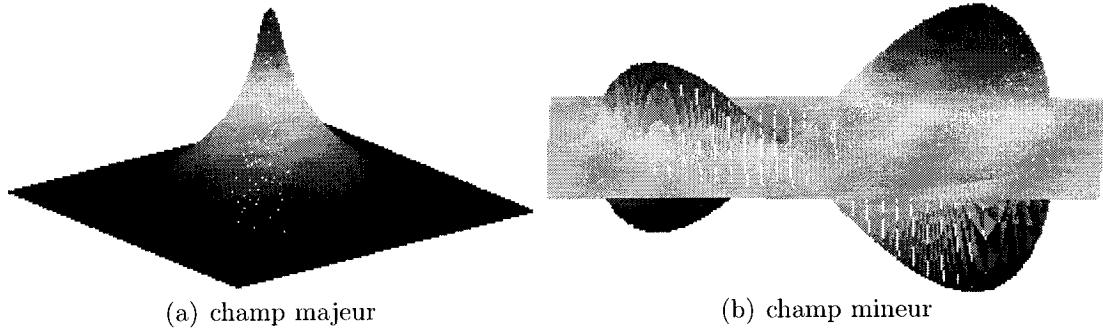


FIG. 4.9 Mode fondamental de la fibre SMF-28 à trois couches pour un $\text{ITR} = 0,3$

À la figure 4.9 nous présentons les deux composantes du champ du mode fondamental calculé pour l'exemple ci-dessus. L'amplitude du champ mineur est de deux ordres plus petite que celle du champ majeur. Pour cette valeur de l'ITR, c'est-à-dire $\text{ITR} = 0,3$, le mode fondamental s'étend dans la gaine de la fibre.

Comme dernier exemple, considérons les premiers modes symétrique et antisymétrique d'un coupleur symétrique. Supposons que la section droite considérée a un degré de fusion $f = 0,3$ et $\text{ITR} = 0,3$. On néglige les effets de diffusion. La forme de la section droite de ce coupleur est donnée à la figure 4.10.

En faisant une discréttisation en différences finies pour le champ magnétique transverse, et en résolvant l'équation aux valeurs propres avec la méthode d'Arnoldi, on obtient les valeurs suivantes pour les indices effectifs des quatre premiers supermodes.

Pour la polarisation en y , on obtient $n_{sy} = 1,4469079442$ pour le supermode symétrique et $n_{ay} = 1,4468681383$ pour le supermode antisymétrique. Les valeurs

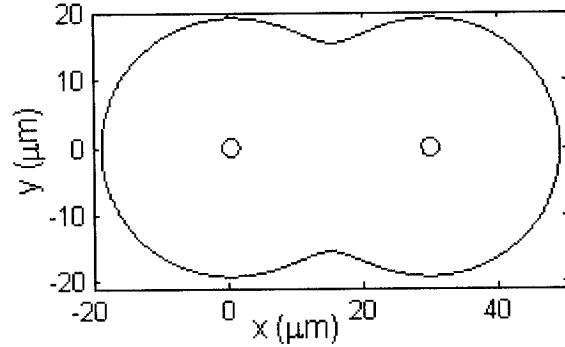


FIG. 4.10 Section droite d'un coupleur avec $f = 0,3$, ITR = 0,3

respectives de l'indice effectif pour la polarisation en x sont $n_{sx} = 1,4469083468$ et $n_{ax} = 1,4468683018$. La longueur de battement moyenne est $z_b = 32,56\text{mm}$. La longueur de battement de polarisation est $z_p = 5,44\text{m}$.

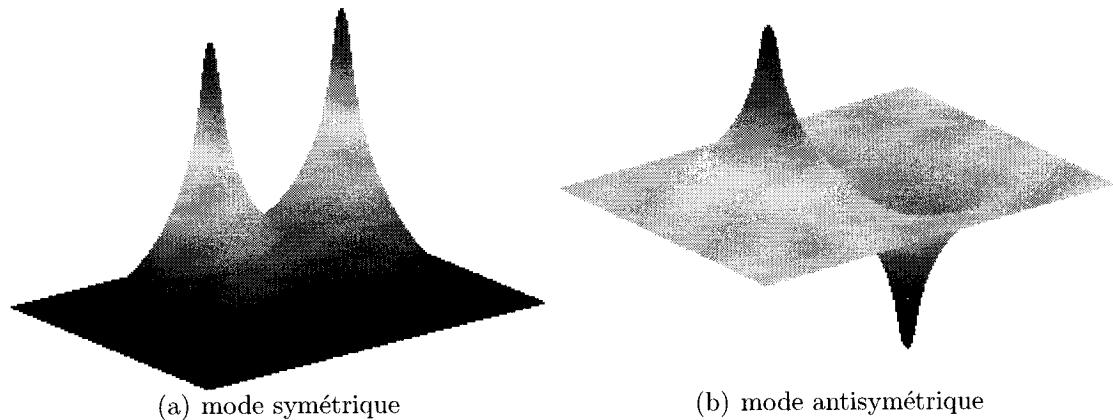


FIG. 4.11 Mode symétrique et antisymétrique d'un coupleur : $f = 0,3$, ITR = 0,3

À la figure 4.11, nous présentons le champ modal des modes symétrique et antisymétrique pour la polarisation en x . Nous avons présenté seulement le champ majeur, c'est-à-dire celui polarisé en x , qui constitue presque la totalité du champ modal. Le champ mineur (H_y) associé à lui, est d'une amplitude de deux ordres plus petite que le champ majeur. Le champ de la polarisation en y a la même forme.

4.3 Simulation de la transmission d'un coupleur réel

La section précédente présente la méthode du calcul des constantes de propagation des modes guidés dans le coupleur. Nous sommes maintenant en mesure de calculer la transmission des coupleurs par le phénomène de battement des supermodes. Dans cette section, nous calculons la transmission d'un coupleur réel et comparons cette transmission calculée avec la transmission mesurée.

4.3.1 Structure du coupleur

Avant de considérer la transmission optique du coupleur, nous devons modéliser son profil d'indice de réfraction. Pour construire ce modèle, nous procédons comme pour le coupleur modélisé au chapitre précédent.

4.3.1.1 Fusion du coupleur

La recette utilisée pour la fusion des fibres est la suivante. La distance entre la torche et les fibres est de 6mm. La vitesse de balayage de la torche est maintenue constante à 2mm/s. Cette fois, on ne fait pas une fusion uniforme des fibres. On commence à chauffer d'abord la partie centrale de 2mm. Après le premier aller-retour, on augmente la distance chauffée d'un millimètre, donc au deuxième tour la distance chauffée est de 3mm. On continue d'augmenter après chaque tour la distance chauffée d'un millimètre jusqu'à une distance totale de 9mm. Le temps total du cycle, sans compter le temps d'approche de la torche, est 44s. Cette procédure a été répétée trois fois pour le même coupleur.

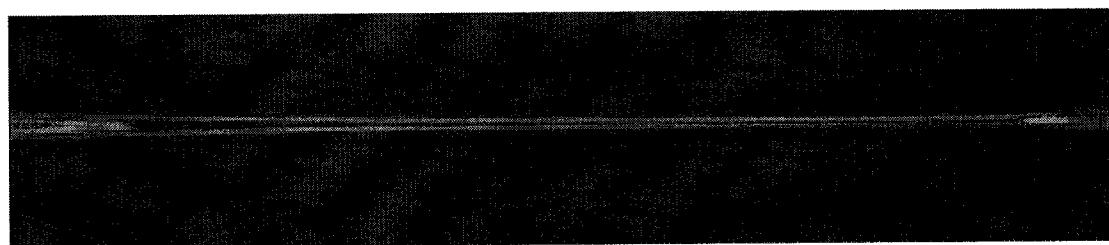


FIG. 4.12 État du coupleur après la fusion

Après la fusion des fibres, nous avons pris une photo de la structure du coupleur, à l'aide d'une caméra montée sur le microscope installé au dessus des fibres. Cette image est donnée à la figure 4.12. La résolution de l'image n'est pas assez bonne pour permettre une détermination de la distribution de la largeur de la section droite comme nous l'avons fait au chapitre précédent pour le processus de l'étirage. En effet, la distance chauffée dans ce cas est 9mm, ce qui est beaucoup plus grand que les 2mm de la recette d'étirage du chapitre précédent.

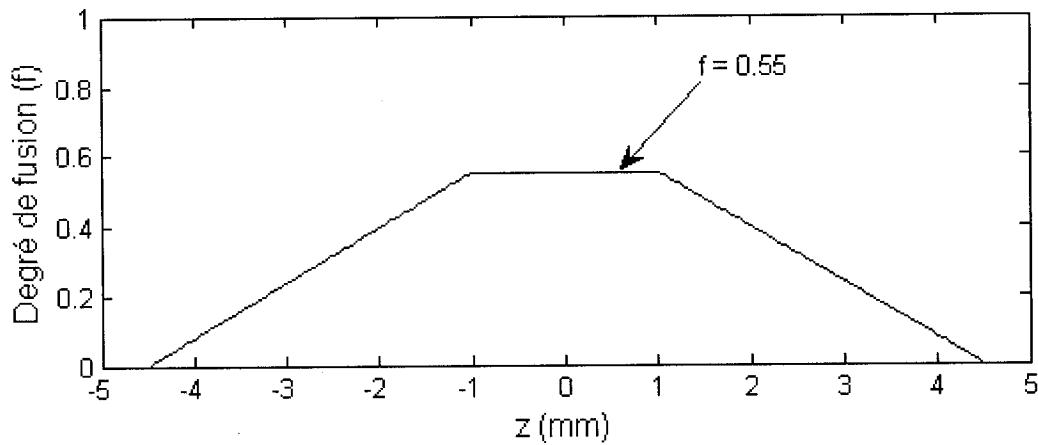


FIG. 4.13 Distribution initiale du degré de fusion

Puisque l'avancement de la fusion est directement proportionnel au temps de chauffage, à partir de la recette décrite ci-dessus, nous avons décidé de considérer une forme de trapèze comme distribution de degré de fusion, avec une partie centrale uniforme de longueur 2mm, comme montré à la figure 4.13. En mesurant la largeur de la partie centrale du coupleur et celle des deux fibres avant la fusion, nous avons obtenu une valeur de $f = 0,55$ pour le degré de fusion.

Pour calculer le profil des sections droites après la fusion des fibres, nous avons aussi besoin du coefficient de diffusion. Comme dans les chapitres précédents, une seule fibre est chauffée selon la recette de fusion. Puisque la distance entre la torche et les fibres est de 6mm, on s'attend à une température moins élevée qu'au chapitre précédent, et donc, à une diffusion moins importante. Pour cette raison, la fibre est chauffée le double du temps de fusion, c'est-à-dire pendant 264s, afin de bien distinguer la diffusion.

Pour déterminer le coefficient de diffusion au centre du coupleur, la fibre est

clivée au milieu de la zone chauffée et une mesure du profil d'indice ou, de façon équivalente, du profil de concentration du germanium, est effectuée sur cette section droite. À la figure 4.14, nous montrons le profil de concentration mesuré. Pour donner une idée de combien de diffusion on obtient dans ce cas, nous présentons aussi dans cette figure le profil de la fibre non chauffée.

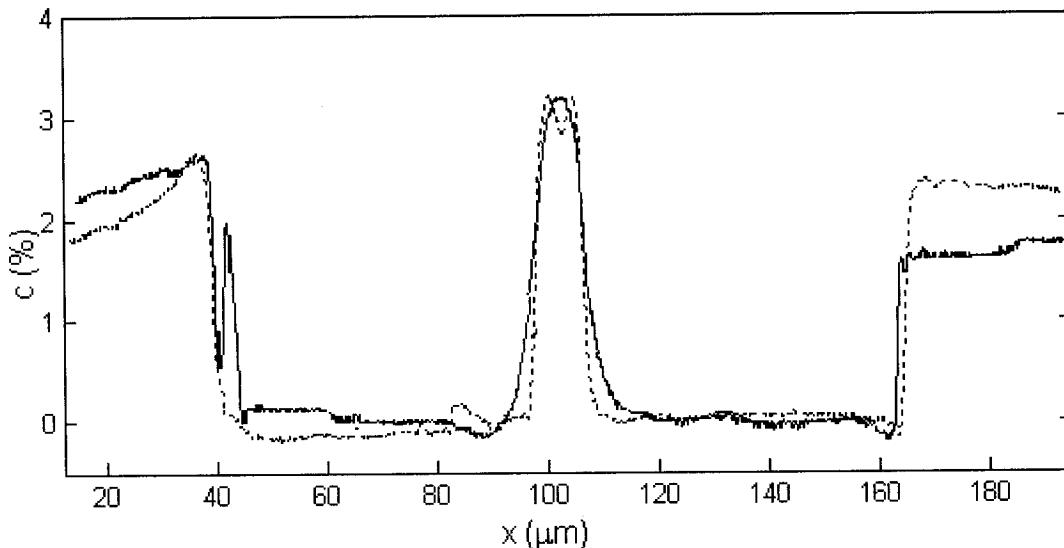


FIG. 4.14 Profil de concentration mesuré dans la fibre avant et après l'application de la recette de fusion $t = 264\text{s}$

En comparant comme au chapitre précédent ces profils avec la solution analytique, on obtient un coefficient de diffusion $D = 1,3 \cdot 10^{-15}\text{m}^2/\text{s}$ au centre du coupleur. Pour le reste du coupleur une distribution semblable à celle du degré de fusion est considérée (distribution trapézoïdale).

Pour modéliser l'état du coupleur après la fusion, nous avons besoin de la valeur du rapport μ/γ . Au centre du coupleur, on obtient un degré de fusion $f = 0,55$ en un temps $t = 132\text{s}$. Utilisant ces valeurs dans la relation (2.32), on obtient $\mu/\gamma = 1,2 \cdot 10^6\text{s/m}$. De cette façon on peut déterminer la valeur de ce rapport pour le reste du coupleur. Maintenant nous avons tout ce qu'il faut pour modéliser l'état du coupleur après la fusion.

On peut également calculer la valeur moyenne au cours du temps de la viscosité durant la fusion. Considérons la partie centrale du coupleur. Comme nous l'avons déjà fait au deuxième chapitre, à partir de la relation entre le coefficient de diffusion

et de sa dépendance en température, donnée dans la littérature [38], on conclut que la température approximative moyenne est $T = 1478^\circ\text{C}$ au centre du coupleur. À partir de la relation (2.31), cela correspond à $\gamma = 0,27 \text{ N/m}$. Donc, la valeur moyenne de la viscosité, au centre du coupleur, est $\mu = 3,22 \cdot 10^5 \text{ Pas}$.

Revenons au calcul du profil de section droite du coupleur. En utilisant la procédure expliquée au deuxième chapitre, on obtient pour la partie centrale du coupleur la section droite montrée à la figure 4.15. Pour le reste du coupleur on obtient des états intermédiaires entre cette section droite et celle avec deux fibres tangentées non fusionnées.

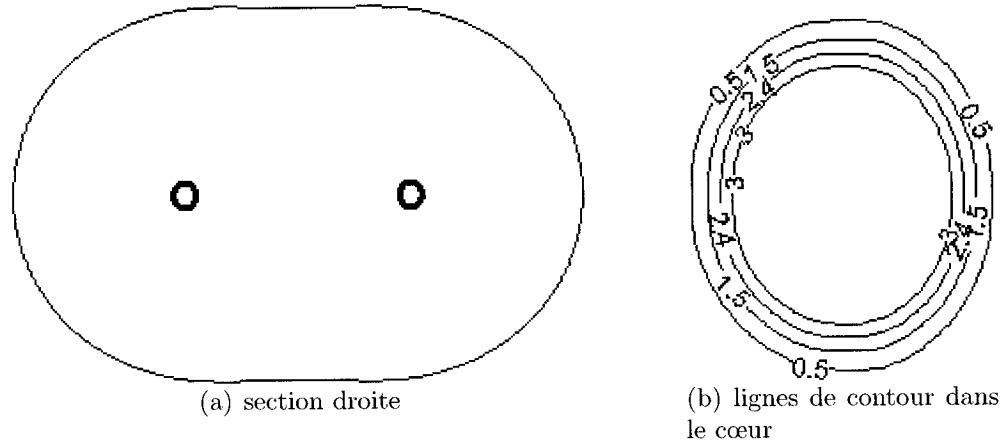


FIG. 4.15 Section droite au centre du coupleur après la fusion : $f = 0,55$

4.3.1.2 Étirage du coupleur

Après la fusion, on continue avec l'étirage du coupleur. La recette utilisée pour l'étirage est la suivante : la torche s'approche à une distance de 6,65mm des fibres. Elle balaye une zone de 8mm avec une vitesse de 2mm/s. La vitesse des moteurs d'étirage est de 50 $\mu\text{m/s}$. La durée du processus est $t = 145\text{s}$.

Pour construire un modèle d'étirage, nous devons connaître les distributions axiales $\frac{\mu}{\gamma}(z)$ et $D(z)$. Commençons avec la distribution $\frac{\mu}{\gamma}(z)$. Comme au chapitre précédent, pour déterminer ces distributions, on applique la recette d'étirage aux deux fibres sans les étirer. Cette fois, au lieu de préchauffer les fibres individuelles selon la recette de fusion, on les fusionne comme d'habitude et après on applique

la recette d'étirage sans étirer le coupleur. À l'aide de la relation (2.32), on peut déduire la valeur du μ/γ à partir de l'avancement de la fusion dans le coupleur.

Aux chapitres précédents nous avons remarqué que la viscosité des fibres qui sont chauffées auparavant était plus basse que celle des fibres non chauffées. Cela est attribué à la présence des ions OH dans la flamme et absorbés par le verre. Donc, une partie du coupleur qui est chauffée plus durant la fusion a une viscosité plus basse durant l'étirage, même si durant ce processus la température est constante dans la zone chauffée. On s'attend alors que l'avancement de la fusion dans la partie centrale qui est chauffée plus soit plus grand que pour le reste du coupleur. Alors, on considère de nouveau une forme de trapèze pour la distribution du degré de fusion, après l'application de la recette d'étirage (sans étirer) aux fibres fusionnées, comme montré à la figure 4.16. En mesurant la largeur de la section droite de la partie centrale du coupleur à l'écran relié au microscope, et en comparant cette mesure avec la largeur de deux fibres tangentes, on obtient $f = 0,62$ pour le degré de fusion.

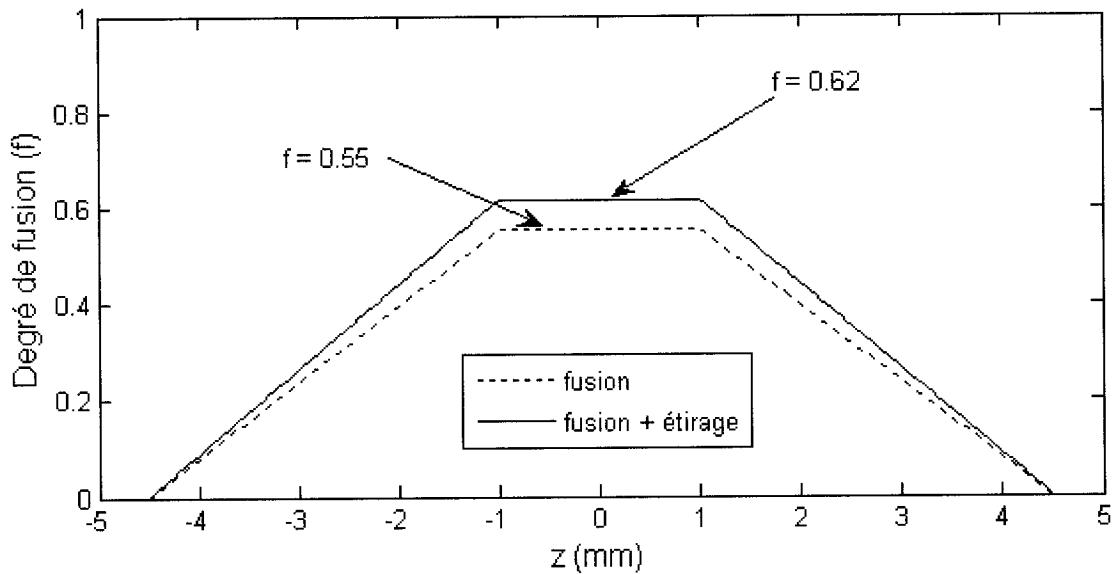


FIG. 4.16 Distribution du degré de fusion après l'application de la recette de fusion et de l'étirage

À partir de cette distribution de l'avancement de la fusion et du temps de l'étirage, on peut déterminer la distribution du rapport $\frac{\mu}{\gamma}(z)$. Cette distribution est présenté à la figure 4.17. La valeur de ce rapport pour la partie centrale est

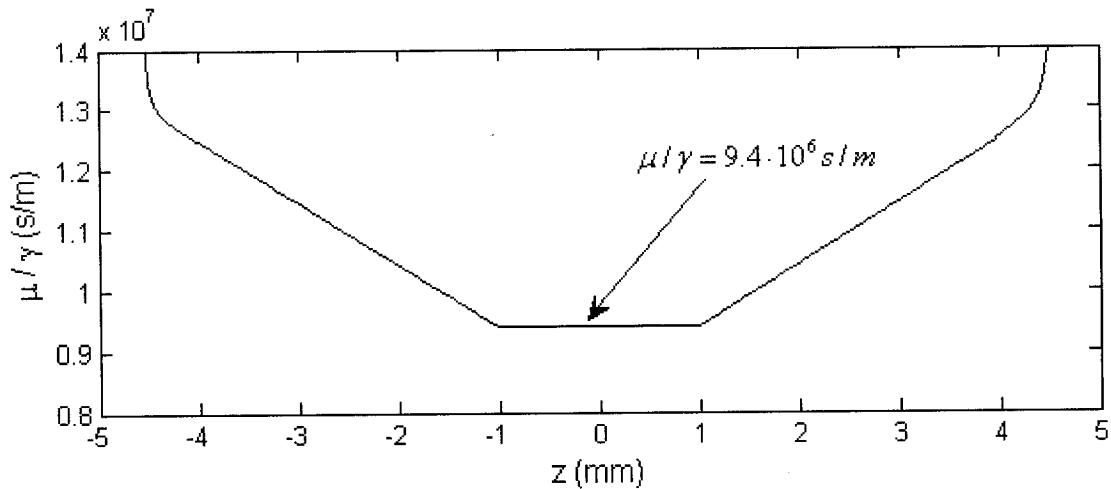


FIG. 4.17 Distribution $\mu/\gamma(z)$ durant le processus d'étirage

$$\mu/\gamma = 9,4 \cdot 10^6 \text{ s/m.}$$

Considérons maintenant la distribution du coefficient de diffusion $D(z)$. Comme d'habitude, une seule fibre est chauffée selon la recette d'étirage. À cause d'une distance plus grande entre la torche et les fibres, comparativement à la fusion (6,65mm au lieu de 6mm), on s'attend à une température moins élevée, ce qui veut dire une diffusion moins importante. Pour être en mesure de distinguer cette diffusion, la fibre est chauffée beaucoup plus longtemps que la durée de l'étirage (quatre fois plus, c'est-à-dire $t = 580\text{s}$).

Nous mesurons seulement la diffusion pour la partie centrale du coupleur, considérant une distribution semblable avec le degré de fusion (forme trapézoïdale). La fibre est alors clivée au milieu de la zone chauffée, et le profil d'indice est mesuré pour cette section droite. Ce profil est montré à la figure 4.18, où nous avons inséré aussi le profil initial de la concentration. En comparant ce profil avec la solution analytique, on obtient $D = 6,2 \cdot 10^{-16}\text{m}^2/\text{s}$ pour le coefficient de diffusion au centre du coupleur.

Comme pour la fusion, on peut déterminer la valeur moyenne (en temps) de la viscosité durant l'étirage, à partir d'une valeur approximative de la température. Comme nous l'avons déjà fait aux chapitres précédents, de la relation entre le coefficient de diffusion et la température donnée à la littérature [38], on peut conclure

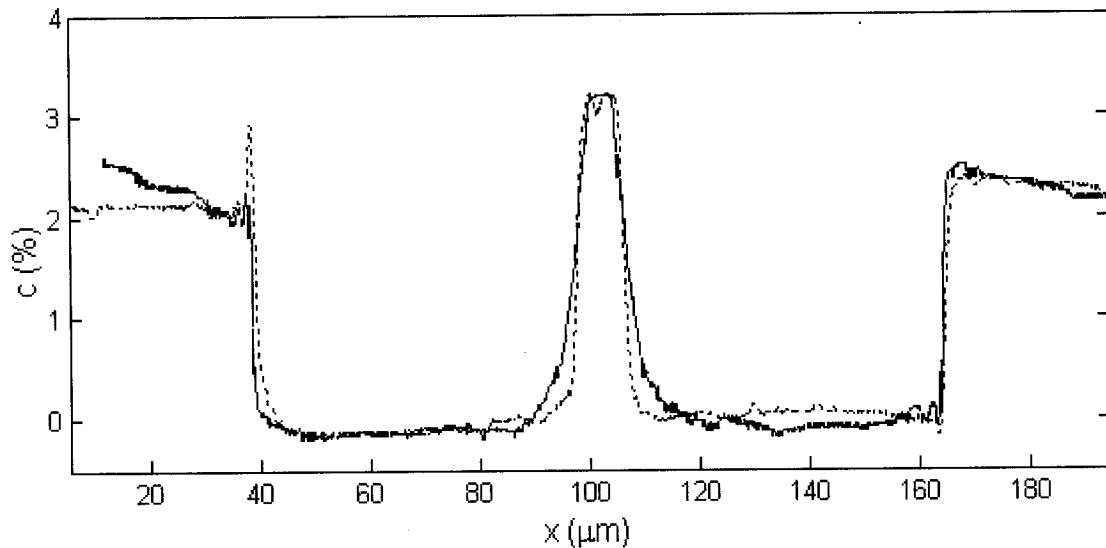


FIG. 4.18 Profil de concentration mesuré dans la fibre après l'application de la recette de l'étirage, $t = 580\text{s}$

que la température approximative est $T = 1417^\circ\text{C}$ au centre du coupleur. À partir de la relation (2.31), cela correspond à $\gamma = 0,26\text{N/m}$. Donc, la valeur moyenne de la viscosité, au centre du coupleur, est $\mu = 4 \cdot 10^5\text{Pa s}$.

Après la détermination des paramètres nécessaires, on procède avec la résolution numérique des équations de l'évolution du profil du coupleur, comme au chapitre précédent. À la figure 4.19, nous présentons le résultat de nos calculs pour le profil du coupleur. À cause de la symétrie, seulement la moitié du coupleur est montrée. Ici, au lieu de la largeur normalisée du coupleur, nous avons montré la distribution de l'ITR, qui est plus utile pour le calcul des modes vectoriels.

Pour donner une idée du profil d'indice en 2D pour les sections droites, nous présentons à la figure 4.20 le résultat de nos calculs pour la section droite au centre du coupleur. Le degré de fusion est $f = 0,66$ et la valeur du taux de réduction inverse est $\text{ITR} = 0,376$ pour cette section droite.

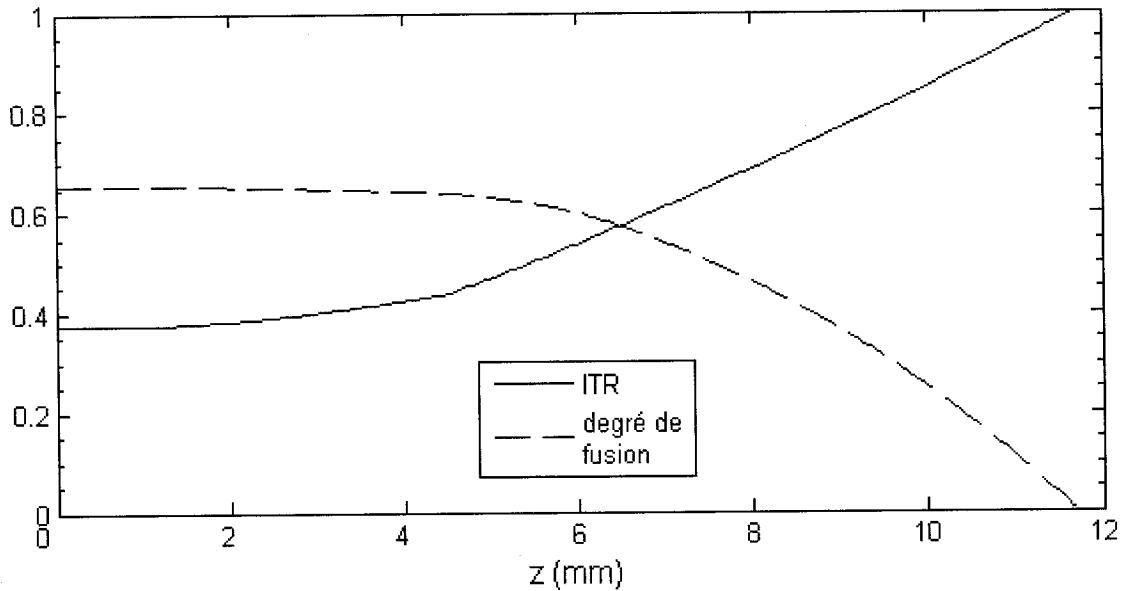


FIG. 4.19 Profil longitudinal calculé pour la moitié du coupleur

4.3.2 Transmission optique

Après la modélisation de la structure du coupleur, nous considérons sa transmission optique qui est l'objet de ce chapitre. Le montage actuel de la fabrication des coupleurs nous permet de mesurer la transmission optique du coupleur seulement en fonction de la longueur d'onde. Nous allons donc calculer théoriquement la réponse spectrale du coupleur décrit ci-dessus et comparer cette réponse avec la réponse expérimentale.

Pour calculer numériquement le déphasage des supermodes, leurs constantes de propagation sont calculées pour un nombre $N = 300$ de sections droites équidistantes dans la moitié du coupleur, à cause de la symétrie longitudinale du coupleur. Cela est fait pour 12 différentes longueurs d'onde dans l'intervalle $[1,3 - 1,65 \mu\text{m}]$. Puisque nous utilisons une source blanche non polarisée, nous avons considéré $\eta = 1/2$ (η est défini à la section 4.1.2, l'équation (4.8)). Les intégrales (4.6) pour α_x et α_y sont calculées avec la méthode des trapèzes.

Les réponses spectrales expérimentale et théorique du coupleur sont présentées à la figure 4.21. On remarque une différence entre les courbes expérimentales et théoriques. Cela provient du fait que les paramètres expérimentaux $\frac{\mu}{\gamma}(z)$ et $D(z)$

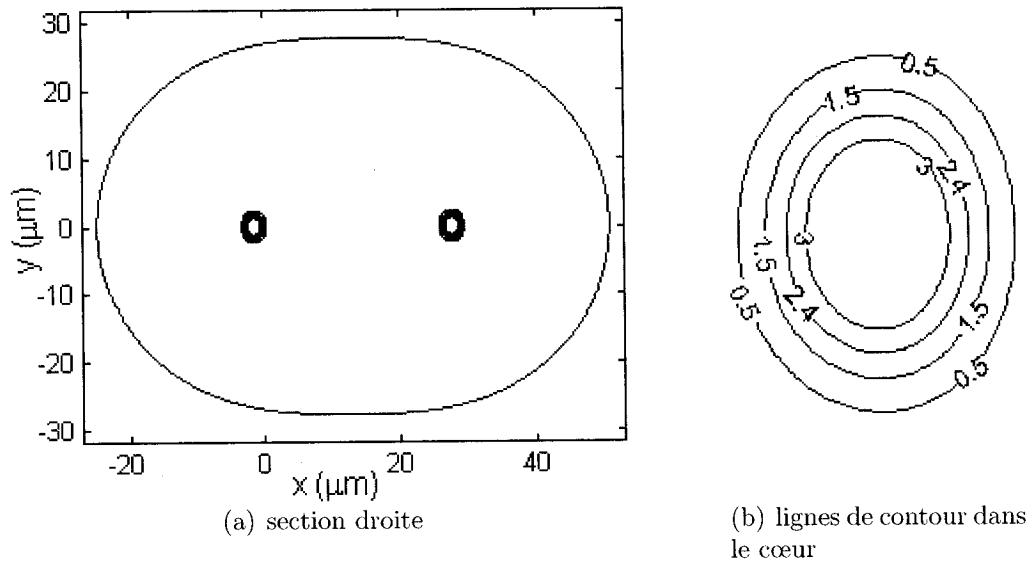


FIG. 4.20 Section droite au centre du coupleur après l'étirage : $f = 0,66$, ITR = 0,376

ne sont pas évalués à chaque point z , mais ils sont évalués seulement pour la partie centrale du coupleur et une fonction linéaire est considérée pour le reste du coupleur. Cela fait que le profil d'indice de réfraction calculé pour le coupleur diffère un petit peu du profil réel. Cependant, la différence en transmission entre la simulation et l'expérience n'est pas très grande si on considère le fait que la transmission du coupleur est très sensible aux changements dans le profil d'indice. Cela veut dire que notre modèle prédit correctement l'allure des courbes de transmission du coupleur pour une recette donnée, et cela en effectuant seulement quelques mesures préliminaires simples.

Il faut noter que, contrairement aux modèles précédents, les différents paramètres du modèle ne sont pas choisis pour que la transmission calculée du coupleur corresponde à la transmission mesurée, mais qu'ils sont déterminés par des méthodes préétablies. On remarque aussi qu'avec la méthode de battement des supermodes, pour évaluer les pertes liées à la non adiabacité du coupleur, il faut calculer le couplage entre les premiers supermodes et les autres supermodes de la structure fusionnée qui est une tâche complexe à cause d'un très grand nombre de modes. Ces pertes sont calculées facilement avec la méthode de propagation des faisceaux étudiée au chapitre suivant.

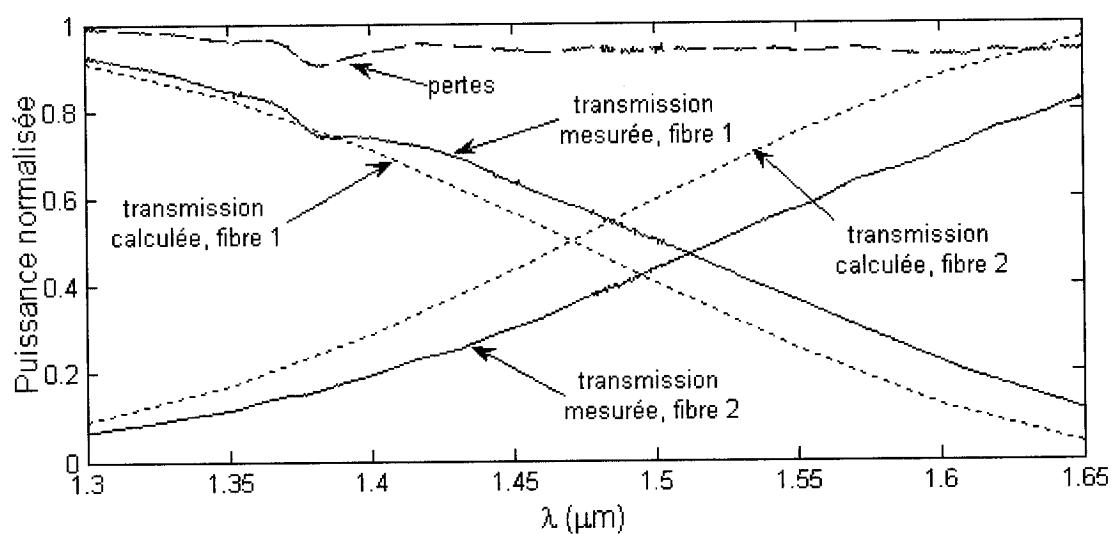


FIG. 4.21 Courbes de transmission mesurées et calculées dans les deux fibres de sortie en fonction de la longueur d'onde

CHAPITRE 5

LA MÉTHODE DE PROPAGATION DES FAISCEAUX

La transmission optique du coupleur est calculée au chapitre précédent en se basant sur le phénomène du battement des supermodes. Dans ce chapitre, nous utilisons une autre approche pour traiter le problème du calcul de cette transmission. C'est la méthode de propagation des faisceaux (BPM).

La méthode de propagation des faisceaux est la méthode la plus utilisée pour la modélisation des guides d'onde d'optique intégrée. Elle a été d'abord développée pour la propagation du champ acoustique dans l'eau et a été introduite en optique par Feit et Fleck [55]. Après cette introduction, la BPM est devenue très populaire pour la modélisation des guides d'ondes à cause de sa simplicité et de son efficacité. Elle permet la modélisation des structures avec une géométrie complexe et elle inclut automatiquement le champ guidé et celui de radiation ainsi que le couplage et la conversion de différents modes. Elle peut aussi inclure les effets non linéaires.

Il y a plusieurs variantes de BPM comme celle basée sur la transformation de Fourier [55, 56], les différences finies [54, 57, 58], les éléments finis [59], la méthode des lignes [60] et les fonctions de Green [61]. Dans cette thèse, nous utilisons une BPM basée sur une discrétisation en différences finies. Même dans ce cas, il existe plusieurs schémas dépendant de l'équation d'onde considérée. On parle donc de BPM scalaire, semi-vectorielle ou vectorielle. Nous considérons la BPM vectorielle. De plus, dépendant de la variation de la structure selon l'axe de propagation, on distingue entre la BPM classique ou paraxiale et la BPM à angle large. Les coupleurs fusionnés qu'on considère dans cette thèse, sont des coupleurs adiabatiques dont le profil d'indice varie lentement selon l'axe longitudinal z . De plus, la direction de propagation du champ dans ces coupleurs, correspond à tout moment avec l'axe longitudinal z . Il s'ensuit que la BPM vectorielle paraxiale décrit correctement ces coupleurs. Cependant, l'approximation de premier ordre du type angle large n'augmente pas la quantité des calculs, et nous allons donc l'inclure dans nos simulations pour augmenter la précision.

5.1 BPM en différences finies

La méthode de propagation des faisceaux, comme son nom l'indique, transporte le champ électromagnétique selon l'axe de propagation z , à partir du champ initial connu dans un plan situé à $z = 0$. Donc, la BPM que nous considérons, consiste en la propagation du champ dans le demi-espace $z > 0$. Ce processus est discréétisé en plusieurs pas. Si l'indice k est utilisé pour la discréétisation en z , un pas de la BPM consiste à calculer le champ électromagnétique dans le plan transverse situé à $z_{k+1} = z_k + dz$ à partir du champ connu en z_k . Nous considérons un profil d'indice constant durant un pas de propagation, ce qui est justifié pour les coupleurs adiabatiques et un pas dz petit.

5.1.1 Équations de base

Le point de départ pour dériver les équations de BPM sont les équations de Maxwell. Nous avons déjà démontré au début du chapitre précédent, la dérivation des relations (4.21) à partir des équations de Maxwell

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} - \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k_0^2 \varepsilon_r H_x + \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y} \frac{\partial H_y}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} - \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + k_0^2 \varepsilon_r H_y + \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} \frac{\partial H_x}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Ces équations sont valables pour $\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial z} = 0$, mais comme nous l'avons déjà mentionné, durant un pas de propagation, le profil d'indice est considéré constant.

Dans les guides d'onde typiques, la variation la plus rapide du champ électromagnétique pour différents modes est la variation de la phase $e^{-i\beta_j z}$ causée par la propagation selon l'axe z . Pour les calculs numériques, il est profitable de factoriser cette variation rapide pour obtenir des amplitudes qui varient peu dans la direction de propagation. On pose alors

$$H_t(x, y, z) = \tilde{H}_t(x, y, z) e^{-i\beta_0 z} \quad (5.2)$$

où $H_t (H_x, H_y)$ est le champ magnétique transverse et $\beta_0 = k_0 n_0$ est la constante

de propagation de référence, avec n_0 une valeur typique de l'indice de réfraction appelé l'indice de référence. Le n_0 doit être choisi proche des indices effectifs des modes guidés. Nous analysons un peu plus loin la valeur de cet indice. Substituant (5.2) dans (5.1), on obtient

$$\left(2i\beta_0 \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \begin{pmatrix} \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} \\ P_{yx} & P_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

avec

$$\begin{aligned} P_{xx} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \varepsilon_r \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial}{\partial y} \right) + (k_0^2 \varepsilon_r - \beta_0^2) \\ P_{xy} &= \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \\ P_{yx} &= \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \\ P_{yy} &= \varepsilon_r \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (k_0^2 \varepsilon_r - \beta_0^2). \end{aligned} \quad (5.4)$$

On remarque ici la ressemblance de la matrice P avec la matrice A du chapitre précédent. Considérons le côté gauche de (5.3). La variation de $\tilde{H}(x, y, z)$ par rapport à z est lente parce que la structure du coupleur varie lentement avec z (coupleurs adiabatiques) et la direction de propagation est l'axe z lui-même. Dans ce cas la dérivée seconde $\partial^2 \tilde{H} / \partial z^2$ est négligeable par rapport au terme $2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{H}}{\partial z}$ et la relation (5.3) prend la forme simple

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \end{pmatrix} = \frac{1}{2i\beta_0} \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} \\ P_{yx} & P_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

On obtient ainsi, l'équation de BPM en approximation paraxiale ou parabolique. Il s'agit d'une équation différentielle de premier ordre, à valeur initiale, qui est beaucoup plus simple à résoudre qu'une équation de deuxième ordre. Elle ressemble beaucoup à une équation de diffusion et nous utilisons les méthodes numériques développées pour cette équation.

On remarque l'apparition de $i = \sqrt{-1}$ dans l'équation de propagation du champ. Le champ initial, c'est-à-dire le champ à $z = 0$ est un champ réel. Par contre, la solution de cette équation, c'est-à-dire le champ calculé à un plan situé à $z > 0$, est

un champ complexe. Pour interpréter cette solution complexe, considérons ce qu'il se passe dans le cas de la propagation d'un seul mode dans un guide uniforme en z , c'est-à-dire, quand le champ initial est $H(0) = a|h\rangle$, où a est l'amplitude modale et $|h\rangle$ le champ modal.

On sait que la solution complexe du problème dans ce cas est $H(z) = ae^{-i\beta z}|h\rangle$ et la puissance totale est alors constante en tout z avec une valeur $a^2\langle h|h\rangle$. On peut aussi écrire la solution complexe sous la forme $H(z) = ae^{-i(\beta-\beta_0)z}e^{-i\beta_0 z}|h\rangle$. En omettant le terme $e^{-i\beta_0 z}$, on obtient comme solution par la BPM : $H(z) = ae^{-i(\beta-\beta_0)z}|h\rangle$. On remarque que la puissance associée à ce champ complexe (le module au carré) correspond à la valeur appropriée de la puissance. S'il y a plusieurs modes, c'est aussi le déphasage entre les modes qui fait que la solution soit complexe.

On remarque aussi que les oscillations de la partie réelle et imaginaire de la solution, dépendent des valeurs $\beta_j - \beta_0$. On voit alors pourquoi on doit choisir β_0 proche des β_j . En effet, pour obtenir une solution numérique précise le pas dz doit être une petite fraction de la longueur de l'oscillation. Il s'ensuit que le choix du β_0 influence beaucoup la quantité des calculs pour obtenir une précision donnée. Il est alors préférable de choisir comme β_0 , la moyenne des constantes de propagation des modes guidés dans le coupleur.

Le calcul des constantes de propagation, considéré au chapitre précédent, prend un temps considérable. Cependant, puisque les coupleurs adiabatiques ont un profil qui varie lentement, nous n'avons pas besoin d'évaluer l'indice effectif moyen à chaque pas de la BPM. On peut le faire après un nombre approprié de pas où la structure du coupleur change assez pour affecter l'indice moyen. Un autre choix recommandé dans la littérature est de choisir comme n_0 l'indice de la gaine des fibres ou du cœur. Mais, comme nous allons voir un peu plus loin, ce choix augmente beaucoup la quantité des calculs.

5.1.2 Discrétisation en différences finies

Pour obtenir une solution numérique de l'équation (5.5), nous utilisons une discrétisation en différences finies. Comme pour l'équation de diffusion où nous

avons fait une discréétisation spatiale et une temporelle, ici on doit faire une discréétisation dans le plan transverse, donnée par une forme discrète de la matrice P , et une discréétisation en z pour la propagation.

Commençons avec la forme discrète de P . Nous avons déjà remarqué que cette matrice opérationnelle ressemble beaucoup à la matrice A du chapitre précédent. Nous utilisons donc la même technique de discréétisation, c'est-à-dire, nous considérons un maillage non uniforme. La forme discrète de la matrice P (presque identique à celle de A) est alors donnée par ces relations

$$\begin{aligned}
 P_{xx}\tilde{H}_x &= a_o\tilde{H}_{x(i,j-1)} + a_e\tilde{H}_{x(i,j-1)} + a_n\tilde{H}_{x(i+1,j)} + a_s\tilde{H}_{x(i-1,j)} + a_c\tilde{H}_{x(i,j)} \\
 P_{xy}\tilde{H}_y &= a_{bo}\tilde{H}_{y(i,j-1)} + a_{be}\tilde{H}_{y(i,j+1)} \\
 P_{yx}\tilde{H}_x &= b_{an}\tilde{H}_{x(i+1,j)} + b_{as}\tilde{H}_{x(i-1,j)} \\
 P_{yy}\tilde{H}_y &= b_o\tilde{H}_{y(i,j-1)} + b_e\tilde{H}_{y(i,j-1)} + b_n\tilde{H}_{y(i+1,j)} + b_s\tilde{H}_{y(i-1,j)} + b_c\tilde{H}_{y(i,j)}
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

avec

$$\begin{aligned}
 a_o &= \frac{2}{o(e+o)} \quad a_e = \frac{2}{e(o+e)} \quad a_n = \frac{2}{n(s+n)} \frac{2\varepsilon_{r(i,j)}}{\varepsilon_{r(i,j)} + \varepsilon_{r(i+1,j)}} \\
 a_s &= \frac{2}{s(n+s)} \frac{2\varepsilon_{r(i,j)}}{\varepsilon_{r(i,j)} + \varepsilon_{r(i-1,j)}} \quad a_c = -a_e - a_o - a_n - a_s + k_o^2\varepsilon_r - \beta_0^2 \\
 a_{bo} &= \frac{\varepsilon_{r(i+1,j)} - \varepsilon_{r(i-1,j)}}{\varepsilon_{r(i,j)}(e+o)(n+s)} \quad a_{be} = -a_{bo}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

et

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{n(s+n)} \quad b_s = \frac{2}{s(n+s)} \quad b_o = \frac{2}{o(e+o)} \frac{2\varepsilon_{r(i,j)}}{\varepsilon_{r(i,j)} + \varepsilon_{r(i,j+1)}} \\
 b_e &= \frac{2}{e(o+e)} \frac{2\varepsilon_{r(i,j)}}{\varepsilon_{r(i,j)} + \varepsilon_{r(i-1,j)}} \quad b_c = -b_e - b_o - b_n - b_s + k_o^2\varepsilon_r - \beta_0^2 \\
 b_{an} &= \frac{\varepsilon_{r(i,j+1)} - \varepsilon_{r(i,j-1)}}{\varepsilon_{r(i,j)}(n+s)(e+o)} \quad b_{as} = -b_{an}.
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

La numérotation des nœuds dans le plan de la section droite est faite comme au

chapitre précédent, selon les rangées, à partir de celle du bas, de gauche à droite. Donc, si le champ magnétique transverse est considéré comme un vecteur $\begin{bmatrix} \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \end{bmatrix}$, la forme de la matrice discrète P est pareille avec celle de la matrice A du chapitre précédent montrée d'une façon schématique à la figure 4.5.

Considérons maintenant la discrétisation en z . Supposons que l'indice k est utilisé pour cette discrétisation. La valeur du champ magnétique transverse discrète au point $z = k \cdot dz$ est notée $H_t^{(k)}$ et la matrice discrète P à ce point est notée $P^{(k)}$. Nous allons utiliser le schéma de Crank-Nicolson pour la discrétisation de l'équation (5.5). Dans ce cas, la forme discrète de cette équation est donnée par

$$\frac{H_t^{(k+1)} - H_t^{(k)}}{dz} = \frac{P^{(k)}}{2i\beta_0} \left(\frac{H_t^{(k)} + H_t^{(k+1)}}{2} \right). \quad (5.9)$$

Ici nous utilisons le fait que la structure du coupleur, et en conséquence la matrice $P^{(k)}$, est considérée constante pendant un pas dz . Nous prenons comme valeur de P celle au début du pas. On remarque aussi que la discrétisation de Crank-Nicolson est symétrique par rapport au point $z = (k+1/2)dz$. Cela correspond à une formule en différences finies centrale et l'erreur dans la discrétisation selon z est alors de l'ordre $O(dz^2)$. Une analyse de stabilité de von Neumann, semblable avec celle du deuxième chapitre, montre que ce schéma est stable pour n'importe quelle valeur du pas dz .

L'équation (5.9) s'écrit sous la forme d'une équation matricielle

$$\left(I - \frac{dz}{4i\beta_0} P^{(k)} \right) H_t^{(k+1)} = \left(I + \frac{dz}{4i\beta_0} P^{(k)} \right) H_t^{(k)} \quad (5.10)$$

avec I la matrice identité. Donc pour évaluer le champ magnétique en $z = (k+1)dz$ à partir de sa valeur en $z = kdz$, nous devons résoudre une équation matricielle linéaire de la forme $A \cdot X = B$, avec $A = I - \frac{dz}{4i\beta_0} P^{(k)}$ et $B = \left(I + \frac{dz}{4i\beta_0} P^{(k)} \right) H_t^{(k)}$.

La discrétisation de la section droite du coupleur est faite de la même façon qu'au chapitre précédent pour le calcul des supermodes, c'est-à-dire que, pour la même section droite, on choisit le même maillage de discrétisation. Comme au chapitre précédent, pour augmenter la précision des calculs, on remplace la valeur

de ε_r à un nœud donné, par sa valeur moyenne dans la cellule autour du nœud $\int_{cellule} \varepsilon_r(x, y) dx dy$.

Puisque la matrice A est creuse et de grande taille, on doit utiliser une méthode itérative pour résoudre cette équation matricielle. Parmi les différentes méthodes nous choisissons la méthode appelée Bi-CGSTAB pour 'BiConjugate Gradients Stabilized Method', qui est une méthode très facile à planter [62, 63]. Cette méthode est aussi disponible en MATLAB sous la commande *bicgstab*.

5.1.3 Approximations de Padé

Dans cette section nous expliquons comment les approximations de Padé permettent d'inclure dans la formulation de la BPM en différences finies la dérivée seconde en z négligée dans l'approximation paraxiale (5.5).

Écrivons l'équation (5.3) sous la forme simple

$$\left(2i\beta_0 \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) H_t = P H_t \quad (5.11)$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(2i\beta_0 - \frac{\partial}{\partial z} \right) H_t = P H_t. \quad (5.12)$$

À partir de cette relation on peut écrire d'une façon formelle

$$\frac{\partial}{\partial z} H_t = \frac{P}{2i\beta_0 - \frac{\partial}{\partial z}} H_t. \quad (5.13)$$

Quand on néglige la dérivée du dénominateur du membre droit, on obtient la formule (5.5), qui peut être considérée comme une approximation d'ordre zéro. La relation (5.13) est considérée comme une formule de récurrence

$$\frac{\partial}{\partial z}^{(n)} = \frac{P}{2i\beta_0 - \frac{\partial}{\partial z}^{(n-1)}}. \quad (5.14)$$

Donc, si on définit

$$\frac{\partial}{\partial z}^{(-1)} = 0$$

on obtient pour l'approximation d'ordre zéro

$$\frac{\partial}{\partial z}^{(0)} = \frac{P}{2i\beta_0 - \frac{\partial}{\partial z}^{(-1)}} = \frac{P}{2i\beta_0}.$$

L'approximation de premier ordre est alors

$$\frac{\partial}{\partial z}^{(1)} = \frac{P}{2i\beta_0 - \frac{\partial}{\partial z}^{(0)}} = -i \frac{2\beta_0 P}{4\beta_0^2 + P}. \quad (5.15)$$

L'approximation de deuxième ordre est

$$\frac{\partial}{\partial z}^{(2)} = \frac{P}{2i\beta_0 - \frac{\partial}{\partial z}^{(1)}} = -i \frac{P/2\beta_0 + P^2/8\beta_0^3}{1 + P/2\beta_0^2} \quad (5.16)$$

et on continue de cette façon pour les ordres supérieurs. Ces approximations sont appelées les approximations de Padé. On remarque qu'à partir de l'approximation de deuxième ordre, des puissances P^n de la matrice P apparaissent dans les équations. En conséquence, la quantité des calculs dans un pas de la BPM augmente avec n pour les ordres supérieurs. Pour cette raison nous avons décidé de s'arrêter à l'approximation du premier ordre. Le schéma de Crank-Nicolson devient dans ce cas

$$(4\beta_0^2 I + P^{(k)}) \frac{H_t^{(k+1)} - H_t^{(k)}}{dz} = -i2\beta_0 P^{(k)} \left(\frac{H_t^{(k)} + H_t^{(k+1)}}{2} \right) \quad (5.17)$$

ou encore

$$[4\beta_0^2 I + (I + i\beta_0 dz)P^{(k)}] H_t^{(k+1)} = [4\beta_0^2 I + (I - i\beta_0 dz)P^{(k)}] H_t^{(k)} \quad (5.18)$$

ce qui est de nouveau une équation de la forme $A \cdot X = B$ dont la solution numérique est discutée à la section précédente.

5.1.4 Conditions aux frontières

Si le champ aux frontières du domaine des calculs est considéré comme nul, les frontières deviennent des miroirs où le champ est réfléchi. Pour s'affranchir de cet inconvénient, il faut trouver une façon de rendre les frontières transparentes ou absorbantes. Il est beaucoup plus facile de rendre les frontières transparentes [64] qu'absorbantes [65]. On choisit alors les conditions frontières transparentes.

Plaçons nous dans la section droite du coupleur et considérons le côté à droite du domaine des calculs, perpendiculaire à l'axe des x . Le champ discret à cette frontière, au k -ième pas, est considéré comme

$$\frac{H_{i,N+1}^k}{H_{i,N}^k} = \frac{H_{i,N}^k}{H_{i,N-1}^k} = \exp(ik_x \Delta x) \quad (5.19)$$

où H représente la composante H_x ou H_y , l'indice i est utilisé pour les rangées et N est l'indice de la dernière colonne. En effet, le noeud $H_{i,N+1}^k$ n'existe pas, mais dans les équations en différences finies, la dérivée seconde du point de la frontière peut utiliser ce point hypothétique. En forçant la partie réelle de k_x à être positive, l'énergie arrivant à la frontière ne peut que sortir du domaine. Donc, dans la formule des différences finies on considère

$$H_{i,N+1}^k = \frac{H_{i,N}^k}{H_{i,N-1}^k}^2. \quad (5.20)$$

On utilise des formules semblables pour le champ au $k+1$ -ième pas, ainsi que pour les autres côtés du domaine des calculs (par exemple $H_{i,0}^k = \frac{H_{i,1}^k}{H_{i,2}^k}$).

5.2 Calcul de la transmission optique

Dans cette section, nous calculons la transmission optique des coupleurs avec la méthode de propagation des faisceaux. Au contraire du chapitre précédent, on ne peut pas en général avec la BPM, exploiter la symétrie du coupleur pour discréteriser seulement une partie de la section droite. En effet, si on sépare les deux polarisations, en les propageant individuellement, on peut discréteriser seulement la moitié

d'un coupleur symétrique (celle qui contient la moitié de chaque guide) et utiliser la symétrie ou l'antisymétrie du champ. Nous choisissons de discréteriser toute la section droite en propageant tout le champ en même temps.

5.2.1 Validation du modèle

Avant de considérer la transmission d'un coupleur réel, nous devons d'abord valider le programme. À cette fin, nous considérons la transmission d'un coupleur uniforme en z , avec un champ initial donné par la somme des supermodes symétrique et antisymétrique polarisés en x . Pour ce coupleur, après avoir calculé les supermodes d'une façon numérique, on peut calculer facilement le champ en fonction de z , selon la méthode de battement des supermodes. Dans la moitié de la section droite qui représente un guide, à cause de ce battement, on obtient une puissance oscillatoire sinusoïdale en fonction de z avec une période $z_b = \frac{2\pi}{B_s - B_a}$. Puisque la discréterisation de la section droite est identique avec les deux méthodes, on s'attend à une correspondance parfaite entre les transmissions calculées par la BPM et la méthode de battement des supermodes.

Nous considérons un coupleur uniforme, avec une section droite fusionnée à $f = 0,3$ et effilée à un ITR = 0,3. Nous négligeons les effets de diffusion. La transmission est calculée pour une longueur d'onde $\lambda = 1,55\mu\text{m}$. On suppose qu'à cette longueur d'onde les indices des couches sont : 1,45 pour le cœur, 1,445 pour la gaine et 1 pour l'air. Les indices effectifs des supermodes polarisés en x calculés sont $n_s = 1,4439995237$ et $n_a = 1,4442935108$.

À partir de l'exemple du chapitre précédent, on sait que pour cet ITR le mode s'étend dans la gaine des fibres. On pourrait alors choisir comme indice de référence, l'indice de la gaine $n_0 = 1,445$. On remarque que les parties réelle et imaginaire du champ complexe, engendré par la BPM dans ce cas, ont des oscillations avec des périodes $z_{bs} = \frac{\lambda}{n_0 - n_s} = 2194\mu\text{m}$ et $z_{ba} = \frac{\lambda}{n_0 - n_a} = 1549\mu\text{m}$ pour cette valeur de n_0 . Si n_0 est choisi comme la moyenne de n_s et n_a les oscillations ont une période de $10544\mu\text{m}$. On s'attend alors à obtenir la même précision, avec un pas dz environ 6 fois plus grand, dans le cas de n_0 l'indice moyen.

En effet, dans la figure 5.1, nous présentons la comparaison entre les calculs

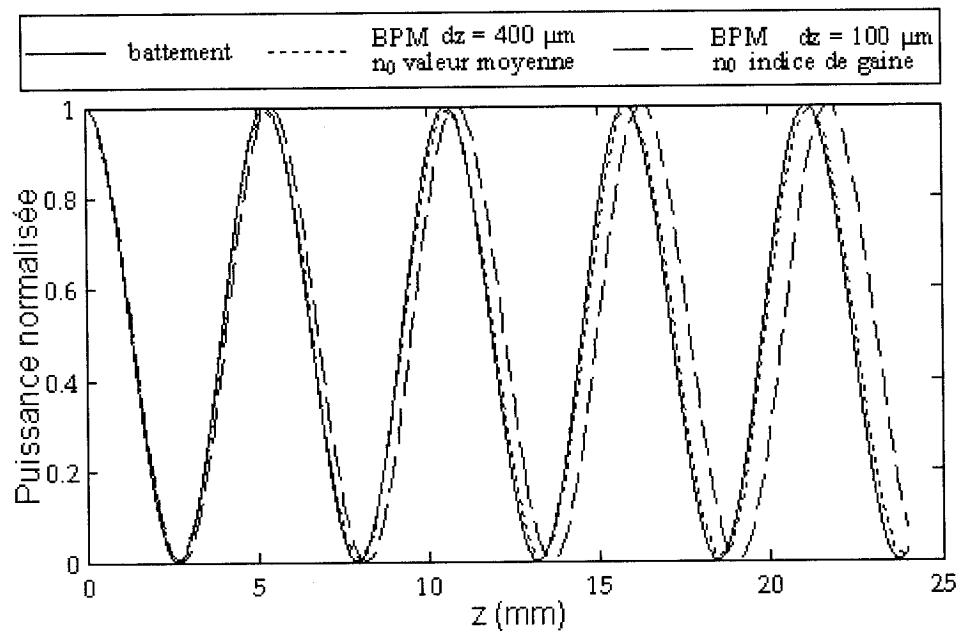


FIG. 5.1 Comparaison de la transmission calculée par battement des supermodes et celle calculée par la BPM, pour un coupleur uniforme en z , avec $ITR = 0,3$ et $f = 0,3$. Dans le cas de la BPM, deux différents indices de référence sont considérés.

pour la transmission dans l'un des guides, avec la BPM et la méthode de battement des supermodes pour les deux variantes de la valeur de n_0 . On remarque une bonne correspondance entre les deux méthodes pour n_0 la valeur moyenne et $dz = 400\mu\text{m}$. En effet, pour $dz = 300\mu\text{m}$ les transmissions sont identiques pour les deux méthodes. Mais, dans le cas de n_0 indice de gaine, même pour $dz = 100\mu\text{m}$ on remarque un décalage entre la transmission calculée par la BPM et celle calculée par battements des supermodes.

5.2.2 Transmission d'un coupleur réel

On procède maintenant avec le calcul de la transmission du coupleur décrit au chapitre précédent. La structure de ce coupleur est donnée à la figure 4.19. À la figure 5.2 on présente les réponses spectrales, mesurées et calculées, pour ce coupleur. À titre de comparaison nous avons aussi inséré dans cette figure, la transmission calculée au chapitre précédent par la méthode de battement des supermodes.

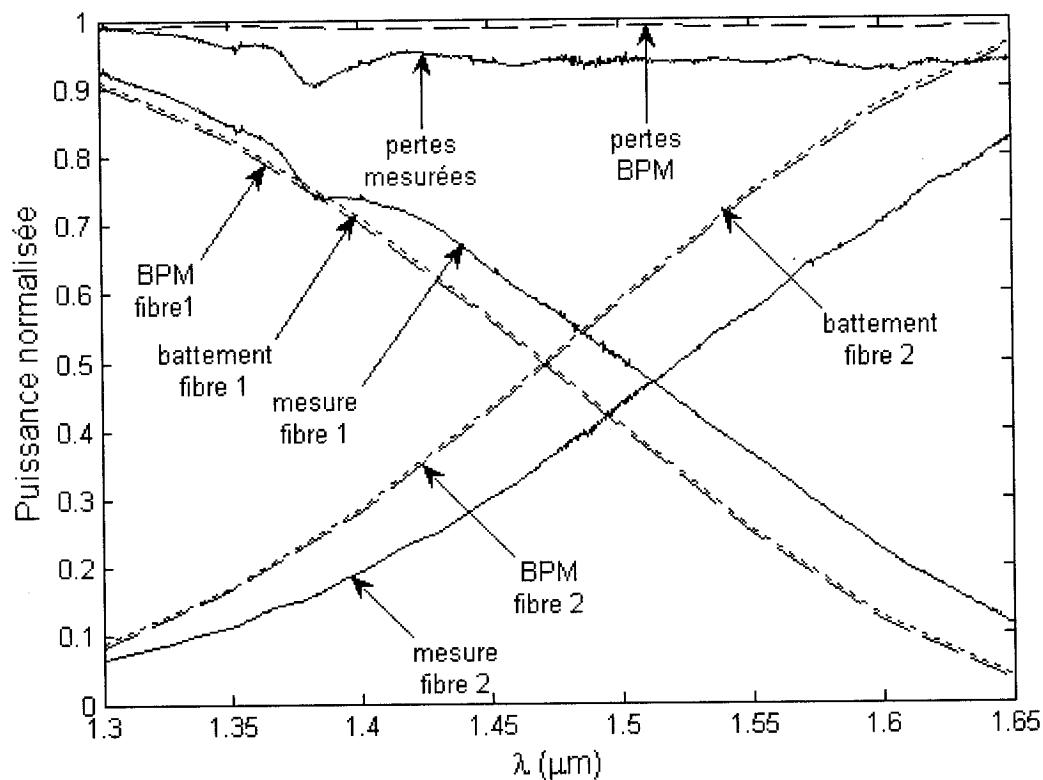


FIG. 5.2 Courbes de transmission mesurées et calculées dans les deux fibres de sortie en fonction de la longueur d'onde

On remarque d'abord que la transmission calculée par la BPM, diffère elle aussi de la transmission mesurée. On attribue la plupart de cette différence à un changement léger entre le profil d'indice calculé et le profil réel. Cela provient du fait que les paramètres expérimentaux $\frac{\mu}{\gamma}(z)$ et $D(z)$ sont évalués à un seul point z , au centre du coupleur.

On remarque aussi une bonne correspondance entre les transmissions calculées par les deux méthodes. On s'attendait à cette correspondance parce que les sections droites sont discrétisées de la même façon. Le changement entre les deux méthodes est au niveau des pertes. La BPM, au contraire de la méthode de battement de supermodes, prévoit des pertes qui ne sont cependant pas au niveau des pertes mesurées. On attribue alors la plupart des pertes mesurées à de petites poussières, introduites dans le coupleur durant la fabrication, plutôt qu'à la non adiabacité du coupleur qui aurait été révélée par la BPM. Ces pertes affectent aussi la différence entre les courbes de transmission.

Pour calculer la transmission du coupleur, la BPM prend environ 60% plus de temps que la méthode des battement. Mais, cela est normal parce que les symétries du coupleur ne sont pas exploitées dans la BPM.

En conclusion, comme au chapitre précédent notre modèle du coupleur est capable de prédire avec une précision relativement bonne, le comportement optique du coupleur, à partir de la recette de fabrication. Avec la BPM nous sommes capables en plus, d'évaluer les pertes causées par la non adiabacité du coupleur.

CONCLUSION

Le but de cette thèse était de construire un modèle qui décrit le comportement optique des coupleurs fusionnés à partir de la recette de fabrication pour servir d'outil pour la conception et la fabrication des coupleurs. Le modèle est constitué de deux parties distinctes : le profil d'indice de réfraction et la transmission optique.

Pour modéliser le profil d'indice, nous avons fait l'hypothèse que l'indice de réfraction est une fonction linéaire de la concentration du dopant. Pour obtenir un profil d'indice à partir de la recette de fabrication, nous avons étudié l'évolution du profil de concentration pendant cette recette. Puisque la fabrication du coupleur se fait dans un état liquide et à une température relativement élevée, deux mécanismes différents peuvent affecter la concentration du dopant : le déplacement du matériau par écoulement et la diffusion des dopants. C'est le couplage entre ces deux phénomènes qui détermine le profil de concentration. Nous avons donc décidé de résoudre l'équation de convection-diffusion.

Pour résoudre cette équation, il faut déterminer le champ de vitesse dans le coupleur. Puisque le verre fondu est un liquide newtonien très visqueux, les équations qui gèrent l'écoulement sont les équations de Stokes. Pour résoudre les équations de Stokes, nous avons considéré d'abord la fusion des fibres qui est aussi la première étape de la fabrication du coupleur. Dans ce cas, le problème est en deux dimensions. La fusion ou la coalescence des fibres est due à la force de tension superficielle qui dépend de la courbure de l'interface.

Pour résoudre ce problème, nous avons utilisé une méthode semi-analytique basée sur des méthodes de transformation conforme. Ces méthodes étaient déjà développées pour l'évolution de l'interface extérieure durant la coalescence des fibres. En prenant le prolongement analytique de différentes fonctions holomorphes, nous avons réussi à obtenir une formule explicite pour la vitesse interne. Cependant, cette vitesse a été calculée numériquement à cause de la présence de plusieurs intégrales de Cauchy dans la formule. Une fois le champ de vitesse calculé, il est facile de simuler l'évolution de la section droite et de visualiser comment elle se déforme durant la fusion. Il a été également facile de résoudre l'équation de convection-diffusion en deux dimensions utilisant un schéma explicite en différences

finies. Les résultats des simulations sont comparés avec des photographies et des mesures expérimentales et une très bonne correspondance a été observée, ce qui prouve la validité de cette partie du modèle.

Après la fusion, nous avons considéré l'étirage des coupleurs. L'équation à résoudre est toujours celle de convection-diffusion, mais, cette fois en trois dimensions. La minceur de la géométrie du coupleur nous a aidée à simplifier les équations, nous permettant ainsi de concevoir une méthode numérique simple pour résoudre les équations. Cette méthode consiste à utiliser un repère mobile qui se déplace avec les sections droites. Les équations d'évolution de la section droite dans ce repère sont identiques avec celles de la coalescence en 2D. Ainsi, nous sommes capables de suivre non seulement l'évolution du profil longitudinal du coupleur, mais aussi l'avancement de la fusion dans les sections droites. Ces processus sont donc couplés. Nous avons obtenu de cette façon la courbe de la distribution axiale du taux de réduction de la section du coupleur ainsi que l'état de chaque section droite après le processus de l'étirage. Pour valider cette partie du modèle, un coupleur arbitraire a été fabriqué et les résultats de nos simulations ont été comparés avec des mesures. De nouveau, une très bonne correspondance a été observée.

Il faut noter que les valeurs de différents paramètres expérimentaux telles que les distributions axiales de la viscosité, le coefficient de tension superficielle et le coefficient de diffusion sont déterminés en effectuant quelques mesures simples et des calculs théoriques. Ainsi, nous avons conçu une nouvelle méthode de l'évaluation de la viscosité qui pourrait trouver des applications dans des domaines autres que la fabrication des coupleurs fusionnés. Cette méthode consiste à évaluer la viscosité à partir de l'avancement de la fusion et du temps écoulé pour cet avancement.

Nous avons aussi remarqué que la distance entre la torche et les fibres doit être assez grande pour que la température des fibres ne soit pas trop élevée, parce que, comme nous l'avons observé au chapitre 3, si le coupleur est trop chauffé, une perte de matière peut se produire.

Pour calculer la transmission optique du coupleur étudié, nous avons utilisé deux méthodes différentes. La première est la méthode de battement des supermodes de la structure fusionnée. La seconde est la méthode de propagation des faisceaux. La méthode de battement des supermodes consiste à calculer le déphasage des modes

symétrique et antisymétrique de la structure fusionnée. Cela nécessite le calcul des modes guidés dans le coupleur. Pour inclure automatiquement les effets de polarisation nous avons calculé les modes vectoriels. Bien qu'il existe plusieurs logiciels qui peuvent calculer ces modes, nous avons conçu nous-même un programme simple. Le calcul des valeurs propres a été fait par la méthode d'Arnoldi via la commande *eigs* du MATLAB. Dans ces calculs, une attention particulière a été consacrée à l'analyse de l'erreur et au choix du maillage optimal. La comparaison avec des modes des fibres cylindriques calculés analytiquement a montré une bonne précision.

La méthode de propagation des faisceaux procède, comme son nom l'indique, en calculant le champ électromagnétique dans une section droite à partir de sa valeur à une section précédente proche. Puisque nous avons considéré une BPM vectorielle en différences finies, la section droite est discrétisée d'une façon identique à la discrétisation pour le calcul des modes. Ainsi, la construction des matrices discrètes de la section droite, qui constitue la plupart du programme, a été faite en modifiant légèrement les matrices construites pour le calcul des modes. Pour un coupleur uniforme en z , la BPM a donné exactement la même transmission que le battement des supermodes.

Pour valider le modèle au complet, ainsi que la partie de la transmission optique, un coupleur réel a été fabriqué et la puissance en fonction de la longueur d'onde dans les deux fibres de sortie a été mesurée. Cette transmission a été comparée avec la transmission calculée par les deux méthodes. La correspondance a été relativement bonne, considérant le fait que les courbes de transmission du coupleur sont très sensibles aux changements dans le profil d'indice.

La correspondance aurait été sans doute meilleure si les paramètres expérimentaux avaient été évalués sur toute la longueur de la zone chauffée au lieu d'un seul point au centre du coupleur. En plus, ce coupleur, n'étant pas fabriqué dans une salle blanche, peut contenir des impuretés, comme par exemple de la poussière, qui induisent des pertes qui, comme nous l'avons vu au chapitre 5, sont non négligeables. Il est clair que notre modèle ne peut pas tenir compte de telles pertes.

En terminant, nous considérons que le but de cette thèse a été atteint. Notre modèle a été capable de décrire le comportement du coupleur à partir de la recette de fabrication en effectuant seulement quelques mesures préliminaires simples. Nous

espérons que ce modèle sera un outil utile aux designers des coupleurs pour concevoir de nouveaux composants ou pour améliorer les recettes actuelles de fabrication des coupleurs.

RÉFÉRENCES

- [1] J. BURES, S. LACROIX et J. LAPIERRE : Analyse d'un coupleur bidirectionnel à fibres optiques monomodes fusionnées. *Applied Optics*, 22:1918–1921, 1983.
- [2] F. P. PAYNE, C. D. HUSSEY et M. S. YATAKI : Modelling fused single-mode-fibre couplers. *Electron. Lett.*, 21:461–462, 1985.
- [3] X.-H. ZHENG : Finite-element analysis for fused couplers. *Electron. Lett.*, 22:804–805, 1986.
- [4] J. V. WRIGHT : Wavelength dependence of fused couplers. *Electron. Lett.*, 22:320–321, 1986.
- [5] F. GONTHIER : *Conception et réalisation de coupleurs multi-fibres intégrés à des fibres optiques unimodales*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, 1992.
- [6] S. LACROIX, F. GONTHIER et J. BURES : Modeling of symmetric 2 x 2 fused-fiber couplers. *Applied Optics*, 33:8361–8369, 1994.
- [7] W. K. BURNS et M. ABEBE : Coupling model for fused fiber couplers with parabolic taper shape. *Appl. Opt.*, 26:4190–4192, 1987.
- [8] M. EISENMANN et E. WEIDEL : Single-mode fused biconical couplers for wavelength division multiplexing with channel spacing between 100 and 300 nm. *J. Lightwave Technol.*, 6:113–118, 1988.
- [9] V. J. TEKIPPE : Passive fiber-optic components made by the fused biconical taper process. *Fib. Int. Opt.*, 9:97–123, 1990.
- [10] T. A. BIRKS et Y. W. LI : The shape of fiber tapers. *J. Lightwave Technol.*, 10:432–438, 1992.
- [11] C. FARGET, J. P. MEUNIER et P.E. BONNEAU : An efficient taper shape model for fused optical fiber components. *Int. Conf. Fiber Opt. Phot. Photonics-96*, 1:1141–1146, 1996.
- [12] X. DAXHELET : *Étude des interféromètres tout-fibres : Application à la stabilisation en fréquence des lasers à semi-conducteurs*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, 1996.

- [13] A. W. SNYDER et J. D. LOVE : *Optical Waveguide Theory*. Chapman and Hall, London, 1983.
- [14] G. de WITH et A. J. CORBIJN : Fiber-on-plate experiments : Relaxation and surface tension. *J. Appl. Phys.*, 71:1204–1212, 1993.
- [15] P. CHASSAING : *Mécanique des fluides*. Cépaduès-Éditions, Toulouse, France, 1997.
- [16] P. D. HOWELL : *Extensional thin layer flows*. Thèse de doctorat, St. Catherine's College, Oxford, 1994.
- [17] W. E. LANGLOIS : *Slow viscous flow*. The Macmillan Company, New York, 1964.
- [18] N. K. ADAM : *The physics and chemistry of surfaces*. Oxford Press, Oxford, 1941.
- [19] H. C. KUHLMANN et H. J. Rath EDS. : *Free surface flows*. Springer, Berlin, 1998.
- [20] J. PHILIBERT : *Diffusion et transport de matière dans les solides*. Les Ulis, Paris, France, 1985.
- [21] V. G. LEVICH : *Physicochemical hydrodynamics*. Englewood Cliffs, New York, 1962.
- [22] J. FRENKEL : Viscous flow of crystalline bodies under action of surface tension. *J. Phys. (Moscow)*, 9:385–391, 1945.
- [23] G. J. COSGROVE : An approximate analytical model for the late-stage sintering of an array of rods by viscous flow. *J. Appl. Phys.*, 47:1258–1264, 1976.
- [24] J. W. ROSS : Dynamic computer simulation of viscous flow sintering kinetics. *J. Appl. Phys.*, 52:3884–3888, 1981.
- [25] A. JAGOTA et A. DAWSON : Simulation of the sintering of two particles. *J. Am. Ceram. Soc.*, 73:343–348, 1985.
- [26] H. K. KUIKEN : Viscous sintering : the surface-tension-driven flow of a liquid form under the influence of curvature gradients at its surface. *J. Fluid. Mech.*, 214:173–177, 1990.
- [27] G. A. L. Van de VORST : *Modelling and numerical simulation of viscous sintering*. Thèse de doctorat, Eindhoven University of Technology., 1994.

- [28] R. W. HOPPER : Plane stokes flow driven by capillarity on a free surface. *J. Fluid. Mech.*, 213:349–375, 1990.
- [29] R. W. HOPPER : Stokes flow of a cylinder and half-space driven by capillarity. *J. Fluid. Mech.*, 243:171–181, 1992.
- [30] S. RICHARDSON : Two-dimensional slow viscous flow with time-dependent free boundaries driven by surface tension. *Eur. J. Appl. Math.*, 3:193–207, 1992.
- [31] S. RICHARDSON : Two-dimensional stokes flow with time-dependent free boundaries driven by surface tension. *Eur. J. Appl. Math.*, 8:311–329, 1997.
- [32] S. RICHARDSON : Plane stokes flows with time-dependent free boundaries in which the fluid occupies a doubly-connected region. *Eur. J. Appl. Math.*, 11:249–269, 2000.
- [33] eds. D. R. UHLMANN, N. J. KREIDL : *Glass : Science and Technology*. Academic Press, New York, 1986.
- [34] J. CRABOL : *Transfert de chaleur*. Masson, Paris, 1990.
- [35] I. AVRAMOV : Viscosity of glassforming melts. *J. Non-Crystalline Solids*, 238:6–10, 1998.
- [36] C. POZRIKIDIS : *Numerical computation in science and engineering*. Oxford University Press, New York, 1998.
- [37] K. SHIRAISHI, Y. AIZAWA et S. KAWAKAMI : Beam expanding fiber using thermal diffusion of the dopant. *J. Lightwave Technol.*, 8:1151–1161, 1990.
- [38] H. YAMADA et H. HANAFUSA : Mode shape convertor produced by the thermal diffusion of different dopants. *IEEE Phot. Technol. Lett.*, 6:531–533, 1994.
- [39] K. I. WHITE : Practical application of the refracted near-field technique for the measurement of optical fibre refractive index profiles. *Opt. Quantum Electron.*, 2:185–196, 1979.
- [40] R. D. RICHTMYER et K. W. MORTON : *Difference methods for initial-value problems*. Interscience Publishers, New York, 1967.
- [41] J. C. STRIKWERDA : *Finite difference schemes and partial differential equations*. Wadsworth and Brooks/Cole Advanced Books and Software, Pacific Grove, Calif., 1989.
- [42] L. J. CUMMINGS et P.D. HOWELL : On the evolution of non-axisymmetric viscous fibres with surface tension, inertia and gravity. *J. Fluid mech.*, 389:361–389, 1999.

- [43] J. N. DEWYNNE, J. R. OCKENDON et P. WILMOTT : On a mathematical model for fiber tapering. *Siam J. Appl. Math.*, 49:983–990, 1989.
- [44] J. N. DEWYNNE, J. R. OCKENDON et P. WILMOTT : A systematic derivation of the leading-order equations for extensional flows in slender geometries. *J. Fluid Mech.*, 244:323–338, 1992.
- [45] J. N. DEWYNNE, P. D. HOWELL et P. WILMOTT : Slender viscous fibres with inertia and gravity. *Q. J. Mech. appl. Math.*, 47:541–555, 1994.
- [46] R. L. WILLIAMSON et M. J. MILES : Melt-drawn scanning near-field optical microscopy probe profiles. *J. Appl. Phys.*, 80:4804–4812, 1996.
- [47] C. VASSALLO : 1993-1995 optical mode solvers. *Optical and Quantum Electronics*, 29:95–114, 1997.
- [48] R. SCARMOZZINO, A. GOPINATH, R. PREGLA et S. HELFERT : Numerical techniques for modeling guided-wave photonic devices. *IEEE J. Select. Topics Quantum Electron.*, 6:150–162, 2000.
- [49] R. G. HADLEY : Full-vector waveguide modeling using an iterative finite-difference method with transparent boundary conditions. *Journal of Lightwave Technology*, 13:465–469, 1995.
- [50] P. LÜSSE, P. STUWE, J. SCHÜLE et H. G. UNGER : Analysis of vectorial mode fields in optical waveguides by a new finite difference method. *L. Lightwave Technol.*, 12:487–493, 1994.
- [51] H. DONG, A. CHRONOPOULOS, J. ZOU et A. GOPINATH : Vectorial integrated finite-difference analysis of dielectric waveguides. *Journal of Lightwave Technology*, 11:1559–1564, 1993.
- [52] K. KAWANO et T. KITOH : *Introduction to optical waveguide analysis*. John Wiley, New York, 2001.
- [53] Z. ZHU et T. G. BROWN : Full-vectorial finite-difference analysis of micro-structured optical fibers. *Opt. Express*, 10:853–864, 2002.
- [54] W. P. HUANG et C. L. XU : Simulation of three-dimensional optical waveguides by a full-vector beam propagation method. *IEEE J. Quantum Electron.*, 29: 2639–2649, 1993.
- [55] M. D. FEIT et J. A. FLECK : Light propagation in graded-index optical fibers. *Applied Optics*, 17:3990–3998, 1978.

- [56] L. THYLÉN : The beam propagation method : An analysis of its applicability. *Opt. Quantum Electron.*, 15:433–439, 1983.
- [57] Y. CHUNG et N. DAGLI : Assessment of finite difference beam propagation. *IEEE J. Quantum Electron.*, 26:1335–1339, 1990.
- [58] J. YAMAUCHI, T. ANDO et H. NAKANO : Beam propagation analysis of optical fibres by alternating direction implicit method. *Electron. Lett.*, 27:1663–1665, 1991.
- [59] M. KOSHIBA et Y. TSUJI : A wide-angle finite element beam propagation method. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 8:1208–1210, 1996.
- [60] J. GERDES et R. PREGLA : Beam-propagation algorithm based on the method of lines. *J. Opt. Soc. Amer. B*, 8:389–394, 1991.
- [61] D. M. PAI : A beam propagation algorithm. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 88:2415–2419, 1990.
- [62] H. A. van der VORST : Bi-cgstab : A fast and smoothly converging variant of bi-cg for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 13:631–644, 1992.
- [63] R. BARRETT, M. BERRY et T. F. CHAN : *Templates for the Solution of Linear Systems : Building Blocks for Iterative Methods*. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [64] G. R. HADLEY : Transparent boundary condition for the beam propagation methods. *Opt. Lett.*, 16:624–626, 1991.
- [65] C. VASSALLO et F. COLLINO : Highly efficient absorbing boundary conditions for the beam propagation method. *J. Light. Technol.*, 14:1570–1577, 1996.

ANNEXE I

FONCTIONS HOLOMORPHES ET TRANSFORMATION CONFORME

Nous donnons dans cette annexe quelques notions de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Nous nous limitons aux seules définitions et propriétés qui sont utiles pour la compréhension des méthodes utilisées dans cette thèse. Ceci comprend la définition des fonctions holomorphes, leur relation avec les fonctions harmoniques ainsi que la définition et les propriétés de la transformation conforme.

I.1 Fonctions holomorphes

Ce qu'on entend par fonction d'une variable complexe : $z = x + iy$ est un nombre complexe variable qu'on peut représenter par un point de coordonnées (x, y) et l'on se donne une fonction complexe de la position de ce point. Si $X = P(x, y)$ et $Y = Q(x, y)$ sont la partie réelle et imaginaire de cette fonction que nous désignerons par $Z = f(z)$, on aura

$$Z = f(z) = P(x, y) + iQ(x, y). \quad (\text{I.1})$$

La continuité au point $z_0 = x_0 + iy_0$ se traduit par le fait que, à tout ϵ donné positif, on peut faire correspondre α tel que

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \quad \text{si} \quad |z - z_0| < \alpha.$$

Pour qu'il soit ainsi, il faut et il suffit que $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ soient continues au point (x_0, y_0) . Si l'on introduit le point représentatif de $Z = X + iY$, on voit que la fonction $Z = f(z)$ définit une transformation ponctuelle : $X = P(x, y)$, $Y = Q(x, y)$.

Une fonction $f(z)$ définie dans un domaine contenant le point z_0 est dite mo-

nogène au point z_0 lorsqu'elle admet une dérivée en ce point, ce qui signifie qu'il existe un nombre fini a_0 tel que

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - a_0$$

tende vers zéro lorsque $|z - z_0|$ tend vers zéro. Autrement dit, à tout ϵ positif correspond α tel que le module de l'expression ci-dessus soit moindre que ϵ si $|z - z_0| < \alpha$. Alors a_0 est la dérivée au point z_0 . Il est clair que $f(z)$ ne peut être monogène au point z_0 que si elle est continue.

Une fonction $f(z)$ qui est monogène en chaque point d'un domaine D est dite holomorphe dans ce domaine. Sa dérivée est alors une fonction de z dans D , on la désigne par $f'(z)$. Ceci implique que D ne contient pas de point à l'infini.

Regardons plus attentivement la condition de l'existence de la dérivée. Vu que $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $y = -\frac{1}{2}i(z - \bar{z})$, toute fonction de x et y est une fonction de z et \bar{z} . Donc, on peut écrire

$$\begin{aligned} P(x, y) + iQ(x, y) &= f(z, \bar{z}) \\ df &= \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \end{aligned}$$

d'où

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \lim_{|dz| \rightarrow 0} \frac{d\bar{z}}{dz}.$$

Mais

$$\lim_{|dz| \rightarrow 0} \frac{d\bar{z}}{dz} = \lim_{|dz| \rightarrow 0} \frac{\delta x - i\delta y}{\delta x + i\delta y} = \lim_{\delta x, \delta y \rightarrow 0} \frac{1 - i\frac{\delta y}{\delta x}}{1 + i\frac{\delta y}{\delta x}}$$

qui a une valeur indéterminée, parce que δx et δy peuvent aller à zéro indépendamment l'un de l'autre. Donc, une dérivée bien déterminée peut exister seulement si :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (\text{I.2})$$

À l'aide de la relation

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \quad (\text{I.3})$$

(I.2) s'écrit

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} i \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} i \left(\frac{\partial P}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{I.4})$$

d'où

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad (\text{I.5})$$

Ces relations sont connues sous le nom des équations de Cauchy-Riemann.

On peut montrer que si $f(z)$ est holomorphe dans un domaine D , sa dérivée est elle-même holomorphe dans D . Il s'ensuit que $f(z)$ a des dérivées de tous les ordres. Les fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ ont donc des dérivées partielles de tous les ordres : en particulier, les dérivées partielles seconde existent et sont continues, les dérivées partielles prises par rapport à x puis y ou par rapport à y puis x sont égales.

En dérivant les égalités (I.5), on obtient

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}$$

et par conséquent

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0. \quad (\text{I.6})$$

De même, en dérivant (I.5) respectivement par rapport à y et x , on voit que Q vérifie la même équation que P . Ainsi, la partie réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe dans un domaine D , sont des solution de l'équation de Laplace et sont appelées fonctions harmoniques.

I.2 Transformation conforme

Soit $Z = \Omega(z)$ une fonction définie sur un domaine (d) du plan (x, y) auquel elle fait correspondre un domaine (D) du plan (X, Y) .

Telle qu'elle est schématisée à la figure I.1, la représentation du domaine (d) en

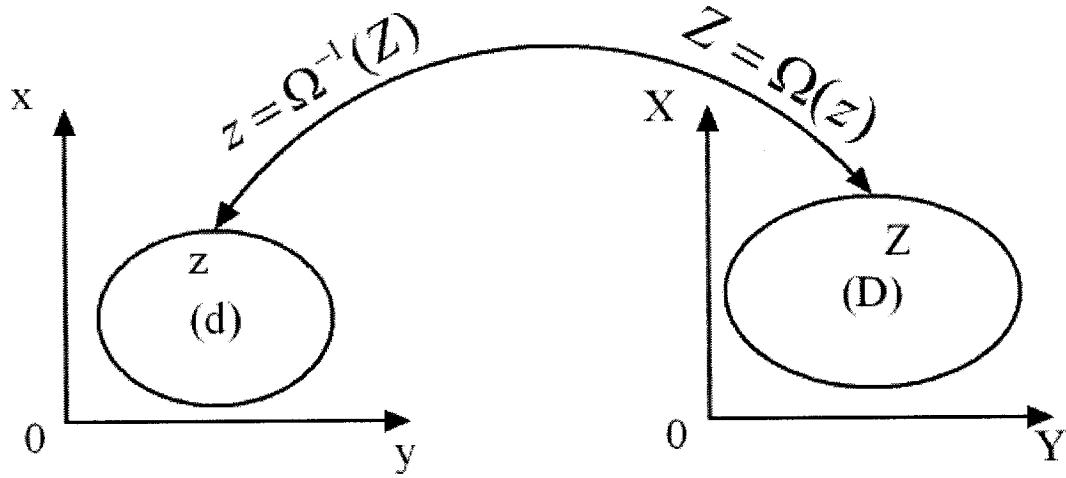


FIG. I.1 Schéma d'une transformation conforme

le domaine (D) sera dite conforme si et seulement si la fonction $\Omega(z)$ est :

1. définie et continue dans (d) ;
2. bijective ;
3. holomorphe et de dérivée non nulle dans tout le domaine (D) .

Cet ensemble d'hypothèses assure l'existence d'une correspondance inverse de (D) sur (d) , notée $z = \Omega^{-1}(Z)$.

Considérons un point z_0 sur (d) . Soit $C : \theta \rightarrow f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, une courbe en (d) qui passe par z_0 . Supposons que la dérivée f' existe et qu'elle soit différente de zéro. Si $z_0 = f(\theta_0)$, alors le nombre complexe $f'(\theta_0)$, interprété comme un vecteur, est le vecteur tangent de C à z_0 .

L'image de C , par la transformation Ω est la courbe

$$C^* : \theta \rightarrow F(\theta) := \Omega[f(\theta)], \quad \alpha \leq \theta \leq \beta.$$

Le vecteur tangent de C^* à l'image $Z_0 := \Omega(z_0)$ de z_0 est donné par

$$F'(\theta_0) = \Omega'(z_0)f'(\theta_0). \quad (I.7)$$

Puisque la transformation Ω est conforme : $\Omega' \neq 0$, on peut écrire

$$\arg F'(\theta_0) = \arg f'(\theta_0) + \arg \Omega'(z_0). \quad (\text{I.8})$$

Cette relation implique que l'angle entre les vecteurs tangents à C en z_0 et à C^* en Z_0 est égal à $\arg \Omega'(z_0)$. Donc il est indépendant de C . Il s'ensuit que chaque ensemble de deux courbes passant par z_0 et qui forment un angle γ à z_0 sont transformées en deux courbes formant le même angle γ (mesuré dans le même sens). D'où le nom : transformation conforme.

ANNEXE II

CHAMP DE VITESSE

Dans cette annexe, nous dérivons une expression pour la vitesse interne durant la fusion des coupleurs en utilisant la méthode de Hopper-Richardson. Comme cette méthode a été plutôt développée pour calculer l'évolution de l'interface extérieure, quelques ajouts à la méthode sont nécessaires. Dans ce qui suit, nous allons utiliser des notions de la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Notons que, contrairement au traitement de Hopper et Richardson, la dérivation des équations est faite à partir des équations de Stokes. Hopper par contre a exploité les méthodes développées pour la théorie de l'élasticité plane. Les équations de Stokes ressemblent à celles de cette théorie dans le cas limite où le matériau est incompressible. Pour obtenir cette équivalence, la vitesse doit être remplacée par le déplacement, la viscosité par le module de cisaillement, et le coefficient de Poisson doit prendre la valeur 1/2.

II.1 Potentiels complexes

II.1.1 Rappel des équations de Stokes

Les équations de Stokes sont introduites au premier chapitre et ici nous faisons seulement un court rappel. L'écoulement est considéré bidimensionnel dans le plan de la section droite du coupleur où un repère cartésien (x, y) est défini.

L'équation de Stokes s'écrit

$$\nabla \bar{\bar{\tau}} = 0 \text{ ou } \vec{\nabla} p = \mu \vec{\nabla}^2 \vec{V} \quad (\text{II.1})$$

où $\bar{\bar{\tau}}$ est le tenseur de contraintes, p la pression, μ la viscosité et \vec{V} la vitesse.

L'équation de continuité est donnée par

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{II.2})$$

et la contrainte à l'interface extérieure par

$$\vec{T}_n = -\gamma \kappa \vec{n} \quad (\text{II.3})$$

où γ est le coefficient de tension superficielle, κ la courbure et \vec{n} la normale vers l'extérieur du liquide.

II.1.2 Introduction des potentiels complexes

En utilisant l'identité vectorielle pour l'expression du Laplacien vectoriel

$$\vec{\nabla}^2 \vec{V} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \quad (\text{II.4})$$

et en introduisant le vecteur rotationnel ou la vorticité : $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$ on obtient pour un liquide incompressible (II.2)

$$\vec{\nabla}^2 \vec{V} = -\vec{\nabla} \times \vec{\omega}. \quad (\text{II.5})$$

L'équation de Stokes (II.1) se met ainsi sous la forme équivalente

$$\vec{\nabla} p = -\mu \vec{\nabla} \times \vec{\omega}. \quad (\text{II.6})$$

En prenant la divergence puis le rotationnel membre à membre de l'équation ci-dessus on déduit respectivement (si $\mu = \text{constante}$)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 p &= 0 \\ \vec{\nabla}^2 \vec{\omega} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Donc les champs de pression et de rotationnel vérifient tous les deux l'équation de Laplace. La condition d'incompressibilité (II.2) implique l'existence d'une fonction

de courant $\Psi(x, y)$ qui vérifie les relations

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (\text{II.8})$$

où u et v sont les composantes de la vitesse selon les axes x et y respectivement. Ces relations se démontrent très simplement

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow u = - \int \frac{\partial v}{\partial y} dx = -\frac{\partial}{\partial y} \int v dx \quad (\text{II.9})$$

d'où nous voyons que nous pouvons choisir $\Psi = - \int v dx$. Utilisant l'expression explicite du rotationnel

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{II.10})$$

les relations (II.8) conduisent à

$$\nabla^2 \Psi = -\omega. \quad (\text{II.11})$$

En prenant le laplacien dans l'équation ci-dessus et en utilisant la deuxième relation en (II.7), nous obtenons

$$\nabla^4 \Psi = 0. \quad (\text{II.12})$$

Donc, la fonction courant pour l'écoulement de Stokes vérifie l'équation biharmonique. De la forme explicite du rotationnel (II.10), nous observons que

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \quad (\text{II.13})$$

De plus, de l'équation de continuité (II.2), il découle que

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (\text{II.14})$$

D'où on déduit que

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \nabla^2 v. \quad (\text{II.15})$$

De même façon on peut déduire

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = -\nabla^2 u. \quad (\text{II.16})$$

En combinant ces relations avec l'équation de Stokes (II.1), on peut déduire que ω et p/μ satisfont les équations de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial x} &= \frac{\partial (p/\mu)}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} &= -\frac{\partial (p/\mu)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Donc ω et p/μ sont des fonctions harmoniques conjuguées et en conséquence elles représentent les parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe : $\varsigma = \omega + i p/\mu$ de la variable complexe $\eta = x + iy$ (Annexe I).

Dans ce qui suit, nous allons noter avec un prime ('') les dérivées par rapport à la variable complexe indépendante et avec une ligne ou un tiret au dessus la variable complexe conjuguée. La dérivée d'une fonction holomorphe est aussi une fonction holomorphe. Introduisons maintenant parmi le nombre infini des fonctions holomorphes dont la dérivée est : $-\varsigma$, la fonction

$$4\phi(\eta) = 4g_1(x, y) + 4ig_2(x, y). \quad (\text{II.18})$$

Ici les fonctions g_1 et g_2 sont respectivement la partie réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe ; donc elles sont harmoniques. Nous avons choisi la fonction $4\phi(\eta)$ telle que

$$4\phi'(\eta) = -\omega - i\frac{p}{\mu}. \quad (\text{II.19})$$

Maintenant introduisons une fonction réelle

$$G(x, y) = xg_1(x, y) + yg_2(x, y) - \Psi(x, y). \quad (\text{II.20})$$

En prenant le laplacien nous obtenons

$$\begin{aligned} \nabla^2 G &= x\nabla^2 g_1 + y\nabla^2 g_2 + 2\left(\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y}\right) - \nabla^2 \Psi \\ &= 4\frac{\partial g_1}{\partial x} - \nabla^2 \Psi = 4\text{Re}\phi'(\eta) - \nabla^2 \Psi = -(\omega + \nabla^2 \Psi) = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

d'où il découle que G est harmonique. Maintenant introduisons encore une autre fonction holomorphe $\chi(\eta)$ dont la partie réelle (qui doit être harmonique) est donnée par

$$\operatorname{Re}[\chi(\eta)] = -G(x, y). \quad (\text{II.22})$$

L'équation (II.20) s'écrit maintenant

$$\Psi(x, y) = [xg_1(x, y) + yg_2(x, y)] + \operatorname{Re}[\chi(\eta)]. \quad (\text{II.23})$$

Mais nous voyons à partir de (II.18) que $xg_1 + yg_2 = \operatorname{Re}[\bar{\eta}\phi(\eta)]$ d'où

$$\Psi(x, y) = \operatorname{Re}[\bar{\eta}\phi(\eta) + \chi(\eta)]. \quad (\text{II.24})$$

Donc la fonction courant est exprimée en termes de deux fonctions holomorphes $\phi(\eta)$ et $\chi(\eta)$ qui sont appelées **potentiels complexes**. De plus, cette dérivation provient seulement du fait que Ψ est biharmonique.

La relation (II.24) s'écrit sous la forme

$$2\Psi = \bar{\eta}\phi(\eta) + \eta\overline{\phi(\eta)} + \chi(\eta) + \overline{\chi(\eta)} \quad (\text{II.25})$$

qui est d'ailleurs la solution la plus générale de l'équation biharmonique. À partir des relations

$$\eta = x + iy, \quad \bar{\eta} = x - iy, \quad x = \frac{\eta + \bar{\eta}}{2}, \quad iy = \frac{\eta - \bar{\eta}}{2} \quad (\text{II.26})$$

il découle l'équivalence des opérateurs

$$2\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}, \quad 2\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}. \quad (\text{II.27})$$

De (II.8), on remarque que

$$-v + iu = \frac{\partial\Psi}{\partial x} + i\frac{\partial\Psi}{\partial y} = 2\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{\eta}} = \phi(\eta) + \eta\overline{\phi'(\eta)} + \overline{\chi'(\eta)}. \quad (\text{II.28})$$

La relation ci-dessus donne l'expression de la vitesse à l'aide des potentiels com-

plexes. La pression, elle aussi, est donnée à l'aide de la relation (II.19) par

$$p = -4\mu \text{Im} [\phi' (\eta)]. \quad (\text{II.29})$$

Le problème d'écoulement de Stokes se réduit à la détermination de deux fonctions holomorphes, $\phi(\eta)$ et $\chi(\eta)$. Les composantes de la contrainte s'expriment à l'aide de ces potentiels complexes de la façon suivante. La forme $(\nabla \bar{\tau} = 0)$ de l'équation de Stokes s'écrit dans le cas bidimensionnel

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} = 0. \quad (\text{II.30})$$

La première relation ci-dessus représente la condition de l'existence d'une fonction $B(x, y)$ telle que

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\tau_{xy}, \quad \frac{\partial B}{\partial y} = \tau_{xx}. \quad (\text{II.31})$$

Ces relations se justifient de la même façon que (II.8). La seconde relation de (II.30) représente la condition de l'existence d'une fonction $A(x, y)$ telle que

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \tau_{yy}, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = -\tau_{xy}. \quad (\text{II.32})$$

La comparaison de (II.31) et (II.32) montre que

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \quad (\text{II.33})$$

d'où il découle l'existence d'une fonction $U(x, y)$ telle que

$$A = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (\text{II.34})$$

En substituant les valeurs de A et B dans les équations précédentes, nous voyons qu'il existe toujours une fonction $U(x, y)$, par laquelle les composantes de la contrainte sont données de la manière suivante

$$\tau_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \tau_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (\text{II.35})$$

Cette fonction est utilisée couramment dans la théorie d'élasticité et elle est appelée fonction d'Airy ou fonction de contrainte. À partir des relations (II.9), (3.1) et (II.35), nous pouvons écrire

$$\nabla^2 U = \tau_{xx} + \tau_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = -2p. \quad (\text{II.36})$$

En prenant le laplacien dans l'équation ci-dessus on obtient

$$\nabla^4 U = 0. \quad (\text{II.37})$$

Donc la fonction $U(x, y)$ vérifie l'équation biharmonique. Comme dans le cas de la fonction courant Ψ , cette fonction admet une représentation semblable à l'aide de deux fonctions holomorphes, mais nous sommes intéressés à la relation entre $U(x, y)$ et les potentiels complexes $\phi(\eta)$ et $\chi(\eta)$. En tenant compte des relations (II.36) et des opérateurs (II.27) on déduit que

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right) = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta \partial \bar{\eta}} = 8\mu \text{Im} [\phi'(\eta)]. \quad (\text{II.38})$$

En intégrant deux fois la dernière égalité de la relation ci-dessus, on obtient

$$U = 2\mu \text{Im} [\bar{\eta} \phi(\eta) + \chi(\eta)]. \quad (\text{II.39})$$

Au lieu d'une fonction arbitraire de η nous avons choisi $\chi(\eta)$.

Maintenant, nous sommes capables d'exprimer la condition à la limite (II.3) à l'aide des potentiels complexes $\phi(\eta)$ et $\chi(\eta)$.

Considérons une partie de la frontière comme celle montrée à la figure II.1. Les composantes de la contrainte \vec{T}_n , normale à la frontière, sont donnés par

$$\begin{pmatrix} T_{nx} \\ T_{ny} \end{pmatrix} = \bar{\tau} \begin{pmatrix} \cos(n, x) \\ \cos(n, y) \end{pmatrix} \quad (\text{II.40})$$

où (n, x) et (n, y) sont les angles entre la normale vers l'extérieur à la frontière et

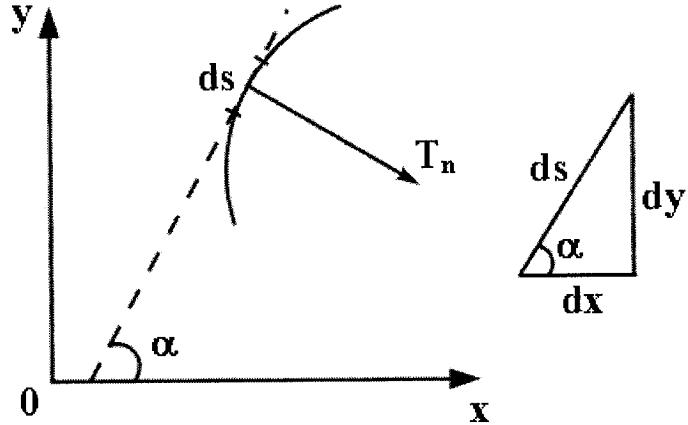


FIG. II.1 La contrainte à la frontière

les axes x et y respectivement. Dans une forme plus détaillée, on écrit

$$\begin{aligned} T_{nx} &= \tau_{xx} \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \cos(n, x) - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos(n, y) \\ T_{ny} &= \tau_{yx} \cos(n, x) + \tau_{yy} \cos(n, y) = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos(n, x) + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cos(n, y). \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

Mais on remarque à la figure II.1 que

$$\begin{aligned} \cos(n, x) &= \cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin(\alpha) = -\frac{dy}{ds} \\ \cos(n, y) &= \cos(\alpha) = \frac{dx}{ds}. \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

Il en découle que

$$T_{nx} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad T_{ny} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right). \quad (\text{II.43})$$

Ici nous avons utilisé l'opérateur $\frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{dy}{ds}$. Donc, on déduit pour la contrainte complexe

$$\begin{aligned} (T_{nx} + iT_{ny}) ds &= d \left(-\frac{\partial U}{\partial y} + i \frac{\partial U}{\partial x} \right) = id \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) U \right] \\ &= id \left[\left(2 \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \right) \frac{2\mu}{2i} \left(\bar{\eta} \phi(\eta) + \chi(\eta) - \eta \overline{\phi(\eta)} - \overline{\chi(\eta)} \right) \right] \\ &= 2\mu d \left[\phi(\eta) - \eta \overline{\phi'(\eta)} - \overline{\chi'(\eta)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

L'expression ci-dessus donne la représentation de la contrainte à la frontière à l'aide des potentiels complexes. De la condition à la limite (II.3), on peut écrire

$$T_{nx} = \gamma\kappa \sin \alpha \quad T_{ny} = -\gamma\kappa \cos \alpha. \quad (\text{II.45})$$

Il en découle que

$$\begin{aligned} (T_{nx} + iT_{ny}) ds &= \gamma d\alpha (\sin \alpha - i \cos \alpha) = -\gamma d (\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ &= -\gamma d \left(\frac{dx}{ds} + i \frac{dy}{ds} \right) = -\gamma d \left(\frac{d\eta}{ds} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

En comparant cette relation avec (II.44) nous obtenons la condition à la limite sous la forme suivante

$$\phi(\eta) - \eta \overline{\phi'(\eta)} - \overline{\chi'(\eta)} = -\frac{\gamma}{2\mu} \frac{d\eta}{ds}. \quad (\text{II.47})$$

Pour avoir la même notation que Hopper [28], nous faisons le changement

$$\phi(\eta) \rightarrow i \frac{\phi(\eta)}{2} \quad \chi'(\eta) \rightarrow i \frac{\psi(\eta)}{2}. \quad (\text{II.48})$$

Les deux nouvelles fonctions $\phi(\eta)$ et $\psi(\eta)$ ainsi obtenues, sont aussi holomorphes. Avec ce changement la condition à la limite (II.3) prend la forme

$$\phi(\eta) + \eta \overline{\phi'(\eta)} + \overline{\psi(\eta)} = i \frac{\gamma}{\mu} \frac{d\eta}{ds} \quad (\text{II.49})$$

et la vitesse complexe (II.28) s'écrit maintenant

$$2(u + iv) = \phi(\eta) - \eta \overline{\phi'(\eta)} - \overline{\psi(\eta)}. \quad (\text{II.50})$$

Notons que Hopper, pour présenter sa méthode, est parti directement des équations (II.50) et (II.49).

En conclusion, nous avons transformé le problème de Stokes [(II.1)-(II.3)] en le calcul de deux fonctions holomorphes qui vérifient l'équation (II.50) dans tout le domaine, et l'équation (II.49) à la frontière.

II.1.3 Unicité du champ de vitesse

La question à laquelle on essaye de répondre dans cette section est la suivante : la condition à la limite (II.49) détermine-t-elle la vitesse de façon unique ? Considérons le cas simple quand la forme du profil est un disque de rayon R . Dans ce cas, on sait que la force de tension superficielle est uniforme à la frontière et le champ de vitesses est nul partout. Pour un point η sur le contour de ce domaine, c'est-à-dire le cercle, nous avons $\bar{\eta} = R^2/\eta$ et (II.49) devient

$$\phi(\eta) = -\eta\bar{\phi}'\left(\frac{R^2}{\eta}\right) - \bar{\psi}\left(\frac{R^2}{\eta}\right) - \frac{\gamma}{\mu R}\eta \quad |\eta| = R. \quad (\text{II.51})$$

Ici nous avons utilisé la notation : $\bar{f}(\eta) = \overline{f(\bar{\eta})}$. Le membre gauche de (II.51) est une fonction holomorphe pour $|\eta| \leq R$ et on remarque que le membre droit est holomorphe pour $|\eta| \geq R$. Donc, la condition à la frontière (II.49) fait que $\phi(\eta)$ soit continue analytiquement dans tout le plan, comme une fonction entière, et ses valeurs pour $|\eta| \geq R$ sont données par le membre droit de (II.51). Maintenant remplaçons dans (II.51) $\eta = R^2/\bar{\eta}$ et prenons le conjugué complexe :

$$\psi(\eta) = -\frac{R^2}{\eta}\phi'(\eta) - \bar{\phi}\left(\frac{R^2}{\eta}\right) - \frac{\gamma R}{\mu}\frac{1}{\eta} \quad |\eta| = R. \quad (\text{II.52})$$

La fonction $\psi(\eta)$ est continue analytiquement dans tout le plan comme une fonction entière et ces valeurs pour $|\eta| \geq R$ sont données par le membre droit de (II.52). Avec cette continuité, les relations (II.51) et (II.52) sont équivalentes et tiennent pour tout η . On remarque que le membre droit de (II.51) se comporte comme une fonction linéaire pour les valeurs de $|\eta|$ élevées, donc $\phi(\eta)$ doit être une fonction linéaire de η . De la même façon, à (II.52) on remarque que $\psi(\eta)$ doit être une fonction constante. Ainsi

$$\phi(\eta) = a + b\eta \quad \text{et} \quad \psi(\eta) = c \quad (\text{II.53})$$

avec a , b et c des constantes complexes. En les remplaçant dans (II.51) ou (II.52) on remarque qu'il faut qu'elles vérifient la relation

$$a + b\eta = -\bar{b}\eta - \bar{c} - \frac{\gamma}{\mu R}\eta \quad (\text{II.54})$$

pour tout η , d'où $c = -\bar{a}$ et $\text{Re}\{b\} = -\gamma/2\mu R$. Alors dans ce cas, il découle que

$$\phi(\eta) = a + \left[-\frac{\gamma}{2\mu R} + i\text{Im}\{b\} \right] \eta \quad \text{et} \quad \psi(\eta) = -\bar{a} \quad (\text{II.55})$$

où a et b sont des constantes arbitraires et Re et Im sont utilisés pour la partie réelle et imaginaire. On peut faire une interprétation immédiate de ces constantes. En remplaçant (II.55) dans (II.50), on remarque que $\phi(\eta)$ et $\psi(\eta)$ correspondent au champ de vitesse

$$u + iv = a + i \text{Im}\{b\} \eta \neq 0. \quad (\text{II.56})$$

Le premier terme du membre de droite représente une translation uniforme, et le second terme représente une rotation par rapport à l'origine avec la vitesse angulaire $\text{Im}\{b\}$. Donc on conclut que la condition de frontière (II.49) détermine la solution, à une translation et une rotation près. Physiquement, pour avoir une solution unique, on doit annuler le moment angulaire et la quantité de mouvement. Comme on voit plus loin, la présence des symétries selon les deux axes x et y , aide à éliminer la rotation et la translation. Une seule symétrie selon l'un des axes élimine seulement la rotation et l'unicité en translation est obtenue en prenant $\phi(0) = 0$.

II.2 Calcul de la vitesse

II.2.1 Transformation conforme

L'évolution de la section droite du coupleur est donnée comme une représentation ou transformation conforme d'un disque unitaire. Ce disque est pris comme référence fixe, et c'est la transformation qui évolue pour donner l'évolution de l'écoulement au cours de la fusion. Les points du plan complexe du disque sont notés ζ , ceux du plan complexe du profil η , et la transformation conforme $\eta = \Omega(\zeta, t)$. Le profil du coupleur est l'image du disque $|\zeta| \leq 1$ à l'aide de la transformation Ω . Donc, le problème d'évolution de notre profil est amené à trouver cette transformation. Les points à la frontière du disque, donc sur le cercle unité, sont notés σ pour les distinguer des points généraux du disque ζ . Donc, à la frontière on a les

relations suivantes

$$\sigma = e^{iv}, \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{\sigma}, \quad |\sigma| = 1, \quad d\sigma = ie^{iv}dv \quad (\text{II.57})$$

où l'angle v est mesuré dans le sens anti-horaire. Dorénavant, tous les calculs sont effectués dans le plan ζ . Donc au lieu des fonctions $\phi(\eta)$ et $\psi(\eta)$, nous utilisons les nouvelles fonctions

$$\phi(\zeta) = \phi[\Omega(\zeta)], \quad \psi(\zeta) = \psi[\Omega(\zeta)]. \quad (\text{II.58})$$

Pour écrire la condition à la frontière à l'aide de la transformation conforme (un point quelconque η à l'interface gaine-air est l'image d'un point σ du cercle unitaire), on calcule d'abord

$$\frac{d\eta}{ds} = \frac{d\eta}{|d\eta|} = \frac{\Omega'(\sigma)}{|\Omega'(\sigma)|} \frac{d\sigma}{|d\sigma|} = \frac{\Omega'(\sigma)}{|\Omega'(\sigma)|} \frac{ie^{iv}dv}{dv} = i\sigma \frac{\Omega'(\sigma)}{|\Omega'(\sigma)|}. \quad (\text{II.59})$$

Avant d'utiliser cette relation dans (II.49), simplifions les équations en introduisant les variables sans dimension

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \frac{\vec{r}^*}{R} & k &= k^*R & \tau_{ij} &= \tau_{ij}^* \frac{R}{\gamma} \\ p &= p^* \frac{R}{\gamma} & \vec{V} &= \vec{V}^* \frac{\mu}{\gamma} & t &= t^* \frac{\gamma}{\mu R} \end{aligned} \quad (\text{II.60})$$

où un astérisque dénote les variables réelles, \vec{r} le vecteur de la position et R une échelle caractéristique de la longueur dans le plan de la section droite. Par exemple R pourrait être le rayon du cylindre final dans le cas d'une fusion complète. Avec ces nouvelles variables adimensionnelles, μ et γ disparaissent de nos équations, par exemple l'équation de Stokes s'écrit maintenant $\vec{\nabla}p = \vec{\nabla}^2\vec{V}$ et la contrainte à la limite est : $\vec{T}_n = k\vec{n}$. Maintenant la condition à la limite (II.49) devient

$$\phi(\sigma) + \frac{\Omega(\sigma)}{\Omega'(\sigma)} \overline{\phi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = -\frac{\sigma\Omega'(\sigma)}{|\Omega'(\sigma)|}. \quad (\text{II.61})$$

Ici nous avons utilisé la relation

$$\phi'(\eta) = \frac{d\phi(\eta)}{d\eta} = \frac{\phi'(\zeta)}{\Omega'(\zeta)}. \quad (\text{II.62})$$

La relation (II.50) pour la vitesse complexe prend la forme

$$2[u(\zeta) + iv(\zeta)] = \phi(\zeta) - \frac{\Omega(\zeta)}{\Omega'(\zeta)}\overline{\phi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)}. \quad (\text{II.63})$$

En combinant cette équation avec (II.61) on obtient pour la vitesse à la frontière

$$V(\sigma, t) = u(\sigma) + iv(\sigma) = \phi(\sigma) + \frac{\sigma\Omega'(\sigma)}{2|\Omega'(\sigma)|} \quad (\text{II.64})$$

Cette équation s'applique seulement à la frontière.

Imposons la condition $\Omega(0, t) = 0$, qui est juste une convenance mathématique, mais qui peut amener à un mouvement comme un corps rigide du profil de coupleur. Considérons maintenant un point η à la frontière de notre profil, l'image d'un point σ à l'instant t . Donc, ce point est $\eta = \Omega(\sigma, t) = \Omega(e^{iv}, t)$.

Mathématiquement nous supposons que la forme du profil évolue d'une façon régulière, c'est à dire que $\frac{\partial}{\partial t}\Omega(\sigma, t)$ est une fonction continue. Pour une augmentation dt en temps, ce point se déplace au point $\Omega(\sigma, t) + V(\sigma, t)dt$. Conformément à la représentation choisie, ce nouveau point doit correspondre à $\Omega[e^{i(v+dv)}, t+dt]$, c'est à dire à l'image dans le plan complexe η , à l'instant $t+dt$, d'un point (pas nécessairement le point original) du cercle unitaire dans le plan complexe ζ . Donc

$$\begin{aligned} \Omega[e^{i(v+dv)}, t+dt] &= \Omega(e^{iv}, t) + V(e^{iv}, t)dt \\ &= \Omega(e^{iv}, t) + \Omega'(e^{iv}, t)ie^{iv}dv + \frac{\partial}{\partial t}\Omega(e^{iv}, t)dt. \end{aligned} \quad (\text{II.65})$$

Le changement en v dépend en même temps de v et de t , et en conséquence on peut écrire

$$dv = \frac{\partial}{\partial t}\Theta(\sigma, t)dt \quad (\text{II.66})$$

où la fonction inconnue $\frac{\partial}{\partial t}\Theta(\sigma, t)$ est réelle. En remplaçant dans (II.65) la valeur de la vitesse donnée par (II.64), on obtient

$$\phi(\sigma, t) + \frac{\sigma\Omega'(\sigma, t)}{2|\Omega'(\sigma, t)|} = \Omega'(\sigma, t)i\sigma\frac{\partial}{\partial t}\Theta(\sigma, t) + \frac{\partial}{\partial t}\Omega(\sigma, t) \quad (\text{II.67})$$

et après un arrangement :

$$\frac{\phi(\sigma, t)}{\sigma \Omega'(\sigma, t)} = - \left[\frac{1}{2|\Omega'(\sigma, t)|} - i \frac{\partial}{\partial t} \Theta(\sigma, t) \right] + \frac{\frac{\partial}{\partial t} \Omega(\sigma, t)}{\sigma \Omega'(\sigma, t)}. \quad (\text{II.68})$$

Maintenant, on sait que les fonctions $\phi(\zeta, t)$ et $\frac{\partial}{\partial t} \Omega(\zeta, t)$ sont holomorphes. Par définition de la transformation conforme, on sait que $\Omega'(\zeta, t) \neq 0$ dans $|\zeta| \leq 1$. Dans ce domaine, pour ne pas avoir de points critiques ($\sigma = 0$), nous avons choisi $\Omega(0, t) = 0$ et en conséquence $\frac{\partial}{\partial t} \Omega(0, t) = 0$. Pour la même raison on choisit $\phi(0) = 0$. Cela est justifié parce que, comme nous l'avons déjà discuté à la section sur l'unicité du champ de vitesse, il y a une indétermination des fonctions $\phi(\zeta)$ et $\psi(\zeta)$.

Donc, le premier et le dernier terme de l'équation (II.68) sont des valeurs à la limite des fonctions holomorphes dans $|\zeta| \leq 1$. Il en découle que les deux termes entre les crochets sont la partie réelle et imaginaire des valeurs à la limite d'une fonction holomorphe dans $|\zeta| \leq 1$. La partie réelle de cette fonction est connue et selon le théorème de Schwarz, cette fonction est donné par l'intégrale de Cauchy de la forme suivante

$$F(\zeta, t) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{2|\Omega'(\sigma, t)|} \frac{\sigma + \zeta}{\sigma(\sigma - \zeta)} d\sigma \quad |\zeta| < 1 \quad (\text{II.69})$$

où intégrale de contour est calculée sur le cercle unitaire $|\sigma| = 1$. Les intégrales de Cauchy comme (II.69) définissent une fonction qui est holomorphe dans le domaine $|\zeta| < 1$ et dans $|\zeta| > 1$, mais non-continue sur $|\zeta| = 1$. Nous sommes concernés par la limite lors qu'on s'approche à un point de la frontière, de l'intérieur du domaine. Cette limite est donnée par la formule de Plemelj

$$F(\sigma_0, t) = \frac{1}{2|\Omega'(\sigma_0, t)|} + \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{2|\Omega'(\sigma, t)|} \frac{\sigma + \sigma_0}{\sigma(\sigma - \sigma_0)} d\sigma. \quad (\text{II.70})$$

L'intégrale ci-dessus a un point singulier ($\sigma = \sigma_0$) et pour cette raison, c'est au sens de la valeur principale qu'elle va être utilisée. De cette façon, la fonction $F(\zeta, t)$ est complètement déterminée, soit à la frontière (II.70), soit à l'intérieur du domaine (II.69). Une simple vérification nous montre qu'à la frontière la partie réelle de F est vraiment $\frac{1}{2|\Omega'(\sigma, t)|}$ parce le dernier terme en (II.70) est imaginaire à cause de la

relation suivante

$$\left(\frac{\sigma + \sigma_0}{\sigma - \sigma_0} \right) \left(\frac{d\sigma}{i\sigma} \right) = \left[\frac{i \sin(v_0 - v)}{1 - \cos(v_0 - v)} \right] (dv). \quad (\text{II.71})$$

Maintenant, en remplaçant $F(\zeta, t)$ dans l'équation (II.68) et en tenant compte du fait que chaque terme est la valeur limite d'une fonction holomorphe continue dans $|\zeta| \leq 1$, on obtient l'expression explicite

$$\phi(\zeta, t) = -\zeta \Omega'(\zeta, t) F(\zeta, t) + \frac{\partial}{\partial t} \Omega(\zeta, t) \quad |\zeta| \leq 1. \quad (\text{II.72})$$

On a fait ici un prolongement analytique en remplaçant σ par ζ . Revenons de nouveau à la frontière. En dérivant (II.72) par rapport à σ et remplaçant le résultat à (II.61) on obtient

$$\frac{[-\sigma \Omega'(\sigma, t) F(\sigma, t) + \frac{\partial}{\partial t} \Omega(\sigma, t)] +}{\frac{\Omega(\sigma)}{\Omega'(\sigma)} \frac{d}{d\sigma} [-\sigma \Omega'(\sigma, t) F(\sigma, t) + \frac{\partial}{\partial t} \Omega(\sigma, t)] + \overline{\psi(\sigma)}} = -\frac{\sigma \Omega'(\sigma)}{|\Omega'(\sigma)|}. \quad (\text{II.73})$$

Après quelques arrangements :

$$\overline{\psi(\sigma, t)} = \sigma \Omega'(\sigma, t) \left[F(\sigma, t) - \frac{1}{|\Omega'(\sigma, t)|} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \Omega(\sigma, t) + \frac{\Omega(\sigma, t)}{\Omega'(\sigma, t)} \frac{d}{d\sigma} [\sigma \Omega'(\sigma, t) F(\sigma, t) - \frac{\partial}{\partial t} \Omega(\sigma, t)]. \quad (\text{II.74})$$

Utilisant (II.70), on remarque que le premier groupe entre les crochets n'est rien d'autre que $[-\overline{F(\sigma, t)}]$. Alors, avec d'autres arrangements on obtient

$$\begin{aligned} \Omega'(\sigma, t) \psi(\sigma, t) &= -\Omega'(\sigma, t) F(\sigma, t) \overline{\sigma \Omega'(\sigma, t)} - \Omega'(\sigma, t) \overline{\frac{\partial}{\partial t} \Omega(\sigma, t)} \\ &+ \overline{\Omega(\sigma, t)} \frac{d}{d\sigma} [\sigma \Omega'(\sigma, t) F(\sigma, t)] - \overline{\Omega(\sigma, t)} \frac{d}{d\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial t} \Omega(\sigma, t) \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.75})$$

La continuité de $\frac{\partial}{\partial t} \Omega(\zeta, t)$ avec l'existence des dérivées $\Omega^{(n)}(\zeta, t)$ implique $\frac{\partial}{\partial t} [\Omega'(\zeta, t)] = \frac{\partial}{\partial \zeta} [\frac{\partial}{\partial t} \Omega(\zeta, t)]$. On remarque aussi que $\frac{d}{d\sigma} \overline{\Omega(\sigma, t)} = -\frac{1}{\sigma^2} \overline{\Omega'(\sigma, t)}$, et l'équation (II.75) devient

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\Omega'(\sigma, t) \overline{\Omega(\sigma, t)} \right] + \Omega'(\sigma, t) \psi(\sigma, t) = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\sigma \Omega'(\sigma, t) \overline{\Omega(\sigma, t)} F(\sigma, t) \right]. \quad (\text{II.76})$$

L'équation ci-dessus est une des équations de l'évolution de notre profil. Elle s'écrit

aussi sous la forme équivalente

$$\begin{aligned} \psi(\sigma, t) = \overline{\Omega(\sigma, t)} & \left[\left(1 + \sigma \frac{\Omega''(\sigma, t)}{\Omega'(\sigma, t)} \right) F(\sigma, t) + \sigma F'(\sigma, t) - \frac{\frac{\partial}{\partial t} \Omega'(\sigma, t)}{\Omega'(\sigma, t)} \right] - \\ & \overline{\sigma \Omega'(\sigma, t)} F(\sigma, t) - \frac{\frac{\partial}{\partial t} \Omega(\sigma, t)}{\Omega'(\sigma, t)}. \end{aligned} \quad (\text{II.77})$$

Maintenant, supposons qu'on peut deviner intuitivement la forme de $\Omega(\sigma, t_0)$ à un instant t_0 . Alors, toutes les quantités dans (II.76) ou (II.77) sont connues à l'exception de $\psi(\sigma, t_0)$ et $\frac{\partial}{\partial t} \Omega(\sigma, t_0)$. On exige que $\frac{\partial}{\partial t} \Omega(\sigma, t_0)$ soit choisi d'une telle manière que $\psi(\sigma, t_0)$ soit la valeur à la limite d'une fonction holomorphe et univalente dans $|\zeta| \leq 1$. C'est un problème de prolongement analytique.

Il paraît qu'en principe (II.76) ou (II.77) détermine $\frac{\partial}{\partial t} \Omega(\sigma, t)$ uniquement à un mouvement comme un corps rigide près. Il est très difficile de résoudre (II.76) ou (II.77) directement, même si le problème est bien posé mathématiquement. Mais, si on choisi une description paramétrique le problème se simplifie. Dans ce cas il faut montrer que la forme paramétrique choisie satisfait (II.76), au moins en principe ; c'est à dire que les paramètres qui déterminent cette forme, peuvent être choisis tels que (II.76) soit vraiment la valeur à la limite d'une fonction holomorphe dans $|\zeta| \leq 1$ et univalente. En faisant nul le coefficient devant les termes singuliers, ces paramètres peuvent être déterminés. Le problème est maintenant de deviner cette forme paramétrique.

II.2.2 Description paramétrique de la transformation

Supposons que $\eta = g(\zeta)$ représente une transformation conforme du disque unitaire $|\zeta| < 1$ du plan complexe ζ dans un domaine D du plan complexe η . Nous allons examiner les effets qu'apporte à cette transformation, le fait d'ajouter à $g(\zeta)$ un pôle simple dans $|\zeta| > 1$ qui est permis d'approcher à un point quelconque $\sigma_0 = e^{i\omega_0}$ dans le cercle unitaire $|\sigma| = 1$. Plus tard nous verrons que $g(\zeta)$ doit être soumise à quelques restrictions. Pour commencer considérons que $g(\zeta)$ transforme le disque unitaire en un domaine D convexe. Nous allons aussi supposer que $g(\zeta)$ est holomorphe à $\zeta = \sigma_0$ et nous allons demander que la frontière ∂D de notre domaine D , ait une tangente bien définie à $\eta_0 = g(\sigma_0)$, c'est-à-dire $g'(\sigma_0) \neq 0$.

Maintenant considérons la transformation donnée par

$$\eta = \Omega(\zeta) = g(\zeta) + \frac{\bar{\beta}\zeta}{1 - \bar{\gamma}\zeta} \quad (\text{II.78})$$

avec β et γ deux paramètres complexes, et $|\gamma| < 1$. Il ne faut pas confondre le paramètre complexe γ avec le coefficient de tension superficielle. Sans perte de généralité, nous supposons que le pôle à $\zeta = 1/\bar{\gamma}$ dans (II.78) s'approche vers $\sigma_0 = e^{iv_0}$ selon un rayon. Donc, on peut écrire

$$\gamma = (1 - \varepsilon) e^{iv_0} \quad (\text{II.79})$$

où $0 < \varepsilon < 1$ et nous sommes concernés à la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Pour que la transformation $\Omega(\zeta)$ ne devienne pas critique à proximité de σ_0 il faut que $\beta \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Pour cette raison supposons que

$$\beta \approx b\varepsilon e^{i\alpha_0} \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0^+ \quad (\text{II.80})$$

avec $b > 0$ une constante réelle et α_0 un argument réel. Nous voyons que si ζ n'est pas à la proximité de σ_0 , alors $\Omega(\zeta) \rightarrow g(\zeta)$ pour $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Maintenant pour focaliser notre attention à ce qu'il se passe avec l'image de la portion de $|\sigma| = 1$ à la proximité de σ_0 , nous considérons

$$\sigma = e^{i(v_0+s\varepsilon)} = \sigma_0 e^{is\varepsilon} \quad (\text{II.81})$$

avec s un paramètre réel. En remplaçant cette expression à (II.78), exploitant (II.79) et (II.80), et en prenant la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ($\cos(s\varepsilon) \approx 1 - \frac{s^2\varepsilon^2}{2}$ et $\sin(s\varepsilon) \approx s\varepsilon$) on obtient

$$\begin{aligned} \eta &= g(\sigma_0) + b e^{i(v_0-\alpha_0)} \frac{1}{1-is} = \\ &= g(\sigma_0) + \frac{1}{2} b e^{i(v_0-\alpha_0)} + \frac{1}{2} b e^{i(v_0-\alpha_0)} \frac{1-s^2+i2s}{1+s^2} \end{aligned} \quad (\text{II.82})$$

qui est l'équation paramétrique d'un cercle de rayon $b/2$ et son centre est situé à $\eta = g(\sigma_0) + \frac{1}{2} b e^{i(v_0-\alpha_0)}$. Le point $\eta_0 = g(\sigma_0)$ dans ce cercle correspond à $s \rightarrow \pm\infty$. Pour être sûr que ce cercle n'empiète pas sur notre domaine original D , son centre doit être situé sur la normale à ∂D , au point $\eta_0 = g(\sigma_0)$ et dirigé vers l'extérieur, qui se réalise lorsque

$$\alpha_0 = -\arg\{g'(\sigma_0)\}. \quad (\text{II.83})$$

L'angle que forme la tangente au point $\sigma_0 = e^{iv_0}$ avec l'axe x dans le plan ζ est $\pi/2 + v_0$. Selon l'interprétation géométrique de la dérivée (annexe I), l'angle formé par la tangente au point $\eta_0 = g(\sigma_0)$ avec l'axe x dans le plan η est $\pi/2 + v_0 + \arg(g'(\zeta_0))$. D'où, il est clair pourquoi la relation (II.83) doit être vérifiée. Avec cette condition en vigueur, à la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$, le domaine D qui est l'image du disque unitaire $|\zeta| < 1$ par la transformation $\Omega(\zeta)$, est composée du domaine original D donné par $g(\zeta)$, plus un disque circulaire de rayon $b/2$ qui touche ∂D au point $\eta_0 = g(\zeta_0)$. La relation (II.83) est une condition nécessaire pour que la famille des transformations que nous sommes en train de considérer, soit déterminée d'une façon unique. Mais, on peut arriver à la même conclusion autrement.

À la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ le pôle $\zeta = 1/\bar{\gamma}$ se déplace vers $\zeta = \sigma_0$, mais avec lui, sont les zéros de la dérivée $\Omega'(\zeta) = g'(\zeta) + \frac{\bar{\beta}}{(1-\bar{\gamma}\zeta)^2}$ qui font la même chose. Ces zéros sont au point où

$$\zeta \approx \sigma_0 \pm i\varepsilon^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{be^{-i\alpha_0}}{g'(\sigma_0)} \right\}^{\frac{1}{2}} \sigma_0 \quad \varepsilon \rightarrow 0^+ \quad (\text{II.84})$$

Pour que la transformation soit conforme dans $|\zeta| \leq 1$ (dérivée non nulle) il faut que ces zéros restent dans $|\zeta| > 1$. Pour réaliser cela, il faut que le terme entre les crochets dans (II.84) soit réel. Donc il faut que la relation (II.83) soit vérifiée.

À ce point, on peut faire une remarque très importante qui sera utilisée plus tard : Si le disque circulaire qui a été greffé dans le domaine original D a un centre situé à $\eta = a$ et son rayon est r , à la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ les relations suivantes sont vérifiées

$$\Omega(\gamma) \rightarrow a \quad \text{et} \quad \beta\Omega'(\gamma) \rightarrow r^2. \quad (\text{II.85})$$

Démontrons ces relations.

$$\begin{aligned} \Omega(\gamma) &= g(\gamma) + \frac{\bar{\beta}\gamma}{1-\bar{\gamma}\gamma} = g(\gamma) + \frac{b\varepsilon e^{-i\alpha_0(1-\varepsilon)}e^{iv_0}}{1-(1-\varepsilon)^2} \rightarrow g(\sigma_0) + \frac{1}{2}be^{i(v_0-\alpha_0)} \\ \beta\Omega'(\gamma) &= b\varepsilon e^{i\alpha_0}g'(\gamma) + \frac{b^2\varepsilon^2}{(1-|\gamma|^2)^2} = b\varepsilon |g'(\zeta_0)| + \frac{b^2\varepsilon^2}{[1-(1-\varepsilon)^2]^2} \rightarrow \frac{b^2}{4}. \end{aligned} \quad (\text{II.86})$$

Maintenant il est évident qu'on peut produire n'importe quelle configuration de disques circulaires en contact l'un avec l'autre en utilisant la procédure ci-dessus.

Pour le premier disque on peut considérer $g(\zeta)$ comme un multiple de ζ qui donne un cercle centré à l'origine, ou d'une façon plus générale, comme une fonction bilinéaire avec son pôle dans $|\zeta| > 1$. Après, on peut ajouter les autres disques l'un après l'autre.

En conclusion, une configuration de N disques en contact est donnée par la transformation

$$\Omega(\zeta) = \sum_{j=1}^N \frac{\bar{\beta}_j \zeta}{1 - \bar{\gamma}_j \zeta}. \quad (\text{II.87})$$

II.2.3 Formule pour la vitesse

La conjuguée complexe de la transformation (II.87), à la frontière, a la forme

$$\overline{\Omega(\sigma)} = \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j}{\sigma - \gamma_j} \quad (\text{II.88})$$

où la relation $\bar{\sigma} = 1/\sigma$ a été utilisé.

En remplaçant (II.87) et (II.88) dans (II.76), et en prenant le prolongement analytique, qui se réalise tout simplement en remplaçant σ par ζ , nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\Omega'(\zeta, t) \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j}{\zeta - \gamma_j} \right] + \Omega'(\zeta, t) \psi(\zeta, t) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\zeta \Omega'(\zeta, t) \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j}{\zeta - \gamma_j} F(\zeta, t) \right]. \quad (\text{II.89})$$

Les seuls points singuliers des deux côtés holomorphes de cette équation, dans $|\zeta| < 1$, sont les pôles $\zeta = \gamma_j$ et donc leurs résidus doivent s'annuler. La valeur du résidu est donné par le coefficient de $(\zeta - \gamma_j)^{-1}$. C'est plus simple et plus utile d'annuler celui du côté gauche, d'où

$$\frac{d}{dt} [\beta_j \Omega'(\gamma_j)] = 0. \quad (\text{II.90})$$

Il en découle que les combinaisons $\beta_j \Omega'(\gamma_j)$ sont des invariants, et de la deuxième relation en (II.85) ces invariants sont

$$\beta_j \Omega'(\gamma_j) = r_j^2 \quad (\text{II.91})$$

avec r_j les rayons initiaux des disques et $j = 1, 2, \dots, N$.

Maintenant nous annulons les coefficients de $(\zeta - \gamma)^{-2}$. La simplification de (II.89) nous donne

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) = & \left(\sum_{j=1}^N \frac{\beta_j}{\zeta - \gamma_j} \right) \left\{ \left[1 + \frac{\zeta \Omega''(\zeta)}{\Omega'(\zeta)} \right] F(\zeta) + \zeta F'(\zeta) - \frac{\frac{\partial}{\partial t} \Omega(\zeta)}{\Omega'(\zeta)} \right\} - \\ & \left[\sum_{j=1}^N \frac{\beta_j}{(\zeta - \gamma_j)^2} \right] \zeta F(\zeta) - \sum_{j=1}^N \frac{\frac{d}{dt} \beta_j}{\zeta - \gamma_j} - \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j \frac{d}{dt} \gamma_j}{(\zeta - \gamma_j)^2}. \end{aligned} \quad (\text{II.92})$$

D'où il est clair qu'on doit avoir

$$\frac{d\gamma_j}{dt} = -\gamma_j F(\gamma_j) \quad (\text{II.93})$$

pour $j = 1, 2, \dots, N$. Il faut noter ici que l'équation ci-dessus n'est pas une équation différentielle ordinaire de γ_j seulement, parce que $F(\gamma_j)$ dépend des β_j aussi. Les équations (II.91) et (II.93) nous procurent $2N$ équations pour les $2N$ inconnus γ_j et β_j .

On dénote le prolongement analytique de (II.88) par

$$\Omega_1 = \overline{\Omega(\zeta)} = \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j}{\zeta - \gamma_j}. \quad (\text{II.94})$$

Utilisant cette notation au prolongement analytique de (II.77), et en remplaçant ensuite (II.77) et (II.72) dans (II.63), on obtient

$$\begin{aligned} 2[u(\zeta, t) + iv(\zeta, t)] = & -\zeta \Omega'(\zeta, t) F(\zeta, t) + \frac{\partial}{\partial t} \Omega(\zeta, t) \\ & + \frac{\Omega(\zeta, t) - \overline{\Omega_1(\zeta, t)}}{\overline{\Omega'(\zeta, t)}} [\overline{\Omega'(\zeta, t) F(\zeta, t)} + \zeta \overline{\Omega''(\zeta, t) F(\zeta, t)}] \\ & + \zeta \overline{\Omega'(\zeta, t) F'(\zeta, t)} - \frac{\partial}{\partial t} \overline{\Omega'(\zeta, t)} \Big] - \overline{\zeta \Omega'_1(\zeta, t) F(\zeta, t)} + \frac{\partial}{\partial t} \overline{\Omega_1(\zeta, t)}. \end{aligned} \quad (\text{II.95})$$

C'est cette équation que nous allons utiliser pour calculer le champ de vitesse interne. Pour calculer les dérivées par rapport au temps il faut d'abord exprimer les β_j en fonctions des γ_j à l'aide de (II.91) et puis utiliser (II.93) pour calculer les

dérivées $d\gamma_j/dt$.

II.2.4 Valeur des paramètres pour quelques configurations simples

Dans une situation générale le nombre des paramètres à déterminer dans la transformation (II.87), peut être réduit de $2N$ à $2N - 1$. De la définition de $F(\zeta)$ en (II.69), nous voyons qu'elle est l'intégrale d'un produit d'une quantité positive et d'une fonction bilinéaire spéciale, alors, il est facile de montrer que les fonctions $F(\gamma_j)$ ont une partie réelle positive. Donc si $\gamma_j \neq 0$ alors $|\gamma_j|$ diminue au cours de la fusion. On peut donc choisir, $\gamma_1 = 0$, à un temps initial quelconque, avec la conséquence que $\gamma_1 = 0$ pour tout le temps. Toute symétrie présente dans le problème pourrait être exploitée, pour réduire le nombre des variables et des équations, ou pour les justifier d'être réelles, ou une combinaison des deux. Si le problème est symétrique à un point où deux disques se touchent, le choix $\gamma_1 = 0$ est toujours possible mais dans ce cas, on ne peut pas utiliser la symétrie.

II.2.4.1 Coupleurs 2×2

Le coupleur 2×2 est le coupleur le plus important pour les réseaux de télécommunications. Nous plaçons les centres des fibres, à l'instant initial, sur l'axe réel. Donc, l'axe majeur du coupleur correspond avec l'axe réel. De la relation (II.85) on remarque qu'à l'instant initial $\Omega(\gamma_j) = a_j$, avec a_j le centre de la fibre et qui, dans notre cas, est un nombre réel. Il en découle qu'à l'instant initial γ_1 et γ_2 sont réels. À cause de la symétrie sur l'axe réel, la valeur de l'intégrale (II.69) est un nombre réel pour un argument réel. Donc, de la relation (II.93), il s'ensuit que γ_1 et γ_2 sont réels tout le temps. Si on utilise le choix $\gamma_1 = 0$ et on dénote $\gamma_2 = \lambda$, la forme de la transformation devient

$$\Omega(\zeta) = \overline{\beta_1} \zeta + \frac{\overline{\beta_2} \zeta}{1 - \lambda \zeta} \quad (\text{II.96})$$

avec $0 \leq \lambda < 1$. Les β_j sont évalués à l'aide de (II.91), qui dans notre cas devient

$$\begin{aligned}\overline{\beta_1}(\overline{\beta_1} + \overline{\beta_2}) &= r_1^2 \\ \overline{\beta_2} \left[\overline{\beta_1} + \overline{\beta_2} \frac{1}{(1 - \lambda^2)^2} \right] &= r_2^2.\end{aligned}\tag{II.97}$$

On remarque que la solution de ce système est une paire de nombres réels. Donc, β_1 et β_2 sont aussi réels et on peut enlever le signe de complexe conjugué dans les relations ci-dessus.

Dans le cas des coupleurs symétriques au lieu d'utiliser le choix $\gamma_1 = 0$, on peut utiliser la symétrie pour déterminer les γ_j . Dans ce cas on peut noter : $\gamma_1 = -\lambda$, $\gamma_2 = \lambda$ et $\beta_1 = \beta_2 \equiv \beta$ et la transformation devient

$$\Omega(\zeta) = \beta\zeta \left(\frac{1}{1 + \lambda\zeta} + \frac{1}{1 - \lambda\zeta} \right).\tag{II.98}$$

Même si cette transformation reflète mieux la symétrie et qu'elle n'amène pas à un mouvement de translation comme un corps rigide du coupleur, c'est la forme (II.96) que nous allons utiliser pour calculer le champ de vitesse. La raison est la présence des points singuliers $\zeta = \pm\lambda$ dans les deux fibres. Les problèmes avec les points singuliers sont expliqués au chapitre 2.

II.2.4.2 Coupleur 3×3 plat

Dans ce cas nous plaçons le centre de la fibre du milieu à l'origine du système de coordonnées, donc nous utilisons le choix $\gamma_1 = 0$. Les deux autres fibres sont placées sur l'axe réel x , une de chaque côté. Comme pour les coupleurs 2×2 , de (II.85) il découle que $\Omega(\gamma_2)$ et $\Omega(\gamma_3)$ sont aussi réels, et nous pouvons dire la même chose pour γ_2 et γ_3 . Pour simplifier les équations nous considérons les fibres latérales égales. Maintenant la situation est symétrique par rapport à l'axe y et nous avons $\beta_2 = \beta_3$ et $\gamma_2 = -\gamma_3 \equiv \lambda$. La forme de la transformation est donnée par

$$\Omega(\zeta) = \beta_1\zeta + \beta_2 \frac{\zeta}{1 - \lambda\zeta} + \beta_2 \frac{\zeta}{1 + \lambda\zeta}\tag{II.99}$$

où $|\zeta| \leq 1$.

Les paramètres β_1 et β_2 sont déterminés en résolvant le système des équations (II.91). Puisque

$$\Omega'(\zeta) = \beta_1 + \beta_2 \frac{1}{(1 - \lambda\zeta)^2} + \beta_2 \frac{1}{(1 + \lambda\zeta)^2}$$

ce système devient

$$\begin{aligned} \beta_1(\beta_1 + 2\beta_2) &= r_1^2 \\ \beta_2 \left(\beta_1 + \beta_2 \frac{1}{(1 - \lambda^2)^2} + \beta_2 \frac{1}{(1 + \lambda^2)^2} \right) &= r_2^2. \end{aligned} \quad (\text{II.100})$$

II.2.4.3 Coupleur 5×5 symétrique

Dans ce cas nous considérons $\gamma_1 = 0$ pour la fibre centrale et nous allons placer 4 fibres identiques sur les axes x et y. Donc nous avons $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5$, $\gamma_2 = -\gamma_3 = \lambda$ et $\gamma_4 = -\gamma_5 = i\lambda$. La transformation prend la forme

$$\Omega(\zeta) = \beta_1\zeta + \beta_2 \frac{\zeta}{1 - \lambda\zeta} + \beta_2 \frac{\zeta}{1 + \lambda\zeta} + \beta_2 \frac{\zeta}{1 - i\lambda\zeta} + \beta_2 \frac{\zeta}{1 + i\lambda\zeta}. \quad (\text{II.101})$$

Les paramètres β_1 et β_2 sont déterminés en résolvant le système des équations (II.91). Étant donné que

$$\Omega'(\zeta) = \beta_1 + \beta_2 \frac{1}{(1 - \lambda\zeta)^2} + \beta_2 \frac{1}{(1 + \lambda\zeta)^2} + 2\beta_2 \frac{1 - \lambda^2\zeta^2}{(1 + \lambda^2\zeta^2)^2}$$

ce système devient

$$\begin{aligned} \beta_1(\beta_1 + 4\beta_2) &= r_1^2 \\ \beta_2 \left(\beta_1 + \beta_2 \frac{1}{(1 - \lambda^2)^2} + \beta_2 \frac{1}{(1 + \lambda^2)^2} + 2\beta_2 \frac{1 - \lambda^4}{(1 + \lambda^4)^2} \right) &= r_2^2. \end{aligned} \quad (\text{II.102})$$

ANNEXE III

MÉTHODE D'ARNOLDI AVEC REDÉMARRAGE IMPLICITE

Dans cette annexe, nous traitons la méthode d'Arnoldi avec redémarrage implicite pour calculer quelques vecteurs et valeurs propres des matrices creuses de grande taille. Comme nous l'avons vu au chapitre 4, pour calculer les modes vectoriels des coupleurs fusionnés, nous sommes arrivés à l'équation aux valeurs propres

$$Av = \lambda v \quad (\text{III.1})$$

où A est une matrice creuse de grande taille et non symétrique, v le vecteur propre et λ la valeur propre (ici, nous avons utilisé la notation classique de l'algèbre linéaire).

Puisque la matrice A est non symétrique, les valeurs propres pourraient être des nombres complexes. Nous sommes intéressés aux modes guidés avec des constantes de propagation réelles dont la valeur propre β^2 est la plus élevée, c'est-à-dire elle est la plus proche de $(k_0 n_c)^2$ avec n_c l'indice du cœur.

Le module des valeurs propres des modes complexes pourrait être plus élevée que les valeurs propres des modes voulus qui ne sont donc pas les valeurs propres dominantes. Ce fait nous complique un petit peu la tâche et réduit en pratique la taille maximale de la matrice qu'on peut traiter dans nos calculs.

III.1 Quelques méthodes simples

III.1.1 Méthode des puissances

Soit $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$, c'est-à-dire, A est une matrice complexe de dimension $n \times n$. Supposons en plus, qu'elle n'est pas défective, c'est-à-dire qu'elle possède n vecteurs propres linéairement indépendants. Notons les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et supposons qu'elles sont rangées de la façon suivante : $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. Si $|\lambda_1| > |\lambda_2|$; λ_1 est appelée la valeur propre dominante.

Si A a une valeur propre dominante, on peut la trouver, ainsi que le vecteur propre associé, par la méthode de la puissance. L'idée est de prendre un vecteur non nul q et de construire la séquence

$$q, \quad Aq, \quad A^2q, \quad A^3q, \dots$$

qui doit être normalisée à chaque étape pour qu'elle converge. Pour construire cette séquence, on n'a pas besoin de construire les puissances de A explicitement. On peut à la place, multiplier le vecteur précédent par A . On peut facilement démontrer que cette séquence converge vers le vecteur propre dominant.

Le vecteur initial q s'écrit

$$q = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

avec c_1, \dots, c_n des constantes inconnues et les vecteurs propres v_1, \dots, v_n qui forment une base dans \mathbf{C}^n . Pour la plupart des vecteurs choisis au hasard $c_1 \neq 0$. Au j -ième pas on obtient

$$A^j q = \lambda_1^j \left[c_1 v_1 + c_2 (\lambda_2 / \lambda_1)^j v_2 + \dots + c_n (\lambda_n / \lambda_1)^j v_n \right]$$

d'où il est clair que la séquence tend vers le vecteur propre dominant.

III.1.2 Méthode des puissances inverses déplacée

Si la matrice A est non singulière, on peut appliquer la méthode des puissances de la section précédente à A^{-1} . Dans ce cas, puisque les valeurs propres de A^{-1} sont $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$, la séquence converge vers la valeur propre qui a le module le plus petit.

On peut montrer facilement que si un vecteur v est un vecteur propre de A avec une valeur propre λ , alors v est aussi un vecteur propre de $A - \rho I$ avec une valeur propre $\lambda - \rho$. Ici I est la matrice identité et la constante ρ est appelée une translation ou une déflation. Si la translation ρ est une bonne approximation de λ_n alors $|\lambda_n - \rho| \ll |\lambda_{n-1} - \rho|$, et la méthode des puissances inverses appliquée à la matrice $A - \rho I$ convergera rapidement vers un multiple de v_n .

La combinaison de la translation avec la méthode de la puissance inverse fonctionne très bien parce que l'on peut trouver des translations pour lesquelles une valeur propre de la matrice déplacée est beaucoup plus petite que les autres valeurs propres. Par contre, en général, il n'existe pas des translations pour lesquelles une valeur propre est beaucoup plus grande que les autres valeurs propres.

III.2 Méthode QR

Comme nous allons voir plus loin le problème du calcul des valeurs propres des matrices creuses de grande taille sera transformé par la méthode d'Arnoldi en un problème équivalent de calcul de toutes les valeurs propres des matrices de taille très petite mais denses. Dans ce cas, la méthode de choix est la méthode QR.

III.2.1 Décomposition QR par les matrices de rotation et de réflexion

Une matrice $Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$ est dite orthogonale si $QQ^T = I$, où Q^T est la matrice transposée. Cela veut dire que Q a une matrice inverse et $Q^{-1} = Q^T$. On peut montrer que si Q est orthogonale $\det(Q) = \pm 1$. La propriété d'orthogonalité d'une matrice est associée à l'orthogonalité de ses lignes et de ses colonnes. En effet, $q_i^T q_j = [Q^T Q]_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Considérons les vecteurs dans le plan \mathbf{R}^2 . La matrice qui fait la rotation des vecteurs avec un angle θ est

$$Q = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (\text{III.2})$$

Cette matrice est dite de rotation. Elle est une matrice orthogonale avec déterminant 1.

Les matrices de rotation peuvent être utilisées pour créer des zéros dans un vecteur ou une matrice. Par exemple, si $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ est un vecteur avec $x_2 \neq$

0, on peut trouver une matrice de rotation Q tel que $Q^T x = \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}$. En effet en remplaçant (III.2) dans cette relation, on trouve $\theta = \arctan(x_2/x_1)$ et $y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Regardons maintenant comment une matrice de rotation peut simplifier une matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

On sait qu'il existe Q telle que

$$Q^T \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec $r_{11} = \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}$. Définissons r_{12} et r_{22} tels que

$$\begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \end{bmatrix} = Q^T \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

et notons

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix}.$$

Alors $Q^T A = R$. Nous avons transformé A à une matrice triangulaire en la multipliant par une matrice orthogonale Q^T . Comme nous allons montrer, il est possible de faire une telle transformation même pour toutes les matrices $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$. On peut écrire la relation $Q^T A = R$ sous la forme

$$A = QR,$$

ce qui veut dire que la matrice A est donnée comme un produit QR où Q est orthogonale et R triangulaire. Considérons maintenant les matrices $n \times n$. Une matrice de rotation plane est une matrice de la forme

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & -s & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \\ & & & s & & c & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{array}$$

avec $c = \cos \theta$ et $s = \sin \theta$ et les éléments non montrés nuls. Cette matrice de rotation est appelé aussi matrice de Givens. Si Q est une telle matrice, alors la transformation $x \rightarrow Qx$ affecte seulement les éléments i et j de x de la même façon

que la matrice de rotation 2×2 affecterait le vecteur $x = \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix}$.

Regardons comment on peut utiliser les matrices de Givens pour obtenir la décomposition QR d'une matrice $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$. Considérons la première colonne de A . On peut trouver une matrice de Givens Q_{21} telle que

$$Q_{21}^T \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}.$$

De même façon on peut trouver Q_{31}^T telle que $Q_{31}^T(Q_{21}^T A)$ a un zéro à la position (3,1). De cette façon on crée les autres zéros dans la première colonne et on continue avec les autres colonnes. En tout, on crée les matrices de rotation $Q_{21}, Q_{31}, \dots, Q_{n1}, Q_{32}, \dots, Q_{n,n-1}$ telles que

$$R = Q_{n,n-1}^T Q_{n,n-2}^T \dots Q_{21}^T A \quad (\text{III.3})$$

est triangulaire. Le produit des matrices orthogonales est aussi une matrice orthogonale et on obtient donc la décomposition recherchée $A = QR$.

On peut obtenir la décomposition QR d'une autre façon en utilisant les matrices de réflexion. Commençons de nouveau avec le cas $n = 2$. Soit L une droite qui passe par l'origine. Nous allons trouver une matrice qui fait une réflexion des vecteurs par rapport à L . Soit v un vecteur selon L et u un vecteur orthogonal à L . Alors $\{u, v\}$ est une base de \mathbf{R}^2 et chaque vecteur x s'écrit sous la forme $x = \alpha u + \beta v$. On veut alors trouver une matrice Q telle que $Q(\alpha u + \beta v) = -\alpha u + \beta v$ pour tout α et β , ce qui revient à trouver Q telle que $Qu = -u$ et $Qv = v$.

Considérons la matrice $Q = I - 2uu^T$. On peut vérifier facilement qu'elle a les propriétés voulues. On peut généraliser sans peine ce concept pour les matrices en $\mathbf{R}^{n \times n}$. Les matrices $Q = I - 2uu^T$ telles que $\|u\|_2 = 1$ sont appelées des matrices de réflexion ou de Householder. On peut montrer facilement que ces matrices sont orthogonales.

Soient x et y deux vecteurs en \mathbf{R}^n tels que $\|x\|_2 = \|y\|_2$. Alors on peut trouver une matrice de réflexion Q telle que $Qx = y$, c'est-à-dire on peut trouver un vecteur u tel que $(I - 2uu^T)x = y$. En effet, u doit être un vecteur perpendiculaire avec la ligne bissectrice de l'angle entre x et y . Comme les normes de x et y sont égales, ce vecteur u n'est rien d'autre que la différence $x - y$ normalisé.

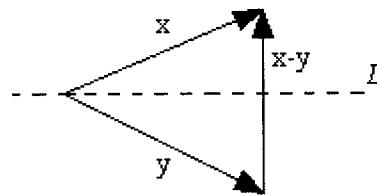


FIG. III.1 Réflexion de x en y

Il en découle qu'on peut créer facilement des zéros dans les vecteurs et les matrices utilisant les matrices de rotation. Par exemple pour trouver une matrice de Householder $Q = I - 2uu^T$ telle que

$$Q \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

le vecteur u dans ce cas est de la forme

$$u = \alpha(x - y) = \alpha \begin{bmatrix} x_1 - \tau \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

où α est choisi d'une telle façon que la norme $\|u\|_2$ soit 1. Cela nous donne une idée comment on peut obtenir la décomposition $A = QR$ en utilisant les matrices de Householder.

III.2.2 Algorithme QR

Avant de considérer l'algorithme QR nous présentons la notion de transformation semblable. Deux matrices A, B sont semblables s'il existe une matrice non singulière S telle que

$$B = S^{-1}AS. \quad (\text{III.4})$$

On peut montrer que les matrices semblables ont les mêmes valeurs propres. En effet, les matrices A et B ont le même polynôme caractéristique parce que $\lambda I - B = S^{-1}\lambda IS - S^{-1}AS = S^{-1}(\lambda I - A)S$ et en conséquence $\det(\lambda I - B) = \det(S^{-1})\det(\lambda I - A)\det(S) = \det(\lambda I - A)$.

On peut alors utiliser les transformations semblables pour simplifier le problème des valeurs propres. Mais l'utilisation des matrices quelconques comme des matrices de transformation amplifie beaucoup les erreurs. La transformation semblable par des matrices unitaires est par contre très stable. Les matrices unitaires sont les analogues complexes des matrices orthogonales, c'est-à-dire elles vérifient la relation $U^* = U^{-1}$ où U^* est la matrice conjuguée et transposée. Le théorème de Schur dit que chaque matrice est unitairement semblable à une matrice triangulaire. Les

matrices triangulaires ont la propriété que les valeurs propres sont les éléments de la diagonale principale. Donc si on est capable d'obtenir la décomposition de Schur $A = UTU^*$ où T est une matrice triangulaire le problème des valeurs propres est résolu.

L'algorithme QR produit une séquence de matrices $A = A_0, A_1, \dots$ unitairement semblables qui converge vers une matrice triangulaire. Il commence avec une matrice $A = A_0$ et produit la séquence (A_j) de la façon suivante

$$A_{m-1} = Q_m R_m \quad R_m Q_m = A_m \quad (\text{III.5})$$

On peut vérifier facilement que $A_m = Q_m^* A_{m-1} Q_m$. Donc A_m est unitairement semblable à A_{m-1} .

Une matrice A est sous la forme Hessenberg supérieure si $a_{ij} = 0$ pour $i > j + 1$. Donc une matrice de la forme Hessenberg a la forme

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

où les éléments non représentés sont nuls. Une itération de l'algorithme QR préserve la forme Hessenberg, c'est-à-dire si A_{m-1} est une matrice de la forme Hessenberg A_m l'est aussi. Le coût des itérations QR est réduit énormément pour les matrices de la forme Hessenberg. En effet, on peut obtenir une décomposition QR en utilisant seulement $n - 1$ matrices de rotation (Givens). Alors, avant de commencer l'algorithme QR la matrice est transformée de façon unitairement semblable à la forme Hessenberg. Cela est réalisé en utilisant les matrices de réflexion de Householder. Nous n'entrons pas dans les détails de cette transformation parce que les matrices denses de taille petite produites par la méthode d'Arnoldi sont déjà de la forme Hessenberg.

Considérons la séquence des matrices de la forme Hessenberg A_m avec éléments a_{ij}^m , produites par l'algorithme QR. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A rangées d'une telle façon que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. Le but de l'algorithme

QR est de rendre nuls $a_{i+1,i}$. On peut montrer que la convergence $a_{i+1,i} \rightarrow 0$ est proportionnelle au rapport $|\lambda_{i+1}/\lambda_i|$.

Soient $|\lambda_1 - \rho| \geq |\lambda_2 - \rho| \geq \dots \geq |\lambda_n - \rho|$ les valeurs propres de la matrice translatée $A - \rho I$. La convergence de l'algorithme dépend des rapports $|(\lambda_{i+1} - \rho)/(\lambda_i - \rho)|$. Commençons par la valeur propre la plus petite. Si on trouve une translation $\rho \approx \lambda_n$ alors l'élément $a_{n,n-1}$ convergera vers zéro très rapidement. La première valeur propre est déterminée et elle est a_{nn} . Après on continue avec la matrice réduite $A^{n-1,n-1}$. Ainsi en continuant avec des matrices toujours plus petites on trouve toutes les valeurs propres.

Il faut maintenant préciser comment évaluer les translations ρ . Supposons qu'on commence avec l'algorithme QR sans translation. Après quelques itérations a_{nn} sera une approximation de λ_n et on peut considérer cette valeur comme la translation ρ . Ensuite, après chaque itération on considère comme ρ la nouvelle valeur de a_{nn} . Il s'agit de l'algorithme QR translaté. Le choix de a_{nn} comme translation est appelé la translation de quotient de Rayleigh. En réalité, on utilise plus souvent la translation de Wilkinson qui est la valeur propre de la matrice 2×2

$$\begin{bmatrix} a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

qui est plus proche de $a_{n,n}$. Enfin, il est possible de multiplier $A - \rho I$ par les matrices de Givens sans calculer $A - \rho I$ explicitement et cela aide à éliminer quelques pertes de l'information par des annulations. L'algorithme s'appelle dans ce cas, QR implicite.

III.3 Procédure d'Arnoldi

Considérons de nouveau la méthode de puissance. À chaque pas on obtient q , Aq , A^2q , ..., A^kq , En continuant, l'algorithme met au rebut les vieilles valeurs et retient seulement la nouvelle valeur. En effet, dans cette séquence, qui est appelée sous-espace de Krylov, il y a beaucoup d'informations sur les valeurs propres. L'idée de la procédure d'Arnoldi est de chercher les valeurs propres dans ce sous-espace.

En pratique, ce sous-espace est mal conditionné parce que les vecteurs $A^j q$ tendent vers le vecteur propre dominant lorsque j augmente, donc il tendent à devenir parallèles. Pour corriger ce problème, on remplace ce sous-espace par un ensemble de vecteurs orthonormaux q_1, q_2, \dots, q_{k+1} qui appartient au même sous-espace. Cela peut être réalisé par l'orthogonalisation de Gram-Schmidt avec une légère modification.

Supposons qu'on ait déjà engendré les k vecteurs orthonormaux et qu'on veuille obtenir le q_{k+1} . En principe, on obtient q_{k+1} en orthogonalisant $A^k q$ par rapport aux q_1, q_2, \dots, q_k . En pratique, on ne possède pas les vecteurs tels que $A^{k-1} q$ pour le multiplier avec A , parce qu'on retient seulement les vecteurs orthonormaux. Alors on multiplie q_k par A et on orthogonalise ce vecteur par rapport aux q_1, q_2, \dots, q_k .

Donc, pour donner quelques détails, on part d'un vecteur quelconque q et on fait la normalisation $q_1 = q / \|q\|_2$. Au pas suivant, on prend

$$\tilde{q}_{k+1} = Aq_k - \sum_{j=1}^k q_j h_{jk} \quad (\text{III.6})$$

où h_{jk} est le coefficient de Gram-Schmidt

$$h_{jk} = \langle Aq_k, q_j \rangle.$$

Ici nous avons utilisé la notation pour le produit scalaire $\langle a, b \rangle = \sum a_i b_i$. Nous complétons le pas en normalisant

$$q_{k+1} = \tilde{q}_{k+1} / h_{k+1,k} \quad \text{avec} \quad h_{k+1,k} = \|\tilde{q}_{k+1}\|_2. \quad (\text{III.7})$$

Pour assurer l'orthogonalisation des vecteurs, en pratique on fait une réorthogonalisation. La procédure qu'on vient de décrire est donnée par l'algorithme 1.

On peut donner une représentation matricielle à la procédure d'Arnoldi. À partir des relations (III.6) et (III.7) on déduit que

$$Aq_k = \sum_{j=1}^{k+1} q_j h_{jk}. \quad (\text{III.8})$$

Data : matrice A , vecteur non nul q
Réult : vecteurs orthonormaux q_1, q_2, \dots, q_m tels que
 $sous\ espace\{q_1, \dots, q_k\} = sous\ espace\{q, Aq, \dots, A^{k-1}q\}$
pour $k = 1, \dots, m$

```

 $q_1 = q / \|q\|_2$ 
for  $k = 1, \dots, m-1$  do
   $q_{k+1} \leftarrow Aq_k$ 
  (orthogonalisation)
  for  $j = 1, \dots, k$  do
     $h_{jk} \leftarrow q_j^* q_{k+1}$ 
     $q_{k+1} \leftarrow q_{k+1} - q_j h_{jk}$ 
  end
  (réorthogonalisation)
  for  $j = 1, \dots, k$  do
     $\alpha \leftarrow q_j^* q_{k+1}$ 
     $q_{k+1} \leftarrow q_{k+1} - q_j \alpha$ 
     $h_{jk} \leftarrow h_{jk} + \alpha$ 
  end
   $h_{k+1,k} \leftarrow \|q_{k+1}\|_2$ 
  if  $h_{k+1,k} = 0$  then
    affiche : sous-espace $\{q_1, \dots, q_k\}$  est invariant sous  $A$ 
    quitter
  end
end

```

Algorithme 1 : Procédure d'Arnoldi

On peut combiner ces équations vectorielles dans une équation matricielle. Définissons

$$Q_m = [q_1 \ \dots \ q_m] \in \mathbf{C}^{n \times m}$$

et

$$H_{m+1,m} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1,m-1} & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2,m-1} & h_{2m} \\ 0 & h_{32} & \cdots & h_{3,m-1} & h_{3m} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & h_{m,m-1} & h_{mm} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{m+1,m} \end{bmatrix}.$$

La relation (III.8) s'écrit alors sous la forme

$$AQ_m = Q_{m+1}H_{m+1,m} \quad (\text{III.9})$$

où $H_{m+1,m}$ est de la forme Hessenberg. Puisque $H_{m+1,m}$ n'est pas une matrice carrée, on peut séparer la dernière colonne de Q_{m+1} et la dernière rangée de $H_{m+1,m}$ pour écrire $Q_{m+1}H_{m+1,m} = Q_mH_m + q_{m+1}[0, \dots, 0, h_{m+1,m}]$, où H_m n'est rien d'autre que $H_{m+1,m}$ sans la dernière rangée. Donc

$$AQ_m = Q_mH_m + q_{m+1}h_{m+1,m}e_m^T \quad (\text{III.10})$$

avec $e_m^T = [0, \dots, 0, 1]$ en \mathbf{R}^m .

III.4 Méthode d'Arnoldi avec redémarrage implicite

Supposons que nous soyons intéressés à calculer les m valeurs propres dominantes ($m \ll n$) qui sont $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_m|$. Soient v_1, \dots, v_m les vecteurs propres associés à ces valeurs propres. Considérons un vecteur q qui est une combinaison linéaire de ces vecteurs propres $q = c_1v_1 + \dots + c_kv_m$. Supposons qu'on commence la procédure d'Arnoldi avec ce vecteur. Puisque les multiplications par A donnent toujours des vecteurs qui sont des combinaisons linéaires des m vecteurs propres, au m -ième pas de la procédure d'Arnoldi on obtient $h_{m+1,m} = 0$, parce que le vecteur $A^m q$ dépend linéairement de $q, Aq, \dots, A^{m-1}q$. Le sous-espace formé par ces vecteurs est dit invariant sous A dans ce cas.

La relation (III.10) devient dans ce cas : $AQ_m = Q_mH_m$. Il est facile de démontrer dans ce cas que, si \tilde{v} est un vecteur propre de H_m avec une valeur propre λ , alors $Q_m\tilde{v}$ est un vecteur propre de A avec la même valeur propre λ . Les valeurs propres de H_m sont donc les valeurs propres recherchées de A . Cela nous donne une idée de ce qu'il faut faire pour calculer les valeurs propres dominantes avec la procédure d'Arnoldi. Le vecteur de départ q doit être dans le sous-espace des vecteurs propres recherchés. Si le vecteur de départ est choisi au hasard, il n'appartient pas à ce sous-espace. Mais après quelques pas de la procédure d'Arnoldi nous avons de l'information nouvelle qu'on peut utiliser pour construire un meilleur vecteur de départ.

Supposons que le vecteur initial q s'écrive sous la forme

$$q = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$$

où v_i sont les vecteurs propres de A et les constantes c_i sont inconnues. On veut calculer les k valeurs propres dominantes $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_k|$. Notre tâche est maintenant de trouver un nouveau vecteur

$$\hat{q} = \hat{c}_1 v_1 + \hat{c}_2 v_2 + \cdots + \hat{c}_n v_n$$

où les constantes c_1, \dots, c_k sont augmentées en module et les constantes c_{k+1}, \dots, c_n sont diminuées. Supposons maintenant qu'on prend $\hat{q} = p(A)q$, où p est un polynôme. Si nous parvenons à choisir le polynôme p tel que les $p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_k)$ soient grands par rapport aux $p(\lambda_{k+1}), \dots, p(\lambda_n)$ on fait du progrès. C'est ce que la méthode d'Arnoldi avec redémarrage implicite fait.

On part d'un vecteur initial q quelconque et on veut calculer les k valeurs propres dominantes de la matrice A . Au début on applique la procédure d'Arnoldi avec $m = k + j$. En pratique, on choisit souvent $j = k$. On engendre donc Q_m et H_m telles que (III.10) se vérifie. Puisque m est petit, on peut facilement calculer les m valeurs propres de H_m . Notons les μ_1, \dots, μ_m et rangeons-les d'une telle façon que $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \cdots \geq |\mu_k|$. Les plus grandes valeurs μ_1, \dots, μ_k sont les estimations de valeurs propres recherchées, et les autres appartiennent à la partie non voulue du spectre.

La méthode d'Arnoldi procède en effectuant j pas de l'algorithme QR translaté sur H_m en choisissant comme translations $t_1 = \mu_{k+1}, t_2 = \mu_{k+2}, \dots, t_j = \mu_m$

$$\begin{aligned} H_m - t_1 I &= Q_1 R_1 & H_m^{(1)} &= R_1 Q_1 + t_1 I \\ H_m^{(1)} - t_2 I &= Q_2 R_2 & H_m^{(2)} &= R_2 Q_2 + t_2 I \\ &\vdots & & \end{aligned} \tag{III.11}$$

Il est facile de démontrer que

$$\begin{aligned}
 H_m^{(1)} &= Q_1^* H_m Q_1 \\
 H_m^{(2)} &= Q_2^* Q_1^* H_m Q_1 Q_2 \\
 &\vdots \\
 H_m^{(j)} &= Q_j^* \cdots Q_1^* H_m Q_1 \cdots Q_j.
 \end{aligned} \tag{III.12}$$

Avant de continuer avec la méthode d'Arnoldi nous allons dériver quelques relations qui vont nous aider à comprendre pourquoi la méthode fonctionne. Puisque $H_m^{(1)} = Q_1^* H_m Q_1$ on peut écrire $(H_m - t_2 I) Q_1 = Q_1 (H_m^{(1)} - t_2 I)$. Donc

$$(H_m - t_2 I)(H_m - t_1 I) = (H_m - t_2 I)Q_1 R_1 = Q_1 (H_m^{(1)} - t_2 I)R_1 = Q_1 Q_2 R_2 R_1.$$

En continuant de cette façon on obtient

$$(H_m - t_j I) \cdots (H_m - t_1 I) = Q_1 \cdots Q_j R_j \cdots R_1.$$

Définissons $\tilde{Q}_m = Q_1 Q_2 \cdots Q_j$ et $\tilde{R}_m = R_j R_{j-1} \cdots R_1$. La relation ci-dessus devient

$$p(H_m) = \tilde{Q}_m \tilde{R}_m \tag{III.13}$$

avec p le polynôme $p(z) = (z - t_j)(z - t_{j-1}) \cdots (z - t_1)$.

Considérons de nouveau la configuration matricielle obtenue après m pas de la procédure d'Arnoldi (III.10)

$$AQ_m = Q_m H_m + q_{m+1} h_{m+1,m} e_m^T.$$

Cette relation tient, même après l'insertion d'une translation

$$(A - t_1 I)Q_m = Q_m (H_m - t_1 I) + E_1 \tag{III.14}$$

avec la matrice $E_1 = q_{m+1} h_{m+1,m} e_m^T$ identiquement nulle sauf la dernière colonne. Cela est juste une manipulation mathématique. On peut obtenir une relation sem-

blable en remplaçant t_1 par t_2 . En multipliant (III.14) par $(A - t_2I)$, on obtient

$$(A - t_2I)(A - t_1I)Q_m = Q_m(H_m - t_2I)(H_m - t_1I) + E_2 \quad (\text{III.15})$$

avec la matrice $E_2 = (A - t_2I)E_1 + E_1(H_m - t_2I)$ identiquement nulle sauf les deux dernières colonnes, à cause du terme $E_1(H_m - t_2I)$ où $H_m - t_2I$ est une matrice de la forme Hessenberg. En continuant de cette façon, on obtient

$$p(A)Q_m = Q_m p(H_m) + E_j \quad (\text{III.16})$$

où p est toujours le polynôme $p(z) = (z - t_j)(z - t_{j-1}) \cdots (z - t_1)$ et la matrice E_j est identiquement nulle sauf les j dernières colonnes.

Revenons à la méthode d'Arnoldi. Après les décompositions (III.12) on construit la matrice

$$K_m = Q_m \tilde{Q}_m \quad (\text{III.17})$$

et pour le prochain pas, nous prenons comme vecteur de départ la première colonne de K_m , noté k_1 . Vérifions que ce vecteur a les propriétés voulues.

On peut transformer (III.17) de cette façon :

$$K_m = Q_m \tilde{Q}_m \Rightarrow K_m \tilde{R}_m = Q_m \tilde{Q}_m \tilde{R}_m = Q_m p(H_m) = p(A)Q_m - E_j. \quad (\text{III.18})$$

Puisque nous sommes intéressés de la première colonne, multiplions (III.18) par

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \text{ On obtient}$$

$$K_m \tilde{R}_m e_1 = (p(A)Q_m - E_j) e_1 \Rightarrow K_m r_{11} e_1 = p(A)Q_m e_1 \Rightarrow r_{11} k_1 = p(A)q_1 \quad (\text{III.19})$$

avec r_{11} le premier élément de la matrice triangulaire \tilde{R}_m et q_1 la première colonne de Q_m . Donc

$$k_1 = \frac{1}{r_{11}} p(A)q_1. \quad (\text{III.20})$$

Le polynôme p prend des valeurs petites près des t_1, \dots, t_j et des valeurs élevées

ailleurs. C'est ce qu'on voulait obtenir.

Normalement, le prochain pas de la méthode d'Arnoldi doit commencer par le vecteur k_1 et effectuer m pas de la procédure d'Arnoldi. Mais, on n'a pas besoin de commencer dès le début. On peut démontrer que les k premières colonnes de K_m sont exactement les vecteurs que la procédure d'Arnoldi allait engendrer à partir de k_1 . Donc, au prochain pas, on commence la procédure d'Arnoldi à partir du $k + 1$ -ième vecteur. D'où le nom redémarrage implicite. Toute cette procédure est donnée par l'algorithme 2.

```

Data : matrice  $A$ , vecteur non nul  $q$ 
Result : vecteurs orthonormaux  $q_1, q_2, \dots, q_m$  tels que
           sous espace $\{q_1, \dots, q_k\}$  est invariant,
           s'il n'est pas, l'algorithme affiche une erreur
 $q_1 = q / \|q\|_2$ 
on prend  $k$  pas de la procédure d'Arnoldi (Algorithme 1) pour obtenir  $Q_k$  et  $H_k$ 
for  $i = 1, 2, \dots, imax$  do
  on prend  $j$  autres pas de la procédure d'Arnoldi
  (Algorithme 1) pour obtenir  $Q_m$  et  $H_m$ ,  $m = k + j$ 
  if  $h_{k+1} < tol$  then
    affiche :  $(Q_k)$  est invariante sous  $A$ 
    quitter
  end
  trouver les  $j$  translations  $t_1, \dots, t_j$ 
  (qui sont les valeurs propres  $\mu_{k+1}, \dots, \mu_m$ )
  prendre  $j$  pas de l'algorithme QR avec les translations  $t_1, \dots, t_j$ 
  pour obtenir la matrice de transformation  $\tilde{Q}_m$ 
   $H_m^{(j)} \leftarrow \tilde{Q}_m^{-1} H_m \tilde{Q}_m$ 
   $K_m \leftarrow Q_m \tilde{Q}_m$ 
   $Q_k \leftarrow K_m(:, 1:k)$ 
   $H_k \leftarrow H_m^{(j)}(1:k, 1:k)$ 
end
affiche une erreur si la convergence n'est pas obtenue
après  $imax$  itérations

```

Algorithme 2 : Procédure d'Arnoldi avec redémarrage implicite

Dans cet algorithme, nous avons présenté la procédure de base en omettant des détails qui ne sont pas importants à la compréhension de la méthode. Une fois que l'algorithme converge, c'est-à-dire que $h_{k+1} < tol$, où tol est la tolérance choisie par

nous, les valeurs propres recherchées sont les k premières valeurs propres de H_m .

Dans cette forme, l'algorithme calcule les k valeurs propres dominantes de la matrice creuse A . Comme nous l'avons déjà dit, nous sommes plutôt intéressés à calculer les k valeurs propres réelles les plus proche de $(k_0 n_c)^2$. Alors, on applique la méthode d'Arnoldi à la matrice $[A - (k_0 n_c)^2]^{-1}$. Bien sûr, on ne calcule pas l'inverse explicitement, parce que l'inverse d'une matrice creuse n'est pas une autre matrice creuse et on ne peut pas la sauver dans la mémoire à cause de la grande taille. On calcule plutôt une décomposition LU creuse. Cela est fait seulement une fois, au début. Ensuite, on utilise cette décomposition LU chaque fois qu'on veut des multiplications du type $[A - (k_0 n_c)^2]^{-1} q$. C'est cette décomposition qui limite la taille des matrices qu'on peut traiter en pratique.