

**Titre:** Développement d'un système mécatronique d'accordage de clavecin  
Title: clavecin

**Auteur:** Pierre-Yves Mailhot  
Author:

**Date:** 2005

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Mailhot, P.-Y. (2005). Développement d'un système mécatronique d'accordage de clavecin [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
Citation: <https://publications.polymtl.ca/7533/>

## Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/7533/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** El-Kébir Boukas, & Luc Robillard  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

DÉVELOPPEMENT D'UN SYSTÈME MÉCATRONIQUE D'ACCORDAGE  
DE CLAVECIN

présenté par: MAILHOT Pierre-Yves

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées  
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. BARON Luc, Ph.D., président

M. BOUKAS El-Kébir, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. ROBILLARD Luc, D.Sc., membre et codirecteur de recherche

M. O'SHEA Jules, D.Eng., membre



Library and  
Archives Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*  
ISBN: 978-0-494-16811-0

*Our file* *Notre référence*  
ISBN: 978-0-494-16811-0

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

\*\*  
**Canada**

La musique : une harmonie agréable célébrant Dieu et les plaisirs permis de l'âme.

Johann Sebastien Bach

## REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier mon directeur de recherche, le professeur El-Kébir Boukas, pour m'avoir offert l'occasion de faire une maîtrise à l'École Polytechnique. Son support, ses conseils et ses encouragements m'ont été bénéfiques. Je tiens grandement aussi à remercier mon codirecteur, le professeur Luc Robillard. Il est à l'origine de ce projet de recherche qui m'a permis de découvrir toute la richesse musicale du clavecin. Son support financier, son enthousiasme et son dévouement m'auront permis de mener à bien ce projet.

Je voudrais aussi souligner l'apport de plusieurs personnes travaillant dans le domaine de l'acoustique musicale, en particulier Caroline Traube, professeure à la faculté de musique de l'Université de Montréal, Pierre-Yves Asselin, accordeur professionnel en charge des clavecins de la faculté de musique de l'Université de Montréal et Charles Besnainou, chercheur au laboratoire d'acoustique musicale (LAM) de Paris.

J'aimerais également remercier Sylvain Simard, technicien du département de Génie Mécanique, pour son aide précieuse avec les circuits électroniques des montages. Ces remerciements ne seraient complets sans mentionner mes amis à la maîtrise du département de Génie Électrique, en particulier Sylvain Marleau, sur qui j'ai pu compter pour m'aider à résoudre les difficultés rencontrées en cours de route et passer des moments inoubliables en ces années de maîtrise.

Finalement, je remercie profondément tous ceux qui, par leur soutien et leur affection, ont rendu mes années d'études des plus agréables.

## RÉSUMÉ

L'accordage d'un instrument est une étape essentielle pour obtenir un son harmonieux et le projet actuel vise à développer un clavecin dont l'accordage soit entièrement automatisé. Deux modes d'accordage automatisé sont envisagés. Le premier mode vise un accordage préalable permettant de passer d'un tempérament à un autre et le deuxième mode vise l'accordage en temps réel pour minimiser la dissonance des cordes en vibration. Dans ce mémoire de maîtrise, l'objectif est de tester la faisabilité du projet en développant un système mécatronique pouvant accorder une corde en un laps de temps très court.

Pour atteindre cet objectif, un montage a été conçu et réalisé en utilisant des composants électromécaniques. Pour détecter le mouvement de la corde, on aimante une petite partie de celle-ci. Son déplacement est alors détecté à l'aide d'un capteur de champ magnétique. La fréquence de la corde étant fonction de sa tension, l'accordage se fait par le contrôle d'un moteur pas-à-pas lui-même relié à une cheville autour de laquelle est enroulée une extrémité de la corde. Le traitement informatique est réalisé à l'aide d'un microcontrôleur. La boucle de contrôle débute par l'excitation de la corde et l'estimation de sa fréquence fondamentale. Cette estimation est faite au moyen de divers algorithmes dont celui de Quinn et Fernandes. En comparant la fréquence estimée avec la fréquence de référence, le programme calcule le changement de tension à appliquer à la corde et actionne le moteur en conséquence. Le programme recommence en boucle jusqu'à ce que la fréquence estimée ait une erreur inférieure à deux cents en comparaison de la fréquence de référence.

Les résultats obtenus sont prometteurs. Le système développé a permis d'accorder une corde en moins de quelques dixièmes de secondes avec une précision supérieure à deux cents. L'accordage préalable est donc un objectif très réaliste. Cependant, il subsiste des difficultés pour l'accordage en temps réel.

## ABSTRACT

The tuning of a musical instrument is essential to get a harmonious sound and the actual project aims to develop a harpsichord whose tuning is automated. Two types of tuning are considered. The first one aims a non real-time tuning that would allow the harpsichord to switch from a set of pitch to another one. The second one aims for a real-time tuning in order to minimize the disharmony during the play. In this report, done for a master degree, the objective is to test the feasibility of the project by developing a mechatronic system that may tune a string in a very short time.

To achieve this goal, a set-up was built by using electromechanics components. To detect the movement of the steel string, we magnetized a small part of it. Its displacement causes a magnetic field that is detected by an magnetic field sensor. Since the frequency of the string is function of his tension, the tuning is achieved by controlling a stepper motor linked to a pin around which an extremity of the string is attached to. The program controlling the system is run on a microcontroller. The control loop begins by the vibration of the string and the estimation of the fundamental frequency. This estimation is done through different algorithms like the one developed by Quinn and Fernandes. By comparing the estimated frequency to the reference, the program computes the necessary change in the tension of the string and activates the motor accordingly. The program then goes back to the beginning for another loop until the frequency difference between the estimation and the reference is within a margin of two cents.

The results we got are promising. The system we developed was able to tune a string in less than a few tenth seconds with a precision better than a two cents margin. So, non real-time tuning appears to be a very realistic objective while there is still some difficulties remaining for the real-time tuning.

**TABLE DES MATIÈRES**

DÉDICACE . . . . .	iv
REMERCIEMENTS . . . . .	v
RÉSUMÉ . . . . .	vi
ABSTRACT . . . . .	vii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	viii
LISTE DES FIGURES . . . . .	xi
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES . . . . .	xv
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xix
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xx
INTRODUCTION . . . . .	1
0.1 État de l'art . . . . .	2
0.2 Objectifs à court et à long terme . . . . .	4
0.3 Contraintes à satisfaire . . . . .	5
0.4 Objectifs de ce mémoire et méthodologie . . . . .	6
CHAPITRE 1 LE CLAVECIN ET LA VIBRATION DE SES CORDES . . . . .	8
1.1 Description d'un clavecin . . . . .	8
1.2 Accordage d'un clavecin . . . . .	11
1.3 Mécanique de la corde vibrante . . . . .	14
1.4 Relation entre fréquence et élongation . . . . .	25

CHAPITRE 2 LE MONTAGE EXPÉRIMENTAL ET SES CONSTITUANTS	29
2.1 Montage préliminaire	29
2.2 Montage final	31
2.2.1 Support des cordes	33
2.2.2 Excitateur	34
2.2.3 Capteur	35
2.2.3.1 Perception du son par un auditeur	44
2.2.4 Actionneurs	46
2.2.4.1 Relation entre la fréquence et le nombre de pas du moteur pas-à-pas	48
2.2.4.2 Couple du moteur pas-à-pas et auto-blocage	50
2.2.4.3 Autres mécanismes	55
2.2.5 Équipements électroniques et informatiques	56
CHAPITRE 3 LA BOUCLE DE CONTRÔLE	59
3.1 Algorithmes de la boucle de contrôle	59
3.1.1 Algorithme général	59
3.1.2 Algorithme simplifié	61
3.2 Estimateurs servant à la détection de la fréquence	61
3.2.1 Estimateur direct (ED)	64
3.2.2 Transformée de Fourier Rapide (FFT)	65
3.2.3 Algorithme de Quinn et Fernandes (QF)	66
3.2.4 Numérisation et validation	72
CHAPITRE 4 LES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX	75
4.1 Mesure du signal détecté	75
4.1.1 Amplitude en fonction du temps	75
4.1.1.1 Corde d'acier	75
4.1.1.2 Corde de laiton	80

4.1.2	Précision avec l'estimateur direct (ED) . . . . .	81
4.1.3	Précision avec l'algorithme de Quinn et Fernandes (QF) . .	84
4.2	Ajustement automatisé de la fréquence . . . . .	87
4.2.1	Nombre d'exécutions de la boucle de contrôle . . . . .	87
4.2.2	Temps d'ajustement . . . . .	99
	CONCLUSION . . . . .	101
	RÉFÉRENCES . . . . .	105
	ANNEXES . . . . .	109

## LISTE DES FIGURES

FIG. 1.1	Clavecin de la Faculté de Musique de l'Université de Montréal	9
FIG. 1.2	Vue rapprochée d'un sautereau	9
FIG. 1.3	Dessin schématique des dimensions d'un clavecin	12
FIG. 1.4	Segment d'une corde	15
FIG. 1.5	Réflexion d'une onde à une extrémité fixe	17
FIG. 1.6	Analyse spectrale d'une corde pincée en son milieu	20
FIG. 1.7	Évolution temporelle de la forme d'une corde pincée à $x = L/2$ au cours d'un demi-cycle	21
FIG. 1.8	Spectre d'amplitude d'une corde pincée à $L/5$	22
FIG. 1.9	Évolution de la forme temporelle d'une corde pincée à $x = L/5$	23
FIG. 1.10	Solution de l'équation 1.38	26
FIG. 1.11	Schéma d'une corde de clavecin et ses appuis	28
FIG. 2.1	Excitateur avec moteur pas-à-pas	30
FIG. 2.2	Moteur pas-à-pas avec engrenages et bloc coulissant	31
FIG. 2.3	Image de l'interface sur le logiciel <i>Labview</i>	32
FIG. 2.4	Schéma du montage final	32
FIG. 2.5	Amplitude relative selon la fréquence	36
FIG. 2.6	Interaction entre la corde et le capteur de champ pour une corde d'acier	39
FIG. 2.7	Interaction entre la corde et le capteur de champ pour une corde de laiton	40
FIG. 2.8	Déplacement vertical théorique de la corde avec deux harmoniques	41
FIG. 2.9	Déplacement vertical théorique de la corde avec dix harmoniques	41

FIG. 2.10	Déplacement vertical théorique de la corde avec quarante harmoniques . . . . .	42
FIG. 2.11	Vitesse théorique de la corde avec 2 harmoniques . . . . .	42
FIG. 2.12	Évolution du signal dans le temps . . . . .	43
FIG. 2.13	Schéma définissant les distances entre la corde et le capteur	45
FIG. 2.14	Effet de la non linéarité sur un mouvement sinusoïdal . . . . .	46
FIG. 2.15	Effet de la non linéarité sur un mouvement de la corde avec 40 harmoniques . . . . .	47
FIG. 2.16	Moteur avec vis de transmission . . . . .	50
FIG. 2.17	Rapport de diamètre pour une roue dentée . . . . .	51
FIG. 2.18	Écrou et vis de transmission . . . . .	51
FIG. 2.19	Forces en action dans les filets . . . . .	52
FIG. 2.20	Utilisation d'un levier pour ajuster la tension . . . . .	56
FIG. 3.1	Schéma global du système . . . . .	60
FIG. 3.2	Boucle de contrôle pour un ensemble de cordes . . . . .	62
FIG. 3.3	Boucle de contrôle simplifiée . . . . .	63
FIG. 3.4	Détermination de la période d'un cycle par l'estimateur direct	65
FIG. 3.5	Variation de l'erreur de la FFT et de QF . . . . .	68
FIG. 3.6	Variation de l'erreur de QF selon $N_e$ . . . . .	69
FIG. 3.7	Variation de l'erreur de QF selon $f_e$ . . . . .	70
FIG. 3.8	Variation de l'erreur de l'estimateur QF avec un estimé précis	71
FIG. 3.9	Variation de l'erreur de l'estimateur QF avec trois itérations	72
FIG. 4.1	Signal d'une corde vibrant à 250 Hz échantillonné à $l_e=15,6$ cm . . . . .	76
FIG. 4.2	Quelques cycles du signal . . . . .	77
FIG. 4.3	Spectre d'amplitude . . . . .	78
FIG. 4.4	Signal d'une corde vibrant à 250 Hz mesuré au centre à $L_c = 35$ cm . . . . .	79

FIG. 4.5	Signal d'une corde à 250 Hz mesuré près de l'excitateur avec une deuxième corde en vibration . . . . .	80
FIG. 4.6	Signal pour une corde en laiton avec un courant de 0,6 A . .	81
FIG. 4.7	Signal pour une corde en laiton avec un courant de 1 A . . .	82
FIG. 4.8	Quelques cycles du signal pour une corde en laiton avec $I = 1$ A	82
FIG. 4.9	Évolution de l'accordage avec $f_s \text{ initiale} \approx 253$ Hz . . . . .	88
FIG. 4.10	Évolution de l'accordage avec $f_s \text{ initiale} \approx 248$ Hz . . . . .	89
FIG. 4.11	Évolution de l'accordage avec $f_s \text{ initiale} \approx 240$ Hz . . . . .	90
FIG. 4.12	Évolution de l'accordage avec $f_s \text{ initiale} \approx 210$ Hz . . . . .	92
FIG. 4.13	Évolution de l'accordage corrigé avec $f_s \text{ initiale} \approx 240$ Hz . .	94
FIG. 4.14	Évolution de l'erreur lors de l'accordage corrigé avec $f_s \text{ initiale} \approx 240$ Hz . . . . .	95
FIG. 4.15	Évolution de l'accordage corrigé avec $f_s \text{ initiale} \approx 210$ Hz . .	96
FIG. 4.16	Évolution de l'erreur lors de l'accordage corrigé avec $f_s \text{ initiale} \approx 210$ Hz . . . . .	97
FIG. I.1	Courbe expérimentale de dissonance $f_1 = 400$ Hz . . . . .	111
FIG. I.2	Courbes expérimentales de dissonance correspondant à différentes valeurs de $f_1$ . . . . .	112
FIG. I.3	Dissonance globale de deux sons complexes $f_1$ et $f_2$ . La fréquence fondamentale de $f_1$ est 261,63 Hz . . . . .	113
FIG. I.4	Courbe expérimentale de dissonance ( $f_1 = 400$ Hz) . . . . .	114
FIG. I.5	Courbes expérimentales de dissonance correspondant à différentes valeurs de $f_1$ . . . . .	115
FIG. I.6	Dissonance globale de deux sons complexes harmoniques $f_1$ et $f_2$ . La fréquence fondamentale de $f_1$ est 261,63 Hz. . . . .	115
FIG. I.7	Dissonance des accords parfaits majeur et mineur (résultats basés sur les courbes de la figure I.2. . . . .	121

FIG. I.8	Dissonance des accords parfaits majeur et mineur (résultats basés sur les courbes de la figure I.5. . . . .	122
FIG. IV.1	Échange d'informations dans un système complet . . . . .	134
FIG. IV.2	Vue en plan de l'installation des moteurs . . . . .	136
FIG. IV.3	Vue de côté de l'installation des moteurs . . . . .	137
FIG. VI.1	Schéma électronique du montage . . . . .	148

## LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

$a$ :	Distance entre la corde et le capteur, m
$A$ :	Aire de la corde, $m^2$
$B$ :	Intensité du champ magnétique, $G$
$c$ :	Vitesse du son dans l'air, m/s
$C$ :	Rapport de hauteur des sons en cents, ¢
$d$ :	Diamètre de la cheville, m
$d_p$ :	Diamètre de la vis sans fin, m
$D$ :	Diamètre de la roue dentée, m
$E$ :	Énergie, J
$E_Y$ :	Module de Young, $N/m^2$
$f$ :	Fréquence, Hz
$f_c$ :	Fréquence critique, Hz
$f_e$ :	Fréquence d'échantillonnage, Hz
$f_{ED}$ :	Fréquence mesurée par l'estimateur ED, Hz
$\bar{f}_{ED}$ :	Fréquence moyenne mesurée par l'estimateur ED, Hz
$f_m$ :	Fréquence mesurée, Hz
$f_{mm}$ :	Fréquence mesurée par le multimètre, Hz
$\bar{f}_{mm}$ :	Fréquence moyenne mesurée par le multimètre, Hz
$f_{QF}$ :	Fréquence mesurée par l'estimateur QF, Hz
$\bar{f}_{QF}$ :	Fréquence moyenne mesurée par l'estimateur QF, Hz
$f_r$ :	Fréquence de référence, Hz
$f_s$ :	Fréquence du signal, Hz
$F$ :	Force, N
$h$ :	Déplacement vertical de la corde causé par le plectre (déplacement maximal), m

$H$ :	Amplitude d'une fréquence, m
$h_c$ :	Distance entre le capteur et la corde dans sa position de repos, m
$I$ :	Intensité du courant électrique, A
$k$ :	Nombre d'onde
$k_c$ :	Coefficient de transfert de chaleur
$K$ :	Nombre de mesures effectuées
$l$ :	Élongation totale de la corde, m
$l_p$ :	Élongation pour un pas du moteur, m
$l_t$ :	Élongation pour un tour de vis, m
$l_v$ :	Pas de la vis, m
$L$ :	Longueur vibrante de la corde, m
$L_e$ :	Distance entre l'excitateur et le sillet, m
$L_c$ :	Distance entre le capteur et le sillet, m
$L_t$ :	Longueur totale de la corde, m
$L_1$ :	Distance entre la pointe d'accroche et le sillet, m
$L_2$ :	Distance entre la cheville tournante et le chevalet, m
$m$ :	Masse, kg
$M$ :	Masse totale de la corde, kg
$N$ :	Nombre de dents de la roue dentée
$Nu_d$ :	Nombre de Nusselt
$N_e$ :	Nombre de points échantillonnés
$P$ :	Nombre de pas du moteur
$Pr$ :	Nombre de Prandtl
$q_w$ :	Flux de chaleur par surface unitaire,
$r_c$ :	Rayon de la cheville, m
$r_p$ :	Rayon de la vis sans fin, m

$R$ :	Résistance électrique, $\Omega$
$Ra_d$ :	Nombre de Rayleigh
$t$ :	Temps, s
$T$ :	Tension, N
$T_e$ :	Fenêtre (durée) d'échantillonnage ( $N_e/f_e$ ), s
$T_s$ :	Couple d'une vis pour soulever une masse, Nm
$T_D$ :	Couple d'une vis pour descendre une masse, Nm
$v$ :	Vitesse, m/s
$W$ :	Poids, N

### Lettres grecques

$\alpha$ :	Angle, $^{\circ}$
$\alpha_l$ :	Coefficient d'expansion linéaire, $^{\circ}C^{-1}$
$\alpha_s$ :	Rapport de fréquence fondamentale de deux sons
$\Delta$ :	Intervalle de temps entre deux échantillons, s
$\Delta_{ED}$ :	Écart entre les moyennes de fréquence du multimètre et de l'estimateur ED, Hz
$\Delta_{QF}$ :	Écart entre les moyennes de fréquence du multimètre et de l'estimateur QF, Hz
$\varepsilon$ :	Élongation unitaire
$\phi$ :	Angle de phase, $^{\circ}$
$\lambda$ :	Longueur d'onde, m
$\mu$ :	Masse linéique, kg/m
$\mu_0$ :	Perméabilité de l'air,
$\mu_t$ :	Coefficient de friction

$\theta$ :	Angle, °
$\rho$ :	Masse volumique, $kg/m^3$
$\sigma$ :	Contrainte, $N/m^2$
$\sigma_{mm}$ :	Écart-type du multimètre, Hz
$\sigma_{ED}$ :	Écart-type de l'estimateur direct, Hz
$\sigma_{QF}$ :	Écart-type de l'algorithme de Quinn et Fernandes, Hz
$\omega$ :	Fréquence angulaire, rad/s
$\Psi$ :	Rapport de fréquence ( $2\pi f_m/f_e$ )

## LISTE DES TABLEAUX

TAB. 1.1	Dimensions de base du clavecin de la FMUM . . . . .	11
TAB. 1.2	Mésotonique classique 1/4 comparé au tempérament égal (Source : Asselin, 1985) . . . . .	14
TAB. 2.1	Amplitude adimensionnelle des harmoniques générés par l'excitateur . . . . .	35
TAB. 2.2	Propriétés mécaniques de la corde . . . . .	49
TAB. 3.1	Comparaison de fréquences mesurées . . . . .	73
TAB. 4.1	Résultats des mesures pour l'estimateur ED . . . . .	84
TAB. 4.2	Résultats des mesures pour l'estimateur ED . . . . .	85
TAB. 4.3	Fenêtre d'échantillonnage des différents tests . . . . .	86
TAB. I.1	Gamme majeure ; l'indice 1 des notes de la gamme de <i>do</i> majeur a été choisi délibérément. Il augmente de l'unité en passant à l'octave supérieure. . . . .	116
TAB. I.2	Gamme mineure ; l'indice 1 des notes de la gamme de <i>do</i> majeur a été choisi délibérément. Il augmente de l'unité en passant à l'octave supérieure. . . . .	117
TAB. I.3	Renormalisation et changements requis pour une tonalité de sol majeur. . . . .	119
TAB. I.4	Le tempérament égal . . . . .	120

**LISTE DES ANNEXES**

ANNEXE I	CONSONANCE ET TEMPÉRAMENTS . . . . .	109
I.1	Le son . . . . .	109
I.2	Consonance . . . . .	110
I.3	Répartition des hauteurs de son en musique . . . . .	114
ANNEXE II	CHANGEMENT DE FRÉQUENCE DÙ AU COURANT ÉLECTRIQUE . . . . .	123
ANNEXE III	TRANSFORMÉE DE FOURIER . . . . .	127
ANNEXE IV	PROBLÉMATIQUE MULTICORDES ET DESIGN COMPLET POUR CLAVECIN . . . . .	133
IV.1	Design pour contrôle de plusieurs cordes . . . . .	133
IV.2	Installation dans un vrai clavecin . . . . .	134
ANNEXE V	SIMULATIONS SOUS MATLAB . . . . .	138
ANNEXE VI	SCHÉMA ÉLECTRONIQUE . . . . .	147

## INTRODUCTION

La musique a toujours occupé une place prépondérante dans l'ensemble des civilisations. Les instruments rudimentaires ont graduellement fait place à des instruments très soignés, certains devenant de véritables œuvres d'art. Les premiers clavecins firent leur apparition à la fin du Moyen-Âge. Cet instrument s'est développé au fil des siècles et a connu son apogée au XVIII<sup>e</sup> siècle avec la musique de chambre.

L'accordage des cordes d'un clavecin est une opération essentielle. En effet, le plaisir que l'on retire à écouter une œuvre peut grandement être affecté par la qualité de l'accordage. Malheureusement, sous l'action de divers facteurs tels que l'humidité et la température, les cordes d'un clavecin se désaccordent rapidement. De plus, le clavecin peut être accordé de plusieurs manières et il s'agit d'une opération délicate. La plupart des clavecinistes doivent donc faire appel régulièrement à un accordeur professionnel. Par exemple, les clavecins de la Faculté de Musique de l'Université de Montréal sont accordés deux fois par semaine. En éliminant le recours à une tierce personne, l'automatisation de l'accordage est d'un intérêt indéniable pour les clavecinistes. Par ailleurs, dans un clavecin, de par la nature de l'instrument, certains accords ne seront pas agréables à écouter même avec un accordage de grande qualité. La modification de la fréquence fondamentale d'une corde pendant que le claveciniste s'exécute permettrait de résoudre cette difficulté et de n'obtenir que des accords harmonieux. Ainsi, la musique du clavecin deviendrait encore plus agréable à écouter.

Afin de résoudre ces difficultés, un projet visant à développer un système d'accordage automatisé pour le clavecin fut initié. L'objectif à long terme du projet, qui comprend plusieurs phases, consiste en l'étude exhaustive et le développement d'un système mécatronique menant à un prototype de clavecin dont l'accordage

est entièrement automatisé. Cet accordage automatisé comporte deux objectifs différents. Premièrement, il y a l'accordage précédent l'exécution d'une oeuvre, que nous convenons d'appeler «accordage préalable», qui demande d'ajuster toutes les cordes à une fréquence correspondant à un tempérament donné. Par la suite, le deuxième objectif est l'accordage en temps réel qui, afin de minimiser la dissonance, vise l'ajustement en un laps de temps très court des cordes en vibration pendant la prestation du claveciniste.

## 0.1 État de l'art

Au meilleur de notre connaissance, il n'existe actuellement aucun clavecin dans le monde dont l'accordage soit entièrement automatisé, ce qui rend difficile le développement d'un tel instrument. Le clavecin étant un instrument moins utilisé que le piano, la littérature qui le concerne est relativement limitée, certainement moins abondante que pour le piano. Mentionnons toutefois que de façon générale, l'acoustique musicale est un domaine qui a pris de l'ampleur au cours des dernières années si on considère les nombreux articles qu'il suscite dans les journaux scientifiques consacrés à l'acoustique.

À la base de la musique d'un clavecin, ses cordes vibrent selon un modèle se rapprochant d'une corde vibrante à extrémités fixes. Les lois de la physique régissant une corde vibrante ont été régulièrement traitées dans la littérature, particulièrement par Valette (1993). Dans la même lignée, de nombreux ouvrages traitent des sons émis par une corde vibrante et de la physique des instruments musicaux (Rossing et al., 2004) (Benade, 1990) (Fletcher et al., 1999) (Hall, 2002). Par ailleurs, la perception humaine des intervalles dans les différents accords musicaux a déjà fait l'objet d'études (Hall et al., 1984) tout comme la consonance des sons musicaux (Sethares, 1993).

Dans le domaine de l'analyse fréquentielle, l'étude de l'identification simultanée de plusieurs notes et des fréquences présentes a déjà été réalisée, entre autres par Rossi (1998). L'évolution de la fréquence instantanée de plusieurs notes et leurs partiels sur un piano a également été étudiée (Rossi et al., 2001) tout comme l'impact des harmoniques pour déterminer la justesse des sons complexes fut traité par Moore (1985).

Au niveau de l'accordage manuel assisté, de nombreux produits électroniques existent qui détectent la fréquence d'une note à partir des ondes sonores. L'accordeur de piano doit cependant exciter la corde et procéder ensuite manuellement à l'ajustement de la tension par le biais d'une cheville. Diverses compagnies proposent ce genre d'appareils (Sabine, 2004) (Korg, 2004).

La détermination des fréquences contenues dans un signal électrique peut se faire par la transformée de Fourier. De nombreuses variantes existent pour de meilleures performances dans des cas particuliers (Johnson et al., 2004). Par ailleurs, il existe plusieurs techniques d'estimation de fréquences. Une revue de l'ensemble des techniques existantes a été effectuée par Gerhard (2003). Différents algorithmes ont été développés pour permettre de déterminer avec une grande précision les fréquences présentes dans un signal (Quinn et al., 2001), (Cheveigne, 2002).

Des recherches ont été effectuées sur le contrôle actif du son d'un instrument de musique. En effet, en modifiant les propriétés mécaniques des matériaux de fabrication d'un instrument, des essais pour contrôler en temps réel le son émis ont déjà été réalisés (Besnainou, 1999). Le développement technologique se rapprochant le plus de notre projet est celui de la compagnie *QRS Music Technologies* (2002), destiné à l'accordage automatisé d'un piano et basé sur un brevet déposé par Don A. Gilmore (2002). L'approche utilisée consiste à faire un accordage préalable, cet accordage étant maintenu pendant l'exécution d'une pièce. La fréquence des cordes

d'acier est détectée par des capteurs semblables à ceux d'une guitare électrique, c'est-à-dire des capteurs électro-magnétiques. La tension de la corde, volontairement trop grande initialement, est réduite par chauffage contrôlé pour atteindre la fréquence recherchée. Le chauffage est obtenu en faisant passer un courant électrique en permanence dans les cordes pendant l'usage du piano. Cette approche est en cours de développement et la compagnie prévoit en commercialiser un modèle dans les années à venir.

## 0.2 Objectifs à court et à long terme

Le clavecin requiert un accordage fréquent par comparaison à un piano. La structure servant à maintenir la tension des cordes est en bois et, de ce fait, sensible à l'humidité. De plus, les exigences en matière d'accordage sont variées, différents tempéraments (c'est-à-dire différentes distributions de fréquences fondamentales des cordes) peuvent être exigés du claveciniste, ces tempéraments exigeant des accordages particuliers. La raison d'être d'un tempérament particulier réside dans l'optimisation des consonances de certaines tonalités. Par comparaison, le piano est pratiquement toujours accordé selon un seul tempérament, le tempérament égal.

L'accordage automatisé a pour objectif premier de remplacer l'accordage manuel et de libérer ainsi l'artiste de ce préalable à l'exécution d'une oeuvre. Cependant, l'automatisation, si elle est suffisamment rapide, ouvre une perspective nouvelle. Elle permet d'envisager un accordage en temps réel, celui qui maximiseraient les consonances en cours de route, c'est-à-dire durant l'exécution d'une oeuvre. Il existe présentement des algorithmes de calculs et d'optimisation de la consonance qui s'exécutent très rapidement (Sethares, 1999). Ces algorithmes, couplés à un système d'accordage automatisé dont la réponse mécanique est suffisamment rapide, permettraient alors de transcender la notion même de tempérament. En effet, dans

un contexte d'optimisation des consonances par un accordage en temps réel, on élimine l'usage du tempérament puisque les fréquences fondamentales des cordes deviennent légèrement variables.

La vitesse de réponse d'un accordage en temps réel est en lien avec la vitesse d'appréciation du système auditif humain. En effet, la correction de la fréquence fondamentale d'une corde doit être faite avant que le cerveau de l'auditeur n'ait pu assimiler la note entendue. La justesse des accords soutenus par rapport aux passages rapides est particulièrement visée, par exemple lors de la résolution d'une cadence. L'accordage en temps réel interviendrait particulièrement à ces endroits et devrait être effectué sur un maximum d'une trentaine de cordes en un temps de l'ordre de 100 ms (millisecondes). L'annexe 1 «Consonance et tempéraments» expose les principes de la consonance.

Le présent rapport, rédigé dans le cadre d'un mémoire de maîtrise, concerne la première phase, soit développer un système mécatronique d'accordage pour une seule corde, valable autant pour l'accordage préalable que pour l'accordage en temps réel. Ce projet se veut donc une intégration de connaissances pour tester la faisabilité du concept de l'accordage automatisé pour l'ajustement préalable et l'ajustement en temps réel d'un clavecin. La réalisation de cette première étape a pour but d'obtenir les bases pour le développement futur d'un montage à plusieurs cordes pouvant permettre la réalisation des tests dans des conditions réelles, étape ultime avant de tenter le développement d'un prototype complet.

### 0.3 Contraintes à saisir

Les exigences auxquelles doit répondre un système d'accordage automatisé sont les suivantes :

### Précision

Le système doit être suffisamment précis pour obtenir une qualité au moins équivalente à celle d'un accordeur professionnel. Ce dernier obtient une précision de 2 à 3 cents (Hall et al., 1984), le cent étant défini par l'équation 1.2. Une erreur de  $\pm 2$  cents correspond à  $\pm 0,3$  Hz pour le  $do_4$  dont la fréquence fondamentale est définie à 261,63 Hz. L'accordeur professionnel base son appréciation sur les battements entre deux notes. Les battements obtenus pour une erreur de 2 cents sur le  $do_4$  sont très lents, ayant une périodicité de 3 secondes.

### Préservation de la sonorité

La sonorité du clavecin doit être préservée au maximum. Il va de soi qu'aucun élément ne doit entrer en contact avec les cordes. Malgré toutes les précautions, il faudra installer des mécanismes avec filage, par exemple sous la table d'harmonie. Or le volume d'air entre celle-ci et la surface du fond participe à la sonorité et s'en trouvera affecté. Des tests comparatifs devront donc être envisagés.

### Préservation de l'esthétique

L'apparence extérieure du clavecin devrait rester inchangée.

### Coût abordable

Le coût d'un clavecin est de l'ordre de 25 000 dollars CAN. Le coût additionnel devrait être de l'ordre de 6 000 dollars CAN.

## **0.4 Objectifs de ce mémoire et méthodologie**

Le présent travail, de nature essentiellement expérimentale, se concentre sur la première étape de l'accordage, la rétroaction sur une seule corde. Il ne comporte pas d'innovations théoriques mais consiste en une application de différentes disciplines dont la mécatronique et l'analyse fréquentielle. L'objectif principal est de dévelop-

per un système dédié à nos besoins à partir d'un microcontrôleur contenant les algorithmes requis pour la détection de la fréquence et le contrôle de la rétroaction. Ce système doit nous permettre de tester nos premières idées, de mettre en lumière les difficultés cachées et de jeter les bases pour la suite du projet. L'évaluation de la solution se fera selon la précision obtenue dans l'estimation de la fréquence fondamentale de la corde, de la précision avec laquelle l'actionneur utilisé corrige la fréquence de la corde ainsi que le temps complet que prend le processus d'accordage.

Dans le reste de ce mémoire, nous présentons d'abord les caractéristiques fondamentales du clavecin, son accordage ainsi que la mécanique de ses cordes. Par la suite, nous présentons les montages que nous avons nous-mêmes réalisés et les composants utilisés pour tester la faisabilité du projet. Ce montage fut bâti après un tour d'horizon des différents possibilités. La boucle de contrôle que nous avons développée est ensuite expliquée, accompagnée de simulations avec le logiciel *Matlab* (Mathworks, 2004). Elle fut conçue pour permettre l'identification de la fréquence fondamentale et le contrôle de l'actionneur relié à la corde. Finalement, nous présentons les résultats expérimentaux que nous avons obtenus en fonction de la précision de la fréquence fondamentale estimée d'une corde et de l'accordage effectué. Différents tests, faisant varier différents paramètres comme la fréquence d'échantillonnage et la position du capteur, ont été faits afin d'évaluer les algorithmes et les composants utilisés.

Note : Bien que le mot «accordage» n'apparaisse pas dans le dictionnaire, on emploie ce terme dans le présent mémoire par opposition au terme «accord», lequel sert à désigner le son produit par un ensemble de notes jouées simultanément. Pierre-Yves Asselin, dans son ouvrage sur les tempéraments (Asselin, 1985), utilise le terme «accord» pour désigner le travail manuel d'ajustement des fréquences d'un clavecin.

## CHAPITRE 1

### LE CLAVECIN ET LA VIBRATION DE SES CORDES

Ce chapitre comporte une description du clavecin et de son accordage. On présente ensuite les équations de base de la mécanique d'une corde pincée à extrémités fixes, ce qui est un cas très proche de celui qu'on retrouve dans un clavecin. On retrouve également à la fin du chapitre les équations reliant la fréquence d'une corde à son élongation.

#### 1.1 Description d'un clavecin

Le clavecin étant un instrument peu connu du grand public, il convient ici de présenter brièvement les principales caractéristiques de cet instrument. Un clavecin, vu de l'extérieur, ressemble à un piano tel qu'on peut le constater à la figure 1.1. La principale différence est que les cordes d'un clavecin sont pincées au lieu d'être frappées. Ainsi, lorsqu'un claveciniste appuie sur une touche, un plectre vient soulever la corde et la relâcher lorsque la tension dans la corde devient trop grande. Le plectre est une petite pointe flexible montée sur un sautereau, lui-même relié à la touche. La figure 1.2 montre le sautereau vu de près. Le plectre est cette petite pointe blanche qui vient pincer la corde. Le morceau de feutre à gauche du plectre, sur les deux sautereaux de gauche sur la photo, est l'étouffoir qui sert à arrêter la vibration de la corde lorsque le claveciniste relâche la touche. Les cordes de clavecin peuvent être obtenues de différents matériaux mais on retrouve principalement l'acier et le laiton, le laiton étant utilisé pour les fréquences les plus basses.

Chaque clavecin comporte deux à trois jeux, chaque jeu contenant 60 cordes. Un



FIG. 1.1 Clavecin de la Faculté de Musique de l'Université de Montréal

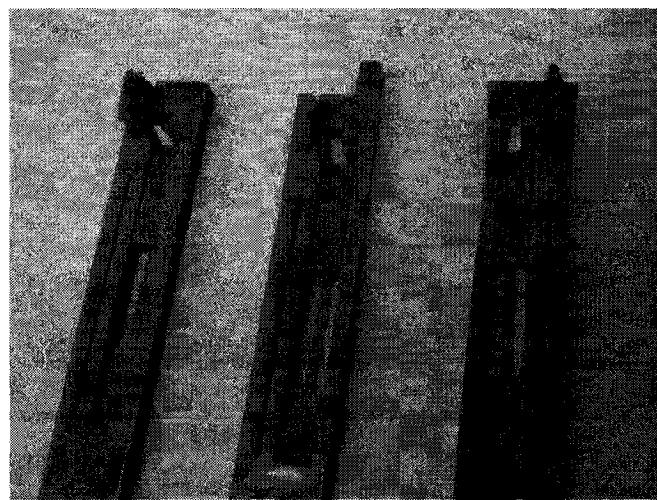


FIG. 1.2 Vue rapprochée d'un sautereau

clavecin peut donc comporter jusqu'à 180 cordes généralement réparties en deux jeux de huit pieds dont les cordes sont accordées par paire à la même fréquence mais actionnées par deux claviers différents, supérieur et inférieur. Le troisième jeu de quatre pieds se contrôle par le clavier inférieur et est accordé à une octave supérieure aux jeux de huit pieds, soit à une fréquence fondamentale deux fois plus élevée. Par un ingénieux mécanisme, le claveciniste peut avec une seule touche pincer les cordes des trois jeux. Cela explique donc la possibilité pour un claveciniste d'actionner simultanément jusqu'à 30 cordes. Un ensemble de corde défini comme un jeu de huit pieds signifie que la corde la plus longue produit un son d'une fréquence comparable à un tuyau d'orgue de huit pieds de long. Un tuyau d'orgue contient une demi-longueur d'onde  $\lambda$  et par conséquent,  $\lambda = 16$  pieds (4,876 m). Comme la vitesse du son dans l'air à 20°C est  $c = 343$  m/s, nous obtenons comme fréquence :

$$f = \frac{c}{\lambda} = 343/4,876 \approx 70 \text{ Hz} \quad (1.1)$$

Cette valeur est voisine de la fréquence de la corde la plus longue sur un clavecin : 65,4 Hz. Les fréquences fondamentales produites par un jeu couvrent cinq octaves et varient ainsi d'une fréquence de 65,4 Hz à 2218 Hz pour un jeu de huit pieds et de 130,8 Hz à 4186 Hz pour un jeu de quatre pieds. De nos jours, les clavecins se retrouvent entre autres dans les facultés de musique principalement pour la reproduction de la musique ancienne. Contrairement aux pianos, les clavecins sont rares chez les particuliers.

Le tableau 1.1 présente les principales dimensions du clavecin de la Faculté de Musique de l'Université de Montréal (FMUM), celui qui nous sert de référence. Une analyse rapide du schéma de la figure 1.3 et ses dimensions permettent de réaliser immédiatement les contraintes d'espace qui seront présentes dans la partie droite du clavecin sur le schéma. En effet, à cet endroit on retrouve les cordes les plus

<b><i>Mesure</i></b>	<b><i>Dimension (mm)</i></b>
Longueur longue	2375
Longueur courte	665
Largeur totale	925
Largeur clavier	821
Hauteur de la boîte	260
Hauteur sous la table d'harmonie	200

TAB. 1.1 Dimensions de base du clavecin de la FMUM

courtes et l'espacement entre les pointes d'accroches (points d'ancrage des cordes) y est beaucoup plus réduit. De plus, l'intérieur du clavecin n'étant pas complètement vide, l'installation des actionneurs nécessitera éventuellement une étude soignée. Par ailleurs, malgré ses faibles dimensions, le système d'actionneurs doit être fiable et offrir une grande précision. Il est également souhaitable de minimiser le nombre de pièces mécaniques pour des raisons de coût et de facilité d'installation. Ces contraintes nous ont guidé dans le choix du mécanisme de contrôle.

## 1.2 Accordage d'un clavecin

Les rapports de fréquence fondamentale des notes en musique correspondent à des intervalles musicaux. Certains de ces intervalles sont plus ou moins consonants, c'est-à-dire que quelques-uns ou plusieurs de leurs harmoniques correspondent. Un intervalle d'une octave correspond à un facteur 2 dans le rapport des fréquences fondamentales, la note à la fréquence fondamentale supérieure ne contenant que les harmoniques paires de la note inférieure. L'objectif de l'accordage est de permettre que les notes à l'intérieur d'une octave, au nombre de douze, donnent des rapports de fréquence qui se rapprochent le plus de fractions comprises entre un et deux, ayant comme numérateur et comme dénominateur, de petits nombres entiers. Ainsi, on élimine les battements entre les notes et on maximise la consonance. Par

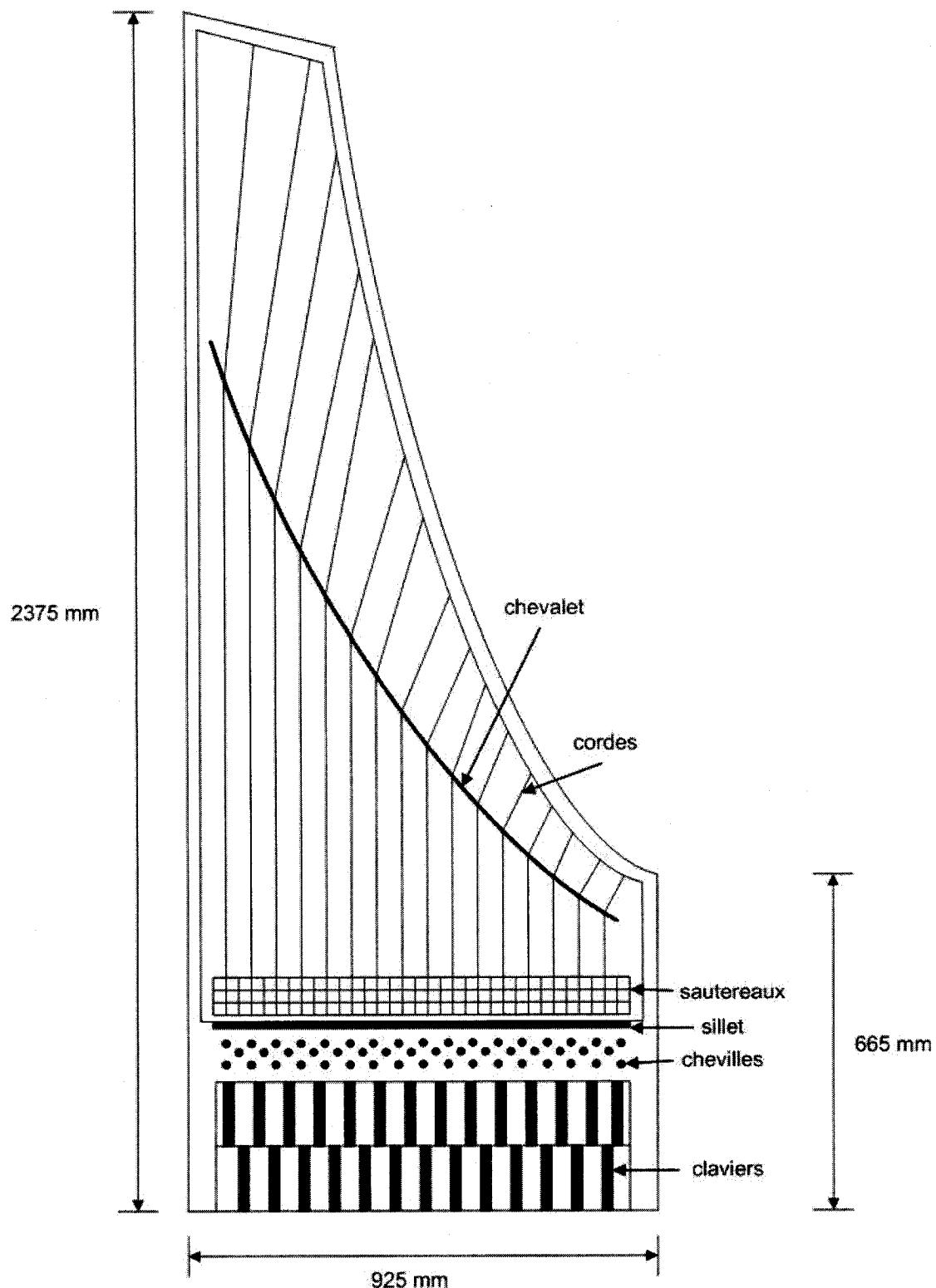


FIG. 1.3 Dessin schématique des dimensions d'un clavecin

exemple, des rapports de fréquence fondamentale de  $3/2$ ,  $4/3$  et  $5/4$  sont parmi les accords les plus consonants. Malheureusement, il est impossible de bâtir une gamme qui permette exclusivement ce genre de rapports. Dans les cas d'instruments comme les cuivres, les bois et les cordes, l'exécutant peut modifier légèrement la fréquence des notes et maximiser ainsi la consonance. Par contre, dans le cas d'instruments à sons fixes comme ceux ayant un clavier, aucun ajustement n'est possible pendant que le joueur s'exécute. En pratique, on établit des compromis qui favorisent la justesse de certains accords au détriment d'autres et c'est pourquoi il existe de nombreuses façons d'accorder un instrument à clavier. Ces différentes façons portent le nom de tempéraments. Le tempérament égal est celui le plus répandu. C'est le tempérament que les pianos utilisent presque exclusivement de nos jours. Ce tempérament ne comporte aucun accord parfaitement juste mais aucun accord aussi dissonant que l'on retrouve dans certaines tonalités d'autres tempéraments. Il se nomme tempérament égal parce que le rapport entre deux notes consécutives est constant et suit la règle  $2^{(n/12)}$ . Si la première note d'une octave correspond à  $n = 0$ , la treizième note  $n = 12$  se situe une octave plus haut. Entre ces deux extrêmes, les notes sont réparties en espaces logarithmiquement égaux. Les rapports précis de hauteur des sons  $C$ , ayant comme unité le cent ( $\text{¢}$ ), sont définis comme suit :

$$C = 1731,234 \ln \frac{f_2}{f_1} \quad (1.2)$$

L'octave qui correspond à  $f_2/f_1 = 2$  a un écart de 1200 ¢. Chaque demi-ton du tempérament égal comporte un écart de 100 ¢. Dans le cas des clavecins, des tempéraments différents du tempérament égal sont utilisés pour maximiser les consonances d'oeuvres variées. Selon Hall (1984), un accordage acceptable doit comporter une erreur limitée à 2 ou 3 ¢. Selon l'équation (1.2), une erreur constante de 2 ¢, lorsqu'exprimée en Hz, augmente linéairement avec la fréquence. Pour  $f_1 = 60$  Hz, on

<i>Note</i>	<i>Écart (¢)</i>	<i>Mésotonique</i>	<i>Égal</i>
<i>do</i>	10,3	526,36	523,25
<i>si</i>	-6,8	491,94	493,88
<i>sib</i>	17,1	470,79	466,16
<i>la</i>	0,0	440,00	440,00
<i>sol#</i>	-17,1	411,22	415,30
<i>sol</i>	6,8	393,55	392,00
<i>fa#</i>	-10,3	367,81	369,99
<i>fa</i>	13,7	352,00	349,23
<i>mi</i>	-3,4	328,98	329,63
<i>mib</i>	20,5	314,84	311,13
<i>re</i>	3,4	294,25	293,66
<i>do#</i>	-13,7	275,00	277,18
<i>do</i>	10,3	263,18	261,63

TAB. 1.2 Mésotonique classique 1/4 comparé au tempérament égal (Source : Asselin, 1985)

obtient approximativement  $f_2 = 60,07$  Hz ce qui nous donne donc une erreur de 0,07 Hz. Pour une fréquence plus élevée,  $f_1 = 3000$  Hz, on obtient  $f_2 = 3003,5$  Hz ce qui représente une erreur de 3,5 Hz.

Le tableau 1.2 donne les fréquences d'un tempérament mésotonique et du tempérament égal. Le *la* international ( $f = 440$  Hz) est le même pour les deux tempéraments. Les écarts entre les deux tempéraments, avec les fréquences du tempérament égal comme étant  $f_1$  et celles du mésotonique comme étant  $f_2$ , sont fournis en cents.

### 1.3 Mécanique de la corde vibrante

Cette partie est un rappel de la théorie à la base de la corde vibrante. De plus amples détails sont donnés dans les livres de Valette (1993), de Benson (2002) et

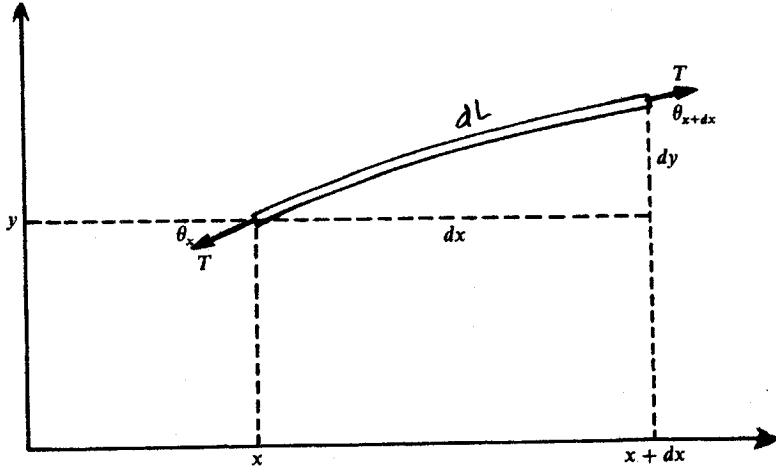


Figure provenant de la référence Rossing (2004)

FIG. 1.4 Segment d'une corde

de Rossing (2004).

Pour déterminer l'équation régissant l'équilibre des forces dans le cas d'une corde tendue, fixée à ses deux extrémités, nous considérons le segment représenté à la figure 1.4. Cette corde, qui possède une masse linéique  $\mu$ , est soumise à une tension  $T$ . La force nette dans la direction  $y$   $dF_y$ , qui tend à ramener le segment à sa position d'équilibre est donnée par

$$dF_y = (T \sin \theta)_{x+dx} - (T \sin \theta)_x \quad (1.3)$$

Appliquant une expansion de Taylor au premier terme de droite et négligeant les termes de second ordre et d'ordre supérieur, nous obtenons

$$dF_y = \frac{\partial (T \sin \theta)}{\partial x} dx \quad (1.4)$$

Pour de petits déplacements dans la direction y,  $\theta$  est petit et donc

$$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (1.5)$$

Compte tenu de ceci, l'équation (1.4) devient

$$dF_y = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \quad (1.6)$$

Utilisant le fait que la masse du segment  $dL$  est  $\mu dL \approx \mu dx$ , nous obtenons, selon la seconde loi de Newton

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = (\mu dx) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1.7)$$

C'est-à-dire, en introduisant  $c^2 = \frac{T}{\mu}$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (1.8)$$

L'équation (1.8) est celle qui régit les ondes transversales d'une corde vibrante. Il s'agit d'une équation d'onde dont la solution attribuée à d'Alembert (1717-1783) a la forme

$$y = f_1(ct - x) + f_2(ct + x) \quad (1.9)$$

Les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  représentent des ondes quelconques voyageant vers la droite et vers la gauche respectivement selon une vitesse  $c$ .

### Extrémités fixes

Pour une extrémité fixe  $y(x = 0) = 0$ , nous obtenons de l'équation 1.9

$$f_1(ct) = -f_2(ct) \quad (1.10)$$

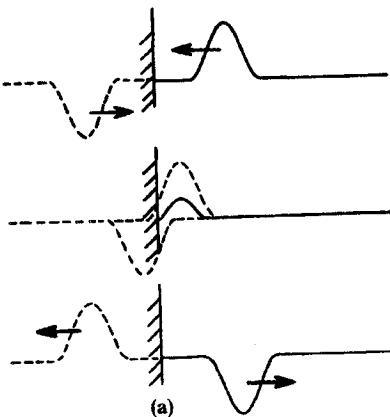


Figure provenant de la référence Rossing (2004)

FIG. 1.5 Réflexion d'une onde à une extrémité fixe

En conséquence, une impulsion positive est réfléchie en une impulsion négative. Cette réflexion de l'onde est illustrée à la figure 1.5. Toute fonction comme  $f_1$  et  $f_2$  peut être décomposée en mouvements harmoniques simples. Définissant  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$  comme étant le nombre d'onde,  $\omega$  étant la fréquence angulaire et  $\lambda$ , la longueur d'onde, nous avons la relation

$$y = A\sin(\omega t - kx) + B\cos(\omega t - kx) + C\sin(\omega t + kx) + D\cos(\omega t + kx) \quad (1.11)$$

L'équation (1.11) prend une forme plus condensée en utilisant les variables complexes dénotées par ()

$$\hat{y} = \hat{A}e^{i(\omega t - kx)} + \hat{B}e^{i(\omega t + kx)} \quad (1.12)$$

### Application à une corde de clavecin

Soit une corde fixée à  $x = 0$  et  $x = L$ ,  $L$  étant la longueur de la corde. Nous

obtenons

$$y(0, t) = 0 \quad (1.13)$$

$$y(L, t) = 0 \quad (1.14)$$

La condition (1.13) implique  $A = -C$  et  $B = -D$  dans l'équation (1.11), ce qui donne

$$y = A [\sin(\omega t - kx) - \sin(\omega t + kx)] + B [\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)] \quad (1.15)$$

Utilisant les relations trigonométriques impliquant des sommes ou des différences d'angles, l'équation (1.15) devient

$$y = -2A\sin(kx)\cos(\omega t) + 2B\sin(\omega t)\sin(kx) \quad (1.16)$$

$$y = 2[-A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]\sin(kx) \quad (1.17)$$

La condition (1.14) implique que  $\sin(kL) = 0$ , c'est-à-dire que  $kL = \omega L/c = n\pi$ . La fréquence angulaire  $\omega$  est donc limitée aux valeurs  $\omega_n = n\pi c/L$ , ce qui correspond à des fréquences  $f_n = \omega_n/2\pi$  limitées aux valeurs  $nc/2L$ . Les modes normaux de vibration de la corde sont donc donnés par

$$y_n(x, t) = (A_n \sin(\omega_n t) + B_n \cos(\omega_n t)) \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) \quad (1.18)$$

La solution générale implique la sommation de tous les modes

$$y = \sum_n (A_n \sin(\omega_n t) + B_n \cos(\omega_n t)) \sin(k_n x) \quad (1.19)$$

Une autre forme de l'équation (1.19) est obtenue en introduisant un angle de phase  $\phi$  tel que  $A = C\cos\phi$  et  $B = C\sin\phi$

$$y = \sum_n (C_n \sin(\omega_n t + \phi_n)) \sin(k_n x) \quad (1.20)$$

L'amplitude du mode  $n$  est donnée par  $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ .

L'énergie d'une corde vibrante correspondant à un de ses modes  $E_n$  est la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique de ce mode à un instant donné. Chacune de ces deux formes d'énergie passe par un maximum alors que l'autre devient nulle. Pour un mode donné  $n$ , la vitesse transversale maximum de la corde à une position  $x$  est obtenue de l'équation (1.20)

$$\frac{\partial y_n}{\partial t} \Big|_{max} = C_n \omega_n \sin(k_n x) \quad (1.21)$$

L'énergie cinétique maximum pour un segment de longueur  $dx$  et de masse linéique  $\mu$  est donc

$$dE_n = \frac{\omega_n^2 \mu}{2} C_n^2 \sin^2 \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad (1.22)$$

Intégrant sur toute la longueur de la corde, on obtient

$$E_n = \frac{\omega_n^2 \mu L}{4} C_n^2 \quad (1.23)$$

L'énergie totale, c'est-à-dire cinétique et potentielle d'un mode donné, correspond à celle donnée par l'équation (1.23). La somme des énergies de chaque mode donne l'énergie totale  $E$  de la corde :

$$E = \sum_n E_n \quad (1.24)$$

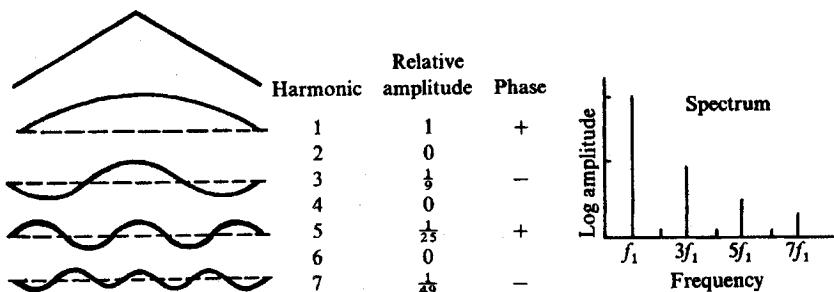


Figure provenant de la référence Rossing (2004)

FIG. 1.6 Analyse spectrale d'une corde pincée en son milieu

### La corde pincée

L'excitation de la corde implique une combinaison de plusieurs modes. Une corde pincée à mi-distance  $x = L/2$  correspond à un déplacement qui se décompose en une somme d'harmoniques impairs, comme le montre la figure 1.6. Les amplitudes relatives des différents harmoniques sont également données sur cette figure. Les modes 3, 7, 11, ... etc, doivent être déphasés de  $180^\circ$  par rapport aux modes 1, 5, 9, ... etc, pour que la sommation donne le déplacement initial. L'évolution de la forme de la corde en fonction du temps est donnée à la figure 1.7. On peut obtenir cette évolution temporelle en faisant la somme des modes à un temps particulier. Une autre façon consiste à faire la somme de deux impulsions qui voyagent dans des directions opposées. La figure 1.7 montre par des lignes pointillées ces deux impulsions. Une corde pincée à  $L/5$  donne le spectre d'amplitude de la figure 1.8. Il est à noter que les harmoniques correspondant à des multiples de 5 de la fréquence fondamentale sont absents. De même, une corde pincée à  $L/4$  ne comporte pas d'harmoniques multiples par 4 de la fondamentale. L'évolution temporelle de la forme d'une corde pincée à  $L/5$  est donnée à la figure 1.9. Ici encore, la forme de la corde peut être reconstituée à partir de deux impulsions qui se déplacent dans des directions opposées. Chacun des modes donnés par l'équation 1.18 comporte deux coefficients  $A_n$  et  $B_n$  qui dépendent de l'excitation initiale de la corde. Ces

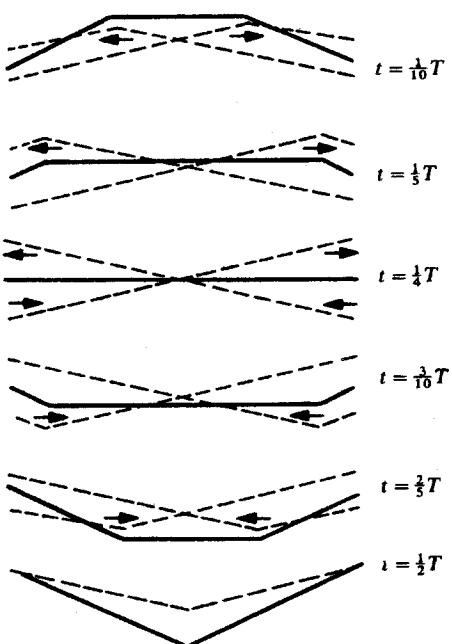


Figure provenant de la référence Rossing (2004)

FIG. 1.7 Évolution temporelle de la forme d'une corde pincée à  $x = L/2$  au cours d'un demi-cycle

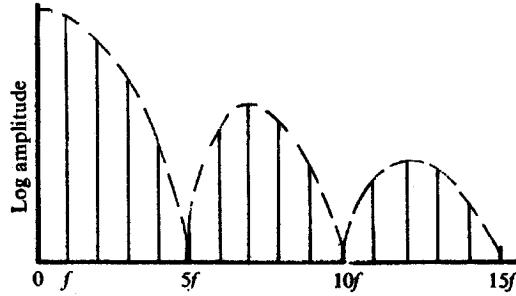


Figure provenant de la référence Rossing (2004)

FIG. 1.8 Spectre d'amplitude d'une corde pincée à  $L/5$

coefficients sont déterminés par une analyse de Fourier (Kreyszig, 1993) selon les formules

$$A_n = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L \dot{y}(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (1.25)$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L y(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (1.26)$$

dans lesquelles  $y$  et  $\dot{y}$  proviennent respectivement de l'équation (1.19) et de sa dérivée par rapport au temps, les deux expressions étant évaluées au temps  $t = 0$ . Dans le cas d'une corde pincée à  $x = L/5$ , initialement, la vitesse transversale, donnée par  $\dot{y}$ , est nulle en tout point, de sorte que  $A_n = 0$  pour tous les  $n$  et l'équation (1.19) devient

$$y = \sum_n B_n \cos(\omega_n t) \sin(k_n x) \quad (1.27)$$

En se référant à la figure 1.9, qui donne une forme triangulaire à la corde, et en supposant un déplacement  $h$  à  $x = L/5$ ,  $h$  étant le déplacement vertical imposé, en

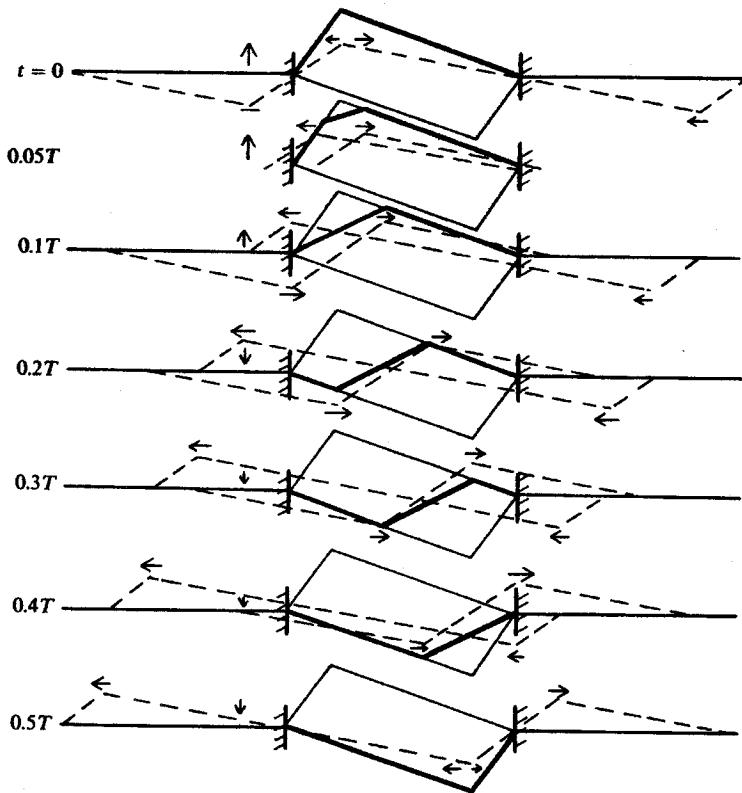


Figure provenant de la référence Rossing (2004)

FIG. 1.9 Évolution de la forme temporelle d'une corde pincée à  $x = L/5$

pratique, par le plectre, on obtient comme conditions initiales le long de la corde

$$y(x, 0) = \frac{5h}{L}x \quad 0 \leq x \leq L/5 \quad (1.28)$$

$$y(x, 0) = \frac{5h}{4L}(L - x) \quad L/5 \leq x \leq L \quad (1.29)$$

Utilisant ces deux expressions dans l'équation (1.26), on peut obtenir analytiquement les coefficients  $B_n$  :

$$B_n = \frac{25}{2} \frac{h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right) \quad (1.30)$$

de sorte que  $B_n = 0$  pour  $n = 5, 10, 15\dots$ , en conformité avec la figure 1.8. Il en va de même pour tout autre endroit où la corde est pincée et qui correspond à une division de la corde par un nombre entier. Par exemple, une corde pincée au tiers de sa longueur élimine les troisième, sixième, neuvième harmoniques et ainsi de suite.

De façon plus générale, dans le cas d'une corde pincée à une distance quelconque  $x = L_e < L$ , où  $L_e$  est la distance entre l'excitateur et le sillet, les équations (1.28) et (1.29) deviennent

$$y(x, 0) = h \frac{x}{L_e} \quad 0 \leq x \leq L_e \quad (1.31)$$

$$y(x, 0) = \left[ \frac{h}{1 - \frac{L_e}{L}} \right] \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \quad L_e \leq x \leq L \quad (1.32)$$

Les amplitudes  $B_n$  pour cette position  $L_e$  sont obtenues analytiquement en faisant intervenir (1.31) et (1.32) dans (1.26). Définissant  $\alpha = l/L$ , on trouve

$$B_n = \frac{2h}{n^2\pi^2\alpha(1-\alpha)} \sin(n\pi\alpha) \quad (1.33)$$

Jusqu'à présent nous avons supposé une corde maintenue entre deux supports rigides. Considérons une corde fixée à un support rigide à  $x = 0$  et à un support caractérisé par une masse  $m$  à  $x = L$ . La force transversale exercée sur la masse par la corde est  $-T(\partial\hat{y}/\partial x)|_L$ ,  $\hat{y}$  étant donné par l'expression (1.12). Selon la seconde loi de Newton, on peut établir que

$$-T \frac{\partial \hat{y}}{\partial x}|_L = m \left( \frac{\partial^2 \hat{y}}{\partial t^2} \right)_L \quad (1.34)$$

La condition  $y(0, t) = 0$  appliquée à l'équation (1.12) donne

$$0 = \hat{A}e^{i\omega t} + \hat{B}e^{-i\omega t} \quad (1.35)$$

de sorte que  $\hat{A} = -\hat{B}$ . L'équation (1.12) devient

$$\hat{y}(x, t) = \hat{A}[-e^{-ikx} + e^{ikx}] e^{i\omega t} \quad (1.36)$$

$$\hat{y}(x, t) = 2i\hat{A}\sin(kx)e^{i\omega t} \quad (1.37)$$

Des équations (1.34) et (1.37) on obtient

$$\cot(kL) = \frac{m\omega^2}{kT} = \frac{m}{M}kL \quad (1.38)$$

$M = \mu L$  étant la masse totale de la corde.

La figure 1.10 représente les solutions graphiques de l'équation (1.38), pour deux rapports  $m/M$ . Les points d'intersection correspondent aux racines. Une corde fixée rigidement à  $x = L$  correspond à  $m/M \rightarrow \infty$ . Dans ce cas les racines de (1.38) sont  $kL = n\pi$ . Il est à noter que pour  $m/M$  décroissant, les fréquences de divers modes ne sont pas strictement harmoniques. Elles sont comprimées, c'est-à-dire que la fréquence du premier mode s'accroît un peu plus que le second mode, cet effet se poursuivant en allant vers les modes supérieurs.

#### 1.4 Relation entre fréquence et élongation

Pour une masse linéique  $\mu$  donnée, la fréquence fondamentale  $f$  d'une corde est fonction de la longueur vibrante  $L$  et de la tension  $T$  selon l'expression (Benade,

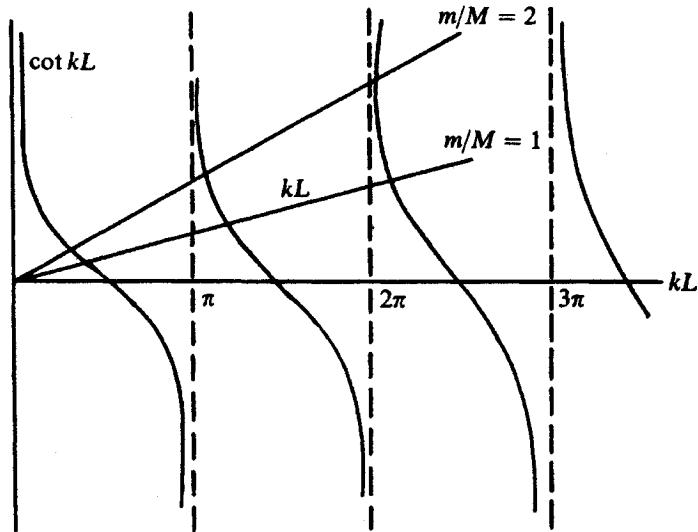


Figure provenant de la référence Rossing (2004)

FIG. 1.10 Solution de l'équation 1.38

1990)

$$f = \frac{1}{\mu^{1/2}} \frac{1}{2L} T^{1/2} \quad (1.39)$$

Dans un clavecin, comme dans un piano, la longueur vibrante d'une corde est fixe. La fréquence est donc modifiée en agissant sur la tension. L'accordage manuel est fait en tournant plus ou moins une cheville sur laquelle est enroulée une extrémité de la corde. Celle-ci subit alors une élongation qui augmente sa tension. Pour réaliser un accordage mécanique automatisé, l'action manuelle de l'accordeur sur la cheville est remplacée par celle d'un moteur travaillant par le biais d'un engrenage. L'emploi d'un moteur pas-à-pas («stepping motor») avec vis sans fin permet de modifier l'élongation et, ce partant, la tension avec une grande précision. De plus, l'emploi d'une vis sans fin rend le mécanisme auto-bloquant lorsque l'alimentation est coupée. Si on suppose que le matériau constituant la corde demeure dans le domaine élastique, alors la tension varie linéairement avec l'élongation. Selon

l'équation (1.39), la fréquence est donc fonction de la racine carrée de l'elongation, que l'on peut déterminer à l'aide des équations de mécanique classique (Bazergui et al., 2002).

La contrainte unitaire  $\sigma$  est donnée par

$$\sigma = \frac{T}{A} \quad (1.40)$$

$A$  étant l'aire de la section de la corde. Cette contrainte unitaire peut à son tour être remplacée par l'elongation unitaire  $\varepsilon$  selon

$$\sigma = E_Y \varepsilon \quad (1.41)$$

dans laquelle  $E_Y$  représente le module de Young. L'elongation unitaire est donnée par

$$\varepsilon = \frac{l}{L_T} \quad (1.42)$$

$l$  étant l'elongation totale et  $L_T$  la longueur totale de la corde telle que montrée à la figure 1.11, avec l'équation

$$L_T = L + L_1 + L_2 \quad (1.43)$$

Il est à noter que l'enroulement autour de la cheville est susceptible de participer à l'elongation mais nous négligeons l'impact de cette portion de la corde. En effet, la longueur de la partie de la corde enroulée autour de la cheville est très faible par rapport à la longueur totale de la corde. Des équations (1.40), (1.41) et (1.42), on obtient

$$T = \frac{AE_Y l}{L} \quad (1.44)$$

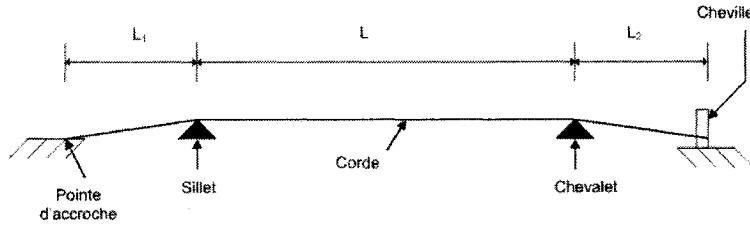


FIG. 1.11 Schéma d'une corde de clavecin et ses appuis

En remplaçant dans l'équation (1.39) et en isolant  $l$ , on obtient

$$l = \left[ 4 \frac{\mu L_T}{AE_Y} L^2 \right] f^2 \quad (1.45)$$

L'élongation requise d'une corde pour obtenir la fréquence est donnée par cette dernière équation. Pour de petits changements de fréquence, on obtient

$$dl = \left[ 4 \frac{\mu L_T}{AE_Y} L^2 \right] f^2 2 \frac{df}{f} = 2l \frac{df}{f} \quad (1.46)$$

qui représente le changement d'élongation correspondant au changement de fréquence.

## CHAPITRE 2

### LE MONTAGE EXPÉRIMENTAL ET SES CONSTITUANTS

Ce chapitre présente les différentes étapes et les principaux composants qui nous ont servi à fabriquer les montages que nous avons utilisés ultérieurement pour nos tests expérimentaux. L'objectif était de réaliser un montage permettant de respecter les principales contraintes présentes dans un clavecin et de tester les solutions proposées. Ainsi, au cours du projet, un montage préliminaire, présenté brièvement ici, a été réalisé. Une seconde version, améliorée, a été produite pour la réalisation de l'ensemble des tests prévus pour l'accordage automatisé d'une corde de clavecin. Ce second montage est présenté en détail.

#### 2.1 Montage préliminaire

Un premier montage doté d'une seule corde et contrôlé par ordinateur à l'aide d'une carte d'acquisition de données et le logiciel *Labview* (National Instruments, 2004) a été construit. Ce montage très simple a été amélioré à quelques reprises, ouvrant la voie à la réalisation d'un montage beaucoup plus complet contrôlé à partir d'un microcontrôleur. Le sillet et le chevalet étaient représentés par deux supports de métal triangulaire. Le crochet de métal, qui servait de pointe d'accroche à une des extrémités de la planche, était beaucoup trop près du support servant de sillet. L'angle formé par la partie non vibrante de la corde, située entre le crochet et le sillet, était trop grand par rapport au plan horizontal. Cet angle induisait une déformation permanente dans la corde.

La figure 2.1 montre les composants qui ont servi à faire vibrer la corde. Cette ex-

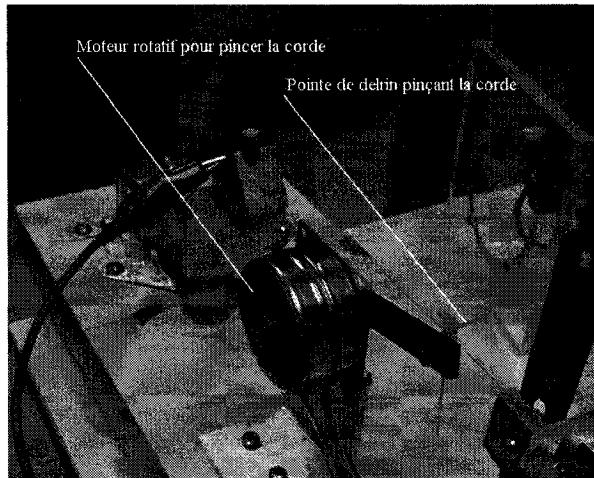


FIG. 2.1 Excitateur avec moteur pas-à-pas

citation était faite par un plectre installé à l'extrémité d'une tige relié à un moteur pas-à-pas. Lorsque le moteur tournait, elle venait frapper la corde à chaque tour complet, l'axe de rotation du moteur n'étant pas perpendiculaire avec la corde. Cette installation était déficiente notamment parce qu'il arriva plus d'une fois, surtout lorsque la tension dans la corde était élevée, que le moteur fut arrêté par la corde dans sa rotation. Un capteur magnétique fut utilisé pour procéder à la détection de la fréquence de la corde. Ce capteur fut repris dans le montage final et est décrit en détail dans la section suivante. La tension dans la corde était contrôlée par un moteur relié à deux vieux engrenages d'imprimante couplés à une vis et dont on peut apercevoir une photo à la figure 2.2. Chaque engrenage avait un rapport 9 : 2. La vis, dotée d'un pas de 1 mm, était utilisée comme une vis sans fin et tournait à l'intérieur d'un bloc d'aluminium. La corde était directement attachée à ce bloc qui ne pouvait se déplacer que linéairement le long de la vis. Cette installation n'a servi qu'à faire des tests préliminaires. Ce mécanisme permettait un ajustement précis mais comportait énormément de frottement, en particulier entre le bloc d'aluminium et la plaque qui le bloquait en rotation. De plus, le manque de

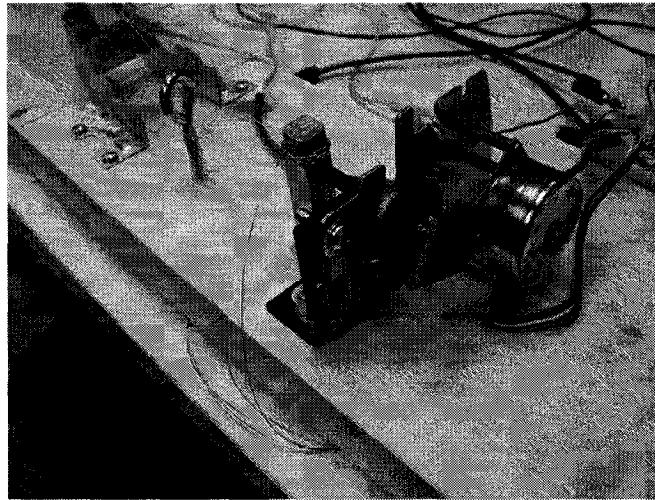


FIG. 2.2 Moteur pas-à-pas avec engrenages et bloc coulissant

rigidité dans l'ensemble de l'installation de la vis avec les roues dentées était une source d'erreur supplémentaire. Néanmoins, il était possible d'ajuster la fréquence de la corde avec une grande précision. Malheureusement, l'atteinte de la fréquence désirée nécessitait plusieurs ajustement successifs. De plus, ce montage occupait un espace considérable qui rendait impossible l'utilisation d'un tel système pour un clavecin. Dans ce montage, les composants électroniques étaient tous reliés à une carte d'acquisition de la compagnie *National Instruments*, ce qui nous permettait de faire le traitement des données à partir du logiciel *Labview* et d'observer graphiquement le mouvement de la corde tel que détecté. Une vue de l'interface du logiciel est présentée à la figure 2.3.

## 2.2 Montage final

Dans ce nouveau montage, qui a servi à faire l'ensemble des tests et représenté schématiquement à la figure 2.4, le capteur du montage préliminaire fut réutilisé.

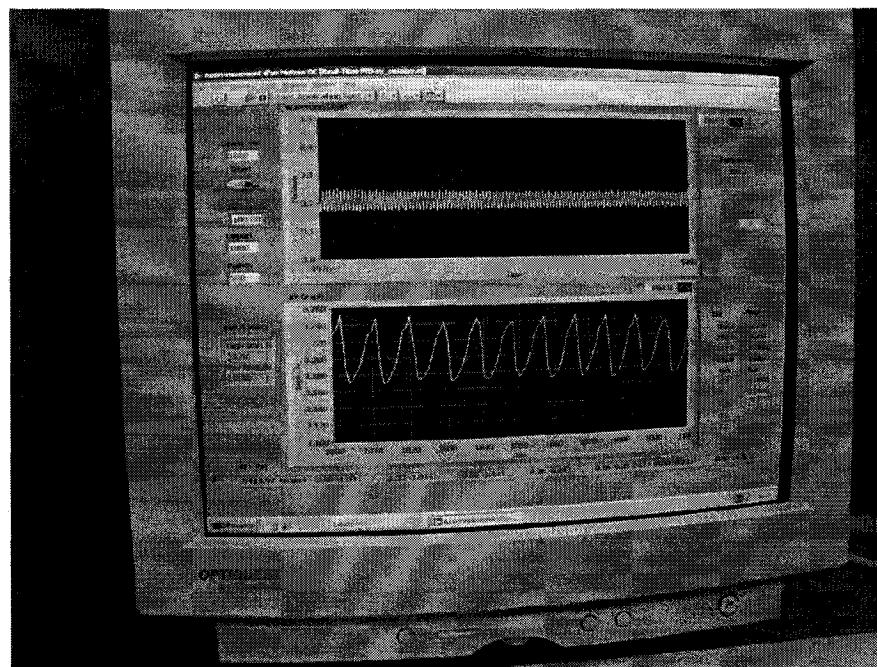


FIG. 2.3 Image de l'interface sur le logiciel *Labview*

Diamètre  $d$  de la corde  
Acier = 0.32 mm  
Laiton = 0.51 mm

$L$  = 70 cm  
 $L_1$  = 16 cm  
 $L_2$  = 55.7 cm  
 $L_e$  = 10.6 cm  
 $L_c$  = 15.6 cm

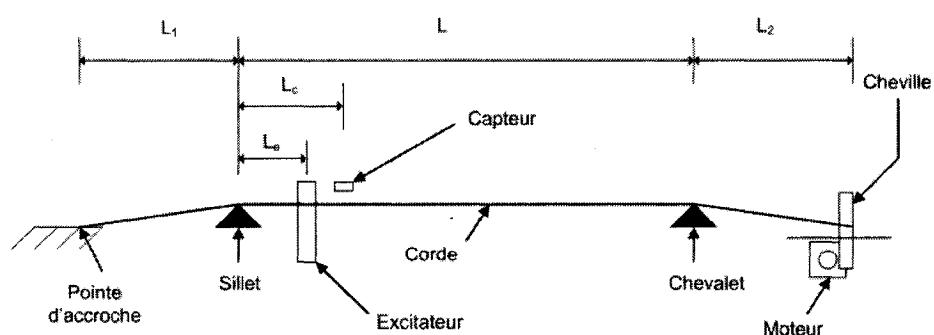


FIG. 2.4 Schéma du montage final

Ce montage avait plusieurs éléments se rapprochant d'un clavecin typique. On cherchait ainsi à retrouver jusqu'à un certain point les conditions d'un clavecin. Il était donc primordial que le support principal du montage soit bien fixe et rigide, ce qui n'était pas le cas sur le montage précédent. Le support fut construit avec du merisier en ayant la forme d'une boîte fermée supportée par des crochets de métal. De plus, une planche mince faisant office de table d'harmonie a été ajoutée. Par cet ajout, la durée totale de vibration de la corde se rapprochait donc davantage de celle d'un clavecin. Le second montage permettait aussi l'installation d'une deuxième corde en acier à quelques millimètres de la corde étudiée sur le montage final dans le but de simuler des interférences électromagnétiques possibles sur le capteur de la première corde. Chaque composant du montage final est expliqué en détail dans les sections suivantes.

### 2.2.1 Support des cordes

Afin de mieux représenter la situation réelle d'un clavecin, des supports de bois triangulaires, dotés d'une pointe de métal où s'appuie la corde et servant de sillet et de chevalet, ont été installés. Par ailleurs, les extrémités des cordes ont été placées de manière à obtenir des angles d'approche très faibles, comme dans un clavecin, afin d'éviter les déformations permanentes dans la corde. Les supports peuvent également être déplacés aisément grâce à des rainures dans le montage afin de permettre de varier la longueur de la portion vibrante de la corde. Le montage est bâti de façon à ce que ces changements de position ne posent pas de problème quant à l'angle d'attaque des cordes avec les supports. Une déformation permanente aurait pu représenter une source d'erreur dans l'estimation de l'élongation requise, la corde ne s'étirant plus de manière uniforme sur toute sa longueur et la déformation pouvant être la cause d'un blocage à un des supports. Ce dernier cas aurait pu faire en sorte que l'élongation ne se produise que sur une fraction seulement de

la longueur totale de la corde. Par ailleurs, si des tensions différentes s'étaient accumulées dans la corde, celle-ci aurait pu finir par glisser subitement sans que l'actionneur ne fonctionne et provoquer un changement de fréquence de la corde.

### 2.2.2 Exciteur

L'exciteur sert à reproduire l'excitation que subit la corde dans un clavecin. L'automatisation du procédé débordait de l'objectif principal du présent travail. Dans le cadre de nos expériences, pour provoquer une excitation de la corde comparable à celle dans un clavecin, un sautereau complet a été utilisé. Pour effectuer l'excitation de la corde, le sautereau effectue un mouvement vertical pouvant être commandé par un solénoïde. Lors des essais, l'activation du sautereau fut faite de manière manuelle. Dans le cas de l'application éventuelle à un clavecin, le solénoïde pourrait être placé à la base des touches ce qui, par le fait-même, permettrait d'éviter les interférences avec le capteur. Comme il a été démontré au chapitre 1, l'emplacement de l'exciteur le long de la corde, dont la partie vibrante est de longueur  $L = 70$  cm, conditionne l'amplitude relative des harmoniques. Cet emplacement,  $L_e = 10,6$  cm, est approximativement celui qu'on retrouve sur la corde  $do_4$  d'un clavecin. Ces valeurs  $L$  et  $L_e$ , intervenant dans les équations (1.31), (1.32) et (1.26), donnent l'expression suivante pour les amplitudes adimensionnelles

$$\frac{B_n}{h} = \frac{c}{n^2} \sin(n\pi\alpha) \quad (2.1)$$

où  $c = \frac{2}{\pi^2\alpha(1-\alpha)}$  et  $\alpha = L_e/L$ . Les amplitudes adimensionnelles  $\frac{B_n}{h}$  sont données au tableau 2.1 en fonction de  $n$ . Certaines valeurs sont négatives, indiquant ainsi un déphasage de  $180^\circ$ . Ces amplitudes sont portées sur le graphique de la figure 2.5 en fonction de la fréquence. Les fréquences les plus faibles sont aux environs de la septième harmonique et de ses multiples par des nombres entiers en conformité

<b><i>n</i></b>	$\frac{B_n}{h} = \frac{c}{n^2} \sin(n\pi\alpha)$
1	0,7088
2	0,31504
3	0,17019
4	0,09144
5	0,04278
6	0,012178
7	-0,005919
8	-0,014907
9	0,017361
10	0,015461

TAB. 2.1 Amplitude adimensionnelle des harmoniques générés par l'excitateur

avec le comportement de la corde vibrante décrit au chapitre 1. En pratique, le déplacement vertical  $h$  imposé par le plectre est de l'ordre de 3 mm.

### 2.2.3 Capteur

L'accordage d'une corde à  $\pm 2$  cents près requiert une mesure précise de ses fréquences de vibration. Pour des raisons pratiques, la détection par microphone des ondes sonores générées fut mise de côté. En effet, de nombreuses perturbations sont susceptibles de se produire au cours de l'échantillonnage et il serait alors nécessaire de faire un traitement plus poussé du signal. De plus, l'utilisation d'un microphone pour l'accordage en temps réel serait problématique car elle supposerait d'analyser les signaux de différentes cordes dans un même ensemble de données. Durant l'exécution d'une oeuvre, jusqu'à trente cordes peuvent vibrer simultanément à un endroit de repos. En outre, si le claveciniste fait partie d'un ensemble, il devient très difficile d'isoler le signal d'une corde particulière.

Nous avons opté pour des capteurs susceptibles de détecter le mouvement de la

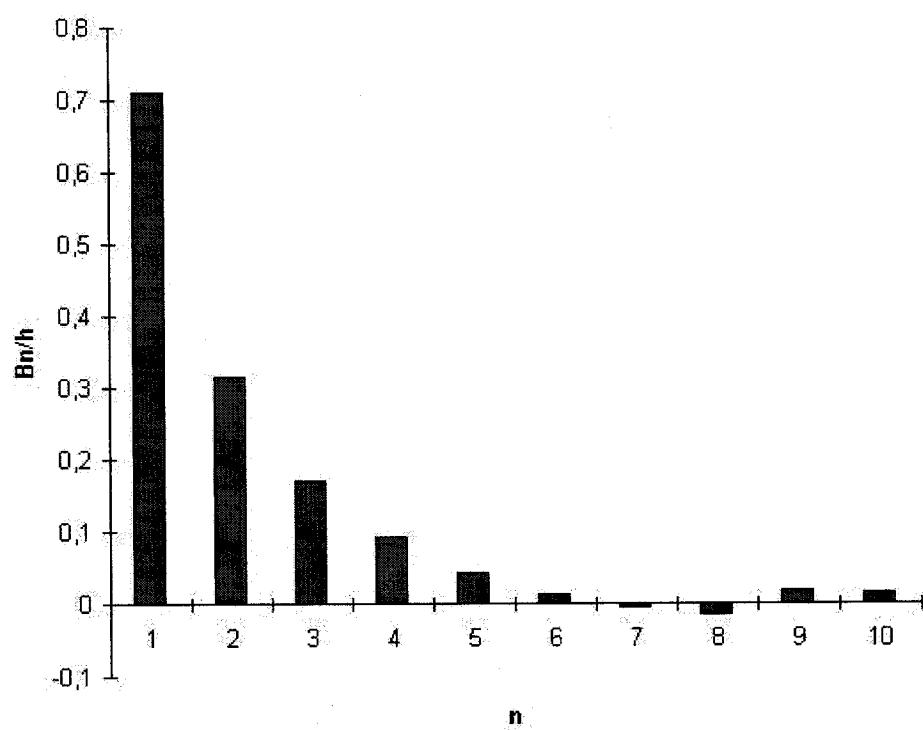
**Mouvement vertical relatif de la corde selon les harmoniques**

FIG. 2.5 Amplitude relative selon la fréquence

corde, tout contact avec celle-ci étant exclu. Les capteurs devaient être petits compte tenu de la faible distance, environ 4 mm, entre les cordes dans un clavecin. Parmi les capteurs optiques abordés, aucun n'offrait un ratio intéressant entre les performances espérées par rapport au coût et à la complexité d'installation et d'utilisation. Les capteurs de tension dynamique sont aussi écartés à cause de leur coût prohibitif.

La solution retenue est semblable à celle que l'on retrouve dans les guitares électriques et à la technique utilisée par Gilmore (2002). Elle consiste à détecter l'intensité du champ magnétique d'une corde en vibration à l'aide d'un capteur magnétorésistif. Le modèle choisi est le HMC1051 de la compagnie *Honeywell* (2004). Ses très faibles dimensions (9,8 x 6,8 x 1,4 mm) rendraient possible son installation entre les cordes d'un clavecin et son coût serait abordable, soit environ 7 \$ l'unité. Le capteur est constitué d'un pont de Wheatstone à quatre éléments formés d'un film de métal magnétorésistif. Une fois le capteur alimenté, celui-ci convertit tout champ magnétique incident en une variation linéaire de voltage correspondante à la sortie. Ce capteur peut détecter l'intensité d'un champ magnétique atteignant jusqu'à 6 Gauss.

Les capteurs magnétiques, tels que ceux utilisés dans les guitares électriques, n'ont pas été testés. Différents de ceux utilisés au cours du projet, ils se basent sur l'interférence produite par une corde en acier dans un champ magnétique, ce champ étant généré par un aimant placé à l'intérieur même du capteur. Ces interférences induisent des variations de courant qui sont ensuite transmises à un amplificateur.

Dans le cas d'une corde de laiton, afin d'obtenir un champ magnétique autour de la corde, on a appliqué un voltage de 0,5 volts à ses extrémités, ce qui a généré un courant de 0,5 ampère. Il est à noter que l'augmentation de température de la corde, obtenue selon les calculs fournis à l'annexe 2, est de 6,083°C et que la

corde est donc ajustée à une température supérieure à l'air ambiant. Lorsque le courant est enlevé, la température de la corde redevient celle de l'air ambiant, ce qui augmente alors sa tension et en conséquence sa fréquence de 10 % par rapport à la fréquence désirée. Cette solution utilisant un courant électrique pour une corde de laiton apparaît donc inacceptable dans son utilisation actuelle et une alternative devra être trouvée. Dans le cas d'une corde en acier, il suffit de magnétiser la corde en frottant une courte partie du fil avec un aimant permanent. La corde étant déjà en place, il est important de bien positionner l'aimant afin d'obtenir les pôles sur l'axe horizontal et un champ magnétique autour du fil d'acier ayant la forme approximative présentée à la figure 2.6. On peut également visualiser sur cette même figure l'interaction entre le capteur et les lignes de champ. Pour notre plage d'utilisation quant à l'intensité du champ magnétique, la sortie en voltage du capteur varie linéairement en fonction de celle-ci qui elle varie, de manière approximative, avec l'inverse de la distance entre le capteur et la corde. La figure 2.7 montre le champ magnétique autour d'une corde aimantée par le passage d'un courant électrique. Dans ce cas, l'intensité du champ magnétique varie linéairement avec la distance et l'intensité du courant tel que défini par l'équation de Biot-Savard (Smythe, 1968) pour un fil de longueur infinie :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (2.2)$$

$B$  est l'intensité du champ magnétique,  $\mu_0$  la perméabilité de l'air et  $a$  la distance entre la corde et le capteur.

Selon le schéma de la figure 2.4, le capteur est placé à une distance  $L_c = 15,6$  cm du sillet perpendiculairement au plan principal de vibration de la corde. Il est donc situé à courte distance du sautereau. Le calcul théorique du mouvement vertical de la corde à cet endroit est obtenu de l'équation (1.27) à partir des amplitudes données au tableau 2.1. Les figures 2.8, 2.9 et 2.10, donnent la position verticale  $y$

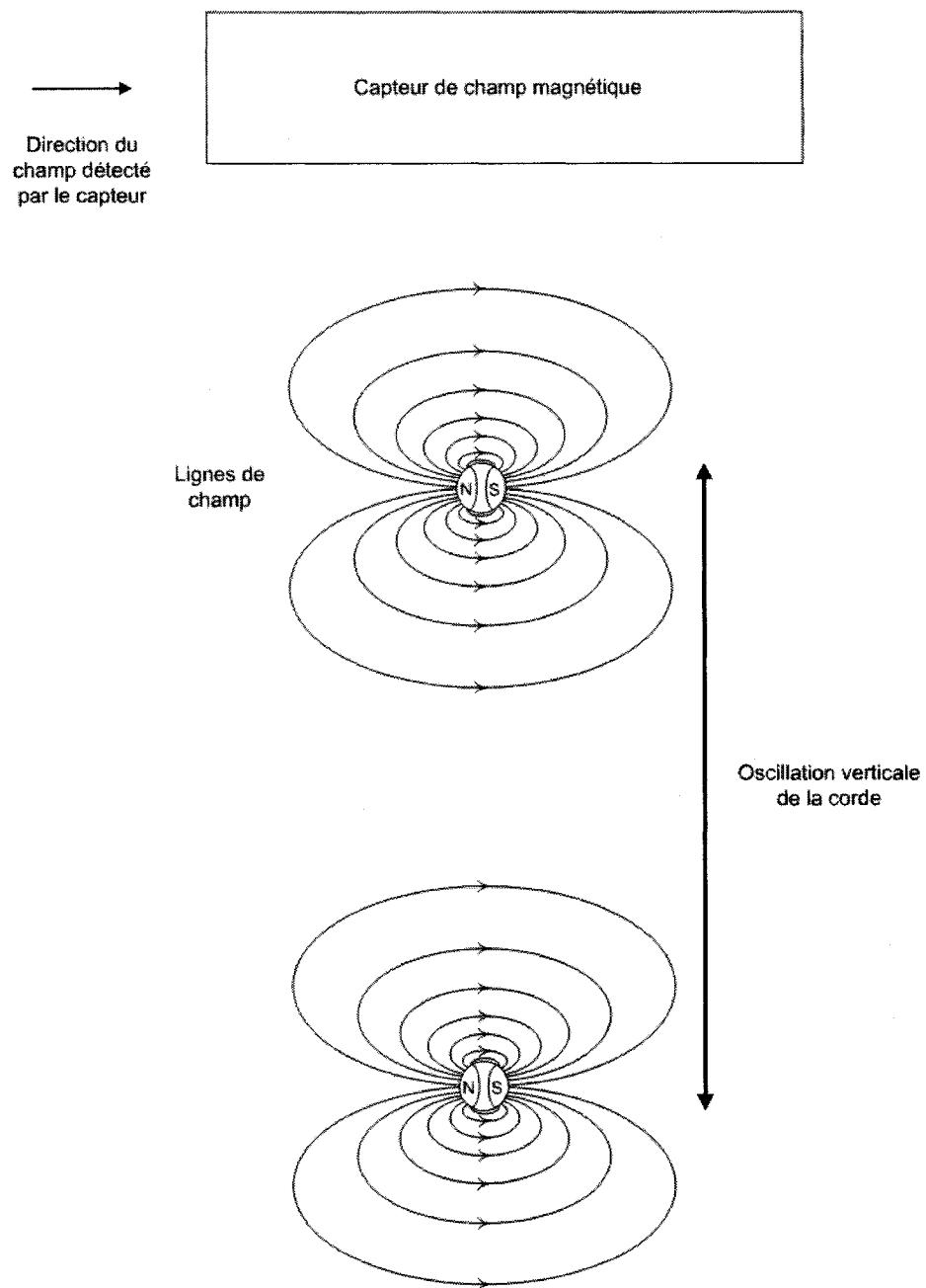
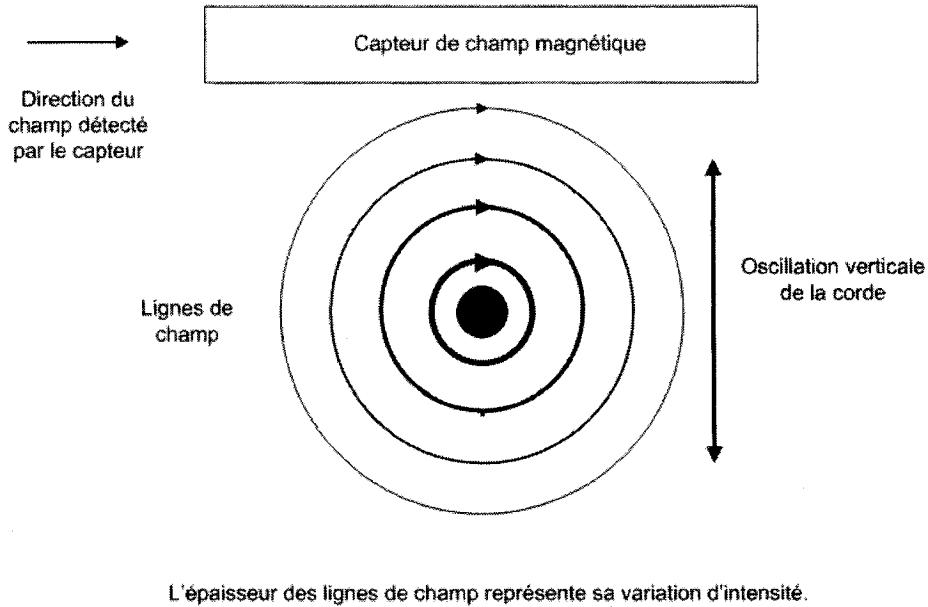


FIG. 2.6 Interaction entre la corde et le capteur de champ pour une corde d'acier



L'épaisseur des lignes de champ représente sa variation d'intensité.

FIG. 2.7 Interaction entre la corde et le capteur de champ pour une corde de laiton

théorique de la corde à l'endroit du capteur en fonction du temps pour des nombres d'harmoniques présents de deux, dix et quarante respectivement. La figure 2.12 donne la forme de la corde à différentes étapes d'un cycle. Les figures 2.8, 2.9, 2.10 et 2.12 ne tiennent pas compte de l'amortissement que subit la corde, les fréquences les plus hautes étant amorties plus rapidement. La figure 2.11 donne la vitesse  $v/h = \frac{\partial y/h}{\partial t}$  en fonction du temps.

Tout comme pour l'exciteur, l'emplacement du capteur le long de la corde de longueur vibrante  $L$  affecte l'importance relative des harmoniques du signal détecté. L'équation (1.27) donne l'amplitude  $y$  fonction de  $x$ , résultant de la combinaison des harmoniques pour une position quelconque  $l$  du capteur le long de la corde, les amplitudes  $B_n$  étant obtenues selon la méthode décrite à la section 1.3. De l'équation (1.27), on obtient le déplacement correspondant à l'harmonique  $n$

$$y_n(x, t) = B_n \cos(\omega_n t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.3)$$

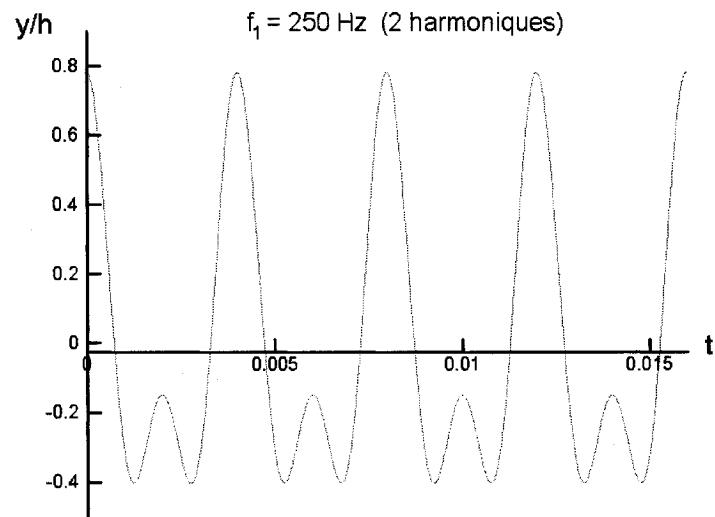


FIG. 2.8 Déplacement vertical théorique de la corde avec deux harmoniques

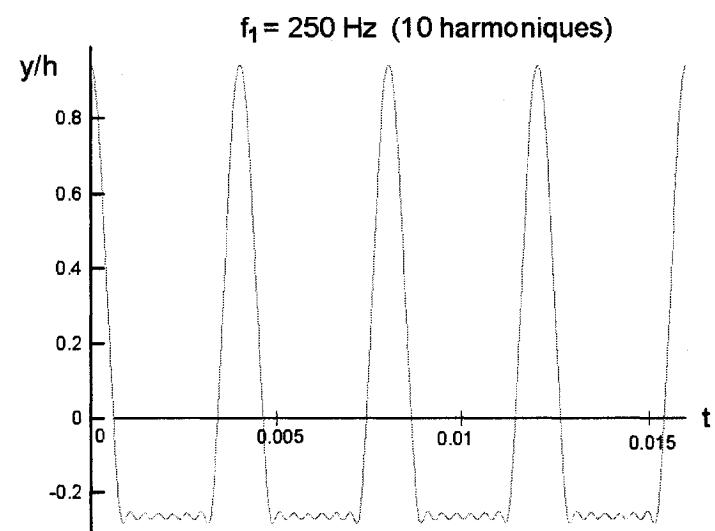


FIG. 2.9 Déplacement vertical théorique de la corde avec dix harmoniques

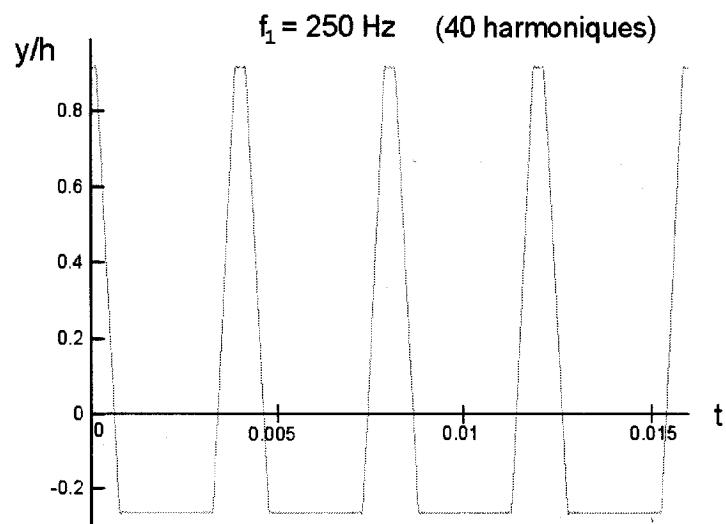


FIG. 2.10 Déplacement vertical théorique de la corde avec quarante harmoniques

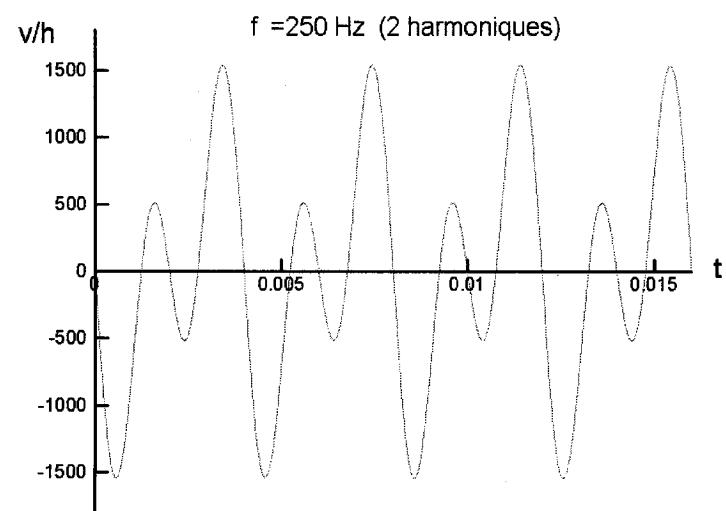


FIG. 2.11 Vitesse théorique de la corde avec 2 harmoniques

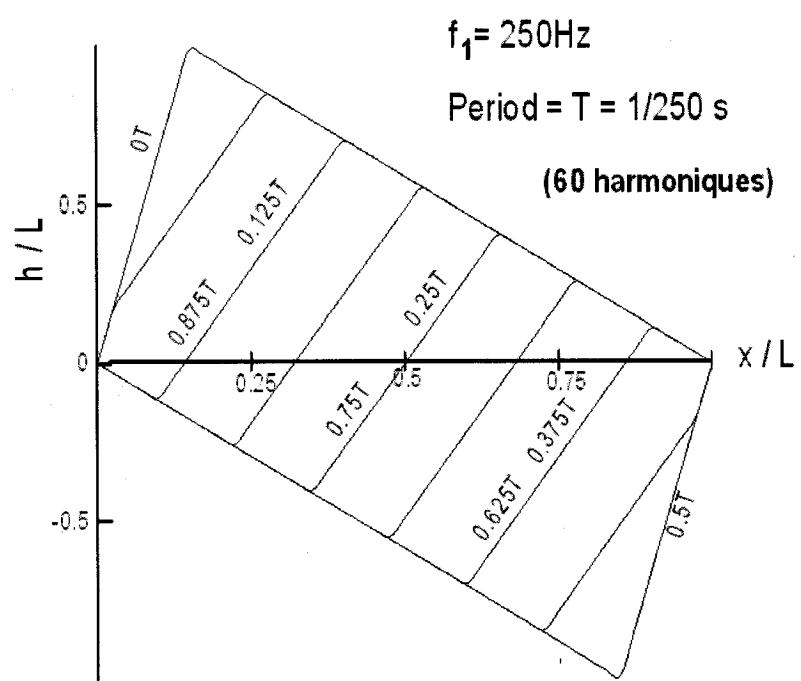


FIG. 2.12 Évolution du signal dans le temps

Pour détecter les premiers harmoniques, il faut donc, tout comme pour l'excitateur, éviter les noeuds correspondants pour l'emplacement du capteur.

### 2.2.3.1 Perception du son par un auditeur

Il est important de bien concevoir que le son d'une corde, tel que perçu par l'auditeur dans une salle quelconque, n'a pas du tout les caractéristiques harmoniques du signal du capteur ni même du mouvement de la corde produisant ce signal. Par ailleurs, une application rigoureuse du calcul de la dissonance, décrite à l'annexe 1, exigerait la connaissance du spectre d'amplitude tel que perçu par le système auditif humain, ce qui est nettement hors de portée et ce, à cause des facteurs multiples affectant le son au moment où il parvient à l'auditeur.

La corde seule est une source sonore de ligne le long de laquelle les harmoniques ont des distributions d'amplitude variables. Ses vibrations sont transmises à une table d'harmonie qui elle-même possède un spectre d'amplitude variable spatialement sur sa surface. Chaque partie de la surface radie son propre spectre d'amplitude. La salle dans laquelle se trouve le clavecin comporte des caractéristiques de réverbération particulières de sorte que le spectre d'amplitude perçu par le système auditif humain, qui occupe un point particulier de l'espace, est très éloigné de celui caractérisant le mouvement de la corde à l'emplacement du capteur.

Le signal  $f_s$  fourni par le capteur est également en relation non linéaire avec le mouvement de la corde. Le voltage généré par le capteur étant linéairement relié au champ magnétique, ce dernier varie à l'inverse du rayon originant de la corde aimantée, selon l'équation (2.2). À la figure 2.13,  $h_c$  est la distance entre le capteur et la corde dans sa position de repos,  $y(t)$  et  $a(t)$  représentent respectivement la position de la corde et la distance entre celle-ci et le capteur au temps  $t$ .  $h$  représente

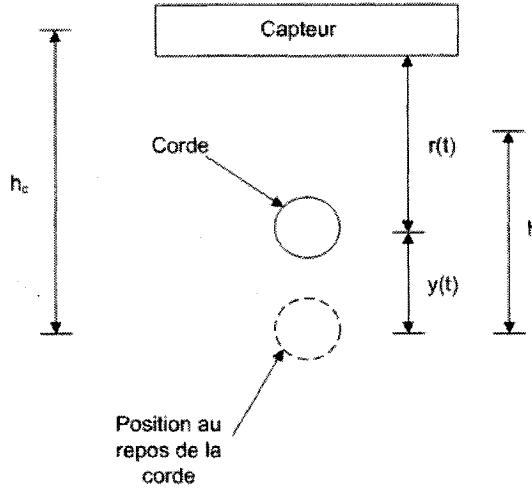


FIG. 2.13 Schéma définissant les distances entre la corde et le capteur

la distance maximale de la corde par rapport à sa position de repos. De l'équation (2.2), on obtient

$$f_s = GB = \left( \frac{G\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{a} \right) = \frac{K}{a} \quad (2.4)$$

où  $G$  et  $K$  sont des constantes. Remplaçant  $a$  par son équivalent  $H - y(t)$ , on a

$$f_s = \frac{K}{h_c - y(t)} = \frac{K/h_c}{1 - \frac{y(t)}{h_c}} = \frac{K_1}{1 - \frac{y(t)}{h_c}} \quad (2.5)$$

Si on suppose un mouvement sinusoïdal  $y(t) = h \sin(\omega t)$ , il s'ensuit que

$$\frac{f_s}{K_1} = \frac{1}{1 - \frac{h}{h_c} \sin(\omega t)} = \frac{1}{1 - K_2 \sin(\omega t)} \quad (2.6)$$

Le coefficient  $K_2$  induit plus ou moins de non linéarité selon qu'il est proche de l'unité ou de zéro. Les figures 2.14a et 2.14b donnent le signal  $f_s/K_1$  tel que fourni par le capteur à partir d'un mouvement sinusoïdal de la corde. La figure 2.15 donne le signal théorique fourni par le capteur avec  $K_2 = 0,8$  à partir du mouvement

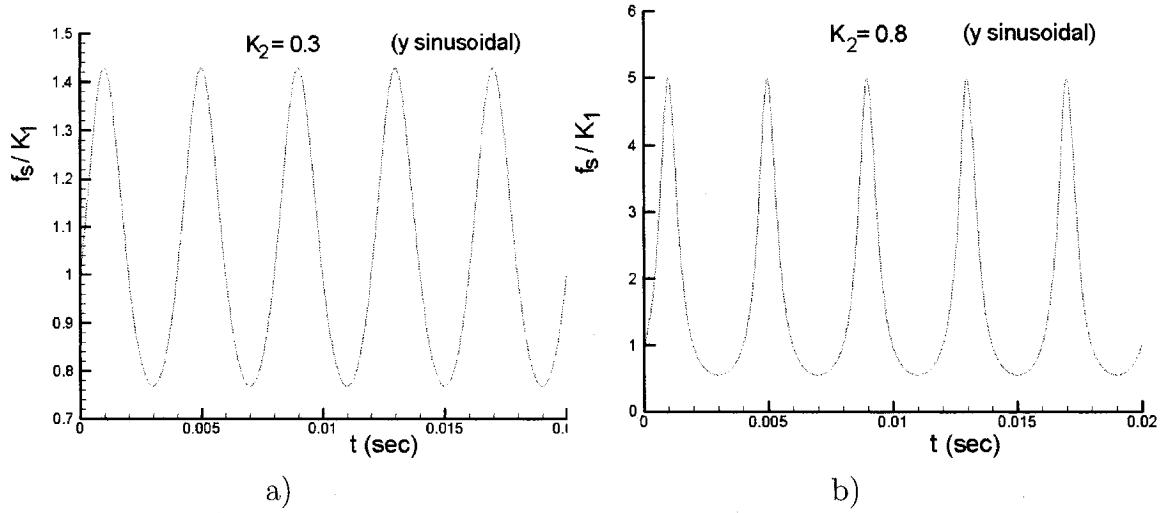


FIG. 2.14 Effet de la non linéarité sur un mouvement sinusoïdal

théorique de la corde donné à la figure 2.10. Comme on le voit, le signal provenant du capteur représente le mouvement de la corde avec une certaine distorsion selon la valeur de  $K_2$ .

#### 2.2.4 Actionneurs

Le premier rôle du mécanisme de contrôle, qui se compose d'un actionneur auquel peut se joindre au besoin des composants mécaniques, est de permettre un ajustement de l'elongation avec la précision requise. De plus, le mécanisme de contrôle de chaque corde doit être le plus petit possible, compte tenu du nombre de cordes et de l'espace limité à notre disposition. Il doit également être autobloquant et peu coûteux. Sur ce dernier point, l'usage d'un actionneur propre à chaque corde représente un coût total important mais nécessaire. Pour l'accordage préalable, une solution faisant appel à des actionneurs en nombre réduit aurait pu être envisagée. Chaque actionneur aurait alors dû être en mesure de contrôler la tension de plus d'une corde. Cependant, cette possibilité ne fut pas étudiée puisque les délais nécessaires au déplacement de certains composants mécaniques auraient à coup sûr

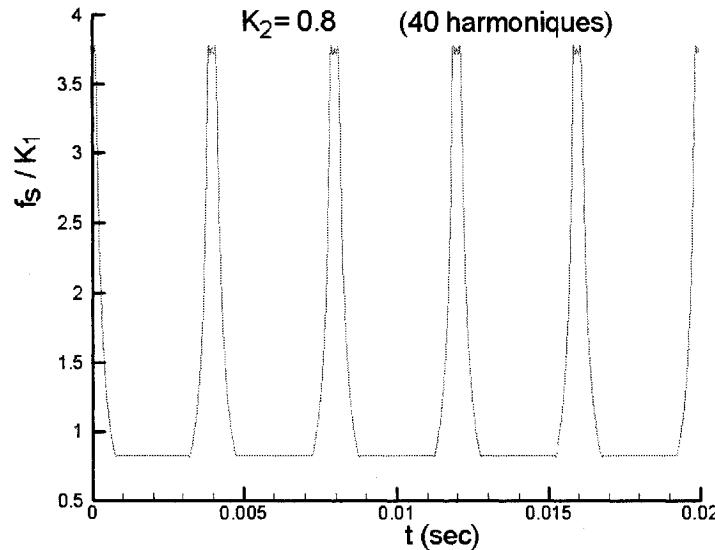


FIG. 2.15 Effet de la non linéarité sur un mouvement de la corde avec 40 harmoniques

éliminé cette solution pour l'accordage en temps réel. De plus, il n'est pas évident qu'une telle solution aurait été profitable puisqu'il aurait fallu un nouveau système complet pour gérer et asservir ces composants en mouvement. Finalement, le mécanisme choisi doit être suffisamment puissant pour pouvoir vaincre les forces en présence et qui sont causées par la corde ainsi que les sources de friction.

Parmi les différentes possibilités, une approche utilisant un moteur combiné à un mécanisme doté d'une vis sans fin et d'une roue dentée pouvait répondre à ces critères. Ce type de mécanisme est autobloquant et permet d'augmenter grandement la précision de l'actionneur tout en diminuant la puissance requise de celui-ci. De plus, l'usage de la roue dentée permet un montage qui n'a pas de limitation quant à l'élongation totale qu'il peut induire dans la corde. Ayant déjà en notre possession un petit moteur pas-à-pas doté de 200 pas, ce choix s'avérait intéressant par rapport à d'autres moteurs à cause de sa simplicité de contrôle. Ce type de moteur donne des positions constantes et facilement reproductibles. Il permet d'exercer un

contrôle sur la tension de la corde sans devoir installer de boucle d'asservissement sur le voltage à envoyer au moteur, ce qui réduit les composants électroniques et le traitement informatique à réaliser. Par ailleurs, plus le nombre de pas du moteur est grand, ce qui est notre cas, plus le rapport de réduction du mécanisme peut être faible ce qui permet de réduire la dimension de la roue dentée.

#### 2.2.4.1 Relation entre la fréquence et le nombre de pas du moteur pas-à-pas

Afin de déterminer le rapport de réduction requis, il faut établir la relation entre la variation de fréquence et le nombre de pas. Pour chaque tour de vis, le déplacement angulaire à la périphérie de la cheville est un arc correspondant à sa circonférence divisée par le nombre de dents. L'élongation  $dl_t$  de la corde enroulée sur la cheville pour un tour complet de la vis est donnée par

$$dl_t = \frac{2\pi r_c}{N} \quad (2.7)$$

où  $r_c$  est le rayon de la cheville et  $N$  le nombre de dents de la roue dentée qui correspond au rapport de réduction. Pour un pas du moteur pas-à-pas, l'élongation  $dl_p$  devient

$$dl_p = \frac{2\pi r_c}{NP} \quad (2.8)$$

$P$  étant le nombre de pas par tour du moteur. L'élongation totale  $l$  pour  $n$  pas est donnée par

$$dl = \frac{2\pi r_c n}{NP} \quad (2.9)$$

$E_Y$ (GPa)	$d$ (m)	$A$ ( $m^2$ )	$\mu$ kg/m	$r_c$ (m)	$L$ (m)	$L_t$ (m)
200	0,00032	8,0425E-8	0,000627	0,003	0,70	1,417

TAB. 2.2 Propriétés mécaniques de la corde

Remplaçant  $dl$  par (2.9) dans l'équation (1.46), on obtient

$$n = \frac{NP}{2\pi r_c} \left[ 8f \frac{L_t \mu}{AE_Y} L^2 \right] df \quad (2.10)$$

Cette dernière équation est valide pour de petits changements de fréquence  $df \ll f$ .

En isolant  $N$ , on obtient

$$N = \frac{2\pi r_c n A E_Y}{8P f L_t \mu L^2 df} \quad (2.11)$$

En fixant comme résolution qu'un pas correspond à un écart de 0,33 ¢, l'équation 1.2 nous donne une valeur de  $df = 0,047$  Hz avec une fréquence de base de 250 Hz. Ainsi, avec  $n = 1$ ,  $f = 250$  Hz et à partir des propriétés de la corde présentées au tableau 2.2 (Bazergui et al., 2002) (Robillard, 2003), on obtient  $N = 37,945$ .

Ainsi, des ensembles de vis sans fin et roue dentée ont été acquis d'une compagnie spécialisée (SDP-SI, 2004). L'ensemble offre un rapport de réduction de 40, c'est-à-dire que chaque tour de cheville demande 40 tours du moteur. Ces pièces peu coûteuses, en nylon et en acétal, donnent un montage compact qui minimise la force de friction. Ce montage est présenté à la figure 2.16.

À titre d'exemple, avec ce montage, où  $N = 40$ , pour un changement  $df = 0,1$  Hz, lorsque  $f = 250$  Hz, le changement requis d'elongation de la corde est de  $dl = 5,41 \mu m$ , ce qui nécessiterait 2,297 pas. Le nombre de pas étant forcément entier, le moteur exécuterait deux pas pour effectuer une telle correction.



FIG. 2.16 Moteur avec vis de transmission

#### 2.2.4.2 Couple du moteur pas-à-pas et auto-blocage

Le moteur que nous avions déjà en notre possession avait une puissance suffisante. Néanmoins, afin de bien connaître nos besoins, dans l'éventualité où il faudra se procurer des moteurs neufs, il était essentiel de connaître le couple requis. Pour le calcul du couple, le mécanisme vis sans fin et roue dentée peut être assimilé à une vis avec écrou bloqué servant à soulever un poids  $W$ . Le poids  $W$  est alors relié à la tension  $T$  de la corde par l'équation suivante :

$$W = \frac{Td}{D} \quad (2.12)$$

$d$  étant le diamètre de la cheville et  $D$  celui de la roue dentée tel que montré à la figure 2.17. Il est alors possible de calculer le couple requis pour le moteur pas-à-pas et de déterminer les conditions nécessaires pour l'autoblocage. La référence de Collins (2003) nous sert de guide dans ces calculs. Nous négligerons la friction des supports de la cheville solidaire de la roue dentée.

La figure 2.18 donne le schéma d'une vis avec écrou bloqué et définit les variables géométriques pertinentes. Le couple requis sera différent selon qu'il s'agit d'aug-

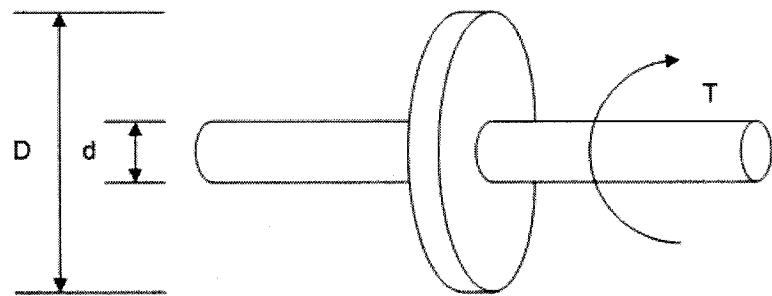


FIG. 2.17 Rapport de diamètre pour une roue dentée

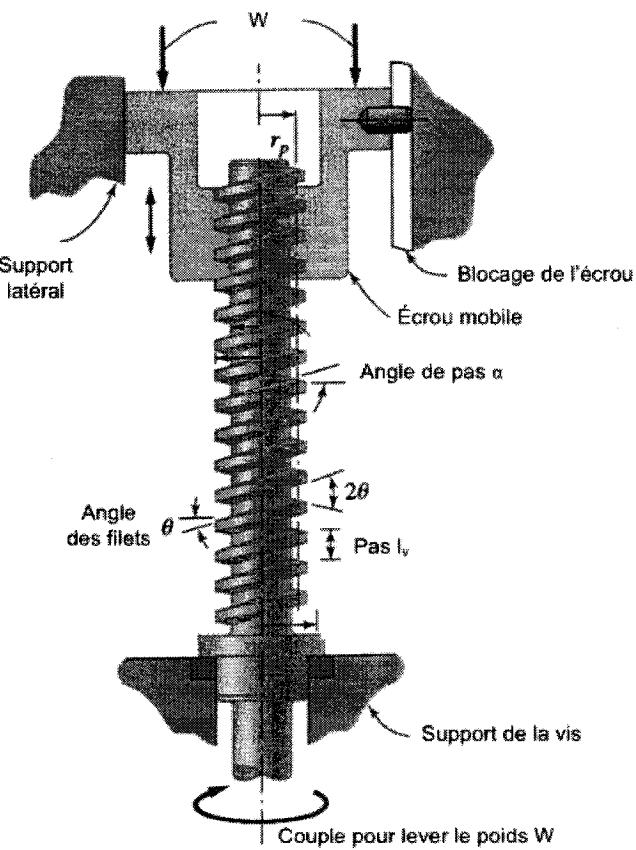


Figure provenant de la référence Collins (2003)

FIG. 2.18 Écrou et vis de transmission

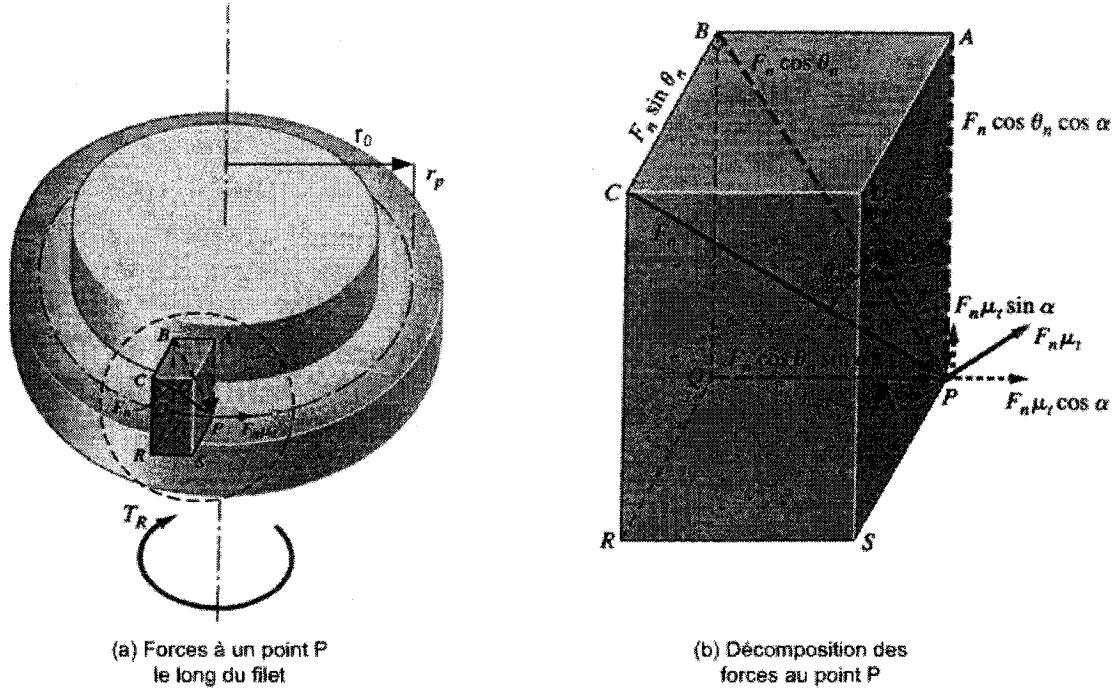


Figure provenant de la référence Collins (2003)

FIG. 2.19 Forces en action dans les filets

menter la tension (soulever le poids  $W$ ) ou de la réduire (descendre le poids  $W$ ). À la composante du poids dans la direction azimutale (plan perpendiculaire à l'axe de la vis) s'ajoute la force de friction. La figure 2.19 donne la décomposition de la force nominale  $F_n$  à un point de contact entre la vis et l'écrou, lorsque la vis est en action pour soulever le poids  $W$ . L'équilibre des forces dans la direction  $z$  donne :

$$W + F_n \mu_t \sin \alpha - F_n \cos \theta_n \cos \alpha = 0 \quad (2.13)$$

Le deuxième terme de l'équation (2.13) correspond à la composante de la force de friction dans la direction verticale,  $\mu_t$  étant le coefficient de friction. La somme des

moments par rapport à l'axe de la vis s'exprime comme suit :

$$\sum M_z^t = T_S - r_p F_n \cos \theta_n \sin \alpha - r_p F_n \mu_t \cos \alpha = 0 \quad (2.14)$$

$r_p$  est le rayon de la vis défini à la figure 2.18.  $T_S$  représente le couple requis pour une rotation qui soulève  $W$ . De l'équation (2.13), on obtient

$$F_n = \frac{W}{\cos \theta_n \cos \alpha - \mu_t \sin \alpha} \quad (2.15)$$

De (2.14) et (2.15), on déduit que

$$T_S = W r_p \left[ \frac{\cos \theta_n \sin \alpha + \mu_t \cos \alpha}{\cos \theta_n \cos \alpha - \mu_t \sin \alpha} \right] \quad (2.16)$$

Dans le cas d'une rotation de la vis qui descend  $W$ , la direction de la force de friction est renversée et  $T_D$  le couple renversé du moteur devient

$$T_D = W r_p \left[ \frac{-\cos \theta_n \sin \alpha + \mu_t \cos \alpha}{\cos \theta_n \cos \alpha + \mu_t \sin \alpha} \right] \quad (2.17)$$

$T_D$  est défini positivement dans le sens de rotation opposé à  $T_S$ . De la figure 2.19b, on déduit que

$$\tan \theta_n = \tan \theta \cos \alpha \quad (2.18)$$

Si, comme c'est le cas pour la vis sans fin utilisée dans notre montage expérimental, l'angle  $\alpha$  est petit,  $\cos \alpha \approx 1$  et  $\theta_n \approx \theta$ . De plus, selon la figure 2.18, nous avons entre  $\alpha$  et le pas de la vis  $l_v$  la relation suivante :

$$\tan \alpha = \frac{l_v}{2\pi r_p} \quad (2.19)$$

En divisant le numérateur et le dénominateur des équations (2.16) et (2.17) par

$\cos\alpha$  et en utilisant la relation (2.19), on obtient

$$T_S = Wr_p \left[ \frac{l_v \cos\theta_n + 2\pi r_p \mu_t}{2\pi r_p \cos\theta_n - l_v \mu_t} \right] \quad (2.20)$$

et

$$T_D = Wr_p \left[ \frac{-l_v \cos\theta_n + 2\pi r_p \mu_t}{2\pi r_p \cos\theta_n + l_v \mu_t} \right] \quad (2.21)$$

À cause de la composante du poids dans la direction azimutale définie par le premier terme du numérateur des expressions (2.20) et (2.21),  $T_S$  et  $T_D$  n'ont pas la même valeur. Cependant, lorsque  $l_v$  est petit par rapport à  $r_p$  ( $l_v = 0,00166$  m et  $r_p = 0,00423$  m), les deux valeurs se rapprochent, la composante du poids dans la direction azimutale devenant petite.

L'autoblocage, c'est-à-dire l'absence de mouvement lorsque  $T_D$  est supprimé, devient possible lorsque le numérateur de l'équation (2.21) devient nul. Par conséquent, la condition d'autoblocage est la suivante :

$$\mu_t > \frac{l_v \cos\theta_n}{2\pi r_p} \quad (2.22)$$

Pour calculer la force requise par le moteur pour tendre la corde, lorsque nous voulons augmenter la tension, nous prenons l'équation (2.16) où  $\theta_n$  est l'angle de pression normal de la roue dentée,  $\mu_t$  est le coefficient de friction et  $\alpha$  est l'angle d'attaque de la vis. Nous avons pour notre vis une valeur  $\alpha = 3,58^\circ$  et une valeur  $\theta_n = 14,5^\circ$ . Le coefficient de friction est approximé à  $\mu_t = 0,25$  pour du nylon frottant sur du nylon et les diamètres pour la vis et la roue sont respectivement  $d_p = 2r_p = 0,008458$  m et  $D = 0,02116$  m. Une corde en acier de longueur vibrante  $L = 70$  cm ajustée en tempérément égal à une fréquence de 261,63 Hz ( $do_4$ ) et une masse linéique de  $\mu = 0,000627$  kg/m. À partir de l'équation (1.39), on peut isoler

$T$  et obtenir la tension dans la corde en fonction de la fréquence ce qui nous donne

$$T = \mu [2L]^2 f^2 \quad (2.23)$$

et une tension de 84,1 N. De l'équation (2.12), avec  $d = 0,006$  m on obtient  $W = 23,85$  N. Enfin, des équations (2.20) et (2.21), on obtient respectivement  $T_S = 0,033$  Nm et  $T_D = 0,019$  Nm.

#### 2.2.4.3 Autres mécanismes

Un mécanisme différent fut aussi envisagé initialement, soit celui d'un bras de levier dont une extrémité agit sur la corde. Cette approche est présentée schématiquement à la figure 2.20. L'extrémité du bras de levier pouvant être très petite, il pourrait être plus facile d'insérer les moteurs dans le clavecin et l'esthétique du clavecin, au niveau des pointes d'accroche, serait moins altérée. L'avantage de cette méthode est qu'elle offre un gain de précision théorique avec l'ajout du bras de levier, donc le moteur peut être moins puissant et moins précis. Le désavantage de cette approche se trouve dans l'utilisation de composants supplémentaires. En effet, le bras de levier devrait être supporté par un pivot et une de ses extrémités aurait malgré tout besoin d'être reliée à un système de roue dentée et vis autobloquante pour avoir une précision suffisante. Par ailleurs, l'approche du bras de levier, à cause de son déplacement possible maximal, limiterait l'ajustement à une certaine plage de fréquences sans faire appel à une intervention humaine. Le principal avantage de cette technique aurait été de faciliter le positionnement des moteurs à l'intérieur du clavecin.

La méthode de réduction de la tension par chauffage contrôlé des cordes ne fut pas retenue à cause des difficultés potentielles que présente le chauffage. Par exemple,

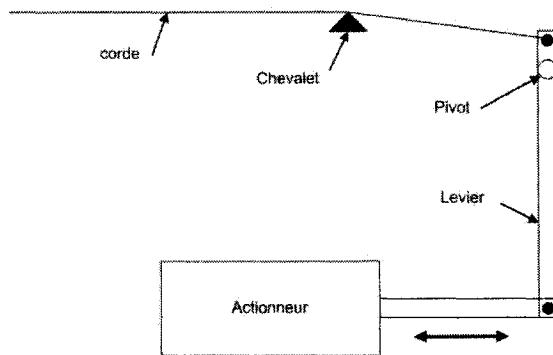


FIG. 2.20 Utilisation d'un levier pour ajuster la tension

avec la dissipation de chaleur, difficile à évaluer pour une corde en vibration, l'atteinte d'un équilibre thermique permettant un accordage précis pourrait demander plusieurs minutes. Il va de soi que cette approche ne pourrait être utilisée pour l'accordage en temps réel.

### 2.2.5 Équipements électroniques et informatiques

Des ressources informatiques sont requises pour l'échantillonnage, les différents calculs mathématiques et le contrôle des actionneurs. Il existe déjà de nombreux appareils pouvant mesurer la fréquence d'un signal électrique, notamment un ordinateur relié à une puissante carte d'acquisition en temps réel. Cette approche ne fut pas retenue car l'objectif du projet était de développer un système minimalist et conçu spécifiquement à nos besoins. L'usage de cartes d'acquisition et d'un ordinateur nous aurait fourni des capacités de traitement largement supérieures à nos besoins. De plus, les coûts d'une telle approche auraient été nettement plus élevés .

L'usage des microprocesseurs fut retenu. Le processeur se devait d'avoir une architecture d'au moins 16 bits afin de fournir une précision suffisante pour les calculs à effectuer et l'expression des résultats en Hz. Par ailleurs, la vitesse du proces-

seur a une certaine importance étant donné le nombre d'opérations qu'il peut être appelé à effectuer dans un court délai. Le principal travail du processeur étant d'ordre numérique, la présence d'un multiplicateur intégré est un atout. De plus, étant donné le nombre éventuel de capteurs et d'actionneurs à contrôler, un nombre élevé de ports entrée/sortie est recherché. Également, la présence d'un convertisseur analogique/numérique performant est nécessaire pour l'échantillonnage. De plus, le convertisseur doit pouvoir atteindre une fréquence de conversion d'au moins 45 kHz afin de pouvoir échantillonner au moins 10 fois plus rapidement que la corde la plus courte, qui vibre à près de 4435 Hz. Quant à la mémoire RAM, elle doit être présente en quantité suffisante pour permettre l'enregistrement rapide des conversions. De plus, une mémoire principale reprogrammable était avantageuse compte tenu du développement à faire avec le processeur.

De nombreux modèles de processeur peuvent remplir ces conditions. La facilité d'utilisation et le coût ont donc été considérés dans le choix. Le modèle retenu est le microcontrôleur MSP430F449 (Texas Instruments, 2004). Celui-ci possède toutes les caractéristiques requises et il coûte moins de 10 \$ l'unité. Les DSP, «Digital Signal Processor», considérés comme solution, étaient trop puissants pour les besoins et donc inutilement chers. Par ailleurs, les FPGA, «Field Programmable Gate Array», ont également été considérés. Une étude rapide a permis de constater que, si ceux-ci pouvaient être utiles à la fin du projet où les 180 cordes du clavecin seraient à contrôler, leur utilisation en début de projet pour des tests sur une à quelques cordes était inappropriée. En effet, les FPGA sont largement utilisés en communications où de multiples canaux doivent être traités simultanément. Leur utilisation pourrait être reconsidérée éventuellement.

Le modèle choisi était fourni avec un support de programmation permettant de programmer le microcontrôleur à partir du port parallèle d'un ordinateur personnel. Le microcontrôleur utilisé est bâti sur une architecture RISC à 16 bits et il peut

fonctionner jusqu'à 8 MHz. Il consomme très peu de courant ce qui est intéressant dans la mesure où plus d'un microcontrôleur, de l'ordre d'une quinzaine, serait présent dans un prototype complet et que celui-ci fonctionnerait sur pile. De plus, le modèle choisi possède une mémoire de type FLASH de 60 KB et de 2 KB de RAM. La mémoire FLASH peut être reprogrammée électriquement ce qui permet donc un développement facile et pratique. Les 60 KB sont bien suffisants pour l'écriture de l'ensemble du programme. Le support de programmation permet de coder en assembleur et en langage C.

Afin de faciliter le développement du programme et la réalisation de tests, il était souhaitable d'avoir un certain contrôle et un retour d'information avec le processeur utilisé. C'est pourquoi un clavier à 12 touches et un écran LCD de format WM-c1602m de la compagnie *Wintek* (Epsilon, 2004) ont été branchés au processeur. Les schémas électroniques de l'ensemble des composants utilisés sont présentés à l'annexe 6.

## CHAPITRE 3

### LA BOUCLE DE CONTRÔLE

Ce chapitre contient la description de la tâche exécutée par le microcontrôleur pour effectuer l'accordage préalable d'une corde de clavecin. La différence entre la fréquence fondamentale désirée, ou fréquence de référence  $f_r$ , et la fréquence fondamentale mesurée  $f_m$  détermine le nombre d'impulsions à envoyer au moteur pas-à-pas qui corrige la tension en conséquence.

#### 3.1 Algorithmes de la boucle de contrôle

L'asservissement de la corde de clavecin se fait par contrôle en boucle fermée. Le schéma global du système est montré à la figure 3.1. L'excitation peut être contrôlée par le microcontrôleur. Pour estimer la fréquence de la corde, le signal électrique du capteur est échantillonné par le microcontrôleur qui estime la fréquence fondamentale du signal  $f_m$ . En soustrayant  $f_m$  à la fréquence de référence  $f_r$ , on obtient l'écart de fréquence  $\Delta f$  qui sert ensuite à calculer le nombre de pas que doit exécuter le moteur. L'algorithme général pour un ensemble de cordes est donné à la figure 3.2. Dans le cadre du présent travail, une seule corde était impliquée et l'algorithme simplifié est donné à la figure 3.3.

##### 3.1.1 Algorithme général

Pour un ensemble de cordes donné, assujetti à un microcontrôleur, celles-ci seraient prises séquentiellement et ajustées de façon à rejoindre les fréquences de référence  $f_r$

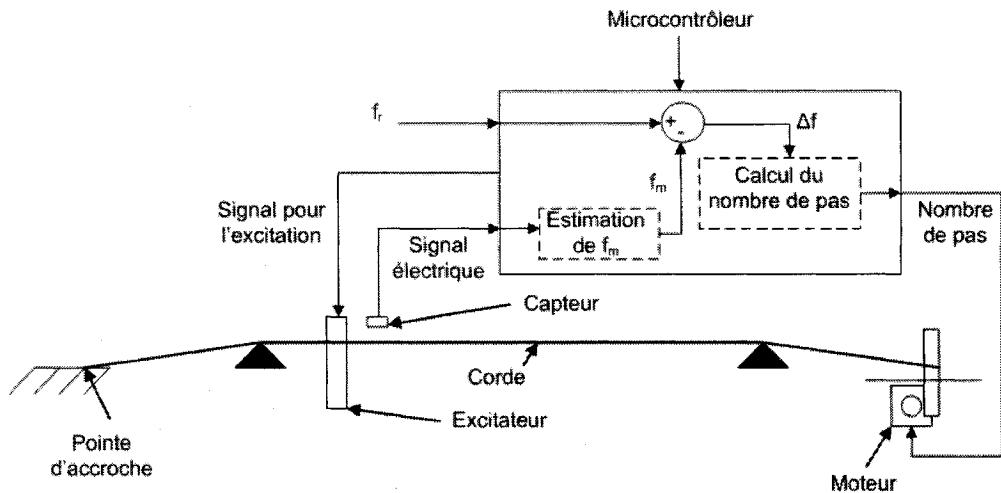


FIG. 3.1 Schéma global du système

propres à chacune d'elles. En fait, puisque chaque octave comporte douze divisions et que les fréquences d'une octave sont des multiples de 2 de l'octave inférieure, il suffit de stocker douze valeurs numériques pour chaque tempérament. L'ajustement d'une corde donnée débute par son excitation. Cette excitation serait déclenchée par le biais d'un solénoïde agissant sur la touche qui soulève un sautereau. La détection de la vibration serait faite par un capteur selon la description donnée au chapitre 2. L'échantillonnage du signal en provenance du capteur survient après un court laps de temps (quelques dizaines de millisecondes) nécessaire pour éviter le transitoire d'attaque. Une transformée de Fourier (FFT) fournit un estimé initial de la fréquence fondamentale et des premiers harmoniques. Cet estimé de la fréquence fondamentale sert ensuite de donnée source à un algorithme particulier, l'estimateur de Quinn et Fernandes (QF) (Quinn et al., 2001), lequel, à partir de l'estimé de la FFT, produit un nouvel estimé plus précis de la fréquence fondamentale. Alternativement, étant donné l'importance de la fondamentale par rapport aux harmoniques supérieurs, on peut substituer à ces deux procédures un estimateur direct (ED) qui détermine le moment précis du passage d'un niveau donné par

le signal. Si  $|f_m - f_r| = \Delta f < \Delta f_a$ ,  $\Delta f_a$  étant l'écart de fréquence acceptable, la corde est correctement ajustée en fréquence et la corde suivante est considérée. Si  $\Delta f > \Delta f_a$ , le nombre d'impulsions à transmettre au moteur pas-à-pas est calculée selon les formules (1.45) et (2.9). Le moteur corrige ensuite la tension de la corde. Finalement, si la vibration de la corde est encore présente avec une amplitude suffisante, c'est-à-dire si le nombre d'échantillonnages effectué  $i$  est inférieur au nombre d'échantillonnage maximum  $M$  permis par le programme, il n'y a pas de nouvelle excitation et un autre échantillonnage peut être fait immédiatement.

### 3.1.2 Algorithme simplifié

Le présent travail avait une boucle de contrôle réduite et l'algorithme simplifié correspondant est donné à la figure 3.3. La boucle entièrement automatisée n'inclut pas l'excitateur dont l'action est déclenchée manuellement, de même que le balayage d'un ensemble de cordes. L'automatisation ne concerne donc que l'ajustement de la tension de la corde considérée selon la description donnée dans le schéma général. Une fois la corde excitée, le lancement du programme est fait manuellement de sorte que l'intervalle de temps entre l'action de l'excitateur et le début de l'échantillonnage n'est pas constant (de 0,1 seconde à 0,5 seconde).

## 3.2 Estimateurs servant à la détection de la fréquence

Trois estimateurs de fréquence fondamentale ont été utilisés, la transformée de Fourier (FFT), l'estimateur Quinn et Fernandes (QF) et un estimateur direct (ED). Chacun de ces estimateurs comporte des avantages et des inconvénients. Ces estimateurs sont présentés dans les sections suivantes.

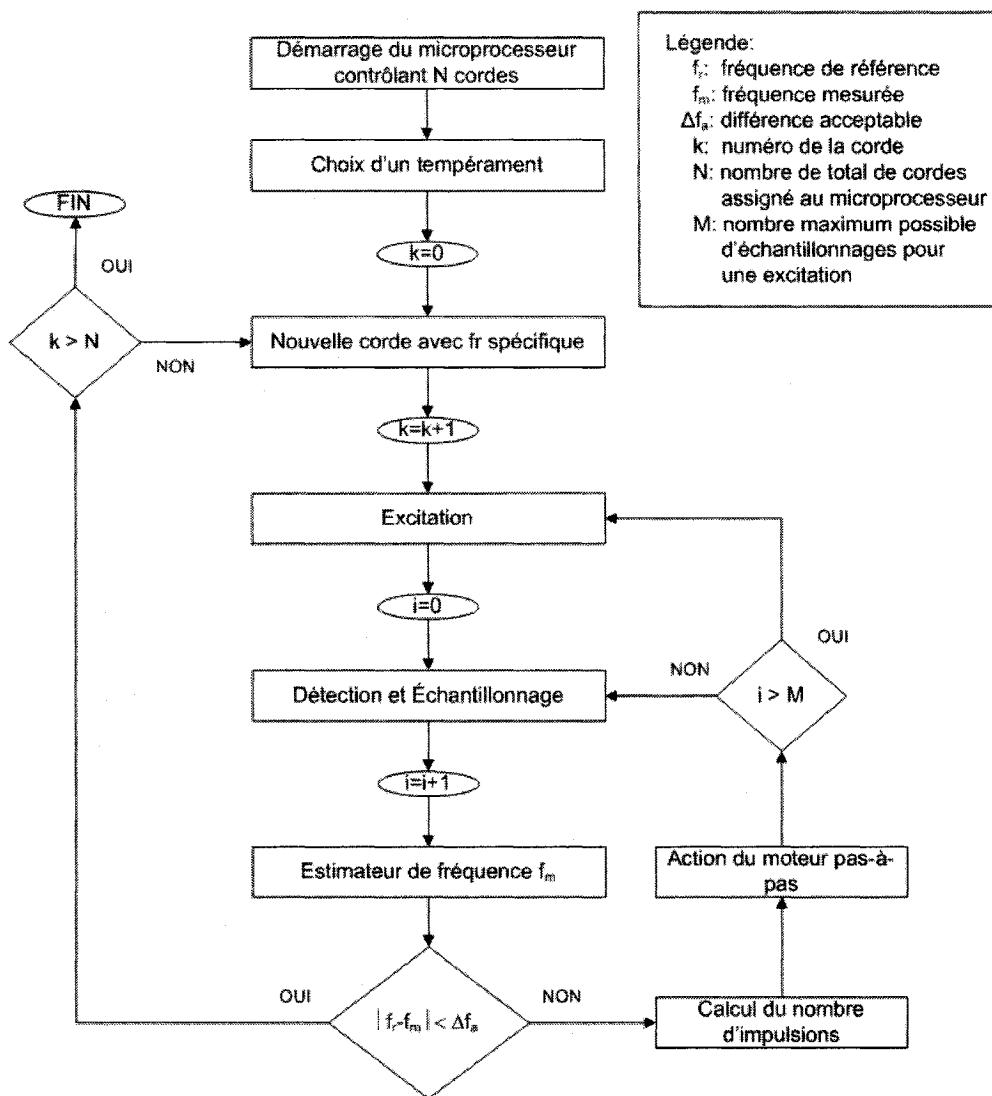


FIG. 3.2 Boucle de contrôle pour un ensemble de cordes

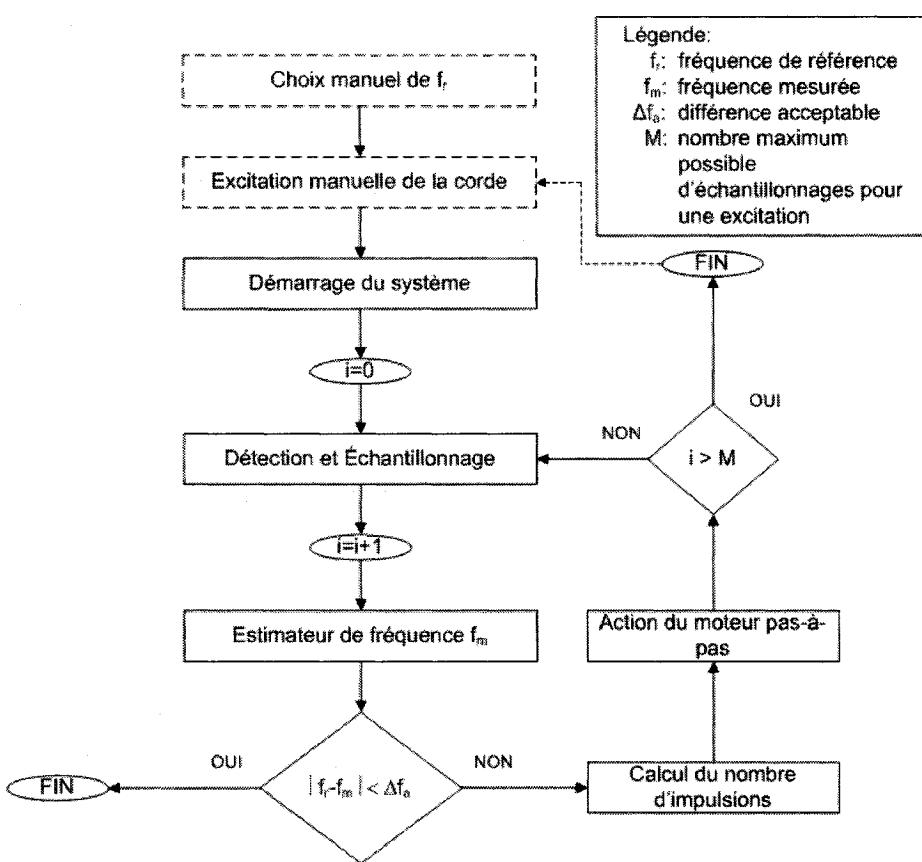


FIG. 3.3 Boucle de contrôle simplifiée

Il est à noter que quel que soit l'algorithme utilisé pour mesurer la fréquence fondamentale, l'erreur obtenue dépend fortement de la façon dont la période du signal à mesurer  $f_s$  est partagée par les intervalles d'échantillonnage  $\Delta = 1/f_e$ . L'erreur est minimisée quand cette période est partagée par un nombre entier de  $\Delta$ . Comme on ne connaît pas à priori  $f_s$ , l'estimation de la précision de l'algorithme doit être basée sur le plus mauvais partage donnant l'erreur maximum.

### 3.2.1 Estimateur direct (ED)

L'estimateur direct tel qu'utilisé dans le cadre de ce travail est basé sur le fait que la fondamentale génère un pic marqué à chaque cycle. La figure 3.4 définit la méthode employée. Un niveau de passage est prédéterminé de façon à éviter les oscillations des harmoniques autres que la fondamentale et l'instant précis où le signal traverse ce passage en décroissant est obtenu par interpolation linéaire. La période  $T_a$  pour un cycle de la fondamentale est ainsi obtenue. Une moyenne  $\bar{T}_a = 1/f_m$  prise sur un certain nombre de cycles fournit la fréquence mesurée. Mise à part la valeur du niveau choisi, cet estimateur correspond à l'approche employée pour déterminer la fréquence d'un signal sinusoïdal désignée par le terme «passage au zéro» ou, en anglais, par le terme «zero crossing».

Il est nécessaire pour cette approche que la fondamentale produise un pic unique clairement identifiable, comme c'est le cas pour le signal que nous avons détecté lors des mesures. Une précision de l'ordre de deux cents requiert que chaque cycle soit défini par un nombre suffisant de points (ex : 15 à 20 points) et que la moyenne soit prise sur un certains nombre de cycles (ex : 10 à 15 cycles). Par exemple, pour un signal  $f_s = 250$  Hz, qui correspond au signal testé au chapitre 4, une fréquence d'échantillonnage  $f_e = 5000$  Hz avec fenêtre d'échantillonnage  $T_e = 0,06$  s, donnant  $N_e = 300$ , satisfait ces conditions. En effet, on obtiendrait alors une quinzaine de

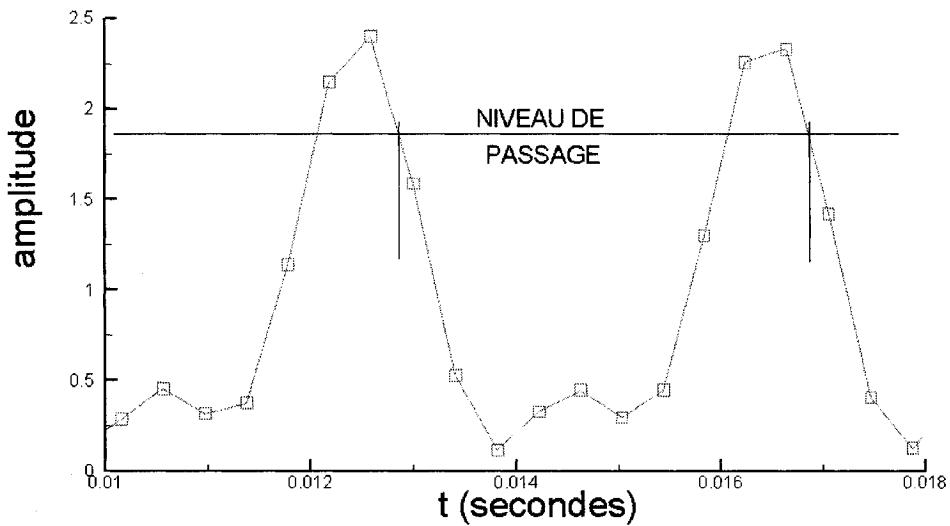


FIG. 3.4 Détermination de la période d'un cycle par l'estimateur direct  
cycles définis par 20 points chacun.

### 3.2.2 Transformée de Fourier Rapide (FFT)

Il nous faut calculer la fréquence fondamentale et les harmoniques des cordes en vibration. La transformée de Fourier se veut une technique reconnue pour obtenir ces fréquences. Il existe de nombreuses techniques de FFT et les plus vieux algorithmes sont apparus il y a environ 40 ans déjà. L'objectif du projet n'étant pas de trouver une nouvelle approche mais simplement de trouver les fréquences présentes dans le signal, il convient amplement de prendre les algorithmes les plus simples même s'ils ne devaient pas être les plus rapides. En effet, la différence de temps de calcul entre deux algorithmes est souvent très minime (Johnson et al., 2004). Par ailleurs, les données que nous avons à traiter dans ce projet représentent un cas très simple pour lequel ces algorithmes sont depuis longtemps éprouvés. La transformée de Fourier et l'algorithme utilisé sont décrits en détail à l'annexe 3.

Il est à noter que lorsque l'on travaille dans le domaine musical, la FFT présente le désavantage d'avoir une précision constante pour toutes les fréquences couvertes. En effet, la précision de la FFT est la même selon le temps d'échantillonnage peu importe que les fréquences du signal échantillonné soient élevées ou basses. Pour une même précision en cents, la précision absolue en Hz de l'accordage se doit d'être meilleure pour les cordes vibrant aux plus basses fréquences.

### 3.2.3 Algorithme de Quinn et Fernandes (QF)

La précision de la FFT étant souvent insuffisante, c'est ici que l'algorithme QF intervient. Lorsque la FFT est terminée, nous avons à notre disposition un estimé initial fiable de la fondamentale de la corde à l'étude. Cet estimé est pris comme point de départ par l'algorithme QF pour estimer avec grande précision cette même fondamentale. L'algorithme QF fut choisi car il est très performant, rapide et simple en ce qui a trait à la programmation. Il est pris directement du livre de Quinn (2001).

L'algorithme débute en posant  $\Psi_1 = 2\pi \frac{f_1}{f_e}$  comme une valeur représentant l'estimé initial, directement proportionnel au rapport entre la fréquence estimée  $f_1$  et la fréquence d'échantillonnage. Avec  $j = 1$  pour la première itération, nous posons donc

$$\alpha_1 = 2 \cos(\Psi_1) \quad (3.1)$$

Pour  $j \geq 1$ , il est posé

$$\xi(t) = y(t) + \alpha_j \xi(t-1) - \xi(t-2) \quad (3.2)$$

pour  $t=0, \dots, T-1$  où  $\xi(t)=0$ ,  $t<0$  et  $y(t)$  représente les valeurs échantillonnées.

Nous avons ensuite

$$\beta_j = \alpha_j + 2 \frac{\sum_{t=0}^{T-1} y(t)\xi(t-1)}{\sum_{t=0}^{T-1} \xi^2(t-1)} \quad (3.3)$$

Si  $|\beta_j - \alpha_j|$  est suffisamment petit, alors nous avons  $\Psi = \cos^{-1}(\beta_j/2)$  et  $f_m = \frac{\Psi f_e}{2\pi}$ . Sinon, nous posons  $\alpha_{j+1} = \beta_j$  et nous retournons à l'équation (3.2).

L'algorithme QF est une procédure itérative qui procède à un filtrage. Néanmoins, l'algorithme en tant que tel n'est pas encore soutenu par une démonstration mathématique. Il semble davantage le fruit de déductions empiriques faites à partir d'autres algorithmes déjà connus. Il se base sur l'observation qu'il est possible de filtrer une sinusoïde avec un filtre du second ordre. La procédure pour trouver l'estimateur ne garantit en rien que le calcul converge à tout coup. L'usage d'un facteur 2, tel que proposé par les auteurs sert à accélérer la convergence.

Pour une très faible augmentation du temps de traitement numérique, il permet une très nette amélioration de l'estimé déjà obtenu par la FFT pour une fréquence fondamentale. Les figures 3.5a et 3.5b représentent l'erreur maximale en valeur absolue,  $|f_m - f_s|_{max}$ , en Hz et en cents respectivement de la FFT et de QF en fonction de la fréquence d'un signal sinusoïdal. La fréquence d'échantillonnage est de 2000 Hz avec 512 points et l'estimateur fait trois itérations successives. On remarque l'erreur presque nulle et constante de QF contrairement à la FFT dont l'erreur est bien plus élevée mais diminue avec l'augmentation de la fréquence  $f_s$ . En se référant à l'objectif d'une précision de deux cents sur la fréquence, la nécessité de QF succédant à la FFT ne fait aucun doute.

De par sa nature, l'algorithme QF produit des estimés dont la précision est susceptible d'être influencée par le nombre de points utilisés et la fréquence d'échantillonnage. Également, l'algorithme se prête à l'itération en se servant du résultat qu'il

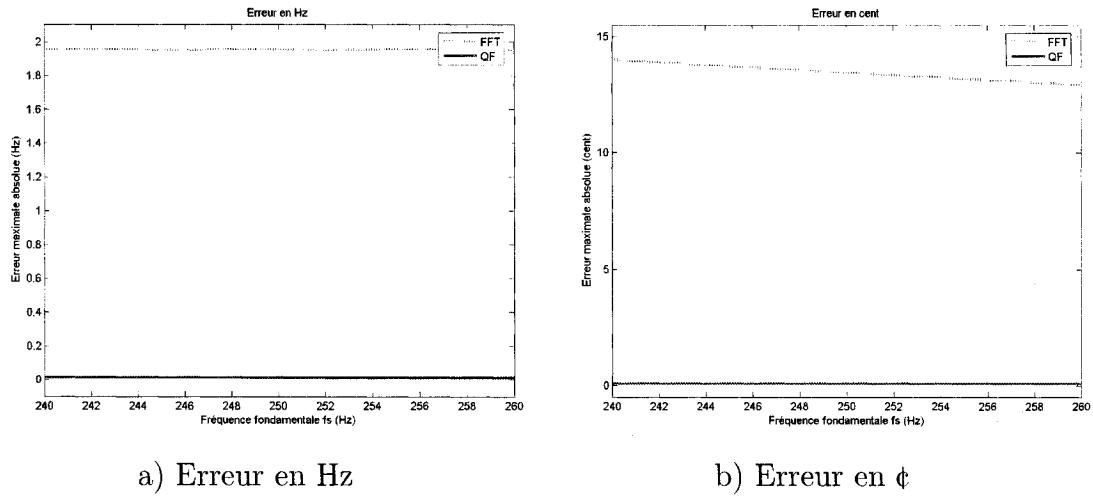


FIG. 3.5 Variation de l'erreur de la FFT et de QF

trouve comme nouvel estimé. Dans le but d'optimiser le traitement du signal par l'algorithme QF, les tests suivants ont été effectués en utilisant le logiciel *Matlab* (Mathworks, 2004).

Pour un signal sinusoïdal ayant une fréquence  $f_s = 250$  Hz et échantillonné à  $f_e = 1500$  Hz, le nombre de points  $N_e$  fut varié de 32 à 512 en n'effectuant qu'une seule itération de l'estimateur. L'estimé initial était constant et fourni arbitrairement à 245 Hz. La figure 3.6 montre la variation de l'erreur maximale absolue selon le nombre de points. Les résultats montrent que cette erreur varie très peu une fois qu'on utilise au moins 150 points. Il y a donc peu d'avantages à utiliser un nombre de points supérieur pour atteindre les objectifs du projet. À cette fréquence  $f_s$ , une erreur de deux  $\phi$  représente approximativement 0,3 Hz ce qui nécessite au moins 100 points. Il est à noter que des variations locales de l'erreur, en lien avec la présence d'un nombre entier ou fractionnaire de cycles dans la fenêtre d'échantillonnage, existent mais ne sont pas représentées. On s'en tient à l'erreur maximale absolue puisque  $f_s$  ne peut pas être connu à l'avance et que c'est le pire cas  $|f_m - f_s|_{max}$  qui doit nous servir de guide.

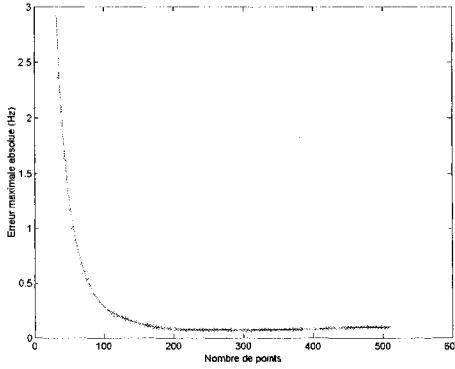


FIG. 3.6 Variation de l'erreur de QF selon  $N_e$

Toujours pour le même signal sinusoïdal à  $f_s = 250$  Hz, la figure 3.7 montre l'erreur maximale absolue selon la fréquence d'échantillonnage.  $N_e$  était constant à 512 et  $f_e$  variait de 600 à 2600 Hz. Globalement, presque toutes les  $f_e$  utilisées ont donné une erreur inférieure à 2 ¢. C'est lorsque  $f_e$  correspond à 4 fois la fréquence fondamentale du signal que l'erreur est la plus faible. L'erreur augmente ensuite graduellement avec l'augmentation de  $f_e$ . Il est donc souhaitable que la  $f_e$  utilisée se rapproche le plus possible d'une fréquence 4 fois plus rapide que  $f_s$ . Néanmoins, l'erreur n'augmente pas de façon importante avec  $f_e$  et, afin d'accélérer le temps de traitement,  $f_e$  pourrait être plus élevée sans affecter grandement la précision. Le passage par zéro de l'erreur représente un changement de signe dans l'erreur qui est présentée en valeur absolue sur le graphique.

Pour vérifier l'impact de l'estimé initial, les deux mêmes simulations ont été exécutées mais cette fois avec un estimé initial de 249 Hz qui se situe ainsi beaucoup plus près de la valeur réelle du sinus qui est de 250 Hz. Les figures 3.8a et 3.8b montrent les variations de l'erreur selon le nombre de points et selon la fréquence d'échantillonnage respectivement. La valeur moyenne de l'erreur est plus faible dans les deux cas ce qui est tout à fait logique. Dans le cas de la figure 3.8a, on constate que

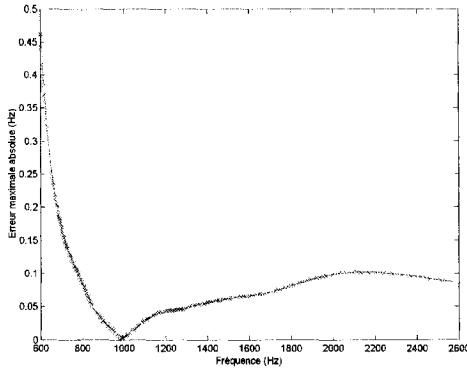


FIG. 3.7 Variation de l'erreur de QF selon  $f_e$

l'augmentation du nombre de points permet d'améliorer le résultat continuellement contrairement à la figure 3.6 où l'erreur avait atteint un plateau. Dans le cas de l'erreur en fonction de  $f_e$ , on remarque qu'elle suit une augmentation très linéaire après avoir dépassé 1000 Hz.

Évidemment, le nombre d'itérations exécuté affecte la précision dans le même sens qu'une amélioration de l'estimé initial. Par exemple, les figures 3.9a et 3.9b, dans les mêmes conditions que précédemment sauf avec un estimé initial de 245 Hz et l'exécution de trois itérations de l'estimateur, présentent les variations de l'erreur de QF. L'observation des graphiques obtenus permet de constater une nette diminution de l'erreur absolue par rapport aux résultats originaux des figures 3.6 et 3.7. Cependant, si nous les comparons à ceux réalisés avec une seule itération et un estimé initial de 249 Hz, on constate que les courbes sont très semblables. Cela signifie que la majeure partie de la correction s'effectue lors de la première itération. Les itérations suivantes permettent de diminuer encore l'erreur mais de manière non significative pour nos objectifs. Ainsi, il apparaît superflu d'exécuter plus d'une itération pour l'estimateur. Ces performances sont théoriques puisque le signal échantillonné est un sinus parfait. Pour un signal fortement bruité, ces per-

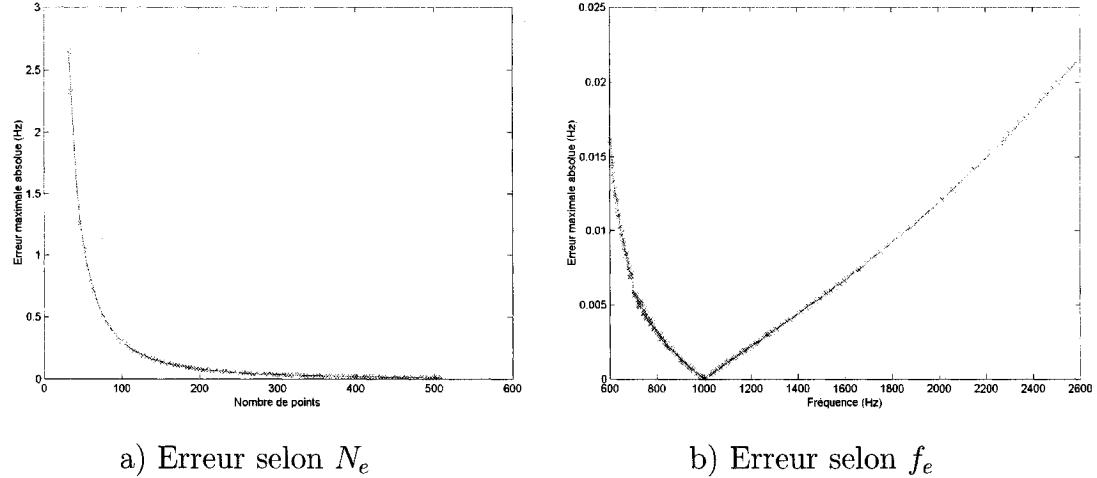


FIG. 3.8 Variation de l'erreur de l'estimateur QF avec un estimé précis

formances risquent d'être moins bonnes et certains paramètres, comme le nombre d'itérations, pourraient voir leur impact être modifié.

Globalement, l'algorithme performe bien et on peut s'attendre à ce que les résultats soient très bons lors des tests expérimentaux. En n'exprimant pas l'erreur en valeur absolue, on aurait pu constater que l'estimateur QF a tendance à sous-estimer légèrement la fondamentale du signal. En conclusion, il semble que  $f_e$ , en autant qu'on ait un estimé assez précis ou qu'on fasse plusieurs itérations, peut être choisie sur une plage assez grande quoique quatre à cinq fois la valeur de  $f_s$  semble l'idéal. Dans le cas du nombre de points, il semble qu'un grand nombre de points ne soit pas garant de meilleurs résultats. Environ 130 à 150 points semblent amplement suffisant. Tous les scripts *matlab* ayant servi à produire ces simulations sont données à l'annexe 5.

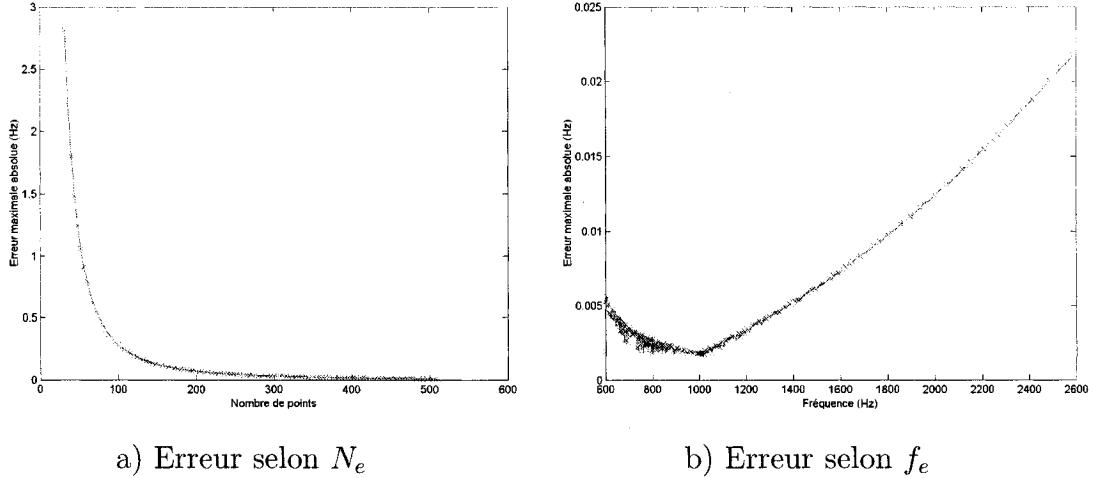


FIG. 3.9 Variation de l'erreur de l'estimateur QF avec trois itérations

### 3.2.4 Numérisation et validation

Le code de la boucle de contrôle a été écrit en assembleur. Le programme actuel permet à un utilisateur de choisir la fréquence de référence désirée pour ajuster la corde à l'aide d'un clavier à douze touches. Ce même clavier permet de démarrer l'ajustement en appuyant sur le bouton approprié. Le système permet l'exécution de plusieurs boucles de contrôle automatiquement selon les spécifications fournies.

L'écriture du programme a amené quelques contraintes dans le choix de  $f_e$ . Au départ, on doit respecter le critère de Nyquist  $f_s/f_e \leq 1/2$ . Dans la programmation de QF, on a posé la contrainte additionnelle  $f_s/f_e \leq 1/4$ . Cependant, pour des raisons numériques, plus  $f_e$  est faible, plus la précision de la réponse est grande. On a donc intérêt, tout en respectant le critère précédent, à ne pas utiliser des fréquences d'échantillonnage trop élevées, lesquelles réduisent la précision. Ceci est d'autant plus vrai qu'à cause de la non-linéarité de la fonction cosinus inverse présente dans QF, il s'est avéré très souhaitable, pour les mêmes raisons de précision, que  $f_s/f_e \geq 1/11$ . Par ailleurs, plus le rapport  $f_s/f_e$  diminue, plus l'imprécision en

<i>Générateur</i>	<i>Fréquencemètre</i>	<i>Microcontrôleur</i>
99,970	99,9	99,96
100,000	100,0	100,01
200,000	199,9	199,96
250,000	249,9	249,97
250,030	250,0	250,0
250,050	250,0	250,0
250,050	250,0	250,02
250,080	250,0	250,02
250,080	250,0	250,02
250,110	250,1	250,07
260,000	259,9	259,94
260,000	259,9	259,94
300,000	299,9	299,96

TAB. 3.1 Comparaison de fréquences mesurées

cents augmente. À titre d'exemple, pour  $f_s = 250$  Hz, avec une  $f_e$  de 2520 Hz, la résolution est approximativement de 0,049 Hz alors qu'avec une  $f_e$  de 1280 Hz, la résolution est approximativement de 0,025 Hz. En cents, on obtient respectivement 0,34 ¢ et 0,17 ¢.

Le programme du microcontrôleur a été validé de différentes manières. On a d'abord échantillonné le signal provenant d'un générateur de fréquences numérique pouvant fournir un signal avec une fréquence précise au millième de Hz près. La  $f_e$  du microcontrôleur était de 1280 Hz avec 512 points pour la FFT qui fournissait l'estimé initial à l'estimateur QF. Un seul cycle de l'estimateur, avec les 256 premiers points, était effectué. Cette  $f_e$  plutôt lente et ce  $N_e$  furent choisis afin de minimiser l'erreur potentielle de l'estimé initial. Ce même signal numérique était également lu par un fréquencemètre numérique qui servait de point de comparaison pour les tests expérimentaux. Les résultats obtenus sont montrés au tableau 3.1. Ces résultats montrent la stabilité et la grande efficacité de l'estimateur QF utilisé dans le calcul de la fréquence. Comme pour les résultats en simulation, on peut constater la

tendance du microcontrôleur à sous-estimer légèrement la fréquence fondamentale du signal. On remarque un effet semblable sur le fréquencemètre. Ces tests réussis nous ont permis de passer aux essais expérimentaux.

## CHAPITRE 4

### LES RÉSULTATS EXPÉIMENTAUX

Ce chapitre présente l'ensemble des résultats expérimentaux obtenus lors des tests effectués avec le montage final. Différents paramètres sont mesurés et comparés afin de montrer les capacités actuelles du système et vérifier si celui-ci répond aux objectifs fixés. La corde fut ajustée à une fréquence d'environ 250 Hz à l'aide des oscilloscopes analogique et numérique. Cette fréquence fut choisie car elle était située à quelques hertz sous la fréquence d'accordage du *do<sub>4</sub>*, normalement accordé à 261,63 Hz en tempérament égal, dont la corde a une longueur vibrante  $L = 0,70$  m reproduite dans le montage. Ce choix se justifie par le fait que le *do<sub>4</sub>* se situe dans l'octave au milieu du spectre de fréquences couvert par un jeu de huit pieds sur un clavecin. La réduction de fréquence de 261,3 Hz à 250 Hz visait à atténuer les risques de rupture de la corde.

Ce chapitre est divisée en deux parties : la première concerne la mesure du signal détecté, la seconde concerne l'ajustement automatisé de la fréquence.

#### 4.1 Mesure du signal détecté

##### 4.1.1 Amplitude en fonction du temps

###### 4.1.1.1 Corde d'acier

Un exemple typique du signal numérisé, représentant la détection d'un champ magnétique montré à la figure 2.6 sur un montage correspondant à la figure 2.4, est

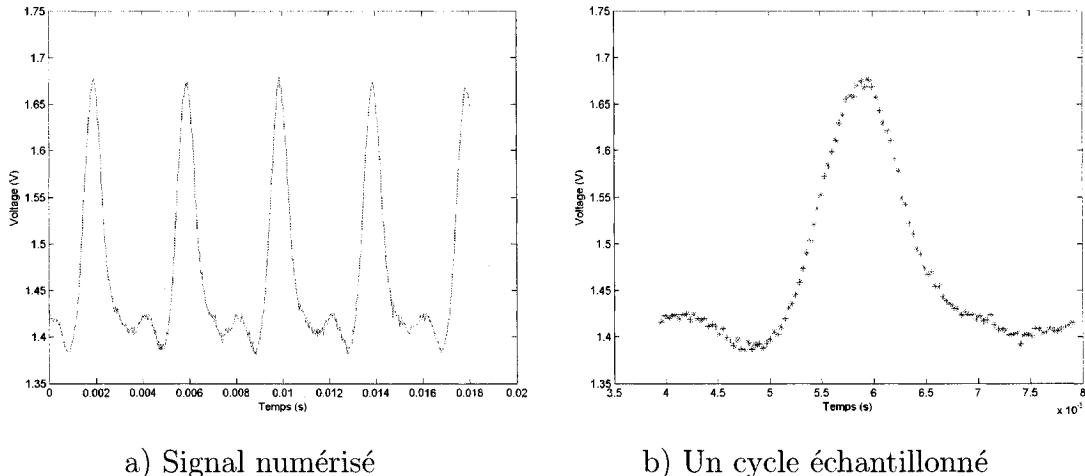


FIG. 4.1 Signal d'une corde vibrant à 250 Hz échantillonné à  $l_e=15,6$  cm

donné à la figure 4.1. La corde de longueur vibrante  $L = 70$  cm était excitée à la position  $L_e = 10,6$  cm et le capteur était placé à  $L_c = 15,6$  cm. La fréquence de la fondamentale  $f_s$  était de 250 Hz, telle qu'estimée par l'oscilloscope numérique. La fréquence d'échantillonnage  $f_e$  était de 28 348 Hz. Le nombre de points  $N_e$  était 512, ce qui donne une fenêtre d'échantillonnage  $T_e = 18,06$  ms (millisecondes). La figure 4.1a représente le signal occupant toute la fenêtre. L'ordonnée donne le voltage du capteur. Les variations de voltage observées correspondent aux variations de position verticale de la corde. La figure 4.1b représente un seul cycle de la figure 4.1a, chacun des 113 points étant représenté par un symbole. Ce signal comporte de façon évidente des harmoniques autres que la fondamentale et se compare dans une certaine mesure à la figure 2.8. En effet, on remarque immédiatement la présence du deuxième harmonique à cause de la crête qui se situe dans le bas des oscillations de la fondamentale. La crête n'étant pas parfaitement centrée entre les pics, le deuxième harmonique serait légèrement déphasé par rapport à la fondamentale.

Le même signal  $f_s$  a été échantillonné à une fréquence  $f_e = 3470$  Hz en gardant le nombre de points à  $N_e = 512$ , pour une fenêtre d'échantillonnage  $T_e = 147,5$  ms,

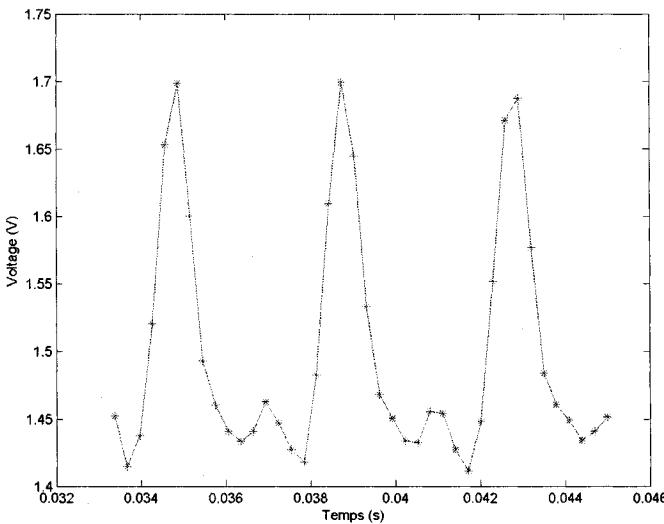


FIG. 4.2 Quelques cycles du signal

de façon à couvrir approximativement 37 cycles. La figure 4.2 représente quelques cycles de ce signal tel que mesuré, les échantillons étant définis par des symboles étoilés. Chaque cycle comporte environ 14 points.

La figure 4.3 donne le spectre d'amplitude de ce signal, tel que fourni par la FFT. L'ordonnée de ce graphique donne les amplitudes du voltage correspondant à chaque harmonique. Le spectre d'amplitude montre la présence de cinq harmoniques avec une amplitude nettement plus grande pour la fondamentale. L'importance relative des harmoniques théoriques calculées à la section 2.2.3, en prenant la fondamentale comme référence, est donnée par des \* sur la figure 4.3. On se rend compte que dans l'ensemble, l'importance relative des harmoniques du signal mesuré correspond d'assez près avec celles de la figure 2.5, ce qui indique que le capteur n'induit pas un effet non linéaire important.

Afin de comparer l'impact du positionnement du capteur, une lecture du signal a été

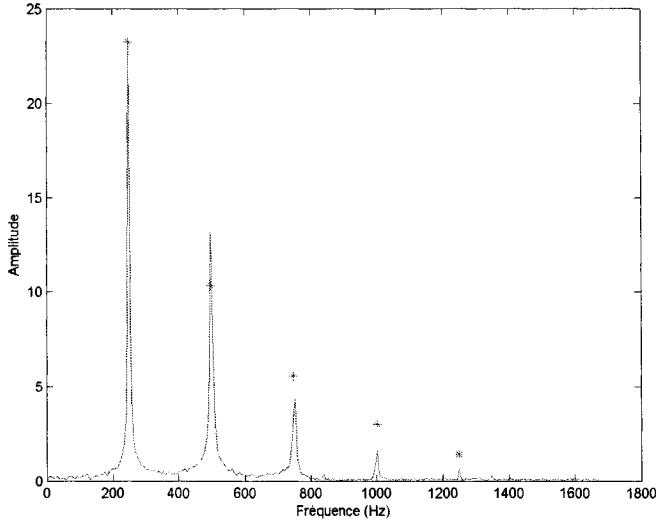


FIG. 4.3 Spectre d'amplitude

exécutée en plaçant le capteur au centre de la corde soit à  $L_c = 35$  cm du sillet. Le signal recueilli au centre, dans les mêmes conditions que pour la figure 4.1a est présenté à la figure 4.4a. On constate que le signal oscille d'une façon qui se rapproche davantage d'une sinusoïde. La figure 4.4b présente le spectre d'amplitude pour un échantillonnage au centre de la corde obtenu à partir des mêmes conditions que celui de la figure 4.3. Théoriquement, le second harmonique n'existe pas au centre. Celui très faible apparaissant sur le spectre d'amplitude est vraisemblablement dû à un ensemble de facteurs ; rigidité du montage, positionnement du capteur, distribution du champ magnétique et possiblement un effet de non linéarité. La position au centre donne donc un signal beaucoup plus modulé sur la fondamentale. À l'inverse, la position proche du sautereau donne un signal influencé davantage par les différents harmoniques. Selon ces premiers essais, les performances du capteur, pour déterminer avec précision la fondamentale, ne sont pas affectées par sa position. La position proche du sautereau, à  $L_c = 15,6$  cm du sillet, fut donc retenue pour l'ensemble des autres tests.

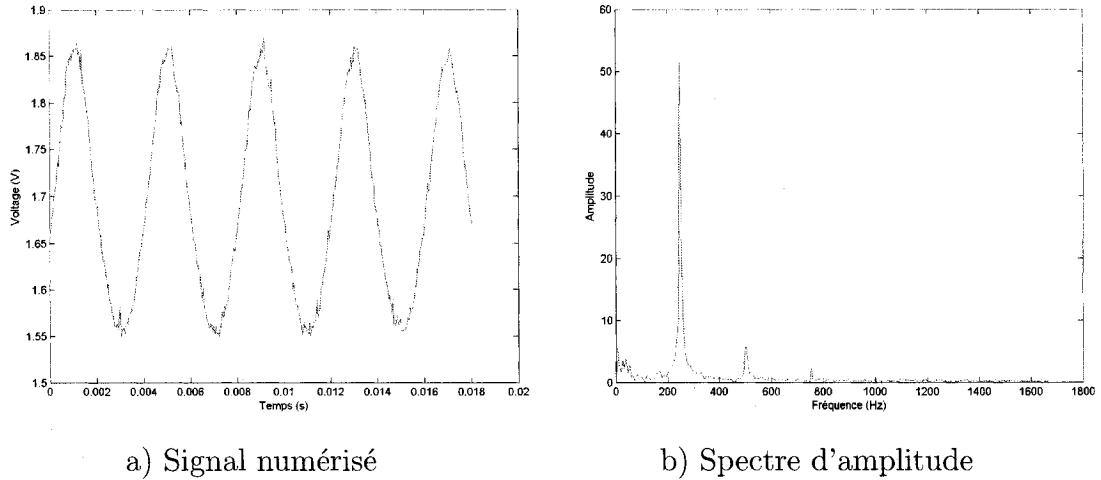


FIG. 4.4 Signal d'une corde vibrant à 250 Hz mesuré au centre à  $L_c = 35$  cm

#### Présence d'une deuxième corde

Sur le montage, une deuxième corde en acier, également aimantée dans les mêmes conditions que la première, était située en permanence à 8 mm de la corde mesurée afin de prendre les mesures dans des conditions se rapprochant de celles d'un clavecin où les cordes sont alignées très près les unes des autres. La présence même de la corde ne change pas de manière perceptible le signal obtenu sauf de manière statique puisque qu'un léger champ magnétique supplémentaire se fait sentir sur le capteur. Cette situation prévaudrait en tout temps pour l'ajustement préalable mais pourrait avoir des conséquences importantes pour l'ajustement en temps réel. En effet, dans ce dernier cas, la corde voisine pourrait être en vibration et amener des perturbations dans le signal mesuré. Afin de tester cet impact, le signal fut échantillonné dans les mêmes conditions que pour la figure 4.1a sauf que cette fois-ci la deuxième corde était excitée simultanément avec une fréquence fondamentale de  $\approx 265$  Hz. La figure 4.5 présente le signal obtenu. Bien que les oscillations principales soient moins régulières entre les pics, l'influence de la deuxième corde demeure très faible. Pour un vrai clavecin comportant un grand nombre de cordes, des tests détaillés devraient être faits afin de valider le fonctionnement d'un proto-

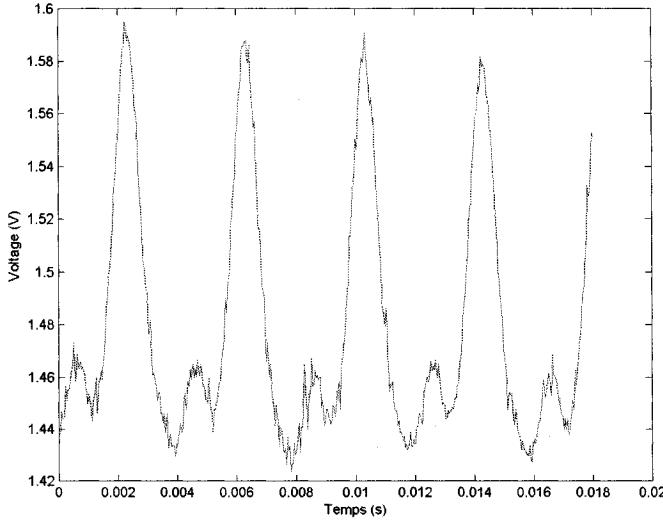


FIG. 4.5 Signal d'une corde à 250 Hz mesuré près de l'excitateur avec une deuxième corde en vibration

type complet.

#### 4.1.1.2 Corde de laiton

En dépit d'effets non souhaités générés par le passage d'un courant (annexe 2), quelques tests ont été réalisés avec une corde de laiton. Dans le montage, une source de courant était directement branchée aux deux extrémités de la corde en laiton. Une fenêtre d'échantillonnage  $T_e$ , par exemple de 0,25 seconde, amènerait une consommation d'énergie assez faible. Une corde ayant une résistance de 1  $\Omega$  donne avec un courant de  $I = 0,5$  A,  $RI^2T_e = 0,625$  J. Même pour une trentaine de cordes en laiton, l'énergie requise serait très faible.

Le champ magnétique ainsi créé était présenté à la figure 2.7. Deux signaux, représentés aux figures 4.6 et 4.7, ont été échantillonnés selon  $f_e = 1905$  Hz et  $N_e = 512$

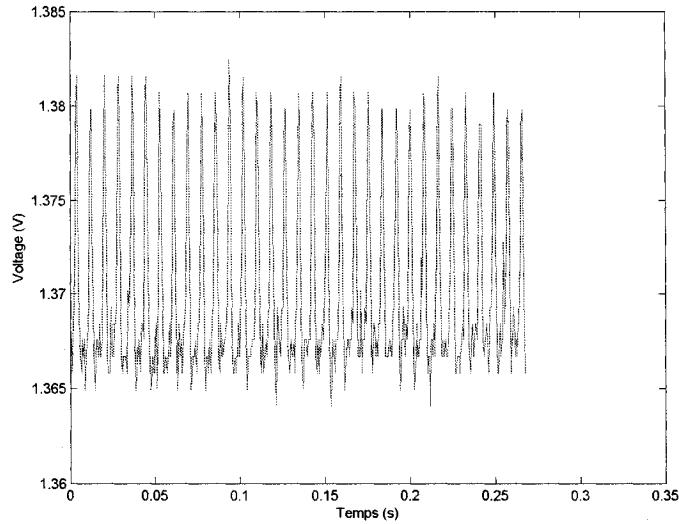


FIG. 4.6 Signal pour une corde en laiton avec un courant de 0,6 A

pour des valeurs de courant de 0,6 A et 1,0 A respectivement. L'amplitude est plus marquée avec 1,0 A mais néanmoins, avec 0,6 A, le signal obtenu permet d'évaluer les fréquences présentes.

La figure 4.8 montre quelques cycles du signal recueilli à 1,0 A. On constate, tout comme sur la figure 4.2, la présence très nette des deux premiers harmoniques. On constate que même à 1,0 A, les amplitudes restent plus faibles que pour la corde en acier.

#### 4.1.2 Précision avec l'estimateur direct (ED)

Le signal obtenu à partir du capteur est très peu bruité et il est donc possible d'utiliser l'approche ED. Pour analyser les résultats obtenus, nous avons eu recours à certaines méthodes statistiques (Hines, 2003). Ainsi la moyenne de la fréquence

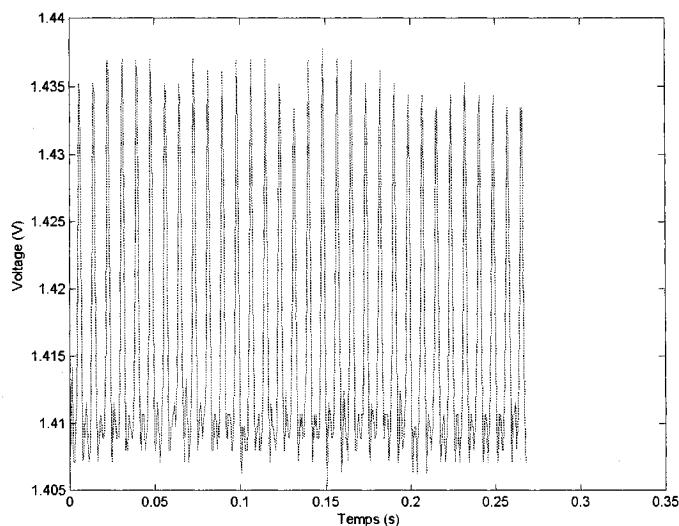


FIG. 4.7 Signal pour une corde en laiton avec un courant de 1 A

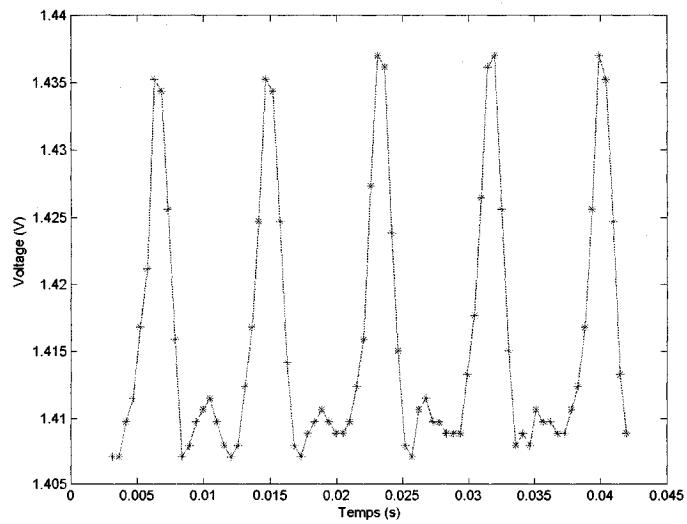


FIG. 4.8 Quelques cycles du signal pour une corde en laiton avec  $I = 1$  A

mesurée par le fréquencemètre  $\bar{f}_{mm}$  est exprimée ainsi :

$$\bar{f}_{mm} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K f_{mm} \quad (4.1)$$

où  $K$  est le nombre de mesures effectuées. On obtient aussi l'écart-type du fréquencemètre en Hz par :

$$\sigma_{mm} = \sqrt{\frac{1}{K-1} \sum_{j=1}^K (f_{mmj} - \bar{f}_{mm})^2} \quad (4.2)$$

À partir de l'équation (1.2), ce même écart-type peut être exprimé en cents par :

$$\sigma_{mm} = 1731,234 \left( \ln \left( \frac{\bar{f}_{mm} + \sigma_{mm}}{\bar{f}_{mm}} \right) \right) \quad (4.3)$$

Ces mêmes équations sont reprises pour caractériser l'estimateur ED et ultérieurement l'estimateur QF, soit :

$$\bar{f}_{ED} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K f_{ED} \quad (4.4)$$

$$\sigma_{ED} = \sqrt{\frac{1}{K-1} \sum_{j=1}^K (f_{EDj} - \bar{f}_{ED})^2} \quad (4.5)$$

$$\sigma_{ED} = 1731,234 \left( \ln \left( \frac{\bar{f}_{ED} + \sigma_{ED}}{\bar{f}_{ED}} \right) \right) \quad (4.6)$$

Finalement, l'écart entre  $\bar{f}_{mm}$  et  $\bar{f}_{ED}$  est exprimée par :

$$\Delta_{ED} = \bar{f}_{ED} - \bar{f}_{mm} \quad (4.7)$$

En échantillonnant avec  $N_e = 512$  points à une fréquence  $f_e = 7613$  Hz, on obtenait environ 16 cycles d'une corde vibrant à  $f_s \approx 250$  Hz pour une fenêtre d'échantillon-

$f_{mm}$	$\sigma_{mm}(Hz)$	$\sigma_{mm}(\phi)$	$f_{ED}$	$\sigma_{ED}(Hz)$	$\sigma_{ED}(\phi)$	$\Delta_{ED}$
250,05	0,0527	0,3649	250,08	0,1352	0,9360	0,03

TAB. 4.1 Résultats des mesures pour l'estimateur ED

nage  $T_e = 0,0672$  seconde. Une série de  $K = 10$  mesures successives fut prise. Les résultats sont présentés au tableau 4.1. On remarque que  $\sigma_{ED}$  avoisine un cent ce qui démontre la présence de variations mineures dans les fréquences fournis par l'estimateur ED. Néanmoins,  $\Delta_{ED}$  est très faible et positif. L'estimateur ED aurait donc une légère tendance à surestimer la fondamentale par rapport au fréquencemètre. L'estimateur ED pourrait probablement prendre quelques cycles en moins et donner des résultats semblables. À l'inverse, il ne permet de tirer aucune information sur les harmoniques supérieurs et reste entre autres dépendant de la phase du second harmonique.

#### 4.1.3 Précision avec l'algorithme de Quinn et Fernandes (QF)

Dans cette section sont présentés les résultats des tests permettant d'évaluer la précision de l'algorithme QF lors de tests avec un signal expérimental. En effet, la marge d'erreur de la fréquence trouvée doit être suffisamment faible pour permettre un accordage acceptable. Suite aux observations faites au chapitre 3 sur l'estimateur QF, il était intéressant de faire varier  $f_e$  et  $N_e$  pour déterminer les conditions optimales d'utilisation de cet estimateur. Le tableau 4.2 présente l'ensemble des résultats pour les différentes conditions d'échantillonnage. Les essais furent réalisés en effectuant  $K = 10$  mesures successives de la fondamentale de la corde et en comparant ce résultat avec le fréquencemètre numérique. La corde était accordée avec  $f_s \approx 250$  Hz. Après observation du tableau, on constate que, à l'exception de la première série avec  $f_e = 1280$  Hz et  $N_e = 128$ , l'estimateur QF a tendance à

#	$f_e$	$N_e$	$f_{mm}$	$\sigma_{mm}$ (Hz)	$\sigma_{mm}$ (¢)	$f_{QF}$	$\sigma_{QF}$ (Hz)	$\sigma_{QF}$ (¢)	$\Delta_{QF}$
1	1280	128	250,11	0,0568	0,3929	250,19	0,1038	0,7182	0,08
2	1280	192	250,11	0,0568	0,3929	250,09	0,0450	0,3116	-0,02
3	1280	256	250,11	0,0568	0,3929	250,02	0,0422	0,2919	-0,09
4	1905	128	250,15	0,0527	0,3647	250,11	0,1044	0,7227	-0,04
5	1905	192	250,11	0,0568	0,3929	250,05	0,0639	0,4420	-0,06
6	1905	256	250,11	0,0316	0,2189	250,05	0,0212	0,1469	-0,06
7	2520	128	250,14	0,0516	0,3574	250,12	0,2053	1,4201	-0,02
8	2520	192	250,11	0,0316	0,2189	250,04	0,1230	0,8516	-0,07
9	2520	256	250,10	0,0471	0,3263	250,08	0,1186	0,8210	-0,02

TAB. 4.2 Résultats des mesures pour l'estimateur ED

légèrement sous-estimer la fondamentale en comparaison avec le fréquencemètre. Celui-ci a fourni des résultats très constants entre chaque série de mesures,  $\sigma_{mm}$  étant toujours de moins d'un demi cent. Quant à l'estimateur, on observe qu'entre les séries de mesures,  $\bar{f}_{QF}$  varie de près de 0,2 Hz. On constate également que la valeur absolue de  $\Delta_{QF}$  ne dépasse jamais 0,1 Hz. Ainsi, les résultats entre l'estimateur QF et le fréquencemètre correspondent très bien, le rapport absolu de  $\Delta_{QF}/\bar{f}_{mm}$  étant toujours inférieur à 0,05 %.

Entre les différentes séries de mesure, il existe certaines nuances qui rendent certaines conditions d'échantillonnage préférables à d'autres. En ce sens, l'écart-type est très important car plus il est faible, plus il sera facile de faire converger l'accordage. Par ailleurs, si on considère l'erreur maximale, plus l'écart-type est grand, plus l'erreur maximale est susceptible d'être importante. Les séries 2, 3, 5 et 6 affichent les meilleurs résultats avec  $\sigma_{QF}$  inférieur au demi-cent. En effet, avec  $N_e = 128$ , les résultats sont moins bons qu'avec  $N_e = 192$  alors que, dans ce cas-ci, ils sont comparables avec ceux obtenus à  $N_e = 256$ . En ce qui concerne  $f_e$ , plus elle est lente, meilleurs sont les résultats, à l'exception de la série 6 qui obtient de meilleurs résultats que la série 3 malgré une  $f_e$  plus rapide.

$N_e/f_e$	1280 Hz	1905 Hz	2520 Hz
128	0,100039	0,067248	0,050852
192	0,150058	0,100872	0,076278
256	0,200078	0,134495	0,101704

TAB. 4.3 Fenêtre d'échantillonnage des différents tests

Fenêtre d'échantillonnage

Par l'intermédiaire de  $N_e$  et  $f_e$ , la précision de QF pourrait être principalement influencée par la durée de temps de la fenêtre d'échantillonnage  $T_e$ . Le tableau 4.3 présente les différentes fenêtres d'échantillonnage pour les tests réalisés selon  $N_e$  et  $f_e$ . On constate que pour chaque  $f_e$  utilisée,  $T_e$  durait environ 0,1 seconde lors d'une des trois séries, dépendamment de  $N_e$ . La comparaison de ces trois essais, soit celui avec  $f_e = 1280$  et  $N_e = 128$ , celui avec  $f_e = 1905$  et  $N_e = 192$  ainsi que celui avec  $f_e = 2520$  et  $N_e = 256$ , permet d'analyser sous un autre angle l'algorithme utilisé. Bien que dans les trois cas les résultats soient très bons, l'essai avec 192 points présente un écart-type beaucoup plus faible. La conclusion serait qu'un nombre de points trop faible augmente l'écart-type tout comme une fréquence d'échantillonnage très élevée. Cela confirme les essais en simulation du chapitre 3.

Globalement, l'ensemble des séries ont donné de très bons résultats et les résultats sont comparables avec la méthode ED. En effet, pour l'essai avec l'estimateur direct, on avait  $T_e = 0,0672$  ce qui est identique à l'essai avec QF pour  $f_e = 1905$  Hz et  $N_e = 128$ . La comparaison entre les deux donne l'avantage à l'algorithme QF en regard de l'écart-type. Pour l'accordage préalable, où la durée de  $T_e$  n'a que très peu d'importance, les meilleurs résultats furent ceux de la série 6, soit avec  $N_e = 512$  et  $f_e = 1905$ . Pour l'accordage en temps réel, les meilleurs résultats, en tenant compte de  $T_e$ , seraient fournis par l'estimateur ED et la série 4 de QF, soit celle avec  $f_e = 1905$  Hz et  $N_e = 128$ . Les résultats obtenus montrent clairement que

l'objectif d'avoir un système pouvant fournir rapidement, avec une erreur d'au plus deux cents, la fréquence fondamentale d'une corde est pleinement atteint.

## 4.2 Ajustement automatisé de la fréquence

L'ajustement de la fréquence d'une corde comportait plusieurs inconnues. Dans cette section, on part de l'hypothèse que  $f_s$  tel que mesuré par la méthode QF représente exactement la fréquence fondamentale de la corde. Au cours de ces tests, la fréquence fut mesurée avec  $N_e = 256$  et  $f_e = 1905$  Hz en exécutant une seule itération de l'estimateur QF. Quant à l'estimé initial de l'estimateur, il était fourni par la FFT. Il est important de noter que la corde fut réexcitée après chaque exécution de la boucle de contrôle de l'ordinogramme de programmation.

### 4.2.1 Nombre d'exécutions de la boucle de contrôle

En principe, compte tenu des calculs théoriques des chapitres 1 et 2, le programme n'aurait qu'à exécuter une seule boucle de contrôle. En effet, la variation de tension à induire dans la corde devrait pouvoir être corrigée du premier coup. Cependant, la grande précision recherchée, combinée à la difficulté de quantifier le frottement de la corde sur ses supports, peut rendre très difficile la prédiction du nombre de pas requis pour corriger la tension dans la corde. Il peut dès lors s'avérer nécessaire d'exécuter plusieurs fois la boucle de contrôle avant d'atteindre la fréquence voulue.

Pour tester le nombre d'exécutions de la boucle que prend le système pour ajuster la corde, des tests successifs pour atteindre une fréquence de référence  $f_r = 250,0$  Hz avec différentes  $f_{s \text{ initiale}}$  ont été exécutés. Notre objectif étant d'avoir une fréquence fondamentale avec un écart inférieur à  $\pm 2\%$  par rapport à  $f_r$ , nous définissons

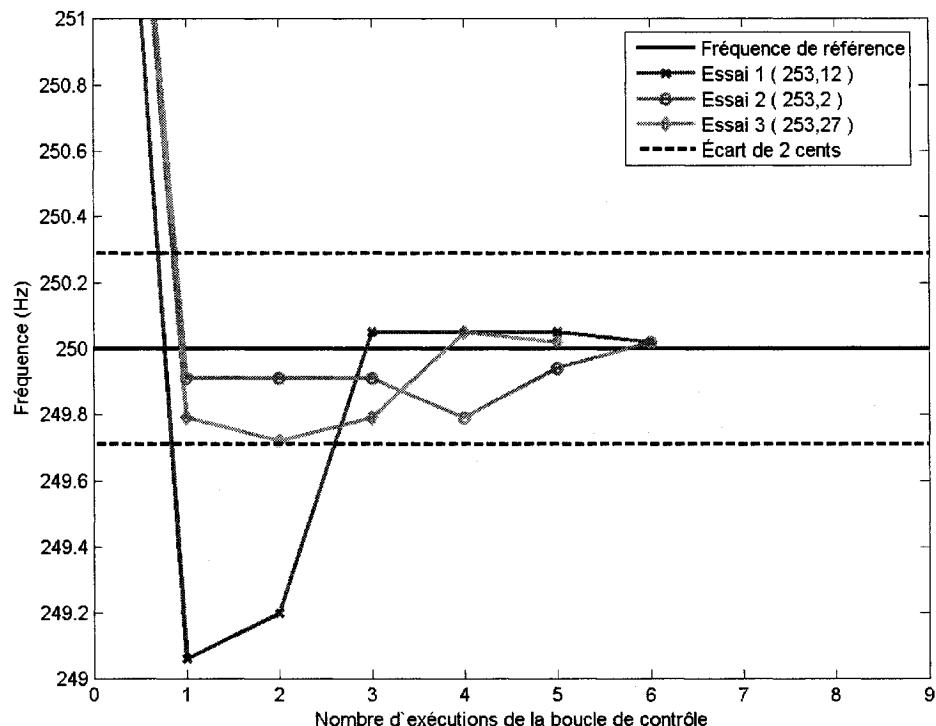


FIG. 4.9 Évolution de l'accordage avec  $f_s \text{ initiale} \approx 253 \text{ Hz}$

toute fréquence fondamentale atteinte respectant ce critère comme une fréquence satisfaisante. De plus, nous définissons  $f_o$  comme étant la fréquence optimale que peut atteindre le système. Elle correspond à la valeur numérique la plus rapprochée de  $f_r$  qui peut être exprimée par le programme en vertu de sa résolution. L'écart entre  $f_o$  et  $f_r$  est approximativement  $\pm 0,15 \text{ \AA}$ . Bien qu'il n'était pas requis d'être aussi précis dans l'ajustement de la fondamentale, l'accordage s'arrêtait à l'atteinte de  $f_o$  afin de mieux évaluer les performances du système.

La première série prenait comme point de départ une fréquence légèrement plus élevée soit  $f_s \text{ initiale} \approx 253 \text{ Hz}$ . La figure 4.9 montre l'évolution de  $f_s$  pour trois essais. La valeur exacte de  $f_s \text{ initiale}$  pour chaque essai est donné entre parenthèses

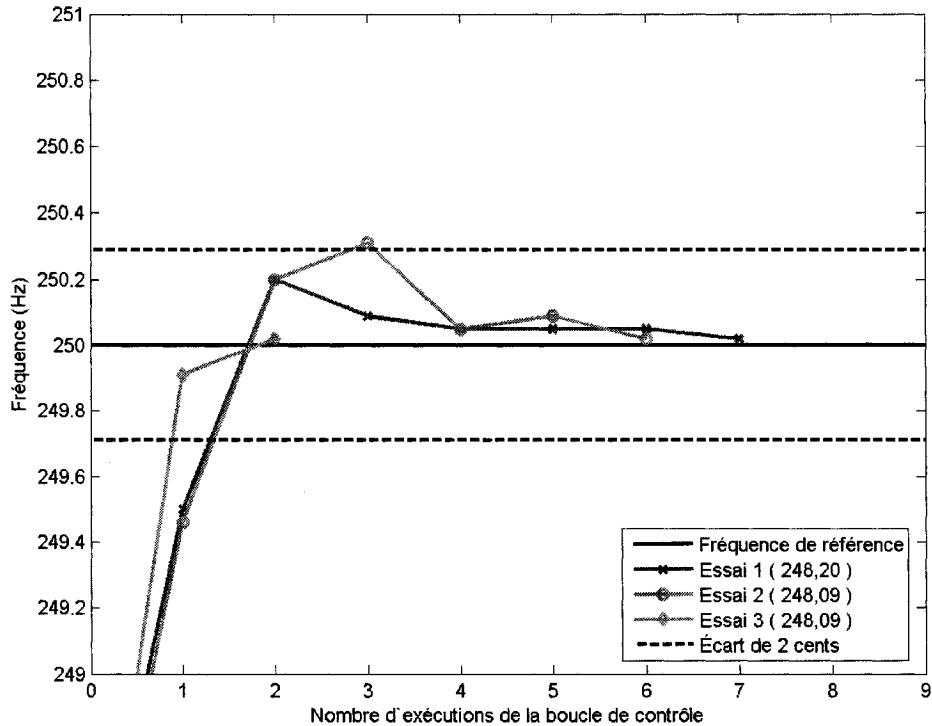


FIG. 4.10 Évolution de l'accordage avec  $f_s$  initiale  $\approx 248$  Hz

dans la légende. On constate que dans les essais 2 et 3, le système a atteint une fréquence satisfaisante en une seule exécution. Cependant, dans le premier essai, le système a eu besoin de trois exécutions. On remarque que dans les trois cas, lors de la première exécution, le système a dépassé  $f_r$  ce qui semble indiquer que l'incertitude concernant les valeurs utilisées pour caractériser les propriétés de la corde amène une surestimation de la correction nécessaire. Le système a ensuite eu besoin de quelques exécutions pour atteindre  $f_o$ . Cela indique que les sources d'erreur dues au frottement et à la précision de la fréquence, telle qu'estimée par les algorithmes, ont un impact significatif lorsque la correction à appliquer est minime.

La deuxième série de tests s'est faite en démarrant le système depuis une fréquence

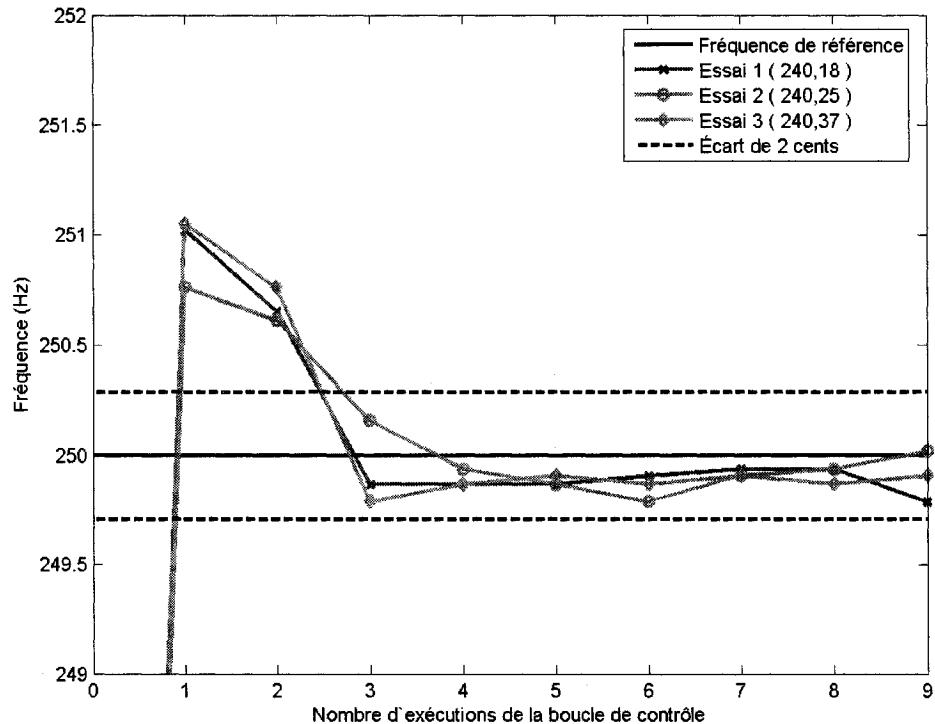


FIG. 4.11 Évolution de l'acordage avec  $f_s \text{ initiale} \approx 240 \text{ Hz}$

légèrement inférieure à  $f_r$ , soit  $f_s \text{ initiale} \approx 248 \text{ Hz}$ . On observe à la figure 4.10 que lors des deux premiers essais, la première exécution n'a pas permis d'obtenir immédiatement une fréquence satisfaisante. L'atteinte de  $f_o$  fut également laborieuse puisque plusieurs exécutions supplémentaires de la boucle furent nécessaires. Néanmoins, lors du troisième essai, l'impact de la première exécution fut excellente et  $f_o$  fut atteinte dès la deuxième exécution. Contrairement au test précédent, la première exécution des trois essais a sous-estimé la correction nécessaire. Cela démontre la difficulté de prévoir adéquatement la réponse de la corde dans le montage par rapport aux faibles variations de tension induites.

La série suivante, montrée à la figure 4.11 présente un ajustement avec  $f_s \text{ initiale} \approx$

240 Hz. Un tel écart approchant le tiers d'un ton est chose rarissime dans la cas d'un clavecin déjà utilisé qui nécessite un accordage. Les trois essais ont donné des résultats très semblables. Dans tous les cas, l'exécution initiale a dépassé  $f_r$  de manière significative. Deux exécutions supplémentaires ont été nécessaires pour atteindre une fréquence satisfaisante. On constate également que même après neuf exécutions, les différents essais n'avaient pas tous atteint précisément  $f_o$ . Les difficultés supplémentaires rencontrées dans cette série pour l'ajustement de la fréquence sont dues en partie aux incertitudes entourant les caractéristiques de la corde. En effet, ces sources d'erreur dans le calcul du nombre de pas prennent une importance grandissante avec l'augmentation de la correction à effectuer. De plus, lors d'un ajustement majeur de la corde, les forces présentes dans le montage changent de manière significative. Le montage n'étant pas parfaitement rigide, il peut se déformer et influencer la tension de la corde.

La dernière série présente un ajustement considérable. En effet,  $f_s \text{ initiale} \approx 210$  Hz soit une quarantaine de Hertz d'écart. Ce type d'ajustement ne devrait jamais se présenter sur un clavecin dans des conditions d'usage normal. Ces derniers tests servent donc davantage à tester les capacités du système qu'à simuler l'usage qui en serait fait sur un clavecin. La figure 4.12 montre les résultats obtenus. Comme pour l'ajustement à partir de 240 Hz, la première exécution provoque une augmentation excessive de la tension de la corde. Le système nécessite ensuite de quatre à cinq exécutions supplémentaires de la boucle pour atteindre une fréquence satisfaisante. Cela démontre à nouveau l'impact de la rigidité du montage et des autres sources d'erreur, mentionnées lors de la série précédente, sur un ajustement majeur de la fréquence d'une corde.

Les premières exécutions des deux dernières séries de tests, où l'ajustement à apporter est très grand, sont beaucoup moins sensibles initialement aux perturbations mineures du montage et à l'imprécision de la fréquence estimée par le microcon-

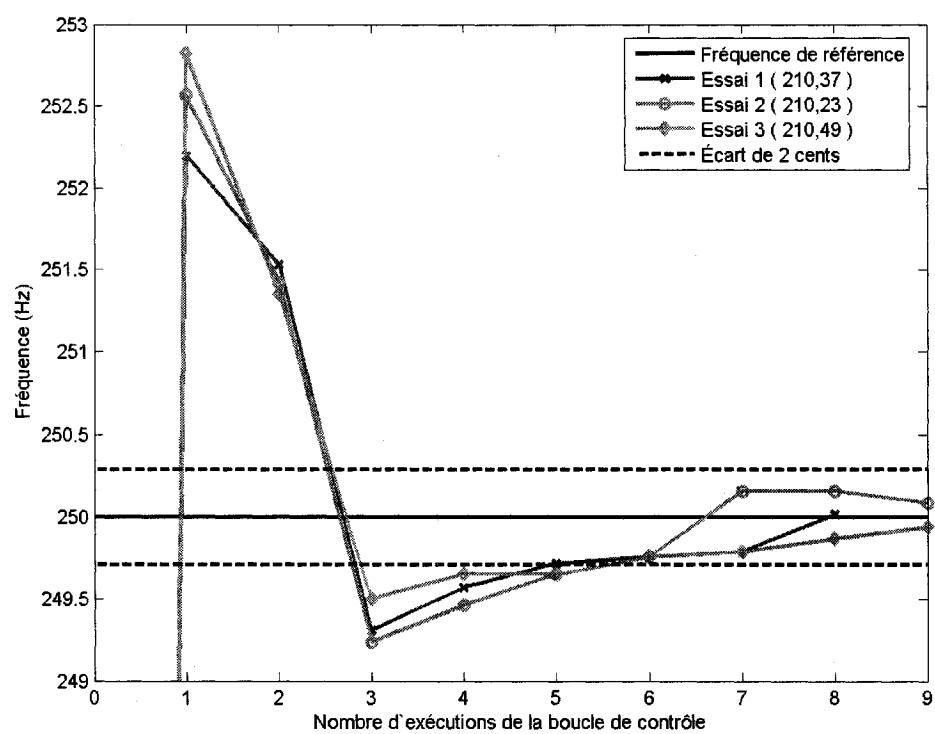


FIG. 4.12 Évolution de l'accordage avec  $f_s \text{ initiale} \approx 210 \text{ Hz}$

trôleur. Ainsi, le dépassement de  $f_r$ , observé lors de la première exécution, varie proportionnellement avec l'importance de l'ajustement. On peut donc se baser sur ces essais pour affirmer que le nombre de pas calculé pour changer la tension de la corde est trop grand. En observant les relations entre la correction prévue et celle appliquée, une diminution de 7,5% a été appliquée sur le calcul du nombre de pas. Les séries de test avec  $f_s \text{ initiale}$  à  $\approx 210$  Hz et  $\approx 240$  Hz ont ensuite été refaites en appliquant cette diminution dans le calcul du nombre de pas. La figure 4.13 montre ces nouveaux essais pour  $f_s \text{ initiale} \approx 240$  Hz. L'essai 2 fut le plus réussi avec une première exécution atteignant presque directement une fréquence satisfaisante. La première correction étant encore trop grande, quoique par une plus petite marge, l'objectif ne fut que partiellement atteint avec ce calcul du nombre de pas modifié. Globalement, les résultats furent meilleurs et la figure 4.14 permet de le constater clairement. Ce graphique reprend les données des figures 4.11 et 4.13 en les présentant autrement. L'ordonnée montre l'erreur en cents obtenue par  $f_s - f_r$  pour chaque essai des deux séries de test. L'erreur en cents des trois essais avec le calcul du nombre de pas modifié est presque systématiquement plus faible et  $f_o$  est atteinte bien plus rapidement dans deux cas sur trois. L'échec du premier essai à atteindre  $f_o$  s'explique par le fait que la correction apportée au calcul du nombre de pas ne compense pas toutes les sources d'erreur. En effet, il existe toujours une erreur sur la fréquence mesurée ainsi que sur les forces de friction en action qui ne sont pas modélisées et prises en compte dans le calcul du nombre de pas. Néanmoins, on peut constater une amélioration de l'ajustement de la fréquence.

La figure 4.15 montre les essais avec le calcul modifié du nombre de pas pour  $f_s \text{ initiale} \approx 210$  Hz. Ici, les résultats obtenus sont très positifs alors que deux des trois essais ont atteint une fréquence satisfaisante en une seule exécution, l'essai 2 ayant même atteint  $f_o$  lors de l'exécution suivante. L'essai 3 a cependant eu besoin de quatre exécutions de la boucle pour atteindre une fréquence satisfaisante. La

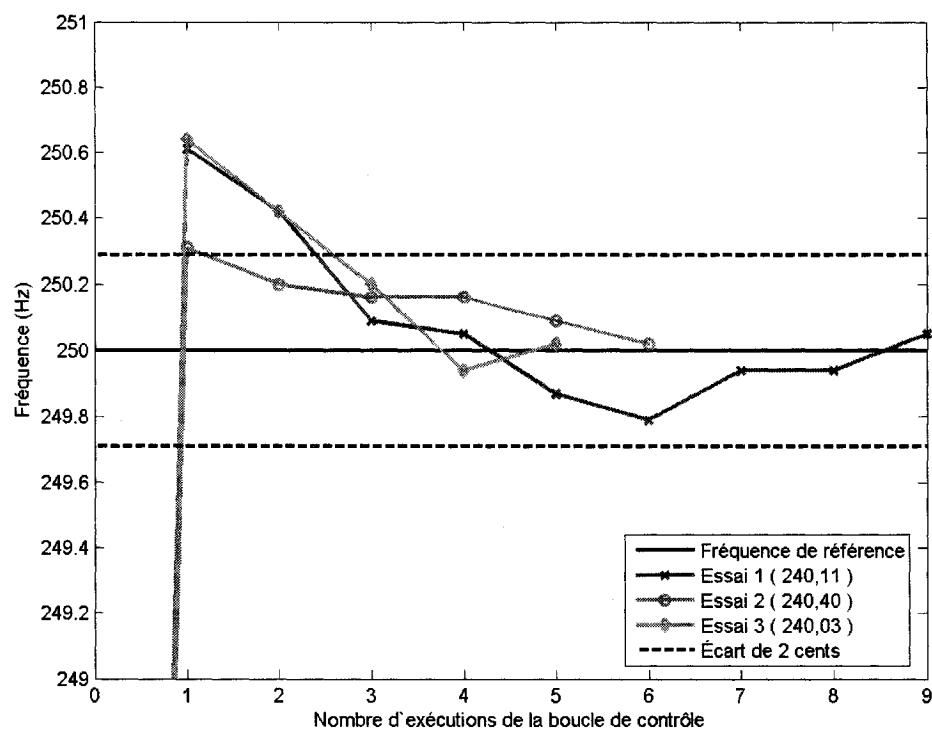


FIG. 4.13 Évolution de l'accordage corrigé avec  $f_s$  initiale  $\approx 240$  Hz

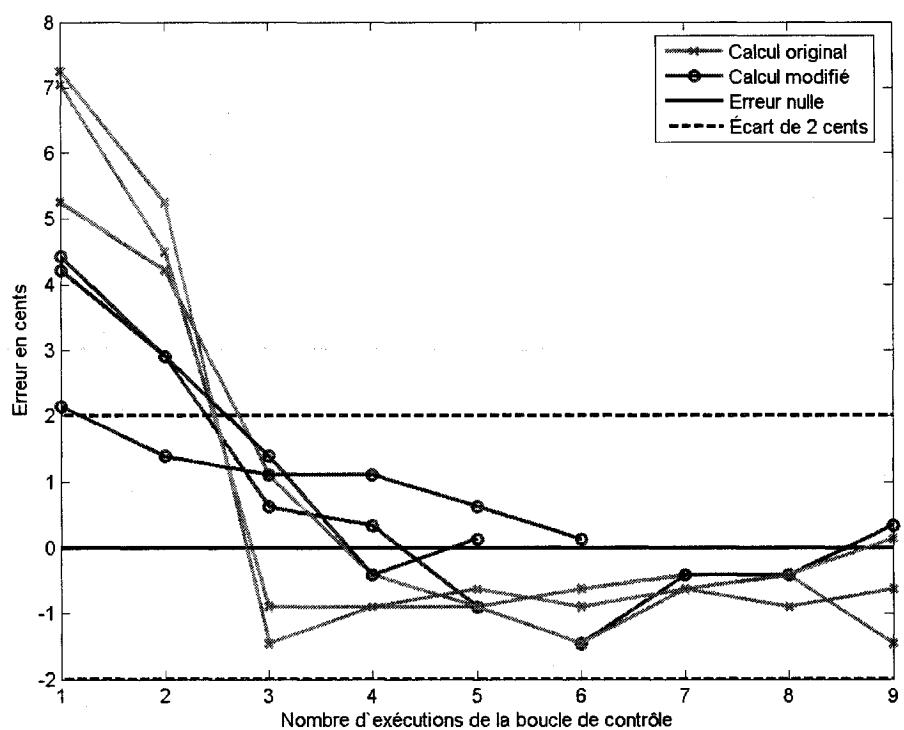


FIG. 4.14 Évolution de l'erreur lors de l'accordage corrigé avec  $f_s \text{ initiale} \approx 240 \text{ Hz}$

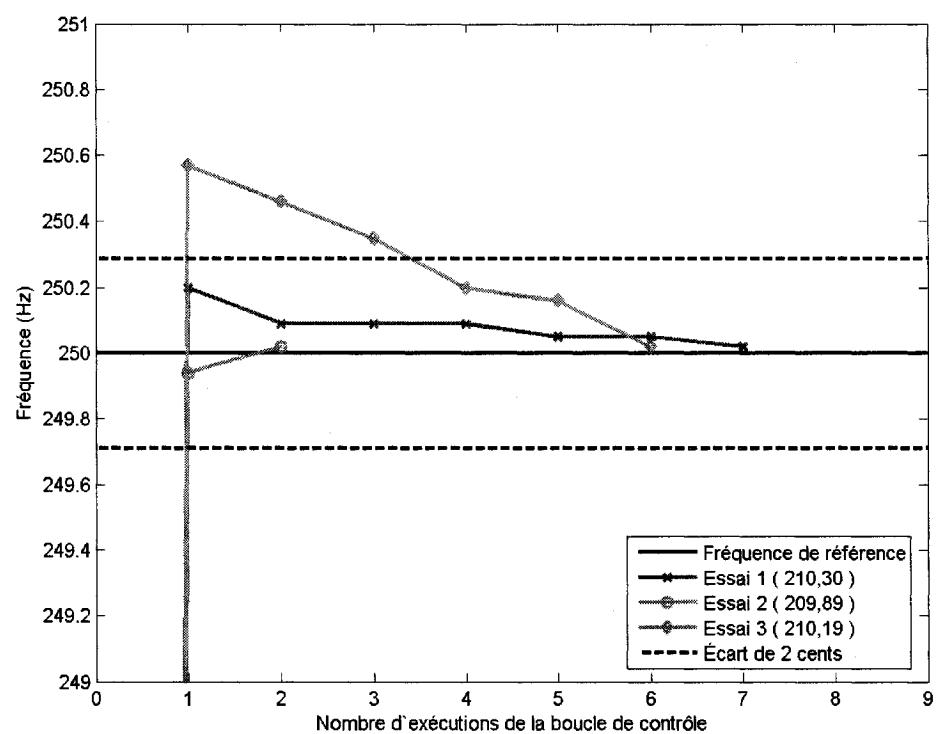


FIG. 4.15 Évolution de l'accordage corrigé avec  $f_{s \text{ initiale}} \approx 210$  Hz

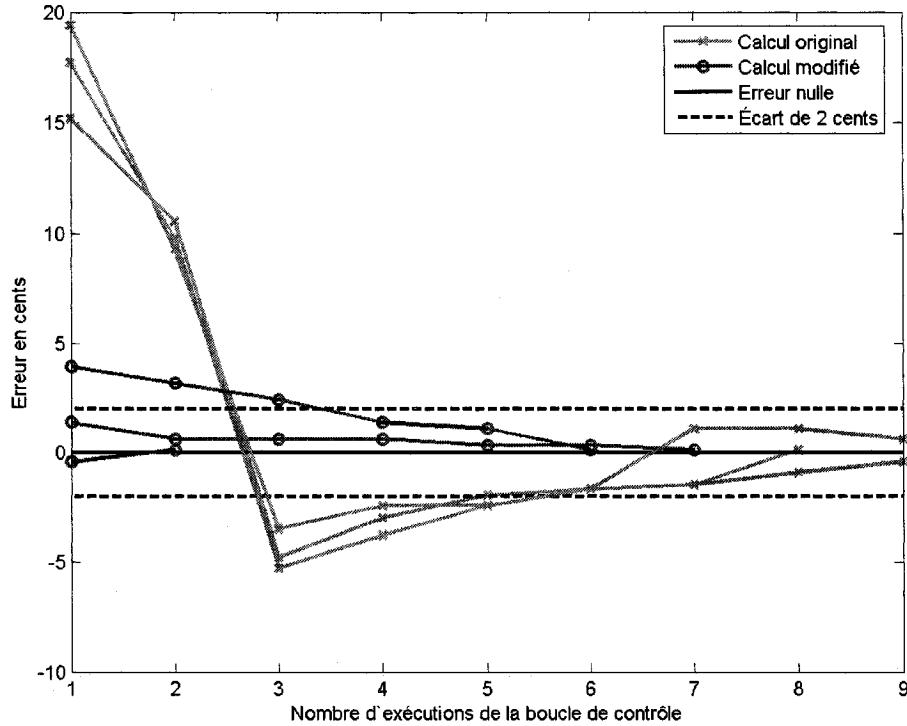


FIG. 4.16 Évolution de l'erreur lors de l'accordage corrigé avec  $f_{s \text{ initiale}} \approx 210 \text{ Hz}$

figure 4.16, qui présente l'erreur en cents obtenue pour les deux séries d'essais avec  $f_{s \text{ initiale}} \approx 210 \text{ Hz}$  de la même manière que la figure 4.14, permet de bien visualiser cette amélioration. Alors que l'écart variait entre 15 et 20 cents après une exécution dans la série avec le calcul original, ceux de la série avec le calcul modifié voient leur écart inférieur à 5 cents, deux des essais atteignant même la plage de deux cents du premier coup. L'erreur reste par la suite systématiquement plus faible pour cette dernière série et  $f_o$  est atteinte bien plus rapidement.

Les graphiques présentés dans cette section permettent de constater qu'il est plus difficile de diminuer rapidement la tension que de l'augmenter. En effet, si le calcul du nombre de pas à exécuter est le même dans tous les cas, on remarque cependant

que, lorsque  $f_r > f_s$ , le nombre de pas à exécuter permet d'atteindre ou de dépasser  $f_r$  alors que dans le cas contraire, lorsque  $f_r < f_s$ , le nombre de pas à exécuter ne permet pas d'atteindre  $f_r$ . Autrement dit, pour une fréquence de référence plus grande, le nombre de pas est surestimé alors que pour une fréquence désirée plus petite, le nombre de pas est sous-estimé. On peut analyser ce phénomène comme une forme d'hystérésis. Le calcul du nombre de pas étant le même dans les deux cas, une explication possible serait la présence de points de friction sur le montage. En effet, pour augmenter la fréquence, le moteur dispose de toute la force nécessaire pour vaincre les forces de friction qui s'ajoutent à la tension de la corde. Cependant, dans le cas d'une diminution de fréquence, c'est la tension même de la corde qui doit vaincre la friction.

Finalement, si la corde est rapidement ajustée à une fréquence satisfaisante, il apparaît clairement que le système a de la difficulté à atteindre  $f_o$ . Il a parfois besoin de plusieurs exécutions de la boucle pour y parvenir. Cette difficulté s'explique par les marges d'erreur présentes dans l'ensemble du montage et inhérentes à certains composants ainsi qu'à l'estimation de la fréquence par les algorithmes utilisés. Une installation minutieuse pourrait aider à amenuiser certaines de ces difficultés et le programme pourrait être adaptatif.

Les explications quant au comportement parfois erratique de l'ajustement, lorsque l'écart entre  $f_s$  et  $f_r$  est inférieur à quelques cents, sont multiples. L'équation utilisée pour prévoir l'élongation nécessaire s'appuie sur certaines hypothèses. Notons d'abord que nous supposons que le montage est parfaitement rigide. De plus, le montage contient certaines sources de friction, principalement le chevalet et le sillet. Il est également très difficile d'évaluer la portion de la corde enroulée autour de la cheville qui entre en compte pour l'évaluation de l'élongation. Néanmoins, l'objectif d'accorder la fréquence d'une corde, avec deux cents d'écart au maximum, est atteint dans le cas de l'accordage préalable qui peut se faire avec plus d'une

exécution de la boucle de contrôle. Pour l'accordage en temps réel, qui devrait se faire idéalement en une seule exécution, il subsiste encore quelques difficultés pour atteindre pleinement cet objectif puisque le système requiert parfois plusieurs exécutions avant d'obtenir une fréquence ayant moins de deux cents d'écart avec la fréquence désirée.

#### 4.2.2 Temps d'ajustement

Le temps que prend le programme pour exécuter une boucle de contrôle dépend de l'algorithme utilisé ainsi que de la correction à apporter à la tension de la corde. Une exécution complète de la boucle comporterait la détection de la mise en vibration de la corde, un temps d'attente pour éviter les distorsions initiales ou transitoire d'attaque, l'échantillonnage, le traitement et la correction. La détection de la vibration n'a pas été abordé dans ce projet mais elle serait fort probablement très rapide et simple à programmer. Quant au transitoire d'attaque, un court laps de temps, de l'ordre de 0,01 seconde, serait sans doute suffisant pour permettre de commencer l'échantillonnage. La durée de la fenêtre d'échantillonnage ayant déjà été abordé, il reste maintenant le temps de calcul et le temps de correction. Avec l'équipement actuel présenté au chapitre 2, le temps de calcul serait négligeable avec la méthode ED. Dans le cas de QF, il serait de l'ordre de 0,02 à 0,03 seconde. Pour ce qui est du moteur, il est programmé pour exécuter 200 pas par seconde. Un ajustement fin étant de l'ordre de 20 pas, il faudrait environ 0,1 seconde au moteur pour ajuster la corde dans les conditions actuelles. Cependant, il serait possible d'accélérer la vitesse de rotation du moteur en augmentant la cadence des impulsions envoyés par le microcontrôleur. La vitesse maximale de rotation dépend du moteur mais elle pourrait facilement être augmentée par un facteur dix. Actuellement, l'exécution complète d'une boucle avec un ajustement mineur et QF demanderait une durée de temps de l'ordre de 0,2 seconde. Avec la méthode ED,

ce temps pourrait être abaissé à moins de 0,15 seconde. Il est donc possible d'avoir un temps de réaction très court mais fournissant néanmoins un ajustement très précis. Le temps total de traitement, pour un ajustement en deux exécutions d'une trentaine de pas, pourrait donc se faire en 0,2 à 0,3 seconde en supposant moins de pas à la deuxième étape.

## CONCLUSION

L'objectif à long terme du projet est de réaliser un système mécatronique qui permet d'automatiser l'accordage des cordes d'un clavecin selon deux modes différents. Le premier mode est l'ajustement préalable, qui s'effectue avant l'exécution d'une oeuvre, et le second est l'ajustement en temps réel, qui s'exécute pendant la prestation du claveciniste. À court terme, l'objectif était de vérifier la faisabilité du projet à l'aide d'un montage simple. Dans ce mémoire, une première approche pour accorder automatiquement une corde de clavecin a été étudiée. Afin de valider notre approche, des composants ont été sélectionnés et nous avons fabriqué un montage répondant à nos besoins. Des algorithmes d'estimation de fréquence, soit la FFT, l'estimateur direct et l'algorithme de Quinn et Fernandes, ont été implantés dans le traitement informatique afin d'estimer la fréquence fondamentale d'une corde. Finalement, des tests ont été réalisés afin d'observer la précision de notre système dans l'accordage d'une corde.

À la lumière des résultats obtenus, il apparaît clairement qu'un système mécatronique automatisé permettant un accordage préalable pour un clavecin complet est un objectif très réaliste. Ses performances seraient au moins égales à celles d'un accordeur professionnel. Le signal détecté contient une fondamentale de grande amplitude et est très peu bruité. Pour estimer la fondamentale, si la FFT ne peut répondre adéquatement à nos besoins à cause de la longue durée de la fenêtre  $T_e$  requise, l'estimateur direct et l'algorithme de Quinn et Fernandes fonctionnent très bien. Néanmoins, l'estimateur QF prendrait toute sa valeur dans le cas d'un signal bruité. En ce qui a trait à l'accordage lui-même, l'ajustement de la tension s'est révélé difficile sur le montage. Le calcul du nombre de pas pour un ajustement fin est souvent erroné à cause de multiples sources d'erreur. Néanmoins, l'objectif d'accorder une corde à une fréquence précise, avec une erreur d'au plus deux cents,

a été atteint et ce au cours d'une même vibration avec des temps d'ajustement très courts.

L'ajustement préalable de 180 cordes impliquerait des processeurs multiples où le changement de tempérament pourrait être accompli en un temps de l'ordre d'une minute. Il importe ici de mentionner que si le système automatisé peut donner un accordage à une fréquence plus précise qu'un accordeur, il n'est pas en mesure, pour le moment, de s'adapter au contexte de l'utilisation du clavecin. Il ne peut donc pas choisir pour le claveciniste un tempérament plutôt qu'un autre ou même tricher légèrement sur un tempérament existant pour obtenir une sonorité optimale du clavecin lors d'un usage dans des conditions particulières. Cette partie, soit l'accordage dans son ensemble, devra faire l'objet de recherches particulières, notamment au niveau des harmoniques et de multiples facteurs acoustiques.

Quant à l'accordage en temps réel, le développement d'un système mécatronique performant dans ces conditions semble un objectif des plus ambitieux, la faisabilité apparaissant comme très incertaine. La durée de temps permise pour évaluer la consonance et effectuer les corrections de plusieurs notes doit être de l'ordre de 0,1 seconde. La détection de la fréquence avec une précision acceptable et l'ajustement précis en fréquence de la corde (quoique forcément faible en temps réel) seront très difficile. Par ailleurs, les essais réalisés n'ont pas couvert les fréquences les plus basses qui, pour un écart constant en cents, demandent une précision absolue en Hz plus grande que pour des fréquences plus élevées. Il serait donc encore plus difficile d'ajuster de manière précise les cordes des plus basses fréquences. À l'inverse, on peut obtenir une précision de fréquence comparable en cent pour les hautes fréquences en échantillonnant moins longtemps, ce qui facilite dans ce cas-ci l'ajustement en temps réel.

Ces difficultés pour le temps réel ne sont pas insurmontables même si ce type d'ac-

cordage requiert de connaître les amplitudes et les fréquences des harmoniques pour minimiser la dissonance. En effet, bien qu'elle ne permettrait pas de soutirer d'informations sur les harmoniques, la méthode ED, en supposant un échantillonnage très rapide pour se limiter à deux ou trois cycles très bien définis, pourrait peut-être détecter la fondamentale avec une grande précision, ce qui est l'aspect primordial du projet, et ensuite supposer les harmoniques comme étant des multiples entiers de la fondamentale. Le son d'un clavecin étant très harmonique, ce type d'approche pourrait être valable.

Par ailleurs, d'autres stratégies doivent être envisagées comme celle de considérer un spectre d'amplitude préétabli, une fois la fondamentale détectée. D'autant plus que, comme mentionné précédemment au chapitre 2, le spectre d'amplitude du signal tel que détecté ne correspond pas à celui perçu par l'auditeur dans une salle. Ces spectres d'amplitudes préétablis pour les différents registres d'un clavecin pourraient être obtenus par une étude systématique de la sonorité d'un clavecin telle que perçue par un auditeur. Cette connaissance a priori limiterait l'accordage en temps réel à la détection exclusive des fondamentales impliquées dans un accord. Une autre stratégie serait de ne corriger que la tierce mineure ou majeure et d'accepter les quintes tempérées telles quelles (voir annexe 1).

Une autre difficulté de l'ajustement en temps réel est le changement de tension à appliquer à la corde. Les tests réalisés dans ce projet ont montré que le système est imprécis lorsque vient le temps d'appliquer une faible correction de tension à la corde. Pour résoudre cette difficulté, il serait d'une grande utilité de réaliser un nouveau montage avec un support usiné pour le moteur. De plus, avec l'aide d'un facteur de clavecin, il serait possible d'obtenir un montage respectant pleinement les caractéristiques d'un clavecin.

Avant d'aborder le contrôle de plusieurs cordes, plusieurs raffinements devraient

être apportés au système actuel. Tout d'abord, d'autres approches pour l'estimation de la fréquence fondamentale, par exemple la convolution et l'autocorrélation, pourraient être testées. Ces tests nous permettraient de déterminer s'il existe un estimateur pouvant encore mieux répondre à nos besoins pour l'accordage en temps réel. De plus, un capteur fonctionnant bien pour les cordes de laiton doit être trouvé. Une recherche du côté des capteurs piézoélectriques, en les positionnant sous la corde dans les sillets, pourrait être très intéressante car si cette approche est efficace, elle pourrait servir autant pour les cordes de laiton que pour les cordes d'acier. Pour l'ajustement de la fréquence, il serait primordial de revoir l'ensemble des éléments en contact avec la corde afin de minimiser les sources de friction. Par ailleurs, il serait utile de mesurer expérimentalement les propriétés de la corde afin de pouvoir mieux prédire son comportement. Aussi, afin de vérifier la relation entre la tension de la corde et sa fréquence, il serait pertinent de mesurer la tension de la corde directement. On pourrait alors comparer la correspondance dans les ajustements prédis entre la mesure de la tension et celle de la fréquence. En outre, le système devant être meilleur qu'un accordeur professionnel, il serait très intéressant de faire la comparaison de l'accordage entre les deux, l'accordeur pouvant se servir d'un diapason comme référence.

Une fois ces problèmes réglés, le contrôle très précis de plusieurs cordes par un même processeur pourrait être abordé. Idéalement, le montage servant à faire ces tests serait fabriqué avec l'aide d'un facteur de clavecin professionnel. On obtiendrait ainsi un montage de grande précision présentant toutes les caractéristiques d'un clavecin. La réussite de cette étape ouvrirait la porte au développement d'un système mécatronique décentralisé gérant l'ensemble des cordes d'un clavecin ainsi qu'à l'étude détaillée de l'installation de tous les composants dans un clavecin prototype.

## RÉFÉRENCES

- ALLEGRO MicroSystems, 2004, <http://www.allegromicro.com/>
- ASSELIN, P-Y., 1985, *Musique et tempérament*, Édition Jobert
- BACKUS, J., 1977, "The acoustical foundations of music", 2nd edition, New York, W.W. Norton and Company Inc,
- BAZERGUI, A., BUI-QUOC, T., BIRON, A., McINTYRE, G., LABERGE, C., 2002, *Résistance des matériaux*, Presses Internationales Polytechnique, Montréal
- BEJAN, A., 1993, "Heat Transfer", John Wiley and Sons inc
- BENADE, Arthur H., 1990, "Fundamentals of Musical Acoustics", Seconde Revised Edition, New York, Dover Publications
- BENSON, D., 2000, "Mathematics and Music", Dep. of Mathematics, University of Georgia, <ftp://byrd.math.uga.edu/pub/html/math-music.html>
- BERG, Richard E., STORK, David G., 1995, "The physics of sound", 2nd edition, New Jersey, Prentice Hall
- BESNAINOU, C., 1999, "Transforming the voice of musical instruments by active control of the sound radiation", Conference Active DEC, Ft Lauderdale, FL, USA
- de CHEVEIGNE, A., Kawahara, H., 2002, "YIN, a fundamental frequency estimator for speech and music", *Journal of Acoustic Society of America*, 111, pp 1853-1860
- COLLINS, J. A., 2003, "Mechanical design of machine elements and machines : a failure prevention perspective", New York :Wiley
- CRANDALL, S.H., DAHL, N.C., LARDNER, T.J., 1978, "An Introduction to Mechanics of Solids", Seconde Edition, McGraw-Hill
- EPSILON, 2004, <http://www.epsilon.com.pl/pub/pdf/Wintek/wm-c1602m.pdf>

- Johnson, S.G., Frigo, M. , 2004, FFTW, [http ://www.fftw.org/](http://www.fftw.org/)
- FLETCHER, N.H., ROSSING, T.D., 1999, "The Physics of Musical Instruments", Seconde Edition, Springer-Verlag New York
- GERHARD, D., 2003, "Pitch Extraction and Fundamental Frequency : History and Current Techniques", Technical report TR-CS 2003-06, Departement of Computer Science, University of Regina
- GILMORE, D.A., , "In Pursuit of the Self-Tuning Piano", [http ://www.qrsmusic.com/Press/pr02032501.htm](http://www.qrsmusic.com/Press/pr02032501.htm)
- HALL, D.E., HESS, J.T., 1984, "Perception of Musical Interval Tuning", Music Perception, hiver 1984, Vol. 2, no. 2, 166-195
- HALL, D.E., 2002, "Musical Acoustics", Brooks/Cole, 3nd edition
- HELMHOLTZ, H., 1954, "On the Sensation of Tone", Dover Publications inc, New York
- HINES, W.W., and coll., 2003, "Probability and Statistics in engineering", John Wiley and Sons, 4th Edition
- HISTAND, M.B., ALCIATORE, D.G., 1999, "Introduction to Mechatronics and Measurement Systems", WCB/McGraw-Hill
- LAFRENIÈRE, V., 2001, *Notions d'acoustique musicale - Étude de la courbe de dissonance*, Rapport interne, Génie mécanique, École Polytechnique de Montréal
- KORG inc, 2004, [http ://www.korg.com/](http://www.korg.com/)
- KREYSZIG, E., 1993, "Advanced engineering mathematics", John Wiley and Sons, 7th edition
- MATHWORKS, 2004 [http ://www.mathworks.com/products/matlab/](http://www.mathworks.com/products/matlab/)
- MOORE, B.C.J., 1997, "An introduction to the psychology of hearing", Academic Press, 4th edition

- MOORE, B.C.J., GLASBERG, B.R., PETERS, R.W., 1985, "Relative dominance of individual partials in determining the pitch of complex tones", *Journal of Acoustic Society of America*, 77, pp 1853-1860
- NATIONAL INSTRUMENTS, 2004, <http://www.ni.com/>
- PLOMP, R., LEVELT, W.J.M., 1965, "Tonal Consonance and Critical Bandwidth", *Journal of Acoustic Society of America*, 38, pp 548-560
- PRESS, W.H., TEUKOLSKY, S.A., VETTERLING, W.T., FLANNERY, B.P., 1992, "Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing", Seconde Edition, Cambridge University Press
- QRS Music technologies News, "To Develop Self-Tuning Piano System", <http://www.qrsmusic.com/press/pr02022401.htm>
- QUINN, B.G., HANNAN, E.J., 2001, "The Estimation and Tracking of Frequency", Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge University Press
- ROBILLARD, L., 2003, *Contrôle automatisé de la fréquence d'une corde de clavein*, EPM-RT-2003-07, École Polytechnique de Montréal
- ROSSI, L., GIROLAMI, G., 2001, "Instantaneous frequency and short term Fourier transforms : Application to piano sounds", *Journal of Acoustic Society of America*, 110, 2412-2420
- ROSSI, L., GIROLAMI, G., LECA, M., 1998, "Identification of polyphonic piano sounds", *Acta Acust.*, 83, 1077-1084
- ROSSING, T.D., FLETCHER, N.H., 2004, "Principles of Vibration and Sound", Second Edition, Springer, New York
- SABINE inc, 2004, <http://www.sabine.com/>
- SETHARES, W.A., 1993, "Local consonance and the relationship between Timbre and Scale", *Journal of Acoustic Society of America*, 94, 3, pp 1218-1228

SETHARES, W.A., 1999, "Tuning, Timbre, Spectrum, Scale", SpringerVerlag, London

SMYTHE, W.R., 1968, "Static and dynamic electricity", 3nd edition, McGraw-Hill, New York

SOLID STATE ELECTRONIC CENTER, 2004,

[http ://www.ssec.honeywell.com/](http://www.ssec.honeywell.com/)

STOCK DRIVE PRODUCTS/STERLING INSTRUMENTS, 2004,

[http ://www.sdp-si.com/](http://www.sdp-si.com/)

TEXAS INSTRUMENTS, 2004, [www.ti.com](http://www.ti.com)

VALLETTE, C., CUESTA, C., 1993, *Mécanique de la corde vibrante*, Traité des nouvelles technologies, série mécanique, Hermès

WEAST, R. C., 1971, "Handbook of Chemistry and Physics", The Chemical Rubber Company (CRC)

## ANNEXE I

### CONSONANCE ET TEMPÉRAMENTS

Les notions abordées dans cet annexe sont basées sur différentes références, notamment celle de Benade (1990), Backus (1977), Hall (2002), Berg (1995), Sethares (1999), Plomp (1965), Moore (1997), Asselin (1985) et Lafrenière (2001).

#### I.1 Le son

Un son peut être simple ou complexe, selon qu'il ne contient qu'une fondamentale (simple sinusoïde) ou un agrégat de partiels (plusieurs sinusoïdes). Un son est harmonique si les partiels sont des harmoniques, c'est-à-dire des multiples entiers d'une fondamentale. Les instruments de musique sont en général conçus pour produire des sons harmoniques. La hauteur du son («pitch»), telle que perçue par l'oreille, correspond à sa périodicité. La hauteur du son correspond donc au commun dénominateur des fréquences impliquées dans les harmoniques présents même si la fondamentale est absente, de même que les premiers harmoniques. Dans le cas où les partiels ne sont pas tout à fait des harmoniques, on obtient une quasi-périodicité et la hauteur du son devient ambiguë. Le son comporte alors une certaine dose d'inharmonicité. Les cordes du registre grave d'un piano produisent des sons inharmonomiques dont la hauteur est mal définie. Par comparaison, les tuyaux d'orgue dans ce même registre produisent des sons harmoniques dont la hauteur est mieux perçue. Le timbre est cette qualité qui différencie des sons de même intensité et de même hauteur. Il est caractérisé entre autres choses par une distribution particulière des amplitudes des harmoniques.

## I.2 Consonance

Le système auditif humain perçoit les ondes acoustiques soit en les fusionnant en un seul agrégat, soit en les séparant en identités distinctes. Sans entrer dans les détails du fonctionnement de l'oreille, il est clair qu'un son complexe harmonique provenant de la voix humaine ou d'un instrument de musique est perçu comme une seule entité (fusion), même s'il comporte une superposition de partiels qui excitent différents points de la membrane basilaire. Il est également démontré qu'il est facile de discerner à l'oreille des partiels non-harmoniques appartenant à un son qui provient d'une seule source.

Le concept de consonance est relié au degré de plaisir ressenti quand deux ou plusieurs sons se font entendre simultanément. Inversement, la dissonance représente le degré d'inconfort ressenti à l'écoute simultanée de deux ou plusieurs sons.

Des expériences sur plusieurs sujets ont été faites par Plomp (1965) en faisant entendre deux sons simples (deux sinusoïdes) de fréquences  $f_1$  et  $f_2$  simultanément, pour différents intervalles  $\Delta f$ . En augmentant la fréquence d'un des deux sons,  $f_2 = f_1 + \Delta f$ , l'autre ayant sa fréquence fixe ( $f_1$ ), la courbe de la figure I.1 donne le degré de dissonance perçu en fonction du rapport de fréquence, celle-ci étant donnée en abscisse selon une échelle logarithmique. Cette échelle logarithmique est divisée en demi-tons, chaque division représentant un rapport de fréquence  $(f_1 + \Delta f)/f_1 = 2^{n/12}$ . La quarte et la quinte tempérée de même que l'octave correspondent à  $n = 5, 7$  et  $12$ . Pour l'octave on obtient  $f_2 = 2f_1$ . On constate que la consonance maximum (ou dissonance minimum) est obtenue à l'unisson  $f_2 = f_1$ . Au fur et à mesure que  $\Delta f$  augmente, la dissonance s'accroît, passe par un maximum situé à une distance d'un peu plus d'un demi-ton pour redescendre ensuite asymptotiquement vers zéro. Pour de légères différences de fréquences, l'oreille ne distingue qu'un son unique caractérisé par des battements qui peuvent être comptés. Lorsque

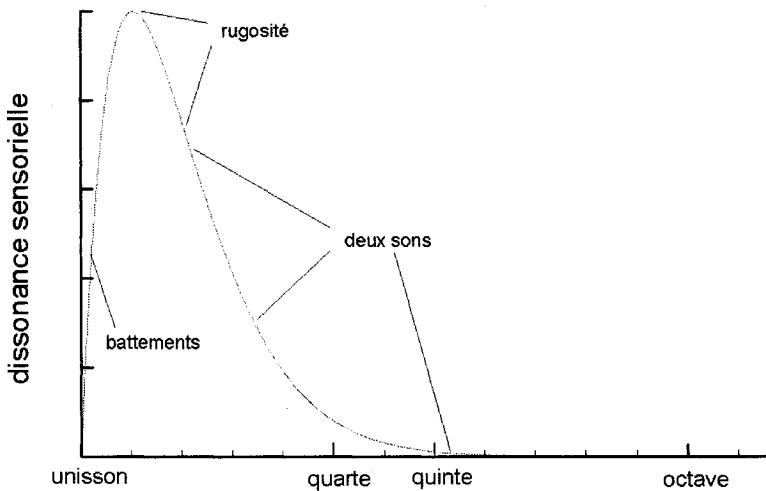


FIG. I.1 Courbe expérimentale de dissonance  $f_1 = 400$  Hz

$\Delta f$  augmente, ces battements deviennent de plus en plus rapides et produisent un effet de «rugosité» désagréable qui correspond à la dissonance maximum. Puis, toujours avec  $\Delta f$  augmentant, les deux sons deviennent perceptibles séparément et la dissonance décroît. Ce comportement du système auditif de l'oreille est lié à la largeur de la bande critique caractérisant la membrane basilaire de l'oreille interne. Deux sons simples ayant des fréquences rapprochées sont à l'intérieur d'une même bande critique et ne peuvent être perçus séparément. Le livre de Moore (1997) fournit de plus amples détails sur cette bande critique caractérisant le système auditif humain. La figure I.1 est valable pour  $f_1 = 400$  Hz. En conservant la même échelle en abscisse, l'étalement de la dissonance diminue si la fréquence de  $f_1$  est augmentée et vice-versa. La figure I.2 donne les résultats expérimentaux pour différentes valeurs de  $f_1$ . Il est possible d'interpoler entre les courbes de cette figure. On peut aussi les exprimer sous forme paramétrique en établissant une équation donnant la dissonance en fonction de  $f_1$  et  $f_2$ . Dans le cas de sons complexes, on peut déterminer la dissonance globale en superposant les dissonances individuelles de tous les partiels pris deux à deux, présents dans les sons produits simultanément. Il existe à

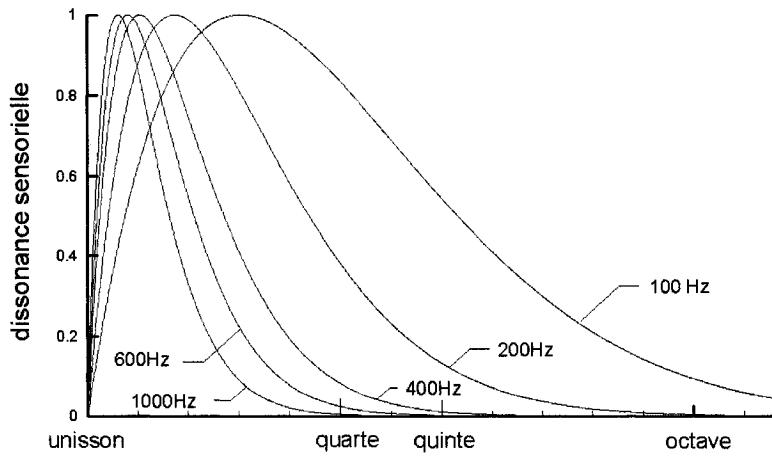


FIG. I.2 Courbes expérimentales de dissonance correspondant à différentes valeurs de  $f_1$

cet effet un algorithme donné dans le livre de Sethares (1999). La figure I.3 donne la dissonance globale de deux sons  $f_1$  et  $f_2$  comportant chacun cinq harmoniques d'égale amplitude, la fréquence fondamentale de  $f_1$  correspondant au *do<sub>4</sub>* (261,63 Hz). L'abscisse comporte une échelle logarithmique et  $\alpha_s$  correspond au rapport des fréquences fondamentales des deux sons. On observe sur cette figure des minima de dissonance (pics inversés) qui correspondent aux intervalles musicaux : unisson, tierce majeure, quarte, quinte, sixte majeure et octave. Ces intervalles qu'on dit consonants n'ont pas tous le même degré de consonance, les minima observés sur la figure étant à des hauteurs différentes. La consonance observée pour ces différents intervalles est due au fait que certains harmoniques des deux sons correspondent (unisson pour les courbes de la figure I.2). Par exemple, dans le cas d'une quinte ( $f_2 = \frac{3}{2}f_1$ ), les troisième, sixième, neuvième, etc harmoniques de  $f_1$  correspondent aux deuxième, quatrième, sixième, etc harmoniques de  $f_2$ . Des exemples de correspondance d'harmoniques pour différents intervalles musicaux sont donnés dans le livre de Asselin (1985).

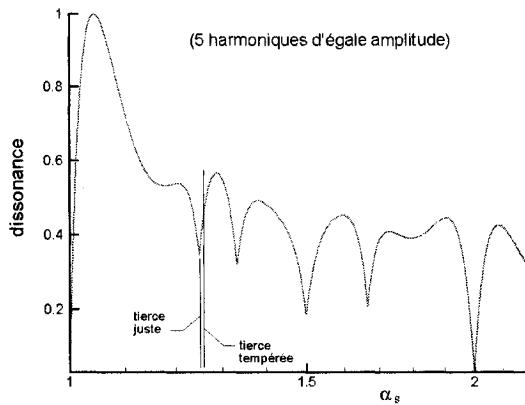


FIG. I.3 Dissonance globale de deux sons complexes  $f_1$  et  $f_2$ . La fréquence fondamentale de  $f_1$  est 261,63 Hz

Il est à noter que les pics inversés de la figure I.3 sont très pointus, de sorte que le moindre écart par rapport au point de consonance maximum se traduit par un accroissement marqué de dissonance. Ainsi, sur la figure I.3, la tierce tempérée ( $\alpha_s = 1,2599$ ) s'écarte beaucoup de la consonance maximum caractérisant la tierce juste ( $\alpha_s = 1,25$ ). L'acuité des pics est reliée à la pente marquée caractérisant les courbes de dissonance sensorielle près de l'unisson sur la figure I.2. Cette pente résulte d'une interprétation libre, dans la zone près de l'unisson, des résultats expérimentaux de Plomp (1965), interprétation reprise subséquemment par Sethares (1999). Par ailleurs, des expériences sur l'appréciation des légers désaccords d'intervalles musicaux consonants indiquent plutôt des pics plus ou moins arrondis Hall (2002), plus apparentés à ceux projetés par Helmholtz (1954). Une façon de produire des pics arrondis de consonance consiste à modifier les courbes de dissonance sensorielle de façon à avoir une pente nulle à l'unisson (Lafrenière, 2001), (voir figure I.4), pente qui augmente ensuite rapidement pour reproduire éventuellement le même type de courbe que sur la figure I.1. Les courbes des figures I.4 et I.5 sont tout aussi justifiables sur la base des mesures de Plomp (1965) que celles des figures I.1 et I.2. L'étude de la consonance de deux sons complexes harmoniques  $f_1$  et  $f_2$ ,

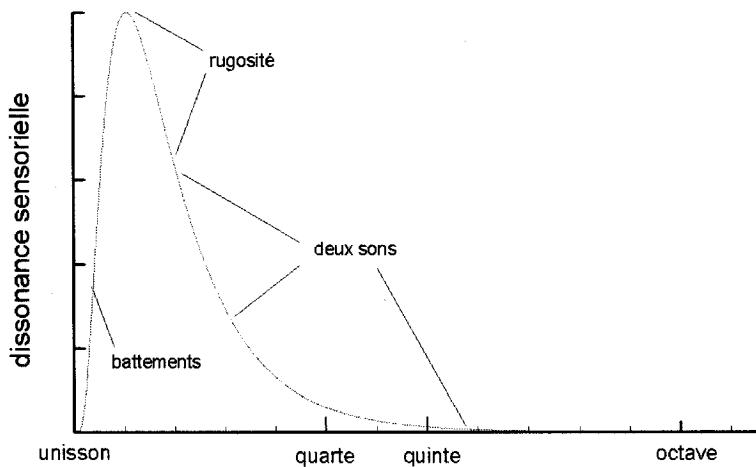


FIG. I.4 Courbe expérimentale de dissonance ( $f_1 = 400$  Hz)

basée sur les courbes de la figure I.5, produit alors la figure I.6, laquelle comporte des pics inversés arrondis. La différence de dissonance entre la tierce tempérée et la tierce juste est alors moins marquée sur la figure I.6 que sur la figure I.3.

### I.3 Répartition des hauteurs de son en musique

Les intervalles musicaux font référence aux différences de hauteur entre deux notes. Ces intervalles sont choisis de façon à maximiser la consonance.

#### La gamme diatonique

Cette gamme, qualifiée parfois de juste ou naturelle, divise l'octave en sept degrés. La musique traditionnelle retient deux modes, le mode majeur et le mode mineur. Les tableaux I.1 et I.2 donnent les divisions relatives à ces deux modes avec les appellations propres à ces degrés de même que leurs fréquences respectives. Les fréquences relatives sont choisies de façon à favoriser un grand nombre d'intervalles consonants entre les divers degrés ou notes. Par exemple, le rapport de fréquence

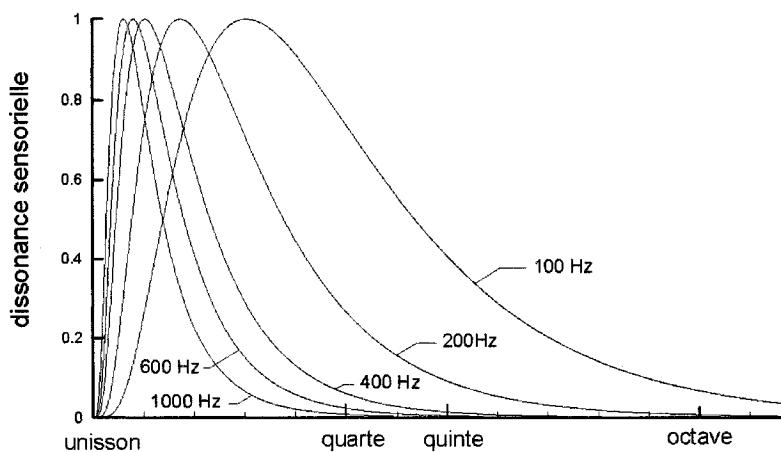


FIG. I.5 Courbes expérimentales de dissonance correspondant à différentes valeurs de  $f_1$

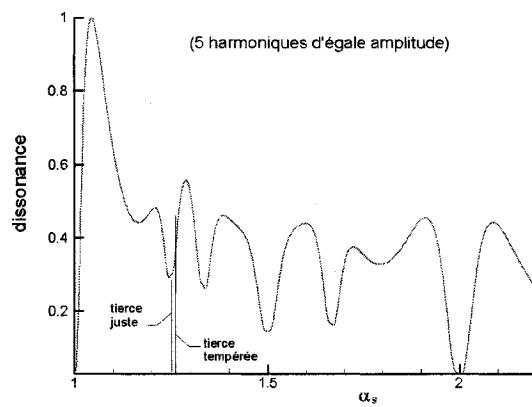


FIG. I.6 Dissonance globale de deux sons complexes harmoniques  $f_1$  et  $f_2$ . La fréquence fondamentale de  $f_1$  est 261,63 Hz.

Degré	Appellation	Gamme de do majeur	Fréquence fondamentale relative
1	tonique	$do_1$	$f_1$
2	sus-tonique	$re_1$	$\frac{9}{8}f_1 = 1,125f_1$
3	mediante	$mi_1$	$\frac{5}{4}f_1 = 1,25f_1$
4	sous-dominante	$fa_1$	$\frac{4}{3}f_1 = 1,333f_1$
5	dominante	$sol_1$	$\frac{3}{2}f_1 = 1,5f_1$
6	sus-dominante	$la_1$	$\frac{5}{3}f_1 = 1,666f_1$
7	sensible	$si_1$	$\frac{15}{8}f_1 = 1,875f_1$
8	tonique(octave)	$do_2$	$2f_1$
9	sus-tonique(octave)	$re_2$	$\frac{9}{4}f_1 = 2,25f_1$
etc.	...	...	...

TAB. I.1 Gamme majeure; l'indice 1 des notes de la gamme de *do* majeur a été choisi délibérément. Il augmente de l'unité en passant à l'octave supérieure.

entre le *sol* et le *re* :

$$\frac{\frac{3}{2}f_1}{\frac{9}{8}f_1} = \frac{4}{3} \quad (I.1)$$

donne un intervalle d'une quarte ; celui entre le *si* et le *sol* :

$$\frac{\frac{15}{8}f_1}{\frac{3}{2}f_1} = \frac{5}{4} \quad (I.2)$$

donne un intervalle d'une tierce majeure ; celui entre le *sol* et le *mi* :

$$\frac{\frac{3}{2}f_1}{\frac{5}{4}f_1} = \frac{6}{5} \quad (I.3)$$

donne un intervalle d'une tierce mineure. L'accord parfait majeur (3 notes), *do-mi-sol*, contient une quinte (*do-sol*), une tierce majeure (*do-mi*) et une tierce mineure (*mi-sol*). En supposant  $f_1 = 4f'$ , on a  $5f'$  pour le *mi* et  $6f'$  pour le *sol*, c'est-à-dire une séquence de fréquences relatives donnée par la séquence (4 :5 :6) pour l'accord

Degré	Appellation	Gamme de do mineur	Fréquence fondamentale relative
1	tonique	$do_1$	$f_1$
2	sus-tonique	$re_1$	$\frac{9}{8}f_1 = 1,125f_1$
3	mediante	$mi_{b_1}$	$\frac{6}{5}f_1 = 1,2f_1$
4	sous-dominante	$fa_1$	$\frac{4}{3}f_1 = 1,333f_1$
5	dominante	$sol_1$	$\frac{3}{2}f_1 = 1,5f_1$
6	sus-dominante	$la_{b_1}$	$\frac{8}{5}f_1 = 1,6f_1$
7	sensible	$si_{b_1}$	$\frac{9}{5}f_1 = 1,8f_1$
8	tonique(octave)	$do_2$	$2f_1$
9	sus-tonique(octave)	$re_2$	$\frac{9}{4}f_1 = 2,25f_1$
etc.	...	...	...

TAB. I.2 Gamme mineure; l'indice 1 des notes de la gamme de *do* majeur a été choisi délibérément. Il augmente de l'unité en passant à l'octave supérieure.

parfait majeur. Cet accord existe également pour *fa-la-do*<sub>2</sub> et *sol-si-re*<sub>2</sub>.

En plus de ces accords majeurs de trois notes («triads»), cette gamme contient deux accords parfaits mineurs *mi-sol-si* et *la-do-mi* dont les rapports de fréquences relatives correspondent à la séquence (10 :12 :15). Par ailleurs, cette gamme diatonique, dite juste, contient certains rapports de fréquences qui s'écartent des rapports consonants déjà mentionnés. Ainsi le rapport de fréquence entre le *re* et le *la* est 1,4815 donc inférieur à une quinte juste (1,5). De même, le rapport de fréquence entre le *re* et le *fa* est 1,185, donc inférieur à une tierce mineure (1,20).

Il est à noter qu'en renormalisant les fréquences de la gamme *do* mineur, c'est-à-dire en divisant toutes les fréquences relatives du tableau I.2 par celle du *mi<sub>b</sub>*, on reconstitue les fréquences relatives de la gamme de *mi<sub>b</sub>* majeur à une exception près, la sus-tonique *fa*  $\frac{10}{9}$  au lieu de  $\frac{9}{8}$ .

Les rapports de fréquence se compliquent lorsqu'on veut moduler, c'est-à-dire choi-

sir une nouvelle tonique (changer de tonalité). Par exemple, si la nouvelle tonique désirée est *sol* (tonalité voisine), il nous faut renormaliser les fréquences relatives en divisant par celle du *sol* sur le tableau I.1. On obtient alors le tableau I.3. Pour récupérer de façon rigoureuse une gamme diatonique basée sur le *sol*, il faut alors modifier les fréquences relatives de deux notes, le *la* et le *fa*. Le changement le plus important est celui de la note *fa*, de  $\frac{16}{9} = 1,778$  à  $\frac{15}{8} = 1,875$  ( $\approx 5\%$ ). Celui du *la* est de moindre importance, de  $\frac{10}{9} = 1,111$  à  $\frac{9}{8} = 1,125$  ( $\approx 1,2\%$ ). En ne modifiant que le *fa*, on obtient alors une gamme de *sol* qui possède une coloration particulière, par comparaison avec la gamme originale de *do*.

Si à partir des résultats du tableau I.3 on veut redéfinir une nouvelle tonalité, celle du *re* majeur qui soit rigoureusement diatonique, il faudrait alors modifier deux autres notes, le *mi* et le *do*, ce qui représente en tout quatre notes, par comparaison à la gamme de *do* majeur, soit *la*, *fa* et *mi*, *do* du tableau I.1. Des modulations plus poussées conduisent à des changements de plus en plus nombreux. Les instruments à clavier visant à conserver les caractéristiques de la gamme diatonique tout en permettant un grand nombre de modulations devraient comporter un nombre exorbitant de touches dans une octave. Certains instruments ont été conçus (par exemple l'harmonium de Helmholtz (1954)), comportant des touches additionnelles mais ces instruments demeurent des exceptions dans le domaine musical. Les instruments à clavier comportent en général douze touches par octave.

Les solutions envisagées pour répondre aux exigences de la consonance et des changements de tonalité sans multiplier à outrance les touches nécessitent des compromis. Ces compromis favorisent la consonance de certains intervalles au détriment des autres et/ou limitent les modulations à des tonalités voisines. Il existe un tempérament de compromis, généralement répandu de nos jours pour les instruments à clavier. Il s'agit du tempérament égal.

Degré	Appellation	Gamme de sol majeur	fréquence fondamentale relative
1	tonique	$do_1$	$\frac{3}{2} \bullet \frac{2}{3} = 1$
2	sus-tonique	$re_1$	$\frac{5}{3} \bullet \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$
3	mediante	$mi_{b_1}$	$\frac{15}{8} \bullet \frac{2}{3} = \frac{5}{4}$
4	sous-dominante	$fa_1$	$2 \bullet \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$
5	dominante	$sol_1$	$\frac{9}{4} \bullet \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$
6	sus-dominante	$la_{b_1}$	$\frac{5}{2} \bullet \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$
7	sensible	$si_{b_1}$	$\frac{8}{3} \bullet \frac{2}{3} = \frac{16}{9}$
8	tonique(octave)	$do_2$	$3 \bullet \frac{2}{3} = 2$

TAB. I.3 Renormalisation et changements requis pour une tonalité de sol majeur.

Le tempérament égal

Les instruments à sons fixes comme le piano sont généralement accordés de nos jours selon le tempérament égal. Ce tempérament partage l'octave en douze demi-tons logarithmiquement égaux selon  $f_n = f_1 2^{n/12}$ . Le tempérament égal permet la modulation de façon à choisir comme tonique n'importe laquelle des douze notes divisant l'octave et ce, en conservant la même couleur accordale. Quelle que soit la tonalité choisie, les mêmes séquences de fréquences relatives sont conservées. Cet avantage se fait au détriment de la justesse des intervalles, en particulier des tierces majeures et mineures.

Le tableau I.4 donne les fréquences relatives des notes de la gamme majeure et de la gamme mineure tempérées. On pourra comparer les fréquences relatives de ce tableau avec celles des tableaux I.1 et I.2. Le tempérament égal donne des quintes à peu près justes (1,4983 vs 1,5) mais les tierces majeures sont trop ouvertes (1,26 vs 1,25, pour un écart de  $\approx 13,7$  cents) et des tierces mineures trop fermées (1,1892 vs 1,20 pour un écart de  $\approx 15,6$  cents). Pour obtenir un accord parfait majeur plus consonant (do-mi-sol), il faudrait donc baisser la note intermédiaire de quelques 14 cents. La figure I.7, basée sur les courbes de la figure I.2, donne la variation

Degré	Gamme de do majeur	fréquence fondamentale relative
1	$do_1$	$2^{\frac{0}{12}} f_1 = f_1$
2	$re_1$	$2^{\frac{2}{12}} f_1 = 1,1225 f_1$
3	$mi_1$	$2^{\frac{4}{12}} f_1 = 1,260 f_1$
4	$fa_1$	$2^{\frac{5}{12}} f_1 = 1,3348 f_1$
5	$sol_1$	$2^{\frac{7}{12}} f_1 = 1,4983 f_1$
6	$la_1$	$2^{\frac{9}{12}} f_1 = 1,6818 f_1$
7	$si_1$	$2^{\frac{11}{12}} f_1 = 1,8877 f_1$
8	$do_2$	$2^{\frac{12}{12}} f_1 = 2f_1$
Degré	Gamme de do mineur	fréquence fondamentale relative
1	$do_1$	$2^{\frac{0}{12}} f_1 = f_1$
2	$re_1$	$2^{\frac{2}{12}} f_1 = 1,1225 f_1$
3	$mi_1$	$2^{\frac{3}{12}} f_1 = 1,1892 f_1$
4	$fa_1$	$2^{\frac{5}{12}} f_1 = 1,3348 f_1$
5	$sol_1$	$2^{\frac{7}{12}} f_1 = 1,4983 f_1$
6	$la_1$	$2^{\frac{8}{12}} f_1 = 1,5874 f_1$
7	$si_1$	$2^{\frac{10}{12}} f_1 = 1,7818 f_1$
8	$do_2$	$2^{\frac{12}{12}} f_1 = 2f_1$

TAB. I.4 Le tempérament égal

de dissonance en fonction de la fréquence fondamentale du son intermédiaire  $f_2$  dans le cas d'un accord de trois sons complexes harmoniques  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ . Le son le plus bas,  $f_1$ , a une fréquence fondamentale fixée à 262 Hz. Le son le plus haut,  $f_3$ , a une fondamentale fixée à une quinte supérieure (393 Hz). Ici, le coefficient  $\alpha_s$  correspond au rapport de fréquences fondamentales entre  $f_2$  et  $f_1$ . Les dissonances minimales sont obtenues pour  $\alpha_s = 1,2$  (accord parfait mineur pur) et  $\alpha_s = 1,25$  (accord parfait majeur pur). Dans le cas d'accords tempérés, la quinte demeure à peu près juste (1,4893 vs 1,5). Par contre, la position de la tierce ( $\alpha_s = 1,892$  et  $\alpha_s = 2,599$ ) crée un accroissement marqué de la dissonance sur cette figure.

La figure I.8, basée cette fois sur les courbes de la figure I.5, donne une plage de dissonance minimum beaucoup plus large pour l'accord parfait majeur et pour

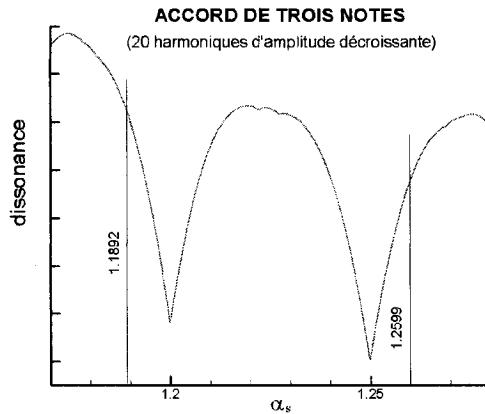


FIG. I.7 Dissonance des accords parfaits majeur et mineur (résultats basés sur les courbes de la figure I.2).

l'accord parfait mineur. Les accords tempérés correspondants donnent un accroissement de dissonance beaucoup moins marqué que celui qu'on observe à la figure I.7. Les figures I.7 et I.8 sont une illustration de ce que pourrait accomplir l'accordage en temps réel, la recherche d'une consonance maximale en cours d'exécution consistant à déplacer la note intermédiaire  $f_2$  vers le minimum du pic inversé.

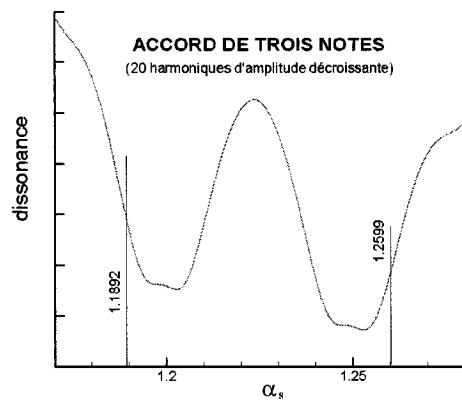


FIG. I.8 Dissonance des accords parfaits majeur et mineur (résultats basés sur les courbes de la figure I.5).

## ANNEXE II

### CHANGEMENT DE FRÉQUENCE DÛ AU COURANT ÉLECTRIQUE

Le fait d'induire un champ magnétique par courant électrique a pour conséquence la réduction de tension de la corde à cause de l'allongement provoqué par l'augmentation de température. Lorsque le courant est enlevé après l'accordage, la corde se refroidit et sa tension augmente. Nous déterminons dans cet annexe le changement de fréquence  $\Delta f$  causé par ce refroidissement. La démarche suivie est basée sur la méthode décrite dans la référence Robillard (2003).

Données (voir Weast (1971) et Crandall (1978)) :

Résistance de la corde :  $R = 1\Omega$

Voltage imposé :  $V = 0,5$  volts

Courant mesuré :  $I = 0,5$  ampères

Caractéristiques de la corde en laiton utilisée

Longueur totale :  $L_t = 1,387$  m

Longueur vibrante :  $L = 0,7$  m

Diamètre :  $d = 0,524$  mm

Coefficient d'expansion linéaire :  $\alpha = 0,00002 (^{\circ}C)^{-1}$

Module de Young :  $E_Y = 10^{11} N/m^2$

Masse volumique :  $\rho = 8400 kg/m^3$

Masse linéique :  $\mu = \rho A = 0,001814 kg/m$

Fréquence fondamentale résultant de la rétroaction :  $f_1 = 250$  Hz

### Caractéristiques de l'air

Coefficient de transfert de chaleur :  $k_c = 0,026W/(m.K)$

Nombre de Prandtl de l'air :  $Pr = 0,72$

En situation stationnaire, c'est-à-dire lorsque la corde est en équilibre thermique avec l'air ambiant, la chaleur totale rejetée par la corde correspond à la puissance électrique fournie. Le flux de chaleur par surface unitaire de la corde,  $q_w$ , est donné par

$$q_w = \frac{Q}{\pi d L_t} = \frac{0,25}{\pi (0,000524) (1,397)} = 108,7 \frac{W}{m^2} \quad (\text{II.1})$$

L'accroissement de température pour un cylindre horizontal refroidi par convection-conduction dans l'air peut être obtenu à partir des relations suivantes (voir Bejan (1993)) :

$$Nu_d = \left[ 0,6 + \frac{0,387 Ra_d^{1/6}}{\left[ 1 + (0,559/Pr)^{9/16} \right]^{8/27}} \right] \quad (\text{II.2})$$

$$Nu_d = \frac{q_w d}{k_c \Delta \theta} \quad (\text{nombre de Nusselt}) \quad (\text{II.3})$$

$$Ra_d = \frac{g \beta}{\alpha_l v} \Delta \theta d^3 \quad (\text{nombre de Rayleigh}) \quad (\text{II.4})$$

L'expression II.3 est valide pour  $10^{-5} < Ra_d < 10^{12}$ . Le groupement  $(g\beta/\alpha v)$  a pour valeur  $90,7(cm^3.K)^{-1}$  dans le cas de l'air. De la définition II.4, on obtient

$$Ra_d = (90,7) (0,0524)^3 \Delta \theta = 0,01305 \Delta \theta \quad (\text{II.5})$$

De l'expression II.4, on obtient

$$Nu_d = \frac{(108,7)(0,000524)}{0,026} \frac{1}{\Delta\theta} = \frac{2,19}{\Delta\theta} \quad (\text{II.6})$$

Le remplacement de  $Ra_d$ ,  $Nu_d$  et  $Pr$  par leurs valeurs dans l'équation II.3 donne la relation suivante avec  $\Delta\theta$  comme seule inconnue

$$\frac{2,19}{\Delta\theta} = \left[ 0,6 + \frac{(0,387)(0,01305)^{1/6}\Delta\theta^{1/6}}{\left[ 1 + (0,559/0,72)^{9/16} \right]^{8/27}} \right] \quad (\text{II.7})$$

Le terme de droite est en fait fort négligeable et le calcul simplifié donne :

$$\Delta\theta = 6,083^\circ C \quad (\text{II.8})$$

le nombre de Rayleigh  $Ra_d = 0,0794$  demeurant à l'intérieur de la plage de validité mentionnée. Le changement de la force de tension  $\Delta T$  causé par un accroissement de température est donnée par l'expression

$$\Delta T = -\alpha_l E A \Delta\theta \quad (\text{II.9})$$

dans laquelle  $A$  est la section de la corde ( $A = \pi d^2/4$ ). Dans le cas qui nous concerne, l'ajustement par rétroaction de la corde est accompli lorsque le courant électrique circule, c'est-à-dire lorsque la corde est à une température de  $6,083^\circ C$  supérieure à l'air ambiant. Lorsque le courant est interrompu, la corde retourne à la température et, de ce fait,  $\Delta\theta = -6,083^\circ C$ . Le changement de tension est donc

$$\Delta T = -(0,00002)(10^{11})(\pi(0,000524)^2/4)(-6,083^\circ C) = 2,628 N \quad (\text{II.10})$$

La fréquence fondamentale  $f_1$  d'une corde est donnée par

$$f_1 = \frac{1}{\mu^{1/2}} \left( \frac{1}{2L} \right) T^{1/2} \quad (\text{II.11})$$

Cette équation, sous forme différentielle, devient

$$\Delta f_1 = \frac{\Delta T}{8L^2 \mu f_1} \quad (\text{II.12})$$

Remplaçant par les valeurs numériques, on obtient

$$\Delta f_1 = \frac{2,628}{(8)(0,7)^2(0,001814)(250)} = 1,478 Hz \quad (\text{II.13})$$

ce qui correspond en cents à 10,2 cents. Cet accroissement de la fréquence dû au refroidissement est appréciable. Pour contrer cet effet, il faut donc réduire de près d'un ordre de grandeur le courant électrique, ce qui exigerait d'améliorer de manière notable la sensibilité du capteur.

### ANNEXE III

#### TRANSFORMÉE DE FOURIER

La transformée de Fourier permet de représenter un signal temporel dans le domaine fréquentiel. Elle s'appuie sur le principe que n'importe quelle fonction périodique  $h(t)$  peut être représentée par l'addition d'un certain nombre de signaux sinusoïdaux de fréquences et d'amplitudes différentes. La transformée s'exprime ainsi

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{2\pi i f t} dt \quad (\text{III.1})$$

avec  $H$  étant l'amplitude de la fréquence  $f$ . On peut également exécuter la transformée inverse pour recomposer un signal à partir d'un ensemble de fréquences

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{-2\pi i f t} df \quad (\text{III.2})$$

Lorsque la transformée de Fourier est appliquée à un ensemble de données discrètes, le domaine de fréquences utilisable pour représenter le signal respecte le théorème de Nyquist. Le théorème de Nyquist affirme que pour éviter une distorsion de la représentation discrète du signal, il faut échantillonner deux fois plus rapidement que  $f_{s_{max}}$ , la fréquence la plus élevée présente dans le signal analogique (Histand, 1999). Le théorème s'exprime ainsi

$$f_e \geq 2f_s \quad (\text{III.3})$$

où  $f_e$  est la fréquence d'échantillonnage. Ce théorème implique que si notre fréquence d'échantillonnage de la corde est trop lente, certains harmoniques pour-

raient se retrouver à des fréquences erronées dans le spectrogramme à cause du phénomène d'alias. Ainsi, avec une fréquence d'échantillonnage de 1000 Hz, seules les fréquences inférieures à 500 Hz seront correctement détectées. Pour éviter ce phénomène d'alias, il faut alors filtrer le signal de façon à éliminer les fréquences supérieures  $f_c = f_e/2$ ,  $f_c$  étant la fréquence critique de Nyquist.

Le développement discret de la transformée de Fourier s'appuie sur le livre de Press (1992). À partir d'un ensemble d'échantillons  $N_e$  pour la transformée et  $\Delta$  l'intervalle de temps entre deux échantillons, nous avons

$$h_k \equiv h(t_k) \quad t_k \equiv k\Delta \quad k = 0, 1, 2, \dots, N_e - 1 \quad (\text{III.4})$$

En supposant que nous couvrons l'ensemble des fréquences du signal périodique, avec  $N_e$  valeurs en entrée, on ne peut sortir que  $N_e$  valeurs à la sortie. À cause des fréquences possibles permises par le théorème de Nyquist, on doit alors se limiter aux fréquences

$$f_n \equiv \frac{n}{N_e \Delta} \quad n = -\frac{N_e}{2}, \dots, \frac{N_e}{2} \quad (\text{III.5})$$

L'équation III.1 peut être reprise et approximée ainsi

$$H(f_n) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{2\pi i f_n t} dt \approx \sum_{k=0}^{N_e-1} h_k e^{2\pi i f_n t_k} \Delta = \Delta \sum_{k=0}^{N_e-1} h_k e^{2\pi i k n / N_e} \quad (\text{III.6})$$

À partir des conditions III.4 et III.5, on peut obtenir l'égalité finale

$$H_n = \sum_{k=0}^{N_e-1} h_k e^{2\pi i k n / N_e} \quad (\text{III.7})$$

avec

$$H(f_n) = H_n \Delta \quad (\text{III.8})$$

$H_n$  est périodique en  $N_e$  de sorte que

$$H_{-n} = H_{N_e - n} \Delta \quad (\text{III.9})$$

En conséquence, les résultats obtenus pour  $n$  variant de 0 à  $N_e - 1$  permettent de reconstituer les fréquences négatives et positives à l'intérieur des limites de Nyquist, c'est-à-dire de  $-N_e/2$  à  $N_e/2$ . De façon générale, la transformée de Fourier accepte  $N_e$  entrées complexes  $h_k$  et fournit  $N_e$  sorties complexes. Dans le cas d'un réel,  $H_{-n} = H_n^*$ . L'amplitude  $A_n$  et la phase  $\phi_n$  d'une fréquence particulière sont données par

$$A_n = \Delta \{ [Re(H_n)]^2 + [Im(H_n)]^2 \}^{1/2} \quad (\text{III.10})$$

$$\phi_n = \tan^{-1} \left[ -\frac{Im(F_n)}{Re(F_n)} \right] \quad (\text{III.11})$$

### Transformée de Fourier Rapide (FFT)

Les deux principes à la base de l'algorithme utilisé de la FFT sont l'utilisation d'un nombre d'échantillons  $N_e$  qui soit une puissance de 2 et le traitement d'un ensemble de  $N_e$  données réelles comme un ensemble de  $N_e/2$  données complexes.

Le premier principe de la FFT se base sur le fait qu'une transformée de Fourier discrète de longueur  $N$  est égale à la somme de deux transformées de Fourier de longueur  $N_e/2$ . Cette démonstration fut réalisée par Danielson et Lanczos en 1942 (Press et al., 1992). La première des deux transformées de Fourier est composée

des valeurs paires de la transformée originale et la seconde est composée des valeurs impaires. Chaque sous-transformée peut ainsi être redivisée à nouveau d'où l'importance d'avoir un  $N_e$  qui soit une puissance de 2 puisque le processus permet alors d'obtenir des sous-transformées de longueur  $N_e = 1$ . Cette technique permet de diminuer grandement le nombre d'opérations requis pour faire le traitement de la transformée de Fourier qui passe d'une valeur de  $N_e^2$  à  $N_e \log_2 N_e$ . Par exemple, pour  $N_e = 512$ , on passe de 262 144 opérations à 4608 opérations, ce qui représente une diminution d'opérations par un facteur de près de 57. Plus le nombre d'échantillons est élevé, plus le gain est important.

La preuve de cette démarche est donnée dans le livre de Press (1992) et reprise ici.

En posant

$$W \equiv e^{2\pi i/N_e} \quad (\text{III.12})$$

nous pouvons réécrire l'équation III.7 ainsi

$$H_n = \sum_{k=0}^{N_e-1} W^{nk} h_k \quad (\text{III.13})$$

La preuve est la suivante en prenant un des termes de droites comme contenant les échantillons pairs et l'autre terme de droite comme contenant les échantillons

impairs.

$$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i j k / N} f_j \quad (\text{III.14})$$

$$F_k = \sum_{j=0}^{N/2-1} e^{2\pi i k (2j) / N} f_{2j} + \sum_{j=0}^{N/2-1} e^{2\pi i k (2j+1) / N} f_{2j+1} \quad (\text{III.15})$$

$$F_k = \sum_{j=0}^{N/2-1} e^{2\pi i k j / (N/2)} f_{2j} + W^k \sum_{j=0}^{N/2-1} e^{2\pi i k j / (N/2)} f_{2j+1} \quad (\text{III.16})$$

$$F_k = F_k^e + W^k F_k^o \quad (\text{III.17})$$

Le traitement d'un ensemble de données réelles peut être encore davantage accéléré. En effet, plutôt que de traiter les données d'un cas réel avec une valeur imaginaire toujours à zéro, on peut fournir les données à traiter en prenant la deuxième valeur réelle comme la partie imaginaire de la première et ainsi de suite avec la quatrième et la troisième. Ainsi, nous avons un ensemble de données comptant moitié moins d'échantillons à traiter. Par la suite, il est possible de traiter le résultat de la transformée pour obtenir un résultat conforme aux données initiales. Cette manoeuvre permet de diminuer le temps de traitement informatique puisque l'ensemble original est traité comme ayant moitié moins d'échantillons. Dans notre cas, en passant de 512 valeurs réelles à 256 valeurs complexes, la diminution du nombre d'opérations suit un facteur de 2,25. Cependant, le gain réel est plus petit car il faut retraiter les données à la fin pour retrouver le résultat correspondant à la transformée initiale.

La durée d'échantillonnage, aussi appelée fenêtre d'échantillonnage ( $T_f$ ), est donnée par  $T_f = N_e \Delta$ . Selon l'équation III.5, la résolution en fréquence est inversement proportionnel à  $T_f = N_e \Delta$ . Cela signifie que pour une résolution de 1 Hz, il faut échantillonner pour une durée d'une seconde. Plus précisément, l'accroissement en

fréquence sur le spectrogramme correspond à  $1/T_f$ .

Compte tenu de la précision recherchée, telle qu'exprimée à la suite de l'équation 1.2, il faudrait donc un échantillonnage d'une durée  $T_f \approx 14$  secondes pour obtenir une précision de 2 % à partir d'un signal sinusoïdal  $f_s = 60$  Hz. Pour un signal sinusoïdal  $f_s = 250$  Hz, qui correspond à la fréquence fondamentale testée au chapitre 4, la même précision requiert une durée  $T_f = 3,46$  secondes. Évidemment, en supposant une inharmonicité négligeable, c'est-à-dire en supposant que les partiels d'une corde de clavecin sont des multiples entiers de la fondamentale (voir annexe 1), on peut déterminer de façon aussi précise la hauteur du son en se basant par exemple, sur le cinquième harmonique, ce qui réduit  $T_f$  à  $\approx 0,69$  seconde.

## ANNEXE IV

### PROBLÉMATIQUE MULTICORDES ET DESIGN COMPLET POUR CLAVECIN

#### IV.1 Design pour contrôle de plusieurs cordes

L'idée de base abordée pour avoir un contrôle complet de l'ensemble des cordes d'un clavecin est un système décentralisé avec un processeur central gérant l'interface usager. Ce processeur commanderait un ensemble de microcontrôleurs comme celui utilisé dans le cadre des tests faits pour le présent rapport. Chaque microcontrôleur commanderait un petit ensemble de cordes dont il serait responsable de l'accordage individuel. L'ensemble complet comprendrait donc des microcontrôleurs responsables de l'accordage local et un processeur central régissant l'accordage dans son ensemble. Dans le cas de l'ajustement préalable, le processeur central ne ferait qu'indiquer le tempérament requis aux différents microcontrôleurs qui se chargereraient ensuite de prendre comme références dans leur mémoire les fréquences correspondantes pour les cordes sous leur responsabilité. Pour l'accordage en temps réel, les fréquences des quelques cordes à ajuster seraient calculées au moyen d'algorithmes déjà existants (Sethares, 1999). Les fréquences de référence calculées seraient alors rapidement retransmises aux microcontrôleurs concernés. Le temps réel demanderait cependant aux microcontrôleurs d'effectuer une surveillance constante des cordes afin de détecter lesquelles sont excitées. Bien que les microcontrôleurs pourraient échantillonner à intervalle régulier les différentes cordes et détecter les variations importantes, il pourrait également être plus simple de les relier par des capteurs aux touches. Ainsi, dès qu'un joueur appuie à fond sur une touche, le microcontrôleur pourrait commencer à échantillonner la ou les

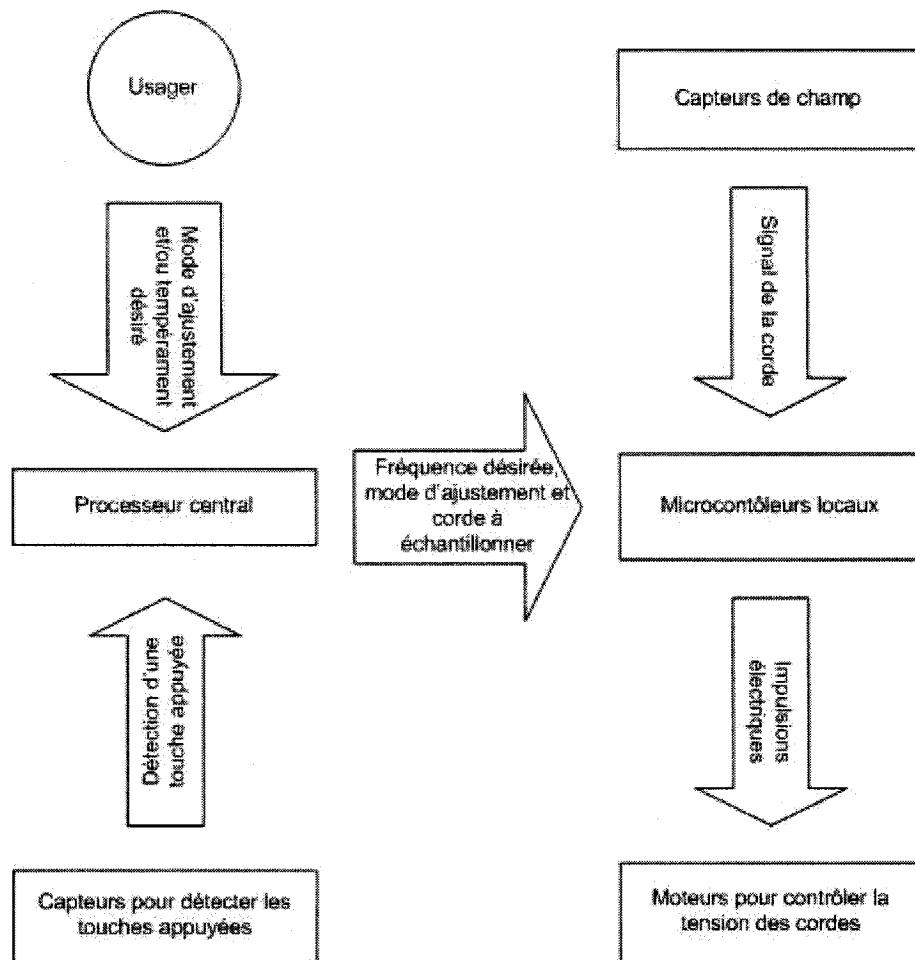


FIG. IV.1 Échange d'informations dans un système complet

cordes correspondantes pendant que le processeur central fait l'évaluation des fréquences de référence souhaitables. La figure IV.1 montre un exemple des échanges d'information qui pourraient se faire dans un tel système.

#### IV.2 Installation dans un vrai clavecin

L'installation de l'ensemble des composants dans un clavecin pose un problème important en ce qui concerne les actionneurs. Les capteurs de champ magnétique pour-

raient facilement être installés en rangée sur une mince passerelle qui surplomberait l'ensemble des cordes. Afin de diminuer le filage, cette passerelle pourrait avoir un circuit imprimé pour acheminer l'information aux microcontrôleurs. Ceux-ci pourraient être installés facilement à l'intérieur du clavecin, tout comme le processeur central. Le contrôle des touches par électro-aimants ne nécessiterait pas non plus de modifications majeures au clavecin. Le problème des actionneurs provient du faible espacement entre chaque corde lorsque celle-ci vient s'accrocher à la pointe d'accroche à l'extrémité du clavecin. L'espace entre deux pointes d'accroche peut être aussi faible que 4 mm. Les chevilles motorisées faisant un diamètre d'environ 5 à 6 mm, déjà l'espace est insuffisant pour des chevilles en rangée et ce, sans même avoir tenu compte du diamètre de la roue dentée et de la grosseur du moteur qui vient forcément s'installer dans le clavecin mais à proximité de la cheville.

Pour résoudre ce problème, une répartition en hauteur des moteurs a été imaginée. Cette disposition est représentée aux figures IV.2 et IV.3. En superposant partiellement les moteurs les uns au-dessus des autres, on peut rapprocher davantage les chevilles autour desquelles sont enroulées les cordes. Néanmoins, dans la partie la plus restreinte du clavecin, il faudrait avoir recours à des roues dentées et des chevilles d'un diamètre plus petit pour pouvoir respecter les contraintes d'espace. Il est à noter qu'une telle installation demanderait d'avoir des chevilles supportées dans le haut et le bas de la boîte du clavecin afin de prévenir une déviation de leur alignement sous l'action de la roue dentée. L'installation demanderait donc de réaliser un agencement précis mais serait réalisable sans changer de manière significative la physionomie et l'apparence extérieure du clavecin selon les premières estimations. Cependant, la sonorité pourrait être altérée à cause des changements de volume d'air dans le clavecin.

Finalement, un dernier point à vérifier serait le bruit. L'équipement électronique serait parfaitement silencieux mais les moteurs pas-à-pas, en tournant, pourrait

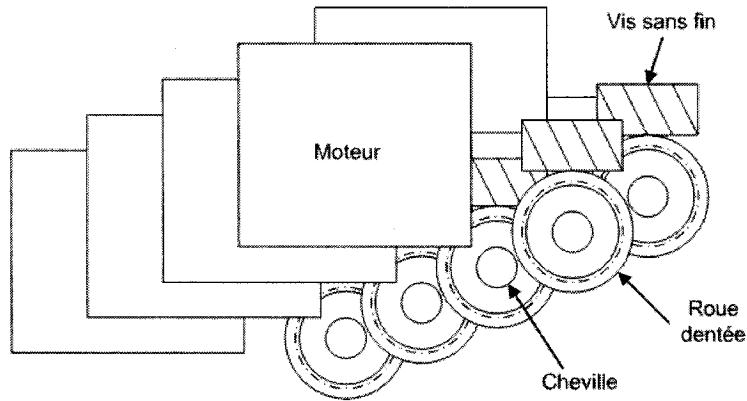


FIG. IV.2 Vue en plan de l'installation des moteurs

provoquer des vibrations dans le clavecin. Ces vibrations pourraient être transmises à la table d'harmonie et devenir audibles ce qui serait très problématique pour l'accordage en temps réel. L'installation des moteurs demanderait alors une précaution supplémentaire pour prévenir les vibrations.

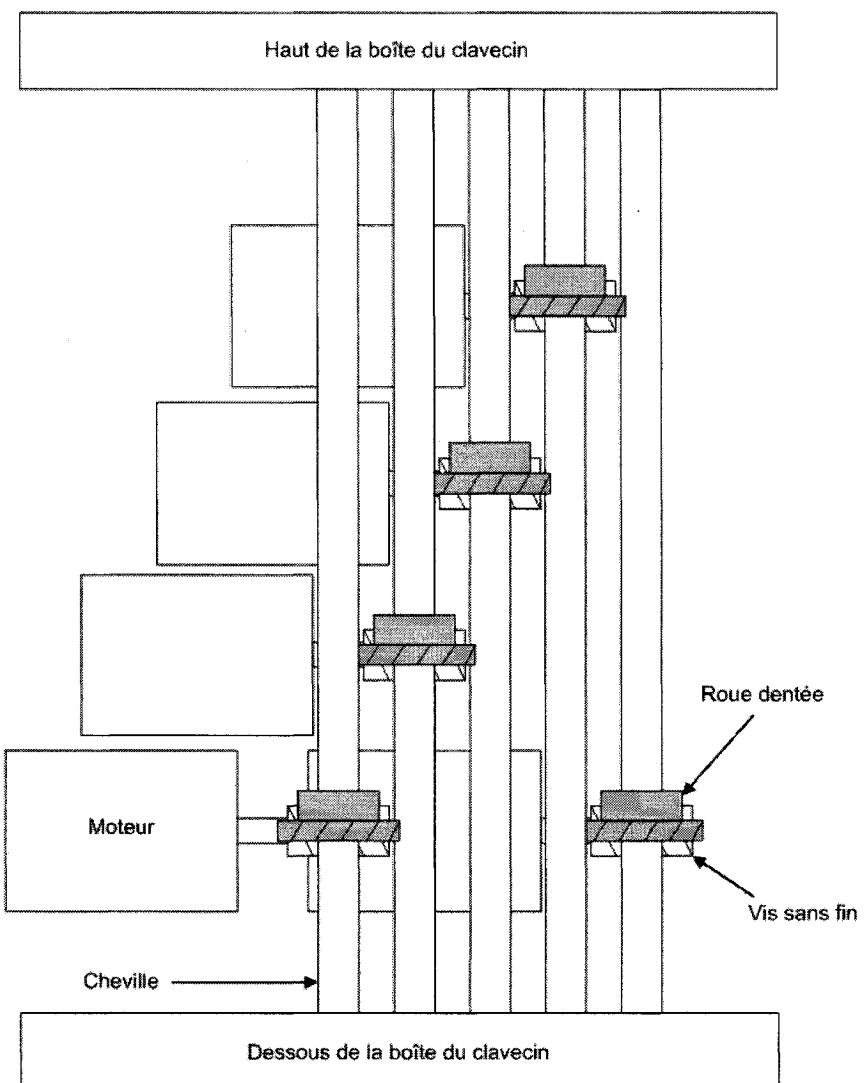


FIG. IV.3 Vue de côté de l'installation des moteurs

## ANNEXE V

### SIMULATIONS SOUS MATLAB

Dans cet annexe est présenté le script *Matlab* utilisé pour générer les courbes d'erreur de l'algorithme de Quinn et Fernandes au chapitre 3.

```
%Erreur de Quinn selon le nombre de points avec plusieurs boucles
clear
x = zeros(1,512);
b=1;
freq=0;
erreur=0;
frequence=0;
a= zeros(1,1);
w= zeros(1,1);
fe=2000;
T=1/fe;
f2=500.2;
f1=250;
R=1;
N=512
for t=1:N
    data(t)=128*(sin(f1*2*pi*(t*T)));
end
xb=mean(data);
zozo=data-xb;
for N=32:512
x=zozo(1:N);
y = zeros(1,N);
a=cos(245*2*pi*T)*2;
R=N-1;
for j=0:2
    c=[1;-a;1];
    y(1)=x(1);
    y(2)=(x(2)-(-a*y(1)));
    for i=3:N
        y(i)=(x(i)-(-a*y(i-1))-y(i-2));
    end
    g=x(2:N)*y(1:R)';
    h=y(1:R)*y(1:R)';
    v=g/h;
    a = a+2*v;
    y=0;
end
end
```

```

end
w=acos((a/2));
freq=w/(2*pi*T);
erreur(b)=abs(freq-f1);
erreur_quinn_cent(b)=(log(freq/f1))*1731.234;
frequence(b)=fe;
NP(b)=N;
b=b+1;
refe=0;
end
figure(1)
j=1;
erreur_mod(j)=erreur(1);
NP_mod(j)=NP(1);
j=j+1;
for a=2:480
    if erreur(a) > erreur(a-1)
        if erreur(a+1) < erreur(a)
            erreur_mod(j)=erreur(a);
            NP_mod(j)=NP(a);
            j=j+1;
        end
    end
end
plot(NP_mod,erreur_mod,'bx-')
%title('Erreur de QF selon le nombre de points')
xlabel('Nombre de points')
ylabel('Erreur maximale absolue (Hz)')
print -dpng erreur_quinn_nbpoints_pbouc;

%Erreur de Quinn selon le nombre de points
clear
x = zeros(1,512);
b=1;
freq=0;
erreur=0;
frequence=0;
a= zeros(1,1);
w= zeros(1,1);
fe=2000;
T=1/fe;
f2=500.2;
f1=250;
R=1;
N=512
for t=1:N
    data(t)=128*(sin(f1*2*pi*(t*T)));
end
xb=mean(data);
zozo=data-xb;

```

```

for N=32:512
x=zozo(1:N);
y = zeros(1,N);
a=cos(245*2*pi*T)*2;
R=N-1;
for j=0:0
    c=[1;-a;1];
    y(1)=x(1);
    y(2)=(x(2)-(-a*y(1)));
    for i=3:N
        y(i)=(x(i)-(-a*y(i-1))-y(i-2));
    end
    g=x(2:N)*y(1:R)';
    h=y(1:R)*y(1:R)';
    v=g/h;
    a = a+2*v;
    y=0;
end
w=acos((a/2));
freq=w/(2*pi*T);
erreur(b)=abs(freq-f1);
erreur_quinn_cent(b)=(log(freq/f1))*1731.234;
frequence(b)=fe;
NP(b)=N;
b=b+1;
end
figure(2)
j=1;
erreur_mod(j)=erreur(1);
NP_mod(j)=NP(1);
j=j+1;
for a=2:480
    if erreur(a) > erreur(a-1)
        if erreur(a+1) < erreur(a)
            erreur_mod(j)=erreur(a);
            NP_mod(j)=NP(a);
            j=j+1;
        end
    end
end
plot(NP_mod,erreur_mod,'bx-')
%title('Erreur de QF')
xlabel('Nombre de points')
ylabel('Erreur maximale absolue (Hz)')
print -dpng erreur_quinn_nbpoints;

%Erreur de Quinn selon le nombre de points avec un estimé précis
clear
x = zeros(1,512);
b=1;

```

```

freq=0;
erreur=0;
frequence=0;
a= zeros(1,1);
w= zeros(1,1);
fe=2000;
T=1/fe;
f2=500.2;
f1=250;
R=1;
N=512
for t=1:N
    data(t)=128*(sin(f1*2*pi*(t*T)));
end
xb=mean(data);
zozo=data-xb;
for N=32:512
x=zozo(1:N);
y = zeros(1,N);
a=cos(249*2*pi*T)*2;
R=N-1;
for j=0:0
    c=[1;-a;1];
    y(1)=x(1);
    y(2)=(x(2)-(-a*y(1)));
    for i=3:N
        y(i)=(x(i)-(-a*y(i-1))-y(i-2));
    end
    g=x(2:N)*y(1:R)';
    h=y(1:R)*y(1:R)';
    v=g/h;
    a = a+2*v;
    y=0;
end
w=acos((a/2));
freq=w/(2*pi*T);
erreur(b)=abs(freq-f1);
erreur_quinn_cent(b)=(log(freq/f1))*1731.234;
frequence(b)=fe;
NP(b)=N;
b=b+1;
end
figure(3)
j=1;
erreur_mod(j)=erreur(1);
NP_mod(j)=NP(1);
j=j+1;
for a=2:480
    if erreur(a) > erreur(a-1)
        if erreur(a+1) < erreur(a)

```

```

        erreur_mod(j)=erreur(a);
        NP_mod(j)=NP(a);
        j=j+1;
    end
end
plot(NP_mod,erreur_mod,'bx-')
%title('Erreur de QF selon le nombre de points')
xlabel('Nombre de points')
ylabel('Erreur maximale absolue (Hz)')
print -dpng erreur_quinn_nbpoints_precis;

%Erreur de Quinn selon la fréquence
clear
x = zeros(1,512);
b=1;
freq=0;
erreur=0;
frequence=0;
a= zeros(1,1);
w= zeros(1,1);
fe=2000;
T=1/fe;
f2=500.2;
f1=250;
R=1;
N=512
for fe=600:1:2600
T=1/fe;
for t=1:N
    data(t)=128*(sin(f1*2*pi*(t*T)));
end
xb=mean(data);
zozo=data-xb;
x=zozo(1:N);
y = zeros(1,N);
a=cos(245*2*pi*T)*2;
R=N-1;
for j=0:0
    c=[1;-a;1];
    y(1)=x(1);
    y(2)=(x(2)-(-a*y(1)));
    for i=3:N
        y(i)=(x(i)-(-a*y(i-1))-y(i-2));
    end
    g=x(2:N)*y(1:R)';
    h=y(1:R)*y(1:R)';
    v=g/h;
    a = a+2*v;
    y=0;
end

```

```

end
w=acos((a/2));
freq=w/(2*pi*T);
erreur(b)=abs(freq-f1);
erreur_quinn_cent(b)=(log(freq/f1))*1731.234;
frequence(b)=fe;
NP(b)=N;
b=b+1;
end
figure(4)
j=1;
erreur_mod(j)=erreur(1);
frequence_mod(j)=frequence(1);
j=j+1;
for a=2:1999
    if erreur(a) > erreur(a-1)
        if erreur(a+1) < erreur(a)
            erreur_mod(j)=erreur(a);
            frequence_mod(j)=frequence(a);
            j=j+1;
        end
    end
end
plot(frequence_mod,erreur_mod,'bx-')
%title('Erreur de QF')
xlabel('Fréquence (Hz)')
ylabel('Erreur maximale absolue (Hz)')
print -dpng erreur_quinn_frequence;

%Erreur de Quinn selon la fréquence avec estimé précis
clear
x = zeros(1,512);
b=1;
freq=0;
erreur=0;
frequence=0;
a= zeros(1,1);
w= zeros(1,1);
fe=2000;
T=1/fe;
f2=500.2;
f1=250;
R=1;
N=512
for fe=600:1:2600
    T=1/fe;
    for t=1:N
        data(t)=128*(sin(f1*2*pi*(t*T)));
    end
    xb=mean(data);

```

```

zozo=data-xb;
x=zozo(1:N);
y = zeros(1,N);
a=cos(249*2*pi*T)*2;
R=N-1;
for j=0:0
    c=[1;-a;1];
    y(1)=x(1);
    y(2)=(x(2)-(-a*y(1)));
    for i=3:N
        y(i)=(x(i)-(-a*y(i-1))-y(i-2));
    end
    g=x(2:N)*y(1:R)';
    h=y(1:R)*y(1:R)';
    v=g/h;
    a = a+2*v;
    y=0;
end
w=acos((a/2));
freq=w/(2*pi*T);
erreur(b)=abs(freq-f1);
erreur_quinn_cent(b)=(log(freq/f1))*1731.234;
frequence(b)=fe;
NP(b)=N;
b=b+1;
end
figure(5)
j=1;
erreur_mod(j)=erreur(1);
frequence_mod(j)=frequence(1);
j=j+1;
for a=2:1999
    if erreur(a) > erreur(a-1)
        if erreur(a+1) < erreur(a)
            erreur_mod(j)=erreur(a);
            frequence_mod(j)=frequence(a);
            j=j+1;
        end
    end
end
plot(frequence_mod,erreur_mod,'bx-')
%title('Erreur de QF selon la fréquence d'échantillonnage')
xlabel('Fréquence (Hz)')
ylabel('Erreur maximale absolue (Hz)')
print -dpng erreur_quinn_frequence_precis;

%Erreur de Quinn selon la fréquence avec plusieurs boucles
clear
x = zeros(1,512);
b=1;

```

```

freq=0;
erreur=0;
frequence=0;
a= zeros(1,1);
w= zeros(1,1);
fe=2000;
T=1/fe;
f2=500.2;
f1=250;
R=1;
N=512
for fe=600:2600
T=1/fe;
for t=1:N
    data(t)=128*(sin(f1*2*pi*(t*T)));
end
xb=mean(data);
zozo=data-xb;
x=zozo(1:N);
y = zeros(1,N);
a=cos(245*2*pi*T)*2;
R=N-1;
for j=0:2
    c=[1;-a;1];
    y(1)=x(1);
    y(2)=(x(2)-(-a*y(1)));
    for i=3:N
        y(i)=(x(i)-(-a*y(i-1))-y(i-2));
    end
    g=x(2:N)*y(1:R)';
    h=y(1:R)*y(1:R)';
    v=g/h;
    a = a+2*v;
    y=0;
end
w=acos((a/2));
freq=w/(2*pi*T);
erreur(b)=abs(freq-f1);
erreur_quinn_cent(b)=(log(freq/f1))*1731.234;
frequence(b)=fe;
NP(b)=N;
b=b+1;
end
figure(6)
j=1;
erreur_mod(j)=erreur(1);
frequence_mod(j)=frequence(1);
j=j+1;
for a=2:1999
    if erreur(a) > erreur(a-1)

```

```
if erreur(a+1) < erreur(a)
    if erreur(a) > 0.0017
        erreur_mod(j)=erreur(a);
        frequence_mod(j)=frequence(a);
        j=j+1;
    end
end
end

plot(frequence_mod,erreur_mod,'bx-')
%title('Erreur de QF selon la fréquence d'échantillonnage')
xlabel('Fréquence (Hz)')
ylabel('Erreur maximale absolue (Hz)')
print -dpng erreur_quinn_frequence_pbouc;
```

**ANNEXE VI****SCHÉMA ÉLECTRONIQUE**

Cet annexe contient le schémas électronique des différents composants utilisés dans le montage.

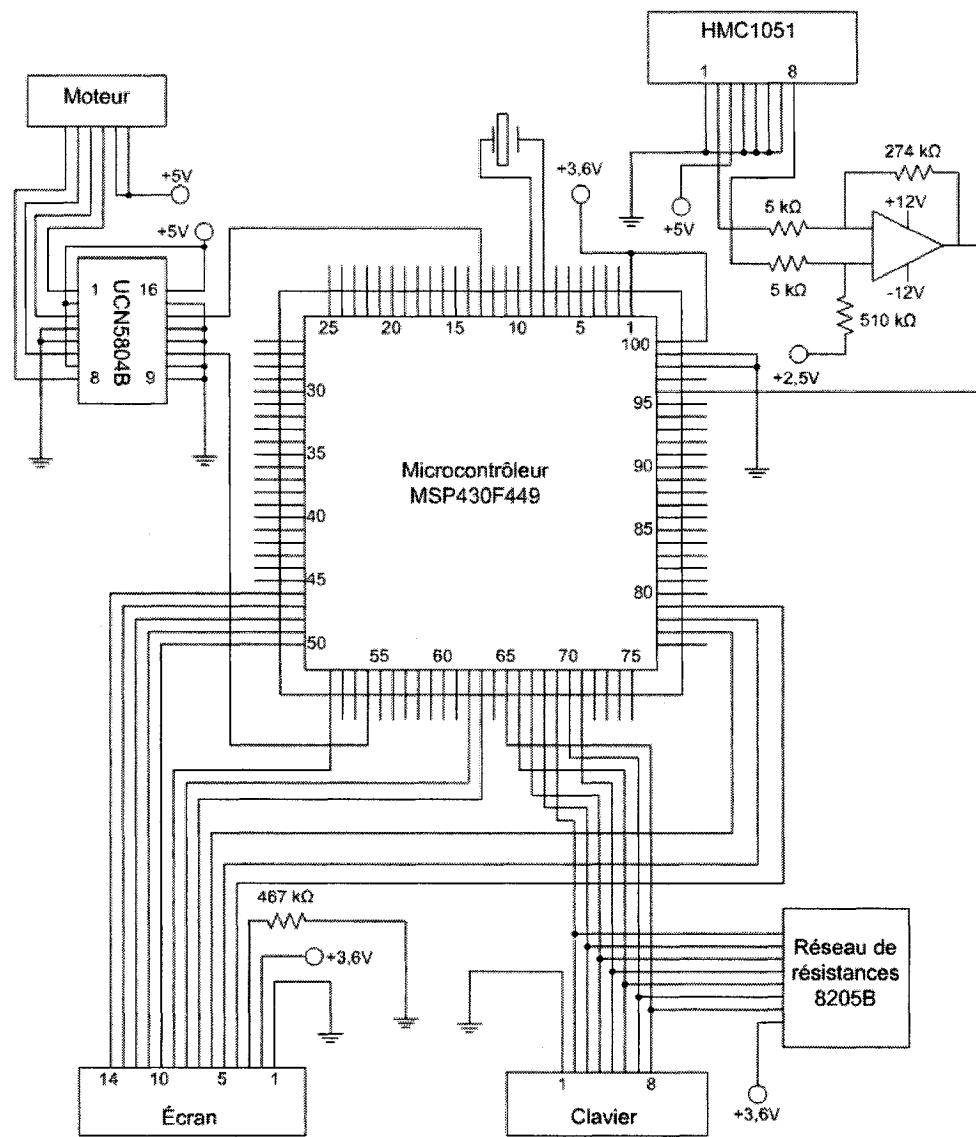


FIG. VI.1 Schéma électronique du montage